NÁMSGÖGN.IS

STÆRÐFRÆÐI

Stærðfræði-greining

1

Stærðfræðigreining, 1. bindi

Námsgögn.is

NÁMSGÖGN

Stærðfræðigreining, 1. bindi

Bókin í heild

Efnisyfirlit

Formáli **6**

1 Föll og gröf **13**

Inngangur 13

1.1 Upprifjun á föllum 14

1.2 Helstu flokkar falla 52

1.3 Hornaföll 83

1.4 Andhverf föll 103

1.5 Vísisföll og lograföll 125

Lykilhugtök 156

Helstu jöfnur 159

Meginatriði 160

Yfirlitsverkefni 162

2 Markgildi **165**

Inngangur 165

2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu 166

2.2 Markgildi falls 179

2.3 Reiknireglur fyrir markgildi 211

2.4 Samfelldni 235

2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi 253

Lykilhugtök 272

Helstu jöfnur 275

Meginatriði 276

Yfirlitsverkefni 277

3 Afleiður **281**

Inngangur 281

3.1 Skilgreining afleiðunnar 282

3.2 Afleiðan sem fall 304

3.3 Deildunarreglur 327

3.4 Afleiður sem breytingarhraðar 348

3.5 Afleiður hornafalla 361

3.6 Keðjureglan 373

3.7 Afleiður andhverfra falla 389

3.8 Fólgin deildun 403

3.9 Afleiður vísis- og lografalla 414

Lykilhugtök 430

Helstu jöfnur....433
Meginatriði....435
Yfirlitsverkefni....438

4 Notkun afleiða....441
Inngangur....441
4.1 Tengdir breytingarhraðar....442
4.2 Línulegar nálganir og deildi....457
4.3 Hágildi og lággildi....471
4.4 Meðalgildissetningin....488
4.5 Afleiður og lögun grafs....501
4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur....522
4.7 Hagnýt bestunarverkefni....560
4.8 Regla l'Hôpital....579
4.9 Aðferð Newtons....601
4.10 Stofnföll....617
Lykilhugtök....635
Helstu jöfnur....638
Meginatriði....638
Yfirlitsverkefni....642

5 Heildun....646
Inngangur....646
5.1 Nálgun flatarmáls....647
5.2 Ákveðið heildi....675
5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar....702
5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu....725
5.5 Innsetning....746
5.6 Heildi með vísis- og lograföllum....760
5.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum....776
Lykilhugtök....786
Helstu jöfnur....788
Meginatriði....790
Yfirlitsverkefni....792

6 Notkun heildunar....795
Inngangur....795
6.1 Flatarmál milli ferla....796
6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum....812
6.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki....838
6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál....855
6.5 Hagnýting í eðlisfræði....871

6.6 Vægi og massamiðjur....891
6.7 Heildi, vísisföll og lograr....912
6.8 Vísisvöxtur og -hnignun....929
6.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla....941
Lykilhugtök....955
Helstu jöfnur....957
Meginatriði....958
Yfirlitsverkefni....961

A Tafla yfir heildi....965

B Tafla yfir afleiður....973

C Upprifjun fyrir stærðfræðigreiningu....976

Svarlykill....980
Kafli 1....980
Kafli 2....1010
Kafli 3....1026
Kafli 4....1058
Kafli 5....1084
Kafli 6....1116

Atriðaskrá....1149

Formáli

Velkomin í Stærðfræðigreiningu, 1. bindi, námsefni frá OpenStax. Þessi kennslubók var samin til að auka aðgengi nemenda að vönduðu námsefni sem stenst ströngustu fræðilegar kröfur, án kostnaðar eða gegn mjög vægu gjaldi.

Um OpenStax

OpenStax er sjálfseignarstofnun sem starfar innan Rice-háskóla og hefur það markmið að bæta aðgengi nemenda að menntun. Fyrsta háskólakennslubók okkar með opnu notkunarleyfi kom út árið 2012 og síðan hefur bókasafn okkar vaxið í meira en 25 bækur fyrir háskóla- og AP®-námskeið sem hundruð þúsunda nemenda nota. OpenStax Tutor, ódýrt verkfæri okkar fyrir einstaklingsmiðað nám, er notað í háskólanámskeiðum um öll Bandaríkin. Með samstarfi við góðgerðarsjóði og bandalagi við önnur samtök á sviði námsgagna ryður OpenStax úr vegi algengustu hindrunum í námi og hjálpar nemendum og kennurum að ná árangri.

Um námsefni OpenStax

Aðlögun

Stærðfræðigreining, 1. bindi er gefin út samkvæmt alþjóðlega notkunarleyfinu Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 (CC-BY-NC-SA). Það merkir að heimilt er að dreifa efninu, aðlaga það og byggja áfram á því, svo framarlega sem OpenStax og þeir sem lögðu efni til séu tilgreindir, efnið sé ekki notað í viðskiptalegum tilgangi og því sé dreift samkvæmt sama CC-BY-NC-SA-notkunarleyfi.

Þar sem bækur okkar eru gefnar út með opnu notkunarleyfi er þér frjálst að nota bókina í heild eða velja þá hluta sem henta þörfum námskeiðsins best. Þú getur aðlagað efnið að vild með því að tilgreina í kennsluáætluninni ákveðna kafla og hluta sem nemendur eiga að lesa og raða þeim eins og þú kýst. Þú getur jafnvel sett beinan tengil í kennsluáætlunina á viðkomandi hluta í vefútgáfu bókarinnar.

Kennarar geta einnig útbúið sérsniðna útgáfu af OpenStax-bókinni sinni. Hægt er að bjóða nemendum sérsniðnu útgáfuna á prenti eða stafrænt gegn vægu gjaldi í gegnum bókaverslun háskólans. Nánari upplýsingar er að finna á síðu bókarinnar á OpenStax.org.

Villuleiðréttingar

Allar kennslubækur OpenStax gangast undir ítarlega ritrýni. Engu að síður geta villur komið fyrir, líkt og í öðrum faglega unnum kennslubókum. Þar sem bækur okkar eru gefnar út á vefnum getum við uppfært þær reglulega þegar kennslufræðileg þörf krefur. Ef þú vilt leggja til leiðréttingu skaltu senda hana með tenglinum á síðu bókarinnar á OpenStax.org. Sérfræðingar á viðkomandi fræðasviði fara yfir allar tillögur að leiðréttingum. OpenStax leggur áherslu á gagnsæi varðandi allar uppfærslur og því er einnig að finna yfirlit yfir fyrri villuleiðréttingar á síðu bókarinnar á OpenStax.org.

Útgáfuform

Þú getur nálgast þessa kennslubók ókeypis sem vefútgáfu eða PDF-skjal á OpenStax.org og fengið prentaða útgáfu gegn vægu gjaldi.

Um Stærðfræðigreiningu, 1. bindi

Stærðfræðigreining er ætluð sem kennslubók fyrir hefðbundið almennt námskeið í stærðfræðigreiningu sem kennt er á tveimur eða þremur misserum. Í bókinni eru nýstárlegir kennsluþættir sem eiga að efla nám nemenda. Hún leiðir nemendur í gegnum grundvallarhugtök stærðfræðigreiningar og hjálpar þeim að skilja hvernig hugtökin nýtast í lífi þeirra og tengjast umhverfi þeirra. Vegna þess hve efnið er yfirgripsmikið er bókin gefin út í þremur bindum til að auðvelda sveigjanlega og skilvirka notkun. Í 1. bindi er fjallað um föll, markgildi, afleiður og heildun.

Efnistök og umfang

Kennslubókin okkar Stærðfræðigreining, 1. bindi fylgir að mestu því umfangi og þeirri efnisröð sem tíðkast í almennum námskeiðum í stærðfræðigreiningu í Bandaríkjunum. Við höfum leitast við að gera stærðfræðigreiningu áhugaverða og aðgengilega nemendum án þess að slaka á þeirri stærðfræðilegu nákvæmni sem greinin krefst. Með þetta markmið að leiðarljósi hefur efni bindanna þriggja í Stærðfræðigreiningu verið þróað og skipulagt í rökréttri framvindu frá grundvallarhugtökum til flóknari hugtaka. Byggt er á fyrri þekkingu nemenda og lögð áhersla á tengsl milli viðfangsefna og milli fræðilegrar umfjöllunar og hagnýtingar. Markmið hvers hluta er að gera nemendum kleift að þekkja hugtökin, en ekki síður að beita þeim á þann hátt sem nýtist í síðari námskeiðum og framtíðarstarfi. Skipulag og kennslufræðilegir þættir voru þróaðir og metnir með hliðsjón af ábendingum stærðfræðikennara sem tóku þátt í verkefninu.

1. bindi

- 1. kafli: Föll og gröf
- 2. kafli: Markgildi
- 3. kafli: Afleiður
- 4. kafli: Hagnýting afleiða
- 5. kafli: Heildun
- 6. kafli: Hagnýting heildunar

2. bindi

- 1. kafli: Heildun
- 2. kafli: Hagnýting heildunar
- 3. kafli: Heildunaraðferðir
- 4. kafli: Inngangur að diffurjöfnum
- 5. kafli: Runur og raðir
- 6. kafli: Veldaraðir
- 7. kafli: Stikajöfnur og pólhnit

3. bindi

- 1. kafli: Stikajöfnur og pólhnit
- 2. kafli: Vigrar í rúmi
- 3. kafli: Vigurgild föll
- 4. kafli: Deildun falla af mörgum breytum
- 5. kafli: Margföld heildun
- 6. kafli: Vigurreikningur
- 7. kafli: Annars stigs diffurjöfnur

Kennslufræðilegur grundvöllur

Í Stærðfræðigreiningu, 1. bindi er að finna dæmi og æfingar um sígildar hugmyndir og reikniaðferðir jafnt sem nútímalega hagnýtingu og nýrri aðferðir. Útleiðslur og skýringar byggjast á áralangri kennslureynslu reyndra kennara í stærðfræðigreiningu. Í framsetningu þeirra er leitast við að ná jafnvægi milli skýrleika og fræðilegrar nákvæmni, enda hefur það reynst nemendum þeirra vel. Hagnýt dæmi sem eiga að vekja áhuga tengjast mikilvægum viðfangsefnum í líkindafræði, líffræði, vistfræði, viðskiptafræði og hagfræði, auk eðlisfræði, efnafræði, verkfræði og tölvunarfræði. Nemendaverkefni í hverjum kafla gefa nemendum tækifæri til að kanna áhugaverð afmörkuð viðfangsefni í hreinni og hagnýttri stærðfræði. Þau spanna allt frá því að ákvarða örugga fjarlægð milli áhorfendastúku og brautar á Formúlu 1-kappakstursbraut til þess að reikna massamiðju Grand Canyon Skywalk eða lokahraða fallhlífastökkvara. Hagnýtingarverkefni í upphafi hvers kafla setja fram viðfangsefni sem eru leyst síðar með hugmyndunum sem fjallað er um í kaflanum. Þar á meðal eru útreikningur á krafti vatnsins á Hoover-stífluna og samanburður á hlutfallslegum styrk tveggja jarðskjálfta. Skilgreiningar, reglur og setningar eru auðkenndar í textanum, þar á meðal sannanir á rúmlega 60 setningum.

Námsmat sem styrkir skilning á lykilhugtökum

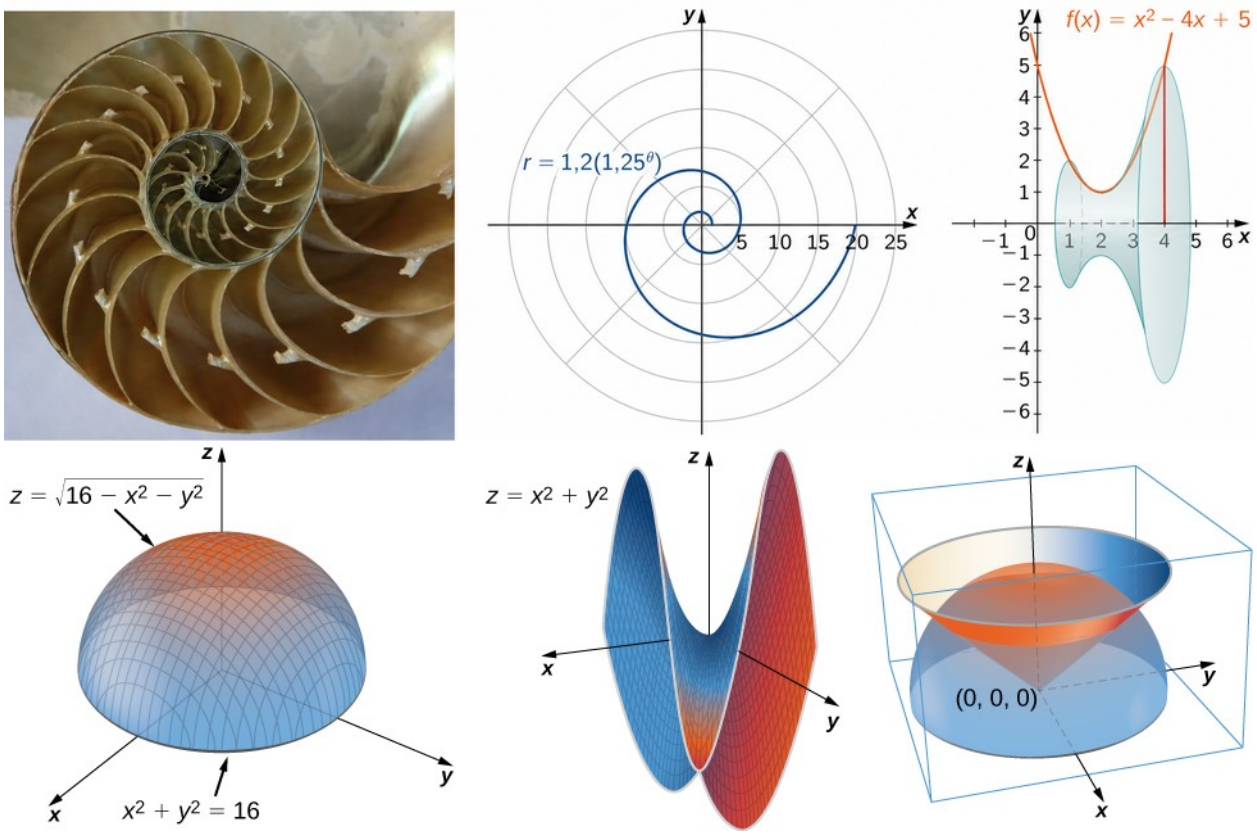
Sýnidæmi í köflunum leiða nemendur í gegnum verkefni: fyrst er spurning sett fram, síðan er lausnin rakin skref fyrir skref og loks fá nemendur að æfa færnina með verkefni undir heitinu „Stöðumat“. Í lok hvers kafla er einnig námsmat þar sem nemendur geta beitt því sem þeir hafa lært með því að leysa æfingaverkefni. Margar æfingar eru merktar [T] til að gefa til kynna að hentugt sé að leysa þær með hjálp tæknibúnaðar, svo sem reiknivéla eða tölvualgebrukerfa (CAS). Svör við völdum æfingum er að finna í svarlyklinum aftast í bókinni.

Yfirskilvitleg föll kynnt snemma eða seint

Stærðfræðigreining, 1. bindi er hönnuð þannig að hún henti bæði framsetningu þar sem yfirskilvitleg föll eru kynnt snemma og framsetningu þar sem þau eru kynnt seint. Vísisföll og lograföll eru kynnt óformlega í 1. kafla og með meiri fræðilegri nákvæmni í 6. kafla. Fyrir kennara sem vilja taka þessi föll fyrir samhliða öðrum fallagerðum er fjallað um deildun þeirra og heildun í 3.–5. kafla. Sú umfjöllun er þó í aðskildum hlutum. Kennarar sem vilja bíða með að leiða út niðurstöður stærðfræðigreiningar um vísis- og lograföll þar til heildisskilgreiningarnar hafa verið kynntar geta því sleppt þessum hlutum.

Viðamikið myndefni

Myndefnið er hannað til að auka skilning nemenda á hugtökum með skýrum og áhrifaríkum myndskreytingum, skýringarmyndum og ljósmyndum.



Svör við spurningum í bókinni

Svör við sýnidæmum eru birt rétt fyrir neðan spurninguna í bókinni. Svör við öllum stöðumatsverkefnum er að finna í svarlyklinum. Svör við æfingum og upprifjunaræfingum sem eru númeraðar með oddatölum eru aðgengileg nemendum bæði í svarlyklinum og í lausnaleiðbeiningum nemenda á síðunni með námsefni fyrir nemendur. Svör við æfingum sem eru númeraðar með sléttum tölum eru aðeins aðgengileg kennurum í svarleiðbeiningum kennara á síðunni með kennsluefni fyrir kennara.

Viðbótarefni

Námsefni fyrir nemendur og kennara

Við höfum tekið saman viðbótarefni fyrir bæði nemendur og kennara, þar á meðal leiðbeiningar fyrir fyrstu skrefin, lausnahandbók fyrir kennara og PowerPoint-glærur. Til að fá aðgang að kennsluefni fyrir kennara þarf staðfestan kennarareikning. Hægt er að sækja um hann við innskráningu á OpenStax.org. Nýttu þér þetta efni til viðbótar við OpenStax-bókina þína.

Samfélagsgáttir

OpenStax er í samstarfi við Institute for the Study of Knowledge Management in Education (ISKME) um að bjóða samfélagsgáttir á OER Commons. Þar geta kennarar deilt án endurgjalds efni sem samfélagið hefur útbúið til stuðnings OpenStax-bókum. Í samfélagsgáttunum okkar geta kennarar hlaðið upp eigin efni eða sótt efni til notkunar í eigin námskeiðum, þar á meðal viðbótarefni, kennsluefni, margmiðlunarefni og annað viðeigandi námsefni. Við hvetjum kennara til að taka þátt í þeim gáttum sem tengjast kennslu þeirra og rannsóknum best, bæði til að auðga námskeið sín og eiga samskipti við aðra háskólakennara.

Samfélagsgáttirnar má nálgast á www.oercommons.org/hubs/OpenStax.

Efni samstarfsaðila

Samstarfsaðilar OpenStax vinna með okkur að því markmiði að gera vandað námsefni á viðráðanlegu verði aðgengilegt nemendum og kennurum hvarvetna. Verkfæri þeirra falla hnökralaust að OpenStax-bókunum okkar og fást gegn vægu gjaldi. Efni samstarfsaðila fyrir bókina þína má nálgast á síðu bókarinnar á OpenStax.org.

Um höfundana

Aðalhöfundar

Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology

Dr. Strang lauk doktorsprófi frá UCLA árið 1959 og hefur kennt stærðfræði við MIT allar götur síðan. Netkennslubók hans í stærðfræðigreiningu er ein af ellefu bókum sem hann hefur gefið út og var lögð til grundvallar þessari útgáfu, sem við höfum unnið og uppfært með þarfir nemenda nútímans í huga. Strang er margverðlaunaður stærðfræðingur og fyrrverandi Rhodes-styrkþegi við Oxford University.

Edwin „Jed“ Herman, University of Wisconsin-Stevens Point Dr. Herman lauk BS-gráðu í stærðfræði frá Harvey Mudd College árið 1985, MA-gráðu í stærðfræði frá UCLA árið 1987 og doktorsprófi í stærðfræði frá University of Oregon árið 1997. Hann er nú prófessor við University of Wisconsin-Stevens Point. Hann hefur meira en 20 ára reynslu af stærðfræðikennslu á háskólastigi, leiðbeinir nemendum í rannsóknarverkefnum og býr yfir reynslu af þróun og hönnun námskeiða. Auk þess hefur hann brennandi áhuga á að hanna og spila borðspil.

Aðrir höfundar

Catherine Abbott, Keuka College Nicoleta Virginia Bila, Fayetteville State University Sheri J. Boyd, Rollins College Joyati Debnath, Winona State University Valeree Falduto, Palm Beach State College Joseph Lakey, New Mexico State University Julie Levandosky, Framingham State University David McCune, William Jewell College Michelle Merriweather, Bronxville High School Kirsten R. Messer, Colorado State University - Pueblo Alfred K. Mulzet, Florida State College at Jacksonville William Radulovich (á eftirlaunum), Florida State College at Jacksonville Erica M. Rutter, Arizona State University David Smith, University of the Virgin Islands Elaine A. Terry, Saint Joseph’s University David Torain, Hampton University

Ritrýnar

Marwan A. Abu-Sawwa, Florida State College at Jacksonville
Kenneth J. Bernard, Virginia State University
John Beyers, University of Maryland
Charles Buehrle, Franklin & Marshall College
Matthew Cathey, Wofford College
Michael Cohen, Hofstra University
William DeSalazar, Broward County School System
Murray Eisenberg, University of Massachusetts Amherst
Kristyanna Erickson, Cecil College
Tiernan Fogarty, Oregon Institute of Technology
David French, Tidewater Community College
Marilyn Gloyer, Virginia Commonwealth University
Shawna Haider, Salt Lake Community College
Lance Hemlow, Raritan Valley Community College
Jerry Jared, The Blue Ridge School
Peter Jipsen, Chapman University
David Johnson, Lehigh University
M.R. Khadivi, Jackson State University
Robert J. Krueger, Concordia University
Tor A. Kwembe, Jackson State University
Jean-Marie Magnier, Springfield Technical Community College
Cheryl Chute Miller, SUNY Potsdam
Bagisa Mukherjee, Penn State University, Worthington Scranton Campus
Kasso Okoudjou, University of Maryland College Park
Peter Olszewski, Penn State Erie, The Behrend College

Steven Purtee, Valencia College
Alice Ramos, Bethel College
Doug Shaw, University of Northern Iowa
Hussain Elalaoui-Talibi, Tuskegee University
Jeffrey Taub, Maine Maritime Academy
William Thistleton, SUNY Polytechnic Institute
A. David Trubatch, Montclair State University
Carmen Wright, Jackson State University
Zhenbu Zhang, Jackson State University

1. KAFLI

Föll og gröf



Mynd 1.1 Hluti San Andreas-misgengisins í Kaliforníu. Flestir öflugustu jarðskjálftar sem mælst hafa eiga upptök sín við stór misgengi á borð við þetta. (mynd: aðlögun á verki eftir Robb Hannawacker, NPS)

Efnisyfirlit kaflans

- 1.1 Upprifjun á föllum
- 1.2 Helstu flokkar falla
- 1.3 Hornaföll
- 1.4 Andhverf föll
- 1.5 Vísisföll og lograföll

Inngangur

1

Á undanförnum árum hafa orðið miklir jarðskjálftar í nokkrum löndum víða um heim. Í janúar 2010 reið jarðskjálfti af stærðinni 7,3 yfir Haítí. Jarðskjálfti af stærðinni 9 skók norðausturhluta Japans í mars 2011. Í apríl 2014 varð jarðskjálfti af stærðinni 8,2 úti fyrir strönd norðurhluta Síle. Hvað merkja þessar tölur? Nánar tiltekið: hversu miklu öflugri er jarðskjálfti af stærðinni 9 en jarðskjálfti af stærðinni 8,2? Eða af stærðinni 7,3? Síðar í þessum kafla sýnum við hvernig lograföll eru notuð til að bera saman hlutfallslegan styrk tveggja jarðskjálfta út frá stærð hvors þeirra (sjá dæmi 1.39).

Stærðfræðigreining er sú grein stærðfræðinnar sem lýsir breytingum á föllum. Í þessum kafla rifjum við upp öll þau föll sem þarf að kunna til að læra stærðfræðigreiningu. Við skilgreinum margliðuföll, ræð föll, hornaföll, vísisföll og lograföll. Við rifjum upp hvernig reikna má gildi fallanna og sýnum eiginleika grafa þeirra. Við sýnum dæmi um jöfnur sem innihalda liði með þessum föllum og útskýrum þær algebruaðferðir sem þarf til að leysa jöfnurnar. Í stuttu máli leggur þessi kafli grunninn að því efni sem fram undan er. Nauðsynlegt er að þekkja þessar hugmyndir vel og hafa góð tök á þeim áður en stærðfræðigreiningin sjálf er kynnt formlega í næsta kafla.

1.1 Upprifjun á föllum

NÁMSMARKMIÐ

- 1.1.1 Nota fallatáknun til að reikna gildi falls.
- 1.1.2 Ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi falls.
- 1.1.3 Teikna graf falls.
- 1.1.4 Finna núllstöðvar falls.
- 1.1.5 Þekkja fall út frá gildatöflu.
- 1.1.6 Mynda ný föll úr tveimur eða fleiri gefnum föllum.
- 1.1.7 Lýsa samhverfueiginleikum falls.

Í þessum undirkafla skilgreinum við fall með formlegum hætti og skoðum ólíkar leiðir til að setja föll fram, það er með töflum, formúlum og gröfum. Við kynnum okkur formlega táknun og hugtök sem tengjast föllum. Einnig skilgreinum við samskeytingu falla og samhverfueiginleika. Megnið af efninu er upprifjun, en undirkaflinn er líka handhægt yfirlit yfir algebruaðferðir sem nýtast þegar unnið er með föll.

Föll

Ef gefin eru tvö mengi A og B, nefnist mengi sem hefur að stökum röðuð pör (x, y), þar sem x er stak í A og y er stak í B, vensl frá A til B. Vensl frá A til B skilgreina tengsl milli þessara tveggja mengja. Fall er sérstök gerð vensla þar sem hvert stak fyrra mengisins tengist nákvæmlega einu staki síðara mengisins. Stak fyrra mengisins nefnist inntak og stak síðara mengisins nefnist úttak eða fallgildi. Föll eru víða notuð í stærðfræði til að lýsa tengslum milli tveggja mengja. Fyrir hvert fall ákvarðast úttakið þegar inntakið er þekkt og því segjum við að

úttakið sé fall af inntakinu. Flatarmál fernings ákvarðast til dæmis af hliðarlengd hans og því segjum við að flatarmálið (úttakið) sé fall af hliðarlengdinni (inntakinu). Lýsa má hraða bolta sem kastað er upp í loftið sem falli af þeim tíma sem boltinn er á lofti. Burðargjald pakka er fall af þyngd pakkans. Föll eru notuð svo víða að mikilvægt er að hafa nákvæmar skilgreiningar og skýr hugtök þegar við rannsökum þau.

SKILGREINING

Fall f samanstendur af mengi inntaksgilda, mengi úttaksgilda og reglu sem úthlutar hverju inntaksgildi nákvæmlega einu úttaksgildi. Mengi inntaksgildanna kallast skilgreiningarmengi fallsins. Mengi úttaksgildanna kallast myndmengi fallsins.

Skoðum til dæmis fallið f, þar sem skilgreiningarmengið er mengi allra rauntalna og reglan felst í því að setja inntakið í annað veldi. Þá er inntakinu $x=3$ úthlutað úttakinu $3^2=9$. Sérhver rauntala sem er ekki neikvæð á sér kvaðratrót sem er rauntala. Því er sérhver tala sem er ekki neikvæð stak í myndmengi fallsins. Engin rauntala í öðru veldi er neikvæð og því eru neikvæðu rauntölurnar ekki stök í myndmenginu. Við ályktum því að myndmengið sé mengi allra rauntalna sem eru ekki neikvæðar.

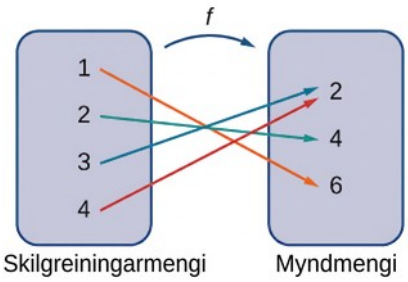
Fyrir almennt fall f með skilgreiningarmengið D, táknum við inntakið oft með x og úttakið með y, það er úttakið sem svarar til x. Þá köllum við x óháðu breytuna og y háðu breytuna, því hún er háð x. Með fallatáknun skrifum við $y=f(x)$, og lesum jöfnuna þannig að "y sé jafnt og f af x." Fyrir ferningsfallið sem lýst var hér að framan skrifum við $f(x)=x^2$.

Hugtakið fall má skýra myndrænt með mynd 1.2, mynd 1.3 og mynd 1.4.

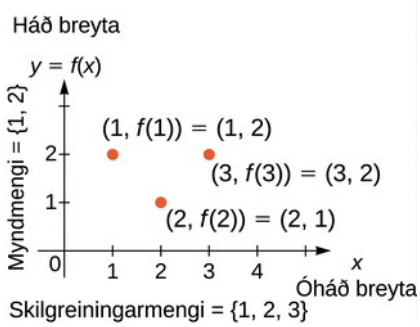
1



Mynd 1.2 Sjá má fall fyrir sér sem inntaks- og úttakstæki.



Mynd 1.3 Fall varpar hverju staki í skilgreiningarmenginu á nákvæmlega eitt stak í myndmenginu. Þótt aðeins megi varpa hverju inntaki á eitt úttak má varpa tveimur ólíkum inntökum á sama úttakið.

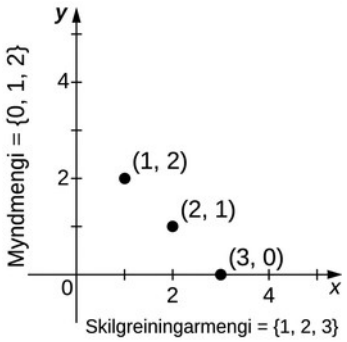


Mynd 1.4 Í þessu tilviki hefur graf falls f skilgreiningarmengið $\{1,2,3\}$ og myndmengið $\{1,2\}$. Óháða breytan er x og háða breytan er y.

MARGMIÐLUN

Opnið smáforritið á þessum tengli til að fræðast nánar um gröf falla.

Við getum einnig sýnt fall myndrænt með því að merkja punkta (x,y) í hnitakerfið þar sem $y=f(x)$. Graf falls er mengi allra þessara punkta. Skoðum til dæmis fallið f, þar sem skilgreiningarmengið er mengið $D=\{1,2,3\}$ og reglan er $f(x)=3-x$. Á mynd 1.5 teiknum við graf þessa falls.



Mynd 1.5 Hér sjáum við graf fallsins f með skilgreiningarmengið $\{1,2,3\}$ og regluna $f(x)=3-x$. Grafið samanstendur af punktunum $(x,f(x))$ fyrir öll x í skilgreiningarmenginu.

Sérhvert fall hefur skilgreiningarmengi. Stundum er falli þó lýst með jöfnu, eins og í $f(x)=x^2$, án þess að tiltekið skilgreiningarmengi sé gefið. Þá er skilgreiningarmengið talið vera mengi allra rauntalna, x, sem gera $f(x)$ að rauntölu. Þar sem hægt er að hefja hvaða rauntölu sem er í annað veldi teljum við til dæmis skilgreiningarmengi $f(x)=x^2$ vera mengi allra rauntalna ef ekkert annað skilgreiningarmengi er tilgreint. Kvaðratrótarfallið $f(x)=\sqrt{x}$ gefur hins vegar aðeins rauntölu sem úttak ef x er ekki neikvæð tala. Skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ er því mengi rauntalna sem eru ekki neikvæðar. Það nefnist stundum náttúrlegt skilgreiningarmengi.

Skilgreiningarmengi fallanna $f(x)=x^2$ og $f(x)=\sqrt{x}$, eru mengi með óendanlega mörgum stökum. Augljóslega getum við ekki talið upp öll þessi stök. Þegar mengi með óendanlega mörgum stökum er lýst er oft gagnlegt að nota mengjalýsingu eða bilarithátt. Þegar við notum mengjalýsingu til að lýsa hlutmengi í mengi allra rauntalna, sem táknað er með $\mathbb{R}$, skrifum við

$$\{x \mid x \text{ hefur einhvern eiginleika}\}.$$

Þetta lesum við sem mengi þeirra rauntalna x þannig að x hefur tiltekinn eiginleika. Ef við hefðum til dæmis áhuga á mengi þeirra rauntalna sem eru stærri en einn en minni en fimm gætum við táknað mengið með mengjalýsingu og skrifað

$$\{x \mid 1<x<5\}.$$

Slíkt mengi, sem inniheldur allar tölur stærri en a og minni en b, má einnig tákna með bilarithætti (a,b). Því gildir

$$(1,5)=\{x \mid 1<x<5\}.$$

Tölurnar 1 og 5 nefnast endapunktar þessa mengis. Ef við viljum skoða mengið sem inniheldur endapunktana táknum við það með því að skrifa

$$[1,5]=\{x \mid 1\le x\le 5\}.$$

Við getum notað svipaðan rithátt ef við viljum hafa annan endapunktinn með en ekki hinn. Til að tákna mengi rauntalna sem eru ekki neikvæðar notum við mengjalýsinguna

$$\{x|0\leq x\}.$$

Minnsta talan í þessu mengi er núll en mengið hefur enga stærstu tölu. Með bilarithætti notum við táknið ∞, sem táknar jákvætt óendanlegt, og skrifum mengið sem

$$[0,\infty)=\{x|0\leq x\}.$$

Mikilvægt er að hafa í huga að ∞ er ekki rauntala. Táknið er notað hér til að gefa til kynna að mengið innihaldi allar rauntölur sem eru stærri en eða jafnar núlli. Ef við vildum á sama hátt lýsa mengi allra talna sem eru ekki jákvæðar gætum við skrifað

$$(-\infty,0]=\{x|x\leq 0\}.$$

Hér táknar $-\infty$ neikvætt óendanlegt og gefur til kynna að allar tölur sem eru minni en eða jafnar núlli séu teknar með, hversu litlar sem þær eru. Mengið

$$(-\infty,\infty)=\{x|x \text{ er einhver rauntala}\}$$

táknar mengi allra rauntalna.

Sum föll eru skilgreind með mismunandi jöfnum á mismunandi hlutum skilgreiningarmengis síns. Slík föll nefnast kaflaskilgreind föll. Gerum til dæmis ráð fyrir að við viljum skilgreina fall f sem hefur mengi allra rauntalna að skilgreiningarmengi þannig að $f(x)=3x+1$ þegar $x\geq 2$ og $f(x)=x^2$ þegar $x<2$. Við táknum fallið með því að skrifa

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geq 2\\ x^2 & x<2\end{cases}.$$

Þegar gildi þessa falls er reiknað fyrir inntak x, fer jafnan sem við notum eftir því hvort $x\geq 2$ eða $x<2$. Þar sem $5>2$, notum við til dæmis þá staðreynd að $f(x)=3x+1$ þegar $x\geq 2$ og sjáum að $f(5)=3(5)+1=16$. Fyrir $x=-1$, notum við hins vegar þá staðreynd að $f(x)=x^2$ þegar $x<2$ og sjáum að $f(-1)=1$.

SÝNIDÆMI 1.1

Útreikningur fallgilda

Fyrir fallið $f(x)=3x^2+2x-1$, reiknið

a. $f(-2)$
b. $f(\sqrt{2})$
c. $f(a+h)$

Lausn

Setjið gefna gildið í stað x í formúlunni fyrir $f(x)$.

a. $f(-2)=3(-2)^2+2(-2)-1=12-4-1=7$

b. $f(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}-1=6+2\sqrt{2}-1=5+2\sqrt{2}$

c.
$$\begin{aligned} f(a+h)=3(a+h)^2+2(a+h)-1 &= 3\left(a^2+2ah+h^2\right)+2a+2h-1 \\ &= 3a^2+6ah+3h^2+2a+2h-1 \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.1

Fyrir $f(x)=x^2-3x+5$, reiknið $f(1)$ og $f(a+h)$.

SÝNIDÆMI 1.2

Ákvörðun skilgreiningarmengis og myndmengis

Ákvarðið fyrir hvert eftirfarandi fall i. skilgreiningarmengið og ii. myndmengið.

a. $f(x)=(x-4)^2+5$

b. $f(x)=\sqrt{3x+2}-1$

c. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$

Lausn

a. Skoðum $f(x)=(x-4)^2+5$.

i. Þar sem $f(x)=(x-4)^2+5$ er rauntala fyrir sérhverja rauntölu x, er skilgreiningarmengi f bilið $(-\infty,\infty)$.

ii. Þar sem $(x-4)^2\geq 0$, vitum við að $f(x)=(x-4)^2+5\geq 5$. Því hlýtur myndmengið að vera hlutmengi í $\{y\,|\,y\geq 5\}$. Til að sýna að sérhvert stak í þessu mengi tilheyri myndmenginu þurfum við að sýna að fyrir gefið y í menginu sé til rauntala x þannig að $f(x)=(x-4)^2+5=y$. Þegar þessi jafna er leyst fyrir x, sést að við þurfum x þannig að $(x-4)^2=y-5$.

Þessi jafna er uppfyllt svo framarlega sem til er rauntala x þannig að $x-4=\pm\sqrt{y-5}$.

Þar sem $y\geq 5$, er kvaðratrótin vel skilgreind. Við ályktum að fyrir $x=4\pm\sqrt{y-5}$, $f(x)=y$, og því er myndmengið $\{y\,|\,y\geq 5\}$.

b. Skoðum $f(x)=\sqrt{3x+2}-1$.

i. Til að finna skilgreiningarmengi f, þarf stæðan $3x+2\geq 0$. Þegar þessi ójafna er leyst fæst að skilgreiningarmengið er $\{x\,|\,x\geq -2/3\}$.

ii. Til að finna myndmengi f, athugum við að þar sem $\sqrt{3x+2}\geq 0$, $f(x)=\sqrt{3x+2}-1\geq -1$. Því hlýtur myndmengi f að vera hlutmengi

1

mengisins $\{y|y\geq -1\}$. Til að sýna að sérhvert stak í þessu mengi tilheyri myndmengi f, þurfum við að sýna að fyrir öll y í menginu sé til rauntala x í skilgreiningarmenginu þannig að $f(x)=y$. Látum $y\geq -1$. Þá gildir $f(x)=y$ þá og því aðeins að
$\sqrt{3x+2}-1=y$.

Þegar þessi jafna er leyst fyrir x, sést að x verður að leysa jöfnuna
$\sqrt{3x+2}=y+1$.

Þar sem $y\geq -1$, getur slíkt x verið til. Þegar báðar hliðar jöfnunnar eru settar í annað veldi fæst $3x+2=(y+1)^2$.
Því þurfum við
$3x=(y+1)^2-2$,

sem leiðir af sér
$x=\frac{1}{3}(y+1)^2-\frac{2}{3}$.

Við þurfum aðeins að sannreyna að x sé í skilgreiningarmengi f. Þar sem skilgreiningarmengi f samanstendur af öllum rauntölum sem eru stærri en eða jafnar $-2/3$, og
$\frac{1}{3}(y+1)^2-\frac{2}{3}\geq -\frac{2}{3}$,

þá er til x í skilgreiningarmengi f. Við ályktum að myndmengi f sé $\{y|y\geq -1\}$.

c. Skoðum $f(x)=3/(x-2)$.

i. Þar sem $3/(x-2)$ er skilgreint þegar nefnarinn er ekki núll er skilgreiningarmengið $\{x|x\neq 2\}$.

ii. Til að finna myndmengi f, þurfum við að finna þau gildi y sem gera það að verkum að til sé rauntala x í skilgreiningarmenginu sem uppfyllir
$\frac{3}{x-2}=y$.

Þegar þessi jafna er leyst fyrir x, fæst
$x=\frac{3}{y}+2$.

Því er, svo framarlega sem $y\neq 0$, til rauntala x í skilgreiningarmenginu þannig að $f(x)=y$. Myndmengið er því $\{y|y\neq 0\}$.

STÖÐUMAT 1.2

Finnið skilgreiningarmengið og myndmengið fyrir $f(x)=\sqrt{4-2x}+5$.

Framsetning falla

Fall er yfirleitt sett fram með einni eða fleiri af eftirfarandi aðferðum:

- Tafla
- Graf
- Formúla

Við getum borið kennsl á fall í hverri þessara mynda en einnig notað þær saman. Til dæmis getum við sett gildin úr töflu fram á grafi eða búið til töflu út frá formúlu.

Töflur

Föllum sem lýst er með gildistöflu bregður oft fyrir í raunverulegum viðfangsefnum. Lítum á einfalt dæmi. Við getum lýst hitastigi á tilteknum degi sem falli af tíma dags. Gerum ráð fyrir að við skráum hitastigið á klukkutíma fresti í 24 klukkustundir frá miðnætti. Látum inntaksbreytuna x tákna tímann frá miðnætti, mældan í klukkustundum, og úttaksbreytuna y tákna hitastigið x klukkustundum eftir miðnætti, mælt í gráðum á Celsíus. Við skráum gögnin okkar í töflu 1.1.

Tafla 1.1 Hitastig sem fall af tíma sólarhrings

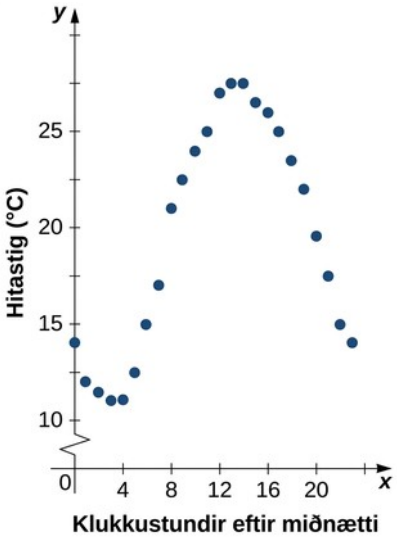
Klukkustundir frá miðnætti	Hitastig $(^\circ C)$	Klukkustundir frá miðnætti	Hitastig $(^\circ C)$
0	14	12	27
1	12	13	27.5
2	11.5	14	27.5
3	11	15	26.5
4	11	16	26
5	12.5	17	25
6	15	18	23.5
7	17	19	22
8	21	20	19.5
9	22.5	21	17.5
10	24	22	15
11	25	23	14

Af töflunni má sjá að hitastig er fall af tíma og að hitastigið lækkar, hækkar síðan og lækkar svo aftur. Við fáum þó ekki skýra mynd af hegðun fallsins án þess að teikna graf þess.

1

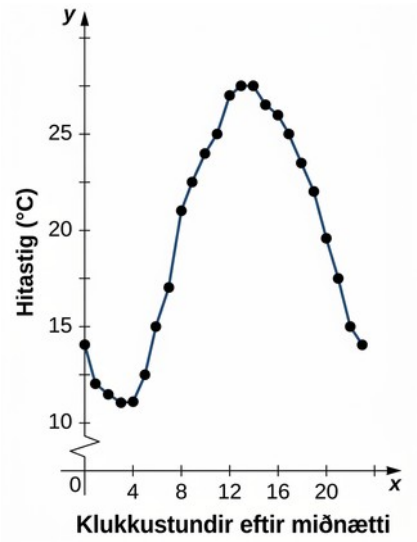
Gröf

Þegar fallinu f er lýst með töflu getum við sýnt það myndrænt með grafi. Með því að teikna graf hitastiganna í töflu 1.1 fáum við betri mynd af sveiflum þeirra yfir daginn. Mynd 1.6 sýnir graf hitastigsfallsins.



Mynd 1.6 Graf gagnanna úr töflu 1.1 sýnir hitastig sem fall af tíma.

Út frá punktunum sem merktir eru inn á grafið á mynd 1.6 getum við séð almenna lögun þess. Oft er gagnlegt að tengja saman punktana á grafinu, en þeir sýna gögnin úr töflunni. Í þessu dæmi getum við ekki dregið neina ótvíræða ályktun um hvað hitastigið var á þeim tímum þegar það var ekki skráð. Með hliðsjón af fjölda gagnapunkta og mynstrinu sem þeir mynda er þó eðlilegt að ætla að hitastigið á öðrum tímum hafi fylgt svipuðu mynstri, eins og sjá má á mynd 1.7.



Mynd 1.7 Þegar punktarnir á mynd 1.6 eru tengdir saman kemur almennt mynstur gagnanna í ljós.

Algebrulegar formúlur

Stundum eru gildi falls ekki gefin í töflu heldur með beinni formúlu. Formúlur koma víða fyrir í hagnýtum verkefnum. Flatarmál hrings með geisla r er til dæmis gefið með formúlunni $A(r)=\pi r^2$. Ef hlut er kastað upp frá jörðu með upphafshraðanum v_0 m/s er hæð hans yfir jörðu í metrum, frá því að honum er kastað þar til hann lendir, gefin með formúlunni $s(t)=-4{,}9\,t^2+v_0\,t$. Þegar P dollarar eru lagðir inn á reikning með ársvöxtunum r og samfelldri vaxtavöxtun er innstæðan eftir t ár gefin með formúlunni $A(t)=Pe^{rt}$. Algebrulegar formúlur eru mikilvæg verkfæri til að reikna fallgildi. Oft sýnum við þessi föll einnig myndrænt með gröfum.

Ef gefin er algebruleg formúla fyrir fall f, er graf f mengi punktanna $(x, f(x))$, þar sem x tilheyrir skilgreiningarmengi f og $f(x)$ tilheyrir myndmenginu. Þegar teikna á graf falls sem gefið er með formúlu er gagnlegt að byrja á því að nota formúluna til að útbúa töflu yfir inntök og úttök. Ef skilgreiningarmengi f hefur óendanlega mörg gildi getum við ekki talið þau öll upp. Það er þó oft góð byrjun að skrá nokkur inntök og úttök því að það getur verið mjög gagnlegt.

Þegar við búum til töflu yfir inntök og úttök athugum við yfirleitt hvort núll komi fyrir sem úttak. Þau gildi x þar sem $f(x)=0$ nefnast núllstöðvar falls. Núllstöðvar $f(x)=x^2-4$ eru til dæmis $x=\pm 2$. Núllstöðvarnar ákvarða hvar graf f sker x-ásinn og veita þannig frekari upplýsingar um lögun grafs fallsins. Graf falls sker ef til vill aldrei x-ásinn, en það getur einnig skorið hann mörgum sinnum, jafnvel óendanlega oft.

Annar áhugaverður punktur er skurðpunkturinn við y-ásinn, ef hann er til. Skurðpunkturinn við y-ásinn er gefinn með $(0, f(0))$.

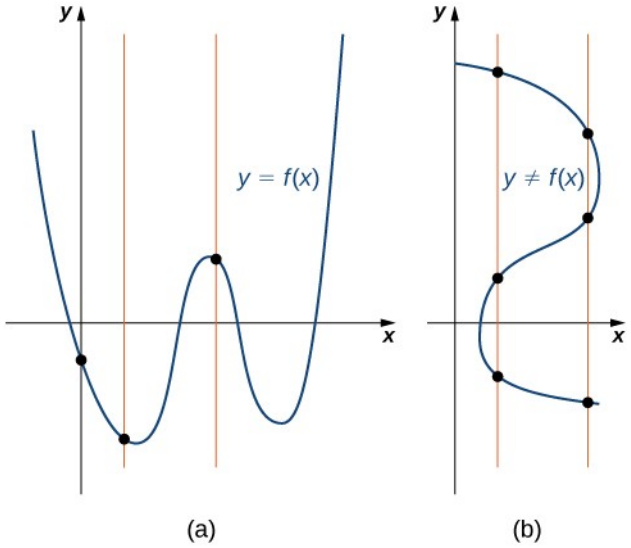
Þar sem fall hefur nákvæmlega eitt úttak fyrir hvert inntak getur graf falls í mesta lagi haft einn skurðpunkt við y-ásinn. Ef $x=0$ tilheyrir skilgreiningarmengi falls f, hefur f nákvæmlega einn skurðpunkt við y-ásinn. Ef $x=0$ tilheyrir ekki skilgreiningarmengi f, hefur f engan skurðpunkt við y-ásinn. Fyrir sérhverja rauntölu c, gildir á sama hátt að ef c tilheyrir skilgreiningarmengi f, er til nákvæmlega eitt úttak $f(c)$, og línan $x=c$ sker graf f nákvæmlega einu sinni. Ef c tilheyrir hins vegar ekki skilgreiningarmengi f, $f(c)$ ekki skilgreint og línan $x=c$ sker ekki graf f. Þessi eiginleiki er dreginn saman í lóðrétta línuprófinu.

REGLA: LÓÐRÉTTA LÍNUPRÓFIÐ

Fyrir gefið fall f, sker sérhver lóðrétt lína sem draga má graf f í mesta lagi einu sinni. Ef einhver lóðrétt lína sker punktamengi oftar en einu sinni táknar punktamengið ekki fall.

Við getum notað þetta próf til að ákvarða hvort mengi innmerktra punkta sé graf falls (mynd 1.8).

1



Mynd 1.8 (a) Punktamengið táknar graf falls vegna þess að sérhver lóðrétt lína sker mengið í mesta lagi einu sinni. (b) Punktamengið táknar ekki graf falls vegna þess að sumar lóðréttar línur skera mengið oftar en einu sinni.

SÝNIDÆMI 1.3

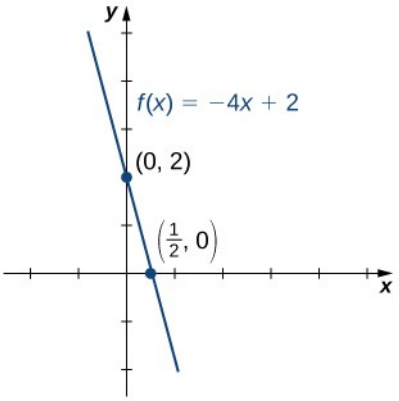
Ákvörðun núllstöðva og skurðpunkta falls við y-ásinn

Skoðum fallið $f(x) = -4x + 2$.

a. Finnið allar núllstöðvar f.
b. Finnið skurðpunktinn við y-ásinn (ef hann er til).
c. Teiknið skissu af grafi f.

Lausn

a. Til að finna núllstöðvarnar leysum við $f(x) = -4x + 2 = 0$. Þá sést að f hefur eina núllstöð við $x = 1/2$.
b. Skurðpunkturinn við y-ásinn er gefinn með $(0, f(0)) = (0, 2)$.
c. Þar sem f er línulegt fall af gerðinni $f(x) = mx + b$ sem liggur gegnum punktana $(1/2, 0)$ og $(0, 2)$, getum við dregið upp graf fallsins f (mynd 1.9).



Mynd 1.9 Fallið $f(x)=-4x+2$ er lína með x-skurðpunktinn $(1/2,0)$ og y-skurðpunktinn $(0,2)$.

SÝNIDÆMI 1.4

Notkun núllstöðva og skurðpunkta við y-ásinn til að draga upp graf

Skoðum fallið $f(x)=\sqrt{x+3}+1$.

a. Finnið allar núllstöðvar f.
b. Finnið skurðpunktinn við y-ásinn (ef hann er til).
c. Teiknið skissu af grafi f.

Lausn

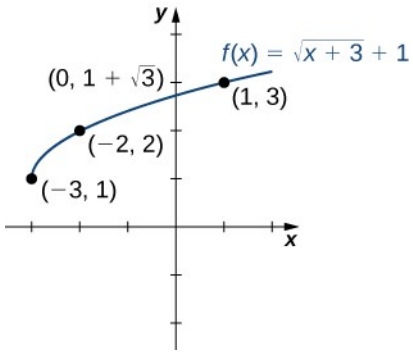
a. Til að finna núllstöðvarnar leysum við $\sqrt{x+3}+1=0$. Þessi jafna gefur $\sqrt{x+3}=-1$. Þar sem $\sqrt{x+3}\geq 0$ fyrir öll x, hefur þessi jafna enga lausn og því hefur f engar núllstöðvar.
b. y-skurðpunkturinn er gefinn með $(0,f(0))=(0,\sqrt{3}+1)$.
c. Til að teikna graf þessa falls búum við til gildatöflu. Þar sem við þurfum $x+3\geq 0$, þurfum við að velja gildi á $x\geq -3$. Við veljum gildi sem auðvelt er að setja inn í kvaðratrótarfallið.

Tafla 1.2

x	-3	-2	1
$f(x)$	1	2	3

Með hliðsjón af töflunni og þeirri staðreynd að fallið er kvaðratrótarfall og graf f ætti því að vera svipað grafi $y=\sqrt{x}$, teiknum við grafið (mynd 1.10).

1



Mynd 1.10 Graf $f\left(x\right)=\sqrt{x+3}+1$ hefur einn y-skurðpunkt en enga x-skurðpunkta.

STÖÐUMAT 1.3

Finnið núllstöðvar $f\left(x\right)=x^3-5x^2+6x$.

SÝNIDÆMI 1.5

Ákvörðun hæðar hlutar í frjálsu falli

Ef bolta er sleppt úr 122,5 metra hæð er hæð hans s á tímanum t gefin með fallinu $s\left(t\right)=-4{,}9\ t^2+122{,}5$, þar sem s er mælt í metrum og t er mælt í sekúndum. Skilgreiningarmengið takmarkast við bilið $\left[0,c\right]$, þar sem $t=0$ er tíminn þegar boltanum er sleppt og $t=c$ er tíminn þegar boltinn lendir á jörðinni.

a. Búið til töflu sem sýnir hæðina $s(t)$ þegar $t=0,1,2,3,4,\text{og }5$. Notið gögnin úr töflunni til að ákvarða skilgreiningarmengi fallsins. Finnið með öðrum orðum tímann c þegar boltinn lendir á jörðinni.

b. Skissið graf s.

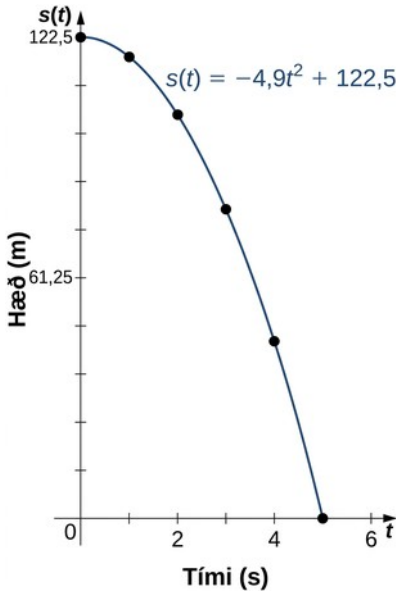
Lausn

Tafla 1.3 Hæð s sem fall af tíma t

t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	122,5	117,6	102,9	78,4	44,1	0

Þar sem boltinn lendir á jörðinni þegar $t=5$, er skilgreiningarmengi fallsins bilið $\left[0,5\right]$.

a.



Takið eftir að fyrir þetta fall og fallið $f(x)=-4x+2$ sem sýnt er á grafi á mynd 1.9 verða gildi $f(x)$ minni eftir því sem x verður stærra. Fall með þennan eiginleika kallast minnkandi. Fyrir fallið $f(x)=\sqrt{x+3}+1$ sem sýnt er á grafi á mynd 1.10 verða gildi $f(x)$ hins vegar stærri eftir því sem gildi x verða stærri. Fall með þennan eiginleika kallast vaxandi. Mikilvægt er þó að hafa í huga að fall getur verið vaxandi á einu eða fleiri bilum og minnkandi á öðru eða öðrum bilum. Ef við skoðum til dæmis hitafallið á mynd 1.6 sjáum við að fallið er minnkandi á bilinu $(0,4)$, vaxandi á bilinu $(4,14)$, og síðan minnkandi á bilinu $(14,23)$. Í næstu skilgreiningu setjum við fram nákvæmari lýsingu á því hvað felst í því að fall sé vaxandi eða minnkandi á tilteknu bili.

SKILGREINING

Við segjum að fall f sé vaxandi á bilinu I ef fyrir öll $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ þegar } x_1 < x_2.$$

Við segjum að f sé stranglega vaxandi á bilinu I ef fyrir öll $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ þegar } x_1 < x_2.$$

Við segjum að fall f sé minnkandi á bilinu I ef fyrir öll $x_1, x_2 \in I$,

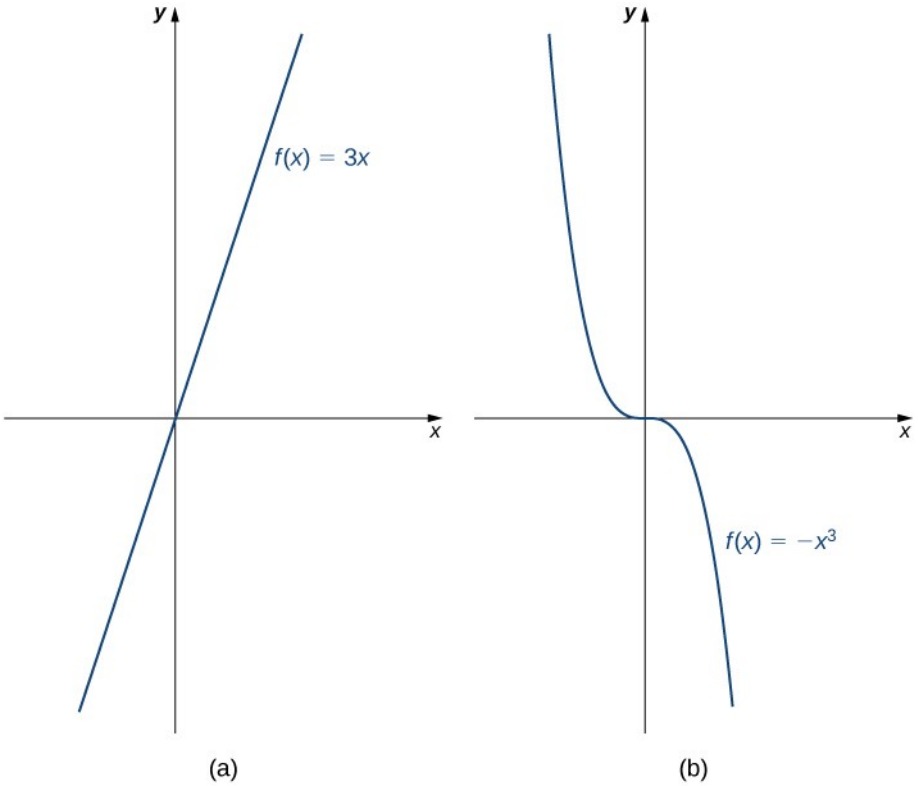
$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ ef } x_1 < x_2.$$

Við segjum að fall f sé stranglega minnkandi á bilinu I ef fyrir öll $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ ef } x_1 < x_2.$$

1

Til dæmis er fallið $f(x)=3x$ vaxandi á bilinu $(-\infty,\infty)$ vegna þess að $3x_1<3x_2$ þegar $x_1<x_2$. Hins vegar er fallið $f(x)=-x^3$ stranglega minnkandi á bilinu $(-\infty,\infty)$ vegna þess að $-x_1^3>-x_2^3$ þegar $x_1<x_2$ (mynd 1.11).



Mynd 1.11 (a) Fallið $f(x)=3x$ er vaxandi á bilinu $(-\infty,\infty)$. (b) Fallið $f(x)=-x^3$ er minnkandi á bilinu $(-\infty,\infty)$.

Aðgerðir á föllum

Nú þegar við höfum rifjað upp helstu eiginleika falla getum við kannað hvað verður um þessa eiginleika þegar við tengjum föll saman með ólíkum hætti og notum grunnaðgerðir stærðfræðinnar til að mynda ný föll. Ef kostnaður fyrirtækis við að framleiða x vörur er til dæmis gefinn með fallinu $C(x)$ og tekjurnar af sölu x vara eru gefnar með fallinu $R(x)$, þá er hagnaðurinn af framleiðslu og sölu x vara skilgreindur sem $P(x)=R(x)-C(x)$. Með því að taka mismun tveggja falla mynduðum við nýtt fall.

Einnig getum við myndað nýtt fall með því að skeyta saman tveimur föllum. Ef til dæmis eru gefin föllin $f(x)=x^2$ og $g(x)=3x+1$, er samskeytta fallið $f\circ g$ skilgreint þannig að

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2=(3x+1)^2.$$

Samskeytta fallið $g\circ f$ er skilgreint þannig að

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=3f(x)+1=3x^2+1.$$

Athugið að þessi tvö nýju föll eru ólík.

Reikniaðgerðir á föllum

Til að tengja föll saman með reikniaðgerðum skrifum við föllin einfaldlega með reikniaðgerðinni á milli og einföldum svo. Fyrir tvö föll f og g, getum við skilgreint fjögur ný föll:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	Summa
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	Mismunur
$(f\cdot g)(x)=f(x)\,g(x)$	Margfeldi
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ þegar $g(x)\neq 0$	Kvóti

---

SÝNIDÆMI 1.6

Reikniaðgerðir á föllum

Fyrir föllin $f(x)=2x-3$ og $g(x)=x^2-1$, finnið hvert eftirfarandi falla og tilgreinið skilgreiningarmengi þess.

a. $(f+g)(x)$

b. $(f-g)(x)$

c. $(f\cdot g)(x)$

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Lausn

a. $(f+g)(x)=(2x-3)+(x^2-1)=x^2+2x-4$. Skilgreiningarmengi þessa falls er bilið $(-\infty,\infty)$.

b. $(f-g)(x)=(2x-3)-(x^2-1)=-x^2+2x-2$. Skilgreiningarmengi þessa falls er bilið $(-\infty,\infty)$.

c. $(f\cdot g)(x)=(2x-3)(x^2-1)=2x^3-3x^2-2x+3$. Skilgreiningarmengi þessa falls er bilið $(-\infty,\infty)$.

d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x-3}{x^2-1}$. Skilgreiningarmengi þessa falls er $\{x \mid x\neq\pm 1\}$.

STÖÐUMAT 1.4

Fyrir $f(x)=x^2+3$ og $g(x)=2x-5$, finnið $(f/g)(x)$ og tilgreinið skilgreiningarmengi þess.

Samskeyting falla

Þegar við skeytum saman föllum tökum við fall af falli. Gerum til dæmis ráð fyrir að hitastiginu T á tilteknum degi sé lýst sem falli af tímanum t (mældum í klukkustundum frá miðnætti), eins og sýnt er í töflu 1.1. Gerum ráð fyrir að kostnaðinum C, við að hita eða kæla byggingu í 1 klukkustund, megi lýsa sem falli af hitastiginu T. Með því að tengja þessi tvö föll saman getum við lýst kostnaðinum við að hita eða kæla byggingu sem falli af tíma með því að

reikna $C(T(t))$. Við höfum skilgreint nýtt fall, táknað með $C \circ T$, sem er skilgreint þannig að $(C \circ T)(t) = C(T(t))$ fyrir öll t í skilgreiningarmengi T. Þetta nýja fall kallast samskeytt fall. Þar sem kostnaðurinn er fall af hitastigi og hitastigið er fall af tíma er eðlilegt að skilgreina þetta nýja fall $(C \circ T)(t)$. Hins vegar er ekki merkingarbært að skoða $(T \circ C)(t)$, því hitastig er ekki fall af kostnaði.

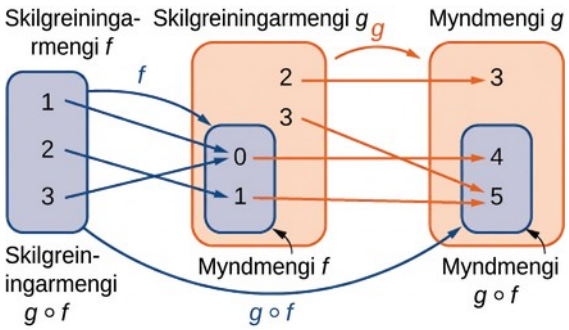
SKILGREINING

Skoðum fallið f með skilgreiningarmengið A og myndmengið B, og fallið g með skilgreiningarmengið D og myndmengið E. Ef B er hlutmengi í D, þá er samskeytta fallið $(g \circ f)(x)$ fallið með skilgreiningarmengið A þannig að

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

(1.1)

Líta má á samskeytt fall $g \circ f$ í tveimur skrefum. Fyrst varpar fallið f hverju inntaki x í skilgreiningarmengi f á úttakið $f(x)$ í myndmengi f. Þar sem myndmengi f er hlutmengi í skilgreiningarmengi g, er úttakið $f(x)$ síðan stak í skilgreiningarmengi g, og því varpast það á úttakið $g(f(x))$ í myndmengi g. Á mynd 1.12 sjáum við myndræna framsetningu á samskeyttu falli.



Mynd 1.12 Fyrir samskeytta fallið $g \circ f$, gildir $(g \circ f)(1) = 4$, $(g \circ f)(2) = 5$, og $(g \circ f)(3) = 4$.

SÝNIDÆMI 1.7

Samskeytingar falla sem skilgreind eru með formúlum

Skoðum föllin $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = 1/x$.

a. Finnið $(g \circ f)(x)$ og tilgreinið skilgreiningarmengi þess og myndmengi.
b. Reiknið $(g \circ f)(4), (g \circ f)(-1/2)$.
c. Finnið $(f \circ g)(x)$ og tilgreinið skilgreiningarmengi þess og myndmengi.
d. Reiknið $(f \circ g)(4), (f \circ g)(-1/2)$.

Lausn

a. Við getum fundið formúluna fyrir $(g \circ f)(x)$ á tvo mismunandi vegu. Við gætum skrifað

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Einnig gætum við skrifað

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Þar sem $x^2+1 \neq 0$ fyrir allar rauntölur x, er skilgreiningarmengi $(g \circ f)(x)$ mengi allra rauntalna. Þar sem $0 < 1/(x^2+1) \leq 1$, er myndmengið í mesta lagi bilið $(0,1]$. Til að sýna að myndmengið sé allt þetta bil látum við $y = 1/(x^2+1)$ og leysum jöfnuna með tilliti til x til að sýna að fyrir öll y á bilinu $(0,1]$, sé til rauntala x þannig að $y = 1/(x^2+1)$. Þegar jafnan er leyst með tilliti til x, fæst $x^2+1 = 1/y$, sem felur í sér að

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

Ef y er á bilinu $(0,1]$, er stæðan undir rótartákninu ekki neikvæð og því er til rauntala x þannig að $1/(x^2+1) = y$. Við ályktum að myndmengi $g \circ f$ sé bilið $(0,1]$.

b. $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(4^2+1) = g(17) = \frac{1}{17}$

$$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1\right) = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}$$

c. Við getum fundið formúlu fyrir $(f \circ g)(x)$ á tvo vegu. Í fyrsta lagi gætum við skrifað

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2+1.$$

Einnig gætum við skrifað

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2+1 = \left(\frac{1}{x}\right)^2+1.$$

Skilgreiningarmengi $f \circ g$ er mengi allra rauntalna x þannig að $x \neq 0$. Til að finna myndmengi f, þurfum við að finna öll gildi y sem gera það að verkum að til sé rauntala $x \neq 0$ þannig að

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2+1 = y.$$

Þegar þessi jafna er leyst fyrir x, sést að x þarf að uppfylla

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = y - 1,$$

1

sem einfaldast í

$$\frac{1}{x} = \pm\sqrt{y-1}.$$

Að lokum fæst

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{y-1}}.$$

Þar sem $1/\sqrt{y-1}$ er rauntala þá og því aðeins að $y > 1$, er myndmengi $f \circ g$ mengið $\{y \mid y > 1\}$.

d. $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$

$$(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

Í dæmi 1.7 sjáum við að $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Þetta sýnir að almennt skiptir máli í hvaða röð við skeytum föllum saman.

STÖÐUMAT 1.5

Látum $f(x) = 2 - 5x$. Látum $g(x) = \sqrt{x}$. Finnið $(f \circ g)(x)$.

SÝNIDÆMI 1.8

Samskeyting falla sem skilgreind eru með töflum

Skoðum föllin f og g sem lýst er í töflu 1.4 og töflu 1.5.

Tafla 1.4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	4	2	4	-2	0	-2	4

Tafla 1.5

x	-4	-2	0	2	4
$g(x)$	1	0	3	0	5

a. Reiknið $(g \circ f)(3), (g \circ f)(0)$.

b. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi $(g \circ f)(x)$.

c. Reiknið $(f \circ f)(3), (f \circ f)(1)$.

d. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi $(f \circ f)(x)$.

Lausn

a. $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-2) = 0$
$(g \circ f)(0) = g(4) = 5$

b. Skilgreiningarmengi $g \circ f$ er mengið $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Þar sem myndmengi f er mengið $\{-2, 0, 2, 4\}$, er myndmengi $g \circ f$ mengið $\{0, 3, 5\}$.

c. $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(-2) = 4$
$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(-2) = 4$

d. Skilgreiningarmengi $f \circ f$ er mengið $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Þar sem myndmengi f er mengið $\{-2, 0, 2, 4\}$, er myndmengi $f \circ f$ mengið $\{0, 4\}$.

SÝNIDÆMI 1.9

Notkun samskeytts falls

Verslun auglýsir 20 % afslátt af öllum vörum. Caroline er með afsláttarmiða sem veitir henni 15 % viðbótarafslátt af hvaða vöru sem er, þar á meðal útsöluvörum. Ef Caroline ákveður að kaupa vöru sem kostar upphaflega x evrur, hversu mikið greiðir hún að lokum ef hún notar afsláttarmiðann til að fá afslátt af útsöluverðinu? Leysið dæmið með samskeyttu falli.

Lausn

Þar sem útsöluverðið er 20 % lægra en upphaflega verðið er útsöluverð vöru, sem kostar x dollara, gefið með $f(x) = 0{,}80\ x$. Þar sem afsláttarmiðinn veitir einstaklingi 15 % afslátt af verði hvaða vöru sem er, er lokaverð vöru sem kostar y dollara, eftir notkun afsláttarmiðans, gefið með $g(y) = 0{,}85\ y$. Ef upphaflega verðið er x dollarar verður útsöluverðið því $f(x) = 0{,}80\ x$ og lokaverðið eftir að afsláttarmiðinn hefur verið notaður verður síðan

$$g(f(x)) = 0{,}85\ (0{,}80\ x) = 0{,}68\ x.$$

STÖÐUMAT 1.6

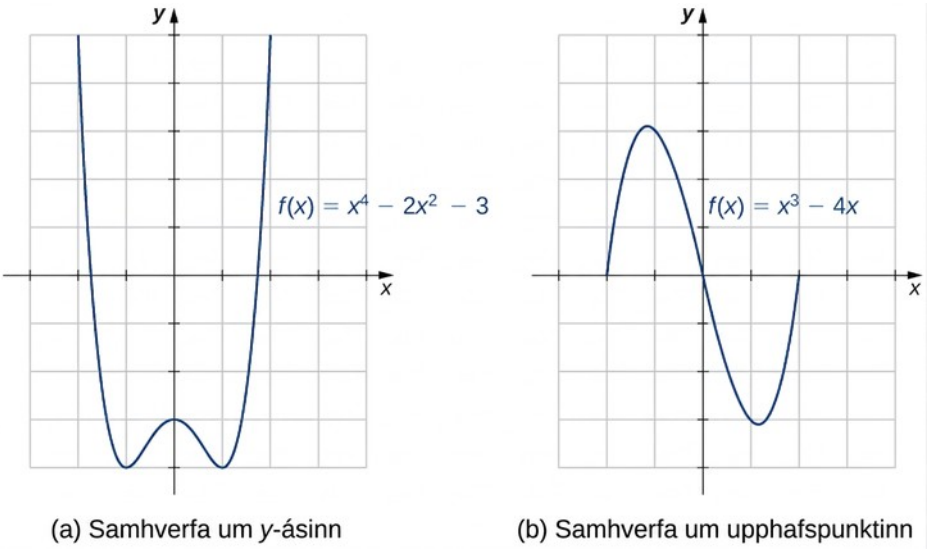
Ef vörur eru á útsölu með 10 % afslætti af upphaflegu verði og viðskiptavinur er með afsláttarmiða sem veitir 30 % viðbótarafslátt, hvert verður þá lokaverð vöru sem kostar upphaflega x evrur þegar viðbótarafslátturinn hefur verið dreginn frá útsöluverðinu?

Samhverfa falla

Gröf sumra falla hafa samhverfueiginleika sem hjálpa okkur að skilja fallið og lögun grafs þess. Skoðum til dæmis fallið $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ sem sýnt er á mynd 1.13 (a). Ef við tökum þann hluta ferilsins sem liggur hægra megin við y -ásinn og speglum hann yfir y -ásinn fellur hann nákvæmlega ofan á ferilinn vinstra megin við y -ásinn. Í þessu tilviki segjum við að

fallið sé samhverft um y -ásinn. Skoðum hins vegar fallið $f(x)=x^3-4x$ sem sýnt er á mynd 1.13 (b). Ef við tökum grafið og snúum því $180°$ um upphafspunktinn verður grafið óbreytt. Í þessu tilviki segjum við að fallið sé samhverft um upphafspunktinn.

1



(a) Samhverfa um y-ásinn (b) Samhverfa um upphafspunktinn

Mynd 1.13 (a) Graf sem er samhverft um y-ásinn. (b) Graf sem er samhverft um upphafspunktinn.

Ef graf falls er gefið er auðvelt að sjá hvort það hefur annan hvorn þessara samhverfueiginleika. En hvernig getum við ákvarðað með algebru hvort fall f sé samhverft ef grafið er ekki gefið? Skoðum aftur mynd 1.13. Þar sem f er samhverft um y-ásinn sjáum við að ef punkturinn (x, y) er á grafinu, þá er punkturinn $(-x, y)$ einnig á grafinu. Með öðrum orðum, $f(-x)=f(x)$. Ef fall f hefur þennan eiginleika segjum við að f sé jafnstætt fall, en graf þess er samhverft um y-ásinn. Til dæmis er $f(x)=x^2$ jafnstætt því að

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

Þegar við skoðum hins vegar mynd 1.13 aftur sjáum við að ef fall f er samhverft um upphafspunktinn og punkturinn (x, y) er á grafinu, þá er punkturinn $(-x, -y)$ einnig á grafinu. Með öðrum orðum, $f(-x)=-f(x)$. Ef f hefur þennan eiginleika segjum við að f sé oddstætt fall, en graf þess er samhverft um upphafspunktinn. Til dæmis er $f(x)=x^3$ oddstætt því að

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

SKILGREINING

Ef $f(x)=f(-x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f, þá er f jafnstætt fall. Jafnstætt fall er samhverft um y -ásinn.

Ef $f(-x)=-f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f, þá er f oddstætt fall. Oddstætt fall er samhverft um upphafspunktinn.

SÝNIDÆMI 1.10

Jafnstæð og oddstæð föll

Ákvarðið hvort hvert eftirfarandi fall sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

a. $f(x)=-5x^4+7x^2-2$

b. $f(x)=2x^5-4x+5$

c. $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$

Lausn

Til að ákvarða hvort fall sé jafnstætt eða oddstætt reiknum við $f(-x)$ og berum niðurstöðuna saman við f(x) og $-f(x)$.

a. $f(-x)=-5(-x)^4+7(-x)^2-2=-5x^4+7x^2-2=f(x)$. Því er f jafnstætt.

b. $f(-x)=2(-x)^5-4(-x)+5=-2x^5+4x+5$. Nú er $f(-x)\neq f(x)$. Þar að auki sjáum við, með hliðsjón af því að $-f(x)=-2x^5+4x-5$, að $f(-x)\neq -f(x)$. Því er f hvorki jafnstætt né oddstætt.

c. $f(-x)=3(-x)/((-x)^2+1)=-3x/(x^2+1)=-[3x/(x^2+1)]=-f(x)$. Því er f oddstætt.

STÖÐUMAT 1.7

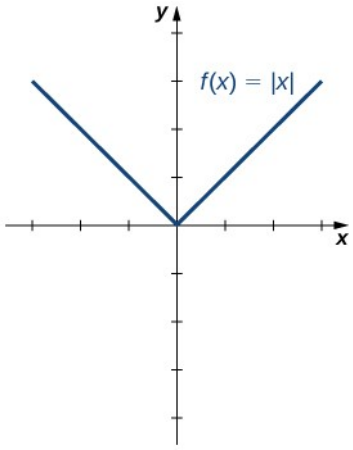
Ákvarðið hvort $f(x)=4x^3-5x$ sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

Eitt samhverft fall sem kemur oft fyrir er tölugildisfallið, táknað með $|x|$. Tölugildisfallið er skilgreint sem

$$f(x)=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}.$$

(1,2)

Sumir nemendur lýsa þessu falli með því að segja að það „geri allt jákvætt“. Af skilgreiningu tölugildisfallsins sést að ef $x<0$, þá er $|x|=-x>0$, og ef $x>0$, þá er $|x|=x>0$. Hins vegar, fyrir $x=0$, $|x|=0$. Því er nákvæmara að segja að fyrir öll inntaksgildi önnur en núll sé úttaksgildið jákvætt, en ef $x=0$, þá er úttaksgildið $|x|=0$. Við ályktum að myndmengi tölugildisfallsins sé $\{y|y\geq 0\}$. Á mynd 1.14 sjáum við að tölugildisfallið er samhverft um y-ásinn og er því jafnstætt fall.



Mynd 1.14 Graf fallsins $f(x)=|x|$ er samhverft um y-ásinn.

SÝNIDÆMI 1.11

Unnið með algildisfallið

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins $f(x)=2|x-3|+4$.

Lausn

Þar sem tölugildisfallið er skilgreint fyrir allar rauntölur er skilgreiningarmengi fallsins $(-\infty,\infty)$. Þar sem $|x-3|\geq 0$ fyrir öll x, gildir $f(x)=2|x-3|+4\geq 4$. Því er myndmengið í mesta lagi mengið $\{y|y\geq 4\}$. Til að sjá að myndmengið er í raun allt þetta mengi þurfum við að sýna að fyrir $y\geq 4$ sé til rauntala x þannig að

$$2|x-3|+4=y.$$

Rauntala x uppfyllir þessa jöfnu svo framarlega sem

$$|x-3|=\frac{1}{2}(y-4).$$

Þar sem $y\geq 4$, vitum við að $y-4\geq 0$, og því er hægri hlið jöfnunnar ekki neikvæð, svo mögulegt er að lausn sé til. Enn fremur gildir að

$$|x-3|=\begin{cases}-(x-3) & \text{ef } x<3\\ x-3 & \text{ef } x\geq 3\end{cases}.$$

Við sjáum því að lausnirnar eru tvær:

$$x=\pm\frac{1}{2}(y-4)+3.$$

Myndmengi þessa falls er $\{y|y\geq 4\}$.

STÖÐUMAT 1.8

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins $f(x)=|x+2|-4$,.

Æfingar í undirkafla 1.1

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið (a) ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi hverra vensla og (b) segja til um hvort venslin séu föll.

1.

x	y	x	y
−3	9	1	1
−2	4	2	4
−1	1	3	9
0	0		

2.

x	y	x	y
−3	−2	1	1
−2	−8	2	8
−1	−1	3	−2
0	0		

3.

x	y	x	y
1	−3	1	1
2	−2	2	2
3	−1	3	3
0	0		

4.

x	y	x	y
1	1	5	1
2	1	6	1
3	1	7	1
4	1		

1

5.

x	y	x	y
3	3	15	1
5	2	21	2
8	1	33	3
10	0		

6.

x	y	x	y
-7	11	1	-2
-2	5	3	4
-2	1	6	11
0	-1		

Finnið í eftirfarandi æfingum tilgreind gildi hvers falls, ef þau eru til, og einfaldið síðan.
a. $f(0)$ b. $f(1)$ c. $f(3)$ d. $f(-x)$ e. $f(a)$ f. $f(a+h)$

7.

$$f(x)=5x-2$$

8.

$$f(x)=4x^2-3x+1$$

9.

$$f(x)=\frac{2}{x}$$

10.

$$f(x)=|x-7|+8$$

11.

$$f(x)=\sqrt{6x+5}$$

12.

$$f(x)=\frac{x-2}{3x+7}$$

13.

$$f(x)=9$$

Finnið í eftirfarandi æfingum skilgreiningarmengi og myndmengi fallanna og allar núllstöðvar þeirra og skurðpunkta við ásana, ef einhver eru.

14.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-16}$$

15.

$$g(x)=\sqrt{8x-1}$$

16.

$$h(x)=\frac{3}{x^2+4}$$

17.

$$f(x)=-1+\sqrt{x+2}$$

18.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-9}}$$

19.

$$g(x)=\frac{3}{x-4}$$

20.

$$f(x)=4|x+5|$$

21.

$$g(x)=\sqrt{\frac{7}{x-5}}$$

Teiknið í eftirfarandi æfingum skissu af grafinu með hjálp taflnanna sem gefnar eru:

22.

$$f(x)=x^2+1$$

x	y	x	y
−3	10	1	2
−2	5	2	5
−1	2	3	10
0	1		

23.

$$f(x)=3x-6$$

1

x	y	x	y
−3	−15	1	−3
−2	−12	2	0
−1	−9	3	3
0	−6		

24.

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1$$

x	y	x	y
−3	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
−2	0	2	2
−1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{5}{2}$
0	1		

25.

$$f(x)=2|x|$$

x	y	x	y
−3	6	1	2
−2	4	2	4
−1	2	3	6
0	0		

26.

$$f(x)=-x^2$$

x	y	x	y
−3	−9	1	−1
−2	−4	2	−4
−1	−1	3	−9
0	0		

27.

$$f(x)=x^3$$

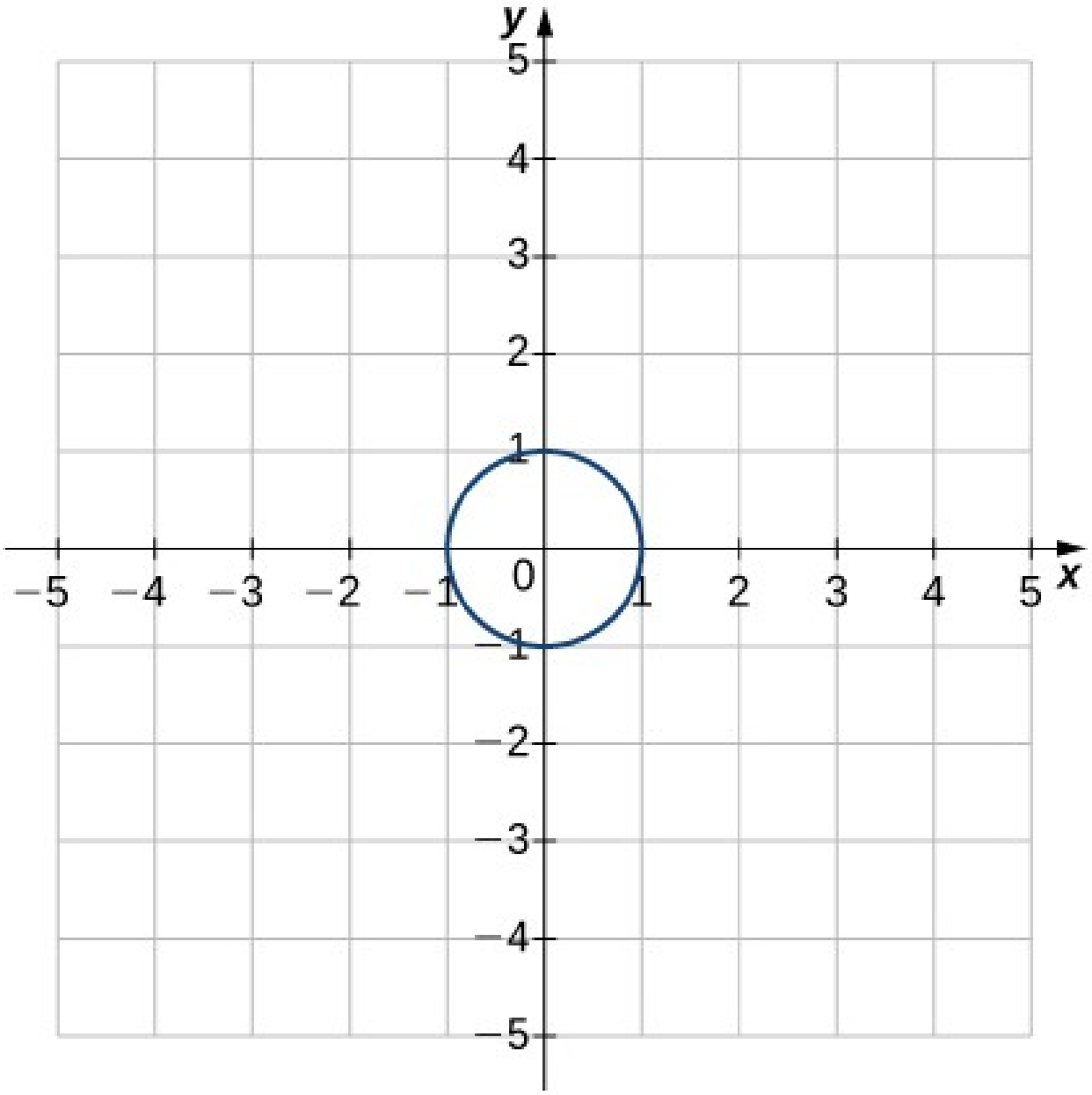
x	y	x	y
−3	−27	1	1
−2	−8	2	8
−1	−1	3	27
0	0		

Notið lóðrétta línuprófið í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort hvert gefið graf tákni fall. Gerið ráð fyrir að graf haldi áfram í báða enda ef það nær út fyrir gefna hnitanetið. Ef grafið táknar fall skuluð þið ákvarða eftirfarandi fyrir hvert graf:

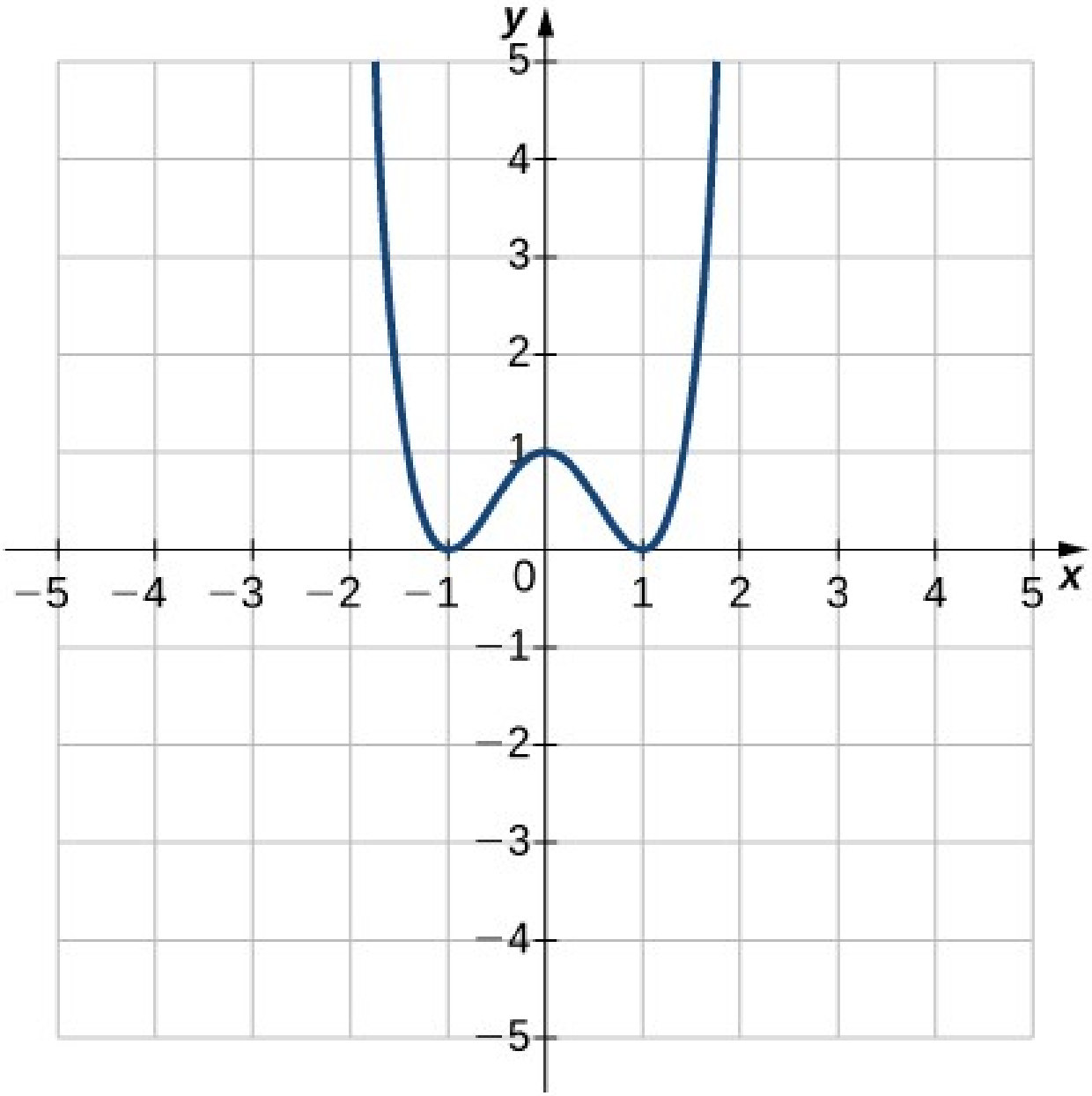
a. Skilgreiningarmengi og myndmengi
b. x-skurðpunkt, ef einhver er (áætlið eftir þörfum)
c. y-skurðpunkt, ef einhver er (áætlið eftir þörfum)
d. Bilin þar sem fallið er vaxandi
e. Bilin þar sem fallið er minnkandi
f. Bilin þar sem fallið er fast
g. Samhverfa um einhvern ás og/eða upphafspunktinn
h. Hvort fallið er jafnstætt, oddstætt eða hvorugt

28.

1

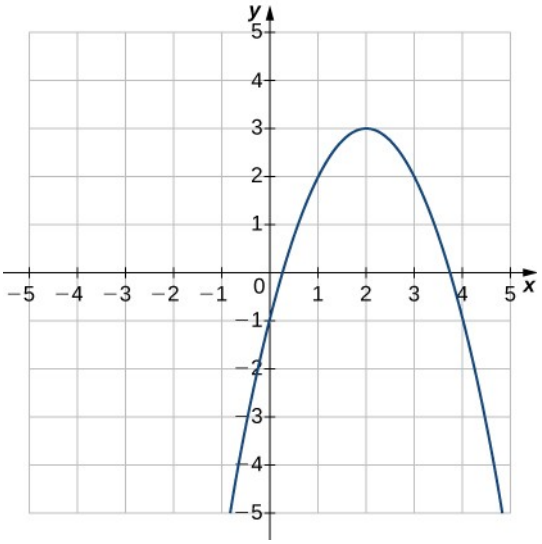


29.

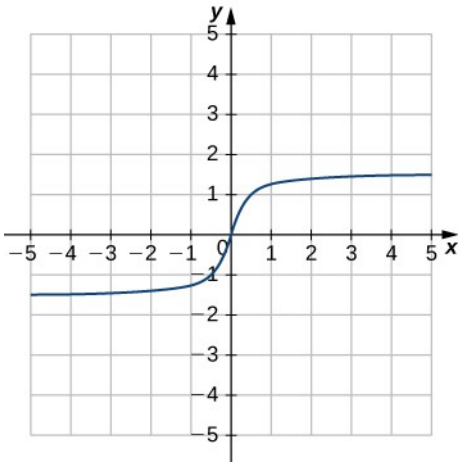


1

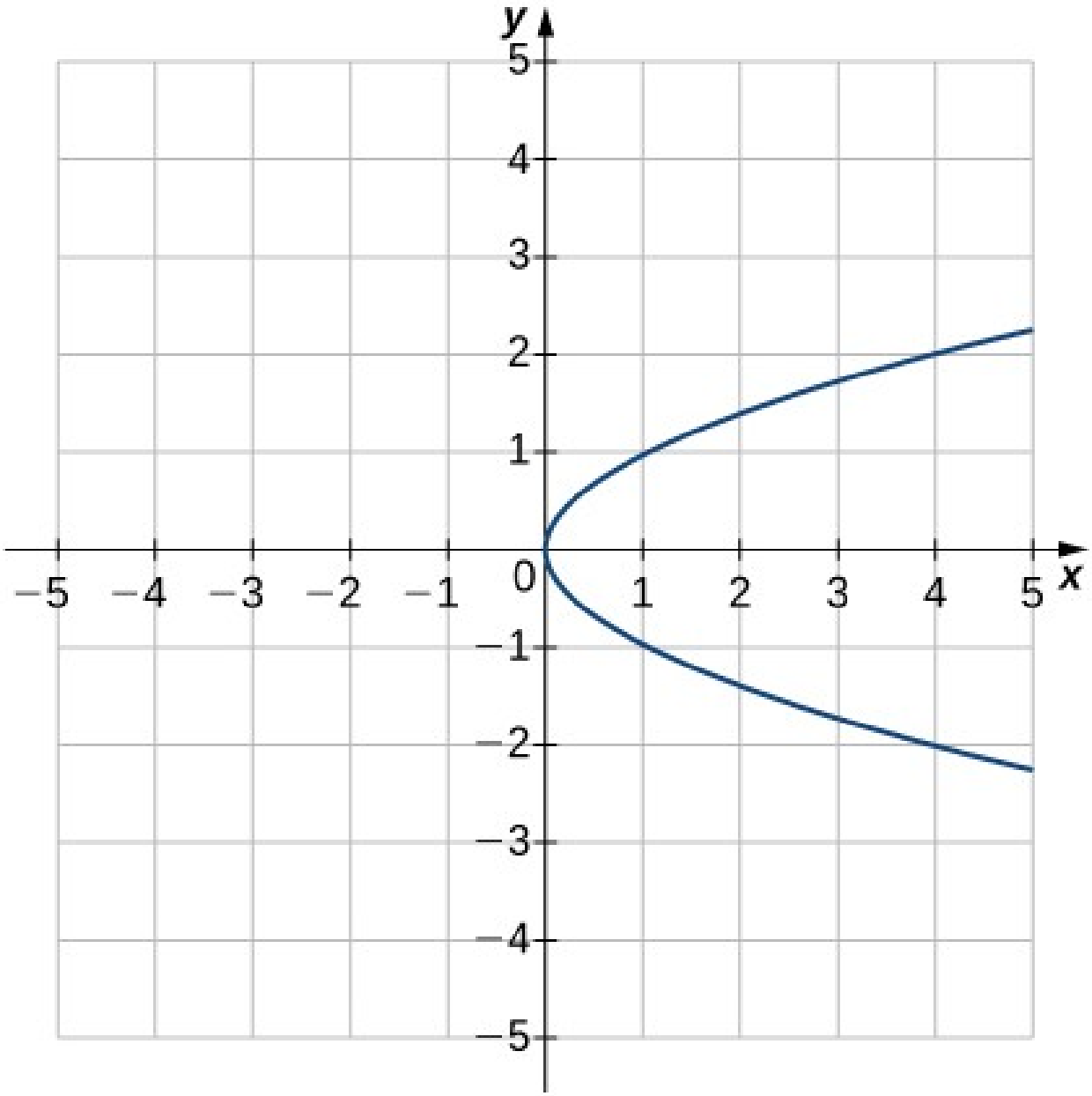
30.



31.

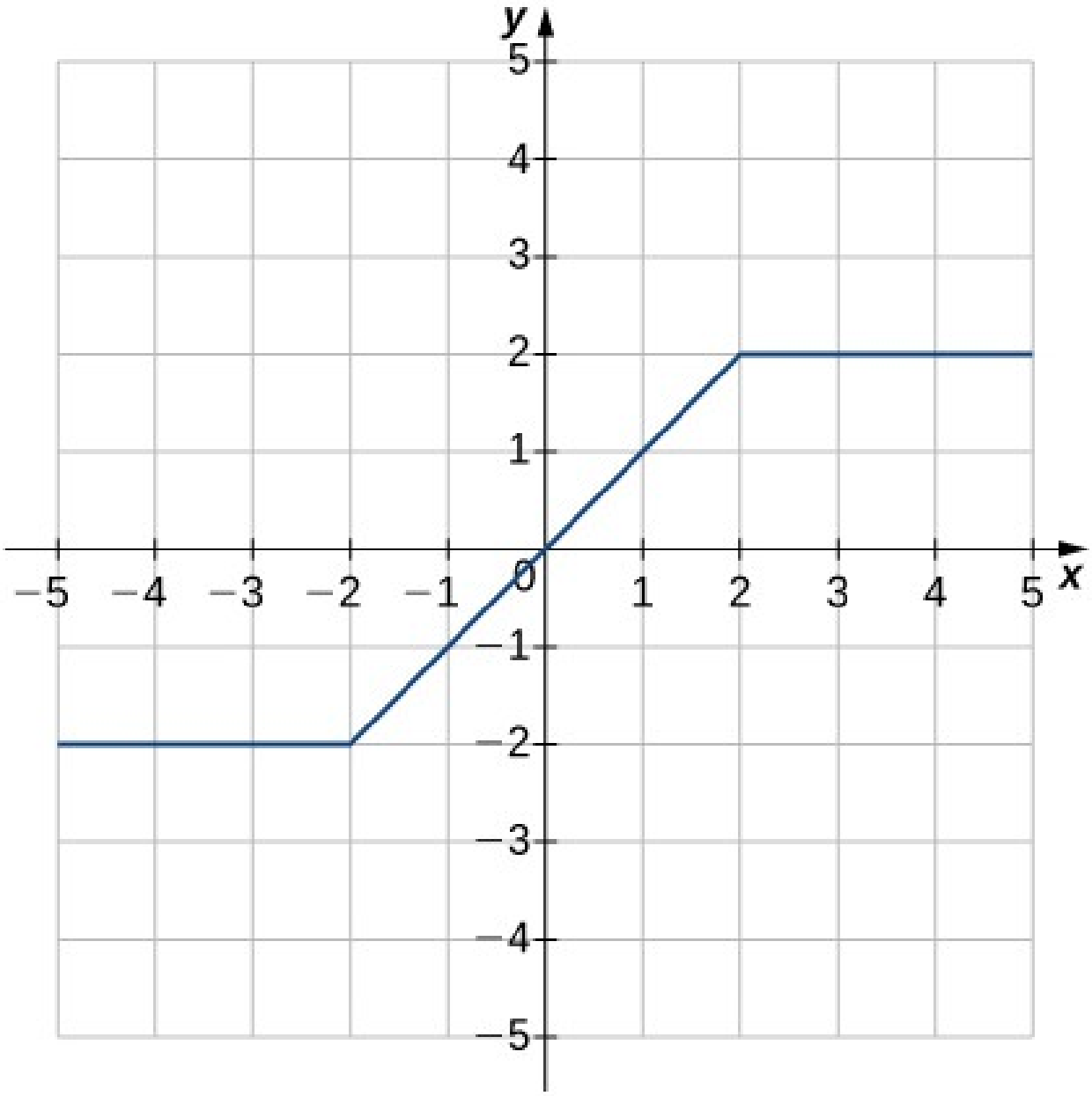


32.

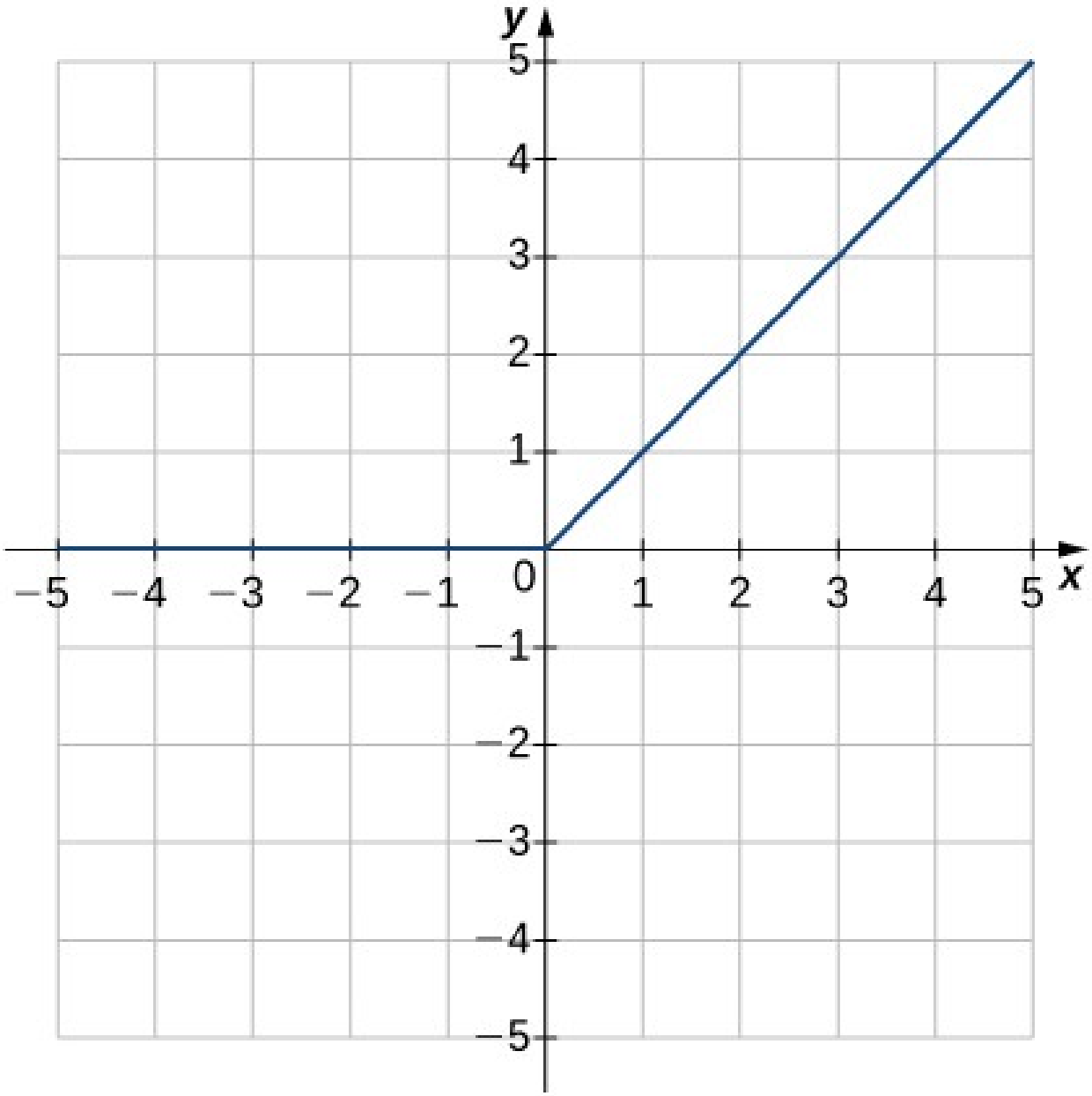


33.

1

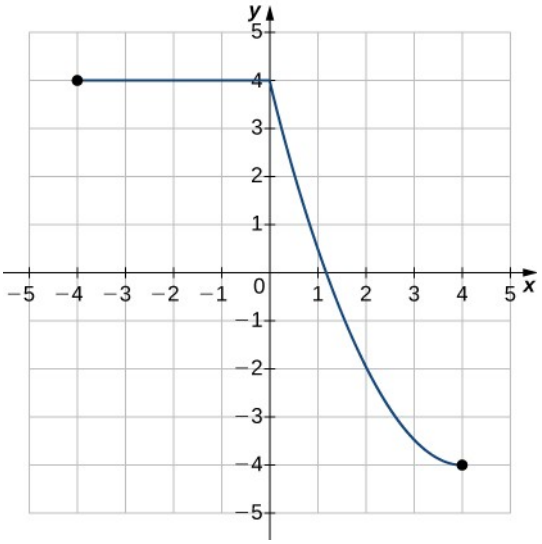


34.



1

35.



Finnið fyrir hvert fallapar í eftirfarandi verkefnum a. $f+g$ b. $f-g$ c. $f\cdot g$ d. f/g. Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers þessara nýju falla.

36.

$$f(x)=3x+4, g(x)=x-2$$

37.

$$f(x)=x-8, g(x)=5x^2$$

38.

$$f(x)=3x^2+4x+1, g(x)=x+1$$

39.

$$f(x)=9-x^2, g(x)=x^2-2x-3$$

40.

$$f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x-2$$

41.

$$f(x)=6+\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{x}$$

Finnið fyrir hvert fallapar í eftirfarandi verkefnum a. $(f\circ g)(x)$ og b. $(g\circ f)(x)$ Einfaldið niðurstöðurnar. Finnið skilgreiningarmengi hverrar niðurstöðu.

42.

$$f(x)=3x, g(x)=x+5$$

43.

$$f(x)=x+4, g(x)=4x-1$$

44.

$$f(x)=2x+4, g(x)=x^2-2$$

45.

$$f(x)=x^2+7, g(x)=x^2-3$$

46.

$$f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x+9$$

47.

$$f(x)=\frac{3}{2x+1}, g(x)=\frac{2}{x}$$

48.

$$f(x)=|x+1|, g(x)=x^2+x-4$$

49. Taflan hér fyrir neðan sýnir sigurvegara NBA-deildarinnar á árunum 2001 til 2012.

Ár	Sigurvegari
2001	LA Lakers
2002	LA Lakers
2003	San Antonio Spurs
2004	Detroit Pistons
2005	San Antonio Spurs
2006	Miami Heat
2007	San Antonio Spurs
2008	Boston Celtics
2009	LA Lakers
2010	LA Lakers
2011	Dallas Mavericks
2012	Miami Heat

a. Skoðið venslin þar sem skilgreiningarmengið er árin 2001 til 2012 og myndmengið samanstendur af samsvarandi sigurvegurum. Eru þessi vensl föll? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.

b. Skoðið venslin þar sem skilgreiningarmengið er sigurvegararnir og myndmengið samanstendur af samsvarandi árum. Eru þessi vensl föll? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.

1

50. **[T]** Flatarmál A fernings er háð lengd hliðarinnar s.

a. Skrifið fall $A(s)$ fyrir flatarmál fernings.
b. Finnið og túlkið $A\ (6{,}5)$.
c. Finnið nákvæma hliðarlengd fernings með flatarmálið 56 ferningseiningar og nálgið hana með tveimur marktækum stöfum.

51. **[T]** Rúmmál tenings er háð hliðarlengdinni s.

a. Skrifið fall $V(s)$ fyrir rúmmál tenings.
b. Finnið og túlkið $V\ (11{,}8)$.

52. **[T]** Bílaleiga leigir bíla gegn föstu gjaldi að upphæð 20 € og tímagjaldi að upphæð 10,25 €. Heildarkostnaðurinn C við að leigja bíl er því fall af þeim fjölda klukkustunda t sem bíllinn er leigður, að viðbættu föstu gjaldinu.

a. Skrifið formúlu fallsins sem lýsir þessum aðstæðum.
b. Finnið heildarkostnaðinn við að leigja bíl í 2 daga og 7 klukkustundir.
c. Ákvarðið hversu lengi bíllinn var leigður ef reikningurinn er 430 €.

53. **[T]** Ökutæki er með 50 lítra eldsneytistank og eyðir 10 lítrum á hverja 100 km. Fjöldi kílómetra N sem hægt er að aka er háður magni eldsneytis x (í lítrum) í tankinum.

a. Skrifið formúlu sem lýsir þessum aðstæðum.
b. Ákvarðið hversu marga kílómetra ökutækið kemst þegar (i) eldsneytisgeymirinn er fullur og (ii) eldsneytismagnið er 3/4 af rúmtaki geymisins.
c. Ákvarðið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins.
d. Ákvarðið hve oft ökumaðurinn hefur þurft að nema staðar til að taka eldsneyti eftir að hafa ekið alls 930 km.

54. **[T]** Rúmmál V kúlu er háð lengd geisla hennar samkvæmt $V=(4/3)\pi r^3$. Þar sem jörðin er ekki fullkomin kúla getum við notað meðalgeislann þegar mælt er frá miðju hennar að yfirborðinu. Meðalgeislinn er meðalfjarlægðin frá miðju jarðar að yfirborðinu, reiknuð út frá miklum fjölda mælinga. Finnið rúmmál jarðar þegar meðalgeislinn er $6{,}371 \times 10^6$ m.

55. **[T]** Tiltekin bakteríurækt vex á hringlaga svæði. Geisli hringsins, mældur í sentímetrum, er gefinn með $r(t)=6-\left[5/\left(t^2+1\right)\right]$, þar sem t er tími, mældur í klukkustundum, frá því að hringlaga bakteríurækt með 1 cm geisla var sett í ætið.

a. Setjið flatarmál bakteríuræktarinnar fram sem fall af tíma.
b. Finnið nákvæmt og nálgað flatarmál bakteríuræktarinnar eftir 3 klukkustundir.
c. Setjið ummál bakteríuræktarinnar fram sem fall af tíma.
d. Finnið nákvæmt og nálgað ummál bakteríuræktarinnar eftir 3 klukkustundir.

56. **[T]** Bandarískur ferðamaður heimsækir París og þarf að skipta bandarískum dollurum í evrur, sem hægt er að gera með fallinu $E(x)=0{,}79\ x$, þar sem x er fjöldi bandarískra dollara og $E(x)$ er samsvarandi fjöldi evra. Gengi gjaldmiðla sveiflast og þegar ferðamaðurinn snýr aftur til Bandaríkjanna 2 vikum síðar er umreikningurinn úr evrum í bandaríska dollara $D(x)=1{,}245\ x$, þar sem x er fjöldi evra og $D(x)$ er samsvarandi fjöldi bandarískra dollara.

a. Finnið samskeytta fallið sem umreiknar beint úr Bandaríkjadölum í Bandaríkjadali með evrum sem milligjaldmiðil. Rýrnaði fé ferðamannsins við umreikninginn?

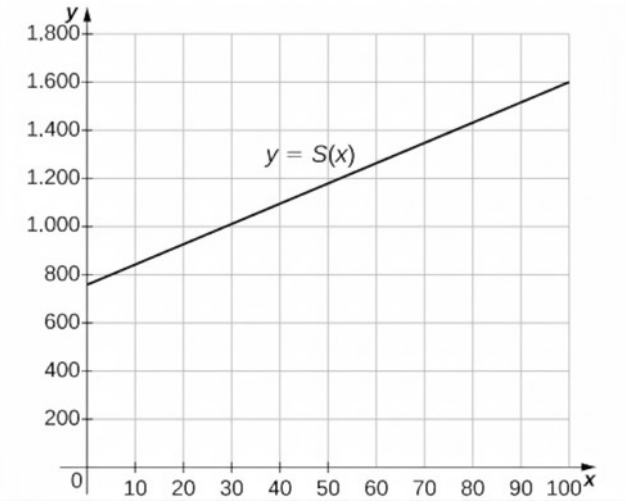
b. Notið (a) til að ákvarða hversu marga Bandaríkjadali ferðamaðurinn fengi til baka í lok ferðarinnar ef hún hefði skipt 200 Bandaríkjadölum til viðbótar þegar hún kom til Parísar.

57. **[T]** Verslunarstjóri hjólabrettaverslunar greiðir starfsfólki sínu mánaðarlaun S sem nema 750 € auk 8,50 € í þóknun fyrir hvert selt hjólabretti.

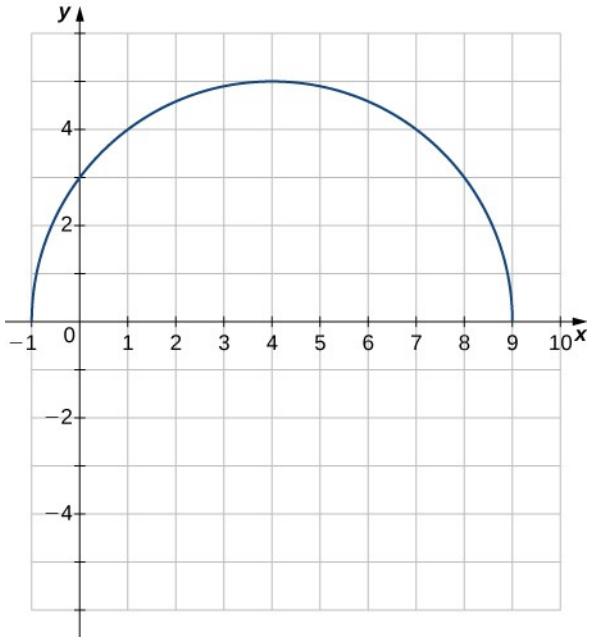
a. Skrifið fall $y=S(x)$ sem lýsir mánaðarlaunum starfsmanns eftir fjölda hjólabretta x sem hann eða hún selur.

b. Finnið mánaðarlaunin þegar starfsmaður selur 25, 40 eða 55 hjólabretti.

c. Notið INTERSECT-aðgerðina á grafískri reiknivél til að ákvarða hversu mörg hjólabretti þarf að selja til að starfsmaður þéni 1400 € á mánuði. (Vísbending: Finnið skurðpunkt fallsins og línunnar $y=1400$.)



58. **[T]** Notið grafíska reiknivél til að teikna hálfhringinn $y=\sqrt{25-(x-4)^2}$. Notið síðan INTERCEPT-aðgerðina til að finna bæði x- og y-skurðpunktana.



1.2 Helstu flokkar falla

NÁMSMARKMIÐ

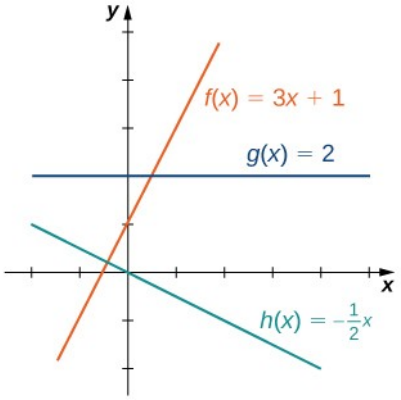
- 1.2.1 Reikna hallatölu línulegs falls og túlka merkingu hennar.
- 1.2.2 Þekkja stig margliðu.
- 1.2.3 Finna rætur annars stigs margliðu.
- 1.2.4 Lýsa gröfum helstu oddstæðra og jafnstæðra margliðufalla.
- 1.2.5 Þekkja rætt fall.
- 1.2.6 Lýsa gröfum veldisfalla og rótarfalla.
- 1.2.7 Útskýra muninn á algebrulegum föllum og torræðum föllum.
- 1.2.8 Teikna graf gaffalfalls.
- 1.2.9 Skissa graf falls sem hefur verið hliðrað, teygt eða speglað miðað við upphaflega legu grafsins.

Við höfum kynnt okkur almenn einkenni falla og skulum nú skoða nokkra tiltekna flokka falla. Fyrst rifjum við upp grunneiginleika línulegra falla og annars stigs falla og alhæfum síðan niðurstöðurnar þannig að þær nái einnig til margliða af hærra stigi. Með því að sameina rótarföll og margliður getum við skilgreint almenn algebruföll og greint þau frá torræðu föllunum sem við skoðum síðar í þessum kafla. Við ljúkum undirkaflanum með dæmum um hlutskilgreind föll og skoðum hvernig draga má upp graf falls sem hefur verið hliðrað, teygt eða speglað miðað við upphaflega mynd sína.

Línuleg föll og hallatala

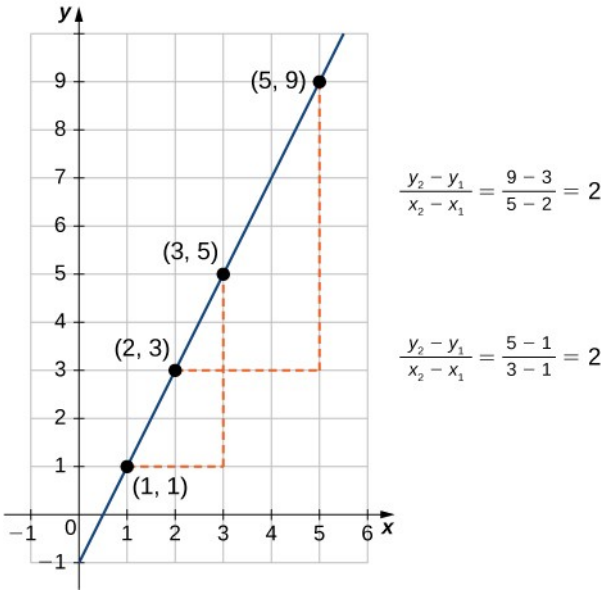
Einfaldasta gerð falls sem hægt er að skoða er línulegt fall. Línuleg föll eru af gerðinni $f(x)=ax+b$, þar sem a og b eru fastar. Á mynd 1.15 sjáum við dæmi um línuleg föll þegar a

er jákvætt, neikvætt og núll. Athugið að ef $a>0$, hækkar graf línunnar þegar x vex. Með öðrum orðum er $f(x)=ax+b$ vaxandi á $(-\infty, \infty)$. Ef $a<0$, lækkar graf línunnar þegar x vex. Í því tilviki er $f(x)=ax+b$ minnkandi á $(-\infty, \infty)$. Ef $a=0$, er línan lárétt.



Mynd 1.15 Þessi línulegu föll eru vaxandi eða minnkandi á $(-\infty, \infty)$ og eitt fallanna er lárétt lína.

Eins og mynd 1.15 gefur til kynna er graf sérhvers línulegs falls bein lína. Eitt af einkennum beinnar línu er hallatala hennar. Hallatalan er breytingin á y fyrir hverja einingabreytingu á x. Hallatalan mælir bæði hve brött línan er og stefnu hennar. Ef hallatalan er jákvæð vísar línan upp á við þegar farið er frá vinstri til hægri. Ef hallatalan er neikvæð vísar línan niður á við þegar farið er frá vinstri til hægri. Ef hallatalan er núll er línan lárétt. Til að reikna hallatölu línu þurfum við að ákvarða hlutfallið milli breytingarinnar á y og breytingarinnar á x. Til þess veljum við hvaða tvo punkta sem er, (x_1, y_1) og (x_2, y_2), á línunni og reiknum $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Á mynd 1.16 sjáum við að þetta hlutfall er óháð því hvaða punktar eru valdir.



Mynd 1.16 Fyrir sérhvert línulegt fall er hallatalan $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ óháð því hvaða punktar (x_1, y_1) og (x_2, y_2) eru valdir á línunni.

SKILGREINING

1

Lítum á línu L sem liggur í gegnum punktana (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Látum $\Delta y = y_2 - y_1$ og $\Delta x = x_2 - x_1$ tákna breytingarnar á y og x, í þeirri röð. Halli línunnar er

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

(1.3)

Nú skoðum við sambandið milli hallatölu og formúlu línulegs falls. Lítum á línulega fallið sem gefið er með formúlunni $f(x) = ax + b$. Við vitum þegar að graf línulegs falls er lína. Við getum notað skilgreiningu okkar á hallatölu til að reikna hallatölu þessarar línu. Eins og sýnt er getum við ákvarðað hallatöluna með því að reikna $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ fyrir hvaða tvo punkta (x_1, y_1) og (x_2, y_2) sem eru á línunni. Ef við reiknum gildi fallsins f í $x = 0$, sjáum við að $(0, b)$ er punktur á þessari línu. Ef við reiknum gildi fallsins í $x = 1$, sjáum við að $(1, a + b)$ er einnig punktur á línunni. Hallatala línunnar er því

$$\frac{(a + b) - b}{1 - 0} = a.$$

Við höfum sýnt að stuðullinn a er hallatala línunnar. Við getum því ályktað að formúlan $f(x) = ax + b$ lýsi línu með hallatöluna a. Þar að auki sker línan y-ásinn í punktinum $(0, b)$, svo skurðpunktur hennar við y-ásinn er $(0, b)$. Formúlan $f(x) = ax + b$ gefur okkur bæði hallatöluna, a, og skurðpunkt línunnar við y-ásinn, $(0, b)$, fyrir þessa línu. Þar sem við notum oft táknið m til að tákna hallatölu línu getum við skrifað

$$f(x) = mx + b$$

til að tákna hallaskurðarform línulegs falls.

Stundum er hentugt að setja línulegt fall fram á mismunandi vegu. Til dæmis skulum við gera ráð fyrir að graf línulegs falls liggi í gegnum punktinn (x_1, y_1) og að hallatala línunnar sé m. Þar sem sérhver annar punktur $(x, f(x))$ á grafi f verður að uppfylla jöfnuna

$$m = \frac{f(x) - y_1}{x - x_1},$$

má setja þetta línulega fall fram með því að skrifa

$$f(x) - y_1 = m(x - x_1).$$

Við segjum að jafnan sé á punkthallaformi fyrir línulega fallið.

Þar sem sérhver lína sem er ekki lóðrétt er graf línulegs falls má lýsa punktum á slíkri línu með hallaskurðarjöfnu eða punkthallajöfnu. Lóðrétt lína er hins vegar ekki graf falls og hvorugt formið nær yfir hana. Þess í stað er lóðréttri línu lýst með jöfnunni $x = k$ fyrir

einhvern fasta k. Þar sem hvorki hallaskurðarformið né punkthallaformið nær yfir lóðréttar línur notum við táknunina

$$a\,x+b\,y=c\,,$$

þar sem $a\,,b$ eru hvorugt núll, til að tákna staðalform línu.

SKILGREINING

Lítum á línu sem liggur í gegnum punktinn $\left(x_1\,,y_1\right)$ og hefur hallatöluna m. Jafnan

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

(1.4)

er punkthallajafna þeirrar línu.

Lítum á línu með hallatöluna m og skurðpunkt við y-ásinn $\left(0\,,b\right)$. Jafnan

$$y=m\,x+b$$

(1,5)

er jafna línunnar á hallaskurðarformi.

Staðalform línu er gefið með jöfnunni

$$a\,x+b\,y=c\,,$$

(1.6)

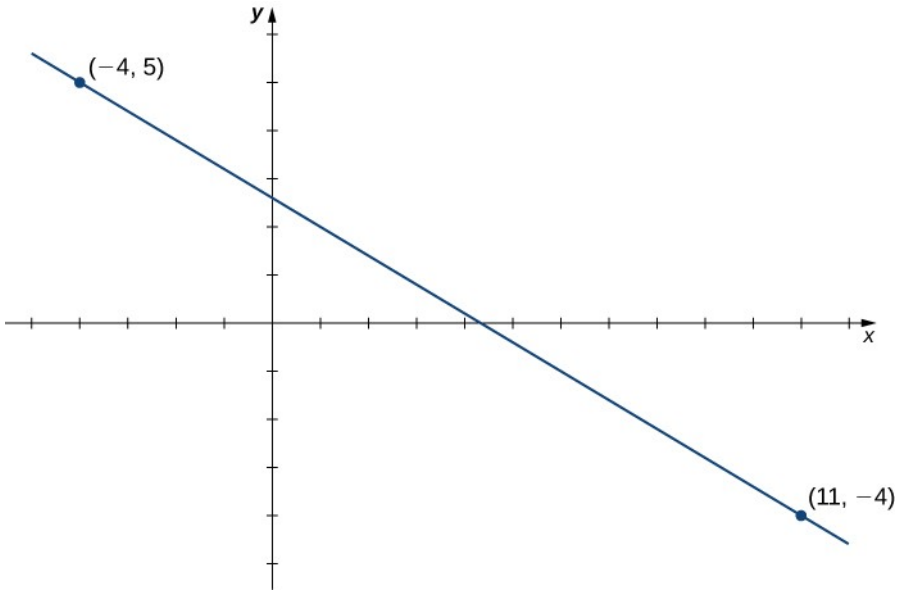
þar sem a og b eru ekki bæði núll. Þetta form er almennara því það tekur einnig til lóðréttrar línu, $x=k$.

SÝNIDÆMI 1.12

Ákvörðun hallatölu og jafna lína

Lítum á línuna sem liggur í gegnum punktana $\left(11\,,-4\right)$ og $\left(-4\,,5\right)$, eins og sýnt er á mynd 1.17.

1



Mynd 1.17 Jafna línulegs falls ákvörðuð út frá línu sem liggur í gegnum tvo gefna punkta.

a. Finnið hallatölu línunnar.
b. Finnið jöfnu þessa línulega falls á punkthallaformi.
c. Finnið jöfnu þessa línulega falls á hallaskurðarformi.

Lausn

a. Hallatala línunnar er

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-(-4)}{-4-11}=-\frac{9}{15}=-\frac{3}{5}.$$

b. Til að finna jöfnu línulega fallsins á punkthallaformi notum við hallatöluna $m=-3/5$ og veljum hvaða punkt sem er á línunni. Ef við veljum punktinn $(11,-4)$, fáum við jöfnuna

$$f(x)+4=-\frac{3}{5}(x-11).$$

c. Til að finna jöfnu línulega fallsins á hallaskurðarformi leysum við jöfnuna í b-lið með tilliti til $f(x)$. Þá fáum við jöfnuna

$$f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{13}{5}.$$

STÖÐUMAT 1.9

Skoðum línuna sem liggur gegnum punktana $(-3,2)$ og $(1,4)$. Finnið hallatölu línunnar.

Finnið jöfnu þessarar línu á punkthallaformi. Finnið jöfnu þessarar línu á hallaskurðarformi.

SÝNIDÆMI 1.13

Línulegt fjarlægðarfall

Jessica fer að heiman kl. 5:50 og hleypur 9 km. Hún kemur aftur heim kl. 7:08. Gerið ráð fyrir að Jessica hlaupi á jöfnum hraða og svarið spurningunum hér á eftir.

a. Lýsið vegalengdinni D (í kílómetrum) sem Jessica hleypur með línulegu falli af hlaupatímanum t (í mínútum).
b. Teiknið graf D.
c. Túlkið merkingu hallatölunnar.

Lausn

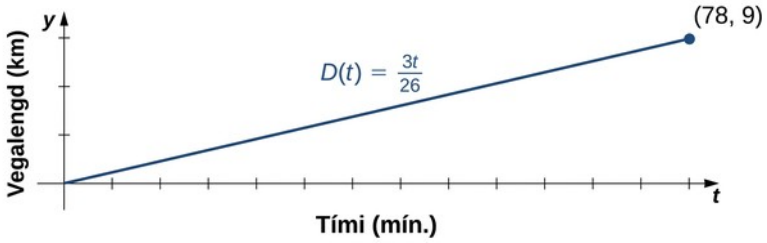
a. Þegar $t=0$, er Jessica heima hjá sér og því er $D(0)=0$. Þegar $t=78$ mínútur hefur Jessica hlaupið 9 km og því er $D(78)=9$. Hallatala línulega fallsins er

$$m=\frac{9-0}{78-0}=\frac{3}{26}.$$

Skurðpunkturinn við y-ásinn er $(0,0)$, svo jafna þessa línulega falls er

$$D(t)=\frac{3}{26}t.$$

b. Til að teikna graf D, nýtum við okkur að grafið fer í gegnum upphafspunktinn og hefur hallatöluna $m=3/26$.



c. The slope $m=3/26\approx 0{,}115$ describes the distance (in miles) Jessica runs per minute, or her average velocity.

Margliður

Línulegt fall er sértilvik í almennari flokki falla: margliðum. Margliðufall er sérhvert fall sem skrifa má á forminu

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

(1.7)

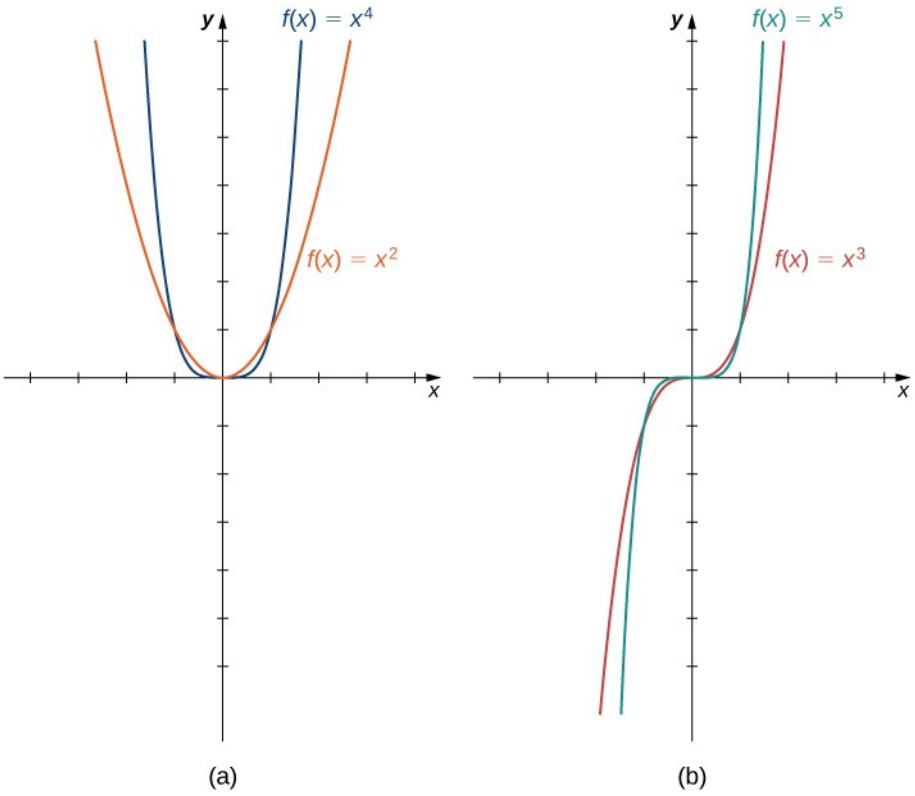
fyrir einhverja heiltölu $n\geq 0$ og fastana $a_n, a_{n-1},\ldots,a_0$, þar sem $a_n\neq 0$. Þegar $n=0$, leyfum við $a_0=0$; ef $a_0=0$, nefnist fallið $f(x)=0$ núllfall. Gildið n nefnist stig margliðunnar; fastinn a_n nefnist stuðull hæsta veldis. Línulegt fall af gerðinni $f(x)=mx+b$ er margliða af stigi 1 ef

$m \neq 0$ og af stigi 0 ef $m = 0$. Margliða af stigi 0 nefnist einnig fastafall. Margliðufall af stigi 2 nefnist annars stigs fall. Annars stigs fall er því af gerðinni $f(x) = a x^2 + b x + c$, þar sem $a \neq 0$. Margliðufall af stigi 3 nefnist þriðja stigs fall.

1

Veldisföll

Sum margliðuföll eru veldisföll. Veldisfall er sérhvert fall af gerðinni $f(x) = a x^b$, þar sem a og b eru rauntölur að eigin vali. Veldisvísir veldisfalls getur verið hvaða rauntala sem er, en hér skoðum við tilvikið þegar veldisvísirinn er jákvæð heiltala. (Önnur tilvik eru skoðuð síðar.) Ef veldisvísirinn er jákvæð heiltala er $f(x) = a x^n$ margliða. Ef n er slétt heiltala, þá er $f(x) = a x^n$ jafnstætt fall, því að $f(-x) = a(-x)^n = a x^n$ ef n er slétt heiltala. Ef n er oddatala, þá er $f(x) = a x^n$ oddstætt fall, því að $f(-x) = a(-x)^n = -a x^n$ ef n er oddatala (Mynd 1.18).



Mynd 1.18 (a) Fyrir sérhverja slétta heiltölu n, $f(x) = a x^n$ er jafnstætt fall. (b) Fyrir sérhverja oddatölu n, $f(x) = a x^n$ er oddstætt fall.

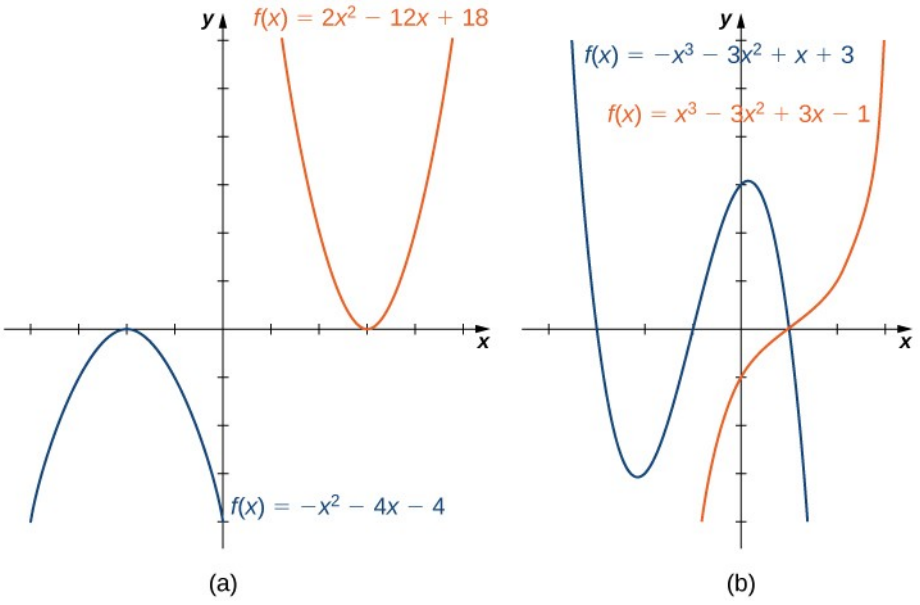
Hegðun við óendanleikann

Til að ákvarða hegðun falls f þegar inntaksgildin stefna á óendanlegt skoðum við gildin $f(x)$ þegar inntaksgildin, það er x, verða stærri. Fyrir sum föll stefnir $f(x)$ á endanlega tölu. Til dæmis inniheldur fallið $f(x) = 2 + 1/x$, liðinn $1/x$ sem verður sífellt nær núlli eftir því sem x verður stærra. Fyrir þetta fall segjum við að "$f(x)$ stefni á tvo þegar x stefnir á óendanlegt" og skrifum $f(x) \to 2$ þegar $x \to \infty$. Línan $y = 2$ er lárétt aðfella fallsins $f(x) = 2 + 1/x$ vegna þess að graf fallsins nálgast línuna eftir því sem x verður stærra.

Fyrir önnur föll er ekki víst að gildin $f(x)$ stefni á endanlega tölu, heldur geta þau orðið æ stærri eftir því sem x stækkar. Í því tilviki segjum við að "$f(x)$ stefni á óendanlegt þegar x stefnir á óendanlegt" og skrifum $f(x) \to \infty$ þegar $x \to \infty$. Til dæmis verða úttaksgildi fallsins $f(x)=3x^2$, það er gildin $f(x)$, sífellt stærri eftir því sem inntaksgildin x stækka. Við getum því ályktað að fallið $f(x)=3x^2$ stefni á óendanlegt þegar x stefnir á óendanlegt, og skrifum $3x^2 \to \infty$ þegar $x \to \infty$. Hegðunina þegar $x \to -\infty$ og merkingu $f(x) \to -\infty$ þegar $x \to \infty$ eða $x \to -\infty$ má skilgreina á svipaðan hátt. Hegðun gilda $f(x)$ þegar $x \to \infty$ og þegar $x \to -\infty$ nefnist endahegðun fallsins.

Til að skilja endahegðun margliðufalla getum við einbeitt okkur að annars stigs og þriðja stigs föllum. Hegðun margliða af hærra stigi má greina á sambærilegan hátt. Lítum á annars stigs fall $f(x)=ax^2+bx+c$. Ef $a>0$, gildir $f(x) \to \infty$ þegar $x \to \pm\infty$. Ef $a<0$, gildir $f(x) \to -\infty$ þegar $x \to \pm\infty$. Þar sem graf annars stigs falls er fleygbogi opnast hann upp ef $a>0$; en niður ef $a<0$. (Sjá mynd 1.19(a).)

Lítum nú á þriðja stigs fall $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Ef $a>0$, þá $f(x) \to \infty$ þegar $x \to \infty$ og $f(x) \to -\infty$ þegar $x \to -\infty$. Ef $a<0$, þá $f(x) \to -\infty$ þegar $x \to \infty$ og $f(x) \to \infty$ þegar $x \to -\infty$. Eins og sjá má af báðum gröfunum ákvarðar forystuliður margliðunnar endahegðunina. (Sjá mynd 1.19(b).)



Mynd 1.19 (a) Fyrir annars stigs fall með stuðul hæsta veldis $a>0$, opnast fleygboginn upp. Ef $a<0$, opnast fleygboginn niður. (b) Fyrir þriðja stigs fallið f, með stuðul hæsta veldis $a>0$, gildir $f(x) \to \infty$ þegar $x \to \infty$ en $f(x) \to -\infty$ þegar $x \to -\infty$. Ef stuðull hæsta veldis $a<0$, gildir hið gagnstæða.

Núllstöðvar margliðufalla

Annað einkenni grafs margliðufalls er hvar það sker x-ásinn. Til að ákvarða hvar fall f sker x-ásinn þurfum við að leysa jöfnuna $f(x)=0$ með tilliti til x. Þegar um línulega fallið $f(x)=mx+b$, er að ræða fæst x-skurðpunkturinn með því að leysa jöfnuna $mx+b=0$. Í þessu

tilviki sjáum við að x-skurðpunkturinn er $(-b/m, 0)$. Þegar um annars stigs fall er að ræða þarf að finna núllstöðvar annars stigs jöfnu til að ákvarða x-skurðpunktinn eða -skurðpunktana: $ax^2+bx+c=0$. Í sumum tilvikum er auðvelt að þátta margliðuna ax^2+bx+c til að finna núllstöðvarnar. Annars notum við lausnarformúlu annars stigs jöfnu.

1

REGLA: LAUSNARFORMÚLA ANNARS STIGS JÖFNU

Lítum á annars stigs jöfnuna

$$ax^2+bx+c=0,$$

þar sem $a\neq 0$. Lausnir jöfnunnar fást með lausnarformúlu annars stigs jöfnu

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(1.8)

Ef aðgreinirinn $b^2-4ac>0$, segir þessi formúla okkur að tvær rauntölur uppfylli annars stigs jöfnuna. Ef $b^2-4ac=0$, segir þessi formúla okkur að aðeins ein lausn sé til og hún sé rauntala. Ef $b^2-4ac<0$, uppfyllir engin rauntala annars stigs jöfnuna.

Þegar um margliður af hærra stigi er að ræða getur verið flóknara að ákvarða hvar grafið sker x-ásinn. Í sumum tilvikum er hægt að finna skurðpunkta við x-ás með því að þátta margliðuna og finna núllstöðvar hennar. Í öðrum tilvikum er ómögulegt að reikna nákvæm gildi skurðpunktanna við x-ás. Eins og við sjáum síðar í textanum getum við þó í slíkum tilvikum notað greiningaraðferðir til að nálga (með mjög mikilli nákvæmni) hvar skurðpunktarnir við x-ás eru. Hér skoðum við gröf margliða sem hafa núllstöðvar sem við getum reiknað nákvæmlega.

SÝNIDÆMI 1.14

Teikning grafa margliðufalla

Fyrir föllin í a- og b-lið: i. lýsið hegðun $f(x)$ þegar $x\to\pm\infty$, ii. finnið allar núllstöðvar f, og iii. teiknið skissu af grafi f.

a. $f(x)=-2x^2+4x-1$

b. $f(x)=x^3-3x^2-4x$

Lausn

a. Fallið $f(x)=-2x^2+4x-1$ er annars stigs fall. Þar sem

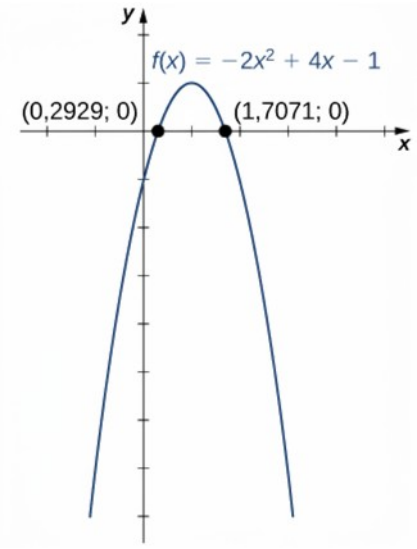
i. Þar sem $a=-2<0$, þegar $x\to\pm\infty$, $f(x)\to-\infty$.

ii. Til að finna núllstöðvar f, skal nota lausnarformúlu annars stigs jöfnu.
Núllstöðvarnar eru x = −4 ± 4 2 − 4 (−2) (−1)/2 (−2) = −4 ± 8/−4 = −4 ± 2 2/−4

$= 2 \pm 2/2.$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

iii. Til að teikna graf f, skal nota upplýsingarnar úr fyrri svörum og hafa jafnframt í huga að graf þess er fleygbogi sem opnast niður.



b. Fallið $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$ er þriðja stigs fall.

i. Þar sem $a = 1 > 0$, þegar $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$. Þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$.

ii. Til að finna núllstöðvar f, þurfum við að þátta margliðuna. Fyrst tökum við x út fyrir sviga í öllum liðunum og fáum

$$f(x) = x(x^2 - 3x - 4).$$

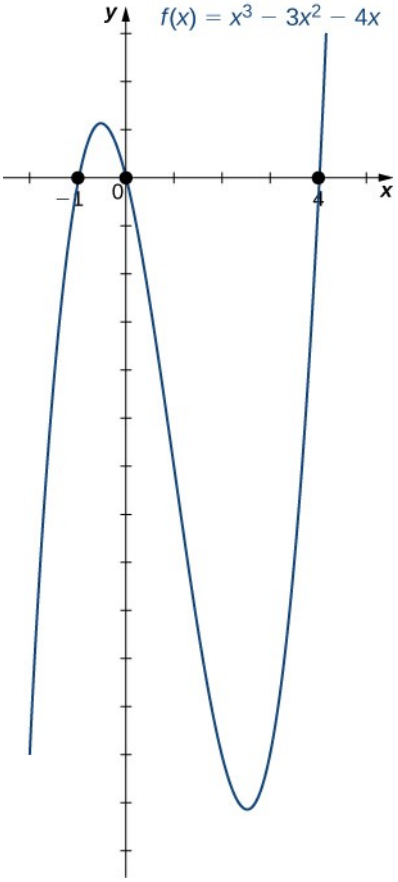
Þegar við þáttum síðan annars stigs margliðuna $x^2 - 3x - 4$, fáum við

$$f(x) = x(x - 4)(x + 1).$$

Núllstöðvar f eru því $x = 0, 4, -1$.

1

iii. Sameinið niðurstöðurnar úr liðum i. og ii. og teiknið grófa skissu af f.



STÖÐUMAT 1.10

Lítum á annars stigs fallið $f(x)=3x^2-6x+2$. Finnið núllstöðvar f. Opnast fleygboginn upp eða niður?

Stærðfræðilíkön

Lýsa má fjölbreyttum raunverulegum aðstæðum með stærðfræðilíkönum. Stærðfræðilíkan er aðferð til að líkja eftir raunverulegum aðstæðum með stærðfræðijöfnum. Eðlisfræðingar, verkfræðingar, hagfræðingar og aðrir rannsakendur þróa líkön með því að samþætta athuganir og töluleg gögn og setja fram jöfnur, föll, gröf og önnur stærðfræðileg verkfæri sem lýsa hegðun ýmissa kerfa nákvæmlega. Líkön eru gagnleg því að þau hjálpa okkur að spá fyrir um framtíðina. Dæmi um stærðfræðilíkön eru rannsóknir á fólksfjöldaþróun og veðurmynstrum og spár um vörusölu.

Sem dæmi skulum við skoða stærðfræðilíkan sem fyrirtæki gæti notað til að lýsa tekjum sínum af sölu tiltekinnar vöru. Tekjunum R sem fyrirtæki fær af sölu á n einingum, þegar hver eining kostar p dollara, er lýst með jöfnunni $R=p\cdot n$. Fyrirtækið vill kanna hvernig salan breytist þegar verð vörunnar breytist. Gerum ráð fyrir að gögnin í töflu 1.6 sýni fjölda eininga sem fyrirtækið selur sem fall af verði hverrar einingar.

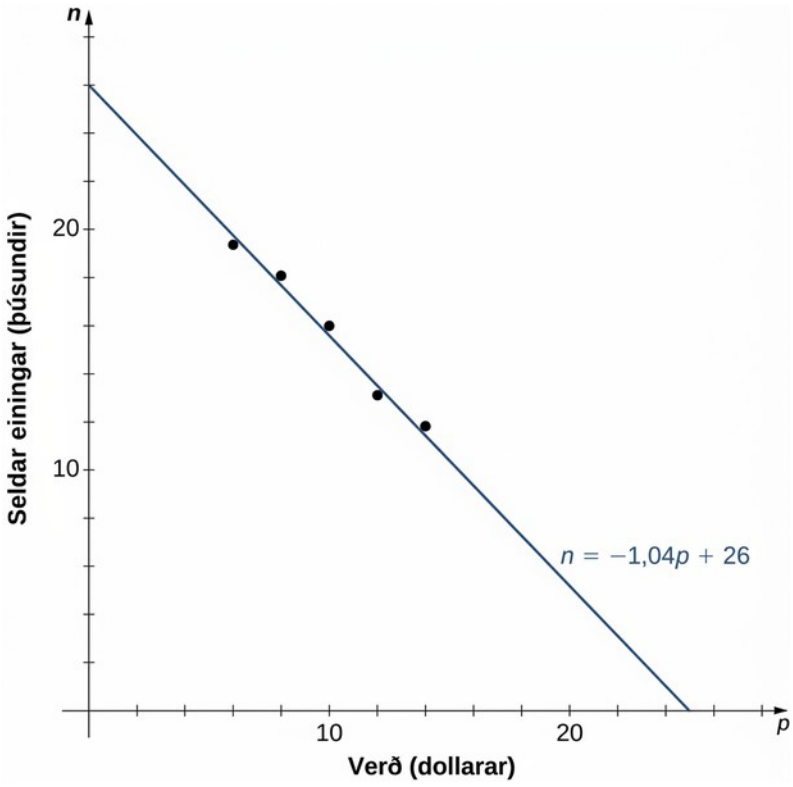
Tafla 1.6 Fjöldi seldra eininga n (í þúsundum) sem fall af verði á einingu p (í dollurum)

p	6	8	10	12	14
n	19,4	18,5	16,2	13,8	12,2

Á mynd 1.20 sjáum við graf yfir fjölda seldra eininga (í þúsundum) sem fall af verði (í dollurum). Af lögun grafsins má ráða að fjöldi seldra eininga sé líklega línulegt fall af verði hverrar einingar. Nálga má gögnin vel með línulega fallinu $n = -1{,}04\ p + 26$ fyrir $0 \le p \le 25$, þar sem n táknar áætlaðan fjölda seldra eininga í þúsundum. Með þessu línulega falli má áætla tekjurnar (í þúsundum dollara) með annars stigs fallinu

$$R(p) = p \cdot (-1{,}04\ p + 26) = -1{,}04\ p^2 + 26\ p$$

fyrir $0 \le p \le 25$. Í dæmi 1.15 notum við þetta annars stigs fall til að spá fyrir um tekjur fyrirtækisins eftir verði hverrar einingar. Athugið að við getum ekki vitað með vissu hve margar einingar seljast í raun fyrir þau gildi p, sem engin gögn liggja fyrir um. Með hliðsjón af öðrum gagnagildum og grafinu virðist þó eðlilegt að ætla að fjöldi seldra eininga (í þúsundum), þegar verðið er p dollarar, sé nálægt þeim gildum sem fást með línulega fallinu $n = -1{,}04\ p + 26$.



Mynd 1.20 Gögnin sem safnað var um fjölda seldra vara sem fall af verði eru nokkurn veginn línuleg. Við notum línulega fallið $n = -1{,}04\ p + 26$ til að nálga þetta fall.

SÝNIDÆMI 1.15

Hámörkun tekna

1

Fyrirtæki vill spá fyrir um tekjur sínar eftir því hvaða verð það setur á tiltekna vöru. Með því að nota gögnin úr töflu 1.6 fær fyrirtækið eftirfarandi annars stigs fall sem lýsir tekjunum R (í þúsundum evra) sem falli af verði hverrar einingar p:

$$R(p)=p\cdot(-1{,}04\ p+26)=-1{,}04\ p^2+26\ p$$

fyrir $0\le p\le 25$.

a. Spáið fyrir um tekjurnar ef fyrirtækið selur vöruna á verðinu $p=\$5$ og $p=\$17$.
b. Finnið núllstöðvar þessa falls og túlkið merkingu þeirra.
c. Teiknið skissu af grafi R.
d. Notið grafið til að ákvarða það gildi á p sem hámarkar tekjurnar. Finnið hámarkstekjurnar.

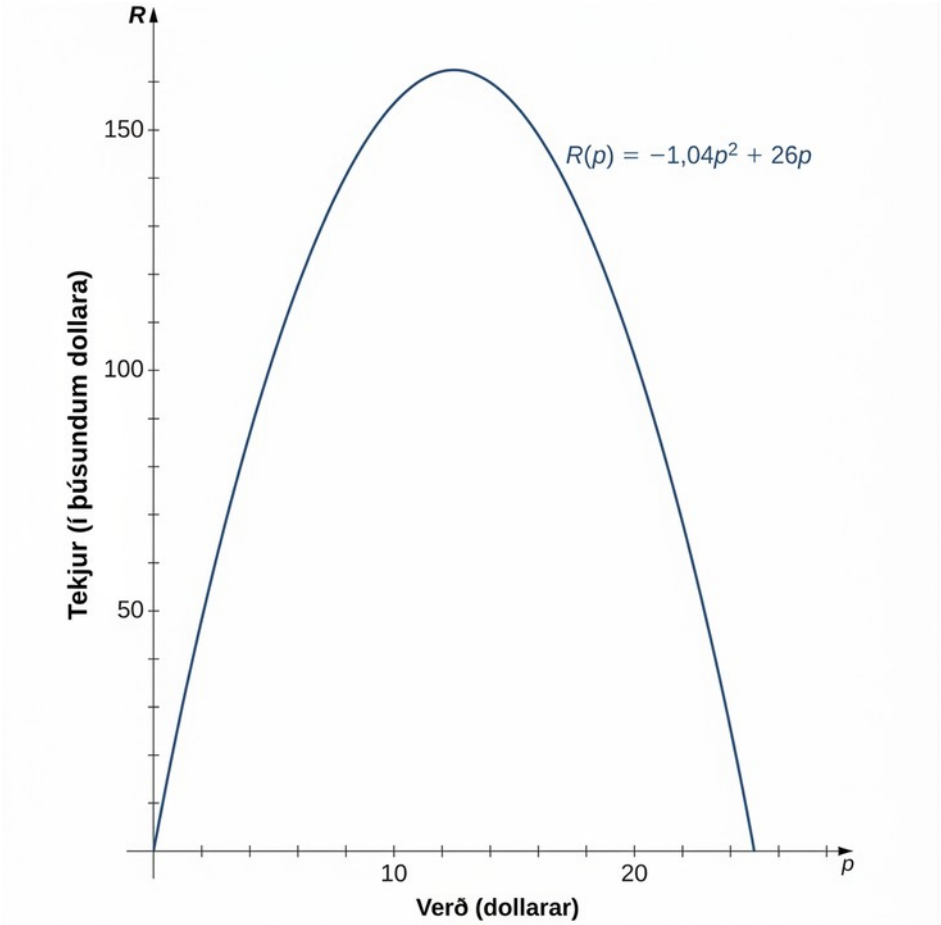
Lausn

a. Með því að reikna gildi tekjufallsins þegar $p=5$ og $p=17$, getum við ályktað að

$$R(5)=-1{,}04\ (5)^2+26\ (5)=104,\ \text{þ.e. tekjur } = \text{ 104.000 €;}$$
$$R(17)=-1{,}04\ (17)^2+26\ (17)=141{,}44,\ \text{þ.e. tekjur } = \text{ 141.440 €.}$$

b. Finna má núllstöðvar fallsins með því að leysa jöfnuna $-1{,}04\ p^2+26\ p=0$. Þegar við þáttum annars stigs segðina fáum við $p\ (-1{,}04\ p+26)=0$. Lausnir jöfnunnar eru $p=0,25$. Fyrir þessi gildi p, eru tekjurnar núll. Þegar $p=\$0$, eru tekjurnar núll vegna þess að fyrirtækið gefur vörur sínar ókeypis. Þegar $p=\$25$, eru tekjurnar núll vegna þess að verðið er of hátt og enginn kaupir neinar vörur.
c. Knowing the fact that the function is quadratic, we also know the graph is a parabola. Since the leading coefficient is negative, the parabola opens downward. One property of parabolas is that they are symmetric about the axis, so since the zeros are at $p=0$ and $p=25$, the parabola must be symmetric about the line halfway between them, or

$p=12{,}5$.



d. Graf fallsins er fleygbogi með núllstöðvar við $p=0$ og $p=25$, og grafið er samhverft um línuna $p=12{,}5$, svo að hámarkstekjur fást þegar verðið er $p=12{,}50$ € fyrir hverja einingu. Við það verð eru tekjurnar

$$R\left(p\right)=-1{,}04\left(12{,}5\right)^2+26\left(12{,}5\right)=162.500\ €.$$

Algebruföll

Með því að leyfa kvóta og brotna veldisvísa í margliðuföllum fáum við stærri flokk falla. Algebrufall er fall sem felur í sér samlagningu, frádrátt, margföldun, deilingu, ræð veldi og rætur. Tvær gerðir algebrufalla eru ræð föll og rótarföll.

Rétt eins og ræðar tölur eru hlutföll heiltalna eru ræð föll hlutföll margliða. Nánar tiltekið er rætt fall sérhvert fall af gerðinni $f\left(x\right)=p\left(x\right)/q\left(x\right)$, þar sem $p\left(x\right)$ og $q\left(x\right)$ eru margliður. Til dæmis,

$$f\left(x\right)=\frac{3x-1}{5x+2}\text{ og }g\left(x\right)=\frac{4}{x^2+1}$$

eru ræð föll. Rótarfall er veldisfall af gerðinni $f\left(x\right)=x^{1/n}$, þar sem n er jákvæð heiltala stærri en einn. Til dæmis er $f\left(x\right)=x^{1/2}=\sqrt{x}$ kvaðratrótarfallið og $g\left(x\right)=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$

teningsrótarfallið. Með samskeytingum rótarfalla og ræðra falla getum við myndað önnur algebruföll. Til dæmis er $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ algebrufall.

1

SÝNIDÆMI 1.16

Ákvörðun skilgreiningarmengis og myndmengis algebrufalla

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi hvers falls hér á eftir.

a. $f(x)=\dfrac{3x-1}{5x+2}$

b. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

Lausn

a. Ekki er hægt að deila með núlli og því er skilgreiningarmengið mengi þeirra rauntalna x sem uppfylla $x\neq -2/5$. Til að finna myndmengið þurfum við að finna þau gildi y þar sem til er rauntala x sem uppfyllir

$$y=\frac{3x-1}{5x+2}.$$

Þegar við margföldum báðar hliðar þessarar jöfnu með $5x+2$, sjáum við að x verður að uppfylla jöfnuna

$$5xy+2y=3x-1.$$

Af þessari jöfnu sjáum við að x verður að uppfylla

$$2y+1=x(3-5y).$$

Ef $y=3/5$, hefur þessi jafna enga lausn. Ef hins vegar $y\neq 3/5$, uppfyllir

$$x=\frac{2y+1}{3-5y}$$

þessa jöfnu. Við getum því ályktað að myndmengi f sé $\{y \mid y\neq 3/5\}$.

b. Til að finna skilgreiningarmengi f þurfum við að ákvarða þau gildi x sem uppfylla $4-x^2\geq 0$. Athugið að $4-x^2=0$ þegar $x=2$ eða $x=-2$. Að leysa $4-x^2>0$ jafngildir því að leysa $(2-x)(2+x)>0$. Ef ójafnan gildir eru annaðhvort báðir þættirnir jákvæðir eða báðir neikvæðir.
Tilvik 1: Báðir þættirnir eru jákvæðir.
$2-x>0$ og $2+x>0$
$x<2$ og $x>-2$
Því er segðin $4-x^2$ jákvæð fyrir öll gildi á bilinu $-2<x<2$.
Tilvik 2: Báðir þættirnir eru neikvæðir.

$2-x<0$ og $2+x<0$

$x>2$ og $x<-2$

Ekkert gildi á x getur uppfyllt báðar ójöfnurnar.

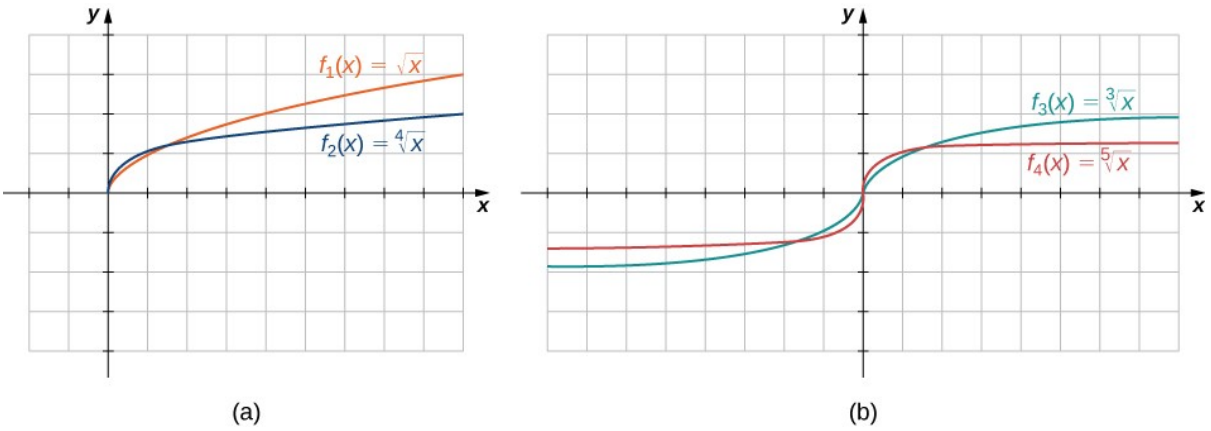
Skilgreiningarmengi fallsins er $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$.

Til að ákvarða myndmengið skulum við athuga að ef $-2 \le x \le 2$, þá er $0 \le 4 - x^2 \le 4$. Því er $0 \le \sqrt{4-x^2} \le 2$. Myndmengi f er $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$.

STÖÐUMAT 1.11

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins $f(x) = (5x+2)/(2x-1)$.

Rótarföllin $f(x) = x^{1/n}$ hafa ólík grundvallareinkenni eftir því hvort n er oddatala eða slétt heiltala. Fyrir allar sléttar heiltölur $n \ge 2$, er skilgreiningarmengi $f(x) = x^{1/n}$ bilið $[0, \infty)$. Fyrir allar oddatölur $n \ge 1$, er skilgreiningarmengi $f(x) = x^{1/n}$ mengi allra rauntalna. Þar sem $x^{1/n} = -(-x)^{1/n}$ fyrir oddatölur n, $f(x) = x^{1/n}$ oddstætt fall ef n er oddatala. Sjá gröf rótarfallanna fyrir mismunandi gildi n á mynd 1.21.



Mynd 1.21 (a) Ef n er slétt heiltala er skilgreiningarmengi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ bilið $[0, \infty)$. (b) Ef n er oddatala er skilgreiningarmengi $f(x) = \sqrt[n]{x}$ bilið $(-\infty, \infty)$ og fallið $f(x) = \sqrt[n]{x}$ er oddstætt fall.

SÝNIDÆMI 1.17

Ákvörðun skilgreiningarmengja algebrufalla

Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers falls hér á eftir.

a. $f(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$

b. $f(x) = \dfrac{2x+5}{3x^2+4}$

c. $f(x) = \sqrt{4-3x}$

d. $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

Lausn

a. Ekki er hægt að deila með núlli og því er skilgreiningarmengið mengi þeirra gilda x sem uppfylla $x^2-1\neq 0$. Skilgreiningarmengið er því $\{x \mid x\neq \pm 1\}$.

b. Ákvarða þarf þau gildi x sem gera nefnarann að núlli. Þar sem $3x^2+4\geq 4$ fyrir allar rauntölur x, verður nefnarinn aldrei núll. Skilgreiningarmengið er því $(-\infty, \infty)$.

c. Þar sem kvaðratrót neikvæðrar tölu er ekki rauntala er skilgreiningarmengið mengi þeirra gilda x sem uppfylla $4-3x\geq 0$. Skilgreiningarmengið er því $\{x \mid x\leq 4/3\}$.

d. Teningsrót er skilgreind fyrir allar rauntölur og því er skilgreiningarmengið bilið $(-\infty, \infty)$.

STÖÐUMAT 1.12

Finnið skilgreiningarmengi hvors fallsins: $f(x)=(5-2x)/(x^2+2)$ og $g(x)=\sqrt{5x-1}$.

Yfirskilvitleg föll

Hingað til höfum við fjallað um algebruföll. Sumum föllum er þó ekki unnt að lýsa með einföldum algebruaðgerðum. Þau eru kölluð torræð föll vegna þess að þau eru talin ná út fyrir algebruna. Algengustu torræðu föllin eru hornaföll, vísisföll og lograföll. Hornafall lýsir hlutföllum tveggja hliða í rétthyrndum þríhyrningi. Hornaföllin eru $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $sec\, x$, og $csc\, x$. (Fjallað er um hornaföll síðar í kaflanum.) Vísisfall er fall af gerðinni $f(x)=b^x$, þar sem grunntalan $b>0, b\neq 1$. Lografall er fall af gerðinni $f(x)=\log_b(x)$ fyrir einhvern fasta $b>0, b\neq 1$, þar sem $\log_b(x)=y$ þá og því aðeins að $b^y=x$. (Einnig er fjallað um vísisföll og lograföll síðar í kaflanum.)

SÝNIDÆMI 1.18

Flokkun algebrufalla og torræðra falla

Flokkið hvert fallanna a. til c. sem algebrufall eða torrætt fall.

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{4x+2}$

b. $f(x)=2^{x^2}$

c. $f(x)=\sin(2x)$

Lausn

a. Þar sem þetta fall felur aðeins í sér grunnreikniaðgerðir algebru er það algebrufall.

b. Ekki er hægt að rita þetta fall með formúlu sem felur aðeins í sér grunnreikniaðgerðir algebru og því er það torrætt. (Athugið að veldisvísar algebrufalla geta aðeins verið ræðar tölur.)

c. Eins og í b-lið er ekki hægt að rita þetta fall með formúlu sem felur aðeins í sér grunnreikniaðgerðir algebru; því er fallið torrætt.

STÖÐUMAT 1.13

Er $f(x)=x/2$ algebrufall eða torrætt fall?

Gaffalföll

Stundum er fall skilgreint með ólíkum formúlum á mismunandi hlutum skilgreiningarmengis þess. Fall með þennan eiginleika nefnist hlutskilgreint fall. Algildisfallið er dæmi um hlutskilgreint fall því að formúlan breytist eftir formerki x:

$$f(x)=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}.$$

Önnur hlutskilgreind föll geta verið sett fram með gjörólíkum formúlum eftir því í hvaða hluta skilgreiningarmengisins punktur liggur. Til að teikna graf hlutskilgreinds falls teiknum við hvern hluta fallsins á viðkomandi hluta skilgreiningarmengisins í sama hnitakerfi. Ef formúla falls er ólík fyrir $x<a$ og $x>a$, þarf sérstaklega að gæta að hegðun grafsins við $x=a$. Stundum þarf að merkja opinn eða lokaðan hring á grafið til að sýna gildi fallsins þegar $x=a$. Við skoðum þetta í næsta dæmi.

SÝNIDÆMI 1.19

Graf gaffalfalls teiknað

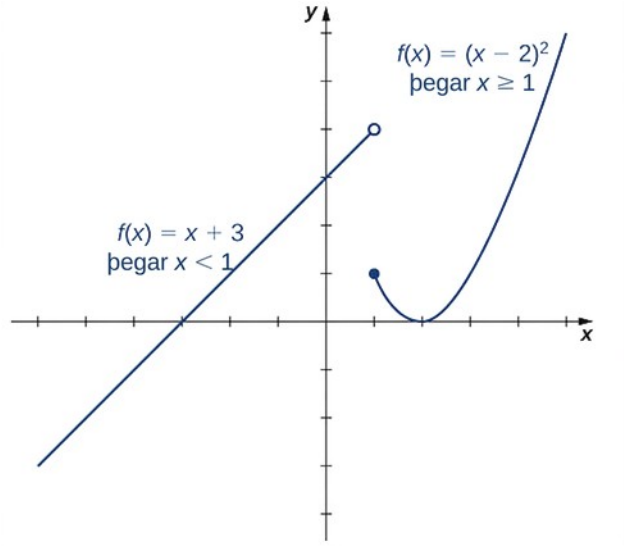
Teiknið skissu af grafi eftirfarandi hlutskilgreinds falls:

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & x<1\\ (x-2)^2, & x\geq 1\end{cases}.$$

Lausn

Við teiknum graf línulega fallsins $y=x+3$ á bilinu $(-\infty,1)$ og graf annars stigs fallsins $y=(x-2)^2$ á bilinu $[1,\infty)$. Þar sem gildi fallsins þegar $x=1$ er gefið með formúlunni $f(x)=(x-2)^2$, sjáum við að $f(1)=1$. Til að sýna þetta á grafinu teiknum við fylltan hring í punktinum $(1,1)$. Gildi fallsins er gefið með $f(x)=x+3$ fyrir öll $x<1$, en ekki þegar $x=1$. Til að sýna þetta á grafinu teiknum við ófylltan hring í punktinum $(1,4)$.

1



Mynd 1.22 Þetta hlutskilgreinda fall er línulegt þegar $x<1$ og annars stigs þegar $x\geq 1$.

STÖÐUMAT 1.14

Teiknið graf fallsins

$$f(x)=\begin{cases}2-x, x\leq 2\\ x+2, x>2\end{cases}.$$

SÝNIDÆMI 1.20

Bílastæðagjöldum lýst með gaffalfalli

Í stórborg greiða ökumenn mismunandi gjöld fyrir að leggja í bílastæðahúsi. Þeir greiða 10 € fyrir fyrstu klukkustundina eða hluta hennar og síðan 2 € til viðbótar fyrir hverja klukkustund eða hluta hennar, þó að hámarki 30 € fyrir daginn. Bílastæðahúsið er opið frá kl. 6 að morgni til miðnættis.

a. Skrifið gaffalfall sem lýsir kostnaðinum C við að leggja í bílastæðahúsinu sem fall af fjölda klukkustunda sem lagt er x.

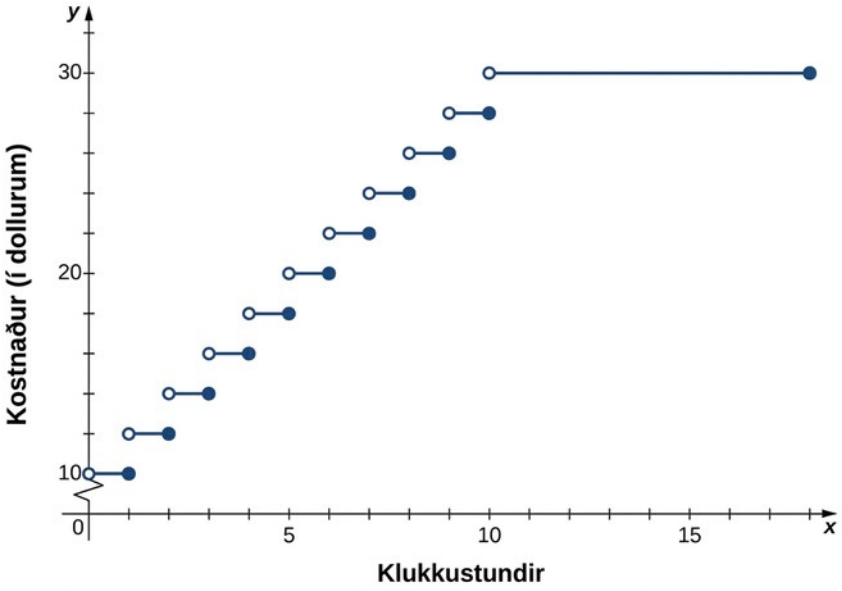
b. Teiknið graf þessa falls $C(x)$.

Lausn

a. Þar sem bílastæðahúsið er opið 18 klukkustundir á dag er skilgreiningarmengi þessa falls $\{x|0<x\leq 18\}$. Kostnaðinum við að leggja bíl í þessu bílastæðahúsi má lýsa með hlutskilgreindu fallinu

$$C(x) = \begin{cases} 10, 0 < x \leq 1 \\ 12, 1 < x \leq 2 \\ 14, 2 < x \leq 3 \\ 16, 3 < x \leq 4 \\ \vdots \\ 30, 10 < x \leq 18 \end{cases}.$$

b. Graf fallsins samanstendur af nokkrum láréttum línustrikum.



STÖÐUMAT 1.15

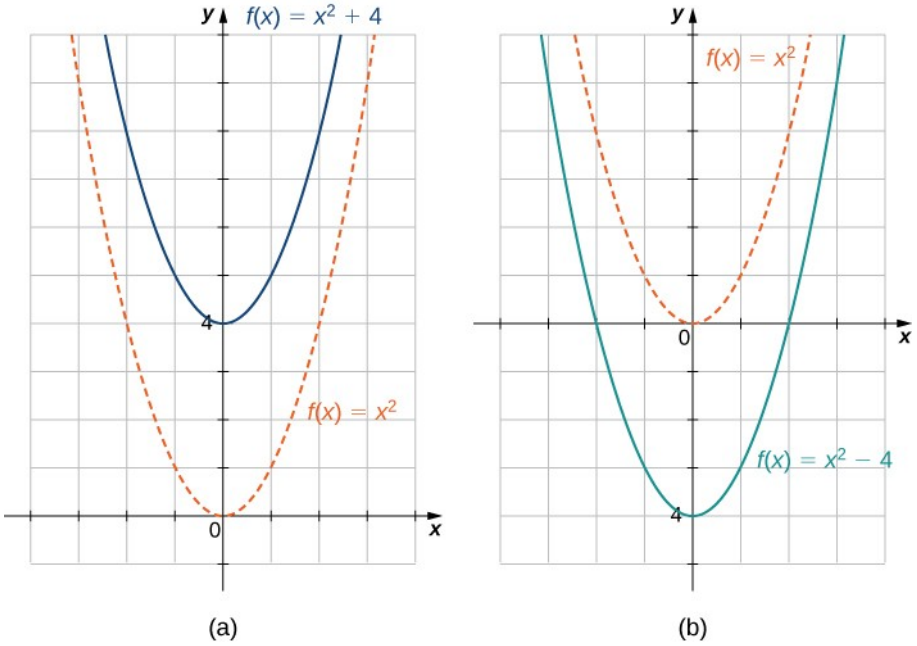
Burðargjald bréfs er fall af þyngd þess. Gerum ráð fyrir að burðargjaldið sé 49 ¢ fyrir fyrstu 20 grömmin og 21 ¢ fyrir hver 20 grömm til viðbótar. Skrifið hlutskilgreint fall sem lýsir kostnaðinum C sem fall af þyngdinni x fyrir $0 < x \leq 60$, þar sem C er mælt í sentum og x í grömmum.

Umbreytingar falla

Við höfum séð nokkur dæmi þess að fastar séu lagðir við, dregnir frá eða margfaldaðir til að mynda tilbrigði við einföld föll. Í dæminu hér á undan drógum við til dæmis 2 frá viðfangi fallsins $y = x^2$ og fengum þannig fallið $f(x) = (x-2)^2$. Þessi frádráttur samsvarar því að fallið $y = x^2$ hliðrist um tvær einingar til hægri. Lárétt eða lóðrétt hliðrun er ein tegund umbreytingar falls. Aðrar umbreytingar eru láréttar og lóðréttar kvarðanir og speglanir um ása.

Lóðrétt hliðrun fæst þegar sami fasti er lagður við eða dreginn frá hverju úttaksgildi y. Fyrir $c > 0$, fæst graf $f(x) + c$ með því að hliðra grafi $f(x)$ upp um c einingar, en graf $f(x) - c$ fæst með því að hliðra grafi $f(x)$ niður um c einingar. Til dæmis fæst graf fallsins $f(x) = x^2 + 4$ með því að hliðra grafinu $y = x^2$ upp um 4 einingar; graf fallsins $f(x) = x^2 - 4$ fæst með því að hliðra grafinu $y = x^2$ niður um 4 einingar (Mynd 1.23).

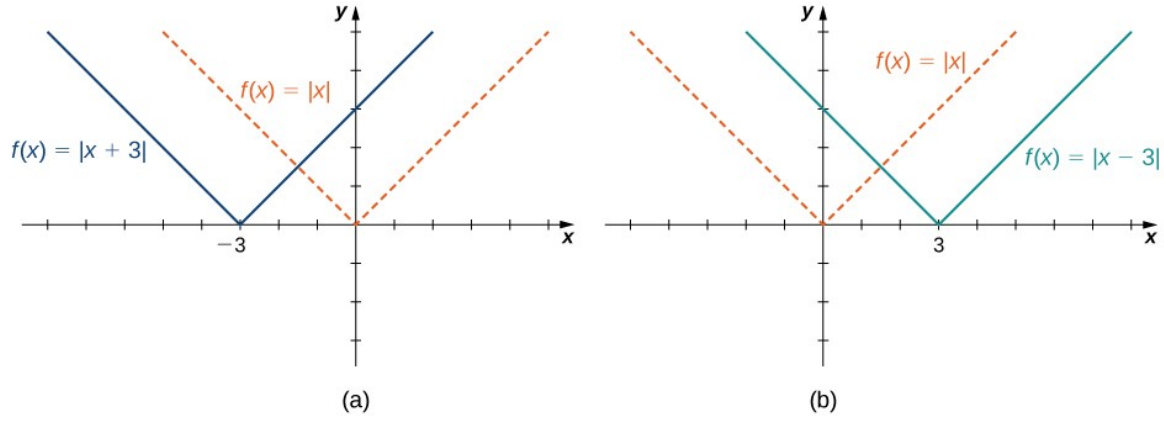
1



Mynd 1.23 (a) Fyrir $c>0$, fæst graf $y=f(x)+c$ með lóðréttri hliðrun um c einingar upp frá grafinu $y=f(x)$. (b) Fyrir $c>0$, fæst graf $y=f(x)-c$ með lóðréttri hliðrun um c einingar niður frá grafinu $y=f(x)$.

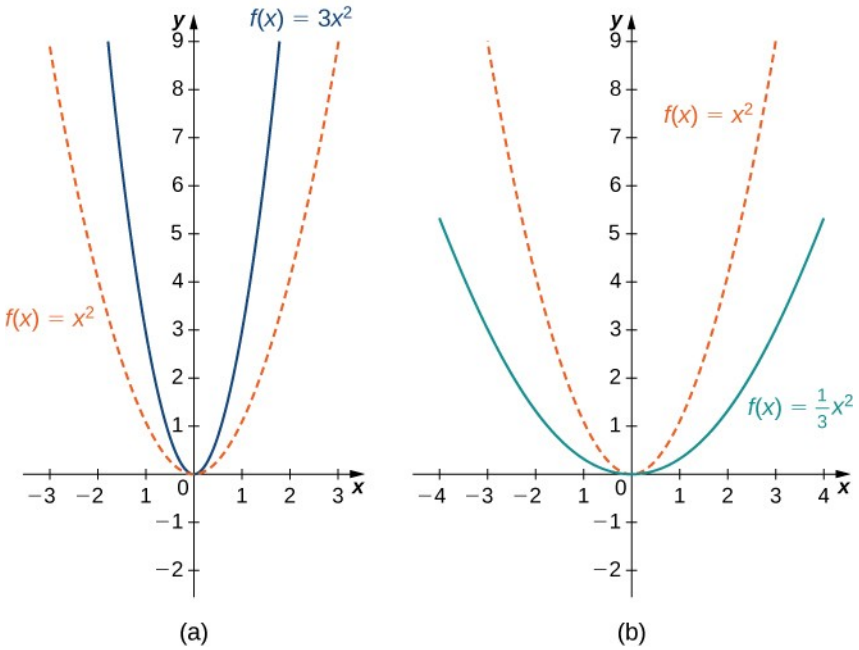
Lárétt hliðrun fæst þegar sami fasti er lagður við eða dreginn frá hverju inntaki x. Fyrir $c>0$, fæst graf $f(x+c)$ með því að hliðra grafi $f(x)$ til vinstri um c einingar; graf $f(x-c)$ fæst með því að hliðra grafi $f(x)$ til hægri um c einingar. Hvers vegna hliðrast grafið til vinstri þegar fasta er lögð við en til hægri þegar fasta er dregin frá? Til að svara þessari spurningu skulum við skoða dæmi.

Skoðum fallið $f(x)=|x+3|$ og metum fallið í $x-3$. Þar sem $f(x-3)=|x|$ og $x-3<x$, er graf $f(x)=|x+3|$ graf $y=|x|$ hliðrað um 3 einingar til vinstri. Á sama hátt er graf $f(x)=|x-3|$ graf $y=|x|$ hliðrað um 3 einingar til hægri (Mynd 1.24).



Mynd 1.24 (a) Fyrir $c>0$, fæst graf $y=f(x+c)$ með láréttri hliðrun um c einingar til vinstri frá grafinu $y=f(x)$. (b) Fyrir $c>0$, fæst graf $y=f(x-c)$ með láréttri hliðrun um c einingar til hægri frá grafinu $y=f(x)$.

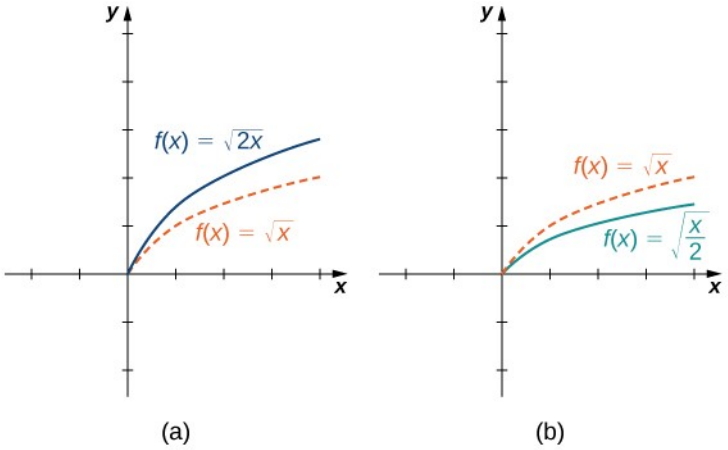
Lóðrétt kvörðun grafs verður þegar öll úttaksgildi y falls eru margfölduð með sama jákvæða fastanum. Fyrir $c>0$, fæst graf fallsins $cf(x)$ með því að kvarða graf $f(x)$ lóðrétt með stuðlinum c. Ef $c>1$, eru úttaksgildi fallsins $cf(x)$ stærri en úttaksgildi fallsins $f(x)$; grafið teygist því lóðrétt. Ef $0<c<1$, eru úttaksgildi fallsins $cf(x)$ minni og grafið þjappast því lóðrétt. Graf fallsins $f(x)=3x^2$ fæst til dæmis með því að teygja grafið $y=x^2$ lóðrétt með stuðlinum 3, en graf $f(x)=x^2/3$ fæst með því að þjappa grafinu $y=x^2$ lóðrétt með stuðlinum 3 (Mynd 1.25).



Mynd 1.25 (a) Ef $c>1$, er graf $y=cf(x)$ lóðrétt teyging á grafi $y=f(x)$. (b) Ef $0<c<1$, er graf $y=cf(x)$ lóðrétt samþjöppun á grafi $y=f(x)$.

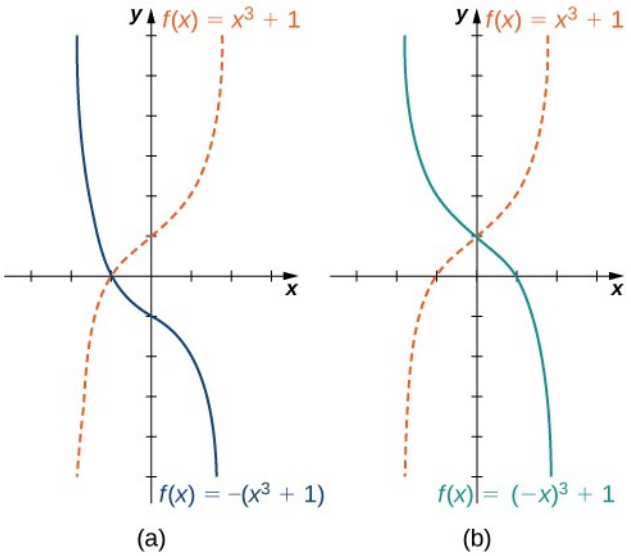
Lárétt kvörðun falls á sér stað þegar inntaksgildin x eru margfölduð með sama jákvæða fastanum. Fyrir $c>0$, fæst graf fallsins $f(cx)$ með því að kvarða graf $f(x)$ lárétt með stuðlinum c. Ef $c>1$, fæst graf $f(cx)$ með því að þjappa grafi $f(x)$ saman lárétt. Ef $0<c<1$, fæst graf $f(cx)$ með því að teygja graf $f(x)$ lárétt. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=\sqrt{2x}$ og reiknum gildi f við $x/2$. Þar sem $f(x/2)=\sqrt{x}$, fæst graf $f(x)=\sqrt{2x}$ með því að þjappa grafi $y=\sqrt{x}$ saman lárétt. Graf $y=\sqrt{x/2}$ fæst með láréttri teygingu á grafinu $y=\sqrt{x}$ (Mynd 1.26).

1



Mynd 1.26 (a) Ef $c>1$, er graf $y=f(cx)$ lárétt samþjöppun grafsins $y=f(x)$. (b) Ef $0<c<1$, er graf $y=f(cx)$ lárétt teyging á grafinu $y=f(x)$.

Við höfum kannað hvað verður um graf falls f þegar f er margfaldað með fasta $c>0$ til að mynda fallið $cf(x)$. Við höfum einnig fjallað um hvað verður um graf falls f þegar óháða breytan x er margfölduð með $c>0$ til að mynda fallið $f(cx)$. Við höfum hins vegar ekki fjallað um hvað verður um graf fallsins þegar fastinn c er neikvæður. Ef fastinn er $c<0$, má rita c sem jákvæða tölu margfaldaða með -1; en hvaða umbreyting fæst þegar fallið eða viðfang þess er margfaldað með -1? Þegar öll úttaksgildi eru margfölduð með -1, fæst speglun um x-ásinn. Þegar öll inntaksgildi eru margfölduð með -1, fæst speglun um y-ásinn. Graf $f(x)=-(x^3+1)$ er til dæmis graf $y=(x^3+1)$ speglað um x-ásinn. Graf $f(x)=(-x)^3+1$ er graf $y=x^3+1$ speglað um y-ásinn (Mynd 1.27).



Mynd 1.27 (a) Graf fallsins $y=-f(x)$ fæst með því að spegla graf fallsins $y=f(x)$ um x-ásinn. (b) Graf fallsins $y=f(-x)$ fæst með því að spegla graf fallsins $y=f(x)$ um y-ásinn.

Ef graf falls fæst með fleiri en einni umbreytingu á öðru grafi er mikilvægt að framkvæma umbreytingarnar í réttri röð. Fyrir gefið fall $f(x)$, má fá graf tengda fallsins $y=cf(a(x+b))+d$ út frá grafi $y=f(x)$ með því að gera umbreytingarnar í þessari röð.

1. Lárétt hliðrun á grafi $y=f(x)$. Ef $b>0$, hliðrast grafið til vinstri. Ef $b<0$, hliðrast grafið til hægri.
2. Lárétt kvörðun á grafi $y=f(x+b)$ með stuðlinum $|a|$. Ef $a<0$, speglið grafið um y-ásinn.
3. Lóðrétt kvörðun á grafi $y=f(a(x+b))$ með stuðlinum $|c|$. Ef $c<0$, skal spegla grafið um x-ásinn.
4. Lóðrétt hliðrun á grafi $y=cf(a(x+b))$. Ef $d>0$, hliðrast grafið upp. Ef $d<0$, hliðrast það niður.

Við getum tekið saman mismunandi umbreytingar og áhrif þeirra á graf falls í töflunni hér á eftir.

Tafla 1.7 Umbreytingar falla

Umbreyting á $f(c>0)$	**Áhrif á graf** f
$f(x)+c$	Lóðrétt hliðrun upp um c einingar
$f(x)-c$	Lóðrétt hliðrun niður um c einingar
$f(x+c)$	Hliðrun til vinstri um c einingar
$f(x-c)$	Hliðrun til hægri um c einingar
$cf(x)$	Lóðrétt teyging ef $c>1$; lóðrétt samþjöppun ef $0<c<1$
$f(cx)$	Lárétt teygja ef $0<c<1$; lárétt samþjöppun ef $c>1$
$-f(x)$	Speglun um x-ásinn
$f(-x)$	Speglun um y-ásinn

SÝNIDÆMI 1.21

Umbreyting falls

Teiknið graf hvors fallsins, a og b, með því að nota röð umbreytinga á vel þekktu falli.

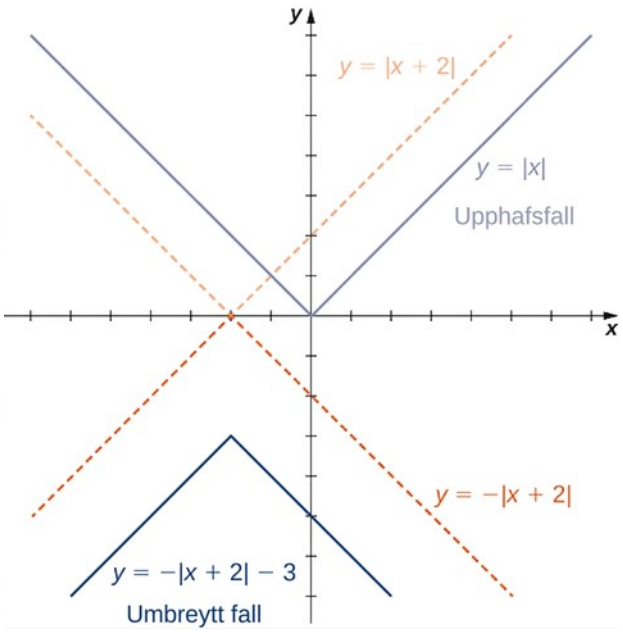
a. $f(x)=-|x+2|-3$

b. $f(x)=3\sqrt{-x}+1$

Lausn

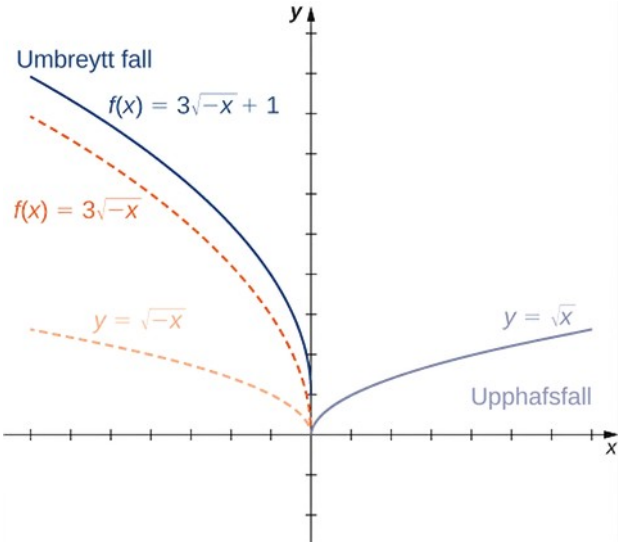
1

a. Byrjið á grafi $y=|x|$, hliðrið því um 2 einingar til vinstri, speglið það um x-ásinn og hliðrið því síðan niður um 3 einingar.



Mynd 1.28 Líta má á fallið $f(x)=-|x+2|-3$ sem röð þriggja umbreytinga á fallinu $y=|x|$.

b. Byrjið á grafi $y=\sqrt{x}$, speglið það um y-ásinn, teygið grafið lóðrétt með stuðlinum 3 og færið það upp um 1 einingu.



Mynd 1.29 Líta má á fallið $f(x)=3\sqrt{-x}+1$ sem röð þriggja umbreytinga á fallinu $y=\sqrt{x}$.

STÖÐUMAT 1.16

Lýsið hvernig teikna má graf fallsins $f(x)=-(x+1)^2-4$ út frá grafi $y=x^2$ og röð umbreytinga.

Æfingar í kafla 1.2

Í eftirfarandi æfingum skal fyrir hvert punktapar a. finna hallatölu línunnar sem liggur í gegnum punktana og b. tilgreina hvort línan sé vaxandi, minnkandi, lárétt eða lóðrétt.

59. $(-2,4)$ og $(1,1)$

60. $(-1,4)$ og $(3,-1)$

61. $(3,5)$ og $(-1,2)$

62. $(6,4)$ og $(4,-3)$

63. $(2,3)$ og $(5,7)$

64. $(1,9)$ og $(-8,5)$

65. $(2,4)$ og $(1,4)$

66. $(1,4)$ og $(1,0)$

Í eftirfarandi æfingum skal rita jöfnu línunnar sem uppfyllir gefin skilyrði á hallaskurðarformi.

67. Hallatala $=-6$, liggur í gegnum $(1,3)$

68. Hallatala $=3$, liggur í gegnum $(-3,2)$

69. Hallatala $=\frac{1}{3}$, liggur í gegnum $(0,4)$

70. Hallatala $=\frac{2}{5}$, x-skurðpunktur $=8$

71. Liggur í gegnum $(2,1)$ og $(-2,-1)$

72. Fer í gegnum $(-3,7)$ og $(1,2)$

73. x-skurðpunktur $=5$ og y-skurðpunktur $=-3$

74. x-skurðpunktur $=-6$ og y-skurðpunktur $=9$

Í eftirfarandi verkefnum skal fyrir hverja línulega jöfnu a. gefa upp hallatöluna m og y-skurðpunktinn b, ef hann er til, og b. teikna graf línunnar.

75.

$$y=2x-3$$

76.

$$y=-\frac{1}{7}x+1$$

77.

$$f(x)=-6x$$

78.

$$f(x)=-5x+4$$

79.

$$4y+24=0$$

80.

$$8x-4=0$$

81.

$$2x+3y=6$$

82.

$$6x-5y+15=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal fyrir hverja margliðu a. finna stigið; b. finna núllstöðvarnar, ef einhverjar eru; c. finna y-skurðpunktana, ef einhverjir eru; d. nota forystustuðulinn til að ákvarða endahegðun grafsins; og e. ákvarða með algebrulegum hætti hvort margliðan sé jafnstæð, oddstæð eða hvorugt.

83.

$$f(x)=2x^2-3x-5$$

84.

$$f(x)=-3x^2+6x$$

85.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$$

86.

$$f(x)=x^3+3x^2-x-3$$

87.

$$f(x)=3x-x^3$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota graf $f(x)=x^2$ til að teikna graf hvers umbreytts falls g.

88.

$$g(x)=x^2-1$$

89.

$$g(x)=(x+3)^2+1$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota graf fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ til að teikna graf hvers umbreytts falls g.

90.

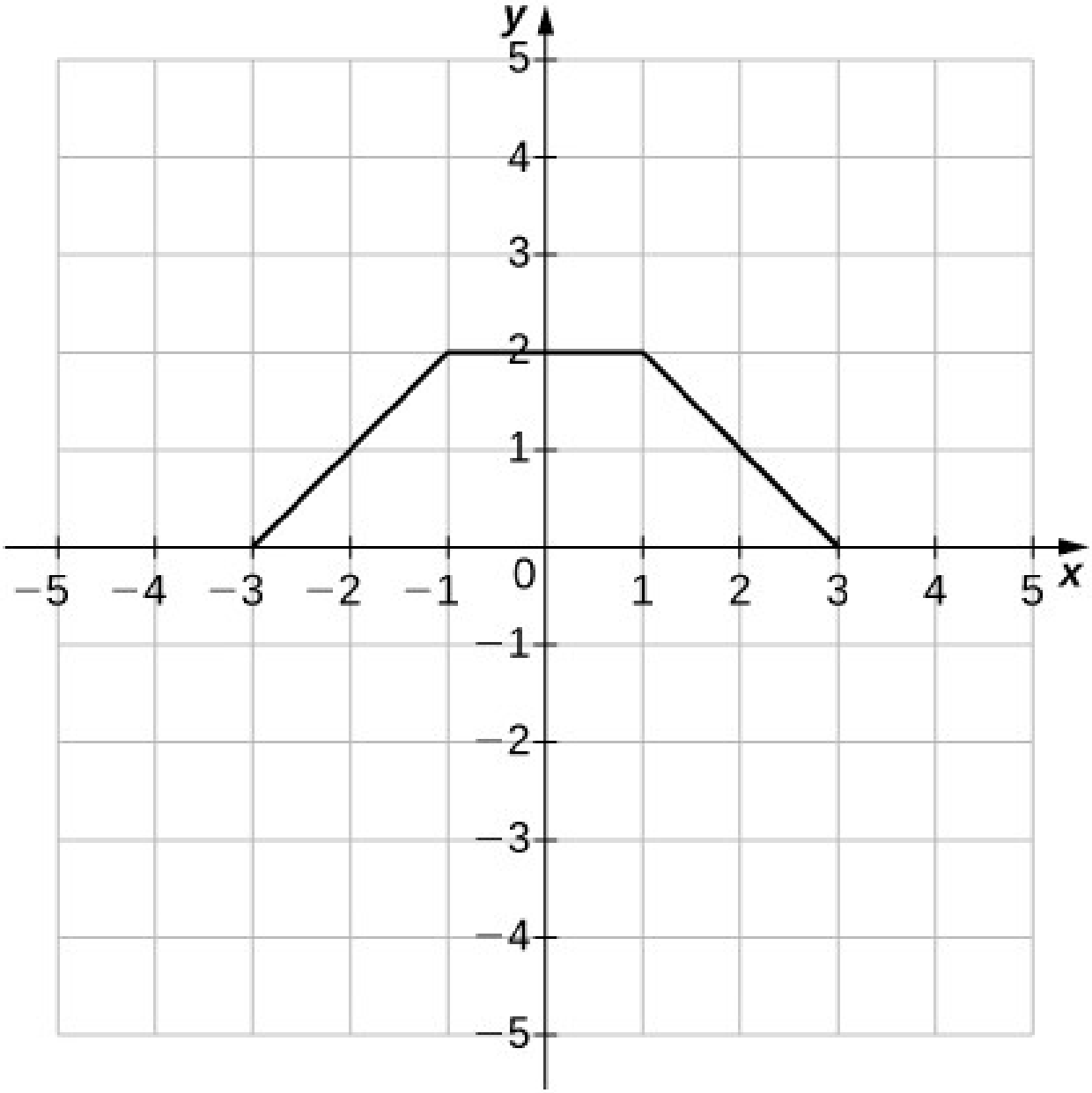
$$g(x)=\sqrt{x+2}$$

91.

$$g(x)=-\sqrt{x}-1$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota graf fallsins $y=f(x)$ til að teikna graf hvers umbreytts falls g.

1



92.

$$g(x)=f(x)+1$$

93.

$$g(x)=f(x-1)+2$$

Í eftirfarandi verkefnum skal fyrir hvert hlutskilgreint fall a. reikna gildi þess fyrir gefin gildi óháðu breytunnar og b. teikna grafið.

94.

$$f(x)=\begin{cases}4x+3, x\leq 0\\ -x+1, x>0\end{cases};\ f(-3); f(0); f(2)$$

95.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3, x<0\\ 4x-3, x\geq 0\end{cases};\ f(-4); f(0); f(2)$$

96.

$$h(x)=\begin{cases}x+1, x\leq 5\\ 4, x>5\end{cases};\ h(0); h(\pi); h(5)$$

97.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{3}{x-2}, x\neq 2\\ 4, x=2\end{cases}; g(0); g(-4); g(2)$$

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hvort fullyrðingin sé sönn eða ósönn. Rökstyðjið svarið.

98. $f(x)=(4x+1)/(7x-2)$ er torrætt fall.

99. $g(x)=\sqrt[3]{x}$ er rótarfall með oddatöluvísi

100. Lografall er algebrufall.

101. Fall af gerðinni $f(x)=x^b$, þar sem b er rauntölufasti, er vísisfall.

102. Skilgreiningarmengi rótarfalls með sléttum rótarvísi er mengi allra rauntalna.

103. **[T]** Fyrirtæki kaupir tölvubúnað fyrir 20.500 €. Að 3 ára tímabili loknu hefur verðmæti búnaðarins minnkað línulega í 12.300 €.

a. Finnið fall $y=V(t)$ sem ákvarðar verðmæti V búnaðarins að t árum liðnum.
b. Finnið og túlkið merkingu skurðpunkta við x- og y-ás í þessu samhengi.
c. Hvert er verðmæti búnaðarins að 5 árum liðnum?
d. Hvenær verður verðmæti búnaðarins 3000 €?

104. **[T]** Heildarumfang netverslunar yfir jólahátíðina hefur aukist verulega undanfarin 5 ár. Árið 2012 ($t=0$), nam heildarsala á netinu yfir jólahátíðina $42,3 milljörðum en árið 2013 nam hún $48,1 milljarði.

a. Finnið línulegt fall S sem áætlar heildarsölu á netinu yfir jólahátíðina árið t.
b. Túlkið hallatölu grafs S.
c. Notið a-lið til að spá fyrir um hvenær netverslun yfir jólin muni ná $60 milljörðum.

1

105. **[T]** Fjölskyldurekið bakarí bakar bollakökur og selur þær á útihátíðum í heimabyggð. Fastur kostnaður við að setja upp sölubás fyrir bollakökur á tónlistarhátíð er 125 €. Eigandinn áætlar að hver bollakaka kosti 0,75 € í framleiðslu. Eigandinn vill ákvarða heildarkostnaðinn C sem fall af fjölda bakaðra bollakaka.

a. Finnið línulegt fall sem tengir kostnaðinn C við x, fjölda bakaðra bollakaka.
b. Finnið kostnaðinn við að baka 160 bollakökur.
c. Ef eigandinn selur bollakökurnar á 1,50 € stykkið, hversu margar bollakökur þarf hún að selja áður en reksturinn fer að skila hagnaði? (Vísbending: Notið INTERSECTION-aðgerðina á reiknivél til að finna þennan fjölda.)

106. **[T]** Hús sem keypt var á 250.000 € er talið verða tvöfalt meira virði en kaupverðið eftir 18 ár.

a. Finnið línulegt fall sem lýsir verði P hússins sem fall af fjölda ára t frá upphaflegu kaupunum.
b. Túlkið hallatölu grafs P.
c. Finnið verð hússins 15 árum eftir að það var keypt.

107. **[T]** Bíll var keyptur á 26.000 €. Verðmæti bílsins rýrnar um 1500 € á ári.

a. Finnið línulegt fall sem lýsir verðmæti V bílsins eftir t ár.
b. Finnið og túlkið $V(4)$.

108. **[T]** Íbúð í dýru hverfi borgarinnar var keypt á 432.000 €. Eftir 35 ár er hún 60.500 € virði. Finnið rýrnunarhraðann.

109. **[T]** Heildarkostnaðurinn C við að framleiða tiltekna vöru er gefinn með fallinu $C(x)=10{,}50\ x+28.500$, þar sem x er fjöldi framleiddra eintaka. Ákvarðið kostnaðinn við að framleiða 175 eintök.

110. **[T]** Prófessor biður nemendur sína að tilgreina tímann t sem þeir vörðu í að skrifa tvö verkefni. Flestir nemendurnir segja að það taki þá um 45 mínútur að vélrita fjögurra blaðsíðna verkefni og um 1,5 klukkustundir að vélrita níu blaðsíðna verkefni.

a. Finnið línulega fallið $y=N(t)$ sem lýsir þessum aðstæðum, þar sem N er fjöldi vélritaðra blaðsíðna og t er tíminn í mínútum.
b. Notið a-lið til að ákvarða hve margar blaðsíður er hægt að vélrita á 2 klukkustundum.
c. Notið a-lið til að ákvarða hve langan tíma það tekur að vélrita 20 blaðsíðna verkefni.

111. **[T]** Hægt er að lýsa afköstum kjarnorkuvera í Bandaríkjunum, sem hundraðshluta af heildarafkastagetu, með fallinu $P(t)=1{,}8576\ t+68{,}052$, þar sem t er tími í árum og $t=0$ samsvarar ársbyrjun 2000. Notið líkanið til að spá fyrir um áætlaðan hundraðshluta afkastagetu sem var nýttur í ársbyrjun 2015.

112. **[T]** Inntökuskrifstofa opinbers háskóla áætlar að 65% þeirra nemenda sem boðin er skólavist í árgangi 2019 muni í raun innritast.

a. Finnið línulega fallið $y = N(x)$, þar sem N er fjöldi nemenda sem innritast í raun og x er heildarfjöldi nemenda sem boðin er skólavist í árgangi 2019.
b. Ef háskólinn vill að 1350 nemendur verði í nýnemahópi ársins 2019, ákvarðið þá hve mörgum nemendum þarf að bjóða skólavist.

1.3 Hornaföll

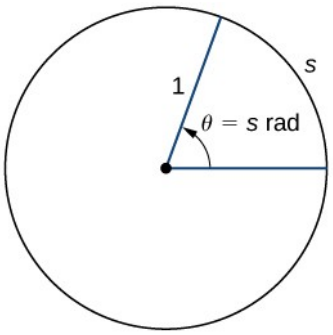
NÁMSMARKMIÐ

- 1.3.1 Umreikna hornamál á milli gráða og radíana.
- 1.3.2 Þekkja þríhyrnings- og hringskilgreiningar grunnhornafallanna.
- 1.3.3 Rita grunnsamsemdir hornafallanna.
- 1.3.4 Þekkja gröf og lotur hornafallanna.
- 1.3.5 Lýsa hliðrun grafs sínus- eða kósínusfalls út frá jöfnu fallsins.

Hornaföll eru notuð til að setja fram líkön af mörgum fyrirbærum, þar á meðal hljóðbylgjum, titringi strengja, riðstraumi og hreyfingu pendúla. Í raun má lýsa nánast hvaða endurtekinni, eða lotubundinni, hreyfingu sem er með einhverri samsetningu hornafalla. Í þessum undirkafla skilgreinum við grunnhornaföllin sex og skoðum nokkrar helstu samsemdir sem tengjast þessum föllum.

Bogaeiningar

Til að nota hornaföll verðum við fyrst að skilja hvernig horn eru mæld. Þótt nota megi bæði radíana og gráður eru radíanar eðlilegri mælieining þar sem þeir tengjast beint einingarhringnum, sem er hringur með radíus 1. Stærð horns í bogaeiningum er skilgreind svona. Fyrir gefið horn θ, látum s tákna lengd samsvarandi boga á einingarhringnum (Mynd 1.30). Við segjum að hornið sem samsvarar boga af lengd 1 hafi stærðina 1 í bogaeiningum.



Mynd 1.30 Stærð hornsins θ í bogaeiningum er bogalengdin s á samsvarandi boga einingarhringsins.

Horn sem mælist $360°$ samsvarar ummáli hrings, eða boga af lengdinni 2π, svo að horn sem mælist $360°$ er í bogaeiningum 2π. Á sama hátt sjáum við að $180°$ jafngildir π radíönum. Tafla 1.8 sýnir sambandið milli algengra gilda í gráðum og radíönum.

Tafla 1.8 Algeng horn í gráðum og radíönum

Gráður	Radíanar	Gráður	Radíanar
0	0	120	$2\pi/3$
30	$\pi/6$	135	$3\pi/4$
45	$\pi/4$	150	$5\pi/6$
60	$\pi/3$	180	π
90	$\pi/2$		

DÆMI 1.22

Umreikningur milli radíana og gráða

a. Umreiknið $225°$ í radíana.

b. Umreiknið $5\pi/3$ rad í gráður.

Lausn

Notið þá staðreynd að $180°$ jafngildir π radíönum sem umreikningsstuðul: $1 = \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{180°}{\pi \text{ rad}}$.

a. $225° = 225° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{4}$ rad

b. $\frac{5\pi}{3}$ rad $= \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 300°$

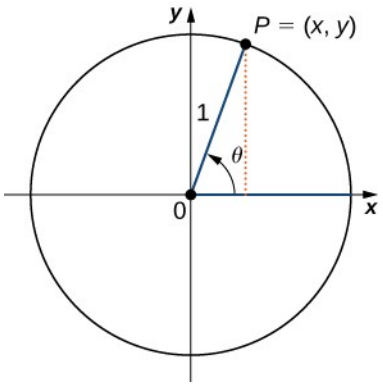
STÖÐUMAT 1.17

Umreiknið $210°$ í radíana. Umreiknið $11\pi/6$ rad í gráður.

Grunnhornaföllin sex

Hornaföll gera okkur kleift að nota hornamál, í radíönum eða gráðum, til að finna hnit punkts á hvaða hring sem er — ekki aðeins á einingarhring — eða til að finna horn út frá gefnum punkti á hring. Þau skilgreina einnig sambandið milli hliða og horna þríhyrnings.

Til að skilgreina hornaföllin skulum við fyrst líta á einingarhring með miðju í upphafspunktinum og punkt $P = (x, y)$ á einingarhringnum. Látum θ vera horn með upphafsarm sem liggur eftir jákvæða hluta x-ássins og lokaarm sem er línustrikið OP. Við segjum að horn í þessari stöðu sé í staðalstöðu (Mynd 1.31). Þá getum við skilgreint gildi hornafallanna sex fyrir θ með hnitunum x og y.



Mynd 1.31 Hornið θ er í staðalstöðu. Gildi hornafallanna fyrir θ eru skilgreind með hnitunum x og y.

SKILGREINING

Látum $P=(x,y)$ vera punkt á einingarhring með miðju í upphafspunktinum O. Látum θ vera horn með upphafsarm eftir jákvæða x-ásnum og lokaarm sem ákvarðast af línustrikinu OP. Hornaföllin eru þá skilgreind sem

$$\begin{aligned} \sin\theta &= y & \csc\theta &= \frac{1}{y} \\ \cos\theta &= x & \sec\theta &= \frac{1}{x} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} & \cot\theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

(1.9)

Ef $x=0$, $\sec\theta$ og $\tan\theta$ eru óskilgreind. Ef $y=0$, þá eru $\cot\theta$ og $\csc\theta$ óskilgreind.

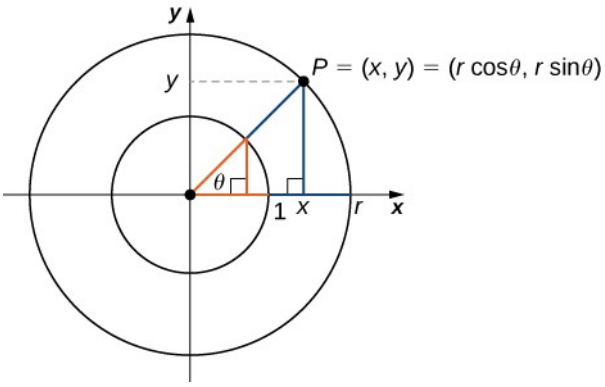
Við sjáum að fyrir punkt $P=(x,y)$ á hring með radíus r og samsvarandi horn θ, uppfylla hnitin x og y eftirfarandi skilyrði

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$y = r\sin\theta.$$

Gildi hinna hornafallanna má setja fram með x, y, og r (mynd 1.32).

1



Mynd 1.32 Fyrir punkt $P=(x,y)$ á hring með geisla r, uppfylla hnitin x og y jöfnurnar $x=r\cos\theta$ og $y=r\sin\theta$.

Tafla 1.9 sýnir gildi sínuss og kósínuss fyrir helstu hornin í fyrsta fjórðungi. Út frá þessari töflu getum við ákvarðað gildi sínuss og kósínuss fyrir samsvarandi horn í hinum fjórðungunum. Gildi hinna hornafallanna má auðveldlega reikna út frá gildum $\sin\theta$ og $\cos\theta$.

Tafla 1.9 Gildi $\sin\theta$ og $\cos\theta$ fyrir helstu hornin θ í fyrsta fjórðungi

θ	$sin\theta$	$cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

DÆMI 1.23

Útreikningur á gildum hornafalla

Reiknið gildi eftirfarandi segða.

a. $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

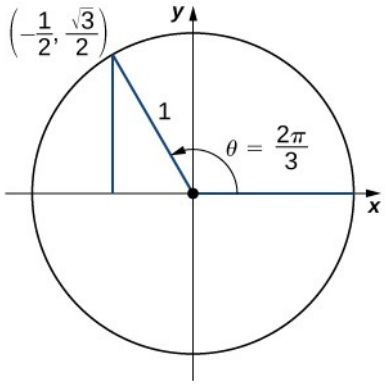
b. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

c. $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)$

Lausn

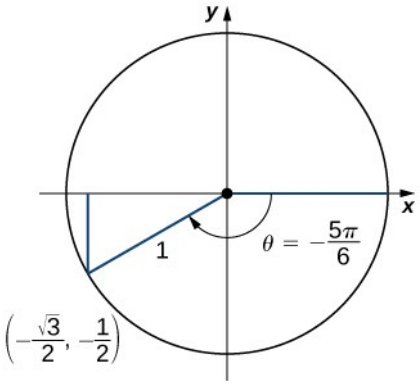
a. Á einingarhringnum samsvarar hornið $\theta = \frac{2\pi}{3}$ punktinum $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Því er

$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



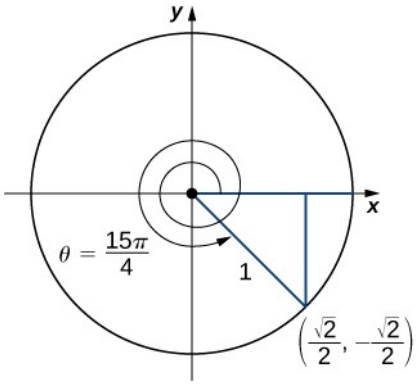
b. Hornið $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ samsvarar snúningi í neikvæða stefnu, eins og sýnt er. Því er

$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



c. Hornið $\theta = \frac{15\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4}$. Því samsvarar þetta horn meira en einum heilum snúningi, eins og sýnt er. Þar sem við vitum að hornið $\frac{7\pi}{4}$ samsvarar punktinum $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

getum við ályktað að $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\frac{y}{x}=-1$.

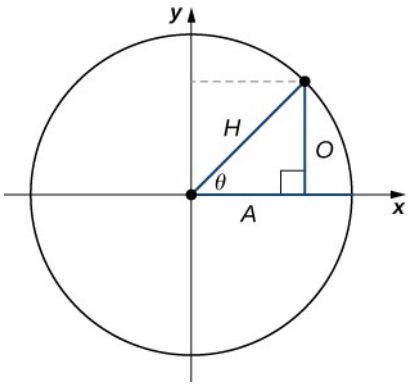


STÖÐUMAT 1.18

Reiknið $\cos(3\pi/4)$ og $\sin(-\pi/6)$.

Eins og áður hefur komið fram má tjá hlutföll hliðarlengdanna í rétthyrndum þríhyrningi með hornaföllum annars hvors hvassa hornsins. Látum θ vera annað hvassa hornið. Látum A vera lengd aðlægu skammhliðarinnar, O vera lengd mótlægu skammhliðarinnar og H vera lengd langhliðarinnar. Með því að innrita þríhyrninginn í hring með radíus H, eins og sýnt er á mynd 1.33, sjáum við að A, H, og O uppfylla eftirfarandi tengsl við θ:

$$\sin\theta = \frac{O}{H} \qquad \csc\theta = \frac{H}{O}$$
$$\cos\theta = \frac{A}{H} \qquad \sec\theta = \frac{H}{A}$$
$$\tan\theta = \frac{O}{A} \qquad \cot\theta = \frac{A}{O}$$



Mynd 1.33 Með því að innrita rétthyrndan þríhyrning í hring getum við sett hlutföll hliðarlengdanna fram með hornaföllum reiknuðum fyrir θ.

DÆMI 1.24

Smíði skábrautar úr timbri

Smíða á skábraut úr timbri þannig að annar endi hennar hvíli á jörðinni en hinn á efsta þrepi stutts stiga. Ef efsta þrep stigans er 1 m frá jörðu og hornið milli jarðar og skábrautarinnar á að vera $10°$, hversu löng þarf skábrautin þá að vera?

Lausn

Látum x tákna lengd skábrautarinnar. Á eftirfarandi mynd sjáum við að x þarf að uppfylla jöfnuna $\sin(10°) = 1/x$. Þegar jafnan er leyst fyrir x, fæst að $x = 1/\sin(10°) \approx 5{,}759$ m.



STÖÐUMAT 1.19

Málari vill reisa 6 metra langan stiga upp að húsi. Ef hornið milli stigans og jarðar á að vera $60°$, hversu langt frá húsinu á hún að setja neðri enda stigans?

Hornafallasamsemdir

Hornafallasamsemd er jafna sem inniheldur hornaföll og gildir fyrir öll horn θ þar sem föllin eru skilgreind. Við getum notað samsemdirnar til að leysa eða einfalda jöfnur. Helstu hornafallasamsemdirnar eru taldar upp hér á eftir.

REGLA: HORNAFALLASAMSEMDIR

Umhverfusamsemdir

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Pýþagórasarsamsemdir

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Samlagningar- og frádráttarformúlur

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Tvöföldunarformúlur

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

DÆMI 1.25

Lausn hornafallajafna

1

Finnið allar lausnir hverrar jöfnu hér á eftir með hornafallasamsemd.

a. $1+\cos(2\theta)=\cos\theta$

b. $\sin(2\theta)=\tan\theta$

Lausn

a. Með því að nota tvöföldunarformúluna fyrir $\cos(2\theta)$, sjáum við að θ er lausn á $1+\cos(2\theta)=\cos\theta$

þá og því aðeins að
$1+2\cos^2\theta-1=\cos\theta$,

sem gildir þá og því aðeins að
$2\cos^2\theta-\cos\theta=0$.

Til að leysa þessa jöfnu er mikilvægt að þátta vinstri hliðina en deila ekki báðum hliðum jöfnunnar með $\cos\theta$. Vandinn við að deila með $\cos\theta$ er sá að $\cos\theta$ gæti verið núll. Ef við deildum báðum hliðum jöfnunnar með $\cos\theta$, myndum við raunar missa af sumum lausnum upphaflegu jöfnunnar. Með því að þátta vinstri hlið jöfnunnar sjáum við að θ er lausn á þessari jöfnu ef og aðeins ef
$\cos\theta(2\cos\theta-1)=0$.

Þar sem $\cos\theta=0$ þegar
$\theta=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\pm\pi,\frac{\pi}{2}\pm2\pi,\ldots,$

og $\cos\theta=1/2$ þegar
$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\pm2\pi,\ldots$ eða $\theta=-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\pm2\pi,\ldots,$

ályktum við að lausnamengi þessarar jöfnu sé

$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi,\theta=\frac{\pi}{3}+2n\pi,$ og $\theta=-\frac{\pi}{3}+2n\pi,n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$

b. Með því að nota tvöföldunarformúluna fyrir $\sin(2\theta)$ og umhverfusamsemdina fyrir $\tan(\theta)$, má rita jöfnuna sem
$2\sin\theta\cos\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Til að leysa þessa jöfnu margföldum við báðar hliðar með $\cos\theta$ til að eyða nefnaranum og segjum að ef θ uppfyllir þessa jöfnu, þá uppfyllir θ jöfnuna
$2\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta = 0$.

Hér þurfum við þó að gæta nokkurrar varúðar. Jafnvel þótt θ uppfylli þessa nýju jöfnu er ekki víst að það uppfylli upphaflegu jöfnuna, því til þess þyrftum við að geta deilt báðum hliðum jöfnunnar með $\cos\theta$. Ef $\cos\theta = 0$, getum við hins vegar ekki deilt báðum hliðum jöfnunnar með $\cos\theta$. Því er mögulegt að fram komi aukalausnir. Að lokum er því mikilvægt að kanna hvort einhverjar lausnir séu aukalausnir. Snúum okkur nú aftur að jöfnunni. Þar er mikilvægt að þátta $\sin\theta$ út úr báðum liðunum vinstra megin í stað þess að deila báðum hliðum jöfnunnar með $\sin\theta$. Með því að þátta vinstri hlið jöfnunnar getum við endurritað hana sem
$\sin\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right) = 0$.

Lausnirnar eru því þau horn θ sem uppfylla $\sin\theta = 0$ eða $\cos^2\theta = 1/2$. Lausnir fyrri jöfnunnar eru $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Lausnir síðari jöfnunnar eru $\theta = \pi/4, (\pi/4) \pm (\pi/2), (\pi/4) \pm \pi, \ldots$. Þegar við höfum útilokað aukalausnir er lausnamengi jöfnunnar

$$\theta = n\pi \text{ og } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

STÖÐUMAT 1.20

Finnið allar lausnir jöfnunnar $\cos(2\theta) = \sin\theta$.

DÆMI 1.26

Sönnun hornafallasamsemdar

Sannið hornafallasamsemdina $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

Lausn

Við byrjum á samsemdinni

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Með því að deila báðum hliðum þessarar jöfnu með $\cos^2\theta$, fáum við

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Þar sem $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$ og $1/\cos\theta = \sec\theta$, ályktum við að

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta.$$

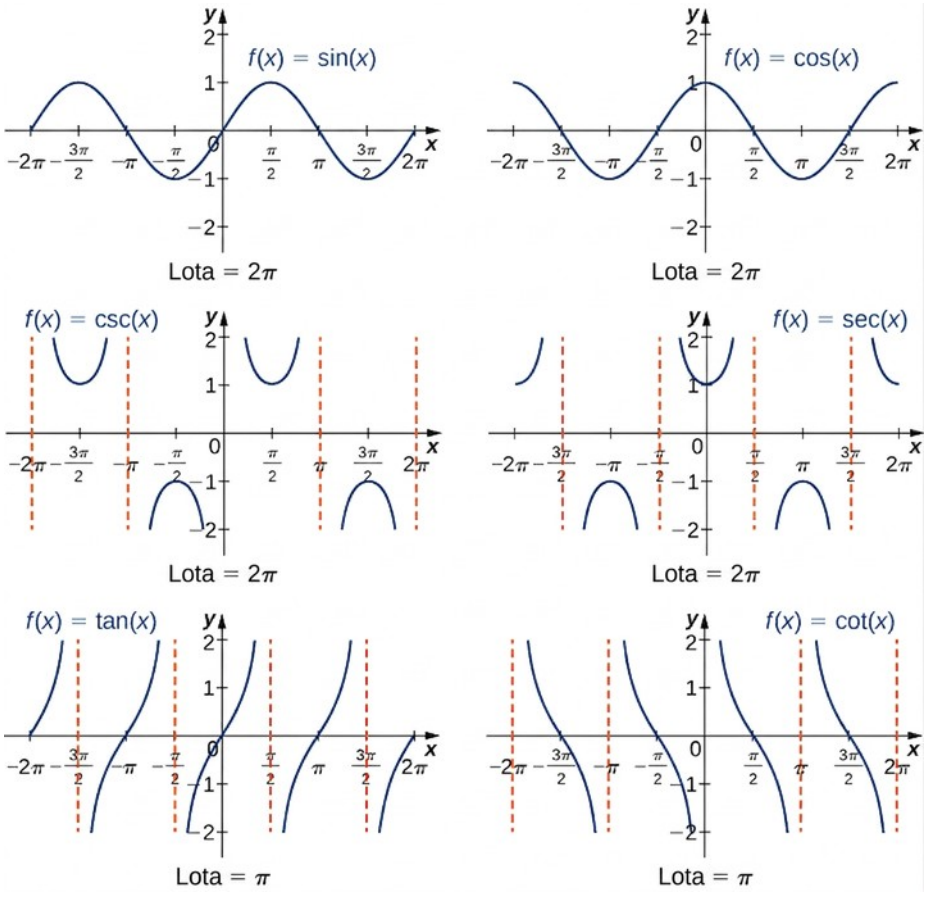
STÖÐUMAT 1.21

1

Sannið hornafallasamsemdina $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.

Gröf og lotur hornafalla

Við höfum séð að þegar við förum eftir einingarhringnum endurtaka gildi hornafallanna sig. Þetta mynstur sést á gröfum fallanna. Látum $P=(x,y)$ vera punkt á einingarhringnum og látum θ vera samsvarandi horn . Þar sem hornin θ og $\theta+2\pi$ samsvara sama punktinum P, eru gildi hornafallanna við θ og við $\theta+2\pi$ þau sömu. Hornaföllin eru því lotubundin föll. Lota falls f er skilgreind sem minnsta jákvæða gildið p þannig að $f(x+p)=f(x)$ fyrir öll gildi x í skilgreiningarmengi f. Sínus-, kósínus-, sekans- og kósekansföllin hafa lotuna 2π. Þar sem tangens- og kótangensföllin endurtaka sig á bili af lengdinni π, er lota þeirra π (Mynd 1.34).



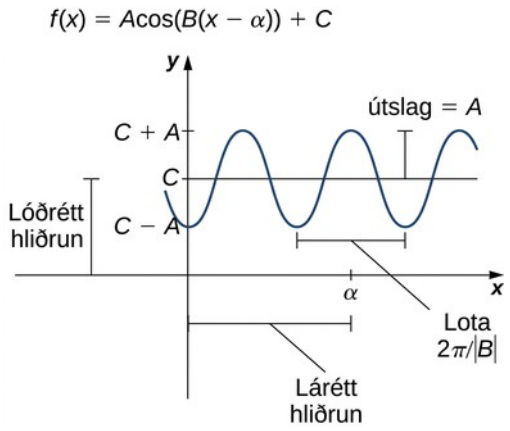
Mynd 1.34 Hornaföllin sex eru lotubundin.

Við getum beitt umbreytingum á hornaföll, rétt eins og á algebruföll. Skoðum sérstaklega eftirfarandi fall:

$$f(x)=A\cos(B(x-\alpha))+C.$$

(1.10)

Á mynd 1.35 veldur fastinn α láréttri hliðrun, eða fasahliðrun. Þátturinn B breytir lotunni. Þetta ummyndaða sínusfall hefur lotuna $2\pi/|B|$. Þátturinn A veldur lóðréttri teygju með stuðlinum $|A|$. Við segjum að $|A|$ sé „útslag f.“ Fastinn C veldur lóðréttri hliðrun.



Mynd 1.35 Graf almenns kósínusfalls.

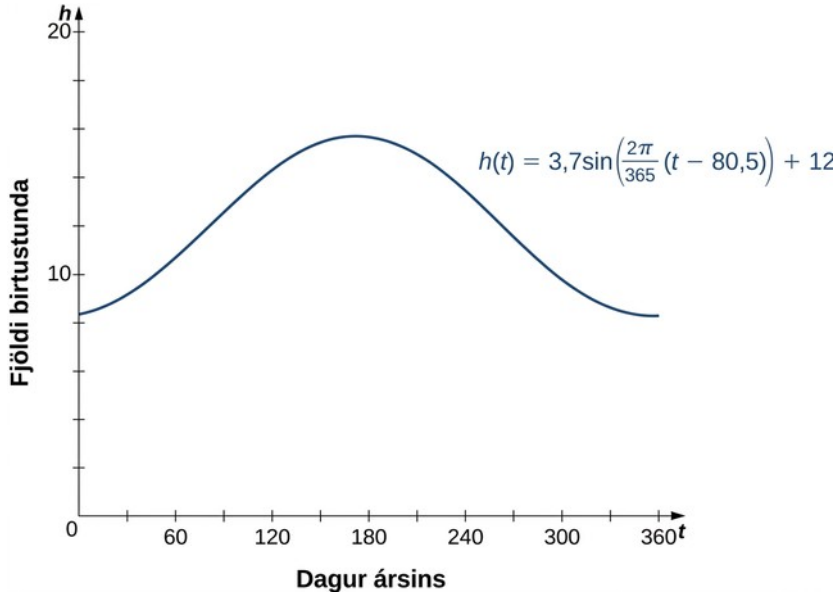
Takið eftir á mynd 1.34 að graf $y=\cos x$ er graf $y=\sin x$ hliðrað um $\pi/2$ einingar til vinstri. Því getum við skrifað $\cos x=\sin(x+\pi/2)$. Á sama hátt getum við litið á graf $y=\sin x$ sem graf $y=\cos x$ hliðrað um $\pi/2$ einingar til hægri og fullyrt að $\sin x=\cos(x-\pi/2)$.

A shifted sine curve arises naturally when graphing the number of hours of daylight in a given location as a function of the day of the year. For example, suppose a city reports that June 21 is the longest day of the year with 15,7 hours and December 21 is the shortest day of the year with 8,3 hours. It can be shown that the function

$$h(t)=3{,}7\ \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80{,}5)\right)+12$$

er líkan fyrir fjölda birtustunda h sem fall af degi ársins t (mynd 1.36).

1



Mynd 1.36 Lýsa má fjölda birtustunda sem fall af degi ársins með hliðruðum sínusferli.

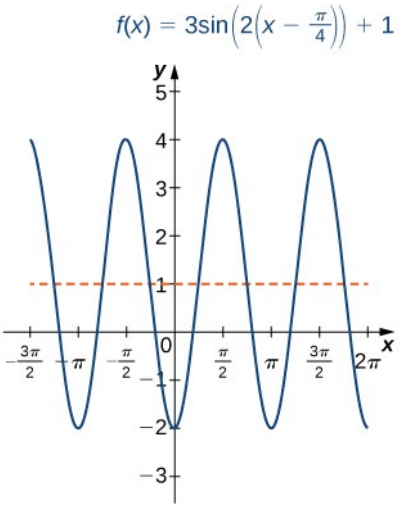
DÆMI 1.27

Teikning grafs ummyndaðs sínusfalls

Teiknið graf fallsins $f(x)=3\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)+1$.

Lausn

Þetta graf fæst með láréttri samþjöppun með stuðlinum 2, fasahliðrun til hægri um $\pi/4$ einingar, síðan lóðréttri teygju með stuðlinum 3 og loks lóðréttri hliðrun um 1 einingu. Lota f er π.



STÖÐUMAT 1.22

Lýsið sambandinu milli grafs $f(x)=3\sin(4x)-5$ og grafs $y=\sin(x)$.

Æfingar úr undirkafla 1.3

Í eftirfarandi æfingum skal breyta hverju horni úr gráðum í radíana. Skrifið svarið sem margfeldi af π.

113.

$$240\,^\circ$$

114.

$$15\,^\circ$$

115.

$$-60\,^\circ$$

116.

$$-225\,^\circ$$

117.

$$330\,^\circ$$

Í eftirfarandi æfingum skal breyta hverju horni úr radíönum í gráður.

118.

$$\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

119.

$$\frac{7\pi}{6}\,\text{rad}$$

1

120.

$$\frac{11\pi}{2}\,\text{rad}$$

121.

$$-3\pi\,\text{rad}$$

122.

$$\frac{5\pi}{12}\,\text{rad}$$

Reiknið eftirfarandi fallgildi.

123.

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

124.

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)$$

125.

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

126.

$$\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

127.

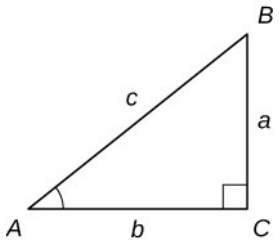
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

128.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skal skoða þríhyrninginn ABC, sem er rétthyrndur þríhyrningur með rétt horn við C. a. Finnið hliðina sem vantar í þríhyrninginn. b. Finnið gildi

hornafallanna sex fyrir hornið við A. Einfaldið í almennt brot eða námundið að þremur aukastöfum eftir því sem við á.



129.

$$a=4\,,c=7$$

130.

$$a=21\,,c=29$$

131.

$$a=85{,}3\,,b=125{,}5$$

132.

$$b=40\,,c=41$$

133.

$$a=84\,,b=13$$

134.

$$b=28\,,c=35$$

Í eftirfarandi æfingum er P punktur á einingarhringnum. a. Finnið (nákvæmt) gildi hnitsins sem vantar fyrir hvern punkt og b. finnið gildi hornafallanna sex fyrir hornið θ þar sem lokaarmurinn liggur um punktinn P. Gerið nefnarana ræðar.

135.

$$P\left(\frac{7}{25}\,,y\right),y>0$$

136.

$$P\left(\frac{-15}{17}\,,y\right),y<0$$

137.

$$P\left(x\,,\frac{\sqrt{7}}{3}\right),x<0$$

138.

$$P\left(x, \frac{-\sqrt{15}}{4}\right), x>0$$

1

Í eftirfarandi æfingum skal einfalda hverja stæðu með því að skrifa hana með sínus og kósínus og einfalda hana síðan. Lokasvarið þarf ekki eingöngu að vera sett fram með sínus og kósínus.

139.

$$\tan^2 x + \sin x \csc x$$

140.

$$\sec x \sin x \cot x$$

141.

$$\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$$

142.

$$\sec x - \cos x$$

143.

$$(1+\tan\theta)^2 - 2\tan\theta$$

144.

$$\sin x(\csc x - \sin x)$$

145.

$$\frac{\cos t}{\sin t} + \frac{\sin t}{1+\cos t}$$

146.

$$\frac{1+\tan^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

Í eftirfarandi æfingum skal sýna fram á að hver jafna sé samsemd.

147.

$$\frac{\tan\theta\cot\theta}{\csc\theta} = \sin\theta$$

148.

$$\frac{\sec^2\theta}{\tan\theta} = \sec\theta\csc\theta$$

149.

$$\frac{\sin t}{\csc t}+\frac{\cos t}{\sec t}=1$$

150.

$$\frac{\sin x}{\cos x+1}+\frac{\cos x-1}{\sin x}=0$$

151.

$$\cot\gamma+\tan\gamma=\sec\gamma\csc\gamma$$

152.

$$\sin^2\beta+\tan^2\beta+\cos^2\beta=\sec^2\beta$$

153.

$$\frac{1}{1-\sin\alpha}+\frac{1}{1+\sin\alpha}=2\sec^2\alpha$$

154.

$$\frac{\tan\theta-\cot\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\sec^2\theta-\csc^2\theta$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa hornafallajöfnurnar á bilinu $0\leq\theta<2\pi$.

155.

$$2\sin\theta-1=0$$

156.

$$1+\cos\theta=\frac{1}{2}$$

157.

$$2\tan^2\theta=2$$

158.

$$4\sin^2\theta-2=0$$

159.

$$\sqrt{3}\cot\theta+1=0$$

160.

$$3\sec\theta-2\sqrt{3}=0$$

161.

$$2\cos\theta\sin\theta=\sin\theta$$

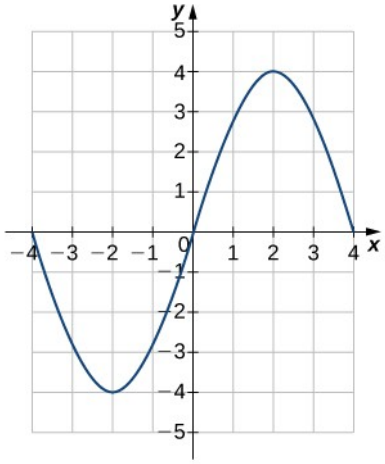
1

162.

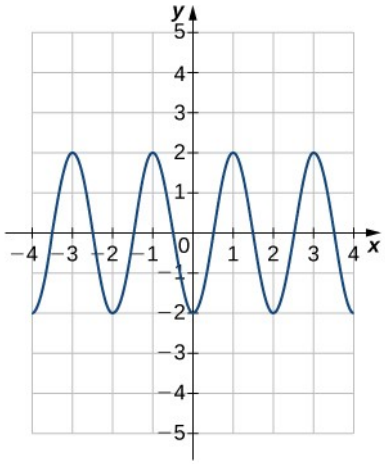
$$\csc^2\theta+2\csc\theta+1=0$$

Í eftirfarandi æfingum er hvert graf á forminu $y=A\sin Bx$ eða $y=A\cos Bx$, þar sem $B>0$. Skrifið jöfnu grafsins.

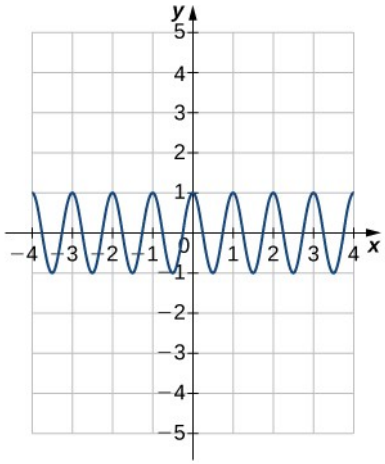
163.



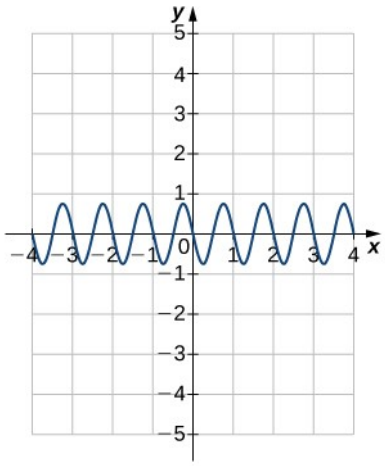
164.



165.



166.



Í eftirfarandi æfingum skal finna a. útslag, b. lotu og c. fasahliðrun ásamt stefnu fyrir hvert fall.

167.

$$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

168.

$$y=3\cos\left(2x+3\right)$$

169.

$$y=\frac{-1}{2}\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$$

170.

$$y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

1

171.

$$y=-3\sin(\pi x+2)$$

172.

$$y=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

173. [T] Þvermál hjóls sem rúllar eftir jörðinni er 40 cm. Ef hjólið snýst um horn sem mælist $120°$, hversu marga sentímetra færist það? Námundið að næsta heila sentímetra.

174. [T] Finnið lengd bogans sem miðhornið θ spannar í hring með geisla r. Námundið að næsta hundraðshluta.

a. $r=12{,}8$ cm, $\theta=\frac{5\pi}{6}$ rad b. $r=4{,}378$ cm, $\theta=\frac{7\pi}{6}$ rad c. $r=0{,}964$ cm, $\theta=50°$ d. $r=8{,}55$ cm, $\theta=325°$

175. [T] Þegar punkturinn P hreyfist eftir hring breytist stærð hornsins. Það hversu hratt hornið breytist kallast hornhraði, ω, og hann er gefinn með $\omega=\theta/t$, þar sem θ er mælt í radíönum og t táknar tíma. Finnið hornhraðann út frá gefnum gögnum. Námundið að næsta þúsundahluta.

a. $\theta=\frac{7\pi}{4}$ rad, $t=10$ sek. b. $\theta=\frac{3\pi}{5}$ rad, $t=8$ sek. c. $\theta=\frac{2\pi}{9}$ rad, $t=1$ mín. d. $\theta=23{,}76$ rad, $t=14$ mín.

176. [T] Samtals þarf 250.000 m² lands til að reisa kjarnorkuver. Gerum ráð fyrir að ákveðið hafi verið að lóð kjarnorkuversins skuli vera hringlaga.

a. Finnið radíus hringlaga landsvæðisins.
b. Ef landsvæðið á að mynda $45°$ hringgeira í stað heils hrings, finnið þá lengd bogadregnu hliðarinnar.

177. [T] Flatarmál jafnarma þríhyrnings með jafnlangar hliðar af lengd x er

$$\frac{1}{2}x^2\sin\theta,$$

þar sem θ er hornið sem hliðarnar tvær mynda. Finnið flatarmál jafnarma þríhyrnings með jafnlangar hliðar sem eru 8 cm að lengd og hornið $\theta=5\pi/12$ rad.

178. [T] Ögn hreyfist eftir hringferli með föstum hornhraða ω. Hornhraðanum er lýst með fallinu $\omega=9\left|\cos(\pi t-\pi/12)\right|$. Ákvarðið hornhraðann þegar $t=9$ sek.

179. [T] Spenna riðstraums í innstungum á heimili er gefin með fallinu

$$V(t)=150\cos 368t,$$

þar sem V er spennan í voltum á tímanum t, mældum í sekúndum.

a. Finnið lotu fallsins og túlkið merkingu hennar.
b. Ákvarðið hve margar lotur líða á 1 sekúndu.

180. [T] Fjöldi dagsbirtustunda í borg í norðausturhluta landsins er gefinn með fallinu

$$N(t)=12+3\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right],$$

þar sem t er fjöldi daga frá 1. janúar.

a. Finnið útslagið og lotuna.
b. Ákvarðið fjölda dagsbirtustunda á lengsta degi ársins.
c. Ákvarðið fjölda dagsbirtustunda á stysta degi ársins.
d. Ákvarðið fjölda dagsbirtustunda 90 dögum eftir 1. janúar.
e. Teiknið graf fallsins fyrir eina lotu frá og með 1. janúar.

181. [T] Gerum ráð fyrir að $T=25+5\ \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-8)\right]$ sé stærðfræðilegt líkan sem lýsir hitastiginu (í gráðum á Celsíus) t klukkustundum eftir miðnætti á tilteknum vikudegi.

a. Ákvarðið útslagið og lotuna.
b. Finnið hitastigið 7 klukkustundum eftir miðnætti.
c. Hvenær er $T=30°$?
d. Teiknið graf T á bilinu $0\le t\le 24$.

182. [T] Fallið $H(t)=2\ \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ lýsir hæð sjávarfalla H (í metrum) t klukkustundum eftir miðnætti. Gerum ráð fyrir að $t=0$ tákni miðnætti.

a. Finnið útslagið og lotuna.
b. Teiknið graf fallsins yfir eina lotu.
c. Hver er sjávarhæðin kl. 4:30 að morgni?

1.4 Andhverf föll

NÁMSMARKMIÐ

- 1.4.1 Ákvarða skilyrðin fyrir því að fall eigi sér andhverfu.
- 1.4.2 Nota lárétta línuprófið til að ákvarða hvenær fall er eintækt.
- 1.4.3 Finna andhverfu tiltekins falls.
- 1.4.4 Teikna graf andhverfs falls.
- 1.4.5 Reikna gildi andhverfra hornafalla.

1

Andhverft fall snýr við aðgerðinni sem tiltekið fall framkvæmir. Með öðrum orðum gerir andhverfa falls að engu það sem fallið gerir. Í þessum undirkafla skilgreinum við andhverft fall með formlegum hætti og setjum fram skilyrðin sem þarf til að það sé til. Við skoðum hvernig finna má andhverft fall og könnum sambandið milli grafs falls og grafs andhverfu þess. Síðan notum við þessar hugmyndir til að skilgreina andhverf hornaföll og fjalla um eiginleika þeirra.

Tilvist andhverfs falls

Við byrjum á dæmi. Ef gefið er fallið f og úttakið $y=f(x)$, viljum við oft finna hvaða gildi x vörpuðust á y með f. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=x^3+4$. Þar sem hvert úttak er $y=x^3+4$, getum við leyst þessa jöfnu fyrir x og komist að því að inntakið er $x=\sqrt[3]{y-4}$. Þessi jafna skilgreinir x sem fall af y. Ef við táknum þetta fall með f^{-1}, og skrifum $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-4}$, sjáum við að fyrir sérhvert x í skilgreiningarmengi f, $f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x^3+4)=x$. Þannig sneri nýja fallið f^{-1}, við því sem upphaflega fallið f gerði. Fall með þennan eiginleika kallast andhverfa upphaflega fallsins.

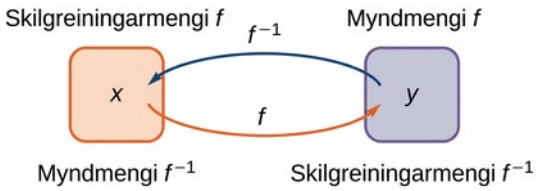
SKILGREINING

Gefið er fall f með skilgreiningarmengið D og myndmengið R, og andhverfa fallsins (ef hún er til) er fallið f^{-1} með skilgreiningarmengið R og myndmengið D þannig að $f^{-1}(y)=x$ ef $f(x)=y$. Með öðrum orðum gildir fyrir fallið f og andhverfu þess f^{-1},

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ fyrir öll } x \text{ í } D, \text{og } f(f^{-1}(y))=y \text{ fyrir öll } y \text{ í } R.$$

(1.11)

Athugið að f^{-1} er lesið „andhverfa f“. Hér er -1 ekki notað sem veldisvísir og $f^{-1}(x)\neq 1/f(x)$. Mynd 1.37 sýnir sambandið milli skilgreiningarmengis og myndmengis f og skilgreiningarmengis og myndmengis f^{-1}.



Mynd 1.37 Fyrir fall f og andhverfu þess f^{-1}, $f^{-1}(y)=x$ gildir þá og því aðeins að $f(x)=y$. Myndmengi f verður skilgreiningarmengi f^{-1} og skilgreiningarmengi f verður myndmengi f^{-1}.

Munið að fall hefur nákvæmlega eitt úttak fyrir hvert inntak. Til þess að skilgreina andhverft fall þurfum við því að varpa hverju inntaki á nákvæmlega eitt úttak. Reynum til dæmis að finna andhverfu fallsins $f(x)=x^2$. Þegar jafnan $y=x^2$ er leyst með tilliti til x, fæst jafnan $x=\pm\sqrt{y}$. Þessi jafna lýsir x ekki sem falli af y vegna þess að jafnan hefur tvær lausnir fyrir

hvert $y>0$. Vandinn við að reyna að finna andhverfu fallsins $f(x)=x^2$ er sá að tveimur inntökum er varpað á sama úttakið fyrir hvert úttak $y>0$. Fallið $f(x)=x^3+4$ sem fjallað var um áður hafði ekki þennan vanda. Það fall varpaði ólíkum inntökum á ólík úttök. Fall sem varpar hverju inntaki á ólíkt úttak kallast eintækt fall.

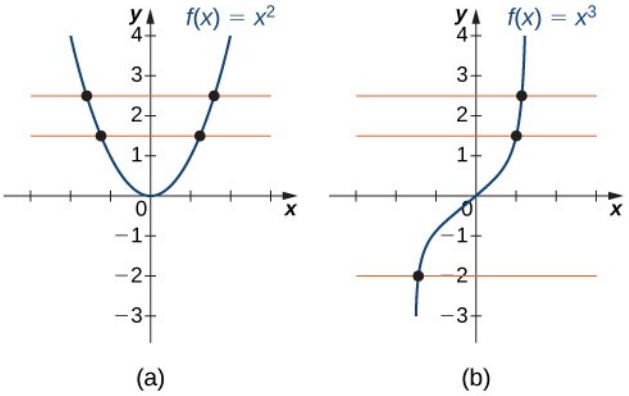
SKILGREINING

Fallið f kallast eintækt fall ef $f(x_1)\neq f(x_2)$ þegar $x_1\neq x_2$.

Ein leið til að ákvarða hvort fall sé eintækt er að skoða graf þess. Ef fall er eintækt geta engin tvö inntaksgildi gefið sama úttaksgildi. Ef við drögum lárétta línu hvar sem er í x y-sléttunni má hún því, samkvæmt lárétta línuprófinu, ekki skera grafið oftar en einu sinni. Athugum að lárétta línuprófið er frábrugðið lóðrétta línuprófinu. Lóðrétta línuprófið ákvarðar hvort graf sé graf falls. Lárétta línuprófið ákvarðar hvort fall sé eintækt (mynd 1.38).

REGLA: LÁRÉTTA LÍNUPRÓFIÐ

Fall f er eintækt þá og því aðeins að sérhver lárétt lína skeri graf f í mesta lagi einu sinni.



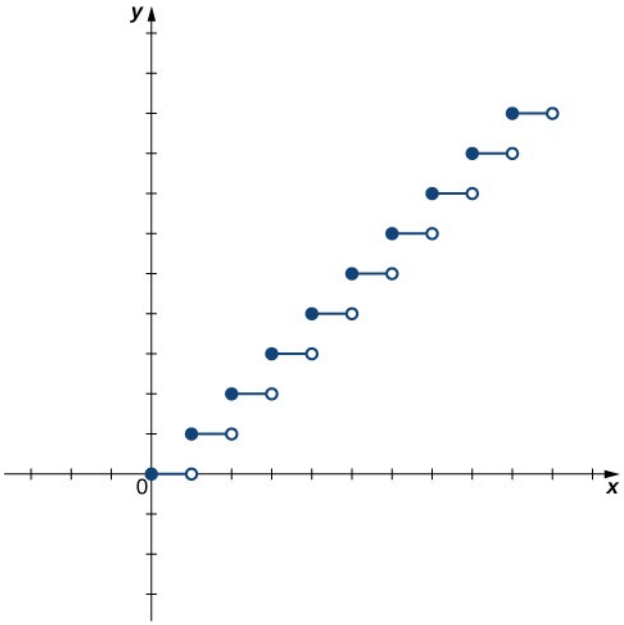
Mynd 1.38 (a) Fallið $f(x)=x^2$ er ekki eintækt vegna þess að það stenst ekki lárétta línuprófið. (b) Fallið $f(x)=x^3$ er eintækt vegna þess að það stenst lárétta línuprófið.

DÆMI 1.28

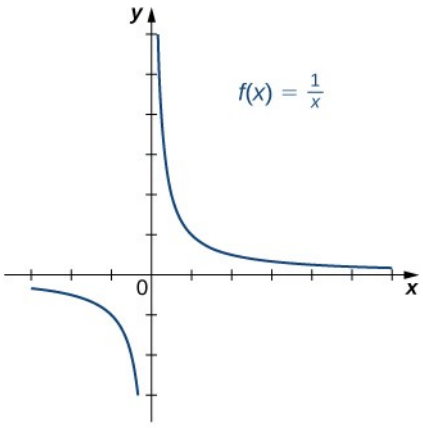
Ákvörðun á því hvort fall sé eintækt

Notið lárétta línuprófið til að ákvarða hvort hvert fallanna hér á eftir sé eintækt.

1



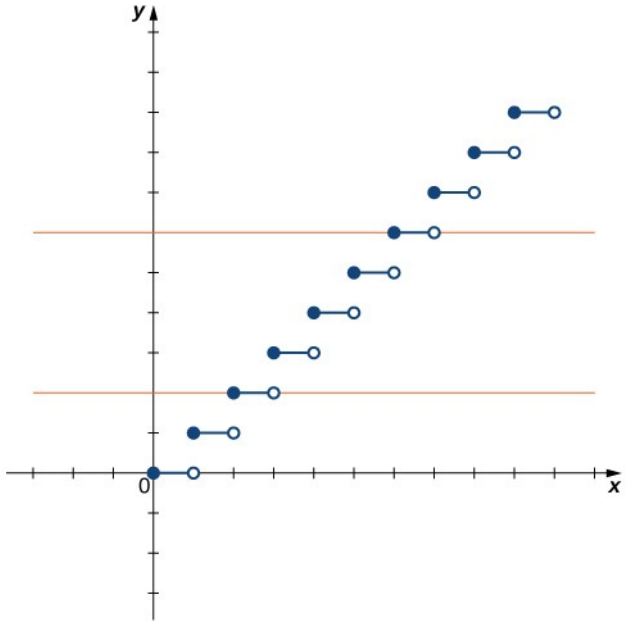
a.



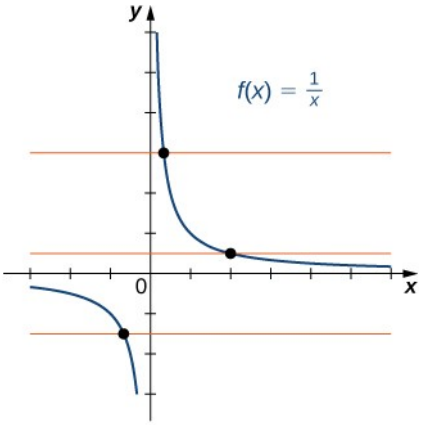
b.

Lausn

a. Þar sem lárétta línan $y = n$ fyrir sérhverja heiltölu $n \geq 0$ sker grafið oftar en einu sinni er fallið ekki eintækt.



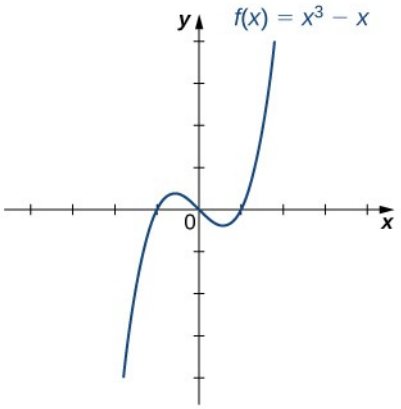
b. Þar sem sérhver lárétt lína sker grafið í mesta lagi einu sinni er fallið eintækt.



STÖÐUMAT 1.23

Er fallið f, sem sýnt er á eftirfarandi mynd, eintækt?

1



Andhverfa falls fundin

Nú getum við skoðað eintæk föll og sýnt hvernig finna má andhverfur þeirra. Rifjum upp að fall varpar stökum í skilgreiningarmengi f á stök í myndmengi f. Andhverfan varpar hverju staki úr myndmengi f aftur á samsvarandi stak úr skilgreiningarmengi f. Til að finna andhverfu eintæks falls f, þurfum við því að taka sérhvert y í myndmengi f, og ákvarða hvaða x í skilgreiningarmengi f uppfyllir $f(x)=y$. Þar sem f er eintækt er nákvæmlega eitt slíkt gildi x. Við getum fundið gildið x með því að leysa jöfnuna $f(x)=y$ með tilliti til x. Þannig getum við ritað x sem fall af y, þar sem skilgreiningarmengi þessa falls er myndmengi f og myndmengi nýja fallsins er skilgreiningarmengi f. Þetta fall er því andhverfa f, og við ritum $x=f^{-1}(y)$. Þar sem við notum yfirleitt x um óháðu breytuna og y um háðu breytuna, víxlum við oft hlutverkum x og y, og ritum $y=f^{-1}(x)$. Að rita andhverfuna á þennan hátt kemur sér einnig vel síðar þegar við teiknum graf fallsins f og graf andhverfu þess f^{-1} í sama hnitakerfi.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Andhverfufall fundið

1. Leysið jöfnuna $y=f(x)$ með tilliti til x.
2. Víxlið breytunum x og y og skrifið $y=f^{-1}(x)$.

DÆMI 1.29

Andhverfufall fundið

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=3x-4$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu fallsins. Sannreynið að $f^{-1}(f(x))=x$.

Lausn

Fylgið skrefunum sem lýst er í aðferðinni.

Skref 1. Ef $y=3x-4$, þá er $3x=y+4$ og $x=\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}$.

Skref 2. Umritið sem $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ og látið $y=f^{-1}(x)$.

Því gildir $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

Þar sem skilgreiningarmengi f er $(-\infty,\infty)$, er myndmengi f^{-1} jafnt $(-\infty,\infty)$. Þar sem myndmengi f er $(-\infty,\infty)$, er skilgreiningarmengi f^{-1} jafnt $(-\infty,\infty)$.

Sannreyna má að $f^{-1}(f(x))=x$ með því að skrifa

$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(3x-4)=\frac{1}{3}(3x-4)+\frac{4}{3}=x-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=x.$$

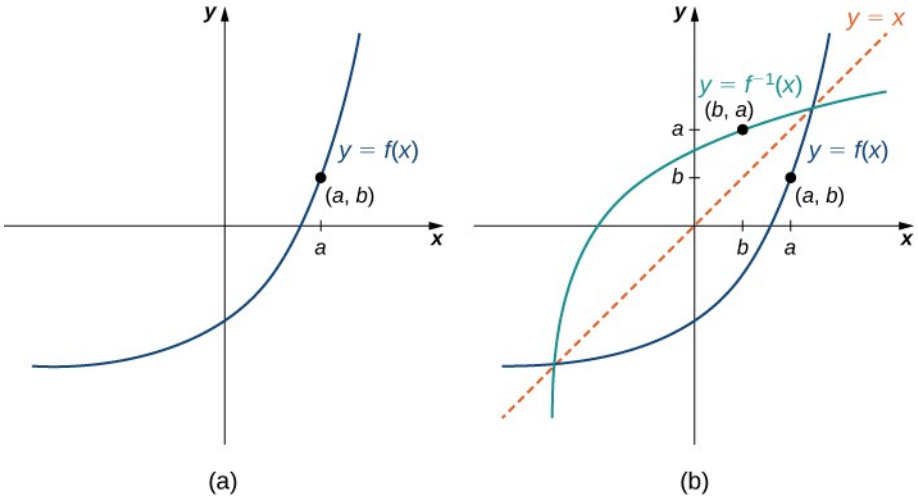
Athugið að til þess að $f^{-1}(x)$ sé andhverfa $f(x)$, verða bæði $f^{-1}(f(x))=x$ og $f(f^{-1}(x))=x$ að gilda fyrir öll x í skilgreiningarmengi innra fallsins.

STÖÐUMAT 1.24

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=3x/(x-2)$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu fallsins.

Graf andhverfra falla

Skoðum sambandið milli grafs falls f og grafs andhverfu þess. Lítum á graf f sem sýnt er á mynd 1.39 og punkt (a,b) á grafinu. Þar sem $b=f(a)$, gildir $f^{-1}(b)=a$. Þegar við teiknum því graf f^{-1}, þá er punkturinn (b,a) á grafinu. Af því leiðir að graf f^{-1} er spegilmynd grafs f um línuna $y=x$.



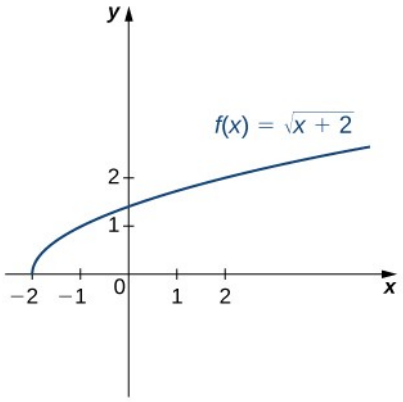
Mynd 1.39 (a) Graf fallsins f sýnir punktinn (a,b) á grafi f. (b) Þar sem (a,b) er á grafi f, er punkturinn (b,a) á grafi f^{-1}. Graf f^{-1} er spegilmynd af grafi f um línuna $y=x$.

DÆMI 1.30

Teikning grafa andhverfra falla

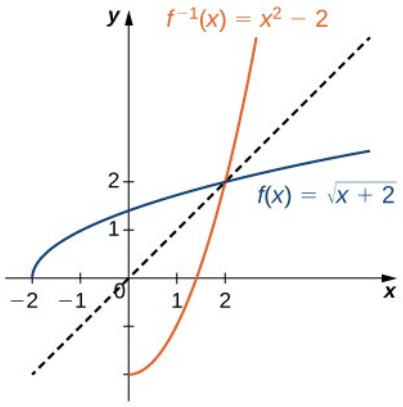
1

Notið graf f á myndinni hér á eftir til að teikna graf f^{-1} með því að teikna línuna $y=x$ og nýta samhverfu. Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi f^{-1}.



Lausn

Speglið grafið um línuna $y=x$. Skilgreiningarmengi f^{-1} er $[0,\infty)$. Myndmengi f^{-1} er $[-2,\infty)$. Með því að nota aðferðina hér að framan til að finna andhverf föll getum við sannreynt að andhverfa fallið sé $f^{-1}(x)=x^2-2$, eins og sýnt er á grafinu.



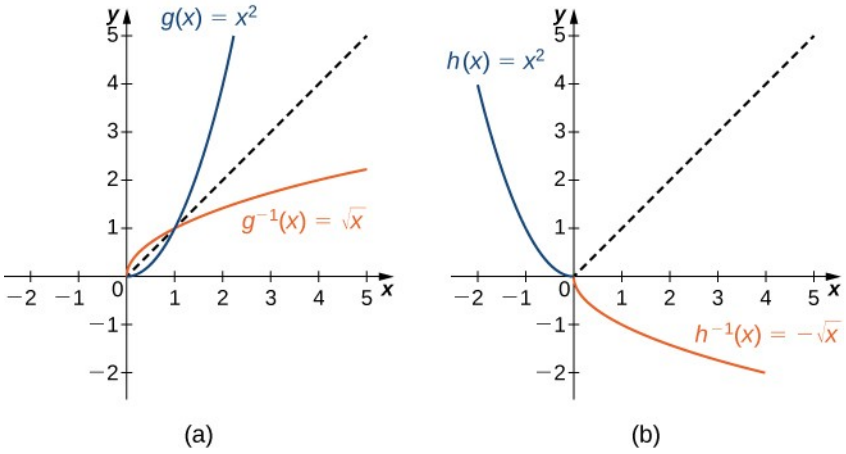
STÖÐUMAT 1.25

Skissið graf $f(x)=2x+3$ og graf andhverfu þess með því að nota samhverfueiginleika andhverfra falla.

Takmörkun skilgreiningarmengja

Eins og við höfum séð hefur $f(x)=x^2$ ekki andhverft fall þar sem það er ekki eintækt. Hins vegar getum við valið hlutmengi úr skilgreiningarmengi f þannig að fallið sé eintækt. Þetta hlutmengi kallast takmarkað skilgreiningarmengi. Ef við takmörkum skilgreiningarmengi f, getum við skilgreint nýtt fall g þannig að skilgreiningarmengi g sé takmarkað

skilgreiningarmengi f og $g(x)=f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi g. Þá getum við skilgreint andhverfu fallsins g á því skilgreiningarmengi. Til dæmis, þar sem $f(x)=x^2$ er eintækt á bilinu $[0,\infty)$, getum við skilgreint nýtt fall g þannig að skilgreiningarmengi g sé $[0,\infty)$ og $g(x)=x^2$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi þess. Þar sem g er eintækt fall hefur það andhverft fall, sem gefið er með formúlunni $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Hins vegar er fallið $f(x)=x^2$ einnig eintækt á skilgreiningarmenginu $(-\infty,0]$. Því gætum við einnig skilgreint nýtt fall h þannig að skilgreiningarmengi h sé $(-\infty,0]$ og $h(x)=x^2$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi h. Þá er h eintækt fall og hlýtur því einnig að hafa andhverft fall. Andhverfa þess er gefin með formúlunni $h^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ (Mynd 1.40).



Mynd 1.40 (a) Þegar $g(x)=x^2$ er takmarkað við $[0,\infty)$, $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$. (b) Þegar $h(x)=x^2$ er takmarkað við $(-\infty,0]$, $h^{-1}(x)=-\sqrt{x}$.

DÆMI 1.31

Takmörkun skilgreiningarmengis

Skoðum fallið $f(x)=(x+1)^2$.

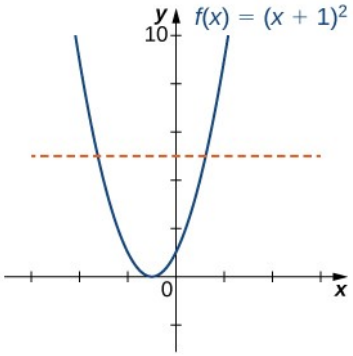
a. Teiknið graf f og notið lárétta línuprófið til að sýna að f er ekki eintækt.

b. Sýnið að f er eintækt á takmarkaða skilgreiningarmenginu $[-1,\infty)$. Ákvarðið skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu f á þessu takmarkaða skilgreiningarmengi og finnið formúlu fyrir f^{-1}.

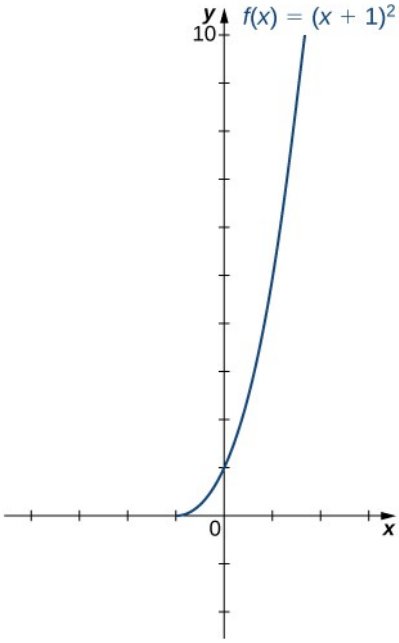
Lausn

1

a. Graf f er graf $y=x^2$ hliðrað um 1 einingu til vinstri. Þar sem til er lárétt lína sem sker grafið oftar en einu sinni er f ekki eintækt.



b. Á bilinu $[-1,\infty)$, f er fallið eintækt.



Skilgreiningarmengi og myndmengi f^{-1} eru myndmengi og skilgreiningarmengi f, í sömu röð. Því er skilgreiningarmengi f^{-1} er $[0,\infty)$ og myndmengi f^{-1} er $[-1,\infty)$. Til að finna formúlu fyrir f^{-1}, leysum við jöfnuna $y=(x+1)^2$ með tilliti til x. Ef $y=(x+1)^2$, þá er $x=-1\pm\sqrt{y}$. Þar sem við takmörkum skilgreiningarmengið við bilið þar sem $x\geq -1$, þurfum við að hafa $\pm\sqrt{y}\geq 0$. Því er $x=-1+\sqrt{y}$. Þegar við víxlum x og y, ritum við $y=-1+\sqrt{x}$ og ályktum að $f^{-1}(x)=-1+\sqrt{x}$.

STÖÐUMAT 1.26

Skoðum $f(x)=1/x^2$ þar sem skilgreiningarmengið er takmarkað við $(-\infty,0)$. Sannreynið að f sé eintækt á þessu skilgreiningarmengi. Ákvarðið skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu f og finnið formúlu fyrir f^{-1}.

Andhverf hornaföll

Grunnhornaföllin sex eru lotubundin og því eru þau ekki eintæk. Ef við takmörkum hins vegar skilgreiningarmengi hornafalls við bil þar sem það er eintækt getum við skilgreint andhverfu þess. Lítum á sínusfallið (Mynd 1.34). Sínusfallið er eintækt á óendanlega mörgum bilum, en venja er að takmarka skilgreiningarmengið við bilið $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Með því skilgreinum við andhverfa sínusfallið á skilgreiningarmenginu $[-1,1]$ þannig að fyrir sérhvert x á bilinu $[-1,1]$, segir andhverfa sínusfallsins okkur hvaða horn θ á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ uppfyllir $\sin\theta = x$. Á sama hátt getum við takmarkað skilgreiningarmengi hinna hornafallanna til að skilgreina andhverf hornaföll, en þau eru föll sem segja okkur hvaða horn á tilteknu bili gefur tiltekið gildi hornafalls.

SKILGREINING

Andhverfa sínusfallsins, táknuð með $\sin^{-1}$ eða arcsin, og andhverfa kósínusfallsins, táknuð með $\cos^{-1}$ eða arccos, eru skilgreindar á skilgreiningarmenginu $D=\{x\,|-1\le x\le 1\}$ sem hér segir:

$$\sin^{-1}(x)=y \text{ ef og aðeins ef } \sin(y)=x \text{ og } -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2};$$
$$\cos^{-1}(x)=y \text{ ef og aðeins ef } \cos(y)=x \text{ og } 0\le y\le\pi.$$

(1.12)

Andhverfa tangensfallsins, táknuð með $\tan^{-1}$ eða arctan, og andhverfa kótangensfallsins, táknuð með $\cot^{-1}$ eða arccot, eru skilgreindar á skilgreiningarmenginu $D=\{x\,|-\infty<x<\infty\}$ sem hér segir:

$$\tan^{-1}(x)=y \text{ ef og aðeins ef } \tan(y)=x \text{ og } -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2};$$
$$\cot^{-1}(x)=y \text{ ef og aðeins ef } \cot(y)=x \text{ og } 0<y<\pi.$$

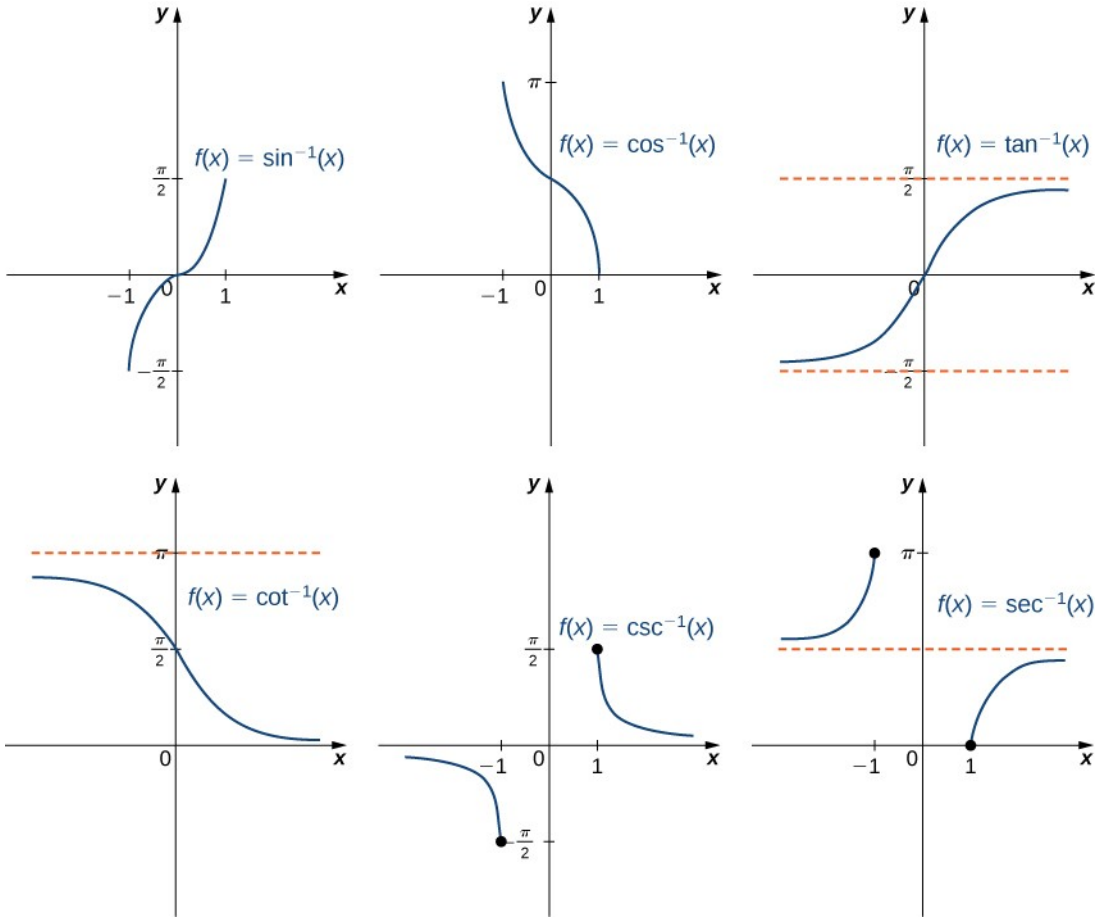
(1.13)

Andhverfa kósekansfallsins, táknuð með $\csc^{-1}$ eða arccsc, og andhverfa sekansfallsins, táknuð með $\sec^{-1}$ eða arcsec, eru skilgreindar á skilgreiningarmenginu $D=\{x\,||x|\ge 1\}$ sem hér segir:

$$\csc^{-1}(x)=y \text{ ef og aðeins ef } \csc(y)=x \text{ og } -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}, y\neq 0;$$
$$\sec^{-1}(x)=y \text{ ef og aðeins ef } \sec(y)=x \text{ og } 0\le y\le\pi, y\neq\pi/2.$$

(1.14)

Til að teikna gröf andhverfu hornafallanna notum við gröf hornafallanna á takmörkuðu skilgreiningarmengjunum sem skilgreind voru hér að framan og speglum gröfin um línuna $y=x$ (Mynd 1.41).



Mynd 1.41 Graf hvers andhverfs hornafalls er spegilmynd samsvarandi takmarkaðs hornafalls um línuna $y=x$.

MARGMIÐLUN

Farið á eftirfarandi vefsvæði til að sjá fleiri samanburði á föllum og andhverfum þeirra.

Þegar gildi andhverfs hornafalls er reiknað er útkoman horn. Til að reikna til dæmis $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, þurfum við að finna horn θ þannig að $\cos\theta=\frac{1}{2}$. Augljóslega hafa mörg horn þennan eiginleika. Samkvæmt skilgreiningunni á $\cos^{-1}$, þurfum við hins vegar að finna hornið θ sem leysir ekki aðeins þessa jöfnu heldur liggur einnig á bilinu $[0,\pi]$. Við ályktum að $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

Við skoðum nú samskeytingu hornafalls og andhverfu þess. Skoðum til dæmis stæðurnar tvær $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ og $\sin^{-1}(\sin(\pi))$. Fyrri stæðuna einföldum við á eftirfarandi hátt:

$$\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Síðari stæðan gefur

$$\sin^{-1}(\sin(\pi))=\sin^{-1}(0)=0.$$

Andhverfan á að „afturkalla“ áhrif upphaflega fallsins, svo hvers vegna er ekki $\sin^{-1}(\sin(\pi))=\pi$? Samkvæmt skilgreiningu okkar á andhverfum föllum uppfylla fall f og andhverfa þess f^{-1} skilyrðið $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ fyrir öll y í skilgreiningarmengi f^{-1} og skilyrðið $f^{-1}(f(x))=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f , og hvað gerðist þá hér? Ástæðan er sú að andhverfa sínusfallsins, $\sin^{-1}$, er andhverfa takmarkaða sínusfallsins sem er skilgreint á menginu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Fyrir x á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, gildir því $\sin^{-1}(\sin x)=x$. Fyrir gildi x utan þessa bils gildir jafnan hins vegar ekki, þótt $\sin^{-1}(\sin x)$ sé skilgreint fyrir allar rauntölur x.

Hvað með $\sin\left(\sin^{-1} y\right)$? Kemur þar upp svipað vandamál? Svarið er nei. Þar sem skilgreiningarmengi $\sin^{-1}$ er bilið $[-1,1]$, ályktum við að $\sin\left(\sin^{-1} y\right)=y$ ef $-1\le y\le 1$ og stæðan er ekki skilgreind fyrir önnur gildi y. Í stuttu máli gildir

$$\sin\left(\sin^{-1} y\right)=y \text{ ef } -1\le y\le 1$$

og

$$\sin^{-1}(\sin x)=x \text{ ef } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

Á sama hátt gildir fyrir kósínusfallið að

$$\cos\left(\cos^{-1} y\right)=y \text{ ef } -1\le y\le 1$$

og

$$\cos^{-1}(\cos x)=x \text{ ef } 0\le x\le\pi.$$

Hin hornaföllin og andhverfur þeirra hafa sambærilega eiginleika.

DÆMI 1.32

Útreikningur á gildum stæða sem innihalda andhverf hornaföll

Reiknið gildi hverrar af eftirfarandi stæðum.

a. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b. $\tan\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

c. $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

d. $\sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

1

Lausn

a. Að reikna $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ jafngildir því að finna hornið θ þannig að $\sin\theta = -\sqrt{3}/2$ og $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Hornið $\theta = -\pi/3$ uppfyllir þessi tvö skilyrði. Því er $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$.

b. Fyrst notum við þá staðreynd að $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$. Þá er $\tan(-\pi/6) = -1/\sqrt{3}$. Því er $\tan(\tan^{-1}(-1/\sqrt{3})) = -1/\sqrt{3}$.

c. Til að reikna $\cos^{-1}(\cos(5\pi/4))$, notum við fyrst þá staðreynd að $\cos(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Þá þurfum við að finna hornið θ þannig að $\cos(\theta) = -\sqrt{2}/2$ og $0 \leq \theta \leq \pi$. Þar sem $3\pi/4$ uppfyllir bæði skilyrðin, fæst $\cos^{-1}(\cos(5\pi/4)) = \cos^{-1}(-\sqrt{2}/2) = 3\pi/4$.

d. Þar sem $\cos(2\pi/3) = -1/2$, þurfum við að reikna $\sin^{-1}(-1/2)$. Með öðrum orðum þurfum við að finna hornið θ þannig að $\sin(\theta) = -1/2$ og $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Þar sem $-\pi/6$ uppfyllir bæði skilyrðin getum við ályktað að $\sin^{-1}(\cos(2\pi/3)) = \sin^{-1}(-1/2) = -\pi/6$.

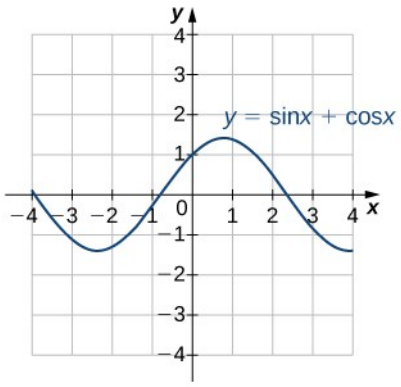
NEMENDAVERKEFNI

Hágildi falls

Á mörgum sviðum vísinda, verkfræði og stærðfræði er gagnlegt að þekkja hæsta gildi sem fall getur tekið, jafnvel þótt við vitum ekki nákvæmt gildi þess á tilteknu augnabliki. Ef við höfum til dæmis fall sem lýsir styrk þakbita viljum við vita hver mesti þungi er sem bitinn getur borið án þess að brotna. Ef við höfum fall sem lýsir hraða lestar viljum við vita hver mesti hraði hennar getur orðið áður en hún fer út af sporinu. Örugg hönnun byggist oft á því að þekkja hágildi.

Í þessu verkefni skoðum við einfalt dæmi um fall þar sem hágildið er háð tveimur stuðlum jöfnunnar. Við munum sjá að hágildi geta verið háð ýmsum öðrum þáttum en óháðu breytunni x.

1. Skoðið grafið á mynd 1.42 af fallinu $y = \sin x + \cos x$. Lýsið lögun þess í heild. Er það lotubundið? Hvernig vitið þið það?



Mynd 1.42 Graf fallsins $y = \sin x + \cos x$.

Notið grafreikni eða annað tæki sem teiknar gröf til að áætla x- og y-gildi hágildispunkts grafsins (fyrsta slíka punktsins þar sem x > 0). Gagnlegt kann að vera að setja x-gildið fram sem margfeldi af π.

2. Skoðið nú önnur gröf af gerðinni $y = A\sin x + B\cos x$ fyrir ýmis gildi A og B. Teiknið grafið þegar A = 2 og B = 1 og finnið x- og y-gildi hágildispunktsins. (Munið að setja x-gildið fram sem margfeldi af π, ef unnt er.) Hefur hann færst?
3. Endurtakið fyrir A = 1, B = 2. Eru einhver tengsl við það sem þið funduð í lið (2)?
4. Fyllið út eftirfarandi töflu og bætið við nokkrum gildum að eigin vali fyrir A og B:

A	*B*	*x*	*y*	*A*	*B*	*x*	*y*
0	1			$\sqrt{3}$	1		
1	0			1	$\sqrt{3}$		
1	1			12	5		
1	2			5	12		
2	1						
2	2						
3	4						
4	3						

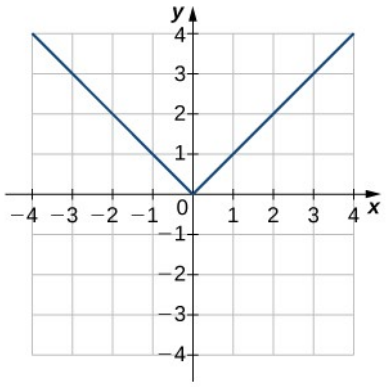
5. Reynið að finna formúluna fyrir y-gildin.
6. Formúlan fyrir x-gildin er aðeins erfiðari. Gagnlegustu punktarnir úr töflunni eru $(1,1),(1,\sqrt{3}),(\sqrt{3},1)$. (Vísbending: Skoðið andhverf hornaföll.)
7. Ef þið funduð formúlur í liðum (5) og (6), sýnið þá að þær samræmast. Setjið formúluna fyrir x-gildið sem þið funduð inn í $y = A\sin x + B\cos x$ og einfaldið þar til formúlan fyrir y-gildið sem þið funduð fæst.

Æfingar úr kafla 1.4

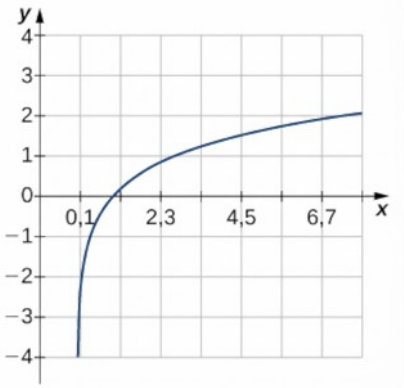
Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota lárétta línuprófið til að ákvarða hvort hvert gefið graf sé eintækt.

1

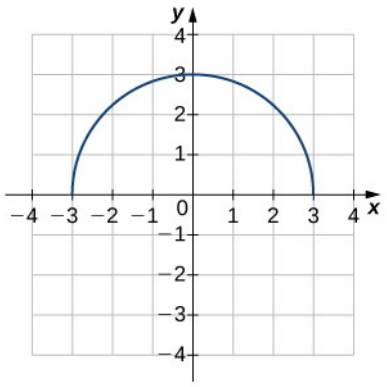
183.



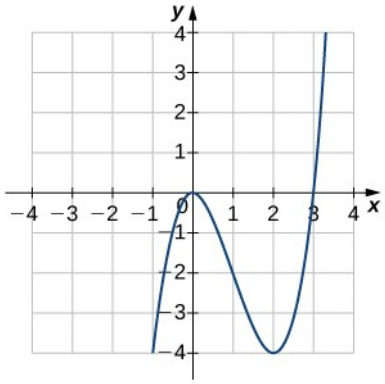
184.



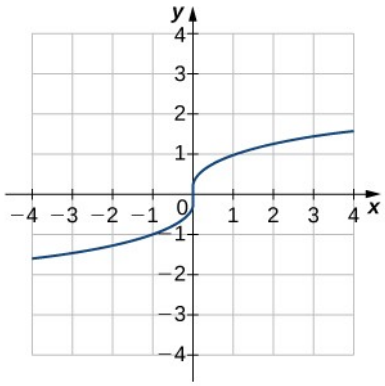
185.



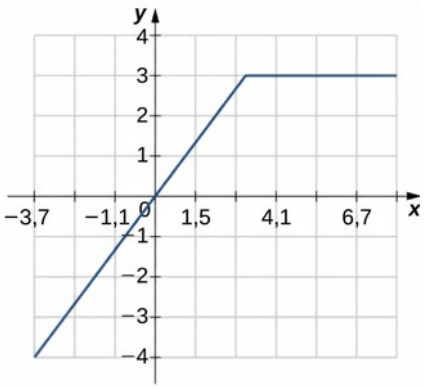
186.



187.



188.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið a. finna andhverfa fallið og b. finna skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu fallsins.

189.

$$f(x)=x^2-4\,,x\geq 0$$

190.

$$f(x)=\sqrt[3]{x-4}$$

191.

$$f(x)=x^3+1$$

1

192.

$$f(x)=(x-1)^2, x\leq 1$$

193.

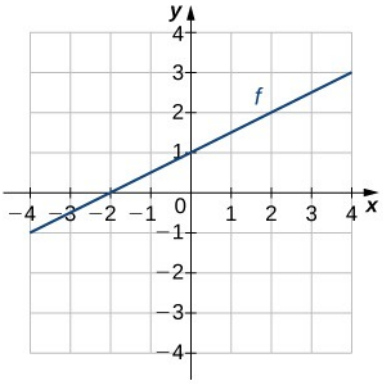
$$f(x)=\sqrt{x-1}$$

194.

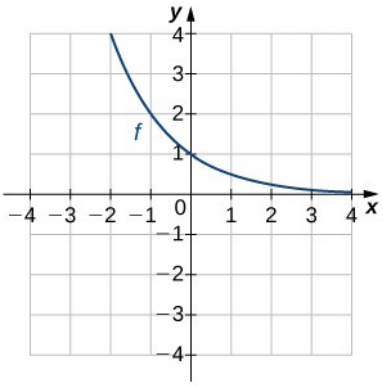
$$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota graf f til að teikna graf andhverfa fallsins.

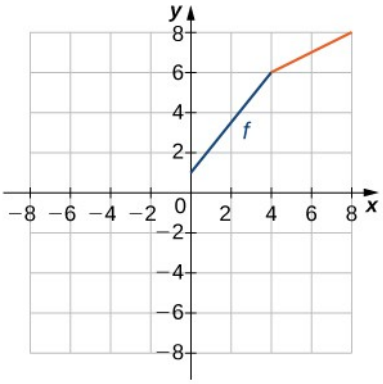
195.



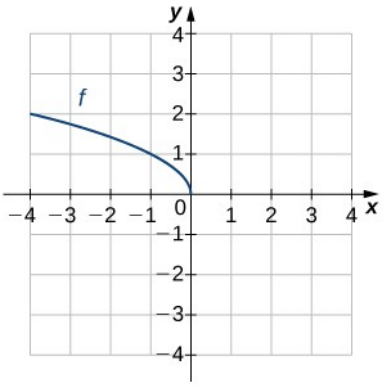
196.



197.



198.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota samskeytingu falla til að ákvarða hvaða fallapör eru andhverf hvort annars.

199.

$$f(x)=8x, g(x)=\frac{x}{8}$$

200.

$$f(x)=8x+3, g(x)=\frac{x-3}{8}$$

201.

$$f(x)=5x-7, g(x)=\frac{x+5}{7}$$

202.

$$f(x)=\frac{2}{3}x+2, g(x)=\frac{3}{2}x+3$$

1

203.

$$f(x)=\frac{1}{x-1}, x\neq 1, g(x)=\frac{1}{x}+1, x\neq 0$$

204.

$$f(x)=x^3+1, g(x)=(x-1)^{1/3}$$

205.

$$f(x)=x^2+2x+1, x\geq -1, g(x)=-1+\sqrt{x}, x\geq 0$$

206.

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}, 0\leq x\leq 2, g(x)=\sqrt{4-x^2}, 0\leq x\leq 2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna gildi fallanna. Gefið nákvæmt gildi.

207.

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

208.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

209.

$$\cot^{-1}(1)$$

210.

$$\sin^{-1}(-1)$$

211.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

212.

$$\cos\left(\tan^{-1}(\sqrt{3})\right)$$

213.

$$\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

214.

$$\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

215.

$$\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

216. Fallið $v = T\,(u) = (5/18)\,u$ breytir hraða í kílómetrum á klukkustund (km/klst) í hraða í metrum á sekúndu (m/s).

a. Finnið andhverfa fallið $F = T^{-1}(C)$

b. Til hvers er andhverfa fallið notað?

217. **[T]** Hraðanum V á blóði í slagæð (í sentímetrum á sekúndu) í fjarlægðinni x cm frá miðju slagæðarinnar má lýsa með fallinu $V = f\,(x) = 500\,(0{,}04 - x^2)$ fyrir $0 \le x \le 0{,}2$.

a. Finnið $x = f^{-1}(V)$.

b. Túlkið til hvers andhverfa fallið er notað.

c. Finnið fjarlægðina frá miðju slagæðar þar sem hraðinn er 15 cm/sec, 10 cm/sec og 5 cm/sec.

218. Fall sem breytir bandarískum fatastærðum í evrópskar er gefið með $D(x) = 2x + 24$.

a. Finnið evrópsku fatastærðirnar sem samsvara bandarísku stærðunum 6, 8, 10 og 12.

b. Finnið fallið sem breytir evrópskum fatastærðum í bandarískar fatastærðir.

c. Notið b-lið til að finna bandarísku fatastærðirnar sem samsvara 46, 52, 62 og 70.

219. **[T]** Kostnaðurinn við að fjarlægja eiturefni úr stöðuvatni er gefinn með fallinu

$C(p) = 75\,p/(85 - p)$, þar sem C er kostnaðurinn (í þúsundum dollara) og p er magn eiturefnisins í litlu stöðuvatni (mælt í milljarðshlutum [ppb]). Þetta líkan gildir aðeins þegar magn eiturefnisins er minna en 85 ppb.

a. Finnið kostnaðinn við að fjarlægja 25 ppb, 40 ppb og 50 ppb af eiturefninu úr stöðuvatninu.

b. Finnið andhverfa fallið. c. Notið b-lið til að ákvarða hve mikið af eiturefninu er fjarlægt fyrir 50.000 €.

220. **[T]** Kappakstursbíll eykur hraðann og hraði hans er gefinn með

$v\,(t) = \frac{25}{4}\,t + 15$, þar sem v er hraðinn (í metrum á sekúndu) á tíma t.

a. Finnið hraða bílsins eftir 10 sek.

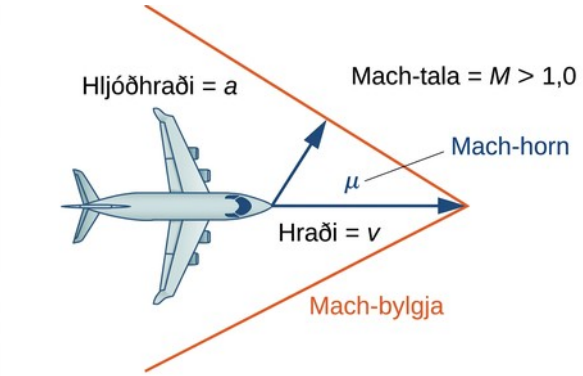
b. Finnið andhverfa fallið.

c. Notið b-lið til að ákvarða hversu langan tíma það tekur bílinn að ná hraðanum 75 m/s.

1

221. **[T]** Mach-tala flugvélar M er hlutfall hraða hennar og hljóðhraðans. Þegar flugvél flýgur í fastri hæð er Mach-horn hennar gefið með $\mu = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$.

Finnið Mach-hornið (námundað að næstu heilu gráðu) fyrir eftirfarandi Mach-tölur.



a. $M = 1{,}4$
b. $M = 2{,}8$
c. $M = 4{,}3$

222. **[T]** Notið $\mu = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$, til að finna Mach-töluna M fyrir eftirfarandi horn.

a. $\mu = \frac{\pi}{6}$
b. $\mu = \frac{2\pi}{7}$
c. $\mu = \frac{3\pi}{8}$

223. **[T]** Lýsa má meðalhita (í gráðum á Celsíus) í borg í norðurhluta Bandaríkjanna með fallinu

$T(x) = 5 + 18\ \sin\left[\frac{\pi}{6}(x - 4{,}6)\right]$, þar sem x táknar tíma í mánuðum og $x = 1{,}00$ samsvarar 1. janúar. Ákvarðið þann dag eða þá daga (mánuð og mánaðardag) þegar meðalhitinn er $21\,^\circ\mathrm{C}$. Látið heiltöluhluta svarsins eða svaranna tákna mánuðinn og reiknið mánaðardaginn út frá tugabrotshlutanum.

224. **[T]** Dýpt vatns (í metrum) við bryggju breytist með flóði og fjöru. Henni er lýst með fallinu

$D(t) = 2\ \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 4$, þar sem t er fjöldi klukkustunda eftir miðnætti. Ákvarðið hvenær fyrst eftir miðnætti dýpið er 5,5 m.

225. **[T]** Hreyfingu hlutar í einfaldri sveifluhreyfingu er lýst með fallinu

$s(t) = -6\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, þar sem s er mælt í sentímetrum og t er mælt í sekúndum. Ákvarðið hvenær vegalengdin sem hluturinn hefur farið verður fyrst 4,5 cm.

226. **[T]** Á listasafni í nágrenninu hangir eins metra hátt málverk þannig að neðri brún þess er 0,8 metrum ofan við augnhæð meðalmanneskju. Lýsa má sjónarhorninu θ með fallinu

$\theta = \tan^{-1}\frac{1{,}8}{x} - \tan^{-1}\frac{0{,}8}{x}$, þar sem x er fjarlægðin (í metrum) frá andlitsmyndinni. Finnið sjónarhornið þegar einstaklingur er 1,2 metra frá andlitsmyndinni.

227. **[T]** Notið reiknivél til að reikna $\tan^{-1}(\tan(2{,}1))$ og $\cos^{-1}(\cos(2{,}1))$. Útskýrið hvora niðurstöðu fyrir sig.

228. **[T]** Notið reiknivél til að reikna $\sin\left(\sin^{-1}(-2)\right)$ og $\tan\left(\tan^{-1}(-2)\right)$. Útskýrið niðurstöðuna í hvoru tilviki.

1.5 Vísisföll og lograföll

NÁMSMARKMIÐ

- 1.5.1 Þekkja form vísisfalls.
- 1.5.2 Útskýra muninn á gröfum x^b og b^x.
- 1.5.3 Gera sér grein fyrir mikilvægi tölunnar e.
- 1.5.4 Þekkja form lografalls.
- 1.5.5 Útskýra sambandið milli vísisfalla og lografalla.
- 1.5.6 Lýsa því hvernig reikna má logra með öðrum grunni.
- 1.5.7 Þekkja breiðbogaföllin, gröf þeirra og helstu samsemdir.

Í þessum undirkafla skoðum við vísisföll og lograföll. Við notum eiginleika þessara falla til að leysa jöfnur sem innihalda vísis- eða logralíði og könnum merkingu og mikilvægi tölunnar e. Við skilgreinum einnig breiðbogaföll og andhverf breiðbogaföll, sem fela í sér samsetningar vísisfalla og lografalla. (Athugið að í kaflanum Notkun heildunar setjum við fram aðrar skilgreiningar á vísisföllum og lograföllum og sýnum fram á að föllin hafi sömu eiginleika óháð því hvor skilgreiningin er notuð.)

Vísisföll

Vísisföll koma fyrir í mörgum hagnýtum viðfangsefnum. Eitt algengt dæmi er fólksfjölgun.

Til dæmis, ef stofn telur P_0 einstaklinga í upphafi og vex síðan um 2%, á ári, er fjöldi einstaklinga í stofninum eftir 1 ár

$$P(1) = P_0 + 0{,}02\ P_0 = P_0(1 + 0{,}02) = P_0(1{,}02).$$

Stofnstærðin eftir 2 ár er

$$P\,(2)=P\,(1)+0{,}02\;P\,(1)=P\,(1)\,(1{,}02)=P_0\,(1{,}02)^2.$$

Almennt er stofnstærðin eftir t ár

1

$$P\,(t)=P_0\,(1{,}02)^t,$$

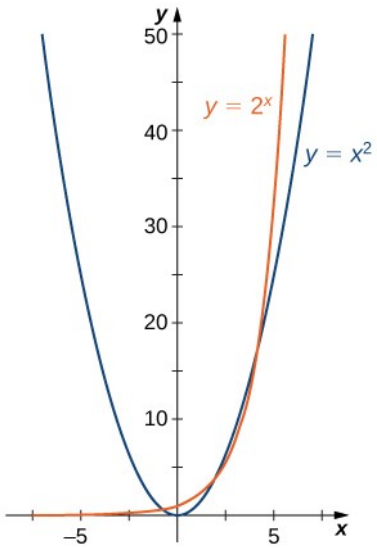
sem er vísisfall. Almennt séð er sérhvert fall af gerðinni $f(x)=b^x$, þar sem $b>0, b\neq 1$, er vísisfall með grunntölu b og veldisvísi x. Vísisföll hafa fastar grunntölur og breytilega veldisvísa. Athugið að fall af gerðinni $f(x)=x^b$ fyrir einhvern fasta b er ekki vísisfall heldur veldisfall.

Til að sjá muninn á vísisfalli og veldisfalli berum við saman föllin $y=x^2$ og $y=2^x$. Í töflu 1.10 sjáum við að bæði 2^x og x^2 stefna á óendanlegt þegar $x\to\infty$. Að lokum verður þó 2^x stærra en x^2 og vex hraðar þegar $x\to\infty$. Í hina áttina, þegar $x\to-\infty, x^2\to\infty$, en $2^x\to 0$. Línan $y=0$ er lárétt aðfella að $y=2^x$.

Tafla 1.10 Gildi x^2 og 2^x

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
2^x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Á mynd 1.43 teiknum við gröf fallanna $y=x^2$ og $y=2^x$ til að sýna hvernig þau eru ólík.



Mynd 1.43 Bæði 2^x og x^2 stefna á óendanlegt þegar $x\to\infty$, en 2^x vex hraðar en x^2. Þegar $x\to-\infty, x^2\to\infty$, en $2^x\to 0$.

Útreikningur á gildum vísisfalla

Rifjum upp reglur um veldi: Ef x er jákvæð heiltala skilgreinum við $b^x = b \cdot b \cdots b$ (með x þáttum af b). Ef x er neikvæð heiltala, þá er $x = -y$ fyrir einhverja jákvæða heiltölu y, og við skilgreinum $b^x = b^{-y} = 1/b^y$. Einnig er b^0 skilgreint sem 1. Ef x er ræð tala, þá er $x = p/q$, þar sem p og q eru heiltölur og $b^x = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p}$. Til dæmis er $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 27$. En hvernig er b^x skilgreint ef x er óræð tala? Til dæmis, hvað er átt við með $2^{\sqrt{2}}$? Þessari spurningu er of flókið að svara til fulls að svo stöddu; við getum þó nálgað svarið. Í töflu 1.11 tökum við saman nokkrar ræðar tölur sem nálgast $\sqrt{2}$, og sýnum einnig gildi 2^x fyrir hverja ræða tölu x. Við fullyrðum að ef við veljum ræðar tölur x sem nálgast $\sqrt{2}$, æ meir, þá nálgast gildi 2^x einhverja tölu L. Við skilgreinum töluna L sem $2^{\sqrt{2}}$.

Tafla 1.11 Gildi 2^x fyrir ræðar tölur sem nálgast $\sqrt{2}$

x	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	1,414213
2^x	2,639	2,65737	2,66475	2,665119	2,665138	2,665143

DÆMI 1.33

Bakteríuvöxtur

Gerum ráð fyrir að tiltekinn bakteríustofn tvöfaldist að stærð á 4 klukkustunda fresti. Ef ræktun inniheldur í upphafi 1000 bakteríur er fjöldi baktería eftir 4 klukkustundir $n(4) = 1000 \cdot 2$. Fjöldi baktería eftir 8 klukkustundir er $n(8) = n(4) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2$. Almennt séð er fjöldi baktería eftir $4m$ klukkustundir $n(4m) = 1000 \cdot 2^m$. Látum $t = 4m$, og sjáum þá að fjöldi baktería eftir t klukkustundir er $n(t) = 1000 \cdot 2^{t/4}$. Finnið fjölda baktería eftir 6 klukkustundir, 10 klukkustundir og 24 klukkustundir.

Lausn

Fjöldi baktería eftir 6 klukkustundir er $n(6) = 1000 \cdot 2^{6/4} \approx 2828$ bakteríur. Fjöldi baktería eftir 10 klukkustundir er $n(10) = 1000 \cdot 2^{10/4} \approx 5657$ bakteríur. Fjöldi baktería eftir 24 klukkustundir er $n(24) = 1000 \cdot 2^6 = 64.000$ bakteríur.

STÖÐUMAT 1.27

Fyrir vísisfallið $f(x) = 100 \cdot 3^{x/2}$, reiknið $f(4)$ og $f(10)$.

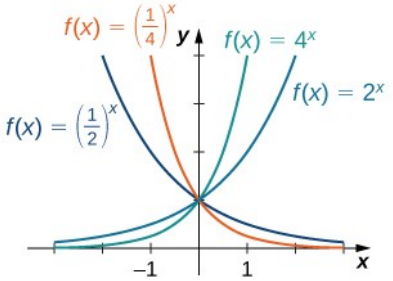
MYNDEFNI

Skoðið Jafnvægi mannfjölda til að sjá annað dæmi um vísisvöxt mannfjölda.

1

Teikning grafa vísisfalla

Fyrir sérhverja grunntölu $b>0, b\neq 1$, er vísisfallið $f(x)=b^x$ skilgreint fyrir allar rauntölur x og $b^x>0$. Því er skilgreiningarmengi $f(x)=b^x$ jafnt $(-\infty,\infty)$ og myndmengið er $(0,\infty)$. Til að teikna graf b^x, tökum við eftir því að þegar $b>1$, b^x er vaxandi á $(-\infty,\infty)$ og $b^x \to \infty$ þegar $x \to \infty$, en $b^x \to 0$ þegar $x \to -\infty$. Hins vegar, ef $0<b<1$, $f(x)=b^x$ er minnkandi á $(-\infty,\infty)$ og $b^x \to 0$ þegar $x \to \infty$ en $b^x \to \infty$ þegar $x \to -\infty$ (mynd 1.44).



Mynd 1.44 Ef $b>1$, þá er b^x vaxandi á $(-\infty,\infty)$. Ef $0<b<1$, þá er b^x minnkandi á $(-\infty,\infty)$.

MYNDEFNI

Skoðið þessa vefsíðu til að kanna gröf vísisfalla nánar.

Athugið að vísisföll uppfylla almenn veldislögmál. Til að rifja þessi lögmál upp setjum við þau fram sem reglur.

REGLA: REIKNIREGLUR VELDISVÍSA

Fyrir sérhverja fasta $a>0, b>0$, og fyrir öll x og y,

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
2. $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
3. $(b^x)^y = b^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

DÆMI 1.34

Notkun veldisreglna

Einfaldið hverja stæðu hér á eftir með veldisreglunum.

a. $\dfrac{(2x^{2/3})^3}{(4x^{-1/3})^2}$

b. $\dfrac{\left(x^3 y^{-1}\right)^2}{\left(x y^2\right)^{-2}}$

Lausn

a. Við getum einfaldað á eftirfarandi hátt:

$$\frac{\left(2x^{2/3}\right)^3}{\left(4x^{-1/3}\right)^2}=\frac{2^3\left(x^{2/3}\right)^3}{4^2\left(x^{-1/3}\right)^2}=\frac{8x^2}{16x^{-2/3}}=\frac{x^2x^{2/3}}{2}=\frac{x^{8/3}}{2}.$$

b. Við getum einfaldað á eftirfarandi hátt:

$$\frac{\left(x^3 y^{-1}\right)^2}{\left(x y^2\right)^{-2}}=\frac{\left(x^3\right)^2\left(y^{-1}\right)^2}{x^{-2}\left(y^2\right)^{-2}}=\frac{x^6y^{-2}}{x^{-2}y^{-4}}=x^6x^2y^{-2}y^4=x^8y^2.$$

STÖÐUMAT 1.28

Notið veldisreglurnar til að einfalda $\left(6x^{-3}y^2\right)/\left(12x^{-4}y^5\right)$.

Talan e

Sérstök gerð vísisfalls kemur oft fyrir í hagnýtum viðfangsefnum. Til að lýsa henni skulum við skoða dæmi um vísisvöxt sem verður til þegar vextir eru lagðir við höfuðstól á sparnaðarreikningi. Gerum ráð fyrir að einstaklingur leggi inn P evrur á sparnaðarreikning með ársvöxtunum r, sem eru lagðir við höfuðstólinn árlega. Fjárhæðin eftir 1 ár er

$$A(1)=P+rP=P(1+r).$$

Fjárhæðin eftir 2 ár er

$$A(2)=A(1)+rA(1)=P(1+r)+rP(1+r)=P(1+r)^2.$$

Almennt séð er upphæðin eftir t ár

$$A(t)=P(1+r)^t.$$

Ef féð er vaxtareiknað 2 sinnum á ári er fjárhæðin eftir hálft ár

$$A\left(\frac{1}{2}\right)=P+\left(\frac{r}{2}\right)P=P\left(1+\left(\frac{r}{2}\right)\right).$$

Fjárhæðin eftir 1 ár er

$$A(1)=A\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{r}{2}\right)A\left(\frac{1}{2}\right)=P\left(1+\frac{r}{2}\right)+\frac{r}{2}\left(P\left(1+\frac{r}{2}\right)\right)=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^2.$$

Eftir t ár er fjárhæðin á reikningnum

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

1

Almennt gildir að ef vextir eru lagðir við höfuðstólinn n sinnum á ári, þá er fjárhæðinni á reikningnum eftir t ár lýst með eftirfarandi falli:

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Hvað gerist þegar $n \to \infty$? Til að svara þessari spurningu látum við $m=n/r$ og skrifum

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mrt},$$

og skoðum hegðun $(1+1/m)^m$ þegar $m \to \infty$, með því að nota gildistöflu (töflu 1.12).

Tafla 1.12 Gildi $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ þegar $m \to \infty$

m	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	2,5937	2,7048	2,71692	2,71815	2,718268	2,718280

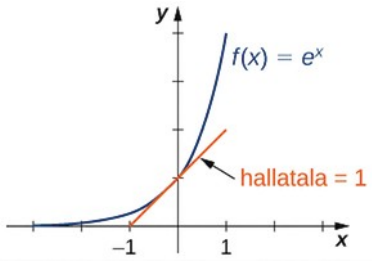
Taflan bendir til að $(1+1/m)^m$ stefni á tölu milli 2,7 og 2,8 þegar $m \to \infty$. Reyndar stefnir $(1+1/m)^m$ á tiltekna tölu þegar $m \to \infty$. Við köllum þessa tölu e. Með sex aukastöfum er

$$e \approx 2{,}718282.$$

Svissneski stærðfræðingurinn Leonhard Euler notaði fyrstur bókstafinn e til að tákna þessa tölu á 3. áratug 18. aldar. Þótt Euler hafi ekki uppgötvað töluna sýndi hann fram á mörg mikilvæg tengsl milli e og lografalla. Enn í dag notum við táknunina e til heiðurs verkum Eulers, enda kemur hún fyrir á mörgum sviðum stærðfræðinnar og nýtist í fjölmörgum hagnýtum viðfangsefnum.

Snúum aftur að dæminu um sparnaðarreikninginn. Við getum ályktað að ef einstaklingur leggur P dollara inn á reikning með ársvöxtum r, sem reiknast samfellt, þá er $A(t)=Pe^{rt}$. Þetta fall kann að vera kunnuglegt. Þar sem föll með grunntöluna e koma oft fyrir í hagnýtum viðfangsefnum köllum við fallið $f(x)=e^x$ hið náttúrulega vísisfall. Fallið er áhugavert, ekki aðeins vegna skilgreiningarinnar á tölunni e, heldur einnig vegna þess að graf þess hefur mikilvægan eiginleika, eins og fjallað verður um næst.

Þar sem $e>1$, vitum við að e^x er vaxandi á $(-\infty,\infty)$. Á mynd 1.45 sýnum við graf $f(x)=e^x$ ásamt snertli við grafið í $x=0$. Í næsta kafla skilgreinum við snertil nákvæmlega, en óformlega segjum við að snertill við graf f í $x=a$ sé lína sem liggur gegnum punktinn $(a,f(a))$ og hefur sömu „hallatölu“ og f í þeim punkti. Fallið $f(x)=e^x$ er eina vísisfallið b^x sem hefur snertil í $x=0$ með hallatöluna 1. Eins og við sjáum síðar í bókinni gerir þessi eiginleiki náttúrlega vísisfallið að einfaldasta vísisfallinu í mörgum tilvikum.



Mynd 1.45 Graf $f(x)=e^x$ hefur snertilínu með hallatöluna 1 í $x=0$.

DÆMI 1.35

Vaxtavextir

Gerum ráð fyrir að $\$500$ sé lagt inn á reikning með ársvöxtum sem nema $r=5{,}5\,\%$, þar sem vextir eru reiknaðir samfellt.

a. Látum t tákna fjölda ára frá upphaflegu fjárfestingunni og $A(t)$ tákna fjárhæðina á reikningnum á tíma t. Finnið formúlu fyrir $A(t)$.

b. Finnið fjárhæðina á reikningnum eftir 10 ár og eftir 20 ár.

Lausn

a. Ef P dollarar eru lagðir inn á reikning með ársvöxtum r, þar sem vextir eru reiknaðir samfellt, þá er $A(t)=Pe^{rt}$. Hér er $P=\$500$ og $r=0{,}055$. Því er $A(t)=500\,e^{0{,}055\,t}$.

b. Eftir 10 ár er fjárhæðin á reikningnum
$A(10)=500\,e^{0{,}055\cdot 10}=500\,e^{0{,}55}\approx 866{,}63\ €$.

Eftir 20 ár er fjárhæðin á reikningnum
$A(20)=500\,e^{0{,}055\cdot 20}=500\,e^{1{,}1}\approx 1.502{,}08\ €$.

STÖÐUMAT 1.29

Ef $\$750$ er lagt inn á reikning með ársvöxtum sem nema $4\,\%$, sem reiknast samfellt, finnið formúlu fyrir innistæðuna á reikningnum eftir t ár. Finnið innistæðuna eftir 30 ár.

Lograföll

Með því að nýta skilning okkar á vísisföllum getum við fjallað um andhverf föll þeirra, sem eru lograföllin. Þau koma að góðum notum þegar við þurfum að skoða fyrirbæri sem getur tekið gildi á mjög víðu bili, svo sem pH-gildi í efnafræði eða hljóðstyrk í desíbelum.

Vísisfallið $f(x)=b^x$ er eintækt, með skilgreiningarmengi $(-\infty,\infty)$ og myndmengi $(0,\infty)$. Því á það sér andhverft fall, sem nefnist lografall með grunntölu b. Fyrir sérhvert $b>0, b\neq 1$, hefur lografallið með grunntölu b, táknað með $\log_b$, skilgreiningarmengið $(0,\infty)$ og myndmengið $(-\infty,\infty)$, og uppfyllir

$\log_b(x)=y$ þá og því aðeins að $b^y=x$.

Til dæmis,

1

$$\log_2(8)=3 \quad \text{þar sem} \quad 2^3=8,$$
$$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right)=-2 \quad \text{þar sem} \quad 10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100},$$
$$\log_b(1)=0 \quad \text{þar sem} \quad b^0=1 \text{ fyrir sérhverja grunntölu } b>0.$$

Enn fremur, þar sem $y=\log_b(x)$ og $y=b^x$ eru andhverf föll,

$$\log_b(b^x)=x \text{ og } b^{\log_b(x)}=x.$$

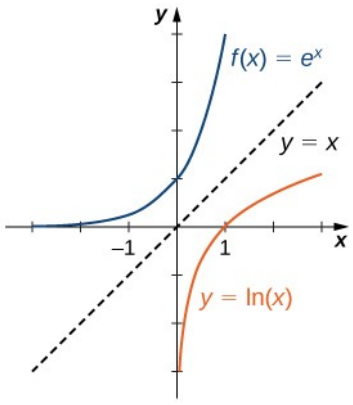
Algengasta lografallið er fallið $\log_e$. Þar sem þetta fall notar töluna e sem grunntölu kallast það náttúrlegi logrinn. Hér notum við táknunina $\ln(x)$ eða $\ln x$ í merkingunni $\log_e(x)$. Til dæmis,

$$\ln(e)=\log_e(e)=1, \ln(e^3)=\log_e(e^3)=3, \ln(1)=\log_e(1)=0.$$

Þar sem föllin $f(x)=e^x$ og $g(x)=\ln(x)$ eru andhverf hvort annars,

$$\ln(e^x)=x \text{ og } e^{\ln x}=x,$$

og gröf þeirra eru samhverf um línuna $y=x$ (mynd 1.46).

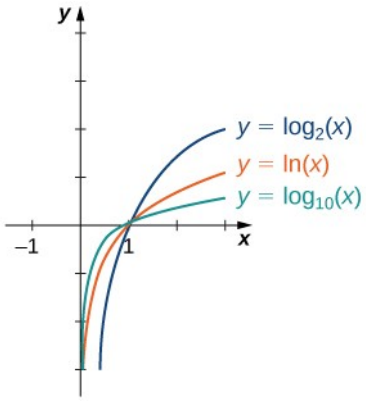


Mynd 1.46 Föllin $y=e^x$ og $y=\ln(x)$ eru andhverf hvort öðru, þannig að gröf þeirra eru samhverf um línuna $y=x$.

MYNDEFNI

Á þessu vefsvæði má sjá dæmi um lograkvarða með grunntölu 10.

Almennt gildir að fyrir sérhverja grunntölu $b>0, b\neq 1$, er fallið $g(x)=\log_b(x)$ samhverft um línuna $y=x$ við fallið $f(x)=b^x$. Út frá þessu og gröfum vísisfallanna teiknum við gröf fallanna $\log_b$ fyrir nokkur gildi $b>1$ (mynd 1.47).



Mynd 1.47 Gröf $y=\log_b(x)$ eru sýnd fyrir $b=2, e, 10$.

Áður en við leysum nokkrar jöfnur sem fela í sér vísisföll og lograföll skulum við rifja upp helstu eiginleika logra.

REGLA: EIGINLEIKAR LOGRA

Ef $a, b, c>0, b\neq 1$, og r er einhver rauntala gildir

1. $\log_b(a\ c)=\log_b(a)+\log_b(c)$ (margfeldisregla)
2. $\log_b\left(\frac{a}{c}\right)=\log_b(a)-\log_b(c)$ (deiliregla)
3. $\log_b(a^r)=r\ \log_b(a)$ (veldisregla)

DÆMI 1.36

Lausn jafna sem innihalda vísisföll

Leysið hverja af eftirfarandi jöfnum með tilliti til x.

a. $5^x=2$

b. $e^x+6e^{-x}=5$

Lausn

a. Með því að beita náttúrulega lografallinu á báðar hliðar jöfnunnar fæst
$\ln 5^x=\ln 2$.

Með veldisreglu logra fæst
$x\ln 5=\ln 2$.

Því er $x=\ln 2/\ln 5$.

b. Með því að margfalda báðar hliðar jöfnunnar með e^x, fáum við jöfnuna
$e^{2x}+6=5e^x$.

1

Með því að umrita þessa jöfnu sem
$e^{2x}-5e^{x}+6=0$,

getum við síðan umritað hana sem annars stigs jöfnu í e^{x}:

$\left(e^{x}\right)^{2}-5\left(e^{x}\right)+6=0$.

Nú getum við leyst annars stigs jöfnuna. Með því að þátta jöfnuna fáum við
$\left(e^{x}-3\right)\left(e^{x}-2\right)=0$.

Því uppfylla lausnirnar $e^{x}=3$ og $e^{x}=2$. Ef við tökum náttúrlega lograng af báðum hliðum fáum við lausnirnar $x=\ln 3, \ln 2$.

STÖÐUMAT 1.30

Leysið $e^{2x}/\left(3+e^{2x}\right)=1/2$.

DÆMI 1.37

Lausn jafna sem innihalda lograföll

Leysið hverja af eftirfarandi jöfnum með tilliti til x.

a. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=4$

b. $\log_{10}\sqrt{x}+\log_{10}x=2$

c. $\ln(2x)-3\ln\left(x^{2}\right)=0$

Lausn

a. Samkvæmt skilgreiningu náttúrulega lografallsins gildir
$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=4$ þá og því aðeins að $e^{4}=\frac{1}{x}$.

Því er lausnin $x=1/e^{4}$.

b. Með því að nota margfeldis- og veldisreglur logra má umrita vinstri hlið jöfnunnar sem
$\log_{10}\sqrt{x}+\log_{10}x=\log_{10}x\sqrt{x}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$.

Því má umrita jöfnuna sem
$\frac{3}{2}\log_{10}x=2$ eða $\log_{10}x=\frac{4}{3}$.

Lausnin er $x=10^{4/3}=10\sqrt[3]{10}$.

c. Með því að nota veldisreglu lografalla getum við umritað jöfnuna sem $\ln(2x)-\ln(x^6)=0$.
Deiliregla logra gefur
$\ln\left(\frac{2}{x^5}\right)=0$.

Því er $2/x^5=1$, sem leiðir til þess að $x=\sqrt[5]{2}$. Síðan ættum við að kanna hvort aðskotalausnir hafi komið fram.

STÖÐUMAT 1.31

Leysið $\ln(x^3)-4\ln(x)=1$.

Þegar þið reiknið gildi lografalls með reiknivél hafið þið kannski tekið eftir því að einu valkostirnir eru $\log_{10}$ eða log, sem nefnist tuglogri, og ln, sem er náttúrlegi logrinn. Vísisföll og lograföll má hins vegar setja fram með hvaða grunntölu sem óskað er. Köllum hana b. Ef þið þurfið reiknivél til að reikna gildi stæðu með annarri grunntölu getið þið fyrst notað grunnskiptiformúlurnar. Með grunnskiptum ritum við yfirleitt vísisfall eða lografall með náttúrulega vísisfallinu og náttúrlega lografallinu.

REGLA: FORMÚLUR UM GRUNNSKIPTI

Látum $a>0, b>0$, og $a\neq 1, b\neq 1$.

1. $a^x=b^{x\log_b a}$ fyrir sérhverja rauntölu x.
   Ef $b=e$, má einfalda jöfnuna í $a^x=e^{x\log_e a}=e^{x\ln a}$.
2. $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$ fyrir sérhverja rauntölu $x>0$.
   Ef $b=e$, má einfalda jöfnuna í $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$.

Sönnun

Fyrri grunnskiptiformúluna leiðum við út með veldisreglu logra. Við vitum að fyrir sérhverja grunntölu $b>0, b\neq 1, \log_b(a^x)=x\log_b a$. Því gildir:

$$b^{\log_b(a^x)}=b^{x\log_b a}.$$

Auk þess vitum við að b^x og $\log_b(x)$ eru andhverf föll. Þess vegna gildir:

$$b^{\log_b(a^x)}=a^x.$$

Með því að sameina þessar tvær síðustu jöfnur ályktum við að $a^x=b^{x\log_b a}$.
Til að sanna seinni eiginleikann sýnum við að

$$\left(\log_b a\right) \cdot \left(\log_a x\right) = \log_b x.$$

Látum $u = \log_b a$, $v = \log_a x$, og $w = \log_b x$. Við sýnum að $u \cdot v = w$. Af skilgreiningu lografalla vitum við að $b^u = a$, $a^v = x$, og $b^w = x$. Af jöfnunum hér að framan sjáum við að

$$b^{uv} = \left(b^u\right)^v = a^v = x = b^w.$$

Þar af leiðandi er $b^{uv} = b^w$. Þar sem vísisföll eru eintæk getum við ályktað að $u \cdot v = w$.

□

DÆMI 1.38

Skipt um grunntölu

Notið reiknitæki til að reikna út $\log_3 7$ með grunnskiptiformúlunni sem kynnt var hér að framan.

Lausn

Notum seinni jöfnuna með $a = 3$ og $e = 3$:

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}77124.$$

STÖÐUMAT 1.32

Notið grunnskiptiformúluna og reiknitæki til að reikna út $\log_4 6$.

DÆMI 1.39

Inngangur að kafla: Richter-kvarðinn fyrir jarðskjálfta



Mynd 1.48 (mynd: breytt útgáfa af verki eftir Robb Hannawacker, Þjóðgarðaþjónusta Bandaríkjanna (NPS))

Árið 1935 þróaði Charles Richter kvarða (sem nú er þekktur sem Richterkvarðinn) til að mæla stærð jarðskjálfta. Kvarðinn er lograkvarði með grunntöluna 10 og honum má lýsa svona:

Lítum á einn jarðskjálfta af stærðinni R_1 á Richterkvarðanum og annan jarðskjálfta af stærðinni R_2 á Richterkvarðanum. Gerum ráð fyrir að $R_1 > R_2$, sem merkir að jarðskjálftinn af stærðinni R_1 er sterkari, en hversu miklu sterkari er hann en hinn jarðskjálftinn? Ein leið til að mæla styrk jarðskjálfta er að nota jarðskjálftamæli til að mæla útslag jarðskjálftabylgnanna. Ef A_1 er útslagið sem mælist fyrir fyrri jarðskjálftann og A_2 er útslagið sem mælist fyrir seinni jarðskjálftann, þá uppfylla útslög og stærðir jarðskjálftanna tveggja eftirfarandi jöfnu:

$$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Skoðum jarðskjálfta sem mælist 8 á Richterkvarðanum og jarðskjálfta sem mælist 7 á Richterkvarðanum. Þá

$$8 - 7 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Því,

$$\log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = 1,$$

sem leiðir af sér að $A_1/A_2 = 10$ eða $A_1 = 10\,A_2$. Þar sem A_1 er 10 sinnum stærri en A_2, segjum við að styrkur fyrri jarðskjálftans sé 10 sinnum meiri en styrkur þess síðari. Ef annar jarðskjálftinn mælist hins vegar 8 á Richterkvarðanum og hinn mælist 6, uppfyllir hlutfallslegur styrkur jarðskjálftanna tveggja jöfnuna

$$\log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = 8 - 6 = 2.$$

Því er $A_1 = 100\,A_2$. Fyrri jarðskjálftinn er með öðrum orðum 100 sinnum öflugri en sá síðari.

Hvernig getum við notað lograföll til að bera saman hlutfallslegan styrk jarðskjálftans af stærðinni 9 í Japan árið 2011 og jarðskjálftans af stærðinni 7,3 á Haítí árið 2010?

Lausn

Til að bera saman jarðskjálftana í Japan og á Haítí getum við notað jöfnu sem áður var sett fram:

$$9 - 7{,}3 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Því er $A_1/A_2 = 10^{1{,}7}$, og við ályktum að jarðskjálftinn í Japan hafi verið um það bil 50 sinnum öflugri en jarðskjálftinn á Haítí.

STÖÐUMAT 1.33

Compare the relative severity of a magnitude 8,4 earthquake with a magnitude 7,4 earthquake.

1

Breiðbogaföll

Breiðbogaföllin eru skilgreind með tilteknum samsetningum af e^x og e^{-x}. Þessi föll koma eðlilega fyrir í ýmsum hagnýtum verkefnum í verkfræði og eðlisfræði, meðal annars við rannsóknir á vatnsbylgjum og sveiflum teygjanlegra himna. Önnur algeng notkun breiðbogafalls er að lýsa hangandi keðju eða kapli, sem myndar svonefndan keðjuferil (mynd 1.49). Ef við veljum hnitakerfi þannig að lægsti punktur keðjunnar liggi á y-ásnum getum við lýst hæð keðjunnar með breiðbogafalli. Fyrst skilgreinum við breiðbogaföllin.



Mynd 1.49 Lögun silkþráðar í köngulóarvef má lýsa með breiðbogafalli. Sömu lögun má sjá á keðju eða kapli sem hangir milli tveggja stoða og ber aðeins eigin þunga. (mynd: „Mtpaley“, Wikimedia Commons)

SKILGREINING

Breiðbogakósínus

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Breiðbogasínus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Breiðbogatangens

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Breiðbogakósekans

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Breiðbogasekans

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Breiðbogakótangens

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Heitið cosh rímar við „gosh“ en heitið sinh er borið fram „cinch“. Tanh, sech, csch og coth eru borin fram „tanch“, „seech“, „coseech“ og „cotanch“, í sömu röð.

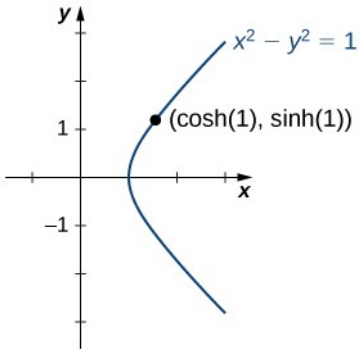
Með því að nota skilgreininguna á $\cosh(x)$ og lögmál eðlisfræðinnar má sýna fram á að hæð hangandi keðju, eins og þeirrar sem sést á mynd 1.49, má lýsa með fallinu $h(x) = a\cosh(x/a) + c$ fyrir tiltekna fasta a og c.

En hvers vegna eru þessi föll kölluð breiðbogaföll? Til að svara þessari spurningu skulum við skoða stærðina $\cosh^2 t - \sinh^2 t$. Með því að nota skilgreininguna á cosh og sinh, sjáum við að

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1.$$

Þessi samsemd er hliðstæða hornafallasamsemdarinnar $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Fyrir sérhvert gefið gildi t, liggur punkturinn $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ á einingarbreiðboganum $x^2 - y^2 = 1$ (Mynd 1.50).

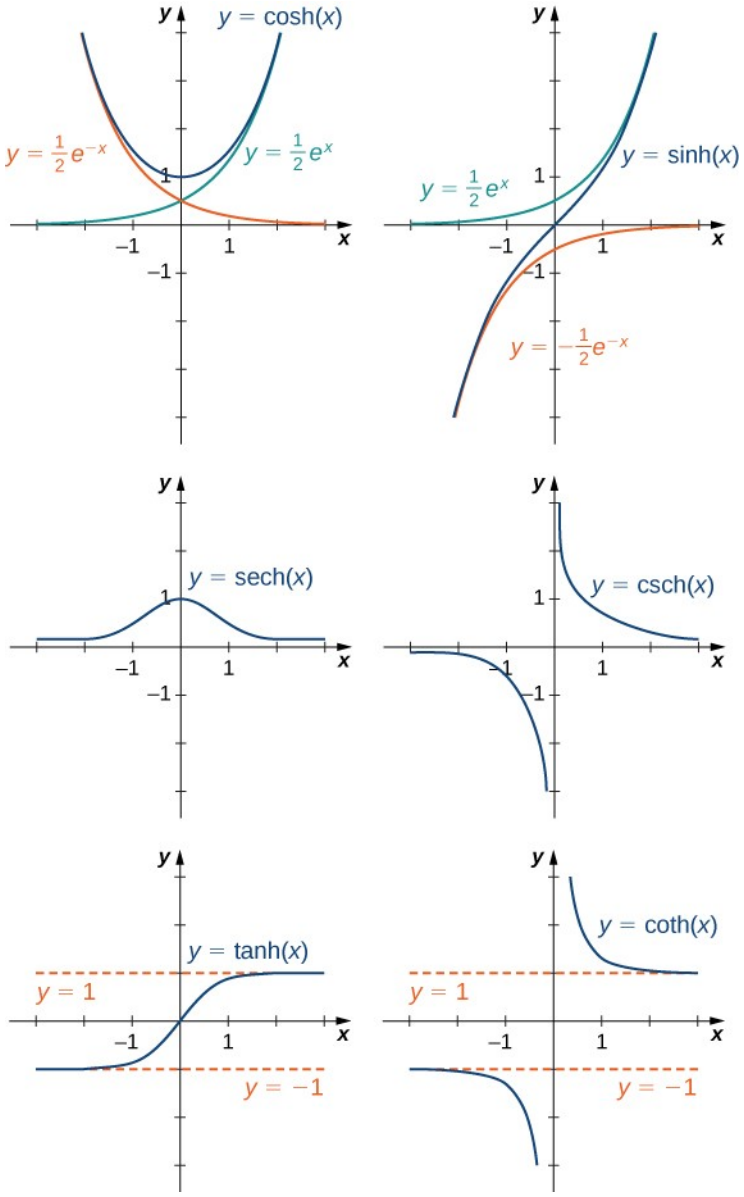
1



Mynd 1.50 Einingarbreiðboginn $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

Gröf breiðbogafalla

Til að teikna gröf $\cosh x$ og $\sinh x$, nýtum við þá staðreynd að bæði föllin stefna á $(1/2)e^x$ þegar $x \to \infty$, þar sem $e^{-x} \to 0$ þegar $x \to \infty$. Þegar $x \to -\infty$, $\cosh x$ stefnir á $1/2\,e^{-x}$, en $\sinh x$ stefnir á $-1/2\,e^{-x}$. Þess vegna notum við gröf $1/2\,e^x$, $1/2\,e^{-x}$, og $-1/2\,e^{-x}$ til hliðsjónar og teiknum gröf $\cosh x$ og $\sinh x$. Til að teikna graf $\tanh x$, notum við þá staðreynd að $\tanh(0) = 0$, $-1 < \tanh(x) < 1$ fyrir öll x, $\tanh x \to 1$ þegar $x \to \infty$, og $\tanh x \to -1$ þegar $x \to -\infty$. Teikna má skissur af gröfum hinna þriggja breiðbogafallanna með því að nota gröf $\cosh x$, $\sinh x$, og $\tanh x$ (mynd 1.51).



Mynd 1.51 Breiðbogaföllin fela í sér samsetningar af e^{x} og e^{-x}.

Samsemdir fyrir breiðbogaföll

Samsemdin $\cosh^2 t - \sinh^2 t$, sem sýnd er á mynd 1.50, er ein af nokkrum samsemdum breiðbogafalla. Sumar þeirra eru taldar upp hér á eftir. Fyrstu fjóra eiginleikana má auðveldlega leiða af skilgreiningum breiðbogasínuss og breiðbogakósínuss. Að nokkrum formerkjamun undanskildum eru flestir þessara eiginleika hliðstæðir samsemdum hornafalla.

REGLA: SAMSEMDIR FYRIR BREIÐBOGAFÖLL

1. $\cosh(-x) = \cosh x$
2. $\sinh(-x) = -\sinh x$

3. $\cosh x + \sinh x = e^{x}$
4. $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
5. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
6. $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
7. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$
8. $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
9. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

DÆMI 1.40

Útreikningur á gildum breiðbogafalla

a. Einfaldið $\sinh(5 \ln x)$.

b. Ef $\sinh x = 3/4$, finnið gildi hinna fimm breiðbogafallanna.

Lausn

a. Með því að nota skilgreiningu sinh fallsins getum við skrifað

$$\sinh(5 \ln x) = \frac{e^{5 \ln x} - e^{-5 \ln x}}{2} = \frac{e^{\ln(x^5)} - e^{\ln(x^{-5})}}{2} = \frac{x^5 - x^{-5}}{2}.$$

b. Með því að nota samsemdina $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, sjáum við að

$$\cosh^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}.$$

Þar sem $\cosh x \geq 1$ fyrir öll x, verður að gilda að $\cosh x = 5/4$. Með því að nota síðan skilgreiningarnar á hinum breiðbogaföllunum fáum við að $\tanh x = 3/5$, $\operatorname{csch} x = 4/3$, $\operatorname{sech} x = 4/5$, og $\coth x = 5/3$.

STÖÐUMAT 1.34

Einfaldið $\cosh(2 \ln x)$.

Andhverf breiðbogaföll

Af gröfum breiðbogafallanna má sjá að þau eru öll eintæk nema $\cosh x$ og $\operatorname{sech} x$. Ef við takmörkum skilgreiningarmengi þessara tveggja falla við bilið $[0, \infty)$, eru öll breiðbogaföllin eintæk og við getum skilgreint andhverf breiðbogaföll. Þar sem breiðbogaföllin sjálf fela í sér vísisföll, fela andhverfu breiðbogaföllin í sér lograföll.

SKILGREINING

Andhverf breiðbogaföll

$$\sinh^{-1}x = \operatorname{arcsinh}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad \cosh^{-1}x = \operatorname{arccosh}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\tanh^{-1}x = \operatorname{arctanh}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) \qquad \coth^{-1}x = \operatorname{arccoth}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{x+1}{x-1}\right)$$
$$\operatorname{sech}^{-1}x = \operatorname{arcsech}x = \ln\left(\tfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1}x = \operatorname{arccsch}x = \ln\left(\tfrac{1}{x}+\tfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

Skoðum hvernig fyrsta jafnan er leidd út. Hinar eru leiddar út á svipaðan hátt. Gerum ráð fyrir að $y=\sinh^{-1}x$. Þá gildir $x=\sinh y$ og samkvæmt skilgreiningu breiðbogasínusfallsins gildir $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$. Því gildir

$$e^y-2x-e^{-y}=0.$$

Með því að margfalda þessa jöfnu með e^y, fáum við

$$e^{2y}-2xe^y-1=0.$$

Þetta má leysa eins og annars stigs jöfnu og lausnin er

$$e^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

Þar sem $e^y>0$, er eina lausnin sú sem hefur jákvætt formerki. Við tökum náttúrlega lograrn af báðum hliðum jöfnunnar og ályktum að

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

DÆMI 1.41

Útreikningur á gildum andhverfra breiðbogafalla

Reiknið gildi hverrar af eftirfarandi stæðum.

$$\sinh^{-1}(2)$$

$$\tanh^{-1}(1/4)$$

Lausn

$$\sinh^{-1}(2)=\ln\left(2+\sqrt{2^2+1}\right)=\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\approx 1{,}4436$$

$$\tanh^{-1}(1/4)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/4}{1-1/4}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5/4}{3/4}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)\approx 0{,}2554$$

STÖÐUMAT 1.35

Reiknið $\tanh^{-1}(1/2)$.

Æfingar úr kafla 1.5

Reiknið gildi vísisfallanna í eftirfarandi æfingum eins og tilgreint er, með tveimur marktækum tölustöfum á eftir kommu.

1

229. $f(x)=5^x$ a. $x=3$ b. $x=\frac{1}{2}$ c. $x=\sqrt{2}$

230. $f(x)=(0{,}3)^x$ a. $x=-1$ b. $x=4$ c. $x=-1{,}5$

231. $f(x)=10^x$ a. $x=-2$ b. $x=4$ c. $x=\frac{5}{3}$

232. $f(x)=e^x$ a. $x=2$ b. $x=-3{,}2$ c. $x=\pi$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið para vísisjöfnuna við rétta grafið.

a. $y=4^{-x}$

b. $y=3^{x-1}$

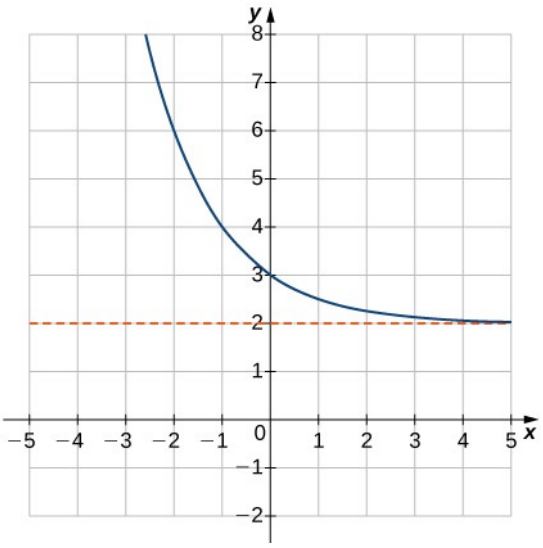
c. $y=2^{x+1}$

d. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$

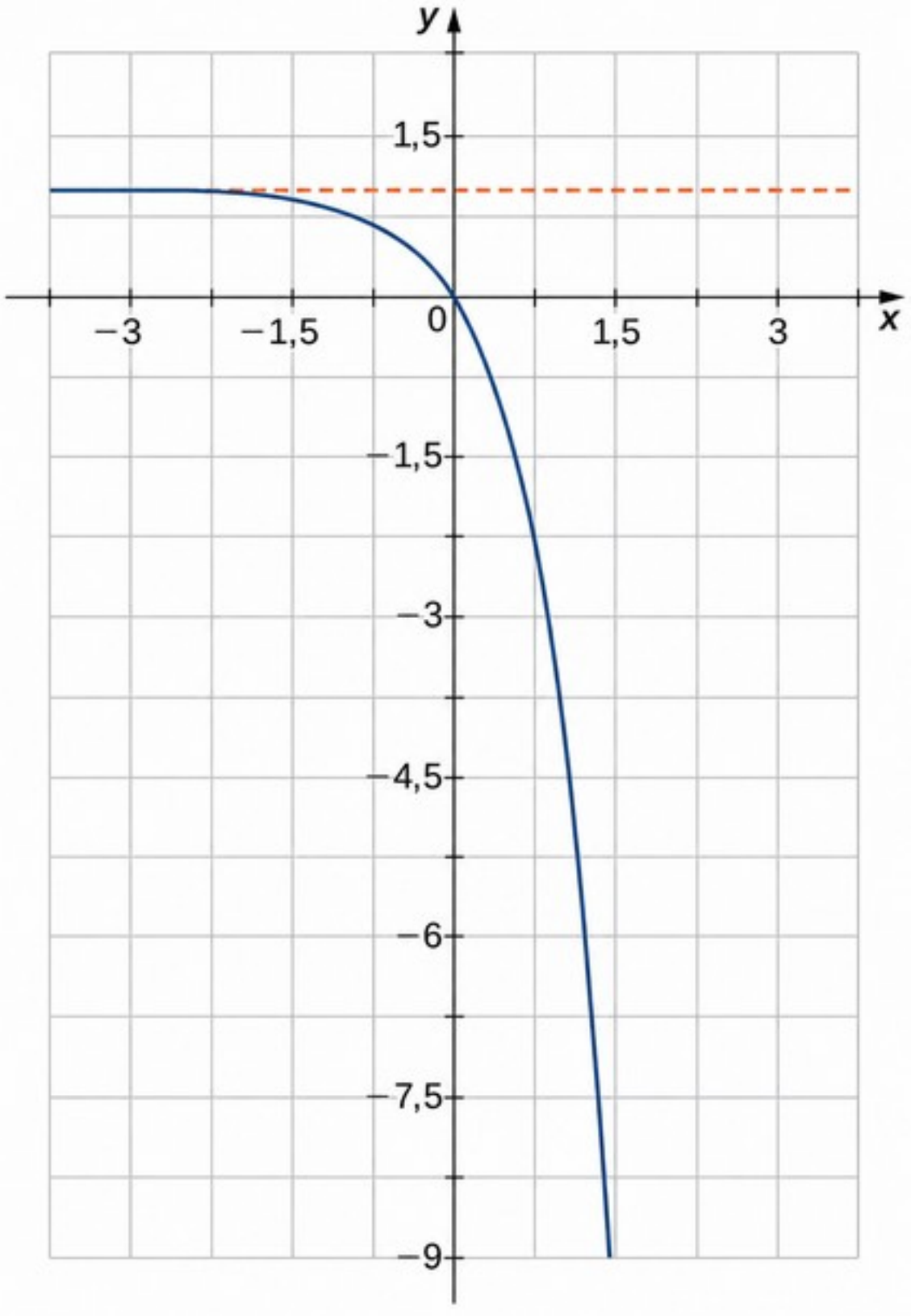
e. $y=-3^{-x}$

f. $y=1-5^x$

233.

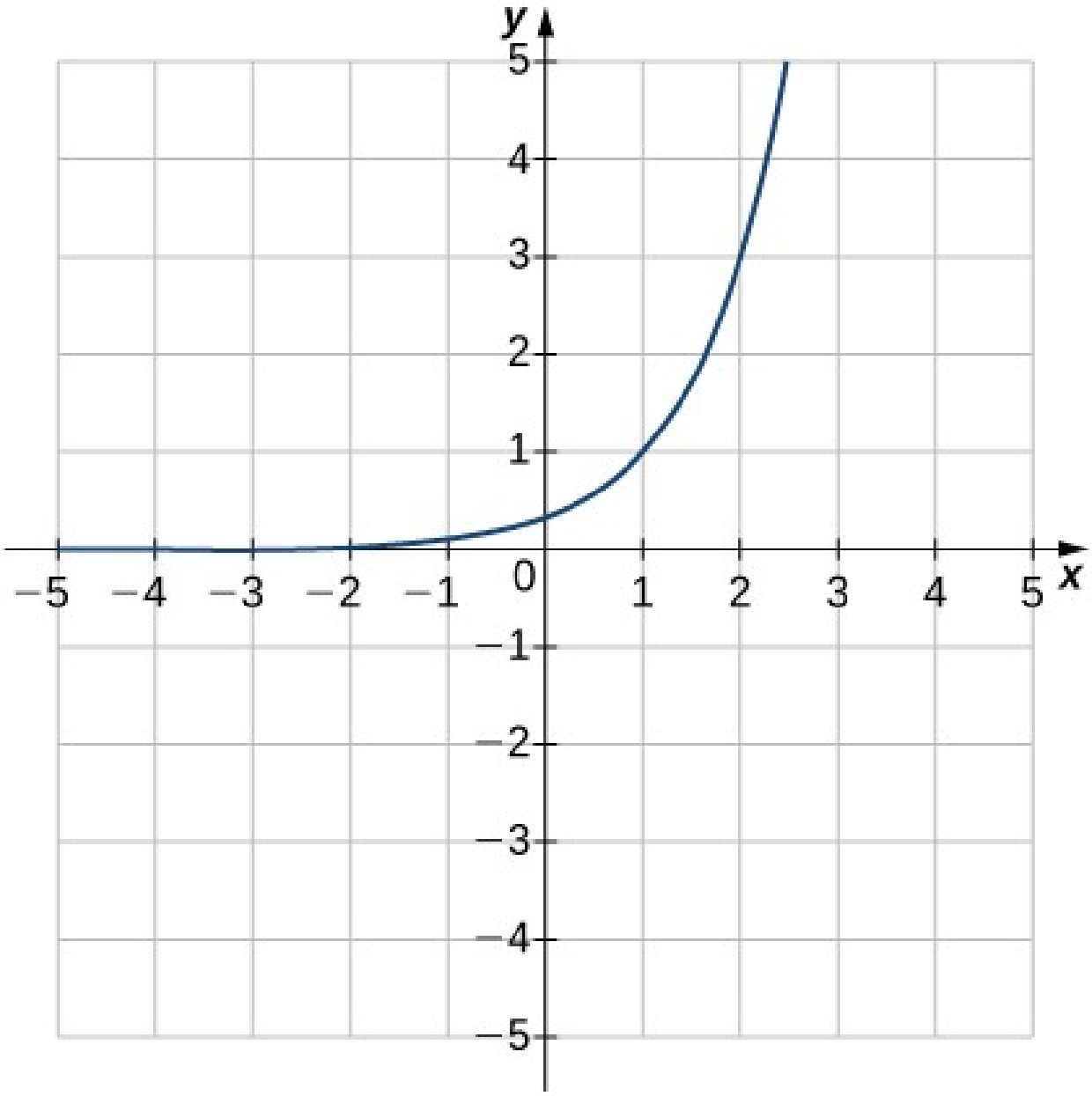


234.

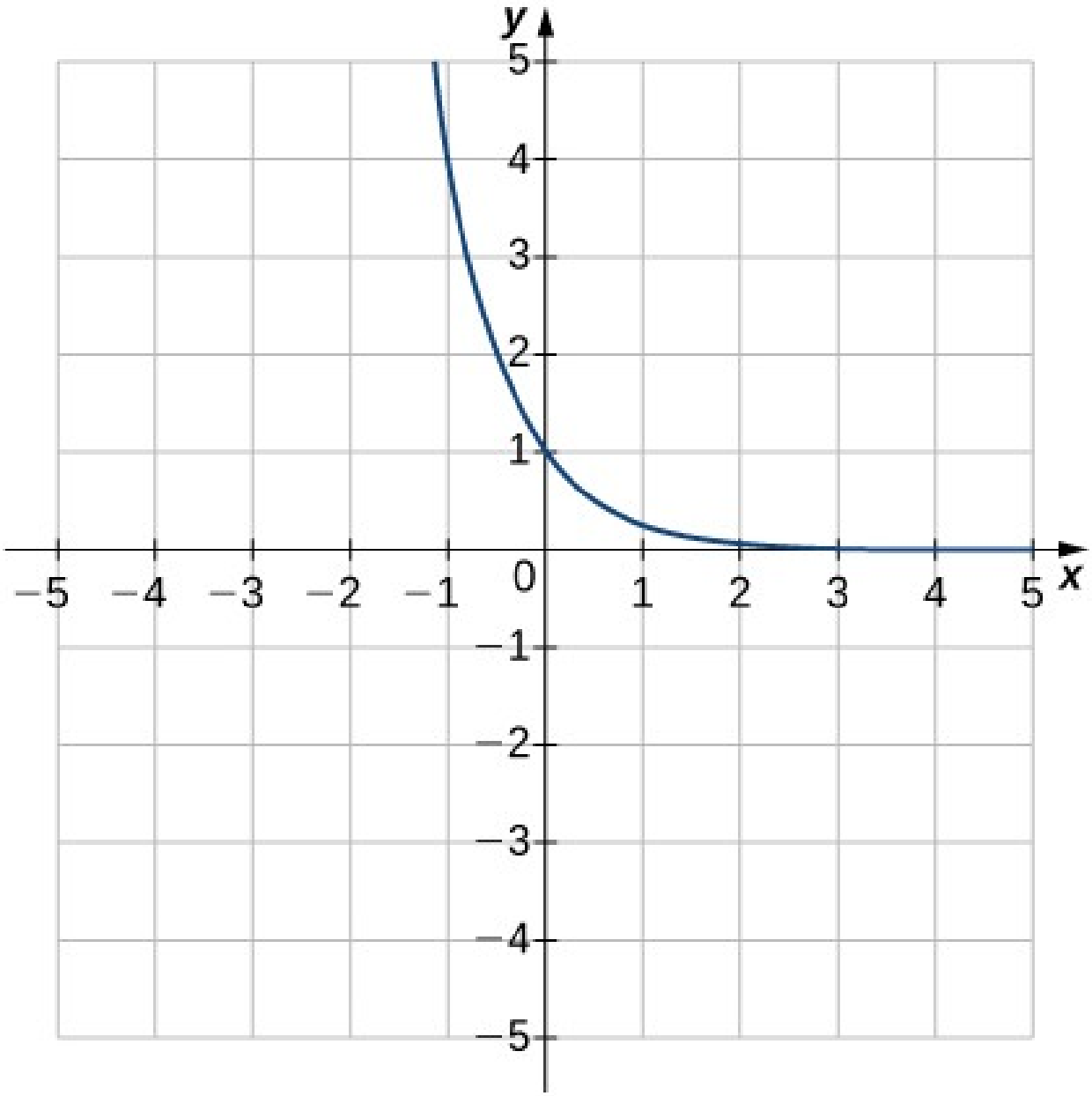


235.

1

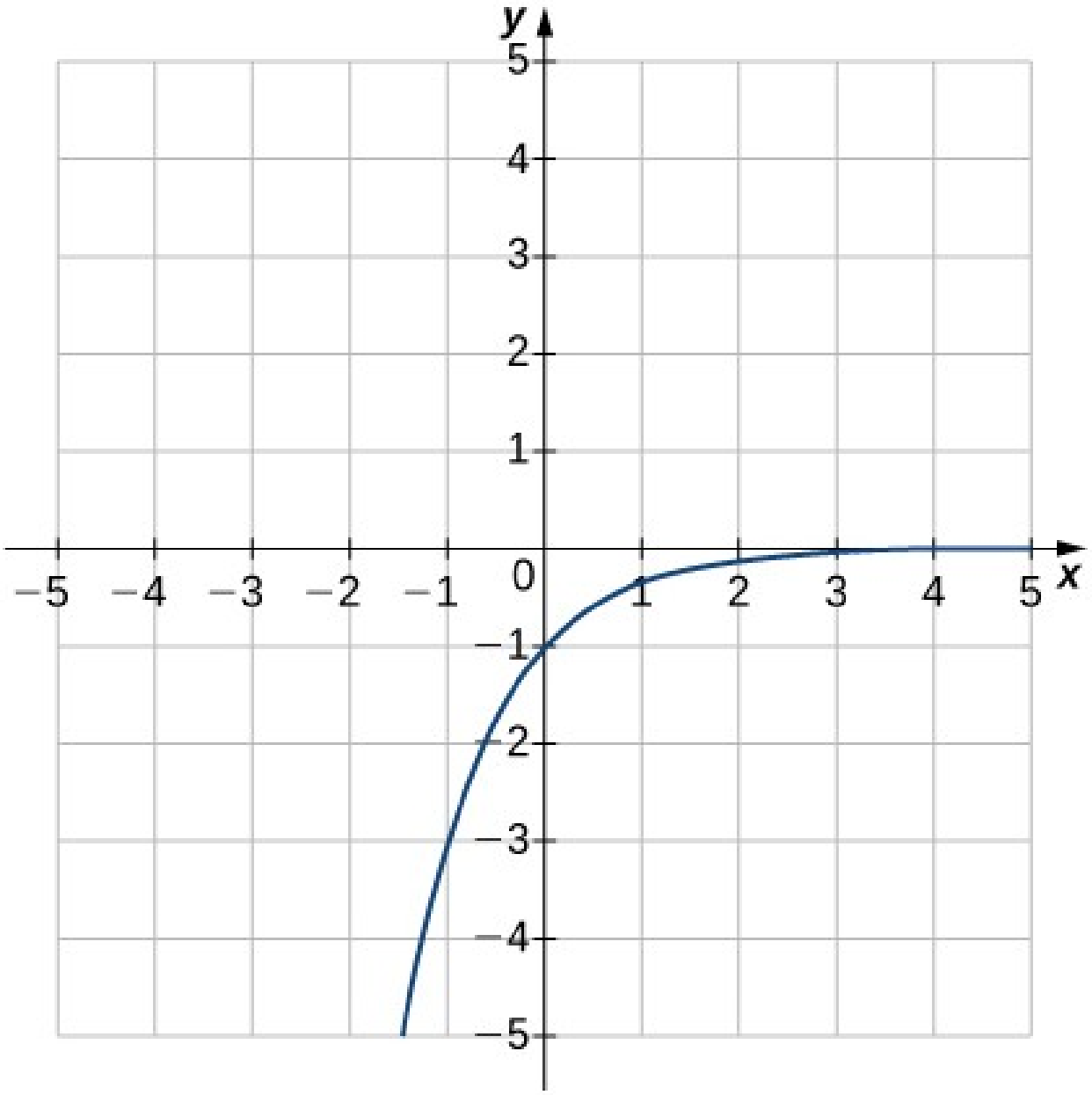


236.

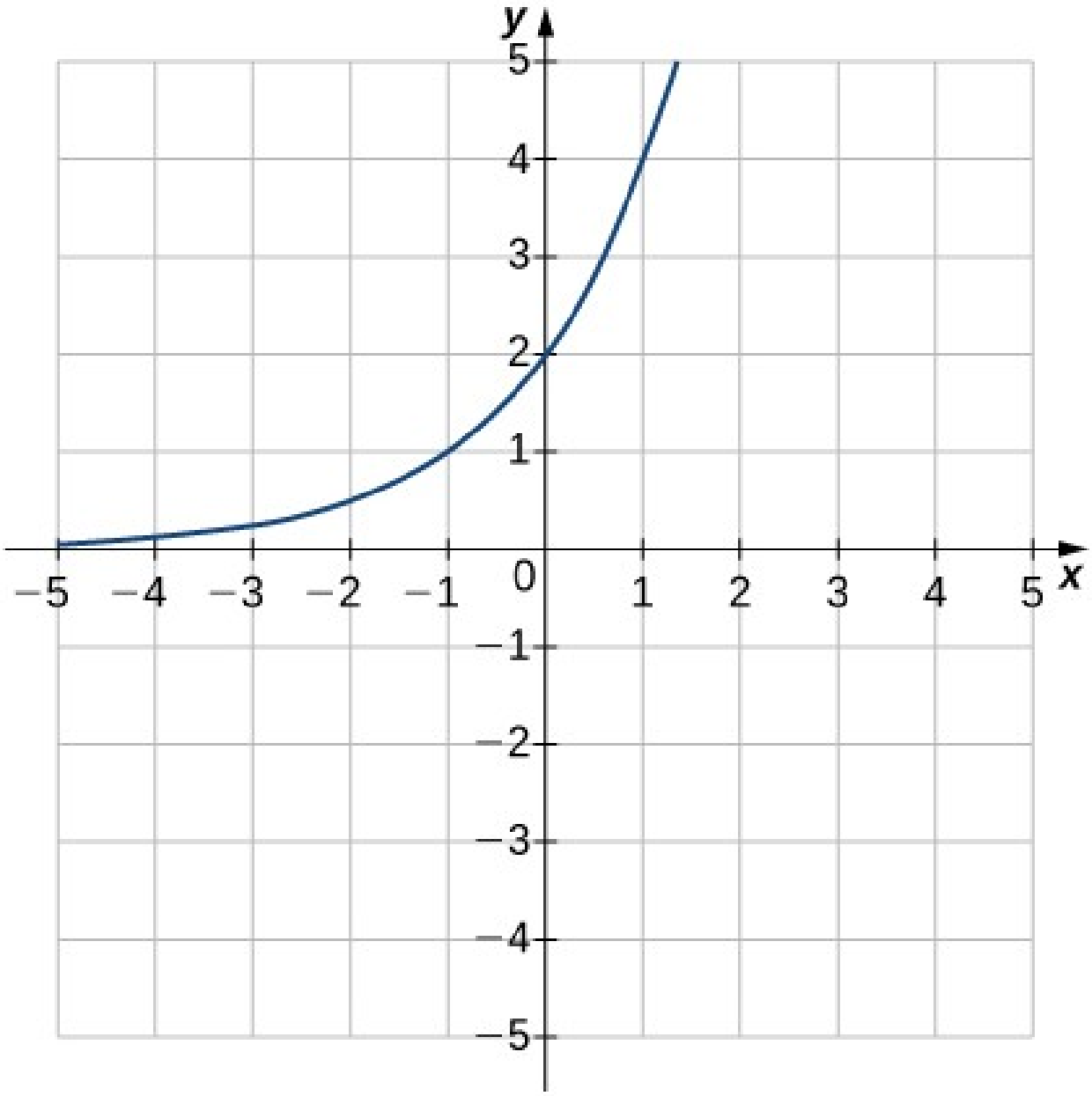


237.

1



238.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skissa graf vísisfallsins. Ákvarðið skilgreiningarmengi, myndmengi og lárétta aðfellu.

239.

$$f(x)=e^{x}+2$$

240.

$$f(x)=-2^{x}$$

241.

$$f(x)=3^{x+1}$$

242.

$$f(x)=4^x-1$$

243.

$$f(x)=1-2^{-x}$$

244.

$$f(x)=5^{x+1}+2$$

245.

$$f(x)=e^{-x}-1$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita jöfnuna á jafngildu vísisformi.

246.

$$\log_3 81=4$$

247.

$$\log_8 2=\frac{1}{3}$$

248.

$$\log_5 1=0$$

249.

$$\log_5 25=2$$

250.

$$\log\ \ 0{,}1=-1$$

251.

$$\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)=-3$$

252.

$$\log_9 3=0{,}5$$

253.

$$\ln 1=0$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita jöfnuna á jafngildu lograformi.

254.

$$2^3=8$$

255.

$$4^{-2}=\frac{1}{16}$$

256.

$$10^{2}=100$$

257.

$$9^{0}=1$$

258.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{1}{27}$$

259.

$$\sqrt[3]{64}=4$$

260.

$$e^{x}=y$$

261.

$$9^{y}=150$$

262.

$$b^{3}=45$$

263.

$$4^{-3/2}=0{,}125$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skissa graf lografallsins. Ákvarðið skilgreiningarmengi, myndmengi og lóðfellu.

264.

$$f(x)=3+\ln x$$

265.

$$f(x)=\ln(x-1)$$

266.

$$f(x)=\ln(-x)$$

267.

$$f(x)=1-\ln x$$

268.

$$f(x)=\log x-1$$

269.

$$f(x)=\ln(x+1)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota eiginleika logra til að skrifa stæðurnar sem summu, mismun og/eða margfeldi logra.

270.

$$\log x^4 y$$

271.

$$\log_3 \frac{9a^3}{b}$$

272.

$$\ln a\sqrt[3]{b}$$

273.

$$\log_5 \sqrt{125\,x\,y^3}$$

274.

$$\log_4 \frac{\sqrt[3]{x\,y}}{64}$$

275.

$$\ln\left(\frac{6}{\sqrt{e^3}}\right)$$

Leysið vísisjöfnuna nákvæmlega í eftirfarandi æfingum.

276.

$$5^x=125$$

277.

$$e^{3x}-15=0$$

278.

$$8^x=4$$

279.

$$4^{x+1}-32=0$$

280.

$$3^{x/14}=\frac{1}{10}$$

281.

$$10^{x}=7{,}21$$

282.

$$4\cdot 2^{3x}-20=0$$

283.

$$7^{3x-2}=11$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið leysa lograjöfnuna nákvæmlega ef það er hægt.

284.

$$\log_3 x=0$$

285.

$$\log_5 x=-2$$

286.

$$\log_4(x+5)=0$$

287.

$$\log(2x-7)=0$$

288.

$$\ln\sqrt{x+3}=2$$

289.

$$\log_6(x+9)+\log_6 x=2$$

290.

$$\log_4(x+2)-\log_4(x-1)=0$$

291.

$$\ln x+\ln(x-2)=\ln 4$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grunnskiptiformúluna og annaðhvort grunntöluna 10 eða grunntöluna e til að reikna gildi stæðnanna. Gefið bæði nákvæmt svar og nálgunargildi, námundað að fjórum aukastöfum.

292.

$$\log_5 47$$

1

293.

$$\log_7 82$$

294.

$$\log_6 103$$

295.

$$\log_{0,5} 211$$

296.

$$\log_2 \pi$$

297.

$$\log_{0,2} 0{,}452$$

298. Umritið eftirfarandi stæður með vísisföllum og einfaldið.

a. $2\cosh(\ln x)$ b. $\cosh 4x + \sinh 4x$ c. $\cosh 2x - \sinh 2x$ d.

$$\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$$

299. **[T]** Fjölda baktería N í ræktun eftir t daga má lýsa með fallinu $N(t) = 1300 \cdot (2)^{t/4}$. Finnið fjölda baktería eftir 15 daga.

300. **[T]** Eftirspurnin D (í milljónum tunna) eftir olíu í olíuríku landi er gefin með fallinu $D(p) = 150 \cdot (2{,}7)^{-0{,}25p}$, þar sem p er verð (í dollurum) á olíutunnu. Finnið eftirspurnina eftir olíu (námundaða að næstu milljón tunna) þegar verðið er á bilinu $15 til $20.

301. **[T]** Verðmæti $100.000 fjárfestingar með samfelldri vaxtareiknun eftir t ár er táknað með A og gefið með $A(t) = 100.000 \cdot e^{0{,}055t}$. Finnið upphæðina A sem hefur safnast upp á 5 árum.

302. **[T]** Fjárfesting ber vexti sem eru lagðir við höfuðstól mánaðarlega, ársfjórðungslega eða árlega og er lýst með fallinu $A = P\left(1 + \frac{j}{n}\right)^{nt}$, þar sem A er verðmæti fjárfestingarinnar á tímanum t, P er upphaflegi höfuðstóllinn, j eru ársvextirnir og n segir til um hversu oft vextirnir eru lagðir við höfuðstólinn á ári. Gefið er að ársvextir séu 3,5% og upphaflegi höfuðstóllinn sé $100.000. Finnið upphæðina A sem hefur safnast upp á 5 árum þegar vextir eru lagðir við höfuðstólinn a. daglega, b. mánaðarlega, c. ársfjórðungslega og d. árlega.

303. **[T]** Styrkur vetnisjóna í efni er táknaður með $[\mathrm{H}^+]$, mældur í mólum á lítra. Sýrustig efnis er skilgreint með lografallinu $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$. Þetta fall er notað til að mæla sýrustig efnis. Sýrustig vatns er 7. Efni með sýrustig undir 7 er sýra en efni með sýrustig yfir 7 er basi.

a. Finnið pH-gildi eftirfarandi efna. Námundið svörin að einum aukastaf.

b. Ákvarðið hvort efnið sé sýra eða basi.

i. Egg: $[\mathrm{H}^+] = 1{,}6 \times 10^{-8}$ mol/L

ii. Bjór: $[\mathrm{H}^+] = 3{,}16 \times 10^{-3}$ mol/L

iii. Tómatsafi: $[\mathrm{H}^+] = 7{,}94 \times 10^{-5}$ mol/L

304. **[T]** Joð-131 er geislavirkt efni sem hrörnar samkvæmt fallinu $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0{,}08664\,t}$, þar sem Q_0 er upphafsmagn sýnis af efninu og t er gefið í dögum. Ákvarðið hve langur tími líður (námundað að næsta heila degi) þar til 95% af magninu hefur hrörnað.

305. **[T]** Samkvæmt Alþjóðabankanum var íbúafjöldi Bandaríkjanna í lok árs 2013 ($t = 0$) 316 milljónir og jókst samkvæmt eftirfarandi líkani:

$P(t) = 316\ e^{0{,}0074\,t}$, þar sem P er mælt í milljónum manna og t er mælt í árum frá árinu 2013.

a. Hver verður íbúafjöldi Bandaríkjanna árið 2020 samkvæmt þessu líkani?

b. Ákvarðið hvenær íbúafjöldi Bandaríkjanna verður tvöfaldur á við það sem hann var árið 2013.

306. **[T]** Upphæðin A sem safnast upp þegar 1000 dollarar eru ávaxtaðir í t ár á 4% vöxtum er lýst með fallinu $A(t) = 1000\,(1{,}04)^t$.

a. Finnið þá fjárhæð sem hefur safnast upp eftir 5 ár og 10 ár.

b. Ákvarðið hve langur tími líður þar til upphaflega fjárfestingin hefur þrefaldast.

307. **[T]** Vitað er að fjöldi baktería í bakteríuþyrpingu sem ræktuð er á rannsóknarstofu tvöfaldast á 12 klukkustundum. Gerum ráð fyrir að í upphafi séu 1000 bakteríur til staðar.

a. Notið vísisfallið $Q = Q_0 e^{kt}$ til að ákvarða gildið k, sem er vaxtarhraði bakteríanna. Námundið að fjórum aukastöfum.

b. Áætlið hve langan tíma það tekur bakteríunum að fjölga í 200.000.

308. **[T]** Kanínustofninn í veiðifriðlandinu tvöfaldast á 6 mánaða fresti. Gerum ráð fyrir að í upphafi hafi kanínurnar verið 120 talsins.

a. Notið vísisfallið $P = P_0 a^t$ til að ákvarða vaxtarfastann a. Námundið að fjórum aukastöfum.

b. Notið fallið í a-lið til að ákvarða um það bil hve langur tími líður þar til kanínustofninn nær 3500.

309. **[T]** Jarðskjálftinn í San Francisco árið 1906 mældist 8,3 á Richterkvarðanum. Á sama tíma varð jarðskjálfti í Japan sem mældist 4,9 og olli aðeins minniháttar skemmdum. Um það bil hversu miklu öflugri var jarðskjálftinn í San Francisco en jarðskjálftinn í Japan? Sjá skilgreiningu Richterkvarðans í þessum undirkafla.

1

Lykilhugtök

algildisfall

$$f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$$

algebrufall

fall sem fæst með því að beita eingöngu grunnaðgerðunum samlagningu, frádrætti, margföldun, deilingu, veldisreikningi og rótarútdrætti, í hvaða samsetningu sem er, á inntaksbreytuna x

grunntala

talan b í vísisfallinu $f(x)=b^x$ og lografallinu $f(x)=\log_b x$

samskeytt fall

fyrir tvö gefin föll f og g, er nýtt fall, samskeytta fallið, táknað $g \circ f$, þannig að $(g \circ f)(x)=g(f(x))$

þriðja stigs fall

margliða af þriðja stigi, það er fall af gerðinni $f(x)=a x^3+b x^2+c x+d$, þar sem $a \neq 0$

minnkandi á bilinu I

fall er minnkandi á bilinu I ef fyrir öll $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) \geq f(x_2)$ þegar $x_1 < x_2$

stig

fyrir margliðufall er stigið hæsti veldisvísir nokkurs liðar í margliðunni

háð breyta

breyta sem táknar fallgildi falls

skilgreiningarmengi

mengi inntaksgilda falls

jafnstætt fall

fall er jafnstætt ef $f(-x)=f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f

veldisvísir

gildið x í stæðunni b^x

fall

mengi inntaksgilda, mengi fallgilda og regla sem varpar hverju inntaksgildi á nákvæmlega eitt fallgildi

graf falls

mengi þeirra punkta (x, y) þar sem x er í skilgreiningarmengi f og $y = f(x)$

lárétta línuprófið

fall f er eintækt þá og því aðeins að sérhver lárétt lína skeri graf f, í mesta lagi einu sinni

breiðbogaföll

föllin sem táknuð eru með $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$, csch, sech, og $\coth$, sem fela í sér tilteknar samsetningar af e^x og e^{-x}

vaxandi á bilinu I

fall er vaxandi á bilinu I ef fyrir öll $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) \leq f(x_2)$ þegar $x_1 < x_2$

óháð breyta

inntaksbreyta falls

andhverft fall

fyrir fall f, gildir um andhverfa fallið f^{-1} að $f^{-1}(y) = x$ ef $f(x) = y$

andhverf breiðbogaföll

andhverfur breiðbogafallanna, þar sem cosh og sech eru einskorðuð við skilgreiningarmengið $[0, \infty)$; hvert þessara falla má setja fram sem samskeytingu náttúrlega lografallsins og algebrufalls

andhverf hornaföll

andhverfur hornafallanna eru skilgreindar með því að takmarka skilgreiningarmengi hornafallanna þannig að þau séu eintæk

línulegt fall

fall sem unnt er að rita á forminu $f(x) = mx + b$

lografall

fall af gerðinni $f(x) = \log_b(x)$ fyrir einhverja grunntölu $b > 0, b \neq 1$ þannig að $y = \log_b(x)$ þá og því aðeins að $b^y = x$

stærðfræðilegt líkan

aðferð til að líkja eftir raunverulegum aðstæðum með stærðfræðijöfnum

náttúrlega vísisfallið

fallið $f(x) = e^x$

náttúrlegi logrinn

fallið $\ln x = \log_e x$

1

talan e

eftir því sem m stækkar nálgast stærðin $(1+(1/m))^m$ einhverja rauntölu; við skilgreinum þá rauntölu sem e ; gildi e er um það bil 2,718282

oddstætt fall

fall er oddstætt ef $f(-x)=-f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f

eintækt fall

fall f er eintækt ef $f(x_1)\neq f(x_2)$ þegar $x_1\neq x_2$

lotubundið fall

fall er lotubundið ef gildi þess endurtaka sig með reglulegu millibili þegar x vex

gaffalfall

fall sem er skilgreint á mismunandi hátt á ólíkum hlutum skilgreiningarmengis síns

punkthallajafna

jafna línulegs falls sem tilgreinir hallatölu þess og punkt á grafi fallsins

margliðufall

fall á forminu $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$

veldisfall

fall á forminu $f(x)=x^n$ fyrir sérhverja jákvæða heiltölu $n\geq 1$

annars stigs fall

margliða af stigi 2; það er fall á forminu $f(x)=a x^2+b x+c$ þar sem $a\neq 0$

radíanar

fyrir hringboga af lengd s á hring með radíus 1 er stærð samsvarandi horns θ í bogaeiningum s

myndmengi

mengi fallgilda falls

rætt fall

fall á forminu $f(x)=p(x)/q(x)$, þar sem $p(x)$ og $q(x)$ eru margliður

takmarkað skilgreiningarmengi

hlutmengi skilgreiningarmengis falls f

rótarfall

fall af gerðinni $f(x)=x^{1/n}$ fyrir sérhverja heiltölu $n\geq 2$

hallatala

breytingin á y fyrir hverja einingabreytingu á x

hallaskurðarform

jafna línulegs falls sem sýnir hallatölu þess og y-skurðpunkt

samhverfa um upphafspunktinn
graf falls f er samhverft um upphafspunktinn ef $(-x, -y)$ er á grafi f í hvert sinn sem (x, y) er á grafinu

samhverfa um y-ásinn
graf falls f er samhverft um y-ásinn ef $(-x, y)$ er á grafi f þegar (x, y) er á grafinu

gildatafla
tafla sem sýnir inntaksgildi og samsvarandi fallgildi þeirra

torrætt fall
fall sem ekki er hægt að setja fram með samsetningu grunnreikniaðgerða

umbreyting falls
hliðrun, kvörðun eða speglun falls

hornaföll
föll sem ráðast af horni og eru skilgreind sem hlutföll milli hliðarlengda í rétthyrndum þríhyrningi

hornafallasamsemd
jafna með hornaföllum sem gildir fyrir öll horn θ þar sem föllin í jöfnunni eru skilgreind

lóðrétta línuprófið
fyrir gefið graf falls sker sérhver lóðrétt lína grafið í mesta lagi einu sinni

núllstöðvar falls
þegar rauntala x er núllstöð falls f, $f(x)=0$

Helstu jöfnur

Samsetning tveggja falla	$(g \circ f)(x)=g(f(x))$
Algildisfall	$f(x)=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$
Punkthallajafna línu	$y-y_1=m(x-x_1)$
Hallaskurðarform línu	$y=mx+b$
Staðalform línu	$ax+by=c$
Margliðufall	$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$
Almennt form sínusfalls	$f(x)=A\sin(B(x-\alpha))+C$
Andhverf föll	$f^{-1}(f(x))=x$ fyrir öll x í D, og $f(f^{-1}(y))=y$ fyrir öll y í R.

Meginatriði

1

1.1 Upprifjun á föllum

- Fall er vörpun úr mengi inntaksgilda í mengi fallgilda þannig að hverju inntaksgildi samsvarar nákvæmlega eitt fallgildi.
- Ef ekkert skilgreiningarmengi er gefið fyrir fallið $y=f(x)$, telst skilgreiningarmengið vera mengi allra rauntalna x sem fallið er skilgreint fyrir.
- Þegar við teiknum graf fallsins f, má hver lóðrétt lína skera grafið í mesta lagi einu sinni.
- Fall getur haft hvaða fjölda núllstöðva sem er en í mesta lagi einn y-ásskurðpunkt.
- Til að skilgreina samskeytinguna $g \circ f$, þarf myndmengi f að vera hlutmengi skilgreiningarmengis g.
- Jafnstæð föll eru samhverf um y-ásinn en oddstæð föll eru samhverf um upphafspunktinn.

1.2 Helstu flokkar falla

- Veldisfallið $f(x)=x^n$ er jafnstætt fall ef n er slétt tala og $n \neq 0$, og það er oddstætt fall ef n er oddatala.
- Rótarfallið $f(x)=x^{1/n}$ hefur skilgreiningarmengið $[0,\infty)$ ef n er slétt tala og skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$ ef n er oddatala. Ef n er oddatala, þá er $f(x)=x^{1/n}$ oddstætt fall.
- Skilgreiningarmengi rætta fallsins $f(x)=p(x)/q(x)$, þar sem $p(x)$ og $q(x)$ eru margliðuföll, er mengi þeirra x þannig að $q(x) \neq 0$.
- Föll sem fela í sér grunnaðgerðirnar samlagningu, frádrátt, margföldun, deilingu og veldisreikning eru algebruföll. Öll önnur föll eru torræð föll. Hornaföll, vísisföll og lograföll eru dæmi um torræð föll.
- Um margliðufall f af stigi $n \geq 1$ gildir að $f(x) \to \pm\infty$ þegar $x \to \pm\infty$. Formerki úttaksins þegar $x \to \infty$ ræðst aðeins af formerki forystustuðulsins og því hvort n er slétt tala eða oddatala.
- Lóðréttar og láréttar hliðranir, lóðréttar og láréttar kvarðanir og speglanir um x- og y-ásana eru dæmi um umbreytingar falla.

1.3 Hornaföll

- Stærð horns í bogaeiningum er skilgreind þannig að hornið sem samsvarar boga af lengd 1 á einingarhringnum hefur stærðina 1 í bogaeiningum. Horn sem er $180°$ mælist π rad.
- Fyrir hvasst horn θ, eru gildi hornafallanna skilgreind sem hlutföll tveggja hliða í rétthyrndum þríhyrningi þar sem annað hvassa hornið er θ.
- Fyrir almennt horn θ, látum (x, y) vera punkt á hring með geisla r sem samsvarar horninu θ. Rita má hornaföllin sem hlutföll sem fela í sér stærðirnar x, y, og r.
- Hornaföllin eru lotubundin. Sínus-, kósínus-, sekans- og kósekansföllin hafa lotuna 2π. Tangens- og kótangensföllin hafa lotuna π.

1.4 Andhverf föll

- Til þess að fall eigi sér andhverfu verður það að vera eintækt. Af grafi falls má ráða hvort fallið sé eintækt með lárétta línuprófinu.
- Ef fall er ekki eintækt getum við takmarkað skilgreiningarmengið við hlutmengi þar sem fallið er eintækt og síðan skilgreint andhverfu fallsins á því hlutmengi.
- Fyrir fall f og andhverfu þess f^{-1}, $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f^{-1} og $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f.
- Hornaföllin eru lotubundin og því þarf að takmarka skilgreiningarmengi þeirra til að skilgreina andhverf hornaföll.
- Graf falls f og graf andhverfu þess f^{-1} eru samhverf um línuna $y=x$.

1.5 Vísisföll og lograföll

- Vísisfallið $y=b^x$ er vaxandi ef $b>1$ og minnkandi ef $0<b<1$. Skilgreiningarmengi þess er $(-\infty, \infty)$ og myndmengi þess er $(0, \infty)$.
- Lografallið $y=\log_b(x)$ er andhverfa $y=b^x$. Skilgreiningarmengi þess er $(0, \infty)$ og myndmengi þess er $(-\infty, \infty)$.
- Náttúrulega vísisfallið er $y=e^x$ og náttúrulega lografallið er $y=\ln x=\log_e x$.
- Ef gefið er vísisfall eða lografall með grunntölu a, má skipta um grunntölu og skrifa fallið með hvaða grunntölu sem er, $b>0, b\neq 1$. Yfirleitt er skipt yfir í grunntöluna e.
- Breiðbogaföllin fela í sér samsetningar vísisfallanna e^x og e^{-x}. Af því leiðir að andhverfu breiðbogaföllin fela í sér náttúrulega logrann.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi.

1

310. Fall er alltaf eintækt.

311. $f \circ g = g \circ f$, að því gefnu að f og g séu föll.

312. Vensl sem standast bæði lárétta og lóðrétta línuprófið skilgreina eintækt fall.

313. Vensl sem standast lárétta línuprófið skilgreina fall.

Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi eftirfarandi falla:

$$f = x^2 + 2x - 3, g = \ln(x - 5), h = \frac{1}{x + 4}$$

314. h

315. g

316.

$$h \circ f$$

317.

$$g \circ f$$

Finnið stig, y-ásskurðpunkt og núllstöðvar eftirfarandi margliðufalla.

318.

$$f(x) = 2x^2 + 9x - 5$$

319.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$$

Einfaldið eftirfarandi hornafallastæður.

320.

$$\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x} + \cos^2 x$$

321.

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

Finnið nákvæmar lausnir eftirfarandi hornafallajafna á bilinu $x = [-2\pi, 2\pi]$.

322.

$$6\cos^2 x - 3 = 0$$

323.

$$\sec^2 x - 2\sec x + 1 = 0$$

Leysið eftirfarandi lograjöfnur.

324.

$$5^x = 16$$

325.

$$\log_2(x+4) = 3$$

Eru eftirfarandi föll eintæk á skilgreiningarmengi sínu? Hefur fallið andhverfu? Ef svo er, finnið andhverfa fallið $f^{-1}(x)$. Rökstyðjið svarið.

326.

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

327.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum stærsta skilgreiningarmengi þar sem fallið er eintækt og finnið andhverfu þess á því mengi.

328.

$$f(x) = \sqrt{9 - x}$$

329.

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

330. Bíll ekur eftir hringlaga kappakstursbraut sem er 1 km í þvermál. Þjálfari stendur í miðju hringsins og skráir staðsetningu bílsins á 5 sekúndna fresti. Að 5 sekúndum liðnum þarf þjálfarinn að snúa sér um 55° til að fylgjast áfram með bílnum. Hve hratt ekur bíllinn?

Í eftirfarandi verkefnum er miðað við veitingahúsaeiganda sem vill selja T-boli til að auglýsa vörumerki sitt. Hann man að kostnaðurinn skiptist í fastan og breytilegan kostnað en man ekki fjárhæðirnar. Hann veit hins vegar að bolaprentunarfyrirtækið tekur 440 € fyrir 20 boli og 1000 € fyrir 100 boli.

331. a. Finnið jöfnuna $C = f(x)$ sem gefur heildarkostnaðinn sem fall af fjölda bola. b. Ákvarðið hve marga boli hann þarf að selja til að standa á sléttu ef hann selur hvern bol á $10.

332. a. Finnið andhverfa fallið $x = f^{-1}(C)$ og lýsið merkingu þess. b. Ákvarðið hve marga boli eigandinn getur keypt ef hann hefur $8000 til ráðstöfunar.

Í eftirfarandi verkefnum er fjallað um íbúafjölda í Ocean City í New Jersey, en hann sveiflast reglubundið eftir árstíðum.

1

333. Lýsa má íbúafjöldanum með $P(t)=82{,}5-67{,}5\ \cos[(\pi/6)\,t]$, þar sem t er tími í mánuðum ($t=0$ táknar 1. janúar) og P táknar íbúafjöldann (í þúsundum). Á hvaða tímabilum ársins er íbúafjöldinn innan við 20.000? Á hvaða tímabilum fer hann yfir 140.000?

334. Í raun er líklegt að heildaríbúafjöldinn breytist jafnt og þétt frá ári til árs. Tökum tillit til þess með eftirfarandi líkani: $P(t)=82{,}5-67{,}5\ \cos[(\pi/6)\,t]+t$, þar sem t er tími í mánuðum ($t=0$ táknar 1. janúar) og P táknar íbúafjöldann (í þúsundum). Hvenær nær íbúafjöldinn fyrst 200.000?

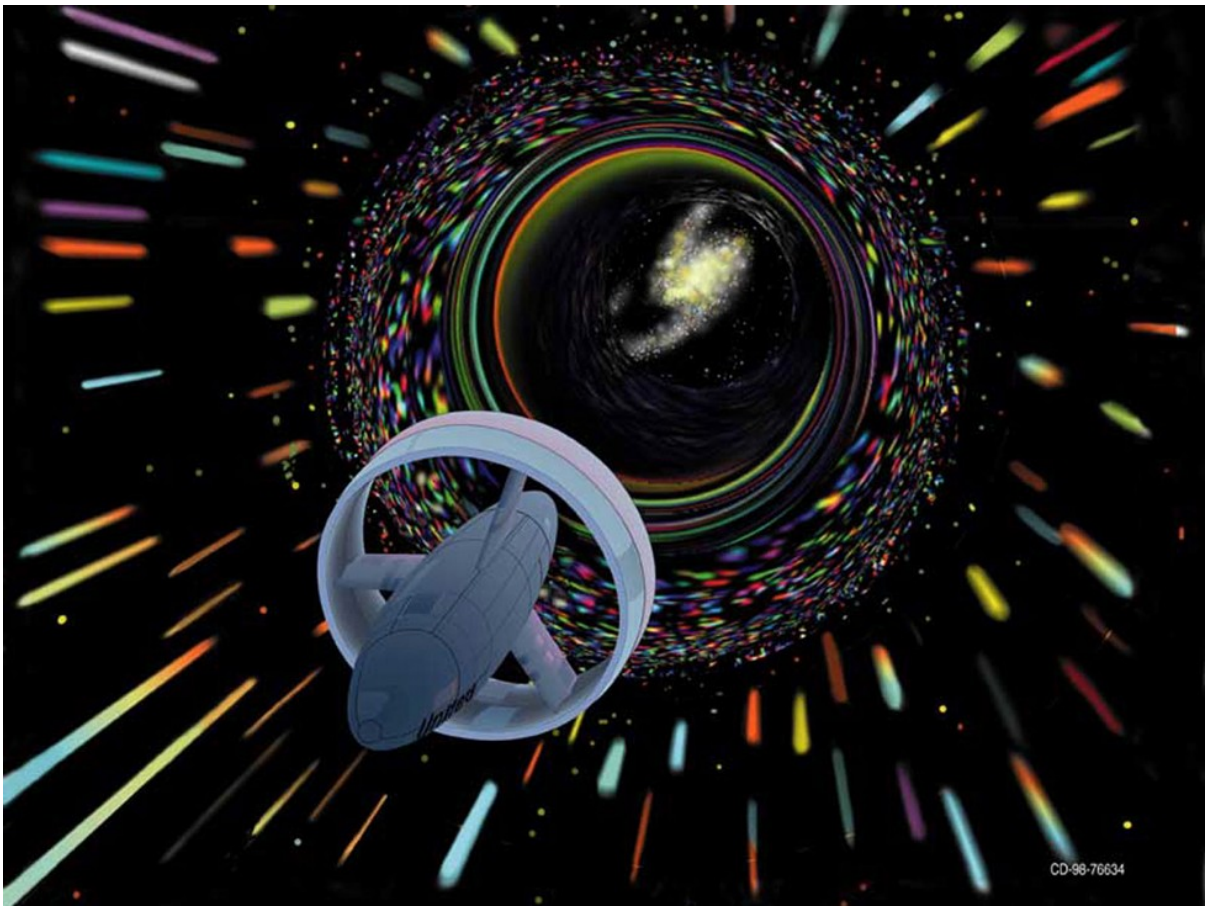
Í eftirfarandi verkefnum er fjallað um aldursgreiningu með geislavirkum samsætum. Beinagrind manns finnst við fornleifauppgröft. Aldur hennar er ákvarðaður með geislakolsgreiningu og jöfnunni $y=e^{rt}$, þar sem y táknar hlutfall þess geislakolefnis sem enn er í efninu, t táknar fjölda liðinna ára og $r=-0{,}0001210$ er hrörnunarhraði geislakolefnis.

335. Ef talið er að beinagrindin sé 2000 ára gömul, hve mörg prósent geislakolefnis ættu þá að vera eftir?

336. Finnið andhverfu jöfnunnar fyrir geislakolsgreiningu. Hvað táknar hún? Ef 25% geislakolefnisins eru eftir, hversu gömul er beinagrindin?

2. KAFLI

Markgildi



Mynd 2.1 Framtíðarsýn Flug- og geimferðastofnunar Bandaríkjanna (NASA) um ferðir manna til fjarlægra hluta alheimsins gefur hugmynd um geimferðir á miklum hraða. En eru takmörk fyrir því hversu hratt geimfar getur farið? (mynd: NASA)

Efnisyfirlit kaflans

- 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
- 2.2 Markgildi falls
- 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi

- 2.4 Samfelldni
- 2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi

Inngangur

Vísindaskáldsagnahöfundar ímynda sér oft geimskip sem geta ferðast til reikistjarna í fjarlægum vetrarbrautum. Árið 1905 sýndi Albert Einstein hins vegar fram á að hraði allra hluta er takmarkaður. Ástæðan er sú að eftir því sem hlutur hreyfist hraðar, þeim mun meiri verður massi hans (í formi orku), samkvæmt jöfnunni

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

þar sem m_0 er kyrrstöðumassi hlutarins, v er hraði hans og c er ljóshraðinn. Hver eru þessi hraðamörk? (Við skoðum þetta viðfangsefni nánar í dæmi 2.12.)

Hugtakið markgildi er grundvallaratriði í stærðfræðigreiningu. Við hefjum þennan kafla á því að kanna hvers vegna markgildi eru svo mikilvæg. Síðan lýsum við því hvernig finna má markgildi falls í tilteknum punkti. Ekki hafa öll föll markgildi í öllum punktum. Við ræðum hvað það merkir og hvernig sjá má hvort fall hafi markgildi við tiltekið gildi eða ekki. Efni þessa kafla er sett fram á óformlegan og innsæislegan hátt, en það nægir ekki alltaf þegar sanna þarf stærðfræðilega fullyrðingu um markgildi. Í síðasta hluta kaflans er sett fram nákvæmari skilgreining á markgildi og sýnt hvernig sanna má að fall hafi markgildi eða hafi það ekki.

2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu

NÁMSMARKMIÐ

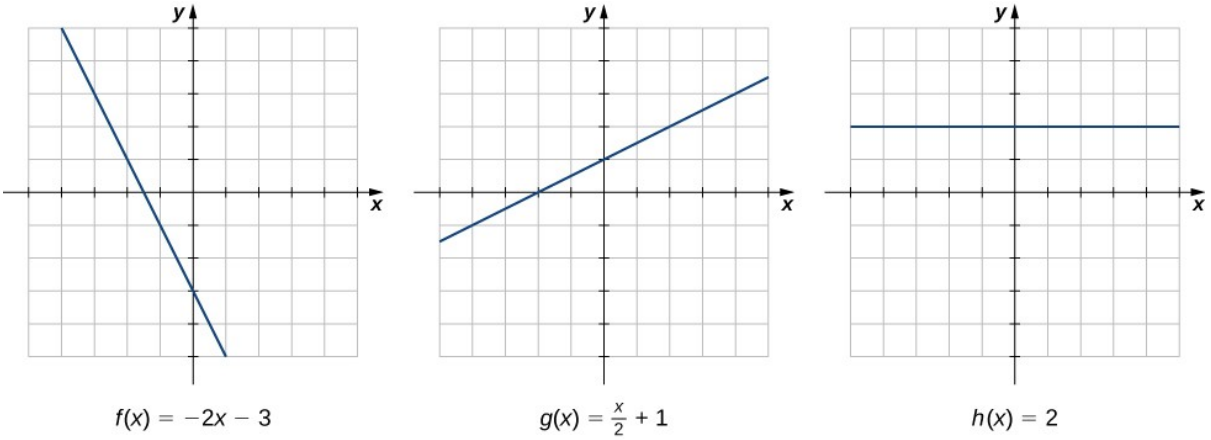
- 2.1.1 Lýsið snertilvandamálinu og hvernig það leiddi til hugmyndarinnar um afleiðu.
- 2.1.2 Útskýrið hvernig hugmyndin um markgildi kemur við sögu við lausn snertilvandamálsins.
- 2.1.3 Gerið ykkur grein fyrir að snertill við feril í punkti fæst sem markgildi sniðla.
- 2.1.4 Gerið ykkur grein fyrir að augnablikshraði fæst sem markgildi meðalhraða þegar tímabilið styttist.
- 2.1.5 Lýsið flatarmálsvandanum og hvernig hann var leystur með heildi.
- 2.1.6 Útskýrið hvernig hugmyndin um markgildi kemur við sögu við lausn flatarmálsvandamálsins.
- 2.1.7 Gerið ykkur grein fyrir því hvernig hugmyndirnar um markgildi, afleiðu og heildi leiddu til rannsókna á óendanlegum röðum og stærðfræðigreiningu margra breyta.

Þegar við hefjum nám í stærðfræðigreiningu sjáum við að þróun hennar spratt af lausnum á hagnýtum viðfangsefnum í verkfræði og eðlisfræði, svo sem geimferðavandamálinu sem sett

var fram í upphafi kaflans. Tvö lykilviðfangsefni urðu til þess að stærðfræðigreining var fyrst sett fram: (1) snertilvandamálið, það er hvernig ákvarða megi hallatölu línu sem snertir feril í tilteknum punkti; og (2) flatarmálsvandamálið, það er hvernig ákvarða megi flatarmálið undir grafi falls.

Snertilvandamálið og deildareikningur

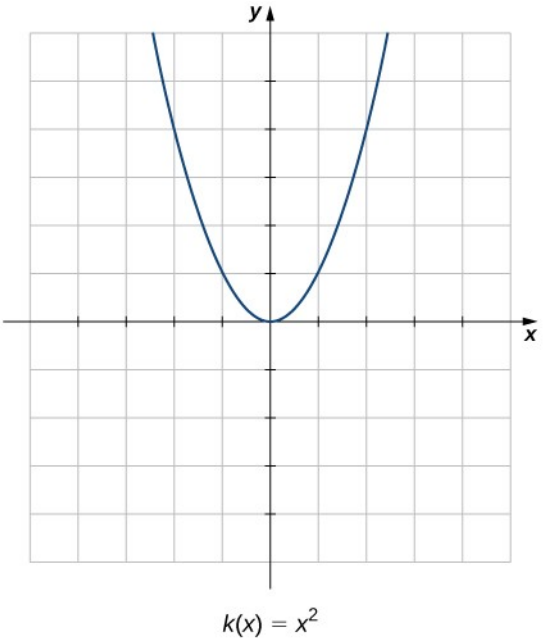
Breytingarhraði er eitt mikilvægasta hugtak stærðfræðigreiningar. Við hefjum umfjöllunina um breytingarhraða á því að skoða gröf línanna þriggja $f(x)=-2x-3$, $g(x)=\frac{1}{2}x+1$, og $h(x)=2$, sem sýndar eru á mynd 2.2.



Mynd 2.2 Breytingarhraði línulegs falls er fastur á öllum þessum þremur gröfum og fastinn ákvarðast af hallatölunni.

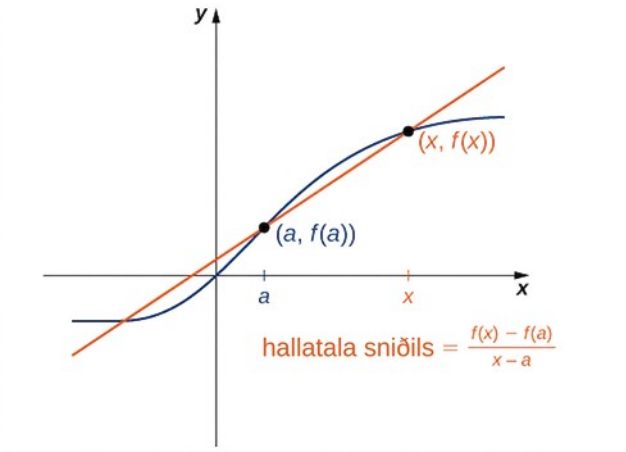
Þegar við færum okkur frá vinstri til hægri eftir grafi $f(x)=-2x-3$, sjáum við að grafið lækkar með jöfnum hraða. Í hvert sinn sem við færum okkur 1 einingu til hægri eftir x-ásnum minnkar y-hnitið um 2 einingar. Þessi breytingarhraði ræðst af hallatölu línunnar (−2). Á sama hátt segir hallatalan 1/2 fyrir fallið $g(x)$ okkur að þegar x breytist um 1 einingu breytist y samsvarandi um 1/2 einingu. Fallið $h(x)=2$ hefur hallatöluna núll, sem sýnir að gildi fallsins haldast föst. Við sjáum að hallatala sérhvers línulegs falls sýnir breytingarhraða fallsins.

Berið gröf þessara þriggja falla saman við graf $k(x)=x^2$ (mynd 2.3). Graf fallsins $k(x)=x^2$ byrjar lengst til vinstri á að lækka hratt, tekur síðan að lækka hægar og fletjast út og fer loks að hækka—hægt í fyrstu en síðan með sívaxandi hraða eftir því sem það færist til hægri. Ólíkt línulegu falli er engin ein tala sem lýsir breytingarhraða þessa falls. Það er því eðlilegt að spyrja: Hvernig mælum við breytingarhraða ólínulegs falls?



Mynd 2.3 Fallið $k(x)=x^2$ hefur ekki fastan breytingarhraða.

Við getum nálgað breytingarhraða falls $f(x)$ í punkti $(a, f(a))$ á grafi þess með því að velja annan punkt $(x, f(x))$ á grafi $f(x)$, draga línu gegnum punktana tvo og reikna hallatölu línunnar sem fæst. Slík lína nefnist sniðill. Mynd 2.4 sýnir sniðil við fall $f(x)$ í punkti $(a, f(a))$.



Mynd 2.4 Hallatala sniðils sem liggur um punkt $(a, f(a))$ er mat á breytingarhraða fallsins í punktinum $(a, f(a))$.

Við skilgreinum formlega sniðil sem hér segir:

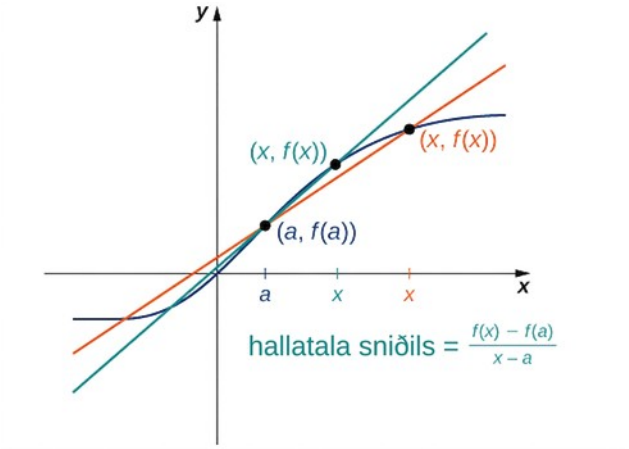
SKILGREINING

Sniðill fallsins $f(x)$ gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(x, f(x))$ er línan sem liggur gegnum þessa punkta. Hallatala hans er gefin með formúlunni

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(2.1)

Hversu vel sniðill nálgar breytingarhraða fallsins ræðst af því hversu nálægt x er a. Á mynd 2.5 sést hvernig x nálgast a og hallatala sniðilsins gefur þá betra mat á breytingarhraða $f(x)$ í a.

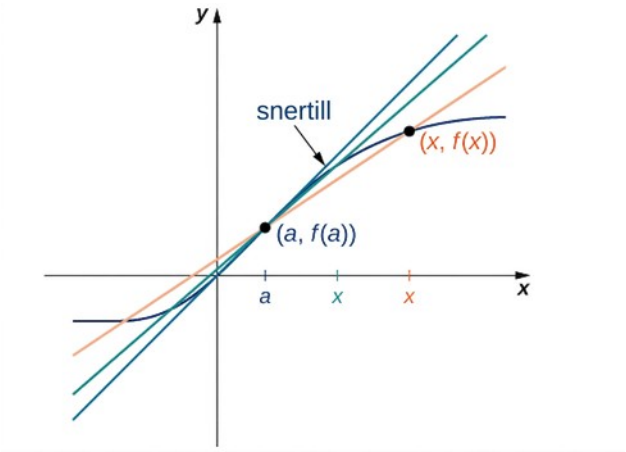


Mynd 2.5 Þegar x nálgast a verður hallatala sniðilsins sífellt betri nálgun á breytingarhraða fallsins $f(x)$ í a.

Sniðlarnir sjálfir nálgast línu sem nefnist snertill við fallið $f(x)$ í a (mynd 2.6). Hallatala snertilsins við grafið í a mælir breytingarhraða fallsins í a. Þetta gildi táknar einnig afleiðu fallsins $f(x)$ í a, eða breytingarhraða fallsins í a. Þessi afleiða er táknuð með $f'(a)$. Deildareikningur er það svið stærðfræðigreiningar sem fjallar um afleiður og notkun þeirra.

MARGMIÐLUNAREFNI

Í þessu smáforriti getið þið sjálf hreyft sniðil og skoðað hallatölu hans (Athugið: þetta vefsvæði krefst Java-viðbótar fyrir vafra): Math Insight.



Mynd 2.6 Lausn á snertilvandamálinu: Þegar x nálgast a nálgast sniðlarnir snertilinn.

Dæmi 2.1 sýnir hvernig finna má hallatölur sniðla. Þessar hallatölur gefa mat á hallatölu snertilsins eða, með öðrum orðum, á breytingarhraða fallsins í punktinum þar sem hallatölurnar eru reiknaðar.

DÆMI 2.1

Að finna hallatölur sniðla

Áætlið hallatölu snertilsins (breytingarhraðann) við $f(x)=x^2$ í $x=1$ með því að finna hallatölur sniðla sem liggja gegnum $(1,1)$ og hvern eftirtalinna punkta á grafi $f(x)=x^2$.

a. $(2,4)$

b. $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$

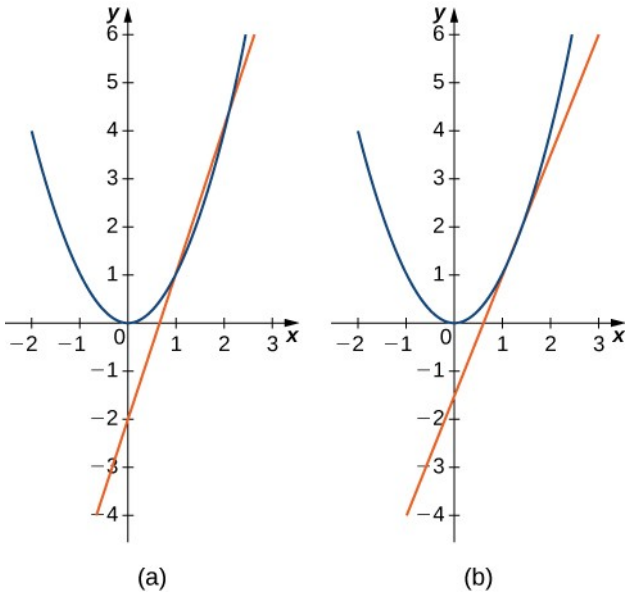
Lausn

Notið formúluna fyrir hallatölu sniðils samkvæmt skilgreiningunni.

a. $m_{\text{sec}}=\frac{4-1}{2-1}=3$

b. $m_{\text{sec}}=\frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{5}{2}=2{,}5$

Punkturinn í b-lið er nær punktinum $(1,1)$, og hallatalan 2,5 er því betra mat á hallatölu snertilsins. Gott mat á hallatölu snertilsins væri á bilinu 2 til 2,5 (mynd 2.7).



Mynd 2.7 Sniðlarnir við $f(x)=x^2$ í $(1,1)$ sem liggja gegnum (a) $(2,4)$ og (b) $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ gefa sífellt nákvæmari nálganir á snertilinn við $f(x)=x^2$ í $(1,1)$.

STÖÐUMAT 2.1

Áætlið hallatölu snertilsins (breytingarhraðann) við $f(x)=x^2$ í $x=1$ með því að finna hallatölu sniðilsins sem liggur um $(1,1)$ og punktinn $\left(\frac{5}{4},\frac{25}{16}\right)$ á grafi $f(x)=x^2$.

Næst skoðum við skylda spurningu. Líta má á hraða sem breytingarhraða staðsetningar. Gerum ráð fyrir að við höfum fall, $s(t)$, sem gefur staðsetningu hlutar á hnitási á hverjum tíma t. Getum við notað sömu hugmyndir til að setja fram skynsamlega skilgreiningu á augnablikshraða við tiltekinn tíma $t=a$? Við byrjum á því að nálga augnablikshraðann með meðalhraða. Rifjum fyrst upp að hraði hlutar sem hreyfist með jöfnum hraða er hlutfall vegalengdarinnar sem hann fer og tímans sem ferðin tekur. Við skilgreinum meðalhraða hlutar á tilteknu tímabili sem hlutfall breytingar á staðsetningu hans og lengdar tímabilsins.

SKILGREINING

Látum $s(t)$ tákna staðsetningu hlutar sem hreyfist eftir hnitás á tímanum t. Meðalhraði hlutarins á tímabilinu $[a,t]$ þar sem $a<t$ (eða $[t,a]$ ef $t<a$) er

$$v_{\text{ave}}=\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$

(2.2)

Eftir því sem t nálgast a nálgast meðalhraðinn augnablikshraðann. Athugið að það er í raun sama verkefnið að finna meðalhraða staðsetningarfalls á tímabili og að finna hallatölu sniðils við graf falls. Til að finna hallatölu snertils í punkti a látum við enn fremur x-gildin nálgast a þegar hallatala sniðilsins er reiknuð. Til að finna augnablikshraðann við tímann a látum við á sama hátt t-gildin nálgast a þegar meðalhraðinn er reiknaður. Þetta ferli, þar sem x eða t er látið nálgast a í stæðu, kallast að taka markgildi. Við getum því skilgreint augnablikshraða á eftirfarandi hátt.

2

SKILGREINING

Gert er ráð fyrir staðsetningarfalli $s(t)$, og er augnablikshraðinn við tímann $t=a$ það gildi sem meðalhraðarnir nálgast á bilum af gerðinni $[a,t]$ og $[t,a]$ þegar gildi t nálgast a, að því gefnu að slíkt gildi sé til.

Dæmi 2.2 skýrir tengsl markgildis og meðalhraða.

DÆMI 2.2

Að finna meðalhraða

Steini er sleppt úr 20 metra hæð. Hæð hans (í metrum) yfir jörðu t sekúndum síðar (fyrir $0 \le t \le 2$) er gefin með $s(t) = -4{,}9\,t^2 + 20$. Finnið meðalhraða steinsins á hverju tilgreindu tímabili. Notið þessar upplýsingar til að áætla augnablikshraða steinsins við tímann $t = 0{,}5$.

a. $[0{,}49\,;0{,}5]$
b. $[0{,}5\,;0{,}51]$

Lausn

Setjið gögnin inn í formúluna sem skilgreinir meðalhraða.

a. $v_{\text{ave}} = \dfrac{s(0{,}5) - s(0{,}49)}{0{,}5 - 0{,}49} = -4{,}851$

b. $v_{\text{ave}} = \dfrac{s(0{,}51) - s(0{,}5)}{0{,}51 - 0{,}5} = -4{,}949$

Augnablikshraðinn er einhvers staðar milli −4,851 og −4,949 m/sek. Gott mat er −4,9 m/sek.

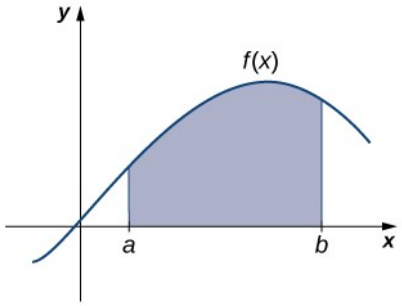
STÖÐUMAT 2.2

Hlutur hreyfist eftir hnitás þannig að staðsetning hans við tímann t er gefin með $s(t) = t^3$. Metið augnablikshraða hans við tímann $t = 2$ með því að reikna meðalhraða hans á tímabilinu $[2\,;2{,}001]$.

Flatarmálsvandamálið og heildareikningur

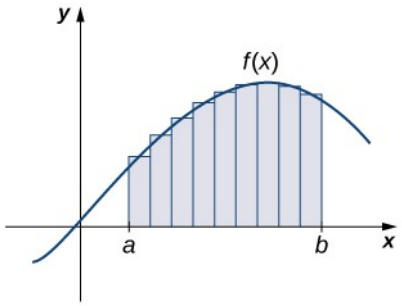
Nú beinum við sjónum okkar að sígildri spurningu í stærðfræðigreiningu. Margar eðlisfræðistærðir, svo sem vinna, má túlka sem flatarmál svæðisins undir grafi falls. Þetta

leiðir til eftirfarandi spurningar: Hvernig getum við fundið flatarmálið milli grafs falls og x-ássins á tilteknu bili (mynd 2.8)?



Mynd 2.8 Flatarmálsvandamálið: Hvernig finnum við flatarmál skyggða svæðisins?

Líkt og þegar við svöruðum fyrri spurningum okkar um hraða reynum við fyrst að nálga lausnina. Við nálgum flatarmálið með því að skipta bilinu $[a, b]$ í undirbil og reisa rétthyrninga yfir þeim. Nálgun flatarmálsins fæst með því að leggja saman flatarmál þessara rétthyrninga (mynd 2.9).



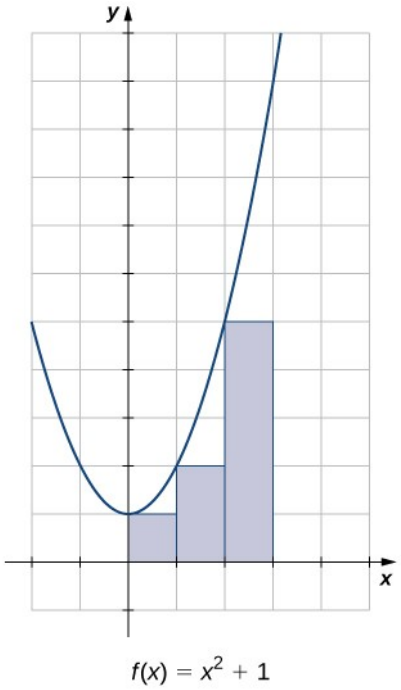
Mynd 2.9 Flatarmál svæðisins undir grafinu er nálgað með því að leggja saman flatarmál mjórra rétthyrninga.

Eftir því sem breiddir rétthyrninganna minnka (nálgast núll) nálgast summa flatarmála þeirra flatarmálið milli grafs $f(x)$ og x-ássins á bilinu $[a, b]$. Enn á ný þurfum við að finna markgildi. Á slíkum markgildum byggist skilgreining ákveðins heildis. Heildareikningur fjallar um heildi og notkun þeirra.

DÆMI 2.3

Nálgun með rétthyrningum

Áætlið flatarmálið milli x-ássins og grafs $f(x) = x^2 + 1$ á bilinu $[0, 3]$ með því að nota rétthyrningana þrjá sem sýndir eru á mynd 2.10.



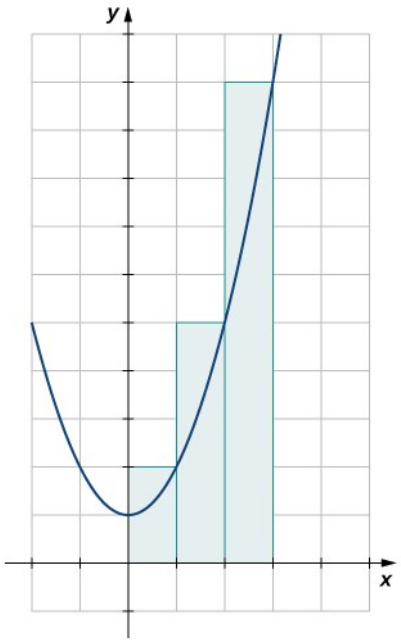
Mynd 2.10 Flatarmál svæðisins undir grafi $f(x)=x^2+1$ má nálga með rétthyrningum.

Lausn

Flatarmál rétthyrninganna þriggja eru 1 eining², 2 einingar² og 5 einingar². Með þessum rétthyrningum fæst að flatarmálið er um það bil 8 einingar².

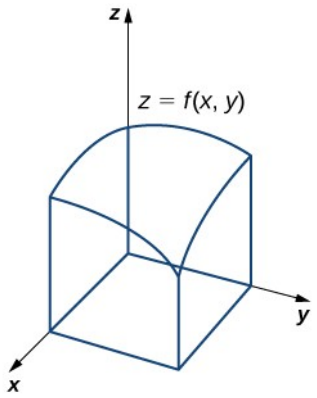
STÖÐUMAT 2.3

Áætlið flatarmálið milli x-ássins og grafs $f(x)=x^2+1$ á bilinu $[0,3]$ með því að nota rétthyrningana þrjá sem sýndir eru hér:



Aðrir þættir stærðfræðigreiningar

Hingað til höfum við aðeins rannsakað föll af einni breytu. Slík föll má sýna myndrænt með gröfum í tveimur víddum. Engin góð ástæða er þó til að einskorða okkur við tvær víddir. Gerum til dæmis ráð fyrir að í stað þess að ákvarða hraða hlutar sem hreyfist eftir hnitás viljum við ákvarða hraða steins sem skotið er úr kastvél á tilteknum tíma eða hraða flugvélar sem hreyfist í þremur víddum. Við gætum viljað teikna gröf raungildra falla af tveimur breytum eða ákvarða rúmmál rúmforma af þeirri gerð sem sýnd er á mynd 2.11. Þetta eru aðeins fáein dæmi um þær spurningar sem hægt er að spyrja og svara með stærðfræðigreiningu margra breyta. Lauslega má lýsa stærðfræðigreiningu margra breyta sem stærðfræðigreiningu falla af tveimur eða fleiri breytum. Áður en við skoðum þessar og aðrar hugmyndir þurfum við þó að leggja grunninn að stærðfræðigreiningu í einni breytu. Það gerum við með því að kanna hugtakið markgildi.



Mynd 2.11 Við getum notað stærðfræðigreiningu margra breyta til að finna rúmmálið milli flatar sem skilgreindur er með falli af tveimur breytum og sléttu.

Æfingar úr kafla 2.1

Í eftirfarandi verkefnum eru punktarnir $P(1,2)$ og $Q(x,y)$ á grafi fallsins $f(x)=x^2+1$.

1. **[T]** Fyllið út eftirfarandi töflu með viðeigandi gildum fyrir y-hnit punktsins Q, hnit punktsins $Q(x,y)$, svo og hallatölu sniðilsins sem liggur um punktana P og Q. Námundið svarið að átta markverðum tölustöfum.

x	y	$Q(x,y)$	m_{sec}
1,1	a.	e.	i.
1,01	b.	f.	j.
1,001	c.	g.	k.
1,0001	d.	h.	l.

2. Notið gildin í hægri dálki töflunnar í verkefninu á undan til að áætla gildi hallatölu snertilsins við graf fallsins f í $x=1$.

3. Notið gildið úr verkefninu á undan til að finna jöfnu snertilsins í punktinum P. Teiknið graf $f(x)$ og snertilinn.

Í eftirfarandi verkefnum eru punktarnir $P(1,1)$ og $Q(x,y)$ á grafi fallsins $f(x)=x^3$.

4. **[T]** Fyllið út eftirfarandi töflu með viðeigandi gildum fyrir y-hnit punktsins Q, hnit punktsins $Q(x,y)$, svo og hallatölu sniðilsins sem liggur um punktana P og Q. Námundið svarið að átta markverðum tölustöfum.

x	y	$Q(x,y)$	m_{sec}
1,1	a.	e.	i.
1,01	b.	f.	j.
1,001	c.	g.	k.
1,0001	d.	h.	l.

5. Notið gildin í hægri dálki töflunnar í verkefninu á undan til að áætla gildi hallatölu snertilsins við graf fallsins f í $x=1$.

6. Notið gildið úr verkefninu á undan til að finna jöfnu snertilsins í punktinum P. Teiknið graf $f(x)$ og snertilinn.

Í eftirfarandi æfingum eru punktarnir $P(4,2)$ og $Q(x,y)$ á grafi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$.

7. **[T]** Fyllið út eftirfarandi töflu með viðeigandi gildum fyrir y-hnit punktsins Q, hnit punktsins $Q(x,y)$, svo og hallatölu sniðilsins sem liggur um punktana P og Q. Námundið svarið að átta markverðum tölustöfum.

x	y	$Q(x, y)$	m_{sec}
4,1	a.	e.	i.
4,01	b.	f.	j.
4,001	c.	g.	k.
4,0001	d.	h.	l.

8. Notið gildin í hægri dálki töflunnar í verkefninu á undan til að áætla hallatölu snertilsins við fallið f í $x = 4$.

9. Notið gildið úr verkefninu á undan til að finna jöfnu snertilsins í punktinum P.

Í eftirfarandi æfingum eru punktarnir $P\ (1{,}5\,;0)$ og $Q(\phi, y)$ á grafi fallsins $f(\phi) = \cos(\pi\phi)$.

10. **[T]** Fyllið út eftirfarandi töflu með viðeigandi gildum fyrir y-hnit punktsins Q, hnit punktsins $Q(\varphi, y)$, svo og hallatölu sniðilsins sem liggur um punktana P og Q. Námundið svarið að átta markverðum tölustöfum.

ϕ	y	$Q(\phi, y)$	m_{sec}
1,4	a.	e.	i.
1,49	b.	f.	j.
1,499	c.	g.	k.
1,4999	d.	h.	l.

11. Notið gildin í hægri dálki töflunnar í verkefninu á undan til að áætla gildi hallatölu snertilsins við f í $\varphi = 1{,}5$.

12. Notið gildið úr verkefninu á undan til að finna jöfnu snertilsins í punktinum P.

Í eftirfarandi æfingum liggja punktarnir $P(-1, -1)$ og $Q(x, y)$ á grafi fallsins $f(x) = \frac{1}{x}$.

13. **[T]** Fyllið út eftirfarandi töflu með viðeigandi gildum fyrir y-hnit punktsins Q, hnit punktsins $Q(x, y)$, svo og hallatölu sniðilsins sem liggur um punktana P og Q. Námundið svarið að átta markverðum tölustöfum.

x	y	$Q(x, y)$	m_{sec}
−1,05	a.	e.	i.
−1,01	b.	f.	j.
−1,005	c.	g.	k.
−1,001	d.	h.	l.

14. Notið gildin í hægri dálki töflunnar í verkefninu á undan til að áætla hallatölu snertilsins við f í $x = -1$.

15. Notið gildið úr verkefninu á undan til að finna jöfnu snertilsins í punktinum P.

Í eftirfarandi æfingum er staðsetningarfall bolta sem sleppt er af þaki 200 metra hárrar byggingar gefið með $s(t)=200-4{,}9\,t^2$, þar sem staðsetningin s er mæld í metrum og tíminn t er mældur í sekúndum. Námundið svarið að átta markverðum tölustöfum.

16. **[T]** Reiknið meðalhraða boltans á tilgreindum tímabilum.

a. $[4{,}99\,;5]$
b. $[5\,;5{,}01]$
c. $[4{,}999\,;5]$
d. $[5\,;5{,}001]$

17. Notið verkefnið hér á undan til að áætla augnablikshraða boltans við $t=5$ sek.

Í eftirfarandi verkefnum skulum við skoða stein sem kastað er upp í loftið frá jörðu með upphafshraða 15 m/sek. Hæð steinsins í metrum eftir t sekúndur er $h(t)=15\,t-4{,}9\,t^2$.

18. **[T]** Reiknið meðalhraða steinsins á tilgreindum tímabilum.

a. $[1\,;1{,}05]$
b. $[1\,;1{,}01]$
c. $[1\,;1{,}005]$
d. $[1\,;1{,}001]$

19. Notið verkefnið hér á undan til að áætla augnablikshraða steinsins við $t=1$ sek.

Í eftirfarandi verkefnum skal líta á eldflaug sem skotin er upp í loftið og snýr síðan aftur til jarðar. Hæð eldflaugarinnar í metrum er gefin með $h(t)=600+78{,}4\,t-4{,}9\,t^2$, þar sem t er mælt í sekúndum.

20. **[T]** Reiknið meðalhraða eldflaugarinnar á tilgreindum tímabilum.

a. $[9\,;9{,}01]$
b. $[8{,}99\,;9]$
c. $[9\,;9{,}001]$
d. $[8{,}999\,;9]$

21. Notið verkefnið hér á undan til að áætla augnablikshraða eldflaugarinnar við $t=9$ sek.

Í eftirfarandi verkefnum skulum við skoða íþróttamann sem hleypur 40 metra spretthlaup. Staðsetning íþróttamannsins er gefin með $d(t)=\frac{t^3}{6}+4t$, þar sem d er staðsetningin í metrum og t er liðinn tími, mældur í sekúndum.

22. **[T]** Reiknið meðalhraða hlauparans á tilgreindum tímabilum.

a. $[1{,}95\,;2{,}05]$
b. $[1{,}995\,;2{,}005]$
c. $[1{,}9995\,;2{,}0005]$
d. $[2\,;2{,}00001]$

23. Notið verkefnið hér á undan til að áætla augnablikshraða hlauparans við $t=2$ sek.

Í eftirfarandi verkefnum skal líta á fallið $f(x)=|x|$.

24. Teiknið graf fallsins f á bilinu $[-1,2]$ og skyggið svæðið ofan við x-ásinn.

25. Notið verkefnið á undan til að finna nálgunargildi flatarmálsins milli x-ássins og grafs f á bilinu $[-1,2]$ með rétthyrningum. Notið einingarferninga við nálgunina og metið flatarmálið bæði að ofan og neðan. Notið rúmfræði til að finna nákvæmt svar.

Í eftirfarandi verkefnum skal skoða fallið $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. (Vísbending: Þetta er efri helmingur hrings með geisla 1 og miðju í $(0,0)$.)

26. Teiknið graf f á bilinu $[-1,1]$.

27. Notið verkefnið á undan til að finna nálgað flatarmál milli x-ássins og grafs f á bilinu $[-1,1]$ með því að nota rétthyrninga. Notið ferninga sem eru 0,4 × 0,4 einingar og metið flatarmálið bæði að ofan og neðan. Notið rúmfræði til að finna nákvæmt svar.

Í eftirfarandi verkefnum skal skoða fallið $f(x)=-x^2+1$.

28. Teiknið graf f á bilinu $[-1,1]$.

29. Áætlið flatarmál svæðisins milli x-ássins og grafs f á bilinu $[-1,1]$.

2.2 Markgildi falls

NÁMSMARKMIÐ

- 2.2.1 Lýsið markgildi falls með réttri táknun.
- 2.2.2 Notið gildatöflu til að áætla markgildi falls eða ákvarða hvenær markgildið er ekki til.
- 2.2.3 Notið graf til að áætla markgildi falls eða ákvarða hvenær markgildið er ekki til.
- 2.2.4 Skilgreinið einhliða markgildi og gefið dæmi.
- 2.2.5 Útskýrið sambandið milli einhliða og tvíhliða markgilda.
- 2.2.6 Lýsið óendanlegu markgildi með réttri táknun.
- 2.2.7 Skilgreinið lóðfellu.

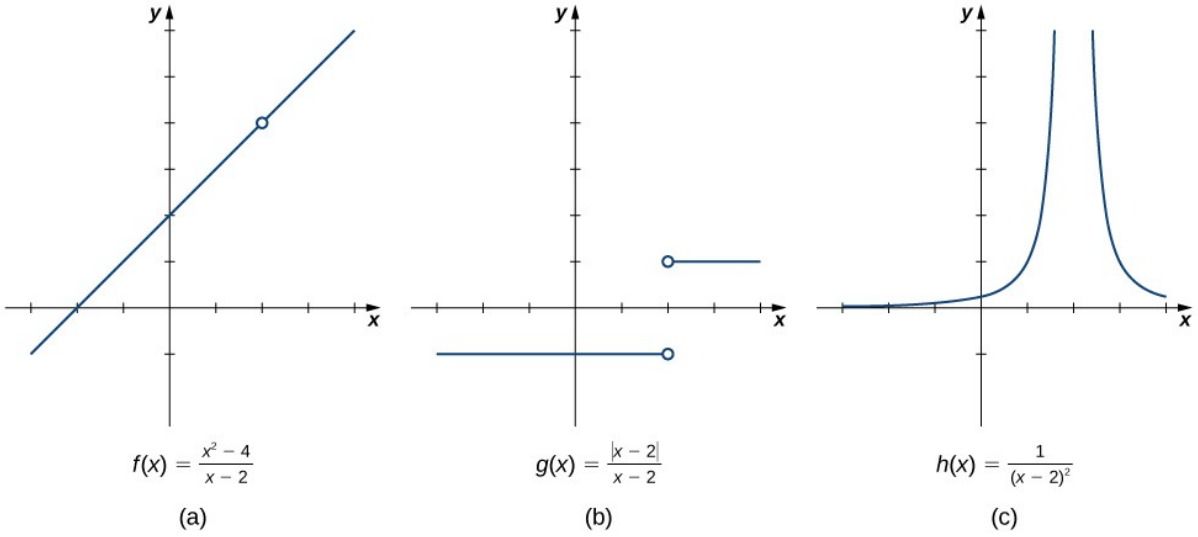
Hugmyndir um markgildi og ferli sem stefna að markgildi eru nauðsynlegar til að skilja stærðfræðigreiningu og hafa verið þekktar í þúsundir ára. Fyrstu stærðfræðingarnir beittu slíkum ferlum til að fá sífellt nákvæmari nálganir á flatarmáli hringa. Formleg skilgreining á

markgildi—eins og við þekkjum hana og skiljum í dag—kom þó ekki fram fyrr en undir lok 19. aldar. Við byrjum því, eins og forverar okkar í stærðfræði, á að skoða markgildi út frá innsæi. Í lok kaflans, þegar við höfum fengið skilning á hugtakinu, skoðum við formlega skilgreiningu þess.

Við hefjum umfjöllun okkar um markgildi með því að skoða gröf fallanna

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, g(x)=\frac{|x-2|}{x-2}, \text{og } h(x)=\frac{1}{(x-2)^2},$$

sem sýnd eru á mynd 2.12. Beinum nú athyglinni sérstaklega að hegðun hvers grafs við og í grennd við $x=2$.



Mynd 2.12 Þessi gröf sýna hegðun þriggja mismunandi falla í grennd við $x=2$.

Hvert fallanna þriggja er óskilgreint við $x=2$, en ef við segjum aðeins þetta gefum við mjög ófullkomna mynd af því hvernig hvert fall hegðar sér í grennd við $x=2$. Til að lýsa betur hegðun hvers grafs í grennd við 2 þurfum við að kynna hugtakið markgildi.

Innsæ skilgreining á markgildi

Við skulum fyrst skoða nánar hvernig fallið $f(x)=(x^2-4)/(x-2)$ hegðar sér í grennd við $x=2$ á mynd 2.12. Þegar gildi x nálgast 2 frá hvorri hlið nálgast gildi $y=f(x)$ 4. Með stærðfræðilegu orðalagi segjum við að markgildi $f(x)$ þegar x nálgast 2 sé 4. Með táknum ritum við þetta markgildi sem

$$\lim_{x\to 2} f(x)=4.$$

Út frá þessari örstuttu og óformlegu athugun á einu markgildi skulum við byrja að móta innsæisskilgreiningu á markgildi. Við getum litið svo á að markgildi falls í punktinum a sé sú rauntala L sem fallgildin nálgast þegar x-gildin nálgast a, að því gefnu að slík rauntala L sé til. Nánar tiltekið höfum við eftirfarandi skilgreiningu:

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint fyrir öll gildi á opnu bili sem inniheldur a, hugsanlega að a sjálfu undanskildu, og látum L vera rauntölu. Ef öll gildi fallsins $f(x)$ nálgast rauntöluna L þegar gildi $x(\neq a)$ nálgast töluna a, þá segjum við að markgildi $f(x)$ þegar x nálgast a sé L. (Í stuttu máli: Þegar x nálgast a nálgast $f(x)$ L og helst nálægt L.) Með táknum setjum við þetta fram sem

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

(2.3)

Við getum áætlað markgildi með því að útbúa töflur yfir fallgildi og skoða gröf fallanna. Þessari aðferð er lýst í eftirfarandi leiðbeiningum um lausn verkefna.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Mat á markgildi með töflu yfir fallgildi

1. Til að reikna $\lim_{x \to a} f(x)$, byrjum við á að fylla út töflu yfir fallgildi. Við veljum tvö mengi x-gilda—annað mengi gilda sem nálgast a og eru minni en a, og hitt mengið með gildum sem nálgast a og eru stærri en a. Tafla 2.1 sýnir hvernig töflurnar gætu litið út. x

Tafla 2.1 Tafla yfir fallgildi fyrir $\lim_{x \to a} f(x)$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$a-0{,}1$	$f(a-0{,}1)$	$a+0{,}1$	$f(a+0{,}1)$
$a-0{,}01$	$f(a-0{,}01)$	$a+0{,}01$	$f(a+0{,}01)$
$a-0{,}001$	$f(a-0{,}001)$	$a+0{,}001$	$f(a+0{,}001)$
$a-0{,}0001$	$f(a-0{,}0001)$	$a+0{,}0001$	$f(a+0{,}0001)$
Notið fleiri gildi eftir þörfum.		Notið fleiri gildi eftir þörfum.	

2. Næst skulum við skoða gildin í hvorum dálki fyrir $f(x)$ og ákvarða hvort þau virðast nálgast eitt tiltekið gildi þegar við færum okkur niður eftir dálkunum. Í dálkunum skoðum við rununa $f(a-0{,}1), f(a-0{,}01), f(a-0{,}001), f(a-0{,}0001)$, og svo framvegis, og $f(a+0{,}1), f(a+0{,}01), f(a+0{,}001), f(a+0{,}0001)$, og svo framvegis. (Athugið: Þótt við höfum valið x-gildin $a \pm 0{,}1, a \pm 0{,}01, a \pm 0{,}001, a \pm 0{,}0001$, og svo framvegis, og þessi gildi dugi líklega nær alltaf, gætum við í örfáum tilvikum þurft að velja önnur gildi.)

3. Ef báðir dálkarnir nálgast sameiginlegt y-gildi L, þá segjum við $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Við getum notað eftirfarandi aðferð til að staðfesta niðurstöðuna úr töflunni eða sem aðra leið til að áætla markgildi.
4. Með grafreiknivél eða tölvuforriti sem gerir okkur kleift að teikna gröf falla getum við teiknað fallið $f(x)$, og gætt þess að fallgildi $f(x)$ fyrir x-gildi nálægt a séu sýnileg í glugganum. Við getum notað rakningaraðgerðina til að færa okkur eftir grafi fallsins og lesið y-gildið af skjánum þegar x-gildin nálgast a. Ef y-gildin nálgast L þegar x-gildin nálgast a úr báðum áttum, þá er $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Við gætum þurft að þysja inn á grafið og endurtaka þetta ferli nokkrum sinnum.

Við notum þessa aðferð við lausn verkefna til að reikna markgildi í dæmi 2.4.

DÆMI 2.4

Mat á markgildi með gildatöflu falls 1

Reiknið $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ með því að nota gildatöflu.

Lausn

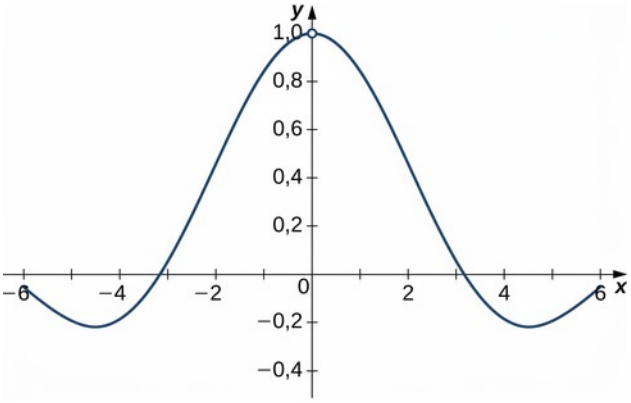
Við höfum reiknað gildi $f(x) = (\sin x)/x$ fyrir þau gildi x sem tilgreind eru í töflu 2.2.

Tafla 2.2 Tafla yfir fallgildi fyrir $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

x	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\frac{\sin x}{x}$
−0,1	0,998334166468	0,1	0,998334166468
−0,01	0,999983333417	0,01	0,999983333417
−0,001	0,999999833333	0,001	0,999999833333
−0,0001	0,999999998333	0,0001	0,999999998333

Athugið: Gildin í þessari töflu voru reiknuð með reiknivél og allir aukastafir í niðurstöðum reiknivélarinnar voru notaðir.

Þegar við lesum niður hvern $\frac{(\sin x)}{x}$ dálk sjáum við að gildin í hverjum dálki virðast nálgast einn. Því er nokkuð eðlilegt að álykta að $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Graf af $f(x) = \frac{(\sin x)}{x}$ sem fengið er með reiknivél eða tölvu væri svipað því sem sýnt er á mynd 2.13, og það staðfestir mat okkar.



Mynd 2.13 Grafið af $f(x)=(\sin x)/x$ staðfestir matið úr töflu 2.2.

DÆMI 2.5

Mat á markgildi með töflu yfir fallgildi 2

Reiknið $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ með því að nota gildatöflu.

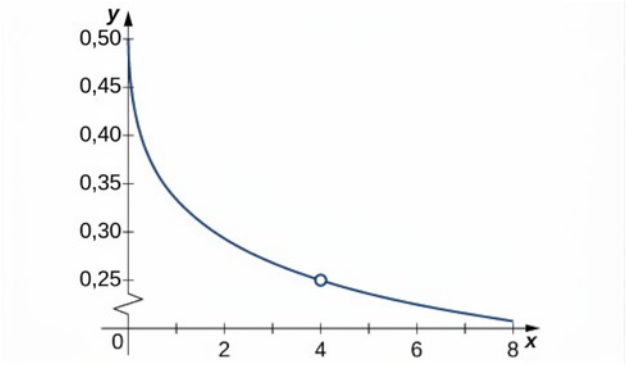
Lausn

Eins og áður notum við töflu—í þessu tilviki töflu 2.3—til að skrá gildi fallsins fyrir gefin gildi x.

Tafla 2.3 Tafla yfir fallgildi fyrir $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

x	$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$	x	$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
3,9	0,251582341869	4,1	0,248456731317
3,99	0,25015644562	4,01	0,24984394501
3,999	0,250015627	4,001	0,249984377
3,9999	0,250001563	4,0001	0,249998438
3,99999	0,25000016	4,00001	0,24999984

Þegar við skoðum töfluna sjáum við að fallgildin fyrir gildi minni en 4 virðast minnka í átt að 0,25, en fallgildin fyrir gildi stærri en 4 virðast vaxa í átt að 0,25. Við ályktum að $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0{,}25$. Við staðfestum þetta mat með grafi fallsins $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ sem sýnt er á mynd 2.14.



2

Mynd 2.14 Graf fallsins $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ staðfestir matið í töflu 2.3.

STÖÐUMAT 2.4

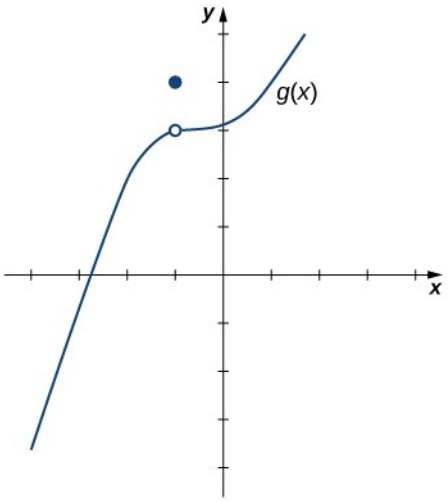
Áætlið $\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$ með því að nota töflu yfir fallgildi. Notið graf til að staðfesta mat ykkar.

Nú sjáum við af dæmum 2.4 og 2.5 að það getur verið jafnauðvelt, ef ekki auðveldara, að áætla markgildi falls með því að skoða graf þess og að áætla markgildið með gildatöflu. Í dæmi 2.6 metum við markgildi eingöngu með því að skoða graf í stað þess að nota gildatöflu.

DÆMI 2.6

Ákvörðun markgildis út frá grafi

Fyrir $g(x)$ sem sýnt er á mynd 2.15, reiknið $\lim_{x \to -1} g(x)$.



Mynd 2.15 Graf $g(x)$ inniheldur eitt gildi sem liggur ekki á sléttum ferli.

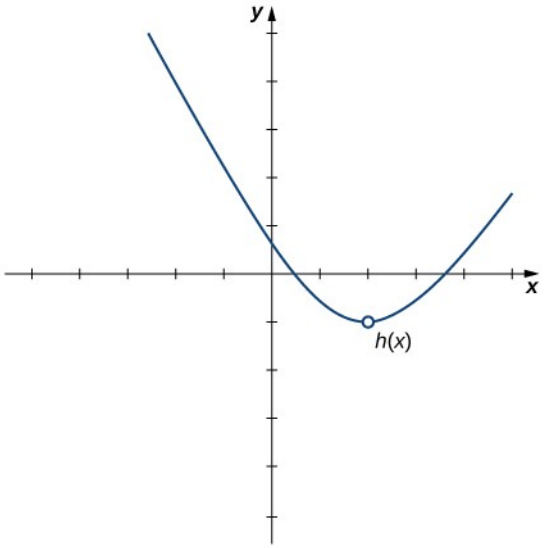
Lausn

Þótt $g(-1)=4$, nálgast fallgildin $g(x)$ töluna 3 þegar x nálgast –1 frá hvorri hlið. Því er $\lim_{x \to -1} g(x)=3$. Athugið að við getum ákvarðað þetta markgildi án þess að þekkja einu sinni algebrustæðu fallsins.

Af dæmi 2.6 má draga eftirfarandi ályktun: Markgildi falls getur verið til í punkti og fallið jafnframt verið skilgreint þar, en markgildið og fallgildið í punktinum geta verið ólík.

STÖÐUMAT 2.5

Notið graf fallsins $h(x)$ á mynd 2.16 til að finna gildi $\lim_{x \to 2} h(x)$, ef unnt er.



Mynd 2.16

Tafla yfir fallgildi eða graf falls gefur okkur gagnlega innsýn í markgildi fallsins í tilteknum punkti. Þessar aðferðir byggjast þó um of á ágiskunum. Þegar fram líða stundir þurfum við að þróa aðrar aðferðir til að ákvarða markgildi. Nýju aðferðirnar byggjast meira á algebru og við skoðum þær í næsta undirkafla. Hér kynnum við þó tvö sérstök markgildi sem aðferðirnar sem á eftir koma byggjast á.

SETNING 2.1

Tvö mikilvæg markgildi

Látum a vera rauntölu og c vera fasta.

i. $\lim_{x \to a} x=a$
(2.4)

ii. $\lim_{x \to a} c=c$

(2,5)

Við getum sett fram eftirfarandi athuganir um þessi tvö markgildi.

i. Fyrir fyrra markgildið má sjá að þegar x nálgast a nálgast $f(x)$, einnig a, enda er $f(x)=x$. Þar af leiðandi er $\lim_{x \to a} x = a$.

ii. Fyrir síðara markgildið skulum við skoða töflu 2.4.

Tafla 2.4 Tafla yfir fallgildi fyrir $\lim_{x \to a} c = c$

x	$f(x)=c$	x	$f(x)=c$
$a-0{,}1$	c	$a+0{,}1$	c
$a-0{,}01$	c	$a+0{,}01$	c
$a-0{,}001$	c	$a+0{,}001$	c
$a-0{,}0001$	c	$a+0{,}0001$	c

Athugið að fyrir öll gildi x (óháð því hvort þau nálgast a) eru gildin $f(x)$ alltaf jöfn c. Við hljótum því að álykta að $\lim_{x \to a} c = c$.

Tilvist markgildis

Þegar við skoðum markgildið í næsta dæmi skulum við hafa í huga að til þess að markgildi falls sé til í punkti verða fallgildin að nálgast eina og sömu rauntölu í þeim punkti. Ef fallgildin nálgast ekki eitt og sama gildi er markgildið ekki til.

DÆMI 2.7

Athugun á markgildi sem ekki er til

Reiknið $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ með gildatöflu.

Lausn

Tafla 2.5 sýnir gildi fallsins $\sin(1/x)$ fyrir gefin gildi x.

Tafla 2.5 Tafla yfir fallgildi fyrir $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	x	$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
−0,1	0,544021110889	0,1	−0,544021110889
−0,01	0,50636564111	0,01	−0,50636564111
−0,001	−0,8268795405312	0,001	0,826879540532
−0,0001	0,305614388888	0,0001	−0,305614388888
−0,00001	−0,035748797987	0,00001	0,035748797987
−0,000001	0,349993504187	0,000001	−0,349993504187

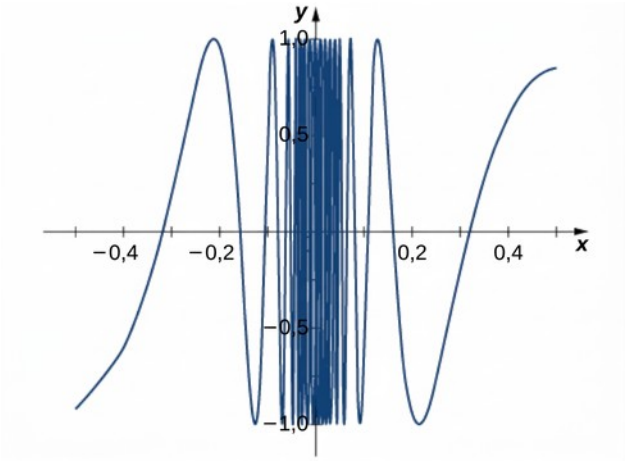
Þegar við skoðum gildatöflu fallsins sjáum við að y-gildin virðast ekki nálgast eitt ákveðið gildi. Svo virðist sem markgildið sé ekki til. Áður en við drögum þá ályktun skulum við beita kerfisbundnari aðferð. Lítum á eftirfarandi runu x-gilda sem nálgast 0:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{9\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots.$$

Samsvarandi y-gildin eru

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots.$$

Nú getum við vissulega ályktað að $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ sé ekki til. (Stærðfræðingar skammstafa „er ekki til“ oft sem DNE. Því myndum við rita $\lim_{x \to 0} \sin(1/x)$ DNE.) Graf $f(x) = \sin(1/x)$ er sýnt á mynd 2.17 og þar sést betur hvernig $\sin(1/x)$ hegðar sér þegar x nálgast 0. Sjá má að $\sin(1/x)$ sveiflast sífellt ákafar milli −1 og 1 þegar x nálgast 0.



Mynd 2.17 Graf $f(x) = \sin(1/x)$ sveiflast hratt milli −1 og 1 þegar x nálgast 0.

STÖÐUMAT 2.6

Notið töflu yfir fallgildi til að ákvarða $\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$, ef unnt er.

Einhliða markgildi

Stundum nægir ekki að segja að markgildi falls sé ekki til í tilteknum punkti til að lýsa hegðun fallsins þar. Skoðum því aftur fallið $g(x) = |x-2|/(x-2)$ sem kynnt var í upphafi undirkaflans (sjá mynd 2.12(b)). Þegar x tekur gildi nálægt 2 nálgast $g(x)$ ekki eitt tiltekið gildi. Markgildið þegar x nálgast 2 er því ekki til; það er, $\lim_{x \to 2} g(x)$ er ekki til. Sú staðhæfing ein gefur þó ekki heildarmynd af hegðun fallsins í grennd við x-gildið 2. Til að lýsa hegðuninni nákvæmar kynnum við hugtakið einhliða markgildi. Fyrir öll gildi vinstra megin við 2 (eða neikvæðu megin við 2) er $g(x) = -1$. Þegar x nálgast 2 frá vinstri nálgast $g(x)$ því –1. Með stærðfræðilegu orðalagi segjum við að markgildið þegar x nálgast 2 frá vinstri sé –1. Með táknum ritum við þetta sem

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = -1.$$

Á sama hátt nálgast fallgildið $g(x)$ töluna 1 þegar x nálgast 2 frá hægri. Með táknum setjum við þetta fram sem

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1.$$

Nú getum við sett fram óformlega skilgreiningu á einhliða markgildum.

SKILGREINING

Við skilgreinum tvær gerðir einhliða markgilda.

Markgildi frá vinstri: Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint fyrir öll gildi á opnu bili af gerðinni (c, a), og látum L vera rauntölu. Ef gildi fallsins $f(x)$ nálgast rauntöluna L þegar gildi x (þar sem $x < a$) nálgast töluna a, þá segjum við að L sé markgildi $f(x)$ þegar x nálgast a frá vinstri. Með táknum setjum við þetta fram sem

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

(2.6)

Markgildi frá hægri: Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint fyrir öll gildi á opnu bili af gerðinni (a, c), og látum L vera rauntölu. Ef gildi fallsins $f(x)$ nálgast rauntöluna L þegar gildi x (þar sem $x > a$) nálgast töluna a, þá segjum við að L sé markgildi $f(x)$ þegar x nálgast a frá hægri. Með táknum setjum við þessa hugmynd fram sem

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

(2.7)

DÆMI 2.8

Mat á einhliða markgildum

Fyrir fallið $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef } x<2 \\ x^2-4 & \text{ef } x\geq 2 \end{cases}$ skuluð þið reikna hvert eftirfarandi markgilda.

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

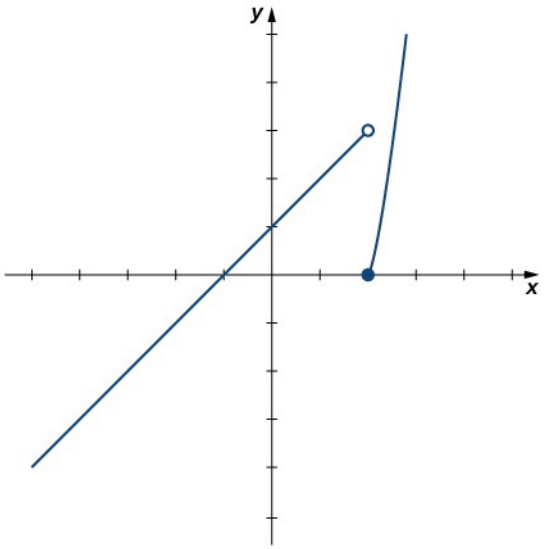
Lausn

Við getum aftur notað töflu yfir fallgildi (töflu 2.6). Athugið að fyrir gildi x sem eru minni en 2 notum við $f(x)=x+1$ og fyrir gildi x sem eru stærri en 2 notum við $f(x)=x^2-4$.

Tafla 2.6 Tafla yfir fallgildi fyrir $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef } x<2 \\ x^2-4 & \text{ef } x\geq 2 \end{cases}$

x	$f(x)=x+1$	x	$f(x)=x^2-4$
1,9	2,9	2,1	0,41
1,99	2,99	2,01	0,0401
1,999	2,999	2,001	0,004001
1,9999	2,9999	2,0001	0,00040001
1,99999	2,99999	2,00001	0,0000400001

Af þessari töflu getum við ályktað að a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ og b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$. Því er (tvíhliða) markgildi $f(x)$ ekki til þegar $x=2$. Mynd 2.18 sýnir graf $f(x)$ og styður niðurstöðu okkar um þessi markgildi enn frekar.



Mynd 2.18 Graf $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ ef } x<2 \\ x^2-4 \text{ ef } x\geq 2 \end{cases}$ $x=2$.

STÖÐUMAT 2.7

Notið gildatöflu til að áætla eftirfarandi markgildi, ef unnt er.

a. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$

Skoðum nú sambandið milli markgildis falls í punkti og markgilda þess frá hægri og vinstri í þeim punkti. Ljóst virðist að ef markgildið frá hægri og markgildið frá vinstri hafa sama gildi, þá er það sameiginlega gildi markgildi fallsins í punktinum. Á sama hátt er markgildi fallsins ekki til ef markgildið frá vinstri og markgildið frá hægri hafa ólík gildi. Þessar niðurstöður eru dregnar saman í setningunni Tengsl einhliða og tvíhliða markgilda.

SETNING 2.2

Tengsl einhliða og tvíhliða markgilda

Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint fyrir öll gildi á opnu bili sem inniheldur a, að a sjálfu hugsanlega undanskildu, og látum L vera rauntölu. Þá gildir:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \text{ þá og því aðeins að } \lim_{x\to a^-} f(x)=L \text{ og } \lim_{x\to a^+} f(x)=L.$$

Óendanleg markgildi

Með því að ákvarða markgildi falls í punkti eða markgildi þess frá hægri og vinstri í punktinum getum við lýst hegðun fallsins í grennd við tiltekið gildi. Eins og við munum sjá getum við einnig lýst hegðun falla sem hafa ekki endanleg markgildi.

Við beinum nú sjónum okkar að $h(x)=1/(x-2)^2$, þriðja og síðasta fallinu sem kynnt var í upphafi þessa undirkafla (sjá mynd 2.12(c)). Af grafi þess sjáum við að þegar gildi x nálgast 2 verða gildi $h(x)=1/(x-2)^2$ sífellt stærri og verða raunar óendanlega stór. Með stærðfræðilegu orðalagi segjum við að markgildi $h(x)$ þegar x nálgast 2 sé jákvæður óendanleiki. Með táknum setjum við þetta fram þannig:

$$\lim_{x \to 2} h(x) = +\infty.$$

Almennt skilgreinum við óendanleg markgildi sem hér segir:

SKILGREINING

Við skilgreinum þrjár gerðir af óendanlegum markgildum.

Óendanleg markgildi frá vinstri: Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint fyrir öll gildi á opnu bili af gerðinni (b, a).

i. Ef gildi $f(x)$ vaxa án takmarkana þegar gildi x (þar sem $x < a$) nálgast töluna a, segjum við að markgildið þegar x nálgast a frá vinstri sé jákvæður óendanleiki og ritum

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty.$$

(2.8)

ii. Ef gildi $f(x)$ minnka án takmarkana þegar gildi x (þar sem $x < a$) nálgast töluna a, segjum við að markgildið þegar x nálgast a frá vinstri sé neikvæður óendanleiki og ritum

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

(2,9)

Óendanleg markgildi frá hægri: Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint fyrir öll gildi á opnu bili af gerðinni (a, c).

i. Ef gildi $f(x)$ vaxa án takmarkana þegar gildi x (þar sem $x > a$) nálgast töluna a, segjum við að markgildið þegar x nálgast a frá hægri sé jákvæður óendanleiki og ritum

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty.$$

(2.10)

ii. Ef gildi $f(x)$ minnka án neðri marka þegar gildi x (þar sem $x>a$) nálgast töluna a, segjum við að markgildið þegar x nálgast a frá hægri sé neikvæður óendanleiki og ritum

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty.$$

(2.11)

Tvíhliða óendanlegt markgildi: Látum $f(x)$ vera skilgreint fyrir öll $x \neq a$ á opnu bili sem inniheldur a.

i. Ef gildi $f(x)$ vaxa án takmarkana þegar gildi x (þar sem $x \neq a$) nálgast töluna a, segjum við að markgildið þegar x nálgast a sé jákvæður óendanleiki og ritum

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

(2.12)

ii. Ef gildi $f(x)$ minnka án neðri marka þegar gildi x (þar sem $x \neq a$) nálgast töluna a, segjum við að markgildið þegar x nálgast a sé neikvæður óendanleiki og ritum

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

(2.13)

Mikilvægt er að skilja að þegar við skrifum fullyrðingar á borð við $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ eða $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ erum við að lýsa hegðun fallsins eins og við höfum nýlega skilgreint hana. Við erum ekki að fullyrða að markgildi sé til. Til þess að markgildi fallsins $f(x)$ sé til í a verða fallgildin að nálgast rauntölu L þegar x nálgast a. Að því sögðu skrifum við til dæmis, ef $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, alltaf $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ en ekki $\lim_{x \to a} f(x)$ DNE.

DÆMI 2.9

Greining óendanlegs markgildis

Reiknið hvert eftirfarandi markgilda, ef unnt er. Notið gildatöflu fallsins og graf $f(x) = 1/x$ til að staðfesta niðurstöðu ykkar.

a. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

b. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Lausn

Byrjið á að útbúa gildatöflu fyrir fallið.

Tafla 2.7 Tafla yfir fallgildi fyrir $f(x)=\frac{1}{x}$

x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
−0,1	−10	0,1	10
−0,01	−100	0,01	100
−0,001	−1000	0,001	1000
−0,0001	−10.000	0,0001	10.000
−0,00001	−100.000	0,00001	100.000
−0,000001	−1.000.000	0,000001	1.000.000

a. Gildi $1/x$ minnka án neðri marka þegar x nálgast 0 frá vinstri. Við ályktum að

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

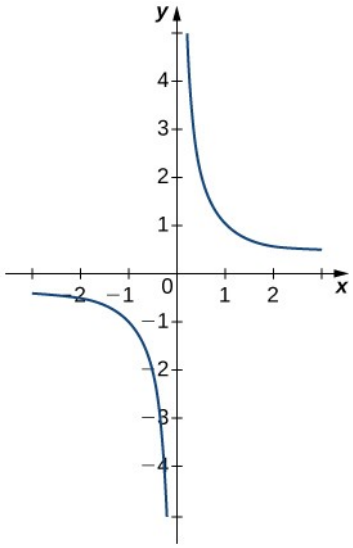
b. Gildi $1/x$ vaxa án takmarkana þegar x nálgast 0 frá hægri. Við ályktum að

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

c. Þar sem $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ og $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ eru ólík, ályktum við að

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ er ekki til.

Graf $f(x)=1/x$ á mynd 2.19 staðfestir þessar niðurstöður.



Mynd 2.19 Graf fallsins $f(x)=1/x$ staðfestir að markgildið þegar x nálgast 0 er ekki til.

STÖÐUMAT 2.8

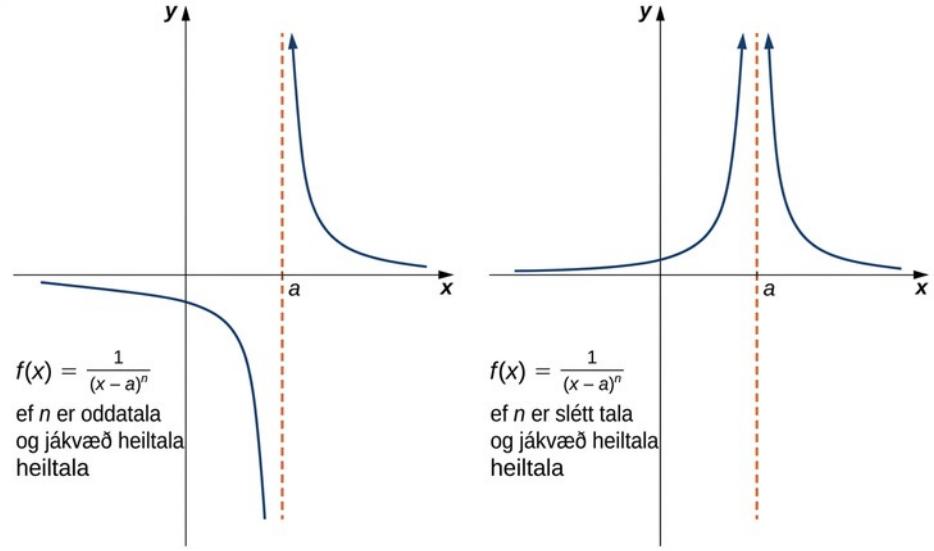
Ákvarðið hvert eftirfarandi markgilda, ef unnt er. Notið töflu yfir fallgildi og teiknið graf $f(x)=1/x^2$ til að staðfesta niðurstöðu ykkar.

a. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$

b. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$

c. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

Föll á forminu $f(x)=1/(x-a)^n$, þar sem n er jákvæð heiltala, hafa óendanleg markgildi þegar x nálgast a frá vinstri eða hægri (mynd 2.20). Setningin Óendanleg markgildi þegar veldisvísirinn er jákvæð heiltala tekur þessi markgildi saman.



Mynd 2.20 Fallið $f(x)=1/(x-a)^n$ hefur óendanleg markgildi þegar x nálgast a.

SETNING 2.3

Óendanleg markgildi þegar veldisvísirinn er jákvæð heiltala

Ef n er jákvæð slétt heiltala, þá

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty.$$

Ef n er jákvæð oddatala, þá

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

og

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty.$$

Á gröfum $f(x)=1/(x-a)^n$, liggja punktar með x-hnit mjög nálægt a jafnframt mjög nálægt lóðréttu línunni $x=a$. Þegar x nálgast a færast punktarnir á grafi $f(x)$ með öðrum orðum nær línunni $x=a$. Línan $x=a$ kallast lóðfella grafsins. Lóðfella er formlega skilgreind á eftirfarandi hátt:

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera fall. Ef eitthvert eftirfarandi skilyrða er uppfyllt, þá er línan $x=a$ lóðfella fallsins $f(x)$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ eða } -\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ eða } -\infty$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ eða } -\infty$$

DÆMI 2.10

Að finna lóðfellu

2

Reiknið hvert eftirfarandi markgilda með því að beita setningunni Óendanleg markgildi þegar veldisvísirinn er jákvæð heiltala. Finnið allar lóðfellur fallsins $f(x)=1/(x+3)^4$.

a. $\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{(x+3)^4}$

b. $\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{(x+3)^4}$

c. $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^4}$

Lausn

Við getum beitt setningunni Óendanleg markgildi þegar veldisvísirinn er jákvæð heiltala beint.

a. $\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$

b. $\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$

c. $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$

Fallið $f(x)=1/(x+3)^4$ hefur lóðfellu við $x=-3$.

STÖÐUMAT 2.9

Reiknið hvert eftirfarandi markgildi. Tilgreinið allar lóðfellur fallsins $f(x)=\frac{1}{(x-2)^3}$.

a. $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$

b. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3}$

c. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^3}$

Í næsta dæmi nýtum við þekkingu okkar á ýmsum gerðum markgilda til að greina hegðun falls í nokkrum mismunandi punktum.

DÆMI 2.11

Hegðun falls í mismunandi punktum

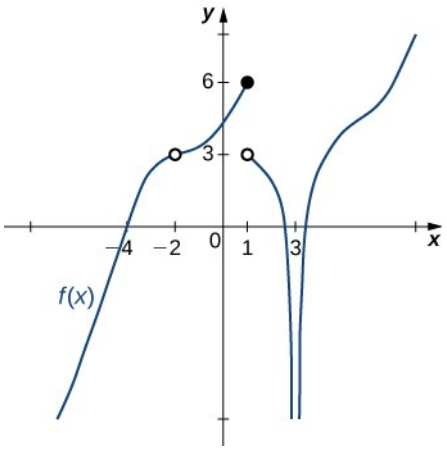
Notið grafið af $f(x)$ á mynd 2.21 til að ákvarða hvert eftirfarandi gilda:

a. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x);\ \lim\limits_{x \to -4^+} f(x);\ \lim\limits_{x \to -4} f(x); f(-4)$

b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x);\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x);\ \lim\limits_{x \to -2} f(x); f(-2)$

c. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x); \lim\limits_{x \to 1^+} f(x); \lim\limits_{x \to 1} f(x); f(1)$

d. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x); \lim\limits_{x \to 3^+} f(x); \lim\limits_{x \to 3} f(x); f(3)$



Mynd 2.21 Grafið sýnir $f(x)$.

Lausn

Með því að beita setningunni um óendanleg markgildi þegar veldisvísirinn er jákvæð heiltala og hafa grafið til hliðsjónar fáum við eftirfarandi gildi:

a. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)=0;\ \lim\limits_{x \to -4^+} f(x)=0;\ \lim\limits_{x \to -4} f(x)=0; f(-4)=0$

b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)=3.;\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)=3;\ \lim\limits_{x \to -2} f(x)=3; f(-2)$ er óskilgreint

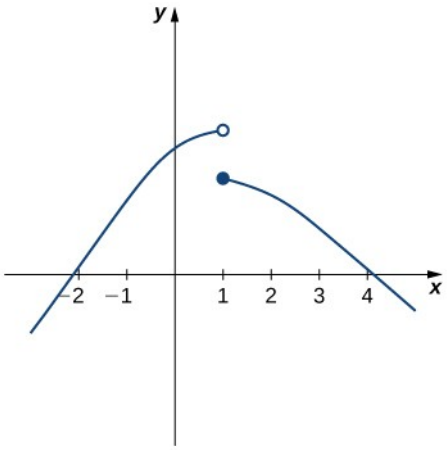
c. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)=6; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)=3; \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ er ekki til; $f(1)=6$

d. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x \to 3} f(x)=-\infty; f(3)$ er óskilgreint

---

STÖÐUMAT 2.10

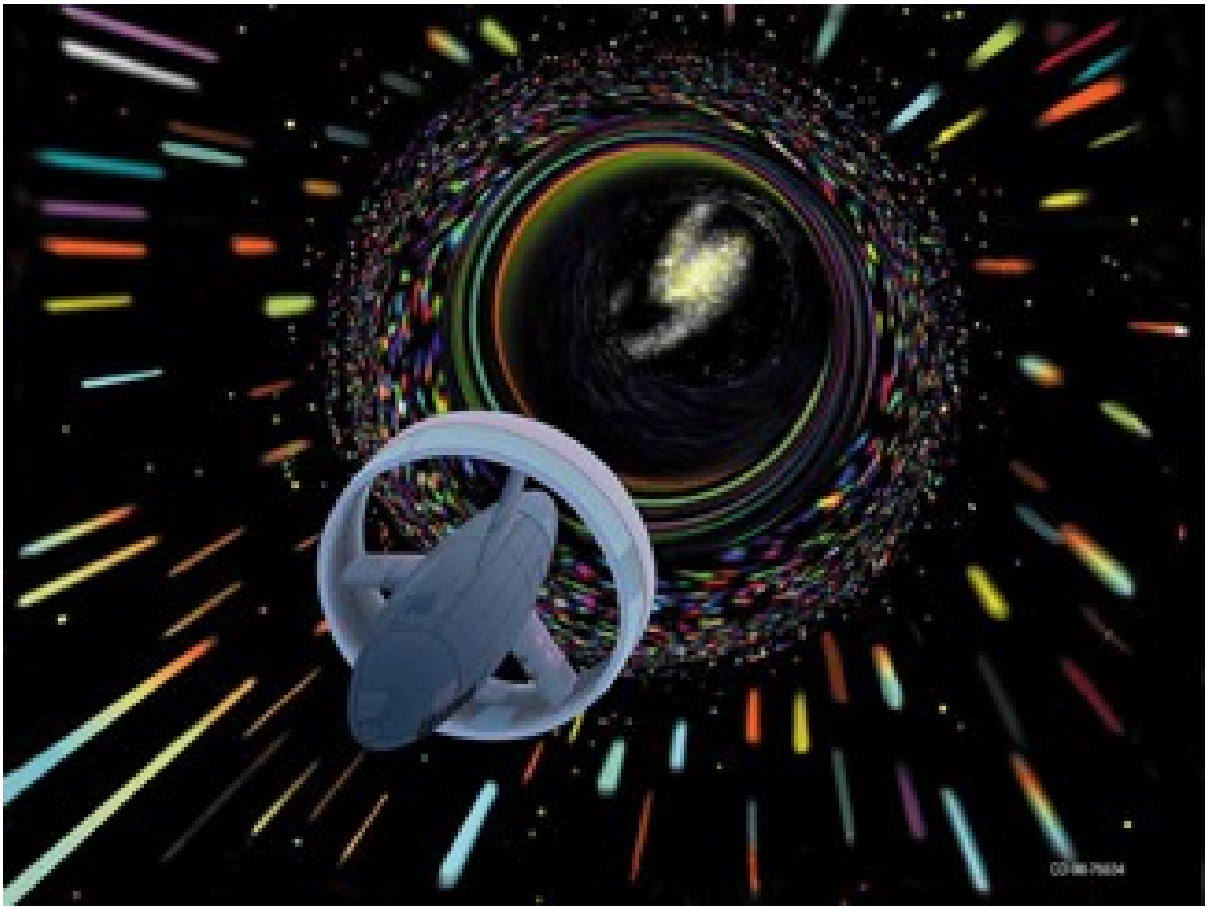
Reiknið $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ fyrir fallið $f(x)$ sem sýnt er hér:



2

DÆMI 2.12

Kaflaupphaf: jafna Einsteins



Mynd 2.22 (mynd: NASA)

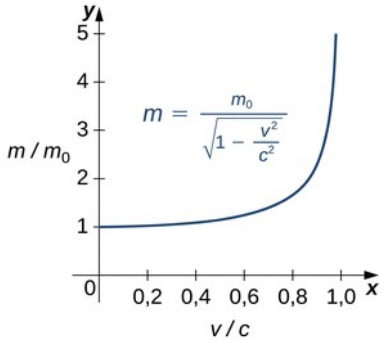
Í inngangi kaflans nefndum við stuttlega að Albert Einstein hefði sýnt fram á að hraði allra hluta ætti sér efri mörk. Hvert er gildi þessara marka samkvæmt jöfnu Einsteins fyrir massa hlutar á hreyfingu?

Lausn

Við byrjum á jöfnu Einsteins fyrir massa hlutar á hreyfingu,

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

þar sem m_0 er massi hlutarins í kyrrstöðu, v er hraði hans og c er ljóshraðinn. Til að sjá hvernig massinn breytist við mikinn hraða getum við teiknað graf massahlutfallsins m/m_0 sem falls af hraðahlutfallinu, v/c (mynd 2.23).



Mynd 2.23 Þetta graf sýnir massahlutfallið sem fall af hraðahlutfallinu í jöfnu Einsteins fyrir massa hlutar á hreyfingu.

Við sjáum að þegar hlutfall hraðanna nálgast 1 — það er að segja þegar hraði hlutarins nálgast ljóshraða — vex hlutfall massanna án takmarkana. Með öðrum orðum hefur fallið lóðfellu við $v/c=1$. Við getum prófað nokkur gildi þessa hlutfalls til að kanna þessa hugmynd.

Tafla 2.8 Hlutfall massa og hraða hlutar á hreyfingu

$\frac{v}{c}$	$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$\frac{m}{m_0}$
0,99	0,1411	7,089
0,999	0,0447	22,37
0,9999	0,0141	70,71

Samkvæmt töflu 2.8 verður massi hlutar, sem er 100 kg og ferðast á hraðanum 0,9999 c, 7071 kg. Þar sem enginn hlutur getur haft óendanlegan massa ályktum við að enginn hlutur geti ferðast á ljóshraða eða hraðar.

Æfingar í kafla 2.2

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið skoða fallið $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$.

30. [T] Fyllið út eftirfarandi töflu fyrir fallið. Námundið lausnirnar að fjórum aukastöfum.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,9	a.	1,1	e.
0,99	b.	1,01	f.
0,999	c.	1,001	g.
0,9999	d.	1,0001	h.

31. Hvað gefa niðurstöður ykkar úr verkefninu hér á undan til kynna um tvíhliða markgildið $\lim_{x \to 1} f(x)$? Rökstyðjið svarið.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skoða fallið $f(x) = (1+x)^{1/x}$.

32. **[T]** Make a table showing the values of f for $x = -0{,}01, -0{,}001, -0{,}0001, -0{,}00001$ and for $x = 0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001, 0{,}00001$. Round your solutions to five decimal places.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
−0,01	a.	0,01	e.
−0,001	b.	0,001	f.
−0,0001	c.	0,0001	g.
−0,00001	d.	0,00001	h.

33. Hvað gefur gildataflan í verkefninu hér á undan til kynna um fallið $f(x) = (1+x)^{1/x}$?

34. Hvaða stærðfræðilega fasta virðist markgildið í verkefninu hér á undan nálgast?

Notið gefnu gildin í eftirfarandi verkefnum til að setja upp töflu og reikna markgildin. Námundið svörin að átta aukastöfum.

35. **[T]**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\ 2\ x}{x};\ \pm 0{,}1, \pm 0{,}01, \pm 0{,}001, \pm, 0001$$

x	$\frac{\sin 2x}{x}$	x	$\frac{\sin 2x}{x}$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

36. **[T]** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ ±0,1, ±0,01, ±0,001, ±0,0001

x	$\frac{\sin 3x}{x}$	x	$\frac{\sin 3x}{x}$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

37. Notið verkefnin tvö hér á undan til að setja fram tilgátu um gildi eftirfarandi markgildis:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x}$ þar sem a er jákvæð rauntala.

[T] Í eftirfarandi æfingum skuluð þið setja upp gildatöflu til að finna tilgreint markgildi. Námundið að átta tölustöfum.

38.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$$

x	$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$	x	$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$
1,9	a.	2,1	e.
1,99	b.	2,01	f.
1,999	c.	2,001	g.
1,9999	d.	2,0001	h.

39.

$$\lim_{x \to 1} (1 - 2x)$$

x	$1 - 2x$	x	$1 - 2x$
0,9	a.	1,1	e.
0,99	b.	1,01	f.
0,999	c.	1,001	g.
0,9999	d.	1,0001	h.

40.

$$\lim_{x \to 0} \frac{5}{1 - e^{1/x}}$$

x	$\frac{5}{1-e^{1/x}}$	x	$\frac{5}{1-e^{1/x}}$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

2

41.

$$\lim_{z \to 0} \frac{z-1}{z^2(z+3)}$$

z	$\frac{z-1}{z^2(z+3)}$	z	$\frac{z-1}{z^2(z+3)}$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

42.

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\cos t}{t}$$

t	$\frac{\cos t}{t}$
0,1	a.
0,01	b.
0,001	c.
0,0001	d.

43.

$$\lim_{x \to 2} \frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$$

x	$\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$	x	$\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$
1,9	a.	2,1	e.
1,99	b.	2,01	f.
1,999	c.	2,001	g.
1,9999	d.	2,0001	h.

[T] Í eftirfarandi dæmum skuluð þið setja upp gildatöflu og námunda að átta markverðum stöfum. Giskið á hvert markgildið sé út frá töflunni. Notið síðan reiknivél til að teikna graf fallsins og ákvarða markgildið. Var tilgátan rétt? Ef ekki, hvers vegna bregst töfluaðferðin?

44.

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$$

θ	$\sin\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$	θ	$\sin\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

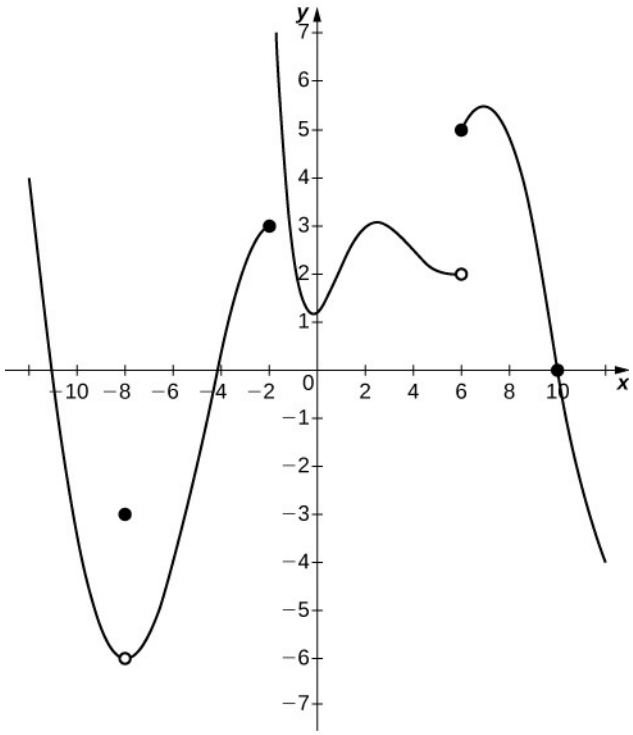
45.

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

α	$\frac{1}{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$
0,1	a.
0,01	b.
0,001	c.
0,0001	d.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið skoða graf fallsins $y=f(x)$ sem sýnt er hér. Hverjar fullyrðinganna um $y=f(x)$ eru sannar og hverjar ósannar? Útskýrið hvers vegna fullyrðing er ósönn.

2



46.

$$\lim_{x \to 10} f(x) = 0$$

47.

$$\lim_{x \to -2^{+}} f(x) = 3$$

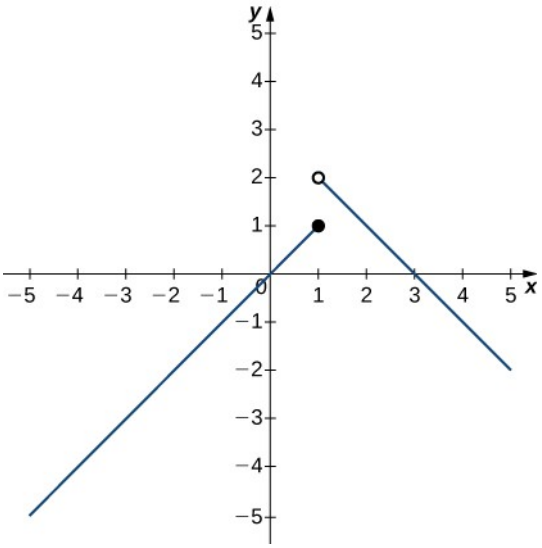
48.

$$\lim_{x \to -8} f(x) = f(-8)$$

49.

$$\lim_{x \to 6} f(x) = 5$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota graf fallsins $y = f(x)$ til að finna gildin, ef unnt er. Áætlið þau eftir þörfum.



50.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)$$

51.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

52.

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

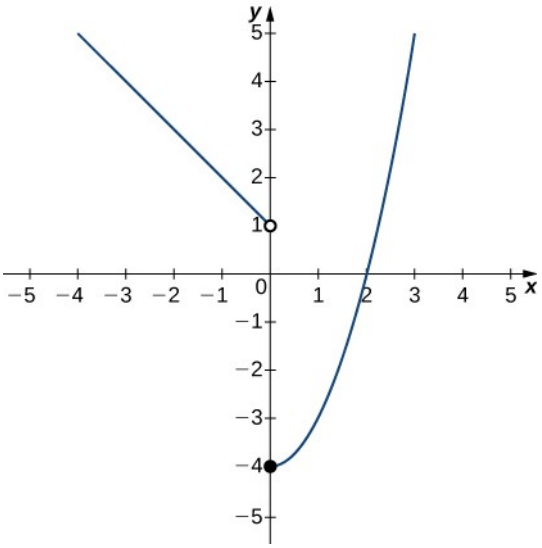
53.

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

54.

$$f(1)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota graf fallsins $y = f(x)$ sem sýnt er hér til að finna gildin, ef unnt er. Áætlið þau þegar þörf krefur.



55.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

56.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

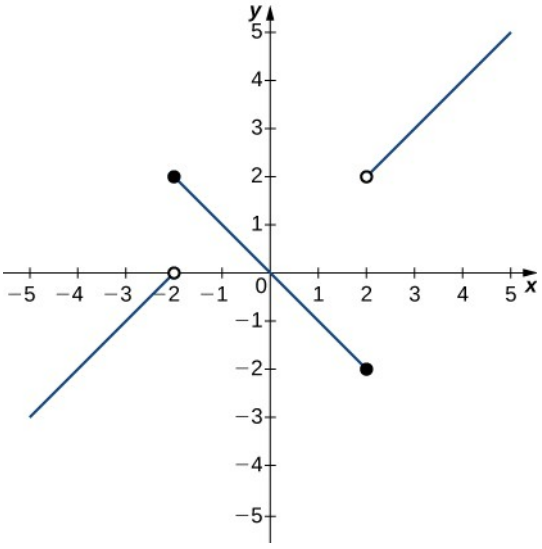
57.

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

58.

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota graf fallsins $y = f(x)$ sem sýnt er hér til að finna gildin, ef unnt er. Áætlið þau þegar þörf krefur.



59.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x)$$

60.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x)$$

61.

$$\lim_{x \to -2} f(x)$$

62.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$

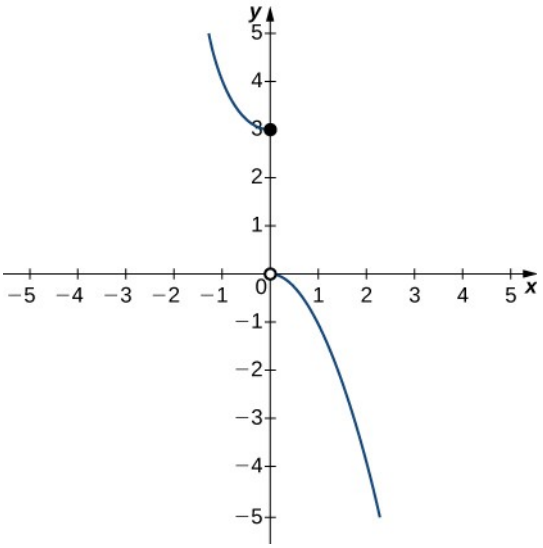
63.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

64.

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota graf fallsins $y = g(x)$ sem sýnt er hér til að finna gildin, ef unnt er. Áætlið þau eftir þörfum.



65.

$$\lim_{x \to 0^-} g(x)$$

66.

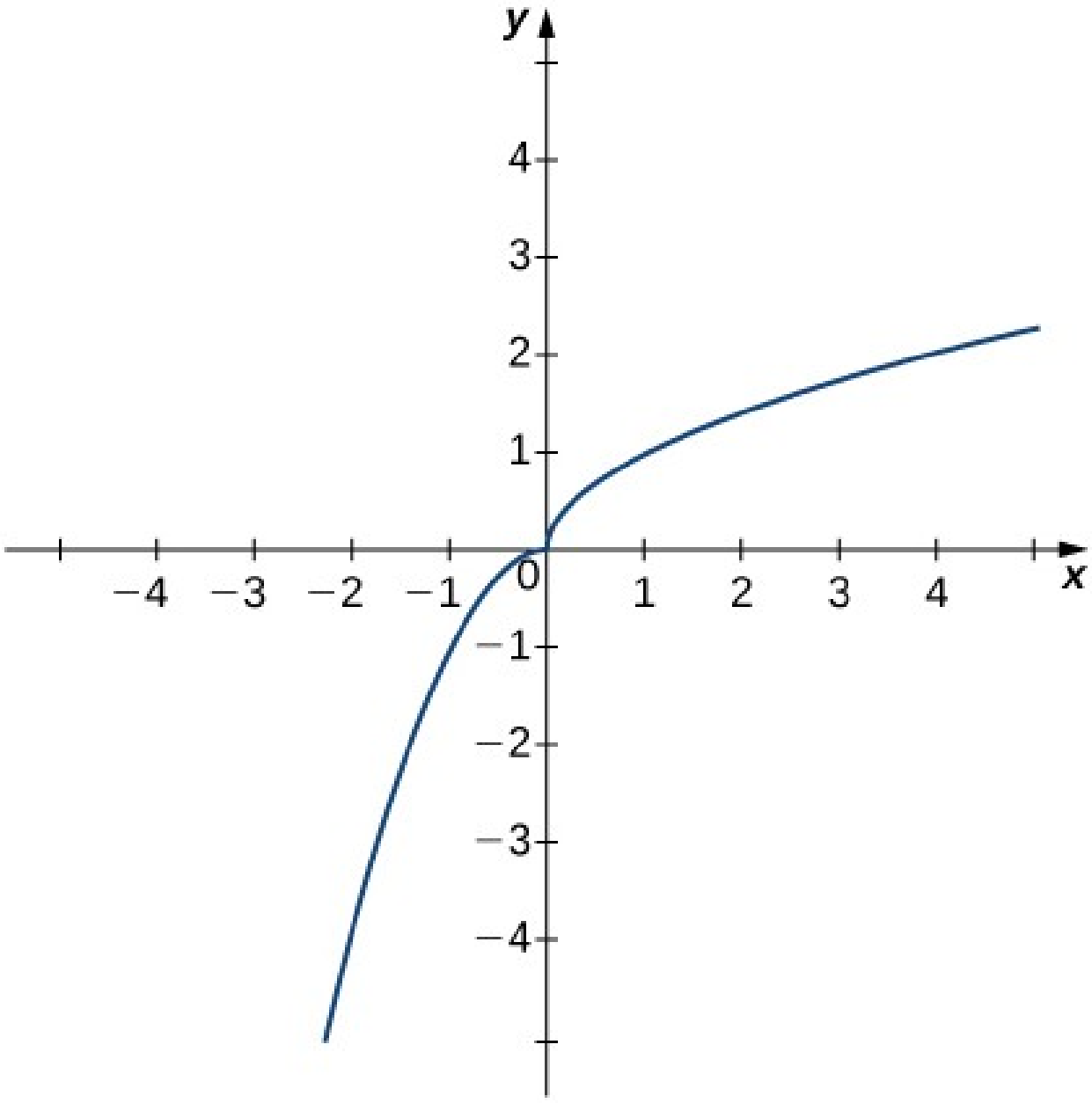
$$\lim_{x \to 0^+} g(x)$$

67.

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota graf fallsins $y = h(x)$ sem sýnt er hér til að finna gildin, ef unnt er. Áætlið þau eftir þörfum.

2



68.

$$\lim_{x \to 0^-} h(x)$$

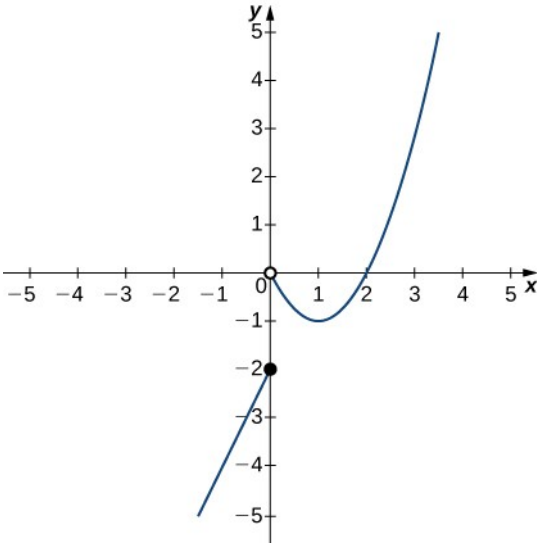
69.

$$\lim_{x \to 0^+} h(x)$$

70.

$$\lim_{x \to 0} h(x)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota graf fallsins $y = f(x)$ sem sýnt er hér til að finna gildin, ef unnt er. Áætlið þau þegar þörf krefur.



71.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)$$

72.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)$$

73.

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

74.

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

75.

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna graf falls sem hefur gefna eiginleika.

76. $\lim_{x \to 2} f(x)=1, \lim_{x \to 4^-} f(x)=3, \lim_{x \to 4^+} f(x)=6, f(4)$ er ekki skilgreint.

77.

$$A s\, x \to -\infty, f(x) \to 0, \lim_{x \to -1^-} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x)=\infty, \lim_{x \to 0} f(x)=f(0), f(0)=1, A s\, x \to \infty, f(x) \to -\infty$$

78.

$$A s\, x \to -\infty, f(x) \to 2, \lim_{x \to 3^-} f(x)=-\infty, \lim_{x \to 3^+} f(x)=\infty, A s\, x \to \infty, f(x) \to 2, f(0)=\frac{-1}{3}$$

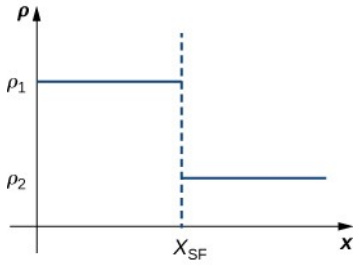
79.

$$A s\, x \to -\infty, f(x) \to 2, \lim_{x \to -2} f(x)=-\infty, A s\, x \to \infty, f(x) \to 2, f(0)=0$$

80.

$$A s\, x \to -\infty, f(x) \to 0, \lim_{x \to -1^-} f(x)=\infty, \lim_{x \to -1^+} f(x)=-\infty,$$
$$f(0)=-1, \lim_{x \to 1^-} f(x)=-\infty, \lim_{x \to 1^+} f(x)=\infty, A s\, x \to \infty, f(x) \to 0$$

81. Höggbylgjur koma fyrir í mörgum eðlisfræðilegum viðfangsefnum, allt frá sprengistjörnum til sprengibylgna. Hér er sýnt graf af eðlismassa höggbylgju sem fall af fjarlægð, x. Við höfum einkum áhuga á staðsetningu framhliðar höggbylgjunnar, sem auðkennd er með x_{SF} á myndinni.



a. Reiknið $\lim_{x \to x_{SF}^+} \rho(x)$.

b. Reiknið $\lim_{x \to x_{SF}^-} \rho(x)$.

c. Reiknið $\lim_{x \to x_{SF}} \rho(x)$. Útskýrið eðlisfræðilega merkingu svara ykkar.

82. Hlaupaþjálfari notar myndavél með stuttum lýsingartíma til að áætla staðsetningu hlaupara sem fall af tíma. Taflan sýnir staðsetningu hlauparans á mismunandi tímum; x táknar staðsetninguna í metrum og t tímann í sekúndum. Hvert er $\lim_{t \to 2} x(t)$? Hver er eðlisfræðileg merking þess?

t (sek.)	x (m)
1,75	4,5
1,95	6,1
1,99	6,42
2,01	6,58
2,05	6,9
2,25	8,5

2.3 Reiknireglur fyrir markgildi

NÁMSMARKMIÐ

- 2.3.1 Þekkið grundvallarreiknireglur markgilda.
- 2.3.2 Notið markgildisreglurnar til að reikna markgildi falls.
- 2.3.3 Reiknið markgildi falls með þáttun.
- 2.3.4 Notið markgildisreglurnar til að reikna markgildi margliðufalls eða ræðs falls.
- 2.3.5 Reiknið markgildi falls með þáttun eða með því að nota samoka.
- 2.3.6 Reiknið markgildi falls með klemmureglunni.

Í fyrri undirkafla reiknuðum við markgildi með því að skoða gröf eða útbúa gildatöflu. Í þessum undirkafla setjum við fram reiknireglur fyrir markgildi og lærum að beita þeim. Í nemendaverkefninu í lok undirkaflans getið þið beitt þessum reiknireglum til að leiða út formúluna fyrir flatarmál hrings. Þar aðlagið þið aðferð sem gríski stærðfræðingurinn Arkímedes þróaði. Við byrjum á að setja aftur fram tvær gagnlegar niðurstöður um markgildi úr fyrri undirkafla. Ásamt reiknireglunum fyrir markgildi eru þessar tvær niðurstöður grunnurinn að því að reikna mörg markgildi.

Útreikningur markgilda með markgildisreglum

Fyrstu tvær markgildisreglurnar voru settar fram undir fyrirsögninni Tvö mikilvæg markgildi og eru endurteknar hér. Með þessum grundvallarniðurstöðum og hinum markgildisreglunum getum við reiknað markgildi margra algebraískra falla.

SETNING 2.4

Grunnniðurstöður um markgildi

Fyrir sérhverja rauntölu a og sérhvern fasta c,

i. $\lim_{x \to a} x = a$
(2.14)

ii. $\lim_{x \to a} c = c$
(2.15)

2

DÆMI 2.13

Útreikningur á einföldu markgildi

Reiknið hvert eftirfarandi markgildi með því að nota Grunnniðurstöður um markgildi.

a. $\lim_{x \to 2} x$

b. $\lim_{x \to 2} 5$

Lausn

a. Markgildi x þegar x nálgast a er a: $\lim_{x \to 2} x = 2$.

b. Markgildi fastafalls er fastinn sjálfur: $\lim_{x \to 2} 5 = 5$.

Við skoðum nú markgildisreglurnar, sem lýsa einstökum eiginleikum markgilda. Hér sleppum við sönnunum þeirra.

SETNING 2.5

Reiknireglur fyrir markgildi

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera skilgreind fyrir öll $x \neq a$ á einhverju opnu bili sem inniheldur a. Gerum ráð fyrir að L og M séu rauntölur þannig að $\lim_{x \to a} f(x) = L$ og $\lim_{x \to a} g(x) = M$. Látum c vera fasta. Þá gilda allar eftirfarandi fullyrðingar:

Summuregla fyrir markgildi:

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

Mismunaregla fyrir markgildi:

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

Regla um fastamargfeldi markgildis: $\lim_{x \to a} c f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c\,L$

Margfeldisregla fyrir markgildi:

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right)=\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)=L \cdot M$$

Deiliregla fyrir markgildi: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}=\frac{L}{M}$ fyrir $M \neq 0$

Veldisregla fyrir markgildi: $\lim_{x \to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n=L^n$ fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n.

Rótarregla fyrir markgildi: $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}=\sqrt[n]{L}$ fyrir öll L ef n er oddatala og fyrir $L \geq 0$ ef n er slétt heiltala og $f(x) \geq 0$.

Nú æfum við okkur í að beita þessum markgildisreglum til að reikna markgildi.

DÆMI 2.14

Útreikningur markgildis með markgildisreglum

Notið markgildisreglurnar til að reikna $\lim_{x \to -3}(4x+2)$.

Lausn

Beitum markgildisreglunum einni af annarri til að ganga úr skugga um að við skiljum hvernig þær virka. Við þurfum að muna að í hvert sinn sem við beitum markgildisreglu verða nýju markgildin að vera til. Annars megum við ekki beita reglunni.

$\lim_{x \to -3}(4x+2) = \lim_{x \to -3} 4x + \lim_{x \to -3} 2$ Beitum summureglunni.

$=4 \cdot \lim_{x \to -3} x + \lim_{x \to -3} 2$ Beitum reglunni um fastamargfeldi markgildis.

$=4 \cdot (-3)+2=-10.$ Beitum grunnniðurstöðum um markgildi og einföldum.

DÆMI 2.15

Endurtekin beiting markgildisreglna

Notið markgildisreglurnar til að reikna $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x+1}{x^3+4}$.

Lausn

Til að finna þetta markgildi þurfum við að beita markgildisreglunum nokkrum sinnum. Aftur þurfum við að muna að þegar við umritum markgildið með öðrum markgildum verður hvert nýtt markgildi að vera til. Annars getum við ekki beitt markgildisreglunni.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x+1}{x^3+4} = \frac{\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+1)}{\lim_{x\to 2}(x^3+4)}$$ Beitum deilireglunni og gætum þess að $(2)^3+4\neq 0$

$$= \frac{2\cdot\lim_{x\to 2}x^2-3\cdot\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1}{\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}4}$$ Beitum summureglunni og reglunni um fastamargfeldi markgildis.

$$= \frac{2\cdot(\lim_{x\to 2}x)^2-3\cdot\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}1}{(\lim_{x\to 2}x)^3+\lim_{x\to 2}4}$$ Beitum veldisreglunni.

$$= \frac{2(4)-3(2)+1}{(2)^3+4} = \frac{1}{4}.$$ Beitum grunnniðurstöðum um markgildi og einföldum.

STÖÐUMAT 2.11

Notið markgildisreglurnar til að reikna $\lim_{x\to 6}(2x-1)\sqrt{x+4}$. Tilgreinið í hverju skrefi hvaða markgildisreglu er beitt.

Markgildi margliðufalla og ræðra falla

Nú hafið þið líklega tekið eftir því að í hverju dæmanna hér á undan hefur gilt að $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Þetta gildir ekki alltaf. Það gildir þó um allar margliður fyrir sérhvert val á a og um öll ræð föll fyrir öll þau gildi a sem ræða fallið er skilgreint fyrir.

SETNING 2.6

Markgildi margliðufalla og ræðra falla

Látum $p(x)$ og $q(x)$ vera margliðuföll. Látum a vera rauntölu. Þá gildir:

$$\lim_{x\to a}p(x)=p(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)} \text{ þegar } q(a)\neq 0.$$

Til að sjá að setningin gildir skoðum við margliðuna $p(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$. Með því að beita summureglunni, reglunni um fastamargfeldi markgildis og veldisreglunni fáum við að lokum

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a}\left(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right)\\ &= c_n\left(\lim_{x\to a} x\right)^n + c_{n-1}\left(\lim_{x\to a} x\right)^{n-1} + \cdots + c_1\left(\lim_{x\to a} x\right) + \lim_{x\to a} c_0\\ &= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0\\ &= p(a).\end{aligned}$$

Af deilireglunni leiðir nú að ef $p(x)$ og $q(x)$ eru margliður þannig að $q(a)\neq 0$, þá

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Í dæmi 2.16 er þessari niðurstöðu beitt.

DÆMI 2.16

Útreikningur markgildis ræðs falls

Reiknið $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x+1}{5x+4}$.

Lausn

Þar sem 3 er í skilgreiningarmengi ræða fallsins $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{5x+4}$, getum við reiknað markgildið með því að setja 3 í stað x í fallið. Því fæst:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x+1}{5x+4} = \frac{10}{19}.$$

STÖÐUMAT 2.12

Reiknið $\lim_{x\to -2}\left(3x^3-2x+7\right)$.

Fleiri aðferðir til að reikna markgildi

Eins og við höfum séð er auðvelt að reikna markgildi margliða og markgildi sumra (en ekki allra) ræðra falla með beinni innsetningu. Eins og fram kom í inngangskaflanum um markgildi er þó vissulega mögulegt að $\lim_{x\to a} f(x)$ sé til þótt $f(a)$ sé óskilgreint. Með eftirfarandi athugun getum við reiknað mörg markgildi af þessu tagi:

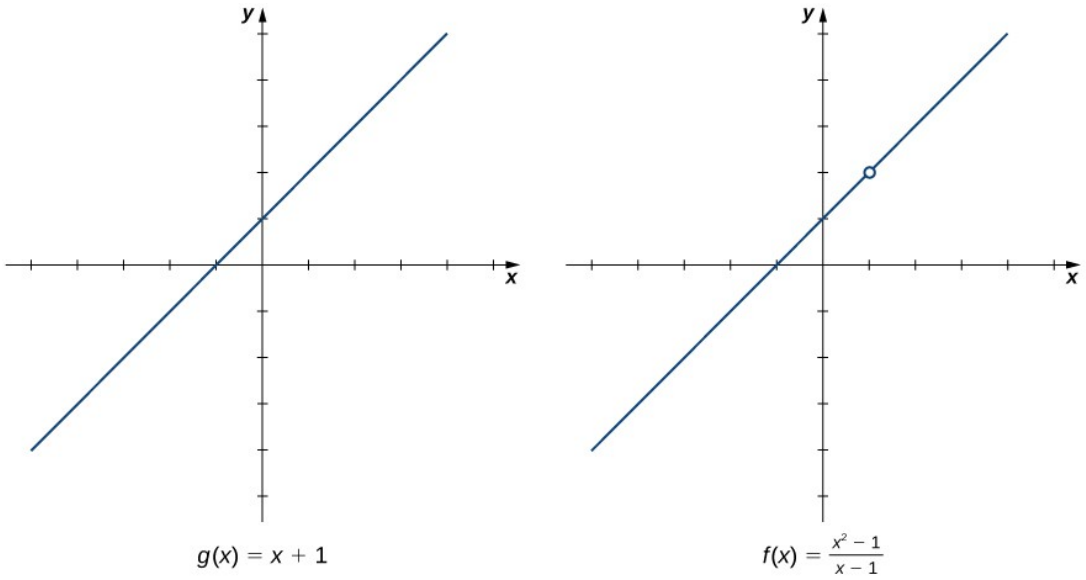
Ef fyrir öll $x\neq a$, $f(x)=g(x)$ á einhverju opnu bili sem inniheldur a, þá er $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$.

Til að skilja þessa hugmynd betur skulum við skoða markgildið $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

Fallið

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

og fallið $g(x)=x+1$ eru eins fyrir öll $x \neq 1$. Gröf þessara tveggja falla eru sýnd á mynd 2.24.



Mynd 2.24 Gröf fallanna $f(x)$ og $g(x)$ eru eins fyrir öll $x \neq 1$. Markgildi þeirra þegar x nálgast 1 eru jöfn.

Við sjáum að

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} (x+1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Markgildið er af gerðinni $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, þar sem $\lim_{x \to a} f(x)=0$ og $\lim_{x \to a} g(x)=0$. (Í þessu tilviki segjum við að $f(x)/g(x)$ hafi óákveðna formið $0/0$.) Lausnaraðferðin hér á eftir lýsir í stórum dráttum hvernig reikna má markgildi af þessari gerð.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Útreikningur markgildis þegar $f(x)/g(x)$ er af óákveðnu gerðinni 0/0

1. Fyrst þurfum við að ganga úr skugga um að fallið sé á viðeigandi formi og að ekki sé hægt að reikna markgildi þess strax með markgildisreglunum.
2. Þá þurfum við að finna fall sem er jafnt $h(x)=f(x)/g(x)$ fyrir öll $x \neq a$ á einhverju bili sem inniheldur a. Til þess gætum við þurft að prófa eitt eða fleiri af skrefunum hér á eftir: Ef
   a. Ef $f(x)$ og $g(x)$ eru margliður, ættum við að þátta hvort fall um sig og stytta alla sameiginlega þætti.

b. Ef teljarinn eða nefnarinn inniheldur mismun þar sem kvaðratrót kemur fyrir, ættum við að reyna að margfalda teljarann og nefnarann með samoka segðarinnar sem inniheldur kvaðratrótina.

c. Ef $f(x)/g(x)$ er brotabrot, byrjum við á að einfalda það.

3. Að lokum beitum við markgildisreglunum.

Næstu dæmi sýna hvernig þessari lausnaraðferð er beitt. Dæmi 2.17 sýnir þáttunar- og styttingaraðferðina; dæmi 2.18 sýnir margföldun með samoka. Í dæmi 2.19 einföldum við brotabrot.

DÆMI 2.17

Útreikningur markgildis með þáttun og styttingu

Reiknið $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3}$.

Lausn

Skref 1. Fallið $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3}$ er óskilgreint þegar $x = 3$. Ef við setjum 3 inn í fallið fáum við raunar $0/0$, sem er óákveðið form. Góð aðferð er að þátta og stytta:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(2x+1)}$$

Skref 2. Fyrir öll $x \neq 3$, $\dfrac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3} = \dfrac{x}{2x+1}$. Því gildir:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(2x+1)} = \lim_{x \to 3} \frac{x}{2x+1}.$$

Skref 3. Reiknið markgildið með markgildisreglunum:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{2x+1} = \frac{3}{7}.$$

STÖÐUMAT 2.13

Reiknið $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 9}$.

DÆMI 2.18

Útreikningur markgildis með því að margfalda með samoka

Reiknið $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1}$.

Lausn

Skref 1. $\frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ er af gerðinni $0/0$ þegar x = −1. Byrjum á því að margfalda bæði teljara og nefnara með $\sqrt{x+2}+1$, sem er samoki $\sqrt{x+2}-1$, eins og hér er sýnt:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1}.$$

Skref 2. Síðan margföldum við upp úr svigunum í teljaranum. Við margföldum ekki upp úr svigunum í nefnaranum því að við vonumst til þess að þátturinn $(x+1)$ í nefnaranum styttist út að lokum:

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2}+1)}.$$

Skref 3. Síðan styttum við út:

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1}.$$

Skref 4. Að lokum beitum við markgildisreglunum:

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{1}{2}.$$

STÖÐUMAT 2.14

Reiknið $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

DÆMI 2.19

Útreikningur markgildis með einföldun brotabrots

Reiknið $\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1}$.

Lausn

Skref 1. $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1}$ er af gerðinni $0/0$ í punktinum 1. Við einföldum algebrubrotið með því að margfalda með $2(x+1)/2(x+1)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1} \cdot \frac{2(x+1)}{2(x+1)}.$$

Skref 2. Næst margföldum við saman þættina í teljurunum. Við margföldum ekki saman þættina í nefnurunum því að við viljum geta stytt út þáttinn $(x-1)$:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{2(x-1)(x+1)}.$$

Skref 3. Síðan einföldum við teljarann:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x+1}{2(x-1)(x+1)}.$$

Skref 4. Nú tökum við –1 út fyrir sviga í teljaranum:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{2(x-1)(x+1)}.$$

Skref 5. Síðan styttum við út sameiginlega þáttinn $(x-1)$:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2(x+1)}.$$

Skref 6. Að lokum reiknum við markgildið með markgildisreglunum:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2(x+1)}=-\frac{1}{4}.$$

STÖÐUMAT 2.15

Reiknið $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\frac{1}{x+2}+1}{x+3}$.

Dæmi 2.20 fellur ekki vel að neinu þeirra mynstra sem komu fram í dæmunum hér á undan. Með örlitlu hugmyndaflugi getum við þó beitt sömu aðferðum.

DÆMI 2.20

Útreikningur markgildis þegar markgildisreglurnar eiga ekki við

Reiknið $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x(x-5)}\right)$.

Lausn

Hvorki $1/x$ né $5/x(x-5)$ hefur markgildi í núlli. Þess vegna getum við ekki beitt summureglunni fyrir markgildi; við verðum að nota aðra aðferð. Í þessu tilviki finnum við markgildið með því að leggja fyrst saman og beita síðan einni af fyrri aðferðum okkar. Athugið að

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{5}{x(x-5)} &= \frac{x-5+5}{x(x-5)}\\ &= \frac{x}{x(x-5)}.\end{aligned}$$

Því fæst

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x(x-5)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-5)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-5}\\ &= -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

2

STÖÐUMAT 2.16

Reiknið $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{4}{x^2-2x-3}\right)$.

Snúum okkur nú aftur að einhliða markgildum. Með einföldum breytingum á markgildisreglunum má beita þeim á einhliða markgildi. Til að beita markgildisreglunum á markgildi af gerðinni $\lim\limits_{x\to a^-}h(x)$, þarf fallið $h(x)$ til dæmis að vera skilgreint á opnu bili af gerðinni (b,a); en fyrir markgildi af gerðinni $\lim\limits_{x\to a^+}h(x)$, þarf fallið $h(x)$ að vera skilgreint á opnu bili af gerðinni (a,c). Dæmi 2.21 sýnir þetta.

DÆMI 2.21

Útreikningur einhliða markgildis með markgildisreglunum

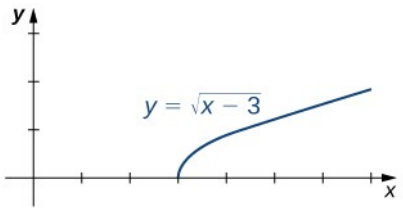
Reiknið hvert markgildanna hér á eftir, ef unnt er.

a. $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x-3}$

b. $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}$

Lausn

Mynd 2.25 sýnir fallið $f(x)=\sqrt{x-3}$ og auðveldar okkur að skilja þessi markgildi.



Mynd 2.25 Grafið sýnir fallið $f(x)=\sqrt{x-3}$.

a. Fallið $f(x)=\sqrt{x-3}$ er skilgreint á bilinu $[3,+\infty)$. Þar sem þetta fall er ekki skilgreint vinstra megin við 3 getum við ekki beitt markgildisreglunum til að reikna út $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x-3}$. Þar sem $f(x)=\sqrt{x-3}$ er óskilgreint vinstra megin við 3 er $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x-3}$ raunar ekki til.

b. Þar sem $f(x)=\sqrt{x-3}$ er skilgreint hægra megin við 3, gilda markgildisreglurnar um $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}$. Með því að beita þessum markgildisreglum fáum við $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$.

Í dæmi 2.22 skoðum við einhliða markgildi hlutskilgreinds falls og notum þau til að draga ályktun um tvíhliða markgildi sama falls.

DÆMI 2.22

Útreikningur tvíhliða markgildis með markgildisreglunum

Fyrir $f(x)=\begin{cases}4x-3 & \text{ef } x<2\\ (x-3)^2 & \text{ef } x\geq 2\end{cases}$, skuluð þið reikna hvert eftirfarandi markgilda:

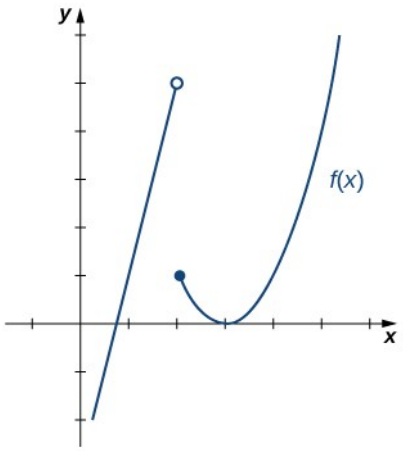
a. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$

c. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

Lausn

Mynd 2.26 sýnir fallið $f(x)$ og auðveldar okkur að skilja þessi markgildi.



Mynd 2.26 Þetta graf sýnir fall $f(x)$.

a. Þar sem $f(x)=4x-3$ fyrir öll x í $(-\infty,2)$, skiptum $f(x)$ út fyrir $4x-3$ í markgildinu og beitum markgildisreglunum:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(4x-3)=5.$$

b. Þar sem $f(x)=(x-3)^2$ fyrir öll x í $(2,+\infty)$, skiptum við $f(x)$ í markgildinu út fyrir $(x-3)^2$ og beitum markgildisreglunum:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x-3)^2=1.$$

c. Þar sem $\lim_{x\to 2^-} f(x)=5$ og $\lim_{x\to 2^+} f(x)=1$, drögum við þá ályktun að $\lim_{x\to 2} f(x)$ sé ekki til.

STÖÐUMAT 2.17

2

Teiknið graf $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{ef } x<-1 \\ 2 & \text{ef } x=-1 \\ x^3 & \text{ef } x>-1 \end{cases}$ og reiknið $\lim_{x\to -1^-} f(x)$.

Við beinum nú sjónum okkar að markgildi af gerðinni $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, þar sem $\lim_{x\to a} f(x)=K$, $K\neq 0$ og $\lim_{x\to a} g(x)=0$. Með öðrum orðum er $f(x)/g(x)$ af gerðinni $K/0, K\neq 0$ í punktinum a.

DÆMI 2.23

Útreikningur markgildis af gerðinni $K/0, K\neq 0$ með markgildisreglunum

Reiknið $\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-2x}$.

Lausn

Skref 1. Ef við setjum inn $x=2$, sjáum við að þetta markgildi er af gerðinni $-1/0$. Það er að segja: Þegar x stefnir á 2 frá vinstri stefnir teljarinn á −1 en nefnarinn á 0. Þar af leiðandi verður tölugildi $\frac{x-3}{x(x-2)}$ óendanlega stórt. Til að átta okkur betur á markgildinu þurfum við að þátta nefnarann:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x(x-2)}.$$

Skref 2. Þar sem $x-2$ er eini þáttur nefnarans sem verður núll þegar 2 er sett inn, einangrum við síðan þáttinn $1/(x-2)$ frá öðrum þáttum fallsins:

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Skref 3. $\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}$ og $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$. Því hefur margfeldi $(x-3)/x$ og $1/(x-2)$ markgildið $+\infty$:

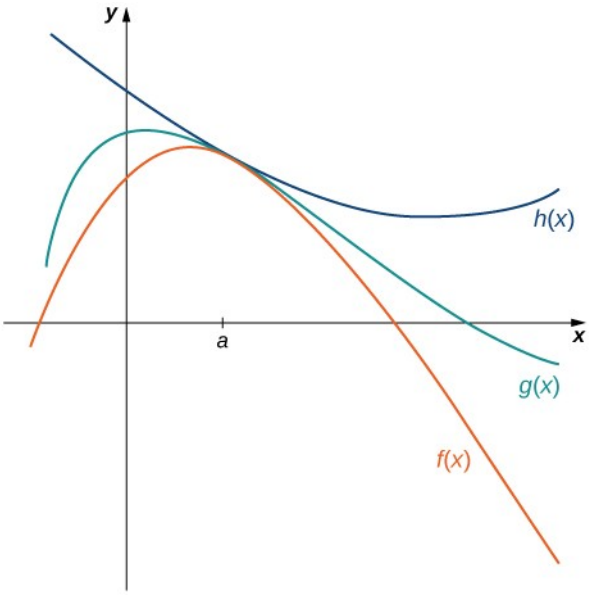
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-3}{x^2-2x} = +\infty.$$

STÖÐUMAT 2.18

Reiknið $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$.

Klemmureglan

Aðferðirnar sem við höfum þróað hingað til nýtast mjög vel fyrir algebruföll, en við getum enn ekki reiknað markgildi mjög einfaldra hornafalla. Næsta setning, sem nefnist klemmureglan, reynist mjög gagnleg við að ákvarða grundvallarmarkgildi hornafalla. Setningin gerir okkur kleift að reikna markgildi með því að „klemma“ fall, sem hefur óþekkt markgildi í punktinum a, á milli tveggja falla sem hafa sama þekkta markgildi í a. Mynd 2.27 sýnir þessa hugmynd.



Mynd 2.27 Klemmureglunni má beita þegar $f(x) \le g(x) \le h(x)$ og $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$.

SETNING 2.7

Klemmureglan

Látum $f(x), g(x)$, og $h(x)$ vera skilgreind fyrir öll $x \neq a$ á opnu bili sem inniheldur a. Ef

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

fyrir öll $x \neq a$ á opnu bili sem inniheldur a og

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$$

þar sem L er rauntala, þá er $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

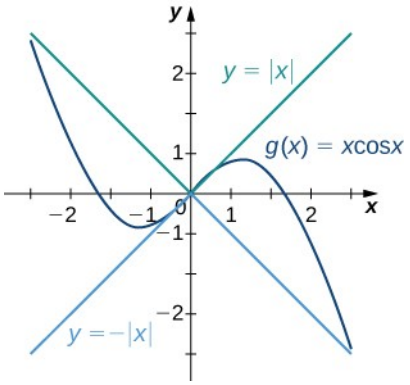
DÆMI 2.24

Beiting klemmureglunnar

Beitið klemmureglunni til að reikna $\lim_{x \to 0} x \cos x$.

Lausn

Þar sem $-1 \le \cos x \le 1$ fyrir öll x höfum við $-|x| \le x \cos x \le |x|$. Þar sem $\lim_{x \to 0}(-|x|) = 0 = \lim_{x \to 0}|x|$, leiðir af klemmureglunni að $\lim_{x \to 0} x \cos x = 0$. Gröf fallanna $f(x) = -|x|, g(x) = x \cos x$, og $h(x) = |x|$ eru sýnd á mynd 2.28.

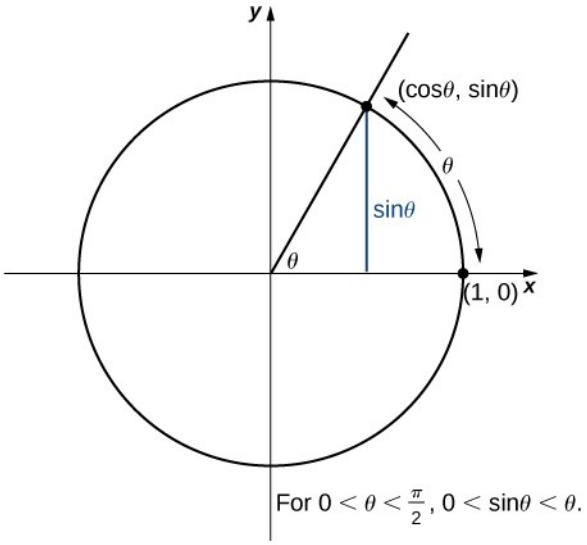


Mynd 2.28 Gröf $f(x), g(x)$, og $h(x)$ eru sýnd í grennd við punktinn $x = 0$.

STÖÐUMAT 2.19

Notið klemmuregluna til að reikna $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Við notum nú klemmuregluna til að ákvarða nokkur mjög mikilvæg markgildi. Umfjöllunin er nokkuð löng, en þessi markgildi eru ómissandi fyrir efnið bæði í næsta undirkafla og næsta kafla. Fyrsta markgildið er $\lim_{\theta \to 0} \sin \theta$. Skoðum einingarhringinn sem sýndur er á mynd 2.29. Á myndinni sjáum við að $\sin \theta$ er y-hnitið á einingarhringnum og samsvarar línustrikinu sem sýnt er með bláum lit. Stærð hornsins θ í bogaeiningum er lengd bogans sem hornið afmarkar á einingarhringnum. Því sjáum við að þegar $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \sin \theta < \theta$.



Mynd 2.29 Sínusfallið er sýnt sem lína á einingarhringnum.

Þar sem $\lim_{\theta \to 0^+} 0 = 0$ og $\lim_{\theta \to 0^+} \theta = 0$, ályktum við með klemmureglunni að

$$\lim_{\theta \to 0^+} \sin\theta = 0.$$

Til að sjá að $\lim_{\theta \to 0^-} \sin\theta = 0$ gildi einnig athugum við að fyrir $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0, 0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ og því $0 < \sin(-\theta) < -\theta$. Þar af leiðandi er $0 < -\sin\theta < -\theta$. Af því leiðir að $0 > \sin\theta > \theta$. Klemmureglan gefur þá markgildið sem leitað er að. Þar sem $\lim_{\theta \to 0^+} \sin\theta = 0$ og $\lim_{\theta \to 0^-} \sin\theta = 0$,

$$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0.$$

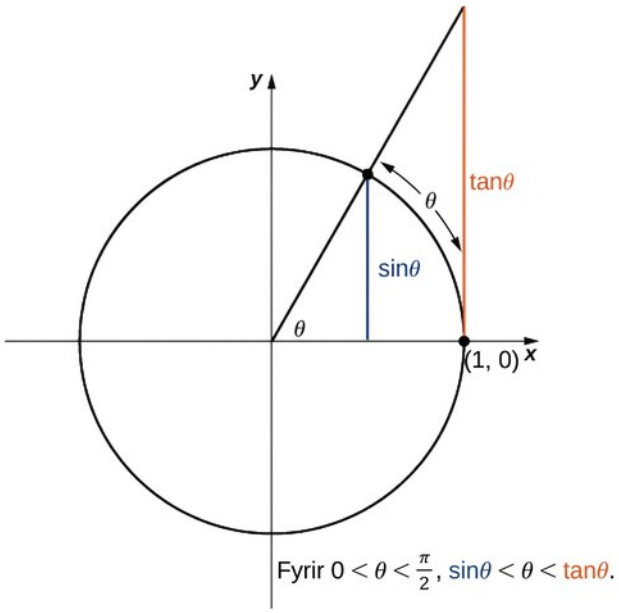
(2.16)

Næst notum við samsemdina $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ fyrir $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, og sjáum að

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \sin^2\theta} = 1.$$

(2.17)

Nú skoðum við markgildi sem gegnir mikilvægu hlutverki í síðari köflum — nefnilega $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$. Til að reikna þetta markgildi notum við einingarhringinn á mynd 2.30. Takið eftir að á þessari mynd hefur einum þríhyrningi verið bætt við mynd 2.30. Við sjáum að lengd hliðarinnar sem er mótlæg horninu θ í þessum nýja þríhyrningi er $\tan\theta$. Því sjáum við að fyrir $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta < \theta < \tan\theta$.



Mynd 2.30 Sínus- og tangensföllin eru sýnd sem línur á einingarhringnum.

Með því að deila með $\sin\theta$ í öllum hlutum ójöfnunnar fáum við

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}.$$

Jafngilt er að skrifa

$$1>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta.$$

Þar sem $\lim_{\theta\to 0^+} 1=1=\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta$, ályktum við að $\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$. Með sams konar umritun og notuð var til að sýna að $\lim_{\theta\to 0^-}\sin\theta=0$, má sýna að $\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$. Því gildir

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

(2.18)

Í dæmi 2.25 notum við þetta markgildi til að sýna fram á $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$. Þetta markgildi kemur einnig að gagni í síðari köflum.

DÆMI 2.25

Útreikningur mikilvægs markgildis hornafalls

Reiknið $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}$.

Lausn

Í fyrsta skrefinu margföldum við með samokanum svo að við getum notað hornafallasamsemd til að breyta kósínusnum í teljaranum í sínus:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\ &= 1\cdot\frac{0}{2}=0.\end{aligned}$$

Því fæst

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0.$$

(2.19)

STÖÐUMAT 2.20

Reiknið $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

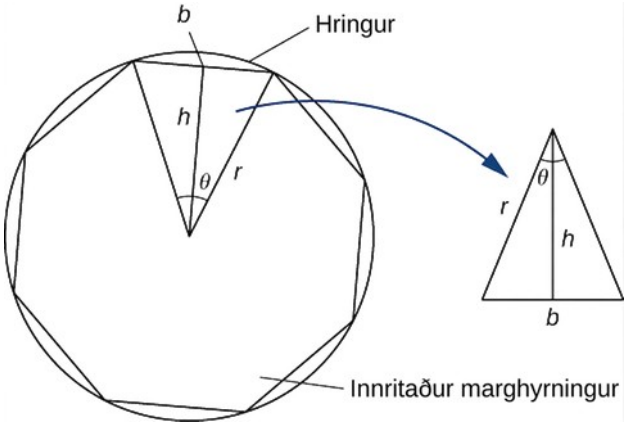
NEMENDAVERKEFNI

Útleiðsla formúlunnar fyrir flatarmál hrings

Sumar þeirra rúmfræðiformúla sem við teljum sjálfsagðar nú á dögum voru fyrst leiddar út með aðferðum sem voru undanfari sumra aðferða stærðfræðigreiningar. Gríski stærðfræðingurinn Arkímedes (um 287–212 f.Kr.) var sérlega hugmyndaríkur og notaði marghyrninga sem innritaðir voru í hringi til að nálga flatarmál hringsins eftir því sem hliðum marghyrningsins fjölgaði. Hann setti hugmyndina um markgildi aldrei fram, en með henni getum við kannað hvaða niðurstöðu mætti leiða af rúmfræðilegum smíðum hans.

Við getum áætlað flatarmál hrings með því að reikna flatarmál reglulegs marghyrnings sem er innritaður í hringinn. Líta má á reglulega marghyrninginn sem samsettan úr n þríhyrningum. Með því að taka markgildið þegar topphorn þessara þríhyrninga stefna á núll má finna flatarmál hringsins. Til að sjá þetta skuluð þið fylgja skrefunum hér á eftir:

1. Tjáið hæðina h og grunnlínuna b í jafnarma þríhyrningnum á mynd 2.31 sem föll af θ og r.



Mynd 2.31

2. Notið segðirnar sem þið fenguð í skrefi 1 til að lýsa flatarmáli jafnarma þríhyrningsins sem falli af θ og r. (Setjið $(1/2)\sin\theta$ í stað $\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ í segð ykkar.)
3. Ef reglulegur n-hyrningur er innritaður í hring með radíus r, finnið samband milli θ og n. Leysið sambandið fyrir n. Hafið í huga að í heilum hring eru 2π radíanar. (Notið radíana, ekki gráður.)
4. Finnið segð fyrir flatarmál n-hyrningsins sem fall af r og θ.
5. Til að finna formúlu fyrir flatarmál hringsins skuluð þið finna markgildi segðarinnar í skrefi 4 þegar θ stefnir á núll. (Vísbending: $\lim_{\theta \to 0} \frac{(\sin\theta)}{\theta} = 1$).

Aðferðin við að áætla flatarmál svæða með marghyrningum er tekin aftur fyrir í kaflanum Inngangur að heildun.

Æfingar úr kafla 2.3

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota markgildisreglurnar til að reikna hvert markgildi. Rökstyðjið hvert skref með því að tilgreina viðeigandi markgildisreglu eða -reglur.

83.

$$\lim_{x \to 0} \left(4x^2 - 2x + 3\right)$$

84.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 5}{4 - 7x}$$

85.

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x^2 - 6x + 3}$$

86.

$$\lim_{x \to -1} \left(9x+1\right)^2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota beina innsetningu til að reikna hvert markgildi.

87.

$$\lim_{x \to 7} x^2$$

88.

$$\lim_{x \to -2} \left(4x^2-1\right)$$

89.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\sin x}$$

90.

$$\lim_{x \to 2} e^{2x-x^2}$$

91.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2-7x}{x+6}$$

92.

$$\lim_{x \to 3} \ln e^{3x}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota beina innsetningu til að sýna að hvert markgildi gefur óákveðna formið $0/0$. Reiknið síðan markgildið.

93.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$$

94.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-2x}$$

95.

$$\lim_{x \to 6} \frac{3x-18}{2x-12}$$

96.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

97.

$$\lim_{t \to 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3}$$

2

98. $\lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$, þar sem a er rauntölufasti sem er ekki núll

99.

$$\lim_{\theta \to \pi} \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$

100.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

101.

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$$

102.

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x+3}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota beina innsetningu til að fá óskilgreinda segð. Notið síðan aðferðina í dæmi 2.23 til að einfalda fallið svo að auðveldara verði að finna markgildið.

103.

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

104.

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

105.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

106.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið gera ráð fyrir að $\lim_{x \to 6} f(x)=4$, $\lim_{x \to 6} g(x)=9$, og $\lim_{x \to 6} h(x)=6$. Notið þessar þrjár staðreyndir og markgildisreglurnar til að reikna hvert markgildi.

107.

$$\lim_{x \to 6} 2f(x)g(x)$$

108.

$$\lim_{x \to 6} \frac{g(x)-1}{f(x)}$$

109.

$$\lim_{x \to 6} \left(f(x)+\frac{1}{3}g(x) \right)$$

110.

$$\lim_{x \to 6} \frac{\left(h(x)\right)^3}{2}$$

111.

$$\lim_{x \to 6} \sqrt{g(x)-f(x)}$$

112.

$$\lim_{x \to 6} x \cdot h(x)$$

113.

$$\lim_{x \to 6} \left[(x+1) \cdot f(x) \right]$$

114.

$$\lim_{x \to 6} \left(f(x) \cdot g(x) - h(x) \right)$$

[T] Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota reiknivél til að teikna graf hvers hlutskilgreinds falls og skoða grafið til að reikna tilgreind markgildi.

115.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3 \\ x + 4, & x > 3 \end{cases}$$

a. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

116.

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

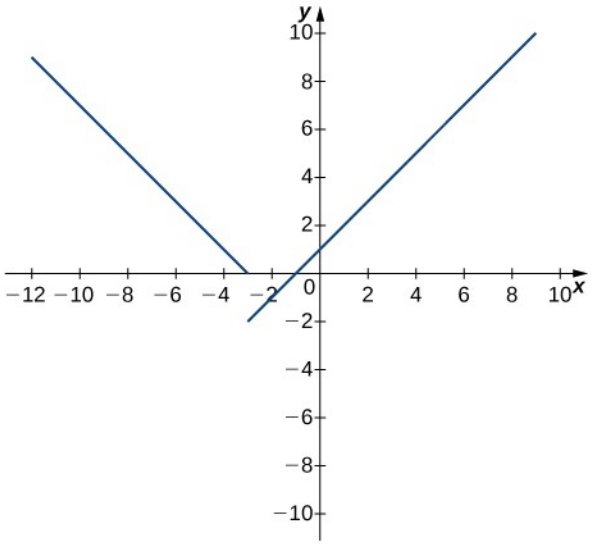
117.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 2 \\ 3 - x, & x \geq 2 \end{cases}$$

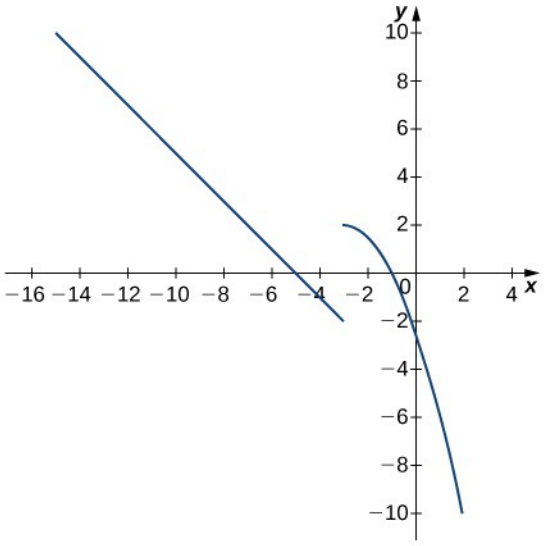
a. $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota gröfin hér á eftir og markgildisreglurnar til að reikna hvert markgildi.



$y = f(x)$



$y = g(x)$

118.

$$\lim_{x \to -3^+} \left(f(x)+g(x)\right)$$

119.

$$\lim_{x \to -3^-} \left(f(x)-3g(x)\right)$$

120.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{3}$$

121.

$$\lim_{x \to -5} \frac{2+g(x)}{f(x)}$$

122.

$$\lim_{x \to 1} \left(f(x)\right)^2$$

123.

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{f(x) - g(x)}$$

124.

$$\lim_{x \to -7} \left(x \cdot g(x)\right)$$

125.

$$\lim_{x \to -9} \left[x \cdot f(x) + 2 \cdot g(x)\right]$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið reikna markgildið með klemmureglunni. Notið reiknivél til að teikna gröf fallanna $f(x), g(x)$, og $h(x)$ þegar þess er kostur.

126. [T] Satt eða ósatt? Ef $2x - 1 \leq g(x) \leq x^2 - 2x + 3$, þá gildir $\lim_{x \to 2} g(x) = 0$.

127. [T] $\lim_{\theta \to 0} \theta^2 \cos\left(\frac{1}{\theta}\right)$

128. $\lim_{x \to 0} f(x)$, þar sem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ er ræð tala} \\ x^2, & x \text{ er óræð tala} \end{cases}$$

129. [T] Í eðlisfræði er rafsviðsstyrkurinn sem punktahleðsla myndar í fjarlægð r í tómarúmi gefinn með lögmáli Coulombs: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, þar sem E táknar rafsviðsstyrkinn, q er hleðsla agnarinnar, r er fjarlægðin milli agnarinnar og punktsins þar sem rafsviðsstyrkurinn er mældur og $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ er fasti Coulombs: $8{,}988 \times 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$.

a. Notið grafreikni til að teikna graf $E(r)$ að því gefnu að hleðsla agnarinnar sé $q = 10^{-10}$.

b. Reiknið $\lim_{r \to 0^+} E(r)$. Hver er eðlisfræðileg merking þessarar stærðar? Hefur hún eðlisfræðilega þýðingu? Hvers vegna reiknið þið frá hægri?

130. [T] Eðlismassi hlutar fæst með því að deila massa hans með rúmmáli hans: $\rho = m/V$.

a. Notið reiknivél til að teikna graf rúmmálsins sem falls af eðlismassanum $(V = m/\rho)$, að því gefnu að þið séuð að skoða hlut sem hefur massann 8 kg ($m = 8$).

b. Reiknið $\lim_{\rho \to 0^+} V(\rho)$ og útskýrið eðlisfræðilega merkingu.

2.4 Samfelldni

NÁMSMARKMIÐ

- 2.4.1 Útskýrið skilyrðin þrjú fyrir samfelldni í punkti.
- 2.4.2 Lýsið þremur tegundum ósamfelldni.
- 2.4.3 Skilgreinið samfelldni á bili.
- 2.4.4 Setjið fram setninguna um markgildi samskeyttra falla.
- 2.4.5 Nefnið dæmi um milligildissetninguna.

Mörg föll hafa þann eiginleika að hægt er að draga upp gröf þeirra með blýanti án þess að lyfta blýantinum af blaðinu. Slík föll kallast samfelld. Í gröfum annarra falla eru punktar þar sem rof verður, en föllin hafa þennan eiginleika á bilum innan skilgreiningarmengja sinna. Þau eru samfelld á þessum bilum og sögð ósamfelld í punktum þar sem rof verður.

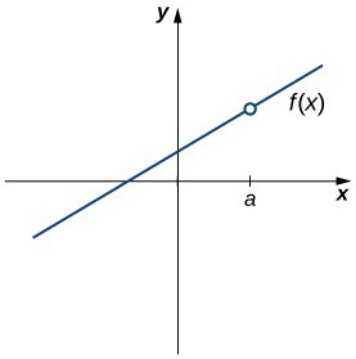
Við hefjum umfjöllun okkar um samfelldni á því að kanna hvað felst í því að fall sé samfellt í punkti. Lauslega sagt er fall samfellt í tilteknum punkti ef graf þess rofnar ekki þar.

Samfelldni í punkti

Áður en við skoðum formlega skilgreiningu á samfelldni í punkti skulum við líta á ýmis föll sem samræmast ekki innsæishugmynd okkar um samfelldni í punkti. Síðan setjum við fram skilyrði sem koma í veg fyrir að slíkt gerist.

Fyrsta fallið sem við skoðum er sýnt á mynd 2.32. Við sjáum að gat er á grafi $f(x)$ við a. Reyndar er $f(a)$ óskilgreint. Til að $f(x)$ sé samfellt í a þarf að minnsta kosti þetta skilyrði að vera uppfyllt:

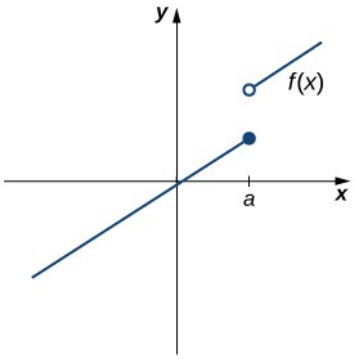
$$\text{i. } f(a) \text{ er skilgreint.}$$



Mynd 2.32 Fallið $f(x)$ er ekki samfellt í a vegna þess að $f(a)$ er óskilgreint.

Eins og sjá má á mynd 2.33 nægir þetta skilyrði þó ekki eitt og sér til að tryggja samfelldni í punktinum a. Þótt $f(a)$ sé skilgreint er rof í fallinu við a. Í þessu dæmi stafar rofið af því að $\lim_{x \to a} f(x)$ er ekki til. Við verðum að bæta við öðru skilyrði fyrir samfelldni í a:

$$\text{ii. } \lim_{x \to a} f(x) \text{ er til.}$$

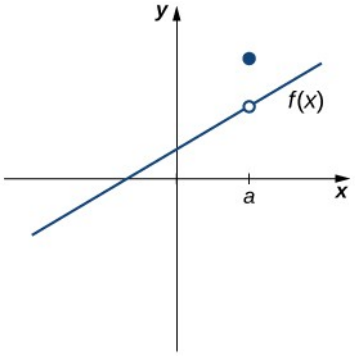


2

Mynd 2.33 Fallið $f(x)$ er ekki samfellt í a vegna þess að $\lim_{x \to a} f(x)$ er ekki til.

Eins og sjá má á mynd 2.34 tryggja þessi tvö skilyrði þó ekki ein og sér samfelldni í punkti. Fallið á þessari mynd uppfyllir fyrstu tvö skilyrðin en er samt ekki samfellt í a. Við verðum að bæta þriðja skilyrðinu við listann:

$$\text{iii.} \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$



Mynd 2.34 Fallið $f(x)$ er ekki samfellt í a vegna þess að $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Nú tökum við skilyrðin saman og setjum fram skilgreiningu á samfelldni í punkti.

SKILGREINING

Fall $f(x)$ er samfellt í punkti a þá og því aðeins að eftirfarandi þrjú skilyrði séu uppfyllt:

i. $f(a)$ er skilgreint

ii. $\lim_{x \to a} f(x)$ er til

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Fall er ósamfellt í punkti a ef það er ekki samfellt í a.

Með eftirfarandi aðferð má nota skilgreininguna til að kanna hvort fall sé samfellt í punkti.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Athugun á samfelldni falls í punkti

1. Athugið hvort $f(a)$ sé skilgreint. Ef $f(a)$ er óskilgreint þurfum við ekki að kanna málið frekar. Fallið er ekki samfellt í punktinum a. Ef $f(a)$ er skilgreint haldið þá áfram í skref 2.
2. Reiknið $\lim_{x \to a} f(x)$. Í sumum tilvikum gæti þurft að gera þetta með því að reikna fyrst $\lim_{x \to a^-} f(x)$ og $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Ef $\lim_{x \to a} f(x)$ er ekki til (það er að segja er ekki rauntala) er fallið ekki samfellt í a og þar með er verkefnið leyst. Ef $\lim_{x \to a} f(x)$ er til haldið þá áfram í skref 3.
3. Berið saman $f(a)$ og $\lim_{x \to a} f(x)$. Ef $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, þá er fallið ekki samfellt í a. Ef $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, þá er fallið samfellt í a.

Næstu þrjú dæmi sýna hvernig nota má þessa skilgreiningu til að ákvarða hvort fall sé samfellt í tilteknum punkti. Í þeim sést hvenær hvert skilyrði í skilgreiningunni á samfelldni er uppfyllt og hvenær ekki.

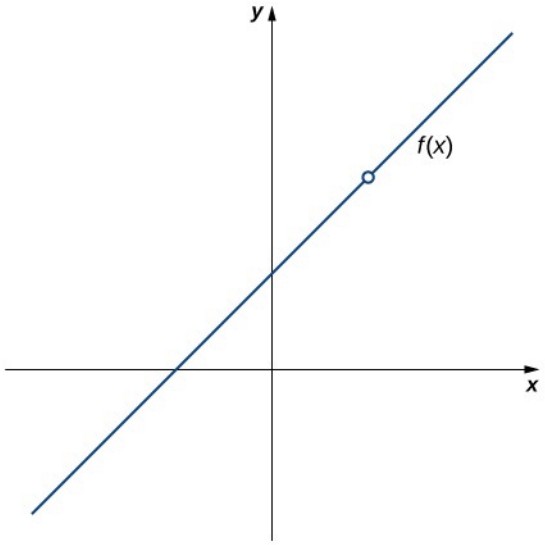
DÆMI 2.26

Athugun á samfelldni falls í punkti, skilyrði 1

Notið skilgreininguna til að ákvarða hvort fallið $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ sé samfellt í $x = 2$. Rökstyðjið niðurstöðuna.

Lausn

Byrjum á að reyna að reikna $f(2)$. Við sjáum að $f(2) = 0/0$, sem er óskilgreint. Því er $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ ósamfellt í 2 vegna þess að $f(2)$ er óskilgreint. Graf $f(x)$ er sýnt á mynd 2.35.



Mynd 2.35 Fallið $f(x)$ er ósamfellt í 2 vegna þess að $f(2)$ er óskilgreint.

DÆMI 2.27

Athugun á samfelldni falls í punkti, skilyrði 2

Notið skilgreininguna til að ákvarða hvort fallið $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & \text{ef } x\leq 3 \\ 4x-8 & \text{ef } x>3 \end{cases}$ sé samfellt í $x=3$.

Rökstyðjið niðurstöðuna.

Lausn

Byrjum á því að reyna að reikna $f(3)$.

$$f(3)=-(3^2)+4=-5.$$

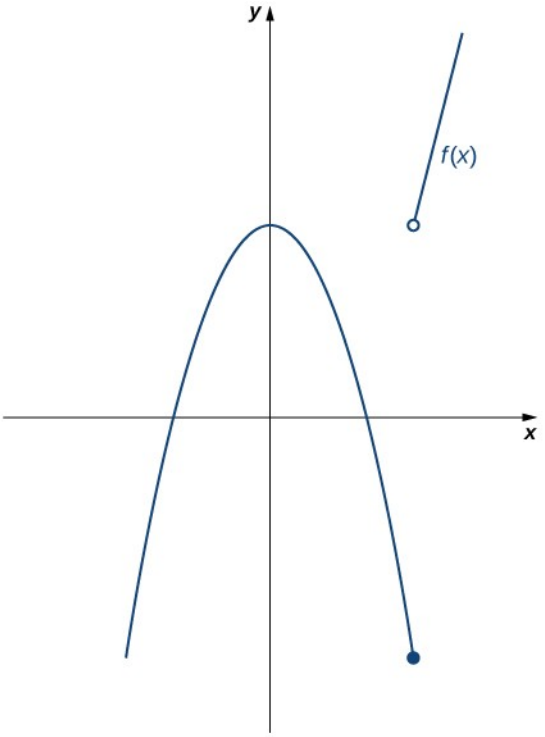
Þar með er $f(3)$ skilgreint. Næst reiknum við $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. Til þess þurfum við að reikna $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ og $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=-(3^2)+4=-5$$

og

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=4(3)-8=4.$$

Þar af leiðandi er $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ekki til. Því er $f(x)$ ekki samfellt í 3. Graf $f(x)$ er sýnt á mynd 2.36.



Mynd 2.36 Fallið $f(x)$ er ekki samfellt í 3 vegna þess að $\lim_{x \to 3} f(x)$ er ekki til.

DÆMI 2.28

Athugun á samfelldni falls í punkti, skilyrði 3

Notið skilgreininguna til að ákvarða hvort fallið $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ef } x \neq 0 \\ 1 & \text{ef } x = 0 \end{cases}$ sé samfellt í $x = 0$.

Lausn

Athugum fyrst að

$$f(0) = 1.$$

Því næst

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Að lokum berum við saman $f(0)$ og $\lim_{x \to 0} f(x)$. Við sjáum að

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to 0} f(x).$$

Þar sem öll þrjú skilyrðin í skilgreiningunni á samfelldni eru uppfyllt er $f(x)$ samfellt í $x = 0$.

STÖÐUMAT 2.21

Notið skilgreininguna til að ákvarða hvort fallið $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{ef } x<1\\ 2 & \text{ef } x=1\\ -x+4 & \text{ef } x>1\end{cases}$ sé samfellt í $x=1$.

Ef fallið er ekki samfellt í 1 skuluð þið tilgreina hvaða skilyrði fyrir samfelldni í punkti er ekki uppfyllt.

Út frá skilgreiningunni á samfelldni og þeim setningum um útreikning markgilda sem við höfum þegar sannað getum við sett fram eftirfarandi setningu.

2

SETNING 2.8

Samfelldni margliða og ræðra falla

Margliður og ræð föll eru samfelld í hverjum punkti skilgreiningarmengja sinna.

Sönnun

Áður sýndum við að ef $p(x)$ og $q(x)$ eru margliður, þá er $\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$ fyrir sérhverja margliðu $p(x)$ og $\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}$ að því gefnu að $q(a)\neq 0$. Því eru margliður og ræð föll samfelld á skilgreiningarmengjum sínum.

□

Við beitum nú setningunni um samfelldni margliða og ræðra falla til að ákvarða í hvaða punktum tiltekið rætt fall er samfellt.

DÆMI 2.29

Samfelldni ræðs falls

Fyrir hvaða gildi x er $f(x)=\frac{x+1}{x-5}$ samfellt?

Lausn

Ræða fallið $f(x)=\frac{x+1}{x-5}$ er samfellt fyrir öll gildi x nema $x=5$.

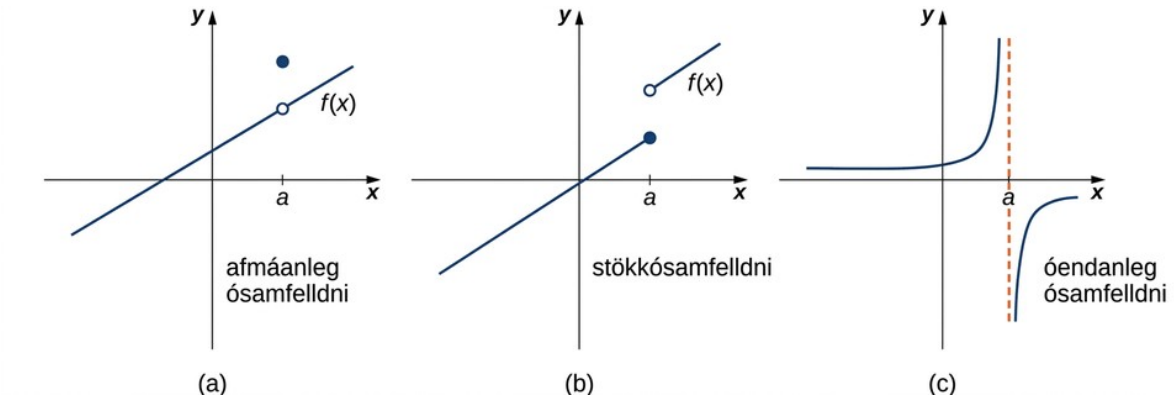
STÖÐUMAT 2.22

Fyrir hvaða gildi x er $f(x)=3x^4-4x^2$ samfellt?

Tegundir ósamfelldni

Eins og við höfum séð í dæmum 2.26 og 2.27 getur ósamfelldni birst með ýmsum hætti. Þær gerðir ósamfelldni sem við höfum séð hingað til flokkast sem afmáanleg ósamfelldni, óendanleg ósamfelldni eða stökkósamfelldni. Í grófum dráttum er afmáanleg ósamfelldni gat

á grafinu; stökkósamfelldni er ósamfelldni sem er ekki óendanleg og þar sem hlutar grafsins mætast ekki; og óendanleg ósamfelldni verður við lóðfellu. Mynd 2.37 sýnir muninn á þessum gerðum. Þessi hugtök eru hentug til að lýsa þremur algengum gerðum ósamfelldni, en hafið í huga að ekki fellur öll ósamfelldni skýrt í þessa flokka.



Mynd 2.37 Ósamfelldni flokkast í (a) afmáanlega ósamfelldni, (b) stökkósamfelldni eða (c) óendanlega ósamfelldni.

Þessar þrjár tegundir ósamfelldni eru formlega skilgreindar á eftirfarandi hátt:

SKILGREINING

Ef $f(x)$ er ósamfellt í a þá

1. f hefur afmáanlega ósamfelldni í a ef $\lim_{x \to a} f(x)$ er til. (Athugið: Þegar við segjum að $\lim_{x \to a} f(x)$ sé til eigum við við að $\lim_{x \to a} f(x) = L$, þar sem L er rauntala.)
2. f hefur stökkósamfelldni í a ef $\lim_{x \to a^-} f(x)$ og $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eru bæði til, en $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$. (Athugið: Þegar við segjum að $\lim_{x \to a^-} f(x)$ og $\lim_{x \to a^+} f(x)$ séu bæði til, eigum við við að bæði séu raungild og að hvorugt þeirra taki gildin $\pm\infty$.)
3. f hefur óendanlega ósamfelldni í a ef $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ og/eða $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

DÆMI 2.30

Flokkun ósamfelldni

Í dæmi 2.26 sýndum við að $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ er ósamfellt í $x = 2$. Flokkið þessa ósamfelldni sem afmáanlega ósamfelldni, stökkósamfelldni eða óendanlega ósamfelldni.

Lausn

Til að flokka ósamfelldnina í 2 verðum við að reikna $\lim_{x \to 2} f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x+2)\\ &= 4.\end{aligned}$$

Þar sem f er ósamfellt í 2 og $\lim_{x\to 2} f(x)$ er til hefur f afmáanlega ósamfelldni í $x=2$.

2

DÆMI 2.31

Flokkun ósamfelldni

Í dæmi 2.27 sýndum við að $f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & \text{ef } x\le 3\\ 4x-8 & \text{ef } x>3\end{cases}$ er ósamfellt í $x=3$. Flokkið þessa ósamfelldni sem afmáanlega ósamfelldni, stökkósamfelldni eða óendanlega ósamfelldni.

Lausn

Fyrr sýndum við að f er ósamfellt í 3 vegna þess að $\lim_{x\to 3} f(x)$ er ekki til. Þar sem $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-5$ og $\lim_{x\to 3^+} f(x)=4$ eru hins vegar bæði til, ályktum við að fallið hafi stökkósamfelldni í 3.

DÆMI 2.32

Flokkun ósamfelldni

Ákvarðið hvort $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ sé samfellt í punktinum −1. Ef fallið er ósamfellt í −1 flokkið þá ósamfelldnina sem afmáanlega ósamfelldni, stökkósamfelldni eða óendanlega ósamfelldni.

Lausn

Fallsgildið $f(-1)$ er óskilgreint. Fallið er því ekki samfellt í −1. Til að ákvarða tegund ósamfelldninnar verðum við að ákvarða markgildið í −1. Við sjáum að $\lim_{x\to -1^-}\frac{x+2}{x+1}=-\infty$ og $\lim_{x\to -1^+}\frac{x+2}{x+1}=+\infty$. Fallið hefur því óendanlega ósamfelldni í −1.

STÖÐUMAT 2.23

Ákvarðið fyrir f (x) = { x 2 ef x ≠ 1 3 ef x = 1, hvort f sé samfellt í 1. Ef f er ekki samfellt í 1 flokkið þá ósamfelldnina sem afmáanlega ósamfelldni, stökkósamfelldni eða óendanlega ósamfelldni.$f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{ef } x\neq 1\\ 3 & \text{ef } x=1\end{cases}$,

Samfelldni á bili

Nú þegar við höfum kannað hugtakið samfelldni í punkti yfirfærum við þessa hugmynd á samfelldni á bili. Þegar við útfærum þessa hugmynd fyrir mismunandi gerðir bila er gott að hafa í huga að fall er, í grófum dráttum, samfellt á bili ef draga má graf þess með blýanti milli hvaða tveggja punkta sem er á bilinu án þess að lyfta blýantinum af blaðinu. Áður en við skilgreinum samfelldni á bili skoðum við hvað það merkir að fall sé samfellt frá hægri og frá vinstri í punkti.

SAMFELLDNI FRÁ HÆGRI OG FRÁ VINSTRI

Fallið $f(x)$ er samfellt frá hægri í a ef $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Fallið $f(x)$ er samfellt frá vinstri í a ef $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Fall er samfellt á opnu bili ef það er samfellt í sérhverjum punkti bilsins. Fall $f(x)$ er samfellt á lokuðu bili af gerðinni $[a, b]$ ef það er samfellt í sérhverjum punkti í (a, b) og er samfellt frá hægri í a og er samfellt frá vinstri í b. Á hliðstæðan hátt er fall $f(x)$ samfellt á bili af gerðinni $(a, b]$ ef það er samfellt á (a, b) og er samfellt frá vinstri í b. Samfelldni á öðrum gerðum bila er skilgreind með hliðstæðum hætti.

Krafan um að $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ og $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ tryggir að við getum dregið graf fallsins frá punktinum $(a, f(a))$ að punktinum $(b, f(b))$ án þess að lyfta blýantinum. Ef til dæmis $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$, þyrftum við að lyfta blýantinum til að stökkva frá $f(a)$ yfir á graf þess hluta fallsins sem eftir er á $(a, b]$.

DÆMI 2.33

Samfelldni á bili

Tilgreinið bilið eða bilin þar sem fallið $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$ er samfellt.

Lausn

Þar sem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$ er rætt fall er það samfellt í sérhverjum punkti skilgreiningarmengis síns. Skilgreiningarmengi $f(x)$ er mengið $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$. Því er $f(x)$ samfellt á hverju bilanna $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, og $(0, +\infty)$.

DÆMI 2.34

Samfelldni á bili

Tilgreinið bilið eða bilin þar sem fallið $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ er samfellt.

Lausn

Samkvæmt reiknireglum fyrir markgildi vitum við að $\lim_{x \to a} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-a^2}$ fyrir öll gildi a í $(-2,2)$. Við vitum einnig að $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0$ er til og $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$ er til. Því er $f(x)$ samfellt á bilinu $[-2,2]$.

STÖÐUMAT 2.24

2

Tilgreinið bilið eða bilin þar sem fallið $f(x) = \sqrt{x+3}$ er samfellt.

Setningin um samskeytt föll gerir okkur kleift að reikna markgildi í fleiri tilvikum. Með henni getum við meðal annars sýnt að hornaföll eru samfelld á skilgreiningarmengjum sínum.

SETNING 2.9

Setningin um samskeytt föll

Ef $f(x)$ er samfellt í L og $\lim_{x \to a} g(x) = L$, þá

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L).$$

Áður en við snúum okkur að dæmi 2.35 skulum við rifja upp að í undirkaflanum um reiknireglur fyrir markgildi sýndum við $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos(0)$. Þar af leiðandi vitum við að $f(x) = \cos x$ er samfellt í 0. Í dæmi 2.35 sjáum við hvernig nota má þessa niðurstöðu ásamt setningunni um samskeytt föll.

DÆMI 2.35

Markgildi samskeytts kósínusfalls

Reiknið $\lim_{x \to \pi/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Lausn

Gefna fallið er samskeyting fallanna $\cos x$ og $x - \frac{\pi}{2}$. Þar sem $\lim_{x \to \pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $\cos x$ er samfellt í 0 getum við beitt setningunni um samskeytt föll. Því fæst:

$$\lim_{x \to \pi/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\lim_{x \to \pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(0) = 1.$$

STÖÐUMAT 2.25

Reiknið $\lim_{x \to \pi} \sin(x - \pi)$.

Í sönnun næstu setningar notum við setninguna um samskeytt föll og samfelldni $f(x) = \sin x$ og $g(x) = \cos x$ í punktinum o til að sýna að hornaföll séu samfelld á öllum skilgreiningarmengjum sínum.

SETNING 2.10

Samfelldni hornafalla

Hornaföll eru samfelld á öllum skilgreiningarmengjum sínum.

Sönnun

Við byrjum á því að sýna fram á að $\cos x$ er samfellt í sérhverri rauntölu. Til þess þurfum við að sýna að $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$ fyrir öll gildi a.

$\lim_{x \to a} \cos\ x = \lim_{x \to a} \cos\ ((x - a) + a)$ umritið $x = x - a + a$

$= \lim_{x \to a} (\cos\ (x - a)\ \cos\ a - \sin\ (x - a)\ \sin\ a)$ notið samlagningarreglu kósínusfallsins

$= \cos\ (\lim_{x \to a} (x - a))\ \cos\ a - \sin\ (\lim_{x \to a} (x - a))\ \sin\ a$ $\lim_{x \to a} (x - a) = 0$, og $\sin\ x$ og $\cos\ x$ eru samfelld í o

$= \cos\ (0)\ \cos\ a - \sin\ (0)\ \sin\ a$ reiknið cos(o) og sin(o) og einfaldið

$$= 1 \cdot \cos\ a - 0 \cdot \sin\ a = \cos\ a.$$

Sönnunin á því að $\sin x$ sé samfellt í sérhverri rauntölu er hliðstæð. Þar sem setja má önnur hornaföll fram með $\sin x$ og $\cos x$, leiðir samfelldni þeirra af reiknireglunni fyrir markgildi kvóta.

□

Eins og sjá má er setningin um samskeytt föll ómetanleg þegar við sýnum fram á samfelldni hornafalla. Við eigum eftir að snúa oft aftur að þessari setningu síðar í stærðfræðigreiningunni.

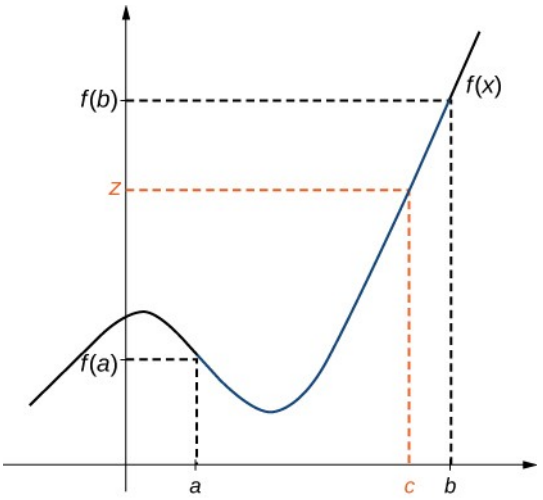
Milligildissetningin

Föll sem eru samfelld á bilum af gerðinni $[a, b]$, þar sem a og b eru rauntölur, hafa marga gagnlega eiginleika. Í námi okkar í stærðfræðigreiningu munum við kynnast mörgum mikilvægum setningum um slík föll. Fyrst þessara setninga er milligildissetningin.

SETNING 2.11

Milligildissetningin

Látum f vera samfellt á lokuðu, takmörkuðu bili $[a,b]$. Ef z er einhver rauntala milli $f(a)$ og $f(b)$, þá er til tala c í $[a,b]$ sem uppfyllir $f(c)=z$, eins og sýnt er á mynd 2.38.



Mynd 2.38 Til er tala $c \in [a,b]$ sem uppfyllir $f(c)=z$.

DÆMI 2.36

Beiting milligildissetningarinnar

Sýnið fram á að $f(x)=x-\cos x$ hafi að minnsta kosti eina núllstöð.

Lausn

Þar sem $f(x)=x-\cos x$ er samfellt á $(-\infty,+\infty)$, er það samfellt á sérhverju lokuðu bili af gerðinni $[a,b]$. Ef unnt er að finna bil $[a,b]$ þannig að $f(a)$ og $f(b)$ hafi gagnstæð formerki má nota milligildissetninguna til að álykta að til hljóti að vera rauntala c í (a,b) sem uppfyllir $f(c)=0$. Athugið að

$$f(0)=0-\cos(0)=-1<0$$

og

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}>0.$$

Af milligildissetningunni leiðir að til hlýtur að vera rauntala c í $[0,\pi/2]$ sem uppfyllir $f(c)=0$. Því hefur $f(x)=x-\cos x$ að minnsta kosti eina núllstöð.

DÆMI 2.37

Hvenær er hægt að beita milligildissetningunni?

Ef $f(x)$ er samfellt á $[0,2]$, $f(0)>0$ og $f(2)>0$, getum við notað milligildissetninguna til að ályktað að $f(x)$ hafi engar núllstöðvar á bilinu $[0,2]$? Útskýrið.

Lausn

Nei. Milligildissetningin segir aðeins að fallið taki öll gildi milli $f(0)$ og $f(2)$; hún útilokar ekki önnur gildi. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=(x-1)^2$. Fyrir það er $f(0)=1>0$, $f(2)=1>0$, og $f(1)=0$.

DÆMI 2.38

Hvenær er hægt að beita milligildissetningunni?

Fyrir $f(x)=1/x$, $f(-1)=-1<0$ og $f(1)=1>0$. Getum við ályktað að $f(x)$ hafi núllstöð á bilinu $[-1,1]$?

Lausn

Nei. Fallið er ekki samfellt á $[-1,1]$. Milligildissetningin á því ekki við hér.

STÖÐUMAT 2.26

Sýnið að $f(x)=x^3-x^2-3x+1$ hefur núllstöð á bilinu $[0,1]$.

Æfingar úr kafla 2.4

Finnið í eftirfarandi æfingum þá punkta, ef einhverjir eru, þar sem hvert fall er ósamfellt. Flokkið hverja ósamfelldni sem stökkósamfelldni, afmáanlega ósamfelldni, óendanlega ósamfelldni eða ósamfelldni af annarri gerð.

131.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

132.

$$f(x)=\frac{2}{x^2+1}$$

133.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-x}$$

134.

$$g(t)=t^{-1}+1$$

135.

$$f(x)=\frac{5}{e^x-2}$$

136.

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$$

137.

$$H(x)=\tan 2x$$

138.

$$f(t)=\frac{t+3}{t^2+5t+6}$$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort fallið sé samfellt í gefna punktinum. Ef það er ósamfellt, hvers konar ósamfelldni er þá um að ræða?

139. $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x-1}$ í $x=1$

140. $h(\theta)=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\tan\theta}$ í $\theta=\pi$

141. $g(u)=\begin{cases}\frac{6u^2+u-2}{2u-1} & \text{ef } u\neq\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2} & \text{ef } u=\frac{1}{2}\end{cases}$, í $u=\frac{1}{2}$

142. $f(y)=\frac{\sin(\pi y)}{\tan(\pi y)}$, í $y=1$

143. $f(x)=\begin{cases}x^2-e^x & \text{ef } x<0\\ x-1 & \text{ef } x\geq 0\end{cases}$, í $x=0$

144. $f(x)=\begin{cases}x\ \sin(x) & \text{ef } x\leq\pi\\ x\ \tan(x) & \text{ef } x>\pi\end{cases}$, í $x=\pi$

Finnið í eftirfarandi æfingum gildi k sem gera hvert fall samfellt á gefna bilinu.

145.

$$f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<k\\ 2x-3, & k\leq x\leq 8\end{cases}$$

146.

$$f(\theta)=\begin{cases}\sin\theta, & 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\\ \cos(\theta+k), & \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi\end{cases}$$

147.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x+2}{x+2}, & x\neq-2\\ k, & x=-2\end{cases}$$

148.

$$f(x)=\begin{cases}e^{kx}, & 0\le x<4\\ x+3, & 4\le x\le 8\end{cases}$$

149.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{kx}, & 0\le x\le 3\\ x+1, & 3<x\le 10\end{cases}$$

Notið milligildissetninguna í eftirfarandi æfingum.

150.

Látum $h(x)=\begin{cases}3x^2-4, & x\le 2\\ 5+4x, & x>2\end{cases}$ Á bilinu $[0,4]$, er ekkert gildi á x þannig að $h(x)=10$, þótt $h(0)<10$ og $h(4)>10$. Útskýrið hvers vegna þetta stangast ekki á við milligildissetninguna.

151. Ögn sem hreyfist eftir línu hefur á hverjum tíma t staðsetningarfallið $s(t)$, sem er samfellt. Gerum ráð fyrir að $s(2)=5$ og $s(5)=2$. Önnur ögn hreyfist þannig að staðsetning hennar er gefin með $h(t)=s(t)-t$. Útskýrið hvers vegna til hlýtur að vera gildi c þannig að $2<c<5$ og $h(c)=0$.

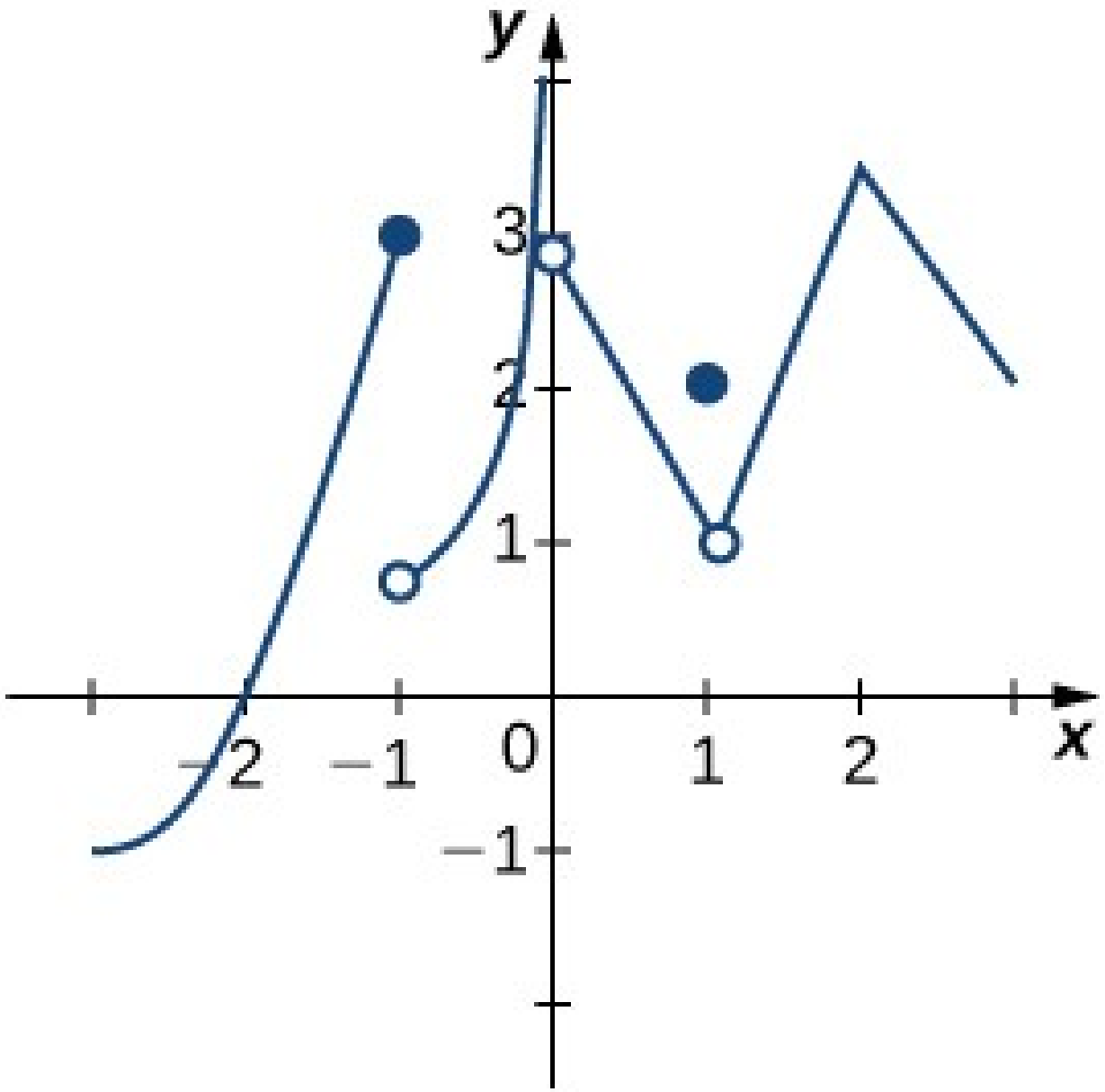
152. [T] Notið fullyrðinguna „Kósínus t er jafnt og t í þriðja veldi.“

a. Skrifið stærðfræðilega jöfnu sem lýsir fullyrðingunni.
b. Sannið að jafnan í a-lið hafi að minnsta kosti eina rauntölulausn.
c. Notið reiknivél til að finna bil af lengd 0,01 sem inniheldur lausn.

153. Beitið milligildissetningunni til að ákvarða hvort $2^x=x^3$ hafi lausn á öðru hvoru bilanna $[1{,}25\,;1{,}375]$ eða $[1{,}375\,;1{,}5]$. Rökstyðjið svarið stuttlega fyrir hvort bil um sig.

154. Skoðum graf fallsins $y=f(x)$ á myndinni hér á eftir.

2



a. Finnið öll gildi þar sem fallið er ósamfellt.

b. Tilgreinið fyrir hvert gildi í a-lið hvers vegna formleg skilgreining á samfelldni á ekki við.

c. Flokkið hverja ósamfelldni sem stökkósamfelldni, afmáanlega ósamfelldni eða óendanlega ósamfelldni.

155.

Látum $f(x) = \begin{cases} 3x, x > 1 \\ x^3, x < 1 \end{cases}$.

a. Teiknið graf fallsins f.

b. Er unnt að finna gildi k þannig að $f(1)=k$, og $f(x)$ verði samfellt fyrir allar rauntölur? Útskýrið í stuttu máli.

156. Látum $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ fyrir $x\neq -1,1$.

a. Teiknið graf fallsins f.

b. Er unnt að finna gildi k_1 og k_2 þannig að $f(-1)=k_1$ og $f(1)=k_2$, svo að $f(x)$ verði samfellt fyrir allar rauntölur? Útskýrið í stuttu máli.

157. Teiknið graf falls $y=f(x)$ sem hefur eiginleikana i. til vi.

i. Skilgreiningarmengi f er $(-\infty,+\infty)$.

ii. *f hefur óendanlega ósamfelldni í* $x=-6$.

iii. $f(-6)=3$

iv. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=2$

v. $f(-3)=3$

vi. *f er samfellt frá vinstri en ekki frá hægri í* $x=3$.

158. Teiknið graf falls $y=f(x)$ sem hefur eiginleikana i. til iv.

i. Skilgreiningarmengi f er $[0,5]$.

ii. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ og $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ eru bæði til og jöfn.

iii. $f(x)$ er samfellt frá vinstri en ekki samfellt í $x=2$, og samfellt frá hægri en ekki samfellt í $x=3$.

iv. $f(x)$ hefur afmáanlega ósamfelldni í $x=1$, stökkósamfelldni í $x=2$, og um markgildin gildir: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ og $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$.

Gerið ráð fyrir í eftirfarandi æfingum að $y=f(x)$ sé skilgreint fyrir sérhvert x. Teiknið fyrir hverja lýsingu graf sem hefur tilgreinda eiginleikann.

159. Ósamfellt í $x=1$ með $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$ og $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

160. Ósamfellt í $x=2$ en samfellt annars staðar með $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}$

Ákvarðið hvort hver af eftirfarandi fullyrðingum sé sönn. Rökstyðjið svar ykkar með skýringu eða gagndæmi.

161. $f(t)=\dfrac{2}{e^t-e^{-t}}$ er samfellt alls staðar.

162. Ef vinstri og hægri markgildi $f(x)$ þegar $x\to a$ eru bæði til og jöfn þá getur f ekki verið ósamfellt í $x=a$.

163. Ef fall er ekki samfellt í punkti er það ekki skilgreint í þeim punkti.

164. Samkvæmt milligildissetningunni hefur $\cos x-\sin x-x=2$ lausn á bilinu $[-1,1]$.

165. Ef $f(x)$ er samfellt og $f(a)$ og $f(b)$ hafa gagnstæð formerki þá hefur $f(x)=0$ nákvæmlega eina lausn á $[a,b]$.

166. Fallið $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$ er samfellt á bilinu $[0,3]$.

167. Ef $f(x)$ er samfellt alls staðar og $f(a), f(b)>0$, þá er engin núllstöð fallsins $f(x)$ á bilinu $[a,b]$.

2

[T] Í eftirfarandi verkefnum er fjallað um skalarform lögmáls Coulombs, sem lýsir rafstöðukraftinum milli tveggja punktahleðslna, svo sem rafeinda. Lögmálið er gefið með jöfnunni $F(r)=k_e\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$, þar sem k_e er Coulomb-fastinn, q_i tákna stærðir hleðslna agnanna tveggja og r er fjarlægðin milli agnanna tveggja.

168. Til að einfalda útreikninga í líkani með mörgum vixlverkandi ögnum látum við F vera núll þegar fjarlægðin fer yfir þröskuldsgildið $r=R$,.

- **a.** Útskýrið eðlisfræðilega röksemdina fyrir þessari forsendu.
- **b.** Hver er jafna kraftsins?
- **c.** Reiknið kraftinn F bæði samkvæmt lögmáli Coulombs og með nálgun okkar. Gerið ráð fyrir að róteindirnar tvær hafi hleðslustærðina $1{,}6022 \times 10^{-19}$ kúlomb (C), að Coulomb-fastinn sé $k_e=8{,}988 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ og að fjarlægðin milli róteindanna sé 1 m. Gerið einnig ráð fyrir að $R<1\,\mathrm{m}$. Hversu mikilli skekkju veldur nálgunin okkar? Er nálgunin raunhæf?
- **d.** Er til eitthvert endanlegt gildi á R þannig að kerfið haldist samfellt í R?

169. Í stað þess að láta kraftinn vera 0 í R látum við hann hafa gildið 10^{-20} fyrir $r \geq R$. Gerum ráð fyrir tveimur róteindum með hleðslustærðina $1{,}6022 \times 10^{-19}$ C, og að Coulomb-fastinn sé $k_e=8{,}988 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$. Er til gildi R sem gerir kerfið samfellt? Ef svo er, finnið það.

Rifjið upp umfjöllunina um geimför í upphafi kaflans. Verkefnin hér á eftir fjalla um eldflaug sem skotið er á loft frá yfirborði Jarðar. Þyngdarkrafturinn sem verkar á eldflaugina er gefinn með $F(d)=-mk/d^2$, þar sem m er massi eldflaugarinnar, d er fjarlægð eldflaugarinnar frá miðju Jarðar og k er fasti.

170. [T] Ákvarðið gildi og einingar k að því gefnu að massi eldflaugarinnar sé 3 milljónir kg. (Vísbending: Fjarlægðin frá miðju Jarðar að yfirborði hennar er 6378 km.)

171. [T] Þegar ákveðinni fjarlægð D er náð verða þyngdaráhrif jarðar hverfandi lítil og því má nálga kraftfallið með F (d) = { − m k/d 2 ef d < D 10.000 ef d ≥ D. Notið gildið á k sem fannst í fyrra verkefni og finnið nauðsynlegt skilyrði á D svo að kraftfallið haldist samfellt.

$$F\left(d\right)=\begin{cases}-\dfrac{m\,k}{d^2} & \text{ef } d<D\\ 10.000 & \text{ef } d\geq D\end{cases}.$$

172. Þegar eldflaugin fjarlægist yfirborð jarðar er til fjarlægð D þar sem hún losar sig við hluta af massa sínum, enda þarf hún ekki lengur á aukaeldsneytisgeymunum að halda. Við getum ritað þetta fall sem $F\left(d\right)=\begin{cases}-\dfrac{m_1\,k}{d^2} & \text{ef } d<D\\ -\dfrac{m_2\,k}{d^2} & \text{ef } d\geq D\end{cases}$. Er til gildi á D þannig að fallið sé samfellt, að því gefnu að $m_1\neq m_2$?

Sannið að eftirfarandi föll séu samfelld alls staðar

173.

$$f\left(\theta\right)=\sin\theta$$

174.

$$g\left(x\right)=\left|x\right|$$

175. Hvar er $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{ef } x \text{ er óræð tala}\\ 1 & \text{ef } x \text{ er ræð tala}\end{cases}$ samfellt?

2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi

NÁMSMARKMIÐ

- 2.5.1 Lýsið epsílon-delta-skilgreiningu markgildis.
- 2.5.2 Beitið epsílon-delta-skilgreiningunni til að finna markgildi falls.
- 2.5.3 Lýsið epsílon-delta-skilgreiningum einhliða markgilda og óendanlegra markgilda.
- 2.5.4 Notið epsílon-delta-skilgreininguna til að sanna reiknireglur fyrir markgildi.

Nú hafið þið farið frá mjög óformlegri skilgreiningu á markgildi í inngangi þessa kafla yfir í innsæislegan skilning á markgildi. Á þessu stigi ættuð þið að hafa skýran innsæislegan skilning á því hvað markgildi falls merkir og hvernig á að finna það. Í þessum undirkafla færum við þessa innsæislegu hugmynd um markgildi í formlegan búning með nákvæmu stærðfræðimáli. Formleg skilgreining á markgildi er að öllum líkindum ein erfiðasta skilgreiningin sem þið kynnist á fyrstu stigum náms ykkar í stærðfræðigreiningu. Það er þó vel þess virði að leggja sig fram um að tengja hana við innsæislegan skilning ykkar á markgildi. Að skilja þessa skilgreiningu er lykillinn að dýpri skilningi á stærðfræðigreiningu.

Töluleg lýsing á nálægð

Áður en við setjum fram formlega skilgreiningu á markgildi þurfum við að kynna nokkrar grunnhugmyndir. Rifjum upp að fjarlægðin milli tveggja punkta a og b á talnalínu er gefin með $|a-b|$.

- Fullyrðinguna $|f(x)-L|<\varepsilon$ má túlka þannig: Fjarlægðin milli $f(x)$ *og L er minni en* ε.
- Fullyrðinguna $0<|x-a|<\delta$ má túlka þannig: $x\neq a$ og fjarlægðin milli x og a er minni en δ.

Einnig er mikilvægt að skoða eftirfarandi jafngildi um algildi:

- Fullyrðingin $|f(x)-L|<\varepsilon$ jafngildir fullyrðingunni $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$.
- Fullyrðingin $0<|x-a|<\delta$ er jafngild fullyrðingunni $a-\delta<x<a+\delta$ og $x\neq a$.

Með þessum skýringum getum við sett fram formlega epsílon-delta-skilgreiningu á markgildi.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera skilgreint fyrir öll $x\neq a$ á opnu bili sem inniheldur a. Látum L vera rauntölu. Þá

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

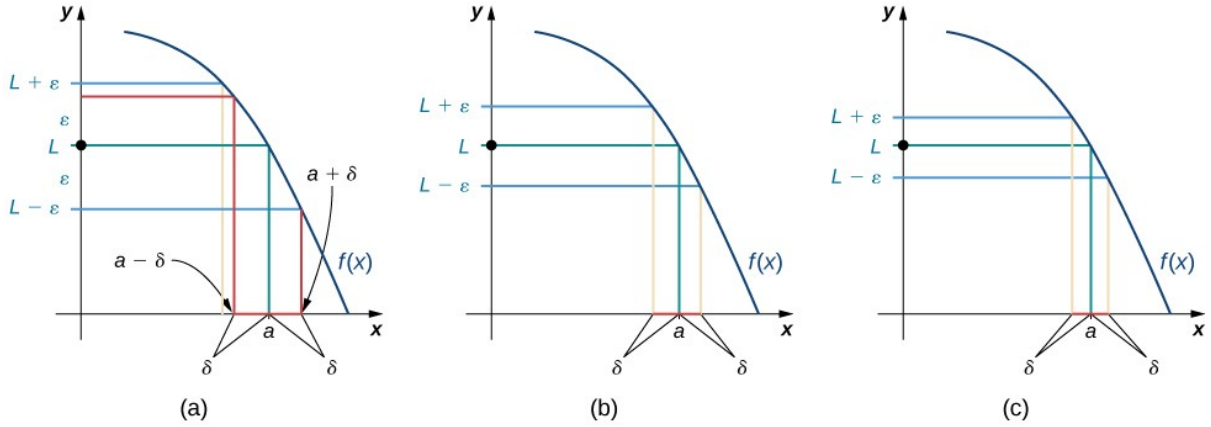
ef fyrir sérhvert $\varepsilon>0$, er til $\delta>0$, þannig að ef $0<|x-a|<\delta$, þá $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Stærðfræðilega séð kann þessi skilgreining að virðast fremur flókin, en hún verður auðskildari ef við greinum hana lið fyrir lið. Staðhæfingin sjálf felur í sér svokallaðan almagnara (fyrir sérhvert $\varepsilon>0$), tilvistarmagnara (til er $\delta>0$), og að lokum skilyrðissetningu (ef $0<|x-a|<\delta$, þá $|f(x)-L|<\varepsilon$). Skoðum töflu 2.9, þar sem skilgreiningunni er skipt í hluta og hver hluti umorðaður.

Tafla 2.9 Epsilon-delta-skilgreining markgildis í orðum

Skilgreining	Þýðing
1. Fyrir sérhvert $\varepsilon>0$,	1. Fyrir sérhverja jákvæða fjarlægð ε frá L,
2. til er $\delta>0$,	2. Til er jákvæð fjarlægð δ frá a,
3. þannig að	3. þannig að
4. ef $0<\|x-a\|<\delta$, þá $\|f(x)-L\|<\varepsilon$.	4. ef x er í minni fjarlægð en δ frá a og $x\neq a$, þá er $f(x)$ í minni fjarlægð en ε frá L.

Við skiljum þessa skilgreiningu betur ef við skoðum hana rúmfræðilega. Mynd 2.39 sýnir möguleg gildi δ fyrir mismunandi val á $\varepsilon>0$ fyrir gefið fall $f(x)$, gefna tölu a og markgildi L í a. Takið eftir að þegar við veljum sífellt minni gildi ε (fjarlægðina milli fallsins og markgildisins) getum við alltaf fundið nægilega lítið δ þannig að ef við höfum valið x-gildi í minni fjarlægð en δ frá a, þá er gildi $f(x)$ í minni fjarlægð en ε frá markgildinu L.



Mynd 2.39 Þessi gröf sýna möguleg gildi δ, þegar valin eru sífellt minni gildi fyrir ε.

MIÐLAR

Notið eftirfarandi smáforrit til að prófa ykkur áfram við að finna gildi δ fyrir valin gildi ε:

- Epsílon-delta-skilgreining markgildis

Dæmi 2.39 sýnir hvernig nota má þessa skilgreiningu til að sanna fullyrðingu um markgildi tiltekins falls við tiltekið gildi.

DÆMI 2.39

Sönnun fullyrðingar um markgildi tiltekins falls

Sannið að $\lim_{x \to 1}(2x+1)=3$.

Lausn

Látum $\varepsilon>0$.

Fyrsti hluti skilgreiningarinnar hefst á „Fyrir sérhvert $\varepsilon>0$.“ Þetta merkir að við verðum að sanna að það sem á eftir kemur sé satt, óháð því hvaða jákvæða gildi ε er valið. Með því að segja „Látum $\varepsilon>0$,“ gefum við til kynna að við ætlum að gera það.

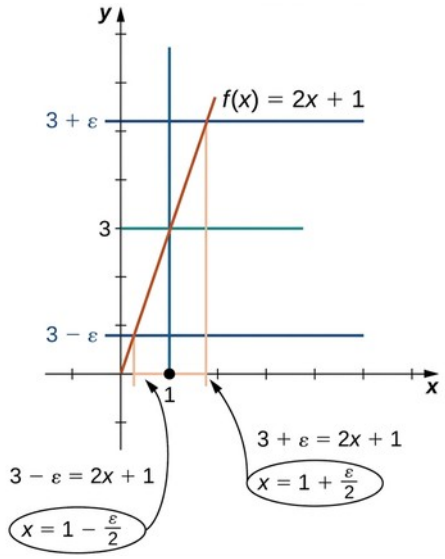
Veljum $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

Skilgreiningin heldur áfram með „til er $\delta>0$.“ Orðasambandið „til er“ í stærðfræðilegri fullyrðingu gefur alltaf til kynna að leit sé fram undan. Með öðrum orðum þurfum við að finna δ. Hvaðan kom $\delta=\varepsilon/2$ nákvæmlega? Tvær meginaðferðir eru til að finna δ. Önnur aðferðin er algebruleg og hin rúmfræðileg.

Við byrjum á að leysa verkefnið með algebrulegum aðferðum. Þar sem við viljum að lokum að $|(2x+1)-3|<\varepsilon$, byrjum við á að umrita þessa stæðu: $|(2x+1)-3|<\varepsilon$ jafngildir $|2x-2|<\varepsilon$,

sem aftur jafngildir $|2||x-1|<\varepsilon$. Að lokum jafngildir þetta $|x-1|<\varepsilon/2$. Því virðist sem $\delta=\varepsilon/2$ eigi við.

Við getum einnig fundið δ með rúmfræðilegum aðferðum. Mynd 2.40 sýnir hvernig þetta er gert.



δ er lengd þeirrar styttri af vegalengdunum tveimur sem merktar eru með brúnu.

$$\delta = \min\{1+\tfrac{\varepsilon}{2}-1,\ 1-(1-\tfrac{\varepsilon}{2})\}$$
$$= \min\{\tfrac{\varepsilon}{2},\tfrac{\varepsilon}{2}\}$$
$$= \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Mynd 2.40 Þetta graf sýnir hvernig við finnum δ með rúmfræðilegum hætti.

Gerum ráð fyrir að $0<|x-1|<\delta$. Þegar δ hefur verið valið er markmið okkar að sýna að ef $0<|x-1|<\delta$, þá $|(2x+1)-3|<\varepsilon$. Til að sanna fullyrðingu af gerðinni „Ef þetta, þá hitt“ byrjum við á því að gera ráð fyrir „þessu“ og reynum að leiða út „hitt“.

Því gildir

$$\begin{aligned}
|(2x+1)-3| &= |2x-2| && \text{eiginleiki algildis}\\
&= |2(x-1)|\\
&= |2|\,|x-1| && |2|=2\\
&= 2|x-1|\\
&< 2\cdot\delta && \text{hér notum við forsenduna } 0<|x-1|<\delta\\
&= 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon && \text{hér notum við valið á } \delta=\varepsilon/2
\end{aligned}$$

Greining

Í þessum hluta sönnunarinnar byrjuðum við á $|(2x+1)-3|$ og notuðum forsendu okkar $0<|x-1|<\delta$ á lykilstað í keðju ójafnanna til að sýna að $|(2x+1)-3|$ væri minna en ε. Við hefðum alveg eins getað umritað forsenduna $0<|x-1|<\delta$ til að fá $|(2x+1)-3|<\varepsilon$ á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned} 0 < |x-1| < \delta &\Rightarrow |x-1| < \delta \\ &\Rightarrow -\delta < x-1 < \delta \\ &\Rightarrow -\tfrac{\varepsilon}{2} < x-1 < \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow -\varepsilon < 2x-2 < \varepsilon \\ &\Rightarrow |2x-2| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |(2x+1)-3| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Því gildir $\lim_{x \to 1}(2x+1)=3$. (Nú þegar sönnuninni er lokið setjum við fram það sem við höfum sýnt.)

Hér er sönnunin í lokagerð, án athugasemdanna:

Látum $\varepsilon>0$.

Veljum $\delta=\varepsilon/2$.

Gerum ráð fyrir að $0<|x-1|<\delta$.

Því gildir

$$\begin{aligned} |(2x+1)-3| &= |2x-2| \\ &= |2(x-1)| \\ &= |2|\,|x-1| \\ &= 2\,|x-1| \\ &< 2 \cdot \delta \\ &= 2 \cdot \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Því er $\lim_{x \to 1}(2x+1)=3$.

Eftirfarandi lausnaraðferð dregur saman þá gerð sönnunar sem við unnum í dæmi 2.39.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Sönnun þess að $\lim_{x \to a} f(x)=L$ fyrir tiltekið fall $f(x)$

1. Byrjum sönnunina á þessari fullyrðingu: Látum $\varepsilon>0$.
2. Næst þurfum við að finna gildi δ. Þegar við höfum fundið þetta gildi setjum við fram eftirfarandi fullyrðingu og fyllum í eyðuna með vali okkar á δ: Veljum $\delta=$ _____.
3. Næsta fullyrðing í sönnuninni ætti að vera (á þessu stigi setjum við inn gefið gildi fyrir a): Gerum ráð fyrir að
   $0<|x-a|<\delta$.
4. Því næst þurfum við að nota þessa forsendu til að sýna að $|f(x)-L|<\varepsilon$, þar sem $f(x)$ og L tákna annars vegar fallið $f(x)$ og hins vegar markgildið L. Einhvers staðar í sönnuninni þurfum við að nota $0<|x-a|<\delta$.
5. Við ljúkum sönnuninni með eftirfarandi fullyrðingu: Þar af leiðandi gildir $\lim_{x \to a} f(x)=L$.

DÆMI 2.40

Sönnun fullyrðingar um markgildi

Ljúkið við sönnunina á því að $\lim_{x \to -1}(4x+1) = -3$ með því að fylla í eyðurnar.

Látum _____.

Veljum $\delta =$ _____.

Gerum ráð fyrir að $0 < |x - $ _____ $| < \delta$.

Þá er

$$|_____ - _____| = _____\ \varepsilon.$$

Lausn

Við byrjum á því að fylla í eyðurnar þar sem valið ræðst af skilgreiningunni. Þannig höfum við

Látum $\varepsilon > 0$.

Veljum $\delta =$ _____.

Gerum ráð fyrir að $0 < |x - (-1)| < \delta$. (eða, sem er jafngilt, $0 < |x+1| < \delta$.)

Þá er $|(4x+1) - (-3)| = |4x+4| = |4||x+1| < 4\delta$ _____ ε.

Af síðustu línu sönnunarinnar sjáum við að við ættum að velja $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Nú skrifum við sönnunina upp í heild:

Látum $\varepsilon > 0$.

Veljum $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Gerum ráð fyrir að $0 < |x - (-1)| < \delta$ (eða, sem er jafngilt, $0 < |x+1| < \delta$.)

Því gildir að $|(4x+1) - (-3)| = |4x+4| = |4||x+1| < 4\delta = 4(\varepsilon/4) = \varepsilon$.

STÖÐUMAT 2.27

Ljúkið við sönnunina á því að $\lim_{x \to 2}(3x-2) = 4$ með því að fylla í eyðurnar.

Látum _____.

Veljum $\delta =$ _____.

Gerum ráð fyrir að $0 < |x - $ _____ $| <$ _____.

Því gildir

$$|_____ - ____| = _____\ \varepsilon.$$

Því er $\lim_{x \to 2}(3x - 2) = 4$.

Í dæmum 2.39 og 2.40 voru sannanirnar tiltölulega einfaldar því að föllin sem við unnum með voru línuleg. Í dæmi 2.41 sjáum við hvernig breyta má sönnuninni þannig að hún eigi við um ólínulegt fall.

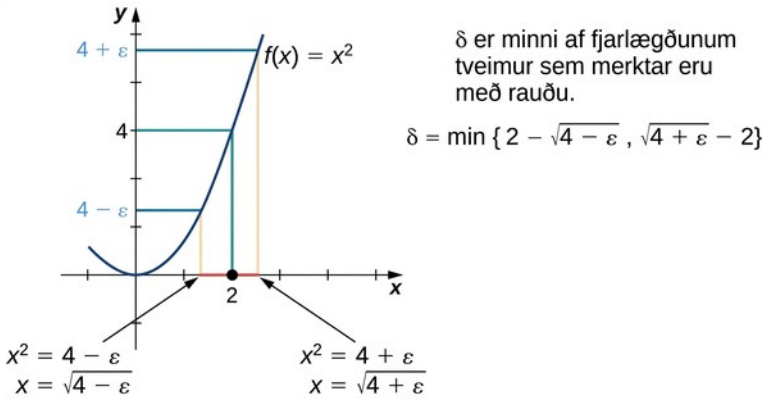
DÆMI 2.41

Sönnun fullyrðingar um markgildi tiltekins falls (rúmfræðileg nálgun)

Sannið að $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Lausn

1. Látum $\varepsilon > 0$. Fyrsti hluti skilgreiningarinnar hefst á „Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$," og því verðum við að sanna að það sem á eftir kemur sé satt, óháð því hvaða jákvæða gildi ε er valið. Með því að segja „Látum $\varepsilon > 0$," gefum við til kynna að við ætlum að gera það.
2. Án þess að skerða almennt gildi skulum við gera ráð fyrir $\varepsilon \leq 4$. Tvær spurningar vakna: Hvers vegna viljum við að $\varepsilon \leq 4$ og hvers vegna megum við gera ráð fyrir því? Svarið við fyrri spurningunni er þetta: Þegar lengra er komið og við leysum með tilliti til δ, munum við komast að því að δ felur í sér stærðina $\sqrt{4 - \varepsilon}$. Þar af leiðandi þarf að gilda að $\varepsilon \leq 4$. Svarið við síðari spurningunni er þetta: Ef við getum fundið $\delta > 0$ sem „dugar" fyrir $\varepsilon \leq 4$, þá mun það einnig „duga" fyrir sérhvert $\varepsilon > 4$. Höfum í huga að þótt alltaf sé í lagi að setja efri mörk fyrir ε er aldrei í lagi að setja neðri mörk (önnur en núll) fyrir ε.
3. Veljum $\delta = \min\left(2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\right)$. Mynd 2.41 sýnir hvernig við völdum þetta δ.



Mynd 2.41 Þetta graf sýnir hvernig við finnum δ með rúmfræðilegum hætti fyrir gefið ε í sönnuninni í Dæmi 2.41.

4. Við verðum að sýna: Ef $0 < |x - 2| < \delta$, þá $|x^2 - 4| < \varepsilon$, og því verðum við að byrja á því að gera ráð fyrir að

   $0 < |x - 2| < \delta$.

Við þurfum í raun ekki $0<|x-2|$ (með öðrum orðum, $x\neq 2$) í þessari sönnun. Þar sem $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |x-2|<\delta$, er óhætt að sleppa $0<|x-2|$.

$|x-2|<\delta$.

Því gildir:

$-\delta<x-2<\delta$.

2

Munum að $\delta=\min\left(2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\right)$. Þá er $\delta\leq 2-\sqrt{4-\varepsilon}$ og þar af leiðandi $-\left(2-\sqrt{4-\varepsilon}\right)\leq -\delta$. Hér notum við einnig $\delta\leq\sqrt{4+\varepsilon}-2$. Við gætum nú spurt: Hvers vegna settum við $2-\sqrt{4-\varepsilon}$ í stað δ vinstra megin í ójöfnunni og $\sqrt{4+\varepsilon}-2$ hægra megin í henni? Ef við skoðum mynd 2.41 sjáum við að $2-\sqrt{4-\varepsilon}$ samsvarar fjarlægðinni vinstra megin við 2 á x-ásnum og $\sqrt{4+\varepsilon}-2$ samsvarar fjarlægðinni hægra megin. Því er

$-\left(2-\sqrt{4-\varepsilon}\right)\leq -\delta<x-2<\delta\leq\sqrt{4+\varepsilon}-2$.

Við einföldum stæðuna vinstra megin:

$-2+\sqrt{4-\varepsilon}<x-2<\sqrt{4+\varepsilon}-2$.

Síðan leggjum við 2 við alla liði ójöfnunnar:

$\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon}$.

Við setjum alla liði ójöfnunnar í annað veldi. Það er óhætt þar sem allir liðir hennar eru jákvæðir:

$4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon$.

Við drögum 4 frá öllum liðum ójöfnunnar:

$-\varepsilon<x^2-4<\varepsilon$.

Að lokum fæst

$|x^2-4|<\varepsilon$.

5. Því er

$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

STÖÐUMAT 2.28

Finnið δ sem samsvarar $\varepsilon > 0$ í sönnun þess að $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$.

Rúmfræðileg aðferð til að sanna að markgildi falls sé tiltekið gildi hentar ágætlega fyrir sum föll. Sú innsýn í formlega skilgreiningu markgildis sem þessi aðferð veitir er einnig ómetanleg. Hins vegar má einnig nálgast sannanir um markgildi með hreinni algebrulegri aðferð. Í mörgum tilvikum getur algebruleg aðferð ekki aðeins veitt okkur frekari innsýn í skilgreininguna heldur einnig reynst einfaldari. Enn fremur er algebruleg aðferð helsta verkfærið sem notað er við sannanir á staðhæfingum um markgildi. Í <u>dæmi</u> 2.42 beitum við hreinni algebrulegri aðferð.

DÆMI 2.42

Sönnun á fullyrðingu um markgildi tiltekins falls (algebruleg aðferð)

Sannið að $\lim_{x \to -1} \left(x^2 - 2x + 3\right) = 6$.

Lausn

Notum nú yfirlitið úr aðferðinni við lausn verkefna:

1. Látum $\varepsilon > 0$.
2. Veljum $\delta = \min\left(1, \varepsilon/5\right)$. Þetta val á δ kann að virðast einkennilegt við fyrstu sýn, en það fékkst með því að skoða ójöfnuna sem við viljum að lokum fá: $\left|\left(x^2 - 2x + 3\right) - 6\right| < \varepsilon$. Þessi ójafna jafngildir $|x+1| \cdot |x-3| < \varepsilon$. Hér er freistandi að velja einfaldlega $\delta = \frac{\varepsilon}{x-3}$. Því miður verður val okkar á δ aðeins að ráðast af ε en ekki neinni annarri breytu. Ef við getum skipt $|x-3|$ út fyrir tölugildi er vandinn leystur. Hér kemur forsendan $\delta \leq 1$ að gagni. Valið á $\delta \leq 1$ hér er handahófskennt. Við hefðum allt eins getað notað hvaða aðra jákvæða tölu sem er. Í sumum sönnunum kann að þurfa að vanda þetta val betur. Þar sem $\delta \leq 1$ og $|x+1| < \delta \leq 1$, getum við nú sýnt að $|x-3| < 5$. Þar af leiðandi er $|x+1| \cdot |x-3| < |x+1| \cdot 5$. Nú sjáum við að við þurfum einnig $\delta \leq \varepsilon/5$. Því veljum við $\delta = \min\left(1, \varepsilon/5\right)$.
3. Gerum ráð fyrir að $0 < |x+1| < \delta$. Þá gildir

   $$|x+1| < 1 \text{ og } |x+1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

   Þar sem $|x+1| < 1$, getum við ályktað að $-1 < x+1 < 1$. Með því að draga 4 frá öllum liðum

ójöfnunnar fæst $-5<x-3<-1$. Af því leiðir að $|x-3|<5$. Þá fæst

$$\left|\left(x^2-2x+3\right)-6\right|=|x+1|\cdot|x-3|<\frac{\varepsilon}{5}\cdot 5=\varepsilon.$$

Því er

$$\lim_{x\to -1}\left(x^2-2x+3\right)=6.$$

2

STÖÐUMAT 2.29

Ljúkið við sönnunina á því að $\lim_{x\to 1} x^2=1$.

Látum $\varepsilon>0$; veljum $\delta=\min\left(1,\varepsilon/3\right)$; gerum ráð fyrir að $0<|x-1|<\delta$.

Þar sem $|x-1|<1$, getum við ályktað að $-1<x-1<1$. Þá fæst $1<x+1<3$. Af því leiðir að $|x+1|<3$.

Almennt munuð þið sjá að því flóknara sem fall er, þeim mun líklegra er að algebrulega aðferðin sé auðveldust. Algebrulega aðferðin nýtist einnig betur við að sanna fullyrðingar um markgildi.

Sannanir á reiknireglum fyrir markgildi

Við sýnum nú hvernig nota má epsílon-delta-skilgreiningu markgildis til að setja fram stranga sönnun á einni af reiknireglum markgilda. Þríhyrningsójafnan er notuð á lykilstað í sönnuninni og því rifjum við fyrst upp þennan mikilvæga eiginleika algildis.

SKILGREINING

Þríhyrningsójafnan segir að ef a og b eru hvaða rauntölur sem er, þá gildir $|a+b|\le|a|+|b|$.

Sönnun

Við sönnum eftirfarandi markgildisreglu: Ef $\lim_{x\to a} f(x)=L$ og $\lim_{x\to a} g(x)=M$, þá $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=L+M$.

Látum $\varepsilon>0$.

Veljum $\delta_1>0$ þannig að ef $0<|x-a|<\delta_1$, þá $|f(x)-L|<\varepsilon/2$.

Veljum $\delta_2>0$ þannig að ef $0<|x-a|<\delta_2$, þá $|g(x)-M|<\varepsilon/2$.

Veljum $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$.

Gerum ráð fyrir að $0<|x-a|<\delta$.

Því gildir

$$0<|x-a|<\delta_1 \text{ og } 0<|x-a|<\delta_2.$$

Því gildir:

$$\begin{aligned}|(f(x)+g(x))-(L+M)| &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\ &\leq |f(x)-L|+|g(x)-M| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Nú könnum við hvað felst í því að markgildi sé ekki til. Markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ er ekki til ef engin rauntala L er til þannig að $\lim_{x\to a} f(x)=L$. Því gildir fyrir allar rauntölur L að $\lim_{x\to a} f(x)\neq L$. Til að skilja hvað þetta merkir skoðum við hvern lið í skilgreiningunni á $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ásamt andstæðu hans. Umorðun skilgreiningarinnar er sýnd í töflu 2.10.

Tafla 2.10 Skilgreining á $\lim_{x\to a} f(x)=L$ og andstæðu hennar í orðum

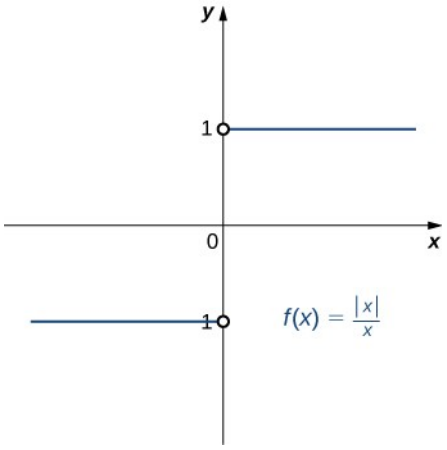
Skilgreining	Neitun
1. Fyrir sérhvert $\varepsilon>0$,	1. Til er $\varepsilon>0$ þannig að
2. til er $\delta>0$, þannig að	2. fyrir sérhvert $\delta>0$,
3. ef $0<\|x-a\|<\delta$, þá $\|f(x)-L\|<\varepsilon$.	3. Til er x sem uppfyllir $0<\|x-a\|<\delta$ þannig að $\|f(x)-L\|\geq\varepsilon$.

Að lokum getum við skilgreint hvað það merkir að markgildi sé ekki til. Markgildið $\lim_{x\to a} f(x)$ er ekki til ef fyrir sérhverja rauntölu L er til rauntala $\varepsilon>0$ þannig að fyrir öll $\delta>0$, er til x sem uppfyllir $0<|x-a|<\delta$, þannig að $|f(x)-L|\geq\varepsilon$. Beitum þessu í dæmi 2.43 til að sýna að markgildið sé ekki til.

DÆMI 2.43

Sýnt fram á að markgildi sé ekki til

Sýnið að $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ sé ekki til. Graf $f(x)=|x|/x$ er sýnt hér:



2

Lausn

Gerum ráð fyrir að L komi til greina sem markgildi. Veljum $\varepsilon = 1/2$.

Látum $\delta > 0$. Annaðhvort $L \geq 0$ eða $L < 0$. Ef $L \geq 0$, þá setjum við $x = -\delta/2$. Því gildir:

$$|x - 0| = \left| -\frac{\delta}{2} - 0 \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

og

$$\left| \frac{\left| -\frac{\delta}{2} \right|}{-\frac{\delta}{2}} - L \right| = |-1 - L| = L + 1 \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Á hinn bóginn, ef $L < 0$, þá setjum við $x = \delta/2$. Því gildir:

$$|x - 0| = \left| \frac{\delta}{2} - 0 \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

og

$$\left| \frac{\left| \frac{\delta}{2} \right|}{\frac{\delta}{2}} - L \right| = |1 - L| = |L| + 1 \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Þannig gildir fyrir sérhvert gildi L að $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \neq L$.

Einhliða og óendanleg markgildi

Fyrst fengum við innsæislegan skilning á markgildum og síðan nákvæmari skilgreiningu á markgildi. Á sama hátt snúum við okkur nú aftur að einhliða markgildum. Við breytum epsílon-delta-skilgreiningu markgildis og fáum þannig formlegar epsílon-delta-skilgreiningar á markgildum frá hægri og frá vinstri í punkti. Til þess þarf aðeins að breyta skilgreiningu

markgildis lítillega. Í skilgreiningunni á markgildi frá hægri kemur ójafnan $0<x-a<\delta$ í stað $0<|x-a|<\delta$, sem tryggir að við tökum aðeins tillit til þeirra x-gilda sem eru stærri en (hægra megin við) a. Á sama hátt kemur ójafnan $-\delta<x-a<0$ í stað $0<|x-a|<\delta$, í skilgreiningunni á markgildi frá vinstri, sem tryggir að við tökum aðeins tillit til þeirra x-gilda sem eru minni en (vinstra megin við) a.

SKILGREINING

Markgildi frá hægri: Látum $f(x)$ vera skilgreint á opnu bili af gerðinni (a,b) þar sem $a<b$. Þá gildir

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

ef fyrir sérhvert $\varepsilon>0$, er til $\delta>0$ þannig að ef $0<x-a<\delta$, þá $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Markgildi frá vinstri: Látum $f(x)$ vera skilgreint á opnu bili af gerðinni (b,a) þar sem $b<a$. Þá gildir

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

ef fyrir sérhvert $\varepsilon>0$, er til $\delta>0$ þannig að ef $-\delta<x-a<0$, þá $|f(x)-L|<\varepsilon$.

DÆMI 2.44

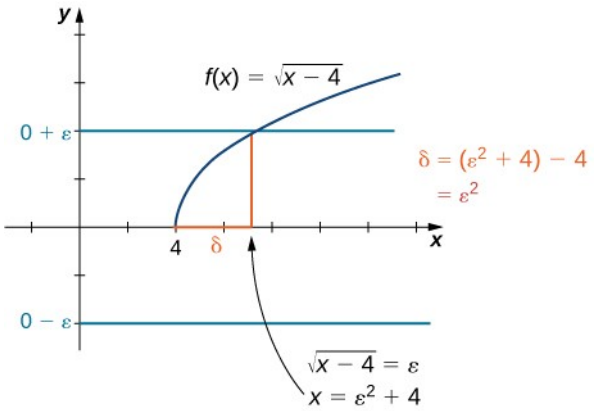
Sönnun fullyrðingar um markgildi frá hægri

Sannið að $\lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=0$.

Lausn

Látum $\varepsilon>0$.

Veljum $\delta=\varepsilon^2$. Þar sem við viljum á endanum fá $|\sqrt{x-4}-0|<\varepsilon$, umritum við þessa ójöfnu þannig að við fáum $\sqrt{x-4}<\varepsilon$ eða, sem er jafngilt, $0<x-4<\varepsilon^2$, og því er $\delta=\varepsilon^2$ augljóst val. Við getum einnig ákvarðað δ rúmfræðilega, eins og sýnt er á mynd 2.42.



Mynd 2.42 Þetta graf sýnir hvernig við finnum δ í sönnuninni í dæmi 2.44.

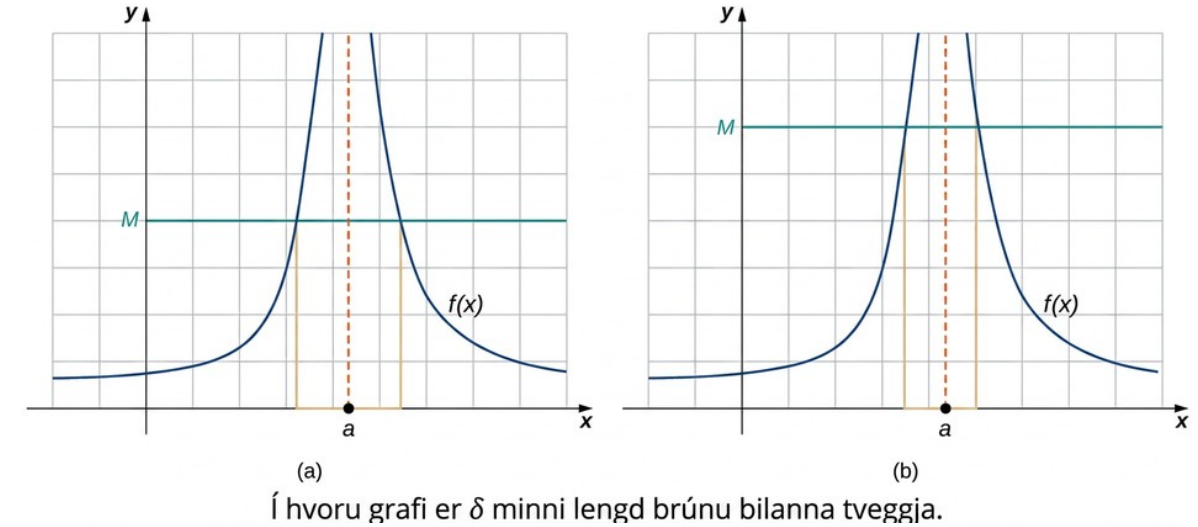
Gerum ráð fyrir að $0<x-4<\delta$. Því fæst $0<x-4<\varepsilon^2$. Þar af leiðir að $0<\sqrt{x-4}<\varepsilon$. Að lokum fæst $\left|\sqrt{x-4}-0\right|<\varepsilon$.

Því gildir að $\lim_{x\to 4^+}\sqrt{x-4}=0$.

STÖÐUMAT 2.30

Finnið δ sem samsvarar ε fyrir sönnun þess að $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$.

Að lokum setjum við fram formlega skilgreiningu á óendanlegum markgildum. Þar með höfum við fært innsæishugmyndir okkar um ýmsar gerðir markgilda yfir í nákvæmar, formlegar skilgreiningar. Til að það gildi að $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$, viljum við að gildi fallsins $f(x)$ verði sífellt stærri þegar x nálgast a. Í stað þess að krefjast þess að $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$ fyrir sérhvert ε, hversu lítið sem það er, þegar $0<\left|x-a\right|<\delta$ fyrir nægilega lítið δ, viljum við að $f(x)>M$ fyrir sérhvert jákvætt M, hversu stórt sem það er, þegar $0<\left|x-a\right|<\delta$ fyrir nægilega lítið δ. Mynd 2.43 sýnir þessa hugmynd með því að sýna gildi δ fyrir sífellt stærri gildi M.



Mynd 2.43 Þessi gröf sýna gildi δ fyrir mismunandi gildi M og þar með að $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera skilgreint fyrir öll $x \neq a$ á opnu bili sem inniheldur a. Þá fæst óendanlegt markgildi

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

ef fyrir sérhvert $M > 0$, er til $\delta > 0$ þannig að ef $0 < |x - a| < \delta$, þá $f(x) > M$.

Látum $f(x)$ vera skilgreint fyrir öll $x \neq a$ á opnu bili sem inniheldur a. Þá fæst neikvætt óendanlegt markgildi

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

ef fyrir sérhvert $M > 0$, er til $\delta > 0$ þannig að ef $0 < |x - a| < \delta$, þá $f(x) < -M$.

Æfingar í kafla 2.5

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skrifa viðeigandi ε-δ -skilgreiningu fyrir hverja gefna fullyrðingu.

176.

$$\lim_{x \to a} f(x) = N$$

177.

$$\lim_{t \to b} g(t) = M$$

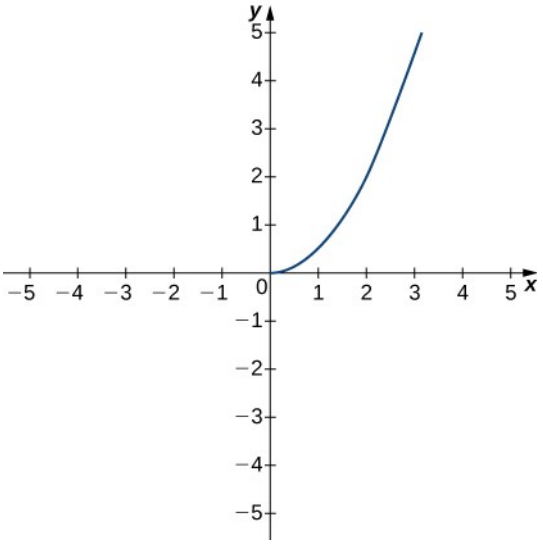
178.

$$\lim_{x \to c} h(x) = L$$

179.

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = A$$

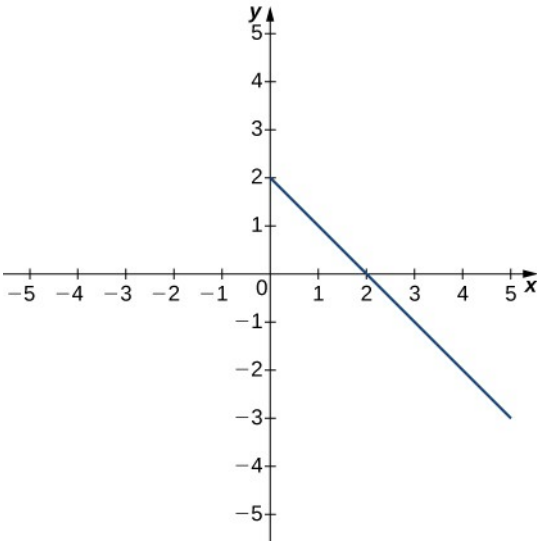
Eftirfarandi graf fallsins f uppfyllir $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$. Í eftirfarandi æfingum skuluð þið ákvarða gildi $\delta > 0$ sem uppfyllir hverja fullyrðingu.



180. Ef $0 < |x - 2| < \delta$, þá $|f(x) - 2| < 1$.

181. Ef $0 < |x - 2| < \delta$, þá $|f(x) - 2| < 0{,}5$.

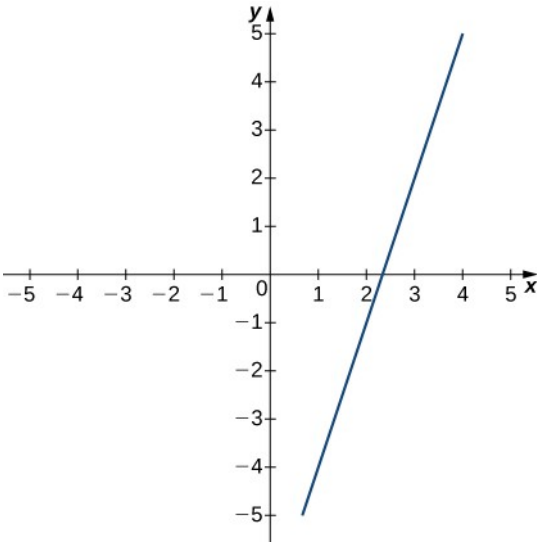
Eftirfarandi graf fallsins f uppfyllir $\lim_{x \to 3} f(x) = -1$. Í eftirfarandi æfingum skuluð þið ákvarða gildi $\delta > 0$ sem uppfyllir hverja fullyrðingu.



182. Ef $0<|x-3|<\delta$, þá $|f(x)+1|<1$.

183. Ef $0<|x-3|<\delta$, þá $|f(x)+1|<2$.

Eftirfarandi graf fallsins f uppfyllir $\lim_{x \to 3} f(x)=2$. Í hverri af eftirfarandi æfingum er gefið gildi ε. Finnið gildi $\delta>0$ þannig að nákvæm skilgreining markgildis sé uppfyllt.



184.

$$\varepsilon=1{,}5$$

185.

$$\varepsilon=3$$

[T] Notið grafíska reiknivél í eftirfarandi æfingum til að finna tölu δ þannig að fullyrðingarnar séu sannar.

186. $\left|\sin\ (2\ x)-\frac{1}{2}\right|<0{,}1$, þegar $\left|x-\frac{\pi}{12}\right|<\delta$

187.

$$|\sqrt{x-4}-2|<0{,}1,\ \text{þegar}\ \ |x-8|<\delta$$

Notið nákvæma skilgreiningu markgildis til að sanna markgildin í eftirfarandi æfingum.

188.

$$\lim_{x\to 2}(5x+8)=18$$

2

189.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

190.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=5$$

191.

$$\lim_{x\to 0}x^4=0$$

192.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x\right)=8$$

Notið nákvæma skilgreiningu markgildis til að sanna einhliða markgildin í eftirfarandi æfingum.

193.

$$\lim_{x\to 5^-}\sqrt{5-x}=0$$

194.

$$\lim_{x\to 0^+}f\ (x)=-2,\ \text{þar sem}\ f\ (x)=\begin{cases}8\ x-3, & \text{ef}\ \ x<0\\ 4\ x-2, & \text{ef}\ \ x\geq 0\end{cases}.$$

195.

$$\lim_{x\to 1^-}f\ (x)=3,\ \text{þar sem}\ f\ (x)=\begin{cases}5\ x-2, & \text{ef}\ \ x<1\\ 7\ x-1, & \text{ef}\ \ x\geq 1\end{cases}.$$

Notið nákvæma skilgreiningu markgildis til að sanna óendanlegu markgildin í eftirfarandi æfingum.

196.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

197.

$$\lim_{x \to -1} \frac{3}{(x+1)^2} = \infty$$

198.

$$\lim_{x \to 2} -\frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$$

199. Verkfræðingur notar vél til að skera flatan ferning úr loftgeli sem hefur flatarmálið 144 cm². Mesta leyfilega skekkja í flatarmálinu er 8 cm². Hversu nákvæmlega þarf verkfræðingurinn að skera hverja hlið ef allar hliðarnar eru jafnlangar? Hvernig tengjast þessar tölur δ, ε, a og L?

200. Notið nákvæma skilgreiningu markgildis til að sanna að eftirfarandi markgildi sé ekki til: $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

201. Notið nákvæma skilgreiningu markgildis til að sanna að $\lim_{x \to 0} f(x)$ sé ekki til, þar sem $f(x)$ er þakfallið. (Vísbending: Prófið eitthvert gildi sem uppfyllir $\delta < 1$.)

202. Notið nákvæmar skilgreiningar á markgildum til að sanna að $\lim_{x \to 0} f(x)$ sé ekki til: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ef } x \text{ er ræð} \\ 0 & \text{ef } x \text{ er óræð} \end{cases}$. (*Vísbending*: Hugsið um hvernig alltaf má velja ræða tölu $0 < r < d$, en $|f(r) - 0| = 1$.)

203. Notið nákvæmar skilgreiningar á markgildum til að ákvarða $\lim_{x \to 0} f(x)$ fyrir $f(x) = \begin{cases} x & \text{ef } x \text{ er ræð} \\ 0 & \text{ef } x \text{ er óræð} \end{cases}$. (*Vísbending*: Skiptið í tvö tilvik, *x* ræð tala og *x* óræð tala.)

204. Notið fallið úr æfingunni hér á undan og nákvæma skilgreiningu markgildis til að sýna að $\lim_{x \to a} f(x)$ sé ekki til fyrir $a \neq 0$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið gera ráð fyrir að $\lim_{x \to a} f(x) = L$ og $\lim_{x \to a} g(x) = M$ séu bæði til. Notið nákvæma skilgreiningu markgildis til að sanna eftirfarandi markgildisreglur:

205.

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = L + M$$

206. $\lim_{x \to a}[c f(x)] = c L$ fyrir sérhvern rauntölufasta c (Vísbending: Athugið tvö tilvik: $c = 0$ og $c \neq 0$.)

207. $\lim_{x \to a}[f(x) g(x)] = L M$. (Vísbending:

$$|f(x) g(x) - L M| =$$

$$|f(x) g(x) - f(x) M + f(x) M - L M| \leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L|.)$$

2

Lykilhugtök

meðalhraði

breyting á staðsetningu hlutar deilt með lengd tímabils; meðalhraði hlutar á tímabilinu $[t, a]$ (ef $t < a$ eða $[a, t]$ ef $t > a$), þar sem staðsetning hans er gefin með $s(t)$, er $v_{\text{ave}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$

regla um fastamargfeldi markgildis

markgildisreglan $\lim_{x \to a} c f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c L$

samfelldni í punkti

Fall $f(x)$ er samfellt í punkti a þá og því aðeins að þessi þrjú skilyrði séu uppfyllt: (1) $f(a)$ er skilgreint, (2) $\lim_{x \to a} f(x)$ er til og (3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

samfelldni frá vinstri

Fall er samfellt frá vinstri í punktinum b ef $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

samfelldni frá hægri

Fall er samfellt frá hægri í punktinum a ef $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

samfelldni á bili

fall sem hægt er að teikna með blýanti án þess að lyfta honum; fall er samfellt á opnu bili ef það er samfellt í öllum punktum bilsins; fall $f(x)$ er samfellt á lokuðu bili af gerðinni $[a, b]$ ef það er samfellt í sérhverjum punkti í (a, b), samfellt frá hægri í a og samfellt frá vinstri í b

mismunaregla fyrir markgildi

markgildisreglan

$$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

deildareikningur

sú grein stærðfræðigreiningar sem fjallar um afleiður og notkun þeirra

ósamfelldni í punkti

Fall er ósamfellt í punkti, eða hefur þar ósamfelldni, ef það er ekki samfellt í punktinum

epsílon-delta-skilgreining á markgildi

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$, er til $\delta > 0$ þannig að ef $0 < |x - a| < \delta$, þá er $|f(x) - L| < \varepsilon$

óendanleg ósamfelldni

Óendanleg ósamfelldni er í punktinum a ef $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ eða $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

óendanlegt markgildi

Fall hefur óendanlegt markgildi í punktinum a ef gildi þess vex eða minnkar án takmarka þegar breytan nálgast a

augnablikshraði

Augnablikshraði hlutar með staðsetningarfallið $s(t)$ er það gildi sem meðalhraðarnir á bilum af gerðinni $[t, a]$ og $[a, t]$ nálgast þegar t nálgast a, að því gefnu að slíkt gildi sé til

heildareikningur

sú grein stærðfræðigreiningar sem fjallar um heildi og notkun þeirra

Milligildissetningin

Látum fallið f vera samfellt á lokuðu og takmörkuðu bili $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$; ef z er rauntala milli $f(a)$ og $f(b)$, þá er til tala c í $[a, b]$ sem uppfyllir $f(c) = z$

innsæ skilgreining á markgildi

Ef öll gildi fallsins $f(x)$ nálgast rauntöluna L þegar $x (\neq a)$ nálgast a, nálgast $f(x)$ töluna L

stökkósamfelldni

Stökkósamfelldni er í punktinum a ef $\lim_{x \to a^-} f(x)$ og $\lim_{x \to a^+} f(x)$ eru bæði til en

$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

markgildi

sú aðgerð að láta x eða t stefna á a í stæðu; markgildi fallsins $f(x)$ þegar x stefnir á a er gildið sem $f(x)$ stefnir á þegar x stefnir á a

reiknireglur fyrir markgildi

einstakar reiknireglur fyrir markgildi; fyrir hverja reglu látum $f(x)$ og $g(x)$ vera skilgreind fyrir öll $x \neq a$ á einhverju opnu bili sem inniheldur a; gerum ráð fyrir að L og M séu rauntölur þannig að $\lim_{x \to a} f(x) = L$ og $\lim_{x \to a} g(x) = M$; látum c vera fasta

stærðfræðigreining margra breyta

sú grein stærðfræðigreiningar sem fjallar um föll tveggja eða fleiri breyta

einhliða markgildi

Einhliða markgildi falls er markgildi þess þegar viðfang fallsins nálgast tiltekið gildi frá vinstri eða hægri

veldisregla fyrir markgildi

markgildisreglan $\lim_{x \to a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n = L^n$ fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n

margfeldisregla fyrir markgildi

markgildisreglan

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$$

deiliregla fyrir markgildi

markgildisreglan $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ fyrir $M \neq 0$

afmáanleg ósamfelldni

Afmáanleg ósamfelldni verður í punktinum a ef $f(x)$ er ósamfellt í a, en $\lim_{x \to a} f(x)$ er til

rótarregla fyrir markgildi

markgildisreglan $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ fyrir öll L ef n er oddatala og fyrir $L \geq 0$ ef n er slétt tala

sniðill

Sniðill við graf fallsins $f(x)$ í punktinum a er lína sem liggur gegnum punktinn $\left(a, f(a)\right)$ og annan punkt á grafi fallsins; hallatala sniðilsins er gefin með $m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Klemmureglan

segir að ef $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ fyrir öll $x \neq a$ á opnu bili sem inniheldur a og $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} h(x)$ þar sem L er rauntala, þá er $\lim_{x \to a} g(x) = L$

summuregla fyrir markgildi

Markgildisreglan

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

snertill

Snertill við graf falls í punktinum $\left(a, f(a)\right)$ er línan sem sniðlar gegnum $\left(a, f(a)\right)$ nálgast þegar hinn punkturinn á grafi fallsins er valinn þannig að x-hnit hans nálgast a; hallatala snertilsins í a mælir breytingarhraða fallsins þar

þríhyrningsójafnan

Ef a og b eru rauntölur, þá er $|a+b| \leq |a|+|b|$

lóðfella

Fallið hefur lóðfelluna $x=a$ ef markgildi þess þegar x nálgast a frá hægri eða vinstri er óendanlegt

Helstu jöfnur

Hallatala sniðils	$m_{\text{sec}} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Meðalhraði á bilinu $[a,t]$	$v_{\text{ave}} = \frac{s(t)-s(a)}{t-a}$
Innsæ skilgreining á markgildi	$\lim_{x \to a} f(x) = L$
Tvö mikilvæg markgildi	$\lim_{x \to a} x = a \quad \lim_{x \to a} c = c$
Einhliða markgildi	$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$
Óendanleg markgildi frá vinstri	$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
Óendanleg markgildi frá hægri	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
Tvíhliða óendanleg markgildi	$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty : \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ og $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty : \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ og $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
Grunnniðurstöður um markgildi	$\lim_{x \to a} x = a \quad \lim_{x \to a} c = c$
Mikilvæg markgildi	$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$ $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$ $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$

Meginatriði

2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu

- Deildareikningur á rætur að rekja til þess verkefnis að ákvarða hallatölu snertils við feril í tilteknum punkti. Hallatala snertilsins lýsir breytingarhraða fallsins, sem einnig kallast afleiða fallsins. Til að reikna afleiðu þarf að finna markgildi.
- Heildareikningur á rætur að rekja til þess verkefnis að finna flatarmál svæðis milli grafs falls og x-ássins. Með því að skipta svæðinu í mjóa rétthyrninga og leggja saman flatarmál þeirra má nálga flatarmálið. Slík summa gefur gildi falls sem nefnist heildi. Heildi fæst einnig sem markgildi og tengist raunar afleiðu falls.
- Stærðfræðigreining margra breyta gerir kleift að leysa verkefni í þrívíðu rúmi, svo sem að lýsa hreyfingu í rúmi og reikna rúmmál rúmhluta.

2.2 Markgildi falls

- Nota má gildatöflu eða graf til að áætla markgildi.
- Þótt markgildi falls í tilteknum punkti sé ekki til geta einhliða markgildi fallsins þar samt verið til.
- Ef markgildi falls frá vinstri og hægri eru bæði til og jöfn er markgildi fallsins sama gildið.
- Nota má markgildi til að lýsa því þegar gildi falls vaxa eða minnka án takmarka nálægt tilteknum punkti.

2.3 Reiknireglur fyrir markgildi

- Með reiknireglum fyrir markgildi má reikna markgildi falla án þess að endurtaka ítarlega útreikninga í hvert skipti.
- Fyrir margliðuföll og ræð föll gildir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Reikna má markgildi falls með því að þátta og stytta, margfalda með samoka eða einfalda brotabrot.
- Með klemmureglunni má finna markgildi falls ef gildi þess liggja alltaf milli gilda tveggja falla sem hafa þekkt markgildi.

2.4 Samfelldni

- Fall er samfellt í punkti ef það er skilgreint þar, markgildi þess er til og fallsgildið er jafnt markgildinu.
- Ósamfellur skiptast í afmáanlegar ósamfellur, stökkósamfellur og óendanlegar ósamfellur.
- Fall er samfellt á opnu bili ef það er samfellt í öllum punktum bilsins. Það er samfellt á lokuðu bili ef það er samfellt í öllum innri punktum þess og frá viðeigandi hlið í hvorum endapunkti.
- Setningin um samskeytt föll segir: Ef $f(x)$ er samfellt í L og $\lim_{x \to a} g(x) = L$, þá er $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$.
- Milligildissetningin tryggir að samfellt fall á lokuðu bili taki öll gildi milli fallsgildanna í endapunktum bilsins.

2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi

- Úr innsærri hugmynd um markgildi má móta stranga stærðfræðilega skilgreiningu, svonefnda epsílon-delta-skilgreiningu markgildis.
- Nota má epsílon-delta-skilgreininguna til að sanna fullyrðingar um markgildi.
- Hægt er að aðlaga epsílon-delta-skilgreiningu markgildis til að skilgreina einhliða markgildi.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt. Rökstyðjið svörin í eftirfarandi verkefnum með sönnun eða gagndæmi.

208. Fall verður að vera samfellt í $x = a$ ef $\lim_{x \to a} f(x)$ er til.

209. Nota má deiliregluna til að reikna $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

210. Ef $x = a$ er lóðfella fallsins $f(x)$, er f ekki skilgreint í $x = a$.

211. Ef $\lim_{x \to a} f(x)$ er ekki til er f ekki skilgreint í $x = a$.

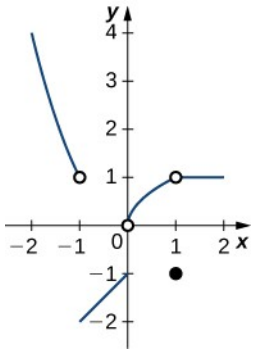
212. Notið grafið til að finna markgildin eða útskýrið hvers vegna þau eru ekki til.

a. $\lim_{x \to -1} f(x)$

b. $\lim_{x \to 1} f(x)$

c. $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

d. $\lim_{x \to 2} f(x)$



Reiknið markgildin í eftirfarandi verkefnum með algebru eða útskýrið hvers vegna þau eru ekki til.

213.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$$

214.

$$\lim_{x \to 0} 3x^2 - 2x + 4$$

215.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{3x - 2}$$

216.

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cot x}{\cos x}$$

217.

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2 + 25}{x + 5}$$

218.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$$

219.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

220.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

221.

$$\lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{\sqrt{x} - 2}$$

222.

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

Notið klemmuregluna til að sanna markgildin í eftirfarandi verkefnum.

223.

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos(2\pi x) = 0$$

224.

$$\lim_{x \to 0} x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

225. Ákvarðið skilgreiningarmengi fallsins $f(x) = \sqrt{x-2} + xe^x$ og sýnið að fallið sé samfellt á öllu skilgreiningarmenginu.

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum gildi c þannig að fallið verði samfellt. Teiknið síðan graf fallsins til að ganga úr skugga um að það sé samfellt.

226.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x > c \\ 2x, x \leq c \end{cases}$$

227.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, x > -1 \\ x^2 + c, x \leq -1 \end{cases}$$

Notið nákvæma skilgreiningu á markgildi til að sanna markgildin í eftirfarandi verkefnum.

228.

$$\lim_{x \to 1} (8x + 16) = 24$$

229.

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

230. Bolta er kastað upp í loft. Hæð hans er gefin með $x\,(t) = -4{,}9\,t^2 + 25\,t + 5$. Notið milligildissetninguna til að sýna að boltinn hljóti að lenda á jörðinni 5–6 sekúndum eftir kastið.

231. Færsla agnar sem hreyfist eftir línu er $x(t) = t^2 - 2t + 4$, þar sem x er mælt í metrum og t í sekúndum. Reiknið meðalhraðann á tímabilinu $t = [0, 2]$.

2

232. Notið niðurstöður fyrri verkefna til að áætla augnablikshraðann við $t = 2$ með því að skoða meðalhraðann fyrir $t = 0{,}01\,\text{sec}$.

3. KAFLI

Afleiður



Mynd 3.1 Hennessey Venom GT nær 322 km/klst hraða úr kyrrstöðu á 14,51 sekúndum. (mynd: byggt á verki eftir Codex41, Flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 3.1 Skilgreining afleiðunnar
- 3.2 Afleiðan sem fall
- 3.3 Deildunarreglur
- 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
- 3.5 Afleiður hornafalla
- 3.6 Keðjureglan

- 3.7 Afleiður andhverfra falla
- 3.8 Fólgin deildun
- 3.9 Afleiður vísis- og lografalla

Inngangur

Hennessey Venom GT er einn af hraðskreiðustu bílum heims. Árið 2014 setti hann hraðamet, 435 km/klst. Hann nær 322 km/klst hraða úr kyrrstöðu á 14,51 sekúndum. Aðferðir þessa kafla má nota til að reikna hröðun Venom-bílsins í þessari hraðaaukningu (sjá dæmi 3.8).

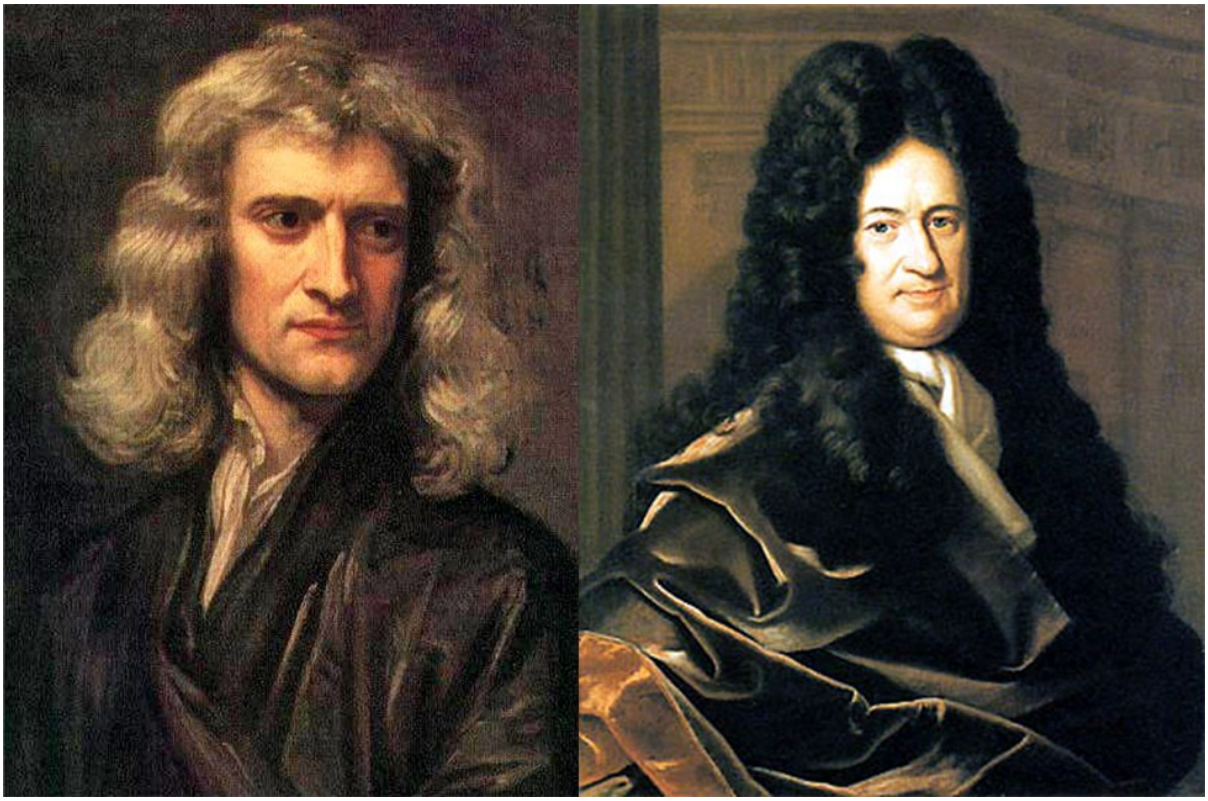
Stærðfræðigreining er mikilvæg til að reikna hraða og breytingar á honum, en hún nýtist til miklu fleira. Stærðfræðigreining er undirstaða allra greina stærðfræði, raunvísinda og verkfræði og er jafnframt ómissandi við greiningar í viðskiptum og heilbrigðisvísindum. Í þessum kafla kynnumst við afleiðunni, einu helsta verkfæri stærðfræðigreiningar, og þægilegum aðferðum til að reikna afleiður. Síðan notum við reglurnar á ýmis föll svo að við getum skoðað hvernig nýta má aðferðirnar.

3.1 Skilgreining afleiðunnar

NÁMSMARKMIÐ

- 3.1.1 Skilja merkingu snertils við feril í tilteknum punkti.
- 3.1.2 Reikna hallatölu snertils.
- 3.1.3 Skilgreina afleiðu sem markgildi mismunakvóta.
- 3.1.4 Reikna afleiðu tiltekins falls í punkti.
- 3.1.5 Lýsa hraða sem breytingarhraða.
- 3.1.6 Útskýra muninn á meðalhraða og augnablikshraða.
- 3.1.7 Áætla afleiðu út frá gildatöflu.

Nú skiljum við hvað markgildi er og kunnum að reikna markgildi. Þar með höfum við lagt grunninn að námi okkar í stærðfræðigreiningu, þeirri grein stærðfræðinnar sem fjallar um afleiður og heildi. Flestir stærðfræðingar og sagnfræðingar eru sammála um að Englendingurinn Isaac Newton (1643–1727) og Þjóðverjinn Gottfried Leibniz (1646–1716), sem sjást á mynd 3.2, hafi þróað stærðfræðigreininguna hvor í sínu lagi. Þegar Newton og Leibniz eru taldir hafa þróað stærðfræðigreiningu er í raun átt við að þeir hafi fyrstir skilið sambandið milli afleiðu og heildis. Báðir nutu þeir góðs af verkum forvera á borð við Barrow, Fermat og Cavalieri. Samband þeirra virðist í fyrstu hafa verið vinsamlegt en síðar blossuðu upp harðvítugar deilur um hvor þeirra hefði orðið fyrri til. Þótt líklegt virðist að Newton hafi fyrstur fengið hugmyndirnar sem liggja stærðfræðigreiningu til grundvallar eigum við Leibniz að þakka táknunina sem almennt er notuð í dag.



Mynd 3.2 Newton og Leibniz eru taldir hafa þróað stærðfræðigreiningu hvor í sínu lagi.

Snertlar

Við hefjum námið í stærðfræðigreiningu á því að rifja upp hugtökin sniðill og snertill. Munum að við notuðum hallatölu sniðils við graf falls í punkti $(a, f(a))$ til að meta breytingarhraðann, það er hversu hratt ein breyta breytist miðað við aðra. Hallatölu sniðilsins má finna með því að velja x-gildi nálægt a og draga línu gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(x, f(x))$, eins og sýnt er á mynd 3.3. Hallatala línunnar fæst þá með eftirfarandi mismunakvóta:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Einnig má reikna hallatölu sniðils við graf falls í a með því að nota þessa jöfnu og skipta x út fyrir $a+h$, þar sem h er nálægt 0. Þá reiknum við hallatölu línunnar gegnum punktana $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$. Hallatala sniðilsins fæst þá með eftirfarandi mismunakvóta, þar sem aukningin er h:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

SKILGREINING

Látum f vera fall sem er skilgreint á bili I sem inniheldur a. Ef $x \neq a$ er í I, þá

$$Q=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(3.1)

er mismunakvóti.

Ef $h\neq 0$ er valið þannig að $a+h$ tilheyri I, þá

$$Q=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(3.2)

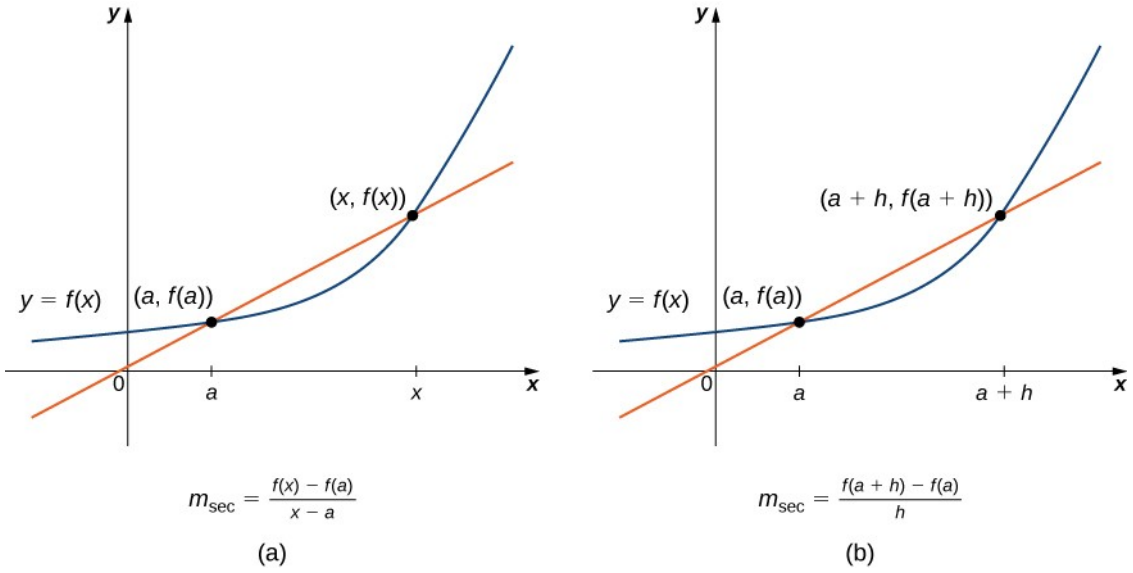
er mismunakvóti með aukningunni h.

MIÐLAR

3

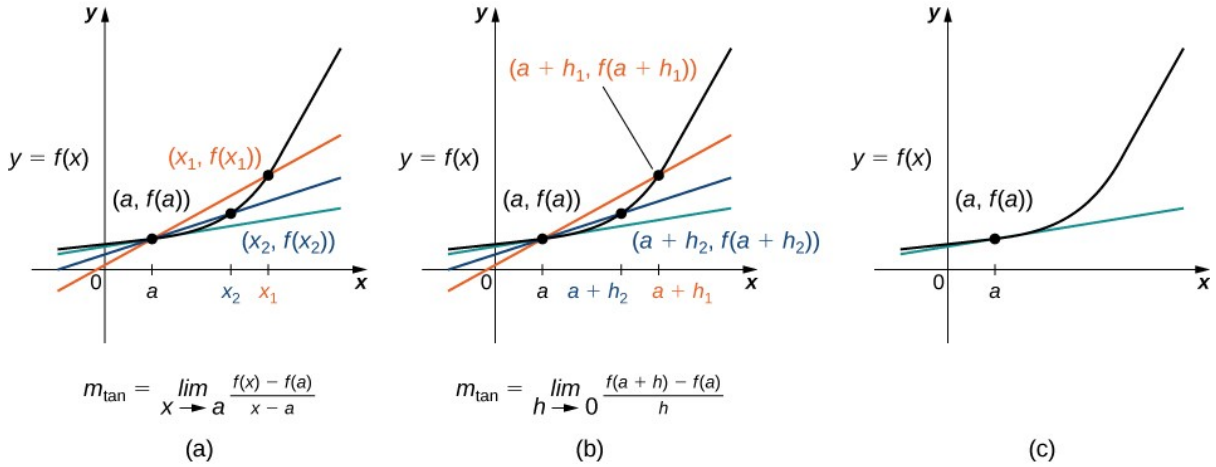
Skoðið hvernig afleiðan er leidd út með þessu smáforriti.

Á mynd 3.3 má sjá tvenns konar framsetningu á hallatölu sniðils. Báðar aðferðirnar koma að gagni og velja má þá sem hentar betur hverju sinni. Yfirleitt verður sú framsetning fyrir valinu sem einfaldar útreikningana.



Mynd 3.3 Við getum reiknað hallatölu sniðils á tvo vegu.

Á mynd 3.4(a) sjáum við að eftir því sem x nálgast a, gefa hallatölur sniðlanna sífellt betra mat á breytingarhraða fallsins í a. Jafnframt nálgast sniðlarnir sjálfir snertil fallsins í a, sem er markstaða þeirra. Á sama hátt sýnir mynd 3.4(b) að eftir því sem h nálgast 0, nálgast sniðlarnir einnig snertilinn. Hallatala snertilsins í a er breytingarhraði fallsins í a, eins og sýnt er á mynd 3.4(c).



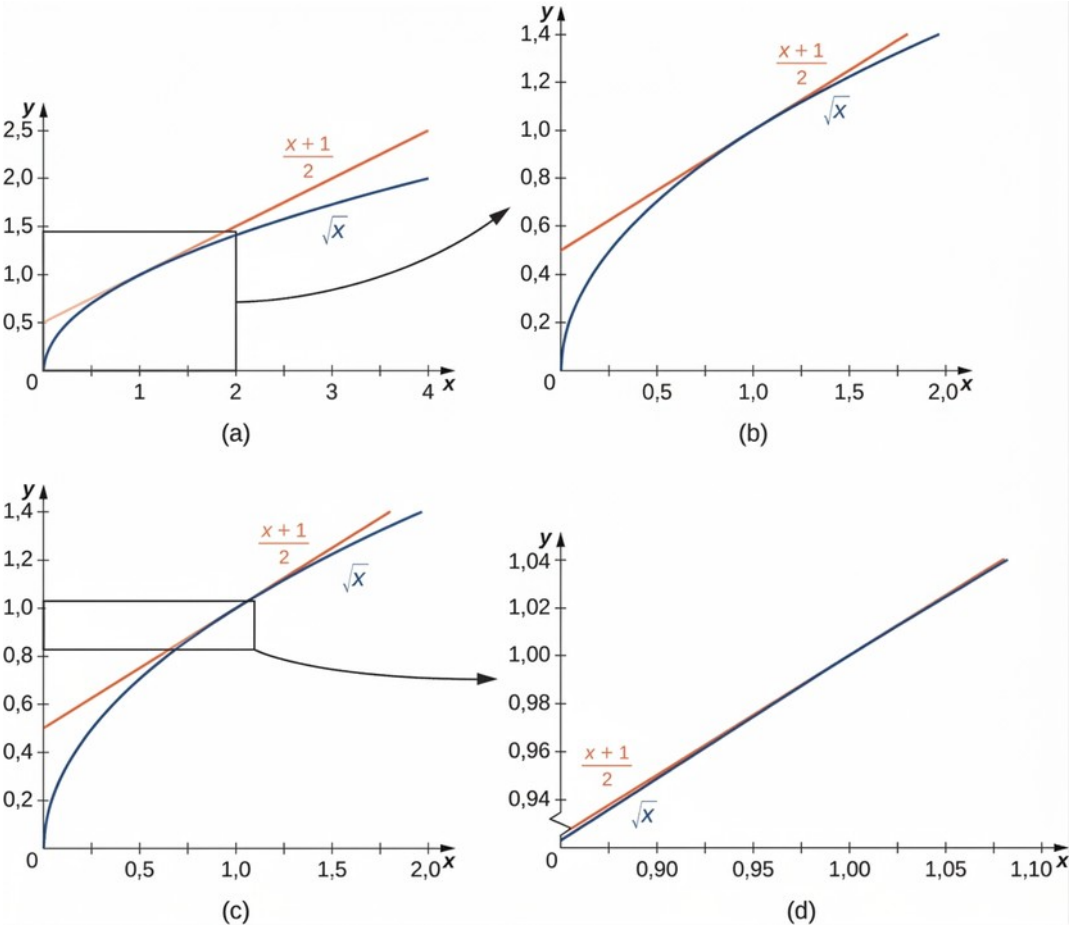
Mynd 3.4 Sniðlarnir nálgast snertilinn (sýndur með grænum lit) þegar seinni punkturinn nálgast þann fyrri.

3

MIÐLAR

Á þessu vefsvæði má skoða gröf og kanna hvort þau hafi snertil í tilteknum punkti.

Á mynd 3.5 sjást graf $f(x)=\sqrt{x}$ og snertill þess við $(1,1)$ á sífellt þrengri bilum um $x=1$. Eftir því sem bilin þrengjast virðast graf fallsins og snertillinn falla saman. Gildi á snertlinum gefa því góða nálgun á gildum fallsins þegar x er nálægt 1. Raunar virðist graf $f(x)$ sjálft vera staðbundið línulegt í grennd við $x=1$.



Mynd 3.5 Þegar x er nálægt 1, virðast graf $f(x)=\sqrt{x}$ og snertill þess falla saman.

Formlega má skilgreina snertil við graf falls á eftirfarandi hátt.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint á opnu bili sem inniheldur a. Snertill við graf $f(x)$ í a er sú lína sem liggur gegnum punktinn $(a, f(a))$ og hefur hallatöluna

$$m_{\tan}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(3.3)

að því gefnu að þetta markgildi sé til.

Jafngilt er að skilgreina snertil við graf $f(x)$ í a sem línuna sem liggur gegnum punktinn $(a, f(a))$ og hefur hallatöluna

$$m_{\tan}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(3.4)

að því gefnu að þetta markgildi sé til.

Rétt eins og hallatölu sniðils má setja fram með tvennum hætti má skilgreina hallatölu snertils á tvo jafngilda vegu. Báðar framsetningarnar eru notaðar í bókinni og eins og áður ræður samhengið hvor er valin. Nú höfum við skilgreint snertil við graf falls í punkti formlega og getum notað skilgreininguna til að finna jöfnur snertla.

DÆMI 3.1

Snertill fundinn

Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=x^2$ í punktinum $x=3$.

Lausn

Finnið fyrst hallatölu snertilsins. Notið jöfnu 3.3 í þessu dæmi.

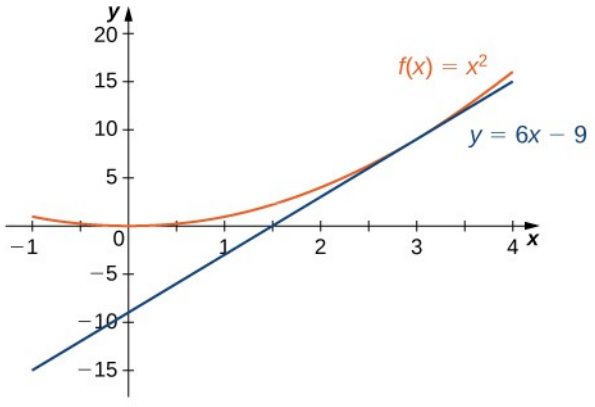
$$m_{\tan} = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ Beitum skilgreiningunni.

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$ Setjum inn $f(x)=x^2$ og $f(3)=9$.

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3)=6$$ Þáttum teljarann til að reikna markgildið.

Næst finnum við punkt á snertlinum. Línan snertir graf $f(x)$ í $x=3$, þannig að hún liggur gegnum punktinn $(3, f(3))$. Þar sem $f(3)=9$, liggur snertillinn gegnum punktinn $(3,9)$.

Hallatalan er $m=6$ og punkturinn er $(3,9)$, og þá fæst með punkthallajöfnu línu $y-9=6(x-3)$. Með einföldun fæst $y=6x-9$. Graf fallsins $f(x)=x^2$ og snertill þess í x = 3 eru sýnd á mynd 3.6.



Mynd 3.6 Snertillinn við $f(x)$ í $x=3$.

DÆMI 3.2

Hallatala snertils skoðuð að nýju

Notið jöfnu 3.4 til að finna hallatölu snertilsins við graf $f(x)=x^2$ í $x=3$.

Lausn

Skrefin eru mjög svipuð þeim í dæmi 3.1. Sjá jöfnu 3.4 fyrir skilgreininguna.

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$ Beitum skilgreiningunni.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$$ Setjum inn $f(3+h)=(3+h)^2$ og $f(3)=9$.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h}$$ Margföldum upp úr svigum og einföldum til að reikna markgildið.

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$$

Við fengum sama gildi fyrir hallatölu snertilsins með því að nota hina skilgreininguna, sem sýnir að nota má formúlurnar hvora í stað annarrar.

DÆMI 3.3

Jafna snertils fundin

Finnið jöfnu snertilsins við graf $f(x)=1/x$ þegar $x=2$.

Lausn

Við getum notað jöfnu 3.3, en eins og við höfum séð fást sömu niðurstöður ef við notum jöfnu 3.4.

$$m_{\tan} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ Beitum skilgreiningunni.

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$$ Setjum inn $f(x)=\frac{1}{x}$ og $f(2)=\frac{1}{2}$.

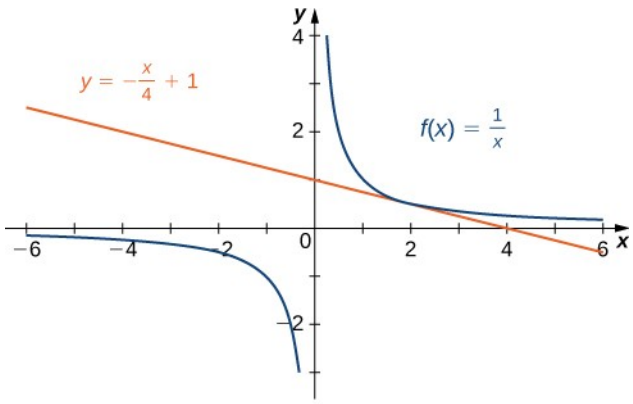
$$= \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\cdot\frac{2x}{2x}$$ Margföldum teljara og nefnara með $2x$ til að einföldum brotin.

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2-x)}{(x-2)(2x)}$$ Einföldum.

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x}$$ Einföldum með $\frac{2-x}{x-2}=-1$, fyrir $x\neq 2$.

$= -\frac{1}{4}$ Reiknum markgildið.

Nú vitum við að hallatala snertilsins er $-\frac{1}{4}$. Til að finna jöfnu hans þurfum við einnig að þekkja punkt á línunni. Við vitum að $f(2)=\frac{1}{2}$. Þar sem snertillinn liggur gegnum punktinn $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ má nota punkthallajöfnu línu til að finna jöfnu hans. Jafna snertilsins er því $y=-\frac{1}{4}x+1$. Gröf fallanna $f(x)=\frac{1}{x}$ og $y=-\frac{1}{4}x+1$ eru sýnd á mynd 3.7.



Mynd 3.7 Línan er snertill við $f(x)$ í punktinum $x=2$.

STÖÐUMAT 3.1

Finnið hallatölu snertils við graf $f(x)=\sqrt{x}$ þegar $x=4$.

Afleiða falls í punkti

Markgildið sem notað er til að finna hallatölu snertils við graf falls í tilteknum punkti kemur fyrir í fjölmörgum hagnýtum verkefnum á ýmsum fræðasviðum. Dæmi um það eru hraði og hröðun í eðlisfræði, jaðarhagnaðarföll í viðskiptafræði og vaxtarhraði í líffræði. Markgildið kemur svo oft fyrir að því hefur verið gefið sérstakt heiti: afleiða. Útreikningur afleiðu nefnist deildun.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera fall sem er skilgreint á opnu bili sem inniheldur a. Afleiða fallsins $f(x)$ í a, táknuð með $f'(a)$, er skilgreind sem

$$f'(a)=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(3.5)

að því gefnu að þetta markgildi sé til.

Einnig má skilgreina afleiðu $f(x)$ í a sem

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

(3.6)

DÆMI 3.4

Mat á afleiðu

Fyrir $f(x)=x^2$, notið töflu og jöfnu 3.5 til að áætla $f'(3)$.

Lausn

Búið til töflu með x-gildum rétt undir 3 og rétt yfir 3.

x	$\frac{x^2-9}{x-3}$
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999
3,001	6,001
3,01	6,01
3,1	6,1

Gott nálgunargildi sem lesa má úr töflunni er $f'(3)=6$.

STÖÐUMAT 3.2

Fyrir $f(x)=x^2$, notið töflu og jöfnu 3.6 til að áætla $f'(3)$.

DÆMI 3.5

Að finna afleiðu

Fyrir $f(x)=3x^2-4x+1$, finnið $f'(2)$ með því að nota jöfnu 3.5.

Lausn

Setjið gefna fallið og gildið beint inn í jöfnuna.

$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ Beitum skilgreiningunni.

$= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 - 4x + 1) - 5}{x - 2}$ Setjum inn $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ og $f(2) = 5$.

$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(3x + 2)}{x - 2}$ Einföldum og þáttum teljarann.

$= \lim_{x \to 2} (3x + 2)$ Styttum með sameiginlega þættinum.

$= 8$ Reiknum markgildið.

DÆMI 3.6

Afleiðan skoðuð á ný

Fyrir $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, finnið $f'(2)$ með því að nota jöfnu 3.6.

Lausn

Setjum tvö gildi fallsins inn í þessa jöfnu. Niðurstaðan ætti að verða sú sama og í dæmi 3.5.

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ Beitum skilgreiningunni.

$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(2 + h)^2 - 4(2 + h) + 1) - 5}{h}$ Setjum inn $f(2) = 5$ og $f(2 + h) = 3(2 + h)^2 - 4(2 + h) + 1$.

$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 8h}{h}$ Einföldum teljarann.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h + 8)}{h}$ Þáttum teljarann.

$= \lim_{h \to 0} (3h + 8)$ Styttum með sameiginlega þættinum.

$= 8$ Reiknum markgildið.

Niðurstöðurnar eru þær sömu hvort sem við notum jöfnu 3.5 eða jöfnu 3.6.

STÖÐUMAT 3.3

Fyrir $f(x) = x^2 + 3x + 2$, finnið $f'(1)$.

Hraði og breytingarhraði

Nú getum við notað afleiðu í verkefnum um hraða. Rifjum upp að ef $s(t)$ táknar stöðu hlutar sem hreyfist eftir hnitás fæst meðalhraði hans á tímabilinu $[a,t]$ þegar $t>a$ eða $[t,a]$ þegar $t<a$ með mismunakvótanum

$$v_{\text{ave}}=\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$

(3.7)

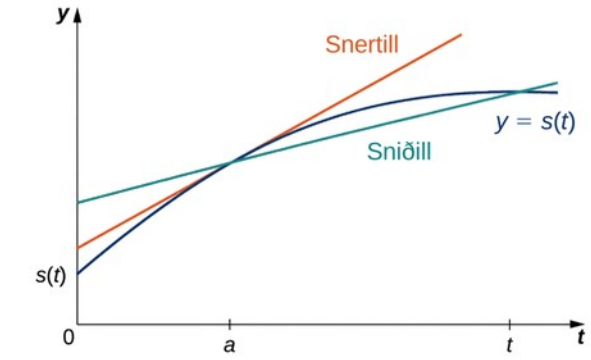
Eftir því sem t nálgast a, nálgast v_{ave} það gildi sem nefnist augnablikshraði við a. Augnablikshraðinn við a, sem táknaður er með $v(a)$, fæst með

$$v(a)=s'(a)=\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$

(3.8)

3

Til að skýra betur samband meðalhraða og augnablikshraða má skoða mynd 3.8. Hallatala rauða snertilsins er augnablikshraði hlutarins við $t=a$, en staða hans við tímann t er gefin með fallinu $s(t)$. Hallatala græna sniðilsins er meðalhraði hlutarins á tímabilinu $[a,t]$.



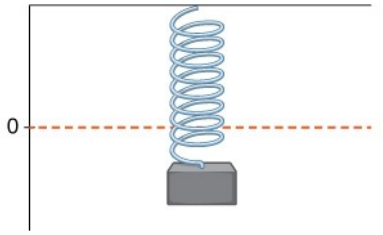
Mynd 3.8 Hallatala sniðilsins er meðalhraðinn á bilinu $[a,t]$. Hallatala snertilsins er augnablikshraðinn.

Augnablikshraðann má reikna með jöfnu 3.5 eða meta út frá gildatöflu. Síðan má sannreyna matið með jöfnu 3.7.

DÆMI 3.7

Mat á hraða

Blýlóð á gormi sveiflast upp og niður. Staða þess við tímann t miðað við fasta lárétta línu er $s(t)=\sin t$ (mynd 3.9). Notið gildatöflu til að áætla $v(0)$. Sannreynið matið með jöfnu 3.5.



Mynd 3.9 Blýlóð sem hangir í gormi og sveiflast lóðrétt.

Lausn

Augnablikshraðann við $t=0$ má áætla með því að reikna meðalhraða fyrir t-gildi sem nálgast 0, eins og sýnt er í töflu 3.1.

Tafla 3.1 Meðalhraði fyrir gildi á t sem nálgast 0

t	$\frac{\sin t-\sin 0}{t-0}=\frac{\sin t}{t}$
$-0{,}1$	0,998334166
$-0{,}01$	0,9999833333
$-0{,}001$	0,999999833
0,001	0,999999833
0,01	0,9999833333
0,1	0,998334166

Úr töflunni sjáum við að meðalhraðinn á tímabilinu $[-0{,}1\,;0]$ er 0,998334166, meðalhraðinn á tímabilinu $[-0{,}01\,;0]$ er 0,9999833333, og svo framvegis. Af þessari gildatöflu virðist mega áætla að $v(0)=1$.

Með jöfnu 3.5 fæst að

$$v(0)=s'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\sin 0}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

Því gildir raunar að $v(0)=1$.

STÖÐUMAT 3.4

Steini er sleppt úr hæð sem er 19,6 metrar. Hæð hans yfir jörðu eftir t sekúndur er gefin með $s(t)=-4{,}9\,t^2+19{,}6$, $0\le t\le 2$. Finnið augnablikshraða hans 1 sekúndu eftir að honum er sleppt með því að nota jöfnu 3.5.

Eins og við höfum séð í þessum undirkafla eru hallatala snertils við graf falls og augnablikshraði skyld hugtök. Hvort tveggja er reiknað með afleiðu og mælir augnabliksbreytingarhraða falls, það er breytingarhraða þess í hverjum punkti.

SKILGREINING

Augnabliksbreytingarhraði falls $f(x)$ við gildið a er afleiða þess $f'(a)$.

DÆMI 3.8

Kaflainngangur: Mat á hröðun



Mynd 3.10 (heimild: aðlögun á verki eftir Codex41, Flickr)

Hennessey Venom GT nær 435 km/klst. hámarkshraða og er einn af hraðskreiðustu bílum heims. Í prófunum jók hann hraðann úr 0 í 97 km/klst. á 3,05 sekúndum, úr 0 upp í 161 km/klst. á 5,88 sekúndum, úr 0 upp í 322 km/klst. á 14,51 sekúndum og úr 0 upp í 370 km/klst. á 19,96 sekúndum. Notið þessi gögn til að draga ályktun um breytingarhraða hraðans (það er hröðun) þegar hraðinn nálgast 370 km/klst. Virðist hröðun bílsins aukast, minnka eða haldast stöðug?

Lausn

Athugum fyrst að 97 km/klst. $\approx$ 26,94 m/s, 161 km/klst. $\approx$ 44,72 m/s, 322 km/klst. $\approx$ 89,44 m/s og 370 km/klst. $\approx$ 102,78 m/s. Við getum tekið upplýsingarnar saman í töflu.

Tafla 3.2 $v(t)$ fyrir mismunandi gildi t

t	$v(t)$
0	0
3,05	26,94
5,88	44,72
14,51	89,44
19,96	102,78

Reiknið nú meðalhröðun bílsins í metrum á sekúndu í öðru veldi á bilum af gerðinni $[t, 19{,}96]$ þegar t nálgast $19{,}96$, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Tafla 3.3 Meðalhröðun

t	$\frac{v(t)-v(19{,}96)}{t-19{,}96}=\frac{v(t)-102{,}78}{t-19{,}96}$
0,0	5,15
3,05	4,48
5,88	4,12
14,51	2,45

Hröðun bílsins minnkar eftir því sem hraði hans nálgast 370 km/klst. (102,78 m/s).

DÆMI 3.9

Breytingarhraði hitastigs

Húseigandi stillir hitastillinn þannig að hitastigið í húsinu fari að lækka úr 21 °C kl. 9 um kvöld, nái lágmarkinu 16 ° um nóttina og verði aftur 21 ° fyrir kl. 7 að morgni næsta dags. Gerum ráð fyrir að hitastigið í húsinu sé gefið með $T(t)=0{,}2\,t^2-2\,t+21$ fyrir $0\le t\le 10$, þar sem t er fjöldi klukkustunda frá kl. 9 um kvöld. Finnið augnabliksbreytingarhraða hitastigsins á miðnætti.

Lausn

Miðnætti er 3 klukkustundum eftir kl. 9 um kvöld. Því þurfum við að reikna $T'(3)$. Notum jöfnu 3.5.

$T'(3) = \lim_{t\to 3}\frac{T(t)-T(3)}{t-3}$ Beitum skilgreiningunni.

$= \lim_{t\to 3}\frac{0{,}2\,t^2-2\,t+21-16{,}8}{t-3}$ Setjum inn $T(t)=0{,}2\,t^2-2\,t+21$ og $T(3)=16{,}8$.

$$= \lim_{t \to 3} \frac{0{,}2\ t^2 - 2\ t + 4{,}2}{t - 3}$$ Einföldum.

$$= \lim_{t \to 3} \frac{0{,}2\ (t-3)\ (t-7)}{t-3} \qquad = \lim_{t \to 3} \frac{0{,}2\ (t-3)\ (t-7)}{t-3}$$

$$= \lim_{t \to 3} 0{,}2\ (t-7)$$ Styttum.

$$= -0{,}8$$ Reiknum markgildið.

Augnabliksbreytingarhraði hitastigsins á miðnætti er $-0{,}8\,°\mathrm{C}$ á klukkustund.

DÆMI 3.10

Breytingarhraði hagnaðar

Leikfangafyrirtæki getur selt x rafræn leikjakerfi á $p = -0{,}01\ x + 400$ dollara stykkið. Framleiðslukostnaður x kerfa er $C\ (x) = 100\ x + 10.000$ dollarar. Finnið breytingarhraða hagnaðarins þegar 10.000 leikjakerfi eru framleidd. Ætti fyrirtækið að auka framleiðsluna eða draga úr henni?

Lausn

Hagnaðurinn $P(x)$ af framleiðslu x leikjakerfa er $R(x) - C(x)$, þar sem $R(x)$ táknar tekjur af sölu x kerfa. Fyrirtækið getur selt x kerfi á verðinu $p = -0{,}01\ x + 400$ fyrir hvert kerfi og því

$$R\ (x) = x\ p = x\ (-0{,}01\ x + 400) = -0{,}01\ x^2 + 400\ x.$$

Þar af leiðir að

$$P\ (x) = -0{,}01\ x^2 + 300\ x - 10.000.$$

Breytingarhraði hagnaðarins er því

$$\begin{aligned} P'\ (10000) &= \lim_{x \to 10000} \frac{P\ (x) - P\ (10000)}{x - 10000} \\ &= \lim_{x \to 10000} \frac{-0{,}01\ x^2 + 300\ x - 10000 - 1990000}{x - 10000} \\ &= \lim_{x \to 10000} \frac{-0{,}01\ x^2 + 300\ x - 2000000}{x - 10000} \\ &= 100. \end{aligned}$$

Þar sem breytingarhraði hagnaðar $P'\ (10.000) > 0$ og $P\ (10.000) > 0$, ætti fyrirtækið að auka framleiðsluna.

STÖÐUMAT 3.5

Kaffihús kemst að þeirri niðurstöðu að daglegur hagnaður af skonsum, þegar verðið er s dollarar á hverja skonsu, sé $P(s) = -20\,s^2 + 150\,s - 10$. Kaffihúsið tekur nú 3,25 € fyrir hverja

skonsu. Finnið $P'(3{,}25)$, breytingarhraða hagnaðarins þegar verðið er 3,25 €. Ákvarðið síðan hvort kaffihúsið ætti að íhuga að hækka eða lækka verðið á skonsum.

Verkefni í kafla 3.1

Notið jöfnu 3.1 til að finna hallatölu sniðilsins milli x_1 og x_2 fyrir hvert eftirfarandi fall $y=f(x)$.

1. $$f(x)=4x+7;\ x_1=2,\ x_2=5$$

2. $$f(x)=8x-3;\ x_1=-1,\ x_2=3$$

3. $$f(x)=x^2+2x+1;\ x_1=3,\ x_2=3{,}5$$

4. $$f(x)=-x^2+x+2;\ x_1=0{,}5,\ x_2=1{,}5$$

5. $$f(x)=\frac{4}{3x-1};\ x_1=1,\ x_2=3$$

6. $$f(x)=\frac{x-7}{2x+1};\ x_1=0,\ x_2=2$$

7. $$f(x)=\sqrt{x};\ x_1=1,\ x_2=16$$

8. $$f(x)=\sqrt{x-9};\ x_1=10,\ x_2=13$$

9. $$f(x)=x^{1/3}+1;\ x_1=0,\ x_2=8$$

10. $$f(x)=6x^{2/3}+2x^{1/3};\ x_1=1,\ x_2=27$$

Fyrir eftirfarandi föll,

a. notið jöfnu 3.4 til að finna hallatölu snertilsins $m_{\tan}=f'(a)$, og

b. finnið jöfnu snertilsins við f þegar $x=a$.

11.

$$f(x)=3-4x, a=2$$

12.

$$f(x)=\frac{x}{5}+6, a=-1$$

13.

$$f(x)=x^2+x, a=1$$

14.

$$f(x)=1-x-x^2, a=0$$

15.

$$f(x)=\frac{7}{x}, a=3$$

16.

$$f(x)=\sqrt{x+8}, a=1$$

17.

$$f(x)=2-3x^2, a=-2$$

18.

$$f(x)=\frac{-3}{x-1}, a=4$$

19.

$$f(x)=\frac{2}{x+3}, a=-4$$

20.

$$f(x)=\frac{3}{x^2}, a=3$$

Fyrir eftirfarandi föll $y=f(x)$, finnið $f'(a)$ með því að nota jöfnu 3.5.

21.

$$f(x)=5x+4, a=-1$$

22.

$$f(x)=-7x+1, a=3$$

23.

$$f(x)=x^2+9x, a=2$$

24.

$$f(x)=3x^2-x+2, a=1$$

25.

$$f(x)=\sqrt{x}, a=4$$

26.

$$f(x)=\sqrt{x-2}, a=6$$

27.

$$f(x)=\frac{1}{x}, a=2$$

28.

$$f(x)=\frac{1}{x-3}, a=-1$$

29.

$$f(x)=\frac{1}{x^3}, a=1$$

30.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, a=4$$

Í verkefnunum hér á eftir er gefið fallið $y=f(x)$,

a. finnið hallatölu sniðilsins PQ fyrir hvern punkt $Q(x, f(x))$ þar sem x-gildið er gefið í töflunni.

b. Notið svörin við a-lið til að áætla hallatölu snertilsins í P.

c. Notið svarið við b-lið til að finna jöfnu snertilsins við f í punktinum P.

31. **[T]** $f(x)=x^2+3x+4, P(1,8)$ (Námundið að 6 aukastöfum.)

x	Hallatala m_{PQ}	x	Hallatala m_{PQ}
1.1	(i)	0.9	(vii)
1.01	(ii)	0.99	(viii)
1.001	(iii)	0.999	(ix)
1.0001	(iv)	0.9999	(x)
1.00001	(v)	0.99999	(xi)
1.000001	(vi)	0.999999	(xii)

32. [T] $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}, P(0,-1)$

x	Hallatala m_{PQ}	x	Hallatala m_{PQ}
0.1	(i)	$-0,1$	(vii)
0.01	(ii)	$-0,01$	(viii)
0.001	(iii)	$-0,001$	(ix)
0.0001	(iv)	$-0,0001$	(x)
0.00001	(v)	$-0,00001$	(xi)
0.000001	(vi)	$-0,000001$	(xii)

33. [T] $f\left(x\right)=10\ e^{0,5\ x}, P\left(0,10\right)$ (Námundið að 4 aukastöfum.)

x	Hallatala m_{PQ}
$-0,1$	(i)
$-0,01$	(ii)
$-0,001$	(iii)
$-0,0001$	(iv)
$-0,00001$	(v)
−0.000001	(vi)

34. [T] $f(x)=\tan(x), P(\pi,0)$

x	Hallatala m_{PQ}
3.1	(i)
3.14	(ii)
3.141	(iii)
3.1415	(iv)
3.14159	(v)
3.141592	(vi)

[T] Í eftirfarandi verkefnum hreyfist hlutur eftir beinni línu samkvæmt staðarfallinu $y=s(t)$, þar sem t er mælt í sekúndum og s í metrum. Finnið

a. einfaldaða stæðu fyrir meðalhraðann frá $t=2$ til $t=2+h$;

b. meðalhraðann milli $t=2$ og $t=2+h$, þar sem (i) $h=0{,}1$, (ii) $h=0{,}01$, (iii) $h=0{,}001$, og (iv) $h=0{,}0001$; og

c. notið svarið við a-lið til að áætla augnablikshraðann við $t=2$ sekúndur.

35.

$$s(t)=\frac{1}{3}t+5$$

36.

$$s(t)=t^2-2t$$

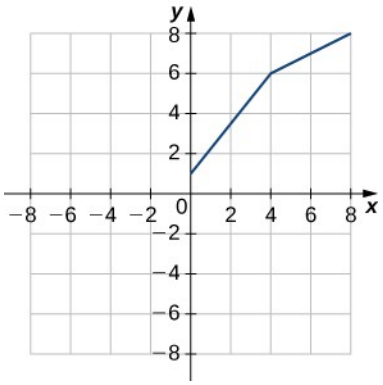
37.

$$s(t)=2t^3+3$$

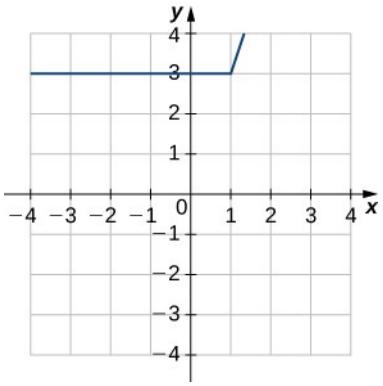
38.

$$s(t)=\frac{16}{t^2}-\frac{4}{t}$$

39. Notið eftirfarandi graf til að ákvarða a. $f'(1)$ og b. $f'(6)$.



40. Notið eftirfarandi graf til að reikna a. $f'(-3)$ og b. $f'(1{,}5)$.



Notið markgildisskilgreiningu afleiðu til að sýna að ekkert fallanna hér á eftir hafi afleiðu í $x=a$.

41.

$$f(x)=x^{1/3}, x=0$$

42.

$$f(x)=x^{2/3}, x=0$$

43.

$$f(x)=\begin{cases}1, x<1\\ x, x\geq 1\end{cases}, x=1$$

44.

$$f(x)=\frac{|x|}{x}, x=0$$

45. [T] Staða kappakstursbíls á beinni braut, mæld í metrum, eftir t sekúndur er gefin með fallinu $s(t)=8t^2-\frac{1}{16}t^3$.

a. Finnið meðalhraða ökutækisins á eftirfarandi tímabilum með fjögurra aukastafa nákvæmni:

i. [4, 4.1]
ii. [4, 4.01]
iii. [4, 4.001]
iv. [4, 4.0001]

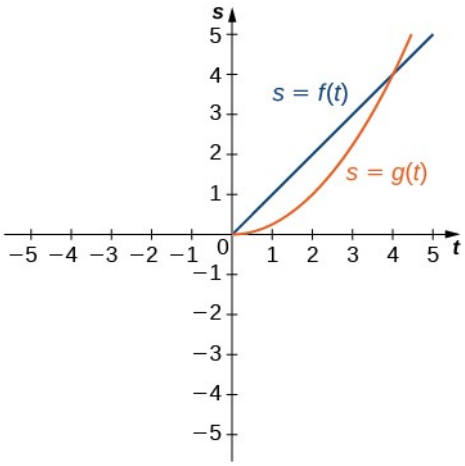
b. Notið niðurstöðurnar í a-lið til að meta augnablikshraða ökutækisins við $t=4$ sekúndur.

46. **[T]** Vegalengdin í metrum sem bolti rúllar niður hallandi flöt er gefin með fallinu $s(t)=14t^2$, þar sem t er tíminn í sekúndum frá því að boltinn byrjar að rúlla.

a. Finnið meðalhraða boltans á eftirfarandi tímabilum:
i. [5, 5.1]
ii. [5, 5.01]
iii. [5, 5.001]
iv. [5, 5.0001]

b. Notið svörin við a-lið til að meta augnablikshraða boltans við $t=5$ sekúndur.

47. Tvö ökutæki leggja af stað hlið við hlið eftir beinum vegi. Staðarföll þeirra, sem sýnd eru á eftirfarandi grafi, eru $s=f(t)$ og $s=g(t)$, þar sem s er mælt í metrum og t í sekúndum.



a. Hvort ökutækjanna hefur farið lengra við $t=2$ sekúndur?
b. Hver er áætlaður hraði hvors ökutækis eftir $t=3$ sekúndur?
c. Hvaða ökutæki ekur hraðar þegar $t=4$ sekúndur eru liðnar?
d. Hvað gildir um staðsetningar ökutækjanna eftir $t=4$ sekúndur?

48. **[T]** Fallið $C(x)$, sem táknar heildarkostnað í hundruðum dollara við framleiðslu á x þúsund krukkum af majónesi, er gefið með $C(x)=0{,}000003\ x^3+4\ x+300$.

a. Reiknið meðalkostnað á hverja krukku á eftirfarandi bilum:
i. [100, 100.1]
ii. [100, 100.01]
iii. [100, 100.001]
iv. [100, 100.0001]

b. Use the answers from a. to estimate the average cost to produce 100.000 jars of mayonnaise.

49. **[T]** Fyrir fallið $f(x)=x^3-2x^2-11x+12$, gerið eftirfarandi.

a. Notið grafreikni til að teikna graf f í viðeigandi myndglugga.
b. Notið ZOOM-aðgerð reiknisins til að finna nálgunargildi fyrir tvö gildi $x=a$ sem uppfylla $m_{\tan}=f'(a)=0$.

50. **[T]** Fyrir fallið $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, gerið eftirfarandi.

a. Notið grafreikni til að teikna graf f í viðeigandi myndglugga.
b. Notið ZOOM-aðgerð reiknisins til að finna nálgunargildi fyrir þau gildi $x=a$ sem uppfylla $m_{\tan}=f'(a)=0$.

51. Látum $N(x)$ gefa fjölda lítra af eldsneyti sem ökutæki notar til að aka x kílómetra. Eldsneytisnotkun ökutækisins er 10 lítrar á hverja 100 km.

a. Finnið stærðfræðilega stæðu fyrir $N(x)$.
b. Hvað er $N(100)$? Útskýrið eðlisfræðilega merkingu þess.
c. Hvað er $N'(100)$? Útskýrið eðlisfræðilega merkingu þess.

52. **[T]** Fyrir fallið $f(x)=x^4-5x^2+4$, gerið eftirfarandi.

a. Notið grafreikni til að teikna graf f í viðeigandi myndglugga.
b. Notið nDeriv-fallið á grafreikni, sem reiknar afleiðuna tölulega, til að áætla gildin $f'(-2), f'(-0{,}5), f'(1{,}7)$, og $f'(2{,}718)$.

53. **[T]** Fyrir fallið $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, gerið eftirfarandi.

a. Notið grafreikni til að teikna graf f í viðeigandi myndglugga.
b. Notið nDeriv-fallið á grafreikni til að finna $f'(-4), f'(-2), f'(2)$, og $f'(4)$.

3.2 Afleiðan sem fall

NÁMSMARKMIÐ

- 3.2.1 Skilgreina afleiðufall tiltekins falls.
- 3.2.2 Teikna graf afleiðufalls út frá grafi tiltekins falls.
- 3.2.3 Lýsa tengslunum milli afleiða og samfelldni.
- 3.2.4 Lýsa þremur skilyrðum þess að fall hafi ekki afleiðu.
- 3.2.5 Útskýra merkingu afleiðu af hærra stigi.

Eins og fram hefur komið gefur afleiða falls í tilteknum punkti breytingarhraða fallsins, eða hallatölu snertils við graf þess í punktinum. Ef staðsetningarfall er deildað við tiltekinn tíma fæst hraðinn á þeim tíma. Afleiða fallsins í öllum punktum þess veitir því mikilvægar upplýsingar um hegðun fallsins. Það yrði þó fljótt tímafrekt að reikna afleiðuna fyrir jafnvel

örfá gildi með aðferðum kaflans á undan. Í þessum kafla skilgreinum við afleiðufall og lærum að finna það.

Afleiðuföll

Afleiðufall gefur afleiðu falls í hverjum þeim punkti í skilgreiningarmengi upprunalega fallsins þar sem afleiðan er til. Afleiðufall má skilgreina formlega á eftirfarandi hátt.

SKILGREINING

Látum f vera fall. Afleiðufallið, táknað með f', er skilgreint fyrir þau x -gildi sem gera eftirfarandi markgildi til:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

(3.9)

Fall $f(x)$ nefnist deildanlegt í a ef $f'(a)$ er til. Almennt nefnist fall deildanlegt á opnu mengi S ef það er deildanlegt í hverjum punkti mengisins S,. Fall nefnist deildanlegt ef $f'(x)$ er til í öllu skilgreiningarmengi þess.

Í næstu dæmum notum við jöfnu 3.9 til að finna afleiðu falls.

DÆMI 3.11

Að finna afleiðu kvaðratrótarfalls

Finnið afleiðu $f(x)=\sqrt{x}$.

Lausn

Byrjum á skilgreiningu afleiðufallsins og notum jöfnu 3.1.

$f'(x) \quad =\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ Setjið inn $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ og $f(x)=\sqrt{x}$ inn í

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ Margfaldið teljara og nefnara með $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ án þess að margfalda inn í nefnara.

$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$ Margfaldið teljarana og einfaldið.

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$ Styttið út h.

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Reiknið markgildið.

DÆMI 3.12

Að finna afleiðu annars stigs falls

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=x^2-2x$.

Lausn

Fylgið sömu aðferð, en hér þarf ekki að margfalda með samokastæðu.

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2-2(x+h))-(x^2-2x)}{h}$ Setjið inn $f(x+h)=(x+h)^2-2(x+h)$ og $f(x)=x^2-2x$ inn í $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h}$ Leysið upp svigana $(x+h)^2-2(x+h)$.

$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh-2h+h^2}{h}$ Einfaldið.

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x-2+h)}{h}$ Takið sameiginlegan þátt út fyrir sviga h úr teljaranum.

$= \lim_{h\to 0} (2x-2+h)$ Styttið út sameiginlega þáttinn h.

$=2x-2$ Reiknið markgildið.

STÖÐUMAT 3.6

Finnið afleiðu $f(x)=x^2$.

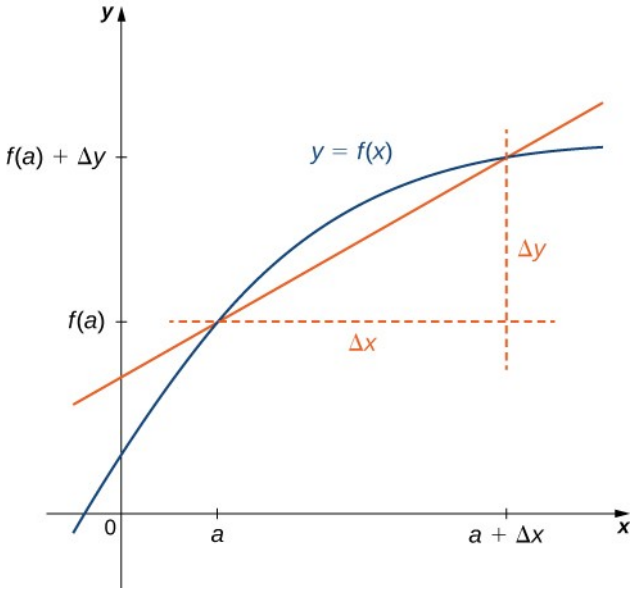
Ýmsar táknanir eru notaðar fyrir afleiðu falls. Í dæmi 3.12 <u>sýndum við</u> að ef $f(x)=x^2-2x$, þá er $f'(x)=2x-2$. Ef fallið hefði verið sett fram sem $y=x^2-2x$, mætti tákna afleiðuna með $y'=2x-2$ eða $\frac{dy}{dx}=2x-2$. Sömu upplýsingar má einnig setja fram sem $\frac{d}{dx}(x^2-2x)=2x-2$. Fyrir fallið $y=f(x)$, tákna því allar eftirfarandi táknanir afleiðu $f(x)$:

$$f'(x), \frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}(f(x)).$$

Í stað $f'(a)$ má einnig nota $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ Táknunin $\frac{dy}{dx}$ (nefnd Leibniz-táknun) er algeng í verkfræði og eðlisfræði. Til að skilja hana betur skulum við rifja upp að afleiða falls í punkti er markgildi hallatalna sniðla þegar sniðlarnir nálgast snertilinn. Hallatölur sniðlanna eru oft settar fram á forminu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ þar sem Δy er mismunur á gildum y sem samsvarar mismun á

gildum x sem táknaður er með Δx (mynd 3.11). Afleiðan, sem túlka má sem augnabliksbreytingarhraða y með tilliti til x, er því sett fram sem

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

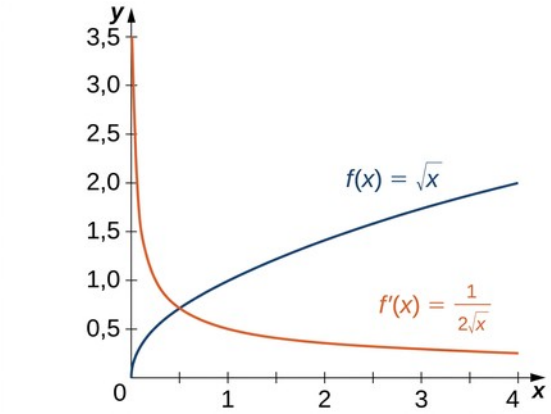


Mynd 3.11 Afleiðan er sett fram sem $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Að teikna graf afleiðu

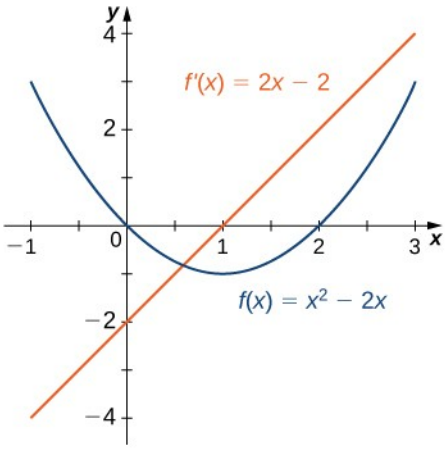
Við höfum þegar fjallað um hvernig graf falls er teiknað. Ef jafna falls eða afleiðufalls er þekkt má því teikna graf þess. Þegar bæði gröfin eru þekkt ætti samband þeirra að vera greinilegt, því $f'(x)$ gefur breytingarhraða fallsins $f(x)$ (eða hallatölu snertils við graf $f(x)$).

Í dæmi 3.11 sýndum við að fyrir $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Þegar gröf fallanna eru teiknuð í sama hnitakerfi, eins og á mynd 3.12, má lesa samband þeirra af gröfunum. Fallið $f(x)$ er vaxandi á öllu skilgreiningarmengi sínu og hallatölur allra snertla þess eru því jákvæðar. Þar af leiðandi er $f'(x) > 0$ fyrir öll x-gildi í skilgreiningarmenginu. Eftir því sem x vex minnka hallatölur snertlanna við $f(x)$ og gildi $f'(x)$. Einnig er $f'(0)$ óskilgreint og $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, Það samsvarar lóðréttum snertli við graf $f(x)$ þegar x = 0.



Mynd 3.12 Afleiðan $f'(x)$ er alls staðar jákvæð vegna þess að fallið $f(x)$ er vaxandi.

Í dæmi 3.12 sýndum við að $f(x)=x^2-2x, f'(x)=2x-2$. Gröf fallanna eru sýnd á mynd 3.13. Fallið $f(x)$ er minnkandi þegar $x<1$. Fyrir sömu gildi á $x, f'(x)<0$. Þegar $x>1, f(x)$ er fallið hins vegar vaxandi og $f'(x)>0$. Fallið $f(x)$ hefur jafnframt láréttan snertil þegar $x=1$ og $f'(1)=0$.

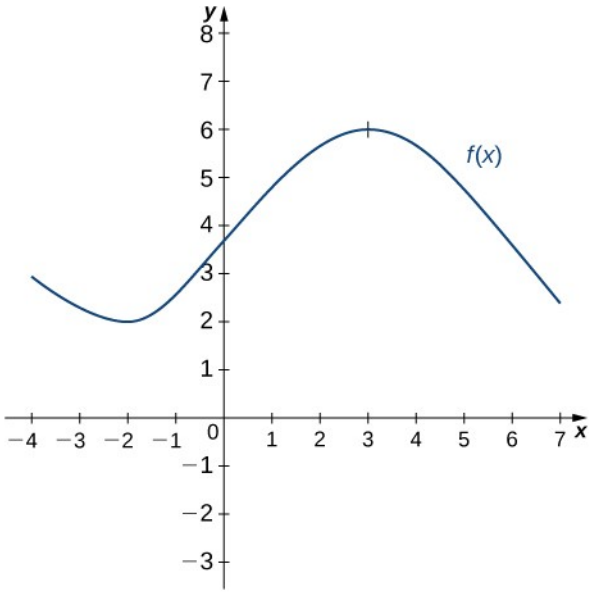


Mynd 3.13 Afleiðan $f'(x)<0$ þar sem fallið $f(x)$ er minnkandi og $f'(x)>0$ þar sem $f(x)$ er vaxandi. Afleiðan er núll þar sem fallið hefur láréttan snertil.

DÆMI 3.13

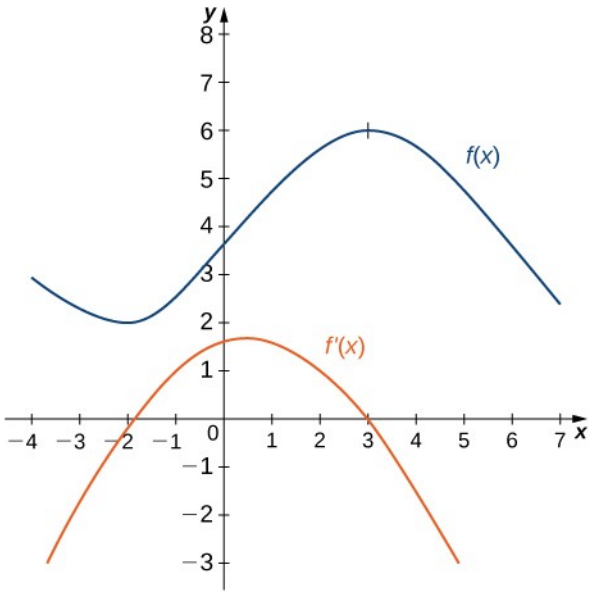
Að teikna graf afleiðu út frá grafi falls

Notið eftirfarandi graf $f(x)$ til að teikna graf $f'(x)$.



Lausn

Lausnin er sýnd á eftirfarandi grafi. Fallið $f(x)$ er vaxandi og $f'(x)>0$ á bilinu $(-2,3)$. Fallið $f(x)$ er hins vegar minnkandi og $f'(x)<0$ á bilunum $(-\infty,-2)$ og $(3,+\infty)$. Fallið $f(x)$ hefur lárétta snertla þegar x = -2 og x = 3, enda er $f'(-2)=0$ og $f'(3)=0$.



STÖÐUMAT 3.7

Teiknið upp graf $f(x)=x^2-4$. Á hvaða bili er graf $f'(x)$ fyrir ofan x-ásinn?

Afleiður og samfelldni

Nú þegar við kunnum að teikna graf afleiðu skulum við kanna eiginleika slíkra grafa. Fyrst skoðum við samband deildanleika og samfelldni. Ef fall er deildanlegt í punkti hlýtur það að

vera samfellt þar. Hið gagnstæða gildir þó ekki: Fall getur verið samfellt í punkti án þess að vera deildanlegt þar, og fyrir því geta verið ýmsar ástæður.

SETNING 3.1

Deildanleiki hefur samfelldni í för með sér

Látum $f(x)$ vera fall og a tilheyra skilgreiningarmengi þess. Ef $f(x)$ er deildanlegt í a, þá er f samfellt í a.

Sönnun

Ef $f(x)$ er deildanlegt í a, þá er $f'(a)$ til og

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Við sýnum að $f(x)$ sé samfellt í a með því að sýna að $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. Þá fæst

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(f(x)-f(a)+f(a))$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\right) \quad \text{Margfaldið og deilið } f(x)-f(a) \text{ með } x-a.$$

$$=\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}(x-a)\right)+\lim_{x\to a} f(a)$$

$$=f'(a)\cdot 0+f(a)$$

$$=f(a).$$

Þar sem $f(a)$ er skilgreint og $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, ályktum við að f sé samfellt í a.

□

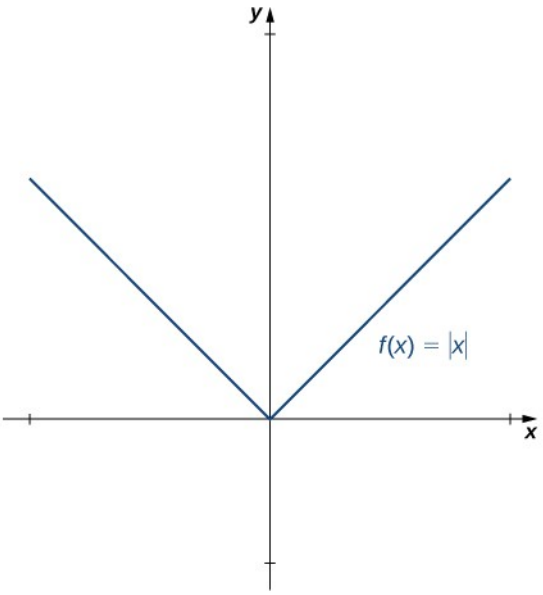
Við höfum sannað að deildanleiki hefur samfelldni í för með sér. Nú athugum við hvort samfelldni hafi jafnframt deildanleika í för með sér. Skoðum fallið $f(x)=|x|$. Það er samfellt alls staðar en $f'(0)$ er óskilgreint. Samfelldni nægir því ekki til að tryggja deildanleika. Skoðum þetta nánar. Fyrir $f(x)=|x|$,

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Þetta markgildi er ekki til vegna þess að

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1 \text{ og } \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1.$$

Sjá mynd 3.14.

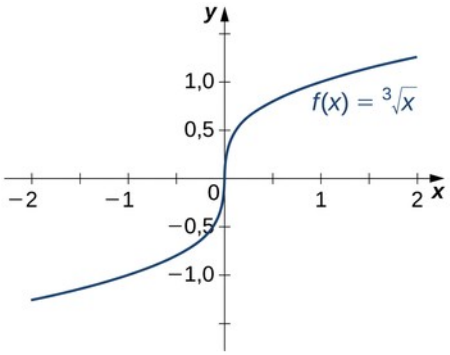


Mynd 3.14 Fallið $f(x)=|x|$ er samfellt í 0 en er ekki deildanlegt í 0.

Skoðum nokkur fleiri tilvik þar sem samfellt fall er ekki deildanlegt. Skoðum fallið $f(x)=\sqrt[3]{x}$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

Því er $f'(0)$ ekki til. Graf fallsins $f(x)=\sqrt[3]{x}$ skýrir málið. Fallið hefur lóðréttan snertil við 0 (mynd 3.15).

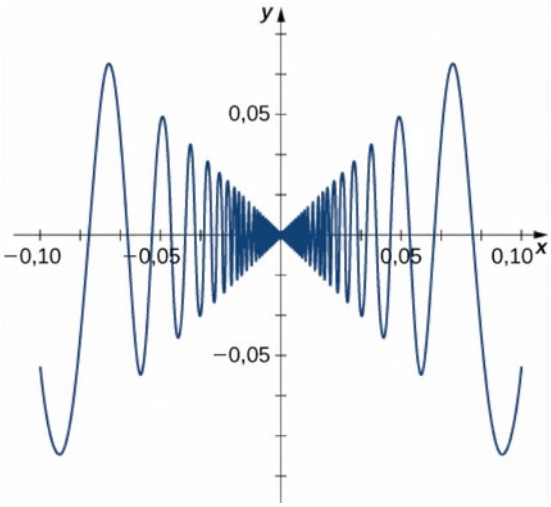


Mynd 3.15 Fallið $f(x)=\sqrt[3]{x}$ hefur lóðréttan snertil í $x=0$. Það er samfellt í 0 en er ekki deildanlegt í 0.

Fallið $f(x)=\begin{cases} x\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ef } x\neq 0 \\ 0 & \text{ef } x=0 \end{cases}$ hefur einnig afleiðu sem hegðar sér á athyglisverðan hátt í 0. Við sjáum að

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(1/x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Þetta markgildi er ekki til, í meginatriðum vegna þess að hallatölur sniðlanna skipta stöðugt um stefnu þegar þær nálgast núll (Mynd 3.16).



Mynd 3.16 Fallið $f(x)=\begin{cases} x\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ef } x\neq 0 \\ 0 & \text{ef } x=0 \end{cases}$.

Í stuttu máli:

1. Ósamfellt fall getur ekki verið deildanlegt, enda er sérhvert deildanlegt fall samfellt. Samfellt fall þarf hins vegar ekki að vera deildanlegt.
2. Við sáum að $f(x)=|x|$ var ekki deildanlegt í 0 vegna þess að einhliða markgildi hallatalnanna frá vinstri og hægri voru ólík. Á grafinu kemur það fram sem skarpt horn við 0. Fall verður því að vera „slétt“ í punkti til þess að vera deildanlegt þar.
3. Eins og við sáum í dæminu um $f(x)=\sqrt[3]{x}$, er fall ekki deildanlegt í punkti þar sem snertillinn er lóðréttur.
4. Eins og við sáum fyrir

$$f(x)=\begin{cases} x\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ef } x\neq 0 \\ 0 & \text{ef } x=0 \end{cases}$$

DÆMI 3.14

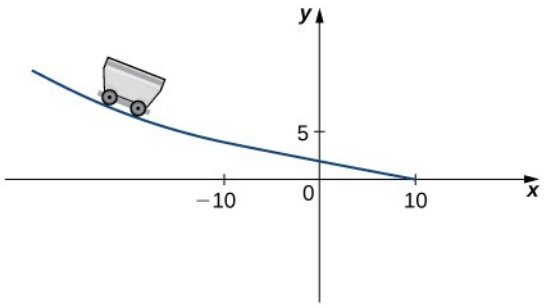
Gaffalfall sem er samfellt og deildanlegt

Leikfangafyrirtæki vill hanna braut fyrir leikfangabíl sem liggur fyrst eftir fleygboga en verður síðan að beinni línu (mynd 3.17). Fallið sem lýsir brautinni á að vera á forminu

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{10}x^2+bx+c & \text{ef } x<-10 \\ -\frac{1}{4}x+\frac{5}{2} & \text{ef } x\geq -10 \end{cases}$$

þar sem x og $f(x)$ eru mæld í sentímetrum. Til þess að

bíllinn hreyfist mjúklega eftir brautinni verður fallið $f(x)$ að vera bæði samfellt og deildanlegt í -10. Finnið gildi b og c sem gera $f(x)$ bæði samfellt og deildanlegt.



Mynd 3.17 Til þess að bíllinn hreyfist mjúklega eftir brautinni þarf fallið að vera bæði samfellt og deildanlegt.

Lausn

Til þess að fallið sé samfellt í $x=-10$, $\lim_{x\to -10^-} f(x)=f(-10)$. Þar sem

$$\lim_{x\to -10^-} f(x)=\frac{1}{10}(-10)^2-10b+c=10-10b+c$$

og $f(-10)=5$, verður að gilda að $10-10b+c=5$. Sú jafna er jafngild $c=10b-5$.

Til þess að fallið sé deildanlegt í -10,

$$f'(-10)=\lim_{x\to -10}\frac{f(x)-f(-10)}{x+10}$$

þarf að vera til. Þar sem $f(x)$ er skilgreint með ólíkum reglum hægra og vinstra megin reiknum við markgildið frá báðum hliðum og setjum niðurstöðurnar jafnar:

$$\lim_{x\to -10^-}\frac{f(x)-f(-10)}{x+10} = \lim_{x\to -10^-}\frac{\frac{1}{10}x^2+bx+c-5}{x+10}$$

$$= \lim_{x\to -10^-}\frac{\frac{1}{10}x^2+bx+(10b-5)-5}{x+10}$$ Setjið inn $c=10b-5$.

$$= \lim_{x\to -10^-}\frac{x^2-100+10bx+100b}{10(x+10)}$$ Margfaldið teljara og nefnara með 10.

$$= \lim_{x\to -10^-}\frac{(x+10)(x-10+10b)}{10(x+10)}$$ Þáttið með flokkun.

$$=b-2.$$

Við höfum einnig

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -10^+}\frac{f(x)-f(-10)}{x+10} &= \lim_{x\to -10^+}\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}-5}{x+10}\\ &= \lim_{x\to -10^+}\frac{-(x+10)}{4(x+10)}\\ &= -\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Þetta gefur okkur $b-2=-\frac{1}{4}$. Því fæst $b=\frac{7}{4}$ og $c=10\left(\frac{7}{4}\right)-5=\frac{25}{2}$.

STÖÐUMAT 3.8

Finnið gildi a og b sem gera $f(x)=\begin{cases} a\,x+b & \text{ef } x<3\\ x^2 & \text{ef } x\geq 3\end{cases}$ bæði samfellt og deildanlegt í 3.

Afleiður af hærra stigi

Afleiða falls er sjálf fall og því má einnig taka afleiðu hennar. Afleiða staðsetningarfalls er til dæmis breytingarhraði staðsetningar, eða hraði. Afleiða hraðans er breytingarhraði hraðans, sem er hröðun. Fallið sem fæst með því að deilda afleiðuna nefnist önnur afleiða. Með áframhaldandi deildun fást þriðja afleiða, fjórða afleiða og svo framvegis. Þær nefnast einu nafni afleiður af hærra stigi. Afleiður af hærra stigi fallsins $y=f(x)$ má tákna á eftirfarandi vegu:

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

$$y''(x), y'''(x), y^{(4)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Líta má á táknunina $\frac{d^2y}{dx^2}$ sem hnitmiðaða framsetningu á $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Með sama hætti fæst $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$.

DÆMI 3.15

Að finna aðra afleiðu

Fyrir $f(x)=2x^2-3x+1$, finnið $f''(x)$.

Lausn

Finnið fyrst $f'(x)$.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1) - (2x^2 - 3x + 1)}{h}$ Setjið inn $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ og $f(x+h) = 2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1$ inn í $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

$= \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h}$ Einfaldið teljarann.

$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 3)$ Takið þáttinn út fyrir sviga úr h í teljaranum og styttið á móti h í nefnara.

$= 4x - 3$ Reiknið markgildið.

Næst finnum við $f''(x)$ með því að taka afleiðu af $f'(x) = 4x - 3$.

$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ Notið $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ með $f'(x)$ í stað $f(x)$.

$= \lim_{h \to 0} \frac{(4(x+h) - 3) - (4x - 3)}{h}$ Setjið inn $f'(x+h) = 4(x+h) - 3$ og $f'(x) = 4x - 3$.

$= \lim_{h \to 0} 4$ Einfaldið.

$= 4$ Reiknið markgildið.

STÖÐUMAT 3.9

Finnið $f''(x)$ fyrir $f(x) = x^2$.

DÆMI 3.16

Ákvörðun hröðunar

Staða agnar á hnitási við tímann t, mældan í sekúndum, er gefin með $s(t) = 3t^2 - 4t + 1$ og mæld í metrum. Finnið fallið sem lýsir hröðun agnarinnar við tímann t.

Lausn

Þar sem $v(t) = s'(t)$ og $a(t) = v'(t) = s''(t)$, tökum við fyrst afleiðu af $s(t)$:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3(t+h)^2 - 4(t+h) + 1 - (3t^2 - 4t + 1)}{h} \\ &= 6t - 4. \end{aligned}$$

Næst,

$$\begin{aligned} s''(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{s'(t+h)-s'(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6(t+h)-4-(6t-4)}{h} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Því er $a = 6\,\text{m/s}^2$.

STÖÐUMAT 3.10

Þegar $s(t) = t^3$, finnið $a(t)$.

Æfingar úr undirkafla 3.2

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota skilgreiningu afleiðu til að finna $f'(x)$.

54.

$$f(x) = 6$$

55.

$$f(x) = 2 - 3x$$

56.

$$f(x) = \frac{2x}{7} + 1$$

57.

$$f(x) = 4x^2$$

58.

$$f(x) = 5x - x^2$$

59.

$$f(x) = \sqrt{2x}$$

60.

$$f(x) = \sqrt{x-6}$$

61.

$$f(x) = \frac{9}{x}$$

62.

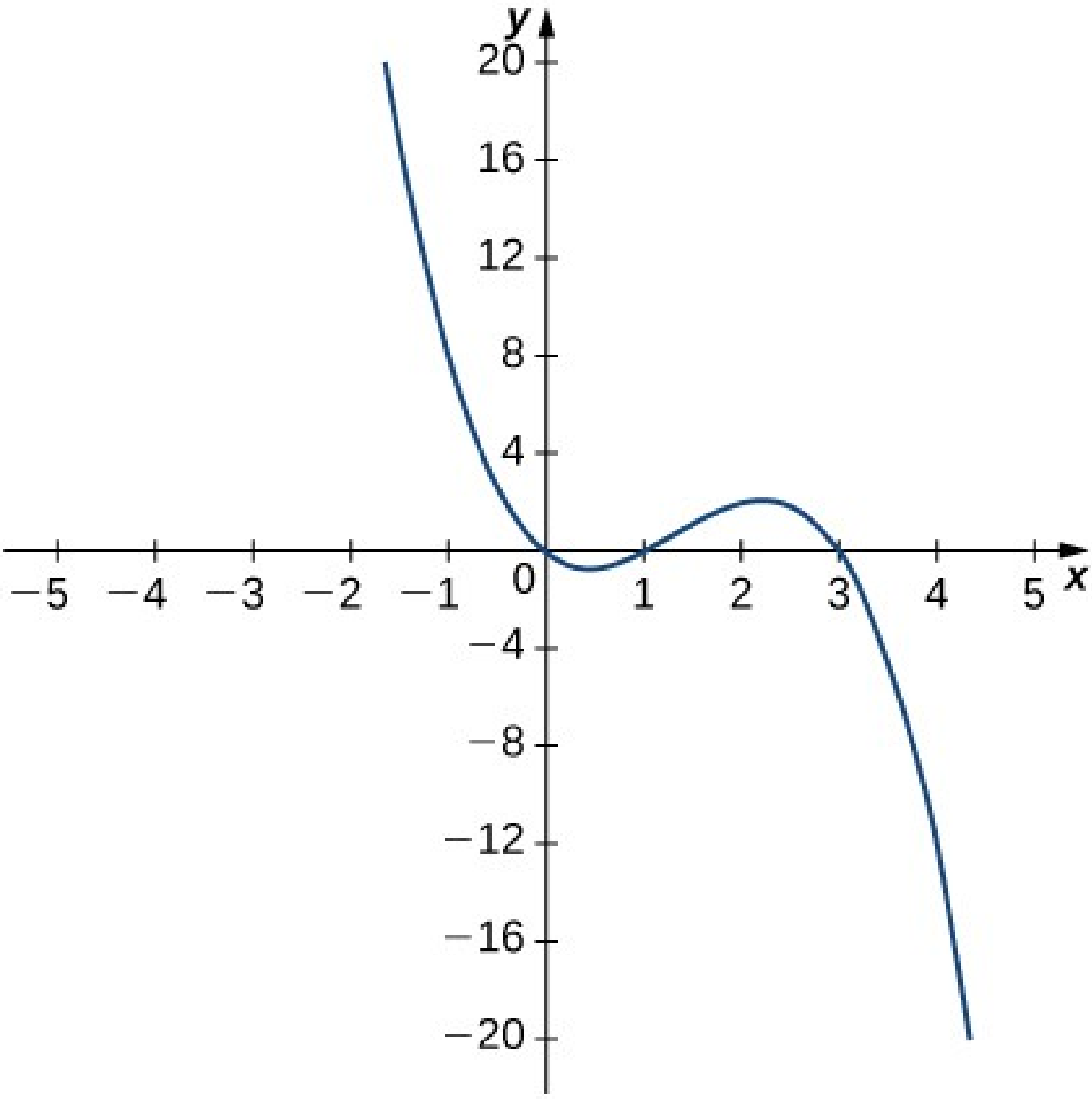
$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

63.

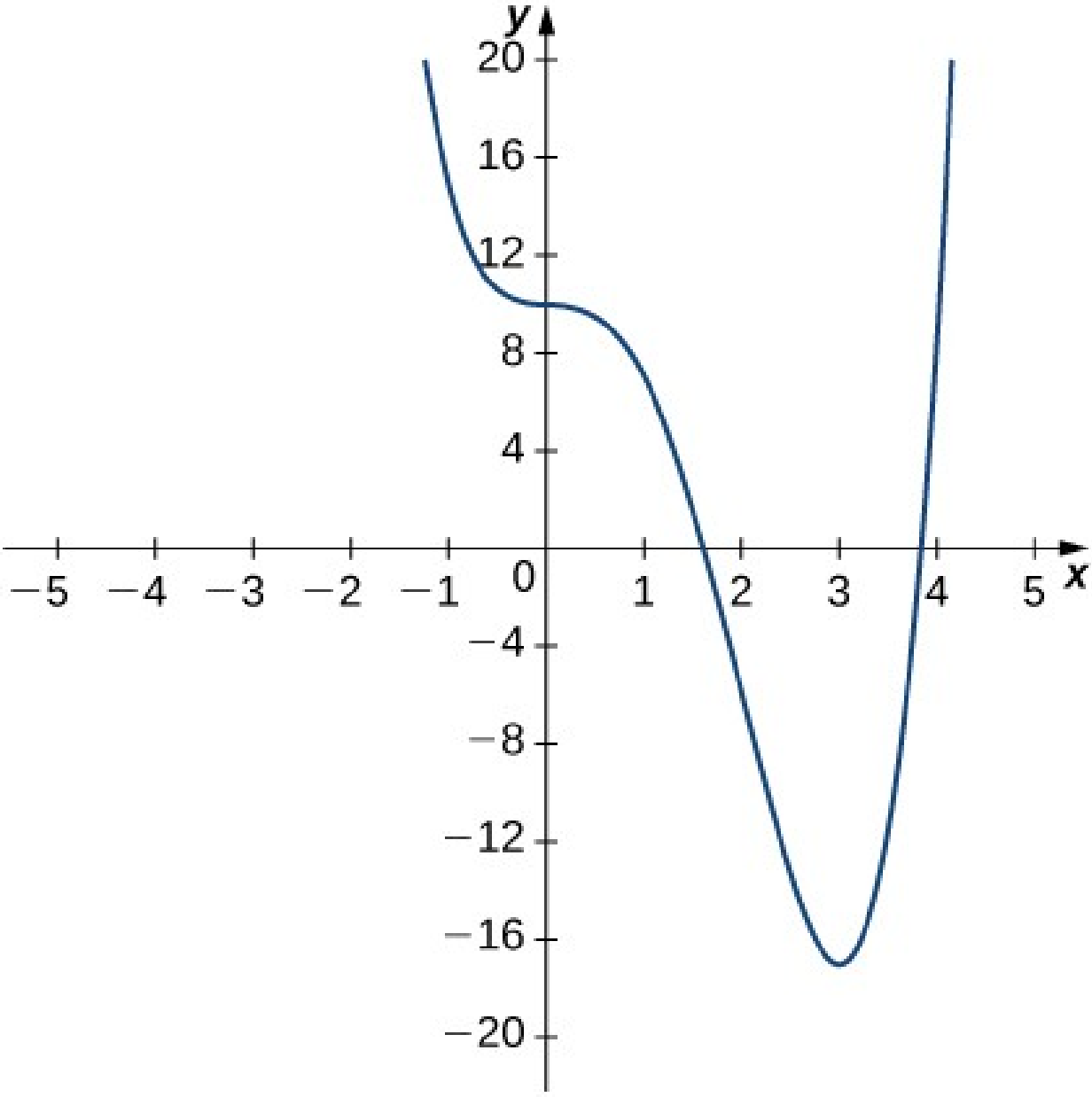
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota graf $y=f(x)$ til að teikna upp graf afleiðufallsins $f'(x)$.

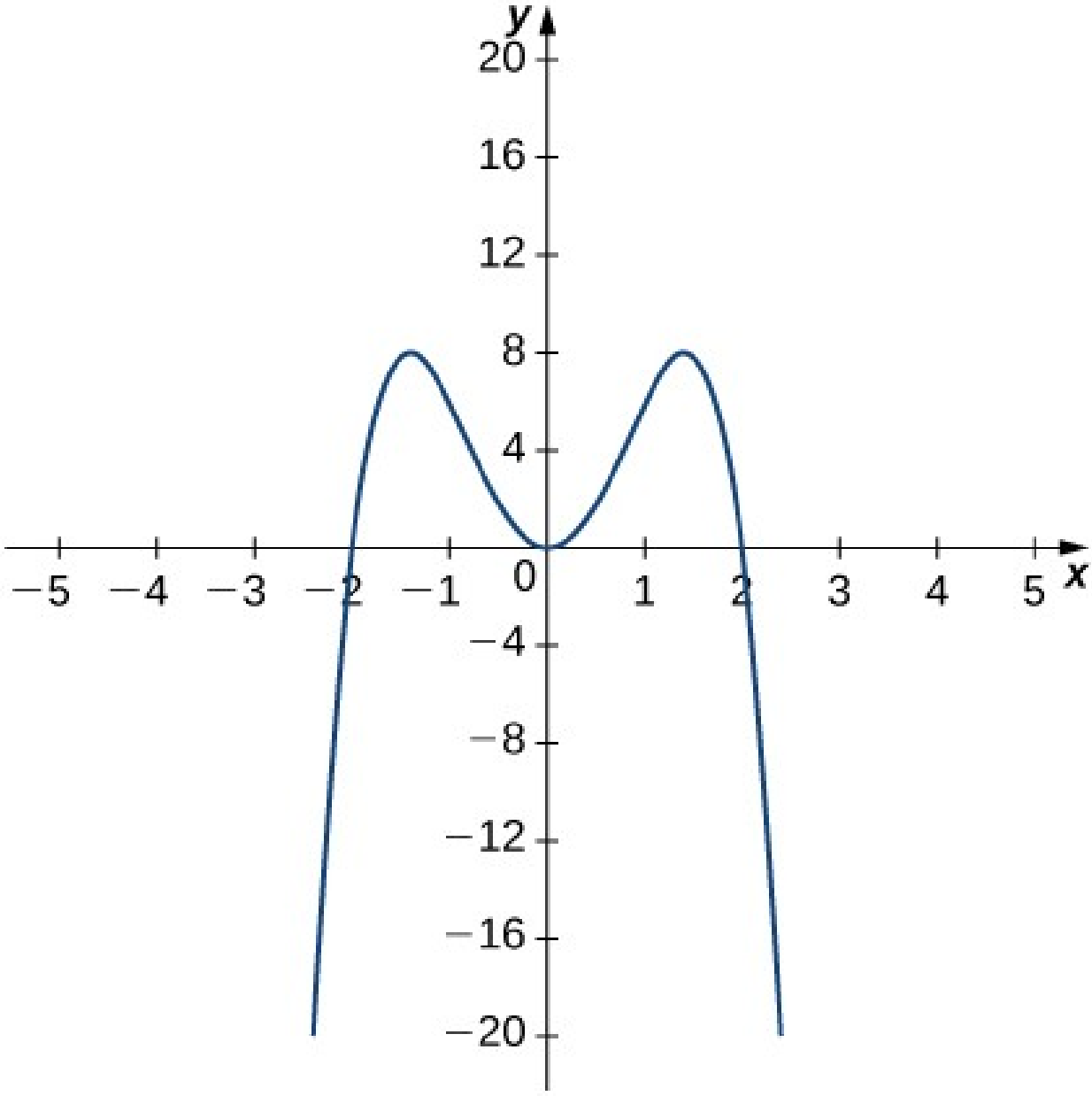
64.



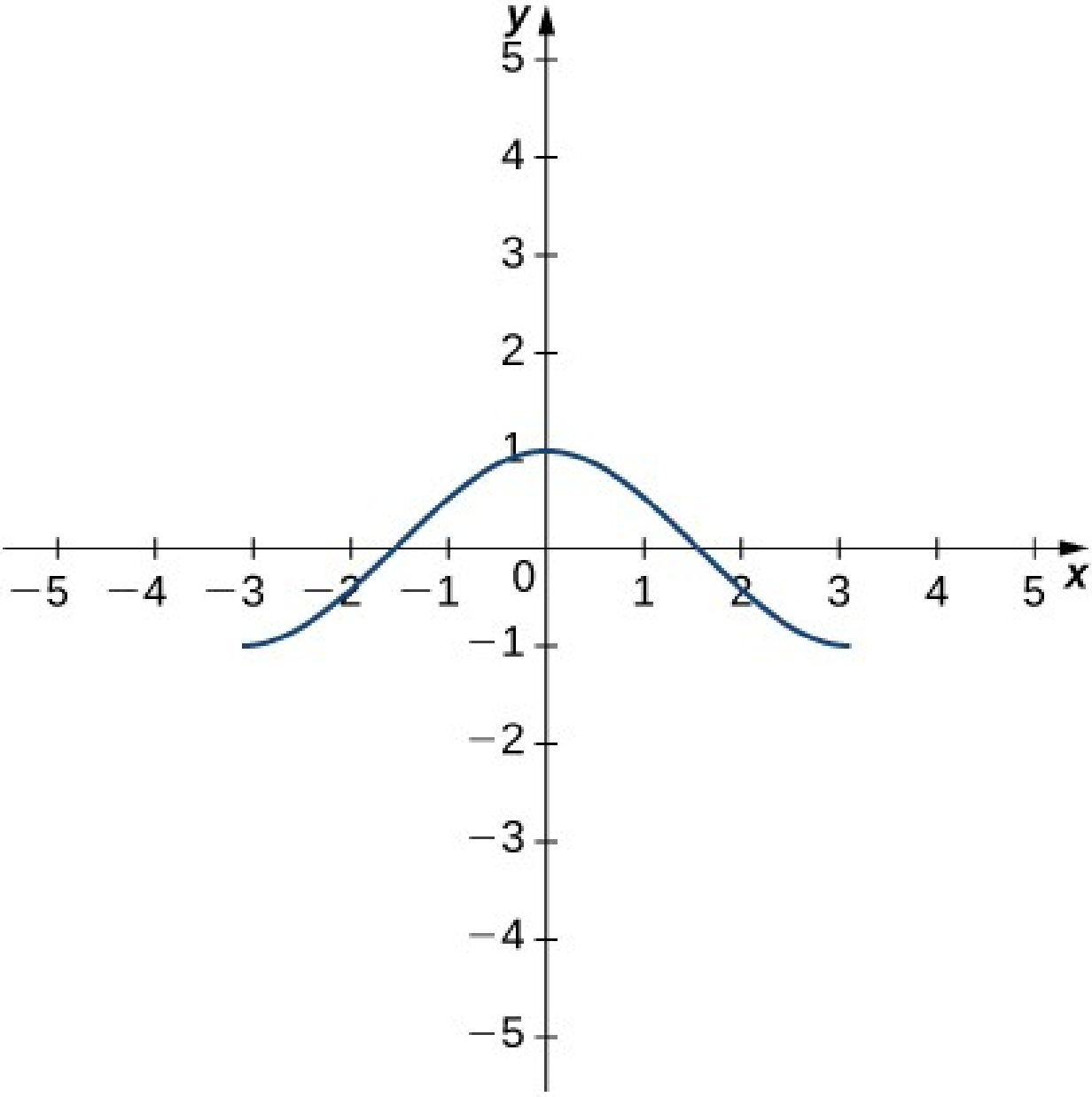
65.



66.



67.



Í eftirfarandi verkefnum táknar gefið markgildi afleiðu fallsins $y=f(x)$ þegar $x=a$. Finnið $f(x)$ og a.

68.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{2/3}-1}{h}$$

69.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[3(2+h)^2+2\right]-14}{h}$$

70.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$$

71.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^4 - 16}{h}$$

72.

$$\lim_{h \to 0} \frac{[2(3+h)^2 - (3+h)] - 15}{h}$$

73.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Fyrir eftirfarandi föll,

a. teiknið upp grafið og

b. notið skilgreiningu afleiðu til að sýna að fallið sé ekki deildanlegt í $x = 1$.

74.

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, x > 1 \end{cases}$$

75.

$$f(x) = \begin{cases} 3, x < 1 \\ 3x, x \geq 1 \end{cases}$$

76.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, x \leq 1 \\ x, x > 1 \end{cases}$$

77.

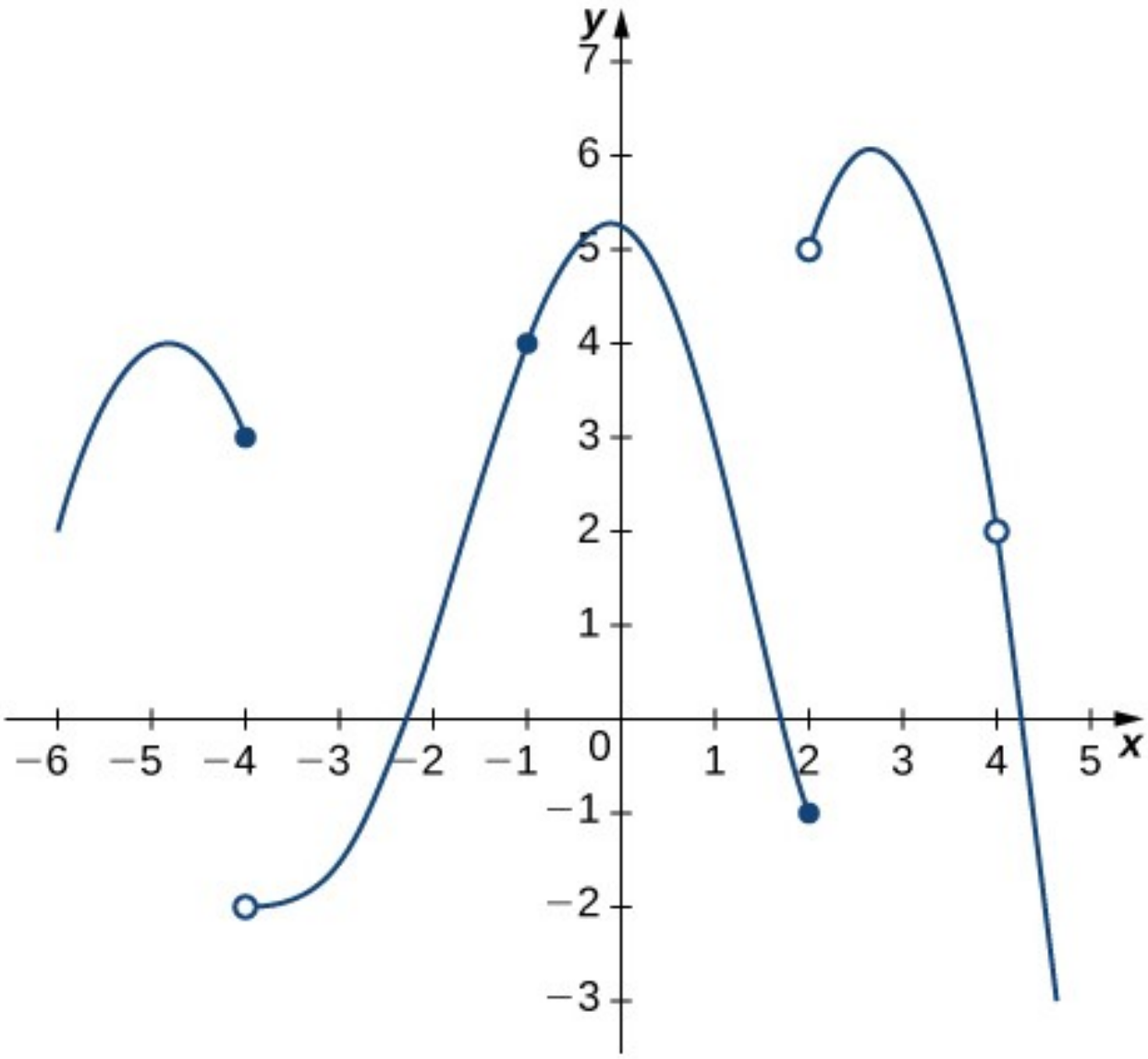
$$f(x) = \begin{cases} 2x, x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, x > 1 \end{cases}$$

Fyrir eftirfarandi gröf,

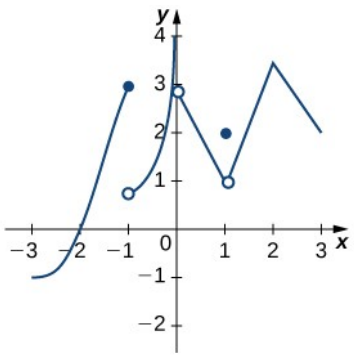
a. ákvarðið fyrir hvaða gildi $x = a$ markgildið $\lim_{x \to a} f(x)$ er til þótt f sé ekki samfellt þegar $x = a$, og

b. ákvarðið fyrir hvaða gildi $x = a$ fallið er samfellt en ekki deildanlegt þegar $x = a$.

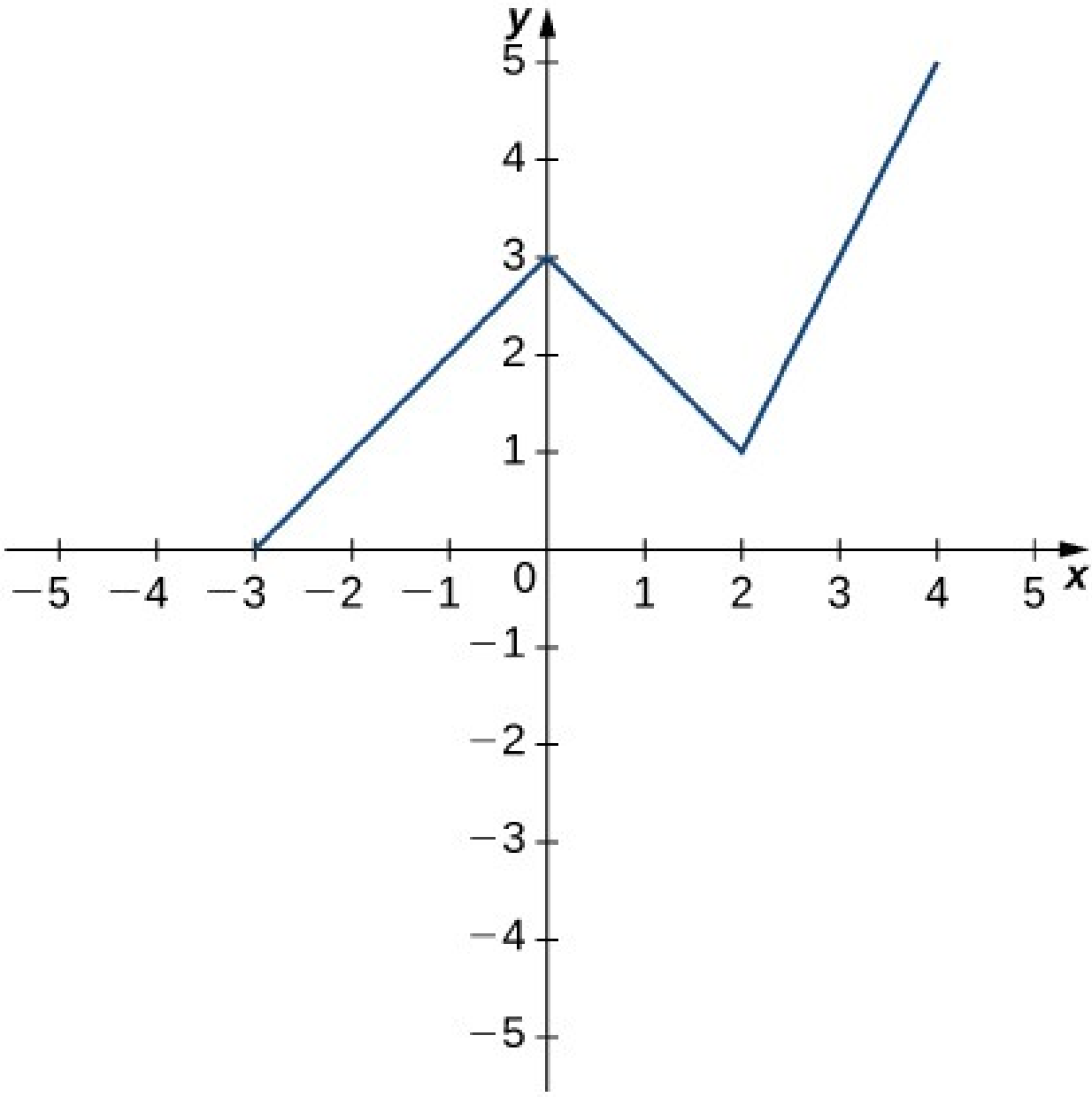
78.



79.



80. Notið grafið til að reikna út a. $f'(-0{,}5)$, b. $f'(0)$, c. $f'(1)$, d. $f'(2)$, og e. $f'(3)$, ef það er til.



Fyrir eftirfarandi föll skuluð þið nota $f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ til að finna $f''(x)$.

81.

$$f(x)=2-3x$$

82.

$$f(x)=4x^2$$

83.

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota reiknivél til að teikna graf $f(x)$. Ákvarðið afleiðufallið $f'(x)$, og notið síðan reiknivél til að teikna graf $f'(x)$.

84. **[T]** $f(x)=-\frac{5}{x}$

85. **[T]** $f(x)=3x^2+2x+4$.

86. **[T]** $f(x)=\sqrt{x}+3x$

87. **[T]** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}$

88. **[T]** $f(x)=1+x+\frac{1}{x}$

89. **[T]** $f(x)=x^3+1$

3

Útskýrið í eftirfarandi verkefnum hvað stæðurnar tvær tákna í hverju tilviki. Tilgreinið einnig mælieiningar.

a. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

b. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

90. $P(x)$ táknar íbúafjölda borgar við tímann x, þar sem tíminn er mældur í árum.

91. $C(x)$ táknar heildarfjárhæðina, í þúsundum dollara, sem x viðskiptavinir verja í veitingar í skemmtigarði.

92. $R(x)$ táknar heildarkostnaðinn, í þúsundum dollara, við að framleiða x útvarpsvekjaraklukkur.

93. $g(x)$ táknar einkunnina, í prósentustigum, sem fæst á prófi eftir x klukkustunda nám.

94. $B(x)$ táknar verð, í dollurum, á kennslubók í félagsfræði í bandarískum háskólabókaverslunum x árum eftir 1990.

95. $p(x)$ táknar loftþrýsting, mældan í kPa, í x metra hæð.

96. Teiknið graf falls $y=f(x)$ sem hefur alla eftirfarandi eiginleika:

a. $f'(x)>0$ fyrir $-2\le x<1$

b. $f'(2)=0$

c. $f'(x)>0$ fyrir $x>2$

d. $f(2)=2$ og $f(0)=1$

e. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ og $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

f. $f'(1)$ er ekki til.

97. Látum hitastigið T í x metra hæð yfir jörðu, mælt í gráðum á Celsíus, vera gefið með $y=T(x)$.

a. Túlkið eftirfarandi stærð eðlisfræðilega og tilgreinið mælieininguna: $T'(x)$.

b. Útskýrið eðlisfræðilega merkingu þess að $T'(1000)=-0{,}0065$.

98. Gerum ráð fyrir að heildarhagnaður fyrirtækis sé $y=P(x)$ þúsund dollarar við sölu á x vörueiningum.

a. Hvað táknar $\dfrac{P(b)-P(a)}{b-a}$ fyrir $0<a<b$, og hverjar eru einingarnar?

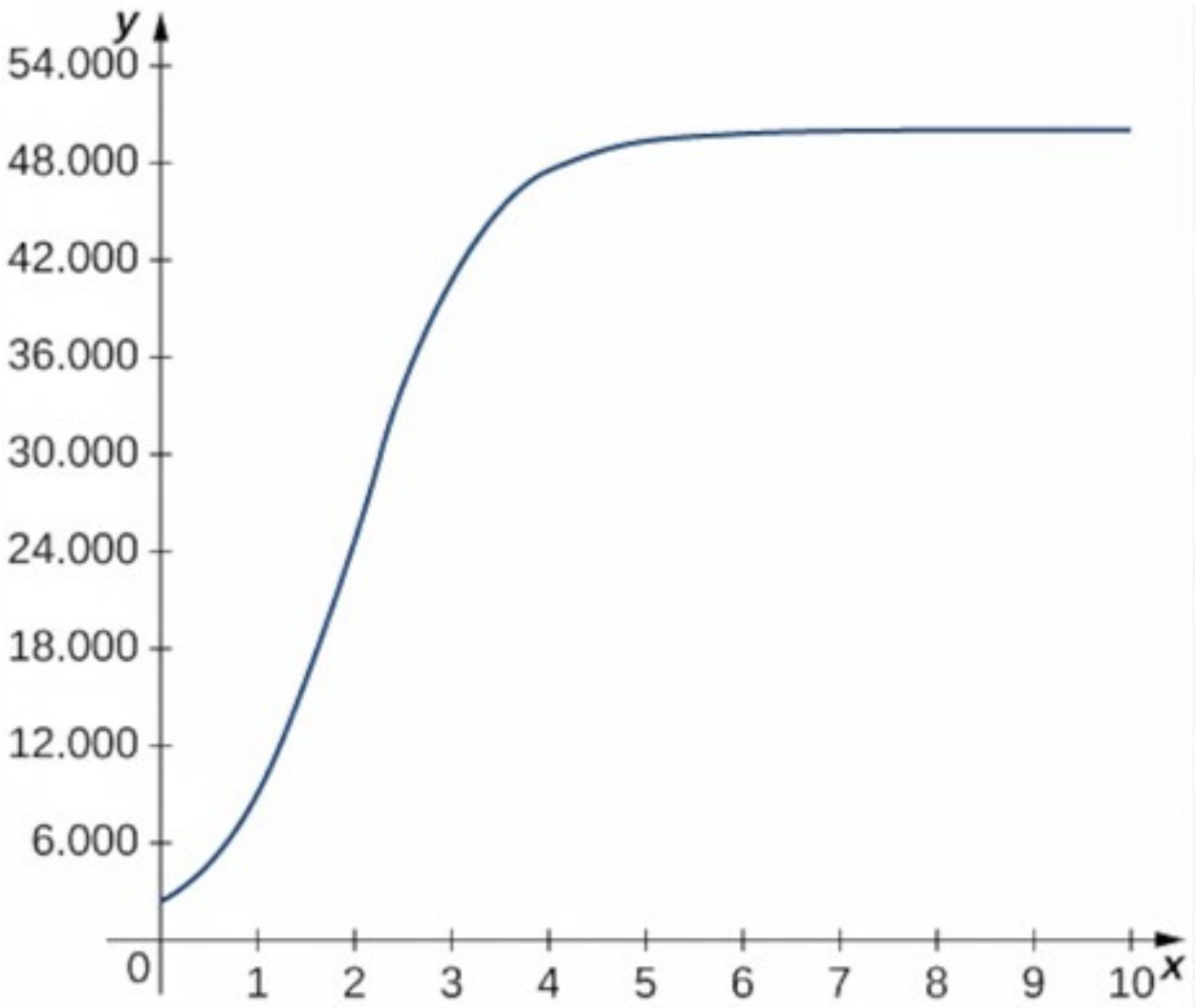
b. Hvað mælir $P'(x)$ og hverjar eru einingarnar?

c. Ef $P'(30)=5$, hversu mikil er þá áætluð breyting á hagnaði þegar seldum einingum fjölgar úr 30 í 31?

99. Grafið á eftirfarandi mynd sýnir fjöldann $N(t)$ sem hefur veikst af inflúensu t vikum eftir að faraldur braust út í bæ með 50.000 íbúa.

a. Lýsið því hvað $N'(t)$ táknar og hvernig gildi þess breytast þegar t vex.

b. Hvað segir afleiðan okkur um áhrif inflúensufaraldursins á þennan bæ?



Notið töfluna hér á eftir í eftirfarandi verkefnum. Hún sýnir hæðina h sem Saturn V-eldflaugin hafði í Apollo 11-leiðangrinum t sekúndum eftir geimskot.

Tími (sekúndur)	Hæð (metrar)
0	0
1	2
2	4
3	13
4	25
5	32

100. Túlkið $h'(t)$? eðlisfræðilega og tilgreinið mælieininguna.

101. **[T]** Gerið gildatöflu fyrir $h'(t)$ og teiknið gröf $h(t)$ og $h'(t)$ í sama hnitakerfi. (Vísbending: Metið bæði vinstra og hægra markgildi í innri punktum og reiknið meðaltal þeirra. Innri punktur bils I er stak í I sem er ekki endapunktur bilsins.)

102. **[T]** Besta línulega aðhvarfslínan fyrir gögnin er $H(t) = 7{,}229\ t - 4{,}905$, þar sem H er hæð eldflaugarinnar í metrum og t er tíminn frá flugtaki. Ákvarðið út frá jöfnunni $H'(t)$. Teiknið graf $H(t)$ ásamt gögnunum og teiknið, í sérstöku hnitakerfi, graf $H'(t)$.

103. **[T]** Besta annars stigs aðhvarfsfallið fyrir gögnin er $G(t) = 1{,}429\ t^2 + 0{,}0857\ t - 0{,}1429$, þar sem G er hæð eldflaugarinnar í metrum og t er tíminn frá flugtaki. Ákvarðið út frá jöfnunni $G'(t)$. Teiknið graf $G(t)$ ásamt gögnunum og teiknið, í sérstöku hnitakerfi, graf $G'(t)$.

104. **[T]** Besta þriðja stigs aðhvarfsfallið fyrir gögnin er $F(t) = 0{,}2037\ t^3 + 2{,}956\ t^2 - 2{,}705\ t + 0{,}4683$, þar sem F er hæð eldflaugarinnar í metrum og t er tíminn frá flugtaki. Ákvarðið út frá jöfnunni $F'(t)$. Teiknið graf $F(t)$ ásamt gögnunum og, í sérstöku hnitakerfi, graf $F'(t)$. Hvert fallanna fellur best að gögnunum: línulega fallið, annars stigs fallið eða þriðja stigs fallið?

105. Notið besta línulega aðhvarfsfallið, annars stigs aðhvarfsfallið og þriðja stigs aðhvarfsfallið fyrir gögnin til að ákvarða $H''(t), G''(t)$ og $F''(t)$. Túlkið $H''(t), G''(t)$ og $F''(t)$, eðlisfræðilega og tilgreinið mælieiningar þeirra.

3.3 Deildunarreglur

NÁMSMARKMIÐ

- 3.3.1 Setja fram fastaregluna, regluna um fastamargfeldi og veldisregluna.
- 3.3.2 Beita summu- og mismunareglunum til að taka saman afleiður.
- 3.3.3 Nota margfeldisregluna til að finna afleiðu af margfeldi falla.
- 3.3.4 Nota deiliregluna til að finna afleiðu af kvóta falla.
- 3.3.5 Útvíkka veldisregluna þannig að hún nái til falla með neikvæða veldisvísa.
- 3.3.6 Beita deildunarreglunum saman til að finna afleiðu margliðufalls eða ræðs falls.

Það getur verið tímafrekt og jafnvel nokkuð krefjandi að finna afleiðu út frá skilgreiningu hennar. Við fundum til dæmis áður $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ með því að margfalda stæðu með samokastæðu áður en markgildið var reiknað. Svipaða aðferð mætti nota til að reikna $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$ út frá skilgreiningunni, en hún yrði flóknari. Í þessum undirkafla leiðum við út deildunarreglur sem gera slíka útreikninga óþarfa. Við byrjum á grunnreglunum.

Grunnreglurnar

Föllin $f(x)=c$ og $g(x)=x^n$, þar sem n er jákvæð heiltala, eru byggingareiningar allra margliða og ræðra falla. Til þess að deilda margliður og ræð föll á skilvirkan hátt án þess að nota markgildisskilgreiningu afleiðunnar þurfum við fyrst að leiða út deildunarreglur fyrir þessi grunnföll.

Fastareglan

Fyrst notum við markgildisskilgreininguna til að finna afleiðu fastafallsins $f(x)=c$. Þar sem bæði $f(x)=c$ og $f(x+h)=c$, fæst eftirfarandi niðurstaða:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Reglan um deildun fastafalla nefnist fastareglan. Samkvæmt henni er afleiða fastafalls núll. Graf fastafalls er lárétt lína og hallatala þess, eða breytingarhraði, er því 0. Reglan er sett formlega fram í eftirfarandi setningu.

SETNING 3.2

Fastareglan

Látum c vera fasta.

Ef $f(x)=c$, þá $f'(x)=0$.

Að öðrum kosti má setja þessa reglu fram sem

$$\frac{d}{dx}(c)=0.$$

DÆMI 3.17

Beiting fastareglunnar

Finnið afleiðu $f(x)=8$.

Lausn

Hér er reglunni einfaldlega beitt í einu skrefi:

$$f'(x)=0.$$

STÖÐUMAT 3.11

Finnið afleiðu $g(x)=-3$.

Veldisreglan

Við höfum sýnt að

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x \text{ og } \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)=\frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Nú má greina mynstur í afleiðum á forminu $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)$. Við höldum áfram að leiða út deildunarreglur fyrir veldisföllin $f\left(x\right)=x^n$ þar sem n er jákvæð heiltala. Áður en almenna reglan er sett fram og sönnuð skoðum við jákvæð heiltöluveldi og byrjum á dæminu $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$. Aðferðin í dæminu er í meginatriðum sú sama og notuð er í almennu sönnuninni.

DÆMI 3.18

Deildun x^3

Finnið $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$.

Lausn

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^3-x^3}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$ Athugið að fyrsti liðurinn í liðun $\left(x+h\right)^3$ er x^3 og annar liðurinn er $3x^2h$. Allir aðrir liðir innihalda veldi h með veldisvísi sem er 2 eða hærri.

$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$ Í þessu skrefi hafa x^3 -liðirnir verið styttir út, þannig að aðeins eru eftir liðir sem innihalda h.

$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}$ Sameiginlegi þátturinn sem tekinn er út fyrir sviga er h.

$=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)$ Sameiginlegi þátturinn er h,og þegar hann hefur verið styttur út kemur í ljós að eini liðurinn sem inniheldur ekki h er $3x^2$.

$=3x^2$ Látum h stefna á 0.

STÖÐUMAT 3.12

Finnið $\frac{d}{dx}\left(x^4\right)$.

Sama aðferð má nota til að finna afleiðu falls á almenna forminu $f\left(x\right)=x^n$. Þótt varasamt sé að draga almenna ályktun af einu dæmi gefur afleiða $f\left(x\right)=x^3$, vísbendingu um regluna:

Veldisvísir x verður stuðull við x^2 í afleiðunni og veldisvísir x lækkar um 1. Í eftirfarandi setningu kemur fram að veldisreglan gildi um öll jákvæð heiltöluveldi x. Síðar verður reglan útvíkkuð fyrst til neikvæðra heiltöluvelda og síðan til ræðra velda x og loks til almennra velda x. Reglan gildir þó ekki þegar fasti er hafinn í breytilegt veldi, eins og í $f(x)=3^x$.

SETNING 3.3

Veldisreglan

Látum n vera jákvæða heiltölu. Ef $f(x)=x^n$, þá

$$f'(x)=n\,x^{n-1}.$$

Að öðrum kosti má setja þessa reglu fram sem

$$\frac{d}{d\,x}x^n=n\,x^{n-1}.$$

3

Sönnun

Ef $f(x)=x^n$, þar sem n er jákvæð heiltala, þá gildir

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}.$$

Þar sem $(x+h)^n=x^n+n\,x^{n-1}\,h+\binom{n}{2}\,x^{n-2}\,h^2+\binom{n}{3}\,x^{n-3}\,h^3+\,\ldots+n\,x\,h^{n-1}+h^n,$

sjáum við að

$$(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\binom{n}{3}x^{n-3}h^3+\ldots+nxh^{n-1}+h^n.$$

Því næst deilum við báðum hliðum með h:

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\binom{n}{3}x^{n-3}h^3+\ldots+nxh^{n-1}+h^n}{h}.$$

Því gildir

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\binom{n}{3}x^{n-3}h^2+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}.$$

Að lokum fæst

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\binom{n}{3}x^{n-3}h^2+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right)\\&=nx^{n-1}.\end{aligned}$$

□

DÆMI 3.19

Beiting veldisreglunnar

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=x^{10}$ með því að beita veldisreglunni.

Lausn

Þegar $n=10$, er sett inn í veldisregluna fæst

$$f'(x)=10x^{10-1}=10x^{9}.$$

STÖÐUMAT 3.13

Finnið afleiðu $f(x)=x^{7}$.

Summureglan, mismunareglan og reglan um fastamargfeldi

Næst leiðum við út reglur um afleiður summa, mismuna og fastamargfelda falla. Reglurnar auðvelda deildun þegar föll eru lögð saman, þau dregin hvort frá öðru eða margfölduð með fasta. Þær eru teknar saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 3.4

Summu-, mismuna- og fastamargfeldisreglur

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera deildanleg föll og k fasta. Þá gilda eftirfarandi jöfnur.

Summuregla. Afleiða summu fallanna f og g er jöfn summu afleiðna f og g.

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x));$$

það er,

$$\text{fyrir } j(x)=f(x)+g(x),\ j'(x)=f'(x)+g'(x).$$

Mismunaregla. Afleiða mismunar fallanna f og g er jöfn mismuni afleiðna f og g:

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x));$$

það er,

$$\text{fyrir } j(x)=f(x)-g(x),\ j'(x)=f'(x)-g'(x).$$

Regla um fastamargfeldi. Ef fastinn k er margfaldaður með fallinu f er afleiða margfeldisins jöfn fastanum sinnum afleiðu fallsins:

$$\frac{d}{dx}(kf(x))=k\frac{d}{dx}(f(x));$$

það er,

$$\text{fyrir } j(x)=kf(x),\ j'(x)=kf'(x).$$

Sönnun

Hér færum við aðeins sönnun summureglunnar. Hinar reglurnar eru sannaðar með svipuðum hætti.

Látum $f(x)$ og $g(x)$, vera deildanleg föll og setjum $j(x)=f(x)+g(x)$. Samkvæmt markgildisskilgreiningu afleiðunnar fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{j(x+h)-j(x)}{h}.$$

Þegar $j(x+h)=f(x+h)+g(x+h)$ og $j(x)=f(x)+g(x)$, eru sett inn fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)+g(x+h)\right)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h}.$$

Eftir umröðun og flokkun liðanna fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right).$$

Með summureglu markgilda og skilgreiningu afleiðunnar fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=f'(x)+g'(x).$$

□

DÆMI 3.20

Beiting reglunnar um fastamargfeldi

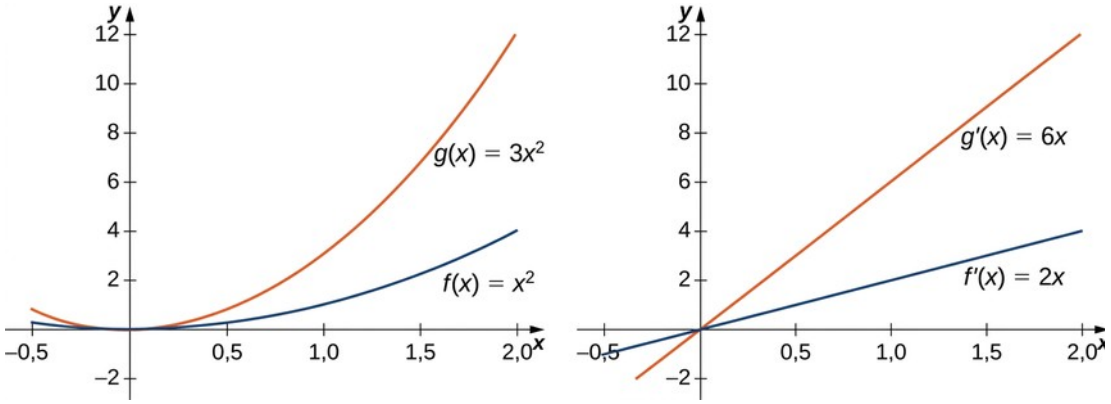
Finnið afleiðu $g(x)=3x^2$ og berið hana saman við afleiðu $f(x)=x^2$.

Lausn

Við beitum veldisreglunni beint:

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(3x^2)=3\frac{d}{dx}(x^2)=3(2x)=6x.$$

Þar sem afleiða $f(x)=x^2$ er $f'(x)=2x$, sjáum við að afleiða $g(x)$ er þreföld afleiða $f(x)$. Sambandið er sýnt á mynd 3.18.



Mynd 3.18 Afleiða $g(x)$ er 3 sinnum afleiða $f(x)$.

DÆMI 3.21

Beiting grunnreglna um afleiður

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=2x^5+7$.

Lausn

Fyrst beitum við summureglunni, síðan reglunni um fastamargfeldi og loks veldisreglunni. Leibniz-táknun er notuð í allri lausninni til að gera röð aðgerðanna skýra:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^5+7)$$

$=\frac{d}{dx}(2x^5)+\frac{d}{dx}(7)$ Beitið summureglunni.

$=2\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(7)$ Beitið reglunni um fastamargfeldi.

$=2(5x^4)+0$ Beitið veldisreglunni og fastareglunni.

$=10x^4$. Einfaldið.

STÖÐUMAT 3.14

Finnið afleiðu $f(x)=2x^3-6x^2+3$.

DÆMI 3.22

Ákvörðun jöfnu snertils

Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=x^2-4x+6$ þegar $x=1$.

Lausn

Til þess að ákvarða jöfnu snertilsins þarf punkt og hallatölu. Punkturinn fæst með því að reikna

$$f(1)=1^2-4(1)+6=3.$$

Þannig fæst punkturinn $(1,3)$. Hallatala snertilsins þegar x = 1 er $f'(1)$, og því þarf fyrst að finna $f'(x)$. Samkvæmt skilgreiningu afleiðu fæst

$$f'(x)=2x-4$$

Því er hallatala snertilsins $f'(1)=-2$. Punkthallaformið gefur þá eftirfarandi jöfnu snertilsins:

$$y-3=-2(x-1).$$

Þegar jafnan er sett á hallaskurðarform fæst

$$y=-2x+5.$$

STÖÐUMAT 3.15

Finnið jöfnu snertils við graf fallsins $f(x)=3x^2-11$ þegar $x=2$. Notið punkthallaformið.

Margfeldisreglan

Að grunnreglunum loknum snúum við okkur að flóknari deildunarreglum. Sú fyrsta fjallar um afleiðu margfeldis tveggja falla. Af summu- og mismunareglunum mætti ætla að afleiða margfeldis væri margfeldi afleiðnanna, en svo er ekki. Skoðum fallið $f(x)=x^2$, en afleiða þess er $f'(x)=2x$, ekki $\frac{d}{dx}(x)\cdot\frac{d}{dx}(x)=1\cdot 1=1$.

SETNING 3.5

Margfeldisreglan

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera deildanleg föll. Þá

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x)+\frac{d}{dx}(g(x))\cdot f(x).$$

það er,

$$\text{ef } j(x)=f(x)g(x), \text{ þá } j'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x).$$

Þetta merkir að afleiða margfeldis tveggja falla er afleiða fyrra fallsins margfölduð með seinna fallinu að viðbættri afleiðu seinna fallsins margfaldaðri með fyrra fallinu.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ og $g(x)$ séu deildanleg föll. Í sönnuninni nýtum við að fyrst $g(x)$ er deildanlegt er $g(x)$ líka samfellt. Þar af leiðandi gildir að $\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$.

Þegar markgildisskilgreiningu afleiðunnar er beitt á $j(x)=f(x)g(x)$, fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}.$$

Með því að leggja við og draga frá $f(x)g(x+h)$ í teljaranum fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}.$$

Þegar kvótanum hefur verið skipt upp og summureglu markgilda beitt fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\right).$$

Eftir umröðun fæst

$$j'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)\right)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)\right).$$

Með samfelldni $g(x)$, skilgreiningum afleiðna $f(x)$ og $g(x)$, og reiknireglum markgilda fæst margfeldisreglan:

$$j'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x).$$

□

DÆMI 3.23

Beiting margfeldisreglunnar á föll í tilteknum punkti

Fyrir fallið $j(x)=f(x)g(x)$, skuluð þið nota margfeldisregluna til að finna $j'(2)$ þegar $f(2)=3, f'(2)=-4, g(2)=1$, og $g'(2)=6$.

Lausn

Þar sem $j(x)=f(x)g(x), j'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$, og því

$$j'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=(-4)(1)+(6)(3)=14.$$

DÆMI 3.24

Beiting margfeldisreglunnar á margfeldi tvíliða

Fyrir $j(x)=(x^2+2)(3x^3-5x)$, finnið $j'(x)$ með því að beita margfeldisreglunni. Sannreynið niðurstöðuna með því að finna fyrst margfeldið og deilda það síðan.

Lausn

Ef $f(x)=x^2+2$ og $g(x)=3x^3-5x$, þá er $f'(x)=2x$ og $g'(x)=9x^2-5$. Því fæst

$$j'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(2x)(3x^3-5x)+(9x^2-5)(x^2+2).$$

Eftir einföldun fæst

$$j'(x)=15x^4+3x^2-10.$$

Til að sannreyna þetta sjáum við að $j(x)=3x^5+x^3-10x$ og þar af leiðandi $j'(x)=15x^4+3x^2-10$.

STÖÐUMAT 3.16

Notið margfeldisregluna til að finna afleiðu $j(x)=2x^5(4x^2+x)$.

3

Deilireglan

Að lokinni umfjöllun um margfeldisregluna skoðum við deildun kvóta falla. Afleiða kvóta er ekki kvóti afleiðnanna. Samkvæmt eftirfarandi setningu er hún mismunur tveggja margfelda: afleiða teljarans sinnum nefnarinn að frádreginni afleiðu nefnarans sinnum teljarinn. Mismuninum er síðan deilt með öðru veldi nefnarans. Til þess að sjá hvers vegna ekki má einfaldlega taka kvóta afleiðnanna skulum við hafa í huga að

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x, \text{ ekki } \frac{\frac{d}{dx}(x^3)}{\frac{d}{dx}(x)}=\frac{3x^2}{1}=3x^2.$$

SETNING 3.6

Deilireglan

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera deildanleg föll. Þá

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(f(x))\cdot g(x)-\frac{d}{dx}(g(x))\cdot f(x)}{(g(x))^2}.$$

það er,

$$\text{ef } j(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ þá } j'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Sönnun deilireglunnar svipar mjög til sönnunar margfeldisreglunnar og er því sleppt. Í næsta dæmi beitum við reglunni til að finna afleiðu.

DÆMI 3.25

Beiting deilireglunnar

Notið deiliregluna til að finna afleiðu $k(x)=\frac{5x^2}{4x+3}$.

Lausn

Látum $f(x)=5x^2$ og $g(x)=4x+3$. Þá er $f'(x)=10x$ og $g'(x)=4$. Þegar þetta er sett inn í deiliregluna fæst

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}=\frac{10x(4x+3)-4(5x^2)}{(4x+3)^2}.$$

Með einföldun fæst

$$k'(x)=\frac{20x^2+30x}{(4x+3)^2}.$$

STÖÐUMAT 3.17

Finnið afleiðu $h(x)=\frac{3x+1}{4x-3}$.

Nú er unnt að nota deiliregluna til að útvíkka veldisregluna og finna afleiður falla á forminu x^k þar sem k er neikvæð heiltala.

SETNING 3.7

Útvíkkuð veldisregla

Ef k er neikvæð heiltala, þá

$$\frac{d}{dx}(x^k)=kx^{k-1}.$$

Sönnun

Ef k er neikvæð heiltala má setja $n=-k$, þannig að n sé jákvæð heiltala og $k=-n$. Fyrir hverja jákvæða heiltölu n, $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, má því beita deilireglunni með $f(x)=1$ og $g(x)=x^n$. Þá er $f'(x)=0$ og $g'(x)=nx^{n-1}$. Því fæst

$$\frac{d}{dx}(x^{-n})=\frac{0(x^n)-1(nx^{n-1})}{(x^n)^2}.$$

Eftir einföldun fæst

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right)=\frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}=-n\,x^{(n-1)-2n}=-n\,x^{-n-1}.$$

Þar sem $k=-n$, fæst að lokum með innsetningu

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k}\right)=k\,x^{k-1}.$$

□

DÆMI 3.26

Notkun útvíkkuðu veldisreglunnar

Finnið $\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right)$.

Lausn

Þegar $k=-4$, er sett inn í útvíkkuðu veldisregluna fæst

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right)=-4\,x^{-4-1}=-4\,x^{-5}.$$

DÆMI 3.27

Notkun útvíkkuðu veldisreglunnar og reglunnar um fastamargfeldi

Notið útvíkkuðu veldisregluna og regluna um fastamargfeldi til að finna afleiðu $f(x)=\frac{6}{x^2}$.

Lausn

Nota mætti deiliregluna til að finna afleiðuna, en mun einfaldara er að deilda fallið ef við umritum það fyrst sem $f(x)=6x^{-2}$.

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{6}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(6\,x^{-2}\right)$ Umritið $\frac{6}{x^2}$ sem $6\,x^{-2}$.

$=6\,\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)$ Beitið reglunni um fastamargfeldi.

$=6\left(-2\,x^{-3}\right)$ Notið útvíkkuðu veldisregluna til að deilda x^{-2}.

$=-12\,x^{-3}$ Einfaldið.

STÖÐUMAT 3.18

Finnið afleiðu $g(x)=\frac{1}{x^7}$ með útvíkkuðu veldisreglunni.

Samsetning deildunarreglna

Í dæmum þessa undirkafla hefur yfirleitt þurft að beita fleiri en einni deildunarreglu. Með því að nota reglurnar saman má nú finna afleiður allra margliðufalla og ræðra falla. Síðar verða teknar fyrir enn flóknari samsetningar reglna. Þegar beita þarf mörgum reglum er gagnlegt að nota þær í öfugri röð við þá sem notuð væri til að reikna gildi fallsins.

DÆMI 3.28

Samsetning deildunarreglna

Fyrir $k(x)=3h(x)+x^2g(x)$, finnið $k'(x)$.

Lausn

Til að finna þessa afleiðu þarf að nota summuregluna, regluna um fastamargfeldi og margfeldisregluna.

$k'(x)=\frac{d}{dx}(3h(x)+x^2g(x))=\frac{d}{dx}(3h(x))+\frac{d}{dx}(x^2g(x))$ Beitið summureglunni.

$=3\frac{d}{dx}(h(x))+\left(\frac{d}{dx}(x^2)g(x)+\frac{d}{dx}(g(x))x^2\right)$ Beitið reglunni um fastamargfeldi til að deilda $3h(x)$ og margfeldis reglunni til að deilda $x^2g(x)$.

$=3h'(x)+2xg(x)+x^2g'(x)$

DÆMI 3.29

Útvíkkun margfeldisreglunnar

Ef $k(x)=f(x)g(x)h(x)$, skrifið $k'(x)$ með $f(x), g(x), h(x)$, og afleiðum þeirra.

Lausn

Líta má á $k(x)$ sem margfeldi fallsins $f(x)g(x)$ og fallsins $h(x)$. Með öðrum orðum er $k(x)=(f(x)g(x))\cdot h(x)$. Þá fæst

$k'(x)=\frac{d}{dx}(f(x)g(x))\cdot h(x)+\frac{d}{dx}(h(x))\cdot(f(x)g(x))$ Beitið margfeldisreglunni á margfeldið af $f(x)g(x)$ og $h(x)$.

$=(f'(x)g(x)+g'(x)f(x))h(x)+h'(x)f(x)g(x)$ Beitið margfeldisreglunni á $f(x)g(x)$.

$=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$. Einfaldið.

DÆMI 3.30

Deilireglunni og margfeldisreglunni beitt saman

Fyrir $h(x)=\frac{2x^3k(x)}{3x+2}$, finnið $h'(x)$.

Lausn

Þessi aðferð er dæmigerð við deildun ræðra falla.

$$h'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(2x^3k(x))\cdot(3x+2)-\frac{d}{dx}(3x+2)\cdot(2x^3k(x))}{(3x+2)^2}$$ Beitið deilireglunni.

$$= \frac{(6x^2k(x)+k'(x)\cdot 2x^3)(3x+2)-3(2x^3k(x))}{(3x+2)^2}$$ Beitið margfeldisreglunni til að finna $\frac{d}{dx}(2x^3k(x))$. Notið $\frac{d}{dx}(3x+2)=3$.

$$= \frac{-6x^3k(x)+18x^3k(x)+12x^2k(x)+6x^4k'(x)+4x^3k'(x)}{(3x+2)^2}$$ Einfaldið.

$$= \frac{12k(x)(x^3+x^2)+2k'(x)(3x^4+2x^3)}{(3x+2)^2}$$

STÖÐUMAT 3.19

Finnið $\frac{d}{dx}(3f(x)-2g(x))$.

DÆMI 3.31

Ákvörðun láréttra snertipunkta

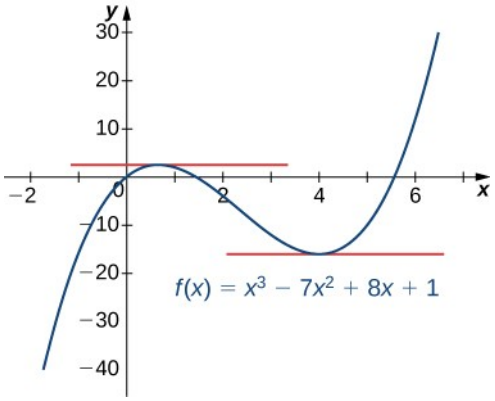
Ákvarðið þau gildi x þar sem $f(x)=x^3-7x^2+8x+1$ hefur láréttan snertil.

Lausn

Til að finna þau gildi x þar sem $f(x)$ hefur láréttan snertil þarf að leysa $f'(x)=0$. Þar sem

$$f'(x)=3x^2-14x+8=(3x-2)(x-4),$$

þarf að leysa $(3x-2)(x-4)=0$. Rætur jöfnunnar eru $x=\frac{2}{3}$ og $x=4$. Graf fallsins hefur því lárétta snertla þar, eins og sjá má á eftirfarandi mynd.



Mynd 3.19 Þetta fall hefur lárétta snertla þegar x = 2/3 og x = 4.

DÆMI 3.32

Ákvörðun hraða

Staða hlutar á hnitási við tímann t er gefin með $s(t)=\frac{t}{t^2+1}$. Hver er upphafshraði hans?

Lausn

Upphafshraðinn er $v(0)=s'(0)$,. Fyrst finnum við því $s'(t)$ með deilireglunni:

$$s'(t)=\frac{1(t^2+1)-2t(t)}{(t^2+1)^2}=\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}.$$

Þegar reiknað er sést að $v(0)=1$.

STÖÐUMAT 3.20

Finnið þau gildi x þar sem graf $f(x)=4x^2-3x+2$ hefur snertil sem er samsíða línunni $y=2x+3$.

NEMENDAVERKEFNI

Áhorfendastúkur í Formúlu 1

Spennandi getur verið að fylgjast með Formúlu 1-kappakstri og hann laðar að sér fjölda áhorfenda. Hönnuðir Formúlu 1-brauta þurfa að tryggja að nægilegt rými sé fyrir áhorfendastúkur umhverfis brautina. Kappakstur getur þó verið hættulegur og öryggi áhorfenda hefur forgang. Stúkurnar verða því að vera þannig staðsettar að áhorfendum stafi ekki hætta af því að ökumaður missi stjórn á bíl sínum (mynd 3.20).



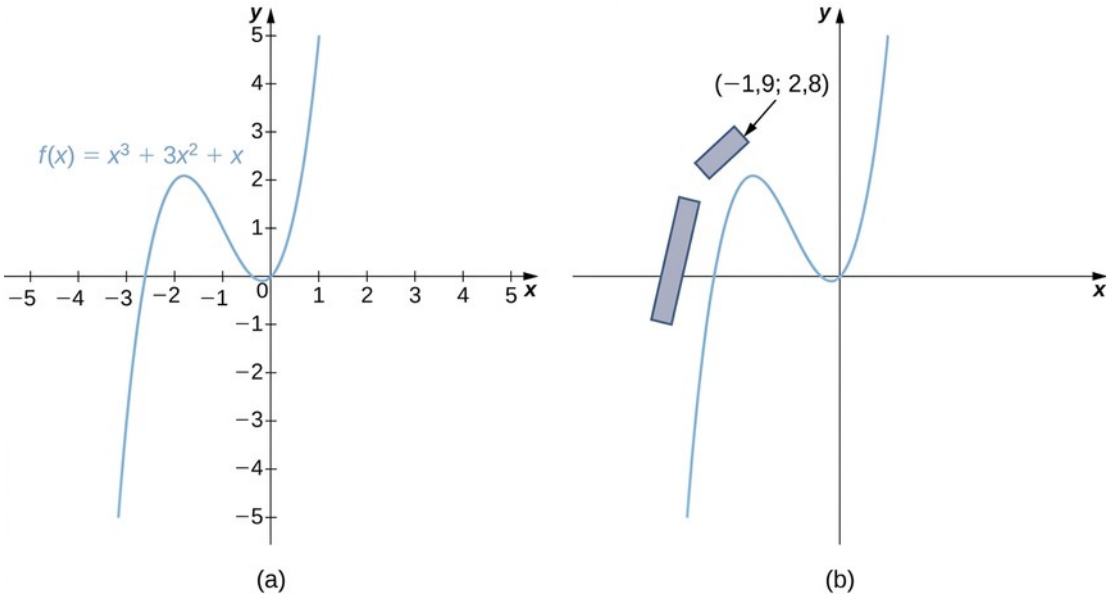
Mynd 3.20 Áhorfendastúka við beinan kafla Circuit de Barcelona-Catalunya-kappakstursbrautarinnar, á stað þar sem áhorfendum stafar ekki hætta.

3

****

Öryggi skiptir sérstaklega miklu í beygjum. Ef ökumaður hægir ekki nægilega á áður en hann ekur inn í beygju getur bíllinn runnið út af kappakstursbrautinni. Oftast verður akstursferillinn þá aðeins víðari og hraðinn minnkar. Missi ökumaður hins vegar alla stjórn getur bíllinn þotið út af brautinni eftir snertli við brautarferilinn.

Hugsum okkur að verið sé að hanna nýja Formúlu 1-braut. Lýsa má einum hluta hennar með fallinu $f(x)=x^3+3x^2+x$ (mynd 3.21). Samkvæmt núverandi áætlun verða áhorfendastúkur reistar meðfram fyrsta beina kaflanum og við hluta fyrstu beygjunnar. Fremra horn stúkunnar á að vera í punktinum $(-1{,}9\,;2{,}8)$. Við viljum ákvarða hvort áhorfendum stafi hætta af þessari staðsetningu ef ökumaður missir stjórn á bílnum.



Mynd 3.21 (a) Lýsa má einum hluta kappakstursbrautarinnar með fallinu $f(x)=x^3+3x^2+x$. (b) Framhornið á áhorfendastúkunni er í punktinum $(-1{,}9\,;2{,}8)$.

1. Eðlisfræðingar hafa komist að því að mestar líkur séu á að ökumenn missi stjórn á bílum sínum þegar þeir aka inn í beygju, í þeim punkti þar sem hallatala snertilsins er 1. Finnið $(x\,,y)$-hnit þessa punkts við beygjuna.
2. Finnið jöfnu snertils við ferilinn í þessum punkti.
3. To determine whether the spectators are in danger in this scenario, find the x-coordinate of the point where the tangent line crosses the line $y=2{,}8$. Is this point safely to the right of the grandstand? Or are the spectators in danger?
4. Hvað gerist ef ökumaður missir stjórn á bílnum fyrr en eðlisfræðingarnir spá? Gerum ráð fyrir að það gerist í punktinum $(-2{,}5\,;0{,}625)$. Hver er hallatala snertilsins í þeim punkti?
5. Eru áhorfendurnir óhultir ef ökumaður missir stjórn á bílnum eins og lýst er í 4. lið?
6. Er óhætt að halda núverandi hönnun stúkunnar eða þarf að færa hana?

Æfingar úr kafla 3.3

Í eftirfarandi æfingum finnið $f'(x)$ fyrir hvert fall.

106.

$$f(x)=x^7+10$$

107.

$$f(x)=5x^3-x+1$$

108.

$$f(x)=4x^2-7x$$

109.

$$f(x)=8x^4+9x^2-1$$

110.

$$f(x)=x^4+\frac{2}{x}$$

111.

$$f(x)=3x\left(18x^4+\frac{13}{x+1}\right)$$

112.

$$f(x)=(x+2)(2x^2-3)$$

3

113.

$$f(x)=x^2\left(\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)$$

114.

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2-4}{3}$$

115.

$$f(x)=\frac{4x^3-2x+1}{x^2}$$

116.

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

117.

$$f(x)=\frac{x+9}{x^2-7x+1}$$

Í eftirfarandi æfingum finnið jöfnu snertilsins $T(x)$ við graf gefna fallsins í tilgreinda punktinum. Notið grafreikni til að teikna graf fallsins og snertilinn.

118. [T] $y=3x^2+4x+1$ við $(0,1)$

119. [T] $y=\frac{2}{x^2}+1$ í $(1,3)$

120. [T] $y=\frac{2x}{x-1}$ við $(-1,1)$

121. [T] $y=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$ við $(1,-1)$

Í eftirfarandi æfingum skal gera ráð fyrir að $f(x)$ og $g(x)$ séu deildanleg fyrir öll x. Finnið afleiðu hvers falls $h(x)$.

122.

$$h(x)=4f(x)+\frac{g(x)}{7}$$

123.

$$h(x)=x^3f(x)$$

124.

$$h(x)=\frac{f(x)g(x)}{2}$$

125.

$$h(x)=\frac{3f(x)}{g(x)+2}$$

Í eftirfarandi æfingum skal gera ráð fyrir að $f(x)$ og $g(x)$ séu deildanleg föll með gildin sem gefin eru í töflunni. Notið töfluna til að reikna afleiðurnar.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	-2	0
$g(x)$	2	3	-4	6
$f'(x)$	-1	7	8	-3
$g'(x)$	4	1	2	9

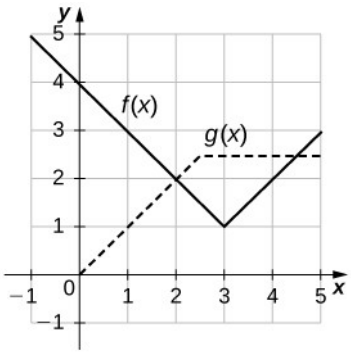
126. Finnið $h'(1)$ ef $h(x)=xf(x)+4g(x)$.

127. Finnið $h'(2)$ ef $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

128. Finnið $h'(3)$ ef $h(x)=2x+f(x)g(x)$.

129. Finnið $h'(4)$ ef $h(x)=\frac{1}{x}+\frac{g(x)}{f(x)}$.

Notið eftirfarandi mynd til að finna tilgreindar afleiður í æfingunum, ef þær eru til.



130. Látum $h(x)=f(x)+g(x)$. Finnið

a. $h'(1)$,
b. $h'(3)$, og
c. $h'(4)$.

3

131. Látum $h(x)=f(x)g(x)$. Finnið

a. $h'(1)$,
b. $h'(3)$, og
c. $h'(4)$.

132. Látum $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Finnið

a. $h'(1)$,
b. $h'(3)$, og
c. $h'(4)$.

Í eftirfarandi æfingum,

a. reiknið út $f'(a)$, og
b. teiknið graf fallsins $f(x)$ og snertil þess í punktinum $x=a$.

133. **[T]** $f(x)=2x^3+3x-x^2, a=2$

134. **[T]** $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2, a=1$

135. **[T]** $f(x)=x^2-x^{12}+3x+2, a=0$

136. **[T]** $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2, a=-1$

137. Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=2x^3+4x^2-5x-3$ þegar $x=-1$.

138. Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=x^2+\dfrac{4}{x}-10$ þegar $x=8$.

139. Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=(3x-x^2)(3-x-x^2)$ þegar $x=1$.

140. Finnið þann punkt á grafi $f(x)=x^3$ þar sem snertillinn í punktinum hefur x-skurðpunktinn 6.

141. Finnið jöfnu línunnar sem liggur um punktinn $P(3,3)$ og snertir graf fallsins $f(x)=\frac{6}{x-1}$.

142. Ákvarðið alla punkta á grafi $f(x)=x^3+x^2-x-1$ þar sem

a. snertillinn er láréttur
b. snertillinn hefur hallatöluna -1.

143. Finnið margliðu af öðru stigi þannig að $f(1)=5, f'(1)=3$ og $f''(1)=-6$.

144. Bíll í umferð á hraðbraut hefur ekið $s(t)=t^3-6t^2+9t$ metra eftir t sekúndur.

a. Finnið eftir hve margar sekúndur hraði bílsins verður 0.
b. Ákvarðið hröðun bílsins þegar hraðinn er 0.

145. **[T]** Síld syndir eftir beinni línu og hefur farið $s(t)=\frac{t^2}{t^2+2}$ metra eftir t sekúndur.

Ákvarðið hraða síldarinnar eftir 3 sekúndur.

146. Stofnstærð heimskautakola í Atlantshafi, mæld í milljónum, er lýst með fallinu $P(t)=\frac{8t+3}{0{,}2t^2+1}$, þar sem t er mælt í árum.

a. Ákvarðið upphaflega stofnstærð heimskautakolans.
b. Ákvarðið $P'(10)$ og túlkið niðurstöðuna í stuttu máli.

147. **[T]** Styrk sýklalyfs í blóði t klukkustundum eftir inndælingu er lýst með fallinu $C(t)=\frac{2t^2+t}{t^3+50}$, þar sem C er mælt í milligrömmum á lítra.

a. Finnið breytingarhraða $C(t)$.
b. Ákvarðið breytingarhraðann þegar $t=8, 12, 24$, og 36.
c. Lýsið í stuttu máli hvernig breytingarhraðinn þróast eftir því sem tíminn líður.

148. Kostnaðarfall bókaútgefanda er $C(x)=\frac{x^3+2x+3}{x^2}$, þar sem x táknar fjölda bókareintaka í þúsundum og C kostnað á eintak í dollurum. Reiknið $C'(2)$ og útskýrið merkingu niðurstöðunnar.

149. **[T]** Samkvæmt alþyngdarlögmáli Newtons er krafturinn F milli tveggja hluta með massana m_1 og m_2 reiknaður með formúlunni $F=\frac{Gm_1m_2}{d^2}$, þar sem G er þyngdarfastinn og d fjarlægðin milli hlutanna.

a. Gerið ráð fyrir að G, m_1, og m_2 séu fastar stærðir. Finnið breytingarhraða kraftsins F með tilliti til fjarlægðarinnar d.

b. Finnið breytingarhraða kraftsins F þegar $G=6{,}67\times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$, fjarlægðin milli hlutanna er 10 metrar og massi hvors þeirra er 1000 kílógrömm.

3.4 Afleiður sem breytingarhraðar

3

NÁMSMARKMIÐ

- 3.4.1 Ákvarða nýtt gildi stærðar út frá fyrra gildi hennar og breytingunni.
- 3.4.2 Reikna meðalbreytingarhraða og útskýra muninn á honum og augnabliksbreytingarhraða.
- 3.4.3 Beita breytingarhraða við útreikninga á færslu, hraða og hröðun hlutar sem hreyfist eftir beinni línu.
- 3.4.4 Spá fyrir um fólksfjölda í framtíðinni út frá núverandi fólksfjölda og vaxtarhraða hans.
- 3.4.5 Nota afleiður til að reikna jaðarkostnað og jaðartekjur í rekstrarlegu samhengi.

Í þessum undirkafla skoðum við hvernig túlka má afleiðu sem breytingarhraða falls og hvernig sú túlkun nýtist. Dæmi um notkun eru hröðun og hraði í eðlisfræði, vaxtarhraði stofna í líffræði og jaðarföll í hagfræði.

Formúla fyrir breytingu

Afleiðu má meðal annars nota til að áætla óþekkt gildi falls út frá þekktu gildi og breytingarhraða þess í tilteknum punkti. Ef $f(x)$ er skilgreint á bilinu $[a, a+h]$, er breyting á $f(x)$ á bilinu mismunur y-gilda þess við enda bilsins og fæst sem

$$f(a+h)-f(a).$$

Meðalbreytingarhraði fallsins f á sama bili er hlutfall breytingar fallsins og samsvarandi breytingar x-gildanna. Hann fæst sem

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Eins og áður hefur komið fram er augnabliksbreytingarhraði fallsins $f(x)$ í a afleiða þess

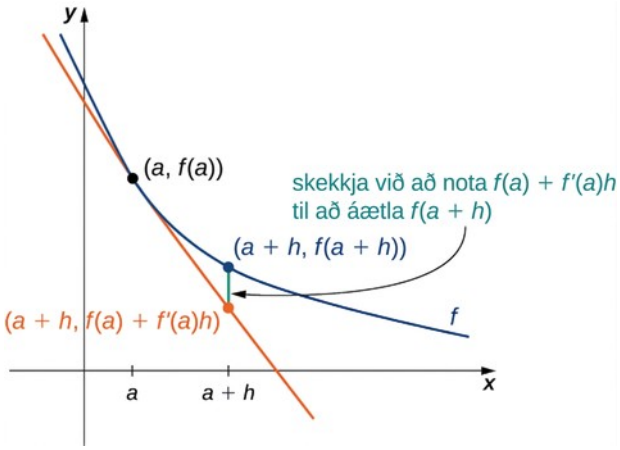
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Eftirfarandi nálgun gildir fyrir nægilega lítil gildi h, $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Með því að einangra $f(a+h)$ fæst formúlan fyrir breytingu:

$$f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h.$$

(3.10)

Formúluna má nota þegar aðeins $f(a)$ og $f'(a)$ eru þekkt og áætla þarf $f(a+h)$. Til dæmis má áætla íbúafjölda borgar í náinni framtíð út frá núverandi íbúafjölda og vaxtarhraða hans. Á mynd 3.22 sést að $f(a+h)$ er nálgað með y -hniti snertilsins við x = $a+h$, þar sem snertillinn er við graf $f(x)$ í $x=a$. Nákvæmni nálgunarinnar ræðst bæði af h og $f'(a)$.



Mynd 3.22 Nálgað nýtt gildi stærðar fæst með því að leggja margfeldi breytingarhraðans og breytingarbilsins við upphaflega gildið: $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$.

MIÐLAR

Hér má sjá áhugaverða sýningu á breytingarhraða.

DÆMI 3.33

Mat á gildi falls

Ef $f(3)=2$ og $f'(3)=5$, skuluð þið áætla $f(3{,}2)$.

Lausn

Begin by finding h. We have $h=3{,}2-3=0{,}2$. Thus,

$$f(3{,}2)=f(3+0{,}2) \approx f(3)+(0{,}2)\,f'(3)=2+0{,}2\,(5)=3.$$

STÖÐUMAT 3.21

Ef $f(10)=-5$ og $f'(10)=6$, skuluð þið áætla $f(10{,}1)$.

Hreyfing eftir línu

Afleiðuna má einnig nota til að greina hreyfingu eftir beinni línu. Hraði er breytingarhraði staðsetningar og afleiða hraðans er hröðunin, það er breytingarhraði hraðans. Einnig þarf að skilgreina ferð, sem er stærð hraðans. Þá má setja fram eftirfarandi stærðfræðilegar skilgreiningar.

SKILGREINING

Látum $s(t)$ vera fall sem gefur staðsetningu hlutar við tímann t.

Hraði hlutarins við tímann t er $v(t)=s'(t)$.

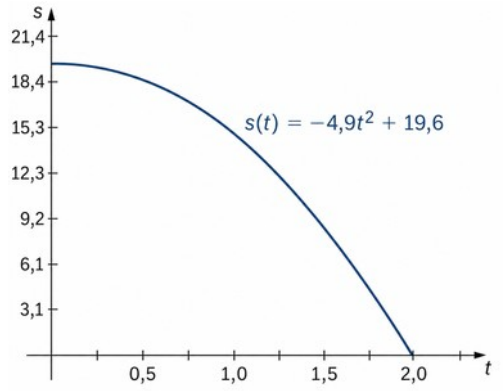
Ferð hlutarins við tímann t er $|v(t)|$.

Hröðun hlutarins við tímann t er $a(t)=v'(t)=s''(t)$.

DÆMI 3.34

Samanburður á augnablikshraða og meðalhraða

Bolta er sleppt úr 19,6 metra hæð. Hæð hans yfir jörðu, mæld í metrum eftir t sekúndur, er $s(t)=-4{,}9\,t^2+19{,}6$.



a. Hver er augnablikshraði boltans þegar hann lendir á jörðinni?
b. Hver er meðalhraði boltans á meðan hann fellur?

Lausn

Fyrst þarf að finna hve lengi boltinn er að falla til jarðar. Setjum því $s(t)=0$. Lausn jöfnunnar $-4{,}9\,t^2+19{,}6=0$, er $t=2$, svo boltinn fellur til jarðar á 2 sekúndum.

a. Augnablikshraði boltans þegar hann lendir á jörðinni er $v(2)$. Þar sem $v(t)=s'(t)=-9{,}8\,t$, fáum við $v(2)=-19{,}6$ m/s.
b. Meðalhraði boltans á meðan hann fellur er

$$v_{ave}=\frac{s(2)-s(0)}{2-0}=\frac{0-19{,}6}{2}=-9{,}8 \text{ m/s}.$$

DÆMI 3.35

Túlkun sambandsins milli $v(t)$ og $a(t)$

Ögn hreyfist eftir hnitás þar sem jákvæð stefna er til hægri. Staðsetning hennar við tímann t er $s(t)=t^3-4t+2$. Finnið $v(1)$ og $a(1)$ og notið gildin til að svara eftirfarandi spurningum.

a. Hreyfist ögnin til vinstri eða hægri við tímann $t=1$?

b. Eykst ferð agnarinnar eða minnkar hún við tímann $t=1$?

Lausn

Byrjum á að finna $v(t)$ og $a(t)$.

$v(t)=s'(t)=3t^2-4$ og $a(t)=v'(t)=s''(t)=6t$.

Þegar gildi fallanna eru reiknuð við $t=1$, fæst $v(1)=-1$ og $a(1)=6$.

a. Þar sem $v(1)<0$, hreyfist ögnin frá hægri til vinstri.

b. Þar sem $v(1)<0$ og $a(1)>0$, hafa hraði og hröðun gagnstæðar stefnur. Ögnin fær því hröðun í gagnstæða átt við hreyfistefnu sína og $|v(t)|$ minnkar. Ferð agnarinnar minnkar.

DÆMI 3.36

Staðsetning og hraði

Staðsetning agnar sem hreyfist eftir hnitás er $s(t)=t^3-9t^2+24t+4$, $t\geq 0$.

a. Finnið $v(t)$.

b. Hvenær er ögnin kyrr?

c. Á hvaða tímabilum hreyfist ögnin frá vinstri til hægri og á hvaða tímabilum frá hægri til vinstri?

d. Notið upplýsingarnar til að skissa feril agnarinnar eftir hnitás.

Lausn

a. Hraðinn er afleiða staðsetningarfallsins:

$v(t)=s'(t)=3t^2-18t+24$.

b. Ögnin er kyrr þegar $v(t)=0$, og því er sett $3t^2-18t+24=0$. Vinstri hlið jöfnunnar má þá þátta og fæst $3(t-2)(t-4)=0$. Ögnin er því kyrr við $t=2$ og $t=4$.

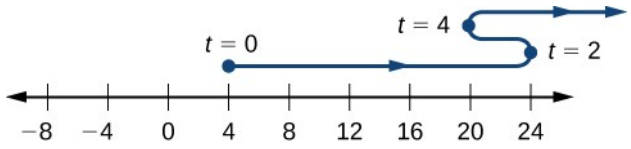
c. Ögnin hreyfist frá vinstri til hægri þegar $v(t)>0$ og frá hægri til vinstri þegar $v(t)<0$. Mynd 3.23 sýnir formerkjagreiningu $v(t)$ fyrir $t\geq 0$, en hún sýnir ekki ásinn sem ögnin hreyfist eftir.



Mynd 3.23 Formerki v(t) segir til um hreyfistefnu agnarinnar.

Þar sem $3t^2-18t+24>0$ á $[0,2)U(4,+\infty)$, hreyfist ögnin frá vinstri til hægri á þessum bilum. Þar sem
$3t^2-18t+24<0$ á $(2,4)$, hreyfist ögnin frá hægri til vinstri á þessu bili.

d. Til að skissa feril agnarinnar þarf að finna staðsetningu hennar við upphaf hreyfingarinnar $(t=0)$ og þegar hún skiptir um stefnu $(t=2,4)$. Gildin eru $s(0)=4, s(2)=24$, og $s(4)=20$. Hreyfing agnarinnar hefst því við 4 á hnitásnum og stefnubreytingar verða við 24 og 20 á hnitásnum. Ferillinn er sýndur á hnitás á mynd 3.24.



Mynd 3.24 Feril agnarinnar má ákvarða með því að greina v(t).

STÖÐUMAT 3.22

Ögn hreyfist eftir hnitás og staðsetning hennar við tímann t er $s(t)=t^2-5t+1$. Í hvora áttina hreyfist ögnin við $t=3$?

Mannfjöldabreyting

Afleiður nýtast ekki aðeins við greiningu á hraða, ferð, hröðun og staðsetningu heldur einnig við rannsóknir á stofnum af ýmsu tagi, allt frá bakteríuþyrpingum til borgarbúa. Áætla má stofnstærð í framtíðinni út frá núverandi stærð og vaxtarhraða. Vaxtarhraði stofns er breytingarhraði stofnstærðarinnar og má því tákna með afleiðu hennar.

SKILGREINING

Ef $P(t)$ táknar fjölda einstaklinga í stofni er vaxtarhraði stofnsins $P(t)$ skilgreindur sem $P'(t)$.

DÆMI 3.37

Mat á stofnstærð

Íbúafjöldi borgar þrefaldast á 5 ára fresti. Ef íbúafjöldinn er nú 10,000, hver verður hann þá um það bil eftir 2 ár?

Lausn

Látum $P(t)$ tákna íbúafjöldann, í þúsundum, eftir t ár. Þá er $P(0)=10$ og af gefnum upplýsingum má álykta að $P(5)=30$. Núverandi vaxtarhraði $P'(0)$, er áætlaður með

$$P'(0)\approx\frac{P(5)-P(0)}{5-0}=\frac{30-10}{5}=4.$$

Með því að beita jöfnu 3.10 á $P(t)$, má áætla íbúafjöldann eftir 2 ár sem

$$P(2)\approx P(0)+(2)P'(0)\approx 10+2(4)=18;$$

Því verður íbúafjöldinn 18.000 eftir 2 ár.

STÖÐUMAT 3.23

Nú eru 3.000 moskítóflugur í stofni, það er $P(0)=3.000$. Áætlið stofnstærðina eftir 3 daga ef $P'(0)=100$, og t er mælt í dögum.

Breytingar á kostnaði og tekjum

Afleiður nýtast einnig til að greina breytingar á kostnaði, tekjum og hagnaði. Jaðarföll eru algeng í viðskiptafræði og hagfræði og eru skilgreind með afleiðum. Jaðarkostnaður er afleiða kostnaðarfalls, jaðartekjur eru afleiða tekjufalls og jaðarhagnaður er afleiða hagnaðarfalls. Hagnaðarfallið byggist á kostnaðarfallinu og tekjufallinu.

SKILGREINING

Ef $C(x)$ er kostnaður við að framleiða x einingar er jaðarkostnaður $MC(x)$ skilgreindur með $MC(x)=C'(x)$.

Ef $R(x)$ eru tekjur af sölu x eininga er jaðartekjufallið $MR(x)$ skilgreint með $MR(x)=R'(x)$.

Ef $P(x)=R(x)-C(x)$ er hagnaður af sölu x eininga er jaðarhagnaðurinn $MP(x)$ skilgreindur með $MP(x)=P'(x)=MR(x)-MC(x)=R'(x)-C'(x)$.

Gróflega má nálga

$$MC(x)=C'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{C(x+h)-C(x)}{h}$$

með því að velja hentugt gildi h. Þar sem x táknar fjölda eininga er 1 eðlilega lítið gildi fyrir h. Með því að setja $h=1$, fæst nálgunin $MC(x)=C'(x)\approx C(x+1)-C(x)$. Því má túlka $C'(x)$ við tiltekið gildi x sem kostnaðaraukann við að framleiða eina einingu til viðbótar. Á sama hátt nálgar $MR(x)=R'(x)$ tekjurnar af sölu einnar viðbótareiningar og $MP(x)=P'(x)$ nálgar hagnaðinn af framleiðslu og sölu hennar.

DÆMI 3.38

Notkun jaðartekna

Gerum ráð fyrir að fjöldi seldra grillmáltíða x, tengist söluverðinu p, samkvæmt jöfnunni $p(x)=9-0{,}03\ x, 0\le x\le 300$.

Tekjur af sölu x grillmáltíða, mældar í evrum, eru þá

$$R(x)=x\ p(x)=x\ (9-0{,}03\ x)=-0{,}03\ x^2+9\ x \text{ fyrir } 0\le x\le 300.$$

Notið jaðartekjufallið til að áætla tekjur af sölu 101. grillmáltíðarinnar. Berið áætlunina saman við raunverulegar tekjur af máltíðinni.

Lausn

Fyrst finnum við jaðartekjufallið: $MR(x)=R'(x)=-0{,}06\ x+9$.

Næst er $R'(100)$ notað til að áætla $R(101)-R(100)$, það er tekjurnar af sölu 101. máltíðarinnar. Þar sem $R'(100)=3$, eru tekjurnar af sölu 101. máltíðarinnar um það bil \$3.

Raunverulegar tekjur af sölu 101. máltíðarinnar eru

$$R(101)-R(100)=602{,}97-600=2{,}97, \text{ eða } \$2{,}97.$$

Jaðartekjurnar gefa nokkuð góða nálgun í þessu tilviki og hafa þann kost að auðvelt er að reikna þær.

STÖÐUMAT 3.24

Gerum ráð fyrir að hagnaður af sölu x fiskmáltíða sé $P(x)=-0{,}03\ x^2+8\ x-50$. Notið jaðarhagnaðarfallið til að áætla hagnað af sölu 101. fiskmáltíðarinnar.

Æfingar úr kafla 3.4

Í eftirfarandi æfingum lýsa föllin sem gefin eru staðsetningu agnar sem hreyfist eftir láréttri línu, þar sem $t\ge 0$.

a. Finnið föllin sem lýsa hraða og hröðun.
b. Ákvarðið á hvaða tímabilum ferð hlutarins minnkar og á hvaða tímabilum hún eykst.

150.

$$s(t)=2t^3-3t^2-12t+8$$

151.

$$s(t)=2t^3-15t^2+36t-10$$

152.

$$s(t)=\frac{t}{1+t^2}$$

153. Líkaneldflaug er skotin lóðrétt upp frá jörðu. Hæð hennar yfir jörðu, mæld í metrum, er táknuð með s eftir t sekúndur og gefin með $s\,(t)=-4{,}9\,t^2+100\,t$.

a. Finnið hraða eldflaugarinnar 3 sekúndum eftir að henni er skotið á loft.
b. Finnið hröðun eldflaugarinnar 3 sekúndum eftir að henni er skotið á loft.

154. Bolta er kastað niður af þaki 20 metra hárrar byggingar með upphafsferðina 3 m/s. Hæð hans yfir jörðu eftir t sekúndur er $s\,(t)=-4{,}9\,t^2-3\,t+20$.

a. Ákvarðið hve lengi boltinn er að falla til jarðar.
b. Ákvarðið hraða boltans þegar hann lendir á jörðinni.

155. Staðsetningarfallið $s\,(t)=0{,}3\,t^2-0{,}9\,t-1{,}2$ lýsir staðsetningu afturenda bifreiðar sem bakkað er út úr innkeyrslu og síðan ekið áfram eftir beinni línu. Staðsetningin er mæld í metrum og táknuð með s, en tíminn er mældur í sekúndum og táknaður með t. Jafnan $s(t)=0$ lýsir því augnabliki þegar afturendi bifreiðarinnar er við bílskúrshurðina. Upphafsstaðsetningin $s\,(0)=-1{,}2$ er því 1,2 metra inni í bílskúrnum.

a. Ákvarðið hraða bílsins þegar $s(t)=0$.
b. Ákvarðið hraða bílsins þegar $s\,(t)=4{,}2$.

156. Staðsetning kólibrífugls sem flýgur eftir beinni línu við tímann t er $s(t)=3t^3-7t$, mæld í metrum.

a. Ákvarðið hraða fuglsins við $t=1$ sek.
b. Ákvarðið hröðun fuglsins við $t=1$ sek.
c. Ákvarðið hröðun fuglsins þegar hraðinn er 0.

157. Kartöflu er skotið lóðrétt upp úr kartöflubyssu á þaki 24,5 metra hárrar byggingar með upphafshraðann 19,6 m/s. Hæð kartöflunnar yfir jörðu eftir t sekúndur er $s\,(t)=-4{,}9\,t^2+19{,}6\,t+24{,}5$.

a. Finnið hraða kartöflunnar eftir 0,5 s og 3,5 s.
b. Finnið ferð kartöflunnar við 0,5 s og 3,5 s.
c. Ákvarðið hvenær kartaflan nær mestri hæð.
d. Finnið hröðun kartöflunnar við 0,5 s og 1,5 s.
e. Ákvarðið hversu lengi kartaflan er á lofti.
f. Ákvarðið hraða kartöflunnar þegar hún lendir á jörðinni.

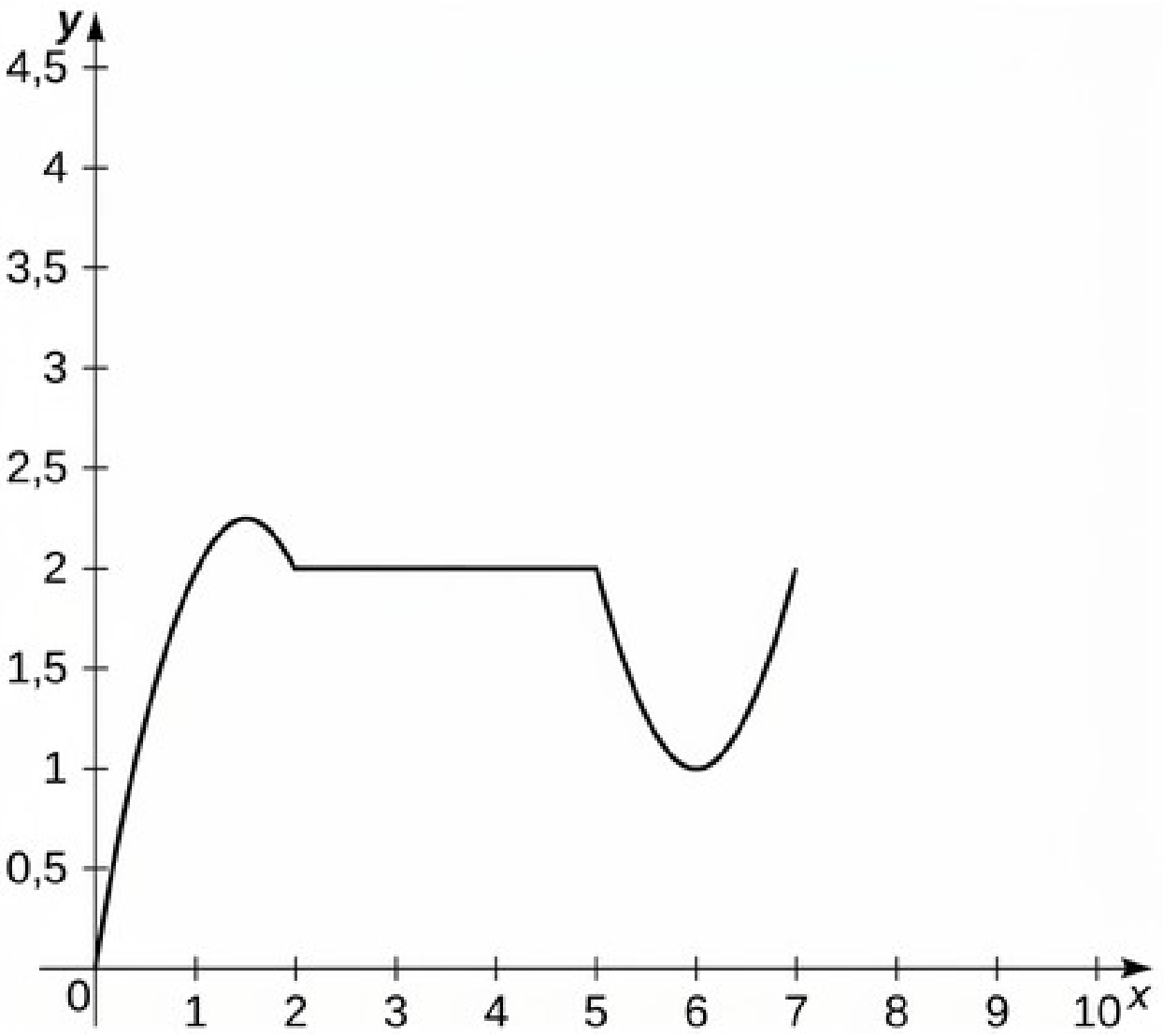
158. Staðsetning vöruflutningalestar, mæld í kílómetrum, er $s(t)=t^3-8t$, þar sem austur telst jákvæð stefna og t er mælt í klukkustundum.

a. Ákvarðið í hvaða átt lestin hreyfist þegar $s(t)=0$.

b. Ákvarðið í hvaða átt lestin hreyfist þegar $a(t)=0$.

c. Ákvarðið á hvaða tímabilum ferð lestarinnar minnkar og á hvaða tímabilum hún eykst.

159. Eftirfarandi graf sýnir staðsetningu $y=s(t)$ hlutar sem hreyfist eftir beinni línu.



a. Notið graf staðsetningarfallsins til að ákvarða á hvaða tímabilum hraðinn er jákvæður, neikvæður eða núll.

b. Skissið graf hraðafallsins.

c. Notið graf hraðafallsins til að ákvarða á hvaða tímabilum hröðunin er jákvæð, neikvæð eða núll.

d. Ákvarðið á hvaða tímabilum ferð hlutarins eykst og á hvaða tímabilum hún minnkar.

160. Kostnaðarfall fyrirtækis sem framleiðir matvinnsluvélar er $C(x)=200+\frac{7}{x}+\frac{x^2}{7}$, mælt í dollurum, þar sem x er fjöldi framleiddra véla.

a. Ákvarðið jaðarkostnaðarfallið.
b. Notið jaðarkostnaðarfallið til að áætla kostnaðinn við að framleiða þrettándu matvinnsluvélina.
c. Finnið raunverulegan kostnað við að framleiða þrettándu matvinnsluvélina.

161. Verðið p, mælt í dollurum, og eftirspurnin x eftir tilteknu stafrænu klukkuútvarpi tengjast samkvæmt verð- og eftirspurnarfallinu $p=10-0{,}001\ x$.

a. Finnið tekjufallið $R(x)$.
b. Finnið jaðartekjufallið.
c. Finnið jaðartekjurnar við $x=2000$ og 5000.

162. **[T]** Hagnaður verður til þegar tekjur eru meiri en kostnaður. Gerum ráð fyrir að hagnaðarfall hjólabrettaframleiðanda sé $P\ (x)=30\ x-0{,}3\ x^2-250$, þar sem x er fjöldi seldra hjólabretta.

a. Finnið nákvæman hagnað af sölu þrítugasta hjólabrettisins.
b. Finnið jaðarhagnaðarfallið og notið það til að áætla hagnaðinn af sölu þrítugasta hjólabrettisins.

163. **[T]** Almennt er hagnaðarfallið mismunur tekjufallsins og kostnaðarfallsins: $P(x)=R(x)-C(x)$.

Gerum ráð fyrir að verð- og eftirspurnarfall þráðlausra borvéla sé $p=143-0{,}03\ x$ og kostnaðarfallið $C\ (x)=75.000+65\ x$, þar sem x er fjöldi seldra borvéla, p er söluverð hverrar vélar í dollurum og $C(x)$ er kostnaður við að framleiða x vélar.

a. Ákvarðið jaðarkostnaðarfallið.
b. Finnið tekjufallið og jaðartekjufallið.
c. Finnið $R'(1000)$ og $R'(4000)$. Túlkið niðurstöðurnar.
d. Finnið hagnaðarfallið og jaðarhagnaðarfallið.
e. Finnið $P'(1000)$ og $P'(4000)$. Túlkið niðurstöðurnar.

164. Lítill bær í Ohio fól tryggingastærðfræðistofu að rannsaka breytingarhraða íbúafjöldans og setja fram líkan af honum. Samkvæmt rannsókninni má lýsa íbúafjöldanum, mældum í þúsundum íbúa, með fallinu $P(t)=-\frac{1}{3}t^3+64t+3000$, þar sem t er mælt í árum.

a. Finnið fallið sem lýsir breytingarhraða íbúafjöldans, $P'(t)$.
b. Finnið $P'(1), P'(2), P'(3)$, og $P'(4)$. Túlkið niðurstöðurnar með hliðsjón af þróun bæjarins.
c. Finnið $P''(1), P''(2), P''(3)$, og $P''(4)$. Túlkið niðurstöðurnar með hliðsjón af þróun íbúafjölda bæjarins.

165. **[T]** Bakteríum í rækt fjölgar samkvæmt fallinu $N(t)=3000\left(1+\frac{4t}{t^2+100}\right)$, þar sem t er mælt í klukkustundum.

a. Finnið breytingarhraða bakteríufjöldans.
b. Finnið $N'(0), N'(10), N'(20)$, og $N'(30)$.
c. Túlkið niðurstöðurnar í (b).
d. Finnið $N''(0), N''(10), N''(20)$, og $N''(30)$. Túlkið hvað svörin gefa til kynna um vöxt bakteríustofnsins.

166. Miðsóknarkraftur hlutar með massa m er $F(r)=\frac{mv^2}{r}$, þar sem v er snúningshraði og r er fjarlægð frá snúningsmiðju.

a. Finnið breytingarhraða miðsóknarkrafts með tilliti til fjarlægðar frá snúningsmiðju.
b. Finnið breytingarhraða miðsóknarkrafts hlutar sem hefur massann 1000 kílógrömm, hraðann 13,89 m/s og er í 200 metra fjarlægð frá snúningsmiðju.

3

Spurningarnar hér á eftir fjalla um íbúafjölda Lundúna (í milljónum) á hverjum áratug 19. aldar. Tölurnar eru í töflunni hér fyrir neðan.

Tafla 3.4 Íbúafjöldi Lundúna Heimild: http://en.wikipedia.org/wiki/Demographics_of_London.

Ár frá 1800	Íbúafjöldi (milljónir)
1	0,8795
11	1,040
21	1,264
31	1,516
41	1,661
51	2,000
61	2,634
71	3,272
81	3,911
91	4,422

167. **[T]**

a. Notið reiknivél eða tölvuforrit til að finna það línulega fall sem fellur best að gögnunum um íbúafjöldann.
b. Finnið afleiðu jöfnunnar í a-lið og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.
c. Finnið aðra afleiðu jöfnunnar og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.

168. [T]

a. Notið reiknivél eða tölvuforrit til að finna þá annars stigs aðfellu sem fellur best að gögnunum.
b. Finnið afleiðu jöfnunnar og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.
c. Finnið aðra afleiðu jöfnunnar og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.

Í eftirfarandi æfingum er fjallað um geimfara á stórri reikistjörnu í annarri vetrarbraut. Til að kanna samsetningu reikistjörnunnar lætur geimfarinn rafskynjara falla niður í djúpa gjá. Á hverri sekúndu sendir skynjarinn upplýsingar um lóðrétta staðsetningu sína miðað við geimfarann. Gögnin um fall skynjarans eru tekin saman í eftirfarandi töflu.

Tími frá sleppingu skynjarans (s)	Staðsetning (m)
0	0
1	−1
2	−2
3	−5
4	−7
5	−14

169. [T]

a. Notið reiknivél eða tölvuforrit til að finna þá annars stigs aðfellu sem fellur best að gögnunum.
b. Finnið afleiðu staðsetningarfallsins og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.
c. Finnið aðra afleiðu staðsetningarfallsins og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.

170. [T]

a. Notið reiknivél eða tölvuforrit til að finna bestu þriðja stigs aðfelluna að gögnunum.
b. Finnið afleiðu staðsetningarfallsins og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.
c. Finnið aðra afleiðu staðsetningarfallsins og útskýrið eðlisfræðilega merkingu hennar.
d. Notið niðurstöðuna úr c-lið til að útskýra hvers vegna þriðja stigs fall hentar ekki vel í þessu verkefni.

Eftirfarandi verkefni fjalla um Holling-jöfnur af gerð I, II og III. Jöfnurnar lýsa því hvernig stærð rándýrastofns breytist eftir því hve mikið er tiltækt af bráð sem rándýrin geta étið.

171. **[T]** Holling-jafna af gerð I er $f(x)=a\,x$, þar sem x er magn tiltækrar bráðar og $a>0$ er tíðni þess að rándýrið finni bráð til að éta.

a. Teiknið graf Holling-jöfnu af gerð I, þegar gefið er $a=0{,}5$.
b. Finnið fyrstu afleiðu Holling-jöfnunnar af gerð I og túlkið merkingu hennar í samhengi líkansins.
c. Finnið aðra afleiðu Holling-jöfnunnar af gerð I og túlkið merkingu hennar í samhengi líkansins.
d. Notið túlkanirnar í b- og c-lið til að útskýra hvers vegna Holling-jafna af gerð I kann að vera óraunhæf.

172. **[T]** Holling-jafna af gerð II er $f(x)=\frac{a\,x}{n+x}$, þar sem x er magn tiltækrar bráðar og $a>0$ er hámarksneysluhraði rándýrsins.

a. Graph the Holling type II equation given $a=0{,}5$ and $n=5$. What are the differences between the Holling type I and II equations?
b. Finnið fyrstu afleiðu Holling-jöfnunnar af gerð II og túlkið merkingu hennar í samhengi líkansins.
c. Sýnið að $f(n)=\frac{1}{2}a$ og túlkið merkingu stikunnar n.
d. Finnið aðra afleiðuna og túlkið merkingu hennar. Hvað gerir Holling-fall af gerð II raunhæfara en Holling-fall af gerð I?

173. **[T]** Holling-jafna af gerð III er $f(x)=\frac{a\,x^2}{n^2+x^2}$, þar sem x er magn tiltækrar bráðar og $a>0$ er hámarksneysluhraði rándýrsins.

a. Graph the Holling type III equation given $a=0{,}5$ and $n=5$. What are the differences between the Holling type II and III equations?
b. Finnið fyrstu afleiðu Holling-jöfnunnar af gerð III og túlkið merkingu hennar í samhengi líkansins.
c. Finnið aðra afleiðu og túlkið merkingu hennar. Gagnlegt gæti verið að teikna graf afleiðunnar.
d. Hvaða vistfræðilegum fyrirbærum lýsir Holling-fall af gerð III sem Holling-fall af gerð II lýsir ekki?

174. **[T]** Eftirfarandi tafla sýnir gögn sem safnað var á sjö árum, frá 1937 til 1943, um stofnstærð snjóþrúguhéra, í þúsundum, og gaupa, í hundruðum. Snjóþrúguhéri er helsta bráð gaupunnar.

Tafla 3.5 Stofnstærð snæhéra og gaupu Heimild: http://www.biotopics.co.uk/newgcse/predatorprey.html.

Stofnstærð snjóþrúguhéra (í þúsundum)	Stofnstærð gaupa (hundruð)
20	10
55	15
65	55
95	60

a. Setjið gagnapunktana á graf og ákvarðið hvaða Holling-fall fellur best að gögnunum.
b. Notið merkingu stikanna a og n, og graf gagnanna til að ákvarða gildi stikanna. Athugið að n er það gildi bráðastofnsins sem samsvarar helmingi hámarksgildis rándýrastofnsins.
c. Teiknið Holling-föllin af gerð I, II og III inn á graf gagnanna. Var niðurstaða a-liðar rétt?

3.5 Afleiður hornafalla

NÁMSMARKMIÐ

- 3.5.1 Finna afleiður sínus- og kósínusfallanna.
- 3.5.2 Finna afleiður helstu hornafallanna.
- 3.5.3 Reikna afleiður sínus- og kósínusfallanna af hærra stigi.

Ein mikilvægasta hreyfing í eðlisfræði er einföld sveifluhreyfing, til dæmis hreyfing massa sem sveiflast á gormi. Henni má lýsa með sínus- eða kósínusfalli. Í þessum undirkafla bætum við afleiðum þessara falla og annarra hornafalla við þær afleiðureglur sem þegar hafa verið kynntar. Fyrst finnum við afleiður sínus- og kósínusfallanna og notum þær síðan til að leiða út formúlur fyrir afleiður hinna fjögurra hornafallanna. Þannig má reikna hraða og hröðun í einfaldri sveifluhreyfingu.

Afleiður sínus- og kósínusfalla

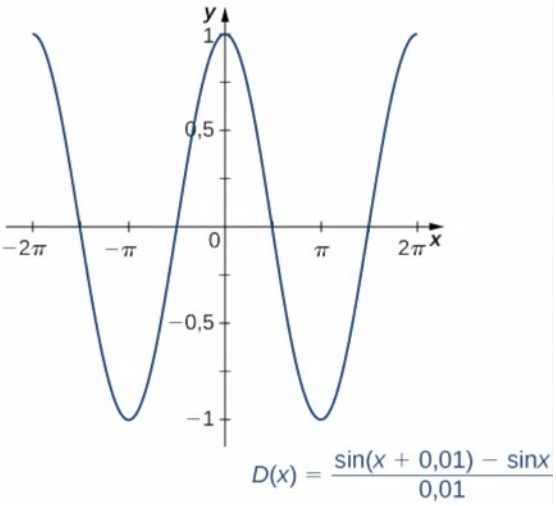
Við byrjum á að áætla afleiðu sínusfallsins út frá skilgreiningarformúlunni. Rifjum upp að fyrir fallið $f(x)$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Því gildir fyrir h-gildi mjög nálægt 0 að $f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Ef $h=0{,}01$,

$$\frac{d}{dx}(\sin x)\approx\frac{\sin(x+0{,}01)-\sin x}{0{,}01}$$

Með því að skilgreina $D(x)=\frac{\sin(x+0{,}01)-\sin x}{0{,}01}$ og nota grafteikniforrit má teikna graf sem nálgar afleiðu $\sin x$ (mynd 3.25).



Mynd 3.25 Graf fallsins $D(x)$ líkist mjög kósínusferli.

3

Graf $D(x)$ virðist líkjast mjög grafi kósínusfallsins. Við sýnum nú að

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x.$$

Ef við færum sömu leið til að nálga afleiðu kósínusfallsins fengjum við að

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x.$$

SETNING 3.8

Afleiður sin x og cos x

Afleiða sínusfallsins er kósínusfallið en afleiða kósínusfallsins er neikvætt sínusfall.

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

(3.11)

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

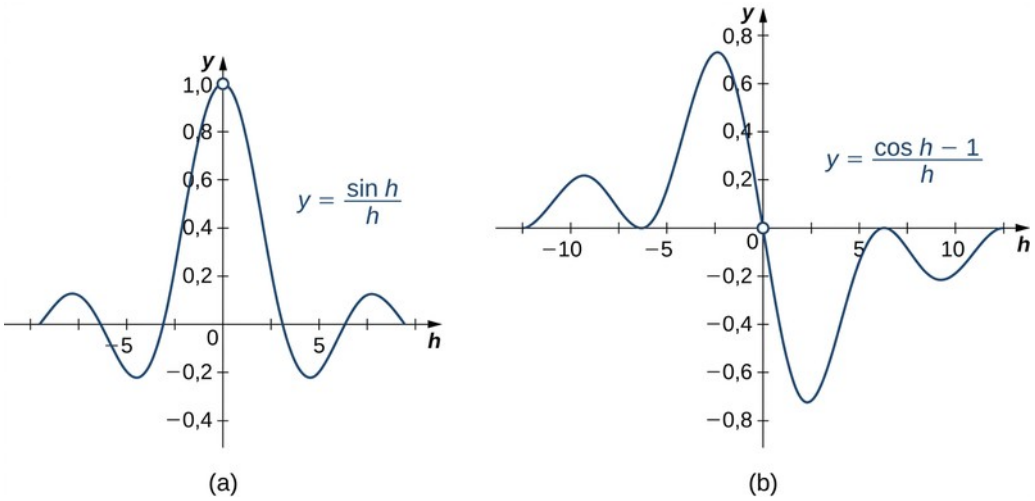
(3.12)

Sönnun

Sannanirnar fyrir $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ og $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ byggjast á svipuðum aðferðum og því sýnum við aðeins sönnunina fyrir $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$. Áður en við hefjum sönnunina skulum við rifja upp tvö mikilvæg markgildi hornafalla sem kynnt voru í inngangi að markgildum:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \text{ og } \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0.$$

Gröf $y=\frac{(\sin h)}{h}$ og $y=\frac{(\cos h-1)}{h}$ eru sýnd á mynd 3.26.



Mynd 3.26 Þessi gröf sýna tvö mikilvæg markgildi sem nauðsynleg eru til að leiða út formúlurnar fyrir afleiður sínus- og kósínusfallanna.

Við rifjum einnig upp hornafallasamsemdina fyrir sínus summu tveggja horna:

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h.$$

Nú höfum við allar jöfnur og samsemdir sem þarf og getum haldið áfram með sönnunina.

$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ Beitið skilgreiningu afleiðunnar.

$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$ Notið samlagningarformúlu sínuss.

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x\cos h-\sin x}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\right)$ Endurraðið liðum.

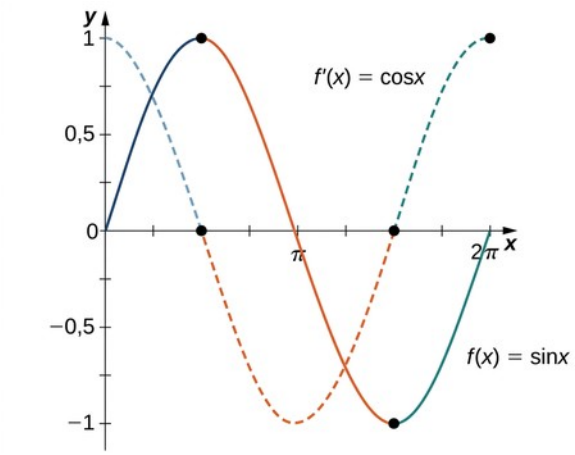
$=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)+\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right)$ Takið eftirfarandi sameiginlega þætti út fyrir sviga: $\sin x$ og $\cos x$.

$=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1$ Beitið markgildisreglum hornafalla.

$=\cos x$ Einfaldið.

□

Mynd 3.27 sýnir sambandið milli grafs $f(x)=\sin x$ og afleiðu þess $f'(x)=\cos x$. Takið eftir að í þeim punktum þar sem $f(x)=\sin x$ hefur láréttan snertil tekur afleiða þess $f'(x)=\cos x$ gildið núll. Við sjáum einnig að þar sem $f(x)=\sin x$ er vaxandi er $f'(x)=\cos x>0$ og þar sem $f(x)=\sin x$ er minnkandi er $f'(x)=\cos x<0$.



Mynd 3.27 Þar sem $f(x)$ hefur hágildi eða lággildi er $f'(x)=0$; með öðrum orðum er $f'(x)=0$ þar sem graf $f(x)$ hefur láréttan snertil. Þessir staðir eru merktir með punktum á gröfunum.

DÆMI 3.39

Deildun falls sem inniheldur sin x

Finnið afleiðu $f(x)=5x^3\sin x$.

Lausn

Með margfeldisreglunni fæst

$$\begin{aligned} f\prime(x) &= \tfrac{d}{dx}\left(5x^3\right)\cdot\sin x + \tfrac{d}{dx}(\sin x)\cdot 5x^3 \\ &= 15x^2\cdot\sin x+\cos x\cdot 5x^3. \end{aligned}$$

Með einföldun fæst

$$f'(x)=15x^2\sin x+5x^3\cos x.$$

STÖÐUMAT 3.25

Finnið afleiðu $f(x)=\sin x\cos x$.

DÆMI 3.40

Afleiða falls sem inniheldur cos x

Finnið afleiðu $g(x)=\dfrac{\cos x}{4x^2}$.

Lausn

Með deilireglunni fæst

$$g'(x)=\frac{(-\sin x)4x^2-8x(\cos x)}{\left(4x^2\right)^2}.$$

Með einföldun fæst

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-4x^2\sin x-8x\cos x}{16x^4} \\ &= \frac{-x\sin x-2\cos x}{4x^3}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.26

Finnið afleiðu $f(x)=\frac{x}{\cos x}$.

DÆMI 3.41

Notkunardæmi um hraða

Ögn hreyfist eftir hnitás og staðsetning hennar við tímann t er $s(t)=2\sin t-t$ fyrir $0\le t\le 2\pi$. Hvenær er ögnin kyrr?

Lausn

Til að finna hvenær ögnin er kyrr setjum við $s'(t)=v(t)=0$. Fyrst finnum við $s'(t)$. Þá fæst

$$s'(t)=2\cos t-1,$$

því þurfum við að leysa

$$2\cos t-1=0 \text{ fyrir } 0\le t\le 2\pi.$$

Lausnir þessarar jöfnu eru $t=\frac{\pi}{3}$ og $t=\frac{5\pi}{3}$. Ögnin er því kyrr við tímana $t=\frac{\pi}{3}$ og $t=\frac{5\pi}{3}$.

STÖÐUMAT 3.27

Ögn hreyfist eftir hnitás. Staðsetning hennar við tímann t er $s(t)=\sqrt{3}t+2\cos t$ fyrir $0\le t\le 2\pi$. Hvenær er ögnin kyrr?

Afleiður annarra hornafalla

Hin fjögur hornaföllin má öll rita sem kvóta þar sem sínus, kósínus eða bæði föllin koma fyrir. Því má nota deiliregluna til að finna formúlur fyrir afleiður þeirra.

DÆMI 3.42

Afleiða tangensfallsins

Finnið afleiðu $f(x)=\tan x$.

Lausn

Fyrst ritum við $\tan x$ sem kvóta $\sin x$ og $\cos x$:

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Með deilireglunni fæst

$$f'(x)=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2}.$$

Með einföldun fæst

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Samkvæmt Pýþagórasarsamsemdinni er $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, og því fæst

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Að lokum notum við samsemdina $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ og fáum

$$f'(x)=\sec^2 x.$$

STÖÐUMAT 3.28

Finnið afleiðu $f(x)=\cot x$.

Afleiður hornafallanna sem eftir eru má finna með sambærilegum aðferðum. Formúlurnar koma fram í næstu setningu.

SETNING 3.9

Afleiður $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, **og** $\csc x$

Afleiður hinna hornafallanna eru þessar:

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

(3.13)

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$$

(3.14)

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

(3.15)

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x.$$

(3.16)

DÆMI 3.43

Jafna snertils ákvörðuð

Finnið jöfnu snertils við graf $f(x) = \cot x$ í $x = \frac{\pi}{4}$.

Lausn

Til að finna jöfnu snertilsins þurfum við punkt á honum og hallatölu hans í þeim punkti. Punktinn finnum við með því að reikna

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$$

Snertillinn liggur því um punktinn $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$. Hallatalan fæst með því að finna afleiðu $f(x) = \cot x$ og reikna gildi hennar í $\frac{\pi}{4}$:

$$f'(x) = -\csc^2 x \text{ og } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$$

Með punkthallajöfnu línunnar fæst

$$y - 1 = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

eða jafngilt

$$y = -2x + 1 + \frac{\pi}{2}.$$

DÆMI 3.44

Afleiður hornafalla

Finnið afleiðu $f(x) = \csc x + x \tan x$.

Lausn

Til að finna þessa afleiðu þurfum við bæði summuregluna og margfeldisregluna. Með summureglunni fæst

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(\csc x)+\frac{d}{dx}(x\tan x).$$

Fyrri liðurinn gefur $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$, og þegar við notum margfeldisregluna á síðari liðinn fáum við

$$\frac{d}{dx}(x\tan x)=(1)(\tan x)+(\sec^2 x)(x).$$

Því fæst

$$f'(x)=-\csc x\cot x+\tan x+x\sec^2 x.$$

STÖÐUMAT 3.29

Finnið afleiðu $f(x)=2\tan x-3\cot x$.

3

STÖÐUMAT 3.30

Finnið hallatölu snertils við graf $f(x)=\tan x$ í $x=\frac{\pi}{6}$.

Afleiður af hærra stigi

Afleiður fallanna $\sin x$ og $\cos x$ af hærra stigi endurtaka sig í föstu mynstri. Með því að fylgja mynstrinu má finna afleiðu af hvaða stigi sem er fyrir föllin $\sin x$ og $\cos x$.

DÆMI 3.45

Afleiður af hærra stigi: fallið $y=\sin x$

Finnið fyrstu fjórar afleiður $y=\sin x$.

Lausn

Hvert skref í ferlinu er einfalt:

$$\begin{aligned} y &= \sin x \\ \frac{dy}{dx} &= \cos x \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\sin x \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= -\cos x \\ \frac{d^4y}{dx^4} &= \sin x. \end{aligned}$$

Greining

Þegar við þekkjum mynstrið í afleiðunum getum við fundið afleiðu af hvaða stigi sem er. Við athugum þá hvaða skrefi mynstursins hún samsvarar. Til dæmis er fjórða hver afleiða sin x aftur sin x og því

$$\frac{d^4}{dx^4}(\sin x) = \frac{d^8}{dx^8}(\sin x) = \frac{d^{12}}{dx^{12}}(\sin x) = \ldots = \frac{d^{4n}}{dx^{4n}}(\sin x) = \sin x$$
$$\frac{d^5}{dx^5}(\sin x) = \frac{d^9}{dx^9}(\sin x) = \frac{d^{13}}{dx^{13}}(\sin x) = \ldots = \frac{d^{4n+1}}{dx^{4n+1}}(\sin x) = \cos x.$$

STÖÐUMAT 3.31

Fyrir $y = \cos x$, finnið $\dfrac{d^4 y}{d x^4}$.

DÆMI 3.46

Mynstur afleiðna af hærra stigi: fallið $y = \sin x$

Finnið $\dfrac{d^{74}}{d x^{74}}(\sin x)$.

Lausn

Við sjáum strax að fyrir 74. afleiðu $\sin x$, $74 = 4(18)+2$, og því gildir

$$\frac{d^{74}}{d x^{74}}(\sin x) = \frac{d^{72+2}}{d x^{72+2}}(\sin x) = \frac{d^2}{d x^2}(\sin x) = -\sin x.$$

STÖÐUMAT 3.32

Fyrir $y = \sin x$, finnið $\dfrac{d^{59}}{d x^{59}}(\sin x)$.

DÆMI 3.47

Notkunardæmi um hröðun

Ögn hreyfist eftir hnitás og staðsetning hennar við tímann t er $s(t) = 2 - \sin t$. Finnið $v(\pi/4)$ og $a(\pi/4)$. Berið gildin saman og ákvarðið hvort ferð agnarinnar eykst eða minnkar.

Lausn

Finnum fyrst $v(t)=s'(t)$:

$$v(t)=s'(t)=-\cos t\,.$$

Því gildir:

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Næst finnum við $a(t)=v'(t)$. Þá er $a(t)=v'(t)=\sin t$ og við fáum

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Þar sem $v\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$ og $a\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}>0$, hafa hraði og hröðun gagnstæð formerki.

3

Hröðunin stefnir því gegn hreyfistefnunni og ferð agnarinnar minnkar.

STÖÐUMAT 3.33

Kubbur festur við gorm hreyfist lóðrétt. Staðsetning hans við tímann t er $s(t)=2\sin t$. Finnið $v\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ og $a\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Berið gildin saman og ákvarðið hvort ferð kubbsins eykst eða minnkar.

Æfingar úr kafla 3.5

Finnið $\frac{dy}{dx}$ fyrir föllin í æfingunum hér á eftir.

175.

$$y=x^2-\sec x+1$$

176.

$$y=3\csc x+\frac{5}{x}$$

177.

$$y=x^2\cot x$$

178.

$$y=x-x^3\sin x$$

179.

$$y=\frac{\sec x}{x}$$

180.

$$y = \sin x \tan x$$

181.

$$y = (x + \cos x)(1 - \sin x)$$

182.

$$y = \frac{\tan x}{1 - \sec x}$$

183.

$$y = \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x}$$

184.

$$y = \cos x (1 + \csc x)$$

Finnið jöfnu snertils við graf hvers falls hér á eftir fyrir tilgreind gildi breytunnar x. Notið síðan reiknivél til að teikna fallið og snertilinn og athugið þannig hvort jafna snertilsins sé rétt.

185. [T] $f(x) = -\sin x, x = 0$

186. [T] $f(x) = \csc x, x = \frac{\pi}{2}$

187. [T] $f(x) = 1 + \cos x, x = \frac{3\pi}{2}$

188. [T] $f(x) = \sec x, x = \frac{\pi}{4}$

189. [T] $f(x) = x^2 - \tan x, x = 0$

190. [T] $f(x) = 5 \cot x, x = \frac{\pi}{4}$

Finnið $\frac{d^2 y}{dx^2}$ fyrir föllin í æfingunum hér á eftir.

191.

$$y = x \sin x - \cos x$$

192.

$$y = \sin x \cos x$$

193.

$$y = x - \frac{1}{2}\sin x$$

194.

$$y = \frac{1}{x} + \tan x$$

195.

$$y = 2\csc x$$

196.

$$y = \sec^2 x$$

3

197. Finnið öll x-gildi á grafi fallsins $f(x) = -3\sin x \cos x$ þar sem snertillinn er láréttur.

198. Finnið öll x-gildi á grafi $f(x) = x - 2\cos x$ fyrir $0 < x < 2\pi$ þar sem hallatala snertilsins er 2.

199. Látum $f(x) = \cot x$. Ákvarðið punktana á grafi f fyrir $0 < x < 2\pi$ þar sem snertillinn er samsíða línunni $y = -2x$.

200. **[T]** Massi á gormi sveiflast upp og niður í einfaldri sveifluhreyfingu sem lýst er með fallinu $s(t) = -6\cos t$ þar sem s er mælt í sentímetrum og t í sekúndum. Finnið sveifluhraða massans þegar $t = 5$ s.

201. Staðsetning pendúls í einfaldri sveifluhreyfingu er $s(t) = a\cos t + b\sin t$ þar sem a og b eru fastar, t er tími í sekúndum og s staðsetning í sentimetrum. Ef staðsetningin er 0 cm og hraðinn 3 cm/s þegar $t = 0$ skuluð þið finna gildi a og b.

202. Eftir að dýfingarmaður stekkur af stökkbretti sveiflast brún þess og staðsetning hennar er $s(t) = -5\cos t$ cm eftir t sekúndur.

a. Teiknið eina lotu staðsetningarfallsins fyrir $t \geq 0$.
b. Finnið hraðafallið.
c. Teiknið eina lotu hraðafallsins fyrir $t \geq 0$.
d. Finnið hvenær hraðinn er 0 innan einnar lotu.
e. Finnið hröðunarfallið.
f. Teiknið eina lotu hröðunarfallsins fyrir $t \geq 0$.

203. Fjöldi seldra hamborgara á skyndibitastað í Pasadena í Kaliforníu er $y = 10 + 5\sin x$ þar sem y er fjöldi seldra hamborgara og x fjöldi klukkustunda frá því að staðurinn er opnaður kl. 11 að morgni þar til honum er lokað kl. 11 að kvöldi. Finnið y' og ákvarðið þau bil þar sem fjöldi seldra hamborgara fer vaxandi.

204. **[T]** Mánaðarlega úrkomu í Phoenix í Arizona má nálga með fallinu $y(t) = 0{,}5 + 0{,}3 \cos t$, þar sem t táknar fjölda mánaða frá janúar. Finnið y' og notið reiknivél til að ákvarða bilin þar sem úrkomumagnið fer minnkandi.

Notið deiliregluna til að leiða út gefnu jöfnurnar í eftirfarandi æfingum.

205.

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

206.

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

207.

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

208. Notið skilgreiningu afleiðu og samsemdina

$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ til að sanna að $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$.

Finnið tilgreinda afleiðu af hærra stigi fyrir hvert fall í æfingunum hér á eftir.

209. $\frac{d^3y}{dx^3}$ af $y = 3\cos x$

210. $\frac{d^2y}{dx^2}$ af $y = 3\sin x + x^2 \cos x$

211. $\frac{d^4y}{dx^4}$ af $y = 5\cos x$

212. $\frac{d^2y}{dx^2}$ af $y = \sec x + \cot x$

213. $\frac{d^3y}{dx^3}$ af $y = x^{10} - \sec x$

3.6 Keðjureglan

NÁMSMARKMIÐ

- 3.6.1 Setja fram keðjuregluna fyrir samskeytingu tveggja falla.
- 3.6.2 Beita keðjureglunni ásamt veldisreglunni.
- 3.6.3 Beita keðjureglunni ásamt margfeldis- og deilireglunum þegar þörf er á báðum reglum.
- 3.6.4 Þekkja keðjuregluna fyrir samskeytingu þriggja eða fleiri falla.
- 3.6.5 Lýsa sönnun keðjureglunnar.

Við höfum kynnst aðferðum við að deilda grunnföll $\left(x^n, \sin x, \cos x, \text{o.s.frv.}\right)$ og summur þeirra, mismun, margfeldi, kvóta og margfeldi þeirra með föstum. Þessar aðferðir nægja þó ekki til að deilda samskeytingar falla, svo sem $h(x)=\sin\left(x^3\right)$ eða $k(x)=\sqrt{3x^2+1}$. Í þessum undirkafla kynnum við okkur regluna um afleiðu samskeytingar tveggja eða fleiri falla.

Útleiðsla keðjureglunnar

Þegar fall er samskeyting tveggja eða fleiri falla gætum við notað allar þær aðferðir sem við höfum þegar lært til að deilda það. Það getur þó orðið fyrirhafnarsamt að beita öllum þessum aðferðum til að skipta falli niður í einfaldari hluta sem við getum deildað. Þess í stað notum við keðjuregluna, sem segir að afleiða samskeytts falls sé afleiða ytra fallsins, metin í innra fallinu, margfölduð með afleiðu innra fallsins.

Til að setja regluna í samhengi skulum við skoða dæmið $h(x)=\sin\left(x^3\right)$. Afleiðu fallsins með tilliti til x má túlka sem breytingarhraða $\sin\left(x^3\right)$ gagnvart breytingu á x. Við viljum því vita hvernig $\sin\left(x^3\right)$ breytist þegar x breytist. Líta má á ferlið sem keðjuverkun: Þegar x breytist breytist x^3 og það veldur breytingu á $\sin\left(x^3\right)$. Þessi keðjuverkun gefur vísbendingu um hvað þarf til að reikna afleiðu $\sin\left(x^3\right)$. Í fyrsta lagi bendir það að breyting á x veldur breytingu á x^3 til þess að afleiða x^3 komi þar við sögu. Þar að auki bendir það að breyting á x^3 veldur breytingu á $\sin\left(x^3\right)$ til þess að afleiða $\sin(u)$ með tilliti til u, þar sem $u=x^3$, komi einnig fyrir í lokaafleiðunni.

Við getum skoðað afleiðu $h(x)=\sin\left(x^3\right)$ með formlegri hætti með því að setja fram markgildið sem gefur afleiðuna við tiltekið gildi a í skilgreiningarmengi $h(x)=\sin\left(x^3\right)$.

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(x^3\right)-\sin\left(a^3\right)}{x-a}.$$

Þessi stæða virðist ekki sérlega gagnleg. Við getum þó ummyndað hana með því að margfalda og deila með stæðunni x^3-a^3 og fá þannig

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(x^3\right)-\sin\left(a^3\right)}{x^3-a^3}\cdot\frac{x^3-a^3}{x-a}.$$

Af skilgreiningu afleiðunnar má sjá að seinni þátturinn er afleiða x^3 í $x=a$. Það er að segja,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\frac{d}{dx}\left(x^3\right)_{x=a}=3a^2.$$

Hins vegar gæti verið örlítið erfiðara að átta sig á því að fyrri liðurinn er einnig afleiða. Við sjáum þetta með því að láta $u=x^3$ og taka eftir því að þegar $x\to a, u\to a^3$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(x^3\right)-\sin\left(a^3\right)}{x^3-a^3} &= \lim_{u\to a^3}\frac{\sin u-\sin\left(a^3\right)}{u-a^3}\\ &= \frac{d}{du}\left(\sin u\right)_{u=a^3}\\ &= \cos\left(a^3\right).\end{aligned}$$

Því fæst $h'(a)=\cos\left(a^3\right)\cdot 3a^2$.

Með öðrum orðum, ef $h(x)=\sin\left(x^3\right)$, þá er $h'(x)=\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2$. Ef við lítum á $h(x)=\sin\left(x^3\right)$ sem samskeytinguna $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)$ þar sem $f(x)=\sin x$ og $g(x)=x^3$, þá er afleiða $h(x)=\sin\left(x^3\right)$ margfeldi afleiðu $g(x)=x^3$ og afleiðu fallsins $f(x)=\sin x$, metinnar í $g(x)=x^3$. Þetta bendir til þess að fyrir $h(x)=\sin\left(g(x)\right)$, gildi $h'(x)=\cos\left(g(x)\right)g'(x)$. Eins og sýnt var hér að framan á það við þegar $h(x)=\sin\left(x^3\right)$.

Nú þegar við höfum leitt út sértilvik keðjureglunnar setjum við regluna fram í almennu formi og beitum henni síðan á önnur samskeytt föll. Í lok undirkaflans er óformleg sönnun.

3

REGLA: KEÐJUREGLAN

Látum f og g vera föll. Fyrir öll x í skilgreiningarmengi g þar sem g er deildanlegt í x og f er deildanlegt í $g(x)$, er afleiða samskeytta fallsins

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)$$

gefin með

$$h'(x)=f'\left(g(x)\right)g'(x).$$

(3.17)

Ef y er fall af u, og u fall af x, má einnig rita

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

MIÐLAR

Skoðið hreyfimynd sem sýnir keðjuregluna.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Beiting keðjureglunnar

1. Til að deilda $h(x)=f\left(g(x)\right)$, byrjið á því að finna föllin $f(x)$ og $g(x)$.
2. Finnið $f'(x)$ og metið fallið í $g(x)$ til að fá $f'\left(g(x)\right)$.
3. Finnið $g'(x)$.
4. Skrifið $h'(x)=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

Athugið: Þegar keðjureglunni er beitt á samskeytingu tveggja eða fleiri falla er unnið frá ysta fallinu inn að því innsta. Gagnlegt er að hafa í huga að afleiða samskeytingar tveggja falla hefur tvo þætti, afleiða samskeytingar þriggja falla þrjá þætti og svo framvegis. Afleiða er heldur aldrei metin í annarri afleiðu.

Keðjureglan ásamt veldisreglunni

Nú getum við beitt keðjureglunni á samskeytt föll, en oft þarf að nota hana ásamt öðrum reglum. Til að finna afleiður falla á forminu $h(x)=(g(x))^n$, þarf til dæmis að beita keðjureglunni ásamt veldisreglunni. Líta má á $h(x)=(g(x))^n$ sem $f(g(x))$ þar sem $f(x)=x^n$. Þá er $f'(x)=n\,x^{n-1}$. Því er $f'(g(x))=n(g(x))^{n-1}$. Þetta gefur eftirfarandi reglu um afleiðu veldisfalls með keðjureglunni:

$$h'(x)=n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

3

REGLA: VELDISREGLA FYRIR SAMSKEYTINGU FALLA

Fyrir öll gildi x þar sem afleiðan er skilgreind gildir: Ef

$$h(x)=(g(x))^n.$$

Þá

$$h'(x)=n(g(x))^{n-1}g'(x).$$

(3.18)

DÆMI 3.48

Notkun keðjureglunnar og veldisreglunnar

Finnið afleiðu $h(x)=\dfrac{1}{(3x^2+1)^2}$.

Lausn

Fyrst skulum við umrita $h(x)=\dfrac{1}{(3x^2+1)^2}=(3x^2+1)^{-2}$.

Ef veldisreglunni er beitt með $g(x)=3x^2+1$, fæst

$$h'(x)=-2(3x^2+1)^{-3}(6x).$$

Þegar svarið er ritað aftur á upphaflega forminu fæst

$$h'(x)=\frac{-12x}{(3x^2+1)^3}.$$

STÖÐUMAT 3.34

Finnið afleiðu $h(x)=(2x^3+2x-1)^4$.

DÆMI 3.49

Beiting keðju- og veldisreglunnar á hornafall

Finnið afleiðu $h(x)=\sin^3 x$.

Lausn

Rifjum fyrst upp að $\sin^3 x=(\sin x)^3$, þannig að við getum endurritað $h(x)=\sin^3 x$ sem $h(x)=(\sin x)^3$.

Ef veldisreglunni er beitt með $g(x)=\sin x$, fæst

$$h'(x)=3(\sin x)^2\cos x=3\sin^2 x\cos x.$$

DÆMI 3.50

Jafna snertils

Finnið jöfnu snertils við graf $h(x)=\dfrac{1}{(3x-5)^2}$ í punktinum $x=2$.

Lausn

Til að finna jöfnu línunnar þarf punkt á henni. x-hnit punktsins er 2. y-hnitið fæst með því að setja 2 inn í $h(x)$. Þar sem $h(2)=\dfrac{1}{(3(2)-5)^2}=1$, er punkturinn $(2,1)$.

Til að finna hallatöluna þarf $h'(2)$. Til að ákvarða $h'(x)$, ritum við $h(x)=(3x-5)^{-2}$ og beitum síðan veldisreglunni. Þá fæst

$$h'(x)=-2(3x-5)^{-3}(3)=-6(3x-5)^{-3}.$$

Með innsetningu fæst $h'(2)=-6(3(2)-5)^{-3}=-6$. Jafna línunnar er því $y-1=-6(x-2)$. Þegar hún er umrituð fæst $y=-6x+13$.

STÖÐUMAT 3.35

Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=(x^2-2)^3$ í punktinum $x=-2$.

Keðjureglan ásamt öðrum reglum

Nú þegar við getum beitt keðjureglunni ásamt veldisreglunni skoðum við hvernig henni er beitt með öðrum reglum sem við höfum lært. Einkum má nota hana með formúlunum fyrir afleiður hornafalla eða með margfeldisreglunni.

DÆMI 3.51

Keðjureglunni beitt á almennt kósínusfall

Finnið afleiðu $h(x)=\cos\left(g(x)\right)$.

Lausn

Lítum á $h(x)=\cos\left(g(x)\right)$ sem $f\left(g(x)\right)$ þar sem $f(x)=\cos x$. Þá er $f'(x)=-\sin x$. Því verður $f'\left(g(x)\right)=-\sin\left(g(x)\right)$. Útreikningurinn er svona:

$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ Beitið keðjureglunni.

$= -\sin(g(x))\,g'(x)$ Setjið inn $f'(g(x)) = -\sin(g(x))$.

Afleiða $h(x)=\cos\left(g(x)\right)$ er því $h'(x)=-\sin\left(g(x)\right)g'(x)$.

Í eftirfarandi dæmi beitum við reglunni sem við vorum að leiða út.

3

DÆMI 3.52

Keðjureglunni beitt á kósínusfall

Finnið afleiðu $h(x)=\cos\left(5x^2\right)$.

Lausn

Látum $g(x)=5x^2$. Þá er $g'(x)=10x$. Samkvæmt niðurstöðunni úr dæminu á undan fæst

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\sin\left(5x^2\right)\cdot 10x \\ &= -10x\sin\left(5x^2\right). \end{aligned}$$

DÆMI 3.53

Keðjureglunni beitt á annað hornafall

Finnið afleiðu $h(x)=\sec\left(4x^5+2x\right)$.

Lausn

Beitið keðjureglunni á $h(x)=\sec\left(g(x)\right)$. Þá fæst

$$h'(x)=\sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right)g'(x).$$

Í þessu verkefni er $g(x)=4x^5+2x$, og því $g'(x)=20x^4+2$. Þá fæst

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sec\left(4x^5+2x\right)\tan\left(4x^5+2x\right)\left(20x^4+2\right) \\ &= (20x^4+2)\sec\left(4x^5+2x\right)\tan\left(4x^5+2x\right). \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.36

Finnið afleiðu $h(x)=\sin(7x+2)$.

Hér er listi yfir afleiðuformúlur sem fást með því að beita keðjureglunni ásamt formúlunum fyrir afleiður hornafalla. Útleiðslur þeirra eru svipaðar þeim sem notaðar eru í dæmum 3.51 og 3.53. Til hægðarauka eru formúlurnar einnig gefnar með rithætti Leibniz, sem sumum nemendum reynist auðveldara að muna. (Fjallað er um keðjuregluna með rithætti Leibniz í lok þessa undirkafla.) Ekki er nauðsynlegt að leggja formúlurnar sérstaklega á minnið, enda eru þær allar afleiðingar af keðjureglunni og áður lærðum formúlum.

SETNING 3.10

Notkun keðjureglunnar með hornaföllum

Fyrir öll gildi x þar sem afleiðan er skilgreind gildir:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}(\sin(g(x))) &= \cos(g(x))g'(x) & \qquad \tfrac{d}{dx}\sin u &= \cos u\tfrac{du}{dx} \\ \tfrac{d}{dx}(\cos(g(x))) &= -\sin(g(x))g'(x) & \qquad \tfrac{d}{dx}\cos u &= -\sin u\tfrac{du}{dx} \\ \tfrac{d}{dx}(\tan(g(x))) &= \sec^2(g(x))g'(x) & \qquad \tfrac{d}{dx}\tan u &= \sec^2 u\tfrac{du}{dx} \\ \tfrac{d}{dx}(\cot(g(x))) &= -\csc^2(g(x))g'(x) & \qquad \tfrac{d}{dx}\cot u &= -\csc^2 u\tfrac{du}{dx} \\ \tfrac{d}{dx}(\sec(g(x))) &= \sec(g(x)\tan(g(x))g'(x) & \qquad \tfrac{d}{dx}\sec u &= \sec u\tan u\tfrac{du}{dx} \\ \tfrac{d}{dx}(\csc(g(x))) &= -\csc(g(x))\cot(g(x))g'(x) & \qquad \tfrac{d}{dx}\csc u &= -\csc u\cot u\tfrac{du}{dx}. \end{aligned}$$

DÆMI 3.54

Keðjureglan ásamt margfeldisreglunni

Finnið afleiðu $h(x)=(2x+1)^5(3x-2)^7$.

Lausn

Beitið fyrst margfeldisreglunni og síðan keðjureglunni á hvorn þátt margfeldisins.

$h'(x) = \frac{d}{dx}\left((2x+1)^5\right)\cdot(3x-2)^7+\frac{d}{dx}\left((3x-2)^7\right)\cdot(2x+1)^5$ Beitið margfeldisreglunni.

$=5(2x+1)^4\cdot 2\cdot(3x-2)^7+7(3x-2)^6\cdot 3\cdot(2x+1)^5$ Beitið keðjureglunni.

$=10(2x+1)^4(3x-2)^7+21(3x-2)^6(2x+1)^5$ Einfaldið.

$=(2x+1)^4(3x-2)^6(10(3x-2)+21(2x+1))$ Takið sameiginlega þætti út fyrir sviga $(2x+1)^4(3x-2)^6$.

$=(2\,x+1)^4\,(3\,x-2)^6\,(72\,x+1)$ Einfaldið.

STÖÐUMAT 3.37

Finnið afleiðu $h(x)=\frac{x}{(2x+3)^3}$.

Samskeyting þriggja eða fleiri falla

Nú getum við beitt keðjureglunni ásamt öðrum deildunarreglum. Þegar samskeyting þriggja eða fleiri falla er deilduð þarf hins vegar að beita keðjureglunni oftar en einu sinni. Almenna tilvikið gefur formúlu, en ekki þarf að leggja hana á minnið þar sem einfaldlega má beita keðjureglunni ítrekað.

Almennt látum við fyrst

$$k(x)=h\big(f\big(g(x)\big)\big).$$

Ef keðjureglunni er beitt einu sinni fæst

$$k'(x)=\frac{d}{dx}\big(h(f(g(x))\big)=h'\big(f\big(g(x)\big)\big)\cdot\frac{d}{dx}f\big(\big(g(x)\big)\big).$$

Ef keðjureglunni er beitt aftur fæst

$$k'(x)=h'\big(f\big(g(x)\big)f'\big(g(x)\big)g'(x)\big).$$

REGLA: KEÐJUREGLAN FYRIR SAMSKEYTINGU ÞRIGGJA FALLA

Fyrir öll gildi x þar sem fallið er deildanlegt gildir: Ef

$$k(x)=h\big(f\big(g(x)\big)\big),$$

þá

$$k'(x)=h'\big(f\big(g(x)\big)\big)f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Með öðrum orðum beitum við keðjureglunni tvisvar.

Athugið að afleiða samskeytingar þriggja falla hefur þrjá þætti. (Á sama hátt hefur afleiða samskeytingar fjögurra falla fjóra þætti og svo framvegis.) Einnig ber að hafa í huga að alltaf má vinna utan frá og inn og taka eina afleiðu í einu.

DÆMI 3.55

Deildun samskeytingar þriggja falla

Finnið afleiðu $k(x)=\cos^4\big(7x^2+1\big)$.

Lausn

Fyrst endurritum við $k(x)$ sem

$$k(x)=\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^4.$$

Beitið síðan veldisreglunni nokkrum sinnum.

$$\begin{aligned}
k'(x) &= 4\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^3\left(\frac{d}{dx}\cos\left(7x^2+1\right)\right) && \text{Beitið keðjureglunni.}\\
&= 4\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^3\left(-\sin\left(7x^2+1\right)\right)\left(\frac{d}{dx}\left(7x^2+1\right)\right) && \text{Beitið keðjureglunni.}\\
&= 4\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^3\left(-\sin\left(7x^2+1\right)\right)(14x) && \text{Beitið keðjureglunni.}\\
&= -56x\sin\left(7x^2+1\right)\cos^3\left(7x^2+1\right) && \text{Einfaldið.}
\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.38

Finnið afleiðu $h(x)=\sin^6\left(x^3\right)$.

DÆMI 3.56

Keðjureglunni beitt í hraðaverkefni

Ögn hreyfist eftir hnitás. Staðsetning hennar við tímann t er $s(t)=\sin(2t)+\cos(3t)$. Hver er hraði agnarinnar við tímann $t=\frac{\pi}{6}$?

Lausn

Til að finna $v(t)$, hraða agnarinnar við tímann t, þarf að deilda $s(t)$. Þá fæst

$$v(t)=s'(t)=2\cos(2t)-3\sin(3t).$$

Þegar $t=\frac{\pi}{6}$ er sett inn í $v(t)$, fæst $v\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2$.

STÖÐUMAT 3.39

Ögn hreyfist eftir hnitás. Staðsetning hennar við tímann t er $s(t)=\sin(4t)$. Finnið hröðun hennar við tímann t.

Sönnun

Hér setjum við fram mjög óformlega sönnun keðjureglunnar. Til einföldunar lítum við fram hjá tilteknum atriðum. Til dæmis gerum við ráð fyrir að $g(x)\neq g(a)$ fyrir $x\neq a$ á opnu bili sem

inniheldur a. Við byrjum á því að beita markgildisskilgreiningu afleiðunnar á fallið $h(x)$. Þá fæst $h'(a)$:

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}.$$

Með umritun fæst

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Þótt ljóst sé að

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a),$$

er ekki augljóst að

$$\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}=f'(g(a)).$$

Þetta sést með því að rifja upp að g er deildanlegt í a, g er þar með einnig samfellt í a. Því gildir:

$$\lim_{x\to a}g(x)=g(a).$$

Næst setjum við $y=g(x)$ og $b=g(a)$ og skiptum um breytu í markgildinu. Þá fæst

$$\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}=\lim_{y\to b}\frac{f(y)-f(b)}{y-b}=f'(b)=f'(g(a)).$$

Að lokum,

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=f'(g(a))g'(a).$$

□

DÆMI 3.57

Notkun keðjureglunnar með fallgildum

Látum $h(x)=f(g(x))$. Ef $g(1)=4$, $g'(1)=3$, og $f'(4)=7$, finnið $h'(1)$.

Lausn

Beitið keðjureglunni og setjið síðan gildin inn.

$h'(1)$	$=f'(g(1))\,g'(1)$	Beitið keðjureglunni.
	$=f'(4)\cdot 3$	Setjið inn $g(1)=4$ og $g'(1)=3$.
	$=7\cdot 3$	Setjið inn $f'(4)=7$.
	$=21$	Einfaldið.

STÖÐUMAT 3.40

Gefið er $h(x)=f(g(x))$. Ef $g(2)=-3, g'(2)=4$, og $f'(-3)=7$, finnið $h'(2)$.

Keðjureglan með rithætti Leibniz

Líkt og með aðrar afleiður sem við höfum séð má setja keðjuregluna fram með rithætti Leibniz. Sá ritháttur er mikið notaður í eðlisfræði.

Fyrir $h(x)=f(g(x))$, látum við $u=g(x)$ og $y=h(x)=f(u)$. Þá er

$$h'(x)=\frac{dy}{dx}, f'(g(x))=f'(u)=\frac{dy}{du} \text{ og } g'(x)=\frac{du}{dx}.$$

Því fæst

$$\frac{dy}{dx}=h'(x)=f'(g(x))g'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

REGLA: KEÐJUREGLAN MEÐ RITHÆTTI LEIBNIZ

Ef y er fall af u, og u fall af x, gildir:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

DÆMI 3.58

Afleiða reiknuð með rithætti Leibniz – dæmi 1

Finnið afleiðu $y=\left(\frac{x}{3x+2}\right)^5$.

Lausn

Látum fyrst $u=\frac{x}{3x+2}$. Þá er $y=u^5$. Næst finnum við $\frac{du}{dx}$ og $\frac{dy}{du}$. Samkvæmt deilireglunni fæst

$$\frac{du}{dx}=\frac{2}{(3x+2)^2}$$

og

$$\frac{dy}{du}=5u^4.$$

Að lokum er allt sett saman.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ Beitið keðjureglunni.

$= 5u^4 \cdot \frac{2}{(3x+2)^2}$ Setjið inn $\frac{dy}{du} = 5u^4$ og $\frac{du}{dx} = \frac{2}{(3x+2)^2}$.

$= 5\left(\frac{x}{3x+2}\right)^4 \cdot \frac{2}{(3x+2)^2}$ Setjið inn $u = \frac{x}{3x+2}$.

$= \frac{10x^4}{(3x+2)^6}$ Einfaldið.

Þegar ritháttur Leibniz er notaður fyrir keðjuregluna þarf lokasvarið að vera eingöngu sett fram með upprunalegu breytunni í dæminu.

3

DÆMI 3.59

Afleiða reiknuð með rithætti Leibniz – dæmi 2

Finnið afleiðu $y = \tan\left(4x^2 - 3x + 1\right)$.

Lausn

Látum fyrst $u = 4x^2 - 3x + 1$. Þá er $y = \tan u$. Næst finnum við $\frac{du}{dx}$ og $\frac{dy}{du}$:

$$\frac{du}{dx} = 8x - 3 \text{ og } \frac{dy}{du} = \sec^2 u.$$

Að lokum er allt sett saman.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ Beitið keðjureglunni.

$= \sec^2 u \cdot (8x - 3)$ Notið $\frac{du}{dx} = 8x - 3$ og $\frac{dy}{du} = \sec^2 u$.

$= \sec^2\left(4x^2 - 3x + 1\right) \cdot (8x - 3)$ Setjið inn $u = 4x^2 - 3x + 1$.

STÖÐUMAT 3.41

Notið rithátt Leibniz til að finna afleiðu $y = \cos\left(x^3\right)$. Gætið þess að lokasvarið sé eingöngu sett fram með breytunni x.

Æfingar úr kafla 3.6

Í eftirfarandi æfingum eru $y=f(u)$ og $u=g(x)$, gefin. Finnið $\frac{dy}{dx}$ með rithætti Leibniz fyrir keðjuregluna: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

214.

$$y=3u-6, u=2x^2$$

215.

$$y=6u^3, u=7x-4$$

216.

$$y=\sin u, u=5x-1$$

217.

$$y=\cos u, u=\frac{-x}{8}$$

218.

$$y=\tan u, u=9x+2$$

219.

$$y=\sqrt{4u+3}, u=x^2-6x$$

Gerið eftirfarandi í hverju verkefni hér á eftir:

a. ritið hvert fall á forminu $y=f(u)$ og $u=g(x)$, og

b. finnið $\frac{dy}{dx}$ sem fall af x.

220.

$$y=(3x-2)^6$$

221.

$$y=(3x^2+1)^3$$

222.

$$y=\sin^5(x)$$

223.

$$y=\left(\frac{x}{7}+\frac{7}{x}\right)^7$$

224.

$$y=\tan\left(\sec x\right)$$

225.

$$y=\csc\left(\pi x+1\right)$$

226.

$$y=\cot^2 x$$

227.

$$y=-6\left(\sin x\right)^{-3}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna $\frac{d\,y}{d\,x}$ fyrir hvert fall.

228.

$$y=\left(3x^2+3x-1\right)^4$$

229.

$$y=\left(5-2x\right)^{-2}$$

230.

$$y=\cos^3\left(\pi x\right)$$

231.

$$y=\left(2x^3-x^2+6x+1\right)^3$$

232.

$$y=\frac{1}{\sin^2\left(x\right)}$$

233.

$$y=\left(\tan x+\sin x\right)^{-3}$$

234.

$$y=x^2\cos^4 x$$

235.

$$y=\sin\left(\cos 7x\right)$$

236.

$$y=\sqrt{6+\sec\pi x^2}$$

237.

$$y=\cot^3(4x+1)$$

238. Látum $y=\left[f(x)\right]^2$ og gerum ráð fyrir að $f'(1)=4$ og $\frac{dy}{dx}=10$ fyrir $x=1$. Finnið $f(1)$.

239. Látum $y=\left(f(x)+5x^2\right)^4$ og gerum ráð fyrir að $f(-1)=-4$ og $\frac{dy}{dx}=3$ þegar $x=-1$. Finnið $f'(-1)$

240. Látum $y=\left(f(u)+3x\right)^2$ og $u=x^3-2x$. Ef $f(4)=6$ og $\frac{dy}{dx}=18$ þegar $x=2$, finnið $f'(4)$.

241. **[T]** Finnið jöfnu snertilsins við $y=-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ í upphafspunktinum. Notið reiknivél til að teikna graf fallsins og snertilinn saman.

242. **[T]** Finnið jöfnu snertilsins við $y=\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2$ í punktinum $(1,16)$. Notið reiknivél til að teikna graf fallsins og snertilinn saman.

243. Finnið þau x-hnit þar sem snertillinn við $y=\left(x-\frac{6}{x}\right)^8$ er láréttur.

244. **[T]** Finnið jöfnu línunnar sem er hornrétt á $g(\theta)=\sin^2(\pi\theta)$ í punktinum $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$. Notið reiknivél til að teikna graf fallsins og hornréttu línunnar saman.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota upplýsingarnar í töflunni til að finna $h'(a)$ fyrir uppgefið gildi a.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	2	5	0	2
1	1	−2	3	0
2	4	4	1	−1
3	3	−3	2	3

245.

$$h(x)=f\left(g(x)\right);a=0$$

246.

$$h(x)=g\left(f(x)\right);a=0$$

247.

$$h(x)=\left(x^4+g(x)\right)^{-2};a=1$$

248.

$$h(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2;a=3$$

249.

$$h(x)=f(x+f(x));a=1$$

250.

$$h(x)=(1+g(x))^3;a=2$$

251.

$$h(x)=g(2+f(x^2));a=1$$

252.

$$h(x)=f(g(\sin x));a=0$$

3

253. **[T]** Staðsetningarfall vöruflutningalestar er $s(t)=100(t+1)^{-2}$, þar sem s er í metrum og t í sekúndum. Við tímann $t=6$ s skuluð þið finna:

a. hraða og
b. hröðun.
c. Eykst eða minnkar ferð lestarinnar samkvæmt niðurstöðum a- og b-liðar?

254. **[T]** Massi sem hangir í lóðréttum gormi er í einfaldri sveifluhreyfingu sem eftirfarandi staðsetningarfall lýsir, þar sem t er í sekúndum og s í sentímetrum:

$$s(t)=-3\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right).$$

a. Determine the position of the spring at $t=1{,}5$ s.
b. Find the velocity of the spring at $t=1{,}5$ s.

255. **[T]** Heildarkostnaður við að framleiða x kassa af Thin Mint-smákökum frá Girl Scouts nemur C Bandaríkjadölum, þar sem $C=0{,}0001\ x^3-0{,}02\ x^2+3\ x+300$. Eftir t vikur er áætlað að framleiðslan nemi $x=1600+100t$ kössum.

a. Finnið jaðarkostnaðinn $C'(x)$.
b. Notið rithátt Leibniz fyrir keðjuregluna, $\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$, til að finna breytingarhraða kostnaðarins með tilliti til tímans t.
c. Notið b-lið til að finna breytingarhraða kostnaðarins þegar $t=2$ vikur. Tilgreinið einingar í svarinu.

256. **[T]** Formúlan fyrir flatarmál hrings er $A=\pi r^2$, þar sem r er geisli hringsins. Gerum ráð fyrir að hringur þenjist út, sem merkir að bæði flatarmálið A og geislinn r (í sentímetrum) stækka.

a. Gerum ráð fyrir að $r=2-\frac{100}{(t+7)^2}$ þar sem t táknar tíma í sekúndum. Notið keðjuregluna $\frac{dA}{dt}=\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$ til að finna breytingarhraða flatarmálsins.

b. Notið a-lið til að finna breytingarhraða flatarmálsins við $t=4$ s.

257. **[T]** Formúlan fyrir rúmmál kúlu er $S=\frac{4}{3}\pi r^3$, þar sem r (í desímetrum) er geisli kúlunnar. Gerum ráð fyrir að kúlulaga snjóbolti bráðni í sólinni.

a. Gerum ráð fyrir að $r=\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{12}$ þar sem t er tími í mínútum. Notið keðjuregluna $\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$ til að finna bráðnunarhraða snjóboltans.

b. Notið a-lið til að finna breytingarhraða rúmmálsins þegar $t=1$ mín.

258. **[T]** Daglegu hitastigi í Phoenix að sumarlagi, mældu í gráðum á Celsíus, má lýsa með fallinu $T(x)=35-6\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-2)\right]$, þar sem x er fjöldi klukkustunda frá miðnætti. Finnið breytingarhraða hitastigsins klukkan 4 síðdegis.

259. **[T]** Dýpt vatns (í metrum) við bryggju breytist með flóði og fjöru. Dýptinni lýsir fallið $D(t)=1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{7\pi}{6}\right)+2{,}5$, þar sem t er fjöldi klukkustunda frá miðnætti. Finnið breytingarhraða dýptarinnar klukkan 6 að morgni.

3.7 Afleiður andhverfra falla

NÁMSMARKMIÐ

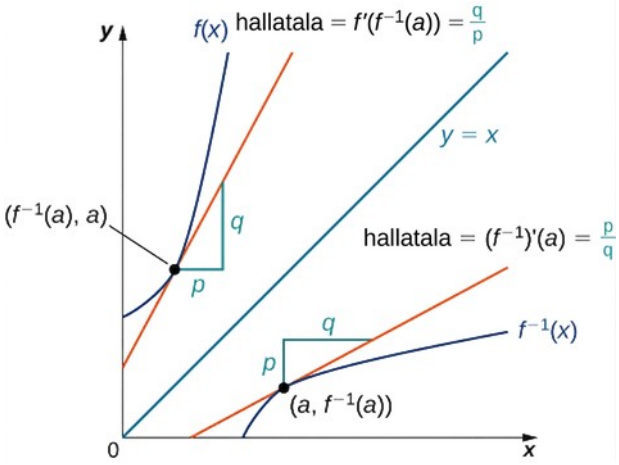
- 3.7.1 Reikna afleiðu andhverfs falls.
- 3.7.2 Þekkja afleiður helstu andhverfu hornafallanna.

Í þessum undirkafla könnum við sambandið milli afleiðu falls og afleiðu andhverfu þess. Þegar afleiða falls er þekkt má nota þetta samband til að finna afleiðu andhverfu þess án þess að beita markgildisskilgreiningu afleiðunnar. Einkum beitum við formúlunni fyrir afleiður andhverfra falla á hornaföll. Einnig má nota formúluna til að útvíkka veldisregluna þannig að hún gildi um ræða veldisvísa.

Afleiða andhverfs falls

Við byrjum á því að skoða fall og andhverfu þess. Ef $f(x)$ á sér andhverfu og er deildanlegt virðist eðlilegt að andhverfa $f(x)$ sé einnig deildanleg. Mynd 3.28 sýnir samband fallsins $f(x)$ og andhverfu þess $f^{-1}(x)$. Skoðum punktinn $\left(a, f^{-1}(a)\right)$ á grafi $f^{-1}(x)$ þar sem snertillinn hefur hallatöluna $\left(f^{-1}\right)'(a)=\frac{p}{q}$. Punkturinn samsvarar punktinum $\left(f^{-1}(a), a\right)$ á grafi $f(x)$ þar sem snertillinn hefur hallatöluna $f'\left(f^{-1}(a)\right)=\frac{q}{p}$. Ef $f^{-1}(x)$ er deildanlegt í punktinum a, hlýtur því að gilda að

$$\left(f^{-1}\right)'(a)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$



Mynd 3.28 Snertlar falls og andhverfu þess tengjast innbyrðis og hið sama gildir um afleiður fallanna.

Formúluna fyrir afleiðu andhverfunnar má einnig leiða út með því að nota að $x=f\left(f^{-1}(x)\right)$. Deildum báðar hliðar jöfnunnar og beitum keðjureglunni hægra megin. Þá fæst

$$1=f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x).$$

Einangrum $\left(f^{-1}\right)'(x)$, og fáum

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

(3.19)

Við tökum niðurstöðuna saman í setningunni hér á eftir.

SETNING 3.11

Setningin um afleiðu andhverfs falls

Látum $f(x)$ vera fall sem á sér andhverfu og er deildanlegt. Látum $y=f^{-1}(x)$ vera andhverfu $f(x)$. Fyrir öll x sem uppfylla $f'\left(f^{-1}(x)\right)\neq 0$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)=\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Þetta má líka rita svona: Ef $y=g(x)$ er andhverfa $f(x)$, þá

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}.$$

DÆMI 3.60

Beiting setningarinnar um afleiðu andhverfs falls

Notið setninguna um afleiðu andhverfs falls til að finna afleiðu $g(x)=\frac{x+2}{x}$. Berið afleiðuna sem fæst saman við þá sem fæst með því að deilda fallið beint.

Lausn

Andhverfa $g(x)=\frac{x+2}{x}$ er $f(x)=\frac{2}{x-1}$. Þar sem $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$, byrjum við á að finna $f'(x)$. Þá fæst

$$f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2} \text{ og } f'(g(x))=\frac{-2}{(g(x)-1)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{x+2}{x}-1\right)^2}=-\frac{x^2}{2}.$$

Að lokum fæst

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=-\frac{2}{x^2}.$$

Við getum staðfest að þetta sé rétta afleiðan með því að beita deilireglunni á $g(x)$ og fá þannig

$$g'(x)=-\frac{2}{x^2}.$$

STÖÐUMAT 3.42

Notið setninguna um afleiðu andhverfs falls til að finna afleiðu $g(x)=\frac{1}{x+2}$. Berið niðurstöðuna saman við afleiðuna sem fæst með því að deilda $g(x)$ beint.

DÆMI 3.61

Beiting setningarinnar um afleiðu andhverfs falls

Notið setninguna um afleiðu andhverfs falls til að finna afleiðu $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

Lausn

Fallið $g(x)=\sqrt[3]{x}$ er andhverfa fallsins $f(x)=x^3$. Þar sem $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$, byrjum við á að finna $f'(x)$. Þá fæst

$$f'(x)=3x^2 \text{ og } f'(g(x))=3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=3x^{2/3}.$$

Að lokum fæst

$$g'(x)=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

3

STÖÐUMAT 3.43

Finnið afleiðu $g(x)=\sqrt[5]{x}$ með því að beita setningunni um afleiðu andhverfs falls.

Dæmið hér á undan sýnir að nota má setninguna um afleiðu andhverfs falls til að útvíkka veldisregluna þannig að hún nái til veldisvísa af gerðinni $\frac{1}{n}$, þar sem n er jákvæð heiltala. Með þessari útvíkkun má að lokum deilda x^q, þar sem q er einhver ræð tala.

SETNING 3.12

Veldisreglan útvíkkuð til ræðra veldisvísa

Útvíkka má veldisregluna þannig að hún gildi um ræða veldisvísa. Sé n jákvæð heiltala gildir

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right)=\frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

(3.20)

Ef n er jákvæð heiltala og m einhver heiltala gildir einnig

$$\frac{d}{dx}\left(x^{m/n}\right)=\frac{m}{n}x^{(m/n)-1}.$$

(3.21)

Sönnun

Fallið $g(x)=x^{1/n}$ er andhverfa fallsins $f(x)=x^n$. Þar sem $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$, byrjum við á að finna $f'(x)$. Þá fæst

$$f'(x)=n\,x^{n-1} \text{ og } f'(g(x))=n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}=n\,x^{(n-1)/n}.$$

Að lokum fæst

$$g'(x)=\frac{1}{n\,x^{(n-1)/n}}=\frac{1}{n}x^{(1-n)/n}=\frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

Til að deilda $x^{m/n}$ verðum við að umrita það sem $\left(x^{1/n}\right)^m$ og beita keðjureglunni. Því fæst

$$\frac{d}{d\,x}\left(x^{m/n}\right)=\frac{d}{d\,x}\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right)=m\left(x^{1/n}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{(1/n)-1}=\frac{m}{n}x^{(m/n)-1}.$$

□

DÆMI 3.62

Veldisreglunni beitt á veldi með ræðum veldisvísi

Finnið jöfnu snertils við graf fallsins $y=x^{2/3}$ þar sem $x=8$.

Lausn

Finnum fyrst $\frac{d\,y}{d\,x}$ og reiknum gildi afleiðunnar þegar $x=8$. Þar sem

$$\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{2}{3}\,x^{-1/3} \text{ og } \frac{d\,y}{d\,x}\Big|_{x=8}=\frac{1}{3}$$

hallatala snertilsins við grafið í $x=8$ er $\frac{1}{3}$.

Setjum $x=8$ inn í upphaflega fallið og fáum $y=4$. Snertillinn fer því í gegnum punktinn $(8,4)$. Setjum hnit punktsins inn í punkthallaform jöfnu línu og fáum jöfnu snertilsins:

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$$

STÖÐUMAT 3.44

Finnið afleiðu $s(t)=\sqrt{2t+1}$.

Afleiður andhverfra hornafalla

Nú finnum við afleiður andhverfra hornafalla. Þessar afleiður reynast afar gagnlegar síðar í bókinni þegar fjallað verður um heildun. Afleiður andhverfra hornafalla koma nokkuð á óvart, því þær eru í raun algebruföll. Hingað til hafa afleiður algebrufalla reynst vera algebruföll og afleiður hornafalla hornaföll. Hér sjáum við í fyrsta sinn að afleiða falls þarf ekki að vera af sömu gerð og upphaflega fallið.

DÆMI 3.63

Afleiða andhverfu sínusfallsins

Notið setninguna um afleiðu andhverfs falls til að finna afleiðu $g(x)=\sin^{-1}x$.

Lausn

Fyrir x á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sin x$ er andhverfa $g(x)=\sin^{-1}x$, svo að við byrjum á að finna $f'(x)$. Þar sem

$$f'(x)=\cos x \text{ og } f'(g(x))=\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2},$$

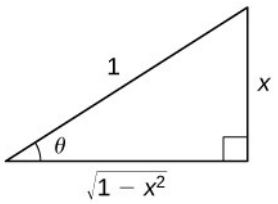
sjáum við að

$$g'(x)=\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3

Greining

Til að sjá að $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$, skoðum við eftirfarandi röksemdafærslu. Setjum $\sin^{-1}x=\theta$. Þá er $\sin\theta=x$ þar sem $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Skoðum fyrst tilvikið $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Þar sem θ er hvasst horn getum við teiknað rétthyrndan þríhyrning með horninu θ, langhlið af lengd 1 og mótlæga skammhlið við hornið θ af lengd x. Samkvæmt setningu Pýþagórasar hefur aðlæga skammhliðin við hornið θ lengdina $\sqrt{1-x^2}$. Þríhyrningurinn er sýndur á mynd 3.29. Af þríhyrningnum sést að $\cos(\sin^{-1}x)=\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$.



Mynd 3.29 Af rétthyrndum þríhyrningi með hvasst horn θ, langhlið af lengd 1, og mótlæga skammhlið við hornið θ af lengd x, sést að $\cos(\sin^{-1}x)=\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$.

Þegar $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$, gildir $0<-\theta<\frac{\pi}{2}$ og því

$$\cos(\sin^{-1}x)=\cos\theta=\cos(-\theta)=\sqrt{1-x^2}.$$

Ef $\theta=\frac{\pi}{2}$ eða $\theta=-\frac{\pi}{2}$, $x=1$ eða $x=-1$, og þar sem í báðum tilvikum er $\cos\theta=0$ og $\sqrt{1-x^2}=0$, fæst

$$\cos(\sin^{-1}x)=\cos\theta=\sqrt{1-x^2}.$$

Að lokum gildir að ef $\theta = 0$, þá er $x = 0$ og $\cos\theta = \sqrt{1-0} = 1$.

Því gildir í öllum tilvikum að $\cos\left(\sin^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$.

DÆMI 3.64

Beiting keðjureglunnar á andhverfa sínusfallið

Beitið keðjureglunni á formúluna sem leidd var út í dæmi 3.61 til að finna afleiðu $h(x) = \sin^{-1}\left(g(x)\right)$ og notið niðurstöðuna síðan til að finna afleiðu $h(x) = \sin^{-1}\left(2x^3\right)$.

Lausn

Beitum keðjureglunni á $h(x) = \sin^{-1}\left(g(x)\right)$, sem gefur

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(g(x)\right)^2}}\,g'(x).$$

Látum nú $g(x) = 2x^3$, þannig að $g'(x) = 6x^2$. Setjum þetta inn í niðurstöðuna hér að framan og fáum

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-4x^6}} \cdot 6x^2 \\ &= \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.45

Notið setninguna um afleiðu andhverfs falls til að finna afleiðu $g(x) = \tan^{-1}x$.

Afleiður hinna andhverfu hornafallanna má einnig finna með setningunni um afleiðu andhverfs falls. Formúlurnar eru í setningunni hér á eftir.

SETNING 3.13

Afleiður andhverfra hornafalla

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3.22)

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3.23)

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

(3.24)

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{1+x^2}$$

(3.25)

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

(3.26)

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

(3.27)

DÆMI 3.65

3

Deildunarformúlum beitt á andhverft tangensfall

Finnið afleiðu $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$.

Lausn

Látum $g(x)=x^2$, þannig að $g'(x)=2x$. Setjum þetta inn í jöfnu 3.24 og fáum

$$f'(x)=\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(2x).$$

Eftir einföldun fæst

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^4}.$$

DÆMI 3.66

Deildunarformúlum beitt á andhverft sínusfall

Finnið afleiðu $h(x)=x^2\sin^{-1}x$.

Lausn

Með því að beita margfeldisreglunni fæst

$$h'(x)=2x\sin^{-1}x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x^2.$$

STÖÐUMAT 3.46

Finnið afleiðu $h(x)=\cos^{-1}(3x-1)$.

DÆMI 3.67

Andhverfa tangensfallinu beitt

Staðsetningu agnar við tímann t lýsir fallið $s(t)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$ fyrir $t\geq\frac{1}{2}$. Finnið hraða agnarinnar við tímann $t=1$.

Lausn

Byrjum á að deilda $s(t)$ til að finna $v(t)$. Þá fæst

$$v(t)=s'(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\cdot\frac{-1}{t^2}.$$

Eftir einföldun fæst

$$v(t)=-\frac{1}{t^2+1}.$$

Því er $v(1)=-\frac{1}{2}$.

STÖÐUMAT 3.47

Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)=\sin^{-1}x$ þar sem $x=0$.

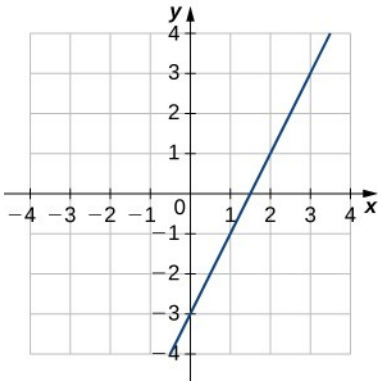
Æfingar úr kafla 3.7

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota graf fallsins $y=f(x)$ til að

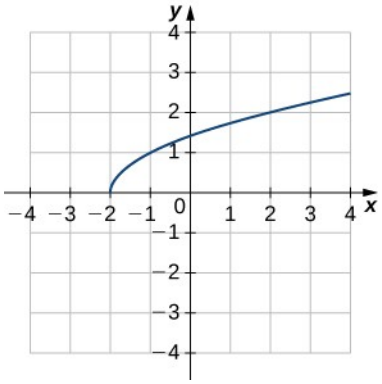
a. teiknið graf $y=f^{-1}(x)$, og

b. notið a-lið til að áætla $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

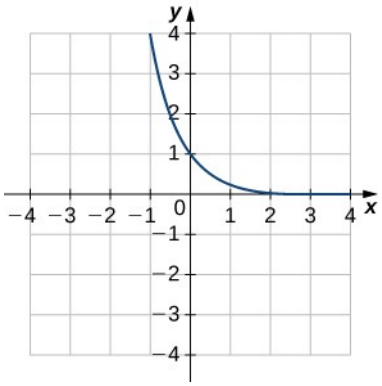
260.



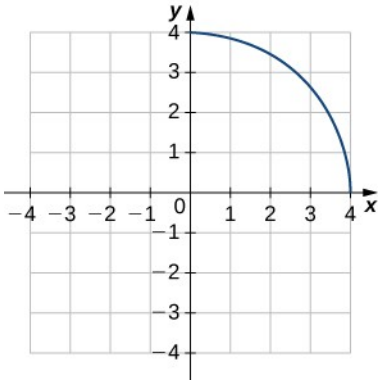
261.



262.



263.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota fallið $y=f(x)$ til að finna

a. $\frac{df}{dx}$ þegar $x=a$ og

b. $x=f^{-1}(y)$.

c. Notið síðan b-lið til að finna $\frac{df^{-1}}{dy}$ þegar $y=f(a)$.

264.

$$f(x)=6x-1, x=-2$$

265.

$$f(x)=2x^3-3, x=1$$

266.

$$f(x)=9-x^2, 0\le x\le 3, x=2$$

267.

$$f(x)=\sin x, x=0$$

Fyrir hvert eftirfarandi falla skuluð þið finna $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

268.

$$f(x)=x^2+3x+2, x\ge -\frac{3}{2}, a=2$$

269.

$$f(x)=x^3+2x+3, a=0$$

270.

$$f(x)=x+\sqrt{x}, a=2$$

271.

$$f(x)=x-\frac{2}{x}, x<0, a=1$$

272.

$$f(x)=x+\sin x, a=0$$

273.

$$f(x)=\tan x+3x^2, a=0; 0<x<\pi/2$$

Fyrir hvert hinna gefnu falla $y=f(x)$,

a. finnið hallatölu snertils við graf andhverfa fallsins f^{-1} í tilgreindum punkti P, og

b. finnið jöfnu snertils við graf f^{-1} í tilgreindum punkti.

274.

$$f(x)=\frac{4}{1+x^2}, P(2,1)$$

275.

$$f(x)=\sqrt{x-4}, P(2,8)$$

276.

$$f(x)=(x^3+1)^4, P(16,1)$$

277.

$$f(x)=-x^3-x+2, P(-8,2)$$

278.

$$f(x)=x^5+3x^3-4x-8, P(-8,1)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna $\frac{dy}{dx}$ fyrir gefið fall.

3

279.

$$y=\sin^{-1}(x^2)$$

280.

$$y=\cos^{-1}(\sqrt{x})$$

281.

$$y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

282.

$$y=\sqrt{\csc^{-1}x}$$

283.

$$y=(1+\tan^{-1}x)^3$$

284.

$$y=\cos^{-1}(2x)\cdot\sin^{-1}(2x)$$

285.

$$y=\frac{1}{\tan^{-1}(x)}$$

286.

$$y=\sec^{-1}(-x)$$

287.

$$y=\cot^{-1}\sqrt{4-x^2}$$

288.

$$y=x\cdot\csc^{-1}x$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota gefnu gildin til að finna $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

289.

$$f(\pi)=0, f'(\pi)=-1, a=0$$

290.

$$f(6)=2, f'(6)=\frac{1}{3}, a=2$$

291.

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-8, f'\left(\frac{1}{3}\right)=2, a=-8$$

292.

$$f(\sqrt{3})=\frac{1}{2}, f'(\sqrt{3})=\frac{2}{3}, a=\frac{1}{2}$$

293.

$$f(1)=-3, f'(1)=10, a=-3$$

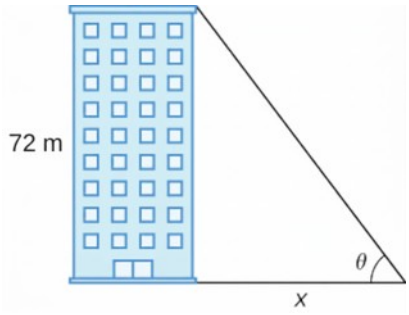
294.

$$f(1)=0, f'(1)=-2, a=0$$

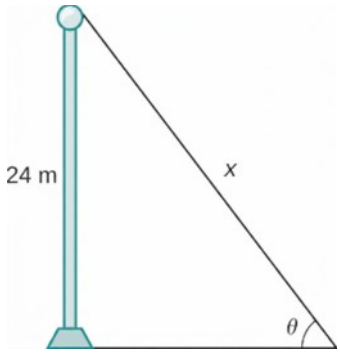
295. **[T]** Staðsetningu íshokkípökks á hreyfingu eftir t sekúndur lýsir fallið $s(t)=\tan^{-1}t$ þar sem s er mælt í metrum.

a. Finnið hraða íshokkípökksins við tímann t.
b. Finnið hröðun íshokkípökksins við tímann t.
c. Reiknið a- og b-lið fyrir $t=2, 4$, og 6 sekúndur.
d. Hvaða ályktun má draga af niðurstöðunum í c-lið?

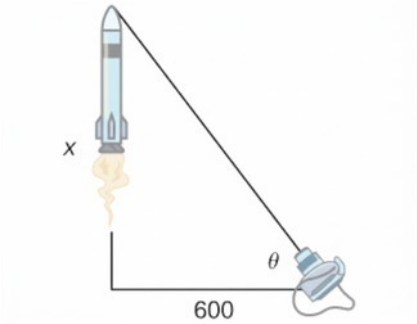
296. **[T]** Bygging sem er 72 metrar á hæð varpar mislöngum skugga x eftir því sem líður á daginn. Hæðarhornið θ myndast milli línanna sem liggja frá efsta og neðsta hluta byggingarinnar að enda skuggans, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd. Finnið breytingarhraða hæðarhornsins $\frac{d\theta}{dx}$ þegar $x=96$ m.



297. **[T]** Staur er 24 metrar á hæð. Horn θ myndast þegar vírar sem eru x metrar að lengd eru strengdir milli jarðar og topps staursins, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd. Finnið breytingarhraða hornsins $\frac{d\theta}{dx}$ þegar strengdur er 30 metra langur vír.



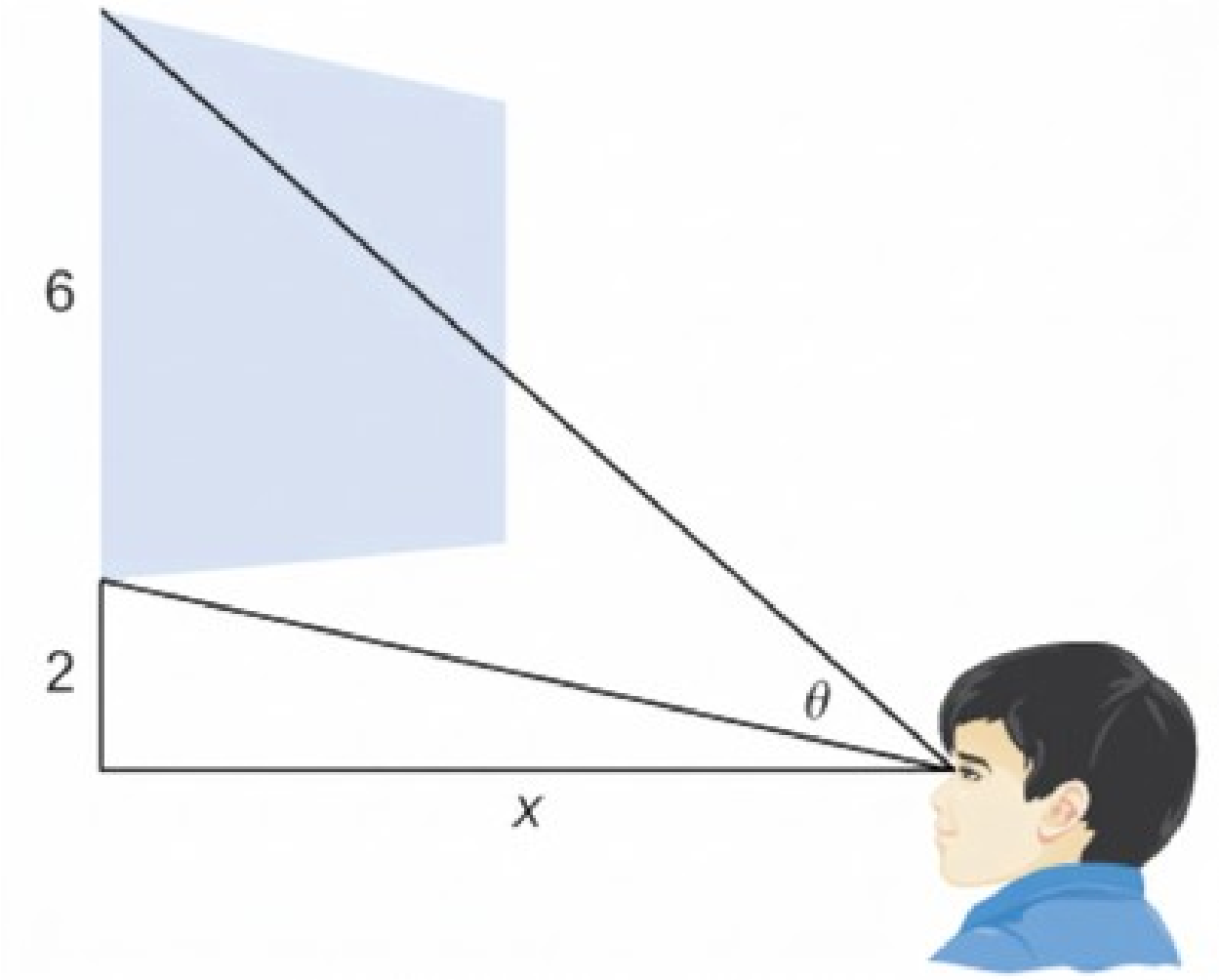
298. **[T]** Sjónvarpsmyndavél við yfirborð jarðar er í 600 metra fjarlægð frá skotpalli geimflaugar sem á að skjóta lóðrétt upp, eins og sést á eftirfarandi mynd. Hæðarhorn myndavélarinnar má finna með jöfnunni $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{600}\right)$, þar sem x er hæð geimflaugarinnar. Finnið breytingarhraða hæðarhornsins eftir flugtak þegar 1000 metrar eru milli myndavélarinnar og geimflaugarinnar.



299. **[T]** Kvikmyndahús í nágrenninu er með 6 metra hátt sýningartjald sem er 2 metrum ofan við augnhæð sitjandi áhorfanda. Sjónarhornið θ (í radíönum) er gefið með

$$\theta = \cot^{-1}\frac{x}{8} - \cot^{-1}\frac{x}{2},$$

þar sem x er fjarlægðin í metrum frá kvikmyndatjaldinu að sæti viðkomandi, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



a. Finnið $\frac{d\theta}{dx}$.

b. Reiknið $\frac{d\theta}{dx}$ fyrir $x=1,2,3$, og 4.

c. Túlkið niðurstöðurnar í b-lið.

d. Reiknið $\frac{d\theta}{dx}$ fyrir $x=5,6,7$, og 8

e. Túlkið niðurstöðurnar í d-lið. Í hvaða fjarlægð x frá tjaldinu ætti einstaklingurinn að sitja til þess að sjónarhornið verði sem stærst?

3.8 Fólgin deildun

NÁMSMARKMIÐ

- 3.8.1 Finna afleiðu flókins falls með fólginni deildun.
- 3.8.2 Nota fólgna deildun til að ákvarða jöfnu snertils.

Við höfum þegar kannað hvernig finna má jöfnur snertla við gröf falla og breytingarhraða falls í tilteknum punkti. Í öllum þessum tilvikum höfðum við beina formúlu fyrir fallið og gátum því deildað það beint. Gerum nú þess í stað ráð fyrir að við viljum ákvarða jöfnu snertils við feril eða breytingarhraða hans í tilteknum punkti. Í þessum undirkafla leysum við þessi verkefni með því að finna afleiður falla sem skilgreina y óbeint sem fall af x.

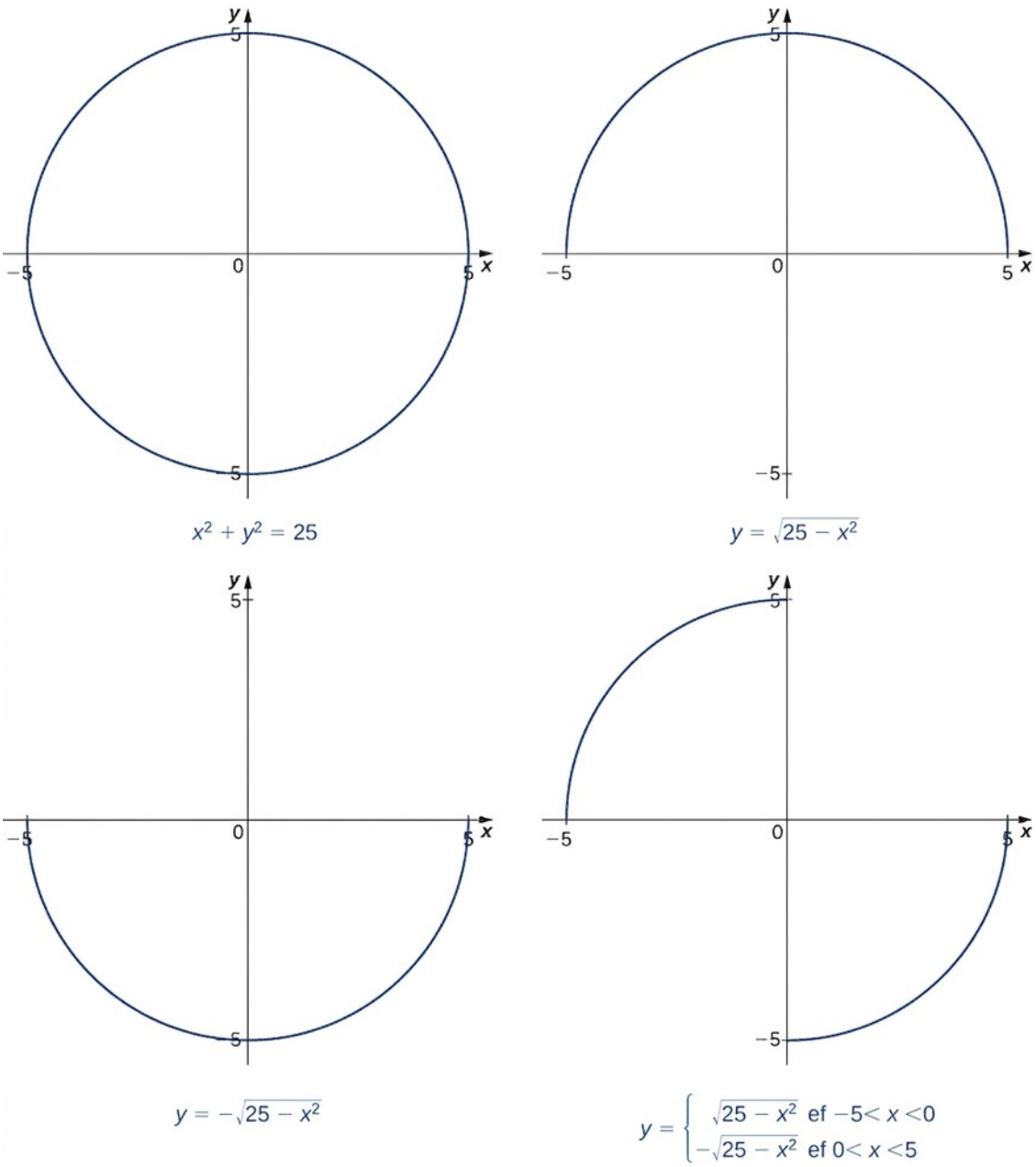
Fólgin deildun

Þegar háða breytan y er fall af óháðu breytunni x, er y yfirleitt ritað sem fall af x. Þá segjum við að y sé beint gefið sem fall af x. Þegar við ritum til dæmis jöfnuna $y=x^2+1$, skilgreinum við y beint sem fall af x. Þegar samband y og x er hins vegar gefið með jöfnu þar sem y er ekki einangrað sem fall af x, segjum við að jafnan skilgreini y óbeint sem fall af x. Jafnan $y-x^2=1$ skilgreinir til dæmis fallið $y=x^2+1$ óbeint.

Með fólginni deildun má finna hallatölur snertla við ferla sem eru ekki gröf falla og standast því ekki lóðrétta línuprófið. Aðferðin byggist á því að lýsa megi hlutum af y með föllum sem uppfylla gefnu jöfnuna, þótt y í heild sé ekki fall af x.

Almennt skilgreinir jafna fall óbeint ef fallið uppfyllir jöfnuna. Sama jafna getur skilgreint mörg mismunandi föll óbeint. Til dæmis eru föllin

$y=\sqrt{25-x^2}$, $y=-\sqrt{25-x^2}$, og $y=\begin{cases}\sqrt{25-x^2} & \text{ef } -5<x<0\\ -\sqrt{25-x^2} & \text{ef } 0<x<25\end{cases}$, sem sýnd eru á mynd 3.30, eru aðeins þrjú af fjölmörgum föllum sem skilgreind eru óbeint með jöfnunni $x^2+y^2=25$.



Mynd 3.30 Jafnan $x^2+y^2=25$ skilgreinir mörg föll óbeint.

Til að finna hallatölu snertils við graf $x^2+y^2=25$ í punktinum $(3,4)$, gætum við reiknað gildi afleiðu fallsins $y=\sqrt{25-x^2}$ í $x=3$. Til að finna hallatölu snertilsins í punktinum $(3,-4)$, gætum við hins vegar notað afleiðu $y=-\sqrt{25-x^2}$. Ekki er þó alltaf auðvelt að einangra fall sem er skilgreint óbeint með jöfnu. Með fólginni deildun má finna afleiðu slíks falls án þess að einangra það fyrst. Eftirfarandi lausnarstefna lýsir því hvernig finna má $\frac{dy}{dx}$ með fólginni deildun.

LAUSNARSTEFNA

Fólgin deildun

Til að beita fólginni deildun á jöfnu sem skilgreinir y óbeint sem fall af breytunni x, skuluð þið fylgja eftirfarandi skrefum:

1. Deildið báðar hliðar jöfnunnar. Hafið í huga að y er fall af x. Þá er $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$, $\frac{d}{dx}(\sin y)=\cos y\frac{dy}{dx}$, þar sem beita þarf keðjureglunni þegar sin y er deildað með tilliti til x.
2. Umritið jöfnuna þannig að allir liðir sem innihalda $\frac{dy}{dx}$ séu vinstra megin og allir liðir sem innihalda ekki $\frac{dy}{dx}$ séu hægra megin.
3. Takið $\frac{dy}{dx}$ út fyrir sviga vinstra megin.
4. Einangrið $\frac{dy}{dx}$ með því að deila báðum hliðum jöfnunnar með viðeigandi algebrustæðu.

3

DÆMI 3.68

Beiting fólginnar deildunar

Ef fallið y er skilgreint óbeint með jöfnunni $x^2+y^2=25$, finnið þá $\frac{dy}{dx}$.

Lausn

Fylgið skrefunum í lausnarstefnunni.

$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(25)$ Skref 1. Deildið báðar hliðar jöfnunnar.

$\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)=0$ Skref 1.1. Beitið samlagningarreglunni vinstra megin. Hægra megin er $\frac{d}{dx}(25)=0$.

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ Skref 1.2. Reiknið afleiðurnar. Þá fæst

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x$$

og $\frac{d}{dx}(y^2)=2y\frac{dy}{dx}$.

$2\ y\ \frac{d\ y}{d\ x}=-2\ x$ Skref 2. Hafið liðina sem innihalda $\frac{d\ y}{d\ x}$ vinstra megin. Færið hina liðina yfir á hægri hlið.

$\frac{d\ y}{d\ x}=-\frac{x}{y}$ Skref 4. Deilið báðum hliðum jöfnunnar með $2\ y$. (Skref 3 á ekki við í þessu tilviki.)

Greining

Athugið að stæðan fyrir $\frac{d\ y}{d\ x}$ inniheldur bæði óháðu breytuna x og háðu breytuna y. Í sumum tilvikum má rita $\frac{d\ y}{d\ x}$ eingöngu sem fall af x, en almennt er það ekki hægt.

DÆMI 3.69

Beiting fólginnar deildunar og margfeldisreglunnar

Ef fallið y er skilgreint óbeint með jöfnunni $x^3 \sin y+y=4\,x+3$, finnið þá $\frac{d\ y}{d\ x}$.

Lausn

$\frac{d}{d\ x}\left(x^3\ \sin\ \ y+y\right)=\frac{d}{d\ x}\left(4\ x+3\right)$ Skref 1: Deildið báðar hliðar jöfnunnar.

$\frac{d}{d\ x}\left(x^3\ \sin\ \ y\right)+\frac{d}{d\ x}\left(y\right)=4$ Skref 1.1: Beitið samlagningarreglunni vinstra megin. Hægra megin er $\frac{d}{d\ x}\left(4\ x+3\right)=4$.

$\left(\frac{d}{d\ x}\left(x^3\right)\cdot\sin\ \ y+\frac{d}{d\ x}\left(\sin\ \ y\right)\cdot x^3\right)+\frac{d\ y}{d\ x}=4$ Skref 1.2: Beitið margfeldisreglunni til að finna $\frac{d}{d\ x}\left(x^3\ \sin\ \ y\right)$. Athugið að $\frac{d}{d\ x}\left(y\right)=\frac{d\ y}{d\ x}$.

$3\ x^2\ \sin\ \ y+\left(\cos\ \ y\ \frac{d\ y}{d\ x}\right)\cdot x^3+\frac{d\ y}{d\ x}=4$ Skref 1.3: Við vitum að $\frac{d}{d\ x}\left(x^3\right)=3\ x^2$. Beitið keðjureglunni til að fá $\frac{d}{d\ x}\left(\sin\ \ y\right)=\cos\ \ y\ \frac{d\ y}{d\ x}$.

$\mathrm{x}^3\ \cos\ \ y\ \frac{d\ y}{d\ x}+\frac{d\ y}{d\ x}=4-3\ x^2\ \sin\ \ y$ Skref 2: Hafið alla liði sem innihalda $\frac{d\ y}{d\ x}$ vinstra megin. Færið alla aðra liði yfir á hægri hlið.

$\frac{d\ y}{d\ x}\left(\mathrm{x}^3\ \cos\ \ y+1\right)=4-3\ x^2\ \sin\ \ y$ Skref 3: Takið $\frac{d\ y}{d\ x}$ út fyrir sviga vinstra megin.

$\frac{d\ y}{d\ x}=\frac{4-3\ x^2\ \sin\ \ y}{x^3\ \cos\ \ y+1}$ Skref 4: Einangrið $\frac{d\ y}{d\ x}$ með því að deila báðum hliðum jöfnunnar með $x^3\ \cos\ \ y+1$.

DÆMI 3.70

Önnur afleiða fundin með fólginni deildun

Finnið $\frac{d^2y}{dx^2}$ ef $x^2+y^2=25$.

Lausn

Í dæmi 3.68 sýndum við að $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. Með því að deilda báðar hliðar þessarar jöfnu má finna $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$\frac{d^2\ y}{d\ x^2}\ \ \ \ =\frac{d}{d\ x}\left(-\frac{x}{y}\right)$ Deildið báðar hliðar jöfnunnar $\frac{d\ y}{d\ x}=-\frac{x}{y}$.

$=-\frac{\left(1\cdot y-x\ \frac{d\ y}{d\ x}\right)}{y^2}$ Beitið deilingarreglunni til að finna $\frac{d}{d\ y}\left(-\frac{x}{y}\right)$.

$=\frac{-y+x\ \frac{d\ y}{d\ x}}{y^2}$ Einfaldið.

$=\frac{-y+x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$ Setjið inn $\frac{d\ y}{d\ x}=-\frac{x}{y}$.

$=\frac{-y^2-x^2}{y^3}$ Einfaldið.

Nú höfum við fundið stæðu fyrir $\frac{d^2y}{dx^2}$. Hana má einfalda frekar með því að nota $x^2+y^2=25$ í teljaranum. Þá fæst $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{25}{y^3}$.

STÖÐUMAT 3.48

Finnið $\frac{dy}{dx}$ ef y er skilgreint óbeint með jöfnunni $4x^5+\tan y=y^2+5x$.

Jöfnur snertla fundnar með fólginni deildun

Nú þegar við höfum kynnst fólginni deildun getum við notað hana til að finna jöfnur snertla við ferla sem jöfnur lýsa.

DÆMI 3.71

Snertill við hring fundinn

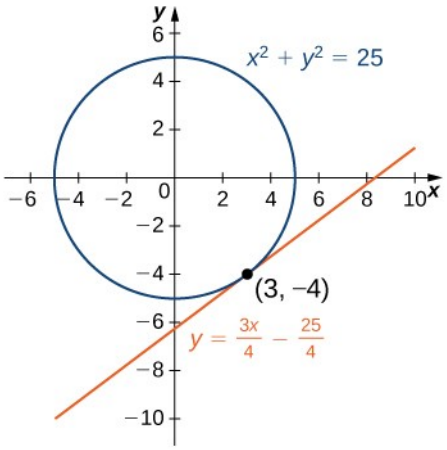
Finnið jöfnu snertils við ferilinn $x^2+y^2=25$ í punktinum $(3,-4)$.

Lausn

Þótt finna mætti jöfnuna án fólginnar deildunar verður lausnin mun einfaldari með þeirri aðferð. Í dæmi 3.68 fengum við $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

Hallatala snertilsins fæst með því að setja $(3,-4)$ inn í þessa stæðu. Hallatala snertilsins er því $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Setjum punktinn $(3,-4)$ og hallatöluna $\frac{3}{4}$ inn í punkthallajöfnu línu. Þá fæst jafnan $y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$ (mynd 3.31).

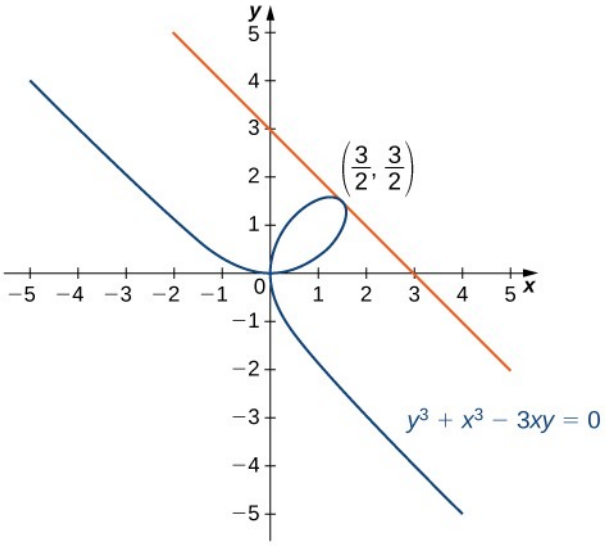


Mynd 3.31 Línan $y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$ er snertill við $x^2+y^2=25$ í punktinum (3, −4).

DÆMI 3.72

Jafna snertils við feril fundin

Finnið jöfnu snertils við graf $y^3+x^3-3\,x\,y=0$ í punktinum $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ (mynd 3.32). Þessi ferill nefnist Descartes-lauf.



Mynd 3.32 Snertill við Descartes-laufið fundinn í punktinum $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Lausn

Byrjum á að finna $\frac{d\,y}{d\,x}$.

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left(y^3+x^3-3xy\right) &= \tfrac{d}{dx}(0) \\ 3y^2\tfrac{dy}{dx}+3x^2-\left(3y+\tfrac{dy}{dx}3x\right) &= 0 \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{3y-3x^2}{3y^2-3x}. \end{aligned}$$

Næst setjum við $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ inn í $\frac{d\,y}{d\,x}=\frac{3\,y-3\,x^2}{3\,y^2-3\,x}$ til að finna hallatölu snertilsins:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}=-1.$$

Að lokum setjum við þetta inn í punkthallajöfnu línunnar og fáum

$$y=-x+3.$$

DÆMI 3.73

Beiting fólginnar deildunar

Í einföldum tölvuleik ferðast eldflaug eftir sporöskjulaga braut sem lýst er með jöfnunni $4x^2+25y^2=100$. Eldflaugin getur skotið flugskeytum eftir snertlum við brautina. Markmið leiksins er að eyða smástirni sem kemur eftir jákvæða x-ásnum í átt að $(0,0)$. Ef eldflaugin skýtur flugskeyti úr punktinum $\left(3,\frac{8}{5}\right)$, hvar sker það x-ásinn?

Lausn

Til að leysa verkefnið þurfum við að finna hvar snertillinn við graf $4x^2+25y^2=100$ í $\left(3,\frac{8}{5}\right)$ sker x-ásinn. Byrjum á að finna $\frac{dy}{dx}$ með fólginni deildun.

Við deildun fæst

$$8x+50y\frac{dy}{dx}=0.$$

Ef við einangrum $\frac{dy}{dx}$, fæst

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{25y}.$$

Hallatala snertilsins er $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(3,\frac{8}{5}\right)}=-\frac{3}{10}$. Jafna snertilsins er $y=-\frac{3}{10}x+\frac{5}{2}$. Til að finna skurðpunkt línunnar og x-ássins leysum við $0=-\frac{3}{10}x+\frac{5}{2}$. Lausnin er $x=\frac{25}{3}$. Flugskeytið sker því x-ásinn í punktinum $\left(\frac{25}{3},0\right)$.

STÖÐUMAT 3.49

Finnið jöfnu snertils við breiðbogann $x^2-y^2=16$ í punktinum $(5,3)$.

Æfingar úr kafla 3.8

Notið fólgna deildun í eftirfarandi æfingum til að finna $\frac{dy}{dx}$.

300.

$$x^2-y^2=4$$

301.

$$6x^2+3y^2=12$$

302.

$$x^2 y = y - 7$$

303.

$$3x^3 + 9xy^2 = 5x^3$$

304.

$$xy - \cos(xy) = 1$$

305.

$$y\sqrt{x+4} = xy + 8$$

306.

$$-xy - 2 = \frac{x}{7}$$

307.

$$y\sin(xy) = y^2 - 2$$

308.

$$(xy)^2 + 3x = y^2$$

309.

$$x^3 y + xy^3 = -8$$

Finnið í eftirfarandi æfingum jöfnu snertils við ferilinn sem gefna jafnan lýsir í tilgreindum punkti. Notið reiknivél eða tölvuforrit til að teikna ferilinn og snertilinn.

310. [T] $x^4 y - xy^3 = -2, (-1, -1)$

311. [T] $x^2 y^2 + 5xy = 14, (2, 1)$

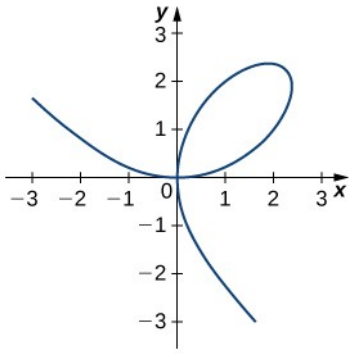
312. [T] $\tan(xy) = y, \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

313. [T] $xy^2 + \sin(\pi y) - 2x^2 = 10, (2, -3)$

314. [T] $\frac{x}{y} + 5x - 7 = -\frac{3}{4}y, (1, 2)$

315. [T] $xy + \sin(x) = 1, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

316. [T] Graf Descartes-laufs sem gefið er með jöfnunni $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ er sýnt á eftirfarandi mynd.



a. Finnið jöfnu snertilsins í punktinum $(2,1)$. Teiknið snertilinn ásamt Descartes-laufinu.

b. Finnið jöfnu þverlínunnar við snertilinn úr a-lið í punktinum $(2,1)$.

317. Fyrir jöfnuna $x^2+2xy-3y^2=0$,

a. Finnið jöfnu þverlínunnar við snertilinn í punktinum $(1,1)$.

b. Í hvaða öðrum punkti sker þverlínan úr a-lið ferilinn sem jafnan lýsir?

318. Finnið alla punkta á grafi $y^3-27y=x^2-90$ þar sem snertillinn er lóðréttur.

319. Fyrir jöfnuna $x^2+xy+y^2=7$,

a. Finnið x-skurðpunkta.

b. Finnið hallatölur snertlanna í x-skurðpunktunum.

c. Hvað segja gildin í b-lið um snertlana?

320. Finnið jöfnu snertils við ferilinn sem jafnan $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{6}$ lýsir í punktinum $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

321. Finnið jöfnu snertils við ferilinn sem jafnan $\tan^{-1}(x+y)=x^2+\frac{\pi}{4}$ lýsir í punktinum $(0,1)$.

322. Finnið y' og y'' fyrir $x^2+6xy-2y^2=3$.

323. **[T]** Fjölda farsíma sem framleiðandi getur framleitt þegar x dölum er varið í vinnuafl og y dölum í fjármagn má lýsa með jöfnunni $60x^{3/4}y^{1/4}=3240$.

a. Finnið $\frac{dy}{dx}$ og reiknið gildið í punktinum $(81,16)$.

b. Túlkið niðurstöðuna úr a-lið.

324. **[T]** Fjölda bíla sem framleiðandi getur framleitt þegar x dölum er varið í vinnuafl og y dölum í fjármagn má lýsa með jöfnunni $30x^{1/3}y^{2/3}=360$.

(Bæði x og y eru gefin upp í þúsundum evra.)

a. Finnið $\frac{dy}{dx}$ og reiknið gildið í punktinum $(27,8)$.

b. Túlkið niðurstöðuna úr a-lið.

325. Rúmmál réttrar hringkeilu með geisla x og hæð y er $V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$. Gerum ráð fyrir að rúmmál keilunnar sé fast. Finnið $\frac{dy}{dx}$ þegar $x=4$ og $y=16$.

Í eftirfarandi æfingum er miðað við lokaðan rétthyrndan kassa með ferningslaga botni, hliðarlengd x og hæð y.

326. Finnið formúlu fyrir yfirborðsflatarmál rétthyrnda kassans, $S(x,y)$.

327. Finnið $\frac{dy}{dx}$ þegar yfirborðsflatarmál rétthyrnda kassans er 78 fersentimetrar, $x=3$ cm og $y=5$ cm.

Notið fólgna deildun í eftirfarandi æfingum til að finna y'. Er svarið í samræmi við formúlurnar sem við höfum áður fundið?

3

328.

$$x=\sin y$$

329.

$$x=\cos y$$

330.

$$x=\tan y$$

3.9 Afleiður vísis- og lografalla

NÁMSMARKMIÐ

- 3.9.1 Finna afleiðu vísisfalla.
- 3.9.2 Finna afleiðu lografalla.
- 3.9.3 Nota logradeildun til að ákvarða afleiðu falls.

Hingað til höfum við lært að deilda ýmiss konar föll, þar á meðal hornaföll, andhverf föll og fólgin föll. Í þessum undirkafla könnum við afleiður vísisfalla og lografalla. Eins og fjallað var um í Inngangi að föllum og gröfum gegna vísisföll mikilvægu hlutverki í líkönum af stofnvexti og hrörnun geislavirkra efna. Með lograföllum má færa stórar stærðir yfir á annan kvarða og umrita flóknar stæður á einfaldara form.

Afleiða vísisfallsins

Líkt og um önnur föll má finna afleiður vísisfalla og lografalla með formúlum. Þegar við leiðum þessar formúlur út þurfum við að gefa okkur nokkrar grunnforsendur. Sönnun þess að forsendurnar standist fellur utan efnis þessa námskeiðs.

Til að byrja með gerum við ráð fyrir að fallið $B(x)=b^x, b>0$, sé skilgreint fyrir allar rauntölur og sé samfellt. Í fyrri námskeiðum voru gildi vísisfalla skilgreind fyrir allar ræðar tölur. Fyrst var skilgreint veldið b^n, þar sem n er jákvæð heiltala: það er margfeldið sem fæst þegar b er margfaldað með sjálfu sér n sinnum. Síðar skilgreindum við $b^0=1, b^{-n}=\frac{1}{b^n}$, fyrir jákvæða heiltölu n, og $b^{s/t}=\left(\sqrt[t]{b}\right)^s$ fyrir jákvæðar heiltölur s og t. Þessar skilgreiningar segja þó ekki hvert gildi b^r er þegar r er einhver rauntala. Ef við gerum ráð fyrir samfelldni fallsins $B(x)=b^x, b>0$, má túlka b^r sem $\lim_{x\to r} b^x$ þar sem x tekur aðeins ræð gildi þegar markgildið er reiknað. Til dæmis má líta á 4^π sem töluna sem uppfyllir

$$4^3<4^\pi<4^4, 4^{3,1}<4^\pi<4^{3,2}, 4^{3,14}<4^\pi<4^{3,15},$$
$$4^{3,141}<4^\pi<4^{3,142}, 4^{3,1415}<4^\pi<4^{3,1416}, \ldots.$$

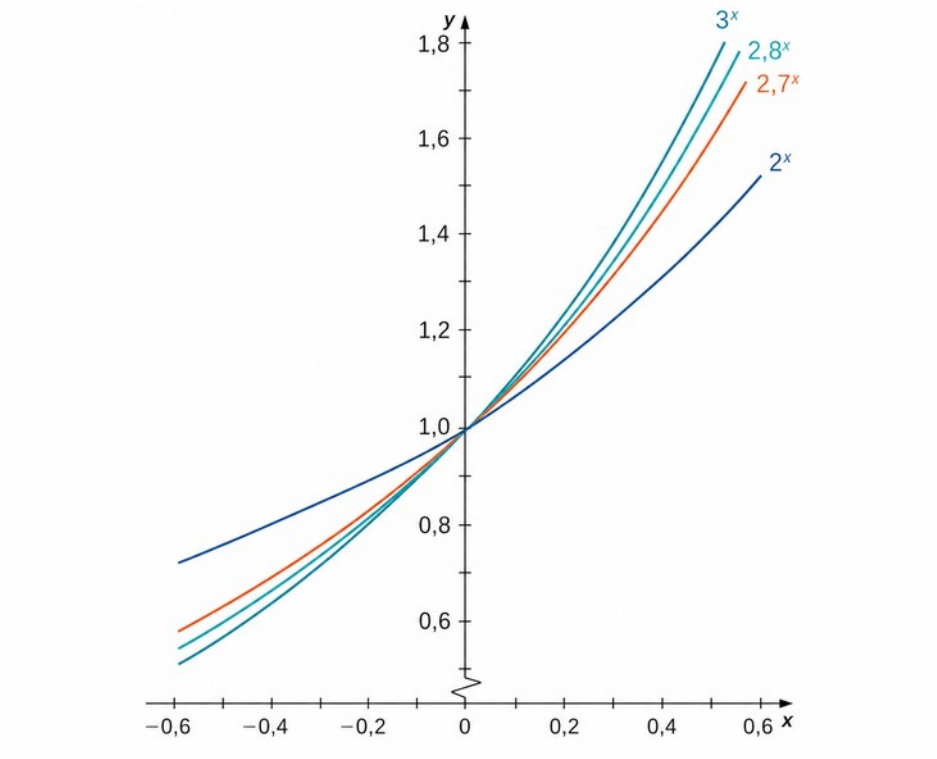
Eins og eftirfarandi tafla sýnir er $4^\pi\approx 77{,}88$.

Tafla 3.6 Nálgun á gildi 4^π

x	4^x	x	4^x
3	64	3,141593	77.8802710486
3,1	73.5166947198	3,1416	77.8810268071
3,14	77.7084726013	3,142	77.9242251944
3,141	77.8162741237	3,15	78.7932424541
3,1415	77.8702309526	3,2	84.4485062895
3,14159	77.8799471543	4	256

Við gerum einnig ráð fyrir að fyrir $B(x)=b^x, b>0$, sé afleiðan $B'(0)$ til. Í þessum undirkafla sýnum við að með þessari einu viðbótarforsendu má sanna að fallið $B(x)$ sé deildanlegt alls staðar.

Við gefum okkur að lokum eina forsendu enn: að til sé nákvæmlega eitt gildi $b>0$ sem uppfyllir $B'(0)=1$. Við skilgreinum e sem þetta eina gildi, líkt og við gerðum í Inngangi að föllum og gröfum. Mynd 3.33 sýnir gröf fallanna $y=2^x$, $y=3^x$, $y=2{,}7^x$, og $y=2{,}8^x$. Ef við metum hallatölur snertla þessara falla í 0 af gröfunum bendir það til þess að gildi e liggi á milli 2,7 og 2,8. Fallið $E(x)=e^x$ kallast náttúrulega vísisfallið. Andhverfa þess, $L(x)=\log_e x=\ln x$, kallast náttúrulega lografallið.



Mynd 3.33 Graf $E(x)=e^x$ liggur milli grafanna $y=2^x$ og $y=3^x$.

Til að fá nákvæmara mat á e, getum við útbúið töflu með mati á $B'(0)$ fyrir föll af gerðinni $B(x)=b^x$. Áður en við gerum það skulum við rifja upp að

$$B'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{b^x-b^0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}\approx\frac{b^x-1}{x}$$

for values of x very close to zero. For our estimates, we choose $x=0{,}00001$ and $x=-0{,}00001$ to obtain the estimate

$$\frac{b^{-0{,}00001}-1}{-0{,}00001}<B'(0)<\frac{b^{0{,}00001}-1}{0{,}00001}.$$

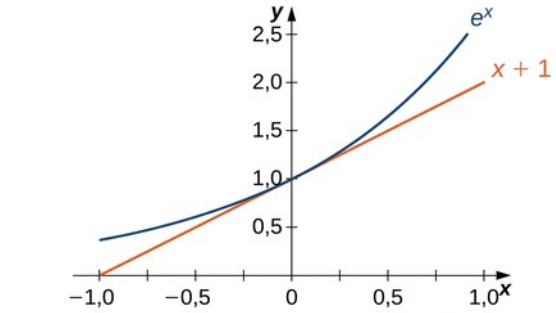
Sjá eftirfarandi töflu.

Tafla 3.7 Mat á gildi e

b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001}<B'(0)<\frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$	b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001}<B'(0)<\frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$
2	$0,693145<B'(0)<0,69315$	2,7183	$1,000002<B'(0)<1,000012$
2,7	$0,993247<B'(0)<0,993257$	2,719	$1,000259<B'(0)<1,000269$
2,71	$0,996944<B'(0)<0,996954$	2,72	$1,000627<B'(0)<1,000637$
2,718	$0,999891<B'(0)<0,999901$	2,8	$1,029614<B'(0)<1,029625$
2,7182	$0,999965<B'(0)<0,999975$	3	$1,098606<B'(0)<1,098618$

The evidence from the table suggests that $2,7182<e<2,7183$.

Graf fallsins $E(x)=e^x$ og línan $y=x+1$ eru sýnd á mynd 3.34. Línan er snertill við graf fallsins $E(x)=e^x$ í $x=0$.



Mynd 3.34 Snertillinn við $E(x)=e^x$ í $x=0$ hefur hallatöluna 1.

Nú þegar grunnforsendurnar liggja fyrir byrjum við á því að skoða afleiðu $B(x)=b^x, b>0$. Munum að við höfum gert ráð fyrir að $B'(0)$ sé til. Markgildisskilgreining afleiðunnar gefur

$$B'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{b^{0+h}-b^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}.$$

(3.28)

Ef við skoðum $B'(x)$, fæst eftirfarandi.

$B'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{b^{x+h}-b^x}{h}$ Beitið markgildisskilgreiningu afleiðunnar.

$= \lim_{h\to 0}\frac{b^x\,b^h-b^x}{h}$ Athugið að $b^{x+h}=b^x\,b^h$.

$= \lim_{h\to 0}\frac{b^x\,(b^h-1)}{h}$ Takið út fyrir sviga b^x.

$= b^x \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ Beitið reglu um markgildi.

$= b^x \, B'(0)$ Notið $B'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{b^{0+h} - b^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$.

Við sjáum að með þeirri forsendu að $B(x) = b^x$ sé deildanlegt í 0, $B(x)$ er ekki aðeins deildanlegt alls staðar heldur er afleiða þess

$$B'(x) = b^x B'(0).$$

(3.29)

Fyrir $E(x) = e^x$, $E'(0) = 1$. Því fæst $E'(x) = e^x$. (Gildi $B'(0)$ fyrir almennt fall af gerðinni $B(x) = b^x$, $b > 0$, verður leitt út síðar.)

SETNING 3.14

3

Afleiða náttúrulega vísisfallsins

Látum $E(x) = e^x$ vera náttúrulega vísisfallið. Þá gildir

$$E'(x) = e^x.$$

Almennt gildir

$$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = e^{g(x)} g'(x).$$

DÆMI 3.74

Afleiða vísisfalls

Finnið afleiðu $f(x) = e^{\tan(2x)}$.

Lausn

Með afleiðuformúlunni og keðjureglunni fæst

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\tan(2x)} \tfrac{d}{dx}(\tan(2x)) \\ &= e^{\tan(2x)} \sec^2(2x) \cdot 2. \end{aligned}$$

DÆMI 3.75

Deildunarreglum beitt saman

Finnið afleiðu $y = \frac{e^{x^2}}{x}$.

Lausn

Notið afleiðu náttúrulega vísisfallsins, deiliregluna og keðjuregluna.

$$y' = \frac{\left(e^{x^2}\cdot 2\right)\, x\cdot x - 1\cdot e^{x^2}}{x^2} \qquad \text{Beitið deilireglunni.}$$

$$= \frac{e^{x^2}\left(2\, x^2 - 1\right)}{x^2} \qquad \text{Einfaldið.}$$

STÖÐUMAT 3.50

Finnið afleiðu $h(x) = x\, e^{2x}$.

DÆMI 3.76

Náttúrulega vísisfallinu beitt

Moskítóflugnastofn telur 1000 einstaklinga í upphafi. Eftir t daga er stofnstærðin gefin með $A\,(t) = 1000\; e^{0{,}3\, t}$. Sýnið að breytingarhraði stofnsins, $A'(t)$, sem hlutfall af stofnstærðinni, $A(t)$, sé fasti.

Lausn

Finnið fyrst $A'(t)$. Með því að beita keðjureglunni fæst $A'\,(t) = 300\; e^{0{,}3\, t}$. Breytingarhraði stofnsins sem hlutfall af stofnstærðinni er því gefinn með

$$\frac{A'\,(t)}{A\,(t)} = \frac{300\; e^{0{,}3\, t}}{1000\; e^{0{,}3\, t}} = 0{,}3.$$

Breytingarhraði stofnsins sem hlutfall af stofnstærðinni er fastinn 0,3.

STÖÐUMAT 3.51

Fallið $A\,(t) = 1000\; e^{0{,}3\, t}$ lýsir moskítóflugnastofninum eftir t daga eins og í dæminu hér á undan. Hver er breytingarhraði $A(t)$ eftir 4 daga?

Afleiða lografallsins

Nú þegar við þekkjum afleiðu náttúrulega vísisfallsins getum við notað fólgna deildun til að finna afleiðu andhverfu þess, náttúrulega lografallsins.

SETNING 3.15

Afleiða náttúrulega lografallsins

Ef $x > 0$ og $y = \ln x$, þá

$$\frac{d\, y}{d\, x} = \frac{1}{x}.$$

(3.30)

Almennt látum við $g(x)$ vera deildanlegt fall. Fyrir öll gildi x sem uppfylla $g(x)>0$, er afleiða $h(x)=\ln(g(x))$ gefin með

$$h'(x)=\frac{1}{g(x)}g'(x).$$

(3.31)

Sönnun

Ef $x>0$ og $y=\ln x$, þá $e^y=x$. Með því að deilda báðar hliðar þessarar jöfnu fæst jafnan

$$e^y\frac{dy}{dx}=1.$$

Þegar $\frac{dy}{dx}$ er einangrað fæst

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}.$$

Að lokum setjum við $x=e^y$ inn og fáum

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}.$$

Einnig má leiða þessa niðurstöðu út með setningunni um afleiðu andhverfs falls. Þar sem $y=g(x)=\ln x$ er andhverfa fallsins $f(x)=e^x$, gefur setningin um afleiðu andhverfs falls að

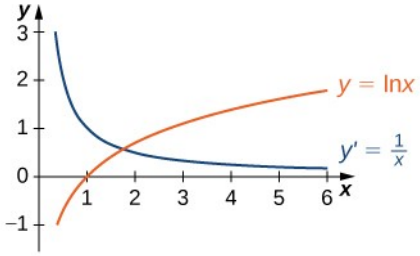
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

Með þessari niðurstöðu og keðjureglunni fyrir $h(x)=\ln(g(x))$ fæst

$$h'(x)=\frac{1}{g(x)}g'(x).$$

□

Graf fallsins $y=\ln x$ og afleiða þess $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ eru sýnd á mynd 3.35.



Mynd 3.35 Fallið $y=\ln x$ er vaxandi á $(0,+\infty)$. Afleiða þess $y'=\frac{1}{x}$ er jákvæð á $(0,+\infty)$.

DÆMI 3.77

Afleiða náttúrulegs logra fundin

Finnið afleiðu $f(x)=\ln(x^3+3x-4)$.

Lausn

Notið jöfnu 3.31 beint.

$f'(x) = \frac{1}{x^3+3x-4}\cdot(3x^2+3)$ Notið $g(x)=x^3+3x-4$ í $h'(x)=\frac{1}{g(x)}g'(x)\cdot$

$=\frac{3x^2+3}{x^3+3x-4}$ Umritið.

DÆMI 3.78

Lograreglum beitt við deildun

Finnið afleiðu $f(x)=\ln\left(\frac{x^2\sin x}{2x+1}\right)$.

Lausn

Við fyrstu sýn virðist nokkuð flókið að finna þessa afleiðu. Ef við notum eiginleika logra áður en við deildum verður verkefnið þó mun einfaldara.

$f(x)=\ln\left(\frac{x^2\sin x}{2x+1}\right)=2\ln x+\ln(\sin x)-\ln(2x+1)$ Beitið lograreglum.

$f'(x)=\frac{2}{x}+\cot x-\frac{2}{2x+1}$ Beitið samlagningarreglunni og $h'(x)=\frac{1}{g(x)}g'(x)$.

STÖÐUMAT 3.52

Deildið: $f(x)=\ln(3x+2)^5$.

Nú þegar við getum deildað náttúrulega lografallið má nota niðurstöðuna til að finna afleiður $y = log_b x$ og $y = b^x$ fyrir $b > 0, b \neq 1$.

SETNING 3.16

Afleiður almennra vísisfalla og lografalla

Látum $b > 0, b \neq 1$, og látum $g(x)$ vera deildanlegt fall.

i. Ef $y = \log_b x$, þá

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}.$$

(3.32)

Almennt gildir að ef $h(x) = \log_b(g(x))$, þá gildir fyrir öll gildi x sem uppfylla $g(x) > 0$, að

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \ln b}.$$

(3.33)

ii. Ef $y = b^x$, þá

$$\frac{dy}{dx} = b^x \ln b.$$

(3.34)

Almennt gildir að ef $h(x) = b^{g(x)}$, þá er

$$h'(x) = b^{g(x)} g'(x) \ln b.$$

(3.35)

Sönnun

Ef $y = \log_b x$, þá $b^y = x$. Af því leiðir að $\ln(b^y) = \ln x$. Því fæst $y \ln b = \ln x$. Ef við einangrum y, fæst $y = \frac{\ln x}{\ln b}$. Með því að deilda og hafa í huga að $\ln b$ er fasti fæst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}.$$

Afleiðan í jöfnu 3.32 fæst nú með keðjureglunni.

Ef $y = b^x$, þá $\ln y = x \ln b$. Beitum fólginni deildun og höfum aftur í huga að $\ln b$ er fasti. Þá fæst $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln b$. Ef við einangrum $\frac{dy}{dx}$ og setjum inn $y = b^x$, fæst

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b = b^x \ln b.$$

Almennari afleiðan (jafna 3.35) fæst með keðjureglunni.

□

DÆMI 3.79

Afleiðuformúlum beitt

Finnið afleiðu $h(x) = \frac{3^x}{3^x + 2}$.

Lausn

Beitið deilireglunni og reglunum um afleiður almennra vísisfalla og lografalla.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3^x \ln 3 \left(3^x + 2\right) - 3^x \ln 3 \left(3^x\right)}{\left(3^x + 2\right)^2} && \text{Beitið deilireglunni.} \\ &= \frac{2 \cdot 3^x \ln 3}{\left(3^x + 2\right)^2} && \text{Einfaldið.} \end{aligned}$$

DÆMI 3.80

Hallatala snertils fundin

Finnið hallatölu snertilsins við graf fallsins $y = \log_2(3x + 1)$ í $x = 1$.

Lausn

Til að finna hallatöluna þarf að reikna $\frac{dy}{dx}$ í $x = 1$. Með jöfnu 3.33 fæst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x + 1)\ln 2}.$$

Þegar afleiðan er reiknuð í $x = 1$, fæst að hallatala snertilsins er

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{3}{4 \ln 2} = \frac{3}{\ln 16}.$$

STÖÐUMAT 3.53

Finnið hallatölu snertilsins við $y = 3^x$ í $x = 2$.

Logradeildun

Á þessu stigi getum við fundið afleiður falla af gerðinni $y = \left(g(x)\right)^n$ fyrir tiltekin gildi n, sem og falla af gerðinni $y = b^{g(x)}$, þar sem $b > 0$ og $b \neq 1$. Því miður þekkjum við enn ekki afleiður falla

á borð við $y=x^x$ eða $y=x^\pi$. Fyrir þessi föll þurfum við aðferð sem nefnist logradeildun, en með henni má deilda hvaða fall sem er af gerðinni $h(x)=g(x)^{f(x)}$. Hana má líka nota til að gera mjög flókið deildunarverkefni einfaldara, til dæmis að finna afleiðu $y=\frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x\sin^3 x}$. Aðferðinni er lýst í eftirfarandi lausnarstefnu.

LAUSNARSTEFNA

Logradeildun notuð

1. Til að deilda $y=h(x)$ með logradeildun skal taka náttúrulegan logra af báðum hliðum jöfnunnar. Þá fæst $\ln y=\ln\left(h(x)\right)$.
2. Notið lograreglur til að liða stæðuna $\ln\left(h(x)\right)$ eins langt og unnt er.
3. Deildið báðar hliðar jöfnunnar. Vinstra megin fæst $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$.
4. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með y til að einangra $\frac{dy}{dx}$.
5. Skiptið y út fyrir $h(x)$.

DÆMI 3.81

Logradeildun notuð

Finnið afleiðu $y=\left(2x^4+1\right)^{\tan x}$.

Lausn

Notið logradeildun til að finna þessa afleiðu.

$\ln\ y=\ln\left(2x^4+1\right)^{\tan x}$ Skref 1: Takið náttúrulegan logra af báðum hliðum.

$\ln\ y=\tan x\ \ln\left(2x^4+1\right)$ Skref 2: Liðið með lograreglum.

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\sec^2 x\ \ln\left(2x^4+1\right)+\frac{8x^3}{2x^4+1}\cdot\tan x$ Skref 3: Deildið báðar hliðar. Beitið margfeldisreglunni hægra megin.

$\frac{dy}{dx}=y\cdot\left(\sec^2 x\ \ln\left(2x^4+1\right)+\frac{8x^3}{2x^4+1}\cdot\tan x\right)$ Skref 4: Margfaldið með y á báðum hliðum.

$\frac{dy}{dx}=\left(2x^4+1\right)^{\tan x}\left(\sec^2 x\ \ln\left(2x^4+1\right)+\frac{8x^3}{2x^4+1}\cdot\tan x\right)$ Skref 5: Setjið inn $y=\left(2x^4+1\right)^{\tan x}$.

DÆMI 3.82

Logradeildun notuð

Finnið afleiðu $y=\frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \sin^3 x}$.

Lausn

Í þessu verkefni reynir bæði á lograreglur og deildunarreglurnar úr þessum kafla.

$\ln\ y=\ln\ \frac{x\sqrt{2\ x+1}}{e^x\ \sin^3\ x}$ Skref 1: Takið náttúrulegan logra af báðum hliðum.

$\ln\ y=\ln\ x+\frac{1}{2}\ \ln\ (2\ x+1)-x\ \ln\ e-3\ \ln\ \sin\ x$ Skref 2: Liðið með lograreglum.

$\frac{1}{y}\ \frac{d\ y}{d\ x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\ x+1}-1-3\ \frac{\cos\ x}{\sin\ x}$ Skref 3: Deildið báðar hliðar.

$\frac{d\ y}{d\ x}=y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2\ x+1}-1-3\ \cot\ x\right)$ Skref 4: Margfaldið með y á báðum hliðum.

$\frac{d\ y}{d\ x}=\frac{x\sqrt{2\ x+1}}{e^x\ \sin^3\ x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2\ x+1}-1-3\ \cot\ x\right)$ Skref 5: Setjið inn $y=\frac{x\sqrt{2\ x+1}}{e^x\ \sin^3\ x}$.

DÆMI 3.83

Veldisreglan útvíkkuð

Finnið afleiðu $y=x^r$ þar sem r er hvaða rauntala sem er.

Lausn

Aðferðin er sú sama og í dæmi 3.82 en einfaldari í framkvæmd.

$\ln\ y=\ln\ x^r$ Skref 1: Takið náttúrulegan logra af báðum hliðum.

$\ln\ y=r\ \ln\ x$ Skref 2: Liðið með lograreglum.

$\frac{1}{y}\ \frac{d\ y}{d\ x}=r\ \frac{1}{x}$ Skref 3: Deildið báðar hliðar.

$\frac{d\ y}{d\ x}=y\ \frac{r}{x}$ Skref 4: Margfaldið með y á báðum hliðum.

$\frac{d\ y}{d\ x}=x^r\ \frac{r}{x}$ Skref 5: Setjið inn $y=x^r$.

$\frac{d\ y}{d\ x}=r\ x^{r-1}$ Einfaldið.

STÖÐUMAT 3.54

Notið logradeildun til að finna afleiðu $y=x^x$.

STÖÐUMAT 3.55

Finnið afleiðu $y=(\tan x)^{\pi}$.

Æfingar í kafla 3.9

Í eftirfarandi æfingum skal finna $f'(x)$ fyrir hvert fall.

331.

$$f(x)=x^2e^x$$

332.

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$$

333.

$$f(x)=e^{x^3\ln x}$$

334.

$$f(x)=\sqrt{e^{2x}+2x}$$

335.

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

336.

$$f(x)=\frac{10^x}{\ln 10}$$

337.

$$f(x)=2^{4x}+4x^2$$

338.

$$f(x)=3^{\sin 3x}$$

339.

$$f(x)=x^{\pi}\cdot\pi^x$$

340.

$$f(x)=\ln\left(4x^3+x\right)$$

341.

$$f(x)=\ln\sqrt{5x-7}$$

342.

$$f(x)=x^2\ln 9x$$

343.

$$f(x)=\log(\sec x)$$

344.

$$f(x)=\log_7\left(6x^4+3\right)^5$$

345.

$$f(x)=2^x\cdot\log_3 7^{x^2-4}$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota logradeildun til að finna $\frac{dy}{dx}$.

346.

$$y=x^{\sqrt{x}}$$

347.

$$y=(\sin 2x)^{4x}$$

348.

$$y=(\ln x)^{\ln x}$$

349.

$$y=x^{\log_2 x}$$

350.

$$y=\left(x^2-1\right)^{\ln x}$$

351.

$$y=x^{\cot x}$$

352.

$$y=\frac{x+11}{\sqrt[3]{x^2-4}}$$

353.

$$y = x^{-1/2}\left(x^2+3\right)^{2/3}(3x-4)^4$$

354. **[T]** Finnið jöfnu snertilsins við graf fallsins $f(x) = 4xe^{(x^2-1)}$ í þeim punkti þar sem $x = -1$. Teiknið gröf fallsins og snertilsins.

355. **[T]** Finnið jöfnu þverlínunnar við graf fallsins $f(x) = x \cdot 5^x$ í punktinum þar sem $x = 1$. Teiknið graf fallsins og þverlínunnar.

356. **[T]** Finnið jöfnu snertils við graf $x^3 - x\ln y + y^3 = 2x + 5$ í punktinum (2, 1). (Vísbending: Notið fólgna deildun til að finna $\frac{dy}{dx}$.) Teiknið bæði ferilinn og snertilinn.

357. Lítum á fallið $y = x^{1/x}$ fyrir $x > 0$.

a. Ákvarðið þá punkta á grafinu þar sem snertillinn er láréttur.

b. Ákvarðið punktana á grafinu þar sem $y' > 0$ og þá þar sem $y' < 0$.

358. Formúlan $I(t) = \frac{\sin t}{e^t}$ lýsir dvínandi riðstraumi.

a. Fyllið út eftirfarandi töflu með viðeigandi gildum.

t	$\frac{\sin t}{e^t}$
0	(i)
$\frac{\pi}{2}$	(ii)
π	(iii)
$\frac{3\pi}{2}$	(iv)
2π	(v)
$\frac{5\pi}{2}$	(vi)
3π	(vii)
$\frac{7\pi}{2}$	(viii)
4π	(ix)

b. Notið aðeins gildin í töflunni til að ákvarða hvar snertill við graf fallsins $I(t)$ er láréttur.

359. **[T]** Íbúafjöldi Toledo í Ohio var um það bil 500.000 árið 2000. Gerum ráð fyrir að íbúum fjölgi um 5% á ári.

a. Ritið vísisfallið sem lýsir heildaríbúafjöldanum sem falli af t.
b. Notið a-lið til að ákvarða hversu hratt íbúafjöldinn vex eftir t ár.
c. Notið b-lið til að ákvarða hversu hratt íbúafjöldinn vex eftir 10 ár.

360. **[T]** Helmingunartími einnar samsætu frumefnisins erbíns er um það bil 12 klukkustundir. Í upphafi eru 9 grömm af samsætunni.

a. Ritið vísisfallið sem lýsir magni efnisins sem eftir er sem falli af t, þar sem t er mælt í klukkustundum.
b. Notið a-lið til að ákvarða sundrunarhraða efnisins eftir t klukkustundir.
c. Notið b-lið til að ákvarða sundrunarhraðann þegar $t=4$ klukkustundir.

361. **[T]** Fjölda inflúensutilfella í New York-borg frá ársbyrjun 1960 til ársbyrjunar 1964 er lýst með fallinu

$N(t)=5{,}3\,e^{0{,}093\,t^2-0{,}87\,t}, (0\le t\le 4)$, þar sem $N(t)$ gefur fjölda tilfella í þúsundum og t er mælt í árum; $t=0$ samsvarar ársbyrjun 1960.

a. Sýnið útreikninga sem gefa gildi $N(0)$ og $N(4)$. Lýsið í stuttu máli hvað gildin segja um útbreiðslu inflúensunnar í New York-borg.
b. Sýnið útreikninga á $N'(0)$ og $N'(3)$. Lýsið í stuttu máli hvað gildin segja um útbreiðslu inflúensunnar í New York-borg.

362. **[T]** Hlutfallslegur breytingarhraði deildanlegs falls $y=f(x)$ er gefinn með $\frac{100\cdot f'(x)}{f(x)}\%$. Eitt líkan fyrir vöxt stofns er Gompertz-vaxtarfallið $P(x)=a\,e^{-b\cdot e^{-cx}}$ þar sem a, b, og c eru fastar.

a. Finnið formúluna fyrir hlutfallslegan breytingarhraða almenna Gompertz-fallsins.
b. Use a. to find the relative rate of change of a population in $x=20$ months when $a=204$, $b=0{,}0198$, and $c=0{,}15$.
c. Útskýrið í stuttu máli hvað niðurstaða b-liðar merkir.

Í eftirfarandi æfingum skal nota íbúafjölda New York-borgar frá 1790 til 1860 sem gefinn er upp í töflunni hér á eftir.

Tafla 3.8 Íbúafjöldi New York-borgar í tímans rás Heimild: http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_cities_in_the_United_States_by_population_by_decade.

Ár frá 1790	Íbúafjöldi
0	33.131
10	60.515
20	96.373
30	123.706
40	202.300
50	312.710
60	515.547
70	813.669

363. **[T]** Notið tölvuforrit eða reiknivél til að aðfella gögnunum vaxtarferil af gerðinni $p = a\,b^t$.

364. **[T]** Notið vísisfallið sem fellur best að gögnunum og setjið upp töflu sem sýnir gildi afleiðunnar fyrir hvert ár.

365. **[T]** Notið vísisfallið sem fellur best að gögnunum og setjið upp töflu sem sýnir gildi annarrar afleiðu fyrir hvert ár.

366. **[T]** Notið töflurnar yfir gildi fyrstu og annarrar afleiðu og bestu aðfelluna til að svara eftirfarandi spurningum:

a. Mun líkanið gefa nákvæma spá um framtíðaríbúafjölda New York-borgar? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

b. Áætlið íbúafjöldann árið 2010. Reyndist spáin í a-lið rétt?

Lykilhugtök

hröðun

er breytingarhraði hraðans, það er afleiða hraðafallsins

stærð breytingar

breyting fallsins $f(x)$ á bilinu $[x, x+h]$ er $f(x+h) - f(x)$

meðalbreytingarhraði

meðalbreytingarhraði fallsins $f(x)$ á bilinu $[x, x+h]$ er $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

keðjuregla

samkvæmt keðjureglunni er afleiða samskeytts falls afleiða ytra fallsins, metin í gildi innra fallsins, margfölduð með afleiðu innra fallsins

regla um fastamargfeldi

afleiða margfeldis fastans c og fallsins f er fastinn margfaldaður með afleiðu fallsins:

$$\frac{d}{dx}(cf(x))=cf'(x)$$

fastaregla

afleiða fasts falls er núll: $\frac{d}{dx}(c)=0$, þar sem c er fasti

afleiða

afleiða falls í tilteknum punkti er hallatala snertils við graf fallsins í punktinum og fæst sem markgildi mismunakvótans

afleiðufall

gefur afleiðu fallsins í hverjum punkti í skilgreiningarmengi þess þar sem afleiðan er skilgreind

mismunakvóti

falls $f(x)$ í a er gefin með

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ eða } \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

mismunaregla

afleiða mismunar falls f og falls g er jöfn mismuni afleiðu f og afleiðu g:

$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=f'(x)-g'(x)$$

deildanlegt í a

fall sem hefur afleiðuna $f'(a)$ er deildanlegt í a

deildanlegt fall

fall er deildanlegt ef $f'(x)$ er til í skilgreiningarmengi þess

deildanlegt á S

fall þar sem $f'(x)$ er til fyrir sérhvert x í opna menginu S er deildanlegt á S

deildun

ferlið við að finna afleiðu

afleiða af hærra stigi

afleiða afleiðu, allt frá annarri afleiðu til afleiðu af n-ta stigi, kallast afleiða af hærra stigi

fólgin deildun

er aðferð til að reikna $\frac{d\,y}{d\,x}$ fyrir fall sem skilgreint er með jöfnu; báðar hliðar jöfnunnar eru deildaðar og litið er á breytuna y sem fall. Loks er jafnan leyst fyrir $\frac{d\,y}{d\,x}$

augnabliksbreytingarhraði

breytingarhraði falls í tilteknum punkti a, einnig táknaður með $f'(a)$, og nefndur afleiða fallsins í a

logradeildun

er aðferð til að deilda fall með því að taka fyrst náttúrulegan logra af báðum hliðum jöfnu, einfalda hana með lograreglum og beita síðan fólginni deildun

jaðarkostnaður

er afleiða kostnaðarfallsins og nálgar kostnaðinn við að framleiða eina einingu til viðbótar

jaðarhagnaður

er afleiða hagnaðarfallsins og nálgar hagnaðinn af því að framleiða og selja eina einingu til viðbótar

jaðartekjur

er afleiða tekjufallsins og nálgar tekjurnar af sölu á einni vöru til viðbótar

vaxtarhraði stofns

er afleiða stofnstærðarinnar með tilliti til tíma

veldisregla

í afleiðu veldisfalls verður veldisvísir x stuðull liðarins og veldisvísir x lækkar um 1: Ef n er heiltala gildir $\frac{d}{d\,x}\,x^n = n\,x^{n-1}$

margfeldisregla

afleiða margfeldis tveggja falla er afleiða fyrra fallsins margfölduð með seinna fallinu að viðbættri afleiðu seinna fallsins margfaldaðri með fyrra fallinu:

$$\frac{d}{d\,x}\left(f(x)\,g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$$

deiliregla

afleiða kvóta tveggja falla er afleiða fyrra fallsins margfölduð með síðara fallinu að frádreginni afleiðu síðara fallsins margfaldaðri með fyrra fallinu, og allt deilt með öðru veldi síðara fallsins: $\frac{d}{d\,x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

ferð

er algildi hraðans; $\left|v(t)\right|$ er því ferð hlutarins við tímann t þegar hraðinn er gefinn með $v(t)$

summuregla

afleiða summu falls f og falls g er jöfn summu afleiðu f og afleiðu g:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=f'(x)+g'(x)$$

Helstu jöfnur

Mismunakvóti	$Q=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Mismunakvóti með viðbótinni h	$Q=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Hallatala snertils	$m_{\tan}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $m_{\tan}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Afleiða $f(x)$ í a	$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Meðalhraði	$v_{a\,\text{ve}}=\frac{s(t)-s(a)}{t-a}$
Augnablikshraði	$v(a)=s'(a)=\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}$
Afleiðufallið	$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Afleiða sínusfalls	$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
Afleiða kósínusfalls	$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
Afleiða tangensfalls	$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$
Afleiða kótangensfalls	$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$
Afleiða sekansfalls	$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x \tan x$
Afleiða kósekansfalls	$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x \cot x$
Keðjureglan	$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
Veldisreglan fyrir föll	$h'(x)=n(g(x))^{n-1}g'(x)$
Setningin um afleiðu andhverfs falls	$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ þegar $f'(f^{-1}(x))\neq 0$ og $f(x)$ er deildanlegt.
Veldisreglan með ræðum veldisvísum	$\frac{d}{dx}(x^{m/n})=\frac{m}{n}x^{(m/n)-1}$.
Afleiða andhverfs sínusfalls	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-(x)^2}}$
Afleiða andhverfs kósínusfalls	$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-(x)^2}}$
Afleiða andhverfs tangensfalls	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+(x)^2}$
Afleiða andhverfs kótangensfalls	$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{1+(x)^2}$
Afleiða andhverfs sekansfalls	$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{(x)^2-1}}$
Afleiða andhverfs kósekansfalls	$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{(x)^2-1}}$

Afleiða náttúrulega vísisfallsins	$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right)=e^{g(x)}g'(x)$
Afleiða náttúrulega lografallsins	$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right)=\frac{1}{g(x)}g'(x)$
Afleiða almenna vísisfallsins	$\frac{d}{dx}\left(b^{g(x)}\right)=b^{g(x)}g'(x)\ln b$
Afleiða almenna lografallsins	$\frac{d}{dx}\left(\log_b g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)\ln b}$

Meginatriði

3.1 Skilgreining afleiðunnar

- Hallatala snertils við feril mælir augnabliksbreytingarhraða ferilsins. Hana má reikna með markgildi mismunakvótans, ýmist beint eða með viðbótinni h.
- Afleiða fallsins $f(x)$ við gildið a fæst með annarri hvorri skilgreiningu hallatölu snertilsins.
- Hraði er breytingarhraði staðsetningar. Hraðinn $v(t)$ á tímanum t er því afleiða staðsetningarinnar $s(t)$ á tímanum t. Meðalhraði er gefinn með

  $$v_{\text{ave}}=\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$

  Augnablikshraði er gefinn með

  $$v(a)=s'(a)=\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$
- Við getum metið afleiðu með því að nota gildatöflu.

3.2 Afleiðan sem fall

- Afleiða fallsins $f(x)$ er fall sem í x hefur gildið $f'(x)$.

- Graf afleiðu fallsins $f(x)$ tengist grafi $f(x)$. Þar sem $f(x)$ hefur snertil með jákvæða hallatölu er $f'(x)>0$. Þar sem $f(x)$ hefur snertil með neikvæða hallatölu er $f'(x)<0$. Þar sem $f(x)$ hefur láréttan snertil er $f'(x)=0$.
- Ef fall er deildanlegt í punkti er það samfellt í þeim punkti. Fall er ekki deildanlegt í punkti ef það er ekki samfellt þar, ef það hefur lóðréttan snertil í punktinum eða ef graf þess hefur hvasshyrnt horn eða brodd þar.
- Afleiður af hærra stigi eru afleiður af afleiðum, frá annarri afleiðu upp í nth afleiðu.

3.3 Deildunarreglur

- Afleiða fasts falls er núll.
- Afleiða veldisfalls er fall þar sem veldisvísirinn á x verður stuðull liðarins og veldisvísirinn á x í afleiðunni lækkar um 1.
- Afleiða margfeldisins c f er fastinn c margfaldaður með afleiðu fallsins f.
- Afleiða summu fallsins f og fallsins g er jöfn summu afleiðu f og afleiðu g.
- Afleiða mismunar fallsins f og fallsins g er jöfn mismuni afleiðu f og afleiðu g.
- Afleiða margfeldis tveggja falla er afleiða fyrra fallsins margfölduð með síðara fallinu að viðbættri afleiðu síðara fallsins margfaldaðri með fyrra fallinu.
- Afleiða kvóta tveggja falla er afleiða fyrra fallsins margfölduð með seinna fallinu að frádreginni afleiðu seinna fallsins margfaldaðri með fyrra fallinu, og loks er öllu deilt með öðru veldi seinna fallsins.
- Við notuðum markgildisskilgreiningu afleiðunnar til að leiða út formúlur sem gera okkur kleift að finna afleiður án þess að þurfa að nota skilgreininguna sjálfa. Þessar formúlur má nota hverja fyrir sig eða saman.

3.4 Afleiður sem breytingarhraðar

- Með formúlunni $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$, má áætla $f(a+h)$ út frá $f'(a)$ og $f(a)$.
- Breytingarhraði staðsetningar er hraði og breytingarhraði hraða er hröðun. Ferð er algildi hraðans, það er að segja stærð hans.
- Vaxtarhraða stofns og núverandi stofnstærð má nota til að spá fyrir um stofnstærð í framtíðinni.
- Jaðarkostnaðarfall, jaðartekjufall og jaðarhagnaðarfall má nota til að spá fyrir um kostnað við að framleiða eina einingu til viðbótar, tekjur af sölu hennar og hagnað af framleiðslu hennar og sölu, í sömu röð.

3.5 Afleiður hornafalla

- Við getum fundið afleiður sin x og cos x með því að nota skilgreiningu afleiðu og markgildisformúlurnar sem við fundum áður. Niðurstöðurnar eru

  $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$
- Með þessum tveimur formúlum getum við ákvarðað afleiður allra sex grunnhornafallanna.

3.6 Keðjureglan

- Keðjureglan gerir okkur kleift að deilda samsetningar tveggja eða fleiri falla. Hún segir að
  ef $h(x) = f(g(x))$,
  þá sé
  $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

  Í táknun Leibniz er reglan rituð

  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$
- Við getum notað keðjuregluna ásamt öðrum reglum sem við höfum lært og leitt út formúlur fyrir sumar þeirra.
- Keðjureglan og veldisreglan mynda saman nýja reglu:

  Ef $h(x) = (g(x))^n$, þá $h'(x) = n(g(x))^{n-1}g'(x)$.
- Þegar keðjureglunni er beitt á samsetningu þriggja falla má rita hana þannig: Ef $h(x) = f(g(k(x)))$, þá er $h'(x) = f'(g(k(x))g'(k(x))k'(x)$.

3.7 Afleiður andhverfra falla

- Setningin um afleiðu andhverfs falls gerir okkur kleift að reikna afleiður andhverfra falla án þess að nota markgildisskilgreiningu afleiðunnar.
- Við getum notað setninguna um afleiðu andhverfs falls til að leiða út deildunarformúlur fyrir andhverfu hornaföllin.

3.8 Fólgin deildun

- Við notum fólgna deildun til að finna afleiður falla sem eru skilgreind óbeint (falla sem skilgreind eru með jöfnum).
- Með fólginni deildun getum við fundið jöfnu snertils við graf ferils.

3.9 Afleiður vísis- og lografalla

- Ef gert er ráð fyrir að vísisfallið $y=b^x, b>0$ sé samfellt alls staðar og deildanlegt í 0 er fallið deildanlegt alls staðar og til er formúla fyrir afleiðu þess.
- Við getum notað formúlu til að finna afleiðu $y=\ln x$, og sambandið $\log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}$ gerir okkur kleift að útvíkka deildunarformúlur okkar þannig að þær nái til logra með hvaða grunntölu sem er.
- Logradeildun gerir okkur kleift að deilda föll af gerðinni $y=g(x)^{f(x)}$ og önnur mjög flókin föll með því að taka náttúrulegan logra beggja hliða og beita reiknireglum logra áður en deildað er.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi.

367. Sérhvert fall hefur afleiðu.

368. Samfellt fall hefur samfellda afleiðu.

369. Samfellt fall hefur afleiðu.

370. Ef fall er deildanlegt er það samfellt.

Notið markgildisskilgreiningu afleiðunnar til að reikna afleiðuna nákvæmlega.

371.

$$f(x)=\sqrt{x+4}$$

372.

$$f(x)=\frac{3}{x}$$

Finnið afleiður eftirfarandi falla.

373.

$$f(x)=3x^3-\frac{4}{x^2}$$

374.

$$f(x)=\left(4-x^2\right)^3$$

375.

$$f(x)=e^{\sin x}$$

376.

$$f(x)=\ln(x+2)$$

377.

$$f(x)=x^2\cos x+x\tan(x)$$

378.

$$f(x)=\sqrt{3x^2+2}$$

379.

$$f(x)=\frac{x}{4}\sin^{-1}(x)$$

380.

$$x^2y=(y+2)+xy\sin(x)$$

Finnið eftirfarandi afleiður af mismunandi stigum.

381. Fyrsta afleiða $y=x\ln(x)\cos x$

382. Þriðja afleiða $y=(3x+2)^2$

383. Önnur afleiða $y=4^x+x^2\sin(x)$

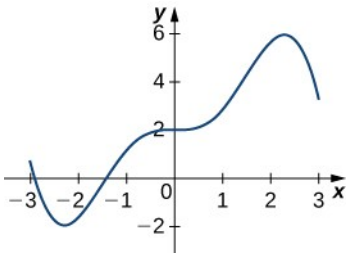
Finnið jöfnu snertils við graf hvers eftirfarandi falls í tilgreindum punkti.

384. $y=\cos^{-1}(x)+x$ við $x=0$

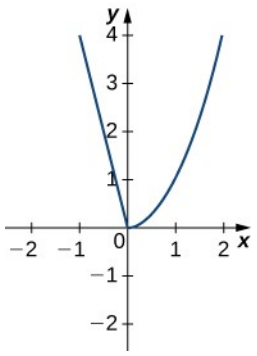
385. $y=x+e^x-\frac{1}{x}$ við $x=1$

Teiknið graf afleiðunnar fyrir eftirfarandi gröf.

386.



387.



Eftirfarandi spurningar fjalla um sjávarhæð í Ocean City í New Jersey í janúar. Hana má nálga með $w(t)=0{,}6+0{,}9\ \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$, þar sem t táknar fjölda klukkustunda eftir miðnætti og sjávarhæðin er mæld í metrum.

3

388. Finnið afleiðuna og teiknið graf hennar. Hver er eðlisfræðileg merking hennar?

389. Finnið $w'(3)$. Hver er eðlisfræðileg merking þessa gildis?

Eftirfarandi spurningar fjalla um vindhraða fellibylsins Katrínar, sem gekk yfir New Orleans í Louisiana í ágúst 2005. Gögnin eru sýnd í töflu.

Tafla 3.9 Vindhraði í fellibylnum Katrínu Heimild: http://news.nationalgeographic.com/news/2005/09/0914_050914_katrina_timeline.html.

Klukkustundir eftir miðnætti, 26. ágúst	Vindhraði (km/klst.)
1	72
5	121
11	161
29	185
49	233
58	282
73	249
81	201
85	153
107	56

390. Notið töfluna til að áætla afleiðu vindhraðans 39 klukkustundum eftir miðnætti. Hver er eðlisfræðileg merking hennar?

391. Áætlið afleiðu vindhraðans 83 klukkustundum eftir miðnætti. Hver er eðlisfræðileg merking hennar?

4. KAFLI

Notkun afleiða



Mynd 4.1 Þegar eldflaug er skotin á loft, hversu hratt þarf hallahorn myndbandsupptökuvélar að breytast svo hún haldi eldflauginni í mynd? (mynd: aðlögun á verki Steve Jurvetson, Wikimedia Commons)

Yfirlit kaflans

- 4.1 Tengdir breytingarhraðar
- 4.2 Línulegar nálganir og deildi
- 4.3 Hágildi og lággildi
- 4.4 Meðalgildissetningin
- 4.5 Afleiður og lögun grafs
- 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur
- 4.7 Hagnýt bestunarverkefni

- 4.8 Regla l'Hôpital
- 4.9 Aðferð Newtons
- 4.10 Stofnföll

Inngangur

Eldflaug er skotin á loft frá jörðu og myndavélar taka flugtak hennar upp. Myndbandsupptökuvél stendur á jörðu í tiltekinni fjarlægð frá skotpallinum. Hversu hratt þarf hallahorn hennar (hornið milli sjónlínu myndavélarinnar og jarðar) að breytast svo hún geti tekið upp flug eldflaugarinnar á leið upp? (Sjá dæmi 4.3.)

Í eldflaugarskoti koma við sögu tvær tengdar stærðir sem breytast með tímanum. Að leysa verkefni af þessu tagi er aðeins eitt dæmi um þá notkun afleiðna sem kaflinn kynnir. Við skoðum einnig hvernig nota má afleiður til að finna hágildi og lággildi falla. Þannig getum við leyst hagnýt bestunarverkefni, svo sem að hámarka tekjur og lágmarka yfirborðsflatarmál. Auk þess skoðum við hvernig nota má afleiður til að reikna flókin markgildi, nálga núllstöðvar falla og teikna nákvæm gröf falla.

4.1 Tengdir breytingarhraðar

4

NÁMSMARKMIÐ

- 4.1.1 Tjá breytilegar stærðir með afleiðum.
- 4.1.2 Finna tengsl milli afleiðna í tilteknu verkefni.
- 4.1.3 Nota keðjuregluna til að finna breytingarhraða einnar stærðar sem ræðst af breytingarhraða annarra stærða.

Við höfum séð að þegar stærðir breytast með tímanum eru breytingarhraðar þeirra gefnir með afleiðum. Ef tvær tengdar stærðir breytast með tímanum eru breytingarhraðar þeirra innbyrðis tengdir. Ef lofti er til dæmis dælt í blöðru aukast bæði geisli hennar og rúmmál. Í þessum undirkafla skoðum við nokkur verkefni þar sem tvær eða fleiri tengdar stærðir breytast og könnum hvernig ákvarða má sambandið milli breytingarhraða þeirra.

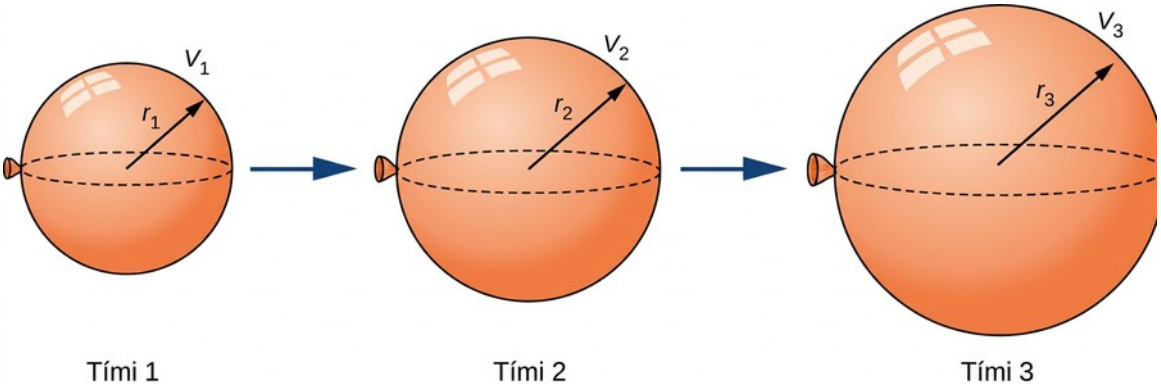
Uppsetning verkefna um tengda breytingarhraða

Í mörgum raunverulegum viðfangsefnum breytast tengdar stærðir með tímanum. Ef við skoðum til dæmis blöðrudæmið aftur getum við sagt að breytingarhraði rúmmálsins, V, tengist breytingarhraða geislans, r. Í þessu tilviki segjum við að $\frac{dV}{dt}$ og $\frac{dr}{dt}$ séu tengdir breytingarhraðar vegna þess að V tengist r. Hér skoðum við nokkur dæmi um tengdar stærðir sem breytast með tímanum og könnum hvernig reikna má einn breytingarhraða þegar annar breytingarhraði er gefinn.

DÆMI 4.1

Að blása upp blöðru

Lofti er dælt í kúlulaga blöðru með föstum hraða $2\,\text{cm}^3/\text{sec}$ (Mynd 4.2). Hversu hratt vex geislinn þegar hann er $3\,\text{cm}$?



Mynd 4.2 Þegar blaðran er fyllt með lofti vaxa bæði radíus hennar og rúmmál með tímanum.

Lausn

Rúmmál kúlu með geisla r sentímetra er

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3\,\text{cm}^3.$$

Þar sem lofti er dælt í blöðruna eru bæði rúmmál hennar og geisli föll af tíma. t sekúndum eftir að dælingin hefst er rúmmál loftsins í blöðrunni

$$V(t)=\frac{4}{3}\pi[r(t)]^3\,\text{cm}^3.$$

Með því að deilda báðar hliðar þessarar jöfnu með tilliti til tíma og beita keðjureglunni sjáum við að breytingarhraði rúmmálsins tengist breytingarhraða geislans með jöfnunni

$$V'(t)=4\pi\left[r(t)\right]^2 r'(t).$$

Lofti er dælt í blöðruna með föstum hraða 2 cm³/sek., þannig að $V'(t)=2\,\text{cm}^3/\text{sec}$. Því fæst

$$2\,\text{cm}^3/\text{sec}=\left(4\pi\left[r(t)\right]^2\text{cm}^2\right)\cdot\left(r'(t)\,\text{cm/s}\right),$$

sem gefur

$$r'(t)=\frac{1}{2\pi\left[r(t)\right]^2}\,\text{cm/sec}.$$

Þegar geislinn $r=3\,\text{cm}$,

$$r'(t)=\frac{1}{18\pi}\,\text{cm/sec}.$$

STÖÐUMAT 4.1

Hver er augnabliksbreytingarhraði geislans þegar $r = 6\,\text{cm}$?

Áður en við skoðum fleiri dæmi skulum við lýsa lausnaraðferðinni sem notuð er í verkefnum um tengda breytingarhraða.

LAUSNARAÐFERÐ

Að leysa verkefni um tengda breytingarhraða

1. Veljið tákn fyrir allar breytur sem koma fyrir í verkefninu. Teiknið mynd ef við á.
2. Skráið með þessum breytum hvaða upplýsingar eru gefnar og hvaða breytingarhraða á að finna.
3. Finnið jöfnu sem tengir breyturnar sem voru skilgreindar í skrefi 1.
4. Notið keðjuregluna og deildið báðar hliðar jöfnunnar sem fékkst í 3. skrefi með tilliti til óháðu breytunnar. Þessi nýja jafna tengir afleiðurnar.
5. Setjið öll þekkt gildi inn í jöfnuna úr skrefi 4 og einangrið síðan óþekkta breytingarhraðann.

Athugið að þegar verkefni um tengda breytingarhraða er leyst skiptir sköpum að setja þekkt gildi ekki inn of snemma. Ef gildi breytilegrar stærðar er til dæmis sett inn í jöfnu áður en báðar hliðar hennar eru deildaðar, hegðar stærðin sér eins og fasti. Afleiða hennar kemur þá ekki fram í nýju jöfnunni sem fæst í skrefi 4. Í næsta dæmi skoðum við þessa hugsanlegu villu.

4

Dæmi um lausnarferlið

Notum nú aðferðina sem lýst var hér að framan til að leysa nokkur verkefni um tengda breytingarhraða. Fyrsta dæmið fjallar um flugvél sem flýgur yfir athuganda. Við skoðum sambandið milli hraða flugvélarinnar og breytingarhraða fjarlægðarinnar milli hennar og manneskju á jörðu niðri.

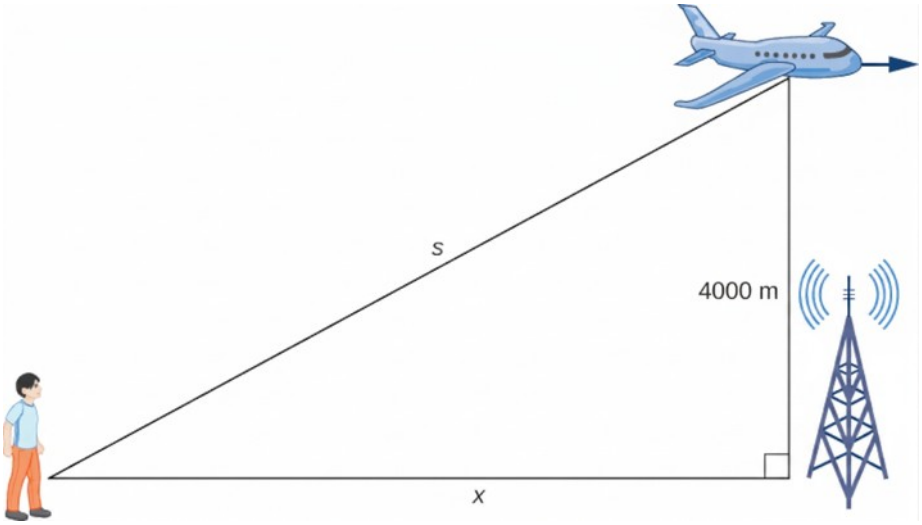
DÆMI 4.2

Flugvél í fastri flughæð

Flugvél flýgur í fastri hæð $4000\ \text{m}$. Maður fylgist með henni frá stað sem er $3000\ \text{m}$ frá fótum útvarpsturns. Flugvélin flýgur lárétt frá manninum. Ef hraði hennar er $200\ \text{m/sek}$, hversu hratt eykst fjarlægðin milli mannsins og flugvélarinnar þegar hún flýgur yfir útvarpsturninn?

Lausn

Skref 1. Teiknið mynd og skilgreinið breytur fyrir stærðirnar sem koma við sögu.



Mynd 4.3 Flugvél flýgur í fastri hæð, 4000 m. Fjarlægðin milli mannsins og flugvélarinnar og fjarlægðin milli mannsins og punktsins á jörðinni beint undir flugvélinni breytast. Við táknum þessar stærðir með breytunum s og x, í sömu röð.

Eins og sjá má táknar x fjarlægðina milli mannsins og punktsins á jörðinni beint undir flugvélinni. Breytan s táknar fjarlægðina milli mannsins og flugvélarinnar. Athugið að bæði x og s eru föll af tíma. Við skilgreinum ekki breytu fyrir hæð flugvélarinnar því hún helst í fastri hæð, 4000 m. Hæð hlutar yfir jörðu er stysta fjarlægðin milli hlutarins og jarðarinnar. Línustrikið sem er 4000 m að lengd er því hornrétt á línustrikið sem er x metrar að lengd og saman mynda þau rétthyrndan þríhyrning.

2. skref. Hér táknar x láréttu fjarlægðina milli mannsins og punktsins á jörðinni beint undir flugvélinni og því táknar dx/dt hraða flugvélarinnar. Gefið er að hraði flugvélarinnar sé 200 m/sek. Því er $\frac{dx}{dt}=200$ m/sek. Þar sem finna á breytingarhraða fjarlægðarinnar milli mannsins og flugvélarinnar þegar flugvélin er beint yfir útvarpsturninum þurfum við að finna ds/dt þegar $x=3000$ m.

3. skref. Samkvæmt myndinni má nota Pýþagórasarsetninguna til að setja fram jöfnu sem tengir x og s:

$$[x(t)]^2+4000^2=[s(t)]^2.$$

Skref 4. Með því að deilda þessa jöfnu með tilliti til tíma og nýta að afleiða fasta er núll fáum við jöfnuna

$$x\frac{dx}{dt}=s\frac{ds}{dt}.$$

Skref 5. Finnið hve hratt fjarlægðin milli mannsins og flugvélarinnar eykst þegar flugvélin er beint yfir útvarpsturninum. Það er að segja: finnið $\frac{ds}{dt}$ þegar $x=3000$ m. Þar sem hraði flugvélarinnar er 200 m/sek, vitum við að $\frac{dx}{dt}=200$ m/sek. Gildi s; er ekki gefið beint. Þar

sem finna á $\frac{ds}{dt}$ þegar $x=3000$ m, má hins vegar nota Pýþagórasarsetninguna til að ákvarða fjarlægðina s þegar $x=3000$ og hæðin er 4000 m. Þegar jafnan er leyst

$$3000^2+4000^2=s^2$$

með tilliti til s, fæst $s=5000$ m á því augnabliki sem um ræðir. Þegar þessi gildi eru sett inn fæst að ds/dt uppfyllir jöfnuna

$$(3000)\,(200)=(5000)\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Því er

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3000\cdot 200}{5000}=120 \text{ m/sek}.$$

Athugasemd: Þegar verkefni um tengda breytingarhraða eru leyst er mikilvægt að setja ekki töluleg gildi breytanna inn of snemma. Í 3. skrefi tengdum við til dæmis breytilegu stærðirnar $x(t)$ og $s(t)$ með jöfnunni

$$\left[x(t)\right]^2+4000^2=\left[s(t)\right]^2.$$

4

Þar sem flugvélin helst í fastri hæð þarf ekki að skilgreina breytu fyrir hæðina og því má nota fastann 4000 til að tákna þá stærð. Hinar stærðirnar tvær breytast hins vegar. Ef við hefðum fyrir mistök sett $x(t)=3000$ inn í jöfnuna áður en við deildum hefði jafnan orðið

$$3000^2+4000^2=\left[s(t)\right]^2.$$

Eftir deildun yrði jafnan

$$0=s(t)\frac{ds}{dt}.$$

Af þeim sökum myndum við ranglega ályktа að $\frac{ds}{dt}=0$.

STÖÐUMAT 4.2

Hver er hraði flugvélarinnar ef fjarlægðin milli mannsins og flugvélarinnar eykst með hraðanum 150 m/sek ?

Nú snúum við aftur að verkefninu um eldflaugarskotið frá upphafi kaflans.

DÆMI 4.3

Upphafsdæmi kaflans: Eldflaugarskot

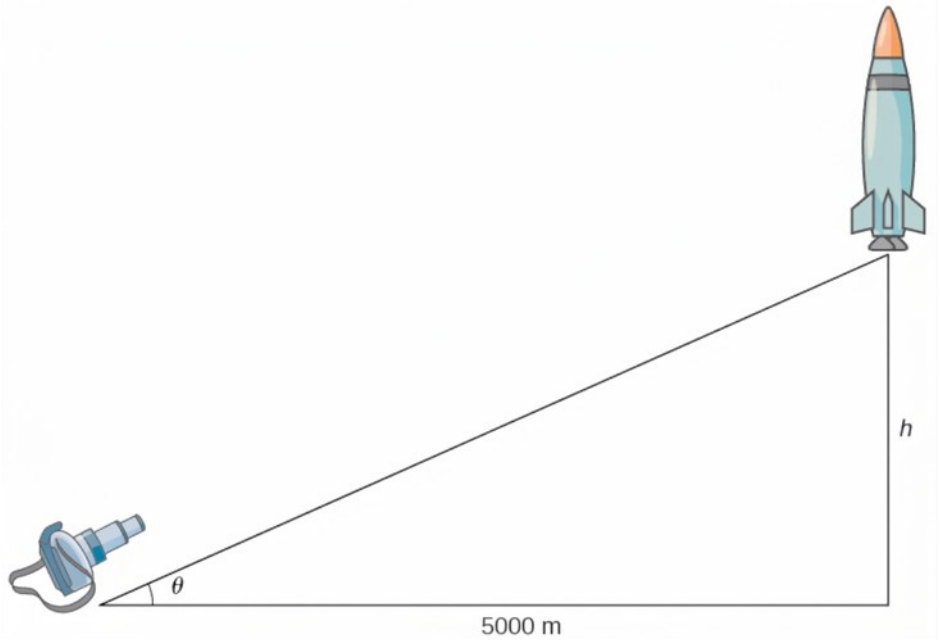


Mynd 4.4 (mynd: verk Steve Jurvetson, Wikimedia Commons, aðlagað)

Eldflaug er skotin á loft þannig að hún stígur lóðrétt. Myndavél er staðsett 5000 m frá skotpallinum. Þegar eldflaugin er 1000 m fyrir ofan skotpallinn er hraði hennar 200 m/sek. Finnið hve hratt hæðarhorn myndavélarinnar þarf að breytast, sem fall af tíma, svo að myndavélin haldi eldflauginni í mynd.

Lausn

Skref 1. Teiknið mynd og skilgreinið breyturnar.



Mynd 4.5 Myndavél er staðsett 5000 m frá skotpalli eldflaugarinnar. Hæð eldflaugarinnar og hæðarhorn myndavélarinnar breytast með tímanum. Við táknum þessar stærðir með breytunum h og θ, í sömu röð.

4

Látum h tákna hæð eldflaugarinnar yfir skotpallinum og θ tákna hornið milli sjónlínu myndavélarinnar og jarðarinnar.

Skref 2. Við ætlum að finna breytingarhraða hæðarhorns myndavélarinnar með tilliti til tíma þegar eldflaugin er 1000 m yfir jörðu. Það er að segja, við þurfum að finna $\frac{d\theta}{dt}$ þegar $h = 1000$ m. Á þeim tíma vitum við að hraði eldflaugarinnar er $\frac{dh}{dt} = 200$ m/sek.

Skref 3. Nú þurfum við að finna jöfnu sem tengir stærðirnar tvær sem breytast með tilliti til tíma: h og θ. Hvernig getum við sett fram slíka jöfnu? Þar sem við höfum teiknað rétthyrndan þríhyrning er eðlilegt að huga að hornaföllum. Rifjum upp að $\tan\theta$ er hlutfall lengdar mótlægu skammhliðar þríhyrningsins og lengdar aðlægu skammhliðarinnar. Því fæst

$$\tan\theta = \frac{h}{5000}.$$

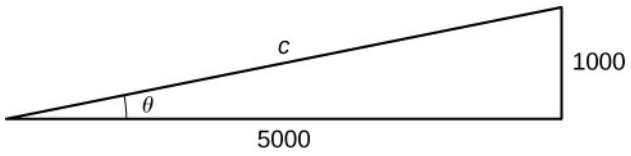
Af þessu fæst jafnan

$$h = 5000\tan\theta.$$

Skref 4. Með því að deilda þessa jöfnu með tilliti til tíma t, fáum við

$$\frac{dh}{dt} = 5000\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

5. skref. Við viljum finna $\frac{d\theta}{dt}$ þegar $h=1000$ m. Á þessu augnabliki vitum við að $\frac{dh}{dt}=200$ m/sek. Við þurfum að ákvarða $\sec^2\theta$. Rifjum upp að $\sec\theta$ er hlutfall lengdar langhliðarinnar og lengdar aðlægu skammhliðarinnar. Lengd aðlægu skammhliðarinnar er 5000 m. Til að ákvarða lengd langhliðarinnar notum við Pýþagórasarsetninguna: önnur skammhliðin er 5000 m, hin er $h=1000$ m, og langhliðin er c metrar, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Við sjáum að

$$1000^2+5000^2=c^2$$

og við ályktum að langhliðin sé

$$c=1000\sqrt{26}\text{ m}.$$

Því gildir, þegar $h=1000$, að

$$\sec^2\theta=\left(\frac{1000\sqrt{26}}{5000}\right)^2=\frac{26}{25}.$$

Rifjum upp úr skrefi 4 að jafnan sem tengir $\frac{d\theta}{dt}$ við þekktu gildin er

$$\frac{dh}{dt}=5000\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Þegar $h=1000$ m, vitum við að $\frac{dh}{dt}=200$ m/sek og $\sec^2\theta=\frac{26}{25}$. Með því að setja þessi gildi inn í fyrri jöfnuna fáum við jöfnuna

$$200=5000\left(\frac{26}{25}\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

Því er $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{26}$ rad/sek.

STÖÐUMAT 4.3

Hversu hratt þarf hæðarhorn myndavélarinnar að breytast ef myndavélin er staðsett á jörðinni í 4000 m fjarlægð frá skotpallinum og hraði eldflaugarinnar er 250 m/sek. þegar eldflaugin er 2000 m frá jörðu?

Í næsta dæmi skoðum við vatn sem rennur úr keilulaga trekt. Við berum saman hve hratt vatnshæðin lækkar og hve hratt rúmmál vatnsins minnkar.

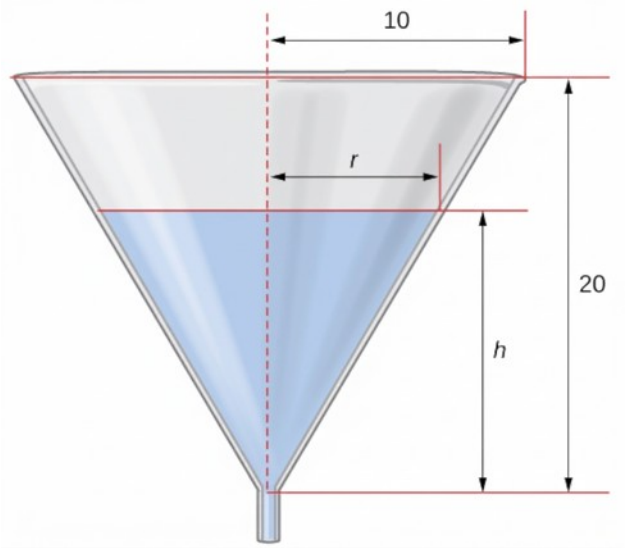
DÆMI 4.4

Vatn rennur úr trekt

Vatn rennur úr botni keilulaga trektar með hraðanum $30\ \text{cm}^3/\text{sek}$. Hæð trektarinnar er 20 cm og geislinn við efri brún hennar er $10\ \text{cm}$. Með hvaða hraða breytist hæð vatnsins í trektinni þegar hæð vatnsins er $5\ \text{cm}$?

Lausn

Skref 1: Teiknið mynd og merkið breyturnar inn á hana.



Mynd 4.6 Vatn rennur úr trekt sem er 20 cm á hæð og hefur geislann 10 cm. Vatnshæðin og geisli vatnsyfirborðsins breytast með tímanum. Við táknum þessar stærðir með breytunum h og r, í sömu röð.

Látum h tákna hæð vatnsins í trektinni, r tákna geisla vatnsflatarins og V tákna rúmmál vatnsins.

Skref 2: Við þurfum að ákvarða $\frac{dh}{dt}$ þegar $h=5\ \text{cm}$. Við vitum að $\frac{dV}{dt}=-30\ \text{cm}^3/\text{sek}$.

Skref 3: Rúmmál vatnsins í keilunni er

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Af myndinni sjáum við að þríhyrningarnir eru einslaga. Því er hlutfall samsvarandi hliða í þríhyrningunum tveimur hið sama. Þar af leiðandi er $\frac{r}{h}=\frac{1}{2}$ eða $r=\frac{h}{2}$. Þá má einfalda jöfnuna fyrir rúmmálið í

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3.$$

Skref 4: Með því að beita keðjureglunni við deildun beggja hliða þessarar jöfnu með tilliti til tíma t, fáum við

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}.$$

Skref 5: Við viljum finna $\frac{dh}{dt}$ þegar $h=5$ cm. Þar sem vatnið rennur út með hraðanum 30 cm^3/sek, vitum við að $\frac{dV}{dt}=-30$ cm^3/sek. Því er

$$-30=\frac{\pi}{4}(5)^2\frac{dh}{dt},$$

sem gefur

$$-30=\frac{25\pi}{4}\frac{dh}{dt}.$$

Af þessu leiðir að

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{4{,}8}{\pi}=-1{,}53 \text{ cm/sek}.$$

4

STÖÐUMAT 4.4

Hversu hratt breytist vatnshæðin þegar hún er $2{,}5$ cm?

Æfingar í undirkafla 4.1

Finnið umbeðnar stærðir í eftirfarandi æfingum út frá jöfnunni sem er gefin.

1. Finnið $\frac{dy}{dt}$ þegar $x=1$ og $y=x^2+3$ ef $\frac{dx}{dt}=4$.

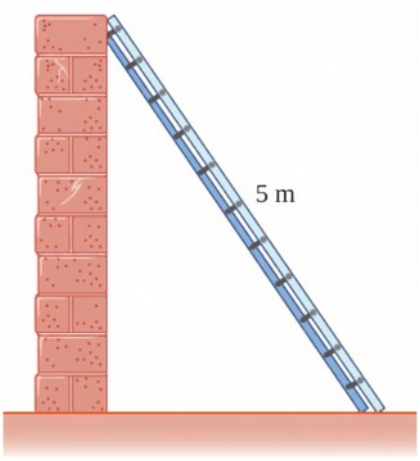
2. Finnið $\frac{dx}{dt}$ við $x=-2$ og $y=2x^2+1$ ef $\frac{dy}{dt}=-1$.

3. Finnið $\frac{dz}{dt}$ þegar $(x,y)=(1,3)$ og $z^2=x^2+y^2$ ef $\frac{dx}{dt}=4$ og $\frac{dy}{dt}=3$.

Teiknið skýringarmynd af aðstæðunum í eftirfarandi æfingum ef þörf krefur. Notið tengda breytingarhraða til að reikna út umbeðnar stærðir.

4. **[T]** Ef tvö rafviðnám eru hliðtengd er heildarviðnámið (mælt í ómum, táknað með gríska hástafnum ómega, Ω) gefið með jöfnunni $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Ef R_1 eykst með hraðanum $0{,}5\ \Omega/\text{min}$ og R_2 minnkar með hraðanum $1{,}1\,\Omega/\text{min}$, með hvaða hraða breytist heildarviðnámið þegar $R_1=20\,\Omega$ og $R_2=50\,\Omega$?

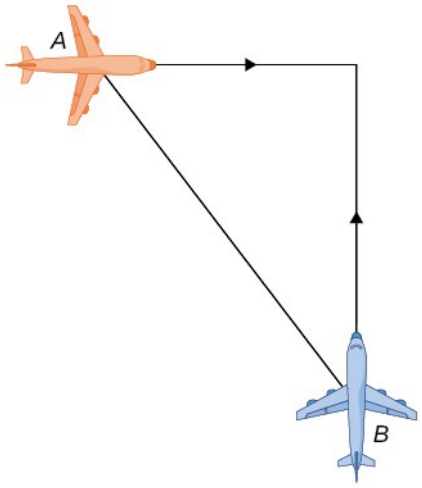
5. 5 m langur stigi hallar upp að vegg. Ef efri endi stigans rennur niður vegginn með hraðanum 1 m/sek., hversu hratt færist neðri endinn eftir jörðinni þegar hann er 2,5 m frá veggnum?



4

6. 5 m langur stigi hallar upp að vegg. Ef við ýtum stiganum í átt að veggnum með hraðanum 0,2 m/sek. og neðri endi stigans er í upphafi 4 m frá veggnum, hversu hratt færist stiginn upp vegginn 5 sec eftir að við byrjum að ýta?

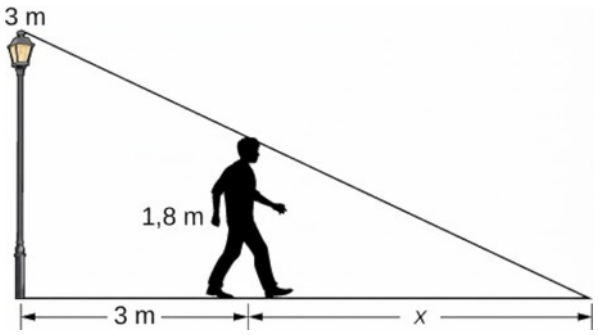
7. Tvær flugvélar fljúga í sömu hæð: flugvél A flýgur í austurátt á 250 km/klst. og flugvél B flýgur í norðurátt á 300 km/klst. Ef þær stefna báðar á sama flugvöll, sem er 30 km austan við flugvél A og 40 km norðan við flugvél B, hversu hratt breytist fjarlægðin milli flugvélanna?



8. Þú og vinur þinn hjólið að veitingastað. Þú telur hann vera í austurátt en vinur þinn í norðurátt. Þið leggið af stað frá sama stað; þú hjólar í austur með hraðanum 16 km/klst. en vinur þinn hjólar norður með hraðanum 12 km/klst. Hversu hratt breytist fjarlægðin milli ykkar þegar þú hefur hjólað 4 km?

9. Tvær rútur aka eftir samsíða hraðbrautum sem eru 5 km hvor frá annarri, önnur í austurátt og hin í vesturátt. Ef hvor rúta ekur með jöfnum hraða, 90 km/klst, finnið þá breytingarhraða fjarlægðarinnar milli rútanna þegar þær eru 13 km hvor frá annarri og stefna hvor á aðra.

10. 1,8 m há manneskja gengur frá 3 m háum ljósastaur með jöfnum hraða 1 m/sek. Hversu hratt fjarlægist skuggaendinn staurinn þegar manneskjan er 3 m frá staurnum?



11. Notið verkefnið á undan til að finna með hvaða hraða skuggaendinn fjarlægist manneskjuna þegar hún er 3 m frá staurnum.

12. 1,8 m há manneskja gengur í átt að vegg með hraðanum 1,5 m/sek. Kastljós er á jörðinni 12 m frá veggnum. Hversu hratt breytist hæð skugga manneskjunnar á veggnum þegar hún er 3 m frá veggnum?

13. Notið fyrra verkefnið til að finna breytingarhraða skuggans þegar manneskjan er 3 m frá veggnum og gengur frá honum með hraðanum 1,5 m/sek.

14. Þyrla hefst á loft frá jörðu og stígur beint upp með hraðanum 5 m/sek. Þið leggið af stað beint undir þyrlunni og hlaupið eftir jörðinni með hraðanum 2 m/sek. Finnið breytingarhraða fjarlægðarinnar milli ykkar og þyrlunnar eftir 5 sek.

15. Notið fyrra verkefnið til að finna breytingarhraða fjarlægðarinnar milli ykkar og þyrlunnar þegar þyrlan er komin í 20 m hæð, að því gefnu að hún hafi í upphafi verið 10 m fyrir ofan ykkur.

Teiknið og merkið skýringarmyndir í eftirfarandi æfingum. Þær auðvelda ykkur að leysa verkefnin um tengda breytingarhraða.

16. Hliðarlengd tenings eykst um $\frac{1}{2}$ m/sek. Finnið breytingarhraða rúmmáls teningsins þegar hliðarlengd hans er 4 m.

17. Rúmmál tenings minnkar um 10 m^3/s. Finnið breytingarhraða hliðarlengdar teningsins þegar hún er 2 m.

18. Geisli hrings eykst með hraðanum 2 m/sec. Finnið breytingarhraða flatarmáls hringsins þegar geislinn er 5 m.

19. Geisli kúlu minnkar með hraðanum 3 m/sek. Finnið hve hratt yfirborðsflatarmálið minnkar þegar geislinn er 10 m.

20. Geisli kúlu eykst með hraðanum 1 m/sek. Finnið hve hratt rúmmálið eykst þegar geislinn er 20 m.

21. Geisli kúlu eykst með hraðanum 9 cm/sec. Finnið geisla kúlunnar þegar rúmmál og geisli hennar aukast með sama tölulega hraða.

22. Grunnlína þríhyrnings styttist um 1 cm/mín og hæð hans eykst um 5 cm/mín. Finnið breytingarhraða flatarmáls þríhyrningsins þegar hæðin er 22 cm og grunnlínan 10 cm.

23. Í þríhyrningi eru tvær hliðar af fastri lengd, 3 m og 5 m. Hornið milli þessara tveggja hliða stækkar með hraðanum 0,1 rad/sek. Ákvarðið breytingarhraða flatarmáls þríhyrningsins þegar hornið milli hliðanna tveggja er $\pi/6$.

24. Hæð þríhyrnings eykst um 2 cm/sek. og flatarmál hans eykst um 4 cm^2/sek. Finnið breytingarhraða grunnlínu þríhyrningsins þegar hæð hans er 4 cm og flatarmálið er 20 cm^2.

Í eftirfarandi æfingum lekur vatn úr beinni keilu. Keilulaga geymirinn er 16 m á hæð og geisli hans er 5 m.

25. Hversu hratt breytist dýpt vatnsins þegar vatnshæðin er 10 m ef vatn lekur úr keilunni með hraðanum 10 m^3/mín?

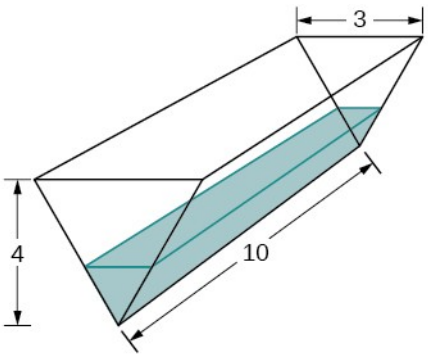
26. Finnið breytingarhraða yfirborðsflatarmáls vatnsins þegar vatnshæðin er 10 m ef vatn lekur úr keilunni með hraðanum 10 m^3/mín.

27. Vatnsborðið lækkar um 25 cm/mín þegar vatnsdýptin er 8 m. Ákvarðið hve hratt vatn lekur úr keilunni.

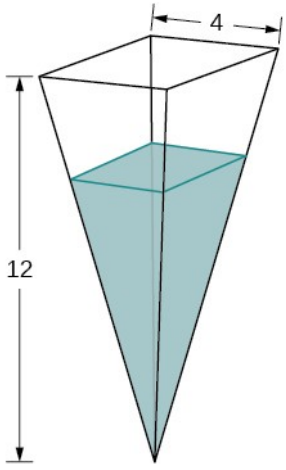
28. Vatn lekur úr lóðréttum sívalningi með hraðanum 0.01 m^3/sek. Ef sívalningurinn er 3 m á hæð og hefur 0.5 m geisla, með hvaða hraða breytist þá hæð vatnsins þegar hún er 1.8 m?

29. Vatn lekur úr lóðréttum sívalningi en ekki er unnt að ákvarða lekahraðann beint. Sívalningurinn er 2 m á hæð og hefur 2 m geisla. Finnið lekahraða vatnsins úr sívalningnum ef hæð vatnsins minnkar um 10 cm/min þegar hún er 1 m.

30. Endafletir trogsins eru jafnarma þríhyrningar, 3 m á breidd og 4 m á hæð, og trogið er 10 m langt. Vatni er dælt í trogið með hraðanum $5\,\text{m}^3/\text{min}$. Hversu hratt breytist vatnshæðin þegar vatnið er 1 m djúpt?



31. Geymir er í laginu eins og ferstrendur pýramídi á hvolfi, með ferningslaga grunnflöt sem er 4 m á hlið og hæðina 12 m (sjá eftirfarandi mynd). Hversu hratt hækkar vatnsborðið þegar vatnið er 2 m djúpt ef vatni er dælt í geyminn með hraðanum $\frac{2}{3}$ m³/sekúndu?



Eftirfarandi dæmi fjalla um laug sem er í laginu eins og neðri helmingur kúlu. Vatni er dælt í hana með hraðanum 0.2 m³/mín. Geisli laugarinnar er 2 m. Formúlan fyrir rúmmál hluta úr hálfkúlu er $V = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right)$ þar sem h er hæð vatnsins og r er geisli vatnsyfirborðsins.

32. Finnið breytingarhraða vatnsdýptarinnar þegar vatnið er 1 m djúpt.

33. Finnið breytingarhraða vatnsdýptarinnar þegar vatnið er 20 cm djúpt.

34. Vatnshæðin eykst um 5 cm/mín þegar vatnsdýptin er 40 cm. Finnið hve hratt vatni er dælt í laugina.

35. Möl er losuð af vörubíl og fellur í keilulaga haug með hraðanum 1 m^3/mín. Geisli grunnflatar keilunnar er þreföld hæð hennar. Finnið breytingarhraða hæðar malarhaugsins þegar haugurinn er 1 m á hæð.

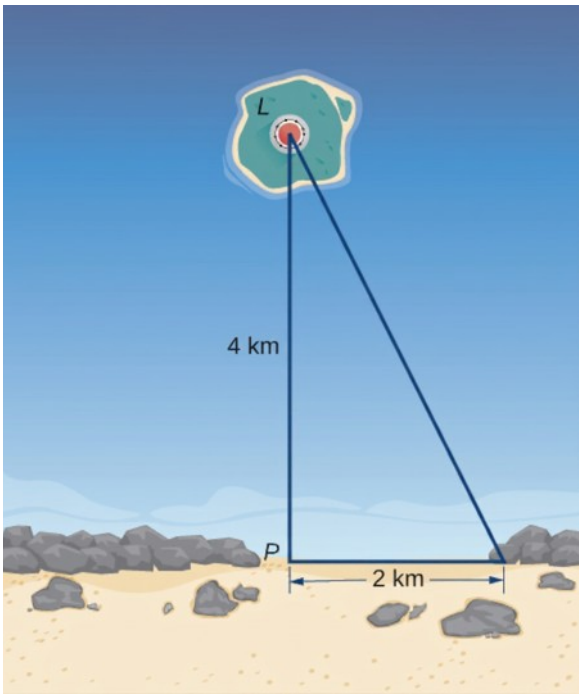
36. Notið svipaða uppsetningu og í verkefninu á undan til að finna losunarhraða malarinnar ef haugurinn er 1 m hár og hæð hans eykst um 5 cm/mín.

Leysið verkefnin um tengda breytingarhraða í eftirfarandi æfingum. Teiknið gjarnan skissu af aðstæðunum til að skilja hvert verkefni betur.

37. Þið standið kyrr á jörðinni og fylgist með fugli sem flýgur lárétt með hraðanum 10 m/sek. Fuglinn er 40 m fyrir ofan höfuð ykkar. Hversu hratt breytist hæðarhornið þegar lárétta fjarlægðin milli ykkar og fuglsins er 9 m?

38. Þið standið í 40 m fjarlægð frá flöskueldflaug á jörðinni og fylgist með þegar hún skýst lóðrétt upp í loftið á hraðanum 20 m/sek. Finnið breytingarhraða hæðarhornsins þegar eldflaugin er komin 30 m upp í loftið.

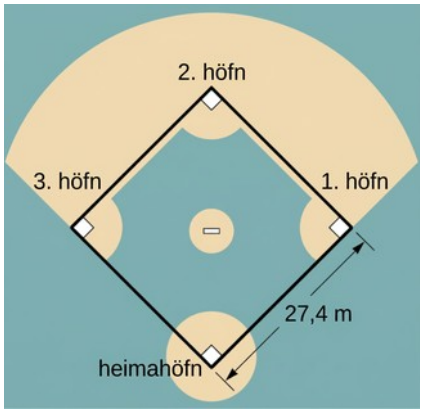
39. Viti, L, stendur á eyju 4 km frá næsta punktinum, P, á ströndinni (sjá eftirfarandi mynd). Ef ljós vitans snýst réttsælis með jöfnum hraða, 10 snúninga/mínútu, hve hratt færist ljósgeislinn þá eftir ströndinni í 2 km fjarlægð frá næsta punktinum á ströndinni?



40. Notið sömu aðstæður og í fyrra verkefni og ákvarðið hve hratt ljósgeislinn færist eftir ströndinni þegar hann er 1 km frá næsta stað á ströndinni.

41. Þið gangið að strætóstoppistöð við horn þar sem götur mætast hornrétt. Þið gangið norður með hraðanum 2 m/sec og eruð 20 m sunnan við gatnamótin. Strætisvagninn ekur vestur frá gatnamótunum á hraðanum 10 m/sec – þið hafið misst af vagninum! Hversu hratt breytist hornið milli ykkar og strætisvagnsins þegar þið eruð 20 m sunnan við gatnamótin og strætisvagninn er 10 m vestan við þau?

Styðjist í eftirfarandi æfingum við myndina af hafnaboltavellinum. Hliðar hans eru 27,4 m langar.



42. **[T]** Slagmaður slær bolta í átt að þriðju höfn með 24 m/sek. hraða og hleypur í átt að fyrstu höfn með 7 m/sek. hraða. Hversu hratt breytist fjarlægðin milli boltans og slagmannsins þegar 2 sek. eru liðnar?

43. **[T]** Slagmaður slær bolta í átt að annarri höfn með hraðanum 24 m/sek. og hleypur í átt að fyrstu höfn með hraðanum 9 m/sek. Hversu hratt breytist fjarlægðin milli boltans og slagmannsins þegar hlauparinn hefur farið þriðjung leiðarinnar að fyrstu höfn? (Vísbending: Rifjið upp kósínusregluna.)

44. **[T]** Slagmaður slær boltann og hleypur í átt að fyrstu höfn með hraðanum 7 m/sek. Með hvaða hraða breytist fjarlægðin milli hlauparans og annarrar hafnar þegar hlauparinn hefur hlaupið 9 m?

45. **[T]** Hlauparar eru á fyrstu og annarri höfn. Þegar boltinn er sleginn hleypur hlauparinn á fyrstu höfn í átt að annarri höfn með hraðanum 5,5 m/sek. og hlauparinn á annarri höfn í átt að þriðju höfn með hraðanum 6 m/sek. Hversu hratt breytist fjarlægðin milli hlauparanna 1 sek. eftir að boltinn er sleginn?

4.2 Línulegar nálganir og deildi

NÁMSMARKMIÐ

- 4.2.1 Lýsa línulegri nálgun falls í tilteknum punkti.
- 4.2.2 Rita línugervingu gefins falls.
- 4.2.3 Teikna graf sem sýnir hvernig nota má deildi til að nálga breytingu á stærð.
- 4.2.4 Reikna hlutfallsskekkju og prósentuskekkju við nálgun með deildi.

Við höfum nýlega séð hvernig nota má afleiður til að bera saman tengdar stærðir sem breytast með tíma. Í þessum undirkafla skoðum við aðra notkun afleiðna: hvernig nálga má föll staðbundið með línulegum föllum. Auðvelt er að vinna með línuleg föll og því nýtast þau vel til að nálga fallgildi. Í kaflanum Inngangur að veldaröðum og föllum alhæfum við síðar þessar hugmyndir þegar við skoðum hvernig nálga má föll með margliðum af hærra stigi.

Línuleg nálgun falls í punkti

Lítum á fall f sem er deildanlegt í punktinum $x=a$. Rifjum upp að snertillinn við graf f í punktinum a er gefinn með jöfnunni

$$y=f(a)+f'(a)(x-a).$$

Skoðum til dæmis fallið $f(x)=\frac{1}{x}$ í punktinum $a=2$. Þar sem f er deildanlegt í punktinum $x=2$ og $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, sjáum við að $f'(2)=-\frac{1}{4}$. Því er snertillinn við graf f í punktinum $a=2$ gefinn með jöfnunni

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2).$$

Mynd 4.7(a) sýnir graf fallsins $f(x)=\frac{1}{x}$ ásamt snertli við f í punktinum $x=2$. Takið eftir að þegar x er nálægt 2 liggur snertillinn nærri grafi f. Því getum við notað jöfnu snertilsins til að nálga $f(x)$ þegar x er nálægt 2. Ef $x=2{,}1$, er y-gildi samsvarandi punkts á snertlinum til dæmis

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(2{,}1-2)=0{,}475.$$

4

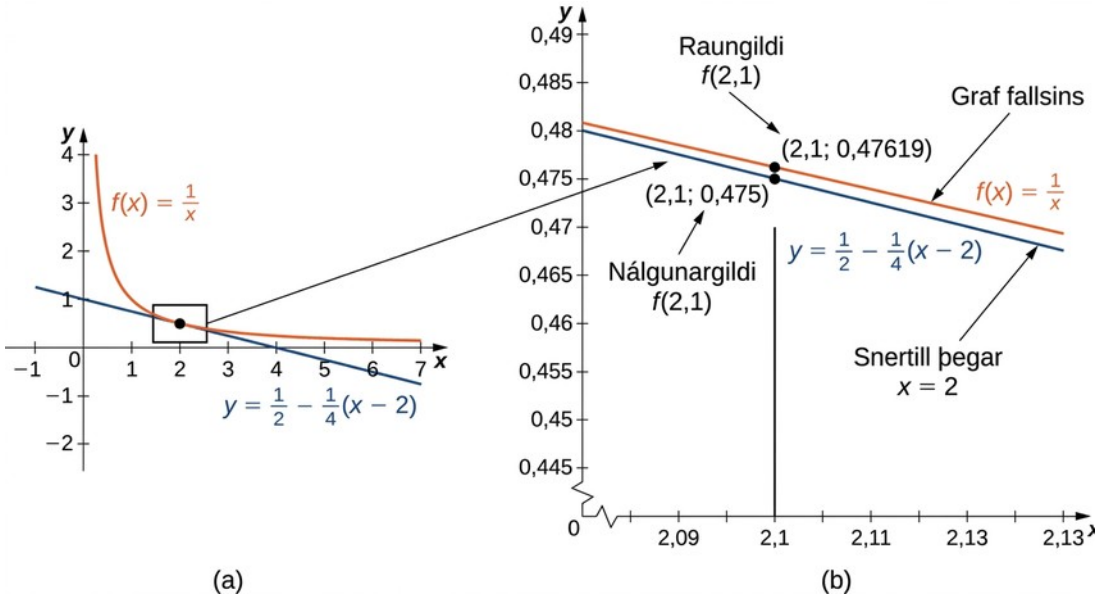
Raungildi $f(2{,}1)$ er hins vegar

$$f(2{,}1)=\frac{1}{2{,}1}\approx 0{,}47619.$$

Snertillinn gefur því nokkuð góða nálgun á $f(2{,}1)$ (mynd 4.7(b)). Fyrir gildi x sem eru fjarri 2 gefur jafna snertilsins hins vegar ekki góða nálgun. Ef $x=10$, er y-gildi samsvarandi punkts á snertlinum til dæmis

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(10-2)=\frac{1}{2}-2=-1{,}5,$$

en gildi fallsins í $x=10$ er $f(10)=0{,}1$.



Mynd 4.7 (a) Snertillinn við $f(x)=1/x$ í punktinum $x=2$ gefur góða nálgun á f þegar x er nálægt 2. (b) Þegar $x=2{,}1$, er y-gildið á snertlinum við $f(x)=1/x$ jafnt 0,475. Raungildi $f\ (2{,}1)$ er $1/2{,}1$, sem er um það bil 0,47619.

Fyrir deildanlegt fall f, má almennt nota jöfnu snertils við f í $x=a$ til að nálga $f(x)$ þegar x er nálægt a. Því getum við ritað

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a) \text{ fyrir } x \text{ nálægt } a.$$

Við köllum línulega fallið

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

(4.1)

línulega nálgun, eða snertilsnálgun, fallsins f í $x=a$. Fallið L er einnig kallað línugerving fallsins f í $x=a$.

Til að sýna hve gagnleg línuleg nálgun getur verið skoðum við hvernig finna má línulega nálgun fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ í $x=9$.

DÆMI 4.5

Línuleg nálgun við $\sqrt{x}$

Finnið línulega nálgun fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ í punktinum $x=9$ og notið hana til að áætla $\sqrt{9{,}1}$.

Lausn

Þar sem við leitum að línulegri nálgun í $x=9$, vitum <u>við samkvæmt</u> jöfnu 4.1 að hún er gefin með

$$L(x)=f(9)+f'(9)(x-9).$$

Við þurfum að finna $f(9)$ og $f'(9)$.

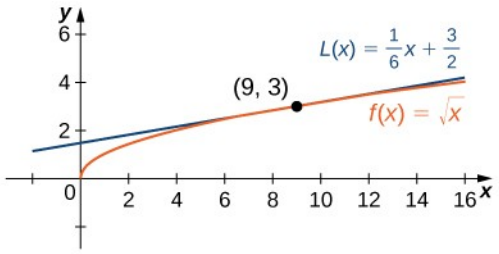
$$f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f(9)=\sqrt{9}=3$$
$$f\prime(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f\prime(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

Línulega nálgunin er því sú sem sýnd er á mynd 4.8.

$$L(x)=3+\frac{1}{6}(x-9)$$

Með línulegri nálgun getum við áætlað $\sqrt{9{,}1}$ með því að rita

$$\sqrt{9{,}1}=f\,(9{,}1)\approx L\,(9{,}1)=3+\frac{1}{6}\,(9{,}1-9)\approx 3{,}0167.$$



Mynd 4.8 Staðbundna línulega nálgunin við fallið $f(x)=\sqrt{x}$ í $x=9$ gefur nálgun á f þegar x er nálægt 9.

4

Greining

Samkvæmt reiknivél er gildi $\sqrt{9{,}1}$ með fjórum aukastöfum 3,0166. Gildið sem línulega nálgunin gefur, 3,0167, er mjög nærri niðurstöðu reiknivélarinnar. Því virðist þessi línulega nálgun henta vel til að áætla $\sqrt{x}$, að minnsta kosti þegar x er nálægt 9. Það kann þó að virðast undarlegt að nota línulega nálgun þegar hægt er að ýta á örfáa hnappa á reiknivél til að reikna $\sqrt{9{,}1}$. En hvernig reiknar reiknivélin $\sqrt{9{,}1}$? Hún notar nálgun! Reiknivélar og tölvur nota sífellt nálganir til að reikna stærðfræðilegar stæður; þær nota einfaldlega nálganir af hærra stigi.

STÖÐUMAT 4.5

Finnið staðbundna línulega nálgun við fallið $f(x)=\sqrt[3]{x}$ í $x=8$. Notið hana til að nálga $\sqrt[3]{8{,}1}$ með fimm aukastafa nákvæmni.

DÆMI 4.6

Línuleg nálgun við $\sin x$

Finnið línulega nálgun fallsins $f(x)=\sin x$ í $x=\frac{\pi}{3}$ og notið hana til að áætla $\sin(62°)$.

Lausn

Við tökum fyrst eftir því að þar sem $\frac{\pi}{3}$ radíanar jafngilda $60°$, virðist eðlilegt að nota línulega nálgun við $x=\pi/3$. Línulega nálgunin er gefin með

$$L(x)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Við sjáum að

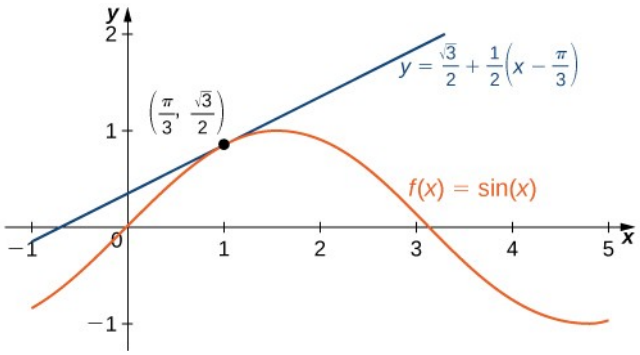
$$\begin{aligned} f(x)=\sin x &\Rightarrow f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x)=\cos x &\Rightarrow f'\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Línulega nálgun fallsins f í punktinum $x=\pi/3$ má því sjá á mynd 4.9.

$$L(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Til að áætla $\sin(62°)$ með L, verðum við fyrst að breyta $62°$ í radíana. Þar sem $62°=\frac{62\pi}{180}$ radíana fæst áætlunin á $\sin(62°)$ með

$$\sin(62°)=f\left(\frac{62\pi}{180}\right)\approx L\left(\frac{62\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{62\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{180}$$
$$\approx 0{,}88348.$$



Mynd 4.9 Línulega nálgunin við fallið $f(x)=\sin x$ í $x=\pi/3$ nálgar $\sin x$ þegar x er nærri $\pi/3$.

STÖÐUMAT 4.6

Finnið línulega nálgun fallsins $f(x)=\cos x$ í $x=\frac{\pi}{2}$.

Nota má línulegar nálganir til að áætla rætur og veldi. Í næsta dæmi finnum við línulega nálgun fallsins $f(x)=(1+x)^n$ í $x=0$, sem nota má til að áætla rætur og veldi rauntalna nálægt

1. Sömu aðferð má nota á fall af gerðinni $f(x)=(m+x)^n$ til að áætla rætur og veldi nálægt annarri tölu m.

DÆMI 4.7

Nálgun á rótum og veldum

Finnið línulega nálgun fallsins $f(x)=(1+x)^n$ í $x=0$. Notið hana til að áætla $(1{,}01)^3$.

Lausn

Línulega nálgunin í $x=0$ er

$$L(x)=f(0)+f'(0)(x-0).$$

Þar sem

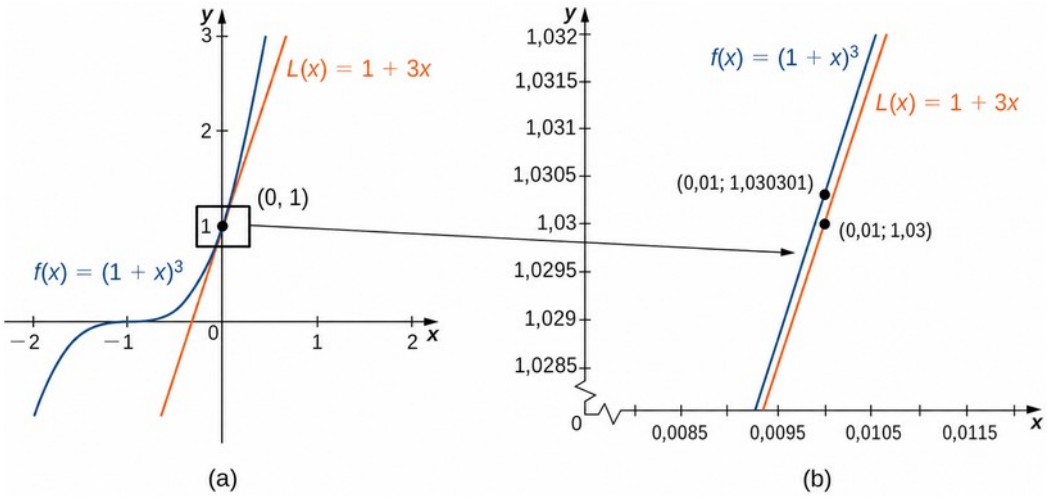
$$\begin{aligned} f(x) = (1+x)^n &\Rightarrow f(0) = 1 \\ f\prime(x) = n(1+x)^{n-1} &\Rightarrow f\prime(0) = n, \end{aligned}$$

er línulega nálgunin gefin eins og sýnt er á mynd 4.10(a).

$$L(x)=1+n(x-0)=1+nx$$

Við getum áætlað $(1{,}01)^3$ með því að reikna $L\,(0{,}01)$ þegar $n=3$. Af því leiðir að

$$(1{,}01)^3=f\,(1{,}01)\approx L\,(0{,}01)=1+3\,(0{,}01)=1{,}03.$$



Mynd 4.10 (a) Línuleg nálgun fallsins $f(x)$ í $x=0$ er $L(x)$. (b) Raungildi $1{,}01^3$ er 1,030301. Línuleg nálgun fallsins $f(x)$ í $x=0$ gefur áætlunina 1,03 fyrir $1{,}01^3$.

STÖÐUMAT 4.7

Finnið línulega nálgun fallsins $f(x)=(1+x)^4$ í $x=0$ án þess að nota niðurstöðuna úr dæminu hér á undan.

Deildi

Við höfum séð að nota má línulegar nálganir til að áætla fallgildi. Einnig má nota þær til að áætla hve mikið fallgildi breytist vegna lítillar breytingar á inntakinu. Til að fjalla um þetta með formlegri hætti skilgreinum við skylt hugtak: deildi. Með deildum má áætla hve mikið fall breytist vegna lítillar breytingar á inntaksgildum.

Þegar við kynntumst afleiðum fyrst notuðum við táknun Leibniz dy/dx fyrir afleiðu y með tilliti til x. Þótt táknin dy og dx kæmu þar fyrir höfðu þau ekki sjálfstæða merkingu. Nú gefum við þeim slíka merkingu. Gerum ráð fyrir að $y=f(x)$ sé deildanlegt fall. Látum dx vera óháða breytu sem getur tekið hvaða rauntölugildi sem er nema núll og skilgreinum háðu breytuna dy með

$$dy=f'(x)\,dx.$$

(4.2)

Mikilvægt er að taka eftir því að dy er fall bæði af x og dx. Stærðirnar dy og dx kallast deildi. Við getum deilt báðum hliðum jöfnu 4.2 með dx, og þá fæst

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

(4.3)

Þetta er kunnuglega stæðan sem við höfum notað fyrir afleiðu. Jafna 4.2 nefnist deildaform jöfnu 4.3.

DÆMI 4.8

Útreikningur deilda

Finnið dy fyrir hvert fallanna hér á eftir og reiknið gildi þess þegar $x=3$ og $dx=0{,}1$.

a. $y=x^2+2x$

b. $y=\cos x$

Lausn

Lykilskrefið er að reikna afleiðuna. Þegar hún liggur fyrir getum við ákvarðað dy beint.

a. Þar sem $f(x)=x^2+2x$, vitum við að $f'(x)=2x+2$, og því

$$dy=(2x+2)\,dx.$$

Þegar $x=3$ og $d\ x=0{,}1$,
er
$d\ y=(2\cdot 3+2)\,(0{,}1)=0{,}8$.

b. Þar sem $f(x)=\cos x$, er $f'(x)=-\sin(x)$. Því fæst

$$d\,y=-\sin x\,d\,x.$$

Þegar $x=3$ og $d\ x=0{,}1$,
er
$d\ y=-\sin\,(3)\,(0{,}1)=-0{,}1\ \ \sin\,(3)$.

STÖÐUMAT 4.8

Fyrir $y=e^{x^2}$, finnið $d\,y$.

Nú tengjum við deildi við línulegar nálganir. Nota má deildi til að áætla breytingu á fallgildi sem hlýst af lítilli breytingu á inntakinu. Lítum á fall f sem er deildanlegt í punktinum a. Gerum ráð fyrir að inntakið x breytist lítillega og könnum hve mikið úttakið y breytist. Ef x breytist úr a í $a+d\,x$, er breytingin á x jöfn $d\,x$ (einnig táknuð $\Delta\,x$), og breytingin á y er gefin með

$$\Delta\,y=f(a+d\,x)-f(a).$$

Þótt hægt sé að reikna nákvæma breytingu á y, er oft auðveldara að nálga breytinguna á y með línulegri nálgun. Þegar x er nálægt a, má nálga $f(x)$ með línulega fallinu

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a).$$

Því gildir að ef $d\,x$ er lítið,

$$f(a+d\,x)\approx L(a+d\,x)=f(a)+f'(a)(a+d\,x-a).$$

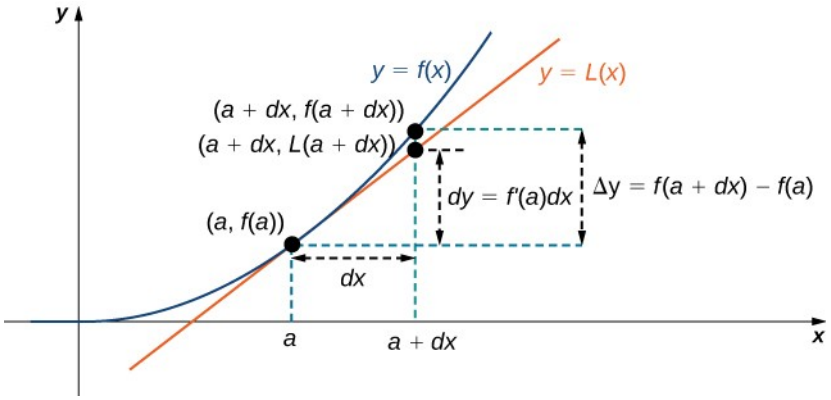
Það er að segja:

$$f(a+d\,x)-f(a)\approx L(a+d\,x)-f(a)=f'(a)\,d\,x.$$

Með öðrum orðum er raunveruleg breyting á fallinu f þegar x vex úr a í $a+d\,x$ um það bil jöfn mismuninum á $L(a+d\,x)$ og $f(a)$, þar sem $L(x)$ er línuleg nálgun fallsins f í a. Samkvæmt skilgreiningu $L(x)$, er þessi mismunur jafn $f'(a)\,d\,x$. Í stuttu máli:

$$\Delta\,y=f(a+d\,x)-f(a)\approx L(a+d\,x)-f(a)=f'(a)\,d\,x=d\,y.$$

Því má nota deildið $d\,y=f'(a)\,d\,x$ til að nálga breytinguna á y þegar x vex úr $x=a$ í $x=a+d\,x$. Þetta sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.11 Deildið $dy = f'(a)dx$ er notað til að nálga raunverulega breytingu á y þegar x vex úr a í $a+dx$.

Nú skoðum við hvernig nota má deildi til að nálga breytinguna á gildi fallsins þegar gildi inntaksins breytist lítillega. Athugið að mun einfaldara er að reikna með deildum en að reikna raunveruleg fallgildi og niðurstaðan er mjög nálægt því sem nákvæmari útreikningur gæfi.

DÆMI 4.9

Breyting nálguð með deildum

Látum $y = x^2 + 2x$. Reiknið Δy og dy þegar $x = 3$ ef $dx = 0{,}1$.

Lausn

The actual change in y if x changes from $x = 3$ to $x = 3{,}1$ is given by

$$\Delta y = f(3{,}1) - f(3) = [(3{,}1)^2 + 2(3{,}1)] - [3^2 + 2(3)] = 0{,}81.$$

Áætluð breyting á y er gefin með $dy = f'(3)dx$. Þar sem $f'(x) = 2x + 2$, fæst

$$dy = f'(3)\,dx = (2(3) + 2)(0{,}1) = 0{,}8.$$

STÖÐUMAT 4.9

Fyrir $y = x^2 + 2x$, finnið Δy og dy í $x = 3$ ef $dx = 0{,}2$.

Útreikningur á stærð skekkju

Öllum mælingum fylgir einhver skekkja. Í mörgum hagnýtum verkefnum eru stærðir reiknaðar út frá mælingum. Flatarmál hrings er til dæmis reiknað út frá mældum geisla hans. Skekkja í geislamælingunni veldur þá skekkju í reiknuðu flatarmáli. Hér skoðum við skekkjur af þessu tagi og hvernig nota má deildi til að áætla þær.

Skoðum fall f þar sem inntakið er mæld stærð. Gerum ráð fyrir að nákvæmt gildi mældu stærðarinnar sé a, en mælda gildið sé $a+dx$. Við segjum að mæliskekkjan sé dx (eða Δx). Þess vegna verður skekkja í reiknuðu stærðinni $f(x)$. Slík skekkja nefnist yfirfærð skekkja og er gefin með

$$\Delta y = f(a+dx) - f(a).$$

Þar sem öllum mælingum fylgir einhver skekkja þekkjum við ekki nákvæmt gildi mældrar stærðar og getum því ekki reiknað yfirfærðu skekkjuna nákvæmlega. Ef við höfum mat á því hve nákvæm mælingin er getum við hins vegar notað deildi til að nálga yfirfærðu skekkjuna Δy. Nánar tiltekið: Ef f er deildanlegt í a, er yfirfærða skekkjan

$$\Delta y \approx dy = f'(a)\,dx.$$

Því miður þekkjum við ekki nákvæmt gildi a. Við getum hins vegar notað mælda gildið $a+dx$, og áætlað

$$\Delta y \approx dy \approx f'(a+dx)\,dx.$$

Í næsta dæmi skoðum við hvernig nota má deildi til að áætla skekkju í reiknuðu rúmmáli kassa þegar hliðarlengdin er mæld með tiltekinni nákvæmni.

DÆMI 4.10

Rúmmál tenings

Gerum ráð fyrir að hliðarlengd tenings mælist 5 cm með skekkju sem er ekki meiri en 0,1 cm.

a. Notið deildi til að áætla skekkjuna í útreiknuðu rúmmáli teningsins.
b. Reiknið rúmmál teningsins þegar hliðarlengdin er (i) 4,9 cm og (ii) 5,1 cm til að bera áætluðu skekkjuna saman við mögulega raunverulega skekkju.

Lausn

a. Mæliskekkja hliðarlengdarinnar er innan $\pm 0{,}1$ cm. Því er

$$-0{,}1 \le dx \le 0{,}1.$$

Rúmmál tenings er $V = x^3$, og því er

$$dV = 3x^2\,dx.$$

Miðað við mældu hliðarlengdina 5 cm má áætla að

$$-3(5)^2(0{,}1) \le dV \le 3(5)^2(0{,}1).$$

Því er

$$-7{,}5 \le dV \le 7{,}5.$$

b. Ef hliðarlengdin er í raun 4,9 cm er rúmmál teningsins

$$V(4{,}9) = (4{,}9)^3 = 117{,}649 \text{ cm}^3.$$

Ef hliðarlengdin er í raun 5,1 cm er rúmmál teningsins

$V\left(5{,}1\right)=\left(5{,}1\right)^3=132{,}651\ \ \text{cm}^3$.

Raunverulegt rúmmál teningsins er því á milli 117,649 og 132,651. Þar sem hliðarlengdin mælist 5 cm er reiknaða rúmmálið $V\left(5\right)=5^3=125$. Skekkjan í reiknaða rúmmálinu er því

$117{,}649-125\leq\Delta\ V\leq132{,}651-125$.

Það er að segja:

$-7{,}351\leq\Delta\ V\leq7{,}651$.

Við sjáum að áætlaða skekkjan $d\,V$ er tiltölulega nálægt raunverulegri mögulegri skekkju í reiknaða rúmmálinu.

STÖÐUMAT 4.10

Áætlið skekkjuna í reiknuðu rúmmáli tenings ef hliðarlengd hans mælist 6 cm með skekkju sem er ekki meiri en 0,2 cm.

Mæliskekkjan dx $\left(=\Delta x\right)$ og yfirfærða skekkjan $\Delta\,y$ eru algildar skekkjur. Yfirleitt skiptir máli hve stór skekkjan er miðað við stærðina sem verið er að mæla eða reikna. Ef algild skekkja tiltekinnar stærðar er Δq skilgreinum við hlutfallslega skekkju sem $\frac{\Delta q}{q}$, þar sem q er raungildi stærðarinnar. Prósentuskekkja er hlutfallslega skekkjan gefin upp í prósentum. Ef hæð stiga mælist til dæmis 252 cm en er í raun 250 cm er algilda skekkjan 2 cm og hlutfallslega skekkjan $\frac{2}{250}=0{,}008$, eða $0{,}8\,\%$. Ef breidd pappaspjalds mælist hins vegar 20,5 cm en er í raun 20 cm er algilda skekkjan $\frac{1}{2}$ cm og hlutfallslega skekkjan $\frac{0{,}5}{20}=\frac{1}{40}$, eða $2{,}5\,\%$. Prósentuskekkjan í mælingu pappaspjaldsins er því meiri þótt 0,5 cm sé minna en 2 cm.

DÆMI 4.11

Hlutfallsleg skekkja og prósentuskekkja

Geimfari notar myndavél til að mæla geisla Jarðar og fær gildið 6400 km með skekkju sem nemur $\pm\,128$ km. Notum deildi til að áætla hlutfallslega skekkju og prósentuskekkju þegar rúmmál Jarðar er reiknað út frá þessari geislamælingu, að því gefnu að reikistjarnan sé fullkomin kúla.

Lausn

Ef skekkjan í geislamælingunni er innan ± 128, gildir

$$-128 \leq d\ r \leq 128.$$

Þar sem rúmmál kúlu er gefið með $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$, fæst

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Miðað við mælda geislann 6400 km má áætla

$$-4\ \pi\ (6400)^2\ (128) \leq d\ V \leq 4\ \pi\ (6400)^2\ (128).$$

Til að meta hlutfallslegu skekkjuna skoðum við $\frac{dV}{V}$. Þar sem við þekkjum ekki nákvæmt gildi rúmmálsins V, notum við mælda geislann $r = 6400$ km til að áætla V. Við fáum $V \approx \left(\frac{4}{3}\right)\ \pi\ (6400)^3$. Því gildir um hlutfallslegu skekkjuna að

$$\frac{-4\ \pi\ (6400)^2\ (128)}{4\ \pi\ (6400)^3/3} \leq \frac{d\ V}{V} \leq \frac{4\ \pi\ (6400)^2\ (128)}{4\ \pi\ (6400)^3/3},$$

sem má einfalda í

$$-0{,}06 \leq \frac{d\ V}{V} \leq 0{,}06.$$

Hlutfallslega skekkjan er 0,06 og prósentuskekkjan 6 %.

STÖÐUMAT 4.11

Ákvarðið prósentuskekkjuna ef geisli Jarðar mælist 6350 km með skekkju sem nemur ± 160 km.

Æfingar í undirkafla 4.2

46. Hver er línuleg nálgun almenns línufalls $y = mx + b$?

47. Ákvarðið nauðsynleg skilyrði fyrir því að línulega nálgunarfallið sé fast. Notið graf til að rökstyðja niðurstöðuna.

48. Útskýrið hvers vegna línulega nálgunin verður ónákvæmari eftir því sem fjarlægðin eykst milli x og a. Notið graf til að rökstyðja svarið.

49. Hvenær er línuleg nálgun nákvæm?

Í eftirfarandi æfingum skal finna línulegu nálgunina $L(x)$ við fallið $y = f(x)$ nærri $x = a$.

50.

$$f(x)=x+x^4, a=0$$

51.

$$f(x)=\frac{1}{x}, a=2$$

52.

$$f(x)=\tan x, a=\frac{\pi}{4}$$

53.

$$f(x)=\sin x, a=\frac{\pi}{2}$$

54.

$$f(x)=x\sin x, a=2\pi$$

55.

$$f(x)=\sin^2 x, a=0$$

Í eftirfarandi æfingum skal reikna gefin gildi með skekkju sem er minni en 0,01. Veljið viðeigandi $f(x)$ og a, og reiknið $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$. Sannreynið svarið með reiknivél.

56. **[T]** $(2{,}001)^6$

57. **[T]** $\sin(0{,}02)$

58. **[T]** $\cos(0{,}03)$

59. **[T]** $(15{,}99)^{1/4}$

60. **[T]** $\frac{1}{0{,}98}$

61. **[T]** $\sin(3{,}14)$

Í eftirfarandi æfingum skal velja viðeigandi $f(x)$ og a, og reikna $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$. Reiknið tölulegu skekkjuna í línulegu nálgununum sem fylgja.

62. **[T]** $(1{,}01)^3$

63. **[T]** $\cos(0{,}01)$

64. **[T]** $(\sin(0{,}01))^2$

65. **[T]** $(1{,}01)^{-3}$

66. **[T]** $\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$

67. **[T]** $\sqrt{8{,}99}$

Í eftirfarandi æfingum skal finna deildi fallsins.

68.

$$y=3x^4+x^2-2x+1$$

69.

$$y=x\cos x$$

70.

$$y=\sqrt{1+x}$$

71.

$$y=\frac{x^2+2}{x-1}$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna deildið og reikna gildi þess fyrir gefið x og dx.

72.

$$y=3x^2-x+6,\ x=2,\ d\ x=0{,}1$$

73.

$$y=\frac{1}{x+1},\ x=1,\ d\ x=0{,}25$$

74.

$$y=\tan x,\ x=0,\ dx=\frac{\pi}{10}$$

75.

$$y=\frac{3x^2+2}{\sqrt{x+1}},\ x=0,\ d\ x=0{,}1$$

76.

$$y=\frac{\sin(2x)}{x},\ x=\pi,\ d\ x=0{,}25$$

77.

$$y=x^3+2x+\frac{1}{x},\ x=1,\ d\ x=0{,}05$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna breytingu rúmmálsins dV eða yfirborðsflatarmálsins dA.

78. dV ef hliðarlengdir tenings breytast úr 10 í 10,1.

79. dA ef hliðar tenings breytast úr x í $x+dx$.

80. dA ef geisli kúlu, sem er r, breytist um dr.

81. dV ef geisli kúlu, sem er r, breytist um dr.

82. dV ef hæð hringlaga sívalnings með $r=2$ breytist úr 3 cm í 3,05 cm.

83. dV ef hringlaga sívalningur með hæðina 3 breytist úr $r=2$ í $r=1{,}9$ cm.

84. A spherical golf ball is measured to have a radius of 5 mm, with a possible measurement error of 0,1 mm. What is the possible change in volume?

85. Sundlaug hefur rétthyrndan botn, 5 m á breidd og 10 m á lengd, og er 2 m á dýpt. Hver er rúmmálsbreytingin ef hún er aðeins fyllt að 1,8 m dýpt?

86. Ískeila er 12 cm á hæð og geisli hennar er 3 cm. Ef keiluskelin er 0,3 cm þykk, hver er þá munurinn á rúmmáli keilunnar að skelinni meðtalinni og rúmmáli íssins sem kemst fyrir í henni?

Staðfestið nálganirnar í eftirfarandi æfingum með því að nota línulegu nálgunina í $x=0$.

87.

$$\sqrt{1-x}\approx 1-\frac{1}{2}x$$

88.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\approx 1$$

89.

$$\sqrt{c^2+x^2}\approx c$$

4.3 Hágildi og lággildi

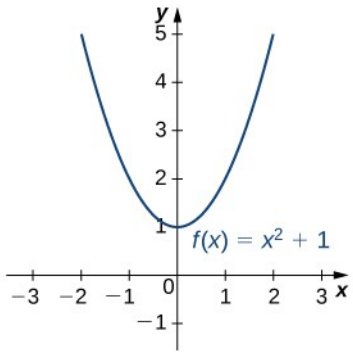
NÁMSMARKMIÐ

- 4.3.1 Skilgreina algild hágildi og lággildi.
- 4.3.2 Skilgreina staðbundin hágildi og lággildi.
- 4.3.3 Útskýra hvernig finna má stöðupunkta falls á lokuðu bili.
- 4.3.4 Lýsa því hvernig nota má stöðupunkta til að finna algild hágildi og lággildi á lokuðu bili.

Við höfum oft áhuga á að finna stærstu og minnstu gildi tiltekins falls. Þessar upplýsingar skipta máli þegar teikna á nákvæm gröf. Það hefur einnig hagnýta þýðingu að finna hágildi og lággildi falls, því að með þessari aðferð getum við leyst bestunarverkefni, svo sem að hámarka hagnað, lágmarka efnið sem þarf til að framleiða áldós eða finna mestu hæð sem eldflaug getur náð. Í þessum undirkafla skoðum við hvernig nota má afleiður til að finna stærstu og minnstu gildi falls.

Algild útgildi

Skoðum fallið $f(x)=x^2+1$ á bilinu $(-\infty,\infty)$. Þegar $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$. Fallið hefur því ekkert stærsta gildi. Þar sem $x^2+1 \geq 1$ fyrir allar rauntölur x og $x^2+1=1$ þegar $x=0$, hefur fallið hins vegar minnsta gildið 1 þegar $x=0$. Gildið 1 er algilt lággildi fallsins $f(x)=x^2+1$ og það fæst þegar $x=0$. Fallið $f(x)=x^2+1$ hefur ekkert algilt hágildi (sjá myndina hér á eftir).



Mynd 4.12 Gefna fallið hefur algilt lággildi 1 í $x=0$. Fallið hefur ekkert algilt hágildi.

SKILGREINING

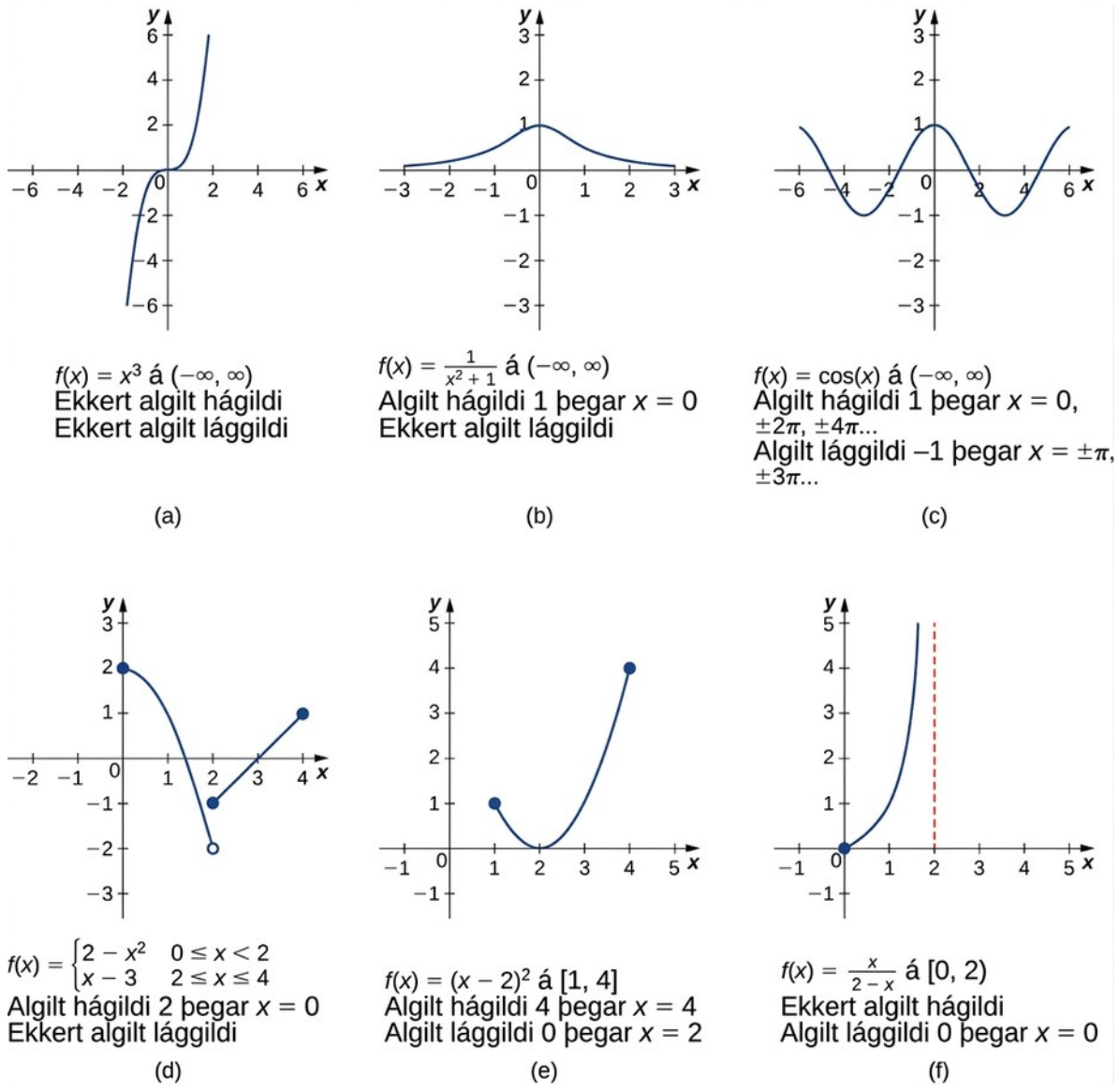
Látum f vera fall sem skilgreint er á bili I og látum $c \in I$. Við segjum að f hafi algilt hágildi á I í c ef $f(c) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in I$. Við segjum að f hafi algilt lággildi á I í c ef $f(c) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in I$. Ef f hefur algilt hágildi á I í c eða algilt lággildi á I í c, segjum við að f hafi algilt útgildi á I í c.

Áður en lengra er haldið skulum við benda á tvö mikilvæg atriði um þessa skilgreiningu. Í fyrsta lagi vísar orðið algilt hér ekki til tölugildis. Algilt útgildi getur verið jákvætt, neikvætt eða núll. Í öðru lagi: Ef fall f hefur algilt útgildi á bili I í c, þá er algilda útgildið $f(c)$. Rauntalan c er það gildi í skilgreiningarmenginu þar sem algilda útgildið fæst. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=1/(x^2+1)$ á bilinu $(-\infty,\infty)$. Þar sem

$$f(0)=1 \geq \frac{1}{x^2+1}=f(x)$$

fyrir allar rauntölur x, segjum við að f hafi algilt hágildi á $(-\infty,\infty)$ þegar $x=0$. Algilda hágildið er $f(0)=1$. Það fæst þegar $x=0$, eins og sýnt er á mynd 4.13(b).

Fall getur haft bæði algilt hágildi og algilt lággildi, aðeins annað útgildið eða hvorugt. Mynd 4.13 sýnir nokkur föll og ýmsa möguleika varðandi algild útgildi. Eftirfarandi setning, sem nefnist útgildissetningin, tryggir hins vegar að samfellt fall f á lokuðu, takmörkuðu bili $[a, b]$ hafi bæði algilt hágildi og algilt lággildi.



Mynd 4.13 Gröfin (a), (b) og (c) sýna nokkra möguleika á algildum hágildum og lággildum falla með skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$. Gröfin (d), (e) og (f) sýna nokkra möguleika á algildum hágildum og lággildum falla þar sem skilgreiningarmengið er takmarkað bil.

SETNING 4.1

Útgildissetningin

Ef f er samfellt fall á lokaða, takmarkaða bilinu $[a, b]$, þá er til punktur í $[a, b]$ þar sem f hefur algilt hágildi á $[a, b]$ og punktur í $[a, b]$ þar sem f hefur algilt lággildi á $[a, b]$.

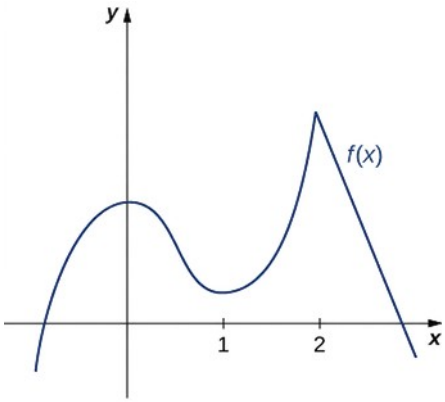
The proof of the extreme value theorem is beyond the scope of this text. Typically, it is proved in a course on real analysis. There are a couple of key points to note about the statement of this theorem. For the extreme value theorem to apply, the function must be continuous over a closed, bounded interval. If the interval I is open or the function has even one point of discontinuity, the function may not have an absolute maximum or absolute minimum over I. For example, consider the functions shown in Figure 4.13(d), (e), and (f). All three of these functions are defined over bounded intervals. However, the function in graph (e) is the only one that has both an absolute maximum and an absolute minimum over its domain. The extreme value theorem cannot be applied to the functions in graphs (d) and (f) because neither of these functions is continuous over a closed, bounded interval. Although the function in graph (d) is defined over the closed interval $[0,4]$, the function is discontinuous at $x=2$. The function has an absolute maximum over $[0,4]$ but does not have an absolute minimum. The function in graph (f) is continuous over the half-open interval $[0,2)$, but is not defined at $x=2$, and therefore is not continuous over a closed, bounded interval. The function has an absolute minimum over $[0,2)$, but does not have an absolute maximum over $[0,2)$. These two graphs illustrate why a function over a bounded interval may fail to have an absolute maximum and/or absolute minimum.

Áður en við skoðum hvernig finna má algild hágildi og lággildi skulum við kanna skylt hugtak: staðbundin hágildi og lággildi. Það hjálpar okkur að finna hvar algild hágildi og lággildi eru.

4

Staðbundin útgildi og stöðupunktar

Skoðum fallið f sem sýnt er á mynd 4.14. Lýsa má grafinu sem tveimur fjöllum með dal á milli. Algilt hágildi fallsins er á hærri tindinum þegar $x=2$. Punkturinn $x=0$ er þó einnig athyglisverður. Þótt $f(0)$ sé ekki stærsta gildi f, er $f(0)$ stærra en $f(x)$ fyrir öll x nálægt 0. Við segjum að f hafi staðbundið hágildi þegar $x=0$. Fallið f hefur ekkert algilt lággildi en hefur staðbundið lággildi þegar $x=1$ vegna þess að $f(1)$ er minna en $f(x)$ fyrir x nálægt 1.



$f(x)$ skilgreint á $(-\infty, \infty)$
Staðbundin hágildi þegar $x = 0$ og $x = 2$
Staðbundið lággildi þegar $x = 1$

Mynd 4.14 Fallið f hefur tvö staðbundin hágildi og eitt staðbundið lággildi. Staðbundna hágildið þegar $x=2$ er jafnframt algilda hágildið.

SKILGREINING

Fall f hefur staðbundið hágildi í c ef til er opið bil I sem inniheldur c þannig að I er hlutmengi skilgreiningarmengis f og $f(c) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in I$. Fall f hefur staðbundið lággildi í c ef til er opið bil I sem inniheldur c þannig að I er hlutmengi skilgreiningarmengis f og $f(c) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in I$. Fall f hefur staðbundið útgildi í c ef f hefur staðbundið hágildi í c eða f hefur staðbundið lággildi í c.

Athugið að ef f hefur algilt útgildi í c og f er skilgreint á bili sem inniheldur c, þá telst $f(c)$ einnig staðbundið útgildi. Ef algilt útgildi fallsins f er í endapunkti teljum við það ekki staðbundið útgildi heldur köllum það endaútgildi.

Þegar gefið er graf falls f, er stundum auðvelt að sjá hvar staðbundið hágildi eða lággildi kemur fyrir. Það er þó ekki alltaf auðvelt, því að áhugaverð atriði á grafinu geta verið svo smá að þau sjást illa. Auk þess höfum við ekki alltaf graf fallsins. Hvernig má þá nota formúlu fallsins til að ákvarða hvar þessi útgildi koma fyrir?

Til að svara þessari spurningu skulum við skoða mynd 4.14 aftur. Staðbundin hágildi og lággildi koma fyrir þegar $x=0$, $x=1$, og $x=2$. Takið eftir að þegar $x=0$ og $x=1$, er afleiðan $f'(x)=0$. Þegar $x=2$, er afleiðan $f'(x)$ ekki til, því að fallið f hefur hornpunkt þar. Ef f hefur staðbundið hágildi eða lággildi í punkti þar sem $x=c$, verður afleiðan $f'(c)$ að uppfylla annað af tveimur skilyrðum: Annaðhvort er $f'(c)=0$ eða $f'(c)$ óskilgreind. Slíkt gildi c nefnist stöðupunktur og skiptir miklu máli þegar finna á útgildi falla.

SKILGREINING

Látum c vera innra gildi í skilgreiningarmengi f. Við segjum að c sé stöðupunktur fallsins f ef $f'(c)=0$ eða $f'(c)$ er óskilgreind. Punkturinn $(c, f(c))$ nefnist einnig stöðupunktur fallsins f. Athugið að þessi tvö hugtök eru oft notuð jöfnum höndum í þessari bók og annars staðar.

Ef f hefur staðbundið útgildi í punkti $x=c$, þá verður c að vera stöðupunktur fallsins f. Þessi niðurstaða nefnist setning Fermats.

SETNING 4.2

Setning Fermats

Ef fallið f hefur staðbundið útgildi í c og f er deildanlegt í c, þá er $f'(c)=0$.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að f hafi staðbundið útgildi í c og að f sé deildanlegt í c. Við þurfum að sýna að $f'(c)=0$. Til þess sýnum við að $f'(c)\geq 0$ og $f'(c)\leq 0$, og þar með að $f'(c)=0$. Þar sem f hefur staðbundið útgildi í c, hefur fallið f annaðhvort staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í c. Gerum ráð fyrir að f hafi staðbundið hágildi í c. Tilvikið þar sem f hefur staðbundið lággildi í c er meðhöndlað á sama hátt. Þá er til opið bil I þannig að $f(c)\geq f(x)$ fyrir öll $x\in I$. Þar sem f er deildanlegt í c, leiðir af skilgreiningu afleiðunnar að

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Þar sem þetta markgildi er til eru bæði einhliða markgildin einnig til og jöfn $f'(c)$. Því er

$$f'(c)=\lim_{x\to c^{+}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

(4.4)

og

$$f'(c)=\lim_{x\to c^{-}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

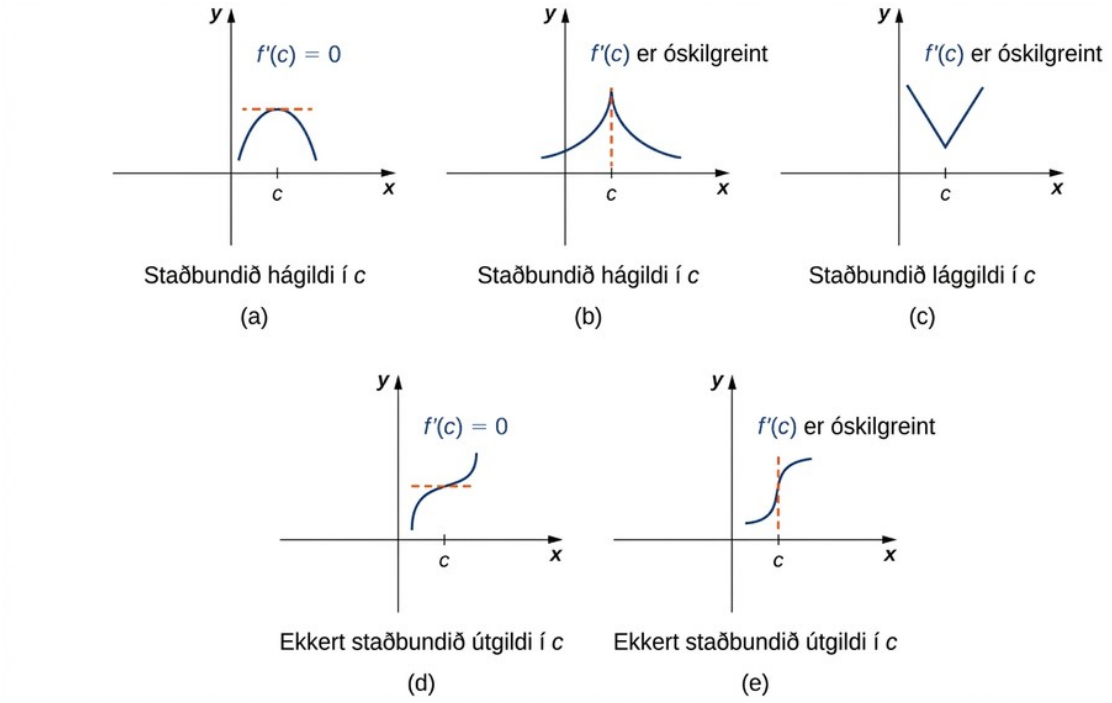
(4.5)

Þar sem $f(c)$ er staðbundið hágildi sjáum við að $f(x)-f(c)\leq 0$ fyrir x nálægt c. Því gildir fyrir x nálægt c, en $x>c$, að $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$. Af jöfnu 4.4 ályktum við að $f'(c)\leq 0$. Á sama hátt má sýna að $f'(c)\geq 0$. Því gildir að $f'(c)=0$.

□

Af setningu Fermats leiðir að ef f hefur staðbundið útgildi í c, þá er annaðhvort $f'(c)=0$ eða $f'(c)$ óskilgreint. Með öðrum orðum geta staðbundin útgildi aðeins komið fyrir í stöðupunktum.

Setningin fullyrðir ekki að fallið f verði að hafa staðbundið útgildi í stöðupunkti. Hún segir aðeins að stöðupunktar séu þeir staðir þar sem staðbundin útgildi geti verið. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=x^3$. Við höfum $f'(x)=3x^2=0$ þegar $x=0$. Því er $x=0$ stöðupunktur. Fallið $f(x)=x^3$ er hins vegar vaxandi á $(-\infty,\infty)$, og f hefur því ekki staðbundið útgildi þegar $x=0$. Á mynd 4.15 sjáum við nokkra ólíka möguleika fyrir stöðupunkta. Í sumum þessara tilvika hafa föllin staðbundin útgildi í stöðupunktum en í öðrum ekki. Athugið að gröfin sýna ekki alla mögulega hegðun falls í stöðupunkti.



Mynd 4.15 (a–e) Fall f hefur stöðupunkt í c ef $f'(c)=0$ eða $f'(c)$ er óskilgreint. Fall getur haft staðbundið útgildi í stöðupunkti, en þarf ekki að hafa það.

Síðar í þessum kafla skoðum við greiningaraðferðir til að ákvarða hvort fall hafi í raun staðbundið útgildi í stöðupunkti. Snúum okkur nú að því að finna stöðupunkta. Við skoðum gröf til að sjá hvort staðbundið útgildi sé í stöðupunkti.

DÆMI 4.12

Að finna stöðupunkta

Finnið alla stöðupunkta fallanna hér á eftir. Notið grafteikniforrit til að ákvarða hvort fallið hafi staðbundið hágildi eða lággildi í hverjum stöðupunkti.

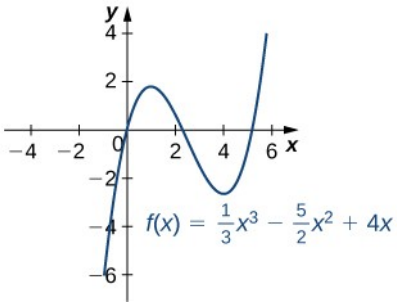
a. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x$

b. $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$

c. $f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$

Lausn

a. Afleiðan $f'(x)=x^2-5x+4$ er skilgreind fyrir allar rauntölur x. Því þurfum við aðeins að finna þau gildi x þar sem $f'(x)=0$. Þar sem $f'(x)=x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$, eru stöðupunktarnir $x=1$ og $x=4$. Af grafi f á mynd 4.16 sjáum við að f hefur staðbundið hágildi í $x=1$ og staðbundið lággildi í $x=4$.

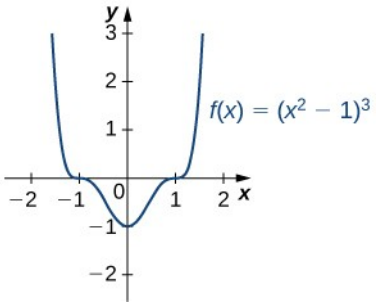


Mynd 4.16 Þetta fall hefur staðbundið hágildi og staðbundið lággildi.

b. Með keðjureglunni sjáum við að afleiðan er

$$f'(x)=3(x^2-1)^2(2x)=6x(x^2-1)^2.$$

Því hefur f stöðupunkta þegar $x=0$ og þegar $x^2-1=0$. Við ályktum að stöðupunktarnir séu $x=0,\pm 1$. Af grafi f á mynd 4.17 sjáum við að f hefur staðbundið (og algilt) lággildi í $x=0$, en ekkert staðbundið útgildi í $x=1$ eða $x=-1$.

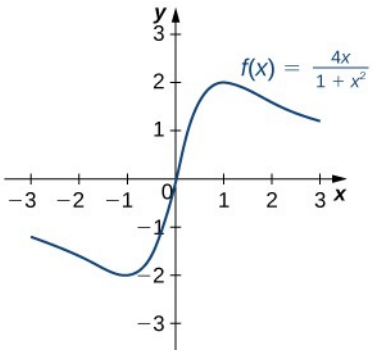


Mynd 4.17 Fallið hefur þrjá stöðupunkta: $x=0$, $x=1$, og $x=-1$. Það hefur staðbundið (og algilt) lággildi þegar $x=0$, en ekkert útgildi í hinum stöðupunktunum tveimur.

c. Samkvæmt deilireglunni er afleiðan

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)(4)-4x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Afleiðan er skilgreind alls staðar. Því þurfum við aðeins að finna þau gildi x þar sem $f'(x)=0$. Þegar við leysum $f'(x)=0$, sjáum við að $4-4x^2=0$, sem leiðir af sér að $x=\pm 1$. Stöðupunktarnir eru því $x=\pm 1$. Af grafi f á mynd 4.18 sjáum við að f hefur algilt hágildi í $x=1$ og algilt lággildi í $x=-1$. Því hefur f staðbundið hágildi í $x=1$ og staðbundið lággildi í $x=-1$. (Athugið að ef f hefur algilt útgildi á bili I í punkti c sem er ekki endapunktur I, þá hefur f staðbundið útgildi í c.)



Mynd 4.18 Þetta fall hefur algilt hágildi og algilt lággildi.

4

STÖÐUMAT 4.12

Finnið alla stöðupunkta fyrir $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Að finna algild hágildi og lággildi

Útgildissetningin segir að samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili hafi algilt hágildi og algilt lággildi. Eins og sýnt er á mynd 4.13 getur annað eða bæði þessara algildu útgilda verið í endapunkti. Ef algilt útgildi er ekki í endapunkti hlýtur það hins vegar að vera í innri punkti og er þá jafnframt staðbundið útgildi. Af setningu Fermats leiðir því að punkturinn c, þar sem staðbundna útgildið er, verður að vera stöðupunktur. Við tökum þessa niðurstöðu saman í næstu setningu.

SETNING 4.3

Staðsetning algildra útgilda

Látum f vera samfellt fall á lokuðu, takmörkuðu bili I. Algilt hágildi f á I og algilt lággildi f á I hljóta að vera í endapunktum I eða í stöðupunktum fallsins f á I.

Með þessa hugmynd í huga skulum við skoða aðferð til að finna algild útgildi.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Að finna algild hágildi og lággildi á lokuðu bili

Lítum á samfellt fall f sem er skilgreint á lokaða bilinu $[a,b]$.

1. Reiknið f í endapunktunum $x=a$ og $x=b$.
2. Finnið alla stöðupunkta fallsins f sem liggja á bilinu (a,b) og reiknið gildi f í þessum stöðupunktum.
3. Berið saman öll gildin sem fundust í (1) og (2). Samkvæmt setningunni um staðsetningu algildra útgilda verða algildu útgildin að vera í endapunktum eða stöðupunktum. Stærsta þessara gilda er því algilt hágildi fallsins f. Minnsta þeirra er algilt lággildi fallsins f.

Skoðum nú hvernig nota má þessa aðferð til að finna algilt hágildi og algilt lággildi samfelldra falla.

DÆMI 4.13

Að finna algild hágildi og lággildi

Finnið algilt hágildi og algilt lággildi hvers falls hér á eftir á bilinu sem gefið er. Tilgreinið einnig hvar gildin fást.

a. $f(x)=-x^2+3x-2$ á $[1,3]$.

b. $f(x)=x^2-3x^{2/3}$ á $[0,2]$.

Lausn

a. Skref 1. Reiknum f í endapunktunum $x=1$ og $x=3$.

$$f(1)=0 \text{ og } f(3)=-2$$

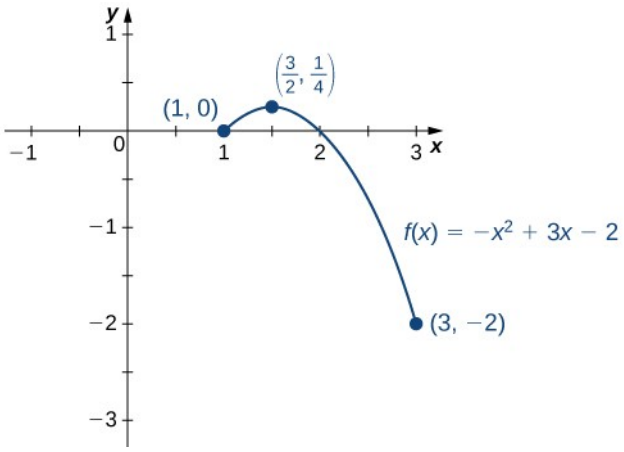
Skref 2. Þar sem $f'(x)=-2x+3$, er f' skilgreint fyrir allar rauntölur x. Því eru engir stöðupunktar þar sem afleiðan er óskilgreind. Eftir stendur að kanna hvar $f'(x)=0$. Þar sem $f'(x)=-2x+3=0$ þegar $x=\frac{3}{2}$ og $\frac{3}{2}$ er á bilinu $[1,3]$, kemur $f\left(\frac{3}{2}\right)$ til greina sem algilt útgildi fallsins f á $[1,3]$. Við reiknum $f\left(\frac{3}{2}\right)$ og fáum

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Skref 3. Við setjum upp eftirfarandi töflu til að bera saman gildin sem fengust í skrefum 1 og 2.

x	$f(x)$	**Niðurstaða**
1	0	
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	Algilt hágildi
3	-2	Algilt lággildi

Af töflunni sjáum við að algilt hágildi f á bilinu $[1, 3]$ er $\frac{1}{4}$, og það fæst í $x=\frac{3}{2}$. Algilt lággildi f á bilinu $[1, 3]$ er -2, og það fæst í $x=3$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.19 Þetta fall hefur bæði algilt hágildi og algilt lággildi.

b. Skref 1. Reiknum gildi f í endapunktunum $x=0$ og $x=2$.

$$f(0)=0 \text{ og } f(2)=4-3\sqrt[3]{4}\approx -0{,}762$$

Skref 2. Afleiða f er gefin með

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^{1/3}}=\frac{2x^{4/3}-2}{x^{1/3}}$$

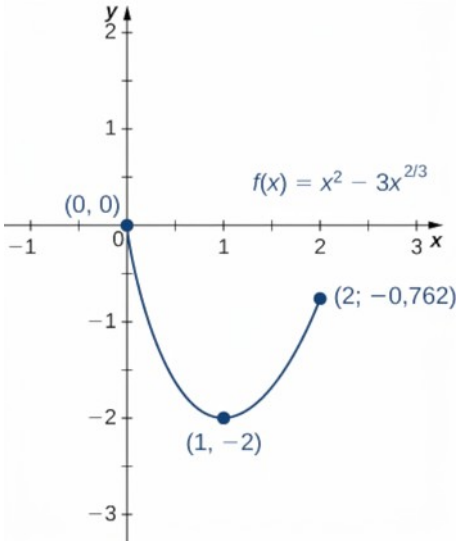
þegar $x\neq 0$. Afleiðan er núll þegar $2x^{4/3}-2=0$, sem gefur $x=\pm 1$. Afleiðan er óskilgreind í $x=0$. Stöðupunktar f eru því $x=0, 1, -1$. Punkturinn $x=0$ er endapunktur, svo að við höfum þegar reiknað $f(0)$ í skrefi 1. Punkturinn $x=-1$ er ekki á bilinu sem um ræðir, svo við þurfum aðeins að reikna gildi $f(1)$. Við fáum að

$$f(1)=-2.$$

Skref 3. Við berum saman gildin sem fengust í skrefum 1 og 2 í eftirfarandi töflu.

x	$f(x)$	**Niðurstaða**
0	0	Algilt hágildi
1	-2	Algilt lággildi
2	$-0{,}762$	

Við ályktum að algilt hágildi f á bilinu $[0, 2]$ sé núll og að það fáist í $x=0$. Algilt lággildi er -2 og það fæst í $x=1$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.20 Fallið hefur algilt hágildi í endapunkti bilsins.

STÖÐUMAT 4.13

Finnið algilt hágildi og algilt lággildi fallsins $f(x)=x^2-4x+3$ á bilinu $[1,4]$.

Nú kunnum við að finna algild hágildi og lággildi samfelldra falla á lokuðum bilum. Við höfum einnig skilgreint staðbundin hágildi og lággildi og komist að því að ef fall f hefur staðbundið hágildi eða lággildi í punkti c, þá hlýtur c að vera stöðupunktur fallsins f. Það nægir hins vegar ekki að c sé stöðupunktur til þess að f hafi staðbundið hágildi eða lággildi í c. Síðar í þessum kafla sýnum við hvernig ákvarða má hvort fall hafi í raun staðbundið hágildi eða lággildi í stöðupunkti. Fyrst þurfum við þó að kynna meðalgildissetninguna, sem hjálpar okkur að greina hegðun grafs falls.

Æfingar í kafla 4.3

90. Í undirbúningsstærðfræði lærðuð þið formúlu fyrir staðsetningu hágildis eða lággildis annars stigs falls $y=ax^2+bx+c$, en hún er $h=-\frac{b}{(2a)}$. Sannið formúluna með aðferðum stærðfræðigreiningar.

91. Ef finna á algilt lággildi á bili $[a,b]$, hvers vegna þarf þá að athuga endapunkta þess? Teiknið graf sem styður tilgátu ykkar.

92. Ef fall er skoðað á bili (a,b), þar sem a og b eru endanleg, er þá mögulegt að fallið hafi hvorki algilt hágildi né algilt lággildi?

93. Útskýrið hvers vegna einnig þarf að finna þá punkta þar sem $f'(x)$ er óskilgreint þegar leitað er að stöðupunktum. Teiknið graf til stuðnings skýringu ykkar.

94. Getur fallið $y=ax^2+bx+c$ haft endanlegt algilt hágildi á $(-\infty,\infty)$? Útskýrið með grafískum rökum hvers vegna svo er eða er ekki.

95. Getur fallið $y=ax^3+bx^2+cx+d$ haft endanlegt algilt hágildi á $(-\infty,\infty)$ ef a er ekki núll? Útskýrið með grafískum rökum hvers vegna svo er eða er ekki.

96. Látum m tákna fjölda staðbundinna lággilda og M tákna fjölda staðbundinna hágilda. Getið þið búið til fall þar sem $M>m+2$? Teiknið graf til stuðnings skýringu ykkar.

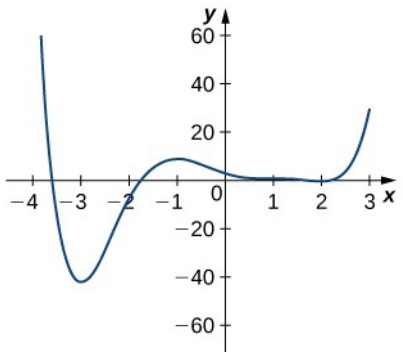
97. Getur fall haft fleiri en eitt algilt hágildi? Notið grafísk rök til að sanna tilgátu ykkar.

98. Getur fall verið án algilds lággildis eða hágildis? Ef svo er, gefið dæmi um slíkt fall. Ef ekki, útskýrið hvers vegna það er ekki mögulegt.

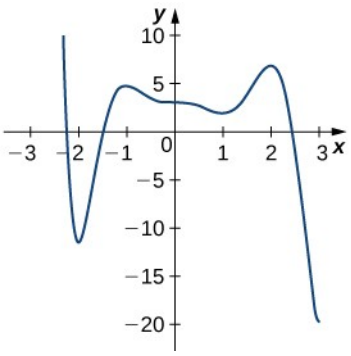
99. **[T]** Teiknið graf fallsins $y=e^{ax}$. Fyrir hvaða gildi a, á óendanlegu skilgreiningarmengi, hefur fallið bæði algilt lággildi og algilt hágildi?

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða hvar staðbundin og algild hágildi og lággildi koma fyrir á grafinu sem gefið er. Gerið ráð fyrir að grafið sýni hvert fall í heild sinni. Ef útgildi er í endapunkti skal áætla x-gildið.

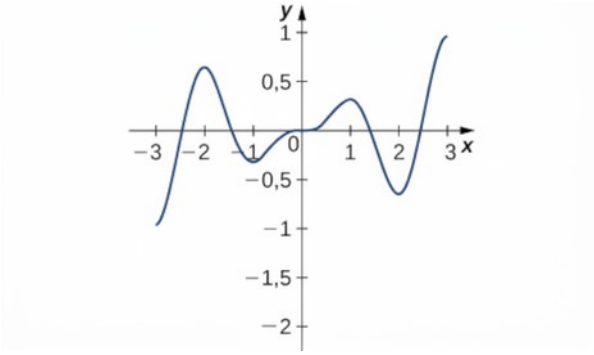
100.



101.

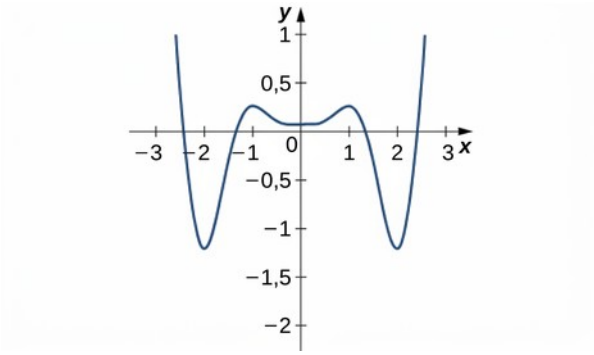


102.



4

103.



Í eftirfarandi verkefnum skal teikna graf samfellds falls $f(x)$, á bilinu $[-4, 4]$ sem hefur eftirfarandi eiginleika:

104. Algilt hágildi þegar $x = 2$ og algild lággildi þegar $x = \pm 3$

105. Algilt lággildi í $x = 1$ og algilt hágildi í $x = 2$

106. Algilt hágildi í $x = 4$, algilt lággildi í $x = -1$, staðbundið hágildi í $x = -2$, og stöðupunktur sem er hvorki hágildis- né lággildispunktur í $x = 2$

107. Algild hágildi í $x = 2$ og $x = -3$, staðbundið lággildi í $x = 1$, og algilt lággildi í $x = 4$

Í eftirfarandi æfingum skal finna stöðupunktana í skilgreiningarmengjum fallanna.

108.

$$y=4x^3-3x$$

109.

$$y=4\sqrt{x}-x^2$$

110.

$$y=\frac{1}{x-1}$$

111.

$$y=\ln(x-2)$$

112.

$$y=\tan(x)$$

113.

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

114.

$$y=x^{3/2}-3x^{5/2}$$

115.

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$$

116.

$$y=\sin^2(x)$$

117.

$$y=x+\frac{1}{x}$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna staðbundin og/eða algild hágildi og lággildi fallanna á tilgreindu skilgreiningarmengi.

118. $f(x)=x^2+3$ á $[-1,4]$

119. $y=x^2+\frac{2}{x}$ á $[1,4]$

120. $y=(x-x^2)^2$ á $[-1,1]$

121. $y=\frac{1}{\left(x-x^2\right)}$ á $\left(0,1\right)$

122. $y=\sqrt{9-x}$ á $\left[1,9\right]$

123. $y=x+\sin\left(x\right)$ á $\left[0,2\pi\right]$

124. $y=\frac{x}{1+x}$ á $\left[0,100\right]$

125. $y=\left|x+1\right|+\left|x-1\right|$ á $\left[-3,2\right]$

126. $y=\sqrt{x}-\sqrt{x^3}$ á $\left[0,4\right]$

127. $y=\sin x+\cos x$ á $\left[0,2\pi\right]$

128. $y=4\sin\theta-3\cos\theta$ á $\left[0,2\pi\right]$

Í eftirfarandi æfingum skal finna staðbundin og algild lággildi og hágildi fallanna á $\left(-\infty,\infty\right)$.

129.

$$y=x^2+4x+5$$

130.

$$y=x^3-12x$$

131.

$$y=3x^4+8x^3-18x^2$$

132.

$$y=x^3\left(1-x\right)^6$$

133.

$$y=\frac{x^2+x+6}{x-1}$$

134.

$$y=\frac{x^2-1}{x-1}$$

Notið reiknivél til að teikna gröf eftirfarandi falla og áætla algild og staðbundin hágildi og lággildi þeirra. Finnið þau síðan nákvæmlega.

135. [T] $y=3x\sqrt{1-x^2}$

136. [T] $y=x+\sin\left(x\right)$

137. [T] $y=12x^5+45x^4+20x^3-90x^2-120x+3$

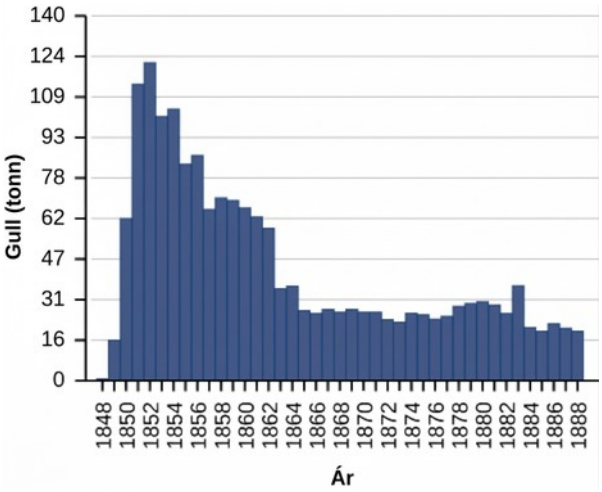
138. **[T]** $y=\dfrac{x^3+6x^2-x-30}{x-2}$

139. **[T]** $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4+x^2}}$

140. Fyrirtæki sem framleiðir farsíma hefur kostnaðarfallið $C=x^2-1200\ x+36.400$, þar sem C er kostnaður í dollurum og x er fjöldi framleiddra farsíma í þúsundum. Hversu mörg þúsund farsíma þarf að framleiða til að kostnaðurinn verði sem minnstur?

141. Bolta er kastað upp í loft og hæð hans er $h\ (t)=-4{,}9\ t^2+60\ t+5\ \text{m}$. Finnið mestu hæð sem boltinn nær. Hve löngu eftir kastið nær hann þeirri hæð?

Í eftirfarandi æfingum er fjallað um gullframleiðslu í gullæðinu í Kaliforníu (1848–1888). Lýsa má gullframleiðslunni með $G\ (t)=\dfrac{(778\ t)}{(t^2+16)}$, þar sem t er fjöldi ára frá því að gullæðið hófst $(0\le t\le 40)$ og G er magn framleidds gulls í tonnum. Yfirlit yfir gögnin er sýnt á eftirfarandi mynd.



142. Finnið hvenær gullframleiðslan náði hágildi sínu (bæði staðbundnu og algildu) og hve mikið gull var þá framleitt.

143. Finnið hvenær gullframleiðslan náði staðbundnu og algildu lággildi. Hve mikið gull var þá framleitt?

Finnið stöðupunkta, hágildi og lággildi eftirfarandi hlutskilgreindra falla.

144.

$$y=\begin{cases}x^2-4x & 0\le x\le 1\\ x^2-4 & 1<x\le 2\end{cases}$$

145.

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & x > 1 \end{cases}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna stöðupunkta almennu fallanna sem gefin eru. Eru þeir hágildi, lággildi eða hvorugt? Tilgreinið nauðsynleg skilyrði.

146. $y = ax^2 + bx + c$, að því gefnu að $a > 0$

147. $y = (x-1)^a$, að því gefnu að $a > 1$ og a sé heiltala.

4.4 Meðalgildissetningin

NÁMSMARKMIÐ

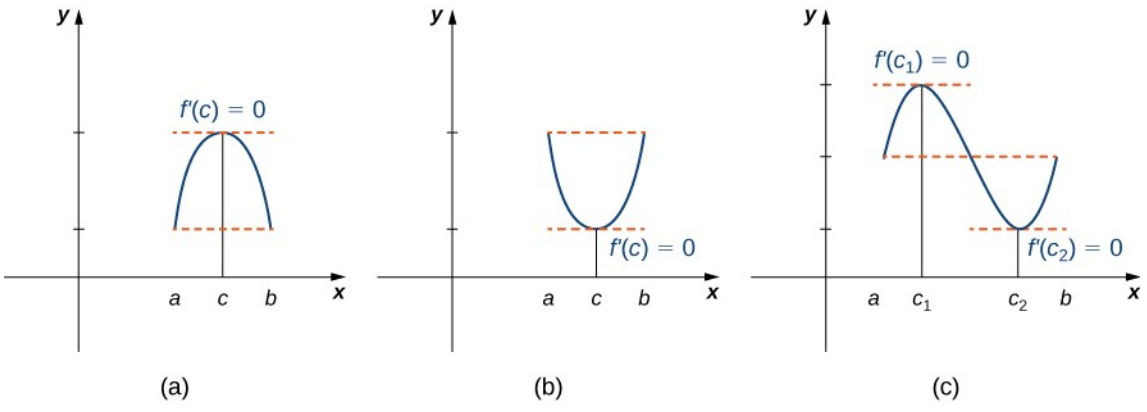
- 4.4.1 Útskýra merkingu setningar Rolle.
- 4.4.2 Lýsa mikilvægi meðalgildissetningarinnar.
- 4.4.3 Setja fram þrjár mikilvægar afleiðingar meðalgildissetningarinnar.

Meðalgildissetningin er ein mikilvægasta setning stærðfræðigreiningar. Við skoðum nokkrar afleiðingar hennar í lok þessa undirkafla. Byrjum þó á sértilviki meðalgildissetningarinnar sem kallast setning Rolle.

4

Setning Rolle

Óformlega segir setning Rolle að ef gildi deildanlegs falls f eru jöfn í endapunktum bils hljóti að vera til innri punktur c þar sem $f'(c) = 0$. Mynd 4.21 sýnir setninguna myndrænt.



Mynd 4.21 Ef deildanlegt fall f uppfyllir $f(a) = f(b)$, þá hlýtur afleiða þess að vera núll í einum eða fleiri punktum milli a og b.

SETNING 4.4

Setning Rolle

Látum f vera samfellt fall á lokaða bilinu $[a,b]$ og deildanlegt á opna bilinu (a,b) þannig að $f(a)=f(b)$. Þá er til að minnsta kosti eitt $c\in(a,b)$ þannig að $f'(c)=0$.

Sönnun

Látum $k=f(a)=f(b)$. Við skoðum þrjú tilvik:

1. $f(x)=k$ fyrir öll $x\in(a,b)$.
2. Til er $x\in(a,b)$ þannig að $f(x)>k$.
3. Til er $x\in(a,b)$ þannig að $f(x)<k$.

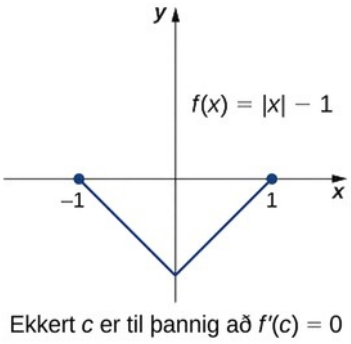
Tilvik 1: Ef $f(x)=k$ fyrir öll $x\in(a,b)$, þá er $f'(x)=0$ fyrir öll $x\in(a,b)$.

Tilvik 2: Þar sem f er samfellt fall á lokaða og takmarkaða bilinu $[a,b]$, hefur það samkvæmt útgildissetningunni algilt hágildi. Þar sem einnig er til punktur $x\in(a,b)$ þannig að $f(x)>k$, er algilda hágildið stærra en k. Það getur því ekki verið í endapunktunum og hlýtur að vera í innri punkti $c\in(a,b)$. Þar sem f hefur hágildi í innri punkti c, og f er deildanlegt í c, leiðir af setningu Fermats að $f'(c)=0$.

Tilvik 3: Tilvikið þar sem til er punktur $x\in(a,b)$ þannig að $f(x)<k$ er hliðstætt tilviki 2, með lággildi í stað hágildis.

□

Mikilvægt er að fallið f sé deildanlegt svo að setning Rolle eigi við. Ef f er ódeildanlegt í einum einasta punkti er ekki víst að niðurstaðan gildi. Til dæmis er fallið $f(x)=|x|-1$ samfellt á $[-1,1]$ og $f(-1)=0=f(1)$, en $f'(c)\neq 0$ fyrir öll $c\in(-1,1)$ þar sem afleiðan er skilgreind, eins og sýnt er á myndinni hér á eftir.



Ekkert c er til þannig að $f'(c) = 0$

Mynd 4.22 Þar sem $f(x)=|x|-1$ er ekki deildanlegt þegar $x=0$, eru skilyrði setningar Rolle ekki uppfyllt. Niðurstaðan gildir heldur ekki hér: Ekkert $c\in(-1,1)$ er til sem uppfyllir $f'(c)=0$.

Skoðum nú föll sem uppfylla skilyrði setningar Rolle og finnum nákvæmlega þau gildi c þar sem $f'(c)=0$.

DÆMI 4.14

Notkun setningar Rolle

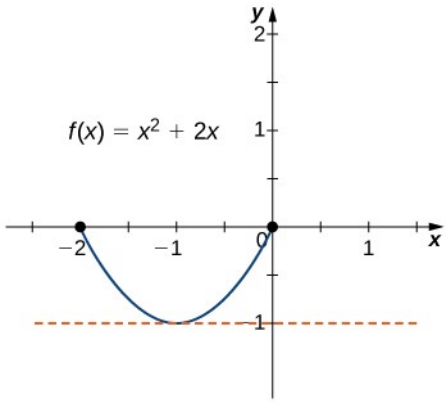
Sannreynið að hvert fallanna hér á eftir uppfylli skilyrði setningar Rolle og finnið öll gildi c á gefna bilinu þar sem $f'(c)=0$.

a. $f(x)=x^2+2x$ á bilinu $[-2,0]$

b. $f(x)=x^3-4x$ á bilinu $[-2,2]$

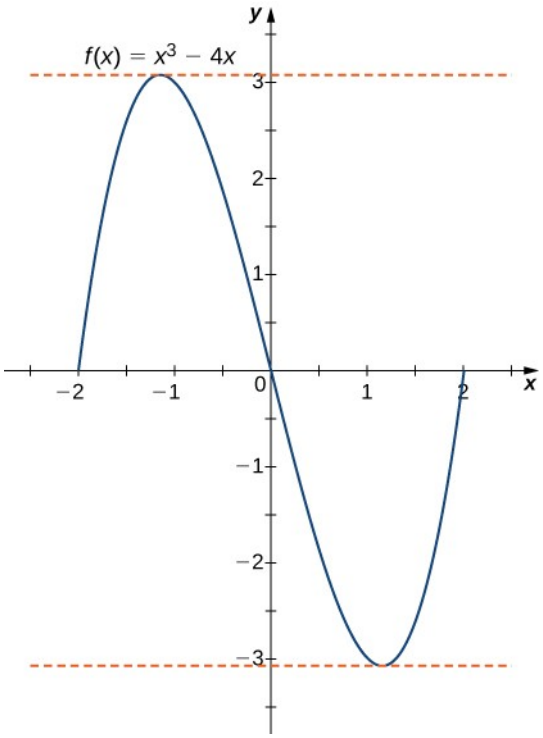
Lausn

a. Þar sem f er margliða er það samfellt og deildanlegt alls staðar. Auk þess gildir $f(-2)=0=f(0)$. Því uppfyllir f skilyrði setningar Rolle. Við ályktum að til sé að minnsta kosti eitt gildi $c\in(-2,0)$ þannig að $f'(c)=0$. Þar sem $f'(x)=2x+2=2(x+1)$, sjáum við að $f'(c)=2(c+1)=0$ leiðir af sér $c=-1$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.23 Þetta fall er samfellt og deildanlegt á $[-2,0]$, $f'(c)=0$ þegar $c=-1$.

b. Eins og í a-lið er f margliða og því samfellt og deildanlegt alls staðar. Einnig gildir að $f(-2)=0=f(2)$. Því uppfyllir f skilyrði setningar Rolle. Með deildun fæst að $f'(x)=3x^2-4$. Því er $f'(c)=0$ þegar $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Báðir punktarnir eru á bilinu $[-2,2]$, og uppfylla því báðir niðurstöðu setningar Rolle, eins og sést á eftirfarandi grafi.



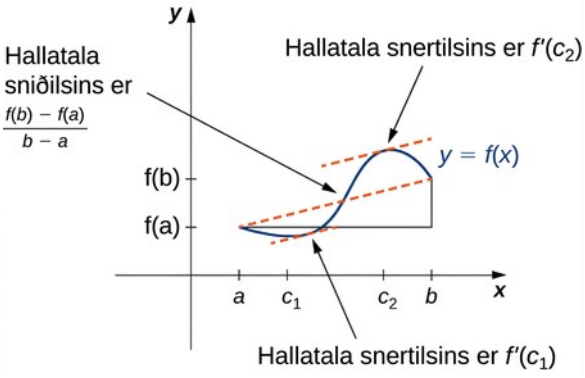
Mynd 4.24 Á bilinu $[-2,2]$, $f'(c)=0$ þegar $x=\pm 2/\sqrt{3}$.

STÖÐUMAT 4.14

Sannreynið að fallið $f(x)=2x^2-8x+6$, sem er skilgreint á bilinu $[1,3]$, uppfylli skilyrði setningar Rolle. Finnið öll gildi c sem setning Rolle tryggir að séu til.

Meðalgildissetningin og merking hennar

Setning Rolle er sértilvik meðalgildissetningarinnar. Í setningu Rolle skoðum við deildanleg föll f sem eru skilgreind á lokuðu bili $[a,b]$ og uppfylla $f(a)=f(b)$. Meðalgildissetningin alhæfir setningu Rolle með því að taka til falla sem hafa ekki endilega sama gildi í endapunktunum. Því má líta á meðalgildissetninguna sem skáhalla hliðstæðu setningar Rolle (mynd 4.25). Meðalgildissetningin segir að ef f er samfellt á lokaða bilinu $[a,b]$ og deildanlegt á opna bilinu (a,b), sé til punktur $c\in(a,b)$ þannig að snertill við graf f í punktinum c sé samsíða sniðlinum sem tengir $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$.



Mynd 4.25 Meðalgildissetningin segir að fyrir fall sem uppfyllir skilyrði hennar sé hallatala snertilsins í einhverjum punkti sú sama og hallatala sniðilsins milli endapunktanna. Fyrir þetta fall eru tvö gildi c_1 og c_2 þannig að snertillinn við f í c_1 og c_2 hefur sömu hallatölu og sniðillinn.

SETNING 4.5

Meðalgildissetningin

Látum f vera samfellt á lokaða bilinu $[a,b]$ og deildanlegt á opna bilinu (a,b). Þá er til að minnsta kosti einn punktur $c \in (a,b)$ þannig að

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Sönnun

Sönnunin byggist á setningu Rolle: Við skilgreinum viðeigandi fall sem uppfyllir skilyrði hennar. Skoðum línuna sem tengir $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$. Þar sem hallatala þeirrar línu er

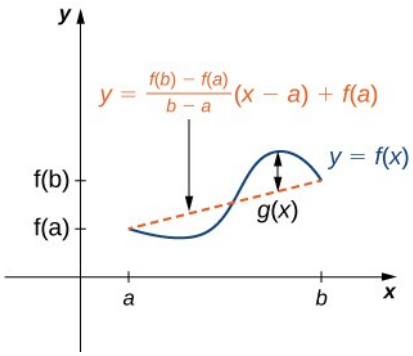
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

og línan liggur í gegnum punktinn $(a,f(a))$, má rita jöfnu þeirrar línu sem

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

Látum $g(x)$ tákna lóðrétta mismuninn milli punktsins $(x,f(x))$ og punktsins (x,y) á línunni. Því gildir að

$$g(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right].$$



Mynd 4.26 Gildið $g(x)$ er lóðrétti munurinn á punktunum $(x, f(x))$ og (x, y), þar sem sá síðarnefndi liggur á sniðlinum sem tengir $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

Þar sem graf f sker sniðilinn þegar $x=a$ og $x=b$, sjáum við að $g(a)=0=g(b)$. Þar sem f er deildanlegt á (a,b), er g einnig deildanlegt á (a,b). Þar sem f er samfellt á $[a,b]$, er g einnig samfellt á $[a,b]$. Því uppfyllir g skilyrði setningar Rolle og þar með er til punktur $c \in (a,b)$ þannig að $g'(c)=0$. Þar sem

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

sjáum við að

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Þar sem $g'(c)=0$, ályktum við að

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

4

DÆMI 4.15

Staðfesting á því að meðalgildissetningin eigi við

Fyrir $f(x)=\sqrt{x}$ á bilinu $[0,9]$, skal sýna að f uppfylli forsendur meðalgildissetningarinnar og að til sé að minnsta kosti eitt gildi $c \in (0,9)$ þannig að $f'(c)$ sé jafnt hallatölu línunnar sem tengir $(0, f(0))$ og $(9, f(9))$. Finnið þau gildi c sem meðalgildissetningin tryggir að séu til.

Lausn

Við vitum að $f(x)=\sqrt{x}$ er samfellt á $[0,9]$ og deildanlegt á $(0,9)$. Því uppfyllir f forsendur meðalgildissetningarinnar og til hlýtur að vera að minnsta kosti eitt gildi $c \in (0,9)$ þannig að $f'(c)$ sé jafnt hallatölu línunnar sem tengir $(0, f(0))$ og $(9, f(9))$ (mynd 4.27). Til að finna þau

gildi c sem setningin tryggir að séu til reiknum við fyrst afleiðu f. Afleiðan er $f'(x)=\frac{1}{(2\sqrt{x})}$.

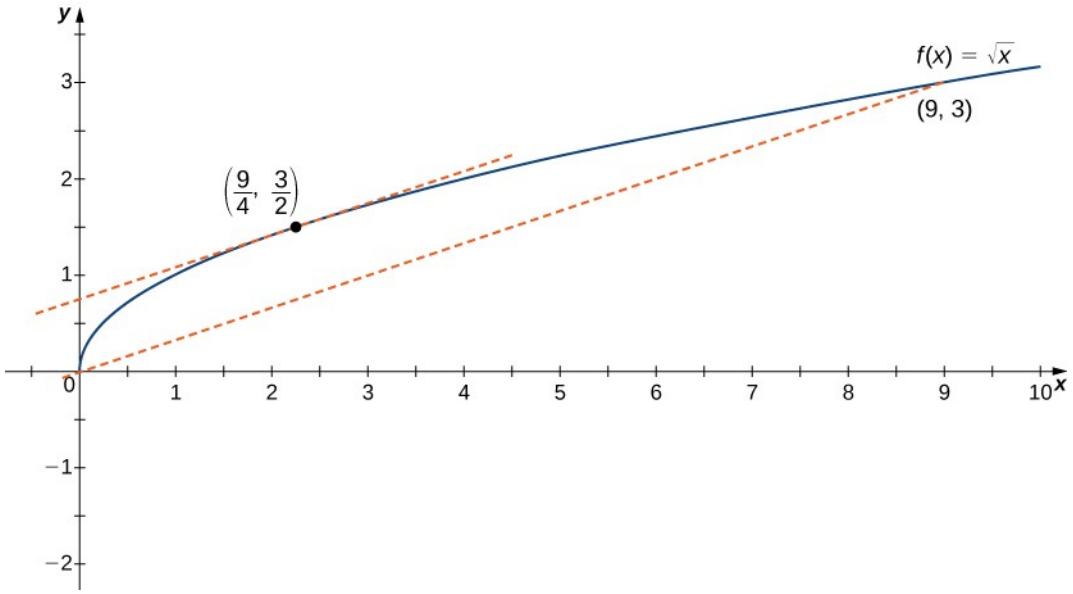
Hallatala línunnar sem tengir $(0, f(0))$ og $(9, f(9))$ er

$$\frac{f(9)-f(0)}{9-0}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9-0}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

Við viljum finna c þannig að $f'(c)=\frac{1}{3}$. Við leitum því að c sem uppfyllir

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{3}.$$

Þegar þessi jafna er leyst með tilliti til c, fæst $c=\frac{9}{4}$. Í þessum punkti er hallatala snertilsins jöfn hallatölu línunnar sem tengir endapunktana.



Mynd 4.27 Hallatala snertilsins í $c=9/4$ er sú sama og hallatala línustriksins sem tengir $(0,0)$ og $(9,3)$.

Dæmi sem varpar ljósi á meðalgildissetninguna tengist hraða. Gerum ráð fyrir að við ökum bíl í 1 h eftir beinum vegi á meðalhraðanum 70 km/klst. Látum $s(t)$ og $v(t)$ tákna staðsetningu og hraða bílsins, í sömu röð, fyrir $0 \le t \le 1$ h. Ef staðsetningarfallið $s(t)$ er deildanlegt má beita meðalgildissetningunni og ályktа að á einhverjum tíma $c \in (0,1)$, hafi hraði bílsins verið nákvæmlega

$$v(c)=s'(c)=\frac{s(1)-s(0)}{1-0}=70 \text{ km/klst}.$$

DÆMI 4.16

Meðalgildissetningin og hraði

Ef steini er sleppt úr 30.625 metra hæð er staðsetning hans að t sekúndum liðnum, fram að því að hann lendir á jörðinni, gefin með fallinu $s(t) = -4{,}9\,t^2 + 30{,}625$.

a. Ákvarðið hve langur tími líður þar til steinninn lendir á jörðinni.

b. Finnið meðalhraðann v_{avg} frá því að steininum er sleppt þar til hann lendir á jörðinni.

c. Finnið tímann t sem meðalgildissetningin tryggir, þegar augnablikshraði steinsins er v_{avg}.

Lausn

a. Þegar steinninn lendir á jörðinni er staðsetning hans $s(t) = 0$. Með því að leysa jöfnuna $-4{,}9\,t^2 + 30{,}625 = 0$ með tilliti til t, fæst að $t = \pm\frac{5}{2}\,\text{sec}$. Þar sem aðeins er litið til $t \geq 0$, lendir steinninn á jörðinni $\frac{5}{2}$ sek. eftir að honum er sleppt.

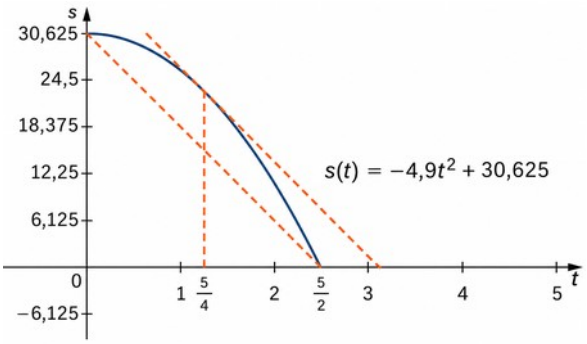
b. Meðalhraðinn er gefinn með

$$v_{\text{meðaltal}} = \frac{s(5/2) - s(0)}{5/2 - 0} = \frac{0 - 30{,}625}{5/2} = -12{,}25 \text{ m/sek.}$$

c. Augnablikshraðinn fæst með afleiðu staðsetningarfallsins. Við þurfum því að finna tíma t þannig að $v(t) = s'(t) = v_{\text{meðaltal}} = -12{,}25$ m/sek. Þar sem $s(t)$ er samfellt á bilinu $[0, 5/2]$ og deildanlegt á bilinu $(0, 5/2)$, tryggir meðalgildissetningin að til sé punktur $c \in (0, 5/2)$ þannig að

$$s'(c) = \frac{s(5/2) - s(0)}{5/2 - 0} = -12{,}25.$$

Með því að deilda staðsetningarfallið $s(t)$, fáum við $s'(t) = -9{,}8\,t$. Jafnan verður því $s'(c) = -9{,}8\,c = -12{,}25$. Þegar við leysum þessa jöfnu með tilliti til c, fáum við $c = \frac{5}{4}$. Því er augnablikshraðinn $\frac{5}{4}$ sek. eftir að steininum er sleppt jafn meðalhraða hans í frjálsa fallinu: $-12{,}25$ m/sek.



Mynd 4.28 Þegar $t = 5/4$ sek. er hraði steinsins jafn meðalhraða hans frá því að honum er sleppt þar til hann lendir á jörðinni.

STÖÐUMAT 4.15

Gerum ráð fyrir að bolta sé sleppt úr 78,4 metra hæð. Staðsetning hans á tíma t er $s(t) = -4{,}9\,t^2 + 78{,}4$. Finnið tímann t þegar augnablikshraði boltans er jafn meðalhraða hans.

4

Fylgisetningar meðalgildissetningarinnar

Lítum nú á þrjár fylgisetningar meðalgildissetningarinnar. Þessar niðurstöður hafa mikilvægar afleiðingar sem við nýtum í köflunum hér á eftir.

Nú vitum við að afleiða fasts falls er alltaf núll. Meðalgildissetningin sýnir að hið gagnstæða gildir einnig. Nánar tiltekið, ef $f'(x) = 0$ fyrir öll x á bili I, þá er $f(x)$ fast á bilinu. Þessi niðurstaða kann að virðast augljós við fyrstu sýn en hún hefur mikilvægar afleiðingar sem við fjöllum um hér á eftir.

SETNING 4.6

Fylgisetning 1: Föll með núllafleiðu

Látum f vera deildanlegt á bili I. Ef $f'(x) = 0$ fyrir öll $x \in I$, þá er $f(x) = C$ fyrir öll $x \in I$.

Sönnun

Þar sem f er deildanlegt á I, hlýtur f að vera samfellt á I. Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé ekki fast fyrir öll x í I. Þá eru til $a, b \in I$, þar sem $a \neq b$ og $f(a) \neq f(b)$. Veljum táknin þannig að $a < b$. Þá gildir að

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0.$$

Þar sem f er deildanlegt fall, er samkvæmt meðalgildissetningunni til $c \in (a, b)$ þannig að

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Því er til $c \in I$ þannig að $f'(c) \neq 0$, sem stangast á við þá forsendu að $f'(x)=0$ fyrir öll $x \in I$.

□

Af fylgisetningu 1 leiðir að ef tvö föll hafa sömu afleiðu er mismunur þeirra fasti.

SETNING 4.7

Fylgisetning 2: Setning um fastan mismun

Ef f og g eru deildanleg á bili I og $f'(x)=g'(x)$ fyrir öll $x \in I$, þá er $f(x)=g(x)+C$ fyrir einhvern fasta C.

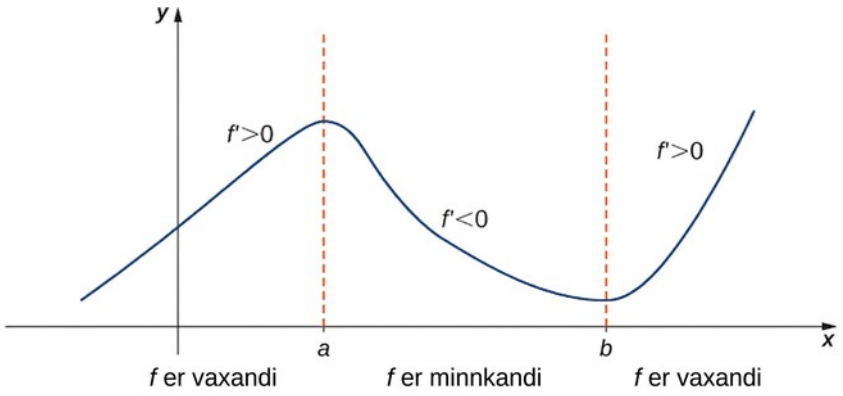
Sönnun

Látum $h(x)=f(x)-g(x)$. Þá er $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ fyrir öll $x \in I$. Samkvæmt fylgisetningu 1 er til fasti C þannig að $h(x)=C$ fyrir öll $x \in I$. Því er $f(x)=g(x)+C$ fyrir öll $x \in I$.

□

Þessi staðreynd er mikilvæg. Hún merkir að fyrir gefið fall f, er eftirfarandi satt: Ef til er fall F þannig að $F'(x)=f(x)$; þá eru einu önnur föllin með afleiðuna f föll af gerðinni $F(x)+C$ fyrir einhvern fasta C. Við fjöllum nánar um þessa niðurstöðu síðar í kaflanum.

Þriðja fylgisetning meðalgildissetningarinnar fjallar um það hvenær fall er vaxandi og hvenær það er minnkandi. Rifjum upp að fall f er vaxandi á I ef $f(x_1)<f(x_2)$ þegar $x_1<x_2$, en f er minnkandi á I ef $f(x)_1>f(x_2)$ þegar $x_1<x_2$. Með hjálp meðalgildissetningarinnar má sýna að fall er vaxandi ef afleiða þess er jákvæð en minnkandi ef afleiðan er neikvæð (mynd 4.29). Við notum þessa staðreynd í næsta undirkafla til að sýna hvernig nota má afleiðu falls til að finna staðbundin hágildi og lággildi og ákvarða lögun grafsins.



Mynd 4.29 Ef fall hefur jákvæða afleiðu á bili I, er það vaxandi á bilinu I; ef afleiðan er neikvæð á bili I, er fallið minnkandi á bilinu I.

SETNING 4.8

Fylgisetning 3: Vaxandi og minnkandi föll

Látum f vera samfellt á lokaða bilinu $[a,b]$ og deildanlegt á opna bilinu (a,b).

i. Ef $f'(x)>0$ fyrir öll $x\in(a,b)$, þá er f vaxandi á $[a,b]$.

ii. Ef $f'(x)<0$ fyrir öll $x\in(a,b)$, þá er f minnkandi fall á $[a,b]$.

Sönnun

Við sönnum i-lið; sönnun ii-liðar er sambærileg. Gerum ráð fyrir að f sé samfellt og deildanlegt á bili I og að $f'(x)>0$ fyrir öll $x\in I$. Gerum jafnframt ráð fyrir því í mótsagnarskyni að f sé ekki vaxandi á I. Þá eru til a og b í I þannig að $a<b$ en $f(a)>f(b)$. Þar sem f er deildanlegt á I tryggir meðalgildissetningin að til sé gildi $c\in(a,b)$ þannig að

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Nú er $a<b$ og því $b-a>0$. Þar sem $f(a)>f(b)$ er $f(b)-f(a)<0$. Kvótinn af $f(b)-f(a)$ og $b-a$ er því neikvæður. Fyrir c gildir því:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0.$$

Hins vegar er $f'(x)>0$ fyrir öll $x\in I$, þar á meðal c. Þetta er mótsögn. Forsendan um að f sé ekki vaxandi á I er röng. Fallið f hlýtur því að vera vaxandi á öllu bilinu I.

□

Æfingar í kafla 4.4

148. Hvers vegna er samfelldni nauðsynleg til að beita meðalgildissetningunni? Setjið fram gagndæmi.

149. Hvers vegna þarf fallið að vera deildanlegt til að hægt sé að beita meðalgildissetningunni? Finnið gagndæmi.

150. Hvenær eru setning Rolle og meðalgildissetningin jafngildar?

151. Getur jafnan $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$? gilt þótt fallið sé ósamfellt? Teiknið slíkt dæmi eða sannið að það sé ómögulegt.

Ákvarðið í æfingunum hér á eftir á hvaða bilum meðalgildissetningin á við, ef einhverjum. Rökstyðjið svarið.

152.

$$y=\sin(\pi x)$$

153.

$$y=\frac{1}{x^3}$$

154.

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

155.

$$y=\sqrt{x^2-4}$$

156.

$$y=\ln(3x-5)$$

Teiknið gröf fallanna í æfingunum hér á eftir með reiknivél og dragið sniðilinn sem tengir endapunktana. Áætlið fjölda punkta c þannig að $f'(c)(b-a)=f(b)-f(a)$.

157. [T] $y=3x^3+2x+1$ á bilinu $[-1,1]$

158. [T] $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ á bilinu $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$

159. [T] $y=x^2\cos(\pi x)$ á $[-2,2]$

160. [T] $y=x^6-\frac{3}{4}x^5-\frac{9}{8}x^4+\frac{15}{16}x^3+\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{16}x+\frac{1}{32}$ á bilinu $[-1,1]$

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna öll gildi $0<c<2$ sem meðalgildissetningin tryggir að séu til og uppfylla $f(2)-f(0)=f'(c)(2-0)$.

161.

$$f(x)=x^3$$

162.

$$f(x)=\sin(\pi x)$$

163.

$$f(x)=\cos(2\pi x)$$

164.

$$f(x)=1+x+x^2$$

165.

$$f(x)=(x-1)^{10}$$

166.

$$f(x)=(x-1)^9$$

Sýnið í æfingunum hér á eftir að ekkert c sé til þannig að $f(1)-f(-1)=f'(c)(2)$. Útskýrið hvers vegna meðalgildissetningin á ekki við á bilinu $[-1,1]$.

167.

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

168.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

169.

$$f(x)=\sqrt{|x|}$$

170. $f(x)=\lfloor x \rfloor$ (Vísbending: Þetta kallast gólffallið og það er skilgreint þannig að $f(x)$ er stærsta heiltalan sem er minni en eða jöfn x.)

4

Ákvarðið í æfingunum hér á eftir hvort meðalgildissetningin eigi við um föllin á gefna bilinu $[a,b]$. Rökstyðjið svarið.

171. $y=e^x$ á bilinu $[0,1]$

172. $y=\ln(2x+3)$ á bilinu $\left[-\frac{3}{2},0\right]$

173. $f(x)=\tan(2\pi x)$ á bilinu $[0,2]$

174. $y=\sqrt{9-x^2}$ á bilinu $[-3,3]$

175. $y=\frac{1}{|x+1|}$ á bilinu $[0,3]$

176. $y=x^3+2x+1$ á bilinu $[0,6]$

177. $y=\frac{x^2+3x+2}{x}$ á bilinu $[-1,1]$

178. $y=\frac{x}{\sin(\pi x)+1}$ á bilinu $[0,1]$

179. $y=\ln(x+1)$ á bilinu $[0,e-1]$

180. $y=x\sin(\pi x)$ á bilinu $[0,2]$

181. $y=5+|x|$ á bilinu $[-1,1]$

Skoðið rætur jöfnunnar í æfingunum hér á eftir.

182. Sýnið að jafnan $y = x^3 + 4x + 16$ hafi nákvæmlega eina rauntölurót. Hver er hún?

183. Finnið skilyrðin fyrir því að eftirfarandi jafna hafi nákvæmlega eina rót, það er tvöfalda rót: $y = x^2 + bx + c$

184. Finnið skilyrðin fyrir því að fallið $y = e^x - b$ hafi eina rót. Getur fallið haft fleiri en eina rót?

Notið reiknivél í æfingunum hér á eftir til að teikna graf fallsins á bilinu $[a, b]$ og sniðilinn frá a til b. Notið reiknivélina til að áætla öll gildi c sem meðalgildissetningin tryggir að séu til. Finnið síðan nákvæm gildi c, ef unnt er. Annars skuluð þið skrifa lokajöfnuna og nota reiknivél til að áætla gildin með fjórum aukastöfum.

185. **[T]** $y = \tan(\pi x)$ á $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

186. **[T]** $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ á bilinu $[0, 3]$

187. **[T]** $y = \left|x^2 + 2x - 4\right|$ á bilinu $[-4, 0]$

188. **[T]** $y = x + \frac{1}{x}$ á bilinu $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$

189. **[T]** $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2}$ á bilinu $[3, 8]$

190. Klukkan 10:17 f.h. akið þið á 90 km/klst. fram hjá lögreglubíl sem stendur kyrr á hraðbrautinni. Klukkan 10:53 f.h. akið þið aftur á 90 km/klst. fram hjá öðrum lögreglubíl sem er 63 km frá þeim fyrri. Ef hámarkshraðinn er 100 km/klst. getur lögreglan þá sektað ykkur fyrir hraðakstur?

191. Tveir bílar aka frá einu umferðarljósi að því næsta. Þeir leggja af stað samtímis og koma samtímis á áfangastað. Er eitthvert augnablik á leiðinni þegar þeir aka á sama hraða? Sannið fullyrðinguna eða hrekjið hana.

192. Sýnið að $y = \sec^2 x$ og $y = \tan^2 x$ hafi sömu afleiðu. Hvað getið þið sagt um $y = \sec^2 x - \tan^2 x$?

193. Sýnið að $y = \csc^2 x$ og $y = \cot^2 x$ hafi sömu afleiðu. Hvað getið þið sagt um $y = \csc^2 x - \cot^2 x$?

4.5 Afleiður og lögun grafs

NÁMSMARKMIÐ

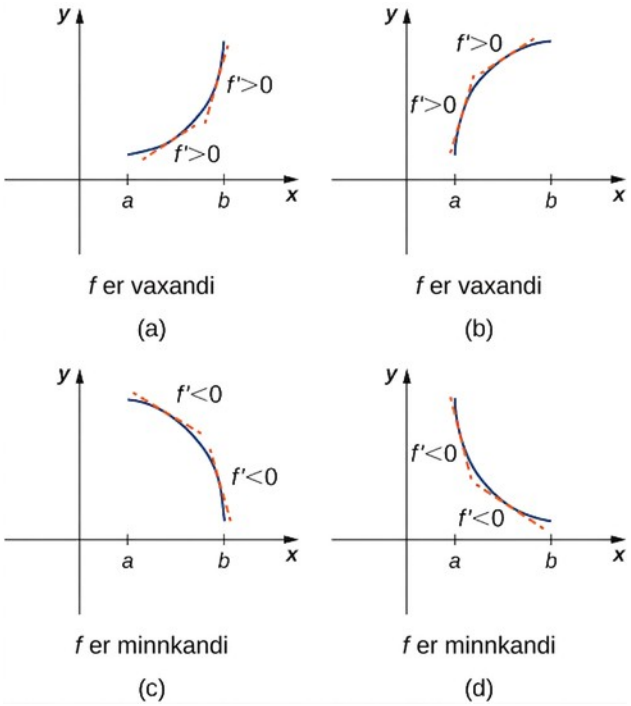
- 4.5.1 Útskýra hvernig formerki fyrstu afleiðu hefur áhrif á lögun grafs falls.
- 4.5.2 Setja fram fyrsta afleiðuprófið fyrir stöðupunkta.

- 4.5.3 Nota kúpni og beygjuskilapunkta til að útskýra hvernig formerki annarrar afleiðu hefur áhrif á lögun grafs falls.
- 4.5.4 Útskýra kúpniprófið fyrir fall á opnu bili.
- 4.5.5 Útskýra samband falls við fyrstu og aðra afleiðu þess.
- 4.5.6 Setja fram annað afleiðuprófið fyrir staðbundin útgildi.

Fyrr í þessum kafla kom fram að ef fallið f hefur staðbundið útgildi í punktinum c, hlýtur c að vera stöðupunktur fallsins f. Fall hefur þó ekki endilega staðbundið útgildi í hverjum stöðupunkti. Til dæmis hefur $f(x)=x^3$ stöðupunkt þegar $x=0$ þar sem $f'(x)=3x^2$ er núll þegar $x=0$, en f hefur ekki staðbundið útgildi þegar $x=0$. Með niðurstöðunum úr síðasta undirkafla getum við nú ákvarðað hvort fall hafi í raun staðbundið útgildi í stöðupunkti. Einnig sjáum við hvernig önnur afleiða segir til um lögun grafs: hún sýnir hvort graf falls er kúpt eða hvelft.

Fyrsta afleiðuprófið

Af fylgisetningu 3 við meðalgildissetninguna leiðir að ef afleiða falls er jákvæð á bili I er fallið vaxandi á I. Ef afleiðan er hins vegar neikvæð á bili I, er fallið minnkandi á I eins og sýnt er á myndinni hér á eftir.

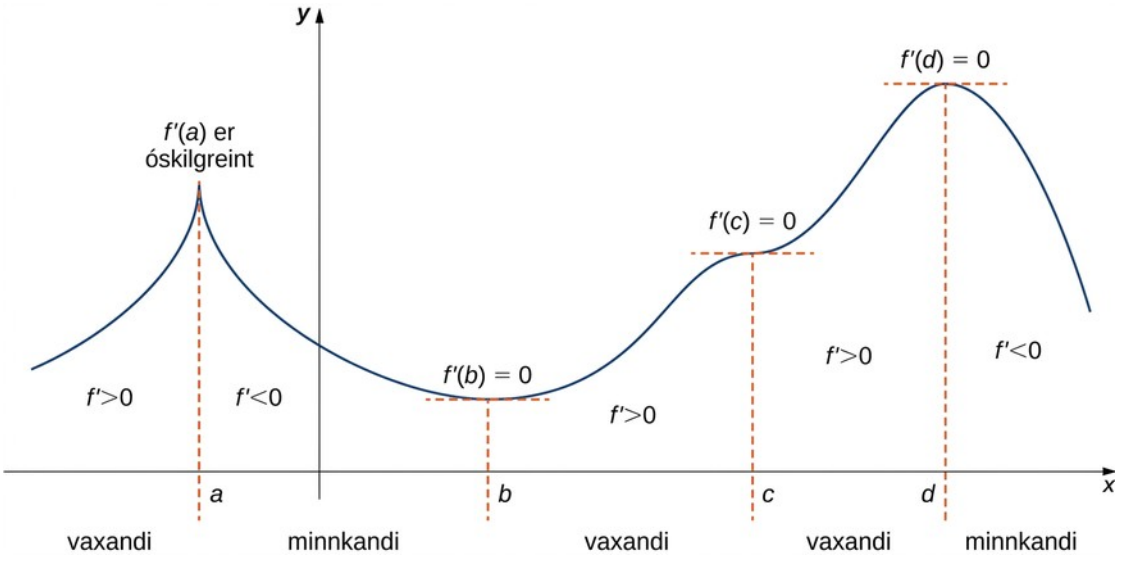


Mynd 4.30 Bæði föllin eru vaxandi á bilinu (a,b). Í sérhverjum punkti x, er $f'(x)>0$. Bæði föllin eru minnkandi á bilinu (a,b). Í sérhverjum punkti x, er $f'(x)<0$.

Samfellt fall f hefur staðbundið hágildi í punktinum c þá og því aðeins að f fari úr því að vera vaxandi í að vera minnkandi í punktinum c. Á sama hátt hefur f staðbundið lággildi í c þá og því aðeins að f fari úr því að vera minnkandi í að vera vaxandi í c. Ef f er samfellt fall á bili I sem inniheldur c og deildanlegt á I, nema hugsanlega í c, getur f aðeins farið úr því að vera

vaxandi í það að vera minnkandi, eða öfugt, í punktinum c ef f' skiptir um formerki þegar x vex fram yfir c. Ef f er deildanlegt í c, getur f' aðeins skipt um formerki þegar x vex fram yfir c ef $f'(c)=0$. Fyrir fall f sem er samfellt á bili I sem inniheldur c og deildanlegt á I, nema hugsanlega í c, getur f því aðeins farið úr því að vera vaxandi í það að vera minnkandi, eða öfugt, ef $f'(c)=0$ eða $f'(c)$ er óskilgreint. Til að finna staðbundin útgildi falls f, leitum við því að gildum c í skilgreiningarmengi f þar sem $f'(c)=0$ eða $f'(c)$ er óskilgreint. Slík gildi kallast stöðupunktar fallsins f.

Athugið að f þarf ekki að hafa staðbundið útgildi í hverjum stöðupunkti. Stöðupunktarnir eru aðeins hugsanlegir staðir útgilda. Á mynd 4.31 sést að ef samfellt fall f hefur staðbundið útgildi hlýtur það að vera í stöðupunkti, en ekki er víst að fall hafi staðbundið útgildi í sérhverjum stöðupunkti. Ef f hefur staðbundið útgildi í stöðupunkti skiptir f' um formerki þegar x vex fram yfir punktinn.



Mynd 4.31 Fallið f hefur fjóra stöðupunkta: $a, b, c,$ og d. Fallið f hefur staðbundin hágildi í a og d, og staðbundið lággildi í b. Fallið f hefur ekki staðbundið útgildi í c. Formerki f' breytist við öll staðbundin útgildi.

Út frá mynd 4.31 tökum við saman helstu niðurstöður um staðbundin útgildi.

- Ef samfellt fall f hefur staðbundið útgildi hlýtur það að vera í stöðupunkti c.
- Fallið hefur staðbundið útgildi í stöðupunktinum c þá og því aðeins að afleiðan f' skipti um formerki þegar x vex fram yfir c.
- Til að kanna hvort fall hafi staðbundið útgildi í stöðupunkti c, verðum við því að ákvarða formerki $f'(x)$ vinstra og hægra megin við c.

Þessi niðurstaða nefnist fyrsta afleiðuprófið.

SETNING 4.9

Fyrsta afleiðuprófið

Gerum ráð fyrir að f sé samfellt fall á bili I sem inniheldur stöðupunktinn c. Ef f er deildanlegt á I, nema hugsanlega í punktinum c, á ein af eftirfarandi lýsingum við um $f(c)$:

i. Ef formerki f' breytist úr jákvæðu fyrir $x<c$ í neikvætt fyrir $x>c$, þá er $f(c)$ staðbundið hágildi fallsins f.
ii. Ef formerki f' breytist úr neikvæðu fyrir $x<c$ í jákvætt fyrir $x>c$, þá er $f(c)$ staðbundið lággildi fallsins f.
iii. Ef f' hefur sama formerki þegar $x<c$ og þegar $x>c$, þá er $f(c)$ hvorki staðbundið hágildi né staðbundið lággildi fallsins f.

Draga má fyrsta afleiðuprófið saman í aðferð til að finna staðbundin útgildi.

AÐFERÐ VIÐ ÚRLAUSN VERKEFNA

Notkun fyrsta afleiðuprófsins

Lítum á fall f sem er samfellt á bili I.

1. Finnið alla stöðupunkta fallsins f og skiptið bilinu I í smærri bil þannig að stöðupunktarnir verði endapunktar þeirra.
2. Greinið formerki f' á hverju hlutbilanna. Ef f' er samfellt á tilteknu hlutbili (eins og yfirleitt er), þá breytist formerki f' ekki á því hlutbili. Því má ákvarða það með því að velja einhvern prófunarpunkt x á hlutbilinu og finna formerki f' í þeim punkti. Notið formerkjagreininguna til að ákvarða hvort f sé vaxandi eða minnkandi á því bili.
   Athugið: Ef
   f' er ekki samfellt alls staðar á I, skal einnig nota ósamfelldnipunkta ásamt stöðupunktum sem endapunkta þegar I er skipt í hlutbil.
3. Notið fyrsta afleiðuprófið og niðurstöður skrefs 2 til að ákvarða hvort f hafi staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða hvorugt í hverjum stöðupunkti.

Skoðum nú hvernig nota má þessa aðferð til að finna öll staðbundin útgildi tiltekinna falla.

DÆMI 4.17

Notkun fyrsta afleiðuprófsins til að finna staðbundin útgildi

Notið fyrsta afleiðuprófið til að finna öll staðbundin útgildi fallsins $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$. Notið grafteikniforrit til að staðfesta niðurstöðurnar.

Lausn

Skref 1. Afleiðan er $f'(x)=3x^2-6x-9$. Til að finna stöðupunktana leitum við að þeim gildum x þar sem $f'(x)=0$. Með því að þátta margliðuna sjáum við að stöðupunktarnir uppfylla

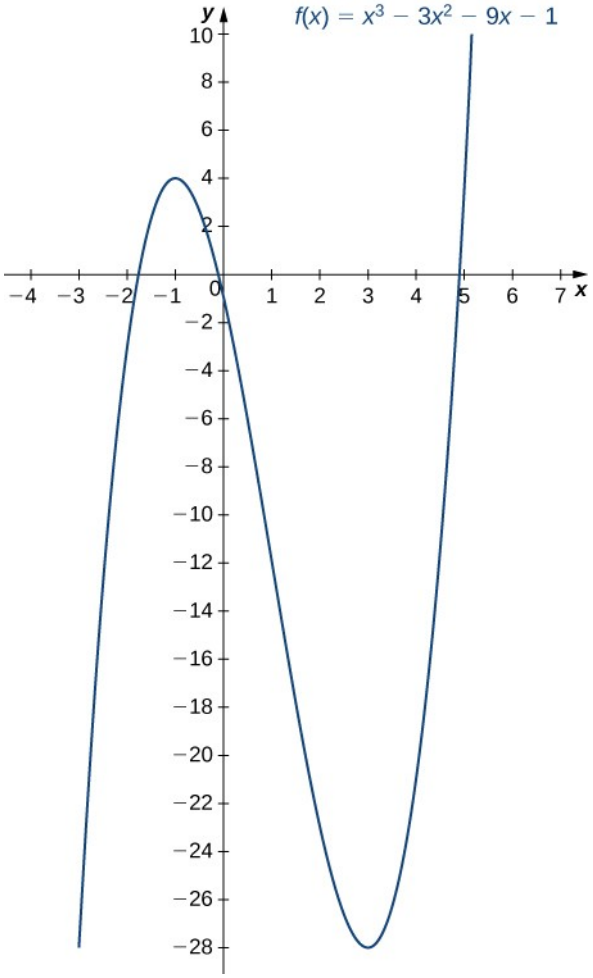
$$3\left(x^2-2x-3\right)=3(x-3)(x+1)=0.$$

Stöðupunktarnir eru því $x=3,-1$. Skiptum nú bilinu $(-\infty,\infty)$ í hlutbilin $(-\infty,-1),(-1,3)$ og $(3,\infty)$.

Skref 2. Þar sem f' er samfellt nægir að ákvarða formerki $f'(x)$ á hverju hlutbili með því að velja einn prófunarpunkt úr bilunum $(-\infty,-1),(-1,3)$ og $(3,\infty)$ og reikna formerki f' þar. Veljum til dæmis $x=-2, x=0,$ og $x=4$ sem prófunarpunkta.

Bil	**Prófunarpunktur**	**Formerki $f'(x)=3(x-3)(x+1)$ í prófunarpunkti**	**Niðurstaða**
$(-\infty,-1)$	$x=-2$	$(+)(-)(-)=+$	f er vaxandi.
$(-1,3)$	$x=0$	$(+)(-)(+)=-$	f er minnkandi.
$(3,\infty)$	$x=4$	$(+)(+)(+)=+$	f er vaxandi.

Skref 3. Afleiðan f' breytir um formerki úr jákvæðu í neikvætt þegar x vex fram yfir -1, f hefur því staðbundið hágildi í $x=-1$. Afleiðan f' breytir um formerki úr neikvæðu í jákvætt þegar x vex fram yfir 3, f hefur því staðbundið lággildi í $x=3$. Niðurstöðurnar samræmast grafinu hér á eftir.



Mynd 4.32 Fallið f hefur hágildi í $x=-1$ og lággildi í $x=3$

4

STÖÐUMAT 4.16

Notið fyrsta afleiðuprófið til að finna öll staðbundin útgildi fyrir $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+18x$.

DÆMI 4.18

Notkun fyrsta afleiðuprófsins

Notið fyrsta afleiðuprófið til að finna öll staðbundin útgildi fallsins $f(x)=5x^{1/3}-x^{5/3}$. Notið grafteikniforrit til að staðfesta niðurstöðurnar.

Lausn

Skref 1. Afleiðan er

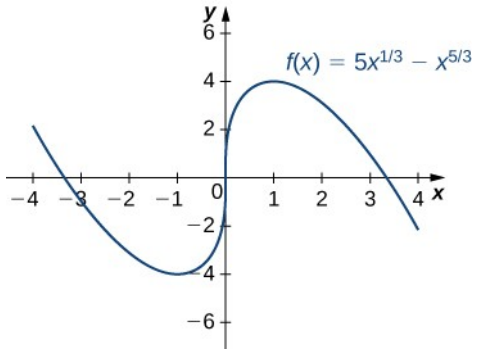
$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{-2/3}-\frac{5}{3}x^{2/3}=\frac{5}{3x^{2/3}}-\frac{5x^{2/3}}{3}=\frac{5-5x^{4/3}}{3x^{2/3}}=\frac{5\left(1-x^{4/3}\right)}{3x^{2/3}}.$$

Jafnan $f'(x)=0$ gildir þegar $1-x^{4/3}=0$. Því er $f'(x)=0$ þegar $x=\pm 1$. Afleiðan $f'(x)$ er jafnframt óskilgreind þegar $x=0$. Stöðupunktarnir eru því þrír: $x=0$, $x=1$, og $x=-1$. Skiptum því bilinu $(-\infty,\infty)$ í hlutbilin $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1)$, og $(1,\infty)$.

Skref 2: Þar sem f' er samfellt á hverju hlutbili nægir að velja einn prófunarpunkt x úr hverju bilanna í skrefi 1 og ákvarða formerki f' þar. Nota má $x=-2, x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}$, og $x=2$ sem prófunarpunkta.

Bil	**Prófunarpunktur**	**Formerki $f'(x)=\frac{5(1-x^{4/3})}{3x^{2/3}}$ í prófunarpunkti**	**Niðurstaða**
$(-\infty,-1)$	$x=-2$	$\frac{(+)(-)}{+}=-$	f er minnkandi.
$(-1,0)$	$x=-\frac{1}{2}$	$\frac{(+)(+)}{+}=+$	f er vaxandi.
$(0,1)$	$x=\frac{1}{2}$	$\frac{(+)(+)}{+}=+$	f er vaxandi.
$(1,\infty)$	$x=2$	$\frac{(+)(-)}{+}=-$	f er minnkandi.

Skref 3: Þar sem f er minnkandi á bilinu $(-\infty,-1)$ en vaxandi á bilinu $(-1,0)$, hefur f staðbundið lággildi í $x=-1$. Þar sem f er vaxandi á bilinu $(-1,0)$ og á bilinu $(0,1)$, hefur f ekki staðbundið útgildi í $x=0$. Fallið f er vaxandi á bilinu $(0,1)$ en minnkandi á bilinu $(1,\infty)$, f hefur því staðbundið hágildi í $x=1$. Niðurstöðurnar samræmast grafinu hér á eftir.



Mynd 4.33 Fallið f hefur staðbundið lággildi í $x=-1$ og staðbundið hágildi í $x=1$.

STÖÐUMAT 4.17

Notið fyrsta afleiðuprófið til að finna öll staðbundin útgildi fyrir $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

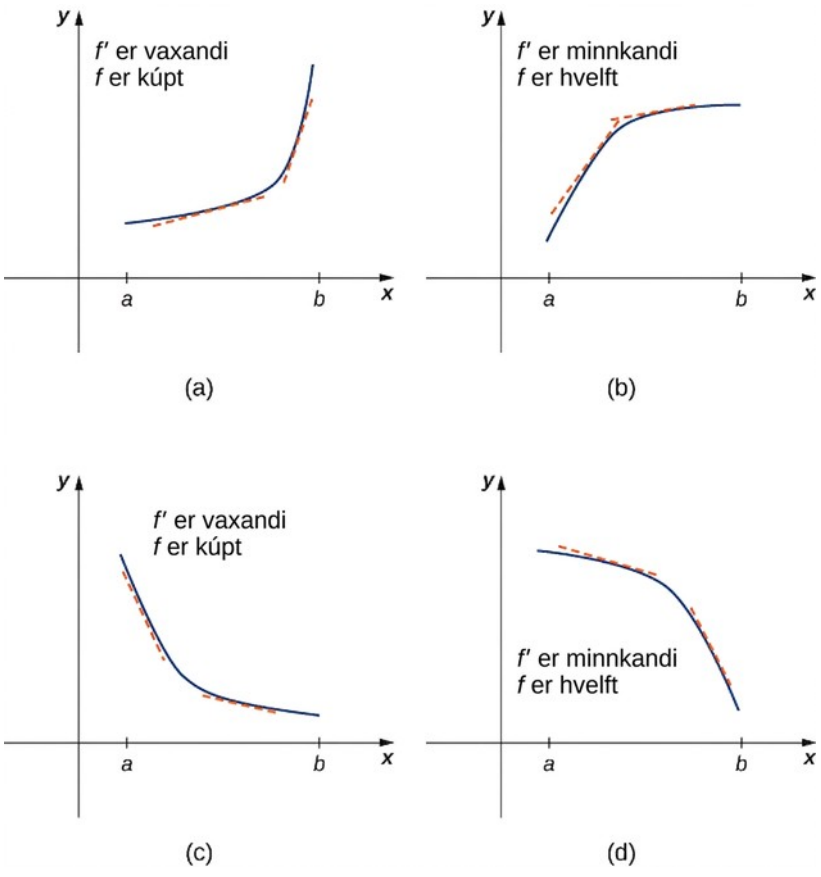
Kúpni og beygjuskilapunktar

Við vitum nú hvernig ákvarða má hvar fall er vaxandi eða minnkandi. Annað einkenni á lögun grafs er hvort það sveigist upp eða niður. Sá eiginleiki nefnist kúpni fallsins.

Mynd 4.34(a) sýnir fall f með graf sem sveigist upp á við. Þegar x vex eykst hallatala snertilsins. Þar sem afleiðan vex þegar x vex er f' vaxandi fall. Við segjum að fallið f sé kúpt. Mynd 4.34(b) sýnir fall f sem sveigist niður á við. Þegar x vex minnkar hallatala snertilsins. Þar sem afleiðan minnkar þegar x vex er f' minnkandi fall. Við segjum að fallið f sé hvelft.

SKILGREINING

Látum f vera fall sem er deildanlegt á opnu bili I. Ef f' er vaxandi á I, segjum við að f sé kúpt á I. Ef f' er minnkandi á I, segjum við að f sé hvelft á I.



Mynd 4.34 (a), (c) Þar sem f' er vaxandi á bilinu (a,b), segjum við að f sé kúpt á (a,b). (b), (d) Þar sem f' er minnkandi á bilinu (a,b), segjum við að f sé hvelft á (a,b).

Hvernig má ákvarða kúpni fallsins f, þegar graf þess liggur ekki fyrir? Samkvæmt skilgreiningu er f kúpt ef f' er vaxandi. Eins og segir í fylgisetningu 3, gildir að ef f' er deildanlegt, þá er f' vaxandi þegar afleiða þess uppfyllir $f''(x)>0$. Tvisvar deildanlegt fall f er því kúpt þar sem $f''(x)>0$. Á sama hátt er f hvelft ef f' er minnkandi. Deildanlega fallið f' er

minnkandi þegar afleiða þess uppfyllir $f''(x)<0$. Tvisvar deildanlegt fall f er því hvelft þar sem $f''(x)<0$. Þessi aðferð nefnist kúpniprófið.

SETNING 4.10

Kúpniprófið

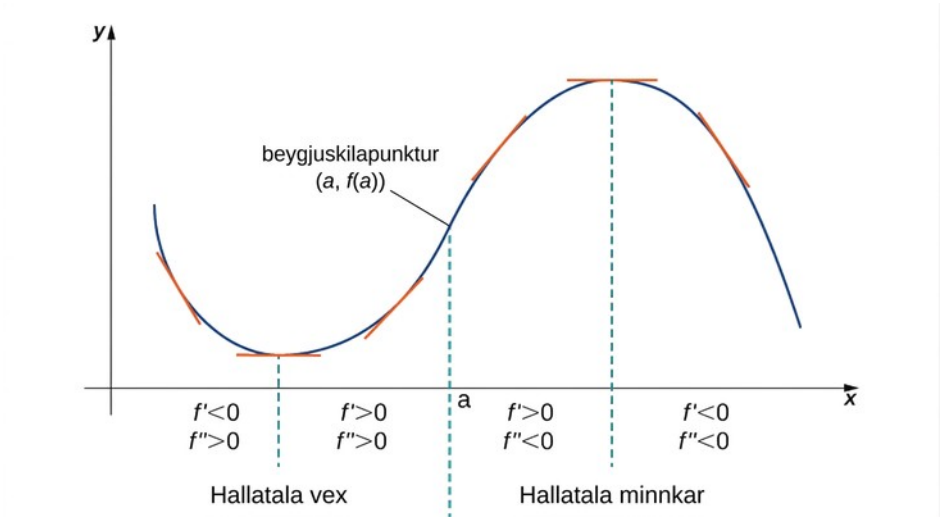
Látum f vera fall sem er tvisvar deildanlegt á bili I.

i. Ef $f''(x)>0$ fyrir öll $x \in I$, þá er f kúpt á I.
ii. Ef $f''(x)<0$ fyrir öll $x \in I$, þá er f hvelft á I.

Kúpni falls f má ákvarða með því að skoða aðra afleiðu fallsins f. Fall f getur breytt um sveigju, eins og sést á mynd 4.35. Samfellt fall getur þó aðeins breytt um sveigju við gildi x ef $f''(x)=0$ eða $f''(x)$ er óskilgreint. Til að finna bilin þar sem f er kúpt eða hvelft leitum við að þeim gildum x þar sem $f''(x)=0$ eða $f''(x)$ er óskilgreint. Síðan skiptum við skilgreiningarmengi f í hlutbil og ákvarðum formerki f'' á hverju þessara smærri bila. Ef f'' skiptir um formerki þegar farið er fram hjá gildi x, þá breytir f um sveigju. Fall f breytir þó ekki endilega um sveigju við gildi x þótt $f''(x)=0$ eða $f''(x)$ sé óskilgreint. Ef f breytir um sveigju í a og f er samfellt í a, er punkturinn $(a, f(a))$ beygjuskilapunktur fallsins f.

SKILGREINING

Ef f er samfellt í a og f breytir um sveigju í a, þá er punkturinn $(a, f(a))$ beygjuskilapunktur fallsins f.



Mynd 4.35 Þar sem $f''(x)>0$ fyrir $x<a$, er f kúpt á bilinu $(-\infty, a)$. Þar sem $f''(x)<0$ fyrir $x>a$, er f hvelft á bilinu (a, ∞). Punkturinn $(a, f(a))$ er beygjuskilapunktur fallsins f.

DÆMI 4.19

Kúpniprófið

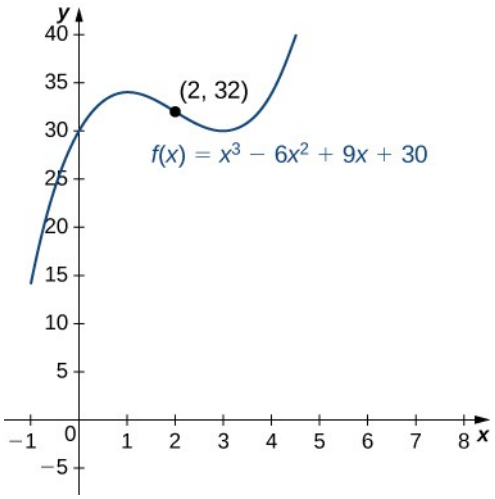
Fyrir fallið $f(x)=x^3-6x^2+9x+30$, ákvarðið öll bil þar sem f er kúpt og öll bil þar sem f er hvelft. Tilgreinið alla beygjuskilapunkta fallsins f. Notið grafteikniforrit til að staðfesta niðurstöðurnar.

Lausn

Til að ákvarða kúpni þurfum við að finna aðra afleiðuna $f''(x)$. Fyrsta afleiðan er $f'(x)=3x^2-12x+9$, svo að önnur afleiðan er $f''(x)=6x-12$. Fallið getur aðeins breytt um sveigju þar sem $f''(x)=0$ eða $f''(x)$ er óskilgreint. Þar sem f'' er skilgreint fyrir allar rauntölur x, nægir að leysa $f''(x)=0$. Úr jöfnunni $6x-12=0$, fæst $x=2$, eina gildið þar sem f gæti breytt um sveigju. Veljum nú prófunarpunkta á bilunum $(-\infty,2)$ og $(2,\infty)$ til að ákvarða kúpni f. Nota má $x=0$ og $x=3$.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f''(x)=6x-12$ í prófunarpunkti	Niðurstaða
$(-\infty,2)$	$x=0$	$-$	f er hvelft
$(2,\infty)$	$x=3$	$+$	f er kúpt.

Fallið f er því hvelft á bilinu $(-\infty,2)$ og kúpt á bilinu $(2,\infty)$. Þar sem f breytir um sveigju þegar $x=2$, er punkturinn $(2,f(2))=(2,32)$ beygjuskilapunktur. Mynd 4.36 staðfestir niðurstöðurnar.



Mynd 4.36 Fallið hefur beygjuskilapunkt í $(2,32)$ þar sem sveigja grafsins breytist.

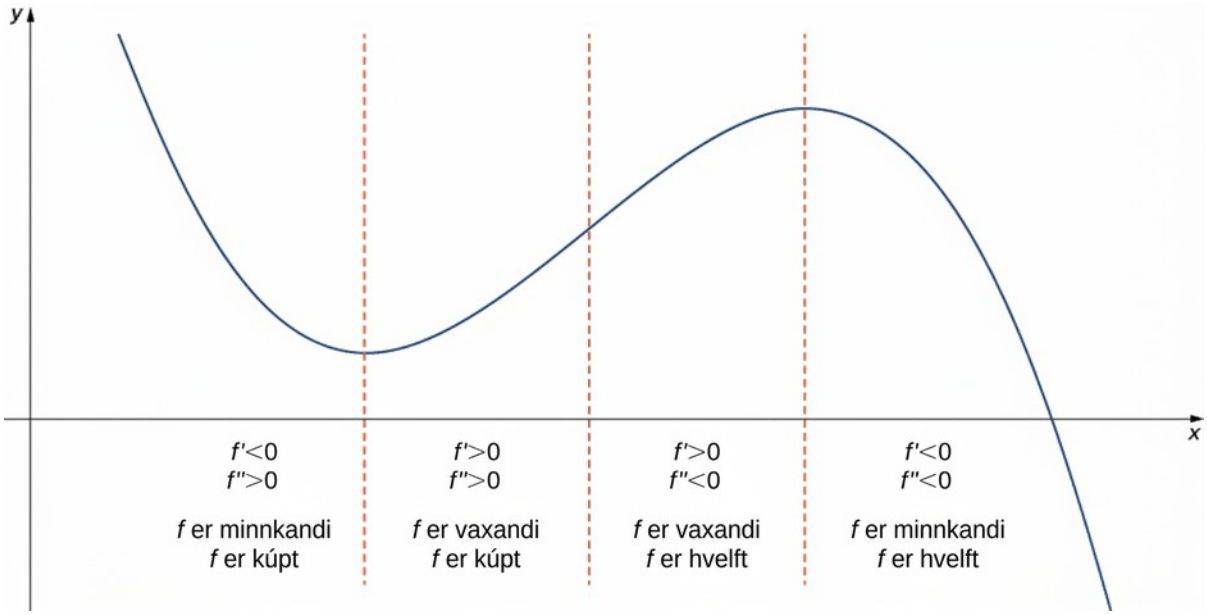
STÖÐUMAT 4.18

Fyrir $f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+18x$, finnið öll bil þar sem f er kúpt og öll bil þar sem f er hvelft.

Í töflu 4.1 tökum við saman þær upplýsingar sem fyrsta og önnur afleiða falls f gefa um graf f, en þær eru einnig sýndar myndrænt á mynd 4.37.

Tafla 4.1 Hvað afleiður segja okkur um gröf

Formerki f'	**Formerki f''**	**Er f vaxandi eða minnkandi?**	**Kúpni**
Jákvætt	Jákvætt	Vaxandi	Kúpt
Jákvætt	Neikvætt	Vaxandi	Hvelft
Neikvætt	Jákvætt	Minnkandi	Kúpt
Neikvætt	Neikvætt	Minnkandi	Hvelft



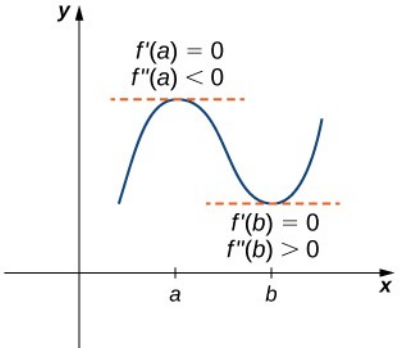
Mynd 4.37 Lítum á tvisvar deildanlegt fall f á opnu bili I. Ef $f'(x)>0$ fyrir öll $x \in I$, er fallið vaxandi á I. Ef $f'(x)<0$ fyrir öll $x \in I$, er fallið minnkandi á I. Ef $f''(x)>0$ fyrir öll $x \in I$, er fallið kúpt á I. Ef $f''(x)<0$ fyrir öll $x \in I$, er fallið hvelft á I.

Annað afleiðuprófið

Fyrsta afleiðuprófið er greiningaraðferð til að finna staðbundin útgildi, en einnig má nota aðra afleiðu í sama tilgangi. Sú aðferð er stundum einfaldari en að nota fyrstu afleiðuna.

Ef samfellt fall hefur staðbundið útgildi hlýtur það að vera í stöðupunkti, en ekki er víst að staðbundið útgildi sé í sérhverjum stöðupunkti. Annað afleiðuprófið sker úr um þetta í mörgum tilvikum. Látum f vera tvisvar deildanlegt fall þannig að $f'(a)=0$ og f'' sé samfellt á

opnu bili I sem inniheldur a. Gerum fyrst ráð fyrir að $f''(a)<0$. Þar sem f'' er samfellt á I, gildir $f''(x)<0$ fyrir öll $x \in I$ (Mynd 4.38). Eins og segir í fylgisetningu 3, er f' minnkandi á I. Þar sem $f'(a)=0$, ályktum við að fyrir öll $x \in I$, $f'(x)>0$ ef $x<a$ og $f'(x)<0$ ef $x>a$. Samkvæmt fyrsta afleiðuprófinu hefur f því staðbundið hágildi þegar $x=a$. Gerum hins vegar ráð fyrir að til sé gildi b þannig að $f'(b)=0$ en $f''(b)>0$. Þar sem f'' er samfellt á opnu bili I sem inniheldur b, þá er $f''(x)>0$ fyrir öll $x \in I$ (Mynd 4.38). Við notum aftur fylgisetningu 3, f' er því vaxandi á I. Þar sem $f'(b)=0$, ályktum við að fyrir öll $x \in I$, $f'(x)<0$ ef $x<b$ og $f'(x)>0$ ef $x>b$. Samkvæmt fyrsta afleiðuprófinu hefur f því staðbundið lággildi þegar $x=b$.



Mynd 4.38 Lítum á tvisvar deildanlegt fall f þannig að f'' sé samfellt. Þar sem $f'(a)=0$ og $f''(a)<0$, er til bil I sem inniheldur a þannig að ef x tilheyrir I, þá er f vaxandi ef $x<a$ og f er minnkandi ef $x>a$. Því hefur f staðbundið hágildi þegar $x=a$. Þar sem $f'(b)=0$ og $f''(b)>0$, er til bil I sem inniheldur b þannig að ef x tilheyrir I, þá er f minnkandi ef $x<b$ og f er vaxandi ef $x>b$. Því hefur f staðbundið lággildi þegar $x=b$.

SETNING 4.11

Annað afleiðuprófið

Gerum ráð fyrir að $f'(c)=0$, f'' sé samfellt á bili sem inniheldur c.

- **i.** Ef $f''(c)>0$, þá hefur f staðbundið lággildi í c.
- **ii.** Ef $f''(c)<0$, þá hefur f staðbundið hágildi í c.
- **iii.** Ef $f''(c)=0$, þá gefur prófið enga niðurstöðu.

Athugið að í tilviki iii, þegar $f''(c)=0$, getur f haft staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða hvorugt í c. Til dæmis hafa föllin $f(x)=x^3$, $f(x)=x^4$, og $f(x)=-x^4$ öll stöðupunkt þegar $x=0$. Önnur afleiða þeirra er núll þegar $x=0$. Fallið $f(x)=x^4$ hefur hins vegar staðbundið lággildi þegar $x=0$, en fallið $f(x)=-x^4$ hefur staðbundið hágildi þegar núll er gildi breytunnar x, en fallið $f(x)=x^3$ hefur ekki staðbundið útgildi þegar $x=0$.

Skoðum nú hvernig nota má annað afleiðuprófið til að ákvarða hvort f hafi staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í stöðupunkti c þar sem $f'(c)=0$.

DÆMI 4.20

Notkun annars afleiðuprófsins

Notið aðra afleiðu til að finna öll staðbundin útgildi fallsins $f(x)=x^5-5x^3$.

Lausn

Til að beita öðru afleiðuprófinu þurfum við fyrst að finna stöðupunkta c þar sem $f'(c)=0$. Afleiðan er $f'(x)=5x^4-15x^2$. Því er $f'(x)=5x^4-15x^2=5x^2\left(x^2-3\right)=0$ þegar $x=0,\pm\sqrt{3}$.

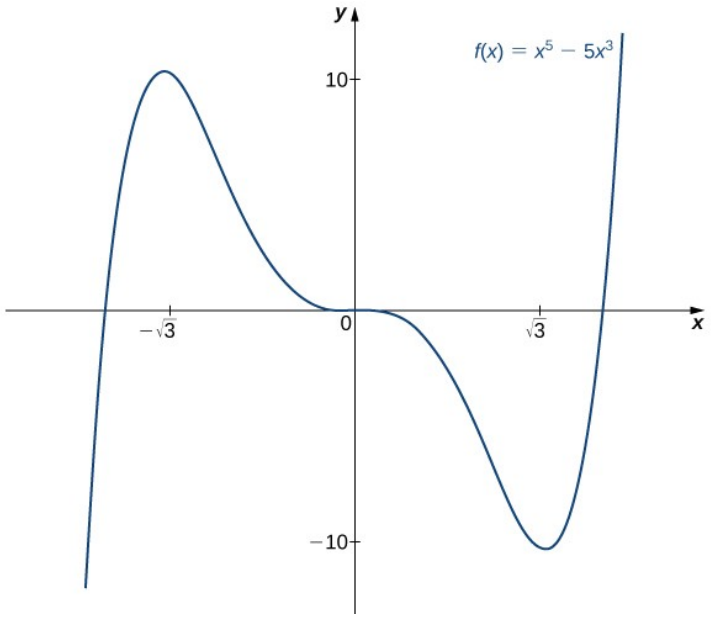
Til að ákvarða hvort f hafi staðbundin útgildi við einhver þessara gilda þurfum við að finna formerki f'' þar. Önnur afleiðan er

$$f''(x)=20x^3-30x=10x\left(2x^2-3\right).$$

Í töflunni hér á eftir reiknum við aðra afleiðu í hverjum stöðupunkti og notum annað afleiðuprófið til að ákvarða hvort f hafi staðbundið hágildi eða lággildi þar.

x	$f''(x)$	**Niðurstaða**
$-\sqrt{3}$	$-30\sqrt{3}$	Staðbundið hágildi
0	0	Annað afleiðuprófið gefur ekki ótvíræða niðurstöðu
$\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	Staðbundið lággildi

Samkvæmt öðru afleiðuprófinu hefur f staðbundið hágildi þegar $x=-\sqrt{3}$ og f hefur staðbundið lággildi þegar $x=\sqrt{3}$. Prófið gefur enga niðurstöðu þegar $x=0$. Til að ákvarða hvort f hafi staðbundið útgildi þegar $x=0$, beitum við fyrsta afleiðuprófinu. Til að ákvarða formerki $f'(x)=5x^2\left(x^2-3\right)$ á bilunum $x\in\left(-\sqrt{3},0\right)$ og $x\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, veljum við $x=-1$ og $x=1$ sem prófunarpunkta. Þar sem $f'(-1)<0$ og $f'(1)<0$, er f minnkandi á báðum bilunum. Fallið f hefur því ekki staðbundið útgildi þegar $x=0$ eins og sést á grafinu hér á eftir.



Mynd 4.39 Fallið f hefur staðbundið hágildi í $x=-\sqrt{3}$ og staðbundið lággildi í $x=\sqrt{3}$

STÖÐUMAT 4.19

4

Skoðum fallið $f(x)=x^3-\left(\frac{3}{2}\right)x^2-18x$. Gildin $c=3,-2$ uppfylla $f'(c)=0$. Notið annað afleiðuprófið til að ákvarða hvort f hafi staðbundið hágildi eða lággildi við þessi gildi.

Við höfum nú þær aðferðir sem þarf til að ákvarða hvar fall er vaxandi eða minnkandi og til að lýsa grunnlögun grafs þess. Í næsta undirkafla könnum við hegðun falls þegar $x \to \pm\infty$. Að því loknu getum við teiknað nákvæm gröf af fjölbreyttum föllum.

Æfingar í undirkafla 4.5

194. Ef c er stöðupunktur fallsins $f(x)$, hvenær hefur fallið hvorki staðbundið hágildi né lággildi við c? Útskýrið.

195. Í fallinu $y=x^3$, er $x=0$ bæði beygjuskilapunktur og staðbundið útgildi?

196. Hefur fallið $y=x^3$, beygjuskilapunkt við $x=0$?

197. Getur punkturinn c á grafi tvisvar deildanlegs falls verið bæði beygjuskilapunktur og staðbundið útgildi?

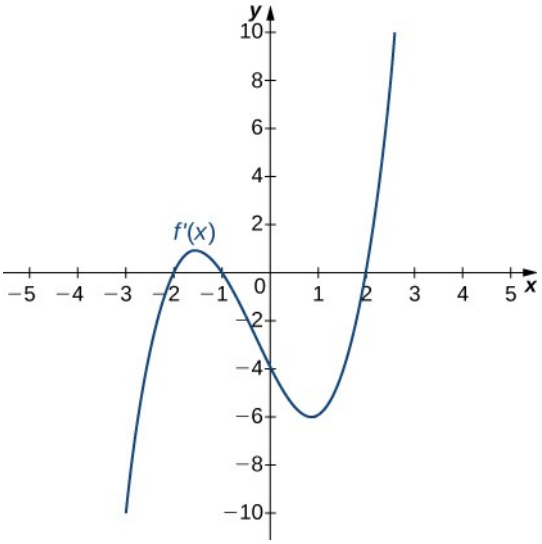
198. Hvers vegna er samfelldni nauðsynleg fyrir fyrsta afleiðuprófið? Setjið fram dæmi.

199. Útskýrið hvort hvelft fall þurfi að skera línuna $y=0$ fyrir eitthvert gildi x.

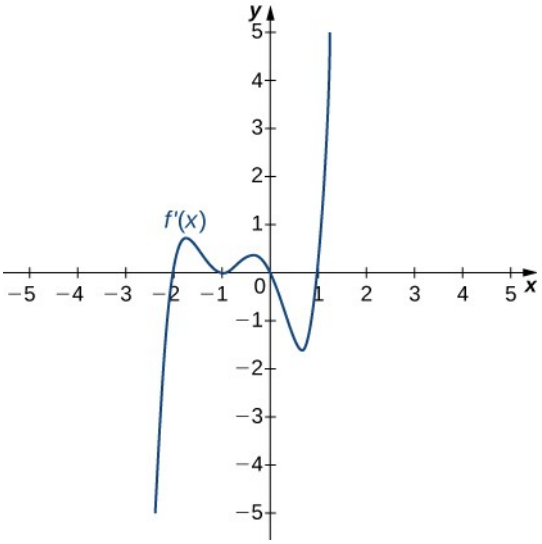
200. Útskýrið hvort margliða af stigi 2 geti haft beygjuskilapunkt.

Í æfingunum hér á eftir skal greina gröf afleiðufallanna f', og tilgreina bilin þar sem f er vaxandi eða minnkandi.

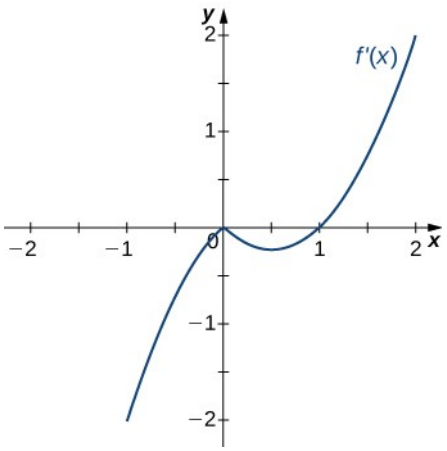
201.



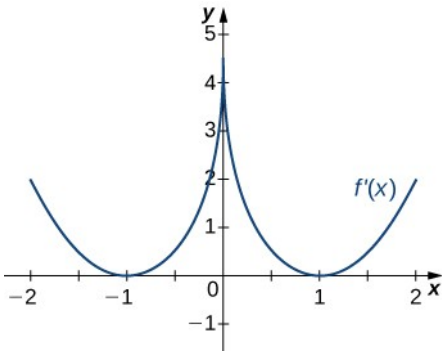
202.



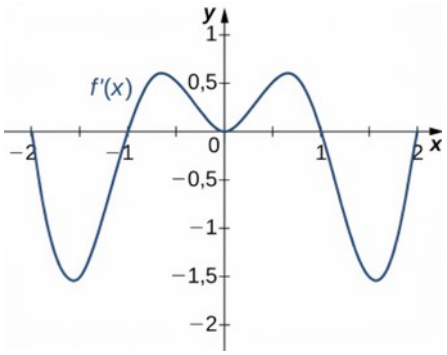
203.



204.



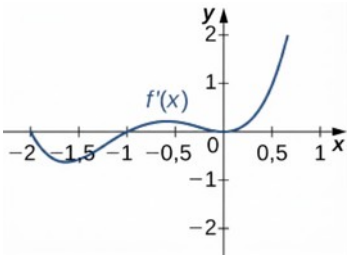
205.



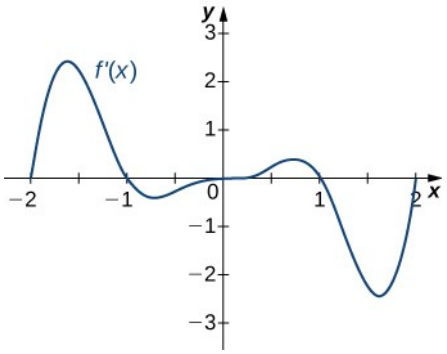
Í æfingunum hér á eftir skal greina gröf afleiðufallanna f', og tilgreina bilin þar sem

a. f er vaxandi eða minnkandi og
b. hvar lággildi og hágildi eru.

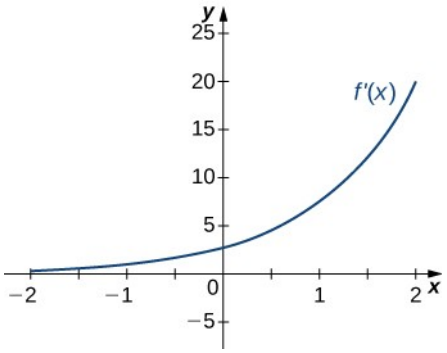
206.



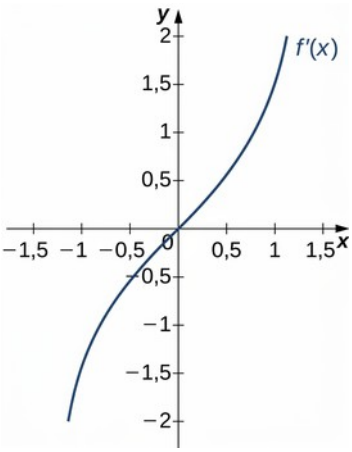
207.



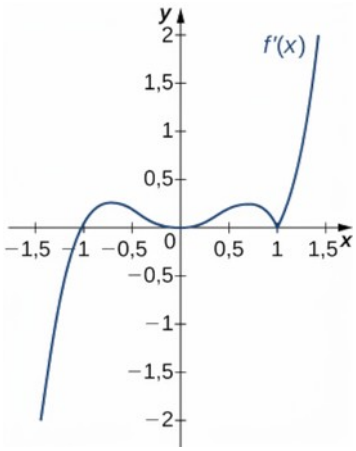
208.



209.

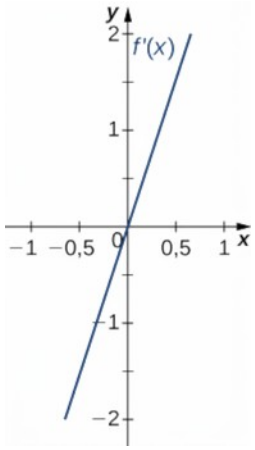


210.

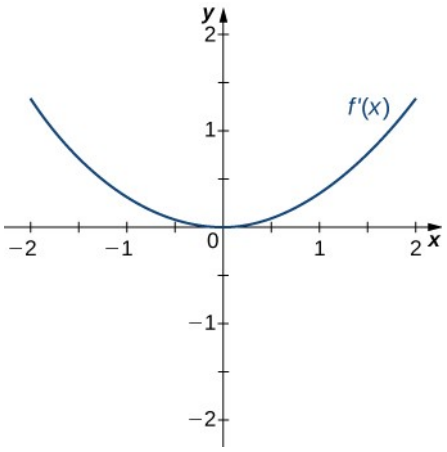


Í æfingunum hér á eftir skal greina gröf afleiðufallanna f', og tilgreina alla beygjuskilapunkta og þau bil þar sem f er kúpt eða hvelft.

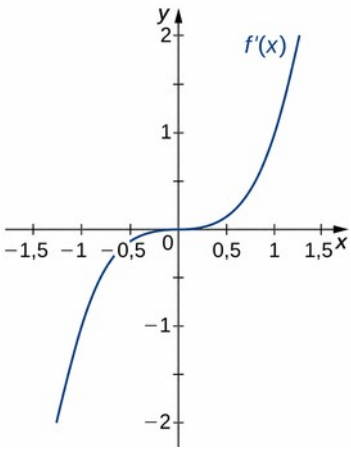
211.



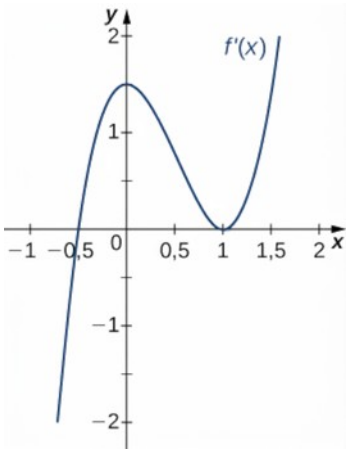
212.



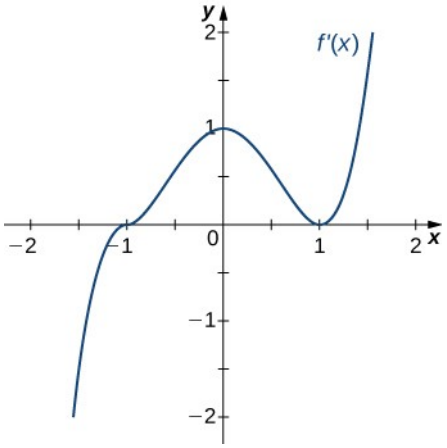
213.



214.



215.



Í eftirfarandi æfingum skal teikna graf sem uppfyllir gefin skilyrði fyrir skilgreiningarmengið $x \epsilon [-3,3]$. Fallið þarf hvorki að vera samfellt né deildanlegt.

216. $f(x)>0, f'(x)>0$ yfir $x>1, -3<x<0, f'(x)=0$ yfir $0<x<1$

217. $f'(x)>0$ þegar $x>2, -3<x<-1, f'(x)<0$ þegar $-1<x<2, f''(x)<0$ fyrir öll x

218. $f''(x)<0$ þegar $-1<x<1$, $f''(x)>0$, $-3<x<-1$, $1<x<3$, staðbundið hágildi þegar $x=0$, og staðbundin lággildi þegar $x=\pm 2$

219. Fallið hefur staðbundið hágildi þegar $x=2$, og staðbundið lággildi þegar $x=1$, en grafið er hvorki kúpt né hvelft.

220. Fallið hefur staðbundin hágildi þegar $x=\pm 1$, er kúpt fyrir öll x, og er jafnframt jákvætt fyrir öll x.

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða

a. bil þar sem f er vaxandi eða minnkandi og
b. staðbundin lággildi og hágildi fallsins f.

Notið reiknivél til að teikna gröf fallanna ef þörf krefur, en sýnið útreikninga ykkar.

221. $f(x)=\sin x+\sin^3 x$ á bilinu $-\pi<x<\pi$

222.

$$f(x)=x^2+\cos x$$

Í æfingunum hér á eftir skal ákvarða a) bilin þar sem f er kúpt eða hvelft og b) beygjuskilapunkta fallsins f.

223.

$$f(x)=x^3-4x^2+x+2$$

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða

a. bil þar sem f er vaxandi eða minnkandi,
b. staðbundin lággildi og hágildi fallsins f,
c. bil þar sem f er kúpt og bil þar sem það er hvelft, og
d. beygjuskilapunkta f.

224.

$$f(x)=x^2-6x$$

225.

$$f(x)=x^3-6x^2$$

226.

$$f(x)=x^4-6x^3$$

227.

$$f(x)=x^{11}-6x^{10}$$

228.

$$f(x)=x+x^2-x^3$$

229.

$$f(x)=x^2+x+1$$

230.

$$f(x)=x^3+x^4$$

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða

a. bil þar sem f er vaxandi eða minnkandi,
b. staðbundin lággildi og hágildi fallsins f,
c. bil þar sem f er kúpt og bil þar sem það er hvelft, og
d. beygjuskilapunkta fallsins f. Teiknið ferilinn og berið svarið síðan saman við niðurstöður reiknivélar. Notið reiknivél ef ekki tekst að finna nákvæmt svar með greiningu.

231. [T] $f(x)=\sin(\pi x)-\cos(\pi x)$ á bilinu $x=[-1,1]$

232. [T] $f(x)=x+\sin(2x)$ á bilinu $x=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

233. [T] $f(x)=\sin x+\tan x$ á bilinu $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

234. [T] $f(x)=(x-2)^2(x-4)^2$

235. [T] $f(x)=\frac{1}{1-x}, x\neq 1$

236. [T] $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ á bilinu

$$x=$$

$$[2\pi,0)U(0,2\pi]$$

237. $f(x)=\sin(x)e^x$ á bilinu $x=[-\pi,\pi]$

238.

$$f(x)=(\ln x)\sqrt{x}, x>0$$

239.

$$f(x)=\frac{1}{4}\sqrt{x}+\frac{1}{x}, x>0$$

240.

$$f(x)=\frac{e^x}{x}, x\neq 0$$

Í æfingunum hér á eftir skal túlka setningarnar með hliðsjón af $f, f', \text{og } f''$.

241. Stofninn vex hægar. Hér táknar f stofnstærðina.

242. Reiðhjólið hefur meiri hröðun en bíllinn, en bíllinn fer hraðar. Hér er $f=$ staðsetning reiðhjólsins að frádreginni staðsetningu bílsins.

243. Flugvélin lendir mjúklega. Hér er f hæð flugvélarinnar.

244. Fyrirtæki fylgist með launakostnaði yfir árið. Þann 1. júlí er kostnaðurinn í hámarki. Hér táknar f launakostnaðinn.

245. Efnahagslífið tekur við sér. Hér er f mælikvarði á efnahagslífið, svo sem verg landsframleiðsla.

Í æfingunum hér á eftir skal skoða þriðja stigs margliðu $f(x)$, sem uppfyllir $f'(1)=0, f'(3)=0$. Skilyrðin eiga ekki við um æfingar 249 og 250. Ákvarðið hvort fullyrðingarnar séu sannar eða ósannar og rökstyðjið svarið.

246. $f(x)=0$ fyrir eitthvert $1\leq x\leq 3$

247. $f''(x)=0$ fyrir eitthvert $1\leq x\leq 3$

248. Ekkert algilt hágildi er við $x=3$

249. Ef $f(x)$ hefur þrjár rætur hefur fallið nákvæmlega 1 beygjuskilapunkt.

250. Ef $f(x)$ hefur einn beygjuskilapunkt hefur fallið þrjár raunrætur.

4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur

NÁMSMARKMIÐ

- 4.6.1 Reikna markgildi falls þegar x vex eða minnkar án takmarka.
- 4.6.2 Þekkja lárétta aðfellu á grafi falls.
- 4.6.3 Áætla endahegðun falls þegar x vex eða minnkar án takmarka.
- 4.6.4 Bera kennsl á skáfellu á grafi falls.
- 4.6.5 Greina fall og afleiður þess til að teikna graf þess.

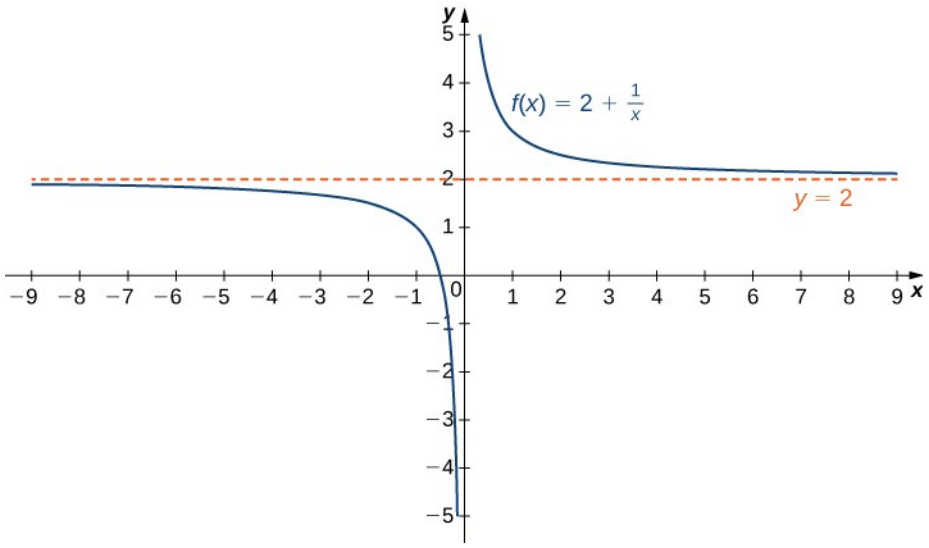
Við höfum sýnt hvernig nota má fyrstu og aðra afleiðu falls til að lýsa lögun grafs. Til að teikna graf falls f sem er skilgreint á ótakmörkuðu skilgreiningarmengi þurfum við einnig að þekkja hegðun f þegar $x\to\pm\infty$. Í þessum undirkafla skilgreinum við markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og sýnum hvernig þau hafa áhrif á graf falls. Í lok undirkaflans lýsum við aðferð til að teikna graf ótiltekins falls f.

Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

Við byrjum á að kanna hvað felst í því að fall hafi endanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt. Síðan skoðum við hugmyndina um fall sem hefur óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt. Fyrr í Inngangi að föllum og gröfum skoðuðum við lóðfellur; í þessum undirkafla fjöllum við um láréttar aðfellur og skáfellur.

Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og láréttar aðfellur

Rifjum upp að $\lim_{x \to a} f(x) = L$ merkir að $f(x)$ verður eins nálægt L og óskað er, svo framarlega sem x er nægilega nálægt a. Við getum yfirfært þessa hugmynd á markgildi þegar x stefnir á óendanlegt. Skoðum til dæmis fallið $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Eins og sjá má af grafinu á mynd 4.40 og tölunum í töflu 4.2 stækka gildi x og gildi $f(x)$ nálgast 2. Við segjum að þegar x stefnir á ∞ sé markgildi $f(x)$ jafnt 2 og ritum $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$. Á sama hátt, þegar $x < 0$, verður $|x|$ stærra og gildi $f(x)$ nálgast 2. Við segjum að þegar x stefnir á $-\infty$ sé markgildi $f(x)$ jafnt 2 og ritum $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$.



Mynd 4.40 Fallið nálgast aðfelluna $y = 2$ þegar x nálgast $\pm\infty$.

Tafla 4.2 Gildi falls f þegar $x \to \pm\infty$

x	10	100	1.000	10.000
$2 + \frac{1}{x}$	2,1	2,01	2,001	2,0001
x	-10	-100	-1.000	-10.000
$2 + \frac{1}{x}$	1,9	1,99	1,999	1,9999

Almennt segjum við, fyrir sérhvert fall f, að þegar $x \to \infty$ sé markgildi $f(x)$ jafnt L ef $f(x)$ verður eins nálægt L og óskað er þegar x er nægilega stórt. Þá ritum við $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$. Á sama hátt segjum við að þegar $x \to -\infty$ sé markgildi $f(x)$ jafnt L ef $f(x)$ verður eins nálægt L og óskað er þegar $x < 0$ og $|x|$ er nægilega stórt. Þá ritum við $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$. Nú skoðum við skilgreininguna á því að fall hafi markgildi þegar x stefnir á óendanlegt.

SKILGREINING

(Óformlega) Ef gildi $f(x)$ verða eins nálægt L og óskað er þegar x verður nægilega stórt, segjum við að fallið f hafi markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

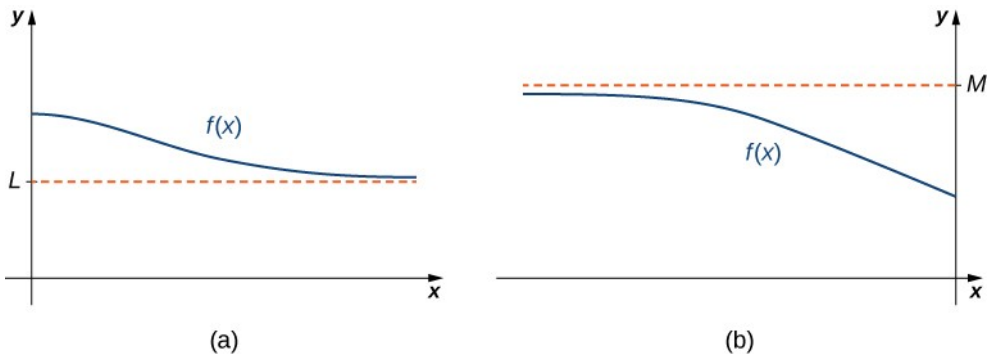
Ef gildi $f(x)$ verða eins nálægt L og óskað er fyrir $x < 0$ þegar $|x|$ verður nægilega stórt, segjum við að fallið f hafi markgildi þegar x stefnir á mínus óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Ef gildin $f(x)$ nálgast eitthvert endanlegt gildi L þegar $x \to \infty$ eða $x \to -\infty$, nálgast graf f línuna $y = L$. Í því tilviki er línan $y = L$ lárétt aðfella grafs f (mynd 4.41). Til dæmis gildir fyrir fallið $f(x) = \frac{1}{x}$, þar sem $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, að línan $y = 0$ er lárétt aðfella grafs fallsins $f(x) = \frac{1}{x}$.

SKILGREINING

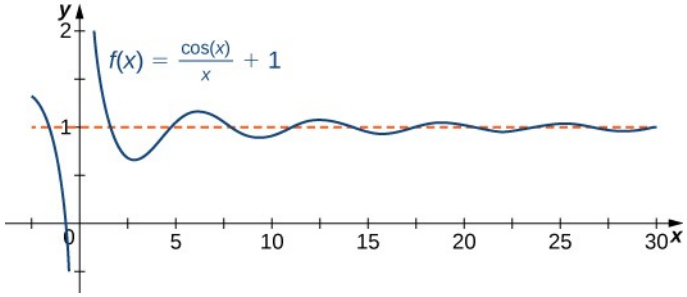
Ef $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ eða $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, segjum við að línan $y = L$ sé lárétt aðfella fallsins f.



Mynd 4.41 (a) Þegar $x \to \infty$, verða gildi f eins nálægt L. og óskað er. Línan $y = L$ er lárétt aðfella fallsins f. (b) Þegar $x \to -\infty$, verða gildi f eins nálægt M. og óskað er. Línan $y = M$ er lárétt aðfella fallsins f.

Fall getur ekki farið yfir lóðfellu því grafið verður að stefna á óendanlegt (eða $-\infty$) úr að minnsta kosti einni átt þegar x nálgast lóðfelluna. Fall getur hins vegar farið yfir lárétta aðfellu. Reyndar getur fall farið yfir lárétta aðfellu ótakmarkað oft. Til dæmis sker fallið

$f(x)=\frac{(\cos x)}{x}+1$ sem sýnt er á mynd 4.42 láréttu aðfelluna $y=1$ óendanlega oft þegar það sveiflast umhverfis aðfelluna með sífellt minnkandi útslagi.



Mynd 4.42 Graf fallsins $f(x)=(\cos x)/x+1$ sker láréttu aðfelluna $y=1$ óendanlega oft.

Algebrulegu markgildisreglurnar og klemmureglan sem við kynntum í Inngangi að markgildum gilda einnig um markgildi þegar breytan stefnir á óendanlegt. Við sýnum hvernig nota má þessar reglur til að reikna nokkur slík markgildi.

DÆMI 4.21

Útreikningur markgilda þegar x stefnir á óendanlegt

Fyrir hvert eftirfarandi fall f, reiknið $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Ákvarðið láréttu aðfelluna eða aðfellurnar fyrir f.

a. $f(x)=5-\frac{2}{x^2}$

b. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

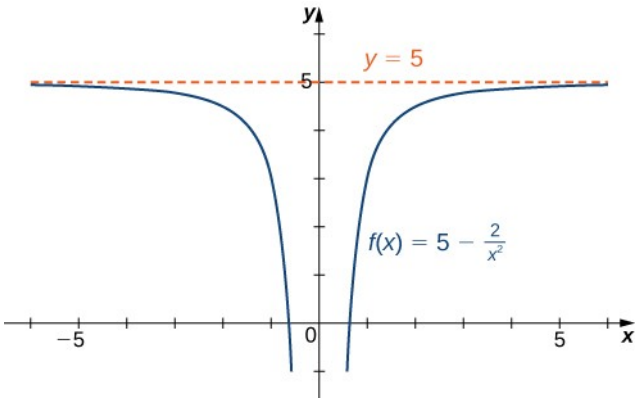
c. $f(x)=\tan^{-1}(x)$

Lausn

a. Með reiknireglum markgilda fáum við

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}5-2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right).\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)=5-2\cdot 0=5.$$

Á sama hátt er $\lim_{x\to-\infty} f(x)=5$. Því hefur $f(x)=5-\frac{2}{x^2}$ láréttu aðfelluna $y=5$ og f nálgast þessa láréttu aðfellu þegar $x\to\pm\infty$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.43 Þetta fall nálgast lárétta aðfellu þegar $x \to \pm\infty$.

b. Þar sem $-1 \le \sin x \le 1$ fyrir öll x, fæst

$$\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

fyrir öll $x \neq 0$. Þar að auki, þar sem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x} = 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x},$$

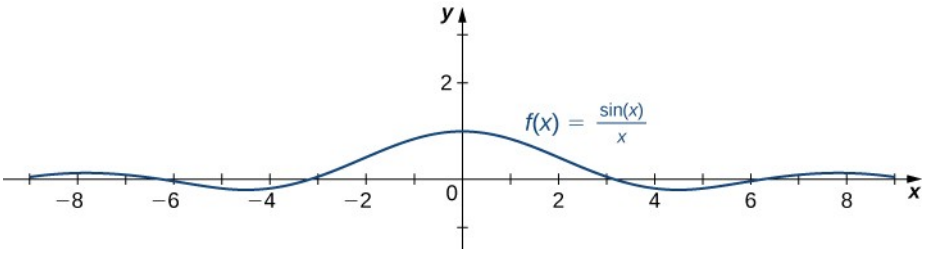
getum við beitt klemmureglunni og ályktað að

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Á sama hátt er

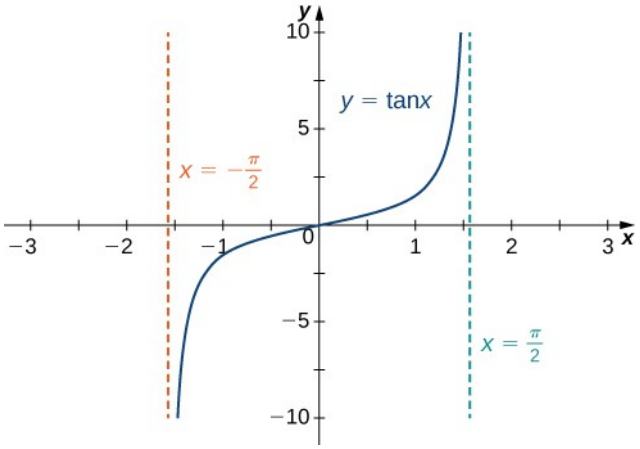
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Því hefur $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ láréttu aðfelluna $y = 0$ og $f(x)$ nálgast þessa láréttu aðfellu þegar $x \to \pm\infty$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.44 Þetta fall sker láréttu aðfelluna sína oft.

c. Til að reikna $\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}(x)$ og $\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(x)$, skoðum við fyrst graf $y = \tan(x)$ á bilinu $(-\pi/2, \pi/2)$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 4.45 Graf fallsins $\tan x$ hefur lóðfellur við $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Þar sem

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty,$$

af því leiðir að

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

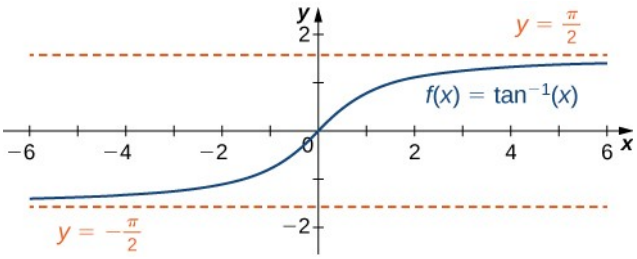
Á sama hátt, þar sem

$$\lim_{x \to (-\pi/2)^+} \tan x = -\infty,$$

af því leiðir að

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Af því leiðir að $y=\frac{\pi}{2}$ og $y=-\frac{\pi}{2}$ eru láréttar aðfellur fallsins $f(x)=\tan^{-1}(x)$ eins og sýnt er á grafinu hér á eftir.



Mynd 4.46 Þetta fall hefur tvær láréttar aðfellur.

STÖÐUMAT 4.20

Reiknið $\lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{4}{x}\right)$ og $\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{4}{x}\right)$. Ákvarðið láréttar aðfellur fallsins $f(x)=3+\frac{4}{x}$, ef einhverjar eru.

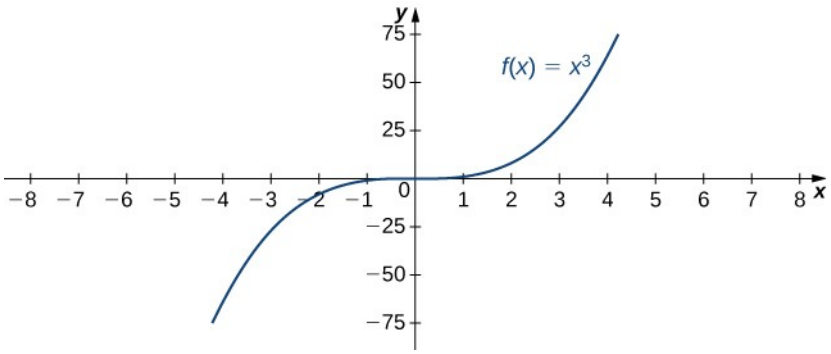
Óendanleg markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

Stundum verða gildi fallsins f ótakmarkað stór þegar $x\to\infty$ (eða þegar $x\to-\infty$). Í þessu tilviki ritum við $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ (eða $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$). Hins vegar, ef gildi f eru neikvæð en tölugildi þeirra verða ótakmarkað stór þegar $x\to\infty$ (eða þegar $x\to-\infty$), ritum við $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ (eða $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$).

Lítum til dæmis á fallið $f(x)=x^3$. Í töflu 4.3 og á mynd 4.47 sést að þegar $x\to\infty$ verða gildin $f(x)$ ótakmarkað stór. Því er $\lim_{x\to\infty}x^3=\infty$. Þegar $x\to-\infty$, eru gildi $f(x)=x^3$ hins vegar neikvæð en verða ótakmarkað stór að tölugildi. Þar af leiðandi er $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

Tafla 4.3 Gildi veldisfalls þegar $x\to\pm\infty$

x	10	20	50	100	1000
x^3	1000	8000	125.000	1.000.000	1.000.000.000
x	−10	−20	−50	−100	−1.000
x^3	−1.000	−8000	−125.000	−1.000.000	−1.000.000.000



Mynd 4.47 Fyrir þetta fall verða fallgildin ótakmörkuð þegar $x \to \pm\infty$.

SKILGREINING

(Óformlega) Segjum að fall f hafi óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

ef $f(x)$ verður eins stórt og óskað er þegar x er nægilega stórt. Við segjum að fall hafi neikvætt óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

ef $f(x) < 0$ og $|f(x)|$ verður ótakmarkað stórt þegar x er nægilega stórt. Á svipaðan hátt getum við skilgreint óendanleg markgildi þegar $x \to -\infty$.

Formlegar skilgreiningar

Áður notuðum við orðasamböndin eins nálægt og óskað er, eins stórt og óskað er, og nægilega stórt til að skilgreina óformlega markgildi þegar breytan stefnir á óendanlegt. Þótt þessi orðasambönd lýsi slíkum markgildum rétt eru þau ekki stærðfræðilega nákvæm. Hér eru formlegri skilgreiningar á markgildum þegar breytan stefnir á óendanlegt. Síðan skoðum við hvernig nota má þessar skilgreiningar til að sanna niðurstöður sem varða slík markgildi.

SKILGREINING

(Formlega) Segjum að fall f hafi markgildi þegar x stefnir á óendanlegt ef til er rauntala L þannig að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$, er til $N > 0$ þannig að

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

fyrir öll $x > N$. Í því tilviki ritum við

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

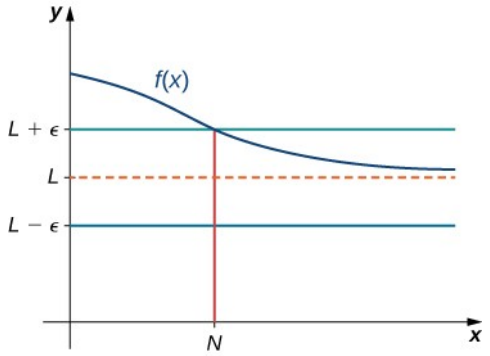
(sjá mynd 4.48).

Við segjum að fall f hafi markgildi þegar x stefnir á mínus óendanlegt ef til er rauntala L þannig að fyrir sérhvert $\varepsilon>0$, er til $N<0$ þannig að

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

fyrir öll $x<N$. Í því tilviki ritum við

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$



Mynd 4.48 Ef fall hefur markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og $x>N$, þá gildir $|f(x)-L|<\varepsilon$.

4

Fyrr í þessum undirkafla notuðum við myndrænar vísbendingar á mynd 4.40 og tölulegar vísbendingar í töflu 4.2 til að álykta að $\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$. Hér notum við formlega skilgreiningu á markgildi þegar x stefnir á óendanlegt til að sanna þessa niðurstöðu með ströngum stærðfræðilegum rökum.

DÆMI 4.22

Dæmi um endanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

Notið formlega skilgreiningu á markgildi þegar x stefnir á óendanlegt til að sanna að $\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2$.

Lausn

Látum $\varepsilon>0$. Látum $N=\frac{1}{\varepsilon}$. Því gildir fyrir öll $x>N$, að

$$\left|2+\frac{1}{x}-2\right|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{x}<\frac{1}{N}=\varepsilon.$$

STÖÐUMAT 4.21

Notið formlega skilgreiningu á markgildi þegar x stefnir á óendanlegt til að sanna að $\lim_{x \to \infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$.

Nú skoðum við nákvæmari skilgreiningu á óendanlegu markgildi þegar x stefnir á óendanlegt.

SKILGREINING

(Formlega) Segjum að fall f hafi óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og ritum

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$$

ef fyrir sérhvert $M>0$, er til $N>0$ þannig að

$$f(x)>M$$

fyrir öll $x>N$ (sjá mynd 4.49).

Við segjum að fall hafi neikvætt óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og ritum

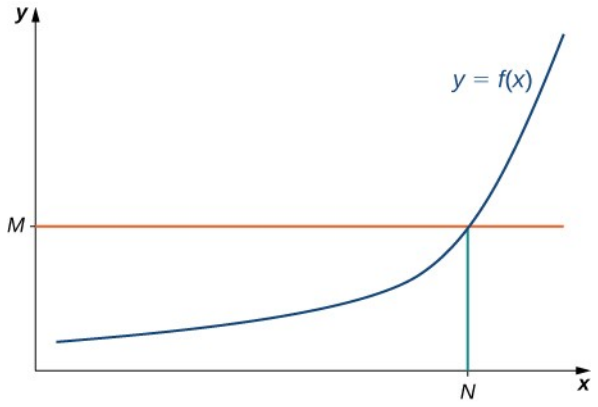
$$\lim_{x \to \infty} f(x)=-\infty$$

ef fyrir sérhvert $M<0$, er til $N>0$ þannig að

$$f(x)<M$$

fyrir öll $x>N$.

Á sama hátt getum við skilgreint markgildi þegar $x \to -\infty$.



Mynd 4.49 Ef fall hefur óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og $x>N$, þá gildir $f(x)>M$.

Áður notuðum við myndrænar vísbendingar (mynd 4.47) og tölulegar vísbendingar (tafla 4.3) til að álykta að $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$. Hér notum við formlegu skilgreininguna á óendanlegu markgildi þegar x stefnir á óendanlegt til að sanna þessa niðurstöðu.

DÆMI 4.23

Óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

Notið formlegu skilgreininguna á óendanlegu markgildi þegar x stefnir á óendanlegt til að sanna að $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

Lausn

Látum $M > 0$. Látum $N = \sqrt[3]{M}$. Þá gildir fyrir öll $x > N$, að

$$x^3 > N^3 = \left(\sqrt[3]{M}\right)^3 = M.$$

Því er $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

STÖÐUMAT 4.22

Notið formlega skilgreiningu á óendanlegu markgildi þegar breytan stefnir á óendanlegt til að sanna að $\lim_{x \to \infty} 3x^2 = \infty$.

4

Endahegðun

Hegðun falls þegar $x \to \pm\infty$ nefnist endahegðun fallsins. Við hvorn enda getur fallið hegðað sér á einn af eftirfarandi vegu:

1. Fallið $f(x)$ nálgast lárétta aðfellu $y = L$.
2. Fyrir fallið gildir $f(x) \to \infty$ eða $f(x) \to -\infty$.
3. Fallið stefnir hvorki á endanlegt markgildi né á ∞ eða $-\infty$. Í þessu tilviki getur fallið sveiflast.

Skoðum hér nokkra flokka falla og ólíka endahegðun þeirra.

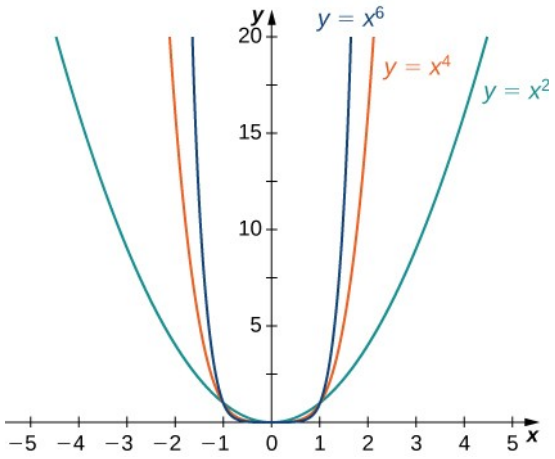
Endahegðun margliðufalla

Skoðum veldisfallið $f(x) = x^n$ þar sem n er jákvæð heiltala. Á myndum 4.50 og 4.51 sjáum við að

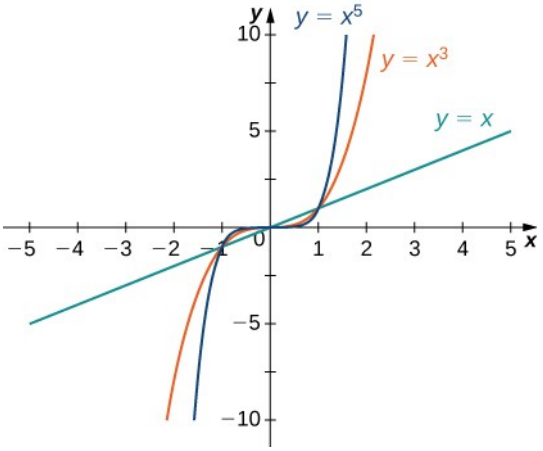
$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty; n = 1, 2, 3, \ldots$$

og

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty; n = 2,4,6,\ldots \\ -\infty; n = 1,3,5,\ldots \end{cases}.$$



Mynd 4.50 Ef veldisfall hefur veldisvísi n, sem er slétt tala, gildir $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty = \lim_{x\to-\infty} x^n$.



Mynd 4.51 Ef veldisfall hefur veldisvísi n, sem er oddatala, gildir $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

Út frá þessum staðreyndum er ekki erfitt að reikna $\lim_{x\to\infty} c\,x^n$ og $\lim_{x\to-\infty} c\,x^n$, þar sem c er ótiltekinn fasti og n er jákvæð heiltala. Ef $c>0$, er graf $y=c\,x^n$ fengið með lóðréttri teygingu eða þjöppun á grafi $y=x^n$, og því

$$\lim_{x\to\infty} c\,x^n = \lim_{x\to\infty} x^n \text{ og } \lim_{x\to-\infty} c\,x^n = \lim_{x\to-\infty} x^n \text{ ef } c>0.$$

Ef $c<0$, er graf $y=c\,x^n$ lóðrétt teygt eða þjappað og jafnframt speglað um x-ásinn og því

$$\lim_{x\to\infty} c\,x^n = -\lim_{x\to\infty} x^n \text{ og } \lim_{x\to-\infty} c\,x^n = -\lim_{x\to-\infty} x^n \text{ ef } c<0.$$

Ef $c=0$, $y=c\,x^n=0$, og í því tilviki er $\lim_{x\to\infty} c\,x^n = 0 = \lim_{x\to-\infty} c\,x^n$.

DÆMI 4.24

Markgildi veldisfalla þegar breytan stefnir á óendanlegt

Fyrir hvert fall f, reiknið $\lim_{x \to \infty} f(x)$ og $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

a. $f(x) = -5x^3$

b. $f(x) = 2x^4$

Lausn

a. Þar sem stuðullinn við x^3 er -5, fæst graf fallsins $f(x) = -5x^3$ með því að teygja graf fallsins $y = x^3$ lóðrétt og spegla það um x-ásinn. Því er $\lim_{x \to \infty}(-5x^3) = -\infty$ og $\lim_{x \to -\infty}(-5x^3) = \infty$.

b. Þar sem stuðullinn við x^4 er 2, fæst graf fallsins $f(x) = 2x^4$ með því að teygja graf fallsins $y = x^4$. lóðrétt. Því er $\lim_{x \to \infty} 2x^4 = \infty$ og $\lim_{x \to -\infty} 2x^4 = \infty$.

STÖÐUMAT 4.23

Látum $f(x) = -3x^4$. Finnið $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

4

Við skoðum nú hvernig nota má markgildi veldisfalla í óendanleika til að ákvarða $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ fyrir sérhvert margliðufall f. Skoðum margliðufall

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

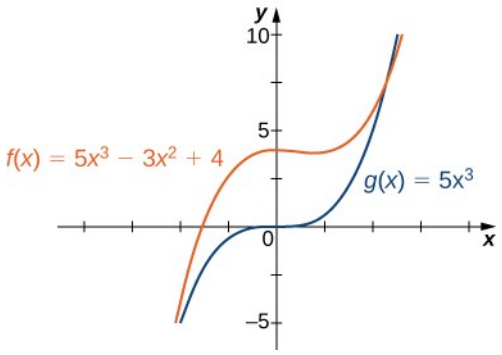
af stigi $n \geq 1$ þannig að $a_n \neq 0$. Með þáttun sjáum við að

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right).$$

Þegar $x \to \pm\infty$, nálgast allir liðirnir innan sviganna núll nema fyrsti liðurinn. Við ályktum að

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.$$

Til dæmis hegðar fallið $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4$ sér svipað og fallið $g(x) = 5x^3$ þegar $x \to \pm\infty$, eins og sýnt er á mynd 4.52 og í töflu 4.4.



Mynd 4.52 Endahegðun margliðu ákvarðast af hegðun liðarins með hæsta veldisvísinum.

Tafla 4.4 Langtímahegðun margliðu ræðst af liðnum með hæsta veldisvísinn.

x	10	100	1000
$f(x)=5x^3-3x^2+4$	4704	4.970.004	4.997.000.004
$g(x)=5x^3$	5000	5.000.000	5.000.000.000
x	-10	-100	-1.000
$f(x)=5x^3-3x^2+4$	-5296	$-5.029.996$	$-5.002.999.996$
$g(x)=5x^3$	-5000	$-5.000.000$	$-5.000.000.000$

Hegðun algebrufalla við óendanleikann

Endahegðun ræðra falla og falla sem fela í sér rætur er nokkru flóknari en endahegðun margliðufalla. Í dæmi 4.25 sýnum við að markgildi ræðs falls $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ í óendanleika ráðast af sambandinu milli stigs teljarans og stigs nefnarans. Til að reikna markgildi ræðs falls í óendanleika deilum við teljaranum og nefnaranum með hæsta veldi x sem kemur fyrir í nefnaranum. Þannig kemur í ljós hvaða liður í stæðunni ræður hegðun fallsins fyrir stór tölugildi x.

DÆMI 4.25

Ákvörðun á hegðun ræðra falla í óendanleika

Ákvarðið fyrir hvert eftirfarandi fall markgildin þegar $x \to \infty$ og $x \to -\infty$. Notið síðan þessar upplýsingar til að lýsa endahegðun fallsins.

a. $f(x)=\frac{3x-1}{2x+5}$ (Athugið: Teljari og nefnari eru af sama stigi.)

b. $f(x)=\frac{3x^2+2x}{4x^3-5x+7}$ (Athugið: Stig teljarans er lægra en stig nefnarans.)

c. $f(x)=\dfrac{3x^2+4x}{x+2}$ (Athugið: Stig teljarans er hærra en stig nefnarans.)

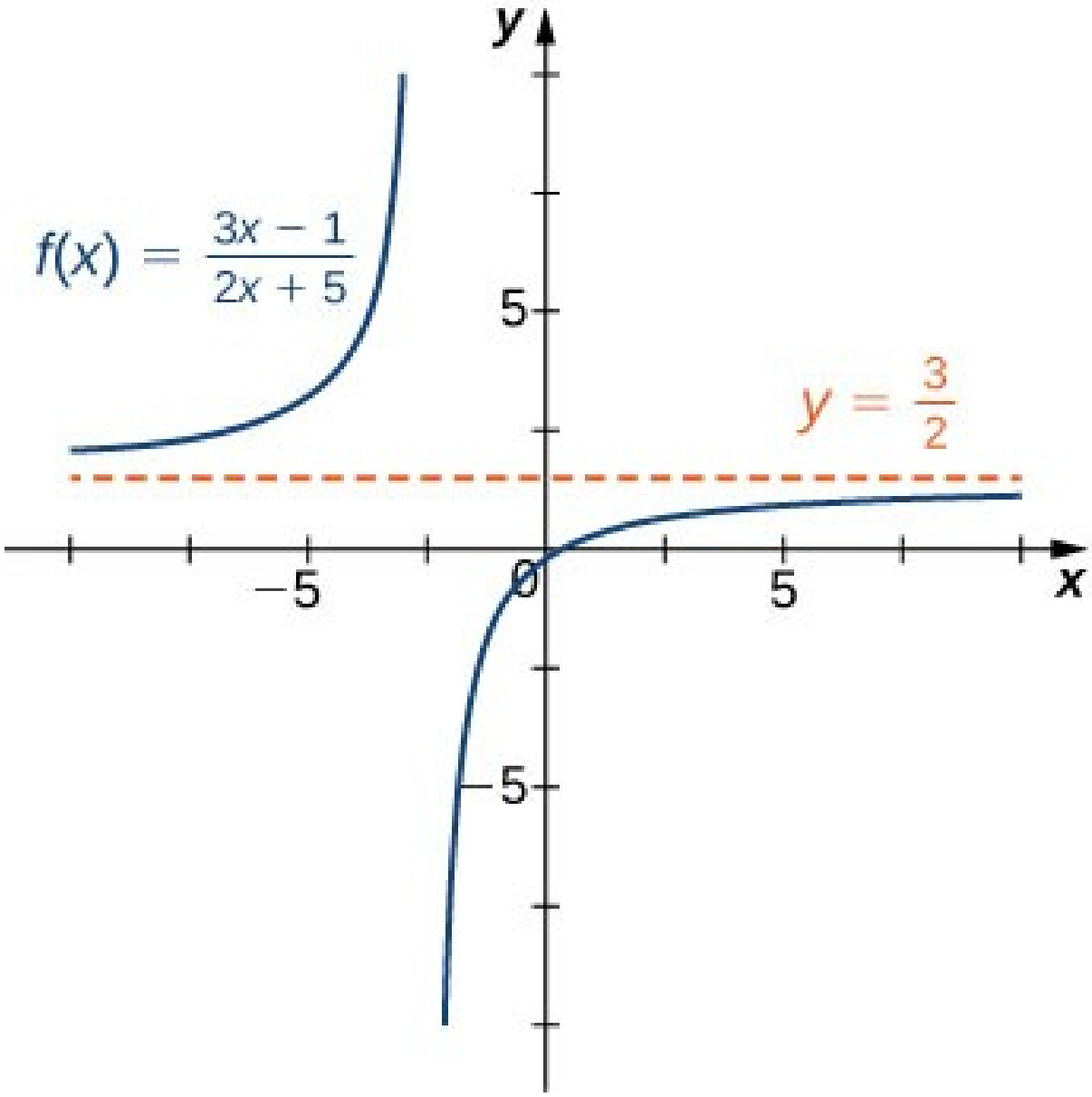
Lausn

a. Hæsta veldi x í nefnaranum er x. Með því að deila teljaranum og nefnaranum með x og beita reiknireglum algebrunnar um markgildi sjáum við að

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-1}{2x+5} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-1/x}{2+5/x}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3-1/x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2+5/x)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}3-\lim\limits_{x\to\pm\infty}1/x}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}2+\lim\limits_{x\to\pm\infty}5/x}\\ &= \frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Þar sem $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{3}{2}$, vitum við að $y=\dfrac{3}{2}$ er lárétt aðfella fallsins, eins og sést á eftirfarandi grafi.

4

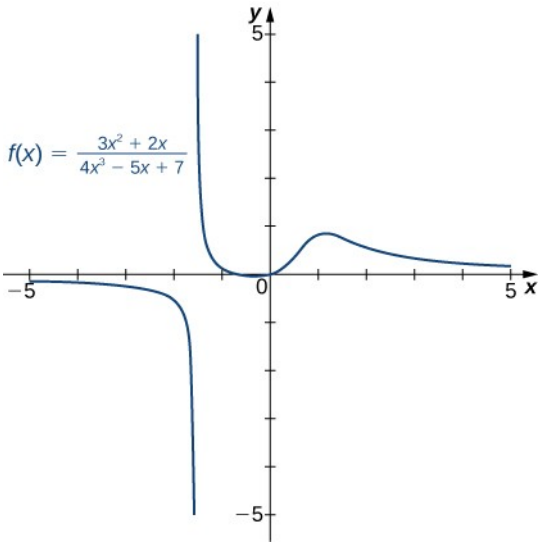


Mynd 4.53 Graf þessa ræða falls nálgast lárétta aðfellu þegar $x \to \pm\infty$.

b. Þar sem hæsta veldi x sem kemur fyrir í nefnaranum er x^3, deilum við teljaranum og nefnaranum með x^3. Að því loknu beitum við reiknireglum algebrunnar um markgildi og fáum

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+2x}{4x^3-5x+7}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3/x+2/x^2}{4-5/x^2+7/x^3}=\frac{3(0)+2(0)}{4-5(0)+7(0)}=0.$$

Því hefur f láréttu aðfelluna $y=0$ eins og sést á eftirfarandi grafi.



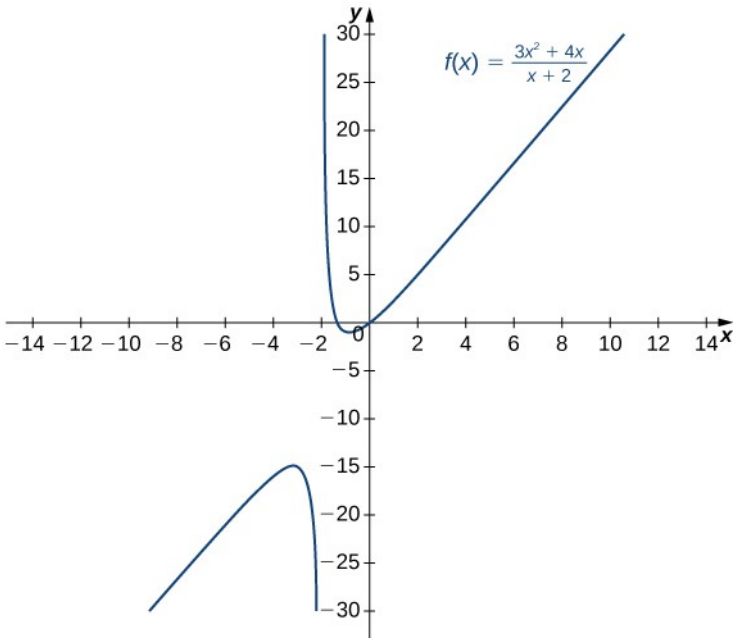
Mynd 4.54 Graf þessa ræða falls nálgast láréttu aðfelluna $y=0$ þegar $x \to \pm\infty$.

c. Með því að deila teljaranum og nefnaranum með x, fæst

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+4x}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x+4}{1+2/x}.$$

4

Þegar $x \to \pm\infty$, stefnir nefnarinn á 1. Þegar $x \to \infty$, stefnir teljarinn á $+\infty$. Þegar $x \to -\infty$, stefnir teljarinn á $-\infty$. Því er $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, en $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ eins og sést á eftirfarandi mynd.



Mynd 4.55 Þegar $x \to \infty$, gildir $f(x) \to \infty$. Þegar $x \to -\infty$, gildir $f(x) \to -\infty$.

STÖÐUMAT 4.24

Reiknið $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{5x^2-4x+7}$ og notið þessi markgildi til að ákvarða endahegðun fallsins $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{5x^2-4x+7}$.

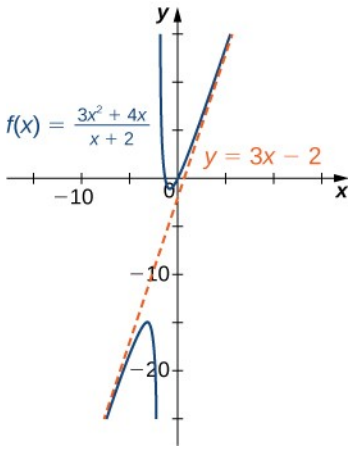
Áður en lengra er haldið skulum við skoða graf fallsins $f(x)=\dfrac{(3x^2+4x)}{(x+2)}$ sem sýnt er á mynd 4.56. Þegar $x \to \infty$ og $x \to -\infty$, virðist graf fallsins f nánast línulegt. Þótt f sé vissulega ekki línulegt fall könnum við nú hvers vegna graf fallsins f virðist nálgast línulegt fall. Fyrst getum við með langdeilingu margliða ritað

$$f(x)=\frac{3x^2+4x}{x+2}=3x-2+\frac{4}{x+2}.$$

Þar sem $\dfrac{4}{(x+2)} \to 0$ þegar $x \to \pm\infty$, ályktum við að

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(f(x)-(3x-2)\right)=\lim_{x \to \pm\infty}\frac{4}{x+2}=0.$$

Því nálgast graf f línuna $y=3x-2$ þegar $x \to \pm\infty$. Þessi lína nefnist skáfella fyrir f (mynd 4.56).



Mynd 4.56 Graf ræða fallsins $f(x)=(3x^2+4x)/(x+2)$ nálgast skáfelluna $y=3x-2$ þegar $x \to \pm\infty$.

Við getum tekið saman niðurstöður dæmis 4.25 og dregið af þeim eftirfarandi ályktun um endahegðun ræðra falla. Lítum á rætt fall

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0},$$

þar sem $a_n \neq 0$ og $b_m \neq 0$.

4

1. Ef stig teljarans er hið sama og stig nefnarans $(n=m)$, þá hefur f láréttu aðfelluna $y=a_n/b_m$ þegar $x \to \pm\infty$.
2. Ef stig teljarans er lægra en stig nefnarans $(n<m)$, þá hefur f láréttu aðfelluna $y=0$ þegar $x \to \pm\infty$.
3. Ef stig teljarans er hærra en stig nefnarans $(n>m)$, þá hefur f enga lárétta aðfellu. Markgildin þegar x stefnir á óendanlegt eru þá annaðhvort jákvæður eða neikvæður óendanleiki, eftir formerkjum forystuliðanna. Með langri deilingu má auk þess umrita fallið sem

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=g(x)+\frac{r(x)}{q(x)},$$

þar sem stig $r(x)$ er lægra en stig $q(x)$. Þar af leiðandi gildir $\lim_{x \to \pm\infty} r(x)/q(x)=0$. Gildi $[f(x)-g(x)]$ nálgast því núll þegar $x \to \pm\infty$. Ef stig $p(x)$ er nákvæmlega einu hærra en stig $q(x)$ $(n=m+1)$, er fallið $g(x)$ línulegt fall. Í þessu tilviki köllum við $g(x)$ skáfellu. Skoðum nú endahegðun falla sem fela í sér rót.

DÆMI 4.26

Ákvörðun á hegðun falls með rótarstæðu þegar breytan stefnir á óendanlegt

Finnið markgildin þegar $x \to \infty$ og $x \to -\infty$ fyrir $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt{4x^2+5}}$ og lýsið endahegðun fallsins f.

Lausn

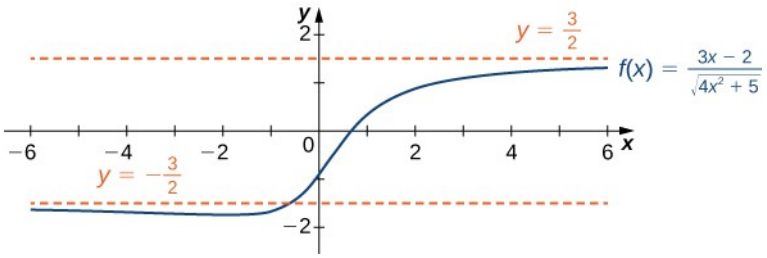
Notum sömu aðferð og fyrir ræð föll: deilum teljara og nefnara með veldi af x. Til að ákvarða viðeigandi veldi af x, skoðum stæðuna $\sqrt{4x^2+5}$ í nefnaranum. Þar sem

$$\sqrt{4x^2+5} \approx \sqrt{4x^2} = 2|x|$$

fyrir stór gildi x kemur x í raun aðeins fyrir í fyrsta veldi í nefnaranum. Því deilum við bæði teljaranum og nefnaranum með $|x|$. Síðan notum við þá staðreynd að $|x| = x$ fyrir $x > 0$, $|x| = -x$ fyrir $x < 0$, og $|x| = \sqrt{x^2}$ fyrir öll x, og reiknum markgildin á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+5}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/|x|)(3x-2)}{(1/|x|)\sqrt{4x^2+5}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x)(3x-2)}{\sqrt{(1/x^2)(4x^2+5)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{\sqrt{4+5/x^2}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+5}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(1/|x|)(3x-2)}{(1/|x|)\sqrt{4x^2+5}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1/x)(3x-2)}{\sqrt{(1/x^2)(4x^2+5)}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+2/x}{\sqrt{4+5/x^2}} = \frac{-3}{\sqrt{4}} = \frac{-3}{2}.
\end{aligned}$$

Þar af leiðandi nálgast $f(x)$ láréttu aðfelluna $y = \dfrac{3}{2}$ þegar $x \to \infty$ og láréttu aðfelluna $y = -\dfrac{3}{2}$ þegar $x \to -\infty$, eins og sýnt er á eftirfarandi grafi.



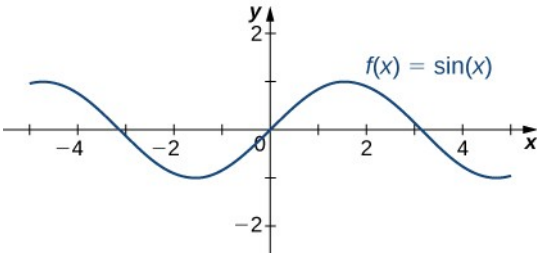
Mynd 4.57 Þetta fall hefur tvær láréttar aðfellur og graf þess sker aðra þeirra.

STÖÐUMAT 4.25

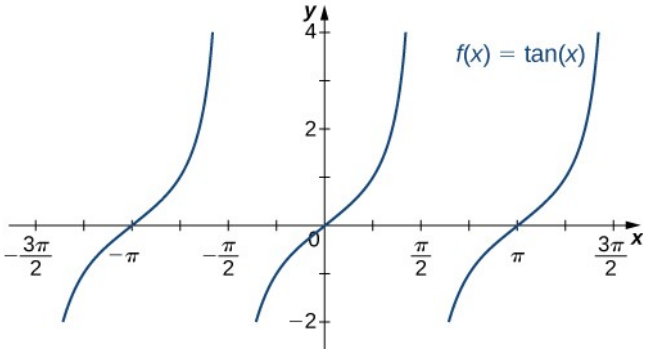
Reiknið $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x^2+4}}{x+6}$.

Ákvörðun á hegðun torræðra falla þegar breytan stefnir á óendanlegt

Grunnhornaföllin sex eru lotubundin og nálgast ekki endanlegt markgildi þegar $x \to \pm\infty$. Til dæmis sveiflast $\sin x$ á milli 1 og -1 (mynd 4.58). Tangensfallið með breytunni x hefur óendanlega margar lóðfellur þegar $x \to \pm\infty$; það nálgast þess vegna hvorki endanlegt markgildi né $\pm\infty$ þegar $x \to \pm\infty$, eins og sýnt er á mynd 4.59.



Mynd 4.58 Fallið $f(x) = \sin x$ sveiflast á milli 1 og -1 þegar $x \to \pm\infty$

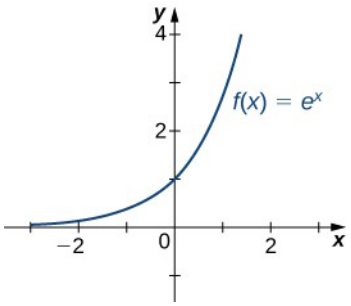


Mynd 4.59 Fallið $f(x) = \tan x$ nálgast ekki markgildi og nálgast ekki $\pm\infty$ þegar $x \to \pm\infty$

Minnumst þess að fyrir sérhverja grunntölu $b > 0, b \neq 1$, er fallið $y = b^x$ vísisfall með skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$ og myndmengið $(0, \infty)$. Ef $b > 1$, $y = b^x$ er vaxandi á ‘$(-\infty, \infty)$. Ef $0 < b < 1$, er $y = b^x$ minnkandi á $(-\infty, \infty)$. Fyrir náttúrulega vísisfallið $f(x) = e^x$, gildir $e \approx 2{,}718 > 1$. Því er $f(x) = e^x$ vaxandi á ‘$(-\infty, \infty)$ og hefur myndmengið ‘$(0, \infty)$. Vísisfallið $f(x) = e^x$ stefnir á ∞ þegar $x \to \infty$ og stefnir á 0 þegar $x \to -\infty$, eins og sýnt er í töflu 4.5 og á mynd 4.60.

Tafla 4.5 Langtímahegðun náttúrlega vísisfallsins

x	-5	-2	0	2	5
e^x	0,00674	0,135	1	7,389	148,413

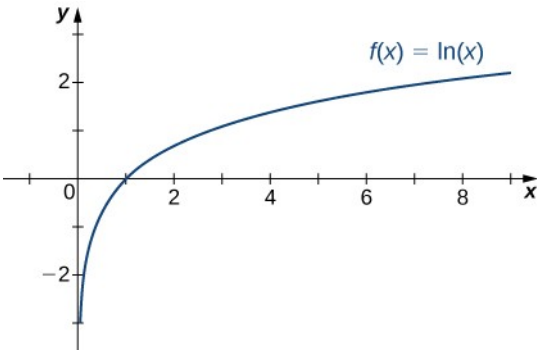


Mynd 4.60 Vísisfallið stefnir á núll þegar $x \to -\infty$ og stefnir á ∞ þegar $x \to \infty$.

Rifjum upp að náttúrulega lografallið $f(x)=\ln(x)$ er andhverfa náttúrulega vísisfallsins $y=e^x$. Því er skilgreiningarmengi $f(x)=\ln(x)$ jafnt $(0,\infty)$ og myndmengið er $(-\infty,\infty)$. Graf $f(x)=\ln(x)$ er spegilmynd grafs $y=e^x$ um línuna $y=x$. Þar af leiðandi gildir $\ln(x) \to -\infty$ þegar $x \to 0^+$ og $\ln(x) \to \infty$ þegar $x \to \infty$, eins og sýnt er á mynd 4.61 og í töflu 4.6.

Tafla 4.6 Langtímahegðun náttúrlega lografallsins

x	0,01	0,1	1	10	100
$\ln(x)$	$-4{,}605$	$-2{,}303$	0	2,303	4,605



Mynd 4.61 Náttúrulega lografallið nálgast ∞ þegar $x \to \infty$.

DÆMI 4.27

Ákvörðun á hegðun torræðs falls þegar breytan stefnir á óendanlegt

Finnið markgildin þegar $x \to \infty$ og $x \to -\infty$ fyrir $f(x)=\dfrac{(2+3e^x)}{(7-5e^x)}$ og lýsið endahegðun f.

Lausn

Til að finna markgildið þegar $x \to \infty$, deilum við teljara og nefnara með e^x:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2+3e^x}{7-5e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(2/e^x)+3}{(7/e^x)-5}.\end{aligned}$$

Á mynd 4.60 sést að $e^x \to \infty$ þegar $x \to \infty$. Því gildir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{e^x}.$$

Við ályktum að $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{3}{5}$, og graf f nálgist láréttu aðfelluna $y = -\frac{3}{5}$ þegar $x \to \infty$. Til að finna markgildið þegar $x \to -\infty$, notum við þá staðreynd að $e^x \to 0$ þegar $x \to -\infty$ og ályktum að $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{7}$, og því nálgast graf f láréttu aðfelluna $y = \frac{2}{7}$ þegar $x \to -\infty$.

STÖÐUMAT 4.26

Finnið markgildin þegar $x \to \infty$ og $x \to -\infty$ fyrir $f(x) = \frac{(3e^x - 4)}{(5e^x + 2)}$.

Leiðbeiningar um teikningu grafs falls

4

Við höfum nú næg greiningartól til að teikna gröf margs konar algebrufalla og torræðra falla. Áður en við sýnum hvernig teikna má gröf tiltekinna falla skulum við skoða almenna aðferð til að teikna graf hvaða falls sem er.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Teiknun grafs falls

Ef gefið er fall f, notið eftirfarandi skref til að skissa graf f:

1. Ákvarðið skilgreiningarmengi fallsins.
2. Finnið skurðpunktana við x- og y-ásana.
3. Reiknið $\lim_{x\to\infty} f(x)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ til að ákvarða endahegðun fallsins. Ef annað þessara markgilda er endanleg tala L, þá er $y = L$ lárétt aðfella. Ef annað þessara markgilda er ∞ eða $-\infty$, ákvarðið hvort f hafi skáfellu. Ef f er rætt fall þannig að $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, þar sem stig teljarans er hærra en stig nefnarans, þá má rita f sem

   $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   þar sem stig $r(x)$ er lægra en stig $q(x)$. Gildi $f(x)$ nálgast gildi $g(x)$ þegar $x \to \pm\infty$. Ef $g(x)$ er línulegt fall kallast það skáfella.

4. Ákvarðið hvort f hafi einhverjar lóðfellur.
5. Reiknið f'. Finnið alla stöðupunkta og ákvarðið bilin þar sem f er vaxandi og þar sem f er minnkandi. Ákvarðið hvort f hafi einhver staðbundin útgildi.
6. Reiknið f''. Ákvarðið bilin þar sem f er kúpt og bilin þar sem f er hvelft. Notið þessar upplýsingar til að ákvarða hvort f hafi einhverja beygjuskilapunkta. Einnig má nota aðra afleiðuna til að ákvarða eða staðfesta að f hafi staðbundið útgildi í stöðupunkti.

Nú skulum við nota þessa aðferð til að teikna gröf nokkurra ólíkra falla. Við byrjum á því að teikna graf margliðufalls.

DÆMI 4.28

Að teikna graf margliðufalls

Teiknið graf fallsins $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

Lausn

Skref 1. Þar sem f er margliða er skilgreiningarmengið mengi allra rauntalna.

Skref 2. Þegar $x=0, f(x)=2$. Því er y-skurðpunkturinn $(0,2)$. Til að finna x-skurðpunktana þurfum við að leysa jöfnuna $(x-1)^2(x+2)=0$, sem gefur okkur x-skurðpunktana $(1,0)$ og $(-2,0)$

Skref 3. Við þurfum að meta endahegðun f. Þegar $x \to \infty$, $(x-1)^2 \to \infty$ og $(x+2) \to \infty$. Því er $\lim_{x \to \infty} f(x)=\infty$. Þegar $x \to -\infty$, $(x-1)^2 \to \infty$ og $(x+2) \to -\infty$. Því er $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$. Til að fá enn frekari upplýsingar um endahegðun f, getum við margfaldað saman þætti f. Þegar það er gert sjáum við að

$$f(x)=(x-1)^2(x+2)=x^3-3x+2.$$

Þar sem forystuliður f er x^3, ályktum við að f hegði sér eins og $y=x^3$ þegar $x \to \pm\infty$.

Skref 4. Þar sem f er margliðufall hefur það engar lóðfellur.

Skref 5. Fyrsta afleiða f er

$$f'(x)=3x^2-3.$$

Því hefur f tvo stöðupunkta: $x=1, -1$. Skiptið bilinu $(-\infty,\infty)$ í þrjú minni bil: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, og $(1,\infty)$. Veljið síðan prófunarpunktana $x=-2$, $x=0$, og $x=2$ úr þessum bilum og ákvarðið formerki $f'(x)$ í hverjum þessara prófunarpunkta, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki afleiðunnar $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$	Niðurstaða
$(-\infty,-1)$	$x=-2$	$(+)(-)(-)=+$	f er vaxandi.
$(-1,1)$	$x=0$	$(+)(-)(+)=-$	f er minnkandi.
$(1,\infty)$	$x=2$	$(+)(+)(+)=+$	f er vaxandi.

Af töflunni sjáum við að f hefur staðbundið hágildi í $x=-1$ og staðbundið lággildi í $x=1$. Með því að reikna gildi $f(x)$ í þessum tveimur punktum komumst við að því að staðbundna hágildið er $f(-1)=4$ og staðbundna lággildið er $f(1)=0$.

Skref 6. Önnur afleiða f er

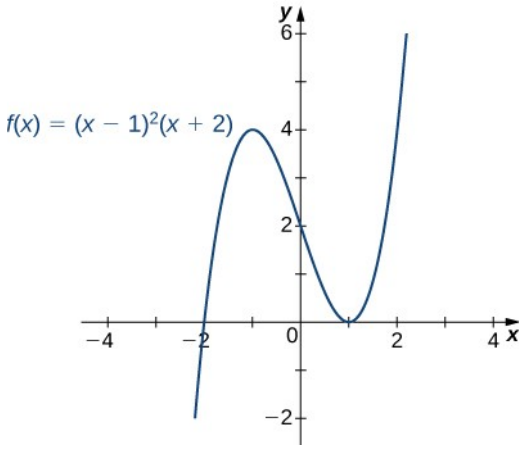
$$f''(x)=6x.$$

Önnur afleiðan er núll í $x=0$. Til að ákvarða kúpni f, þarf því að skipta bilinu $(-\infty,\infty)$ í minni bilin $(-\infty,0)$ og $(0,\infty)$, og velja prófunarpunkta $x=-1$ og $x=1$ til að ákvarða kúpni f á hverju þessara minni bila, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f''(x)=6x$	Niðurstaða
$(-\infty,0)$	$x=-1$	$-$	f er hvelft.
$(0,\infty)$	$x=1$	$+$	f er kúpt.

Taflan hér á undan staðfestir niðurstöðuna úr skrefi 5, að f hefur staðbundið hágildi í $x=-1$ og staðbundið lággildi í $x=1$. Í skrefi 5 kom einnig fram að f hefur staðbundið hágildi í $x=-1$ og staðbundið lággildi í $x=1$, og $f'(x)=0$ í þessum punktum. Þegar við bætum því við að f'' skiptir aðeins um formerki í $x=0$ staðfestir þetta það sem fannst í skrefi 6 um kúpni f.

Þegar þessar upplýsingar eru teknar saman fæst graf fallsins $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ sem sýnt er á eftirfarandi mynd.



STÖÐUMAT 4.27

Teiknið graf fallsins $f(x)=(x-1)^3(x+2)$.

DÆMI 4.29

Teikning ræðs falls

Teiknið graf fallsins $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x^2)}$.

Lausn

Skref 1. Fallið f er skilgreint þegar nefnarinn er ekki núll. Því er skilgreiningarmengið mengi allra rauntalna x nema $x=\pm 1$.

Skref 2. Finnið skurðpunktana. Ef $x=0$, þá er $f(x)=0$, og því er 0 skurðpunktur. Ef $y=0$, þá er $\dfrac{x^2}{(1-x^2)}=0$, sem leiðir af sér að $x=0$. Því er $(0,0)$ eini skurðpunkturinn.

Skref 3. Reiknið markgildin þegar x stefnir á óendanlegt. Þar sem f er rætt fall deilum við teljaranum og nefnaranum með hæsta veldinu í nefnaranum: x^2. Við fáum

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1}=-1.$$

Því hefur f lárétta aðfellu $y=-1$ þegar $x\to\infty$ og $x\to-\infty$.

Skref 4. Til að ákvarða hvort f hafi einhverjar lóðfellur athugum við fyrst hvort nefnarinn hafi einhverjar núllstöðvar. Við sjáum að nefnarinn er núll þegar $x=\pm 1$. Til að ákvarða hvort línurnar $x=1$ eða $x=-1$ séu lóðfellur f, reiknum við $\lim_{x\to 1} f(x)$ og $\lim_{x\to -1} f(x)$. Með því að skoða hvert einhliða markgildi þegar $x\to 1$, sjáum við að

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty \text{ og } \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = \infty.$$

Þegar við skoðum hvert einhliða markgildi um sig þegar $x \to -1$, komumst við einnig að eftirfarandi:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = \infty \text{ og } \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

Skref 5. Reiknið fyrstu afleiðuna:

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)(2x) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Stöðupunktar eru þeir punktar x þar sem $f'(x) = 0$ eða $f'(x)$ er óskilgreint. Við sjáum að $f'(x) = 0$ þegar $x = 0$. Afleiðan f' er skilgreind alls staðar á skilgreiningarmengi f. Hins vegar tilheyra gildin $x = \pm 1$ ekki skilgreiningarmengi f. Til þess að ákvarða hvar f er vaxandi og hvar f er minnkandi skiptum við bilinu $(-\infty, \infty)$ í fjögur minni bil: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, og $(1, \infty)$, og veljum prófunarpunkt á hverju bili til að ákvarða formerki $f'(x)$ á hverju þessara bila. Gildin $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, og $x = 2$ henta vel sem prófunarpunktar, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

4

Bil	**Prófunarpunktur**	**Formerki** $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$	**Niðurstaða**
$(-\infty, -1)$	$x = -2$	$-/+ = -$	f er minnkandi.
$(-1, 0)$	$x = -1/2$	$-/+ = -$	f er minnkandi.
$(0, 1)$	$x = 1/2$	$+/+ = +$	f er vaxandi.
$(1, \infty)$	$x = 2$	$+/+ = +$	f er vaxandi.

Af þessari greiningu ályktum við að f hafi staðbundið lággildi í $x = 0$ en ekkert staðbundið hágildi.

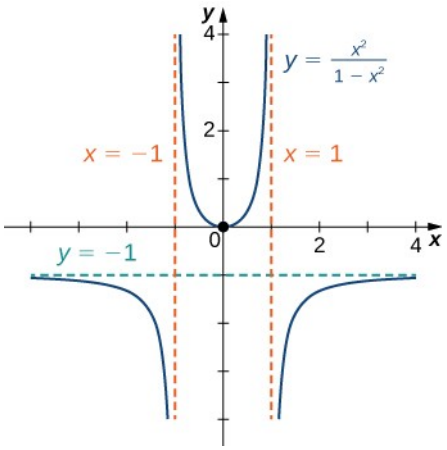
Skref 6. Reiknið aðra afleiðu:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1-x^2)^2(2)-2x(2(1-x^2)(-2x))}{(1-x^2)^4} \\ &= \frac{(1-x^2)\left[2(1-x^2)+8x^2\right]}{(1-x^2)^4} \\ &= \frac{2(1-x^2)+8x^2}{(1-x^2)^3} \\ &= \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}. \end{aligned}$$

Til að ákvarða bilin þar sem f er kúpt og þar sem f er hvelft þurfum við fyrst að finna alla punkta x þar sem $f''(x)=0$ eða $f''(x)$ er óskilgreint. Þar sem teljarinn $6x^2+2\neq 0$ fyrir sérhvert x, er $f''(x)$ aldrei núll. Auk þess er f'' skilgreint fyrir sérhvert x í skilgreiningarmengi f. Eins og áður hefur komið fram eru $x=\pm 1$ ekki í skilgreiningarmengi f. Til að ákvarða kúpni f, skiptum við því bilinu $(-\infty,\infty)$ í smærri bilin þrjú $(-\infty,-1)$, $(-1,-1)$, og $(1,\infty)$, og veljum prófunarpunkt á hverju þessara bila til að kanna formerki $f''(x)$. Gildin $x=-2$, $x=0$, og $x=2$ eru mögulegir prófunarpunktar, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f''(x)=\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$	Niðurstaða
$(-\infty,-1)$	$x=-2$	$+/-=-$	f er hvelft.
$(-1,-1)$	$x=0$	$+/+=+$	f er kúpt.
$(1,\infty)$	$x=2$	$+/-=-$	f er hvelft.

Þegar allar þessar upplýsingar eru teknar saman fáum við graf f sem sýnt er hér að neðan. Athugið að þótt f breyti um sveigju við $x=-1$ og $x=1$, er hvorugur þessara punkta beygjuskilapunktur, þar sem f er hvorki samfellt í $x=-1$ né $x=1$.



STÖÐUMAT 4.28

Teiknið graf fallsins $f(x)=\frac{(3x+5)}{(8+4x)}$.

DÆMI 4.30

Teikning ræðs falls með skáfellu

Teiknið graf fallsins $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)}$

Lausn

Skref 1. Skilgreiningarmengi f er mengi allra rauntalna x nema $x=1$.

Skref 2. Finnið skurðpunktana. Við sjáum að þegar $x=0$, $f(x)=0$, og því er $(0,0)$ eini skurðpunkturinn.

Skref 3. Reiknið markgildin þegar x stefnir á óendanlegt. Þar sem stig teljarans er einu hærra en stig nefnarans er ljóst að f hlýtur að hafa skáfellu. Til að finna skáfelluna notum við langdeilingu margliða og ritum

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}.$$

Þar sem $1/(x-1)\to 0$ þegar $x\to\pm\infty$, nálgast $f(x)$ línuna $y=x+1$ þegar $x\to\pm\infty$. Línan $y=x+1$ er skáfella fyrir f.

Skref 4. Til að athuga hvort lóðfellur séu til staðar skoðum við hvar nefnarinn er núll. Hér er nefnarinn núll þegar $x=1$. Þegar við skoðum bæði einhliða markgildin þegar $x\to 1$, sjáum við að

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\infty \text{ og } \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty.$$

Því er $x=1$ lóðfella og við höfum ákvarðað hegðun f þegar x stefnir á 1 bæði frá hægri og frá vinstri.

Skref 5. Reiknið fyrstu afleiðuna:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(2x)-x^2(1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Við höfum $f'(x)=0$ þegar $x^2-2x=x(x-2)=0$. Því eru $x=0$ og $x=2$ stöðupunktar. Þar sem f er óskilgreint í $x=1$, þurfum við að skipta bilinu $(-\infty,\infty)$ í smærri bilin $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, og $(2,\infty)$, og velja prófunarpunkt úr hverju bili til að ákvarða formerki $f'(x)$ á hverju þessara smærri bila. Látum til dæmis $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, og $x=3$ vera prófunarpunktana sem sýndir eru í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$	Niðurstaða
$(-\infty,0)$	$x=-1$	$(-)(-)/+=+$	f er vaxandi.
$(0,1)$	$x=1/2$	$(+)(-)/+=-$	f er minnkandi.
$(1,2)$	$x=3/2$	$(+)(-)/+=-$	f er minnkandi.
$(2,\infty)$	$x=3$	$(+)(+)/+=+$	f er vaxandi.

Af þessari töflu sjáum við að f hefur staðbundið hágildi í $x=0$ og staðbundið lággildi í $x=2$. Staðbundið hágildi f er $f(0)=0$ og staðbundið lággildi f er $f(2)=4$. Því eru $(0,0)$ og $(2,4)$ mikilvægir punktar á grafinu.

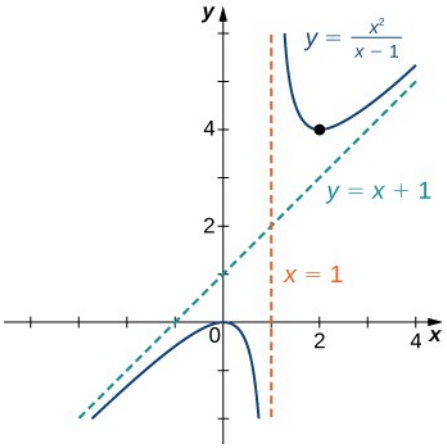
Skref 6. Reiknið aðra afleiðu:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-1)^2(2x-2)-(x^2-2x)(2(x-1))}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)[(x-1)(2x-2)-2(x^2-2x)]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1)(2x-2)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2x^2-4x+2-(2x^2-4x)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Við sjáum að $f''(x)$ er aldrei núll né óskilgreint fyrir x í skilgreiningarmengi f. Þar sem f er óskilgreint þegar $x=1$, nægir okkur til að kanna kúpnina að skipta bilinu $(-\infty,\infty)$ í tvö minni bil $(-\infty,1)$ og $(1,\infty)$, og velja prófunarpunkt úr hvoru bili til að ákvarða formerki $f''(x)$ á hvoru þessara bila. Gildin $x=0$ og $x=2$ koma til greina sem prófunarpunktar, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$	Niðurstaða
$(-\infty,1)$	$x=0$	$+/-=-$	f er hvelft.
$(1,\infty)$	$x=2$	$+/+=+$	f er kúpt.

Út frá þessum upplýsingum fáum við eftirfarandi graf fallsins f.



STÖÐUMAT 4.29

Finnið skáfellu fyrir $f(x)=\dfrac{(3x^3-2x+1)}{(2x^2-4)}$.

DÆMI 4.31

Graf falls með broddpunkti teiknað

4

Teiknið graf fallsins $f(x)=(x-1)^{2/3}$.

Lausn

Skref 1. Þar sem teningsrótarfallið er skilgreint fyrir allar rauntölur x og $(x-1)^{2/3}=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2$, er skilgreiningarmengi f mengi allra rauntalna.

Skref 2: Til að finna y-skurðpunktinn reiknum við $f(0)$. Þar sem $f(0)=1$, er y-skurðpunkturinn $(0,1)$. Til að finna x-skurðpunktinn leysum við $(x-1)^{2/3}=0$. Lausn þessarar jöfnu er $x=1$, og því er x-skurðpunkturinn $(1,0)$.

Skref 3: Þar sem $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-1)^{2/3}=\infty$, heldur fallið áfram að vaxa án takmarka þegar $x\to\infty$ og $x\to-\infty$.

Skref 4: Fallið hefur engar lóðfellur.

Skref 5: Til að ákvarða hvar f er vaxandi eða minnkandi reiknum við f'. Við fáum

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3}=\frac{2}{3(x-1)^{1/3}}.$$

Þetta fall er hvergi núll en það er óskilgreint þegar $x=1$. Því er eini stöðupunkturinn $x=1$. Skiptið bilinu $(-\infty,\infty)$ í smærri bilin $(-\infty,1)$ og $(1,\infty)$, og veljið einn prófunarpunkt á hvoru bili til að ákvarða formerki $f'(x)$ á hvoru þessara bila. Látum $x=0$ og $x=2$ vera prófunarpunktana, eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f'(x)=\frac{2}{3(x-1)^{1/3}}$	Niðurstaða
$(-\infty,1)$	$x=0$	$+/-=-$	f er minnkandi.
$(1,\infty)$	$x=2$	$+/+=+$	f er vaxandi.

Við ályktum að f hafi staðbundið lággildi í $x=1$. Þegar f er reiknað í $x=1$, kemur í ljós að gildi f í staðbundna lággildinu er núll. Athugið að $f'(1)$ er óskilgreint. Til að ákvarða hegðun fallsins í þessum stöðupunkti þurfum við því að skoða $\lim_{x\to 1} f'(x)$. Þegar einhliða markgildin eru skoðuð fæst

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{3(x-1)^{1/3}}=\infty \text{ og } \lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3(x-1)^{1/3}}=-\infty.$$

Því hefur f broddpunkt í $x=1$.

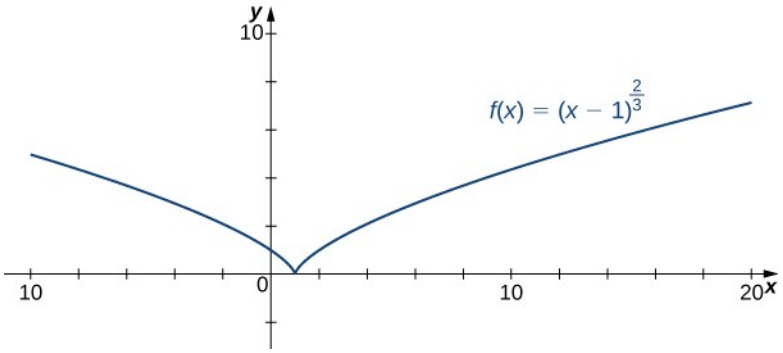
Skref 6: Til að ákvarða kúpni reiknum við aðra afleiðu f:

$$f''(x)=-\frac{2}{9}(x-1)^{-4/3}=\frac{-2}{9(x-1)^{4/3}}.$$

Við komumst að því að $f''(x)$ er ekki núll fyrir neitt x, en er óskilgreint þegar $x=1$. Skiptum því bilinu $(-\infty,\infty)$ í minni bilin $(-\infty,1)$ og $(1,\infty)$, og veljum prófunarpunkta til að ákvarða formerki $f''(x)$ á hverju þessara bila. Eins og áður látum við $x=0$ og $x=2$ vera prófunarpunkta eins og sýnt er í eftirfarandi töflu.

Bil	Prófunarpunktur	Formerki $f''(x)=\frac{-2}{9(x-1)^{4/3}}$	Niðurstaða
$(-\infty,1)$	$x=0$	$-/+=-$	f er hvelft.
$(1,\infty)$	$x=2$	$-/+=-$	f er hvelft.

Af þessari töflu ályktum við að f sé hvelft alls staðar þar sem það er skilgreint. Þegar allar þessar upplýsingar eru teknar saman fáum við eftirfarandi graf fallsins f.



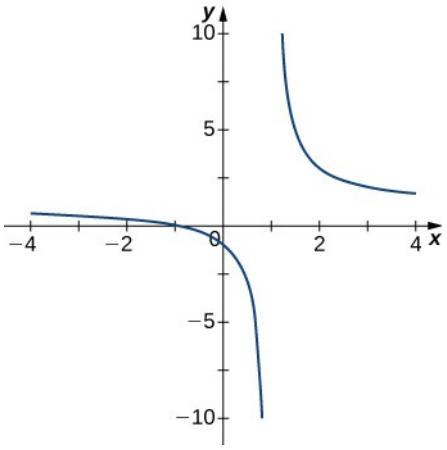
STÖÐUMAT 4.30

Skoðið fallið $f(x)=5-x^{2/3}$. Finnið broddpunkt grafsins. Ákvarðið endahegðun f.

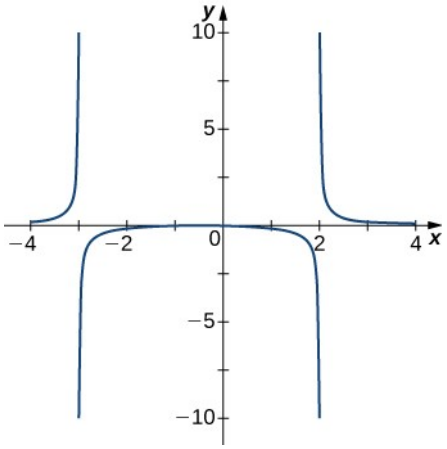
Æfingar í kafla 4.6

Skoðið gröfin í eftirfarandi æfingum. Finnið hvar lóðfellurnar liggja.

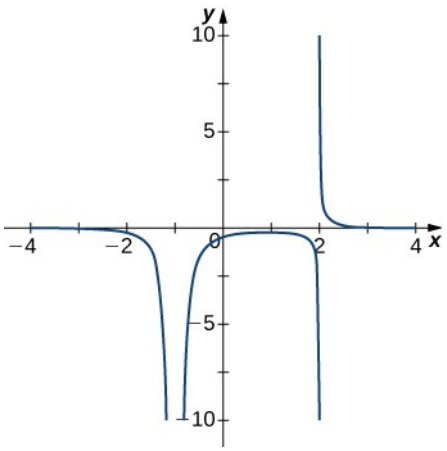
251.



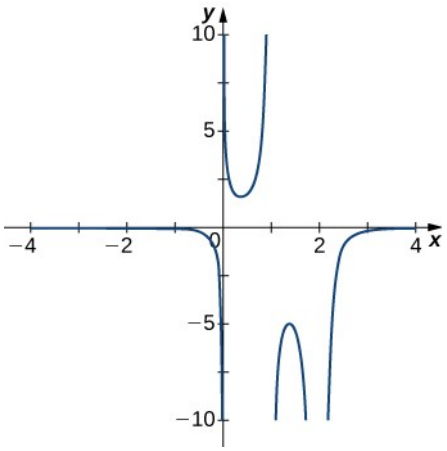
252.



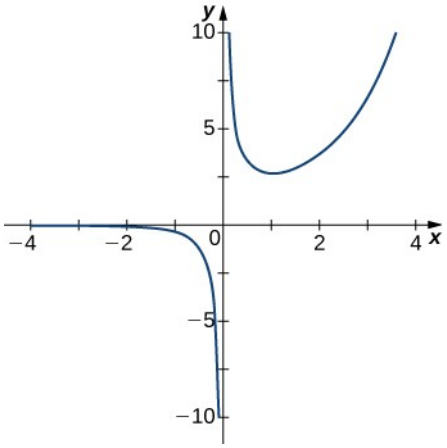
253.



254.



255.



Ákvarðið fyrir hvert eftirfarandi fall $f(x)$, hvort lóðfella sé við $x=a$. Rökstyðjið svarið án þess að nota reiknivél til að teikna graf.

256.

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+5x+4}, a=-1$$

257.

$$f(x)=\frac{x}{x-2}, a=2$$

258.

$$f(x)=(x+2)^{3/2}, a=-2$$

259.

$$f(x)=(x-1)^{-1/3}, a=1$$

260.

$$f(x)=1+x^{-2/5}, a=1$$

Reiknið markgildið í eftirfarandi æfingum.

261.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x+6}$$

262.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{4x}$$

263.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x+2}$$

264.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-2x}{x^2+2x+8}$$

265.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-4x^3+1}{2-2x^2-7x^4}$$

266.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

267.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+2}$$

268.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$$

269.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$$

270.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

Finnið láréttu aðfellurnar og lóðfellurnar í eftirfarandi æfingum.

271.

$$f(x)=x-\frac{9}{x}$$

272.

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}$$

273.

$$f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}$$

274.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+1}$$

275.

$$f(x)=\sin(x)\sin(2x)$$

276.

$$f(x)=\cos x+\cos(3x)+\cos(5x)$$

277.

$$f(x)=\frac{x\sin(x)}{x^2-1}$$

278.

$$f(x)=\frac{x}{\sin(x)}$$

279.

$$f(x)=\frac{1}{x^3+x^2}$$

280.

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-2x$$

281.

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1}$$

282.

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$$

283.

$$f(x)=x-\sin x$$

284.

$$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið búa til fall $f(x)$ sem hefur gefnar aðfellur.

285. $x=1$ og $y=2$

286. $x=1$ og $y=0$

287.

$$y=4,\ x=-1$$

288.

$$x=0$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna graf fallsins með grafískri reiknivél í glugganum $x=[-5,5]$ og áætla láréttu aðfelluna eða markgildið. Reiknið síðan nákvæmt gildi láréttu aðfellunnar eða markgildisins.

289. **[T]** $f(x)=\frac{1}{x+10}$

290. **[T]** $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+7x+6}$

291. **[T]** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+10x+25$

292. **[T]** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{x^2+7x+6}$

293. **[T]** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+2}{x+5}$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf fallanna án þess að nota reiknivél. Gætið þess að taka eftir öllum mikilvægum einkennum grafanna: staðbundnum hágildum og lággildum, beygjuskilapunktum og hegðun við aðfellur.

294.

$$y=3x^2+2x+4$$

295.

$$y=x^3-3x^2+4$$

296.

$$y=\frac{2x+1}{x^2+6x+5}$$

297.

$$y=\frac{x^3+4x^2+3x}{3x+9}$$

298.

$$y=\frac{x^2+x-2}{x^2-3x-4}$$

299.

$$y=\sqrt{x^2-5x+4}$$

300.

$$y=2x\sqrt{16-x^2}$$

301. $y=\dfrac{\cos x}{x}$, á $x=[-2\pi,2\pi]$

302.

$$y=\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$$

303.

$$y = x\tan x, x = [-\pi, \pi]$$

304.

$$y = x\ln(x), x > 0$$

305.

$$y = x^2\sin(x), x = [-2\pi, 2\pi]$$

306. Til þess að $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ hafi lárétta aðfellu við $y = 2$ þarf ákveðið samband að gilda milli margliðanna $P(x)$ og $Q(x)$. Hvert er sambandið?

307. Til þess að $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ hafi lóðfellu við $x = 0$, þarf ákveðið samband að gilda milli margliðanna $P(x)$ og $Q(x)$. Hvert er innbyrðis samband þeirra?

308. Ef $f'(x)$ hefur aðfellur við $y = 3$ og $x = 1$, hvaða aðfellur hefur þá $f(x)$?

309. Bæði $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ og $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ hafa aðfellur við $x = 1$ og $y = 0$. Hver er augljósasti munurinn á þessum tveimur föllum?

310. Satt eða ósatt: Sérhvert hlutfall tveggja margliða hefur lóðfellur.

4.7 Hagnýt bestunarverkefni

NÁMSMARKMIÐ

- 4.7.1 Setja fram og leysa bestunarverkefni á ýmsum hagnýtum sviðum.

Ein algeng hagnýting stærðfræðigreiningar er að reikna lággildi eða hágildi falls. Fyrirtæki vilja til dæmis oft lágmarka framleiðslukostnað eða hámarka tekjur. Í framleiðslu er oft æskilegt að lágmarka það magn efnis sem notað er til að pakka vöru af tilteknu rúmmáli. Í þessum undirkafla sýnum við hvernig setja má upp bestunarverkefni af þessu tagi og leysa þau með verkfærunum úr þessum kafla.

Lausn bestunarverkefna á lokuðu og takmörkuðu bili

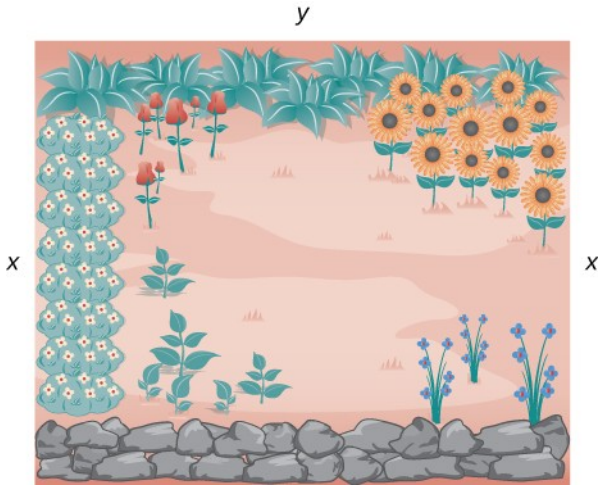
Grunnhugmynd þeirra bestunarverkefna sem hér fara á eftir er sú sama. Við höfum tiltekna stærð sem við viljum hámarka eða lágmarka. Um leið þarf þó að uppfylla eitthvert aukaskilyrði. Til dæmis viljum við í dæmi 4.32 hámarka flatarmál rétthyrnds garðs. Ef við höldum áfram að lengja hliðar garðsins stækkar flatarmálið að sjálfsögðu áfram. En hvað ef einhver takmörk eru á því hve mikið girðingarefni við getum notað í ummál garðsins? Þá

getum við ekki haft garðinn eins stóran og okkur sýnist. Skoðum hvernig hægt er að hámarka flatarmál rétthyrnings með tiltekinni skorðu á ummálið.

DÆMI 4.32

Hámörkun flatarmáls garðs

Gera á rétthyrndan garð þannig að grjótveggur myndi eina hlið hans og vírgirðing hinar þrjár (mynd 4.62). Ef 100 metrar af vírgirðingu eru til ráðstöfunar, ákvarðið þá mál garðsins sem gefa mesta mögulega flatarmálið. Hvert er mesta flatarmálið?



Mynd 4.62 Við viljum ákvarða málin x og y sem gefa garði stærsta mögulega flatarmál með því að nota 100 metra af girðingu.

Lausn

Látum x tákna lengd þeirrar hliðar garðsins sem er hornrétt á grjótvegginn og y tákna lengd þeirrar hliðar sem er samsíða grjótveggnum. Þá er flatarmál garðsins

$$A = x \cdot y.$$

Við viljum finna stærsta mögulega flatarmálið með þeirri skorðu að heildarlengd girðingarinnar sé 100 m. Af mynd 4.62 sést að heildarlengd girðingarinnar er $2x + y$. Því er skorðujafnan

$$2x + y = 100.$$

Ef við leysum þessa jöfnu fyrir y, fáum við $y = 100 - 2x$. Því getum við ritað flatarmálið sem

$$A(x) = x \cdot (100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Áður en við reynum að hámarka flatarmálsfallið $A(x) = 100x - 2x^2$, þurfum við að ákvarða skilgreiningarmengið sem kemur til greina. Til að útbúa rétthyrndan garð þurfa lengdir beggja hliða vissulega að vera jákvæðar. Því þarf að gilda að $x > 0$ og $y > 0$. Þar sem $y = 100 - 2x$, gildir að ef $y > 0$, þá er $x < 50$. Við reynum því að ákvarða hágildi $A(x)$ fyrir x á

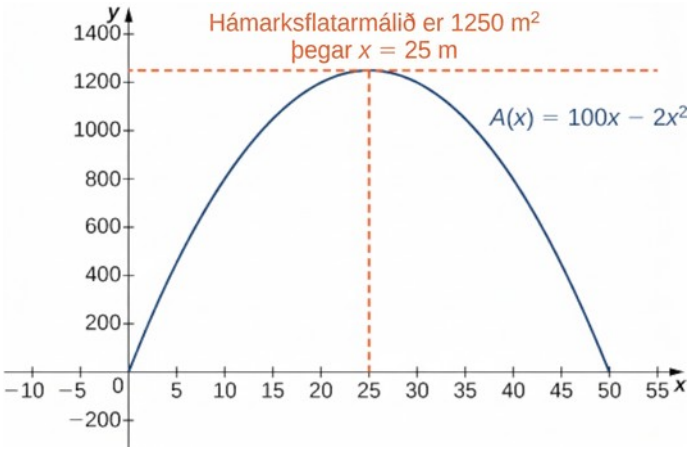
opna bilinu $(0,50)$. Ekki er víst að fall hafi hágildi á opnu bili. Hins vegar vitum við að samfellt fall hefur algilt hágildi (og algilt lággildi) á lokuðu bili. Skoðum því fallið $A(x)=100x-2x^2$ á lokaða bilinu $[0,50]$. Ef hágildið fæst í innri punkti höfum við fundið gildið x á opna bilinu $(0,50)$ sem hámarkar flatarmál garðsins. Við skoðum því þetta verkefni:

Hámarkið $A(x)=100x-2x^2$ á bilinu $[0,50]$.

Eins og áður kom fram er A samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili og hefur því hágildi og lággildi samkvæmt útgildissetningunni. Þessi útgildi fást annaðhvort í endapunktum eða stöðupunktum. Í endapunktunum er $A(x)=0$. Þar sem flatarmálið er jákvætt fyrir öll x á opna bilinu $(0,50)$, hlýtur hágildið að fást í stöðupunkti. Með því að deilda fallið $A(x)$, fáum við

$$A'(x)=100-4x.$$

Því er eini stöðupunkturinn $x=25$ (mynd 4.63). Við ályktum að flatarmálið hljóti að ná hágildi þegar $x=25$. Þá fæst $y=100-2x=100-2(25)=50$. Til að hámarka flatarmál garðsins látum við $x=25$ m og $y=50$ m. Flatarmál þessa garðs er 1250 m^2.



Mynd 4.63 Til að hámarka flatarmál garðsins þurfum við að finna hágildi fallsins $A(x)=100x-2x^2$.

STÖÐUMAT 4.31

Ákvarðið stærsta mögulega flatarmál ef við viljum útbúa sama rétthyrnda garð og sýndur er á mynd 4.63, en höfum 200 metra af girðingarefni.

Nú skulum við skoða almenna aðferð við að leysa bestunarverkefni á borð við dæmi 4.32.

AÐFERÐ VIÐ ÚRLAUSN VERKEFNA

Lausn bestunarverkefna

1. Skilgreinið allar breytur. Ef við á, teiknið mynd og merkið allar breytur inn á hana.

2. Ákvarðið hvaða stærð á að hámarka eða lágmarka og hvert gildabil hinna breytanna er (ef það er hægt á þessu stigi).
3. Ritið formúlu fyrir stærðina sem á að hámarka eða lágmarka sem fall af breytunum. Formúlan kann að innihalda fleiri en eina breytu.
4. Skrifið allar jöfnur sem tengja óháðu breyturnar í formúlunni úr skrefi 3. Notið þessar jöfnur til að skrifa stærðina sem á að hámarka eða lágmarka sem fall af einni breytu.
5. Ákvarðið skilgreiningarmengið sem kemur til álita fyrir fallið í skrefi 4 út frá aðstæðunum í verkefninu.
6. Finnið hágildi eða lággildi fallsins úr skrefi 4. Í þessu skrefi þarf yfirleitt að finna stöðupunkta og reikna gildi fallsins í endapunktum.

Nú skulum við nota þessa aðferð til að hámarka rúmmál opins kassa þegar skorða er á því hve mikið efni má nota.

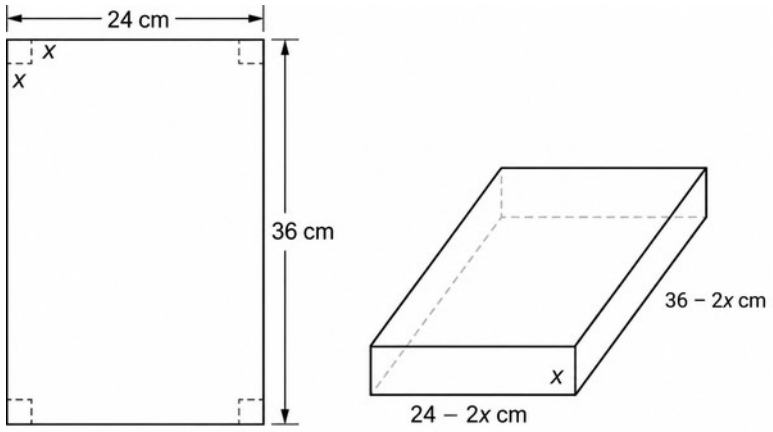
DÆMI 4.33

Hámörkun rúmmáls kassa

Búa á til opinn kassa úr pappaspjaldi sem er 24 cm á 36 cm með því að skera ferning úr hverju horni og brjóta upp flipana á hverri hlið. Hversu stóran ferning á að skera úr hverju horni til að rúmmál kassans verði sem mest?

Lausn

Skref 1: Látum x tákna hliðarlengd ferningsins sem skorinn er úr hverju horni (mynd 4.64). Þá má brjóta upp flipana fjóra sem eftir eru og mynda þannig opinn kassa. Látum V tákna rúmmál kassans sem þannig myndast.



Mynd 4.64 Ferningur með hliðarlengdina x cm er skorinn úr hverju horni pappaspjaldsins. Fliparnir sem eftir eru eru brotnir upp til að mynda kassa sem er opinn að ofan.

Skref 2: Við ætlum að hámarka rúmmál kassans. Verkefnið er því að hámarka V.

Skref 3: Eins og fram kom í skrefi 2, reynum við að hámarka rúmmál kassa. Rúmmál kassa er $V = L \cdot W \cdot H$, þar sem L, W, og H tákna lengd, breidd og hæð, í þessari röð.

Skref 4: Af mynd 4.64 sjáum við að hæð kassans er x cm, lengdin er $36-2x$ cm og breiddin er $24-2x$ cm. Því er rúmmál kassans

$$V(x)=(36-2x)(24-2x)x=4x^3-120x^2+864x.$$

Skref 5: Til að ákvarða skilgreiningarmengið sem kemur til álita skulum við skoða mynd 4.64. Við þurfum vissulega að hafa $x>0$. Auk þess má hliðarlengd ferningsins ekki vera meiri en eða jöfn helmingi af lengd styttri hliðarinnar, sem er 24 cm; annars yrði einn flipinn skorinn alveg af. Við reynum því að ákvarða hvort rúmmál kassans hafi hágildi fyrir x á opna bilinu $(0,12)$. Þar sem V er samfellt fall á lokaða bilinu $[0,12]$, vitum við að V hefur algilt hágildi á lokaða bilinu. Fallið V er því skoðað á lokaða bilinu $[0,12]$ og athugað hvort algilda hágildið fáist í innri punkti.

Skref 6: Þar sem $V(x)$ er samfellt fall á lokaða og takmarkaða bilinu $[0,12]$, hlýtur V að hafa algilt hágildi (og algilt lággildi). Þar sem $V(x)=0$ í endapunktunum og $V(x)>0$ fyrir $0<x<12$, hlýtur hágildið að fást í stöðupunkti. Afleiðan er

$$V'(x)=12x^2-240x+864.$$

Til að finna stöðupunktana þurfum við að leysa jöfnuna

$$12x^2-240x+864=0.$$

4

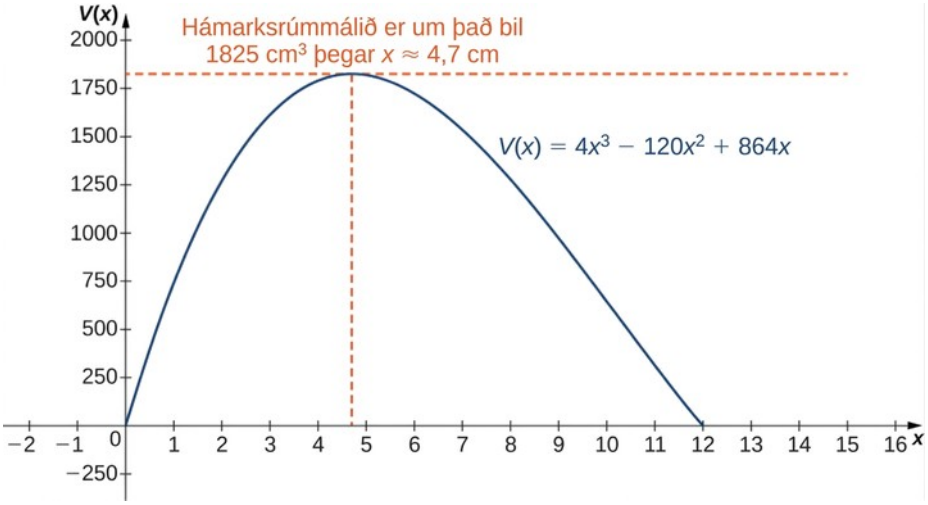
Ef við deilum báðum hliðum jöfnunnar með 12, nægir að leysa jöfnuna

$$x^2-20x+72=0.$$

Með því að nota lausnarformúlu annars stigs jöfnu finnum við að stöðupunktarnir eru

$$x=\frac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4(1)(72)}}{2}=\frac{20\pm\sqrt{112}}{2}=\frac{20\pm4\sqrt{7}}{2}=10\pm2\sqrt{7}.$$

Þar sem $10+2\sqrt{7}$ er ekki í skilgreiningarmenginu sem kemur til álita, er eini stöðupunkturinn sem við þurfum að skoða $10-2\sqrt{7}$. Því verður rúmmálið mest ef við látum $x=10-2\sqrt{7}$ cm. Hámarksrúmmálið er $V(10-2\sqrt{7})=640+448\sqrt{7}\approx1825$ cm^3, eins og grafið hér á eftir sýnir.



Mynd 4.65 Til að hámarka rúmmál kassans þarf að finna hágildi þriðja stigs margliðu.

MIÐLAR

Horfið á myndband um bestun rúmmáls kassa.

STÖÐUMAT 4.32

Gerum ráð fyrir að mál pappaspjaldsins í dæmi 4.33 séu 20 cm á 30 cm. Látið x tákna hliðarlengd hvers fernings og ritið rúmmál opna kassans sem fall af x. Ákvarðið skilgreiningarmengið sem kemur til álita fyrir x.

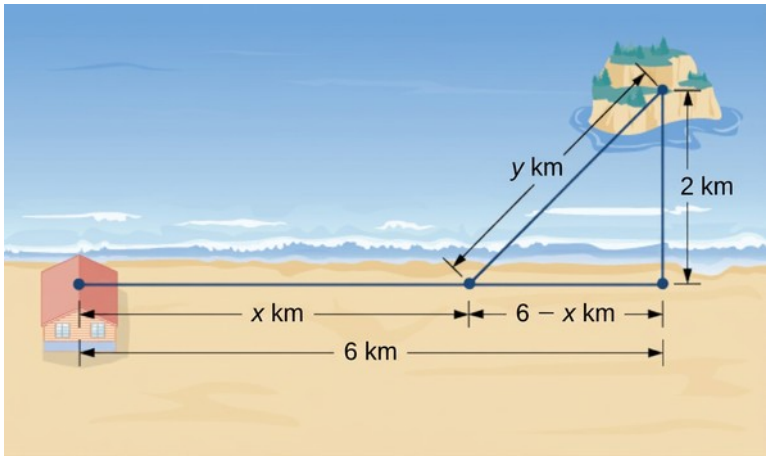
DÆMI 4.34

Lágmörkun ferðatíma

Eyja er 2 km beint norður af þeim stað á beinni strandlengju sem er næstur henni. Gestur dvelur í kofa á ströndinni, 6 km vestur af þeim stað. Gesturinn hyggst fara frá kofanum út í eyjuna. Gerum ráð fyrir að gesturinn hlaupi á hraðanum 8 km/klst og syndi á hraðanum 3 km/klst. Hve langt ætti gesturinn að hlaupa áður en hann syndir til að komast sem fyrst út í eyjuna?

Lausn

Skref 1: Látum x tákna vegalengdina sem hlaupið er og látum y tákna vegalengdina sem synt er (mynd 4.66). Látum T tákna tímann sem það tekur að komast frá kofanum til eyjarinnar.



Mynd 4.66 Hvernig getum við valið x og y þannig að ferðatíminn frá kofanum til eyjarinnar verði sem stystur?

Skref 2: Verkefnið er að lágmarka T.

Skref 3: Ferðatíminn frá kofanum til eyjarinnar fæst með því að leggja saman tímann sem fer í að hlaupa og tímann sem fer í að synda. Þar sem vegalengd $=$ hraði $\times$ tími $\left(D=R\times T\right)$, er tíminn sem fer í að hlaupa

$$T_{\text{hlaup}}=\frac{D_{\text{hlaup}}}{R_{\text{hlaup}}}=\frac{x}{8},$$

og tíminn sem fer í sund er

$$T_{\text{sund}}=\frac{D_{\text{sund}}}{R_{\text{sund}}}=\frac{y}{3}.$$

Því er heildartíminn sem fer í ferðina

$$T=\frac{x}{8}+\frac{y}{3}.$$

Skref 4: Af mynd 4.66 sést að línustrik með lengdina y km er langhlið rétthyrnds þríhyrnings með skammhliðar sem eru 2 km og $6-x$ km. Samkvæmt setningu Pýþagórasar er því $2^2+\left(6-x\right)^2=y^2$, og við fáum $y=\sqrt{\left(6-x\right)^2+4}$. Heildarferðatíminn er því gefinn með fallinu

$$T\left(x\right)=\frac{x}{8}+\frac{\sqrt{\left(6-x\right)^2+4}}{3}.$$

Skref 5: Af mynd 4.66 sjáum við að $0\le x\le 6$. Því er $\left[0,6\right]$ skilgreiningarmengið sem kemur til álita.

Skref 6: Þar sem $T\left(x\right)$ er samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili hefur það hágildi og lággildi. Byrjum á að leita að stöðupunktum T á bilinu $\left[0,6\right]$. Afleiðan er

$$T'(x)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\frac{\left[(6-x)^2+4\right]^{-1/2}}{3}\cdot 2(6-x)=\frac{1}{8}-\frac{(6-x)}{3\sqrt{(6-x)^2+4}}.$$

Ef $T'(x)=0$, þá

$$\frac{1}{8}=\frac{6-x}{3\sqrt{(6-x)^2+4}}.$$

Því er

$$3\sqrt{(6-x)^2+4}=8(6-x).$$

(4.6)

Þegar báðar hliðar þessarar jöfnu eru settar í annað veldi sést að ef x uppfyllir þessa jöfnu verður x að uppfylla

$$9\left[(6-x)^2+4\right]=64(6-x)^2,$$

sem leiðir til

$$55(6-x)^2=36.$$

Við ályktum að ef x er stöðupunktur uppfylli x

$$(x-6)^2=\frac{36}{55}.$$

Því koma eftirfarandi stöðupunktar til greina

$$x=6\pm\frac{6}{\sqrt{55}}.$$

Þar sem $x=6+6/\sqrt{55}$ er ekki í skilgreiningarmenginu kemur gildið ekki til greina sem stöðupunktur. Hins vegar er $x=6-6/\sqrt{55}$ í skilgreiningarmenginu. Þar sem við settum báðar hliðar jöfnu 4.6 í annað veldi til að finna mögulega stöðupunkta þurfum við enn að kanna hvort $x=6-6/\sqrt{55}$ uppfylli jöfnu 4.6. Þar sem $x=6-6/\sqrt{55}$ uppfyllir jöfnuna ályktum við að $x=6-6/\sqrt{55}$ sé stöðupunktur og jafnframt sá eini. Til að rökstyðja að tíminn sé minnstur fyrir þetta gildi á x, þurfum við aðeins að kanna gildi $T(x)$ í endapunktunum $x=0$ og $x=6$, og bera þau saman við gildi $T(x)$ í stöðupunktinum $x=6-6/\sqrt{55}$. Við fáum að $T(0)\approx 2{,}108$ h og $T(6)\approx 1{,}417$ h, en $T(6-6/\sqrt{55})\approx 1{,}368$ h. Því ályktum við að T hafi staðbundið lággildi þegar $x\approx 5{,}19$ km.

STÖÐUMAT 4.33

Gerum ráð fyrir að eyjan sé 1 km frá ströndinni og að fjarlægðin frá kofanum að þeim punkti á ströndinni sem er næstur eyjunni sé 15 km. Gerum ráð fyrir að gestur syndi á hraðanum 2,5 km/klst og hlaupi á hraðanum 6 km/klst. Látið x tákna vegalengdina sem gesturinn

hleypur áður en hann syndir og finnið fall fyrir tímann sem það tekur gestinn að komast frá kofanum til eyjunnar.

Í viðskiptum hafa fyrirtæki áhuga á að hámarka tekjur. Í eftirfarandi dæmi skoðum við aðstæður þar sem fyrirtæki hefur safnað gögnum um hve marga bíla það getur leigt út eftir því hvaða leiguverð það setur upp. Notum þessi gögn til að ákvarða hvaða verð fyrirtækið ætti að taka til að hámarka tekjur sínar.

DÆMI 4.35

Hámörkun tekna

Eigendur bílaleigu hafa komist að því að ef þeir rukka viðskiptavini um p Bandaríkjadali á dag fyrir hvern bíl, þar sem $50 \leq p \leq 200$, má lýsa fjölda bíla n sem þeir leigja út á dag með línulega fallinu $n(p) = 1000 - 5p$. Ef þeir rukka $\$50$ á dag eða minna leigja þeir út alla bíla sína. Ef þeir rukka $\$200$ á dag eða meira leigja þeir enga bíla út. Gerum ráð fyrir að eigendurnir hyggist rukka viðskiptavini á bilinu $50 til $\$200$ á dag fyrir hvern bíl. Hversu mikið ættu þeir að rukka til að hámarka tekjur sínar?

Lausn

Skref 1: Látum p vera leiguverðið fyrir hvern bíl á dag og látum n vera fjölda bíla sem leigðir eru á dag. Látum R vera tekjurnar á dag.

Skref 2: Verkefnið er að hámarka R.

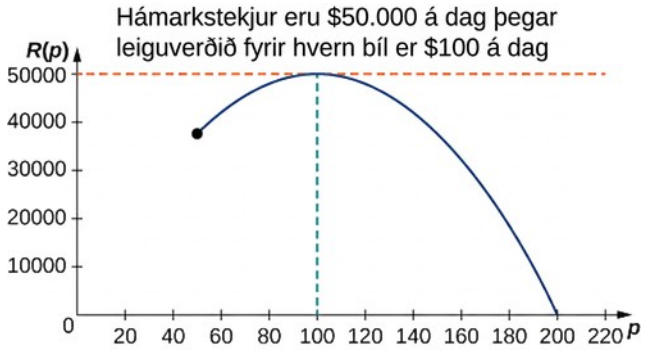
Skref 3: Tekjurnar (á dag) eru fjöldi bíla sem leigðir eru á dag sinnum verðið fyrir hvern bíl á dag, það er $R = n \times p$.

Skref 4: Þar sem fjöldi bíla sem leigðir eru á dag er gefinn með línulega fallinu $n(p) = 1000 - 5p$, má setja tekjurnar R fram með fallinu

$$R(p) = n \times p = (1000 - 5p)p = -5p^2 + 1000p.$$

Skref 5: Þar sem eigendurnir hyggjast innheimta gjald á bilinu $\$50$ til $\$200$ fyrir hvern bíl á dag er verkefnið að finna hágildi teknanna $R(p)$ fyrir p á lokaða bilinu $[50, 200]$.

Skref 6: Þar sem R er samfellt fall á lokaða og takmarkaða bilinu $[50, 200]$, hefur það algilt hágildi (og algilt lággildi) á því bili. Til að finna hágildið leitum við að stöðupunktum. Afleiðan er $R'(p) = -10p + 1000$. Stöðupunkturinn er því $p = 100$. Þegar $p = 100$, $R(100) = 50.000$ €. Þegar $p = 50$, $R(p) = 37.500$ €. Þegar $p = 200$, $R(p) = \$0$. Algilda hágildið fæst því þegar $p = \$100$. Bílaleigan ætti að taka $\$100$ á dag fyrir hvern bíl til að hámarka tekjurnar, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 4.67 Til að hámarka tekjur þarf bílaleiga að finna jafnvægi milli leiguverðs og þess fjölda bíla sem fólk leigir á því verði.

STÖÐUMAT 4.34

Bílaleiga rukkar viðskiptavini sína um p Bandaríkjadali á dag, þar sem $60 \le p \le 150$. Fyrirtækið hefur komist að því að lýsa megi fjölda bíla sem leigðir eru á dag með línulega fallinu $n(p) = 750 - 5p$. Hversu mikið ætti fyrirtækið að rukka hvern viðskiptavin til að hámarka tekjurnar?

DÆMI 4.36

Að hámarka flatarmál innritaðs rétthyrnings

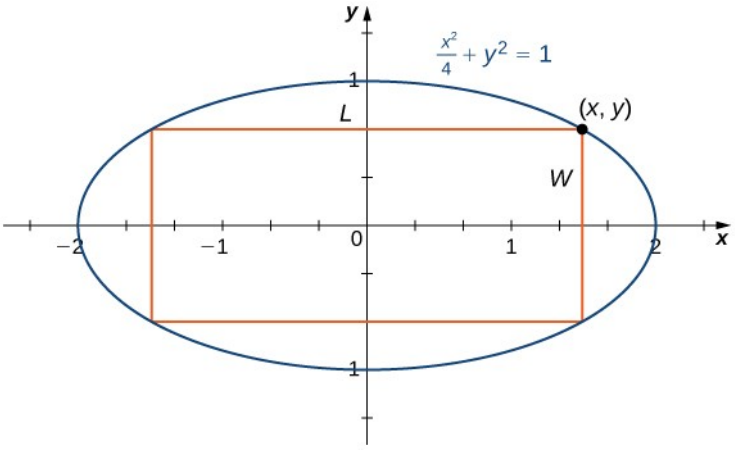
Innrita á rétthyrning í sporbauginn

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Hver eiga mál rétthyrningsins að vera til að flatarmál hans verði sem mest? Hvert er mesta flatarmálið?

Lausn

Skref 1: Til þess að rétthyrningur sé innritaður í sporbauginn verða hliðar rétthyrningsins að vera samsíða ásunum. Látum L tákna lengd rétthyrningsins og W tákna breidd hans. Látum A tákna flatarmál rétthyrningsins.



Mynd 4.68 Við viljum hámarka flatarmál rétthyrnings sem er innritaður í sporbaug.

Skref 2: Verkefnið er að hámarka A.

Skref 3: Flatarmál rétthyrningsins er $A = LW$.

Skref 4: Látum (x, y) vera horn rétthyrningsins sem liggur í fyrsta fjórðungi, eins og sýnt er á mynd 4.68. Við getum ritað lengdina $L = 2x$ og breiddina $W = 2y$. Þar sem $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ og $y > 0$, gildir $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Því er flatarmálið

$$A = LW = (2x)(2y) = 4x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

Skref 5: Af mynd 4.68 sjáum við að til þess að innrita rétthyrning í sporbauginn verður x-hnit hornsins í fyrsta fjórðungi að uppfylla $0 < x < 2$. Verkefnið snýst því um að finna hágildi $A(x)$ á opna bilinu $(0, 2)$. Þar sem $A(x)$ hefur algilt hágildi (og algilt lággildi) á lokaða bilinu $[0, 2]$, skoðum við $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$ á bilinu $[0, 2]$. Ef algilda hágildið fæst í innri punkti höfum við fundið algilt hágildi á opna bilinu.

Skref 6: Eins og áður hefur komið fram er $A(x)$ samfellt fall á lokaða og takmarkaða bilinu $[0, 2]$. Því hefur það algilt hágildi (og algilt lággildi). Í endapunktunum $x = 0$ og $x = 2$, $A(x) = 0$. Fyrir $0 < x < 2$, $A(x) > 0$. Því hlýtur hágildið að vera í stöðupunkti. Ef við tökum afleiðu $A(x)$, fáum við

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \cdot \tfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(-2x) \\ &= 2\sqrt{4 - x^2} - \tfrac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \tfrac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}. \end{aligned}$$

Til að finna stöðupunkta þurfum við að finna hvar $A'(x) = 0$. Við sjáum að ef x er lausn á

$$\frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0,$$

(4,7)

þá verður x að uppfylla

$$8-4x^2=0.$$

Því er $x^2=2$. Þar með eru $x=\pm\sqrt{2}$ mögulegar lausnir á jöfnu 4.7. Þar sem við skoðum x á bilinu $[0,2]$, kemur $x=\sqrt{2}$ til greina sem stöðupunktur, en $x=-\sqrt{2}$ gerir það ekki. Því athugum við hvort $\sqrt{2}$ sé lausn á jöfnu 4.7. Þar sem $x=\sqrt{2}$ er lausn á jöfnu 4.7 ályktum við að $\sqrt{2}$ sé eini stöðupunktur $A(x)$ á bilinu $[0,2]$. Því hlýtur $A(x)$ að hafa algilt hágildi í stöðupunktinum $x=\sqrt{2}$. Til að ákvarða mál rétthyrningsins þurfum við að finna lengdina L og breiddina W. Ef $x=\sqrt{2}$ þá

$$y=\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Því eru mál rétthyrningsins $L=2x=2\sqrt{2}$ og $W=2y=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Flatarmál þessa rétthyrnings er $A=LW=\left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)=4$.

4

STÖÐUMAT 4.35

Breytið flatarmálsfallinu A ef rétthyrningurinn á að vera innritaður í einingarhringinn $x^2+y^2=1$. Hvaða skilgreiningarmengi kemur til álita?

Lausn bestunarverkefna á bilum sem eru ekki lokuð eða eru ótakmörkuð

Í dæmunum hér á undan skoðuðum við föll á lokuðum og takmörkuðum skilgreiningarmengjum. Af útgildissetningunni leiddi því að föllin höfðu algild útgildi. Skoðum nú föll þar sem skilgreiningarmengið er hvorki lokað né takmarkað.

Mörg föll hafa engu að síður að minnsta kosti eitt algilt útgildi, jafnvel þótt skilgreiningarmengið sé ekki lokað eða sé ótakmarkað. Til dæmis hefur fallið $f(x)=x^2+4$ á $(-\infty,\infty)$ algilt lággildi sem er 4 í $x=0$. Því getum við samt skoðað föll á ótakmörkuðum skilgreiningarmengjum eða opnum bilum og ákvarðað hvort þau hafi einhver algild útgildi. Í næsta dæmi reynum við að finna lággildi falls á ótakmörkuðu skilgreiningarmengi. Við sjáum að þótt skilgreiningarmengið sem kemur til álita sé $(0,\infty)$, hefur fallið algilt lággildi.

Í eftirfarandi dæmi skoðum við hvernig smíða má kassa með gefnu rúmmáli þannig að yfirborðsflatarmál hans verði sem minnst. Ekki er erfitt að sýna fram á að vegna samhverfu hafi teningur minnsta yfirborðsflatarmálið af öllum lokuðum kössum með tiltekið rúmmál. Því skoðum við breytt verkefni: Hvaða kassi, opinn að ofan og með tiltekið rúmmál, hefur minnsta yfirborðsflatarmálið?

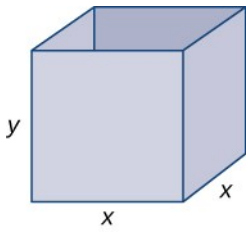
DÆMI 4.37

Lágmörkun yfirborðsflatarmáls

Smíða á rétthyrndan kassa sem hefur ferningslaga botn, er opinn að ofan og hefur rúmmálið 216 rúmsentímetra. Hver eiga mál kassans að vera til að yfirborðsflatarmál hans verði sem minnst? Hvert er minnsta yfirborðsflatarmálið?

Lausn

Skref 1: Teiknið rétthyrndan kassa og látið breytuna x tákna hliðarlengd ferningslaga botnsins. Látið y tákna hæð kassans. Látið S tákna yfirborðsflatarmál kassans sem er opinn að ofan.



Mynd 4.69 Við viljum lágmarka yfirborðsflatarmál kassa með ferningslaga grunnflöt og gefið rúmmál.

4

Skref 2: Við þurfum að lágmarka yfirborðsflatarmálið. Þess vegna þurfum við að lágmarka S.

Skref 3: Þar sem kassinn er opinn að ofan þurfum við aðeins að ákvarða flatarmál lóðréttu hliðanna fjögurra og botnsins. Flatarmál hverrar lóðréttu hliðar er $x \cdot y$. Flatarmál botnsins er x^2. Því er yfirborðsflatarmál kassans

$$S = 4xy + x^2.$$

Skref 4: Þar sem rúmmál þessa kassa er $x^2 y$ og rúmmálið er gefið sem $216\ \text{cm}^3$, er skorðujafnan

$$x^2 y = 216.$$

Ef skorðujafnan er leyst með tilliti til y, fæst $y = \frac{216}{x^2}$. Því getum við ritað yfirborðsflatarmálið sem fall af x einni saman:

$$S(x) = 4x\left(\frac{216}{x^2}\right) + x^2.$$

Því gildir $S(x) = \frac{864}{x} + x^2$.

Skref 5: Þar sem við gerum þá kröfu að $x^2 y = 216$, getur gildið ekki verið $x = 0$. Því þarf að gilda að $x > 0$. Hins vegar má x taka hvaða jákvæða gildi sem er. Athugið að þegar x verður stórt verður hæð kassans y að sama skapi lítil þannig að $x^2 y = 216$. Eins verður hæð kassans að sama skapi mikil þegar x verður lítið. Við ályktum að skilgreiningarmengið sé opna,

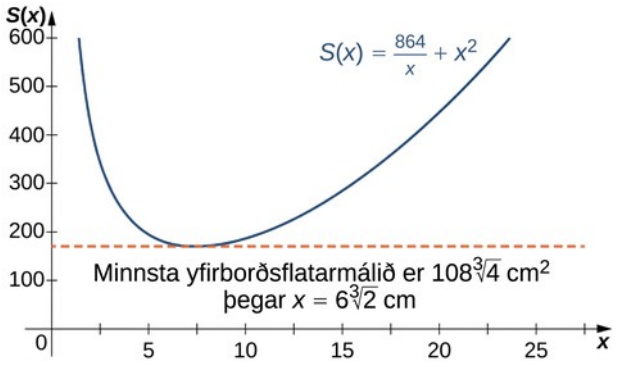
ótakmarkaða bilið $(0,\infty)$. Athugið að ólíkt fyrri dæmum getum við ekki einfaldað verkefnið með því að leita að algildu hágildi eða algildu lággildi á lokuðu og takmörkuðu bili. Í næsta skrefi komumst við þó að því hvers vegna þetta fall hlýtur að hafa algilt lággildi á bilinu $(0,\infty)$.

Skref 6: Athugið að þegar $x \to 0^+$, $S(x) \to \infty$. Einnig gildir að þegar $x \to \infty$, $S(x) \to \infty$. Þar sem S er samfellt fall sem stefnir á óendanlegt við enda skilgreiningarmengisins hlýtur það að hafa algilt lággildi fyrir eitthvert gildi $x \in (0,\infty)$. Þetta lággildi hlýtur að fást í stöðupunkti fallsins S. Afleiðan er

$$S'(x) = -\frac{864}{x^2} + 2x.$$

Því er $S'(x) = 0$ þegar $2x = \frac{864}{x^2}$. Ef þessi jafna er leyst með tilliti til x, fæst $x^3 = 432$, og því $x = \sqrt[3]{432} = 6\sqrt[3]{2}$. Þar sem þetta er eini stöðupunktur fallsins S, hlýtur algilda lággildið að fást þegar $x = 6\sqrt[3]{2}$ (sjá mynd 4.70). Þegar $x = 6\sqrt[3]{2}$, $y = \frac{216}{(6\sqrt[3]{2})^2} = 3\sqrt[3]{2}$ cm. Því ættu mál kassans að vera $x = 6\sqrt[3]{2}$ cm og $y = 3\sqrt[3]{2}$ cm. Með þessum málum er yfirborðsflatarmálið

$$S(6\sqrt[3]{2}) = \frac{864}{6\sqrt[3]{2}} + (6\sqrt[3]{2})^2 = 108\sqrt[3]{4} \text{ cm}^2$$



Mynd 4.70 Við getum notað graf til að ákvarða mál kassa með gefið rúmmál og minnsta yfirborðsflatarmál.

STÖÐUMAT 4.36

Skoðum sama opna kassann, sem á að hafa rúmmálið 216 cm^3. Gerum ráð fyrir að efniskostnaður grunnflatarins sé $2\ ¢/\text{cm}^2$ og að efniskostnaður hliðanna sé $3\ ¢/\text{cm}^2$ og að við reynum að lágmarka kostnaðinn við þennan kassa. Ritið kostnaðinn sem fall af hliðarlengdum grunnflatarins. (Látum x tákna hliðarlengd grunnflatarins og y tákna hæð kassans.)

Æfingar í kafla 4.7

Í eftirfarandi æfingum skal svara með sönnun, gagndæmi eða útskýringu.

311. Þegar þú finnur hágildi í bestunarverkefni, hvers vegna þarftu þá að athuga formerki afleiðunnar beggja vegna stöðupunktanna?

312. Hvers vegna þarf að athuga endapunkta í bestunarverkefnum?

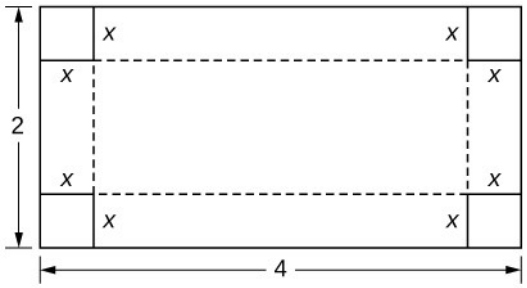
313. *Rétt eða rangt. Fyrir sérhvert samfellt ólínulegt fall er hægt að finna gildið x* sem hámarkar fallið.

314. *Satt eða ósatt. Fyrir sérhvert samfellt ófast fall á lokuðu, takmörkuðu skilgreiningarmengi er til að minnsta kosti eitt x* sem gefur fallinu lággildi eða hágildi.

Setjið upp og leysið hvert bestunarverkefni í eftirfarandi æfingum.

315. Til að taka ferðatösku með um borð í flugvél þarf lengd + breidd + hæð töskunnar að vera minni en eða jöfn 150 cm. Gerið ráð fyrir að botn ferðatöskunnar sé ferningslaga og sýnið að rúmmálið sé $V = h\left(75 - \left(\frac{1}{2}\right)\ h\right)^2$. Hvaða hæð gefur stærsta rúmmálið?

316. Þú ert að búa til pappakassa úr pappaspjaldi sem er 2 m sinnum 4 m. Síðan skerðu jafnstóra ferninga úr hverju horni svo hægt sé að brjóta hliðarnar upp. Hver eru mál kassans sem hefur mesta rúmmálið?



317. Finnið jákvæðu heiltöluna sem lágmarkar summu tölunnar og margföldunarandhverfu hennar.

318. Finnið tvær jákvæðar heiltölur þannig að summa þeirra sé 10 og summa ferninga þeirra sé eins stór og mögulegt er. Finnið síðan aðrar tvær jákvæðar heiltölur þannig að summa þeirra sé 10 og summa ferninga þeirra sé eins lítil og mögulegt er.

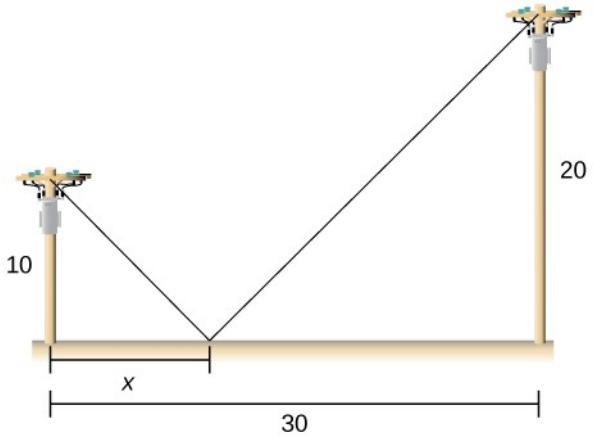
Í eftirfarandi æfingum skal skoða gerði sem afmörkuð eru með girðingu.

319. Þú hefur 400 m af girðingarefni til að útbúa rétthyrnt gerði fyrir nautgripi. Hver eiga mál gerðisins að vera til að flatarmál þess verði sem mest?

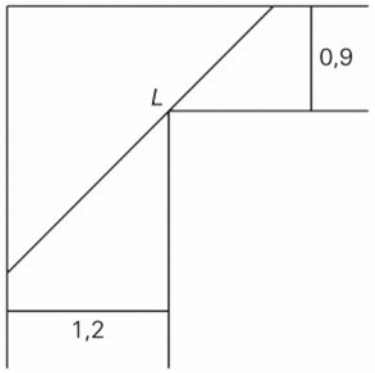
320. Þú hefur 200 m af girðingarefni til að útbúa gerði fyrir svín. Ef á rennur meðfram einni hlið landareignarinnar, hver eiga mál rétthyrnda gerðisins að vera svo að flatarmálið verði sem mest?

321. Þú þarft að reisa girðingu umhverfis svæði að flatarmáli $1600\ \text{m}^2$. Hver eiga mál rétthyrnda gerðisins að vera svo að sem minnst efni þurfi?

322. Tveir staurar eru tengdir með vír sem einnig er festur við jörðina. Fyrri staurinn er $20\ \text{m}$ á hæð og seinni staurinn er $10\ \text{m}$ á hæð. Fjarlægðin milli stauranna er $30\ \text{m}$. Hvar ætti að festa vírinn við jörðina til að lágmarka vírlengdina sem þarf?



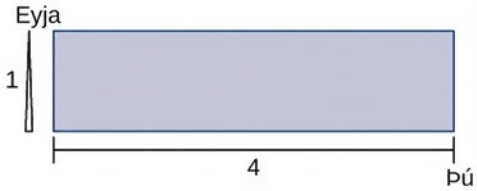
323. **[T]** Þú ert að flytja í nýja íbúð og tekur eftir beygju þar sem gangurinn þrengist úr $1{,}2\ \text{m}$ í $0{,}9\ \text{m}$. Hve langur er lengsti hluturinn sem hægt er að bera lárétt um beygjuna?



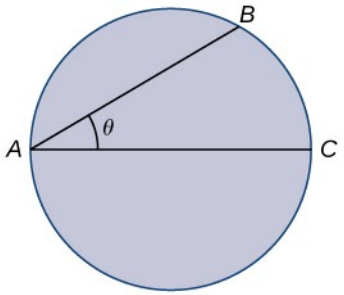
324. Púls sjúklings mælist 70 slög á mín., 80 slög á mín. og síðan 120 slög á mín.. Til að fá nákvæmt mat á púlsinum vill læknirinn vita hvaða gildi lágmarkar stæðuna $(x-70)^2+(x-80)^2+(x-120)^2$? Hvaða gildi lágmarkar hana?

325. Gerum nú ráð fyrir að sjúklingurinn í fyrra verkefni hafi verið kvíðinn við þriðju mælinguna. Því gefum við þeirri mælingu aðeins hálft vægi á við hinar. Hvaða gildi lágmarkar $(x-70)^2+(x-80)^2+\frac{1}{2}(x-120)^2$?

326. Þú ert á ströndinni og getur hlaupið á hraðanum 6 km á klukkustund og synt á hraðanum 3 km á klukkustund. Þú ert 4 km austan við eyju sem er 1 km norðan við strandlínuna. Hversu langt ættir þú að hlaupa í vesturátt til að lágmarka tímann sem þarf til að komast til eyjunnar?



Í eftirfarandi verkefnum skulum við líta á sundlaugarvörð við hringlaga laug með þvermálið $40\,\text{m}$. Hann þarf að komast til manneskju sem er að drukkna nákvæmlega hinum megin í lauginni, við punkt C. Sundlaugarvörðurinn syndir með hraðanum v og hleypur umhverfis laugina með hraðanum $w=3v$.



327. Finnið fall fyrir heildartímann sem það tekur að komast til manneskjunnar sem er að drukkna, þar sem breytan er sundhornið θ.

328. Ákvarðið undir hvaða horni θ sundlaugarvörðurinn ætti að synda til að komast til drukknandi manneskjunnar á sem skemmstum tíma.

329. Vörubíll eyðir eldsneyti samkvæmt $g(v)=av+\frac{b}{v}$, þar sem v táknar hraða vörubílsins og g táknar eldsneytiseyðslu í lítrum á kílómetra. Að því gefnu að a og b séu jákvæð, við hvaða hraða er eldsneytiseyðslan í lágmarki?

Í næstu æfingum gilda þessar forsendur: Eldsneytisnýtni límósínu er $m(v)=\frac{(200-2v)}{20}$ km/L við hraðann v, laun bílstjórans eru \$15/h, og eldsneytið kostar $1{,}5\ €/\text{L}$.

330. Finnið kostnað á hvern kílómetra við hraðann v.

331. Finnið þann akstursshraða sem lágmarkar kostnaðinn.

Í eftirfarandi æfingum skal líta á pítsustað með tekjufallið $R(x)=ax$ og kostnaðarfallið $C(x)=b+cx+dx^2$, þar sem x táknar fjölda pítsa ; $a>c$.

332. Finnið hagnaðarfallið sem fall af fjölda pítsa. Hversu margar pítsur gefa mestan hagnað á hverja pítsu?

333. Gerum ráð fyrir að $R(x)=10x$ og $C(x)=2x+x^2$. Hversu margar pítsur þarf að selja til að hámarka hagnaðinn?

334. Gerum ráð fyrir að $R(x)=15x$, og $C(x)=60+3x+\frac{1}{2}x^2$. Hversu margar pítsur þarf að selja til að hámarka hagnaðinn?

Í eftirfarandi verkefnum er 4 m langur vír skorinn í tvo hluta. Annar hlutinn myndar hring með geisla r en hinn myndar ferning með hliðarlengd x.

335. Veljið x þannig að summa flatarmála þeirra verði sem mest.

336. Veljið x þannig að summa flatarmála þeirra verði sem minnst.

Í eftirfarandi æfingum skal líta á tvær óneikvæðar tölur x og y þannig að $x+y=10$. Finnið hágildi og lággildi stærðanna.

337.

$$x\,y$$

338.

$$x^2\,y^2$$

339.

$$y-\frac{1}{x}$$

340.

$$x^2-y$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna mynd af gefnu bestunarverkefninu og leysa það.

341. Finnið rúmmál stærsta rétta hringsívalnings sem kemst fyrir í kúlu með geisla 1.

342. Finnið rúmmál stærstu réttu hringkeilunnar sem rúmast í kúlu með geislann 1.

343. Finnið flatarmál stærsta rétthyrningsins sem rúmast innan þríhyrningsins sem afmarkast af línunum $x=0$, $y=0$ og $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$.

344. Finnið mesta rúmmál sívalnings sem kemst fyrir í keilu með grunngeisla R og hæð h.

345. Finnið mál lokaðs sívalnings með rúmmálið $V=16\pi$ sem hefur minnsta yfirborðsflatarmálið.

346. Finnið mál réttrar keilu með yfirborðsflatarmálið $S=4\pi$ sem hefur stærsta rúmmálið.

Í eftirfarandi æfingum skal líta á punktana á gefnu gröfunum. Notið reiknivél til að teikna gröf fallanna.

347. **[T]** Hvar er línan $y=5-2x$ næst upphafspunktinum?

348. **[T]** Hvar er línan $y=5-2x$ næst punktinum $(1,1)$?

349. **[T]** Hvar er fleygboginn $y=x^2$ næst punktinum $(2,0)$?

350. **[T]** Hvar er fleygboginn $y=x^2$ næst punktinum $(0,3)$?

Í eftirfarandi æfingum skal skrifa jöfnu sem lýsir hverju tilviki tengdra breytingarhraða. Leysið ekki jöfnuna.

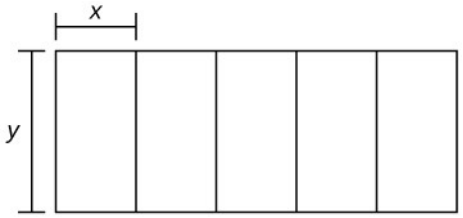
351. Gluggi er gerður úr hálfhring ofan á rétthyrningi. Ef 6 m af efni eru til ráðstöfunar fyrir ytri gluggakarminn, hversu stóran glugga er þá hægt að búa til? Notið r til að tákna geisla hálfhringsins.



352. Í garðinum þínum er röð með 20 vatnsmelónuplöntum sem gefa að meðaltali 30 vatnsmelónur hver. Fyrir hverja vatnsmelónuplöntu sem bætt er við minnkar uppskeran af hverri plöntu um eina vatnsmelónu. Hversu mörgum vatnsmelónuplöntum til viðbótar ættir þú að planta?

353. Þú ert að smíða kassa sem kötturinn þinn getur sofið í. Mjúka efnið í ferningslaga botn kassans kostar 50 €/m^2 og efnið í hliðarnar kostar 20 €/m^2. Kassinn þarf að hafa rúmmálið $0{,}08$ m^3. Finnið þau mál kassans sem lágmarka kostnaðinn. Notið x til að tákna hliðarlengd kassans í metrum.

354. Þú ert að byggja fimm eins gerði hlið við hlið með heildarflatarmálið $1000\,\text{m}^2$, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd. Hvaða mál ætti að nota svo að sem minnst girðingarefni þurfi?



355. Þú ert framkvæmdastjóri fjölbýlishúss með 50 íbúðum. Ef leigan er $\$800/\text{mánuð}$, eru allar íbúðirnar í útleigu. Útleigðum íbúðum fækkar um eina í hvert sinn sem leigan er hækkuð um $\$25/\text{mánuð}$, en viðhaldskostnaður er $\$50/\text{mánuð}$ fyrir hverja íbúð í útleigu. Hve há leiga hámarkar heildarhagnaðinn?

4.8 Regla l'Hôpital

NÁMSMARKMIÐ

- 4.8.1 Átta sig á því hvenær beita á reglu l'Hôpital.
- 4.8.2 Greina óákveðin form sem myndast við deilingu, margföldun, frádrátt og veldisreikning og beita reglu l'Hôpital í hverju tilviki.
- 4.8.3 Lýsa hlutfallslegum vaxtarhraða falla.

Í þessum undirkafla skoðum við öflugt verkfæri til að reikna markgildi. Þetta verkfæri, sem nefnist regla l'Hôpital, notar afleiður til að reikna markgildi. Með þessari reglu getum við reiknað mörg markgildi sem okkur hefur hingað til ekki tekist að ákvarða. Við þurfum þá ekki lengur að styðjast við tölulegar vísbendingar til að giska á að markgildi sé til. Við getum sýnt með fullri vissu að það sé til og fundið nákvæmt gildi þess.

Beiting reglu l'Hôpital

Reglu l'Hôpital má beita til að reikna markgildi sem fela í sér kvóta tveggja falla. Skoðum

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ef $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ og $\lim_{x \to a} g(x) = L_2 \neq 0$, þá

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

En hvað gerist ef $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ og $\lim_{x \to a} g(x) = 0$? Við köllum þetta eitt óákveðnu formanna, af gerðinni $\frac{0}{0}$. Þetta telst óákveðið form vegna þess að án frekari greiningar getum við ekki ákvarðað nákvæma hegðun $\frac{f(x)}{g(x)}$ þegar $x \to a$. Við höfum áður séð dæmi um þetta í textanum. Skoðum til dæmis

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ og } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Í fyrra þessara dæma getum við reiknað markgildið með því að þátta teljarann og rita

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4.$$

Fyrir $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ gátum við sýnt með rúmfræðilegum rökum að

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Hér beitum við annarri aðferð til að reikna markgildi á borð við þessi. Með henni er ekki aðeins auðveldara að reikna þessi markgildi. Það sem meira máli skiptir er að með henni getum við reiknað mörg önnur markgildi sem við gátum ekki reiknað áður.

Hugmyndina að baki reglu l'Hôpital má skýra með staðbundnum línulegum nálgunum. Lítum á tvö deildanleg föll f og g þannig að $\lim_{x\to a}f(x)=0=\lim_{x\to a}g(x)$ og þannig að $g'(a)\neq 0$. Þegar x er nálægt a, getum við ritað

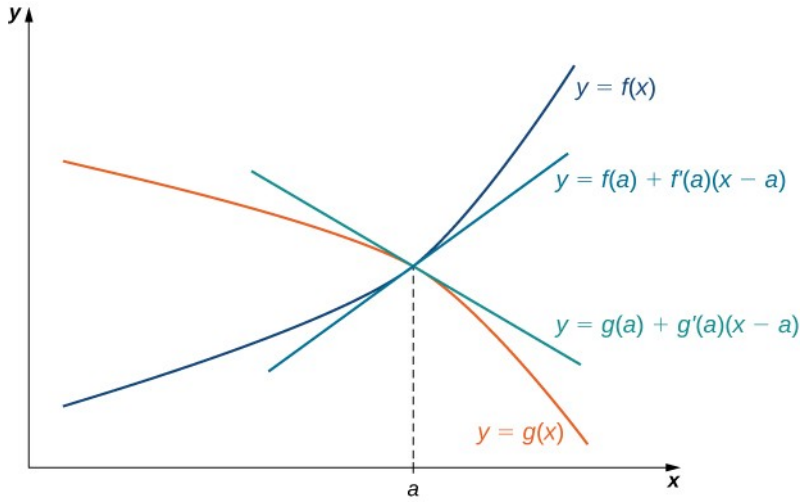
$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

og

$$g(x)\approx g(a)+g'(a)(x-a).$$

Því gildir

$$\frac{f(x)}{g(x)}\approx\frac{f(a)+f'(a)(x-a)}{g(a)+g'(a)(x-a)}.$$



Mynd 4.71 Ef $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$, þá er hlutfallið $f(x)/g(x)$ um það bil jafnt hlutfalli línulegra nálganna þeirra nærri a.

Þar sem f er deildanlegt í a, er f samfellt í a, og því er $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0$. Á sama hátt er $g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0$. Ef við gerum einnig ráð fyrir að f' og g' séu samfelld í $x=a$, er $f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x)$ og $g'(a)=\lim_{x\to a} g'(x)$. Af þessu ályktum við að

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)}{g'(x)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Athugið að unnt er að slaka á þeirri forsendu að f' og g' séu samfelld í a og $g'(a)\neq 0$. Nú setjum við reglu l'Hôpital formlega fram fyrir óákveðna formið $\frac{0}{0}$. Athugið einnig að táknunin $\frac{0}{0}$ merkir ekki að núlli sé í raun deilt með núlli. Þess í stað notum við táknunina $\frac{0}{0}$ til að tákna kvóta markgilda sem hvort um sig er núll.

SETNING 4.12

Regla l'Hôpital (tilvikið 0/0)

Gerum ráð fyrir að f og g séu deildanleg föll á opnu bili sem inniheldur a, nema hugsanlega í a. Ef $\lim_{x\to a} f(x)=0$ og $\lim_{x\to a} g(x)=0$, þá

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

að því gefnu að markgildið hægra megin sé til eða sé ∞ eða $-\infty$. Þessi niðurstaða gildir einnig ef við skoðum einhliða markgildi eða ef $a=\infty$ og $-\infty$.

Sönnun

Við sönnum setninguna í því sértilviki að f, g, f', sem og g' séu öll samfelld á opnu bili sem inniheldur a. Þar sem $\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$ og f og g eru samfelld í a, gildir $f(a)=0=g(a)$. Því

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} && \text{þar sem } f(a)=0=g(a)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} && \text{algebruleg umritun}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} && \text{markgildi kvóta}\\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)} && \text{skilgreining afleiðu}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)} && \text{samfelldni } f' \text{ og } g'\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. && \text{markgildi kvóta}
\end{aligned}
$$

Athugið að samkvæmt reglu l'Hôpital má reikna markgildi kvóta $\frac{f}{g}$ með því að skoða markgildi kvóta afleiðnanna $\frac{f'}{g'}$. Mikilvægt er að gera sér grein fyrir því að við erum ekki að reikna afleiðu kvótans $\frac{f}{g}$.

□

DÆMI 4.38

Beiting reglu l'Hôpital (tilfellið 0/0)

Reiknið hvert af eftirfarandi markgildum með því að beita reglu l'Hôpital.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$

c. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2}$

Lausn

a. Þar sem teljarinn $1-\cos x \to 0$ og nefnarinn $x\to 0$, getum við beitt reglu l'Hôpital til að reikna þetta markgildi. Við fáum

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos x)}{\frac{d}{dx}(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)}{\lim\limits_{x\to 0}(1)}\\ &= \frac{0}{1} = 0.\end{aligned}$$

b. Þegar $x \to 1$, gildir $\sin(\pi x) \to 0$ fyrir teljarann, en um nefnarann gildir $\ln(x) \to 0$. Þess vegna getum við beitt reglu l'Hôpital. Við fáum

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{\ln x} &= \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1/x}\\ &= \lim_{x\to 1}(\pi x)\cos(\pi x)\\ &= (\pi\cdot 1)(-1) = -\pi.\end{aligned}$$

c. Þegar $x \to \infty$, gildir $e^{1/x} - 1 \to 0$ fyrir teljarann, en um nefnarann gildir $\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$. Því getum við beitt reglu l'Hôpital. Við fáum

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

d. Þegar $x \to 0$, nálgast bæði teljarinn og nefnarinn núll. Því getum við beitt reglu l'Hôpital. Við fáum

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x}.$$

Þar sem bæði teljari og nefnari þessa nýja kvóta nálgast núll þegar $x \to 0$, beitum við reglu l'Hôpital aftur. Þá sjáum við að

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0.$$

Því ályktum við að

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = 0.$$

STÖÐUMAT 4.37

Reiknið $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$.

Við getum einnig notað reglu l'Hôpital til að reikna markgildi kvóta $\frac{f(x)}{g(x)}$ þar sem $f(x) \to \pm\infty$ og $g(x) \to \pm\infty$. Markgildi af þessu tagi eru óákveðin form af gerðinni ∞/∞. Athugið aftur að við erum í raun ekki að deila ∞ með ∞. Þar sem ∞ er ekki rauntala er slík deiling ómöguleg; þess í stað notum við táknið ∞/∞. Það táknar kvóta falla sem hvort um sig stefnir á ∞ eða $-\infty$.

SETNING 4.13

Regla l'Hôpital (∞/∞-tilvikið)

Gerum ráð fyrir að f og g séu deildanleg föll á opnu bili sem inniheldur a, nema hugsanlega í a. Gerum ráð fyrir að $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (eða $-\infty$) og $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (eða $-\infty$). Þá gildir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

að því gefnu að markgildið hægra megin sé til eða sé ∞ eða $-\infty$. Þessi niðurstaða gildir einnig ef markgildið er óendanlegt, ef $a = \infty$ eða $-\infty$, eða ef markgildið er einhliða.

DÆMI 4.39

Beiting reglu l'Hôpital (∞/∞-tilvikið)

Reiknið hvert af eftirfarandi markgildum með því að beita reglu l'Hôpital.

a. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{2x+1}$

b. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

Lausn

a. Þar sem $3x+5$ og $2x+1$ eru fyrstastigs margliður með jákvæða forystustuðla, er $\lim_{x \to \infty}(3x+5) = \infty$ og $\lim_{x \to \infty}(2x+1) = \infty$. Því beitum við reglu l'Hôpital og fáum

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Athugið að einnig má reikna þetta markgildi án þess að beita reglu l'Hôpital. Fyrr í kaflanum sýndum við hvernig reikna má slíkt markgildi með því að deila bæði teljara og

nefnara með hæsta veldi x í nefnaranum. Með því sáum við að

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+5/x}{2+1/x}=\frac{3}{2}.$$

Regla l'Hôpital veitir okkur aðra leið til að reikna markgildi af þessu tagi.

b. Hér gildir $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ og $\lim_{x\to 0^+}\cot x=\infty$. Því getum við beitt reglu l'Hôpital og fáum

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-x\csc^2 x}.$$

Þegar $x\to 0^+$, gildir $\csc^2 x\to\infty$. Þá nálgast fyrri þátturinn í nefnaranum núll en sá síðari vex án takmarka. Í slíku tilviki getur hvað sem er gerst með margfeldið, svo að við getum ekki enn dregið neina ályktun. Til að reikna markgildið notum við skilgreininguna á $\csc x$ og ritum

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-x\csc^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x}.$$

Þar sem $\lim_{x\to 0^+}\sin^2 x=0$ og $\lim_{x\to 0^+}x=0$, getum við beitt reglu l'Hôpital aftur. Við fáum

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{-1}=\frac{0}{-1}=0.$$

Við ályktum að

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=0.$$

4

STÖÐUMAT 4.38

Reiknið $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{5x}$.

Eins og áður hefur komið fram er regla l'Hôpital afar gagnlegt tæki til að reikna markgildi. Reglu l'Hôpital má þó aðeins beita á kvótann $\frac{f(x)}{g(x)}$, ef markgildi $\frac{f(x)}{g(x)}$ er af gerðinni $\frac{0}{0}$ eða ∞/∞. Lítum á eftirfarandi dæmi.

DÆMI 4.40

Þegar regla l'Hôpital á ekki við

Skoðum $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5}{3x+4}$. Sýnið að ekki sé hægt að ákvarða markgildið með því að beita reglu l'Hôpital.

Lausn

Þar sem markgildi teljarans og nefnarans eru hvorki bæði núll né bæði óendanleg, getum við ekki beitt reglu l'Hôpital. Ef við reynum samt að gera það, fáum við

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)=2x$$

og

$$\frac{d}{dx}\left(3x+4\right)=3.$$

Þá myndum við ranglega ályktа að

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5}{3x+4}=\lim_{x \to 1} \frac{2x}{3}=\frac{2}{3}.$$

En þar sem $\lim_{x \to 1}\left(x^2+5\right)=6$ og $\lim_{x \to 1}\left(3x+4\right)=7$, fæst í raun

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5}{3x+4}=\frac{6}{7}.$$

Við getum ályktað að

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+5}{3x+4} \neq \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)}{\frac{d}{dx}\left(3x+4\right)}.$$

STÖÐUMAT 4.39

Útskýrið hvers vegna ekki er hægt að beita reglu l'Hôpital til að reikna $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x}$. Reiknið $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{x}$ með öðrum aðferðum.

Önnur óákveðin form

Regla l'Hôpital er mjög gagnleg við að ákvarða markgildi sem fela í sér óákveðnu formin $\frac{0}{0}$ og ∞/∞. Reglu l'Hôpital má einnig nota til að ákvarða markgildi sem fela í sér önnur óákveðin

form. Stæðurnar $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, auk 0^{0} teljast allar óákveðin form. Þessar stæður eru ekki rauntölur heldur tákna þær form sem koma fram þegar tiltekin markgildi eru reiknuð. Næst skoðum við hvers vegna formin eru óákveðin og hvernig beita má reglu l'Hôpital í þessum tilvikum. Meginhugmyndin er að umrita þau þannig að úr verði óákveðna formið $\frac{0}{0}$ eða ∞/∞.

Óákveðið form af gerðinni $0 \cdot \infty$

Gerum ráð fyrir að við viljum reikna $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big)$, þar sem $f(x) \to 0$ og $g(x) \to \infty$ (eða $-\infty$) þegar $x \to a$. Þegar annar þátturinn nálgast núll en tölugildi hins vex án takmarka getur margfeldið haft ólík markgildi. Táknunin $0 \cdot \infty$ lýsir því formi. Formið $0 \cdot \infty$ er óákveðið því án frekari greiningar getum við ekki ákvarðað hegðun margfeldisins $f(x)g(x)$ þegar $x \to a$. Látum til dæmis n vera jákvæða heiltölu og skoðum

$$f(x) = \frac{1}{(x^n + 1)} \text{ og } g(x) = 3x^2.$$

Þegar $x \to \infty$, gildir $f(x) \to 0$ og $g(x) \to \infty$. Þegar $x \to \infty$ er markgildi fallsins $f(x)g(x) = \frac{3x^2}{(x^n+1)}$ breytilegt og ræðst af n. Þegar $n = 2$, er $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)g(x) = 3$. Þegar $n = 1$, er $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)g(x) = \infty$. Þegar $n = 3$, er $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)g(x) = 0$. Hér skoðum við annað markgildi sem felur í sér óákveðna formið $0 \cdot \infty$ og sýnum hvernig umrita má fallið sem kvóta til að beita reglu l'Hôpital.

DÆMI 4.41

Óákveðið form af gerðinni $0 \cdot \infty$

Reiknið $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$.

Lausn

Fyrst skulum við umrita fallið $x \ln x$ sem kvóta til að beita reglu l'Hôpital. Ef við skrifum

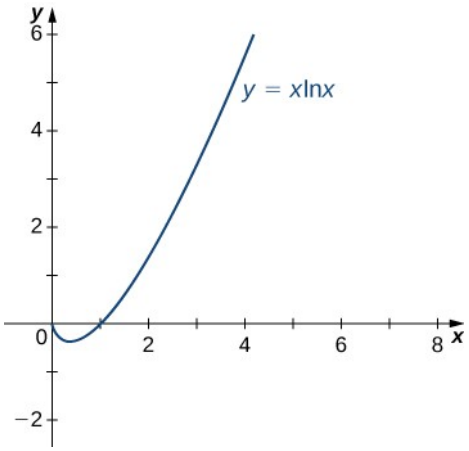
$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x},$$

sjáum við að $\ln x \to -\infty$ þegar $x \to 0^+$ og $\frac{1}{x} \to \infty$ þegar $x \to 0^+$. Því getum við beitt reglu l'Hôpital og fengið

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(1/x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Við ályktum að

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$



Mynd 4.72 Markgildi í $x=0$ fyrir fallið $f(x)=x\ln x$.

STÖÐUMAT 4.40

4

Reiknið $\lim_{x \to 0} x \cot x$.

Óákveðið form af gerðinni $\infty - \infty$

Önnur gerð óákveðins forms er $\infty - \infty$. Skoðum eftirfarandi dæmi. Látum n vera jákvæða heiltölu og látum $f(x)=3x^n$ og $g(x)=3x^2+5$. Þegar $x \to \infty$, gildir $f(x) \to \infty$ og $g(x) \to \infty$. Við viljum kanna $\lim_{x \to \infty} \left(f(x)-g(x)\right)$. Eftir því hvort $f(x)$ vex hraðar, $g(x)$ vex hraðar eða föllin vaxa jafnhratt getur markgildið tekið ólík gildi, eins og fram kemur hér á eftir. Þar sem $f(x) \to \infty$ og $g(x) \to \infty$, ritum við $\infty - \infty$ til að lýsa formi markgildisins. Eins og önnur óákveðin form hefur $\infty - \infty$ enga merkingu eitt og sér; greina þarf markgildið nánar til að ákvarða gildi þess. Ef til dæmis veldisvísirinn n í fallinu $f(x)=3x^n$ er $n=3$, fæst

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x \to \infty} \left(3x^3-3x^2-5\right) = \infty.$$

Ef hins vegar $n=2$, þá

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x \to \infty} \left(3x^2-3x^2-5\right) = -5.$$

En ef $n=1$, þá

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x)-g(x)\right) = \lim_{x \to \infty} \left(3x-3x^2-5\right) = -\infty.$$

Því er ekki hægt að ákvarða markgildið með því að skoða aðeins $\infty - \infty$. Næst sjáum við hvernig umrita má stæðu sem felur í sér óákveðna formið $\infty - \infty$ sem brot svo beita megi reglu l'Hôpital.

DÆMI 4.42

Óákveðið form af gerðinni $\infty - \infty$

Reiknið $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan x} \right)$.

Lausn

Með því að sameina brotin getum við ritað fallið sem kvóta. Þar sem minnsti samnefnarinn er $x^2 \tan x$, höfum við

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan x} = \frac{(\tan x) - x^2}{x^2 \tan x}.$$

Þegar $x \to 0^+$, gildir $\tan x - x^2 \to 0$ fyrir teljarann, en um nefnarann gildir $x^2 \tan x \to 0$. Því getum við beitt reglu l'Hôpital. Við deildum teljarann og nefnarann og fáum

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\tan x) - x^2}{x^2 \tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\sec^2 x\right) - 2x}{x^2 \sec^2 x + 2x \tan x}.$$

Þegar $x \to 0^+$, gildir $\left(\sec^2 x\right) - 2x \to 1$ og $x^2 \sec^2 x + 2x \tan x \to 0$. Þar sem nefnarinn er jákvæður þegar x nálgast núll frá hægri ályktum við að

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\sec^2 x\right) - 2x}{x^2 \sec^2 x + 2x \tan x} = \infty.$$

Því gildir

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan x} \right) = \infty.$$

STÖÐUMAT 4.41

Reiknið $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Önnur gerð óákveðins forms sem kemur fyrir þegar markgildi eru reiknuð tengist veldisvísum. Stæðurnar 0^0, ∞^0, auk 1^∞ eru allar óákveðin form. Ein og sér hafa þessi form enga merkingu, því ekki er hægt að reikna gildi þeirra á sama hátt og gildi stæðu með rauntölum. Þess í stað tákna þau form sem koma upp þegar markgildi eru fundin. Nú skoðum við hvernig nota má reglu l'Hôpital til að reikna markgildi sem fela í sér þessi óákveðnu form.

Regla l'Hôpital á við um kvóta. Því notum við náttúrulega logrann og eiginleika hans til að breyta markgildi með veldi í hliðstætt markgildi kvóta. Gerum til dæmis ráð fyrir að við

viljum reikna $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ og fáum óákveðna formið ∞^0. (Óákveðnu formin 0^0 og 1^∞ má meðhöndla á svipaðan hátt.) Við höldum áfram sem hér segir. Látum

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Þá er

$$\ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln\left(f(x)\right).$$

Því gildir

$$\lim_{x \to a}\left[\ln(y)\right] = \lim_{x \to a}\left[g(x)\ln\left(f(x)\right)\right].$$

Þar sem $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, vitum við að $\lim_{x \to a} \ln\left(f(x)\right) = \infty$. Því er $\lim_{x \to a} g(x)\ln\left(f(x)\right)$ á óákveðna forminu $0 \cdot \infty$, svo að við getum notað aðferðirnar sem lýst var hér að framan til að umrita stæðuna $g(x)\ln\left(f(x)\right)$ þannig að beita megi reglu l'Hôpital. Gerum ráð fyrir að $\lim_{x \to a} g(x)\ln\left(f(x)\right) = L$, þar sem L getur verið ∞ eða $-\infty$. Þá

$$\lim_{x \to a}\left[\ln(y)\right] = L.$$

Þar sem náttúrulega lografallið er samfellt ályktum við að

$$\ln\left(\lim_{x \to a} y\right) = L,$$

sem gefur okkur

$$\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

DÆMI 4.43

Óákveðið form af gerðinni ∞^0

Reiknið $\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$.

Lausn

Látum $y = x^{1/x}$. Þá er

$$\ln y = \ln\left(x^{1/x}\right) = \frac{1}{x}\ln x = \frac{\ln x}{x}.$$

Við þurfum að reikna $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$. Með því að beita reglu l'Hôpital fáum við

$$\lim_{x \to \infty} \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Því er $\lim_{x \to \infty} \ln y = 0$. Þar sem náttúrulega lografallið er samfellt ályktum við að

$$\ln\left(\lim_{x \to \infty} y\right) = 0,$$

sem leiðir til

$$\lim_{x \to \infty} y = e^{\ln(y)} = \lim e^0 = 1. \text{ (Öll markgildi } x \geq \infty.)$$

Því gildir

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = 1.$$

STÖÐUMAT 4.42

Reiknið $\lim_{x \to \infty} x^{1/\ln(x)}$.

DÆMI 4.44

Óákveðið form af gerðinni 0^0

Reiknið $\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x}$.

Lausn

Látum

$$y = x^{\sin x}.$$

Því gildir

$$\ln y = \ln\left(x^{\sin x}\right) = \sin x \ln x.$$

Nú reiknum við $\lim_{x \to 0^+} \sin x \ln x$. Þar sem $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$ og $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, er stæðan á óákveðna forminu $0 \cdot \infty$. Til að beita reglu l'Hôpital þurfum við að umrita $\sin x \ln x$ sem brot. Við gætum skrifað

$$\sin x \ln x = \frac{\sin x}{1/\ln x}$$

eða

$$\sin x \ln x = \frac{\ln x}{1/\sin x} = \frac{\ln x}{\csc x}.$$

Skoðum fyrri kostinn. Ef við beittum reglu l'Hôpital í þessu tilviki fengjum við

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{1/\ln x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{-1/\left(x(\ln x)^2\right)} = \lim_{x \to 0^+} \left(-x(\ln x)^2 \cos x\right).$$

Því miður fáum við aftur stæðu á óákveðna forminu $0 \cdot \infty$, og nýja markgildið er auk þess enn erfiðara að reikna en það sem við byrjuðum á. Þess í stað reynum við seinni kostinn. Með því að rita

$$\sin x \ln x = \frac{\ln x}{1/\sin x} = \frac{\ln x}{\csc x},$$

og með því að beita reglu l'Hôpital fáum við

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{x \csc x \cot x}.$$

Þar sem $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ og $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, má umrita stæðuna hægra megin sem

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot (-\tan x) \right] = \left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} (-\tan x) \right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Við ályktum að $\lim_{x \to 0^+} \ln y = 0$. Því er $\ln \left(\lim_{x \to 0^+} y \right) = 0$ og við höfum

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1.$$

Því gildir

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = 1.$$

4

STÖÐUMAT 4.43

Reiknið $\lim_{x \to 0^+} x^x$.

Vaxtarhraði falla

Gerum ráð fyrir að föllin f og g stefni bæði á óendanlegt þegar $x \to \infty$. Þótt gildi beggja fallanna geti orðið eins stór og óskað er þegar x verður nægilega stórt, vex annað fallið stundum hraðar en hitt. Til dæmis stefna $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$ bæði á óendanlegt þegar $x \to \infty$. Eins og eftirfarandi tafla sýnir vaxa gildi x^3 þó mun hraðar en gildi x^2.

Tafla 4.7 Samanburður á vaxtarhraða x^2 og x^3

x	10	100	1000	10.000
$f(x) = x^2$	100	10.000	1.000.000	100.000.000
$g(x) = x^3$	1000	1.000.000	1.000.000.000	1.000.000.000.000

Raunar gildir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty\text{. eða, jafngilt því, }\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Því segjum við að x^3 vaxi hraðar en x^2 þegar $x\to\infty$. Ef hins vegar $f(x)=x^2$ og $g(x)=3x^2+4x+1$, eru gildi $g(x)$ alltaf stærri en gildi $f(x)$ þegar $x>0$, en hvert gildi $g(x)$ er um það bil þrefalt samsvarandi gildi $f(x)$ þegar $x\to\infty$, eins og eftirfarandi tafla sýnir. Raunar er

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x^2+4x+1}=\frac{1}{3}.$$

Tafla 4.8 Samanburður á vaxtarhraða x^2 og $3x^2+4x+1$

x	10	100	1000	10.000
$f(x)=x^2$	100	10.000	1.000.000	100.000.000
$g(x)=3x^2+4x+1$	341	30.401	3.004.001	300.040.001

Í þessu tilviki segjum við að x^2 og $3x^2+4x+1$ vaxi jafnhratt þegar $x\to\infty$.

Gerum nú almennt ráð fyrir að f og g séu tvö föll sem stefna á óendanlegt þegar $x\to\infty$. Við segjum að g vaxi hraðar en f þegar $x\to\infty$ ef

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty\text{; eða, jafngilt því, }\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Ef hins vegar er til fasti $M\neq 0$ þannig að

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=M,$$

segjum við að f og g vaxi jafnhratt þegar $x\to\infty$.

Næst sjáum við hvernig nota má reglu l'Hôpital til að bera saman vaxtarhraða veldisfalla, vísisfalla og lografalla.

DÆMI 4.45

Samanburður á vaxtarhraða $\ln(x)$, x^2, sem og e^x

Notið reglu l'Hôpital fyrir hvert eftirfarandi fallapar til að reikna $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$.

a. $f(x)=x^2$ og $g(x)=e^x$

b. $f(x)=\ln(x)$ og $g(x)=x^2$

Lausn

a. Þar sem $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$ og $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, getum við notað reglu l'Hôpital til að reikna $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2}{e^x} \right]$.

Við fáum

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}.$$

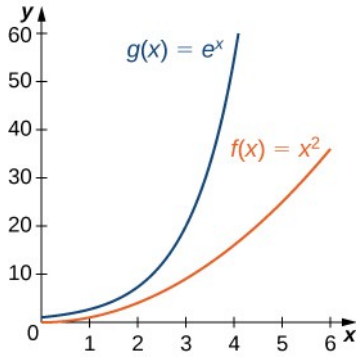
Þar sem $\lim_{x \to \infty} 2x = \infty$ og $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, getum við beitt reglu l'Hôpital aftur. Þar sem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

Við ályktum að

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Því vex e^x hraðar en x^2 þegar $x \to \infty$ (sjá mynd 4.73 og töflu 4.9).



Mynd 4.73 Vísisfall vex hraðar en veldisfall.

Tafla 4.9 Vaxtarhraði veldisfalls og vísisfalls.

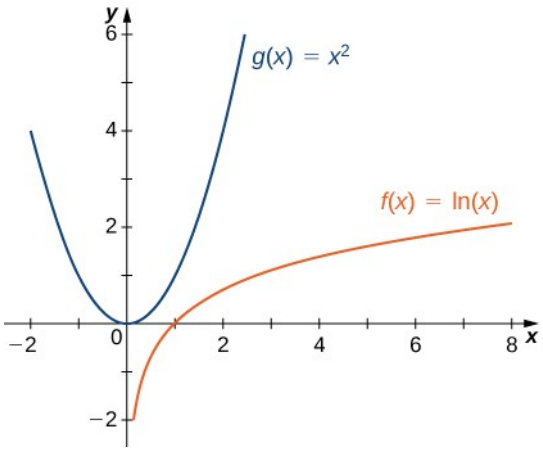
x	5	10	15	20
x^2	25	100	225	400
e^x	148	22.026	3.269.017	485.165.195

b. Þar sem $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$ og $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, getum við notað reglu l'Hôpital til að reikna $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

Við fáum

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Því vex x^2 hraðar en $\ln x$ þegar $x \to \infty$ (sjá mynd 4.74 og töflu 4.10).



Mynd 4.74 Veldisfall vex hraðar en lografall.

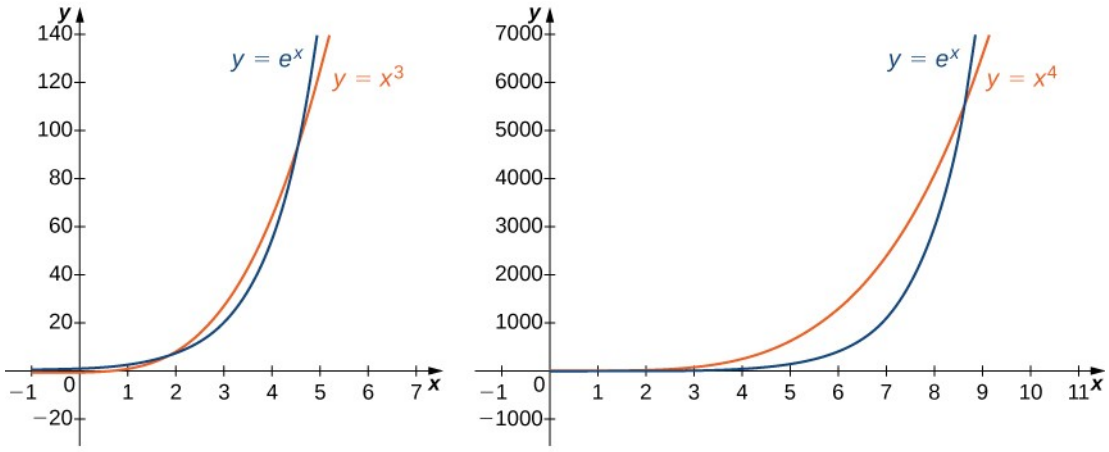
Tafla 4.10 Vaxtarhraði veldisfalls og lografalls

x	10	100	1000	10.000
$\ln(x)$	2,303	4,605	6,908	9,210
x^2	100	10.000	1.000.000	100.000.000

STÖÐUMAT 4.44

Berið saman vaxtarhraða x^{100} og 2^x.

Með sömu hugmyndum og í dæmi 4.45a-lið er ekki erfitt að sýna að e^x vex hraðar en x^p fyrir sérhvert $p > 0$. Á mynd 4.75 og í töflu 4.11 berum við e^x saman við x^3 og x^4 þegar $x \to \infty$.

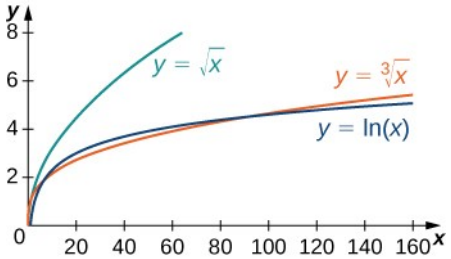


Mynd 4.75 Vísisfallið e^x vex hraðar en x^p fyrir sérhvert $p>0$. (a) Samanburður á e^x og x^3. (b) Samanburður á e^x og x^4.

Tafla 4.11 Vísisfall vex hraðar en nokkurt veldisfall

x	5	10	15	20
x^3	125	1000	3375	8000
x^4	625	10.000	50.625	160.000
e^x	148	22.026	3.269.017	485.165.195

Á sama hátt er ekki erfitt að sýna að x^p vex hraðar en $\ln x$ fyrir sérhvert $p>0$. Á mynd 4.76 og í töflu 4.12 berum við $\ln x$ saman við $\sqrt[3]{x}$ og $\sqrt{x}$.



Mynd 4.76 Fallið $y=\ln(x)$ vex hægar en x^p fyrir sérhvert $p>0$ þegar $x \to \infty$.

Tafla 4.12 Lografall vex hægar en nokkurt rótarfall

x	10	100	1000	10.000
$\ln(x)$	2,303	4,605	6,908	9,210
$\sqrt[3]{x}$	2,154	4,642	10	21,544
$\sqrt{x}$	3,162	10	31,623	100

Æfingar úr kafla 4.8

Reiknið markgildin í eftirfarandi æfingum.

356. Reiknið markgildið $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$.

357. Reiknið markgildið $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k}$.

358. Reiknið markgildið $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^k}$.

359. Reiknið markgildið $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^2-a^2}, a \neq 0$.

360. Reiknið markgildið $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^3-a^3}, a \neq 0$.

361. Reiknið markgildið $\lim_{x \to a} \frac{x-a}{x^n-a^n}, a \neq 0$.

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort hægt sé að beita reglu l'Hôpital beint. Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki. Tilgreinið síðan hvort breyta megi markgildinu þannig að hægt sé að beita reglunni.

362.

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$$

363.

$$\lim_{x \to \infty} x^{1/x}$$

364.

$$\lim_{x \to 0} x^{2/x}$$

365.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1/x}$$

366.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$$

Reiknið markgildin í eftirfarandi æfingum, annaðhvort með reglu l'Hôpital eða aðferðum sem þið hafið áður lært.

367.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

368.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

369.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{-2} - 1}{x}$$

370.

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

371.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{x - \pi}{\sin x}$$

372.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sin x}$$

373.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

374.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x^2}$$

375.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$$

376.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

377.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

378.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$$

379.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x}$$

380.

$$\lim_{x \to 0} \left(x+1\right)^{1/x}$$

381.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x - 1}$$

382.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{2x}$$

383.

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

384.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

385.

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln\left(x^4\right)$$

386.

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - e^x \right)$$

387.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x}$$

388.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$$

389.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+1/x}{1-1/x}$$

390.

$$\lim_{x \to \pi/4} \left(1 - \tan x\right) \cot x$$

391.

$$\lim_{x \to \infty} x\, e^{1/x}$$

392.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/\cos x}$$

393.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/x}$$

394.

$$\lim_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

395.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna graf fallsins og áætla markgildið. Beitið síðan reglu l'Hôpital til að finna markgildið beint.

396. **[T]** $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

397. **[T]** $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

398. **[T]** $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1-\cos(\pi x)}$

399. **[T]** $\lim_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)}-1}{x-1}$

400. **[T]** $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{\ln x}$

401. **[T]** $\lim_{x \to \pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}$

402. **[T]** $\lim_{x \to 0} \left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$

403. **[T]** $\lim_{x \to 0^+} \tan\left(x^x\right)$

404. **[T]** $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\sin x}$

405. **[T]** $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

4

4.9 Aðferð Newtons

NÁMSMARKMIÐ

- 4.9.1 Lýsa skrefum aðferðar Newtons.
- 4.9.2 Útskýra hvað ítrunarferli felur í sér.
- 4.9.3 Þekkja hvenær aðferð Newtons virkar ekki.
- 4.9.4 Beita ítrunarferlum við ýmsar aðstæður.

Á mörgum sviðum hreinnar og hagnýttrar stærðfræði höfum við áhuga á að finna lausnir á jöfnu af gerðinni $f(x)=0$. Fyrir flest föll er þó erfitt — ef ekki ómögulegt — að reikna núllstöðvar þeirra nákvæmlega. Í þessum undirkafla skoðum við mjög skilvirka aðferð til að nálga núllstöðvar falla. Aðferðin byggist á nálgunum með snertlum og liggur að baki þeirri aðferð sem reiknivélar og tölvur nota oft til að finna núllstöðvar.

Lýsing á aðferð Newtons

Hugsum okkur að við viljum finna lausnir jöfnunnar $f(x)=0$. Ef f er fyrsta stigs margliðan $f(x)=ax+b$, fæst lausn jöfnunnar $f(x)=0$ með formúlunni $x=-\frac{b}{a}$. Ef f er annars stigs

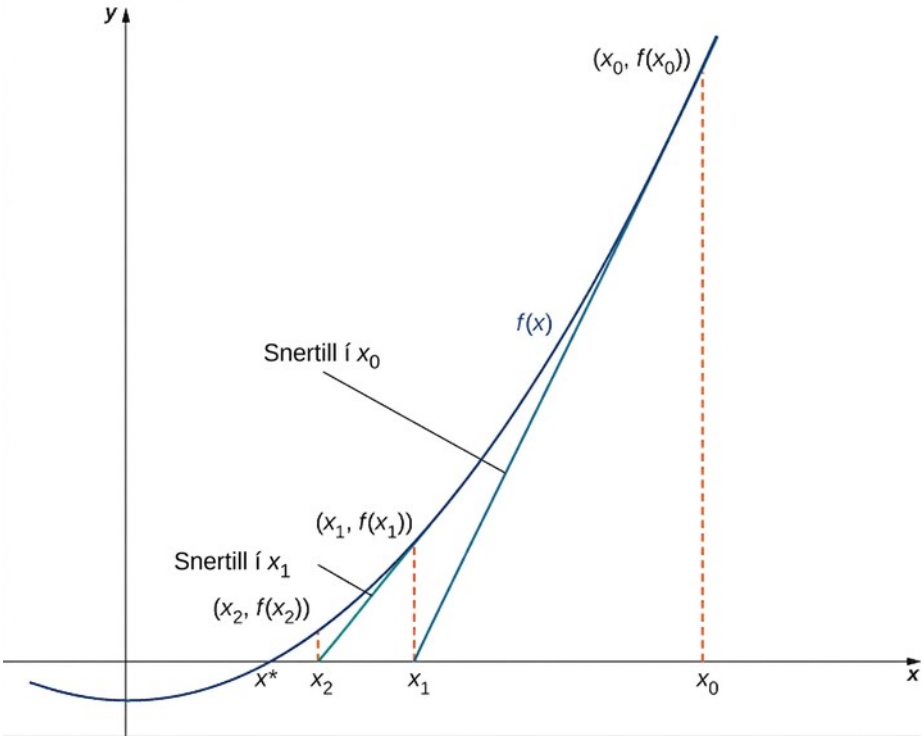
margliðan $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$, má finna lausnir jöfnunnar $f(x)=0$ með lausnarformúlu annars stigs jöfnu. Fyrir margliður af stigi 3 eða hærra verður þó flóknara að finna núllstöðvar fallsins f. Þótt til séu formúlur fyrir margliður af þriðja og fjórða stigi eru þær býsna flóknar. Ef f er margliða af stigi 5 eða hærra er jafnframt vitað að engar slíkar formúlur eru til. Lítum til dæmis á fallið

$$f(x)=x^5+8\,x^4+4\,x^3-2\,x-7.$$

Engin formúla er til sem gerir okkur kleift að finna lausnir jöfnunnar $f(x)=0$. Svipaður vandi kemur upp hjá föllum sem eru ekki margliðuföll. Hugsum okkur til dæmis að við viljum finna lausnir jöfnunnar $\tan(x)-x=0$. Engin einföld formúla er til fyrir lausnir þessarar jöfnu. Í slíkum tilvikum getum við notað aðferð Newtons til að nálga núllstöðvarnar.

Aðferð Newtons byggist á eftirfarandi hugmynd til að nálga lausnir jöfnunnar $f(x)=0$. Ef við teiknum grafið fyrir fallið f, getum við áætlað núllstöð jöfnunnar $f(x)=0$. Köllum þetta áætlaða gildi x_0. Síðan teiknum við snertil við graf f í x_0. Ef $f'(x_0)\neq 0$, sker snertillinn x-ásinn í punkti $(x_1,0)$. Látum nú x_1 vera næsta nálgunargildi fyrir raunverulegu núllstöðina. Yfirleitt er x_1 nær raunverulegri núllstöð en x_0. Því næst teiknum við snertil við graf f í x_1. Ef $f'(x_1)\neq 0$, sker snertillinn einnig x-ásinn og gefur þannig annað nálgunargildi, x_2. Við höldum áfram með sama hætti og fáum eftirfarandi runu nálgunargilda: $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Yfirleitt nálgast tölurnar $x_0, x_1, x_2, \ldots$ hratt þá raunverulegu núllstöð sem við táknum með $x*$, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.

4



Mynd 4.77 Nálgunargildin $x_0, x_1, x_2, \ldots$ nálgast raunverulegu núllstöðina $x*$. Nálgunargildin eru fundin með því að skoða snertla við graf f.

Nú skulum við skoða hvernig nálgunargildin $x_0, x_1, x_2, \ldots$ eru reiknuð. Ef x_0 er fyrsta nálgunargildið okkar er x_1 skilgreint með því að láta $(x_1, 0)$ vera skurðpunkt x-ássins og snertilsins við graf f í x_0. Jafna snertilsins er

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Því verður x_1 að uppfylla

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

Ef við leysum þessa jöfnu með tilliti til x_1, fáum við

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Á sama hátt er punkturinn $(x_2, 0)$ skurðpunktur x-ássins og snertilsins við graf f í x_1. Því uppfyllir x_2 eftirfarandi jöfnu

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Almennt gildir eftirfarandi jafna fyrir $n > 0$, x_n

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

(4.8)

Næst skoðum við hvernig nota má þessa aðferð til að nálga núllstöð margliðunnar $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

DÆMI 4.46

Að finna núllstöð margliðu

Notið aðferð Newtons til að nálga núllstöð $f(x) = x^3 - 3x + 1$ á bilinu $[1, 2]$. Látið $x_0 = 2$ og reiknið gildin x_1, x_2, x_3, x_4, ásamt x_5.

Lausn

Af mynd 4.78 sjáum við að f hefur eina núllstöð á bilinu $(1, 2)$. Því virðist $x_0 = 2$ vera skynsamlegt fyrsta nálgunargildi. Til að finna næsta nálgunargildi notum við jöfnu 4.8. Þar sem fallið er gefið með $f(x) = x^3 - 3x + 1$, fæst afleiðan $f'(x) = 3x^2 - 3$. Með því að nota jöfnu 4.8 þegar $n = 1$ (ásamt reiknivél sem sýnir 10 tölustafi) fáum við

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{3}{9} \approx 1{,}666666667.$$

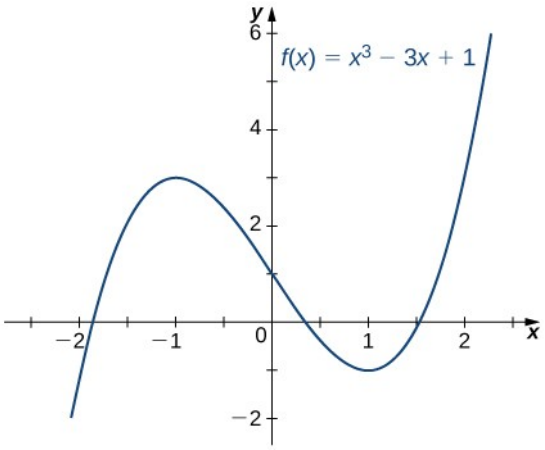
Til að finna næstu nálgun x_2, notum við jöfnu 4.8 með $n = 2$ og gildi x_1 sem vistað er í reiknivélinni. Þá fæst

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1{,}548611111.$$

Ef við höldum áfram á sama hátt fáum við eftirfarandi niðurstöður:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1{,}666666667 \\ x_2 &\approx 1{,}548611111 \\ x_3 &\approx 1{,}532390162 \\ x_4 &\approx 1{,}532088989 \\ x_5 &\approx 1{,}532088886 \\ x_6 &\approx 1{,}532088886. \end{aligned}$$

Við tökum eftir að við fengum sama gildi fyrir x_5 og x_6. Ef aðferð Newtons er notuð áfram fæst því að öllum líkindum sama gildi fyrir x_n.



Mynd 4.78 Fallið $f(x)=x^3-3x+1$ hefur eina núllstöð á bilinu $[1,2]$.

STÖÐUMAT 4.45

Látum $x_0=0$, og notum aðferð Newtons til að nálga núllstöð $f(x)=x^3-3x+1$ á bilinu $[0,1]$ með því að reikna x_1 og x_2.

Aðferð Newtons má einnig nota til að nálga kvaðratrætur. Hér sýnum við hvernig nálga má $\sqrt{2}$. Þessari aðferð má breyta til að nálga kvaðratrót hvaða jákvæðrar tölu sem er.

4

DÆMI 4.47

Ákvörðun kvaðratrótar

Notið aðferð Newtons til að nálga $\sqrt{2}$ (sjá mynd 4.79). Látið $f(x)=x^2-2$, veljið $x_0=2$, og reiknið x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. (Athugið að þar sem $f(x)=x^2-2$ hefur núllstöð í $\sqrt{2}$, er upphafsgildið $x_0=2$ skynsamlegt val til að nálga $\sqrt{2}$.)

Lausn

Fyrir $f(x)=x^2-2, f'(x)=2x$. Af jöfnu 4.8 vitum við að

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f\prime(x_{n-1})} \\ &= x_{n-1} - \frac{x^2{}_{n-1}-2}{2x_{n-1}} \\ &= \tfrac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

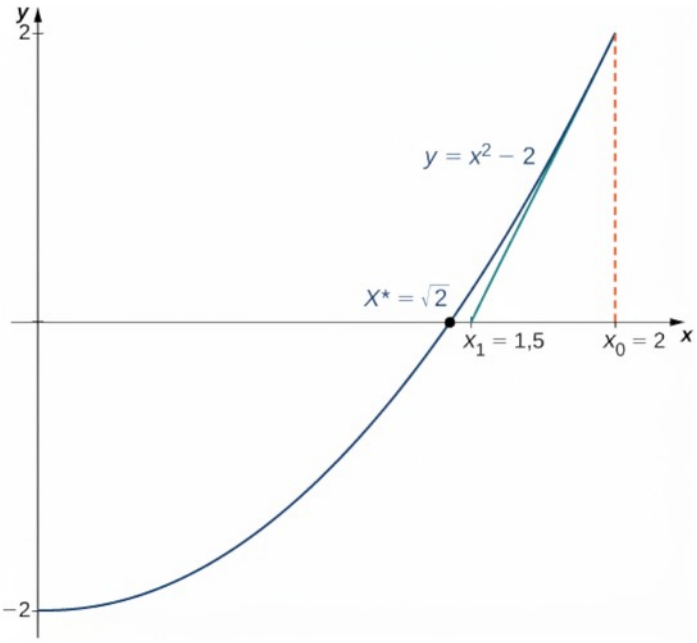
Því fæst

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right)=1{,}5$$
$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\left(1{,}5+\frac{2}{1{,}5}\right)\approx 1{,}416666667.$$

Ef við höldum áfram á sama hátt fæst

$$\begin{aligned} x_1&=1{,}5\\ x_2&\approx 1{,}416666667\\ x_3&\approx 1{,}414215686\\ x_4&\approx 1{,}414213562\\ x_5&\approx 1{,}414213562. \end{aligned}$$

Þar sem við fengum sama gildið fyrir x_4 og x_5, er ólíklegt að gildið x_n breytist þótt aðferð Newtons sé notuð áfram. Við ályktum að $\sqrt{2}\approx 1{,}414213562$.



Mynd 4.79 Við getum notað aðferð Newtons til að finna $\sqrt{2}$.

STÖÐUMAT 4.46

Notið aðferð Newtons til að nálga $\sqrt{3}$ með því að láta $f(x)=x^2-3$ og $x_0=3$. Finnið x_1 og x_2.

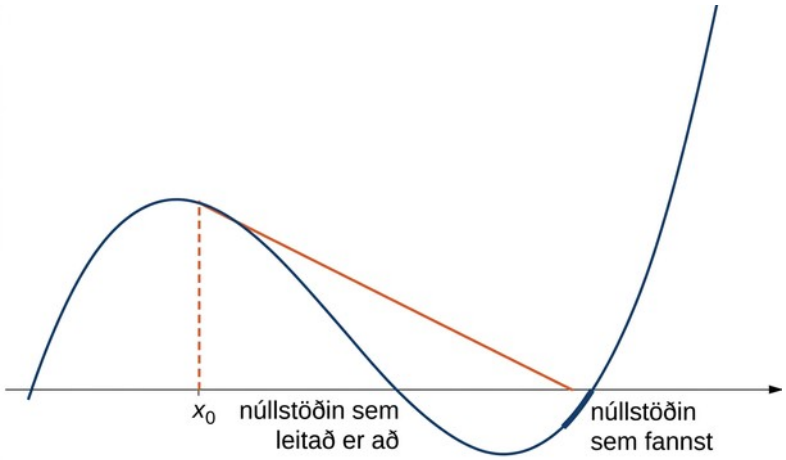
Þegar aðferð Newtons er notuð er hvert nálgunargildi á eftir upphafsgildinu skilgreint út frá fyrra nálgunargildi með sömu formúlu. Með því að skilgreina fallið $F(x)=x-\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$, getum við umritað jöfnu 4.8 sem $x_n=F(x_{n-1})$. Ferli af þessu tagi, þar sem hvert x_n er skilgreint út frá

x_{n-1} með því að beita sama fallinu aftur og aftur, er dæmi um ítrunarferli. Innan skamms skoðum við önnur ítrunarferli. Fyrst skulum við kanna hvers vegna aðferð Newtons finnur stundum ekki núllstöð.

Tilvik þar sem aðferð Newtons bregst

Yfirleitt finnur aðferð Newtons núllstöðvar tiltölulega hratt. Ýmislegt getur þó farið úrskeiðis. Aðferð Newtons getur til dæmis brugðist af eftirfarandi ástæðum:

1. Við eitt nálgunargildanna, x_n, er afleiðan f' jöfn núlli í x_n, en $f(x_n) \neq 0$. Af þeim sökum sker snertillinn við graf f í x_n ekki x-ásinn. Því getum við ekki haldið ítrunarferlinu áfram.
2. Nálgunargildin $x_0, x_1, x_2, \ldots$ kunna að nálgast aðra núllstöð. Ef fallið f hefur fleiri en eina núllstöð er mögulegt að nálgunargildi okkar nálgist ekki núllstöðina sem við leitum að heldur aðra núllstöð (sjá mynd 4.80). Þetta gerist oftast þegar upphafsgildið x_0 er ekki valið nógu nálægt núllstöðinni sem leitað er að.
3. Nálgunargildin kunna jafnvel að nálgast enga núllstöð. Í dæmi 4.48 skoðum við fall og upphafsgildið x_0 þar sem röð nálgunargilda nálgast aldrei núllstöð heldur víxlast sífellt milli tveggja gilda.



Mynd 4.80 Ef upphafsgildið x_0 er of fjarri núllstöðinni sem leitað er að geta nálgunargildin nálgast aðra núllstöð.

DÆMI 4.48

Þegar aðferð Newtons bregst

Skoðið fallið $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Látið $x_0 = 0$. Sýnið að runan $x_1, x_2, \ldots$ nálgist ekki núllstöð fallsins f.

Lausn

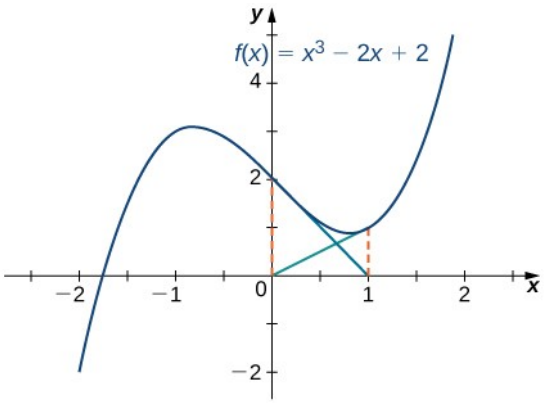
Þar sem fallið er gefið með $f(x) = x^3 - 2x + 2$, fæst afleiðan $f'(x) = 3x^2 - 2$. Því fæst

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

Í næsta skrefi fæst

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Þar af leiðandi víxlast tölurnar $x_0, x_1, x_2, \ldots$ áfram milli 0 og 1 án þess að nálgast núllstöð fallsins f, sem er á bilinu $[-2, -1]$ (sjá mynd 4.81). Sem betur fer getum við komist hjá þessu með því að velja upphafsgildið x_0 þannig að það sé nær raunverulegu núllstöðinni.



Mynd 4.81 Nálgunargildin halda áfram að skiptast á milli 0 og 1 og nálgast aldrei núllstöð f.

STÖÐUMAT 4.47

Fyrir $f(x) = x^3 - 2x + 2$, látið $x_0 = -1{,}5$ og finnið x_1 og x_2.

Af dæmi 4.48 sjáum við að aðferð Newtons virkar ekki alltaf. Þegar hún virkar nálgast runa nálgunargildanna hins vegar núllstöðina mjög hratt. Í ritum um tölulega greiningu er fjallað um það hve hratt runa nálgunargilda sem fæst með aðferð Newtons nálgast núllstöð.

Önnur ítrunarferli

Eins og áður kom fram er aðferð Newtons dæmi um ítrunarferli. Nú skoðum við annars konar ítrunarferli.

Lítum á fallið F og upphafsgildið x_0. Skilgreinum síðan tölurnar x_n með formúlunni $x_n = F(x_{n-1})$. Þetta ítrunarferli myndar talnarununa $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Talnarunan kann að nálgast endanlega tölu $x*$ þegar n vex, en það þarf ekki að gerast. Í dæmi 4.49 sjáum við hvernig fallið F og upphafsgildið x_0 mynda talnarunu sem nálgast endanlegt gildi.

DÆMI 4.49

Að finna markgildi í ítrunarferli

Látið $F(x)=\frac{1}{2}x+4$ og veljið $x_0=0$. Fyrir öll $n\geq 1$, skilgreinið $x_n=F(x_{n-1})$. Finnið gildin x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Setjið fram tilgátu um hvað verði um talnarununa $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$ þegar $n \to \infty$. Ef talnarunan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nálgast endanlega tölu $x*$, þá uppfyllir $x*$ jöfnuna $x* = F(x*)$, og $x*$ kallast fastapunktur fallsins F.

Lausn

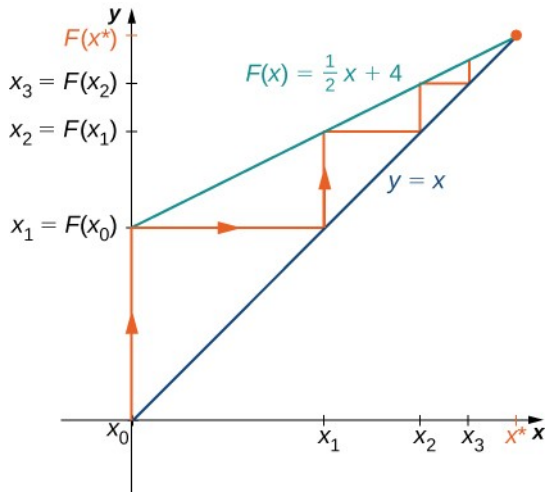
Ef $x_0=0$, fæst

$$x_1=\frac{1}{2}(0)+4=4$$
$$x_2=\frac{1}{2}(4)+4=6$$
$$x_3=\frac{1}{2}(6)+4=7$$
$$x_4=\frac{1}{2}(7)+4=7{,}5$$
$$x_5=\frac{1}{2}(7{,}5)+4=7{,}75$$
$$x_6=\frac{1}{2}(7{,}75)+4=7{,}875$$
$$x_7=\frac{1}{2}(7{,}875)+4=7{,}9375$$
$$x_8=\frac{1}{2}(7{,}9375)+4=7{,}96875$$
$$x_9=\frac{1}{2}(7{,}96875)+4=7{,}984375.$$

Út frá þessari talnarunu setjum við fram þá tilgátu að gildin x_n nálgist 8.

Mynd 4.82 sýnir myndrænt að gildin nálgast 8 þegar $n \to \infty$. Byrjum í punktinum (x_0, x_0), og drögum lóðrétt strik að punktinum $(x_0, F(x_0))$. Næsta talan í runnunni er $x_1=F(x_0)$. Við notum x_1 til að reikna x_2. Því drögum við lárétt strik frá (x_0, x_1) að punktinum (x_1, x_1) á línunni $y=x$, og síðan lóðrétt strik frá (x_1, x_1) að punktinum $(x_1, F(x_1))$. Gildið $F(x_1)$ verður x_2. Með því að halda áfram á þennan hátt gætum við myndað óendanlega mörg strik. Strikin liggja milli grafanna $F(x)=\frac{x}{2}+4$ og $y=x$. Strikin nálgast skurðpunkt grafanna, þar sem $x=F(x)$. Ef við leysum jöfnuna $x=\frac{x}{2}+4$, sjáum við að gröfin skerast þegar $x=8$. Myndræna

niðurstaðan samræmist tölulegu niðurstöðunni: talnarunan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ nálgast $x* = 8$ þegar $n \to \infty$.



Mynd 4.82 Þetta ítrunarferli nálgast gildið $x* = 8$.

STÖÐUMAT 4.48

4

Skoðið fallið $F(x) = \frac{1}{3}x + 6$. Látið $x_0 = 0$ og skilgreinið $x_n = F(x_{n-1})$ þegar $n \geq 2$. Finnið x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Setjið fram tilgátu um hvað verði um talnarununa $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ þegar $n \to \infty$.

NEMENDAVERKEFNI

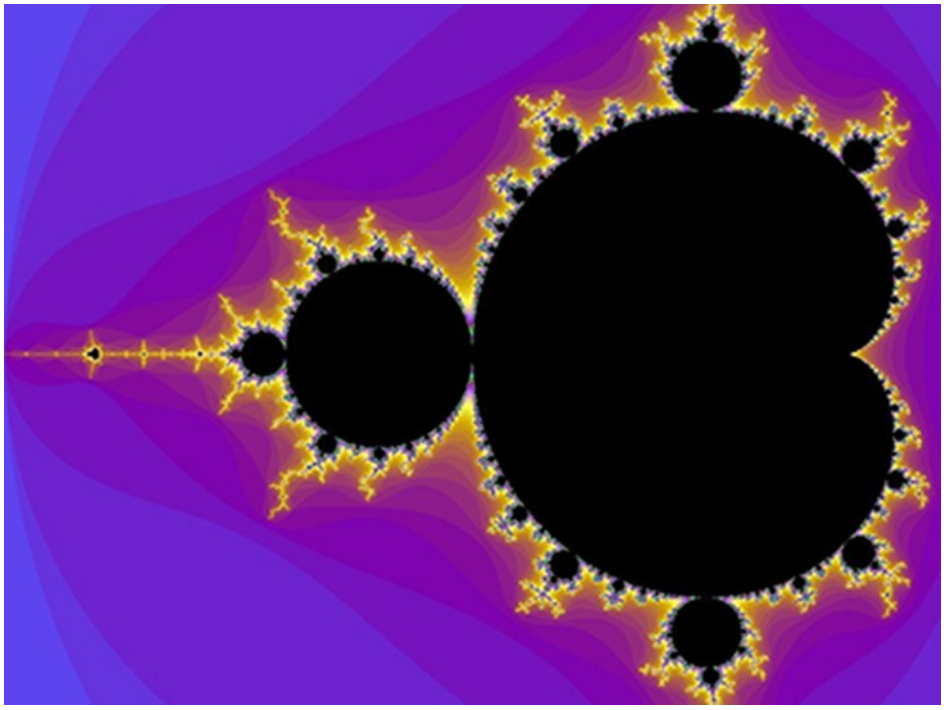
Ítrunarferli og óreiða

Ítrunarferli geta hegðað sér á afar áhugaverðan hátt. Í þessum undirkafla höfum við séð nokkur dæmi um ítrunarferli sem nálgast fastapunkt. Við sáum einnig í dæmi 4.48 að ítrunarferlið víxlaðist milli tveggja gilda. Slíka hegðun köllum við 2-lotu. Ítrunarferli geta nálgast lotur af mismunandi lengd, svo sem 2 − lotur, 4 − lotur (þar sem ítrunarferlið endurtekur röð fjögurra gilda), 8-lotur og svo framvegis.

Sum ítrunarferli leiða til þess sem stærðfræðingar kalla óreiðu. Þá virðist ferlið stökkva af handahófi milli gilda; það samleitar aldrei og festist ekki í lotu. Þótt ítarleg umfjöllun um óreiðu sé utan við efni þessarar bókar skoðum við hér einn af lykileiginleikum óreiðukennds ítrunarferlis: næmt háð upphafsskilyrðum. Með því er átt við að litlar breytingar á upphafsskilyrðum geti gerbreytt hegðun ítrunarferlisins.

Þekktasta dæmið um óreiðu er líklega Mandelbrot-mengið (sjá mynd 4.83), sem kennt er við Benoit Mandelbrot (1924–2010), en hann rannsakaði eiginleika þess og átti þátt í að vekja athygli á óreiðukenningunni. Mandelbrot-mengið er yfirleitt myndað í tölvu og við stækkun koma í ljós heillandi smáatriði, þar á meðal sjálfseftirmyndun mengisins. Nokkrar litaðar

útgáfur af menginu hafa verið sýndar á söfnum og má finna þær á netinu og í vinsælum bókum um efnið.



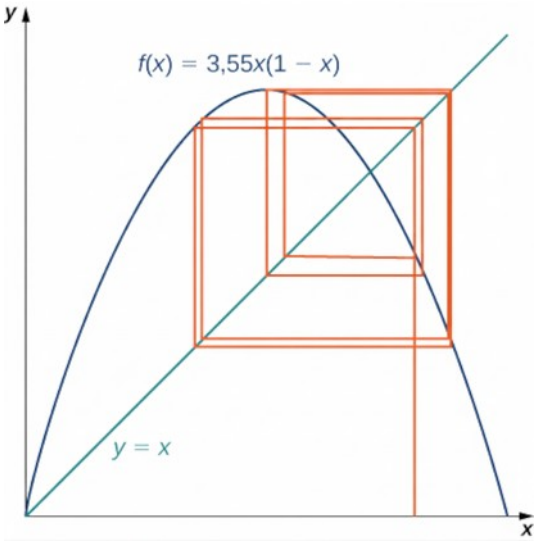
Mynd 4.83 Mandelbrot-mengið er vel þekkt dæmi um punktamengi sem myndast við ítrekaða óreiðukennda hegðun tiltölulega einfalds falls.

Í þessu verkefni notum við lógistísku vörpunina

$$f(x)=r\,x(1-x),\ \text{þar sem}\ x\in[0,1]\ \text{og}\ r>0$$

sem fall í ítrunarferlinu okkar. Lógistíska vörpunin virðist einföld en gildi stikunnar r, sem ræður hegðun ítrunarferlisins, getur leitt til fastapunkta, lota og jafnvel óreiðu.

Til að sjá fyrir okkur langtímahegðun ítrunarferlisins sem fylgir lógistísku vörpuninni notum við verkfæri sem kallast köngulóarvefsrit. Líkt og við gerðum með ítrunarferlið sem við skoðuðum fyrr í þessum undirkafla drögum við fyrst lóðrétta línu frá punktinum $(x_0,0)$ að punktinum $(x_0,f(x_0))=(x_0,x_1)$. Síðan drögum við lárétta línu frá þeim punkti að punktinum (x_1,x_1), drögum því næst lóðrétta línu að $(x_1,f(x_1))=(x_1,x_2)$, og höldum ferlinu áfram þar til langtímahegðun kerfisins kemur í ljós. Mynd 4.84 sýnir langtímahegðun lógistísku vörpunarinnar þegar $r=3{,}55$ og $x_0=0{,}2$. (Fyrstu 100 ítranirnar eru ekki sýndar.) Langtímahegðun þessa ítrunarferlis er 8-lota.



Mynd 4.84 Köngulóarvefsrit fyrir $f\left(x\right)=3{,}55\ x\left(1-x\right)$ er sýnt hér. Gildarunan myndar 8-lotu.

1. Látið $r=0{,}5$ og veljið $x_0=0{,}2$. Reiknið fyrstu 10 gildi rununnar, annaðhvort í höndunum eða með tölvu. Virðist runan samleita? Ef svo er, að hvaða gildi? Myndar hún lotu? Ef svo er, af hvaða lengd (til dæmis $2-\text{lota}, 4-\text{lota}.$)?
2. Hvað gerist þegar $r=2$?
3. For $r=3{,}2$ and $r=3{,}5$, calculate the first 100 sequence values. Generate a cobweb diagram for each iterative process. (Several free applets are available online that generate cobweb diagrams for the logistic map.) What is the long-term behavior in each of these cases?
4. Látið nú $r=4$. Reiknið fyrstu 100 gildi rununnar og teiknið köngulóarvefsrit. Hver er langtímahegðunin í þessu tilviki?
5. Endurtakið ferlið fyrir $r=4$, en látið $x_0=0{,}201$. Hvernig er hegðunin frábrugðin hegðuninni þegar $x_0=0{,}2$?

Æfingar úr kafla 4.9

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita formúlu Newtons sem $x_{n+1}=F\left(x_n\right)$ til að leysa $f\left(x\right)=0$.

406.

$$f\left(x\right)=x^2+1$$

407.

$$f\left(x\right)=x^3+2x+1$$

408.

$$f\left(x\right)=\sin x$$

409.

$$f(x)=e^x$$

410.

$$f(x)=x^3+3xe^x$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið leysa $f(x)=0$ með ítruninni $x_{n+1}=x_n-cf(x_n)$, sem er lítillega frábrugðin aðferð Newtons. Finnið eitt gildi c sem virkar og annað gildi c sem veldur því að ítrunin samleitar ekki. Sleppið gildinu $c=0$.

411. $f(x)=x^2-4$, með $x_0=0$

412. $f(x)=x^2-4x+3$, með $x_0=2$

413. Hvert er gildi "c" í aðferð Newtons?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið byrja með

a. $x_0=0{,}6$ og

b. $x_0=2$.

Reiknið x_1 og x_2 með tilgreindri ítrunaraðferð.

414.

$$x_{n+1}=x_n{}^2-\frac{1}{2}$$

415.

$$x_{n+1}=2x_n(1-x_n)$$

416.

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n}$$

417.

$$x_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{x_n}}$$

418.

$$x_{n+1}=3x_n(1-x_n)$$

419.

$$x_{n+1}=x_n{}^2+x_n-2$$

420.

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-1$$

421.

$$x_{n+1}=\left|x_n\right|$$

Leysið jöfnurnar í eftirfarandi æfingum með fjögurra aukastafa nákvæmni. Notið aðferð Newtons og tölvu eða reiknivél. Veljið eitthvert upphafsgildi x_0 sem er ekki nákvæmlega núllstöð.

422.

$$x^2-10=0$$

423.

$$x^4-100=0$$

424.

$$x^2-x=0$$

425.

$$x^3-x=0$$

426.

$$x+5\cos(x)=0$$

4

427. $x+\tan(x)=0$, veljið $x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

428.

$$\frac{1}{1-x}=2$$

429.

$$1+x+x^2+x^3+x^4=2$$

430.

$$x^3+(x+1)^3=10^3$$

431.

$$x=\sin^2(x)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota aðferð Newtons til að finna fastapunkta fallsins þar sem $f(x)=x$; námundið að þremur aukastöfum.

432.

$$\sin x$$

433. $\tan(x)$ á $x=\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

434.

$$e^x-2$$

435.

$$\ln(x)+2$$

Aðferð Newtons má nota til að finna hágildi og lággildi falla auk núllstöðva þeirra. Þá er aðferð Newtons notuð á afleiðufallið $f'(x)$ en ekki á upphaflega fallið, til að finna núllstöðvar afleiðufallsins. Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota aðferðina á þennan hátt.

436. Til að finna möguleg hágildi og lággildi þurfum við að finna stöðupunkta fallsins, þar sem $f'(x)=0$. Sýnið að þegar leitað er að stöðupunktum fallsins $f(x)$, gefur aðferð Newtons formúluna $x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$.

437. Hvaða viðbótarskilyrði þarf að gilda um fallið f?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota aðferð Newtons til að ákvarða hvar staðbundin lággildi og/eða hágildi eftirfarandi falla eru; námundið að þremur aukastöfum.

438. Lággildi $f(x)=x^2+2x+4$

439. Lággildi $f(x)=3x^3+2x^2-16$

440. Lággildi $f(x)=x^2e^x$

441. Hágildi $f(x)=x+\frac{1}{x}$

442. Hágildi $f(x)=x^3+10x^2+15x-2$

443. Hágildi $f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}$

444. Lággildi fallsins $f(x)=x^2\sin x$, það lággildi sem er ekki í núllpunktinum og er næst $x=0$

445. Lággildi $f(x)=x^4+x^3+3x^2+12x+6$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið leysa jöfnuna með tilgreindri aðferð. Ef aðferðin virkar ekki, útskýrið hvers vegna.

446. aðferð Newtons, $x^2+2=0$

447. aðferð Newtons, $0=e^x$

448. aðferð Newtons, $0=1+x^2$ með upphafsgildi $x_0=0$

449. Leysið $x_{n+1}=-{x_n}^3$ með upphafsgildinu $x_0=-1$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota sniðilsaðferðina, sem er ítrunaraðferð sem nota má í stað aðferðar Newtons. Formúlan er

$$x_n=x_{n-1}-f\left(x_{n-1}\right)\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_{n-2}\right)}.$$

450. Finnið núllstöð jöfnunnar $0=x^2-x-3$ með þriggja aukastafa nákvæmni.

451. Finnið núllstöð jöfnunnar $0=\sin x+3x$ með fjögurra aukastafa nákvæmni.

452. Finnið núllstöð jöfnunnar $0=e^x-2$ með fjögurra aukastafa nákvæmni.

453. Finnið núllstöð jöfnunnar $\ln\left(x+2\right)=\frac{1}{2}$ með fjögurra aukastafa nákvæmni.

454. Hvers vegna ætti að nota sniðilsaðferðina fremur en aðferð Newtons? Hvaða nauðsynlegu skilyrði þurfa að gilda um f?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna núllstöð hverrar jöfnu bæði með aðferð Newtons og sniðilsaðferðinni. Notið reiknivél eða tölvu til að reikna hve margar ítranir þarf með hvorri aðferð til að nálgunin sé rétt með þriggja aukastafa nákvæmni. Í sniðilsaðferðinni skuluð þið nota fyrstu ágiskunina úr aðferð Newtons.

4

455.

$$f\left(x\right)=x^2+2x+1,x_0=1$$

456.

$$f\left(x\right)=x^2,x_0=1$$

457.

$$f\left(x\right)=\sin x,x_0=1$$

458.

$$f\left(x\right)=e^x-1,x_0=2$$

459.

$$f\left(x\right)=x^3+2x+4,x_0=0$$

Í eftirfarandi æfingum er fjallað um jöfnu Keplers fyrir brautir reikistjarna, $M=E-\varepsilon\sin\left(E\right)$, þar sem M táknar meðalfrávikið, E táknar hjámiðjufrávikið og ε táknar hjámiðju brautarinnar.

460. Use Newton's method to solve for the eccentric anomaly E when the mean anomaly $M=\frac{\pi}{3}$ and the eccentricity of the orbit $\varepsilon=0{,}25$; round to three decimals.

461. Notið aðferð Newtons til að finna hjámiðjufrávikið E þegar meðalfrávikið er $M=\frac{3\pi}{2}$ og hjámiðja brautarinnar er $\varepsilon=0{,}8$; námundið að þremur aukastöfum.

Í næstu tveimur æfingum er fjallað um fjárfestingu í banka. Upphaflega fjárfestingin er 10.000 €. Eftir 25 ár hefur fjárfestingin þrefaldast og er orðin 30.000 €.

462. Notið aðferð Newtons til að ákvarða vextina ef þeir eru lagðir við höfuðstól árlega.

463. Notið aðferð Newtons til að ákvarða vextina ef miðað er við samfellda vaxtavöxtun.

464. Heildarkostnaði við að prenta x bækur má lýsa með jöfnunni $C(x)=1000+12x+\left(\frac{1}{2}\right)x^{2/3}$. Notið aðferð Newtons til að finna jafnvægispunktinn ef prentsmiðjan selur hverja bók á $\$20$.

4.10 Stofnföll

NÁMSMARKMIÐ

- 4.10.1 Finna almennt stofnfall gefins falls.
- 4.10.2 Útskýra hugtökin og táknunina sem notuð eru um óákveðin heildi.
- 4.10.3 Setja fram veldisregluna fyrir heildi.
- 4.10.4 Nota stofnföll til að leysa einföld upphafsgildisverkefni.

Hingað til höfum við séð hvernig reikna má afleiður margra falla og kynnst ýmiss konar notkun þeirra. Nú snúum við ferlinu við. Skoðum fallið f, sem er gefið. Við viljum finna fall sem hefur afleiðuna f. Hvers vegna höfum við áhuga á slíku falli?

Fyrri hluta spurningarinnar svörum við með skilgreiningu stofnfalls. Stofnfall falls f er fall sem hefur afleiðuna f. Hvers vegna skipta stofnföll máli? Stofnfalla er þörf við fjölmargar aðstæður og ýmis dæmi verða skoðuð síðar í bókinni. Hér skoðum við dæmi um hreyfingu eftir beinni línu. Í umfjölluninni um afleiður hreyfingar eftir beinni línu sýndum við að ef staðsetningarfall hlutar, $s(t)$, er þekkt, er hraðafall hans $v(t)$ afleiða staðsetningarfallsins $s(t)$ — það er $v(t)=s'(t)$. Hröðunin $a(t)$ er aftur afleiða hraðafallsins $v(t)$ — það er $a(t)=v'(t)=s''(t)$. Gerum nú ráð fyrir að gefið sé hröðunarfall a, en hvorki hraðafallið v né staðsetningarfallið s. Þar sem $a(t)=v'(t)$, finnum við hraðafallið með því að finna stofnfall hröðunarfallsins. Þar sem $v(t)=s'(t)$, finnum við síðan staðsetningarfallið með því að finna stofnfall hraðafallsins. Hreyfing eftir beinni línu er aðeins eitt dæmi um aðstæður þar sem stofnfalla er þörf. Mun fleiri dæmi koma fyrir síðar í bókinni. Skoðum nú hugtakanotkun og táknun stofnfalla og finnum stofnföll nokkurra gerða falla. Síðar í bókinni kynnumst við ýmsum aðferðum við að finna stofnföll flóknari falla (Inngangur að heildunaraðferðum).

Andhverfa deildunar

Nú kunnum við að finna afleiður ýmissa falla og snúum því spurningunni við. Skoðum fallið f, sem er gefið. Hvernig finnum við þá fall sem hefur afleiðuna f? Ef til er fall F sem hefur afleiðuna f, þá köllum við F stofnfall fallsins f.

SKILGREINING

Fall F er stofnfall fallsins f ef

$$F'(x)=f(x)$$

fyrir öll x í skilgreiningarmengi f.

Skoðum fallið $f(x)=2x$. Með hliðsjón af veldisreglunni fyrir deildun ályktum við að $F(x)=x^2$ sé stofnfall f þar sem $F'(x)=2x$. Eru til önnur stofnföll f? Já; þar sem afleiða sérhvers fasta C er núll, er x^2+C einnig stofnfall $2x$. Því eru x^2+5 og $x^2-\sqrt{2}$ einnig stofnföll. Eru til einhver önnur sem eru ekki á forminu x^2+C fyrir einhvern fasta C? Svarið er nei. Af fylgisetningu 2 við meðalgildissetninguna vitum við að ef F og G eru deildanleg föll þannig að $F'(x)=G'(x)$, þá er $F(x)-G(x)=C$ fyrir einhvern fasta C. Þessi staðreynd leiðir til eftirfarandi mikilvægrar setningar.

4

SETNING 4.14

Almennt form stofnfalls

Látum F vera stofnfall fyrir f á bili I. Þá gildir:

i. fyrir sérhvern fasta C, er fallið $F(x)+C$ einnig stofnfall fyrir f á I;

ii. ef G er stofnfall fyrir f á I, þá er til fasti C þannig að $G(x)=F(x)+C$ á I.

Með öðrum orðum er almennasta stofnfallið fyrir f á I af gerðinni $F(x)+C$.

Við notum þessa staðreynd og þekkingu okkar á afleiðum til að finna öll stofnföll nokkurra falla.

DÆMI 4.50

Að finna stofnföll

Finnið öll stofnföll fyrir hvert eftirfarandi fall.

a. $f(x)=3x^2$

b. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

c. $f(x)=\cos x$

d. $f(x)=e^x$

Lausn

a. Þar sem

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$$

er $F(x)=x^3$ stofnfall fyrir $3x^2$. Því er sérhvert stofnfall fyrir $3x^2$ af gerðinni x^3+C fyrir einhvern fasta C, og sérhvert fall af gerðinni x^3+C er stofnfall fyrir $3x^2$.

b. Látum $f(x)=\ln|x|$. Fyrir $x>0$, $f(x)=\ln(x)$ og

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)=\frac{1}{x}.$$

Fyrir $x<0$, $f(x)=\ln(-x)$ og

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(-x)\right)=-\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}.$$

Því er

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x}.$$

Því er $F(x)=\ln|x|$ stofnfall fyrir $\frac{1}{x}$. Þar af leiðandi er sérhvert stofnfall fyrir $\frac{1}{x}$ af gerðinni $\ln|x|+C$ fyrir einhvern fasta C og sérhvert fall af gerðinni $\ln|x|+C$ er stofnfall fyrir $\frac{1}{x}$.

c. Við höfum

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)=\cos x,$$

er $F(x)=\sin x$ stofnfall fyrir $\cos x$. Því er sérhvert stofnfall fyrir $\cos x$ af gerðinni $\sin x+C$ fyrir einhvern fasta C og sérhvert fall af gerðinni $\sin x+C$ er stofnfall fyrir $\cos x$.

d. Þar sem

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x,$$

er $F(x)=e^x$ stofnfall fyrir e^x. Því er sérhvert stofnfall fyrir e^x af gerðinni e^x+C fyrir einhvern fasta C og sérhvert fall af gerðinni e^x+C er stofnfall fyrir e^x.

STÖÐUMAT 4.49

Finnið öll stofnföll fyrir fallið $f(x)=\sin x$.

Óákveðin heildi

Nú skoðum við formlegu táknunina fyrir stofnföll og nokkra eiginleika þeirra. Með þessum eiginleikum getum við fundið stofnföll flóknari falla. Fyrir fallið f, sem hér er gefið, notum við táknin $f'(x)$ og $\frac{df}{dx}$ fyrir afleiðu f. Hér innleiðum við táknun fyrir stofnföll. Ef F er stofnfall fyrir f, segjum við að $F(x)+C$ sé almennasta stofnfallið fyrir f og ritum

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Táknið $\int$ kallast heildismerki og $\int f(x)\,dx$ kallast óákveðið heildi fallsins f.

SKILGREINING

Fyrir fallið f, sem hér er gefið, er óákveðið heildi fallsins f, táknað með

$$\int f(x)\,dx,$$

er almennasta stofnfallið fyrir f. Ef F er stofnfall fyrir f, þá

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

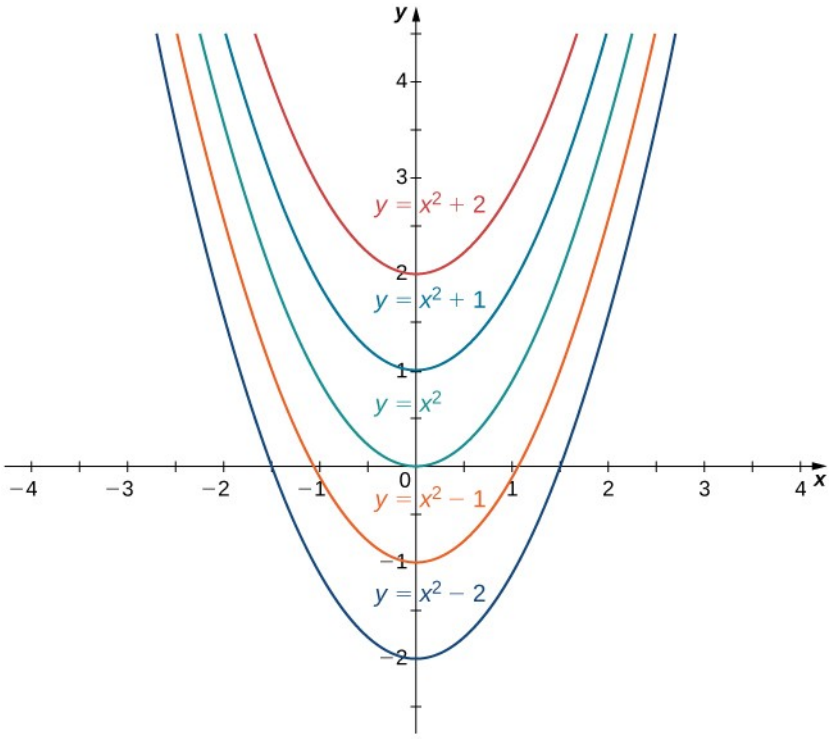
Stæðan $f(x)$ kallast heildisstofn og breytan x er heildunarbreyta.

Í samræmi við hugtökin í þessari skilgreiningu kallast það að finna stofnföll fallsins f yfirleitt að heilda fallið f.

Látum f vera fall og F, eitt stofnfall þess. Föllin $F(x)+C$, þar sem C er hvaða rauntala sem er, mynda stofnfallafjölskyldu fallsins f. Þar sem x^2 er stofnfall fyrir $2x$ og sérhvert stofnfall fyrir $2x$ er af gerðinni x^2+C, ritum við

$$\int 2x\,dx=x^2+C.$$

Safn allra falla af gerðinni x^2+C, þar sem C er hvaða rauntala sem er, nefnist fjölskylda stofnfalla fallsins $2x$. Mynd 4.85 sýnir graf þessarar stofnfallafjölskyldu.



Mynd 4.85 Fjölskylda stofnfalla fallsins $2x$ samanstendur af öllum föllum á forminu x^2+C, þar sem C er hvaða rauntala sem er.

Fyrir sum föll má reikna óákveðin heildi beint út frá eiginleikum afleiða. Til dæmis, fyrir $n\neq -1$,

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$$

sem fæst beint af

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=(n+1)\frac{x^n}{n+1}=x^n.$$

Þessi staðreynd er þekkt sem veldisreglan fyrir heildi.

SETNING 4.15

Veldisregla fyrir heildi

Fyrir $n\neq -1$,

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Einnig er einfalt að reikna óákveðin heildi nokkurra annarra falla. Í eftirfarandi töflu eru talin upp óákveðin heildi nokkurra algengra falla. Ítarlegri listi er í viðauka A.

Tafla 4.13 Heildunarformúlur

Deildunarformúla	Óákveðið heildi
$\frac{d}{dx}(k)=0$	$\int k\,dx=\int k\,x^0\,dx=kx+C$
$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ fyrir $n\neq -1$
$\frac{d}{dx}(\ln\lvert x\rvert)=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\lvert x\rvert+C$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x+C$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$
$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
$\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$
$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x+C$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x+C$
$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx=\sec^{-1}x+C$

Samkvæmt skilgreiningu óákveðins heildis fallsins f, vitum við

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

þá og því aðeins að F sé stofnfall fyrir f. Þegar fullyrt er að

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

þarf því að kanna hvort fullyrðingin sé rétt með því að sannreyna að $F'(x) = f(x)$.

DÆMI 4.51

Sannprófun óákveðins heildis

Allar eftirfarandi fullyrðingar eru á forminu $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Sannreynið hverja þeirra með því að sýna að $F'(x) = f(x)$.

a. $\int \left(x + e^x\right) dx = \frac{x^2}{2} + e^x + C$

b. $\int x e^x\,dx = x e^x - e^x + C$

Lausn

a. Þar sem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + e^x + C\right) = x + e^x,$$

staðhæfingin

$$\int \left(x + e^x\right) dx = \frac{x^2}{2} + e^x + C$$

rétt. Athugið að hér sannreynum við óákveðið heildi summu. Enn fremur eru $\frac{x^2}{2}$ og e^x stofnföll fallanna x og e^x, hvort um sig, og summa stofnfallanna er stofnfall summunnar. Við fjöllum aftur um þessa staðreynd síðar í þessum undirkafla.

b. Með margfeldisreglunni sjáum við að

$$\frac{d}{dx}\left(x e^x - e^x + C\right) = e^x + x e^x - e^x = x e^x.$$

Því er staðhæfingin

$$\int x e^x\,dx = x e^x - e^x + C$$

rétt. Athugið að hér sannreynum við óákveðið heildi margfeldis. Stofnfallið $x e^x - e^x$ er ekki margfeldi stofnfallanna. Enn fremur er margfeldi stofnfallanna, $x^2 e^x/2$, ekki stofnfall fyrir $x e^x$ þar sem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2e^x}{2}\right)=xe^x+\frac{x^2e^x}{2}\neq xe^x.$$

Almennt er margfeldi stofnfalla ekki stofnfall fyrir margfeldi.

STÖÐUMAT 4.50

Sannreynið að $\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+C$.

Í töflu 4.13 tókum við saman óákveðin heildi margra einfaldra falla. Beinum nú sjónum að því að reikna óákveðin heildi flóknari falla. Skoðum til dæmis hvernig finna má stofnfall summunnar $f+g$. Í dæmi 4.51a sýndum við að stofnfall summunnar $x+e^x$ er summan $\left(\frac{x^2}{2}\right)+e^x$. Stofnfall summu er með öðrum orðum summa stofnfallanna. Þessi niðurstaða einskorðast ekki við þetta dæmi. Almennt gildir að ef F og G eru stofnföll fallanna f og g, í sömu röð, þá

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)+G(x)\big)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x).$$

Því er $F(x)+G(x)$ stofnfall fyrir $f(x)+g(x)$ og þá gildir

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)\,dx=F(x)+G(x)+C.$$

Á sama hátt gildir

$$\int\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=F(x)-G(x)+C.$$

Skoðum jafnframt hvernig finna má stofnfall fyrir $kf(x)$, þar sem k er rauntala. Þar sem

$$\frac{d}{dx}\big(kf(x)\big)=k\frac{d}{dx}F(x)=kf'(x)$$

fyrir sérhverja rauntölu k, ályktum við að

$$\int kf(x)\,dx=kF(x)+C.$$

Þessir eiginleikar eru teknir saman hér á eftir.

SETNING 4.16

Eiginleikar óákveðinna heilda

Látum F og G vera stofnföll fyrir f og g, í sömu röð, og látum k vera rauntölu.

Summur og mismunir

$$\int\big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx=F(x)\pm G(x)+C$$

Fastamargfeldi

$$\int k f(x)\,dx = k F(x) + C$$

Með þessari setningu getum við reiknað hvert það heildi sem felur í sér summu, mismun eða fastamargfeldi falla sem hafa þekkt stofnföll. Flóknara er að reikna heildi sem fela í sér margfeldi, kvóta eða samskeytingar (sjá dæmi 4.51b., þar sem fjallað er um stofnfall margfeldis). Við skoðum og reiknum heildi sem fela í sér þessi flóknari föll í Inngangi að heildun. Í næsta dæmi skoðum við hvernig nota má þessa setningu til að reikna óákveðin heildi nokkurra falla.

DÆMI 4.52

Útreikningur óákveðinna heilda

Reiknið hvert eftirfarandi óákveðið heildi:

a. $\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3x + 4\right) dx$

b. $\int \frac{x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$

c. $\int \frac{4}{1+x^2}\,dx$

d. $\int \tan x \cos x\,dx$

Lausn

a. Með því að nota eiginleika óákveðinna heilda getum við heildað hvern hinna fjögurra liða í heildisstofninum fyrir sig. Við fáum

$$\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3x + 4\right) dx = \int 5x^3\,dx - \int 7x^2\,dx + \int 3x\,dx + \int 4\,dx.$$

Af síðari hluta eiginleika óákveðinna heilda leiðir að rita má hvern stuðul framan við heildismerkið, sem gefur

$$\int 5x^3\,dx - \int 7x^2\,dx + \int 3x\,dx + \int 4\,dx = 5\int x^3\,dx - 7\int x^2\,dx + 3\int x\,dx + 4\int 1\,dx.$$

Með því að nota veldisregluna fyrir heildi ályktum við að

$$\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3x + 4\right) dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$$

b. Umritið heildisstofninn sem

$$\frac{x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Til að reikna heildið skal síðan heilda hvorn þessara liða fyrir sig. Með veldisreglunni fæst

$$\begin{aligned}\int \left(x+\frac{4}{x^{2/3}}\right)dx &= \int x\,dx + 4\int x^{-2/3}dx \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + 4\tfrac{1}{(\frac{-2}{3})+1}x^{(-2/3)+1} + C \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + 12x^{1/3} + C.\end{aligned}$$

c. Notið eiginleika óákveðinna heilda til að rita heildið sem

$$4\int \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Notið síðan þá staðreynd að $\tan^{-1}(x)$ er stofnfall fyrir $\frac{1}{(1+x^2)}$ og ályktið að

$$\int \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\tan^{-1}(x)+C.$$

d. Umritið heildisstofninn sem

$$\tan x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}\cos x = \sin x.$$

Því er

$$\int \tan x\cos x = \int \sin x = -\cos x + C.$$

4

STÖÐUMAT 4.51

Reiknið $\int \left(4x^3 - 5x^2 + x - 7\right)dx$.

Upphafsgildisverkefni

Síðar í bókinni skoðum við aðferðir til að heilda fjölbreytt föll sem fela í sér margfeldi, kvóta og samskeytingar. Hér snúum við okkur að algengri notkun stofnfalla sem kemur víða við sögu: að leysa deildajöfnur.

Deildajafna er jafna sem tengir óþekkt fall og eina eða fleiri afleiður þess. Jafnan

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

(4.9)

er einfalt dæmi um deildajöfnu. Að leysa þessa jöfnu felst í að finna fall y með afleiðuna f. Lausnir jöfnu 4.9 eru því stofnföll fyrir f. Ef F er stofnfall fyrir f, er sérhvert fall af gerðinni $y = F(x) + C$ lausn þeirrar deildajöfnu. Til dæmis eru lausnir

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2$$

eru gefnar með

$$y=\int 6x^2\,dx=2x^3+C.$$

Stundum viljum við ákvarða hvort tiltekinn lausnarferill liggi um ákveðinn punkt (x_0, y_0) — það er að segja, $y(x_0)=y_0$. Verkefni sem felst í að finna fall y sem uppfyllir deildajöfnu

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

(4.10)
með viðbótarskilyrðinu

$$y(x_0)=y_0$$

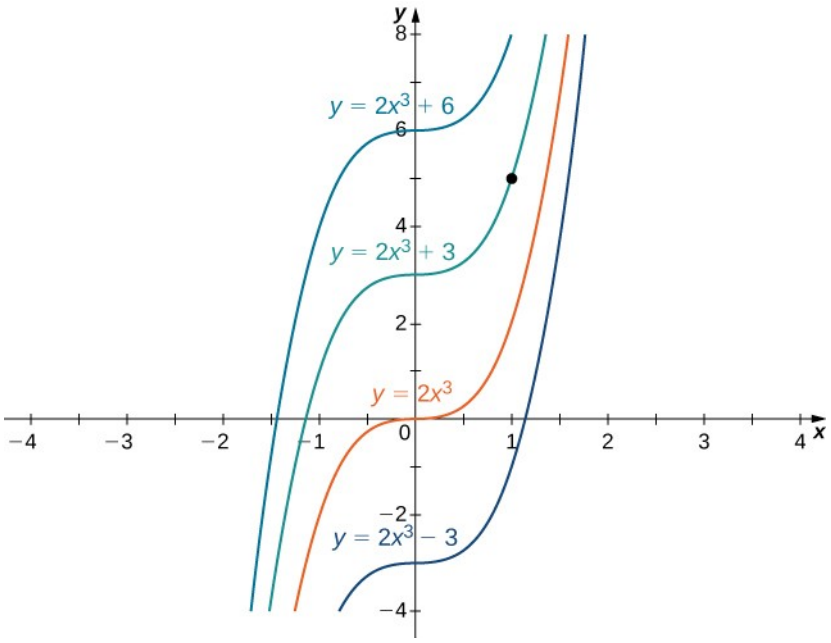
(4.11)
er dæmi um upphafsgildisverkefni. Skilyrðið $y(x_0)=y_0$ er kallað upphafsskilyrði. Leit að falli y sem uppfyllir deildajöfnuna

$$\frac{dy}{dx}=6x^2$$

og upphafsskilyrðið

$$y(1)=5$$

er til dæmis upphafsgildisverkefni. Þar sem lausnir deildajöfnunnar eru $y=2x^3+C$, finnum við fall y sem uppfyllir einnig upphafsskilyrðið með því að finna C þannig að $y(1)=2(1)^3+C=5$. Af þessari jöfnu sjáum við að $C=3$, og við ályktum að $y=2x^3+3$ sé lausn þessa upphafsgildisverkefnis, eins og sýnt er á grafinu hér á eftir.



Mynd 4.86 Nokkrir lausnarferlar deildajöfnunnar $\frac{dy}{dx}=6x^2$ eru sýndir. Fallið $y=2x^3+3$ uppfyllir deildajöfnuna og upphafsskilyrðið $y(1)=5$.

4

DÆMI 4.53

Lausn upphafsgildisverkefnis

Leysið upphafsgildisverkefnið

$$\frac{dy}{dx}=\sin x,\ y(0)=5.$$

Lausn

Fyrst þurfum við að leysa deildajöfnuna. Ef $\frac{dy}{dx}=\sin x$, þá

$$y=\int \sin(x)\,dx=-\cos x+C.$$

Næst þurfum við að finna lausn y sem uppfyllir upphafsskilyrðið. Upphafsskilyrðið $y(0)=5$ merkir að finna þarf fasta C þannig að $-\cos x+C=5$. Af þessu fæst

$$C=5+\cos(0)=6.$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er $y=-\cos x+6$.

STÖÐUMAT 4.52

Leysið upphafsgildisverkefnið $\frac{dy}{dx}=3x^{-2},\ y(1)=2.$

Upphafsgildisverkefni koma fyrir í fjölmörgum hagnýtum viðfangsefnum. Næst skoðum við verkefni þar sem ökumaður hemlar bifreið og könnum hve langan tíma hún þarf til að stöðvast. Munum að hraðafallið $v(t)$ er afleiða staðsetningarfallsins $s(t)$, og hröðunin $a(t)$ er afleiða hraðafallsins. Í fyrri dæmum í bókinni reiknuðum við hraðann út frá staðsetningunni og síðan hröðunina út frá hraðanum. Í næsta dæmi förum við öfuga leið: Við reiknum hraðafallið út frá gefnu hröðunarfalli og notum það síðan til að ákvarða staðsetningarfallið.

DÆMI 4.54

Bíll sem hægir á sér

Bíll ekur á hraðanum 25 m/s (90 km/klst.) þegar hemlað er. Hraði bílsins minnkar jafnt um 3 m/s².

a. Hversu margar sekúndur líða áður en bíllinn stöðvast?
b. Hversu langt ekur bíllinn á þeim tíma?

Lausn

a. Fyrst skilgreinum við breytur verkefnisins. Látum t tákna tímann (í sekúndum) frá því að fyrst er hemlað. Látum $a(t)$ tákna hröðun bílsins (í metrum á sekúndu í öðru veldi) á tíma t. Látum $v(t)$ tákna hraða bílsins (í metrum á sekúndu) á tíma t. Látum $s(t)$ tákna staðsetningu bílsins (í metrum) miðað við punktinn þar sem hemlað var, á tíma t.
Bíllinn ekur á hraðanum 25 m/s. Því er upphafshraðinn $v(0)=25$ m/s. Þar sem bíllinn hægir á sér er hröðunin

$$a(t)=-3 \text{ m/s}^2.$$

Hröðun er afleiða hraða og því er

$$v'(t)=-3.$$

Við þurfum því að leysa eftirfarandi upphafsgildisverkefni:

$$v'(t)=-3, v(0)=25.$$

Með heildun fæst

$$v(t)=-3t+C.$$

Þar sem $v(0)=25$, $C=25$. Því er hraðafallið

$$v(t)=-3t+25.$$

Til að finna hve langan tíma bíllinn þarf til að stöðvast þurfum við að finna þann tíma t þegar hraðinn er núll. Með því að leysa $-3\,t+25=0$, fáum við $t=\frac{25}{3}$ sek.

b. Til að finna vegalengdina sem bíllinn ekur á þessum tíma þurfum við að ákvarða staðsetningu hans eftir $\frac{25}{3}$ sek. Við vitum að hraðafallið $v(t)$ er afleiða staðsetningarfallsins $s(t)$. Látum upphafsstaðsetninguna vera $s(0)=0$. Því þurfum við að leysa upphafsgildisverkefnið

$$s'(t)=-3\,t+25, s(0)=0.$$

Með heildun fæst

$$s(t)=-\frac{3}{2}\,t^2+25\,t+C.$$

Þar sem $s(0)=0$, fæst $C=0$. Því er staðsetningarfallið

$$s(t)=-\frac{3}{2}\,t^2+25\,t.$$

Eftir $t=\frac{25}{3}$ sek. hefur bíllinn því ekið $s\left(\frac{25}{3}\right)\approx 104{,}167$ m.

4

STÖÐUMAT 4.53

Gerum ráð fyrir að bíllinn aki á hraðanum 15 m/s. Hve langan tíma þarf hann til að stöðvast? Hve langt ekur hann áður en hann stöðvast?

Æfingar í kafla 4.10

Sýnið í eftirfarandi dæmum að $F(x)$ sé stofnfall $f(x)$.

465.

$$F(x)=5x^3+2x^2+3x+1, f(x)=15x^2+4x+3$$

466.

$$F(x)=x^2+4x+1, f(x)=2x+4$$

467.

$$F(x)=x^2e^x, f(x)=e^x(x^2+2x)$$

468.

$$F(x)=\cos x, f(x)=-\sin x$$

469.

$$F(x)=e^x, f(x)=e^x$$

Finnið almennt form stofnfalls fallsins í eftirfarandi æfingum.

470.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+x$$

471.

$$f(x)=e^x-3x^2+\sin x$$

472.

$$f(x)=e^x+3x-x^2$$

473.

$$f(x)=x-1+4\sin(2x)$$

Finnið í eftirfarandi æfingum almennt form stofnfallsins $F(x)$ fyrir hvert fall $f(x)$.

474.

$$f(x)=5x^4+4x^5$$

475.

$$f(x)=x+12x^2$$

476.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

477.

$$f(x)=(\sqrt{x})^3$$

478.

$$f(x)=x^{1/3}+(2x)^{1/3}$$

479.

$$f(x)=\frac{x^{1/3}}{x^{2/3}}$$

480.

$$f(x)=2\sin(x)+\sin(2x)$$

481.

$$f(x)=\sec^2(x)+1$$

482.

$$f(x)=\sin x\cos x$$

483.

$$f(x)=\sin^2(x)\cos(x)$$

484.

$$f(x)=0$$

485.

$$f(x)=\frac{1}{2}\csc^2(x)+\frac{1}{x^2}$$

486.

$$f(x)=\csc x\cot x+3x$$

487.

$$f(x)=4\csc x\cot x-\sec x\tan x$$

488.

$$f(x)=8\sec x(\sec x-4\tan x)$$

489.

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-4x}+\sin x$$

Reiknið heildið í eftirfarandi æfingum.

490.

$$\int(-1)\,dx$$

491.

$$\int\sin x\,dx$$

492.

$$\int(4x+\sqrt{x})\,dx$$

493.

$$\int \frac{3x^2+2}{x^2}\,dx$$

494.

$$\int (\sec x \tan x + 4x)\,dx$$

495.

$$\int \left(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx$$

496.

$$\int \left(x^{-1/3}-x^{2/3}\right)dx$$

497.

$$\int \frac{14x^3+2x+1}{x^3}\,dx$$

498.

$$\int \left(e^x+e^{-x}\right)dx$$

Leysið upphafsgildisverkefnið í eftirfarandi æfingum.

499.

$$f'(x)=x^{-3}, f(1)=1$$

500.

$$f'(x)=\sqrt{x}+x^2, f(0)=2$$

501.

$$f'(x)=\cos x+\sec^2(x), f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

502.

$$f'(x)=x^3-8x^2+16x+1, f(0)=0$$

503.

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{x^2}{2}, f(1)=0$$

Finnið í eftirfarandi æfingum tvö möguleg föll f út frá gefinni annarri eða þriðju afleiðu.

504.

$$f''(x)=x^2+2$$

505.

$$f''(x)=e^{-x}$$

506.

$$f''(x)=1+x$$

507.

$$f'''(x)=\cos x$$

508.

$$f'''(x)=8e^{-2x}-\sin x$$

509. Bíl er ekið á hraðanum 72 km/klst. þegar hemlað er. Hraði bílsins minnkar jafnt um 4 m/s². Hve langur tími líður þar til bíllinn stöðvast?

510. Reiknið út frá verkefninu hér á undan hve langt bíllinn ekur áður en hann stöðvast.

511. Bíll tekur af stað inn á hraðbraut með fastri hröðun sem nemur 3 m/s². Hve langan tíma þarf hann til að ná hraðanum 108 km/klst.?

512. Notið fyrra verkefnið til að finna hve langt bíllinn ekur áður en hann nær hraða umferðarinnar á hraðbrautinni.

513. Bílaframleiðandi vill tryggja að nýjasta gerð fyrirtækisins geti stöðvast á 6 sekúndum þegar ekið er á hraðanum 108 km/klst. Gerið ráð fyrir fastri hraðaminnkun og finnið hve mikil hraðaminnkunin þarf að vera.

514. Bílaframleiðandi vill tryggja að nýjasta gerð fyrirtækisins geti stöðvast á vegalengd innan við 50 m þegar ekið er á 90 km/klst. Gerið ráð fyrir fastri hraðaminnkun og finnið hve mikil hraðaminnkunin þarf að vera.

Finnið stofnfall fallsins í eftirfarandi æfingum og gerið ráð fyrir að $F(0)=0$.

515. [T] $f(x)=x^2+2$

516. [T] $f(x)=4x-\sqrt{x}$

517. [T] $f(x)=\sin x+2x$

518. [T] $f(x)=e^x$

519. [T] $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

520. [T] $f(x)=e^{-2x}+3x^2$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort fullyrðingin sé sönn eða ósönn. Sannið að hún sé sönn eða finnið mótdæmi ef hún er ósönn.

521. Ef $f(x)$ er stofnfall fyrir $v(x)$, þá er $2f(x)$ stofnfall fyrir $2v(x)$.

522. Ef $f(x)$ er stofnfall fyrir $v(x)$, þá er $f(2x)$ stofnfall fyrir $v(2x)$.

523. Ef $f(x)$ er stofnfall fyrir $v(x)$, þá er $f(x)+1$ stofnfall fyrir $v(x)+1$.

524. Ef $f(x)$ er stofnfall fyrir $v(x)$, þá er $(f(x))^2$ stofnfall fyrir $(v(x))^2$.

Lykilhugtök

algilt útgildi
ef f hefur algilt hágildi eða algilt lággildi í c, segjum við að f hafi algilt útgildi í c

algilt hágildi
ef $f(c) \geq f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f, segjum við að f hafi algilt hágildi í c

algilt lággildi
ef $f(c) \leq f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f, segjum við að f hafi algilt lággildi í c

stofnfall
fall F þannig að $F'(x) = f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f er stofnfall fyrir f

hvelft
ef f er deildanlegt á bili I og f' er minnkandi á I, þá er f hvelft á I

kúpt
ef f er deildanlegt á bili I og f' er vaxandi á I, þá er f kúpt á I

kúpni
það hvort graf falls sveigist upp eða niður

kúpnipróf
gerum ráð fyrir að f sé tvisvar deildanlegt á bili I; ef $f'' > 0$ á I, þá er f kúpt á I; ef $f'' < 0$ á I, þá er f hvelft á I

stöðupunktur
ef $f'(c) = 0$ eða $f'(c)$ er óskilgreint, segjum við að c sé stöðupunktur fallsins f

stöðupunktur
punkturinn $(c, f(c))$ er stöðupunktur fallsins f

deildi
deildið dx er óháð breyta sem má gefa hvaða rauntölugildi sem er, þó ekki núll; deildið dy er skilgreint sem $dy = f'(x)\,dx$

deildaform
ef gefið er deildanlegt fall $y = f'(x)$, er jafnan $dy = f'(x)\,dx$ deildaform afleiðu y með tilliti til x

endahegðun
hegðun falls þegar $x \to \infty$ og $x \to -\infty$

útgildissetningin
ef f er samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili, þá hefur f algilt hágildi og algilt lággildi

setning Fermats
ef f hefur staðbundið útgildi í c, þá er c stöðupunktur fallsins f

fyrsta afleiðuprófið
látum f vera samfellt fall á bili I sem inniheldur stöðupunkt c þannig að f sé deildanlegt á I nema hugsanlega í c; ef f' skiptir um formerki úr jákvæðu í neikvætt þegar x vex í gegnum c, þá hefur f staðbundið hágildi í c; ef f' skiptir um formerki úr neikvæðu í jákvætt þegar x vex í gegnum c, þá hefur f staðbundið lággildi í c; ef f' skiptir ekki um formerki þegar x vex í gegnum c, þá hefur f ekki staðbundið útgildi í c

lárétt aðfella
ef $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ eða $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, þá er $y = L$ lárétt aðfella f

óákveðið heildi
almennasta stofnfallið fyrir $f(x)$ er óákveðið heildi fallsins f; við notum táknunina $\int f(x)\,dx$ til að tákna óákveðið heildi fallsins f

óákveðin form
þegar markgildi er metið eru formin $\frac{0}{0}$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, en einnig 1^∞ talin óákveðin, því að athuga þarf nánar hvort markgildið sé til og, ef svo er, hvert gildi þess sé

óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt
fall sem verður stærra en hvaða tala sem er þegar x stækkar

beygjuskilapunktur
ef f er samfellt í c og f breytir um kúpni í c, er punkturinn $(c, f(c))$ beygjuskilapunktur fallsins f

upphafsgildisverkefni
verkefni þar sem finna þarf fall y sem uppfyllir deildajöfnuna $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ásamt upphafsskilyrðinu $y(x_0) = y_0$

ítrunarferli
ferli þar sem talnarunan $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ er mynduð með því að velja fyrst töluna x_0 og skilgreina $x_n = F(x_{n-1})$ fyrir $n \geq 1$

regla l'Hôpital

ef f og g eru deildanleg föll á bili a, nema hugsanlega í a, og $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ eða $\lim_{x \to a} f(x)$ og $\lim_{x \to a} g(x)$ eru óendanleg, þá er $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, að því gefnu að markgildið hægra megin sé til eða sé ∞ eða $-\infty$

markgildi þegar x stefnir á óendanlegt

markgildi falls, ef það er til, þegar $x \to \infty$ eða $x \to -\infty$

línuleg nálgun

línulega fallið $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ er línuleg nálgun fallsins f við $x = a$

staðbundið útgildi

ef f hefur staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi í c, segjum við að f hafi staðbundið útgildi í c

staðbundið hágildi

ef til er bil I þannig að $f(c) \geq f(x)$ fyrir öll $x \in I$, segjum við að f hafi staðbundið hágildi í c

staðbundið lággildi

ef til er bil I þannig að $f(c) \leq f(x)$ fyrir öll $x \in I$, segjum við að f hafi staðbundið lággildi í c

meðalgildissetningin

ef f er samfellt á $[a, b]$ og deildanlegt á (a, b), þá er til $c \in (a, b)$ þannig að

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

aðferð Newtons

aðferð til að nálga lausnir jöfnunnar $f(x) = 0$; valið er upphafsgildi x_0; síðan er hver nálgun þar á eftir skilgreind með jöfnunni $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

skáfella

línan $y = mx + b$ er skáfella fallsins f ef $f(x)$ nálgast hana þegar $x \to \infty$ eða $x \to -\infty$

bestunarverkefni

verkefni þar sem finna þarf hágildi eða lággildi falls

prósentuskekkja

hlutfallsleg skekkja sem gefin er upp í prósentum

yfirfærð skekkja

skekkjan sem verður í reiknaðri stærð $f(x)$ vegna mæliskekkju dx

tengdir breytingarhraðar
breytingarhraðar tveggja eða fleiri innbyrðis tengdra stærða sem breytast með tímanum

hlutfallsleg skekkja
sé algild skekkja Δq gefin fyrir tiltekna stærð er $\frac{\Delta q}{q}$ hlutfallsleg skekkja hennar.

Setning Rolle
ef f er samfellt á $[a,b]$ og deildanlegt á (a,b), og ef $f(a)=f(b)$, þá er til $c\in(a,b)$ þannig að $f'(c)=0$

annað afleiðuprófið
gerum ráð fyrir að $f'(c)=0$ og f'' sé samfellt á bili sem inniheldur c; ef $f''(c)>0$, þá hefur f staðbundið lággildi í c; ef $f''(c)<0$, þá hefur f staðbundið hágildi í c; ef $f''(c)=0$, þá gefur prófið enga niðurstöðu

snertilsnálgun (línugerving)
línuleg nálgun fallsins f við $x=a$ er skilgreind með jöfnu snertilsins; því er línuleg nálgun fallsins f við $x=a$ einnig nefnd snertilsnálgun fallsins f við $x=a$

4

Helstu jöfnur

Línuleg nálgun	$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$
Deildi	$dy=f'(x)dx.$

Meginatriði

4.1 Tengdir breytingarhraðar

- Til að leysa verkefni um tengda breytingarhraða skal fyrst teikna mynd sem sýnir sambandið milli tveggja eða fleiri tengdra stærða sem breytast með tíma.
- Tilgreinið hvaða upplýsingar eru gefnar um stærðirnar og hvaða breytingarhraða á að finna.
- Finnið jöfnu sem tengir stærðirnar.
- Notið deildun og beitið keðjureglunni eftir þörfum til að finna jöfnu sem tengir breytingarhraðana.
- Gætið þess að setja ekki gildi breytilegrar stærðar inn fyrir eina af breytunum fyrr en þið hafið fundið jöfnu sem tengir breytingarhraðana.

4.2 Línulegar nálganir og deildi

- Deildanlegt fall $y=f(x)$ má nálga við a með línulega fallinu

  $$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a).$$
- Fyrir fall $y=f(x)$, ef x breytist úr a í $a+dx$, þá er

  $$dy=f'(x)dx$$

  nálgun á breytingunni á y. Raunveruleg breyting á y er

  $$\Delta y=f(a+dx)-f(a).$$
- Mæliskekkja dx getur leitt til skekkju í reiknaðri stærð $f(x)$. Skekkjan í reiknuðu stærðinni kallast yfirfærð skekkja. Yfirfærðu skekkjuna má áætla með

  $$dy\approx f'(x)dx.$$
- Til að meta hlutfallslega skekkju tiltekinnar stærðar q, metum við $\frac{\Delta q}{q}$.

4.3 Hágildi og lággildi

- Fall getur haft bæði algilt hágildi og algilt lággildi, aðeins eitt algilt útgildi eða hvorki algilt hágildi né algilt lággildi.
- Ef fall hefur staðbundið útgildi í punkti verður sá punktur að vera stöðupunktur. Fall þarf þó ekki að hafa staðbundið útgildi í stöðupunkti.
- Samfellt fall á lokuðu og takmörkuðu bili hefur algilt hágildi og algilt lággildi. Hvort útgildi um sig er í stöðupunkti eða endapunkti.

4.4 Meðalgildissetningin

- Ef f er samfellt á $[a,b]$ og deildanlegt á (a,b) og $f(a)=f(b)$, þá er til punktur $c\in(a,b)$ þannig að $f'(c)=0$. Þetta er setning Rolle.
- Ef f er samfellt á $[a,b]$ og deildanlegt á (a,b), þá er til punktur $c\in(a,b)$ þannig að

  $$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

  Þetta er meðalgildissetningin.

- Ef $f'(x)=0$ á bili I, þá er f fast fall á I.
- Ef tvö deildanleg föll f og g uppfylla $f'(x)=g'(x)$ á I, þá er $f(x)=g(x)+C$ fyrir einhvern fasta C.
- Ef $f'(x)>0$ á bili I, þá er f vaxandi á I. Ef $f'(x)<0$ á I, þá er f minnkandi á I.

4.5 Afleiður og lögun grafs

- Ef c er stöðupunktur fallsins f og $f'(x)>0$ fyrir $x<c$ og $f'(x)<0$ fyrir $x>c$, þá hefur f staðbundið hágildi í c.
- Ef c er stöðupunktur fallsins f og $f'(x)<0$ fyrir $x<c$ og $f'(x)>0$ fyrir $x>c$, þá hefur f staðbundið lággildi í c.
- Ef $f''(x)>0$ á bili I, þá er f kúpt á I.
- Ef $f''(x)<0$ á bili I, þá er f hvelft á I.
- Ef $f'(c)=0$ og $f''(c)>0$, þá hefur f staðbundið lággildi í c.
- Ef $f'(c)=0$ og $f''(c)<0$, þá hefur f staðbundið hágildi í c.
- Ef $f'(c)=0$ og $f''(c)=0$, þá skal reikna gildi $f'(x)$ í prófunarpunkti x vinstra megin við c og í prófunarpunkti x hægra megin við c, til að ákvarða hvort f hafi staðbundið útgildi í c.

4

4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur

- Markgildi $f(x)$ er L þegar $x \to \infty$ (eða þegar $x \to -\infty$) ef gildin $f(x)$ komast eins nálægt L og óskað er þegar x verður nægilega stórt.
- Markgildi $f(x)$ er ∞ þegar $x \to \infty$ ef $f(x)$ verður ótakmarkað stórt þegar x verður nægilega stórt. Markgildi $f(x)$ er $-\infty$ þegar $x \to \infty$ ef $f(x)<0$ og $|f(x)|$ verður ótakmarkað stórt þegar x verður nægilega stórt. Á svipaðan hátt getum við skilgreint markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á $-\infty$.
- Fyrir margliðufall $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$, þar sem $a_n \neq 0$, ræðst endahegðunin af forystuliðnum $a_n x^n$. Ef $n \neq 0$, $p(x)$ stefnir á ∞ eða $-\infty$ í báðar áttir.
- Fyrir rætt fall $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, ræðst endahegðunin af samanburði á stigi p og stigi q. Ef stig p er lægra en stig q, er línan $y=0$ lárétt aðfella fallsins f. Ef stig p er jafnt stigi q, er línan $y=\frac{a_n}{b_n}$ lárétt aðfella, þar sem a_n og b_n eru forystustuðlar p og q, í þeirri röð. Ef stig p er hærra en stig q, þá stefnir f á ∞ eða $-\infty$ í báðar áttir.

4.7 Hagnýt bestunarverkefni

- Til að leysa bestunarverkefni skal byrja á því að teikna mynd og skilgreina breytur.
- Finnið jöfnu sem tengir breyturnar.
- Finnið fall af einni breytu sem lýsir stærðinni sem á að lágmarka eða hámarka.
- Leitið að stöðupunktum til að finna staðbundin útgildi.

4.8 Regla l'Hôpital

- Nota má reglu l'Hôpital til að reikna markgildi kvóta þegar óákveðna formið $\frac{0}{0}$ eða ∞/∞ kemur fyrir.
- Reglu l'Hôpital má einnig beita á önnur óákveðin form ef unnt er að umrita þau sem markgildi kvóta á forminu $\frac{0}{0}$ eða ∞/∞.
- Vísisfallið e^x vex hraðar en öll veldisföll

$$x^p,$$

$$p>0.$$

- Lografallið $\ln x$ vex hægar en öll veldisföll

$$x^p,$$

$$p>0.$$

4.9 Aðferð Newtons

- Aðferð Newtons er notuð til að nálga lausnir jöfnunnar $f(x)=0$. Fyrst er valin upphafsnálgun x_0, en síðan eru snertlar við graf f notaðir til að mynda runu nálgunargilda $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
- Aðferð Newtons er yfirleitt skilvirk leið til að finna tiltekna núllstöð. Í sumum tilvikum bregst aðferðin vegna þess að talnarunan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ stefnir ekki á endanlegt gildi eða stefnir á annað gildi en núllstöðina sem leitað er að.
- Ferli þar sem talnaruna $x_0, x_1, x_2, \ldots$ er mynduð með því að velja upphafstölu x_0 og ákvarða síðari tölur með jöfnunni $x_n=F(x_{n-1})$ fyrir eitthvert fall F nefnist ítrunarferli.

Aðferð Newtons er dæmi um slíkt ferli; þar er fallið skilgreint með $F(x)=x-\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$ fyrir gefið fall f.

4.10 Stofnföll

- Ef F er stofnfall fyrir f, þá er sérhvert stofnfall fyrir f á forminu $F(x)+C$ fyrir einhvern fasta C.
- Til að leysa upphafsgildisverkefnið

$$\frac{dy}{dx}=f(x), y(x_0)=y_0$$

þarf fyrst að finna mengi stofnfalla fyrir f og síðan það tiltekna stofnfall sem uppfyllir upphafsskilyrðið.

4

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi. Gerið ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt og deildanlegt nema annað sé tekið fram.

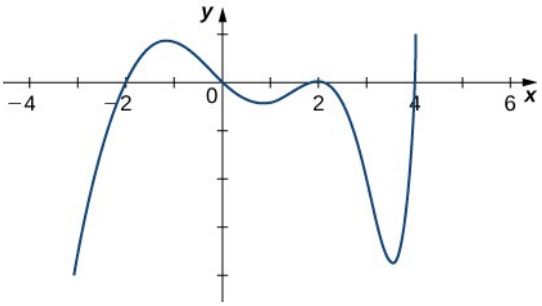
525. Ef $f(-1)=-6$ og $f(1)=2$, þá er til að minnsta kosti einn punktur $x\in[-1,1]$ þannig að $f'(x)=4$.

526. Ef $f'(c)=0$, þá hefur fallið hágildi eða lággildi í $x=c$.

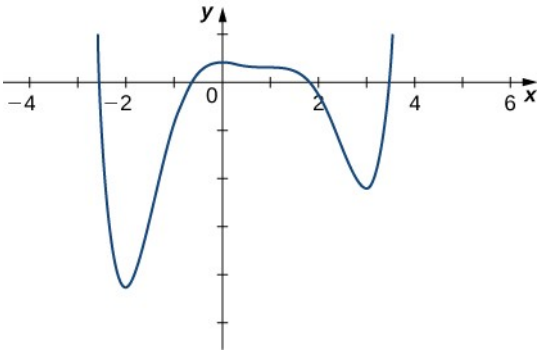
527. Til er fall þar sem $f(x)<0, f'(x)>0$, og $f''(x)<0$. (Myndræn „sönnun“ telst fullnægjandi svar við þessu verkefni.)

528. Til er fall sem hefur bæði beygjuskilapunkt og stöðupunkt í sama punktinum $x=a$.

529. Á myndinni sést graf af f', sem nota skal til að ákvarða hvar f er vaxandi og hvar fallið er minnkandi.



530. Graf fallsins f er sýnt hér að neðan. Teiknið f'.



531. Finnið línulegu nálgunina $L(x)$ fyrir fallið $y=x^2+\tan(\pi x)$ í grennd við $x=\frac{1}{4}$.

532. Finnið deildi fallsins $y=x^2-5x-6$ og reiknið gildi þess fyrir $x=2$ með $d\ x=0{,}1$.

Finnið stöðupunkta og staðbundin og algild útgildi eftirfarandi falla á gefna bilinu.

533. $f(x)=x+\sin^2(x)$ á bilinu $[0,\pi]$

534. $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+6$ á bilinu $[-3,3]$

Ákvarðið á hvaða bilum eftirfarandi föll eru vaxandi, minnkandi, kúpt og hvelft.

535.

$$x(t)=3t^4-8t^3-18t^2$$

536.

$$y=x+\sin(\pi x)$$

537.

$$g(x)=x-\sqrt{x}$$

538.

$$f(\theta)=\sin(3\theta)$$

Reiknið eftirfarandi markgildi.

539.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}$$

540.

$$\lim_{x \to \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

541.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sin(\pi x)}$$

542.

$$\lim_{x \to \infty} (3x)^{1/x}$$

Notið gefna upphafspunktinn og aðferð Newtons til að finna fyrstu tvö ítrunargildin.

543.

$$y = x^3 + 1, x_0 = 0{,}5$$

4

544.

$$y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, x_0 = 0$$

Finnið stofnföll $F(x)$ fyrir eftirfarandi föll.

545.

$$g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$$

546.

$$f(x) = 2x + 6\cos x, F(\pi) = \pi^2 + 2$$

Teiknið gröf eftirfarandi falla í höndunum. Gætið þess að merkja beygjuskilapunkta, stöðupunkta, núllstöðvar og aðfellur á gröfin.

547.

$$y = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

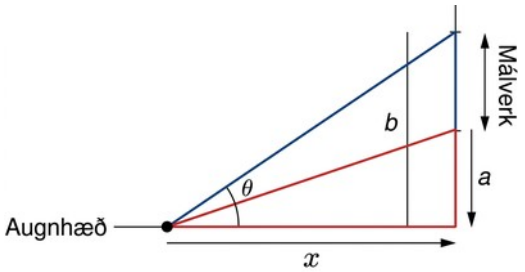
548.

$$y = x - \sqrt{4-x^2}$$

549. Bifreið er pressuð saman í rétthyrndan ferstrending. Rúmmálið minnkar með hraðanum 2 m³/sek. Lengd og breidd pressunnar eru jafnar, en hæðin er önnur. Veggirnir sem afmarka lengd og breidd færast inn á við með hraðanum 0,25 m/sek. Finnið hve hratt hæðin breytist þegar lengdin og breiddin eru 2 m og hæðin er 1,5 m.

550. Eldflaug er skotin út í geim; hreyfiorka hennar er gefin með $K(t)=\left(\frac{1}{2}\right)m(t)v(t)^2$, þar sem K er hreyfiorkan í júlum, m er massi eldflaugarinnar í kílógrömmum og v er hraði eldflaugarinnar í metrum á sekúndu. Gerið ráð fyrir að hraði eldflaugarinnar aukist með hröðuninni 15 m/s² og að massi hennar minnki um 10 kg/s vegna bruna eldsneytis. Hversu hratt breytist hreyfiorka eldflaugarinnar þegar massinn er 2000 kg og hraðinn er 5000 m/s? Gefið svarið í megajúlum á sekúndu (MJ/s), sem jafngildir 10^6 J/s.

551. Hið þekkta bestunarverkefni Regiomontanusar um sjónarhorn var sett fram á 15. öld. Málverk hangir á vegg þannig að neðri brún þess er í a metra hæð yfir augnhæð og efri brúnin í b metra hæð yfir augnhæð. Í hvaða fjarlægð x (í metrum) frá veggnum ætti áhorfandinn að standa til að hámarka sjónarhornið θ ?



552. Flugfélag selur flugmiða frá Tókýó til Detroit fyrir $\$1200$. Alls eru 500 sæti í boði og að jafnaði eru 350 sæti bókuð í hvert flug. Í hvert sinn sem fargjaldið er lækkað um $\$10$ seljast fimm sæti til viðbótar. Hvert ætti fargjaldið að vera til að hámarka hagnað? Hversu margir farþegar yrðu um borð?

5. KAFLI

Heildun



Mynd 5.1 Íssigling er vinsæl vetraríþrótt sums staðar í norðurhluta Bandaríkjanna og í Evrópu. (mynd: breytt útgáfa af verki Carter Brown, Flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 5.1 Nálgun flatarmáls
- 5.2 Ákveðið heildi

- 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
- 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
- 5.5 Innsetning
- 5.6 Heildi með vísis- og lograföllum
- 5.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum

Inngangur

Ísskútur eru algengar á vötnum í Wisconsin og Minnesota um helgar að vetrarlagi. Þær líkjast seglbátum en eru búnar meiðum, eða „skautum“, og hannaðar til að renna eftir ísnum í stað þess að sigla á vatni. Ísskútur geta náð miklum hraða og það er einmitt hraðinn sem laðar marga áhugamenn að íssiglingum. Fremstu keppendur geta náð allt að fimmföldum vindhraða. Ef við vitum hversu hratt ísskúta fer getum við notað heildun til að reikna út hversu langt hún fer. Við snúum aftur að þessari spurningu síðar í kaflanum (sjá dæmi 5.27).

Að reikna vegalengd út frá hraða er aðeins eitt af fjölmörgum notkunarsviðum heildunar. Heildi eru raunar notuð við margvísleg viðfangsefni í aflfræði og eðlisfræði. Við hefjum kaflann á fræðilegum grunni heildunar og notum síðan heildi til að reikna flatarmál. Því næst leiðum við út undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar, sem tengir saman deildun og heildun. Að lokum kynnumst við nokkrum grunnaðferðum við heildun og skoðum stuttlega fáein notkunardæmi.

5.1 Nálgun flatarmáls

NÁMSMARKMIÐ

- 5.1.1 Nota ritháttt með summutákni til að reikna summur og veldi heiltalna.
- 5.1.2 Nota summu flatarmála rétthyrninga til að nálga flatarmál undir ferli.
- 5.1.3 Nota Riemann-summur til að nálga flatarmál.

Arkímedes hafði mikinn áhuga á að reikna flatarmál ýmissa forma, það er stærð flatarins sem formið afmarkar. Hann beitti ferli sem síðar varð þekkt sem tæmingaraðferðin. Í henni var óreglulegt svæði fyllt með sífellt minni formum með flatarmál sem reikna mátti nákvæmlega. Þannig fengust sífellt nákvæmari nálganir á heildarflatarmáli svæðisins. Í þessu ferli er svæði sem afmarkast af ferlum fyllt með rétthyrningum, þríhyrningum og öðrum formum sem hafa nákvæmar flatarmálsformúlur. Flatarmál þessara forma eru síðan lögð saman til að nálga flatarmál svæðisins sem afmarkast af ferlunum.

Í þessum undirkafla þróum við aðferðir til að nálga flatarmálið milli ferils sem lýst er með fallinu $f(x)$, og x-ássins á lokaða bilinu $[a, b]$. Líkt og Arkímedes nálgum við flatarmálið undir ferlinum fyrst með formum sem hafa þekkt flatarmál, nánar tiltekið rétthyrningum. Eftir því sem rétthyrningarnir verða minni verður nálgunin nákvæmari. Með því að láta nálgunargildin stefna að markgildi getum við reiknað flatarmálið undir ferlinum nákvæmlega.

Byrjum á að kynna rithátt sem einfaldar útreikningana. Síðan skoðum við tilvikið þegar $f(x)$ er samfellt og óneikvætt. Síðar í kaflanum drögum við úr sumum þessara takmarkana og þróum aðferðir sem eiga við um almennari tilvik.

Ritháttur með summutákni

Eins og áður segir notum við form með þekkt flatarmál til að nálga flatarmál óreglulegs svæðis sem afmarkast af ferlum. Við það þarf oft að leggja saman langar talnarunur. Til að auðvelda okkur að skrifa svo langar summur kynnum við hér rithátt með summutákni. Gríski hástafurinn sigma, Σ, kallast summutákn og er notaður til að rita langar summur á knöppu formi. Ef við viljum til dæmis leggja saman allar heiltölur frá 1 til 20 án summutákns þurfum við að skrifa

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20.$$

Við gætum sleppt nokkrum liðum og skrifað

$$1+2+3+4+\cdots+19+20,$$

sem er skárra en samt fyrirferðarmikið. Með summutákni skrifum við summuna sem

$$\sum_{i=1}^{20} i,$$

sem er mun styttra.

Summa með summutákni er yfirleitt rituð á forminu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

þar sem a_i táknar liðina sem á að leggja saman og i kallast summuvísir. Gildi hvers liðar er reiknað og síðan eru gildin lögð saman, frá $i=1$ til og með $i=n$. Til dæmis táknar stæðan $\sum_{i=2}^{7} s_i$ summuna $s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7$. Athugið að vísirinn er aðeins notaður til að halda utan um liðina sem á að leggja saman; hann kemur ekki við sögu í sjálfum útreikningi summunnar. Vísirinn kallast því gervibreyta. Nota má hvaða bókstaf sem er sem vísi. Stærðfræðingar nota yfirleitt i, j, k, m og n sem vísa.

Við skulum skoða tvö dæmi um notkun summutákns.

DÆMI 5.1

Notkun summutákns

a. Ritið með summutákni og reiknið summu liðanna 3^i fyrir $i=1,2,3,4,5$.

b. Ritið summuna með summutákni:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}.$$

Lausn

a. Ritið

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} 3^i &= 3+3^2+3^3+3^4+3^5\\ &= 363.\end{aligned}$$

b. Nefnari hvers liðar er ferningstala. Með summutákni má rita summuna sem $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$.

STÖÐUMAT 5.1

Ritið með summutákni og reiknið summu liðanna 2^i fyrir $i=3,4,5,6$.

Í næstu reglu eru eiginleikar summutákns teknir saman.

REGLA: EIGINLEIKAR SUMMUTÁKNS

Látum $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tákna tvær runur liða og látum c vera fasta. Eftirfarandi eiginleikar gilda fyrir allar jákvæðar heiltölur n og fyrir heiltölur m, þar sem $1 \le m \le n$.

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

(5.1)

$$\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

(5.2)

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(5.3)

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i-b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(5.4)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

(5.5)

Sönnun

Hér sönnum við eiginleika 2 og 3 en hina eiginleikana á að sanna í æfingunum.

2. Við höfum

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

3. Við höfum

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

□

Nokkrar formúlur til viðbótar fyrir algeng föll einfalda samlagninguna enn frekar. Í næstu reglu eru gefnar formúlur fyrir summur heiltalna og velda þeirra og þær verða notaðar í næstu dæmum.

REGLA: SUMMUR OG VELDI HEILTALNA

1. Summa fyrstu n jákvæðu heiltalnanna er $\sum i = 1 n i = 1 + 2 + \ldots + n = n\ (n + 1)/2$.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Summa ferninga fyrstu n jákvæðu heiltalnanna er gefin með

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Summa þriðju velda fyrstu n jákvæðu heiltalnanna er gefin með

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

DÆMI 5.2

Útreikningur með summutákni

Ritið með summutákni og reiknið:

a. Summu liðanna $(i-3)^2$ fyrir $i = 1, 2, \ldots, 200$.

b. Summu liðanna $(i^3 - i^2)$ fyrir $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Lausn

a. Með því að leysa upp svigann í $(i-3)^2$, má skipta stæðunni í þrjá liði.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{200}(i-3)^2 &= \sum_{i=1}^{200}(i^2-6\,i+9)\\
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - \sum_{i=1}^{200} 6\,i + \sum_{i=1}^{200} 9\\
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - 6\sum_{i=1}^{200} i + \sum_{i=1}^{200} 9\\
&= \frac{200\,(200+1)\,(400+1)}{6} - 6\left[\frac{200\,(200+1)}{2}\right] + 9\,(200)\\
&= 2.686.700 - 120.600 + 1800\\
&= 2.567.900
\end{aligned}$$

b. Notum eiginleika iv fyrir summutákn og reglurnar um summu annarra og þriðju velda.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}\left(i^3-i^2\right) &= \sum_{i=1}^{6} i^3 - \sum_{i=1}^{6} i^2\\
&= \frac{6^2(6+1)^2}{4} - \frac{6(6+1)(2(6)+1)}{6}\\
&= \frac{1764}{4} - \frac{546}{6}\\
&= 350
\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.2

Finnið summu gildanna $4+3i$ fyrir $i=1,2,\ldots,100$.

DÆMI 5.3

Að finna summu fallgildanna

Finnið summu gilda $f(x)=x^3$ fyrir heiltölurnar $1,2,3,\ldots,10$.

Lausn

Með formúlunni fæst

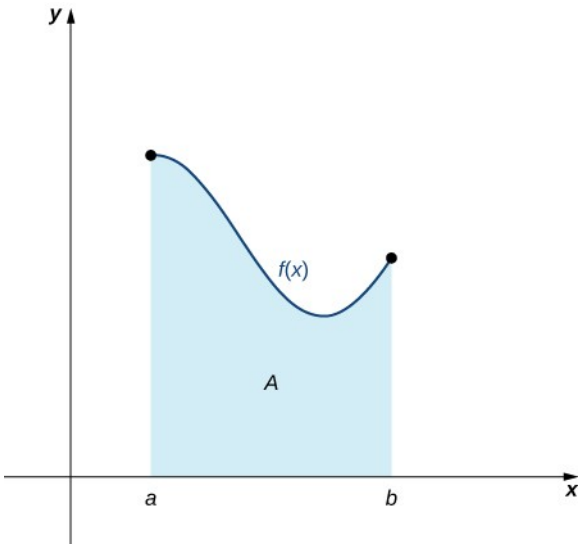
$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \frac{(10)^2(10+1)^2}{4}$$
$$= \frac{100(121)}{4}$$
$$= 3025.$$

STÖÐUMAT 5.3

Reiknið summuna sem táknuð er með $\sum_{k=1}^{20} (2k+1)$.

Nálgun flatarmáls

Nú þegar við höfum nauðsynlegan rithátt snúum við aftur að viðfangsefninu: að nálga flatarmál undir ferli. Látum $f(x)$ vera samfellt, óneikvætt fall sem er skilgreint á lokaða bilinu $[a,b]$. Við viljum nálga flatarmálið A sem afmarkast að ofan af $f(x)$, að neðan af x-ásnum, til vinstri af línunni $x=a$ og til hægri af línunni $x=b$ (mynd 5.2).



Mynd 5.2 Svæði (skyggt) sem afmarkast að ofan af ferlinum $f(x)$, að neðan af x-ásnum, til vinstri af línunni $x=a$ og til hægri af línunni $x=b$.

Hvernig nálgum við flatarmálið undir þessum ferli? Aðferðin er rúmfræðileg. Með því að skipta svæðinu í mörg lítil form sem hafa þekktar flatarmálsformúlur getum við lagt flatarmál þeirra saman og fengið þokkalegt mat á raunverulegu flatarmáli svæðisins. Við byrjum á að skipta bilinu $[a,b]$ í n jafnbreið hlutbil, $\frac{b-a}{n}$. Til þess veljum við jafnt dreifða punkta $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ með $x_0=a, x_n=b$, og

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

fyrir $i=1,2,3,\ldots,n$.

Við táknum breidd hvers hlutbils með tákninu Δx, þannig að $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x$$

fyrir $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Oft þarf að skipta bili $[a, b]$ í hlutbil með því að velja punkta á bilinu þegar flatarmál undir ferli er nálgað. Því skulum við skilgreina nokkur hugtök sem tengjast slíkri skiptingu.

SKILGREINING

Punktamengi $P = \{x_i\}$ fyrir $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ þar sem $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, skiptir bilinu $[a, b]$ í hlutbil af gerðinni $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ og kallast skipting bilsins $[a, b]$. Ef öll hlutbilin hafa sömu breidd myndar punktamengið reglulega skiptingu bilsins $[a, b]$.

Á þessari reglulegu skiptingu getum við byggt aðferð til að meta flatarmálið undir ferlinum. Næst skoðum við tvær aðferðir: nálgun með vinstri endapunktum og nálgun með hægri endapunktum.

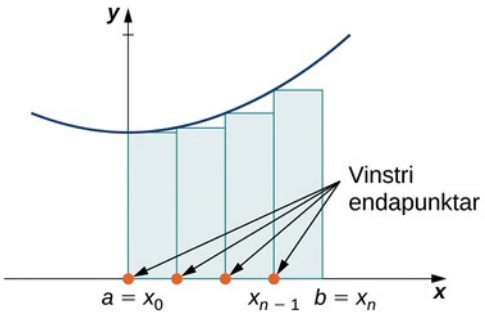
REGLA: NÁLGUN MEÐ VINSTRI ENDAPUNKTUM

Á hverju hlutbili $[x_{i-1}, x_i]$ (fyrir $i = 1, 2, 3, \ldots, n$), teiknum við rétthyrning með breiddina Δx og hæðina $f(x_{i-1})$, sem er fallgildið í vinstri endapunkti hlutbilsins. Flatarmál rétthyrningsins er þá $f(x_{i-1})\,\Delta x$. Þegar flatarmál allra rétthyrninganna eru lögð saman fæst nálgunargildi A (mynd 5.3). Táknið L_n merkir að A sé nálgað með vinstri endapunktum og n hlutbilum.

$$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

(5.6)



Mynd 5.3 Við nálgun á flatarmáli undir ferli með vinstri endapunktum ræðst hæð hvers rétthyrnings af fallgildinu í vinstri endapunkti hvers hlutbils.

Önnur aðferð til að nálga flatarmál undir ferli er nálgun með hægri endapunktum. Hún er nánast eins og nálgunin með vinstri endapunktum, en nú ráðast hæðir rétthyrninganna af fallgildunum í hægri endapunkti hvers hlutbils.

REGLA: NÁLGUN MEÐ HÆGRI ENDAPUNKTUM

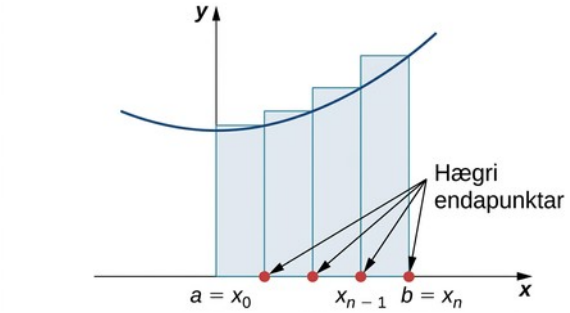
Teiknum rétthyrning á hverju hlutbili $[x_{i-1}, x_i]$, en að þessu sinni ræðst hæð rétthyrningsins af fallgildinu $f(x_i)$ í hægri endapunkti hlutbilsins. Flatarmál hvers rétthyrnings er þá $f(x_i)\Delta x$ og nálgunargildi A er

$$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

(5.7)

Táknið R_n merkir að A sé nálgað með hægri endapunktum (mynd 5.4).



Mynd 5.4 Við nálgun á flatarmáli undir ferli með hægri endapunktum ræðst hæð hvers rétthyrnings af fallgildinu í hægri endapunkti hvers hlutbils. Athugið að nálgunin með hægri endapunktum er frábrugðin nálguninni með vinstri endapunktum á mynd 5.3.

Gröfin á mynd 5.5 sýna ferilinn $f(x)=\frac{x^2}{2}$. Á grafi (a) skiptum við bilinu $[0,3]$ í sex hlutbil sem hvert hefur breiddina 0,5. Því er $\Delta x = 0{,}5$. Síðan myndum við sex rétthyrninga með því að draga lóðréttar línur upp frá x_{i-1}, vinstri endapunkti hvers hlutbils. Hæð hvers rétthyrnings fæst með því að reikna $f(x_{i-1})$ fyrir $i=1,2,3,4,5,6$. Hlutbilin eru $[0;0{,}5],[0{,}5;1],[1;1{,}5],[1{,}5;2],[2;2{,}5],[2{,}5;3]$. Flatarmál hvers rétthyrnings fæst með því að margfalda hæð hans með breiddinni. Summa flatarmála rétthyrninganna nálgar þá flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins. Þegar hæðirnar eru reiknaðar í vinstri endapunktum fæst nálgun með vinstri endapunktum. Því er

$$A \approx L_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\Delta x$$

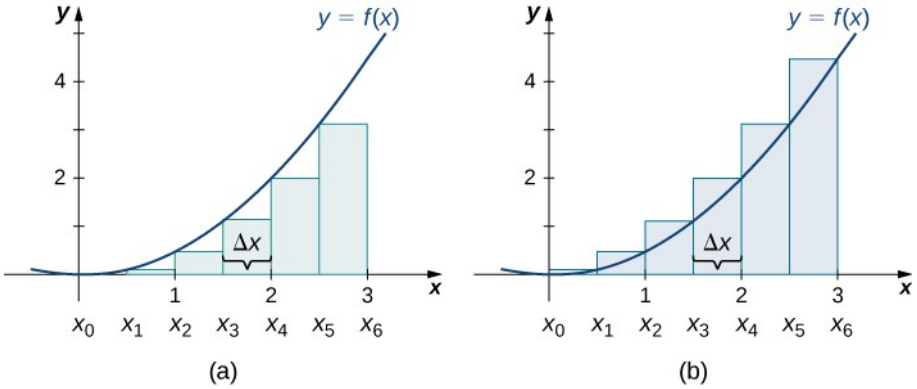
$$= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x$$

$$=f\left(0\right)0{,}5+f\left(0{,}5\right)0{,}5+f\left(1\right)0{,}5+f\left(1{,}5\right)0{,}5+f\left(2\right)0{,}5+f\left(2{,}5\right)0{,}5$$

$$=\left(0\right)0{,}5+\left(0{,}125\right)0{,}5+\left(0{,}5\right)0{,}5+\left(1{,}125\right)0{,}5+\left(2\right)0{,}5+\left(3{,}125\right)0{,}5$$

$$=0+0{,}0625+0{,}25+0{,}5625+1+1{,}5625$$

$$=3{,}4375.$$



Mynd 5.5 Aðferðir til að nálga flatarmál undir ferli með (a) vinstri endapunktum og (b) hægri endapunktum.

Á mynd 5.5(b) drögum við lóðréttar línur upp frá punktunum x_i, þar sem x_i er hægri endapunktur hvers hlutbils, og reiknum $f\left(x_i\right)$ fyrir $i=1,2,3,4,5,6$. Við margföldum $f\left(x_i\right)$ með Δx til að finna flatarmál rétthyrninganna og leggjum þau síðan saman. Þannig fæst nálgun með hægri endapunktum á flatarmálinu undir $f\left(x\right)$. Því er

$$A\approx R_6=\sum_{i=1}^{6} f\left(x_i\right)\Delta x$$

$$=f\left(x_1\right)\Delta x+f\left(x_2\right)\Delta x+f\left(x_3\right)\Delta x+f\left(x_4\right)\Delta x+f\left(x_5\right)\Delta x+f\left(x_6\right)\Delta x$$

$$=f\left(0{,}5\right)0{,}5+f\left(1\right)0{,}5+f\left(1{,}5\right)0{,}5+f\left(2\right)0{,}5+f\left(2{,}5\right)0{,}5+f\left(3\right)0{,}5$$

$$=\left(0{,}125\right)0{,}5+\left(0{,}5\right)0{,}5+\left(1{,}125\right)0{,}5+\left(2\right)0{,}5+\left(3{,}125\right)0{,}5+\left(4{,}5\right)0{,}5$$

$$=0{,}0625+0{,}25+0{,}5625+1+1{,}5625+2{,}25$$

$$=5{,}6875.$$

DÆMI 5.4

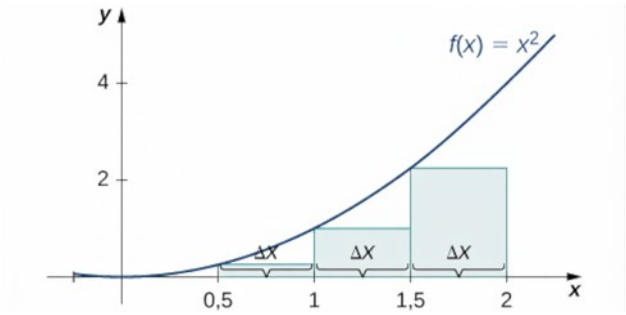
Nálgun á flatarmáli undir ferli

Notið bæði nálgun með vinstri endapunktum og nálgun með hægri endapunktum til að nálga flatarmálið undir ferli $f\left(x\right)=x^2$ á bilinu $\left[0,2\right]$; notið $n=4$.

Lausn

Fyrst skiptum við bilinu $[0,2]$ í n jafnbreið hlutbil. Hér er $n=4, \Delta x=\frac{(2-0)}{4}=0{,}5$. Þetta er breidd hvers rétthyrnings. Hlutbilin $[0;0{,}5],[0{,}5;1],[1;1{,}5],[1{,}5;2]$ eru sýnd á mynd 5.6. Í nálgun með vinstri endapunktum eru hæðirnar $f(0)=0, f(0{,}5)=0{,}25, f(1)=1, f(1{,}5)=2{,}25$. Þá fæst

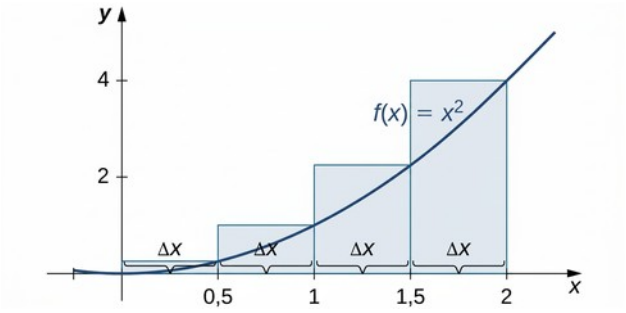
$$\begin{aligned} L_4 &= f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x \\ &= 0(0{,}5)+0{,}25(0{,}5)+1(0{,}5)+2{,}25(0{,}5) \\ &= 1{,}75. \end{aligned}$$



Mynd 5.6 Grafið sýnir nálgun með vinstri endapunktum á flatarmálinu undir $f(x)=x^2$ frá 0 til 2.

The right-endpoint approximation is shown in Figure 5.7. The intervals are the same, $\Delta x=0{,}5$, but now use the right endpoint to calculate the height of the rectangles. We have

$$\begin{aligned} R_4 &= f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x \\ &= 0{,}25(0{,}5)+1(0{,}5)+2{,}25(0{,}5)+4(0{,}5) \\ &= 3{,}75. \end{aligned}$$



Mynd 5.7 Grafið sýnir nálgun með hægri endapunktum á flatarmálinu undir $f(x)=x^2$ frá 0 til 2.

Nálgunin með vinstri endapunktum er 1,75 en nálgunin með hægri endapunktum er 3,75.

STÖÐUMAT 5.4

Teiknið nálganir með vinstri og hægri endapunktum fyrir $f(x)=\frac{1}{x}$ á $[1,2]$; notið $n=4$. Nálgið flatarmálið með báðum aðferðunum.

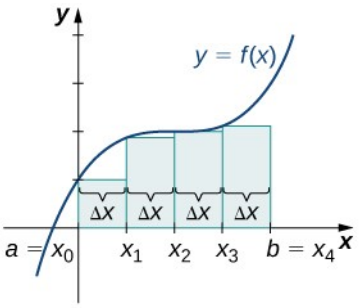
Á mynd 5.5 og gröfunum í dæmi 5.4 sést að þegar fá hlutbil eru notuð gefur hvorki nálgun með vinstri né hægri endapunktum sérlega nákvæmt mat á flatarmálinu undir ferlinum. Rökrétt er þó að ætla að matið á A batni þegar punktum skiptingarinnar er fjölgað. Þá fjölgar rétthyrningunum en hver þeirra verður mjórri og fellur því betur að ferlinum.

Með dæmi má sýna hvernig nálgunin batnar þegar hlutbilin eru gerð mjórri. Við aukum n, fyrst í nálgun með vinstri endapunktum og fjórum rétthyrningum, síðan átta rétthyrningum og loks 32 rétthyrningum. Síðan gerum við hið sama fyrir sama svæði með hægri endapunktum og sömu hlutbilum. Mynd 5.8 sýnir flatarmál svæðisins undir ferlinum $f(x)=(x-1)^3+4$ á bilinu $[0,2]$ nálgað með vinstri endapunktum þegar $n=4$. Breidd hvers rétthyrnings er

$$\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}.$$

Flatarmálið er nálgað með samanlögðu flatarmáli rétthyrninganna, eða

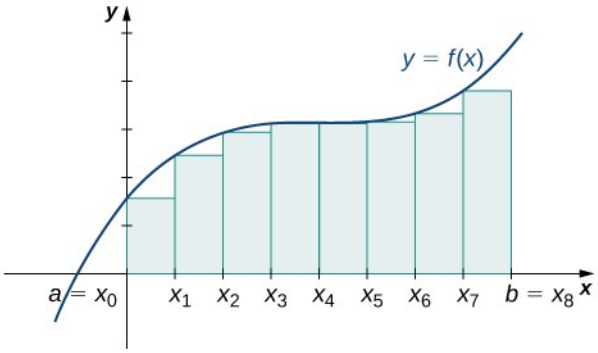
$$\begin{aligned} L_4 &= f(0)(0{,}5)+f(0{,}5)(0{,}5)+f(1)(0{,}5)+f(1{,}5)\,0{,}5 \\ &= 7{,}5. \end{aligned}$$



Mynd 5.8 Þegar nálgun með vinstri endapunktum er notuð og svæðinu frá a til b er skipt í fjögur jafnbreið hlutbil er flatarmálið undir ferlinum um það bil jafnt summu flatarmála rétthyrninganna.

Mynd 5.9 sýnir sama feril, en nú er bilinu skipt í átta hlutbil. Þegar grafið með fjórum rétthyrningum á mynd 5.8 er borið saman við þetta graf með átta rétthyrningum virðist minna autt svæði vera undir ferlinum þegar $n=8$. Þetta auða svæði er sá hluti flatarmálsins undir ferlinum sem við getum ekki tekið með í nálguninni. Flatarmál rétthyrninganna er

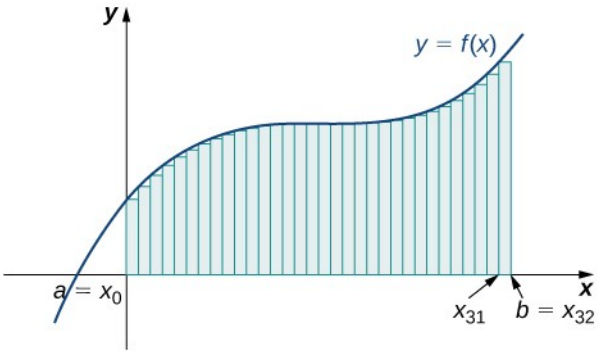
$$\begin{aligned} L_8 &= f(0)(0{,}25)+f(0{,}25)(0{,}25)+f(0{,}5)(0{,}25)+f(0{,}75)(0{,}25) \\ &\quad +f(1)(0{,}25)+f(1{,}25)(0{,}25)+f(1{,}5)(0{,}25)+f(1{,}75)(0{,}25) \\ &= 7{,}75. \end{aligned}$$



Mynd 5.9 Svæðinu undir ferlinum er skipt í $n=8$ jafnbreið hlutbil og flatarmálið nálgað með vinstri endapunktum.

Grafið á mynd 5.10 sýnir sama fall með 32 rétthyrningum innrituðum undir ferilinn. Lítið autt svæði virðist vera eftir. Flatarmálið sem rétthyrningarnir þekja er

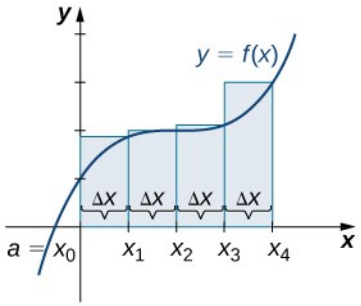
$$L_{32}=f\left(0\right)\left(0{,}0625\right)+f\left(0{,}0625\right)\left(0{,}0625\right)+f\left(0{,}125\right)\left(0{,}0625\right)+\cdots$$
$$+f\left(1{,}9375\right)\left(0{,}0625\right)$$
$$=7{,}9375.$$



Mynd 5.10 Hér eru 32 rétthyrningar innritaðir undir ferilinn til að nálga flatarmálið með vinstri endapunktum.

Sams konar aðferð má nota við nálgun með hægri endapunktum. Þegar sami ferill er nálgaður með hægri endapunktum og fjórum rétthyrningum (mynd 5.11) fæst flatarmálið

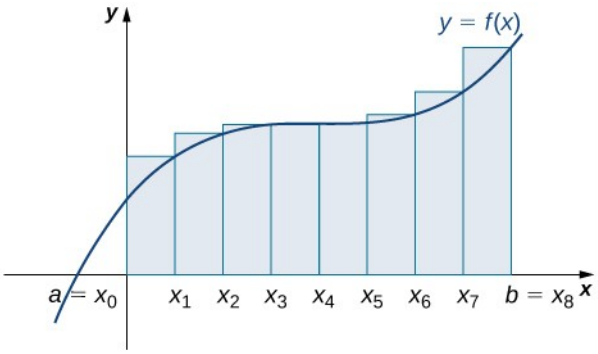
$$\begin{aligned}R_4 &=f\left(0{,}5\right)\left(0{,}5\right)+f\left(1\right)\left(0{,}5\right)+f\left(1{,}5\right)\left(0{,}5\right)+f\left(2\right)\left(0{,}5\right)\\ &=8{,}5.\end{aligned}$$



Mynd 5.11 Nú skiptum við svæðinu undir ferlinum í fjögur jafnbreið hlutbil og nálgum flatarmálið með hægri endapunktum.

Ef svæðinu yfir bilinu $[0,2]$ er skipt í átta rétthyrninga fæst $\Delta x = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$. Grafið er sýnt á mynd 5.12. Flatarmálið er

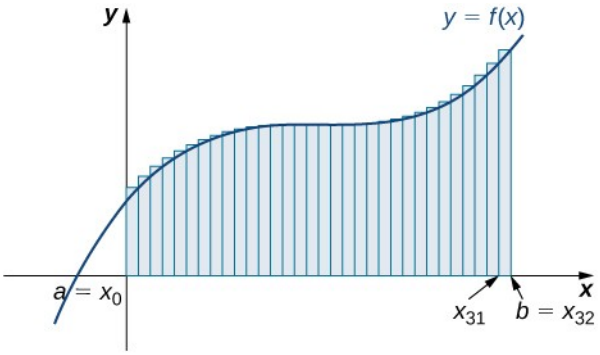
$$\begin{aligned} R_8 &= f(0{,}25)(0{,}25) + f(0{,}5)(0{,}25) + f(0{,}75)(0{,}25) + f(1)(0{,}25) \\ &\quad + f(1{,}25)(0{,}25) + f(1{,}5)(0{,}25) + f(1{,}75)(0{,}25) + f(2)(0{,}25) \\ &= 8{,}25. \end{aligned}$$



Mynd 5.12 Hér notum við nálgun með hægri endapunktum fyrir svæði sem skipt er í átta jafnbreið hlutbil.

Loks er nálgunin með hægri endapunktum nálægt raunverulega flatarmálinu þegar $n = 32$ (mynd 5.13). Flatarmálið er um það bil

$$\begin{aligned} R_{32} &= f(0{,}0625)(0{,}0625) + f(0{,}125)(0{,}0625) + f(0{,}1875)(0{,}0625) \\ &\quad + \cdots + f(2)(0{,}0625) \\ &= 8{,}0625. \end{aligned}$$



Mynd 5.13 Svæðinu er skipt í 32 jafnbreið hlutbil og flatarmálið nálgað með hægri endapunktum.

Myndirnar og útreikningarnir benda til þess að við séum á réttri leið: rétthyrningarnir virðast nálga flatarmálið undir ferlinum betur eftir því sem n hækkar. Þegar n hækkar virðast jafnframt bæði nálgunargildin, með vinstri og hægri endapunktum, stefna að 8 ferningseiningum. Í töflu 5.1 eru aðferðirnar bornar saman tölulega. Sú hugmynd að nálgunin á flatarmálinu undir ferlinum batni eftir því sem n hækkar er mjög mikilvæg og við skoðum hana nú nánar.

Tafla 5.1 Samleitin gildi nálganna með vinstri og hægri endapunktum þegar n vex

Gildi n	Nálgað flatarmál L_n	Nálgað flatarmál R_n
$n=4$	7.5	8.5
$n=8$	7.75	8.25
$n=32$	7.94	8.06

5

Myndun Riemann-summa

Hingað til höfum við nálgað flatarmál undir ferli með rétthyrningum. Hæð hvers rétthyrnings hefur ráðist af fallgildinu annaðhvort í hægri eða vinstri endapunkti hlutbilsins $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Engin ástæða er þó til að einskorða valið við þessa tvo punkta. Reikna má fallgildið í hvaða punkti x_i^* sem er á hlutbilinu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, og nota $f\left(x_i^*\right)$ sem hæð rétthyrningsins. Þá fæst flatarmálsnálgun á forminu

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x .$$

Summa af þessu tagi kallast Riemann-summa eftir 19. aldar stærðfræðingnum Bernhard Riemann, sem þróaði hugmyndina.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera skilgreint á lokaða bilinu $[a,b]$ og látum P vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$. Látum Δx tákna breidd hvers hlutbils $[x_{i-1},x_i]$ og veljum fyrir hvert i punkt x_i^* einhvers staðar á $[x_{i-1},x_i]$. Riemann-summa fyrir $f(x)$ er þá skilgreind með

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Minnumst þess að nálganir með vinstri og hægri endapunktum virðast batna eftir því sem n hækkar. Hið sama á við um Riemann-summur: stærra gildi n gefur betri nálgun. Nú getum við skilgreint flatarmálið undir ferli með Riemann-summum.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera samfellt, óneikvætt fall á bili $[a,b]$, og látum $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ vera Riemann-summu fyrir $f(x)$. Þá er flatarmálið undir ferlinum $y=f(x)$ á $[a,b]$ gefið með

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

MIÐLAR

Skoðið myndræna framsetningu á því hvernig Riemann-summa er mynduð.

Í þessu sambandi er vert að ræða nokkur atriði. Í fyrsta lagi skal hafa í huga að það er dálítið annað að finna markgildi summu en að finna markgildi falls $f(x)$ þegar x stefnir á óendanlegt. Fjallað er ítarlega um markgildi summa í kaflanum Runur og raðir. Að sinni getum við þó gert ráð fyrir að nota megi sömu reikniaðferðir við markgildi summa og við markgildi falla.

Í öðru lagi verðum við að íhuga hvað gera skuli ef stæðan stefnir á mismunandi markgildi eftir vali á $\{x_i^*\}$. Sem betur fer gerist það ekki. Þótt sönnunin sé utan við efni þessarar bókar má sýna fram á að ef $f(x)$ er samfellt á lokaða bilinu $[a,b]$, þá er $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ til og ótvírætt (með öðrum orðum, það er óháð valinu á $\{x_i^*\}$).

Við skoðum brátt nokkur dæmi. En áður en að því kemur skulum við staldra við og ræða nokkrar sérstakar leiðir til að velja $\{x_i^*\}$. Þótt hvert val á $\{x_i^*\}$ gefi okkur nálgun á flatarmálinu undir ferlinum vitum við ekki endilega hvort nálgunin er of há (ofmat) eða of lág (vanmat). Ef mikilvægt er að vita hvort nálgunin okkar er of há eða of lág getum við valið $\{x_i^*\}$ þannig að önnur hvor niðurstaðan sé tryggð.

Ef við viljum til dæmis fá ofmat getum við valið $\{x_i^*\}$ þannig að fyrir $i=1,2,3,\ldots,n, f(x_i^*)\geq f(x)$ fyrir öll $x\in[x_{i-1},x_i]$. Með öðrum orðum veljum við $\{x_i^*\}$ þannig að

fyrir $i=1,2,3,\ldots,n$, $f\left(x_i^*\right)$ sé hágildi fallsins á bilinu $\left[x_{i-1},x_i\right]$. Ef $\left\{x_i^*\right\}$ eru valin þannig kallast Riemann-summan $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$ efri summa. Á sama hátt getum við, ef við viljum fá vanmat, valið $\left\{x_i^*\right\}$ þannig að fyrir $i=1,2,3,\ldots,n$, $f\left(x_i^*\right)$ sé lággildi fallsins á bilinu $\left[x_{i-1},x_i\right]$. Samsvarandi Riemann-summa kallast þá neðri summa. Athugið að ef $f\left(x\right)$ er annaðhvort vaxandi eða minnkandi á öllu bilinu $\left[a,b\right]$, eru hágildi og lággildi fallsins í endapunktum hlutbilanna. Þá eru efri og neðri summurnar einfaldlega þær sömu og nálganirnar með vinstri og hægri endapunktum.

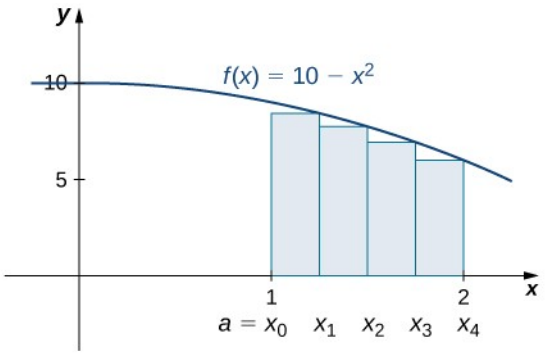
DÆMI 5.5

Neðri og efri summur

Finnið neðri summu fyrir $f\left(x\right)=10-x^2$ á $\left[1,2\right]$; notið $n=4$ hlutbil.

Lausn

Þegar $n=4$ er breidd hlutbilanna á bilinu $\left[1,2\right]$, $\Delta x=\frac{1}{4}$. Hlutbilin eru $\left[1;1{,}25\right],\left[1{,}25;1{,}5\right],\left[1{,}5;1{,}75\right],\left[1{,}75;2\right]$. Fallið er minnkandi á $\left[1,2\right]$, og því má sjá á mynd 5.14 að neðri summa fæst með hægri endapunktunum.



Mynd 5.14 Graf fallsins $f\left(x\right)=10-x^2$ sýnir nálgun með hægri endapunktum á flatarmálinu sem ferillinn og x-ásinn afmarka á $\left[1,2\right]$, og nálgunargildið er neðri summa.

Riemann-summan er

$$\sum_{k=1}^{4}\left(10-x_k^{\,2}\right)\left(0{,}25\right)$$

$$=0{,}25\left[10-\left(1{,}25\right)^2+10-\left(1{,}5\right)^2+10-\left(1{,}75\right)^2+10-\left(2\right)^2\right]$$

$$=0{,}25\left[8{,}4375+7{,}75+6{,}9375+6\right]$$

$$=7{,}28.$$

Gildið 7,28 er neðri summa og því vanmat á flatarmálinu.

STÖÐUMAT 5.5

a. Finnið efri summu fyrir $f(x)=10-x^2$ á $[1,2]$; notið $n=4$.

b. Teiknið nálgunina.

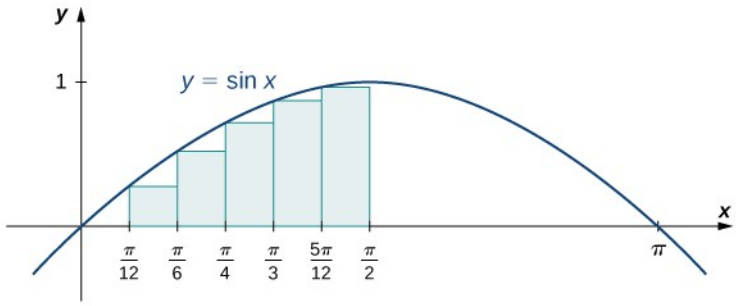
DÆMI 5.6

Neðri og efri summur fyrir $f(x)=\sin x$

Finnið neðri summu fyrir $f(x)=\sin x$ á bilinu $[a,b]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; notið $n=6$.

Lausn

Skoðum fyrst grafið á mynd 5.15 til að átta okkur betur á flatarmálinu sem um ræðir.



Mynd 5.15 Svæðinu undir grafi $y=\sin x$ er skipt í sex hluta: $\Delta x=\frac{\pi/2}{6}=\frac{\pi}{12}$.

Hlutbilin eru $\left[0,\frac{\pi}{12}\right],\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right],\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right]$, og $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$. Fallið $f(x)=\sin x$ er vaxandi á $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, og því gefur nálgun með vinstri endapunktum neðri summuna. Sú nálgun er Riemann-summan $\sum_{i=0}^{5}\sin x_i\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Við fáum

$$A\approx \sin(0)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=0{,}863.$$

STÖÐUMAT 5.6

Finnið efri summu fyrir fallið $f(x)=\sin x$ á bilinu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, með $n=6$.

Æfingar úr undirkafla 5.1

1. Segið til um hvort gefnu summurnar séu jafnar eða ójafnar.

a. $\sum_{i=1}^{10} i$ og $\sum_{k=1}^{10} k$

b. $\sum_{i=1}^{10} i$ og $\sum_{i=6}^{15} (i-5)$

c. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ og $\sum_{j=0}^{9} (j+1)j$

d. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ og $\sum_{k=1}^{10} (k^2-k)$

Notið reglurnar um summur velda heiltalna til að reikna summurnar í eftirfarandi æfingum.

2.

$$\sum_{i=5}^{10} i$$

3.

$$\sum_{i=5}^{10} i^2$$

Gerum ráð fyrir að $\sum_{i=1}^{100} a_i = 15$ og $\sum_{i=1}^{100} b_i = -12$. Reiknið summurnar í eftirfarandi æfingum.

4.

$$\sum_{i=1}^{100} (a_i + b_i)$$

5.

$$\sum_{i=1}^{100} (a_i - b_i)$$

6.

$$\sum_{i=1}^{100} (3a_i - 4b_i)$$

7.

$$\sum_{i=1}^{100} (5a_i + 4b_i)$$

Notið eiginleika og formúlur summa til að umrita og reikna summurnar í eftirfarandi æfingum.

8.

$$\sum_{k=1}^{20} 100\left(k^2-5k+1\right)$$

9.

$$\sum_{j=1}^{50} \left(j^2-2j\right)$$

10.

$$\sum_{j=11}^{20} \left(j^2-10j\right)$$

11.

$$\sum_{k=1}^{25} \left[(2k)^2-100k\right]$$

Látum L_n tákna summuna með vinstri endapunktum og n hlutbilum og R_n samsvarandi summu með hægri endapunktum. Reiknið í eftirfarandi æfingum tilgreindar vinstri og hægri summur fyrir gefnu föllin á tilgreindum bilum.

12. L_4 fyrir $f(x)=\frac{1}{x-1}$ á $[2,3]$

13. R_4 fyrir $g(x)=\cos(\pi x)$ á $[0,1]$

14. L_6 fyrir $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ á $[2,5]$

15. R_6 fyrir $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ á $[2,5]$

16. R_4 fyrir $\frac{1}{x^2+1}$ á $[-2,2]$

17. L_4 fyrir $\frac{1}{x^2+1}$ á $[-2,2]$

18. R_8 fyrir x^2-2x+1 á $[0,2]$

19. L_8 fyrir x^2-2x+1 á $[0,2]$

20. Reiknið Riemann-summurnar L_4 og R_4 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=(2-|x|)$ á $[-2,2]$. Reiknið meðaltal þeirra og berið það saman við flatarmálið undir grafi f.

21. Reiknið Riemann-summurnar L_6 og R_6 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=(3-|3-x|)$ á $[0,6]$. Reiknið meðaltal þeirra og berið það saman við flatarmálið undir grafi f.

22. Reiknið Riemann-summurnar L_4 og R_4 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ á $[-2,2]$ og berið gildi þeirra saman.

23. Reiknið Riemann-summurnar L_6 og R_6 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=\sqrt{9-(x-3)^2}$ á $[0,6]$ og berið gildi þeirra saman.

Ritið eftirfarandi endapunktasummur með summutákni en reiknið þær ekki.

24. L_{30} fyrir $f(x)=x^2$ á $[1,2]$

25. L_{10} fyrir $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ á $[-2,2]$

26. R_{20} fyrir $f(x)=\sin x$ á $[0,\pi]$

27. R_{100} fyrir $\ln x$ á $[1,e]$

Teiknið í eftirfarandi æfingum graf fallsins og notið síðan reiknivél eða tölvuforrit til að reikna tilteknar summur með vinstri og hægri endapunktum. Ef summurnar eru jafnar skuluð þið svara „hvorugt“.

28. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y=x^2-x+3$ á bilinu $[-1,1]$

29. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y=x^2$ á bilinu $[0,1]$

30. **[T]** L_{50} og R_{50} fyrir $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ á bilinu $[2,4]$

31. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y=x^3+2$ á bilinu $[-1,1]$

32. **[T]** L_{50} og R_{50} fyrir $y=\tan(x)$ á bilinu $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

33. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y=e^{2x}$ á bilinu $[-1,1]$

34. Látum t_j tákna tímann sem það tók Tejay van Garteren að hjóla j. áfanga Frakklandshjólreiðanna árið 2014. Áfangarnir voru alls 21. Túlkið $\sum_{j=1}^{21} t_j$.

35. Látum r_j tákna heildarúrkomuna í Portland á j. degi ársins 2009. Túlkið $\sum_{j=1}^{31} r_j$.

36. Látum d_j tákna fjölda dagsbirtustunda og δ_j tákna fjölgun dagsbirtustunda frá degi $j-1$ til dags j í Fargo í Norður-Dakóta á j. degi ársins. Túlkið $d_1+\sum_{j=2}^{365} \delta_j$.

37. Til að komast í betra form fær Joe sér nýja hlaupaskó. Joe hleypur 1 km á dag í fyrstu vikunni og bætir $\frac{1}{10}$ km við daglega hlaupalengd sína í hverri viku. Hversu marga kílómetra hefur hann samtals hlaupið á skónum eftir 25 vikur?

38. Taflan sýnir um það bil hve mikið koltvísýringur (CO_2) í andrúmsloftinu jókst að meðaltali á ári á hverjum áratug frá 1960, mælt í milljónarhlutum (ppm). Áætlið heildaraukningu CO_2 í andrúmsloftinu frá 1964 til 2013.

Tafla 5.2 Meðalárleg aukning á CO_2 í andrúmsloftinu, 1964–2013 *Heimild*: http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/.

Áratugur	ppm/ár
1964–1973	1,07
1974–1983	1,34
1984–1993	1,40
1994–2003	1,87
2004–2013	2,07

39. Eftirfarandi tafla sýnir áætlaða hækkun sjávarborðs í millimetrum á 20 ára tímabili frá og með tilgreindu ári. Áætlið heildarbreytingu á meðalsjávarborði frá 1870 til 2010.

Tafla 5.3 Áætluð hækkun sjávarborðs á 20 ára tímabilum, 1870–1990 *Heimild*: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10712-011-9119-1

Upphafsár	Breyting á 20 árum (mm)
1870	8
1890	38
1910	5
1930	71
1950	18
1970	28
1990	38

40. Eftirfarandi tafla sýnir áætlaða hækkun meðalverðs á lítra af bensíni, í evrum, á hverjum áratug frá 1950. Ef meðalverð á lítra af bensíni árið 2010 var 0,69 €, hvert var meðalverðið árið 1950?

Tafla 5.4 Áætluð hækkun bensínverðs á 10 ára tímabilum, 1950–2000 *Heimild*: http://epb.lbl.gov/homepages/Rick_Diamond/docs/lbnl55011-trends.pdf.

Upphafsár	Breyting á 10 árum (€ á lítra)
1950	0,01
1960	0,01
1970	0,23
1980	−0,01
1990	0,08
2000	0,30

41. Eftirfarandi tafla sýnir hlutfallslega fjölgun íbúa Bandaríkjanna frá og með júlí þess árs sem tilgreint er. Ef íbúafjöldi Bandaríkjanna var 281.421.906 í júlí 2000, áætlið þá íbúafjölda Bandaríkjanna í júlí 2010.

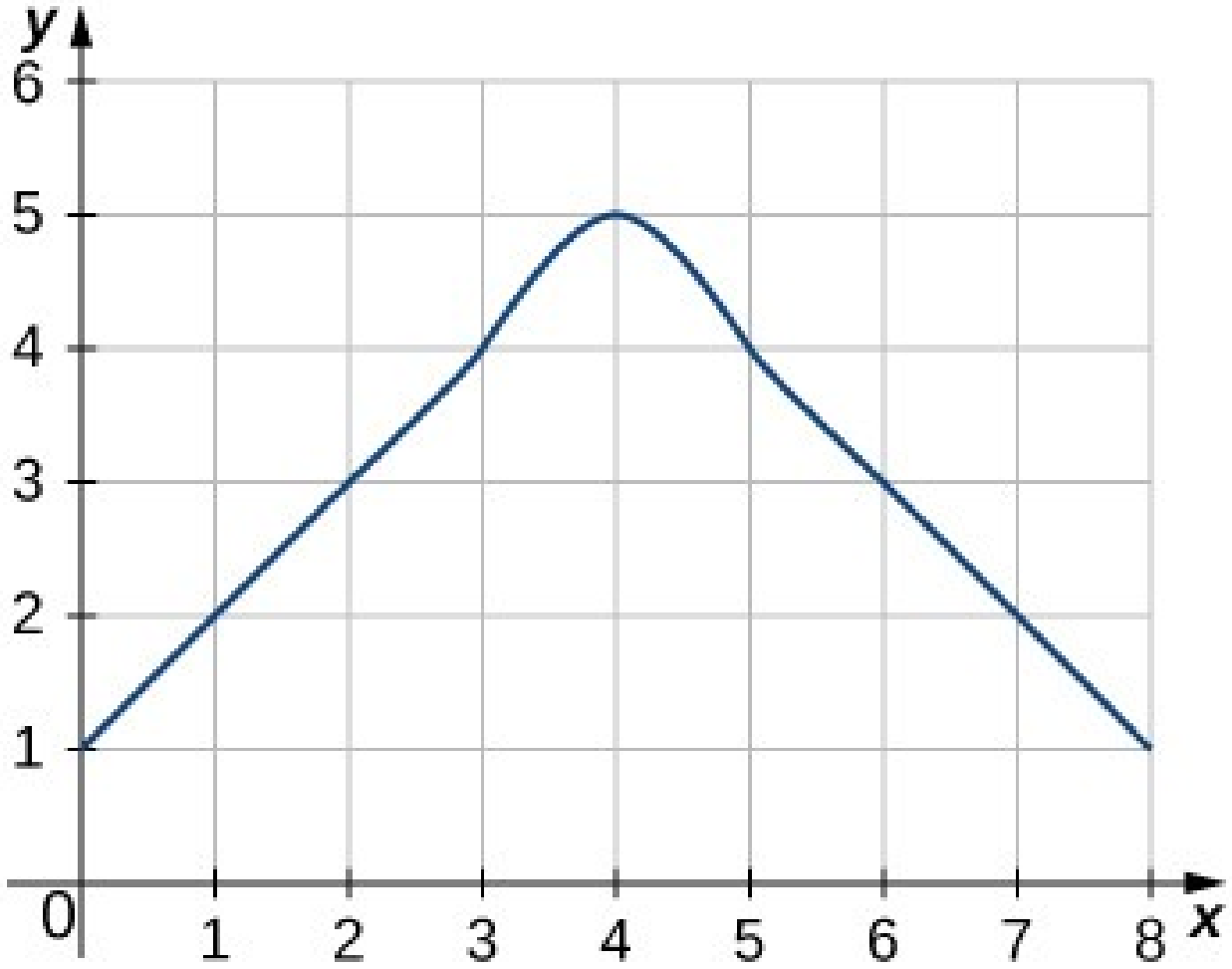
Tafla 5.5 Árlegur hlutfallslegur vöxtur íbúafjölda Bandaríkjanna, 2000–2009 *Heimild*: http://www.census.gov/popest/data.

Ár	Breyting á ári (%)
2000	1,12
2001	0,99
2002	0,93
2003	0,86
2004	0,93
2005	0,93
2006	0,97
2007	0,96
2008	0,95
2009	0,88

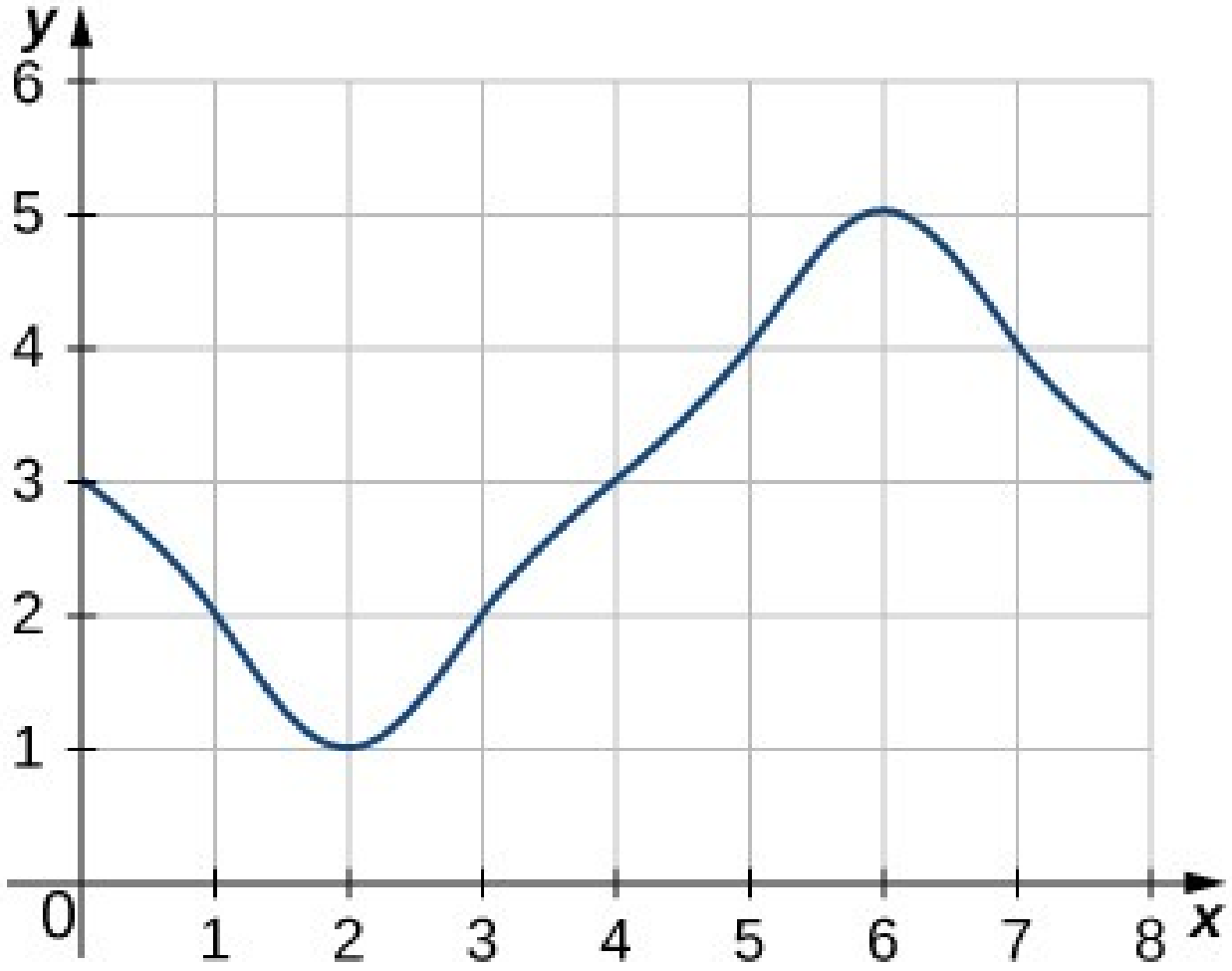
(Vísbending: Margfaldið íbúafjöldann í júlí 2000 með 1,0112 til að fá íbúafjöldann í júlí 2001, 284.573.831.)

Áætlið í eftirfarandi æfingum flatarmálin undir ferlunum með því að reikna Riemann-summurnar L_8 með vinstri endapunktum.

42.

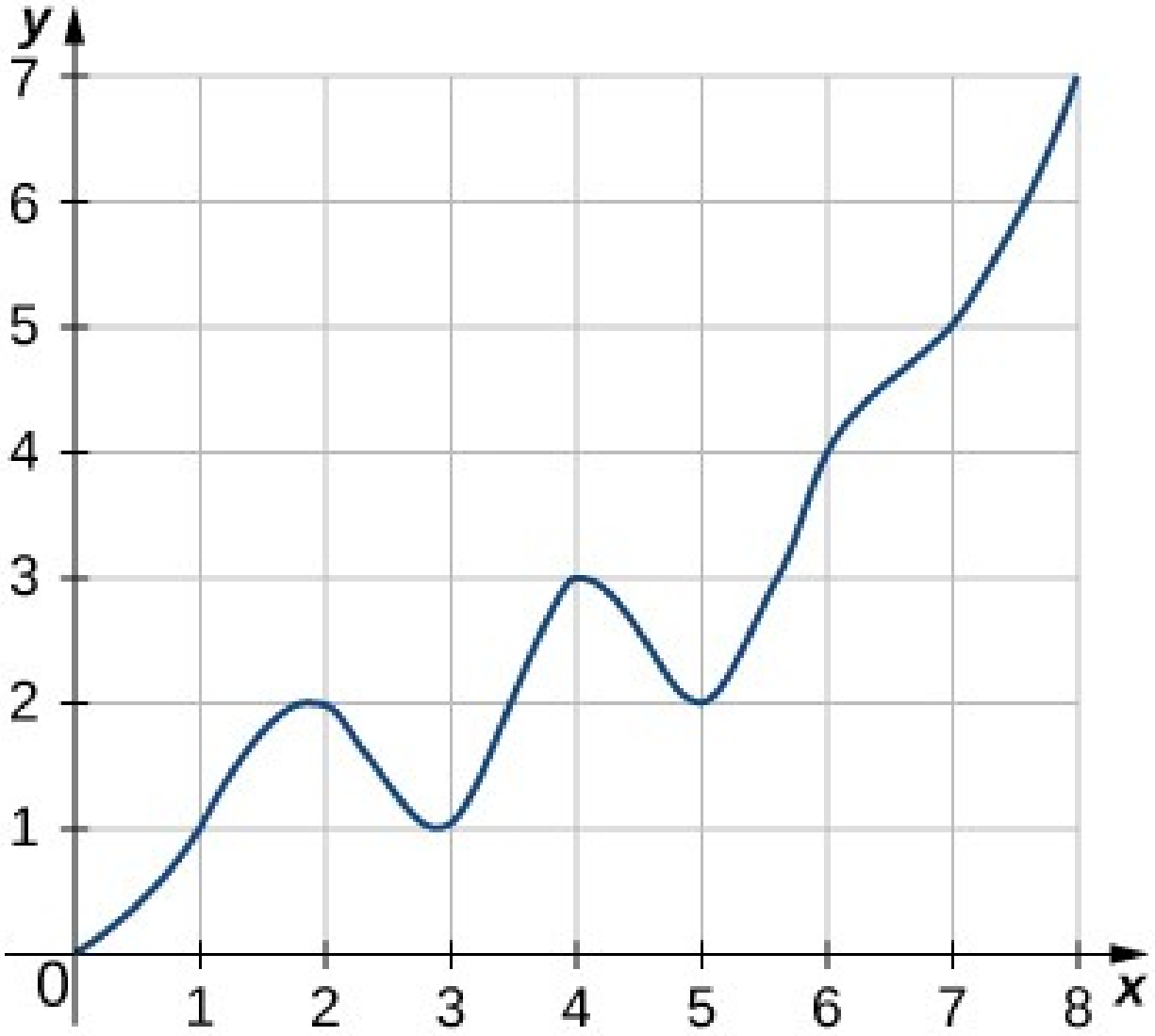


43.

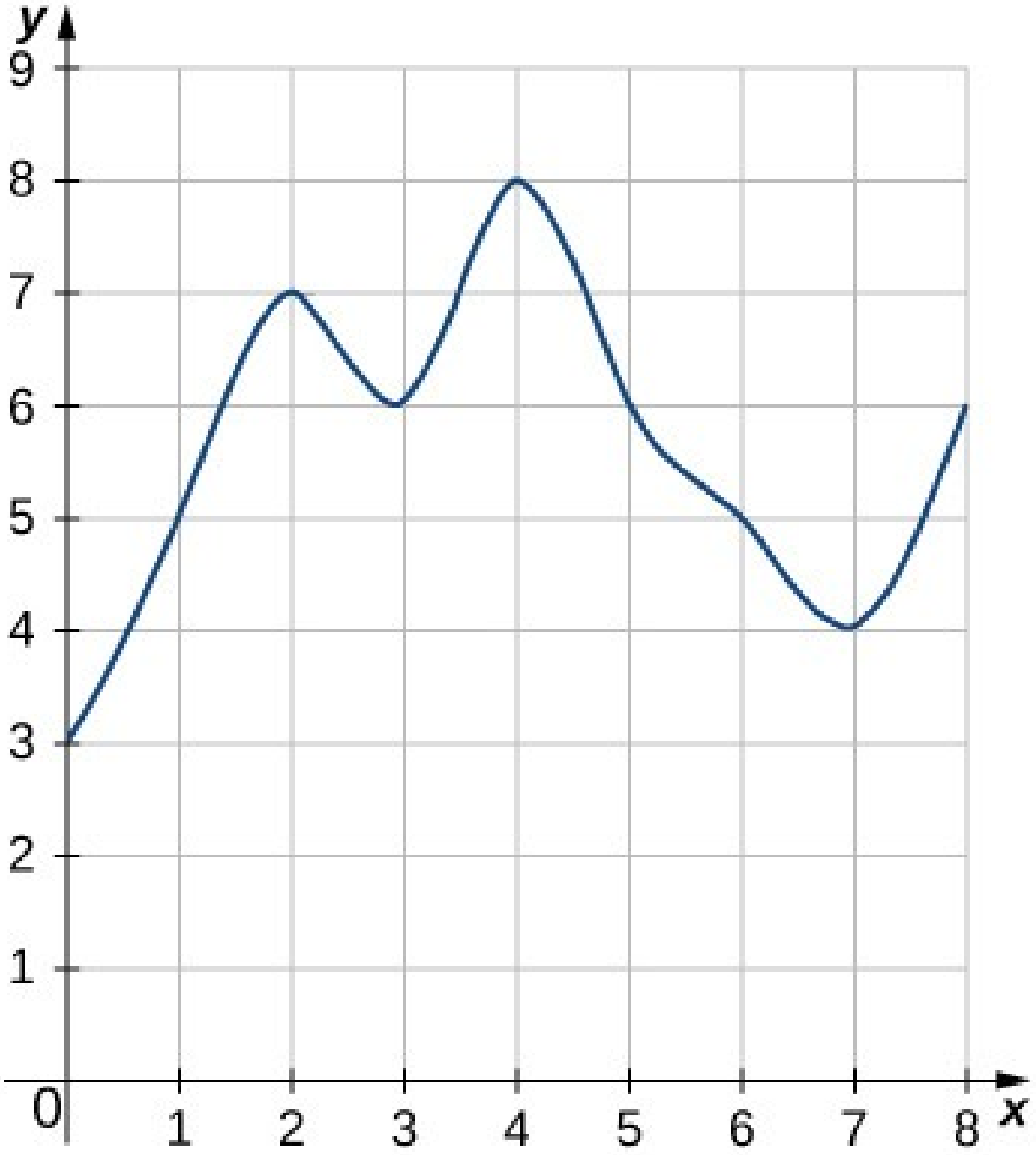


5

44.



45.



46. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að reikna Riemann-summuna L_N, fyrir $N=10,30,50$ og $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ á $[-1,1]$.

47. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að reikna Riemann-summuna L_N fyrir $N=10,30,50$ og $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ á $[-1,1]$.

48. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að reikna Riemann-summuna L_N fyrir $N=10,30,50$ og $f(x)=\sin^2 x$ á $[0,2\pi]$. Berið nálgunargildin saman við π.

Notið í eftirfarandi æfingum reiknivél eða tölvuforrit til að reikna summurnar R_N og L_N með endapunktum fyrir $N=1,10,100$. Hvernig eru nálgunargildin í samanburði við nákvæmu svörin sem finna má með rúmfræði?

49. **[T]** $y=\cos(\pi x)$ á bilinu $[0,1]$

50. **[T]** $y=3x+2$ á bilinu $[3,5]$

Notið í eftirfarandi æfingum reiknivél eða tölvuforrit til að reikna endapunktasummurnar R_N og L_N fyrir $N=1,10,100$.

51. **[T]** $y=x^4-5x^2+4$ á bilinu $[-2,2]$, þar sem nákvæmt flatarmál er $\frac{32}{15}$

52. **[T]** $y=\ln x$ á bilinu $[1,2]$, þar sem nákvæmt flatarmál er $2\ln(2)-1$

53. Útskýrið hvers vegna eftirfarandi gildir: Ef $f(a)\geq 0$ og f er vaxandi á $[a,b]$, þá er nálgun með vinstri endapunktum neðra mark fyrir flatarmálið undir grafi f á $[a,b]$.

54. Útskýrið hvers vegna eftirfarandi gildir: Ef $f(b)\geq 0$ og f er minnkandi á $[a,b]$, þá er nálgun með vinstri endapunktum efra mark fyrir flatarmálið undir grafi f á $[a,b]$.

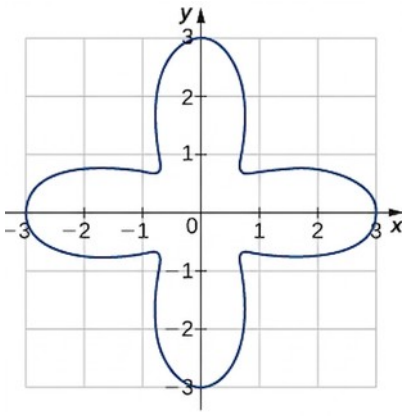
55. Sýnið að almennt gildir $R_N-L_N=(b-a)\times\frac{f(b)-f(a)}{N}$.

56. Útskýrið hvers vegna eftirfarandi gildir: Ef f er vaxandi á $[a,b]$, þá er skekkjan í hvoru nálgunargildinu um sig, L_N eða R_N, miðað við flatarmálið A undir grafi f í mesta lagi $(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{N}$.

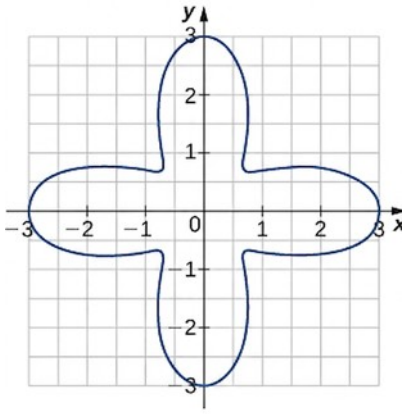
57. Fyrir hvert grafanna þriggja:

a. Finnið neðra mark $L(A)$ fyrir flatarmálið sem ferillinn afmarkar með því að leggja saman flatarmál þeirra ferninga sem liggja að öllu leyti innan ferilsins.

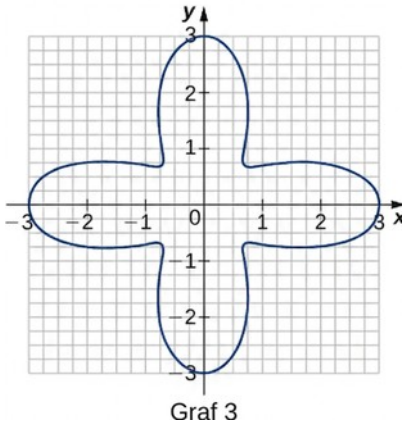
b. Finnið efra mark $U(A)$ fyrir flatarmálið með því að leggja við $L(A)$ flatarmálin $B(A)$ þeirra ferninga *sem ferillinn umlykur* að hluta.



Graf 1



Graf 2

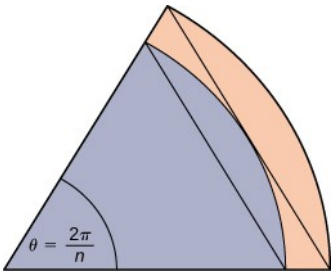


Graf 3

58. Lítið aftur á æfinguna á undan og útskýrið hvers vegna $L(A)$ getur ekki minnkað og $U(A)$ ekki stækkað þegar hverjum ferningi er skipt í fjóra jafnstóra reiti.

59. Einingarhringur er settur saman úr n hringgeirum sem eru eins og innri geirinn á myndinni. Grunnlína innri þríhyrningsins er 1 eining og hæð hans er $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Grunnlína ytri þríhyrningsins er $B=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ og hæð hans er $H=B\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Notið þessar upplýsingar til að rökstyðja að flatarmál einingarhrings sé jafnt π.



5.2 Ákveðið heildi

NÁMSMARKMIÐ

- 5.2.1 Setjið fram skilgreiningu á ákveðnu heildi.
- 5.2.2 Útskýrið hugtökin heildisstofn, heildismörk og heildunarbreyta.
- 5.2.3 Útskýrið hvenær fall er heildanlegt.
- 5.2.4 Lýsið tengslum ákveðins heildis og formerkts flatarmáls.
- 5.2.5 Notið rúmfræði og eiginleika ákveðinna heilda til að reikna þau.
- 5.2.6 Reiknið meðalgildi falls.

Í undirkaflanum á undan skilgreindum við flatarmál undir ferli með Riemann-summum:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x\,.$$

Þessari skilgreiningu fylgdu þó takmarkanir. Við gerðum þá kröfu að $f(x)$ væri samfellt og óneikvætt. Raunveruleg viðfangsefni uppfylla því miður ekki alltaf þessi skilyrði. Í þessum undirkafla skoðum við hvernig ákveðið heildi gerir okkur kleift að nota hugmyndina um flatarmál undir ferli fyrir fleiri föll.

Skilgreining og táknun

Ákveðið heildi alhæfir hugmyndina um flatarmál undir ferli. Við fellum niður skilyrðin um að $f(x)$ sé samfellt og óneikvætt og skilgreinum ákveðið heildi sem hér segir.

SKILGREINING

Ef $f(x)$ er fall sem skilgreint er á bili $[a,b]$, er ákveðið heildi f frá a til b gefið með

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x,$$

(5.8)

að því gefnu að markgildið sé til. Ef markgildið er til kallast fallið $f(x)$ heildanlegt á $[a,b]$, eða einfaldlega heildanlegt fall.

Heildistáknið í skilgreiningunni hér á undan ætti að vera kunnuglegt. Við höfum séð svipaða táknun í kaflanum um notkun afleiða, þar sem við notuðum tákn óákveðins heildis (án a og b fyrir ofan og neðan) til að tákna stofnfall. Þótt táknun óákveðinna heilda líkist táknun ákveðins heildis eru þetta ekki sömu fyrirbæri. Ákveðið heildi er tala en óákveðið heildi er fjölskylda falla. Síðar í þessum kafla skoðum við hvernig hugtökin tengjast. Alltaf þarf þó að gæta vel að táknuninni svo ljóst sé hvort unnið er með ákveðið eða óákveðið heildi.

Heildatáknun á rætur að rekja til síðari hluta sautjándu aldar og er eitt af framlögum Gottfrieds Wilhelms Leibniz, sem ásamt Isaac Newton er oft talinn annar tveggja upphafsmanna stærðfræðigreiningarinnar. Heildistáknið $\int$ er ílangt S og vísar til sigma eða summu. Fyrir ofan og neðan heildistáknið í ákveðnu heildi standa endamörk bilsins $[a,b]$. Tölurnar a og b eru x-gildi og kallast heildismörk; a er neðra heildismark og b efra heildismark. Til skýringar er orðið mark notað í tvenns konar merkingu í samhengi við ákveðið heildi. Annars vegar er talað um markgildi summu þegar $n \to \infty$. Hins vegar kallast endamörk svæðisins heildismörk.

Við köllum fallið $f(x)$ heildisstofn og dx gefur til kynna að $f(x)$ sé fall af breytunni x, sem er heildunarbreytan. Líkt og summuvísir í summu er heildunarbreytan gervibreyta og hefur engin áhrif á útreikning heildisins. Við gætum valið hvaða breytu sem er sem heildunarbreytu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

Áður kom fram að ef $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$, þá er markgildið $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$ til og ótvírætt ákvarðað. Af því leiðir næsta setning, sem við setjum fram án sönnunar.

SETNING 5.1

Samfelld föll eru heildanleg

Ef $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$, þá er f heildanlegt á $[a,b]$.

Föll sem eru ekki samfelld á $[a,b]$ geta samt verið heildanleg, eftir eðli ósamfellnanna. Til dæmis eru föll heildanleg ef þau eru samfelld á lokuðu bili að undanskildum endanlega mörgum stökkósamfellum.

Einnig er vert að taka fram að við höfum haldið okkur við reglulega skiptingu í Riemann-summunum. Sú takmörkun er í raun óþörf. Nota má hvaða skiptingu sem er til að mynda Riemann-summu. Ef óregluleg skipting er notuð til að skilgreina ákveðið heildi nægir hins vegar ekki að taka markgildið þegar fjöldi hlutbila stefnir á óendanlegt. Þá verður þess í stað að taka markgildið þegar breidd stærsta hlutbilsins stefnir á núll. Við það verður táknun markgildanna nokkru flóknari og útreikningarnir erfiðari, án þess að skilningur okkar aukist að ráði. Því höldum við okkur við reglulegar skiptingar í Riemann-summum.

DÆMI 5.7

Heildi reiknað út frá skilgreiningunni

Notið skilgreiningu ákveðins heildis til að reikna $\int_0^2 x^2\,dx$. Notið nálgun með hægri endapunktum til að mynda Riemann-summuna.

Lausn

Fyrst setjum við upp Riemann-summu. Af heildismörkunum fæst $a=0$ og $b=2$. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[0,2]$. Þá fæst

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}.$$

Við notum nálgun með hægri endapunktum til að mynda Riemann-summur og þurfum því, fyrir hvert i, að reikna fallgildið í hægri endapunkti hlutbilsins $[x_{i-1},x_i]$. Hægri endapunktur hlutbilsins er x_i, og þar sem P er regluleg skipting er

$$x_i=x_0+i\Delta x=0+i\left[\frac{2}{n}\right]=\frac{2i}{n}.$$

Fallgildið í hægri endapunkti hlutbilsins er því

$$f(x_i)=x_i^2=\left(\frac{2i}{n}\right)^2=\frac{4i^2}{n^2}.$$

Þá er Riemann-summan á forminu

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Með summuformúlunni fyrir $\sum_{i=1}^{n} i^2$, fæst

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] \\ &= \frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3} \\ &= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}.\end{aligned}$$

Til að reikna ákveðna heildið þurfum við nú að taka markgildið þegar $n \to \infty$. Við fáum

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{6n^2}\right) \\ &= \frac{8}{3}+0+0=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.7

Notið skilgreiningu ákveðins heildis til að reikna $\int_0^3 (2x-1)\,dx$. Notið nálgun með hægri endapunktum til að mynda Riemann-summuna.

5

Útreikningur ákveðinna heilda

Það getur verið seinlegt að reikna ákveðin heildi á þennan hátt því að útreikningarnir eru flóknir. Síðar í kaflanum þróum við aðferðir til að reikna ákveðin heildi án þess að taka markgildi Riemann-summa. Í bili getum við hins vegar nýtt þá staðreynd að ákveðin heildi tákna flatarmál undir ferli og reiknað þau með rúmfræðiformúlum fyrir flatarmál. Þannig staðfestum við að ákveðin heildi tákna í raun flatarmál og getum síðan rætt hvað gera skuli þegar ferill falls liggur neðan x-ássins.

DÆMI 5.8

Rúmfræðiformúlur notaðar til að reikna ákveðin heildi

Notið formúluna fyrir flatarmál hrings til að reikna $\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$.

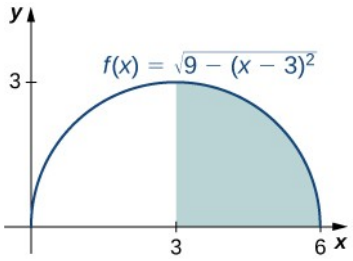
Lausn

Fallið lýsir hálfhring með geisla 3. Til að finna

$$\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx,$$

viljum við finna flatarmálið undir ferlinum á bilinu $[3,6]$. Formúlan fyrir flatarmál hrings er $A=\pi r^2$. Flatarmál hálfhrings er helmingur flatarmáls hrings, eða $A=\left(\frac{1}{2}\right)\pi r^2$. Skyggða svæðið á mynd 5.16 er helmingur hálfhringsins, eða $A=\left(\frac{1}{4}\right)\pi r^2$. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2} &= \frac{1}{4}\,\pi\,(3)^2\\ &= \frac{9}{4}\,\pi\\ &\approx 7{,}069.\end{aligned}$$



Mynd 5.16 Gildi heildis fallsins $f(x)$ á bilinu $[3,6]$ er flatarmál skyggða svæðisins.

5

STÖÐUMAT 5.8

Notið formúluna fyrir flatarmál trapisu til að reikna $\int_2^4 (2x+3)\,dx$.

Flatarmál og ákveðið heildi

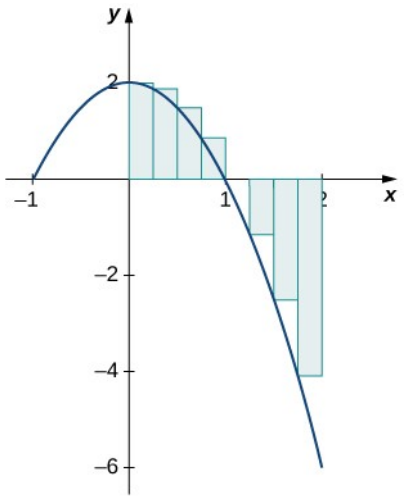
Þegar við skilgreindum ákveðna heildið felldum við niður kröfuna um að $f(x)$ væri óneikvætt. En hvernig túlkum við „flatarmálið undir ferlinum“ þegar $f(x)$ er neikvætt?

Formerkt flatarmál

Snúum okkur aftur að Riemann-summunni. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=2-2x^2$ (sýnt á mynd 5.17) á bilinu $[0,2]$. Notum $n=8$ og veljum $\{x_i^*\}$ sem vinstri endapunkt hvers hlutbils. Teiknum rétthyrning yfir hvert hlutbil með hæðina $f(x_i^*)$ og breiddina Δx. Þegar $f(x_i^*)$ er jákvætt táknar margfeldið $f(x_i^*)\Delta x$ flatarmál rétthyrningsins, eins og áður. Þegar $f(x_i^*)$ er

neikvætt táknar margfeldið $f\left(x_i^*\right)\Delta x$ hins vegar neikvætt gildi flatarmáls rétthyrningsins. Riemann-summan verður þá

$$\sum_{i=1}^{8} f\left(x_i^*\right)\Delta x$$
$$=\left(\text{Flatarmál rétthyrninga ofan við } x\text{-ásinn}\right)-\left(\text{Flatarmál rétthyrninga neðan við } x\text{-ásinn}\right)$$

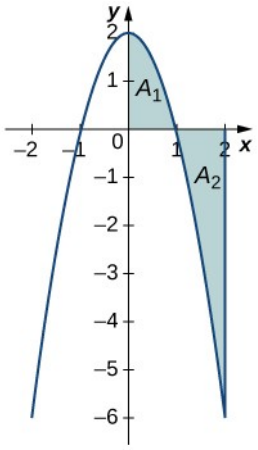


Mynd 5.17 Fyrir fall sem er neikvætt á hluta bilsins er Riemann-summan flatarmál rétthyrninganna ofan x-ássins að frádregnu flatarmáli rétthyrninganna neðan x-ássins.

Þegar $n \to \infty$, nálgast Riemann-summan flatarmálið milli ferilsins og x-ássins ofan við ásinn, að frádregnu flatarmálinu milli ferilsins og x-ássins neðan við ásinn, eins og sýnt er á mynd 5.18. Þá fæst:

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ &= A_1 - A_2.\end{aligned}$$

Stærðin $A_1 - A_2$ kallast formerkt flatarmál.



Mynd 5.18 Í markgildinu er ákveðið heildi jafnt flatarmáli A_1 að frádregnu flatarmáli A_2, það er formerktu flatarmáli.

Athugið að formerkt flatarmál getur verið jákvætt, neikvætt eða núll. Ef flatarmálið ofan x-ássins er stærra er formerkta flatarmálið jákvætt. Ef flatarmálið neðan x-ássins er stærra er það neikvætt. Ef flatarmálin ofan og neðan x-ássins eru jafnstór er formerkta flatarmálið núll.

DÆMI 5.9

Formerkt flatarmál fundið

Finnið formerkt flatarmál milli grafs fallsins $f(x)=2x$ og x-ássins á bilinu $[-3,3]$.

Lausn

Graf fallsins er bein lína sem myndar tvo þríhyrninga: annan frá $x=-3$ til $x=0$ og hinn frá $x=0$ til $x=3$ (mynd 5.19). Með rúmfræðiformúlunni fyrir flatarmál þríhyrnings, $A=\frac{1}{2}bh$, er flatarmál þríhyrnings A_1, sem er ofan við ásinn, jafnt

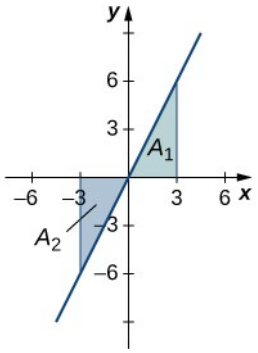
$$A_1=\frac{1}{2}3(6)=9,$$

þar sem 3 er grunnlínan og $2(3)=6$ er hæðin. Flatarmál þríhyrnings A_2 neðan ássins er

$$A_2=\frac{1}{2}(3)(6)=9,$$

þar sem 3 er grunnlínan og 6 hæðin. Formerkta flatarmálið er því

$$\int_{-3}^{3} 2x\,dx=A_1-A_2=9-9=0.$$



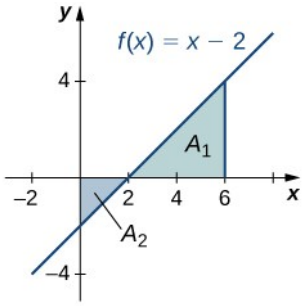
Mynd 5.19 Flatarmálið ofan ferilsins og neðan x-ássins er jafnt flatarmálinu neðan ferilsins og ofan x-ássins.

Greining

Ef A_1 er flatarmálið ofan x-ássins og A_2 flatarmálið neðan hans er formerkta flatarmálið $A_1 - A_2$. Þar sem þríhyrningarnir hafa sama flatarmál er formerkta flatarmálið núll.

STÖÐUMAT 5.9

Finnið formerkt flatarmál $f(x) = x - 2$ á bilinu $[0, 6]$, eins og sýnt er á myndinni hér á eftir.



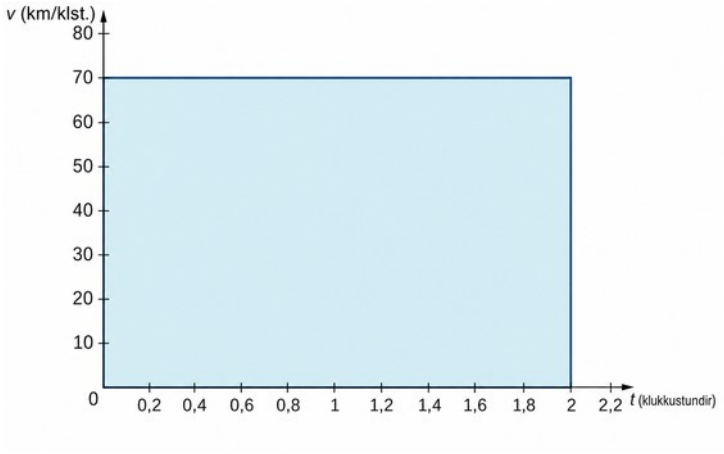
5

Heildarflatarmál

Ein notkun ákveðins heildis er að finna færslu þegar hraðafall er gefið. Ef $v(t)$ táknar hraða hlutar sem fall af tíma segir flatarmálið undir ferlinum til um hve langt hluturinn er frá upphafsstöðu sinni. Þetta er mjög mikilvæg notkun ákveðins heildis og við skoðum hana nánar síðar í kaflanum. Fyrst skoðum við grunnatriðin með því að athuga hreyfingu með föstum hraða.

Þegar hraðinn er fastur er flatarmálið undir ferlinum einfaldlega margfeldi hraða og tíma. Þetta þekkjum við vel. Ef bíll ekur í beinni línu frá upphafsstað sínum á 70 km/klst. hraða í 2 klukkustundir er hann 140 km frá upphafsstaðnum (mynd 5.20). Með heildatáknun fæst

$$\int_0^2 70\,dt = 140.$$

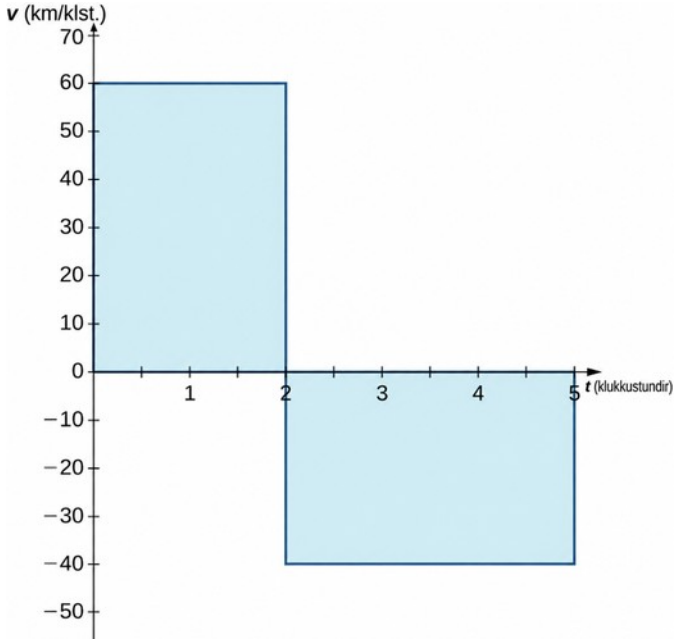


Mynd 5.20 Flatarmálið undir ferlinum $v(t)=70$ segir okkur hversu langt bíllinn er frá upphafspunkti sínum á tilteknum tíma.

Þegar fjallað er um færslu gerir formerkt flatarmál okkur kleift að taka tillit til stefnu. Ef bíll ekur beint í norður á 60 km/klst. hraða í 2 klukkustundir er hann 120 km norðan við upphafsstað sinn. Ef bíllinn snýr þá við og ekur í suður á 40 km/klst. hraða í 3 klukkustundir er hann aftur kominn á upphafsstaðinn (mynd 5.21). Með heildatáknun fæst aftur

$$\begin{aligned}\int_0^2 60dt + \int_2^5 -40dt &= 120 - 120 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Í þessu tilviki er færslan núll.



Mynd 5.21 Flatarmálið ofan ássins og flatarmálið neðan hans eru jafnstór og því er formerkta flatarmálið núll.

Gerum nú ráð fyrir að við viljum vita hversu langt bíllinn ekur alls, óháð stefnu. Þá viljum við finna flatarmálið milli ferilsins og x-ássins, óháð því hvort það liggur ofan eða neðan við ásinn. Þetta kallast heildarflatarmál.

Myndrænt er einfaldast að hugsa sér heildarflatarmálið sem summu flatarmálanna ofan og neðan ássins. Flatarmálin neðan ássins eru þá ekki dregin frá eins og við gerðum fyrir formerkt flatarmál. Stærðfræðilega gerum við þetta með algildisfallinu. Heildarvegalengd bílsins er því

$$\begin{aligned}\int_0^2 |60|dt + \int_2^5 |-40|dt &= \int_0^2 60dt + \int_2^5 40dt \\ &= 120 + 120 \\ &= 240.\end{aligned}$$

Við tökum þessar hugmyndir formlega saman í eftirfarandi skilgreiningum.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera heildanlegt fall sem skilgreint er á bili $[a,b]$. Látum A_1 tákna flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins ofan við ásinn og A_2 flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins neðan við hann. Þá er formerkt flatarmál milli $f(x)$ og x-ássins reiknað sem

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2.$$

Heildarflatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins er reiknað sem

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2.$$

5

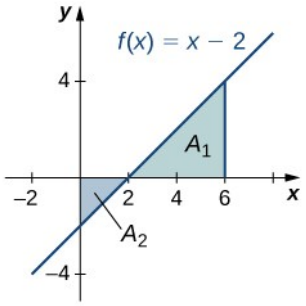
DÆMI 5.10

Heildarflatarmál fundið

Finnið heildarflatarmálið milli $f(x) = x - 2$ og x-ássins á bilinu $[0,6]$.

Lausn

Skurðpunkturinn við x-ásinn er $(2,0)$. Hann fæst með því að setja $y = 0$, og leysa með tilliti til x. Til að finna heildarflatarmálið leggjum við saman flatarmálið neðan x-ássins á hlutbilinu $[0,2]$ og flatarmálið ofan x-ássins á hlutbilinu $[2,6]$ (mynd 5.22).



Mynd 5.22 Heildarflatarmálið milli línunnar og x-ássins á $[0,6]$ er A_2 plús A_1.

Við fáum

$$\int_0^6 |(x-2)|\,dx = A_2 + A_1.$$

Með formúlunni fyrir flatarmál þríhyrnings fáum við þá

$$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8.$$

Heildarflatarmálið er því

$$A_1 + A_2 = 8 + 2 = 10.$$

STÖÐUMAT 5.10

Finnið heildarflatarmálið milli fallsins $f(x) = 2x$ og x-ássins á bilinu $[-3,3]$.

5

Eiginleikar ákveðins heildis

Eiginleikar óákveðinna heilda gilda einnig um ákveðin heildi. Ákveðin heildi hafa auk þess eiginleika sem tengjast heildismörkunum. Þessir eiginleikar, ásamt heildunarreglunum sem við skoðum síðar í kaflanum, gera okkur kleift að umrita stæður til að reikna ákveðin heildi.

REGLA: EIGINLEIKAR ÁKVEÐINS HEILDIS

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(5.9)

Ef heildismörkin eru þau sömu er heildunarsvæðið aðeins línustrik og hefur því ekkert flatarmál.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(5.10)

Ef heildunarmörkunum er víxlað skal setja mínusmerki fyrir framan heildið.

$$\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(5.11)

Heildi summu er summa heildanna.

$$\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

(5.12)

Heildi mismunar er mismunur heildanna.

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

(5.13)

∫ a b c f (x) d x = c ∫ a b f (x) d x (5.13) fyrir fastann c. Heildi margfeldis fasta og falls er jafnt margfeldi fastans og heildis fallsins.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(5.14)

Þótt formúlan gildi venjulega þegar c er á milli a og b gildir hún fyrir öll gildi a, b og c, að því gefnu að $f(x)$ sé heildanlegt á stærsta bilinu.

DÆMI 5.11

Eiginleikar ákveðins heildis notaðir

Notið eiginleika ákveðins heildis til að rita ákveðið heildi fallsins $f(x) = -3x^3+2x+2$ á bilinu $[-2,1]$ sem summu þriggja ákveðinna heilda.

Lausn

Með heildatáknun fæst $\int_{-2}^{1} \left(-3x^3+2x+2\right)dx$. Með eiginleikum 3 og 5 fæst

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\left(-3x^3+2x+2\right)dx &= \int_{-2}^{1}-3x^3dx+\int_{-2}^{1}2xdx+\int_{-2}^{1}2dx\\ &= -3\int_{-2}^{1}x^3dx+2\int_{-2}^{1}xdx+\int_{-2}^{1}2dx.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.11

Notið eiginleika ákveðins heildis til að rita ákveðið heildi fallsins $f(x)=6x^3-4x^2+2x-3$ á bilinu $[1,3]$ sem summu fjögurra ákveðinna heilda.

DÆMI 5.12

Eiginleikar ákveðins heildis notaðir

Ef vitað er að $\int_0^8 f(x)\,dx=10$ og $\int_0^5 f(x)\,dx=5$, finnið gildi $\int_5^8 f(x)\,dx$.

Lausn

Samkvæmt eiginleika 6,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Því fæst

$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)dx &= \int_0^5 f(x)dx+\int_5^8 f(x)dx\\ 10 &= 5+\int_5^8 f(x)dx\\ 5 &= \int_5^8 f(x)dx.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.12

Ef vitað er að $\int_1^5 f(x)\,dx=-3$ og $\int_2^5 f(x)\,dx=4$, finnið gildi $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Samanburðareiginleikar heilda

Mynd getur stundum sagt okkur meira um fall en niðurstöður útreikninga. Oft fæst betri skilningur á heildun með því að bera föll saman, bæði út frá gröfum þeirra og algebrulegum stæðum. Í fljótu bragði mætti ætla að ef fall $f(x)$ liggur ofan við annað fall $g(x)$, þá sé flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins stærra en flatarmálið milli $g(x)$ og x-ássins. Hvort það er rétt fer eftir bilinu sem samanburðurinn nær yfir. Eiginleikar ákveðinna heilda gilda hvort sem

$a<b$, $a=b$, eða $a>b$. Eftirfarandi eiginleikar eiga hins vegar aðeins við þegar $a \leq b$, og eru notaðir til að bera saman stærð heilda.

SETNING 5.2

Samanburðarsetning

i. Ef $f(x) \geq 0$ fyrir $a \leq x \leq b$, þá

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

ii. Ef $f(x) \geq g(x)$ fyrir $a \leq x \leq b$, þá

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

iii. Ef m og M eru fastar þannig að $m \leq f(x) \leq M$ fyrir $a \leq x \leq b$, þá

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x)dx \\ &\leq M(b-a). \end{aligned}$$

DÆMI 5.13

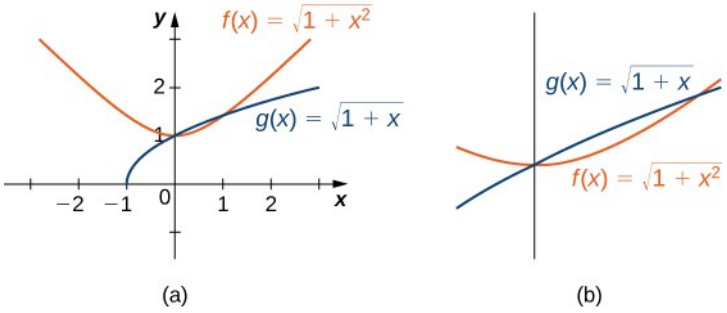
Samanburður tveggja falla á tilteknu bili

Berið saman $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ og $g(x)=\sqrt{1+x}$ á bilinu $[0,1]$.

5

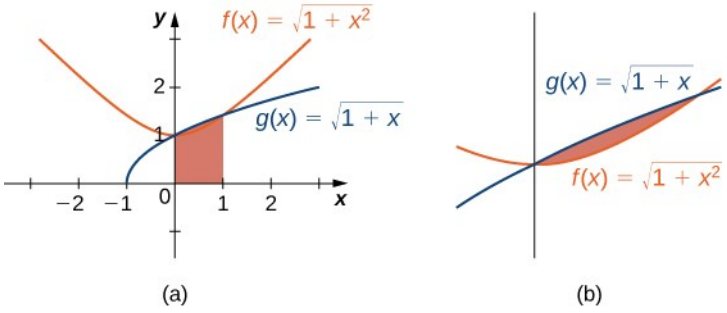
Lausn

Nauðsynlegt er að teikna gröf fallanna til að geta borið þau saman á bilinu $[0,1]$. Þegar þau eru fyrst teiknuð með grafreikni virðist $f(x)$ liggja alls staðar ofan við $g(x)$. Þegar aðeins er litið á bilið $[0,1]$, virðast gröfin þó falla saman. Við þurfum að stækka myndina til að sjá hvernig þau liggja á bilinu $[0,1]$, $g(x)$ liggur ofan við $f(x)$. Föllin skerast í $x=0$ og $x=1$ (mynd 5.23).



Mynd 5.23 (a) Fallið $f(x)$ virðist liggja ofan við fallið $g(x)$ nema á bilinu $[0,1]$. (b) Þetta sést skýrar þegar sama graf er stækkað.

Af grafinu sést að á bilinu $[0,1], g(x) \geq f(x)$. Þegar heildin eru borin saman á bilinu $[0,1]$, sést einnig að $\int_0^1 g(x)\,dx \geq \int_0^1 f(x)\,dx$ (mynd 5.24). Mjóa rauðskyggða svæðið sýnir muninn á þessum tveimur heildum á bilinu $[0,1]$.



Mynd 5.24 (a) Grafið sýnir að á bilinu $[0,1], g(x) \geq f(x)$, og jafnaðarmerkið gildir aðeins í endapunktum bilsins. (b) Þetta sést skýrar þegar sama graf er stækkað.

5

Meðalgildi falls

Oft þurfum við að finna meðaltal talnasafns, til dæmis meðaleinkunn á prófum. Gerum ráð fyrir að þið hafið fengið eftirfarandi einkunnir í algebruprófum: 89, 90, 56, 78, 100 og 69. Annareinkunnin er meðaltal prófseinkunnanna og þið viljið vita við hvaða einkunn þið megið búast. Meðaltalið fæst með því að leggja allar einkunnirnar saman og deila með fjölda þeirra. Hér eru prófseinkunnirnar sex og því fæst

$$\frac{89+90+56+78+100+69}{6} = \frac{482}{6} \approx 80{,}33.$$

Meðaleinkunn ykkar á prófunum er því um það bil 80,33, sem jafngildir B– í flestum skólum.

Gerum hins vegar ráð fyrir að fallið $v(t)$ gefi hraða hlutar á hverjum tíma t og að við viljum finna meðalhraða hlutarins. Fallið $v(t)$ tekur óendanlega mörg gildi og því getum við ekki notað aðferðina hér á undan. Sem betur fer má nota ákveðið heildi til að finna meðalgildi slíks falls.

Látum $f(x)$ vera samfellt á bilinu $[a,b]$ og skiptum $[a,b]$ í n hlutbil með breiddina $\Delta x=(b-a)/n$. Veljum fulltrúa x_i^* í hverju hlutbili og reiknum $f\left(x_i^*\right)$ fyrir $i=1,2,\ldots,n$. Með öðrum orðum lítum við á hvert $f\left(x_i^*\right)$ sem úrtak úr fallinu á viðkomandi hlutbili. Þá má nálga meðalgildi fallsins með

$$\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{n},$$

sem er í meginatriðum sama stæða og notuð er til að reikna meðaltal stakra gilda.

En við vitum að $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, þannig að $n=\frac{b-a}{\Delta x}$, og við fáum

$$\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{n}=\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}}.$$

Ef við höldum útreikningnum áfram sést að teljarinn er summa sem rituð er $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)$, og deilt er með broti. Til að deila með broti snúum við nefnaranum við og margföldum. Nálgun á meðalgildi fallsins er því gefin með

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}} &= \left(\frac{\Delta x}{b-a}\right)\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\\ &= \left(\frac{1}{b-a}\right)\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x.\end{aligned}$$

Þetta er Riemann-summa. Til að fá nákvæmt meðalgildi tökum við markgildið þegar n stefnir á óendanlegt. Meðalgildi falls er því gefið með

$$\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera samfellt á bilinu $[a,b]$. Þá er meðalgildi fallsins $f(x)$ (eða f_{ave}) á $[a,b]$ gefið með

$$f_{\text{ave}}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

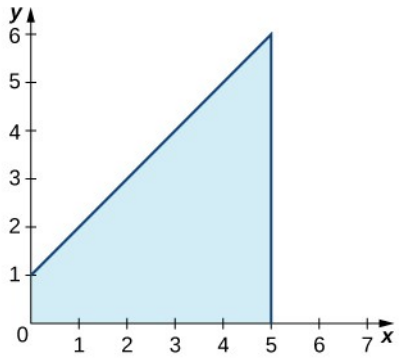
DÆMI 5.14

Meðalgildi línulegs falls fundið

Finnið meðalgildi $f(x)=x+1$ á bilinu $[0,5]$.

Lausn

Teiknum fyrst graf fallsins á tilgreinda bilinu, eins og sýnt er á mynd 5.25.



Mynd 5.25 Grafið sýnir flatarmálið undir grafi fallsins $f(x)=x+1$ á bilinu $[0,5]$.

Svæðið er trapisa sem liggur á hlið og því má nota flatarmálsformúluna fyrir trapisu $A=\frac{1}{2}h(a+b)$, þar sem h táknar hæðina og a og b tákna samsíða hliðarnar tvær. Þá fæst:

$$\begin{aligned}\int_0^5 x+1\,dx &= \tfrac{1}{2}h\,(a+b)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot(1+6)\\ &= \tfrac{35}{2}.\end{aligned}$$

Meðalgildi fallsins er því

$$\frac{1}{5-0}\int_0^5 x+1\,dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{35}{2}=\frac{7}{2}.$$

STÖÐUMAT 5.13

Finnið meðalgildi $f(x)=6-2x$ á bilinu $[0,3]$.

Æfingar í undirkafla 5.2

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita markgildin sem heildi.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)\Delta x$ á $[1,3]$

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(5\left(x_i^*\right)^2-3\left(x_i^*\right)^3\right)\Delta x$ á $[0,2]$

62. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x$ á $[0,1]$

63. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x$ á $[0,1]$

Í eftirfarandi æfingum eru L_n eða R_n gefin eins og tilgreint er. Ritið markgildi þeirra þegar $n \to \infty$ sem ákveðin heildi og tilgreinið rétt bil.

64.

$$L_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}$$

65.

$$R_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$$

66.

$$L_n=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+2\frac{i-1}{n}\right)$$

67.

$$R_n=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3+3\frac{i}{n}\right)$$

68.

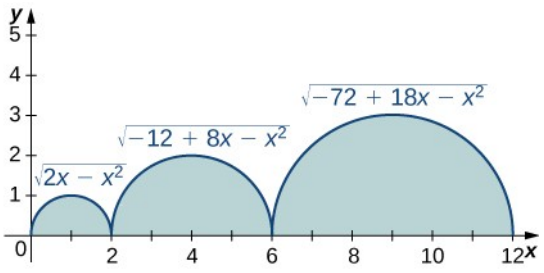
$$L_n=\frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}2\pi\frac{i-1}{n}\cos\left(2\pi\frac{i-1}{n}\right)$$

69.

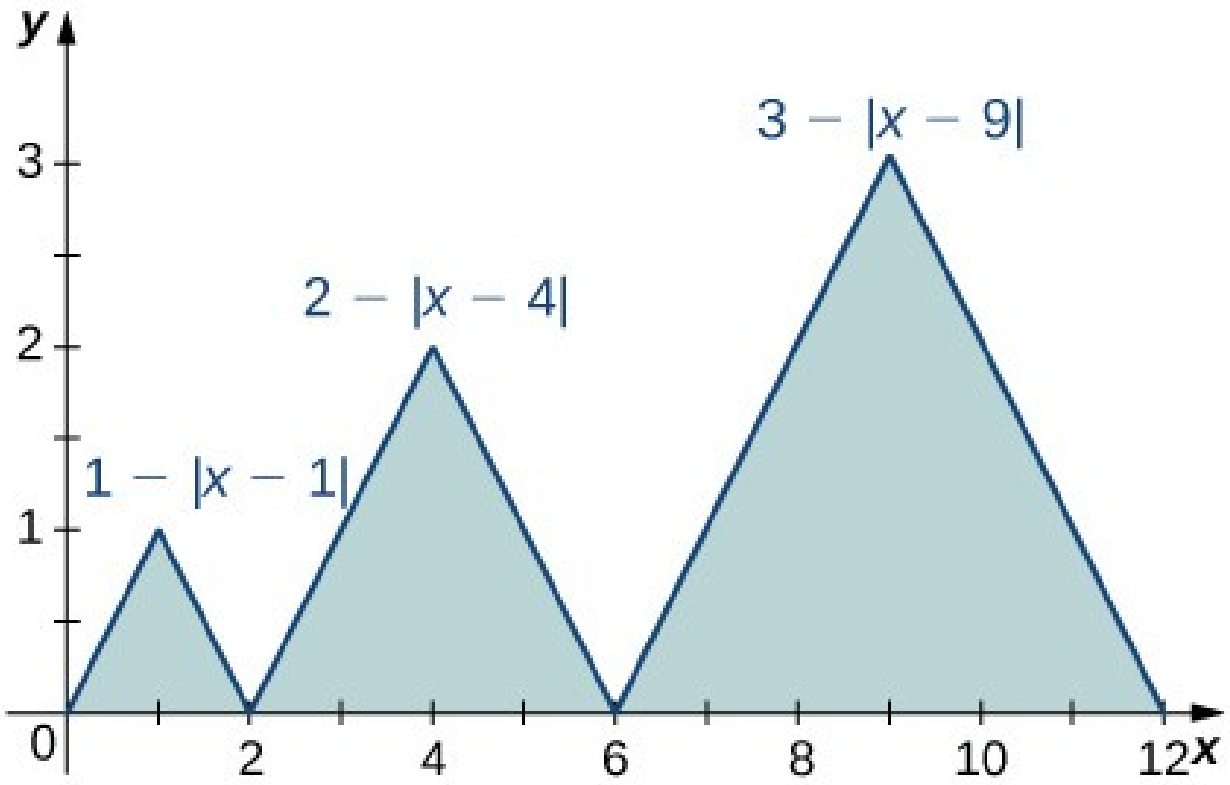
$$R_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\log\left(\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna heildi fallanna sem sýnd eru á gröfunum. Notið flatarmálsformúlur þríhyrninga og hringa og dragið flatarmál svæðanna neðan x-ássins frá.

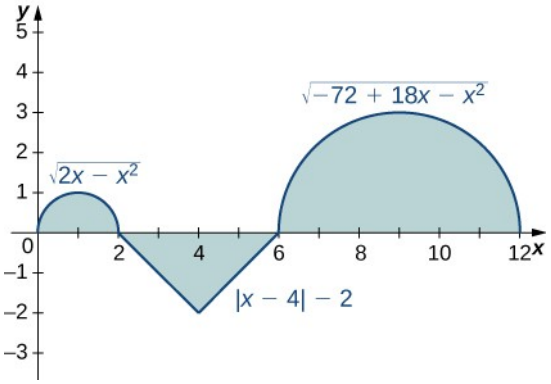
70.



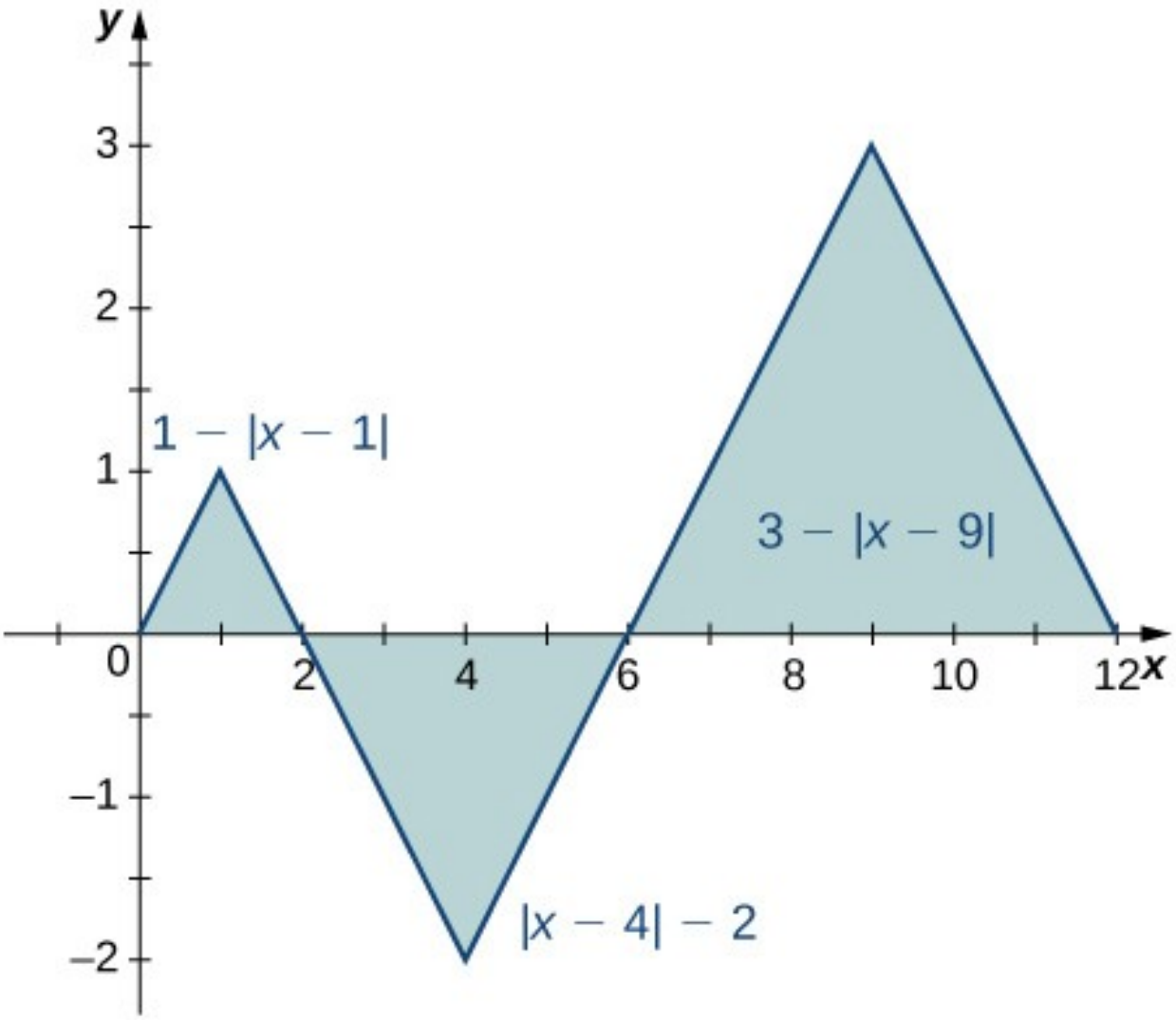
71.


y
3
2
1
0
2
4
6
8
10
12
x
1 − |x − 1|
2 − |x − 4|
3 − |x − 9|

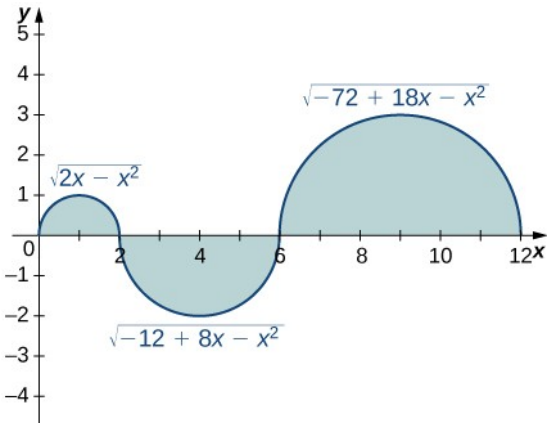
72.


y
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
2
4
6
8
10
12
x
√(2x − x²)
√(−72 + 18x − x²)
|x − 4| − 2

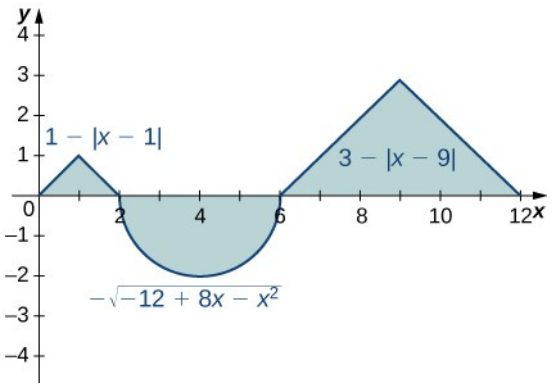
73.


y
x
3
2
1
0
−1
−2
2
4
6
8
10
12
1 − |x − 1|
3 − |x − 9|
|x − 4| − 2

74.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
2
4
6
8
10
12
√(2x − x²)
√(−72 + 18x − x²)
√(−12 + 8x − x²)

75.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna heildið með flatarmálsformúlum.

76.

$$\int_0^3 (3-x)\,dx$$

77.

$$\int_2^3 (3-x)\,dx$$

78.

$$\int_{-3}^3 (3-|x|)\,dx$$

79.

$$\int_0^6 (3-|x-3|)\,dx$$

80.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

81.

$$\int_1^5 \sqrt{4-(x-3)^2}\,dx$$

82.

$$\int_0^{12} \sqrt{36-(x-6)^2}\,dx$$

83.

$$\int_{-2}^{3} \left(3-|x|\right) d\,x$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota meðaltöl gilda í vinstri (L) og hægri (R) endapunktum til að reikna heildi falla sem eru línuleg á köflum. Gröf fallanna liggja um gefnu punktana á tilgreindum bilum.

84. $\{(0,0),(2,1),(4,3),(5,0),(6,0),(8,3)\}$ á $[0,8]$

85. $\{(0,2),(1,0),(3,5),(5,5),(6,2),(8,0)\}$ á $[0,8]$

86. $\{(-4,-4),(-2,0),(0,-2),(3,3),(4,3)\}$ á $[-4,4]$

87. $\{(-4,0),(-2,2),(0,0),(1,2),(3,2),(4,0)\}$ á $[-4,4]$

Gerum ráð fyrir að $\int_0^4 f(x)\,d\,x=5$ og $\int_0^2 f(x)\,d\,x=-3$, og $\int_0^4 g(x)\,d\,x=-1$ og $\int_0^2 g(x)\,d\,x=2$.

Reiknið heildin í eftirfarandi æfingum.

88.

$$\int_0^4 \left(f(x)+g(x)\right) d\,x$$

89.

$$\int_2^4 \left(f(x)+g(x)\right) d\,x$$

5

90.

$$\int_0^2 \left(f(x)-g(x)\right) d\,x$$

91.

$$\int_2^4 \left(f(x)-g(x)\right) d\,x$$

92.

$$\int_0^2 \left(3f(x)-4g(x)\right) d\,x$$

93.

$$\int_2^4 \left(4f(x)-3g(x)\right) d\,x$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota samsemdina $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{-A}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{A} f(x)\,dx$ til að reikna heildin.

94.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt \ (Hint: \sin(-t) = -\sin(t))$$

95.

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \frac{t}{1+\cos t}\,dt$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna formerkt flatarmál milli $f(x)$ og x-ássins.

96. $\int_{1}^{3} (2-x)\,dx$ (Vísbending: Skoðið graf f.)

97. $\int_{2}^{4} (x-3)^3\,dx$ (Vísbending: Skoðið graf f.)

Gefið er að $\int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}$, og $\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}$, og út frá því skuluð þið reikna heildin í eftirfarandi æfingum.

98.

$$\int_{0}^{1} \left(1+x+x^2+x^3\right)dx$$

99.

$$\int_{0}^{1} \left(1-x+x^2-x^3\right)dx$$

100.

$$\int_{0}^{1} (1-x)^2\,dx$$

101.

$$\int_{0}^{1} (1-2x)^3\,dx$$

102.

$$\int_{0}^{1} \left(6x - \frac{4}{3}x^2\right)dx$$

103.

$$\int_0^1 \left(7-5x^3\right)dx$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota samanburðarsetninguna.

104. Sýnið að $\int_0^3 \left(x^2-6x+9\right)dx \geq 0$.

105. Sýnið að $\int_{-2}^3 (x-3)(x+2)\,dx \leq 0$.

106. Sýnið að $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

107. Sýnið að $\int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

108. Sýnið að $\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt \geq \frac{\pi}{4}$. ($Hint: \sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ á $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

109. Sýnið að $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\,dt \geq \pi\sqrt{2}/4$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna meðalgildið f_{ave} fyrir fallið f á bilinu frá a til b og finna punkt c þannig að $f(c)=f_{ave}$.

110.

$$f(x)=x^2, a=-1, b=1$$

111.

$$f(x)=x^5, a=-1, b=1$$

112.

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=0, b=2$$

113.

$$f(x)=(3-|x|), a=-3, b=3$$

114.

$$f(x)=\sin x, a=0, b=2\pi$$

115.

$$f(x)=\cos x, a=0, b=2\pi$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nálga meðalgildið með Riemann-summunum L_{100} og R_{100}. Hvernig ber svarinu saman við gefna nákvæma svarið?

116. [T] $y=\ln(x)$ á bilinu $[1,4]$; nákvæma gildið er $\frac{\ln(256)}{3}-3$.

117. [T] $y=e^{x/2}$ á bilinu $[0,1]$; nákvæma gildið er $2(\sqrt{e}-1)$.

118. [T] $y=\tan x$ á bilinu $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; nákvæma lausnin er $\frac{2\ln(2)}{\pi}$.

119. [T] $y=\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ á bilinu $[-1,1]$; nákvæma lausnin er $\frac{\pi}{6}$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna meðalgildið með vinstri Riemann-summunum L_N fyrir $N=1,10,100$. Hversu nákvæmar eru niðurstöðurnar miðað við gefna nákvæma gildið?

120. [T] $y=x^2-4$ á bilinu $[0,2]$; nákvæma gildið er $-\frac{8}{3}$.

121. [T] $y=xe^{x^2}$ á bilinu $[0,2]$; nákvæma gildið er $\frac{1}{4}(e^4-1)$.

122. [T] $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ á bilinu $[0,4]$; nákvæma lausnin er $\frac{15}{64\ln(2)}$.

123. [T] $y=x\sin(x^2)$ á bilinu $[-\pi,0]$; nákvæma gildið er $\frac{\cos(\pi^2)-1}{2\pi}$.

124. Gerum ráð fyrir að $A=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$ og $B=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt$. Sýnið að $A+B=2\pi$ og $A=B$.

125. Gerum ráð fyrir að $A=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^2 t\,dt=\pi$ og $B=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan^2 t\,dt$. Sýnið að $A-B=\frac{\pi}{2}$.

126. Sýnið að meðalgildi $\sin^2 t$ á bilinu $[0,2\pi]$ sé $1/2$. Ákvarðið síðan án frekari útreikninga hvort meðalgildi $\sin^2 t$ á bilinu $[0,\pi]$ sé einnig $1/2$.

127. Sýnið að meðalgildi $\cos^2 t$ á bilinu $[0,2\pi]$ sé $1/2$. Ákvarðið síðan án frekari útreikninga hvort meðalgildi $\cos^2(t)$ á bilinu $[0,\pi]$ sé einnig $1/2$.

128. Útskýrið hvers vegna graf annars stigs falls $p(x)$ (fleygbogi) og graf línulegs falls $\ell(x)$ geta haft í mesta lagi tvo skurðpunkta. Gerum ráð fyrir að $p(a)=\ell(a)$ og $p(b)=\ell(b)$, og að $\int_a^b p(t)\,dt>\int_a^b \ell(t)\,dt$. Útskýrið hvers vegna $\int_c^d p(t)>\int_c^d \ell(t)\,dt$ þegar $a\le c<d\le b$.

129. Gerum ráð fyrir að fleygboginn $p(x)=ax^2+bx+c$ opnist niður $(a<0)$ og hafi topppunktinn $y=\frac{-b}{2a}>0$. Fyrir hvaða bil $[A,B]$ er $\int_A^B (ax^2+bx+c)\,dx$ stærst?

130. Gerum ráð fyrir að $[a,b]$ megi skipta í hlutbil $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_N=b$ þannig að annaðhvort $f\geq 0$ á $[a_{i-1},a_i]$ eða $f\leq 0$ á $[a_{i-1},a_i]$. Setjum $A_i=\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,dt$.

a. Útskýrið hvers vegna $\int_a^b f(t)\,dt=A_1+A_2+\cdots+A_N$.

b. Útskýrið síðan hvers vegna $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\int_a^b |f(t)|\,dt$.

131. Gerum ráð fyrir að f og g séu samfelld föll þannig að $\int_c^d f(t)\,dt\leq\int_c^d g(t)\,dt$ fyrir hvert hlutbil $[c,d]$ í $[a,b]$. Útskýrið hvers vegna $f(x)\leq g(x)$ fyrir öll gildi x.

132. Gerum ráð fyrir að meðalgildi f á $[a,b]$ sé 1 og að meðalgildi f á $[b,c]$ sé 1, þar sem $a<c<b$. Sýnið að meðalgildi f á $[a,c]$ sé einnig 1.

133. Gerum ráð fyrir að skipta megi bilinu $[a,b]$ með skiptipunktunum $a=a_0<a_1<\cdots<a_N=b$ þannig að meðalgildi f á hverju hlutbili $[a_{i-1},a_i]=1$ sé 1 fyrir hvert $i=1,\ldots,N$. Útskýrið hvers vegna meðalgildi f á $[a,b]$ er þá einnig 1.

134. Gerum ráð fyrir að fyrir hvert i með $1\leq i\leq N$ gildi $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt=i$. Sýnið að

$$\int_0^N f(t)\,dt=\frac{N(N+1)}{2}.$$

135. Gerum ráð fyrir að fyrir hvert i með $1\leq i\leq N$ gildi $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt=i^2$. Sýnið að

$$\int_0^N f(t)\,dt=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

136. [T] Reiknið vinstri og hægri Riemann-summurnar L_{10} og R_{10} og meðaltal þeirra $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ fyrir $f(t)=t^2$ á $[0,1]$. Ef vitað er að $\int_0^1 t^2\,dt=0,\overline{33}$, upp á hve marga aukastafi er $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ nákvæmt?

137. [T] Reiknið vinstri og hægri Riemann-summurnar, L_{10} og R_{10}, og meðaltal þeirra $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ fyrir $f(t)=(4-t^2)$ á $[1,2]$. Ef vitað er að $\int_1^2 (4-t^2)\,dt=1,\overline{66}$, upp á hve marga aukastafi er $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ nákvæmt?

5

138. Ef $\int_1^5 \sqrt{1+t^4}\,dt = 41{,}7133\ldots$, hvert er þá $\int_1^5 \sqrt{1+u^4}\,du$?

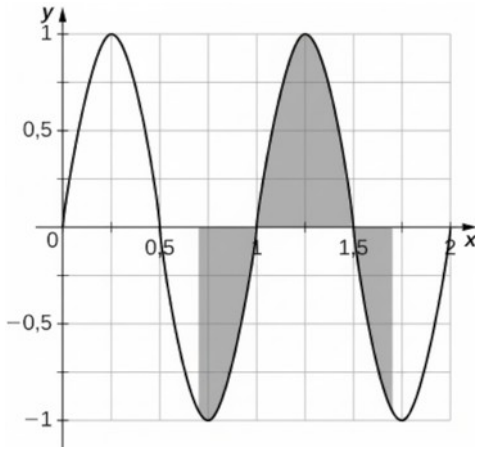
139. Metið $\int_0^1 t\,dt$ með summu með vinstri endapunktum og summu með hægri endapunktum, hvorri með einum rétthyrningi. Hvernig ber meðaltali þessara summa saman við nákvæma gildið $\int_0^1 t\,dt$?

140. Metið $\int_0^1 t\,dt$ með því að bera það saman við flatarmál eins rétthyrnings þar sem hæðin er jöfn gildi t í miðpunktinum $t=\frac{1}{2}$. Hvernig ber þessu miðpunktsmati saman við nákvæma gildið $\int_0^1 t\,dt$?

141. Á grafinu hér á eftir er fallið $\sin(2\pi x)$ sýnt:

a. Útskýrið hvers vegna $\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt = 0$.

b. Útskýrið hvers vegna almennt gildir að $\int_a^{a+1} \sin(2\pi t)\,dt = 0$ fyrir hvaða gildi á a sem er.



142. Ef f er 1-lotubundið $(f(t+1)=f(t))$, oddstætt og heildanlegt á $[0,1]$, gildir þá alltaf að $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$?

143. Ef f er 1-lotubundið og $\int_0^1 f(t)\,dt = A$, gildir þá endilega að $\int_a^{1+a} f(t)\,dt = A$ fyrir öll A?

5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

NÁMSMARKMIÐ

- 5.3.1 Lýsið merkingu meðalgildissetningarinnar fyrir heildi.
- 5.3.2 Útskýrið merkingu 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.
- 5.3.3 Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna afleiður heilda.
- 5.3.4 Útskýrið merkingu 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.
- 5.3.5 Notið 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna ákveðin heildi.
- 5.3.6 Útskýrið sambandið milli deildunar og heildunar.

Í tveimur fyrri undirköflunum skoðuðum við ákveðna heildið og tengsl þess við flatarmálið undir ferli falls. Enn sem komið er höfum við því miður aðeins tvö verkfæri til að reikna gildi ákveðins heildis: rúmfræðiformúlur fyrir flatarmál og markgildi Riemann-summa. Báðar aðferðirnar eru afar fyrirhafnarsamar. Í þessum undirkafla skoðum við öflugri og gagnlegri aðferðir til að reikna ákveðin heildi.

Þessar nýju aðferðir byggjast á tengslum milli deildunar og heildunar. Sir Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz voru meðal þeirra sem uppgötvuðu og rannsökuðu þessi tengsl seint á 17. öld og snemma á 18. öld. Tengslin eru sett fram í því sem við köllum nú undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar. Hún er í tveimur hlutum sem við skoðum í þessum undirkafla. Heitið eitt sýnir hve miklu máli setningin skiptir fyrir alla þróun stærðfræðigreiningarinnar.

MIÐLAR

5

Framlag Isaacs Newtons til stærðfræði og eðlisfræði breytti sýn okkar á heiminn. Tengslin sem hann uppgötvaði og setti fram sem lögmál Newtons og almenna þyngdarlögmálið eru enn kennd sem undirstöðuefni í eðlisfræði. Stærðfræðigreining hans lagði jafnframt grunn að heilum greinum stærðfræðinnar. Lesið stutta ævisögu Newtons með margmiðlunarefni til að fræðast nánar.

Áður en við snúum okkur að þessari veigamiklu setningu skulum við þó skoða aðra mikilvæga setningu: meðalgildissetninguna fyrir heildi. Hún er nauðsynleg til að sanna undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar.

Meðalgildissetningin fyrir heildi

Meðalgildissetningin fyrir heildi segir að samfellt fall á lokuðu bili taki meðalgildi sitt í einhverjum punkti á bilinu. Setningin tryggir að ef $f(x)$ er samfellt, þá sé til punktur c á bili $[a,b]$ þannig að gildi fallsins í c sé jafnt meðalgildi $f(x)$ á $[a,b]$. Við setjum setninguna fram stærðfræðilega með hjálp formúlunnar fyrir meðalgildi falls sem við settum fram í lok undirkaflans á undan.

SETNING 5.3

Meðalgildissetningin fyrir heildi

Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$, þá er til að minnsta kosti einn punktur $c \in [a,b]$ þannig að

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(5.15)

Þessa formúlu má einnig rita sem

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Sönnun

Þar sem $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$, tekur það lággildi og hágildi samkvæmt útgildissetningunni (sjá Hágildi og lággildi). Gildin eru m og M, í þeirri röð, á $[a,b]$. Fyrir öll x á $[a,b]$, gildir $m \le f(x) \le M$. Samkvæmt samanburðarsetningunni (sjá Ákveðna heildið) fæst því

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Deilum með $b-a$ og fáum

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Þar sem $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ er tala á milli m og M og $f(x)$ er samfellt og tekur gildin m og M á bilinu $[a,b]$, er samkvæmt milligildissetningunni (sjá Samfelldni) til tala c á bilinu $[a,b]$ þannig að

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

og sönnuninni er lokið.

□

DÆMI 5.15

Meðalgildi falls fundið

Finnið meðalgildi fallsins $f(x) = 8 - 2x$ á bilinu $[0,4]$ og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi fallsins á $[0,4]$.

Lausn

Samkvæmt formúlunni fæst meðalgildi $f(x)$ með

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 (8-2x)\,dx.$$

Við sjáum á mynd 5.26 að graf fallsins er bein lína sem myndar rétthyrndan þríhyrning sem afmarkast af x- og y-ásunum. Flatarmál þríhyrningsins er $A=\frac{1}{2}(\text{grunnlína})(\text{hæð})$. Þá fæst

$$A=\frac{1}{2}(4)(8)=16.$$

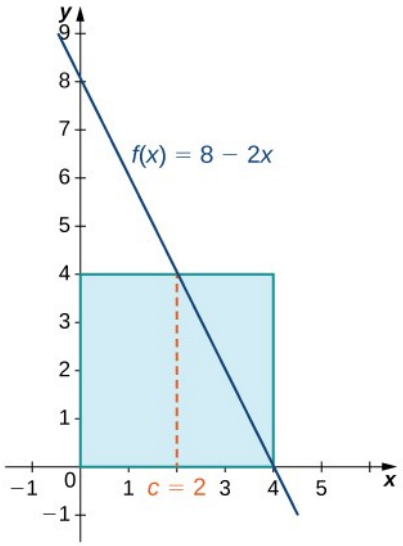
Meðalgildið fæst með því að margfalda flatarmálið með $1/(4-0)$. Því er meðalgildi fallsins

$$\frac{1}{4}(16)=4.$$

Jöfnum meðalgildið við $f(c)$ og leysum jöfnuna með tilliti til c.

$$\begin{aligned} 8-2c &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Þegar $c=2, f(2)=4$.



Mynd 5.26 Samkvæmt meðalgildissetningunni er á lokuðu bili að minnsta kosti einn punktur c þar sem samfellda fallið $f(x)$ tekur meðalgildi sitt.

STÖÐUMAT 5.14

Finnið meðalgildi fallsins $f(x)=\frac{x}{2}$ á bilinu $[0,6]$ og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi fallsins á $[0,6]$.

DÆMI 5.16

Punktur fundinn þar sem fall tekur meðalgildi sitt

Gefið er að $\int_0^3 x^2\,dx=9$, og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi $f(x)=x^2$ á $[0,3]$.

Lausn

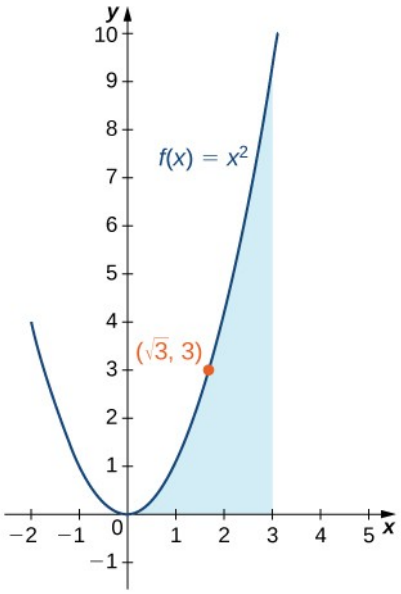
Við leitum að gildi c þannig að

$$f(c)=\frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx=\frac{1}{3}(9)=3.$$

Í stað $f(c)$ setjum við c^2. Þá fæst

$$\begin{aligned} c^2 &= 3 \\ c &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Þar sem $-\sqrt{3}$ er utan bilsins tökum við aðeins jákvæða gildið. Því fæst $c=\sqrt{3}$ (mynd 5.27).



Mynd 5.27 Á bilinu $[0,3]$, tekur fallið $f(x)=x^2$ meðalgildi sitt í $c=\sqrt{3}$.

STÖÐUMAT 5.15

Gefið er að $\int_0^3 \left(2x^2-1\right)dx=15$, og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi $f(x)=2x^2-1$ á $[0,3]$.

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti: Heildi og stofnföll

Eins og áður hefur komið fram er undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar afar öflug. Hún lýsir sambandinu milli deildunar og heildunar og gerir okkur kleift að reikna ákveðin heildi án þess að nota Riemann-summur eða reikna flatarmál. Setningin er í tveimur hlutum. Fyrri hlutinn, 1. hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar, er settur fram hér og lýsir sambandinu milli deildunar og heildunar.

SETNING 5.4

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti

Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$, og fallið $F(x)$ er skilgreint með

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

(5.16)

þá gildir $F'(x)=f(x)$ á (a,b).

Áður en við förum nánar út í sönnunina er rétt að nefna tvö fíngerð atriði. Fyrra atriðið varðar táknunina. Við höfum skilgreint fallið $F(x)$, sem ákveðið heildi annars falls, $f(t)$, frá a til x. Við fyrstu sýn getur þetta virst ruglingslegt, því við höfum oft sagt að ákveðið heildi sé tala en hér virðist það vera fall. Lykilatriðið er að fyrir hvert tiltekið gildi x er ákveðna heildið tala. Fallið $F(x)$ skilar því tölu, gildi ákveðna heildisins, fyrir hvert gildi x.

Í öðru lagi er vert að nefna nokkrar helstu afleiðingar setningarinnar. Hún er ekki að ástæðulausu kölluð undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar. Hún staðfestir ekki aðeins tengsl heildunar og deildunar heldur tryggir einnig að hvert heildanlegt fall eigi sér stofnfall.

Sönnun

Notum skilgreiningu afleiðunnar og fáum

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^{a} f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Ef við skoðum síðustu stæðuna vandlega sjáum við að $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ er einmitt meðalgildi fallsins $f(x)$ á bilinu $[x, x+h]$. Samkvæmt meðalgildissetningunni fyrir heildi er því til tala c í $[x, x+h]$ þannig að

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c).$$

Þar að auki er c milli x og x + h. Af því leiðir að c stefnir á x þegar h stefnir á núll. Þar sem $f(x)$ er samfellt gildir $\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$. Setjum nú alla þessa hluta saman og fáum

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

og sönnuninni er lokið.

□

5

DÆMI 5.17

Afleiða fundin með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar

Notið fyrri hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að finna afleiðu

$$g(x) = \int_1^{x} \frac{1}{t^3+1}\,dt.$$

Lausn

Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar er afleiðan gefin með

$$g'(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

STÖÐUMAT 5.16

Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að finna afleiðu

$g(r)=\int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$.

DÆMI 5.18

Afleiður reiknaðar með undirstöðusetningunni og keðjureglunni

Látum $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \sin t\,dt$. Finnið $F'(x)$.

Lausn

Látum $u(x)=\sqrt{x}$, þá fæst $F(x)=\int_1^{u(x)} \sin t\,dt$. Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar og keðjureglunni fæst því

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin\left(u(x)\right)\frac{du}{dx} \\ &= \sin\left(u(x)\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) \\ &= \tfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.17

Látum $F(x)=\int_1^{x^3} \cos t\,dt$. Finnið $F'(x)$.

5

DÆMI 5.19

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar notuð með tveimur breytilegum heildismörkum

Látum $F(x)=\int_x^{2x} t^3\,dt$. Finnið $F'(x)$.

Lausn

Gefið er $F(x)=\int_x^{2x} t^3\,dt$. Bæði heildismörkin eru breytileg og því þurfum við að skipta heildinu í tvennt. Þá fæst

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} t^3 dt \\ &= \int_x^0 t^3 dt + \int_0^{2x} t^3 dt \\ &= -\int_0^x t^3 dt + \int_0^{2x} t^3 dt. \end{aligned}$$

Deildum fyrri liðinn og fáum

$$\frac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3\,dt\right] = -x^3.$$

Til að deilda síðari liðinn látum við fyrst $u(x) = 2x$. Þá fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3 dt\right] &= \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{u(x)} t^3 dt\right] \\ &= (u(x))^3 \tfrac{du}{dx} \\ &= (2x)^3 \cdot 2 \\ &= 16x^3. \end{aligned}$$

Því fæst

$$\begin{aligned} F'(x) &= \tfrac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3 dt\right] + \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3 dt\right] \\ &= -x^3 + 16x^3 \\ &= 15x^3. \end{aligned}$$

5

STÖÐUMAT 5.18

Látum $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,dt$. Finnið $F'(x)$.

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti: Reiknisetningin

2. hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar er ef til vill mikilvægasta setning stærðfræðigreiningarinnar. Eftir þrotlaust starf stærðfræðinga í um 500 ár komu fram nýjar aðferðir sem gáfu vísindafólki nauðsynleg verkfæri til að skýra fjölmörg fyrirbæri. Með stærðfræðigreiningu gátu stjörnufræðingar loks ákvarðað fjarlægðir í geimnum og kortlagt brautir reikistjarna. Nú var hægt að leysa dagleg fjármálaverkefni, svo sem að reikna jaðarkostnað eða spá fyrir um heildarhagnað, á einfaldan og nákvæman hátt. Verkfræðingar gátu reiknað beygjustyrk efna eða þrívíða hreyfingu hluta. Stærðfræðigreining breytti sýn okkar á heiminn til frambúðar.

Eftir að við höfum nálgað flatarmál með því að leggja saman flatarmál n rétthyrninga er einfalt í samanburði að nota þessa setningu. Það virðist næstum of einfalt að reikna megi flatarmál heils svæðis sem afmarkast af bognum ferli með því einu að reikna gildi stofnfalls í báðum endapunktum bilsins.

SETNING 5.5

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti

Ef f er samfellt á bilinu $[a,b]$ og $F(x)$ er eitthvert stofnfall $f(x)$, þá

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(5.17)

Táknunin $F(x)\Big|_a^b$ er oft notuð fyrir stæðuna $F(b) - F(a)$. Lóðrétta strikið og mörkin a og b merkja að reikna skuli gildi fallsins $F(x)$ við efra markið, hér b, og draga frá gildi fallsins $F(x)$ við neðra markið, hér a.

Seinni hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar, sem einnig kallast reiknisetningin, segir að ef við getum fundið stofnfall heildisstofnsins megi reikna ákveðna heildið með því að reikna gildi stofnfallsins í endapunktum bilsins og draga gildið í neðri endapunktinum frá gildinu í þeim efri.

Sönnun

Látum $P = \{x_i\}, i = 0,1,\ldots,n$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Þá getum við skrifað

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \ldots + [F(x_1) - F(x_0)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

Þar sem F er stofnfall f á $[a,b]$, má samkvæmt meðalgildissetningunni (sjá Meðalgildissetninguna) fyrir $i = 0,1,\ldots,n$ finna c_i í $[x_{i-1}, x_i]$ þannig að

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x.$$

Setjum þetta inn í jöfnuna hér á undan og fáum

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$

Tökum markgildi beggja hliða þegar $n \to \infty$, og fáum

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

□

DÆMI 5.20

Heildi reiknað með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar

Notið 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna

$$\int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt.$$

Lausn

Rifjum upp veldisregluna fyrir stofnföll:

$$\text{Ef } y = x^n, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

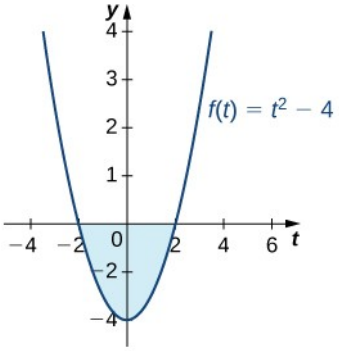
Finnum stofnfall fallsins með þessari reglu og notum síðan setninguna. Þá fæst

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt &= \tfrac{t^3}{3} - 4t \Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\tfrac{(2)^3}{3} - 4(2)\right] - \left[\tfrac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right] \\ &= \left(\tfrac{8}{3} - 8\right) - \left(-\tfrac{8}{3} + 8\right) \\ &= \tfrac{8}{3} - 8 + \tfrac{8}{3} - 8 \\ &= \tfrac{16}{3} - 16 \\ &= -\tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Greining

Takið eftir að við tókum liðinn „+ C“ ekki með þegar við rituðum stofnfallið. Ástæðan er sú að samkvæmt 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar má nota hvaða stofnfall sem er. Til einföldunar völdum við því stofnfallið þar sem $C = 0$. Hefðum við valið annað stofnfall hefði fastaliðurinn fallið út. Þetta gerist alltaf þegar við reiknum ákveðið heildi.

Svæðið sem við vorum að reikna er sýnt á mynd 5.28. Takið eftir að allt svæðið milli ferilsins og x-ássins liggur neðan x-ássins. Flatarmál er alltaf jákvætt en ákveðið heildi getur engu að síður gefið neikvæða tölu (formerkt flatarmál). Ef fallið væri til dæmis hagnaðarfall gæfi neikvæð tala til kynna að fyrirtækið væri rekið með tapi á gefna bilinu.



Mynd 5.28 Útreikningur ákveðins heildis getur gefið neikvætt gildi, þótt flatarmál sé alltaf jákvætt.

DÆMI 5.21

Ákveðið heildi reiknað með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar

Reiknið eftirfarandi heildi með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Lausn

Fyrst ritum við heildið með ræðum veldisvísum til að losna við rótarmerkið. Síðan skiptum við brotinu upp og ritum hvern lið teljarans yfir nefnaranum:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{x^{1/2}}\,dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\right)dx.$$

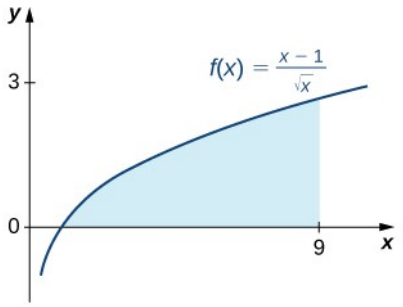
Einföldum með veldisreglunum:

$$\int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx.$$

Heildum nú með veldisreglunni:

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx &= \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^9 \\
&= \left[\frac{(9)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(9)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{(1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \left[\tfrac{2}{3}(27) - 2(3)\right] - \left[\tfrac{2}{3}(1) - 2(1)\right] \\
&= 18 - 6 - \tfrac{2}{3} + 2 \\
&= \tfrac{40}{3}.
\end{aligned}$$

Sjá mynd 5.29.



Mynd 5.29 Flatarmálið undir ferlinum frá $x=1$ til $x=9$ má reikna með ákveðnu heildi.

STÖÐUMAT 5.19

Notið 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna $\int_1^2 x^{-4}\,dx$.

DÆMI 5.22

Kapphlaup á hjólaskautum

James og Kathy keppa á hjólaskautum eftir langri og beinni braut. Sá sem hefur farið lengst eftir 5 sekúndur vinnur verðlaun. James getur skautað með hraðanum $f(t)=3+0{,}8\,t$ m/s og Kathy með hraðanum $g(t)=5+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)$ m/s. Hvort þeirra vinnur kapphlaupið?

Lausn

Við þurfum að heilda bæði föllin á bilinu $[0,5]$ og athuga hvort þeirra gefur stærra gildi. Fyrir James viljum við reikna

$$\int_0^5 (3+0{,}8\,t)\,dt.$$

Notum veldisregluna og fáum

$$\begin{aligned}\int_0^5 (3+0{,}8\,t)\,dt &= (3\,t+0{,}4\,t^2)\Big|_0^5\\ &= (15+10)=25.\end{aligned}$$

James hefur því skautað 25 metra eftir 5 sekúndur. Snúum okkur nú að Kathy og reiknum

$$\int_0^5 5+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)\,dt.$$

Við vitum að $\sin t$ er stofnfall $\cos t$, og því er eðlilegt að ætla að stofnfall $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ feli í sér $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Þegar við deildum $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, fáum við hins vegar $\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ vegna keðjureglunnar og því verðum við að taka tillit til þessa viðbótarstuðuls þegar við heildum. Við fáum

$$\begin{aligned}\int_0^5 5+\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)\,d\,t &= \left(5\,t+\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)\right)\Big|_0^5\\ &= \left(25+\frac{2}{\pi}\right)-\left(0-\frac{2}{\pi}\sin\;\;0\right)\\ &\approx 25{,}6.\end{aligned}$$

Kathy hefur skautað um það bil 25,6 metra eftir 5 sekúndur. Kathy vinnur, en naumlega!

STÖÐUMAT 5.20

Gerum ráð fyrir að James og Kathy keppi aftur en nú stöðvi dómarinn keppnina eftir aðeins 3 sekúndur. Breytir það úrslitunum?

NEMENDAVERKEFNI

Fallhlífarstökkvari í frjálsu falli



Mynd 5.30 Fallhlífarstökkvarar geta stillt fallhraðann með því að breyta líkamsstöðu sinni í frjálsu falli. (mynd: Jeremy T. Lock)

Julie er áhugasöm fallhlífarstökkkona. Hún hefur stokkið oftar en 300 sinnum og náð fullum tökum á að stilla líkamsstöðu sína í loftinu til að stjórna fallhraðanum. Ef hún fettir bakið og snýr kviðnum að jörðinni nær hún lokahraða sem er um það bil 176 km/klst (49 m/s). Ef hún snýr sér hins vegar með höfuðið beint niður fellur hún hraðar og nær lokahraðanum um 212 km/klst (58,8 m/s).

Julie hreyfist niður á við (hún fellur) og því látum við niðurstefnuna vera jákvæða til að einfalda útreikningana. Julie stekkur úr 4000 metra hæð. Um leið og hún yfirgefur flugvélina tekur hún að falla með hraðanum $v\left(t\right)=9{,}8\ t$. Hraði hennar heldur áfram að aukast samkvæmt þessu hraðafalli þar til hún nær lokahraða. Eftir það helst hraði hennar óbreyttur þar til hún togar í opnunarstrenginn og hægir á sér fyrir lendingu.

Í fyrsta stökki dagsins kemur Julie sér fyrir í hægari stöðunni „með kviðinn niður“ (lokahraðinn er 49 m/s). Notið þessar upplýsingar til að svara eftirfarandi spurningum.

1. Hve löngu eftir að Julie yfirgefur flugvélina nær hún lokahraða?
2. Notið svarið við spurningu 1 og setjið fram stæðu með einu eða fleiri heildum sem táknar vegalengdina sem Julie fellur á 30 sekúndum.
3. Hve lengi er Julie í frjálsu falli ef hún togar í opnunarstrenginn í 1000 metra hæð?

4. Julie togar í opnunarstrenginn í 1000 metra hæð. Það tekur fallhlífina 5 sekúndur að opnast að fullu og hægja á falli hennar. Á þeim tíma fellur hún um 120 metra til viðbótar. Þegar fallhlífin er fullopin hefur hraði hennar minnkað í 5 m/s. Finnið heildartímann sem Julie er í loftinu, frá því að hún yfirgefur flugvélina þar til fætur hennar snerta jörðina. Í öðru stökki dagsins ákveður Julie að falla örlítið hraðar og kemur sér fyrir í stöðunni „með höfuðið niður“. Lokahraði hennar í þeirri stöðu er 58,8 m/s. Svarið eftirfarandi spurningum miðað við þennan hraða:

5. Hve lengi er Julie að ná lokahraða í þessu tilviki?
6. Áður en Julie togar í opnunarstrenginn snýr hún sér aftur í stöðuna „með kviðinn niður“ svo hún fari ekki alveg eins hratt þegar fallhlífin opnast. Ef hún byrjar að snúa sér í 1300 metra hæð, hve lengi er hún þá í frjálsu falli fram að því? Sumir fallhlífarstökkvarar klæðast
„vængbúningum“ (sjá mynd 5.31). Þessir búningar eru með dúkþiljum milli handleggja og fótleggja sem gera stökkvaranum kleift að svífa í frjálsu falli, líkt og flugíkorni. (Búningarnir eru reyndar stundum kallaðir „flugíkornabúningar“.) Í slíkum búningi getur lokahraðinn minnkað í um 70 km/klst (19,6 m/s) og því gefst stökkvaranum mun lengri tími í loftinu. Fólk í vængbúningum notar þó enn fallhlíf við lendingu. Þótt lóðrétti hraðinn sé innan öryggismarka getur lárétti hraðinn farið yfir 110 km/klst, sem er allt of hratt fyrir örugga lendingu.



Mynd 5.31 Dúkþilin milli handleggja og fótleggja á vængbúningi draga úr lóðréttum fallhraða fallhlífarstökkvara. (mynd: Richard Schneider)

Svarið eftirfarandi spurningu miðað við hraðann í vængbúningi.

7. Hve lengi getur Julie svifið um loftið ef hún klæðist vængbúningi fyrir þriðja stökk dagsins og togar í opnunarstrenginn í 1000 metra hæð?

Æfingar í undirkafla 5.3

144. Skoðið tvo íþróttamenn sem hlaupa á breytilegum hraða, $v_1(t)$ og $v_2(t)$. Hlaupararnir hefja kapphlaupið og ljúka því á nákvæmlega sama tíma. Útskýrið hvers vegna þeir hljóta einhvern tímann að hlaupa á sama hraða.

145. Tveir fjallgöngumenn hefja göngu sína í grunnbúðum og fara hvor sína leið, aðra brattari en hina, en ná á tindinn á nákvæmlega sama tíma. Er víst að til sé tímapunktur þegar báðir hækka sig með sama hraða?

146. Til að aka inn á tiltekinn veggjaldaveg þarf ökumaður að taka kort sem tilgreinir kílómetramerkið við innkeyrsluna. Kortið er einnig tímastimplað. Við útkeyrsluna greiðir ökumaðurinn veggjaldið og fær sér til undrunar hraðasekt um leið. Útskýrið hvernig þetta getur gerst.

147. Látum $F(x)=\int_1^x (1-t)\,dt$. Finnið $F'(2)$ og meðalgildi F' á $[1,2]$.

Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að finna afleiðurnar í eftirfarandi æfingum.

148.

$$\frac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$$

149.

$$\frac{d}{dx}\int_1^x e^{\cos t}\,dt$$

150.

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{9-y^2}\,dy$$

151.

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \frac{ds}{\sqrt{16-s^2}}$$

152.

$$\frac{d}{dx}\int_x^{2x} t\,dt$$

153.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} t\,dt$$

154.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

155.

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

156.

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{1+t^4}\,dt$$

157.

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$$

158.

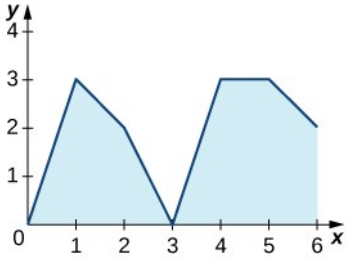
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x}e^t\,dt$$

159.

$$\frac{d}{dx}\int_1^{e^x}\ln u^2\,du$$

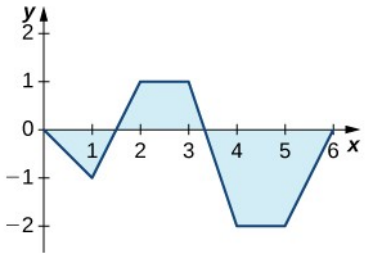
5

160. Hér er sýnt graf $y=\int_0^x f(t)\,dt$, þar sem f er hlutskilgreint fastafall.



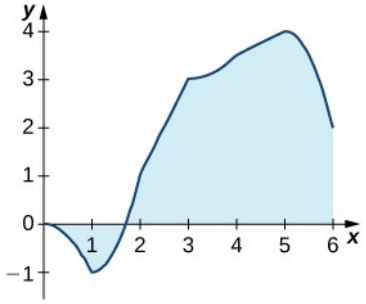
a. Á hvaða bilum er f jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Hver eru hágildi og lággildi f?
c. Hvert er meðalgildi f?

161. Hér er sýnt graf $y=\int_0^x f(t)\,dt$, þar sem f er hlutskilgreint fastafall.



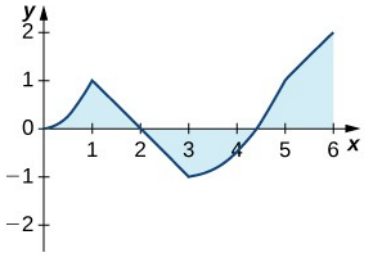
a. Á hvaða bilum er f jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Hver eru hágildi og lággildi f?
c. Hvert er meðalgildi f?

162. Hér er sýnt graf $y = \int_0^x \ell(t)\,dt$, þar sem ℓ er hlutskilgreint línulegt fall.



a. Á hvaða bilum er ℓ jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Á hvaða bilum er ℓ vaxandi? Á hvaða bilum er það minnkandi? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það fast?
c. Hvert er meðalgildi ℓ?

163. Hér er sýnt graf $y = \int_0^x \ell(t)\,dt$, þar sem ℓ er hlutskilgreint línulegt fall.



a. Á hvaða bilum er ℓ jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Á hvaða bilum er ℓ vaxandi? Á hvaða bilum er það minnkandi? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það fast?
c. Hvert er meðalgildi ℓ?

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að áætla flatarmálið undir ferlinum með því að reikna T_{10}, meðaltal Riemann-summanna með vinstri og hægri endapunktum fyrir $N=10$ rétthyrninga. Ákvarðið síðan nákvæmt flatarmál með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

164. [T] $y=x^2$ á $[0,4]$

165. [T] $y=x^3+6x^2+x-5$ á $[-4,2]$

166. [T] $y=\sqrt{x^3}$ á $[0,6]$

167. [T] $y=\sqrt{x}+x^2$ á $[1,9]$

168. [T] $\int(\cos x-\sin x)\,dx$ á $[0,\pi]$

169. [T] $\int\frac{4}{x^2}\,dx$ á $[1,4]$

Reiknið hvert ákveðið heildi í eftirfarandi æfingum með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

170.

$$\int_{-1}^{2}(x^2-3x)\,dx$$

171.

$$\int_{-2}^{3}(x^2+3x-5)\,dx$$

172.

$$\int_{-2}^{3}(t+2)(t-3)\,dt$$

173.

$$\int_{2}^{3}(t^2-9)(4-t^2)\,dt$$

174.

$$\int_{1}^{2}x^9\,dx$$

175.

$$\int_{0}^{1}x^{99}\,dx$$

176.

$$\int_4^8 \left(4t^{5/2} - 3t^{3/2}\right) dt$$

177.

$$\int_{1/4}^4 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

178.

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx$$

179.

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

180.

$$\int_1^4 \frac{2-\sqrt{t}}{t^2} dt$$

181.

$$\int_1^{16} \frac{dt}{t^{1/4}}$$

182.

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta$$

183.

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

184.

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \, d\theta$$

185.

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

186.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/4} \csc\theta \cot\theta \, d\theta$$

187.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2\theta \, d\theta$$

188.

$$\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt$$

189.

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt$$

Notið reiknisetninguna í eftirfarandi æfingum til að setja heildið fram sem fall $F(x)$.

190.

$$\int_{a}^{x} t^2 \, dt$$

191.

$$\int_{1}^{x} e^t \, dt$$

5

192.

$$\int_{0}^{x} \cos t \, dt$$

193.

$$\int_{-x}^{x} \sin t \, dt$$

Finnið núllstöðvar heildisstofnsins í eftirfarandi æfingum til að losna við algildismerkin og reiknið síðan heildið með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

194.

$$\int_{-2}^{3} |x| \, dx$$

195.

$$\int_{-2}^{4} \left|t^2 - 2t - 3\right| dt$$

196.

$$\int_{0}^{\pi} \left|\cos t\right| dt$$

197.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\sin t\right| dt$$

198. Gerum ráð fyrir að fjölda birtustunda á tilteknum degi í Seattle sé lýst með fallinu $-3{,}75 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 12{,}25$, þar sem t er gefið upp í mánuðum og $t = 0$ samsvarar vetrarsólstöðum.

a. Hver er meðalfjöldi birtustunda á sólarhring yfir heilt ár?

b. Á hvaða tímum t_1 og t_2, þar sem $0 \le t_1 < t_2 < 12$, er fjöldi birtustunda jafn meðalfjöldanum?

c. Ritið heildi sem lýsir heildarfjölda birtustunda í Seattle á milli t_1 og t_2.

d. Reiknið meðalfjölda birtustunda í Seattle á tímabilinu frá t_1 til t_2, þar sem $0 \le t_1 < t_2 < 12$, og síðan á tímabilinu frá t_2 til t_1, og sýnið að meðaltal þessara tveggja gilda sé jafnt meðallengd dags.

199. Gerum ráð fyrir að lýsa megi notkunarhraða bensíns í Bandaríkjunum yfir árið með sínusfalli af gerðinni $\left(42{,}4 - 3{,}8 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) \times 10^9$ lítrar á mánuði.

a. Hver er meðalnotkunin á mánuði og fyrir hvaða gildi t er notkunarhraðinn á tíma t jafn meðalnotkunarhraðanum?

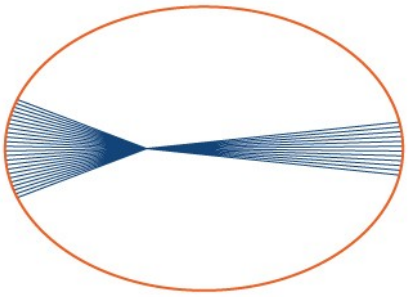
b. Hve margir lítrar af bensíni eru notaðir í Bandaríkjunum á einu ári?

c. Ritið heildi sem lýsir meðalnotkun bensíns á mánuði í Bandaríkjunum frá byrjun apríl $(t = 3)$ til loka september $(t = 9)$.

200. Ef f er samfellt á $[a, b]$, útskýrið þá hvers vegna til er að minnsta kosti einn punktur $c \in [a, b]$ þannig að $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$.

201. Ef f er samfellt á $[a, b]$ og er ekki fastafall, útskýrið þá hvers vegna til er að minnsta kosti einn punktur $M \in [a, b]$ þannig að $f(M) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$ og að minnsta kosti einn punktur $m \in [a, b]$ þannig að $f(m) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$.

202. Fyrsta lögmál Keplers segir að reikistjörnur gangi um sólu á sporbaugsbrautum og að sólin sé í öðrum brennipunkti hverrar brautar. Sá punktur brautar reikistjörnu sem er næstur sólu kallast sólnánd og jörðin er nú í sólnánd um 3. janúar. Fjarlægasti punkturinn kallast sólfirrð en jörðin er nú í sólfirrð um 4. júlí. Annað lögmál Keplers segir að reikistjörnur sópi yfir jafnstór svæði á sporbaugsbraut sinni á jafnlöngum tíma. Það tekur því jafnlangan tíma að fara eftir hvorum boganna tveggja sem merktir eru á eftirfarandi mynd. Á hvaða árstíma fer jörðin hraðast eftir braut sinni? Hvenær fer hún hægast?



203. Punktur á sporbaug með lengd langáss 2a og lengd skammáss 2b hefur hnitin $(a\cos\theta, b\sin\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$.

a. Sýnið að fjarlægðin frá þessum punkti til brennipunktsins $(-c, 0)$ er $d(\theta) = a + c\cos\theta$, þar sem $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

b. Notið þessi hnit til að sýna að meðalfjarlægðin $\bar{d}$ frá punkti á sporbaugnum til brennipunktsins $(-c, 0)$, með tilliti til hornsins θ, er a.

204. Eins og áður kom fram er braut jarðar samkvæmt lögmálum Keplers sporbaugur með sólina í öðrum brennipunktinum. Í sólnánd er fjarlægð jarðar frá sólu 147.098.290 km og í sólfirrð er hún 152.098.232 km.

a. Leggið langásinn eftir x-ásnum og finnið meðalfjarlægð jarðar frá sólu.

b. Samkvæmt hefðbundinni skilgreiningu er stjarnfræðieining (AU) fjarlægðin frá jörðu til sólar og gildi hennar var reiknað sem meðaltal fjarlægðanna við sólnánd og sólfirrð. Er þessi skilgreining réttmæt?

205. Þyngdaraðdráttarkrafturinn milli sólar og reikistjörnu er $F(\theta) = \frac{G\,m\,M}{r^2(\theta)}$, þar sem m er massi reikistjörnunnar, M er massi sólar, G er algildur fasti og $r(\theta)$ er fjarlægðin milli sólar og reikistjörnunnar þegar reikistjarnan myndar hornið θ við langás brautar sinnar. Gerið ráð fyrir að M, m og sporbaugsstærðirnar a og b (hálflengdir langáss og skammáss) séu gefnar. Setjið fram, en reiknið ekki, heildi sem gefur meðalþyngdaraðdráttarkraftinn milli sólar og reikistjörnunnar sem fall af G, m, M, a, b.

206. Tilfærsla massa, sem festur er við gorm, frá jafnvægisstöðu uppfyllir jöfnu einfaldrar sveifluhreyfingar $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, þar sem ϕ er fasafasti, ω er horntíðnin og A er útslagið. Finnið meðalhraða, meðalferð (stærð hraðans), meðaltilfærslu og meðalfjarlægð massans frá jafnvægisstöðu (stærð tilfærslunnar).

5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

NÁMSMARKMIÐ

- 5.4.1 Beita helstu heildunarreglum.
- 5.4.2 Útskýra mikilvægi setningarinnar um heildarbreytingu.
- 5.4.3 Nota setninguna um heildarbreytingu til að leysa hagnýt verkefni.
- 5.4.4 Beita heildum oddstæðra og jafnstæðra falla.

Í þessum undirkafla notum við nokkrar helstu heildunarreglur sem við höfum kynnst áður til að leysa mikilvæg hagnýt verkefni. Rétt er að hafa í huga að reglurnar eru settar fram með óákveðnum heildum. Þótt ákveðin og óákveðin heildi séu nátengd er mikilvægt að muna nokkurn grundvallarmun á þeim. Ákveðið heildi er annaðhvort tala, þegar heildismörkin eru föst, eða eitt fall, þegar annað eða bæði heildismörkin eru breytileg. Óákveðið heildi táknar fjölskyldu falla sem einungis eru frábrugðin hvert öðru um fastalið. Eftir því sem þið kynnist heildun betur fáið þið tilfinningu fyrir því hvenær á að nota ákveðið heildi og hvenær óákveðið heildi. Þá veljið þið ósjálfrátt réttu aðferðina fyrir hvert verkefni án þess að hugsa mikið um það. Þar til þessi hugtök eru orðin föst í sessi skuluð þið þó íhuga vandlega hvort þörf sé á ákveðnu eða óákveðnu heildi og gæta þess að nota rétta táknun í samræmi við valið.

Helstu heildunarreglur

Rifjið upp heildunarreglurnar í töflunni í undirkaflanum Stofnföll og regluna um eiginleika ákveðinna heilda. Skoðum nokkur dæmi um hvernig þessum reglum er beitt.

DÆMI 5.23

Heildun falls með veldisreglunni

Notið veldisregluna til að heilda fallið $\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt$.

Lausn

Fyrsta skrefið er að umrita fallið og einfalda það svo að við getum beitt veldisreglunni:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)dt &= \int_1^4 t^{1/2}(1+t)dt \\ &= \int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right)dt.\end{aligned}$$

Beitum nú veldisreglunni:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right)dt &= \left(\tfrac{2}{3}t^{3/2}+\tfrac{2}{5}t^{5/2}\right)\Big|_1^4 \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(4)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(4)^{5/2}\right]-\left[\tfrac{2}{3}(1)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(1)^{5/2}\right] \\ &= \tfrac{256}{15}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.21

Reiknið ákveðið heildi fallsins $f(x)=x^2-3x$ á bilinu $[1,3]$.

Setningin um heildarbreytingu

Setningin um heildarbreytingu fjallar um heildi breytingarhraða. Hún segir að þegar stærð breytist sé nýja gildið jafnt upphafsgildinu að viðbættu heildi breytingarhraða stærðarinnar. Formúluna má setja fram á tvo vegu. Síðari framsetningin er kunnuglegri; hún er einfaldlega ákveðið heildi.

SETNING 5.6

Setningin um heildarbreytingu

Nýtt gildi breytilegrar stærðar er jafnt upphafsgildinu að viðbættu heildi breytingarhraðans:

$$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)\,dx$$

eða

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

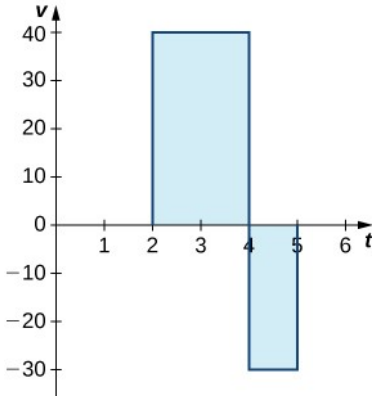
(5.18)

Ef $F(a)$ er dregið frá báðum hliðum fyrri jöfnunnar fæst síðari jafnan. Formúlurnar eru jafngildar og því fer það eftir viðfangsefninu hvora þeirra við notum.

Mikilvægi setningarinnar um heildarbreytingu felst í niðurstöðunum. Meðal annars má beita henni á flatarmál, vegalengd og rúmmál. Hún tekur sjálfkrafa tillit til neikvæðra stærða án þess að þurfa að skrifa fleiri en eitt heildi. Til skýringar skulum við beita setningunni á hraðafall og finna færslu.

Við skoðuðum einfalt dæmi um þetta í undirkaflanum Ákveðna heildið. Gerum ráð fyrir að bíll aki í hánorður, sem telst jákvæð stefna, með hraðanum 40 km á klukkustund frá kl. 14 til

16 og síðan í suður með hraðanum 30 km á klukkustund frá kl. 16 til 17. Hreyfinguna má sýna á grafi eins og sést á mynd 5.32.



Mynd 5.32 Grafið sýnir hraða bílsins sem fall af tíma.

Rétt eins og áður getum við notað ákveðin heildi til að reikna bæði heildarfærsluna og heildarvegalengdina. Heildarfærslan fæst sem

$$\begin{aligned}\int_2^5 v(t)dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 -30dt \\ &= 80 - 30 \\ &= 50.\end{aligned}$$

Klukkan 17 er bíllinn því 50 km norðan við upphafsstað sinn. Heildarvegalengdin sem ekin var fæst með

$$\begin{aligned}\int_2^5 |v(t)|dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 30dt \\ &= 80 + 30 \\ &= 110.\end{aligned}$$

Milli kl. 14 og 17 ók bíllinn því samtals 110 km.

Í stuttu máli getur heildarfærsla verið bæði jákvæð og neikvæð. Hraðafallið tekur með öðrum orðum tillit til vegalengdar bæði fram á við og aftur á bak. Heildarfærslan fæst með því að heilda hraðafallið á bilinu. Heildarvegalengdin er hins vegar alltaf jákvæð. Til að finna heildarvegalengdina sem hlutur fer, óháð stefnu, þarf að heilda algildi hraðafallsins.

DÆMI 5.24

Útreikningur heildarfærslu

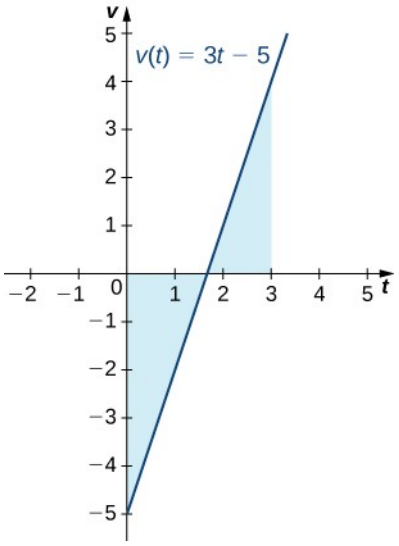
Gefið er hraðafallið $v(t)=3t-5$ (í metrum á sekúndu) fyrir ögn á hreyfingu frá $t=0$ til $t=3$,. Finnið heildarfærslu agnarinnar.

Lausn

Með setningunni um heildarbreytingu fæst

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3t-5)dt &= \frac{3t^2}{2} - 5t\Big|_0^3 \\ &= \left[\frac{3(3)^2}{2} - 5(3)\right] - 0 \\ &= \frac{27}{2} - 15 \\ &= \frac{27}{2} - \frac{30}{2} \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Heildarfærslan er $-\frac{3}{2}$ m (mynd 5.33).



Mynd 5.33 Grafið sýnir hraða sem fall af tíma fyrir ögn sem hreyfist samkvæmt línulegu hraðafalli.

5

DÆMI 5.25

Útreikningur heildarvegalengdar

Notið dæmi 5.24 til að finna heildarvegalengdina sem ögn fer samkvæmt hraðafallinu $v(t) = 3t - 5$ m/sek. á tímabilinu $[0, 3]$.

Lausn

Bæði jákvæð og neikvæð gildi hraðafallsins teljast með í heildarvegalengdinni. Því þurfum við að heilda algildi hraðafallsins til að finna heildarvegalengdina.

Við höldum áfram með dæmið og notum tvö heildi til að finna heildarvegalengdina. Fyrst finnum við skurðpunkt fallsins við t-ásinn, því þar skiptist tímabilið. Setjum fallið jafnt núlli og einangrum t. Þá fæst

$$\begin{aligned} 3t-5 &= 0 \\ 3t &= 5 \\ t &= \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$

Hlutbilin tvö eru $\left[0,\frac{5}{3}\right]$ og $\left[\frac{5}{3},3\right]$. Til að finna heildarvegalengdina heildum við tölugildi fallsins. Þar sem fallið er neikvætt á bilinu $\left[0,\frac{5}{3}\right]$, gildir $|v(t)|=-v(t)$ á því bili. Fallið er jákvætt á bilinu $\left[\frac{5}{3},3\right]$, og því gildir $|v(t)|=v(t)$. Þá fæst

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)|dt &= \int_0^{5/3} -v(t)dt + \int_{5/3}^3 v(t)dt \\ &= \int_0^{5/3} 5-3tdt + \int_{5/3}^3 3t-5dt \\ &= \left(5t-\tfrac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^{5/3} + \left(\tfrac{3t^2}{2}-5t\right)\Big|_{5/3}^3 \\ &= \left[5\left(\tfrac{5}{3}\right)-\tfrac{3(5/3)^2}{2}\right]-0+\left[\tfrac{27}{2}-15\right]-\left[\tfrac{3(5/3)^2}{2}-\tfrac{25}{3}\right] \\ &= \tfrac{25}{3}-\tfrac{25}{6}+\tfrac{27}{2}-15-\tfrac{25}{6}+\tfrac{25}{3} \\ &= \tfrac{41}{6}. \end{aligned}$$

Heildarvegalengdin er því $\frac{41}{6}$ m.

STÖÐUMAT 5.22

Finnið heildarfærsluna og heildarvegalengdina í metrum fyrir hraðafallið $f(t)=\frac{1}{2}e^t-2$ á bilinu $[0,2]$.

Beiting setningarinnar um heildarbreytingu

Beita má setningunni um heildarbreytingu á flæði og notkun vökva, eins og sýnt er í dæmi 5.26.

DÆMI 5.26

Hve margir lítrar af bensíni eru notaðir?

Mótor vélbáts er ræstur við $t=0$ og bensínnotkun hans er $20-0{,}4\ t^3$ lítrar á klukkustund. Hve mikið bensín notar hann fyrstu 2 klukkustundirnar?

Lausn

Við setjum verkefnið fram sem ákveðið heildi, heildum og reiknum gildið með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar. Heildismörkin eru endapunktar bilsins $[0,2]$. Þá fæst

$$\int_0^2 (20-0{,}4\ t^3)\,dt = \left(20\ t - 0{,}4\ \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \left[20\ (2) - 0{,}4\ \frac{(2)^4}{4}\right] - 0 = 40 - 1{,}6 = 38{,}4$$

Vélbáturinn notar því 38,4 lítra af bensíni á 2 klukkustundum.

DÆMI 5.27

Kaflaupphaf: Íssleðar



Mynd 5.34 (mynd: verk Carters Browns á Flickr, breytt)

Eins og fram kom í upphafi kaflans geta fremstu keppendur í íssiglingum (mynd 5.1) náð allt að fimmföldum vindhraða. Andrew hefur hins vegar miðlungsreynslu af íssiglingum og nær því aðeins tvöföldum vindhraða. Gerum ráð fyrir að hann fari út á íssleða sínum morgun einn eftir að hæg gola, 5 km á klukkustund, hefur blásið allan morguninn. Á meðan Andrew gerir íssleðann kláran fer þó að hvessa. Fyrsta hálftímann sem hann siglir eykst vindhraðinn samkvæmt fallinu $v(t) = 20t + 5$. Síðari hálftíma ferðarinnar helst vindhraðinn stöðugur, 15 km á klukkustund. Vindhraðinn er með öðrum orðum

$$v(t) = \begin{cases} 20\ t + 5 & \text{þegar} \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ 15 & \text{þegar} \quad \dfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Munið að íssleði Andrews fer á tvöföldum vindhraða. Gerum ráð fyrir að hann fari eftir beinni línu frá upphafsstað sínum. Hve langt er hann frá upphafsstaðnum eftir 1 klukkustund?

Lausn

Til að finna hve langt Andrew hefur farið þarf að heilda hraða hans, sem er tvöfaldur vindhraðinn. Þá fæst

$$\text{Vegalengd} = \int_0^1 2v(t)\,dt.$$

Þegar gefnu stæðurnar fyrir $v(t)$, eru settar inn fæst

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2v(t)dt &= \int_0^{1/2} 2v(t)dt + \int_{1/2}^1 2v(t)dt \\
&= \int_0^{1/2} 2(20t+5)dt + \int_{1/2}^1 2(15)dt \\
&= \int_0^{1/2} (40t+10)dt + \int_{1/2}^1 30dt \\
&= \left[20t^2+10t\right]\Big|_0^{1/2} + \left[30t\right]\Big|_{1/2}^1 \\
&= \left(\tfrac{20}{4}+5\right) - 0 + (30-15) \\
&= 25.
\end{aligned}$$

Andrew er 25 km frá upphafsstað sínum eftir 1 klukkustund.

STÖÐUMAT 5.23

Gerum nú ráð fyrir að vindurinn haldist ekki stöðugur síðari hálftíma ferðar Andrews heldur dragi úr honum samkvæmt fallinu $v(t) = -10t + 15$. Vindhraðinn er með öðrum orðum

$$v(t) = \begin{cases} 20t+5 & \text{þegar} \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ -10t+15 & \text{þegar} \quad \dfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Hve langt er Andrew frá upphafsstað sínum eftir 1 klukkustund við þessar aðstæður?

Heildun jafnstæðra og oddstæðra falla

Við sáum í undirkaflanum Föll og gröf að fall er jafnstætt ef $f(-x) = f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmenginu. Graf fallsins helst þá óbreytt þegar x er skipt út fyrir –x og er samhverft um y-ásinn. Fall er oddstætt ef $f(-x) = -f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmenginu og graf þess er þá samhverft um upphafspunkt hnitakerfisins.

Þegar jafnstætt fall er heildað frá –a til a eru svæðin sitt hvorum megin við y-ásinn jafnstór vegna samhverfunnar. Þegar oddstætt fall er heildað á sama bili, $[-a, a]$, verður heildið núll, því formerktu flatarmálin ofan og neðan við x-ásinn eyða hvort öðru.

REGLA: HEILDI JAFNSTÆÐRA OG ODDSTÆÐRA FALLA

Ef f er samfellt jafnstætt fall þannig að $f(-x)=f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Ef f er samfellt oddstætt fall þannig að $f(-x)=-f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

DÆMI 5.28

Heildun jafnstæðs falls

Heildið jafnstæða fallið $\int_{-2}^{2} \left(3x^8-2\right)dx$ og sannreynið að heildunarreglan fyrir jafnstæð föll gildi.

Lausn

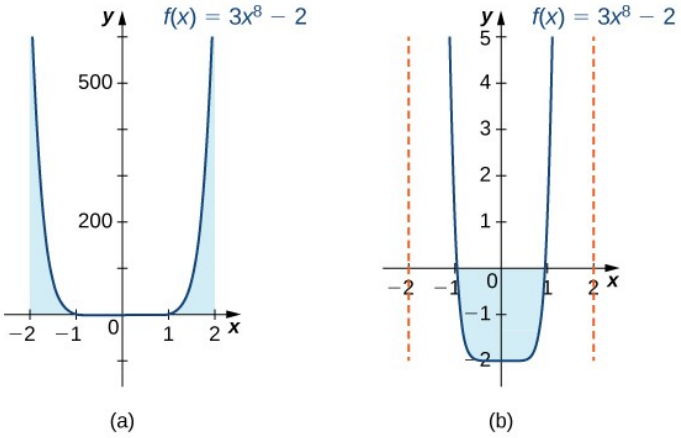
Samhverfan sést á gröfunum á mynd 5.35. Graf (a) sýnir svæðið undir ferlinum og ofan við x-ásinn. Stækka þarf grafið verulega til að sjá svæðið. Graf (b) sýnir svæðið ofan við ferilinn og neðan við x-ásinn. Formerkt flatarmál þess svæðis er neikvætt. Bæði gröfin sýna samhverfu jafnstæða fallsins um y-ásinn. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(3x^8-2)dx &= \left(\tfrac{x^9}{3}-2x\right)\Big|_{-2}^{2}\\ &= \left[\tfrac{(2)^9}{3}-2(2)\right]-\left[\tfrac{(-2)^9}{3}-2(-2)\right]\\ &= \left(\tfrac{512}{3}-4\right)-\left(-\tfrac{512}{3}+4\right)\\ &= \tfrac{1000}{3}.\end{aligned}$$

Til að sannreyna heildunarregluna fyrir jafnstæð föll reiknum við heildið frá 0 til 2 og tvöföldum það. Síðan athugum við hvort sama niðurstaða fáist.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}(3x^8-2)dx &= \left(\tfrac{x^9}{3}-2x\right)\Big|_{0}^{2}\\ &= \tfrac{512}{3}-4\\ &= \tfrac{500}{3}\end{aligned}$$

Þar sem $2\cdot\frac{500}{3}=\frac{1000}{3}$, höfum við sannreynt regluna fyrir jafnstæð föll í þessu tiltekna dæmi.



Mynd 5.35 Graf (a) sýnir jákvætt flatarmál milli ferilsins og x-ássins en graf (b) sýnir neikvætt flatarmál milli þeirra. Bæði gröfin sýna samhverfu um y-ásinn.

DÆMI 5.29

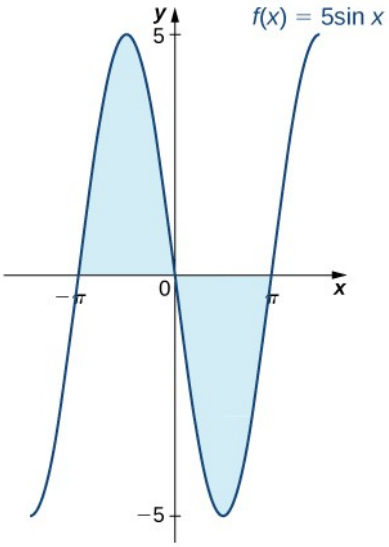
Heildun oddstæðs falls

Reiknið ákveðið heildi oddstæða fallsins $-5\sin x$ á bilinu $[-\pi, \pi]$.

Lausn

Grafið er sýnt á mynd 5.36. Jákvæða flatarmálið ofan við x-ásinn á bilinu $[-\pi, 0]$, og neikvæða flatarmálið neðan við x-ásinn á bilinu $[0, \pi]$. sýna samhverfu um upphafspunktinn. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} -5\sin x\,dx &= -5\left(-\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 5\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left[5\cos\pi\right] - \left[5\cos\left(-\pi\right)\right] \\ &= -5 - \left(-5\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$



Mynd 5.36 Grafið sýnir flatarmál milli ferils og x-áss fyrir oddstætt fall.

STÖÐUMAT 5.24

5

Heildið fallið $\int_{-2}^{2} x^4\,dx$.

Æfingar í undirkafla 5.4

Notið helstu heildunarreglur til að reikna eftirfarandi stofnföll eða ákveðin heildi.

207.

$$\int\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

208.

$$\int\left(e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x/2}\right)dx$$

209.

$$\int\frac{dx}{2x}$$

210.

$$\int \frac{x-1}{x^2}\,dx$$

211.

$$\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$$

212.

$$\int_0^{\pi/2} (x - \sin x)\,dx$$

213. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á ummáli $P(s)$ fernings þegar hliðarlengdin s vex úr 2 einingum í 4 einingar og reiknið heildið.

214. Skrifið heildi sem lýsir breytingunni á flatarmáli $A(s)=s^2$ fernings þegar hliðarlengdin tvöfaldast úr S einingum í 2S einingar og reiknið heildið.

215. Reglulegur N-hyrningur (N-hliða marghyrningur með jafnlangar hliðar s, svo sem fimmhyrningur eða sexhyrningur) hefur ummálið Ns. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á ummáli reglulegs N-hyrnings þegar lengd hverrar hliðar vex úr 1 einingu í 2 einingar og reiknið heildið.

216. Flatarmál reglulegs fimmhyrnings með hliðarlengd $a>0$ er pa^2 þar sem $p=\frac{1}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$. Innri hliðar Pentagon-byggingarinnar í Washington, DC, eru 110 m að lengd og ytri hliðarnar 280 m. Skrifið heildi sem lýsir flatarmáli þaks Pentagon-byggingarinnar samkvæmt þessum málum og reiknið flatarmálið.

217. Tólfflötungur er reglulegur margflötungur og yfirborð hans er úr 12 fimmhyrningum sem allir hafa sama flatarmál. Hve mikið vex yfirborðsflatarmál tólfflötungs þegar hliðarlengd hvers fimmhyrnings tvöfaldast úr 1 einingu í 2 einingar?

218. Tuttuguflötungur er reglulegur margflötungur og yfirborð hans er úr 20 jafnhliða þríhyrningum. Hve mikið vex yfirborðsflatarmál tuttuguflötungs þegar hliðarlengd hvers þríhyrnings tvöfaldast úr a einingum í 2a einingar?

219. Skrifið heildi sem lýsir breytingunni á yfirborðsflatarmáli tenings þegar hliðarlengd hans tvöfaldast úr s einingum í 2s einingar og reiknið heildið.

220. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á rúmmáli tenings þegar hliðarlengdin tvöfaldast úr s einingum í 2s einingar og reiknið heildið.

221. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á yfirborðsflatarmáli kúlu þegar geisli hennar tvöfaldast úr R einingum í 2R einingar og reiknið heildið.

222. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á rúmmáli kúlu þegar geisli hennar tvöfaldast úr R einingum í 2R einingar og reiknið heildið.

223. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hraðanum $v(t)=4-2t$, þar sem $0\le t\le 2$ (í metrum á sekúndu). Finnið færslu agnarinnar á tímanum t og heildarvegalengdina sem hún hefur farið fram að $t=2$.

224. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hraða sem er skilgreindur með $v(t)=t^2-3t-18$, þar sem $0\le t\le 6$ (í metrum á sekúndu). Finnið færslu agnarinnar á tímanum t og heildarvegalengdina sem hún hefur farið fram að $t=6$.

225. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hraða sem er skilgreindur með $v(t)=|2t-6|$, þar sem $0\le t\le 6$ (í metrum á sekúndu). Finnið færslu agnarinnar á tímanum t og heildarvegalengdina sem hún hefur farið fram að $t=6$.

226. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hröðun sem er skilgreind með $a(t)=t-3$, þar sem $0\le t\le 6$ (í metrum á sekúndu). Finnið hraðann og færsluna á tímanum t og heildarvegalengdina sem ögnin hefur farið fram að $t=6$ ef $v(0)=3$ og $d(0)=0$.

227. Bolta er kastað upp á við úr 1,5 m hæð með upphafshraðanum 40 m/sek. Hröðunin af völdum þyngdaraflsins er −9,8 m/sek.^{2}. Horfið fram hjá loftmótstöðu og finnið hraða boltans $v(t)$ og hæð hans $h(t)$ t sekúndum eftir kastið og áður en hann lendir aftur á jörðinni.

228. Bolta er kastað upp á við úr 3 m hæð með upphafshraðanum 60 m/sek. Hröðunin af völdum þyngdaraflsins er −9,8 m/sek.^{2}. Horfið fram hjá loftmótstöðu og finnið hraða boltans $v(t)$ og hæð hans $h(t)$ t sekúndum eftir kastið og áður en hann lendir aftur á jörðinni.

229. Flatarmál $A(t)$ á hringlaga svæði vex með jöfnum hraða. Ef flatarmálið eykst úr 4π einingum í 9π einingar frá $t=2$ til $t=3$, finnið þá heildarbreytingu geislans á því tímabili.

230. Kúlulaga blaðra er blásin upp með jöfnum hraða. Ef rúmmál hennar breytist úr 36π cm^3 í 288π cm^3 frá $t=30$ til $t=60$ sekúndna, finnið þá heildarbreytingu geisla blöðrunnar á því tímabili.

231. Vatn rennur í keilulaga tank með þversniðsflatarmálið πx^2 í hæðinni x og rúmmálið $\frac{\pi x^3}{3}$ upp að hæðinni x. Ef vatn rennur í tankinn með hraðanum 1 m^3/mín., finnið þá hæð vatnsins í tankinum eftir 5 mín. Finnið einnig hæðarbreytinguna frá 5 mín. til 10 mín.

232. Láréttur sívalningslaga tankur hefur þversniðsflatarmálið $A(x)=4\left(6x-x^2\right)m^2$ í x metra hæð yfir botninum þegar $x\leq 3$.

a. Rúmmálið V milli hæðanna a og b er $\int_a^b A(x)\,dx$. Finnið rúmmálið milli hæðanna 2 m og 3 m.

b. Gerum ráð fyrir að olíu sé dælt í tankinn með rennslishraðanum 50 L/mín. Notið keðjuregluna $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dV}\frac{dV}{dt}$, og finnið, sem fall af x, hve hratt hæð olíunnar í tankinum breytist í metrum á mínútu þegar hæðin er x metrar.

c. Hve lengi tekur að fylla tankinn úr 2 m hæð upp í 3 m?

233. Eftirfarandi tafla sýnir rafaflið í gígavöttum — það er að segja hversu hratt orka er notuð — í tiltekinni borg á mismunandi tímum dags á dæmigerðu 24 klukkustunda tímabili. Klukkustund 1 er tíminn frá miðnætti til kl. 1 að nóttu.

Klukkustund	Afl	Klukkustund	Afl
1	28	13	48
2	25	14	49
3	24	15	49
4	23	16	50
5	24	17	50
6	27	18	50
7	29	19	46
8	32	20	43
9	34	21	42
10	39	22	40
11	42	23	37
12	46	24	34

Finnið heildarorkuna í gígavattstundum (GWst.) sem borgin notar á dæmigerðu 24 klukkustunda tímabili.

234. Eftirfarandi tafla sýnir hve mikið rafafl heimili notar að meðaltali á hverri klukkustund, í hundruðum vatta.

Klukkustund	Afl	Klukkustund	Afl
1	8	13	12
2	6	14	13
3	5	15	14
4	4	16	15
5	5	17	17
6	6	18	19
7	7	19	18
8	8	20	17
9	9	21	16
10	10	22	16
11	10	23	13
12	11	24	11

a. Reiknið hve mikla orku heimili notar að meðaltali á dag í kílóvattstundum (kWst.).

b. Ef eitt tonn af kolum gefur 2030 kWst., hve lengi er meðalheimili að brenna einu tonni af kolum?

c. Útskýrið hvers vegna gögnin gætu fallið að grafi af gerðinni $p\left(t\right)=11{,}5-7{,}5\ \ \sin\left(\frac{\pi\ t}{12}\right)$.

235. Gögnin í eftirfarandi töflu eru notuð til að meta meðalafl Peters Sagans á hverri af síðustu 18 sekúndunum í 1. áfanga Tour de France árið 2012.

5

Tafla 5.6 Meðalafl Heimild: sportsexercisengineering.com

Sekúnda	Vött	Sekúnda	Vött
1	600	10	1200
2	500	11	1170
3	575	12	1125
4	1050	13	1100
5	925	14	1075
6	950	15	1000
7	1050	16	950
8	950	17	900
9	1100	18	780

Metið heildarorkunotkunina í kílójúlum (kJ) og meðalafl Sagans á þessu tímabili. Hafið í huga að 1 W = 1 J/s.

236. Gögnin í eftirfarandi töflu eru notuð til að meta meðalafl Peters Sagans á hverju 15 mínútna tímabili í 1. áfanga Tour de France árið 2012.

Tafla 5.7 Meðalafl Heimild: sportsexercisengineering.com

Mínútur	Vött	Mínútur	Vött
15	200	165	170
30	180	180	220
45	190	195	140
60	230	210	225
75	240	225	170
90	210	240	210
105	210	255	200
120	220	270	220
135	210	285	250
150	150	300	400

Metið heildarorkunotkunina í kílójúlum og hafið í huga að 1 W = 1 J/s.

237. Eftirfarandi tafla sýnir tekjudreifingu í Bandaríkjunum árið 2012 í 5.000 dollara þrepum. Lína k sýnir hlutfall heimila með tekjur á bilinu $\$5000\,x\,k$ til $5000\,x\,k+4999$. Línan $k=40$ nær yfir öll heimili með tekjur á bilinu $200.000 til $250.000.

Tafla 5.8 Tekjudreifing *Heimild*: http://www.census.gov/prod/2013pubs/p60-245.pdf

0	3,5	11	3,5	21	1,5	31	0,6
1	4,1	12	3,7	22	1,4	32	0,5
2	5,9	13	3,2	23	1,3	33	0,5
3	5,7	14	3,0	24	1,3	34	0,4
4	5,9	15	2,8	25	1,1	35	0,3
5	5,4	16	2,5	26	1,0	36	0,3
6	5,5	17	2,2	27	0,75	37	0,3
7	5,1	18	2,2	28	0,8	38	0,2
8	4,8	19	1,8	29	1,0	39	1,8
9	4,1	20	2,1	30	0,6	40	2,3
10	4,3						

a. Metið hlutfall heimila í Bandaríkjunum sem höfðu tekjur undir $55.000 árið 2012.
b. Hve hátt hlutfall heimila var með tekjur yfir $85.000?
c. Teiknið gögnin upp og reynið að laga lögun þeirra að grafi af gerðinni $a(x+c)e^{-b(x+e)}$ fyrir viðeigandi a, b, c.

238. Þyngdarlögmál Newtons segir að þyngdarkrafturinn milli hlutar með massa M og hlutar með massa m, þegar fjarlægðin milli miðja þeirra er r, sé $F = G\frac{mM}{r^2}$, þar sem G er reynslufasti $G = 6{,}67\ x\ 10^{-11}\ m^3/(k\ g \cdot s^2)$. Vinnan sem breytilegur kraftur vinnur á bili $[a, b]$ er skilgreind sem $W = \int_a^b F(x)\,dx$. Ef massi jarðar er $5{,}97219\ \times\ 10^{24}$ og geisli hennar 6371 km, reiknið þá vinnuna sem þarf til að lyfta 1400 kg veðurgervitungli á pólbraut upp í 850 km brautarhæð yfir jörðu.

239. Fyrir tiltekið vélknúið ökutæki er mesta mögulega hraðaminnkun við hemlun um það bil 7 m/sek.² á þurri steinsteypu en á blautu malbiki um það bil 2,5 m/sek.². Athugið að 3,6 km/klst. samsvara 1 m/sek. Finnið heildarvegalengdina í metrum sem bíll fer á þurri steinsteypu frá því að hemlað er þar til hann stöðvast alveg. Hraðinn þegar hemlun hefst er annars vegar 108 km/klst. (30 m/sek.) og hins vegar 90 km/klst. (25 m/sek.). Finnið samsvarandi vegalengdir ef yfirborðið er hált, blautt malbik.

240. John er 25 ára maður sem vegur 73 kg. Hann brennir $500 - 50t$ hitaeiningum á klukkustund þegar hann hjólar í t klukkustundir. Hver hafrakaka inniheldur 55 hitaeiningar og John fær hitaeiningar úr kökum með hraðanum 4t á t-tu klukkustundinni. Hvert er nettótap hans á hitaeiningum eftir að hann hefur hjólað í 3 klukkustundir?

5

241. Sandra er 25 ára kona sem vegur 54 kg. Hún brennir $300 - 50t$ hitaeiningum á klukkustund þegar hún gengur á hlaupabretti. Úr Gatorade-drykk fær hún 100t hitaeiningar á klukkustund á t-tu klukkustundinni. Hvert er nettótap hennar á hitaeiningum eftir 3 klukkustunda göngu?

242. Vélknúið ökutæki nær mestri eldsneytisnýtingu, 14 km á lítra, við jafnan akstursshraða sem nemur 60 km/klst. Eldsneytisnýtingin minnkar um 0,05 km á lítra fyrir hvern km/klst. sem hraðinn eykst úr 60 í 80 km/klst. og um 0,08 km á lítra fyrir hvern km/klst. sem hraðinn eykst úr 80 í 130 km/klst. Hver er eldsneytisnýtingin í km á lítra þegar bílnum er ekið á 80 km hraða á klukkustund? En á 130 km hraða á klukkustund? Ef bensín kostar 0,90 evrur á lítra, hver er eldsneytiskostnaðurinn við að aka 80 km á 60, 80 og 130 km hraða á klukkustund?

243. Þótt sumar vélar nýti eldsneyti betur en aðrar við sama afl minnkar eldsneytisnýting að meðaltali um 1/50 km á lítra fyrir hvert kílóvatt (kW) sem bætist við. Ef dæmigerð 40 kW vél hefur meðaleldsneytisnýtinguna 14 km á lítra, hver er þá meðaleldsneytisnýting 100, 200 og 300 kW véla?

244. **[T]** Eftirfarandi tafla sýnir skattþrep alríkistekjuskatts árið 2013 eftir skattskyldum tekjum.

Tafla 5.9 Alríkistekjuskattur og skattskyldar tekjur *Heimild*: http://www.irs.gov/pub/irs-prior/i1040tt--2013.pdf.

Bil skattskyldra tekna	Skatturinn er ...	... af fjárhæð umfram
$0–$8925	10%	$0
$8925–$36.250	$892,50 + 15%	$8925
$36.250–$87.850	$4.991,25 + 25%	$36.250
$87.850–$183.250	$17.891,25 + 28%	$87.850
$183.250–$398.350	$44.603,25 + 33%	$183.250
$398.350–$400.000	$115.586,25 + 35%	$398.350
> $400.000	$116.163,75 + 39,6%	$400.000

Gerum ráð fyrir að Steve hafi nýlega fengið $10.000 launahækkun. Hve mikið stendur eftir af hækkuninni að frádregnum alríkissköttum ef laun Steves fyrir hækkunina voru $40.000? En ef þau voru $90.000? En ef þau voru $385.000?

245. **[T]** Eftirfarandi tafla sýnir ímynduð gögn um þjónustustig tiltekins þjóðvegar.

Tafla 5.10

Hraðabil á þjóðvegi (km/klst.)	Ökutæki á klukkustund á hverri akrein	Þéttleikabil (ökutæki/km)
> 120	< 600	< 5
120–114	600–1000	5–10
114–108	1000–1500	10–15
108–92	1500–1900	15–23
92–60	1900–2100	23–35
<60	Óstöðugt	35–100

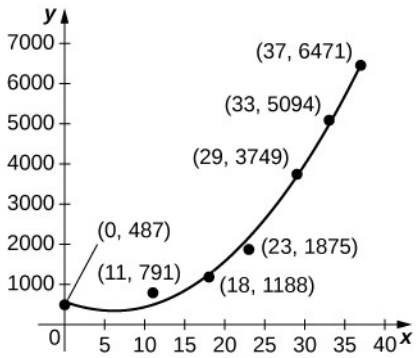
a. Teiknið fjölda ökutækja á klukkustund á hverri akrein á x-ásinn og hraða á þjóðveginum á y-ásinn.
b. Reiknið meðallækkun hraða (í km/klst.) fyrir hverja einingaraukningu á umferðarþunga (ökutæki á klukkustund á hverri akrein) þegar umferðarþunginn vex úr 600 í 1000, úr 1000 í 1500 og úr 1500 í 2100. Er línulegt samband milli hraðalækkunarinnar og fjölgunar ökutækja á klukkustund á hverri akrein?
c. Teiknið mínútur á kílómetra, það er 60 sinnum margföldunarandhverfu hraðans í km/klst., sem fall af fjölda ökutækja á klukkustund á hverri akrein. Er þetta fall línulegt?

Í næstu tveimur æfingum notið þið gögnin í eftirfarandi töflu, sem sýnir stofnstærð skallaarna á meginlandi Bandaríkjanna frá 1963 til 2000.

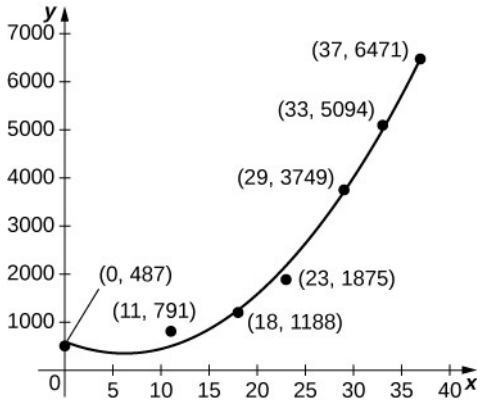
Tafla 5.11 Fjöldi varppara skallaarna *Heimild*: http://www.fws.gov/Midwest/eagle/population/chtofprs.html.

Ár	Fjöldi varppara skallaarna
1963	487
1974	791
1981	1188
1986	1875
1992	3749
1996	5094
2000	6471

246. **[T]** Grafið hér að neðan sýnir annars stigs fallið $p\,(t)=6{,}48\ t^2-80{,}3\ \ 1\ t+585{,}69$ ásamt gögnunum í töflunni hér á undan, þar sem $t=0$ samsvarar árinu 1963. Metið meðalfjölda skallaarna á ári á þessu 37 ára tímabili með því að reikna meðalgildi p á bilinu $[0\,,37]$.

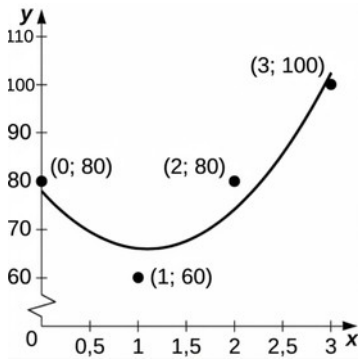


247. **[T]** Grafið hér að neðan sýnir þriðja stigs fallið $p\,(t)=0{,}07\ t^3+2{,}42\ t^2-25{,}63\ t+521{,}23$ ásamt gögnunum í töflunni hér á undan, þar sem $t=0$ samsvarar árinu 1963. Metið meðalfjölda skallaarna á ári á þessu 37 ára tímabili með því að reikna meðalgildi p á bilinu $[0\,,37]$.



248. **[T]** Gerum ráð fyrir að þið farið í bílferð og skráið hraðann á hálftíma fresti eins og sýnt er í eftirfarandi töflu. Besta annars stigs aðfellan að gögnunum er $q\left(t\right)=10\ x^2-22\ x+78$, sem sýnd er á meðfylgjandi grafi. Heildið q til að meta heildarvegalengdina sem ekin er á þessum 3 klukkustundum.

Tími (klst.)	**Hraði (km/klst.)**
0 (upphaf)	80
1	60
2	80
3	100



Þegar bíll eykur hraðann er hröðunin ekki jöfn heldur breytileg. Í eftirfarandi æfingum notið þið töfluna hér að neðan, sem sýnir hröðunina mælda á hverri sekúndu þegar ökumaður ekur inn á hraðbraut.

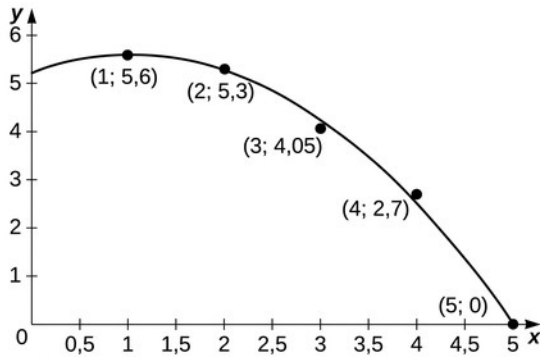
Tími (sek.)	**Hröðun (m/sek.^{2})**
1	5,6
2	5,3
3	4,05
4	2,7
5	0

Þegar bíll eykur hraðann er hröðunin ekki jöfn heldur breytileg. Í næstu þremur æfingum notið þið töfluna hér að neðan, sem sýnir hröðunina mælda á hverri sekúndu þegar ökumaður ekur inn á hraðbraut.

Tafla 5.12

Tími (sek.)	Hröðun (m/sek.^{2})
1	5,6
2	5,3
3	4,05
4	2,7
5	0

249. **[T]** Meðfylgjandi graf sýnir bestu annars stigs aðfelluna að gögnunum í töflunni á undan, $a(t) = -0{,}35\,t^2 + 0{,}72\,t + 5{,}22$. Reiknið meðalgildi $a(t)$ til að meta meðalhröðunina á bilinu frá $t = 0$ til $t = 5$.

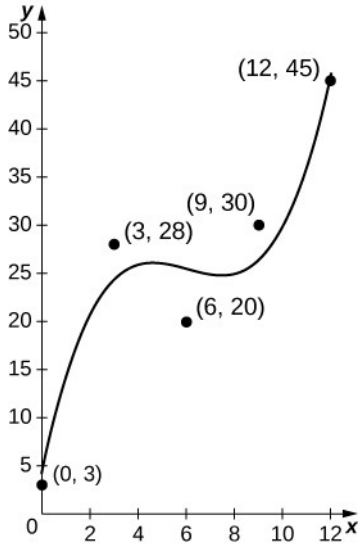


250. **[T]** Notið hröðunarjöfnuna úr æfingunni á undan til að finna samsvarandi hraðajöfnu. Gerið ráð fyrir að upphafshraðinn sé 15 m/sek. og finnið hraðann á tímanum $t = 0$.

251. **[T]** Notið hraðajöfnuna úr æfingunni á undan til að finna samsvarandi vegalengdarjöfnu og gerið ráð fyrir að upphafsvegalengdin sé 0 m. Hve langt ókuð þið meðan bíllinn jók hraðann? (Vísbending: Hraðinn er í m/sek. og tíminn í sekúndum.)

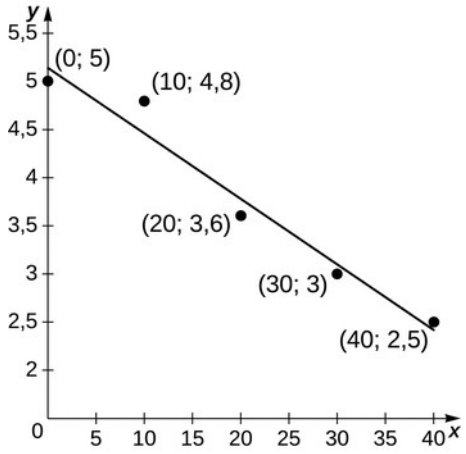
252. **[T]** Fjöldi hamborgara sem veitingastaður selur yfir daginn er sýndur í eftirfarandi töflu. Meðfylgjandi graf sýnir bestu þriðja stigs aðfelluna að gögnunum, $b(t) = 0{,}12\,t^3 - 2{,}13\,t^2 + 12{,}13\,t + 3{,}91$, þar sem $t = 0$ samsvarar kl. 9 að morgni og $t = 12$ kl. 9 að kvöldi. Reiknið meðalgildi $b(t)$ til að meta meðalfjölda seldra hamborgara á klukkustund.

Klukkustundir eftir miðnætti	Fjöldi seldra hamborgara
9	3
12	28
15	20
18	30
21	45



253. **[T]** Íþróttakona hleypur fram hjá hreyfiskynjara sem skráir hraða hennar eins og sýnt er í eftirfarandi töflu. Besta línulega aðfellan að gögnunum, $\ell(t) = -0{,}068\,t + 5{,}14$, er sýnd á meðfylgjandi grafi. Notið meðalgildi $\ell(t)$ á bilinu frá $t = 0$ til $t = 40$ til að meta meðalhraða hlaupakonunnar.

Mínútur	Hraði (m/sek.)
0	5
10	4,8
20	3,6
30	3,0
40	2,5



5.5 Innsetning

NÁMSMARKMIÐ

- 5.5.1 Notið innsetningu til að reikna óákveðin heildi.
- 5.5.2 Notið innsetningu til að reikna ákveðin heildi.

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar gaf okkur aðferð til að reikna heildi án þess að nota Riemann-summur. Ókostur aðferðarinnar er þó sá að við verðum að geta fundið stofnfall, sem er ekki alltaf auðvelt. Í þessum undirkafla skoðum við aðferð sem nefnist heildun með innsetningu og auðveldar okkur að finna stofnföll. Nánar tiltekið nýtist aðferðin þegar heildisstofninn verður til við deildun með keðjureglunni.

Í fyrstu er ef til vill ekki augljóst hvernig nota á innsetningu. Þetta er þó fyrst og fremst sjónrænt verkefni: heildisstofninn sýnir hvað gera skal og við þurfum að þekkja form fallsins. Að hverju leitum við þá? Við leitum að heildisstofni af gerðinni $f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx$. Tökum sem dæmi heildið $\int\left(x^2-3\right)^3 2x\,dx$, þar sem $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2-3$, og $g'(x)=2x$. Þá er

$$f\left[g(x)\right]g'(x)=\left(x^2-3\right)^3(2x),$$

og heildisstofninn er því á réttu formi.

Aðferðin nefnist innsetning vegna þess að hluta heildisstofnsins er skipt út fyrir breytuna u og öðrum hluta hans fyrir du. Hún er einnig nefnd breytuskipti, enda skiptum við um breytu til að fá segð sem auðveldara er að nota heildunarreglurnar á.

SETNING 5.7

Innsetning í óákveðnum heildum

Látum $u=g(x)$, þar sem $g'(x)$ er samfellt á bili, látum $f(x)$ vera samfellt á samsvarandi myndmengi fallsins g og látum $F(x)$ vera stofnfall $f(x)$. Þá gildir

$$\begin{aligned}\int f\left[g\left(x\right)\right]g'(x)dx &= \int f\left(u\right)du \\ &= F\left(u\right)+C \\ &= F\left(g\left(x\right)\right)+C.\end{aligned}$$

(5.19)

Sönnun

Látum f, g, u og F vera eins og tilgreint er í setningunni. Þá er

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g\left(x\right))g'(x) \\ &= f\left[g\left(x\right)\right]g'(x).\end{aligned}$$

Með því að heilda báðar hliðar með tilliti til x fæst

$$\int f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx=F\left(g\left(x\right)\right)+C.$$

Ef við setjum nú inn $u=g\left(x\right)$, og $du=g'\left(x\right)dx$, fæst

$$\begin{aligned}\int f\left[g\left(x\right)\right]g'(x)dx &= \int f\left(u\right)du \\ &= F\left(u\right)+C \\ &= F\left(g\left(x\right)\right)+C.\end{aligned}$$

□

Snúum aftur að verkefninu sem við skoðuðum í upphafi. Látum $u=x^2-3$ og þá er $du=2x\,dx$. Umritum heildið með tilliti til u:

$$\int \underbrace{\left(x^2-3\right)}_{u}^{3}\underbrace{\left(2x\,dx\right)}_{du}=\int u^3\,du.$$

Samkvæmt veldisreglunni fyrir heildi fæst

$$\int u^3\,du=\frac{u^4}{4}+C.$$

Setjum upphaflegu segðina, sem rituð er með x, aftur inn í lausnina:

$$\frac{u^4}{4}+C=\frac{\left(x^2-3\right)^4}{4}+C.$$

Við getum lýst aðferðinni almennt í lausnarleiðinni hér á eftir.

LAUSNARLEIÐ

Heildun með innsetningu

1. Skoðið heildisstofninn vandlega og veljið segð $g\left(x\right)$ í honum sem setja á jafnt og u. Veljið $g\left(x\right)$ þannig að $g'\left(x\right)$ sé einnig hluti af heildisstofninum.

2. Setjið $u=g(x)$ og $du=g'(x)dx$ inn í heildið.
3. Nú ætti að vera hægt að reikna heildið með tilliti til u. Ef það tekst ekki þarf að fara til baka og velja aðra segð fyrir u.
4. Reiknið heildið með tilliti til u.
5. Skrifið niðurstöðuna með breytunni x og segðinni $g(x)$.

DÆMI 5.30

Innsetning notuð til að finna stofnfall

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int 6x\left(3x^2+4\right)^4 dx$.

Lausn

Fyrsta skrefið er að velja segð fyrir u. Við veljum $u=3x^2+4$ því þá er $du=6x\,dx$, og du er þegar í heildisstofninum. Skrifum heildið með tilliti til u:

$$\int 6x\left(3x^2+4\right)^4 dx=\int u^4 du.$$

Munið að du er afleiða segðarinnar sem valin er fyrir u, óháð því hvað annað er í heildisstofninum. Nú getum við reiknað heildið með tilliti til u:

$$\begin{aligned}\int u^4 du &= \tfrac{u^5}{5}+C \\ &= \tfrac{\left(3x^2+4\right)^5}{5}+C.\end{aligned}$$

Greining

Við getum sannreynt svarið með því að deilda niðurstöðuna. Þá ættum við að fá heildisstofninn. Veljum C = 1 og látum $y=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^5+1$. Þá fæst

$$y=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^5+1,$$

svo

$$\begin{aligned}y' &= \left(\tfrac{1}{5}\right)5\left(3x^2+4\right)^4 6x \\ &= 6x\left(3x^2+4\right)^4.\end{aligned}$$

Þetta er nákvæmlega segðin sem var í heildisstofninum í upphafi.

STÖÐUMAT 5.25

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int 3x^2\left(x^3-3\right)^2 dx$.

Stundum þarf að laga fastana í heildinu þegar þeir samsvara ekki nákvæmlega segðunum sem settar eru inn.

DÆMI 5.31

Innsetning með aðlögun

Notið innsetningu til að finna $\int z\sqrt{z^2-5}\,dz$.

Lausn

Umritum heildið sem $\int z\left(z^2-5\right)^{1/2}dz$. Látum $u=z^2-5$ og $du=2z\,dz$. Nú kemur upp vandi því $du=2z\,dz$ en í upphaflegu segðinni er aðeins $z\,dz$. Við verðum að breyta segðinni fyrir du, annars verður heildið með tilliti til u tvöfalt stærra en það á að vera. Við leysum vandann með því að margfalda báðar hliðar jöfnunnar fyrir du með $\frac{1}{2}$. Þá fæst

$$\begin{aligned} u &= z^2-5 \\ du &= 2z\,dz \\ \tfrac{1}{2}du &= \tfrac{1}{2}(2z)dz = z\,dz. \end{aligned}$$

Skrifum heildið með tilliti til u en tökum $\frac{1}{2}$ út fyrir heildistáknið:

$$\int z\left(z^2-5\right)^{1/2}dz = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du.$$

Heildum segðina með tilliti til u:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}du &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)u^{3/2}+C \\ &= \tfrac{1}{3}u^{3/2}+C \\ &= \tfrac{1}{3}\left(z^2-5\right)^{3/2}+C. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.26

Notið innsetningu til að finna $\int x^2\left(x^3+5\right)^9dx$.

DÆMI 5.32

Innsetning í heildum hornafalla

Notið innsetningu til að reikna heildið $\int\frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$.

Lausn

Við vitum að afleiða $\cos t$ er $-\sin t$, og því setjum við $u=\cos t$. Þá er $du=-\sin t\,dt$. Með innsetningu í heildið fæst

$$\int \frac{\sin t}{\cos^3 t}\,dt=-\int \frac{du}{u^3}.$$

Þegar heildið er reiknað fæst

$$\begin{aligned}-\int \frac{du}{u^3} &= -\int u^{-3}du \\ &= -\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-2}+C.\end{aligned}$$

Þegar svarið er aftur sett fram með tilliti til t fæst

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt &= \tfrac{1}{2u^2}+C \\ &= \tfrac{1}{2\cos^2 t}+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.27

Notið innsetningu til að reikna heildið $\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt$.

Stundum þarf að umrita heildi á flóknari hátt en með því einu að margfalda eða deila með fasta. Fjarlægja þarf allar segðir í heildisstofninum sem eru settar fram með upphaflegu breytunni. Að því loknu á u að vera eina breytan í heildisstofninum. Í sumum tilvikum þarf því að einangra upphaflegu breytuna og rita hana með u. Næsta dæmi skýrir þessa aðferð.

5

DÆMI 5.33

Stofnfall fundið með u-innsetningu

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Lausn

Ef við látum $u=x-1$, þá er $du=dx$. Þá er þó ekki tekið tillit til x í teljara heildisstofnsins. Við þurfum að rita x með u. Ef $u=x-1$, þá er $x=u+1$. Nú getum við umritað heildið með tilliti til u:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx &= \int \frac{u+1}{\sqrt{u}}du \\ &= \int \sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}du \\ &= \int \left(u^{1/2}+u^{-1/2}\right)du.\end{aligned}$$

Síðan heildum við á venjulegan hátt, setjum upphaflegu segðina í stað u og þáttum og einföldum niðurstöðuna. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int \left(u^{1/2}+u^{-1/2}\right)du &= \tfrac{2}{3}u^{3/2}+2u^{1/2}+C \\ &= \tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2}+2(x-1)^{1/2}+C \\ &= (x-1)^{1/2}\left[\tfrac{2}{3}(x-1)+2\right]+C \\ &= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{2}{3}+\tfrac{6}{3}\right)+C \\ &= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{4}{3}\right)+C \\ &= \tfrac{2}{3}(x-1)^{1/2}(x+2)+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.28

Notið innsetningu til að reikna óákveðna heildið $\int \cos^3 t \sin t \, dt$.

Innsetning í ákveðnum heildum

Einnig má nota innsetningu í ákveðnum heildum. Þegar ákveðið heildi er reiknað með innsetningu þarf þó að breyta heildismörkunum. Ef skipt er um breytu í heildisstofninum breytast heildismörkin jafnframt.

5

SETNING 5.8

Innsetning í ákveðnum heildum

Látum $u=g(x)$ og látum g' vera samfellt á bilinu $[a,b]$, og látum f vera samfellt á myndmengi $u=g(x)$. Þá gildir

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Við sönnum setninguna ekki formlega en rökstyðjum hana hér með nokkrum útreikningum. Ef $F(x)$ er stofnfall $f(x)$, fæst samkvæmt innsetningarreglunni fyrir óákveðin heildi

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C.$$

Þá er

$$\begin{aligned}\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx &= F(g(x))|_{x=a}^{x=b}\\ &= F(g(b)) - F(g(a))\\ &= F(u)|_{u=g(b)}^{u=g(a)}\\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,\end{aligned}$$

(5.20)

og þar með fæst niðurstaðan sem sýna átti.

DÆMI 5.34

Ákveðið heildi reiknað með innsetningu

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^1 x^2\left(1+2x^3\right)^5 dx$.

Lausn

Látum $u=1+2x^3$, þannig að $du=6x^2dx$. Þar sem upphaflegi heildisstofninn inniheldur þáttinn x^2 og $du=6x^2dx$, margföldum við báðar hliðar jöfnunnar fyrir du með $1/6$. Þá fæst

$$\begin{aligned}du &= 6x^2dx\\ \tfrac{1}{6}du &= x^2dx.\end{aligned}$$

Til að laga heildismörkin athugum við að þegar $x=0, u=1+2(0)=1$, og þegar $x=1, u=1+2(1)=3$. Þá er

$$\int_0^1 x^2\left(1+2x^3\right)^5 dx = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du.$$

Þegar segðin er reiknuð fæst

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\int_1^3 u^5du &= \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{u^6}{6}\right)\Big|_1^3\\ &= \tfrac{1}{36}\left[(3)^6-(1)^6\right]\\ &= \tfrac{182}{9}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.29

Notið innsetningu til að reikna ákveðna heildið $\int_{-1}^0 y\left(2y^2-3\right)^5 dy$.

DÆMI 5.35

Innsetning notuð með vísisfalli

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^1 x\,e^{4x^2+3}\,dx$.

Lausn

Látum $u=4x^2+3$. Þá er $du=8x\,dx$. Til að laga heildismörkin athugum við að þegar $x=0, u=3$, og þegar $x=1, u=7$. Innsetningin gefur því

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,e^{4x^2+3}\,dx &= \frac{1}{8}\int_3^7 e^u\,du \\ &= \frac{1}{8}\,e^u\Big|_3^7 \\ &= \frac{e^7-e^3}{8} \\ &\approx 134{,}568.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.30

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right)dx$.

Stundum er innsetning aðeins ein af nokkrum aðferðum sem þarf til að reikna ákveðið heildi. Allir eiginleikar og allar reglur heildunar gilda eftir sem áður og stundum þarf að umrita hornaföll með hornafallasamsemd áður en hægt er að beita innsetningu. Einnig má setja upphaflegu segðina aftur í stað u eftir að stofnfallið hefur verið fundið og þá þarf ekki að breyta heildismörkunum. Þessar tvær leiðir eru sýndar í dæmi 5.36.

DÆMI 5.36

Hornafallsheildi reiknað með innsetningu

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$.

Lausn

Notum fyrst hornafallasamsemd til að umrita heildið. Með samsemdinni $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ má umrita heildið sem

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta.$$

Þá er

$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d\theta.$$

Fyrra heildið má reikna eins og það stendur en nota þarf innsetningu til að reikna það síðara. Látum $u=2\theta$. Þá er $du=2\,d\theta$, eða $\frac{1}{2}du=d\theta$. Auk þess gildir að þegar $\theta=0, u=0$, og þegar $\theta=\pi/2, u=\pi$. Ef síðara heildið er ritað með u fæst

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\cos u du$$
$$= \tfrac{\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \tfrac{1}{4}\sin u\Big|_{u=0}^{u=\pi}$$
$$= \left(\tfrac{\pi}{4}-0\right)+(0-0)=\tfrac{\pi}{4}.$$

Æfingar í undirkafla 5.5

254. Hvers vegna er u-innsetning einnig nefnd breytuskipti?

255. 2. Ef $f=g\circ h$, þegar keðjureglunni er beitt öfugt, $\frac{d}{dx}(g\circ h)(x)=g'(h(x))h'(x)$, ættuð þið að velja $u=g(x)$ eða $u=h(x)$?

Sannreynið hverja samsemd í eftirfarandi æfingum með deildun. Notið síðan tilgreinda u-innsetningu og ákvarðið f þannig að heildið verði á forminu $\int f(u)\,du$.

256.

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2)+C;\ u=x+1$$

257. Fyrir

$$x>1:\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx=\frac{2}{15}\sqrt{x-1}\left(3x^2+4x+8\right)+C;\ u=x-1$$

258.

$$\int x\sqrt{4x^2+9}\,dx=\frac{1}{12}\left(4x^2+9\right)^{3/2}+C;\ u=4x^2+9$$

259.

$$\int\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}dx=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9}+C;\ u=4x^2+9$$

260.

$$\int \frac{x}{\left(4x^2+9\right)^2}dx=-\frac{1}{8\left(4x^2+9\right)};u=4x^2+9$$

Finnið stofnfallið í eftirfarandi æfingum með tilgreindri innsetningu.

261.

$$\int \left(x+1\right)^4 dx;u=x+1$$

262.

$$\int \left(x-1\right)^5 dx;u=x-1$$

263.

$$\int \left(2x-3\right)^{-7} dx;u=2x-3$$

264.

$$\int \left(3x-2\right)^{-11} dx;u=3x-2$$

265.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;u=x^2+1$$

266.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;u=1-x^2$$

267.

$$\int \left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)^3 dx;u=x^2-2x$$

268.

$$\int \left(x^2-2x\right)\left(x^3-3x^2\right)^2 dx;u=x^3-3x^2$$

269.

$$\int \cos^3\theta\, d\theta;u=\sin\theta\ (Hint:\cos^2\theta=1-\sin^2\theta)$$

270.

$$\int \sin^3\theta\, d\theta;u=\cos\theta\ (Hint:\sin^2\theta=1-\cos^2\theta)$$

Notið viðeigandi breytuskipti í eftirfarandi æfingum til að reikna óákveðna heildið.

271.

$$\int x\left(1-x\right)^{99} dx$$

272.

$$\int t\left(1-t^2\right)^{10} d\,t$$

273.

$$\int \left(11\,x-7\right)^{-3} d\,x$$

274.

$$\int \left(7\,x-11\right)^{4} d\,x$$

275.

$$\int \cos^3\theta \sin\theta \, d\,\theta$$

276.

$$\int \sin^7\theta \cos\theta \, d\,\theta$$

277.

$$\int \cos^2\left(\pi\,t\right)\sin\left(\pi\,t\right) d\,t$$

278.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, d\,x \ \left(Hint: \sin^2 x + \cos^2 x = 1\right)$$

279.

$$\int t \sin\left(t^2\right)\cos\left(t^2\right) d\,t$$

280.

$$\int t^2 \cos^2\left(t^3\right)\sin\left(t^3\right) d\,t$$

281.

$$\int \frac{x^2}{\left(x^3-3\right)^2} d\,x$$

282.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} d\,x$$

283.

$$\int \frac{y^5}{\left(1-y^3\right)^{3/2}} d\,y$$

284.

$$\int \cos\theta\left(1-\cos\theta\right)^{99}\sin\theta\,d\theta$$

285.

$$\int\left(1-\cos^3\theta\right)^{10}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

286.

$$\int\left(\cos\theta-1\right)\left(\cos^2\theta-2\cos\theta\right)^3\sin\theta\,d\theta$$

287.

$$\int\left(\sin^2\theta-2\sin\theta\right)\left(\sin^3\theta-3\sin^2\theta\right)^3\cos\theta\,d\theta$$

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að áætla flatarmálið undir ferlinum með vinstri Riemann-summu með 50 liðum. Notið síðan innsetningu til að finna nákvæmt svar.

288. **[T]** $y=3\left(1-x\right)^2$ á bilinu $\left[0,2\right]$

289. **[T]** $y=x\left(1-x^2\right)^3$ á bilinu $\left[-1,2\right]$

290. **[T]** $y=\sin x\left(1-\cos x\right)^2$ á bilinu $\left[0,\pi\right]$

291. **[T]** $y=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ á bilinu $\left[-1,1\right]$

Notið breytuskipti í eftirfarandi æfingum til að reikna ákveðna heildið.

292.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

293.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

294.

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{5+t^2}}\,dt$$

295.

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$$

296.

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \tan\theta \, d\theta$$

297.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta} d\theta$$

Reiknið í eftirfarandi æfingum óákveðna heildið $\int f(x)\,dx$ þar sem fastinn er $C=0$ og notið u-innsetningu. Teiknið síðan gröf fallsins og stofnfallsins á tilgreinda bilinu. Áætlið, ef hægt er, hvaða gildi C þarf að bæta við stofnfallið svo að það verði jafnt ákveðna heildinu $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, þar sem a er vinstri endapunktur gefna bilsins.

298. **[T]** $\int (2x+1)e^{x^2+x-6}\,dx$ á bilinu $[-3,2]$

299. **[T]** $\int \frac{\cos(\ln(2x))}{x}\,dx$ á bilinu $[0,2]$

300. **[T]** $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x+4}}\,dx$ á bilinu $[-1,2]$

301. **[T]** $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$ á bilinu $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$

302. **[T]** $\int (x+2)e^{-x^2-4x+3}\,dx$ á bilinu $[-5,1]$

303. **[T]** $\int 3x^2\sqrt{2x^3+1}\,dx$ á bilinu $[0,1]$

304. Ef $h(a)=h(b)$ í $\int_a^b g'(h(x))h'(x)\,dx$, hvað má þá segja um gildi heildisins?

305. Er innsetningin $u=1-x^2$ í ákveðna heildinu $\int_0^2 \frac{x}{1-x^2}\,dx$ gild? Ef ekki, hvers vegna?

Notið breytuskipti í eftirfarandi æfingum til að sýna að hvert ákveðið heildi sé núll.
306.

$$\int_0^{\pi} \cos^2(2\theta)\sin(2\theta)\,d\theta$$

307.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos(t^2)\sin(t^2)\,dt$$

308.

$$\int_0^1 (1-2t)\,dt$$

309.

$$\int_0^1 \frac{1-2t}{\left(1+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)}\,dt$$

310.

$$\int_0^{\pi} \sin\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$$

311.

$$\int_0^2 (1-t)\cos(\pi t)\,dt$$

312.

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 t\cos t\,dt$$

313. Sýnið að meðalgildi $f(x)$ á bilinu $[a,b]$ sé jafnt meðalgildi $f(cx)$ á bilinu $\left[\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right]$ þegar $c>0$.

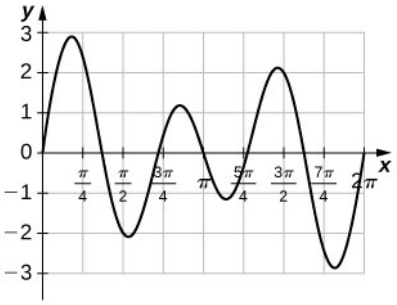
314. Finnið flatarmálið undir grafi $f(t)=\frac{t}{(1+t^2)^a}$ milli $t=0$ og $t=x$ þar sem a er fasti sem uppfyllir $a>0$ og $a\neq 1$. Reiknið síðan markgildið þegar $x\to\infty$.

315. Finnið flatarmálið undir grafi $g(t)=\frac{t}{(1-t^2)^a}$ milli $t=0$ og $t=x$, þar sem $0<x<1$ og a er fasti sem uppfyllir $a>0$. Reiknið markgildið þegar $x\to 1$.

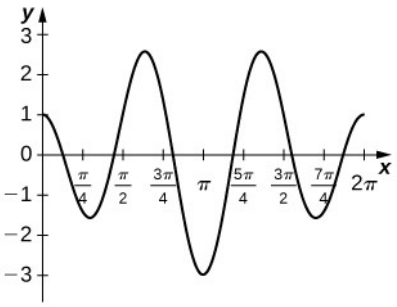
316. Flatarmál hálfhrings með geisla 1 má rita sem $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Notið innsetninguna $x=\cos t$ til að rita flatarmál hálfhrings sem heildi hornafalls. Ekki þarf að reikna heildið.

317. Langás sporbaugs er x-ásinn frá $x=-a$ til $x=a$ og skammás hans er y-ásinn frá $y=-b$ til $y=b$. Flatarmál efri helmings sporbaugsins má rita sem $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$. Notið innsetninguna $x=a\cos t$ til að rita flatarmálið sem heildi hornafalls. Ekki þarf að reikna heildið.

318. **[T]** Eftirfarandi graf sýnir fall af gerðinni $f(t)=a\sin(nt)+b\sin(mt)$. Áætlið stuðlana a og b og tíðnistikana n og m. Notið áætluðu gildin til að nálga $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$.



319. **[T]** Eftirfarandi graf sýnir fall af gerðinni $f(x)=a\cos(nt)+b\cos(mt)$. Áætlið stuðlana a og b og tíðnistikana n og m. Notið áætluðu gildin til að nálga $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$.



5

5.6 Heildi með vísis- og lograföllum

NÁMSMARKMIÐ

- 5.6.1 Heilda föll sem innihalda vísisföll.
- 5.6.2 Heilda föll sem innihalda lograföll.

Vísis- og lograföll eru meðal annars notuð til að lýsa fólksfjölgun, frumuvexti og fjárhagslegum vexti, svo og afskriftum, geislavirkri hrörnun og auðlindanotkun. Í þessum undirkafla skoðum við heildun falla sem innihalda vísis- og lograföll.

Heildi vísisfalla

Vísisfallið er ef til vill það fall sem þægilegast er að vinna með í stærðfræðigreiningu. Vísisfallið $y=e^x$, er sín eigin afleiða og sitt eigið heildi.

REGLA: HEILDI VÍSISFALLA

Vísisföll má heilda með formúlunum hér á eftir.

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \tfrac{a^x}{\ln a} + C\end{aligned}$$

(5.21)

DÆMI 5.37

Stofnfall vísisfalls fundið

Finnið stofnfall vísisfallsins e^{-x}.

Lausn

Notið innsetningu og látið $u = -x$, og síðan $du = -1\,dx$. Margfaldið du-jöfnuna með −1 svo að $-du = dx$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int e^{-x} dx &= -\int e^u du \\ &= -e^u + C \\ &= -e^{-x} + C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.31

Finnið stofnfall fallsins með innsetningu: $x^2 e^{-2x^3}$.

Algeng mistök þegar unnið er með vísissegðir eru að fara með veldisvísi e eins og veldisvísa í margliðusegðum. Ekki má nota veldisregluna á veldisvísi e. Þetta getur valdið sérstökum ruglingi þegar sama segð inniheldur bæði vísisfall og margliðu, eins og í stöðumatsverkefninu hér á undan. Í slíkum tilvikum ættum við alltaf að ganga úr skugga um að við notum réttar reglur á föllin sem við heildum.

DÆMI 5.38

Kvaðratrót vísisfalls

Finnið stofnfall vísisfallsins $e^x\sqrt{1+e^x}$.

Lausn

Umritum dæmið fyrst með ræðum veldisvísi:

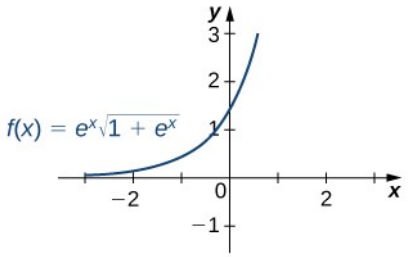
$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2} dx.$$

Notum innsetningu og veljum $u = 1+e^x$. Þá er $du = e^x\,dx$. Við fáum því (mynd 5.37)

$$\int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2}\,dx=\int u^{1/2}\,du\,.$$

Þá fæst

$$\int u^{1/2}\,du=\frac{u^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}u^{3/2}+C=\frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{3/2}+C\,.$$



Mynd 5.37 Grafið sýnir margfeldi vísisfalls og kvaðratrótar vísisfalls.

STÖÐUMAT 5.32

Finnið stofnfall $e^x\left(3e^x-2\right)^2$.

DÆMI 5.39

Innsetning með vísisfalli

Notið innsetningu til að reikna óákveðna heildið $\int 3x^2e^{2x^3}\,dx$.

Lausn

Hér látum við u vera segðina í veldisvísi e. Látum $u=2x^3$ og $du=6x^2\,dx$.. Enn vantar fastan margföldunarþátt í du: upphaflega fallið inniheldur þáttinn 3x² en ekki 6x². Margföldum báðar hliðar jöfnunnar með $\frac{1}{2}$ svo að heildisstofninn með tilliti til u verði jafn heildisstofninum með tilliti til x. Þá fæst

$$\int 3x^2e^{2x^3}\,dx=\frac{1}{2}\int e^u\,du\,.$$

Heildið segðina með tilliti til u og setjið síðan upphaflegu segðina í x aftur í stað u:

$$\frac{1}{2}\int e^u\,du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{2x^3}+C\,.$$

STÖÐUMAT 5.33

Reiknið óákveðna heildið $\int 2x^3e^{x^4}\,dx$.

Eins og fram kom í upphafi þessa undirkafla eru vísisföll notuð við margs konar hagnýt viðfangsefni. Talan e tengist oft samsettum eða sífellt hraðari vexti, eins og við höfum séð í fyrri undirköflum um afleiður. Afleiða táknar breytingar- eða vaxtarhraða en heildi táknar heildarbreytingu eða heildarvöxt. Skoðum dæmi þar sem við leysum algengt viðfangsefni úr viðskiptalífinu með því að heilda vísisfall.

Verð–eftirspurnarfall lýsir sambandi eftirspurðs magns vöru og verðs hennar. Almennt lækkar verðið þegar eftirspurt magn eykst. Jaðarverð–eftirspurnarfallið er afleiða verð–eftirspurnarfallsins og sýnir hve hratt verðið breytist við tiltekið framleiðslustig. Slík föll eru notuð í viðskiptum til að ákvarða verðteygni eftirspurnar og meta hvort breyting á framleiðslustigi yrði arðbær.

DÆMI 5.40

Verð-eftirspurnarjafna fundin

Finnið verð-eftirspurnarjöfnuna fyrir tiltekna tannkremstegund hjá stórmarkaðskeðju þegar eftirspurnin er 50 túpur á viku við verðið $2,35 á túpu. Jaðarverð-eftirspurnarfallið $p'(x)$, fyrir x túpur á viku, er gefið með

$$p'(x) = -0{,}015\, e^{-0{,}01\,x}.$$

Hvaða verð ætti stórmarkaðskeðjan að setja ef hún selur 100 túpur á viku?

Lausn

Heildum jaðarverð-eftirspurnarfallið til að finna verð-eftirspurnarjöfnuna. Finnum fyrst stofnfallið og notum síðan gefnu upplýsingarnar. Þá fæst

$$\begin{aligned} p(x) &= \int -0{,}015\, e^{-0{,}01\,x}\, dx \\ &= -0{,}015 \int e^{-0{,}01\,x}\, dx. \end{aligned}$$

Notum innsetningu og látum $u = -0{,}01\,x$ og $du = -0{,}01\,dx$. Deilum síðan báðum hliðum jöfnunnar fyrir du með −0,01. Þá fæst

$$\begin{aligned} \frac{-0{,}015}{-0{,}01} \int e^{u}\, du &= 1{,}5 \int e^{u}\, du \\ &= 1{,}5\, e^{u} + C \\ &= 1{,}5\, e^{-0{,}01\,x} + C. \end{aligned}$$

Næsta skref er að einangra C. Við vitum að þegar verðið er 2,35 € á túpu er eftirspurnin 50 túpur á viku. Það merkir að

$$\begin{aligned} p(50) &= 1{,}5\, e^{-0{,}01\,(50)} + C \\ &= 2{,}35. \end{aligned}$$

Nú er aðeins eftir að finna C:

$$\begin{aligned} C &= 2{,}35 - 1{,}5\ e^{-0{,}5} \\ &= 2{,}35 - 0{,}91 \\ &= 1{,}44. \end{aligned}$$

Því fæst

$$p\left(x\right) = 1{,}5\ e^{-0{,}01\,x} + 1{,}44.$$

Ef stórmarkaðurinn selur 100 tannkremstúpur á viku verður verðið

$$p\left(100\right) = 1{,}5\ e^{-0{,}01\,(100)} + 1{,}44 = 1{,}5\ e^{-1} + 1{,}44 \approx 1{,}99.$$

Stórmarkaðurinn ætti að taka 1,99 € fyrir hverja túpu ef hann selur 100 túpur á viku.

DÆMI 5.41

Ákveðið heildi með vísisfalli reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_1^2 e^{1-x}\,dx$.

Lausn

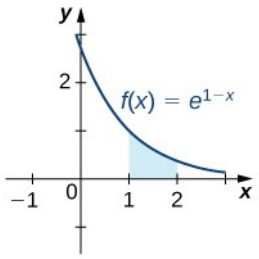
Notum aftur innsetningu. Látum $u = 1 - x$, þannig að $du = -1\,dx$ eða $-du = dx$. Þá er $\int e^{1-x}\,dx = -\int e^{u}\,du$. Breytum næst heildismörkunum. Samkvæmt jöfnunni $u = 1 - x$, er

$$\begin{aligned} u &= 1 - (1) = 0 \\ u &= 1 - (2) = -1. \end{aligned}$$

Heildið verður þá

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{1-x}dx &= -\int_0^{-1} e^{u}du \\ &= \int_{-1}^{0} e^{u}du \\ &= e^{u}\big|_{-1}^{0} \\ &= e^{0} - \left(e^{-1}\right) \\ &= -e^{-1} + 1. \end{aligned}$$

Sjá mynd 5.38.



Mynd 5.38 Reikna má sýnda flatarmálið með ákveðnu heildi og innsetningu.

STÖÐUMAT 5.34

Reiknið $\int_0^2 e^{2x}\,dx$.

DÆMI 5.42

Vöxtur bakteríuræktar

Gerum ráð fyrir að vaxtarhraði baktería í petrískál sé $q(t)=3^t$, þar sem t er mælt í klukkustundum og $q(t)$ í þúsundum baktería á klukkustund. Í upphafi eru 10.000 bakteríur í ræktuninni. Finnið fallið $Q(t)$ sem gefur fjölda baktería í petrískálinni á hverjum tíma t. Hve margar bakteríur eru í skálinni eftir 2 klukkustundir?

Lausn

Við höfum

$$Q(t)=\int 3^t\,dt=\frac{3^t}{\ln 3}+C.$$

Þegar $t=0$ er $Q(0)=10=\frac{1}{\ln 3}+C$, og því $C\approx 9{,}090$. Þá fæst

$$Q(t)=\frac{3^t}{\ln 3}+9{,}090.$$

Þegar $t=2$, er

$$Q(2)=\frac{3^2}{\ln 3}+9{,}090$$

$$=17{,}282.$$

Eftir 2 klukkustundir eru 17.282 bakteríur í skálinni.

STÖÐUMAT 5.35

Lítum aftur á dæmi 5.42 og gerum ráð fyrir að bakteríunum fjölgi með hraðanum $q(t)=2^t$. Sem fyrr eru 10.000 bakteríur í ræktuninni í upphafi. Finnið $Q(t)$. Hve margar bakteríur eru í skálinni eftir 3 klukkustundir?

DÆMI 5.43

Stofnvöxtur ávaxtaflugna

Gerum ráð fyrir að stofn ávaxtaflugna vaxi með hraðanum $g\,(t)=2\,e^{0{,}02\,t}$, mældum í flugum á dag. Í upphafi eru 100 flugur í stofninum. Hve margar flugur verða í honum eftir 10 daga?

Lausn

Látum $G(t)$ tákna fjölda flugna í stofninum á tímanum t. Með setningunni um heildarbreytingu fæst

$$\begin{aligned} G\,(10) &= G\,(0)+\int_0^{10} 2\,e^{0{,}02\,t}\,dt \\ &= 100+\left[\frac{2}{0{,}02}\,e^{0{,}02\,t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100+\left[100\,e^{0{,}02\,t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100+100\,e^{0{,}2}-100 \\ &\approx 122. \end{aligned}$$

Í stofninum eru 122 flugur eftir 10 daga.

5

STÖÐUMAT 5.36

Gerum ráð fyrir að vaxtarhraði flugnastofnsins sé $g\,(t)=e^{0{,}01\,t}$, og að 100 flugur séu í stofninum í upphafi. Hve margar flugur eru í stofninum eftir 15 daga?

DÆMI 5.44

Ákveðið heildi reiknað með innsetningu

Reiknið ákveðna heildið með innsetningu: $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

Lausn

Við þurfum að umrita dæmið aðeins svo að auðveldara sé að nota eiginleikana. Fyrst ritum við veldisvísi e sem veldi af x og færum síðan x^2 úr nefnaranum upp í teljarann með neikvæðum veldisvísi. Þá fæst

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \int_1^2 e^{x^{-1}} x^{-2}\,dx.$$

Látum $u = x^{-1}$, sem er veldisvísir e. Þá fæst

$$\begin{aligned} du &= -x^{-2}dx \\ -du &= x^{-2}dx. \end{aligned}$$

Ef við tökum mínusmerkið út fyrir heildistáknið verður dæmið

$$-\int e^u\,du.$$

Næst breytum við heildismörkunum:

$$\begin{aligned} u &= (1)^{-1} = 1 \\ u &= (2)^{-1} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Takið eftir að neðra heildismarkið er nú stærra en það efra. Því þurfum við að margfalda með -1 og víxla heildismörkunum. Þá fæst

$$\begin{aligned} -\int_1^{1/2} e^u du &= \int_{1/2}^1 e^u du \\ &= e^u|_{1/2}^1 \\ &= e - e^{1/2} \\ &= e - \sqrt{e}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.37

Reiknið ákveðna heildið með innsetningu: $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{4x^{-2}}\,dx$.

Heildi sem innihalda lograföll

Heildun falls af gerðinni $f(x) = x^{-1}$ gefur náttúrlega logrann af tölugildi breytunnar, eins og eftirfarandi regla sýnir. Heildunarformúlur fyrir önnur lograföll, svo sem $f(x) = \ln x$ og $f(x) = \log_a x$, eru einnig í reglunni.

REGLA: HEILDUNARFORMÚLUR FYRIR LOGRAFÖLL

Heildi sem innihalda lograföll má reikna með formúlunum hér á eftir.

$$\begin{aligned}\int x^{-1}dx &= \ln|x| + C \\ \int \ln x\,dx &= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \\ \int \log_a x\,dx &= \tfrac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

(5.22)

DÆMI 5.45

Að finna stofnfall sem inniheldur $\ln x$

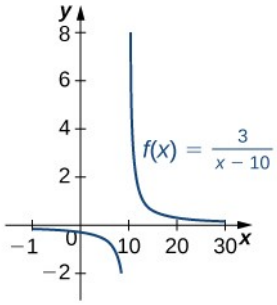
Finnið stofnfall fallsins $\dfrac{3}{x-10}$.

Lausn

Takið fyrst stuðulinn 3 út fyrir heildistáknið. Notið síðan u^{-1}-regluna. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x-10}dx &= 3\int \frac{1}{x-10}dx \\ &= 3\int \frac{du}{u} \\ &= 3\ln|u| + C \\ &= 3\ln|x-10| + C, x \neq 10.\end{aligned}$$

Sjá mynd 5.39.



Mynd 5.39 Skilgreiningarmengi þessa falls er $x \neq 10$.

STÖÐUMAT 5.38

Finnið stofnfall $\dfrac{1}{x+2}$.

DÆMI 5.46

Stofnfall ræðs falls fundið

Finnið stofnfall $\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2}$.

Lausn

Umrita má heildið sem $\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1} dx$. Notum innsetningu og látum $u=x^4+3x^2$, þá er $du=4x^3+6x$. Tökum stuðulinn 2 út fyrir sviga í jöfnunni fyrir du. Þá fæst

$$\begin{aligned} du &= \left(4x^3+6x\right)dx \\ &= 2\left(2x^3+3x\right)dx \\ \tfrac{1}{2}\,du &= \left(2x^3+3x\right)dx. \end{aligned}$$

Umritum heildisstofninn sem fall af u:

$$\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1} dx = \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du.$$

Þá fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int u^{-1}du &= \tfrac{1}{2}\ln|u|+C \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left|x^4+3x^2\right|+C. \end{aligned}$$

DÆMI 5.47

Stofnfall lografalls fundið

Finnið stofnfall lografallsins $\log_2 x$.

Lausn

Notum formúluna úr reglunni um heildunarformúlur fyrir lografföll. Þá fæst

$$\int \log_2 x\,dx = \frac{x}{\ln 2}\left(\ln x-1\right)+C.$$

STÖÐUMAT 5.39

Finnið stofnfall $\log_3 x$.

Dæmi 5.48 fjallar um ákveðið heildi hornafalls. Þegar unnið er með hornaföll þurfum við oft að nota eiginleika hornafalla eða hornafallasamsemd áður en við getum haldið áfram. Yfirleitt gengur heildunin greiðlega ef við komum heildisstofninum á rétt form.

DÆMI 5.48

Ákveðið heildi reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx$.

Lausn

Við þurfum innsetningu til að reikna heildið. Látum $u=1+\cos x$, , þannig að $du=-\sin x\, dx$. Umritum heildið sem fall af u og breytum jafnframt heildismörkunum. Þá fæst

$$u = 1+\cos(0) = 2$$
$$u = 1+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x} &= -\int_2^1 u^{-1} du \\ &= \int_1^2 u^{-1} du \\ &= \ln|u||_1^2 \\ &= [\ln 2 - \ln 1] \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Æfingar í undirkafla 5.6

Reiknið hvert óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum.

320.

$$\int e^{2x}\, dx$$

321.

$$\int e^{-3x}\, dx$$

322.

$$\int 2^x\, dx$$

323.

$$\int 3^{-x}\, dx$$

324.

$$\int \frac{1}{2x}\, dx$$

325.

$$\int \frac{2}{x}\,dx$$

326.

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

327.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Finnið hvert óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningu.

328.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

329.

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

330.

$$\int \frac{dx}{x\ln x}\,(x>1)$$

331.

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

332.

$$\int \tan\theta\,d\theta$$

333.

$$\int \frac{\cos x - x\sin x}{x\cos x}\,dx$$

334.

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\tan x}\,dx$$

335.

$$\int \ln(\cos x)\tan x\,dx$$

336.

$$\int x e^{-x^2} dx$$

337.

$$\int x^2 e^{-x^3} dx$$

338.

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

339.

$$\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx$$

340.

$$\int e^{\ln x} \frac{dx}{x}$$

341.

$$\int \frac{e^{\ln(1-t)}}{1-t} dt$$

Sannreynið í eftirfarandi æfingum með deildun að $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$, og reiknið síðan heildið með viðeigandi breytuskiptum.

342.

$$\int x \ln x \, dx \ \left(Hint: \int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} \int x \ln\left(x^2\right) dx \right)$$

5

343.

$$\int x^2 \ln(x^2) dx$$

344.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \ (Hint: \text{Látum } u = \frac{1}{x}.)$$

345.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \ (Hint: \text{Látum } u = \sqrt{x}.)$$

346. Skrifið heildi sem lýsir flatarmálinu undir grafi $y = \frac{1}{t}$ frá $t = 1$ til e^x og reiknið heildið.

347. Skrifið heildi sem lýsir flatarmálinu undir grafi $y = e^t$ milli $t = 0$ og $t = \ln x$, og reiknið heildið.

Notið viðeigandi innsetningar í eftirfarandi æfingum til að setja hornafallsheildin fram sem samskeytingar með lograföllum.

348.

$$\int \tan(2x)\,dx$$

349.

$$\int \frac{\sin(3x)-\cos(3x)}{\sin(3x)+\cos(3x)}\,dx$$

350.

$$\int \frac{x\sin(x^2)}{\cos(x^2)}\,dx$$

351.

$$\int x\csc(x^2)\,dx$$

352.

$$\int \ln(\cos x)\tan x\,dx$$

353.

$$\int \ln(\csc x)\cot x\,dx$$

354.

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

Reiknið ákveðna heildið í eftirfarandi æfingum.

355.

$$\int_1^2 \frac{1+2x+x^2}{3x+3x^2+x^3}\,dx$$

356.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$$

357.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

358.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc x \, dx$$

359.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x \, dx$$

Heildið í eftirfarandi æfingum með tilgreindri innsetningu.

360.

$$\int \frac{x}{x-100} \, dx \, ; u = x - 100$$

361.

$$\int \frac{y-1}{y+1} \, dy \, ; u = y + 1$$

362.

$$\int \frac{1-x^2}{3x-x^3} \, dx \, ; u = 3x - x^3$$

363.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \, dx \, ; u = \sin x - \cos x$$

364.

$$\int e^{2x} \sqrt{1-e^{2x}} \, dx \, ; u = e^{2x}$$

365.

$$\int \ln(x) \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x} \, dx \, ; u = \ln x$$

Er nálgunin með hægri endapunktum í eftirfarandi æfingum ofmat eða vanmat á nákvæma flatarmálinu? Reiknið matið með hægri endapunktum, R_{50}, og finnið nákvæma flatarmálið.

366. **[T]** $y = e^x$ á $[0,1]$

367. **[T]** $y = e^{-x}$ á $[0,1]$

368. **[T]** $y = \ln(x)$ á $[1,2]$

369. **[T]** $y = \frac{x+1}{x^2+2x+6}$ á $[0,1]$

370. **[T]** $y=2^x$ á $[-1,0]$

371. **[T]** $y=-2^{-x}$ á $[0,1]$

Í eftirfarandi æfingum er $f(x)\geq 0$ fyrir $a\leq x\leq b$. Finnið með heildun flatarmálið undir grafi $f(x)$ milli gefinna gilda a og b.

372.

$$f(x)=\frac{\log_{10}(x)}{x};a=10,b=100$$

373.

$$f(x)=\frac{\log_2(x)}{x};a=32,b=64$$

374.

$$f(x)=2^{-x};a=1,b=2$$

375.

$$f(x)=2^{-x};a=3,b=4$$

376. Finnið flatarmálið undir grafi fallsins $f(x)=xe^{-x^2}$ milli $x=0$ og $x=5$.

377. Reiknið heildi $f(x)=xe^{-x^2}$ og finnið minnsta gildi N þannig að flatarmálið undir grafi $f(x)=xe^{-x^2}$ milli $x=N$ og $x=N+1$ sé í mesta lagi 0,01.

378. Látum N stefna á óendanlegt. Finnið markgildi flatarmálsins undir grafi $f(x)=xe^{-x^2}$ milli $x=0$ og $x=N$.

379. Sýnið að $\int_a^b \frac{dt}{t}=\int_{1/b}^{1/a} \frac{dt}{t}$ þegar $0<a\leq b$.

380. Gerum ráð fyrir að $f(x)>0$ fyrir öll x og að f og g séu deildanleg. Notið samsemdina $f^g=e^{g\ln f}$ og keðjuregluna til að finna afleiðu f^g.

381. Notið fyrri æfinguna til að finna stofnfall fallsins $h(x)=x^x(1+\ln x)$ og reiknið $\int_2^3 x^x(1+\ln x)\,dx$.

382. Sýnið að ef $c>0$, þá sé heildið af $1/x$ frá ac til bc $(0<a<b)$ jafnt heildinu af $1/x$ frá a til b.

Í eftirfarandi æfingum leiðum við út grunneiginleika náttúrlega lograns út frá skilgreiningunni $\ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$, með því að nota eiginleika ákveðna heildisins og án frekari forsendna.

383. Notið samsemdina $\ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ til að leiða út samsemdina $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$.

384. Notið breytuskipti í heildinu $\int_1^{xy} \frac{1}{t}dt$ til að sýna að $\ln xy=\ln x+\ln y$ fyrir $x, y>0$.

385. Notið samsemdina $\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$ til að sýna að $\ln(x)$ sé vaxandi fall af x á $[0,\infty)$, og notið fyrri æfingar til að sýna að myndmengi $\ln(x)$ sé $(-\infty,\infty)$. Ályktið, án frekari forsendna, að $\ln(x)$ hafi andhverft fall sem er skilgreint á $(-\infty,\infty)$.

386. Gerum um stund ráð fyrir að við vitum ekki að e^x sé andhverfa $\ln(x)$, en höfum í huga að $\ln(x)$ hefur andhverft fall sem er skilgreint á $(-\infty,\infty)$. Köllum fallið E. Notið samsemdina $\ln xy=\ln x+\ln y$ til að leiða út að $E(a+b)=E(a)E(b)$ fyrir allar rauntölur a og b.

387. Gerum um stund ráð fyrir að við vitum ekki að e^x sé andhverfa $\ln x$, en höfum í huga að $\ln x$ hefur andhverft fall sem er skilgreint á $(-\infty,\infty)$. Köllum fallið E. Sýnið að $E'(t)=E(t)$.

388. Sínusheildið er skilgreint með $S(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ og er mikilvæg stærð í verkfræði. Þótt engin einföld lokuð formúla sé til fyrir það er hægt að meta hegðun þess fyrir stór x. Sýnið að fyrir

$$k\geq 1, \left|S(2\pi k)-S(2\pi(k+1))\right|\leq \frac{1}{k(2k+1)\pi}.$$

$$(Hint: \sin(t+\pi)=-\sin t)$$

389. **[T]** Normaldreifingin í líkindafræði er gefin með $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, þar sem σ er staðalfrávikið og μ meðaltalið. Staðlaða normaldreifingin í líkindafræði, p_s, samsvarar $\mu=0$ og $\sigma=1$. Reiknið nálganir með hægri endapunktum R_{10} og R_{100} á $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

390. **[T]** Reiknið nálganir með hægri endapunktum R_{50} og R_{100} á $\int_{-3}^{5} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/8}$.

5.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum

NÁMSMARKMIÐ

- 5.7.1 Heilda föll sem skila andhverfum hornaföllum

Í þessum undirkafla skoðum við heildi sem skila andhverfum hornaföllum. Við höfum áður unnið með þessi föll. Rifjum upp úr kaflanum Föll og gröf að hornaföll eru ekki eintæk nema skilgreiningarmengi þeirra séu takmörkuð. Þegar við vinnum með andhverfur hornafalla þurfum við alltaf að taka tillit til þessara takmarkana. Í kaflanum Afleiður leiddum við einnig út formúlur fyrir afleiður andhverfra hornafalla. Út frá þeim formúlum fáum við beint heildunarreglur fyrir andhverf hornaföll.

Heildi sem skila andhverfu sínusfalli

Hefjum þennan síðasta undirkafla kaflans á formúlunum þremur. Við notum þessar formúlur ásamt innsetningu til að reikna heildin. Við sönnum formúluna fyrir heildi sem skilar andhverfu sínusfalli.

REGLA: HEILDI SEM SKILA ANDHVERFUM HORNAFÖLLUM

Eftirfarandi heildunarreglur skila andhverfum hornaföllum. Gerum ráð fyrir að $a>0$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

(5.23)

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C$$

(5.24)

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|u|}{a}+C$$

(5.25)

Sönnun

Látum $y=\sin^{-1}\frac{x}{a}$. Þá er $a\sin y = x$. Notum nú fólgna deildun. Þá fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left(a\sin y\right) &= \tfrac{d}{dx}\left(x\right) \\ a\cos y\,\tfrac{dy}{dx} &= 1 \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{a\cos y}. \end{aligned}$$

Fyrir $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $\cos y\ge 0$. Með því að nota Pýþagórasarsamsemdina $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, fæst $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$. Þetta gefur

$$\begin{aligned}\frac{1}{a\cos y} &= \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.\end{aligned}$$

Fyrir $-a \le x \le a$, og þegar við alhæfum niðurstöðuna yfir á u fæst því

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C.$$

□

DÆMI 5.49

Ákveðið heildi reiknað með andhverfum hornaföllum

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lausn

Við getum notað beint formúluna fyrir stofnfallið í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum og síðan reiknað ákveðna heildið. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \sin^{-1}x\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \sin^{-1}\tfrac{1}{2} - \sin^{-1}0 \\ &= \tfrac{\pi}{6} - 0 \\ &= \tfrac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.40

Reiknið heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

DÆMI 5.50

Stofnfall með andhverfu hornafalli

Reiknið heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Lausn

Notum innsetninguna $u = 3x$. Þá er $du = 3\,dx$ og því fæst

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}.$$

Notum formúluna með $a=2$, og fáum

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} &= \tfrac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\ &= \tfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\tfrac{u}{2}\right)+C \\ &= \tfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\tfrac{3x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.41

Notið andhverft hornafall og innsetningu til að finna óákveðna heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

DÆMI 5.51

Ákveðið heildi reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Lausn

Verkefnið er á sama formi og formúlan fyrir andhverft sínusfall. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \sin^{-1}u\Big|_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left[\sin^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]-\left[\sin^{-1}(0)\right] \\ &= \tfrac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Heildi sem skila öðrum andhverfum hornaföllum

Andhverfu hornaföllin eru sex. Í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum eru þó aðeins þrjár heildunarreglur taldar upp. Hinar þrjár eru eins og þær sem við notum, nema með öfugu formerki. Eini munurinn er sá hvort heildisstofninn er jákvæður eða neikvæður. Ef heildisstofninn er neikvæður þarf ekki að leggja þrjár formúlur til viðbótar á minnið. Þá má einfaldlega taka stuðulinn -1 út fyrir heildistáknið og reikna heildið með einni af formúlunum sem þegar eru gefnar. Í lok þessa undirkafla skoðum við eina formúlu til viðbótar: heildið sem skilar andhverfu tangensfalli.

DÆMI 5.52

Stofnfall með andhverfu tangensfalli

Reiknið heildið $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$.

Lausn

Ef við berum verkefnið saman við formúlurnar í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum sjáum við að heildisstofninn líkist formúlunni fyrir $\tan^{-1}u+C$. Við notum því innsetningu og látum $u=2x$, þá er $du=2\,dx$ og $1/2\,du=dx$. Þá fæst

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{1}{2}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+C.$$

STÖÐUMAT 5.42

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

DÆMI 5.53

Heildunarreglunum beitt

Reiknið heildið $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$.

Lausn

Notum formúluna með $a=3$. Þá fæst

$$\int \frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C.$$

STÖÐUMAT 5.43

Reiknið heildið $\int \frac{dx}{16+x^2}$.

DÆMI 5.54

Ákveðið heildi reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Lausn

Notum formúluna fyrir andhverft tangensfall. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= \tan^{-1}x\Big|_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \\ &= \left[\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right] - \left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.44

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

Æfingar í undirkafla 5.7

Reiknið hvert heildi í eftirfarandi æfingum og skrifið svarið með andhverfu hornafalli.

391.

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

392.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

393.

$$\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$$

394.

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

395.

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

396.

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Finnið hvert óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningu.

397.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

398.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$$

399.

$$\int \frac{dx}{9+x^2}$$

400.

$$\int \frac{dx}{25+16x^2}$$

401.

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-9}}$$

402.

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{4x^2-16}}$$

403. Útskýrið sambandið $-\cos^{-1}t+C=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}t+C$. Gildir almennt að $\cos^{-1}t=-\sin^{-1}t$?

404. Útskýrið sambandið $\sec^{-1}t+C=\int \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}=-\csc^{-1}t+C$. Gildir almennt að $\sec^{-1}t=-\csc^{-1}t$?

405. Útskýrið hvað er rangt við eftirfarandi heildi: $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

406. Útskýrið hvað er rangt við eftirfarandi heildi: $\int_{-1}^1 \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}$.

Finnið í eftirfarandi æfingum stofnfallið $\int f$ fyrir fallið f þegar $C=0$, og notið síðan reiknivél til að teikna gröf f og stofnfallsins á gefna bilinu $[a,b]$. Finnið gildi C þannig að þegar C er lagt við stofnfallið fáist fallið $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

407. **[T]** $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ á bilinu $[-3,3]$

408. **[T]** $\int \frac{9}{9+x^2}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

409. **[T]** $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

410. **[T]** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

Reiknið stofnfallið í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningu.

411.

$$\int \frac{\sin^{-1} t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

412.

$$\int \frac{dt}{\sin^{-1} t\sqrt{1-t^2}}$$

413.

$$\int \frac{\tan^{-1}(2t)}{1+4t^2}\,dt$$

414.

$$\int \frac{t\tan^{-1}(t^2)}{1+t^4}\,dt$$

415.

$$\int \frac{\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)}{|t|\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

416.

$$\int \frac{t\sec^{-1}(t^2)}{t^2\sqrt{t^4-1}}\,dt$$

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna graf stofnfallsins $\int f$ þegar $C=0$ á gefna bilinu $[a,b]$. Nálgið, ef hægt er, gildi C þannig að þegar C er lagt við stofnfallið fáist sama fall og $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

417. **[T]** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$ á bilinu $[2,6]$

418. **[T]** $\int \frac{1}{(2x+2)\sqrt{x}}\,dx$ á bilinu $[0,6]$

419. **[T]** $\int \frac{(\sin x + x\cos x)}{1+x^2\sin^2 x}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

420. **[T]** $\int \frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}}\,dx$ á bilinu $[0,2]$

421. **[T]** $\int \frac{1}{x+x\ln^2 x}\,dx$ á bilinu $[0,2]$

422. **[T]** $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ á bilinu $[-1,1]$

Reiknið hvert heildi í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningum.

423.

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$$

424.

$$\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$$

425.

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$$

426.

$$\int \frac{dt}{t(1+\ln^2 t)}$$

427.

$$\int \frac{\cos^{-1}(2t)}{\sqrt{1-4t^2}}\,dt$$

428.

$$\int \frac{e^t\cos^{-1}(e^t)}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$$

Reiknið hvert ákveðið heildi í eftirfarandi æfingum.

429.

$$\int_0^{1/2} \frac{\tan\left(\sin^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

430.

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{\tan\left(\cos^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

431.

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}\,dt$$

432.

$$\int_0^{1/2} \frac{\cos\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}\,dt$$

433. Ef $A>0$, skuluð þið reikna $I(A)=\int_{-A}^{A} \frac{dt}{1+t^2}$ og ákvarða markgildið $\lim_{A\to\infty} I(A)$, sem gefur flatarmálið undir grafi fallsins $\frac{1}{1+t^2}$ á $[-\infty,\infty]$.

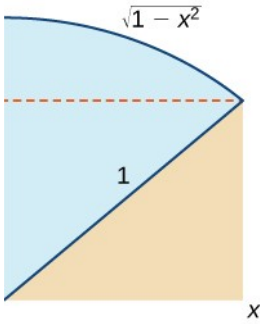
434. Ef $1<B<\infty$, skuluð þið reikna $I(B)=\int_1^B \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ og ákvarða markgildið $\lim_{B\to\infty} I(B)$, sem gefur flatarmálið undir grafi fallsins $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ á $[1,\infty)$.

435. Notið innsetninguna $u=\sqrt{2}\cot x$ og samsemdina $1+\cot^2 x=\csc^2 x$ til að reikna $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. (Vísbending: Margfaldið teljara og nefnara heildisstofnsins með $\csc^2 x$.)

436. **[T]** Nálgið skurðpunkta grafa fallanna $f(x)=2x^2-1$ og $g(x)=\left(1+4x^2\right)^{-3/2}$ með fjórum aukastöfum og flatarmálið milli grafanna með þremur aukastöfum.

437. **[T]** Nálgið skurðpunkta grafa fallanna $f(x)=x^2-1$ og $g(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ með fjórum aukastöfum og flatarmálið milli grafanna með þremur aukastöfum.

438. Notið eftirfarandi graf til að sanna að $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1} x$.



Lykilhugtök

meðalgildi falls
(einnig f_{ave}) meðalgildi falls á bili fæst með því að reikna ákveðið heildi fallsins og deila niðurstöðunni með lengd bilsins

breytuskipti
innsetning breytu, til dæmis u, í stað stæðu í heildisstofninum

ákveðið heildi
ein af meginaðgerðum stærðfræðigreiningarinnar; ákveðið heildi er flatarmálið milli ferils og x-ássins á tilteknu bili

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
setningin sem er undirstaða allrar þróunar stærðfræðigreiningarinnar og tengir saman deildun og heildun

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, fyrri hluti
notar ákveðið heildi til að skilgreina stofnfall falls

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, síðari hluti
(einnig reiknisetningin) ákveðið heildi má reikna með því að finna gildi stofnfalls heildisstofnsins í endapunktum bilsins og draga gildið í neðri endapunktinum frá gildinu í þeim efri

heildanlegt fall
fall er heildanlegt ef markgildið sem skilgreinir heildið er til; með öðrum orðum, ef markgildi Riemann-summanna er til þegar n stefnir á óendanlegt

heildisstofn
fallið eða stæðan sem heildað er og stendur hægra megin við heildistáknið

heildun með innsetningu
heildunaraðferð sem nota má á föll sem fást með því að beita keðjureglunni við deildun

nálgun með vinstri endapunktum
nálgun á flatarmáli undir ferli þar sem vinstri endapunktur hvers hlutbils ákvarðar hæð viðkomandi rétthyrnings

heildismörk
gildin sem standa efst og neðst við heildistáknið og afmarka bilið sem fallið er heildað yfir

neðri summa
summa sem fæst með því að nota lággildi $f(x)$ á hverju hlutbili

meðalgildissetningin fyrir heildi
tryggir að til sé punktur c þar sem $f(c)$ er jafnt meðalgildi fallsins

setningin um heildarbreytingu
ef breytingarhraði stærðar er þekktur, segir setningin um heildarbreytingu að lokagildi stærðarinnar sé jafnt upphafsgildi hennar að viðbættu heildi breytingarhraðans

formerkt flatarmál
flatarmál milli grafs falls og x-ássins, reiknað þannig að flatarmál neðan x-ássins er dregið frá flatarmáli ofan x-ássins; niðurstaðan er jöfn ákveðnu heildi fallsins

skipting
mengi punkta sem skiptir bili í hlutbil

regluleg skipting
skipting þar sem öll hlutbil hafa sömu breidd

Riemann-summa
nálgun á flatarmáli undir ferli á forminu $A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$

nálgun með hægri endapunktum
nálgun á flatarmáli rétthyrninganna undir ferli þar sem hægri endapunktur hvers hlutbils ákvarðar hæð viðkomandi rétthyrnings

summutákn
gríski bókstafurinn sigma (Σ) táknar að gildin skuli lögð saman; gildi vísisins neðan og ofan við sigma sýna hvar summan hefst og hvar henni lýkur

heildarflatarmál
heildarflatarmál milli grafs falls og x-ássins fæst með því að leggja saman flatarmálið ofan x-ássins og flatarmálið neðan x-ássins; niðurstaðan er jöfn ákveðnu heildi algildis fallsins

efri summa
summa sem fæst með því að nota hágildi $f(x)$ á hverju hlutbili

heildunarbreyta
sýnir með tilliti til hvaða breytu er heildað; ef breytan er x kemur dx á eftir fallinu í heildisstofninum

Helstu jöfnur

Eiginleikar summutáknsins

$$\sum_{i=1}^{n} c = n\,c$$

$$\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

Summur og veldi heiltalna

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Nálgun með vinstri endapunktum

$$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Nálgun með hægri endapunktum

$$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

5

Ákveðið heildi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Eiginleikar ákveðins heildis

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x) \text{ fyrir fastann c}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Meðalgildissetningin fyrir heildi	Ef $f(x)$ er samfellt á bilinu $[a,b]$, þá er til að minnsta kosti einn punktur $c \in [a,b]$ þannig að $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.
Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, fyrri hluti	Ef $f(x)$ er samfellt á bilinu $[a,b]$, og fallið $F(x)$ er skilgreint með $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, þá er $F'(x)=f(x)$.
Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, síðari hluti	Ef f er samfellt á bilinu $[a,b]$ og $F(x)$ er eitthvert stofnfall $f(x)$, þá er $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.
Setningin um heildarbreytingu	$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)\,dx$ eða $\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)$
Innsetning í óákveðnum heildum	$\int f[g(x)]g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F(g(x))+C$
Innsetning í ákveðnum heildum	$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$
Heildi vísisfalla	$\int e^x\,dx=e^x+C$ $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
Heildunarformúlur fyrir lograföll	$\int x^{-1}\,dx=\ln\lvert x\rvert+C$ $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$ $\int \log_a x\,dx=\frac{x}{\ln a}(\ln x-1)+C$
Heildi sem skila andhverfum hornaföllum	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$ $\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$

Meginatriði

5.1 Nálgun svæða

- Með summutákni á forminu $\sum_{i=1}^{n} a_i$ má rita langar summur gilda á knöppu formi.
- Fyrir samfellt fall á bilinu $[a, b]$, má nálga flatarmál svæðisins með því að skipta bilinu í n jafnlöng hlutbil, reisa rétthyrning á hverju hlutbili upp að grafi fallsins, reikna flatarmál rétthyrninganna og leggja þau saman.
- Breidd hvers rétthyrnings er $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- Riemann-summur eru stæður á forminu $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$, og má nota þær til að nálga flatarmálið undir ferlinum $y = f(x)$. Nálganir með vinstri og hægri endapunktum eru sérstakar gerðir Riemann-summa þar sem punktarnir $\left\{x_i^*\right\}$ eru valdir sem vinstri eða hægri endapunktar hlutbilanna, eftir því sem við á.
- Í Riemann-summum er mikið svigrúm til að velja punktamengið $\left\{x_i^*\right\}$ þar sem fallgildin eru reiknuð, oft til þess að fá neðri eða efri summu.

5

5.2 Ákveðið heildi

- Ákveðið heildi má nota til að reikna formerkt flatarmál: flatarmálið ofan x-ássins að frádregnu flatarmálinu neðan x-ássins. Formerkt flatarmál getur verið jákvætt, neikvætt eða núll.
- Hlutar ákveðins heildis eru heildisstofninn, heildunarbreytan og heildismörkin.
- Samfelld föll á lokuðu bili eru heildanleg. Ósamfelld föll geta þó verið heildanleg, allt eftir eðli ósamfelldninnar.
- Nota má eiginleika ákveðinna heilda til að reikna heildi.
- Flatarmálið undir gröfum margra falla má reikna með rúmfræðilegum formúlum.
- Meðalgildi falls má reikna með ákveðnum heildum.

5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

- Meðalgildissetningin fyrir heildi segir að fyrir samfellt fall á lokuðu bili sé til punktur c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi fallsins. Sjá meðalgildissetninguna fyrir heildi.

- Fyrri hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar sýnir tengsl afleiðu og heildis. Sjá fyrri hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.
- Síðari hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar gefur formúlu til að reikna ákveðið heildi út frá stofnfalli heildisstofnsins. Með formúlunni má finna heildarflatarmálið undir ferli. Sjá síðari hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

- Setningin um heildarbreytingu segir að þegar stærð breytist sé lokagildi hennar jafnt upphafsgildinu að viðbættu heildi breytingarhraðans. Heildarbreytingin getur verið jákvæð tala, neikvæð tala eða núll.
- Flatarmálið undir grafi jafnstæðs falls á samhverfu bili má reikna með því að tvöfalda flatarmálið á jákvæða hluta x-ássins. Fyrir oddstætt fall er heildið á samhverfu bili núll, því að helmingur flatarmálsins er neikvæður.

5.5 Innsetning

- Innsetning er aðferð sem einfaldar heildun falla sem fást þegar keðjureglunni er beitt við deildun. Hugtakið „innsetning“ vísar til breytuskipta eða þess að setja u og du í stað viðeigandi stæða í heildisstofninum.
- Þegar innsetning er notuð við ákveðið heildi þarf einnig að breyta heildismörkunum.

5.6 Heildi með vísis- og lograföllum

- Vísis- og lograföll koma víða við sögu í hagnýtum verkefnum, einkum þegar fjallað er um vöxt og hnignun.
- Innsetning er oft notuð til að reikna heildi sem innihalda vísisföll eða logra.

5.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum

- Í kaflanum Afleiður vísisfalla og lografalla voru leiddar út formúlur fyrir afleiður andhverfra hornafalla. Af þeim fást beint heildunarreglur fyrir andhverf hornaföll.
- Notið formúlurnar í reglunni um heildi sem gefa andhverf hornaföll til að finna rétta formið. Gerið síðan þær breytingar sem þarf til að leysa dæmið.

- Oft þarf að nota innsetningu til að koma heildisstofninum á rétt form.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt. Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi. Gerið ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á skilgreiningarmengjum sínum.

439. Ef $f(x)>0, f'(x)>0$ fyrir öll x, þá vanmetur nálgun með hægri endapunktum heildið $\int_a^b f(x)$. Notið graf til að rökstyðja svarið.

440.

$$\int_a^b f(x)^2\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx$$

441. Ef $f(x)\le g(x)$ fyrir öll $x\in[a,b]$, þá $\int_a^b f(x)\le\int_a^b g(x)$.

442. Öll samfelld föll eiga sér stofnfall.

Reiknið Riemann-summurnar L_4 og R_4 fyrir föllin hér á eftir á gefnu bili. Berið svarið saman við nákvæma gildið ef hægt er, en notið annars reiknivél til að finna það.

443. $y=3x^2-2x+1$ á bilinu $[-1,1]$

444. $y=\ln\left(x^2+1\right)$ á bilinu $[0,e]$

445. $y=x^2\sin x$ á bilinu $[0,\pi]$

446. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ á bilinu $[1,4]$

Reiknið eftirfarandi heildi.

447.

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2+4x\right)dx$$

448.

$$\int_0^4 \frac{3t}{\sqrt{1+6t^2}}\,dt$$

449.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\sec(2\theta)\tan(2\theta)\,d\theta$$

450.

$$\int_0^{\pi/4} e^{\cos^2 x} \sin x \cos x \, dx$$

Finnið stofnfallið.

451.

$$\int \frac{dx}{(x+4)^3}$$

452.

$$\int x \ln\left(x^2\right) dx$$

453.

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$$

454.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx$$

Finnið afleiðuna.

455.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

456.

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \sqrt{4-t^2} \, dt$$

457.

$$\frac{d}{dx} \int_1^{\ln(x)} \left(4t+e^t\right) dt$$

458.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} e^{t^2} \, dt$$

Næstu verkefni fjalla um meðalverð á gígabæti af vinnsluminni (RAM) í tölvum í gegnum tíðina.

Ár	Breyting á 5 árum (€)
1980	0
1985	−5.468.750
1990	−755.495
1995	−73.005
2000	−29.768
2005	−918
2010	−177

459. Ef meðalverð á gígabæti af vinnsluminni árið 2010 er 12 €, finnið þá meðalverðið árið 1980.

460. Nálga má meðalverð á gígabæti af vinnsluminni með fallinu $C\left(t\right)=8.500.000\left(0{,}65\right)^{t}$, þar sem t er mælt í árum frá 1980 og C táknar verð í Bandaríkjadölum. Finnið meðalverð á gígabæti af vinnsluminni á tímabilinu 1980–2010.

461. Finnið meðalverð á eitt gígabæti af vinnsluminni (RAM) á tímabilinu 2005–2010.

462. Hraða riffilkúlu má nálga með $v\left(t\right)=1920\ t^{2}-1980\ t+820$, þar sem t er tíminn í sekúndum frá skotinu og v er hraðinn í metrum á sekúndu. Jafnan lýsir aðeins hraðanum fyrstu hálfu sekúnduna eftir skotið: $0\le t\le 0{,}5$. Hversu langt fer kúlan samtals á 0,5 sekúndum?

463. Hver er meðalhraði kúlunnar fyrstu hálfu sekúnduna?

6. KAFLI

Notkun heildunar



Mynd 6.1 Hoover-stíflan er eitt þekktasta kennileiti Bandaríkjanna og sér milljónum manna í suðvesturhluta landsins fyrir áveituvatni og raforku úr vatnsafli. (mynd: breytt verk eftir Lynn Betts, Wikimedia)

Efnisyfirlit kaflans

- 6.1 Flatarmál milli ferla
- 6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
- 6.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki
- 6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

- 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
- 6.6 Vægi og massamiðjur
- 6.7 Heildi, vísisföll og lograr
- 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
- 6.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla

Inngangur

Hoover-stíflan er einstakt verkfræðiafrek. Þegar Mead-vatn, uppistöðulónið ofan við stífluna, er fullt verkar mikill kraftur á stífluna. Vatnsborð lónsins er þó mjög breytilegt vegna þurrka og breytilegrar vatnsnotkunar. Síðar í kaflanum notum við ákveðin heildi til að reikna kraftinn sem verkar á stífluna þegar lónið er fullt og könnum hvernig breytilegt vatnsborð hefur áhrif á kraftinn (sjá dæmi 6.28).

Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings er aðeins eitt af mörgum viðfangsefnum í þessum kafla þar sem við notum ákveðin heildi. Ákveðin heildi eru öflugt tæki til að skilja heiminn í kringum okkur og lýsa honum með stærðfræðilegum líkönum. Þau nýtast meðal annars í rúmfræði til að reikna yfirborðsflatarmál og rúmmál, í eðlisfræði til að reikna massa og vinnu og í líkönum af vexti og hnignun.

6.1 Flatarmál milli ferla

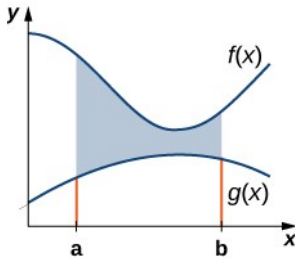
NÁMSMARKMIÐ

- 6.1.1 Reiknið flatarmál svæðis milli tveggja ferla með því að heilda með tilliti til óháðu breytunnar.
- 6.1.2 Finnið flatarmál samsetts svæðis.
- 6.1.3 Reiknið flatarmál svæðis milli tveggja ferla með því að heilda með tilliti til háðu breytunnar.

Í Inngangi að heildun kynntumst við ákveðnu heildi sem aðferð til að reikna flatarmál undir ferli á gefnu bili. Hér útvíkkum við hugmyndina og reiknum flatarmál flóknari svæða. Við byrjum á því að finna flatarmálið milli tveggja ferla sem eru gröf falla af x, og tökum fyrst einfalda tilvikið þar sem gildi annars fallsins er alltaf stærra en gildi hins. Síðan skoðum við tilvik þar sem gröf fallanna skerast. Að lokum athugum við hvernig reikna má flatarmálið milli tveggja ferla sem eru gröf falla af y.

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld föll á bili $[a, b]$ þannig að $f(x) \geq g(x)$ á $[a, b]$. Við viljum finna flatarmálið milli grafa fallanna, eins og næsta mynd sýnir.

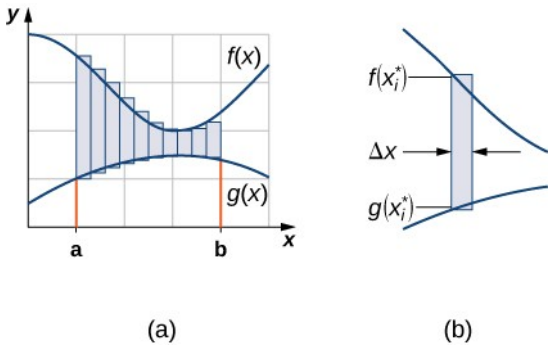


Mynd 6.2 Flatarmálið milli grafa tveggja falla, $f(x)$ og $g(x)$, á bilinu $[a,b]$.

Eins og áður skiptum við bilinu á x-ásnum og nálgum flatarmálið milli grafa fallanna með rétthyrningum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við því $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við síðan punkt $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$, og reisum á hverju bili $[x_{i-1},x_i]$ rétthyrning sem nær lóðrétt frá $g(x_i^*)$ til $f(x_i^*)$. Mynd 6.3(a) sýnir rétthyrningana þegar x_i^* er valinn sem vinstri endapunktur bilsins og $n=10$. Mynd 6.3(b) sýnir dæmigerðan rétthyrning nánar.

MIÐLAR

Notið þessa reiknivél til að kanna nánar flatarmál milli tveggja ferla.



Mynd 6.3 (a) Við getum nálgað flatarmálið milli grafa tveggja falla, $f(x)$ og $g(x)$, með rétthyrningum. (b) Dæmigerður rétthyrningur nær frá öðrum ferlinum til hins.

Hæð hvers rétthyrnings er $f(x_i^*)-g(x_i^*)$ og breidd hans er Δx. Þegar við leggjum saman flatarmál allra rétthyrninganna fáum við þessa nálgun fyrir flatarmálið milli ferlanna:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Við tökum því markgildið þegar $n \to \infty$ og fáum

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx.$$

Næsta setning dregur þessar niðurstöður saman.

SETNING 6.1

Flatarmál milli tveggja ferla

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld föll þannig að $f(x) \geq g(x)$ á bili $[a, b]$. Látum R tákna svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af grafi $g(x)$, og til vinstri og hægri af línunum $x = a$ og $x = b$, í þeirri röð. Þá er flatarmál R reiknað með

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

(6.1)

Við notum setninguna í næsta dæmi.

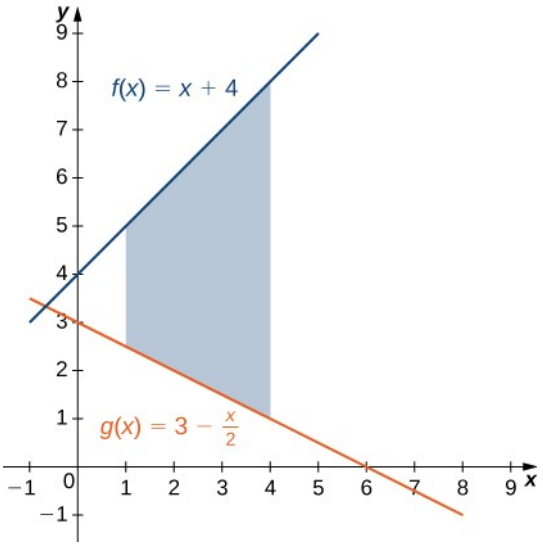
DÆMI 6.1

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla 1

Ef R er svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x) = x + 4$ og að neðan af grafi fallsins $g(x) = 3 - \frac{x}{2}$ á bilinu $[1, 4]$, finnið flatarmál svæðisins R.

Lausn

Svæðið sést á næstu mynd.



Mynd 6.4 Sýnt er svæði milli tveggja ferla þar sem annar ferillinn liggur alls staðar ofan við hinn.

Við höfum

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_1^4 \left[(x+4) - \left(3 - \frac{x}{2}\right)\right]dx = \int_1^4 \left[\frac{3x}{2} + 1\right]dx \\ &= \left[\tfrac{3x^2}{4} + x\right]\Big|_1^4 = \left(16 - \tfrac{7}{4}\right) = \tfrac{57}{4}. \end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $\frac{57}{4}$ einingar^2.

STÖÐUMAT 6.1

Ef R er svæðið sem afmarkast af gröfum fallanna $f(x)=\frac{x}{2}+5$ og $g(x)=x+\frac{1}{2}$ á bilinu $[1,5]$, finnið flatarmál svæðisins R.

Í dæmi 6.1 var bilið sem við skoðuðum gefið í dæminu sjálfu. Oft viljum við þó ákvarða bilið út frá því hvar gröf fallanna tveggja skerast. Næsta dæmi sýnir þetta.

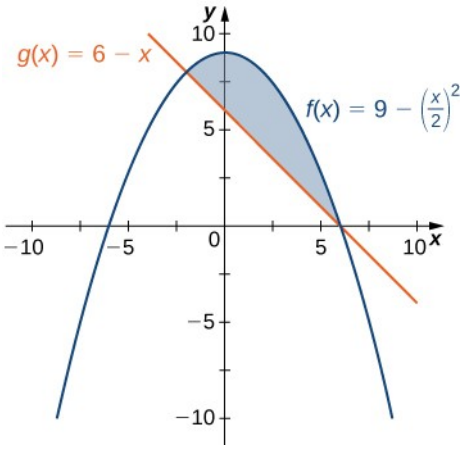
DÆMI 6.2

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla 2

Ef R er svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=9-(x/2)^2$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=6-x$, finnið flatarmál svæðisins R.

Lausn

Svæðið sést á næstu mynd.



Mynd 6.5 Grafið sýnir svæðið neðan við graf $f(x)$ og ofan við graf $g(x)$.

Fyrst finnum við skurðpunkta grafa fallanna. Með því að setja $f(x)=g(x)$, fáum við

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 9-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 &= 6-x \\ 9-\tfrac{x^2}{4} &= 6-x \\ 36-x^2 &= 24-4x \\ x^2-4x-12 &= 0 \\ (x-6)\,(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Gröf fallanna skerast þegar $x=6$ eða $x=-2$, og því heildum við frá -2 til 6. Nú gildir $f(x)\geq g(x)$ fyrir $-2\leq x\leq 6$, svo að við fáum

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \\ &= \int_{-2}^{6}\left[9-\left(\frac{x}{2}\right)^2-(6-x)\right]dx = \int_{-2}^{6}\left[3-\frac{x^2}{4}+x\right]dx \\ &= \left[3x-\tfrac{x^3}{12}+\tfrac{x^2}{2}\right]\Big|_{-2}^{6} = \tfrac{64}{3}. \end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $64/3$ einingar^2.

STÖÐUMAT 6.2

Ef R er svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=x$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=x^4$, finnið flatarmál svæðisins R.

Flatarmál samsettra svæða

Hingað til höfum við krafist þess að $f(x)\geq g(x)$ á öllu bilinu sem við skoðum. En hvað ef við viljum skoða svæði sem afmarkast af gröfum falla sem skerast? Þá breytum við aðferðinni sem við vorum að leiða út og notum tölugildisfallið.

SETNING 6.2

Flatarmál svæðis milli ferla sem skerast

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld föll á bili $[a,b]$. Látum R tákna svæðið milli grafa $f(x)$ og $g(x)$, sem afmarkast til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í þeirri röð. Þá er flatarmál R reiknað með

$$A=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

Til að nota setninguna þurfum við í reynd að skipta bilinu $[a,b]$ upp og reikna nokkur heildi, eftir því hvort fallgildanna er stærra á hverjum hluta bilsins. Næsta dæmi sýnir hvernig þetta er gert.

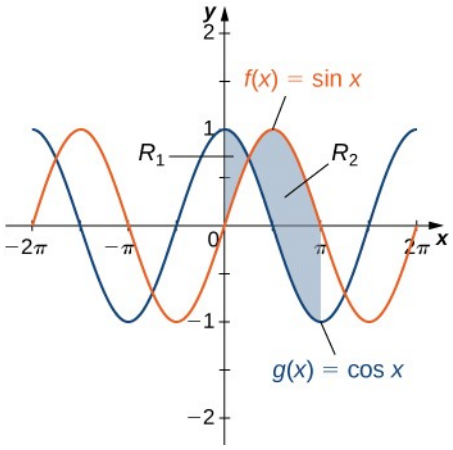
DÆMI 6.3

Flatarmál svæðis sem afmarkast af föllum sem skerast

Ef R er svæðið milli grafa fallanna $f(x)=\sin x$ og $g(x)=\cos x$ á bilinu $[0,\pi]$, finnið flatarmál svæðisins R.

Lausn

Svæðið sést á næstu mynd.



Mynd 6.6 Svæðinu milli tveggja ferla má skipta í tvö undirsvæði.

Gröf fallanna skerast við $x=\pi/4$. Fyrir $x\in[0,\pi/4]$, $\cos x\geq\sin x$, svo að

$$|f(x)-g(x)|=|\sin x-\cos x|=\cos x-\sin x.$$

Á hinn bóginn gildir á bilinu $x\in[\pi/4,\pi]$, $\sin x\geq\cos x$, svo að

$$|f(x)-g(x)|=|\sin x-\cos x|=\sin x-\cos x.$$

Þá fæst

$$\begin{aligned}A &= \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \\ &= \int_0^{\pi} |\sin x-\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x-\sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x-\cos x)\,dx \\ &= [\sin x+\cos x]\,|_0^{\pi/4} + [-\cos x-\sin x]\,|_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\sqrt{2}-1\right)+\left(1+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $2\sqrt{2}$ einingar².

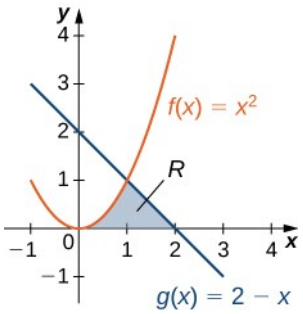
STÖÐUMAT 6.3

Ef R er svæðið milli grafa fallanna $f(x)=\sin x$ og $g(x)=\cos x$ á bilinu $[\pi/2, 2\pi]$, finnið flatarmál svæðisins R.

DÆMI 6.4

Flatarmál flókins svæðis

Skoðið svæðið á mynd 6.7. Finnið flatarmál R.



Mynd 6.7 Reikna þarf tvö heildi til að finna flatarmál svæðisins.

Lausn

Eins og í dæmi 6.3 þurfum við að skipta bilinu í tvo hluta. Gröf fallanna skerast við $x=1$ (setjið $f(x)=g(x)$ og leysið með tilliti til x). Við reiknum því tvö aðskilin heildi, annað á bilinu $[0,1]$ og hitt á bilinu $[1,2]$.

Á bilinu $[0,1]$, afmarkast svæðið að ofan af $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ásnum, svo að við fáum

$$A_1=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Á bilinu $[1,2]$, afmarkast svæðið að ofan af $g(x)=2-x$ og að neðan af x-ásnum, svo að við fáum

$$A_2=\int_1^2 (2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2=\frac{1}{2}.$$

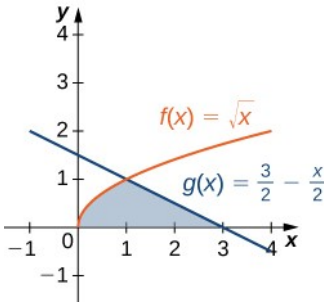
Þegar við leggjum þessi flatarmál saman fáum við

$$A=A_1+A_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

Flatarmál svæðisins er $5/6$ einingar^2.

STÖÐUMAT 6.4

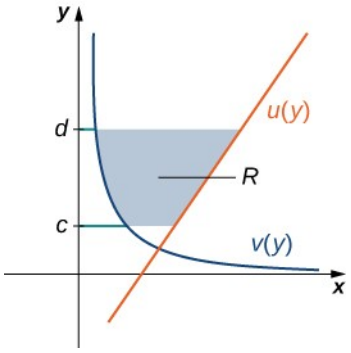
Skoðið svæðið á næstu mynd. Finnið flatarmál R.



Svæði skilgreind með tilliti til y

Í dæmi 6.4 þurftum við að reikna tvö aðskilin heildi til að finna flatarmál svæðisins. En til er önnur aðferð sem þarf aðeins eitt heildi. Hvað ef við lítum á ferlana sem föll af y, en ekki sem föll af x? Skoðið mynd 6.7. Takið eftir að vinstra grafið, sem sýnt er með rauðu, er gefið með fallinu $y=f(x)=x^2$. Við gætum allt eins leyst þessa jöfnu með tilliti til x og gefið ferilinn með fallinu $x=v(y)=\sqrt{y}$. (Athugið að $x=-\sqrt{y}$ er einnig gild framsetning á fallinu $y=f(x)=x^2$ sem falli af y. Af grafinu er þó ljóst að hér kemur jákvæða kvaðratrótin við sögu.) Á sama hátt er hægra grafið gefið með fallinu $y=g(x)=2-x$, en því mætti allt eins lýsa með fallinu $x=u(y)=2-y$. Þegar gröfin eru gefin sem föll af y, sjáum við að svæðið afmarkast til vinstri af grafi annars fallsins og til hægri af grafi hins fallsins. Ef við heildum með tilliti til y, þurfum við því aðeins að reikna eitt heildi. Leiðum nú út formúlu fyrir heildun af þessu tagi.

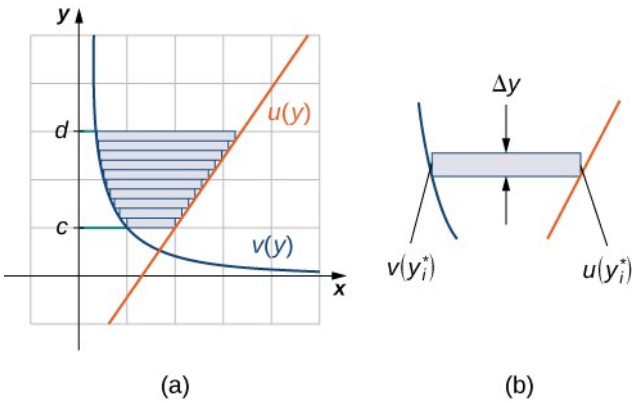
Látum $u(y)$ og $v(y)$ vera samfelld föll á bili $[c,d]$ þannig að $u(y)\geq v(y)$ fyrir öll $y\in[c,d]$. Við viljum finna flatarmálið milli grafa fallanna, eins og næsta mynd sýnir.



Mynd 6.8 Við getum fundið flatarmálið milli grafa tveggja falla, $u(y)$ og $v(y)$.

Að þessu sinni skiptum við bilinu á y-ásnum og nálgum flatarmálið milli fallanna með láréttum rétthyrningum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við því $Q=\{y_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[c,d]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við síðan punkt $y_i^*\in[y_{i-1},y_i]$, og reisum á hverju bili $[y_{i-1},y_i]$ rétthyrning sem nær lárétt frá $v(y_i^*)$ til $u(y_i^*)$. Mynd 6.9(a) sýnir rétthyrningana

þegar y_i^* er valinn sem neðri endapunktur bilsins og $n=10$. Mynd 6.9(b) sýnir dæmigerðan rétthyrning nánar.



Mynd 6.9 (a) Flatarmálið milli grafa tveggja falla, $u(y)$ og $v(y)$, nálgað með rétthyrningum. (b) Flatarmál dæmigerðs rétthyrnings.

Hæð hvers rétthyrnings er Δy og breidd hans er $u(y_i^*)-v(y_i^*)$. Því fáum við þessa nálgun fyrir flatarmálið milli ferlanna:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[u(y_i^*)-v(y_i^*)\right]\Delta y.$$

Þetta er Riemann-summa. Við tökum því markgildið þegar $n \to \infty$, og fáum

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[u(y_i^*)-v(y_i^*)\right]\Delta y=\int_c^d \left[u(y)-v(y)\right]dy.$$

Næsta setning dregur þessar niðurstöður saman.

SETNING 6.3

Flatarmál milli tveggja ferla: heildað með tilliti til y

Látum $u(y)$ og $v(y)$ vera samfelld föll þannig að $u(y)\geq v(y)$ fyrir öll $y\in[c,d]$. Látum R tákna svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $u(y)$, til vinstri af grafi $v(y)$, og að ofan og neðan af línunum $y=d$ og $y=c$, í þeirri röð. Þá er flatarmál R reiknað með

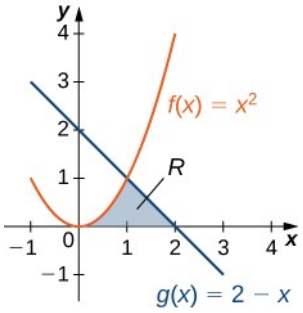
$$A=\int_c^d \left[u(y)-v(y)\right]dy.$$

(6.2)

DÆMI 6.5

Heildun með tilliti til y

Skoðum aftur dæmi 6.4, en heildum nú með tilliti til y. Látum R vera svæðið sem sýnt er á mynd 6.10. Finnið flatarmál R með því að heilda með tilliti til y.



Mynd 6.10 Reikna má flatarmál svæðisins R með aðeins einu heildi þegar ferlarnir eru settir fram sem föll af y.

Lausn

Fyrst þurfum við að setja gröfin fram sem föll af y. Eins og við sáum í upphafi þessa undirkafla má lýsa ferlinum til vinstri með fallinu $x = v(y) = \sqrt{y}$, og ferlinum til hægri með fallinu $x = u(y) = 2 - y$.

Nú þurfum við að ákvarða heildismörkin. Svæðið afmarkast að neðan af x-ásnum og neðra heildismarkið er því $y = 0$. Efra heildismarkið ræðst af skurðpunkti grafanna tveggja, sem er punkturinn $(1, 1)$, og er því $y = 1$. Þar með fæst $[c, d] = [0, 1]$.

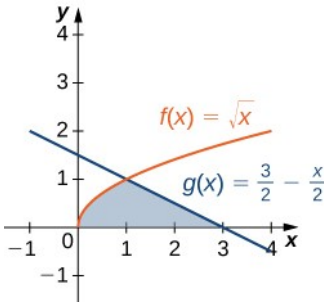
Við reiknum flatarmál svæðisins og fáum

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [u(y) - v(y)]\,dy \\ &= \int_0^1 \left[(2 - y) - \sqrt{y}\right] dy = \left[2y - \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{2}{3}y^{3/2}\right]\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{5}{6}. \end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $5/6$ einingar^2.

STÖÐUMAT 6.5

Skoðum aftur stöðumatsverkefnið sem fylgir dæmi 6.4, en heildum nú með tilliti til y. Látum R vera svæðið sem sýnt er á eftirfarandi mynd. Finnið flatarmál R með því að heilda með tilliti til y.

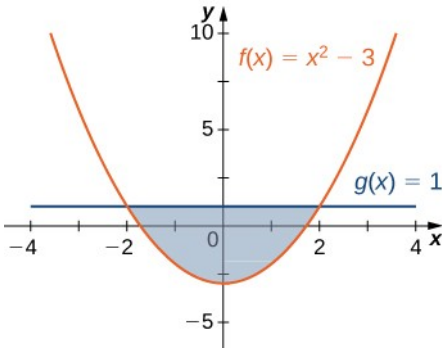


Æfingar í kafla 6.1

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna flatarmál svæðisins milli ferlanna tveggja á myndinni með því að heilda eftir x-ásnum.

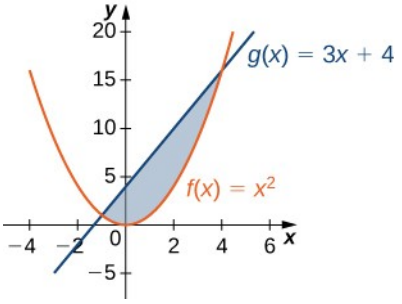
1.

$$y = x^2 - 3 \text{ og } y = 1$$



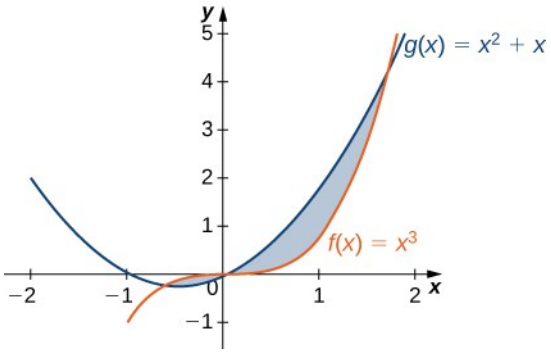
2.

$$y = x^2 \text{ og } y = 3x + 4$$

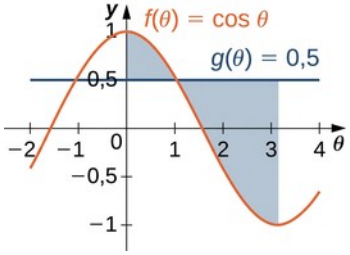


Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skipta svæðinu milli ferlanna tveggja í tvö minni svæði og reikna síðan flatarmálið með því að heilda eftir x-ásnum. Athugið að reikna þarf tvö heildi.

3. $y = x^3$ og $y = x^2 + x$



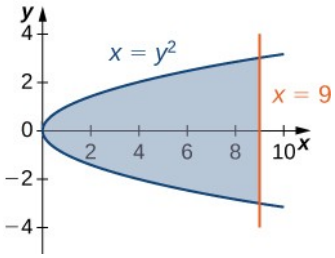
4. $y=\cos\theta$ og $y=0{,}5$, fyrir $0\le\theta\le\pi$



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna flatarmál svæðisins milli ferlanna tveggja með því að heilda eftir y-ásnum.

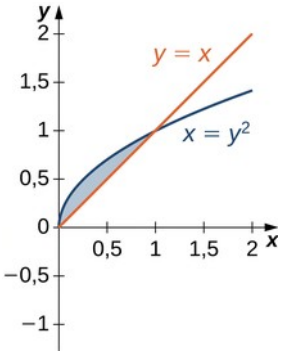
5.

$$x=y^2 \text{ og } x=9$$



6.

$$y=x \text{ og } x=y^2$$



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Reiknið flatarmál þess með því að heilda eftir x-ásnum.

7.

$$y=x^2 \text{ og } y=-x^2+18x$$

8.

$$y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x^2}, \text{og } x=3$$

9. $y=\cos x$ og $y=\cos^2 x$ á bilinu $x=[-\pi,\pi]$

10.

$$y=e^x, y=e^{2x-1}, \text{og } x=0$$

11.

$$y=e^x, y=e^{-x}, x=-1 \text{ og } x=1$$

12.

$$y=e, y=e^x, \text{og } y=e^{-x}$$

13.

$$y=|x| \text{og } y=x^2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Skiptið svæðinu í undirsvæði ef þess þarf til að reikna heildarflatarmál þess.

14.

$$y=\sin(\pi x), y=2x, \text{og } x>0$$

15.

$$y=12-x, y=\sqrt{x}, \text{og } y=1$$

16. $y=\sin x$ og $y=\cos x$ á bilinu $x=[-\pi,\pi]$

17. $y=x^3$ og $y=x^2-2x$ á bilinu $x=[-1,1]$

18. $y=x^2+9$ og $y=10+2x$ á bilinu $x=[-1,3]$

19. $y=x^3+3x$ og $y=4x$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Reiknið flatarmál þess með því að heilda eftir y-ásnum.

20.

$$x=y^3 \text{og } x=3y-2$$

21.

$$x=2y \text{og } x=y^3-y$$

22.

$$x=-3+y^2 \text{ og } x=y-y^2$$

23.

$$y^2=x \text{ og } x=y+2$$

24.

$$x=|y| \text{ og } 2x=-y^2+2$$

25.

$$x=\sin y, x=\cos(2y), y=\pi/2, \text{og } y=-\pi/2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Reiknið flatarmál þess með því að heilda með tilliti til x eða y, eftir því hvor leiðin virðist hentugri.

26.

$$x=y^4 \text{ og } x=y^5$$

27.

$$y=xe^x, y=e^x, x=0, \text{og } x=1$$

28.

$$y=x^6 \text{ og } y=x^4$$

29.

$$x=y^3+2y^2+1 \text{ og } x=-y^2+1$$

30.

$$y=|x| \text{ og } y=x^2-1$$

31.

$$y=4-3x \text{ og } y=\frac{1}{x}$$

32.

$$y=\sin x, x=-\pi/6, x=\pi/6, \text{og } y=\cos^3 x$$

33.

$$y=x^2-3x+2 \text{ og } y=x^3-2x^2-x+2$$

34.

$$y=2\cos^3(3x),\ y=-1,\ x=\frac{\pi}{4},\ \text{og}\ x=-\frac{\pi}{4}$$

35.

$$y+y^3=x\ \text{og}\ 2y=x$$

36.

$$y=\sqrt{1-x^2}\ \text{og}\ y=x^2-1$$

37.

$$y=\cos^{-1}x,\ y=\sin^{-1}x,\ x=-1,\ \text{og}\ x=1$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna nákvæmt flatarmál svæðisins sem gefnu jöfnurnar afmarka, ef unnt er. Ef ekki er hægt að finna skurðpunktana með beinum útreikningi skuluð þið nota reiknivél til að nálga þá með þremur aukastöfum. Finnið síðan nálgunargildi flatarmálsins.

38. **[T]** $x=e^y\ \text{og}\ y=x-2$

39. **[T]** $y=x^2\ \text{og}\ y=\sqrt{1-x^2}$

40. **[T]** $y=3x^2+8x+9\ \text{og}\ 3y=x+24$

41. **[T]** $x=\sqrt{4-y^2}\ \text{og}\ y^2=1+x^2$

42. **[T]** $x^2=y^3\ \text{og}\ x=3y$

43. **[T]**

$$y=\sin^3 x+2,\ y=\tan\ x,\ x=-1{,}5,\ \text{og}\ x=1{,}5$$

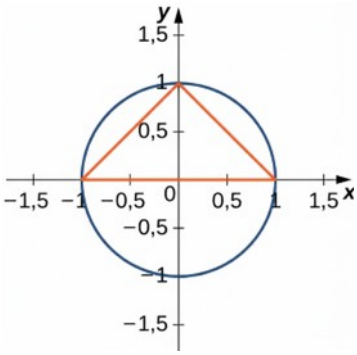
44. **[T]** $y=\sqrt{1-x^2}\ \text{og}\ y^2=x^2$

45. **[T]** $y=\sqrt{1-x^2}\ \text{og}\ y=x^2+2x+1$

46. **[T]** $x=4-y^2\ \text{og}\ x=1+3y+y^2$

47. **[T]** $y=\cos x,\ y=e^x,\ x=-\pi,\ \text{og}\ x=0$

48. Stærsti þríhyrningurinn sem hefur grunnlínu á x-ásnum og rúmast innan efri helmings einingarhringsins $y^2+x^2=1$ afmarkast af línunum $y=1+x$ og $y=1-x$. Sjá næstu mynd. Hvert er flatarmálið innan hálfhringsins en utan þríhyrningsins?



49. Verksmiðja sem selur farsíma hefur jaðarkostnaðarfallið $C\,(x)=0{,}01\,x^2-3\,x+229$, þar sem x táknar fjölda farsíma og C er jaðarkostnaðurinn í dollurum við að selja x síma. Jaðartekjufallið er $R(x)=429-2x$, þar sem R táknar jaðartekjur í dollurum af sölu x farsíma. Finnið flatarmálið milli grafa þessara falla og línunnar $x=0$. Hvað táknar flatarmálið?

50. Skemmtigarður hefur jaðarkostnaðarfallið $C(x)=1000\,e^{-x}+5$, þar sem x táknar fjölda seldra miða. Jaðartekjufallið er $R\,(x)=60-0{,}1\,x$. Finnið heildarhagnaðinn sem fæst þegar 550 miðar eru seldir. Notið reiknivél ef þess þarf til að finna skurðpunkta með tveimur aukastöfum.

51. Skjaldbakan og hérinn: Hraði hérans er gefinn með sínusfallinu $H(t)=1-\cos\left((\pi t)/2\right)$, en hraði skjaldbökunnar er $T\,(t)=0{,}1032\,t$, þar sem t er tími mældur í klukkustundum og hraðinn í kílómetrum á klukkustund. Finnið flatarmálið milli ferlanna frá tímanum $t=0$ þar til skjaldbakan og hérinn eru í fyrsta sinn á sama hraða eftir að ein klukkustund er liðin. Hvað táknar flatarmálið? Notið reiknivél ef þess þarf til að ákvarða skurðpunktana með þriggja aukastafa nákvæmni.

52. Skjaldbakan og hérinn: Hraði hérans er gefinn með sínusfallinu $H(t)=(1/2)-(1/2)\cos(2\pi t)$, en hraði skjaldbökunnar er $T(t)=\sqrt{t}$, þar sem t er tími mældur í klukkustundum og hraðinn í kílómetrum á klukkustund. Kapphlaupinu lauk eftir 1 klukkustund. Hvort þeirra vann kapphlaupið og með hve miklum mun? Notið reiknivél ef þess þarf til að ákvarða skurðpunktana með þriggja aukastafa nákvæmni.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna flatarmálið milli ferlanna með því að heilda fyrst með tilliti til x og síðan með tilliti til y. Er önnur aðferðin auðveldari en hin? Fáið þið sama svar?

53.

$$y=x^2+2x+1 \text{ og } y=-x^2-3x+4$$

54.

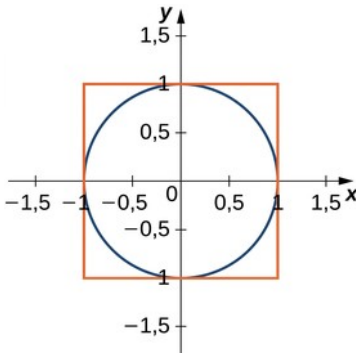
$$y=x^4 \text{ og } x=y^5$$

55.

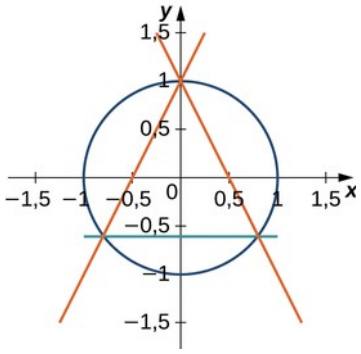
$$x=y^2-2 \text{ og } x=2y$$

Leysið eftirfarandi æfingar með stærðfræðigreiningu og sannreynið síðan svörin með rúmfræði.

56. Ákvarðið jöfnur hliða ferningsins sem snertir einingarhringinn með öllum fjórum hliðum sínum, eins og sést á næstu mynd. Finnið flatarmálið milli jaðars ferningsins og einingarhringsins. Er hægt að leysa dæmið á annan hátt án stærðfræðigreiningar?



57. Finnið flatarmálið milli jaðars einingarhringsins og þríhyrningsins sem afmarkast af $y=2x+1$, $y=1-2x$ og $y=-\frac{3}{5}$, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd. Er hægt að leysa dæmið án stærðfræðigreiningar?



6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum

6

NÁMSMARKMIÐ

- 6.2.1 Ákvarðið rúmmál rúmhlutar með því að heilda flatarmál þversniðs hans (sneiðaaðferðin).
- 6.2.2 Finnið rúmmál snúðs með skífuaðferðinni.
- 6.2.3 Finnið rúmmál snúðs sem hefur holrúm með hringkragaaðferðinni.

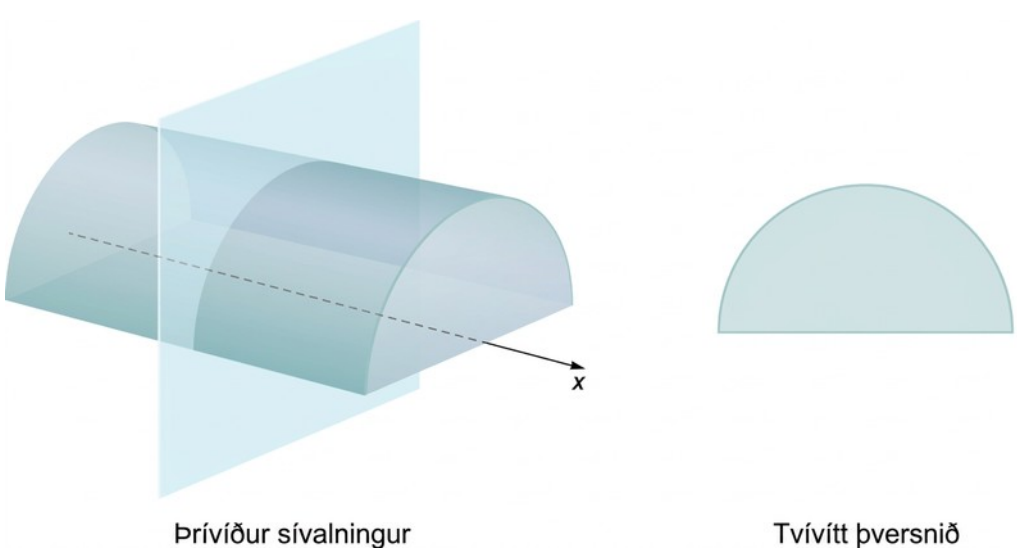
Í undirkaflanum á undan notuðum við ákveðin heildi til að finna flatarmálið milli tveggja ferla. Í þessum undirkafla notum við ákveðin heildi til að finna rúmmál þrívíðra rúmhluta. Við skoðum þrjár aðferðir — sneiðaaðferðina, skífuaðferðina og hringkragaaðferðina — til að finna þessi rúmmál, allt eftir eiginleikum rúmhlutarins.

Rúmmál og sneiðaaðferðin

Rétt eins og flatarmál er tölulegur mælikvarði á tvívítt svæði er rúmmál tölulegur mælikvarði á þrívíðan rúmhlut. Flest okkar hafa reiknað rúmmál rúmhluta með einföldum rúmfræðiformúlum. Rúmmál rétthyrnds strendings má til dæmis reikna með því að margfalda saman lengd, breidd og hæð: $V = l\,w\,h$. Formúlurnar fyrir rúmmál kúlu $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$, keilu $\left(V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$, og pýramída $\left(V = \frac{1}{3}A\,h\right)$ hafa einnig verið kynntar. Þótt sumar þessara formúla hafi verið leiddar út með rúmfræði einni saman má fá þær allar með heildun.

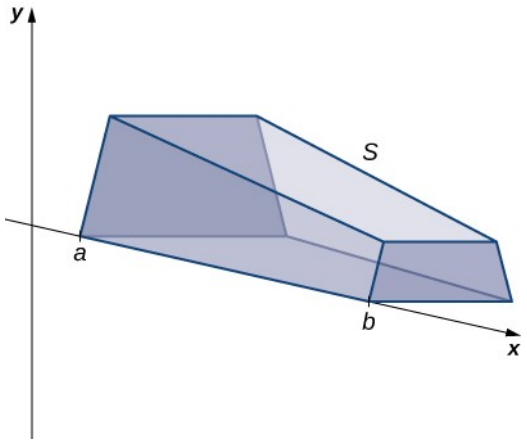
Við getum einnig reiknað rúmmál sívalnings. Þótt flest okkar hugsi sér sívalning með hringlaga grunnflöt, svo sem niðursuðudós eða málmstöng, hefur orðið sívalningur víðtækari merkingu í stærðfræði. Til að fjalla um sívalninga í þessu almenna samhengi þurfum við fyrst að skilgreina nokkur hugtök.

Þversnið rúmhlutar er skurðmengi sléttu og rúmhlutarins. Sívalningur er hver sá rúmhlutur sem mynda má með því að hliðra sléttu svæði eftir línu sem er hornrétt á svæðið; línan nefnist ás sívalningsins. Öll þversnið sem eru hornrétt á ás sívalnings eru því eins. Rúmhluturinn sem sýndur er á mynd 6.11 er dæmi um sívalning með grunnflöt sem er ekki hringlaga. Rúmmál sívalnings fæst þá einfaldlega með því að margfalda flatarmál þversniðsins með hæð sívalningsins: $V = A \cdot h$. Fyrir réttan hringstrending (niðursuðudós) verður formúlan $V = \pi r^2 h$.



Mynd 6.11 Öll þversnið tiltekins sívalnings eru eins.

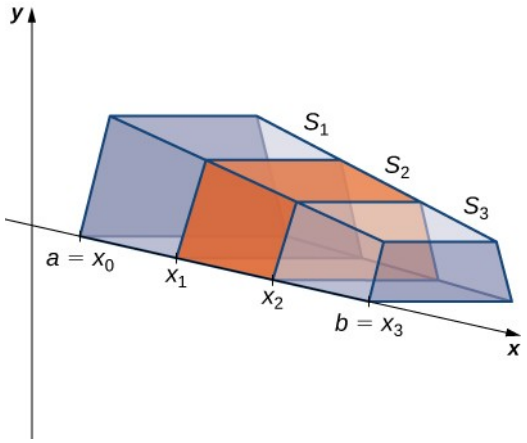
Ef rúmhlutur hefur ekki fast þversnið (og er ekki einn af hinum grunnrúmhlutunum) er ekki víst að til sé formúla fyrir rúmmál hans. Þá getum við reiknað rúmmál rúmhlutarins með ákveðnu heildi. Við skerum rúmhlutinn í sneiðar, metum rúmmál hverrar sneiðar og leggjum síðan þessi áætluðu rúmmál saman. Sneiðarnar eiga allar að vera samsíða og saman eiga þær að mynda allan rúmhlutinn. Skoðum til dæmis rúmhlutinn S á mynd 6.12, sem liggur eftir x-ásnum.



Mynd 6.12 Rúmhlutur með breytilegt þversnið.

Við viljum skipta S í sneiðar sem eru hornréttar á x-ásinn. Síðar í kaflanum sjáum við að stundum er betra að sneiða rúmhlutinn í aðra stefnu, til dæmis í sneiðar sem eru hornréttar á y-ásinn. Miklu skiptir að velja rétta stefnu. Ef röng stefna er valin geta útreikningarnir orðið býsna flóknir. Síðar í kaflanum skoðum við nokkur slík tilvik nánar og sjáum hvernig velja má í hvaða stefnu rúmhluturinn er sneiddur. Í þessum undirkafla notum við þó sneiðar sem eru hornréttar á x-ásinn.

Þversniðsflatarmálið er ekki fast og því látum við $A(x)$ tákna flatarmál þversniðsins í punktinum x. Látum nú $P=\{x_0, x_1 \ldots, X_n\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots n$, látum við S_i tákna þá sneið af S sem nær frá x_{i-1} til x_i. Myndin hér á eftir sýnir sneidda rúmhlutinn þegar $n=3$.



Mynd 6.13 Rúmhlutnum S hefur verið skipt í þrjár sneiðar sem eru hornréttar á x-ásinn.

Að lokum veljum við fyrir hvert $i=1,2,\ldots n$, einhvern punkt x_i^* í $[x_{i-1}, x_i]$. Þá má áætla rúmmál sneiðar S_i með $V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$. Þegar við leggjum nálgunargildin saman sjáum við að nálga má rúmmál alls rúmhlutarins S með

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Við þekkjum þetta sem Riemann-summu og næsta skref er að taka markgildið þegar $n \to \infty$. Þá fæst

$$V(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right) \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Aðferðin sem við höfum nú lýst nefnist sneiðaaðferð. Til að beita henni fylgjum við eftirfarandi lausnarleið.

LAUSNARLEIÐ

Ákvörðun rúmmáls með sneiðaaðferðinni

1. Skoðið rúmhlutinn og ákvarðið lögun þversniðs hans. Oft er gagnlegt að teikna mynd ef engin mynd fylgir.
2. Ákvarðið formúlu fyrir flatarmál þversniðsins.
3. Heildið flatarmálsformúluna yfir viðeigandi bil til að fá rúmmálið.

Minnumst þess að í þessum undirkafla gerum við ráð fyrir að sneiðarnar séu hornréttar á x-ásinn. Flatarmálsformúlan er því sett fram sem fall af x og heildismörkin liggja á x-ásnum. Lausnarleiðin sem hér er sýnd gildir þó óháð því hvernig við veljum að sneiða rúmhlutinn.

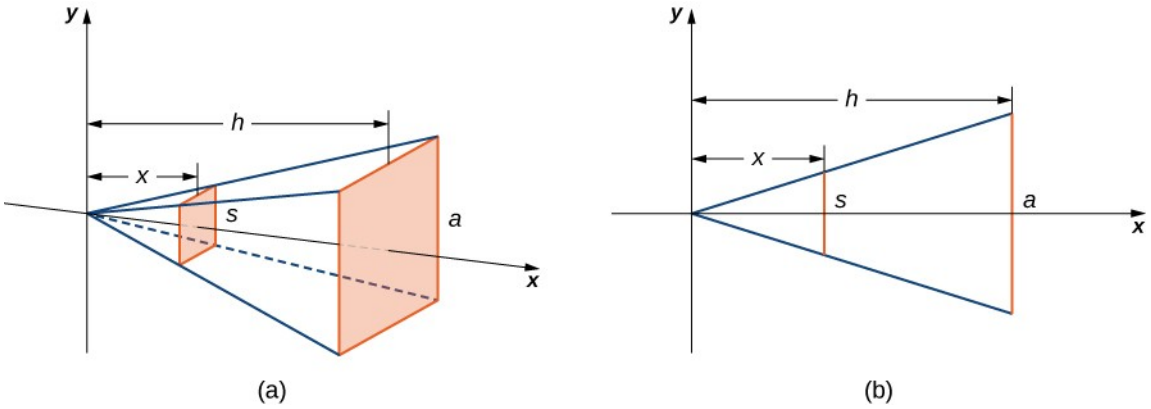
DÆMI 6.6

Útleiðsla formúlunnar fyrir rúmmál pýramída

Við vitum úr rúmfræði að formúlan fyrir rúmmál pýramída er $V = \frac{1}{3} A h$. Ef pýramídinn hefur ferningslaga grunnflöt verður formúlan $V = \frac{1}{3} a^2 h$, þar sem a táknar lengd einnar hliðar grunnflatarins. Við ætlum að nota sneiðaaðferðina til að leiða þessa formúlu út.

Lausn

Við viljum beita sneiðaaðferðinni á pýramída með ferningslaga grunnflöt. Til að setja heildið fram skoðum við pýramídann á mynd 6.14, sem liggur eftir x-ásnum.



Mynd 6.14 (a) Pýramídi með ferningslaga grunnflöt snýr eftir x-ásnum. (b) Tvívíð mynd af pýramídanum sést frá hlið.

Fyrst ákvarðum við lögun þversniðs pýramídans. Grunnflöturinn er ferningur og þversniðin eru því einnig ferningar (skref 1). Nú viljum við finna formúlu fyrir flatarmál eins þessara ferningslaga þversniða. Af mynd 6.14(b) sést að þríhyrningarnir eru einslaga og út frá hlutföllum fæst

$$\frac{s}{a}=\frac{x}{h} \text{ eða } s=\frac{a\,x}{h}.$$

Flatarmál eins ferningslaga þversniðs er því

$$A(x)=s^2=\left(\frac{a\,x}{h}\right)^2 \text{(skref 2)}.$$

Rúmmál pýramídans fæst síðan með því að heilda frá 0 til h (skref 3):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)\,dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \tfrac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \\ &= \left[\tfrac{a^2}{h^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\right]\Big|_0^h = \tfrac{1}{3}a^2h. \end{aligned}$$

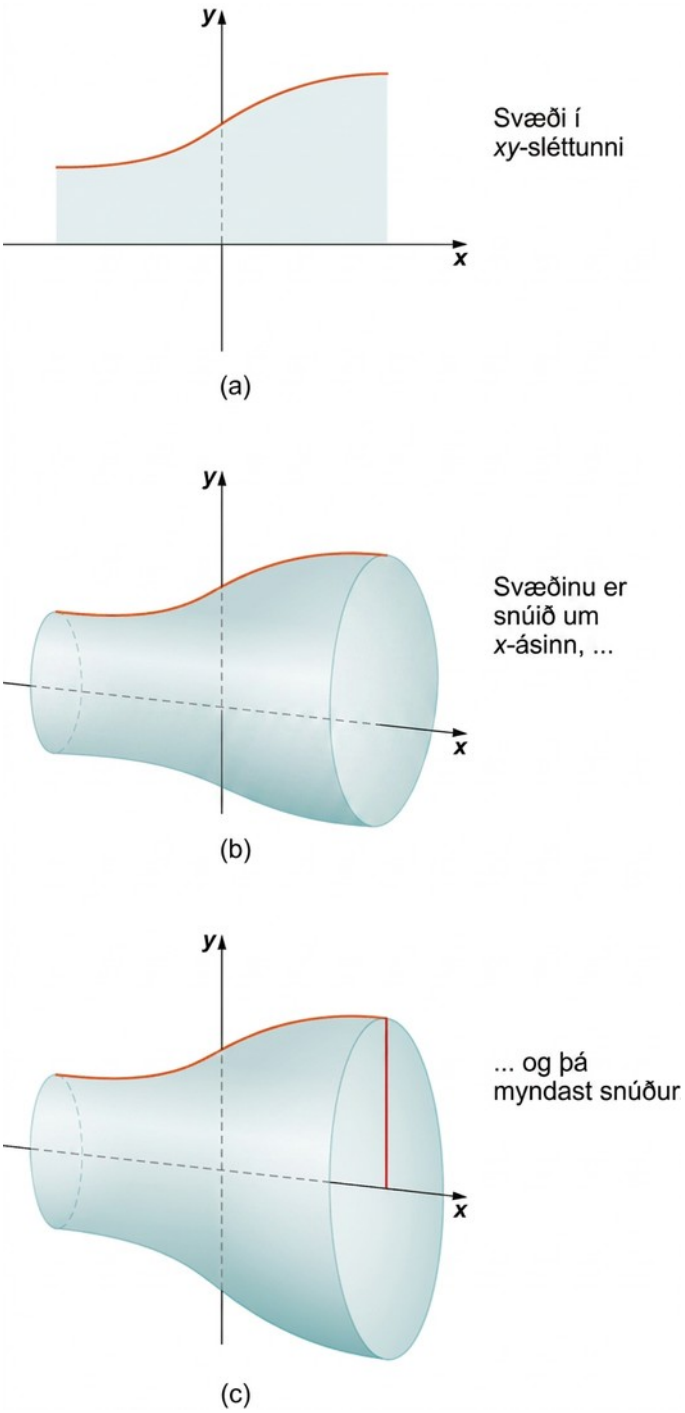
Þetta er formúlan sem við leituðum að.

STÖÐUMAT 6.6

Notið sneiðaaðferðina til að leiða út formúluna $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ fyrir rúmmál hringkeilu.

Snúðar

Þegar svæði í sléttu er snúið um línu í sömu sléttu myndast rúmhlutur sem nefnist snúður, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.15 (a) Svæðið sem er snúið um x-ásinn. (b) Þegar svæðið byrjar að snúast um ásinn myndar það snúð. (c) Snúðurinn sem fæst þegar snúningnum er lokið.

Snúðar eru algengir í vélbúnaði, til dæmis í vélarhlutum sem renndir eru í rennibekk. Í því sem eftir er af þessum undirkafla skoðum við slíka rúmhluta. Í næsta dæmi er sneiðaaðferðin notuð til að reikna rúmmál snúðs.

MARGMIÐLUN

Notið heildareiknivél á netinu til að kynnast efninu betur.

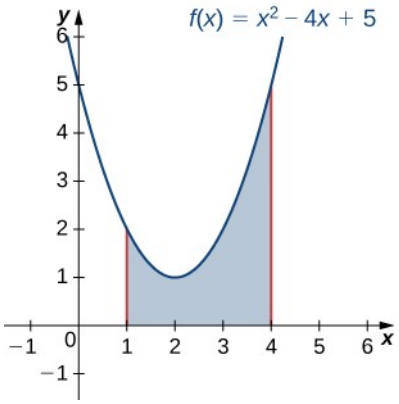
DÆMI 6.7

Notkun sneiðaaðferðarinnar til að finna rúmmál snúðs

Notið sneiðaaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af gröfum $f(x)=x^2-4x+5$, $x=1$, og $x=4$, er snúið um x-ásinn.

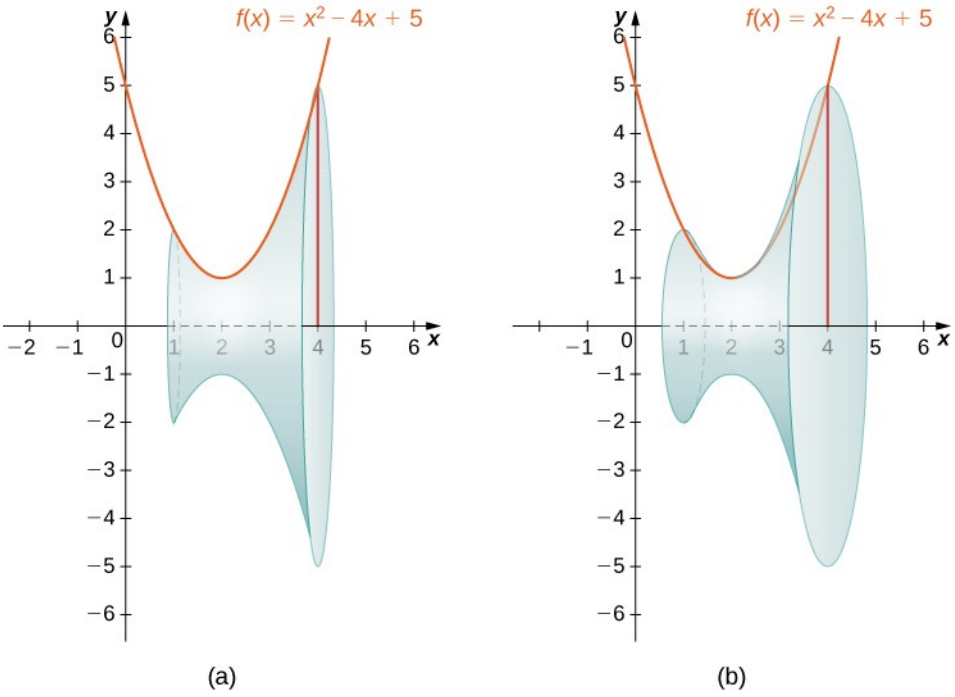
Lausn

Samkvæmt lausnarleiðinni teiknum við fyrst graf annars stigs fallsins á bilinu $[1,4]$ eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.16 Svæði sem notað er til að mynda snúð.

Næst snúum við svæðinu um x-ásinn, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.17 Tvær myndir, (a) og (b), af snúðnum sem myndast þegar svæðinu á mynd 6.16 er snúið um x-ásinn.

Þar sem rúmhluturinn myndaðist þegar svæðinu var snúið um x-ásinn, eru þversniðin hringir (skref 1). Flatarmál þversniðsins er því flatarmál hrings og geisli hringsins er $f(x)$. Notum formúluna fyrir flatarmál hrings:

$$A(x)=\pi r^2=\pi\left[f(x)\right]^2=\pi\left(x^2-4x+5\right)^2 \text{(skref 2)}.$$

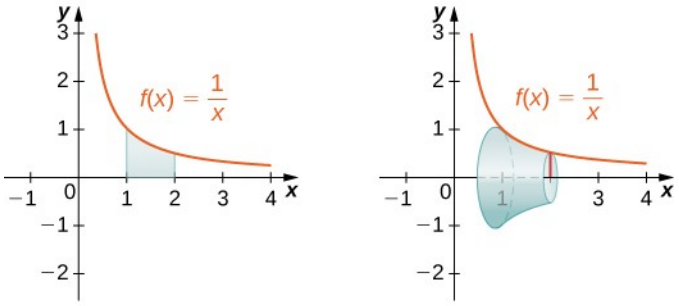
Rúmmálið er því (skref 3)

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)dx \\ &= \int_1^4 \pi\left(x^2-4x+5\right)^2 dx = \pi\int_1^4 \left(x^4-8x^3+26x^2-40x+25\right)dx \\ &= \pi\left(\tfrac{x^5}{5}-2x^4+\tfrac{26x^3}{3}-20x^2+25x\right)\Big|_1^4 = \tfrac{78}{5}\pi. \end{aligned}$$

Rúmmálið er $78\pi/5$.

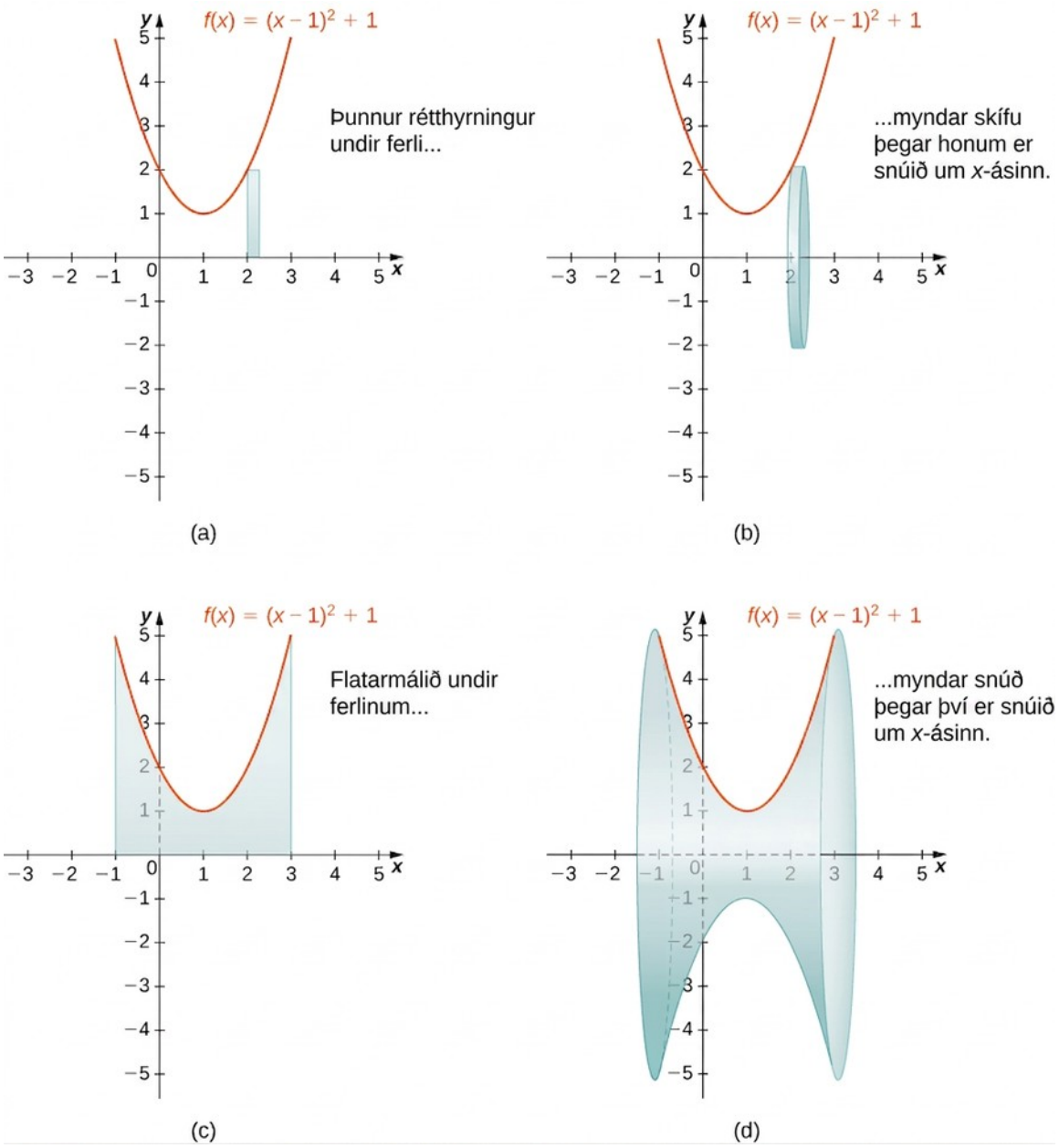
STÖÐUMAT 6.7

Notið sneiðaaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs fallsins $f(x)=1/x$ og x-ássins á bilinu $[1,2]$ er snúið um x-ásinn. Sjá eftirfarandi mynd.



Skífuaðferðin

Þegar sneiðaaðferðinni er beitt á snúða er hún oft kölluð skífuaðferð því að sneiðarnar sem notaðar eru til að nálga rúmmál snúðsins eru skífur. Til að sjá þetta skulum við skoða snúðinn sem myndast þegar svæðinu milli grafs fallsins $f(x)=(x-1)^2+1$ og x-ássins á bilinu $[-1,3]$ er snúið um x-ásinn. Graf fallsins og dæmigerð skífa eru sýnd á mynd 6.18(a) og (b). Snúningssvæðið og snúðurinn sem myndast eru sýnd á mynd 6.18(c) og (d).



Mynd 6.18 (a) Þunnur rétthyrningur til að nálga flatarmálið undir ferli. (b) Dæmigerð skífa sem myndast þegar rétthyrningnum er snúið um x-ásinn. (c) Svæðinu undir ferlinum er snúið um x-ásinn, og við það myndast (d) snúðurinn.

6

Við leiddum rúmmálsformúluna formlega út með Riemann-summum þegar við settum fram sneiðaaðferðina. Við vitum að

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Það eina sem greinir skífuaðferðina frá almennu sneiðaaðferðinni er að við þekkjum fyrir fram formúluna fyrir þversniðsflatarmálið: það er flatarmál hrings. Af þessu fæst eftirfarandi regla.

REGLA: SKÍFUAÐFERÐIN

Látum $f(x)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af x-ásnum, til vinstri af línunni $x=a$, og til hægri af línunni $x=b$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um x-ásinn með

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx.$$

(6.3)

Rúmmál snúðsins sem við höfum verið að skoða (mynd 6.18) fæst með

$$V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \pi\,[(x-1)^2+1]^2\,dx = \pi\int_{-1}^{3}[(x-1)^4+2(x-1)^2+1]\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}(x-1)^5+\frac{2}{3}(x-1)^3+x\right]\Bigg|_{-1}^{3}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+3\right)-\left(-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-1\right)\right]=\frac{412\,\pi}{15}\ \text{einingar}^3.$$

Lítum á nokkur dæmi.

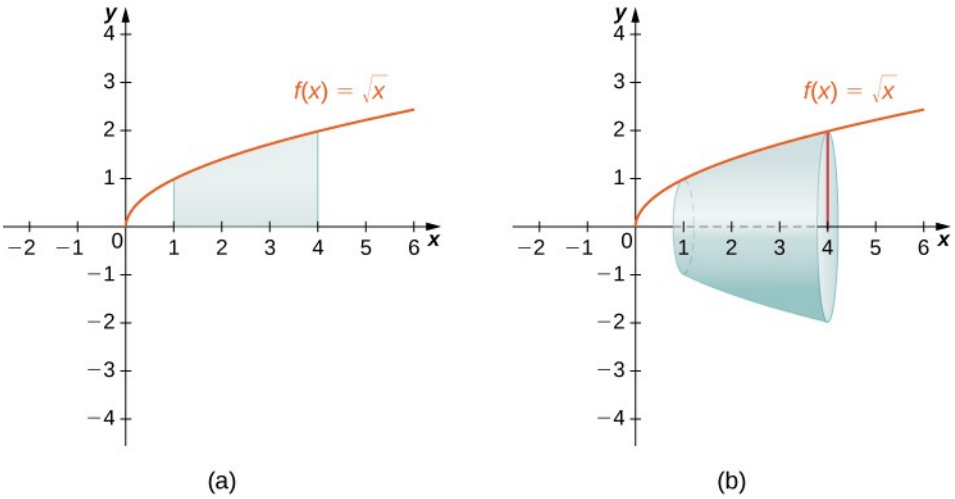
DÆMI 6.8

Notkun skífuaðferðarinnar til að finna rúmmál snúðs 1

Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs $f(x)=\sqrt{x}$ og x-ássins á bilinu $[1,4]$ er snúið um x-ásinn.

Lausn

Graf fallsins og snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.19 (a) Fallið $f(x)=\sqrt{x}$ á bilinu $[1,4]$. (b) Snúðurinn sem fæst með því að snúa svæðinu undir grafi $f(x)$ um x-ásinn.

Við höfum

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \int_1^4 x\, dx \\ &= \tfrac{\pi}{2} x^2 \Big|_1^4 = \tfrac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

Rúmmálið er $(15\pi)/2$ einingar^3.

STÖÐUMAT 6.8

Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs $f(x)=\sqrt{4-x}$ og x-ássins á bilinu $[0,4]$ er snúið um x-ásinn.

Hingað til hafa öll dæmin fjallað um svæði sem er snúið um x-ásinn, en mynda má snúð með því að snúa sléttu svæði um hvaða láréttu eða lóðréttu línu sem er. Í næsta dæmi skoðum við snúð sem myndast þegar svæði er snúið um y-ásinn. Skífuaðferðinni er beitt nær eins og þegar x-ásinn er snúningsásinn, en við setjum fallið fram sem fall af y og heildum einnig með tilliti til y. Þetta er tekið saman í eftirfarandi reglu.

REGLA: SKÍFUAÐFERÐIN FYRIR SNÚÐA UM Y-ÁSINN

Látum $g(y)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y)$, til vinstri af y-ásnum, að neðan af línunni $y=c$, og að ofan af línunni $y=d$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um y-ásinn með

$$V=\int_c^d \pi\left[g(y)\right]^2 d\,y.$$

(6.4)

Næsta dæmi sýnir hvernig þessari reglu er beitt í reynd.

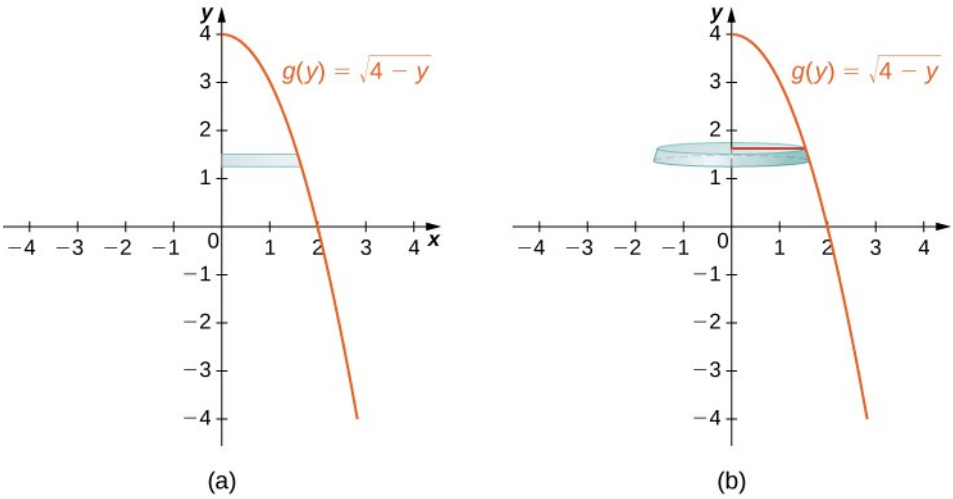
DÆMI 6.9

Notkun skífuaðferðarinnar til að finna rúmmál snúðs 2

Látum R vera svæðið sem afmarkast af grafi $g(y)=\sqrt{4-y}$ og y-ásnum á y-ásnum-bilinu $[0,4]$. Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

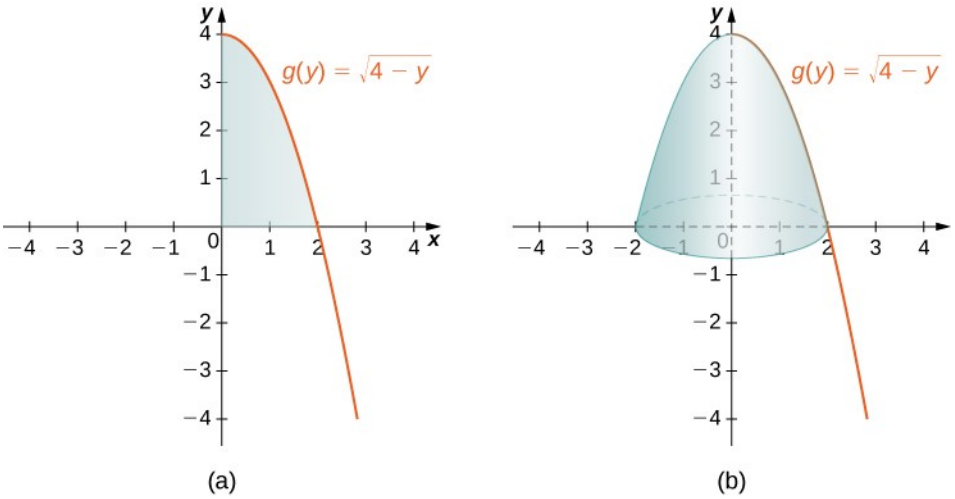
Lausn

Mynd 6.20 sýnir fallið og dæmigerða skífu sem nota má til að áætla rúmmálið. Takið eftir að þar sem fallinu er snúið um y-ásinn, eru skífurnar láréttar en ekki lóðréttar.



Mynd 6.20 (a) Þunnur rétthyrningur milli grafs fallsins $g(y)=\sqrt{4-y}$ og y-ássins. (b) Rétthyrningurinn myndar dæmigerða skífu þegar honum er snúið um y-ásinn.

Svæðið sem á að snúa og allur snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.21 (a) Svæðið vinstra megin við graf fallsins $g(y)=\sqrt{4-y}$ á y-ásnum-bilinu $[0,4]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

Til að finna rúmmálið heildum við með tilliti til y. Þá fæst

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{4-y}\right]^2 dy = \pi \int_0^4 (4-y)dy \\ &= \pi\left[4y - \tfrac{y^2}{2}\right]\Big|_0^4 = 8\pi. \end{aligned}$$

Rúmmálið er 8π einingar^3.

STÖÐUMAT 6.9

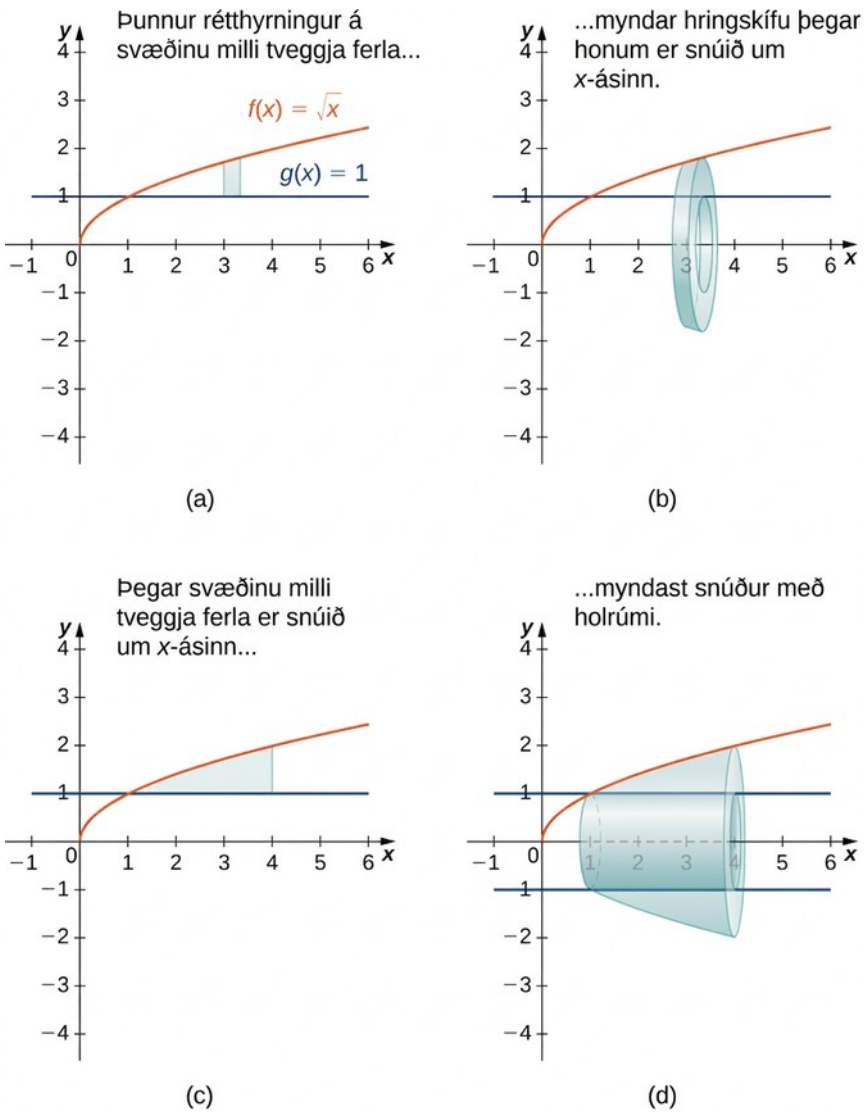
Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs $g(y)=y$ og y-ássins á bilinu $[1,4]$ er snúið um y-ásinn.

Hringkragaaðferðin

Sumir snúðar hafa holrúm í miðjunni; þeir eru ekki gegnheilir alveg inn að snúningsásnum. Stundum stafar þetta einfaldlega af lögun snúningssvæðisins miðað við snúningsásinn. Í öðrum tilvikum myndast holrúm þegar snúningssvæðið er skilgreint sem svæðið milli grafa tveggja falla. Þriðja tilvikið kemur upp þegar valinn er annar snúningsás en x-ásinn eða y-ásinn.

Þegar snúður hefur holrúm í miðjunni eru sneiðarnar sem notaðar eru til að nálga rúmmálið ekki skífur heldur hringkragar (skífur með gati í miðjunni). Skoðum til dæmis svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=1$ á bilinu $[1,4]$. Þegar þessu svæði er snúið um x-ásinn, myndast rúmhlutur með holrúmi í miðjunni og sneiðarnar eru hringkragar. Graf fallsins og dæmigerður hringkragi eru sýnd á

mynd 6.22(a) og (b). Snúningssvæðið og rúmhluturinn sem myndast eru sýnd á mynd 6.22(c) og (d).



Mynd 6.22 (a) Þunnur rétthyrningur á svæðinu milli tveggja ferla. (b) Dæmigerður hringkragi sem myndast þegar rétthyrningnum er snúið um x-ásinn. (c) Svæðið milli ferlanna á gefna bilinu. (d) Snúðurinn sem myndast.

6

Þversniðsflatarmálið er þá flatarmál ytri hringsins að frádregnu flatarmáli innri hringsins. Í þessu tilviki er

$$A(x)=\pi\left(\sqrt{x}\right)^2-\pi(1)^2=\pi(x-1).$$

Þá er rúmmál rúmhlutarins

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \pi(x-1)\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]\Big|_1^4 = \frac{9}{2}\pi \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

Með því að alhæfa þetta ferli fæst hringkragaaðferðin.

REGLA: HRINGKRAGAAÐFERÐIN

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ og $g(x)$ séu samfelld, óneikvæð föll þannig að $f(x) \geq g(x)$ á $[a,b]$. Látum R tákna svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af grafi $g(x)$, til vinstri af línunni $x=a$, og til hægri af línunni $x=b$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um x-ásinn með

$$V=\int_a^b \pi\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx.$$

(6.5)

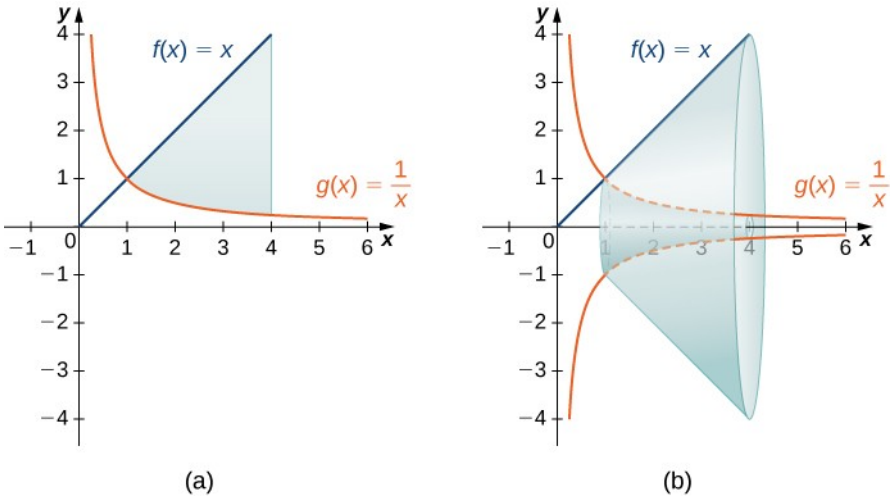
DÆMI 6.10

Notkun hringkragaaðferðarinnar

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x$ og að neðan af grafi $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,4]$ er snúið um x-ásinn.

Lausn

Gröf fallanna og snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.23 (a) Svæðið milli grafa fallanna $f(x)=x$ og $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,4]$. (b) Þegar svæðinu er snúið um x-ásinn myndast snúður með holrúmi í miðjunni.

Við höfum

$$V = \int_a^b \pi\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx$$
$$= \pi\int_1^4\left[x^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}\right]\Big|_1^4 = \frac{81\pi}{4}\ \text{einingar}^3.$$

STÖÐUMAT 6.10

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af gröfum $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,3]$ er snúið um x-ásinn.

Líkt og með skífuaðferðinni getum við einnig beitt hringkragaaðferðinni á snúða sem myndast þegar svæði er snúið um y-ásinn. Í þessu tilviki gildir eftirfarandi regla.

REGLA: HRINGKRAGAAÐFERÐIN FYRIR SNÚÐA UM Y-ÁSINN

Gerum ráð fyrir að $u(y)$ og $v(y)$ séu samfelld, óneikvæð föll þannig að $v(y)\leq u(y)$ fyrir $y\in[c,d]$. Látum Q tákna svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $u(y)$, til vinstri af grafi $v(y)$, að neðan af línunni $y=c$, og að ofan af línunni $y=d$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um y-ásinn með

$$V=\int_c^d \pi\left[(u(y))^2-(v(y))^2\right]dy.$$

Í stað þess að skoða dæmi um hringkragaaðferðina þar sem y-ásinn er snúningsásinn skoðum við nú dæmi þar sem snúningsásinn er önnur lína en hnitásarnir tveir. Sama almenna aðferðin gildir, en þið gætuð þurft að sjá fyrir ykkur hvernig lýsa á þversniðsflatarmálinu.

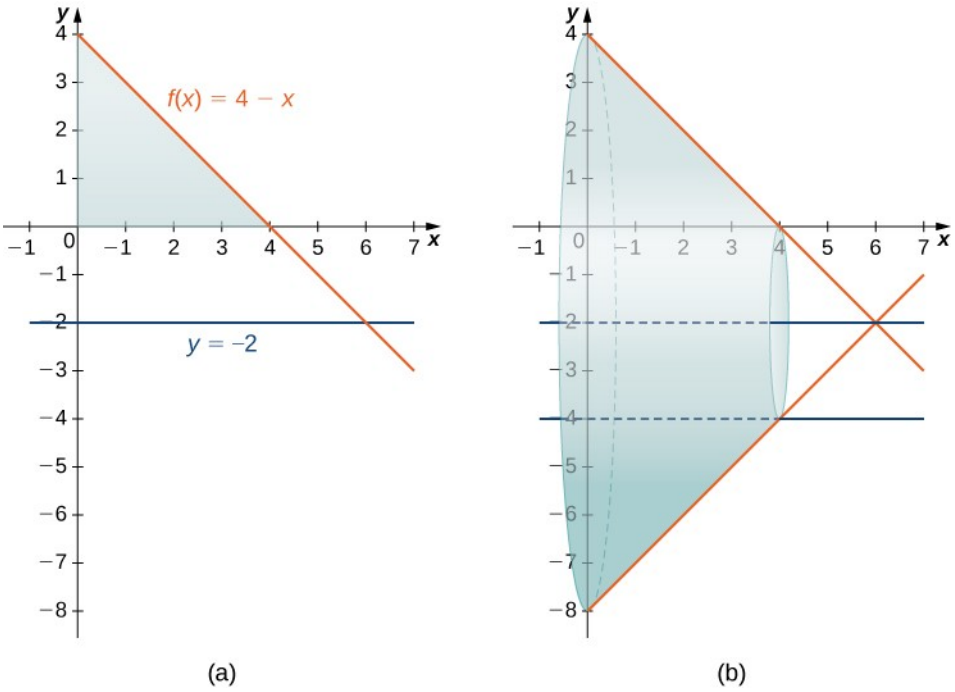
DÆMI 6.11

Hringkragaaðferðin með öðrum snúningsás

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast að ofan af $f(x)=4-x$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,4]$ er snúið um línuna $y=-2$.

Lausn

Graf svæðisins og snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.24 (a) Svæðið milli grafs fallsins $f(x)=4-x$ og x-ássins á bilinu $[0,4]$. (b) Þegar svæðinu er snúið um línuna $y=-2$ myndast snúður með sívalningslaga gati eftir honum miðjum.

Við getum ekki beitt rúmmálsformúlunni beint á þetta dæmi þar sem snúningsásinn er hvorugur hnitásanna. Við vitum þó enn að flatarmál þversniðsins er flatarmál ytri hringsins að frádregnu flatarmáli innri hringsins. Af grafi fallsins sést að geisli ytri hringsins er $f(x)+2$, sem einfaldast í

$$f(x)+2=(4-x)+2=6-x.$$

Geisli innri hringsins er $g(x)=2$. Því fæst

$$V = \int_0^4 \pi\left[(6-x)^2-(2)^2\right]\,dx$$

$$=\pi\int_0^4 (x^2-12x+32)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}-6x^2+32x\right]\Big|_0^4 = \frac{160\pi}{3} \text{ einingar}^3.$$

6

STÖÐUMAT 6.11

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x+2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,3]$ er snúið um línuna $y=-1$.

Æfingar í undirkafla 6.2

58. Leiðið út formúluna fyrir rúmmál kúlu með sneiðaaðferðinni.

59. Notið sneiðaaðferðina til að leiða út formúluna fyrir rúmmál keilu.

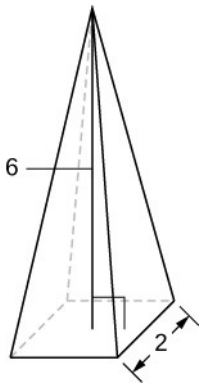
60. Notið sneiðaaðferðina til að leiða út formúluna fyrir rúmmál fjórflötungs með hliðarlengd a.

61. Notið skífuaðferðina til að leiða út formúluna fyrir rúmmál trapísustrendings.

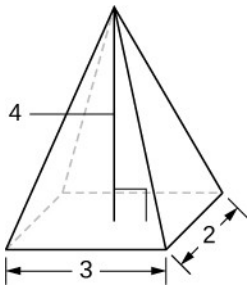
62. Útskýrið hvenær nota á skífuaðferðina og hvenær hringkragaaðferðina. Hvenær má nota hvora aðferðina sem er?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna dæmigerða sneið og finna rúmmál rúmhlutarins með sneiðaaðferðinni.

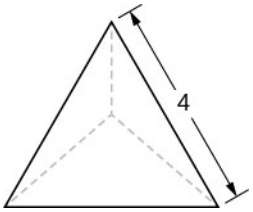
63. Pýramídi með hæðina 6 einingar og ferningslaga grunnflöt með hliðarlengdina 2 einingar, eins og sýnt er hér.



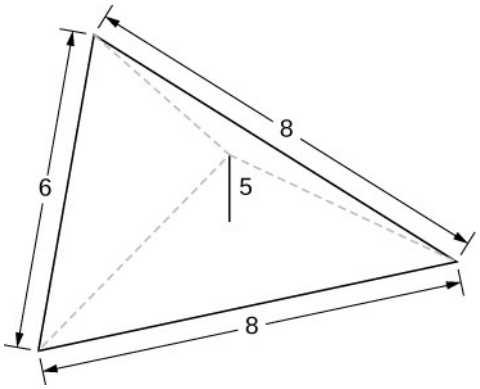
64. Fjögurra eininga hár pýramídi með rétthyrndan grunnflöt sem er 2 einingar á lengd og 3 einingar á breidd, eins og sýnt er hér.



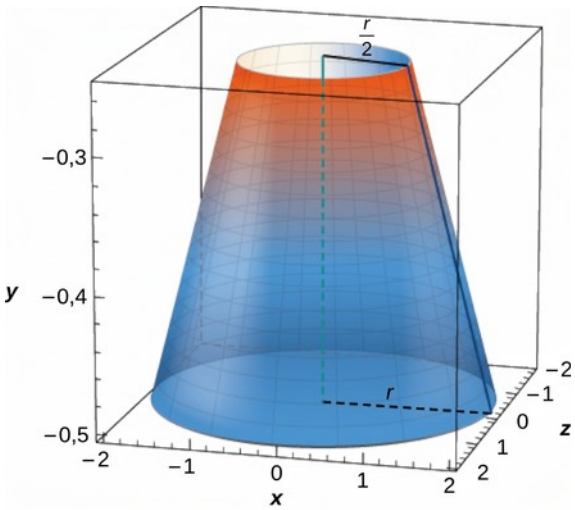
65. Fjórflötungur með grunnflöt sem hefur 4 eininga langar hliðar, eins og sýnt er hér.



66. Pýramídi með hæðina 5 einingar og grunnflöt sem er jafnarma þríhyrningur með hliðarlengdirnar 6 einingar og 8 einingar, eins og sýnt er hér.



67. Úr efri hluta keilu með geisla r og hæð h er skorin minni keila með geisla $r/2$ og hæð $h/2$, eins og sýnt er hér. Rúmhluturinn sem eftir stendur nefnist keilustúfur.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna útlínur rúmhlutarins og finna rúmmál hans með sneiðaaðferðinni.

68. Grunnflöturinn er hringur með geisla a. Sneiðar hornréttar á grunnflötinn eru ferningar.

69. Grunnflöturinn er þríhyrningur með hornpunkta $(0,0),(1,0)$, og $(0,1)$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

70. Grunnflöturinn er svæðið undir fleygboganum $y=1-x^2$ í fyrsta fjórðungi. Sneiðar hornréttar á xy-sléttuna og samsíða y-ásnum eru ferningar.

71. Grunnflöturinn er svæðið undir fleygboganum $y=1-x^2$ og fyrir ofan x-ássins. Sneiðar hornréttar á y-ásinn eru ferningar.

72. Grunnflöturinn er svæðið sem afmarkast af $y=x^2$ og $y=9$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru rétthyrndir jafnarma þríhyrningar. Skurðlína einnar þessara sneiða við grunnflötinn er skammhlið þríhyrningsins.

73. Grunnflöturinn er svæðið milli $y=x$ og $y=x^2$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Notið síðan skífuaðferðina til að finna rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um x-ásinn.

74.

$$x+y=8, x=0, \text{og } y=0$$

75.

$$y=2x^2, x=0, x=4, \text{og } y=0$$

76.

$$y=e^x+1, x=0, x=1, \text{og } y=0$$

77.

$$y=x^4, x=0, \text{og } y=1 \text{ fyrir } x\geq 0$$

78.

$$y=\sqrt{x}, x=0, x=4, \text{og } y=0$$

79.

$$y=\sin x, y=\cos x, \text{og } x=0$$

80.

$$y=\frac{1}{x}, x=2, \text{og } y=3$$

81.

$$x^2-y^2=9 \text{ og } x+y=9, y=0 \text{ og } x=0$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Finnið síðan rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

82.

$$y=4-\frac{1}{2}x, x=0, \text{og } y=0$$

83.

$$y=2x^3, x=0, x=1, \text{og } y=0$$

84.

$$y=3x^2, x=0, \text{og } y=3$$

85.

$$y=\sqrt{4-x^2}, y=0, \text{og } x=0$$

86.

$$y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}, x=0, x=3, \text{og } y=0$$

87.

$$x=\sec(y) \text{og } y=\frac{\pi}{4}, y=0 \text{og } x=0$$

88.

$$y=\frac{1}{x+1}, x=0,, x=2, \text{og } y=0$$

89.

$$y=4-x, y=x, \text{og } x=0$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Finnið síðan rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um x-ásinn.

90.

$$y=x+2, y=x+6, x=0, \text{og } x=5$$

91.

$$y=x^2 \text{og } y=x+2$$

92.

$$x^2=y^3 \text{og } x^3=y^2$$

93.

$$y=4-x^2 \text{og } y=2-x$$

94. [T]

$$y=\cos\ x, y=e^{-x}, x=0, \text{ og } x=1{,}2927$$

95.

$$y=\sqrt{x} \text{og } y=x^2$$

96.

$$y=\sin x, y=5\sin x, x=0 \text{og } x=\pi$$

97.

$$y=\sqrt{1+x^2} \text{og } y=\sqrt{4-x^2}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Notið síðan hringkragaaðferðina til að finna rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

98.

$$y=\sqrt{x}, x=4, \text{og } y=0$$

99.

$$y=x+2, y=2x-1, \text{og } x=0$$

100.

$$y=\sqrt[3]{x} \text{ og } y=x^3$$

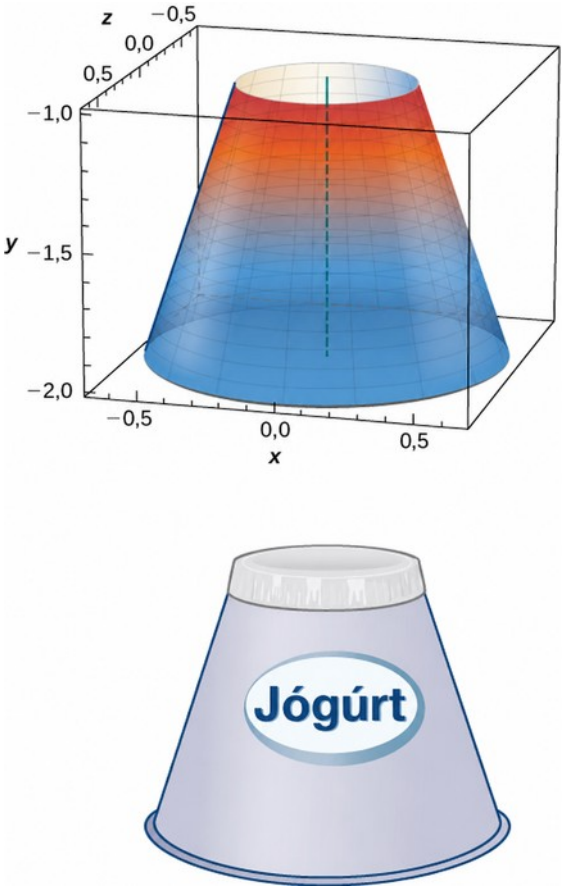
101.

$$x=e^{2y}, x=y^2, y=0, \text{og } y=\ln(2)$$

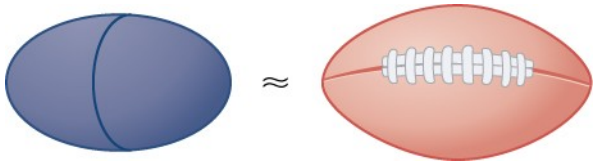
102.

$$x=\sqrt{9-y^2}, x=e^{-y}, y=0, \text{og } y=3$$

103. Jógúrtdósir geta verið í laginu eins og keilustúfar. Snúið línunni $y=\frac{1}{m}x$ um y-ásinn til að finna rúmmálið milli $y=a$ og $y=b$.

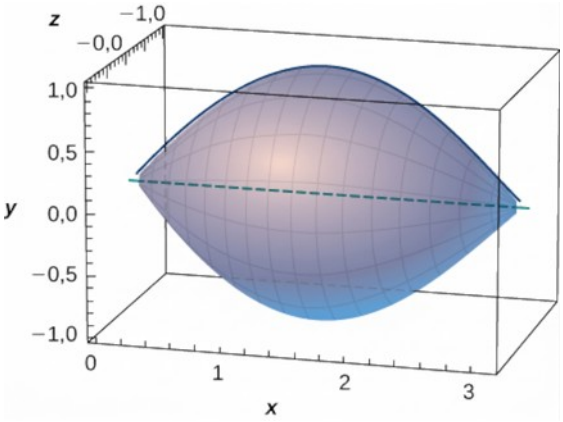


104. Snúið sporbaugnum $\left(x^2/a^2\right)+\left(y^2/b^2\right)=1$ um x-ásinn til að nálga rúmmál amerísks fótbolta, eins og sýnt er hér.

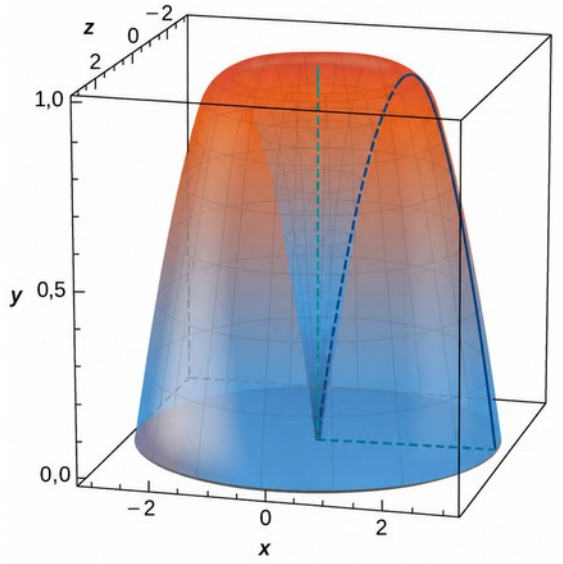


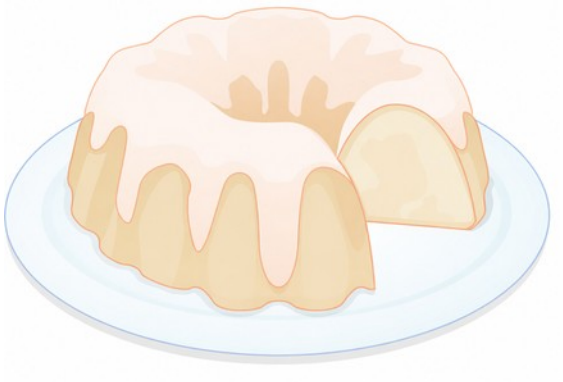
105. Snúið sporbaugnum $\left(x^2/a^2\right)+\left(y^2/b^2\right)=1$ um y-ásinn til að nálga rúmmál amerísks fótbolta.

106. Betri nálgun á rúmmáli amerísks fótbolta fæst með snúðnum sem myndast þegar $y=\sin x$ er snúið um x-ásinn frá $x=0$ til $x=\pi$. Hvert er rúmmál þessa líkans af fótboltanum, eins og sýnt er hér?



107. Hvert er rúmmál Bundt-hringkökunnar sem fæst með því að snúa $y = \sin x$ um y-ásinn frá $x = 0$ til $x = \pi$?



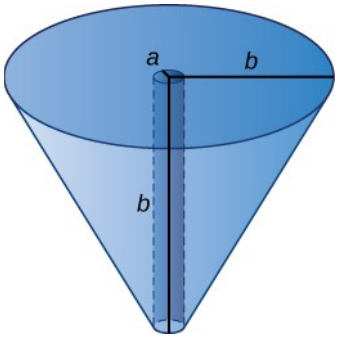


Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna rúmmál rúmhlutarins sem lýst er.

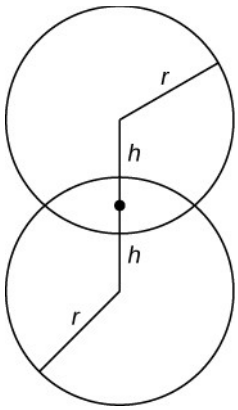
108. Grunnflöturinn er svæðið milli $y = x$ og $y = x^2$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

109. Grunnflöturinn er svæðið sem afmarkast af almenna sporbaugnum $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

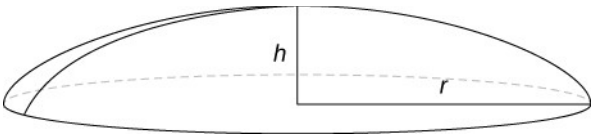
110. Borið gat með geisla a eftir ási réttrar keilu sem hefur hæðina b og geislann b. Gatið er borað gegnum grunnflöt keilunnar eins og sýnt er hér.



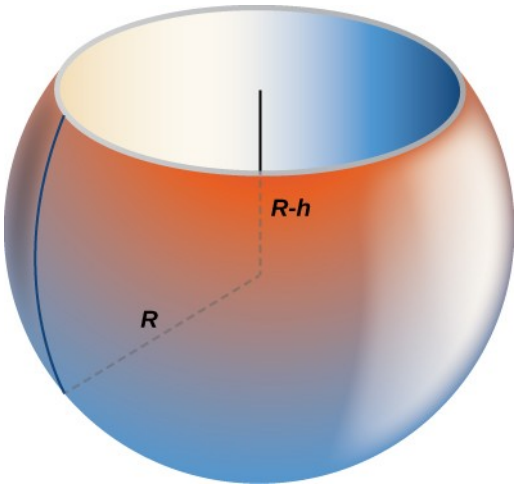
111. Finnið rúmmál sameiginlegs hluta tveggja kúlna með geisla r þegar fjarlægðin milli miðpunkta þeirra er $2\,h$, eins og sýnt er hér.



112. Finnið rúmmál kúluhatts með hæðina h og geislann r þar sem $h<r$, eins og sýnt er hér.



113. Finnið rúmmál kúlu með geisla R þegar kúluhattur með hæð h hefur verið fjarlægður ofan af henni, eins og sýnt er hér.



6.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki

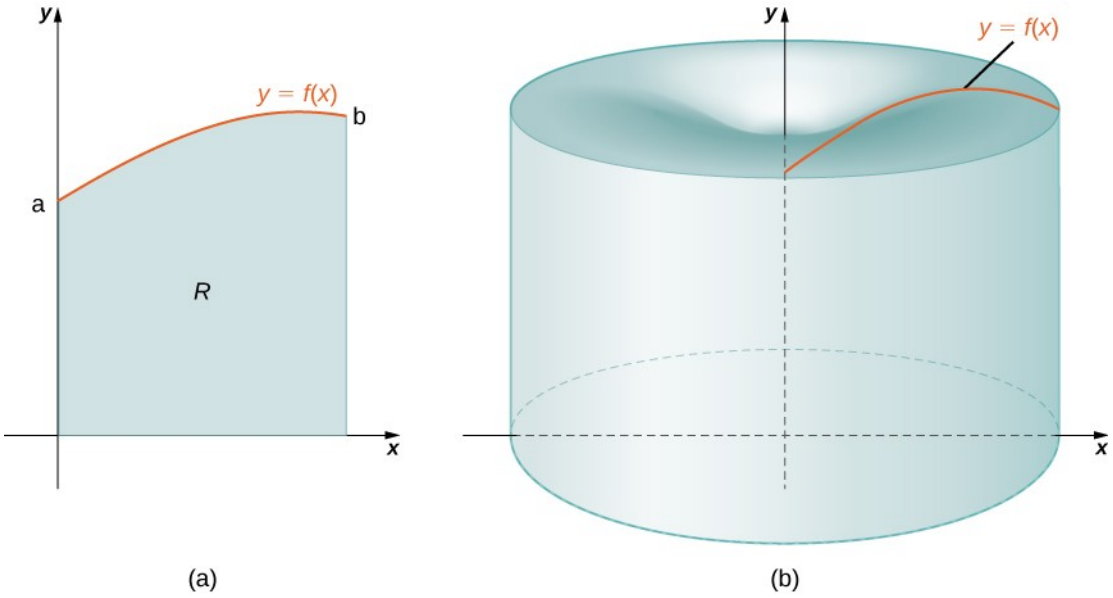
NÁMSMARKMIÐ

- 6.3.1 Reiknið rúmmál snúðs með hylkjaaðferðinni.
- 6.3.2 Berið saman mismunandi aðferðir til að reikna rúmmál snúðs.

Í þessum undirkafla skoðum við hylkjaaðferðina, síðustu aðferðina sem við fjöllum um til að reikna rúmmál snúðs. Hana má nota á sömu gerðir snúða og skífu- og hringkragaaðferðirnar. Með skífu- og hringkragaaðferðunum er heildað eftir hnitás sem er samsíða snúningsásnum. Með hylkjaaðferðinni er hins vegar heildað eftir hnitás sem er hornréttur á snúningsásinn. Þegar föllin eru flóknari getur skipt miklu máli að geta valið heildunarbreytuna. Lögun snúðsins getur einnig gert hylkjaaðferðina hentugri en hringkragaaðferðina. Í lok undirkaflans rifjum við upp allar aðferðirnar sem við höfum lært til að finna rúmmál. Við gefum líka nokkur ráð um hvaða aðferð hentar best hverju sinni.

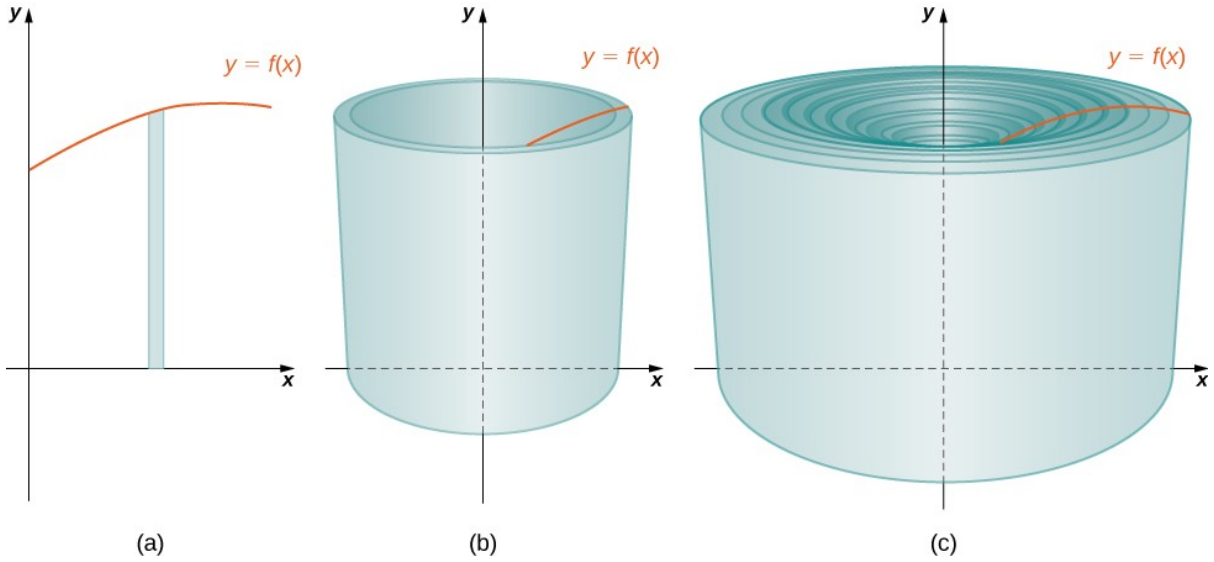
Hylkjaaðferðin

Við vinnum enn á ný með snúð. Eins og áður skilgreinum við svæði R, sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $y=f(x)$, að neðan af x-ásnum, og til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í þeirri röð, eins og sýnt er á mynd 6.25(a). Síðan snúum við svæðinu um y-ásinn, eins og sýnt er á mynd 6.25(b). Þetta er ólíkt því sem við höfum áður gert. Hingað til höfum við snúið svæðum sem skilgreind eru með föllum af x um x-ásinn eða línu sem er samsíða honum.



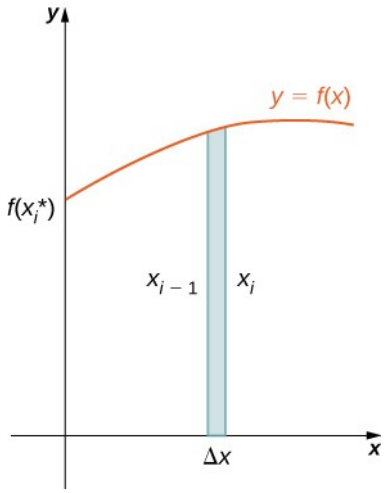
Mynd 6.25 (a) Svæði sem afmarkast af grafi falls af x. (b) Snúðurinn sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

Eins og oft áður skiptum við bilinu $[a,b]$ með reglulegri skiptingu, $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ og veljum fyrir $i=1,2,\ldots,n$, punkt $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$. Því næst myndum við rétthyrning yfir bilinu $[x_{i-1},x_i]$ með hæð $f(x_i^*)$ og breidd Δx. Dæmigerður rétthyrningur er sýndur á mynd 6.26(a). Þegar þessum rétthyrningi er snúið um y-ásinn fæst sívalningshylki í stað skífu eða hringkraga, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.26 (a) Dæmigerður rétthyrningur. (b) Þegar rétthyrningnum er snúið um y-ásinn, myndast sívalningshylki. (c) Þegar öll hylkin eru sett saman fæst nálgun á upprunalega snúðnum.

Til að reikna rúmmál hylkisins skoðum við mynd 6.27.



Mynd 6.27 Rúmmál hylkisins reiknað.

Hylkið er sívalningur, svo að rúmmál þess er þversniðsflatarmálið margfaldað með hæð sívalningsins. Þversniðin eru hringkragar (hringlaga svæði, í raun hringir með gati í miðjunni) með ytri geisla x_i og innri geisla x_{i-1}. Þversniðsflatarmálið er því $\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2$. Hæð sívalningsins er $f\left(x_i^*\right)$. Þá er rúmmál hylkisins

$$\begin{aligned} V_{\text{shell}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\tfrac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

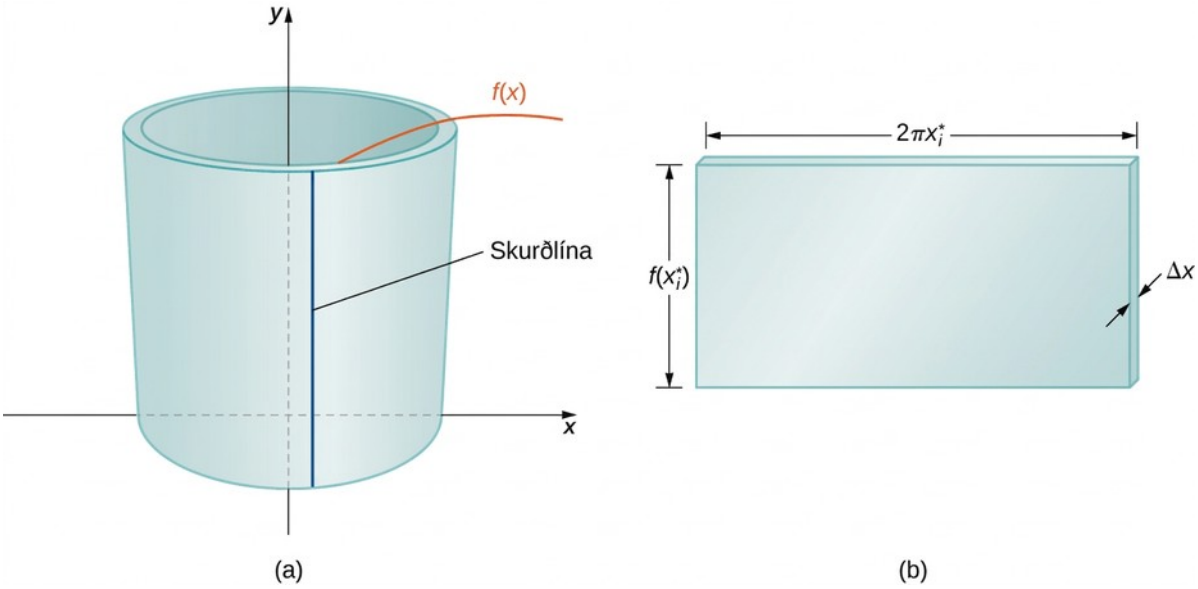
Athugið að $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, og því fæst

$$V_{\text{hylki}} = 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x.$$

Enn fremur er $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ bæði miðpunktur bilsins $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ og meðalgeisli hylkisins, sem nálga má með x_i^*. Þá fæst

$$V_{\text{hylki}} \approx 2\pi f\left(x_i^*\right) x_i^* \Delta x.$$

Önnur leið til að sjá þetta er að skera hylkið lóðrétt og opna það síðan þannig að úr verði flöt plata (mynd 6.28).



Mynd 6.28 (a) Skerið dæmigert hylki lóðrétt. (b) Opnið hylkið þannig að úr verði flöt plata.

Í raun er ytri geisli hylkisins stærri en innri geislinn og því væri aftari brún plötunnar örlítið lengri en fremri brún hennar. Hins vegar má nálga útflatta hylkið með flatri plötu sem hefur hæðina $f\left(x_i^*\right)$, breiddina $2\pi x_i^*$, og þykktina Δx (mynd 6.28). Rúmmál hylkisins er þá um það bil jafnt rúmmáli flötu plötunnar. Ef við margföldum saman hæð, breidd og þykkt plötunnar fáum við

$$V_{\text{hylki}} \approx f\left(x_i^*\right)\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x,$$

sem er sama formúla og við fengum áður.

Til að reikna rúmmál alls snúðsins leggjum við saman rúmmál allra hylkjanna og fáum

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \left(2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x\right).$$

Hér höfum við aðra Riemann-summu, nú fyrir fallið $2\pi x f(x)$. Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$ fæst

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x\right) = \int_a^b \left(2\pi x f(x)\right) dx.$$

Þetta leiðir til eftirfarandi reglu um hylkjaaðferðina.

REGLA: HYLKJAAÐFERÐIN

Látum $f(x)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af x-ásnum, til vinstri af línunni $x=a$, og til hægri af línunni $x=b$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn með

$$V=\int_a^b \left(2\pi x f(x)\right) dx.$$

(6.6)

Skoðum nú dæmi.

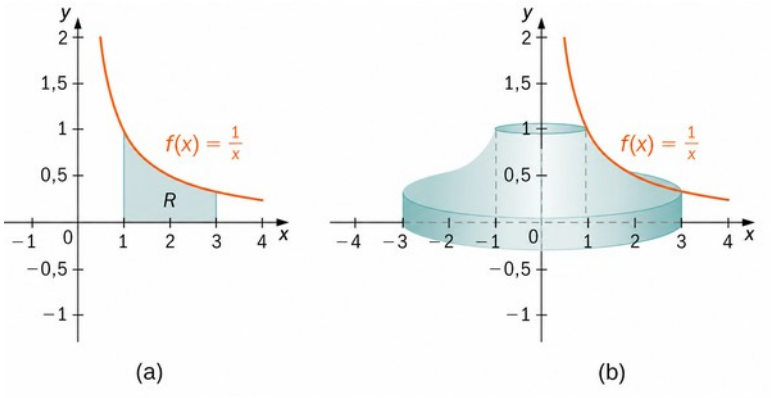
DÆMI 6.12

Hylkjaaðferðin 1

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=1/x$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[1,3]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Lausn

Fyrst teiknum við svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.29 (a) Svæðið R undir grafi $f(x)=1/x$ á bilinu $[1,3]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\,\pi\,x\,f\,(x))\,d\,x \\ &= \int_1^3 \left(2\,\pi\,x\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\ &= \int_1^3 2\,\pi\;d\,x = 2\,\pi\,x\big|_1^3 = 4\,\pi \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.12

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[1,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

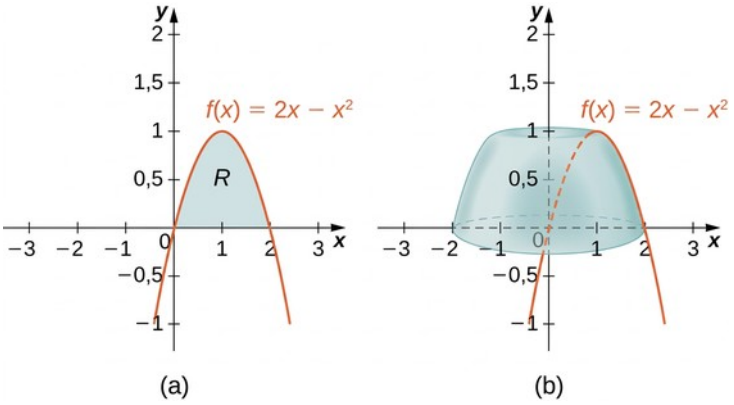
DÆMI 6.13

Hylkjaaðferðin 2

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=2x-x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Lausn

Teiknum fyrst svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.30 (a) Svæðið R undir grafi $f(x)=2x-x^2$ á bilinu $[0,2]$. (b) Snúðurinn sem fæst þegar R er snúið um y-ásinn.

Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx \\ &= \int_0^2 (2\pi x(2x-x^2))\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2-x^3)\,dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.13

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=3x-x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Líkt og skífu- og hringkragaaðferðirnar má nota hylkjaaðferðina á snúða um x-ásinn, þegar heilda á með tilliti til y. Samsvarandi regla fyrir slíka snúða fer hér á eftir.

REGLA: HYLKJAAÐFERÐIN FYRIR SNÚÐA UM X-ÁSINN

Látum $g(y)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y)$, til vinstri af y-ásnum, að neðan af línunni $y=c$, og að ofan af línunni $y=d$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um x-ásinn með

$$V = \int_c^d (2\pi\, y\, g(y))\, dy.$$

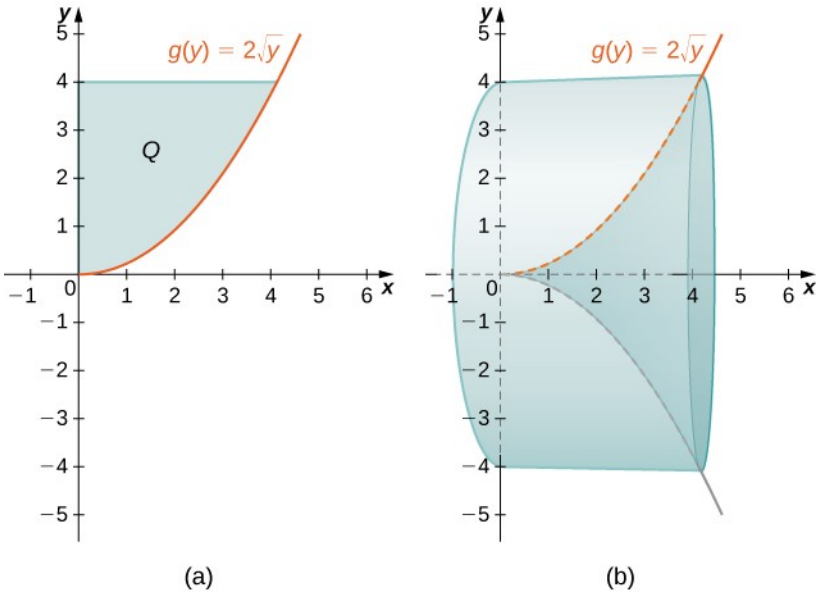
DÆMI 6.14

Hylkjaaðferðin fyrir snúð um x-ásinn

Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y) = 2\sqrt{y}$ og til vinstri af y-ásnum þegar $y \in [0, 4]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um x-ásinn.

Lausn

Fyrst teiknum við svæðið Q og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.31 (a) Svæðið Q vinstra megin við fallið $g(y)$ á bilinu $[0, 4]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar Q er snúið um x-ásinn.

Merkjum skyggða svæðið Q. Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d (2\,\pi\, y\, g(y))\, dy \\ &= \int_0^4 (2\,\pi\, y\, (2\sqrt{y}))\, dy = 4\,\pi \int_0^4 y^{3/2}\, dy \\ &= 4\,\pi \left[\frac{2\, y^{5/2}}{5}\right]\Big|_0^4 = \frac{256\,\pi}{5} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.14

Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y) = 3/y$ og til vinstri af y-ásnum þegar $y \in [1, 3]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um x-ásinn.

Í næsta dæmi skoðum við snúð sem myndast þegar svæði undir grafi falls er snúið um aðra línu en hnitásana. Til að setja dæmið fram þurfum við að rifja upp hvernig hylkjaaðferðin var leidd út. Áður fundum við að rúmmál eins hylkis fæst með

$$\begin{aligned} V_{\text{shell}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\tfrac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Þetta byggðist á hylki með ytri geisla x_i og innri geisla x_{i-1}. Ef svæðinu er hins vegar snúið um aðra línu en y-ásinn, verða ytri og innri geislinn aðrir. Gerum til dæmis ráð fyrir að svæðinu sé snúið um línuna $x = -k$, þar sem k er jákvæður fasti. Þá er ytri geisli hylkisins $x_i + k$ og innri geislinn $x_{i-1} + k$. Ef við setjum þessar stærðir inn í rúmmálsformúluna sjáum við að ef svæði í sléttu er snúið um línuna $x = -k$, fæst rúmmál hylkis með

$$\begin{aligned} V_{\text{shell}} &= 2\pi f(x_i^*)\left(\tfrac{(x_i + k) + (x_{i-1} + k)}{2}\right)\left((x_i + k) - (x_{i-1} + k)\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\left(\tfrac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) + k\right)\Delta x. \end{aligned}$$

Eins og áður tökum við eftir að $\dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$ er miðpunktur bilsins $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ og nálga má hann með x_i^*. Rúmmál hylkisins er þá um það bil

$$V_{\text{hylki}} \approx 2\pi\left(x_i^* + k\right) f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Afgangurinn af útleiðslunni er eins og áður og við fáum

$$V = \int_a^b \left(2\pi\left(x + k\right) f\left(x\right)\right) dx.$$

Svæðinu mætti einnig snúa um aðrar láréttar eða lóðréttar línur, svo sem lóðrétta línu í hægra hálfplaninu. Í hverju tilviki þarf að laga rúmmálsformúluna að aðstæðum. Nánar tiltekið þarf að setja stæðu sem táknar geisla hylkis í stað x-liður í heildinu. Eftirfarandi dæmi sýnir hvernig það er gert.

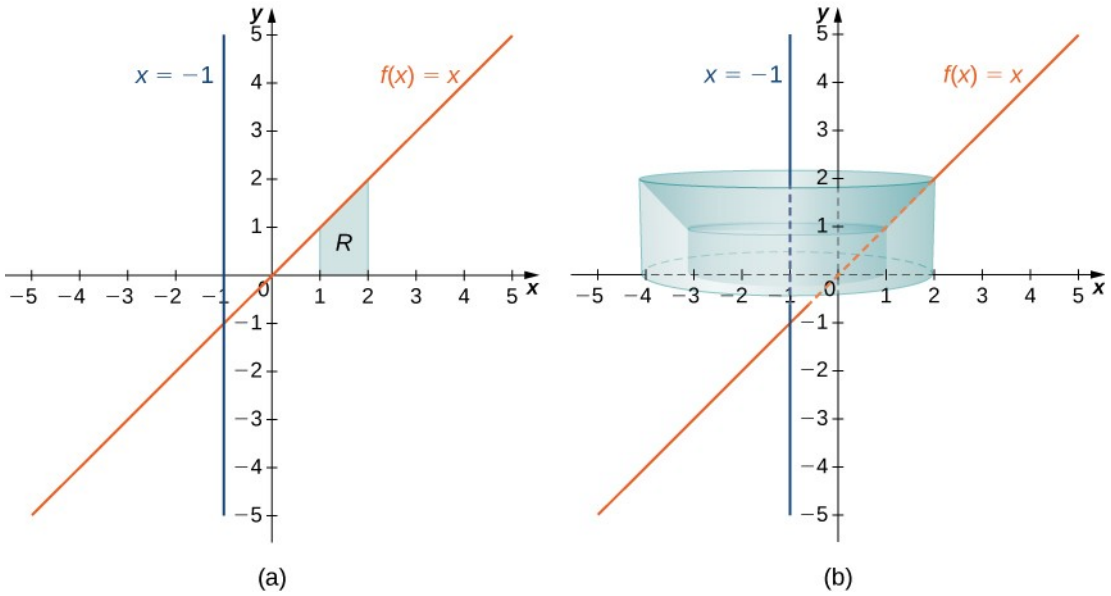
DÆMI 6.15

Snúningur svæðis um línu

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f\left(x\right) = x$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $\left[1, 2\right]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um línuna $x = -1$.

Lausn

Teiknum fyrst svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.32 (a) Svæðið R milli grafs $f(x)$ og x-ássins á bilinu $[1,2]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um línuna $x=-1$.

Athugið að geisli hylkisins er $x+1$. Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 (2\pi (x+1) f(x))\, dx \\ &= \int_1^2 (2\pi (x+1) x)\, dx = 2\pi \int_1^2 (x^2+x)\, dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{23\pi}{3} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.15

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,1]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um línuna $x=-2$.

Í síðasta dæmi þessa undirkafla skoðum við rúmmál snúðs sem myndast úr svæði sem afmarkast af gröfum tveggja falla.

6

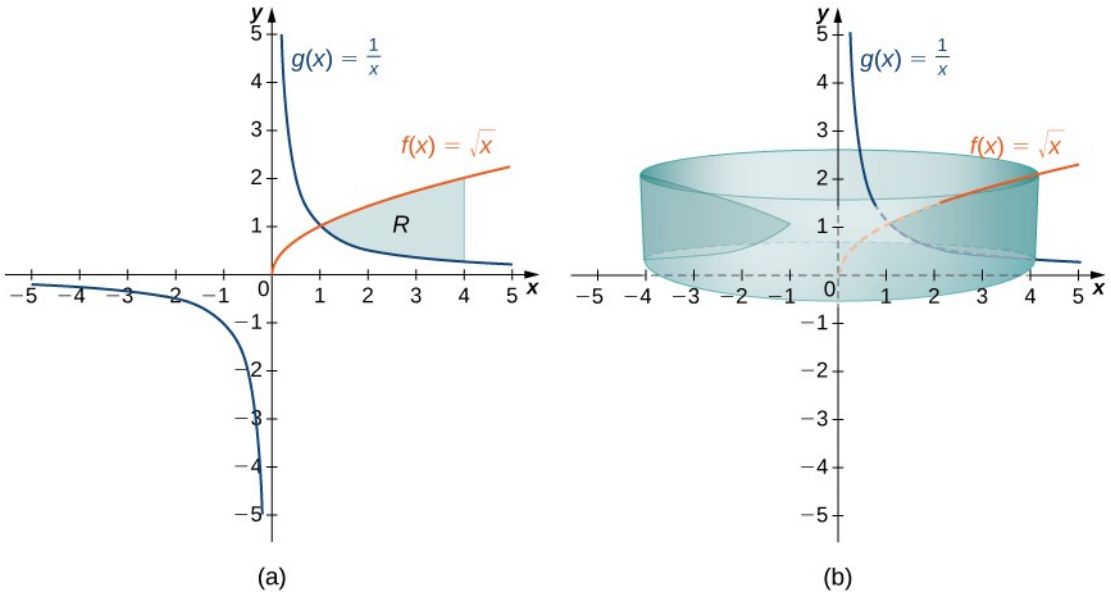
DÆMI 6.16

Svæði afmarkað af gröfum tveggja falla

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,4]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Lausn

Teiknum fyrst svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 6.33 (a) Svæðið R milli grafa fallanna $f(x)$ og $g(x)$ á bilinu $[1,4]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Athugið að snúningsásinn er y-ásnum, og því er geisli hylkisins einfaldlega x. Ekki þarf að breyta x-lið heildisstofnsins. Hæð hylkisins er hins vegar $f(x)-g(x)$, og því þarf í þessu tilviki að breyta $f(x)$-lið heildisstofnsins. Rúmmál snúðsins fæst því með

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 (2\pi x\,(f(x)-g(x)))\,dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi x\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\right)dx = 2\pi\int_1^4 (x^{3/2}-1)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2x^{5/2}}{5}-x\right]\Bigg|_1^4 = \frac{94\pi}{5}\ \text{einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.16

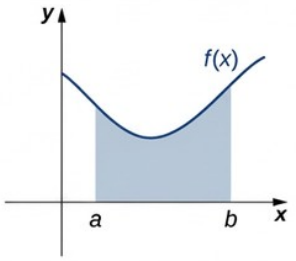
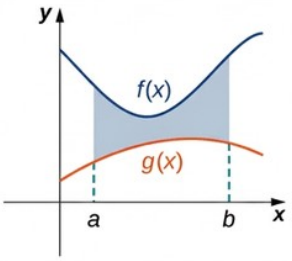
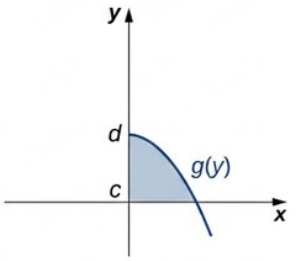
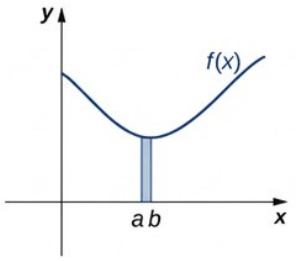
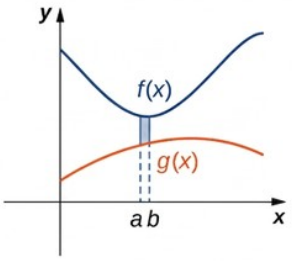
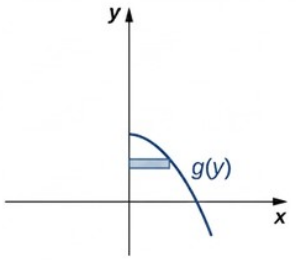
Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x$ og að neðan af grafi $g(x)=x^2$ á bilinu $[0,1]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

6

Hvaða aðferð eigum við að nota?

Við höfum kynnst nokkrum aðferðum til að finna rúmmál snúðs, en hvernig vitum við hvaða aðferð á að nota? Valið ræðst oft af því hvaða heildi er auðveldast að reikna. Mynd 6.34 lýsir mismunandi aðferðum fyrir snúða um x-ásinn. Útbúið hliðstæða töflu fyrir snúða um y-ásinn.

Samanburður á aðferðum til að finna rúmmál snúðs um x-ásinn

Samanburður	Skífuaðferð	Hringskífuaðferð	Hylkjaaðferð
Rúmmálsformúla	$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	$V = \int_a^b \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]\,dx$	$V = \int_c^d 2\pi y\,g(y)\,dy$
Snúður	Ekkert holrúm í miðjunni	Holrúm í miðjunni	Með eða án holrúms í miðjunni
Bil sem skipt er upp	$[a, b]$ á x-ás	$[a, b]$ á x-ás	$[c, d]$ á y-ás
Rétthyrningur	Lóðréttur	Lóðréttur	Láréttur
Dæmigert svæði			
Dæmigert rúmmálselement			

Mynd 6.34

Skoðum tvö verkefni til viðbótar og ákveðum hvaða aðferð hentar best til að leysa þau.

DÆMI 6.17

Hentugasta aðferðin valin

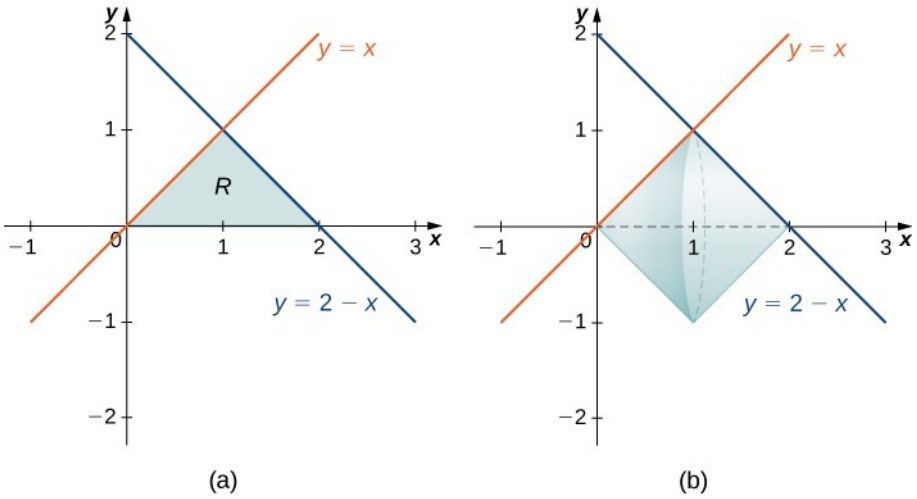
Veljið í hverju verkefni hér á eftir hentugustu aðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar gefna svæðinu er snúið um x-ásinn, og setjið upp heildið fyrir rúmmálið en reiknið það ekki.

a. Svæðið sem afmarkast af gröfunum $y = x$, $y = 2 - x$, og x-ásnum.

b. Svæðið sem afmarkast af grafinu $y = 4x - x^2$ og x-ásnum.

Lausn

a. Teiknum fyrst svæðið og snúðinn eins og sýnt er.



Mynd 6.35 (a) Svæðið R sem afmarkast af tveimur línum og x-ásnum. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um x-ásinn.

Ef við viljum heilda með tilliti til x, þarf að skipta heildinu í tvo hluta, því mismunandi föll afmarka svæðið á bilunum $[0,1]$ og $[1,2]$. Með skífuaðferðinni fengjum við þá

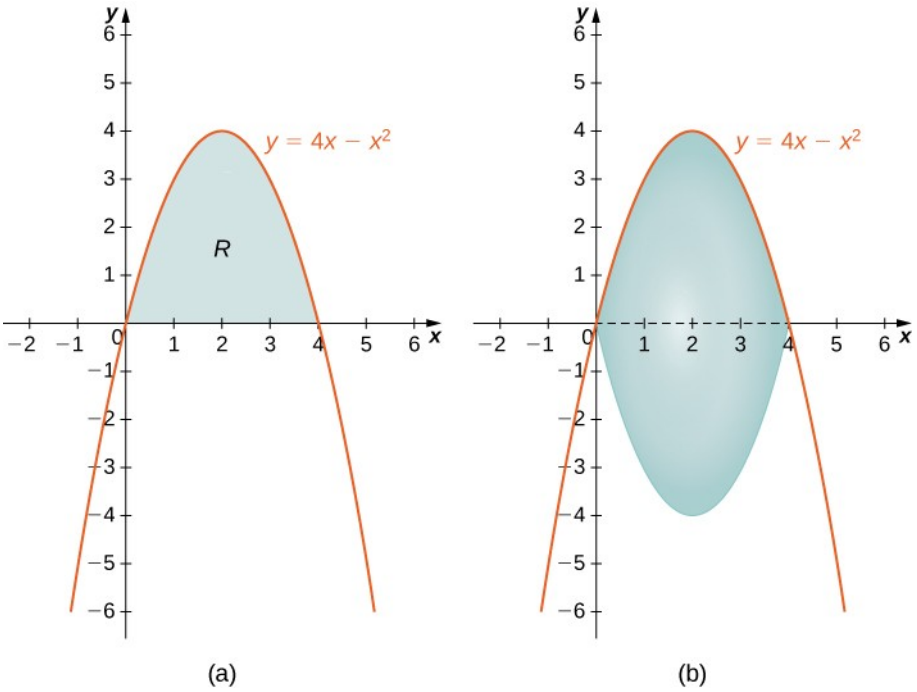
$$V = \int_0^1 \left(\pi x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\pi (2-x)^2\right) dx.$$

Ef við notuðum hylkjaaðferðina í staðinn lýstum við ferlunum með föllum af y og þá fengist

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi y\,[(2-y)-y])dy \\ &= \int_0^1 (2\pi y\,[2-2y])dy. \end{aligned}$$

Hvorugt þessara heilda er sérlega erfitt, en þar sem hylkjaaðferðin krefst aðeins eins heildis og heildisstofninn þarfnast minni einföldunar er líklega best að velja hylkjaaðferðina í þessu tilviki.

b. Teiknum fyrst svæðið og snúðinn eins og sýnt er.



Mynd 6.36 (a) Svæðið R milli ferilsins og x-ássins. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um x-ásinn.

Þegar svæðið er skoðað sést að erfitt væri að skilgreina láréttan rétthyrning, þar sem sama fall afmarkar svæðið bæði til vinstri og hægri. Því getum við útilokað hylkjaaðferðina. Snúðurinn hefur ekkert holrúm í miðjunni og því getum við notað skífuaðferðina. Þá fæst

$$V = \int_0^4 \pi \left(4x - x^2\right)^2 dx.$$

STÖÐUMAT 6.17

Veljið hentugustu aðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar gefna svæðinu er snúið um x-ásinn, og setjið upp heildið fyrir rúmmálið en reiknið það ekki: svæðið sem afmarkast af gröfum $y = 2 - x^2$ og $y = x^2$.

Æfingar úr undirkafla 6.3

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu milli ferlanna er snúið um gefinn ás. Notið bæði hylkjaaðferðina og hringkragaaðferðina. Notið tölvutækni til að teikna gröf fallanna og teiknið dæmigerða sneið í höndunum.

114. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y = 3x$, $x = 0$, og $y = 3$ er snúið um y-ásinn.

115. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y = 3x$, $y = 0$, og $x = 3$ er snúið um y-ásinn.

116. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=3x$, $y=0$, og $y=3$ er snúið um x-ásinn.

117. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=3x$, $y=0$, og $x=3$ er snúið um x-ásinn.

118. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=2x^3$, $y=0$, og $x=2$ er snúið um y-ásinn.

119. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=2x^3$, $y=0$, og $x=2$ er snúið um x-ásinn.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota hylkjaaðferðina til að finna rúmmál gefnu snúðanna. Athugið að svæðin sem snúið er liggja milli ferilsins og x-ássins og þeim er snúið um y-ásinn.

120.

$$y=1-x^2, x=0, \text{og } x=1$$

121.

$$y=5x^3, x=0, \text{og } x=1$$

122.

$$y=\frac{1}{x}, x=1, \text{og } x=100$$

123.

$$y=\sqrt{1-x^2}, x=0, \text{og } x=1$$

124.

$$y=\frac{1}{1+x^2}, x=0, \text{og } x=3$$

125.

$$y=\sin x^2, x=0, \text{og } x=\sqrt{\pi}$$

126.

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x=0, \text{og } x=\frac{1}{2}$$

127.

$$y=\sqrt{x}, x=0, \text{og } x=1$$

128.

$$y=\left(1+x^2\right)^3, x=0, \text{og } x=1$$

129.

$$y=5x^3-2x^4, x=0, \text{og } x=2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota hylkjaaðferðina til að finna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu milli gefna ferilsins og $y=0$ er snúið um x-ásinn.

130. $y=\sqrt{1-x^2}, x=0, x=1$ og x-ásinn

131. $y=x^2, x=0, x=2$ og x-ásinn

132. $y=\frac{x^3}{2}, x=0, x=2$, og x-ásinn

133. $y=\frac{2}{x^2}, x=1, x=2$, og x-ásinn

134.

$$x=\frac{1}{1+y^2}, y=4$$

135. $x=\frac{1+y^2}{y}, y=1, y=4$, og y-ásinn

136.

$$x=\sqrt{4-y^2}, x=0, y=0$$

137.

$$x=y^3-2y^2, x=0, x=9$$

138. $x=\sqrt{y}+1, x=1, x=3$, og x-ásinn

139.

$$x=\sqrt[3]{27y} \text{ og } x=\frac{3y}{4}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu milli ferlanna er snúið um gefinn ás.

6

140. $y=3-x, y=0, x=0,$ og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

141. $y=x^3, x=0,$ og $y=8$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

142. $y=x^2, y=x$, afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

143. $y=\sqrt{x}, y=0,$ og $x=1$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $x=2$.

144. $y=\frac{1}{4-x}, x=1, x=2$ og $y=0$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $x=4$.

145. $y=\sqrt{x}$ og $y=x^2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

146. $y=\sqrt{x}$ og $y=x^2$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $x=2$.

147. $x=y^3$, $x=\frac{1}{y}$, $x=1$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um x-ásinn.

148. $x=y^2$ og $y=x$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $y=2$.

149. **[T]** Svæðinu vinstra megin við $x=\sin(\pi y)$, og hægra megin við $y=x$, er snúið um y-ásinn.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota tölvutækni til að teikna svæðið. Ákvarðið hvaða aðferð þið teljið auðveldast að nota til að reikna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu er snúið um tilgreindan ás. Notið síðan aðferðina sem þið völduð til að finna rúmmálið.

150. **[T]** $y=x^2$ og $y=4x$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

151. **[T]** $y=\cos(\pi x)$, $y=\sin(\pi x)$, $x=\frac{1}{4}$, og $x=\frac{5}{4}$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

Þetta verkefni krefst flóknari heildunaraðferða. Þið megið nota tölvutækni við heildunina.

152. **[T]** $y=x^2-2x$, $x=2$, og $x=4$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

153. **[T]** $y=x^2-2x$, $x=2$, og $x=4$ afmarka svæði sem snúið er um x-ásinn.

154. **[T]** $y=3x^3-2$, $y=x$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um x-ásinn.

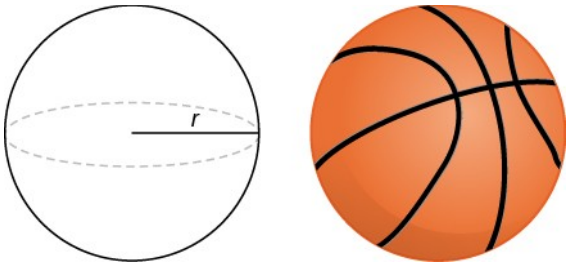
155. **[T]** $y=3x^3-2$, $y=x$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

156. **[T]** $x=\sin(\pi y^2)$ og $x=\sqrt{2}y$ afmarka svæði sem snúið er um x-ásinn.

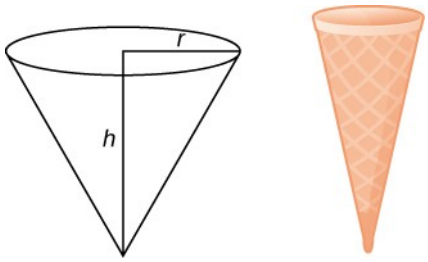
157. **[T]** $x=y^2$, $x=y^2-2y+1$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ásinn.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota hylkjaaðferðina til að nálga rúmmál nokkurra algengra hluta sem sýndir eru á meðfylgjandi myndum.

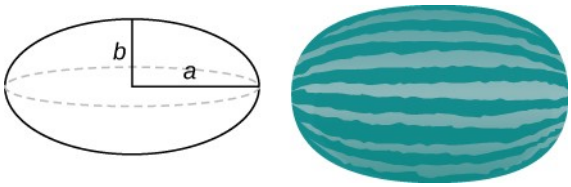
158. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál kúlu með geisla r.



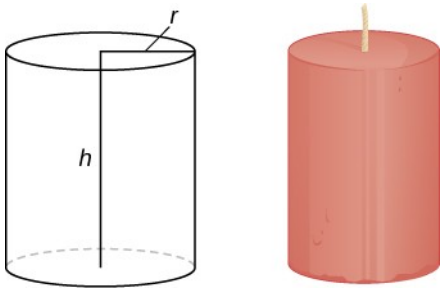
159. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál keilu með geisla r og hæð h.



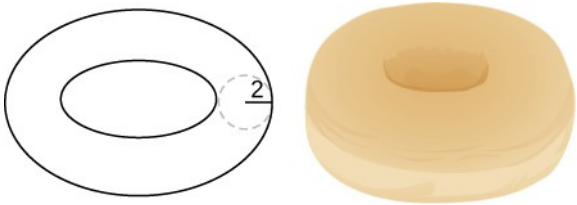
160. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál sporvölungsins sem fæst þegar sporbauginum $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ er snúið um x-ásinn.



161. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál sívalnings með geisla r og hæð h.



162. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál kleinuhringsins sem myndast þegar hringnum $x^2+y^2=4$ er snúið um línuna $x=4$.



6

163. Lítum á svæðið sem afmarkast af gröfum $y=f(x)$, $y=1+f(x)$, $x=0$, $y=0$, og $x=a>0$. Hvert er rúmmál snúðsins sem myndast þegar þessu svæði er snúið um y-ásinn? Gerið ráð fyrir að fallið sé skilgreint á bilinu $[0,a]$.

164. Lítum á fallið $y=f(x)$, sem minnkar frá $f(0)=b$ til $f(1)=0$. Svæðinu, sem afmarkast af grafi fallsins og línunum $x=0$ og $y=0$, er snúið um y-ásinn. Setjið upp heildi fyrir rúmmál snúðsins sem myndast, bæði með hylkjaaðferðinni og skífuaðferðinni, og sannið að þau gefi sama rúmmál. Hvorri aðferðinni er auðveldara að beita? (Vísbending: Þar sem $f(x)$ er eintækt er til andhverfa $f^{-1}(y)$.)

6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

NÁMSMARKMIÐ

- 6.4.1 Ákvarðið lengd ferils, $y=f(x)$, milli tveggja punkta.
- 6.4.2 Ákvarðið lengd ferils, $x=g(y)$, milli tveggja punkta.
- 6.4.3 Finnið yfirborðsflatarmál snúðs.

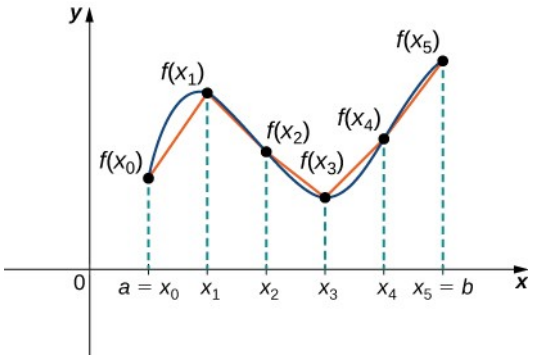
Í þessum undirkafla notum við ákveðin heildi til að finna bogalengd ferils. Líta má á bogalengd sem þá vegalengd sem við færum ef við gengjum eftir ferlinum. Bogalengd kemur fyrir í mörgum hagnýtum verkefnum. Ef eldflaug er skotið á loft eftir fleygboga gætum við viljað vita hve langt hún fer. Ef ferill á korti táknar veg gætum við sömuleiðis viljað vita hve langt þarf að aka til að komast á áfangastað.

Fyrst reiknum við bogalengd ferla sem skilgreindir eru sem föll af x, og skoðum síðan sömu aðferð fyrir ferla sem skilgreindir eru sem föll af y. (Aðferðin er sú sama, en hlutverkum x og y er víxlað.) Aðferðirnar við útreikning bogalengdar má einnig nota til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatar. Það hugtak skoðum við í lok undirkaflans.

Bogalengd ferilsins y = f(x)

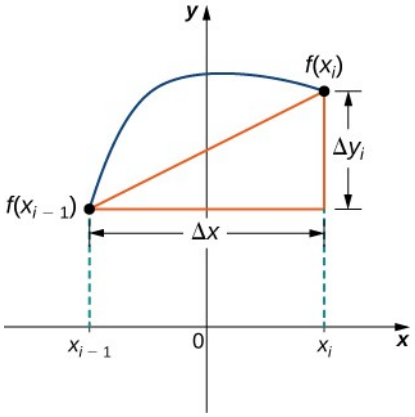
Þegar við notuðum heildun áður kröfðumst við aðeins þess að fallið $f(x)$ væri heildanlegt eða í mesta lagi samfellt. Við útreikning bogalengdar gerum við hins vegar strangari kröfur til $f(x)$. Hér þarf fallið $f(x)$ að vera deildanlegt og afleiðan, $f'(x)$, þarf að vera samfelld. Föll af þessu tagi, sem hafa samfelldar afleiður, kallast þjál. (Þessi eiginleiki kemur aftur fyrir í síðari köflum.)

Látum $f(x)$ vera þjált fall sem er skilgreint á $[a,b]$. Við viljum reikna lengd ferilsins frá punktinum $(a,f(a))$ að punktinum $(b,f(b))$. Við byrjum á að nálga lengd ferilsins með línustrikum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, drögum við síðan línustrik frá punktinum $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ að punktinum $(x_i,f(x_i))$. Þótt rökrétt kunni að virðast að nota annaðhvort lárétt eða lóðrétt línustrik viljum við að línustrikin nálgi ferilinn eins vel og kostur er. Mynd 6.37 sýnir þessa uppbyggingu fyrir $n=5$.



Mynd 6.37 Nálga má lengd ferils með því að leggja saman lengdir línustrika.

Til að finna lengd hvers línustriks skoðum við breytingu bæði á lóðréttri og láréttri fjarlægð á hverju bili. Skiptingin er regluleg og því er lárétta breytingin á hverju bili Δx. Lóðrétta breytingin er hins vegar mismunandi eftir bilum. Við notum því $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ til að tákna breytinguna á lóðréttri fjarlægð á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$, eins og sýnt er á mynd 6.38. Athugið að sum (eða öll) Δy_i kunna að vera neikvæð.



Mynd 6.38 Dæmigert línustrik nálgar ferilinn á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$.

Samkvæmt setningu Pýþagórasar er lengd línustriksins $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Einnig má rita þetta sem $\Delta x \sqrt{1 + \left((\Delta y_i)/(\Delta x)\right)^2}$. Samkvæmt meðalgildissetningunni er til punktur $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ þannig að $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/(\Delta x)$. Lengd línustriksins er því $\Delta x \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}$. Þegar lengdir allra línustrikanna eru lagðar saman fæst

$$\text{Bogalengd} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\, \Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$, fæst

$$\text{Bogalengd} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(x_i^*)\right]^2}\, \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx.$$

Við tökum þessar niðurstöður saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 6.4

Bogalengd fyrir y = f(x)

Látum $f(x)$ vera þjált fall á bilinu $[a,b]$. Þá fæst bogalengd þess hluta grafs $f(x)$ sem liggur frá punktinum $(a,f(a))$ að punktinum $(b,f(b))$ með

$$\text{Bogalengd} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

(6.7)

Athugið að við heildum stæðu sem inniheldur $f'(x)$, og því þurfum við að tryggja að $f'(x)$ sé heildanlegt. Þess vegna krefjumst við þess að $f(x)$ sé þjált. Næsta dæmi sýnir hvernig setningin er notuð.

DÆMI 6.18

Útreikningur á bogalengd falls af x

Látum $f(x)=2x^{3/2}$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[0,1]$. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

Lausn

Þar sem $f'(x)=3x^{1/2}$, er $\left[f'(x)\right]^2=9x$. Bogalengdin er því

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\;dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\;dx.\end{aligned}$$

Setjum $u=1+9x$. Þá er $du=9\,dx$. Þegar $x=0$, er $u=1$, og þegar $x=1$, er $u=10$. Því fæst

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\;dx \\ &= \frac{1}{9}\int_0^1 \sqrt{1+9x}\;9\,dx = \frac{1}{9}\int_1^{10}\sqrt{u}\;du \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\,u^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{2}{27}\left[10\sqrt{10}-1\right] \approx 2{,}268 \text{ einingar}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.18

Látum $f(x)=(4/3)x^{3/2}$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[0,1]$. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

Þótt gott sé að hafa formúlu til að reikna bogalengd getur þessi setning gefið stæður sem erfitt er að heilda. Við kynnum okkur nokkrar heildunaraðferðir í Inngangi að heildunaraðferðum. Stundum þarf að nota tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildisins.

DÆMI 6.19

Notkun tölvu eða reiknivélar til að ákvarða bogalengd falls af x

Látum $f(x)=x^2$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[1,3]$.

Lausn

Þar sem $f'(x)=2x$, er $[f'(x)]^2=4x^2$. Bogalengdin er þá gefin með

$$\text{Bogalengd}=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_1^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Þegar gildi heildisins er nálgað með tölvu fæst

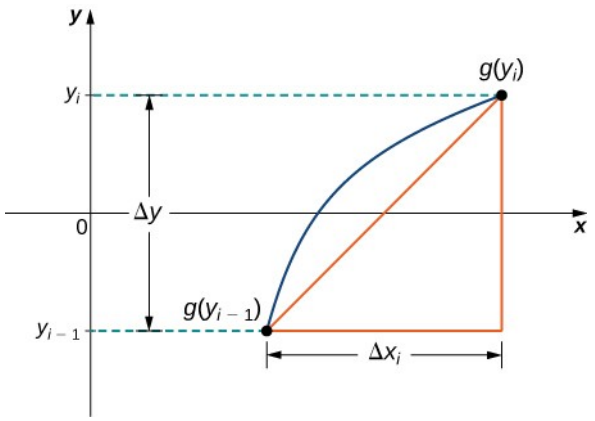
$$\int_1^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx\approx 8{,}26815.$$

STÖÐUMAT 6.19

Látum $f(x)=\sin x$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[0,\pi]$. Notið tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildisins.

Bogalengd ferilsins x = g(y)

Við höfum nú séð hvernig nálga má lengd ferils með línustrikum. Til að finna bogalengd grafs falls af y, förum við eins að. Í þetta sinn er skiptingarásinn y-ásinn í stað x-ássins. Mynd 6.39 sýnir dæmigert línustrik.



Mynd 6.39 Dæmigert línustrik á bilinu $[y_{i-1},y_i]$.

Þá er lengd línustriksins $\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta x_i)^2}$, sem einnig má rita sem $\Delta y\sqrt{1+\left((\Delta x_i)/(\Delta y)\right)^2}$. Með sömu röksemdafærslu og áður fæst formúla fyrir bogalengd fallsins $x=g(y)$.

SETNING 6.5

Bogalengd fyrir x = g(y)

Látum $g(y)$ vera þjált fall á y-bilinu $[c,d]$. Þá fæst bogalengd grafs $g(y)$ frá punktinum $(g(d),d)$ að punktinum $(g(c),c)$ með

$$\text{Bogalengd} = \int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy.$$

(6.8)

DÆMI 6.20

Útreikningur á bogalengd falls af y

Látum $g(y)=3y^3$. Reiknið bogalengd grafs $g(y)$ á bilinu $[1,2]$.

Lausn

Þar sem $g'(y)=9y^2$, er $\left[g'(y)\right]^2=81y^4$. Bogalengdin er því

$$\text{Bogalengd} = \int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1+81y^4}\,dy.$$

Þegar gildi heildisins er nálgað með tölvu fæst

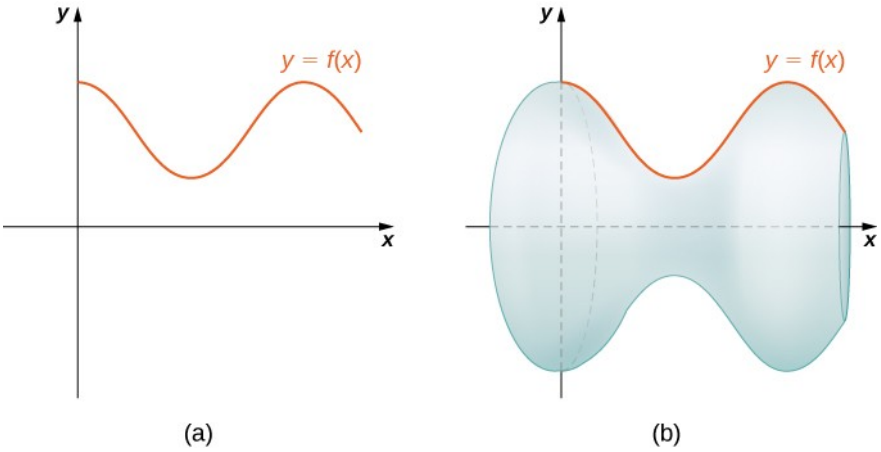
$$\int_1^2 \sqrt{1+81y^4}\,dy \approx 21{,}0277.$$

STÖÐUMAT 6.20

Látum $g(y)=1/y$. Reiknið bogalengd grafs $g(y)$ á bilinu $[1,4]$. Notið tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildisins.

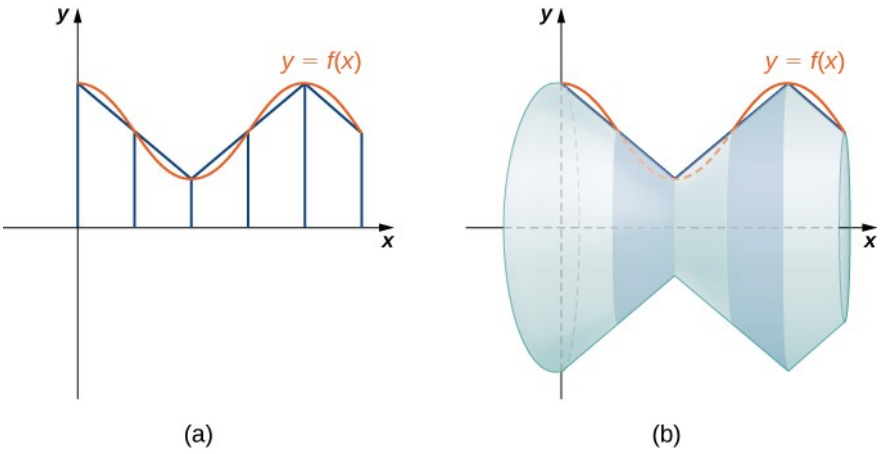
Yfirborðsflatarmál snúðflatar

Aðferðirnar við útreikning bogalengdar má einnig nota til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatar. Yfirborðsflatarmál er samanlagt flatarmál ytra byrðis hlutar. Fyrir hluti á borð við teninga eða múrsteina er yfirborðsflatarmál hlutarins summa flatarmála allra flata hans. Þegar yfirborðið er bogið er málið aðeins flóknara. Látum $f(x)$ vera óneikvætt þjált fall á bilinu $[a,b]$. Við viljum finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $y=f(x)$ er snúið um x-ásinn eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 6.40 (a) Ferill sem táknar fallið $f(x)$. (b) Snúðflöturinn sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ásinn.

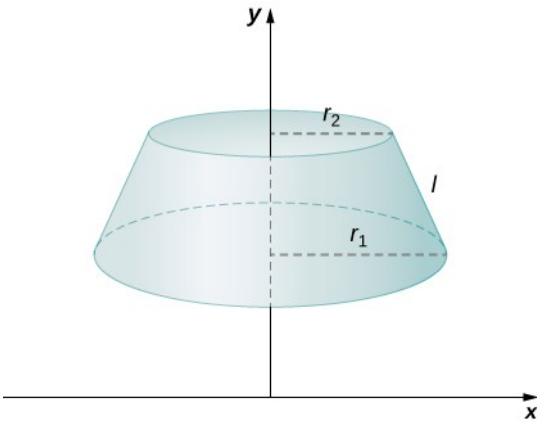
Eins og við höfum oft gert áður skiptum við bilinu $[a,b]$ og nálgum yfirborðsflatarmálið með því að reikna yfirborðsflatarmál einfaldari forma. Við byrjum á að nálga ferilinn með línustrikum, eins og við gerðum fyrr í þessum undirkafla. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, drögum við síðan línustrik frá punktinum $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ að punktinum $(x_i,f(x_i))$. Nú snúum við þessum línustrikum um x-ásinn til að fá nálgun á snúðfletinum, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 6.41 (a) Nálgun á $f(x)$ með línustrikum. (b) Snúðflöturinn sem myndast þegar línustrikunum er snúið um x-ásinn.

Takið eftir að þegar hverju línustriki er snúið um ásinn myndast ræma. Ræmurnar eru í raun hlutar af keilum (hugsið ykkur ískeilu þar sem oddurinn hefur verið skorinn af). Slíkur hluti keilu kallast keilustúfur.

Til að finna yfirborðsflatarmál ræmunnar þurfum við að finna hliðarflatarmál keilustúfsins, S, (aðeins flatarmál hallandi ytra borðs keilustúfsins, án efri og neðri grunnflatanna). Látum r_1 og r_2 vera geisla víðari og mjórri enda keilustúfsins, í sömu röð, og látum l vera hliðarlengd hans, eins og sýnt er á næstu mynd.

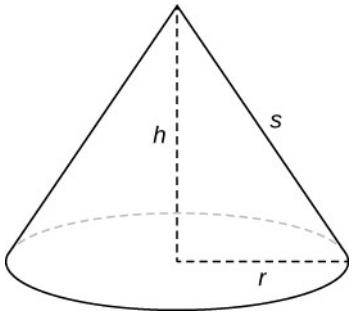


Mynd 6.42 Keilustúf má nota til að nálga lítinn hluta yfirborðsins.

Við vitum að hliðarflatarmál keilu er gefið með

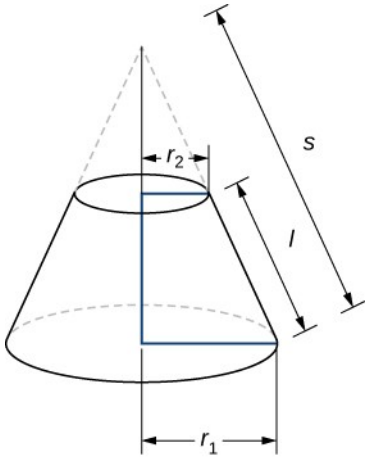
$$\text{Hliðarflatarmál} = \pi r s,$$

þar sem r er geisli grunnflatar keilunnar og s er hliðarlengdin (sjá næstu mynd).



Mynd 6.43 Hliðarflatarmál keilunnar er gefið með $\pi r s$.

Líta má á keilustúf sem hluta af keilu. Hliðarflatarmál hans fæst því með því að draga hliðarflatarmál minni keilunnar (oddsins sem var skorinn af) frá hliðarflatarmáli allrar keilunnar (sjá næstu mynd).



Mynd 6.44 Hliðarflatarmál keilustúfs reiknað.

Þversnið litlu og stóru keilnanna eru einslaga þríhyrningar. Því gildir að

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{s-l}{s}.$$

Þegar við einangrum s, fæst

$$\begin{aligned}
\tfrac{r_2}{r_1} &= \tfrac{s-l}{s} \\
r_2 s &= r_1(s-l) \\
r_2 s &= r_1 s - r_1 l \\
r_1 l &= r_1 s - r_2 s \\
r_1 l &= (r_1 - r_2)s \\
\tfrac{r_1 l}{r_1 - r_2} &= s.
\end{aligned}$$

Hliðarflatarmál keilustúfsins er því

S = (hliðarflatarmál stóru keilunnar) – (hliðarflatarmál litlu keilunnar)

$$=\pi r_1 s-\pi r_2 (s-l)$$

$$=\pi r_1\left(\frac{r_1 l}{r_1-r_2}\right)-\pi r_2\left(\frac{r_1 l}{r_1-r_2}-l\right)$$

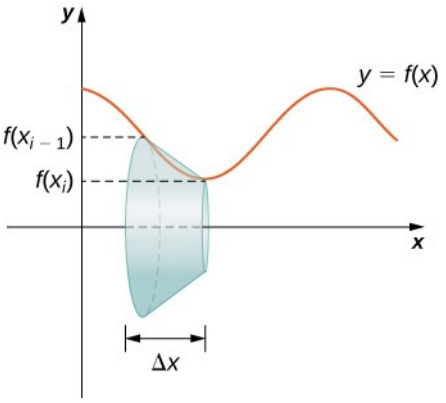
$$=\frac{\pi r_1^2 l}{r_1-r_2}-\frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1-r_2}+\pi r_2 l$$

$$=\frac{\pi r_1^2 l}{r_1-r_2}-\frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1-r_2}+\frac{\pi r_2 l (r_1-r_2)}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{\pi r_1^2 l}{r_1-r_2}-\frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1-r_2}+\frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1-r_2}-\frac{\pi r_2{}^2 l}{r_1-r_2}$$

$$=\frac{\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)l}{r_1-r_2}=\frac{\pi\left(r_1-r_2\right)\left(r_1+r_2\right)l}{r_1-r_2}=\pi\left(r_1+r_2\right)l.$$

Nú notum við þessa formúlu til að reikna yfirborðsflatarmál hverrar ræmu sem myndast þegar línustrikunum er snúið um x-ásinn. Dæmigerð ræma er sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.45 Dæmigerð ræma sem notuð er til að ákvarða yfirborðsflatarmál.

Takið eftir að hliðarlengd keilustúfsins er einmitt lengd línustriksins sem myndar hann. Formúlan fyrir yfirborðsflatarmál gefur því

$$\begin{aligned} S &= \pi(r_1+r_2)l \\ &= \pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{\Delta x^2+(\Delta y_i)^2} \\ &= \pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\Delta x\sqrt{1+\left(\tfrac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Nú beitum við meðalgildissetningunni, eins og við gerðum þegar við leiddum út formúluna fyrir bogalengd, til að velja $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ þannig að $f'(x_i^*)=(\Delta y_i)/\Delta x$. Þá fæst

$$S=\pi\left(f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_i\right)\right)\Delta x\sqrt{1+\left(f'\left(x_i^*\right)\right)^2}.$$

Þar að auki er $f(x)$ samfellt og því segir milligildissetningin að til sé punktur $x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$ þannig að $f(x_i^{**})=(1/2)\left[f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_i\right)\right]$, og því fæst

$$S=2\pi f\left(x_i^{**}\right)\Delta x\sqrt{1+\left(f'\left(x_i^*\right)\right)^2}.$$

Nálgun á yfirborðsflatarmáli alls snúðflatarins fæst þá með

$$\text{Yfirborðsflatarmál} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^{**}\right)\Delta x\sqrt{1+\left(f'\left(x_i^*\right)\right)^2}.$$

Þetta lítur nánast út eins og Riemann-summa, nema föllin eru reiknuð í tveimur mismunandi punktum, x_i^* og x_i^{**}, á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$. Við förum ekki nánar út í smáatriðin hér, en vegna þess að $f(x)$ er þjált fæst sama markgildi og fyrir Riemann-summu þegar $n \to \infty$,

þrátt fyrir punktana tvo. Þetta kemur heim og saman við innsæið. Bæði x_i^* og x_i^{**} eru á bilinu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, og þegar $n \to \infty$, nálgast bæði x_i^* og x_i^{**} gildið x. Nánari rökstuðning má finna í ítarlegri kennslubók í stærðfræðigreiningu.

Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$, fæst

$$\text{Yfirborðsflatarmál} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^{**}\right) \Delta x \sqrt{1+\left(f'\left(x_i^*\right)\right)^2} = \int_a^b \left(2\pi f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right) dx.$$

Eins og fyrir bogalengd má leiða út sambærilega formúlu fyrir föll af y til að fá yfirborðsflatarmál snúðflata um y-ásinn. Við tökum niðurstöðurnar saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 6.6

Yfirborðsflatarmál snúðflatar

Látum $f(x)$ vera óneikvætt þjált fall á bilinu $[a, b]$. Þá fæst yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ásinn með

$$\text{Yfirborðsflatarmál} = \int_a^b \left(2\pi f(x) \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right) dx.$$

(6.9)

Látum á sama hátt $g(y)$ vera óneikvætt þjált fall á bilinu $[c, d]$. Þá fæst yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $g(y)$ er snúið um y-ásinn með

$$\text{Yfirborðsflatarmál} = \int_c^d \left(2\pi g(y) \sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\right) dy.$$

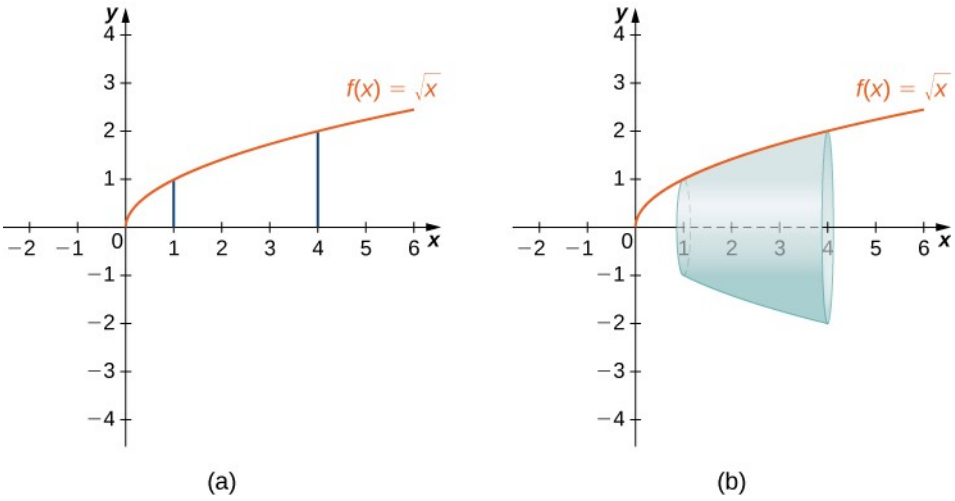
DÆMI 6.21

Útreikningur á yfirborðsflatarmáli snúðflatar 1

Látum $f(x) = \sqrt{x}$ á bilinu $[1, 4]$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ásinn. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

Lausn

Graf $f(x)$ og snúðflöturinn eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.46 (a) Graf $f(x)$. (b) Snúðflöturinn.

Við höfum $f(x)=\sqrt{x}$. Þá eru $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$ og $(f'(x))^2=1/(4x)$. Því fæst

$$\begin{aligned}\text{Yfirborðsflatarmál} &= \int_a^b (2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2})\,dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\right)dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)dx.\end{aligned}$$

Setjum $u=x+1/4$. Þá er $du=dx$. Þegar $x=1$, $u=5/4$, og þegar $x=4$, $u=17/4$. Því fæst

$$\int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)dx = \int_{5/4}^{17/4} 2\pi\sqrt{u}\,du$$

$$=2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_{5/4}^{17/4}=\frac{\pi}{6}[17\sqrt{17}-5\sqrt{5}]\approx 30{,}846.$$

STÖÐUMAT 6.21

Látum $f(x)=\sqrt{1-x}$ á bilinu $[0,1/2]$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ásinn. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

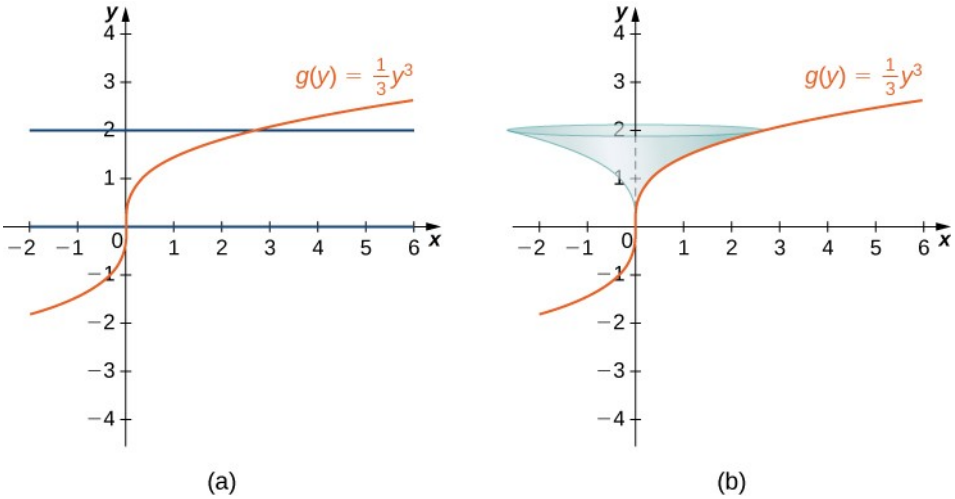
DÆMI 6.22

Útreikningur á yfirborðsflatarmáli snúðflatar 2

Látum $f(x)=y=\sqrt[3]{3x}$. Skoðið þann hluta ferilsins þar sem $0\le y\le 2$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um y-ásinn.

Lausn

Takið eftir að ferlinum er snúið um y-ásinn, og að bilið er gefið með tilliti til y, og þess vegna viljum við umrita fallið sem fall af y. Þá fæst $x=g(y)=(1/3)y^3$. Graf $g(y)$ og snúðflöturinn eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.47 (a) Graf $g(y)$. (b) Snúðflöturinn.

Við höfum $g(y)=(1/3)y^3$, svo að $g'(y)=y^2$ og $(g'(y))^2=y^4$. Því fæst

$$\begin{aligned}\text{Yfirborðsflatarmál} &= \int_c^d (2\pi\, g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2})\,dy \\ &= \int_0^2 \left(2\pi\left(\frac{1}{3}y^3\right)\sqrt{1+y^4}\right) dy \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^2 (y^3\sqrt{1+y^4})\,dy.\end{aligned}$$

Setjum $u=y^4+1$. Þá er $du=4y^3\,dy$. Þegar $y=0$, $u=1$, og þegar $y=2$, $u=17$. Því fæst

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{3}\int_0^2 (y^3\sqrt{1+y^4})\,dy &= \frac{2\pi}{3}\int_1^{17}\frac{1}{4}\sqrt{u}\,du \\ &= \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{9}\left[(17)^{3/2}-1\right]\approx 24{,}118.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.22

Látum $g(y)=\sqrt{9-y^2}$ á bilinu $y\in[0,2]$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $g(y)$ er snúið um y-ásinn.

Æfingar í undirkafla 6.4

Finnið lengd grafa fallanna á gefnu bili í eftirfarandi æfingum.

165.

$$y=5x \text{ frá } x=0 \text{ til } x=2$$

166.

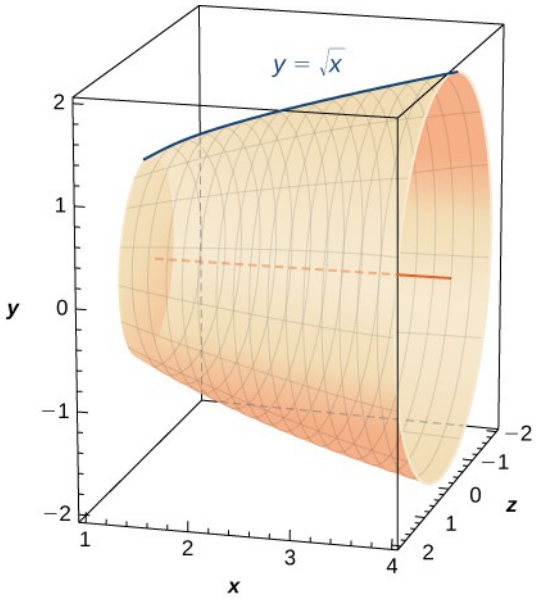
$$y=-\frac{1}{2}x+25 \text{ frá } x=1 \text{ til } x=4$$

167.

$$x=4y \text{ frá } y=-1 \text{ til } y=1$$

168. Veljið eitthvert línulegt fall $x=g(y)$ og eitthvert bil (y_1, y_2). Ákvarðið lengd grafs fallsins og sannið síðan með rúmfræði að lengdin sé rétt.

169. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=\sqrt{x}$ er snúið um x-ásinn frá $(1,1)$ til $(4,2)$, eins og sést hér.



170. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=x^2$ er snúið um y-ásinn frá $(1,1)$ til $(3,9)$.



Finnið lengd grafa fallanna af x á gefnu bili í eftirfarandi æfingum. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með tölvu eða reiknivél.

171. $y=x^{3/2}$ frá $(0,0)$ til $(1,1)$

172. $y=x^{2/3}$ frá $(1,1)$ til $(8,4)$

173. $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{3/2}$ frá $x=0$ til $x=1$

174. $y=\frac{1}{3}\left(x^2-2\right)^{3/2}$ frá $x=2$ til $x=4$

175. **[T]** $y=e^x$ frá $x=0$ til $x=1$

176. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ frá $x=1$ til $x=3$

177. $y=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^2}$ frá $x=1$ til $x=2$

178. $y=\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^{1/2}}{2}$ frá $x=1$ til $x=4$

179. $y=\frac{1}{27}\left(9x^2+6\right)^{3/2}$ frá $x=0$ til $x=2$

180. **[T]** $y=\sin x$ frá $x=0$ til $x=\pi$

Finnið lengd grafa fallanna af y á gefnu bili í eftirfarandi æfingum. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með tölvu eða reiknivél.

181. $y=\frac{5-3x}{4}$ frá $y=0$ til $y=4$

182. $x=\frac{1}{2}\left(e^y+e^{-y}\right)$ frá $y=-1$ til $y=1$

183. $x=5y^{3/2}$ frá $y=0$ til $y=1$

184. **[T]** $x=y^2$ frá $y=0$ til $y=1$

185. $x=\sqrt{y}$ frá $y=0$ til $y=1$

186. $x=\frac{2}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}$ frá $y=1$ til $y=3$

187. **[T]** $x=\tan y$ frá $y=0$ til $y=\frac{3}{4}$

188. **[T]** $x=\cos^2 y$ frá $y=-\frac{\pi}{2}$ til $y=\frac{\pi}{2}$

189. **[T]** $x=4^y$ frá $y=0$ til $y=2$

190. **[T]** $x=\ln(y)$ frá $y=\frac{1}{e}$ til $y=e$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar hverjum ferli er snúið um x-ásinn. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með reiknivél.

191. $y=\sqrt{x}$ frá $x=2$ til $x=6$

192. $y=x^3$ frá $x=0$ til $x=1$

193. $y=7x$ frá $x=-1$ til $x=1$

194. [T] $y=\frac{1}{x^2}$ frá $x=1$ til $x=3$

195. $y=\sqrt{4-x^2}$ frá $x=0$ til $x=2$

196. $y=\sqrt{4-x^2}$ frá $x=-1$ til $x=1$

197. $y=5x$ frá $x=1$ til $x=5$

198. [T] $y=\tan x$ frá $x=-\frac{\pi}{4}$ til $x=\frac{\pi}{4}$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar hverjum ferli er snúið um y-ásinn. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með reiknivél.

199. $y=x^2$ frá $x=0$ til $x=2$

200. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ frá $x=0$ til $x=1$

201. $y=x+1$ frá $x=0$ til $x=3$

202. [T] $y=\frac{1}{x}$ frá $x=\frac{1}{2}$ til $x=1$

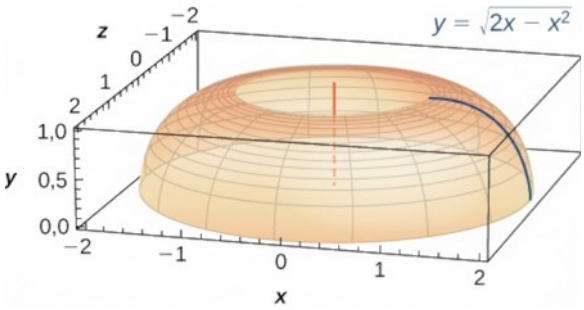
203. $y=\sqrt[3]{x}$ frá $x=1$ til $x=27$

204. [T] $y=3x^4$ frá $x=0$ til $x=1$

205. [T] $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ frá $x=1$ til $x=3$

206. [T] $y=\cos x$ frá $x=0$ til $x=\frac{\pi}{2}$

207. Lampafótur fæst með því að snúa fjórðungshringnum $y=\sqrt{2x-x^2}$ um y-ásinn frá $x=1$ til $x=2$, eins og sést hér. Setjið fram heildi fyrir yfirborðsflatarmál þessa snúðflatar og reiknið það.



208. Ljósapera er kúla með geisla $5/2$ cm. Neðan af henni er skorinn hluti svo að hún falli nákvæmlega að sívalningi með geisla $5/4$ cm og hæð $5/3$ cm, eins og hér sést. Þar sem skurðurinn fellur nákvæmlega að sívalningnum er geisli skurðhringsins $5/4$ cm. Finnið yfirborðsflatarmál (án efri og neðri grunnflatar sívalningsins).



209. **[T]** Lampaskermur fæst með því að snúa $y = 1/x$ um x-ásinn frá $y = 1$ til $y = 2$, eins og sést hér. Ákvarðið hve mikið efni þarf í skerminn, það er yfirborðsflatarmál hans, með fjórum aukastöfum.



210. **[T]** Akkeri dregst á eftir bát samkvæmt fallinu $y = 24e^{-x/2} - 24$, þar sem y táknar dýptina undir bátnum og x lárétta fjarlægð akkerisins frá skut bátsins. Ef akkerið er 23 metra undir bátnum, hve langt reipi þarf að draga inn til að ná akkerinu? Námundið svarið að þremur aukastöfum.

6

211. **[T]** Þið eruð að smíða brú sem verður 10 metrar að lengd. Þið ætlið að setja á hana skrautreipi í laginu $y = 5\left|\sin\left((x\pi)/5\right)\right|$, þar sem x er fjarlægðin í metrum frá öðrum enda brúarinnar. Finnið hve marga heila metra af reipi þið þurfið að kaupa.

Finnið nákvæma bogalengd á gefnu bili í eftirfarandi æfingum.

212. $y = \ln(\sin x)$ frá $x = \pi/4$ til $x = (3\pi)/4$. (Vísbending: Rifjið upp hornafallasamsemdir.)

213. **[T]** Teiknið gröf $y=x^2$, $y=x^6$, og $y=x^{10}$. Fyrir $y=x^n$, þegar n vex, setjið fram tilgátu um bogalengdina milli $(0,0)$ og $(1,1)$. Reiknið síðan lengd grafs hvers þessara þriggja falla og kannið hvort tilgátan var rétt.

214. Berið saman lengd fleygbogans $x=y^2$ og línunnar $x=b$ y frá $(0,0)$ til (b^2,b) þegar b vex. Hverju takið þið eftir?

215. Reiknið lengd $x=y^2$ frá $(0,0)$ til $(1,1)$. Sýnið að $x=(1/2)y^2$ frá $(0,0)$ til $(2,2)$ sé tvöfalt lengri. Teiknið gröf beggja fallanna og útskýrið hvers vegna svo er.

216. **[T]** Hvor ferill er lengri milli $(1,1)$ og $(2,1/2)$: breiðboginn $y=1/x$ eða línan $x+2y=3$?

217. Útskýrið hvers vegna yfirborðsflatarmálið er óendanlegt þegar grafinu $y=1/x$ er snúið um x-ásinn fyrir $1\le x<\infty$, en rúmmálið er endanlegt.

6.5 Hagnýting í eðlisfræði

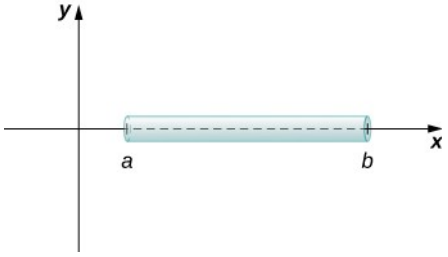
NÁMSMARKMIÐ

- 6.5.1 Ákvarðið massa einvíðs hlutar út frá línuþéttleikafalli hans.
- 6.5.2 Ákvarðið massa tvívíðs hringlaga hlutar út frá geislaþéttleikafalli hans.
- 6.5.3 Reiknið vinnu breytilegs krafts sem verkar eftir línu.
- 6.5.4 Reiknið vinnuna við að dæla vökva úr einni hæð í aðra.
- 6.5.5 Finnið kraftinn vegna vökvastöðuþrýstings á lóðrétta plötu á kafi.

Í þessum undirkafla skoðum við nokkur dæmi um hagnýtingu heildunar í eðlisfræði. Við byrjum á því að reikna massa út frá þéttleikafalli. Síðan beinum við sjónum að vinnu og ljúkum undirkaflanum með umfjöllun um kraft vegna vökvastöðuþrýstings.

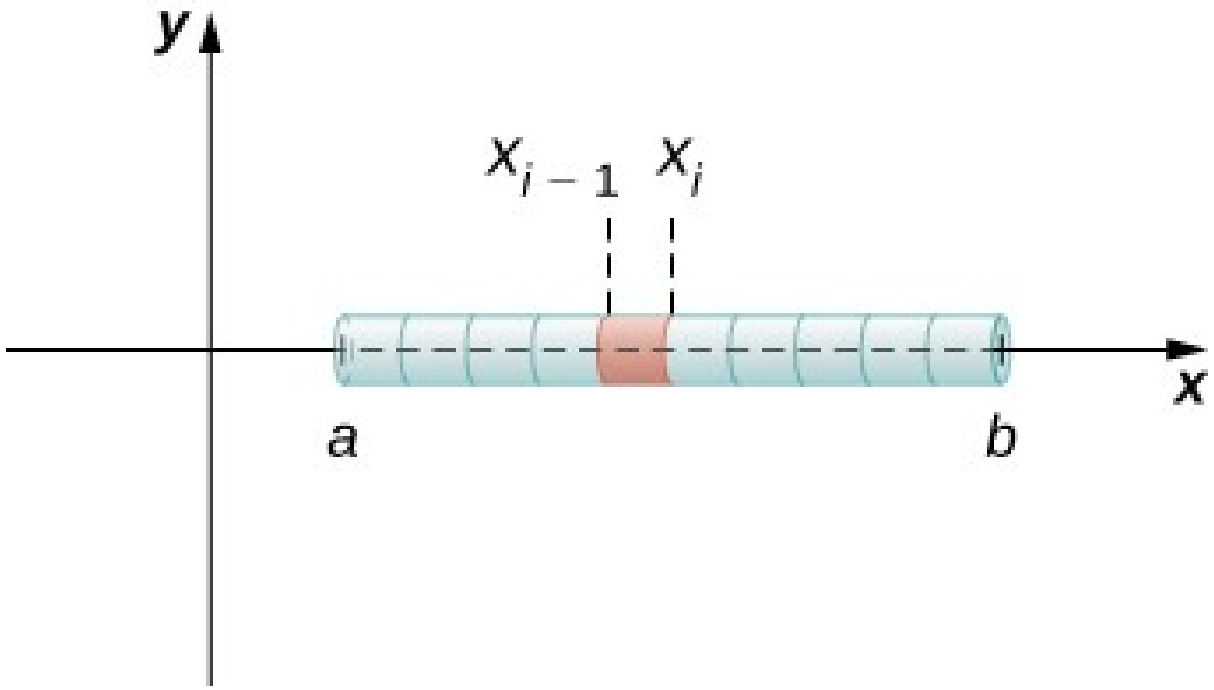
Massi og þéttleiki

Með heildun má leiða út formúlu til að reikna massa út frá þéttleikafalli. Fyrst skoðum við granna stöng eða vír. Leggjum stöngina eftir x-ásnum, þannig að vinstri endi hennar sé við $x=a$ og hægri endinn við $x=b$ (mynd 6.48). Á myndunum er stöngin sýnd með nokkurri þykkt, en í útreikningunum gerum við ráð fyrir að hún sé svo grönn að líta megi á hana sem einvíðan hlut.



Mynd 6.48 Reikna má massa grannrar stangar sem liggur eftir x-ásnum með því að heilda þéttleikafall hennar.

Ef stöngin hefur fastan þéttleika ρ, gefinn sem massi á lengdareiningu, er massi hennar einfaldlega margfeldi þéttleikans og lengdar stangarinnar: $(b-a)\rho$. Ef þéttleiki stangarinnar er ekki fastur verður verkefnið hins vegar nokkru flóknara. Þegar þéttleiki stangarinnar breytist frá punkti til punkts notum við línuþéttleikafall, $\rho(x)$, til að tákna þéttleika hennar í hverjum punkti x. Látum $\rho(x)$ vera heildanlegt línuþéttleikafall. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$ látum við nú $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$ veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Mynd 6.49 sýnir dæmigerðan hluta stangarinnar.



Mynd 6.49 Dæmigerður hluti stangarinnar.

Massi m_i stangarhlutans frá x_{i-1} til x_i er nálgaður með

$$m_i \approx \rho(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Með því að leggja saman massa allra hlutanna fáum við nálgun á massa allrar stangarinnar:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Með því að taka markgildið þegar $n \to \infty$, fæst stæða fyrir nákvæman massa stangarinnar:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Við setjum niðurstöðuna fram í eftirfarandi setningu.

SETNING 6.7

Formúla fyrir massa og línuþéttleika einvíðs hlutar

Látum granna stöng liggja eftir x-ásnum á bilinu $[a,b]$, og $\rho(x)$ tákna línuþéttleikafall sem gefur þéttleika stangarinnar í punkti x á bilinu. Þá er massi stangarinnar gefinn með

$$m=\int_a^b \rho(x)\,dx.$$

(6.10)

Við beitum setningunni í næsta dæmi.

DÆMI 6.23

Útreikningur massa út frá línuþéttleika

Lítum á granna stöng sem liggur eftir x-ásnum á bilinu $[\pi/2,\pi]$. Ef línuþéttleiki stangarinnar er gefinn með $\rho(x)=\sin x$, hver er þá massi stangarinnar?

Lausn

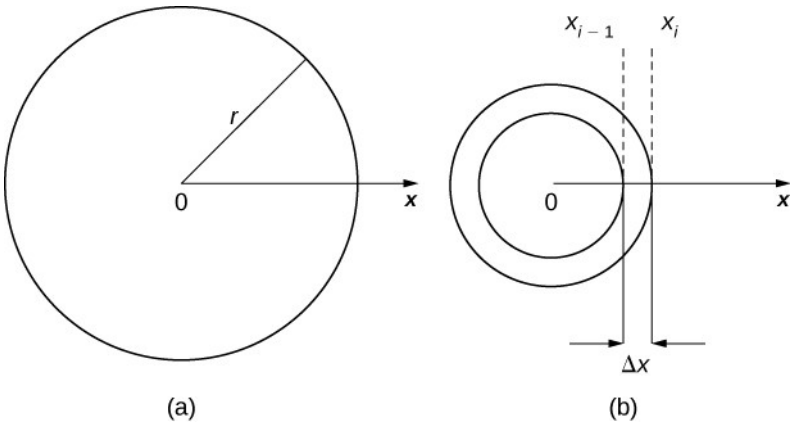
Með því að beita jöfnu 6.10 beint fáum við

$$m=\int_a^b \rho(x)\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1.$$

STÖÐUMAT 6.23

Lítum á granna stöng sem liggur eftir x-ásnum á bilinu $[1,3]$. Ef línuþéttleiki stangarinnar er gefinn með $\rho(x)=2x^2+3$, hver er þá massi stangarinnar?

Nú útvíkkum við hugmyndina til að finna massa tvívíðrar skífu með geisla r. Eins og með stöngina í einvíða tilvikinu gerum við ráð fyrir að skífan sé svo þunn að í stærðfræðilegum tilgangi megi líta á hana sem tvívíðan hlut. Við gerum ráð fyrir að þéttleikinn sé gefinn sem massi á flatarmálseiningu (kallaður flatarþéttleiki) og jafnframt að þéttleikinn breytist aðeins eftir geisla skífunnar (kallaður geislaþéttleiki). Við leggjum skífuna í xy-slétta, með miðju í upphafspunktinum. Þá má líta á þéttleika skífunnar sem fall af x, táknað $\rho(x)$. Við gerum ráð fyrir að $\rho(x)$ sé heildanlegt. Þar sem þéttleikinn er fall af x, skiptum við bilinu $[0,r]$ eftir x-ásnum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[0,r]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$. Notum síðan skiptinguna til að skipta skífunni í þunna (tvívíða) hringkraga. Skífa og dæmigerður hringkragi eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.50 (a) Þunn skífa í xy-planinu. (b) Dæmigerður hringkragi.

Nú nálgum við þéttleika og flatarmál hringkragans til að nálga massann, m_i. Athugið að flatarmál hringkragans er gefið með

$$\begin{aligned} A_i &= \pi(x_i)^2 - \pi(x_{i-1})^2 \\ &= \pi\left[x_i^2 - x_{i-1}^2\right] \\ &= \pi\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \pi(x_i + x_{i-1})\Delta x. \end{aligned}$$

Þið munið ef til vill að við fengum svipaða stæðu þegar við reiknuðum rúmmál með hylkjaaðferðinni. Líkt og þar notum við $x_i^* \approx \left(x_i + x_{i-1}\right)/2$ til að nálga meðalgeisla hringkragans. Við fáum

$$A_i = \pi\left(x_i + x_{i-1}\right)\Delta x \approx 2\pi x_i^* \Delta x.$$

Með því að nota $\rho\left(x_i^*\right)$ til að nálga þéttleika hringkragans nálgum við massa hans með

$$m_i \approx 2\pi x_i^* \rho\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Þegar við leggjum saman massa hringkraganna sjáum við að massi m allrar skífunnar er nálgaður með

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Við sjáum aftur að þetta er Riemann-summa og tökum markgildið þegar $n \to \infty$. Þá fæst

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho\left(x_i^*\right)\Delta x = \int_0^r 2\pi x\,\rho(x)\,dx.$$

Við tökum niðurstöðurnar saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 6.8

Formúla fyrir massa og geislaþéttleika hringlaga hlutar

Látum $\rho(x)$ vera heildanlegt fall sem táknar geislaþéttleika skífu með geisla r. Þá er massi skífunnar gefinn með

$$m = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx.$$

(6.11)

DÆMI 6.24

Útreikningur á massa út frá geislaþéttleika

Látum $\rho(x) = \sqrt{x}$ tákna geislaþéttleika skífu. Reiknið massa skífu með geisla 4.

Lausn

Með formúlunni fáum við

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx \\ &= \int_0^4 2\pi x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= 2\pi \tfrac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \tfrac{4\pi}{5}[32] = \tfrac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.24

Látum $\rho(x) = 3x + 2$ tákna geislaþéttleika skífu. Reiknið massa skífu með geisla 2.

Vinna sem kraftur vinnur

Nú skoðum við vinnu. Í eðlisfræði tengist vinna krafti, sem oft er lýst lauslega sem ýtingu eða togi á hlut. Þegar kraftur færir hlut úr stað segjum við að krafturinn vinni vinnu á hlutnum. Með öðrum orðum má líta á vinnu sem orkuna sem þarf til að færa hlut úr stað. Þegar krafturinn er fastur má samkvæmt eðlisfræði lýsa vinnu sem margfeldi krafts og vegalengdar.

Í SI-kerfinu (metrakerfinu) er kraftur mældur í njútonum og vegalengd í metrum, svo vinna er gefin í njútonmetrum. Eitt njúton er sá kraftur sem þarf til að gefa 1 kílógrammi af massa hröðunina 1 m/sek². Algengasta eining vinnu er því njútonmetri. Sama eining nefnist einnig júl. Báðar einingarnar eru skilgreindar sem kílógrömm sinnum metrar í öðru veldi deilt með sekúndum í öðru veldi $\left(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\right)$.

Þegar kraftur er fastur eru útreikningarnir einfaldir. Kraftur er þó sjaldnast fastur. Vinnan við að þjappa gormi saman (eða teygja hann) breytist til dæmis eftir því hve mikið gorminum hefur þegar verið þjappað saman (eða hann teygður). Við skoðum gorma nánar síðar í þessum undirkafla.

Gerum ráð fyrir breytilegum krafti $F(x)$ sem færir hlut í jákvæða stefnu eftir x-ásnum frá punkti a að punkti b. Til að reikna vinnuna skiptum við bilinu $[a,b]$ og metum vinnuna á hverju hlutbili. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við því $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Til að reikna vinnuna við að færa hlut frá punkti x_{i-1} að punkti x_i, gerum við ráð fyrir að krafturinn sé nokkurn veginn fastur á bilinu og notum $F(x_i^*)$ til að nálga kraftinn. Vinnan á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$, er þá gefin með

$$W_i \approx F(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i^*)\Delta x.$$

Því er vinnan á bilinu $[a,b]$ um það bil

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x.$$

Ef við tökum markgildi þessarar stæðu þegar $n \to \infty$ fáum við nákvæmt gildi vinnunnar:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Við getum því skilgreint vinnu á eftirfarandi hátt.

SKILGREINING

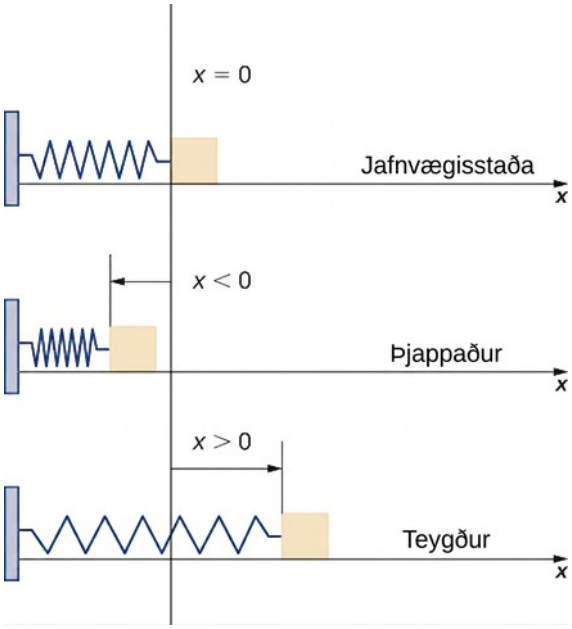
Ef breytilegur kraftur $F(x)$ færir hlut í jákvæða stefnu eftir x-ásnum frá punkti a að punkti b, þá er vinnan sem unnin er á hlutnum

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

(6.12)

Athugið að ef F er fasti, þá er gildi heildisins $F \cdot (b-a) = F \cdot d$, sem er formúlan sem við settum fram í upphafi þessa undirkafla.

Lítum nú á tiltekið dæmi um vinnuna sem unnin er við að þjappa saman gormi eða teygja hann. Hugsum okkur kubb sem festur er við láréttan gorm. Kubburinn hreyfist fram og til baka þegar gormurinn teygist og þjappast saman. Í raunverulegum aðstæðum þyrftum við að taka tillit til núningskraftsins milli kubbsins og yfirborðsins sem hann hvílir á, en hér lítum við fram hjá núningi og gerum ráð fyrir að kubburinn hvíli á núningslausu yfirborði. Þegar gormurinn hefur náttúrulega lengd sína (er í hvíld) segjum við að kerfið sé í jafnvægi. Þá er gormurinn hvorki teygður né samanþjappaður og kubburinn hreyfist ekki úr jafnvægisstöðunni fyrr en krafti er beitt. Við veljum hnitakerfið þannig að $x=0$ samsvari jafnvægisstöðunni (sjá næstu mynd).



Mynd 6.51 Kubbur festur við láréttan gorm þegar gormurinn er í jafnvægisstöðu, samanþjappaður og teygður.

Samkvæmt lögmáli Hookes er krafturinn sem þarf til að þjappa gormi saman eða teygja hann frá jafnvægisstöðu gefinn með $F(x)=k\,x$, fyrir einhvern fasta k. Gildi k ræðst af eðliseiginleikum gormsins. Fastinn k nefnist gormstuðull og er alltaf jákvæður. Við getum notað þessar upplýsingar til að reikna vinnuna við að þjappa gormi saman eða teygja hann, eins og sýnt er í næsta dæmi.

DÆMI 6.25

Vinnan sem þarf til að teygja eða þjappa gormi

Suppose it takes a force of 10 N (in the negative direction) to compress a spring 0,2 m from the equilibrium position. How much work is done to stretch the spring 0,5 m from the equilibrium position?

Lausn

Finnum fyrst gormstuðulinn k. Þegar $x=-0{,}2$, vitum við að $F(x)=-10$, svo að

$$\begin{aligned} F(x) &= k\,x \\ -10 &= k(-0{,}2) \\ k &= 50 \end{aligned}$$

og $F(x)=50\,x$. Til að reikna vinnuna heildum við síðan kraftfallið og fáum

$$W=\int_a^b F(x)\,dx=\int_0^{0{,}5} 50\,x\,dx=25\,x^2\Big|_0^{0{,}5}=6{,}25.$$

The work done to stretch the spring is 6,25 J.

STÖÐUMAT 6.25

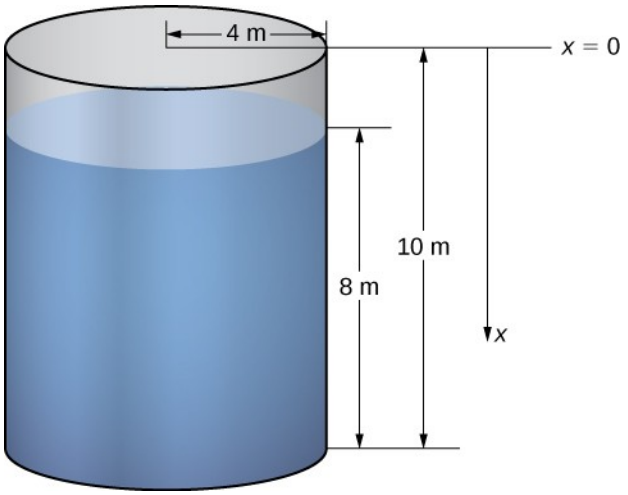
Gerum ráð fyrir að 8 N kraft þurfi til að teygja gorm 10 cm frá jafnvægisstöðu. Hve mikil vinna er unnin við að teygja gorminn 20 cm frá jafnvægisstöðu?

Vinna við dælingu

Skoðum vinnuna við að dæla vatni (eða öðrum vökva) úr tanki. Dæluverkefni eru nokkru flóknari en gormaverkefni því margir útreikningar ráðast af lögun og stærð tanksins. Auk þess skoðum við nú vinnuna við að færa tiltekið rúmmál af vatni en ekki einn hlut með tiltekinn massa. Meiri vinnu þarf til að færa vatn af botni tanksins en vatn sem er efst í honum.

Við skoðum ferlið fyrst fyrir sívalan tank og síðan nokkur dæmi með tönkum af annarri lögun. Gerum ráð fyrir að sívalur tankur með geisla 4 m og hæð 10 m sé fylltur af vatni upp í 8 m dýpt. Hve mikla vinnu þarf til að dæla öllu vatninu upp yfir efri brún tanksins?

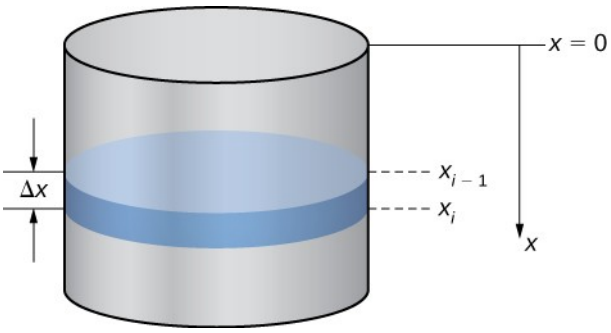
Fyrst þurfum við að skilgreina viðmiðunarkerfi. Látum x tákna lóðrétta fjarlægð niður frá efri brún tanksins. Með öðrum orðum látum við x-ásnum liggja lóðrétt, með upphafspunktinn efst í tankinum og jákvæða stefnu niður á við (sjá næstu mynd).



Mynd 6.52 Hve mikla vinnu þarf til að tæma tank sem er að hluta fylltur af vatni?

6

Í þessu hnitakerfi nær vatnið frá $x=2$ til $x=10$. Við skiptum því bilinu $[2,10]$ og skoðum vinnuna sem þarf til að lyfta hverju einstöku „lagi“ vatns. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[2,10]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Mynd 6.53 sýnir dæmigert lag.



Mynd 6.53 Dæmigert vatnslag.

Í dæluverkefnum þarf krafturinn sem lyftir vatninu upp að efri brún tanksins að vinna gegn þyngdaraflinu. Hann er því jafn þyngd vatnsins. Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m^3 (eðlismassinn 1000 kg/m^3 sinnum þyngdarhröðunin 9,8 m/sek2), svo að þyngdin fæst með því að reikna rúmmál hvers lags. Í þessu tilviki fæst

$$V = \pi (4)^2 \Delta x = 16\pi \Delta x.$$

Þá er krafturinn sem þarf til að lyfta hverju lagi

$$F = 9800 \cdot 16\ \pi \Delta x = 156.800\ \pi \Delta x.$$

Athugið að þetta skref verður nokkru flóknara ef tankurinn er ekki sívalur. Við skoðum slíkan tank í næsta dæmi.

Við þurfum einnig að vita hve hátt þarf að lyfta vatninu. Miðað við hnitakerfið sem við völdum getum við notað x_i^* sem nálgun á vegalengdina sem þarf að lyfta laginu. Þá er vinnan við að lyfta *i* th vatnslaginu W_i um það bil

$$W_i \approx 156.800\ \pi\ x_i^* \Delta x.$$

Með því að leggja saman vinnuna fyrir hvert lag sjáum við að áætluð vinna við að tæma tankinn er gefin með

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 156,800\, \pi\, x_i^* \Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa og með því að taka markgildið þegar $n \to \infty$, fæst

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 156.800\ \pi\ x_i^* \Delta x \\ &= 156.800\ \pi \int_2^{10} x\ d\ x \\ &= 156.800\ \pi \left[\frac{x^2}{2} \right] \Big|_2^{10} = 7.526.400\ \pi \approx 23.644.883. \end{aligned}$$

Vinnan sem þarf til að tæma tankinn er um það bil 23.650.000 J.

Útreikningar í dæluverkefnum ráðast af lögun tanksins eða ílátsins. Eftirfarandi lausnarleið lýsir skref fyrir skref hvernig leysa má dæluverkefni.

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Lausn dælingarverkefna

1. Teiknið mynd af tankinum og veljið hentugt viðmiðunarkerfi.
2. Reiknið rúmmál dæmigerðs vatnslags.
3. Margfaldið rúmmálið með þyngdarþéttleika vatns til að fá kraftinn.
4. Reiknið vegalengdina sem þarf að lyfta vatnslaginu.
5. Margfaldið kraftinn með vegalengdinni til að fá mat á vinnunni sem þarf til að lyfta vatnslaginu.
6. Leggið saman vinnuna sem þarf til að lyfta öllum lögunum. Þessi stæða er mat á vinnunni sem þarf til að dæla út tilskildu vatnsmagni og er á formi Riemann-summu.
7. Takið markgildið þegar $n \to \infty$ og reiknið heildið sem fæst til að finna nákvæma vinnu við að dæla út tilskildu vatnsmagni.

Nú notum við þessa lausnarleið í dæmi með ósívölum tanki.

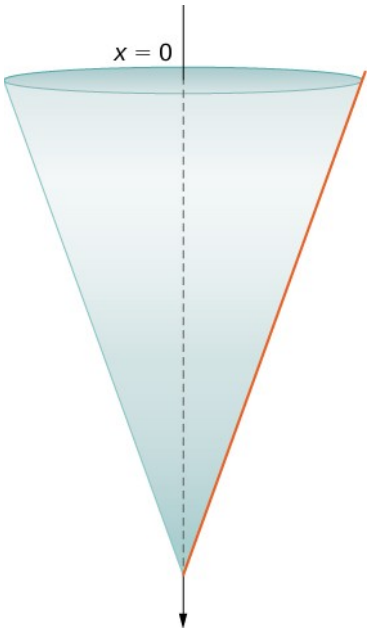
DÆMI 6.26

Dælingarverkefni með ósívalningslaga geymi

Gerum ráð fyrir tanki í laginu eins og keila á hvolfi, með hæðina 12 m og grunngeislann 4 m. Tankurinn er fullur í upphafi og vatni er dælt upp yfir efri brún hans þar til hæð vatnsins sem eftir er í tankinum er 4 m. Hve mikla vinnu þarf til að dæla út þessu vatnsmagni?

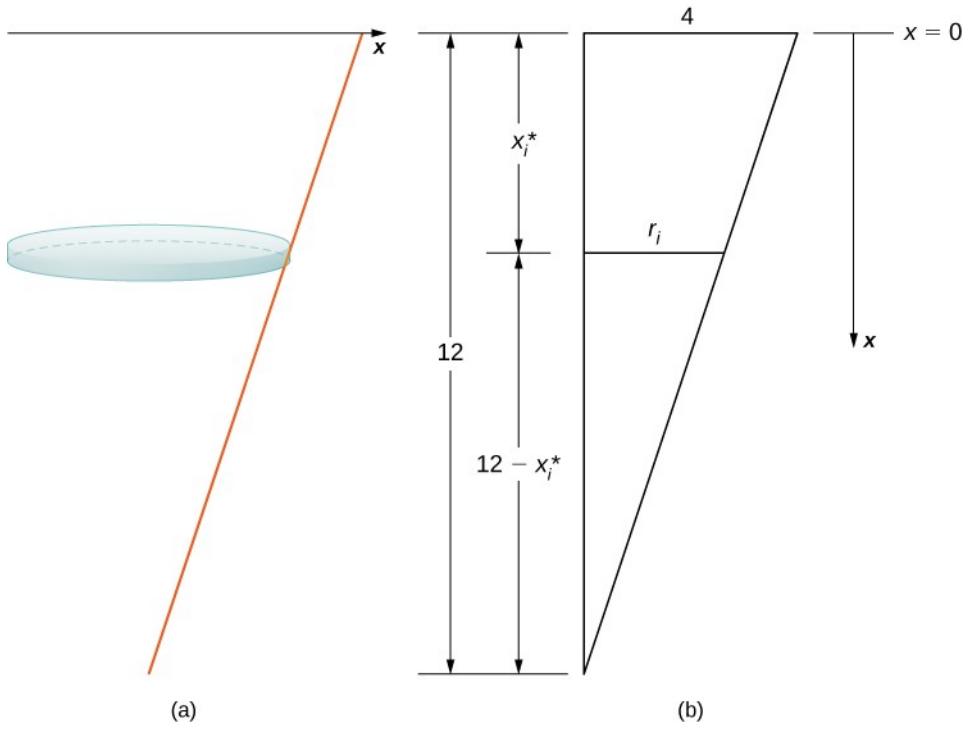
Lausn

Tankurinn er sýndur á mynd 6.54. Eins og í dæminu með sívala tankinum látum við x-ásnum liggja lóðrétt, með upphafspunktinn efst í tankinum og jákvæða stefnu niður á við (skref 1).



Mynd 6.54 Vatnstankur í laginu eins og keila á hvolfi.

Tankurinn er fullur í upphafi en að lokum eru 4 m af vatni eftir. Miðað við valið viðmiðunarkerfi þurfum við því að skipta bilinu $[0,8]$. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við síðan $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[0,8]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Við getum nálgað rúmmál lags með skífu og síðan notað einslaga þríhyrninga til að finna geisla skífunnar (sjá næstu mynd).



Mynd 6.55 Einslaga þríhyrningar notaðir til að lýsa radíus vatnsskífu.

Af eiginleikum einslaga þríhyrninga fæst

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{12-x_i^*} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ 3r_i &= 12 - x_i^* \\ r_i &= \frac{12-x_i^*}{3} \\ &= 4 - \frac{x_i^*}{3}. \end{aligned}$$

Þá er rúmmál skífunnar

$$V_i = \pi \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (skref 2).}$$

Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m³, þannig að krafturinn sem þarf til að lyfta hverju lagi er um það bil

$$F_i \approx 9800\ \pi \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (skref 3).}$$

Samkvæmt myndinni þarf að lyfta vatninu um það bil x_i^* m (skref 4), þannig að vinnan sem þarf til að lyfta laginu er um það bil

$$W_i \approx 9800\ \pi\ x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \ \text{(skref 5)}.$$

Með því að leggja saman vinnuna sem þarf til að lyfta öllum lögunum fáum við nálgun fyrir heildarvinnuna:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 9800\ \pi\ x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \ \text{(skref 6)}.$$

Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$, fáum við

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9800\ \pi\ x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \\ &= \int_0^8 9800\ \pi\ x \left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 dx \\ &= 9800\ \pi \int_0^8 x\left(16 - \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) dx = 9800\ \pi \int_0^8 \left(16x - \frac{8x^2}{3} + \frac{x^3}{9}\right) dx \\ &= 9800\ \pi \left[8x^2 - \frac{8x^3}{9} + \frac{x^4}{36}\right]_0^8 = 1.672.533{,}3\ \pi \approx 5.254.418{,}4. \end{aligned}$$

Það þarf um það bil 5.254.000 J af vinnu til að tæma tankinn niður í æskilega hæð.

STÖÐUMAT 6.26

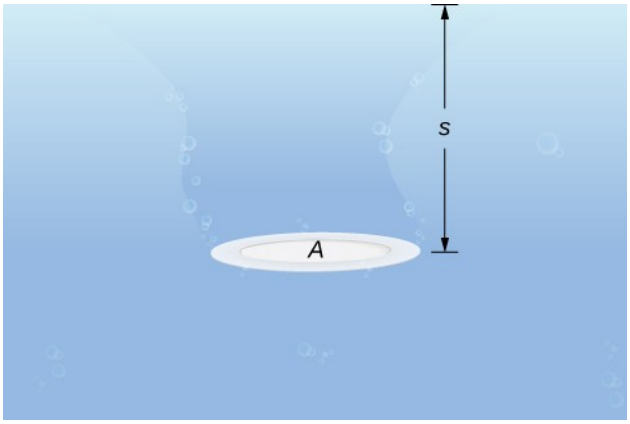
Tankur er í laginu eins og keila á hvolfi, með hæðina 10 m og grunngeislann 6 m. Í upphafi nær vatnið 8 m upp í tankinn og því er dælt upp yfir efri brún hans þar til 3 m af vatni eru eftir. Hve mikla vinnu þarf til að dæla út þessu vatnsmagni?

6

Kraftur og þrýstingur í vökvastöðu

Í þessum síðasta hluta skoðum við kraftinn og þrýstinginn sem verkar á hlut á kafi í vökva. Kraftur er mældur í njútonum. Þrýstingur er kraftur á flatarmálseiningu og er því gefinn í njútonum á fermetra, sem einnig nefnast pasköl.

Byrjum á einföldu tilviki þar sem plata með flatarmálið A er lárétt á kafi í vatni á dýpinu s (mynd 6.56). Þá er krafturinn sem verkar á plötuna einfaldlega þyngd vatnsins fyrir ofan hana, og hann er gefinn með $F = \rho A s$, þar sem ρ er þyngdarþéttleiki vatns (þyngd á rúmmálseiningu). Til að finna vökvastöðuþrýstinginn – það er að segja þrýstinginn sem vatn beitir á hlut á kafi – deilum við kraftinum með flatarmálinu. Þrýstingurinn er því $p = F/A = \rho s$.

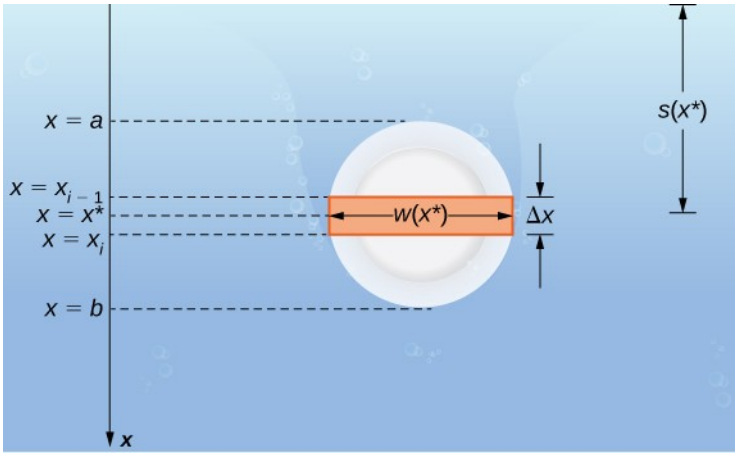


Mynd 6.56 Plata lárétt á kafi í vatni.

Samkvæmt lögmáli Pascals er þrýstingur á tilteknu dýpi sá sami í allar áttir og því skiptir ekki máli hvort platan er lárétt eða lóðrétt á kafi. Ef við þekkjum dýpið þekkjum við því þrýstinginn. Við getum beitt lögmáli Pascals til að finna kraftinn sem verkar á lóðrétta fleti, svo sem stíflur. Við getum ekki beitt formúlunni $F=\rho A s$ beint, því dýpið breytist frá einum punkti til annars á lóðréttum fleti. Eins og við höfum oft gert áður myndum við því skiptingu, Riemann-summu og að lokum ákveðið heildi til að reikna kraftinn.

Gerum ráð fyrir að þunn plata sé á kafi í vatni. Við veljum viðmiðunarkerfi þannig að x-ásinn liggi lóðrétt, jákvæða stefnan vísi niður á við og punkturinn $x=0$ samsvari hentugum viðmiðunarpunkti. Látum $s(x)$ tákna dýpið í punktinum x. Athugið að við látum oft $x=0$ samsvara yfirborði vatnsins. Í þessu tilviki er dýpið í hverjum punkti einfaldlega gefið með $s(x)=x$. Í sumum tilvikum gætum við þó viljað velja annan viðmiðunarpunkt fyrir $x=0$, og því leiðum við formúluna út fyrir almenna tilvikið. Að lokum látum við $w(x)$ tákna breidd plötunnar í punktinum x.

Gerum ráð fyrir að efri brún plötunnar sé við punkt $x=a$ og neðri brún hennar við punkt $x=b$. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum síðan $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$. Skiptingin skiptir plötunni í nokkrar þunnar, rétthyrndar ræmur (sjá næstu mynd).



Mynd 6.57 Þunn plata lóðrétt á kafi í vatni.

Metum nú kraftinn á dæmigerða ræmu. Ef ræman er nógu þunn getum við litið svo á að hún sé á föstu dýpi, $s\left(x_i^*\right)$. Þá fæst

$$F_i = \rho A s = \rho\left[w\left(x_i^*\right)\Delta x\right]s\left(x_i^*\right).$$

Með því að leggja kraftana saman fáum við mat á kraftinum sem verkar á plötuna:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \rho\left[w\left(x_i^*\right)\Delta x\right]s\left(x_i^*\right).$$

Þetta er Riemann-summa, svo markgildi hennar gefur nákvæman kraft:

$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \rho\left[w\left(x_i^*\right)\Delta x\right]s\left(x_i^*\right) = \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx.$$

(6.13)

Með því að reikna heildið fáum við kraftinn sem verkar á plötuna. Við tökum þetta saman í eftirfarandi lausnarleið.

6

AÐFERÐ VIÐ LAUSN VERKEFNA

Útreikningur krafts vegna vökvastöðuþrýstings

1. Teiknið mynd og veljið hentugt viðmiðunarkerfi. (Athugið að ef við veljum annað viðmiðunarkerfi en það sem áður var notað gætum við þurft að laga jöfnu 6.13 til samræmis.)
2. Ákvarðið dýptarfallið og breiddarfallið, $s(x)$ og $w(x)$.
3. Ákvarðið þyngdarþéttleika vökvans sem unnið er með. Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m^3.
4. Notið jöfnuna til að reikna heildarkraftinn.

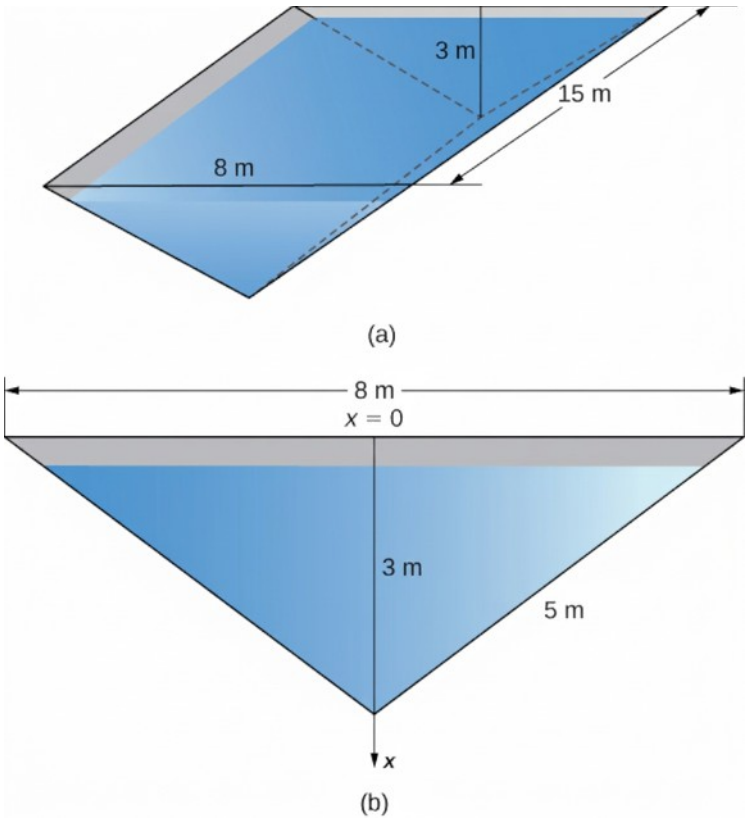
DÆMI 6.27

Útreikningur krafts vegna vökvastöðuþrýstings

Vatnsrenna er 15 m á lengd og endar hennar eru í laginu eins og jafnarma þríhyrningar á hvolfi með grunnlínuna 8 m og hæðina 3 m. Finnið kraftinn sem verkar á annan enda rennunnar þegar hún er full af vatni.

Lausn

Mynd 6.58 sýnir rennuna og nákvæmari mynd af öðrum enda hennar.



Mynd 6.58 (a) Vatnsrenna með þríhyrningslaga þversnið. (b) Mál annars enda vatnsrennunnar.

Veljum viðmiðunarkerfi þar sem x-ásinn liggur lóðrétt og stefna niður á við er jákvæð. Látum efri brún rennunnar samsvara punktinum $x=0$ (skref 1). Dýptarfallið er þá $s(x)=x$. Með því að nota einslaga þríhyrninga sjáum við að $w(x)=8-(8/3)x$ (skref 2). Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m^3 (skref 3), þannig að með því að beita jöfnu 6.13 fáum við

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx \\ &= \int_0^3 9800\left(8-\frac{8}{3}x\right)x\, dx = 9800\int_0^3\left(8x-\frac{8}{3}x^2\right)dx \\ &= 9800\left[4x^2-\frac{8}{9}x^3\right]\Big|_0^3 = 117{,}600. \end{aligned}$$

Vatnið verkar á enda rennunnar með 117,600 N krafti (skref 4).

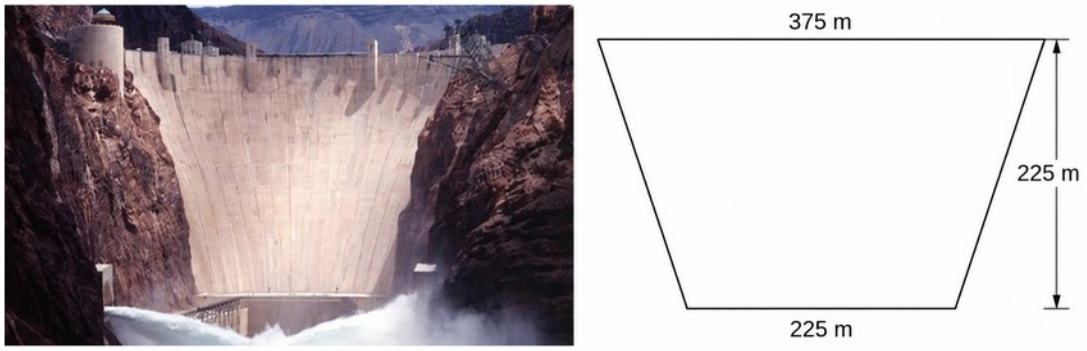
STÖÐUMAT 6.27

Vatnsrenna er 12 m á lengd og endar hennar eru í laginu eins og jafnarma þríhyrningar á hvolfi með grunnlínuna 6 m og hæðina 4 m. Finnið kraftinn sem verkar á annan enda rennunnar þegar hún er full af vatni.

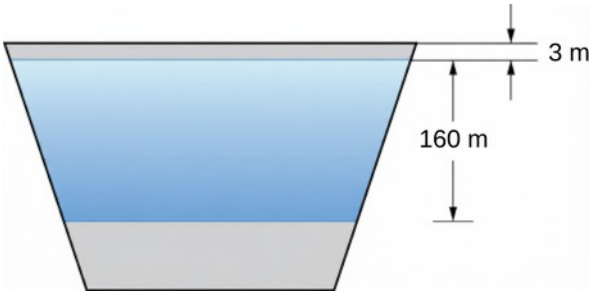
DÆMI 6.28

Kaflaupphaf: Útreikningur krafts vegna vökvastöðuþrýstings

Nú beinum við sjónum aftur að Hoover-stíflunni sem var nefnd í upphafi kaflans. Stíflan er í raun bogadregin en ekki flöt. Til að auðvelda útreikningana gefum við okkur samt nokkrar einfaldandi forsendur. Gerum ráð fyrir að framhlið Hoover-stíflunnar sé í laginu eins og jafnarma trapisa með neðri grunnlínuna 225 m, efri grunnlínuna 375 m og hæðina 225 m (sjá næstu mynd).



Þegar miðlunarlónið er fullt er mesta dýpi Mead-vatns um 160 m og yfirborð vatnsins er um 3 m fyrir neðan efri brún stíflunnar (sjá næstu mynd).



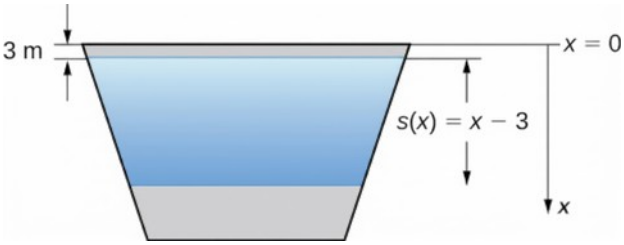
Mynd 6.59 Einfaldað líkan af Hoover-stíflunni með gefnum málum.

a. Finnið kraftinn sem verkar á framhlið stíflunnar þegar miðlunarlónið er fullt.

b. Þurrkar hafa geisað í suðvesturhluta Bandaríkjanna og yfirborð Mead-vatns er um 40 m neðar en það væri ef miðlunarlónið væri fullt. Hvaða kraftur verkar á framhlið stíflunnar við þessar aðstæður?

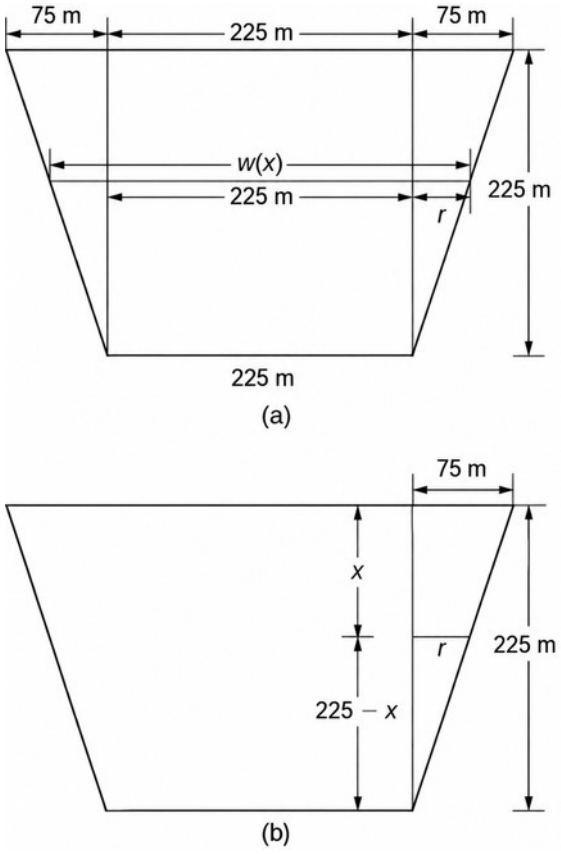
Lausn

a. Fyrst þurfum við að skilgreina viðmiðunarkerfi. Eins og venjulega látum við x-ásnum liggja lóðrétt, með jákvæða stefnu niður á við. Í þetta sinn látum við þó $x=0$ tákna efri brún stíflunnar en ekki vatnsyfirborðið. Þegar lónið er fullt er vatnsyfirborðið 3 m fyrir neðan efri brún stíflunnar, svo að $s\left(x\right)=x-3$ (sjá eftirfarandi mynd).



Mynd 6.60 Við veljum fyrst viðmiðunarkerfi.

Til að finna breiddarfallið notum við aftur einslaga þríhyrninga, eins og sýnt er á myndinni hér á eftir.



Mynd 6.61 Við notum einslaga þríhyrninga til að ákvarða fall fyrir breidd stíflunnar. (a) Mál stíflunnar sem gert er ráð fyrir; (b) einslaga þríhyrningarnir auðkenndir.

Af myndinni sjáum við að $w\,(x)=225+2\,r$. Með eiginleikum einslaga þríhyrninga fáum við $r=75-(1/3)\,x$. Því er

$$w\,(x)=375-\frac{2}{3}\,x \quad \text{(skref 2).}$$

6

Með þyngdarþéttleikanum 9800 N/m³ (skref 3) og með því að beita jöfnu 6.13 fáum við

$$\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho\, w\,(x)\, s\,(x)\, d\,x \\
&= \int_3^{163} 9800 \left(375-\frac{2}{3}\,x\right)(x-3)\,dx \\
&= 9800 \int_3^{163} -\frac{2}{3}\left[x^2-565{,}5\,x+1687{,}5\right] d\,x \\
&= -9800\left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{565{,}5\,x^2}{2}+1687{,}5\,x\right]\Big|_3^{163} \approx 37.868.942.000 \text{ N} \\
&= 37.868.942 \text{ kN}.
\end{aligned}$$

Athugið breytinguna úr njútonum í kílónjúton (1000 N = 1 kN) (skref 4).

b. Takið eftir að þurrkarnir breyta dýptarfallinu, $s(x)$, og heildismörkunum. Við höfum $s(x) = x - 43$. Neðra heildismarkið er 43. Efra heildismarkið er áfram 163. Þegar heildið er reiknað fáum við

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx \\ &= \int_{43}^{163} 9800 \left(375 - \frac{2}{3}x\right)(x - 43)\, dx \\ &= -9800 \left(\frac{2}{3}\right) \int_{43}^{163} (x - 562{,}5)(x - 43)\, dx \\ &= -9800 \left(\frac{2}{3}\right) \int_{43}^{163} (x^2 - 605{,}5x + 24187{,}5)\, dx \\ &= -9800 \left(\frac{2}{3}\right) \left[\frac{x^3}{3} - 302{,}75x^2 + 24187{,}5x\right]\Big|_{43}^{163} \approx 20.674.080.000 \text{ N} \\ &= 20.674.080 \text{ kN}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.28

Þegar vatnsborð miðlunarlónsins er í meðalhæð er yfirborð vatnsins um 15 m neðar en það væri ef lónið væri fullt. Hvaða kraftur verkar á framhlið stíflunnar við þessar aðstæður?

MIÐLAR

Nánar má fræðast um Hoover-stífluna í þessari grein frá History Channel.

Æfingar úr kafla 6.5

Finnið vinnuna í eftirfarandi æfingum.

218. Find the work done when a constant force $F = 12$ lb moves a chair from $x = 0{,}9$ to $x = 1{,}1$ ft.

219. Hve mikil vinna er unnin þegar manneskja lyftir 25 kg kassa með myndasögum upp á vörubílspall sem er 1 m frá jörðu? (Athugið að massinn 1 kg vegur 9,8 N nálægt yfirborði jarðar.)

220. What is the work done lifting a 20 kg child from the floor to a height of 2 m? (Note that a mass of1 kg weighs 9,8 N near the surface of the Earth.)

221. Finnið vinnuna þegar kassa er ýtt 2 m eftir gólfi með föstum krafti $F = 100$ N.

222. Reiknið vinnu kraftsins $F = 12/x^2$ N frá $x = 1$ til $x = 2$ m.

223. Hve mikil vinna er unnin við að færa ögn frá $x = 0$ til $x = 1$ m ef krafturinn sem verkar á hana er $F = 3x^2$ N?

Finnið massa einvíða hlutarins í eftirfarandi æfingum.

224. Vír sem er 2 m á lengd (frá $x=0$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=x^2+2x$ g/m

225. Bílaloftnet sem er 1 m á lengd (frá $x=0$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=3x+2$ g/m

226. Málmstöng sem er 8 cm á lengd (frá $x=0$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=e^{(1/2)x}$ g/cm

227. Blýantur sem er 10 cm á lengd (frá $x=2$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=5/x$ g/cm

228. Reglustika sem er 12 cm á lengd (frá $x=5$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=\ln(x)+(1/2)x^2$ g/cm

Finnið massa tvívíða hlutarins með miðju í upphafspunktinum í eftirfarandi æfingum.

229. Óvenjustór íshokkípökkur með geisla 5 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=x^3-2x+5$

230. Frisbídiskur með geisla 12 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=e^{-x}$

231. Plata með geisla 10 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=1+\cos(\pi x)$

232. Krukkulok með geisla 3 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=\ln(x+1)$

233. Skífa með geisla 5 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=\sqrt{3x}$

234. 12 cm gormur er teygður í 15 cm með 75 N krafti. Hver er gormstuðullinn?

235. Gormur hefur náttúrulega lengd 10 cm. Það þarf 2 J til að teygja hann í 15 cm. Hve mikla vinnu þarf til að teygja gorminn frá 15 cm í 20 cm?

236. A 1-m spring requires 10 J to stretch the spring to 1,1 m. How much work would it take to stretch the spring from 1 m to 1,2 m?

237. Það þarf 5 J til að teygja gorm frá 8 cm í 12 cm og 4 J til viðbótar til að teygja hann frá 12 cm í 14 cm. Hver er náttúruleg lengd gormsins?

238. Höggdeyfir þjappast saman um 5 cm undan þunga hlutar sem er 1 tonn (1000 kg) að massa. (Massinn 1 kg vegur 9,8 N.) Hver er gormstuðullinn?

239. Krafturinn $F=20x-x^3$ N teygir ólínulegan gorm um x metra. Hve mikla vinnu þarf til að teygja gorminn frá $x=0$ til $x=2$ m?

240. Finnið vinnuna við að vinda upp hangandi kapal sem er 100 m á lengd og hefur þyngdarþéttleikann 5 N/m.

241. Hve mikil vinna er unnin við að lyfta kaplinum í æfingunni á undan um 50 m?

242. Hve mikil viðbótarvinna er unnin ef lóð sem vegur 200 N er hengt í enda kapalsins í æfingunni á undan?

243. **[T]** Pýramídi með hæðina 150 m hefur ferningslaga grunnflöt sem er 240 m sinnum 240 m. Finnið flatarmálið A í hæðinni h. Ef bergið sem notað var til að byggja pýramídann vegur um $w=25.000$ N/m^3, hve mikla vinnu þurfti til að lyfta öllu berginu?

244. **[T]** Gerum ráð fyrir að 1000 verkamenn hafi byggt pýramídann í æfingunni á undan og hver þeirra unnið 10 klukkustundir á dag, 5 daga í viku og 50 vikur á ári. Ef verkamennirnir lyftu að meðaltali 10 steinum sem hver um sig var 50 kg að massa um 1 m á klukkustund, hve lengi voru þeir að byggja pýramídann? (Massinn 1 kg vegur 9,8 N.)

245. **[T]** Þyngdarkrafturinn á massann m er $F=-\left(\left(GMm\right)/x^2\right)$ njúton. Reiknið vinnuna við að lyfta eldflaug sem hefur massann $m=1000\,\text{kg}$, frá $x=6400$ til $x=6500$ km. Gefið svörin með þremur markverðum tölustöfum. (Athugið: $G=6{,}67\times10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2$ og $M=6\times10^{24}\,\text{kg}$.)

246. **[T]** Finnið vinnuna við að lyfta eldflauginni úr æfingunni á undan frá $x=6400$ til $x=\infty$.

247. **[T]** Rétthyrnd stífla er 40 m á hæð og 60 m á breidd. Gerið ráð fyrir að þyngdarþéttleiki vatns sé 9800 N/m³. Reiknið heildarkraftinn F á stífluna þegar

a. yfirborð vatnsins er við efri brún stíflunnar og
b. vatnsyfirborðið er mitt á milli efri og neðri brúnar stíflunnar.

248. **[T]** Finnið vinnuna sem þarf til að dæla öllu vatninu úr sívalningi sem hefur hringlaga grunnflöt með geislann 5 m og hæðina 20 m. Notið að þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m³.

249. **[T]** Finnið vinnuna sem þarf til að dæla öllu vatninu úr sívalningnum í æfingunni á undan ef hann er aðeins hálffullur af vatni.

250. **[T]** Hve mikla vinnu þarf til að dæla vatninu úr sundlaug ef flatarmál botnsins er 80 m², vatnsdýptin er 1,5 m og efri brún laugarinnar er 0,5 m fyrir ofan vatnsborðið? Gerið ráð fyrir að þyngdarþéttleiki vatns sé 9800 N/m³.

251. Sívalningur með dýptina H og þversniðsflatarmálið A er fullur af vatni með eðlismassann ρ. Reiknið vinnuna við að dæla öllu vatninu upp að efri brún.

252. Reiknið vinnuna við að dæla öllu vatninu upp að efri brún sívalningsins í æfingunni á undan ef hann er aðeins hálffullur af vatni.

253. Keilulaga tankur hefur þversniðsflatarmál sem vex með dýptinni: $A=\left(\pi r^2h^2\right)/H^3$. Sýnið að vinnan við að tæma hann er helmingur vinnunnar við að tæma sívalning með sömu hæð og sama grunnflöt.

6.6 Vægi og massamiðjur

NÁMSMARKMIÐ

- 6.6.1 Finnið massamiðju hluta sem dreifast eftir línu.
- 6.6.2 Finnið massamiðju þunnrar plötu.
- 6.6.3 Notið samhverfu til að finna þungamiðju þunnrar plötu.

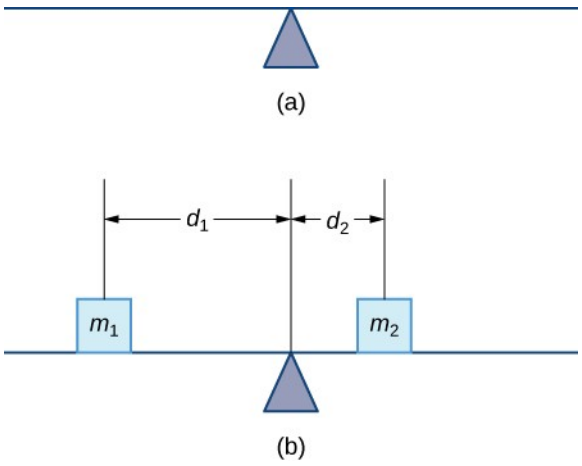
- 6.6.4 Beitið setningu Papposar um rúmmál.

Í þessum undirkafla skoðum við massamiðjur (sem við ákveðin skilyrði nefnast einnig þungamiðjur) og vægi. Grunnhugmynd massamiðju er jafnvægispunktur. Mörg okkar hafa séð listamenn láta diska snúast á endum stanga. Þeir reyna að halda mörgum diskum á snúningi samtímis án þess að nokkur þeirra falli. Ef við skoðum einn disk án þess að láta hann snúast er á honum ákveðinn punktur þar sem hann helst fullkomlega í jafnvægi á stönginni. Sé stöngin sett annars staðar helst diskurinn ekki í jafnvægi og fellur til jarðar. (Þess vegna láta listamennirnir diskana snúast; snúningurinn hjálpar til við að halda þeim uppi þótt stöngin sé ekki nákvæmlega á réttum stað.) Í stærðfræði nefnist þessi jafnvægispunktur massamiðja disksins.

Í þessum undirkafla skoðum við hugtökin fyrst í einni vídd og síðan massamiðjur tvívíðra svæða og samhverfu. Að lokum notum við þungamiðjur og setningu Papposar til að finna rúmmál tiltekinna rúmhluta.

Massamiðja og vægi

Byrjum á að skoða massamiðju í einni vídd. Hugsum okkur langan, þunnan vír eða stöng með hverfandi massa sem hvílir á vogarási, eins og sýnt er á mynd 6.62(a). Gerum nú ráð fyrir að við setjum hluti með massana m_1 og m_2 í fjarlægðunum d_1 og d_2 frá vogarásnum, í sömu röð, eins og sýnt er á mynd 6.62(b).

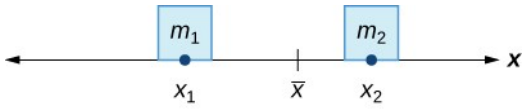


Mynd 6.62 (a) Þunn stöng hvílir á vogarási. (b) Massar eru settir á stöngina.

Algengasta dæmið um slíkt kerfi úr daglegu lífi er vegasalt á leikvelli þar sem misþung börn sitja í mismikilli fjarlægð frá miðjunni. Ef eitt barn situr á hvorum enda sígur þyngra barnið niður en það léttara lyftist upp. Ef þyngra barnið færir sig nær miðjunni kemst vegasaltið hins vegar í jafnvægi. Ef við beitum þessari hugmynd á massana á stönginni sjáum við að þeir vega hvor annan upp þá og því aðeins að $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

Í dæminu um vegasaltið komum við kerfinu í jafnvægi með því að færa massana (börnin) miðað við vogarásinn. Við höfum þó einkum áhuga á kerfum þar sem massarnir geta ekki færst og við komum kerfinu þess í stað í jafnvægi með því að færa vogarásinn. Gerum ráð fyrir tveimur punktmössum, m_1 og m_2, sem eru á talnalínu í punktunum x_1 og x_2, í sömu röð

(mynd 6.63). Massamiðjan, $\bar{x}$, er sá punktur þar sem setja þarf vogarásinn svo að kerfið verði í jafnvægi.



Mynd 6.63 Massamiðjan $\bar{x}$ er jafnvægispunktur kerfisins.

Því fæst

$$\begin{aligned} m_1\,|\bar{x}-x_1| &= m_2\,|x_2-\bar{x}| \\ m_1\,(\bar{x}-x_1) &= m_2\,(x_2-\bar{x}) \\ m_1\bar{x}-m_1x_1 &= m_2x_2-m_2\bar{x} \\ \bar{x}\,(m_1+m_2) &= m_1x_1+m_2x_2 \\ \bar{x} &= \tfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}. \end{aligned}$$

Segðin í teljaranum, $m_1x_1+m_2x_2$, nefnist fyrsta vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins. Þegar samhengið er skýrt sleppum við oft orðinu fyrsta og köllum segðina einfaldlega vægi kerfisins. Segðin í nefnaranum, m_1+m_2, er heildarmassi kerfisins. Massamiðja kerfisins er því sá punktur þar sem safna mætti öllum massa kerfisins saman án þess að breyta væginu.

Hugmyndin takmarkast ekki við tvo punktmassa. Almennt gildir að ef n mössum, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, er komið fyrir á talnalínu í punktunum $x_1, x_2, \ldots, x_n$, í sömu röð, þá er massamiðja kerfisins gefin með

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

SETNING 6.9

Massamiðja hluta á línu

Látum $m_1, m_2, \ldots, m_n$ vera punktmassa sem komið er fyrir á talnalínu í punktunum $x_1, x_2, \ldots, x_n$, í sömu röð, og látum $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$ tákna heildarmassa kerfisins. Þá er vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins gefið með

$$M=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

(6.14)

og massamiðja kerfisins er gefin með

$$\bar{x} = \frac{M}{m}.$$

(6.15)

Við beitum setningunni í næsta dæmi.

DÆMI 6.29

Massamiðja hluta á línu fundin

Gerum ráð fyrir að fjórum punktmössum sé komið fyrir á talnalínu eins og hér segir:

$$m_1 = 30 \text{ kg, staðsettur við } x_1 = -2 \text{ m}$$
$$m_3 = 10 \text{ kg, staðsettur við } x_3 = 6 \text{ m}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg, staðsettur við } x_2 = 3 \text{ m}$$
$$m_4 = 15 \text{ kg, staðsettur við } x_4 = -3 \text{ m}.$$

Finnið vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins og massamiðju þess.

Lausn

Fyrst reiknum við vægi kerfisins:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{4} m_i x_i \\ &= -60 + 15 + 60 - 45 = -30. \end{aligned}$$

Til að finna massamiðjuna þurfum við næst heildarmassa kerfisins:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{4} m_i \\ &= 30 + 5 + 10 + 15 = 60\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Þá fæst

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{-30}{60} = -\frac{1}{2}.$$

Massamiðjan er $1/2$ m vinstra megin við upphafspunktinn.

STÖÐUMAT 6.29

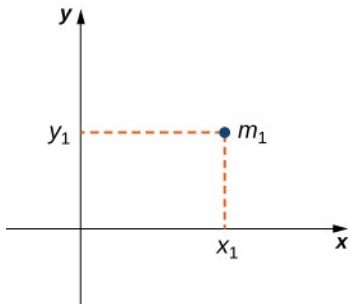
Gerum ráð fyrir að fjórum punktmössum sé komið fyrir á talnalínu eins og hér segir:

$$m_1 = 12 \text{ kg, staðsettur við } x_1 = -4 \text{ m}$$
$$m_3 = 30 \text{ kg, staðsettur við } x_3 = 2 \text{ m}$$

$$m_2 = 12 \text{ kg, staðsettur við } x_2 = 4 \text{ m}$$
$$m_4 = 6 \text{ kg, staðsettur við } x_4 = -6 \text{ m}.$$

Finnið vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins og massamiðju þess.

Við getum alhæft hugmyndina til að finna massamiðju kerfis punktmassa í sléttu. Látum m_1 vera punktmassa í punktinum (x_1, y_1) í sléttunni. Þá er vægi massans M_x um x-ásinn gefið með $M_x = m_1 y_1$. Á sama hátt er vægið M_y um y-ásinn gefið með $M_y = m_1 x_1$. Takið eftir að x-hnit punktsins er notað til að reikna vægið um y-ásinn og öfugt. Ástæðan er sú að x-hnitið gefur fjarlægð punktmassans frá y-ásnum en y-hnitið gefur fjarlægðina frá x-ásnum (sjá næstu mynd).



Mynd 6.64 Punktmassi m_1 er í punktinum (x_1, y_1) í sléttunni.

Ef nokkrir punktmassar eru í xy-sléttunni getum við notað vægin um x- og y-ásana til að reikna x- og y-hnit massamiðju kerfisins.

SETNING 6.10

Massamiðja hluta í sléttu

Látum $m_1, m_2, \ldots, m_n$ vera punktmassa í xy-sléttunni í punktunum $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, í sömu röð, og látum $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ tákna heildarmassa kerfisins. Þá eru vægi kerfisins M_x og M_y um x- og y-ásana, í sömu röð, gefin með

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ og } M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

(6.16)

Einnig eru hnit massamiðju $(\bar{x}, \bar{y})$ kerfisins

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

(6.17)

Næsta dæmi sýnir hvernig setningunni er beitt.

DÆMI 6.30

Massamiðja hluta í sléttu fundin

Gerum ráð fyrir að þremur punktmössum sé komið fyrir í xy-sléttunni eins og hér segir (hnitin eru gefin í metrum):

$$m_1 = 2 \text{ kg, staðsettur í } (-1, 3),$$
$$m_2 = 6 \text{ kg, staðsettur í } (1, 1),$$
$$m_3 = 4 \text{ kg, staðsettur í } (2, -2).$$

Finnið massamiðju kerfisins.

Lausn

Fyrst reiknum við heildarmassa kerfisins:

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 2 + 6 + 4 = 12 \,\text{kg}.$$

Næst finnum við vægin um x- og y-ásana:

$$M_y = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = -2 + 6 + 8 = 12,$$
$$M_x = \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 6 + 6 - 8 = 4.$$

Þá fæst

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{12}{12} = 1 \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Massamiðja kerfisins er $(1, 1/3)$, í metrum.

STÖÐUMAT 6.30

Gerum ráð fyrir að þremur punktmössum sé komið fyrir á talnalínu eins og hér segir (hnitin eru gefin í metrum):

$$m_1 = 5 \text{ kg, staðsettur í } (-2, -3),$$
$$m_2 = 3 \text{ kg, staðsettur í } (2, 3),$$
$$m_3 = 2 \text{ kg, staðsettur í } (-3, -2).$$

Finnið massamiðju kerfisins.

Massamiðja þunnra platna

Hingað til höfum við skoðað kerfi punktmassa á línu og í sléttu. Nú skoðum við kerfi þar sem massinn er ekki samþjappaður í einstökum punktum heldur dreifist samfellt um þunna

efnisplötu. Við gerum ráð fyrir að platan sé svo þunn að líta megi á hana sem tvívíða. Slík efnisplata nefnist þunn plata. Næst setjum við fram aðferðir til að finna massamiðju hennar. Í þessum undirkafla gerum við einnig ráð fyrir að þéttleiki plötunnar sé fastur.

Oft er þunn plata táknuð með tvívíðu svæði í sléttu. Rúmfræðileg miðja slíks svæðis nefnist þungamiðja. Við höfum gert ráð fyrir að þéttleiki plötunnar sé fastur. Því ræðst massamiðja hennar eingöngu af lögun samsvarandi svæðis í sléttunni en ekki af þéttleikanum. Þá fellur massamiðja plötunnar saman við þungamiðju afmarkaða svæðisins. Líkt og í kerfum punktmassa þurfum við að finna heildarmassa plötunnar og vægi hennar um x- og y-ásana.

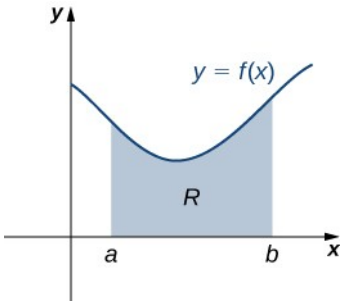
Skoðum fyrst rétthyrnda þunna plötu. Rifjum upp að massamiðja plötu er sá punktur þar sem hún helst í jafnvægi. Í rétthyrningi er punkturinn bæði lárétt og lóðrétt miðja hans. Massamiðja rétthyrndrar plötu er því skurðpunktur hornalínanna. Þetta leiðir af samhverfureglunni, sem hér er sett fram án sönnunar.

SETNING 6.11

Samhverfureglan

Ef svæði R er samhverft um línu l liggur þungamiðja R á l.

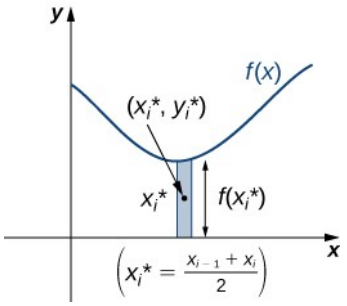
Snúum okkur nú að almennari þunnum plötum. Gerum ráð fyrir að þunn plata afmarkist að ofan af grafi samfellds falls $f(x)$, að neðan af x-ásnum og til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í sömu röð, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 6.65 Svæði í sléttu sem táknar þunna plötu.

Líkt og í kerfum punktmassa þurfum við að finna heildarmassa plötunnar og vægi hennar um x- og y-ásana til að finna massamiðjuna. Eins og oft áður nálgum við þessar stærðir með því að skipta bilinu $[a,b]$ og mynda rétthyrninga.

Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$. Rifjum upp að við getum valið hvaða punkt sem er innan bilsins $[x_{i-1},x_i]$ sem x_i^*. Hér viljum við að x_i^* sé x-hnit þungamiðju rétthyrningsins. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við því $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$ þannig að x_i^* sé miðpunktur bilsins, það er $x_i^*=(x_{i-1}+x_i)/2$. Nú myndum við, fyrir $i=1,2,\ldots,n$, rétthyrning með hæðina $f(x_i^*)$ á $[x_{i-1},x_i]$. Massamiðja rétthyrningsins er $\left(x_i^*,\left(f(x_i^*)\right)/2\right)$, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 6.66 Dæmigerður rétthyrningur plötunnar.

Næst finnum við heildarmassa rétthyrningsins. Látum ρ tákna þéttleika plötunnar (takið eftir að ρ er fasti). Hér er ρ gefið sem massi á flatarmálseiningu. Til að finna heildarmassa rétthyrningsins margföldum við því flatarmál hans með ρ. Massi rétthyrningsins er þá $\rho f\left(x_i^*\right)\Delta x$.

Við nálgum massa plötunnar með því að leggja saman massa allra rétthyrninganna og fáum

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho f\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Með því að taka markgildið þegar $n \to \infty$ fæst nákvæmur massi plötunnar:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho f\left(x_i^*\right)\Delta x = \rho \int_a^b f(x)\,dx.$$

Næst reiknum við vægi plötunnar um x-ásinn. Rifjum upp að massamiðja hins dæmigerða rétthyrnings er $\left(x_i^*, \left(f\left(x_i^*\right)\right)/2\right)$. Vægið breytist ekki þótt litið sé á rétthyrninginn sem punktmassa í massamiðjunni. Vægi rétthyrningsins um x-ásinn fæst því með því að margfalda massa hans, $\rho f\left(x_i^*\right)\Delta x$, með fjarlægð massamiðjunnar frá x-ásnum, $\left(f\left(x_i^*\right)\right)/2$. Því er vægi rétthyrningsins um x-ásinn $\rho\left(\left[f\left(x_i^*\right)\right]^2/2\right)\Delta x$. Ef við leggjum saman vægi rétthyrninganna og tökum markgildi Riemann-summunnar sem fæst sjáum við að vægi plötunnar um x-ásinn er

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \frac{\left[f\left(x_i^*\right)\right]^2}{2}\Delta x = \rho \int_a^b \frac{\left[f(x)\right]^2}{2}\,dx.$$

Á svipaðan hátt leiðum við út vægið um y-ásinn og notum þá að fjarlægðin frá massamiðju rétthyrningsins að y-ásnum er x_i^*. Þá er vægi plötunnar um y-ásinn gefið með

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho x_i^* f\left(x_i^*\right)\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Við finnum hnit massamiðjunnar með því að deila vægjunum með heildarmassanum og fáum $\bar{x} = M_y/m$ og $\bar{y} = M_x/m$. Ef við skoðum vel segðirnar fyrir M_x, M_y, og m, sjáum við að fastinn ρ styttist út þegar $\bar{x}$ og $\bar{y}$ eru reiknuð.

Við tökum niðurstöðurnar saman í næstu setningu.

SETNING 6.12

Massamiðja þunnrar plötu í xy-sléttunni

Látum R tákna svæði sem afmarkast að ofan af grafi samfellds falls $f(x)$, að neðan af x-ásnum og til vinstri og hægri af línunum $x = a$ og $x = b$, í sömu röð. Látum ρ tákna þéttleika samsvarandi þunnrar plötu. Þá gildir eftirfarandi:

i. Massi þunnu plötunnar er

$$m = \rho \int_a^b f(x)\,dx.$$

(6.18)

ii. Vægi þunnu plötunnar M_x og M_y um x- og y-ásana eru, í sömu röð,

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}\,dx \text{ og } M_y = \rho \int_a^b x f(x)\,dx.$$

(6.19)

iii. Hnit massamiðjunnar $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ eru

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

(6.20)

Í næsta dæmi notum við setninguna til að finna massamiðju þunnrar plötu.

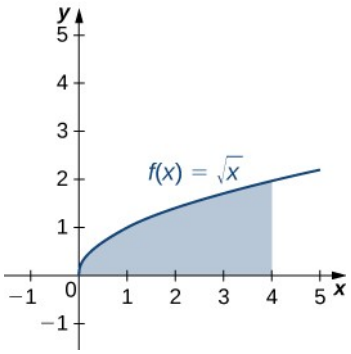
DÆMI 6.31

Massamiðja þunnrar plötu fundin

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x) = \sqrt{x}$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0, 4]$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Lausn

Svæðið er sýnt á næstu mynd.



Mynd 6.67 Massamiðja þunnrar plötu fundin.

Við eigum aðeins að finna þungamiðju svæðisins en hvorki massa né vægi samsvarandi þunnrar plötu. Við vitum því að þéttleikafastinn ρ styttist að lokum út úr útreikningunum. Til einföldunar skulum við því gera ráð fyrir að $\rho = 1$.

Fyrst reiknum við heildarmassann:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{3}[8-0] = \tfrac{16}{3}. \end{aligned}$$

Næst reiknum við vægin:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx \\ &= \int_0^4 \frac{x}{2} dx = \tfrac{1}{4}x^2\Big|_0^4 = 4 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x f(x)dx \\ &= \int_0^4 x\sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{3/2}dx \\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{5}[32-0] = \tfrac{64}{5}. \end{aligned}$$

Því fæst

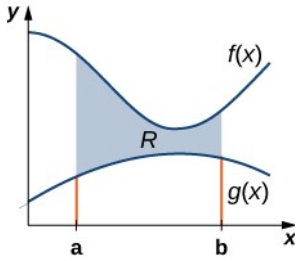
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{64/5}{16/3} = \frac{64}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{12}{5} \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{16/3} = 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

Þungamiðja svæðisins er $(12/5, 3/4)$.

STÖÐUMAT 6.31

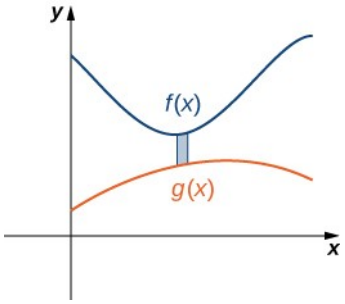
Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,2]$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Við getum einnig lagað aðferðina að því að finna þungamiðjur flóknari svæða. Gerum eins og áður ráð fyrir að svæðið afmarkist að ofan af grafi samfellds falls $f(x)$, en nú afmarkast það ekki að neðan af x-ásnum heldur af grafi annars samfellds falls, $g(x)$, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 6.68 Svæði milli tveggja falla.

Aftur skiptum við bilinu $[a,b]$ og myndum rétthyrninga. Dæmigerður rétthyrningur er sýndur á næstu mynd.



Mynd 6.69 Dæmigerður rétthyrningur á svæðinu milli tveggja falla.

Takið eftir að þungamiðja rétthyrningsins er $\left(x_i^*, \left(f\left(x_i^*\right)+g\left(x_i^*\right)\right)/2\right)$. Við förum ekki í öll smáatriðin við að setja upp Riemann-summuna en skoðum nokkur lykilskref. Þegar formúlurnar fyrir massa plötunnar og vægið um y-ásinn eru leiddar út er hæð hvers rétthyrnings $f\left(x_i^*\right)-g\left(x_i^*\right)$, sem leiðir til segðarinnar $f(x)-g(x)$ í heildisstofnunum.

Þegar formúlan fyrir vægið um x-ásinn er leidd út fæst vægi hvers rétthyrnings með því að margfalda flatarmál hans, $\rho\left[f\left(x_i^*\right)-g\left(x_i^*\right)\right]\Delta x$, með fjarlægð þungamiðjunnar frá x-ásnum, $\left(f\left(x_i^*\right)+g\left(x_i^*\right)\right)/2$, sem gefur $\rho(1/2)\left\{\left[f\left(x_i^*\right)\right]^2-\left[g\left(x_i^*\right)\right]^2\right\}\Delta x$. Við tökum niðurstöðurnar saman í næstu setningu.

SETNING 6.13

Massamiðja þunnrar plötu sem afmarkast af tveimur föllum

Látum R tákna svæði sem afmarkast að ofan af grafi samfellda fallsins $f(x)$, að neðan af grafi samfellda fallsins $g(x)$, og til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í sömu röð. Látum ρ tákna þéttleika samsvarandi þunnrar plötu. Þá gildir eftirfarandi:

i. Massi þunnu plötunnar er

$$m=\rho\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx.$$

(6.21)

ii. Vægi þunnu plötunnar M_x og M_y um x- og y-ásana eru, í sömu röð,

$$M_x=\rho\int_a^b \frac{1}{2}\left(\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right)dx \text{ og } M_y=\rho\int_a^b x\left[f(x)-g(x)\right]dx.$$

(6.22)

iii. Hnit massamiðjunnar $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ eru

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m} \text{ og } \bar{y}=\frac{M_x}{m}.$$

(6.23)

Við skýrum setninguna með næsta dæmi.

DÆMI 6.32

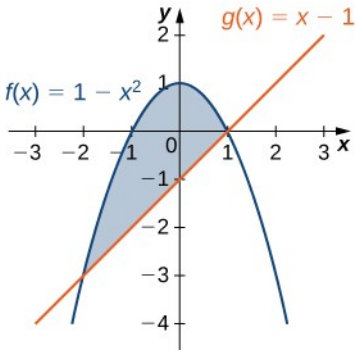
Þungamiðja svæðis sem afmarkast af tveimur föllum fundin

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=1-x^2$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=x-1$. Finnið þungamiðju svæðisins.

6

Lausn

Svæðið er sýnt á næstu mynd.



Mynd 6.70 Þungamiðja svæðis milli tveggja ferla fundin.

Gröf fallanna skerast í $(-2,-3)$ og $(1,0)$, þannig að við heildum frá -2 til 1. Til einföldunar gerum við aftur ráð fyrir að $\rho=1$.

Fyrst reiknum við heildarmassann:

$$\begin{aligned} m &= \rho\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{1}\left[1-x^2-(x-1)\right]dx = \int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx \\ &= \left[2x-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = \left[2-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right]-\left[-4+\tfrac{8}{3}-2\right] = \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

Næst reiknum við vægin:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho\int_a^b \frac{1}{2}\Big([f(x)]^2-[g(x)]^2\Big)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{1}\Big(\big(1-x^2\big)^2-(x-1)^2\Big)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{1}\big(x^4-3x^2+2x\big)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^5}{5}-x^3+x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = -\tfrac{27}{10} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} M_y &= \rho\int_a^b x\,[f(x)-g(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{1} x\left[\big(1-x^2\big)-(x-1)\right]dx = \int_{-2}^{1} x\left[2-x^2-x\right]dx \\ &= \int_{-2}^{1}\big(2x-x^3-x^2\big)\,dx \\ &= \left[x^2-\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{1} = -\tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

Því fæst

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{9}=-\frac{1}{2} \text{ og } \bar{y}=\frac{M_x}{m}=-\frac{27}{10}\cdot\frac{2}{9}=-\frac{3}{5}.$$

Þungamiðja svæðisins er $\left(-\left(1/2\right),-\left(3/5\right)\right)$.

STÖÐUMAT 6.32

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f\left(x\right)=6-x^2$ og að neðan af grafi fallsins $g\left(x\right)=3-2\,x$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Samhverfureglan

Við settum samhverfuregluna fram fyrr þegar við skoðuðum þungamiðju rétthyrnings. Reglan getur komið að miklu gagni þegar finna á þungamiðjur samhverfra svæða. Skoðum næsta dæmi.

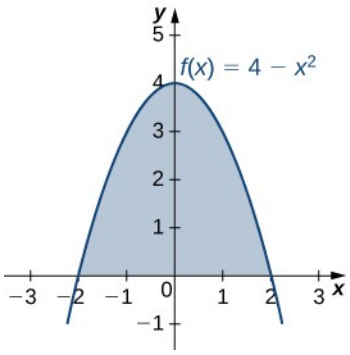
DÆMI 6.33

Þungamiðja samhverfs svæðis fundin

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f\left(x\right)=4-x^2$ og að neðan af x-ásnum. Finnið þungamiðju svæðisins.

Lausn

Svæðið er sýnt á næstu mynd.



Mynd 6.71 Við getum notað samhverfuregluna til að finna þungamiðju samhverfs svæðis.

6

Svæðið er samhverft um y-ásinn. Því er x-hnit þungamiðjunnar núll. Við þurfum aðeins að reikna $\bar{y}$. Til einföldunar gerum við aftur ráð fyrir að $\rho=1$.

Fyrst reiknum við heildarmassann:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \\ &= \left[4x - \tfrac{x^3}{3}\right] \Big|_{-2}^{2} = \tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Næst reiknum við vægin. Við þurfum aðeins M_x:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left[4 - x^2\right]^2 dx = \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{x^5}{5} - \tfrac{8x^3}{3} + 16x\right] \Big|_{-2}^{2} = \tfrac{256}{15}. \end{aligned}$$

Þá fæst

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256}{15} \cdot \frac{3}{32} = \frac{8}{5}.$$

Þungamiðja svæðisins er $(0, 8/5)$.

STÖÐUMAT 6.33

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x) = 1 - x^2$ og að neðan af x-ásnum. Finnið þungamiðju svæðisins.

NEMENDAVERKEFNI

Útsýnispallurinn Grand Canyon Skywalk

Grand Canyon Skywalk var opnaður almenningi 28. mars 2007. Þetta verkfræðiundur er skeifulaga útsýnispallur sem svífur um 1200 m yfir Colorado-ánni við vesturbrún Miklagljúfurs. Kristaltært glergólfið veitir tilkomumikið útsýni niður í gljúfrið (sjá næstu mynd).



Mynd 6.72 Grand Canyon Skywalk veitir tilkomumikið útsýni yfir gljúfrið. (mynd: 10da_ralta, Wikimedia Commons)

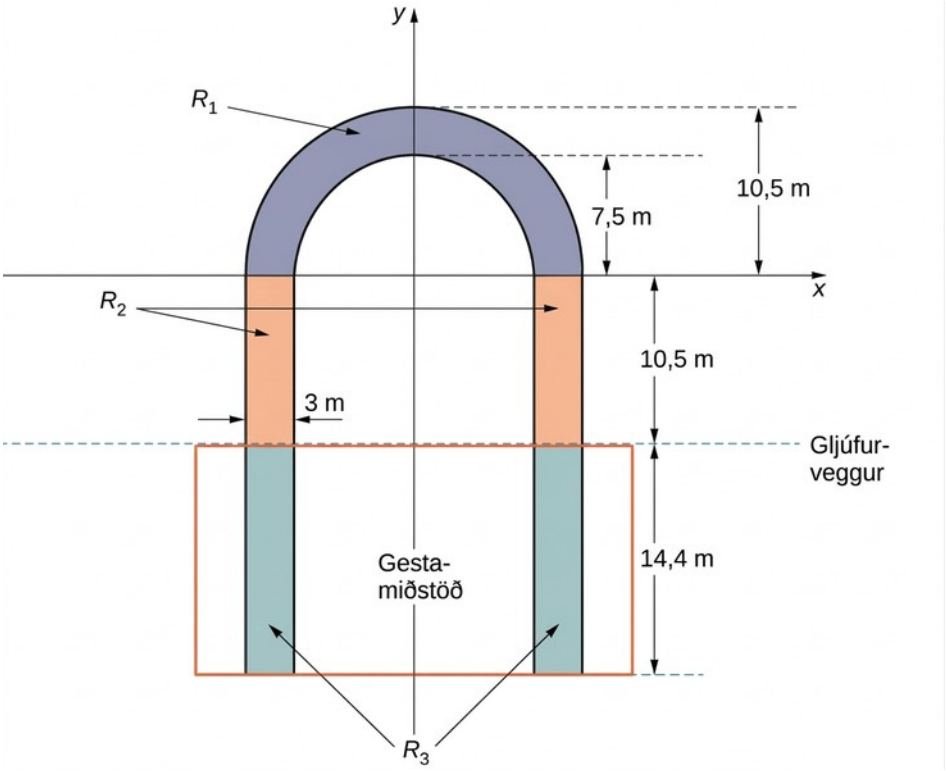
Skywalk er svifbitamannvirki, sem þýðir að útsýnispallurinn teygir sig út fyrir gljúfurbrúnina án sýnilegra burðarvirkja undir honum. Þótt hvorki sjáist stoðir né stífur eru svifbitamannvirki hönnuð til að vera mjög stöðug og Skywalk er þar engin undantekning. Útsýnispallurinn er tryggilega festur við stoðir sem ná 14 m niður í berggrunninn. Mannvirkið var byggt til að þola vindhraða allt að 160 km/klst og jarðskjálfta af stærð 8,0 innan 80 km fjarlægðar. Það getur borið meira en 31,000 tonn.

Þyngdarpunktur mannvirkisins er einn þeirra þátta sem hafa áhrif á stöðugleika Skywalk. Við reiknum þyngdarpunkt pallsins og könnum hvernig hann breytist þegar ferðamenn ganga út á útsýnispallinn.

6

Útsýnispallurinn er U-laga. Armar U-sins eru 3 m á breidd og hefjast á landi undir gestamiðstöðinni, 14,4 m frá gljúfurbrúninni. Pallurinn teygir sig 21 m út fyrir brúnina.

Til að reikna massamiðju mannvirkisins lítum við á það sem þunna plötu og táknum pallinn með tvívíðu svæði í xy-sléttunni. Fyrst skiptum við svæðinu í þrjú undirsvæði svo hægt sé að skoða hvert þeirra fyrir sig. Fyrsta svæðið, R_1, er bogadregni hluti U-sins. Við lítum á R_1 sem hálfan hringkraga með innri geisla 7,5 m og ytri geisla 10,5 m og miðju í upphafspunktinum (sjá næstu mynd).



Mynd 6.73 Við gerum líkan af Skywalk með þremur undirsvæðum.

Armar pallsins, sem ná 10,5 m milli R_1 og gljúfurveggsins, mynda annað undirsvæðið, R_2. Endar armanna, sem ná 14,4 m undir gestamiðstöðina, mynda loks þriðja undirsvæðið, R_3. Gerið ráð fyrir að þéttleiki plötunnar sé fastur og að heildarþyngd pallsins sé 5.390.000 N (án þyngdar gestamiðstöðvarinnar, sem verður tekin með síðar). Notið $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

1. Reiknið flatarmál undirsvæðanna þriggja. Athugið að flatarmál svæðanna R_2 og R_3 eiga aðeins að ná yfir flatarmál armanna en ekki auða svæðið á milli þeirra. Námundið svörin í fermetrum að einum aukastaf.
2. Ákvarðið massann sem tilheyrir hverju undirsvæðanna þriggja.
3. Reiknið massamiðju hvers undirsvæðanna þriggja.
4. Lítið nú á hvert hlutsvæðanna þriggja sem punktmassa í massamiðju þess. Notið þessa framsetningu til að reikna massamiðju alls pallsins.
5. Gerið ráð fyrir að gestamiðstöðin vegi 9.800.000 N og að massamiðja hennar sé sú sama og massamiðja R_3. Lítið á gestamiðstöðina sem punktmassa og reiknið massamiðju kerfisins aftur. Hvernig breytist massamiðjan?
6. Þótt Skywalk hafi verið hannaður fyrir að hámarki 120 manns á útsýnispallinum getur pallurinn borið allt að 800 manns sem eru hver um sig 90 kg að massa. Ef öllum 800 væri hleypt út á pallinn og þeir færu allir út á ysta enda hans, hvaða áhrif hefði það á þyngdarpunkt kerfisins? (Takið gestamiðstöðina með í útreikningana og táknið fólkið með punktmassa á ystu brún pallsins, 21 m frá gljúfurveggnum.)

Setning Papposar

Í lok þessa undirkafla fjöllum við um setningu Papposar um rúmmál, sem gerir okkur kleift að finna rúmmál tiltekinna rúmhluta með hjálp þungamiðjunnar. (Einnig er til setning Papposar um yfirborðsflatarmál, en hún nýtist mun sjaldnar en setningin um rúmmál.)

SETNING 6.14

Setning Papposar um rúmmál

Látum R vera svæði í sléttu og l línu í sömu sléttu sem sker ekki R. Þá er rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um l jafnt flatarmáli R margfölduðu með vegalengdinni d sem farin er af þungamiðju R.

Sönnun

Við getum sannað tilvikið þegar svæðið afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)$ á bilinu $[a,b]$, og snúningsásinn er y-ásinn. Þá er flatarmál svæðisins $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$. Þar sem snúningsásinn er y-ásinn ræðst vegalengdin sem þungamiðja svæðisins fer aðeins af x-hniti hennar, $\bar{x}$, sem er

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m},$$

þar sem

$$m=\rho\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \text{ og } M_y=\rho\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx.$$

Þá fæst

$$d=2\pi\frac{\rho\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx}{\rho\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx}$$

og því

$$d\cdot A=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx.$$

Hins vegar fáum við með hylkjaaðferðinni

$$V=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx.$$

Því,

$$V = d \cdot A$$

og sönnuninni er lokið.

□

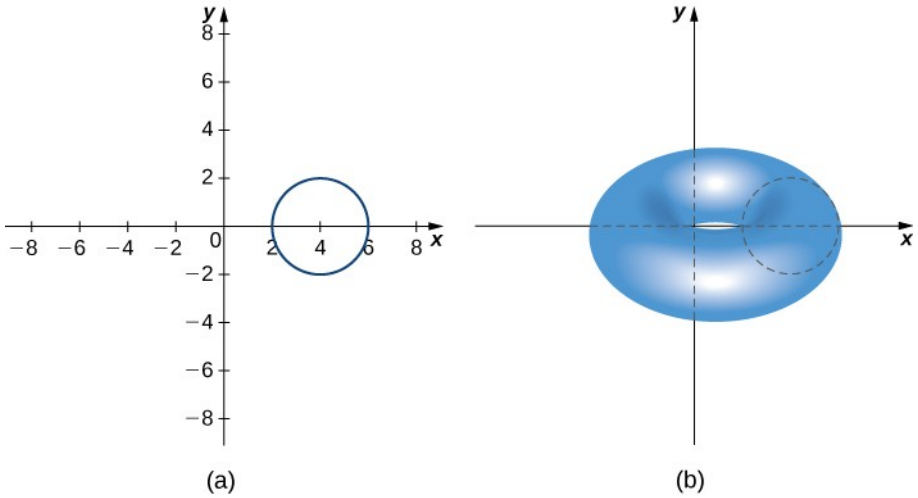
DÆMI 6.34

Setningu Papposar um rúmmál beitt

Látum R vera hring með geisla 2 og miðju í $(4, 0)$. Notið setningu Papposar um rúmmál til að finna rúmmál hjólflötungsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Lausn

Svæðið og hjólflötungurinn eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.74 Rúmmál hjólflötungs fundið með setningu Papposar. (a) Hringlaga svæði R í sléttu. (b) Hjólflötungurinn sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Svæðið R er hringur með geisla 2, svo flatarmál R er $A = 4\pi$ einingar². Samkvæmt samhverfureglunni er þungamiðja R miðja hringsins. Þungamiðjan fer umhverfis y-ásinn eftir hringferli með geisla 4 og fer því $d = 8\pi$ einingar. Rúmmál hjólflötungsins er þá $A \cdot d = 32\pi^2$ einingar³.

STÖÐUMAT 6.34

Látum R vera hring með geisla 1 og miðju í $(3, 0)$. Notið setningu Papposar um rúmmál til að finna rúmmál hjólflötungsins sem myndast með því að snúa R um y-ásinn.

Æfingar úr undirkafla 6.6

Reiknið massamiðju massanna sem gefnir eru í eftirfarandi æfingum.

254. $m_1 = 2$ við $x_1 = 1$ og $m_2 = 4$ við $x_2 = 2$

255. $m_1=1$ við $x_1=-1$ og $m_2=3$ við $x_2=2$

256. $m=3$ við $x=0,1,2,6$

257. Einingarmassar í punktunum $(x,y)=(1,0),(0,1),(1,1)$

258. $m_1=1$ við $(1,0)$ og $m_2=4$ við $(0,1)$

259. $m_1=1$ í $(1,0)$ og $m_2=3$ í $(2,2)$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna massamiðjuna $\bar{x}$.

260. $\rho=1$ fyrir $x\in(-1,3)$

261. $\rho=x^2$ fyrir $x\in(0,L)$

262. $\rho=1$ fyrir $x\in(0,1)$ og $\rho=2$ fyrir $x\in(1,2)$

263. $\rho=\sin x$ fyrir $x\in(0,\pi)$

264. $\rho=\cos x$ fyrir $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

265. $\rho=e^x$ fyrir $x\in(0,2)$

266. $\rho=x^3+xe^{-x}$ fyrir $x\in(0,1)$

267. $\rho=x\sin x$ fyrir $x\in(0,\pi)$

268. $\rho=\sqrt{x}$ fyrir $x\in(1,4)$

269. $\rho=\ln x$ fyrir $x\in(1,e)$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna massamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$. Notið samhverfu þar sem hægt er til að auðvelda ykkur að finna hana.

270. $\rho=7$ í ferningnum

$$0\le x\le 1,$$

$$0\le y\le 1$$

6

271. $\rho=3$ í þríhyrningnum með hornpunkta $(0,0)$, $(a,0)$, og $(0,b)$

272. $\rho=2$ á svæðinu sem afmarkast af $y=\cos(x)$, $y=-\cos(x)$, $x=-\frac{\pi}{2}$, og $x=\frac{\pi}{2}$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota reiknivél til að teikna svæðið og reikna síðan massamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$. Notið samhverfu þar sem hægt er til að auðvelda ykkur að finna hana.

273. **[T]** Svæðið sem afmarkast af $y=\cos(2x)$, $x=-\frac{\pi}{4}$, og $x=\frac{\pi}{4}$

274. **[T]** Svæðið milli $y=2x^2$, $y=0$, $x=0$, og $x=1$

275. **[T]** Svæðið milli $y=\frac{5}{4}x^2$ og $y=5$

276. **[T]** Svæðið milli $y=\sqrt{x}$, $y=\ln(x)$, $x=1$, og $x=4$

277. **[T]** Svæðið sem afmarkast af

$$y=0,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

278. **[T]** Svæðið sem afmarkast af $y=0$, $x=0$, og $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

279. **[T]** Svæðið í fyrsta fjórðungi sem afmarkast af $y=x^2$ og $y=x^4$

Notið setningu Papposar í eftirfarandi æfingum til að ákvarða rúmmál rúmhlutans.

280. Snúið $y=mx$ um x-ásinn milli $x=0$ og $x=1$

281. Snúið $y=mx$ um y-ásinn milli $x=0$ og $x=1$

282. Almenn keila sem myndast við að snúa þríhyrningi með hornpunkta $(0,0)$, $(a,0)$, og $(0,b)$ um y-ásinn. Samræmist svarið rúmmáli keilu?

283. Almennur sívalningur sem myndast með því að snúa rétthyrningi með hornpunkta $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$, og (a,b) um y-ásinn. Samræmist svarið rúmmáli sívalnings?

284. Kúla sem myndast þegar hálfhring með geisla a er snúið um y-ásinn. Samræmist svarið rúmmáli kúlu?

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna svæðið sem ferillinn afmarkar. Finnið flatarmálið M og þungamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ fyrir gefnu svæðin. Notið samhverfu þar sem hægt er til að auðvelda ykkur að finna massamiðjuna.

285. **[T]** Fjórðungshringur: $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0$, og $x=0$

286. **[T]** Þríhyrningur: $y=x$, $y=2-x$, og $y=0$

287. **[T]** Linsusvæði: $y=x^2$ og $y=x$

288. **[T]** Hringkragi: $y^2+x^2=1$ og $y^2+x^2=4$

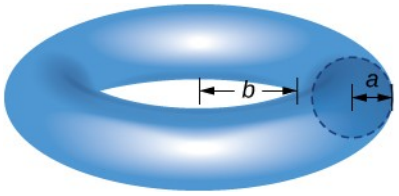
289. **[T]** Hálfur hringkragi: $y^2+x^2=1$, $y^2+x^2=4$, og $y=0$

290. Finnið almenna formúlu fyrir massamiðju mjóa svæðisins milli $y=x^a$ og $y=x^b$ þar sem $a>b$. Notið síðan setningu Papposar til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

291. Finnið almenna formúlu fyrir massamiðju svæðisins milli $y=a^2-x^2$, $x=0$, og $y=0$. Notið síðan setningu Papposar til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

292. Finnið almenna formúlu fyrir massamiðju svæðisins milli $y=b\sin(ax)$, $x=0$, og $x=\frac{\pi}{a}$. Notið síðan setningu Papposar til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

293. Notið setningu Papposar til að finna rúmmál hjólflötungsins sem sýndur er hér. Gerið ráð fyrir að skífa með geisla a sé staðsett þannig að vinstri endi hringsins sé við $x=b$, $b>0$, og að henni sé snúið um y-ásinn.



294. Finnið massamiðjuna $(\bar{x},\bar{y})$ fyrir þunnan vír sem liggur eftir hálfhringnum $y=\sqrt{1-x^2}$ og hefur einingarmassa. (Vísbending: Notið setningu Papposar.)

6.7 Heildi, vísisföll og lograr

NÁMSMARKMIÐ

- 6.7.1 Setjið fram skilgreiningu náttúrlega lograns sem heildi.
- 6.7.2 Þekkið afleiðu náttúrlega lograns.
- 6.7.3 Heildið föll sem fela í sér náttúrlega lografallið.
- 6.7.4 Skilgreinið töluna e með heildi.
- 6.7.5 Þekkið afleiðu og heildi vísisfallsins.
- 6.7.6 Sannið eiginleika logra og vísisfalla með heildum.
- 6.7.7 Ritið almenn lografföll og vísisföll með náttúrlega logranum og náttúrlega vísisfallinu.

Við höfum þegar fjallað um vísisföll og logra í fyrri köflum. Í þeirri umfjöllun fórum við þó lauslega yfir nokkur mikilvæg atriði. Til dæmis skoðuðum við ekki hvernig fara á með vísisföll með óræðum veldisvísum. Skilgreining tölunnar e er annað atriði sem fyrri umfjöllun gerði ekki full skil. Nú höfum við þau verkfæri sem þarf til að fjalla um þessi hugtök á strangari stærðfræðilegan hátt og það gerum við í þessum undirkafla.

Í þessum undirkafla gerum við ráð fyrir að náttúrlegi logrinn, talan e og heildunar- og deildunarreglurnar sem tengjast þessum föllum hafi enn ekki verið skilgreind. Í lok undirkaflans höfum við fjallað um þessi hugtök á stærðfræðilega strangan hátt (og séð að þau samræmast hugtökunum sem við kynntumst áður).

Við byrjum undirkaflann á því að skilgreina náttúrlega logrann með heildi. Þessi skilgreining er undirstaða undirkaflans. Út frá henni leiðum við út deildunarreglur, skilgreinum töluna e, og útvíkkum síðan hugtökin þannig að þau nái til logra og vísisfalla með hvaða grunntölu sem er.

Náttúrlegi logrinn sem heildi

Rifjum upp veldisregluna fyrir heildi:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

Ljóst er að reglan gildir ekki þegar $n = -1$, því þá þyrftum við að deila með núlli. Hvernig förum við þá með $\int \frac{1}{x} \, dx$? Rifjum upp úr undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar að $\int_1^x \frac{1}{t} \, dt$ er stofnfall $1/x$. Við getum því sett fram eftirfarandi skilgreiningu.

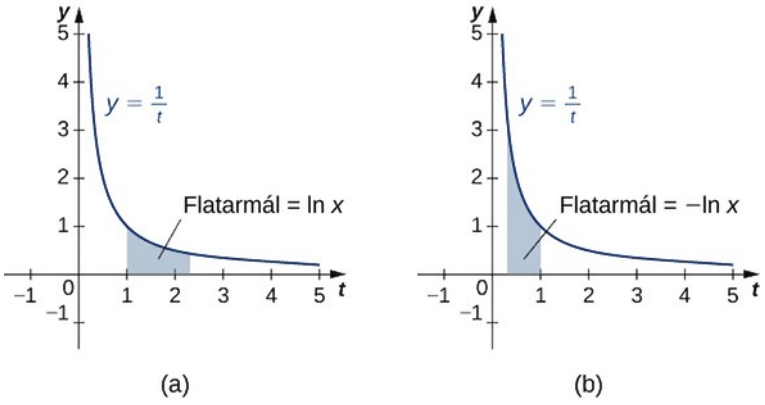
SKILGREINING

Fyrir $x > 0$, skilgreinum við náttúrlega lografallið með

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt.$$

(6.24)

Fyrir $x > 1$, er þetta einfaldlega flatarmálið undir ferlinum $y = 1/t$ frá 1 til x. Fyrir $x < 1$, gildir $\int_1^x \frac{1}{t} \, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} \, dt$, svo þá er þetta neikvætt gildi flatarmálsins undir ferlinum frá x til 1 (sjá næstu mynd).



Mynd 6.75 (a) Þegar $x > 1$, er náttúrlegi logrinn flatarmálið undir ferlinum $y = 1/t$ frá 1 til x. (b) Þegar $x < 1$, er náttúrlegi logrinn neikvætt gildi flatarmálsins undir ferlinum frá x til 1.

Takið eftir að $\ln 1 = 0$. Enn fremur er fallið $y = 1/t > 0$ fyrir $x > 0$. Af eiginleikum heilda er því ljóst að $\ln x$ er vaxandi fyrir $x > 0$.

Eiginleikar náttúrlega lograns

Eftirfarandi deildunarregla leiðir beint af því hvernig við skilgreindum náttúrlega logrann og af undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar.

SETNING 6.15

Afleiða náttúrlega lograns

Fyrir $x > 0$, er afleiða náttúrlega lograns gefin með

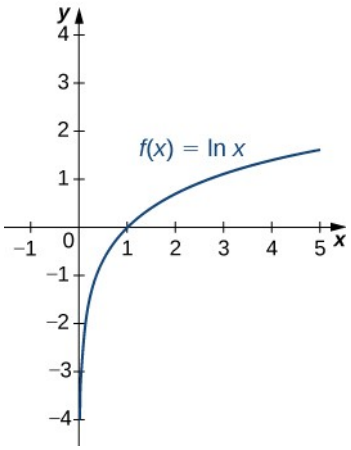
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

SETNING 6.16

Fylgisetning um afleiðu náttúrlega lograns

Fallið $\ln x$ er deildanlegt og er því samfellt.

Graf $\ln x$ er sýnt á mynd 6.76. Takið eftir að fallið er samfellt á öllu skilgreiningarmenginu $(0, \infty)$.



Mynd 6.76 Graf $f(x) = \ln x$ sýnir að fallið er samfellt.

DÆMI 6.35

Afleiður náttúrlegra logra reiknaðar

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx} \ln(5x^3 - 2)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(3x\right)\right)^2$

Lausn

Við þurfum að beita keðjureglunni í báðum tilvikum.

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(5x^3-2\right)=\frac{15x^2}{5x^3-2}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(3x\right)\right)^2=\frac{2\left(\ln\left(3x\right)\right)\cdot 3}{3x}=\frac{2\left(\ln\left(3x\right)\right)}{x}$

STÖÐUMAT 6.35

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(2x^2+x\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^3\right)\right)^2$

Athugið að ef við notum tölugildisfallið og skilgreinum nýtt fall $\ln|x|$, getum við víkkað skilgreiningarmengi náttúrlega lograns þannig að það nái einnig til $x<0$. Þá gildir $\left(d/\left(dx\right)\right)\ln|x|=1/x$. Af þessu fæst hin kunnuglega heildunarregla.

SETNING 6.17

Heildi af (1/u) du

Náttúrlegi logrinn er stofnfall fallsins $f\left(u\right)=1/u$:

$$\int\frac{1}{u}\,du=\ln|u|+C.$$

DÆMI 6.36

Heildi sem fela í sér náttúrlega logra reiknuð

Reiknið heildið $\int\frac{x}{x^2+4}\,dx$.

Lausn

Notum u-innsetningu og látum $u=x^2+4$. Þá er $du=2x\,dx$ og við fáum

$$\int\frac{x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+C.$$

STÖÐUMAT 6.36

Reiknið heildið $\int \frac{x^2}{x^3+6}\,dx$.

Þótt við höfum kallað fallið okkar „logra“ höfum við í raun ekki sannað að neinir eiginleikar logra gildi um þetta fall. Það gerum við hér.

SETNING 6.18

Eiginleikar náttúrlega lograns

Ef $a, b>0$ og r er ræð tala gildir

i. $\ln 1=0$

ii. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

iii. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

iv. $\ln(a^r)=r\ln a$

Sönnun

i. Samkvæmt skilgreiningu er $\ln 1=\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt=0$.

ii. Við höfum

$$\ln(ab)=\int_1^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt.$$

Notum u-innsetning á síðasta heildið í þessari stæðu. Látum $u=t/a$. Þá er $du=(1/a)\,dt$. Þegar $t=a, u=1$, og þegar $t=ab, u=b$. Því fæst

$$\ln(ab)=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{a}{t}\cdot\frac{1}{a}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_1^{b}\frac{1}{u}\,du=\ln a+\ln b.$$

iv. Athugið að

$$\frac{d}{dx}\ln(x^r)=\frac{r\,x^{r-1}}{x^r}=\frac{r}{x}.$$

Enn fremur,

$$\frac{d}{dx}(r\ln x)=\frac{r}{x}.$$

Föllin tvö hafa sömu afleiðu. Af undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar leiðir að munurinn á þeim er fasti. Því fæst

$$\ln\left(x^r\right)=r\ln x+C$$

fyrir einhvern fasta C. Með því að velja $x=1$, fæst

$$\begin{aligned}\ln\left(1^r\right) &= r\ln(1)+C\\ 0 &= r(0)+C\\ C &= 0.\end{aligned}$$

Því gildir $\ln\left(x^r\right)=r\ln x$ og sönnuninni er lokið. Athugið að síðar í þessum undirkafla útvíkkum við þennan eiginleika þannig að hann gildi fyrir óræð gildi r. Liður iii. leiðir af liðum ii. og iv. og ykkur er látið eftir að sanna hann.

□

DÆMI 6.37

Eiginleikar logra notaðir

Notið eiginleika logra til að einfalda eftirfarandi stæðu og rita hana sem einn logra:

$$\ln 9-2\ln 3+\ln\left(\frac{1}{3}\right).$$

Lausn

Við höfum

$$\ln 9-2\ln 3+\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(3^2\right)-2\ln 3+\ln\left(3^{-1}\right)=2\ln 3-2\ln 3-\ln 3=-\ln 3.$$

STÖÐUMAT 6.37

Notið eiginleika logra til að einfalda eftirfarandi stæðu og rita hana sem einn logra:

$$\ln 8-\ln 2-\ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

Skilgreining á tölunni e

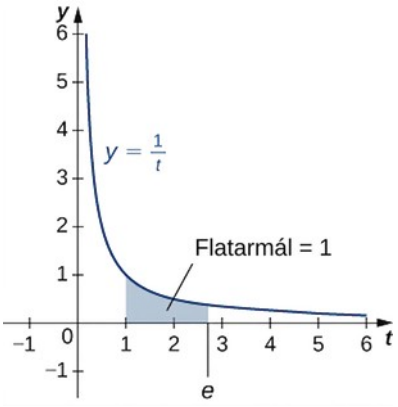
Nú þegar við höfum skilgreint náttúrlega lograng getum við notað hann til að skilgreina töluna e.

SKILGREINING

Talan e er skilgreind sem sú rauntala sem uppfyllir

$$\ln e = 1.$$

Með öðrum orðum: Flatarmálið undir ferlinum $y = 1/t$ milli $t = 1$ og $t = e$ er 1 (mynd 6.77). Ykkur er látið eftir að sanna að slík tala sé til og að hún sé aðeins ein. (Vísbending: Notið milligildissetninguna til að sanna að talan sé til og notið þá staðreynd að $\ln x$ er vaxandi til að sanna að hún sé aðeins ein.)



Mynd 6.77 Flatarmálið undir ferlinum frá 1 til e er jafnt einum.

Hægt er að sýna fram á að talan e sé óræð, þótt það verði ekki gert hér (sjá nemendaverkefnið í Taylor- og Maclaurin-röðum). Nálgunargildi hennar er

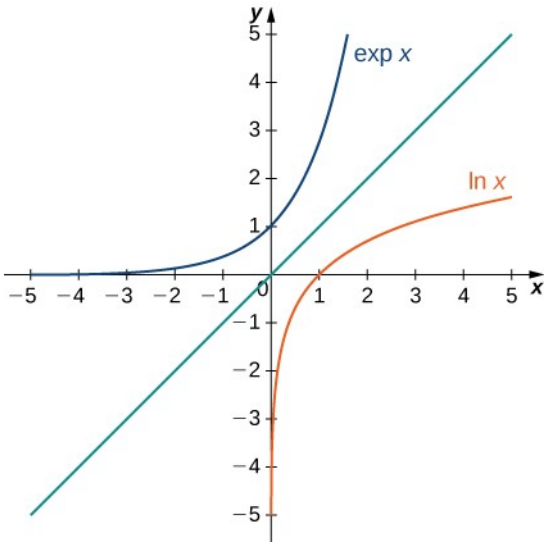
$$e \approx 2{,}71828182846.$$

Vísisfallið

Nú beinum við athyglinni að fallinu e^x. Athugið að náttúrlegi lograinn er eintækur og hefur því andhverft fall. Í bili táknum við þetta andhverfa fall með $\exp x$. Þá gildir

$$\exp(\ln x) = x \text{ fyrir } x > 0 \text{ og } \ln(\exp x) = x \text{ fyrir öll } x.$$

Eftirfarandi mynd sýnir gröf fallanna $\exp x$ og $\ln x$.



Mynd 6.78 Gröf fallanna $\ln x$ og $\exp x$.

Við setjum fram þá tilgátu að $\exp x = e^x$. Fyrir ræð gildi x, er auðvelt að sýna fram á þetta. Ef x er ræð tala gildir $\ln\left(e^x\right) = x \ln e = x$. Þegar x er ræð tala gildir því $e^x = \exp x$. Fyrir óræð gildi x, skilgreinum við einfaldlega e^x sem andhverfu fallsins $\ln x$.

SKILGREINING

Fyrir hverja rauntölu x, skilgreinum við $y = e^x$ sem þá tölu sem uppfyllir

$$\ln y = \ln\left(e^x\right) = x.$$

(6.25)

Þá gildir $e^x = \exp\left(x\right)$ fyrir öll x, og því

$$e^{\ln x} = x \text{ fyrir } x > 0 \text{ og } \ln\left(e^x\right) = x$$

(6.26)
fyrir öll x.

6

Eiginleikar vísisfallsins

Þar sem vísisfallið var skilgreint með andhverfu falli en ekki með veldi af e, verðum við að sannreyna að venjulegar veldisreglur gildi um fallið e^x.

SETNING 6.19

Eiginleikar vísisfallsins

Ef p og q eru hvaða rauntölur sem er og r er ræð tala gildir

i. $e^p e^q = e^{p+q}$

ii. $\frac{e^p}{e^q} = e^{p-q}$

iii. $\left(e^p\right)^r = e^{pr}$

Sönnun

Athugið að ef p og q eru ræðar tölur gilda eiginleikarnir. Ef p eða q er hins vegar óræð tala verðum við að nota skilgreininguna á e^x sem andhverfu falli og sannreyna eiginleikana. Hér sannreynum við aðeins fyrsta eiginleikann; ykkur er látið eftir að sannreyna hina tvo. Við höfum

$$\ln\left(e^p e^q\right) = \ln\left(e^p\right) + \ln\left(e^q\right) = p + q = \ln\left(e^{p+q}\right).$$

Þar sem $\ln x$ er eintækt fall fæst

$$e^p e^q = e^{p+q}.$$

□

Líkt og í iv. lið eiginleika logra getum við útvíkkað eiginleika iii. þannig að hann gildi fyrir óræð gildi r, og það gerum við í lok undirkaflans.

Við viljum einnig sannreyna deildunarregluna fyrir fallið $y = e^x$. Til þess þurfum við að nota fólgna deildun. Látum $y = e^x$. Þá

$$\begin{aligned} \ln y &= x \\ \frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= y. \end{aligned}$$

Þannig sjáum við

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

eins og stefnt var að, og af því leiðir heildunarreglan þegar í stað:

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Við notum þessar formúlur í dæmunum hér á eftir.

6

DÆMI 6.38

Eiginleikar vísisfalla notaðir

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2}$

b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2}$

Lausn

Við beitum keðjureglunni eftir þörfum.

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2}=\frac{d}{dt}e^{3t+t^2}=e^{3t+t^2}(3+2t)$

b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2}=e^{3x^2}6x$

STÖÐUMAT 6.38

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right)$

b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3$

DÆMI 6.39

Eiginleikar vísisfalla notaðir

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int 2xe^{-x^2}dx$.

Lausn

Notum u-innsetningu og látum $u=-x^2$. Þá er $du=-2xdx$, og við fáum

$$\int 2xe^{-x^2}dx=-\int e^u du=-e^u+C=-e^{-x^2}+C.$$

STÖÐUMAT 6.39

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int \frac{4}{e^{3x}}dx$.

Almenn lograföll og vísisföll

Við ljúkum þessum undirkafla með því að skoða vísisföll og logra með öðrum grunntölum en e. Vísisföll eru föll á forminu $f(x)=a^x$. Athugið að nema $a=e$, höfum við enn ekki stærðfræðilega stranga skilgreiningu á þessum föllum fyrir óræða veldisvísa. Við bætum úr því hér og skilgreinum fallið $f(x)=a^x$ með vísisfallinu e^x. Síðan skoðum við logra með öðrum grunntölum en e sem andhverf föll vísisfalla.

SKILGREINING

Fyrir hvert $a>0$, og hverja rauntölu x, skilgreinum við $y=a^x$ á eftirfarandi hátt:

$$y=a^x=e^{x\ln a}.$$

Nú er a^x skilgreint á stærðfræðilega strangan hátt fyrir öll gildi x. Þessi skilgreining gerir okkur einnig kleift að alhæfa eiginleika iv. logra og eiginleika iii. vísisfalla þannig að þeir gildi bæði fyrir ræð og óræð gildi r. Auðvelt er að sýna að veldisreglurnar gilda um almenn vísisföll sem eru skilgreind með þessum hætti.

Notum nú þessa skilgreiningu til að leiða út deildunarreglu fyrir a^x. Við höfum

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{x\ln a}=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

Samsvarandi heildunarregla fæst þegar í stað.

SETNING 6.20

Afleiður og heildi almennra vísisfalla

Látum $a>0$. Þá er

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$$

og

$$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C.$$

Ef $a\neq 1$, er fallið a^x eintækt og hefur vel skilgreint andhverft fall. Andhverfa þess er táknuð með $\log_a x$. Þá gildir

$$y=\log_a x \text{ þá og því aðeins að } x=a^y.$$

Athugið að rita má almenn lograföll með náttúrlega logranum. Látum $y=\log_a x$. Þá er $x=a^y$. Tökum náttúrlega logrann af báðum hliðum síðari jöfnunnar og fáum

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln(a^y)\\ \ln x &= y\ln a\\ y &= \tfrac{\ln x}{\ln a}\\ \log_a x &= \tfrac{\ln x}{\ln a}.\end{aligned}$$

Því sjáum við að öll lograföll eru fastamargfeldi hvert annars. Næst notum við þessa formúlu til að finna deildunarreglu fyrir logra með grunntölu a. Látum aftur $y=\log_a x$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\log_a x)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)\\ &= \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$

SETNING 6.21

Afleiður almennra lografalla

Látum $a>0$. Þá er

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}.$$

DÆMI 6.40

Afleiður almennra vísisfalla og lografalla reiknaðar

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t\cdot 2^{t^2}\right)$

b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right)$

Lausn

Við beitum keðjureglunni eftir þörfum.

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t\cdot 2^{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(2^{2t}\cdot 2^{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(2^{2t+t^2}\right)=2^{2t+t^2}\ln(2)(2+2t)$

b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right)=\frac{1}{\left(7x^2+4\right)(\ln 8)}(14x)$

STÖÐUMAT 6.40

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dt}4^{t^4}$

b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

DÆMI 6.41

Almenn vísisföll heilduð

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int \frac{3}{2^{3x}} dx$.

Lausn

Notum u-innsetning og látum $u = -3x$. Þá er $du = -3\,dx$ og við fáum

$$\int \frac{3}{2^{3x}} dx = \int 3 \cdot 2^{-3x} dx = -\int 2^u du = -\frac{1}{\ln 2} 2^u + C = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-3x} + C.$$

STÖÐUMAT 6.41

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int x^2 2^{x^3} dx$.

Æfingar í undirkafla 6.7

Finnið í eftirfarandi æfingum afleiðuna $\frac{dy}{dx}$.

295.

$$y = \ln(2x)$$

296.

$$y = \ln(2x+1)$$

297.

$$y = \frac{1}{\ln x}$$

Finnið óákveðna heildið í eftirfarandi æfingum.

298.

$$\int \frac{dt}{3t}$$

299.

$$\int \frac{dx}{1+x}$$

Finnið í eftirfarandi æfingum afleiðuna dy/dx. (Þið getið notað reiknivél til að teikna gröf fallsins og afleiðunnar og staðfest þannig að niðurstaðan sé rétt.)

300. **[T]** $y = \frac{\ln(x)}{x}$

301. **[T]** $y = x \ln(x)$

302. **[T]** $y=\log_{10} x$

303. **[T]** $y=\ln(\sin x)$

304. **[T]** $y=\ln(\ln x)$

305. **[T]** $y=7\ln(4x)$

306. **[T]** $y=\ln\left((4x)^7\right)$

307. **[T]** $y=\ln(\tan x)$

308. **[T]** $y=\ln(\tan(3x))$

309. **[T]** $y=\ln(\cos^2 x)$

Finnið ákveðið eða óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum.

310.

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x}$$

311.

$$\int_0^1 \frac{dt}{3+2t}$$

312.

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

313.

$$\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^2+1}$$

314.

$$\int_2^e \frac{dx}{x\ln x}$$

315.

$$\int_2^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

316.

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

317.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$$

318.

$$\int \cot(3x)\, dx$$

319.

$$\int \frac{(\ln x)^2 \, dx}{x}$$

Reiknið dy/dx í eftirfarandi æfingum með því að deilda $\ln y$.

320.

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

321.

$$y = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}$$

322.

$$y = e^{\sin x}$$

323.

$$y = x^{-1/x}$$

324.

$$y = e^{(ex)}$$

325.

$$y = x^e$$

326.

$$y = x^{(ex)}$$

327.

$$y = \sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}$$

328.

$$y = x^{-1/\ln x}$$

329.

$$y = e^{-\ln x}$$

Reiknið eftirfarandi dæmi með hvaða aðferð sem er.

330.

$$\int_{5}^{10} \frac{dt}{t} - \int_{5x}^{10x} \frac{dt}{t}$$

331.

$$\int_{1}^{e^{\pi}} \frac{dx}{x} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$$

332.

$$\frac{d}{dx} \int_{x}^{1} \frac{dt}{t}$$

333.

$$\frac{d}{dx} \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t}$$

334.

$$\frac{d}{dx} \ln(\sec x + \tan x)$$

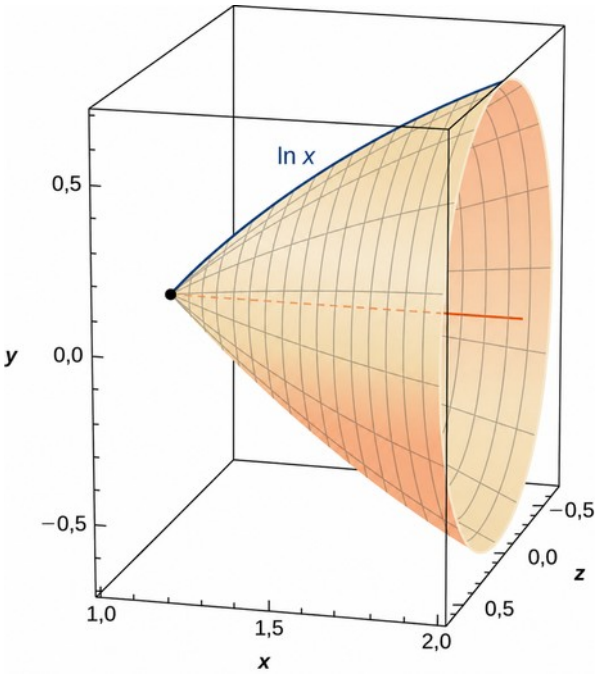
Notið í eftirfarandi æfingum fallið $\ln x$. Notið reiknivél ef ykkur tekst ekki að finna skurðpunkta með greiningaraðferðum.

335. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af $x=1$ og $y=5$ ofan við $y=\ln x$.

336. **[T]** Finnið bogalengd $\ln x$ frá $x=1$ til $x=2$.

337. Finnið flatarmálið milli $\ln x$ og x-ássins frá $x=1$ til $x=2$.

338. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar þessum ferli er snúið frá $x=1$ til $x=2$ um x-ásinn, eins og sýnt er hér.



339. **[T]** Finnið yfirborðsflatarmál snúðsins sem myndast þegar ferlinum í síðustu æfingu er snúið frá $x=1$ til $x=2$ um x-ásinn.

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum ef ykkur tekst ekki að finna skurðpunkta með greiningaraðferðum.

340. Finnið flatarmál breiðbogafjórðungsins sem afmarkast af $x=2$ og $y=2$ ofan við $y=1/x$.

341. **[T]** Finnið bogalengd $y=1/x$ frá $x=1$ til $x=4$.

342. Finnið flatarmálið undir $y=1/x$ og ofan við x-ásinn frá $x=1$ til $x=4$.

Sannreynið afleiðurnar og stofnföllin í eftirfarandi æfingum.

343.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

6

344.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)=\frac{2a}{\left(x^2-a^2\right)}$$

345.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

346.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

347.

$$\int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln x)} = \ln(\ln(\ln x)) + C$$

6.8 Vísisvöxtur og -hnignun

NÁMSMARKMIÐ

- 6.8.1 Notið vísisvaxtarlíkanið í hagnýtum verkefnum, meðal annars um fólksfjölgun og vaxtavexti.
- 6.8.2 Útskýrið hugtakið tvöföldunartími.
- 6.8.3 Notið vísishnignunarlíkanið í hagnýtum verkefnum, meðal annars um geislavirka hrörnun og kólnunarlögmál Newtons.
- 6.8.4 Útskýrið hugtakið helmingunartími.

Ein algengasta notkun vísisfalla er í líkönum af vexti og hnignun. Vísisvöxtur og vísishnignun koma fyrir í fjölmörgum náttúrulegum ferlum. Vísisföll eru alls staðar í náttúrunni, allt frá fólksfjölgun og samfelldri vaxtavöxtun til geislavirkrar hrörnunar og kólnunarlögmáls Newtons. Í þessum undirkafla skoðum við vísisvöxt og vísishnignun í samhengi við nokkur slík viðfangsefni.

Vísisvaxtarlíkan

Mörg kerfi sýna vísisvöxt. Þau fylgja líkani af gerðinni $y = y_0 e^{kt}$, þar sem y_0 táknar upphafsástand kerfisins og k er jákvæður fasti sem nefnist vaxtarfasti. Takið eftir að í vísisvaxtarlíkani gildir

$$y' = k\, y_0 e^{kt} = k\, y.$$

(6.27)

Vaxtarhraðinn er sem sagt í réttu hlutfalli við gildi fallsins á hverjum tíma. Þetta er eitt megineinkenni vísisvaxtar. Jafna 6.27 inniheldur afleiður og nefnist deildajafna. Nánar er fjallað um deildajöfnur í Inngangi að deildajöfnum.

6

REGLA: VÍSISVAXTARLÍKAN

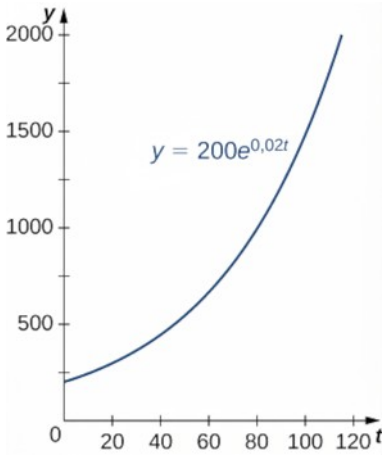
Kerfi sem sýna vísisvöxt vaxa samkvæmt stærðfræðilíkaninu

$$y = y_0 e^{kt},$$

þar sem y_0 táknar upphafsástand kerfisins og $k > 0$ er fasti sem nefnist vaxtarfasti.

Population growth is a common example of exponential growth. Consider a population of bacteria, for instance. It seems plausible that the rate of population growth would be proportional to the size of the population. After all, the more bacteria there are to reproduce,

the faster the population grows. Figure 6.79 and Table 6.1 represent the growth of a population of bacteria with an initial population of 200 bacteria and a growth constant of $0{,}02$. Notice that after only 2 hours $(120$ minutes), the population is 10 times its original size!



Mynd 6.79 Dæmi um vísisvöxt bakteríustofns.

Tafla 6.1 Vísisvöxtur bakteríustofns

Tími (mín.)	Stofnstærð (fjöldi baktería)
10	244
20	298
30	364
40	445
50	544
60	664
70	811
80	991
90	1210
100	1478
110	1805
120	2205

Takið eftir að hér notum við samfellt fall til að líkja eftir hegðun sem er í eðli sínu strjál. Á hverjum tíma er fjöldi baktería í raunverulegum stofni heiltala, þótt líkanið taki einnig gildi

sem eru ekki heiltölur. Þegar við notum vísisvaxtarlíkön verðum við alltaf að gæta þess að túlka fallgildin í samhengi við fyrirbærið sem líkanið lýsir.

DÆMI 6.42

Vöxtur stofns

Skoðum bakteríustofninn sem lýst var hér á undan. Hann vex samkvæmt fallinu $f\left(t\right)=200\ e^{0,02\,t}$, þar sem t er mælt í mínútum. Hve margar bakteríur eru í stofninum eftir 5 klukkustundir $\left(300\right.$ mínútur)? Hvenær nær stofninn 100.000 bakteríum?

Lausn

Við höfum $f\left(t\right)=200\ e^{0,02\,t}$. Þá

$$f\left(300\right)=200\ e^{0,02\left(300\right)}\approx 80.686.$$

There are 80.686 bacteria in the population after 5 hours.

To find when the population reaches 100.000 bacteria, we solve the equation

$$\begin{aligned} 100.000 &= 200\ e^{0,02\,t} \\ 500 &= e^{0,02\,t} \\ \ln\ 500 &= 0,02\,t \\ t &= \frac{\ln\ 500}{0,02}\approx 310,73. \end{aligned}$$

The population reaches 100.000 bacteria after 310,73 minutes.

STÖÐUMAT 6.42

Skoðum bakteríustofn sem vex samkvæmt fallinu $f\left(t\right)=500\ e^{0,05\,t}$, þar sem t er mælt í mínútum. Hve margar bakteríur eru í stofninum eftir 4 klukkustundir? Hvenær nær stofninn 100 milljónum baktería?

Snúum okkur nú að dæmi úr fjármálum: vaxtavöxtum. Vextir sem ekki leggjast við höfuðstólinn kallast einfaldir vextir. Einfaldir vextir eru greiddir einu sinni, í lok tiltekins tímabils (venjulega 1 árs). Ef við leggjum $\$1000$ inn á sparireikning sem ber 2 % einfalda ársvexti eigum við því í lok ársins

$$1000\left(1+0,02\right)=1020\ €.$$

Vaxtavextir eru lagðir við höfuðstólinn nokkrum sinnum á ári, eftir lengd vaxtatímabilsins. Ef bankinn leggur vextina við höfuðstólinn á 6 mánaða fresti færir hann því helming ársvaxtanna inn á reikninginn eftir 6 mánuði. Síðari helming ársins ber reikningurinn ekki aðeins vexti af upphaflegu $\$1000$, heldur einnig af vöxtunum sem söfnuðust á fyrri helmingi ársins. Stærðfræðilega séð eigum við því í lok ársins

$$1000\left(1+\frac{0{,}02}{2}\right)^2=1020{,}10\ \text{€}.$$

Ef vextirnir eru á sama hátt lagðir við höfuðstólinn á 4 mánaða fresti fæst

$$1000\left(1+\frac{0{,}02}{3}\right)^3=1020{,}13\ \text{€},$$

og ef vextirnir eru lagðir við höfuðstólinn daglega $(365$ sinnum á ári) fæst $1020{,}20\ \text{€}$. Ef við útvíkkum þetta þannig að vextirnir séu lagðir samfellt við höfuðstólinn fæst eftir t ár

$$1000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{n\,t}.$$

Umritum nú þessa stæðu þannig að við fáum vísisfall sem lýsir vexti. Rifjum upp að töluna e má setja fram sem markgildi:

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Við viljum því að stæðan innan sviganna sé af gerðinni $(1+1/m)$. Látum $n=0{,}02\ m$. Takið eftir að þegar $n\to\infty$, gildir $m\to\infty$ einnig. Þá fæst

$$\begin{aligned}1000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{n\,t}&=1000\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{0{,}02\ m}\right)^{0{,}02\ m\ t}\\&=1000\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{0{,}02\ t}.\end{aligned}$$

Við þekkjum markgildið innan hornklofanna sem töluna e. Innistæðan á bankareikningnum eftir t ár er því $1000\ e^{0{,}02\,t}$. Almennt gildir að ef bankareikningur með upphafsinnistæðuna $\$P$ ber vexti sem nema $r\,\%$, með samfelldri vaxtavöxtun, er innistæðan eftir t ár

$$\text{Innistæða}=P\,e^{r\,t}.$$

6

DÆMI 6.43

Vaxtavextir

25 ára námsmanni býðst að leggja fé inn á lífeyrisreikning sem ber $5\,\%$ ársvexti með samfelldri vaxtavöxtun. Hversu mikið þarf hún að leggja inn í dag til að eiga $\$1$ milljón þegar hún verður 65? Hvað ef hún gæti í staðinn fengið $6\,\%$ ársvexti með samfelldri vaxtavöxtun?

Lausn

Við höfum

$$\begin{aligned}1.000.000&=P\ e^{0{,}05\,(40)}\\P&=135.335{,}28.\end{aligned}$$

Hún þarf að leggja 135.335,28 € inn með 5 % vöxtum.

Ef hún getur í staðinn fengið 6 %, verður jafnan

$$\begin{aligned} 1.000.000 &= P\,e^{0{,}06\,(40)} \\ P &= 90.717{,}95. \end{aligned}$$

Í þessu tilviki þarf hún aðeins að leggja inn 90.717,95 €. Það er um tveir þriðju hlutar þeirrar fjárhæðar sem hún þarf að leggja inn ef vextirnir eru 5 %. Af því að vextirnir leggjast samfellt við höfuðstólinn magnast áhrifin mjög þegar þeir hækka um 1 %.

STÖÐUMAT 6.43

Gerum nú ráð fyrir að námsmaðurinn fjárfesti ekki við 25 ára aldur heldur bíði þar til hún verður 35. Hversu mikið þyrfti hún þá að leggja inn ef vextirnir væru 5 %? En ef þeir væru 6 %?

If a quantity grows exponentially, the time it takes for the quantity to double remains constant. In other words, it takes the same amount of time for a population of bacteria to grow from 100 to 200 bacteria as it does to grow from 10.000 to 20.000 bacteria. This time is called the doubling time. To calculate the doubling time, we want to know when the quantity reaches twice its original size. So we have

$$\begin{aligned} 2y_0 &= y_0 e^{kt} \\ 2 &= e^{kt} \\ \ln 2 &= kt \\ t &= \tfrac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

SKILGREINING

Ef stærð vex samkvæmt vísisfalli er tvöföldunartími sá tími sem það tekur stærðina að tvöfaldast. Hann er gefinn með

$$\text{Tvöföldunartími} = \frac{\ln 2}{k}.$$

DÆMI 6.44

Notkun tvöföldunartíma

Assume a population of fish grows exponentially. A pond is stocked initially with 500 fish. After 6 months, there are 1000 fish in the pond. The owner will allow his friends and neighbors to fish on his pond after the fish population reaches 10.000. When will the owner's friends be allowed to fish?

Lausn

Við vitum að fiskistofninn tvöfaldast á 6 mánuðum. Ef t táknar tíma í mánuðum gefur formúlan fyrir tvöföldunartíma $6=(\ln 2)/k$. Þá er $k=(\ln 2)/6$. Stofnstærðin er því gefin með $y=500\,e^{((\ln 2)/6)t}$. Til að finna hvenær stofninn nær 10.000 fiskum leysum við jöfnuna

$$\begin{aligned} 10.000 &= 500\,e^{(\ln\ 2/6)\,t} \\ 20 &= e^{(\ln\ 2/6)\,t} \\ \ln\ 20 &= \left(\frac{\ln\ 2}{6}\right)t \\ t &= \frac{6\,(\ln\ 20)}{\ln\ 2} \approx 25{,}93. \end{aligned}$$

The owner's friends have to wait 25,93 months (a little more than 2 years) to fish in the pond.

STÖÐUMAT 6.44

Gerum ráð fyrir að það taki 9 mánuði fyrir fiskistofninn í dæmi 6.44 að ná 1000 fiskum. Hversu lengi þurfa vinir eigandans þá að bíða?

Vísishnignunarlíkan

Vísisföll má einnig nota til að lýsa stofnum sem minnka (til dæmis vegna sjúkdóma) eða efnasamböndum sem brotna niður með tímanum. Við segjum að slík kerfi sýni vísishnignun en ekki vísisvöxt. Líkanið er nánast það sama, nema hvað veldisvísirinn hefur neikvætt formerki. Því gildir fyrir einhvern jákvæðan fasta k, að $y=y_0e^{-kt}$.

Líkt og við vísisvöxt er til deildajafna sem lýsir vísishnignun. Við höfum

$$y'=-k\,y_0e^{-kt}=-k\,y.$$

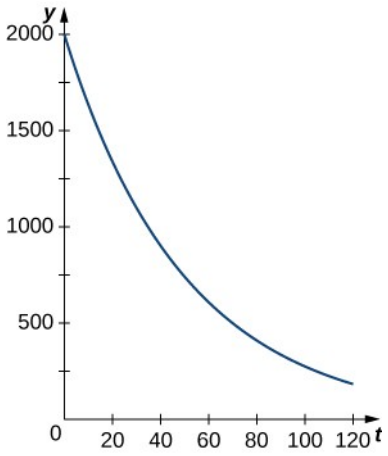
REGLA: VÍSISHNIGNUNARLÍKAN

Kerfi sem sýna vísishnignun hegða sér samkvæmt líkaninu

$$y=y_0e^{-kt},$$

þar sem y_0 táknar upphafsástand kerfisins og $k>0$ er fasti sem nefnist hnignunarfasti.

Myndin hér á eftir sýnir graf dæmigerðs vísisfalls sem lýsir vísishnignun.



Mynd 6.80 Dæmi um vísishnignun.

Skoðum hagnýtt dæmi um vísishnignun úr eðlisfræði. Kólnunarlögmál Newtons segir að hlutur kólni með hraða sem er í réttu hlutfalli við muninn á hitastigi hans og umhverfisins. Með öðrum orðum, ef T táknar hitastig hlutarins og T_a umhverfishitann í herberginu, þá er

$$T' = -k\left(T - T_a\right).$$

Takið eftir að þetta er ekki alveg rétta líkanið fyrir vísishnignun. Við viljum að afleiðan sé í réttu hlutfalli við fallið, en í þessari stæðu er aukaliðurinn T_a. Sem betur fer má leysa vandann með breytuskiptum. Látum $y(t) = T(t) - T_a$. Þá er $y'(t) = T'(t) - 0 = T'(t)$, og jafnan verður

$$y' = -k\,y.$$

Af fyrri niðurstöðum vitum við að þetta samband milli y og afleiðu þess leiðir til vísishnignunar. Því er

$$y = y_0 e^{-kt},$$

og við sjáum að

$$\begin{aligned} T - T_a &= (T_0 - T_a)e^{-kt} \\ T &= (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a \end{aligned}$$

þar sem T_0 táknar upphafshitastigið. Notum þessa formúlu í næsta dæmi.

DÆMI 6.45

Kólnunarlögmál Newtons

Að mati reyndra kaffibarþjóna er best að bera kaffi fram við hitastig milli 68 °C og 80 °C. Gerum ráð fyrir að kaffi sé hellt í bolla við hitastigið 95 °C, og að eftir 2 mínútur í 20 °C heitu herbergi hafi það kólnað niður í 83 °C. Hvenær verður kaffið fyrst nægilega svalt til að bera það fram? Hvenær verður það of kalt? Námundið svörin að næstu hálfu mínútu.

Lausn

Við höfum

$$\begin{aligned} T &= (T_0 - T_a)\, e^{-k\,t} + T_a \\ 83 &= (95-20)\, e^{-k\,(2)} + 20 \\ 63 &= 75\, e^{-2\,k} \\ \frac{21}{25} &= e^{-2\,k} \\ \ln\ \frac{21}{25} &= -2\,k \\ \ln\ 21 - \ln\ 25 &= -2\,k \\ k &= \frac{\ln\ 25 - \ln\ 21}{2}. \end{aligned}$$

Þá er líkanið

$$T = 75\, e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} + 20.$$

Kaffið nær $80\,^\circ\mathrm{C}$ þegar

$$\begin{aligned} 80 &= 75\, e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} + 20 \\ 60 &= 75\, e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} \\ \frac{4}{5} &= e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} \\ \ln\ \frac{4}{5} &= \frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\, t \\ \ln\ 4 - \ln\ 5 &= \frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\, t \\ t &= \frac{2\,(\ln\ 4 - \ln\ 5)}{\ln\ 21 - \ln\ 25} \approx 2{,}56. \end{aligned}$$

Bera má kaffið fram um 2,5 mínútum eftir að því er hellt í bollann. Kaffið nær $68\,^\circ\mathrm{C}$ þegar

$$\begin{aligned} 68 &= 75\, e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} + 20 \\ 48 &= 75\, e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} \\ \frac{16}{25} &= e^{\left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t} \\ \ln\ 16 - \ln\ 25 &= \left(\frac{\ln\ 21 - \ln\ 25}{2}\right) t \\ t &= \frac{2\,(\ln\ 16 - \ln\ 25)}{\ln\ 21 - \ln\ 25} \approx 5{,}12. \end{aligned}$$

Kaffið verður of kalt til að bera það fram um 5 mínútum eftir að því er hellt í bollann.

STÖÐUMAT 6.45

Gerum ráð fyrir að herbergið sé hlýrra $(24\,^\circ\mathrm{C})$ og að kaffið hafi eftir 2 mínútur aðeins kólnað niður í $86\,^\circ\mathrm{C}$. Hvenær verður kaffið fyrst nægilega svalt til að bera það fram? Hvenær verður það of kalt? Námundið svörin að næstu hálfu mínútu.

Rétt eins og kerfi sem sýna vísisvöxt hafa fastan tvöföldunartíma hafa kerfi sem sýna vísishnignun fastan helmingunartíma. Til að reikna helmingunartímann finnum við hvenær stærðin verður helmingur upphafsgildis síns. Því fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ \tfrac{1}{2} &= e^{-kt} \\ -\ln 2 &= -kt \\ t &= \tfrac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Athugið: Þetta er sama stæðan og við fengum fyrir tvöföldunartímann.

SKILGREINING

Ef stærð minnkar samkvæmt vísisfalli er helmingunartími sá tími sem það tekur stærðina að minnka um helming. Hann er gefinn með

$$\text{Helmingunartími} = \frac{\ln 2}{k}.$$

DÆMI 6.46

Geislakolsgreining

Ein algengasta notkun vísishnignunarlíkans er geislakolsgreining. Kolefni-14 hrörnar (gefur frá sér geislavirka ögn) jafnt og þétt samkvæmt vísisfalli. Ef við vitum hve mikið kolefni var upphaflega í hlut og hve mikið er eftir getum við því ákvarðað aldur hlutarins. Fyrir samsætuna kolefni-14 er helmingunartíminn um 5730 ár. Það merkir að eftir þann tíma hefur helmingur efnisins breyst úr upphafsefninu kolefni-14 í ógeislavirka efnið nitur-14. Ef við höfum 100 g af kolefni-14 í dag, hve mikið verður eftir að liðnum 50 árum? Ef forngripur sem upphaflega innihélt 100 g af kolefni inniheldur nú 10 g af kolefni, hve gamall er hann? Námundið svarið að næsta hundraði ára.

Lausn

Við höfum

$$\begin{aligned} 5730 &= \tfrac{\ln 2}{k} \\ k &= \tfrac{\ln 2}{5730}. \end{aligned}$$

Líkanið segir því

$$y = 100\, e^{-(\ln 2/5730)t}.$$

Eftir 50 ár höfum við

$$\begin{aligned} y &= 100\, e^{-(\ln\ 2/5730)\,(50)} \\ &\approx 99{,}40. \end{aligned}$$

Eftir 50 ár verða því 99,40 g af kolefni-14 eftir.

Til að ákvarða aldur forngripsins leysum við jöfnuna

$$\begin{aligned} 10 &= 100e^{-(\ln 2/5730)t} \\ \tfrac{1}{10} &= e^{-(\ln 2/5730)t} \\ t &\approx 19035. \end{aligned}$$

The artifact is about 19.000 years old.

STÖÐUMAT 6.46

Ef við höfum 100 g af kolefni-14, hve mikið verður eftir að liðnum 500 árum? Ef forngripur sem upphaflega innihélt 100 g af kolefni inniheldur nú 20 g, hve gamall er hann? Námundið svarið að næsta hundraði ára.

Æfingar úr kafla 6.8

Satt eða ósatt? Ef fullyrðingin er sönn, sannið hana. Ef hún er ósönn, finnið rétta svarið.

348. Tvöföldunartíminn fyrir $y=e^{ct}$ er $(\ln(2))/(\ln(c))$.

349. Ef þið fjárfestið $\$500$, gefa ársvextir sem nema 3 % meiri ávöxtun á fyrsta árinu en 2,5 % samfelldir vextir.

350. Ef þið skiljið $100\,^\circ\mathrm{C}$ tekönnu eftir við stofuhita $(25\,^\circ\mathrm{C})$ og sams konar tekönnu í ísskáp $(5\,^\circ\mathrm{C})$, við $k=0{,}02$, nær teið í ísskápnum drykkjarhæfu hitastigi $(70\,^\circ\mathrm{C})$ meira en 5 mínútum á undan teinu við stofuhita.

351. Ef helmingunartíminn er t ár er fastinn k í $y=e^{kt}$ reiknaður með $k=\ln(1/2)/t$.

Notið í eftirfarandi verkefnum $y=y_0e^{kt}$.

352. Ef bakteríurækt tvöfaldast á 3 klukkustundum, hve margar klukkustundir tekur hana að margfaldast með 10 *?*

353. Ef fjöldi baktería margfaldast með 10 á 10 klukkustundum, hve margar klukkustundir tekur hann að margfaldast með 100 *?*

354. Hve gömul er höfuðkúpa sem inniheldur fimmtung þess geislakols sem er í nútímahöfuðkúpu? Athugið að helmingunartími geislakols er 5730 ár.

355. Ef forngripur inniheldur 90 % af því geislakoli sem er í nýju efni, getur hann þá verið frá tímum Krists (fyrir um 2000 árum)? Athugið að helmingunartími geislakols er 5730 ár.

356. Íbúum Kaíró fjölgaði úr 5 milljónum í 10 milljónir á 20 árum. Notið vísisvaxtarlíkan til að finna hvenær íbúafjöldinn var 8 milljónir.

357. The populations of New York and Los Angeles are growing at 1 % and 1,4 % a year, respectively. Starting from 8 million (New York) and 6 million (Los Angeles), when are the populations equal? Round your answer to a whole number of years.

358. Gerum ráð fyrir að virði $\$1$ í japönskum jenum lækki um 2 % á ári. Ef upphafsgildið er $\$1 = ¥250$, hvenær verður $\$1 = ¥1$?

359. Áhrif auglýsinga dvína samkvæmt vísisfalli. Ef 40 % íbúanna muna eftir nýrri vöru eftir 3 daga, eftir hve langan tíma munu aðeins 20 % muna eftir henni?

360. Ef $y = 1000$ þegar $t = 3$ og $y = 3000$ þegar $t = 4$, hvað var y_0 þegar $t = 0$?

361. Ef $y = 100$ þegar $t = 4$ og $y = 10$ þegar $t = 8$, hvenær er $y = 1$?

362. If a bank offers annual interest of 7,5 % or continuous interest of 7,25 %, which has a better annual yield?

363. Hvaða samfelldu vextir gefa sömu ávöxtun og ársvextir sem nema 9 %?

364. Ef þið leggið $\$5000$ inn á reikning með 8 % ársvöxtum, í hve mörg ár getið þið tekið út $\$500$ (frá lokum fyrsta árs) án þess að innistæðan klárist?

365. Þið ætlið að safna 50.000 € á 20 árum fyrir skólagjöldum barnsins ykkar. Ef vextirnir leggjast samfellt við höfuðstólinn og nema 10 %, hve mikið þurfið þið að leggja inn í upphafi?

366. Kalkúnn er tekinn úr ofninum þegar kjarnhiti hans er $75\,^\circ\mathrm{C}$. Þegar hann hefur staðið í 10 mínútur í $20\,^\circ\mathrm{C}$ heitri íbúð er hitinn kominn niður í $70\,^\circ\mathrm{C}$. Hver er hiti kalkúnsins 20 mínútum eftir að hann er tekinn úr ofninum?

367. Gerum ráð fyrir að þíða eigi grænmeti sem er $-15\,^\circ\mathrm{C}$. Til að þíða það á öruggan hátt þarf að setja það í ísskáp þar sem umhverfishitinn er $6\,^\circ\mathrm{C}$. Eftir 2 klukkustundir í ísskápnum er grænmetið orðið $-10\,^\circ\mathrm{C}$. Teiknið hitastigsferilinn og notið hann til að ákvarða hvenær grænmetið nær $0\,^\circ\mathrm{C}$.

368. You are an archaeologist and are given a bone that is claimed to be from a Tyrannosaurus Rex. You know these dinosaurs lived during the Cretaceous Era (146 million years to 65 million years ago), and you find by radiocarbon dating that there is 0,000001 % the amount of radiocarbon. Is this bone from the Cretaceous?

369. Notað eldsneyti úr kjarnakljúfi inniheldur plúton-239, sem hefur helmingunartímann 24.000 ár. Ef 1 tunna með 10 kg af plúton-239 er innsigluð, hve mörg ár þurfa að líða þar til aðeins $10\,g$ af plúton-239 eru eftir?

Notið eftirfarandi töflu í næstu verkefnum. Hún sýnir mannfjölda í heiminum eftir áratugum.

Ár frá 1950	Mannfjöldi (í milljónum)
0	2.556
10	3.039
20	3.706
30	4.453
40	5.279
50	6.083
60	6.849

Heimild: http://www.factmonster.com/ipka/A0762181.html.

370. **[T]** Sá vísisferill af gerðinni $P(t)=a\,e^{bt}$ sem fellur best að gögnunum er $P\,(t)=2686\;e^{0{,}01604\,t}$. Notið grafíska reiknivél til að teikna gögnin og vísisferilinn á sama hnitakerfi.

371. **[T]** Finnið og teiknið afleiðuna y' af jöfnunni ykkar. Hvar er hún vaxandi og hvað merkir sú aukning?

372. **[T]** Finnið og teiknið aðra afleiðu jöfnunnar. Hvar er hún vaxandi og hvað merkir sú aukning?

373. **[T]** Finnið hvenær líkanið spáir því að mannfjöldinn nái 10 milljörðum. Notið fyrri svör ykkar um fyrstu og aðra afleiðu til að útskýra hvers vegna vísisvöxtur hentar illa til að spá fyrir um framtíðina.

Notið eftirfarandi töflu í næstu verkefnum. Hún sýnir íbúafjölda San Francisco á 19. öld.

Ár frá 1850	Mannfjöldi (í þúsundum)
0	21,00
10	56,80
20	149,5
30	234,0

Heimild: http://www.sfgenealogy.com/sf/history/hgpop.htm.

374. **[T]** Sá vísisferill af gerðinni $P(t)=a\,e^{bt}$ sem fellur best að gögnunum er $P\,(t)=35{,}26\;e^{0{,}06407\,t}$. Notið grafíska reiknivél til að teikna gögnin og vísisferilinn á sama hnitakerfi.

375. **[T]** Finnið og teiknið afleiðuna y' af jöfnunni ykkar. Hvar er hún vaxandi? Hvað merkir sú aukning? Er til gildi þar sem aukningin er mest?

376. **[T]** Finnið og teiknið aðra afleiðu jöfnunnar. Hvar er hún vaxandi? Hvað merkir sú aukning?

6.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla

NÁMSMARKMIÐ

- 6.9.1 Notið reglurnar um afleiður og heildi breiðbogafallanna.
- 6.9.2 Notið reglurnar um afleiður andhverfu breiðbogafallanna og heildin sem tengjast þeim.
- 6.9.3 Lýsið algengum hagnýtum aðstæðum þar sem keðjuferill myndast.

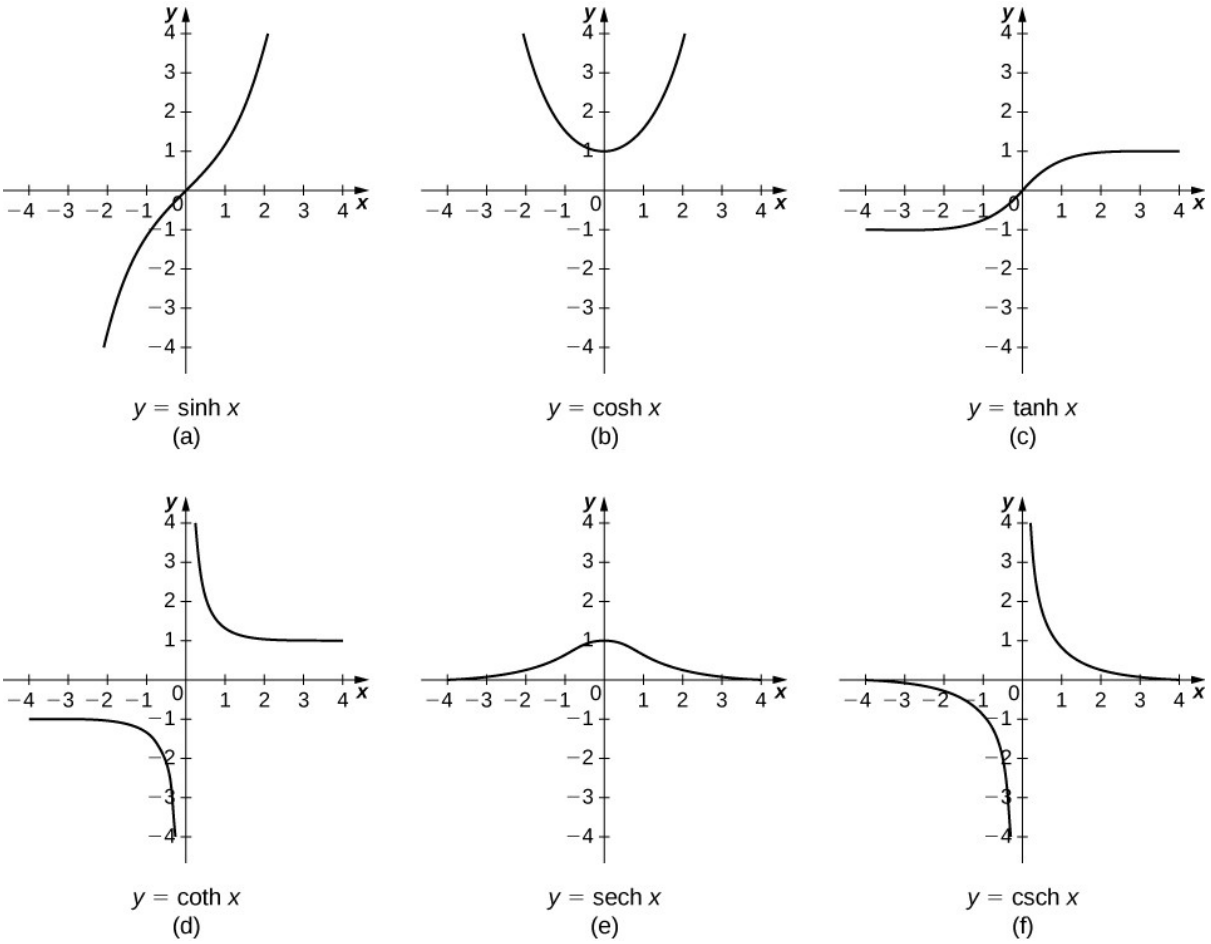
Við kynntumst breiðbogaföllum og nokkrum grunneiginleikum þeirra í Inngangi að föllum og gröfum. Í þessum undirkafla skoðum við deildunar- og heildunarreglur breiðbogafalla og andhverfa þeirra.

Afleiður og heildi breiðbogafallanna

Rifjum upp að breiðbogasínus og breiðbogakósínus eru skilgreindir með

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ og } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hin breiðbogaföllin eru síðan skilgreind út frá $\sinh x$ og $\cosh x$. Gröf breiðbogafallanna eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.81 Gröf breiðbogafallanna.

Auðvelt er að leiða út deildunarreglur breiðbogafallanna. Ef við skoðum til dæmis $\sinh x$ fáum við

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})\right]\\ &= \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \cosh x.\end{aligned}$$

Á sama hátt er $(d/dx)\cosh x = \sinh x$. Við tökum deildunarreglur breiðbogafallanna saman í næstu töflu.

Tafla 6.2 Afleiður breiðbogafalla

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$

Berum afleiður breiðbogafallanna saman við afleiður venjulegu hornafallanna. Margt er líkt, en einnig er nokkur munur. Afleiður sínusfallanna samsvara til dæmis hvor annarri: $(d/dx)\sin x = \cos x$ og $(d/dx)\sinh x = \cosh x$. Afleiður kósínusfallanna hafa hins vegar ólík formerki: $(d/dx)\cos x = -\sin x$, en $(d/dx)\cosh x = \sinh x$. Þegar við skoðum breiðbogaföllin nánar þurfum við að hafa í huga hvað er líkt og hvað ólíkt með þeim og venjulegu hornaföllunum.

Af þessum deildunarreglum breiðbogafallanna fást beint eftirfarandi heildunarreglur.

$$\begin{aligned}\int \sinh u\,du &= \cosh u + C & \int \operatorname{csch}^2 u\,du &= -\coth u + C\\ \int \cosh u\,du &= \sinh u + C & \int \operatorname{sech} u \tanh u\,du &= -\operatorname{sech} u + C\\ \int \operatorname{sech}^2 u\,du &= \tanh u + C & \int \operatorname{csch} u \coth u\,du &= -\operatorname{csch} u + C\end{aligned}$$

DÆMI 6.47

Deildun breiðbogafalla

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh\left(x^2\right)\right)$

b. $\frac{d}{dx}(\cosh x)^2$

Lausn

Með því að nota reglurnar í töflu 6.2 og keðjuregluna fáum við

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh\left(x^2\right)\right)=\cosh\left(x^2\right)\cdot 2x$

b. $\frac{d}{dx}(\cosh x)^2=2\cosh x\sinh x$

STÖÐUMAT 6.47

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2+3x\right)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(\sinh x)^2}\right)$

DÆMI 6.48

Heildi með breiðbogaföllum

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int x\cosh\left(x^2\right)dx$

b. $\int \tanh x\,dx$

Lausn

Við getum notað u-innsetningu í báðum tilvikum.

a. Látum $u=x^2$. Þá er $du=2x\,dx$ og

$$\int x\cosh\left(x^2\right)dx=\int\frac{1}{2}\cosh u\,du=\frac{1}{2}\sinh u+C=\frac{1}{2}\sinh\left(x^2\right)+C.$$

b. Látum $u=\cosh x$. Þá er $du=\sinh x\,dx$ og

$$\int \tanh x\,dx=\int\frac{\sinh x}{\cosh x}dx=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|\cosh x|+C.$$

Athugið að $\cosh x>0$ fyrir öll x, svo við getum sleppt tölugildismerkjunum og fengið

$$\int \tanh x\,dx=\ln(\cosh x)+C.$$

STÖÐUMAT 6.48

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int \sinh^3 x \cosh x \, dx$

b. $\int \operatorname{sech}^2(3x) \, dx$

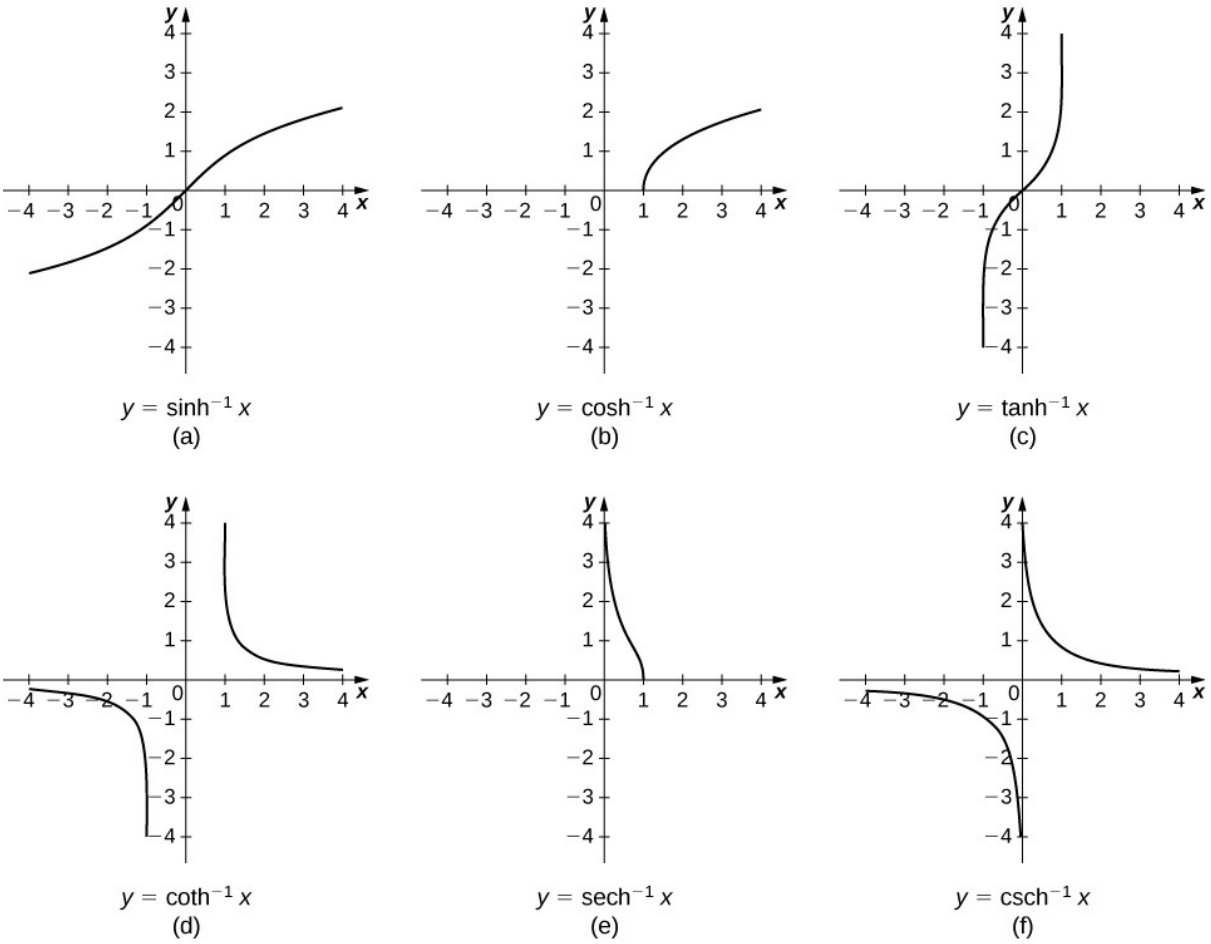
Stærðfræðigreining andhverfra breiðbogafalla

Þegar við skoðum gröf breiðbogafallanna sjáum við að þau hafa öll andhverfur ef myndmengi þeirra eru takmörkuð á viðeigandi hátt. Flestar nauðsynlegar takmarkanir má sjá með því að skoða gröfin vel. Skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu breiðbogafallanna eru tekin saman í næstu töflu.

Tafla 6.3 Skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfra breiðbogafalla

Fall	Skilgreiningarmengi	Myndmengi
$\sinh^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$
$\tanh^{-1} x$	$(-1, 1)$	$(-\infty, \infty)$
$\coth^{-1} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$(0, 1]$	$[0, \infty)$
$\operatorname{csch}^{-1} x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Gröf andhverfu breiðbogafallanna eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 6.82 Gröf andhverfu breiðbogafallanna.

Til að finna afleiður andhverfu fallanna notum við fólgna deildun. Við höfum

$$\begin{aligned} y &= \sinh^{-1} x \\ \sinh y &= x \\ \tfrac{d}{dx}\sinh y &= \tfrac{d}{dx}x \\ \cosh y \tfrac{dy}{dx} &= 1. \end{aligned}$$

Rifjum upp að $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, svo $\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$. Þá fæst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Á sama hátt getum við leitt út deildunarreglur hinna andhverfu breiðbogafallanna. Reglurnar eru teknar saman í næstu töflu.

Tafla 6.4 Afleiður andhverfra breiðbogafalla

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$
$\sinh^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{sech}^{-1}x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{csch}^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

Athugið að afleiður $\tanh^{-1}x$ og $\coth^{-1}x$ eru eins. Þegar við heildum $1/(1-x^2)$, þurfum við því að velja rétt stofnfall út frá skilgreiningarmengi fallanna og gildum x. Heildunarreglurnar fyrir andhverfu breiðbogaföllin eru teknar saman hér á eftir.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du=\sinh^{-1}u+C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\,du=-\operatorname{sech}^{-1}|u|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du=\cosh^{-1}u+C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,du=-\operatorname{csch}^{-1}|u|+C$$

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du=\begin{cases}\tanh^{-1}u+C & \text{ef } |u|<1\\ \coth^{-1}u+C & \text{ef } |u|>1\end{cases}$$

DÆMI 6.49

Deildun andhverfra breiðbogafalla

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)^2$

Lausn

Með því að nota reglurnar í töflu 6.4 og keðjuregluna fáum við eftirfarandi niðurstöður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)=\frac{1}{3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)^2=\frac{2\left(\tanh^{-1}x\right)}{1-x^2}$

STÖÐUMAT 6.49

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}(3x)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)^3$

DÆMI 6.50

Heildi með andhverfum breiðbogaföllum

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx$

b. $\int\frac{1}{2x\sqrt{1-9x^2}}dx$

Lausn

Við getum notað u-innsetning í báðum tilvikum.

a. Látum $u=2x$. Þá er $du=2dx$ og við fáum

$$\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{u^2-1}}du=\frac{1}{2}\cosh^{-1}u+C=\frac{1}{2}\cosh^{-1}(2x)+C.$$

b. Látum $u=3x$. Þá er $du=3dx$ og við fáum

$$\int\frac{1}{2x\sqrt{1-9x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}|u|+C=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}|3x|+C.$$

STÖÐUMAT 6.50

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx, x>2$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

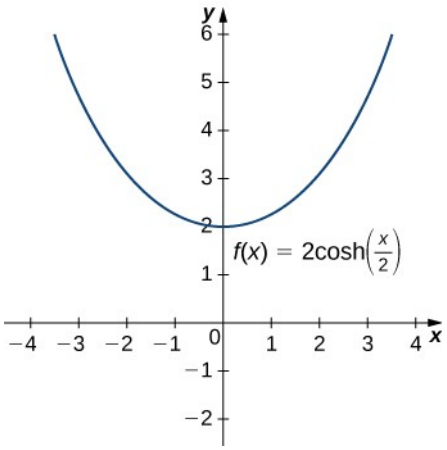
Hagnýting

Eitt eðlisfræðilegt notkunarsvið breiðbogafalla tengist hangandi köplum. Ef kapall með jafnan línuþéttleika er hengdur milli tveggja festinga og ber ekkert annað álag en eigin þyngd myndar hann feril sem nefnist keðjuferill. Háspennulínur, keðjur sem hanga milli tveggja stólpa og þræðir í köngulóarvef mynda öll keðjuferla. Næsta mynd sýnir keðjur sem hanga milli stólpa í röð.



Mynd 6.83 Keðjurnar milli þessara stólpa hafa lögun keðjuferils. (mynd: breytt útgáfa af verki OKFoundryCompany, Flickr)

Breiðbogaföll má nota til að lýsa keðjuferlum. Nánar tiltekið eru föll af gerðinni $y=a\cosh(x/a)$ keðjuferlar. Mynd 6.84 sýnir graf $y=2\cosh(x/2)$.



Mynd 6.84 Graf breiðbogakósínusfalls hefur lögun keðjuferils.

DÆMI 6.51

Keðjuferill notaður til að finna lengd kapals

Gerum ráð fyrir að hangandi kapall hafi lögunina $10\cosh(x/10)$ fyrir $-15 \le x \le 15$, þar sem x er mælt í metrum. Finnið lengd kapalsins í metrum.

Lausn

Rifjum upp úr kafla 2.4 að formúlan fyrir bogalengd er

$$\text{Bogalengd} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Við höfum $f(x) = 10\cosh(x/10)$, svo $f'(x) = \sinh(x/10)$. Þá er

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx \\ &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{10}\right)}\ dx.\end{aligned}$$

Rifjum nú upp að $1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$, svo við fáum

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{10}\right)}\ dx \\ &= \int_{-15}^{15} \cosh\left(\frac{x}{10}\right) dx \\ &= 10\ \sinh\left(\frac{x}{10}\right)\Big|_{-15}^{15} = 10\left[\sinh\left(\frac{3}{2}\right) - \sinh\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 20\ \sinh\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\approx 42{,}586\ \text{m}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.51

Gerum ráð fyrir að hangandi kapall hafi lögunina $15\cosh(x/15)$ fyrir $-20 \le x \le 20$. Finnið lengd kapalsins í metrum.

Æfingar í kafla 6.9

377. **[T]** Finnið stæður fyrir $\cosh x + \sinh x$ og $\cosh x - \sinh x$. Notið reiknivél til að teikna gröf þessara falla og ganga úr skugga um að stæðurnar séu réttar.

378. Finnið, út frá skilgreiningunum á $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$, stofnföll þeirra.

379. Sýnið að $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ uppfylla $y'' = y$.

380. Notið deiliregluna til að sannreyna að $\tanh(x)' = \operatorname{sech}^2(x)$.

381. Leiðið $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$ út frá skilgreiningunni.

382. Deildið fyrri stæðuna til að finna stæðu fyrir $\sinh(2x)$.

383. Sannið $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ með því að umrita stæðuna með vísisföllum.

384. Deildið fyrri stæðuna til að finna stæðu fyrir $\cosh(x+y)$.

Finnið afleiður fallanna í eftirfarandi æfingum. Teiknið gröf afleiðanna ásamt gröfum fallanna til að ganga úr skugga um að svörin séu rétt.

385. **[T]** $\cosh(3x+1)$

386. **[T]** $\sinh(x^2)$

387. **[T]** $\dfrac{1}{\cosh(x)}$

388. **[T]** $\sinh(\ln(x))$

389. **[T]** $\cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

390. **[T]** $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

391. **[T]** $\tanh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

392. **[T]** $\dfrac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$

393. **[T]** $\sinh^6(x)$

394. **[T]** $\ln(\operatorname{sech}(x) + \tanh(x))$

Finnið stofnföll gefnu fallanna í eftirfarandi æfingum.

395.

$$\cosh\left(2x+1\right)$$

396.

$$\tanh\left(3x+2\right)$$

397.

$$x\cosh\left(x^2\right)$$

398.

$$3x^3\tanh\left(x^4\right)$$

399.

$$\cosh^2\left(x\right)\sinh\left(x\right)$$

400.

$$\tanh^2\left(x\right)\operatorname{sech}^2\left(x\right)$$

401.

$$\frac{\sinh\left(x\right)}{1+\cosh\left(x\right)}$$

402.

$$\coth\left(x\right)$$

403.

$$\cosh\left(x\right)+\sinh\left(x\right)$$

404.

$$\left(\cosh\left(x\right)+\sinh\left(x\right)\right)^n$$

6

Finnið afleiður fallanna í eftirfarandi æfingum.

405.

$$\tanh^{-1}\left(4x\right)$$

406.

$$\sinh^{-1}\left(x^2\right)$$

407.

$$\sinh^{-1}\left(\cosh\left(x\right)\right)$$

408.

$$\cosh^{-1}\left(x^3\right)$$

409.

$$\tanh^{-1}\left(\cos\left(x\right)\right)$$

410.

$$e^{\sinh^{-1}(x)}$$

411.

$$\ln\left(\tanh^{-1}\left(x\right)\right)$$

Finnið stofnföll fallanna í eftirfarandi æfingum.

412.

$$\int \frac{dx}{4-x^2}$$

413.

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

414.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

415.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

416.

$$\int -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

417.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$$

418.

$$\int -\frac{2x}{x^4-1}\,dx$$

Notið í eftirfarandi æfingum þá staðreynd að fallandi hlutur með núningsmótstöðu sem er jöfn hraðanum í öðru veldi uppfyllir jöfnuna $dv/dt = g - v^2$.

419. Sýnið að $v(t) = \sqrt{g}\tanh\left(\left(\sqrt{g}\right)t\right)$ uppfyllir þessa jöfnu.

420. Leiðið út fyrri stæðuna fyrir $v(t)$ með því að heilda $\dfrac{dv}{g - v^2} = dt$.

421. **[T]** Áætlið hversu langt hlutur hefur fallið á 12 sekúndum með því að finna flatarmálið undir ferli $v(t)$.

Notið þessar aðstæður í eftirfarandi æfingum: Kapall sem hangir undan eigin þyngd hefur hallatöluna $S = dy/dx$ sem uppfyllir $dS/dx = c\sqrt{1+S^2}$. Fastinn c er hlutfall línuþéttleika kapalsins og togkraftsins í honum.

422. Sýnið að $S = \sinh(cx)$ uppfyllir þessa jöfnu.

423. Heildið $dy/dx = \sinh(cx)$ til að finna hæð kapalsins $y(x)$ ef $y(0) = 1/c$.

424. Teiknið kapalinn og finnið hversu langt hann sígur við $x = 0$.

Leysið eftirfarandi verkefni.

425. **[T]** Keðja hangir milli tveggja stólpa með 2 m millibili og myndar keðjuferil sem lýst er með jöfnunni $y = 2\cosh(x/2) - 1$. Finnið hallatölu keðjuferilsins við vinstri stólpann.

426. **[T]** Keðja hangir milli tveggja stólpa með fjögurra metra millibili og myndar keðjuferil sem lýst er með jöfnunni $y = 4\cosh(x/4) - 3$. Finnið heildarlengd keðjuferilsins (bogalengd).

427. **[T]** Háspennulína er keðjuferill sem lýst er með $y = 10\cosh(x/10)$. Finnið hlutfall flatarmálsins undir keðjuferlinum og bogalengdar hans. Hverju takið þið eftir?

428. Símalína er keðjuferill sem lýst er með $y = a\cosh(x/a)$. Finnið hlutfall flatarmálsins undir keðjuferlinum og bogalengdar hans. Staðfestir þetta svar ykkar við spurningunni á undan?

429. Sannið regluna fyrir afleiðu $y = \sinh^{-1}(x)$ með því að deilda $x = \sinh(y)$. (Vísbending: Notið samsemdir breiðbogafalla.)

430. Sannið regluna fyrir afleiðu $y = \cosh^{-1}(x)$ með því að deilda $x = \cosh(y)$.

(Vísbending: Notið samsemdir breiðbogafalla.)

431. Sannið regluna fyrir afleiðu $y = \operatorname{sech}^{-1}(x)$ með því að deilda $x = \operatorname{sech}(y)$. (Vísbending: Notið samsemdir breiðbogafalla.)

432. Sannið að $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$.

433. Sannið stæðuna fyrir $\sinh^{-1}(x)$. Margfaldið $x = \sinh(y) = (1/2)\left(e^y - e^{-y}\right)$ með $2e^y$ og einangrið y. Er stæðan ykkar sú sama og í kennslubókinni?

434. Sannið stæðuna fyrir $\cosh^{-1}(x)$. Margfaldið $x=\cosh(y)=(1/2)\left(e^{y}+e^{-y}\right)$ með $2e^{y}$ og einangrið y. Er stæðan ykkar sú sama og í kennslubókinni?

Lykilhugtök

bogalengd
líta má á bogalengd ferils sem vegalengdina sem farin væri eftir ferlinum

keðjuferill
ferill sem hefur lögun fallsins $y=a\cosh(x/a)$ er keðjuferill; kapall með jafnan línuþéttleika sem hangir milli tveggja festipunkta tekur á sig lögun keðjuferils

massamiðja
punkturinn þar sem hugsa mætti sér að allur massi kerfisins væri saman kominn án þess að vægið breyttist

þungamiðja
þungamiðja svæðis er rúmfræðileg miðja þess; þunnar plötur eru oft táknaðar með svæðum í sléttu; ef þunn plata hefur fastan þéttleika ræðst massamiðja hennar aðeins af lögun samsvarandi svæðis í sléttunni; þá fellur massamiðja plötunnar saman við þungamiðju svæðisins sem táknar hana

þversnið
skurðmengi sléttu og rúmhlutar

þéttleikafall
þéttleikafall lýsir því hvernig massi dreifist um hlut; það getur verið línuþéttleiki, gefinn sem massi á lengdareiningu; flatarþéttleiki, gefinn sem massi á flatarmálseiningu; eða rúmþéttleiki, gefinn sem massi á rúmmálseiningu; þyngdarþéttleiki er einnig notaður um þyngd (fremur en massa) á rúmmálseiningu

skífuaðferð
sértilvik sneiðaaðferðarinnar fyrir snúða þegar sneiðarnar eru skífur

tvöföldunartími
ef stærð vex samkvæmt vísisfalli er tvöföldunartíminn sá tími sem það tekur stærðina að tvöfaldast; hann er gefinn með $(\ln 2)/k$

vísishnignun
kerfi sem sýna vísishnignun fylgja líkani af gerðinni $y=y_0e^{-kt}$

vísisvöxtur
kerfi sem sýna vísisvöxt fylgja líkani af gerðinni $y=y_0e^{kt}$

keilustúfur
hluti keilu; keilustúfur myndast þegar keila er skorin með sléttu sem er samsíða grunnfletinum

helmingunartími
ef stærð hnignar samkvæmt vísisfalli er helmingunartíminn sá tími sem það tekur stærðina að minnka um helming. Hann er gefinn með $(\ln 2)/k$

lögmál Hookes
þetta lögmál segir að krafturinn sem þarf til að þjappa gormi saman (eða teygja hann) sé í réttu hlutfalli við frávik gormsins frá jafnvægisstöðu; með öðrum orðum er $F = k\,x$, þar sem k er fasti

vökvastöðuþrýstingur
þrýstingur vatns á hlut sem er á kafi

þunn plata
þunn efnisplata; slík plata er svo þunn að í stærðfræðilegum tilgangi má líta á hana sem tvívíða

hylkjaaðferð
aðferð til að reikna rúmmál snúðs með því að skipta honum í sammiðja sívalningshylki; aðferðin er frábrugðin skífu- og hringkragaaðferðunum að því leyti að heildað er með tilliti til hinnar breytunnar

vægi
ef n massar eru staðsettir á talnalínu er vægi kerfisins um upphafspunktinn gefið með $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$; ef við lítum þess í stað á svæði í sléttunni sem afmarkast að ofan af falli $f(x)$ á bili $[a, b]$, þá eru vægi svæðisins um x- og y-ásana gefin með $M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} d\,x$ og $M_y = \rho \int_a^b x f(x) d\,x$, í sömu röð

6

sneiðaaðferð
aðferð til að reikna rúmmál hlutar með því að skipta honum í sneiðar, áætla rúmmál hverrar sneiðar og leggja áætlanirnar saman til að fá mat á heildarrúmmálinu; þegar fjöldi sneiða stefnir á óendanlegt verður matið að heildi sem gefur nákvæmt rúmmál

snúður
rúmhlutur sem myndast þegar svæði í sléttu er snúið um línu í sömu sléttu

yfirborðsflatarmál
yfirborðsflatarmál rúmhlutar er heildarflatarmál ytra byrðis hans; fyrir hluti á borð við teninga eða múrsteina er það summa flatarmála allra flata hans

samhverfureglan
samhverfureglan segir að ef svæði R er samhverft um línu l, þá liggur þungamiðja R á l

setning Papposar um rúmmál
þessi setning segir að rúmmál snúðs sem myndast þegar svæði er snúið um ytri ás sé jafnt flatarmáli svæðisins margfölduðu með vegalengdinni sem þungamiðja svæðisins fer

hringkragaaðferð
sértilvik sneiðaaðferðarinnar fyrir snúða þegar sneiðarnar eru hringkragar

vinna
orkan sem þarf til að færa hlut úr stað; þegar kraftur er fastur er vinna í eðlisfræði margfeldi krafts og vegalengdar

Helstu jöfnur

Flatarmál milli tveggja ferla, heildað með tilliti til x	$A=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$
Flatarmál milli tveggja ferla, heildað með tilliti til y	$A=\int_c^d \left[u(y)-v(y)\right]dy$
Skífuaðferð meðfram x-ásnum	$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$
Skífuaðferð meðfram y-ásnum	$V=\int_c^d \pi\left[g(y)\right]^2 dy$
Hringkragaaðferð	$V=\int_a^b \pi\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$
Hylkjaaðferð	$V=\int_a^b \left(2\pi x f(x)\right)dx$
Bogalengd falls af x	$\text{Bogalengd}=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$
Bogalengd falls af y	$\text{Bogalengd}=\int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$
Yfirborðsflatarmál falls af x	$\text{Yfirborðsflatarmál}=\int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)dx$

6

Massi einvíðs hlutar	$m=\int_a^b \rho(x)\,dx$
Massi hringlaga hlutar	$m=\int_0^r 2\pi x\,\rho(x)\,dx$
Vinna sem unnin er á hlut	$W=\int_a^b F(x)\,dx$
Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings á plötu	$F=\int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\,dx$
Massi þunnrar plötu	$m=\rho\int_a^b f(x)\,dx$
Vægi þunnrar plötu	$M_x=\rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}\,dx$ og $M_y=\rho\int_a^b x f(x)\,dx$
Massamiðja þunnrar plötu	$\bar{x}=\frac{M_y}{m}$ og $\bar{y}=\frac{M_x}{m}$
Náttúrulega lografallið	$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ z
Vísisfallið $y=e^x$	$\ln y=\ln(e^x)=x$ z

Meginatriði

6.1 Flatarmál milli ferla

6

- Rétt eins og nota má ákveðin heildi til að finna flatarmálið undir ferli má einnig nota þau til að finna flatarmálið milli tveggja ferla.
- Til að finna flatarmálið milli tveggja ferla sem skilgreindir eru með föllum heildum við mismun fallanna.
- Ef gröf fallanna skerast eða svæðið er flókið notum við algildi mismunar fallanna. Þá getur þurft að reikna tvö eða fleiri heildi og leggja niðurstöðurnar saman til að finna flatarmál svæðisins.
- Stundum getur verið auðveldara að heilda með tilliti til y til að finna flatarmálið. Meginreglurnar eru þær sömu óháð því hvaða breyta er heildunarbreytan.

6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum

- Nota má ákveðin heildi til að finna rúmmál rúmhluta. Með sneiðaaðferðinni má finna rúmmál með því að heilda þversniðsflatarmálið.
- Í snúðum eru rúmmálssneiðarnar oft skífur og þversniðin hringir. Skífuaðferðin er sértilvik sneiðaaðferðarinnar þar sem þversniðin eru hringir og formúlan fyrir flatarmál hrings er notuð.
- Ef snúður hefur holrúm í miðjunni eru rúmmálssneiðarnar hringkragar. Í hringkragaaðferðinni er flatarmál innri hringsins dregið frá flatarmáli ytri hringsins áður en heildað er.

6.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki

- Hylkjaaðferðin er önnur leið til að reikna rúmmál snúðs með ákveðnu heildi. Stundum er þessi aðferð heppilegri en skífuaðferðin eða hringkragaaðferðin vegna þess að heildað er með tilliti til hinnar breytunnar. Í sumum tilvikum er annað heildið mun flóknara en hitt.
- Rúmfræðileg lögun fallanna og það hversu erfið heildunin er ráða mestu um hvaða heildunaraðferð er valin.

6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

- Reikna má bogalengd ferils með ákveðnu heildi.
- Bogalengdin er fyrst nálguð með línustrikum og þannig fæst Riemann-summa. Með því að taka markgildi fæst síðan formúlan fyrir bogalengd sem ákveðið heildi. Sömu aðferð má beita á föll af y.
- Alhæfa má hugtökin sem notuð eru til að reikna bogalengd og nota þau til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatar.
- Oft er erfitt að reikna heildin sem fást með formúlunum fyrir bogalengd og yfirborðsflatarmál. Þá getur þurft að nota tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildanna.

6.5 Hagnýting í eðlisfræði

- Ákveðin heildi hafa ýmis algeng notkunarsvið í verkfræði og eðlisfræði.
- Nota má ákveðin heildi til að ákvarða massa hlutar ef þéttleikafall hans er þekkt.
- Einnig má reikna vinnu með því að heilda kraftfall, meðal annars þegar unnið er gegn þyngdarkraftinum, eins og í dæmum um dælingu.

- Einnig má nota ákveðin heildi til að reikna kraftinn sem verkar á hlut sem er á kafi í vökva.

6.6 Vægi og massamiðjur

- Stærðfræðilega séð er massamiðja kerfis sá punktur þar sem safna mætti öllum massa kerfisins saman án þess að vægið breyttist. Í grófum dráttum má líta á massamiðjuna sem jafnvægispunkt kerfisins.
- Fyrir punktmassa sem dreifast eftir talnalínu er vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins $M=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. Fyrir punktmassa sem dreifast í sléttu eru vægi kerfisins með tilliti til x- og y-ásanna $M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ og $M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, í sömu röð.
- Ef þunn plata afmarkast að ofan af falli $f(x)$, eru vægi kerfisins með tilliti til x- og y-ásanna, í sömu röð, $M_x=\rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}\,dx$ og $M_y=\rho\int_a^b x f(x)\,dx$.
- Hnit massamiðjunnar, x-hnitið og y-hnitið, fást með því að deila vægjunum um y-ásinn og x-ásinn, í sömu röð, með heildarmassanum. Samhverfureglan segir að ef svæði er samhverft með tilliti til línu, þá liggi þungamiðja svæðisins á línunni.
- Papposarsetningin um rúmmál segir að ef svæði er snúið um ytri ás sé rúmmál snúðsins sem myndast jafnt flatarmáli svæðisins margfölduðu með vegalengdinni sem þungamiðja svæðisins færist um.

6.7 Heildi, vísisföll og lograr

- Í fyrri umfjöllun um logra og vísisföll voru föllin ekki skilgreind nákvæmlega og formlega. Í þessum undirkafla eru hugtökin sett fram á stærðfræðilega strangan hátt.
- Grundvöllur umfjöllunarinnar er að náttúrlegi logrinn er skilgreindur með heildi.
- Fallið e^x er síðan skilgreint sem andhverfa náttúrlega lograns.
- Almenn vísisföll eru skilgreind út frá e^x, og samsvarandi andhverf föll eru almennir lograr.
- Þekktir eiginleikar logra og veldisvísa gilda áfram í þessu strangara samhengi.

6.8 Vísisvöxtur og -hnignun

- Vísisvöxtur og vísishnignun eru tvö af algengustu notkunarsviðum vísisfalla.

- Kerfi sem sýna vísisvöxt fylgja líkani af gerðinni $y = y_0 e^{kt}$.
- Í vísisvexti er vaxtarhraðinn í réttu hlutfalli við það magn sem fyrir er. Með öðrum orðum er $y' = k\,y$.
- Kerfi sem sýna vísisvöxt hafa fastan tvöföldunartíma sem er gefinn með $(\ln 2)/k$.
- Kerfi sem sýna vísishnignun fylgja líkani af gerðinni $y = y_0 e^{-kt}$.
- Kerfi sem sýna vísishnignun hafa fastan helmingunartíma sem er gefinn með $(\ln 2)/k$.

6.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla

- Breiðbogaföll eru skilgreind með vísisföllum.
- Með því að deilda lið fyrir lið fást deildunarreglur fyrir breiðbogaföllin. Af þeim fást síðan heildunarreglur.
- Með viðeigandi takmörkunum á myndmengi eiga öll breiðbogaföllin sér andhverfur.
- Með fólginni deildun fást deildunarreglur fyrir andhverfu breiðbogaföllin og af þeim fást síðan heildunarreglur.
- Í eðlisfræði eru breiðbogaföll oftast notuð til að reikna keðjuferla.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi.

435. Það þarf helmingi minni vinnu til að dæla vatninu úr hálffullum sívalningi en úr fullum sívalningi.

436. Ef krafturinn er fastur er vinnan við að færa hlut frá $x = a$ til $x = b$ jöfn $F(b - a)$.

437. Nota má skífuaðferðina í öllum tilvikum þar sem hringkragaaðferðin gefur rúmmál snúðs.

438. Ef helmingunartími seborgín-266 er 360 ms, þá er $k = (\ln(2))/360$.

Finnið rúmmál rúmhlutarins í verkefnunum hér á eftir með þeirri aðferð sem er tilgreind.

439. Grunnflötur rúmhlutarins afmarkast af sporbaugnum $x^2/4 + y^2/9 = 1$. Þversnið rúmhlutarins eru jafnhliða þríhyrningar sem standa hornrétt á y-ásinn. Notið sneiðaaðferðina.

440. Svæðið afmarkast af ferlinum $y = x^2 - x$ og x-ásnum á bilinu $x = 1$ til $x = 4$, og því er snúið um y-ásinn með hringkragaaðferðinni

441. $x = y^2$ og $x = 3\,y$; svæðinu þar á milli er snúið um y-ásinn með hringkragaaðferðinni

442. $x = 2\,y^2 - y^3$, $x = 0$, og $y = 0$; svæðinu sem afmarkast af þessum ferlum er snúið um x-ásinn með hylkjaaðferðinni

Í eftirfarandi verkefnum skal finna

a. flatarmál svæðisins,
b. rúmmál snúðsins þegar svæðinu er snúið um x-ásinn og
c. rúmmál snúðsins þegar svæðinu er snúið um y-ásinn. Notið þá aðferð sem ykkur þykir henta best.

~~443~~.

$$y=x^3, x=0, y=0, \text{og } x=2$$

444.

$$y=x^2-x \text{ og } x=0$$

445. **[T]** $y=\ln(x)+2$ og $y=x$

446. $y=x^2$ og $y=\sqrt{x}$

447. $y=5+x$, $y=x^2$, $x=0$, og $x=1$

448. Fyrir neðan $x^2+y^2=1$ og fyrir ofan $y=1-x$

449. Finnið massa skífu sem hefur þéttleikafallið $\rho=\frac{1}{x^2+1}$, miðju í upphafspunkti og geisla 4.

450. Finnið massamiðju $\rho=\tan^2 x$ á $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

451. Finnið massa svæðisins og massamiðju þess þegar þéttleikafallið er $\rho=1$ og svæðið afmarkast af $y=x^5$ og $y=\sqrt{x}$.

Finnið umbeðnar bogalengdir í eftirfarandi verkefnum.

452. Reiknið bogalengd með tilliti til x fyrir ferilinn $y=\cosh(x)$ á bilinu $x=0$ til $x=2$.

453. Reiknið bogalengd með tilliti til y fyrir ferilinn $x=3-\sqrt{y}$ frá $y=0$ til $y=4$

6

Finnið yfirborðsflatarmál og rúmmál í verkefnunum hér á eftir þegar gefnu ferlunum er snúið um tilgreindan ás.

454. Hluturinn sem myndast þegar svæðinu milli $y=4+x$, $y=3-x$, $x=0$, og $x=2$ er snúið um y-ásinn.

455. Hátalarinn sem myndast þegar ferlinum $y=1/x$ frá $x=1$ til $x=4$ er snúið um x-ásinn.

456. Þetta verkefni fjallar um Karun-3-stífluna í Íran. Nálga má lögun stíflunnar með jafnarma þríhyrningi á hvolfi sem nær þvert yfir ána. Þríhyrningurinn er 205 m á hæð og 388 m á breidd (þvert yfir efri brún stíflunnar). Gerið ráð fyrir að vatnsdýpið sé nú 180 m. Eðlismassi vatns er 1000 kg/m^3. Finnið heildarkraftinn sem verkar á stífluvegginn.

457. Þið rannsakið glæpavettvang og reynið að ákvarða dánartíma fórnarlambs. Klukkan er tólf á hádegi. Útihitinn er $8\,^\circ\mathrm{C}$ og líkamshitinn er $26\,^\circ\mathrm{C}$. Þið vitið að kólnunarfastinn er $k = 0{,}00824\,/\text{mín}$. Hvenær lést fórnarlambið ef gert er ráð fyrir að eðlilegur líkamshiti manns sé $37\,^\circ\mathrm{C}$?

Næsta verkefni fjallar um hrun hlutabréfamarkaðarins í Bandaríkjunum árið 1929. Taflan sýnir árlegt gildi Dow Jones-iðnaðarvísitölunnar í aðdraganda hrunsins.

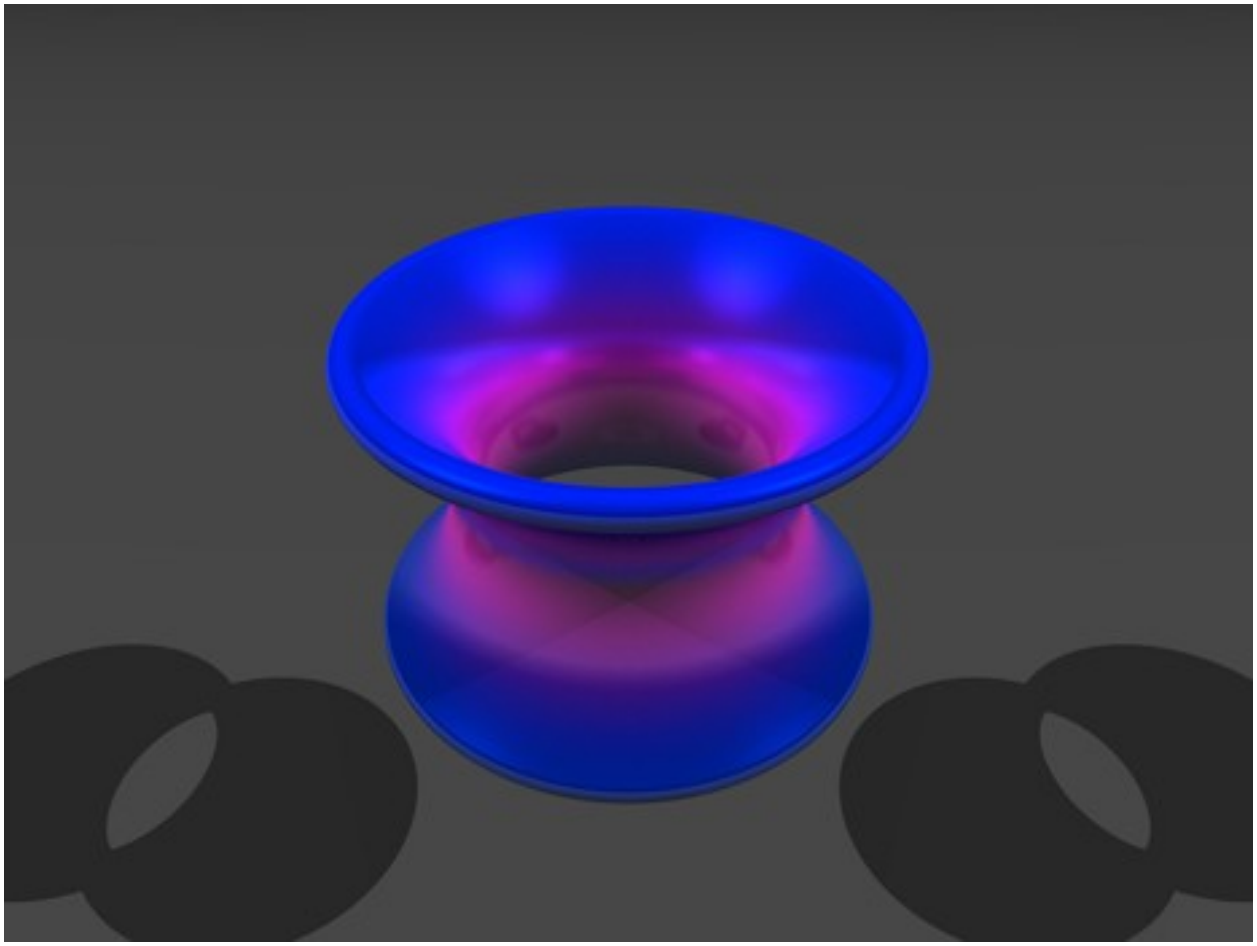
Ár eftir 1920	Gildi ($)
1	63,90
3	100
5	110
7	160
9	381,17

Heimild: http://stockcharts.com/freecharts/historical/djia19201940.html

458. **[T]** Vísisferillinn sem fellur best að gögnunum er $y = 40{,}71 + 1{,}224^x$. Hvers vegna teljið þið að hækkun markaðarins hafi ekki verið sjálfbær? Notið fyrstu og aðra afleiðu til að rökstyðja svarið. Hvaða gildi Dow Jones-iðnaðarvísitölunnar gefur líkanið fyrir árið 2014?

Verkefnin hér á eftir fjalla um keðjuflötinn. Hann er eini snúðflöturinn sem er lágflötur, það er flötur með meðalkrappa núll. Í náttúrunni myndast keðjuflötur þegar sápuhimna er teygð milli tveggja hringa.

459. Finnið rúmmál keðjuflatarins sem myndast þegar ferlinum $y = \cosh(x)$ frá $x = -1$ til $x = 1$ er snúið um x-ásinn, eins og sýnt er hér.



460. Finnið yfirborðsflatarmál keðjuflatarins sem myndast þegar ferlinum $y = \cosh(x)$ frá $x = -1$ til $x = 1$ er snúið um x-ásinn.

Viðauki A Tafla yfir heildi

Grunnheildi

1. $\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C, n\neq -1$
2. $\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$
3. $\int e^u\,du=e^u+C$
4. $\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C$
5. $\int \sin u\,du=-\cos u+C$
6. $\int \cos u\,du=\sin u+C$
7. $\int \sec^2 u\,du=\tan u+C$
8. $\int \csc^2 u\,du=-\cot u+C$
9. $\int \sec u\tan u\,du=\sec u+C$
10. $\int \csc u\cot u\,du=-\csc u+C$
11. $\int \tan u\,du=\ln|\sec u|+C$
12. $\int \cot u\,du=\ln|\sin u|+C$
13. $\int \sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+C$
14. $\int \csc u\,du=\ln|\csc u-\cot u|+C$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$
16. $\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C$
17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+C$

Heildi hornafalla

18. $\int \sin^2 u\,du=\frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\sin 2u+C$
19. $\int \cos^2 u\,du=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\sin 2u+C$
20. $\int \tan^2 u\,du=\tan u-u+C$
21. $\int \cot^2 u\,du=-\cot u-u+C$
22. $\int \sin^3 u\,du=-\frac{1}{3}\left(2+\sin^2 u\right)\cos u+C$
23. $\int \cos^3 u\,du=\frac{1}{3}\left(2+\cos^2 u\right)\sin u+C$

24. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

25. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

26.

$$\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

27.

$$\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$$

28.

$$\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du$$

29.

$$\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$$

30.

$$\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$$

31.

$$\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$$

32.

$$\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$$

33.

$$\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$$

34.

$$\int \sin au \sin bu\,du = \frac{\sin((a-b)u)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)u)}{2(a+b)} + C$$

35.

$$\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\sin((a-b)u)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)u)}{2(a+b)} + C$$

36.

$$\int \sin au \cos bu\,du = -\frac{\cos\left((a-b)u\right)}{2(a-b)} - \frac{\cos\left((a+b)u\right)}{2(a+b)} + C$$

37. $\int u \sin u\,du = \sin u - u\cos u + C$

38. $\int u \cos u\,du = \cos u + u\sin u + C$

39.

$$\int u^n \sin u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$$

40.

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$$

41.

$$\begin{aligned}\int \sin^n u \cos^m u\,du &= -\tfrac{\sin^{n-1}u\cos^{m+1}u}{n+m} + \tfrac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}u\cos^m u\,du \\ &= \tfrac{\sin^{n+1}u\cos^{m-1}u}{n+m} + \tfrac{m-1}{n+m}\int \sin^n u\cos^{m-2}u\,du\end{aligned}$$

Heildi vísisfalla og lografalla

42. $\int u e^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

43.

$$\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$$

44.

$$\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$$

45.

$$\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$$

46. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

47. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\left[(n+1)\ln u - 1\right] + C$

48. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln\left|\ln u\right| + C$

Heildi breiðbogafalla

49. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$

50. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$

51. $\int \tanh u\,du = \ln \cosh u + C$
52. $\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + C$
53. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\sinh u| + C$
54. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh \frac{1}{2}u\right| + C$
55. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$
56. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$
57. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$
58. $\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Heildi andhverfra hornafalla

59. $\int \sin^{-1} u\,du = u\sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
60. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
61.

$$\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + C$$

62.

$$\int u\sin^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

63.

$$\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

64. $\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
65.

$$\int u^n \sin^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$$

66.

$$\int u^n \cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$$

67.

$$\int u^n \tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], n \neq -1$$

A

Heildi sem fela í sér $a^2 + u^2$, $a > 0$

68.

$$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

69.

$$\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}\left(a^2+2u^2\right)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

70.

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right|+C$$

71.

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

72. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$

73.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\left(\sqrt{a^2+u^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

74. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right|+C$

75. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u}+C$

76. $\displaystyle\int \frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}}+C$

Heildi sem fela í sér $u^2 - a^2$, $a > 0$

77.

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

78.

$$\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

79. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

80.

$$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

81. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

82.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

83. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u} + C$

84a. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

84b. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Heildi sem fela í sér $a^2 - u^2$, $a > 0$

85. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

86.

$$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

87.

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$$

88. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

89.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

90. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

91. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

92.

$$\int \left(a^2-u^2\right)^{3/2} du = -\frac{u}{8}\left(2u^2-5a^2\right)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$$

93a. $\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$

93b. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C$

Heildi sem fela í sér $a^2 - u2$, $a > 0$

94.

$$\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$$

95. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$

96.

$$\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$$

97. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+C$

Heildi sem fela í sér $a + bu$, $a \neq 0$

98. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a+bu-a\ln|a+bu|\right)+C$

99.

$$\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2-4a(a+bu)+2a^2\ln|a+bu|\right]+C$$

100. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|+C$

101. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

102.

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)}+\frac{1}{b^2}\ln|a+bu|+C$$

A

103.

$$\int \frac{u\,du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

104.

$$\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$$

105. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

106. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

107.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$$

108.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, & \text{if } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan - 1\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

109. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

110. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

111.

$$\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$$

112.

$$\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$$

113.

$$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

A

Viðauki B Tafla yfir afleiður

Almennar formúlur

1. $\frac{d}{dx}(c)=0$
2. $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}(x^n)=n\,x^{n-1}$, fyrir rauntölur n
5. $\frac{d}{dx}(cf(x))=cf'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=f'(x)-g'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8. $\frac{d}{dx}[f(g(x))]=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Hornaföll

9. $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
10. $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
12. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
13. $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$
14. $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

Andhverf hornaföll

15. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

18. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2}$

20. $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Vísisföll og lograföll

21. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$

22. $\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x}$

23. $\frac{d}{dx}\left(b^x\right)=b^x\ln b$

24. $\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right)=\frac{1}{x\ln b}$

Breiðbogaföll

25. $\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)=\cosh x$

26. $\frac{d}{dx}\left(\tanh x\right)=\operatorname{sech}^2 x$

27. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech} x\right)=-\operatorname{sech} x\tanh x$

28. $\frac{d}{dx}\left(\cosh x\right)=\sinh x$

29. $\frac{d}{dx}\left(\coth x\right)=-\operatorname{csch}^2 x$

30. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch} x\right)=-\operatorname{csch} x\coth x$

Andhverf breiðbogaföll

31. $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

32. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(|x|<1\right)$

33. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(0<x<1\right)$

34. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(x>1\right)$

35. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(|x|>1\right)$

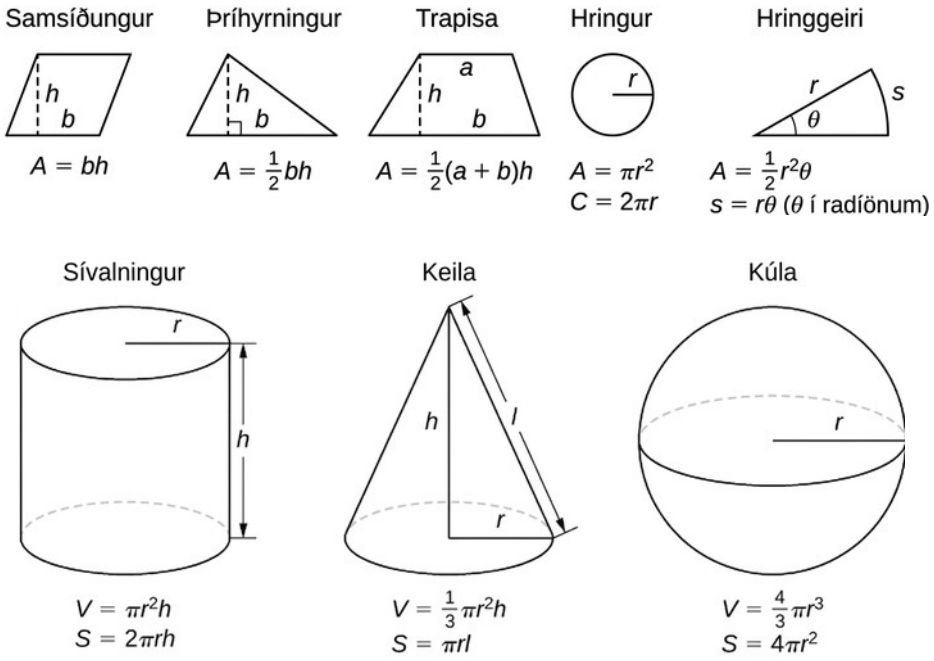
36. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1}x\right)=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\left(x\neq 0\right)$

Viðauki C Upprifjun fyrir stærðfræðigreiningu

Formúlur úr rúmfræði

$A = \text{flatarmál}$, $V = \text{Rúmmál}$, og $S = \text{hliðarflatarmál}$

C



Formúlur úr algebru

Veldisreglur

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Sérstakar þáttanir

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Lausnarformúla annars stigs

Ef $ax^2+bx+c=0$, þá $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Tvíliðusetningin

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

þar sem $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

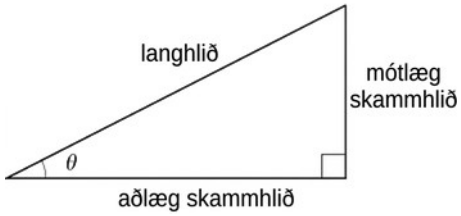
Formúlur úr hornafræði

Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningum

$$\sin\ \theta = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} \qquad \csc\ \theta = \frac{\text{langhlið}}{\text{mótlæg skammhlið}}$$

$$\cos\ \theta = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} \qquad \sec\ \theta = \frac{\text{langhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}}$$

$$\tan\ \theta = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}} \qquad \cot\ \theta = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{mótlæg skammhlið}}$$



Hornaföll mikilvægra horna

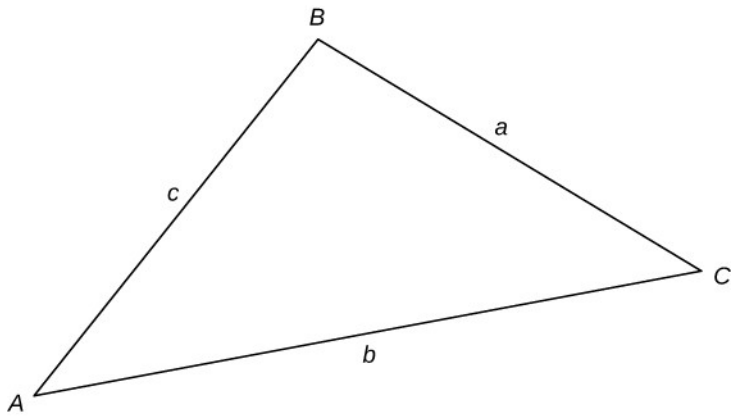
θ	Radíanar	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—

Grundvallarsamsemdir

$$\begin{aligned} \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 & \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ 1 + \tan^2\theta &= \sec^2\theta & \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ 1 + \cot^2\theta &= \csc^2\theta & \tan(-\theta) &= -\tan\theta \\ \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\theta & \sin(\theta + 2\pi) &= \sin\theta \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\theta & \cos(\theta + 2\pi) &= \cos\theta \\ \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot\theta & \tan(\theta + \pi) &= \tan\theta \end{aligned}$$

Sínusreglan

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Kósínusreglan

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Samlagningar- og frádráttarformúlur

$$\begin{aligned} \sin{(x+y)} &= \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ \sin{(x-y)} &= \sin x\cos y - \cos x\sin y \\ \cos{(x+y)} &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \cos{(x-y)} &= \cos x\cos y + \sin x\sin y \\ \tan{(x+y)} &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} \\ \tan{(x-y)} &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} \end{aligned}$$

Tvöföldunarformúlur

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

Helmingunarformúlur

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

C

Svarlykill

Kafli 1

Stöðumat

1.1

$f(1)=3$ og $f(a+h)=a^2+2ah+h^2-3a-3h+5$

1.2

Skilgreiningarmengi = $(x|x\leq 2)$, myndmengi = $(y|y\geq 5)$

1.3

$$x=0,2,3$$

1.4

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+3}{2x-5}$. Skilgreiningarmengið er $\left\{x|x\neq\frac{5}{2}\right\}$.

1.5

$$(f\circ g)(x)=2-5\sqrt{x}.$$

1.6

$$(g\circ f)(x)=0{,}63\ x$$

1.7

$f(x)$ er oddstætt.

1.8

Skilgreiningarmengi = $(-\infty,\infty)$, myndmengi = $(y|y\geq -4)$.

1.9

$m=1/2$. Punkthallaformið er

$$y-4=\frac{1}{2}(x-1).$$

Hallaskurðarformið er

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}.$$

1.10

Núllstöðvarnar eru $x=1\pm\sqrt{3}/3$. Fleygboginn opnast upp á við.

1.11

Skilgreiningarmengið er mengi rauntalna x þannig að $x\neq 1/2$. Myndmengið er mengið $(y|y\neq 5/2)$.

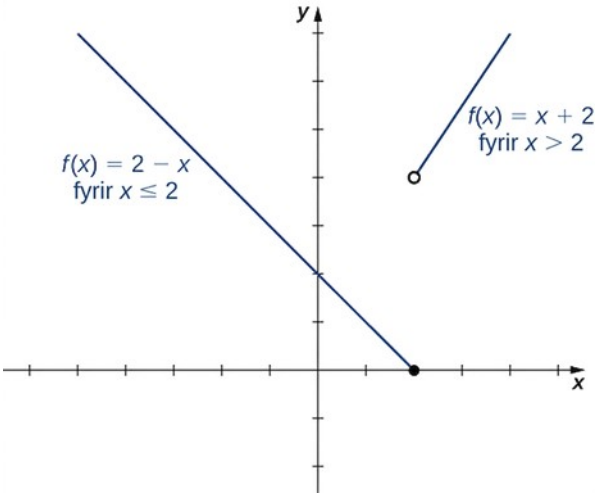
1.12

Skilgreiningarmengi f er $(-\infty, \infty)$. Skilgreiningarmengi g er $\{x | x \geq 1/5\}$.

1.13

Algebruleg

1.14



1.15

$$C(x) = \begin{cases} 49, 0 < x \leq 20 \\ 70, 20 < x \leq 40 \\ 91, 40 < x \leq 60 \end{cases}$$

1.16

Hliðrið grafinu $y = x^2$ um 1 einingu til vinstri, speglið því um x-ásinn og hliðrið því síðan niður um 4 einingar.

1.17

$7\pi/6$; 330°

1.18

$$\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2; \sin(-\pi/6) = -1/2$$

1.19

3 m

1.20

$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ fyrir $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1.21

$$\begin{aligned} 1+\theta &= 1+\frac{\theta}{\theta} \\ &= \frac{\theta}{\theta}+\frac{\theta}{\theta} \\ &= \frac{\theta+\theta}{\theta} \\ &= \frac{1}{\theta} \\ &= \theta \end{aligned}$$

1.22

Til að teikna graf $f(x)=3\sin(4x)-5$, þarf að breyta grafi $y=\sin(x)$ þannig að það sé þjappað saman lárétt um stuðulinn 4, síðan teygt lóðrétt um stuðulinn 3 og loks hliðrað niður um 5 einingar. Fallið f hefur lotuna $\pi/2$ og útslagið 3.

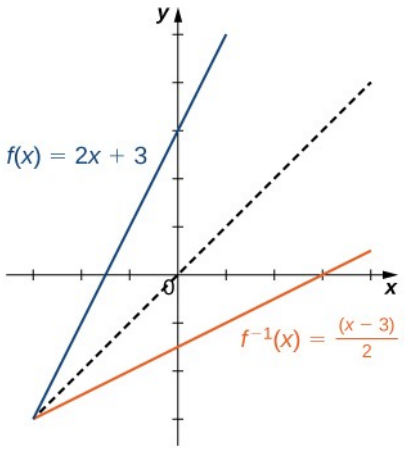
1.23

Nei.

1.24

$f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-3}$. Skilgreiningarmengi f^{-1} er $\{x|x\neq 3\}$. Myndmengi f^{-1} er $\{y|y\neq 2\}$.

1.25



1.26

Skilgreiningarmengi f^{-1} er $(0,\infty)$. Myndmengi f^{-1} er $(-\infty,0)$. Andhverfa fallið er gefið með formúlunni $f^{-1}(x)=-1/\sqrt{x}$.

1.27

$$f(4)=900; f(10)=24.300.$$

1.28

$$x/(2y^3)$$

1.29

$A(t)=750\ e^{0,04\,t}$. Eftir 30 ár verða um það bil $\$\ 2.490,09$.

1.30

$$x=\frac{\ln 3}{2}$$

1.31

$$x=\frac{1}{e}$$

1.32

1,29248

1.33

The magnitude 8,4 earthquake is roughly 10 times as severe as the magnitude 7,4 earthquake.

1.34

$$\left(x^2+x^{-2}\right)/2$$

1.35

$$\frac{1}{2}\ln\left(3\right)\approx 0{,}5493.$$

Æfingar úr undirkafla 1.1

1. a. Skilgreiningarmengi = $\left\{-3,-2,-1,0,1,2,3\right\}$, myndmengi = $\left\{0,1,4,9\right\}$ b. Já, fall

3. a. Skilgreiningarmengi = $\left\{0,1,2,3\right\}$, myndmengi = $\left\{-3,-2,-1,0,1,2,3\right\}$ b. Nei, þetta er ekki fall

5. a. Skilgreiningarmengi = $\left\{3,5,8,10,15,21,33\right\}$, myndmengi = $\left\{0,1,2,3\right\}$ b. Já, fall

7. a. -2 b. 3 c. 13 d. $-5x-2$ e. $5a-2$ f. $5a+5h-2$

9. a. Óskilgreint b. 2 c. $\frac{2}{3}$ d. $-\frac{2}{x}$ e $\frac{2}{a}$ f. $\frac{2}{a+h}$

11. a. $\sqrt{5}$ b. $\sqrt{11}$ c. $\sqrt{23}$ d. $\sqrt{-6x+5}$ e. $\sqrt{6a+5}$ f. $\sqrt{6a+6h+5}$

13. a. 9 b. 9 c. 9 d. 9 e. 9 f. 9

15. $x\geq\frac{1}{8}$; $y\geq 0$; $x=\frac{1}{8}$; engan y-skurðpunkt

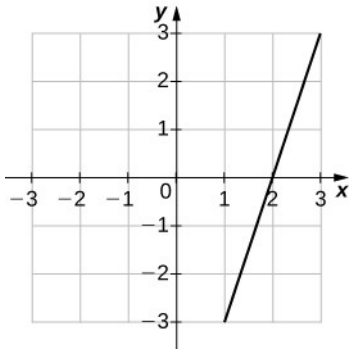
17.

$$x\geq -2;\ y\geq -1;\ x=-1;\ y=-1+\sqrt{2}$$

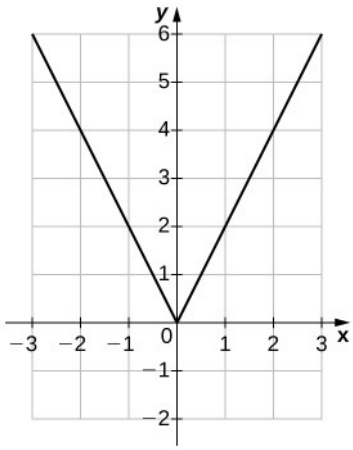
19. $x\neq 4$; $y\neq 0$; enginn x-ássskurðpunktur; $y=-\frac{3}{4}$

21. $x>5\,;\, y>0\,;$ engir skurðpunktar

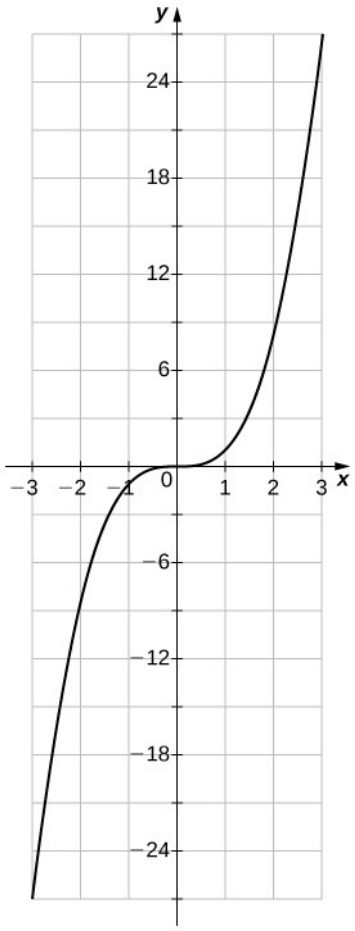
23.



25.



27.



29. Fall; a. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: $y \geq 0$ b. $x = \pm 1$ c. $y = 1$ d. $-1 < x < 0$ og $1 < x < \infty$ e. $-\infty < x < -1$ og $0 < x < 1$ f. Ekki fast g. y-ás h. Jafnstætt

31. Fall; a. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: $-1{,}5 \leq y \leq 1{,}5$ b. $x = 0$ c. $y = 0$ d. allar rauntölur e. Ekkert f. Ekki fast g. Upphafspunktur h. Oddstætt

33. Fall; a. Skilgreiningarmengi: $-\infty < x < \infty$, myndmengi: $-2 \leq y \leq 2$ b. $x = 0$ c. $y = 0$ d. $-2 < x < 2$ e. Ekki minnkandi f. $-\infty < x < -2$ og $2 < x < \infty$ g. Upphafspunktur h. Oddstætt

35. Function; a. Domain: $-4 \leq x \leq 4$, range: $-4 \leq y \leq 4$ b. $x = 1{,}2$ c. $y = 4$ d. Not increasing e. $0 < x < 4$ f. $-4 < x < 0$ g. No Symmetry h. Neither

37. a. $5x^2 + x - 8$; allar rauntölur b. $-5x^2 + x - 8$; allar rauntölur c. $5x^3 - 40x^2$; allar rauntölur d. $\frac{x-8}{5x^2}$; $x \neq 0$

39. a. $-2x + 6$; allar rauntölur b. $-2x^2 + 2x + 12$; allar rauntölur c. $-x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 18x - 27$; allar rauntölur d. $-\frac{x+3}{x+1}$; $x \neq -1, 3$

41. a. $6 + \frac{2}{x}$; $x \neq 0$ b. 6; $x \neq 0$ c. $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$; $x \neq 0$ d. $6x + 1$; $x \neq 0$

43. a. $4x+3$; allar rauntölur b. $4x+15$; allar rauntölur

45. a. x^4-6x^2+16; allar rauntölur b. x^4+14x^2+46; allar rauntölur

47. a. $\frac{3x}{4+x}$; $x\neq 0,-4$ b. $\frac{4x+2}{3}$; $x\neq -\frac{1}{2}$

49. a. Já, því að aðeins einn sigurvegari er á hverju ári. b. Nei, því að þrjú lið unnu oftar en einu sinni á árunum 2001 til 2012.

51. a. $V(s)=s^3$ b. $V(11{,}8)\approx 1643$; teningur með hliðarlengdina 11,8 hefur rúmmál sem er um það bil 1643 rúmeiningar.

53. a. $N(x)=10\ x$ b. i. $N(50)=10(50)=500$; því getur ökutækið ekið 500 km á fullum eldsneytisgeymi. ii. $N(37{,}5)=375$; því getur ökutækið ekið 375 km á 3/4 af eldsneytisgeymi. c. Skilgreiningarmengi: $0\leq x\leq 50$; myndmengi: $[0,500]$ d. Ökumaðurinn þurfti að stöðva að minnsta kosti einu sinni, þar sem það þarf 93 lítra af eldsneyti til að aka samtals 930 km.

55. a. $A(t)=A(r(t))=\pi\cdot\left(6-\frac{5}{t^2+1}\right)^2$ b. Nákvæmt: $\frac{121\pi}{4}$; um það bil 95 cm² c.

$C(t)=C(r(t))=2\pi\left(6-\frac{5}{t^2+1}\right)$ d. Nákvæmt: 11π; um það bil 35 cm

57. a. $S(x)=8{,}5\ x+750$ b. \$962,50, \$1090, \$1217,50 c. 77 hjólabretti

Æfingar úr undirkafla 1.2

59. a. −1 b. Minnkandi

61. a. 3/4 b. Vaxandi

63. a. 4/3 b. Vaxandi

65. a. 0 b. Lárétt

67.

$$y=-6x+9$$

69.

$$y=\frac{1}{3}x+4$$

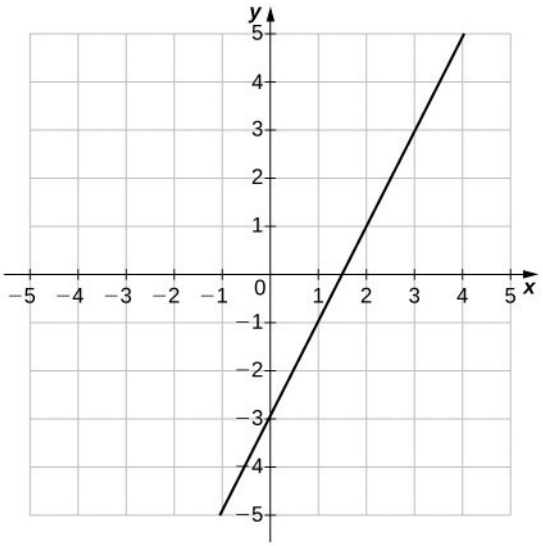
71.

$$y=\frac{1}{2}x$$

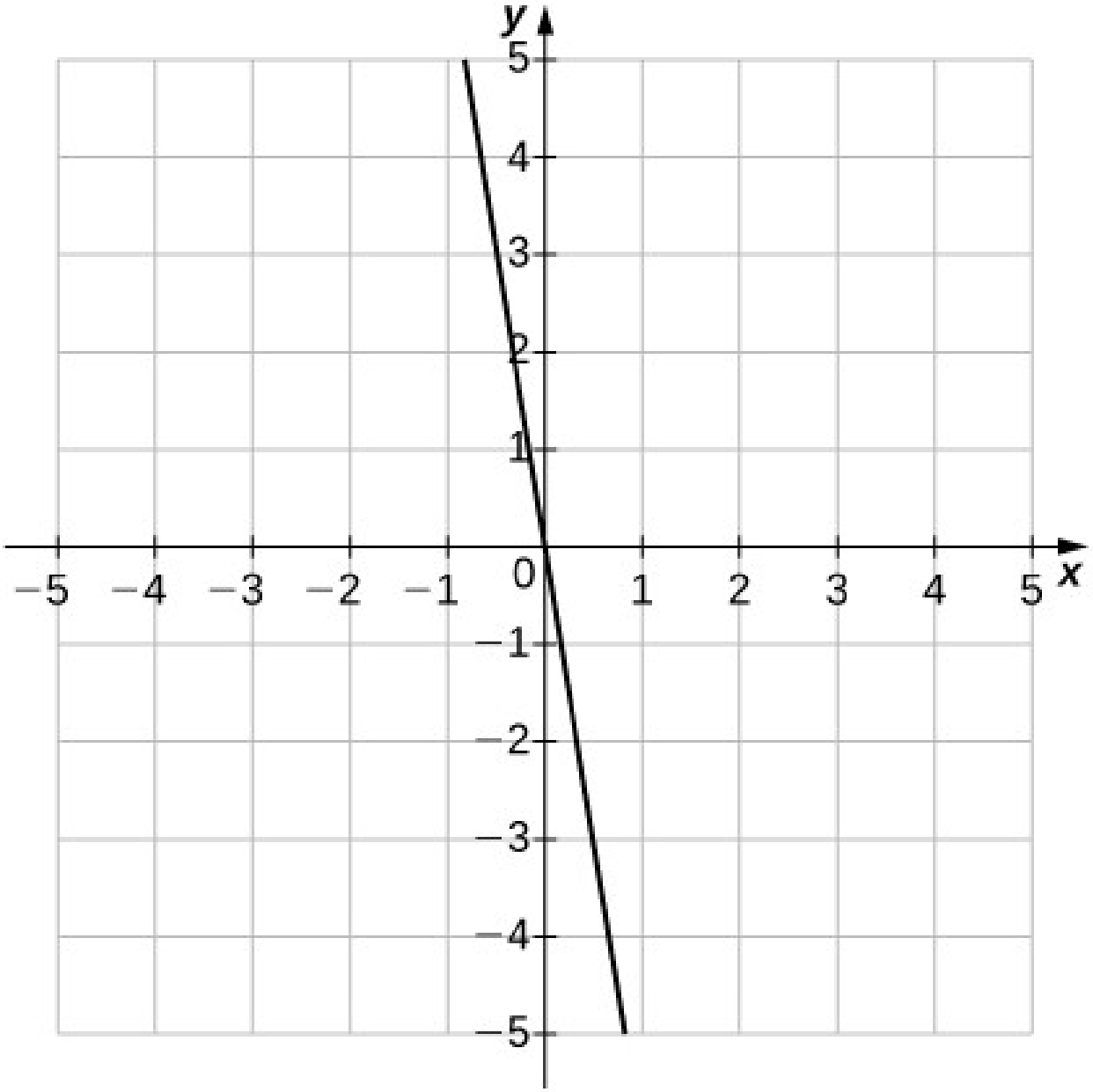
73.

$$y=\frac{3}{5}x-3$$

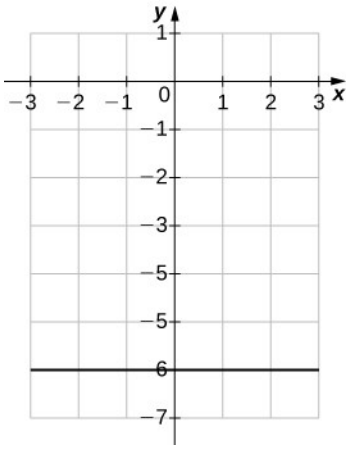
75. a. $(m=2, b=-3)$ b.



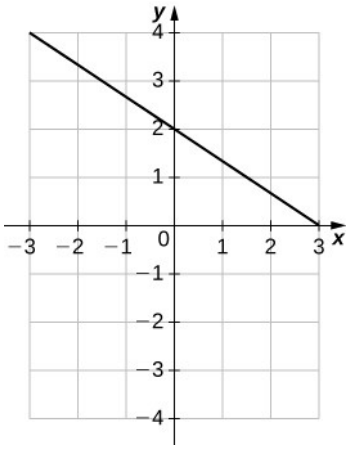
77. a. $(m=-6, b=0)$ b.



79. a. $(m=0, b=-6)$ b.



81. a. $\left(m=-\frac{2}{3}, b=2\right)$ b.

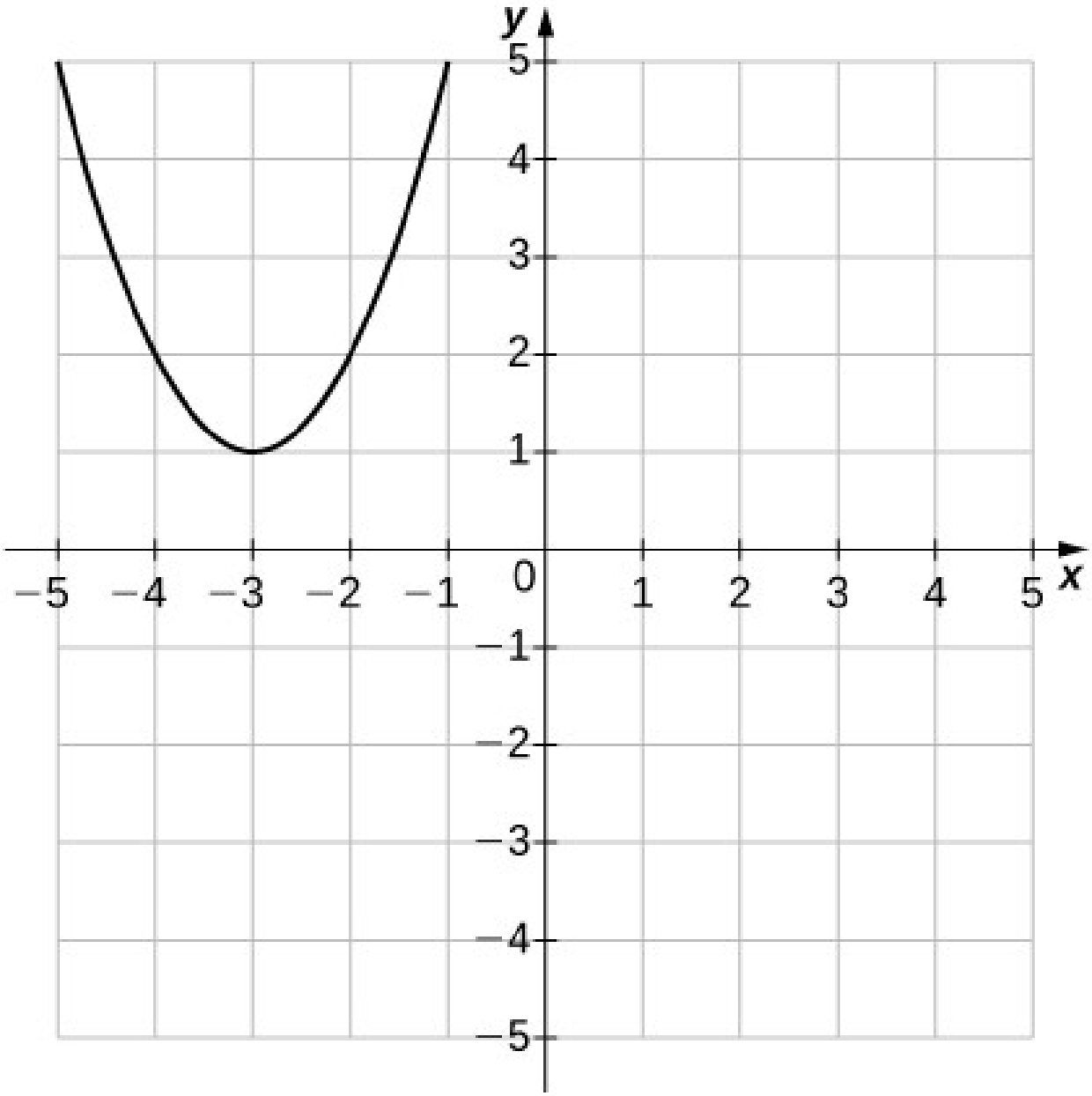


83. a. 2 b. $\frac{5}{2}, -1$; c. -5 d. Þegar $x \to \pm\infty$, $y \to \infty$ e. Hvorugt

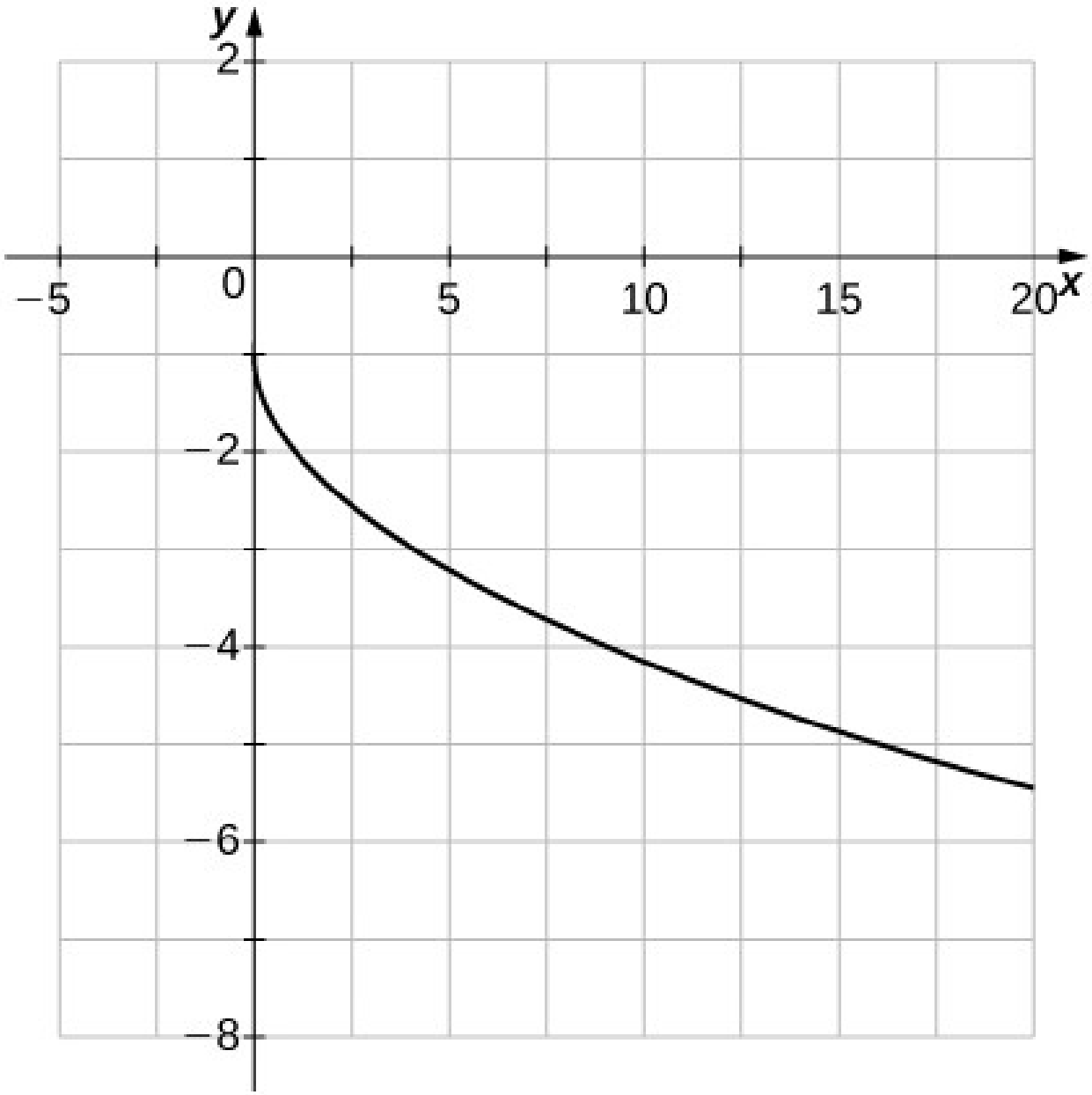
85. a. 2 b. $\pm\sqrt{2}$ c. -1 d. Þegar $x \to \pm\infty$, $y \to \infty$ e. Jafnstætt

87. a. 3 b. 0, $\pm\sqrt{3}$ c. 0 d. Þar sem $x \to -\infty$, $y \to \infty$ og $x \to \infty$, $y \to -\infty$ e. Oddstætt

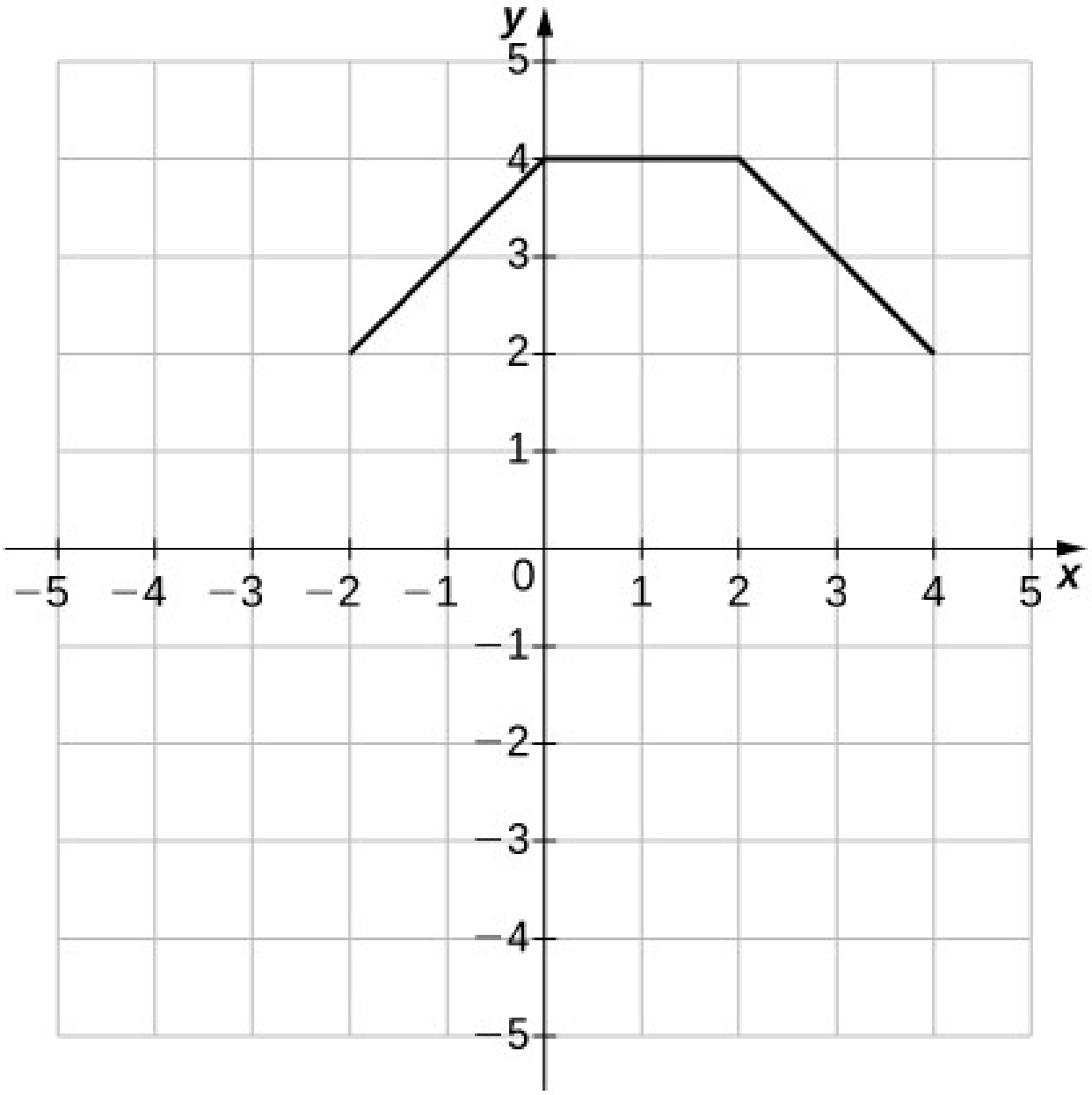
89.



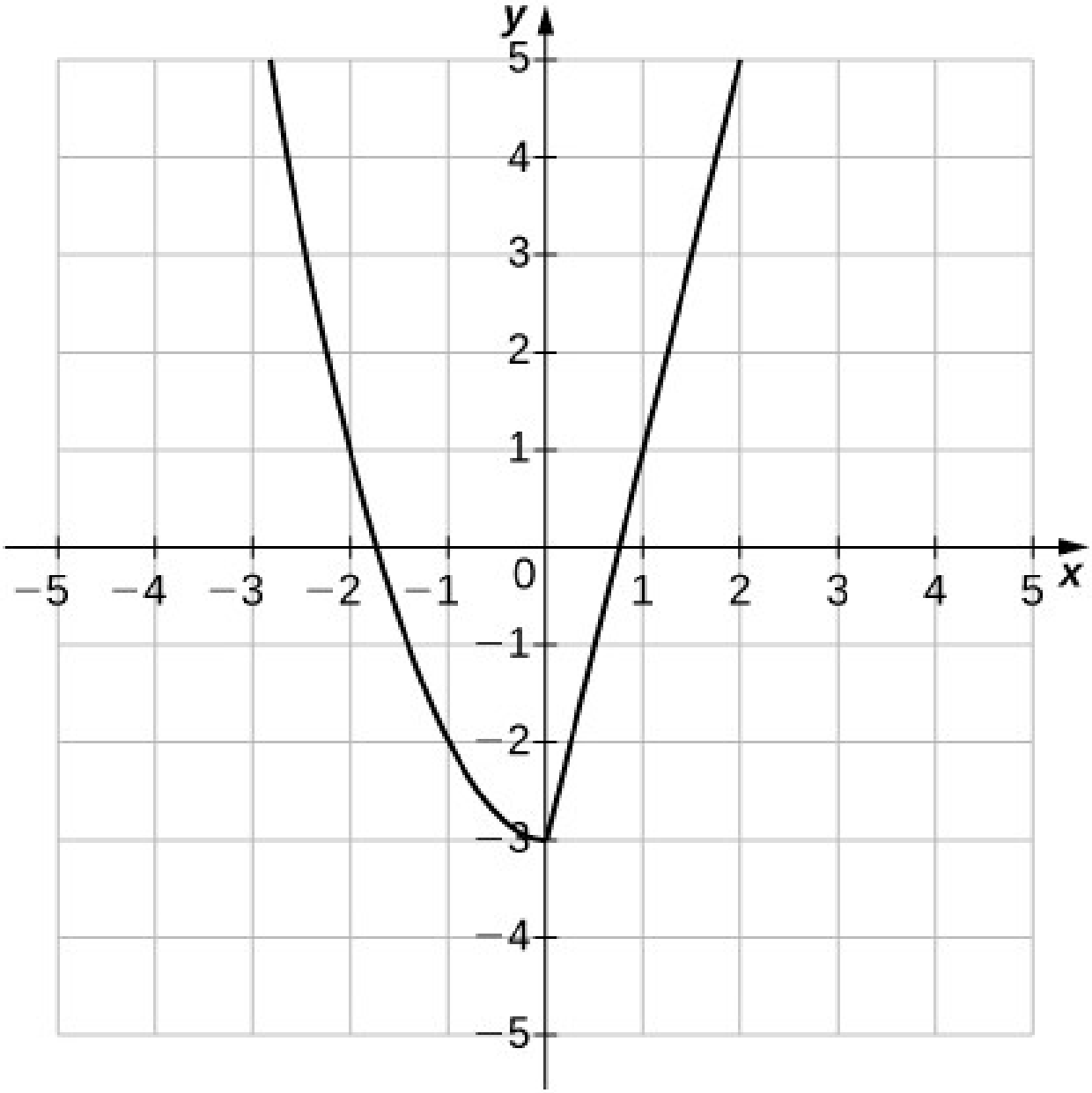
91.



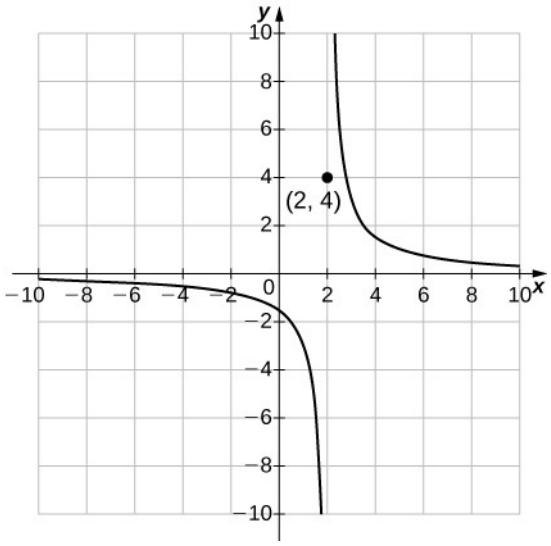
93.



95. a. $13, -3{,}5$ b.



97. a. $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 4$ b.



99. Satt; $n=3$

101. Rangt; $f(x)=x^b$, þar sem b er raungildur fasti, er veldisfall

103. a. $V(t)=-2733t+20500$ b. $(0,20.500)$ þýðir að upphaflegt kaupverð búnaðarins er \$20.500; $(7{,}5\,;0)$ þýðir að eftir 7,5 ár er tölvubúnaðurinn verðlaus. c. \$6835 d. Eftir um það bil 6,4 ár

105. a. $C=0{,}75\ x+125$ b. \$245 c. 167 bollakökur

107. a. $V\ (t)=-1500\ t+26.000$ b. Eftir 4 ár er verðmæti bílsins \$20.000.

109. \$30.337,50

111. 96% af heildarrýmdinni

Æfingar úr undirkafla 1.3

113.

$$\frac{4\pi}{3}\text{ rad}$$

115.

$$\frac{-\pi}{3}$$

117.

$$\frac{11\pi}{6}\text{ rad}$$

119.

$$210°$$

121.

$$-540°$$

123.

$$-0{,}5$$

125.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

127.

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

129. a. $b=5{,}7$ b.

$$\sin\ A=\frac{4}{7},\cos\ A=\frac{5{,}7}{7},\tan\ A=\frac{4}{5{,}7},\csc\ A=\frac{7}{4},\sec\ A=\frac{7}{5{,}7},\cot\ A=\frac{5{,}7}{4}$$

131. a. $c=151{,}7$ b.

$\sin\ A=0{,}5623,\cos\ A=0{,}8273,\tan\ A=0{,}6797,\csc\ A=1{,}778,\sec\ A=1{,}209,\cot\ A=1{,}471$

133. a. $c=85$ b.

$$\sin A=\frac{84}{85},\cos A=\frac{13}{85},\tan A=\frac{84}{13},\csc A=\frac{85}{84},\sec A=\frac{85}{13},\cot A=\frac{13}{84}$$

135. a. $y=\frac{24}{25}$ b.

$$\sin\theta=\frac{24}{25},\cos\theta=\frac{7}{25},\tan\theta=\frac{24}{7},\csc\theta=\frac{25}{24},\sec\theta=\frac{25}{7},\cot\theta=\frac{7}{24}$$

137. a. $x=\frac{-\sqrt{2}}{3}$ b.

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{3},\cos\theta=\frac{-\sqrt{2}}{3},\tan\theta=\frac{-\sqrt{14}}{2},\csc\theta=\frac{3\sqrt{7}}{7},\sec\theta=\frac{-3\sqrt{2}}{2},\cot\theta=\frac{-\sqrt{14}}{7}$$

139.

$$\sec^2 x$$

141.

$$\sin^2 x$$

143.

$$\sec^2\theta$$

145.

$$\frac{1}{\sin t}\left(=\csc t\right)$$

155.

$$\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$$

157.

$$\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

159.

$$\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$$

161.

$$\left\{0,\pi,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$$

163.

$$y=4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

165.

$$y=\cos\left(2\pi x\right)$$

167. a. 1 b. 2π c. $\frac{\pi}{4}$ einingar til hægri

169. a. $\frac{1}{2}$ b. 8π c. Engin fasahliðrun

171. a. 3 b. 2 c. $\frac{2}{\pi}$ einingar til vinstri

173. Um það bil 42 cm.

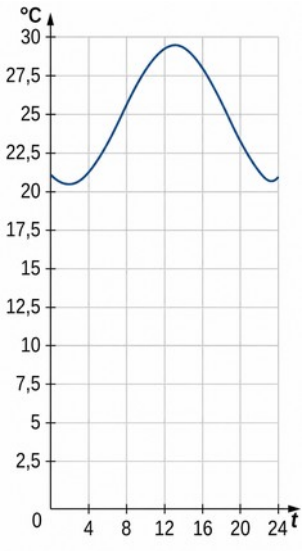
175. a. 0,550 rad/s b. 0,236 rad/s c. 0,698 rad/mín d. 1,697 rad/mín

177.

$$\approx 30{,}9\ \ \text{cm}^2$$

179. a. $\pi/184$; spennan endurtekur sig á $\pi/184$ sek. fresti b. Um það bil 59 lotur

181. a. Sveifluvídd $= 5$; lota $=$ 24 b. 23,7 $°C$ c. 14 klukkustundum síðar, eða kl. 14. d.



Æfingar úr undirkafla 1.4

183. Ekki eintækt

185. Ekki eintækt

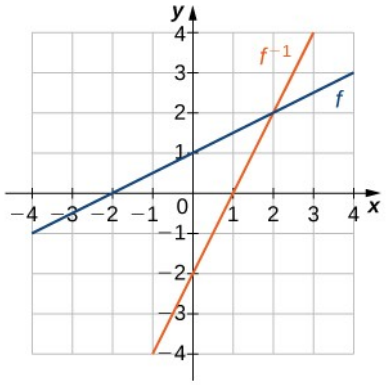
187. Eintækt

189. a. $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}$ b. Skilgreiningarmengi : $x \geq -4$, myndmengi : $y \geq 0$

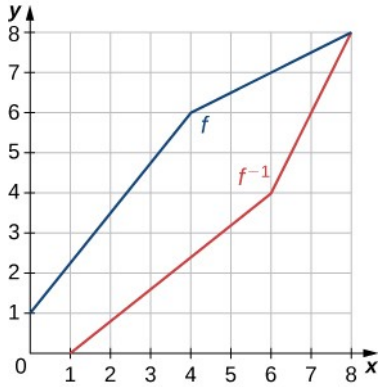
191. a. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ b. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: allar rauntölur

193. a. $f^{-1}(x)=x^2+1$, b. Skilgreiningarmengi: $x \geq 0$, myndmengi: $y \geq 1$

195.



197.



199. Þetta eru andhverf föll.

201. Þetta eru ekki andhverf föll.

203. Þetta eru andhverf föll.

205. Þetta eru andhverf föll.

207.

$$\frac{\pi}{6}$$

209.

$$\frac{\pi}{4}$$

211.

$$\frac{\pi}{6}$$

213.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

215.

$$-\frac{\pi}{6}$$

217. a. $x = f^{-1}(V) = \sqrt{0{,}04 - \frac{V}{500}}$ b. Andhverfa fallsins ákvarðar fjarlægðina frá miðju slagæðarinnar þar sem blóðið flæðir með hraðanum V. c. 0,1 cm; 0,14 cm; 0,17 cm

219. a. \$31.250, \$66.667, \$107.143 b. $\left(p = \frac{85C}{C+75}\right)$ c. 34 milljarðshlutar

221. a. $\sim 92°$ b. $\sim 42°$ c. $\sim 27°$

223. $x \approx 6{,}69, 8{,}51$; so, the temperature occurs on June 21 and August 15

225.

$$\sim 1{,}5 \sec$$

227. $\tan^{-1}(\tan(2{,}1)) \approx -1{,}0416$; stæðan er ekki jöfn 2,1 þar sem $2{,}1 > 1{,}57 = \frac{\pi}{2}$—með öðrum orðum er það ekki í takmarkaða skilgreiningarmengi
$\tan x$. $\cos^{-1}(\cos(2{,}1)) = 2{,}1$, þar sem 2,1 er í takmarkaða skilgreiningarmengi $\cos x$.

Æfingar úr undirkafla 1.5

229. a. 125 b. 2,24 c. 9,74

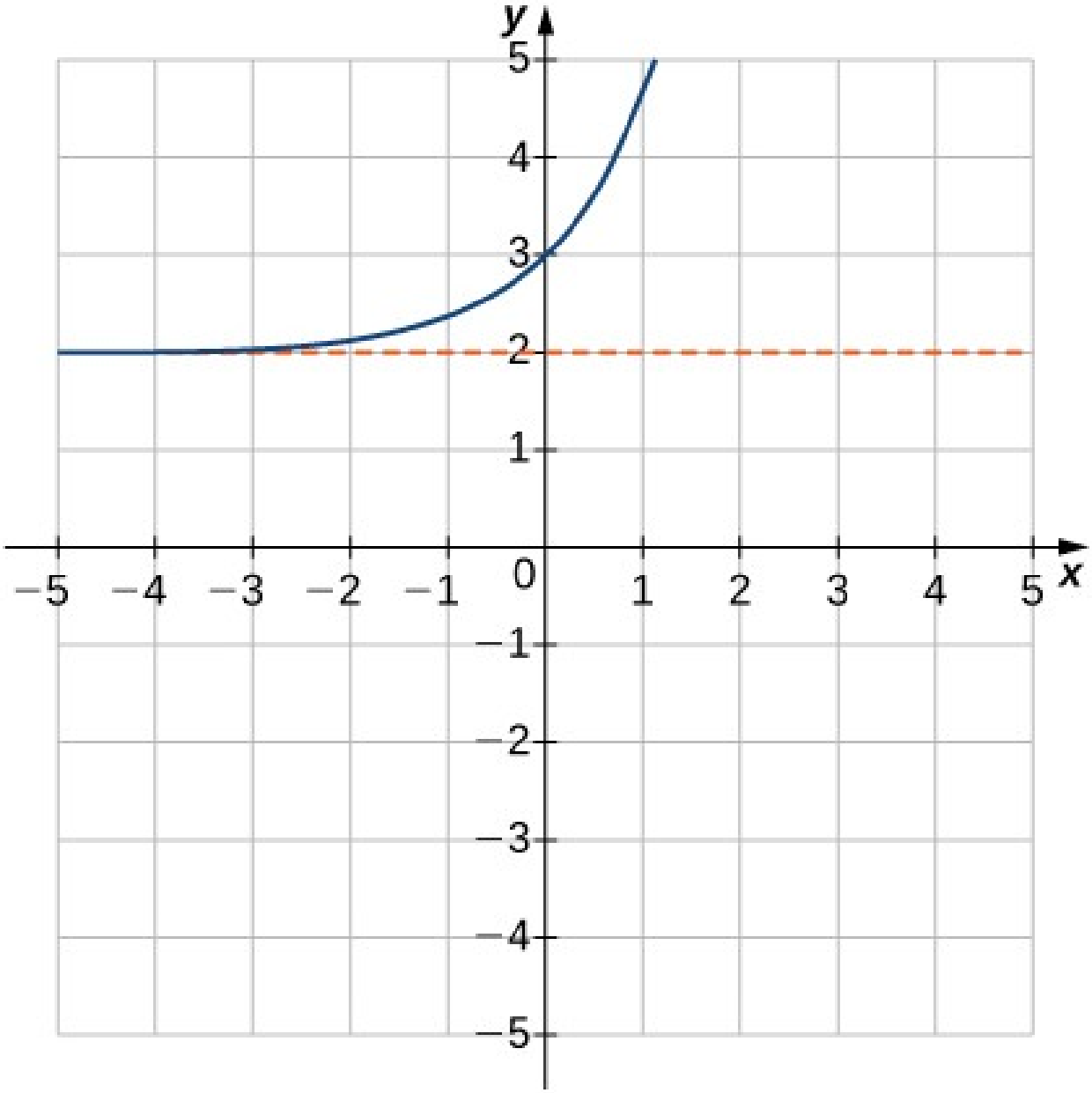
231. a. 0,01 b. 10.000 c. 46,42

233. d

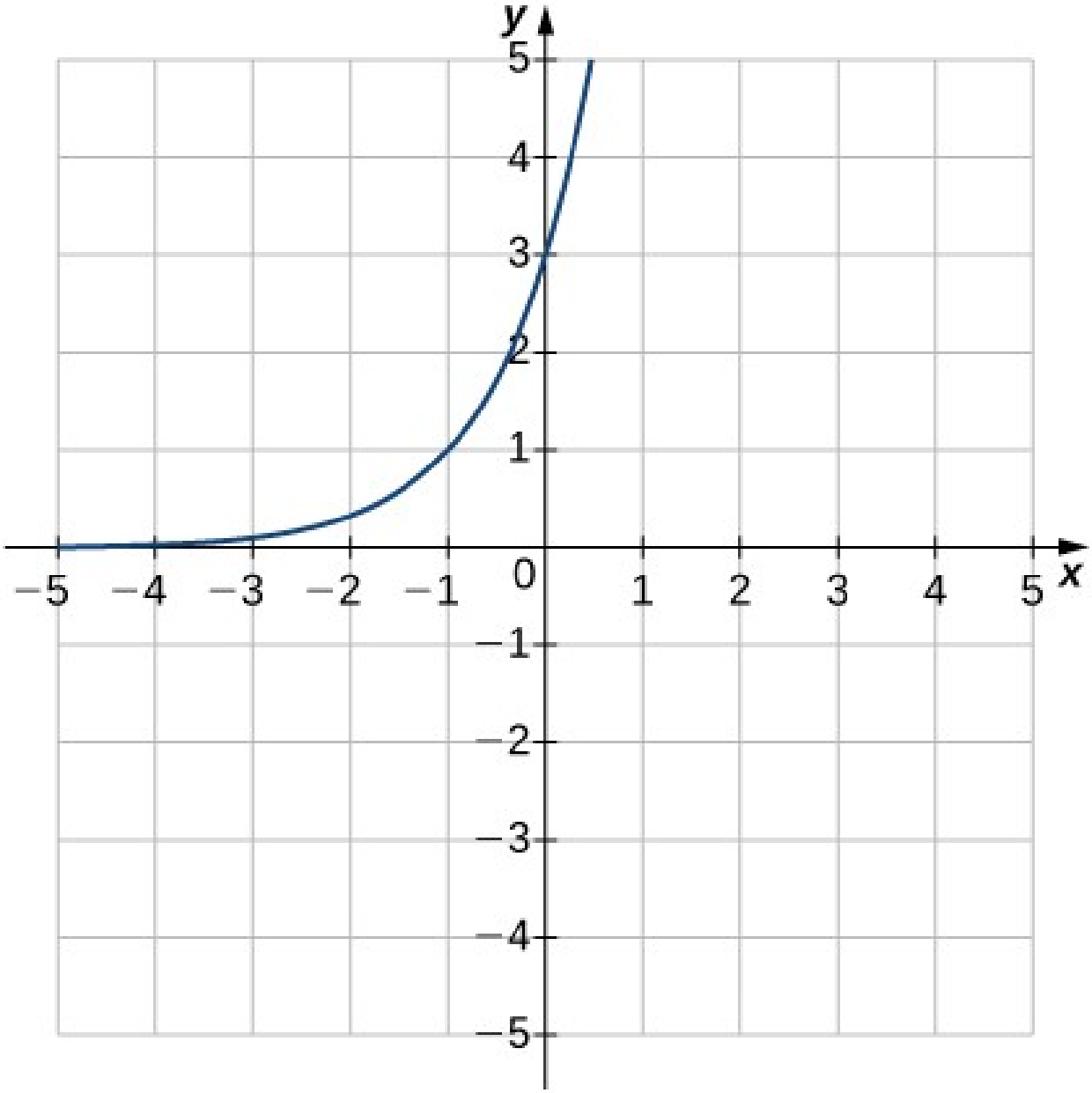
235. b

237. e

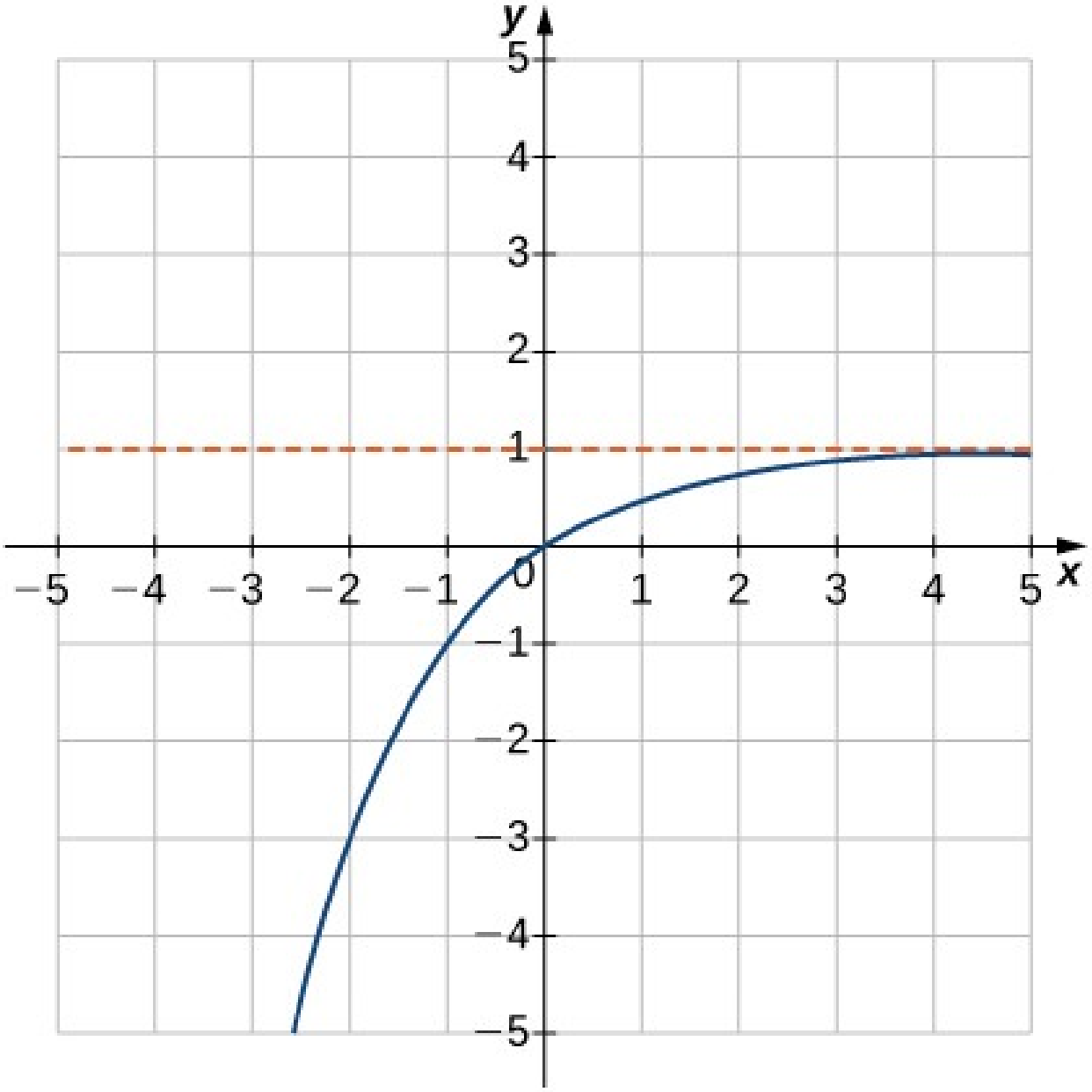
239. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: $(2, \infty)$, $y = 2$



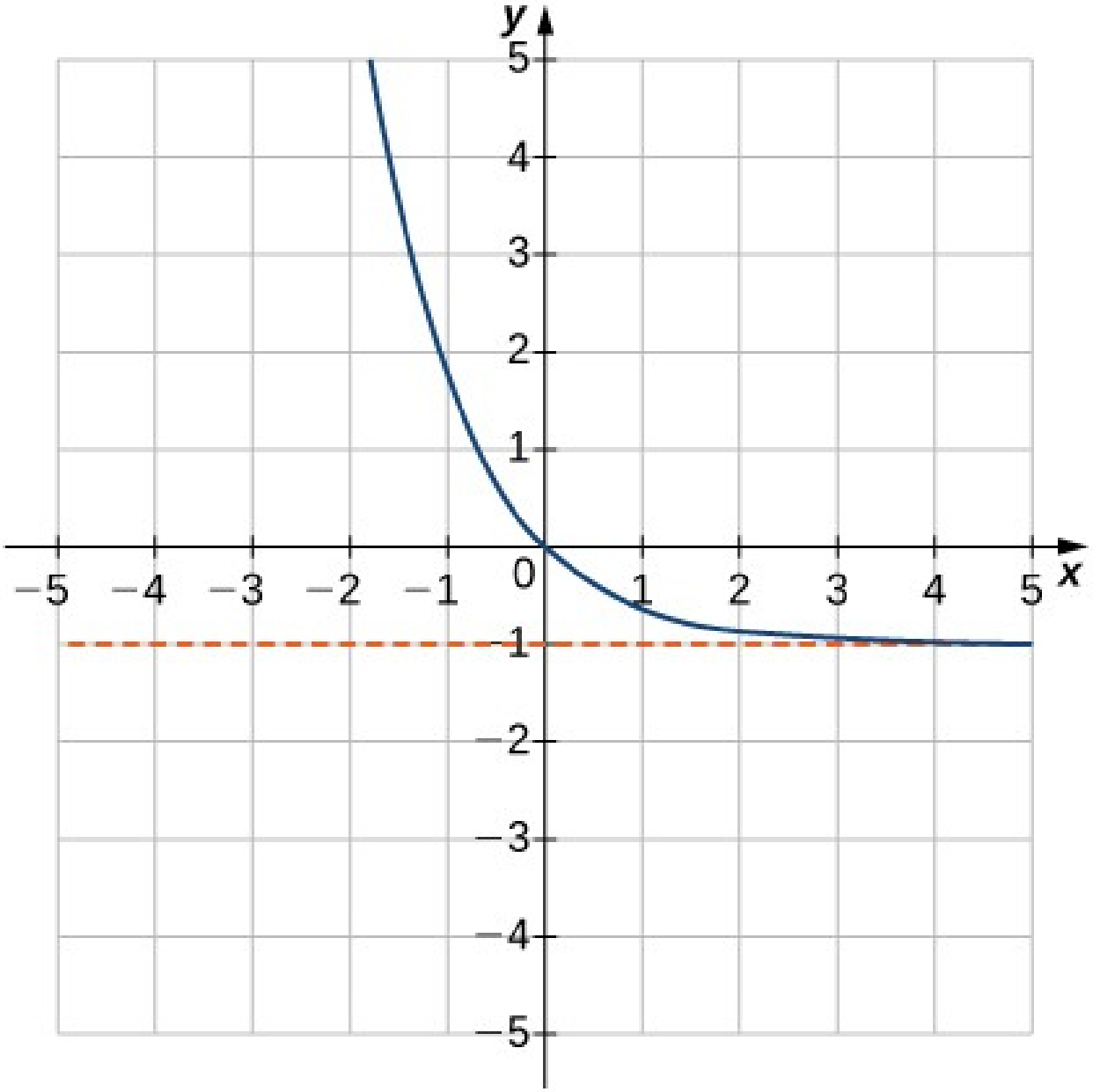
241. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: $(0, \infty)$, $y = 0$



243. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: $(-\infty, 1)$, $y=1$



245. Skilgreiningarmengi: allar rauntölur, myndmengi: $(-1, \infty)$, $y = -1$



247.

$$8^{1/3}=2$$

249.

$$5^{2}=25$$

251.

$$e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}$$

253.

$$e^{0}=1$$

255.

$$\log_4\left(\frac{1}{16}\right)=-2$$

257.

$$\log_9 1=0$$

259.

$$\log_{64} 4=\frac{1}{3}$$

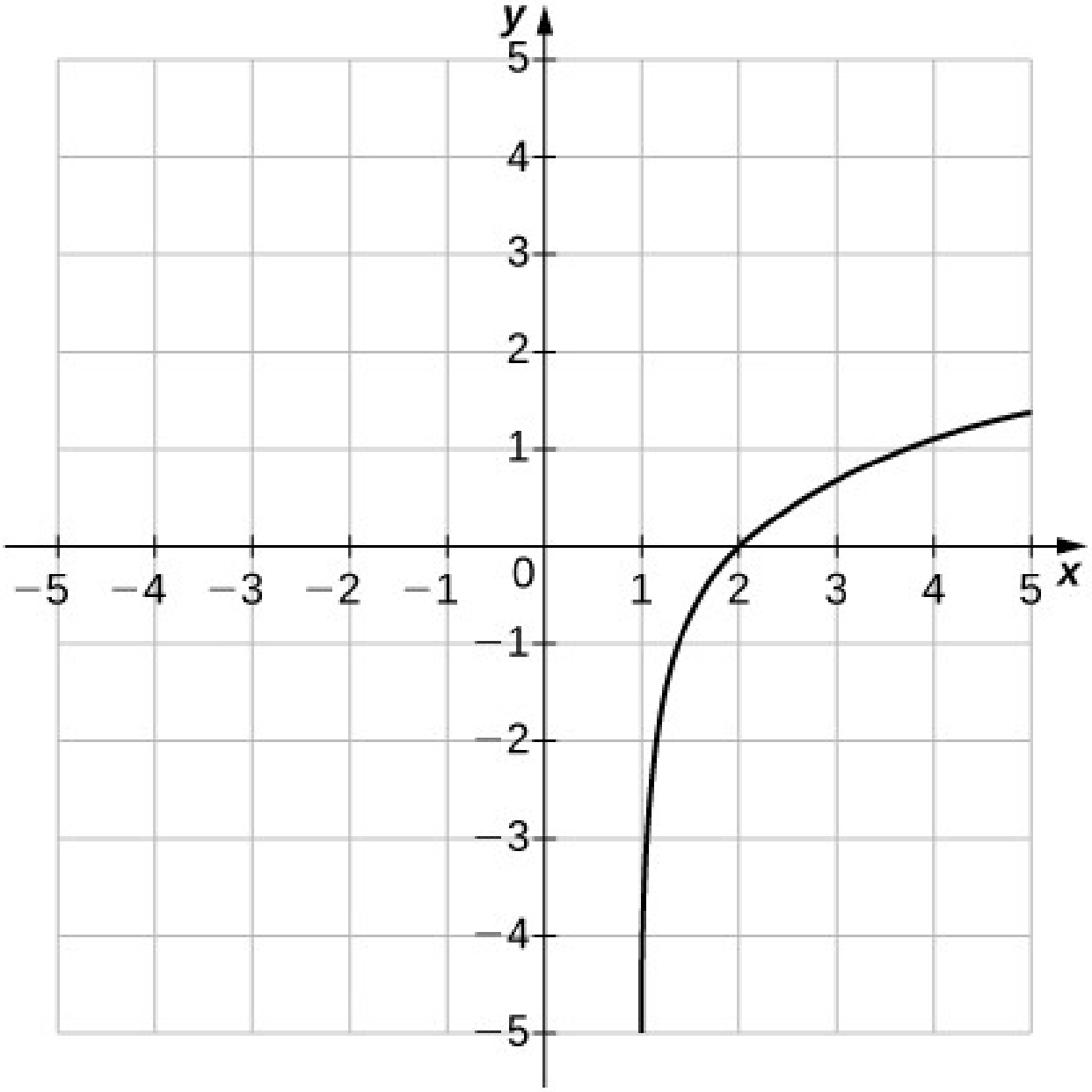
261.

$$\log_9 150=y$$

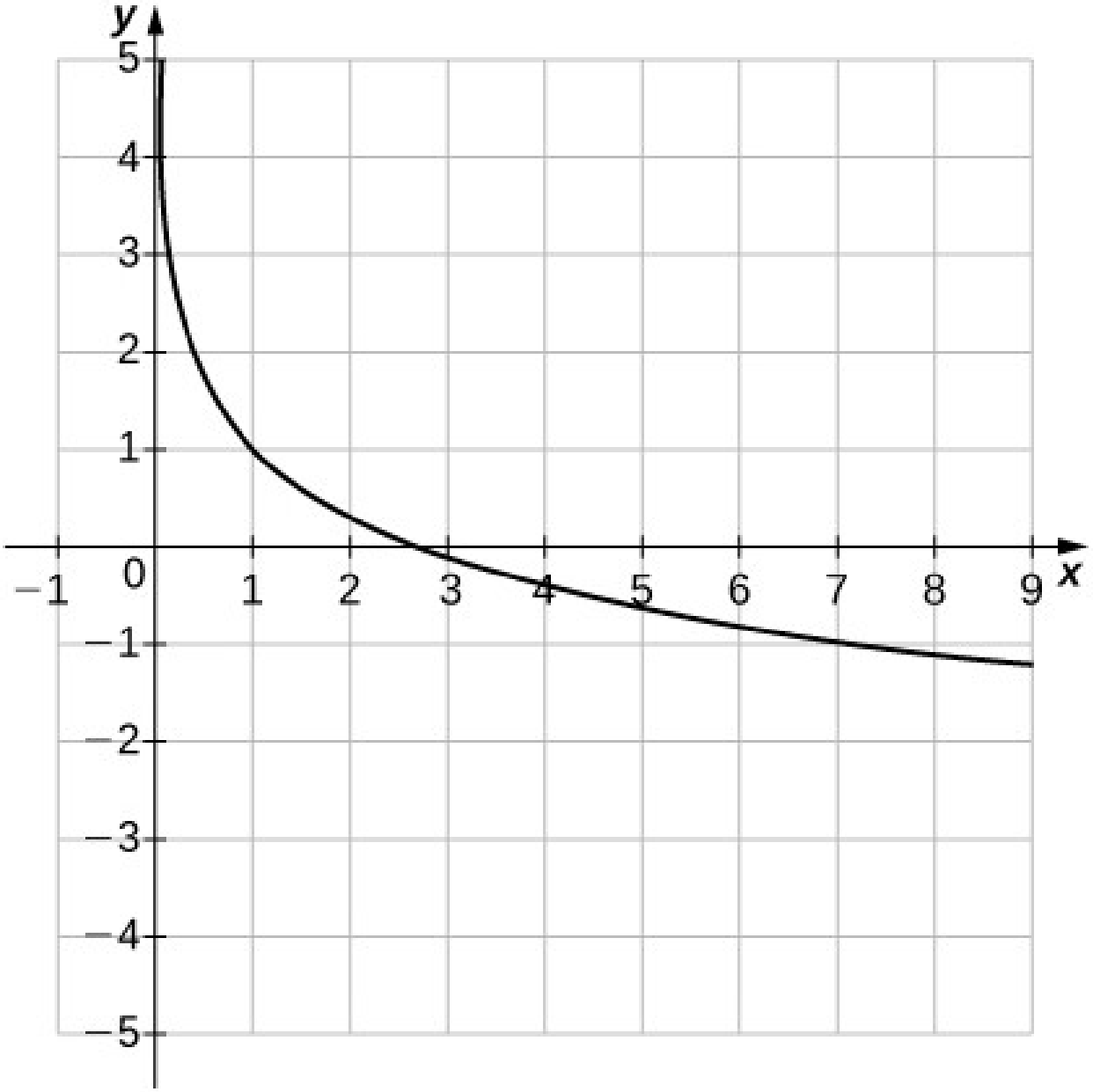
263.

$$\log_4\ 0{,}125=-\frac{3}{2}$$

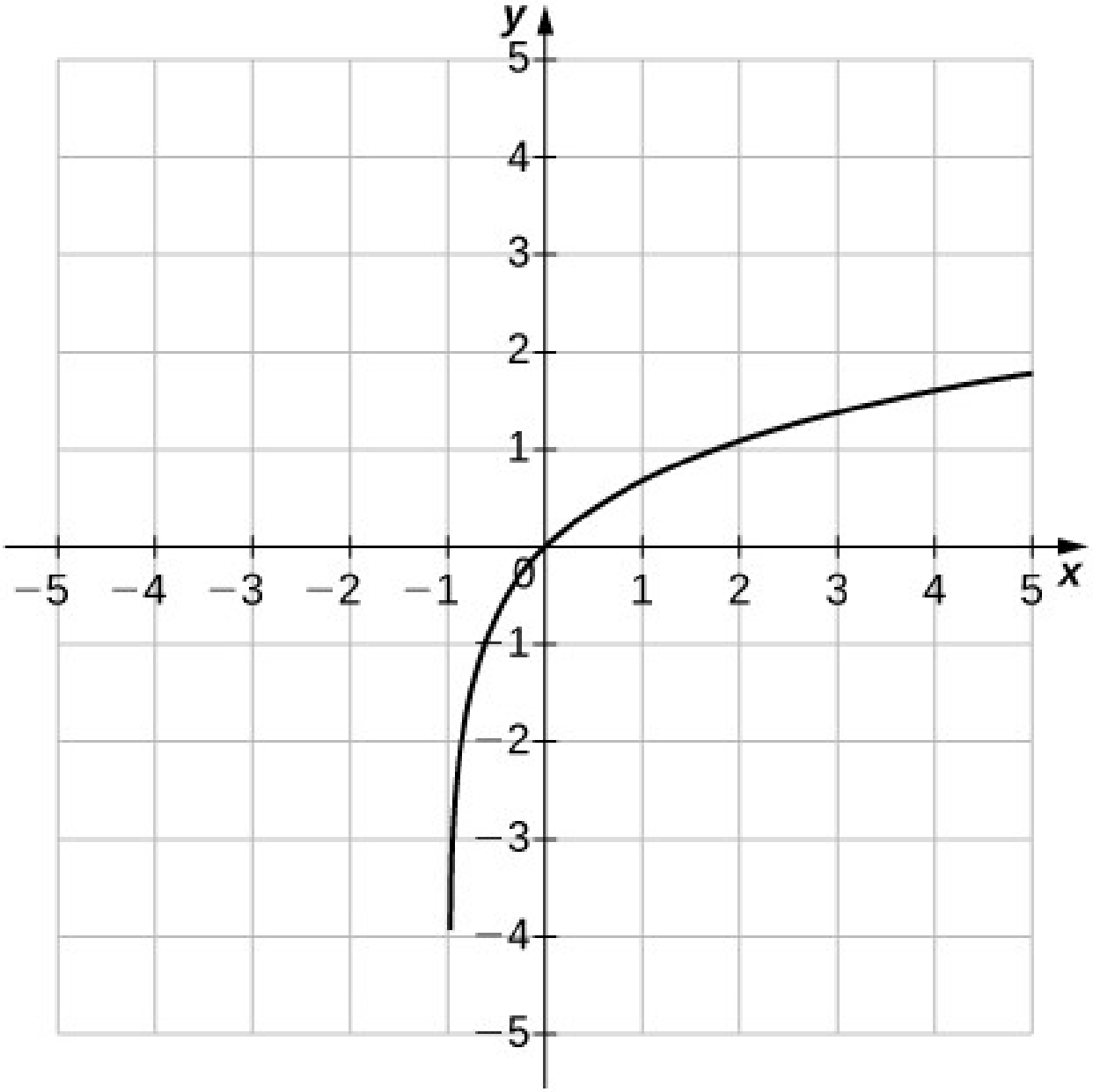
265. Skilgreiningarmengi: $(1,\infty)$, myndmengi: $(-\infty,\infty)$, $x=1$



267. Skilgreiningarmengi: $(0,\infty)$, myndmengi: $(-\infty,\infty)$, $x=0$



269. Skilgreiningarmengi: $(-1,\infty)$, myndmengi: $(-\infty,\infty)$, $x=-1$



271.

$$2+3\log_3 a-\log_3 b$$

273.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_5 x+\frac{3}{2}\log_5 y$$

275.

$$-\frac{3}{2}+\ln 6$$

277.

$$\frac{\ln 15}{3}$$

279.

$$\frac{3}{2}$$

281.

$$\log\ 7{,}21$$

283.

$$\frac{2}{3}+\frac{\log 11}{3\log 7}$$

285.

$$x=\frac{1}{25}$$

287.

$$x=4$$

289.

$$x=3$$

291.

$$1+\sqrt{5}$$

293.

$$\left(\frac{\log\ 82}{\log\ 7}\approx 2{,}2646\right)$$

295.

$$\left(\frac{\log\ 211}{\log\ 0{,}5}\approx -7{,}7211\right)$$

297.

$$\left(\frac{\log\ 0{,}452}{\log\ 0{,}2}\approx 0{,}4934\right)$$

299.

$$\sim 17\,,491$$

301. Um það bil 131.653 € safnast upp á 5 árum.

303. i. a. pH = 8 b. Basi ii. a. pH = 3 b. Sýra iii. a. pH = 4 b. Sýra

305. a. ~333 milljónir b. 94 árum eftir 2013, eða árið 2107

307. a. $k \approx 0{,}0578$ b. ≈ 92 klukkustundir

309. Jarðskjálftinn í San Francisco var $10^{3{,}4}$ eða ≈ 2512 sinnum öflugri en jarðskjálftinn í Japan.

Yfirlitsæfingar

311. Ósatt

313. Ósatt

315. Skilgreiningarmengi: $x > 5$, myndmengi: allar rauntölur

317. Skilgreiningarmengi: $x > 2$ og $x < -4$, myndmengi: allar rauntölur

319. Stig 3, y-skurðpunktur: 0, núllstöðvar: 0, $\sqrt{3}-1$, $-1-\sqrt{3}$

321.

$$\begin{aligned}&\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

323.

$$0, \pm 2\pi$$

325. 4

327. Eintækt; já, fallið á sér andhverfu; andhverfa: $f^{-1}(x) = \frac{1}{y}$

329.

$$x \geq -\frac{3}{2}, f^{-1}(x) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y-7}$$

331. a. $C(x) = 300 + 7x$ b. 100 skyrtur

333. Íbúafjöldinn er undir 20.000 frá 8. desember til 23. janúar og yfir 140.000 frá 29. maí til 2. ágúst

335. 78,51%

Kafli 2

Stöðumat

2.1

2,25

2.2

12,006001

2.3

17 einingar²

2.4

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = -1$$

2.5

$$\lim_{x \to 2} h(x) = -1.$$

2.6

$\lim_{x \to 2} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$ er ekki til.

2.7

a. $\lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = -4$; b. $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} = 4$

2.8

a. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$; b. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$; c. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2.9

a. $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$; b. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = +\infty$; c. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^3}$ er ekki til. Línan $x = 2$ er lóðfella fallsins $f(x) = 1/(x-2)^3$.

2.10

Er ekki til.

2.11

$$11\sqrt{10}$$

2.12

−13;

2.13

$$\frac{1}{3}$$

2.14

$$\frac{1}{4}$$

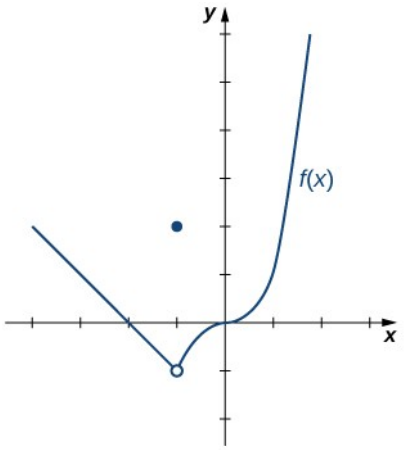
2.15

-1;

2.16

$$\frac{1}{4}$$

2.17



$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$$

2.18

$+\infty$

2.19

0

2.20

0

2.21

f er ekki samfellt í 1 vegna þess að $f(1) = 2 \neq 3 = \lim_{x \to 1} f(x)$.

2.22

$f(x)$ er samfellt í sérhverri rauntölu.

2.23

Ósamfellt við 1; afmáanlegt

2.24

$$[-3, +\infty)$$

2.25

0

2.26

$f(0)=1>0, f(1)=-2<0; f(x)$ er samfellt á $[0,1]$. Það hlýtur að hafa núllstöð á þessu bili.

2.27

Látum $\varepsilon>0$; velji $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$; gerum ráð fyrir $0<|x-2|<\delta$.

Því fæst $|(3x-2)-4|=|3x-6|=|3|\cdot|x-2|<3\cdot\delta=3\cdot(\varepsilon/3)=\varepsilon$.

Þess vegna, $\lim_{x\to 2} 3x-2=4$.

2.28

Veljum $\delta=\min\left(9-(3-\varepsilon)^2,(3+\varepsilon)^2-9\right)$.

2.29

$$|x^2-1|=|x-1|\cdot|x+1|<\varepsilon/3\cdot 3=\varepsilon$$

2.30

$$\delta=\varepsilon^2$$

Æfingar úr undirkafla 2.1

1. a. 2,2100000; b. 2,0201000; c. 2,0020010; d. 2,0002000; e. (1,1000000; 2,2100000); f. (1,0100000; 2,0201000); g. (1,0010000; 2,0020010); h. (1,0001000; 2,0002000); i. 2,1000000; j. 2,0100000; k. 2,0010000; l. 2,0001000

3.

$$y=2x$$

5. 3

7. a. 2,0248457; b. 2,0024984; c. 2,0002500; d. 2,0000250; e. (4,1000000;2,0248457); f. (4,0100000;2,0024984); g. (4,0010000;2,0002500); h. (4,00010000;2,0000250); i. 0,24845673; j. 0,24984395; k. 0,24998438; l. 0,24999844

9.

$$y=\frac{x}{4}+1$$

11. π

13. a. −0,95238095; b. −0,99009901; c. −0,99502488; d. −0,99900100; e. (−1;.0500000,−0;.95238095); f. (−1;.0100000,−0;.9909901); g. (−1;.0050000,−0;.99502488); h. (1,0010000,−0;.99900100); i. −0,95238095; j. −0,99009901; k. −0,99502488; l. −0,99900100

15.

$$y=-x-2$$

17. −49 m/sek (hraði boltans er 49 m/sek niður á við)

19. 5,2 m/sek.

21. −9,8 m/sek.

23. 6 m/sek.

25. Undir, 1 eining²; yfir: 4 einingar². Nákvæmt flatarmál þríhyrninganna tveggja er

$$\frac{1}{2}(1)(1)+\frac{1}{2}(2)(2)=2{,}5 \text{ einingar}^2.$$

27. Undir, 0,96 eining²; yfir, 1,92 eining². Nákvæmt flatarmál hálfhringsins með radíus 1 er $\frac{\pi(1)^2}{2}=\frac{\pi}{2}$ eining².

29. Um það bil 1,3333333 eining²

Æfingar úr undirkafla 2.2

31. $\lim_{x\to 1} f(x)$ er ekki til vegna þess að $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-2\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)=2$.

33.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=2{,}7183$$

35. a. 1,98669331; b. 1,99986667; c. 1,99999867; d. 1,99999999; e. 1,98669331; f. 1,99986667; g. 1,99999867; h. 1,99999999; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$

37.

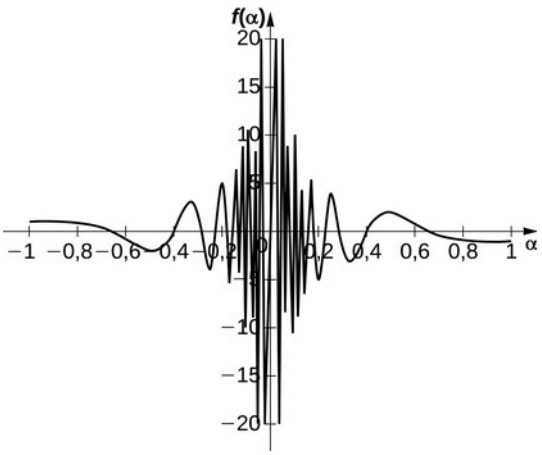
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a$$

39. a. −0,80000000; b. −0,98000000; c. −0,99800000; d. −0,99980000; e. −1,2000000; f. −1,0200000; g. −1,0020000; h. −1,0002000; $\lim_{x\to 1}(1-2x)=-1$

41. a. −37,931934; b. −3377,9264; c. −333.777,93; d. −33.337.778; e. −29,032258; f. −3289,0365; g. −332.889,04; h. −33.328.889 $\lim_{x\to 0}\frac{z-1}{z^2(z+3)}=-\infty$

43. a. 0,13495277; b. 0,12594300; c. 0,12509381; d. 0,12500938; e. 0,11614402; f. 0,12406794; g. 0,12490631; h. 0,12499063; $\therefore \lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}=0{,}1250=\frac{1}{8}$

45. a. 10,00000; b. 100,00000; c. 1000,0000; d. 10.000,000; Tilgáta: $\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)=\infty$, raunverulegt gildi: markgildið er ekki til



47. Ósatt; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

49. Ósatt; $\lim_{x \to 6} f(x)$ er ekki til þar sem $\lim_{x \to 6^-} f(x) = 2$ og $\lim_{x \to 6^+} f(x) = 5$.

51. 2

53. 1

55. 1

57. Ekki til

59. 0

61. Ekki til

63. 2

65. 3

67. Ekki til

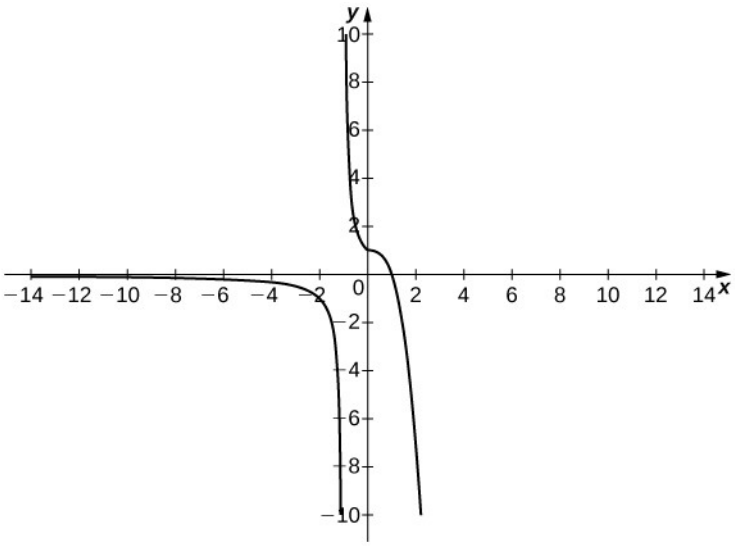
69. 0

71. -2

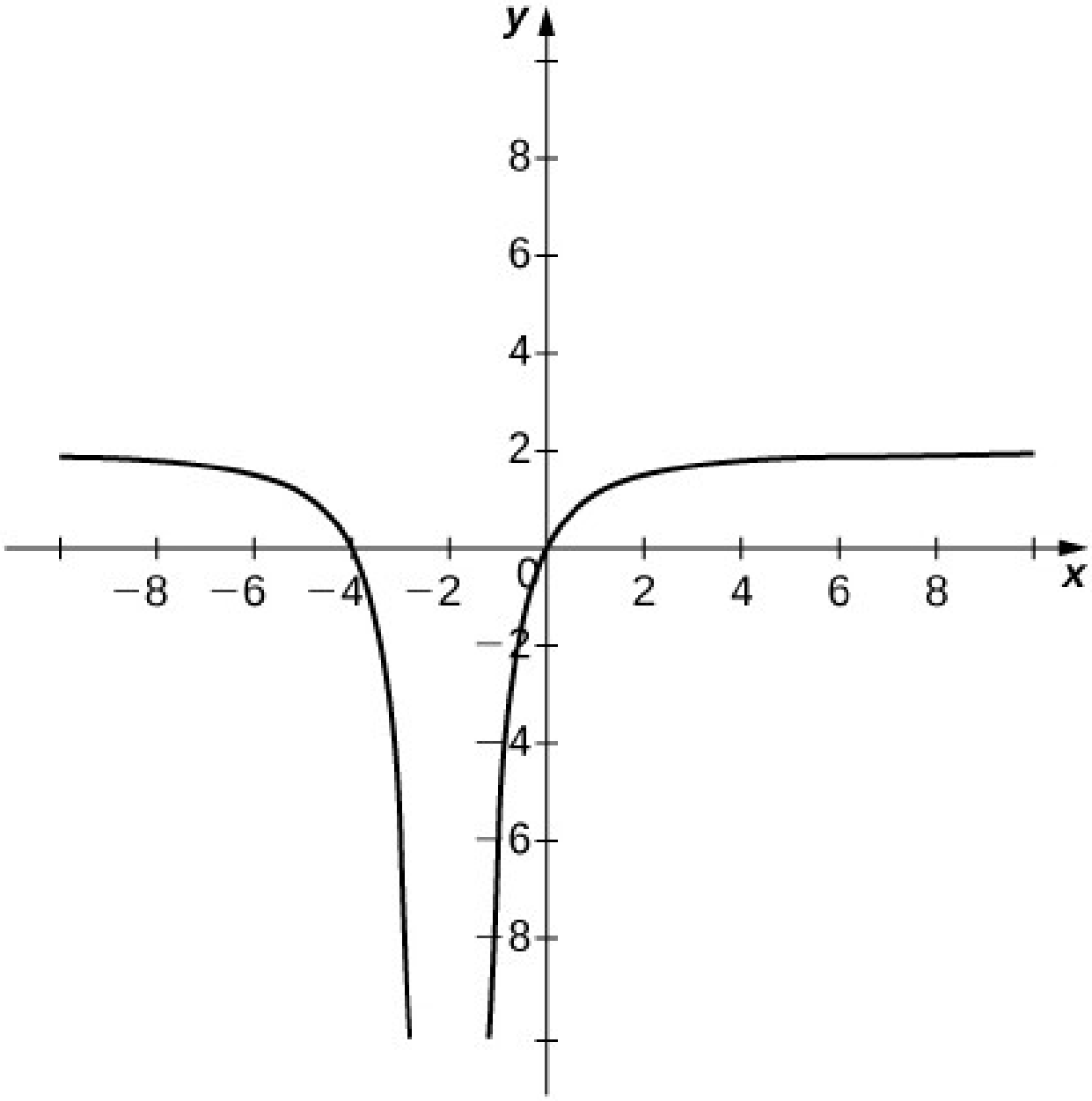
73. Ekki til

75. 0

77. Svör geta verið mismunandi.



79. Svör geta verið mismunandi.



81. a. ρ_2 b. ρ_1 c. er ekki til nema $\rho_1 = \rho_2$. Þegar nálgast er x_{SF} frá vinstri er komið inn á háþéttnisvæði höggbylgjunnar. Þegar nálgast er frá hægri hefur höggbylgjan ekki enn gengið yfir og eðlismassinn er því minni.

Æfingar úr undirkafla 2.3

83. Notum regluna um fastamargfeldi markgildis og mismunaregluna:

$$\lim_{x \to 0}\left(4x^2 - 2x + 3\right) = 4\lim_{x \to 0} x^2 - 2\lim_{x \to 0} x + \lim_{x \to 0} 3 = 3$$

85. Notum rótarregluna fyrir markgildi:

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x^2 - 6x + 3} = \sqrt{\lim_{x \to -2} \left(x^2 - 6x + 3 \right)} = \sqrt{19}$$

87. 49

89. 1

91.

$$-\frac{5}{7}$$

93. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{16 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$; þá,

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = 8$$

95. $\lim_{x \to 6} \frac{3x - 18}{2x - 12} = \frac{18 - 18}{12 - 12} = \frac{0}{0}$; þá er

$$\lim_{x \to 6} \frac{3x - 18}{2x - 12} = \lim_{x \to 6} \frac{3(x - 6)}{2(x - 6)} = \frac{3}{2}$$

97. $\lim_{x \to 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$; þá er

$$\lim_{t \to 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3} = \lim_{t \to 9} \frac{t - 9}{\sqrt{t} - 3} \frac{\sqrt{t} + 3}{\sqrt{t} + 3} = \lim_{t \to 9} \left(\sqrt{t} + 3 \right) = 6$$

99. $\lim_{\theta \to \pi} \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \frac{\sin \pi}{\tan \pi} = \frac{0}{0}$; þá,

$$\lim_{\theta \to \pi} \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \lim_{\theta \to \pi} \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \lim_{\theta \to \pi} \cos \theta = -1$$

101. $\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x - 1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$; þá,

$$\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x - 1} = \lim_{x \to 1/2} \frac{(2x - 1)(x + 2)}{2x - 1} = \frac{5}{2}$$

103. $-\infty$

105. $-\infty$

107.

$$\lim_{x \to 6} 2f(x)g(x) = 2 \lim_{x \to 6} f(x) \lim_{x \to 6} g(x) = 72$$

109.

$$\lim_{x \to 6}\left(f(x)+\frac{1}{3}g(x)\right)=\lim_{x \to 6}f(x)+\frac{1}{3}\lim_{x \to 6}g(x)=7$$

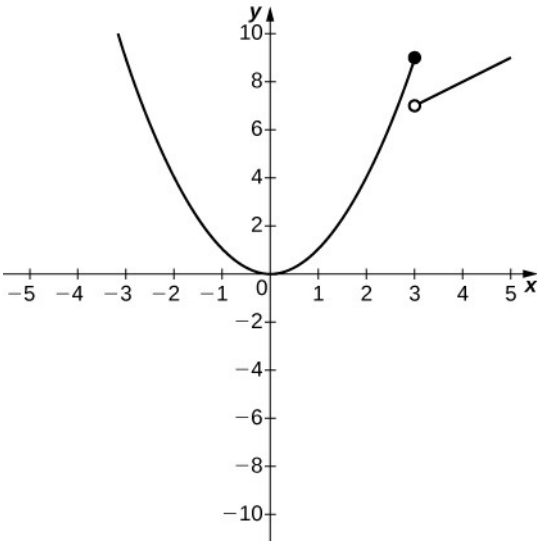
111.

$$\lim_{x \to 6}\sqrt{g(x)-f(x)}=\sqrt{\lim_{x \to 6}g(x)-\lim_{x \to 6}f(x)}=\sqrt{5}$$

113.

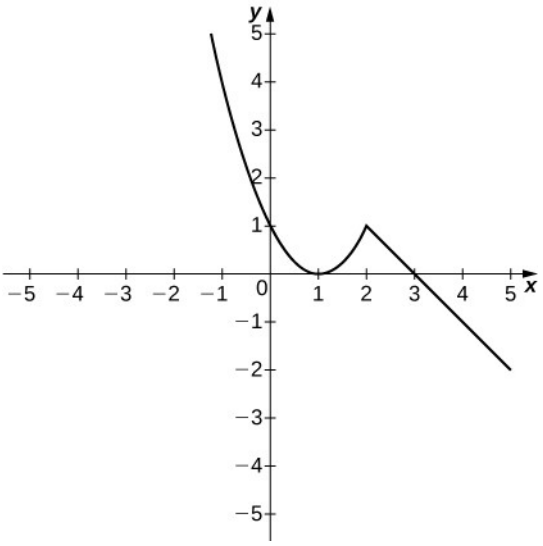
$$\lim_{x \to 6}\left[(x+1)f(x)\right]=\left(\lim_{x \to 6}(x+1)\right)\left(\lim_{x \to 6}f(x)\right)=28$$

115.



a. 9; b. 7

117.



a. 1; b. 1

119.

$$\lim_{x \to -3^-} \left(f(x) - 3g(x)\right) = \lim_{x \to -3^-} f(x) - 3 \lim_{x \to -3^-} g(x) = 0 + 6 = 6$$

121.

$$\lim_{x \to -5} \frac{2 + g(x)}{f(x)} = \frac{2 + \left(\lim\limits_{x \to -5} g(x)\right)}{\lim\limits_{x \to -5} f(x)} = \frac{2+0}{2} = 1$$

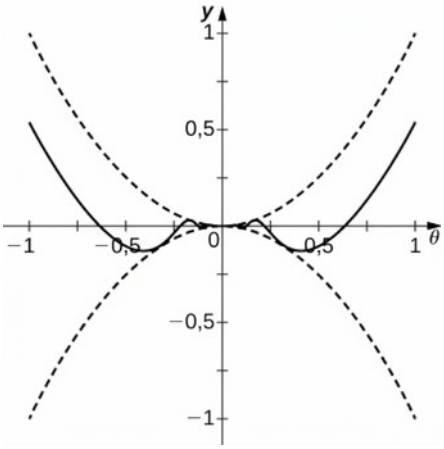
123.

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{f(x) - g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x)} = \sqrt[3]{2+5} = \sqrt[3]{7}$$

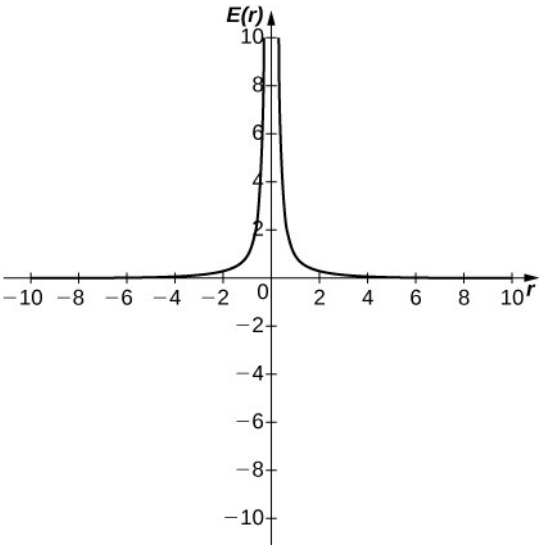
125.

$$\lim_{x \to -9} \left(x f(x) + 2g(x)\right) = \left(\lim_{x \to -9} x\right)\left(\lim_{x \to -9} f(x)\right) + 2 \lim_{x \to -9} \left(g(x)\right) = (-9)(6) + 2(4)$$
$$= -46$$

127. Markgildið er núll.



129. a.



b. ∞. Stærð rafsviðsins þegar nálgast er ögnina q verður óendanleg. Það er ekki eðlisfræðilega merkingarbært að reikna gildi fyrir neikvæða fjarlægð.

Æfingar úr undirkafla 2.4

131. Fallið er skilgreint fyrir öll x á bilinu $(0,\infty)$.

133. Afmáanleg ósamfelldni við $x=0$; óendanleg ósamfelldni við $x=1$

135. Óendanleg ósamfelldni við $x=\ln 2$

137. Óendanlegir ósamfelldnipunktar eru við $x=\frac{(2k+1)\pi}{4}$, fyrir $k=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots$

139. Nei. Þetta er afmáanleg ósamfelldni.

141. Já. Það er samfellt.

143. Já. Það er samfellt.

145.

$$k=-5$$

147.

$$k=-1$$

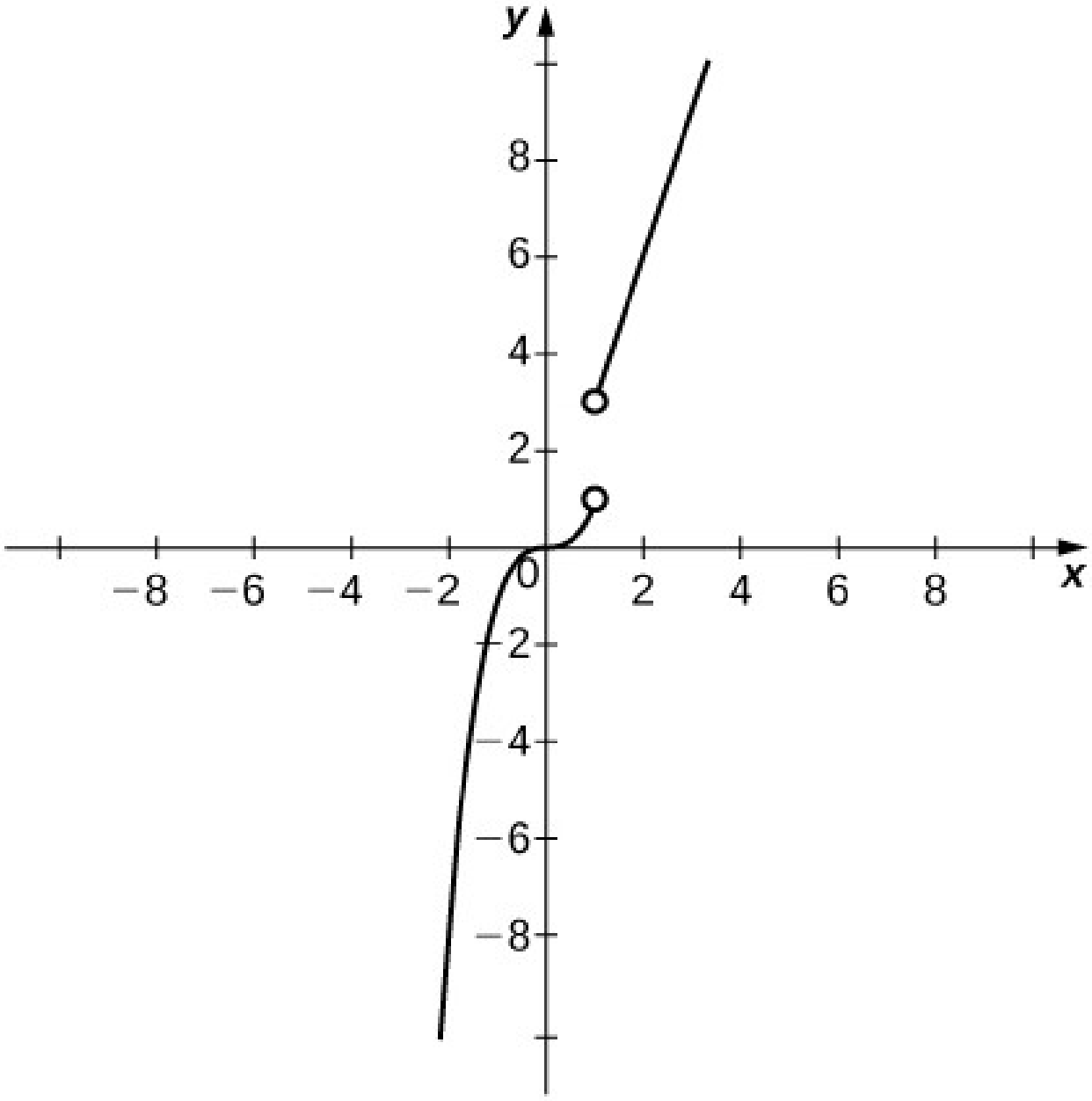
149.

$$k=\frac{16}{3}$$

151. Þar sem bæði s og $y=t$ eru samfelld alls staðar er $h(t)=s(t)-t$ samfellt alls staðar, einkum á lokaða bilinu $[2,5]$. Enn fremur er $h(2)=3>0$ og $h(5)=-3<0$. Samkvæmt milligildissetningunni er því til gildi $x=c$ þannig að $h(c)=0$.

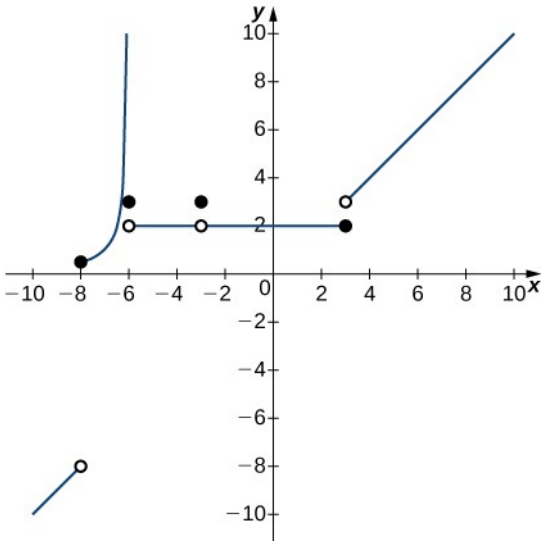
153. Fallið $f(x)=2^x-x^3$ er samfellt á bilinu $[1{,}25\,;1{,}375]$ og hefur gagnstæð formerki í endapunktunum.

155. a.

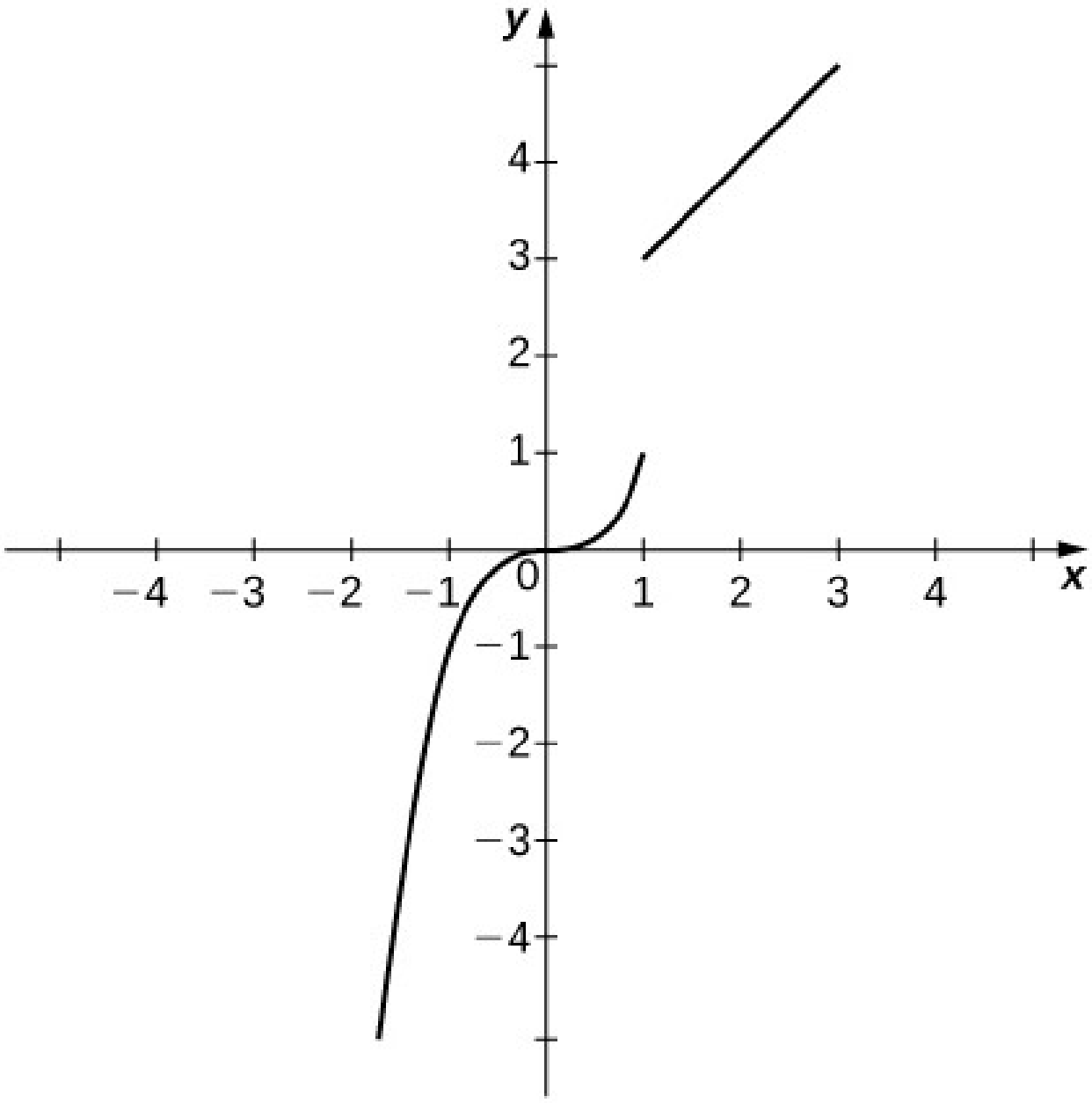


b. Ekki er hægt að endurskilgreina $f(1)$ þar sem ósamfelldnin er stökkósamfelldni.

157. Svör geta verið mismunandi; sjá eftirfarandi dæmi:



159. Svör geta verið mismunandi; sjá eftirfarandi dæmi:



161. Ósatt. Það er samfellt á $(-\infty, 0) U (0, \infty)$.

163. Ósatt. Skoðum $f(x) = \begin{cases} x & \text{ef } x \neq 0 \\ 4 & \text{ef } x = 0 \end{cases}$.

165. Ósatt. Milligildissetningin segir aðeins að til sé að minnsta kosti ein lausn; hún tryggir ekki að lausnin sé nákvæmlega ein. Skoðum $f(x) = \cos(x)$ á $[-\pi, 2\pi]$.

167. Ósatt. Milligildissetningin gildir ekki í öfuga átt! Skoðum $(x-1)^2$ á bilinu $[-2, 2]$.

169.

$$R = 0{,}0001519 \text{ m}$$

171.

$$D = 345.826 \text{ km}$$

173. Fyrir sérhvert gildi a, $f(a)$ er skilgreint, $\lim_{\theta \to a} f(\theta)$ er til og $\lim_{\theta \to a} f(\theta) = f(a)$. Því er $f(\theta)$ samfellt alls staðar.

175. Hvergi

Æfingar úr undirkafla 2.5

177. Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$, er til $\delta > 0$, þannig að ef $0 < |t - b| < \delta$, þá $|g(t) - M| < \varepsilon$

179. Fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$, er til $\delta > 0$, þannig að ef $0 < |x - a| < \delta$, þá $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$

181.

$$\delta \leq 0{,}25$$

183.

$$\delta \leq 2$$

185.

$$\delta \leq 1$$

187.

$$\delta < 0{,}3900$$

189. Látum $\delta = \varepsilon$. Ef $0 < |x - 3| < \varepsilon$, þá $|x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$.

191. Látum $\delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$. Ef $0 < |x| < \sqrt[4]{\varepsilon}$, þá $|x^4| = x^4 < \varepsilon$.

193. Látum $\delta = \varepsilon^2$. Ef $5 - \varepsilon^2 < x < 5$, þá $|\sqrt{5 - x}| = \sqrt{5 - x} < \varepsilon$.

195. Látum $\delta = \varepsilon/5$. Ef $1 - \varepsilon/5 < x < 1$, þá $|f(x) - 3| = 5x - 5 < \varepsilon$.

197. Látum $\delta = \sqrt{\frac{3}{M}}$. Ef $0 < |x + 1| < \sqrt{\frac{3}{M}}$, þá $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > M$.

199. The engineer must cut within 0,328 cm of 12 cm on each side;
$\varepsilon = 8, \delta = 0{,}328, a = 12, L = 144$

201. Svör geta verið mismunandi.

203. 0

205.

$$\lim_{x \to a} (f(x)) + \lim_{x \to a} (g(x))$$
$$= L + M$$

207. Svör geta verið mismunandi.

Yfirlitsæfingar

209. Ósatt

211. Ósatt. Mögulegt er að ósamfellan sé afmáanleg.

213. 5

215.

$$8/7$$

217. Ekki til

219.

$$2/3$$

221. -4;

223. Þar sem $-1 \le \cos(2\pi x) \le 1$, þá $-x^2 \le x^2\cos(2\pi x) \le x^2$. Þar sem $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} -x^2$, fæst samkvæmt klemmureglunni að $\lim_{x \to 0} x^2\cos(2\pi x) = 0$.

225.

$$[2, \infty]$$

227.

$$c = -1$$

229.

$$\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$$

231.

$$0\,\mathrm{m/sec}$$

Kafli 3

Stöðumat

3.1

$$\frac{1}{4}$$

3.2

$$6$$

3.3

$$f'(1)=5$$

3.4

$-9{,}8$ m/s

3.5

$P'(3{,}25)=20>0$; hækka verð

3.6

$$f'(x)=2x$$

3.7

$$(0,+\infty)$$

3.8

$a=6$ og $b=-9$

3.9

$$f''(x)=2$$

3.10

$$a(t)=6t$$

3.11

0

3.12

$$4x^3$$

3.13

$$f'(x)=7x^6$$

3.14

$$f'(x)=6x^2-12x.$$

3.15

$$y=12x-23$$

3.16

$$j'(x)=10x^4\left(4x^2+x\right)+(8x+1)\left(2x^5\right)=56x^6+12x^5.$$

3.17

$$k'(x) = -\frac{13}{(4x-3)^2}.$$

3.18

$$g'(x) = -7x^{-8}.$$

3.19

$$3f'(x) - 2g'(x).$$

3.20

$$\frac{5}{8}$$

3.21

$$-4{,}4$$

3.22

frá vinstri til hægri

3.23

3.300

3.24

$2

3.25

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

3.26

$$\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}$$

3.27

$$t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$$

3.28

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

3.29

$$f'(x) = 2\sec^2 x + 3\csc^2 x$$

3.30

$$\frac{4}{3}$$

3.31

$$\cos x$$

3.32

$$-\cos x$$

3.33

$v\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}<0$ og $a\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-1<0$. Kubburinn eykur hraðann.

3.34

$$h'(x)=4\left(2x^3+2x-1\right)^3\left(6x^2+2\right)=8\left(3x^2+1\right)\left(2x^3+2x-1\right)^3$$

3.35

$$y=-48x-88$$

3.36

$$h'(x)=7\cos\left(7x+2\right)$$

3.37

$$h'(x)=\frac{3-4x}{\left(2x+3\right)^4}$$

3.38

$$h'(x)=18x^2\sin^5\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)$$

3.39

$$a(t)=-16\sin\left(4t\right)$$

3.40

$$28$$

3.41

$$\frac{dy}{dx}=-3x^2\sin\left(x^3\right)$$

3.42

$$g'(x)=-\frac{1}{\left(x+2\right)^2}$$

3.43

$$g(x)=\frac{1}{5}x^{-4/5}$$

3.44

$$s'(t)=(2t+1)^{-1/2}$$

3.45

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

3.46

$$h'(x)=\frac{-3}{\sqrt{6x-9x^2}}$$

3.47

$$y=x$$

3.48

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5-20x^4}{\sec^2 y-2y}$$

3.49

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{16}{3}$$

3.50

$$h'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$$

3.51
996

3.52

$$f'(x)=\frac{15}{3x+2}$$

3.53

$$9\ln(3)$$

3.54

$$\frac{dy}{dx}=x^x(1+\ln x)$$

3.55

$$y' = \pi(\tan x)^{\pi-1}\sec^2 x$$

Æfingar úr undirkafla 3.1

1.

$$4$$

3.

$$8{,}5$$

5.

$$-\frac{3}{4}$$

7.

$$0{,}2$$

9.

$$0{,}25$$

11. a. -4 b. $y = 3 - 4x$

13. a. 3 b. $y = 3x - 1$

15. a. $\frac{-7}{9}$ b. $y = \frac{-7}{9}x + \frac{14}{3}$

17. a. 12 b. $y = 12x + 14$

19. a. -2 b. $y = -2x - 10$

21.

$$5$$

23.

$$13$$

25.

$$\frac{1}{4}$$

27.

$$-\frac{1}{4}$$

29.

$$-3$$

31. a. (i) $5{,}100000$, (ii) $5{,}010000$, (iii) $5{,}001000$, (iv) $5{,}000100$, (v) $5{,}000010$, (vi) $5{,}000001$, (vii) $4{,}900000$, (viii) $4{,}990000$, (ix) $4{,}999000$, (x) $4{,}999900$, (xi) $4{,}999990$, (x) $4{,}999999$ b. $m_{\tan}=5$ c. $y=5x+3$

33. a. (i) $4{,}8771$, (ii) $4{,}9875$ (iii) $4{,}9988$, (iv) $4{,}9999$, (v) $4{,}9999$, (vi) $4{,}9999$ b. $m_{\tan}=5$ c. $y=5x+10$

35. a. $\frac{1}{3}$; b. (i) $0{,}\bar{3}$ m/s, (ii) $0{,}\bar{3}$ m/s, (iii) $0{,}\bar{3}$ m/s, (iv) $0{,}\bar{3}$ m/s; c. $0{,}\bar{3}=\frac{1}{3}$ m/s

37. a. $2\left(h^2+6h+12\right)$; b. (i) 25,22 m/s, (ii) 24,12 m/s, (iii) 24,01 m/s, (iv) 24 m/s; c. 24 m/s

39. a. 1,25; b. 0,5

41.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{1/3}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{2/3}}=\infty$$

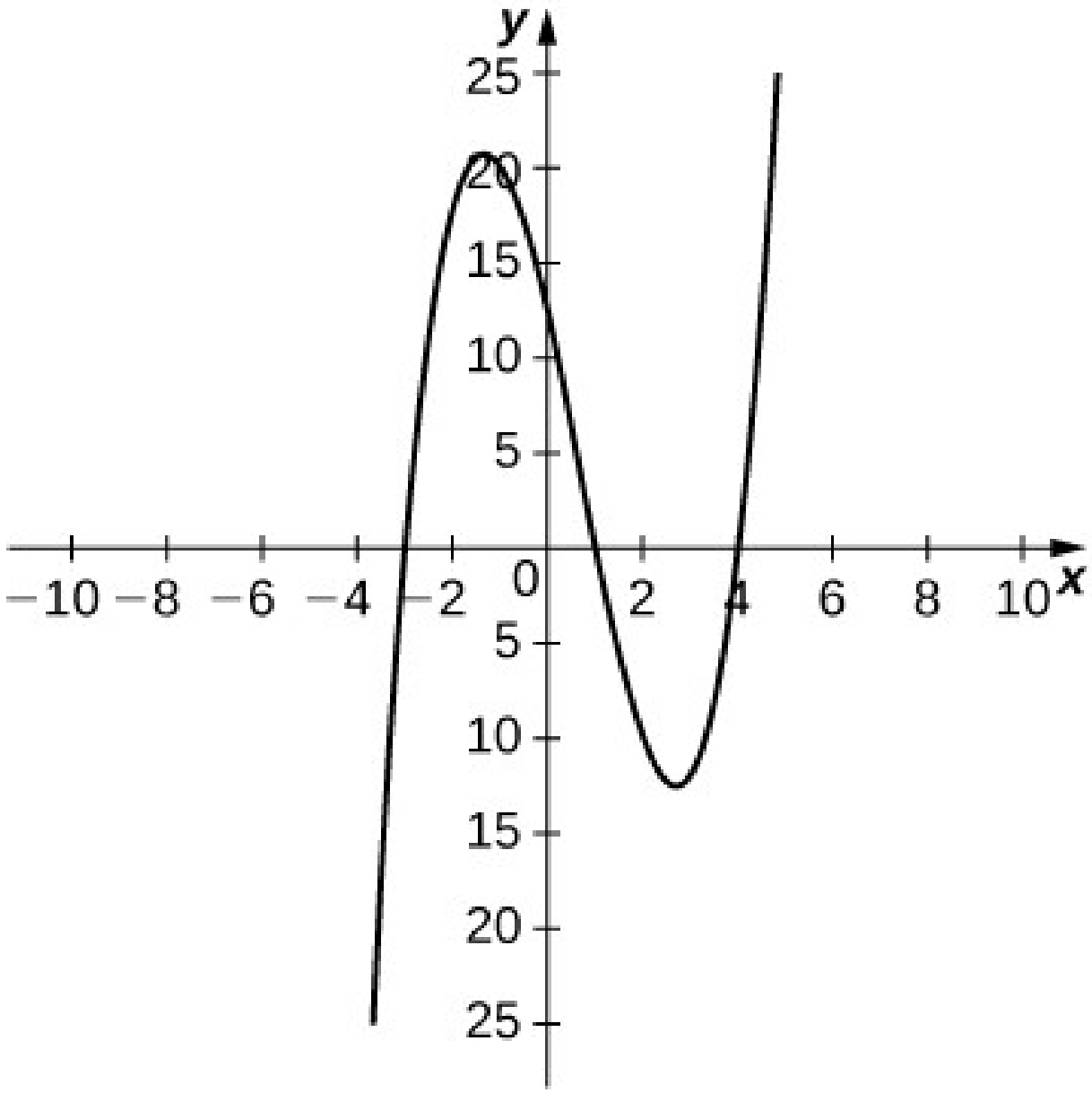
43.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0\neq 1=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}$$

45. a. (i) 61,7244 m/s, (ii) 61,0725 m/s (iii) 61,0072 m/s (iv) 61,0007 m/s b. Eftir 4 sekúndur ekur kappakstursbíllinn á hraðanum 61 m/s.

47. a. Ökutækinu er lýst með $f(t)$, og það hefur ekið 2 metra, en $g(t)$ hefur ekið 1 metra. b. Hraði $f(t)$ er stöðugur og nemur 1 m/s, en hraði $g(t)$ er um það bil 2 m/s. c. Ökutækinu er lýst með $g(t)$, og hraði þess er um það bil 4 m/s. d. Bæði ökutækin hafa ekið 4 metra á 4 sekúndum.

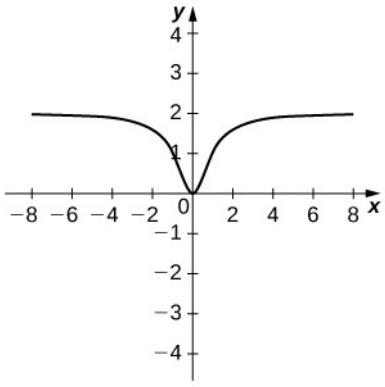
49. a.



b. $a \approx -1{,}361\,, 2{,}694$

51. a. $N\left(x\right)=\frac{x}{10}$ b. 10 lítrar. Þegar ökutækið ekur 100 km hefur það notað 10 lítra af eldsneyti. c. $\frac{1}{10}$. Eldsneytisnotkun ökutækisins, í lítrum á hvern kílómetra, eftir að það hefur ekið 100 km.

53. a.



b. $-0{,}028, -0{,}16, 0{,}16, 0{,}028$

Æfingar úr undirkafla 3.2

55.

$$-3$$

57.

$$8x$$

59.

$$\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

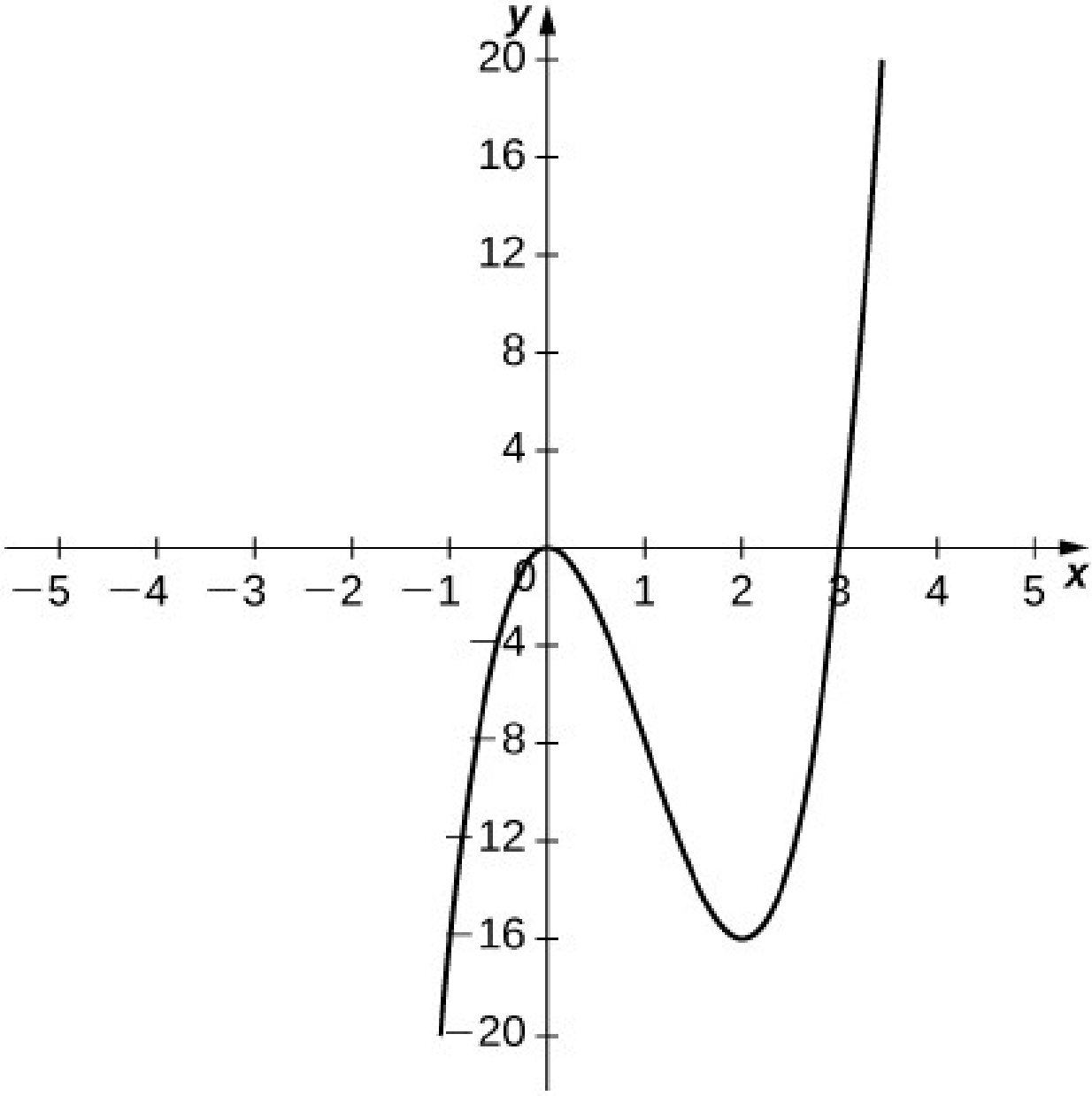
61.

$$\frac{-9}{x^2}$$

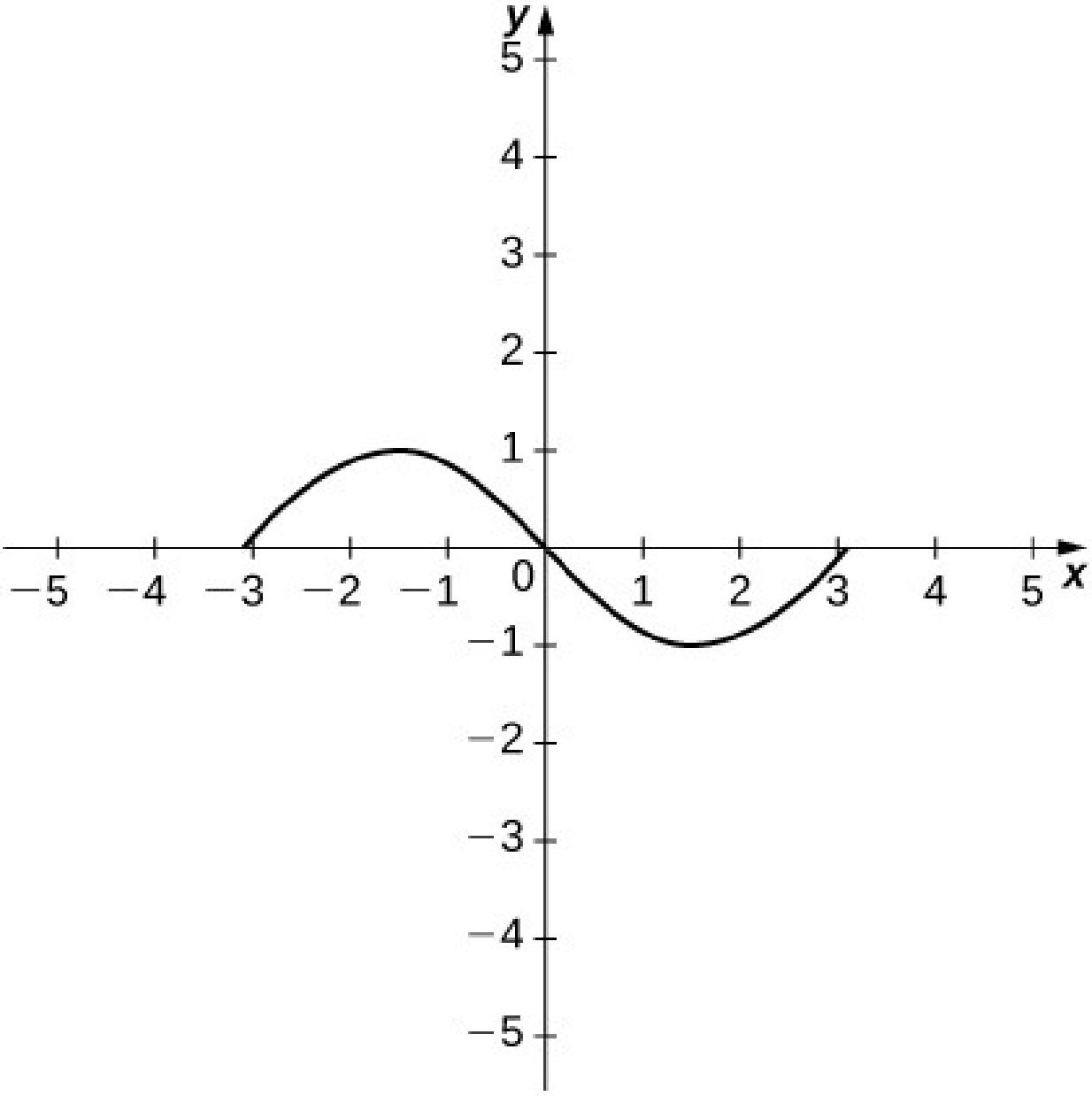
63.

$$\frac{-1}{2x^{3/2}}$$

65.



67.



69.

$$f(x)=3x^2+2, a=2$$

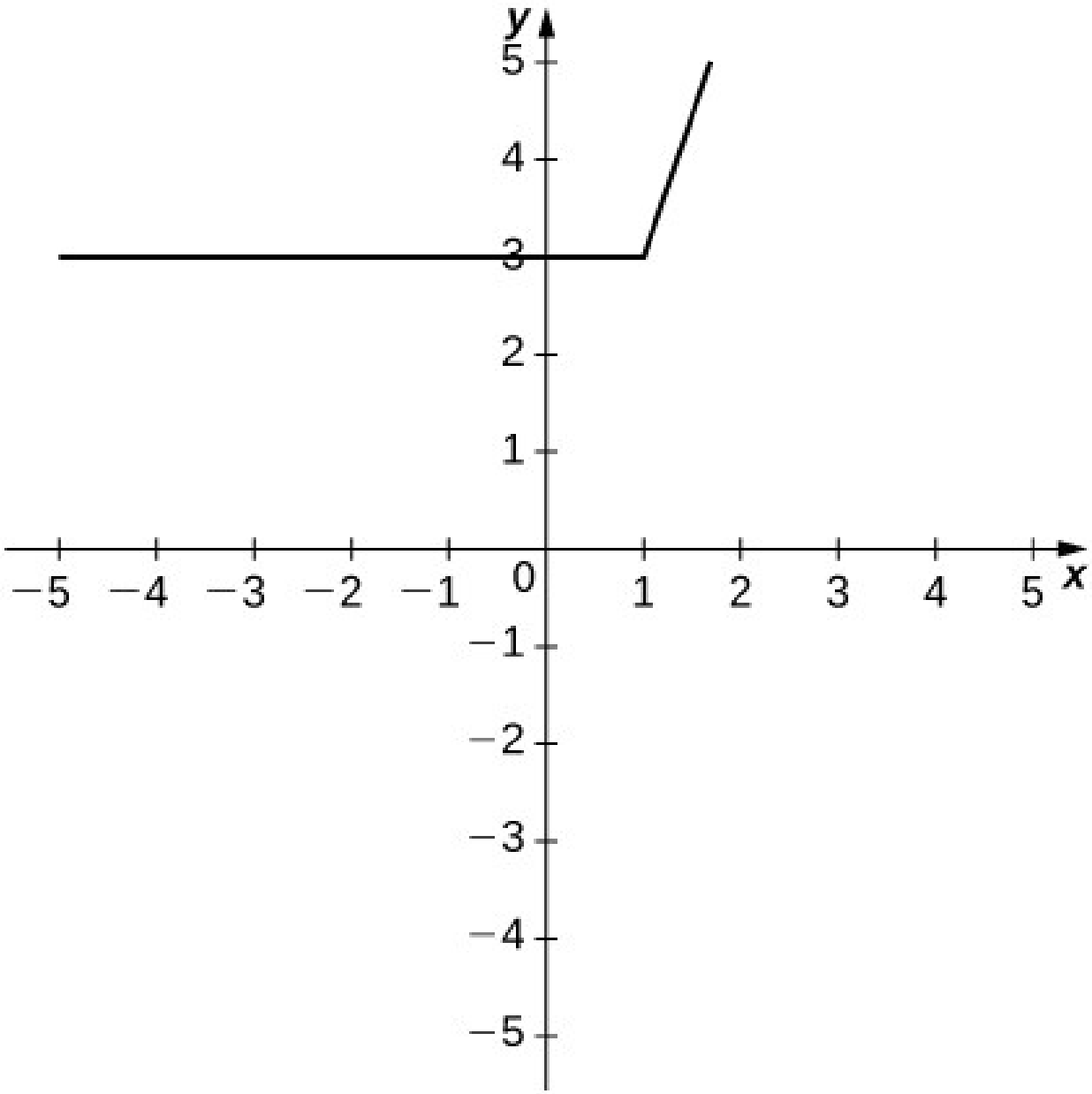
71.

$$f(x)=x^4, a=2$$

73.

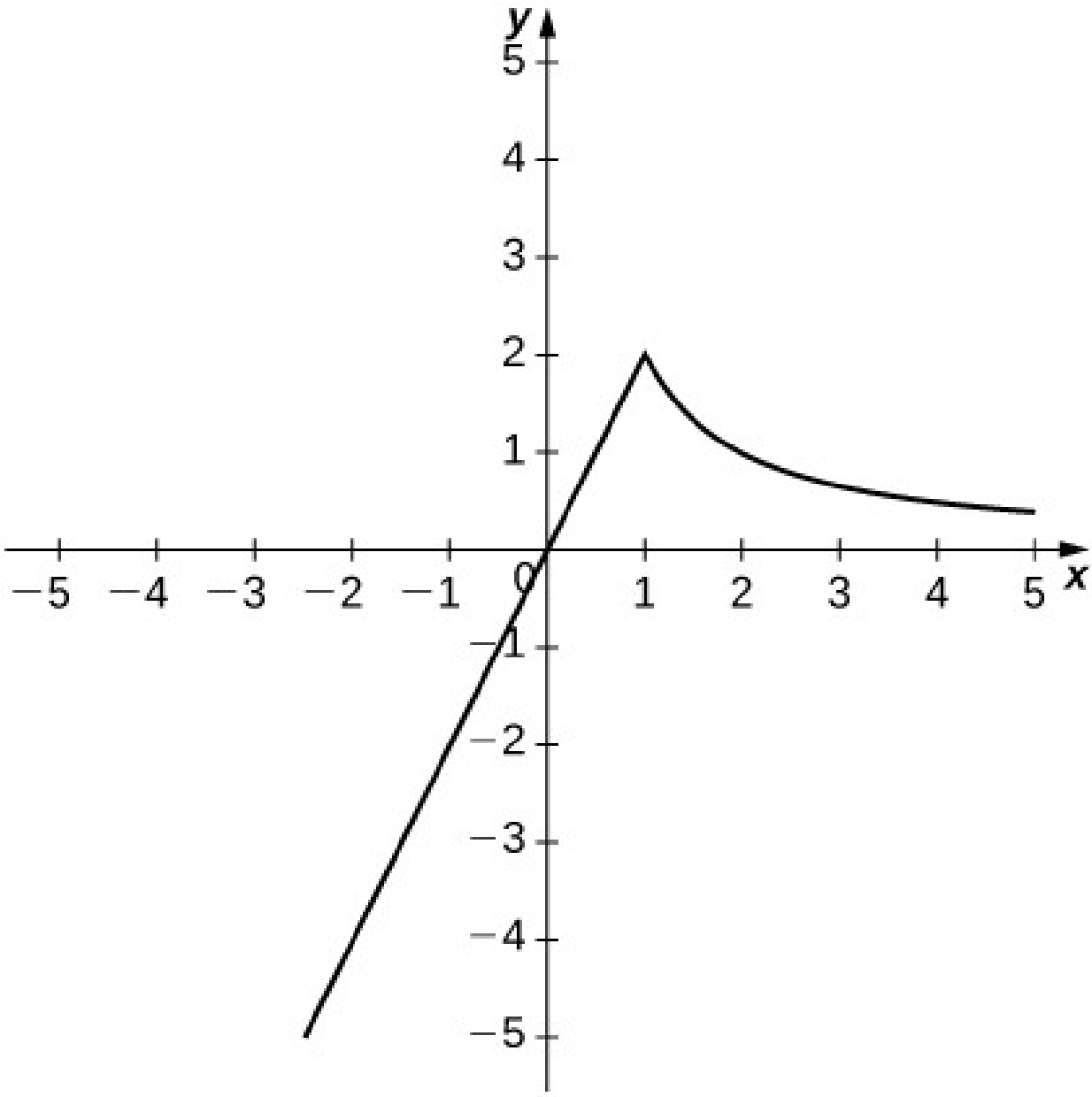
$$f(x)=e^x, a=0$$

75. a.



b. $\lim_{h \to 1^-} \frac{3-3}{h} \neq \lim_{h \to 1^+} \frac{3h}{h}$

77. a.



b. $\lim_{h \to 1^-} \frac{2h}{h} \neq \lim_{h \to 1^+} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h}$.

79. a. $x = 1$, b. $x = 2$

81.

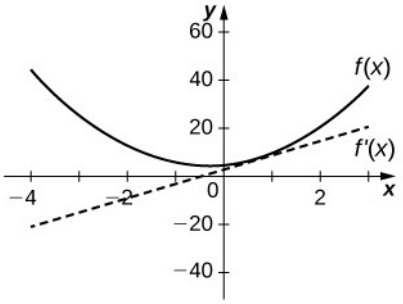
$$0$$

83.

$$\frac{2}{x^3}$$

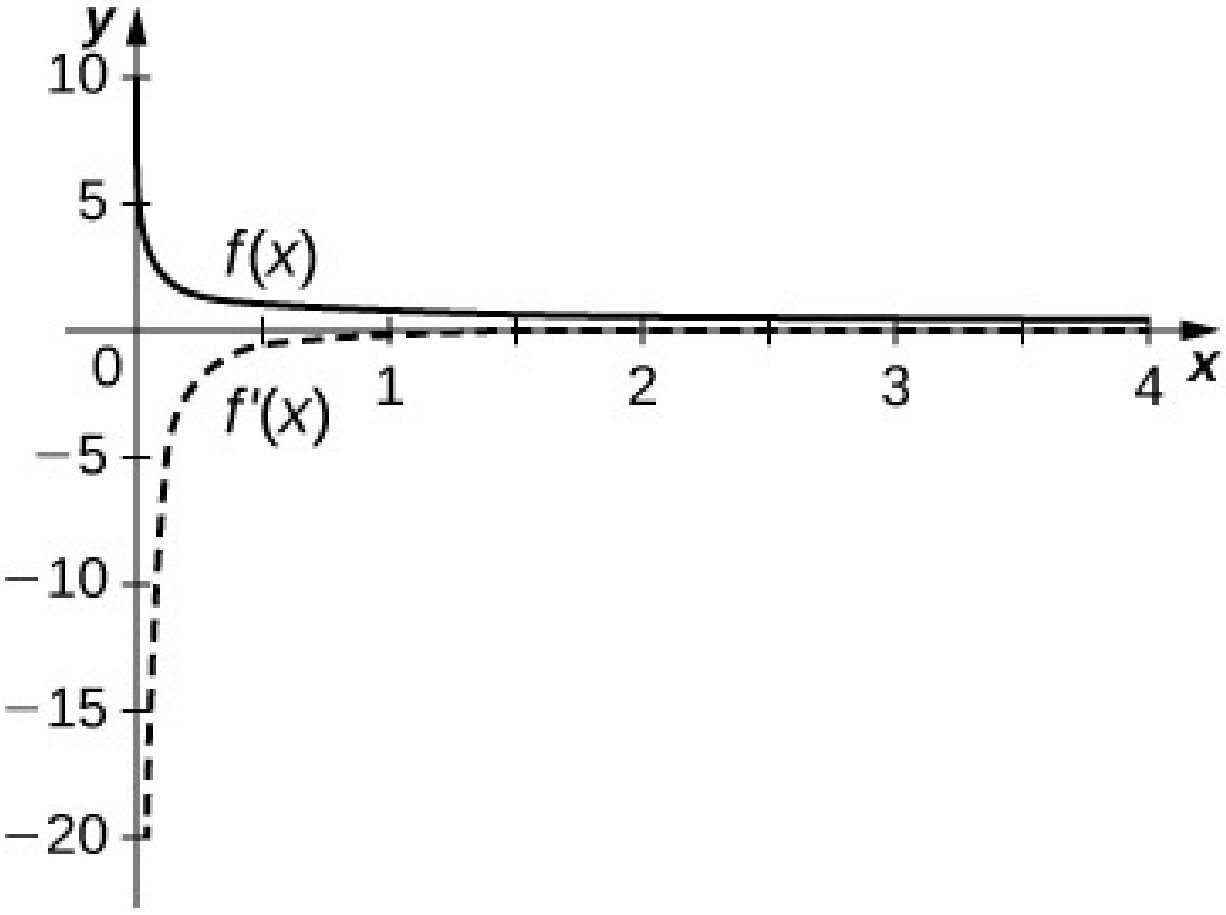
85.

$$f'(x)=6x+2$$



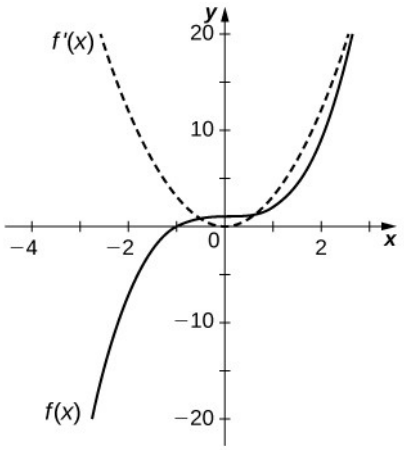
87.

$$f'(x)=-\frac{1}{(2x)^{3/2}}$$



89.

$$f'(x)=3x^2$$



91. a. Meðalbreytingarhraði útgjalda viðskiptavina vegna veitinga, í þúsundum á hvern viðskiptavin. b. Breytingarhraði útgjalda til veitinga hjá x viðskiptavinum, mældur í þúsundum á hvern viðskiptavin.

93. a. Meðaleinkunn á prófinu þegar meðalnámstími var á milli tveggja gilda. b. Breytingarhraði prófeinkunnarinnar, mældur í prósentustigum á klukkustund, þegar meðalnámstíminn nam x klukkustundum.

95. a. Meðalbreyting loftþrýstings milli tveggja mismunandi hæðarpunkta. b. Breytingarhraði loftþrýstings, mældur í kPa á metra, í x metra hæð.

97. a. Breytingarhraði hitastigs, mældur í °C á metra, í hæðinni x. b. Breytingarhraði hitastigs með tilliti til hæðar í 1000 metra hæð er $-0{,}0065$ °C á hvern metra, þ.e. hitinn lækkar um 6,5 °C á hvern kílómetra.

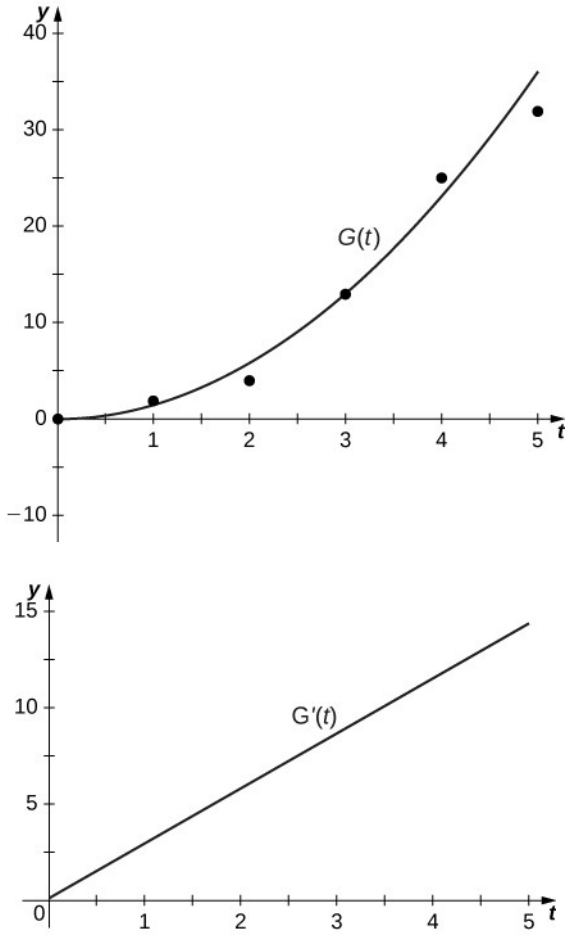
99. a. Breytingarhraði fjölda þeirra sem hafa veikst af inflúensu t vikum eftir að faraldurinn braust fyrst út. b. Breytingarhraðinn vex hratt fram að þriðju viku en þá hægir á aukningunni og hraðinn verður síðan fastur.

101.

Tími (sekúndur)	$h'(t)$ (m/s)
0	2
1	2
2	5,5
3	10,5
4	9,5
5	7

103.

$$G'(t)=2{,}858\ t+0{,}0857$$



105. $H''(t)=0, G''(t)=2{,}858$ og $f''(t)=1{,}222\ t+5{,}912$ tákna hröðun eldflaugarinnar, mælda í metrum á sekúndu í öðru veldi $\left(\text{m/s}^2\right)$.

Æfingar úr undirkafla 3.3

107.

$$f'(x)=15x^2-1$$

109.

$$f'(x)=32x^3+18x$$

111.

$$f'(x)=270x^4+\frac{39}{(x+1)^2}$$

113.

$$f'(x)=\frac{-5}{x^2}$$

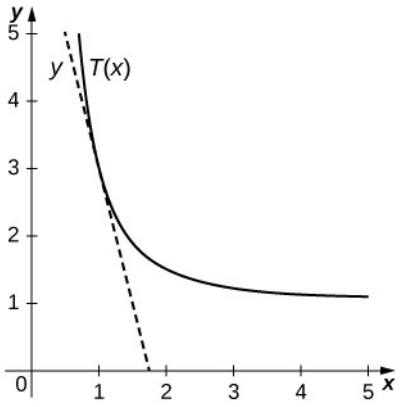
115.

$$f'(x)=\frac{4x^4+2x^2-2x}{x^4}$$

117.

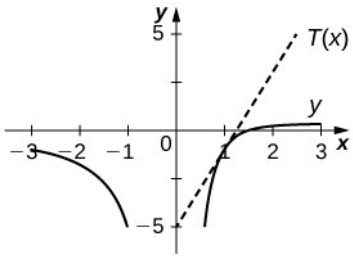
$$f'(x)=\frac{-x^2-18x+64}{\left(x^2-7x+1\right)^2}$$

119.



$$T(x)=-4x+7$$

121.



$$T(x)=4x-5$$

123.

$$h'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$$

125.

$$h'(x)=\frac{3f'(x)\left(g(x)+2\right)-3f(x)g'(x)}{\left(g(x)+2\right)^2}$$

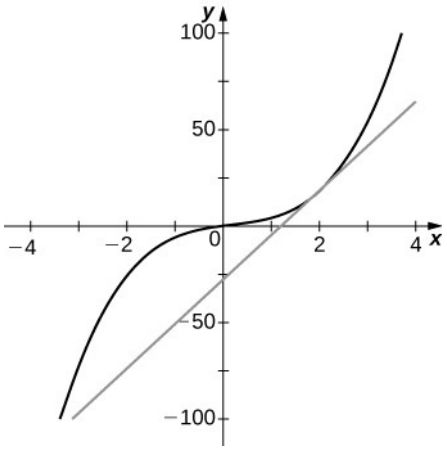
127.

$$\frac{16}{9}$$

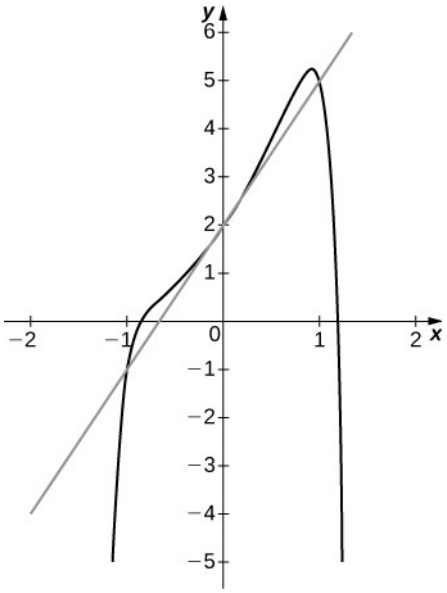
129. Óskilgreint

131. a. 2 , b. er ekki til, c. 2,5

133. a. 23, b. $y=23x-28$



135. a. 3, b. $y=3x+2$



137.

$$y=-7x-3$$

139.

$$y=-5x+7$$

141.

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$$

143.

$$y=-3x^2+9x-1$$

145. $\frac{12}{121}$ eða 0,0992 m/s

147. a. $\frac{-2t^4-2t^3+200t+50}{\left(t^3+50\right)^2}$ b. $-0{,}02395$ mg/L-klst., $-0{,}01344$ mg/L-klst., $-0{,}003566$ mg/L-klst., $-0{,}001579$ mg/L-klst. c. Hraði lækkunar styrks lyfsins í blóðrásinni minnkar og nálgast 0 eftir því sem tíminn líður.

149. a. $F'(d)=\frac{-2Gm_1m_2}{d^3}$ b. $-1{,}33\times10^{-7}$ N/m

Æfingar úr undirkafla 3.4

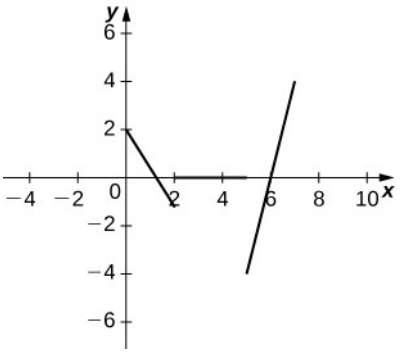
151. a. $v(t)=6t^2-30t+36$, $a(t)=12t-30$; b. eykur hraðann $]2;2{,}5[\cup]3,\infty[$, dregur úr hraðanum $]0,2[\cup]2{,}5;3[$

153. a. 70,6 m/s b. $-9{,}8$ m/s^2

155. a. 1,5 m/s b. 2,7 m/s

157. a. 14,7 m/s, $-14{,}7$ m/s b. 14,7 m/s c. 2 s d. $-9{,}8$ m/s^2 í báðum tilvikum e. 5 s f. $-29{,}4$ m/s

159. a. Hraðinn er jákvæður á $]0;1{,}5[\cup]6,7[$, neikvæður á $]1{,}5;2[\cup]5,6[$, og núll á $(2,5)$. b.



c. Hröðunin er jákvæð á $(5,7)$, neikvæð á $(0,2)$, og núll á $(2,5)$. d. Hluturinn eykur hraðann á $]6,7[\cup]1{,}5;2[$ og hægir á sér á $]0;1{,}5[\cup]5,6[$.

161. a. $R(x)=10\,x-0{,}001\,x^2$ b. $R'(x)=10-0{,}002\,x$ c. \$6 á einingu, \$0 á einingu

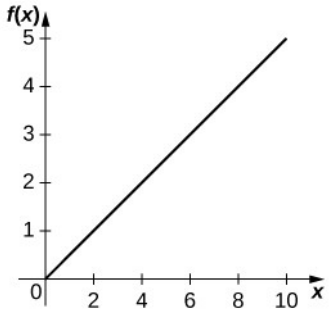
163. a. $C'(x)=65$ b. $R(x)=143\,x-0{,}03\,x^2, R'(x)=143-0{,}06\,x$ c. $83,-97$. Við framleiðslumagn upp á 1000 þráðlausar borvélar aukast tekjurnar um \$83 fyrir hverja borvél; við framleiðslumagn upp á 4000 þráðlausar borvélar minnka tekjurnar um \$97 fyrir hverja borvél. d. $P(x)=-0{,}03\,x^2+78\,x-75000, P'(x)=-0{,}06\,x+78$ e. $18,-162$. Við framleiðslumagn upp á 1000 þráðlausar borvélar eykst hagnaðurinn um \$18 fyrir hverja borvél; við framleiðslumagn upp á 4000 þráðlausar borvélar minnkar hagnaðurinn um \$162 fyrir hverja borvél.

165. a. $N'(t)=3000\left(\frac{-4t^2+400}{(t^2+100)^2}\right)$ b. $120,0,-14{,}4,-9{,}6$ c. Bakteríunum fjölgar frá 0 til 10 klukkustunda; eftir það fækkar bakteríunum. d. $0,-6,0{,}384,0{,}432$. Fjölgunarhraði bakteríanna minnkar fyrstu 10 klukkustundirnar. Eftir það fækkar bakteríunum en sífellt hægar.

167. a. $P(t)=0{,}03983+0{,}4280$ b. $P'(t)=0{,}03983$. Mannfjöldinn eykst. c. $P''(t)=0$. Fjölgunarhraði mannfjöldans er fastur.

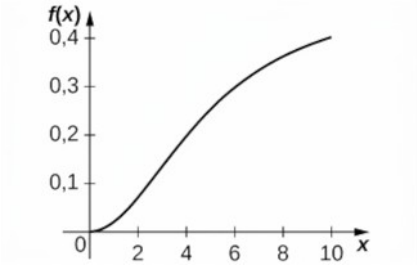
169. a. $p(t)=-0{,}6071\,x^2+0{,}4357\,x-0{,}3571$ b. $p'(t)=-1{,}214\,x+0{,}4357$. Þetta er hraði skynjarans. c. $p''(t)=-1{,}214$. Þetta er hröðun skynjarans; hún er föst hröðun niður á við.

171. a.



b. $f'(x)=a$. Eftir því sem bráðardýrunum fjölgar vex rándýrastofninn meira. c. $f''(x)=0$. Aukning vaxtarhraða rándýrastofnsins er föst þegar bráðardýrunum fjölgar. d. Í þessari jöfnu er gert ráð fyrir að ef bráðardýrunum fjölgar geti rándýrið aukið neyslu sína línulega. Þessi forsenda er eðlisfræðilega óraunhæf vegna þess að búast mætti við ákveðnum mettunar-punkti þar sem bráðardýrin eru orðin of mörg til að rándýrið geti étið nægilega mörg þeirra.

173. a.



b. $f'(x)=\frac{2axn^2}{\left(n^2+x^2\right)^2}$. Þegar bráðardýrunum fjölgar vex rándýrastofninn. c. $f''(x)=\frac{2an^2\left(n^2-3x^2\right)}{\left(n^2+x^2\right)^3}$. Þegar bráðardýrin eru afar fá eykst vaxtarhraði rándýrastofnsins sífellt hraðar, en þegar fjöldi bráðardýranna fer yfir ákveðin mörk tekur aukningin í vaxtarhraða rándýrastofnsins að minnka. d. Þegar bráðardýrin eru fá eiga þau auðveldara með að komast hjá því að rándýrið finni þau og því eru færri bráðardýr étin, og rándýrastofninn vex því minna.

Æfingar úr undirkafla 3.5

175.

$$\frac{dy}{dx}=2x-\sec x\tan x$$

177.

$$\frac{dy}{dx}=2x\cot x-x^2\csc^2 x$$

179.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sec x\tan x-\sec x}{x^2}$$

181.

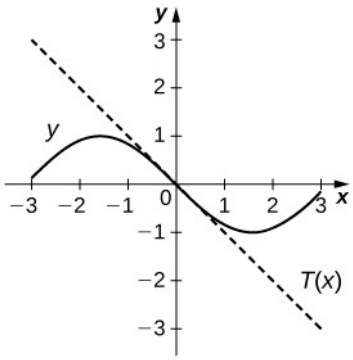
$$\frac{dy}{dx}=(1-\sin x)(1-\sin x)-\cos x(x+\cos x)$$

183.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

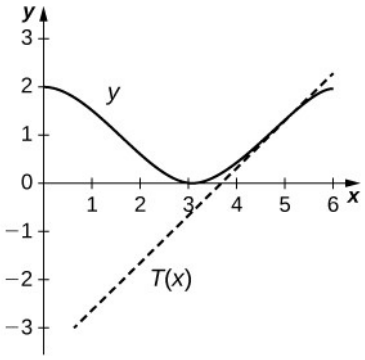
185.

$$y=-x$$



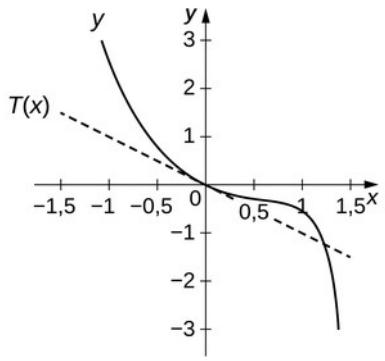
187.

$$y=x+\frac{2-3\pi}{2}$$



189.

$$y=-x$$



191.

$$3\cos x - x\sin x$$

193.

$$\frac{1}{2}\sin x$$

195.

$$2\csc x\left(\csc^2 x+\cot^2 x\right)$$

197.

$$\frac{(2n+1)\pi}{4}, \text{þar sem } n \text{ er heiltala}$$

199.

$$\left(\frac{\pi}{4},1\right),\left(\frac{3\pi}{4},-1\right),\left(\frac{5\pi}{4},1\right),\left(\frac{7\pi}{4},-1\right)$$

201.

$$a=0, b=3$$

203. $y'=5\cos(x)$, vaxandi á $\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$, og $\left(\frac{7\pi}{2},12\right)$

209.

$$3\sin x$$

211.

$$5\cos x$$

213.

$$720x^7 - 5\tan(x)\sec^3(x) - \tan^3(x)\sec(x)$$

Æfingar úr undirkafla 3.6

215.

$$18u^2 \cdot 7 = 18(7x-4)^2 \cdot 7$$

217.

$$-\sin u \cdot \frac{-1}{8} = -\sin\left(\frac{-x}{8}\right) \cdot \frac{-1}{8}$$

219.

$$\frac{8x-24}{2\sqrt{4u+3}} = \frac{4x-12}{\sqrt{4x^2-24x+3}}$$

221. a. $u = 3x^2+1$; b. $18x(3x^2+1)^2$

223. a. $f(u) = u^7, u = \frac{x}{7}+\frac{7}{x}$; b. $7\left(\frac{x}{7}+\frac{7}{x}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{7}-\frac{7}{x^2}\right)$

225. a. $f(u) = \csc u, u = \pi x+1$; b. $-\pi \csc(\pi x+1) \cdot \cot(\pi x+1)$

227. a. $f(u) = -6u^{-3}, u = \sin x$, b. $18(\sin)^{-4} x \cdot \cos x$

229.

$$\frac{4}{(5-2x)^3}$$

231.

$$6(2x^3-x^2+6x+1)^2(3x^2-x+3)$$

233.

$$-3(\tan x+\sin x)^{-4} \cdot (\sec^2 x+\cos x)$$

235.

$$-7\cos(\cos 7x) \cdot \sin 7x$$

237.

$$-12\cot^2(4x+1) \cdot \csc^2(4x+1)$$

239.

$$10\frac{3}{4}$$

241.

$$y=\frac{-1}{2}x$$

243.

$$x=\pm\sqrt{6}$$

245. 10

247.

$$-\frac{1}{8}$$

249.

$$-4$$

251.

$$-12$$

253. a. $-\frac{200}{343}$ m/s, b. $\frac{600}{2401}$ m/s², c. Lestin hægir á sér þar sem hraði og hröðun hafa gagnstæð formerki.

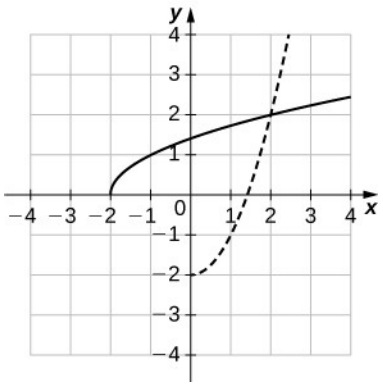
255. a. $C'(x)=0{,}0003\ x^2-0{,}04\ x+3$ b. $\frac{dC}{dt}=100\cdot(0{,}0003\ x^2-0{,}04\ x+3)$ c. Um það bil \$90.300 á viku

257. a. $\frac{dS}{dt}=-\frac{8\pi r^2}{(t+1)^3}$ b. Breytingarhraði rúmmálsins er $-\frac{\pi}{36}$ dm³/mín. (um −0.087 lítra á mínútu).

259. ~0,68 m/klst.

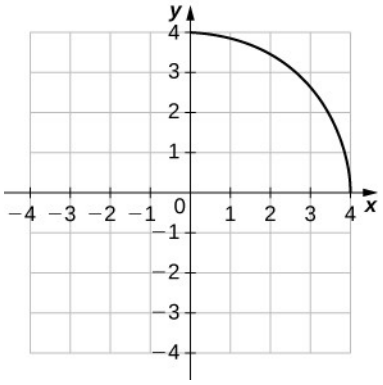
Æfingar úr undirkafla 3.7

261. a.



b. $\left(f^{-1}\right)'(1) \sim 2$

263. a.



$$y\prime = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

b. $y\prime(1) = \frac{-1}{\sqrt{16-1}} = \frac{-1}{\sqrt{15}}$

265. a. 6, b. $x = f^{-1}(y) = \left(\frac{y+3}{2}\right)^{1/3}$, c. $\frac{1}{6}$

267. a. 1, b. $x = f^{-1}(y) = \sin^{-1} y$, c. 1

269.

$$\frac{1}{5}$$

271.

$$\frac{1}{3}$$

273.

$$1$$

275. a. 4, b. $y=4x$

277. a. $-\frac{1}{13}$, b. $y=-\frac{1}{13}x+\frac{18}{13}$

279.

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

281.

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

283.

$$\frac{3\left(1+\tan^{-1}x\right)^2}{1+x^2}$$

285.

$$\frac{-1}{\left(1+x^2\right)\left(\tan^{-1}x\right)^2}$$

287.

$$\frac{x}{\left(5-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$$

289.

$$-1$$

291.

$$\frac{1}{2}$$

293.

$$\frac{1}{10}$$

295. a. $v(t)=\frac{1}{1+t^2}$ b. $a(t)=\frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ c. $(a)\ 0{,}2, 0{,}06, 0{,}03; (b) -0{,}16, -0{,}028, -0{,}0088$ d.

Hokkípökkurinn hægir á sér við 2, 4 og 6 sekúndur.

297. $-0{,}0444$ radíanar á metra

299. a. $\frac{d\theta}{dx}=\frac{2}{4+x^2}-\frac{8}{64+x^2}$ b. $\frac{18}{65},\frac{9}{68},\frac{42}{949},0$ c. Þegar einstaklingur fjarlægist skjáinn stækkar sjónarhornið, sem þýðir að sýn hans á skjáinn breikkar eftir því sem hann færist fjær. d. $-\frac{54}{2581},-\frac{3}{100},-\frac{198}{5989},-\frac{9}{272}$ e. Þegar einstaklingurinn færist lengra en 4 metra frá skjánum minnkar sjónarhornið. Besta fjarlægðin frá skjánum til að hámarka sjónarhornið er 4 metrar.

Æfingar úr undirkafla 3.8

301.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{y}$$

303.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3y}-\frac{y}{2x}$$

305.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-\frac{y}{2\sqrt{x+4}}}{\sqrt{x+4}-x}$$

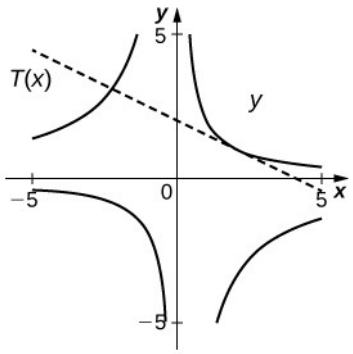
307.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cos(xy)}{2y-\sin(xy)-xy\cos(xy)}$$

309.

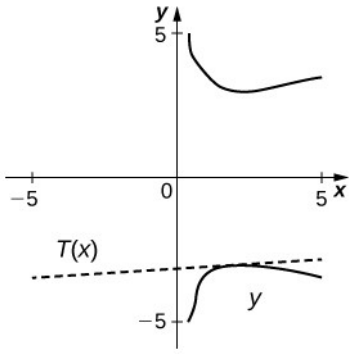
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2y-y^3}{x^3+3xy^2}$$

311.



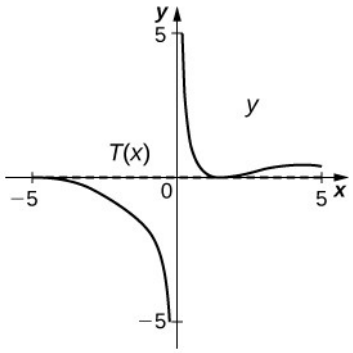
$$y=\frac{-1}{2}x+2$$

313.



$$y=\frac{1}{\pi+12}x-\frac{3\pi+38}{\pi+12}$$

315.



$$y=0$$

317. a. $y=-x+2$ b. $(3,-1)$

319. a. $\left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$ b. -2 c. Línurnar eru samsíða þar sem hallatalan er sú sama við báða skurðpunktana.

321.

$$y = -x + 1$$

323. a. $-0{,}5926$ b. When \$81 is spent on labor and \$16 is spent on capital, the amount spent on capital is decreasing by \$0,5926 per \$1 spent on labor.

325.

$$-8$$

327.

$$-2{,}67$$

329.

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Æfingar úr undirkafla 3.9

331.

$$2xe^x + x^2e^x$$

333.

$$e^{x^3 \ln x}\left(3x^2 \ln x + x^2\right)$$

335.

$$\frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

337.

$$2^{4x+2} \cdot \ln 2 + 8x$$

339.

$$\pi x^{\pi - 1} \cdot \pi^x + x^\pi \cdot \pi^x \ln \pi$$

341.

$$\frac{5}{2(5x-7)}$$

343.

$$\frac{\tan x}{\ln 10}$$

345.

$$2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_3 7^{x^2-4} + 2^x \cdot \frac{2x \ln 7}{\ln 3}$$

347.

$$(\sin 2x)^{4x}\left[4 \cdot \ln(\sin 2x) + 8x \cdot \cot 2x\right]$$

349.

$$x^{\log_2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x \ln 2}$$

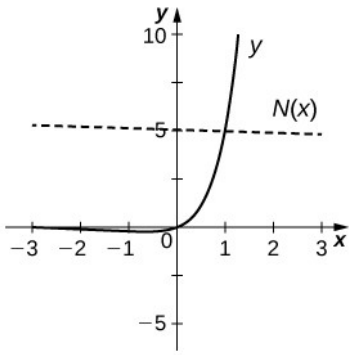
351.

$$x^{\cot x} \cdot \left[-\csc^2 x \cdot \ln x + \frac{\cot x}{x}\right]$$

353.

$$x^{-1/2}\left(x^2+3\right)^{2/3}(3x-4)^4 \cdot \left[\frac{-1}{2x} + \frac{4x}{3\left(x^2+3\right)} + \frac{12}{3x-4}\right]$$

355.



$$y = \frac{-1}{5+5\ln 5}x + \left(5 + \frac{1}{5+5\ln 5}\right)$$

357. a. $x = e \sim 2{,}718$ b. $y' > 0$ á $(0, e)$; $y' < 0$ á (e, ∞)

359. a. $P = 500.000\ (1{,}05)^t$ einstaklingar b. $P'(t) = 24395 \cdot (1{,}05)^t$ einstaklingar á ári c. 39.737 einstaklingar á ári

361. a. At the beginning of 1960 there were 5,3 thousand cases of the disease in New York City. At the beginning of 1964 there were approximately 723 cases of the disease in the United States. b. At the beginning of 1960 the number of cases of the disease was decreasing at rate of $-4{,}611$ thousand per year; at the beginning of 1963, the number of cases of the disease was decreasing at a rate of $-0{,}2808$ thousand per year.

363.

$$p = 35741\,(1{,}045)^t$$

365.

Ár frá 1790	P''
0	69,25
10	107,5
20	167,0
30	259,4
40	402,8
50	625,5
60	971,4
70	1508,5

Yfirlitsæfingar

367. Ósatt.

369. Ósatt

371.

$$\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

373.

$$9x^2 + \frac{8}{x^3}$$

375.

$$e^{\sin x}\cos x$$

377.

$$x\sec^2(x) + 2x\cos(x) + \tan(x) - x^2\sin(x)$$

379.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sin^{-1}(x)\right)$$

381.

$$\cos x\cdot(\ln x+1)-x\ln(x)\sin x$$

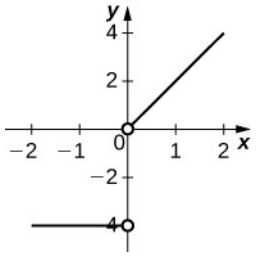
383.

$$4^x(\ln 4)^2+2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$$

385.

$$T=(2+e)x-2$$

387.



389. $w'(3)=-\frac{0{,}9\ \pi}{6}$. Kl. 3 að nóttu lækkar sjávarstaðan um 0,471 m/klst.

391. -12. Vindhraðinn minnkar um 12 km/klst. á hverri klukkustund.

Kafli 4

Stöðumat

4.1

$\frac{1}{72\,\pi}$ cm/sec , eða um það bil 0,0044 cm/sek.

4.2

250 m/sek.

4.3

$\frac{1}{20}$ rad/sek

4.4

$-6{,}11$ cm/sek.

4.5

$L(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)$; 2,00833

4.6

$$L(x)=-x+\frac{\pi}{2}$$

4.7

$$L(x)=1+4x$$

4.8

$$dy=2xe^{x^2}dx$$

4.9

$$dy=1{,}6,\ \Delta y=1{,}64$$

4.10

Skekkja rúmmálsmælingarinnar er innan $21{,}6\ \text{cm}^3$.

4.11

7,6%

4.12

$$x=-\frac{2}{3},\ x=1$$

4.13

Algilda hágildið er 3 og það er tekið í $x=4$. Algilda lággildið er -1 og það er tekið í $x=2$.

4.14

$$c=2$$

4.15

2 sek.

4.16

f hefur staðbundið lággildi í -2 og staðbundið hágildi í 3.

4.17

f hefur engin staðbundin útgildi vegna þess að f' skiptir ekki um formerki í $x=1$.

4.18

f er kúpt á bilinu $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ og hvelft á bilinu $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

4.19

f hefur staðbundið hágildi í -2 og staðbundið lággildi í 3.

4.20

Bæði markgildin eru 3. Línan $y=3$ er lárétt aðfella.

4.21

Látum $\varepsilon>0$. Látum $N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Því gildir fyrir öll $x>N$, að

$$\left|3-\frac{1}{x^2}-3\right|=\frac{1}{x^2}<\frac{1}{N^2}=\varepsilon$$

Þess vegna $\lim_{x\to\infty}\left(3-1/x^2\right)=3$.

4.22

Látum $M>0$. Látum $N=\sqrt{\frac{M}{3}}$. Þá gildir fyrir öll $x>N$, að

$$3x^2>3N^2=3\left(\sqrt{\frac{M}{3}}\right)^2{}^2=\frac{3M}{3}=M$$

4.23

$$-\infty$$

4.24

$$\frac{3}{5}$$

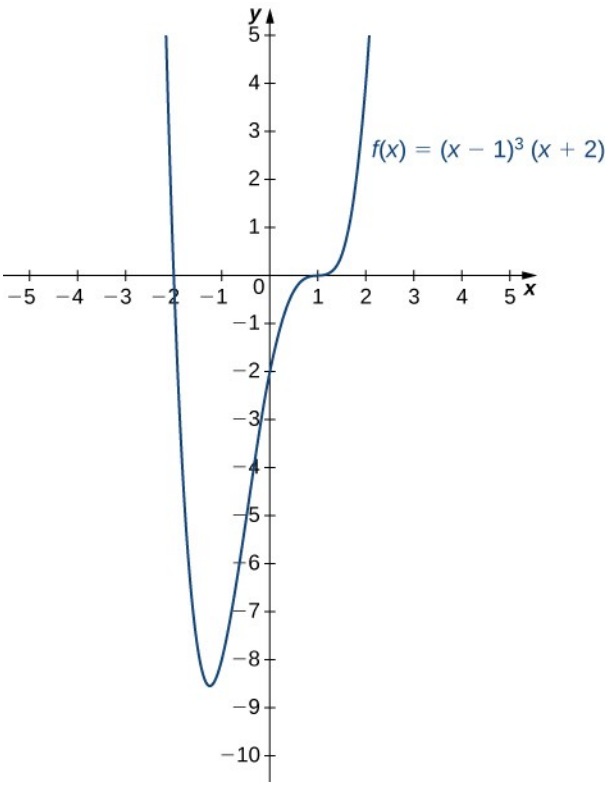
4.25

$$\pm\sqrt{3}$$

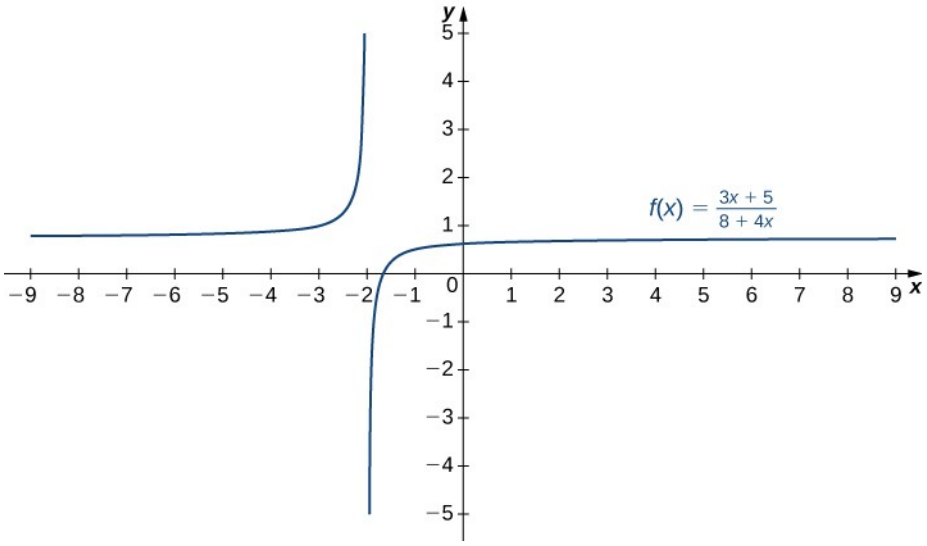
4.26

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{3}{5},\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-2$$

4.27



4.28



4.29

$$y=\frac{3}{2}x$$

4.30

Fallið f hefur broddpunkt við $(0,5)$ $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \infty$, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$. Fyrir endhegðun, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$.

4.31

Hámarksflatarmálið er $5000 \ \text{m}^2$.

4.32

$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$. Formengið er $[0,10]$.

4.33

$$T(x) = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{(15-x)^2+1}}{2{,}5}$$

4.34

Fyrirtækið ætti að innheimta $\$75$ á hvern bíl á dag.

4.35

$A(x) = 4x\sqrt{1-x^2}$. Skilgreiningarmengið sem er til skoðunar er $[0,1]$.

4.36

$c(x) = \frac{25{,}92}{x} + 0{,}02\ x^2$ dollarar

4.37

$$1$$

4.38

$$0$$

4.39

$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$. Því getum við ekki beitt reglu L'Hôpitals. Markgildi kvótans er ∞

4.40

$$1$$

4.41

$$0$$

4.42

$$e$$

4.43

$$1$$

4.44

Fallið 2^x vex hraðar en x^{100}.

4.45

$$x_1 \approx 0{,}33333333\,,\; x_2 \approx 0{,}347222222$$

4.46

$$x_1 = 2\,,\; x_2 = 1{,}75$$

4.47

$$x_1 \approx -1{,}842105263\,,\; x_2 \approx -1{,}772826920$$

4.48

$$x_1 = 6\,,\; x_2 = 8\,,\; x_3 = \frac{26}{3}\,,\; x_4 = \frac{80}{9}\,,\; x_5 = \frac{242}{27}\,;\; x* = 9$$

4.49

$$-\cos x + C$$

4.50

$$\frac{d}{dx}\left(x\sin x + \cos x + C\right) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$$

4.51

$$x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7x + C$$

4.52

$$y = -\frac{3}{x} + 5$$

4.53

$$5 \text{ sek.}\,,\; 37{,}5 \text{ m}$$

Æfingar úr undirkafla 4.1

1.

$$8$$

3.

$$\pm\frac{13}{\sqrt{10}}$$

5. $\sqrt{3}$ m/sek.

7. Fjarlægðin minnkar um 390 km/klst.

9. Fjarlægðin á milli þeirra minnkar með hraðanum $\frac{2160}{13} \approx 166{,}2$ km/klst.

11. $\frac{3}{2}$ m/sek.

13. Það vex með hraðanum $\frac{2}{5}$ m/sek.

15. Vegalengdin eykst um $\frac{(27\sqrt{26})}{26}$ m/sek.

17. $-\frac{5}{6}$ m/sek.

19. 240π m²/sek.

21. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ cm

23. Flatarmálið eykst með hraðanum $\frac{(3\sqrt{3})}{8}$ m^2/sek.

25. Dýpi vatnsins minnkar um $\frac{128}{125\pi}$ m/mín.

27. Rúmmálið minnkar með hraðanum $\frac{(25\ \pi)}{16}$ m^3/mín.

29. Vatnið flæðir út með hraðanum $\frac{(2\pi)}{5}\mathrm{m}^3$/min.

31. $\frac{3}{2}$ m/sek.

33. $\frac{5}{19\ \pi}$ m/mín.

35. $\frac{1}{9\ \pi}$ m/mín.

37. Hornið minnkar með hraðanum $\frac{400}{1681}$ rad/sec.

39.

$100\ \pi$ km/mín.

41. Hornið breytist með hraðanum $\frac{11}{25}$ rad/sec.

43. Fjarlægðin eykst með hraðanum 18,75 m/sek.

45. Fjarlægðin minnkar um 3,72 m/sek.

Æfingar úr undirkafla 4.2

47.

$$f'(a)=0$$

49. Línulega nálgunin er nákvæm þegar $y=f(x)$ er línuleg eða föst.

51.

$$L(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$$

53.

$$L(x)=1$$

55.

$$L(x)=0$$

57. 0,02

59.

$$1{,}9996875$$

61.

$$0{,}001593$$

63. 1; skekkja, $\sim 0{,}00005$

65. $0{,}97$; skekkja, $\sim 0{,}0006$

67. $3-\frac{1}{600}$; skekkja, $\sim 4{,}632\times 10^{-7}$

69.

$$dy=(\cos x - x\sin x)\,dx$$

71.

$$dy=\left(\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}\right)dx$$

73.

$$dy=-\frac{1}{(x+1)^2}\,dx,\ -\frac{1}{16}$$

75.

$$dy = \frac{9x^2 + 12x - 2}{2(x+1)^{3/2}}\,dx,\ -0{,}1$$

77.

$$dy = \left(3x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}\right)dx,\ 0{,}2$$

79.

$$12x\,dx$$

81.

$$4\pi r^2\,dr$$

83.

$$-1{,}2\ \pi\ \ \text{cm}^3$$

85. $-10\ \text{m}^3$

Æfingar úr undirkafla 4.3

91. Svör geta verið mismunandi

93. Svör geta verið mismunandi

95. Nei; svör verða mismunandi

97. Þar sem algilda hágildið er fallgildið (úttaksgildið) en ekki x-gildið er svarið nei; svör geta verið mismunandi

99. Þegar $a = 0$

101. Algilt lággildi við 3; algilt hágildi við −2,2; staðbundin lágmörk við −2, 1; staðbundin hámörk við −1, 2

103. Algild lágmörk við −2, 2; algild hámörk við −2,5, 2,5; lágmörk við −2, 0 og 2 (Athugið: −2 og 2 eru bæði staðbundin og algild lágmörk); staðbundin hámörk við −1, 1

105. Svör geta verið mismunandi.

107. Svör geta verið mismunandi.

109.

$$x = 1$$

111. Ekkert

113.

$$x = 0;\ x = \pm 2$$

115. Ekkert

117.

$$x=-1,1$$

119. Algilt hágildi: $x=4$, $y=\frac{33}{2}$; algilt lággildi:

$$x=1,$$

$$y=3$$

121. Algilt lággildi:

$$x=\frac{1}{2},$$

$$y=4$$

123. Algilt hágildi: $x=2\pi$, $y=2\pi$; algilt lággildi:

$$x=0,$$

$$y=0$$

125. Algilt hágildi: $x=-3$ og $y=6$;; algilt lággildi:

$$-1\leq x\leq 1,$$

$$y=2$$

127. Algilt hágildi: $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\sqrt{2}$; algilt lággildi:

$$x=\frac{5\pi}{4},$$

$$y=-\sqrt{2}$$

129. Algilt lággildi:

$$x=-2,$$

$$y=1$$

131. Algilt lággildi: $x=-3$, $y=-135$; staðbundið hágildi: $x=0$, $y=0$; staðbundið lággildi:

$$x=1,$$

$$y=-7$$

133. Staðbundið hágildi: $x=1-2\sqrt{2}$, $y=3-4\sqrt{2}$; staðbundið lággildi:

$$x=1+2\sqrt{2},$$

$$y=3+4\sqrt{2}$$

135. Algilt hágildi: $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{3}{2}$; algilt lággildi:

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y=-\frac{3}{2}$$

137. Staðbundið hágildi: $x=-2$, $y=59$; staðbundið lággildi:

$$x=1,$$

$$y=-130$$

139. Algilt hágildi: $x=0$, $y=1$; algilt lággildi:

$$x=-2,2,$$

$$y=0$$

141.

$$h=\frac{9245}{49}\,\text{m},\ t=\frac{300}{49}\,\text{s}$$

143. Algilda lággildið var árið 1848, þegar ekkert gull var framleitt.

145. Algild lágmörk: $x=0$, $x=2$, $y=1$; staðbundið hágildi í

$$x=1,$$

$$y=2$$

147. Engin hágildi/lággildi ef a er oddatala, lággildi við $x=1$ ef a er slétt tala

Æfingar úr undirkafla 4.4

149. Eitt dæmi er $f(x)=|x|+3$, $-2\le x\le 2$

151. Já, en meðalgildissetningin á samt ekki við

153. Sérhvert lokað bil í $(-\infty,0)$ eða $(0,\infty)$

155. Sérhvert lokað bil í $(-\infty,-2)$ eða $(2,\infty)$

157. 2 punktar

159. 5 punktar

161.

$$c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

163.

$$c=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}$$

165.

$$c=1$$

167. Ekki diffranlegt

169. Ekki diffranlegt

171. Já

173. Meðalgildissetningin á ekki við þar sem fallið er ósamfellt í $x=\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}$.

175. Já

177. Meðalgildissetningin á ekki við; ósamfellt við $x=0$.

179. Já

181. Meðalgildissetningin á ekki við; ekki diffranlegt í $x=0$.

183.

$$b=\pm 2\sqrt{c}$$

185.

$$c=\pm\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right),\ c=\pm 0{,}1533$$

187. Meðalgildissetningin á ekki við.

189.

$$\frac{1}{2\sqrt{c+1}}-\frac{2}{c^3}=\frac{521}{2880};\ c=3{,}133,5{,}867$$

191. Já

193. Látum $s_1(t)$ tákna fjarlægð bíls 1 frá umferðarljósum 1 á tíma t. Látum $s_2(t)$ tákna fjarlægð bíls 2 frá umferðarljósum 1 á tíma t. Þá gildir $s_1(0)=0=s_2(0)$. Látum $t=m$ tákna tímann þegar bílarnir koma að umferðarljósum 2. Þá gildir $s_1(m)=d=s_2(m)$ þar sem d er fjarlægðin milli umferðarljósanna.

Skilgreinum nýtt fall $f(t)=s_1(t)-s_2(t)$. Þá gildir $f(0)=0=f(m)$. Samkvæmt meðalgildissetningunni er til tímapunktur $0<c<m$ þannig að

$$f'(c)=\frac{f(m)-f(0)}{m-0}=\frac{0}{m}=0.$$

Við tímann c,

$$f'(c)=0$$

$$s_1'(c)-s_2'(c)=0$$

$$s_1'(c)=s_2'(c)$$

Við tímann c aka því bíll 1 og bíll 2 á sama hraða.

Æfingar úr undirkafla 4.5

195. Það er ekki staðbundið hágildi/lággildi vegna þess að f' skiptir ekki um formerki

197. Nei

199. Ósatt; til dæmis $y=\sqrt{x}$.

201. Vaxandi fyrir $-2<x<-1$ og $x>2$; minnkandi fyrir $x<-2$ og $-1<x<2$

203. Minnkandi fyrir $x<1$, vaxandi fyrir $x>1$

205. Minnkandi fyrir $-2<x<-1$ og $1<x<2$; vaxandi fyrir $-1<x<1$ og $x<-2$ og $x>2$

207. a. Vaxandi á $-2<x<-1, 0<x<1, x>2$, minnkandi á $x<-2$, $-1<x<0, 1<x<2$; b. hágildi í $x=-1$ og $x=1$, lággildi í $x=-2$ og $x=0$ og $x=2$

209. a. Vaxandi á $x>0$, minnkandi á $x<0$; b. Lággildi í $x=0$

211. Kúpt fyrir öll x, engir beygjuskilapunktar

213. Kúpt fyrir öll x, engir beygjuskilapunktar

215. Kúpt á bilinu $x<0$ og $x>1$, hvelft á bilinu $0<x<1$, beygjuskilapunktar við $x=0$ og $x=1$

217. Svör geta verið mismunandi

219. Svör geta verið mismunandi

221. a. Vaxandi á $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, minnkandi á $x<-\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}$ b. Staðbundið hágildi við $x=\frac{\pi}{2}$; staðbundið lággildi við $x=-\frac{\pi}{2}$

223. a. Kúpt fyrir $x>\frac{4}{3}$, hvelft fyrir $x<\frac{4}{3}$ b. Beygjuskilapunktur við $x=\frac{4}{3}$

225. a. Vaxandi á $x<0$ og $x>4$, minnkandi á $0<x<4$ b. Hágildi í $x=0$, lággildi í $x=4$ c. Kúpt fyrir $x>2$, hvelft fyrir $x<2$ d. Beygjuskilapunktur í $x=2$

227. a. Vaxandi á $x<0$ og $x>\frac{60}{11}$, minnkandi á $0<x<\frac{60}{11}$ b. Lággildi við $x=\frac{60}{11}$, staðbundið hágildi við x = o c. Hvelft á $x<\frac{54}{11}$, kúpt á $x>\frac{54}{11}$ d. Beygjuskilapunktur við $x=\frac{54}{11}$

229. a. Vaxandi á $x>-\frac{1}{2}$, minnkandi á $x<-\frac{1}{2}$ b. Lággildi við $x=-\frac{1}{2}$ c. Kúpt fyrir öll x d. Engir beygjuskilapunktar

231. a. Vex á $-\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}$, minnkar á $x>\frac{3}{4}$ og $x<-\frac{1}{4}$ b. Lággildi við $x=-\frac{1}{4}$, hágildi við $x=\frac{3}{4}$ c. Kúpt á $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{4}$, hvelft á $x<-\frac{3}{4}$ og $x>\frac{1}{4}$ d. Beygjuskilapunktur við $x=-\frac{3}{4}, x=\frac{1}{4}$

233. a. Vaxandi fyrir öll x b. Ekkert staðbundið lággildi eða hágildi c. Kúpt fyrir $x>0$, hvelft fyrir $x<0$ d. Beygjuskilapunktur við $x=0$

235. a. Vaxandi fyrir öll x þar sem fallið er skilgreint b. Engin staðbundin lágmörk eða hámörk c. Kúpt fyrir $x<1$; hvelft fyrir $x>1$ d. Engir beygjuskilapunktar á skilgreiningarmenginu

237. a. Vaxandi á $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$, minnkandi á $x>\frac{3\pi}{4}, x<-\frac{\pi}{4}$ b. Lággildi við $x=-\frac{\pi}{4}$, hágildi við $x=\frac{3\pi}{4}$ c. Kúpt á $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, hvelft á $x<-\frac{\pi}{2}, x>\frac{\pi}{2}$ d. Beygjuskilapunktur við $x=\pm\frac{\pi}{2}$

239. a. Vaxandi á $x>4$, minnkandi á $0<x<4$ b. Lággildi í $x=4$ c. Kúpt á $0<x<8\sqrt[3]{2}$, hvelft á $x>8\sqrt[3]{2}$ d. Beygjuskilapunktur í $x=8\sqrt[3]{2}$

241.

$$f>0, f'>0, f''<0$$

243.

$$f>0, f'<0, f''>0$$

245.

$$f>0, f'>0, f''>0$$

247. Satt, samkvæmt meðalgildissetningunni

249. Rétt, skoðið afleiðuna

Æfingar úr undirkafla 4.6

251.

$$x=1$$

253.

$$x=-1\,,x=2$$

255.

$$x=0$$

257. Já, það er lóðfella

259. Já, það er lóðfella

261.

$$0$$

263.

$$\infty$$

265.

$$-\frac{1}{7}$$

267.

$$-2$$

269.

$$-4$$

271. Láréttar aðfellur: engar, lóðfellur: $x=0$

273. Láréttar aðfellur: engar, lóðfellur: $x=\pm 2$

275. Láréttar aðfellur: engar, lóðfellur: engar

277. Lárétt aðfella: $y=0$, lóðfellur: $x=\pm 1$

279. Lárétt aðfella: $y=0$, lóðfellur: $x=0$ og $x=-1$

281. Lárétt aðfella: $y=1$, lóðfellur: $x=1$

283. Láréttar aðfellur: engar, lóðfellur: engar

285. Svör geta verið mismunandi, til dæmis: $y=\frac{2x}{x-1}$

287. Svör geta verið mismunandi, til dæmis: $y=\frac{4x}{x+1}$

289.

$$y=0$$

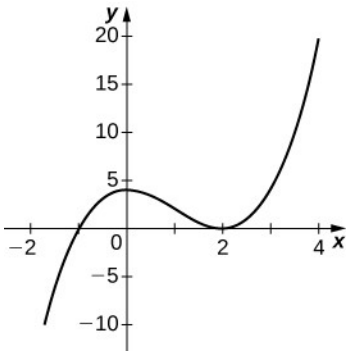
291.

$$\infty$$

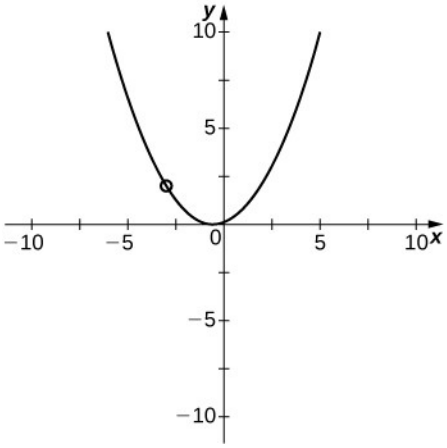
293.

$$y=3$$

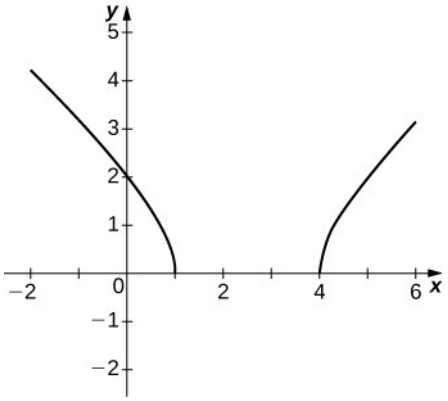
295.



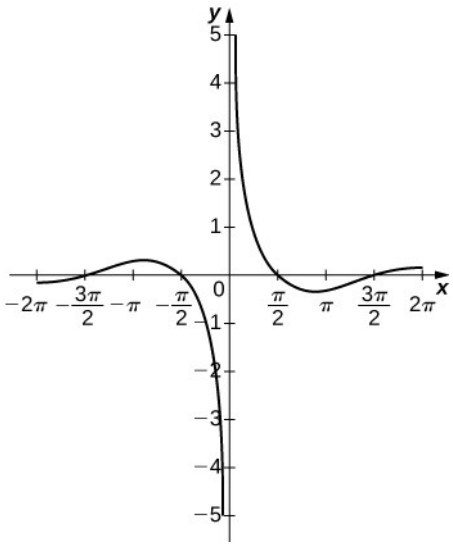
297.



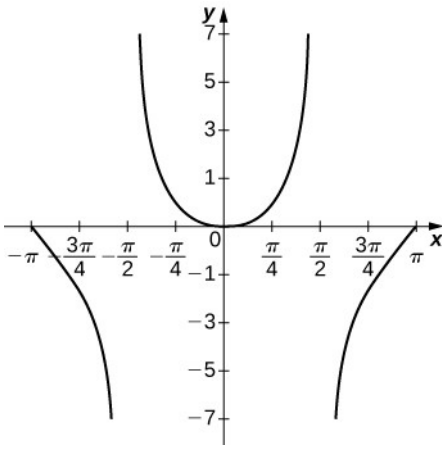
299.


y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−2
0
2
4
6

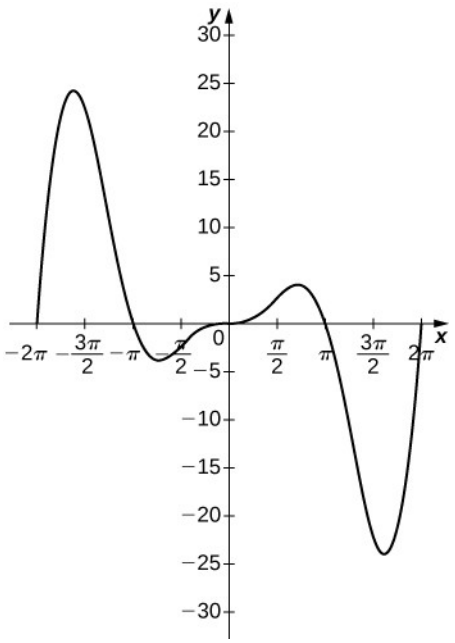
301.


y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
0
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

303.


y
x
7
5
3
1
−1
−3
−5
−7
0
$-\pi$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π

305.



307.

$$P(0)\neq 0\, and\, Q(0)=0$$

309.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \text{ og } \lim_{x\to 1^-} g(x)=\infty$$

Æfingar úr undirkafla 4.7

311. Stöðupunktar geta verið lágmarkspunktar, hámarkspunktar eða hvorugt.

313. Ósatt; $y=x^2$ hefur aðeins lággildi

315. $h=50$ cm

317.

$$1$$

319.

$$100\ \text{m} \times\ 100\ \text{m}$$

321.

$$40\ \text{m} \times\ 40\ \text{m}$$

323.

$$2{,}96\ \text{m}.$$

325.

$$84 \text{ slög á mín.}$$

327.

$$T(\theta) = \frac{40\theta}{3v} + \frac{40\cos\theta}{v}$$

329.

$$v = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

331.

$$50 \text{ km/klst}$$

333.

$$4$$

335.

$$0$$

337. Hágildi: $x = 5, y = 5$; lággildi: $x = 0, y = 10$ og $y = 0, x = 10$

339. Hágildi: $x = 1, y = 9$; lággildi: ekkert

341.

$$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

343.

$$6$$

345.

$$r = 2, h = 4$$

347.

$$(2, 1)$$

349.

$$(0{,}8351\,; 0{,}6974)$$

351.

$$A = 6\left(\frac{6}{\pi+4}\right) - 2\left(\frac{6}{\pi+4}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\pi\left(\frac{6}{\pi+4}\right)^2$$

353.

$$C\left(x\right)=50\ x^2+\frac{6{,}4}{x}$$

355.

$$P\left(x\right)=\left(50-x\right)\left(800+25\,x-50\right)$$

Æfingar úr undirkafla 4.8

357.

$$\infty$$

359.

$$\frac{1}{2\,a}$$

361.

$$\frac{1}{n\,a^{n-1}}$$

363. Ekki er hægt að beita þessu beint; nota þarf logra

365. Ekki er hægt að beita þessu beint; umritið sem $\lim_{x\to 0} x^3$

367.

$$6$$

369.

$$-2$$

371.

$$-1$$

373.

$$n$$

375.

$$-\frac{1}{2}$$

377.

$$\frac{1}{2}$$

379.

$$1$$

381.

$$\frac{1}{6}$$

383.

$$1$$

385.

$$0$$

387.

$$0$$

389.

$$-1$$

391.

$$\infty$$

393.

$$0$$

395.

$$\frac{1}{e}$$

397.

$$0$$

399.

$$1$$

401.

$$0$$

403.

$$\tan\left(1\right)$$

405.

$$2$$

Æfingar úr undirkafla 4.9

407.

$$F\left(x_n\right)=x_n-\frac{{x_n}^3+2x_n+1}{3{x_n}^2+2}$$

409.

$$F\left(x_n\right)=x_n-\frac{e^{x_n}}{e^{x_n}}$$

411. $|c|>0{,}5$ bregst, $|c|\leq 0{,}5$ virkar

413.

$$c=\frac{1}{f'\left(x_n\right)}$$

415. a. $x_1=\frac{12}{25}, x_2=\frac{312}{625}$; b. $x_1=-4, x_2=-40$

417. a. $x_1=1{,}291, x_2=0{,}8801$; b. $x_1=0{,}7071, x_2=1{,}189$

419. a. $x_1=-\frac{26}{25}, x_2=-\frac{1224}{625}$; b. $x_1=4, x_2=18$

421. a. $x_1=\frac{6}{10}, x_2=\frac{6}{10}$; b. $x_1=2, x_2=2$

423.

$$3{,}1623 \text{ eða } -3{,}1623$$

425.

$$0, -1 \text{ eða } 1$$

427.

$$0$$

429.

$$0{,}5188 \text{ eða } -1{,}2906$$

431.

$$0$$

433.

$$4{,}493$$

435.

$$0{,}159\,, 3{,}146$$

437. Við þurfum að f sé tvisvar samfellt deildanlegt.

439.

$$x = 0$$

441.

$$x = -1$$

443.

$$x = 5{,}619$$

445.

$$x = -1{,}326$$

447. Jafnan hefur enga lausn.

449. Hún fer inn í hringrás.

451.

$$0$$

453.

$$-0{,}3513$$

455. Aðferð Newtons: 11 ítranir, sniðilsaðferð: 16 ítranir

457. Aðferð Newtons: þrjár ítranir, sniðilsaðferð: sex ítranir

459. Aðferð Newtons: fimm ítranir, sniðilsaðferð: átta ítranir

461.

$$E = 4{,}071$$

463.

$$4\,, 394\,\%$$

Æfingar úr undirkafla 4.10

465.

$$F'(x) = 15\,x^2 + 4\,x + 3$$

467.

$$F'(x)=2xe^{x}+x^{2}e^{x}$$

469.

$$F'(x)=e^{x}$$

471.

$$F(x)=e^{x}-x^{3}-\cos(x)+C$$

473.

$$F(x)=\frac{x^{2}}{2}-x-2\cos(2x)+C$$

475.

$$F(x)=\frac{1}{2}x^{2}+4x^{3}+C$$

477.

$$F(x)=\frac{2}{5}(\sqrt{x})^{5}+C$$

479.

$$F(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}+C$$

481.

$$F(x)=x+\tan(x)+C$$

483.

$$F(x)=\frac{1}{3}\sin^{3}(x)+C$$

485.

$$F(x)=-\frac{1}{2}\cot(x)-\frac{1}{x}+C$$

487.

$$F(x)=-\sec x-4\csc x+C$$

489.

$$F(x)=-\frac{1}{8}e^{-4x}-\cos x+C$$

491.

$$-\cos x + C$$

493.

$$3x - \frac{2}{x} + C$$

495.

$$\frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{4}{5}x^{5/4} + C$$

497.

$$14x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

499.

$$f(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$$

501.

$$f(x) = \sin x + \tan x + 1$$

503.

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{x} + \frac{13}{6}$$

505. Svör geta verið mismunandi; eitt mögulegt svar er $f(x) = e^{-x}$

507. Svör geta verið mismunandi; eitt mögulegt svar er $f(x) = -\sin x$

509. 5 sek.

511. 10 sek.

513. 5 m/s²

515.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$$

517.

$$F(x) = x^2 - \cos x + 1$$

519.

$$F(x)=-\frac{1}{(x+1)}+1$$

521. Satt

523. Ósatt

Yfirlitsæfingar

525. Satt, samkvæmt meðalgildissetningunni

527. Satt

529. Vaxandi: $(-2,0)\cup(4,\infty)$, minnkandi: $(-\infty,-2)\cup(0,4)$

531.

$$L(x)=\frac{17}{16}+\frac{1}{2}(1+4\pi)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

533. Stöðupunktur: $x=\frac{3\pi}{4}$, algilt lággildi: $x=0$, algilt hágildi: $x=\pi$

535. Vaxandi: $(-1,0)\cup(3,\infty)$, minnkandi: $(-\infty,-1)\cup(0,3)$, kúpt: $\left(-\infty,\frac{1}{3}(2-\sqrt{13})\right)\cup\left(\frac{1}{3}(2+\sqrt{13}),\infty\right)$, hvelft: $\left(\frac{1}{3}(2-\sqrt{13}),\frac{1}{3}(2+\sqrt{13})\right)$

537. Vaxandi: $\left(\frac{1}{4},\infty\right)$, minnkandi: $\left(0,\frac{1}{4}\right)$, kúpt: $(0,\infty)$, hvelft: hvergi

539.

$$3$$

541.

$$-\frac{1}{\pi}$$

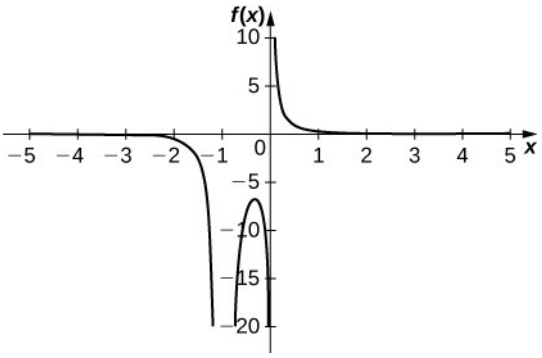
543.

$$x_1=-1, x_2=-1$$

545.

$$F(x)=\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{1}{x}+C$$

547.



Beygjuskilapunktar: engir; stöðupunktur: $x=-\frac{1}{3}$; núllstöðvar: engar; lóðfellur: $x=-1$, $x=0$; lárétt aðfella: $y=0$

549. The height is decreasing at a rate of 0,125 m/sec

551. $x=\sqrt{a\,b}$ m

Kafli 5

Stöðumat

5.1

$$\sum_{i=3}^{6} 2^i = 2^3+2^4+2^5+2^6 = 120$$

5.2

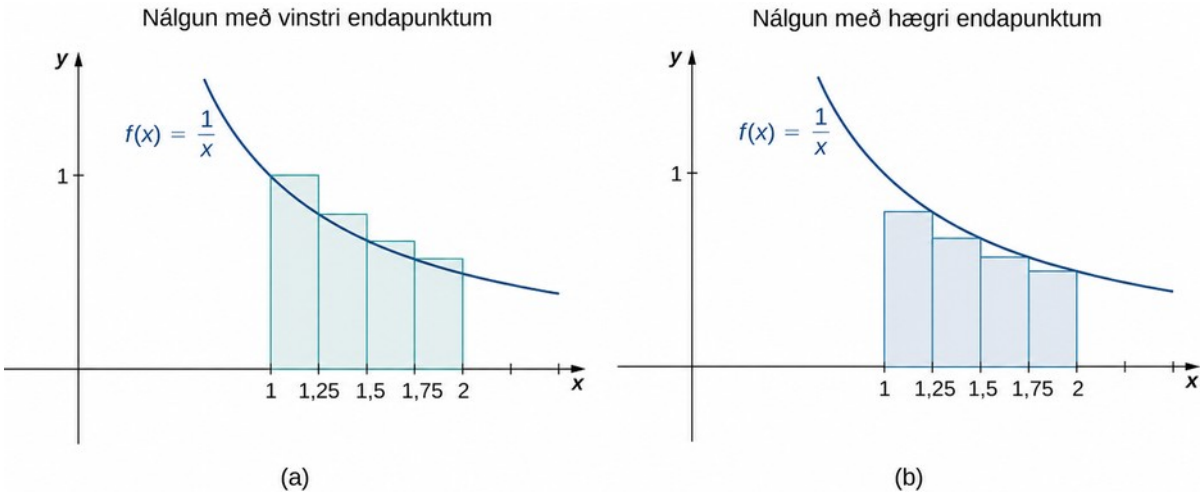
15.550

5.3

440

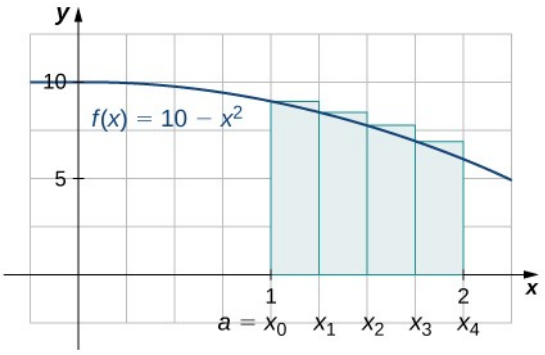
5.4

Nálgunin með vinstri endapunktum er 0,7595. Nálgunin með hægri endapunktum er 0,6345.



5.5

a. Efri summa $=8{,}0313$.



5.6

$$A \approx 1{,}125$$

5.7

6

5.8

18 ferningseiningar

5.9

6

5.10

18

5.11

$$6\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 3\,dx$$

5.12

-7

5.13

3

5.14

$$\text{Meðalgildi} = 1{,}5\,;\, c = 3$$

5.15

$$c = \sqrt{3}$$

5.16

$$g'(r) = \sqrt{r^2 + 4}$$

5.17

$$F'(x) = 3x^2 \cos x^3$$

5.18

$$F'(x) = 2x \cos x^2 - \cos x$$

5.19

$$\frac{7}{24}$$

5.20

Kathy vinnur enn, en munurinn er miklu meiri: James skautar 12,6 metra á 3 sek., en Kathy skautar 14,3634 metra á 3 sek.

5.21

$$-\frac{10}{3}$$

5.22

Nettótilfærsla: $\frac{e^2 - 9}{2} \approx -0{,}8055$ m; heildarvegalengd: $4 \quad \ln \quad 4 - 7{,}5 + \frac{e^2}{2} \approx 1{,}740$ m

5.23

17,5 km

5.24

$$\frac{64}{5}$$

5.25

$$\int 3x^2 \left(x^3 - 3\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x^3 - 3\right)^3 + C$$

5.26

$$\frac{\left(x^3 + 5\right)^{10}}{30} + C$$

5.27

$$-\frac{1}{\sin t}+C$$

5.28

$$-\frac{\cos^4 t}{4}+C$$

5.29

$$\frac{91}{3}$$

5.30

$$\frac{2}{3\ \pi}\approx 0{,}2122$$

5.31

$$\int x^2 e^{-2x^3}\,dx=-\frac{1}{6}e^{-2x^3}+C$$

5.32

$$\int e^x\left(3e^x-2\right)^2\,dx=\frac{1}{9}\left(3e^x-2\right)^3$$

5.33

$$\int 2x^3 e^{x^4}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^4}$$

5.34

$$\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

5.35

$Q\left(t\right)=\frac{2^t}{\ln\ 2}+8{,}557$. Eftir 3 klukkustundir eru 20,099 bakteríur í skálinni.

5.36

Flugurnar eru 116 talsins.

5.37

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{4x^{-2}}\,dx=\frac{1}{8}\left[e^4-e\right]$$

5.38

$$\ln|x+2|+C$$

5.39

$$\frac{x}{\ln 3}(\ln x-1)+C$$

5.40

$$\frac{1}{4}\sin^{-1}(4x)+C$$

5.41

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

5.42

$$\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+C$$

5.43

$$\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

5.44

$$\frac{\pi}{8}$$

Æfingar úr undirkafla 5.1

1. a. Þær eru jafnar; báðar tákna summu fyrstu 10 heilu talnanna. b. Þær eru jafnar; báðar tákna summu fyrstu 10 heilu talnanna. c. Þær eru jafnar þegar sett er inn $j=i-1$. d. Þær eru jafnar; í fyrri summunni eru liðir þeirrar síðari þáttaðir.

3.

$$385-30=355$$

5.

$$15-(-12)=27$$

7.

$$5(15)+4(-12)=27$$

9.

$$\sum_{j=1}^{50} j^2 - 2\sum_{j=1}^{50} j = \frac{(50)(51)(101)}{6} - \frac{2(50)(51)}{2} = 40,375$$

11.

$$4\sum_{k=1}^{25} k^2 - 100\sum_{k=1}^{25} k = \frac{4(25)(26)(51)}{6} - 50(25)(26) = -10,400$$

13.

$$R_4 = -0,25$$

15.

$$R_6 = 0,372$$

17.

$$L_4 = 2,20$$

19.

$$L_8 = 0,6875$$

21. $L_6 = 9,000 = R_6$. Graf f afmarkar þríhyrning með flatarmálið 9.

23. $L_6 = 13,12899 = R_6$. Þær eru jafnar.

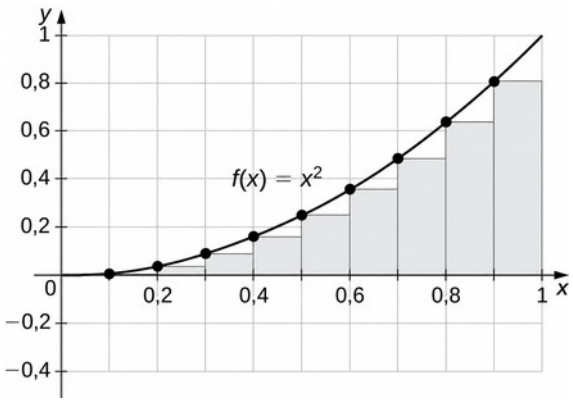
25.

$$L_{10} = \frac{4}{10}\sum_{i=1}^{10} \sqrt{4 - \left(-2 + 4\frac{(i-1)}{10}\right)^2}$$

27.

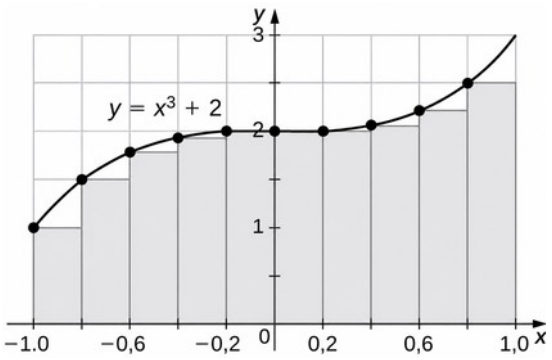
$$R_{100} = \frac{e-1}{100}\sum_{i=1}^{100} \ln\left(1 + (e-1)\frac{i}{100}\right)$$

29.



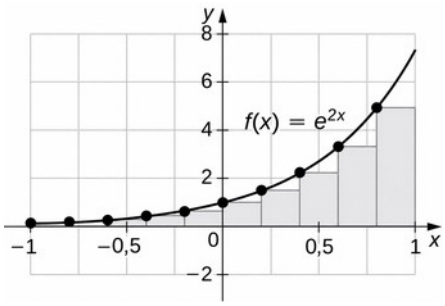
$R_{100}=0{,}33835$, $L_{100}=0{,}32835$. Grafið sýnir að vinstri Riemann-summan er vanmat þar sem fallið er vaxandi. Á sama hátt er hægri Riemann-summan ofmat. Flatarmálið liggur á milli vinstri og hægri Riemann-summunnar. Tíu rétthyrningar eru sýndir til að auðvelda sjónrænan skilning. Sama gildir þótt rétthyrningunum sé fjölgað.

31.



$L_{100}=3{,}980$, $R_{100}=4{,}020$, $R_{100}>L_{100}$. Summan með vinstri endapunktum er vanmat vegna þess að fallið er vaxandi. Á sama hátt er nálgun með hægri endapunktum ofmat. Flatarmálið liggur á milli matsins sem fæst með vinstri endapunktum og matsins sem fæst með hægri endapunktum.

33.



$L_{100}=3{,}555$, $R_{100}=3{,}670$ Grafið sýnir að vinstri Riemann-summan gefur of lágt mat þar sem fallið er vaxandi. Tíu rétthyrningar eru sýndir til að skýra myndina. Sama gildir þegar rétthyrningunum er fjölgað.

35. Summan táknar uppsafnaða úrkomu í janúar 2009.

37. Heildarvegalengdin er

$$7 \times \sum_{i=1}^{25} \left(1+\frac{(i-1)}{10}\right)=7 \times 25+\frac{7}{10} \times 12 \times 25=385 \text{ km}.$$

39. Leggið tölurnar saman og fáið 206 mm heildarhækkun.

41. 309.389.957

43.

$$L_8=3+2+1+2+3+4+5+4=24$$

45.

$$L_8=3+5+7+6+8+6+5+4=44$$

47.

$$L_{10}\approx 1{,}7604,\ L_{30}\approx 1{,}7625,\ L_{50}\approx 1{,}76265$$

49. $R_1=-1$, $L_1=1$, $R_{10}=-0{,}1$, $L_{10}=0{,}1$, $L_{100}=0{,}01$, og $R_{100}=-0{,}01$. Vegna samhverfu grafsins er nákvæmt flatarmál núll.

51.

$$R_1=0,\ L_1=0,\ R_{10}=2{,}4499,\ L_{10}=2{,}4499,\ R_{100}=2{,}1365,\ L_{100}=2{,}1365$$

53. Ef $[c,d]$ er hlutbil í $[a,b]$ undir einum rétthyrninganna í summunni með vinstri endapunktum, þá er flatarmál rétthyrningsins sem myndar nálgunina með vinstri endapunktum $f(c)(d-c)$. En $f(c)\le f(x)$ fyrir $c\le x\le d$, þannig að flatarmálið undir grafi f milli c og d er $f(c)(d-c)$ að viðbættu flatarmálinu undir grafi f en ofan við lárétta línustrikið í hæðinni $f(c)$, sem er jákvætt. Þar sem þetta gildir um hvert hlutbil summunnar með vinstri endapunktum leiðir af því að vinstri Riemann-summan er minni en eða jöfn flatarmálinu undir grafi f á $[a,b]$.

55. $L_N=\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(a+(b-a)\frac{i-1}{N}\right)=\frac{b-a}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f\left(a+(b-a)\frac{i}{N}\right)$ og $R_N=\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(a+(b-a)\frac{i}{N}\right)$. Vinstri summan hefur lið sem samsvarar $i=0$ og hægri summan hefur lið sem samsvarar $i=N$. Í mismuninum R_N-L_N, kemur sérhver liður sem samsvarar $i=1,2,\ldots,N-1$ fyrir einu sinni með plúsmerki og einu sinni með mínusmerki, þannig að allir slíkir liðir styttast út og eftir stendur

$$R_N-L_N=\frac{b-a}{N}\left(f(a+(b-a))\frac{N}{N}\right)-\left(f(a)+(b-a)\frac{0}{N}\right)=\frac{b-a}{N}(f(b)-f(a)).$$

57. Graf 1: a. $L(A)=0, B(A)=20$; b. $U(A)=20$. Graf 2: a. $L(A)=9$; b. $B(A)=11, U(A)=20$. Graf 3: a. $L(A)=11{,}0$; b. $B(A)=4{,}5, U(A)=15{,}5$.

59. Látum A tákna flatarmál einingarhringsins. Hringurinn umlykur n samstæða þríhyrninga sem hver hefur flatarmálið $\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$, og því $\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\le A$. Á sama hátt er hringurinn umlukinn af n samstæðum þríhyrningum sem hver hefur flatarmálið $\frac{BH}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, og því

$A\le\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2$. Þar sem $n\to\infty$, $\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)}A\to\pi$,

ályktum við að $\pi\le A$. Þar að auki, þar sem $n\to\infty$, $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\to 1$, fæst einnig að $A\le\pi$. Með klemmusetningunni fyrir markgildi ályktum við að $A=\pi$.

Æfingar úr undirkafla 5.2

61.

$$\int_0^2 \left(5x^2-3x^3\right)dx$$

63.

$$\int_0^1 \cos^2(2\pi x)\,dx$$

65.

$$\int_0^1 x\,dx$$

67.

$$\int_3^6 x\,dx$$

69.

$$\int_1^2 x\log\left(x^2\right)dx$$

71.

$$1+2\cdot 2+3\cdot 3=14$$

73.

$$1-4+9=6$$

75.

$$1-2\pi+9=10-2\pi$$

77. Heildið er flatarmál þríhyrningsins, $\frac{1}{2}$

79. Heildið er flatarmál þríhyrningsins, 9.

81. Heildið er flatarmálið $\frac{1}{2}\pi r^2=2\pi$.

83. Heildið er flatarmál „stóra“ þríhyrningsins að frádregnu flatarmáli þríhyrningsins sem „vantar“, $9-\frac{1}{2}$.

85.

$$L=2+0+10+5+4=21,\ R=0+10+10+2+0=22,\ \frac{L+R}{2}=21{,}5$$

87.

$$L=0+4+0+4+2=10,\ R=4+0+2+4+0=10,\ \frac{L+R}{2}=10$$

89.

$$\int_2^4 f(x)\,dx+\int_2^4 g(x)\,dx=8-3=5$$

91.

$$\int_2^4 f(x)\,dx-\int_2^4 g(x)\,dx=8+3=11$$

93.

$$4\int_2^4 f(x)\,dx-3\int_2^4 g(x)\,dx=32+9=41$$

95. Heildisstofninn er oddstætt fall; heildið er núll.

97. Heildisstofninn er andsamhverfur um $x=3$. Heildið er núll.

99.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

101.

$$\int_0^1 \left(1-6x+12x^2-8x^3\right)dx=\left(x-3x^2+4x^3-2x^4\right)=(1-3+4-2)(0-0+0-0)=0$$

103.

$$7-\frac{5}{4}=\frac{23}{4}$$

105. Heildisstofninn er neikvæður á bilinu $[-2,3]$.

107. $x\le x^2$ yfir $[1,2]$, þannig að $\sqrt{1+x}\le\sqrt{1+x^2}$ yfir $[1,2]$.

109. $\cos(t)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Margfaldið með lengd bilsins til að fá ójöfnuna.

111.

$$f_{\text{ave}}=0;c=0$$

113. $\frac{3}{2}$ þegar $c=\pm\frac{3}{2}$

115.

$$f_{\text{ave}}=0;c=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

117. $L_{100}=1{,}294$, $R_{100}=1{,}301$; hið nákvæma meðaltal er á milli þessara gilda.

119.

$$L_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5178,\ R_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5294$$

121. $L_1=0$, $L_{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)=8{,}743493$, $L_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=12{,}861728$. Nákvæma svarið $\approx 26{,}799$, þannig að L_{100} er ekki nákvæmt.

123. $L_1\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=1{,}352$, $L_{10}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}1837$, $L_{100}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}2956$. Nákvæma svarið $\approx -0{,}303$, þannig að L_{100} er ekki rétt með einum aukastaf.

125. Notið $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$. Síðan, $B-A=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}1\,dx=\frac{\pi}{2}$.

127. $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\pi$, þannig að deila skal með lengd bilsins, 2π. $\cos^2 t$ hefur lotuna π, þannig að já, þetta er rétt.

129. Heildið nær hámarki þegar stærsta bilið þar sem p er óneikvætt er notað. Því gildir $A=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ og $B=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

131. Ef $f(t_0)>g(t_0)$ fyrir eitthvert $t_0\in[a,b]$, þá er $f-g$ samfellt og því er til bil sem inniheldur t_0 þannig að $f(t)>g(t)$ á bilinu $[c,d]$, og þá $\int_d^d f(t)\,dt>\int_c^d g(t)\,dt$ á þessu bili.

133.

Heildi f yfir bil er jafnt heildi meðalgildis f yfir sama bil. Því gildir

$$\int_a^b f(t)dt=\int_{a_0}^{a_1}f(t)dt+\int_{a_1}^{a_2}f(t)dt+\cdots+\int_{a_{N+1}}^{a_N}f(t)dt=\int_{a_0}^{a_1}1dt+\int_{a_1}^{a_2}1dt+\cdots+\int_{a_{N+1}}^{a_N}1dt$$
$$=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_N-a_{N-1})=a_N-a_0=b-a.$$

Þegar deilt er með $b-a$ fæst jafnan sem óskað var eftir.

135.

$$\int_0^N f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{N}\int_{i-1}^{i}f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{N}i^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

137. $L_{10}=1{,}815$, $R_{10}=1{,}515$, $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}=1{,}665$, þannig að nálgunin er nákvæm upp á tvo aukastafi.

139. Meðaltalið er $1/2$, sem er jafnt heildinu í þessu tilviki.

141. a. Grafið er andsamhverft með tilliti til $t=\frac{1}{2}$ á bilinu $[0,1]$, og því er meðalgildið núll. b. Fyrir sérhvert gildi a er grafið á milli $[a,a+1]$ hliðrun á grafinu á bilinu $[0,1]$, og því breytast nettóflatarmálin fyrir ofan og neðan ásinn ekki og meðalgildið helst núll.

143. Já, heildið yfir sérhvert bil af lengd 1 er hið sama.

Æfingar úr undirkafla 5.3

145. Já. Það leiðir af meðalgildissetningunni fyrir heildi.

147. $F'(2)=-1$; meðalgildi F' yfir $[1,2]$ er $-1/2$.

149.

$$e^{\cos x}$$

151.

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

153.

$$\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2}$$

155.

$$-\sqrt{1-\cos^2 x}\,\frac{d}{dx}\cos x=|\sin x|\sin x$$

157.

$$2x\,\frac{|x|}{1+x^2}$$

159.

$$\ln\left(e^{2x}\right)\frac{d}{dx}e^x=2xe^x$$

161. a. f er jákvætt á $(1,2)$ og $(5,6)$, neikvætt á $(0,1)$ og $(3,4)$, og jafnt núlli á $(2,3)$ og $(4,5)$. b. Hágildið er 2 og lággildið er -3. c. Meðalgildið er 0.

163. a. ℓ er jákvætt á $(0,1)$ og $(3,6)$, og neikvætt á $(1,3)$. b. Það er vaxandi á $(0,1)$ og $(3,5)$, og það er fast á $(1,3)$ og $(5,6)$. c. Meðalgildi þess er $\frac{1}{3}$.

165.

$$T_{10}=49{,}08\,,\int_{-4}^{3}\left(x^3+6x^2+x-5\right)dx=48$$

167.

$$T_{10}=260{,}836\,,\int_{1}^{9}\left(\sqrt{x}+x^2\right)dx=260$$

169.

$$T_{10}=3{,}058\,,\int_{1}^{4}\frac{4}{x^2}\,dx=3$$

171.

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-5x\,,F(3)-F(-2)=-\frac{35}{6}$$

173.

$$F(x)=-\frac{t^5}{5}+\frac{13t^3}{3}-36t\,,F(3)-F(2)=\frac{62}{15}$$

175.

$$F(x)=\frac{x^{100}}{100}\,,F(1)-F(0)=\frac{1}{100}$$

177.

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}\,,F(4)-F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1125}{64}$$

179.

$$F(x)=\sqrt{x}\,,F(4)-F(1)=1$$

181.

$$F(x)=\frac{4}{3}t^{3/4}\,,F(16)-F(1)=\frac{28}{3}$$

183.

$$F(x)=-\cos x\,,F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=1$$

185.

$$F(x)=\sec x, F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\sqrt{2}-1$$

187.

$$F(x)=-\cot(x), F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

189.

$$F(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}, F(-1)-F(-2)=\frac{7}{8}$$

191.

$$F(x)=e^x-e$$

193.

$$F(x)=0$$

195.

$$\int_{-2}^{-1}(t^2-2t-3)\,dt-\int_{-1}^{3}(t^2-2t-3)\,dt+\int_{3}^{4}(t^2-2t-3)\,dt=\frac{46}{3}$$

197.

$$-\int_{-\pi/2}^{0}\sin t\,dt+\int_{0}^{\pi/2}\sin t\,dt=2$$

199. a. Meðaltalið er $42{,}4\ \times\ 10^9$ lítrar á mánuði þar sem $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ hefur lotuna 12 og heildið 0 yfir sérhverja lotu. Notkunin er jöfn meðaltalinu þegar $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=0$, þegar $t=3$, og þegar $t=9$. b. Heildarnotkunin er meðalnotkunin margfölduð með tímalengdinni: $42{,}4\ \times\ 12\ \times\ 10^9=5{,}09\ \times\ 10^{11}$ lítrar. c.

$$10^9\left(42{,}4-\frac{3{,}8}{6}\int_3^9\cos\left(\frac{\pi\ t}{6}\right)dt\right)=10^9\left(42{,}4+\frac{7{,}6}{\pi}\right)=44{,}82\times10^9$$

201. Ef f er ekki fastafall, þá er meðalgildi þess stranglega minna en hágildið og stærra en lággildið, sem bæði nást á $[a,b]$ samkvæmt útgildissetningunni.

203. a. $d^2\theta=(a\cos\theta+c)^2+b^2\sin^2\theta=a^2+c^2\cos^2\theta+2ac\cos\theta=(a+c\cos\theta)^2$; b. $\bar{d}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a+c\cos\theta)\,d\theta=a$

205. Meðalþyngdarkraftur $= \dfrac{GmM}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(a+2\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\right)^2}\,d\theta$.

Æfingar úr undirkafla 5.4

207.

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int x^{1/2}\,dx-\int x^{-1/2}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+C_1-2x^{1/2}+C_2=\frac{2}{3}x^{3/2}-2x^{1/2}+C$$

209.

$$\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

211.

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_0^{\pi}\cos x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}-(\sin x)\Big|_0^{\pi}=(-(-1)+1)-(0-0)=2$$

213. $P(s)=4s$, þannig að $\dfrac{dP}{ds}=4$ og $\displaystyle\int_2^4 4\,ds=8$.

215.

$$\int_1^2 N\,ds=N$$

217. Með p eins og í fyrra dæminu eykst flatarmál hvers hinna 12 fimmhyrninga úr 2p í 4p flatarmálseiningar, þannig að heildaraukningin á flatarmáli tólfflötungsins er 36p flatarmálseiningar.

219.

$$18s^2=6\int_s^{2s}2x\,dx$$

221.

$$12\pi R^2=8\pi\int_R^{2R} r\,dr$$

223. $d(t)=\displaystyle\int_0^t v(s)\,ds=4t-t^2$. Heildarvegalengdin er $d(2)=4\,\text{m}$.

225. $d(t)=\displaystyle\int_0^t v(s)\,ds$. Fyrir $t<3$, $d(t)=\displaystyle\int_0^t(6-2t)\,dt=6t-t^2$. Fyrir $t>3$, $d(t)=d(3)+\displaystyle\int_3^t(2t-6)\,dt=9+\left(t^2-6t\right)\Big|_3^6$. Heildarvegalengdin er $d(6)=18\,\text{m}$.

227. $v(t)=40-9{,}8t$ m/sec ; $h(t)=1{,}5+40t-4{,}9t^2$ m/s

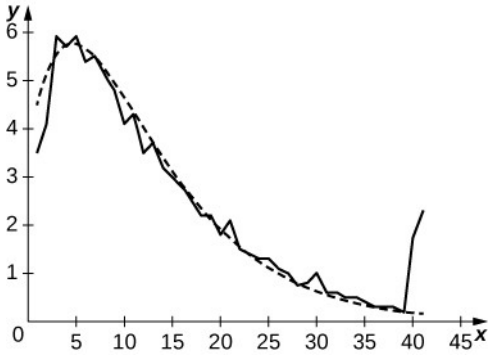
229. Nettóaukningin er 1 eining.

231. Við $t=5$, er vatnshæðin $x=\left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}$ m.. Heildarbreytingin á hæð frá $t=5$ til $t=10$ er $\left(\frac{30}{\pi}\right)^{1/3}-\left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}$ m.

233. Heildarorkunotkun á dag er áætluð sem summa aflgildanna á hverri klukkustund, eða 911 GWst.

235. 17 kJ

237. a. 54,3%; b. 27,00%; c. Ferillinn á eftirfarandi grafi er $2{,}35\,(t+3)\,e^{-0{,}15\,(t+3)}$.



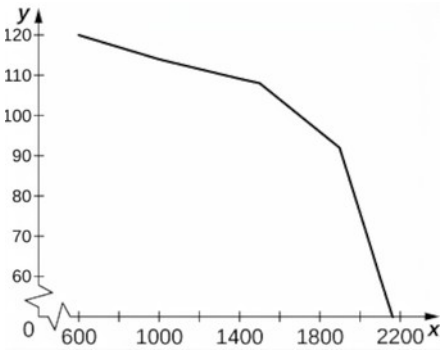
239. Við þurrar aðstæður gildir að fyrir upphafshraðann $v_0=30$ m/s er $D=64{,}3$, en þegar $v_0=25$, $D=44{,}64$. Við blautar aðstæður gildir $v_0=30$, $D=180$, en þegar $v_0=25$, $D=125$.

241. 225 kal

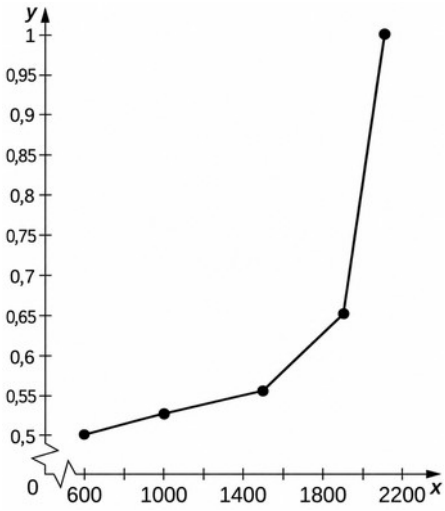
243.

$$E\,(100)=12{,}8,\ E\,(200)=10{,}8,\ E\,(300)=8{,}8$$

245. a.



b. Milli 600 og 1000 er meðalbreyting hraðans −0,015 km/klst. fyrir hvert ökutæki á klukkustund á akrein. Milli 1000 og 1500 er hún −0,012 km/klst. og milli 1500 og 2100 er hún −0,08 km/klst. fyrir hvert ökutæki á klukkustund á akrein. Lækkunin er því ekki línuleg.
c.



Grafið er ólínulegt og mínútum á hvern kílómetra fjölgar verulega þegar fjöldi ökutækja á klukkustund á hverri akrein nær 2000.

247.

$$\frac{1}{37}\int_0^{37} p(t)\,dt = \frac{0{,}07(37)^3}{4} + \frac{2{,}42(37)^2}{3} - \frac{25{,}63(37)}{2} + 521{,}23 \approx 2037$$

249. Meðalhröðunin er

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{0{,}35}{3}\,t^3 + \frac{0{,}72}{2}\,t^2 + 5{,}22\,t\right]\Big|_0^5 = \frac{1}{5}\left(-\frac{0{,}35}{3}\,(5^3) + \frac{0{,}72}{2}\,(5^2) + 5{,}22\,(5)\right) \approx 4{,}1 \text{ m/sek.}^2$$

251.

$$s\left(t\right)=\int v\left(t\right)\,dt=\int\left(-\frac{7}{60}\,t^3+0{,}36\,t^2+5{,}22\,t+15\right)dt$$

$$=-\frac{7}{240}\,t^4+0{,}12\,t^3+2{,}61\,t^2+15\,t+C,\quad C=0,\quad s\left(5\right)\approx 137\ \text{m}$$

253.

$$\frac{1}{40}\int_0^{40}\left(-0{,}068t+5{,}14\right)dt=-\frac{0{,}068\left(40\right)}{2}+5{,}14=3{,}78\,\text{m/sec}$$

Æfingar úr undirkafla 5.5

255.

$$u=h\left(x\right)$$

257.

$$f\left(u\right)=\frac{\left(u+1\right)^2}{\sqrt{u}}$$

259.

$$du=8\,x\,dx\,;f\left(u\right)=\frac{1}{8\sqrt{u}}$$

261.

$$\frac{1}{5}\left(x+1\right)^5+C$$

263.

$$-\frac{1}{12\left(2\,x-3\right)^6}+C$$

265.

$$\sqrt{x^2+1}+C$$

267.

$$\frac{1}{8}\left(x^2-2\,x\right)^4+C$$

269.

$$\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}+C$$

271.

$$\frac{(1-x)^{101}}{101}-\frac{(1-x)^{100}}{100}+C$$

273.

$$\int (11x-7)^{-2}\,dx=-\frac{1}{22(11x-7)^2}+C$$

275.

$$-\frac{\cos^4\theta}{4}+C$$

277.

$$-\frac{\cos^3(\pi t)}{3\pi}+C$$

279.

$$-\frac{1}{4}\cos^2\left(t^2\right)+C$$

281.

$$-\frac{1}{3\left(x^3-3\right)}+C$$

283.

$$-\frac{2\left(y^3-2\right)}{3\sqrt{1-y^3}}+C$$

285.

$$\frac{1}{33}\left(1-\cos^3\theta\right)^{11}+C$$

287.

$$\frac{1}{12}\left(\sin^3\theta-3\sin^2\theta\right)^4+C$$

289. $L_{50}=-8{,}5779$. Nákvæmt gildi heildisins er $\frac{-81}{8}$

291. $L_{50}=-0{,}006399\ldots$ Nákvæma flatarmálið er 0.

293.

$$u=1+x^2, du=2x\,dx, \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2}\,du=\sqrt{2}-1$$

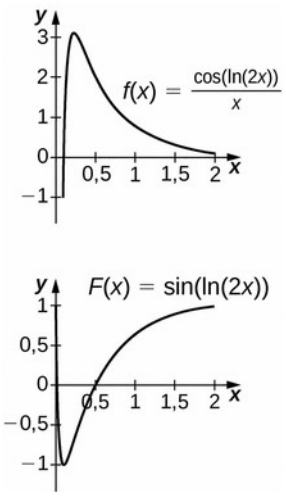
295.

$$u=1+t^3, du=3t^2\,dt, \frac{1}{3}\int_1^2 u^{-1/2}\,du=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

297.

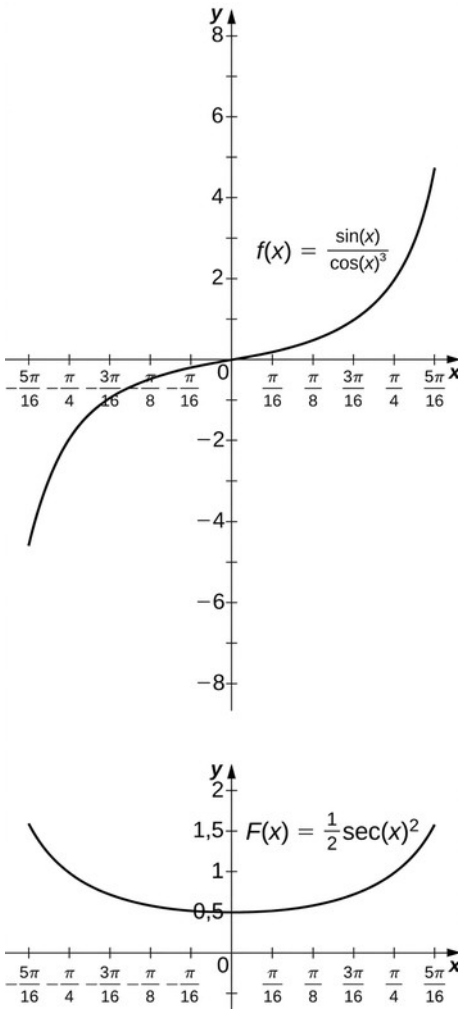
$$u=\cos\theta, du=-\sin\theta\,d\theta, \int_{1/\sqrt{2}}^1 u^{-4}\,du=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

299.



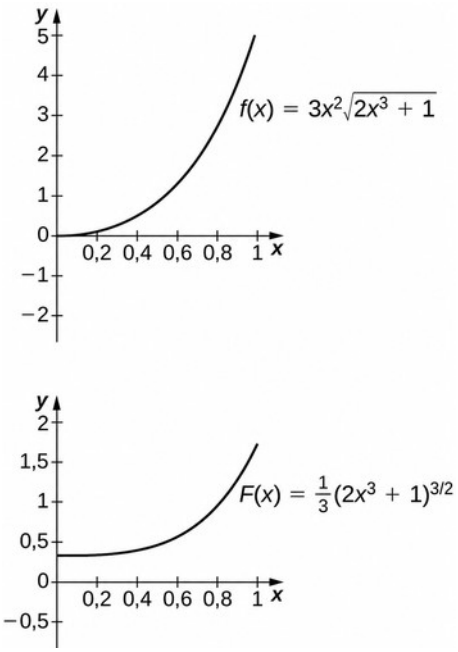
Stofnfallið er $y=\sin\left(\ln\left(2x\right)\right)$. Þar sem stofnfallið er ekki samfellt í $x=0$, er ekki unnt að velja C þannig að $y=\sin\left(\ln\left(2x\right)\right)-C$ svari til ákveðins heildis.

301.



Stofnfallið er $y=\frac{1}{2}\sec^2 x$. Veljið $C=-2$ þannig að $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

303.



Stofnfallið er $y=\frac{1}{3}\left(2x^3+1\right)^{3/2}$. Taka skal $C=-\frac{1}{3}$.

305. Nei, vegna þess að heildisstofninn er ósamfelldur í $x=1$.

307. $u=\sin\left(t^2\right)$; heildið verður þá $\frac{1}{2}\int_0^0 u\,du$.

309. $u=\left(1+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)$; heildið verður $-\int_{5/4}^{5/4}\frac{1}{u}du$.

311.

$u=1-t$; heildið verður

$$\int_1^{-1} u\cos\left(\pi\left(1-u\right)\right)du$$

$$=\int_1^{-1} u\left[\cos\pi\cos\pi u-\sin\pi\sin\pi u\right]du$$

$$=-\int_1^{-1} u\cos\pi u du$$

$$=\int_{-1}^{1} u\cos\pi u du=0$$

þar sem heildisstofninn er oddstætt fall.

313. Ef sett er $u=c\,x$ og $d\,u=c\,d\,x$ fæst

$$\frac{1}{\frac{b}{c}-\frac{a}{c}}\int_{a/c}^{b/c} f(cx)\,dx=\frac{c}{b-a}\int_{u=a}^{u=b} f(u)\frac{du}{c}=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\,du.$$

315. $\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{u=1-x^2}^{1}\frac{du}{u^a}=\frac{1}{2(1-a)}u^{1-a}\Big|_{u=1-x^2}^{1}=\frac{1}{2(1-a)}\left(1-\left(1-x^2\right)^{1-a}\right)$. Þegar $x\to 1$ markgildið er $\frac{1}{2(1-a)}$ ef $a<1$, og markgildið stefnir á $+\infty$ ef $a\geq 1$.

317.

$$\int_{t=\pi}^{0} b\sqrt{1-\cos^2 t}\times(-a\sin t)\,dt=\int_{t=0}^{\pi} ab\sin^2 t\,dt$$

319.

$$f(t)=2\cos(3t)-\cos(2t);\int_0^{\pi}\left(2\cos(3t)-\cos(2t)\right)dt=0$$

Æfingar úr undirkafla 5.6

321.

$$\frac{-1}{3}e^{-3x}+C$$

323.

$$-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$$

325.

$$2\ln|x|+C \text{ eða } \ln\left(x^2\right)+\text{C}$$

327.

$$2\sqrt{x}+C$$

329.

$$-\frac{1}{\ln x}+C$$

331.

$$\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)+C$$

333.

$$\ln\left(x\cos x\right)+C$$

335.

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\cos\left(x\right)\right)\right)^2+C$$

337.

$$\frac{-e^{-x^3}}{3}+C$$

339.

$$e^{\tan x}+C$$

341.

$$t+C$$

343.

$$\frac{2}{9}x^3\left(\ln\left(x^3\right)-1\right)+C$$

345.

$$2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)+C$$

347.

$$\int_0^{\ln x} e^t\,dt=e^t|_0^{\ln x}=e^{\ln x}-e^0=x-1$$

349.

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\sin\left(3x\right)+\cos\left(3x\right)\right|+\mathrm{C}$$

351.

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\csc\left(x^2\right)+\cot\left(x^2\right)\right|+C$$

353.

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\csc x\right)\right)^2+C$$

355.

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{26}{7}\right)$$

357.

$$\ln\left(\sqrt{3}-1\right)$$

359.

$$\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

361.

$$y-2\ln\left|y+1\right|+C$$

363.

$$\ln\left|\sin x-\cos x\right|+C$$

365.

$$-\frac{1}{3}\left(1-\left(\ln x\right)^2\right)^{3/2}+C$$

367. Nákvæm lausn: $\frac{e-1}{e}$, $R_{50}=0{,}6258$. Þar sem f er minnkandi vanmetur matið út frá hægri endapunkti flatarmálið.

369. Nákvæm lausn: $\frac{2\ \ln\left(3\right)-\ln\left(6\right)}{2}$, $R_{50}=0{,}2033$. Þar sem f er vaxandi er flatarmálið ofmetið þegar hægri endapunktar eru notaðir við matið.

371. Nákvæm lausn: $-\frac{1}{\ln\left(4\right)}$, $R_{50}=-0{,}7164$. Þar sem f er neikvætt og vaxandi á bilinu gefur mat með hægri endapunktum of hátt mat á gildi heildisins en of lágt mat á flatarmáli svæðisins (tölugildi heildisins).

373.

$$\frac{11}{2}\ln 2$$

375.

$$\frac{1}{\ln\left(65.536\right)}$$

377. $\int_N^{N+1} x\,e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(e^{-N^2}-e^{-\left(N+1\right)^2}\right)$. Stærðin er minni en 0,01 þegar $N=2$.

379.

$$\int_a^b \frac{dx}{x}=\ln\left(b\right)-\ln\left(a\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)-\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\int_{1/b}^{1/a}\frac{dx}{x}$$

381. 23

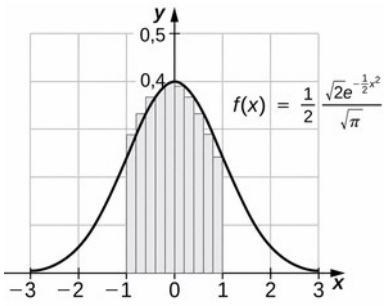
383. Við megum gera ráð fyrir að $x>1$, svo $\frac{1}{x}<1$. Þá fæst $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}$. Gerum nú innsetninguna $u=\frac{1}{t}$, þannig að $du=-\frac{dt}{t^2}$ og $\frac{du}{u}=-\frac{dt}{t}$, og breytum heildunarmörkunum: $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}=-\int_1^{x} \frac{du}{u}=-\ln x$.

385. Svör eru mismunandi.

387. $x=E(\ln(x))$. Þá $1=\frac{E'(\ln x)}{x}$ eða $x=E'(\ln x)$. Þar sem sérhverja tölu t má rita $t=\ln x$ fyrir eitthvert x, og fyrir slíkt t gildir $x=E(t)$, leiðir af því að fyrir sérhvert t, $E'(t)=E(t)$.

389.

$$R_{10}=0{,}6811,\ R_{100}=0{,}6827$$



Æfingar úr undirkafla 5.7

391.

$$\sin^{-1} x\big|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\pi}{3}$$

393.

$$\tan^{-1} x\big|_{\sqrt{3}}^{1}=-\frac{\pi}{12}$$

395.

$$\sec^{-1}\big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

397.

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

399.

$$\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

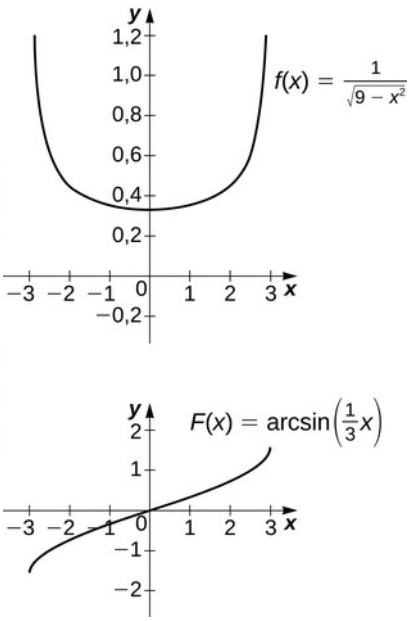
401.

$$\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

403. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$. Því er $\sin^{-1}t=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}t$. Munurinn á þeim er fasti.

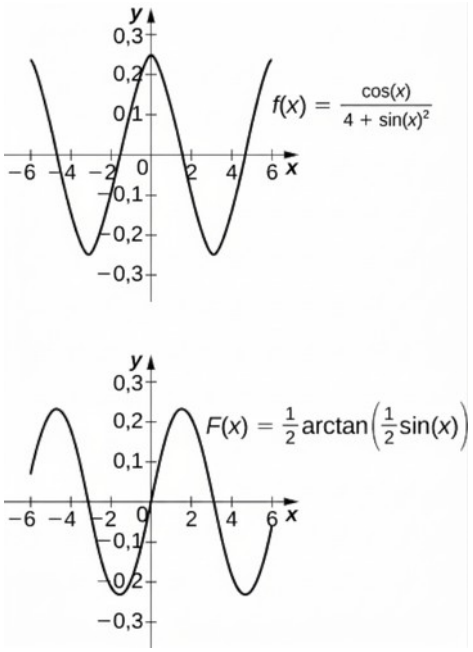
405. $\sqrt{1-t^2}$ er ekki skilgreint sem rauntala þegar $t>1$.

407.



Stofnfallið er $\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$. Ef tekið er $C=\frac{\pi}{2}$ fæst gildi ákveðna heildisins aftur.

409.



Stofnfallið er $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$. Ef tekið er $C=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin(6)}{2}\right)$ fæst gildi ákveðna heildisins aftur.

411.

$$\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}t\right)^2+C$$

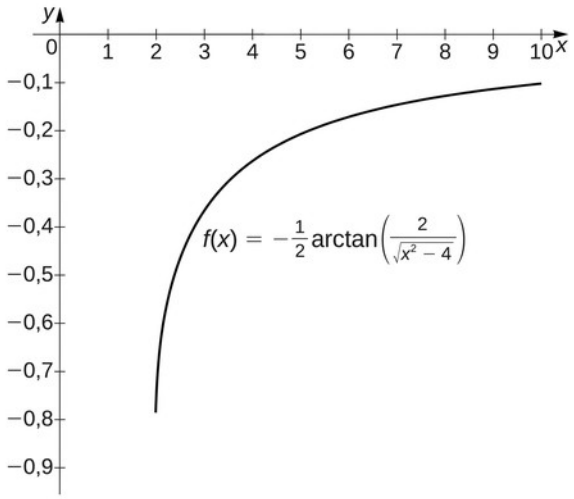
413.

$$\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2t)\right)^2+C$$

415.

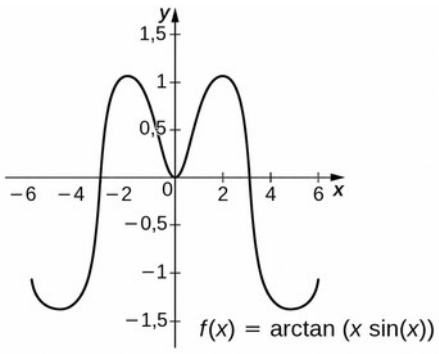
$$\frac{1}{4}\left(\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)+C$$

417.



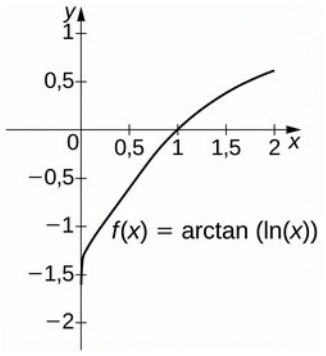
Stofnfallið er $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$. Með því að taka $C=0$ fæst gildi ákveðna heildisins yfir $[2,6]$.

419.



Almenna stofnfallið er $\tan^{-1}(x\sin x)+C$. Með því að velja $C=-\tan^{-1}(6\sin(6))$ fæst gildi ákveðna heildisins.

421.



Almenna stofnfallið er $\tan^{-1}(\ln x)+C$. Með því að velja $C=\frac{\pi}{2}=\tan^{-1}\infty$ fæst gildi ákveðna heildisins.

423.

$$\sin^{-1}(e^t)+C$$

425.

$$\sin^{-1}(\ln t)+C$$

427.

$$-\frac{1}{4}\left(\cos^{-1}(2t)\right)^2+C$$

429.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

431.

$$1-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

433. $2\tan^{-1}(A)\to\pi$ sem $A\to\infty$

435. Með því að nota vísbendinguna fæst $\int\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x+\cot^2 x}\,dx=\int\frac{\csc^2 x}{1+2\cot^2 x}\,dx$. Setjum $u=\sqrt{2}\cot x$. Því næst, $du=-\sqrt{2}\csc^2 x$ og heildið er $-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}\cot x)+C$. Ef notuð er samsemdin $\tan^{-1}s+\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi}{2}$, þá má einnig rita þetta $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

437. $x \approx \pm 1{,}7321$. The left endpoint estimate with $N = 100$ is 4,781 and these decimals persist for $N = 500$.

Yfirlitsæfingar

439. Ósatt

441. Satt

443. $L_4 = 5{,}25$, $R_4 = 3{,}25$, nákvæmt svar: 4

445. $L_4 = 5{,}364$, $R_4 = 5{,}364$, nákvæmt svar: 5,870

447.

$$-\frac{4}{3}$$

449. 1

451.

$$-\frac{1}{2(x+4)^2}+C$$

453.

$$\frac{4}{3}\sin^{-1}\left(x^3\right)+C$$

455.

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}}$$

457.

$$4\frac{\ln x}{x}+1$$

459. \$6.328.113

461. \$73,36

463.

485 m/sek.

Kafli 6

Stöðumat

6.1

12 einingar²

6.2

$\frac{3}{10}$ eining²

6.3

$2+2\sqrt{2}$ einingar²

6.4

$\frac{5}{3}$ einingar²

6.5

$\frac{5}{3}$ einingar²

6.7

$$\frac{\pi}{2}$$

6.8

8π einingar³

6.9

21π einingar³

6.10

$\frac{10\pi}{3}$ einingar³

6.11

60π einingar³

6.12

$\frac{15\pi}{2}$ einingar³

6.13

8π einingar³

6.14

12π einingar³

6.15

$\frac{11\pi}{6}$ einingar³

6.16

$\frac{\pi}{6}$ einingar³

6.17

Notið hringkragaaðferðina; $V=\int_{-1}^{1}\pi\left[\left(2-x^2\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx$

6.18

$$\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)\approx 1{,}697$$

6.19

$$\text{Bogalengd}\approx 3{,}8202$$

6.20

$$\text{Bogalengd}=3{,}15018$$

6.21

$$\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\approx 3{,}133$$

6.22

$$12\pi$$

6.23

$$70/3$$

6.24

$$24\pi$$

6.25

1,6 J

6.26

Um það bil 6.793 .286 J

6.27

156.800 N

6.28

Um það bil 30,757,940,000 N eða 30,757,940 kN

6.29

$$M=24\,,\,\bar{x}=\frac{2}{5}\,\text{m}$$

6.30

$\left(-1\,,-1\right)$ m

6.31

Þungamiðja svæðisins er $\left(3/2\,,6/5\right)$.

6.32

Þungamiðja svæðisins er $(1, 13/5)$.

6.33

Þungamiðja svæðisins er $(0, 2/5)$.

6.34

$6\pi^2$ einingar³

6.35

a. $\frac{d}{dx}\ln(2x^2+x)=\frac{4x+1}{2x^2+x}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln(x^3)\right)^2=\frac{6\ln(x^3)}{x}$

6.36

$$\int \frac{x^2}{x^3+6}\,dx=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+6\right|+C$$

6.37

$$4\ln 2$$

6.38

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right)=e^{x^2-5x}(2x-5)$

b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3=6e^{6t}$

6.39

$$\int \frac{4}{e^{3x}}\,dx=-\frac{4}{3}e^{-3x}+C$$

6.40

a. $\frac{d}{dt}4^{t^4}=4^{t^4}(\ln 4)(4t^3)$

b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{x}{(\ln 3)(x^2+1)}$

6.41

$$\int x^2 2^{x^3}\,dx=\frac{1}{3\ln 2}2^{x^3}+C$$

6.42

There are 81.377.396 bacteria in the population after 4 hours. The population reaches 100 million bacteria after 244,12 minutes.

6.43

Við 5 % vexti þarf hún að fjárfesta 223.130,16 €. Við 6 % vexti þarf hún að fjárfesta 165.298,89 €.

6.44

38,90 mánuðir

6.45

The coffee is first cool enough to serve about 3,5 minutes after it is poured. The coffee is too cold to serve about 7 minutes after it is poured.

6.46

A total of 94,13 g of carbon remains. The artifact is approximately 13.300 years old.

6.47

a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2+3x\right)\right)=\left(\operatorname{sech}^2\left(x^2+3x\right)\right)\left(2x+3\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left(\sinh x\right)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)^{-2}=-2\left(\sinh x\right)^{-3}\cosh x$

6.48

a. $\int \sinh^3 x\cosh x\,dx=\frac{\sinh^4 x}{4}+C$

b. $\int \operatorname{sech}^2\left(3x\right)dx=\frac{\tanh\left(3x\right)}{3}+C$

6.49

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}\left(3x\right)\right)=\frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)^3=\frac{3\left(\coth^{-1}x\right)^2}{1-x^2}$

6.50

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx=-\operatorname{sech}^{-1}\left(e^x\right)+C$

6.51

52,95 m

Æfingar úr undirkafla 6.1

1.

$$\frac{32}{3}$$

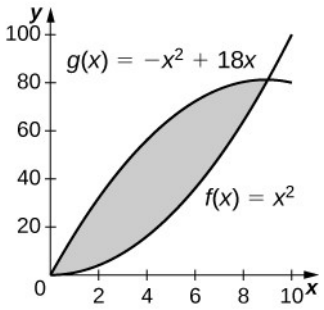
3.

$$\frac{13}{12}$$

5.

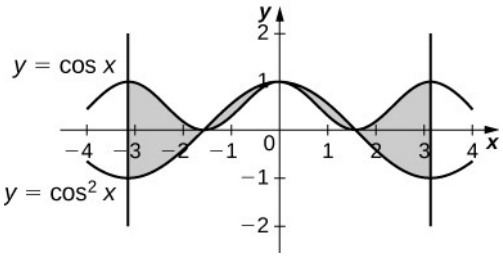
$$36$$

7.



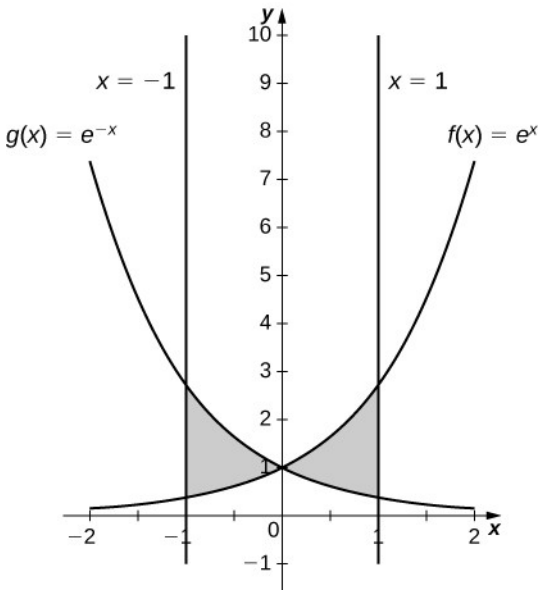
243 ferningseiningar

9.



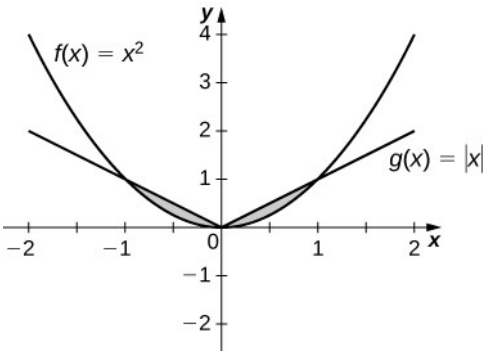
4

11.



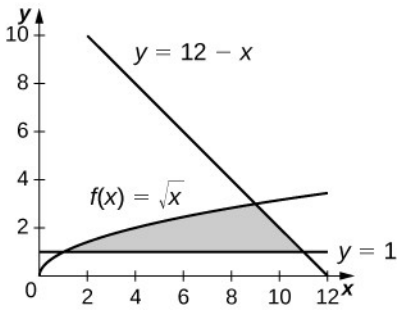
$$\frac{2(e-1)^2}{e}$$

13.



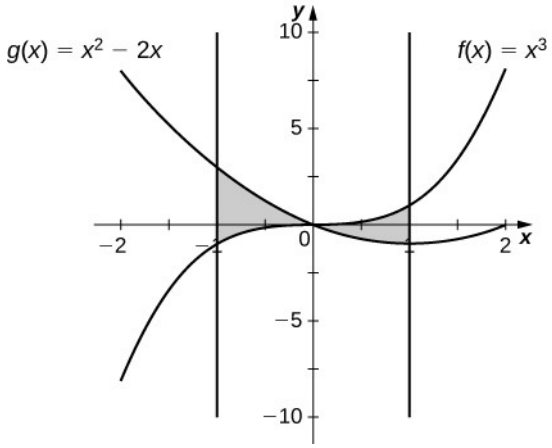
$$\frac{1}{3}$$

15.



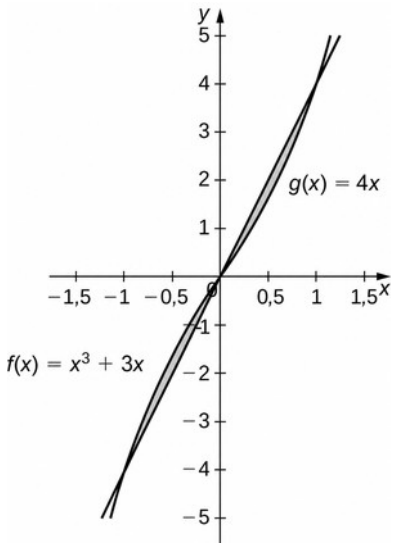
$$\frac{34}{3}$$

17.



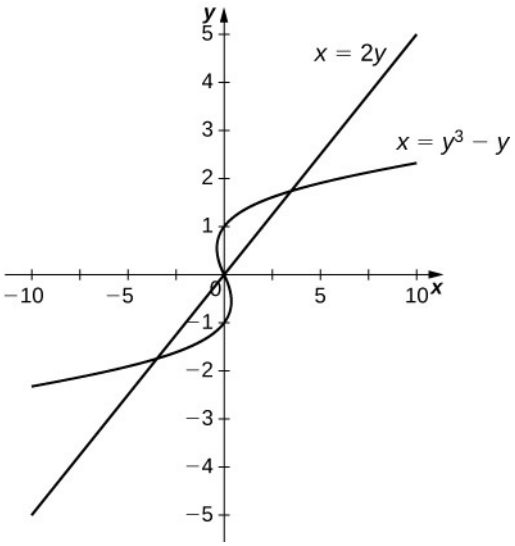
$$\frac{5}{2}$$

19.



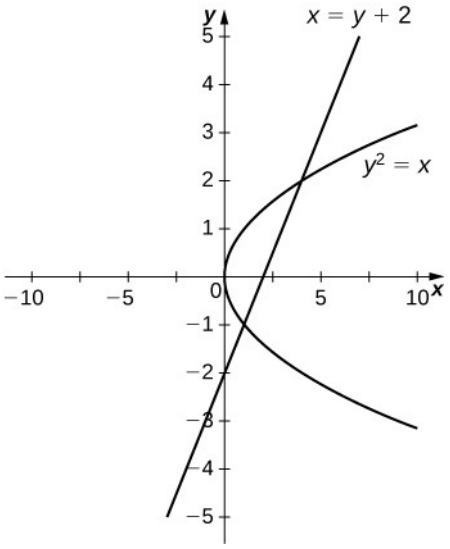
$$\frac{1}{2}$$

21.



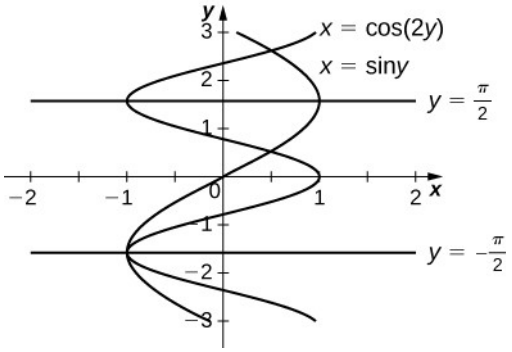
$$\frac{9}{2}$$

23.



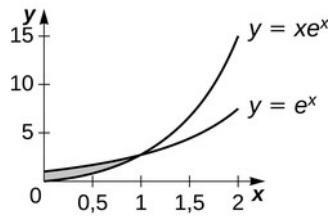
$$\frac{9}{2}$$

25.



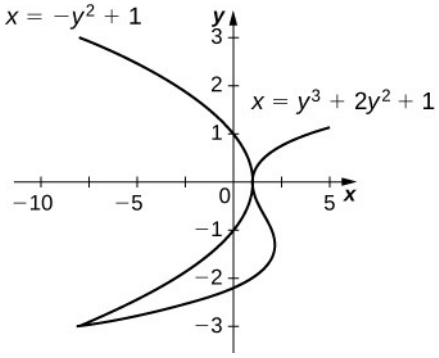
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

27.



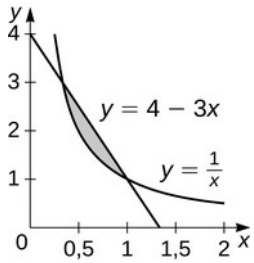
$$e-2$$

29.



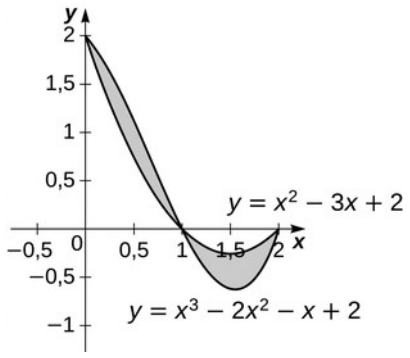
$$\frac{27}{4}$$

31.



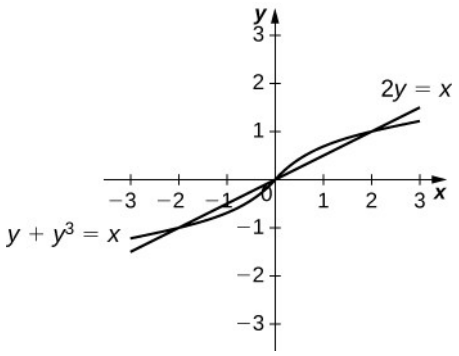
$$\frac{4}{3} - \ln(3)$$

33.



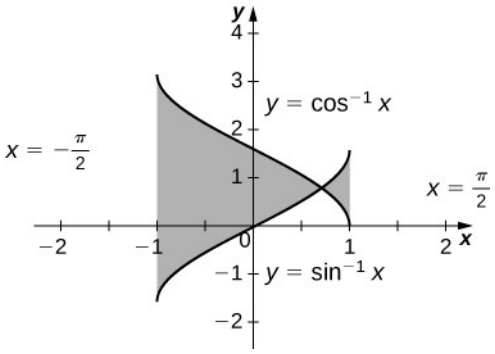
$$\frac{1}{2}$$

35.



$$\frac{1}{2}$$

37.



$$-2\left(\sqrt{2}-\pi\right)$$

39.

$$1{,}067$$

41.

$$1{,}605$$

43.

$$7{,}523$$

45.

$$\frac{3\pi-4}{12}$$

47.

$$1{,}429$$

49. 33.333,33 € heildarhagnaður af sölu 200 farsíma

51. 3,32 mi represents how far ahead the hare is from the tortoise

53.

$$\frac{343}{24}$$

55.

$$4\sqrt{3}$$

57.

$$\pi - \frac{32}{25}$$

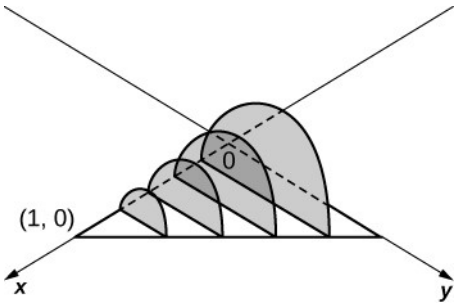
Æfingar úr undirkafla 6.2

63. 8 einingar^3

65. $\frac{32}{3\sqrt{2}}$ einingar^3

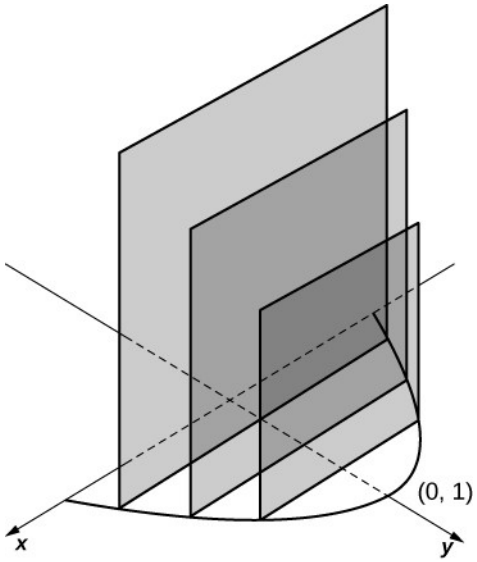
67. $\frac{7}{24}\pi r^2 h$ einingar^3

69.



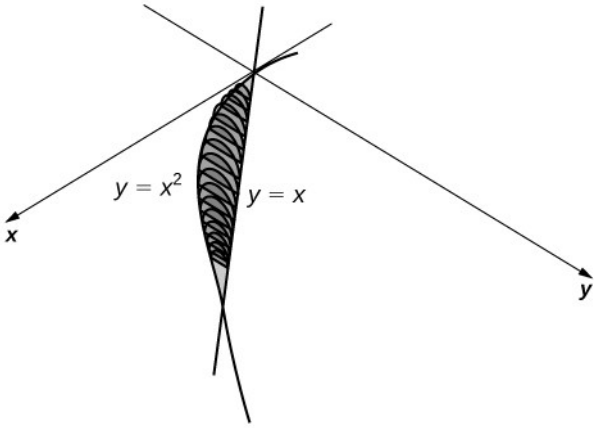
$\frac{\pi}{24}$ einingar^3

71.



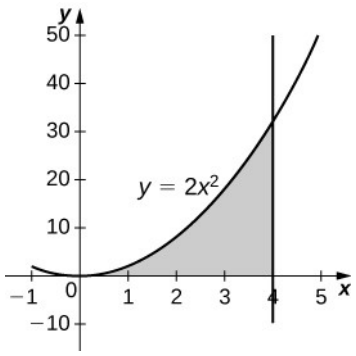
2 einingar^3

73.



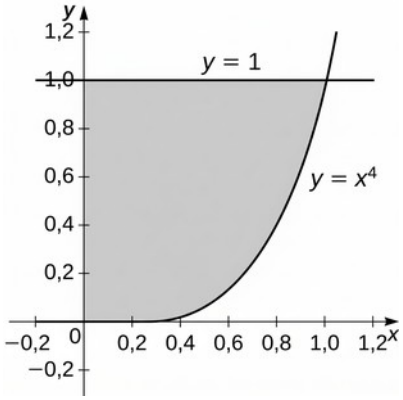
$\frac{\pi}{240}$ einingar^3

75.



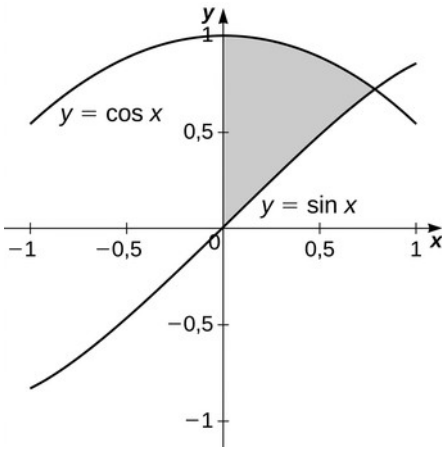
$\frac{4096\,\pi}{5}$ einingar³

77.



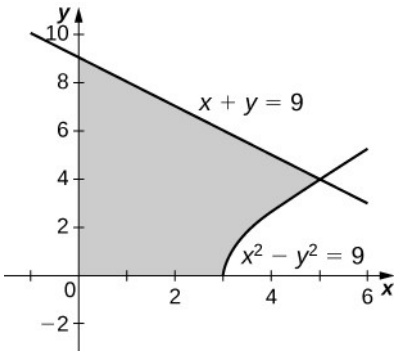
$\frac{8\,\pi}{9}$ einingar³

79.



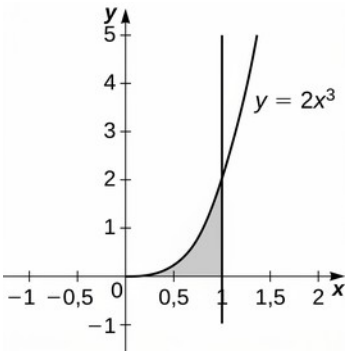
$\frac{\pi}{2}$ einingar^3

81.



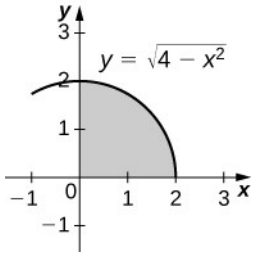
$207\,\pi$ einingar^3

83.



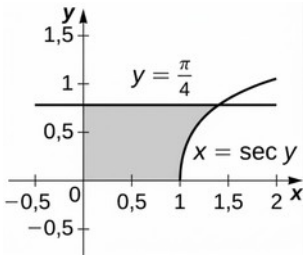
$\frac{4\,\pi}{5}$ einingar^3

85.



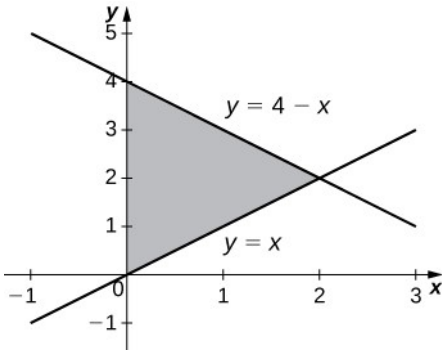
$\frac{16\pi}{3}$ einingar^3

87.



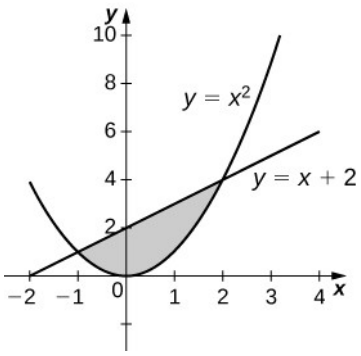
π einingar^3

89.



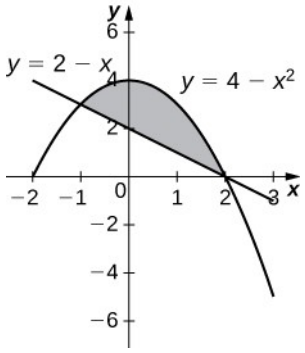
$\frac{16\pi}{3}$ einingar^3

91.



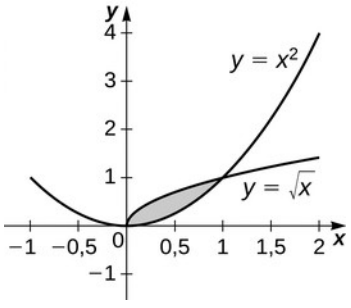
$\frac{72\pi}{5}$ einingar³

93.



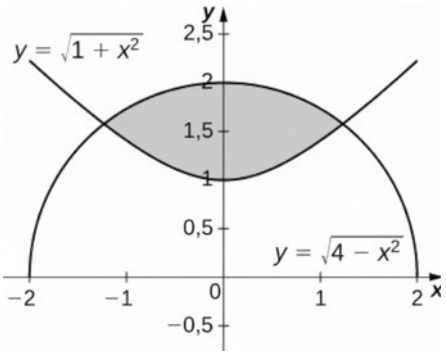
$\frac{108\pi}{5}$ einingar³

95.



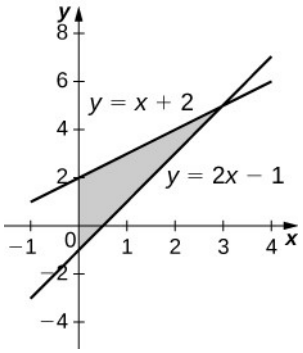
$\frac{3\pi}{10}$ einingar³

97.



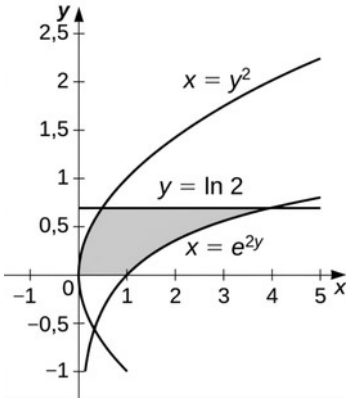
$2\sqrt{6}\,\pi$ einingar³

99.



$9\,\pi$ einingar³

101.



$\frac{\pi}{20}\left(75 - 4\ln^5(2)\right)$ einingar³

103. $\frac{m^2\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ einingar³

105. $\frac{4a^2b\pi}{3}$ einingar^3

107. $2\pi^2$ einingar^3

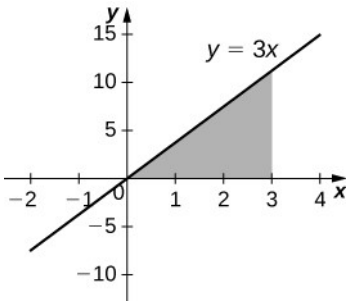
109. $\frac{2ab^2\pi}{3}$ einingar^3

111. $V=\frac{2\pi}{3}(2r+h)(r-h)^2$ einingar^3

113. $\frac{\pi}{3}(h+R)(h-2R)^2$ einingar^3

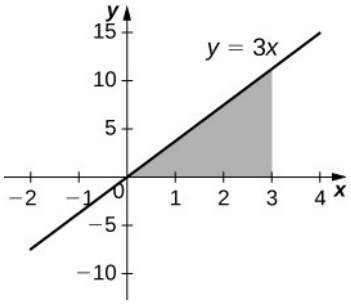
Æfingar úr undirkafla 6.3

115.



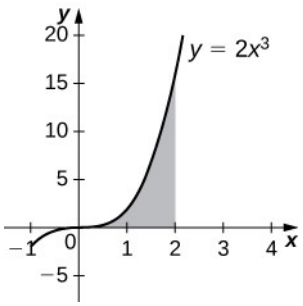
54π einingar^3

117.



81π einingar^3

119.



$\frac{512\pi}{7}$ einingar³

121. 2π einingar³

123. $\frac{2\pi}{3}$ einingar³

125. 2π einingar³

127. $\frac{4\pi}{5}$ einingar³

129. $\frac{64\pi}{3}$ einingar³

131. $\frac{32\pi}{5}$ einingar³

133.

$$\frac{7\pi}{6}$$

135.

$$48\pi$$

137.

$$\frac{308\pi}{5}$$

139.

$$\frac{512\pi}{7}$$

141.

$$\frac{8\pi}{5}$$

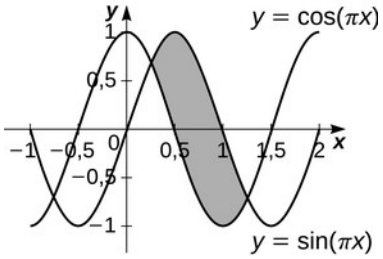
143. $\frac{28\pi}{15}$ einingar³

145. $\frac{3\pi}{10}$ einingar³

147. $\pi\left(\frac{6\cdot 2^{2/3}}{5}-\frac{11}{10}\right)=\frac{\pi}{10}\left(12\cdot 2^{2/3}-11\right)\approx 2,5286$ einingar³

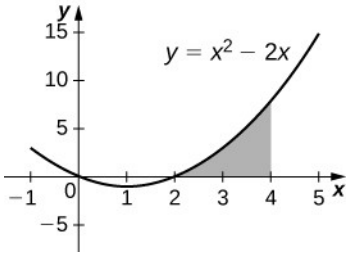
149. 0,9876 einingar³

151.



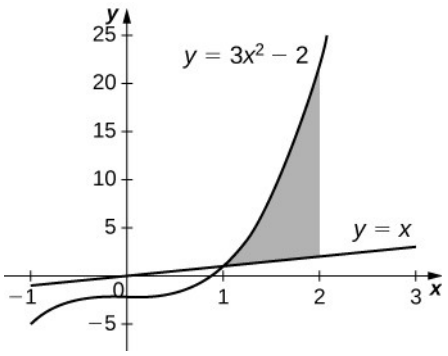
$3\sqrt{2}$ einingar³

153.



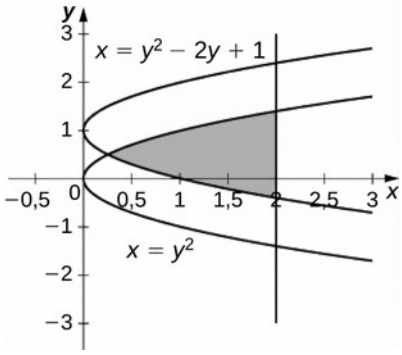
$\frac{496\pi}{15}$ einingar³

155.



$\frac{398\pi}{15}$ einingar³

157.



15,9074 einingar³

159. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ einingar³

161. $\pi r^2 h$ einingar³

163. πa^2 einingar³

Æfingar úr undirkafla 6.4

165.

$$2\sqrt{26}$$

167.

$$2\sqrt{17}$$

169.

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$$

171.

$$\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

173.

$$\frac{4}{3}$$

175.

$$2{,}0035$$

177.

$$\frac{123}{32}$$

179.

$$10$$

181.

$$\frac{20}{3}$$

183.

$$\frac{1}{675}\left(229\sqrt{229}-8\right)$$

185.

$$\frac{1}{8}\left(4\sqrt{5}+\ln\left(9+4\sqrt{5}\right)\right)$$

187.

$$1{,}201$$

189.

$$15{,}2341$$

191.

$$\frac{49\pi}{3}$$

193.

$$70\pi\sqrt{2}$$

195.

$$8\pi$$

197.

$$120\pi\sqrt{26}$$

199.

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

201.

$$9\sqrt{2}\pi$$

203.

$$\frac{10\sqrt{10}\pi}{27}\left(73\sqrt{73}-1\right)$$

205.

$$25{,}645$$

207.

$$\pi\left(2+\pi\right)$$

209.

$$10{,}5017$$

211. 24 m

213.

$$2$$

215. Svör geta verið ólík

217. Frekari upplýsingar má finna með því að leita að horni Gabríels.

Æfingar úr undirkafla 6.5

219. 245 J

221.

$$200\,\mathrm{J}$$

223. 1 J

225.

$$\frac{7}{2}$$

227.

$$\ln\left(7776\right)$$

229.

$$\frac{3625\ \pi}{3}$$

231.

$$100\,\pi$$

233.

$$20\,\pi\,\sqrt{15}$$

235. 6 J

237. 5 cm

239. 36 J

241. 18.750 J

243. Þyngd $=7{,}2\ \times\ 10^{10}$ N

Vinna $=2{,}7\ \times\ 10^{12}$ J

245.

$$9{,}71\ \times\ 10^{8}\ \text{N m}$$

247. a. 470.400.000 N, b. 117.600.000 N

249. 36,75 π milljón J

251.

$$\frac{A\,\rho\,H^{2}}{2}$$

253. Svör geta verið ólík

Æfingar úr undirkafla 6.6

255.

$$\frac{5}{4}$$

257.

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

259.

$$\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

261.

$$\frac{3L}{4}$$

263.

$$\frac{\pi}{2}$$

265.

$$\frac{e^2+1}{e^2-1}$$

267.

$$\frac{\pi^2-4}{\pi}$$

269.

$$\frac{1}{4}\left(1+e^2\right)$$

271.

$$\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

273.

$$\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$$

275.

$$\left(0, 3\right)$$

277.

$$\left(0, \frac{4}{\pi}\right)$$

279.

$$\left(\frac{5}{8},\frac{1}{3}\right)$$

281.

$$\frac{2m\pi}{3}$$

283.

$$\pi a^2 b$$

285.

$$\left(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}\right)$$

287.

$$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$$

289.

$$\left(0,\frac{28}{9\pi}\right)$$

291. Massamiðja: $\left(\frac{3a}{8},\frac{2a^2}{5}\right)$, rúmmál: $\frac{\pi a^4}{2}$

293. Rúmmál: $2\pi^2 a^2(b+a)$

Æfingar úr undirkafla 6.7

295.

$$\frac{1}{x}$$

297.

$$-\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

299.

$$\ln(x+1)+C$$

301.

$$\ln(x)+1$$

303.

$$\cot(x)$$

305.

$$\frac{7}{x}$$

307.

$$\csc(x)\sec x$$

309.

$$-2\tan x$$

311.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

313.

$$2-\frac{1}{2}\ln(5)$$

315.

$$\frac{1}{\ln(2)}-1$$

317.

$$\frac{1}{2}\ln(2)$$

319.

$$\frac{1}{3}(\ln x)^3$$

321.

$$\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}}$$

323.

$$x^{-2-(1/x)}(\ln x-1)$$

325.

$$e\,x^{e-1}$$

327.

$$1$$

329.

$$-\frac{1}{x^2}$$

331.

$$\pi - \ln(2)$$

333.

$$\frac{1}{x}$$

335.

$$e^5 - 6 \text{ einingar}^2$$

337.

$$\ln(4) - 1 \text{ einingar}^2$$

339.

$$2{,}8656$$

341.

$$3{,}1502$$

Æfingar úr undirkafla 6.8

349. Satt

351. Satt; $k = \frac{\ln(2)}{t}$

353. 20 klukkustundir

355. Nei. Forngripurinn er um það bil 871 ára gamall.

357. 73 ár

359. 5 dagar 6 klukkustundir 27 mínútur

361.

$$12$$

363.

$$8{,}618\,\%$$

365.

$$6766{,}76\ €$$

367. 9 klukkustundir 13 mínútur

369. 239.179 ár

371. $P'(t)=43\ e^{0{,}01604\,t}$. Stofninum fjölgar stöðugt.

373. Mannfjöldinn nær 10 milljörðum manna árið 2032.

375. $P'(t)=2{,}259\ e^{0{,}06407\,t}$. Stofninum fjölgar stöðugt.

Æfingar úr undirkafla 6.9

377.

$$e^{x} \text{ og } e^{-x}$$

379. Svör geta verið ólík

381. Svör geta verið ólík

383. Svör geta verið ólík

385.

$$3\sinh(3x+1)$$

387.

$$-\tanh(x)\operatorname{sech}(x)$$

389.

$$4\cosh(x)\sinh(x)$$

391.

$$\frac{x\operatorname{sech}^{2}\left(\sqrt{x^{2}+1}\right)}{\sqrt{x^{2}+1}}$$

393.

$$6\sinh^{5}(x)\cosh(x)$$

395.

$$\frac{1}{2}\sinh(2x+1)+C$$

397.

$$\frac{1}{2}\sinh\left(x^2\right)+C$$

399.

$$\frac{1}{3}\cosh^3\left(x\right)+C$$

401.

$$\ln\left(1+\cosh\left(x\right)\right)+C$$

403.

$$\cosh\left(x\right)+\sinh\left(x\right)+C$$

405.

$$\frac{4}{1-16\,x^2}$$

407.

$$\frac{\sinh\left(x\right)}{\sqrt{\cosh^2\left(x\right)+1}}$$

409.

$$-\csc\left(x\right)$$

411.

$$-\frac{1}{\left(x^2-1\right)\tanh^{-1}\left(x\right)}$$

413.

$$\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

415.

$$\sqrt{x^2+1}+C$$

417.

$$\cosh^{-1}\left(e^x\right)+C$$

419. Svör geta verið ólík

421.

$$37{,}30$$

423.

$$y=\frac{1}{c}\cosh\left(c\,x\right)$$

425.

$$-0{,}521095$$

427.

$$10$$

Yfirlitsæfingar

435. Ósatt

437. Ósatt

439.

$$16\sqrt{3}\,units^3$$

441.

$$\frac{162\,\pi}{5}$$

443. a. 4, b. $\frac{128\,\pi}{7}$, c. $\frac{64\,\pi}{5}$

445. a. $1{,}949$, b. $21{,}952$, c. $17{,}099$

447. a. $\frac{31}{6}$, b. $\frac{452\,\pi}{15}$, c. $\frac{31\,\pi}{6}$

449.

$$\pi\ln 17$$

451. Massi: $\frac{1}{2}$, massamiðja: $\left(\frac{18}{35},\frac{9}{22}\right)$

453.

$$\sqrt{17}+\frac{1}{8}\ln\left(33+8\sqrt{17}\right)$$

455. Rúmmál: $\frac{3\,\pi}{4}$, yfirborðsflatarmál: $\pi\left(\sqrt{2}-\sinh^{-1}\left(1\right)+\sinh^{-1}\left(16\right)-\frac{\sqrt{257}}{16}\right)$

457. Um kl. 11:02 fyrir hádegi.

459.

$$\pi\left(1+\sinh\left(1\right)\cosh\left(1\right)\right)$$

Atriðaskrá

A
aðferð Newtons 4.9 Aðferð Newtons
afleiða 3.1 Skilgreining afleiðunnar
afleiðufall 3.2 Afleiðan sem fall
afleiður af hærra stigi 3.2 Afleiðan sem fall
afmáanleg ósamfelldni 2.4 Samfelldni
algebrufall 1.2 Helstu flokkar falla
algildisfall 1.1 Upprifjun á föllum
algilt hágildi 4.3 Hágildi og lággildi
algilt lággildi 4.3 Hágildi og lággildi
algilt útgildi 4.3 Hágildi og lággildi
almagnari 2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi
alríkistekjuskattur 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
andhverf breiðbogaföll 1.5 Vísisföll og lograföll
andhverf hornaföll 1.4 Andhverf föll
andhverft fall 1.4 Andhverf föll
annað afleiðuprófið 4.5 Afleiður og lögun grafs
annars stigs fall 1.2 Helstu flokkar falla
Arkímedes 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi, 5.1 Nálgun flatarmáls
augnabliksbreytingarhraði 3.1 Skilgreining afleiðunnar
augnablikshraði 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu, 3.1 Skilgreining afleiðunnar
Á
ákveðið heildi 5.2 Ákveðið heildi
ávaxtaflugur 5.6 Heildi með vísis- og lografföllum
B
bakteríuvöxtur 5.6 Heildi með vísis- og lografföllum
bestunarverkefni 4.7 Hagnýt bestunarverkefni
beygjuskilapunktur 4.5 Afleiður og lögun grafs
bilatáknun 1.1 Upprifjun á föllum
bogalengd 6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
breiðbogaföll 1.5 Vísisföll og lograföll
breytingarhraði 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu, 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

breytuskipti 5.5 Innsetning
D
deildaform 4.2 Línulegar nálganir og deildi
deildanlegt á S 3.2 Afleiðan sem fall
deildanlegt fall 3.2 Afleiðan sem fall
deildanlegt í a 3.2 Afleiðan sem fall
deildareikningur 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
deildi 4.2 Línulegar nálganir og deildi
deildun 3.1 Skilgreining afleiðunnar
deiliregla 3.3 Deildunarreglur
deiliregla fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
Descartes-lauf 3.8 Fólgin deildun
E
efri summa 5.1 Nálgun flatarmáls
einfaldir vextir 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
einhliða markgildi 2.2 Markgildi falls
eintækt fall 1.4 Andhverf föll
endahegðun 1.2 Helstu flokkar falla, 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur
endapunktar 1.1 Upprifjun á föllum
epsílon-delta-skilgreining á markgildi 2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi
F
fall 1.1 Upprifjun á föllum
fallhlífarstökkvari 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
fastafall 1.2 Helstu flokkar falla
fastaregla 3.3 Deildunarreglur
f_{ave} 5.2 Ákveðið heildi
ferð 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
flatarmál undir ferli 5.1 Nálgun flatarmáls
Flatarmálsvandamálið 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
flatarþéttleiki 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
formerkt flatarmál 5.2 Ákveðið heildi
forystustuðull 1.2 Helstu flokkar falla
fólgin deildun 3.8 Fólgin deildun
fyrsta afleiðuprófið 4.5 Afleiður og lögun grafs
G
gaffalfall 1.2 Helstu flokkar falla
gaffalföll 1.1 Upprifjun á föllum
geislakolsgreining 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun

geislaþéttleiki 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
gervibreyta 5.1 Nálgun flatarmáls, 5.2 Ákveðið heildi
gildatafla 1.1 Upprifjun á föllum
gormstuðull 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
graf falls 1.1 Upprifjun á föllum
grunntala 1.5 Vísisföll og lograföll
H
hallaskurðarform 1.2 Helstu flokkar falla
hallatala 1.2 Helstu flokkar falla
hangandi kaplar 6.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla
háð breyta 1.1 Upprifjun á föllum
hámörkun tekna 4.7 Hagnýt bestunarverkefni
heildanlegt fall 5.2 Ákveðið heildi
heildareikningur 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
heildarflatarmál 5.2 Ákveðið heildi
heildismörk 5.2 Ákveðið heildi
heildisstofn 5.2 Ákveðið heildi
heildun með innsetningu 5.5 Innsetning
heildunarbreyta 5.2 Ákveðið heildi
helmingunartími 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
hlutfallsleg skekkja 4.2 Línulegar nálganir og deildi
Holling-jafna af gerð I 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
Hoover-stíflan 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
hornafallasamsemd 1.3 Hornaföll
hornaföll 1.3 Hornaföll
hraðaminnkun 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
hraði 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
hringkragaaðferð 6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
hröðun 3.1 Skilgreining afleiðunnar, 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
hvelft 4.5 Afleiður og lögun grafs
hylkjaaðferð 6.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki
I
innri punktar 3.2 Afleiðan sem fall
innsæ skilgreining á markgildi 2.2 Markgildi falls
inntak 1.1 Upprifjun á föllum
Í

íssleði 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
ítrunarferli 4.9 Aðferð Newtons
J
jaðarhagnaður 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
jaðarkostnaður 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
jafnstætt fall 1.1 Upprifjun á föllum, 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
jarðskjálfti 1.5 Vísisföll og lograföll
júl 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
K
keðjuferill 6.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla
keðjuregla 3.6 Keðjureglan
keilustúfur 6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
Klemmureglan 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
kólnunarlögmál Newtons 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
kúpni 4.5 Afleiður og lögun grafs
kúpnipróf 4.5 Afleiður og lögun grafs
kúpt 4.5 Afleiður og lögun grafs
L
lárétt aðfella 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur
lárétta línuprófið 1.4 Andhverf föll
Leibniz 3.1 Skilgreining afleiðunnar, 5.2 Ákveðið heildi
línugerving 4.2 Línulegar nálganir og deildi
línuleg nálgun 4.2 Línulegar nálganir og deildi
línulegt fall 1.2 Helstu flokkar falla
logradeildun 3.9 Afleiður vísis- og lografalla
lografall 1.2 Helstu flokkar falla
lotubundin föll. 1.3 Hornaföll
lóðfella 2.2 Markgildi falls
lóðrétta línuprófið 1.1 Upprifjun á föllum
lögmál Hookes 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
lögmál Pascals 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
M
Mandelbrot-mengið 4.9 Aðferð Newtons
margfeldisregla 3.3 Deildunarreglur
margfeldisregla fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
margliðufall 1.2 Helstu flokkar falla

markgildi 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
markgildi þegar x stefnir á óendanlegt 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur, 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur
massamiðja 6.6 Vægi og massamiðjur
meðalbreytingarhraði 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
meðalgildi falls 5.2 Ákveðið heildi
meðalgildissetningin 4.4 Meðalgildissetningin
meðalgildissetningin fyrir heildi 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
meðalhraði 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu, 3.1 Skilgreining afleiðunnar
Milligildissetningin 2.4 Samfelldni
minnkandi á bilinu I 1.1 Upprifjun á föllum
mismunakvóti 3.1 Skilgreining afleiðunnar
mismunaregla 3.3 Deildunarreglur
mismunaregla fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
myndmengi 1.1 Upprifjun á föllum
N
nálgun með hægri endapunktum 5.1 Nálgun flatarmáls
nálgun með vinstri endapunktum 5.1 Nálgun flatarmáls
náttúrlegi logrinn 1.5 Vísisföll og lograföll
náttúrlegt vísisfall 1.5 Vísisföll og lograföll, 3.9 Afleiður vísis- og lografalla
náttúrulegt lografall 3.9 Afleiður vísis- og lografalla
neðri summa 5.1 Nálgun flatarmáls
Newton 3.1 Skilgreining afleiðunnar, 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
núllstöðvar falla 4.9 Aðferð Newtons
núllstöðvar falls 1.1 Upprifjun á föllum
O
oddstætt fall 1.1 Upprifjun á föllum, 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
Ó
óákveðið heildi 4.10 Stofnföll
óákveðin form 4.8 Regla l'Hôpital
óendanleg markgildi 2.2 Markgildi falls
óendanleg ósamfelldni 2.4 Samfelldni

óendanlegt markgildi þegar x stefnir á óendanlegt 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur
óháð breyta 1.1 Upprifjun á föllum
óreiða 4.9 Aðferð Newtons
ósamfellt í punkti 2.4 Samfelldni
P
Papposarsetning um rúmmál 6.6 Vægi og massamiðjur
pasköl 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
prósentuskekkja 4.2 Línulegar nálganir og deildi
punkthallajafna 1.2 Helstu flokkar falla
R
radíanar 1.3 Hornaföll
regla l'Hôpital 4.8 Regla l'Hôpital
regla um fastamargfeldi 3.3 Deildunarreglur
regla um fastamargfeldi markgildis 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
regluleg skipting 5.1 Nálgun flatarmáls
reiknireglur fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
reiknisetningin 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
Richter-kvarði 1.5 Vísisföll og lograföll
Riemann-summa 5.1 Nálgun flatarmáls
riðháttur með summutákni 5.1 Nálgun flatarmáls
rótarfall 1.2 Helstu flokkar falla
rótarregla fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
rætt fall 1.2 Helstu flokkar falla
S
samfelldni á bili 2.4 Samfelldni
samfellt frá hægri 2.4 Samfelldni
samfellt frá vinstri 2.4 Samfelldni
samfellt í punkti 2.4 Samfelldni
samhverfa um upphafspunkt 1.1 Upprifjun á föllum
samhverfa um *y*-ásinn 1.1 Upprifjun á föllum
samhverfureglan 6.6 Vægi og massamiðjur
samskeytt fall 1.1 Upprifjun á föllum
setning Fermats 4.3 Hágildi og lággildi
setning Pýþagórasar 4.1 Tengdir breytingarhraðar
Setning Rolle 4.4 Meðalgildissetningin

setningin um heildarbreytingu 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
skallaörn 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
skáfella 4.6 Markgildi þegar x stefnir á óendanlegt og aðfellur
skilgreiningarmengi 1.1 Upprifjun á föllum
skilyrðissetning 2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi
skipting 5.1 Nálgun flatarmáls
skífuaðferð 6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
slétt 6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
sneiðaaðferð 6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
snertill 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
snertilsnálgun 4.2 Línulegar nálganir og deildi
Snertilvandamálið 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
sniðill 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
sniðilsaðferð 4.9 Aðferð Newtons
snúður 6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
sólfirrð 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
sólnánd 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
staðalform línu 1.2 Helstu flokkar falla
staðbundið hágildi 4.3 Hágildi og lággildi
staðbundið lággildi 4.3 Hágildi og lággildi
staðbundið útgildi 4.3 Hágildi og lággildi
stig 1.2 Helstu flokkar falla
stofnfall 4.10 Stofnföll
stofnvöxtur 1.5 Vísisföll og lograföll, 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
stærð breytingar 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar
stærðfræðigreining margra breyta 2.1 Innsýn í stærðfræðigreiningu
stærðfræðileg líkön 1.2 Helstu flokkar falla
stöðupunktur 4.3 Hágildi og lággildi
stökkósamfelldni 2.4 Samfelldni
summur og veldi heiltalna 5.1 Nálgun flatarmáls
summuregla 3.3 Deildunarreglur
summuregla fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi
summutákn 5.1 Nálgun flatarmáls

summuvísir 5.1 Nálgun flatarmáls

T

takmarkað skilgreiningarmengi 1.4 Andhverf föll

tala e 1.5 Vísisföll og lograföll

tengdir breytingarhraðar 4.1 Tengdir breytingarhraðar

tilfærsla 5.2 Ákveðið heildi, 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

tilvistarmagnari 2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi

torræð föll 1.2 Helstu flokkar falla

Tour de France 5.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

tuglogri 1.5 Vísisföll og lograföll

tvöföldunartími 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun

tæmingaraðferðin 5.1 Nálgun flatarmáls

U

umbreyting falls 1.2 Helstu flokkar falla

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, fyrri hluti 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, síðari hluti 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

upphafsgildisverkefni 4.10 Stofnföll

Ú

útgildissetningin 4.3 Hágildi og lággildi

úttak 1.1 Upprifjun á föllum

V

vaxandi á bilinu I 1.1 Upprifjun á föllum

vaxtarhraði stofns 3.4 Afleiður sem breytingarhraðar

vaxtavaxtareikningur 1.5 Vísisföll og lograföll

vaxtavextir 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun

veldisfall 1.2 Helstu flokkar falla

veldisregla 3.3 Deildunarreglur

veldisregla fyrir markgildi 2.3 Reiknireglur fyrir markgildi

veldisvísir 1.5 Vísisföll og lograföll

verð-eftirspurnarfall 5.6 Heildi með vísis- og lograföllum

verkefni Regiomontanusar 4 Yfirlitsverkefni

vinna 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
vísishnignun 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
vísisvöxtur 6.8 Vísisvöxtur og -hnignun
vægi 6.6 Vægi og massamiðjur
vængbúningar 5.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
vökvastöðuþrýstingur 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
Y
yfirborðsflatarmál 6.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
yfirfærð skekkja 4.2 Línulegar nálganir og deildi
Þ
þéttleikafall 6.5 Hagnýting í eðlisfræði
þriðja stigs fall 1.2 Helstu flokkar falla
þríhyrningsójafnan 2.5 Nákvæm skilgreining á markgildi
þungamiðja 6.6 Vægi og massamiðjur
þunn plata 6.6 Vægi og massamiðjur
þversnið 6.2 Rúmmál reiknað með sneiðum