NÁMSGÖGN.IS

STÆRÐFRÆÐI

Stærðfræði-greining

2

Stærðfræðigreining, 2. bindi

Námsgögn.is

NÁMSGÖGN

Stærðfræðigreining 2. bindi

Bókin í heild

Efnisyfirlit

Formáli **6**

1 Heildun **12**

Inngangur 12
1.1 Nálgun flatarmáls 13
1.2 Ákveðið heildi 42
1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar 69
1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu 92
1.5 Innsetning 113
1.6 Heildi með vísis- og lograföllum 127
1.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum 143
Lykilhugtök 153
Lykiljöfnur 155
Meginatriði 157
Yfirlitsverkefni 159

2 Hagnýting heildunar **162**

Inngangur 162
2.1 Flatarmál milli ferla 163
2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum 179
2.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki 204
2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál 221
2.5 Hagnýting í eðlisfræði 237
2.6 Vægi og massamiðjur 258
2.7 Heildi, vísisföll og lograr 278
2.8 Vísisvöxtur og -hnignun 295
2.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla 307
Lykilhugtök 321
Lykiljöfnur 323
Meginatriði 324
Yfirlitsverkefni 327

3 Heildunaraðferðir **331**

Inngangur 331
3.1 Hlutheildun 332
3.2 Heildi hornafalla 346
3.3 Innsetning með hornaföllum 360
3.4 Stofnbrotaliðun 377

3.5 Aðrar heildunaraðferðir....394
3.6 Töluleg heildun....402
3.7 Óeiginleg heildi....419
Lykilhugtök....439
Lykiljöfnur....441
Meginatriði....442
Yfirlitsverkefni....444

4 Inngangur að deildajöfnum....447
Inngangur....447
4.1 Grunnatriði deildajafna....448
4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir....462
4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur....486
4.4 Lógistíska jafnan....501
4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur....518
Lykilhugtök....537
Lykiljöfnur....540
Meginatriði....540
Yfirlitsverkefni....541

5 Runur og raðir....545
Inngangur....545
5.1 Runur....546
5.2 Óendanlegar raðir....576
5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið....603
5.4 Samanburðarpróf....621
5.5 Víxlmerkjaraðir....636
5.6 Kvóta- og rótarpróf....652
Lykilhugtök....670
Lykiljöfnur....674
Meginatriði....674
Yfirlitsverkefni....677

6 Veldaraðir....681
Inngangur....681
6.1 Veldaraðir og föll....682
6.2 Eiginleikar veldaraða....698
6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir....720
6.4 Vinna með Taylor-raðir....744
Lykilhugtök....767
Lykiljöfnur....769
Lykilatriði....769

Upprifjunardæmi....771

7 Stikajöfnur og skauthnit....774

Inngangur....775
7.1 Stikajöfnur....775
7.2 Stærðfræðigreining stikaðra ferla....796
7.3 Skauthnit....819
7.4 Flatarmál og bogalengd í skauthnitum....844
7.5 Keilusnið....857
Lykilhugtök....884
Lykiljöfnur....886
Lykilatriði....886
Upprifjunardæmi....889

A Heildistafla....892

B Afleiðutafla....900

C Upprifjun fyrir stærðfræðigreiningu....903

Svarlykill....907

Kafli 1....907
Kafli 2....938
Kafli 3....970
Kafli 4....988
Kafli 5....1017
Kafli 6....1035
Kafli 7....1059

Atriðisorðaskrá....1092

Formáli

Velkomin í Stærðfræðigreiningu, 2. bindi, námsefni frá OpenStax. Kennslubókin var samin til að auka aðgengi nemenda að vönduðu námsefni, án endurgjalds eða gegn vægu gjaldi, og viðhalda um leið ströngustu kröfum um fræðileg vinnubrögð.

Um OpenStax

OpenStax er stofnun sem ekki er rekin í hagnaðarskyni og hefur aðsetur við Rice-háskóla. Markmið okkar er að bæta aðgengi nemenda að menntun. Fyrsta háskólakennslubók okkar með opnu leyfi kom út árið 2012 og síðan hefur safnið stækkað og telur nú yfir 20 bækur fyrir háskóla- og AP-námskeið sem hundruð þúsunda nemenda nota. Verið er að prófa aðlögunarhæfa námstækni okkar í háskólanámskeiðum víðs vegar um Bandaríkin. Henni er ætlað að bæta námsárangur með einstaklingsmiðuðum námsleiðum. Með samstarfi við góðgerðarsjóði og önnur samtök sem vinna að gerð námsefnis ryður OpenStax algengustu hindrunum í námi úr vegi og auðveldar nemendum og kennurum að ná árangri.

Um námsefni OpenStax

Sérsnið

Stærðfræðigreining, 2. bindi er gefin út samkvæmt alþjóðlega Creative Commons-leyfinu Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 (CC BY-NC-SA). Það merkir að heimilt er að dreifa efninu, endurraða því og byggja á því, að því tilskildu að OpenStax og höfundar efnisins séu tilgreindir, efnið sé ekki notað í viðskiptalegum tilgangi og afleitt efni sé gefið út samkvæmt sama CC BY-NC-SA-leyfi.

Bækur okkar eru með opnu leyfi. Því má nota bókina í heild eða velja aðeins þá hluta sem henta þörfum námskeiðsins best. Efninu má endurraða með því að setja nemendum fyrir tiltekna kafla og hluta í þeirri röð sem kennari kýs í kennsluáætlun sinni. Einnig má setja þar beinan tengil á viðkomandi hluta í vefútgáfu bókarinnar.

Kennarar geta einnig búið til sérsniðna útgáfu af OpenStax-bókinni sinni. Nemendur geta fengið sérsniðnu útgáfuna á ódýru prent- eða stafrænu formi í gegnum bókabúð skólans. Nánari upplýsingar eru á síðu bókarinnar á openstax.org.

Villuleiðréttingar

Allar kennslubækur OpenStax gangast undir ítarlega ritrýni. Engu að síður geta villur komið fyrir, líkt og í öðrum faglega unnum kennslubókum. Þar sem bækur okkar eru vefbækur getum við uppfært þær reglulega þegar það er talið nauðsynlegt af kennslufræðilegum ástæðum. Tillögu að leiðréttingu má senda inn með tenglinum á síðu bókarinnar á openstax.org. Sérfræðingar á viðkomandi fræðasviði fara yfir allar slíkar tillögur. OpenStax vill greina opinskátt frá öllum uppfærslum og því er einnig að finna yfirlit yfir fyrri villuleiðréttingar á síðu bókarinnar á openstax.org.

Útgáfuform

Bókina má lesa ókeypis á openstax.org, annaðhvort í vefútgáfu eða sem PDF-skrá, og fá hana á prenti gegn vægu gjaldi.

Um Stærðfræðigreiningu, 2. bindi

Stærðfræðigreining er ætluð almennu tveggja eða þriggja missera námskeiði í stærðfræðigreiningu og hefur að geyma nýstárleg atriði sem styðja við nám nemenda. Bókin leiðir nemendur í gegnum kjarnahugtök stærðfræðigreiningar og hjálpar þeim að skilja hvernig hugtökin nýtast í daglegu lífi þeirra og tengjast umheiminum. Vegna þess hve efnið er yfirgripsmikið er bókin gefin út í þremur bindum til að auka sveigjanleika og hagkvæmni. 2. bindi fjallar um heildun, deildajöfnur, runur og raðir, stikajöfnur og skauthnit.

Efnissvið og umfang

Kennslubókin Stærðfræðigreining, 2. bindi fylgir efnissviði og framvindu flestra almennra námskeiða í stærðfræðigreiningu í Bandaríkjunum. Við höfum leitast við að gera stærðfræðigreiningu áhugaverða og aðgengilega nemendum án þess að slaka á þeirri stærðfræðilegu nákvæmni sem greinin krefst. Með þetta markmið að leiðarljósi hefur efni þriggja binda Stærðfræðigreiningar verið samið og skipulagt þannig að það leiði rökrétt frá grunnhugtökum að flóknari hugtökum. Það byggir á því sem nemendur hafa þegar lært og leggur áherslu á tengsl milli efnisþátta og milli kenninga og hagnýtingar. Markmið hvers hluta er að nemendur þekki ekki aðeins hugtökin heldur geti líka unnið með þau á þann hátt sem nýtist í síðari námskeiðum og framtíðarstarfi. Skipulagið og kennslufræðileg einkenni bókarinnar voru þróuð og yfirfarin með hliðsjón af umsögnum stærðfræðikennara sem lögðu verkefninu lið.

1. bindi

- Kafli 1: Föll og gröf
- Kafli 2: Markgildi
- Kafli 3: Afleiður
- Kafli 4: Notkun afleiðna
- Kafli 5: Heildun
- Kafli 6: Notkun heildunar

2. bindi

- Kafli 1: Heildun
- Kafli 2: Notkun heildunar
- Kafli 3: Aðferðir við heildun
- Kafli 4: Inngangur að deildajöfnum
- Kafli 5: Runur og raðir
- Kafli 6: Veldaraðir
- Kafli 7: Stikajöfnur og skauthnit

3. bindi

- Kafli 1: Stikajöfnur og skauthnit
- Kafli 2: Vigrar í rúmi
- Kafli 3: Vigurgild föll
- Kafli 4: Deildun falla af mörgum breytum
- Kafli 5: Margföld heildun
- Kafli 6: Vigurreikningur
- Kafli 7: Annars stigs deildajöfnur

Kennslufræðilegur grundvöllur

Í Stærðfræðigreiningu, 2. bindi er að finna sýnidæmi og verkefni sem fjalla bæði um sígildar hugmyndir og aðferðir og nútímaleg notkunarsvið og vinnubrögð. Útleiðslur og skýringar byggjast á áralangri reynslu kennara sem hafa kennt stærðfræðigreiningu um langt skeið. Markmiðið er jafnvægi milli skýrleika og nákvæmni sem hefur reynst nemendum þeirra vel. Notkunardæmi sem vekja áhuga ná til mikilvægra viðfangsefna í líkindafræði, líffræði, vistfræði, viðskiptafræði og hagfræði, auk eðlisfræði, efnafræði, verkfræði og tölvunarfræði. Nemendaverkefni í hverjum kafla veita tækifæri til að kanna áhugaverð hliðarefni í hreinni og hagnýttri stærðfræði, allt frá því að sýna fram á að talan e sé óræð til þess að reikna massamiðju Grand Canyon Skywalk eða lokahraða fallhlífarstökkvara. Í notkunardæmum í upphafi kafla eru sett fram verkefni sem leyst eru síðar í kaflanum með þeim hugmyndum sem þar eru teknar fyrir. Meðal verkefna eru kraftur vegna vökvastöðuþrýstings sem verkar á Hoover-stífluna og samanburður á hlutfallslegum styrk tveggja jarðskjálfta. Skilgreiningar, reglur og setningar eru auðkenndar í textanum, þar á meðal yfir 60 sannanir á setningum.

Námsmat sem styrkir skilning á lykilhugtökum

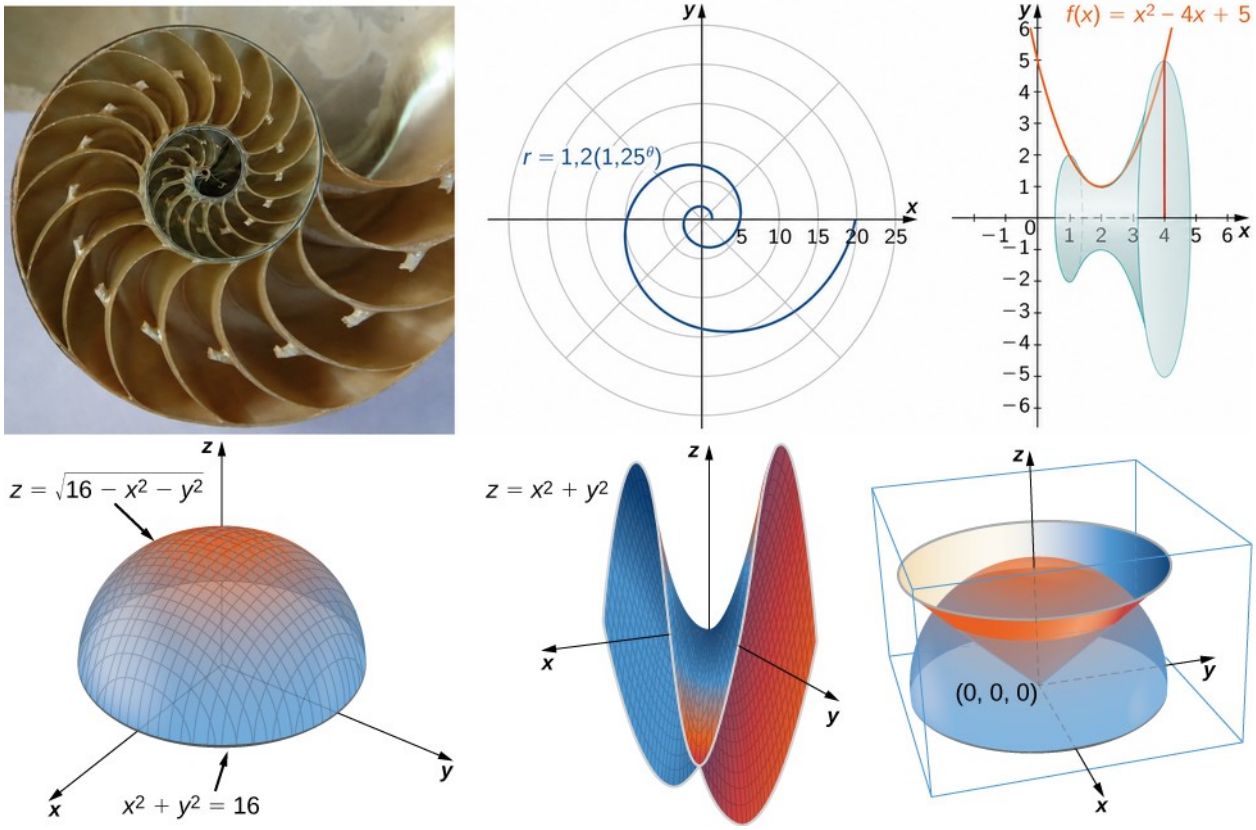
Sýnidæmi í köflunum leiða nemendur í gegnum verkefni með því að setja fram spurningu, leysa hana skref fyrir skref og biðja þá síðan að æfa færnina í Stöðumati. Í lok hvers kafla er einnig námsmat þar sem nemendur geta notað það sem þeir hafa lært í æfingaverkefnum. Mörg verkefni eru merkt [T] til að sýna að leysa megi þau með tæknilegum hjálpartækjum, svo sem reiknivél eða tölvualgebrukerfi (CAS). Svör við völdum verkefnum eru í svarlyklinum aftast í bókinni.

Torræð föll tekin snemma eða síðar

Stærðfræðigreining, 2. bindi er þannig uppbyggð að hún henti bæði námskeiðum þar sem torræð föll eru tekin snemma og þeim þar sem þau eru tekin síðar. Vísisföll og lograföll eru kynnt í 2. kafla. Fyrir kennara sem vilja fjalla um heildun þessara falla ásamt öðrum fallagerðum er umfjöllunin í 1. kafla. Umfjöllunin er þó í sérstökum hlutum. Kennarar sem vilja bíða með að leiða út reiknireglur stærðfræðigreiningar fyrir vísisföll og lograföll þar til heildi hafa verið skilgreind geta sleppt þessum hlutum.

Heildstætt myndefni

Myndefninu er ætlað að auka skilning nemenda á hugtökum með skýrum og áhrifaríkum myndskreytingum, skýringarmyndum og ljósmyndum.



Svör við spurningum bókarinnar

Svör við sýnidæmum birtast rétt fyrir neðan spurninguna í bókinni. Svör við öllum stöðumatsverkefnum eru í svarlyklinum. Nemendur finna svör við verkefnum með oddatölum og spurningum úr yfirlitsverkefnum bæði í svarlyklinum og í lausnaleiðbeiningum fyrir nemendur á efnissíðu nemenda. Svör við verkefnum með sléttum tölum eru aðeins aðgengileg kennurum í svarleiðbeiningum fyrir kennara á efnissíðu kennara.

Viðbótarefni

Efni fyrir nemendur og kennara

Við höfum tekið saman viðbótarefni fyrir bæði nemendur og kennara, þar á meðal leiðbeiningar fyrir fyrstu skrefin, lausnahandbók fyrir kennara og PowerPoint-glærur. Til að fá aðgang að efni fyrir kennara þarf staðfestan kennarareikning. Sækja má um slíkan reikning þegar skráð er inn á openstax.org. Efnið má nota sem viðbót við OpenStax-bókina.

Efni samstarfsaðila

Samstarfsaðilar OpenStax vinna með okkur að því markmiði að gera vandað námsefni á viðráðanlegu verði aðgengilegt nemendum og kennurum hvarvetna. Verkfæri þeirra falla hnökralaust að OpenStax-bókunum og kosta lítið. Efni samstarfsaðila fyrir bókina má nálgast á síðu hennar á openstax.org.

Um höfundana

Aðalhöfundar

Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology

Dr. Strang lauk doktorsprófi við UCLA árið 1959 og hefur kennt stærðfræði við MIT æ síðan. Netkennslubók hans í stærðfræðigreiningu er ein ellefu bóka sem hann hefur gefið út. Hún er grunnurinn að þessari útgáfu, sem hefur verið endurskoðuð og uppfærð með þarfir nemenda nútímans í huga. Strang er margverðlaunaður stærðfræðingur og var áður Rhodes-styrkþegi við Oxford-háskóla.

Edwin „Jed“ Herman, University of Wisconsin–Stevens Point

Dr. Herman lauk BS-prófi í stærðfræði við Harvey Mudd College árið 1985, MA-prófi í stærðfræði við UCLA árið 1987 og doktorsprófi í stærðfræði við University of Oregon árið 1997. Hann er prófessor við University of Wisconsin–Stevens Point. Hann hefur meira en 20 ára reynslu af kennslu í stærðfræði á háskólastigi, leiðbeinir nemendum við rannsóknir, hefur reynslu af þróun og hönnun námskeiða og er jafnframt áhugasamur borðspilahönnuður og -spilari.

Meðhöfundar

Catherine Abbott, Keuka College
Nicoleta Virginia Bila, Fayetteville State University
Sheri J. Boyd, Rollins College
Joyati Debnath, Winona State University
Valeree Falduto, Palm Beach State College
Joseph Lakey, New Mexico State University
Julie Levandosky, Framingham State University
David McCune, William Jewell College
Michelle Merriweather, Bronxville High School
Kirsten R. Messer, Colorado State University - Pueblo
Alfred K. Mulzet, Florida State College at Jacksonville
William Radulovich (á eftirlaunum), Florida State College at Jacksonville
Erica M. Rutter, Arizona State University
David Smith, University of the Virgin Islands
Elaine A. Terry, Saint Joseph’s University
David Torain, Hampton University

Ritrýnar

Marwan A. Abu-Sawwa, Florida State College at Jacksonville
Kenneth J. Bernard, Virginia State University
John Beyers, University of Maryland
Charles Buehrle, Franklin & Marshall College
Matthew Cathey, Wofford College
Michael Cohen, Hofstra University
William DeSalazar, Broward County School System

Murray Eisenberg, University of Massachusetts Amherst
Kristyanna Erickson, Cecil College
Tiernan Fogarty, Oregon Institute of Technology
David French, Tidewater Community College
Marilyn Gloyer, Virginia Commonwealth University
Shawna Haider, Salt Lake Community College
Lance Hemlow, Raritan Valley Community College
Jerry Jared, The Blue Ridge School
Peter Jipsen, Chapman University
David Johnson, Lehigh University
M.R. Khadivi, Jackson State University
Robert J. Krueger, Concordia University
Tor A. Kwembe, Jackson State University
Jean-Marie Magnier, Springfield Technical Community College
Cheryl Chute Miller, SUNY Potsdam
Bagisa Mukherjee, Penn State University, Worthington Scranton Campus
Kasso Okoudjou, University of Maryland College Park
Peter Olszewski, Penn State Erie, The Behrend College
Steven Purtee, Valencia College
Alice Ramos, Bethel College
Doug Shaw, University of Northern Iowa
Hussain Elalaoui-Talibi, Tuskegee University
Jeffrey Taub, Maine Maritime Academy
William Thistleton, SUNY Polytechnic Institute
A. David Trubatch, Montclair State University
Carmen Wright, Jackson State University
Zhenbu Zhang, Jackson State University

1

1. KAFLI

Heildun



Mynd 1.1 Íssigling er vinsæl vetraríþrótt sums staðar í norðurhluta Bandaríkjanna og í Evrópu. (mynd: breytt útgáfa af verki Carter Brown, Flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 1.1 Nálgun flatarmáls
- 1.2 Ákveðið heildi

- 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
- 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
- 1.5 Innsetning
- 1.6 Heildi með vísis- og lograföllum
- 1.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum

Inngangur

Ísskútur eru algengar á vötnum í Wisconsin og Minnesota um helgar að vetrarlagi. Þær líkjast seglbátum en eru búnar meiðum, eða „skautum“, og hannaðar til að renna eftir ísnum í stað þess að sigla á vatni. Ísskútur geta náð miklum hraða og það er einmitt hraðinn sem laðar marga áhugamenn að íssiglingum. Fremstu keppendur geta náð allt að fimmföldum vindhraða. Ef við vitum hversu hratt ísskúta fer getum við notað heildun til að reikna út hversu langt hún fer. Við snúum aftur að þessari spurningu síðar í kaflanum (sjá dæmi 1.27).

Að reikna vegalengd út frá hraða er aðeins eitt af fjölmörgum notkunarsviðum heildunar. Heildi eru raunar notuð við margvísleg viðfangsefni í aflfræði og eðlisfræði. Við hefjum kaflann á fræðilegum grunni heildunar og notum síðan heildi til að reikna flatarmál. Því næst leiðum við út undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar, sem tengir saman deildun og heildun. Að lokum kynnumst við nokkrum grunnaðferðum við heildun og skoðum stuttlega fáein notkunardæmi.

1.1 Nálgun flatarmáls

NÁMSMARKMIÐ

- 1.1.1 Nota summutákn til að reikna summur og veldi heiltalna.
- 1.1.2 Nota summu flatarmála rétthyrninga til að nálga flatarmál undir ferli.
- 1.1.3 Nota Riemann-summur til að nálga flatarmál.

Arkímedes hafði mikinn áhuga á að reikna flatarmál ýmissa forma, það er stærð flatarins sem formið afmarkar. Hann beitti ferli sem síðar varð þekkt sem tæmingaraðferðin. Í henni var óreglulegt svæði fyllt með sífellt minni formum með flatarmál sem reikna mátti nákvæmlega. Þannig fengust sífellt nákvæmari nálganir á heildarflatarmáli svæðisins. Í þessu ferli er svæði sem afmarkast af ferlum fyllt með rétthyrningum, þríhyrningum og öðrum formum sem hafa nákvæmar flatarmálsformúlur. Flatarmál þessara forma eru síðan lögð saman til að nálga flatarmál svæðisins sem afmarkast af ferlunum.

Í þessum undirkafla þróum við aðferðir til að nálga flatarmálið milli ferils sem lýst er með fallinu $f(x)$, og x-ássins á lokaða bilinu $[a, b]$. Líkt og Arkímedes nálgum við flatarmálið undir ferlinum fyrst með formum sem hafa þekkt flatarmál, nánar tiltekið rétthyrningum. Eftir því sem rétthyrningarnir verða minni verður nálgunin nákvæmari. Með því að láta nálgunargildin stefna að markgildi getum við reiknað flatarmálið undir ferlinum nákvæmlega.

Byrjum á að kynna rithátt sem einfaldar útreikningana. Síðan skoðum við tilvikið þegar $f(x)$ er samfellt og óneikvætt. Síðar í kaflanum drögum við úr sumum þessara takmarkana og þróum aðferðir sem eiga við um almennari tilvik.

1

Summutákn

Eins og áður segir notum við form með þekkt flatarmál til að nálga flatarmál óreglulegs svæðis sem afmarkast af ferlum. Við það þarf oft að leggja saman langar talnarunur. Til að auðvelda okkur að skrifa svo langar summur kynnum við hér summutákn, sem einnig nefnist sigma-tákn. Gríski hástafurinn Σ, sigma, er notaður til að rita langar summur á knöppu formi. Ef við viljum til dæmis leggja saman allar heiltölur frá 1 til 20 án summutákns þurfum við að skrifa

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20.$$

Við gætum sleppt nokkrum liðum og skrifað

$$1+2+3+4+\cdots+19+20,$$

sem er skárra en samt fyrirferðarmikið. Með summutákni skrifum við summuna sem

$$\sum_{i=1}^{20} i,$$

sem er mun styttra.
Summutákn er yfirleitt ritað á forminu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

þar sem a_i táknar liðina sem á að leggja saman og i kallast vísir. Gildi hvers liðar er reiknað og síðan eru gildin lögð saman, frá $i=1$ til og með $i=n$. Til dæmis táknar stæðan $\sum_{i=2}^{7} s_i$ summuna $s_2+s_3+s_4+s_5+s_6+s_7$. Athugið að vísirinn er aðeins notaður til að halda utan um liðina sem á að leggja saman; hann kemur ekki við sögu í sjálfum útreikningi summunnar. Vísirinn kallast því gervibreyta. Nota má hvaða bókstaf sem er sem vísi. Stærðfræðingar nota yfirleitt i, j, k, m og n sem vísa.

Við skulum skoða tvö dæmi um notkun summutákns.

DÆMI 1.1

Notkun summutákns

a. Ritið með summutákni og reiknið summu liðanna 3^i fyrir $i=1,2,3,4,5$.

b. Ritið summuna með summutákni:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}.$$

Lausn

a. Ritið

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} 3^i &= 3+3^2+3^3+3^4+3^5\\ &= 363.\end{aligned}$$

b. Nefnari hvers liðar er ferningstala. Með summutákni má rita summuna sem $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$.

STÖÐUMAT 1.1

Ritið með summutákni og reiknið summu liðanna 2^i fyrir $i=3,4,5,6$.

Í næstu reglu eru eiginleikar summutákns teknir saman.

REGLA: EIGINLEIKAR SUMMUTÁKNS

Látum $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tákna tvær runur liða og látum c vera fasta. Eftirfarandi eiginleikar gilda fyrir allar jákvæðar heiltölur n og fyrir heiltölur m, þar sem $1 \le m \le n$.

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

(1.1)

$$\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

(1.2)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i+b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(1.3)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i-b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

(1.4)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

(1.5)

Sönnun

Hér sönnum við eiginleika 2 og 3 en hina eiginleikana á að sanna í æfingunum.

2. Við höfum

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

3. Við höfum

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

□

Nokkrar formúlur til viðbótar fyrir algeng föll einfalda samlagninguna enn frekar. Þær eru settar fram í næstu reglu um summur og veldi heiltalna og verða notaðar í næstu dæmum.

REGLA: SUMMUR OG VELDI HEILTALNA

1. Summa fyrstu n jákvæðu heiltalnanna er gefin með

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Summa ferninga fyrstu n jákvæðu heiltalnanna er gefin með

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Summa þriðju velda fyrstu n jákvæðu heiltalnanna er gefin með

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

DÆMI 1.2

Útreikningur með summutákni

Ritið með summutákni og reiknið:

a. Summu liðanna $(i-3)^2$ fyrir $i = 1, 2, \ldots, 200$.

b. Summu liðanna $(i^3 - i^2)$ fyrir $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Lausn

a. Með því að leysa upp svigann í $(i-3)^2$, má skipta stæðunni í þrjá liði.

$$\sum_{i=1}^{200}(i-3)^2 = \sum_{i=1}^{200}(i^2-6i+9)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - \sum_{i=1}^{200} 6i + \sum_{i=1}^{200} 9 \\
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - 6\sum_{i=1}^{200} i + \sum_{i=1}^{200} 9 \\
&= \frac{200(200+1)(400+1)}{6} - 6\left[\frac{200(200+1)}{2}\right] + 9(200) \\
&= 2.686.700 - 120.600 + 1800 \\
&= 2.567.900
\end{aligned}$$

b. Notum eiginleika iv um summutákn og reglurnar um summur ferninga og þriðju velda.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}(i^3-i^2) &= \sum_{i=1}^{6} i^3 - \sum_{i=1}^{6} i^2 \\
&= \frac{6^2(6+1)^2}{4} - \frac{6(6+1)(2(6)+1)}{6} \\
&= \frac{1764}{4} - \frac{546}{6} \\
&= 350
\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.2

Finnið summu gildanna $4+3i$ fyrir $i=1,2,\ldots,100$.

DÆMI 1.3

Að finna summu fallgildanna

Finnið summu gilda $f(x)=x^3$ fyrir heiltölurnar $1,2,3,\ldots,10$.

Lausn

Með formúlunni fæst

1

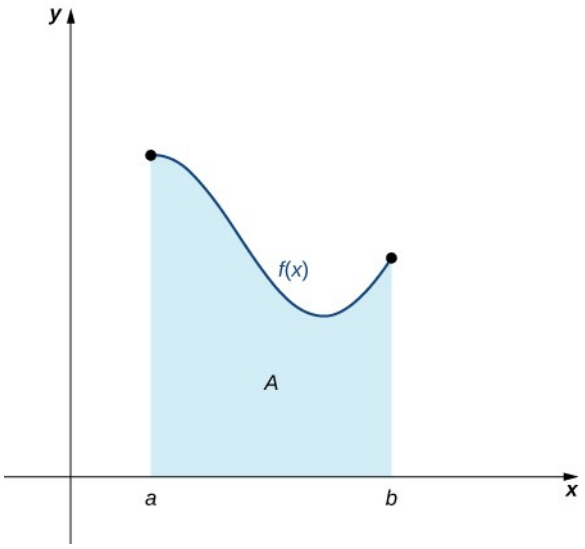
$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \frac{(10)^2(10+1)^2}{4}$$
$$= \frac{100(121)}{4}$$
$$= 3025.$$

STÖÐUMAT 1.3

Reiknið summuna sem táknuð er með $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)$.

Nálgun flatarmáls

Nú þegar við höfum nauðsynlegan rithátt snúum við aftur að viðfangsefninu: að nálga flatarmál undir ferli. Látum $f(x)$ vera samfellt, óneikvætt fall sem er skilgreint á lokaða bilinu $[a,b]$. Við viljum nálga flatarmálið A sem afmarkast að ofan af $f(x)$, að neðan af x-ásnum, til vinstri af línunni $x=a$ og til hægri af línunni $x=b$ (mynd 1.2).



Mynd 1.2 Svæði (skyggt) sem afmarkast að ofan af ferlinum $f(x)$, að neðan af x-ásnum, til vinstri af línunni $x=a$ og til hægri af línunni $x=b$.

Hvernig nálgum við flatarmálið undir þessum ferli? Aðferðin er rúmfræðileg. Með því að skipta svæðinu í mörg lítil form sem hafa þekktar flatarmálsformúlur getum við lagt flatarmál þeirra saman og fengið þokkalegt mat á raunverulegu flatarmáli svæðisins. Við byrjum á að skipta bilinu $[a,b]$ í n jafnbreið hlutbil, $\frac{b-a}{n}$. Til þess veljum við jafnt dreifða punkta $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, þar sem $x_0=a, x_n=b$, og

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

fyrir $i=1,2,3,\ldots,n$.

Við táknum breidd hvers hlutbils með tákninu Δx, þannig að $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ og

$$x_i = x_0 + i\,\Delta x$$

fyrir $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Oft þarf að skipta bili $[a, b]$ í hlutbil með því að velja punkta á bilinu þegar flatarmál undir ferli er nálgað. Því skulum við skilgreina nokkur hugtök sem tengjast slíkri skiptingu.

SKILGREINING

Punktamengi $P = \{x_i\}$ fyrir $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, þar sem $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, skiptir bilinu $[a, b]$ í hlutbil af gerðinni $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ og kallast skipting bilsins $[a, b]$. Ef öll hlutbilin hafa sömu breidd myndar punktamengið reglulega skiptingu bilsins $[a, b]$.

Á þessari reglulegu skiptingu getum við byggt aðferð til að meta flatarmálið undir ferlinum. Næst skoðum við tvær aðferðir: nálgun með vinstri endapunktum og nálgun með hægri endapunktum.

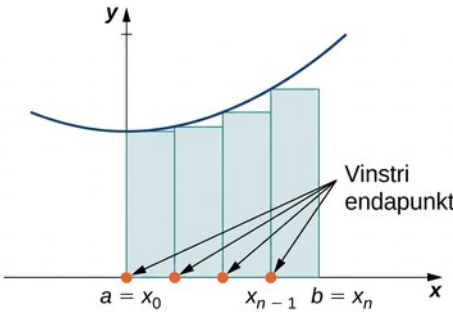
REGLA: NÁLGUN MEÐ VINSTRI ENDAPUNKTUM

Á hverju hlutbili $[x_{i-1}, x_i]$ (fyrir $i = 1, 2, 3, \ldots, n$), teiknum við rétthyrning með breiddina Δx og hæðina $f(x_{i-1})$, sem er fallgildið í vinstri endapunkti hlutbilsins. Flatarmál rétthyrningsins er þá $f(x_{i-1})\,\Delta x$. Þegar flatarmál allra rétthyrninganna eru lögð saman fæst nálgunargildi A (mynd 1.3). Táknið L_n stendur fyrir nálgunargildi með vinstri endapunktum fyrir A þegar bilinu er skipt í n hlutbil.

$$\begin{aligned} A \approx L_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \end{aligned}$$

(1.6)

1



Mynd 1.3 Við nálgun á flatarmáli undir ferli með vinstri endapunktum ræðst hæð hvers rétthyrnings af fallgildinu í vinstri endapunkti hvers hlutbils.

Önnur aðferð til að nálga flatarmál undir ferli er nálgun með hægri endapunktum. Hún er nánast eins og nálgunin með vinstri endapunktum, en nú ráðast hæðir rétthyrninganna af fallgildunum í hægri endapunkti hvers hlutbils.

REGLA: NÁLGUN MEÐ HÆGRI ENDAPUNKTUM

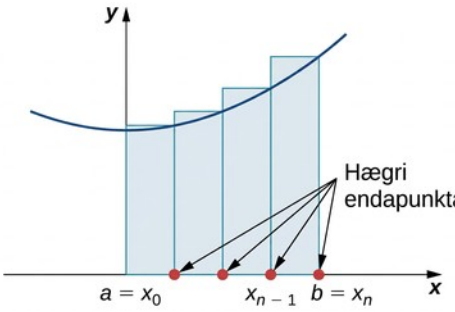
Teiknum rétthyrning á hverju hlutbili $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, en að þessu sinni ræðst hæð rétthyrningsins af fallgildinu $f\left(x_i\right)$ í hægri endapunkti hlutbilsins. Flatarmál hvers rétthyrnings er þá $f\left(x_i\right)\Delta x$ og nálgunargildi A er

$$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

(1.7)

Táknið R_n stendur fyrir nálgunargildi með hægri endapunktum fyrir A (mynd 1.4).



Mynd 1.4 Við nálgun á flatarmáli undir ferli með hægri endapunktum ræðst hæð hvers rétthyrnings af fallgildinu í hægri endapunkti hvers hlutbils. Athugið að nálgunin með hægri endapunktum er frábrugðin nálguninni með vinstri endapunktum á mynd 1.3.

Gröfin á mynd 1.5 sýna ferilinn $f(x)=\frac{x^2}{2}$. Á grafi (a) skiptum við bilinu $[0,3]$ í sex hlutbil sem hvert hefur breiddina 0,5. Því er $\Delta x=0{,}5$. Síðan myndum við sex rétthyrninga með því að draga lóðréttar línur upp frá x_{i-1}, vinstri endapunkti hvers hlutbils. Hæð hvers rétthyrnings fæst með því að reikna $f(x_{i-1})$ fyrir $i=1,2,3,4,5,6$. Hlutbilin eru $[0;0{,}5],[0{,}5;1],[1;1{,}5],[1{,}5;2],[2;2{,}5],[2{,}5;3]$. Flatarmál hvers rétthyrnings fæst með því að margfalda hæð hans með breiddinni. Summa flatarmála rétthyrninganna nálgar þá flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins. Þegar hæðirnar eru reiknaðar í vinstri endapunktum fæst nálgun með vinstri endapunktum. Því er

$$A\approx L_6=\sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\Delta x$$

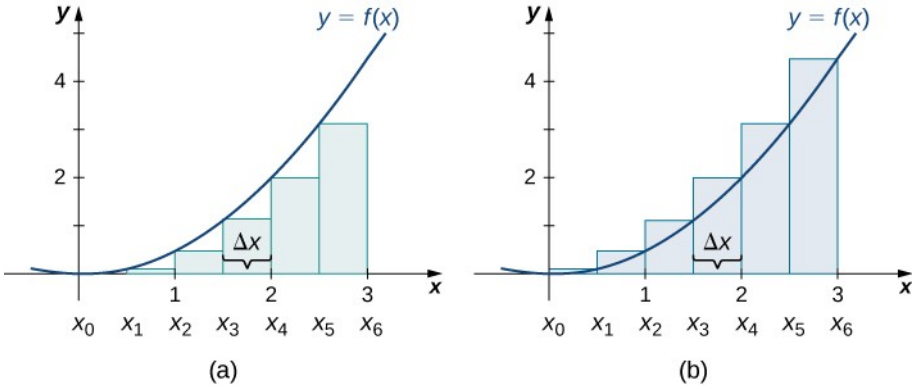
$$=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x+f(x_5)\Delta x$$

$$=f(0)0{,}5+f(0{,}5)0{,}5+f(1)0{,}5+f(1{,}5)0{,}5+f(2)0{,}5+f(2{,}5)0{,}5$$

$$=(0)0{,}5+(0{,}125)0{,}5+(0{,}5)0{,}5+(1{,}125)0{,}5+(2)0{,}5+(3{,}125)0{,}5$$

$$=0+0{,}0625+0{,}25+0{,}5625+1+1{,}5625$$

$$=3{,}4375.$$



Mynd 1.5 Aðferðir til að nálga flatarmál undir ferli með (a) vinstri endapunktum og (b) hægri endapunktum.

Á mynd 1.5(b) drögum við lóðréttar línur upp frá punktunum x_i, þar sem x_i er hægri endapunktur hvers hlutbils, og reiknum $f(x_i)$ fyrir $i=1,2,3,4,5,6$. Við margföldum hvert fallgildi $f(x_i)$ með Δx til að finna flatarmál rétthyrninganna og leggjum þau síðan saman. Þannig fæst nálgun með hægri endapunktum á flatarmálinu undir $f(x)$. Því er

$$A\approx R_6=\sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x$$

$$=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x+f(x_5)\Delta x+f(x_6)\Delta x$$

$$=f(0{,}5)0{,}5+f(1)0{,}5+f(1{,}5)0{,}5+f(2)0{,}5+f(2{,}5)0{,}5+f(3)0{,}5$$

$$=(0{,}125)0{,}5+(0{,}5)0{,}5+(1{,}125)0{,}5+(2)0{,}5+(3{,}125)0{,}5+(4{,}5)0{,}5$$

$$=0{,}0625+0{,}25+0{,}5625+1+1{,}5625+2{,}25$$

$$=5{,}6875.$$

1

DÆMI 1.4

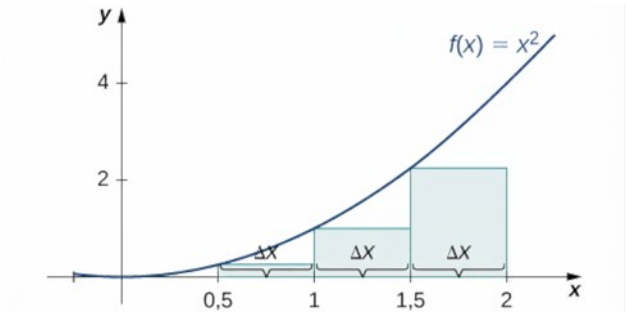
Nálgun flatarmáls undir ferli

Notið bæði nálgun með vinstri endapunktum og nálgun með hægri endapunktum til að nálga flatarmálið undir ferli $f(x)=x^2$ á bilinu $[0,2]$; notið $n=4$.

Lausn

Fyrst skiptum við bilinu $[0,2]$ í n jafnbreið hlutbil. Hér er $n=4, \Delta x=\frac{(2-0)}{4}=0{,}5$. Þetta er breidd hvers rétthyrnings. Hlutbilin $[0;0{,}5],[0{,}5;1],[1;1{,}5],[1{,}5;2]$ eru sýnd á mynd 1.6. Í nálgun með vinstri endapunktum eru hæðirnar $f(0)=0, f(0{,}5)=0{,}25, f(1)=1, f(1{,}5)=2{,}25$. Þá fæst

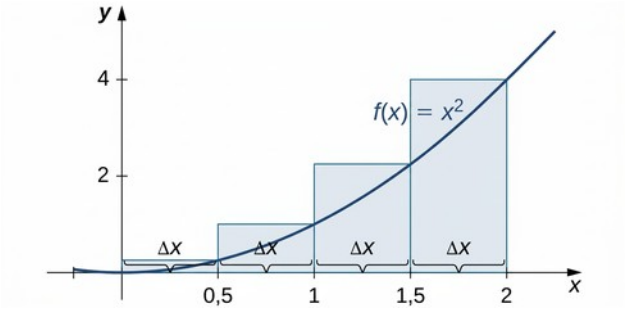
$$\begin{aligned} L_4 &= f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x \\ &= 0(0{,}5)+0{,}25(0{,}5)+1(0{,}5)+2{,}25(0{,}5) \\ &= 1{,}75. \end{aligned}$$



Mynd 1.6 Grafið sýnir nálgun með vinstri endapunktum á flatarmálinu undir $f(x)=x^2$ frá 0 til 2.

The right-endpoint approximation is shown in Figure 1.7. The intervals are the same, $\Delta x=0{,}5$, but now use the right endpoint to calculate the height of the rectangles. We have

$$\begin{aligned} R_4 &= f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+f(x_4)\Delta x \\ &= 0{,}25(0{,}5)+1(0{,}5)+2{,}25(0{,}5)+4(0{,}5) \\ &= 3{,}75. \end{aligned}$$



Mynd 1.7 Grafið sýnir nálgun með hægri endapunktum á flatarmálinu undir $f(x)=x^2$ frá 0 til 2.

Nálgunin með vinstri endapunktum er 1,75 en nálgunin með hægri endapunktum er 3,75.

STÖÐUMAT 1.4

Teiknið nálganir með vinstri og hægri endapunktum fyrir $f(x)=\frac{1}{x}$ á $[1,2]$; notið $n=4$. Nálgið flatarmálið með báðum aðferðunum.

Af mynd 1.5 og gröfunum í dæmi 1.4 sést að þegar fá hlutbil eru notuð gefur hvorki nálgun með vinstri né hægri endapunktum sérlega nákvæmt mat á flatarmálinu undir ferlinum. Rökrétt er þó að ætla að matið á A batni þegar punktum skiptingarinnar er fjölgað. Þá fjölgar rétthyrningunum en hver þeirra verður mjórri og fellur því betur að ferlinum.

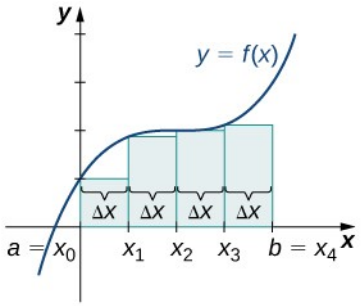
Með dæmi má sýna hvernig nálgunin batnar þegar hlutbilin eru gerð mjórri. Við aukum n, fyrst í nálgun með vinstri endapunktum og fjórum rétthyrningum, síðan átta rétthyrningum og loks 32 rétthyrningum. Síðan gerum við hið sama fyrir sama svæði með hægri endapunktum og sömu hlutbilum. Mynd 1.8 sýnir flatarmál svæðisins undir ferlinum $f(x)=(x-1)^3+4$ á bilinu $[0,2]$ nálgað með vinstri endapunktum þegar $n=4$. Breidd hvers rétthyrnings er

$$\Delta x=\frac{2-0}{4}=\frac{1}{2}.$$

Flatarmálið er nálgað með samanlögðu flatarmáli rétthyrninganna, eða

$$\begin{aligned} L_4 &= f(0)(0{,}5)+f(0{,}5)(0{,}5)+f(1)(0{,}5)+f(1{,}5)0{,}5 \\ &= 7{,}5. \end{aligned}$$

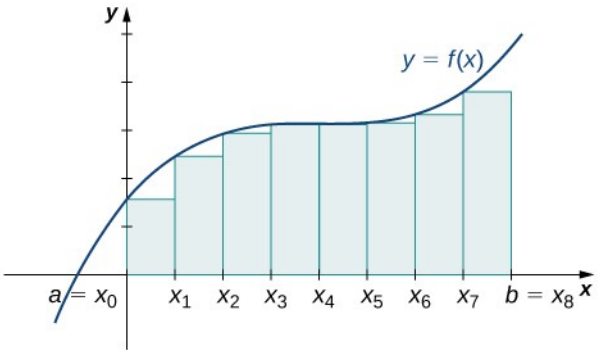
1



Mynd 1.8 Þegar nálgun með vinstri endapunktum er notuð og svæðinu frá a til b er skipt í fjögur jafnbreið hlutbil er flatarmálið undir ferlinum um það bil jafnt summu flatarmála rétthyrninganna.

Mynd 1.9 sýnir sama feril, en nú er bilinu skipt í átta hlutbil. Þegar grafið með fjórum rétthyrningum á mynd 1.8 er borið saman við þetta graf með átta rétthyrningum virðist minna autt svæði vera undir ferlinum þegar $n=8$. Þetta auða svæði er sá hluti flatarmálsins undir ferlinum sem við getum ekki tekið með í nálguninni. Flatarmál rétthyrninganna er

$$\begin{aligned} L_8 &= f(0)(0{,}25)+f(0{,}25)(0{,}25)+f(0{,}5)(0{,}25)+f(0{,}75)(0{,}25) \\ &+f(1)(0{,}25)+f(1{,}25)(0{,}25)+f(1{,}5)(0{,}25)+f(1{,}75)(0{,}25) \\ &=7{,}75. \end{aligned}$$



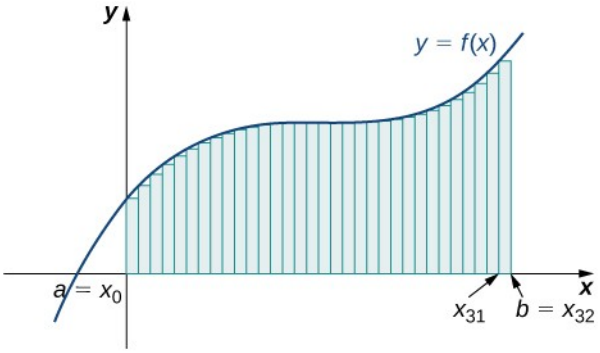
Mynd 1.9 Svæðinu undir ferlinum er skipt í $n=8$ jafnbreið hlutbil og flatarmálið nálgað með vinstri endapunktum.

Grafið á mynd 1.10 sýnir sama fall með 32 rétthyrningum innrituðum undir ferilinn. Lítið autt svæði virðist vera eftir. Flatarmálið sem rétthyrningarnir þekja er

$$L_{32}$$

$$=f(0)(0{,}0625)+f(0{,}0625)(0{,}0625)+f(0{,}125)(0{,}0625)+\cdots+f(1{,}9375)(0{,}0625)$$

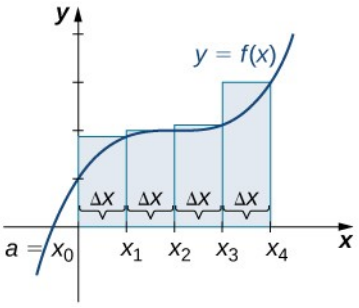
$$=7{,}9375.$$



Mynd 1.10 Hér eru 32 rétthyrningar innritaðir undir ferilinn til að nálga flatarmálið með vinstri endapunktum.

Sams konar aðferð má nota við nálgun með hægri endapunktum. Þegar sami ferill er nálgaður með hægri endapunktum og fjórum rétthyrningum (mynd 1.11) fæst flatarmálið

$$\begin{aligned} R_4 &= f(0{,}5)(0{,}5)+f(1)(0{,}5)+f(1{,}5)(0{,}5)+f(2)(0{,}5) \\ &= 8{,}5. \end{aligned}$$

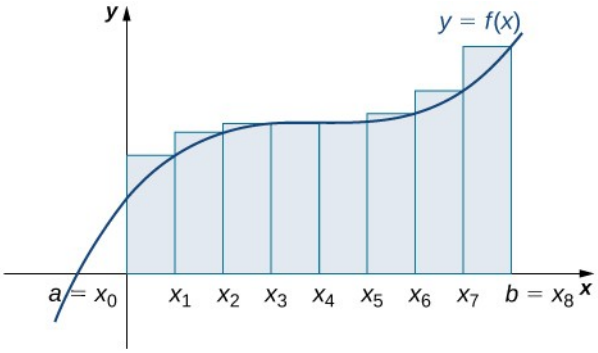


Mynd 1.11 Nú skiptum við svæðinu undir ferlinum í fjögur jafnbreið hlutbil og nálgum flatarmálið með hægri endapunktum.

Ef svæðinu yfir bilinu $[0,2]$ er skipt í átta rétthyrninga fæst $\Delta x = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$. Grafið er sýnt á mynd 1.12. Flatarmálið er

$$\begin{aligned} R_8 &= f(0{,}25)(0{,}25)+f(0{,}5)(0{,}25)+f(0{,}75)(0{,}25)+f(1)(0{,}25) \\ &\quad +f(1{,}25)(0{,}25)+f(1{,}5)(0{,}25)+f(1{,}75)(0{,}25)+f(2)(0{,}25) \\ &= 8{,}25. \end{aligned}$$

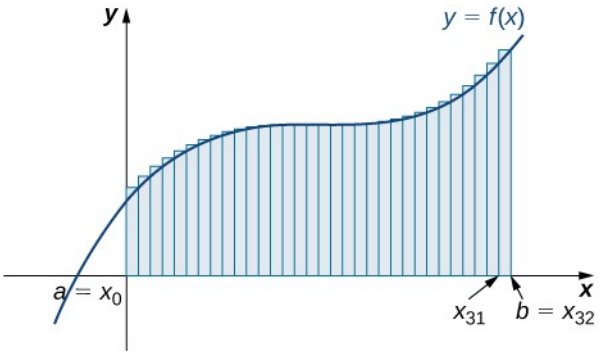
1



Mynd 1.12 Hér notum við nálgun með hægri endapunktum fyrir svæði sem skipt er í átta jafnbreið hlutbil.

Loks er nálgunin með hægri endapunktum nálægt raunverulega flatarmálinu þegar $n=32$ (mynd 1.13). Flatarmálið er um það bil

$$R_{32}$$
$$=f(0{,}0625)(0{,}0625)+f(0{,}125)(0{,}0625)+f(0{,}1875)(0{,}0625)+\cdots+f(2)(0{,}0625)$$
$$=8{,}0625.$$



Mynd 1.13 Svæðinu er skipt í 32 jafnbreið hlutbil og flatarmálið nálgað með hægri endapunktum.

Myndirnar og útreikningarnir benda til þess að við séum á réttri leið: rétthyrningarnir virðast nálga flatarmálið undir ferlinum betur eftir því sem n hækkar. Þegar n hækkar virðast jafnframt bæði nálgunargildin, með vinstri og hægri endapunktum, stefna að 8 ferningseiningum. Í töflu 1.1 eru aðferðirnar bornar saman tölulega. Sú hugmynd að nálgunin á flatarmálinu undir ferlinum batni eftir því sem n hækkar er mjög mikilvæg og við skoðum hana nú nánar.

Tafla 1.1 Samleitin gildi nálgana með vinstri og hægri endapunktum þegar n vex

Gildi n	Nálgað flatarmál L_n	Nálgað flatarmál R_n
$n=4$	7.5	8.5
$n=8$	7.75	8.25
$n=32$	7.94	8.06

Myndun Riemann-summa

Hingað til höfum við nálgað flatarmál undir ferli með rétthyrningum. Hæð hvers rétthyrnings hefur ráðist af fallgildinu annaðhvort í hægri eða vinstri endapunkti hlutbilsins $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Engin ástæða er þó til að einskorða valið við þessa tvo punkta. Reikna má fallgildið í hvaða punkti x_i^* sem er á hlutbilinu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, og nota $f\left(x_i^*\right)$ sem hæð rétthyrningsins. Þá fæst flatarmálsnálgun á forminu

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Summa af þessu tagi kallast Riemann-summa eftir 19. aldar stærðfræðingnum Bernhard Riemann, sem þróaði hugmyndina.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera skilgreint á lokaða bilinu $[a, b]$ og látum P vera reglulega skiptingu bilsins $[a, b]$. Látum Δx tákna breidd hvers hlutbils $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ og veljum fyrir hvert i punkt x_i^* einhvers staðar á $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Riemann-summa fyrir $f(x)$ er þá skilgreind með

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Minnumst þess að nálganir með vinstri og hægri endapunktum virðast batna eftir því sem n hækkar. Hið sama á við um Riemann-summur: stærra gildi n gefur betri nálgun. Nú getum við skilgreint flatarmálið undir ferli með Riemann-summum.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera samfellt, óneikvætt fall á bili $[a, b]$, og látum $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$ vera Riemann-summu fyrir $f(x)$. Þá er flatarmálið undir ferlinum $y=f(x)$ á $[a, b]$ gefið með

$$A=\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

MYNDEFNI

Skoðið myndræna sýningu á því hvernig Riemann-summa er mynduð.

1

Í þessu sambandi er vert að ræða nokkur atriði. Í fyrsta lagi skal hafa í huga að það er dálítið annað að finna markgildi summu en að finna markgildi falls $f(x)$ þegar x stefnir á óendanlegt. Fjallað er ítarlega um markgildi summa í kaflanum Runur og raðir. Að sinni getum við þó gert ráð fyrir að nota megi sömu reikniaðferðir við markgildi summa og við markgildi falla.

Í öðru lagi verðum við að íhuga hvað gera skuli ef stæðan stefnir á mismunandi markgildi eftir vali á $\left\{x_i^*\right\}$. Sem betur fer gerist það ekki. Þótt sönnunin sé utan við efni þessarar bókar má sýna fram á að ef $f(x)$ er samfellt á lokaða bilinu $[a,b]$, þá er $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$ til og ótvírætt (með öðrum orðum, það er óháð valinu á $\left\{x_i^*\right\}$).

Við skoðum brátt nokkur dæmi. En áður en að því kemur skulum við staldra við og ræða nokkrar sérstakar leiðir til að velja $\left\{x_i^*\right\}$. Þótt hvert val á $\left\{x_i^*\right\}$ gefi okkur nálgun á flatarmálinu undir ferlinum vitum við ekki endilega hvort nálgunin er of há (ofmat) eða of lág (vanmat). Ef mikilvægt er að vita hvort nálgunin okkar er of há eða of lág getum við valið $\left\{x_i^*\right\}$ þannig að önnur hvor niðurstaðan sé tryggð.

Ef við viljum til dæmis fá ofmat getum við valið $\left\{x_i^*\right\}$ þannig að fyrir $i=1,2,3,\ldots,n, f\left(x_i^*\right)\geq f(x)$ fyrir öll $x\in\left[x_{i-1},x_i\right]$. Með öðrum orðum veljum við $\left\{x_i^*\right\}$ þannig að fyrir $i=1,2,3,\ldots,n, f\left(x_i^*\right)$ sé hágildi fallsins á bilinu $\left[x_{i-1},x_i\right]$. Ef $\left\{x_i^*\right\}$ eru valin þannig kallast Riemann-summan $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$ efri summa. Á sama hátt getum við, ef við viljum fá vanmat, valið $\left\{x_i^*\right\}$ þannig að fyrir $i=1,2,3,\ldots,n, f\left(x_i^*\right)$ sé lággildi fallsins á bilinu $\left[x_{i-1},x_i\right]$. Samsvarandi Riemann-summa kallast þá neðri summa. Athugið að ef $f(x)$ er annaðhvort vaxandi eða minnkandi á öllu bilinu $[a,b]$, eru hágildi og lággildi fallsins í endapunktum hlutbilanna. Þá eru efri og neðri summurnar einfaldlega þær sömu og nálganirnar með vinstri og hægri endapunktum.

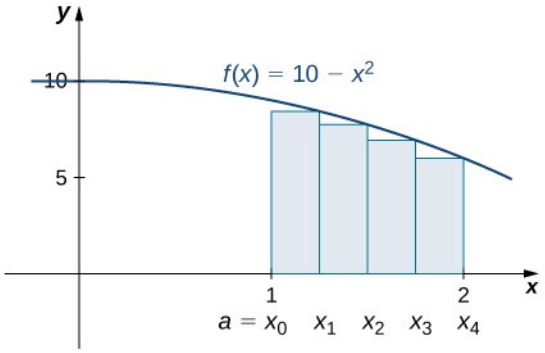
DÆMI 1.5

Útreikningur neðri og efri summa

Finnið neðri summu fyrir $f(x)=10-x^2$ á $[1,2]$; notið $n=4$ hlutbil.

Lausn

Þegar $n=4$ er breidd hlutbilanna á bilinu $[1,2], \Delta x=\frac{1}{4}$. Hlutbilin eru $[1;1{,}25],[1{,}25;1{,}5],[1{,}5;1{,}75],[1{,}75;2]$. Fallið er minnkandi á $[1,2]$, og því má sjá á mynd 1.14 að neðri summa fæst með hægri endapunktunum.



Mynd 1.14 Graf fallsins $f(x)=10-x^2$ sýnir nálgun með hægri endapunktum á flatarmálinu sem ferillinn og x-ásinn afmarka á $[1,2]$, og nálgunargildið er neðri summa.

Riemann-summan er

$$\sum_{k=1}^{4}\left(10-x_k{}^2\right)(0{,}25)$$

$$=0{,}25\left[10-(1{,}25)^2+10-(1{,}5)^2+10-(1{,}75)^2+10-(2)^2\right]$$

$$=0{,}25\left[8{,}4375+7{,}75+6{,}9375+6\right]$$

$$=7{,}28.$$

Gildið 7,28 er neðri summa og því vanmat á flatarmálinu.

STÖÐUMAT 1.5

a. Finnið efri summu fyrir $f(x)=10-x^2$ á $[1,2]$; notið $n=4$.

b. Teiknið nálgunina.

DÆMI 1.6

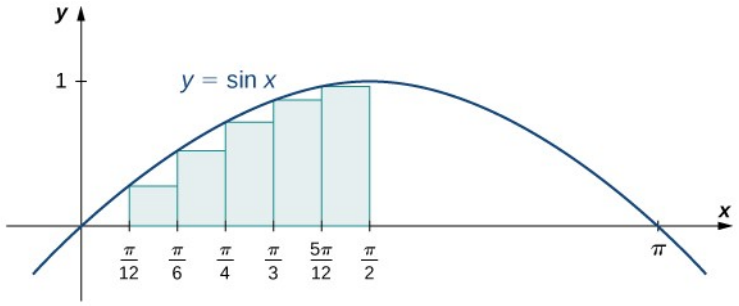
Neðri og efri summur fyrir $f(x)=\sin x$ fundnar

Finnið neðri summu fyrir $f(x)=\sin x$ á bilinu $[a,b]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$; notið $n=6$.

Lausn

Skoðum fyrst grafið á mynd 1.15 til að átta okkur betur á flatarmálinu sem um ræðir.

1



Mynd 1.15 Svæðinu undir grafi $y=\sin x$ er skipt í sex hluta: $\Delta x=\frac{\pi/2}{6}=\frac{\pi}{12}$.

Hlutbilin eru $\left[0,\frac{\pi}{12}\right],\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right],\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right]$, og $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$. Fallið $f(x)=\sin x$ er vaxandi á $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, og því gefur nálgun með vinstri endapunktum neðri summuna. Sú nálgun er Riemann-summan $\sum_{i=0}^{5}\sin x_i\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Við fáum

$$A\approx\sin(0)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$+\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=0{,}863.$$

STÖÐUMAT 1.6

Finnið efri summu fyrir fallið $f(x)=\sin x$ á bilinu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, með $n=6$.

Æfingar úr undirkafla 1.1

1. Segið til um hvort gefnu summurnar séu jafnar eða ójafnar.

a. $\sum_{i=1}^{10} i$ og $\sum_{k=1}^{10} k$

b. $\sum_{i=1}^{10} i$ og $\sum_{i=6}^{15}(i-5)$

c. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ og $\sum_{j=0}^{9}(j+1)j$

d. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ og $\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$

Notið reglurnar um summur velda heiltalna til að reikna summurnar í eftirfarandi æfingum.

2.

$$\sum_{i=5}^{10} i$$

3.

$$\sum_{i=5}^{10} i^2$$

Gerum ráð fyrir að $\sum_{i=1}^{100} a_i = 15$ og $\sum_{i=1}^{100} b_i = -12$. Reiknið summurnar í eftirfarandi æfingum.

4.

$$\sum_{i=1}^{100} \left(a_i + b_i\right)$$

5.

$$\sum_{i=1}^{100} \left(a_i - b_i\right)$$

6.

$$\sum_{i=1}^{100} \left(3\,a_i - 4\,b_i\right)$$

7.

$$\sum_{i=1}^{100} \left(5\,a_i + 4\,b_i\right)$$

Notið eiginleika og formúlur summa til að umrita og reikna summurnar í eftirfarandi æfingum.

8.

$$\sum_{k=1}^{20} 100\left(k^2 - 5k + 1\right)$$

9.

$$\sum_{j=1}^{50} \left(j^2 - 2\,j\right)$$

10.

$$\sum_{j=11}^{20} \left(j^2 - 10\,j\right)$$

11.

$$\sum_{k=1}^{25}\left[(2k)^2-100k\right]$$

1

Látum L_n tákna summuna með vinstri endapunktum og n hlutbilum og R_n samsvarandi summu með hægri endapunktum. Reiknið í eftirfarandi æfingum tilgreindar vinstri og hægri summur fyrir gefnu föllin á tilgreindum bilum.

12. L_4 fyrir $f(x)=\frac{1}{x-1}$ á $[2,3]$

13. R_4 fyrir $g(x)=\cos(\pi x)$ á $[0,1]$

14. L_6 fyrir $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ á $[2,5]$

15. R_6 fyrir $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ á $[2,5]$

16. R_4 fyrir $\frac{1}{x^2+1}$ á $[-2,2]$

17. L_4 fyrir $\frac{1}{x^2+1}$ á $[-2,2]$

18. R_8 fyrir x^2-2x+1 á $[0,2]$

19. L_8 fyrir x^2-2x+1 á $[0,2]$

20. Reiknið Riemann-summurnar L_4 og R_4 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=(2-|x|)$ á $[-2,2]$. Reiknið meðaltal þeirra og berið það saman við flatarmálið undir grafi f.

21. Reiknið Riemann-summurnar L_6 og R_6 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=(3-|3-x|)$ á $[0,6]$. Reiknið meðaltal þeirra og berið það saman við flatarmálið undir grafi f.

22. Reiknið Riemann-summurnar L_4 og R_4 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ á $[-2,2]$ og berið gildi þeirra saman.

23. Reiknið Riemann-summurnar L_6 og R_6 með vinstri og hægri endapunktum, í sömu röð, fyrir $f(x)=\sqrt{9-(x-3)^2}$ á $[0,6]$ og berið gildi þeirra saman.

Ritið eftirfarandi endapunktasummur með summutákni en reiknið þær ekki.

24. L_{30} fyrir $f(x)=x^2$ á $[1,2]$

25. L_{10} fyrir $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ á $[-2,2]$

26. R_{20} fyrir $f(x)=\sin x$ á $[0,\pi]$

27. R_{100} fyrir $\ln x$ á $[1, e]$

Teiknið í eftirfarandi æfingum graf fallsins og notið síðan reiknivél eða tölvuforrit til að reikna tilteknar summur með vinstri og hægri endapunktum. Ef summurnar eru jafnar skuluð þið svara „hvorugt“.

28. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y = x^2 - x + 3$ á bilinu $[-1, 1]$

29. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y = x^2$ á bilinu $[0, 1]$

30. **[T]** L_{50} og R_{50} fyrir $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ á bilinu $[2, 4]$

31. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y = x^3 + 2$ á bilinu $[-1, 1]$

32. **[T]** L_{50} og R_{50} fyrir $y = \tan(x)$ á bilinu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

33. **[T]** L_{100} og R_{100} fyrir $y = e^{2x}$ á bilinu $[-1, 1]$

34. Látum t_j tákna tímann sem það tók Tejay van Garteren að hjóla j. áfanga Frakklandshjólreiðanna árið 2014. Áfangarnir voru alls 21. Túlkið $\sum_{j=1}^{21} t_j$.

35. Látum r_j tákna heildarúrkomuna í Portland á j. degi ársins 2009. Túlkið $\sum_{j=1}^{31} r_j$.

36. Látum d_j tákna fjölda dagsbirtustunda og δ_j tákna fjölgun dagsbirtustunda frá degi $j-1$ til dags j í Fargo í Norður-Dakóta á j. degi ársins. Túlkið $d_1 + \sum_{j=2}^{365} \delta_j$.

37. Til að komast í betra form fær Joe sér nýja hlaupaskó. Joe hleypur 1 km á dag í viku 1 og bætir $\frac{1}{10}$ km við daglega hlaupalengd sína í hverri viku. Hversu marga kílómetra hefur hann samtals hlaupið á skónum eftir 25 vikur?

38. Taflan sýnir um það bil hve mikið koltvísýringur (CO_2) í andrúmsloftinu jókst að meðaltali á ári á hverjum áratug frá 1960, mælt í milljónarhlutum (ppm). Áætlið heildaraukningu CO_2 í andrúmsloftinu frá 1964 til 2013.

Tafla 1.2 Meðalárleg aukning CO_2 í andrúmslofti, 1964–2013 *Heimild*: http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/.

Áratugur	ppm/ár
1964–1973	1,07
1974–1983	1,34
1984–1993	1,40
1994–2003	1,87
2004–2013	2,07

39. Eftirfarandi tafla sýnir áætlaða hækkun sjávarborðs í millimetrum á 20 ára tímabili frá og með tilgreindu ári. Áætlið heildarbreytingu á meðalsjávarborði frá 1870 til 2010.

Tafla 1.3 Áætluð hækkun sjávarborðs á 20 ára tímabilum, 1870–1990 *Heimild*: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10712-011-9119-1

Upphafsár	Breyting á 20 árum (mm)
1870	8
1890	38
1910	5
1930	71
1950	18
1970	28
1990	38

40. Eftirfarandi tafla sýnir áætlaða hækkun meðalverðs á lítra af bensíni, í evrum, á hverjum áratug frá 1950. Ef meðalverð á lítra af bensíni árið 2010 var 0,69 €, hvert var meðalverðið árið 1950?

Tafla 1.4 Áætluð hækkun bensínverðs á 10 ára tímabilum, 1950–2000 *Heimild*: http://epb.lbl.gov/homepages/Rick_Diamond/docs/lbnl55011-trends.pdf.

Upphafsár	Breyting á 10 árum (€ á lítra)
1950	0,01
1960	0,01
1970	0,23
1980	−0,01
1990	0,08
2000	0,30

41. Eftirfarandi tafla sýnir hlutfallslega fjölgun íbúa Bandaríkjanna frá og með júlí þess árs sem tilgreint er. Ef íbúafjöldi Bandaríkjanna var 281.421.906 í júlí 2000, áætlið þá íbúafjölda Bandaríkjanna í júlí 2010.

Tafla 1.5 Árlegur hlutfallslegur vöxtur mannfjölda í Bandaríkjunum, 2000–2009 *Heimild*: http://www.census.gov/popest/data.

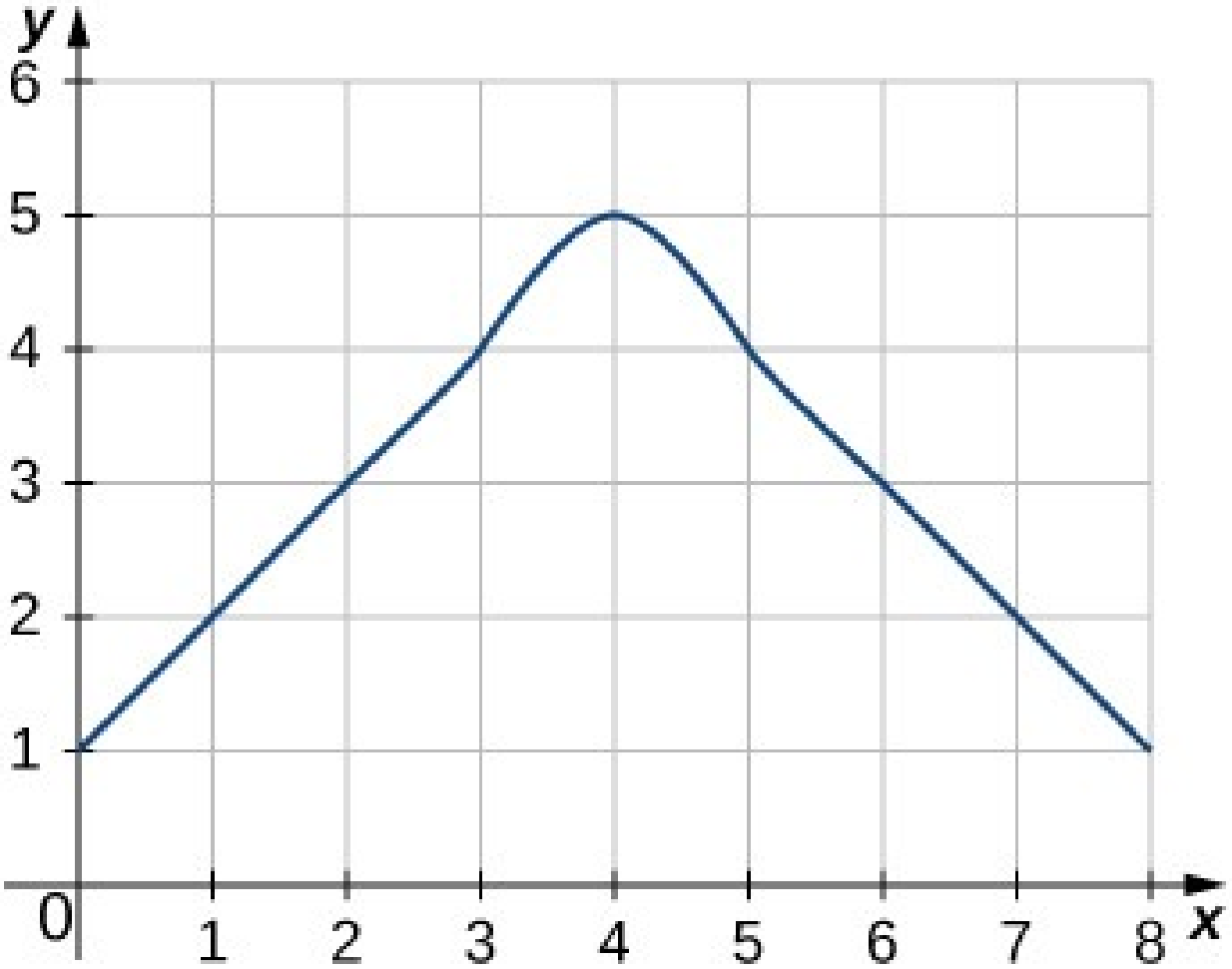
Ár	Breyting á ári (%)
2000	1,12
2001	0,99
2002	0,93
2003	0,86
2004	0,93
2005	0,93
2006	0,97
2007	0,96
2008	0,95
2009	0,88

(Vísbending: Margfaldið íbúafjöldann í júlí 2000 með 1,0112 til að fá íbúafjöldann í júlí 2001, 284.573.831.)

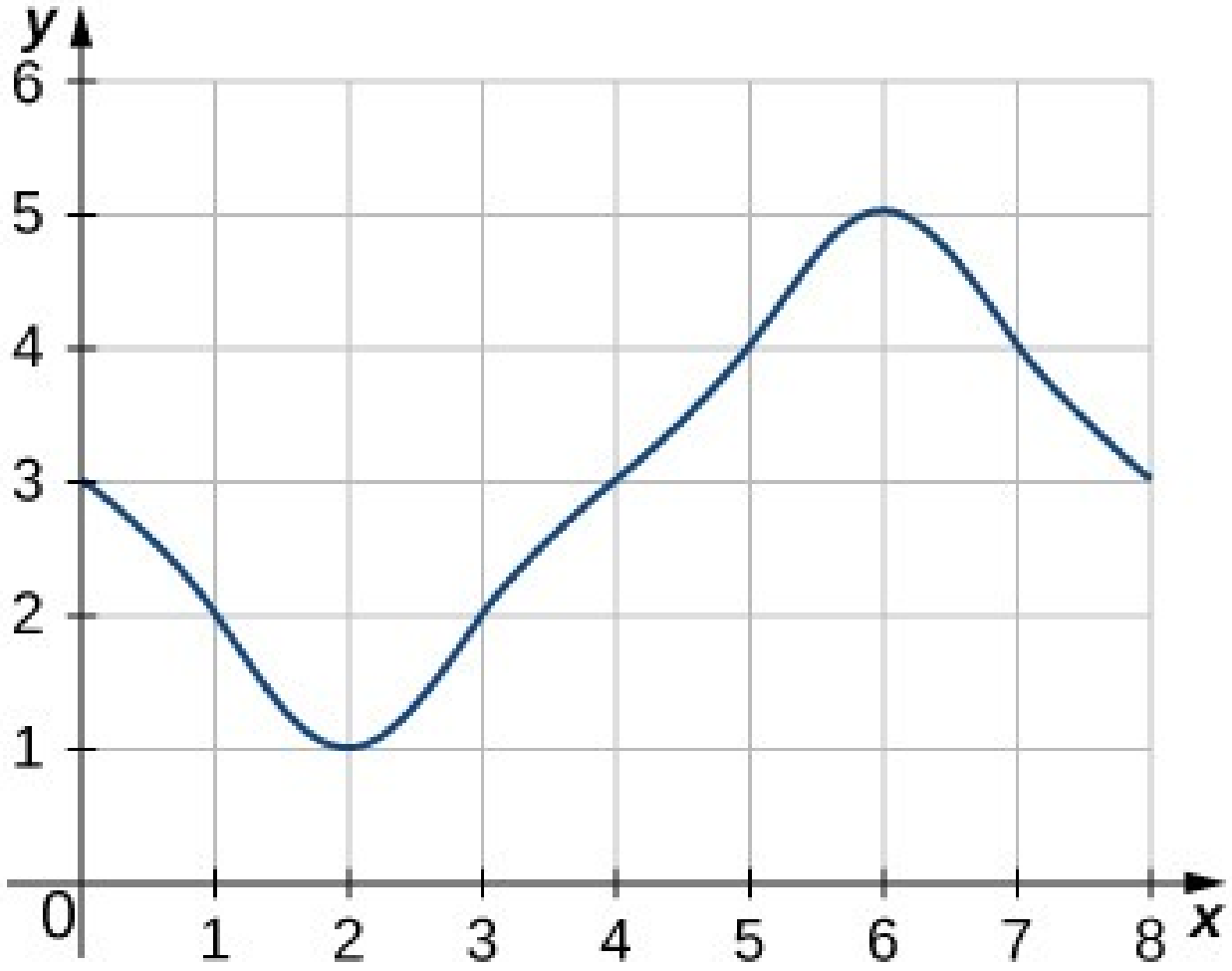
Áætlið í eftirfarandi æfingum flatarmálin undir ferlunum með því að reikna vinstri Riemann-summurnar L_8.

42.

1

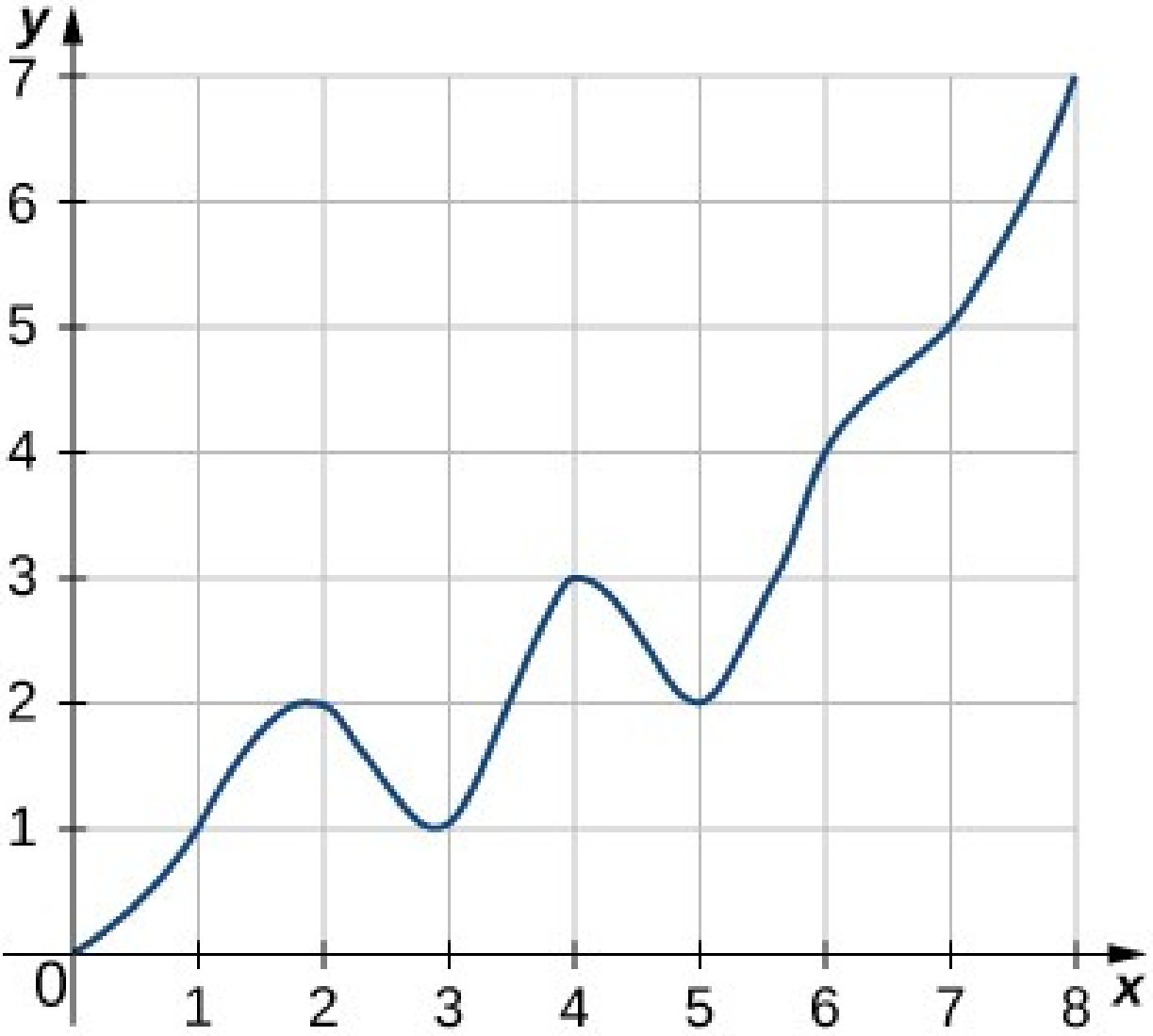


43.

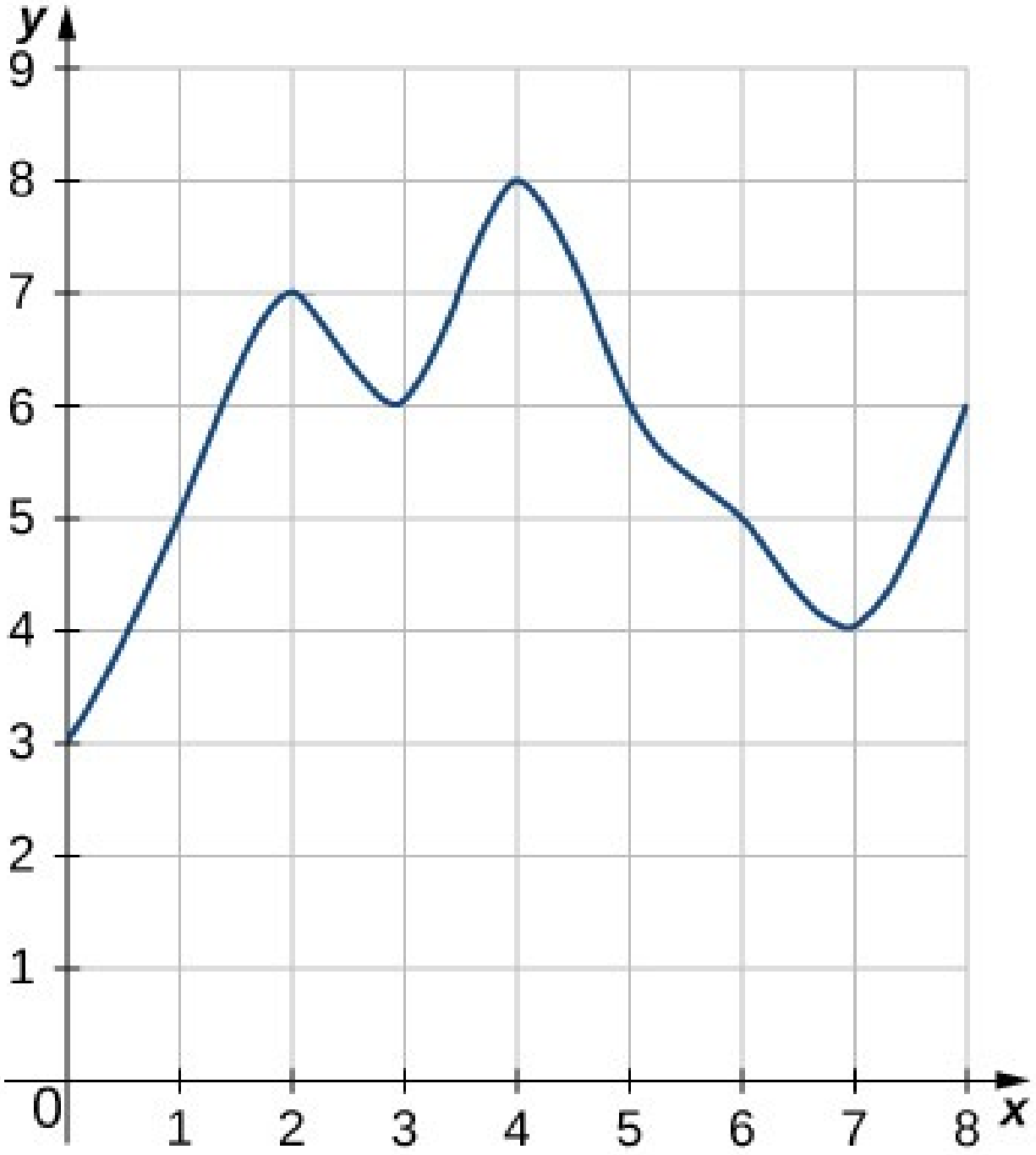


44.

1



45.



46. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að reikna Riemann-summuna L_N, fyrir $N=10,30,50$ og $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ á $[-1,1]$.

47. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að reikna Riemann-summuna L_N fyrir $N=10,30,50$ og $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ á $[-1,1]$.

48. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að reikna Riemann-summuna L_N fyrir $N=10,30,50$ og $f(x)=\sin^2 x$ á $[0,2\pi]$. Berið nálgunargildin saman við π.

1

Notið í eftirfarandi æfingum reiknivél eða tölvuforrit til að reikna endapunktasummurnar R_N og L_N fyrir $N=1,10,100$. Hvernig eru nálgunargildin í samanburði við nákvæmu svörin sem finna má með rúmfræði?

49. **[T]** $y=\cos(\pi x)$ á bilinu $[0,1]$

50. **[T]** $y=3x+2$ á bilinu $[3,5]$

Notið í eftirfarandi æfingum reiknivél eða tölvuforrit til að reikna endapunktasummurnar R_N og L_N fyrir $N=1,10,100$.

51. **[T]** $y=x^4-5x^2+4$ á bilinu $[-2,2]$, þar sem nákvæmt flatarmál er $\frac{32}{15}$

52. **[T]** $y=\ln x$ á bilinu $[1,2]$, þar sem nákvæmt flatarmál er $2\ln(2)-1$

53. Útskýrið hvers vegna eftirfarandi gildir: Ef $f(a)\geq 0$ og f er vaxandi á $[a,b]$, þá er nálgun með vinstri endapunktum neðra mark fyrir flatarmálið undir grafi f á $[a,b]$.

54. Útskýrið hvers vegna eftirfarandi gildir: Ef $f(b)\geq 0$ og f er minnkandi á $[a,b]$, þá er nálgun með vinstri endapunktum efra mark fyrir flatarmálið undir grafi f á $[a,b]$.

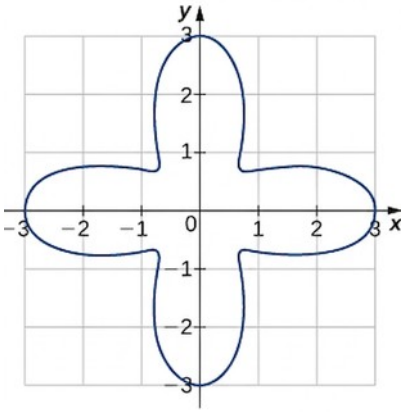
55. Sýnið að almennt gildir $R_N-L_N=(b-a)\times\frac{f(b)-f(a)}{N}$.

56. Útskýrið hvers vegna eftirfarandi gildir: Ef f er vaxandi á $[a,b]$, þá er skekkjan í hvoru nálgunargildinu um sig, L_N eða R_N, miðað við flatarmálið A undir grafi f í mesta lagi $(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{N}$.

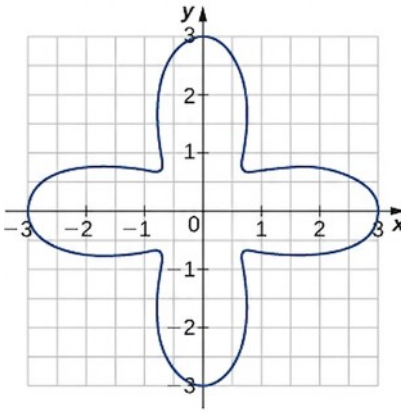
57. Fyrir hvert grafanna þriggja:

a. Finnið neðra mark $L(A)$ fyrir flatarmálið sem ferillinn afmarkar með því að leggja saman flatarmál þeirra ferninga sem liggja að öllu leyti innan ferilsins.

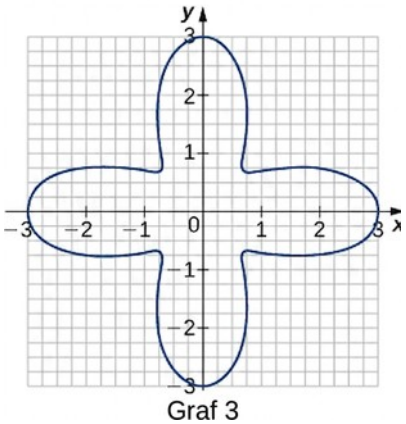
b. Finnið efra mark $U(A)$ fyrir flatarmálið með því að leggja við $L(A)$ flatarmálin $B(A)$ fyrir þá ferninga sem liggja að hluta innan ferilsins.



Graf 1



Graf 2

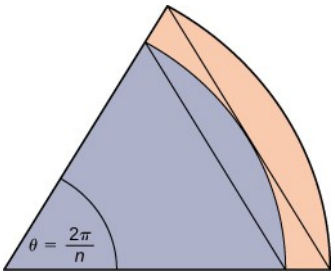


Graf 3

58. Lítið aftur á æfinguna á undan og útskýrið hvers vegna $L(A)$ getur ekki minnkað og $U(A)$ ekki stækkað þegar hverjum ferningi er skipt í fjóra jafnstóra reiti.

59. Einingarhringur er settur saman úr n hringgeirum sem eru eins og innri geirinn á myndinni. Grunnlína innri þríhyrningsins er 1 eining og hæð hans er $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

Grunnlína ytri þríhyrningsins er $B=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ og hæð hans $H=B\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Notið þessar upplýsingar til að rökstyðja að flatarmál einingarhrings sé jafnt π.



1.2 Ákveðið heildi

NÁMSMARKMIÐ

- 1.2.1 Setja fram skilgreiningu á ákveðnu heildi.
- 1.2.2 Útskýra hugtökin heildisstofn, heildismörk og heildunarbreyta.
- 1.2.3 Útskýra hvenær fall er heildanlegt.
- 1.2.4 Lýsa tengslum ákveðins heildis og formerkts flatarmáls.
- 1.2.5 Nota rúmfræði og eiginleika ákveðinna heilda til að reikna þau.
- 1.2.6 Reikna meðalgildi falls.

Í undirkaflanum á undan skilgreindum við flatarmál undir ferli með Riemann-summum:

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x\,.$$

Þessari skilgreiningu fylgdu þó takmarkanir. Við gerðum þá kröfu að $f(x)$ væri samfellt og óneikvætt. Raunveruleg viðfangsefni uppfylla því miður ekki alltaf þessi skilyrði. Í þessum undirkafla skoðum við hvernig ákveðið heildi gerir okkur kleift að nota hugmyndina um flatarmál undir ferli fyrir fleiri föll.

Skilgreining og táknun

Ákveðið heildi alhæfir hugmyndina um flatarmál undir ferli. Við fellum niður skilyrðin um að $f(x)$ sé samfellt og óneikvætt og skilgreinum ákveðið heildi sem hér segir.

SKILGREINING

Ef $f(x)$ er fall sem skilgreint er á bili $[a,b]$, er ákveðið heildi f frá a til b gefið með

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x,$$

(1.8)

að því gefnu að markgildið sé til. Ef markgildið er til kallast fallið $f(x)$ heildanlegt á $[a,b]$, eða einfaldlega heildanlegt fall.

Heildistáknið í skilgreiningunni hér á undan ætti að vera kunnuglegt. Við höfum séð svipaða táknun í kaflanum um notkun afleiða, þar sem við notuðum tákn óákveðins heildis (án a og b fyrir ofan og neðan) til að tákna stofnfall. Þótt táknun óákveðinna heilda líkist táknun ákveðins heildis eru þetta ekki sömu fyrirbæri. Ákveðið heildi er tala en óákveðið heildi er fjölskylda falla. Síðar í þessum kafla skoðum við hvernig hugtökin tengjast. Alltaf þarf þó að gæta vel að táknuninni svo ljóst sé hvort unnið er með ákveðið eða óákveðið heildi.

Heildatáknun á rætur að rekja til síðari hluta sautjándu aldar og er eitt af framlögum Gottfrieds Wilhelms Leibniz, sem ásamt Isaac Newton er oft talinn annar tveggja upphafsmanna stærðfræðigreiningarinnar. Heildistáknið $\int$ er ílangt S og vísar til sigma eða summu. Fyrir ofan og neðan heildistáknið í ákveðnu heildi standa endamörk bilsins $[a,b]$. Tölurnar a og b eru x-gildi og kallast heildismörk; a er neðra heildismark og b efra heildismark. Til skýringar er orðið mark notað í tvenns konar merkingu í samhengi við ákveðið heildi. Annars vegar er talað um markgildi summu þegar $n \to \infty$. Hins vegar kallast endamörk svæðisins heildismörk.

Fallið $f(x)$ kallast heildisstofn og dx gefur til kynna að $f(x)$ sé fall af x; x kallast heildunarbreyta. Líkt og vísir í summu er heildunarbreytan gervibreyta og hefur engin áhrif á útreikning heildisins. Við gætum valið hvaða breytu sem er sem heildunarbreytu:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

Áður kom fram að ef $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$, þá er markgildið $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$ til og ótvírætt ákvarðað. Af því leiðir næsta setning, sem við setjum fram án sönnunar.

SETNING 1.1

Samfelld föll eru heildanleg

Ef $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$, þá er f heildanlegt á $[a,b]$.

Föll sem eru ekki samfelld á $[a,b]$ geta samt verið heildanleg, eftir eðli ósamfellnanna. Til dæmis eru föll heildanleg ef þau eru samfelld á lokuðu bili að undanskildum endanlega mörgum stökkósamfellum.

1

Einnig er vert að taka fram að við höfum haldið okkur við reglulega skiptingu í Riemann-summunum. Sú takmörkun er í raun óþörf. Nota má hvaða skiptingu sem er til að mynda Riemann-summu. Ef óregluleg skipting er notuð til að skilgreina ákveðið heildi nægir hins vegar ekki að taka markgildið þegar fjöldi hlutbila stefnir á óendanlegt. Þá verður þess í stað að taka markgildið þegar breidd stærsta hlutbilsins stefnir á núll. Við það verður táknun markgildanna nokkru flóknari og útreikningarnir erfiðari, án þess að skilningur okkar aukist að ráði. Því höldum við okkur við reglulegar skiptingar í Riemann-summum.

DÆMI 1.7

Heildi reiknað út frá skilgreiningunni

Notið skilgreiningu ákveðins heildis til að reikna $\int_0^2 x^2\,dx$. Notið nálgun með hægri endapunktum til að mynda Riemann-summuna.

Lausn

Fyrst setjum við upp Riemann-summu. Af heildismörkunum fæst $a=0$ og $b=2$. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[0,2]$. Þá fæst

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}.$$

Við notum nálgun með hægri endapunktum til að mynda Riemann-summur og þurfum því, fyrir hvert i, að reikna fallgildið í hægri endapunkti hlutbilsins $[x_{i-1},x_i]$. Hægri endapunktur hlutbilsins er x_i, og þar sem P er regluleg skipting er

$$x_i=x_0+i\Delta x=0+i\left[\frac{2}{n}\right]=\frac{2i}{n}.$$

Fallgildið í hægri endapunkti hlutbilsins er því

$$f(x_i)=x_i^2=\left(\frac{2i}{n}\right)^2=\frac{4i^2}{n^2}.$$

Þá er Riemann-summan á forminu

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}=\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Með summuformúlunni fyrir $\sum_{i=1}^{n} i^2$, fæst

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] \\ &= \frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3} \\ &= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}.\end{aligned}$$

Til að reikna ákveðna heildið þurfum við nú að taka markgildið þegar $n \to \infty$. Við fáum

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{6n^2}\right) \\ &= \frac{8}{3}+0+0=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

PRÓFAÐU ÞIG 1.7

Notið skilgreiningu ákveðins heildis til að reikna $\int_0^3 (2x-1)\,dx$. Notið nálgun með hægri endapunktum til að mynda Riemann-summuna.

Útreikningur ákveðinna heilda

Það getur verið seinlegt að reikna ákveðin heildi á þennan hátt því að útreikningarnir eru flóknir. Síðar í kaflanum þróum við aðferðir til að reikna ákveðin heildi án þess að taka markgildi Riemann-summa. Í bili getum við hins vegar nýtt þá staðreynd að ákveðin heildi tákna flatarmál undir ferli og reiknað þau með rúmfræðiformúlum fyrir flatarmál. Þannig staðfestum við að ákveðin heildi tákna í raun flatarmál og getum síðan rætt hvað gera skuli þegar ferill falls liggur neðan x-ássins.

DÆMI 1.8

Rúmfræðiformúlur notaðar til að reikna ákveðin heildi

Notið formúluna fyrir flatarmál hrings til að reikna $\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$.

Lausn

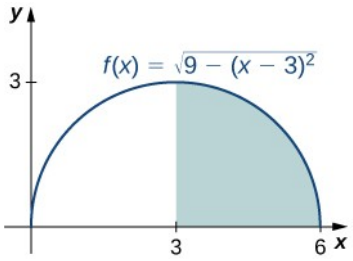
Fallið lýsir hálfhring með radíus 3. Til að finna

$$\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx,$$

1

viljum við finna flatarmálið undir ferlinum á bilinu $[3,6]$. Formúlan fyrir flatarmál hrings er $A=\pi r^2$. Flatarmál hálfhrings er helmingur flatarmáls hrings, eða $A=\left(\frac{1}{2}\right)\pi r^2$. Skyggða svæðið á mynd 1.16 er helmingur hálfhringsins, eða $A=\left(\frac{1}{4}\right)\pi r^2$. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2} &= \frac{1}{4}\pi(3)^2\\ &= \frac{9}{4}\pi\\ &\approx 7{,}069.\end{aligned}$$



Mynd 1.16 Gildi heildis fallsins $f(x)$ á bilinu $[3,6]$ er flatarmál skyggða svæðisins.

PRÓFAÐU ÞIG 1.8

Notið formúluna fyrir flatarmál trapisu til að reikna $\int_2^4 (2x+3)\,dx$.

Flatarmál og ákveðið heildi

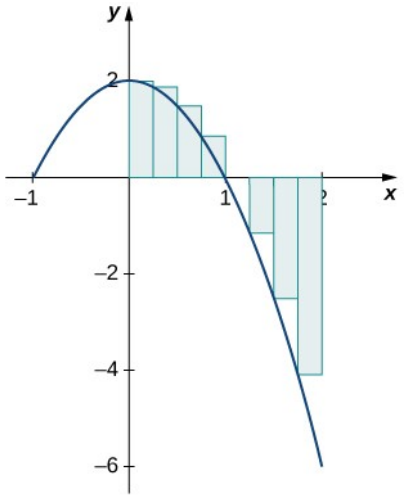
Þegar við skilgreindum ákveðna heildið felldum við niður kröfuna um að $f(x)$ væri óneikvætt. En hvernig túlkum við „flatarmálið undir ferlinum“ þegar $f(x)$ er neikvætt?

Formerkt flatarmál

Snúum okkur aftur að Riemann-summunni. Skoðum til dæmis fallið $f(x)=2-2x^2$ (sýnt á mynd 1.17) á bilinu $[0,2]$. Notum $n=8$ og veljum $\{x_i^*\}$ sem vinstri endapunkt hvers hlutbils. Teiknum rétthyrning yfir hvert hlutbil með hæðina $f(x_i^*)$ og breiddina Δx. Þegar $f(x_i^*)$ er jákvætt táknar margfeldið $f(x_i^*)\Delta x$ flatarmál rétthyrningsins, eins og áður. Þegar $f(x_i^*)$ er

neikvætt táknar margfeldið $f\left(x_i^*\right)\Delta x$ hins vegar neikvætt gildi flatarmáls rétthyrningsins. Riemann-summan verður þá

$$\sum_{i=1}^{8} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \left(\text{Flatarmál rétthyrninga ofan } x\text{-ás}\right) - \left(\text{Flatarmál rétthyrninga neðan } x\text{-ás}\right)$$

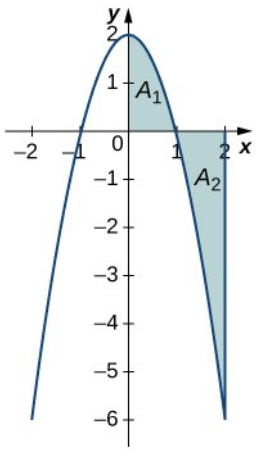


Mynd 1.17 Fyrir fall sem er neikvætt á hluta bilsins er Riemann-summan flatarmál rétthyrninganna ofan x-ássins að frádregnu flatarmáli rétthyrninganna neðan x-ássins.

Þegar $n \to \infty$, nálgast Riemann-summan flatarmálið milli ferilsins ofan x-ássins og x-ássins að frádregnu flatarmálinu milli ferilsins neðan x-ássins og x-ássins, eins og sýnt er á mynd 1.18. Þá fæst:

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ &= A_1 - A_2.\end{aligned}$$

Stærðin $A_1 - A_2$ kallast formerkt flatarmál.



Mynd 1.18 Í markgildinu er ákveðið heildi jafnt flatarmáli A_1 að frádregnu flatarmáli A_2, það er formerktu flatarmáli.

Athugið að formerkt flatarmál getur verið jákvætt, neikvætt eða núll. Ef flatarmálið ofan x-ássins er stærra er formerkta flatarmálið jákvætt. Ef flatarmálið neðan x-ássins er stærra er formerkta flatarmálið neikvætt. Ef flatarmálin ofan og neðan x-ássins eru jafnstór er formerkta flatarmálið núll.

1

DÆMI 1.9

Formerkt flatarmál fundið

Finnið formerkt flatarmál milli grafs fallsins $f(x)=2x$ og x-ássins á bilinu $[-3,3]$.

Lausn

Graf fallsins er bein lína sem myndar tvo þríhyrninga: annan frá $x=-3$ til $x=0$ og hinn frá $x=0$ til $x=3$ (mynd 1.19). Með rúmfræðiformúlunni fyrir flatarmál þríhyrnings, $A=\frac{1}{2}bh$, er flatarmál þríhyrnings A_1, sem er ofan við ásinn, jafnt

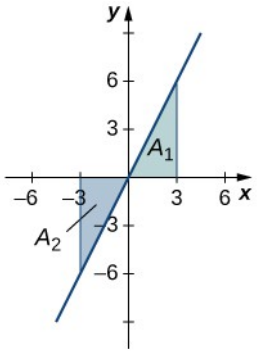
$$A_1=\frac{1}{2}3(6)=9,$$

þar sem 3 er grunnlínan og $2(3)=6$ er hæðin. Flatarmál þríhyrnings A_2 neðan ássins er

$$A_2=\frac{1}{2}(3)(6)=9,$$

þar sem 3 er grunnlínan og 6 hæðin. Formerkta flatarmálið er því

$$\int_{-3}^{3} 2x\,dx=A_1-A_2=9-9=0.$$



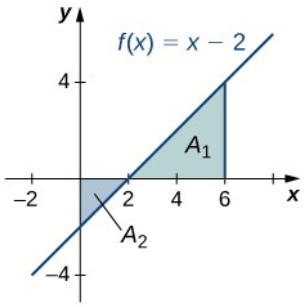
Mynd 1.19 Flatarmálið ofan ferilsins og neðan x-ássins er jafnt flatarmálinu neðan ferilsins og ofan x-ássins.

Greining

Ef A_1 er flatarmálið ofan x-ássins og A_2 er flatarmálið neðan x-ássins er formerkta flatarmálið A_1-A_2. Þar sem þríhyrningarnir hafa sama flatarmál er formerkta flatarmálið núll.

PRÓFAÐU ÞIG 1.9

Finnið formerkt flatarmál $f(x)=x-2$ á bilinu $[0,6]$, eins og sýnt er á myndinni hér á eftir.

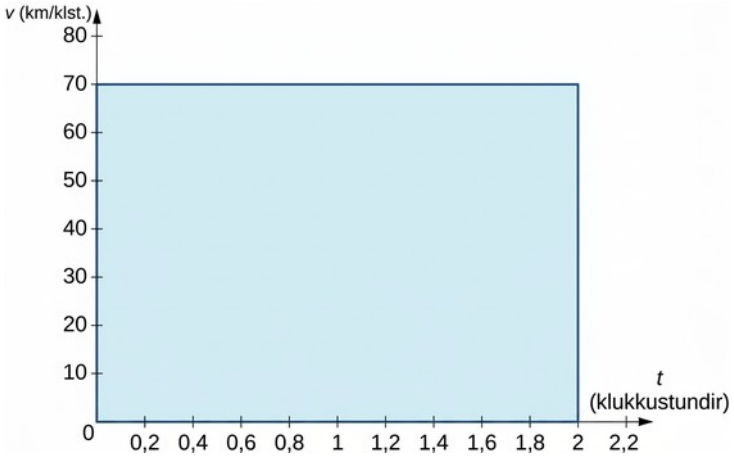


Heildarflatarmál

Ein notkun ákveðins heildis er að finna færslu þegar hraðafall er gefið. Ef $v(t)$ táknar hraða hlutar sem fall af tíma segir flatarmálið undir ferlinum til um hve langt hluturinn er frá upphafsstöðu sinni. Þetta er mjög mikilvæg notkun ákveðins heildis og við skoðum hana nánar síðar í kaflanum. Fyrst skoðum við grunnatriðin með því að athuga hreyfingu með föstum hraða.

Þegar hraðinn er fastur er flatarmálið undir ferlinum einfaldlega margfeldi hraða og tíma. Þetta þekkjum við vel. Ef bíll ekur í beinni línu frá upphafsstað sínum á 70 km/klst. hraða í 2 klukkustundir er hann 140 km frá upphafsstaðnum (mynd 1.20). Með heildatáknun fæst

$$\int_0^2 70\,dt=140.$$



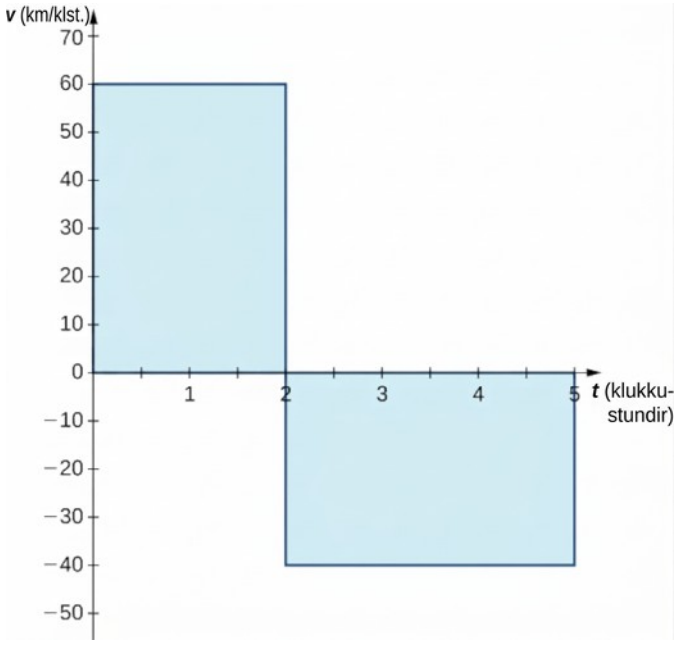
Mynd 1.20 Flatarmálið undir ferlinum $v(t)=70$ segir okkur hversu langt bíllinn er frá upphafspunkti sínum á tilteknum tíma.

Þegar fjallað er um færslu gerir formerkt flatarmál okkur kleift að taka tillit til stefnu. Ef bíll ekur beint í norður á 60 km/klst. hraða í 2 klukkustundir er hann 120 km norðan við upphafsstað sinn. Ef bíllinn snýr þá við og ekur í suður á 40 km/klst. hraða í 3 klukkustundir er hann aftur kominn á upphafsstaðinn (mynd 1.21). Með heildatáknun fæst aftur

$$\int_0^2 60dt + \int_2^5 -40dt = 120 - 120$$
$$= 0.$$

1

Í þessu tilviki er færslan núll.



Mynd 1.21 Flatarmálið ofan ássins og flatarmálið neðan hans eru jafnstór og því er formerkta flatarmálið núll.

Gerum nú ráð fyrir að við viljum vita hversu langt bíllinn ekur alls, óháð stefnu. Þá viljum við finna flatarmálið milli ferilsins og x-ássins, óháð því hvort það liggur ofan eða neðan við ásinn. Þetta kallast heildarflatarmál.

Myndrænt er einfaldast að hugsa sér heildarflatarmálið sem summu flatarmálanna ofan og neðan ássins. Flatarmálin neðan ássins eru þá ekki dregin frá eins og við gerðum fyrir formerkt flatarmál. Stærðfræðilega gerum við þetta með algildisfallinu. Heildarvegalengd bílsins er því

$$\int_0^2 |60|dt + \int_2^5 |-40|dt = \int_0^2 60dt + \int_2^5 40dt$$
$$= 120 + 120$$
$$= 240.$$

Við tökum þessar hugmyndir formlega saman í eftirfarandi skilgreiningum.

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera heildanlegt fall sem skilgreint er á bili $[a, b]$. Látum A_1 tákna flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins sem liggur ofan ássins og látum A_2 tákna flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins sem liggur neðan ássins. Þá er formerkta flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins reiknað sem

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2.$$

Heildarflatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins er reiknað sem

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2.$$

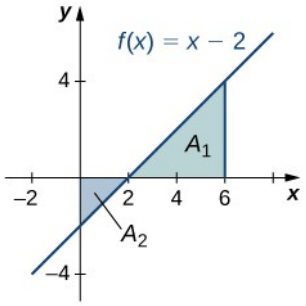
DÆMI 1.10

Heildarflatarmál fundið

Finnið heildarflatarmálið milli $f(x) = x - 2$ og x-ássins á bilinu $[0, 6]$.

Lausn

Skurðpunkturinn við x-ásinn er $(2, 0)$. Hann fæst með því að setja $y = 0$, og leysa með tilliti til x. Til að finna heildarflatarmálið leggjum við saman flatarmálið neðan x-ássins á hlutbilinu $[0, 2]$ og flatarmálið ofan x-ássins á hlutbilinu $[2, 6]$ (mynd 1.22).



Mynd 1.22 Heildarflatarmálið milli línunnar og x-ássins á $[0, 6]$ er A_2 að viðbættu A_1.

Við fáum

$$\int_0^6 |(x-2)|\,dx = A_2 + A_1.$$

Með formúlunni fyrir flatarmál þríhyrnings fáum við þá

$$A_2 = \frac{1}{2} b\,h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

$$A_1 = \frac{1}{2} b\,h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Heildarflatarmálið er því

$$A_1 + A_2 = 8 + 2 = 10.$$

PRÓFAÐU ÞIG 1.10

Finnið heildarflatarmálið milli fallsins $f(x)=2x$ og x-ássins á bilinu $[-3,3]$.

1

Eiginleikar ákveðins heildis

Eiginleikar óákveðinna heilda gilda einnig um ákveðin heildi. Ákveðin heildi hafa auk þess eiginleika sem tengjast heildismörkunum. Þessir eiginleikar, ásamt heildunarreglunum sem við skoðum síðar í kaflanum, gera okkur kleift að umrita stæður til að reikna ákveðin heildi.

REGLA: EIGINLEIKAR ÁKVEÐINS HEILDIS

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

(1.9)

Ef heildismörkin eru þau sömu er heildunarsvæðið aðeins línustrik og hefur því ekkert flatarmál.

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

(1.10)

Ef heildismörkunum er snúið við er mínusmerki sett fyrir framan heildið.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

(1.11)

Heildi summu er summa heildanna.

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

(1.12)

Heildi mismunar er mismunur heildanna.

$$\int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$$

(1.13)

∫ a b c f (x) d x = c ∫ a b f (x) d x (1.13) fyrir fastann c. Heildi margfeldis fasta og falls er jafnt margfeldi fastans og heildis fallsins.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

(1.14)

Þótt formúlan gildi venjulega þegar c er á milli a og b, gildir hún fyrir öll gildi a, b og c, að því gefnu að $f(x)$ sé heildanlegt á stærsta bilinu.

DÆMI 1.11

Eiginleikar ákveðins heildis notaðir

Notið eiginleika ákveðins heildis til að rita ákveðið heildi fallsins $f(x)=-3x^3+2x+2$ á bilinu $[-2,1]$ sem summu þriggja ákveðinna heilda.

Lausn

Með heildatáknun fæst $\int_{-2}^{1}\left(-3x^3+2x+2\right)dx$. Með eiginleikum 3 og 5 fæst

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}(-3x^3+2x+2)dx &= \int_{-2}^{1}-3x^3dx+\int_{-2}^{1}2xdx+\int_{-2}^{1}2dx\\ &= -3\int_{-2}^{1}x^3dx+2\int_{-2}^{1}xdx+\int_{-2}^{1}2dx.\end{aligned}$$

PRÓFAÐU ÞIG 1.11

Notið eiginleika ákveðins heildis til að rita ákveðið heildi fallsins $f(x)=6x^3-4x^2+2x-3$ á bilinu $[1,3]$ sem summu fjögurra ákveðinna heilda.

DÆMI 1.12

Eiginleikar ákveðins heildis notaðir

Ef vitað er að $\int_0^8 f(x)\,dx=10$ og $\int_0^5 f(x)\,dx=5$, finnið gildi $\int_5^8 f(x)\,dx$.

Lausn

Samkvæmt eiginleika 6,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Því fæst

1

$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)dx &= \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx \\ 10 &= 5 + \int_5^8 f(x)dx \\ 5 &= \int_5^8 f(x)dx.\end{aligned}$$

PRÓFAÐU ÞIG 1.12

Ef vitað er að $\int_1^5 f(x)\,dx = -3$ og $\int_2^5 f(x)\,dx = 4$, finnið gildi $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Samanburðareiginleikar heilda

Mynd getur stundum sagt okkur meira um fall en niðurstöður útreikninga. Oft fæst betri skilningur á heildun með því að bera föll saman, bæði út frá gröfum þeirra og algebrulegum stæðum. Í fljótu bragði mætti ætla að ef fall $f(x)$ liggur ofan við annað fall $g(x)$, þá sé flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins stærra en flatarmálið milli $g(x)$ og x-ássins. Hvort það er rétt fer eftir bilinu sem samanburðurinn nær yfir. Eiginleikar ákveðinna heilda gilda hvort sem $a<b$, $a=b$, eða $a>b$. Eftirfarandi eiginleikar eiga hins vegar aðeins við þegar $a \le b$, og eru notaðir til að bera saman stærð heilda.

SETNING 1.2

Samanburðarsetning

i. Ef $f(x) \ge 0$ fyrir $a \le x \le b$, þá

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

ii. Ef $f(x) \ge g(x)$ fyrir $a \le x \le b$, þá

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx.$$

iii. Ef m og M eru fastar þannig að $m \le f(x) \le M$ fyrir $a \le x \le b$, þá

$$\begin{aligned} m\,(b-a) &\leq \int_a^b f\,(x)dx \\ &\leq M\,(b-a). \end{aligned}$$

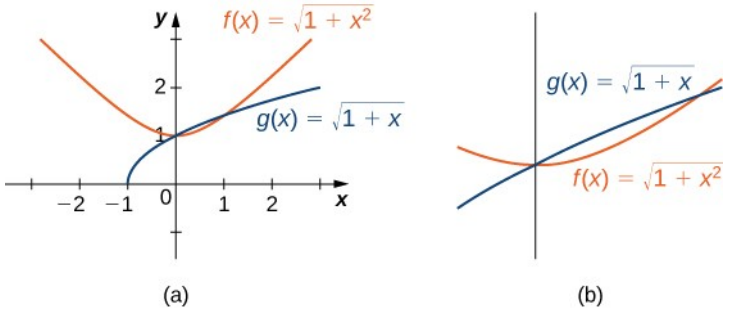
DÆMI 1.13

Samanburður tveggja falla á tilteknu bili

Berið saman $f\,(x)=\sqrt{1+x^2}$ og $g\,(x)=\sqrt{1+x}$ á bilinu $[0,1]$.

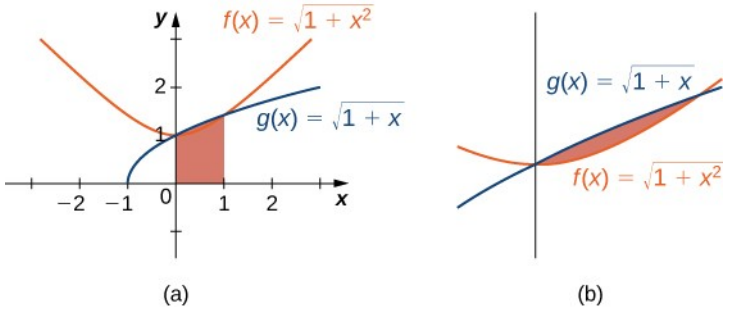
Lausn

Nauðsynlegt er að teikna gröf fallanna til að geta borið þau saman á bilinu $[0,1]$. Þegar þau eru fyrst teiknuð með grafreikni virðist $f\,(x)$ liggja alls staðar ofan við $g\,(x)$. Þegar aðeins er litið á bilið $[0,1]$, virðast gröfin þó falla saman. Við þurfum að stækka myndina til að sjá að á bilinu $[0,1]$, $g\,(x)$ liggur ofan við $f\,(x)$. Föllin skerast í $x=0$ og $x=1$ (mynd 1.23).



Mynd 1.23 (a) Fallið $f\,(x)$ virðist liggja ofan við fallið $g\,(x)$ nema á bilinu $[0,1]$. (b) Þetta sést skýrar þegar sama graf er stækkað.

Af grafinu sést að á bilinu $[0,1]$, $g\,(x)\geq f\,(x)$. Þegar heildin eru borin saman á bilinu $[0,1]$, sést einnig að $\int_0^1 g\,(x)\,dx \geq \int_0^1 f\,(x)\,dx$ (mynd 1.24). Mjóa rauðskyggða svæðið sýnir muninn á þessum tveimur heildum á bilinu $[0,1]$.



Mynd 1.24 (a) Grafið sýnir að á bilinu $[0,1]$, $g\,(x)\geq f\,(x)$, og jafnaðarmerkið gildir aðeins í endapunktum bilsins. (b) Þetta sést skýrar þegar sama graf er stækkað.

Meðalgildi falls

1

Oft þurfum við að finna meðaltal talnasafns, til dæmis meðaleinkunn á prófum. Gerum ráð fyrir að þið hafið fengið eftirfarandi einkunnir í algebruprófum: 89, 90, 56, 78, 100 og 69. Annareinkunnin er meðaltal prófseinkunnanna og þið viljið vita við hvaða einkunn þið megið búast. Meðaltalið fæst með því að leggja allar einkunnirnar saman og deila með fjölda þeirra. Hér eru prófseinkunnirnar sex og því fæst

$$\frac{89+90+56+78+100+69}{6}=\frac{482}{6}\approx 80{,}33.$$

Meðaleinkunn ykkar á prófunum er því um það bil 80,33, sem jafngildir B– í flestum skólum.

Gerum hins vegar ráð fyrir að fallið $v(t)$ gefi hraða hlutar á hverjum tíma t og að við viljum finna meðalhraða hlutarins. Fallið $v(t)$ tekur óendanlega mörg gildi og því getum við ekki notað aðferðina hér á undan. Sem betur fer má nota ákveðið heildi til að finna meðalgildi slíks falls.

Látum $f(x)$ vera samfellt á bilinu $[a,b]$ og skiptum $[a,b]$ í n hlutbil með breiddina $\Delta x=(b-a)/n$. Veljum fulltrúa x_i^* í hverju hlutbili og reiknum $f\left(x_i^*\right)$ fyrir $i=1,2,\ldots,n$. Með öðrum orðum lítum við á hvert $f\left(x_i^*\right)$ sem úrtak úr fallinu á viðkomandi hlutbili. Þá má nálga meðalgildi fallsins með

$$\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{n},$$

sem er í meginatriðum sama stæða og notuð er til að reikna meðaltal stakra gilda.

En við vitum að $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, þannig að $n=\frac{b-a}{\Delta x}$, og við fáum

$$\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{n}=\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}}.$$

Ef við höldum útreikningnum áfram sést að teljarinn er summa sem rituð er $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)$, og deilt er með broti. Til að deila með broti snúum við nefnaranum við og margföldum. Nálgun á meðalgildi fallsins er því gefin með

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}} = \left(\frac{\Delta x}{b-a}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right) \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Til að fá nákvæmt meðalgildi tökum við markgildið þegar n stefnir á óendanlegt. Meðalgildi falls er því gefið með

$$\frac{1}{b-a} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

SKILGREINING

Látum $f(x)$ vera samfellt á bilinu $[a, b]$. Þá er meðalgildi fallsins $f(x)$ (eða f_{ave}) á $[a, b]$ gefið með

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

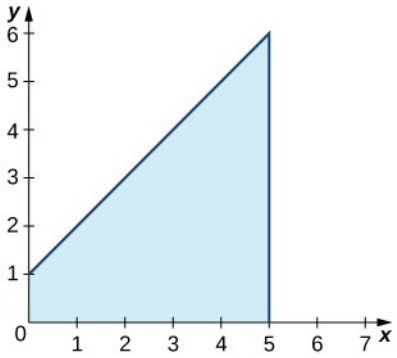
DÆMI 1.14

Meðalgildi línulegs falls fundið

Finnið meðalgildi $f(x) = x + 1$ á bilinu $[0, 5]$.

Lausn

Teiknum fyrst graf fallsins á tilgreinda bilinu, eins og sýnt er á mynd 1.25.



Mynd 1.25 Grafið sýnir flatarmálið undir grafi fallsins $f(x) = x + 1$ á $[0, 5]$.

Svæðið er trapisa sem liggur á hlið og því má nota flatarmálsformúluna fyrir trapisu $A = \frac{1}{2} h(a + b)$, þar sem h táknar hæðina og a og b tákna samsíða hliðarnar tvær. Þá fæst:

$$\begin{aligned}\int_0^5 x+1dx &= \tfrac{1}{2}h\,(a+b)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot(1+6)\\ &= \tfrac{35}{2}.\end{aligned}$$

Meðalgildi fallsins er því

$$\frac{1}{5-0}\int_0^5 x+1\,dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{35}{2}=\frac{7}{2}.$$

PRÓFAÐU ÞIG 1.13

Finnið meðalgildi $f(x)=6-2x$ á bilinu $[0,3]$.

Æfingar undirkafla 1.2

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita markgildin sem heildi.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^*\right)\Delta x$ á $[1,3]$

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(5\left(x_i^*\right)^2-3\left(x_i^*\right)^3\right)\Delta x$ á $[0,2]$

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x$ á $[0,1]$

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos^2\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x$ á $[0,1]$

Í eftirfarandi æfingum eru L_n eða R_n gefin eins og tilgreint er. Ritið markgildi þeirra þegar $n\to\infty$ sem ákveðin heildi og tilgreinið rétt bil.

64.

$$L_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}$$

65.

$$R_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}$$

66.

$$L_n=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+2\frac{i-1}{n}\right)$$

67.

$$R_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3+3\frac{i}{n}\right)$$

68.

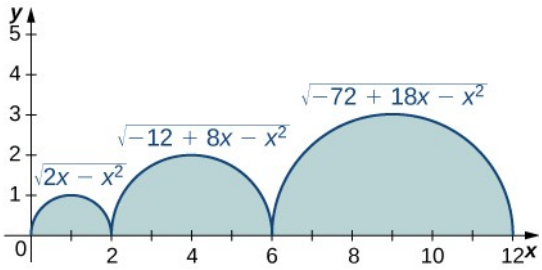
$$L_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\frac{i-1}{n}\cos\left(2\pi\frac{i-1}{n}\right)$$

69.

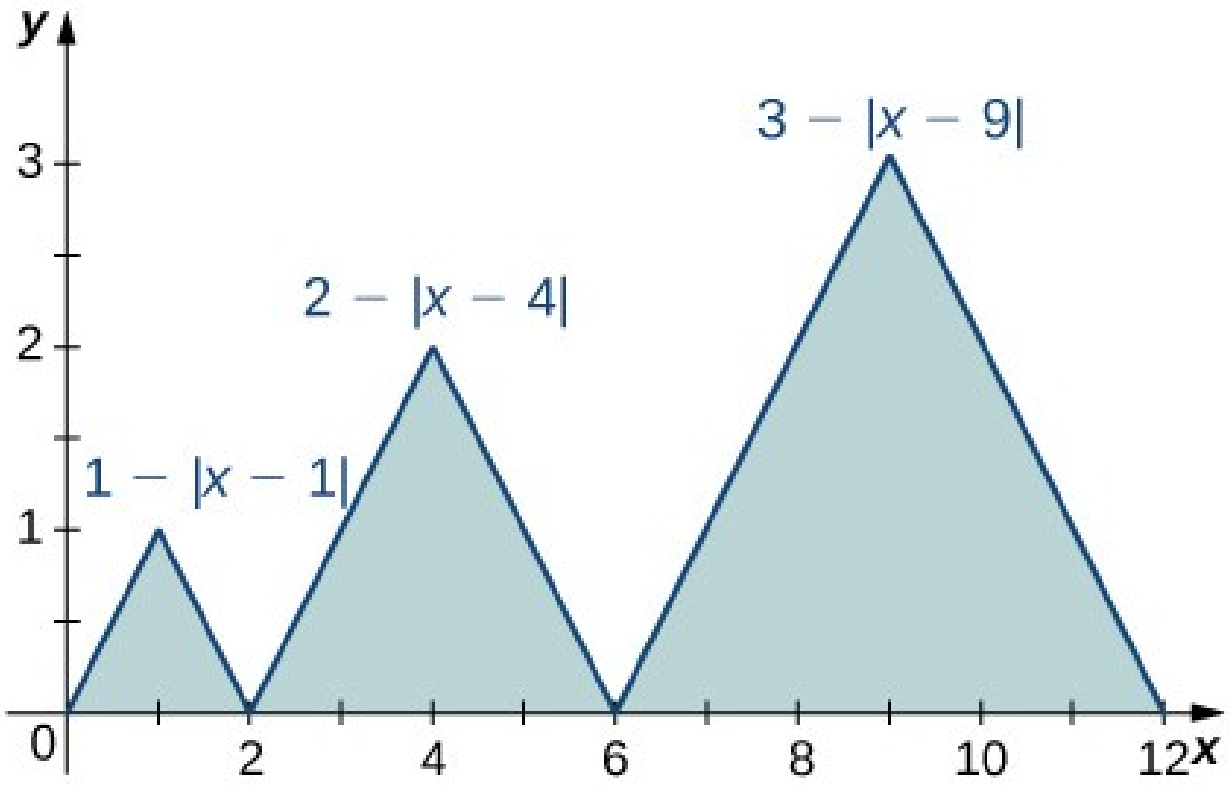
$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)\log\left(\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna heildi fallanna sem sýnd eru á gröfunum. Notið flatarmálsformúlur þríhyrninga og hringa og dragið flatarmál svæðanna neðan x-ássins frá.

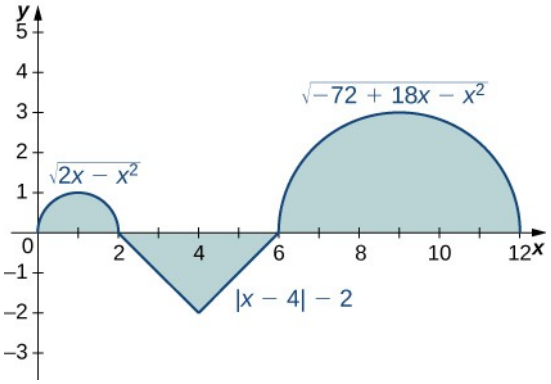
70.



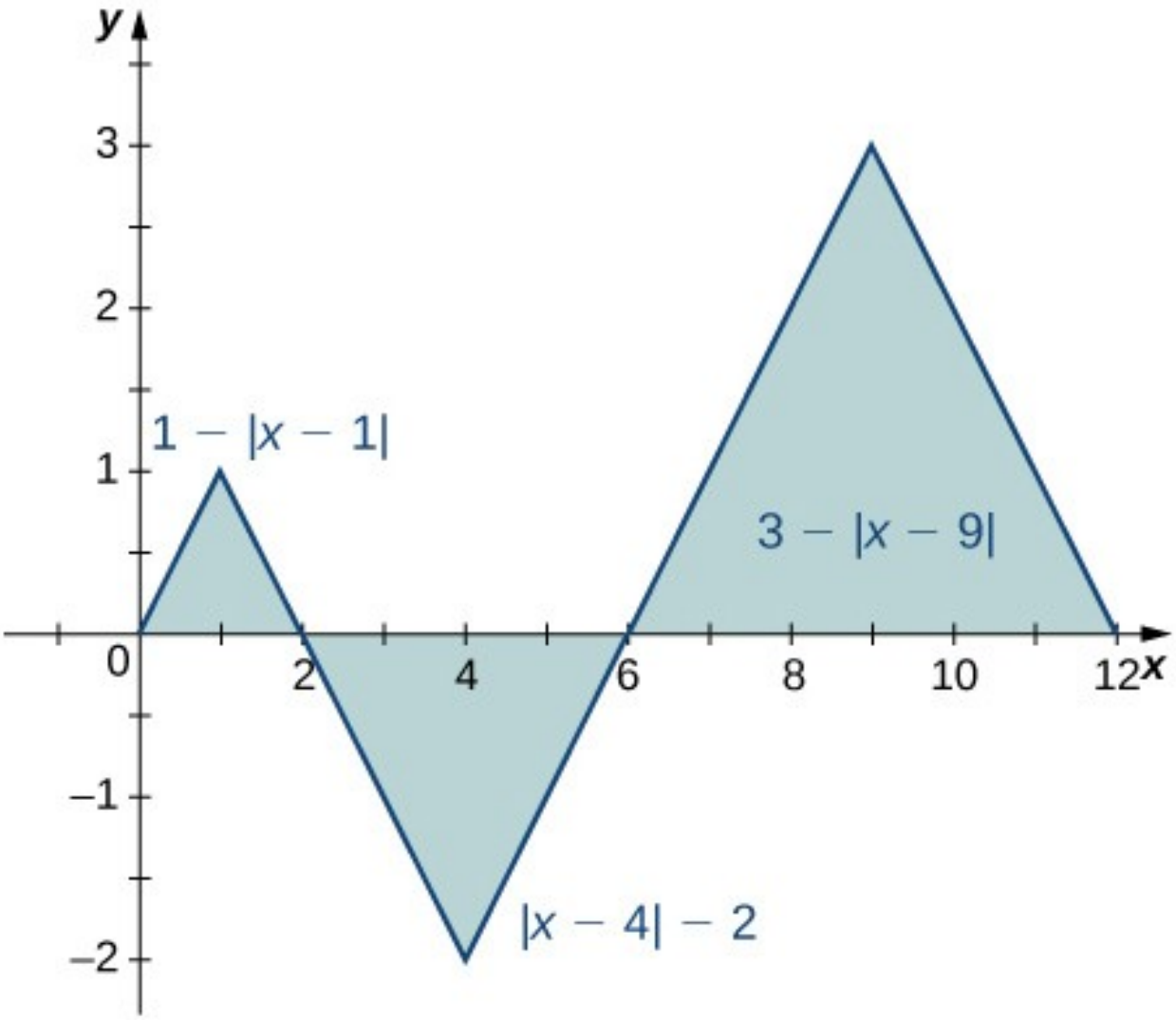
71.


y
3
2
1
0
2
4
6
8
10
12
x
3 − |x − 9|
2 − |x − 4|
1 − |x − 1|

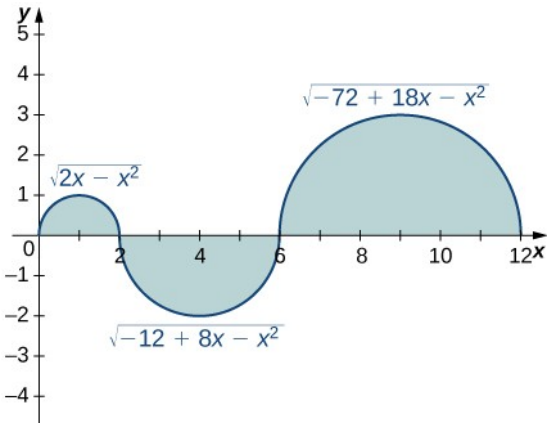
72.


y
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
2
4
6
8
10
12
x
√−72 + 18x − x²
√2x − x²
|x − 4| − 2

73.

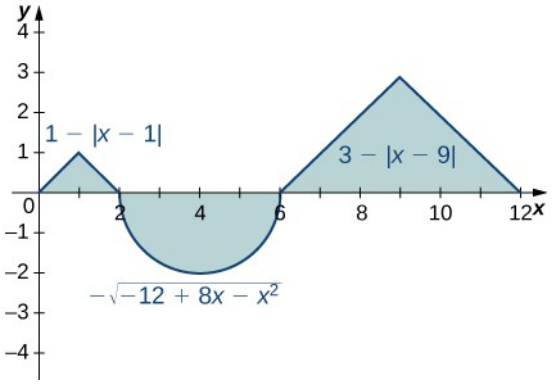

y
3
2
1
0
−1
−2
2
4
6
8
10
12
x
1 − |x − 1|
3 − |x − 9|
|x − 4| − 2

74.


y
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
2
4
6
8
10
12
x
√(2x − x²)
√(−72 + 18x − x²)
√(−12 + 8x − x²)

1

75.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna heildið með flatarmálsformúlum.

76.

$$\int_0^3 (3-x)\,dx$$

77.

$$\int_2^3 (3-x)\,dx$$

78.

$$\int_{-3}^3 (3-|x|)\,dx$$

79.

$$\int_0^6 (3-|x-3|)\,dx$$

80.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

81.

$$\int_1^5 \sqrt{4-(x-3)^2}\,dx$$

82.

$$\int_0^{12} \sqrt{36-(x-6)^2}\,dx$$

83.

$$\int_{-2}^{3} (3-|x|)\,dx$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota meðaltöl gilda í vinstri (L) og hægri (R) endapunktum til að reikna heildi falla sem eru línuleg á köflum. Gröf fallanna liggja um gefnu punktana á tilgreindum bilum.

84. $\{(0,0),(2,1),(4,3),(5,0),(6,0),(8,3)\}$ á $[0,8]$

85. $\{(0,2),(1,0),(3,5),(5,5),(6,2),(8,0)\}$ á $[0,8]$

86. $\{(-4,-4),(-2,0),(0,-2),(3,3),(4,3)\}$ á $[-4,4]$

87. $\{(-4,0),(-2,2),(0,0),(1,2),(3,2),(4,0)\}$ á $[-4,4]$

Gerum ráð fyrir að $\int_0^4 f(x)\,dx=5$ og $\int_0^2 f(x)\,dx=-3$, og $\int_0^4 g(x)\,dx=-1$ og $\int_0^2 g(x)\,dx=2$.

Reiknið heildin í eftirfarandi æfingum.

88.

$$\int_0^4 (f(x)+g(x))\,dx$$

89.

$$\int_2^4 (f(x)+g(x))\,dx$$

90.

$$\int_0^2 (f(x)-g(x))\,dx$$

91.

$$\int_2^4 (f(x)-g(x))\,dx$$

92.

$$\int_0^2 (3f(x)-4g(x))\,dx$$

93.

$$\int_2^4 (4f(x)-3g(x))\,dx$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota samsemdina $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{-A}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{A} f(x)\,dx$ til að reikna heildin.

1

94.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt \ (\textit{Vísbending}: \sin(-t) = -\sin(t))$$

95.

$$\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \frac{t}{1+\cos t}\,dt$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna formerkta flatarmálið milli $f(x)$ og x-ássins.

96. $\int_{1}^{3} (2-x)\,dx$ (Vísbending: Skoðið graf f.)

97. $\int_{2}^{4} (x-3)^3\,dx$ (Vísbending: Skoðið graf f.)

Gefið er að $\int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{3}$, og $\int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}$, og út frá því skuluð þið reikna heildin í eftirfarandi æfingum.

98.

$$\int_{0}^{1} \left(1+x+x^2+x^3\right)dx$$

99.

$$\int_{0}^{1} \left(1-x+x^2-x^3\right)dx$$

100.

$$\int_{0}^{1} (1-x)^2\,dx$$

101.

$$\int_{0}^{1} (1-2x)^3\,dx$$

102.

$$\int_{0}^{1} \left(6x - \frac{4}{3}x^2\right)dx$$

103.

$$\int_0^1 \left(7-5x^3\right)dx$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota samanburðarsetninguna.

104. Sýnið að $\int_0^3 \left(x^2-6x+9\right)dx \geq 0$.

105. Sýnið að $\int_{-2}^3 (x-3)(x+2)\,dx \leq 0$.

106. Sýnið að $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

107. Sýnið að $\int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

108. Sýnið að $\int_0^{\pi/2} \sin t\,dt \geq \frac{\pi}{4}$. ($\textit{Vísbending}: \sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ á $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

109. Sýnið að $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\,dt \geq \pi\sqrt{2}/4$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna meðalgildið f_{ave} fyrir fallið f á bilinu frá a til b og finna punkt c þannig að $f(c)=f_{ave}$.

110.

$$f(x)=x^2, a=-1, b=1$$

111.

$$f(x)=x^5, a=-1, b=1$$

112.

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=0, b=2$$

113.

$$f(x)=(3-|x|), a=-3, b=3$$

114.

$$f(x)=\sin x, a=0, b=2\pi$$

115.

$$f(x)=\cos x, a=0, b=2\pi$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nálga meðalgildið með Riemann-summunum L_{100} og R_{100}. Hvernig ber svarinu saman við gefna nákvæma svarið?

1

116. [T] $y=\ln(x)$ á bilinu $[1,4]$; nákvæma gildið er $\frac{\ln(256)}{3}-3$.

117. [T] $y=e^{x/2}$ á bilinu $[0,1]$; nákvæma gildið er $2(\sqrt{e}-1)$.

118. [T] $y=\tan x$ á bilinu $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; nákvæma lausnin er $\frac{2\ln(2)}{\pi}$.

119. [T] $y=\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ á bilinu $[-1,1]$; nákvæma lausnin er $\frac{\pi}{6}$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna meðalgildið með vinstri Riemann-summunum L_N fyrir $N=1,10,100$. Hversu nákvæmar eru niðurstöðurnar miðað við gefna nákvæma gildið?

120. [T] $y=x^2-4$ á bilinu $[0,2]$; nákvæma gildið er $-\frac{8}{3}$.

121. [T] $y=xe^{x^2}$ á bilinu $[0,2]$; nákvæma gildið er $\frac{1}{4}(e^4-1)$.

122. [T] $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ á bilinu $[0,4]$; nákvæma lausnin er $\frac{15}{64\ln(2)}$.

123. [T] $y=x\sin(x^2)$ á bilinu $[-\pi,0]$; nákvæma gildið er $\frac{\cos(\pi^2)-1}{2\pi}$.

124. Gerum ráð fyrir að $A=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$ og $B=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt$. Sýnið að $A+B=2\pi$ og $A=B$.

125. Gerum ráð fyrir að $A=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^2 t\,dt=\pi$ og $B=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan^2 t\,dt$. Sýnið að $A-B=\frac{\pi}{2}$.

126. Sýnið að meðalgildi $\sin^2 t$ á $[0,2\pi]$ sé $1/2$. Ákvarðið síðan án frekari útreikninga hvort meðalgildi $\sin^2 t$ á $[0,\pi]$ sé einnig $1/2$.

127. Sýnið að meðalgildi $\cos^2 t$ á $[0,2\pi]$ sé $1/2$. Ákvarðið síðan án frekari útreikninga hvort meðalgildi $\cos^2(t)$ á $[0,\pi]$ sé einnig $1/2$.

128. Útskýrið hvers vegna graf annars stigs fallsins, fleygbogans $p(x)$, og graf línulega fallsins $\ell(x)$ geta haft í mesta lagi tvo skurðpunkta. Gerum ráð fyrir að $p(a)=\ell(a)$ og $p(b)=\ell(b)$, og að $\int_a^b p(t)\,dt>\int_a^b \ell(t)\,dt$. Útskýrið hvers vegna $\int_c^d p(t)>\int_c^d \ell(t)\,dt$ þegar $a\le c<d\le b$.

129. Gerum ráð fyrir að fleygboginn $p(x)=ax^2+bx+c$ opnist niður $(a<0)$ og hafi topppunktinn $y=\frac{-b}{2a}>0$. Fyrir hvaða bil $[A,B]$ er $\int_A^B (ax^2+bx+c)\,dx$ stærst?

130. Gerum ráð fyrir að skipta megi $[a,b]$ í hlutbil $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_N=b$ þannig að annaðhvort $f\geq 0$ á $[a_{i-1},a_i]$ eða $f\leq 0$ á $[a_{i-1},a_i]$. Setjum $A_i=\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,dt$.

a. Útskýrið hvers vegna $\int_a^b f(t)\,dt=A_1+A_2+\cdots+A_N$.

b. Útskýrið síðan hvers vegna $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\int_a^b |f(t)|\,dt$.

131. Gerum ráð fyrir að f og g séu samfelld föll þannig að $\int_c^d f(t)\,dt\leq\int_c^d g(t)\,dt$ fyrir hvert hlutbil $[c,d]$ í $[a,b]$. Útskýrið hvers vegna $f(x)\leq g(x)$ fyrir öll gildi x.

132. Gerum ráð fyrir að meðalgildi f á $[a,b]$ sé 1 og að meðalgildi f á $[b,c]$ sé 1, þar sem $a<c<b$. Sýnið að meðalgildi f á $[a,c]$ sé einnig 1.

133. Gerum ráð fyrir að skipta megi bilinu $[a,b]$ með skiptipunktunum $a=a_0<a_1<\cdots<a_N=b$ þannig að meðalgildi f á hverju hlutbili $[a_{i-1},a_i]=1$ sé 1 fyrir hvert $i=1,\ldots,N$. Útskýrið hvers vegna meðalgildi f á $[a,b]$ er þá einnig 1.

134. Gerum ráð fyrir að fyrir hvert i með $1\leq i\leq N$ gildi $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt=i$. Sýnið að $\int_0^N f(t)\,dt=\frac{N(N+1)}{2}$.

135. Gerum ráð fyrir að fyrir hvert i með $1\leq i\leq N$ gildi $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt=i^2$. Sýnið að $\int_0^N f(t)\,dt=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

136. [T] Reiknið vinstri og hægri Riemann-summurnar L_{10} og R_{10} og meðaltal þeirra $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ fyrir $f(t)=t^2$ á $[0,1]$. Ef vitað er að $\int_0^1 t^2\,dt=0,\overline{33}$, upp á hve marga aukastafi er $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ nákvæmt?

137. [T] Reiknið vinstri og hægri Riemann-summurnar L_{10} og R_{10} og meðaltal þeirra $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ fyrir $f(t)=(4-t^2)$ á $[1,2]$. Ef vitað er að $\int_1^2 (4-t^2)\,dt=1,\overline{66}$, upp á hve marga aukastafi er $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ nákvæmt?

138. Ef $\int_1^5 \sqrt{1+t^4}\,dt = 41{,}7133\ldots$, hvert er þá $\int_1^5 \sqrt{1+u^4}\,du$?

1

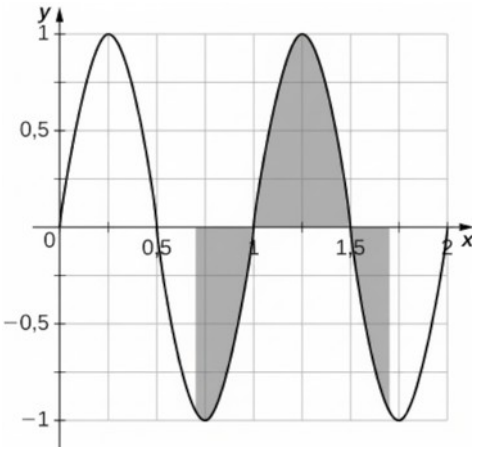
139. Metið $\int_0^1 t\,dt$ með summu með vinstri endapunktum og summu með hægri endapunktum, hvorri með einum rétthyrningi. Hvernig ber meðaltali þessara summa saman við nákvæma gildið $\int_0^1 t\,dt$?

140. Metið $\int_0^1 t\,dt$ með því að bera það saman við flatarmál eins rétthyrnings þar sem hæðin er jöfn gildi t í miðpunktinum $t=\frac{1}{2}$. Hvernig ber þessu miðpunktsmati saman við nákvæma gildið $\int_0^1 t\,dt$?

141. Á grafinu hér á eftir er fallið $\sin(2\pi x)$ sýnt:

a. Útskýrið hvers vegna $\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt = 0$.

b. Útskýrið hvers vegna almennt gildir að $\int_a^{a+1} \sin(2\pi t)\,dt = 0$ fyrir öll gildi a.



142. Ef f er 1-lotubundið $(f(t+1)=f(t))$, oddstætt og heildanlegt á $[0,1]$, gildir þá alltaf að $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$?

143. Ef f er 1-lotubundið og $\int_0^1 f(t)\,dt = A$, gildir þá endilega að $\int_a^{1+a} f(t)\,dt = A$ fyrir öll A?

1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

NÁMSMARKMIÐ

- 1.3.1 Lýsið merkingu meðalgildissetningarinnar fyrir heildi.
- 1.3.2 Útskýrið merkingu 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.
- 1.3.3 Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna afleiður heilda.
- 1.3.4 Útskýrið merkingu 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.
- 1.3.5 Notið 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna ákveðin heildi.
- 1.3.6 Útskýrið sambandið milli deildunar og heildunar.

Í tveimur fyrri undirköflunum skoðuðum við ákveðna heildið og tengsl þess við flatarmálið undir ferli falls. Enn sem komið er höfum við því miður aðeins tvö verkfæri til að reikna gildi ákveðins heildis: rúmfræðiformúlur fyrir flatarmál og markgildi Riemann-summa. Báðar aðferðirnar eru afar fyrirhafnarsamar. Í þessum undirkafla skoðum við öflugri og gagnlegri aðferðir til að reikna ákveðin heildi.

Þessar nýju aðferðir byggjast á tengslum milli deildunar og heildunar. Sir Isaac Newton og Gottfried Wilhelm Leibniz voru meðal þeirra sem uppgötvuðu og rannsökuðu þessi tengsl seint á 1600-árunum og snemma á 1700-árunum. Tengslin eru sett fram í því sem við köllum nú undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar. Hún er í tveimur hlutum sem við skoðum í þessum undirkafla. Heitið eitt sýnir hve miklu máli setningin skiptir fyrir alla þróun stærðfræðigreiningarinnar.

MIÐLAR

Framlag Isaacs Newtons til stærðfræði og eðlisfræði breytti sýn okkar á heiminn. Tengslin sem hann uppgötvaði og setti fram sem lögmál Newtons og almenna þyngdarlögmálið eru enn kennd sem undirstöðuefni í eðlisfræði. Stærðfræðigreining hans lagði jafnframt grunn að heilum greinum stærðfræðinnar. Lesið stutta ævisögu Newtons með margmiðlunarefni til að fræðast nánar.

Áður en við snúum okkur að þessari veigamiklu setningu skulum við þó skoða aðra mikilvæga setningu: meðalgildissetninguna fyrir heildi. Hún er nauðsynleg til að sanna undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar.

Meðalgildissetningin fyrir heildi

Meðalgildissetningin fyrir heildi segir að samfellt fall á lokuðu bili taki meðalgildi sitt í einhverjum punkti á bilinu. Setningin tryggir að ef $f(x)$ er samfellt, þá sé til punktur c á bili $[a,b]$ þannig að gildi fallsins í c sé jafnt meðalgildi $f(x)$ á $[a,b]$. Við setjum setninguna fram stærðfræðilega með hjálp formúlunnar fyrir meðalgildi falls sem við settum fram í lok undirkaflans á undan.

SETNING 1.3

Meðalgildissetningin fyrir heildi

1

Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$, þá er til að minnsta kosti einn punktur $c \in [a,b]$ þannig að

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

(1.15)

Þessa formúlu má einnig rita sem

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a).$$

Sönnun

Þar sem $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$, tekur það lággildi og hágildi samkvæmt útgildissetningunni (sjá Hágildi og lággildi). Gildin eru m og M, í þeirri röð, á $[a,b]$. Fyrir öll x á $[a,b]$, gildir $m \le f(x) \le M$. Samkvæmt samanburðarsetningunni (sjá Ákveðið heildi) fæst því

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Deilum með $b-a$ og fáum

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Þar sem $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ er tala á milli m og M og $f(x)$ er samfellt og tekur gildin m og M á $[a,b]$, er samkvæmt milligildissetningunni (sjá Samfelldni) til tala c á $[a,b]$ þannig að

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

og sönnuninni er lokið.

□

DÆMI 1.15

Meðalgildi falls fundið

Finnið meðalgildi fallsins $f(x)=8-2x$ á bilinu $[0,4]$ og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi fallsins á $[0,4]$.

Lausn

Samkvæmt formúlunni fæst meðalgildi $f(x)$ með

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 (8-2x)\,dx.$$

Við sjáum á mynd 1.26 að graf fallsins er bein lína sem myndar rétthyrndan þríhyrning sem afmarkast af x- og y-ásunum. Flatarmál þríhyrningsins er $A=\frac{1}{2}(\text{grunnlína})(\text{hæð})$. Þá fæst

$$A=\frac{1}{2}(4)(8)=16.$$

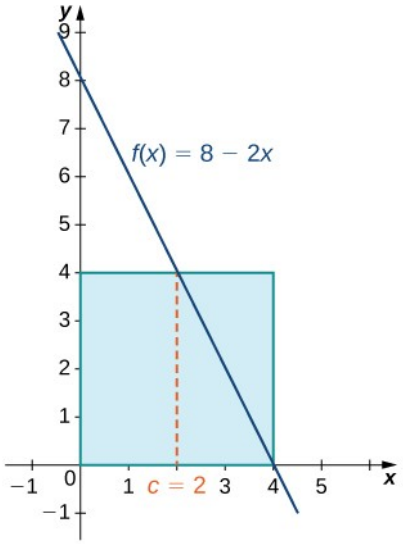
Meðalgildið fæst með því að margfalda flatarmálið með $1/(4-0)$. Því er meðalgildi fallsins

$$\frac{1}{4}(16)=4.$$

Jöfnum meðalgildið við $f(c)$ og leysum jöfnuna með tilliti til c.

$$\begin{aligned} 8-2c &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Þegar $c=2, f(2)=4$.



Mynd 1.26 Samkvæmt meðalgildissetningunni tekur samfellda fallið $f(x)$ meðalgildi sitt í c að minnsta kosti einu sinni á lokuðu bili.

STÖÐUMAT 1.14

Finnið meðalgildi fallsins $f(x)=\frac{x}{2}$ á bilinu $[0,6]$ og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi fallsins á $[0,6]$.

DÆMI 1.16

Punktur fundinn þar sem fall tekur meðalgildi sitt

1

Gefið er að $\int_0^3 x^2\,dx = 9$, og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi $f(x) = x^2$ á $[0,3]$.

Lausn

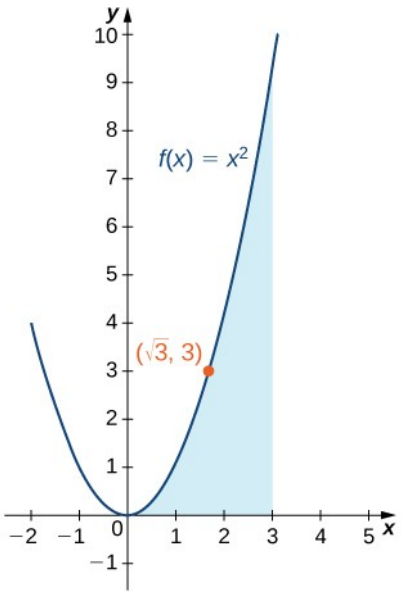
Við leitum að gildi c þannig að

$$f(c) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}(9) = 3.$$

Í stað $f(c)$ setjum við c^2 og fáum

$$\begin{aligned} c^2 &= 3 \\ c &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Þar sem $-\sqrt{3}$ er utan bilsins tökum við aðeins jákvæða gildið. Því fæst $c = \sqrt{3}$ (mynd 1.27).



Mynd 1.27 Á bilinu $[0,3]$, tekur fallið $f(x) = x^2$ meðalgildi sitt í $c = \sqrt{3}$.

STÖÐUMAT 1.15

Gefið er að $\int_0^3 (2x^2 - 1)\,dx = 15$, og finnið c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi $f(x) = 2x^2 - 1$ á $[0,3]$.

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti: Heildi og stofnföll

Eins og áður hefur komið fram er undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar afar öflug. Hún lýsir sambandinu milli deildunar og heildunar og gerir okkur kleift að reikna ákveðin heildi án þess að nota Riemann-summur eða reikna flatarmál. Setningin er í tveimur hlutum. Fyrri hlutinn, 1. hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar, er settur fram hér. 1. hluti lýsir sambandinu milli deildunar og heildunar.

SETNING 1.4

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti

Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$, og fallið $F(x)$ er skilgreint með

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

(1.16)

þá gildir $F'(x)=f(x)$ á (a,b).

Áður en við förum nánar út í sönnunina er rétt að nefna tvö fíngerð atriði. Fyrra atriðið varðar táknunina. Við höfum skilgreint fallið $F(x)$, sem ákveðið heildi annars falls, $f(t)$, frá a til x. Við fyrstu sýn getur þetta virst ruglingslegt, því við höfum oft sagt að ákveðið heildi sé tala en hér virðist það vera fall. Lykilatriðið er að fyrir hvert tiltekið gildi x er ákveðna heildið tala. Fallið $F(x)$ skilar því tölu, gildi ákveðna heildisins, fyrir hvert gildi x.

Í öðru lagi er vert að nefna nokkrar helstu afleiðingar setningarinnar. Hún er ekki að ástæðulausu kölluð undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar. Hún staðfestir ekki aðeins tengsl heildunar og deildunar heldur tryggir einnig að hvert heildanlegt fall eigi sér stofnfall.

Sönnun

Notum skilgreiningu afleiðunnar og fáum

1

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^{a} f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Ef við skoðum síðustu stæðuna vandlega sjáum við að $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ er einmitt meðalgildi fallsins $f(x)$ á bilinu $[x, x+h]$. Samkvæmt meðalgildissetningunni fyrir heildi er því til tala c í $[x, x+h]$ þannig að

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c).$$

Þar að auki er c milli x og x + h. Af því leiðir að c stefnir á x þegar h stefnir á núll. Þar sem $f(x)$ er samfellt gildir $\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$. Setjum nú alla þessa hluta saman og fáum

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

og sönnuninni er lokið.

□

DÆMI 1.17

Afleiða fundin með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar

Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að finna afleiðu

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt.$$

Lausn

Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar er afleiðan gefin með

$$g'(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

STÖÐUMAT 1.16

Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að finna afleiðu

$g(r)=\int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$.

DÆMI 1.18

Afleiður reiknaðar með undirstöðusetningunni og keðjureglunni

Látum $F(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \sin t\,dt$. Finnið $F'(x)$.

Lausn

Látum $u(x)=\sqrt{x}$, þá fæst $F(x)=\int_1^{u(x)} \sin t\,dt$. Samkvæmt undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar og keðjureglunni fæst því

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sin\left(u\left(x\right)\right)\frac{du}{dx} \\ &= \sin\left(u\left(x\right)\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) \\ &= \tfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.17

Látum $F(x)=\int_1^{x^3} \cos t\,dt$. Finnið $F'(x)$.

DÆMI 1.19

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar notuð með tveimur breytilegum heildismörkum

Látum $F(x)=\int_x^{2x} t^3\,dt$. Finnið $F'(x)$.

Lausn

Gefið er $F(x)=\int_x^{2x} t^3\,dt$. Bæði heildismörkin eru breytileg og því þurfum við að skipta heildinu í tvennt. Þá fæst

1

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} t^3 dt \\ &= \int_x^0 t^3 dt + \int_0^{2x} t^3 dt \\ &= -\int_0^x t^3 dt + \int_0^{2x} t^3 dt. \end{aligned}$$

Deildum fyrri liðinn og fáum

$$\frac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3\,dt\right] = -x^3.$$

Til að deilda síðari liðinn látum við fyrst $u(x) = 2x$. Þá fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3 dt\right] &= \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{u(x)} t^3 dt\right] \\ &= (u(x))^3 \tfrac{du}{dx} \\ &= (2x)^3 \cdot 2 \\ &= 16x^3. \end{aligned}$$

Því fæst

$$\begin{aligned} F'(x) &= \tfrac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3 dt\right] + \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3 dt\right] \\ &= -x^3 + 16x^3 \\ &= 15x^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.18

Látum $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,dt$. Finnið $F'(x)$.

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti: Reiknisetningin

2. hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar er ef til vill mikilvægasta setning stærðfræðigreiningarinnar. Eftir þrotlaust starf stærðfræðinga í um 500 ár komu fram nýjar aðferðir sem gáfu vísindafólki nauðsynleg verkfæri til að skýra fjölmörg fyrirbæri. Með stærðfræðigreiningu gátu stjörnufræðingar loks ákvarðað fjarlægðir í geimnum og kortlagt brautir reikistjarna. Nú var hægt að leysa dagleg fjármálaverkefni, svo sem að reikna jaðarkostnað eða spá fyrir um heildarhagnað, á einfaldan og nákvæman hátt. Verkfræðingar gátu reiknað beygjustyrk efna eða þrívíða hreyfingu hluta. Stærðfræðigreining breytti sýn okkar á heiminn til frambúðar.

Eftir að við höfum nálgað flatarmál með því að leggja saman flatarmál n rétthyrninga er einfalt í samanburði að nota þessa setningu. Það virðist næstum of einfalt að reikna megi flatarmál heils svæðis sem afmarkast af bognum ferli með því einu að reikna gildi stofnfalls í báðum endapunktum bilsins.

SETNING 1.5

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti

Ef f er samfellt á bilinu $[a,b]$ og $F(x)$ er eitthvert stofnfall $f(x)$, þá

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(1.17)

Táknunin $F(x)\Big|_a^b$ er oft notuð fyrir stæðuna $F(b) - F(a)$. Lóðrétta strikið og mörkin a og b merkja að reikna skuli gildi fallsins $F(x)$ við efra markið, hér b, og draga frá gildi fallsins $F(x)$ við neðra markið, hér a.

2. hluti undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar, sem einnig kallast reiknisetningin, segir að ef við getum fundið stofnfall heildisstofnsins megi reikna ákveðna heildið með því að reikna gildi stofnfallsins í endapunktum bilsins og draga gildið í neðri endapunktinum frá gildinu í þeim efri.

Sönnun

Látum $P = \{x_i\}, i = 0,1,\ldots,n$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Þá getum við skrifað

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \ldots + [F(x_1) - F(x_0)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

Þar sem F er stofnfall f á $[a,b]$, má samkvæmt meðalgildissetningunni (sjá Meðalgildissetninguna) fyrir $i = 0,1,\ldots,n$ finna c_i í $[x_{i-1}, x_i]$ þannig að

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x.$$

Setjum þetta inn í jöfnuna hér á undan og fáum

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$

Tökum markgildi beggja hliða þegar $n \to \infty$, og fáum

1

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

□

DÆMI 1.20

Heildi reiknað með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar

Notið 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna

$$\int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt.$$

Lausn

Rifjum upp veldisregluna fyrir stofnföll:

$$\text{Ef } y = x^n, \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

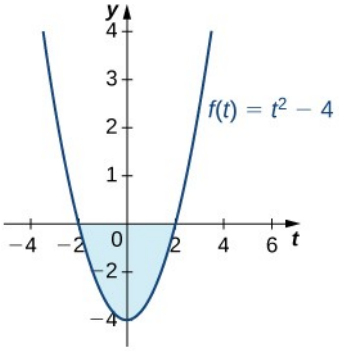
Finnum stofnfall fallsins með þessari reglu og notum síðan setninguna. Þá fæst

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt &= \tfrac{t^3}{3} - 4t \Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\tfrac{(2)^3}{3} - 4(2)\right] - \left[\tfrac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right] \\ &= \left(\tfrac{8}{3} - 8\right) - \left(-\tfrac{8}{3} + 8\right) \\ &= \tfrac{8}{3} - 8 + \tfrac{8}{3} - 8 \\ &= \tfrac{16}{3} - 16 \\ &= -\tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Greining

Takið eftir að við tókum liðinn „+ C“ ekki með þegar við rituðum stofnfallið. Ástæðan er sú að samkvæmt 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar má nota hvaða stofnfall sem er. Til einföldunar völdum við því stofnfallið þar sem $C = 0$. Hefðum við valið annað stofnfall hefði fastaliðurinn fallið út. Þetta gerist alltaf þegar við reiknum ákveðið heildi.

Svæðið sem við vorum að reikna er sýnt á mynd 1.28. Takið eftir að allt svæðið milli ferilsins og x-ássins liggur neðan x-ássins. Flatarmál er alltaf jákvætt en ákveðið heildi getur engu að síður gefið neikvæða tölu (formerkt flatarmál). Ef fallið væri til dæmis hagnaðarfall gæfi neikvæð tala til kynna að fyrirtækið væri rekið með tapi á gefna bilinu.



Mynd 1.28 Útreikningur ákveðins heildis getur gefið neikvætt gildi, þótt flatarmál sé alltaf jákvætt.

DÆMI 1.21

Ákveðið heildi reiknað með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar

Reiknið eftirfarandi heildi með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Lausn

Fyrst ritum við heildið með ræðum veldisvísum til að losna við rótarmerkið. Síðan skiptum við brotinu upp og ritum hvern lið teljarans yfir nefnaranum:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{x^{1/2}}\,dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\right)dx.$$

Einföldum með veldisreglunum:

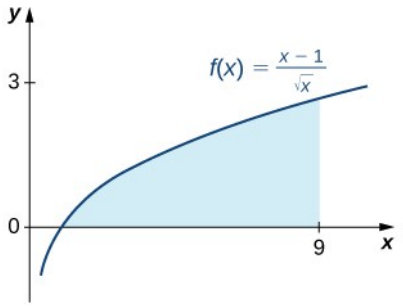
$$\int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx.$$

Heildum nú með veldisreglunni:

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx &= \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^9 \\
&= \left[\frac{(9)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(9)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{(1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \left[\tfrac{2}{3}(27) - 2(3)\right] - \left[\tfrac{2}{3}(1) - 2(1)\right] \\
&= 18 - 6 - \tfrac{2}{3} + 2 \\
&= \tfrac{40}{3}.
\end{aligned}$$

Sjá mynd 1.29.

1



Mynd 1.29 Flatarmálið undir ferlinum frá $x=1$ til $x=9$ má reikna með ákveðnu heildi.

STÖÐUMAT 1.19

Notið 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að reikna $\int_1^2 x^{-4}\,dx$.

DÆMI 1.22

Kapphlaup á hjólaskautum

James og Kathy keppa á hjólaskautum eftir langri og beinni braut. Sá sem hefur farið lengst eftir 5 sekúndur vinnur verðlaun. James getur skautað með hraðanum $f(t)=3+0{,}8t$ m/s og Kathy með hraðanum $g(t)=5+\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ m/s. Hvort þeirra vinnur kapphlaupið?

Lausn

Við þurfum að heilda bæði föllin á bilinu $[0,5]$ og athuga hvort þeirra gefur stærra gildi. Fyrir James viljum við reikna

$$\int_0^5 (3+0{,}8t)\,dt.$$

Notum veldisregluna og fáum

$$\begin{aligned}\int_0^5 (3+0{,}8t)\,dt &= (3t+0{,}4t^2)\big|_0^5\\ &= (15+10)=25.\end{aligned}$$

James hefur því skautað 25 metra eftir 5 sekúndur. Snúum okkur nú að Kathy og reiknum

$$\int_0^5 5+\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt.$$

Við vitum að $\sin t$ er stofnfall $\cos t$, og því er eðlilegt að ætla að stofnfall $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ feli í sér $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Þegar við deildum $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, fáum við hins vegar $\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ vegna keðjureglunnar og því verðum við að taka tillit til þessa viðbótarstuðuls þegar við heildum. Við fáum

$$\begin{aligned}\int_0^5 5+\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt &= \left(5t+\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)\Big|_0^5\\ &= \left(25+\frac{2}{\pi}\right)-\left(0-\frac{2}{\pi}\sin\ 0\right)\\ &\approx 25{,}6.\end{aligned}$$

Kathy hefur skautað um það bil 25,6 metra eftir 5 sekúndur. Kathy vinnur, en naumlega!

STÖÐUMAT 1.20

Gerum ráð fyrir að James og Kathy keppi aftur en nú stöðvi dómarinn keppnina eftir aðeins 3 sekúndur. Breytir það úrslitunum?

NEMENDAVERKEFNI

Fallhlífarstökkvari í frjálsu falli

1



Mynd 1.30 Fallhlífarstökkvarar geta stillt fallhraðann með því að breyta líkamsstöðu sinni í frjálsu falli. (mynd: Jeremy T. Lock)

Julie er áhugasöm fallhlífarstökkkona. Hún hefur stokkið oftar en 300 sinnum og náð fullum tökum á að stilla líkamsstöðu sína í loftinu til að stjórna fallhraðanum. Ef hún fettir bakið og snýr kviðnum að jörðinni nær hún lokahraða sem er um það bil 176 km/klst (49 m/s). Ef hún snýr sér hins vegar með höfuðið beint niður fellur hún hraðar og nær lokahraðanum um 212 km/klst (58,8 m/s).

Julie hreyfist niður á við (hún fellur) og því látum við niðurstefnuna vera jákvæða til að einfalda útreikningana. Julie stekkur úr 4000 metra hæð. Um leið og hún yfirgefur flugvélina tekur hún að falla með hraðanum $v(t)=9{,}8t$. Hraði hennar heldur áfram að aukast samkvæmt þessu hraðafalli þar til hún nær lokahraða. Eftir það helst hraði hennar óbreyttur þar til hún togar í opnunarstrenginn og hægir á sér fyrir lendingu.

Í fyrsta stökki dagsins kemur Julie sér fyrir í hægari stöðunni „með kviðinn niður“ (lokahraðinn er 49 m/s). Notið þessar upplýsingar til að svara eftirfarandi spurningum.

1. Hve löngu eftir að Julie yfirgefur flugvélina nær hún lokahraða?
2. Notið svarið við spurningu 1 og setjið fram stæðu með einu eða fleiri heildum sem táknar vegalengdina sem Julie fellur á 30 sekúndum.
3. Hve lengi er Julie í frjálsu falli ef hún togar í opnunarstrenginn í 1000 metra hæð?

4. Julie togar í opnunarstrenginn í 1000 metra hæð. Það tekur fallhlífina 5 sekúndur að opnast að fullu og hægja á falli hennar. Á þeim tíma fellur hún um 120 metra til viðbótar. Þegar fallhlífin er fullopin hefur hraði hennar minnkað í 5 m/s. Finnið heildartímann sem Julie er í loftinu, frá því að hún yfirgefur flugvélina þar til fætur hennar snerta jörðina.

   Í öðru stökki dagsins ákveður Julie að falla örlítið hraðar og kemur sér fyrir í stöðunni „með höfuðið niður“. Lokahraði hennar í þeirri stöðu er 58,8 m/s. Svarið eftirfarandi spurningum miðað við þennan hraða:
5. Hve lengi er Julie að ná lokahraða í þessu tilviki?
6. Áður en Julie togar í opnunarstrenginn snýr hún sér aftur í stöðuna „með kviðinn niður“ svo hún fari ekki alveg eins hratt þegar fallhlífin opnast. Ef hún byrjar að snúa sér í 1300 metra hæð, hve lengi er hún þá í frjálsu falli fram að því?

   Sumir fallhlífarstökkvarar klæðast „vængjabúningum“ (sjá mynd 1.31). Þessir búningar eru með dúkflötum milli handleggja og fótleggja sem gera stökkvaranum kleift að svífa í frjálsu falli, líkt og flugíkorni. (Búningarnir eru reyndar stundum kallaðir „flugíkornabúningar“.) Í slíkum búningi getur lokahraðinn minnkað í um 70 km/klst (19,6 m/s) og því gefst stökkvaranum mun lengri tími í loftinu. Fólk í vængjabúningum notar þó enn fallhlíf við lendingu. Þótt lóðrétti hraðinn sé innan öryggismarka getur lárétti hraðinn farið yfir 110 km/klst, sem er allt of hratt fyrir örugga lendingu.



Mynd 1.31 Dúkfletirnir milli handleggja og fótleggja á vængjabúningi draga úr lóðréttum fallhraða fallhlífarstökkvara. (mynd: Richard Schneider)

Svarið eftirfarandi spurningu miðað við hraðann í vængjabúningi.

7. Hve lengi getur Julie svifið um loftið ef hún klæðist vængjabúningi fyrir þriðja stökk dagsins og togar í opnunarstrenginn í 1000 metra hæð?

1

Æfingar í undirkafla 1.3

144. Skoðið tvo íþróttamenn sem hlaupa á breytilegum hraða, $v_1(t)$ og $v_2(t)$. Hlaupararnir hefja kapphlaupið og ljúka því á nákvæmlega sama tíma. Útskýrið hvers vegna þeir hljóta einhvern tímann að hlaupa á sama hraða.

145. Tveir fjallgöngumenn hefja göngu sína í grunnbúðum og fara hvor sína leið, aðra brattari en hina, en ná á tindinn á nákvæmlega sama tíma. Er víst að til sé tímapunktur þegar báðir hækka sig með sama hraða?

146. Til að aka inn á tiltekinn veggjaldaveg þarf ökumaður að taka kort sem tilgreinir kílómetramerkið við innkeyrsluna. Kortið er einnig tímastimplað. Við útkeyrsluna greiðir ökumaðurinn veggjaldið og fær sér til undrunar hraðasekt um leið. Útskýrið hvernig þetta getur gerst.

147. Látum $F(x)=\int_1^x (1-t)\,dt$. Finnið $F'(2)$ og meðalgildi F' á $[1,2]$.

Notið 1. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar til að finna afleiðurnar í eftirfarandi æfingum.

148.

$$\frac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$$

149.

$$\frac{d}{dx}\int_1^x e^{\cos t}\,dt$$

150.

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{9-y^2}\,dy$$

151.

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \frac{ds}{\sqrt{16-s^2}}$$

152.

$$\frac{d}{dx}\int_x^{2x} t\,dt$$

153.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} t\,dt$$

154.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

155.

$$\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

156.

$$\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{1+t^4}\,dt$$

157.

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^2}\frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$$

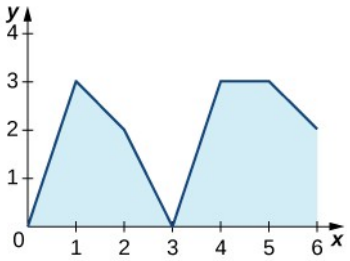
158.

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x}e^t\,dt$$

159.

$$\frac{d}{dx}\int_1^{e^x}\ln u^2\,du$$

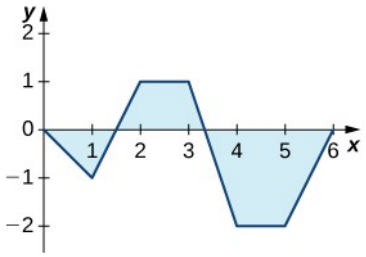
160. Hér er sýnt graf $y=\int_0^x f(t)\,dt$, þar sem f er hlutskilgreint fastafall.



a. Á hvaða bilum er f jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Hver eru hágildi og lággildi f?
c. Hvert er meðalgildi f?

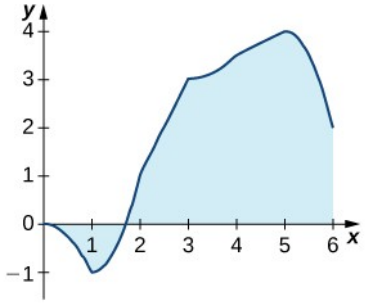
161. Hér er sýnt graf $y=\int_0^x f(t)\,dt$, þar sem f er hlutskilgreint fastafall.

1



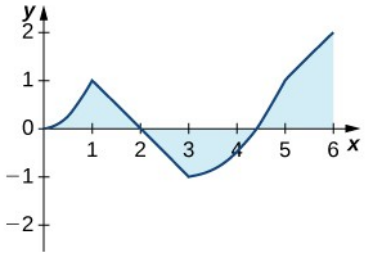
a. Á hvaða bilum er f jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Hver eru hágildi og lággildi f?
c. Hvert er meðalgildi f?

162. Hér er sýnt graf $y = \int_0^x \ell(t)\,dt$, þar sem ℓ er hlutskilgreint línulegt fall.



a. Á hvaða bilum er ℓ jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Á hvaða bilum er ℓ vaxandi? Á hvaða bilum er það minnkandi? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það fast?
c. Hvert er meðalgildi ℓ?

163. Hér er sýnt graf $y = \int_0^x \ell(t)\,dt$, þar sem ℓ er hlutskilgreint línulegt fall.



a. Á hvaða bilum er ℓ jákvætt? Á hvaða bilum er það neikvætt? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það jafnt og núll?
b. Á hvaða bilum er ℓ vaxandi? Á hvaða bilum er það minnkandi? Á hvaða bilum, ef einhver eru, er það fast?
c. Hvert er meðalgildi ℓ?

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að áætla flatarmálið undir ferlinum með því að reikna T_{10}, meðaltal Riemann-summanna með vinstri og hægri endapunktum fyrir $N=10$ rétthyrninga. Ákvarðið síðan nákvæmt flatarmál með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

164. [T] $y=x^2$ á $[0,4]$

165. [T] $y=x^3+6x^2+x-5$ á $[-4,2]$

166. [T] $y=\sqrt{x^3}$ á $[0,6]$

167. [T] $y=\sqrt{x}+x^2$ á $[1,9]$

168. [T] $\int(\cos x-\sin x)\,dx$ á $[0,\pi]$

169. [T] $\int\frac{4}{x^2}\,dx$ á $[1,4]$

Reiknið hvert ákveðið heildi í eftirfarandi æfingum með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

170.

$$\int_{-1}^{2}(x^2-3x)\,dx$$

171.

$$\int_{-2}^{3}(x^2+3x-5)\,dx$$

172.

$$\int_{-2}^{3}(t+2)(t-3)\,dt$$

173.

$$\int_{2}^{3}(t^2-9)(4-t^2)\,dt$$

174.

$$\int_{1}^{2}x^9\,dx$$

175.

$$\int_{0}^{1}x^{99}\,dx$$

1

176.

$$\int_4^8 \left(4t^{5/2} - 3t^{3/2}\right) dt$$

177.

$$\int_{1/4}^4 \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

178.

$$\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx$$

179.

$$\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

180.

$$\int_1^4 \frac{2-\sqrt{t}}{t^2} dt$$

181.

$$\int_1^{16} \frac{dt}{t^{1/4}}$$

182.

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta$$

183.

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

184.

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \, d\theta$$

185.

$$\int_0^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta \, d\theta$$

186.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/4} \csc\theta \cot\theta \, d\theta$$

187.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2\theta \, d\theta$$

188.

$$\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt$$

189.

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt$$

Notið reiknisetninguna í eftirfarandi æfingum til að setja heildið fram sem fall $F(x)$.

190.

$$\int_{a}^{x} t^2 \, dt$$

191.

$$\int_{1}^{x} e^t \, dt$$

192.

$$\int_{0}^{x} \cos t \, dt$$

193.

$$\int_{-x}^{x} \sin t \, dt$$

Finnið núllstöðvar heildisstofnsins í eftirfarandi æfingum til að losna við algildismerkin og reiknið síðan heildið með 2. hluta undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar.

194.

$$\int_{-2}^{3} |x| \, dx$$

1

195.

$$\int_{-2}^{4} \left|t^2 - 2t - 3\right| dt$$

196.

$$\int_{0}^{\pi} \left|\cos t\right| dt$$

197.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left|\sin t\right| dt$$

198. Gerum ráð fyrir að fjölda birtustunda á tilteknum degi í Seattle sé lýst með fallinu $-3{,}75\ \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)+12{,}25$, þar sem t er gefið upp í mánuðum og $t=0$ samsvarar vetrarsólstöðum.

a. Hver er meðalfjöldi birtustunda á sólarhring yfir heilt ár?

b. Á hvaða tímum t_1 og t_2, þar sem $0 \le t_1 < t_2 < 12$, er fjöldi birtustunda jafn meðalfjöldanum?

c. Ritið heildi sem lýsir heildarfjölda birtustunda í Seattle á milli t_1 og t_2.

d. Reiknið meðalfjölda birtustunda í Seattle milli t_1 og t_2, þar sem $0 \le t_1 < t_2 < 12$, og síðan milli t_2 og t_1, og sýnið að meðaltal þessara tveggja gilda sé jafnt meðallengd dags.

199. Gerum ráð fyrir að lýsa megi notkunarhraða bensíns í Bandaríkjunum yfir árið með sínusfalli af gerðinni $\left(42{,}4 - 3{,}8\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) \times 10^9$ lítrar á mánuði.

a. Hver er meðalnotkunin á mánuði og fyrir hvaða gildi t er notkunarhraðinn á tíma t jafn meðalnotkunarhraðanum?

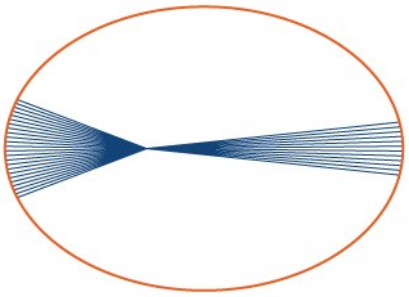
b. Hve margir lítrar af bensíni eru notaðir í Bandaríkjunum á einu ári?

c. Ritið heildi sem lýsir meðalnotkun bensíns á mánuði í Bandaríkjunum frá byrjun apríl $(t=3)$ til loka september $(t=9)$.

200. Ef f er samfellt á $[a,b]$, útskýrið þá hvers vegna til er að minnsta kosti einn punktur $c \in [a,b]$ þannig að $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

201. Ef f er samfellt á $[a,b]$ og er ekki fastafall, útskýrið þá hvers vegna til er að minnsta kosti einn punktur $M \in [a,b]$ þannig að $f(M) > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ og að minnsta kosti einn punktur $m \in [a,b]$ þannig að $f(m) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

202. Fyrsta lögmál Keplers segir að reikistjörnur gangi um sólu á sporbaugsbrautum og að sólin sé í öðrum brennipunkti hverrar brautar. Sá punktur brautar reikistjörnu sem er næstur sólu kallast sólnánd og jörðin er nú í sólnánd um 3. janúar. Fjarlægasti punkturinn kallast sólfirrð en jörðin er nú í sólfirrð um 4. júlí. Annað lögmál Keplers segir að reikistjörnur sópi yfir jafnstór svæði á sporbaugsbraut sinni á jafnlöngum tíma. Það tekur því jafnlangan tíma að fara eftir hvorum boganna tveggja sem merktir eru á eftirfarandi mynd. Á hvaða árstíma fer jörðin hraðast eftir braut sinni? Hvenær fer hún hægast?



203. Punktur á sporbaug með lengd langáss 2a og lengd skammáss 2b hefur hnitin $(a\cos\theta, b\sin\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$.

a. Sýnið að fjarlægðin frá þessum punkti til brennipunktsins $(-c, 0)$ er $d(\theta) = a + c\cos\theta$, þar sem $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

b. Notið þessi hnit til að sýna að meðalfjarlægðin $\bar{d}$ frá punkti á sporbaugnum til brennipunktsins $(-c, 0)$, með tilliti til hornsins θ, er a.

204. Eins og áður kom fram er braut jarðar samkvæmt lögmálum Keplers sporbaugur með sólina í öðrum brennipunktinum. Í sólnánd er fjarlægð jarðar frá sólu 147.098.290 km og í sólfirrð er hún 152.098.232 km.

a. Leggið langásinn eftir x-ásnum og finnið meðalfjarlægð jarðar frá sólu.

b. Samkvæmt hefðbundinni skilgreiningu er stjarnfræðieining (SE) fjarlægðin frá jörðu til sólar og gildi hennar var reiknað sem meðaltal fjarlægðanna við sólnánd og sólfirrð. Er þessi skilgreining réttmæt?

205. Þyngdaraðdráttarkrafturinn milli sólar og reikistjörnu er $F(\theta) = \dfrac{G\,m\,M}{r^2(\theta)}$, þar sem m er massi reikistjörnunnar, M er massi sólar, G er algildur fasti og $r(\theta)$ er fjarlægðin milli sólar og reikistjörnunnar þegar reikistjarnan myndar hornið θ við langás brautar sinnar. Gerið ráð fyrir að M, m og sporbaugsstærðirnar a og b (hálflengdir langáss og skammáss) séu gefnar. Setjið fram, en reiknið ekki, heildi sem gefur meðalþyngdaraðdráttarkraftinn milli sólar og reikistjörnunnar sem fall af G, m, M, a, b.

206. Færsla massa, sem festur er við gorm, frá jafnvægisstöðu uppfyllir jöfnu einfaldrar sveifluhreyfingar $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, þar sem ϕ er fasafasti, ω er horntíðnin og A er útslagið. Finnið meðalhraða, meðalferð (stærð hraðans), meðalfærslu og meðalfjarlægð massans frá jafnvægisstöðu (stærð færslunnar).

1

1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

NÁMSMARKMIÐ

- 1.4.1 Beita helstu heildunarreglum.
- 1.4.2 Útskýra mikilvægi setningarinnar um heildarbreytingu.
- 1.4.3 Nota setninguna um heildarbreytingu til að leysa hagnýt verkefni.
- 1.4.4 Beita heildum oddstæðra og jafnstæðra falla.

Í þessum undirkafla notum við nokkrar helstu heildunarreglur sem við höfum kynnst áður til að leysa mikilvæg hagnýt verkefni. Rétt er að hafa í huga að reglurnar eru settar fram með óákveðnum heildum. Þótt ákveðin og óákveðin heildi séu nátengd er mikilvægt að muna nokkurn grundvallarmun á þeim. Ákveðið heildi er annaðhvort tala, þegar heildismörkin eru föst, eða eitt fall, þegar annað eða bæði heildismörkin eru breytileg. Óákveðið heildi táknar fjölskyldu falla sem einungis eru frábrugðin hvert öðru um fastalið. Eftir því sem þið kynnist heildun betur fáið þið tilfinningu fyrir því hvenær á að nota ákveðið heildi og hvenær óákveðið heildi. Þá veljið þið ósjálfrátt réttu aðferðina fyrir hvert verkefni án þess að hugsa mikið um það. Þar til þessi hugtök eru orðin föst í sessi skuluð þið þó íhuga vandlega hvort þörf sé á ákveðnu eða óákveðnu heildi og gæta þess að nota rétta táknun í samræmi við valið.

Helstu heildunarreglur

Rifjið upp heildunarreglurnar í töflunni í undirkaflanum Stofnföll og regluna um eiginleika ákveðinna heilda. Skoðum nokkur dæmi um hvernig þessum reglum er beitt.

DÆMI 1.23

Heildun falls með veldisreglunni

Notið veldisregluna til að heilda fallið $\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt$.

Lausn

Fyrsta skrefið er að umrita fallið og einfalda það svo að við getum beitt veldisreglunni:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)dt &= \int_1^4 t^{1/2}(1+t)dt \\ &= \int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right)dt.\end{aligned}$$

Beitum nú veldisreglunni:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right)dt &= \left(\tfrac{2}{3}t^{3/2}+\tfrac{2}{5}t^{5/2}\right)\Big|_1^4 \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(4)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(4)^{5/2}\right]-\left[\tfrac{2}{3}(1)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(1)^{5/2}\right] \\ &= \tfrac{256}{15}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.21

Reiknið ákveðið heildi fallsins $f(x)=x^2-3x$ á bilinu $[1,3]$.

Setningin um heildarbreytingu

Setningin um heildarbreytingu fjallar um heildi breytingarhraða. Hún segir að þegar stærð breytist sé nýja gildið jafnt upphafsgildinu að viðbættu heildi breytingarhraða stærðarinnar. Formúluna má setja fram á tvo vegu. Síðari framsetningin er kunnuglegri; hún er einfaldlega ákveðið heildi.

SETNING 1.6

Setningin um heildarbreytingu

Nýtt gildi breytilegrar stærðar er jafnt upphafsgildinu að viðbættu heildi breytingarhraðans:

$$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)\,dx$$

eða

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

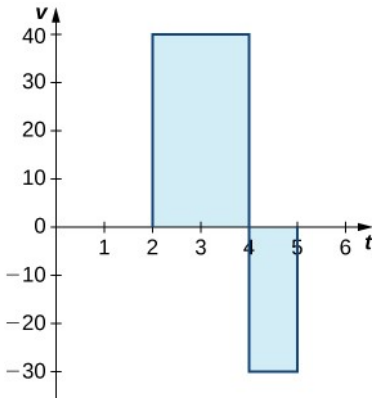
(1.18)

Ef $F(a)$ er dregið frá báðum hliðum fyrri jöfnunnar fæst síðari jafnan. Formúlurnar eru jafngildar og því fer það eftir viðfangsefninu hvora þeirra við notum.

Mikilvægi setningarinnar um heildarbreytingu felst í niðurstöðunum. Meðal annars má beita henni á flatarmál, vegalengd og rúmmál. Hún tekur sjálfkrafa tillit til neikvæðra stærða án þess að þurfa að skrifa fleiri en eitt heildi. Til skýringar skulum við beita setningunni á hraðafall og finna færslu.

Við skoðuðum einfalt dæmi um þetta í undirkaflanum Ákveðið heildi. Gerum ráð fyrir að bíll aki í hánorður, sem telst jákvæð stefna, með hraðanum 40 km á klukkustund milli

klukkan 2 og 4 síðdegis og síðan í suður með hraðanum 30 km á klukkustund milli klukkan 4 og 5 síðdegis. Hreyfinguna má sýna á grafi eins og sést á mynd 1.32.



Mynd 1.32 Grafið sýnir hraða bílsins sem fall af tíma.

Rétt eins og áður getum við notað ákveðin heildi til að reikna bæði heildarfærsluna og heildarvegalengdina. Heildarfærslan fæst sem

$$\begin{aligned}\int_2^5 v(t)dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 -30dt \\ &= 80 - 30 \\ &= 50.\end{aligned}$$

Klukkan 5 síðdegis er bíllinn því 50 km norðan við upphafsstað sinn. Heildarvegalengdin sem ekin var fæst með

$$\begin{aligned}\int_2^5 |v(t)|dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 30dt \\ &= 80 + 30 \\ &= 110.\end{aligned}$$

Milli klukkan 2 og 5 síðdegis ók bíllinn því samtals 110 km.

Í stuttu máli getur heildarfærsla verið bæði jákvæð og neikvæð. Hraðafallið tekur með öðrum orðum tillit til vegalengdar bæði fram á við og aftur á bak. Heildarfærslan fæst með því að heilda hraðafallið á bilinu. Heildarvegalengdin er hins vegar alltaf jákvæð. Til að finna heildarvegalengdina sem hlutur fer, óháð stefnu, þarf að heilda algildi hraðafallsins.

DÆMI 1.24

Útreikningur heildarfærslu

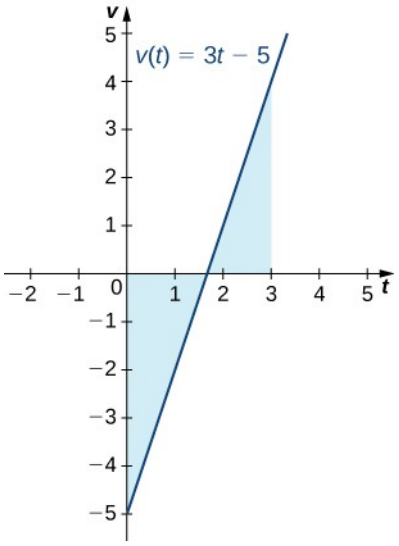
Gefið er hraðafallið $v(t) = 3t - 5$ (í metrum á sekúndu) fyrir ögn á hreyfingu frá $t = 0$ til $t = 3$, og finnið heildarfærslu agnarinnar.

Lausn

Með setningunni um heildarbreytingu fæst

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3t-5)dt &= \frac{3t^2}{2} - 5t\Big|_0^3 \\ &= \left[\frac{3(3)^2}{2} - 5(3)\right] - 0 \\ &= \frac{27}{2} - 15 \\ &= \frac{27}{2} - \frac{30}{2} \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Heildarfærslan er $-\frac{3}{2}$ m (mynd 1.33).



Mynd 1.33 Grafið sýnir hraða sem fall af tíma fyrir ögn sem hreyfist samkvæmt línulegu hraðafalli.

DÆMI 1.25

Útreikningur heildarvegalengdar

Notið dæmi 1.24 til að finna heildarvegalengdina sem ögn fer samkvæmt hraðafallinu $v(t)=3t-5$ m/sek. á tímabilinu $[0,3]$.

Lausn

Bæði jákvæð og neikvæð gildi hraðafallsins teljast með í heildarvegalengdinni. Því þurfum við að heilda algildi hraðafallsins til að finna heildarvegalengdina.

Við höldum áfram með dæmið og notum tvö heildi til að finna heildarvegalengdina. Fyrst finnum við skurðpunkt fallsins við t-ásinn, því þar skiptist tímabilið. Setjum fallið jafnt núlli og einangrum t. Þá fæst

$$\begin{aligned} 3t-5 &= 0 \\ 3t &= 5 \\ t &= \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$

1

Hlutbilin tvö eru $\left[0,\frac{5}{3}\right]$ og $\left[\frac{5}{3},3\right]$. Til að finna heildarvegalengdina heildum við tölugildi fallsins. Þar sem fallið er neikvætt á bilinu $\left[0,\frac{5}{3}\right]$, gildir $|v(t)|=-v(t)$ á því bili. Á $\left[\frac{5}{3},3\right]$, er fallið jákvætt og því er $|v(t)|=v(t)$. Þá fæst

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)|dt &= \int_0^{5/3} -v(t)dt + \int_{5/3}^3 v(t)dt \\ &= \int_0^{5/3} 5-3tdt + \int_{5/3}^3 3t-5dt \\ &= \left(5t-\tfrac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^{5/3} + \left(\tfrac{3t^2}{2}-5t\right)\Big|_{5/3}^3 \\ &= \left[5\left(\tfrac{5}{3}\right)-\tfrac{3(5/3)^2}{2}\right]-0+\left[\tfrac{27}{2}-15\right]-\left[\tfrac{3(5/3)^2}{2}-\tfrac{25}{3}\right] \\ &= \tfrac{25}{3}-\tfrac{25}{6}+\tfrac{27}{2}-15-\tfrac{25}{6}+\tfrac{25}{3} \\ &= \tfrac{41}{6}. \end{aligned}$$

Heildarvegalengdin er því $\frac{41}{6}$ m.

STÖÐUMAT 1.22

Finnið heildarfærsluna og heildarvegalengdina í metrum fyrir hraðafallið $f(t)=\frac{1}{2}e^t-2$ á bilinu $[0,2]$.

Beiting setningarinnar um heildarbreytingu

Beita má setningunni um heildarbreytingu á flæði og notkun vökva, eins og sýnt er í dæmi 1.26.

DÆMI 1.26

Hve margir lítrar af bensíni eru notaðir?

Mótor vélbáts er ræstur við $t=0$ og bensínnotkun hans er $20-0{,}4t^3$ lítrar á klukkustund. Hve mikið bensín notar hann fyrstu 2 klukkustundirnar?

Lausn

Við setjum verkefnið fram sem ákveðið heildi, heildum og reiknum gildið með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar. Heildismörkin eru endapunktar bilsins $[0,2]$. Þá fæst

$$\int_0^2 \left(20-0{,}4t^3\right)dt=\left(20t-0{,}4\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^2=\left[20(2)-0{,}4\frac{(2)^4}{4}\right]-0=40-1{,}6=38{,}4$$

Vélbáturinn notar því 38,4 lítra af bensíni á 2 klukkustundum.

DÆMI 1.27

Kaflaupphaf: Íssleðar



Mynd 1.34 (mynd: verk Carters Browns á Flickr, breytt)

Eins og fram kom í upphafi kaflans geta fremstu keppendur í íssiglingum (mynd 1.1) náð allt að fimmföldum vindhraða. Andrew hefur hins vegar miðlungsreynslu af íssiglingum og nær því aðeins tvöföldum vindhraða. Gerum ráð fyrir að hann fari út á íssleða sínum morgun einn eftir að hæg gola, 5 km á klukkustund, hefur blásið allan morguninn. Á meðan Andrew gerir íssleðann kláran fer þó að hvessa. Fyrsta hálftímann sem hann siglir eykst vindhraðinn samkvæmt fallinu $v(t)=20t+5$. Síðari hálftíma ferðarinnar helst vindhraðinn stöðugur, 15 km á klukkustund. Vindhraðinn er með öðrum orðum

$$v(t)=\begin{cases}20t+5 & \text{þegar} \quad 0\le t\le\frac{1}{2}\\ 15 & \text{þegar} \quad \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

Munið að íssleði Andrews fer á tvöföldum vindhraða. Gerum ráð fyrir að hann fari eftir beinni línu frá upphafsstað sínum. Hve langt er hann frá upphafsstaðnum eftir 1 klukkustund?

Lausn

Til að finna hve langt Andrew hefur farið þarf að heilda hraða hans, sem er tvöfaldur vindhraðinn. Þá fæst

1

$$\text{Vegalengd} = \int_0^1 2v(t)\,dt.$$

Setjum inn gefnu stæðurnar fyrir $v(t)$, og fáum

$$\begin{aligned}
\int_0^1 2v(t)dt &= \int_0^{1/2} 2v(t)dt + \int_{1/2}^1 2v(t)dt \\
&= \int_0^{1/2} 2(20t+5)dt + \int_{1/2}^1 2(15)dt \\
&= \int_0^{1/2} (40t+10)dt + \int_{1/2}^1 30dt \\
&= \left[20t^2+10t\right]\Big|_0^{1/2} + [30t]\Big|_{1/2}^1 \\
&= \left(\tfrac{20}{4}+5\right) - 0 + (30-15) \\
&= 25.
\end{aligned}$$

Andrew er 25 km frá upphafsstað sínum eftir 1 klukkustund.

STÖÐUMAT 1.23

Gerum nú ráð fyrir að vindurinn haldist ekki stöðugur síðari hálftíma ferðar Andrews heldur dragi úr honum samkvæmt fallinu $v(t) = -10t + 15$. Vindhraðinn er með öðrum orðum

$$v(t) = \begin{cases} 20t+5 & \text{þegar } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -10t+15 & \text{þegar } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Hve langt er Andrew frá upphafsstað sínum eftir 1 klukkustund við þessar aðstæður?

Heildun jafnstæðra og oddstæðra falla

Í Föllum og gröfum sáum við að jafnstætt fall er fall sem uppfyllir $f(-x) = f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmenginu. Graf fallsins breytist með öðrum orðum ekki þegar x er skipt út fyrir −x. Gröf jafnstæðra falla eru samhverf um y-ásinn. Oddstætt fall uppfyllir $f(-x) = -f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmenginu og graf þess er samhverft um upphafspunktinn.

Þegar jafnstætt fall er heildað frá – a til a eru svæðin sitt hvorum megin við y-ásinn jafnstór vegna samhverfunnar. Þegar oddstætt fall er heildað á sama bili, $[-a, a]$,, verður heildið núll, því formerktu flatarmálin ofan og neðan við x-ásinn eyða hvort öðru.

REGLA: HEILDI JAFNSTÆÐRA OG ODDSTÆÐRA FALLA

Ef f er samfellt jafnstætt fall þannig að $f(-x)=f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Ef f er samfellt oddstætt fall þannig að $f(-x)=-f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

DÆMI 1.28

Heildun jafnstæðs falls

Heildið jafnstæða fallið $\int_{-2}^{2} (3x^8 - 2)\,dx$ og sannreynið að heildunarreglan fyrir jafnstæð föll gildi.

Lausn

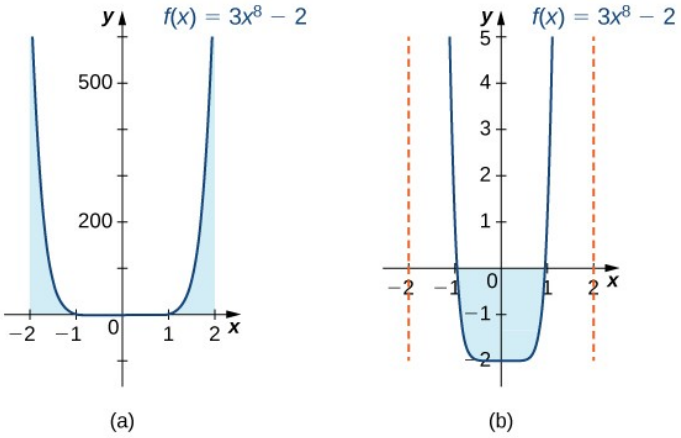
Samhverfan sést á gröfunum á mynd 1.35. Graf (a) sýnir svæðið undir ferlinum og ofan við x-ásinn. Stækka þarf grafið verulega til að sjá svæðið. Graf (b) sýnir svæðið ofan við ferilinn og neðan við x-ásinn. Formerkt flatarmál þess svæðis er neikvætt. Bæði gröfin sýna samhverfu jafnstæða fallsins um y-ásinn. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} (3x^8 - 2)dx &= \left(\tfrac{x^9}{3} - 2x\right)\Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\tfrac{(2)^9}{3} - 2(2)\right] - \left[\tfrac{(-2)^9}{3} - 2(-2)\right] \\ &= \left(\tfrac{512}{3} - 4\right) - \left(-\tfrac{512}{3} + 4\right) \\ &= \tfrac{1000}{3}.\end{aligned}$$

Til að sannreyna heildunarregluna fyrir jafnstæð föll reiknum við heildið frá 0 til 2 og tvöföldum það. Síðan athugum við hvort sama niðurstaða fáist.

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} (3x^8 - 2)dx &= \left(\tfrac{x^9}{3} - 2x\right)\Big|_{0}^{2} \\ &= \tfrac{512}{3} - 4 \\ &= \tfrac{500}{3}\end{aligned}$$

Þar sem $2 \cdot \frac{500}{3} = \frac{1000}{3}$, höfum við sannreynt regluna fyrir jafnstæð föll í þessu tiltekna dæmi.



Mynd 1.35 Graf (a) sýnir jákvætt flatarmál milli ferilsins og x-ássins en graf (b) sýnir neikvætt flatarmál milli þeirra. Bæði gröfin sýna samhverfu um y-ásinn.

DÆMI 1.29

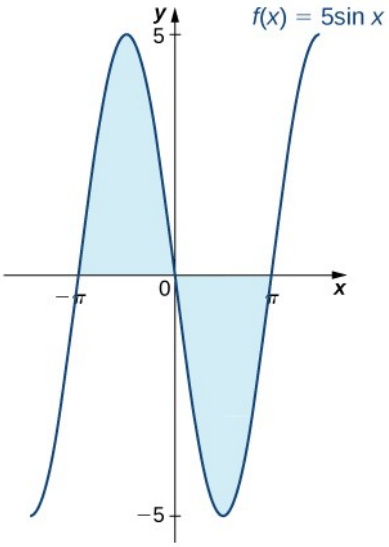
Heildun oddstæðs falls

Reiknið ákveðið heildi oddstæða fallsins $-5\sin x$ á bilinu $[-\pi, \pi]$.

Lausn

Grafið er sýnt á mynd 1.36. Samhverfan um upphafspunktinn sést af jákvæða svæðinu ofan x-ássins yfir $[-\pi, 0]$, og neikvæða svæðinu neðan x-ássins yfir $[0, \pi]$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} -5\sin x\,dx &= -5\left(-\cos x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 5\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left[5\cos\pi\right] - \left[5\cos\left(-\pi\right)\right] \\ &= -5 - \left(-5\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$



Mynd 1.36 Grafið sýnir flatarmál milli ferils og x-áss fyrir oddstætt fall.

STÖÐUMAT 1.24

Heildið fallið $\int_{-2}^{2} x^4\,dx$.

Æfingar í undirkafla 1.4

Notið helstu heildunarreglur til að reikna eftirfarandi stofnföll eða ákveðin heildi.

207.

$$\int\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

208.

$$\int\left(e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x/2}\right)dx$$

209.

$$\int\frac{dx}{2x}$$

1

210.

$$\int \frac{x-1}{x^2}\,dx$$

211.

$$\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)\,dx$$

212.

$$\int_0^{\pi/2} (x - \sin x)\,dx$$

213. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á ummáli $P(s)$ fernings þegar hliðarlengdin s vex úr 2 einingum í 4 einingar og reiknið heildið.

214. Skrifið heildi sem lýsir breytingunni á flatarmáli $A(s)=s^2$ fernings þegar hliðarlengdin tvöfaldast úr S einingum í 2 S einingar og reiknið heildið.

215. Reglulegur N-hyrningur (N-hliða marghyrningur með jafnlangar hliðar s, svo sem fimmhyrningur eða sexhyrningur) hefur ummálið Ns. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á ummáli reglulegs N-hyrnings þegar lengd hverrar hliðar vex úr 1 einingu í 2 einingar og reiknið heildið.

216. Flatarmál reglulegs fimmhyrnings með hliðarlengd $a>0$ er pa^2 þar sem $p=\frac{1}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$. Innri hliðar Pentagon-byggingarinnar í Washington, DC, eru 110 m að lengd og ytri hliðarnar 280 m. Skrifið heildi sem lýsir flatarmáli þaks Pentagon-byggingarinnar samkvæmt þessum málum og reiknið flatarmálið.

217. Tólfflötungur er reglulegur margflötungur og yfirborð hans er úr 12 fimmhyrningum sem allir hafa sama flatarmál. Hve mikið vex yfirborðsflatarmál tólfflötungs þegar hliðarlengd hvers fimmhyrnings tvöfaldast úr 1 einingu í 2 einingar?

218. Tuttuguflötungur er reglulegur margflötungur og yfirborð hans er úr 20 jafnhliða þríhyrningum. Hve mikið vex yfirborðsflatarmál tuttuguflötungs þegar hliðarlengd hvers þríhyrnings tvöfaldast úr a einingum í 2 a einingar?

219. Skrifið heildi sem lýsir breytingunni á yfirborðsflatarmáli tenings þegar hliðarlengd hans tvöfaldast úr s einingum í 2 s einingar og reiknið heildið.

220. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á rúmmáli tenings þegar hliðarlengdin tvöfaldast úr s einingum í 2 s einingar og reiknið heildið.

221. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á yfirborðsflatarmáli kúlu þegar radíus hennar tvöfaldast úr R einingum í 2 R einingar og reiknið heildið.

222. Skrifið heildi sem lýsir aukningunni á rúmmáli kúlu þegar radíus hennar tvöfaldast úr R einingum í 2 R einingar og reiknið heildið.

223. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hraðanum $v(t)=4-2t$, þar sem $0\le t\le 2$ (í metrum á sekúndu). Finnið færslu agnarinnar á tímanum t og heildarvegalengdina sem hún hefur farið fram að $t=2$.

224. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hraða sem er skilgreindur með $v(t)=t^2-3t-18$, þar sem $0\le t\le 6$ (í metrum á sekúndu). Finnið færslu agnarinnar á tímanum t og heildarvegalengdina sem hún hefur farið fram að $t=6$.

225. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hraða sem er skilgreindur með $v(t)=|2t-6|$, þar sem $0\le t\le 6$ (í metrum á sekúndu). Finnið færslu agnarinnar á tímanum t og heildarvegalengdina sem hún hefur farið fram að $t=6$.

226. Gerum ráð fyrir að ögn hreyfist eftir beinni línu með hröðun sem er skilgreind með $a(t)=t-3$, þar sem $0\le t\le 6$ (í metrum á sekúndu). Finnið hraðann og færsluna á tímanum t og heildarvegalengdina sem ögnin hefur farið fram að $t=6$ ef $v(0)=3$ og $d(0)=0$.

227. Bolta er kastað upp á við úr 1,5 m hæð með upphafshraðanum 40 m/sek. Hröðunin af völdum þyngdaraflsins er −9,8 m/sek.^{2}. Horfið fram hjá loftmótstöðu og finnið hraða boltans $v(t)$ og hæð hans $h(t)$ t sekúndum eftir kastið og áður en hann lendir aftur á jörðinni.

228. Bolta er kastað upp á við úr 3 m hæð með upphafshraðanum 60 m/sek. Hröðunin af völdum þyngdaraflsins er −9,8 m/sek.^{2}. Horfið fram hjá loftmótstöðu og finnið hraða boltans $v(t)$ og hæð hans $h(t)$ t sekúndum eftir kastið og áður en hann lendir aftur á jörðinni.

229. Flatarmál $A(t)$ á hringlaga svæði vex með jöfnum hraða. Ef flatarmálið eykst úr $4\,\pi$ einingum í $9\,\pi$ einingar frá $t=2$ til $t=3$, finnið þá heildarbreytingu geislans á því tímabili.

230. Kúlulaga blaðra er blásin upp með jöfnum hraða. Ef rúmmál hennar breytist úr $36\,\pi$ cm^3 í $288\,\pi$ cm^3 frá $t=30$ til $t=60$ sekúndna, finnið þá heildarbreytingu geisla blöðrunnar á því tímabili.

231. Vatn rennur í keilulaga tank með þversniðsflatarmálið πx^2 í hæðinni x og rúmmálið $\frac{\pi x^3}{3}$ upp að hæðinni x. Ef vatn rennur í tankinn með rennslishraðanum 1 m^3 /mín., finnið þá hæð vatnsins í tankinum eftir 5 mín. Finnið einnig hæðarbreytinguna frá 5 mín. til 10 mín.

1

232. Láréttur sívalningslaga tankur hefur þversniðsflatarmálið $A(x)=4\left(6x-x^2\right)m^2$ í x metra hæð yfir botninum þegar $x\leq 3$.

a. Rúmmálið V milli hæðanna a og b er $\int_a^b A(x)\,dx$. Finnið rúmmálið milli hæðanna 2 m og 3 m.

b. Gerum ráð fyrir að olíu sé dælt í tankinn með rennslishraðanum 50 L/mín. Notið keðjuregluna $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dV}\frac{dV}{dt}$, og finnið, sem fall af x, um hve marga metra á mínútu hæð olíunnar í tankinum breytist þegar hún er x metrar.

c. Hve lengi tekur að fylla tankinn úr 2 m hæð upp í 3 m?

233. Eftirfarandi tafla sýnir rafaflið í gígavöttum — það er að segja hversu hratt orka er notuð — í tiltekinni borg á mismunandi tímum dags á dæmigerðu 24 klukkustunda tímabili. Klukkustund 1 er tíminn frá miðnætti til kl. 1 að nóttu.

Klukkustund	Afl	Klukkustund	Afl
1	28	13	48
2	25	14	49
3	24	15	49
4	23	16	50
5	24	17	50
6	27	18	50
7	29	19	46
8	32	20	43
9	34	21	42
10	39	22	40
11	42	23	37
12	46	24	34

Finnið heildarorkuna í gígavattstundum (GWst.) sem borgin notar á dæmigerðu 24 klukkustunda tímabili.

234. Eftirfarandi tafla sýnir hve mikið rafafl heimili notar að meðaltali á hverri klukkustund, í hundruðum vatta.

Klukkustund	Afl	Klukkustund	Afl
1	8	13	12
2	6	14	13
3	5	15	14
4	4	16	15
5	5	17	17
6	6	18	19
7	7	19	18
8	8	20	17
9	9	21	16
10	10	22	16
11	10	23	13
12	11	24	11

a. Reiknið hve mikla orku heimili notar að meðaltali á dag í kílóvattstundum (kWst.).

b. Ef eitt tonn af kolum gefur 2030 kWst., hve lengi er meðalheimili að brenna einu tonni af kolum?

c. Útskýrið hvers vegna gögnin gætu fallið að grafi af gerðinni $p(t)=11{,}5-7{,}5\ \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

235. Gögnin í eftirfarandi töflu eru notuð til að meta meðalafl Peters Sagans á hverri af síðustu 18 sekúndunum í 1. áfanga Tour de France árið 2012.

Tafla 1.6 Meðalafl *Heimild*: sportsexercisengineering.com

Sekúnda	Vött	Sekúnda	Vött
1	600	10	1200
2	500	11	1170
3	575	12	1125
4	1050	13	1100
5	925	14	1075
6	950	15	1000
7	1050	16	950
8	950	17	900
9	1100	18	780

Metið heildarorkunotkunina í kílójúlum (kJ) og meðalafl Sagans á þessu tímabili. Hafið í huga að 1 W = 1 J/s.

1

236. Gögnin í eftirfarandi töflu eru notuð til að meta meðalafl Peters Sagans á hverju 15 mínútna tímabili í 1. áfanga Tour de France árið 2012.

Tafla 1.7 Meðalafl *Heimild*: sportsexercisengineering.com

Mínútur	Vött	Mínútur	Vött
15	200	165	170
30	180	180	220
45	190	195	140
60	230	210	225
75	240	225	170
90	210	240	210
105	210	255	200
120	220	270	220
135	210	285	250
150	150	300	400

Metið heildarorkunotkunina í kílójúlum og hafið í huga að 1 W = 1 J/s.

237. Eftirfarandi tafla sýnir tekjudreifingu í Bandaríkjunum árið 2012 í $5000 þrepum. Lína k sýnir hlutfall heimila með tekjur á bilinu $\$5000\,x\,k$ til $5000\,x\,k+4999$. Línan $k=40$ nær yfir öll heimili með tekjur á bilinu $200.000 til $250.000.

Tafla 1.8 Tekjudreifing *Heimild*: http://www.census.gov/prod/2013pubs/p60-245.pdf

0	3,5	11	3,5	21	1,5	31	0,6
1	4,1	12	3,7	22	1,4	32	0,5
2	5,9	13	3,2	23	1,3	33	0,5
3	5,7	14	3,0	24	1,3	34	0,4
4	5,9	15	2,8	25	1,1	35	0,3
5	5,4	16	2,5	26	1,0	36	0,3
6	5,5	17	2,2	27	0,75	37	0,3
7	5,1	18	2,2	28	0,8	38	0,2
8	4,8	19	1,8	29	1,0	39	1,8
9	4,1	20	2,1	30	0,6	40	2,3
10	4,3						

a. Metið hlutfall heimila í Bandaríkjunum sem höfðu tekjur undir $55.000 árið 2012.
b. Hve hátt hlutfall heimila var með tekjur yfir $85.000?
c. Teiknið gögnin upp og reynið að laga lögun þeirra að grafi af gerðinni $a(x+c)e^{-b(x+e)}$ fyrir viðeigandi a, b, c.

238. Þyngdarlögmál Newtons segir að þyngdarkrafturinn milli hlutar með massa M og hlutar með massa m, þegar fjarlægðin milli miðja þeirra er r, sé $F = G\frac{mM}{r^2}$, þar sem G er reynslufasti $G = 6{,}67\,x\,10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$. Vinnan sem breytilegur kraftur vinnur á bili $[a, b]$ er skilgreind sem $W = \int_a^b F(x)\,dx$. Ef massi jarðar er $5{,}97219\ \times\ 10^{24}$ og geisli hennar 6371 km, reiknið þá vinnuna sem þarf til að lyfta 1400 kg veðurgervitungli á pólbraut upp í 850 km brautarhæð yfir jörðu.

239. Fyrir tiltekið vélknúið ökutæki er mesta mögulega hraðaminnkun við hemlun um það bil 7 m/sek.² á þurri steinsteypu en á blautu malbiki um það bil 2,5 m/sek.². Athugið að 3.6 km/klst. samsvara 1 m/sek. Finnið heildarvegalengdina í metrum sem bíll fer á þurri steinsteypu frá því að hemlað er þar til hann stöðvast alveg. Hraðinn þegar hemlun hefst er annars vegar 108 km/klst. (30 m/sek.) og hins vegar 90 km/klst. (25 m/sek.). Finnið samsvarandi vegalengdir ef yfirborðið er hált, blautt malbik.

240. John er 25 ára maður sem vegur 73 kg. Hann brennir $500 - 50t$ hitaeiningum á klukkustund þegar hann hjólar í t klukkustundir. Hver hafrakaka inniheldur 55 hitaeiningar og John fær hitaeiningar úr kökum með hraðanum 4 t á t-tu klukkustundinni. Hvert er nettótap hans á hitaeiningum eftir að hann hefur hjólað í 3 klukkustundir?

241. Sandra er 25 ára kona sem vegur 54 kg. Hún brennir $300 - 50t$ hitaeiningum á klukkustund þegar hún gengur á hlaupabretti. Úr Gatorade-drykk fær hún 100 t hitaeiningar á klukkustund á t-tu klukkustundinni. Hvert er nettótap hennar á hitaeiningum eftir 3 klukkustunda göngu?

242. Vélknúið ökutæki nær mestri eldsneytisnýtingu, 14 km á lítra, við jafnan akstursshraða sem nemur 60 km/klst. Eldsneytisnýtingin minnkar um 0,05 km á lítra fyrir hvern km/klst. sem hraðinn eykst úr 60 í 80 km/klst. og um 0,08 km á lítra fyrir hvern km/klst. sem hraðinn eykst úr 80 í 130 km/klst. Hver er eldsneytisnýtingin í km á lítra þegar bílnum er ekið á 80 km hraða á klukkustund? En á 130 km hraða á klukkustund? Ef bensín kostar 0,90 evrur á lítra, hver er eldsneytiskostnaðurinn við að aka 80 km á 60, 80 og 130 km hraða á klukkustund?

243. Þótt sumar vélar nýti eldsneyti betur en aðrar við sama afl minnkar eldsneytisnýting að meðaltali um 1/50 km á lítra fyrir hvert kílóvatt (kW) sem bætist við. Ef dæmigerð 40 kW vél hefur meðaleldsneytisnýtinguna 14 km á lítra, hver er þá meðaleldsneytisnýting 100, 200 og 300 kW véla?

244. **[T]** Eftirfarandi tafla sýnir skattþrep alríkistekjuskatts árið 2013 eftir skattskyldum tekjum.

1

Tafla 1.9 Alríkistekjuskattur og skattskyldar tekjur *Heimild*: http://www.irs.gov/pub/irs-prior/i1040tt--2013.pdf.

Bil skattskyldra tekna	Skatturinn er ...	... af fjárhæð umfram
$0–$8925	10%	$0
$8925–$36.250	$892,50 + 15%	$8925
$36.250–$87.850	$4.991,25 + 25%	$36.250
$87.850–$183.250	$17.891,25 + 28%	$87.850
$183.250–$398.350	$44.603,25 + 33%	$183.250
$398.350–$400.000	$115.586,25 + 35%	$398.350
> $400.000	$116.163,75 + 39,6%	$400.000

Gerum ráð fyrir að Steve hafi nýlega fengið $10.000 launahækkun. Hve mikið stendur eftir af hækkuninni að frádregnum alríkissköttum ef laun Steves fyrir hækkunina voru $40.000? En ef þau voru $90.000? En ef þau voru $385.000?

245. **[T]** Eftirfarandi tafla sýnir ímynduð gögn um þjónustustig tiltekins þjóðvegar.

Tafla 1.10

Hraðabil á þjóðvegi (km/klst.)	Ökutæki á klukkustund á hverri akrein	Þéttleikabil (ökutæki/km)
> 60	< 600	< 10
60–57	600–1000	10–20
57–54	1000–1500	20–30
54–46	1500–1900	30–45
46–30	1900–2100	45–70
<30	Óstöðugt	70–200

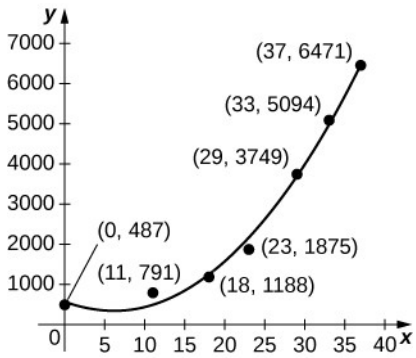
a. Teiknið fjölda ökutækja á klukkustund á hverri akrein á x-ásinn og hraða á þjóðveginum á y-ásinn.
b. Reiknið meðallækkun hraða (í km/klst.) fyrir hverja einingaraukningu á umferðarþunga (ökutæki á klukkustund á hverri akrein) þegar umferðarþunginn vex úr 600 í 1000, úr 1000 í 1500 og úr 1500 í 2100. Er línulegt samband milli hraðalækkunarinnar og fjölgunar ökutækja á klukkustund á hverri akrein?
c. Teiknið mínútur á kílómetra, það er 60 sinnum margföldunarandhverfu hraðans í km/klst., sem fall af fjölda ökutækja á klukkustund á hverri akrein. Er þetta fall línulegt?

Í næstu tveimur æfingum notið þið gögnin í eftirfarandi töflu, sem sýnir stofnstærð skallaarna á meginlandi Bandaríkjanna frá 1963 til 2000.

Tafla 1.11 Fjöldi skallarnarpara í varpi *Heimild*: http://www.fws.gov/Midwest/eagle/population/chtofprs.html.

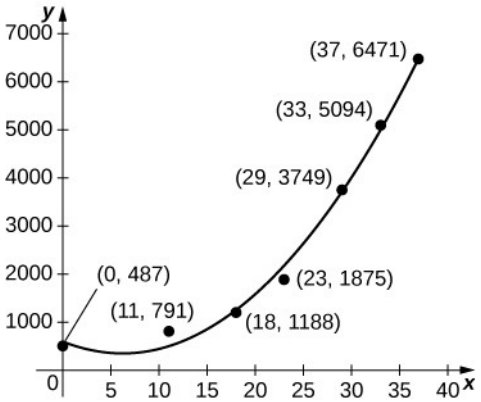
Ár	Fjöldi varppara skallaarna
1963	487
1974	791
1981	1188
1986	1875
1992	3749
1996	5094
2000	6471

246. **[T]** Grafið hér að neðan sýnir annars stigs fallið $p(t)=6{,}48t^2-80{,}3\ 1t+585{,}69$ ásamt gögnunum í töflunni hér á undan, þar sem $t=0$ samsvarar árinu 1963. Metið meðalfjölda skallaarna á ári á þessu 37 ára tímabili með því að reikna meðalgildi p á $[0,37]$.



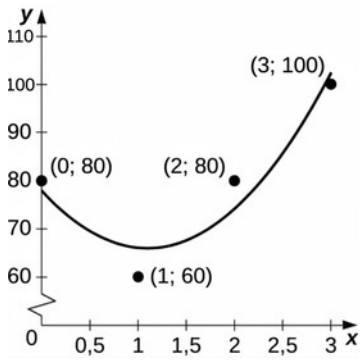
247. **[T]** Grafið hér að neðan sýnir þriðja stigs fallið $p(t)=0{,}07t^3+2{,}42t^2-25{,}63t+521{,}23$ ásamt gögnunum í töflunni hér á undan, þar sem $t=0$ samsvarar árinu 1963. Metið meðalfjölda skallaarna á ári á þessu 37 ára tímabili með því að reikna meðalgildi p á $[0,37]$.

1



248. **[T]** Gerum ráð fyrir að þið farið í bílferð og skráið hraðann á hálftíma fresti eins og sýnt er í eftirfarandi töflu. Besta annars stigs aðfellan að gögnunum er $q(t)=10x^2-22x+78$, sem sýnd er á meðfylgjandi grafi. Heildið q til að meta heildarvegalengdina sem ekin er á þessum 3 klukkustundum.

Tími (klst.)	**Hraði (km/klst.)**
0 (upphaf)	80
1	60
2	80
3	100



Þegar bíll eykur hraðann er hröðunin ekki jöfn heldur breytileg. Í eftirfarandi æfingum notið þið töfluna hér að neðan, sem sýnir hröðunina mælda á hverri sekúndu þegar ökumaður ekur inn á hraðbraut.

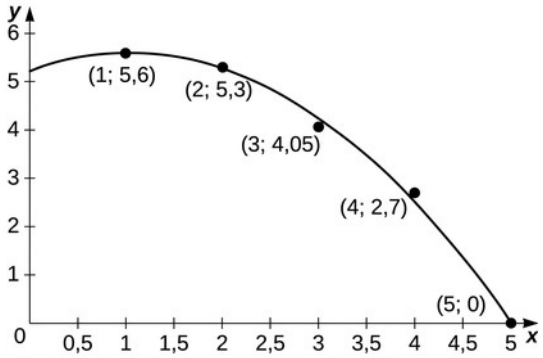
Tími (sek.)	**Hröðun (m/sek.^{2})**
1	5,6
2	5,3
3	4,05
4	2,7
5	0

Þegar bíll eykur hraðann er hröðunin ekki jöfn heldur breytileg. Í næstu þremur æfingum notið þið töfluna hér að neðan, sem sýnir hröðunina mælda á hverri sekúndu þegar ökumaður ekur inn á hraðbraut.

Tafla 1.12

Tími (sek.)	Hröðun (m/sek.^{2})
1	5,6
2	5,3
3	4,05
4	2,7
5	0

249. **[T]** Meðfylgjandi graf sýnir bestu annars stigs aðfelluna, $a(t) = -0{,}35t^2 + 0{,}72t + 5{,}22$, að gögnunum í töflunni á undan. Reiknið meðalgildi $a(t)$ til að meta meðalhröðunina á bilinu frá $t = 0$ til $t = 5$.



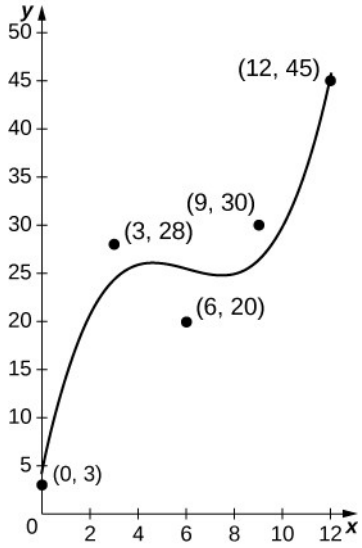
250. **[T]** Notið hröðunarjöfnuna úr æfingunni á undan til að finna samsvarandi hraðajöfnu. Gerið ráð fyrir að upphafshraðinn sé 15 m/sek. og finnið hraðann á tímanum $t = 0$.

251. **[T]** Notið hraðajöfnuna úr æfingunni á undan til að finna samsvarandi vegalengdarjöfnu og gerið ráð fyrir að upphafsvegalengdin sé 0 m. Hve langt ókuð þið meðan bíllinn jók hraðann? (Vísbending: Hraðinn er í m/sek. og tíminn í sekúndum.)

252. **[T]** Fjöldi hamborgara sem veitingastaður selur yfir daginn er sýndur í eftirfarandi töflu. Meðfylgjandi graf sýnir bestu þriðja stigs aðfelluna að gögnunum, $b(t) = 0{,}12t^3 - 2{,}13t^2 + 12{,}13t + 3{,}91$, þar sem $t = 0$ samsvarar kl. 9 að morgni og $t = 12$ kl. 9 að kvöldi. Reiknið meðalgildi $b(t)$ til að meta meðalfjölda seldra hamborgara á klukkustund.

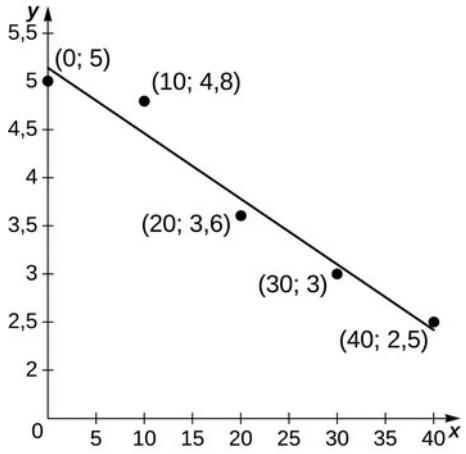
1

Klukkustundir eftir miðnætti	Fjöldi seldra hamborgara
9	3
12	28
15	20
18	30
21	45



253. **[T]** Íþróttakona hleypur fram hjá hreyfiskynjara sem skráir hraða hennar eins og sýnt er í eftirfarandi töflu. Besta línulega aðfellan að gögnunum, $\ell(t) = -0{,}068t + 5{,}14$, er sýnd á meðfylgjandi grafi. Notið meðalgildi $\ell(t)$ milli $t = 0$ og $t = 40$ til að meta meðalhraða hlaupakonunnar.

Mínútur	Hraði (m/sek.)
0	5
10	4,8
20	3,6
30	3,0
40	2,5



1.5 Innsetning

NÁMSMARKMIÐ

- 1.5.1 Notið innsetningu til að reikna óákveðin heildi.
- 1.5.2 Notið innsetningu til að reikna ákveðin heildi.

Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar gaf okkur aðferð til að reikna heildi án þess að nota Riemann-summur. Ókostur aðferðarinnar er þó sá að við verðum að geta fundið stofnfall, sem er ekki alltaf auðvelt. Í þessum undirkafla skoðum við aðferð sem nefnist heildun með innsetningu og auðveldar okkur að finna stofnföll. Nánar tiltekið nýtist aðferðin þegar heildisstofninn verður til við deildun með keðjureglunni.

Í fyrstu er ef til vill ekki augljóst hvernig nota á innsetningu. Þetta er þó fyrst og fremst sjónrænt verkefni: heildisstofninn sýnir hvað gera skal og við þurfum að þekkja form fallsins. Að hverju leitum við þá? Við leitum að heildisstofni af gerðinni $f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx$. Tökum sem dæmi heildið $\int\left(x^2-3\right)^3 2x\,dx$, þar sem $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2-3$, og $g'(x)=2x$. Þá er

$$f\left[g(x)\right]g'(x)=\left(x^2-3\right)^3(2x),$$

og heildisstofninn er því á réttu formi.

Aðferðin nefnist innsetning vegna þess að hluta heildisstofnsins er skipt út fyrir breytuna u og öðrum hluta hans fyrir du. Hún er einnig nefnd breytuskipti, enda skiptum við um breytu til að fá segð sem auðveldara er að nota heildunarreglurnar á.

SETNING 1.7

Innsetning í óákveðnum heildum

Látum $u=g(x)$, þar sem $g'(x)$ er samfellt á bili, látum $f(x)$ vera samfellt á samsvarandi myndmengi fallsins g og látum $F(x)$ vera stofnfall $f(x)$. Þá gildir

$$\begin{aligned}\int f[g(x)]g'(x)dx &= \int f(u)du \\ &= F(u)+C \\ &= F(g(x))+C.\end{aligned}$$

1

(1.19)

Sönnun

Látum f, g, u og F vera eins og tilgreint er í setningunni. Þá er

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f[g(x)]g'(x).\end{aligned}$$

Með því að heilda báðar hliðar með tilliti til x fæst

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)\,dx = F\left(g(x)\right)+C.$$

Ef við setjum nú inn $u=g(x)$, og $du=g'(x)\,dx$, fæst

$$\begin{aligned}\int f[g(x)]g'(x)dx &= \int f(u)du \\ &= F(u)+C \\ &= F(g(x))+C.\end{aligned}$$

□

Snúum aftur að verkefninu sem við skoðuðum í upphafi. Látum $u=x^2-3$ og þá er $du=2x\,dx$. Umritum heildið með tilliti til u:

$$\int \underbrace{\left(x^2-3\right)}_{u}^{3}\underbrace{\left(2x\,dx\right)}_{du} = \int u^3\,du.$$

Samkvæmt veldisreglunni fyrir heildi fæst

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4}+C.$$

Setjum upphaflegu segðina, sem rituð er með x, aftur inn í lausnina:

$$\frac{u^4}{4}+C = \frac{\left(x^2-3\right)^4}{4}+C.$$

Við getum lýst aðferðinni almennt í lausnarleiðinni hér á eftir.

LAUSNARLEIÐ

Heildun með innsetningu

1. Skoðið heildisstofninn vandlega og veljið segð $g(x)$ í honum sem setja á jafnt og u. Veljið $g(x)$ þannig að $g'(x)$ sé einnig hluti af heildisstofninum.

2. Setjið $u=g(x)$ og $du=g'(x)dx$ inn í heildið.
3. Nú ætti að vera hægt að reikna heildið með tilliti til u. Ef það tekst ekki þarf að fara til baka og velja aðra segð fyrir u.
4. Reiknið heildið með tilliti til u.
5. Skrifið niðurstöðuna með breytunni x og segðinni $g(x)$.

DÆMI 1.30

Innsetning notuð til að finna stofnfall

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int 6x\left(3x^2+4\right)^4 dx$.

Lausn

Fyrsta skrefið er að velja segð fyrir u. Við veljum $u=3x^2+4$ því þá er $du=6x\,dx$, og du er þegar í heildisstofninum. Skrifum heildið með tilliti til u:

$$\int 6x\left(3x^2+4\right)^4 dx=\int u^4 du.$$

Munið að du er afleiða segðarinnar sem valin er fyrir u, óháð því hvað annað er í heildisstofninum. Nú getum við reiknað heildið með tilliti til u:

$$\begin{aligned}\int u^4 du &= \tfrac{u^5}{5}+C \\ &= \tfrac{\left(3x^2+4\right)^5}{5}+C.\end{aligned}$$

Greining

Við getum sannreynt svarið með því að deilda niðurstöðuna. Þá ættum við að fá heildisstofninn. Veljum 1 sem gildi fyrir C og látum $y=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^5+1$. Þá fæst

$$y=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^5+1,$$

því

$$\begin{aligned}y' &= \left(\tfrac{1}{5}\right)5\left(3x^2+4\right)^4 6x \\ &= 6x\left(3x^2+4\right)^4.\end{aligned}$$

Þetta er nákvæmlega segðin sem var í heildisstofninum í upphafi.

STÖÐUMAT 1.25

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int 3x^2\left(x^3-3\right)^2 dx$.

Stundum þarf að laga fastana í heildinu þegar þeir samsvara ekki nákvæmlega segðunum sem settar eru inn.

1

DÆMI 1.31

Innsetning með aðlögun

Notið innsetningu til að finna $\int z\sqrt{z^2-5}\,dz$.

Lausn

Umritum heildið sem $\int z\left(z^2-5\right)^{1/2}dz$. Látum $u=z^2-5$ og $du=2z\,dz$. Nú kemur upp vandi því $du=2z\,dz$ en í upphaflegu segðinni er aðeins $z\,dz$. Við verðum að breyta segðinni fyrir du, annars verður heildið með tilliti til u tvöfalt stærra en það á að vera. Við leysum vandann með því að margfalda báðar hliðar jöfnunnar fyrir du með $\frac{1}{2}$. Þá fæst

$$\begin{aligned} u &= z^2-5 \\ du &= 2z\,dz \\ \tfrac{1}{2}du &= \tfrac{1}{2}(2z)dz = z\,dz. \end{aligned}$$

Skrifum heildið með tilliti til u en tökum $\frac{1}{2}$ út fyrir heildistáknið:

$$\int z\left(z^2-5\right)^{1/2}dz = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du.$$

Heildum segðina með tilliti til u:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}du &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)u^{3/2}+C \\ &= \tfrac{1}{3}u^{3/2}+C \\ &= \tfrac{1}{3}\left(z^2-5\right)^{3/2}+C. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.26

Notið innsetningu til að finna $\int x^2\left(x^3+5\right)^9dx$.

DÆMI 1.32

Innsetning í heildum hornafalla

Notið innsetningu til að reikna heildið $\int\frac{\sin t}{\cos^3 t}dt$.

Lausn

Við vitum að afleiða $\cos t$ er $-\sin t$, og því setjum við $u=\cos t$. Þá er $du=-\sin t\,dt$. Með innsetningu í heildið fæst

$$\int \frac{\sin t}{\cos^3 t}\,dt=-\int \frac{du}{u^3}.$$

Þegar heildið er reiknað fæst

$$\begin{aligned}-\int \frac{du}{u^3} &= -\int u^{-3}du \\ &= -\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-2}+C.\end{aligned}$$

Þegar svarið er aftur sett fram með tilliti til t fæst

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt &= \tfrac{1}{2u^2}+C \\ &= \tfrac{1}{2\cos^2 t}+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.27

Notið innsetningu til að reikna heildið $\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt$.

Stundum þarf að umrita heildi á flóknari hátt en með því einu að margfalda eða deila með fasta. Fjarlægja þarf allar segðir í heildisstofninum sem eru settar fram með upphaflegu breytunni. Að því loknu á u að vera eina breytan í heildisstofninum. Í sumum tilvikum þarf því að einangra upphaflegu breytuna og rita hana með u. Næsta dæmi skýrir þessa aðferð.

DÆMI 1.33

Stofnfall fundið með u-innsetningu

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Lausn

Ef við látum $u=x-1$, þá er $du=dx$. Þá er þó ekki tekið tillit til x í teljara heildisstofnsins. Við þurfum að rita x með u. Ef $u=x-1$, þá er $x=u+1$. Nú getum við umritað heildið með tilliti til u:

1

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx &= \int \frac{u+1}{\sqrt{u}}du \\ &= \int \sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}du \\ &= \int \left(u^{1/2}+u^{-1/2}\right)du.\end{aligned}$$

Síðan heildum við á venjulegan hátt, setjum upphaflegu segðina í stað u og þáttum og einföldum niðurstöðuna. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int \left(u^{1/2}+u^{-1/2}\right)du &= \tfrac{2}{3}u^{3/2}+2u^{1/2}+C \\ &= \tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2}+2(x-1)^{1/2}+C \\ &= (x-1)^{1/2}\left[\tfrac{2}{3}(x-1)+2\right]+C \\ &= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{2}{3}+\tfrac{6}{3}\right)+C \\ &= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{4}{3}\right)+C \\ &= \tfrac{2}{3}(x-1)^{1/2}(x+2)+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.28

Notið innsetningu til að reikna óákveðna heildið $\int \cos^3 t \sin t \, dt$.

Innsetning í ákveðnum heildum

Einnig má nota innsetningu í ákveðnum heildum. Þegar ákveðið heildi er reiknað með innsetningu þarf þó að breyta heildismörkunum. Ef skipt er um breytu í heildisstofninum breytast heildismörkin jafnframt.

SETNING 1.8

Innsetning í ákveðnum heildum

Látum $u=g(x)$ og látum g' vera samfellt á bilinu $[a,b]$, og látum f vera samfellt á myndmengi $u=g(x)$. Þá gildir

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Við sönnum setninguna ekki formlega en rökstyðjum hana hér með nokkrum útreikningum. Ef $F(x)$ er stofnfall $f(x)$, fæst samkvæmt innsetningarreglunni fyrir óákveðin heildi

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C.$$

Þá er

$$\begin{aligned}\int_a^b f\left[g\left(x\right)\right]g'(x)dx &= F\left(g\left(x\right)\right)\big|_{x=a}^{x=b}\\ &= F\left(g\left(b\right)\right) - F\left(g\left(a\right)\right)\\ &= F\left(u\right)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}\\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,\end{aligned}$$

(1.20)

og þar með fæst niðurstaðan sem sýna átti.

DÆMI 1.34

Ákveðið heildi reiknað með innsetningu

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^1 x^2\left(1+2\,x^3\right)^5 d\,x$.

Lausn

Látum $u=1+2\,x^3$, þannig að $d\,u=6\,x^2\,d\,x$. Þar sem upphaflegi heildisstofninn inniheldur þáttinn x² og $d\,u=6\,x^2\,d\,x$, margföldum við báðar hliðar jöfnunnar fyrir du með $1/6$. Þá fæst

$$\begin{aligned}du &= 6x^2dx\\ \tfrac{1}{6}du &= x^2dx.\end{aligned}$$

Til að laga heildismörkin athugum við að þegar $x=0, u=1+2\left(0\right)=1$, og þegar $x=1, u=1+2\left(1\right)=3$. Þá er

$$\int_0^1 x^2\left(1+2\,x^3\right)^5 d\,x=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5\,d\,u.$$

Þegar segðin er reiknuð fæst

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{6}\int_1^3 u^5du &= \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{u^6}{6}\right)\Big|_1^3\\ &= \tfrac{1}{36}\left[(3)^6-(1)^6\right]\\ &= \tfrac{182}{9}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.29

Notið innsetningu til að reikna ákveðna heildið $\int_{-1}^0 y\left(2\,y^2-3\right)^5 d\,y$.

DÆMI 1.35

Innsetning notuð með vísisfalli

1

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^1 x\,e^{4x^2+3}\,dx$.

Lausn

Látum $u=4x^2+3$. Þá er $du=8x\,dx$. Til að laga heildismörkin athugum við að þegar $x=0, u=3$, og þegar $x=1, u=7$. Innsetningin gefur því

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,e^{4x^2+3}\,dx &= \frac{1}{8}\int_3^7 e^u\,du \\ &= \frac{1}{8}e^u\Big|_3^7 \\ &= \frac{e^7-e^3}{8} \\ &\approx 134{,}568.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.30

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right)dx$.

Stundum er innsetning aðeins ein af nokkrum aðferðum sem þarf til að reikna ákveðið heildi. Allir eiginleikar og allar reglur heildunar gilda eftir sem áður og stundum þarf að umrita hornaföll með hornafallasamsemd áður en hægt er að beita innsetningu. Einnig má setja upphaflegu segðina aftur í stað u eftir að stofnfallið hefur verið fundið og þá þarf ekki að breyta heildismörkunum. Þessar tvær leiðir eru sýndar í dæmi 1.36.

DÆMI 1.36

Hornafallsheildi reiknað með innsetningu

Notið innsetningu til að reikna $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$.

Lausn

Notum fyrst hornafallasamsemd til að umrita heildið. Með samsemdinni $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ má umrita heildið sem

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta.$$

Þá er

$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d\theta.$$

Fyrra heildið má reikna eins og það stendur en nota þarf innsetningu til að reikna það síðara. Látum $u=2\theta$. Þá er $du=2\,d\theta$, eða $\frac{1}{2}du=d\theta$. Auk þess gildir að þegar $\theta=0, u=0$, og þegar $\theta=\pi/2, u=\pi$. Ef síðara heildið er ritað með u fæst

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\theta d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\cos u du$$

$$= \tfrac{\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \tfrac{1}{4}\sin u\Big|_{u=0}^{u=\pi}$$

$$= \left(\tfrac{\pi}{4}-0\right)+(0-0) = \tfrac{\pi}{4}.$$

Æfingar í undirkafla 1.5

254. Hvers vegna er u-innsetning einnig nefnd breytuskipti?

255. 2. Ef $f=g\circ h$, þegar keðjureglunni er beitt öfugt, $\frac{d}{dx}(g\circ h)(x)=g'(h(x))h'(x)$, ættuð þið að velja $u=g(x)$ eða $u=h(x)$?

Sannreynið hverja samsemd í eftirfarandi æfingum með deildun. Notið síðan tilgreinda u-innsetningu og ákvarðið f þannig að heildið verði á forminu $\int f(u)\,du$.

256.

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx=\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2)+C;\ u=x+1$$

257. Fyrir

$$x>1:\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx=\frac{2}{15}\sqrt{x-1}\left(3x^2+4x+8\right)+C;\ u=x-1$$

258.

$$\int x\sqrt{4x^2+9}\,dx=\frac{1}{12}\left(4x^2+9\right)^{3/2}+C;\ u=4x^2+9$$

259.

$$\int\frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}dx=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9}+C;\ u=4x^2+9$$

260.

$$\int \frac{x}{\left(4x^2+9\right)^2}dx=-\frac{1}{8\left(4x^2+9\right)};u=4x^2+9$$

1

Finnið stofnfallið í eftirfarandi æfingum með tilgreindri innsetningu.

261.

$$\int \left(x+1\right)^4 dx;u=x+1$$

262.

$$\int \left(x-1\right)^5 dx;u=x-1$$

263.

$$\int \left(2x-3\right)^{-7} dx;u=2x-3$$

264.

$$\int \left(3x-2\right)^{-11} dx;u=3x-2$$

265.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx;u=x^2+1$$

266.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx;u=1-x^2$$

267.

$$\int \left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)^3 dx;u=x^2-2x$$

268.

$$\int \left(x^2-2x\right)\left(x^3-3x^2\right)^2 dx;u=x^3-3x^2$$

269.

$$\int \cos^3\theta\, d\theta;u=\sin\theta\ (\textit{Vísbending}:\cos^2\theta=1-\sin^2\theta)$$

270.

$$\int \sin^3\theta\, d\theta;u=\cos\theta\ (\textit{Vísbending}:\sin^2\theta=1-\cos^2\theta)$$

Notið viðeigandi breytuskipti í eftirfarandi æfingum til að reikna óákveðna heildið.

271.

$$\int x\left(1-x\right)^{99} dx$$

272.

$$\int t\left(1-t^2\right)^{10} d\,t$$

273.

$$\int \left(11\,x-7\right)^{-3} d\,x$$

274.

$$\int \left(7\,x-11\right)^{4} d\,x$$

275.

$$\int \cos^3\theta \sin\theta \, d\,\theta$$

276.

$$\int \sin^7\theta \cos\theta \, d\,\theta$$

277.

$$\int \cos^2\left(\pi\,t\right)\sin\left(\pi\,t\right) d\,t$$

278.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, d\,x \ \left(\textit{Vísbending}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1\right)$$

279.

$$\int t \sin\left(t^2\right)\cos\left(t^2\right) d\,t$$

280.

$$\int t^2 \cos^2\left(t^3\right)\sin\left(t^3\right) d\,t$$

281.

$$\int \frac{x^2}{\left(x^3-3\right)^2} d\,x$$

282.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} d\,x$$

283.

$$\int \frac{y^5}{\left(1-y^3\right)^{3/2}} d\,y$$

284.

$$\int \cos\theta\left(1-\cos\theta\right)^{99}\sin\theta\,d\theta$$

285.

$$\int\left(1-\cos^3\theta\right)^{10}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$$

286.

$$\int\left(\cos\theta-1\right)\left(\cos^2\theta-2\cos\theta\right)^3\sin\theta\,d\theta$$

287.

$$\int\left(\sin^2\theta-2\sin\theta\right)\left(\sin^3\theta-3\sin^2\theta\right)^3\cos\theta\,d\theta$$

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að áætla flatarmálið undir ferlinum með vinstri Riemann-summu með 50 liðum. Notið síðan innsetningu til að finna nákvæmt svar.

288. **[T]** $y=3\left(1-x\right)^2$ á bilinu $\left[0,2\right]$

289. **[T]** $y=x\left(1-x^2\right)^3$ á bilinu $\left[-1,2\right]$

290. **[T]** $y=\sin x\left(1-\cos x\right)^2$ á bilinu $\left[0,\pi\right]$

291. **[T]** $y=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ á bilinu $\left[-1,1\right]$

Notið breytuskipti í eftirfarandi æfingum til að reikna ákveðna heildið.

292.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

293.

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

294.

$$\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{5+t^2}}\,dt$$

295.

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$$

296.

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \tan\theta \, d\theta$$

297.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta} d\theta$$

Reiknið í eftirfarandi æfingum óákveðna heildið $\int f(x)\,dx$ þar sem fastinn er $C=0$ og notið u-innsetningu. Teiknið síðan gröf fallsins og stofnfallsins á tilgreinda bilinu. Áætlið, ef hægt er, hvaða gildi C þarf að bæta við stofnfallið svo að það verði jafnt ákveðna heildinu $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, þar sem a er vinstri endapunktur gefna bilsins.

298. **[T]** $\int (2x+1)e^{x^2+x-6}\,dx$ á bilinu $[-3,2]$

299. **[T]** $\int \frac{\cos(\ln(2x))}{x}\,dx$ á bilinu $[0,2]$

300. **[T]** $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x+4}}\,dx$ á bilinu $[-1,2]$

301. **[T]** $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$ á bilinu $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$

302. **[T]** $\int (x+2)e^{-x^2-4x+3}\,dx$ á bilinu $[-5,1]$

303. **[T]** $\int 3x^2\sqrt{2x^3+1}\,dx$ á bilinu $[0,1]$

304. Ef $h(a)=h(b)$ í $\int_a^b g'(h(x))h'(x)\,dx$, hvað má þá segja um gildi heildisins?

305. Er innsetningin $u=1-x^2$ í ákveðna heildinu $\int_0^2 \frac{x}{1-x^2}\,dx$ gild? Ef ekki, hvers vegna?

Notið breytuskipti í eftirfarandi æfingum til að sýna að hvert ákveðið heildi sé núll.

306.

$$\int_0^{\pi} \cos^2(2\theta)\sin(2\theta)\,d\theta$$

307.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos(t^2)\sin(t^2)\,dt$$

1

308.

$$\int_0^1 (1-2t)\,dt$$

309.

$$\int_0^1 \frac{1-2t}{\left(1+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)}\,dt$$

310.

$$\int_0^{\pi} \sin\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$$

311.

$$\int_0^2 (1-t)\cos(\pi t)\,dt$$

312.

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 t\cos t\,dt$$

313. Sýnið að meðalgildi $f(x)$ á bilinu $[a,b]$ sé jafnt meðalgildi $f(cx)$ á bilinu $\left[\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right]$ þegar $c>0$.

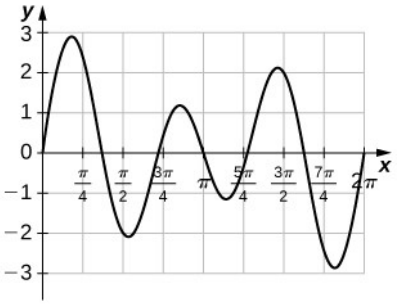
314. Finnið flatarmálið undir grafi $f(t)=\frac{t}{(1+t^2)^a}$ milli $t=0$ og $t=x$ þar sem a er fasti sem uppfyllir $a>0$ og $a\neq 1$. Reiknið síðan markgildið þegar $x\to\infty$.

315. Finnið flatarmálið undir grafi $g(t)=\frac{t}{(1-t^2)^a}$ milli $t=0$ og $t=x$, þar sem $0<x<1$ og a er fasti sem uppfyllir $a>0$. Reiknið markgildið þegar $x\to 1$.

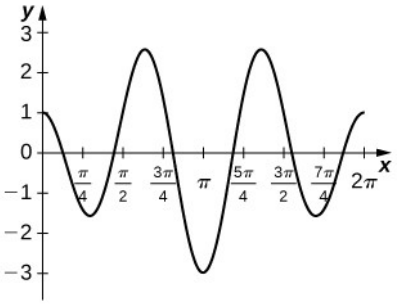
316. Flatarmál hálfhrings með geisla 1 má rita sem $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$. Notið innsetninguna $x=\cos t$ til að rita flatarmál hálfhrings sem heildi hornafalls. Ekki þarf að reikna heildið.

317. Langás sporbaugs er x-ásinn frá $x=-a$ til $x=a$ og skammás hans er y-ásinn frá $y=-b$ til $y=b$. Flatarmál efri helmings sporbaugsins má rita sem $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$. Notið innsetninguna $x=a\cos t$ til að rita flatarmálið sem heildi hornafalls. Ekki þarf að reikna heildið.

318. [T] Eftirfarandi graf sýnir fall af gerðinni $f(t)=a\sin(nt)+b\sin(mt)$. Áætlið stuðlana a og b og tíðnistikana n og m. Notið áætluðu gildin til að nálga $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$.



319. [T] Eftirfarandi graf sýnir fall af gerðinni $f(x)=a\cos(nt)+b\cos(mt)$. Áætlið stuðlana a og b og tíðnistikana n og m. Notið áætluðu gildin til að nálga $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$.



1.6 Heildi með vísis- og lograföllum

NÁMSMARKMIÐ

- 1.6.1 Heilda föll sem innihalda vísisföll.
- 1.6.2 Heilda föll sem innihalda lograföll.

Vísis- og lograföll eru meðal annars notuð til að lýsa fólksfjölgun, frumuvexti og fjárhagslegum vexti, svo og afskriftum, geislavirkri hrörnun og auðlindanotkun. Í þessum undirkafla skoðum við heildun falla sem innihalda vísis- og lograföll.

Heildi vísisfalla

Vísisfallið er ef til vill það fall sem þægilegast er að vinna með í stærðfræðigreiningu. Vísisfallið $y=e^x$, er sín eigin afleiða og sitt eigið heildi.

REGLA: HEILDI VÍSISFALLA

Vísisföll má heilda með formúlunum hér á eftir.

1

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + C \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C\end{aligned}$$

(1.21)

DÆMI 1.37

Stofnfall vísisfalls fundið

Finnið stofnfall vísisfallsins e^{-x}.

Lausn

Notið innsetningu og látið $u = -x$, og síðan $du = -1\,dx$. Margfaldið jöfnuna fyrir du með -1 svo að $-du = dx$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int e^{-x} dx &= -\int e^u du \\ &= -e^u + C \\ &= -e^{-x} + C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.31

Finnið stofnfall fallsins með innsetningu: $x^2 e^{-2x^3}$.

Algeng mistök þegar unnið er með vísissegðir eru að fara með veldisvísi e eins og veldisvísa í margliðusegðum. Ekki má nota veldisregluna á veldisvísi e. Þetta getur valdið sérstökum ruglingi þegar sama segð inniheldur bæði vísisfall og margliðu, eins og í stöðumatinu hér á undan. Í slíkum tilvikum ættum við alltaf að ganga úr skugga um að við notum réttar reglur á föllin sem við heildum.

DÆMI 1.38

Kvaðratrót vísisfalls

Finnið stofnfall vísisfallsins $e^x\sqrt{1+e^x}$.

Lausn

Umritum dæmið fyrst með ræðum veldisvísi:

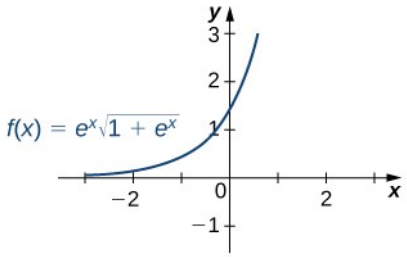
$$\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx = \int e^x \left(1+e^x\right)^{1/2} dx.$$

Notum innsetningu og veljum $u = 1+e^x$. Þá er $du = e^x\,dx$. Við fáum (mynd 1.37)

$$\int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2}dx=\int u^{1/2}du.$$

Þá fæst

$$\int u^{1/2}du=\frac{u^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}u^{3/2}+C=\frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{3/2}+C.$$



Mynd 1.37 Grafið sýnir margfeldi vísisfalls og kvaðratrótar vísisfalls.

STÖÐUMAT 1.32

Finnið stofnfall $e^x\left(3e^x-2\right)^2$.

DÆMI 1.39

Innsetning með vísisfalli

Notið innsetningu til að reikna óákveðna heildið $\int 3x^2e^{2x^3}dx$.

Lausn

Hér látum við u vera segðina í veldisvísi e. Látum $u=2x^3$ og $du=6x^2dx$.. Enn vantar fastan margföldunarþátt í du: upphaflega fallið inniheldur þáttinn 3x² en ekki 6x². Margföldum báðar hliðar jöfnunnar með $\frac{1}{2}$ svo að heildisstofninn með tilliti til u verði jafn heildisstofninum með tilliti til x. Þá fæst

$$\int 3x^2e^{2x^3}dx=\frac{1}{2}\int e^u du.$$

Heildið segðina með tilliti til u og setjið síðan upphaflegu segðina í x aftur í stað u:

$$\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{2x^3}+C.$$

STÖÐUMAT 1.33

Reiknið óákveðna heildið $\int 2x^3e^{x^4}dx$.

1

Eins og fram kom í upphafi þessa undirkafla eru vísisföll notuð við margs konar hagnýt viðfangsefni. Talan e tengist oft samsettum eða sífellt hraðari vexti, eins og við höfum séð í fyrri undirköflum um afleiður. Afleiða táknar breytingar- eða vaxtarhraða en heildi táknar heildarbreytingu eða heildarvöxt. Skoðum dæmi þar sem við leysum algengt viðfangsefni úr viðskiptalífinu með því að heilda vísisfall.

Verð–eftirspurnarfall lýsir sambandi eftirspurðs magns vöru og verðs hennar. Almennt lækkar verðið þegar eftirspurt magn eykst. Jaðarverð–eftirspurnarfallið er afleiða verð–eftirspurnarfallsins og sýnir hve hratt verðið breytist við tiltekið framleiðslustig. Slík föll eru notuð í viðskiptum til að ákvarða verðteygni eftirspurnar og meta hvort breyting á framleiðslustigi yrði arðbær.

DÆMI 1.40

Verð–eftirspurnarjafna fundin

Finnið verð–eftirspurnarjöfnuna fyrir tiltekna tannkremstegund hjá stórmarkaðskeðju þegar eftirspurnin er 50 túpur á viku við verðið $2,35 á túpu. Jaðarverð–eftirspurnarfallið $p'(x)$, fyrir x túpur á viku, er gefið með

$$p'(x) = -0{,}015\, e^{-0{,}01x}.$$

Hvaða verð ætti stórmarkaðskeðjan að setja ef hún selur 100 túpur á viku?

Lausn

Heildum jaðarverð–eftirspurnarfallið til að finna verð–eftirspurnarjöfnuna. Finnum fyrst stofnfallið og notum síðan gefnu upplýsingarnar. Þá fæst

$$\begin{aligned} p(x) &= \int -0{,}015\, e^{-0{,}01x}\, dx \\ &= -0{,}015 \int e^{-0{,}01x}\, dx. \end{aligned}$$

Using substitution, let $u = -0{,}01x$ and $du = -0{,}01\, dx$. Then, divide both sides of the du equation by –0,01. This gives

$$\begin{aligned} \frac{-0{,}015}{-0{,}01} \int e^u\, du &= 1{,}5 \int e^u\, du \\ &= 1{,}5\, e^u + C \\ &= 1{,}5\, e^{-0{,}01x} + C. \end{aligned}$$

Næsta skref er að einangra C. Við vitum að þegar verðið er 2,35 € á túpu er eftirspurnin 50 túpur á viku. Það merkir að

$$\begin{aligned} p(50) &= 1{,}5\, e^{-0{,}01(50)} + C \\ &= 2{,}35. \end{aligned}$$

Nú er aðeins eftir að finna C:

$$\begin{aligned} C &= 2{,}35 - 1{,}5\,e^{-0{,}5} \\ &= 2{,}35 - 0{,}91 \\ &= 1{,}44. \end{aligned}$$

Því fæst

$$p(x) = 1{,}5\,e^{-0{,}01x} + 1{,}44.$$

Ef stórmarkaðurinn selur 100 tannkremstúpur á viku verður verðið

$$p(100) = 1{,}5\,e^{-0{,}01(100)} + 1{,}44 = 1{,}5\,e^{-1} + 1{,}44 \approx 1{,}99.$$

Stórmarkaðurinn ætti að taka 1,99 € fyrir hverja túpu ef hann selur 100 túpur á viku.

DÆMI 1.41

Ákveðið heildi með vísisfalli reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_1^2 e^{1-x}\,dx$.

Lausn

Notum aftur innsetningu. Látum $u = 1 - x$, þannig að $du = -1\,dx$ eða $-du = dx$. Þá er $\int e^{1-x}\,dx = -\int e^u\,du$. Breytum næst heildismörkunum. Samkvæmt jöfnunni $u = 1 - x$, er

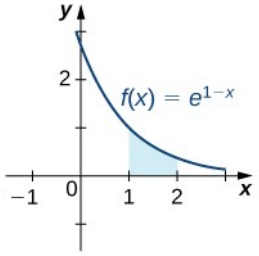
$$\begin{aligned} u &= 1 - (1) = 0 \\ u &= 1 - (2) = -1. \end{aligned}$$

Heildið verður þá

$$\begin{aligned} \int_1^2 e^{1-x}dx &= -\int_0^{-1} e^u du \\ &= \int_{-1}^{0} e^u du \\ &= e^u\big|_{-1}^{0} \\ &= e^0 - \left(e^{-1}\right) \\ &= -e^{-1} + 1. \end{aligned}$$

Sjá mynd 1.38.

1



Mynd 1.38 Reikna má sýnda flatarmálið með ákveðnu heildi og innsetningu.

STÖÐUMAT 1.34

Reiknið $\int_0^2 e^{2x}\,dx$.

DÆMI 1.42

Vöxtur bakteríuræktar

Gerum ráð fyrir að vaxtarhraði baktería í petrískál sé $q(t)=3^t$, þar sem t er mælt í klukkustundum og $q(t)$ í þúsundum baktería á klukkustund. Í upphafi eru 10.000 bakteríur í ræktuninni. Finnið fallið $Q(t)$ sem gefur fjölda baktería í petrískálinni á hverjum tíma t. Hve margar bakteríur eru í skálinni eftir 2 klukkustundir?

Lausn

Við höfum

$$Q(t)=\int 3^t\,dt=\frac{3^t}{\ln 3}+C.$$

Þegar $t=0$ er $Q(0)=10=\frac{1}{\ln 3}+C$, og því $C\approx 9{,}090$. Þá fæst

$$Q(t)=\frac{3^t}{\ln\ 3}+9{,}090.$$

Þegar $t=2$, er

$$Q(2)=\frac{3^2}{\ln\ 3}+9{,}090$$

$$=17{,}282.$$

Eftir 2 klukkustundir eru 17.282 bakteríur í skálinni.

STÖÐUMAT 1.35

Lítum aftur á dæmi 1.42 og gerum ráð fyrir að bakteríunum fjölgi með hraðanum $q(t)=2^t$. Sem fyrr eru 10.000 bakteríur í ræktuninni í upphafi. Finnið $Q(t)$. Hve margar bakteríur eru í skálinni eftir 3 klukkustundir?

DÆMI 1.43

Stofnvöxtur ávaxtaflugna

Gerum ráð fyrir að stofn ávaxtaflugna vaxi með hraðanum $g(t)=2e^{0,02t}$, mældum í flugum á dag. Í upphafi eru 100 flugur í stofninum. Hve margar flugur verða í honum eftir 10 daga?

Lausn

Látum $G(t)$ tákna fjölda flugna í stofninum á tímanum t. Með setningunni um heildarbreytingu fæst

$$\begin{aligned} G(10) &= G(0)+\int_0^{10} 2e^{0,02t}\,dt \\ &= 100+\left[\frac{2}{0,02}e^{0,02t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100+\left[100e^{0,02t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100+100e^{0,2}-100 \\ &\approx 122. \end{aligned}$$

Í stofninum eru 122 flugur eftir 10 daga.

STÖÐUMAT 1.36

Gerum ráð fyrir að vaxtarhraði flugnastofnsins sé $g(t)=e^{0,01t}$, og að 100 flugur séu í stofninum í upphafi. Hve margar flugur eru í stofninum eftir 15 daga?

DÆMI 1.44

Ákveðið heildi reiknað með innsetningu

Reiknið ákveðna heildið með innsetningu: $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$.

Lausn

Við þurfum að umrita dæmið aðeins svo að auðveldara sé að nota eiginleikana. Fyrst ritum við veldisvísi e sem veldi af x og færum síðan x^2 úr nefnaranum upp í teljarann með neikvæðum veldisvísi. Þá fæst

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \int_1^2 e^{x^{-1}} x^{-2}\,dx.$$

1

Látum $u = x^{-1}$,, sem er veldisvísir e. Þá fæst

$$\begin{aligned} du &= -x^{-2}dx \\ -du &= x^{-2}dx. \end{aligned}$$

Ef við tökum mínusmerkið út fyrir heildistáknið verður dæmið

$$-\int e^u\,du.$$

Næst breytum við heildismörkunum:

$$\begin{aligned} u &= (1)^{-1} = 1 \\ u &= (2)^{-1} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Takið eftir að neðra heildismarkið er nú stærra en það efra. Því þurfum við að margfalda með -1 og víxla heildismörkunum. Þá fæst

$$\begin{aligned} -\int_1^{1/2} e^u du &= \int_{1/2}^1 e^u du \\ &= e^u|_{1/2}^1 \\ &= e - e^{1/2} \\ &= e - \sqrt{e}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.37

Reiknið ákveðna heildið með innsetningu: $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{4x^{-2}}\,dx$.

Heildi sem innihalda lograföll

Heildun falls af gerðinni $f(x) = x^{-1}$ gefur náttúrlega logrann af tölugildi breytunnar, eins og eftirfarandi regla sýnir. Reglan inniheldur einnig heildunarformúlur fyrir önnur lograföll, svo sem $f(x) = \ln x$ og $f(x) = \log_a x$,

---

REGLA: HEILDUNARFORMÚLUR FYRIR LOGRAFÖLL

Heildi sem innihalda lograföll má reikna með formúlunum hér á eftir.

$$\begin{aligned}\int x^{-1}dx &= \ln|x| + C \\ \int \ln x\,dx &= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \\ \int \log_a x\,dx &= \tfrac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C\end{aligned}$$

(1.22)

DÆMI 1.45

Að finna stofnfall sem inniheldur $\ln x$

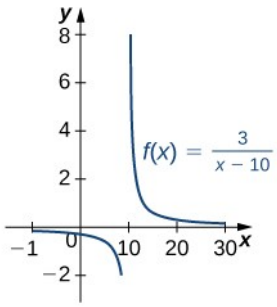
Finnið stofnfall fallsins $\dfrac{3}{x-10}$.

Lausn

Takið fyrst stuðulinn 3 út fyrir heildistáknið. Notið síðan u^{-1}-regluna. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x-10}dx &= 3\int \frac{1}{x-10}dx \\ &= 3\int \frac{du}{u} \\ &= 3\ln|u| + C \\ &= 3\ln|x-10| + C, x \neq 10.\end{aligned}$$

Sjá mynd 1.39.



Mynd 1.39 Skilgreiningarmengi þessa falls er $x \neq 10$.

STÖÐUMAT 1.38

Finnið stofnfall $\dfrac{1}{x+2}$.

DÆMI 1.46

Stofnfall ræðs falls fundið

1

Finnið stofnfall $\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2}$.

Lausn

Umrita má heildið sem $\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1} dx$. Notum innsetningu og látum $u=x^4+3x^2$, þá er $du=4x^3+6x$. Breytum du með því að taka 2 út fyrir sviga. Þá fæst

$$\begin{aligned} du &= \left(4x^3+6x\right)dx \\ &= 2\left(2x^3+3x\right)dx \\ \tfrac{1}{2}\,du &= \left(2x^3+3x\right)dx. \end{aligned}$$

Umritum heildisstofninn sem fall af u:

$$\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1} dx = \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du.$$

Þá fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int u^{-1}du &= \tfrac{1}{2}\ln|u|+C \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left|x^4+3x^2\right|+C. \end{aligned}$$

DÆMI 1.47

Stofnfall lografalls fundið

Finnið stofnfall lografallsins $\log_2 x$.

Lausn

Notum formúluna úr reglunni um heildunarformúlur fyrir lograföll. Þá fæst

$$\int \log_2 x\,dx = \frac{x}{\ln 2}\left(\ln x-1\right)+C.$$

STÖÐUMAT 1.39

Finnið stofnfall $\log_3 x$.

Dæmi 1.48 fjallar um ákveðið heildi hornafalls. Þegar unnið er með hornaföll þurfum við oft að nota eiginleika hornafalla eða hornafallasamsemd áður en við getum haldið áfram. Yfirleitt gengur heildunin greiðlega ef við komum heildisstofninum á rétt form.

DÆMI 1.48

Ákveðið heildi reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x}\, dx$.

Lausn

Við þurfum innsetningu til að reikna heildið. Látum $u=1+\cos x$, , þannig að $du=-\sin x\, dx$. Umritum heildið sem fall af u og breytum jafnframt heildismörkunum. Þá fæst

$$u = 1+\cos(0) = 2$$
$$u = 1+\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x} &= -\int_2^1 u^{-1}du \\ &= \int_1^2 u^{-1}du \\ &= \ln|u||_1^2 \\ &= [\ln 2-\ln 1] \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Æfingar í undirkafla 1.6

Reiknið hvert óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum.

320.

$$\int e^{2x}\, dx$$

321.

$$\int e^{-3x}\, dx$$

322.

$$\int 2^{x}\, dx$$

323.

$$\int 3^{-x}\, dx$$

324.

$$\int \frac{1}{2x}\, dx$$

325.

$$\int \frac{2}{x}\,dx$$

326.

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

327.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Finnið hvert óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningu.

328.

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

329.

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

330.

$$\int \frac{dx}{x\ln x}\,(x>1)$$

331.

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$$

332.

$$\int \tan\theta\,d\theta$$

333.

$$\int \frac{\cos x - x\sin x}{x\cos x}\,dx$$

334.

$$\int \frac{\ln(\sin x)}{\tan x}\,dx$$

335.

$$\int \ln(\cos x)\tan x\,dx$$

336.

$$\int x e^{-x^2} dx$$

337.

$$\int x^2 e^{-x^3} dx$$

338.

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

339.

$$\int e^{\tan x} \sec^2 x \, dx$$

340.

$$\int e^{\ln x} \frac{dx}{x}$$

341.

$$\int \frac{e^{\ln(1-t)}}{1-t} dt$$

Sannreynið í eftirfarandi æfingum með deildun að $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$, og reiknið síðan heildið með viðeigandi breytuskiptum.

342.

$$\int x \ln x \, dx \ \left(\textit{Vísbending}: \int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} \int x \ln\left(x^2\right) dx \right)$$

343.

$$\int x^2 \ln(x^2) dx$$

344.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx \ (\textit{Vísbending}: \text{Látum } u = \frac{1}{x}.)$$

345.

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \ (\textit{Vísbending}: \text{Látum } u = \sqrt{x}.)$$

346. Skrifið heildi sem lýsir flatarmálinu undir grafi $y = \frac{1}{t}$ frá $t = 1$ til e^x og reiknið heildið.

347. Skrifið heildi sem lýsir flatarmálinu undir grafi $y = e^t$ milli $t = 0$ og $t = \ln x$, og reiknið heildið.

Notið viðeigandi innsetningar í eftirfarandi æfingum til að setja hornafallsheildin fram sem samskeytingar með lograföllum.

348.

$$\int \tan(2x)\,dx$$

349.

$$\int \frac{\sin(3x)-\cos(3x)}{\sin(3x)+\cos(3x)}\,dx$$

350.

$$\int \frac{x\sin(x^2)}{\cos(x^2)}\,dx$$

351.

$$\int x\csc(x^2)\,dx$$

352.

$$\int \ln(\cos x)\tan x\,dx$$

353.

$$\int \ln(\csc x)\cot x\,dx$$

354.

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

Reiknið ákveðna heildið í eftirfarandi æfingum.

355.

$$\int_1^2 \frac{1+2x+x^2}{3x+3x^2+x^3}\,dx$$

356.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$$

357.

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

358.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc x \, dx$$

359.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x \, dx$$

Heildið í eftirfarandi æfingum með tilgreindri innsetningu.

360.

$$\int \frac{x}{x-100} \, dx \, ; u = x - 100$$

361.

$$\int \frac{y-1}{y+1} \, dy \, ; u = y + 1$$

362.

$$\int \frac{1-x^2}{3x-x^3} \, dx \, ; u = 3x - x^3$$

363.

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \, dx \, ; u = \sin x - \cos x$$

364.

$$\int e^{2x} \sqrt{1-e^{2x}} \, dx \, ; u = e^{2x}$$

365.

$$\int \ln(x) \frac{\sqrt{1-(\ln x)^2}}{x} \, dx \, ; u = \ln x$$

Er nálgunin með hægri endapunktum í eftirfarandi æfingum ofmat eða vanmat á nákvæma flatarmálinu? Reiknið matið með hægri endapunktum, R_{50}, og finnið nákvæma flatarmálið.

366. **[T]** $y = e^x$ á $[0,1]$

367. **[T]** $y = e^{-x}$ á $[0,1]$

368. **[T]** $y = \ln(x)$ á $[1,2]$

369. **[T]** $y = \frac{x+1}{x^2+2x+6}$ á $[0,1]$

370. **[T]** $y=2^x$ á $[-1,0]$

371. **[T]** $y=-2^{-x}$ á $[0,1]$

1

Í eftirfarandi æfingum er $f(x)\geq 0$ fyrir $a\leq x\leq b$. Finnið með heildun flatarmálið undir grafi $f(x)$ milli gefinna gilda a og b.

372.

$$f(x)=\frac{\log_{10}(x)}{x};a=10,b=100$$

373.

$$f(x)=\frac{\log_2(x)}{x};a=32,b=64$$

374.

$$f(x)=2^{-x};a=1,b=2$$

375.

$$f(x)=2^{-x};a=3,b=4$$

376. Finnið flatarmálið undir grafi fallsins $f(x)=xe^{-x^2}$ milli $x=0$ og $x=5$.

377. Reiknið heildi $f(x)=xe^{-x^2}$ og finnið minnsta gildi N þannig að flatarmálið undir grafi $f(x)=xe^{-x^2}$ milli $x=N$ og $x=N+1$ sé í mesta lagi 0,01.

378. Látum N stefna á óendanlegt. Finnið markgildi flatarmálsins undir grafi $f(x)=xe^{-x^2}$ milli $x=0$ og $x=N$.

379. Sýnið að $\int_a^b \frac{dt}{t}=\int_{1/b}^{1/a} \frac{dt}{t}$ þegar $0<a\leq b$.

380. Gerum ráð fyrir að $f(x)>0$ fyrir öll x og að f og g séu deildanleg. Notið samsemdina $f^g=e^{g\ln f}$ og keðjuregluna til að finna afleiðu f^g.

381. Notið fyrri æfinguna til að finna stofnfall fallsins $h(x)=x^x(1+\ln x)$ og reiknið $\int_2^3 x^x(1+\ln x)\,dx$.

382. Sýnið að ef $c>0$, þá sé heildið af $1/x$ frá ac til bc $(0<a<b)$ jafnt heildinu af $1/x$ frá a til b.

Í eftirfarandi æfingum leiðum við út grunneiginleika náttúrlega lograns út frá skilgreiningunni $\ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$, með því að nota eiginleika ákveðna heildisins og án frekari forsendna.

383. Notið samsemdina $\ln(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ til að leiða út samsemdina $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$.

384. Notið breytuskipti í heildinu $\int_1^{xy} \frac{1}{t}dt$ til að sýna að $\ln xy=\ln x+\ln y$ fyrir $x, y>0$.

385. Notið samsemdina $\ln x=\int_1^x \frac{dt}{t}$ til að sýna að $\ln(x)$ sé vaxandi fall af x á $[0,\infty)$, og notið fyrri æfingar til að sýna að myndmengi $\ln(x)$ sé $(-\infty,\infty)$. Ályktið, án frekari forsendna, að $\ln(x)$ hafi andhverft fall sem er skilgreint á $(-\infty,\infty)$.

386. Gerum um stund ráð fyrir að við vitum ekki að e^x sé andhverfa $\ln(x)$, en höfum í huga að $\ln(x)$ hefur andhverft fall sem er skilgreint á $(-\infty,\infty)$. Köllum fallið E. Notið samsemdina $\ln xy=\ln x+\ln y$ til að leiða út að $E(a+b)=E(a)E(b)$ fyrir allar rauntölur a og b.

387. Gerum um stund ráð fyrir að við vitum ekki að e^x sé andhverfa $\ln x$, en höfum í huga að $\ln x$ hefur andhverft fall sem er skilgreint á $(-\infty,\infty)$. Köllum fallið E. Sýnið að $E'(t)=E(t)$.

388. Sínusheildið er skilgreint með $S(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ og er mikilvæg stærð í verkfræði. Þótt engin einföld lokuð formúla sé til fyrir það er hægt að meta hegðun þess fyrir stór x. Sýnið að fyrir

$$k\geq 1, \left|S(2\pi k)-S(2\pi(k+1))\right|\leq \frac{1}{k(2k+1)\pi}.$$

$$(\textit{Vísbending}: \sin(t+\pi)=-\sin t)$$

389. **[T]** Normaldreifingin í líkindafræði er gefin með $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, þar sem σ er staðalfrávikið og μ meðaltalið. Staðlaða normaldreifingin í líkindafræði, p_s, samsvarar $\mu=0$ og $\sigma=1$. Reiknið nálganir með hægri endapunktum R_{10} og R_{100} á $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

390. **[T]** Reiknið nálganir með hægri endapunktum R_{50} og R_{100} á $\int_{-3}^{5} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/8}$.

1.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum

NÁMSMARKMIÐ

- 1.7.1 Heilda föll sem skila andhverfum hornaföllum

1

Í þessum undirkafla skoðum við heildi sem skila andhverfum hornaföllum. Við höfum áður unnið með þessi föll. Rifjum upp úr kaflanum Föll og gröf að hornaföll eru ekki eintæk nema skilgreiningarmengi þeirra séu takmörkuð. Þegar við vinnum með andhverfur hornafalla þurfum við alltaf að taka tillit til þessara takmarkana. Í kaflanum Afleiður leiddum við einnig út formúlur fyrir afleiður andhverfra hornafalla. Út frá þeim formúlum fáum við beint heildunarreglur fyrir andhverf hornaföll.

Heildi sem skila andhverfu sínusfalli

Hefjum þennan síðasta undirkafla kaflans á formúlunum þremur. Við notum þessar formúlur ásamt innsetningu til að reikna heildin. Við sönnum formúluna fyrir heildi sem skilar andhverfu sínusfalli.

REGLA: HEILDI SEM SKILA ANDHVERFUM HORNAFÖLLUM

Eftirfarandi heildunarreglur skila andhverfum hornaföllum. Gerum ráð fyrir að $a>0$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

(1.23)

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C$$

(1.24)

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{|u|}{a}+C$$

(1.25)

Sönnun

Látum $y=\sin^{-1}\frac{x}{a}$. Þá er $a\sin y = x$. Notum nú fólgna deildun. Þá fæst

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left(a\sin y\right) &= \tfrac{d}{dx}\left(x\right) \\ a\cos y\,\tfrac{dy}{dx} &= 1 \\ \tfrac{dy}{dx} &= \tfrac{1}{a\cos y}. \end{aligned}$$

Fyrir $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $\cos y\ge 0$. Með því að nota Pýþagórasarsamsemdina $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, fæst $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$. Þetta gefur

$$\begin{aligned}\frac{1}{a\cos y} &= \frac{1}{a\sqrt{1-\sin^2 y}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 y}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.\end{aligned}$$

Fyrir $-a \le x \le a$, og þegar við alhæfum niðurstöðuna yfir á u fæst því

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C.$$

□

DÆMI 1.49

Ákveðið heildi reiknað með andhverfum hornaföllum

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lausn

Við getum notað beint formúluna fyrir stofnfallið í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum og síðan reiknað ákveðna heildið. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \sin^{-1}x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\\ &= \sin^{-1}\tfrac{1}{2} - \sin^{-1}0\\ &= \tfrac{\pi}{6} - 0\\ &= \tfrac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.40

Reiknið heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

DÆMI 1.50

Stofnfall með andhverfu hornafalli

Reiknið heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Lausn

Notum innsetninguna $u = 3x$. Þá er $du = 3\,dx$ og því fæst

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}.$$

1

Notum formúluna með $a=2$, og fáum

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} &= \tfrac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\ &= \tfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\tfrac{u}{2}\right)+C \\ &= \tfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\tfrac{3x}{2}\right)+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.41

Notið andhverft hornafall og innsetningu til að finna óákveðna heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

DÆMI 1.51

Ákveðið heildi reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Lausn

Verkefnið er á sama formi og formúlan fyrir andhverft sínusfall. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \sin^{-1}u\Big|_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left[\sin^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]-\left[\sin^{-1}(0)\right] \\ &= \tfrac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Heildi sem skila öðrum andhverfum hornaföllum

Andhverfu hornaföllin eru sex. Í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum eru þó aðeins þrjár heildunarreglur taldar upp. Hinar þrjár eru eins og þær sem við notum, nema með öfugu formerki. Eini munurinn er sá hvort heildisstofninn er jákvæður eða neikvæður. Ef heildisstofninn er neikvæður þarf ekki að leggja þrjár formúlur til viðbótar á minnið. Þá má einfaldlega taka stuðulinn -1 út fyrir heildistáknið og reikna heildið með einni af formúlunum sem þegar eru gefnar. Í lok þessa undirkafla skoðum við eina formúlu til viðbótar: heildið sem skilar andhverfu tangensfalli.

DÆMI 1.52

Stofnfall með andhverfu tangensfalli

Reiknið heildið $\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$.

Lausn

Ef við berum verkefnið saman við formúlurnar í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum sjáum við að heildisstofninn líkist formúlunni fyrir $\tan^{-1}u+C$. Við notum því innsetningu og látum $u=2x$, þá er $du=2\,dx$ og $1/2\,du=dx$. Þá fæst

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{1}{2}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+C.$$

STÖÐUMAT 1.42

Notið innsetningu til að finna stofnfallið $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

DÆMI 1.53

Heildunarreglunum beitt

Reiknið heildið $\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$.

Lausn

Notum formúluna með $a=3$. Þá fæst

$$\int \frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C.$$

STÖÐUMAT 1.43

Reiknið heildið $\int \frac{dx}{16+x^2}$.

DÆMI 1.54

Ákveðið heildi reiknað

Reiknið ákveðna heildið $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Lausn

Notum formúluna fyrir andhverft tangensfall. Þá fæst

1

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= \tan^{-1}x\Big|_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \\ &= \left[\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right] - \left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 1.44

Reiknið ákveðna heildið $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

Æfingar í undirkafla 1.7

Reiknið hvert heildi í eftirfarandi æfingum og skrifið svarið með andhverfu hornafalli.

391.

$$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

392.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

393.

$$\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$$

394.

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

395.

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

396.

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Finnið hvert óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningu.

397.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

398.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$$

399.

$$\int \frac{dx}{9+x^2}$$

400.

$$\int \frac{dx}{25+16x^2}$$

401.

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-9}}$$

402.

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{4x^2-16}}$$

403. Útskýrið sambandið $-\cos^{-1}t+C=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}t+C$. Gildir almennt að $\cos^{-1}t=-\sin^{-1}t$?

404. Útskýrið sambandið $\sec^{-1}t+C=\int \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}=-\csc^{-1}t+C$. Gildir almennt að $\sec^{-1}t=-\csc^{-1}t$?

405. Útskýrið hvað er rangt við eftirfarandi heildi: $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

406. Útskýrið hvað er rangt við eftirfarandi heildi: $\int_{-1}^1 \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}$.

Finnið í eftirfarandi æfingum stofnfallið $\int f$ fyrir fallið f þegar $C=0$, og notið síðan reiknivél til að teikna gröf f og stofnfallsins á gefna bilinu $[a,b]$. Finnið gildi C þannig að þegar C er lagt við stofnfallið fáist fallið $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

407. **[T]** $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ á bilinu $[-3,3]$

408. **[T]** $\int \frac{9}{9+x^2}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

409. **[T]** $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

410. **[T]** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

Reiknið stofnfallið í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningu.

411.

$$\int \frac{\sin^{-1} t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

412.

$$\int \frac{dt}{\sin^{-1} t\sqrt{1-t^2}}$$

413.

$$\int \frac{\tan^{-1}(2t)}{1+4t^2}\,dt$$

414.

$$\int \frac{t\tan^{-1}(t^2)}{1+t^4}\,dt$$

415.

$$\int \frac{\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)}{|t|\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

416.

$$\int \frac{t\sec^{-1}(t^2)}{t^2\sqrt{t^4-1}}\,dt$$

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna graf stofnfallsins $\int f$ þegar $C=0$ á gefna bilinu $[a,b]$. Nálgið, ef hægt er, gildi C þannig að þegar C er lagt við stofnfallið fáist sama fall og $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

417. **[T]** $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$ á bilinu $[2,6]$

418. **[T]** $\int \frac{1}{(2x+2)\sqrt{x}}\,dx$ á bilinu $[0,6]$

419. **[T]** $\int \frac{(\sin x + x\cos x)}{1+x^2\sin^2 x}\,dx$ á bilinu $[-6,6]$

420. **[T]** $\int \frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}}\,dx$ á bilinu $[0,2]$

421. **[T]** $\int \frac{1}{x+x\ln^2 x}\,dx$ á bilinu $[0,2]$

422. **[T]** $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ á bilinu $[-1,1]$

Reiknið hvert heildi í eftirfarandi æfingum með viðeigandi innsetningum.

423.

$$\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$$

424.

$$\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$$

425.

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$$

426.

$$\int \frac{dt}{t(1+\ln^2 t)}$$

427.

$$\int \frac{\cos^{-1}(2t)}{\sqrt{1-4t^2}}\,dt$$

428.

$$\int \frac{e^t\cos^{-1}(e^t)}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,dt$$

Reiknið hvert ákveðið heildi í eftirfarandi æfingum.

1

429.

$$\int_0^{1/2} \frac{\tan\left(\sin^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

430.

$$\int_{1/4}^{1/2} \frac{\tan\left(\cos^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

431.

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}\,dt$$

432.

$$\int_0^{1/2} \frac{\cos\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}\,dt$$

433. Ef $A>0$, skuluð þið reikna $I(A)=\int_{-A}^{A} \frac{dt}{1+t^2}$ og ákvarða markgildið $\lim_{A\to\infty} I(A)$, sem gefur flatarmálið undir grafi $\frac{1}{1+t^2}$ á $[-\infty,\infty]$.

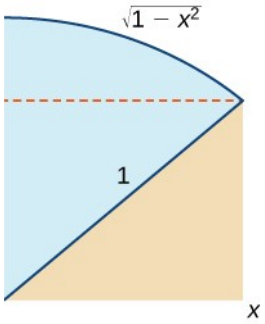
434. Ef $1<B<\infty$, skuluð þið reikna $I(B)=\int_1^B \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ og ákvarða markgildið $\lim_{B\to\infty} I(B)$, sem gefur flatarmálið undir grafi $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ á $[1,\infty)$.

435. Notið innsetninguna $u=\sqrt{2}\cot x$ og samsemdina $1+\cot^2 x=\csc^2 x$ til að reikna $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$. (Vísbending: Margfaldið teljara og nefnara heildisstofnsins með $\csc^2 x$.)

436. **[T]** Nálgið skurðpunkta grafa $f(x)=2x^2-1$ og $g(x)=\left(1+4x^2\right)^{-3/2}$ með fjórum aukastöfum og flatarmálið milli grafanna með þremur aukastöfum.

437. **[T]** Nálgið skurðpunkta grafa $f(x)=x^2-1$ og $g(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ með fjórum aukastöfum og flatarmálið milli grafanna með þremur aukastöfum.

438. Notið eftirfarandi graf til að sanna að $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1} x$.



Lykilhugtök

meðalgildi falls
(einnig f_{ave}) meðalgildi falls á bili fæst með því að reikna ákveðið heildi fallsins og deila niðurstöðunni með lengd bilsins

breytuskipti
innsetning breytu, til dæmis u, í stað stæðu í heildisstofninum

ákveðið heildi
ein af meginaðgerðum stærðfræðigreiningarinnar; ákveðið heildi er flatarmálið milli ferils og x-ássins á tilteknu bili

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
setningin sem er undirstaða allrar þróunar stærðfræðigreiningarinnar og tengir saman deildun og heildun

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti
notar ákveðið heildi til að skilgreina stofnfall falls

undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti
(einnig reiknisetningin) ákveðið heildi má reikna með því að finna gildi stofnfalls heildisstofnsins í endapunktum bilsins og draga gildið í neðri endapunktinum frá gildinu í þeim efri

heildanlegt fall
fall er heildanlegt ef markgildið sem skilgreinir heildið er til; með öðrum orðum, ef markgildi Riemann-summanna er til þegar n stefnir á óendanlegt

heildisstofn
fallið eða stæðan sem heildað er og stendur hægra megin við heildistáknið

heildun með innsetningu
heildunaraðferð sem nota má á föll sem fást með því að beita keðjureglunni við deildun

nálgun með vinstri endapunktum
nálgun á flatarmáli undir ferli þar sem vinstri endapunktur hvers hlutbils ákvarðar hæð viðkomandi rétthyrnings

1

heildismörk
gildin sem standa efst og neðst við heildistáknið og afmarka bilið sem fallið er heildað yfir

neðri summa
summa sem fæst með því að nota lággildi $f(x)$ á hverju hlutbili

meðalgildissetningin fyrir heildi
tryggir að til sé punktur c þar sem $f(c)$ er jafnt meðalgildi fallsins

setningin um heildarbreytingu
ef breytingarhraði stærðar er þekktur, segir setningin um heildarbreytingu að lokagildi stærðarinnar sé jafnt upphafsgildi hennar að viðbættu heildi breytingarhraðans

formerkt flatarmál
flatarmál milli grafs falls og x-ássins, reiknað þannig að flatarmál neðan x-ássins er dregið frá flatarmáli ofan x-ássins; niðurstaðan er jöfn ákveðnu heildi fallsins

skipting
mengi punkta sem skiptir bili í hlutbil

regluleg skipting
skipting þar sem öll hlutbil hafa sömu breidd

Riemann-summa
nálgun á flatarmáli undir ferli á forminu $A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$

nálgun með hægri endapunktum
nálgun á flatarmáli rétthyrninganna undir ferli þar sem hægri endapunktur hvers hlutbils ákvarðar hæð viðkomandi rétthyrnings

summutákn
gríski bókstafurinn sigma (Σ) táknar að gildin skuli lögð saman; gildi vísisins neðan og ofan við sigma sýna hvar summan hefst og hvar henni lýkur

heildarflatarmál
heildarflatarmál milli grafs falls og x-ássins fæst með því að leggja saman flatarmálið ofan x-ássins og flatarmálið neðan x-ássins; niðurstaðan er jöfn ákveðnu heildi algildis fallsins

efri summa
summa sem fæst með því að nota hágildi $f(x)$ á hverju hlutbili

heildunarbreyta
sýnir með tilliti til hvaða breytu er heildað; ef breytan er x kemur dx á eftir fallinu í heildisstofninum

Lykiljöfnur

Eiginleikar summutákns

$$\sum_{i=1}^{n} c = n\,c$$

$$\sum_{i=1}^{n} c\,a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$$

Summur og veldi heiltalna

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Nálgun með vinstri endapunktum

$$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Nálgun með hægri endapunktum

$$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Ákveðið heildi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Reiknireglur fyrir ákveðin heildi

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)$$ þar sem fastinn er c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

1

Meðalgildissetningin fyrir heildi	Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$, þá er til að minnsta kosti einn punktur $c \in [a,b]$ þannig að $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.
Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti	Ef $f(x)$ er samfellt á bili $[a,b]$, og fallið $F(x)$ er skilgreint með $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, þá er $F'(x)=f(x)$.
Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti	Ef f er samfellt á bilinu $[a,b]$ og $F(x)$ er eitthvert stofnfall fyrir $f(x)$, þá er $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.
Setningin um heildarbreytingu	$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)\,dx$ eða $\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a)$
Innsetning í óákveðnum heildum	$\int f[g(x)]g'(x)\,dx=\int f(u)\,du=F(u)+C=F(g(x))+C$
Innsetning í ákveðnum heildum	$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$
Heildi vísisfalla	$\int e^x\,dx=e^x+C$ $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
Heildunarreglur fyrir lograföll	$\int x^{-1}\,dx=\ln\lvert x\rvert+C$ $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$ $\int \log_a x\,dx=\frac{x}{\ln a}(\ln x-1)+C$
Heildi sem skila andhverfum hornaföllum	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$ $\int \frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$

Meginatriði

1.1 Nálgun flatarmáls

- Með summutákni á forminu $\sum_{i=1}^{n} a_i$ má rita langar summur gilda á knöppu formi.
- Fyrir samfellt fall á bilinu $[a, b]$, má nálga flatarmál svæðisins með því að skipta bilinu í n jafnlöng hlutbil, reisa rétthyrning á hverju hlutbili upp að grafi fallsins, reikna flatarmál rétthyrninganna og leggja þau saman.
- Breidd hvers rétthyrnings er $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- Riemann-summur eru segðir á forminu $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$, og má nota þær til að nálga flatarmálið undir ferlinum $y = f(x)$. Nálganir með vinstri og hægri endapunktum eru sérstakar gerðir Riemann-summa þar sem punktarnir $\left\{x_i^*\right\}$ eru valdir sem vinstri eða hægri endapunktar hlutbilanna, eftir því sem við á.
- Í Riemann-summum er mikið svigrúm til að velja punktamengið $\left\{x_i^*\right\}$ þar sem fallgildin eru reiknuð, oft til þess að fá neðri eða efri summu.

1.2 Ákveðið heildi

- Ákveðið heildi má nota til að reikna formerkt flatarmál: flatarmálið ofan x-ássins að frádregnu flatarmálinu neðan x-ássins. Formerkt flatarmál getur verið jákvætt, neikvætt eða núll.
- Hlutar ákveðins heildis eru heildisstofninn, heildunarbreytan og heildismörkin.
- Samfelld föll á lokuðu bili eru heildanleg. Ósamfelld föll geta þó verið heildanleg, allt eftir eðli ósamfelldninnar.
- Nota má eiginleika ákveðinna heilda til að reikna heildi.
- Flatarmálið undir gröfum margra falla má reikna með rúmfræðilegum formúlum.
- Meðalgildi falls má reikna með ákveðnum heildum.

1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar

- Meðalgildissetningin fyrir heildi segir að fyrir samfellt fall á lokuðu bili sé til punktur c þannig að $f(c)$ sé jafnt meðalgildi fallsins. Sjá: Meðalgildissetningin fyrir heildi.

- Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti, sýnir tengsl afleiðu og heildis. Sjá: Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 1. hluti.
- Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti, gefur formúlu til að reikna ákveðið heildi út frá stofnfalli heildisstofnsins. Með formúlunni má finna heildarflatarmálið undir ferli. Sjá: Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, 2. hluti.

1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

- Setningin um heildarbreytingu segir að þegar stærð breytist sé lokagildi hennar jafnt upphafsgildinu að viðbættu heildi breytingarhraðans. Heildarbreytingin getur verið jákvæð tala, neikvæð tala eða núll.
- Flatarmálið undir grafi jafnstæðs falls á samhverfu bili má reikna með því að tvöfalda flatarmálið á jákvæða hluta x-ássins. Fyrir oddstætt fall er heildið á samhverfu bili núll, því að helmingur flatarmálsins er neikvæður.

1.5 Innsetning

- Innsetning er aðferð sem einfaldar heildun falla sem fást þegar keðjureglunni er beitt við deildun. Hugtakið „innsetning“ vísar til breytuskipta eða þess að setja breytuna u og deildið du í stað viðeigandi segða í heildisstofninum.
- Þegar innsetning er notuð við ákveðið heildi þarf einnig að breyta heildismörkunum.

1.6 Heildi með vísis- og lograföllum

- Vísis- og lograföll koma víða við sögu í hagnýtum verkefnum, einkum þegar fjallað er um vöxt og hnignun.
- Innsetning er oft notuð til að reikna heildi sem innihalda vísisföll eða logra.

1.7 Heildi sem skila andhverfum hornaföllum

- Í kaflanum Afleiður vísis- og lografalla voru leiddar út formúlur fyrir afleiður andhverfra hornafalla. Af þeim fást beint heildunarreglur fyrir andhverf hornaföll.
- Notið formúlurnar í reglunni um heildi sem skila andhverfum hornaföllum til að finna rétta formið. Gerið síðan þær breytingar sem þarf til að leysa dæmið.

- Oft þarf að nota innsetningu til að koma heildisstofninum á rétt form.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt. Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi. Gerið ráð fyrir að föllin f og g séu samfelld á skilgreiningarmengjum sínum.

439. Ef $f(x)>0, f'(x)>0$ fyrir öll x, þá vanmetur nálgun með hægri endapunktum heildið $\int_a^b f(x)$. Notið graf til að rökstyðja svarið.

440.

$$\int_a^b f(x)^2\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx$$

441. Ef $f(x)\le g(x)$ fyrir öll $x\in[a,b]$, þá er $\int_a^b f(x)\le\int_a^b g(x)$.

442. Öll samfelld föll eiga sér stofnfall.

Reiknið Riemann-summurnar L_4 og R_4 fyrir föllin hér á eftir á gefnu bili. Berið svarið saman við nákvæma gildið ef hægt er, en notið annars reiknivél til að finna það.

443. $y=3x^2-2x+1$ á bilinu $[-1,1]$

444. $y=\ln\left(x^2+1\right)$ á bilinu $[0,e]$

445. $y=x^2\sin x$ á bilinu $[0,\pi]$

446. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ á bilinu $[1,4]$

Reiknið eftirfarandi heildi.

447.

$$\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2+4x\right)dx$$

448.

$$\int_0^4 \frac{3t}{\sqrt{1+6t^2}}\,dt$$

449.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\sec(2\theta)\tan(2\theta)\,d\theta$$

450.

$$\int_0^{\pi/4} e^{\cos^2 x} \sin x \cos x \, dx$$

1

Finnið stofnfallið.

451.

$$\int \frac{dx}{(x+4)^3}$$

452.

$$\int x \ln\left(x^2\right) dx$$

453.

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$$

454.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx$$

Finnið afleiðuna.

455.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

456.

$$\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \sqrt{4-t^2}\, dt$$

457.

$$\frac{d}{dx} \int_1^{\ln(x)} \left(4t+e^t\right) dt$$

458.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} e^{t^2} dt$$

Næstu verkefni fjalla um meðalverð á gígabæti af vinnsluminni (RAM) í tölvum í gegnum tíðina.

Ár	Breyting á 5 árum (€)
1980	0
1985	−5.468.750
1990	−755.495
1995	−73.005
2000	−29.768
2005	−918
2010	−177

459. Ef meðalverð á gígabæti af vinnsluminni árið 2010 er 12 €, finnið þá meðalverðið árið 1980.

460. Nálga má meðalverð á gígabæti af vinnsluminni með fallinu $C(t)=8.500.000(0{,}65)^t$, þar sem t er mælt í árum frá 1980 og C táknar verð í Bandaríkjadölum. Finnið meðalverð á gígabæti af vinnsluminni á tímabilinu 1980–2010.

461. Finnið meðalverð á 1 GB af vinnsluminni (RAM) á tímabilinu 2005–2010.

462. Hraða riffilkúlu má nálga með $v(t)=1920t^2-1980t+820$, þar sem t er tíminn í sekúndum frá skotinu og v er hraðinn í metrum á sekúndu. Jafnan lýsir aðeins hraðanum fyrstu hálfu sekúnduna eftir skotið: $0\le t\le 0{,}5$. Hversu langt fer kúlan samtals á 0,5 sekúndum?

463. Hver er meðalhraði kúlunnar fyrstu hálfu sekúnduna?

2. KAFLI

2

Hagnýting heildunar



Mynd 2.1 Hoover-stíflan er eitt þekktasta kennileiti Bandaríkjanna og sér milljónum manna í suðvesturhluta landsins fyrir áveituvatni og raforku úr vatnsafli. (mynd: breytt verk eftir Lynn Betts, Wikimedia)

Efnisyfirlit kaflans

- 2.1 Flatarmál milli ferla
- 2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
- 2.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki
- 2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

- 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
- 2.6 Vægi og massamiðjur
- 2.7 Heildi, vísisföll og lograr
- 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
- 2.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla

Inngangur

Hoover-stíflan er einstakt verkfræðiafrek. Þegar Mead-vatn, uppistöðulónið ofan við stífluna, er fullt verkar mikill kraftur á stífluna. Vatnsborð lónsins er þó mjög breytilegt vegna þurrka og breytilegrar vatnsnotkunar. Síðar í kaflanum notum við ákveðin heildi til að reikna kraftinn sem verkar á stífluna þegar lónið er fullt og könnum hvernig breytilegt vatnsborð hefur áhrif á kraftinn (sjá dæmi 2.28).

Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings er aðeins eitt af mörgum viðfangsefnum í þessum kafla þar sem við notum ákveðin heildi. Ákveðin heildi eru öflugt tæki til að skilja heiminn í kringum okkur og lýsa honum með stærðfræðilegum líkönum. Þau nýtast meðal annars í rúmfræði til að reikna yfirborðsflatarmál og rúmmál, í eðlisfræði til að reikna massa og vinnu og í líkönum af vexti og hnignun.

2.1 Flatarmál milli ferla

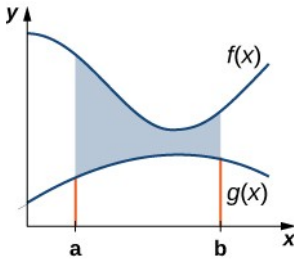
NÁMSMARKMIÐ

- 2.1.1 Reikna flatarmál svæðis milli tveggja ferla með því að heilda með tilliti til óháðu breytunnar.
- 2.1.2 Finna flatarmál samsetts svæðis.
- 2.1.3 Reikna flatarmál svæðis milli tveggja ferla með því að heilda með tilliti til háðu breytunnar.

Í Inngangi að heildun kynntumst við ákveðnu heildi sem aðferð til að reikna flatarmál undir ferli á gefnu bili. Hér útvíkkum við hugmyndina og reiknum flatarmál flóknari svæða. Við byrjum á því að finna flatarmálið milli tveggja ferla sem eru gröf falla af x, og tökum fyrst einfalda tilvikið þar sem gildi annars fallsins er alltaf stærra en gildi hins. Síðan skoðum við tilvik þar sem gröf fallanna skerast. Að lokum athugum við hvernig reikna má flatarmálið milli tveggja ferla sem eru gröf falla af y.

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld föll á bili $[a, b]$ þannig að $f(x) \geq g(x)$ á $[a, b]$. Við viljum finna flatarmálið milli grafa fallanna, eins og næsta mynd sýnir.



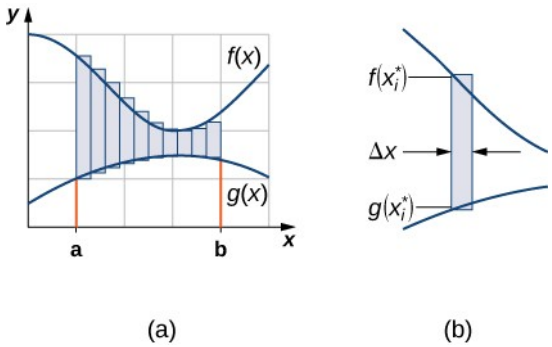
Mynd 2.2 Flatarmálið milli grafa tveggja falla, $f(x)$ og $g(x)$, á bilinu $[a,b]$.

2

Eins og áður skiptum við bilinu á x-ás og nálgum flatarmálið milli grafa fallanna með rétthyrningum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við því $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við síðan punkt $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$, og reisum á hverju bili $[x_{i-1},x_i]$ rétthyrning sem nær lóðrétt frá $g(x_i^*)$ til $f(x_i^*)$. Mynd 2.3 (a) sýnir rétthyrningana þegar x_i^* er valinn sem vinstri endapunktur bilsins og $n=10$. Mynd 2.3 (b) sýnir dæmigerðan rétthyrning nánar.

MARGMIÐLUN

Notið þessa reiknivél til að kanna nánar flatarmál milli tveggja ferla.



Mynd 2.3 (a) Við getum nálgað flatarmálið milli grafa tveggja falla, $f(x)$ og $g(x)$, með rétthyrningum. (b) Dæmigerður rétthyrningur nær frá öðrum ferlinum til hins.

Hæð hvers rétthyrnings er $f(x_i^*)-g(x_i^*)$ og breidd hans er Δx. Þegar við leggjum saman flatarmál allra rétthyrninganna fáum við þessa nálgun fyrir flatarmálið milli ferlanna:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Við tökum því markgildið þegar $n \to \infty$ og fáum

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*) \right] \Delta x = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx.$$

Næsta setning dregur þessar niðurstöður saman.

SETNING 2.1

Flatarmál milli tveggja ferla

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld föll þannig að $f(x) \geq g(x)$ á bili $[a, b]$. Látum R tákna svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af grafi $g(x)$, og til vinstri og hægri af línunum $x = a$ og $x = b$, í þeirri röð. Þá er flatarmál R reiknað með

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

(2.1)

Við notum setninguna í næsta dæmi.

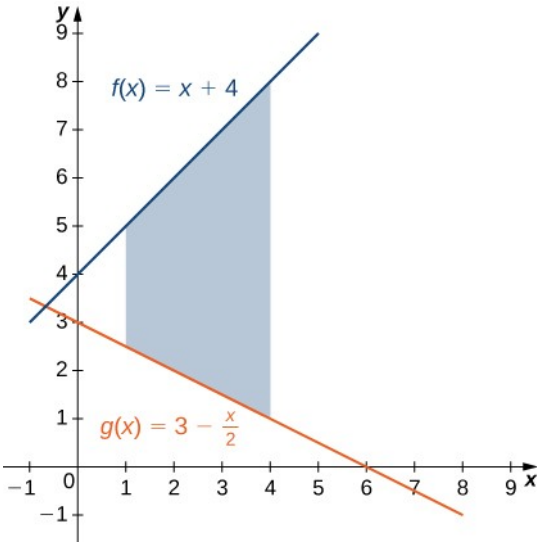
DÆMI 2.1

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla 1

Ef R er svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x) = x + 4$ og að neðan af grafi fallsins $g(x) = 3 - \frac{x}{2}$ á bilinu $[1, 4]$, finnið flatarmál svæðisins R.

Lausn

Svæðið sést á næstu mynd.



Mynd 2.4 Sýnt er svæði milli tveggja ferla þar sem annar ferillinn liggur alls staðar ofan við hinn.

Við höfum

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \\ &= \int_1^4 \left[(x+4) - \left(3 - \frac{x}{2}\right)\right]dx = \int_1^4 \left[\frac{3x}{2} + 1\right]dx \\ &= \left[\tfrac{3x^2}{4} + x\right]\Big|_1^4 = \left(16 - \tfrac{7}{4}\right) = \tfrac{57}{4}. \end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $\frac{57}{4}$ einingar^2.

2

STÖÐUMAT 2.1

Ef R er svæðið sem afmarkast af gröfum fallanna $f(x)=\frac{x}{2}+5$ og $g(x)=x+\frac{1}{2}$ á bilinu $[1,5]$, finnið flatarmál svæðisins R.

Í dæmi 2.1 var bilið sem við skoðuðum gefið í dæminu sjálfu. Oft viljum við þó ákvarða bilið út frá því hvar gröf fallanna tveggja skerast. Næsta dæmi sýnir þetta.

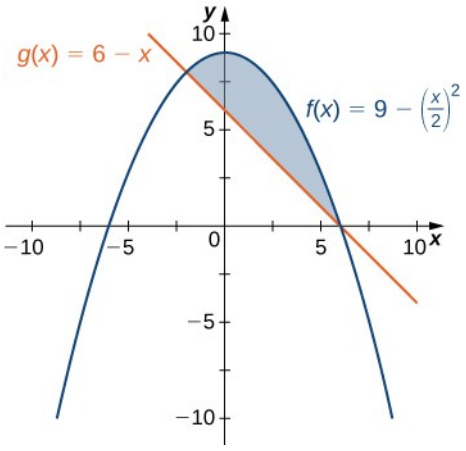
DÆMI 2.2

Flatarmál svæðis milli tveggja ferla 2

Ef R er svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=9-(x/2)^2$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=6-x$, finnið flatarmál svæðisins R.

Lausn

Svæðið sést á næstu mynd.



Mynd 2.5 Grafið sýnir svæðið neðan við graf $f(x)$ og ofan við graf $g(x)$.

Fyrst finnum við skurðpunkta grafa fallanna. Með því að setja $f(x)=g(x)$, fáum við

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 9-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 &= 6-x \\ 9-\tfrac{x^2}{4} &= 6-x \\ 36-x^2 &= 24-4x \\ x^2-4x-12 &= 0 \\ (x-6)\,(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Gröf fallanna skerast þegar $x=6$ eða $x=-2$, og því heildum við frá -2 til 6. Nú gildir $f(x)\geq g(x)$ fyrir $-2\leq x\leq 6$, svo að við fáum

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \\ &= \int_{-2}^{6}\left[9-\left(\frac{x}{2}\right)^2-(6-x)\right]dx = \int_{-2}^{6}\left[3-\frac{x^2}{4}+x\right]dx \\ &= \left[3x-\tfrac{x^3}{12}+\tfrac{x^2}{2}\right]\Big|_{-2}^{6} = \tfrac{64}{3}. \end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $64/3$ einingar^2.

STÖÐUMAT 2.2

Ef R er svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=x$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=x^4$, finnið flatarmál svæðisins R.

Flatarmál samsettra svæða

Hingað til höfum við krafist þess að $f(x)\geq g(x)$ á öllu bilinu sem við skoðum. En hvað ef við viljum skoða svæði sem afmarkast af gröfum falla sem skerast? Þá breytum við aðferðinni sem við vorum að leiða út og notum tölugildisfallið.

SETNING 2.2

Flatarmál svæðis milli ferla sem skerast

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld föll á bili $[a,b]$. Látum R tákna svæðið milli grafa $f(x)$ og $g(x)$, sem afmarkast til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í þeirri röð. Þá er flatarmál R reiknað með

$$A=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

Til að nota setninguna þurfum við í reynd að skipta bilinu $[a,b]$ upp og reikna nokkur heildi, eftir því hvort fallgildanna er stærra á hverjum hluta bilsins. Næsta dæmi sýnir hvernig þetta er gert.

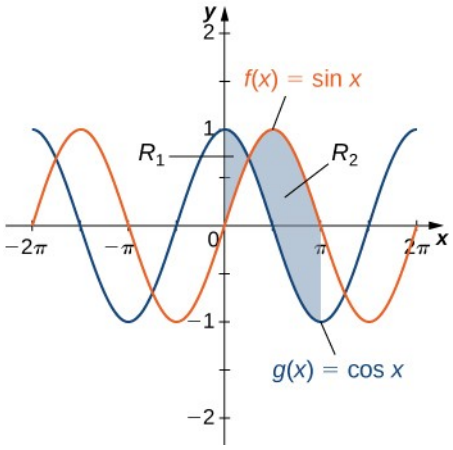
DÆMI 2.3

Flatarmál svæðis sem afmarkast af föllum sem skerast

Ef R er svæðið milli grafa fallanna $f(x)=\sin x$ og $g(x)=\cos x$ á bilinu $[0,\pi]$, finnið flatarmál svæðisins R.

Lausn

Svæðið sést á næstu mynd.



Mynd 2.6 Svæðinu milli tveggja ferla má skipta í tvö undirsvæði.

Gröf fallanna skerast við $x=\pi/4$. Fyrir $x\in[0,\pi/4]$, er $\cos x\geq\sin x$, svo að

$$|f(x)-g(x)|=|\sin x-\cos x|=\cos x-\sin x.$$

Á hinn bóginn gildir á bilinu $x\in[\pi/4,\pi]$, að $\sin x\geq\cos x$, svo að

$$|f(x)-g(x)|=|\sin x-\cos x|=\sin x-\cos x.$$

Þá fæst

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \\
&= \int_0^{\pi} |\sin x-\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x-\sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x-\cos x)\,dx \\
&= [\sin x+\cos x]\,|_0^{\pi/4} + [-\cos x-\sin x]\,|_{\pi/4}^{\pi} \\
&= \left(\sqrt{2}-1\right)+\left(1+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $2\sqrt{2}$ einingar^2.

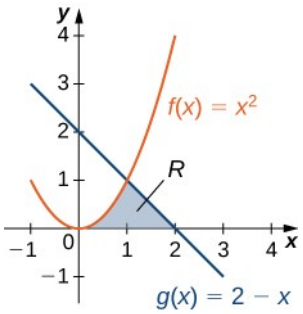
STÖÐUMAT 2.3

Ef R er svæðið milli grafa fallanna $f(x)=\sin x$ og $g(x)=\cos x$ á bilinu $[\pi/2, 2\pi]$, finnið flatarmál svæðisins R.

DÆMI 2.4

Flatarmál flókins svæðis

Skoðið svæðið á mynd 2.7. Finnið flatarmál R.



Mynd 2.7 Reikna þarf tvö heildi til að finna flatarmál svæðisins.

Lausn

Eins og í dæmi 2.3 þurfum við að skipta bilinu í tvo hluta. Gröf fallanna skerast við $x=1$ (setjið $f(x)=g(x)$ og leysið með tilliti til x). Við reiknum því tvö aðskilin heildi, annað á bilinu $[0,1]$ og hitt á bilinu $[1,2]$.

Á bilinu $[0,1]$, afmarkast svæðið að ofan af $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ásnum, svo að við fáum

$$A_1=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Á bilinu $[1,2]$, afmarkast svæðið að ofan af $g(x)=2-x$ og að neðan af x-ás, svo að við fáum

$$A_2=\int_1^2 (2-x)\,dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2=\frac{1}{2}.$$

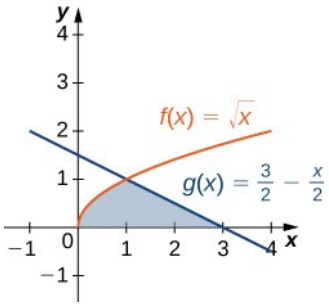
Þegar við leggjum þessi flatarmál saman fáum við

$$A=A_1+A_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

Flatarmál svæðisins er $5/6$ einingar^2.

STÖÐUMAT 2.4

Skoðið svæðið á næstu mynd. Finnið flatarmál R.

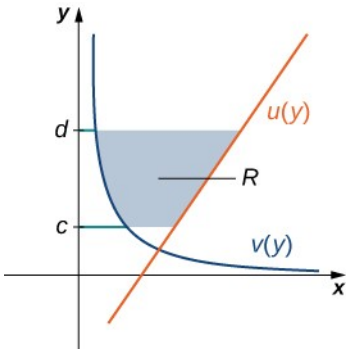


2

Svæði skilgreind með tilliti til y

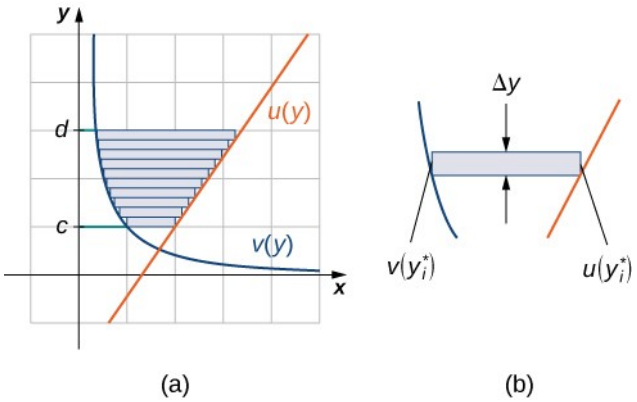
Í dæmi 2.4 þurftum við að reikna tvö aðskilin heildi til að finna flatarmál svæðisins. En til er önnur aðferð sem þarf aðeins eitt heildi. Hvað ef við lítum á ferlana sem föll af y, en ekki sem föll af x? Skoðið mynd 2.7. Takið eftir að vinstra grafið, sem sýnt er með rauðu, er gefið með fallinu $y=f(x)=x^2$. Við gætum allt eins leyst þessa jöfnu með tilliti til x og gefið ferilinn með fallinu $x=v(y)=\sqrt{y}$. (Athugið að $x=-\sqrt{y}$ er einnig gild framsetning á fallinu $y=f(x)=x^2$ sem falli af y. Af grafinu er þó ljóst að hér kemur jákvæða kvaðratrótin við sögu.) Á sama hátt er hægra grafið gefið með fallinu $y=g(x)=2-x$, en því mætti allt eins lýsa með fallinu $x=u(y)=2-y$. Þegar gröfin eru gefin sem föll af y, sjáum við að svæðið afmarkast til vinstri af grafi annars fallsins og til hægri af grafi hins fallsins. Ef við heildum með tilliti til y, þurfum við því aðeins að reikna eitt heildi. Leiðum nú út formúlu fyrir heildun af þessu tagi.

Látum $u(y)$ og $v(y)$ vera samfelld föll á bili $[c,d]$ þannig að $u(y)\geq v(y)$ fyrir öll $y\in[c,d]$. Við viljum finna flatarmálið milli grafa fallanna, eins og næsta mynd sýnir.



Mynd 2.8 Við getum fundið flatarmálið milli grafa tveggja falla, $u(y)$ og $v(y)$.

Að þessu sinni skiptum við bilinu á y-ás og nálgum flatarmálið milli fallanna með láréttum rétthyrningum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við því $Q=\{y_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[c,d]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við síðan punkt $y_i^*\in[y_{i-1},y_i]$, og reisum á hverju bili $[y_{i-1},y_i]$ rétthyrning sem nær lárétt frá $v(y_i^*)$ til $u(y_i^*)$. Mynd 2.9 (a) sýnir rétthyrningana þegar y_i^* er valinn sem neðri endapunktur bilsins og $n=10$. Mynd 2.9 (b) sýnir dæmigerðan rétthyrning nánar.



Mynd 2.9 (a) Flatarmálið milli grafa tveggja falla, $u(y)$ og $v(y)$, nálgað með rétthyrningum. (b) Flatarmál dæmigerðs rétthyrnings.

Hæð hvers rétthyrnings er Δy og breidd hans er $u(y_i^*) - v(y_i^*)$. Því fáum við þessa nálgun fyrir flatarmálið milli ferlanna:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[u(y_i^*) - v(y_i^*) \right] \Delta y .$$

Þetta er Riemann-summa. Við tökum því markgildið þegar $n \to \infty$, og fáum

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[u(y_i^*) - v(y_i^*) \right] \Delta y = \int_c^d \left[u(y) - v(y) \right] dy .$$

Næsta setning dregur þessar niðurstöður saman.

SETNING 2.3

Flatarmál milli tveggja ferla: heildað með tilliti til y

Látum $u(y)$ og $v(y)$ vera samfelld föll þannig að $u(y) \geq v(y)$ fyrir öll $y \in [c, d]$. Látum R tákna svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $u(y)$, til vinstri af grafi $v(y)$, og að ofan og neðan af línunum $y = d$ og $y = c$, í þeirri röð. Þá er flatarmál R reiknað með

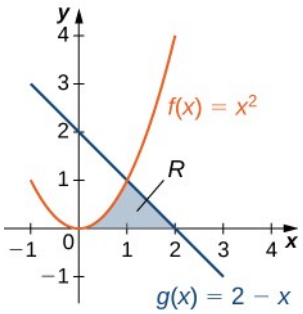
$$A = \int_c^d \left[u(y) - v(y) \right] dy .$$

(2.2)

DÆMI 2.5

Heildun með tilliti til y

Skoðum aftur dæmi 2.4, en heildum nú með tilliti til y. Látum R vera svæðið sem sýnt er á mynd 2.10. Finnið flatarmál R með því að heilda með tilliti til y.



2

Mynd 2.10 Reikna má flatarmál svæðisins R með aðeins einu heildi þegar ferlarnir eru settir fram sem föll af y.

Lausn

Fyrst þurfum við að setja gröfin fram sem föll af y. Eins og við sáum í upphafi undirkaflans má lýsa ferlinum til vinstri með fallinu $x=v(y)=\sqrt{y}$, og ferlinum til hægri með fallinu $x=u(y)=2-y$.

Nú þurfum við að ákvarða heildismörkin. Svæðið afmarkast að neðan af x-ásnum og neðra heildismarkið er því $y=0$. Efra heildismarkið ræðst af skurðpunkti grafanna tveggja, sem er punkturinn $(1,1)$, og er því $y=1$. Þar með fæst $[c,d]=[0,1]$.

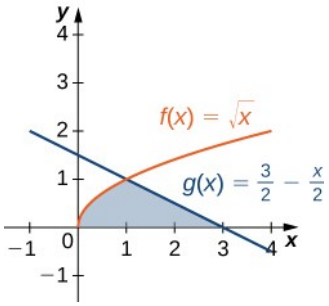
Við reiknum flatarmál svæðisins og fáum

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [u(y)-v(y)]\,dy \\ &= \int_0^1 \left[(2-y)-\sqrt{y}\right]dy = \left[2y-\tfrac{y^2}{2}-\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right]\Big|_0^1 \\ &= \tfrac{5}{6}. \end{aligned}$$

Flatarmál svæðisins er $5/6$ einingar^2.

STÖÐUMAT 2.5

Skoðum aftur stöðumatið sem fylgir dæmi 2.4, en heildum nú með tilliti til y. Látum R vera svæðið sem sýnt er á eftirfarandi mynd. Finnið flatarmál R með því að heilda með tilliti til y.

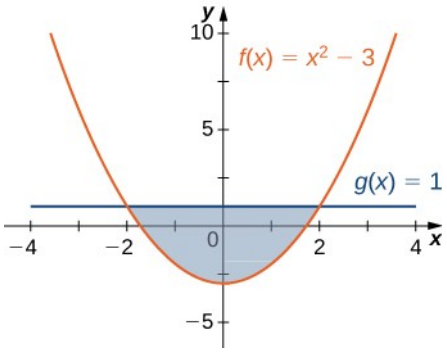


Æfingar í undirkafla 2.1

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna flatarmál svæðisins milli ferlanna tveggja á myndinni með því að heilda meðfram x-ás.

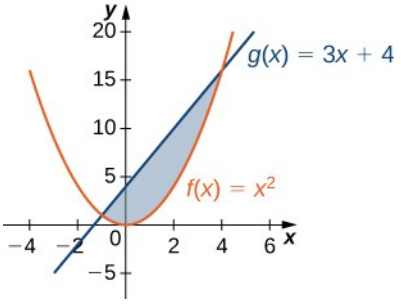
1.

$$y=x^2-3 \text{ og } y=1$$



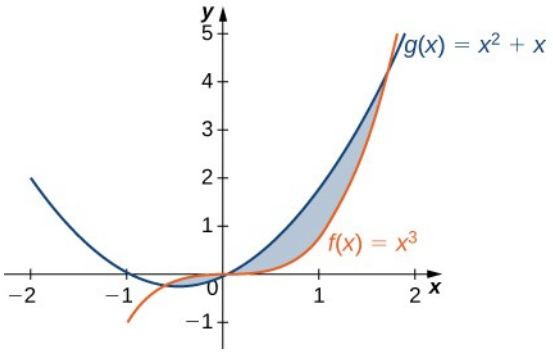
2.

$$y=x^2 \text{ og } y=3x+4$$



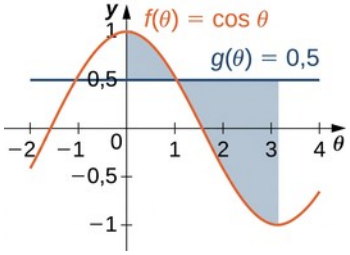
Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skipta svæðinu milli ferlanna tveggja í tvö minni svæði og reikna síðan flatarmálið með því að heilda meðfram x-ás. Athugið að reikna þarf tvö heildi.

3. $y=x^3$ og $y=x^2+x$



2

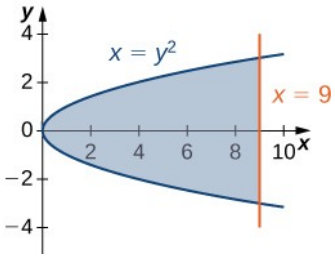
4. $y=\cos\theta$ og $y=0{,}5$, fyrir $0\le\theta\le\pi$



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna flatarmál svæðisins milli ferlanna tveggja með því að heilda meðfram y-ás.

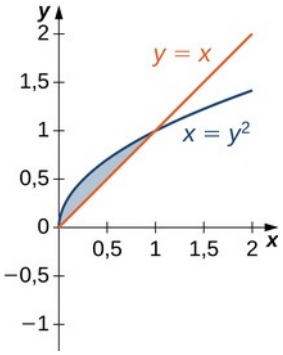
5.

$$x=y^2 \text{ og } x=9$$



6.

$$y=x \text{ og } x=y^2$$



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Reiknið flatarmál þess með því að heilda meðfram x-ás.

7.

$$y=x^2 \text{ og } y=-x^2+18x$$

8.

$$y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x^2}, \text{og } x=3$$

9. $y=\cos x$ og $y=\cos^2 x$ á bilinu $x=[-\pi,\pi]$

10.

$$y=e^x, y=e^{2x-1}, \text{og } x=0$$

11.

$$y=e^x, y=e^{-x}, x=-1 \text{ og } x=1$$

12.

$$y=e, y=e^x, \text{og } y=e^{-x}$$

13.

$$y=|x| \text{og } y=x^2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Skiptið svæðinu í undirsvæði ef þess þarf til að reikna heildarflatarmál þess.

14.

$$y=\sin(\pi x), y=2x, \text{og } x>0$$

15.

$$y=12-x, y=\sqrt{x}, \text{og } y=1$$

16. $y=\sin x$ og $y=\cos x$ á bilinu $x=[-\pi,\pi]$

17. $y=x^3$ og $y=x^2-2x$ á bilinu $x=[-1,1]$

18. $y=x^2+9$ og $y=10+2x$ á bilinu $x=[-1,3]$

19. $y=x^3+3x$ og $y=4x$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Reiknið flatarmál þess með því að heilda meðfram y-ás.

20.

$$x=y^3 \text{og } x=3y-2$$

21.

$$x=2y \text{og } x=y^3-y$$

22.

$$x=-3+y^2 \text{ og } x=y-y^2$$

23.

$$y^2=x \text{ og } x=y+2$$

24.

$$x=|y| \text{ og } 2x=-y^2+2$$

25.

$$x=\sin y, x=\cos(2y), y=\pi/2, \text{ og } y=-\pi/2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna gröf jafnanna og skyggja svæðið milli ferlanna. Reiknið flatarmál þess með því að heilda með tilliti til x eða y, eftir því hvor leiðin virðist hentugri.

26.

$$x=y^4 \text{ og } x=y^5$$

27.

$$y=xe^x, y=e^x, x=0, \text{ og } x=1$$

28.

$$y=x^6 \text{ og } y=x^4$$

29.

$$x=y^3+2y^2+1 \text{ og } x=-y^2+1$$

30.

$$y=|x| \text{ og } y=x^2-1$$

31.

$$y=4-3x \text{ og } y=\frac{1}{x}$$

32.

$$y=\sin x, x=-\pi/6, x=\pi/6, \text{ og } y=\cos^3 x$$

33.

$$y=x^2-3x+2 \text{ og } y=x^3-2x^2-x+2$$

34.

$$y=2\cos^3(3x),\ y=-1,\ x=\frac{\pi}{4},\ \text{og}\ x=-\frac{\pi}{4}$$

35.

$$y+y^3=x\ \text{og}\ 2y=x$$

36.

$$y=\sqrt{1-x^2}\ \text{og}\ y=x^2-1$$

37.

$$y=\cos^{-1}x,\ y=\sin^{-1}x,\ x=-1,\ \text{og}\ x=1$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna nákvæmt flatarmál svæðisins sem gefnu jöfnurnar afmarka, ef unnt er. Ef ekki er hægt að finna skurðpunktana með beinum útreikningi skuluð þið nota reiknivél til að nálga þá með þremur aukastöfum. Finnið síðan nálgunargildi flatarmálsins.

38. **[T]** $x=e^y\ \text{og}\ y=x-2$

39. **[T]** $y=x^2\ \text{og}\ y=\sqrt{1-x^2}$

40. **[T]** $y=3x^2+8x+9\ \text{og}\ 3y=x+24$

41. **[T]** $x=\sqrt{4-y^2}\ \text{og}\ y^2=1+x^2$

42. **[T]** $x^2=y^3\ \text{og}\ x=3y$

43. **[T]**

$$y=\sin^3 x+2,\ y=\tan\ x,\ x=-1{,}5,\ \text{og}\ \ x=1{,}5$$

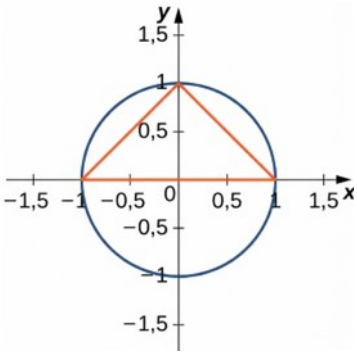
44. **[T]** $y=\sqrt{1-x^2}\ \text{og}\ y^2=x^2$

45. **[T]** $y=\sqrt{1-x^2}\ \text{og}\ y=x^2+2x+1$

46. **[T]** $x=4-y^2\ \text{og}\ x=1+3y+y^2$

47. **[T]** $y=\cos x,\ y=e^x,\ x=-\pi,\ \text{og}\ x=0$

48. Stærsti þríhyrningurinn sem hefur grunnlínu á x-ás og rúmast innan efri helmings einingarhringsins $y^2+x^2=1$ afmarkast af línunum $y=1+x$ og $y=1-x$. Sjá næstu mynd. Hvert er flatarmálið innan hálfhringsins en utan þríhyrningsins?



2

49. Verksmiðja sem selur farsíma hefur jaðarkostnaðarfallið $C(x)=0{,}01x^2-3x+229$, þar sem x táknar fjölda farsíma og C er jaðarkostnaðurinn í dollurum við að selja x síma. Jaðartekjufallið er $R(x)=429-2x$, þar sem R táknar jaðartekjur í dollurum af sölu x farsíma. Finnið flatarmálið milli grafa þessara falla og línunnar $x=0$. Hvað táknar flatarmálið?

50. Skemmtigarður hefur jaðarkostnaðarfallið $C(x)=1000e^{-x}+5$, þar sem x táknar fjölda seldra miða. Jaðartekjufallið er $R(x)=60-0{,}1x$. Finnið heildarhagnaðinn sem fæst þegar 550 miðar eru seldir. Notið reiknivél ef þess þarf til að finna skurðpunkta með tveimur aukastöfum.

51. Skjaldbakan og hérinn: Hraði hérans er gefinn með sínusfallinu $H(t)=1-\cos((\pi t)/2)$, en hraði skjaldbökunnar er $T(t)=0{,}1032t$, þar sem t er tími mældur í klukkustundum og hraðinn í kílómetrum á klukkustund. Finnið flatarmálið milli ferlanna frá tímanum $t=0$ þar til skjaldbakan og hérinn eru í fyrsta sinn á sama hraða eftir að ein klukkustund er liðin. Hvað táknar flatarmálið? Notið reiknivél ef þess þarf til að ákvarða skurðpunktana með þriggja aukastafa nákvæmni.

52. Skjaldbakan og hérinn: Hraði hérans er gefinn með sínusfallinu $H(t)=(1/2)-(1/2)\cos(2\pi t)$, en hraði skjaldbökunnar er $T(t)=\sqrt{t}$, þar sem t er tími mældur í klukkustundum og hraðinn í kílómetrum á klukkustund. Kapphlaupinu lauk eftir 1 klukkustund. Hvort þeirra vann kapphlaupið og með hve miklum mun? Notið reiknivél ef þess þarf til að ákvarða skurðpunktana með þriggja aukastafa nákvæmni.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna flatarmálið milli ferlanna með því að heilda fyrst með tilliti til x og síðan með tilliti til y. Er önnur aðferðin auðveldari en hin? Fáið þið sama svar?

53.

$$y=x^2+2x+1 \text{ og } y=-x^2-3x+4$$

54.

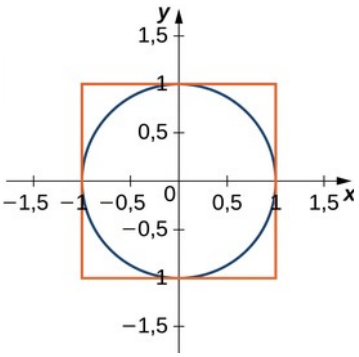
$$y=x^4 \text{ og } x=y^5$$

55.

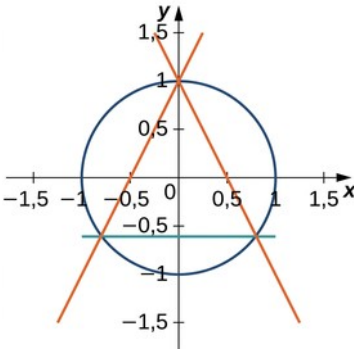
$$x=y^2-2 \text{ og } x=2y$$

Leysið eftirfarandi æfingar með stærðfræðigreiningu og sannreynið síðan svörin með rúmfræði.

56. Ákvarðið jöfnur hliða ferningsins sem snertir einingarhringinn með öllum fjórum hliðum sínum, eins og sést á næstu mynd. Finnið flatarmálið milli jaðars ferningsins og einingarhringsins. Er hægt að leysa dæmið á annan hátt án stærðfræðigreiningar?



57. Finnið flatarmálið milli jaðars einingarhringsins og þríhyrningsins sem afmarkast af $y=2x+1$, $y=1-2x$ og $y=-\frac{3}{5}$, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd. Er hægt að leysa dæmið án stærðfræðigreiningar?



2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum

NÁMSMARKMIÐ

- 2.2.1 Ákvarða rúmmál rúmhlutar með því að heilda flatarmál þversniðs hans (sneiðaaðferðin).
- 2.2.2 Finna rúmmál snúðs með skífuaðferðinni.
- 2.2.3 Finna rúmmál snúðs sem hefur holrúm með hringkragaaðferðinni.

Í undirkaflanum á undan notuðum við ákveðin heildi til að finna flatarmálið milli tveggja ferla. Í þessum undirkafla notum við ákveðin heildi til að finna rúmmál þrívíðra rúmhluta. Við skoðum þrjár aðferðir — sneiðaaðferðina, skífuaðferðina og hringkragaaðferðina — til að finna þessi rúmmál, allt eftir eiginleikum rúmhlutarins.

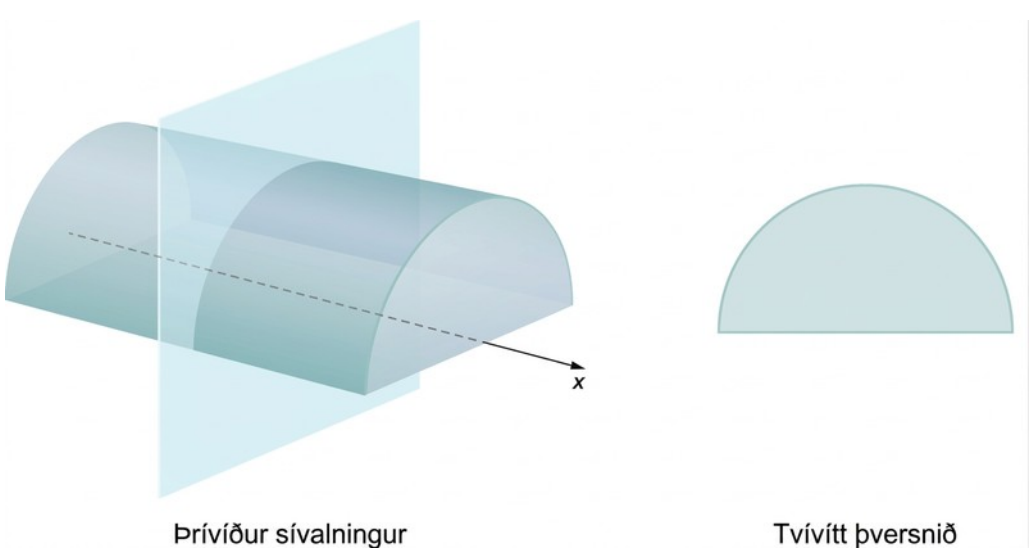
Rúmmál og sneiðaaðferðin

Rétt eins og flatarmál er tölulegur mælikvarði á tvívítt svæði er rúmmál tölulegur mælikvarði á þrívíðan rúmhlut. Flest okkar hafa reiknað rúmmál rúmhluta með einföldum rúmfræðiformúlum. Rúmmál rétthyrnds strendings má til dæmis reikna með því að margfalda saman lengd, breidd og hæð: $V = l\,w\,h$. Formúlurnar fyrir rúmmál kúlu $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$, keilu $\left(V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$, og pýramída $\left(V = \frac{1}{3}A\,h\right)$ hafa einnig verið kynntar. Þótt sumar þessara formúla hafi verið leiddar út með rúmfræði einni saman má fá þær allar með heildun.

2

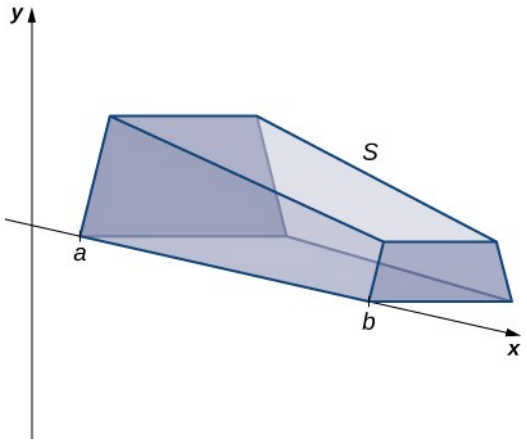
Við getum einnig reiknað rúmmál sívalnings. Þótt flest okkar hugsi sér sívalning með hringlaga grunnflöt, svo sem niðursuðudós eða málmstöng, hefur orðið sívalningur víðtækari merkingu í stærðfræði. Til að fjalla um sívalninga í þessu almenna samhengi þurfum við fyrst að skilgreina nokkur hugtök.

Þversnið rúmhlutar er skurðmengi sléttu og rúmhlutarins. Sívalningur er hver sá rúmhlutur sem mynda má með því að hliðra sléttu svæði eftir línu sem er hornrétt á svæðið; línan nefnist ás sívalningsins. Öll þversnið sem eru hornrétt á ás sívalnings eru því eins. Rúmhluturinn sem sýndur er á mynd 2.11 er dæmi um sívalning með grunnflöt sem er ekki hringlaga. Rúmmál sívalnings fæst þá einfaldlega með því að margfalda flatarmál þversniðsins með hæð sívalningsins: $V = A \cdot h$. Fyrir réttan hringstrending (niðursuðudós) verður formúlan $V = \pi r^2 h$.



Mynd 2.11 Öll þversnið tiltekins sívalnings eru eins.

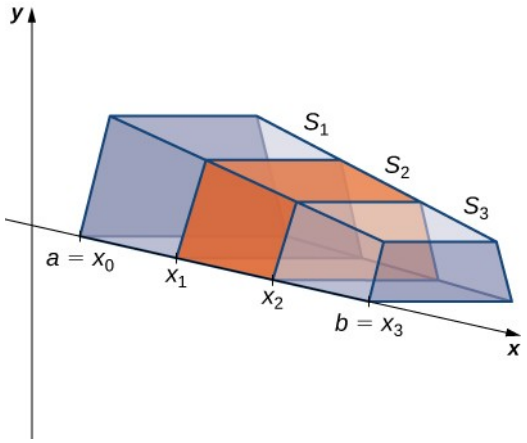
Ef rúmhlutur hefur ekki fast þversnið (og er ekki einn af hinum grunnrúmhlutunum) er ekki víst að til sé formúla fyrir rúmmál hans. Þá getum við reiknað rúmmál rúmhlutarins með ákveðnu heildi. Við skerum rúmhlutinn í sneiðar, metum rúmmál hverrar sneiðar og leggjum síðan þessi áætluðu rúmmál saman. Sneiðarnar eiga allar að vera samsíða og saman eiga þær að mynda allan rúmhlutinn. Skoðum til dæmis rúmhlutinn S á mynd 2.12, sem liggur eftir x-ás.



Mynd 2.12 Rúmhlutur með breytilegt þversnið.

Við viljum skipta S í sneiðar sem eru hornréttar á x-ás. Síðar í kaflanum sjáum við að stundum er betra að sneiða rúmhlutinn í aðra stefnu, til dæmis í sneiðar sem eru hornréttar á y-ásinn. Miklu skiptir að velja rétta stefnu. Ef röng stefna er valin geta útreikningarnir orðið býsna flóknir. Síðar í kaflanum skoðum við nokkur slík tilvik nánar og sjáum hvernig velja má í hvaða stefnu rúmhluturinn er sneiddur. Í þessum undirkafla notum við þó sneiðar sem eru hornréttar á x-ás.

Þversniðsflatarmálið er ekki fast og því látum við $A(x)$ tákna flatarmál þversniðsins í punktinum x. Látum nú $P=\{x_0, x_1 \ldots, X_n\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots n$, látum við S_i tákna þá sneið af S sem nær frá x_{i-1} til x_i. Myndin hér á eftir sýnir sneidda rúmhlutinn þegar $n=3$.



Mynd 2.13 Rúmhlutnum S hefur verið skipt í þrjár sneiðar sem eru hornréttar á x-ás.

Að lokum veljum við fyrir hvert $i=1,2,\ldots n$, einhvern punkt x_i^* í $[x_{i-1}, x_i]$. Þá má áætla rúmmál sneiðar S_i með $V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x$. Þegar við leggjum nálgunargildin saman sjáum við að nálga má rúmmál alls rúmhlutarins S með

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Við þekkjum þetta sem Riemann-summu og næsta skref er að taka markgildið þegar $n \to \infty$. Þá fæst

$$V(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right) \Delta x = \int_a^b A(x)\, dx.$$

Aðferðin sem við höfum nú lýst nefnist sneiðaaðferð. Til að beita henni fylgjum við eftirfarandi lausnarleið.

LAUSNARLEIÐ

Ákvörðun rúmmáls með sneiðaaðferðinni

1. Skoðið rúmhlutinn og ákvarðið lögun þversniðs hans. Oft er gagnlegt að teikna mynd ef engin mynd fylgir.
2. Ákvarðið formúlu fyrir flatarmál þversniðsins.
3. Heildið flatarmálsformúluna yfir viðeigandi bil til að fá rúmmálið.

Minnumst þess að í þessum undirkafla gerum við ráð fyrir að sneiðarnar séu hornréttar á x-ás. Flatarmálsformúlan er því sett fram sem fall af x og heildismörkin liggja á x-ás. Lausnarleiðin sem hér er sýnd gildir þó óháð því hvernig við veljum að sneiða rúmhlutinn.

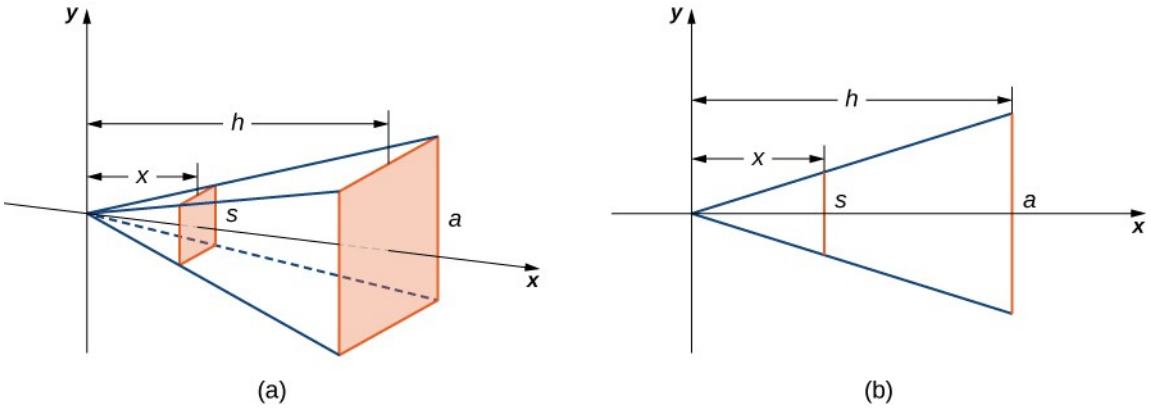
DÆMI 2.6

Útleiðsla formúlunnar fyrir rúmmál pýramída

Við vitum úr rúmfræði að formúlan fyrir rúmmál pýramída er $V = \frac{1}{3} A h$. Ef pýramídinn hefur ferningslaga grunnflöt verður formúlan $V = \frac{1}{3} a^2 h$, þar sem a táknar lengd einnar hliðar grunnflatarins. Við ætlum að nota sneiðaaðferðina til að leiða þessa formúlu út.

Lausn

Við viljum beita sneiðaaðferðinni á pýramída með ferningslaga grunnflöt. Til að setja heildið fram skoðum við pýramídann á mynd 2.14, sem liggur eftir x-ás.



Mynd 2.14 (a) Pýramídi með ferningslaga grunnflöt liggur eftir x-ásnum. (b) Tvívíð hliðarmynd af pýramídanum.

Fyrst ákvarðum við lögun þversniðs pýramídans. Grunnflöturinn er ferningur og þversniðin eru því einnig ferningar (skref 1). Nú viljum við finna formúlu fyrir flatarmál eins þessara ferningslaga þversniða. Af mynd 2.14 (b) sést að þríhyrningarnir eru einslaga og út frá hlutföllum fæst

$$\frac{s}{a}=\frac{x}{h} \text{ eða } s=\frac{a\,x}{h}.$$

Flatarmál eins ferningslaga þversniðs er því

$$A(x)=s^2=\left(\frac{a\,x}{h}\right)^2 \text{(skref 2)}.$$

Rúmmál pýramídans fæst síðan með því að heilda frá 0 til h (skref 3):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)\,dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \tfrac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \\ &= \left[\tfrac{a^2}{h^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\right]\Big|_0^h = \tfrac{1}{3}a^2h. \end{aligned}$$

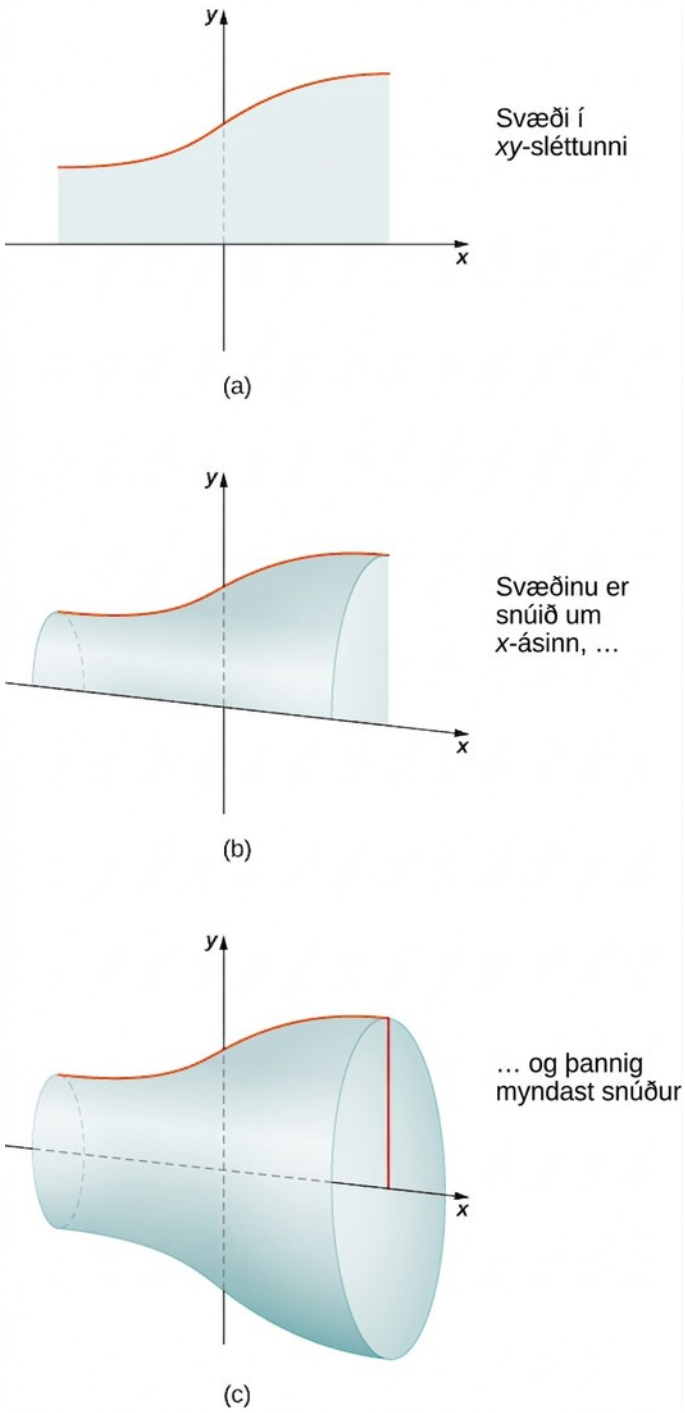
Þetta er formúlan sem við leituðum að.

STÖÐUMAT 2.6

Notið sneiðaaðferðina til að leiða út formúluna $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ fyrir rúmmál hringkeilu.

Snúðar

Þegar svæði í sléttu er snúið um línu í sömu sléttu myndast rúmhlutur sem nefnist snúður, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.15 (a) Svæðið sem er snúið um x-ásinn. (b) Þegar svæðið byrjar að snúast um ásinn myndar það snúð. (c) Snúðurinn sem fæst þegar snúningnum er lokið.

Snúðar eru algengir í vélbúnaði, til dæmis í vélarhlutum sem renndir eru í rennibekk. Í því sem eftir er af þessum undirkafla skoðum við slíka rúmhluta. Í næsta dæmi er sneiðaaðferðin notuð til að reikna rúmmál snúðs.

MARGMIÐLUN

Notið heildareiknivél á netinu til að kynnast efninu betur.

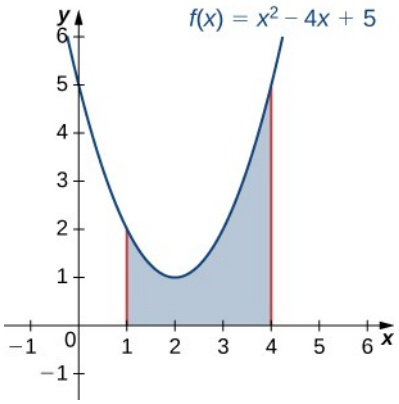
DÆMI 2.7

Notkun sneiðaaðferðarinnar til að finna rúmmál snúðs

Notið sneiðaaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af gröfum $f(x)=x^2-4x+5$, $x=1$, og $x=4$, er snúið um x-ás.

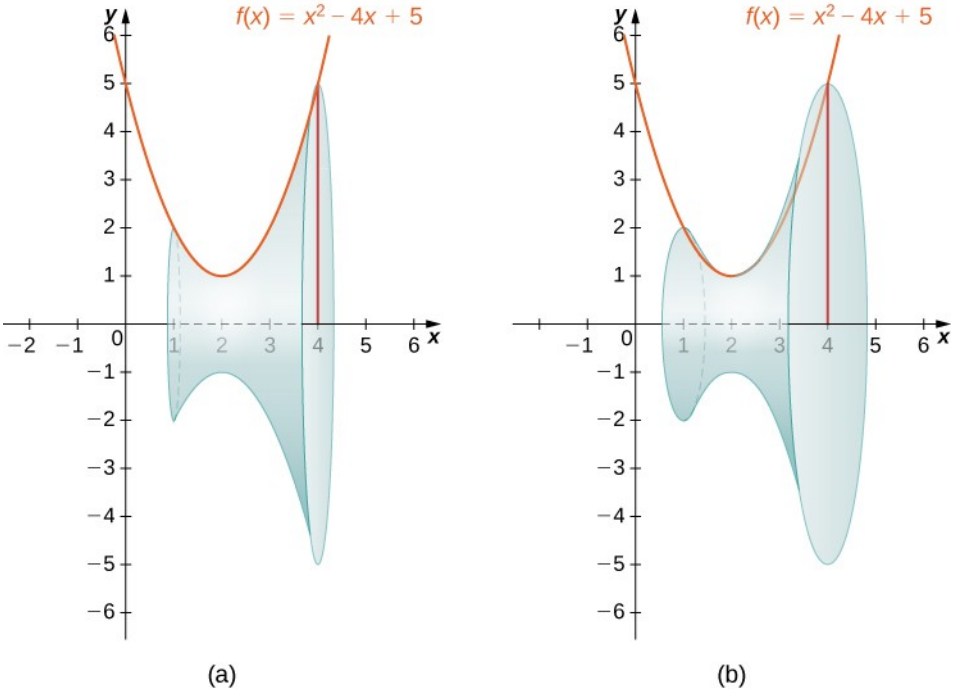
Lausn

Samkvæmt lausnarleiðinni teiknum við fyrst graf annars stigs fallsins á bilinu $[1,4]$ eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.16 Svæði sem notað er til að mynda snúð.

Næst snúum við svæðinu um x-ásinn, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.17 Tvær myndir, (a) og (b), af snúðnum sem myndast þegar svæðinu á mynd 2.16 er snúið um x-ás.

Þar sem rúmhluturinn myndaðist þegar svæðinu var snúið um x-ás, eru þversniðin hringir (skref 1). Flatarmál þversniðsins er því flatarmál hrings og geisli hringsins er $f(x)$. Notum formúluna fyrir flatarmál hrings:

$$A(x)=\pi r^2=\pi\left[f(x)\right]^2=\pi\left(x^2-4x+5\right)^2 \text{(skref 2)}.$$

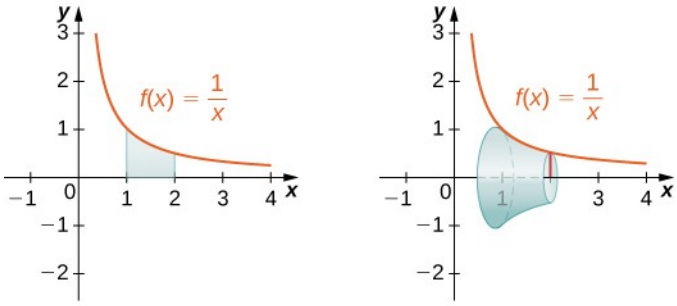
Rúmmálið er því (skref 3)

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)dx \\ &= \int_1^4 \pi\left(x^2-4x+5\right)^2 dx = \pi\int_1^4 \left(x^4-8x^3+26x^2-40x+25\right)dx \\ &= \pi\left(\tfrac{x^5}{5}-2x^4+\tfrac{26x^3}{3}-20x^2+25x\right)\Big|_1^4 = \tfrac{78}{5}\pi. \end{aligned}$$

Rúmmálið er $78\pi/5$.

STÖÐUMAT 2.7

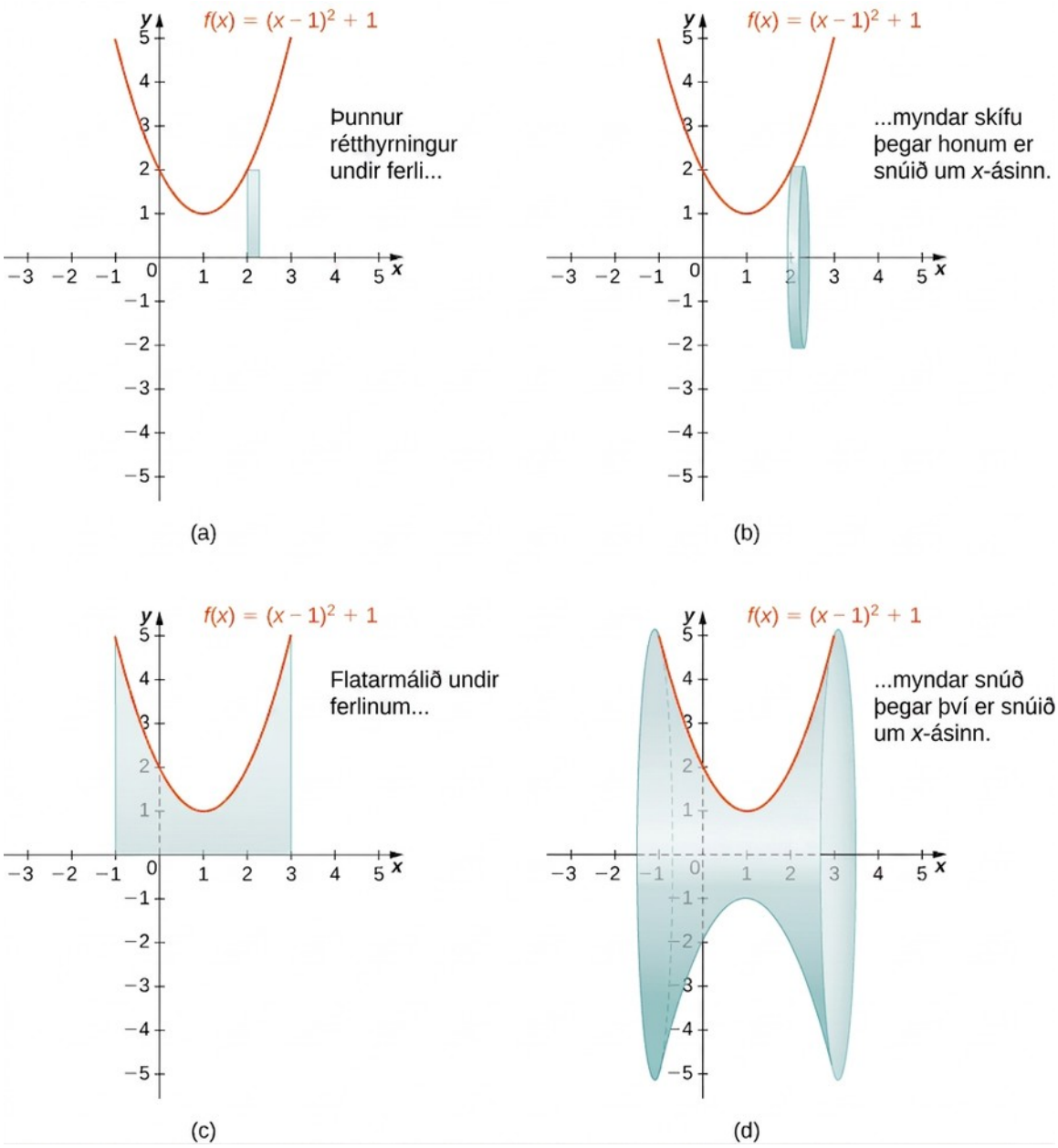
Notið sneiðaaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs fallsins $f(x)=1/x$ og x-ássins á bilinu $[1,2]$ er snúið um x-ás. Sjá eftirfarandi mynd.



(a) (b)

Skífuaðferðin

Þegar sneiðaaðferðinni er beitt á snúða er hún oft kölluð skífuaðferð því að sneiðarnar sem notaðar eru til að nálga rúmmál snúðsins eru skífur. Til að sjá þetta skulum við skoða snúðinn sem myndast þegar svæðinu milli grafs fallsins $f(x)=(x-1)^2+1$ og x-ássins á bilinu $[-1,3]$ er snúið um x-ás. Graf fallsins og dæmigerð skífa eru sýnd á mynd 2.18 (a) og (b). Snúningssvæðið og snúðurinn sem myndast eru sýnd á mynd 2.18 (c) og (d).



Mynd 2.18 (a) Þunnur rétthyrningur til að nálga flatarmálið undir ferli. (b) Dæmigerð skífa sem myndast þegar rétthyrningnum er snúið um x-ás. (c) Svæðinu undir ferlinum er snúið um x-ás, og við það myndast (d) snúðurinn.

Við leiddum rúmmálsformúluna formlega út með Riemann-summum þegar við settum fram sneiðaaðferðina. Við vitum að

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

Það eina sem greinir skífuaðferðina frá almennu sneiðaaðferðinni er að við þekkjum fyrir fram formúluna fyrir þversniðsflatarmálið: það er flatarmál hrings. Af þessu fæst eftirfarandi regla.

REGLA: SKÍFUAÐFERÐIN

Látum $f(x)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af x-ás, til vinstri af línunni $x=a$, og til hægri af línunni $x=b$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um x-ás með

$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx.$$

(2.3)

Rúmmál snúðsins sem við höfum verið að skoða (mynd 2.18) fæst með

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx \\ &= \int_{-1}^3 \pi\left[(x-1)^2+1\right]^2 dx = \pi\int_{-1}^3 \left[(x-1)^4+2(x-1)^2+1\right] dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}(x-1)^5+\frac{2}{3}(x-1)^3+x\right]\Big|_{-1}^{3} \\ &= \pi\left[\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+3\right)-\left(-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}-1\right)\right]=\frac{412\pi}{15} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

Lítum á nokkur dæmi.

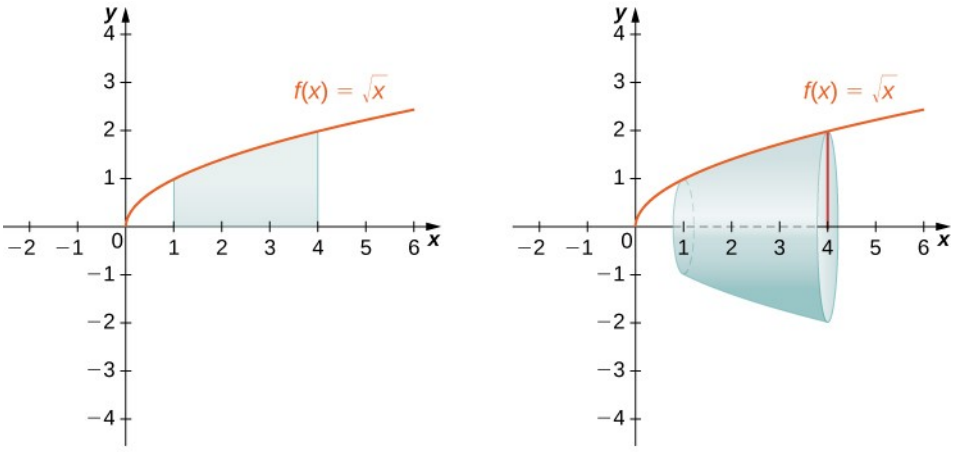
DÆMI 2.8

Notkun skífuaðferðarinnar til að finna rúmmál snúðs 1

Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs $f(x)=\sqrt{x}$ og x-ássins á bilinu $[1,4]$ er snúið um x-ás.

Lausn

Graf fallsins og snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.19 (a) Fallið $f(x)=\sqrt{x}$ á bilinu $[1,4]$. (b) Snúðurinn sem fæst með því að snúa svæðinu undir grafi $f(x)$ um x-ás.

Við höfum

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \int_1^4 x\, dx \\ &= \tfrac{\pi}{2} x^2 \Big|_1^4 = \tfrac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

Rúmmálið er $(15\pi)/2$ einingar^3.

STÖÐUMAT 2.8

Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs $f(x)=\sqrt{4-x}$ og x-ássins á bilinu $[0,4]$ er snúið um x-ás.

Hingað til hafa öll dæmin fjallað um svæði sem er snúið um x-ás, en mynda má snúð með því að snúa sléttu svæði um hvaða láréttu eða lóðréttu línu sem er. Í næsta dæmi skoðum við snúð sem myndast þegar svæði er snúið um y-ás. Skífuaðferðinni er beitt nær eins og þegar x-ás er snúningsásinn, en við setjum fallið fram sem fall af y og heildum einnig með tilliti til y. Þetta er tekið saman í eftirfarandi reglu.

REGLA: SKÍFUAÐFERÐIN FYRIR SNÚÐA UM Y-ÁSINN

Látum $g(y)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y)$, til vinstri af y-ás, að neðan af línunni $y=c$, og að ofan af línunni $y=d$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um y-ás með

$$V=\int_c^d \pi\left[g(y)\right]^2 d\,y.$$

(2.4)

Næsta dæmi sýnir hvernig þessari reglu er beitt í reynd.

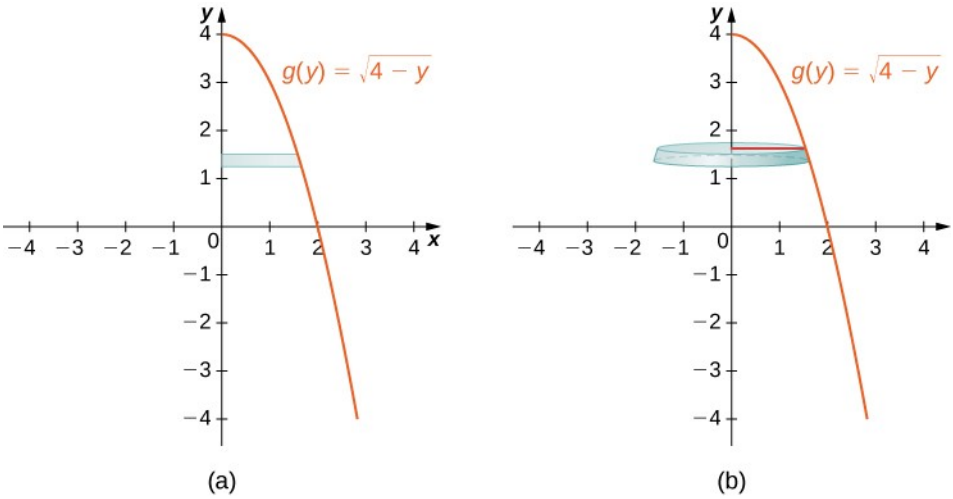
DÆMI 2.9

Notkun skífuaðferðarinnar til að finna rúmmál snúðs 2

Látum R vera svæðið sem afmarkast af grafi $g(y)=\sqrt{4-y}$ og y-ásnum á bili y-ássins sem er $[0,4]$. Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

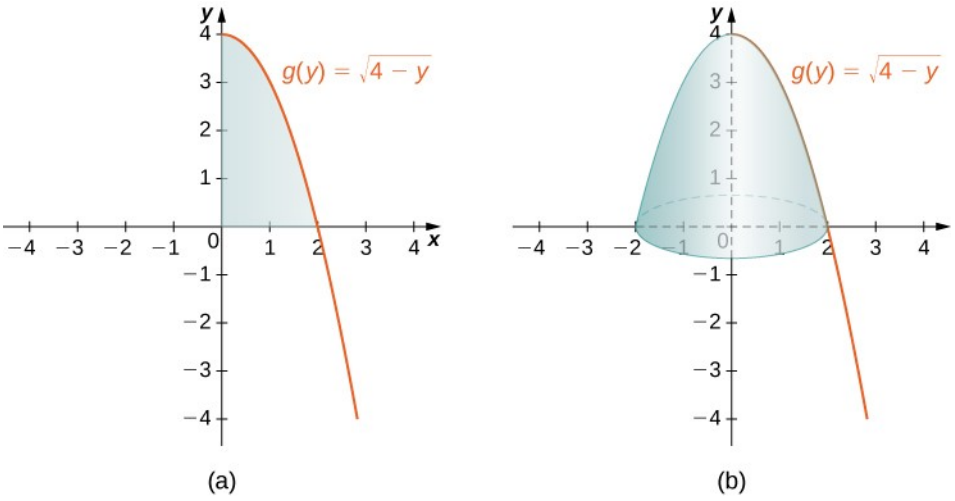
Lausn

Mynd 2.20 sýnir fallið og dæmigerða skífu sem nota má til að áætla rúmmálið. Takið eftir að þar sem fallinu er snúið um y-ás, eru skífurnar láréttar en ekki lóðréttar.



Mynd 2.20 (a) Þunnur rétthyrningur milli grafs fallsins $g(y)=\sqrt{4-y}$ og y-ássins. (b) Rétthyrningurinn myndar dæmigerða skífu þegar honum er snúið um y-ás.

Svæðið sem á að snúa og allur snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.21 (a) Svæðið vinstra megin við graf fallsins $g(y)=\sqrt{4-y}$ á y-ás á bilinu $[0,4]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ás.

Til að finna rúmmálið heildum við með tilliti til y. Þá fæst

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{4-y}\right]^2 dy = \pi \int_0^4 (4-y)dy \\ &= \pi\left[4y - \tfrac{y^2}{2}\right]\Big|_0^4 = 8\pi. \end{aligned}$$

Rúmmálið er 8π einingar^3.

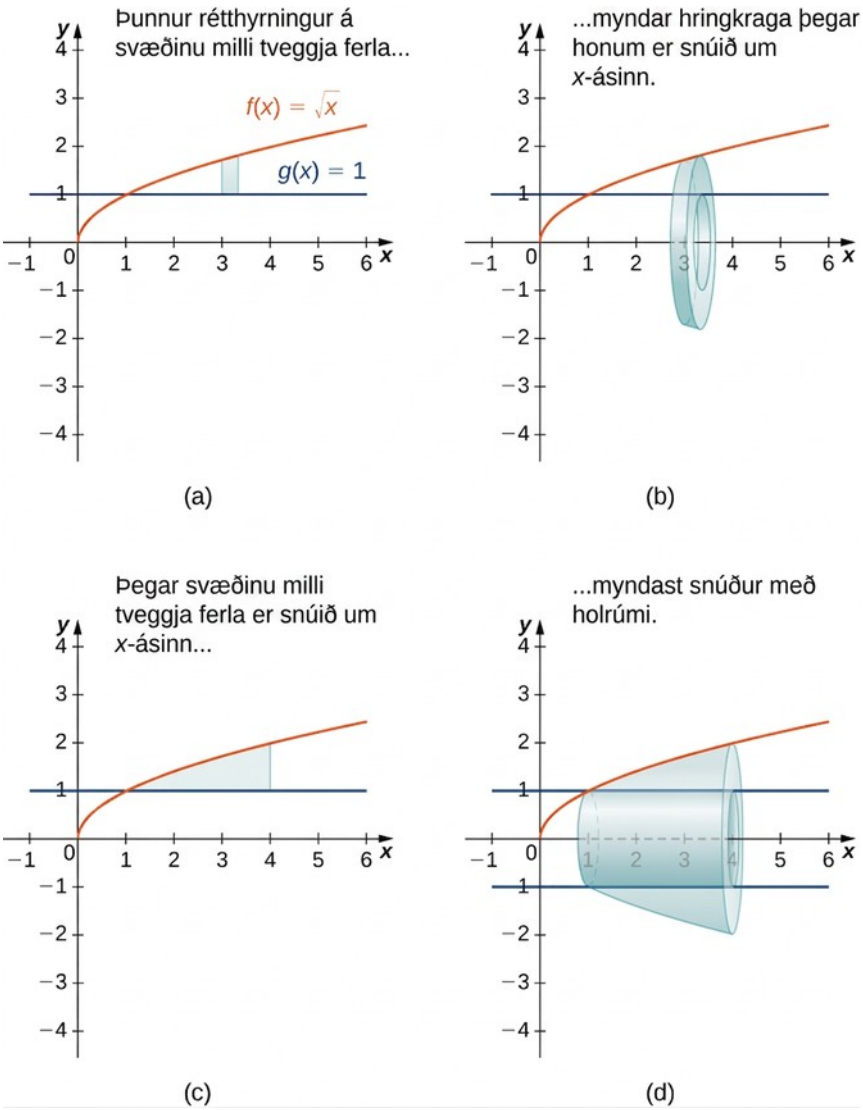
STÖÐUMAT 2.9

Notið skífuaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu milli grafs $g(y)=y$ og y-ássins á bilinu $[1,4]$ er snúið um y-ás.

Hringkragaaðferðin

Sumir snúðar hafa holrúm í miðjunni; þeir eru ekki gegnheilir alveg inn að snúningsásnum. Stundum stafar þetta einfaldlega af lögun snúningssvæðisins miðað við snúningsásinn. Í öðrum tilvikum myndast holrúm þegar snúningssvæðið er skilgreint sem svæðið milli grafa tveggja falla. Þriðja tilvikið kemur upp þegar valinn er annar snúningsás en x-ás eða y-ás.

Þegar snúður hefur holrúm í miðjunni eru sneiðarnar sem notaðar eru til að nálga rúmmálið ekki skífur heldur hringkragar (skífur með gati í miðjunni). Skoðum til dæmis svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=1$ á bilinu $[1,4]$. Þegar þessu svæði er snúið um x-ás, myndast rúmhlutur með holrúmi í miðjunni og sneiðarnar eru hringkragar. Graf fallsins og dæmigerður hringkragi eru sýnd á mynd 2.22 (a) og (b). Snúningssvæðið og rúmhluturinn sem myndast eru sýnd á mynd 2.22 (c) og (d).



Mynd 2.22 (a) Þunnur rétthyrningur á svæðinu milli tveggja ferla. (b) Dæmigerður hringkragi sem myndast þegar rétthyrningnum er snúið um x-ás. (c) Svæðið milli ferlanna á gefna bilinu. (d) Snúðurinn sem myndast.

Þversniðsflatarmálið er þá flatarmál ytri hringsins að frádregnu flatarmáli innri hringsins. Í þessu tilviki er

$$A(x)=\pi\left(\sqrt{x}\right)^2-\pi(1)^2=\pi(x-1).$$

Þá er rúmmál rúmhlutarins

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \pi(x-1)\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]\Bigg|_1^4=\frac{9}{2}\pi \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

Með því að alhæfa þetta ferli fæst hringkragaaðferðin.

REGLA: HRINGKRAGAAÐFERÐIN

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ og $g(x)$ séu samfelld, óneikvæð föll þannig að $f(x) \geq g(x)$ á $[a,b]$. Látum R tákna svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af grafi $g(x)$, til vinstri af línunni $x=a$, og til hægri af línunni $x=b$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um x-ás með

$$V=\int_a^b \pi\left[(f(x))^2-(g(x))^2\right]dx.$$

(2.5)

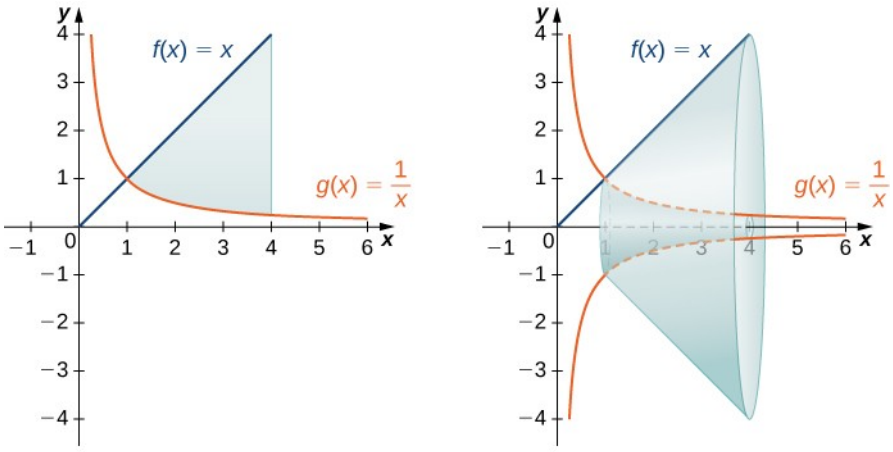
DÆMI 2.10

Notkun hringkragaaðferðarinnar

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x$ og að neðan af grafi $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,4]$ er snúið um x-ás.

Lausn

Gröf fallanna og snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.23 (a) Svæðið milli grafa fallanna $f(x)=x$ og $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,4]$. (b) Þegar svæðinu er snúið um x-ás myndast snúður með holrúmi í miðjunni.

Við höfum

$$V = \int_a^b \pi[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$$
$$= \pi\int_1^4\left[x^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}\right]\Big|_1^4 = \frac{81\pi}{4} \text{ einingar}^3.$$

STÖÐUMAT 2.10

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af gröfum $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,3]$ er snúið um x-ás.

Líkt og með skífuaðferðinni getum við einnig beitt hringkragaaðferðinni á snúða sem myndast þegar svæði er snúið um y-ásinn. Í þessu tilviki gildir eftirfarandi regla.

REGLA: HRINGKRAGAAÐFERÐIN FYRIR SNÚÐA UM Y-ÁSINN

Gerum ráð fyrir að $u(y)$ og $v(y)$ séu samfelld, óneikvæð föll þannig að $v(y)\leq u(y)$ fyrir $y\in[c,d]$. Látum Q tákna svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $u(y)$, til vinstri af grafi $v(y)$, að neðan af línunni $y=c$, og að ofan af línunni $y=d$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um y-ás með

$$V=\int_c^d \pi\left[(u(y))^2-(v(y))^2\right]dy.$$

Í stað þess að skoða dæmi um hringkragaaðferðina þar sem y-ás er snúningsásinn skoðum við nú dæmi þar sem snúningsásinn er önnur lína en hnitásarnir tveir. Sama almenna aðferðin gildir, en þið gætuð þurft að sjá fyrir ykkur hvernig lýsa á þversniðsflatarmálinu.

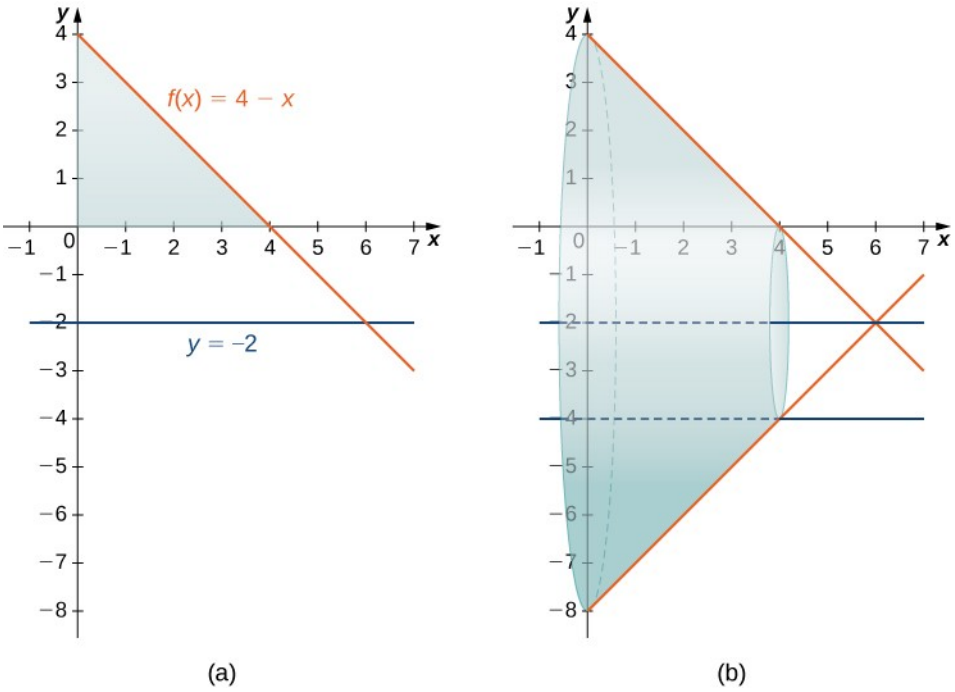
DÆMI 2.11

Hringkragaaðferðin með öðrum snúningsás

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast að ofan af $f(x)=4-x$ og að neðan af x-ás á bilinu $[0,4]$ er snúið um línuna $y=-2$.

Lausn

Graf svæðisins og snúðurinn eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.24 (a) Svæðið milli grafs fallsins $f(x)=4-x$ og x-ássins á bilinu $[0,4]$. (b) Þegar svæðinu er snúið um línuna $y=-2$ myndast snúður með sívalningslaga gati eftir honum miðjum.

Við getum ekki beitt rúmmálsformúlunni beint á þetta dæmi þar sem snúningsásinn er hvorugur hnitásanna. Við vitum þó enn að flatarmál þversniðsins er flatarmál ytri hringsins að frádregnu flatarmáli innri hringsins. Af grafi fallsins sést að geisli ytri hringsins er $f(x)+2$, sem einfaldast í

$$f(x)+2=(4-x)+2=6-x.$$

Geisli innri hringsins er $g(x)=2$. Því fæst

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi[(6-x)^2-(2)^2]\,dx \\ &= \pi\int_0^4 (x^2-12x+32)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}-6x^2+32x\right]\Big|_0^4 = \frac{160\pi}{3} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.11

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x+2$ og að neðan af x-ás á bilinu $[0,3]$ er snúið um línuna $y=-1$.

Æfingar í undirkafla 2.2

58. Leiðið út formúluna fyrir rúmmál kúlu með sneiðaaðferðinni.

59. Notið sneiðaaðferðina til að leiða út formúluna fyrir rúmmál keilu.

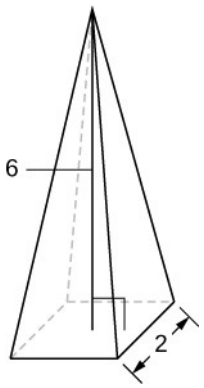
60. Notið sneiðaaðferðina til að leiða út formúluna fyrir rúmmál fjórflötungs með hliðarlengd a.

61. Notið skífuaðferðina til að leiða út formúluna fyrir rúmmál trapísustrendings.

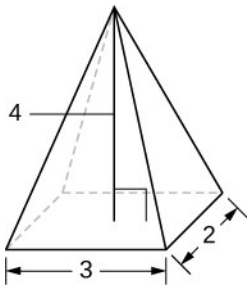
62. Útskýrið hvenær nota á skífuaðferðina og hvenær hringkragaaðferðina. Hvenær má nota hvora aðferðina sem er?

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna dæmigerða sneið og finna rúmmál rúmhlutarins með sneiðaaðferðinni.

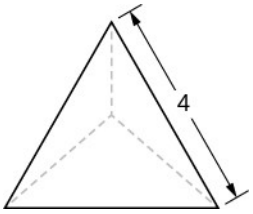
63. Pýramídi með hæðina 6 einingar og ferningslaga grunnflöt með hliðarlengdina 2 einingar, eins og sýnt er hér.



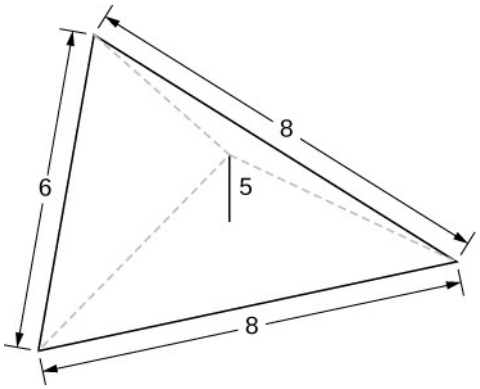
64. Pýramídi með hæðina 4 einingar og rétthyrndan grunnflöt með lengdina 2 einingar og breiddina 3 einingar, eins og sýnt er hér.



65. Fjórflötungur með grunnflöt sem hefur 4 eininga langar hliðar, eins og sýnt er hér.

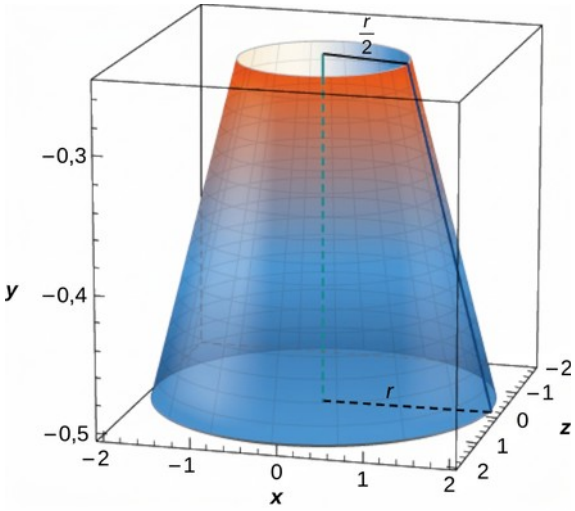


66. Pýramídi með hæðina 5 einingar og grunnflöt sem er jafnarma þríhyrningur með hliðarlengdirnar 6 einingar og 8 einingar, eins og sýnt er hér.



2

67. Úr efri hluta keilu með radíusinn r og hæðina h er skorin minni keila með radíusinn $r/2$ og hæðina $h/2$, eins og sýnt er hér. Rúmhluturinn sem eftir stendur nefnist keilustúfur.



Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna útlínur rúmhlutarins og finna rúmmál hans með sneiðaaðferðinni.

68. Grunnflöturinn er hringur með radíus a. Sneiðar hornréttar á grunnflötinn eru ferningar.

69. Grunnflöturinn er þríhyrningur með hornpunkta $(0,0),(1,0)$, og $(0,1)$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

70. Grunnflöturinn er svæðið undir fleygboganum $y=1-x^2$ í fyrsta fjórðungi. Sneiðar hornréttar á xy-sléttuna og samsíða y-ásnum eru ferningar.

71. Grunnflöturinn er svæðið undir fleygboganum $y=1-x^2$ og fyrir ofan x-ás. Sneiðar hornréttar á y-ás eru ferningar.

72. Grunnflöturinn er svæðið sem afmarkast af $y=x^2$ og $y=9$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru rétthyrndir jafnarma þríhyrningar. Skurðlína einnar þessara sneiða við grunnflötinn er skammhlið þríhyrningsins.

73. Grunnflöturinn er svæðið milli $y=x$ og $y=x^2$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Notið síðan skífuaðferðina til að finna rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um x-ásinn.

74.

$$x+y=8, x=0, \text{og } y=0$$

75.

$$y=2x^2, x=0, x=4, \text{og } y=0$$

76.

$$y=e^x+1, x=0, x=1, \text{og } y=0$$

77.

$$y=x^4, x=0, \text{og } y=1 \text{ þegar } x\geq 0$$

78.

$$y=\sqrt{x}, x=0, x=4, \text{og } y=0$$

79.

$$y=\sin x, y=\cos x, \text{og } x=0$$

80.

$$y=\frac{1}{x}, x=2, \text{og } y=3$$

81.

$$x^2-y^2=9 \text{ og } x+y=9, y=0 \text{ og } x=0$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Finnið síðan rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

82.

$$y=4-\frac{1}{2}x, x=0, \text{og } y=0$$

83.

$$y=2x^3, x=0, x=1, \text{og } y=0$$

84.

$$y=3x^2, x=0, \text{og } y=3$$

85.

$$y=\sqrt{4-x^2}, y=0, \text{og } x=0$$

86.

$$y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}, x=0, x=3, \text{og } y=0$$

87.

$$x=\sec(y) \text{ og } y=\frac{\pi}{4}, y=0 \text{ og } x=0$$

2

88.

$$y=\frac{1}{x+1}, x=0,, x=2, \text{og } y=0$$

89.

$$y=4-x, y=x, \text{og } x=0$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Finnið síðan rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um x-ásinn.

90.

$$y=x+2, y=x+6, x=0, \text{og } x=5$$

91.

$$y=x^2 \text{ og } y=x+2$$

92.

$$x^2=y^3 \text{ og } x^3=y^2$$

93.

$$y=4-x^2 \text{ og } y=2-x$$

94. [T] $y=\cos\ x, y=e^{-x}, x=0,\ \text{og}\ \ x=1{,}2927$

95.

$$y=\sqrt{x} \text{ og } y=x^2$$

96.

$$y=\sin x, y=5\sin x, x=0 \text{ og } x=\pi$$

97.

$$y=\sqrt{1+x^2} \text{ og } y=\sqrt{4-x^2}$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna svæðið sem ferlarnir afmarka. Notið síðan hringkragaaðferðina til að finna rúmmál rúmhlutarins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

98.

$$y=\sqrt{x}, x=4, \text{og } y=0$$

99.

$$y=x+2, y=2x-1, \text{og } x=0$$

100.

$$y=\sqrt[3]{x} \text{ og } y=x^3$$

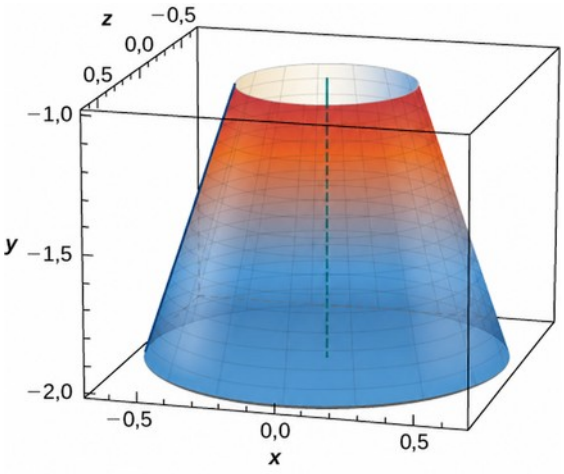
101.

$$x=e^{2y}, x=y^2, y=0, \text{og } y=\ln(2)$$

102.

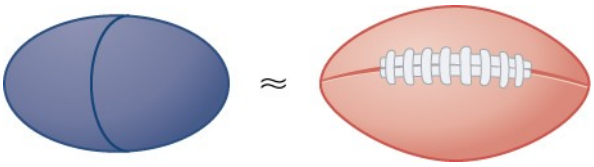
$$x=\sqrt{9-y^2}, x=e^{-y}, y=0, \text{og } y=3$$

103. Jógúrtdósir geta verið í laginu eins og keilustúfar. Snúið línunni $y=\frac{1}{m}x$ um y-ásinn til að finna rúmmálið milli $y=a$ og $y=b$.



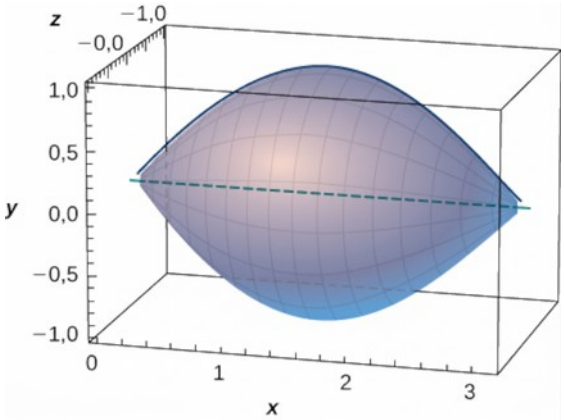


104. Snúið sporbaugnum $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ um x-ásinn til að nálga rúmmál amerísks fótbolta, eins og sýnt er hér.

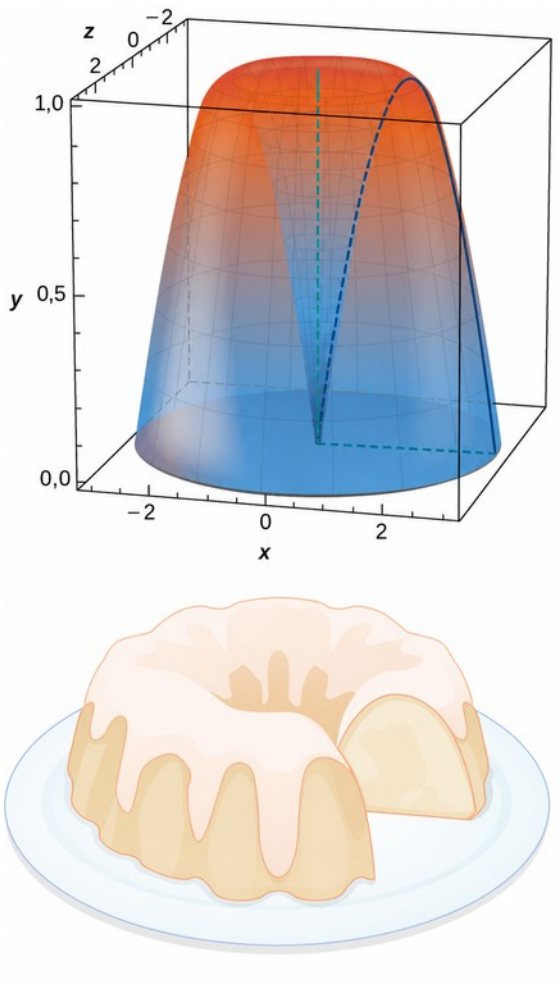


105. Snúið sporbaugnum $\left(x^2/a^2\right)+\left(y^2/b^2\right)=1$ um y-ásinn til að nálga rúmmál amerísks fótbolta.

106. Betri nálgun á rúmmáli amerísks fótbolta fæst með snúðnum sem myndast þegar $y=\sin x$ er snúið um x-ásinn frá $x=0$ til $x=\pi$. Hvert er rúmmál þessa líkans af fótboltanum, eins og sýnt er hér?



107. Hvert er rúmmál Bundt-hringkökunnar sem fæst með því að snúa $y=\sin x$ um y-ásinn frá $x=0$ til $x=\pi$?

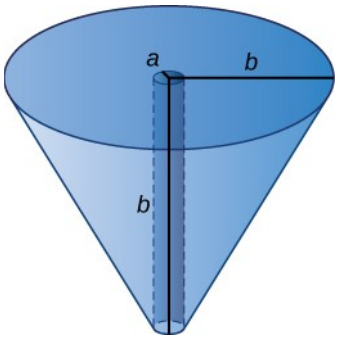


Í eftirfarandi dæmum skuluð þið finna rúmmál rúmhlutarins sem lýst er.

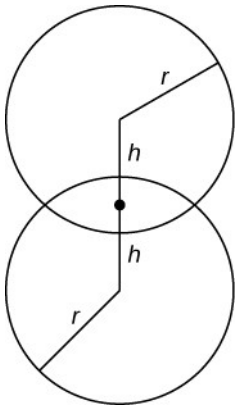
108. Grunnflöturinn er svæðið milli $y = x$ og $y = x^2$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

109. Grunnflöturinn er svæðið sem afmarkast af almenna sporbaugnum $\left(x^2/a^2\right)+\left(y^2/b^2\right)=1$. Sneiðar hornréttar á x-ásinn eru hálfhringir.

110. Borið gat með radíus a eftir ási réttrar keilu sem hefur hæðina b og radíusinn b. Gatið er borað gegnum grunnflöt keilunnar eins og sýnt er hér.

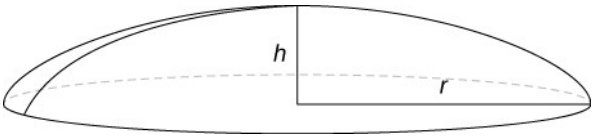


111. Finnið rúmmál sameiginlegs hluta tveggja kúlna með radíus r þegar fjarlægðin milli miðpunkta þeirra er $2h$, eins og sýnt er hér.

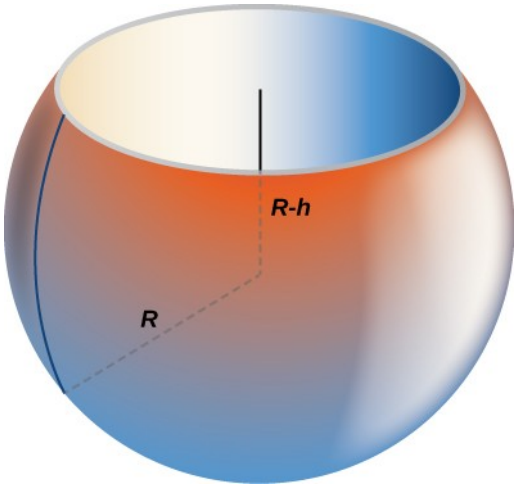


2

112. Finnið rúmmál kúluhatts með hæðina h og radíusinn r þar sem $h<r$, eins og sýnt er hér.



113. Finnið rúmmál kúlu með radíus R þegar kúluhattur með hæð h hefur verið fjarlægður ofan af henni, eins og sýnt er hér.



2.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki

NÁMSMARKMIÐ

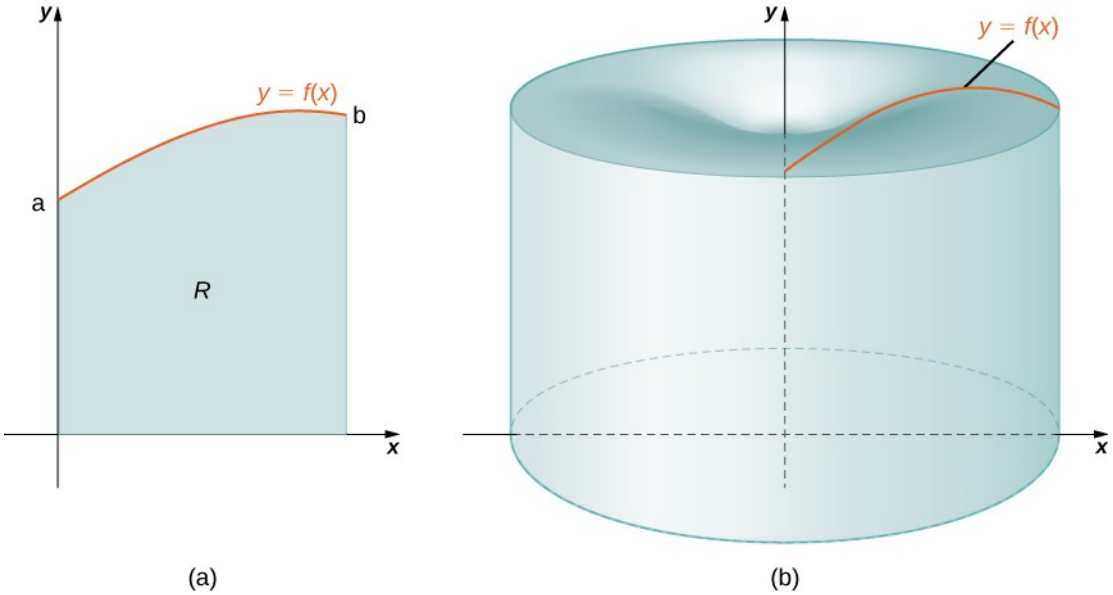
- 2.3.1 Reikna rúmmál snúðs með hylkjaaðferðinni.
- 2.3.2 Bera saman mismunandi aðferðir til að reikna rúmmál snúðs.

Í þessum undirkafla skoðum við hylkjaaðferðina, síðustu aðferðina sem við fjöllum um til að reikna rúmmál snúðs. Hana má nota á sömu gerðir snúða og skífu- og hringkragaaðferðirnar. Með skífu- og hringkragaaðferðunum er heildað eftir hnitás sem er samsíða snúningsásnum. Með hylkjaaðferðinni er hins vegar heildað eftir hnitás sem er hornréttur á snúningsásinn. Þegar föllin eru flóknari getur skipt miklu máli að geta valið heildunarbreytuna. Lögun

snúðsins getur einnig gert hylkjaaðferðina hentugri en hringkragaaðferðina. Í lok undirkaflans rifjum við upp allar aðferðirnar sem við höfum lært til að finna rúmmál. Við gefum líka nokkur ráð um hvaða aðferð hentar best hverju sinni.

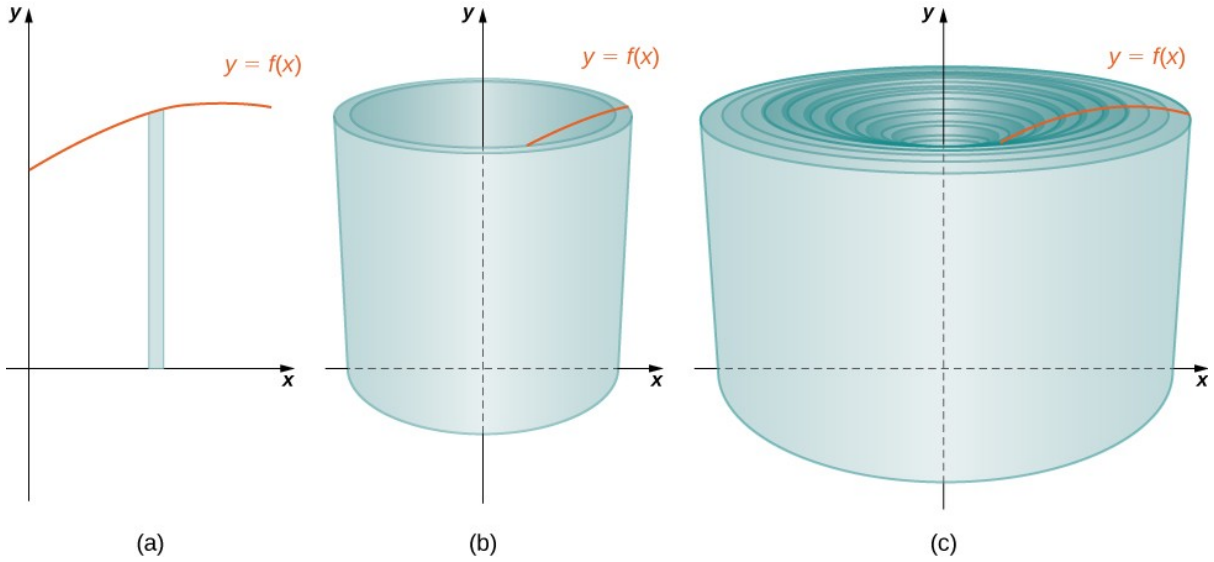
Hylkjaaðferðin

Við vinnum enn á ný með snúð. Eins og áður skilgreinum við svæði R, sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $y=f(x)$, að neðan af x-ás, og til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í þeirri röð, eins og sýnt er á mynd 2.25 (a). Síðan snúum við svæðinu um y-ásinn, eins og sýnt er á mynd 2.25 (b). Þetta er ólíkt því sem við höfum áður gert. Hingað til höfum við snúið svæðum sem skilgreind eru með föllum af x um x-ás eða línu sem er samsíða honum.



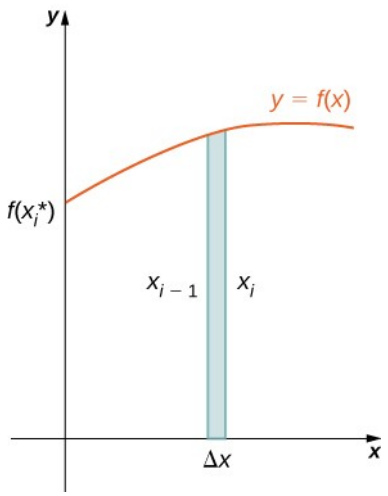
Mynd 2.25 (a) Svæði sem afmarkast af grafi falls af x. (b) Snúðurinn sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ás.

Eins og oft áður skiptum við bilinu $[a,b]$ með reglulegri skiptingu, $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ og veljum fyrir $i=1,2,\ldots,n$, punkt $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$. Því næst myndum við rétthyrning yfir bilinu $[x_{i-1},x_i]$ með hæð $f(x_i^*)$ og breidd Δx. Dæmigerður rétthyrningur er sýndur á mynd 2.26 (a). Þegar þessum rétthyrningi er snúið um y-ásinn fæst sívalningshylki í stað skífu eða hringkraga, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.26 (a) Dæmigerður rétthyrningur. (b) Þegar rétthyrningnum er snúið um y-ás, myndast sívalningshylki. (c) Þegar öll hylkin eru sett saman fæst nálgun á upprunalega snúðnum.

Til að reikna rúmmál hylkisins skoðum við mynd 2.27.



Mynd 2.27 Rúmmál hylkisins reiknað.

Hylkið er sívalningur, svo að rúmmál þess er þversniðsflatarmálið margfaldað með hæð sívalningsins. Þversniðin eru hringkragar (hringlaga svæði, í raun hringir með gati í miðjunni) með ytri geisla x_i og innri geisla x_{i-1}. Þversniðsflatarmálið er því $\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2$. Hæð sívalningsins er $f\left(x_i^*\right)$. Þá er rúmmál hylkisins

$$\begin{aligned} V_{\text{shell}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\,(x_i + x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\tfrac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

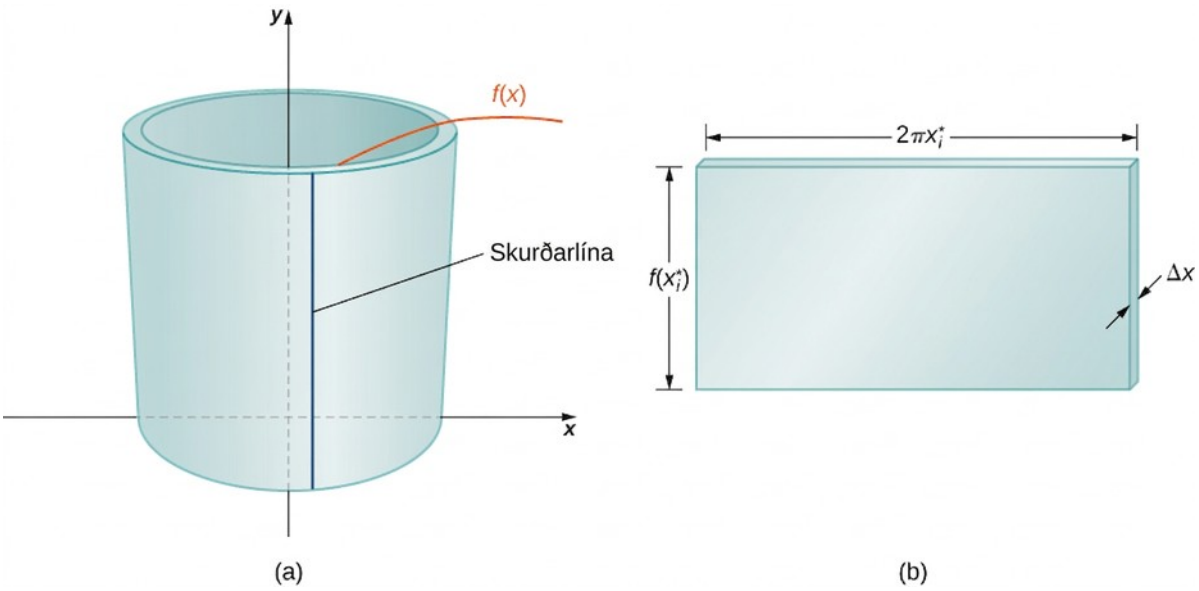
Athugið að $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, og því fæst

$$V_{\text{hylki}} = 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x.$$

Enn fremur er $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ bæði miðpunktur bilsins $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ og meðalgeisli hylkisins, sem nálga má með x_i^*. Þá fæst

$$V_{\text{hylki}} \approx 2\pi f\left(x_i^*\right) x_i^* \Delta x.$$

Önnur leið til að sjá þetta er að skera hylkið lóðrétt og opna það síðan þannig að úr verði flöt plata (mynd 2.28).



Mynd 2.28 (a) Skerið dæmigert hylki lóðrétt. (b) Opnið hylkið þannig að úr verði flöt plata.

Í raun er ytri geisli hylkisins stærri en innri geislinn og því væri aftari brún plötunnar örlítið lengri en fremri brún hennar. Hins vegar má nálga útflatta hylkið með flatri plötu sem hefur hæðina $f\left(x_i^*\right)$, breiddina $2\pi x_i^*$, og þykktina Δx (mynd 2.28). Rúmmál hylkisins er þá um það bil jafnt rúmmáli flötu plötunnar. Ef við margföldum saman hæð, breidd og þykkt plötunnar fáum við

$$V_{\text{hylki}} \approx f\left(x_i^*\right)\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x,$$

sem er sama formúla og við fengum áður.

Til að reikna rúmmál alls snúðsins leggjum við saman rúmmál allra hylkjanna og fáum

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \left(2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right) \Delta x \right).$$

Hér höfum við aðra Riemann-summu, nú fyrir fallið $2\pi x f(x)$. Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$ fæst

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\pi x_i^* f\left(x_i^*\right) \Delta x \right) = \int_a^b \left(2\pi x f(x) \right) dx.$$

Þetta leiðir til eftirfarandi reglu um hylkjaaðferðina.

REGLA: HYLKJAAÐFERÐIN

Látum $f(x)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)$, að neðan af x-ás, til vinstri af línunni $x = a$, og til hægri af línunni $x = b$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn með

$$V = \int_a^b \left(2\pi x f(x) \right) dx.$$

(2.6)

Skoðum nú dæmi.

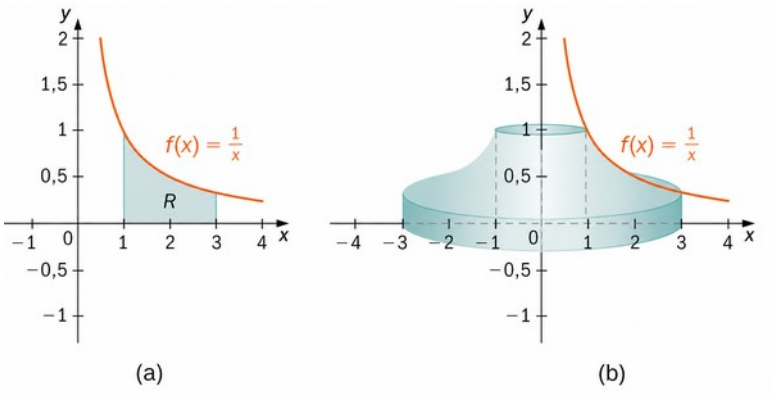
DÆMI 2.12

Hylkjaaðferðin 1

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x) = 1/x$ og að neðan af x-ás á bilinu $[1, 3]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Lausn

Fyrst teiknum við svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.29 (a) Svæðið R undir grafi $f(x)=1/x$ á bilinu $[1,3]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx \\ &= \int_1^3 \left(2\pi x\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx \\ &= \int_1^3 2\pi\ dx = 2\pi x|_1^3 = 4\pi \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.12

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[1,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

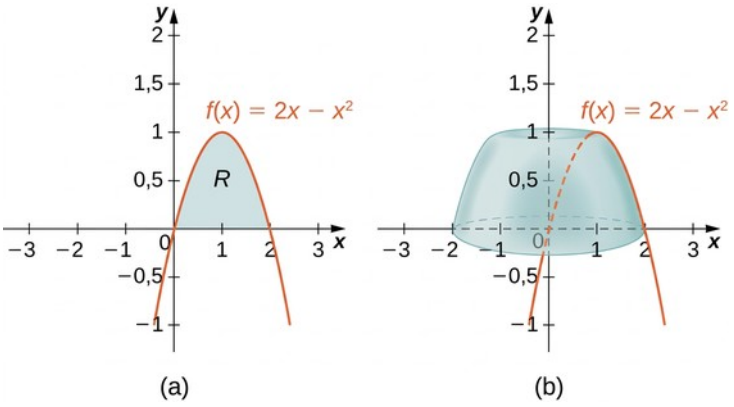
DÆMI 2.13

Hylkjaaðferðin 2

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=2x-x^2$ og að neðan af x-ás á bilinu $[0,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Lausn

Teiknum fyrst svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.30 (a) Svæðið R undir grafi $f(x)=2x-x^2$ á bilinu $[0,2]$. (b) Snúðurinn sem fæst þegar R er snúið um y-ás.

Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx \\ &= \int_0^2 (2\pi x(2x-x^2))\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2-x^3)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.13

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=3x-x^2$ og að neðan af x-ás á bilinu $[0,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Líkt og skífu- og hringkragaaðferðirnar má nota hylkjaaðferðina á snúða um x-ás, þegar heilda á með tilliti til y. Samsvarandi regla fyrir slíka snúða fer hér á eftir.

REGLA: HYLKJAAÐFERÐIN FYRIR SNÚÐA UM X-ÁSINN

Látum $g(y)$ vera samfellt og óneikvætt fall. Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y)$, til vinstri af y-ás, að neðan af línunni $y=c$, og að ofan af línunni $y=d$. Þá fæst rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um x-ás með

$$V=\int_c^d (2\pi y\, g(y))\,dy.$$

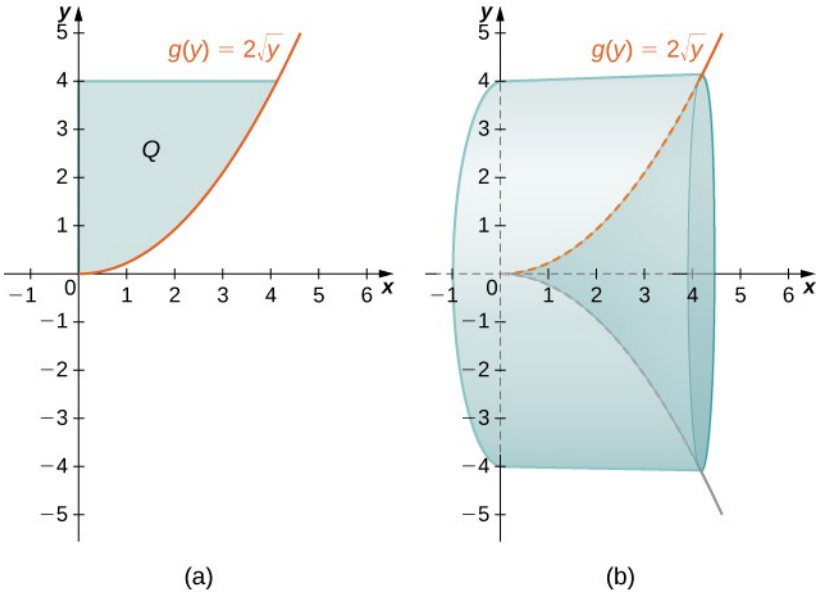
DÆMI 2.14

Hylkjaaðferðin fyrir snúð um x-ásinn

Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y)=2\sqrt{y}$ og til vinstri af y-ás þegar $y\in[0,4]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um x-ásinn.

Lausn

Fyrst teiknum við svæðið Q og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.31 (a) Svæðið Q vinstra megin við fallið $g(y)$ á bilinu $[0,4]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar Q er snúið um x-ás.

Merkjum skyggða svæðið Q. Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d (2\pi y\, g(y))\, dy \\ &= \int_0^4 (2\pi y (2\sqrt{y}))\, dy = 4\pi \int_0^4 y^{3/2}\, dy \\ &= 4\pi \left[\frac{2y^{5/2}}{5}\right]\Big|_0^4 = \frac{256\pi}{5} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.14

Skilgreinum Q sem svæðið sem afmarkast til hægri af grafi $g(y) = 3/y$ og til vinstri af y-ás þegar $y \in [1,3]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar Q er snúið um x-ás.

Í næsta dæmi skoðum við snúð sem myndast þegar svæði undir grafi falls er snúið um aðra línu en hnitásana. Til að setja dæmið fram þurfum við að rifja upp hvernig hylkjaaðferðin var leidd út. Áður fundum við að rúmmál eins hylkis fæst með

$$\begin{aligned} V_{\text{shell}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\tfrac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Þetta byggðist á hylki með ytri geisla x_i og innri geisla x_{i-1}. Ef svæðinu er hins vegar snúið um aðra línu en y-ás, verða ytri og innri geislinn aðrir. Gerum til dæmis ráð fyrir að svæðinu

sé snúið um línuna $x=-k$, þar sem k er jákvæður fasti. Þá er ytri geisli hylkisins x_i+k og innri geislinn $x_{i-1}+k$. Ef við setjum þessar stærðir inn í rúmmálsformúluna sjáum við að ef svæði í sléttu er snúið um línuna $x=-k$, fæst rúmmál hylkis með

$$\begin{aligned} V_{\text{shell}} &= 2\pi f(x_i^*)\left(\tfrac{(x_i+k)+(x_{i-1}+k)}{2}\right)((x_i+k)-(x_{i-1}+k)) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\left(\tfrac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)+k\right)\Delta x. \end{aligned}$$

Eins og áður tökum við eftir að $\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}$ er miðpunktur bilsins $\left[x_{i-1},x_i\right]$ og nálga má hann með x_i^*. Rúmmál hylkisins er þá um það bil

$$V_{\text{hylki}} \approx 2\pi\left(x_i^*+k\right)f\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Afgangurinn af útleiðslunni er eins og áður og við fáum

$$V=\int_a^b \left(2\pi(x+k)f(x)\right)dx.$$

Svæðinu mætti einnig snúa um aðrar láréttar eða lóðréttar línur, svo sem lóðrétta línu í hægra hálfplaninu. Í hverju tilviki þarf að laga rúmmálsformúluna að aðstæðum. Nánar tiltekið þarf að skipta x-lið í heildinu út fyrir segð sem táknar geisla hylkis. Eftirfarandi dæmi sýnir hvernig það er gert.

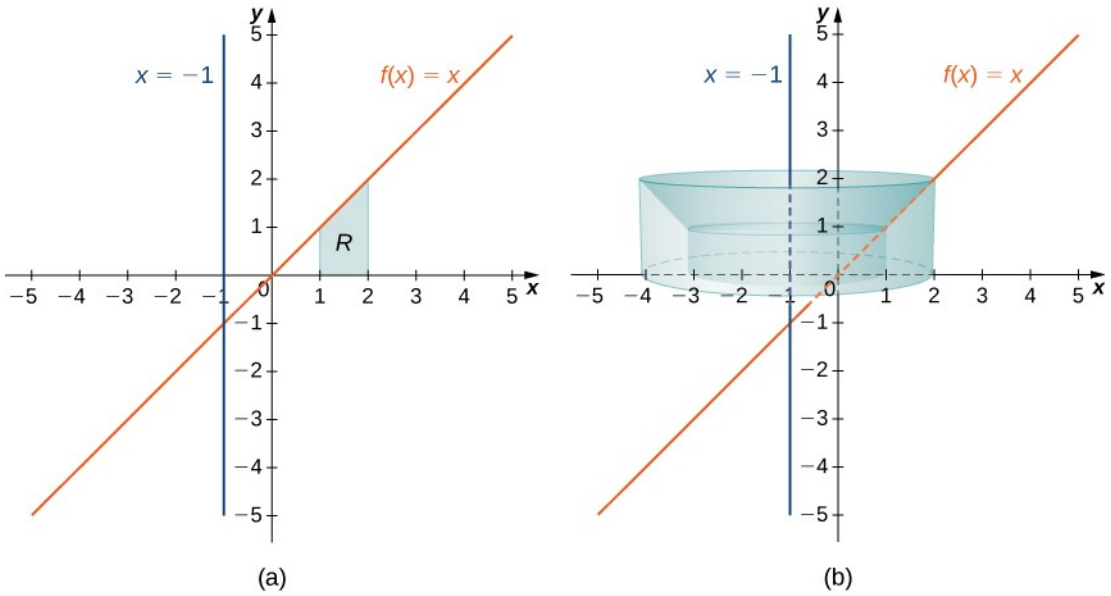
DÆMI 2.15

Snúningur svæðis um línu

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x$ og að neðan af x-ás á bilinu $[1,2]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um línuna $x=-1$.

Lausn

Teiknum fyrst svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.32 (a) Svæðið R milli grafs $f(x)$ og x-ássins á bilinu $[1,2]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um línuna $x=-1$.

Athugið að radíus hylkisins er $x+1$. Rúmmál snúðsins fæst þá með

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 (2\pi(x+1)f(x))\,dx \\ &= \int_1^2 (2\pi(x+1)x)\,dx = 2\pi\int_1^2 (x^2+x)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{23\pi}{3} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.15

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x^2$ og að neðan af x-ás á bilinu $[0,1]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um línuna $x=-2$.

Í síðasta dæmi þessa undirkafla skoðum við rúmmál snúðs sem myndast úr svæði sem afmarkast af gröfum tveggja falla.

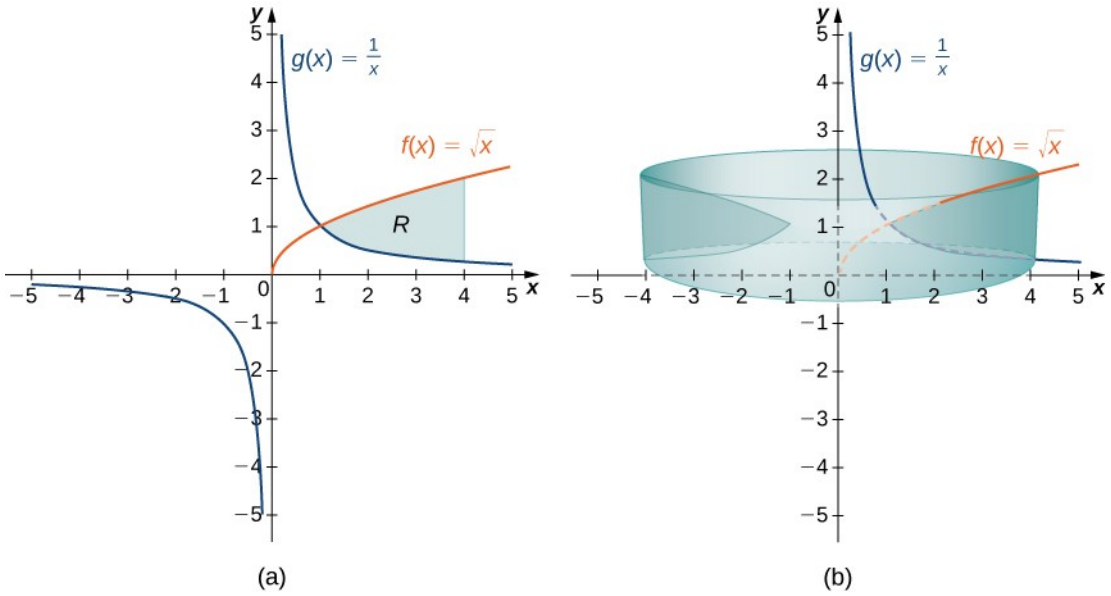
DÆMI 2.16

Svæði afmarkað af gröfum tveggja falla

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=1/x$ á bilinu $[1,4]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Lausn

Teiknum fyrst svæðið R og tilheyrandi snúð, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 2.33 (a) Svæðið R milli grafa fallanna $f(x)$ og $g(x)$ á bilinu $[1,4]$. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Athugið að snúningsásinn er y-ás, og því er geisli hylkisins einfaldlega x. Ekki þarf að breyta x-lið heildisstofnsins. Hæð hylkisins er hins vegar $f(x)-g(x)$, og því þarf í þessu tilviki að breyta $f(x)$-lið heildisstofnsins. Rúmmál snúðsins fæst því með

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 (2\pi x(f(x)-g(x)))\,dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi x\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\right)dx = 2\pi\int_1^4 (x^{3/2}-1)\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2x^{5/2}}{5}-x\right]\Big|_1^4 = \frac{94\pi}{5} \text{ einingar}^3. \end{aligned}$$

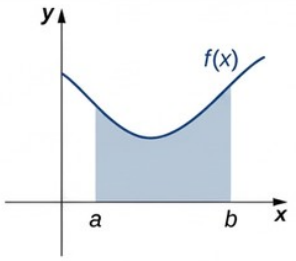
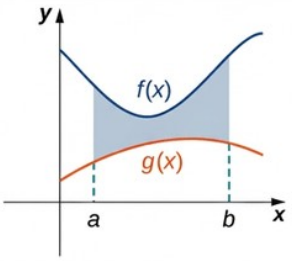
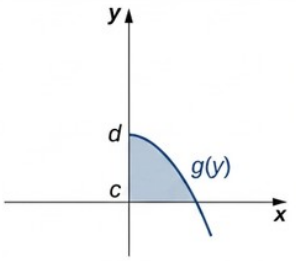
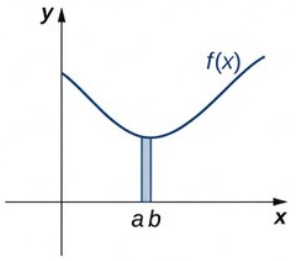
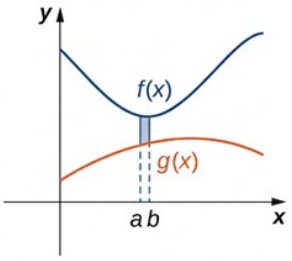
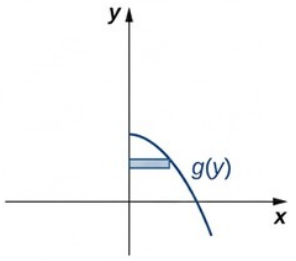
STÖÐUMAT 2.16

Skilgreinum R sem svæðið sem afmarkast að ofan af grafi $f(x)=x$ og að neðan af grafi $g(x)=x^2$ á bilinu $[0,1]$. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um y-ás.

Hvaða aðferð eigum við að nota?

Við höfum kynnst nokkrum aðferðum til að finna rúmmál snúðs, en hvernig vitum við hvaða aðferð á að nota? Valið ræðst oft af því hvaða heildi er auðveldast að reikna. Mynd 2.34 lýsir mismunandi aðferðum fyrir snúða um x-ás. Útbúið hliðstæða töflu fyrir snúða um y-ás.

Samanburður á aðferðum til að finna rúmmáls snúðs um x-ásinn

Samanburður	Skífuaðferð	Skífuhringjaaðferð	Hylkjaaðferð
Rúmmálsformúla	$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)\,dx$	$V = \int_c^d 2\pi y\,g(y)\,dy$
Snúður	Ekkert holrúm í miðjunni	Holrúm í miðjunni	Með eða án holrúms í miðjunni
Bil sem skipt er niður	$[a, b]$ á x-ás	$[a, b]$ á x-ás	$[c, d]$ á y-ás
Rétthyrningur	Lóðréttur	Lóðréttur	Láréttur
Dæmigert svæði			
Dæmigert stak			

Mynd 2.34

Skoðum tvö verkefni til viðbótar og ákveðum hvaða aðferð hentar best til að leysa þau.

DÆMI 2.17

Hentugasta aðferðin valin

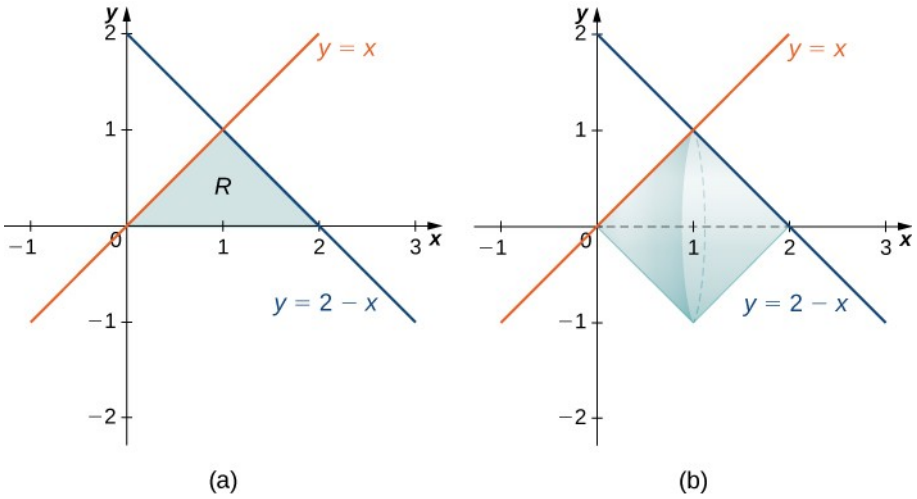
Veljið í hverju verkefni hér á eftir hentugustu aðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar gefna svæðinu er snúið um x-ás, og setjið upp heildið fyrir rúmmálið en reiknið það ekki.

a. Svæðið sem afmarkast af gröfunum $y = x$, $y = 2 - x$, og x-ás.

b. Svæðið sem afmarkast af grafinu $y = 4x - x^2$ og x-ás.

Lausn

a. Teiknum fyrst svæðið og snúðinn eins og sýnt er.



Mynd 2.35 (a) Svæðið R sem afmarkast af tveimur línum og x-ás. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um x-ás.

Ef við viljum heilda með tilliti til x, þarf að skipta heildinu í tvo hluta, því mismunandi föll afmarka svæðið á bilunum $[0,1]$ og $[1,2]$. Með skífuaðferðinni fengjum við þá

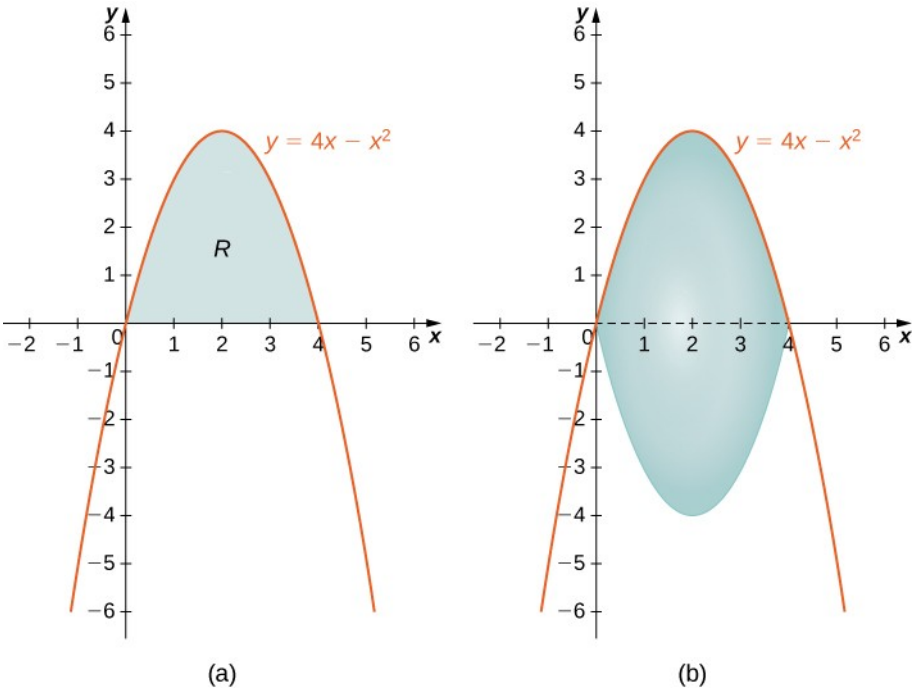
$$V = \int_0^1 \left(\pi x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\pi (2-x)^2\right) dx.$$

Ef við notuðum hylkjaaðferðina í staðinn lýstum við ferlunum með föllum af y og þá fengist

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi y\,[(2-y)-y])dy \\ &= \int_0^1 (2\pi y\,[2-2y])dy. \end{aligned}$$

Hvorugt heildið er sérlega erfitt. Hylkjaaðferðin krefst þó aðeins eins heildis og heildisstofninn þarf minni einföldun. Því er líklega best að velja hylkjaaðferðina í þessu tilviki.

b. Teiknum fyrst svæðið og snúðinn eins og sýnt er.



Mynd 2.36 (a) Svæðið R milli ferilsins og x-ássins. (b) Snúðurinn sem myndast þegar R er snúið um x-ás.

Þegar svæðið er skoðað sést að erfitt væri að skilgreina láréttan rétthyrning, því sama fall afmarkar svæðið bæði til vinstri og hægri. Því getum við útilokað hylkjaaðferðina. Snúðurinn hefur ekkert holrúm í miðjunni og því má nota skífuaðferðina. Þá fæst

$$V = \int_0^4 \pi \left(4x - x^2\right)^2 dx.$$

STÖÐUMAT 2.17

Veljið hentugustu aðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar gefna svæðinu er snúið um x-ás, og setjið upp heildið fyrir rúmmálið en reiknið það ekki: svæðið sem afmarkast af gröfum $y = 2 - x^2$ og $y = x^2$.

Æfingar í undirkafla 2.3

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu milli ferlanna er snúið um gefinn ás. Notið bæði hylkjaaðferðina og hringkragaaðferðina. Notið tölvutækni til að teikna gröf fallanna og teiknið dæmigerða sneið í höndunum.

114. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y = 3x$, $x = 0$, og $y = 3$ er snúið um y-ás.

115. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y = 3x$, $y = 0$, og $x = 3$ er snúið um y-ás.

116. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y = 3x$, $y = 0$, og $y = 3$ er snúið um x-ás.

117. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=3x$, $y=0$, og $x=3$ er snúið um x-ás.

118. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=2x^3$, $y=0$, og $x=2$ er snúið um y-ás.

119. [T] Svæðinu sem afmarkast af ferlunum $y=2x^3$, $y=0$, og $x=2$ er snúið um x-ás.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota hylkjaaðferðina til að finna rúmmál gefnu snúðanna. Athugið að svæðin sem snúið er liggja milli ferilsins og x-ássins og þeim er snúið um y-ás.

2

120.

$$y=1-x^2, x=0, \text{og } x=1$$

121.

$$y=5x^3, x=0, \text{og } x=1$$

122.

$$y=\frac{1}{x}, x=1, \text{og } x=100$$

123.

$$y=\sqrt{1-x^2}, x=0, \text{og } x=1$$

124.

$$y=\frac{1}{1+x^2}, x=0, \text{og } x=3$$

125.

$$y=\sin x^2, x=0, \text{og } x=\sqrt{\pi}$$

126.

$$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x=0, \text{og } x=\frac{1}{2}$$

127.

$$y=\sqrt{x}, x=0, \text{og } x=1$$

128.

$$y=\left(1+x^2\right)^3, x=0, \text{og } x=1$$

129.

$$y=5x^3-2x^4, x=0, \text{og } x=2$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota hylkjaaðferðina til að finna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu milli gefna ferilsins og $y=0$ er snúið um x-ás.

130. $y=\sqrt{1-x^2}, x=0, x=1$ og x-ásinn

131. $y=x^2, x=0, x=2$ og x-ásinn

132. $y=\frac{x^3}{2}, x=0, x=2$, og x-ásinn

133. $y=\frac{2}{x^2}, x=1, x=2$, og x-ásinn

134.

$$x=\frac{1}{1+y^2}, y=4$$

135. $x=\frac{1+y^2}{y}, y=1, y=4$, og y-ásinn

136.

$$x=\sqrt{4-y^2}, x=0, y=0$$

137.

$$x=y^3-2y^2, x=0, x=9$$

138. $x=\sqrt{y}+1, x=1, x=3$, og x-ásinn

139.

$$x=\sqrt[3]{27y} \text{ og } x=\frac{3y}{4}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu milli ferlanna er snúið um gefinn ás.

140. $y=3-x, y=0, x=0,$ og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

141. $y=x^3, x=0,$ og $y=8$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

142. $y=x^2, y=x$, afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

143. $y=\sqrt{x}, y=0,$ og $x=1$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $x=2$.

144. $y=\frac{1}{4-x}, x=1, x=2$ og $y=0$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $x=4$.

145. $y=\sqrt{x}$ og $y=x^2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

146. $y=\sqrt{x}$ og $y=x^2$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $x=2$.

147. $x=y^3, x=\frac{1}{y}, x=1,$ og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um x-ás.

148. $x=y^2$ og $y=x$ afmarka svæði sem snúið er um línuna $y=2$.

149. **[T]** Svæðinu vinstra megin við $x=\sin(\pi y)$, og hægra megin við $y=x$, er snúið um y-ás.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota tölvutækni til að teikna svæðið. Ákvarðið hvaða aðferð þið teljið auðveldast að nota til að reikna rúmmálið sem myndast þegar svæðinu er snúið um tilgreindan ás. Notið síðan aðferðina sem þið völduð til að finna rúmmálið.

150. **[T]** $y=x^2$ og $y=4x$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

151. **[T]** $y=\cos(\pi x)$, $y=\sin(\pi x)$, $x=\frac{1}{4}$, og $x=\frac{5}{4}$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás. Þetta verkefni krefst flóknari heildunaraðferða. Þið megið nota tölvutækni við heildunina.

152. **[T]** $y=x^2-2x$, $x=2$, og $x=4$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

153. **[T]** $y=x^2-2x$, $x=2$, og $x=4$ afmarka svæði sem snúið er um x-ás.

154. **[T]** $y=3x^3-2$, $y=x$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um x-ás.

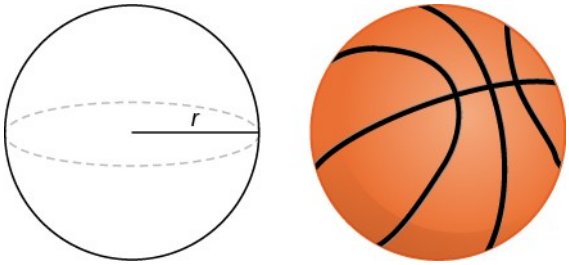
155. **[T]** $y=3x^3-2$, $y=x$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

156. **[T]** $x=\sin(\pi y^2)$ og $x=\sqrt{2}y$ afmarka svæði sem snúið er um x-ás.

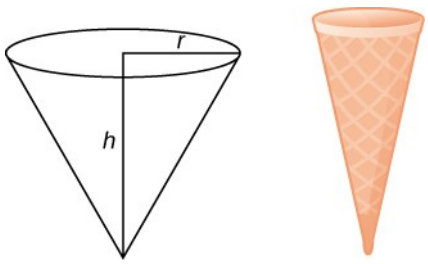
157. **[T]** $x=y^2$, $x=y^2-2y+1$, og $x=2$ afmarka svæði sem snúið er um y-ás.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota hylkjaaðferðina til að nálga rúmmál nokkurra algengra hluta sem sýndir eru á meðfylgjandi myndum.

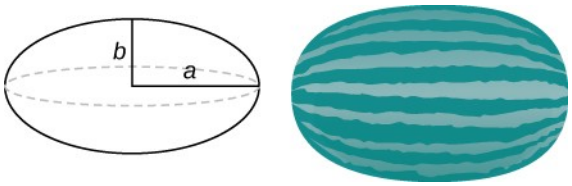
158. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál kúlu með geisla r.



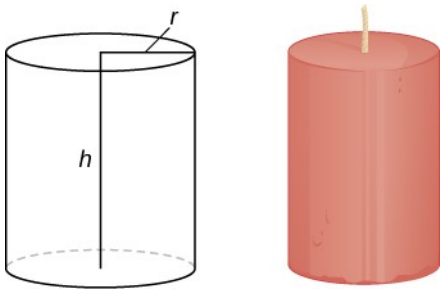
159. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál keilu með radíus r og hæð h.



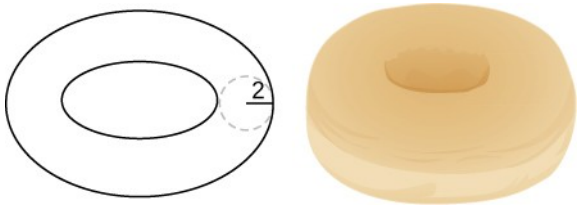
160. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál sporvölungsins sem fæst þegar sporbauginum $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ er snúið um x-ás.



161. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál sívalnings með radíus r og hæð h.



162. Notið hylkjaaðferðina til að finna rúmmál kleinuhringsins sem myndast þegar hringnum $x^2+y^2=4$ er snúið um línuna $x=4$.



163. Lítum á svæðið sem afmarkast af gröfum $y=f(x)$, $y=1+f(x)$, $x=0$, $y=0$, og $x=a>0$. Hvert er rúmmál snúðsins sem myndast þegar þessu svæði er snúið um y-ás? Gerið ráð fyrir að fallið sé skilgreint á bilinu $[0,a]$.

164. Lítum á fallið $y=f(x)$, sem minnkar frá $f(0)=b$ til $f(1)=0$. Svæðinu, sem afmarkast af grafi fallsins og línunum $x=0$ og $y=0$, er snúið um y-ás. Setjið upp heildi fyrir rúmmál snúðsins sem myndast, bæði með hylkjaaðferðinni og skífuaðferðinni, og sannið að þau gefi sama rúmmál. Hvorri aðferðinni er auðveldara að beita? (Vísbending: Þar sem $f(x)$ er eintækt er til andhverfa $f^{-1}(y)$.)

2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

NÁMSMARKMIÐ

- 2.4.1 Ákvarða lengd ferils, $y=f(x)$, milli tveggja punkta.
- 2.4.2 Ákvarða lengd ferils, $x=g(y)$, milli tveggja punkta.
- 2.4.3 Finna yfirborðsflatarmál snúðs.

Í þessum undirkafla notum við ákveðin heildi til að finna bogalengd ferils. Líta má á bogalengd sem þá vegalengd sem við færum ef við gengjum eftir ferlinum. Bogalengd kemur

fyrir í mörgum hagnýtum verkefnum. Ef eldflaug er skotið á loft eftir fleygboga gætum við viljað vita hve langt hún fer. Ef ferill á korti táknar veg gætum við sömuleiðis viljað vita hve langt þarf að aka til að komast á áfangastað.

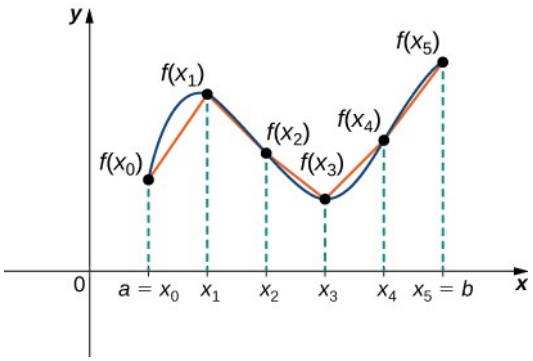
Fyrst reiknum við bogalengd ferla sem skilgreindir eru sem föll af x, og skoðum síðan sömu aðferð fyrir ferla sem skilgreindir eru sem föll af y. (Aðferðin er sú sama, en hlutverkum x og y er víxlað.) Aðferðirnar við útreikning bogalengdar má einnig nota til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatar. Það hugtak skoðum við í lok undirkaflans.

2

Bogalengd ferilsins y = f (x)

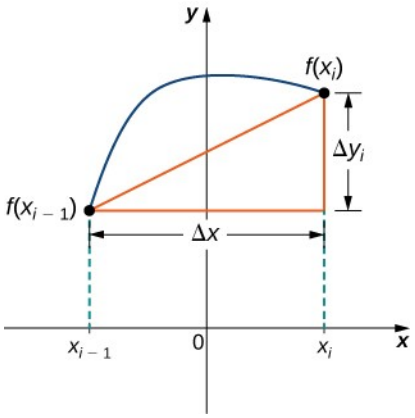
Þegar við notuðum heildun áður kröfðumst við aðeins þess að fallið $f(x)$ væri heildanlegt eða í mesta lagi samfellt. Við útreikning bogalengdar gerum við hins vegar strangari kröfur til $f(x)$. Hér þarf fallið $f(x)$ að vera deildanlegt og afleiðan, $f'(x)$, þarf að vera samfelld. Föll af þessu tagi, sem hafa samfelldar afleiður, kallast þjál. (Þessi eiginleiki kemur aftur fyrir í síðari köflum.)

Látum $f(x)$ vera þjált fall sem er skilgreint á $[a,b]$. Við viljum reikna lengd ferilsins frá punktinum $(a,f(a))$ að punktinum $(b,f(b))$. Við byrjum á að nálga lengd ferilsins með línustrikum. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, drögum við síðan línustrik frá punktinum $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ að punktinum $(x_i,f(x_i))$. Þótt rökrétt kunni að virðast að nota annaðhvort lárétt eða lóðrétt línustrik viljum við að línustrikin nálgi ferilinn eins vel og kostur er. Mynd 2.37 sýnir þessa uppbyggingu fyrir $n=5$.



Mynd 2.37 Nálga má lengd ferils með því að leggja saman lengdir línustrika.

Til að finna lengd hvers línustriks skoðum við breytingu bæði á lóðréttri og láréttri fjarlægð á hverju bili. Skiptingin er regluleg og því er lárétta breytingin á hverju bili Δx. Lóðrétta breytingin er hins vegar mismunandi eftir bilum. Við notum því $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ til að tákna breytinguna á lóðréttri fjarlægð á bilinu $[x_{i-1},x_i]$, eins og sýnt er á mynd 2.38. Athugið að sum (eða öll) Δy_i kunna að vera neikvæð.



Mynd 2.38 Dæmigert línustrik nálgar ferilinn á bilinu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$.

Samkvæmt setningu Pýþagórasar er lengd línustriksins $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y_i)^2}$. Einnig má rita þetta sem $\Delta x\sqrt{1+\left((\Delta y_i)/(\Delta x)\right)^2}$. Samkvæmt meðalgildissetningunni er til punktur $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ þannig að $f'\left(x_i^*\right)=(\Delta y_i)/(\Delta x)$. Lengd línustriksins er því $\Delta x\sqrt{1+\left[f'\left(x_i^*\right)\right]^2}$. Þegar lengdir allra línustrikanna eru lagðar saman fæst

$$\text{Bogalengd} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'\left(x_i^*\right)\right]^2}\,\Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$, fæst

$$\text{Bogalengd} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'\left(x_i^*\right)\right]^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Við tökum þessar niðurstöður saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 2.4

Bogalengd fyrir y = f (x)

Látum $f(x)$ vera þjált fall á bilinu $[a,b]$. Þá fæst bogalengd þess hluta grafs $f(x)$ sem liggur frá punktinum $(a, f(a))$ að punktinum $(b, f(b))$ með

$$\text{Bogalengd} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

(2.7)

Athugið að við heildum segð sem inniheldur $f'(x)$, og því þurfum við að tryggja að $f'(x)$ sé heildanlegt. Þess vegna krefjumst við þess að $f(x)$ sé þjált. Næsta dæmi sýnir hvernig setningin er notuð.

DÆMI 2.18

Bogalengd falls af x reiknuð

Látum $f(x)=2x^{3/2}$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[0,1]$. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

Lausn

Við höfum $f'(x)=3x^{1/2}$, svo að $\left[f'(x)\right]^2=9x$. Bogalengdin er því

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\ dx.\end{aligned}$$

Setjum $u=1+9x$. Þá er $du=9\,dx$. Þegar $x=0$, er $u=1$, og þegar $x=1$, er $u=10$. Því fæst

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_0^1 \sqrt{1+9x}\ dx \\ &= \frac{1}{9}\int_0^1 \sqrt{1+9x}\,9\,dx = \frac{1}{9}\int_1^{10}\sqrt{u}\ du \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{2}{27}[10\sqrt{10}-1]\approx 2{,}268 \text{ einingar}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.18

Látum $f(x)=(4/3)x^{3/2}$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[0,1]$. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

Þótt gott sé að hafa formúlu til að reikna bogalengd getur þessi setning gefið segðir sem erfitt er að heilda. Við kynnum okkur nokkrar heildunaraðferðir í Inngangi að heildunaraðferðum. Stundum þarf að nota tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildisins.

DÆMI 2.19

Tölva eða reiknivél notuð til að finna bogalengd falls af x

Látum $f(x)=x^2$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[1,3]$.

Lausn

Við höfum $f'(x)=2x$, svo að $\left[f'(x)\right]^2=4x^2$. Bogalengdin er þá gefin með

$$\text{Bogalengd}=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_1^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Þegar gildi heildisins er nálgað með tölvu fæst

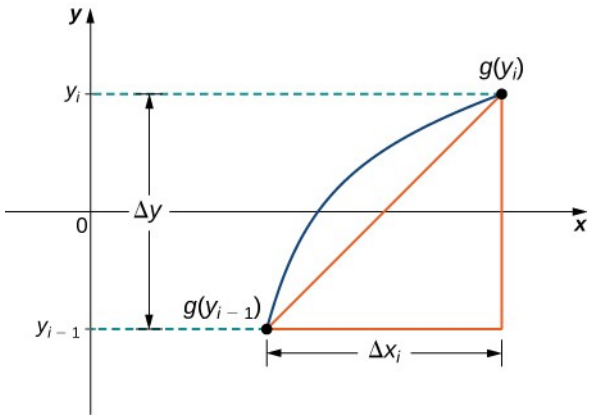
$$\int_1^3 \sqrt{1+4x^2}\,dx\approx 8{,}26815.$$

STÖÐUMAT 2.19

Látum $f(x)=\sin x$. Reiknið bogalengd grafs $f(x)$ á bilinu $[0,\pi]$. Notið tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildisins.

Bogalengd ferilsins x = g (y)

Við höfum nú séð hvernig nálga má lengd ferils með línustrikum. Til að finna bogalengd grafs falls af y, förum við eins að. Í þetta sinn er skiptingarásinn y-ás, ekki x-ás. Mynd 2.39 sýnir dæmigert línustrik.



Mynd 2.39 Dæmigert línustrik á bilinu $[y_{i-1},y_i]$.

Þá er lengd línustriksins $\sqrt{(\Delta y)^2+(\Delta x_i)^2}$, sem einnig má rita sem $\Delta y\sqrt{1+\left((\Delta x_i)/(\Delta y)\right)^2}$. Með sömu röksemdafærslu og áður fæst formúla fyrir bogalengd fallsins $x=g(y)$.

SETNING 2.5

Bogalengd fyrir x = g (y)

Látum $g(y)$ vera þjált fall á y-bilinu $[c,d]$. Þá fæst bogalengd grafs $g(y)$ frá punktinum $(g(d),d)$ að punktinum $(g(c),c)$ með

$$\text{Bogalengd}=\int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy.$$

(2.8)

DÆMI 2.20

Bogalengd falls af y reiknuð

Látum $g(y)=3y^3$. Reiknið bogalengd grafs $g(y)$ á bilinu $[1,2]$.

Lausn

Við höfum $g'(y)=9y^2$, svo að $\left[g'(y)\right]^2=81y^4$. Bogalengdin er því

$$\text{Bogalengd}=\int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy=\int_1^2 \sqrt{1+81y^4}\,dy.$$

Þegar gildi heildisins er nálgað með tölvu fæst

$$\int_1^2 \sqrt{1+81y^4}\,dy\approx 21{,}0277.$$

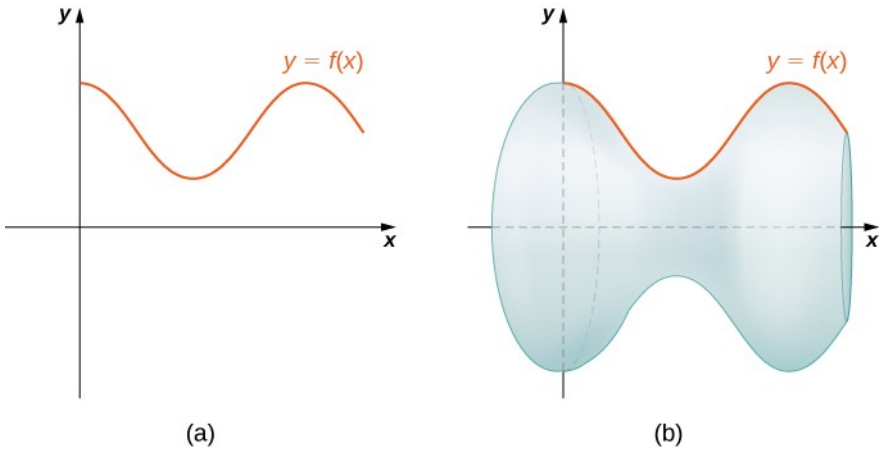
2

STÖÐUMAT 2.20

Látum $g(y)=1/y$. Reiknið bogalengd grafs $g(y)$ á bilinu $[1,4]$. Notið tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildisins.

Yfirborðsflatarmál snúðflatar

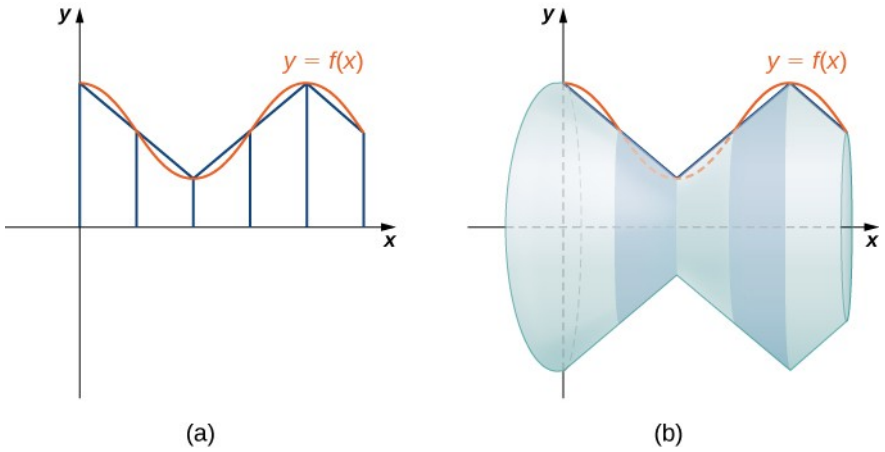
Aðferðirnar við útreikning bogalengdar má einnig nota til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatar. Yfirborðsflatarmál er samanlagt flatarmál ytra byrðis hlutar. Fyrir hluti á borð við teninga eða múrsteina er yfirborðsflatarmál hlutarins summa flatarmála allra flata hans. Þegar yfirborðið er bogið er málið aðeins flóknara. Látum $f(x)$ vera óneikvætt þjált fall á bilinu $[a,b]$. Við viljum finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $y=f(x)$ er snúið um x-ás, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 2.40 (a) Ferill sem táknar fallið $f(x)$. (b) Snúðflöturinn sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ás.

Eins og við höfum oft gert áður skiptum við bilinu $[a,b]$ og nálgum yfirborðsflatarmálið með því að reikna yfirborðsflatarmál einfaldari forma. Við byrjum á að nálga ferilinn með línustrikum, eins og við gerðum fyrr í þessum undirkafla. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu á $[a,b]$. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, drögum við síðan línustrik frá

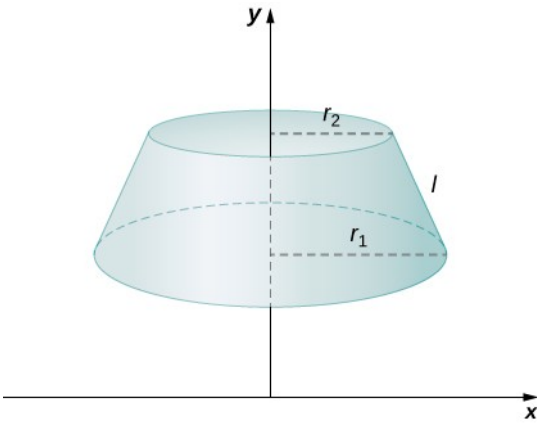
punktinum $\left(x_{i-1}, f\left(x_{i-1}\right)\right)$ að punktinum $\left(x_i, f\left(x_i\right)\right)$. Nú snúum við þessum línustrikum um x-ás til að fá nálgun á snúðfletinum, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 2.41 (a) $f\left(x\right)$ nálgað með línustrikum. (b) Snúðflöturinn sem myndast þegar línustrikunum er snúið um x-ás.

Takið eftir að þegar hverju línustriki er snúið um ásinn myndast ræma. Ræmurnar eru í raun hlutar af keilum (hugsið ykkur ískeilu þar sem oddurinn hefur verið skorinn af). Slíkur hluti keilu kallast keilustúfur.

Til að finna yfirborðsflatarmál ræmunnar þurfum við að finna hliðarflatarmál keilustúfsins, S, (aðeins flatarmál hallandi ytra borðs keilustúfsins, án efri og neðri grunnflatanna). Látum r_1 og r_2 vera geisla víðari og mjórri enda keilustúfsins, í sömu röð, og látum l vera hliðarlengd hans, eins og sýnt er á næstu mynd.

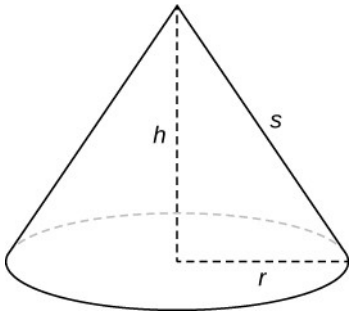


Mynd 2.42 Keilustúf má nota til að nálga lítinn hluta yfirborðsins.

Við vitum að hliðarflatarmál keilu er gefið með

$$\text{Hliðarflatarmál} = \pi r s,$$

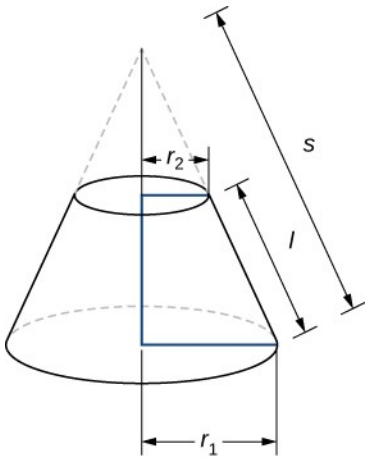
þar sem r er radíus grunnflatar keilunnar og s er hliðarlengdin (sjá næstu mynd).



2

Mynd 2.43 Hliðarflatarmál keilunnar er gefið með $\pi r s$.

Líta má á keilustúf sem hluta af keilu. Hliðarflatarmál hans fæst því með því að draga hliðarflatarmál minni keilunnar (oddsins sem var skorinn af) frá hliðarflatarmáli allrar keilunnar (sjá næstu mynd).



Mynd 2.44 Hliðarflatarmál keilustúfs reiknað.

Þversnið litlu og stóru keilnanna eru einslaga þríhyrningar. Því gildir að

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{s-l}{s}.$$

Þegar við einangrum s, fæst

$$\begin{aligned}
\tfrac{r_2}{r_1} &= \tfrac{s-l}{s} \\
r_2 s &= r_1 (s-l) \\
r_2 s &= r_1 s - r_1 l \\
r_1 l &= r_1 s - r_2 s \\
r_1 l &= (r_1 - r_2) s \\
\tfrac{r_1 l}{r_1 - r_2} &= s.
\end{aligned}$$

Hliðarflatarmál keilustúfsins er því

S = (Hliðarflatarmál stóru keilunnar) – (Hliðarflatarmál litlu keilunnar)

$$=\pi r_1 s-\pi r_2(s-l)$$

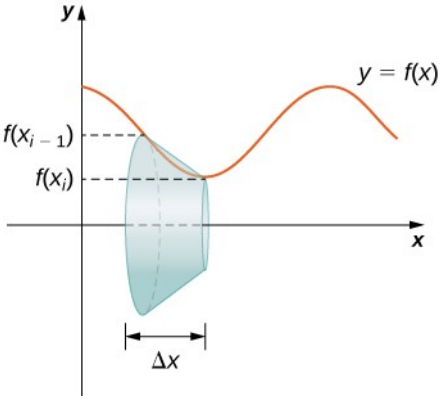
$$=\pi r_1 s-\pi r_2 s+\pi r_2 l$$

$$=\pi(r_1-r_2)s+\pi r_2 l$$

$$=\pi r_1 l+\pi r_2 l$$

$$=\pi(r_1+r_2)l.$$

Nú notum við þessa formúlu til að reikna yfirborðsflatarmál hverrar ræmu sem myndast þegar línustrikunum er snúið um x-ás. Dæmigerð ræma er sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.45 Dæmigerð ræma sem notuð er til að ákvarða yfirborðsflatarmál.

Takið eftir að hliðarlengd keilustúfsins er einmitt lengd línustriksins sem myndar hann. Formúlan fyrir yfirborðsflatarmál gefur því

$$\begin{aligned} S &= \pi(r_1+r_2)l \\ &= \pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\sqrt{\Delta x^2+(\Delta y_i)^2} \\ &= \pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}. \end{aligned}$$

Nú beitum við meðalgildissetningunni, eins og við gerðum þegar við leiddum út formúluna fyrir bogalengd, til að velja $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ þannig að $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/\Delta x$. Þá fæst

$$S=\pi\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\Delta x\sqrt{1+\left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Þar sem auki er $f(x)$ samfellt og því segir milligildissetningin að til sé punktur $x_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]$ þannig að $f(x_i^{**}) = (1/2)\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]$, og því fæst

$$S=2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1+\left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Nálgun á yfirborðsflatarmáli alls snúðflatarins fæst þá með

$$\text{Yfirborðsflatarmál} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^{**}\right)\Delta x\sqrt{1+\left(f'\left(x_i^{*}\right)\right)^2}.$$

Þetta líkist mjög Riemann-summu, nema föllin eru reiknuð í tveimur mismunandi punktum, x_i^{*} og x_i^{**}, á bilinu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Við förum ekki nánar út í smáatriðin hér, en vegna þess að $f(x)$ er þjált fæst sama markgildi og fyrir Riemann-summu þegar $n \to \infty$, þrátt fyrir punktana tvo. Þetta kemur heim og saman við innsæið. Bæði x_i^{*} og x_i^{**} eru á bilinu $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, og þegar $n \to \infty$, nálgast bæði x_i^{*} og x_i^{**} gildið x. Nánari rökstuðning má finna í ítarlegri kennslubók í stærðfræðigreiningu.

2

Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$, fæst

$$\text{Yfirborðsflatarmál} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^{**}\right)\Delta x\sqrt{1+\left(f'\left(x_i^{*}\right)\right)^2} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)dx.$$

Eins og fyrir bogalengd má leiða út sambærilega formúlu fyrir föll af y til að fá yfirborðsflatarmál snúðflata um y-ás. Við tökum niðurstöðurnar saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 2.6

Yfirborðsflatarmál snúðflatar

Látum $f(x)$ vera óneikvætt þjált fall á bilinu $[a, b]$. Þá fæst yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ásinn með

$$\text{Yfirborðsflatarmál} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)dx.$$

(2.9)

Látum á sama hátt $g(y)$ vera óneikvætt þjált fall á bilinu $[c, d]$. Þá fæst yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $g(y)$ er snúið um y-ás með

$$\text{Yfirborðsflatarmál} = \int_c^d \left(2\pi g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\right)dy.$$

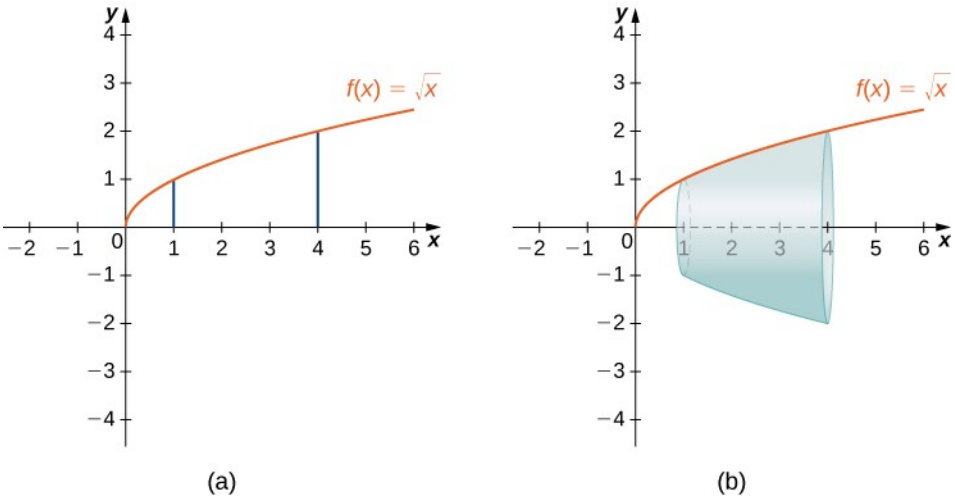
DÆMI 2.21

Yfirborðsflatarmál snúðflatar reiknað 1

Látum $f(x) = \sqrt{x}$ á bilinu $[1, 4]$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ás. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

Lausn

Graf $f(x)$ og snúðflöturinn eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.46 (a) Graf $f(x)$. (b) Snúðflöturinn.

Við höfum $f(x)=\sqrt{x}$. Þá eru $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$ og $(f'(x))^2=1/(4x)$. Því fæst

$$\begin{aligned}\text{Yfirborðsflatarmál} &= \int_a^b (2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2})\,dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\right)dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)dx.\end{aligned}$$

Setjum $u=x+1/4$. Þá er $du=dx$. Þegar $x=1$, er $u=5/4$, og þegar $x=4$, er $u=17/4$. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)dx &= \int_{5/4}^{17/4} 2\pi\sqrt{u}\;du \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_{5/4}^{17/4} = \frac{\pi}{6}[17\sqrt{17}-5\sqrt{5}] \approx 30{,}846.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.21

Látum $f(x)=\sqrt{1-x}$ á bilinu $[0,1/2]$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um x-ás. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

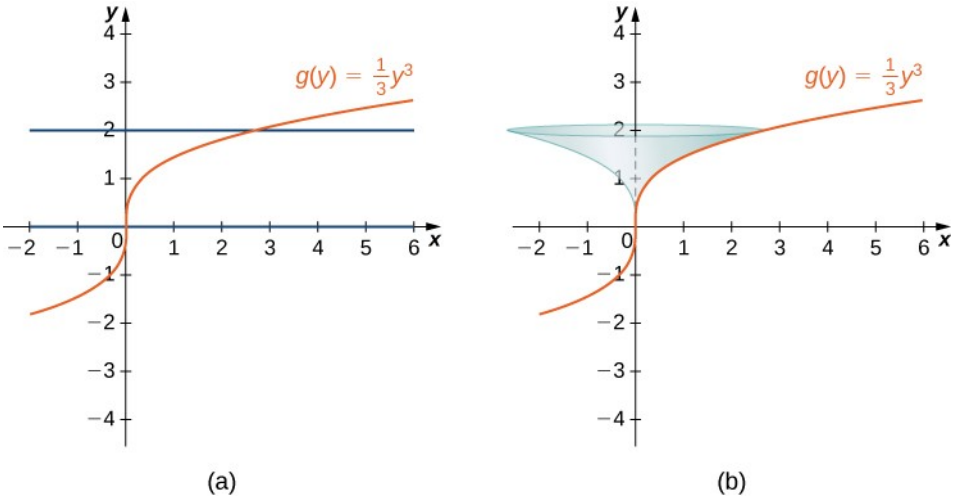
DÆMI 2.22

Yfirborðsflatarmál snúðflatar reiknað 2

Látum $f(x)=y=\sqrt[3]{3x}$. Skoðið þann hluta ferilsins þar sem $0\le y\le 2$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $f(x)$ er snúið um y-ás.

Lausn

Takið eftir að ferlinum er snúið um y-ás, og að bilið er gefið með tilliti til y, og þess vegna viljum við umrita fallið sem fall af y. Þá fæst $x=g(y)=(1/3)y^3$. Graf $g(y)$ og snúðflöturinn eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.47 (a) Graf $g(y)$. (b) Snúðflöturinn.

Við höfum $g(y)=(1/3)y^3$, svo að $g'(y)=y^2$ og $(g'(y))^2=y^4$. Því fæst

$$\begin{aligned}\text{Yfirborðsflatarmál} &= \int_c^d (2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2})\,dy \\ &= \int_0^2 \left(2\pi\left(\frac{1}{3}y^3\right)\sqrt{1+y^4}\right)dy \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^2 (y^3\sqrt{1+y^4})\,dy.\end{aligned}$$

Setjum $u=y^4+1$. Þá er $du=4y^3\,dy$. Þegar $y=0$, er $u=1$, og þegar $y=2$, er $u=17$. Því fæst

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{3}\int_0^2 (y^3\sqrt{1+y^4})\,dy &= \frac{2\pi}{3}\int_1^{17}\frac{1}{4}\sqrt{u}\,du \\ &= \frac{\pi}{6}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_1^{17} = \frac{\pi}{9}[(17)^{3/2}-1]\approx 24{,}118.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.22

Látum $g(y)=\sqrt{9-y^2}$ á bilinu $y\in[0,2]$. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $g(y)$ er snúið um y-ás.

Æfingar í undirkafla 2.4

Finnið lengd grafa fallanna á gefnu bili í eftirfarandi æfingum.

165.

$$y=5x \text{ frá } x=0 \text{ til } x=2$$

166.

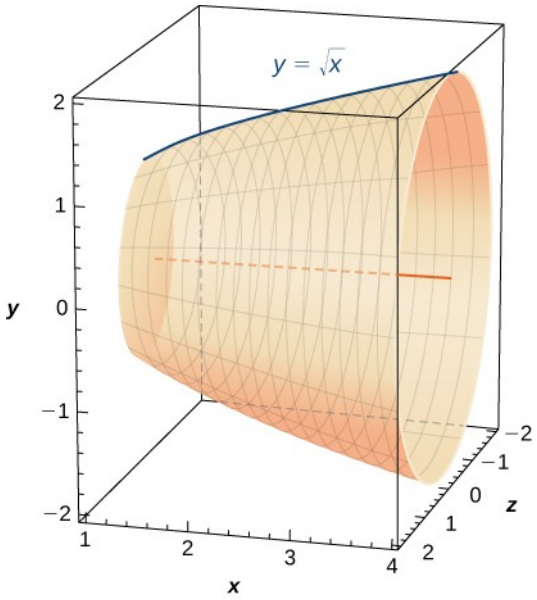
$$y=-\frac{1}{2}x+25 \text{ frá } x=1 \text{ til } x=4$$

167.

$$x=4y \text{ frá } y=-1 \text{ til } y=1$$

168. Veljið eitthvert línulegt fall $x=g(y)$ og eitthvert bil (y_1, y_2). Ákvarðið lengd grafs fallsins og sannið síðan með rúmfræði að lengdin sé rétt.

169. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=\sqrt{x}$ er snúið um x-ás frá $(1,1)$ til $(4,2)$, eins og sést hér.



170. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=x^2$ er snúið um y-ás frá $(1,1)$ til $(3,9)$.



Finnið lengd grafa fallanna af x á gefnu bili í eftirfarandi æfingum. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með tölvu eða reiknivél.

171. $y=x^{3/2}$ frá $(0,0)$ til $(1,1)$

172. $y=x^{2/3}$ frá $(1,1)$ til $(8,4)$

173. $y=\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{3/2}$ frá $x=0$ til $x=1$

174. $y=\frac{1}{3}\left(x^2-2\right)^{3/2}$ frá $x=2$ til $x=4$

2

175. [T] $y=e^x$ frá $x=0$ til $x=1$

176. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$ frá $x=1$ til $x=3$

177. $y=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^2}$ frá $x=1$ til $x=2$

178. $y=\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^{1/2}}{2}$ frá $x=1$ til $x=4$

179. $y=\frac{1}{27}\left(9x^2+6\right)^{3/2}$ frá $x=0$ til $x=2$

180. [T] $y=\sin x$ frá $x=0$ til $x=\pi$

Finnið lengd grafa fallanna af y á gefnu bili í eftirfarandi æfingum. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með tölvu eða reiknivél.

181. $y=\frac{5-3x}{4}$ frá $y=0$ til $y=4$

182. $x=\frac{1}{2}\left(e^y+e^{-y}\right)$ frá $y=-1$ til $y=1$

183. $x=5y^{3/2}$ frá $y=0$ til $y=1$

184. [T] $x=y^2$ frá $y=0$ til $y=1$

185. $x=\sqrt{y}$ frá $y=0$ til $y=1$

186. $x=\frac{2}{3}\left(y^2+1\right)^{3/2}$ frá $y=1$ til $y=3$

187. [T] $x=\tan y$ frá $y=0$ til $y=\frac{3}{4}$

188. [T] $x=\cos^2 y$ frá $y=-\frac{\pi}{2}$ til $y=\frac{\pi}{2}$

189. [T] $x=4^y$ frá $y=0$ til $y=2$

190. [T] $x=\ln(y)$ frá $y=\frac{1}{e}$ til $y=e$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar hverjum ferli er snúið um x-ás. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með reiknivél.

191. $y=\sqrt{x}$ frá $x=2$ til $x=6$

192. $y=x^3$ frá $x=0$ til $x=1$

193. $y=7x$ frá $x=-1$ til $x=1$

194. [T] $y=\frac{1}{x^2}$ frá $x=1$ til $x=3$

195. $y=\sqrt{4-x^2}$ frá $x=0$ til $x=2$

196. $y=\sqrt{4-x^2}$ frá $x=-1$ til $x=1$

197. $y=5x$ frá $x=1$ til $x=5$

198. [T] $y=\tan x$ frá $x=-\frac{\pi}{4}$ til $x=\frac{\pi}{4}$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar hverjum ferli er snúið um y-ás. Ef ekki er hægt að reikna heildið nákvæmlega skuluð þið nálga það með reiknivél.

199. $y=x^2$ frá $x=0$ til $x=2$

200. $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ frá $x=0$ til $x=1$

201. $y=x+1$ frá $x=0$ til $x=3$

202. [T] $y=\frac{1}{x}$ frá $x=\frac{1}{2}$ til $x=1$

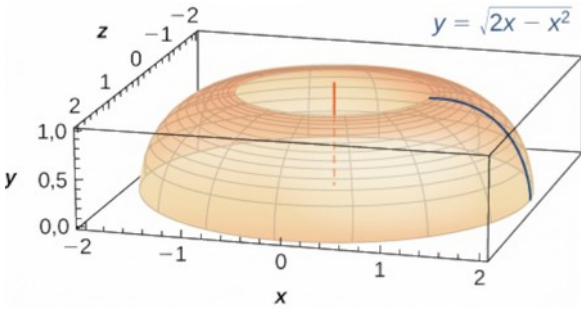
203. $y=\sqrt[3]{x}$ frá $x=1$ til $x=27$

204. [T] $y=3x^4$ frá $x=0$ til $x=1$

205. [T] $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ frá $x=1$ til $x=3$

206. [T] $y=\cos x$ frá $x=0$ til $x=\frac{\pi}{2}$

207. Lampafótur fæst með því að snúa fjórðungshringnum $y=\sqrt{2x-x^2}$ um y-ás frá $x=1$ til $x=2$, eins og sést hér. Setjið fram heildi fyrir yfirborðsflatarmál þessa snúðflatar og reiknið það.



2

208. Ljósapera er kúla með geisla $5/2$ cm. Neðan af henni er skorinn hluti svo að hún falli nákvæmlega að sívalningi með geisla $5/4$ cm og hæð $5/3$ cm, eins og hér sést. Þar sem skurðurinn fellur nákvæmlega að sívalningnum er geisli skurðhringsins $5/4$ cm. Finnið yfirborðsflatarmál (án efri og neðri grunnflatar sívalningsins).



209. **[T]** Lampaskermur fæst með því að snúa $y = 1/x$ um x-ás frá $y = 1$ til $y = 2$, eins og sést hér. Ákvarðið hve mikið efni þarf í skerminn, það er yfirborðsflatarmál hans, með fjórum aukastöfum.



210. **[T]** Akkeri dregst á eftir bát samkvæmt fallinu $y = 24e^{-x/2} - 24$, þar sem y táknar dýptina undir bátnum og x lárétta fjarlægð akkerisins frá skut bátsins. Ef akkerið er 23 metra undir bátnum, hve langt reipi þarf að draga inn til að ná akkerinu? Námundið svarið að þremur aukastöfum.

211. **[T]** Þið eruð að smíða brú sem verður 10 metrar að lengd. Þið ætlið að setja á hana skrautreipi í laginu $y = 5\left|\sin\left((x\pi)/5\right)\right|$, þar sem x er fjarlægðin í metrum frá öðrum enda brúarinnar. Finnið hve marga heila metra af reipi þið þurfið að kaupa.

Finnið nákvæma bogalengd á gefnu bili í eftirfarandi æfingum.

212. $y = \ln(\sin x)$ frá $x = \pi/4$ til $x = (3\pi)/4$. (Vísbending: Rifjið upp hornafallasamsemdir.)

213. **[T]** Teiknið gröf $y=x^2$, $y=x^6$, og $y=x^{10}$. Fyrir $y=x^n$, þegar n vex, setjið fram tilgátu um bogalengdina frá $(0,0)$ til $(1,1)$. Reiknið síðan lengd grafs hvers þessara þriggja falla og kannið hvort tilgátan var rétt.

214. Berið saman lengd fleygbogans $x=y^2$ og línunnar $x=b$ y frá $(0,0)$ til (b^2,b) þegar b vex. Hverju takið þið eftir?

215. Reiknið lengd $x=y^2$ frá $(0,0)$ til $(1,1)$. Sýnið að $x=(1/2)y^2$ frá $(0,0)$ til $(2,2)$ sé tvöfalt lengri. Teiknið gröf beggja fallanna og útskýrið hvers vegna svo er.

216. **[T]** Hvor ferill er lengri milli $(1,1)$ og $(2,1/2)$: breiðboginn $y=1/x$ eða línan $x+2y=3$?

217. Útskýrið hvers vegna yfirborðsflatarmálið er óendanlegt þegar $y=1/x$ er snúið um x-ás fyrir $1\le x<\infty$, en rúmmálið er endanlegt.

2.5 Hagnýting í eðlisfræði

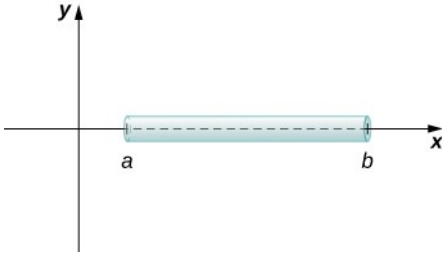
NÁMSMARKMIÐ

- 2.5.1 Ákvarða massa einvíðs hlutar út frá línuþéttleikafalli hans.
- 2.5.2 Ákvarða massa tvívíðs hringlaga hlutar út frá geislaþéttleikafalli hans.
- 2.5.3 Reikna vinnu breytilegs krafts sem verkar eftir línu.
- 2.5.4 Reikna vinnuna við að dæla vökva úr einni hæð í aðra.
- 2.5.5 Finna kraftinn vegna vökvastöðuþrýstings á lóðrétta plötu á kafi.

Í þessum undirkafla skoðum við nokkur dæmi um hagnýtingu heildunar í eðlisfræði. Við byrjum á því að reikna massa út frá þéttleikafalli. Síðan beinum við sjónum að vinnu og ljúkum undirkaflanum með umfjöllun um kraft vegna vökvastöðuþrýstings.

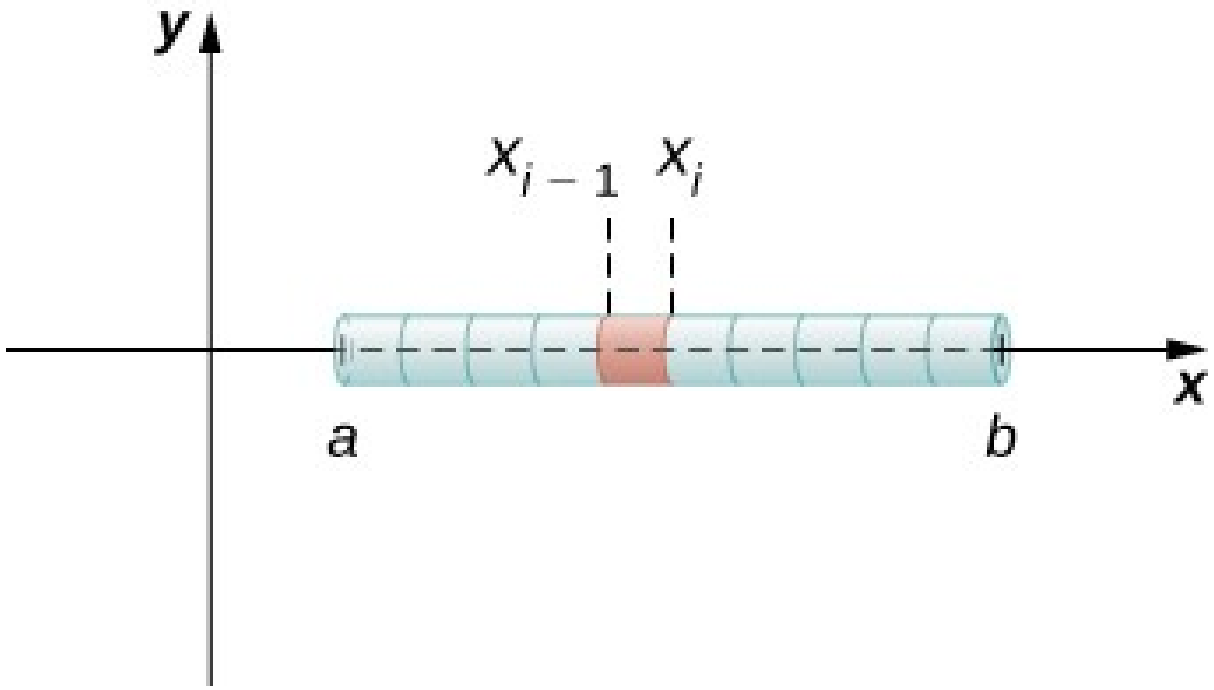
Massi og þéttleiki

Með heildun má leiða út formúlu til að reikna massa út frá þéttleikafalli. Fyrst skoðum við granna stöng eða vír. Leggjum stöngina eftir x-ás, þannig að vinstri endi hennar sé við $x=a$ og hægri endinn við $x=b$ (mynd 2.48). Á myndunum er stöngin sýnd með nokkurri þykkt, en í útreikningunum gerum við ráð fyrir að hún sé svo grönn að líta megi á hana sem einvíðan hlut.



Mynd 2.48 Reikna má massa grannrar stangar sem liggur eftir x-ás með því að heilda þéttleikafall hennar.

Ef stöngin hefur fastan þéttleika ρ, gefinn sem massi á lengdareiningu, er massi hennar einfaldlega margfeldi þéttleikans og lengdar stangarinnar: $(b-a)\rho$. Ef þéttleiki stangarinnar er ekki fastur verður verkefnið hins vegar nokkru flóknara. Þegar þéttleiki stangarinnar breytist frá punkti til punkts notum við línuþéttleikafallið $\rho(x)$, til að tákna þéttleika hennar í hverjum punkti x. Látum $\rho(x)$ vera heildanlegt línuþéttleikafall. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$ látum við nú $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$ veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Mynd 2.49 sýnir dæmigerðan hluta stangarinnar.



Mynd 2.49 Dæmigerður hluti stangarinnar.

Massi m_i stangarhlutans frá x_{i-1} til x_i er nálgaður með

$$m_i \approx \rho(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Með því að leggja saman massa allra hlutanna fáum við nálgun á massa allrar stangarinnar:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Með því að taka markgildið þegar $n \to \infty$, fæst stæða fyrir nákvæman massa stangarinnar:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Við setjum niðurstöðuna fram í eftirfarandi setningu.

SETNING 2.7

Formúla fyrir massa einvíðs hlutar út frá þéttleika

Látum granna stöng liggja eftir x-ás á bilinu $[a,b]$, og $\rho(x)$ tákna línuþéttleikafall sem gefur þéttleika stangarinnar í punkti x á bilinu. Þá er massi stangarinnar gefinn með

$$m=\int_a^b \rho(x)\,dx.$$

(2.10)

Við beitum setningunni í næsta dæmi.

DÆMI 2.23

Massi reiknaður út frá línuþéttleika

Lítum á granna stöng sem liggur eftir x-ásnum á bilinu $[\pi/2,\pi]$. Ef þéttleiki stangarinnar er gefinn með $\rho(x)=\sin x$, hver er þá massi hennar?

Lausn

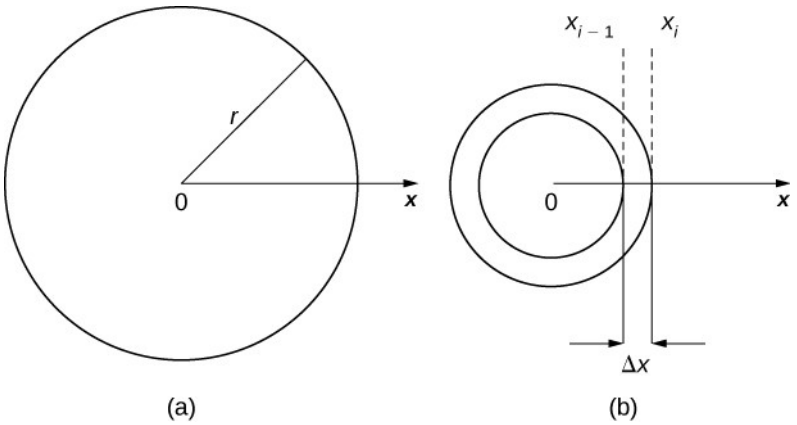
Með því að beita jöfnu 2.10 beint fáum við

$$m=\int_a^b \rho(x)\,dx=\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1.$$

STÖÐUMAT 2.23

Lítum á granna stöng sem liggur eftir x-ásnum á bilinu $[1,3]$. Hver er massi stangarinnar ef þéttleiki hennar er gefinn með $\rho(x)=2x^2+3$,?

Nú útvíkkum við hugmyndina til að finna massa tvívíðrar skífu með geisla r. Eins og með stöngina í einvíða tilvikinu gerum við ráð fyrir að skífan sé svo þunn að í stærðfræðilegum tilgangi megi líta á hana sem tvívíðan hlut. Við gerum ráð fyrir að þéttleikinn sé gefinn sem massi á flatarmálseiningu (kallaður flatarþéttleiki) og jafnframt að þéttleikinn breytist aðeins eftir geisla skífunnar (kallaður geislaþéttleiki). Við leggjum skífuna í xy-sléttuna, með miðju í upphafspunktinum. Þá má líta á þéttleika skífunnar sem fall af x, táknað $\rho(x)$. Við gerum ráð fyrir að $\rho(x)$ sé heildanlegt. Þar sem þéttleikinn er fall af x, skiptum við bilinu $[0,r]$ eftir x-ás. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[0,r]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$. Notum síðan skiptinguna til að skipta skífunni í þunna (tvívíða) hringkraga. Skífa og dæmigerður hringkragi eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.50 (a) Þunn skífa í xy-sléttunni. (b) Dæmigerður hringkragi.

Nú nálgum við þéttleika og flatarmál hringkragans til að nálga massann, m_i. Athugið að flatarmál hringkragans er gefið með

$$\begin{aligned} A_i &= \pi(x_i)^2 - \pi(x_{i-1})^2 \\ &= \pi\left[x_i^2 - x_{i-1}^2\right] \\ &= \pi\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \pi(x_i + x_{i-1})\Delta x. \end{aligned}$$

Þið munið ef til vill að við fengum svipaða stæðu þegar við reiknuðum rúmmál með hylkjaaðferðinni. Líkt og þar notum við $x_i^* \approx \left(x_i + x_{i-1}\right)/2$ til að nálga meðalgeisla hringkragans. Við fáum

$$A_i = \pi\left(x_i + x_{i-1}\right)\Delta x \approx 2\pi x_i^* \Delta x.$$

Með því að nota $\rho\left(x_i^*\right)$ til að nálga þéttleika hringkragans nálgum við massa hans með

$$m_i \approx 2\pi x_i^* \rho\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Þegar við leggjum saman massa hringkraganna sjáum við að massi m allrar skífunnar er nálgaður með

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

Við sjáum aftur að þetta er Riemann-summa og tökum markgildið þegar $n \to \infty$. Þá fæst

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho\left(x_i^*\right)\Delta x = \int_0^r 2\pi x\,\rho(x)\,dx.$$

Við tökum niðurstöðurnar saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 2.8

Formúla fyrir massa hringlaga hlutar út frá þéttleika

Látum $\rho(x)$ vera heildanlegt fall sem táknar geislaþéttleika skífu með geisla r. Þá er massi skífunnar gefinn með

$$m = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx.$$

(2.11)

DÆMI 2.24

Massi reiknaður út frá geislaþéttleika

Látum $\rho(x) = \sqrt{x}$ tákna geislaþéttleika skífu. Reiknið massa skífu með geisla 4.

Lausn

Með formúlunni fáum við

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx \\ &= \int_0^4 2\pi x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= 2\pi \tfrac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \tfrac{4\pi}{5}[32] = \tfrac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.24

Látum $\rho(x) = 3x + 2$ tákna geislaþéttleika skífu. Reiknið massa skífu með geisla 2.

Vinna krafts

Nú skoðum við vinnu. Í eðlisfræði tengist vinna krafti, sem oft er lýst lauslega sem ýtingu eða togi á hlut. Þegar kraftur færir hlut úr stað segjum við að krafturinn vinni vinnu á hlutnum. Með öðrum orðum má líta á vinnu sem orkuna sem þarf til að færa hlut úr stað. Þegar krafturinn er fastur má samkvæmt eðlisfræði lýsa vinnu sem margfeldi krafts og vegalengdar.

Í SI-kerfinu (metrakerfinu) er kraftur mældur í njútonum og vegalengd í metrum, svo vinna er gefin í njútonmetrum. Eitt njúton er sá kraftur sem þarf til að gefa 1 kílógrammi af massa hröðunina 1 m/s². Algengasta eining vinnu er því njútonmetri. Sama eining nefnist einnig júl. Báðar einingarnar eru skilgreindar sem kílógrömm sinnum metrar í öðru veldi deilt með sekúndum í öðru veldi $(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2)$.

Þegar kraftur er fastur eru útreikningarnir einfaldir. Kraftur er þó sjaldnast fastur. Vinnan við að þjappa gormi saman (eða teygja hann) breytist til dæmis eftir því hve mikið gorminum hefur þegar verið þjappað saman (eða hann teygður). Við skoðum gorma nánar síðar í þessum undirkafla.

Gerum ráð fyrir breytilegum krafti $F(x)$ sem færir hlut í jákvæða stefnu eftir x-ásnum frá punktinum a að punktinum b. Til að reikna vinnuna skiptum við bilinu $[a,b]$ og metum vinnuna á hverju hlutbili. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við því $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Til að reikna vinnuna við að færa hlut frá punktinum x_{i-1} að punktinum x_i, gerum við ráð fyrir að krafturinn sé nokkurn veginn fastur á bilinu og notum $F(x_i^*)$ til að nálga kraftinn. Vinnan á bilinu $[x_{i-1}, x_i]$, er þá gefin með

2

$$W_i \approx F(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i^*)\Delta x.$$

Því er vinnan á bilinu $[a,b]$ um það bil

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x.$$

Ef við tökum markgildi þessarar stæðu þegar $n \to \infty$ fáum við nákvæmt gildi vinnunnar:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Við getum því skilgreint vinnu á eftirfarandi hátt.

SKILGREINING

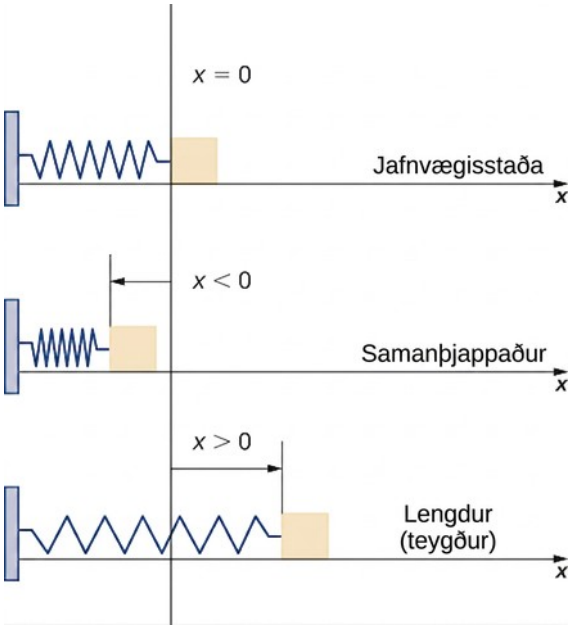
Ef breytilegur kraftur $F(x)$ færir hlut í jákvæða stefnu eftir x-ásnum frá punktinum a að punktinum b, þá er vinnan sem unnin er á hlutnum

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

(2.12)

Athugið að ef F er fasti, þá er gildi heildisins $F \cdot (b-a) = F \cdot d$, sem er formúlan sem við settum fram í upphafi þessa undirkafla.

Lítum nú á tiltekið dæmi um vinnuna sem unnin er við að þjappa saman gormi eða teygja hann. Hugsum okkur kubb sem festur er við láréttan gorm. Kubburinn hreyfist fram og til baka þegar gormurinn teygist og þjappast saman. Í raunverulegum aðstæðum þyrftum við að taka tillit til núningskraftsins milli kubbsins og yfirborðsins sem hann hvílir á, en hér lítum við fram hjá núningi og gerum ráð fyrir að kubburinn hvíli á núningslausu yfirborði. Þegar gormurinn hefur náttúrulega lengd sína (er í hvíld) segjum við að kerfið sé í jafnvægi. Þá er gormurinn hvorki teygður né samanþjappaður og kubburinn hreyfist ekki úr jafnvægisstöðunni fyrr en krafti er beitt. Við veljum hnitakerfið þannig að $x=0$ samsvari jafnvægisstöðunni (sjá næstu mynd).



Mynd 2.51 Kubbur festur við láréttan gorm þegar gormurinn er í jafnvægisstöðu, samanþjappaður og teygður.

Samkvæmt lögmáli Hookes er krafturinn sem þarf til að þjappa gormi saman eða teygja hann frá jafnvægisstöðu gefinn með $F(x)=k\,x$, fyrir einhvern fasta k. Gildi k ræðst af eðliseiginleikum gormsins. Fastinn k nefnist gormstuðull og er alltaf jákvæður. Við getum notað þessar upplýsingar til að reikna vinnuna við að þjappa gormi saman eða teygja hann, eins og sýnt er í næsta dæmi.

DÆMI 2.25

Vinnan sem þarf til að teygja eða þjappa saman gormi

Suppose it takes a force of 10 N (in the negative direction) to compress a spring 0,2 m from the equilibrium position. How much work is done to stretch the spring 0,5 m from the equilibrium position?

Lausn

Finnum fyrst gormstuðulinn k. Þegar $x=-0{,}2$, vitum við að $F(x)=-10$, svo að

$$\begin{aligned} F(x) &= k\,x \\ -10 &= k(-0{,}2) \\ k &= 50 \end{aligned}$$

og $F(x)=50\,x$. Til að reikna vinnuna heildum við síðan kraftfallið og fáum

$$W=\int_a^b F(x)\,dx=\int_0^{0{,}5} 50\,x\,dx=25\,x^2\Big|_0^{0{,}5}=6{,}25.$$

The work done to stretch the spring is 6,25 J.

STÖÐUMAT 2.25

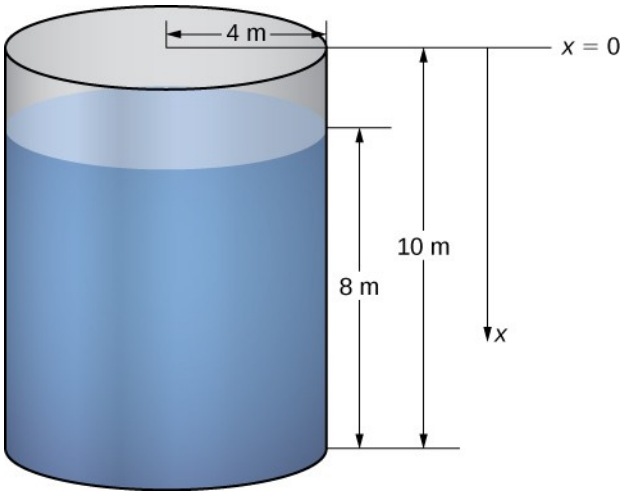
Gerum ráð fyrir að 8 N kraft þurfi til að teygja gorm 10 cm frá jafnvægisstöðu. Hve mikil vinna er unnin við að teygja gorminn 20 cm frá jafnvægisstöðu?

Vinna við dælingu

Skoðum vinnuna við að dæla vatni (eða öðrum vökva) úr tanki. Dæluverkefni eru nokkru flóknari en gormaverkefni því margir útreikningar ráðast af lögun og stærð tanksins. Auk þess skoðum við nú vinnuna við að færa tiltekið rúmmál af vatni en ekki einn hlut með tiltekinn massa. Meiri vinnu þarf til að færa vatn af botni tanksins en vatn sem er efst í honum.

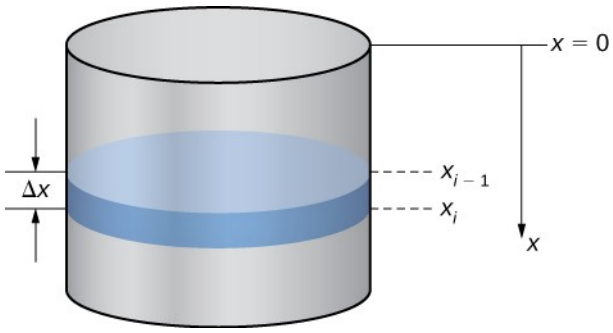
Við skoðum ferlið fyrst fyrir sívalan tank og síðan nokkur dæmi með tönkum af annarri lögun. Gerum ráð fyrir að sívalur tankur með radíus 4 m og hæð 10 m sé fylltur af vatni upp í 8 m dýpt. Hve mikla vinnu þarf til að dæla öllu vatninu upp yfir efri brún tanksins?

Fyrst þurfum við að skilgreina viðmiðunarkerfi. Látum x tákna lóðrétta fjarlægð niður frá efri brún tanksins. Með öðrum orðum látum við x-ás liggja lóðrétt, með upphafspunktinn efst í tankinum og jákvæða stefnu niður á við (sjá næstu mynd).



Mynd 2.52 Hve mikla vinnu þarf til að tæma tank sem er að hluta fylltur af vatni?

Í þessu hnitakerfi nær vatnið frá $x=2$ til $x=10$. Við skiptum því bilinu $[2,10]$ og skoðum vinnuna sem þarf til að lyfta hverju einstöku „lagi“ vatns. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[2,10]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Mynd 2.53 sýnir dæmigert lag.



Mynd 2.53 Dæmigert vatnslag.

Í dæluverkefnum þarf krafturinn sem lyftir vatninu upp að efri brún tanksins að vinna gegn þyngdaraflinu. Hann er því jafn þyngd vatnsins. Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m^3 (eðlismassinn 1000 kg/m^3 sinnum þyngdarhröðunin 9,8 m/s^2), svo að þyngdin fæst með því að reikna rúmmál hvers lags. Í þessu tilviki fæst

$$V = \pi (4)^2 \Delta x = 16\pi \Delta x.$$

Þá er krafturinn sem þarf til að lyfta hverju lagi

$$F = 9800 \cdot 16\pi \Delta x = 156.800\pi \Delta x.$$

Athugið að þetta skref verður nokkru flóknara ef tankurinn er ekki sívalur. Við skoðum slíkan tank í næsta dæmi.

Við þurfum einnig að vita hve langt þarf að lyfta vatninu. Miðað við hnitakerfið sem við völdum getum við notað x_i^* sem nálgun á vegalengdina sem þarf að lyfta laginu um. Þá er vinnan við að lyfta i-ta vatnslaginu W_i um það bil

$$W_i \approx 156.800\pi x_i^* \Delta x.$$

Með því að leggja saman vinnuna fyrir hvert lag sjáum við að áætluð vinna við að tæma tankinn er gefin með

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 156,800\pi x_i^* \Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa og með því að taka markgildið þegar $n \to \infty$, fæst

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 156.800\pi x_i^* \Delta x \\ &= 156.800\pi \int_2^{10} x\, dx \\ &= 156.800\pi \left[\frac{x^2}{2}\right] \Big|_2^{10} = 7.526.400\pi \approx 23.644.883. \end{aligned}$$

Vinnan sem þarf til að tæma tankinn er um það bil 23.650.000 J.

Útreikningar í dæluverkefnum ráðast af lögun tanksins eða ílátsins. Eftirfarandi lausnarleið lýsir skref fyrir skref hvernig leysa má dæluverkefni.

LAUSNARLEIÐ

Dæluverkefni leyst

1. Teiknið mynd af tankinum og veljið hentugt viðmiðunarkerfi.
2. Reiknið rúmmál dæmigerðs vatnslags.
3. Margfaldið rúmmálið með þyngdarþéttleika vatns til að fá kraftinn.
4. Reiknið vegalengdina sem þarf að lyfta vatnslaginu.
5. Margfaldið kraftinn með vegalengdinni til að fá mat á vinnunni sem þarf til að lyfta vatnslaginu.
6. Leggið saman vinnuna sem þarf til að lyfta öllum lögunum. Þessi stæða er mat á vinnunni sem þarf til að dæla út tilskildu vatnsmagni og er á formi Riemann-summu.
7. Takið markgildið þegar $n \to \infty$ og reiknið heildið sem fæst til að finna nákvæma vinnu við að dæla út tilskildu vatnsmagni.

Nú notum við þessa lausnarleið í dæmi með ósívölum tanki.

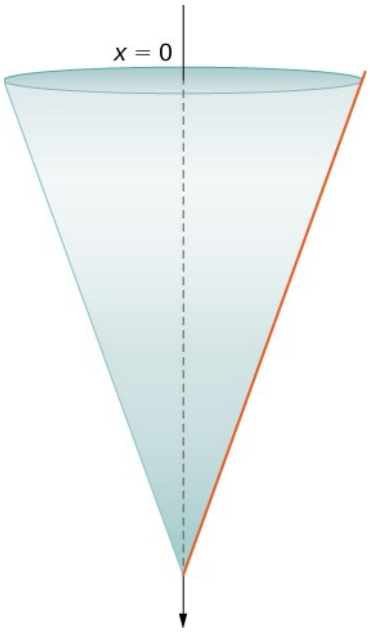
DÆMI 2.26

Dæluverkefni með ósívölum tanki

Gerum ráð fyrir tanki í laginu eins og keila á hvolfi, með hæðina 12 m og grunnradíusinn 4 m. Tankurinn er fullur í upphafi og vatni er dælt upp yfir efri brún hans þar til hæð vatnsins sem eftir er í tankinum er 4 m. Hve mikla vinnu þarf til að dæla út þessu vatnsmagni?

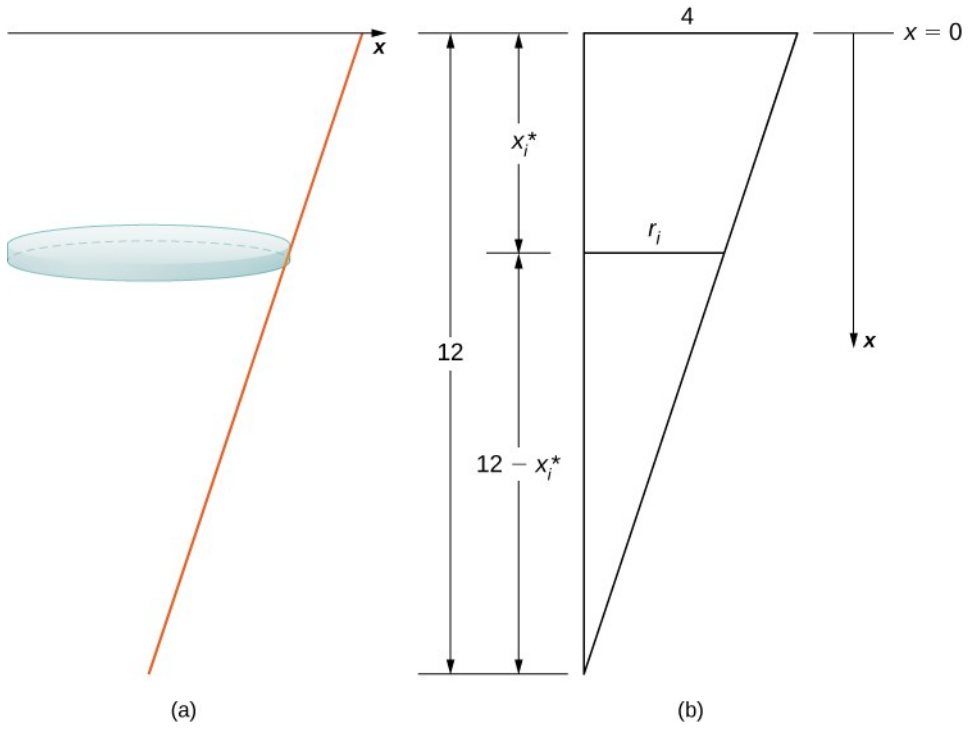
Lausn

Tankurinn er sýndur á mynd 2.54. Eins og í dæminu með sívala tankinum látum við x-ás liggja lóðrétt, með upphafspunktinn efst í tankinum og jákvæða stefnu niður á við (skref 1).



Mynd 2.54 Vatnstankur í laginu eins og keila á hvolfi.

Tankurinn er fullur í upphafi en að lokum eru 4 m af vatni eftir. Miðað við valið viðmiðunarkerfi þurfum við því að skipta bilinu $[0,8]$. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum við síðan $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[0,8]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Við getum nálgað rúmmál lags með skífu og síðan notað einslaga þríhyrninga til að finna geisla skífunnar (sjá næstu mynd).



Mynd 2.55 Einslaga þríhyrningar notaðir til að lýsa radíus vatnsskífu.

Af eiginleikum einslaga þríhyrninga fæst

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{12-x_i^*} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ 3r_i &= 12 - x_i^* \\ r_i &= \frac{12-x_i^*}{3} \\ &= 4 - \frac{x_i^*}{3}. \end{aligned}$$

Þá er rúmmál skífunnar

$$V_i = \pi\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \,(\text{skref 2}).$$

Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m³, þannig að krafturinn sem þarf til að lyfta hverju lagi er um það bil

$$F_i \approx 9800\,\pi\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \,(\text{skref 3}).$$

Samkvæmt myndinni þarf að lyfta vatninu um það bil x_i^* m (skref 4), þannig að vinnan sem þarf til að lyfta laginu er um það bil

$$W_i \approx 9800\,\pi\, x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (skref 5).}$$

Með því að leggja saman vinnuna sem þarf til að lyfta öllum lögunum fáum við nálgun fyrir heildarvinnuna:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 9800\,\pi\, x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (skref 6).}$$

Ef við tökum markgildið þegar $n \to \infty$, fáum við

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9800\,\pi\, x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \\ &= \int_0^8 9800\,\pi\, x \left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 dx \\ &= 9800\,\pi \int_0^8 x\left(16 - \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) dx = 9800\,\pi \int_0^8 \left(16x - \frac{8x^2}{3} + \frac{x^3}{9}\right) dx \\ &= 9800\,\pi \left[8x^2 - \frac{8x^3}{9} + \frac{x^4}{36}\right]\Big|_0^8 = 1.672.533{,}3\,\pi \approx 5.254.418{,}4. \end{aligned}$$

Það þarf um það bil 5,254,000 J af vinnu til að tæma tankinn niður í æskilega hæð.

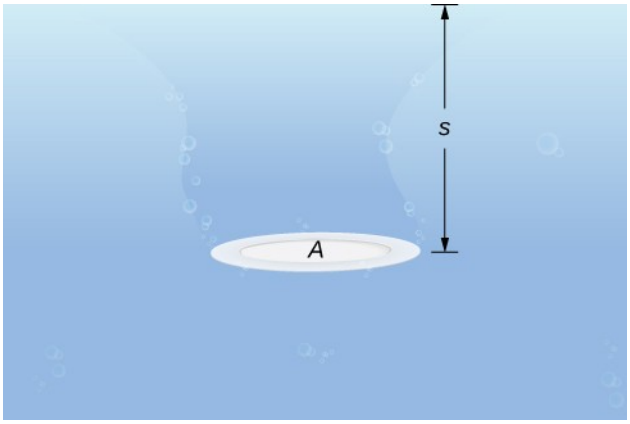
STÖÐUMAT 2.26

Tankur er í laginu eins og keila á hvolfi, með hæðina 10 m og grunnradíusinn 6 m. Í upphafi nær vatnið 8 m upp í tankinn og því er dælt upp yfir efri brún hans þar til 3 m af vatni eru eftir. Hve mikla vinnu þarf til að dæla út þessu vatnsmagni?

Kraftur og þrýstingur í vökva

Í þessum síðasta hluta skoðum við kraftinn og þrýstinginn sem verkar á hlut á kafi í vökva. Kraftur er mældur í njútonum. Þrýstingur er kraftur á flatarmálseiningu og er því gefinn í njútonum á fermetra, sem einnig nefnast pasköl.

Byrjum á einföldu tilviki þar sem plata með flatarmálið A er lárétt á kafi í vatni á dýpinu s (mynd 2.56). Þá er krafturinn sem verkar á plötuna einfaldlega þyngd vatnsins fyrir ofan hana, og hann er gefinn með $F = \rho A s$, þar sem ρ er þyngdarþéttleiki vatns (þyngd á rúmmálseiningu). Til að finna vökvastöðuþrýstinginn – það er að segja þrýstinginn sem vatn beitir á hlut á kafi – deilum við kraftinum með flatarmálinu. Þrýstingurinn er því $p = F/A = \rho s$.

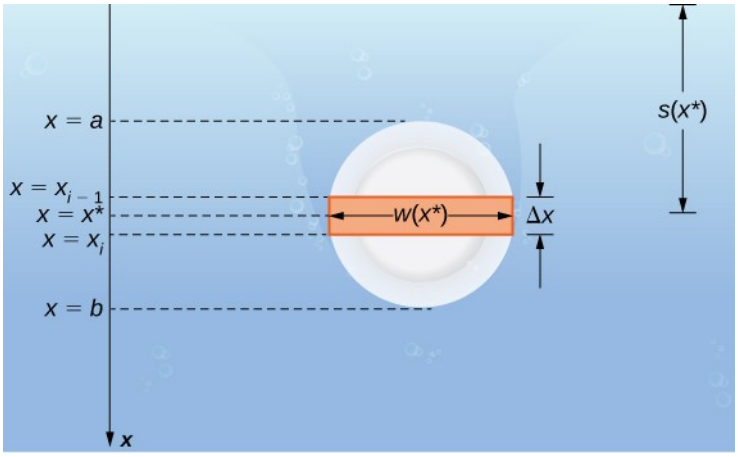


Mynd 2.56 Plata lárétt á kafi í vatni.

Samkvæmt lögmáli Pascals er þrýstingur á tilteknu dýpi sá sami í allar áttir og því skiptir ekki máli hvort platan er lárétt eða lóðrétt á kafi. Ef við þekkjum dýpið þekkjum við því þrýstinginn. Við getum beitt lögmáli Pascals til að finna kraftinn sem verkar á lóðrétta fleti, svo sem stíflur. Við getum ekki beitt formúlunni $F=\rho A s$ beint, því dýpið breytist frá einum punkti til annars á lóðréttum fleti. Eins og við höfum oft gert áður myndum við því skiptingu, Riemann-summu og að lokum ákveðið heildi til að reikna kraftinn.

Gerum ráð fyrir að þunn plata sé á kafi í vatni. Við veljum viðmiðunarkerfi þannig að x-ásinn liggi lóðrétt, jákvæða stefnan vísi niður á við og punkturinn $x=0$ samsvari hentugum viðmiðunarpunkti. Látum $s(x)$ tákna dýpið í punktinum x. Athugið að við látum oft $x=0$ samsvara yfirborði vatnsins. Í þessu tilviki er dýpið í hverjum punkti einfaldlega gefið með $s(x)=x$. Í sumum tilvikum gætum við þó viljað velja annan viðmiðunarpunkt fyrir $x=0$, og því leiðum við formúluna út fyrir almenna tilvikið. Að lokum látum við $w(x)$ tákna breidd plötunnar í punktinum x.

Gerum ráð fyrir að efri brún plötunnar sé við punkt $x=a$ og neðri brún hennar við punkt $x=b$. Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum síðan $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$, og fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við einhvern punkt $x_i^* \in [x_{i-1},x_i]$. Skiptingin skiptir plötunni í nokkrar þunnar, rétthyrndar ræmur (sjá næstu mynd).



Mynd 2.57 Þunn plata lóðrétt á kafi í vatni.

Metum nú kraftinn á dæmigerða ræmu. Ef ræman er nógu þunn getum við litið svo á að hún sé á föstu dýpi, $s\left(x_i^*\right)$. Þá fæst

$$F_i = \rho A s = \rho\left[w\left(x_i^*\right)\Delta x\right]s\left(x_i^*\right).$$

Með því að leggja kraftana saman fáum við mat á kraftinum sem verkar á plötuna:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \rho\left[w\left(x_i^*\right)\Delta x\right]s\left(x_i^*\right).$$

Þetta er Riemann-summa, svo markgildi hennar gefur nákvæman kraft:

$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \rho\left[w\left(x_i^*\right)\Delta x\right]s\left(x_i^*\right) = \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx.$$

(2.13)

Með því að reikna heildið fáum við kraftinn sem verkar á plötuna. Við tökum þetta saman í eftirfarandi lausnarleið.

LAUSNARLEIÐ

Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings fundinn

1. Teiknið mynd og veljið hentugt viðmiðunarkerfi. (Athugið að ef við veljum annað viðmiðunarkerfi en það sem áður var notað gætum við þurft að laga jöfnu 2.13 til samræmis.)
2. Ákvarðið dýptarfallið og breiddarfallið, $s(x)$ og $w(x)$.
3. Ákvarðið þyngdarþéttleika vökvans sem unnið er með. Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m^3.
4. Notið jöfnuna til að reikna heildarkraftinn.

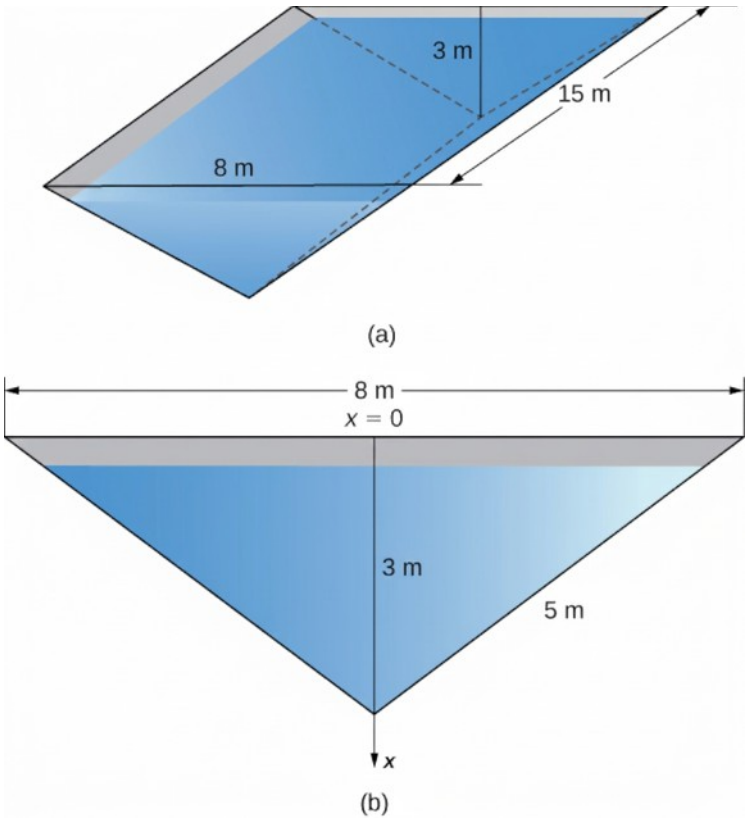
DÆMI 2.27

Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings fundinn

Vatnsrenna er 15 m á lengd og endar hennar eru í laginu eins og jafnarma þríhyrningar á hvolfi með grunnlínuna 8 m og hæðina 3 m. Finnið kraftinn sem verkar á annan enda rennunnar þegar hún er full af vatni.

Lausn

Mynd 2.58 sýnir rennuna og nákvæmari mynd af öðrum enda hennar.



Mynd 2.58 (a) Vatnsrenna með þríhyrningslaga þversnið. (b) Mál annars enda vatnsrennunnar.

Veljum viðmiðunarkerfi þar sem x-ás liggur lóðrétt og stefna niður á við er jákvæð. Látum efri brún rennunnar samsvara punktinum $x=0$ (skref 1). Dýptarfallið er þá $s(x)=x$. Með því að nota einslaga þríhyrninga sjáum við að $w(x)=8-(8/3)x$ (skref 2). Þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m^3 (skref 3), þannig að með því að beita jöfnu 2.13 fáum við

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx \\ &= \int_0^3 9800\left(8-\frac{8}{3}x\right)x\ dx = 9800\int_0^3\left(8x-\frac{8}{3}x^2\right)dx \\ &= 9800\left[4x^2-\frac{8}{9}x^3\right]\Big|_0^3 = 117.600. \end{aligned}$$

Vatnið verkar á enda rennunnar með 117.600 N krafti (skref 4).

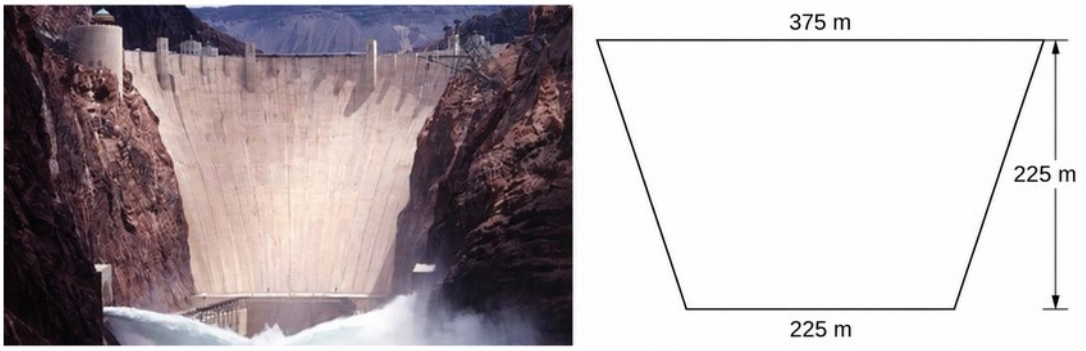
STÖÐUMAT 2.27

Vatnsrenna er 12 m á lengd og endar hennar eru í laginu eins og jafnarma þríhyrningar á hvolfi með grunnlínuna 6 m og hæðina 4 m. Finnið kraftinn sem verkar á annan enda rennunnar þegar hún er full af vatni.

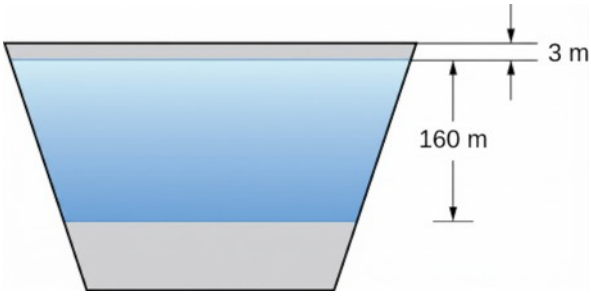
DÆMI 2.28

Kaflaupphaf: Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings fundinn

Nú beinum við sjónum aftur að Hoover-stíflunni sem var nefnd í upphafi kaflans. Stíflan er í raun bogadregin en ekki flöt. Til að auðvelda útreikningana gefum við okkur samt nokkrar einfaldandi forsendur. Gerum ráð fyrir að framhlið Hoover-stíflunnar sé í laginu eins og jafnarma trapisa með neðri grunnlínuna 225 m, efri grunnlínuna 375 m og hæðina 225 m (sjá næstu mynd).



Þegar miðlunarlónið er fullt er mesta dýpi Mead-vatns um 160 m og yfirborð vatnsins er um 3 m fyrir neðan efri brún stíflunnar (sjá næstu mynd).



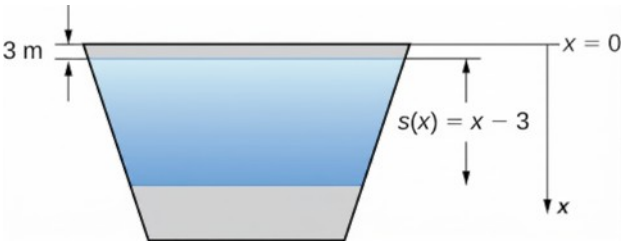
Mynd 2.59 Einfaldað líkan af Hoover-stíflunni með gefnum málum.

a. Finnið kraftinn sem verkar á framhlið stíflunnar þegar miðlunarlónið er fullt.

b. Þurrkar hafa geisað í suðvesturhluta Bandaríkjanna og yfirborð Mead-vatns er um 40 m neðar en það væri ef miðlunarlónið væri fullt. Hvaða kraftur verkar á framhlið stíflunnar við þessar aðstæður?

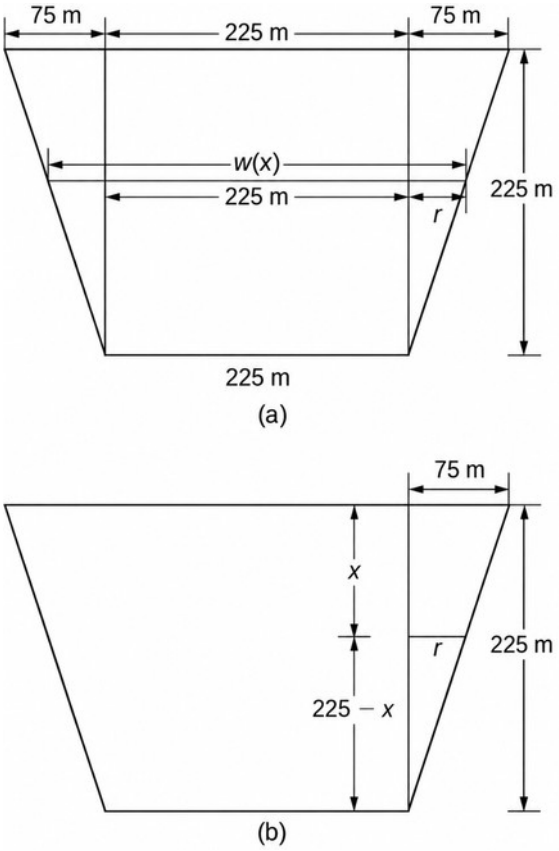
Lausn

a. Við byrjum á að velja viðmiðunarkerfi. Eins og venjulega látum við x-ás liggja lóðrétt með jákvæða stefnu niður á við. Að þessu sinni látum við hins vegar $x=0$ tákna efri brún stíflunnar en ekki yfirborð vatnsins. Þegar miðlunarlónið er fullt er yfirborð vatnsins 3 m fyrir neðan efri brún stíflunnar, svo $s(x)=x-3$ (sjá næstu mynd).



Mynd 2.60 Fyrst veljum við viðmiðunarkerfi.

Til að finna breiddarfallið notum við aftur einslaga þríhyrninga eins og næsta mynd sýnir.



Mynd 2.61 Einslaga þríhyrningar notaðir til að ákvarða fall fyrir breidd stíflunnar. (a) Gefin mál stíflunnar. (b) Einslaga þríhyrningarnir auðkenndir.

Af myndinni sjáum við að $w(x)=225+2r$. Af eiginleikum einslaga þríhyrninga fæst $r=75-(1/3)x$. Því fæst

$$w(x)=375-\frac{2}{3}x \text{ (skref 2).}$$

Með þyngdarþéttleikanum 9800 N/m³ (skref 3) og með því að beita jöfnu 2.13 fæst

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx \\ &= \int_3^{163} 9800\left(375-\frac{2}{3}x\right)(x-3)\,dx = 9800\int_3^{163} -\frac{2}{3}\left[x^2-565{,}5\,x+1687{,}5\right]dx \\ &= -9800\left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{x^3}{3}-\frac{565{,}5\,x^2}{2}+1687{,}5\,x\right]\Bigg|_3^{163} \\ &\approx 37.868.942.000 \text{ N} = 37.868.942 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Takið eftir breytingunni úr njútonum í kílónjúton: (1000 N = 1 kN) (skref 4).

b. Takið eftir að þurrkarnir breyta dýptarfallinu, $s(x)$, og heildunarmörkunum. Við höfum $s(x)=x-43$. Neðri heildunarmörkin eru 43. Efri mörkin eru enn 163. Með því að reikna heildið fæst

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\, dx \\ &= \int_{43}^{163} 9800\left(375-\frac{2}{3}x\right)(x-43)\, dx \\ &= -9800\left(\frac{2}{3}\right)\int_{43}^{163}(x-562{,}5)(x-43)\, dx \\ &= -9800\left(\frac{2}{3}\right)\int_{43}^{163}(x^2-605{,}5\,x+24187{,}5)\, dx \\ &= -9800\left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{x^3}{3}-302{,}75\,x^2+24187{,}5\,x\right]\Bigg|_{43}^{163} \\ &\approx 20.674.080.000 \text{ N} = 20.674.080 \text{ kN}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.28

Þegar vatnsborð miðlunarlónsins er í meðalhæð er yfirborð vatnsins um 15 m neðar en það væri ef lónið væri fullt. Hvaða kraftur verkar á framhlið stíflunnar við þessar aðstæður?

MARGMIÐLUN

Nánar má fræðast um Hoover-stífluna í þessari grein frá History Channel.

Æfingar í undirkafla 2.5

Finnið vinnuna í eftirfarandi æfingum.

218. Find the work done when a constant force $F=12$ lb moves a chair from $x=0{,}9$ to $x=1{,}1$ ft.

219. Hve mikil vinna er unnin þegar manneskja lyftir 25 kg kassa með myndasögum upp á vörubílspall sem er 1 m frá jörðu? (Athugið að massinn 1 kg vegur 9,8 N nálægt yfirborði jarðar.)

220. What is the work done lifting a 20 kg child from the floor to a height of 2 m? (Note that a mass of1 kg weighs 9,8 N near the surface of the Earth.)

221. Finnið vinnuna þegar kassa er ýtt 2 m eftir gólfi með föstum krafti $F=100\,\text{N}$.

222. Reiknið vinnu kraftsins $F=12/x^2$ N frá $x=1$ til $x=2$ m.

223. Hve mikil vinna er unnin við að færa ögn frá $x=0$ til $x=1$ m ef krafturinn sem verkar á hana er $F=3x^2$ N?

Finnið massa einvíða hlutarins í eftirfarandi æfingum.

224. Vír sem er 2 m á lengd (frá $x=0$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=x^2+2x$ g/m

225. Bílaloftnet sem er 1 m á lengd (frá $x=0$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=3x+2$ g/m

226. Málmstöng sem er 8 cm á lengd (frá $x=0$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=e^{(1/2)x}$ g/cm

227. Blýantur sem er 10 cm á lengd (frá $x=2$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=5/x$ g/cm

228. Reglustika sem er 12 cm á lengd (frá $x=5$) og hefur þéttleikafallið $\rho(x)=\ln(x)+(1/2)x^2$ g/cm

Finnið massa tvívíða hlutarins með miðju í upphafspunktinum í eftirfarandi æfingum.

229. Óvenjustór íshokkípökkur með geisla 5 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=x^3-2x+5$

230. Frisbídiskur með geisla 12 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=e^{-x}$

231. Plata með geisla 10 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=1+\cos(\pi x)$

232. Krukkulok með geisla 3 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=\ln(x+1)$

233. Skífa með geisla 5 cm og þéttleikafallið $\rho(x)=\sqrt{3x}$

234. Til að teygja gorm sem er 12 cm á lengd í 15 cm þarf kraft sem nemur 75 N. Hver er gormstuðullinn?

235. Gormur hefur náttúrulega lengd 10 cm. Það þarf 2 J til að teygja hann í 15 cm. Hve mikla vinnu þarf til að teygja gorminn frá 15 cm í 20 cm?

236. A 1-m spring requires 10 J to stretch the spring to 1,1 m. How much work would it take to stretch the spring from 1 m to 1,2 m?

237. Það þarf 5 J til að teygja gorm frá 8 cm í 12 cm og 4 J til viðbótar til að teygja hann frá 12 cm í 14 cm. Hver er náttúruleg lengd gormsins?

238. Höggdeyfir þjappast saman um 5 cm undan þunga hlutar sem er 1 tonn (1000 kg) að massa. (Massinn 1 kg vegur 9,8 N.) Hver er gormstuðullinn?

239. Krafturinn $F=20x-x^3$ N teygir ólínulegan gorm um x metra. Hve mikla vinnu þarf til að teygja gorminn frá $x=0$ til $x=2$ m?

240. Finnið vinnuna við að vinda upp hangandi kapal sem er 100 m á lengd og hefur þyngdarþéttleikann 5 N/m.

241. Hve mikil vinna er unnin við að lyfta kaplinum í æfingunni á undan um 50 m?

242. Hve mikil viðbótarvinna er unnin ef lóð sem vegur 200 N er hengt í enda kapalsins í æfingunni á undan?

243. **[T]** Pýramídi með hæðina 150 m hefur ferningslaga grunnflöt sem er 240 m sinnum 240 m. Finnið flatarmálið A í hæðinni h. Ef bergið sem notað var til að byggja pýramídann vegur um $w = 25{,}000\ \text{N/m}^3$, hve mikla vinnu þurfti til að lyfta öllu berginu?

244. **[T]** Gerum ráð fyrir að 1000 verkamenn hafi byggt pýramídann í æfingunni á undan og hver þeirra unnið 10 klukkustundir á dag, 5 daga í viku og 50 vikur á ári. Ef verkamennirnir lyftu að meðaltali 10 steinum sem hver um sig var 50 kg að massa um 1 m á klukkustund, hve lengi voru þeir að byggja pýramídann? (Massinn 1 kg vegur 9,8 N.)

245. **[T]** Þyngdarkrafturinn á massann m er $F = -\left((GMm)/x^2\right)$ njúton. Reiknið vinnuna við að lyfta eldflaug sem hefur massann $m = 1000\,\text{kg}$, frá $x = 6400$ til $x = 6500$ km. Gefið svörin með þremur markverðum tölustöfum. (Athugið: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2$ og $M = 6 \times 10^{24}\,\text{kg}$.)

246. **[T]** Finnið vinnuna við að lyfta eldflauginni úr æfingunni á undan frá $x = 6400$ til $x = \infty$.

247. **[T]** Rétthyrnd stífla er 40 m á hæð og 60 m á breidd. Gerið ráð fyrir að þyngdarþéttleiki vatns sé 9800 N/m³. Reiknið heildarkraftinn F á stífluna þegar

a. yfirborð vatnsins er við efri brún stíflunnar og
b. yfirborð vatnsins er mitt á milli efri og neðri brúnar stíflunnar.

248. **[T]** Finnið vinnuna sem þarf til að dæla öllu vatninu úr sívalningi sem hefur hringlaga grunnflöt með geislann 5 m og hæðina 20 m. Notið að þyngdarþéttleiki vatns er 9800 N/m³.

249. **[T]** Finnið vinnuna sem þarf til að dæla öllu vatninu úr sívalningnum í æfingunni á undan ef hann er aðeins hálffullur af vatni.

250. **[T]** Hve mikla vinnu þarf til að dæla vatninu úr sundlaug ef flatarmál botnsins er 80 m², vatnsdýptin er 1,5 m og efri brún laugarinnar er 0,5 m fyrir ofan vatnsborðið? Gerið ráð fyrir að þyngdarþéttleiki vatns sé 9800 N/m³.

251. Sívalningur með dýptina H og þversniðsflatarmálið A er fullur af vatni með eðlismassann ρ. Reiknið vinnuna við að dæla öllu vatninu upp að efri brún.

252. Reiknið vinnuna við að dæla öllu vatninu upp að efri brún sívalningsins í æfingunni á undan ef hann er aðeins hálffullur af vatni.

253. Keilulaga tankur hefur þversniðsflatarmál sem vex með dýptinni: $A = \left(\pi r^2 h^2\right)/H^3$. Sýnið að vinnan við að tæma hann er helmingur vinnunnar við að tæma sívalning með sömu hæð og sama grunnflöt.

2.6 Vægi og massamiðjur

NÁMSMARKMIÐ

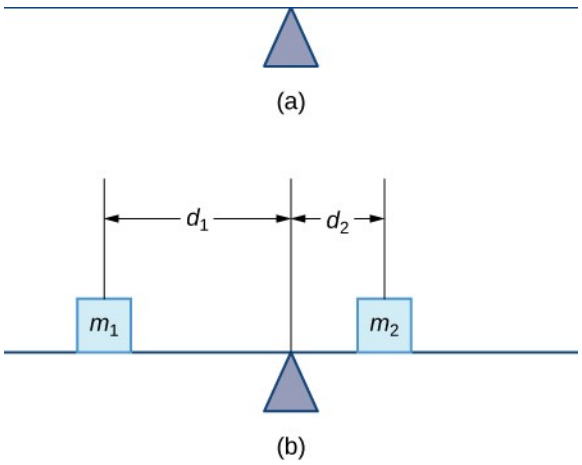
- 2.6.1 Finna massamiðju hluta sem dreifast eftir línu.
- 2.6.2 Finna massamiðju þunnrar plötu.
- 2.6.3 Nota samhverfu til að finna þungamiðju þunnrar plötu.
- 2.6.4 Beita Papposarsetningu um rúmmál.

Í þessum undirkafla skoðum við massamiðjur (sem við ákveðin skilyrði nefnast einnig þungamiðjur) og vægi. Grunnhugmynd massamiðju er jafnvægispunktur. Mörg okkar hafa séð listamenn láta diska snúast á endum stanga. Þeir reyna að halda mörgum diskum á snúningi samtímis án þess að nokkur þeirra falli. Ef við skoðum einn disk án þess að láta hann snúast er á honum ákveðinn punktur þar sem hann helst fullkomlega í jafnvægi á stönginni. Sé stöngin sett annars staðar helst diskurinn ekki í jafnvægi og fellur til jarðar. (Þess vegna láta listamennirnir diskana snúast; snúningurinn hjálpar til við að halda þeim uppi þótt stöngin sé ekki nákvæmlega á réttum stað.) Í stærðfræði nefnist þessi jafnvægispunktur massamiðja disksins.

Í þessum undirkafla skoðum við hugtökin fyrst í einni vídd og síðan massamiðjur tvívíðra svæða og samhverfu. Að lokum notum við þungamiðjur og Papposarsetningu til að finna rúmmál tiltekinna rúmhluta.

Massamiðja og vægi

Byrjum á að skoða massamiðju í einni vídd. Hugsum okkur langan, þunnan vír eða stöng með hverfandi massa sem hvílir á vogarási, eins og sýnt er á mynd 2.62 (a). Gerum nú ráð fyrir að við setjum hluti með massana m_1 og m_2 í fjarlægðunum d_1 og d_2 frá vogarásnum, í sömu röð, eins og sýnt er á mynd 2.62 (b).

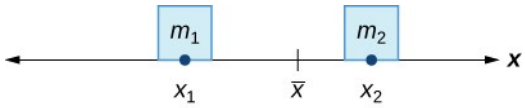


Mynd 2.62 (a) Þunn stöng hvílir á vogarási. (b) Massar eru settir á stöngina.

Algengasta dæmið um slíkt kerfi úr daglegu lífi er vegasalt á leikvelli þar sem misþung börn sitja í mismikilli fjarlægð frá miðjunni. Ef eitt barn situr á hvorum enda sígur þyngra barnið

niður en það léttara lyftist upp. Ef þyngra barnið færir sig nær miðjunni kemst vegasaltið hins vegar í jafnvægi. Ef við beitum þessari hugmynd á massana á stönginni sjáum við að þeir vega hvor annan upp þá og því aðeins að $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

Í dæminu um vegasaltið komum við kerfinu í jafnvægi með því að færa massana (börnin) miðað við vogarásinn. Við höfum þó einkum áhuga á kerfum þar sem massarnir geta ekki færst og við komum kerfinu þess í stað í jafnvægi með því að færa vogarásinn. Gerum ráð fyrir tveimur punktmössum, m_1 og m_2, sem eru á talnalínu í punktunum x_1 og x_2, í sömu röð (mynd 2.63). Massamiðjan, $\bar{x}$, er sá punktur þar sem setja þarf vogarásinn svo að kerfið verði í jafnvægi.



Mynd 2.63 Massamiðjan $\bar{x}$ er jafnvægispunktur kerfisins.

Því fæst

$$\begin{aligned} m_1 |\bar{x} - x_1| &= m_2 |x_2 - \bar{x}| \\ m_1 (\bar{x} - x_1) &= m_2 (x_2 - \bar{x}) \\ m_1 \bar{x} - m_1 x_1 &= m_2 x_2 - m_2 \bar{x} \\ \bar{x} (m_1 + m_2) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Segðin í teljaranum, $m_1 x_1 + m_2 x_2$, nefnist fyrsta vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins. Þegar samhengið er skýrt sleppum við oft orðinu fyrsta og köllum segðina einfaldlega vægi kerfisins. Segðin í nefnaranum, $m_1 + m_2$, er heildarmassi kerfisins. Massamiðja kerfisins er því sá punktur þar sem safna mætti öllum massa kerfisins saman án þess að breyta væginu.

Hugmyndin takmarkast ekki við tvo punktmassa. Almennt gildir að ef n mössum, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, er komið fyrir á talnalínu í punktunum $x_1, x_2, \ldots, x_n$, í sömu röð, þá er massamiðja kerfisins gefin með

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

SETNING 2.9

Massamiðja hluta á línu

Látum $m_1, m_2, \ldots, m_n$ vera punktmassa sem komið er fyrir á talnalínu í punktunum $x_1, x_2, \ldots, x_n$, í sömu röð, og látum $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ tákna heildarmassa kerfisins. Þá er vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins gefið með

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

(2.14)

og massamiðja kerfisins er gefin með

$$\bar{x} = \frac{M}{m}.$$

(2.15)

Við beitum setningunni í næsta dæmi.

DÆMI 2.29

Massamiðja hluta á línu fundin

Gerum ráð fyrir að fjórum punktmössum sé komið fyrir á talnalínu eins og hér segir:

$$m_1 = 30 \text{ kg, við } x_1 = -2 \text{ m} \qquad m_2 = 5 \text{ kg, við } x_2 = 3 \text{ m}$$
$$m_3 = 10 \text{ kg, við } x_3 = 6 \text{ m} \qquad m_4 = 15 \text{ kg, við } x_4 = -3 \text{ m}.$$

Finnið vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins og massamiðju þess.

Lausn

Fyrst reiknum við vægi kerfisins:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{4} m_i x_i \\ &= -60 + 15 + 60 - 45 = -30. \end{aligned}$$

Til að finna massamiðjuna þurfum við næst heildarmassa kerfisins:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{4} m_i \\ &= 30 + 5 + 10 + 15 = 60 \,\text{kg}. \end{aligned}$$

Þá fæst

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{-30}{60} = -\frac{1}{2}.$$

Massamiðjan er 1/2 m vinstra megin við upphafspunktinn.

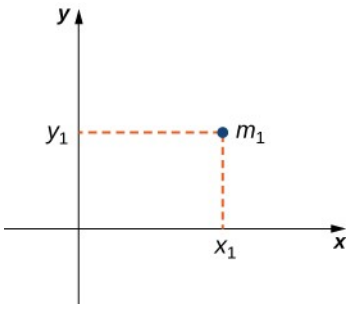
STÖÐUMAT 2.29

Gerum ráð fyrir að fjórum punktmössum sé komið fyrir á talnalínu eins og hér segir:

$$m_1 = 12 \text{ kg, við } x_1 = -4 \text{ m} \qquad m_2 = 12 \text{ kg, við } x_2 = 4 \text{ m}$$
$$m_3 = 30 \text{ kg, við } x_3 = 2 \text{ m} \qquad m_4 = 6 \text{ kg, við } x_4 = -6 \text{ m}.$$

Finnið vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins og massamiðju þess.

Við getum alhæft hugmyndina til að finna massamiðju kerfis punktmassa í sléttu. Látum m_1 vera punktmassa í punktinum (x_1, y_1) í sléttunni. Þá er vægi massans M_x um x-ásinn gefið með $M_x = m_1 y_1$. Á sama hátt er vægið M_y um y-ásinn gefið með $M_y = m_1 x_1$. Takið eftir að x-hnit punktsins er notað til að reikna vægið um y-ásinn og öfugt. Ástæðan er sú að x-hnitið gefur fjarlægð punktmassans frá y-ásnum en y-hnitið gefur fjarlægðina frá x-ásnum (sjá næstu mynd).



Mynd 2.64 Punktmassi m_1 er í punktinum (x_1, y_1) í sléttunni.

Ef nokkrir punktmassar eru í xy-sléttunni getum við notað vægin um x- og y-ásana til að reikna x- og y-hnit massamiðju kerfisins.

SETNING 2.10

Massamiðja hluta í sléttu

Látum $m_1, m_2, \ldots, m_n$ vera punktmassa í xy-sléttunni í punktunum $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, í sömu röð, og látum $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ tákna heildarmassa kerfisins. Þá eru vægi kerfisins M_x og M_y um x- og y-ásana, í sömu röð, gefin með

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ og } M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

(2.16)

Einnig eru hnit massamiðju $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ kerfisins

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

(2.17)

Næsta dæmi sýnir hvernig setningunni er beitt.

2

DÆMI 2.30

Massamiðja hluta í sléttu fundin

Gerum ráð fyrir að þremur punktmössum sé komið fyrir í xy-sléttunni eins og hér segir (hnitin eru gefin í metrum):

$$m_1 = 2 \text{ kg, við } (-1, 3),$$
$$m_2 = 6 \text{ kg, við } (1, 1),$$
$$m_3 = 4 \text{ kg, við } (2, -2).$$

Finnið massamiðju kerfisins.

Lausn

Fyrst reiknum við heildarmassa kerfisins:

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 2+6+4 = 12\,\text{kg}.$$

Næst finnum við vægin um x- og y-ásana:

$$M_y = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = -2 + 6 + 8 = 12,$$
$$M_x = \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 6 + 6 - 8 = 4.$$

Þá fæst

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{12}{12} = 1 \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Massamiðja kerfisins er $(1, 1/3)$, í metrum.

STÖÐUMAT 2.30

Gerum ráð fyrir að þremur punktmössum sé komið fyrir á talnalínu eins og hér segir (hnitin eru gefin í metrum):

$$m_1 = 5 \text{ kg, við } (-2,-3),$$
$$m_2 = 3 \text{ kg, við } (2,3),$$
$$m_3 = 2 \text{ kg, við } (-3,-2).$$

Finnið massamiðju kerfisins.

Massamiðja þunnra platna

Hingað til höfum við skoðað kerfi punktmassa á línu og í sléttu. Nú skoðum við kerfi þar sem massinn er ekki samþjappaður í einstökum punktum heldur dreifist samfellt um þunna efnisplötu. Við gerum ráð fyrir að platan sé svo þunn að líta megi á hana sem tvívíða. Slík efnisplata nefnist þunn plata. Næst setjum við fram aðferðir til að finna massamiðju hennar. Í þessum undirkafla gerum við einnig ráð fyrir að þéttleiki plötunnar sé fastur.

Oft er þunn plata táknuð með tvívíðu svæði í sléttu. Rúmfræðileg miðja slíks svæðis nefnist þungamiðja. Við höfum gert ráð fyrir að þéttleiki plötunnar sé fastur. Því ræðst massamiðja hennar eingöngu af lögun samsvarandi svæðis í sléttunni en ekki af þéttleikanum. Þá fellur massamiðja plötunnar saman við þungamiðju afmarkaða svæðisins. Líkt og í kerfum punktmassa þurfum við að finna heildarmassa plötunnar og vægi hennar um x- og y-ásana.

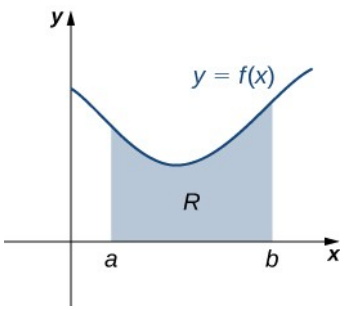
Skoðum fyrst rétthyrnda þunna plötu. Rifjum upp að massamiðja plötu er sá punktur þar sem hún helst í jafnvægi. Í rétthyrningi er punkturinn bæði lárétt og lóðrétt miðja hans. Massamiðja rétthyrndrar plötu er því skurðpunktur hornalínanna. Þetta leiðir af samhverfureglunni, sem hér er sett fram án sönnunar.

SETNING 2.11

Samhverfureglan

Ef svæði R er samhverft um línu l liggur þungamiðja R á l.

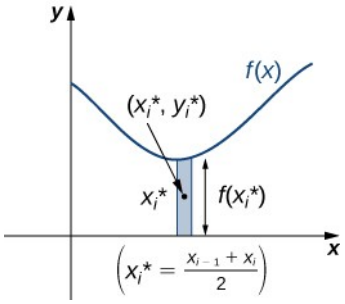
Snúum okkur nú að almennari þunnum plötum. Gerum ráð fyrir að þunn plata afmarkist að ofan af grafi samfellds falls $f(x)$, að neðan af x-ásnum og til vinstri og hægri af línunum $x = a$ og $x = b$, í sömu röð, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 2.65 Svæði í sléttu sem táknar þunna plötu.

Líkt og í kerfum punktmassa þurfum við að finna heildarmassa plötunnar og vægi hennar um x- og y-ásana til að finna massamiðjuna. Eins og oft áður nálgum við þessar stærðir með því að skipta bilinu $[a,b]$ og mynda rétthyrninga.

Fyrir $i=0,1,2,\ldots,n$, látum $P=\{x_i\}$ vera reglulega skiptingu bilsins $[a,b]$. Rifjum upp að við getum valið hvaða punkt sem er innan bilsins $[x_{i-1},x_i]$ sem x_i^*. Hér viljum við að x_i^* sé x-hnit þungamiðju rétthyrningsins. Fyrir $i=1,2,\ldots,n$, veljum við því $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$ þannig að x_i^* sé miðpunktur bilsins, það er $x_i^*=(x_{i-1}+x_i)/2$. Nú myndum við, fyrir $i=1,2,\ldots,n$, rétthyrning með hæðina $f(x_i^*)$ á $[x_{i-1},x_i]$. Massamiðja rétthyrningsins er $\left(x_i^*,\left(f(x_i^*)\right)/2\right)$, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 2.66 Dæmigerður rétthyrningur plötunnar.

Næst finnum við heildarmassa rétthyrningsins. Látum ρ tákna þéttleika plötunnar (takið eftir að ρ er fasti). Hér er ρ gefið sem massi á flatarmálseiningu. Til að finna heildarmassa rétthyrningsins margföldum við því flatarmál hans með ρ. Massi rétthyrningsins er þá $\rho f(x_i^*)\Delta x$.

Við nálgum massa plötunnar með því að leggja saman massa allra rétthyrninganna og fáum

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho f(x_i^*)\Delta x.$$

Þetta er Riemann-summa. Með því að taka markgildið þegar $n\to\infty$ fæst nákvæmur massi plötunnar:

$$m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho f(x_i^*)\Delta x=\rho\int_a^b f(x)\,dx.$$

Næst reiknum við vægi plötunnar um x-ásinn. Rifjum upp að massamiðja hins dæmigerða rétthyrnings er $\left(x_i^*,\left(f(x_i^*)\right)/2\right)$. Vægið breytist ekki þótt litið sé á rétthyrninginn sem punktmassa í massamiðjunni. Vægi rétthyrningsins um x-ásinn fæst því með því að margfalda massa hans, $\rho f(x_i^*)\Delta x$, með fjarlægð massamiðjunnar frá x-ásnum, $\left(f(x_i^*)\right)/2$. Vægi rétthyrningsins um x-ásinn er því $\rho\left(\left[f(x_i^*)\right]^2/2\right)\Delta x$. Ef við leggjum saman vægi

rétthyrninganna og tökum markgildi Riemann-summunnar sem fæst sjáum við að vægi plötunnar um x-ásinn er

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \frac{\left[f\left(x_i^*\right)\right]^2}{2} \Delta x = \rho \int_a^b \frac{\left[f(x)\right]^2}{2} dx.$$

Á svipaðan hátt leiðum við út vægið um y-ásinn og notum þá að fjarlægðin frá massamiðju rétthyrningsins að y-ásnum er x_i^*. Þá er vægi plötunnar um y-ásinn gefið með

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho x_i^* f\left(x_i^*\right) \Delta x = \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

Við finnum hnit massamiðjunnar með því að deila vægjunum með heildarmassanum og fáum $\bar{x} = M_y/m$ og $\bar{y} = M_x/m$. Ef við skoðum vel segðirnar fyrir M_x, M_y, og m, sjáum við að fastinn ρ styttist út þegar $\bar{x}$ og $\bar{y}$ eru reiknuð.

Við tökum niðurstöðurnar saman í næstu setningu.

SETNING 2.12

Massamiðja þunnrar plötu í xy-sléttunni

Látum R tákna svæði sem afmarkast að ofan af grafi samfellds falls $f(x)$, að neðan af x-ásnum og til vinstri og hægri af línunum $x = a$ og $x = b$, í sömu röð. Látum ρ tákna þéttleika samsvarandi þunnrar plötu. Þá gildir eftirfarandi:

i. Massi þunnu plötunnar er

$$m = \rho \int_a^b f(x) dx.$$

(2.18)

ii. Vægin M_x og M_y um x- og y-ásana eru, í sömu röð,

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{\left[f(x)\right]^2}{2} dx \text{ og } M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx.$$

(2.19)

iii. Hnit massamiðjunnar $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ eru

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

(2.20)

Í næsta dæmi notum við setninguna til að finna massamiðju þunnrar plötu.

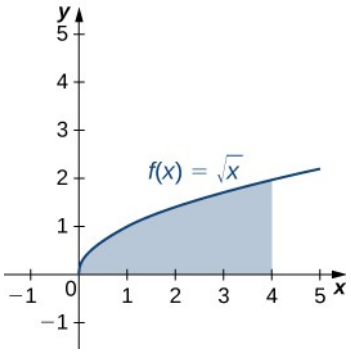
DÆMI 2.31

Massamiðja þunnrar plötu fundin

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,4]$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Lausn

Svæðið er sýnt á næstu mynd.



Mynd 2.67 Massamiðja þunnrar plötu fundin.

Við eigum aðeins að finna þungamiðju svæðisins en hvorki massa né vægi samsvarandi þunnrar plötu. Við vitum því að þéttleikafastinn ρ styttist að lokum út úr útreikningunum. Til einföldunar skulum við því gera ráð fyrir að $\rho=1$.

Fyrst reiknum við heildarmassann:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{3}[8-0] = \tfrac{16}{3}. \end{aligned}$$

Næst reiknum við vægin:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx \\ &= \int_0^4 \frac{x}{2}dx = \tfrac{1}{4}x^2\Big|_0^4 = 4 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x f(x)\,dx \\ &= \int_0^4 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{3/2}\,dx \\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{5}[32-0] = \tfrac{64}{5}. \end{aligned}$$

Því fæst

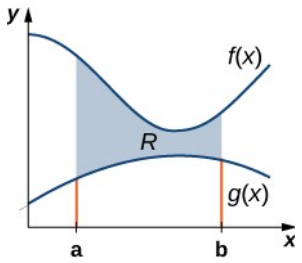
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{64/5}{16/3} = \frac{64}{5}\cdot\frac{3}{16} = \frac{12}{5} \text{ og } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{16/3} = 4\cdot\frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

Þungamiðja svæðisins er $(12/5, 3/4)$.

STÖÐUMAT 2.31

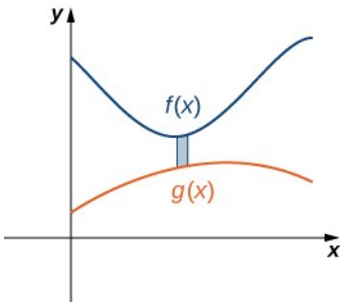
Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x) = x^2$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0, 2]$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Við getum einnig lagað aðferðina að því að finna þungamiðjur flóknari svæða. Gerum eins og áður ráð fyrir að svæðið afmarkist að ofan af grafi samfellds falls $f(x)$, en nú afmarkast það ekki að neðan af x-ásnum heldur af grafi annars samfellds falls, $g(x)$, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 2.68 Svæði milli tveggja falla.

Aftur skiptum við bilinu $[a, b]$ og myndum rétthyrninga. Dæmigerður rétthyrningur er sýndur á næstu mynd.



Mynd 2.69 Dæmigerður rétthyrningur á svæðinu milli tveggja falla.

Takið eftir að þungamiðja rétthyrningsins er $\left(x_i^*, \left(f\left(x_i^*\right)+g\left(x_i^*\right)\right)/2\right)$. Við förum ekki í öll smáatriðin við að setja upp Riemann-summuna en skoðum nokkur lykilskref. Þegar formúlurnar fyrir massa plötunnar og vægið um y-ásinn eru leiddar út er hæð hvers rétthyrnings $f\left(x_i^*\right)-g\left(x_i^*\right)$, sem leiðir til segðarinnar $f(x)-g(x)$ í heildisstofnunum.

Þegar formúlan fyrir vægið um x-ásinn er leidd út fæst vægi hvers rétthyrnings með því að margfalda flatarmál hans, $\rho\left[f\left(x_i^*\right)-g\left(x_i^*\right)\right]\Delta x$, með fjarlægð þungamiðjunnar frá x-ásnum, $\left(f\left(x_i^*\right)+g\left(x_i^*\right)\right)/2$, sem gefur $\rho(1/2)\left\{\left[f\left(x_i^*\right)\right]^2-\left[g\left(x_i^*\right)\right]^2\right\}\Delta x$. Við tökum niðurstöðurnar saman í næstu setningu.

2

SETNING 2.13

Massamiðja þunnrar plötu sem afmarkast af tveimur föllum

Látum R tákna svæði sem afmarkast að ofan af grafi samfellda fallsins $f(x)$, að neðan af grafi samfellda fallsins $g(x)$, og til vinstri og hægri af línunum $x=a$ og $x=b$, í sömu röð. Látum ρ tákna þéttleika samsvarandi þunnrar plötu. Þá gildir eftirfarandi:

i. Massi þunnu plötunnar er

$$m=\rho\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx.$$

(2.21)

ii. Vægin M_x og M_y um x- og y-ásana eru, í sömu röð,

$$M_x=\rho\int_a^b\frac{1}{2}\left(\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\right)dx \text{ og } M_y=\rho\int_a^b x\left[f(x)-g(x)\right]dx.$$

(2.22)

iii. Hnit massamiðjunnar $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ eru

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m} \text{ og } \bar{y}=\frac{M_x}{m}.$$

(2.23)

Við skýrum setninguna með næsta dæmi.

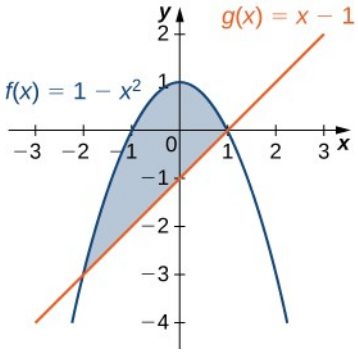
DÆMI 2.32

Þungamiðja svæðis sem afmarkast af tveimur föllum fundin

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=1-x^2$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=x-1$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Lausn

Svæðið er sýnt á næstu mynd.



Mynd 2.70 Þungamiðja svæðis milli tveggja ferla fundin.

Gröf fallanna skerast í $(-2,-3)$ og $(1,0)$, þannig að við heildum frá -2 til 1. Til einföldunar gerum við aftur ráð fyrir að $\rho=1$.

Fyrst reiknum við heildarmassann:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b [f(x)-g(x)]dx \\ &= \int_{-2}^{1} \left[1-x^2-(x-1)\right]dx = \int_{-2}^{1} (2-x^2-x)dx \\ &= \left[2x-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = \left[2-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right]-\left[-4+\tfrac{8}{3}-2\right] = \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

Næst reiknum við vægin:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{1}{2}\Big([f(x)]^2-[g(x)]^2\Big)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{1} \Big(\big(1-x^2\big)^2-(x-1)^2\Big)dx = \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{1} \big(x^4-3x^2+2x\big)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^5}{5}-x^3+x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = -\tfrac{27}{10} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x\,[f(x)-g(x)]dx \\ &= \int_{-2}^{1} x\left[\big(1-x^2\big)-(x-1)\right]dx = \int_{-2}^{1} x\left[2-x^2-x\right]dx \\ &= \int_{-2}^{1} \big(2x-x^3-x^2\big)dx \\ &= \left[x^2-\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{1} = -\tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

Því fæst

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{9}=-\frac{1}{2} \text{ og } \bar{y}=\frac{M_x}{m}=-\frac{27}{10}\cdot\frac{2}{9}=-\frac{3}{5}.$$

Þungamiðja svæðisins er $\left(-(1/2),-(3/5)\right)$.

STÖÐUMAT 2.32

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=6-x^2$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)=3-2x$. Finnið þungamiðju svæðisins.

Samhverfureglan

Við settum samhverfuregluna fram fyrr þegar við skoðuðum þungamiðju rétthyrnings. Reglan getur komið að miklu gagni þegar finna á þungamiðjur samhverfra svæða. Skoðum næsta dæmi.

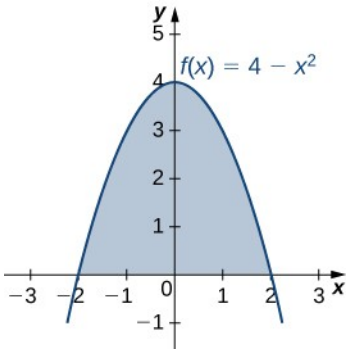
DÆMI 2.33

Þungamiðja samhverfs svæðis fundin

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)=4-x^2$ og að neðan af x-ásnum. Finnið þungamiðju svæðisins.

Lausn

Svæðið er sýnt á næstu mynd.



Mynd 2.71 Við getum notað samhverfuregluna til að finna þungamiðju samhverfs svæðis.

Svæðið er samhverft um y-ásinn. Því er x-hnit þungamiðjunnar núll. Við þurfum aðeins að reikna $\bar{y}$. Til einföldunar gerum við aftur ráð fyrir að $\rho=1$.

Fyrst reiknum við heildarmassann:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \\ &= \left[4x - \tfrac{x^3}{3}\right] \Big|_{-2}^{2} = \tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Næst reiknum við vægin. Við þurfum aðeins M_x:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left[4 - x^2\right]^2 dx = \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{x^5}{5} - \tfrac{8x^3}{3} + 16x\right] \Big|_{-2}^{2} = \tfrac{256}{15}. \end{aligned}$$

Þá fæst

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256}{15} \cdot \frac{3}{32} = \frac{8}{5}.$$

Þungamiðja svæðisins er $(0, 8/5)$.

STÖÐUMAT 2.33

Látum R vera svæðið sem afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x) = 1 - x^2$ og að neðan af x-ásnum. Finnið þungamiðju svæðisins.

NEMENDAVERKEFNI

Útsýnispallurinn Grand Canyon Skywalk

Grand Canyon Skywalk var opnaður almenningi 28. mars 2007. Þetta verkfræðiundur er skeifulaga útsýnispallur sem svífur um 1200 m yfir Colorado-ánni við vesturbrún Miklagljúfurs. Kristaltært glergólfið veitir tilkomumikið útsýni niður í gljúfrið (sjá næstu mynd).



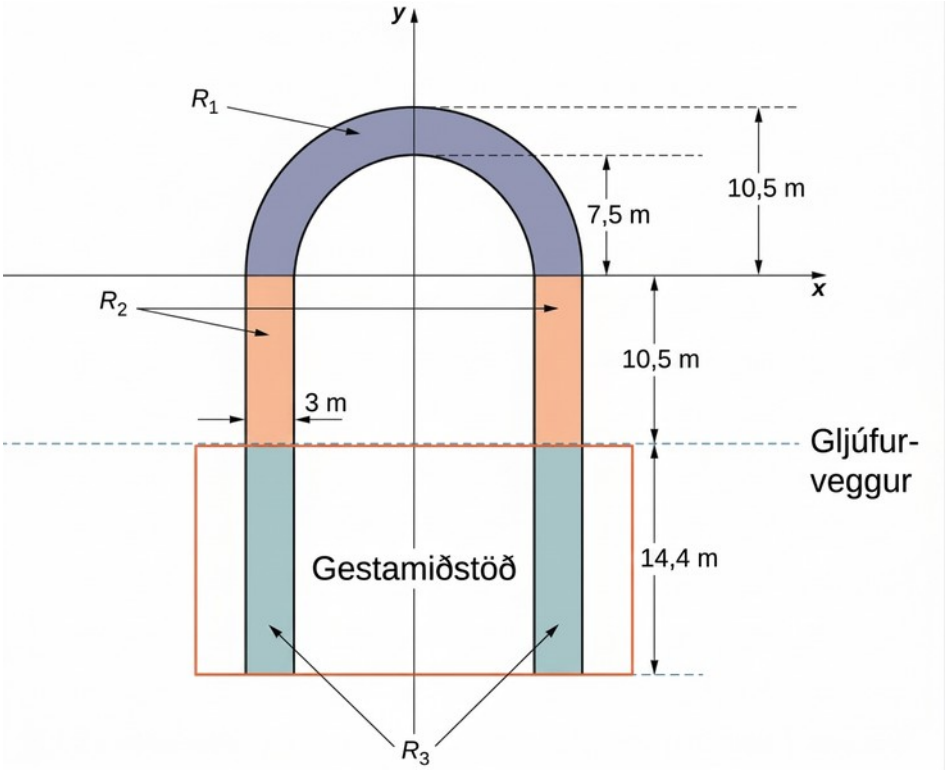
Mynd 2.72 Grand Canyon Skywalk veitir tilkomumikið útsýni yfir gljúfrið. (mynd: 10da_ralta, Wikimedia Commons)

Skywalk er svifbitamannvirki, sem þýðir að útsýnispallurinn teygir sig út fyrir gljúfurbrúnina án sýnilegra burðarvirkja undir honum. Þótt hvorki sjáist stoðir né stífur eru svifbitamannvirki hönnuð til að vera mjög stöðug og Skywalk er þar engin undantekning. Útsýnispallurinn er tryggilega festur við stoðir sem ná 14 m niður í berggrunninn. Mannvirkið var byggt til að þola vindhraða allt að 160 km/klst og jarðskjálfta af stærð 8,0 innan 80 km fjarlægðar. Það getur borið meira en 31.000 tonn.

Þyngdarpunktur mannvirkisins er einn þeirra þátta sem hafa áhrif á stöðugleika Skywalk. Við reiknum þyngdarpunkt pallsins og könnum hvernig hann breytist þegar ferðamenn ganga út á útsýnispallinn.

Útsýnispallurinn er U-laga. Armar U-sins eru 3 m á breidd og hefjast á landi undir gestamiðstöðinni, 14,4 m frá gljúfurbrúninni. Pallurinn teygir sig 21 m út fyrir brúnina.

Til að reikna massamiðju mannvirkisins lítum við á það sem þunna plötu og táknum pallinn með tvívíðu svæði í xy-sléttunni. Fyrst skiptum við svæðinu í þrjú undirsvæði svo hægt sé að skoða hvert þeirra fyrir sig. Fyrsta svæðið, R_1, er bogadregni hluti U-sins. Við lítum á R_1 sem hálfan hringkraga með innri geisla 7,5 m og ytri geisla 10,5 m og miðju í upphafspunktinum (sjá næstu mynd).



Mynd 2.73 Við gerum líkan af Skywalk með þremur undirsvæðum.

Armar pallsins, sem ná 10,5 m milli R_1 og gljúfurveggsins, mynda annað undirsvæðið, R_2. Endar armanna, sem ná 14,4 m undir gestamiðstöðina, mynda loks þriðja undirsvæðið, R_3. Gerið ráð fyrir að þéttleiki plötunnar sé fastur og að heildarþyngd pallsins sé 5.390.000 N (án þyngdar gestamiðstöðvarinnar, sem verður tekin með síðar). Notið $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$.

1. Reiknið flatarmál undirsvæðanna þriggja. Athugið að flatarmál svæðanna R_2 og R_3 eiga aðeins að ná yfir flatarmál armanna en ekki auða svæðið á milli þeirra. Námundið svörin í fermetrum að einum aukastaf.
2. Ákvarðið massann sem tilheyrir hverju undirsvæðanna þriggja.
3. Reiknið massamiðju hvers undirsvæðanna þriggja.
4. Lítið nú á hvert undirsvæðanna þriggja sem punktmassa í massamiðju þess. Notið þessa framsetningu til að reikna massamiðju alls pallsins.
5. Gerið ráð fyrir að gestamiðstöðin vegi 9.800.000 N og að massamiðja hennar sé sú sama og massamiðja R_3. Lítið á gestamiðstöðina sem punktmassa og reiknið massamiðju kerfisins aftur. Hvernig breytist massamiðjan?
6. Þótt Skywalk hafi verið hannaður fyrir að hámarki 120 manns á útsýnispallinum getur pallurinn borið allt að 800 manns sem eru hver um sig 90 kg að massa. Ef öllum 800 væri hleypt út á pallinn og þeir færu allir út á ysta enda hans, hvaða áhrif hefði það á þyngdarpunkt kerfisins? (Takið gestamiðstöðina með í útreikningana og táknið fólkið með punktmassa á ystu brún pallsins, 21 m frá gljúfurveggnum.)

Papposarsetning

Í lok þessa undirkafla fjöllum við um Papposarsetningu um rúmmál, sem gerir okkur kleift að finna rúmmál tiltekinna rúmhluta með hjálp þungamiðjunnar. (Einnig er til Papposarsetning um yfirborðsflatarmál, en hún nýtist mun sjaldnar en setningin um rúmmál.)

SETNING 2.14

Papposarsetning um rúmmál

2

Látum R vera svæði í sléttu og l línu í sömu sléttu sem sker ekki R. Þá er rúmmál snúðsins sem myndast þegar R er snúið um l jafnt flatarmáli R margfölduðu með vegalengdinni d sem þungamiðja R fer.

Sönnun

Við getum sannað tilvikið þegar svæðið afmarkast að ofan af grafi fallsins $f(x)$ og að neðan af grafi fallsins $g(x)$ á bilinu $[a,b]$, og snúningsásinn er y-ásinn. Þá er flatarmál svæðisins $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$. Þar sem snúningsásinn er y-ásinn ræðst vegalengdin sem þungamiðja svæðisins fer aðeins af x-hniti hennar, $\bar{x}$, sem er

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m},$$

þar sem

$$m=\rho\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx \text{ og } M_y=\rho\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx.$$

Þá fæst

$$d=2\pi\frac{\rho\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx}{\rho\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx}$$

og því

$$d\cdot A=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx.$$

Hins vegar fáum við með hylkjaaðferðinni

$$V=2\pi\int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx.$$

Því fæst

$$V = d \cdot A$$

og sönnuninni er lokið.

□

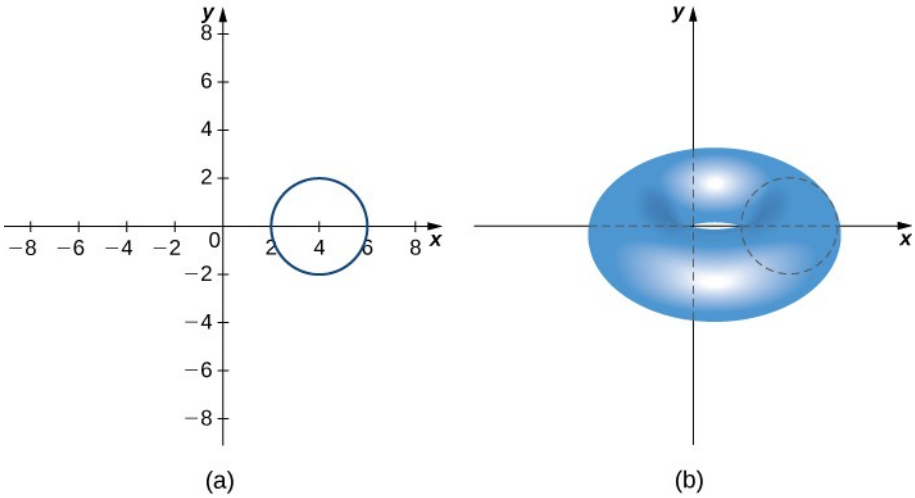
DÆMI 2.34

Papposarsetningu um rúmmál beitt

Látum R vera hring með geisla 2 og miðju í $(4, 0)$. Notið Papposarsetningu um rúmmál til að finna rúmmál hjólflötungsins sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Lausn

Svæðið og hjólflötungurinn eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.74 Rúmmál hjólflötungs fundið með Papposarsetningu. (a) Hringlaga svæði R í sléttu. (b) Hjólflötungurinn sem myndast þegar R er snúið um y-ásinn.

Svæðið R er hringur með geisla 2, svo flatarmál R er $A = 4\pi$ einingar². Samkvæmt samhverfureglunni er þungamiðja R miðja hringsins. Þungamiðjan fer eftir hringferli með geisla 4 um y-ásinn og fer því $d = 8\pi$ einingar. Rúmmál hjólflötungsins er þá $A \cdot d = 32\pi^2$ einingar³.

STÖÐUMAT 2.34

Látum R vera hring með geisla 1 og miðju í $(3, 0)$. Notið Papposarsetningu um rúmmál til að finna rúmmál hjólflötungsins sem myndast með því að snúa R um y-ásinn.

Æfingar í undirkafla 2.6

Reiknið massamiðju massanna sem gefnir eru í eftirfarandi æfingum.

254. $m_1 = 2$ við $x_1 = 1$ og $m_2 = 4$ við $x_2 = 2$

255. $m_1=1$ við $x_1=-1$ og $m_2=3$ við $x_2=2$

256. $m=3$ við $x=0,1,2,6$

257. Einingarmassar í punktunum $(x,y)=(1,0),(0,1),(1,1)$

258. $m_1=1$ við $(1,0)$ og $m_2=4$ við $(0,1)$

259. $m_1=1$ við $(1,0)$ og $m_2=3$ við $(2,2)$

2

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna massamiðjuna $\bar{x}$.

260. $\rho=1$ fyrir $x\in(-1,3)$

261. $\rho=x^2$ fyrir $x\in(0,L)$

262. $\rho=1$ þegar $x\in(0,1)$ og $\rho=2$ þegar $x\in(1,2)$

263. $\rho=\sin x$ fyrir $x\in(0,\pi)$

264. $\rho=\cos x$ fyrir $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

265. $\rho=e^x$ fyrir $x\in(0,2)$

266. $\rho=x^3+xe^{-x}$ fyrir $x\in(0,1)$

267. $\rho=x\sin x$ fyrir $x\in(0,\pi)$

268. $\rho=\sqrt{x}$ fyrir $x\in(1,4)$

269. $\rho=\ln x$ fyrir $x\in(1,e)$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna massamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$. Notið samhverfu þar sem hægt er til að auðvelda ykkur að finna hana.

270. $\rho=7$ í ferningnum

$$0\le x\le 1,$$

$$0\le y\le 1$$

271. $\rho=3$ í þríhyrningnum með hornpunkta $(0,0)$, $(a,0)$, og $(0,b)$

272. $\rho=2$ á svæðinu sem afmarkast af $y=\cos(x)$, $y=-\cos(x)$, $x=-\frac{\pi}{2}$, og $x=\frac{\pi}{2}$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota reiknivél til að teikna svæðið og reikna síðan massamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$. Notið samhverfu þar sem hægt er til að auðvelda ykkur að finna hana.

273. **[T]** Svæðið sem afmarkast af $y=\cos(2x)$, $x=-\frac{\pi}{4}$, og $x=\frac{\pi}{4}$

274. **[T]** Svæðið milli $y=2x^2$, $y=0$, $x=0$, og $x=1$

275. **[T]** Svæðið milli $y=\frac{5}{4}x^2$ og $y=5$

276. **[T]** Svæðið milli $y=\sqrt{x}$, $y=\ln(x)$, $x=1$, og $x=4$

277. **[T]** Svæðið sem afmarkast af

$$y=0,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

278. **[T]** Svæðið sem afmarkast af $y=0$, $x=0$, og $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

279. **[T]** Svæðið í fyrsta fjórðungi sem afmarkast af $y=x^2$ og $y=x^4$

Notið Papposarsetningu í eftirfarandi æfingum til að ákvarða rúmmál rúmhlutans.

280. Snúið $y=mx$ um x-ásinn milli $x=0$ og $x=1$

281. Snúið $y=mx$ um y-ásinn milli $x=0$ og $x=1$

282. Almenn keila sem myndast við að snúa þríhyrningi með hornpunkta $(0,0)$, $(a,0)$, og $(0,b)$ um y-ásinn. Samræmist svarið rúmmáli keilu?

283. Almennur sívalningur sem myndast með því að snúa rétthyrningi með hornpunkta $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$, og (a,b) um y-ásinn. Samræmist svarið rúmmáli sívalnings?

284. Kúla sem myndast þegar hálfhring með radíus a er snúið um y-ásinn. Samræmist svarið rúmmáli kúlu?

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna svæðið sem ferillinn afmarkar. Finnið flatarmálið M og þungamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ fyrir gefnu svæðin. Notið samhverfu þar sem hægt er til að auðvelda ykkur að finna massamiðjuna.

285. **[T]** Fjórðungshringur: $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=0$, og $x=0$

286. **[T]** Þríhyrningur: $y=x$, $y=2-x$, og $y=0$

287. **[T]** Linsusvæði: $y=x^2$ og $y=x$

288. **[T]** Hringkragi: $y^2+x^2=1$ og $y^2+x^2=4$

289. **[T]** Hálfur hringkragi: $y^2+x^2=1$, $y^2+x^2=4$, og $y=0$

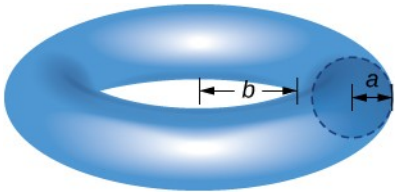
290. Finnið almenna formúlu fyrir massamiðju mjóa svæðisins milli $y=x^a$ og $y=x^b$ þar sem $a>b$. Notið síðan Papposarsetningu til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

291. Finnið almenna formúlu fyrir massamiðju svæðisins milli $y=a^2-x^2$, $x=0$, og $y=0$. Notið síðan Papposarsetningu til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

292. Finnið almenna formúlu fyrir massamiðju svæðisins milli $y=b\sin(ax)$, $x=0$, og $x=\frac{\pi}{a}$. Notið síðan Papposarsetningu til að finna rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu er snúið um y-ásinn.

2

293. Notið Papposarsetningu til að finna rúmmál hjólflötungsins sem sýndur er hér. Gerið ráð fyrir að skífa með radíus a sé staðsett þannig að vinstri endi hringsins sé við $x=b$, $b>0$, og að henni sé snúið um y-ásinn.



294. Finnið massamiðjuna $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ fyrir þunnan vír sem liggur eftir hálfhringnum $y=\sqrt{1-x^2}$ og hefur einingarmassa. (Vísbending: Notið Papposarsetningu.)

2.7 Heildi, vísisföll og lograr

NÁMSMARKMIÐ

- 2.7.1 Setja fram skilgreiningu náttúrlega lograns sem heildi.
- 2.7.2 Þekkja afleiðu náttúrlega lograns.
- 2.7.3 Heilda föll sem fela í sér náttúrlega lografallið.
- 2.7.4 Skilgreina töluna e með heildi.
- 2.7.5 Þekkja afleiðu og heildi vísisfallsins.
- 2.7.6 Sanna eiginleika logra og vísisfalla með heildum.
- 2.7.7 Rita almenn lografföll og vísisföll með náttúrlega logranum og náttúrlega vísisfallinu.

Við höfum þegar fjallað um vísisföll og logra í fyrri köflum. Í þeirri umfjöllun fórum við þó lauslega yfir nokkur mikilvæg atriði. Til dæmis skoðuðum við ekki hvernig fara á með vísisföll með óræðum veldisvísum. Skilgreining tölunnar e er annað atriði sem fyrri umfjöllun gerði ekki full skil. Nú höfum við þau verkfæri sem þarf til að fjalla um þessi hugtök á strangari stærðfræðilegan hátt og það gerum við í þessum undirkafla.

Í þessum undirkafla gerum við ráð fyrir að náttúrlegi logrinn, talan e og heildunar- og deildunarreglurnar sem tengjast þessum föllum hafi enn ekki verið skilgreind. Í lok undirkaflans höfum við fjallað um þessi hugtök á stærðfræðilega strangan hátt (og séð að þau samræmast hugtökunum sem við kynntumst áður).

Við byrjum undirkaflann á því að skilgreina náttúrlega lograng með heildi. Þessi skilgreining er undirstaða undirkaflans. Út frá henni leiðum við út deildunarreglur, skilgreinum töluna e, og útvíkkum síðan hugtökin þannig að þau nái til logra og vísisfalla með hvaða grunntölu sem er.

Náttúrlegi logrinn sem heildi

Rifjum upp veldisregluna fyrir heildi:

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

Ljóst er að reglan gildir ekki þegar $n = -1$, því þá þyrftum við að deila með núlli. Hvernig förum við þá með $\int \frac{1}{x} \, dx$? Rifjum upp úr undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar að $\int_1^x \frac{1}{t} \, dt$ er stofnfall $1/x$. Við getum því sett fram eftirfarandi skilgreiningu.

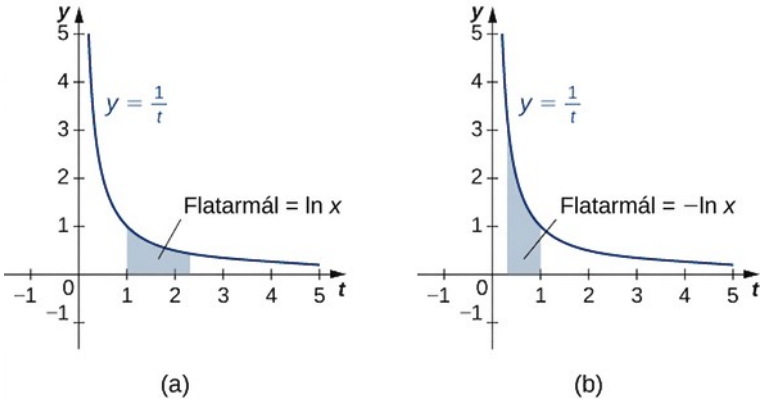
SKILGREINING

Fyrir $x > 0$, skilgreinum við náttúrlega lografallið með

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt.$$

(2.24)

Þegar $x > 1$, er þetta einfaldlega flatarmálið undir ferlinum $y = 1/t$ frá 1 til x. Þegar $x < 1$, gildir $\int_1^x \frac{1}{t} \, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} \, dt$, svo þá er þetta neikvætt gildi flatarmálsins undir ferlinum frá x til 1 (sjá næstu mynd).



Mynd 2.75 (a) Þegar $x > 1$, er náttúrlegi logrinn flatarmálið undir ferlinum $y = 1/t$ frá 1 til x. (b) Þegar $x < 1$, er náttúrlegi logrinn neikvætt gildi flatarmálsins undir ferlinum frá x til 1.

Takið eftir að $\ln 1 = 0$. Enn fremur er fallið $y = 1/t > 0$ fyrir $x > 0$. Af eiginleikum heilda er því ljóst að $\ln x$ er vaxandi fyrir $x > 0$.

Eiginleikar náttúrlega lograns

Eftirfarandi deildunarregla leiðir beint af því hvernig við skilgreindum náttúrlega logrann og af undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar.

2

SETNING 2.15

Afleiða náttúrlega lograns

Fyrir $x > 0$, er afleiða náttúrlega lograns gefin með

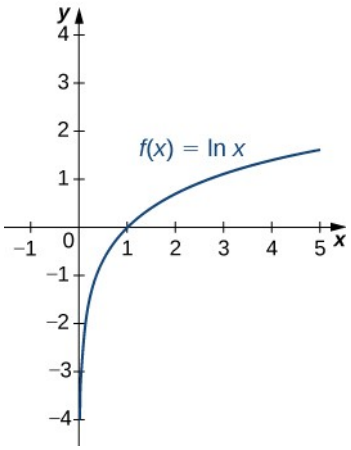
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

SETNING 2.16

Fylgisetning um afleiðu náttúrlega lograns

Fallið $\ln x$ er deildanlegt og er því samfellt.

Graf $\ln x$ er sýnt á mynd 2.76. Takið eftir að fallið er samfellt á öllu skilgreiningarmenginu $(0, \infty)$.



Mynd 2.76 Graf $f(x) = \ln x$ sýnir að fallið er samfellt.

DÆMI 2.35

Afleiður náttúrlegra loga reiknaðar

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx} \ln(5x^3 - 2)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(3x\right)\right)^2$

Lausn

Við þurfum að beita keðjureglunni í báðum tilvikum.

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(5x^3-2\right)=\frac{15x^2}{5x^3-2}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(3x\right)\right)^2=\frac{2\left(\ln\left(3x\right)\right)\cdot 3}{3x}=\frac{2\left(\ln\left(3x\right)\right)}{x}$

STÖÐUMAT 2.35

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(2x^2+x\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^3\right)\right)^2$

Athugið að ef við notum tölugildisfallið og skilgreinum nýtt fall $\ln|x|$, getum við víkkað skilgreiningarmengi náttúrlega lograns þannig að það nái einnig til $x<0$. Þá gildir $\left(d/\left(dx\right)\right)\ln|x|=1/x$. Af þessu fæst hin kunnuglega heildunarregla.

SETNING 2.17

Heildi af (1/u) du

Náttúrlegi logrinn er stofnfall fallsins $f\left(u\right)=1/u$:

$$\int\frac{1}{u}\,du=\ln|u|+C.$$

DÆMI 2.36

Heildi sem fela í sér náttúrlega logra reiknuð

Reiknið heildið $\int\frac{x}{x^2+4}\,dx$.

Lausn

Notum u-innsetningu og látum $u=x^2+4$. Þá er $du=2x\,dx$ og við fáum

$$\int\frac{x}{x^2+4}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+C.$$

STÖÐUMAT 2.36

Reiknið heildið $\int \frac{x^2}{x^3+6}\,dx$.

Þótt við höfum kallað fallið okkar „logra“ höfum við í raun ekki sannað að neinir eiginleikar logra gildi um þetta fall. Það gerum við hér.

2

SETNING 2.18

Eiginleikar náttúrlega lograns

Ef $a, b>0$ og r er ræð tala gildir

i. $\ln 1=0$

ii. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

iii. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

iv. $\ln(a^r)=r\ln a$

Sönnun

i. Samkvæmt skilgreiningu er $\ln 1=\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt=0$.

ii. Við höfum

$$\ln(ab)=\int_1^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt.$$

Notum u-innsetningu á síðasta heildið í þessari stæðu. Látum $u=t/a$. Þá er $du=(1/a)\,dt$. Þegar $t=a, u=1$, og þegar $t=ab, u=b$. Því fæst

$$\ln(ab)=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_a^{ab}\frac{a}{t}\cdot\frac{1}{a}\,dt=\int_1^{a}\frac{1}{t}\,dt+\int_1^{b}\frac{1}{u}\,du=\ln a+\ln b.$$

iv. Athugið að

$$\frac{d}{dx}\ln(x^r)=\frac{r\,x^{r-1}}{x^r}=\frac{r}{x}.$$

Enn fremur,

$$\frac{d}{dx}(r\ln x)=\frac{r}{x}.$$

Föllin tvö hafa sömu afleiðu. Af undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar leiðir að munurinn á þeim er fasti. Því fæst

$$\ln\left(x^r\right)=r\ln x+C$$

fyrir einhvern fasta C. Með því að velja $x=1$, fæst

$$\begin{aligned}\ln\left(1^r\right) &= r\ln(1)+C\\ 0 &= r(0)+C\\ C &= 0.\end{aligned}$$

Því gildir $\ln\left(x^r\right)=r\ln x$ og sönnuninni er lokið. Athugið að síðar í þessum undirkafla útvíkkum við þennan eiginleika þannig að hann gildi fyrir óræð gildi r.
Liður iii. leiðir af liðum ii. og iv. og ykkur er látið eftir að sanna hann.

□

DÆMI 2.37

Eiginleikar logra notaðir

Notið eiginleika logra til að einfalda eftirfarandi stæðu og rita hana sem einn logra:

$$\ln 9-2\ln 3+\ln\left(\frac{1}{3}\right).$$

Lausn

Við höfum

$$\ln 9-2\ln 3+\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(3^2\right)-2\ln 3+\ln\left(3^{-1}\right)=2\ln 3-2\ln 3-\ln 3=-\ln 3.$$

STÖÐUMAT 2.37

Notið eiginleika logra til að einfalda eftirfarandi stæðu og rita hana sem einn logra:

$$\ln 8-\ln 2-\ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

Talan e skilgreind

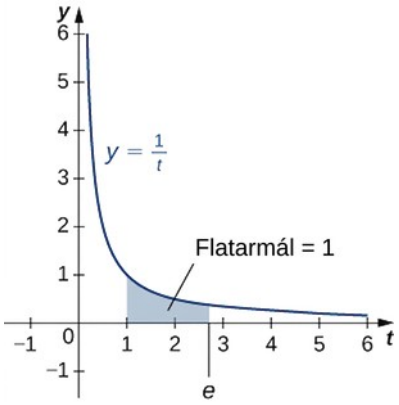
Nú þegar við höfum skilgreint náttúrlega lograng getum við notað hann til að skilgreina töluna e.

SKILGREINING

Talan e er skilgreind sem sú rauntala sem uppfyllir

$$\ln e = 1.$$

Með öðrum orðum: Flatarmálið undir ferlinum $y = 1/t$ milli $t = 1$ og $t = e$ er 1 (mynd 2.77). Ykkur er látið eftir að sanna að slík tala sé til og að hún sé aðeins ein. (Vísbending: Notið milligildissetninguna til að sanna að talan sé til og notið þá staðreynd að $\ln x$ er vaxandi til að sanna að hún sé aðeins ein.)



Mynd 2.77 Flatarmálið undir ferlinum frá 1 til e er jafnt einum.

Hægt er að sýna fram á að talan e sé óræð, þótt það verði ekki gert hér (sjá nemendaverkefnið í Taylor- og Maclaurin-röðum). Nálgunargildi hennar er

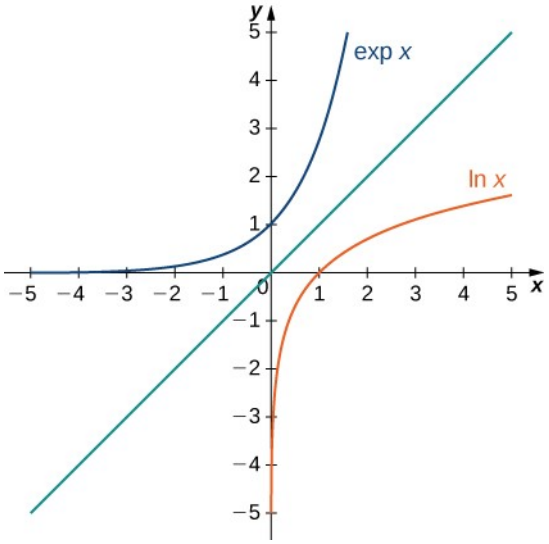
$$e \approx 2{,}71828182846.$$

Vísisfallið

Nú beinum við athyglinni að fallinu e^x. Athugið að náttúrlegi lograinn er eintækur og hefur því andhverft fall. Í bili táknum við þetta andhverfa fall með $\exp x$. Þá gildir

$$\exp(\ln x) = x \text{ fyrir } x > 0 \text{ og } \ln(\exp x) = x \text{ fyrir öll } x.$$

Eftirfarandi mynd sýnir gröf fallanna $\exp x$ og $\ln x$.



Mynd 2.78 Gröf fallanna $\ln x$ og $\exp x$.

Við setjum fram þá tilgátu að $\exp x = e^x$. Fyrir ræð gildi x, er auðvelt að sýna fram á þetta. Ef x er ræð tala gildir $\ln\left(e^x\right) = x \ln e = x$. Þegar x er ræð tala gildir því $e^x = \exp x$. Fyrir óræð gildi x, skilgreinum við einfaldlega e^x sem andhverfu fallsins $\ln x$.

SKILGREINING

Fyrir hverja rauntölu x, skilgreinum við $y = e^x$ sem þá tölu sem uppfyllir

$$\ln y = \ln\left(e^x\right) = x.$$

(2.25)

Þá gildir $e^x = \exp\left(x\right)$ fyrir öll x, og því

$$e^{\ln x} = x \text{ fyrir } x > 0 \text{ og } \ln\left(e^x\right) = x$$

(2.26)
fyrir öll x.

Eiginleikar vísisfallsins

Þar sem vísisfallið var skilgreint með andhverfu falli en ekki með veldi af e, verðum við að sannreyna að venjulegar veldisreglur gildi um fallið e^x.

SETNING 2.19

Eiginleikar vísisfallsins

Ef p og q eru hvaða rauntölur sem er og r er ræð tala gildir

i. $e^p e^q = e^{p+q}$

ii. $\frac{e^p}{e^q} = e^{p-q}$

iii. $\left(e^p\right)^r = e^{pr}$

Sönnun

Athugið að ef p og q eru ræðar tölur gilda eiginleikarnir. Ef p eða q er hins vegar óræð tala verðum við að nota skilgreininguna á e^x sem andhverfu falli og sannreyna eiginleikana. Hér sannreynum við aðeins fyrsta eiginleikann; ykkur er látið eftir að sannreyna hina tvo. Við höfum

$$\ln\left(e^p e^q\right) = \ln\left(e^p\right) + \ln\left(e^q\right) = p + q = \ln\left(e^{p+q}\right).$$

Þar sem $\ln x$ er eintækt fall fæst

$$e^p e^q = e^{p+q}.$$

□

Líkt og í iv. lið eiginleika logra getum við útvíkkað eiginleika iii. þannig að hann gildi fyrir óræð gildi r, og það gerum við í lok undirkaflans.

Við viljum einnig sannreyna deildunarregluna fyrir fallið $y = e^x$. Til þess þurfum við að nota fólgna deildun. Látum $y = e^x$. Þá

$$\begin{aligned} \ln y &= x \\ \frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= y. \end{aligned}$$

Þannig sjáum við

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

eins og stefnt var að, og af því leiðir heildunarreglan þegar í stað:

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Við notum þessar formúlur í dæmunum hér á eftir.

DÆMI 2.38

Eiginleikar vísisfalla notaðir

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2}$

b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2}$

Lausn

Við beitum keðjureglunni eftir þörfum.

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2}=\frac{d}{dt}e^{3t+t^2}=e^{3t+t^2}(3+2t)$

b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2}=e^{3x^2}6x$

STÖÐUMAT 2.38

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right)$

b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3$

DÆMI 2.39

Eiginleikar vísisfalla notaðir

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int 2xe^{-x^2}dx$.

Lausn

Notum u-innsetningu og látum $u=-x^2$. Þá er $du=-2xdx$, og við fáum

$$\int 2xe^{-x^2}dx=-\int e^u du=-e^u+C=-e^{-x^2}+C.$$

STÖÐUMAT 2.39

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int \frac{4}{e^{3x}}dx$.

Almenn lograföll og vísisföll

Við ljúkum þessum undirkafla með því að skoða vísisföll og logra með öðrum grunntölum en e. Vísisföll eru föll á forminu $f(x)=a^x$. Athugið að nema $a=e$, höfum við enn ekki stærðfræðilega stranga skilgreiningu á þessum föllum fyrir óræða veldisvísa. Við bætum úr því hér og skilgreinum fallið $f(x)=a^x$ með vísisfallinu e^x. Síðan skoðum við logra með öðrum grunntölum en e sem andhverf föll vísisfalla.

SKILGREINING

Fyrir hvert $a>0$, og hverja rauntölu x, skilgreinum við $y=a^x$ á eftirfarandi hátt:

$$y=a^x=e^{x\ln a}.$$

Nú er a^x skilgreint á stærðfræðilega strangan hátt fyrir öll gildi x. Þessi skilgreining gerir okkur einnig kleift að alhæfa eiginleika iv. logra og eiginleika iii. vísisfalla þannig að þeir gildi bæði fyrir ræð og óræð gildi r. Auðvelt er að sýna að veldisreglurnar gilda um almenn vísisföll sem eru skilgreind með þessum hætti.

2

Notum nú þessa skilgreiningu til að leiða út deildunarreglu fyrir a^x. Við höfum

$$\frac{d}{dx}a^x=\frac{d}{dx}e^{x\ln a}=e^{x\ln a}\ln a=a^x\ln a.$$

Samsvarandi heildunarregla fæst þegar í stað.

SETNING 2.20

Afleiður og heildi almennra vísisfalla

Látum $a>0$. Þá er

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$$

og

$$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C.$$

Ef $a\neq 1$, er fallið a^x eintækt og hefur vel skilgreint andhverft fall. Andhverfa þess er táknuð með $\log_a x$. Þá gildir

$$y=\log_a x \text{ þá og því aðeins að } x=a^y.$$

Athugið að rita má almenn lograföll með náttúrlega logranum. Látum $y=\log_a x$. Þá er $x=a^y$. Tökum náttúrlega logrann af báðum hliðum síðari jöfnunnar og fáum

$$\begin{aligned}\ln x &= \ln(a^y)\\ \ln x &= y\ln a\\ y &= \tfrac{\ln x}{\ln a}\\ \log_a x &= \tfrac{\ln x}{\ln a}.\end{aligned}$$

Því sjáum við að öll lograföll eru fastamargfeldi hvert annars. Næst notum við þessa formúlu til að finna deildunarreglu fyrir logra með grunntölu a. Látum aftur $y=\log_a x$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\log_a x)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)\\ &= \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{d}{dx}(\ln x)\\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \frac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$

SETNING 2.21

Afleiður almennra lografalla

Látum $a>0$. Þá er

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\ln a}.$$

DÆMI 2.40

Afleiður almennra vísisfalla og lografalla reiknaðar

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t\cdot 2^{t^2}\right)$

b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right)$

Lausn

Við beitum keðjureglunni eftir þörfum.

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t\cdot 2^{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(2^{2t}\cdot 2^{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(2^{2t+t^2}\right)=2^{2t+t^2}\ln(2)(2+2t)$

b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right)=\frac{1}{\left(7x^2+4\right)(\ln 8)}(14x)$

STÖÐUMAT 2.40

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dt}4^{t^4}$

b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

DÆMI 2.41

Almenn vísisföll heilduð

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int \frac{3}{2^{3x}} dx$.

Lausn

Notum u-innsetningu og látum $u = -3x$. Þá er $du = -3\,dx$ og við fáum

$$\int \frac{3}{2^{3x}} dx = \int 3 \cdot 2^{-3x} dx = -\int 2^u du = -\frac{1}{\ln 2} 2^u + C = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-3x} + C.$$

STÖÐUMAT 2.41

Reiknið eftirfarandi heildi: $\int x^2 2^{x^3} dx$.

Æfingar í undirkafla 2.7

Finnið í eftirfarandi æfingum afleiðuna $\frac{dy}{dx}$.

295.

$$y = \ln(2x)$$

296.

$$y = \ln(2x+1)$$

297.

$$y = \frac{1}{\ln x}$$

Finnið óákveðna heildið í eftirfarandi æfingum.

298.

$$\int \frac{dt}{3t}$$

299.

$$\int \frac{dx}{1+x}$$

Finnið í eftirfarandi æfingum afleiðuna dy/dx. (Þið getið notað reiknivél til að teikna gröf fallsins og afleiðunnar og staðfest þannig að niðurstaðan sé rétt.)

300. **[T]** $y = \frac{\ln(x)}{x}$

301. **[T]** $y = x \ln(x)$

302. **[T]** $y=\log_{10} x$

303. **[T]** $y=\ln(\sin x)$

304. **[T]** $y=\ln(\ln x)$

305. **[T]** $y=7\ln(4x)$

306. **[T]** $y=\ln\left((4x)^7\right)$

307. **[T]** $y=\ln(\tan x)$

308. **[T]** $y=\ln(\tan(3x))$

309. **[T]** $y=\ln(\cos^2 x)$

Finnið ákveðið eða óákveðið heildi í eftirfarandi æfingum.

310.

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x}$$

311.

$$\int_0^1 \frac{dt}{3+2t}$$

312.

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

313.

$$\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^2+1}$$

314.

$$\int_2^e \frac{dx}{x\ln x}$$

315.

$$\int_2^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

316.

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

317.

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$$

318.

$$\int \cot(3x)\, dx$$

319.

$$\int \frac{(\ln x)^2 \, dx}{x}$$

Reiknið dy/dx í eftirfarandi æfingum með því að deilda $\ln y$.

320.

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

321.

$$y = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}$$

322.

$$y = e^{\sin x}$$

323.

$$y = x^{-1/x}$$

324.

$$y = e^{(ex)}$$

325.

$$y = x^e$$

326.

$$y = x^{(ex)}$$

327.

$$y = \sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x}$$

328.

$$y = x^{-1/\ln x}$$

329.

$$y = e^{-\ln x}$$

Reiknið eftirfarandi dæmi með hvaða aðferð sem er.

330.

$$\int_5^{10} \frac{dt}{t} - \int_{5x}^{10x} \frac{dt}{t}$$

331.

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{dx}{x} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$$

332.

$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{dt}{t}$$

333.

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$$

334.

$$\frac{d}{dx} \ln(\sec x + \tan x)$$

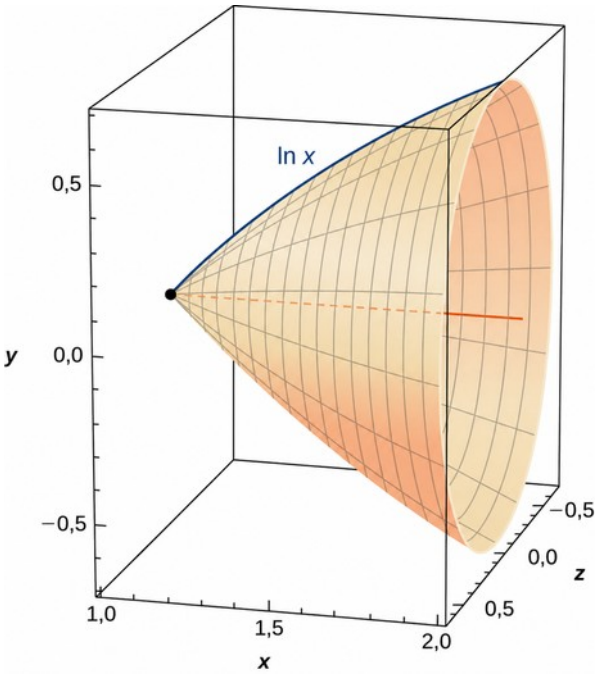
Notið í eftirfarandi æfingum fallið $\ln x$. Notið reiknivél ef ykkur tekst ekki að finna skurðpunkta með greiningaraðferðum.

335. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af $x=1$ og $y=5$ ofan við $y=\ln x$.

336. **[T]** Finnið bogalengd $\ln x$ frá $x=1$ til $x=2$.

337. Finnið flatarmálið milli $\ln x$ og x-ássins frá $x=1$ til $x=2$.

338. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar þessum ferli er snúið frá $x=1$ til $x=2$ um x-ásinn, eins og sýnt er hér.



339. **[T]** Finnið yfirborðsflatarmál snúðsins sem myndast þegar ferlinum í síðustu æfingu er snúið frá $x=1$ til $x=2$ um x-ásinn.

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum ef ykkur tekst ekki að finna skurðpunkta með greiningaraðferðum.

340. Finnið flatarmál breiðbogafjórðungsins sem afmarkast af $x=2$ og $y=2$ ofan við $y=1/x$.

341. **[T]** Finnið bogalengd $y=1/x$ frá $x=1$ til $x=4$.

342. Finnið flatarmálið undir $y=1/x$ og ofan við x-ásinn frá $x=1$ til $x=4$.

Sannreynið afleiðurnar og stofnföllin í eftirfarandi æfingum.

343.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

344.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)=\frac{2a}{\left(x^2-a^2\right)}$$

345.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

346.

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

347.

$$\int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln x)} = \ln(\ln(\ln x)) + C$$

2.8 Vísisvöxtur og -hnignun

NÁMSMARKMIÐ

- 2.8.1 Nota vísisvaxtarlíkanið í hagnýtum verkefnum, meðal annars um fólksfjölgun og vaxtavexti.
- 2.8.2 Útskýra hugtakið tvöföldunartími.
- 2.8.3 Nota vísishnignunarlíkanið í hagnýtum verkefnum, meðal annars um geislavirka hrörnun og kólnunarlögmál Newtons.
- 2.8.4 Útskýra hugtakið helmingunartími.

Ein algengasta notkun vísisfalla er í líkönum af vexti og hnignun. Vísisvöxtur og -hnignun koma fyrir í fjölmörgum náttúrulegum ferlum. Vísisföll eru alls staðar í náttúrunni, allt frá fólksfjölgun og samfelldri vaxtavöxtun til geislavirkrar hrörnunar og kólnunarlögmáls Newtons. Í þessum undirkafla skoðum við vísisvöxt og -hnignun í samhengi við nokkur slík viðfangsefni.

Vísisvaxtarlíkan

Mörg kerfi sýna vísisvöxt. Þau fylgja líkani af gerðinni $y = y_0 e^{kt}$, þar sem y_0 táknar upphafsástand kerfisins og k er jákvæður fasti sem nefnist vaxtarfasti. Takið eftir að í vísisvaxtarlíkani gildir

$$y' = k\, y_0 e^{kt} = k\, y.$$

(2.27)

Vaxtarhraðinn er sem sagt í réttu hlutfalli við gildi fallsins á hverjum tíma. Þetta er eitt megineinkenni vísisvaxtar. Jafna 2.27 inniheldur afleiður og nefnist deildajafna. Nánar er fjallað um deildajöfnur í Inngangi að deildajöfnum.

REGLA: VÍSISVAXTARLÍKAN

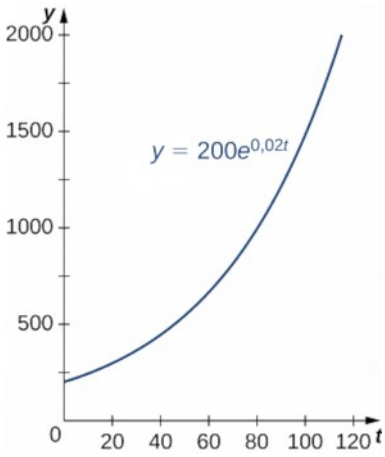
Kerfi sem sýna vísisvöxt vaxa samkvæmt stærðfræðilíkaninu

$$y = y_0 e^{kt},$$

þar sem y_0 táknar upphafsástand kerfisins og $k > 0$ er fasti sem nefnist vaxtarfasti.

Population growth is a common example of exponential growth. Consider a population of bacteria, for instance. It seems plausible that the rate of population growth would be proportional to the size of the population. After all, the more bacteria there are to reproduce,

the faster the population grows. Figure 2.79 and Table 2.1 represent the growth of a population of bacteria with an initial population of 200 bacteria and a growth constant of $0{,}02$. Notice that after only 2 hours $(120$ minutes), the population is 10 times its original size!



Mynd 2.79 Dæmi um vísisvöxt bakteríustofns.

Tafla 2.1 Vísisvöxtur bakteríustofns

Tími (mín.)	Stærð stofns (fjöldi baktería)
10	244
20	298
30	364
40	445
50	544
60	664
70	811
80	991
90	1210
100	1478
110	1805
120	2205

Takið eftir að hér notum við samfellt fall til að líkja eftir hegðun sem er í eðli sínu strjál. Á hverjum tíma er fjöldi baktería í raunverulegum stofni heiltala, þótt líkanið taki einnig gildi

sem eru ekki heiltölur. Þegar við notum vísisvaxtarlíkön verðum við alltaf að gæta þess að túlka fallgildin í samhengi við fyrirbærið sem líkanið lýsir.

DÆMI 2.42

Vöxtur bakteríustofns

Skoðum bakteríustofninn sem lýst var hér á undan. Hann vex samkvæmt fallinu $f(t)=200\,e^{0,02t}$, þar sem t er mælt í mínútum. Hve margar bakteríur eru í stofninum eftir 5 klukkustundir $(300$ mínútur)? Hvenær nær stofninn 100.000 bakteríum?

Lausn

Við höfum $f(t)=200\,e^{0,02t}$. Þá

$$f(300)=200\,e^{0,02(300)}\approx 80.686.$$

There are 80.686 bacteria in the population after 5 hours.

To find when the population reaches 100.000 bacteria, we solve the equation

$$\begin{aligned} 100.000 &= 200\,e^{0,02t} \\ 500 &= e^{0,02t} \\ \ln\ 500 &= 0,02t \\ t &= \frac{\ln\ 500}{0,02}\approx 310,73. \end{aligned}$$

The population reaches 100.000 bacteria after 310,73 minutes.

STÖÐUMAT 2.42

Skoðum bakteríustofn sem vex samkvæmt fallinu $f(t)=500\,e^{0,05t}$, þar sem t er mælt í mínútum. Hve margar bakteríur eru í stofninum eftir 4 klukkustundir? Hvenær nær stofninn 100 milljónum baktería?

Let's now turn our attention to a financial application: compound interest. Interest that is not compounded is called *simple interest*. Simple interest is paid once, at the end of the specified time period (usually 1 year). So, if we put $\$1000$ in a savings account earning $2\,\%$ simple interest per year, then at the end of the year we have

$$1000(1+0,02)=1020\ \text{€}.$$

Compound interest is paid multiple times per year, depending on the compounding period. Therefore, if the bank compounds the interest every 6 months, it credits half of the year's interest to the account after 6 months. During the second half of the year, the account earns interest not only on the initial $\$1000$, but also on the interest earned during the first half of the year. Mathematically speaking, at the end of the year, we have

$$1000\left(1+\frac{0{,}02}{2}\right)^2=1020{,}10\ \text{€}.$$

Ef vextirnir eru á sama hátt lagðir við höfuðstólinn á 4 mánaða fresti fæst

$$1000\left(1+\frac{0{,}02}{3}\right)^3=1020{,}13\ \text{€},$$

og ef vextirnir eru lagðir við höfuðstólinn daglega $(365$ sinnum á ári) fæst $1020{,}20\ \text{€}$. Ef við útvíkkum þetta þannig að vextirnir séu lagðir samfellt við höfuðstólinn fæst eftir t ár

$$1000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{nt}.$$

Umritum nú þessa segð þannig að við fáum vísisfall sem lýsir vexti. Rifjum upp að töluna e má setja fram sem markgildi:

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Við viljum því að segðin innan sviganna sé af gerðinni $(1+1/m)$. Látum $n=0{,}02\,m$. Takið eftir að þegar $n\to\infty$, gildir $m\to\infty$ einnig. Þá fæst

$$1000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{nt}=1000\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{0{,}02\,m}\right)^{0{,}02\,mt}=1000\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{0{,}02t}.$$

Við þekkjum markgildið innan hornklofanna sem töluna e. Innistæðan á bankareikningnum eftir t ár er því $1000\,e^{0{,}02t}$. Almennt gildir að ef bankareikningur með upphafsinnistæðuna $\$P$ ber vexti sem nema $r\,\%$, með samfelldri vaxtavöxtun er innistæðan eftir t ár

$$\text{Innstæða}=P\,e^{rt}.$$

DÆMI 2.43

Vaxtavextir

25 ára námsmanni býðst að leggja fé inn á lífeyrisreikning sem ber $5\,\%$ ársvexti með samfelldri vaxtavöxtun. Hversu mikið þarf hún að leggja inn í dag til að eiga $\$1$ milljón þegar hún verður 65 ára? Hvað ef hún gæti í staðinn fengið $6\,\%$ ársvexti með samfelldri vaxtavöxtun?

Lausn

Við höfum

$$\begin{aligned}1.000.000 &= P\,e^{0{,}05(40)}\\ P &= 135.335{,}28.\end{aligned}$$

Hún þarf að leggja $135.335{,}28\ \text{€}$ inn með $5\,\%$ vöxtum.

Ef hún getur í staðinn fengið $6\,\%$, verður jafnan

$$\begin{aligned} 1.000.000 &= P e^{0{,}06(40)} \\ P &= 90.717{,}95. \end{aligned}$$

Í þessu tilviki þarf hún aðeins að leggja inn $90.717{,}95$ €. Það er um tveir þriðju hlutar þeirrar fjárhæðar sem hún þarf að leggja inn ef vextirnir eru $5\,\%$. Af því að vextirnir leggjast samfellt við höfuðstólinn magnast áhrifin mjög þegar þeir hækka um $1\,\%$.

STÖÐUMAT 2.43

Gerum nú ráð fyrir að námsmaðurinn fjárfesti ekki við 25 ára aldur heldur bíði þar til hún verður 35. Hversu mikið þyrfti hún þá að leggja inn ef vextirnir væru $5\,\%$? En ef þeir væru $6\,\%$?

If a quantity grows exponentially, the time it takes for the quantity to double remains constant. In other words, it takes the same amount of time for a population of bacteria to grow from 100 to 200 bacteria as it does to grow from 10.000 to 20.000 bacteria. This time is called the doubling time. To calculate the doubling time, we want to know when the quantity reaches twice its original size. So we have

$$\begin{aligned} 2y_0 &= y_0 e^{kt} \\ 2 &= e^{kt} \\ \ln 2 &= kt \\ t &= \tfrac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

SKILGREINING

Ef stærð vex samkvæmt vísisfalli er tvöföldunartími sá tími sem það tekur stærðina að tvöfaldast. Hann er gefinn með

$$\text{Tvöföldunartími} = \frac{\ln 2}{k}.$$

DÆMI 2.44

Tvöföldunartími notaður

Assume a population of fish grows exponentially. A pond is stocked initially with 500 fish. After 6 months, there are 1000 fish in the pond. The owner will allow his friends and neighbors to fish on his pond after the fish population reaches 10.000. When will the owner's friends be allowed to fish?

Lausn

Við vitum að fiskistofninn tvöfaldast á 6 mánuðum. Ef t táknar tíma í mánuðum gefur formúlan fyrir tvöföldunartíma $6=(\ln 2)/k$. Þá er $k=(\ln 2)/6$. Stofnstærðin er því gefin með $y=500\,e^{((\ln 2)/6)t}$. Til að finna hvenær stofninn nær 10.000 fiskum leysum við jöfnuna

$$\begin{aligned} 10.000 &= 500\,e^{(\ln\ 2/6)t} \\ 20 &= e^{(\ln\ 2/6)t} \\ \ln\ 20 &= \left(\frac{\ln\ 2}{6}\right)t \\ t &= \frac{6(\ln\ 20)}{\ln\ 2}\approx 25{,}93. \end{aligned}$$

The owner's friends have to wait 25,93 months (a little more than 2 years) to fish in the pond.

STÖÐUMAT 2.44

Gerum ráð fyrir að það taki 9 mánuði fyrir fiskistofninn í dæmi 2.44 að ná 1000 fiskum. Hversu lengi þurfa vinir eigandans þá að bíða?

Vísishnignunarlíkan

Vísisföll má einnig nota til að lýsa stofnum sem minnka (til dæmis vegna sjúkdóma) eða efnasamböndum sem brotna niður með tímanum. Við segjum að slík kerfi sýni vísishnignun en ekki vísisvöxt. Líkanið er nánast það sama, nema hvað veldisvísirinn hefur neikvætt formerki. Því gildir fyrir einhvern jákvæðan fasta k, að $y=y_0e^{-kt}$.

Líkt og við vísisvöxt er til deildajafna sem lýsir vísishnignun. Við höfum

$$y'=-k\,y_0e^{-kt}=-k\,y.$$

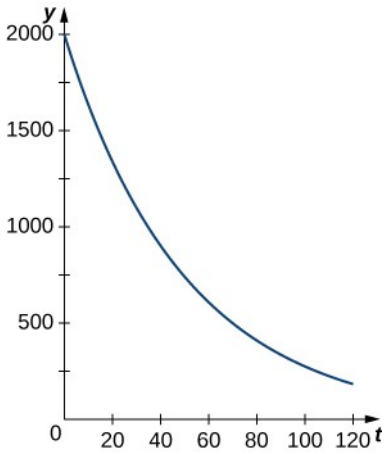
REGLA: VÍSISHNIGNUNARLÍKAN

Kerfi sem sýna vísishnignun hegða sér samkvæmt líkaninu

$$y=y_0e^{-kt},$$

þar sem y_0 táknar upphafsástand kerfisins og $k>0$ er fasti sem nefnist hnignunarfasti.

Myndin hér á eftir sýnir graf dæmigerðs vísisfalls sem lýsir vísishnignun.



Mynd 2.80 Dæmi um vísishnignun.

Skoðum hagnýtt dæmi um vísishnignun úr eðlisfræði. Kólnunarlögmál Newtons segir að hlutur kólni með hraða sem er í réttu hlutfalli við muninn á hitastigi hans og umhverfisins. Með öðrum orðum, ef T táknar hitastig hlutarins og T_a umhverfishitann í herberginu, þá er

$$T' = -k\left(T - T_a\right).$$

Takið eftir að þetta er ekki alveg rétta líkanið fyrir vísishnignun. Við viljum að afleiðan sé í réttu hlutfalli við fallið, en í þessari segð er aukaliðurinn T_a. Sem betur fer má leysa vandann með breytuskiptum. Látum $y(t) = T(t) - T_a$. Þá er $y'(t) = T'(t) - 0 = T'(t)$, og jafnan verður

$$y' = -k\,y.$$

Af fyrri niðurstöðum vitum við að þetta samband milli y og afleiðu þess leiðir til vísishnignunar. Því er

$$y = y_0 e^{-kt},$$

og við sjáum að

$$\begin{aligned} T - T_a &= (T_0 - T_a)e^{-kt} \\ T &= (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a \end{aligned}$$

þar sem T_0 táknar upphafshitastigið. Notum þessa formúlu í næsta dæmi.

DÆMI 2.45

Kólnunarlögmál Newtons

Að mati reyndra kaffibarþjóna er best að bera kaffi fram við hitastig milli 68 °C og 80 °C. Gerum ráð fyrir að kaffi sé hellt í bolla við hitastigið 95 °C, og að eftir 2 mínútur í 20 °C heitu herbergi hafi það kólnað niður í 83 °C. Hvenær verður kaffið fyrst nægilega svalt til að bera það fram? Hvenær verður það of kalt? Námundið svörin að næstu hálfu mínútu.

Lausn

Við höfum

$$\begin{aligned} T &= (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a \\ 83 &= (95-20)e^{-k(2)} + 20 \\ 63 &= 75e^{-2k} \\ \frac{21}{25} &= e^{-2k} \\ \ln\frac{21}{25} &= -2k \\ \ln 21 - \ln 25 &= -2k \\ k &= \frac{\ln 25 - \ln 21}{2}. \end{aligned}$$

Þá er líkanið

$$T = 75e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} + 20.$$

Kaffið nær $80\,^\circ\mathrm{C}$ þegar

$$\begin{aligned} 80 &= 75e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} + 20 \\ 60 &= 75e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} \\ \frac{4}{5} &= e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} \\ \ln\frac{4}{5} &= \frac{\ln 21 - \ln 25}{2}t \\ \ln 4 - \ln 5 &= \frac{\ln 21 - \ln 25}{2}t \\ t &= \frac{2(\ln 4 - \ln 5)}{\ln 21 - \ln 25} \approx 2{,}56. \end{aligned}$$

Bera má kaffið fram um 2,5 mínútum eftir að því er hellt í bollann. Kaffið nær $68\,^\circ\mathrm{C}$ þegar

$$\begin{aligned} 68 &= 75e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} + 20 \\ 48 &= 75e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} \\ \frac{16}{25} &= e^{\left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t} \\ \ln 16 - \ln 25 &= \left(\frac{\ln 21 - \ln 25}{2}\right)t \\ t &= \frac{2(\ln 16 - \ln 25)}{\ln 21 - \ln 25} \approx 5{,}12. \end{aligned}$$

Kaffið verður of kalt til að bera það fram um 5 mínútum eftir að því er hellt í bollann.

STÖÐUMAT 2.45

Gerum ráð fyrir að herbergið sé hlýrra $(24\,^\circ\mathrm{C})$ og að kaffið hafi eftir 2 mínútur aðeins kólnað niður í $86\,^\circ\mathrm{C}$. Hvenær verður kaffið fyrst nægilega svalt til að bera það fram? Hvenær verður það of kalt? Námundið svörin að næstu hálfu mínútu.

Rétt eins og kerfi sem sýna vísisvöxt hafa fastan tvöföldunartíma hafa kerfi sem sýna vísishnignun fastan helmingunartíma. Til að reikna helmingunartímann finnum við hvenær stærðin verður helmingur upphafsgildis síns. Því fæst

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ \frac{1}{2} &= e^{-kt} \\ -\ln 2 &= -kt \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Athugið: Þetta er sama segð og við fengum fyrir tvöföldunartímann.

SKILGREINING

Ef stærð minnkar samkvæmt vísisfalli er helmingunartími sá tími sem það tekur stærðina að minnka um helming. Hann er gefinn með

$$\text{Helmingunartími} = \frac{\ln 2}{k}.$$

DÆMI 2.46

Geislakolsgreining

Ein algengasta notkun vísishnignunarlíkans er geislakolsgreining. Kolefni-14 hrörnar (gefur frá sér geislavirka ögn) jafnt og þétt samkvæmt vísisfalli. Ef við vitum hve mikið kolefni var upphaflega í hlut og hve mikið er eftir getum við því ákvarðað aldur hlutarins. Fyrir samsætuna kolefni-14 er helmingunartíminn um 5730 ár. Það merkir að eftir þann tíma hefur helmingur efnisins breyst úr upphafsefninu kolefni-14 í ógeislavirka efnið köfnunarefni-14. Ef við höfum 100 g af kolefni-14 í dag, hve mikið verður eftir að liðnum 50 árum? Ef forngripur sem upphaflega innihélt 100 g af kolefni inniheldur nú 10 g af kolefni, hve gamall er hann? Námundið svarið að næsta hundraði ára.

Lausn

Við höfum

$$\begin{aligned} 5730 &= \frac{\ln 2}{k} \\ k &= \frac{\ln 2}{5730}. \end{aligned}$$

Líkanið segir því

$$y = 100\, e^{-(\ln 2/5730)t}.$$

Eftir 50 ár höfum við

$$\begin{aligned} y &= 100\,e^{-(\ln\,2/5730)(50)} \\ &\approx 99{,}40. \end{aligned}$$

Eftir 50 ár verða því 99,40 g af kolefni-14 eftir.

Til að ákvarða aldur forngripsins leysum við jöfnuna

$$\begin{aligned} 10 &= 100e^{-(\ln 2/5730)t} \\ \tfrac{1}{10} &= e^{-(\ln 2/5730)t} \\ t &\approx 19035. \end{aligned}$$

The artifact is about 19.000 years old.

2

STÖÐUMAT 2.46

Ef við höfum 100 g af kolefni-14, hve mikið verður eftir að liðnum 500 árum? Ef forngripur sem upphaflega innihélt 100 g af kolefni inniheldur nú 20 g, hve gamall er hann? Námundið svarið að næsta hundraði ára.

Æfingar í undirkafla 2.8

Satt eða ósatt? Ef fullyrðingin er sönn, sannið hana. Ef hún er ósönn, finnið rétta svarið.

348. Tvöföldunartíminn fyrir $y=e^{ct}$ er $(\ln(2))/(\ln(c))$.

349. If you invest $\$500$, an annual rate of interest of 3% yields more money in the first year than a 2,5% continuous rate of interest.

350. Ef þið skiljið $100\,^\circ\mathrm{C}$ tekönnu eftir við stofuhita $(25\,^\circ\mathrm{C})$ og sams konar tekönnu í ísskáp $(5\,^\circ\mathrm{C})$, við $k=0{,}02$, nær teið í ísskápnum drykkjarhæfu hitastigi $(70\,^\circ\mathrm{C})$ meira en 5 mínútum á undan teinu við stofuhita.

351. Ef helmingunartíminn er t ár er fastinn k í $y=e^{kt}$ reiknaður með $k=\ln(1/2)/t$.

Notið í eftirfarandi verkefnum $y=y_0e^{kt}$.

352. Ef bakteríurækt tvöfaldast á 3 klukkustundum, hve margar klukkustundir tekur hana að margfaldast með 10 *?*

353. Ef fjöldi baktería margfaldast með 10 á 10 klukkustundum, hve margar klukkustundir tekur hann að margfaldast með 100 *?*

354. Hve gömul er höfuðkúpa sem inniheldur fimmtung þess geislakols sem er í nútímahöfuðkúpu? Athugið að helmingunartími geislakols er 5730 ár.

355. Ef forngripur inniheldur 90% af því geislakoli sem er í nýju efni, getur hann þá verið frá tímum Krists (fyrir um 2000 árum)? Athugið að helmingunartími geislakols er 5730 ár.

356. Íbúum Kaíró fjölgaði úr 5 milljónum í 10 milljónir á 20 árum. Notið vísisvaxtarlíkan til að finna hvenær íbúafjöldinn var 8 milljónir.

357. The populations of New York and Los Angeles are growing at 1 % and 1,4 % a year, respectively. Starting from 8 million (New York) and 6 million (Los Angeles), when are the populations equal? Round your answer to a whole number of years.

358. Gerum ráð fyrir að virði $ 1 í japönskum jenum lækki um 2 % á ári. Ef upphafsgildið er $ 1 = ¥ 250, hvenær verður $ 1 = ¥ 1?

359. Áhrif auglýsinga dvína samkvæmt vísisfalli. Ef 40 % íbúanna muna eftir nýrri vöru eftir 3 daga, eftir hve langan tíma munu aðeins 20 % muna eftir henni?

360. Ef $y = 1000$ þegar $t = 3$ og $y = 3000$ þegar $t = 4$, hvað var y_0 þegar $t = 0$?

361. Ef $y = 100$ þegar $t = 4$ og $y = 10$ þegar $t = 8$, hvenær er $y = 1$?

362. If a bank offers annual interest of 7,5 % or continuous interest of 7,25 %, which has a better annual yield?

363. Hvaða samfelldu vextir gefa sömu ávöxtun og ársvextir sem nema 9 %?

364. If you deposit $ 5000 at 8 % annual interest, how many years can you withdraw $ 500 (starting after the first year) without running out of money?

365. Þið ætlið að safna 50.000 € á 20 árum fyrir skólagjöldum barnsins ykkar. Ef vextirnir leggjast samfellt við höfuðstólinn og nema 10 %, hve mikið þurfið þið að leggja inn í upphafi?

366. Kalkúnn er tekinn úr ofninum þegar kjarnhiti hans er 75 °C. Þegar hann hefur staðið í 10 mínútur í 20 °C heitri íbúð er hitinn kominn niður í 70 °C. Hver er hiti kalkúnsins 20 mínútum eftir að hann er tekinn úr ofninum?

367. Gerum ráð fyrir að þíða eigi grænmeti sem er −15 °C. Til að þíða það á öruggan hátt þarf að setja það í ísskáp þar sem umhverfishitinn er 6 °C. Eftir 2 klukkustundir í ísskápnum er grænmetið orðið −10 °C. Teiknið hitastigsferilinn og notið hann til að ákvarða hvenær grænmetið nær 0 °C.

368. Þið eruð fornleifafræðingar og fáið bein sem sagt er vera úr grameðlu (Tyrannosaurus rex). Þið vitið að þessar risaeðlur lifðu á krítartímabilinu (146 til 65 milljónum ára síðan) og með geislakolsgreiningu komist þið að því að 0,000001 % af upphaflegu magni geislakols er eftir. Er beinið frá krítartímabilinu?

369. The spent fuel of a nuclear reactor contains plutonium-239, which has a half-life of 24.000 years. If 1 barrel containing 10 kg of plutonium-239 is sealed, how many years must pass until only 10 g of plutonium-239 is left?

Notið eftirfarandi töflu í næstu verkefnum. Hún sýnir mannfjölda í heiminum eftir áratugum.

Ár frá 1950	Mannfjöldi (milljónir)
0	2.556
10	3.039
20	3.706
30	4.453
40	5.279
50	6.083
60	6.849

Source: http://www.factmonster.com/ipka/A0762181.html.

370. **[T]** Sá vísisferill af gerðinni $P(t)=a\,e^{bt}$ sem fellur best að gögnunum er $P(t)=2686\,e^{0,01604t}$. Notið grafíska reiknivél til að teikna gögnin og vísisferilinn á sama hnitakerfi.

371. **[T]** Finnið og teiknið afleiðuna y' af jöfnunni ykkar. Hvar er hún vaxandi og hvað merkir sú aukning?

372. **[T]** Finnið og teiknið aðra afleiðu jöfnunnar. Hvar er hún vaxandi og hvað merkir sú aukning?

373. **[T]** Finnið hvenær líkanið spáir því að mannfjöldinn nái 10 milljörðum. Notið fyrri svör ykkar um fyrstu og aðra afleiðu til að útskýra hvers vegna vísisvöxtur hentar illa til að spá fyrir um framtíðina.

Notið eftirfarandi töflu í næstu verkefnum. Hún sýnir íbúafjölda San Francisco á 19. öld.

Ár frá 1850	Íbúafjöldi (þúsundir)
0	21,00
10	56,80
20	149,5
30	234,0

Source: http://www.sfgenealogy.com/sf/history/hgpop.htm.

374. **[T]** Sá vísisferill af gerðinni $P(t)=a\,e^{bt}$ sem fellur best að gögnunum er $P(t)=35{,}26\,e^{0,06407t}$. Notið grafíska reiknivél til að teikna gögnin og vísisferilinn á sama hnitakerfi.

375. **[T]** Finnið og teiknið afleiðuna y' af jöfnunni ykkar. Hvar er hún vaxandi? Hvað merkir sú aukning? Er til gildi þar sem aukningin er mest?

376. **[T]** Finnið og teiknið aðra afleiðu jöfnunnar. Hvar er hún vaxandi? Hvað merkir sú aukning?

2.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla

NÁMSMARKMIÐ

- 2.9.1 Notið reglurnar um afleiður og heildi breiðbogafallanna.
- 2.9.2 Notið reglurnar um afleiður andhverfu breiðbogafallanna og heildin sem tengjast þeim.
- 2.9.3 Lýsið algengum hagnýtum aðstæðum þar sem keðjuferill myndast.

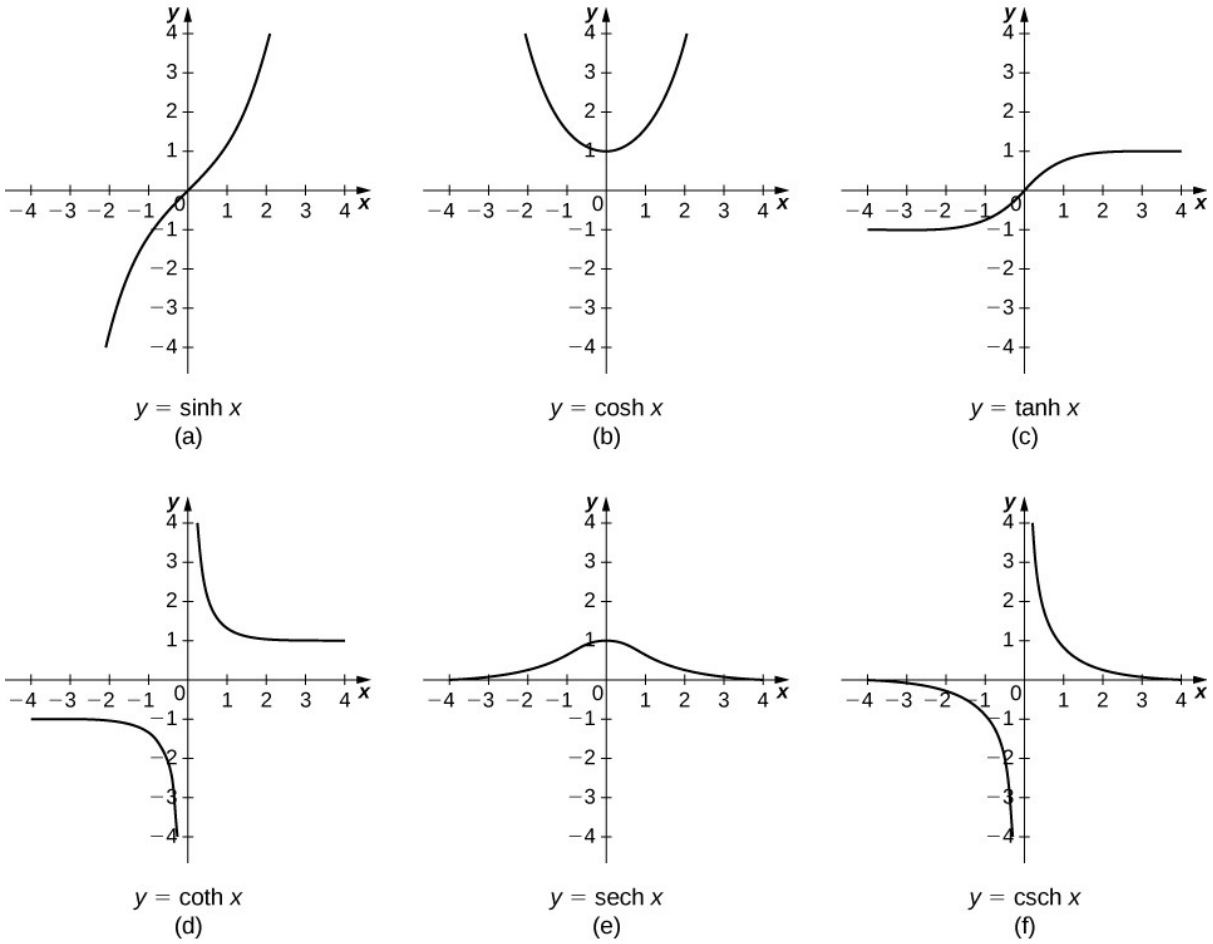
Við kynntumst breiðbogaföllum og nokkrum grunneiginleikum þeirra í Inngangi að föllum og gröfum. Í þessum undirkafla skoðum við deildunar- og heildunarreglur breiðbogafalla og andhverfa þeirra.

Afleiður og heildi breiðbogafalla

Rifjum upp að breiðbogasínus og breiðbogakósínus eru skilgreindir með

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ og } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Hin breiðbogaföllin eru síðan skilgreind út frá $\sinh x$ og $\cosh x$. Gröf breiðbogafallanna eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.81 Gröf breiðbogafallanna.

Auðvelt er að leiða út deildunarreglur breiðbogafallanna. Ef við skoðum til dæmis $\sinh x$ fáum við

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sinh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})\right]\\ &= \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \cosh x.\end{aligned}$$

Á sama hátt er $(d/dx)\cosh x = \sinh x$. Við tökum deildunarreglur breiðbogafallanna saman í næstu töflu.

Tafla 2.2 Afleiður breiðbogafallanna

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\coth x$	$-\operatorname{csch}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{csch} x$	$-\operatorname{csch} x \coth x$

Berum afleiður breiðbogafallanna saman við afleiður venjulegu hornafallanna. Margt er líkt, en einnig er nokkur munur. Afleiður sínusfallanna samsvara til dæmis hvor annarri: $(d/dx)\sin x = \cos x$ og $(d/dx)\sinh x = \cosh x$. Afleiður kósínusfallanna hafa hins vegar ólík formerki: $(d/dx)\cos x = -\sin x$, en $(d/dx)\cosh x = \sinh x$. Þegar við skoðum breiðbogaföllin nánar þurfum við að hafa í huga hvað er líkt og hvað ólíkt með þeim og venjulegu hornaföllunum.

Af þessum deildunarreglum breiðbogafallanna fást beint eftirfarandi heildunarreglur.

$$\begin{aligned}\int \sinh u\,du &= \cosh u + C & \int \operatorname{csch}^2 u\,du &= -\coth u + C\\ \int \cosh u\,du &= \sinh u + C & \int \operatorname{sech} u \tanh u\,du &= -\operatorname{sech} u + C\\ \int \operatorname{sech}^2 u\,du &= \tanh u + C & \int \operatorname{csch} u \coth u\,du &= -\operatorname{csch} u + C\end{aligned}$$

DÆMI 2.47

Deildun breiðbogafalla

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh\left(x^2\right)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\cosh x\right)^2$

Lausn

Með því að nota reglurnar í töflu 2.2 og keðjuregluna fáum við

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh\left(x^2\right)\right)=\cosh\left(x^2\right)\cdot 2x$

b. $\frac{d}{dx}\left(\cosh x\right)^2=2\cosh x\sinh x$

2

STÖÐUMAT 2.47

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2+3x\right)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left(\sinh x\right)^2}\right)$

DÆMI 2.48

Heildi með breiðbogaföllum

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int x\cosh\left(x^2\right)dx$

b. $\int \tanh x\,dx$

Lausn

Við getum notað u-innsetningu í báðum tilvikum.

a. Látum $u=x^2$. Þá er $du=2x\,dx$ og

$$\int x\cosh\left(x^2\right)dx=\int\frac{1}{2}\cosh u\,du=\frac{1}{2}\sinh u+C=\frac{1}{2}\sinh\left(x^2\right)+C.$$

b. Látum $u=\cosh x$. Þá er $du=\sinh x\,dx$ og

$$\int \tanh x\,dx=\int\frac{\sinh x}{\cosh x}dx=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C=\ln|\cosh x|+C.$$

Athugið að $\cosh x>0$ fyrir öll x, svo við getum sleppt tölugildismerkjunum og fengið

$$\int \tanh x\,dx=\ln\left(\cosh x\right)+C.$$

STÖÐUMAT 2.48

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int \sinh^3 x \cosh x \, dx$

b. $\int \operatorname{sech}^2(3x) \, dx$

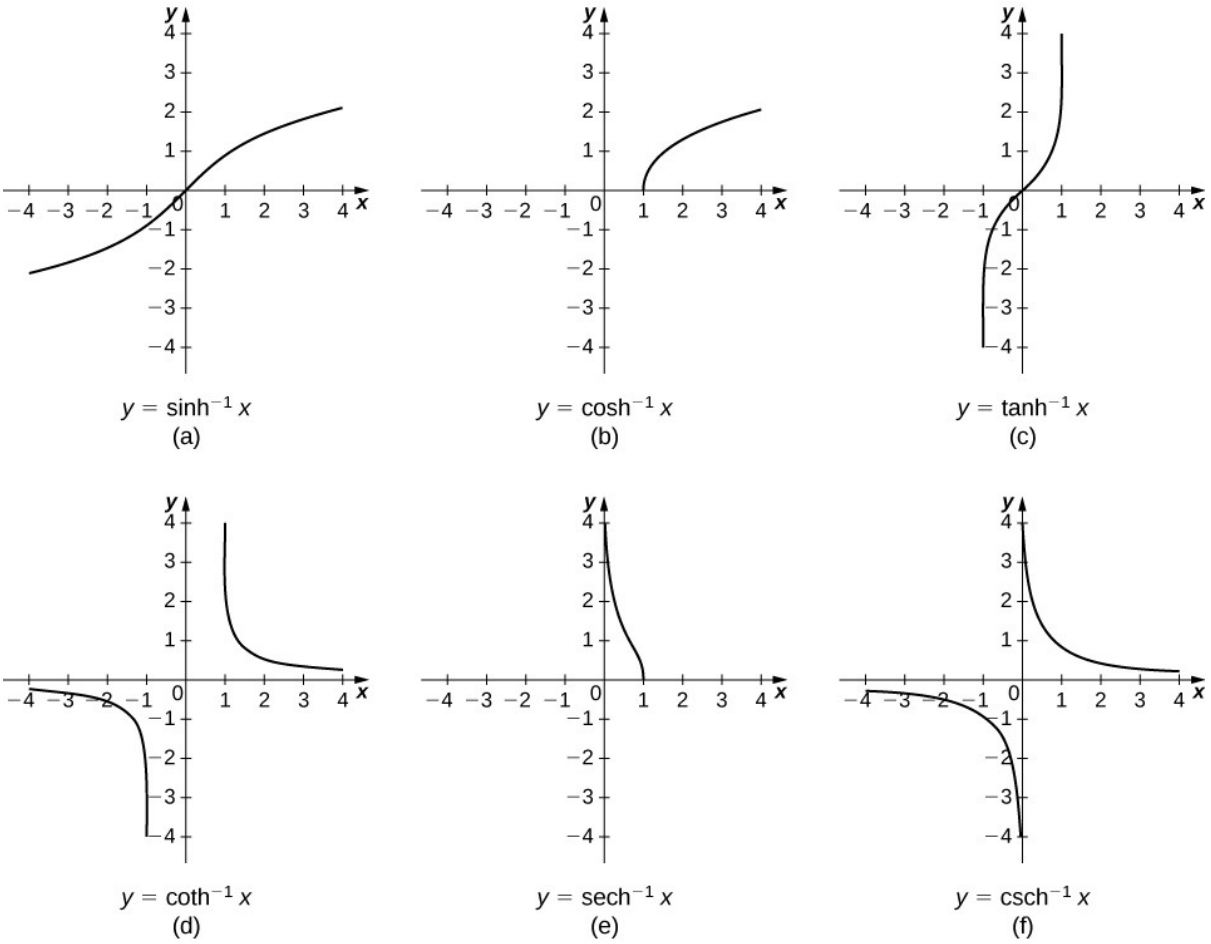
Stærðfræðigreining andhverfra breiðbogafalla

Þegar við skoðum gröf breiðbogafallanna sjáum við að þau hafa öll andhverfur ef myndmengi þeirra eru takmörkuð á viðeigandi hátt. Flestar nauðsynlegar takmarkanir má sjá með því að skoða gröfin vel. Skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu breiðbogafallanna eru tekin saman í næstu töflu.

Tafla 2.3 Skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu breiðbogafallanna

Fall	Skilgreiningarmengi	Myndmengi
$\sinh^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh^{-1} x$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$
$\tanh^{-1} x$	$(-1, 1)$	$(-\infty, \infty)$
$\coth^{-1} x$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\operatorname{sech}^{-1} x$	$(0, 1]$	$[0, \infty)$
$\operatorname{csch}^{-1} x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Gröf andhverfu breiðbogafallanna eru sýnd á næstu mynd.



Mynd 2.82 Gröf andhverfu breiðbogafallanna.

Til að finna afleiður andhverfu fallanna notum við fólgna deildun. Við höfum

$$\begin{aligned} y &= \sinh^{-1} x \\ \sinh y &= x \\ \tfrac{d}{dx}\sinh y &= \tfrac{d}{dx}x \\ \cosh y \tfrac{dy}{dx} &= 1. \end{aligned}$$

Rifjum upp að $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, svo $\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$. Þá fæst

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Á sama hátt getum við leitt út deildunarreglur hinna andhverfu breiðbogafallanna. Reglurnar eru teknar saman í næstu töflu.

Tafla 2.4 Afleiður andhverfu breiðbogafallanna

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$
$\sinh^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1}x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1}x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{sech}^{-1}x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{csch}^{-1}x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

Athugið að afleiður $\tanh^{-1}x$ og $\coth^{-1}x$ eru eins. Þegar við heildum $1/(1-x^2)$, þurfum við því að velja rétt stofnfall út frá skilgreiningarmengi fallanna og gildum x. Heildunarreglurnar fyrir andhverfu breiðbogaföllin eru teknar saman hér á eftir.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du=\sinh^{-1}u+C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\,du=-\operatorname{sech}^{-1}|u|+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,du=\cosh^{-1}u+C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,du=-\operatorname{csch}^{-1}|u|+C$$

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du=\begin{cases}\tanh^{-1}u+C & \text{ef } |u|<1\\ \coth^{-1}u+C & \text{ef } |u|>1\end{cases}$$

DÆMI 2.49

Deildun andhverfra breiðbogafalla

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)^2$

Lausn

Með því að nota reglurnar í töflu 2.4 og keðjuregluna fáum við eftirfarandi niðurstöður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)=\frac{1}{3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)^2=\frac{2\left(\tanh^{-1}x\right)}{1-x^2}$

STÖÐUMAT 2.49

Reiknið eftirfarandi afleiður:

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}(3x)\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)^3$

DÆMI 2.50

Heildi með andhverfum breiðbogaföllum

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx$

b. $\int\frac{1}{2x\sqrt{1-9x^2}}dx$

Lausn

Við getum notað u-innsetningu í báðum tilvikum.

a. Látum $u=2x$. Þá er $du=2dx$ og við fáum

$$\int\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{u^2-1}}du=\frac{1}{2}\cosh^{-1}u+C=\frac{1}{2}\cosh^{-1}(2x)+C.$$

b. Látum $u=3x$. Þá er $du=3dx$ og við fáum

$$\int\frac{1}{2x\sqrt{1-9x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}|u|+C=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}|3x|+C.$$

STÖÐUMAT 2.50

Reiknið eftirfarandi heildi:

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx, x>2$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

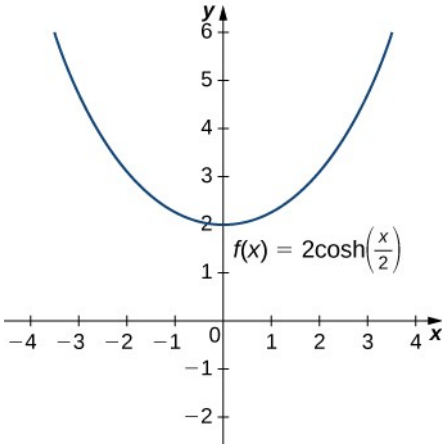
Hagnýting

Eitt eðlisfræðilegt notkunarsvið breiðbogafalla tengist hangandi köplum. Ef kapall með jafnan línuþéttleika er hengdur milli tveggja festinga og ber ekkert annað álag en eigin þyngd myndar hann feril sem nefnist keðjuferill. Háspennulínur, keðjur sem hanga milli tveggja stólpa og þræðir í köngulóarvef mynda öll keðjuferla. Næsta mynd sýnir keðjur sem hanga milli stólpa í röð.



Mynd 2.83 Keðjurnar milli þessara stólpa hafa lögun keðjuferils. (mynd: breytt útgáfa af verki OKFoundryCompany, Flickr)

Breiðbogaföll má nota til að lýsa keðjuferlum. Nánar tiltekið eru föll af gerðinni $y=a\cosh(x/a)$ keðjuferlar. Mynd 2.84 sýnir graf $y=2\cosh(x/2)$.



Mynd 2.84 Graf breiðbogakósínusfalls hefur lögun keðjuferils.

DÆMI 2.51

Keðjuferill notaður til að finna lengd kapals

Gerum ráð fyrir að hangandi kapall hafi lögunina $10\cosh(x/10)$ fyrir $-15 \le x \le 15$, þar sem x er mælt í metrum. Finnið lengd kapalsins í metrum.

Lausn

Rifjum upp úr undirkafla 2.4 að formúlan fyrir bogalengd er

$$\text{Bogalengd} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Við höfum $f(x) = 10\cosh(x/10)$, svo $f'(x) = \sinh(x/10)$. Þá er

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\;dx \\ &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{10}\right)}\;dx.\end{aligned}$$

Rifjum nú upp að $1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$, svo við fáum

$$\begin{aligned}\text{Bogalengd} &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{10}\right)}\;dx \\ &= \int_{-15}^{15} \cosh\left(\frac{x}{10}\right)dx \\ &= 10\;\sinh\left(\frac{x}{10}\right)\Big|_{-15}^{15} = 10\left[\sinh\left(\frac{3}{2}\right)-\sinh\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = 20\;\sinh\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\approx 42{,}586\ \text{m}.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 2.51

Gerum ráð fyrir að hangandi kapall hafi lögunina $15\cosh(x/15)$ fyrir $-20 \le x \le 20$. Finnið lengd kapalsins í metrum.

Æfingar í undirkafla 2.9

377. **[T]** Finnið stæður fyrir $\cosh x + \sinh x$ og $\cosh x - \sinh x$. Notið reiknivél til að teikna gröf þessara falla og ganga úr skugga um að stæðurnar séu réttar.

378. Finnið stofnföll $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$, út frá skilgreiningum þeirra.

379. Sýnið að $\cosh(x)$ og $\sinh(x)$ uppfylla $y'' = y$.

380. Notið deiliregluna til að sannreyna að $\tanh(x)' = \operatorname{sech}^2(x)$.

381. Leiðið $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$ út frá skilgreiningunni.

382. Deildið fyrri stæðuna til að finna stæðu fyrir $\sinh(2x)$.

383. Sannið $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ með því að umrita stæðuna með vísisföllum.

384. Deildið fyrri stæðuna til að finna stæðu fyrir $\cosh(x+y)$.

Finnið afleiður fallanna í eftirfarandi æfingum. Teiknið gröf afleiðanna ásamt gröfum fallanna til að ganga úr skugga um að svörin séu rétt.

385. **[T]** $\cosh(3x+1)$

386. **[T]** $\sinh(x^2)$

387. **[T]** $\dfrac{1}{\cosh(x)}$

388. **[T]** $\sinh(\ln(x))$

389. **[T]** $\cosh^2(x) + \sinh^2(x)$

390. **[T]** $\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$

391. **[T]** $\tanh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

392. **[T]** $\dfrac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$

393. **[T]** $\sinh^6(x)$

394. **[T]** $\ln(\operatorname{sech}(x) + \tanh(x))$

Finnið stofnföll gefnu fallanna í eftirfarandi æfingum.

395.

$$\cosh(2x+1)$$

396.

$$\tanh(3x+2)$$

397.

$$x\cosh(x^2)$$

398.

$$3x^3\tanh(x^4)$$

399.

$$\cosh^2(x)\sinh(x)$$

400.

$$\tanh^2(x)\operatorname{sech}^2(x)$$

401.

$$\frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}$$

402.

$$\coth(x)$$

403.

$$\cosh(x)+\sinh(x)$$

404.

$$(\cosh(x)+\sinh(x))^n$$

Finnið afleiður fallanna í eftirfarandi æfingum.

405.

$$\tanh^{-1}(4x)$$

406.

$$\sinh^{-1}(x^2)$$

407.

$$\sinh^{-1}(\cosh(x))$$

408.

$$\cosh^{-1}\left(x^3\right)$$

409.

$$\tanh^{-1}\left(\cos\left(x\right)\right)$$

410.

$$e^{\sinh^{-1}(x)}$$

411.

$$\ln\left(\tanh^{-1}\left(x\right)\right)$$

Finnið stofnföll fallanna í eftirfarandi æfingum.

412.

$$\int \frac{dx}{4-x^2}$$

413.

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

414.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

415.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

416.

$$\int -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

417.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$$

418.

$$\int -\frac{2x}{x^4-1}\,dx$$

Notið í eftirfarandi æfingum þá staðreynd að fallandi hlutur með núningsmótstöðu sem er jöfn hraðanum í öðru veldi uppfyllir jöfnuna $dv/dt = g - v^2$.

419. Sýnið að $v(t) = \sqrt{g}\tanh\left(\left(\sqrt{g}\right)t\right)$ uppfyllir þessa jöfnu.

420. Leiðið út fyrri stæðuna fyrir $v(t)$ með því að heilda $\dfrac{dv}{g - v^2} = dt$.

421. **[T]** Áætlið hversu langt hlutur hefur fallið á 12 sekúndum með því að finna flatarmálið undir ferli $v(t)$.

2

Notið þessar aðstæður í eftirfarandi æfingum: Kapall sem hangir undan eigin þyngd hefur hallatöluna $S = dy/dx$ sem uppfyllir $dS/dx = c\sqrt{1+S^2}$. Fastinn c er hlutfall línuþéttleika kapalsins og togkraftsins í honum.

422. Sýnið að $S = \sinh(cx)$ uppfyllir þessa jöfnu.

423. Heildið $dy/dx = \sinh(cx)$ til að finna hæð kapalsins $y(x)$ ef $y(0) = 1/c$.

424. Teiknið kapalinn og finnið hversu langt hann sígur við $x = 0$.

Leysið eftirfarandi verkefni.

425. **[T]** Keðja hangir milli tveggja stólpa með 2 m millibili og myndar keðjuferil sem lýst er með jöfnunni $y = 2\cosh(x/2) - 1$. Finnið hallatölu keðjuferilsins við vinstri stólpann.

426. **[T]** Keðja hangir milli tveggja stólpa með fjögurra metra millibili og myndar keðjuferil sem lýst er með jöfnunni $y = 4\cosh(x/4) - 3$. Finnið heildarlengd keðjuferilsins (bogalengd).

427. **[T]** Háspennulína er keðjuferill sem lýst er með $y = 10\cosh(x/10)$. Finnið hlutfall flatarmálsins undir keðjuferlinum og bogalengdar hans. Hverju takið þið eftir?

428. Símalína er keðjuferill sem lýst er með $y = a\cosh(x/a)$. Finnið hlutfall flatarmálsins undir keðjuferlinum og bogalengdar hans. Staðfestir þetta svar ykkar við spurningunni á undan?

429. Sannið regluna fyrir afleiðu $y = \sinh^{-1}(x)$ með því að deilda $x = \sinh(y)$. (Vísbending: Notið samsemdir breiðbogafalla.)

430. Sannið regluna fyrir afleiðu $y = \cosh^{-1}(x)$ með því að deilda $x = \cosh(y)$.

(Vísbending: Notið samsemdir breiðbogafalla.)

431. Sannið regluna fyrir afleiðu $y = \operatorname{sech}^{-1}(x)$ með því að deilda $x = \operatorname{sech}(y)$. (Vísbending: Notið samsemdir breiðbogafalla.)

432. Sannið að $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$.

433. Sannið stæðuna fyrir $\sinh^{-1}(x)$. Margfaldið $x = \sinh(y) = (1/2)(e^y - e^{-y})$ með $2e^y$ og einangrið y. Er stæðan ykkar sú sama og í kennslubókinni?

434. Sannið stæðuna fyrir $\cosh^{-1}(x)$. Margfaldið $x=\cosh(y)=(1/2)\left(e^{y}+e^{-y}\right)$ með $2e^{y}$ og einangrið y. Er stæðan ykkar sú sama og í kennslubókinni?

Lykilhugtök

bogalengd
líta má á bogalengd ferils sem vegalengdina sem farin væri eftir ferlinum

keðjuferill
ferill sem hefur lögun fallsins $y=a\cosh(x/a)$ er keðjuferill; kapall með jafnan línuþéttleika sem hangir milli tveggja festipunkta tekur á sig lögun keðjuferils

massamiðja
punkturinn þar sem hugsa mætti sér að allur massi kerfisins væri saman kominn án þess að vægið breyttist

þungamiðja
þungamiðja svæðis er rúmfræðileg miðja þess; þunnar plötur eru oft táknaðar með svæðum í sléttu; ef þunn plata hefur fastan þéttleika ræðst massamiðja hennar aðeins af lögun samsvarandi svæðis í sléttunni; þá fellur massamiðja plötunnar saman við þungamiðju svæðisins sem táknar hana

þversnið
skurðmengi sléttu og rúmhlutar

þéttleikafall
þéttleikafall lýsir því hvernig massi dreifist um hlut; það getur verið línuþéttleiki, gefinn sem massi á lengdareiningu; flatarþéttleiki, gefinn sem massi á flatarmálseiningu; eða rúmþéttleiki, gefinn sem massi á rúmmálseiningu; þyngdarþéttleiki er einnig notaður um þyngd (fremur en massa) á rúmmálseiningu

skífuaðferð
sértilvik sneiðaaðferðarinnar fyrir snúða þegar sneiðarnar eru skífur

tvöföldunartími
ef stærð vex samkvæmt vísisfalli er tvöföldunartíminn sá tími sem það tekur stærðina að tvöfaldast; hann er gefinn með $(\ln 2)/k$

vísishnignun
kerfi sem sýna vísishnignun fylgja líkani af gerðinni $y=y_0e^{-kt}$

vísisvöxtur
kerfi sem sýna vísisvöxt fylgja líkani af gerðinni $y=y_0e^{kt}$

keilustúfur
hluti keilu; keilustúfur myndast þegar keila er skorin með sléttu sem er samsíða grunnfletinum

helmingunartími
ef stærð hnignar samkvæmt vísisfalli er helmingunartíminn sá tími sem það tekur stærðina að minnka um helming. Hann er gefinn með $(\ln 2)/k$

lögmál Hookes
þetta lögmál segir að krafturinn sem þarf til að þjappa gormi saman (eða teygja hann) sé í réttu hlutfalli við frávik gormsins frá jafnvægisstöðu; með öðrum orðum er $F = k\,x$, þar sem k er fasti

vökvastöðuþrýstingur
þrýstingur vatns á hlut sem er á kafi

þunn plata
þunn efnisplata; slík plata er svo þunn að í stærðfræðilegum tilgangi má líta á hana sem tvívíða

hylkjaaðferð
aðferð til að reikna rúmmál snúðs með því að skipta honum í sammiðja sívalningshylki; aðferðin er frábrugðin skífu- og hringkragaaðferðunum að því leyti að heildað er með tilliti til hinnar breytunnar

vægi
ef n massar eru staðsettir á talnalínu er vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins gefið með $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$; ef við lítum þess í stað á svæði í sléttunni sem afmarkast að ofan af falli $f(x)$ á bili $[a, b]$, þá eru vægi svæðisins með tilliti til x- og y-ásanna gefin með $M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}\,dx$ og $M_y = \rho \int_a^b x f(x)\,dx$, í sömu röð

sneiðaaðferð
aðferð til að reikna rúmmál hlutar með því að skipta honum í sneiðar, áætla rúmmál hverrar sneiðar og leggja áætlanirnar saman til að fá mat á heildarrúmmálinu; þegar fjöldi sneiða stefnir á óendanlegt verður matið að heildi sem gefur nákvæmt rúmmál

snúður
rúmhlutur sem myndast þegar svæði í sléttu er snúið um línu í sömu sléttu

yfirborðsflatarmál
yfirborðsflatarmál rúmhlutar er heildarflatarmál ytra byrðis hans; fyrir hluti á borð við teninga eða múrsteina er það summa flatarmála allra flata hans

samhverfureglan
samhverfureglan segir að ef svæði R er samhverft um línu l, þá liggur þungamiðja R á l

Papposarsetning um rúmmál
þessi setning segir að rúmmál snúðs sem myndast þegar svæði er snúið um ytri ás sé jafnt flatarmáli svæðisins margfölduðu með vegalengdinni sem þungamiðja svæðisins fer

hringkragaaðferð
sértilvik sneiðaaðferðarinnar fyrir snúða þegar sneiðarnar eru hringkragar

vinna
orkan sem þarf til að færa hlut úr stað; þegar kraftur er fastur er vinna í eðlisfræði margfeldi krafts og vegalengdar

Lykiljöfnur

Flatarmál milli tveggja ferla, heildað með tilliti til x-ássins	$A=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$
Flatarmál milli tveggja ferla, heildað með tilliti til *y*-ássins	$A=\int_c^d \left[u(y)-v(y)\right]dy$
Skífuaðferð með heildun með tilliti til *x*-ássins	$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$
Skífuaðferð með heildun með tilliti til *y*-ássins	$V=\int_c^d \pi\left[g(y)\right]^2 dy$
Hringkragaaðferð	$V=\int_a^b \pi\left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$
Hylkjaaðferð	$V=\int_a^b \left(2\pi x f(x)\right)dx$
Bogalengd falls af x	$\text{Bogalengd}=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$
Bogalengd falls af y	$\text{Bogalengd}=\int_c^d \sqrt{1+\left[g'(y)\right]^2}\,dy$
Yfirborðsflatarmál falls af x	$\text{Yfirborðsflatarmál}=\int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right)dx$

Massi einvíðs hlutar	$m=\int_a^b \rho(x)\,dx$
Massi hringlaga hlutar	$m=\int_0^r 2\pi x\,\rho(x)\,dx$
Vinna sem unnin er á hlut	$W=\int_a^b F(x)\,dx$
Kraftur vegna vökvastöðuþrýstings á plötu	$F=\int_a^b \rho\, w(x)\, s(x)\,dx$
Massi þunnrar plötu	$m=\rho\int_a^b f(x)\,dx$
Vægi þunnrar plötu	$M_x=\rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}\,dx$ og $M_y=\rho\int_a^b x f(x)\,dx$
Massamiðja þunnrar plötu	$\bar{x}=\frac{M_y}{m}$ og $\bar{y}=\frac{M_x}{m}$
Náttúrulega lografallið	$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ ⓩ
Vísisfallið $y=e^x$	$\ln y=\ln(e^x)=x$ ⓩ

Meginatriði

2.1 Flatarmál milli ferla

- Rétt eins og nota má ákveðin heildi til að finna flatarmálið undir ferli má einnig nota þau til að finna flatarmálið milli tveggja ferla.
- Til að finna flatarmálið milli tveggja ferla sem skilgreindir eru með föllum heildum við mismun fallanna.
- Ef gröf fallanna skerast eða svæðið er flókið notum við algildi mismunar fallanna. Þá getur þurft að reikna tvö eða fleiri heildi og leggja niðurstöðurnar saman til að finna flatarmál svæðisins.
- Stundum getur verið auðveldara að heilda með tilliti til y til að finna flatarmálið. Meginreglurnar eru þær sömu óháð því hvaða breyta er heildunarbreytan.

2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum

- Nota má ákveðin heildi til að finna rúmmál rúmhluta. Með sneiðaaðferðinni má finna rúmmál með því að heilda þversniðsflatarmálið.
- Í snúðum eru rúmmálssneiðarnar oft skífur og þversniðin hringir. Skífuaðferðin er sértilvik sneiðaaðferðarinnar þar sem þversniðin eru hringir og formúlan fyrir flatarmál hrings er notuð.
- Ef snúður hefur holrúm í miðjunni eru rúmmálssneiðarnar hringkragar. Í hringkragaaðferðinni er flatarmál innri hringsins dregið frá flatarmáli ytri hringsins áður en heildað er.

2.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki

- Hylkjaaðferðin er önnur leið til að reikna rúmmál snúðs með ákveðnu heildi. Stundum er þessi aðferð heppilegri en skífuaðferðin eða hringkragaaðferðin vegna þess að heildað er með tilliti til hinnar breytunnar. Í sumum tilvikum er annað heildið mun flóknara en hitt.
- Rúmfræðileg lögun fallanna og það hversu erfið heildunin er ráða mestu um hvaða heildunaraðferð er valin.

2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

- Reikna má bogalengd ferils með ákveðnu heildi.
- Bogalengdin er fyrst nálguð með línustrikum og þannig fæst Riemann-summa. Með því að taka markgildi fæst síðan formúlan fyrir bogalengd sem ákveðið heildi. Sömu aðferð má beita á föll af y.
- Alhæfa má hugtökin sem notuð eru til að reikna bogalengd og nota þau til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatar.
- Oft er erfitt að reikna heildin sem fást með formúlunum fyrir bogalengd og yfirborðsflatarmál. Þá getur þurft að nota tölvu eða reiknivél til að nálga gildi heildanna.

2.5 Hagnýting í eðlisfræði

- Ákveðin heildi hafa ýmis algeng notkunarsvið í verkfræði og eðlisfræði.
- Nota má ákveðin heildi til að ákvarða massa hlutar ef þéttleikafall hans er þekkt.
- Einnig má reikna vinnu með því að heilda kraftfall, meðal annars þegar unnið er gegn þyngdarkraftinum, eins og í dæmum um dælingu.

- Einnig má nota ákveðin heildi til að reikna kraftinn sem verkar á hlut sem er á kafi í vökva.

2.6 Vægi og massamiðjur

- Stærðfræðilega séð er massamiðja kerfis sá punktur þar sem safna mætti öllum massa kerfisins saman án þess að vægið breyttist. Í grófum dráttum má líta á massamiðjuna sem jafnvægispunkt kerfisins.
- Fyrir punktmassa sem dreifast eftir talnalínu er vægi kerfisins með tilliti til upphafspunktsins $M=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. Fyrir punktmassa sem dreifast í sléttu eru vægi kerfisins með tilliti til x- og y-ásanna $M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ og $M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, í sömu röð.
- Ef þunn plata afmarkast að ofan af falli $f(x)$, eru vægi kerfisins með tilliti til x- og y-ásanna $M_x=\rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx$ og $M_y=\rho\int_a^b xf(x)dx$.
- x- og y-hnit massamiðjunnar fást með því að deila vægjunum um y-ásinn og x-ásinn, í sömu röð, með heildarmassanum. Samhverfureglan segir að ef svæði er samhverft með tilliti til línu, þá liggi þungamiðja svæðisins á línunni.
- Papposarsetning um rúmmál segir að ef svæði er snúið um ytri ás sé rúmmál snúðsins sem myndast jafnt flatarmáli svæðisins margfölduðu með vegalengdinni sem þungamiðja svæðisins færist um.

2.7 Heildi, vísisföll og lograr

- Í fyrri umfjöllun um logra og vísisföll voru föllin ekki skilgreind nákvæmlega og formlega. Í þessum undirkafla eru hugtökin sett fram á stærðfræðilega strangan hátt.
- Grundvöllur umfjöllunarinnar er að náttúrlegi logrinn er skilgreindur með heildi.
- Fallið e^x er síðan skilgreint sem andhverfa náttúrlega lograns.
- Almenn vísisföll eru skilgreind út frá e^x, og samsvarandi andhverf föll eru almennir lograr.
- Þekktir eiginleikar logra og veldisvísa gilda áfram í þessu strangara samhengi.

2.8 Vísisvöxtur og -hnignun

- Vísisvöxtur og vísishnignun eru tvö af algengustu notkunarsviðum vísisfalla.

- Kerfi sem sýna vísisvöxt fylgja líkani af gerðinni $y = y_0 e^{kt}$.
- Í vísisvexti er vaxtarhraðinn í réttu hlutfalli við það magn sem fyrir er. Með öðrum orðum er $y' = k\,y$.
- Kerfi sem sýna vísisvöxt hafa fastan tvöföldunartíma sem er gefinn með $(\ln 2)/k$.
- Kerfi sem sýna vísishnignun fylgja líkani af gerðinni $y = y_0 e^{-kt}$.
- Kerfi sem sýna vísishnignun hafa fastan helmingunartíma sem er gefinn með $(\ln 2)/k$.

2.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla

- Breiðbogaföll eru skilgreind með vísisföllum.
- Með því að deilda lið fyrir lið fást deildunarreglur fyrir breiðbogaföllin. Af þeim fást síðan heildunarreglur.
- Með viðeigandi takmörkunum á myndmengi eiga öll breiðbogaföllin sér andhverfur.
- Með fólginni deildun fást deildunarreglur fyrir andhverfu breiðbogaföllin og af þeim fást síðan heildunarreglur.
- Í eðlisfræði eru breiðbogaföll oftast notuð til að reikna keðjuferla.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi.

435. Það þarf helmingi minni vinnu til að dæla vatninu úr hálffullum sívalningi en úr fullum sívalningi.

436. Ef krafturinn er fastur er vinnan við að færa hlut frá $x = a$ til $x = b$ jöfn $F(b - a)$.

437. Nota má skífuaðferðina í öllum tilvikum þar sem hringkragaaðferðin gefur rúmmál snúðs.

438. Ef helmingunartími seborgíns- 266 er 360 ms, þá er $k = (\ln(2))/360$.

Finnið rúmmál rúmhlutarins í verkefnunum hér á eftir með þeirri aðferð sem er tilgreind.

439. Grunnflötur rúmhlutarins afmarkast af sporbaugnum $x^2/4 + y^2/9 = 1$. Þversnið rúmhlutarins eru jafnhliða þríhyrningar sem standa hornrétt á y-ás. Notið sneiðaaðferðina.

440. Svæðinu sem afmarkast af ferlinum $y = x^2 - x$ og x-ásnum á bilinu $x = 1$ til $x = 4$, er snúið um y-ásinn með hringkragaaðferðinni.

441. $x = y^2$ og $x = 3\,y$; svæðinu þar á milli er snúið um y-ásinn með hringkragaaðferðinni.

442. $x = 2\,y^2 - y^3, x = 0$, og $y = 0$; svæðinu sem afmarkast af þessum ferlum er snúið um x-ásinn með hylkjaaðferðinni.

Í eftirfarandi verkefnum skal finna

a. flatarmál svæðisins,
b. rúmmál snúðsins þegar svæðinu er snúið um x-ásinn og
c. rúmmál snúðsins þegar svæðinu er snúið um y-ásinn. Notið þá aðferð sem ykkur þykir henta best.

~~443~~.

$$y=x^3, x=0, y=0, \text{og } x=2$$

2

444.

$$y=x^2-x \text{ og } x=0$$

445. **[T]** $y=\ln(x)+2$ og $y=x$

446. $y=x^2$ og $y=\sqrt{x}$

447. $y=5+x$, $y=x^2$, $x=0$, og $x=1$

448. Fyrir neðan $x^2+y^2=1$ og fyrir ofan $y=1-x$

449. Finnið massa skífu sem hefur þéttleikafallið $\rho=\frac{1}{x^2+1}$, miðju í upphafspunkti og geisla 4.

450. Finnið massamiðju massadreifingar sem hefur þéttleikafallið $\rho=\tan^2 x$ á bilinu $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

451. Finnið massa svæðisins og massamiðju þess þegar þéttleikafallið er $\rho=1$ og svæðið afmarkast af $y=x^5$ og $y=\sqrt{x}$.

Finnið umbeðnar bogalengdir í eftirfarandi verkefnum.

452. Reiknið bogalengd með tilliti til x fyrir ferilinn $y=\cosh(x)$ á bilinu $x=0$ til $x=2$.

453. Reiknið bogalengd með tilliti til y fyrir ferilinn $x=3-\sqrt{y}$ frá $y=0$ til $y=4$

Finnið yfirborðsflatarmál og rúmmál í verkefnunum hér á eftir þegar gefnu ferlunum er snúið um tilgreindan ás.

454. Hluturinn sem myndast þegar svæðinu milli $y=4+x$, $y=3-x$, $x=0$, og $x=2$ er snúið um y-ásinn.

455. Hátalarinn sem myndast þegar ferlinum $y=1/x$ frá $x=1$ til $x=4$ er snúið um x-ásinn.

456. Þetta verkefni fjallar um Karun-3-stífluna í Íran. Nálga má lögun stíflunnar með jafnarma þríhyrningi á hvolfi sem nær þvert yfir ána. Þríhyrningurinn er 205 m á hæð og 388 m á breidd (þvert yfir efri brún stíflunnar). Gerið ráð fyrir að vatnsdýpið sé nú 180 m. Eðlismassi vatns er 1000 kg/m^3. Finnið heildarkraftinn sem verkar á stífluvegginn.

457. Þið rannsakið glæpavettvang og reynið að ákvarða dánartíma fórnarlambs. Klukkan er tólf á hádegi. Útihitinn er $8\,^\circ\mathrm{C}$ og líkamshitinn er $26\,^\circ\mathrm{C}$. Þið vitið að kólnunarfastinn er $k = 0{,}00824\,/\text{mín}$. Hvenær lést fórnarlambið ef gert er ráð fyrir að eðlilegur líkamshiti manns sé $37\,^\circ\mathrm{C}$?

Næsta verkefni fjallar um hrun hlutabréfamarkaðarins í Bandaríkjunum árið 1929. Taflan sýnir árlegt gildi Dow Jones-iðnaðarvísitölunnar í aðdraganda hrunsins.

Ár eftir 1920	Gildi ($)
1	63,90
3	100
5	110
7	160
9	381,17

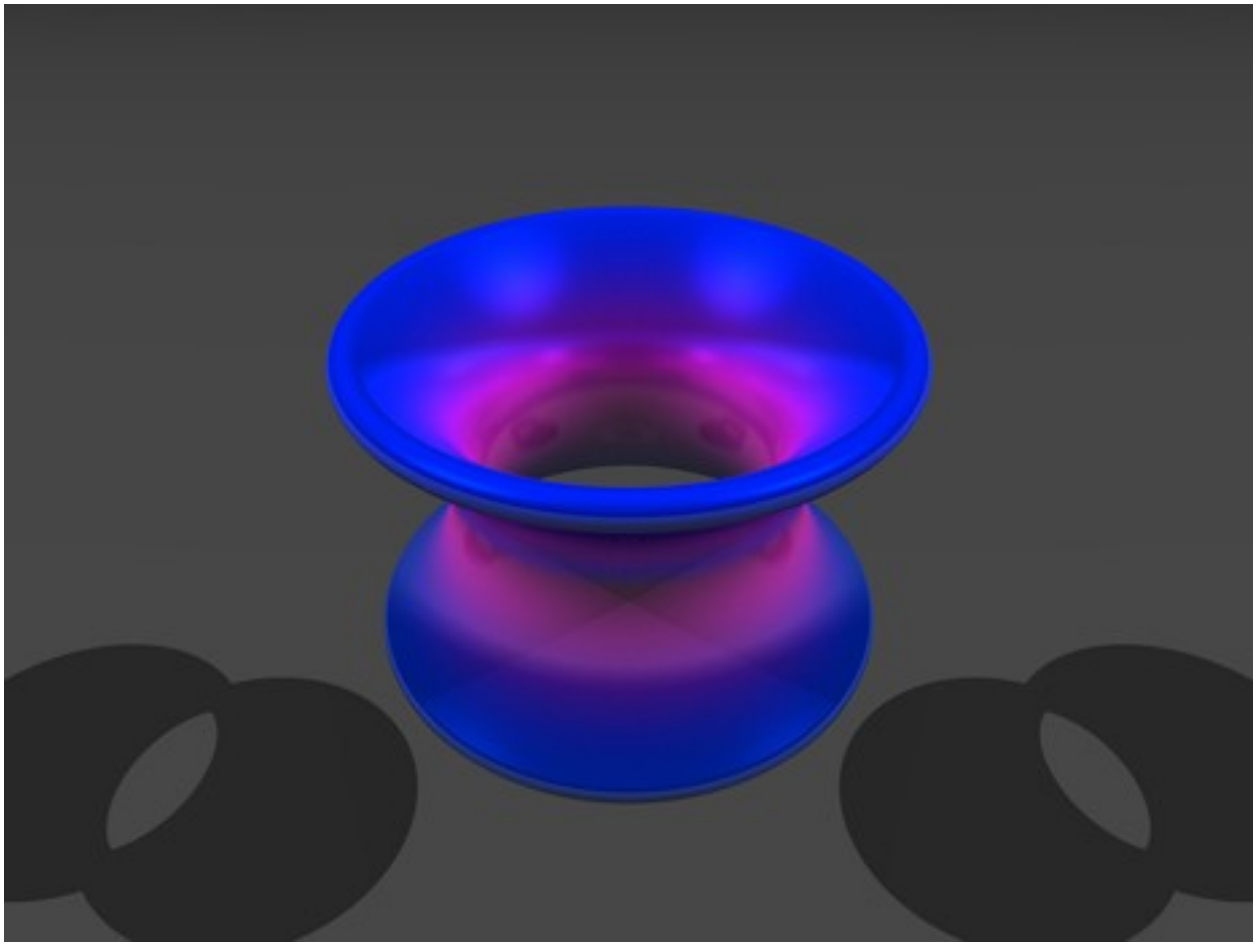
Source: http://stockcharts.com/freecharts/historical/djia19201940.html

458. **[T]** Vísisferillinn sem fellur best að gögnunum er $y = 40{,}71 + 1{,}224^x$. Hvers vegna teljið þið að hækkun markaðarins hafi ekki verið sjálfbær? Notið fyrstu og aðra afleiðu til að rökstyðja svarið. Hvaða gildi Dow Jones-iðnaðarvísitölunnar gefur líkanið fyrir árið 2014?

Verkefnin hér á eftir fjalla um keðjuflötinn. Hann er eini snúðflöturinn sem er lágflötur, það er flötur með meðalkrappa núll. Í náttúrunni myndast keðjuflötur þegar sápuhimna er teygð milli tveggja hringa.

459. Finnið rúmmál keðjuflatarins sem myndast þegar ferlinum $y = \cosh(x)$ frá $x = -1$ til $x = 1$ er snúið um x-ás, eins og sýnt er hér.

2



460. Finnið yfirborðsflatarmál keðjuflatarins sem myndast þegar ferlinum $y = \cosh(x)$ frá $x = -1$ til $x = 1$ er snúið um x-ás.

3. KAFLI

Heildunaraðferðir



Mynd 3.1 Vandað skipulag umferðarljósa getur komið í veg fyrir slys eða fækkað þeim á fjölförnum gatnamótum. (heimild: breytt verk eftir David McKelvey, Flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 3.1 Hlutheildun
- 3.2 Heildi hornafalla
- 3.3 Innsetning með hornaföllum
- 3.4 Stofnbrotaliðun
- 3.5 Aðrar heildunaraðferðir
- 3.6 Töluleg heildun
- 3.7 Óeiginleg heildi

Inngangur

Í stórri borg urðu slys að meðaltali á þriggja mánaða fresti á sérlega fjölförnum gatnamótum. Eftir að íbúar kvörtuðu var umferðarljósunum á gatnamótunum breytt. Nú eru liðnir tíu mánuðir frá breytingunum og ekkert slys hefur orðið. Báru breytingarnar árangur eða er tíu mánaða slysalaust tímabil tilviljun? Síðar í þessum kafla skoðum við þessa spurningu og sjáum að heildun gegnir lykilhlutverki við að finna svarið (sjá dæmi 3.49).

Í fyrri kafla sáum við hve mikilvæg heildun er á fjölmörgum sviðum — allt frá rúmmálsútreikningum og rennslishraða til þess að ákvarða staðsetningu út frá hraðafalli og finna massamiðjur. Því kemur ekki á óvart að allir sem nota heildun þurfi að kunna aðferðir til að finna stofnföll (eða óákveðin heildi). Við höfum þegar fjallað um nokkrar helstu heildunarreglur og heildun með innsetningu. Í þessum kafla kynnumst við fleiri aðferðum, meðal annars leiðum til að nálga ákveðin heildi þegar hefðbundnar aðferðir duga ekki.

3

3.1 Hlutheildun

NÁMSMARKMIÐ

- 3.1.1 Greina hvenær beita á hlutheildun.
- 3.1.2 Nota hlutheildunarformúluna til að leysa heildunarverkefni.
- 3.1.3 Nota hlutheildunarformúluna fyrir ákveðin heildi.

Nú höfum við nokkuð ítarlega aðferð til að reikna mörg einföld heildi. Þótt við getum reiknað $\int x \sin\left(x^2\right) dx$ með innsetningunni $u = x^2$, ræður hún ekki við heildi sem virðist jafn einfalt og $\int x \sin x \, dx$. Margir nemendur spyrja hvort til sé margfeldisregla fyrir heildun. Svo er ekki, en til er aðferð sem byggist á margfeldisreglu deildunar og gerir okkur kleift að skipta einu heildi út fyrir annað. Aðferðin nefnist hlutheildun.

Hlutheildunarformúlan

Ef $h(x) = f(x)g(x)$, fæst samkvæmt margfeldisreglunni $h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$. Þótt það virðist í fyrstu vinna gegn markmiðinu skulum við nú heilda báðar hliðar jöfnunnar: $\int h'(x)\,dx = \int \left(g(x)f'(x) + f(x)g'(x)\right) dx$.

Þá fæst

$$h(x) = f(x)g(x) = \int g(x)f'(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Nú einangrum við $\int f(x)g'(x)\,dx$:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Með innsetningunum $u = f(x)$ og $v = g(x)$, sem gefa $du = f'(x)\,dx$ og $dv = g'(x)\,dx$, fæst þéttara formið

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

SETNING 3.1

Hlutheildun

Látum $u=f(x)$ og $v=g(x)$ vera föll með samfelldar afleiður. Þá er hlutheildunarformúlan fyrir heildi sem inniheldur þessi tvö föll:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

(3.1)

Kosturinn við hlutheildunarformúluna er að með henni má skipta einu heildi út fyrir annað sem kann að vera auðveldara að reikna. Næsta dæmi sýnir hvernig formúlan er notuð.

DÆMI 3.1

Hlutheildun beitt

Beitið hlutheildun með $u=x$ og $dv=\sin x\,dx$ til að reikna $\int x\sin x\,dx$.

Lausn

Þegar $u=x$, fæst $du=1\,dx$. Þar sem $dv=\sin x\,dx$, fæst $v=\int \sin x\,dx=-\cos x$. Gott er að skrá þessi gildi svona:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \sin x\,dx \\ du &= 1dx & v &= \int \sin x\,dx = -\cos x. \end{aligned}$$

Með hlutheildunarformúlunni fæst

$$\int x\ \sin\ x\ dx = (x)(-\cos\ x) - \int(-\cos\ x)(1\,dx) \quad \text{Setjum inn.}$$

$$= -x\ \cos\ x + \int \cos\ x\ dx \quad \text{Einföldum.}$$

$$= -x\ \cos\ x + \sin\ x + C. \quad \text{Notum } \int \cos\ x\ dx = \sin\ x + C.$$

Greining

Hér þarf að skýra nokkur atriði. Fyrst má velta fyrir sér hvað hefði gerst ef við hefðum valið $u=\sin x$ og $dv=x$. Þá hefðum við fengið $du=\cos x\,dx$ og $v=\frac{1}{2}x^2$. Eftir hlutheildun fengist því $\int x\sin x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin x-\int \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx$. Nýja heildið er því miður ekki auðveldara en það fyrra. Þegar hlutheildun er beitt getur þurft að prófa nokkur mismunandi val á u og dv áður en hentugt val finnst.

Næst má spyrja: Þegar við finnum $v=\int \sin x\,dx=-\cos x$, hvers vegna notum við þá ekki $v=-\cos x+K$. Til að sjá að það breytir engu getum við leyst verkefnið aftur með $v=-\cos x+K$:

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= (x)(-\cos x + K) - \int (-\cos x + K)(1dx)\\ &= -x\cos x + Kx + \int \cos x\,dx - \int K dx\\ &= -x\cos x + Kx + \sin x - Kx + C\\ &= -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Eins og sjá má breytir það ekki lokaniðurstöðunni.

Að lokum getum við staðfest stofnfallið með því að deilda $-x\cos x + \sin x + C$:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}(-x\cos x + \sin x + C) &= (-1)\cos x + (-x)(-\sin x) + \cos x\\ &= x\sin x.\end{aligned}$$

3

Stofnfallið stenst því prófunina.

MARGMIÐLUN

Horfið á myndbandið og skoðið vefsíðuna til að sjá dæmi um hlutheildun.

STÖÐUMAT 3.1

Reiknið $\int x e^{2x}\,dx$ með hlutheildunarformúlunni, þar sem $u = x$ og $dv = e^{2x}\,dx$.

Nú vaknar eðlilega spurningin: Hvernig vitum við hvernig velja á u og dv? Stundum þarf að prófa sig áfram, en skammstöfunin LIATE getur oft dregið úr ágiskunum. Stafirnir standa fyrir L – lograföll, I – andhverf hornaföll, A – algebruföll, T – hornaföll og E – vísisföll. Minnisreglan auðveldar val á heppilegu u.

Sú fallagerð í heildinu sem kemur fyrst í listanum ætti að vera fyrsta val okkar á u. Ef heildi inniheldur til dæmis lografall og algebrufall veljum við lografallið sem u því L kemur á undan A í LIATE. Heildið í dæmi 3.1 inniheldur hornafallið $(\sin x)$ og algebrufallið (x). Þar sem A kemur á undan T í LIATE völdum við algebrufallið sem u. Þegar við höfum valið u, er dv sá hluti heildisstofnsins sem eftir stendur ásamt dx.

Hvers vegna virkar þessi minnisregla? Munum að það sem við veljum sem dv verður að vera hægt að heilda. Þar sem við höfum engar heildunarreglur fyrir einföld lograföll og andhverf hornaföll er eðlilegt að velja þau ekki sem dv. Þau koma því fremst á listanum sem valkostir fyrir u. Af þeirri ástæðu byrjar minnisreglan á LI. (Hún gæti allt eins byrjað á IL, því þessar tvær fallagerðir koma ekki saman í hlutheildunarverkefni.) Vísisföll og hornaföll eru aftast á listanum þar sem tiltölulega auðvelt er að heilda þau og þau henta því vel sem dv. Þess vegna endar minnisreglan á TE. (Hún gæti allt eins endað á ET, því þegar þessar fallagerðir koma saman skiptir yfirleitt litlu hvort þeirra er u og hvort er dv.) Algebruföll eru almennt auðveld bæði í heildun og deildun og eru því í miðri minnisreglunni.

DÆMI 3.2

Hlutheildun beitt

Reiknið $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$.

Lausn

Byrjum á að umrita heildið:

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\ln x\,dx.$$

Heildið inniheldur algebrufallið x^{-3} og lografallið $\ln x$, svo við veljum $u=\ln x$, þar sem L kemur á undan A í LIATE. Þegar $u=\ln x$, veljum við síðan $dv=x^{-3}dx$.

Þar sem $u=\ln x$, fæst $du=\frac{1}{x}dx$. Einnig er $v=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}$. Tökum þetta saman:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & dv &= x^{-3}dx \\ du &= \tfrac{1}{x}dx & v &= \int x^{-3}dx = -\tfrac{1}{2}x^{-2}. \end{aligned}$$

Með innsetningu í hlutheildunarformúluna (jöfnu 3.1) fæst

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\ln x\,dx = \left(\ln x\right)\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) - \int \left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x + \int \frac{1}{2}x^{-3}dx \quad \text{Einföldum.}$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-2}\ln x - \frac{1}{4}x^{-2} + C \quad \text{Heildum.}$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + C. \quad \text{Ritum með jákvæðum veldisvísum.}$$

STÖÐUMAT 3.2

Reiknið $\int x\ln x\,dx$.

Í sumum tilvikum, eins og í næstu tveimur dæmum, þarf að beita hlutheildun oftar en einu sinni.

DÆMI 3.3

Hlutheildun beitt oftar en einu sinni

Reiknið $\int x^2 e^{3x}\,dx$.

Lausn

Samkvæmt LIATE veljum við $u=x^2$ og $dv=e^{3x}\,dx$. Þá fást $du=2x\,dx$ og $v=\int e^{3x}\,dx=\left(\frac{1}{3}\right)e^{3x}$. Því fæst

$$\begin{aligned} u &= x^2 & dv &= e^{3x}dx \\ du &= 2x\,dx & v &= \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}. \end{aligned}$$

Með innsetningu í jöfnu 3.1 fæst

$$\int x^2 e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\int\frac{2}{3}xe^{3x}\,dx.$$

3

Við getum enn ekki heildað $\int\frac{2}{3}xe^{3x}\,dx$ beint, en nú er lægra veldi á x. Nýja heildið má reikna með annarri hlutheildun. Veljum $u=x$ og $dv=\frac{2}{3}e^{3x}\,dx$. Þá er $du=dx$ og $v=\int\left(\frac{2}{3}\right)e^{3x}\,dx=\left(\frac{2}{9}\right)e^{3x}$. Nú fæst

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \tfrac{2}{3}e^{3x}dx \\ du &= dx & v &= \int\frac{2}{3}e^{3x}dx = \frac{2}{9}e^{3x}. \end{aligned}$$

Þegar þessu er stungið aftur inn í fyrri jöfnuna fæst

$$\int x^2e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\left(\frac{2}{9}xe^{3x}-\int\frac{2}{9}e^{3x}\,dx\right).$$

Eftir að síðasta heildið hefur verið reiknað og segðin einfölduð fæst

$$\int x^2e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C.$$

DÆMI 3.4

Hlutheildun þegar LIATE dugar ekki

Reiknið $\int t^3e^{t^2}\,dt$.

Lausn

Ef við fylgjum LIATE nákvæmlega við val á u, fáum við $u=t^3$ og $dv=e^{t^2}\,dt$. Þetta val gengur því miður ekki þar sem við getum ekki reiknað $\int e^{t^2}\,dt$. Við getum hins vegar reiknað $\int te^{t^2}\,dt$, og prófum því að velja $u=t^2$ og $dv=te^{t^2}\,dt$. Með þessu vali fæst

$$\begin{aligned} u &= t^2 & dv &= te^{t^2}dt \\ du &= 2t\,dt & v &= \int te^{t^2}dt = \tfrac{1}{2}e^{t^2}. \end{aligned}$$

Því fæst

$$\begin{aligned} \int t^3e^{t^2}dt &= \tfrac{1}{2}t^2e^{t^2} - \int \frac{1}{2}e^{t^2}2tdt \\ &= \tfrac{1}{2}t^2e^{t^2} - \tfrac{1}{2}e^{t^2} + C. \end{aligned}$$

DÆMI 3.5

Hlutheildun beitt oftar en einu sinni

Reiknið $\int \sin(\ln x)\,dx$.

Lausn

Heildið virðist aðeins innihalda eitt fall, $\sin(\ln x)$, en alltaf má nota fastafallið 1 sem hitt fallið. Í þessu dæmi veljum við $u=\sin(\ln x)$ og $dv=1\,dx$. Auðvelt er að ákveða að nota $u=\sin(\ln x)$. Við getum ekki valið $dv=\sin(\ln x)\,dx$ því ef við gætum heildað það þyrftum við ekki hlutheildun. Þá fást $du=(1/x)\cos(\ln x)\,dx$ og $v=\int 1\,dx=x$. Eftir hlutheildun og einföldun fæst

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx.$$

Þetta skilur því miður eftir nýtt heildi sem líkist því upprunalega. Skoðum samt hvað gerist ef hlutheildun er beitt aftur. Í þetta sinn veljum við $u=\cos(\ln x)$ og $dv=1\,dx$, og þá fást $du=-(1/x)\sin(\ln x)\,dx$ og $v=\int 1\,dx=x$. Með innsetningu fæst

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \Big(x\cos(\ln x) - \int -\sin(\ln x)\,dx\Big).$$

Eftir einföldun fæst

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx.$$

Síðasta heildið er nú það sama og upprunalega heildið. Við virðumst hafa farið í hring, en nú getum við í raun reiknað heildið. Til að sjá þetta skýrar setjum við $I=\int \sin(\ln x)\,dx$. Þá verður jafnan

$$I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I.$$

Leggjum fyrst I við báðar hliðar jöfnunnar og fáum

$$2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x).$$

Deilum næst með 2:

$$I=\frac{1}{2}x\sin(\ln x)-\frac{1}{2}x\cos(\ln x).$$

Þegar $I=\int \sin(\ln x)\,dx$ er sett aftur inn fæst

$$\int \sin(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x\sin(\ln x)-\frac{1}{2}x\cos(\ln x).$$

Af þessu sést að $(1/2)x\sin(\ln x)-(1/2)x\cos(\ln x)$ er stofnfall fyrir $\sin(\ln x)\,dx$. Til að fá almenna stofnfallið bætum við við $+C$:

$$\int \sin(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x\sin(\ln x)-\frac{1}{2}x\cos(\ln x)+C.$$

Greining

3

Ef aðferðin virðist óvenjuleg í fyrstu getum við staðfest svarið með deildun:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}x\sin(\ln x)-\tfrac{1}{2}x\cos(\ln x)\right)\\&=\tfrac{1}{2}(\sin(\ln x))+\cos(\ln x)\cdot\tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{1}{2}x-\left(\tfrac{1}{2}\cos(\ln x)-\sin(\ln x)\cdot\tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{1}{2}x\right)\\&=\sin(\ln x).\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.3

Reiknið $\int x^2\sin x\,dx$.

Hlutheildun ákveðinna heilda

Nú þegar við höfum notað hlutheildun til að reikna óákveðin heildi snúum við okkur að ákveðnum heildum. Aðferðin er í raun sú sama; aðeins bætist við skref þar sem stofnfallið er metið við efri og neðri heildunarmörkin.

SETNING 3.2

Hlutheildun ákveðinna heilda

Látum $u=f(x)$ og $v=g(x)$ vera föll með samfelldar afleiður á $[a,b]$. Þá gildir

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

(3.2)

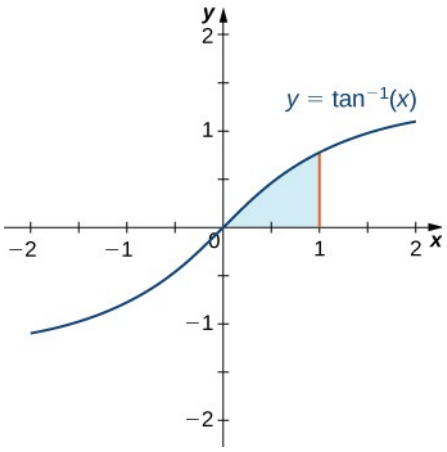
DÆMI 3.6

Flatarmál svæðis fundið

Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast að ofan af grafi $y=\tan^{-1}x$ og að neðan af x-ásnum á bilinu $[0,1]$.

Lausn

Svæðið er sýnt á mynd 3.2. Til að finna flatarmálið þurfum við að reikna $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.



Mynd 3.2 Til að finna flatarmál skyggða svæðisins þurfum við að beita hlutheildun.

Fyrir þetta heildi veljum við $u=\tan^{-1}x$ og $dv=dx$, og þá fást $du=\frac{1}{x^2+1}dx$ og $v=x$. Með hlutheildunarformúlunni (jöfnu 3.2) fæst

$$\text{Flatarmál}=x\tan^{-1}x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx.$$

Með u-innsetningu fæst

$$\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1.$$

Því fæst

$$\text{Flatarmál}=x\tan^{-1}x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

At this point it might not be a bad idea to do a “reality check” on the reasonableness of our solution. Since $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\approx 0{,}4388$, and from Figure 3.2 we expect our area to be slightly less than 0.5, this solution appears to be reasonable.

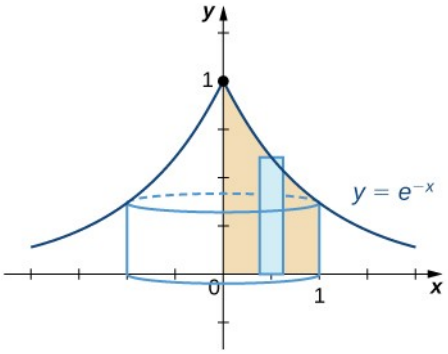
DÆMI 3.7

Rúmmál snúðs fundið

Finnið rúmmál hlutarins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af grafi $f(x)=e^{-x}$, x-ásnum, y-ásnum og línunni $x=1$ er snúið um y-ásinn.

Lausn

Hentugast er að leysa verkefnið með hylkjaaðferðinni. Byrjum á að teikna svæðið sem á að snúa ásamt dæmigerðum rétthyrningi (sjá grafið hér á eftir).



Mynd 3.3 Nota má hylkjaaðferðina til að finna rúmmál snúðs.

Til að finna rúmmálið með hylkjaaðferðinni þurfum við að reikna $2\pi\int_0^1 x e^{-x}\,dx$. Látum $u=x$ og $dv=e^{-x}$. Þetta val gefur $du=dx$ og $v=\int e^{-x}=-e^{-x}$. Með innsetningu í jöfnu 3.2 fæst

Rúmmál $=2\pi\int_0^1 x e^{-x}\,dx=2\pi\left(-x e^{-x}|_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx\right)$ Beitum hlutheildun.

$=-2\pi x e^{-x}|_0^1-2\pi e^{-x}|_0^1$ Reiknum $\int_0^1 e^{-x}\,dx=-e^{-x}|_0^1$.

$=2\pi-\frac{4\pi}{e}$. Reiknum og einföldum.

Greining

Aftur er skynsamlegt að kanna hvort svarið sé raunhæft. Rúmmál hlutarins er örlítið minna en samanlagt rúmmál sívalnings með radíus 1 og hæð $1/e$ og keilu með grunnradíus 1 og hæð $1-\frac{1}{e}$. Rúmmál hlutarins ætti því að vera aðeins minna en

$$\pi(1)^2\frac{1}{e}+\left(\frac{\pi}{3}\right)(1)^2\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{2\pi}{3e}+\frac{\pi}{3}\approx 1{,}8177.$$

Since $2\pi-\frac{4\pi}{e}\approx 1{,}6603$, we see that our calculated volume is reasonable.

STÖÐUMAT 3.4

Reiknið $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$.

Æfingar í undirkafla 3.1

Þegar hlutheildun er beitt þarf að velja vandlega hvaða segð verður u. Í hverju verkefni hér á eftir skuluð þið nota leiðbeiningarnar í þessum undirkafla til að velja u. Reiknið ekki heildin.

1.

$$\int x^3 e^{2x}\,dx$$

2.

$$\int x^3 \ln(x)\,dx$$

3.

$$\int y^3 \cos y\,dy$$

4.

$$\int x^2 \arctan x\,dx$$

5.

$$\int e^{3x} \sin(2x)\,dx$$

Finnið heildið með einföldustu aðferðinni. Ekki þarf að beita hlutheildun í öllum verkefnunum.

6.

$$\int v \sin v\,dv$$

7. $\int \ln x\,dx$ (Vísbending: $\int \ln x\,dx$ jafngildir $\int 1 \cdot \ln(x)\,dx$.)

8.

$$\int x\cos x\,dx$$

9.

$$\int \tan^{-1} x\,dx$$

10.

$$\int x^2 e^x\,dx$$

11.

$$\int x\sin(2x)\,dx$$

12.

$$\int x e^{4x} dx$$

13.

$$\int x e^{-x} dx$$

14.

$$\int x \cos 3x \, dx$$

15.

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

16.

$$\int x \ln x \, dx$$

17.

$$\int \ln(2x+1) dx$$

18.

$$\int x^2 e^{4x} dx$$

19.

$$\int e^x \sin x \, dx$$

20.

$$\int e^x \cos x \, dx$$

21.

$$\int x e^{-x^2} dx$$

22.

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

23.

$$\int \sin(\ln(2x)) dx$$

24.

$$\int cos(\ln x) dx$$

25.

$$\int (\ln x)^2 dx$$

26.

$$\int \ln\left(x^2\right) d\,x$$

27.

$$\int x^2 \ln x \, d\,x$$

28.

$$\int \sin^{-1} x \, d\,x$$

29.

$$\int \cos^{-1}\left(2\,x\right) d\,x$$

30.

$$\int x \arctan x \, d\,x$$

31.

$$\int x^2 \sin x \, d\,x$$

32.

$$\int x^3 \cos x \, d\,x$$

33.

$$\int x^3 \sin x \, d\,x$$

34.

$$\int x^3 e^x \, d\,x$$

35.

$$\int x \sec^{-1} x \, d\,x$$

36.

$$\int x \sec^2 x \, d\,x$$

37.

$$\int x \cosh x \, d\,x$$

Reiknið ákveðnu heildin. Staðfestið svörin með grafteikniforriti.

38.

$$\int_{1/e}^{1} \ln x \, d\,x$$

39. $\int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx$ (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

40.

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \left(\text{látum } u=\sqrt{x}\right)$$

41.

$$\int_1^e \ln\left(x^2\right)dx$$

42.

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$$

43. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$ (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

44. $\int_0^3 \ln\left(x^2+1\right)dx$ (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

45. $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$ (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

46. $\int_0^1 x\,5^x\,dx$ (Gefið svarið með fimm markverðum tölustöfum.)

47. Reiknið $\int \cos x \ln\left(\sin x\right)dx$

Leiðið eftirfarandi formúlur út með hlutheildun. Gerið ráð fyrir að n sé jákvæð heiltala. Formúlurnar nefnast lækkunarformúlur þar sem veldisvísir x-liðarins lækkar um einn í hverju tilviki. Síðara heildið er einfaldara en upprunalega heildið.

48.

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$$

49.

$$\int x^n\cos x\,dx = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$$

50.

$$\int x^n\sin x\,dx = ____$$

51. Reiknið heildið $\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx$ með tveimur aðferðum:

a. Með hlutheildun, þar sem $dv=\sqrt{2x-3}\,dx$

b. Með innsetningu, þar sem $u=2x-3$

Ákvarðið hvort beita ætti hlutheildun til að reikna heildið. Ef svo er, tilgreinið þá u og dv. Ef ekki, lýsið þá aðferðinni sem nota mætti, en leysið ekki verkefnið.

52.

$$\int x\ln x\,dx$$

53.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$$

54.

$$\int xe^x\,dx$$

55.

$$\int xe^{x^2-3}\,dx$$

56.

$$\int x^2\sin x\,dx$$

57.

$$\int x^2\sin\left(3x^3+2\right)dx$$

Teiknið svæðið sem afmarkast að ofan af ferlinum og að öðru leyti af x-ásnum og $x=1$, og finnið flatarmál þess. Gefið nákvæmt svar eða námundið með tilgreindum fjölda aukastafa.

58. $y=2xe^{-x}$ (Námundið svarið að fjórum aukastöfum.)

59. $y=e^{-x}\sin(\pi x)$ (Námundið svarið að fimm aukastöfum.)

Finnið rúmmálið sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af gefnu ferlunum er snúið um tilgreinda línu. Gefið svörin á nákvæmu formi eða námundið með tilgreindum fjölda aukastafa.

60. $y=\sin x$, $y=0$, $x=2\pi$, $x=3\pi$ um y-ásinn (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

61. $y=e^{-x}$ $y=0$, $x=-1$ $x=0$; um $x=1$ (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

62. Ögn sem hreyfist eftir beinni línu hefur hraðann $v(t)=t^2e^{-t}$ eftir t sekúndur. Hve langt fer hún á fyrstu 2 sekúndunum? (Gerið ráð fyrir að lengdin sé mæld í metrum og hraðinn í m/s og gefið svarið á nákvæmu formi.)

63. Finnið flatarmálið undir grafi $y=\sec^3 x$ frá $x=0$ til $x=1$. (Námundið svarið að tveimur markverðum tölustöfum.)

64. Finnið flatarmálið milli $y=(x-2)e^x$ og x-ássins frá $x=2$ til $x=5$. (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

65. Finnið flatarmál svæðisins sem ferillinn $y=x\cos x$ og x-ásinn afmarka fyrir $\frac{11\pi}{2}\le x\le\frac{13\pi}{2}$. (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

66. Finnið rúmmál hlutarins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af ferlinum $y=\ln x$, x-ásnum og lóðréttu línunni $x=e^2$ er snúið um x-ásinn. (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

67. Finnið rúmmál hlutarins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af ferlinum $y=4\cos x$ og x-ásnum, $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$, er snúið um x-ásinn. (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

68. Finnið rúmmál hlutarins sem myndast þegar svæðinu í fyrsta fjórðungi sem afmarkast af $y=e^x$ og x-ásnum, frá $x=0$ til $x=\ln(7)$, er snúið um y-ásinn. (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

3.2 Heildi hornafalla

NÁMSMARKMIÐ

- 3.2.1 Leysa heildunarverkefni sem fela í sér margfeldi og veldi $\sin x$ og $\cos x$.
- 3.2.2 Leysa heildunarverkefni sem fela í sér margfeldi og veldi $\tan x$ og $\sec x$.
- 3.2.3 Nota lækkunarformúlur til að reikna heildi hornafalla.

Í þessum undirkafla skoðum við hvernig heilda má ýmis margfeldi hornafalla. Slík heildi nefnast heildi hornafalla. Þau eru mikilvægur þáttur heildunaraðferðarinnar sem nefnist innsetning með hornaföllum og fjallað er um hana í undirkaflanum Innsetning með hornaföllum. Með aðferðinni má breyta algebrusegðum sem við kunnum ekki að heilda í segðir með hornaföllum. Þær getum við ef til vill heildað með aðferðunum í þessum undirkafla. Heildi af þessu tagi koma einnig oft fyrir þegar við kynnumst síðar skaut-, sívalnings- og kúluhnitakerfum. Byrjum á margfeldum $\sin x$ og $\cos x$.

Margfeldi og veldi sin x og cos x heildað

Lykilhugmynd aðferðarinnar við að heilda margfeldi og veldi $\sin x$ og $\cos x$ er að umrita segðirnar sem summur og mismun heilda af gerðinni $\int \sin^j x\cos x\,dx$ eða $\int \cos^j x\sin x\,dx$. Eftir umritunina reiknum við heildin með u-innsetningu. Áður en við lýsum almennu aðferðinni nánar skulum við skoða nokkur dæmi.

DÆMI 3.8

Heildun á $\int \cos^j x \sin x \, dx$

Reiknið $\int \cos^3 x \sin x \, dx$.

Lausn

Notum u-innsetningu og látum $u = \cos x$. Í þessu tilviki er $du = -\sin x \, dx$. Því fæst

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin x \, dx &= -\int u^3 \, du \\ &= -\tfrac{1}{4}u^4 + C \\ &= -\tfrac{1}{4}\cos^4 x + C. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.5

Reiknið $\int \sin^4 x \cos x \, dx$.

DÆMI 3.9

Undirbúningsdæmi: $\int \cos^j x \sin^k x \, dx$ heildað þegar k er oddatala

Reiknið $\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx$.

Lausn

Til að breyta þessu heildi í heildi af gerðinni $\int \cos^j x \sin x \, dx$, umritum við $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x$ og notum innsetninguna $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Því fæst

$\int \cos^2 x \ \sin^3 x \ dx \quad = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin \ x \ dx$ Látum $u = \cos \ x$; þá er $du = -$ $\sin \ x \, dx$.

$$= -\int u^2 (1 - u^2) \, du$$

$$= \int (u^4 - u^2) \, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$$

STÖÐUMAT 3.6

Reiknið $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$.

Í næsta dæmi sjáum við hvaða aðferð á að nota þegar aðeins koma fyrir slétt veldi af $\sin x$ og $\cos x$. Fyrir heildi af þessari gerð eru samsemdirnar

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

auk

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

ómetanlegar. Þær eru stundum nefndar veldislækkunarsamsemdir og má leiða þær út frá tvöföldunarhornssamsemdinni $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ og Pýþagórasarsamsemdinni $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

DÆMI 3.10

3

Heildun á sléttu veldi $\sin x$

Reiknið $\int \sin^2 x \, dx$.

Lausn

Til að reikna heildið notum við hornafallasamsemdina $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Því fæst

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) + C. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.7

Reiknið $\int \cos^2 x \, dx$.

Almenna aðferðin við að heilda margfeldi og veldi $\sin x$ og $\cos x$ er dregin saman í leiðbeiningunum hér á eftir.

LAUSNARLEIÐ

Margfeldi og veldi sin x og cos x heildað

Notið eftirfarandi aðferðir til að heilda $\int \cos^j x \sin^k x \, dx$:

1. Ef k er oddatala, umritið $\sin^k x = \sin^{k-1} x \sin x$ og notið samsemdina $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ til að umrita $\sin^{k-1} x$ með $\cos x$. Heildið með innsetningunni $u = \cos x$. Við þessa innsetningu fæst $du = -\sin x \, dx$.
2. Ef j er oddatala, umritið $\cos^j x = \cos^{j-1} x \cos x$ og notið samsemdina $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ til að umrita $\cos^{j-1} x$ með $\sin x$. Heildið með innsetningunni $u = \sin x$. Við þessa innsetningu fæst $du = \cos x \, dx$. (Athugið: Ef bæði j og k eru oddatölur má nota annaðhvort aðferð 1 eða aðferð 2.)

3. Ef bæði j og k eru sléttar tölur, notið $\sin^2 x=(1/2)-(1/2)\cos(2x)$ og $\cos^2 x=(1/2)+(1/2)\cos(2x)$. Einfaldið síðan og notið aftur aðferðir 1 til 3 eftir því sem við á.

DÆMI 3.11

Heildun á $\int \cos^j x \sin^k x\, dx$ þegar k er oddatala

Reiknið $\int \cos^8 x \sin^5 x\, dx$.

Lausn

Þar sem veldisvísir $\sin x$ er oddatala notum við aðferð 1. Því fæst

$$\int \cos^8 x\ \sin^5 x\ dx = \int \cos^8 x\ \sin^4 x\ \sin\ x\ dx \quad \text{Skiljið eftir þáttinn } \sin\ x.$$

$$= \int \cos^8 x(\sin^2 x)^2 \sin\ x\ dx \quad \text{Umritið } \sin^4 x=(\sin^2 x)^2.$$

$$= \int \cos^8 x(1-\cos^2 x)^2 \sin\ x\ dx \quad \text{Notið innsetninguna } \sin^2 x=1-\cos^2 x.$$

$$= \int u^8(1-u^2)^2(-du) \quad \text{Látum } u=\cos\ x \text{ og } du=-\sin\ x\, dx.$$

$$= \int (-u^8+2u^{10}-u^{12})\, du \quad \text{Margfaldið upp úr svigum.}$$

$$= -\frac{1}{9}u^9+\frac{2}{11}u^{11}-\frac{1}{13}u^{13}+C \quad \text{Reiknið heildið.}$$

$$= -\frac{1}{9}\cos^9 x+\frac{2}{11}\cos^{11} x-\frac{1}{13}\cos^{13} x+C. \quad \text{Notið innsetninguna } u=\cos\ x.$$

DÆMI 3.12

Heildun á $\int \cos^j x \sin^k x\, dx$ þegar k og j eru sléttar tölur

Reiknið $\int \sin^4 x\, dx$.

Lausn

Þar sem veldisvísir $\sin x$ er slétt tala $(k=4)$ og veldisvísir $\cos x$ er slétt tala $(j=0)$, verðum við að nota aðferð 3. Því fæst

$$\int \sin^4 x\ dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx \quad \text{Umritið } \sin^4 x=(\sin^2 x)^2.$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2 dx \quad \text{Notið innsetninguna } \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x).$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\cos^2(2x)\right)dx \quad \text{Margfaldið upp úr svigum } \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2.$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right)\right)dx.$$

Þar sem $\cos^2(2x)$ hefur sléttan veldisvísi setjum við inn $\cos^2(2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)$:

$$
\begin{aligned}
&=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx \quad \text{Einfaldið.}\\
&=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C \quad \text{Reiknið heildið.}
\end{aligned}
$$

STÖÐUMAT 3.8

Reiknið $\int \cos^3 x\,dx$.

STÖÐUMAT 3.9

Reiknið $\int \cos^2(3x)\,dx$.

Á sumum sviðum eðlisfræðinnar, svo sem í skammtafræði, merkjavinnslu og útreikningum á Fourier-röðum, þarf oft að heilda margfeldi sem innihalda $\sin(ax)$, $\sin(bx)$, $\cos(ax)$, auk $\cos(bx)$. Við reiknum þessi heildi með hornafallasamsemdum eins og lýst er í reglunni hér á eftir.

REGLA: MARGFELDI SÍNUS- OG KÓSÍNUSFALLA MISMUNANDI HORNA HEILDAÐ

Til að heilda margfeldi sem innihalda $\sin(ax)$, $\sin(bx)$, $\cos(ax)$, auk $\cos(bx)$, skal nota innsetningarnar

$$\sin(ax)\sin(bx)=\frac{1}{2}\cos((a-b)x)-\frac{1}{2}\cos((a+b)x)$$

(3.3)

$$\sin(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}\sin((a-b)x)+\frac{1}{2}\sin((a+b)x)$$

(3.4)

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}\cos((a-b)x)+\frac{1}{2}\cos((a+b)x)$$

(3.5)

Þessar formúlur má leiða út frá samlagningarformúlunum fyrir sínus og kósínus.

DÆMI 3.13

Reikningur á $\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx$

Reiknið $\int \sin(5x)\cos(3x)\,dx$.

Lausn

Notum samsemdina $\sin(5x)\cos(3x)=\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\sin(8x)$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\int \sin(5x)\cos(3x)dx &= \int \tfrac{1}{2}\sin(2x)\mathrm{dx} + \int \tfrac{1}{2}\sin(8x)\,\mathrm{dx} \\ &= -\tfrac{1}{4}\cos(2x) - \tfrac{1}{16}\cos(8x) + C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.10

Reiknið $\int \cos(6x)\cos(5x)\,dx$.

Margfeldi og veldi tan x og sec x heildað

Áður en við heildum margfeldi og veldi $\tan x$ og $\sec x$, er gagnlegt að rifja upp heildin með $\tan x$ og $\sec x$ sem við höfum þegar lært:

1. $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
2. $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
3. $\int \tan x\,dx=\ln|\sec x|+C$
4. $\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

Í flestum heildum margfelda og velda $\tan x$ og $\sec x$, umritum við segðina sem heilda á sem summu eða mismun heilda af gerðinni $\int \tan^j x\sec^2 x\,dx$ eða $\int \sec^j x\tan x\,dx$. Eins og næsta dæmi sýnir má reikna þessi nýju heildi með u-innsetningu.

DÆMI 3.14

Reikningur á $\int \sec^j x\tan x\,dx$

Reiknið $\int \sec^5 x\tan x\,dx$.

Lausn

Byrjum á að umrita $\sec^5 x\tan x$ sem $\sec^4 x\sec x\tan x$.

$\int \sec^5 x\ \tan\ x\ dx \quad = \int \sec^4 x\ \sec\ x\ \tan\ x\ dx$ Látum $u=\sec\ x$; þá er, $du=\sec\ x\ \tan\ x\,dx$.

$=\int u^4\,du$ Reiknið heildið.

$=\frac{1}{5}u^5+C$ Notið innsetninguna $\sec\ x=u$.

$$=\frac{1}{5}\sec^5 x+C$$

MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu má lesa áhugaverðan fróðleik um algengt heildi sem inniheldur sekant.

STÖÐUMAT 3.11

Reiknið $\int \tan^5 x \sec^2 x \, dx$.

Nú skoðum við mismunandi aðferðir við að heilda margfeldi og veldi $\sec x$ og $\tan x$.

LAUSNARLEIÐ

Heildun á $\int \tan^k x \sec^j x \, dx$

Notið eftirfarandi aðferðir til að heilda $\int \tan^k x \sec^j x \, dx$, eftir því sem við á:

1. Ef j er slétt tala og $j \geq 2$, skal umrita $\sec^j x = \sec^{j-2} x \sec^2 x$ og nota $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ til að umrita $\sec^{j-2} x$ með $\tan x$. Látum $u = \tan x$ og $du = \sec^2 x \, dx$.
2. Ef k er oddatala og $j \geq 1$, skal umrita $\tan^k x \sec^j x = \tan^{k-1} x \sec^{j-1} x \sec x \tan x$ og nota $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ til að umrita $\tan^{k-1} x$ með $\sec x$. Látum $u = \sec x$ og $du = \sec x \tan x \, dx$. (Athugið: Ef j er slétt tala og k er oddatala má nota annaðhvort aðferð 1 eða aðferð 2.)
3. Ef k er oddatala, þar sem $k \geq 3$ og $j = 0$, skal umrita $\tan^k x = \tan^{k-2} x \tan^2 x = \tan^{k-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) = \tan^{k-2} x \sec^2 x - \tan^{k-2} x$. Ef til vill þarf að endurtaka ferlið fyrir $\tan^{k-2} x$-liðinn.
4. Ef k er slétt tala og j er oddatala skal nota $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ til að setja $\tan^k x$ fram með $\sec x$. Notið hlutheildun til að heilda oddatöluveldi $\sec x$.

DÆMI 3.15

Heildun á $\int \tan^k x \sec^j x \, dx$ þegar j er slétt tala

Reiknið $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$.

Lausn

Þar sem veldisvísir $\sec x$ er slétt tala umritum við $\sec^4 x = \sec^2 x \sec^2 x$ og notum $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ til að umrita fyrra $\sec^2 x$ með $\tan x$. Því fæst

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^6 x \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x \, dx \quad \text{Látum } u = \tan x \text{ og } du = \sec^2 x \, dx.$$

$$= \int u^6 \left(u^2 + 1\right) du \quad \text{Margfaldið upp úr svigum.}$$

$$= \int \left(u^8 + u^6\right) du \quad \text{Reiknið heildið.}$$

$$= \frac{1}{9} u^9 + \frac{1}{7} u^7 + C \quad \text{Notið innsetninguna } u = \tan x.$$

$$=\frac{1}{9}\tan^9 x+\frac{1}{7}\tan^7 x+C.$$

DÆMI 3.16

Heildun á $\int \tan^k x \sec^j x\,dx$ þegar k er oddatala

Reiknið $\int \tan^5 x \sec^3 x\,dx$.

Lausn

Þar sem veldisvísir $\tan x$ er oddatala byrjum við á að umrita
$\tan^5 x \sec^3 x = \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x$. Því fæst

$\tan^5 x\ \sec^3 x = \ \tan^4 x\ \sec^2 x\ \sec\ x\ \tan\ x$. Umritið $\tan^4 x = (\tan^2 x)^2$.

$\int \tan^5 x\ \sec^3 x\ dx = \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x\ \sec\ x\ \tan\ x\ dx$ Notið $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x\ \sec\ x\ \tan\ x\ dx$ Látum $u = \sec\ x$ og $du = \sec\ x \tan\ x\,dx$.

$= \int (u^2-1)^2 u^2\,du$ Margfaldið upp úr svigum.

$= \int (u^6 - 2u^4 + u^2)\,du$ Heildið.

$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C$ Notið innsetninguna $\sec\ x = u$.

$$=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C.$$

DÆMI 3.17

Heildun á $\int \tan^k x\,dx$ þegar k er oddatala og $k \geq 3$

Reiknið $\int \tan^3 x\,dx$.

Lausn

Byrjum á að umrita $\tan^3 x = \tan x \tan^2 x = \tan x\left(\sec^2 x - 1\right) = \tan x \sec^2 x - \tan x$. Því fæst

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \left(\tan x \sec^2 x - \tan x\right) dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\sec x| + C.\end{aligned}$$

Í fyrra heildinu notum við innsetninguna $u = \tan x$. Í síðara heildinu notum við formúluna.

DÆMI 3.18

Heildun á $\int \sec^3 x\,dx$

Heildið $\int \sec^3 x\,dx$.

Lausn

Til að reikna þetta heildi þarf hlutheildun. Byrjum á að láta $u=\sec x$ og $dv=\sec^2 x\,dx$. Með þessu vali fáum við $du=\sec x\tan x$ og $v=\tan x$. Því fæst

$$\int \sec^3 x\ dx = \sec x\ \tan x - \int \tan x\ \sec x\ \tan x\ dx$$

$= \sec x\ \tan x - \int \tan^2 x\ \sec x\ dx$ Einfaldið.

$= \sec x\ \tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\ dx$ Notið innsetninguna $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$= \sec x\ \tan x + \int \sec x\ dx - \int \sec^3 x\ dx$ Umritið.

$= \sec x\ \tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\ dx$. Reiknið $\int \sec x\,dx$.

Nú höfum við

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\,dx.$$

Þar sem heildið $\int \sec^3 x\,dx$ hefur komið aftur fram hægra megin getum við einangrað $\int \sec^3 x\,dx$ með því að leggja það við báðar hliðar. Þá fæst

$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|.$$

Með því að deila með 2 fæst

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

STÖÐUMAT 3.12

Reiknið $\int \tan^3 x \sec^7 x\,dx$.

Lækkunarformúlur

Til að reikna $\int \sec^n x\,dx$ fyrir gildi n þar sem n er oddatala þarf hlutheildun. Auk þess þurfum við að þekkja gildi $\int \sec^{n-2} x\,dx$ til að reikna $\int \sec^n x\,dx$. Til að reikna $\int \tan^n x\,dx$ þarf einnig að geta heildað $\int \tan^{n-2} x\,dx$. Til að einfalda ferlið getum við leitt út og beitt eftirfarandi veldislækkunarformúlum. Með þeim má skipta heildi veldis af $\sec x$ eða $\tan x$ út fyrir heildi lægra veldis af $\sec x$ eða $\tan x$.

REGLA: LÆKKUNARFORMÚLUR FYRIR $\int \sec^n x\,dx$ OG $\int \tan^n x\,dx$

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

(3.6)

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

(3.7)

Staðfesta má fyrri veldislækkunarregluna með hlutheildun. Þá síðari má staðfesta með aðferðinni sem við lýstum til að heilda oddatöluveldi $\tan x$.

DÆMI 3.19

Endurskoðun á $\int \sec^3 x\,dx$

Beitið lækkunarformúlu til að reikna $\int \sec^3 x\,dx$.

Lausn

Með því að beita fyrri lækkunarformúlunni fæst

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \tfrac{1}{2}\sec x \tan x + \tfrac{1}{2}\int \sec x\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\sec x \tan x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

DÆMI 3.20

Lækkunarformúla notuð

Reiknið $\int \tan^4 x\,dx$.

Lausn

Með því að beita lækkunarformúlunni fyrir $\int \tan^4 x\,dx$ fæst

$$\int \tan^4 x\ dx \qquad = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x\ dx$$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \left(\tan\ x - \int \tan^0 x\ dx\right)$ Beitið lækkunarformúlunni á $\int \tan^2 x\,dx$.

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan\ x + \int 1\ dx$ Einfaldið.

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan\ x + x + C.$ Reiknið $\int 1\,dx$.

STÖÐUMAT 3.13

Beitið lækkunarformúlunni á $\int \sec^5 x\,dx$.

Æfingar úr undirkafla 3.2

Fyllið í eyðuna þannig að fullyrðingin verði sönn.

69.

$$\sin^2 x + _____ = 1$$

70.

$$\sec^2 x - 1 = _____$$

Notið samsemd til að umrita veldi hornafallsins sem hornafall í fyrsta veldi.

71.

$$\sin^2 x = _____$$

72.

$$\cos^2 x = _____$$

Reiknið eftirfarandi heildi með u-innsetningu.

73.

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx$$

74.

$$\int \sqrt{\cos x} \sin x\,dx$$

75.

$$\int \tan^5(2x)\sec^2(2x)\,dx$$

76.

$$\int \sin^7(2x)\cos(2x)\,dx$$

77.

$$\int \tan\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

78.

$$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx$$

Reiknið eftirfarandi heildi samkvæmt leiðbeiningunum um heildun velda hornafalla. Staðfestið lausnirnar með tölvualgebrukerfi. (Athugið: Sum verkefnin má leysa með heildunaraðferðum sem þegar hafa verið kynntar.)

79.

$$\int \sin^3 x \, d x$$

80.

$$\int \cos^3 x \, d x$$

81.

$$\int \sin x \cos x \, d x$$

82.

$$\int \cos^5 x \, d x$$

83.

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, d x$$

84.

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, d x$$

85.

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, d x$$

86.

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, d x$$

87.

$$\int \sec x \tan x \, d x$$

88.

$$\int \tan(5 x) \, d x$$

89.

$$\int \tan^2 x \sec x \, d x$$

90.

$$\int \tan x \sec^3 x \, d x$$

91.

$$\int \sec^4 x \, d x$$

92.

$$\int \cot x \, d x$$

93.

$$\int \csc x \, dx$$

94.

$$\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx$$

Finnið almenna formúlu fyrir heildin í eftirfarandi verkefnum.

95.

$$\int \sin^2 ax \cos ax \, dx$$

96.

$$\int \sin ax \cos ax \, dx.$$

Reiknið eftirfarandi heildi með tvöföldunarhornsformúlunum.

97.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

98.

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

99.

$$\int \cos^2 3x \, dx$$

100.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

101.

$$\int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx$$

102.

$$\int \sin^2 x \cos^2 (2x) \, dx$$

Reiknið ákveðnu heildin í eftirfarandi verkefnum. Gefið svörin á nákvæmu formi þegar þess er kostur.

103.

$$\int_0^{2\pi} \cos x \sin 2x \, dx$$

104.

$$\int_0^{\pi} \sin 3x \sin 5x \, dx$$

105.

$$\int_0^{\pi} \cos(99x)\sin(101x)\, dx$$

106.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(3x)\, dx$$

107.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \sin(2x)\sin(3x)\, dx$$

108.

$$\int_0^{4\pi} \cos(x/2)\sin(x/2)\, dx$$

109. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$ (Námundið svarið að þremur aukastöfum.)

110.

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{\sec^2 x - 1}\, dx$$

111.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos(2x)}\, dx$$

112. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af gröfum jafnanna

$y = \sin x$, $y = \sin^3 x$, $x = 0$, og $x = \frac{\pi}{2}$.

113. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af gröfum jafnanna

$y = \cos^2 x$, $y = \sin^2 x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, og $x = \frac{\pi}{4}$.

114. Ögn hreyfist eftir beinni línu með hraðafallið $v(t) = \sin(\omega t)\cos^2(\omega t)$. Finnið staðsetningarfall hennar $x = f(t)$ ef $f(0) = 0$.

115. Finnið meðalgildi fallsins $f(x) = \sin^2 x \cos^3 x$ á bilinu $[-\pi, \pi]$.

Leysið deildajöfnurnar í eftirfarandi verkefnum.

116. $\frac{dy}{dx}=\sin^2 x$. Ferillinn liggur um punktinn $(0,0)$.

117.

$$\frac{dy}{d\theta}=\sin^4(\pi\theta)$$

118. Finnið lengd ferilsins $y=\ln(\csc x), \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

119. Finnið lengd ferilsins $y=\ln(\sin x), \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

120. Finnið rúmmálið sem myndast þegar ferlinum $y=\cos(3x)$ er snúið um x-ásinn, $0\le x\le\frac{\pi}{36}$.

Notið eftirfarandi upplýsingar í verkefnunum: Innfeldi tveggja falla f og g á $[a,b]$ er skilgreint með $f(x)\cdot g(x)=\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$. Tvö ólík föll f og g nefnast hornrétt ef $\langle f,g\rangle=0$.

121. Sýnið að $\{\sin(2x),\cos(3x)\}$ séu hornrétt á bilinu $[-\pi,\pi]$.

122. Reiknið $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(nx)\,dx$.

123. Heildið $y'=\sqrt{\tan x}\sec^4 x$.

Ákvarðið hvort heildanna í hverju pari er erfiðara að reikna og rökstyðjið svarið.

124. $\int \sin^{456}x\cos x\,dx$ eða $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

125. $\int \tan^{350}x\sec^2 x\,dx$ eða $\int \tan^{350}x\sec x\,dx$

3.3 Innsetning með hornaföllum

NÁMSMARKMIÐ

- 3.3.1 Leysa heildunarverkefni sem fela í sér kvaðratrót af summu eða mismun tveggja ferninga.

Í þessum undirkafla skoðum við heildi sem innihalda segðir á forminu $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, og $\sqrt{x^2-a^2}$, þar sem a hefur jákvætt gildi. Við höfum áður reiknað heildi sem innihalda sumar segðir af þessu tagi en margar þeirra ráðum við enn ekki við með þeim aðferðum sem við höfum lært. Innsetning með hornaföllum kemur sér vel þegar slík heildi eru reiknuð. Með aðferðinni eru heildin endurrituð sem heildi hornafalla.

Heildi sem innihalda $\sqrt{a^2-x^2}$

Áður en við mótum almenna lausnarleið fyrir heildi sem innihalda $\sqrt{a^2-x^2}$, skulum við skoða heildið $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$. Ekki er hægt að reikna þetta heildi með neinni þeirra aðferða sem við höfum fjallað um hingað til. Ef við gerum hins vegar innsetninguna $x=3\sin\theta$, fæst $dx=3\cos\theta\,d\theta$. Þegar við setjum þetta inn í heildið fæst

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\int \sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\,3\cos\theta\,d\theta.$$

Eftir einföldun fæst

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\int 9\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta.$$

Með því að nota $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$, fæst nú

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\int 9\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta.$$

Ef við gerum ráð fyrir að $\cos\theta\geq 0$, fæst

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx=\int 9\cos^2\theta\,d\theta.$$

Nú getum við reiknað heildið með aðferðunum sem við höfum lært til að heilda veldi og margfeldi hornafalla. Áður en við ljúkum dæminu skulum við skoða almennu rökin að baki hugmyndinni.

Til að reikna heildi sem innihalda $\sqrt{a^2-x^2}$, gerum við innsetningarnar $x=a\sin\theta$ og $dx=a\cos\theta$. Hér eru rökin fyrir því að þetta sé réttmætt. Skilgreiningarmengi segðarinnar $\sqrt{a^2-x^2}$ er $[-a,a]$. Því gildir $-a\leq x\leq a$. Þar af leiðandi gildir $-1\leq\frac{x}{a}\leq 1$. Myndmengi $\sin x$ á $[-(\pi/2),\pi/2]$ er $[-1,1]$, og því er til nákvæmlega eitt horn θ sem uppfyllir $-(\pi/2)\leq\theta\leq\pi/2$ þannig að $\sin\theta=x/a$, eða jafngilt $x=a\sin\theta$. Ef $x=a\sin\theta$ er sett inn í $\sqrt{a^2-x^2}$, fæst

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-(a\ \sin\ \theta)^2}$ Látum $x=a\ \sin\ \theta$ þar sem $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Einföldum.

$=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}$ Tökum sameiginlegan þátt út fyrir a^2.

$=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$ Setjum inn $1-\sin^2 x=\cos^2 x$.

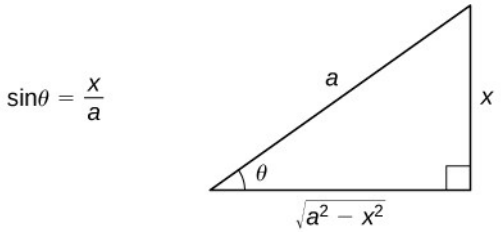
$=\sqrt{a^2\cos^2\theta}$ Tökum kvaðratrót.

$$=|a\ \cos\ \theta|$$

$$=a\ \cos\ \theta.$$

Þar sem $\cos\theta\geq 0$ á $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ og $a>0$, gildir $|a\cos\theta|=a\cos\theta$. Af þessu sést að þegar við notum innsetninguna $x=a\sin\theta$, breytist heildi sem inniheldur rót í heildi sem inniheldur hornaföll. Þegar heildið hefur verið reiknað má endurrita lausnina sem segð með x. Til að sjá hvernig það er gert skulum við fyrst gera ráð fyrir að $0<x<a$. Þá er $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Þar sem

$\sin\theta = \frac{x}{a}$, getum við teiknað viðmiðunarþríhyrninginn á mynd 3.4 og notað hann til að tjá $\cos\theta$, $\tan\theta$, auk annarra hornafalla með x. Sýna má að þríhyrningurinn gefur rétt gildi hornafallanna í θ fyrir öll θ sem uppfylla $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Takið eftir að segðin $\sqrt{a^2 - x^2}$ er lengd einnar hliðar þríhyrningsins. Ef θ stendur eitt og sér notum við loks $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$.



Mynd 3.4 Viðmiðunarþríhyrningur auðveldar að tjá hornaföllin í θ með x.

Aðalatriði umfjöllunarinnar eru tekin saman í lausnarleiðinni hér á eftir.

LAUSNARLEIÐ

Heildun segða sem innihalda $\sqrt{a^2 - x^2}$

1. Fyrst er rétt að ganga úr skugga um að ekki sé auðveldara að reikna heildið á annan hátt. Þótt nota megi þessa aðferð á heildi af gerðinni $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$, og $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, má til dæmis heilda hvert þeirra beint, annaðhvort með formúlu eða einfaldri u-innsetningu.
2. Gerið innsetningarnar $x = a\sin\theta$ og $dx = a\cos\theta\,d\theta$. Athugið: Innsetningin gefur $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$.
3. Einfaldið segðina.
4. Reiknið heildið með aðferðunum úr undirkaflanum um heildi hornafalla.
5. Notið viðmiðunarþríhyrninginn á mynd 3.4 til að endurrita niðurstöðuna með x. Einnig gæti þurft að nota samsemdir hornafalla og sambandið $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$.

Næsta dæmi sýnir hvernig lausnarleiðin er notuð.

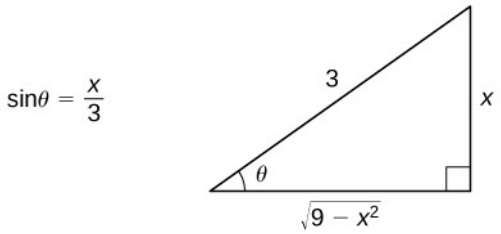
DÆMI 3.21

Heildun segðar sem inniheldur $\sqrt{a^2 - x^2}$

Reiknið $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

Lausn

Byrjum á innsetningunum $x=3\sin\theta$ og $dx=3\cos\theta\,d\theta$. Þar sem $\sin\theta=\frac{x}{3}$, getum við teiknað viðmiðunarþríhyrninginn á næstu mynd.



Mynd 3.5 Teikna má viðmiðunarþríhyrning fyrir dæmi 3.21.

Því fæst

$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \int\sqrt{9-(3\sin\theta)^2}\,3\cos\theta\,d\theta$ Setjum inn $x=3\sin\theta$ og $dx=3\cos\theta\,d\theta$.

$=\int\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\,3\cos\theta\,d\theta$ Einföldum.

$=\int\sqrt{9\cos^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta$ Setjum inn $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$.

$=\int 3|\cos\theta|\,3\cos\theta\,d\theta$ Tökum kvaðratrót.

$=\int 9\cos^2\theta\,d\theta$ Einföldum. Þar sem $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta\ge 0$ og $|\cos\theta|=\cos\theta$.

$=\int 9\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)d\theta$ Notum aðferðina fyrir heildun slétts veldis af $\cos\theta$.

$=\frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\sin(2\theta)+C$ Reiknum heildið.

$=\frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}(2\sin\theta\cos\theta)+C$ Setjum inn $\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$.

$=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}+C$ Setjum inn $\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)=\theta$ og $\sin\theta=\frac{x}{3}$. Notum viðmiðunarþríhyrninginn til að sjá að $\cos\theta=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ og gerum þessa innsetningu.

$=\frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C.$ Einföldum.

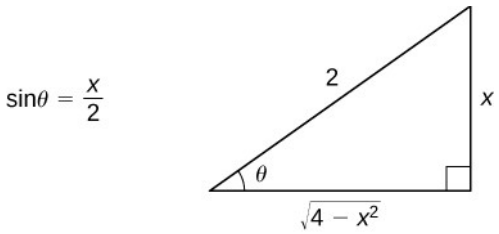
DÆMI 3.22

Heildun segðar sem inniheldur $\sqrt{a^2 - x^2}$

Reiknið $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx$.

Lausn

Gerum fyrst innsetningarnar $x = 2\sin\theta$ og $dx = 2\cos\theta\, d\theta$. Þar sem $\sin\theta = \frac{x}{2}$, getum við teiknað viðmiðunarþríhyrninginn á næstu mynd.



Mynd 3.6 Teikna má viðmiðunarþríhyrning fyrir dæmi 3.22.

Því fæst

$\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{4 - (2\ \sin\ \theta)^2}}{2\ \sin\ \theta} 2\ \cos\ \theta\, d\theta$ Setjum inn $x = 2\ \sin\ \theta$ og $dx = 2\ \cos\ \theta\, d\theta$.

$= \int \frac{2\ \cos^2\theta}{\sin\ \theta} d\theta$ Setjum inn $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ og einföldum.

$= \int \frac{2(1 - \sin^2\theta)}{\sin\ \theta} d\theta$ Setjum inn $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

$= \int (2\ \csc\ \theta - 2\ \sin\ \theta) d\theta$ Aðskiljum liði í teljara, einföldum og notum $\csc\ \theta = \frac{1}{\sin\ \theta}$.

$= 2\ \ln|\csc\ \theta - \cot\ \theta| + 2\ \cos\ \theta + C$ Reiknum heildið.

$= 2\ \ln\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{4 - x^2} + C$. Notum viðmiðunarþríhyrninginn til að endurrita segðina með x og einföldum.

Næsta dæmi sýnir að stundum er hægt að velja milli aðferða.

DÆMI 3.23

Heildun segðar sem inniheldur $\sqrt{a^2-x^2}$ með tveimur aðferðum

Reiknið $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ með tveimur aðferðum: fyrst með innsetningunni $u=1-x^2$ og síðan með innsetningu með hornaföllum.

Lausn

Aðferð 1

Setjum $u=1-x^2$ og þar með $x^2=1-u$. Því er $du=-2x\,dx$. Heildið verður þá

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\;dx = -\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{1-x^2}(-2x\;dx) \quad \text{Gerum innsetninguna.}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-u)\sqrt{u}\;du \quad \text{Margföldum upp úr svigum.}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (u^{1/2}-u^{3/2})\,du \quad \text{Reiknum heildið.}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}-\frac{2}{5}u^{5/2}\right)+C \quad \text{Endurritum með } x.$$

$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2}+C.$$

Aðferð 2

Setjum $x=\sin\theta$. Þá er $dx=\cos\theta\,d\theta$. Með þessari innsetningu fæst

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\;dx = \int \sin^3\theta\;\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\;\sin\;\theta\,d\theta \quad \text{Látum } u=\cos\;\theta. \text{ Því fæst } du=-\sin\;\theta\,d\theta.$$

$$= \int (u^4-u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3+C \quad \text{Setjum inn } \cos\;\theta=u.$$

$$= \frac{1}{5}\cos^5\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta+C \quad \text{Notum viðmiðunarþríhyrning til að sjá að } \cos\;\theta=\sqrt{1-x^2}.$$

$$= \frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C.$$

STÖÐUMAT 3.14

Endurritið heildið $\int \frac{x^3}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$ með viðeigandi innsetningu með hornaföllum, án þess að reikna heildið.

Heildi sem innihalda $\sqrt{a^2+x^2}$

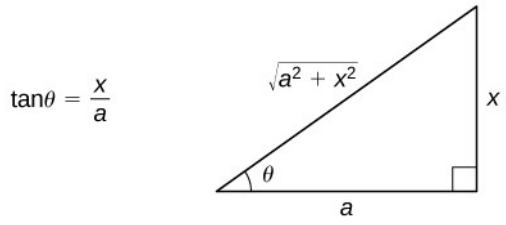
Fyrir heildi sem innihalda $\sqrt{a^2+x^2}$, skulum við fyrst skoða skilgreiningarmengi segðarinnar. Þar sem $\sqrt{a^2+x^2}$ er skilgreint fyrir öll raungildi x, einskorðast valið við hornaföll sem hafa allar rauntölur að myndmengi. Við getum því aðeins valið $x=a\tan\theta$ eða $x=a\cot\theta$. Báðar innsetningarnar ganga en venja er að nota $x=a\tan\theta$ eða jafngilt $\tan\theta=x/a$. Við þessa innsetningu gerum við ráð fyrir að $-(\pi/2)<\theta<\pi/2$, og þá gildir einnig $\theta=\tan^{-1}(x/a)$. Aðferðin er tekin saman í næstu lausnarleið.

LAUSNARLEIÐ

Heildi sem innihalda $\sqrt{a^2+x^2}$

3

1. Athugið fyrst hvort auðvelt sé að reikna heildið með annarri aðferð. Í sumum tilvikum er þægilegra að nota aðra aðferð.
2. Setjið inn $x=a\tan\theta$ og $dx=a\sec^2\theta\,d\theta$. Innsetningin gefur $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2\sec^2\theta}=|a\sec\theta|=a\sec\theta$. (Þar sem $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ og $\sec\theta>0$ á þessu bili er $|a\sec\theta|=a\sec\theta$.)
3. Einfaldið segðina.
4. Reiknið heildið með aðferðunum úr undirkaflanum um heildi hornafalla.
5. Notið viðmiðunarþríhyrninginn á mynd 3.7 til að endurrita niðurstöðuna með x. Einnig gæti þurft að nota samsemdir hornafalla og sambandið $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. (Athugið: Viðmiðunarþríhyrningurinn byggist á því að $x>0$; en hlutföll hornafallanna sem hann gefur eru þau sömu þegar $x\le 0$.)



Mynd 3.7 Teikna má viðmiðunarþríhyrning til að tjá hornaföllin í θ með x.

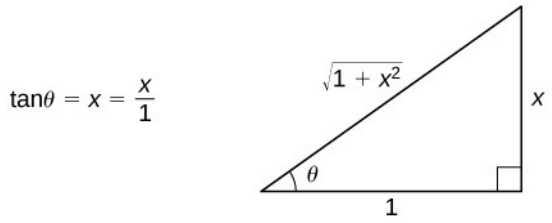
DÆMI 3.24

Heildun segðar sem inniheldur $\sqrt{a^2+x^2}$

Reiknið $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ og sannreynið lausnina með deildun.

Lausn

Byrjum á innsetningunum $x=\tan\theta$ og $dx=\sec^2\theta\,d\theta$. Þar sem $\tan\theta=x$, skulum við teikna viðmiðunarþríhyrninginn á næstu mynd.



Mynd 3.8 Viðmiðunarþríhyrningurinn fyrir dæmi 3.24.

Því fæst

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta$$ Setjum inn $x=\tan\theta$ og $dx=\sec^2\theta\,d\theta$. Þessi innsetning gefur $\sqrt{1+x^2}=\sec\theta$. Einföldum.

$=\int\sec\theta\,d\theta$ Reiknum heildið.

$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$ Notum viðmiðunarþríhyrninginn til að tjá niðurstöðuna með x.

$$=\ln|\sqrt{1+x^2}+x|+C.$$

Deildum til að sannreyna lausnina:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Þar sem $\sqrt{1+x^2}+x>0$ fyrir öll gildi x, má endurrita $\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+C=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C$, ef þess er óskað.

DÆMI 3.25

Önnur innsetning notuð til að reikna $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

Notið innsetninguna $x=\sinh\theta$ til að reikna $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Lausn

Þar sem $\sinh\theta$ hefur allar rauntölur að myndmengi og $1+\sinh^2\theta=\cosh^2\theta$, má einnig nota innsetninguna $x=\sinh\theta$ til að reikna heildið. Þá er $dx=\cosh\theta\,d\theta$. Þar af leiðandi fæst

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cosh\ \theta}{\sqrt{1+\sinh^2\theta}} d\theta$ Setjum inn $x = \sinh\ \theta$ og $dx = \cosh\ \theta\, d\theta$. Setjum inn $1+\sinh^2\theta = \cosh^2\theta$.

$$= \int \frac{\cosh\ \theta}{\sqrt{\cosh^2\theta}} d\theta \quad \sqrt{\cosh^2\theta} = |\cosh\ \theta|$$

$= \int \frac{\cosh\ \theta}{|\cosh\ \theta|} d\theta$ $|\cosh\ \theta| = \cosh\ \theta$ þar sem $\cosh\ \theta > 0$ fyrir öll θ.

$= \int \frac{\cosh\ \theta}{\cosh\ \theta} d\theta$ Einföldum.

$= \int 1\, d\theta$ Reiknum heildið.

$= \theta + C$ Þar sem $x = \sinh\ \theta$, vitum við að $\theta = \sinh^{-1} x$.

$$= \sinh^{-1} x + C.$$

3

Greining

Þetta svar virðist talsvert frábrugðið svarinu sem fékkst með innsetningunni $x = \tan\theta$. Til að sýna að lausnirnar séu jafngildar setjum við $y = \sinh^{-1} x$. Þá er $\sinh y = x$. Af þessari jöfnu fæst:

$$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x.$$

Ef við margföldum báðar hliðar með $2e^y$ og endurritum jöfnuna fáum við:

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Leysum annars stigs jöfnuna með tilliti til e^y:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}.$$

Eftir einföldun fæst:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Þar sem $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, hlýtur að gilda að $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$. Því fæst

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Að lokum fæst

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Að lokum, þar sem $x + \sqrt{x^2+1} > 0$,

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|,$$

sést að aðferðirnar tvær gáfu jafngildar lausnir.

DÆMI 3.26

Bogalengd fundin

Finnið lengd ferilsins $y=x^2$ á bilinu $[0,\frac{1}{2}]$.

Lausn

Þar sem $\frac{dy}{dx}=2x$, fæst bogalengdin með

$$\int_0^{1/2}\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\int_0^{1/2}\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Til að reikna heildið notum við innsetningarnar $x=\frac{1}{2}\tan\theta$ og $dx=\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$. Einnig þarf að breyta heildunarmörkunum. Ef $x=0$, þá er $\theta=0$ og ef $x=\frac{1}{2}$, þá er $\theta=\frac{\pi}{4}$. Því fæst

$\int_0^{1/2}\sqrt{1+4x^2}\;dx \quad =\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ Eftir innsetningu $\sqrt{1+4x^2}=\tan\ \theta$. Setjum inn $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ og einföldum.

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta\,d\theta$ Við leiddum þetta heildi út í fyrri undirkaflanum.

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sec\ \theta\ \tan\ \theta+\frac{1}{2}\ln|\sec\ \theta+\tan\ \theta|\right)\Big|_0^{\pi/4}$ Reiknum og einföldum.

$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$

STÖÐUMAT 3.15

Endurritið $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$ með innsetningu sem inniheldur $\tan\theta$.

Heildun segða sem innihalda $\sqrt{x^2-a^2}$

Skilgreiningarmengi segðarinnar $\sqrt{x^2-a^2}$ er $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$. Því er annaðhvort $x\le -a$ eða $x\ge a$. Þar af leiðandi er $\frac{x}{a}\le -1$ eða $\frac{x}{a}\ge 1$. Þessi bil samsvara myndmengi $\sec\theta$ á menginu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, og því er eðlilegt að nota innsetninguna $\sec\theta=\frac{x}{a}$ eða jafngilt $x=a\sec\theta$, þar

sem $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ eða $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$. Samsvarandi innsetning fyrir dx er $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$. Aðferðin er tekin saman í næstu lausnarleið.

LAUSNARLEIÐ

Heildi sem innihalda $\sqrt{x^2 - a^2}$

1. Athugið fyrst hvort hægt sé að reikna heildið með annarri aðferð. Ef svo er gæti verið heppilegra að nota hana.
2. Setjið inn $x = a\sec\theta$ og $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$. Innsetningin gefur

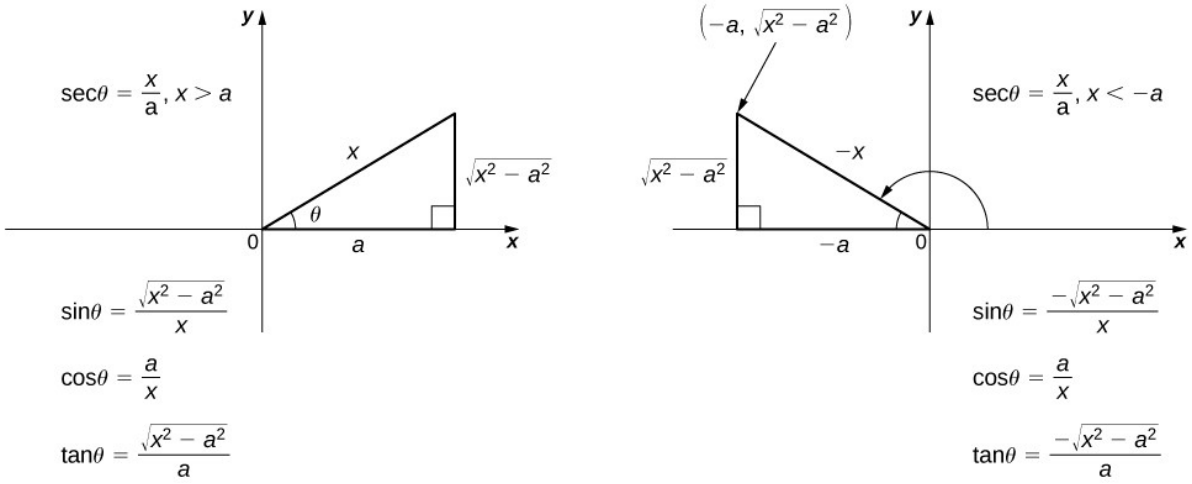
   $$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{(a\sec\theta)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta|.$$

   Þegar $x \ge a$, $|a\tan\theta| = a\tan\theta$, en þegar

   $$x \le -a,$$

   $$|a\tan\theta| = -a\tan\theta.$$

3. Einfaldið segðina.
4. Reiknið heildið með aðferðunum úr undirkaflanum um heildi hornafalla.
5. Notið viðmiðunarþríhyrningana á mynd 3.9 til að endurrita niðurstöðuna með x. Einnig gæti þurft að nota samsemdir hornafalla og sambandið $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$. (Athugið: Við þurfum báða viðmiðunarþríhyrningana því að sum hlutföll hornafallanna hafa ólík gildi eftir því hvort $x \ge a$ eða $x \le -a$.)



Mynd 3.9 Notið viðeigandi viðmiðunarþríhyrning til að tjá hornaföllin í θ með x.

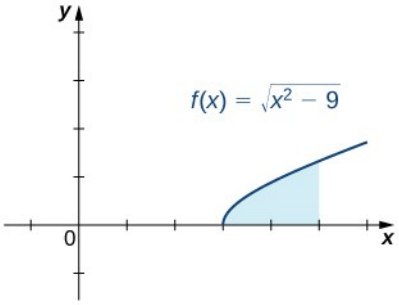
DÆMI 3.27

Flatarmál svæðis fundið

Finnið flatarmál svæðisins milli grafs $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ og x-ássins á bilinu $[3,5]$.

Lausn

Teiknum fyrst grófa mynd af svæðinu sem lýst er í dæminu, eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 3.10 Til að reikna flatarmál skyggða svæðisins þarf að reikna heildi með innsetningu með hornaföllum.

Við sjáum að flatarmálið er $A=\int_3^5 \sqrt{x^2-9}\,dx$. Til að reikna þetta ákveðna heildi setjum við inn $x=3\sec\theta$ og $dx=3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$. Einnig þarf að breyta heildunarmörkunum. Ef $x=3$, þá er $3=3\sec\theta$ og þar með $\theta=0$. Ef $x=5$, þá er $\theta=\sec^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$. Þegar við höfum sett inn og einfaldað fæst

Flatarmál $=\int_3^5\sqrt{x^2-9}\;dx$

$=\int_0^{\sec^{-1}(5/3)}9\;\tan^2\theta\;\sec\;\theta\,d\theta$ Notum $\tan^2\theta=1-\sec^2\theta$.

$=\int_0^{\sec^{-1}(5/3)}9\left(\sec^2\theta-1\right)\sec\;\theta\,d\theta$ Margföldum upp úr svigum.

$=\int_0^{\sec^{-1}(5/3)}9\left(\sec^3\theta-\sec\;\theta\right)d\theta$ Reiknum heildið.

$=\left(\frac{9}{2}\ln|\sec\;\theta+\tan\;\theta|+\frac{9}{2}\sec\;\theta\;\tan\;\theta\right)-9\;\ln|\sec\;\theta+\tan\;\theta||_0^{\sec^{-1}(5/3)}$ Einföldum.

$=\frac{9}{2}\sec\;\theta\;\tan\;\theta-\frac{9}{2}\ln|\sec\;\theta+\tan\;\theta||_0^{\sec^{-1}(5/3)}$ Reiknum. Notum $\sec\left(\sec^{-1}\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$ og $\tan\left(\sec^{-1}\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}$.

$$=\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3}-\frac{9}{2}\ln\left|\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right|-\left(\frac{9}{2}\cdot1\cdot0-\frac{9}{2}\ln|1+0|\right)$$

$$= 10 - \frac{9}{2} \ln\ 3.$$

STÖÐUMAT 3.16

Reiknið $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$. Gerið ráð fyrir að $x > 2$.

Æfingar úr undirkafla 3.3

Einfaldið eftirfarandi segðir með því að skrifa hverja þeirra með einu hornafalli.

126.

$$4 - 4\sin^2\theta$$

127.

$$9\sec^2\theta - 9$$

128.

$$a^2 + a^2\tan^2\theta$$

129.

$$a^2 + a^2\sinh^2\theta$$

130.

$$16\cosh^2\theta - 16$$

Fyllið í ferninginn til að skrifa hverja þríliðusegð sem ferning tvíliðu eða sem ferning tvíliðu að viðbættum fasta.

131.

$$4x^2 - 4x + 1$$

132.

$$2x^2 - 8x + 3$$

133.

$$-x^2 - 2x + 4$$

Heildið með innsetningu með hornaföllum. Tjáið lokasvarið með upphaflegu breytunni.

134.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$

135.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

136.

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$$

137.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$$

138.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

139.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

140.

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

141.

$$\int \sqrt{x^2+9}\,dx$$

142.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$$

143.

$$\int \frac{\theta^3\,d\theta}{\sqrt{9-\theta^2}}$$

144.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^6-x^2}}$$

145.

$$\int \sqrt{x^6-x^8}\,dx$$

146.

$$\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$$

147.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-9\right)^{3/2}}$$

148.

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,dx}{x}$$

149.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

150.

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+4}$$

151.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

152.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

153.

$$\int \left(1-x^2\right)^{3/2} dx$$

Í dæmunum hér á eftir skuluð þið nota innsetningarnar $x=\sinh\theta$, $\cosh\theta$, eða $\tanh\theta$. Tjáið lokasvörin með breytunni x.

154.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

155.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

156.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$$

157.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$$

158.

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

159.

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$$

Fyllið í ferninginn til að reikna eftirfarandi heildi.

160.

$$\int \frac{1}{x^2-6x}\,dx$$

161.

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$$

162.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\,dx$$

163.

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+10x}}\,dx$$

164.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}\,dx$$

165. Reiknið heildið án þess að nota stærðfræðigreiningu: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$.

166. Finnið flatarmálið sem afmarkast af sporbaugnum $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

167. Reiknið heildið $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ með tveimur mismunandi innsetningum. Setjið fyrst $x=\cos\theta$ og notið innsetningu með hornaföllum. Setjið síðan $x=\sin\theta$ og notið aftur innsetningu með hornaföllum. Eru svörin þau sömu?

168. Reiknið heildið $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ með innsetningunni $x=\sec\theta$. Reiknið síðan sama heildi með innsetningunni $x=\csc\theta$. Sýnið að niðurstöðurnar séu jafngildar.

169. Reiknið heildið $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ með forminu $\int \frac{1}{u}du$. Reiknið síðan sama heildi með $x=\tan\theta$. Eru niðurstöðurnar þær sömu?

170. Tilgreinið hvaða heildunaraðferð þið mynduð nota til að reikna heildið $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$. Hvers vegna völduð þið þessa aðferð?

171. Tilgreinið hvaða heildunaraðferð þið mynduð nota til að reikna heildið $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$. Hvers vegna völduð þið þessa aðferð?

172. Reiknið $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

173. Finnið bogalengd ferilsins á tilgreinda bilinu: $y=\ln x, [1,5]$. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

174. Finnið yfirborðsflatarmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af gröfum $y=x^2$, $y=0$, $x=0$, og $x=\sqrt{2}$ er snúið um x-ásinn. Námundið svarið að þremur aukastöfum.

175. Svæðinu sem afmarkast af grafi $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ og x-ásnum milli $x=0$ og $x=1$ er snúið um x-ásinn. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast.

Leysið upphafsgildisverkefnið og finnið y sem fall af x.

176.

$$(x^2+36)\frac{dy}{dx}=1, y(6)=0$$

177.

$$(64-x^2)\frac{dy}{dx}=1, y(0)=3$$

178. Finnið flatarmálið sem afmarkast af $y=\frac{2}{\sqrt{64-4x^2}}, x=0, y=0, \text{og } x=2$.

179. Lýsa má olíugeymi sem rúmmálinu sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af $y=\frac{16}{\sqrt{64+x^2}}, x=0, y=0, x=2$ er snúið um x-ásinn. Finnið rúmmál geymisins í rúmmetrum.

180. Í hverri lotu er hraði v (í metrum á sekúndu) suðuvélmennis gefinn með $v=2t-\frac{14}{4+t^2}$, þar sem t er tími í sekúndum. Finnið færsluna s (í metrum) sem fall af t ef $s=0$ þegar $t=0$.

181. Finnið lengd ferilsins $y=\sqrt{16-x^2}$ milli $x=0$ og $x=2$.

3.4 Stofnbrotaliðun

NÁMSMARKMIÐ

- 3.4.1 Heilda rætt fall með stofnbrotaliðun.
- 3.4.2 Þekkja einfalda línulega þætti í ræðu falli.
- 3.4.3 Þekkja endurtekna línulega þætti í ræðu falli.
- 3.4.4 Þekkja annars stigs þætti í ræðu falli.

Við höfum séð nokkrar aðferðir sem gera okkur kleift að heilda tiltekin ræð föll. Við vitum til dæmis að

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C \text{ og } \int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C.$$

Við höfum þó enn enga aðferð til að fást við hvaða kvóta af þessu tagi sem er. Því er ekki strax ljóst hvernig reikna eigi $\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx$. Af fyrra efni vitum við hins vegar að

$$\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}\right)dx=\ln|x+1|+2\ln|x-2|+C.$$

Með því að samnefna brotin sjáum við raunar að

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x}{x^2-x-2}.$$

Þar af leiðandi er

$$\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}\right)dx.$$

Í þessum undirkafla skoðum við stofnbrotaliðun. Með henni má liða ræð föll í summur einfaldari ræðra falla sem auðveldara er að heilda. Með þessari aðferð getum við til dæmis endurritað segðina $\frac{3x}{x^2-x-2}$ á forminu $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}$.

Lykillinn að stofnbrotaliðun er að geta séð fyrir hvaða form liðun ræða fallsins tekur. Eins og við munum sjá er formið fyrirsjáanlegt og ræðst að verulegu leyti af þáttun nefnara ræða fallsins. Einnig er afar mikilvægt að hafa í huga að aðeins má stofnbrotaliða rætt fall $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ef $\deg\big(P(x)\big)<\deg\big(Q(x)\big)$. Þegar $\deg\big(P(x)\big)\geq\deg\big(Q(x)\big)$, verðum við fyrst að beita langdeilingu og endurrita kvótann $\frac{P(x)}{Q(x)}$ á forminu $A(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, þar sem $\deg\big(R(x)\big)<\deg\big(Q(x)\big)$. Síðan stofnbrotaliðum við $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Eftirfarandi dæmi krefst ekki stofnbrotaliðunar en sýnir hvernig við förum að þegar heilda á ræð föll af forminu $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, þar sem $\deg\big(P(x)\big)\geq\deg\big(Q(x)\big)$.

3

DÆMI 3.28

Heildun $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, þegar $\deg\big(P(x)\big)\geq\deg\big(Q(x)\big)$

Reiknið $\int\frac{x^2+3x+5}{x+1}\,dx$.

Lausn

Þar sem $\deg\big(x^2+3x+5\big)\geq\deg\big(x+1\big)$, beitum við langdeilingu og fáum

$$\frac{x^2+3x+5}{x+1}=x+2+\frac{3}{x+1}.$$

Því fæst

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+3x+5}{x+1}dx &= \int\left(x+2+\frac{3}{x+1}\right)dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2+2x+3\ln|x+1|+C.\end{aligned}$$

MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu má rifja upp langdeilingu margliða.

STÖÐUMAT 3.17

Reiknið $\int\frac{x-3}{x+2}\,dx$.

Til að heilda $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, þar sem $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, verðum við að byrja á að þátta $Q(x)$.

Einfaldir línulegir þættir

Ef þátta má $Q(x)$ sem $(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)$, þar sem allir línulegu þættirnir eru ólíkir, má finna fasta $A_1, A_2, \dots A_n$ þannig að

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}.$$

Það er utan við efni þessa námskeiðs að sanna að slíkir fastar séu til.
Í næsta dæmi sjáum við hvernig stofnbrot eru notuð til að heilda rætt fall af þessu tagi.

DÆMI 3.29

Stofnbrot með einföldum línulegum þáttum

Reiknið $\int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx$.

Lausn

Þar sem $\deg(3x+2) < \deg(x^3-x^2-2x)$, byrjum við á að þátta nefnara $\frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}$. Við sjáum að $x^3-x^2-2x = x(x-2)(x+1)$. Því eru til fastar A, B, og C þannig að

$$\frac{3x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Nú verðum við að finna þessa fasta. Við byrjum á að samnefna brotin í hægri hliðinni. Þá fæst

$$\frac{3x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Nú látum við teljarana vera jafna og fáum

$$3x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2). \tag{3.8}$$

Tvær ólíkar aðferðir má nota til að finna stuðlana A, B, og C. Við köllum þær stuðlasamanburð og markvissa innsetningu.

REGLA: STUÐLASAMANBURÐUR

Endurritið jöfnu 3.8 á forminu

$$3x+2 = (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x + (-2A).$$

Með stuðlasamanburði fæst jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -A+B-2C &= 3 \\ -2A &= 2. \end{aligned}$$

Til að leysa jöfnuhneppið tökum við fyrst eftir að $-2A=2 \Rightarrow A=-1$. Ef þetta gildi er sett inn í fyrstu tvær jöfnurnar fæst jöfnuhneppið

$$\begin{aligned} B+C &= 1 \\ B-2C &= 2. \end{aligned}$$

Margföldum seinni jöfnuna með -1 og leggjum útkomuna við fyrri jöfnuna. Þá fæst

$$-3C=1,$$

sem gefur $C=-\frac{1}{3}$. Ef þetta gildi er sett inn í jöfnuna $B+C=1$ fæst $B=\frac{4}{3}$. Lausn jöfnuhneppisins er því $A=-1$, $B=\frac{4}{3}$, og $C=-\frac{1}{3}$.

Athugum að jöfnuhneppið sem þessi aðferð gefur er leysanlegt þá og því aðeins að liðunin hafi verið sett rétt fram. Ef jöfnuhneppið er óleysanlegt er villa í liðuninni.

REGLA: MARKVISS INNSETNING

Markviss innsetning byggist á þeirri forsendu að liðunin hafi verið sett rétt fram. Ef það hefur verið gert verða að vera til gildi A, B, og C sem uppfylla jöfnu 3.8 fyrir öll gildi x. Jafnan verður með öðrum orðum að gilda fyrir hvert það gildi x sem við setjum inn. Með því að velja gildi x af kostgæfni og setja þau inn í jöfnuna getum við því fundið A, B, og C auðveldlega. Ef við setjum til dæmis inn $x=0$, einfaldast jafnan í $2=A(-2)(1)$. Þegar leyst er fyrir A fæst $A=-1$. Ef við setjum næst inn $x=2$, einfaldast jafnan í $8=B(2)(3)$, sem jafngildir $B=4/3$. Að lokum setjum við $x=-1$ inn í jöfnuna og fáum $-1=C(-1)(-3)$. Þegar leyst er fæst $C=-\frac{1}{3}$.

Hafa þarf í huga að ef liðunin hefur ekki verið sett rétt fram má samt finna gildi fastanna með þessari aðferð, en þau hafa þá enga merkingu. Ef markviss innsetning er notuð er því skynsamlegt að sannreyna niðurstöðuna með því að samnefna liðina aftur.

Nú þegar við höfum fundið gildi A, B, og C, endurritum við upphaflega heildið:

$$\int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)} \right) dx.$$

Þegar heildið er reiknað fæst

$$\int \frac{3x+2}{x^3-x^2-2x}\,dx = -\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

Í næsta dæmi heildum við rætt fall þar sem stig teljarans er ekki lægra en stig nefnarans.

DÆMI 3.30

Deilt áður en stofnbrotaliðun er beitt

Reiknið $\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx$.

Lausn

Þar sem $\text{stig}\left(x^2+3x+1\right) \geq \text{stig}\left(x^2-4\right)$, verðum við að langdeila margliðunum. Við það fæst

$$\frac{x^2+3x+1}{x^2-4} = 1 + \frac{3x+5}{x^2-4}.$$

Næst stofnbrotaliðum við $\frac{3x+5}{x^2-4} = \frac{3x+5}{(x+2)(x-2)}$. Við höfum

$$\frac{3x+5}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Því fæst

$$3x+5 = A(x+2) + B(x-2).$$

Þegar leyst er fyrir A og B með hvorri aðferðinni sem er fæst $A = 11/4$ og $B = 1/4$.

Þegar upphaflega heildið er endurritað fæst

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx = \int \left(1 + \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx.$$

Þegar heildið er reiknað fæst

$$\int \frac{x^2+3x+1}{x^2-4}\,dx = x + \frac{11}{4}\ln|x-2| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + C.$$

Eins og næsta dæmi sýnir má stundum beita stofnbrotaliðun á fall sem er ekki rætt. Bragðið er að breyta fallinu í rætt fall með innsetningu.

DÆMI 3.31

Stofnbrotaliðun beitt eftir innsetningu

Reiknið $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \sin x}\,dx$.

Lausn

Byrjum á að setja $u=\sin x$. Þar af leiðandi er $du=\cos x\,dx$. Eftir þessar innsetningar fæst

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-\sin x}\,dx=\int \frac{du}{u^2-u}=\int \frac{du}{u(u-1)}.$$

Með stofnbrotaliðun á $1/u(u-1)$ fæst $\frac{1}{u(u-1)}=-\frac{1}{u}+\frac{1}{u-1}$.

Því fæst

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-\sin x}\,dx &= -\ln|u|+\ln|u-1|+C\\ &= -\ln|\sin x|+\ln|\sin x-1|+C.\end{aligned}$$

3

STÖÐUMAT 3.18

Reiknið $\int \frac{x+1}{(x+3)(x-2)}\,dx$.

Endurteknir línulegir þættir

Í sumum verkefnum þurfum við að heilda ræðar segðir sem hafa nefnara með endurteknum línulegum þáttum, það er ræð föll sem hafa að minnsta kosti einn þátt af forminu $(ax+b)^n$, þar sem n er jákvæð heiltala sem er að minnsta kosti 2. Ef nefnarinn inniheldur endurtekna línulega þáttinn $(ax+b)^n$, verður liðunin að innihalda

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

Eins og næsta dæmi sýnir er grunnaðferðin við að finna stuðlana sú sama, en meiri algebru þarf til að ákvarða teljara stofnbrotanna.

DÆMI 3.32

Stofnbrot með endurteknum línulegum þáttum

Reiknið $\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}\,dx$.

Lausn

Við höfum $\text{stig}(x-2)<\text{stig}\left((2x-1)^2(x-1)\right)$, og getum því stofnbrotaliðað. Þar sem $(2x-1)^2$ er endurtekinn línulegur þáttur þarf $\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}$ að koma fyrir í liðuninni. Því fæst

$$\frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Eftir að brotin hafa verið samnefnd og teljararnir látnir vera jafnir fæst

$$x-2=A(2x-1)(x-1)+B(x-1)+C(2x-1)^2.$$

(3.9)

Síðan notum við stuðlasamanburð til að finna gildi A, B, og C.

$$x-2=(2A+4C)x^2+(-3A+B-4C)x+(A-B+C).$$

Stuðlasamanburður gefur $2A+4C=0$, $-3A+B-4C=1$, og $A-B+C=-2$. Lausn þessa jöfnuhneppis er $A=2$, $B=3$, og $C=-1$.

Einnig má nota markvissa innsetningu. Þegar $x=1$ og $x=1/2$ eru sett inn í jöfnu 3.9 fást auðveldlega gildin $B=3$ og $C=-1$. Nú kann að virðast sem engin hentug gildi x, séu eftir. Við höfum hins vegar þegar fundið gildi B og C, og getum því sett þau inn og valið eitthvert gildi x sem ekki hefur verið notað áður. Gildið $x=0$ hentar vel. Þá fæst jafnan $-2=A(-1)(-1)+3(-1)+(-1)(-1)^2$ sem jafngildir $A=2$.

Nú þegar við höfum fundið gildi A, B, og C, endurritum við upphaflega heildið og reiknum það:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}dx &= \int\left(\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{(2x-1)^2}-\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= \ln|2x-1|-\tfrac{3}{2(2x-1)}-\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.19

Setjið fram stofnbrotaliðun fyrir $\int \frac{x+2}{(x+3)^3(x-4)^2}\,dx$. (Ákvarðið ekki stuðlana og ljúkið ekki heilduninni.)

Almenna aðferðin

Nú þegar við sjáum betur hvernig stofnbrotaliðun virkar skulum við draga grunnaðferðina saman í eftirfarandi lausnarleið.

LAUSNARLEIÐ

Stofnbrotaliðun

Notið eftirfarandi skref til að stofnbrotaliða ræða fallið $P(x)/Q(x)$,

1. Gangið úr skugga um að stig$(P(x))<$stig$(Q(x))$. Langdeilið margliðunum ef svo er ekki.
2. Þáttið $Q(x)$ í margfeldi línulegra og núllstöðvalausra annars stigs þátta. Núllstöðvalaus annars stigs margliða hefur engar raunnúllstöðvar.

3. Að því gefnu að deg$\left(P\left(x\right)\right)<deg\left(Q\left(x\right)\right)$, ákvarða þættir $Q\left(x\right)$ form liðunarinnar $P\left(x\right)/Q\left(x\right)$.
   a. Ef þátta má $Q\left(x\right)$ sem $\left(a_1x+b_1\right)\left(a_2x+b_2\right)\ldots\left(a_nx+b_n\right)$, þar sem allir línulegu þættirnir eru ólíkir, má finna fasta $A_1, A_2, \ldots A_n$ þannig að

$$\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}.$$

   b. Ef $Q\left(x\right)$ inniheldur endurtekna línulega þáttinn $\left(ax+b\right)^n$, verður liðunin að innihalda

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{\left(ax+b\right)^2}+\cdots+\frac{A_n}{\left(ax+b\right)^n}.$$

   c. Fyrir hvern núllstöðvalausan annars stigs þátt ax^2+bx+c sem $Q\left(x\right)$ inniheldur verður liðunin að innihalda

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

   d. Fyrir hvern endurtekinn núllstöðvalausan annars stigs þátt $\left(ax^2+bx+c\right)^n$, verður liðunin að innihalda

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}.$$

   e. Þegar rétt liðunarform hefur verið ákvarðað eru fastarnir fundnir.
   f. Að lokum er heildið endurritað á liðuðu formi og reiknað með aðferðum eða heildunarformúlum sem þegar hafa verið þróaðar.

3

Einfaldir annars stigs þættir

Skoðum nú heildun ræðrar segðar þar sem nefnarinn inniheldur núllstöðvalausan annars stigs þátt. Rifjum upp að annars stigs margliðan ax^2+bx+c er óþáttanleg yfir rauntölunum ef $ax^2+bx+c=0$ hefur engar raunnúllstöðvar, það er ef $b^2-4ac<0$.

DÆMI 3.33

Ræðar segðir með núllstöðvalausum annars stigs þætti

Reiknið $\int\frac{2x-3}{x^3+x}\,dx$.

Lausn

Þar sem $\deg(2x-3)<\deg(x^3+x)$, þáttum við nefnarann og stofnbrotaliðum. Þar sem $x^3+x=x(x^2+1)$ inniheldur núllstöðvalausa annars stigs þáttinn x^2+1, þarf liðurinn $\frac{Ax+B}{x^2+1}$ að koma fyrir í liðuninni ásamt $\frac{C}{x}$ fyrir línulega þáttinn x. Liðunin er því á forminu

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x}.$$

Eftir að brotin hafa verið samnefnd og teljararnir látnir vera jafnir fæst jafnan

$$2x-3=(Ax+B)x+C(x^2+1).$$

Þegar leyst er fyrir A, B, og C, fæst $A=3$, $B=2$, og $C=-3$.

Því fæst

$$\frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{3x+2}{x^2+1}-\frac{3}{x}.$$

Þegar sett er aftur inn í heildið fæst

$$\int\frac{2x-3}{x^3+x}dx \qquad =\int\left(\frac{3x+2}{x^2+1}-\frac{3}{x}\right)dx$$

$$=3\int\frac{x}{x^2+1}dx+2\int\frac{1}{x^2+1}dx-3\int\frac{1}{x}dx \quad \text{Skiptum heildinu í liði.}$$

$$=\frac{3}{2}\ln|x^2+1|+2\ \tan^{-1}x-3\ \ln|x|+C. \quad \text{Reiknum hvert heildi.}$$

Athugið: Við megum endurrita $\ln|x^2+1|=\ln(x^2+1)$, ef við viljum, því $x^2+1>0$.

DÆMI 3.34

Stofnbrot með núllstöðvalausum annars stigs þætti

Reiknið $\int\frac{dx}{x^3-8}$.

Lausn

Við byrjum á að þátta $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Við sjáum að annars stigs þátturinn x^2+2x+4 er núllstöðvalaus, því $2^2-4(1)(4)=-12<0$. Með liðunarforminu úr lausnarleiðinni fæst

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Eftir að brotin hafa verið samnefnd og teljararnir látnir vera jafnir fæst

$$1=A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+C)(x-2).$$

Með hvorri aðferðinni sem er fæst $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{12}$, og $C=-\frac{1}{3}$.

Með því að endurrita $\int \frac{dx}{x^3-8}$, fæst

$$\int \frac{dx}{x^3-8}=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{12}\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx.$$

Við sjáum að

3

$\int \frac{1}{x-2}dx=\ln|x-2|+C$, en $\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx$ krefst aðeins meiri vinnu. Byrjum á að fylla í ferninginn í x^2+2x+4 og fá

$$x^2+2x+4=(x+1)^2+3.$$

Setjum $u=x+1$; þá er $du=dx$, þannig að

$\int \frac{x+4}{x^2+2x+4}dx = \int \frac{x+4}{(x+1)^2+3}dx$ Fyllum í ferninginn í nefnaranum.

$=\int \frac{u+3}{u^2+3}du$ Setjum inn $u=x+1$, $x=u-1$, og $du=dx$.

$=\int \frac{u}{u^2+3}du+\int \frac{3}{u^2+3}du$ Skiptum teljaranum í liði.

$=\frac{1}{2}\ln|u^2+3|+\frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}}+C$ Reiknum hvert heildi.

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|+\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$ Endurritum með x og einföldum.

Þegar sett er aftur inn í upphaflega heildið og einfaldað fæst

$$\int \frac{dx}{x^3-8}=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln|x^2+2x+4|-\frac{\sqrt{3}}{12}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Hér getum við aftur sleppt algildismerkjunum ef við viljum, því $x^2+2x+4>0$ fyrir öll x.

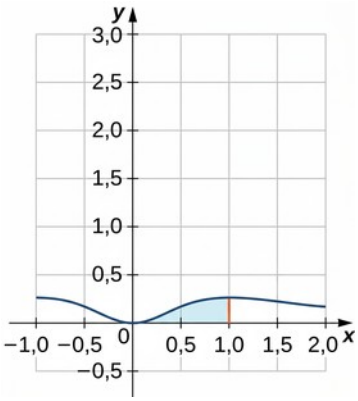
DÆMI 3.35

Rúmmál fundið

Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af grafi $f(x)=\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ og x-ásnum á bilinu $[0,1]$ er snúið um y-ásinn.

Lausn

Byrjum á að teikna svæðið sem á að snúa (sjá mynd 3.11). Af teikningunni sjáum við að hylkjaaðferðin hentar vel til að leysa verkefnið.



Mynd 3.11 Við getum notað hylkjaaðferðina til að finna rúmmál snúðsins sem fæst þegar sýnda svæðinu er snúið um y-ásinn.

Rúmmálið er

$$V=2\pi\int_0^1 x\cdot\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^1\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx.$$

Þar sem $\deg\left(\left(x^2+1\right)^2\right)=4>3=\deg\left(x^3\right)$, getum við stofnbrotaliðað. Takið eftir að $\left(x^2+1\right)^2$ er endurtekinn núllstöðvalaus annars stigs þáttur. Með liðunarforminu úr lausnarleiðinni fæst

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Með því að samnefna brotin og láta teljarana vera jafna fæst

$$x^3=(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D.$$

Þegar leyst er fæst $A=1$, $B=0$, $C=-1$, og $D=0$. Þegar sett er aftur inn í heildið fæst

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} \right) dx \\ &= 2\pi \left(\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{x^2+1} \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \pi \left(\ln 2 - \tfrac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.20

3

Setjið fram stofnbrotaliðun fyrir $\int \frac{x^2+3x+1}{(x+2)(x-3)^2(x^2+4)^2}\,dx$.

Æfingar úr undirkafla 3.4

Skrifið ræða fallið sem summu eða mismun tveggja einfaldari ræðra segða.

182.

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)}$$

183.

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}$$

184.

$$\frac{1}{x^3-x}$$

185.

$$\frac{3x+1}{x^2}$$

186. $\frac{3x^2}{x^2+1}$ (Vísbending: Notið langdeilingu fyrst.)

187.

$$\frac{2x^4}{x^2-2x}$$

188.

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

189.

$$\frac{1}{x^2(x-1)}$$

190.

$$\frac{x}{x^2-4}$$

191.

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

192.

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

193.

$$\frac{3x^2}{x^3-1}=\frac{3x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

194.

$$\frac{2x}{(x+2)^2}$$

195.

$$\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}$$

Notið stofnbrotaliðun til að reikna eftirfarandi heildi.

196.

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$$

197.

$$\int \frac{3x}{x^2+2x-8}\,dx$$

198.

$$\int \frac{dx}{x^3 - x}$$

199.

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} dx$$

200.

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

201.

$$\int \frac{2x^2 + 4x + 22}{x^2 + 2x + 10} dx$$

202.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

203.

$$\int \frac{2 - x}{x^2 + x} dx$$

204.

$$\int \frac{2}{x^2 - x - 6} dx$$

205.

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

206.

$$\int \frac{dx}{x^4 - 10x^2 + 9}$$

Reiknið eftirfarandi heildi, sem hafa núllstöðvalausa annars stigs þætti.

207.

$$\int \frac{2}{(x-4)(x^2 + 2x + 6)} dx$$

208.

$$\int \frac{x^2}{x^3 - x^2 + 4x - 4}\,dx$$

209.

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 3x + 6}{x^3 + 2x^2}\,dx$$

210.

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+2x+2)^2}\,dx$$

Notið stofnbrotaliðun til að reikna eftirfarandi heildi.

211.

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+4)(3-x)}\,dx$$

212.

$$\int \frac{2}{(x+2)^2(2-x)}\,dx$$

213. $\int \frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4}\,dx$ (Vísbending: Notið setninguna um ræðar núllstöðvar.)

Notið innsetningu til að breyta heildunum í heildi ræðra falla. Notið síðan stofnbrotaliðun til að reikna heildin.

214. $\int_0^1 \frac{e^x}{36 - e^{2x}}\,dx$ (Gefið nákvæmt svar og tugabrotsnálgun þess. Námundið að fimm aukastöfum.)

215.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x}\,dx$$

216.

$$\int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x}$$

217.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 6}\,dx$$

218.

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

219.

$$\int \frac{dt}{\left(e^{t}-e^{-t}\right)^{2}}$$

220.

$$\int \frac{1+e^{x}}{1-e^{x}}\,dx$$

221.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$$

222.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

223.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\left(1-\sin x\right)}\,dx$$

224.

$$\int \frac{e^{x}}{\left(e^{2x}-4\right)^{2}}\,dx$$

225.

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^{2}\sqrt{4-x^{2}}}\,dx$$

226.

$$\int \frac{1}{2+e^{-x}}\,dx$$

227.

$$\int \frac{1}{1+e^{x}}\,dx$$

Notið gefnu innsetninguna til að breyta heildinu í heildi ræða falls og reiknið það síðan.

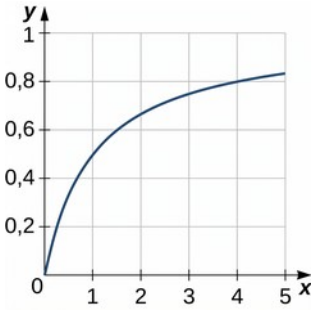
228.

$$\int \frac{1}{t-\sqrt[3]{t}}\,dt\,t = x^3$$

229.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx\,; x = u^6$$

230. Teiknið ferilinn $y = \frac{x}{1+x}$ á bilinu $[0,5]$. Finnið síðan flatarmál svæðisins sem afmarkast af ferlinum, x-ásnum og línunni $x = 4$.



231. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af $y = 1/\sqrt{x(3-x)}$, $y = 0$, $x = 1$, og $x = 2$ er snúið um x-ásinn.

232. Hraði agnar sem hreyfist eftir línu er gefinn sem fall af tíma með $v(t) = \frac{88t^2}{t^2+1}$. Tíminn er mældur í sekúndum. Finnið hve langt ögnin hefur farið þegar $t = 5$.

Leysið upphafsgildisverkefnið fyrir x sem fall af t.

233.

$$(t^2 - 7t + 12)\frac{dx}{dt} = 1, (t > 4, x(5) = 0)$$

234.

$$(t+5)\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, t > -5, x(1) = \tan 1$$

235.

$$(2t^3 - 2t^2 + t - 1)\frac{dx}{dt} = 3, x(2) = 0$$

236. Finnið x-hnit þungamiðju svæðisins sem afmarkast af $y(x^2 - 9) = 1$, $y = 0$, $x = 4$, og $x = 5$. (Námundið svarið að tveimur aukastöfum.)

237. Finnið rúmmálið sem myndast þegar svæðinu sem afmarkast af $y=\frac{1}{x^3+7x^2+6x}$, $x=1$, $x=7$, og $y=0$ er snúið um y-ásinn.

238. Finnið flatarmálið sem afmarkast af $y=\frac{x-12}{x^2-8x-20}$, $y=0$, $x=2$, og $x=4$. (Námundið svarið að næsta hundraðshluta.)

239. Reiknið heildið $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Í næstu verkefnum skuluð þið nota innsetningarnar $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, og $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

240.

$$\int \frac{dx}{3-5\sin x}$$

241. Finnið flatarmálið undir ferlinum $y=\frac{1}{1+\sin x}$ milli $x=0$ og $x=\pi$. (Gerið ráð fyrir að lengdir séu mældar í sentímetrum.)

242. Út frá $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$, skuluð þið leiða út formúlurnar $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, og $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

243. Reiknið $\int \frac{\sqrt[3]{x-8}}{x}dx$.

3.5 Aðrar heildunaraðferðir

NÁMSMARKMIÐ

- 3.5.1 Nota heildatöflu til að leysa heildunarverkefni.
- 3.5.2 Nota tölvualgebrukerfi (CAS) til að leysa heildunarverkefni.

Auk heildunaraðferðanna sem við höfum þegar séð eru ýmis önnur hjálpartæki víða tiltæk. Þar á meðal eru heildatöflur sem finna má í mörgum bókum, meðal annars í viðaukum þessarar bókar. Tölvualgebrukerfi (CAS) eru einnig víða tiltæk. Þau má finna í reiknivélum og í tölvuverum margra háskóla, auk þess sem nota má þau ókeypis á netinu.

Heildatöflur

Séu heildatöflur notaðar rétt eru þær handhæg leið til að reikna heildi hratt eða sannreyna það. Þegar tafla er notuð til að sannreyna svar þarf að hafa í huga að tvær fullkomlega réttar lausnir geta litið mjög ólíkt út. Í undirkaflanum Innsetning með hornaföllum komumst við til dæmis að niðurstöðunni með innsetningunni $x=\tan\theta$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C.$$

Með innsetningunni $x=\sinh\theta$, fengum við hins vegar aðra lausn, það er

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\sinh^{-1}x+C.$$

Síðar sýndum við með algebru að lausnirnar tvær væru jafngildar. Við sýndum sem sagt að $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Í þessu tilviki voru stofnföllin tvö sem við fundum í raun jöfn, en það þarf ekki alltaf að vera svo. Þau eru jafngild svo lengi sem mismunur þeirra er fasti.

DÆMI 3.36

Formúla úr töflu notuð til að reikna heildi

Notið töfluformúluna

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du=-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}-\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$$

til að reikna $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}\,dx$.

Lausn

Í heildatöflum sjáum við að nokkrar formúlur innihalda segðir af forminu $\sqrt{a^2-u^2}$. Þessi segð líkist raunar $\sqrt{16-e^{2x}}$, þar sem $a=4$ og $u=e^x$. Við innsetninguna þarf jafnframt að gilda að $du=e^x\,dx$. Með því að margfalda bæði teljara og nefnara heildisins með e^x má koma heildinu á hentugt form. Nú fæst því

$$\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}\,dx=\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^{2x}}e^x\,dx.$$

Þegar $u=e^x$ og $du=e^x\,dx$ eru sett inn fæst $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du$. Samkvæmt heildatöflunni (formúla nr. 88 í viðauka A) er

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du=-\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}-\sin^{-1}\frac{u}{a}+C.$$

Því fæst

$$\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}\,dx = \int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^{2x}}e^x\,dx \quad \text{Setjum inn } u=e^x \text{ og } du=e^x\,dx.$$

$$= \int \frac{\sqrt{4^2-u^2}}{u^2}\,du \quad \text{Beitum formúlunni með } a=4.$$

$$= -\frac{\sqrt{4^2-u^2}}{u} - \sin^{-1}\frac{u}{4} + C \quad \text{Setjum inn } u=e^x.$$

$$= -\frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} - \sin^{-1}\left(\frac{e^x}{4}\right) + C.$$

Tölvualgebrukerfi

3

Ef tölvualgebrukerfi er við höndina er fljótlegra að nota það en töflu til að leysa heildunarverkefni. Mörg slík kerfi eru aðgengileg og almennt fremur auðveld í notkun.

DÆMI 3.37

Tölvualgebrukerfi notað til að reikna heildi

Notið tölvualgebrukerfi til að reikna $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. Berið niðurstöðuna saman við $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{x}{2}\right|+C$, niðurstöðu sem við hefðum einnig getað fengið með innsetningu með hornaföllum.

Lausn

Með Wolfram Alpha fæst

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \ln\left|\sqrt{x^2-4}+x\right|+C.$$

Takið eftir að

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{x}{2}\right|+C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{2}\right|+C = \ln\left|\sqrt{x^2-4}+x\right| - \ln 2 + C.$$

Mismunur stofnfallanna tveggja er aðeins fasti og því eru lausnirnar jafngildar. Við hefðum einnig getað sýnt að bæði stofnföllin væru rétt með því að deilda þau.

MARGMIÐLUN

Hér má opna heildareiknivél og skoða fleiri dæmi.

DÆMI 3.38

Tölvualgebrukerfi notað til að reikna heildi

Notið tölvualgebrukerfi til að reikna $\int \sin^3 x\, dx$. Berið niðurstöðuna saman við $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$, niðurstöðu sem við hefðum getað fengið með aðferðinni við heildun oddavelda af $\sin x$ sem fjallað var um fyrr í þessum kafla.

Lausn

Með Wolfram Alpha fæst

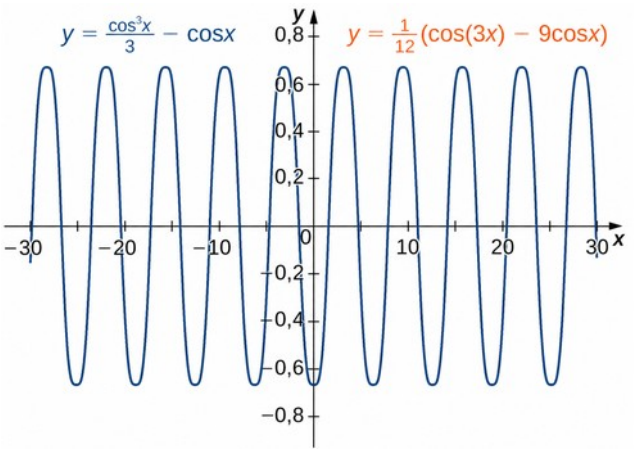
$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{12}\left(\cos\left(3x\right) - 9\cos x\right) + C.$$

Þetta lítur töluvert öðruvísi út en $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$. Til að sjá að stofnföllin eru jafngild getum við notað nokkrar samsemdir hornafalla:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{12}(\cos(3x) - 9\cos x) &= \tfrac{1}{12}(\cos(x + 2x) - 9\cos x) \\
&= \tfrac{1}{12}(\cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) - 9\cos x) \\
&= \tfrac{1}{12}(\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - \sin x\,(2\sin x\cos x) - 9\cos x) \\
&= \tfrac{1}{12}(2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\left(1 - \cos^2 x\right) - 9\cos x) \\
&= \tfrac{1}{12}(4\cos^3 x - 12\cos x) \\
&= \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x.
\end{aligned}$$

Stofnföllin tvö eru því eins.

Við getum einnig notað tölvualgebrukerfi til að bera saman gröf fallanna tveggja eins og sýnt er á næstu mynd.



Mynd 3.12 Gröf $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$ og $y = \frac{1}{12}\left(\cos\left(3x\right) - 9\cos x\right)$ eru eins.

STÖÐUMAT 3.21

Notið tölvualgebrukerfi til að reikna $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Æfingar úr undirkafla 3.5

Notið heildatöflu til að reikna eftirfarandi heildi.

244.

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$$

245.

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx$$

246.

$$\int x^3\sqrt{1+2x^2}\,dx$$

247.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x}}\,dx$$

248.

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx$$

249.

$$\int x\cdot 2^{x^2}\,dx$$

250.

$$\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx$$

251.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}}$$

252.

$$\int \sin^3(2x)\cos(2x)\,dx$$

253.

$$\int \csc(2w)\cot(2w)\,dw$$

254.

$$\int 2^y \, dy$$

255.

$$\int_0^1 \frac{3x \, dx}{\sqrt{x^2+8}}$$

256.

$$\int_{-1/4}^{1/4} \sec^2(\pi x)\tan(\pi x)\, dx$$

257.

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

258.

$$\int \cos^3 x \, dx$$

259.

$$\int \tan^5(3x)\, dx$$

260.

$$\int \sin^2 y \cos^3 y \, dy$$

Notið tölvualgebrukerfi til að reikna eftirfarandi heildi. Einnig má nota töflur til að sannreyna svörin.

261. [T] $\int \frac{dw}{1+\sec\left(\frac{w}{2}\right)}$

262. [T] $\int \frac{dw}{1-\cos(7w)}$

263. [T] $\int_0^t \frac{dt}{4\cos t + 3\sin t}$

264. [T] $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{3x}\, dx$

265. [T] $\int \frac{dx}{x^{1/2}+x^{1/3}}$

266. [T] $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

267. **[T]** $\int x^3 \sin x \, dx$

268. **[T]** $\int x\sqrt{x^4-9}\, dx$

269. **[T]** $\int \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$

270. **[T]** $\int \frac{\sqrt{3-5x}}{2x} dx$

271. **[T]** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

272. **[T]** $\int e^x \cos^{-1}\left(e^x\right) dx$

3

Notið reiknivél eða tölvualgebrukerfi til að reikna eftirfarandi heildi.

273. **[T]** $\int_0^{\pi/4} \cos\left(2x\right) dx$

274. **[T]** $\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx$

275. **[T]** $\int_0^8 \frac{2x}{\sqrt{x^2+36}} dx$

276. **[T]** $\int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4+9x^2} dx$

277. **[T]** $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$

278. **[T]** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

Notið töflur til að reikna heildin. Nauðsynlegt getur verið að fylla í ferninginn eða skipta um breytu til að koma heildinu á form sem finna má í töflunni.

279.

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$$

280.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$$

281.

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}} dx$$

282.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x}\, dx$$

283.

$$\int \frac{\arctan\left(x^3\right)}{x^4}\, dx$$

284.

$$\int \frac{\ln|x| \arcsin\left(\ln|x|\right)}{x}\, dx$$

Notið töflur til að reikna heildin.

285.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$$

286.

$$\int \frac{3x}{2x+7}\, dx$$

287.

$$\int \frac{dx}{1-\cos(4x)}$$

288.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$$

289. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af $y = \frac{5}{4+25x^2}$, $x=0$, $y=0$, og $x=4$. Notið heildatöflu eða tölvualgebrukerfi.

290. Svæðinu sem afmarkast af ferlinum $y = \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}$, $0{,}3 \le x \le 1{,}1$, og x-ásnum er snúið um x-ásinn og við það myndast snúður. Notið heildatöflu til að finna rúmmál snúðsins. (Námundið svarið að tveimur aukastöfum.)

291. Notið innsetningu og heildatöflu til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y = e^x, 0 \le x \le 3$, er snúið um x-ásinn. (Námundið svarið að tveimur aukastöfum.)

292. **[T]** Notið heildatöflu og reiknivél til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 1$, er snúið um x-ásinn. (Námundið svarið að tveimur aukastöfum.)

293. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi eða töflur til að finna yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=\cos x, 0\le x\le \frac{\pi}{2}$, er snúið um x-ásinn. (Námundið svarið að tveimur aukastöfum.)

294. Finnið bogalengd ferilsins $y=\frac{x^2}{4}$ á bilinu $[0,8]$.

295. Finnið bogalengd ferilsins $y=e^x$ á bilinu $[0,\ln(2)]$.

296. Finnið yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem myndast þegar grafi $y=2\sqrt{x}$ á bilinu $[0,9]$ er snúið um x-ásinn.

297. Finnið meðalgildi fallsins $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ á bilinu $[-3,3]$.

298. Nálgið bogalengd ferilsins $y=\tan(\pi x)$ á bilinu $\left[0,\frac{1}{4}\right]$. (Námundið svarið að þremur aukastöfum.)

3.6 Töluleg heildun

NÁMSMARKMIÐ

- 3.6.1 Nálga gildi ákveðins heildis með miðpunktsreglu og trapisureglu.
- 3.6.2 Ákvarða algilda og hlutfallslega skekkju við notkun tölulegrar heildunaraðferðar.
- 3.6.3 Meta algilda og hlutfallslega skekkju með formúlu fyrir skekkjumörk.
- 3.6.4 Greina hvenær miðpunktsreglan og trapisureglan ofmeta eða vanmeta raungildi heildis.
- 3.6.5 Nota reglu Simpsons til að nálga gildi ákveðins heildis með gefinni nákvæmni.

Oft er annaðhvort ómögulegt eða erfitt að setja stofnföll falla fram á lokuðu formi (það er með þekktum föllum). Í stað þess að reikna ákveðin heildi þessara falla beint grípum við því til ýmissa aðferða tölulegrar heildunar til að nálga gildi þeirra. Í þessum undirkafla skoðum við nokkrar slíkar aðferðir. Að auki könnum við hvernig meta má skekkjuna sem fylgir notkun þeirra.

Miðpunktsreglan

Fyrr í þessari bók skilgreindum við ákveðið heildi falls yfir bil sem markgildi Riemann-summa. Almennt má líta á sérhverja Riemann-summu falls $f(x)$ yfir bil $[a,b]$ sem mat á $\int_a^b f(x)\,dx$. Munið að Riemann-summa falls $f(x)$ yfir bil $[a,b]$ fæst með því að velja skiptingu

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\},\text{ þar sem } a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

og mengi

$$S=\{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\},\text{ þar sem } x_{i-1}\le x_i^*\le x_i \text{ fyrir öll } i.$$

Riemann-summan sem samsvarar skiptingunni P og menginu S er $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$, og hér er $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, sem er lengd i-ta hlutbilsins.

Miðpunktsreglan til að meta ákveðið heildi notar Riemann-summu með jafnbreiðum hlutbilum og miðpunkti hvers hlutbils, m_i, í stað x_i^*. Formlega setjum við fram eftirfarandi setningu um samleitni miðpunktsreglunnar.

SETNING 3.3

Miðpunktsreglan

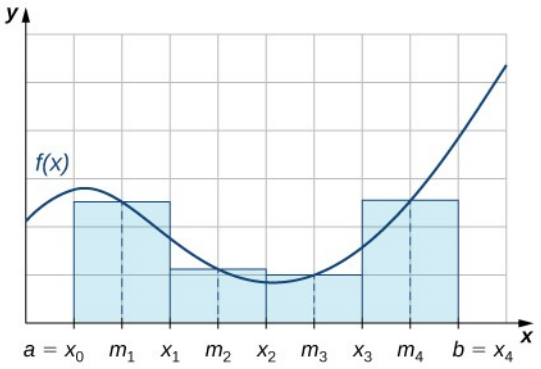
Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt á $[a,b]$. Látum n vera jákvæða heiltölu og $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Ef $[a,b]$ er skipt í n hlutbil, hvert með lengd Δx, og m_i er miðpunktur i-ta hlutbilsins, skilgreinum við

$$M_n=\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x.$$

(3.10)

Þá gildir $\lim_{n\to\infty} M_n=\int_a^b f(x)\,dx$.

Eins og sjá má á mynd 3.13, ef $f(x)\ge 0$ á $[a,b]$, þá samsvarar $\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$ summu flatarmála rétthyrninga sem nálga flatarmálið milli grafs $f(x)$ og x-ássins á $[a,b]$. Grafið sýnir rétthyrningana sem samsvara M_4 fyrir óneikvætt fall á lokuðu bili $[a,b]$.



Mynd 3.13 Miðpunktsreglan nálgar flatarmálið milli grafs $f(x)$ og x-ássins með því að leggja saman flatarmál rétthyrninga sem hafa miðpunkta á grafi $f(x)$.

3

DÆMI 3.39

Miðpunktsreglan notuð með M_4

Notið miðpunktsregluna til að meta $\int_0^1 x^2\,dx$ með fjórum hlutbilum. Berið niðurstöðuna saman við raungildi heildisins.

Lausn

Hvert hlutbil hefur lengdina $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Hlutbilin eru því

$$\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \text{og} \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Miðpunktar hlutbilanna eru $\left\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right\}$. Því fæst

$$M_4 = \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{64} = \frac{21}{64}.$$

Þar sem

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \text{og} \left|\frac{1}{3} - \frac{21}{64}\right| = \frac{1}{192} \approx 0{,}0052,$$

sjáum við að miðpunktsreglan gefur mat sem er nokkuð nálægt raungildi heildisins.

DÆMI 3.40

Miðpunktsreglan notuð með M_6

Notið M_6 til að meta bogalengd ferilsins $y=\frac{1}{2}x^2$ á bilinu $[1,4]$.

Lausn

Bogalengd ferilsins $y=\frac{1}{2}x^2$ á bilinu $[1,4]$ er

$$\int_1^4 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Þar sem $\frac{dy}{dx}=x$, verður heildið $\int_1^4 \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Ef $[1,4]$ er skipt í sex hlutbil hefur hvert hlutbil lengdina $\Delta x=\frac{4-1}{6}=\frac{1}{2}$ og miðpunktar hlutbilanna eru $\left\{\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{9}{4},\frac{11}{4},\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right\}$. Ef við skilgreinum $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,

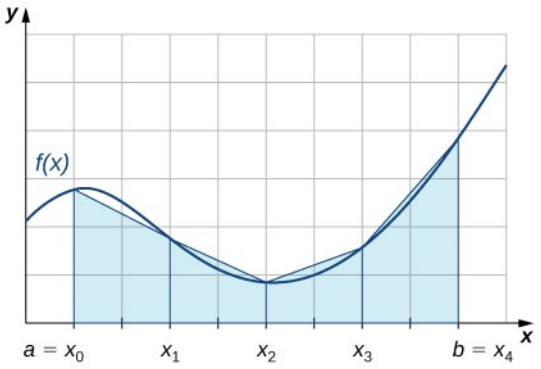
$$\begin{aligned} M_6 &= \frac{1}{2}f\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{11}{4}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{13}{4}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{15}{4}\right) \\ &\approx \frac{1}{2}(1{,}6008+2{,}0156+2{,}4622+2{,}9262+3{,}4004+3{,}8810)=8{,}1431. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 3.22

Notið miðpunktsregluna með $n=2$ til að meta $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Trapisureglan

Við getum einnig nálgað gildi ákveðins heildis með trapísum í stað rétthyrninga. Á mynd 3.14 er flatarmálið undir ferlinum nálgað með trapísum í stað rétthyrninga.



Mynd 3.14 Nota má trapísur til að nálga flatarmálið undir ferli og nálga þar með ákveðna heildið.

3

Trapisureglan til að meta ákveðin heildi notar trapísur í stað rétthyrninga til að nálga flatarmálið undir ferli. Til að átta okkur á lokaformi reglunnar skoðum við trapísurnar á mynd 3.14. Gerum ráð fyrir að lengd hvers hlutbils sé Δx. Rifjum fyrst upp að flatarmál trapísu með hæð h og samsíða hliðar af lengdunum b_1 og b_2 er Flatarmál $=\frac{1}{2}h\left(b_1+b_2\right)$. Fyrsta trapísan hefur hæðina Δx og samsíða hliðar af lengdunum $f\left(x_0\right)$ og $f\left(x_1\right)$. Flatarmál fyrstu trapísunnar á mynd 3.14 er því

$$\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)\right).$$

Flatarmál hinna þriggja trapísanna eru

$$\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right),\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right),\text{og}\,\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right).$$

Þar af leiðandi fæst

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)\right)+\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)+\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)\right)+\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right).$$

Þegar sameiginlegi þátturinn $\frac{1}{2}\Delta x$ er tekinn út fyrir sviga og samkynja liðir sameinaðir fæst

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_0\right)+2f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)+2f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\right).$$

Ef við alhæfum þetta fáum við eftirfarandi reglu.

SETNING 3.4

Trapisureglan

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt á $[a,b]$. Látum n vera jákvæða heiltölu og $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Skiptum $[a,b]$ í n hlutbil, hvert með lengd Δx, þar sem endapunktarnir mynda mengið $P = \{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n\}$. Skilgreinum

$$T_n = \frac{1}{2}\Delta x\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

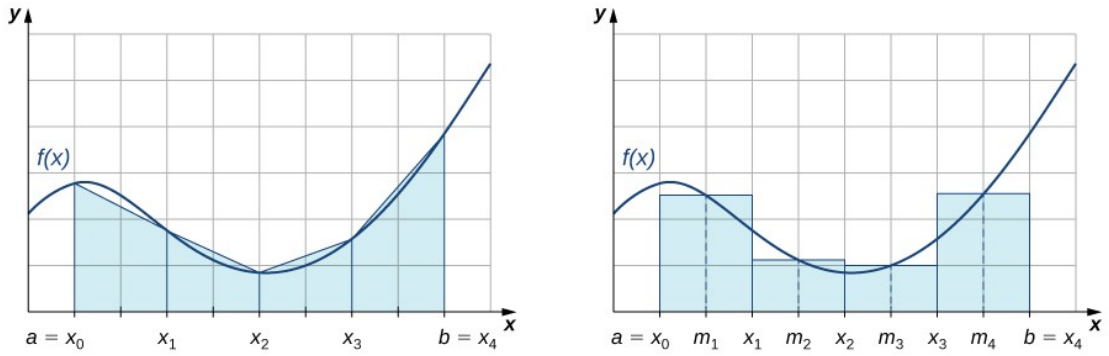
(3.11)

Þá gildir $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,dx$.

Áður en lengra er haldið skulum við skoða nokkur atriði um trapisuregluna. Fyrst er gagnlegt að taka eftir að

$$T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n) \text{ þar sem } L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \text{ og } R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Með öðrum orðum nálga L_n og R_n heildið með vinstri og hægri endapunkti hvers hlutbils. Ef við skoðum mynd 3.15 vel sjáum við einnig eftirfarandi um það þegar trapisureglan og miðpunktsreglan eru notaðar til að meta ákveðið heildi óneikvæðs falls. Trapisureglan hefur tilhneigingu til að ofmeta gildi ákveðins heildis á bilum þar sem fallið er kúpt upp og vanmeta það á bilum þar sem fallið er kúpt niður. Miðpunktsreglan jafnar hins vegar þessar skekkjur að nokkru með því að ofmeta gildi ákveðna heildisins á hluta bilsins og vanmeta það á öðrum hluta. Af þessu má geta sér til að miðpunktsreglan sé almennt nákvæmari en trapisureglan.



Mynd 3.15 Trapisureglan er yfirleitt ónákvæmari en miðpunktsreglan.

DÆMI 3.41

Trapisureglan notuð

Notið trapisuregluna til að meta $\int_0^1 x^2\,dx$ með fjórum hlutbilum.

Lausn

Endapunktar hlutbilanna eru stök mengisins $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$ og $\Delta x=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$. Því fæst

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2dx &\approx \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\left(f(0)+2f\left(\tfrac{1}{4}\right)+2f\left(\tfrac{1}{2}\right)+2f\left(\tfrac{3}{4}\right)+f(1)\right)\\ &= \tfrac{1}{8}\left(0+2\cdot\tfrac{1}{16}+2\cdot\tfrac{1}{4}+2\cdot\tfrac{9}{16}+1\right)\\ &= \tfrac{11}{32}.\end{aligned}$$

3

STÖÐUMAT 3.23

Notið trapisuregluna með $n=2$ til að meta $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Algild og hlutfallsleg skekkja

Þegar þessar tölulegu nálgunarreglur eru notaðar til að meta gildi ákveðins heildis er mikilvægt að reikna skekkjuna. Fyrst þurfum við að skilgreina algilda skekkju og hlutfallslega skekkju.

SKILGREINING

Ef B er mat okkar á stærð sem hefur raungildið A, þá er algilda skekkjan $|A-B|$.
Hlutfallslega skekkjan er skekkjan sem hlutfall af algildi raungildisins og er
$\left|\frac{A-B}{A}\right|=\left|\frac{A-B}{A}\right|\cdot 100\,\%$.

DÆMI 3.42

Skekkja miðpunktsreglunnar reiknuð

Reiknið algildu og hlutfallslegu skekkjuna í mati á $\int_0^1 x^2\,dx$ með miðpunktsreglunni sem fékkst í dæmi 3.39.

Lausn

Reiknaða gildið er $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ og matið úr dæminu er $M_4 = \frac{21}{64}$. Algilda skekkjan er því $\left|\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{21}{64}\right)\right| = \frac{1}{192} \approx 0{,}0052$. Hlutfallslega skekkjan er

$$\frac{1/192}{1/3} = \frac{1}{64} \approx 0{,}015625 \approx 1{,}6\,\%.$$

DÆMI 3.43

Skekkja trapisureglunnar reiknuð

Reiknið algildu og hlutfallslegu skekkjuna í mati á $\int_0^1 x^2\,dx$ með trapisureglunni sem fékkst í dæmi 3.41.

Lausn

Reiknaða gildið er $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ og matið úr dæminu er $T_4 = \frac{11}{32}$. Algilda skekkjan er því $\left|\frac{1}{3} - \frac{11}{32}\right| = \frac{1}{96} \approx 0{,}0104$. Hlutfallslega skekkjan er

$$\frac{1/96}{1/3} = 0{,}03125 \approx 3{,}1\,\%.$$

STÖÐUMAT 3.24

Í fyrra stöðumatsverkefni mátum við $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ sem $\frac{24}{35}$ með T_2. Raungildi heildisins er $\ln 2$.

Notið $\frac{24}{35} \approx 0{,}6857$ og $\ln\ 2 \approx 0{,}6931$, og reiknið algildu skekkjuna og hlutfallslegu skekkjuna.

Í dæmunum tveimur hér á undan gátum við borið mat okkar á heildi saman við raungildi þess, en slíkt er yfirleitt ekki mögulegt. Þegar við nálgum heildi er það almennt vegna þess að erfitt er að reikna nákvæmt gildi heildisins. Því er oft gagnlegt að geta fundið efri mörk skekkjunnar í nálgun á heildi. Eftirfarandi setning gefur skekkjumörk fyrir miðpunktsregluna og trapisuregluna. Setningin er sett fram án sönnunar.

SETNING 3.5

Skekkjumörk fyrir miðpunktsreglu og trapisureglu

Látum $f(x)$ vera samfellt fall á $[a,b]$, sem hefur aðra afleiðu $f''(x)$ á bilinu. Ef M er stærsta gildi $|f''(x)|$ á $[a,b]$, þá eru efri mörk skekkjunnar þegar M_n og T_n eru notuð til að meta $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\text{Skekkja í } M_n \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

(3.12)

og

$$\text{Skekkja í } T_n \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

(3.13)

Við getum notað þessi mörk til að ákvarða það gildi n sem þarf til að tryggja að skekkjan í matinu sé minni en tiltekið gildi.

3

DÆMI 3.44

Fjöldi hlutbila ákvarðaður

Hvaða gildi n þarf að nota til að tryggja að mat á $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ víki um minna en 0,01 frá raungildinu þegar miðpunktsreglan er notuð?

Lausn

Við byrjum á að ákvarða M, sem er stærsta gildi $|f''(x)|$ á $[0,1]$ fyrir $f(x)=e^{x^2}$. Þar sem $f'(x)=2xe^{x^2}$, fæst

$$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}.$$

Því fæst

$$|f''(x)|=2e^{x^2}(1+2x^2)\leq 2\cdot e\cdot 3=6e.$$

Af jöfnu 3.12 um skekkjumörk fæst

$$\text{Skekkja í } M_n \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \leq \frac{6e(1-0)^3}{24n^2}=\frac{6e}{24n^2}.$$

Nú leysum við eftirfarandi ójöfnu með tilliti til n:

$$\frac{6e}{24n^2} \leq 0{,}01.$$

Því er $n \geq \sqrt{\frac{600e}{24}} \approx 8{,}24$. Þar sem n verður að vera heiltala sem uppfyllir ójöfnuna tryggir valið $n = 9$ að $\left| \int_0^1 e^{x^2} dx - M_n \right| < 0{,}01$.

Greining

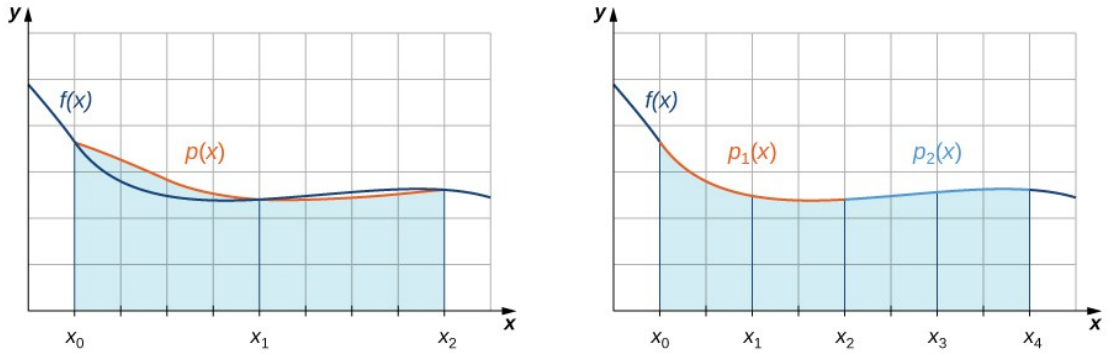
We might have been tempted to round 8,24 down and choose $n = 8$, but this would be incorrect because we must have an integer greater than or equal to 8,24. We need to keep in mind that the error estimates provide an upper bound only for the error. The actual estimate may, in fact, be a much better approximation than is indicated by the error bound.

STÖÐUMAT 3.25

Notið jöfnu 3.13 til að finna efri mörk skekkjunnar þegar M_4 er notað til að meta $\int_0^1 x^2 dx$.

Regla Simpsons

Með miðpunktsreglunni mátum við flatarmál svæða undir ferlum með rétthyrningum. Í vissum skilningi nálguðum við ferilinn með bútavísum föstum föllum. Með trapisureglunni nálguðum við ferilinn með bútavísum línulegum föllum. Hvað ef við nálguðum feril í staðinn með bútavísum annars stigs föllum? Það er einmitt gert í reglu Simpsons. Við skiptum bilinu í sléttan fjölda jafnbreiðra hlutbila. Fyrir fyrsta par hlutbila nálgum við $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx$ með $\int_{x_0}^{x_2} p(x) dx$, þar sem $p(x) = Ax^2 + Bx + C$ er annars stigs fallið sem fer í gegnum $\left(x_0, f(x_0)\right)$, $\left(x_1, f(x_1)\right)$, og $\left(x_2, f(x_2)\right)$ (mynd 3.16). Fyrir næsta par hlutbila nálgum við $\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx$ með heildi annars stigs falls sem fer í gegnum $\left(x_2, f(x_2)\right)$, $\left(x_3, f(x_3)\right)$, og $\left(x_4, f(x_4)\right)$. Svona höldum við áfram með hvert par hlutbila á fætur öðru.



Mynd 3.16 Með reglu Simpsons nálgum við ákveðið heildi með því að heilda fall sem er annars stigs á köflum.

Til að skilja formúluna fyrir reglu Simpsons byrjum við á að leiða út formúlu fyrir nálgunina yfir fyrstu tvö hlutbilin. Við útleiðsluna þurfum við að hafa eftirfarandi vensl í huga:

$$f(x_0) = p(x_0) = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$
$$f(x_1) = p(x_1) = Ax_1^2 + Bx_1 + C$$
$$f(x_2) = p(x_2) = Ax_2^2 + Bx_2 + C$$

$x_2 - x_0 = 2\Delta x$, þar sem Δx er lengd hlutbils.

$$x_2 + x_0 = 2x_1, \text{ þar sem } x_1 = \frac{(x_2 + x_0)}{2}.$$

Því fæst

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p(x)\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$

$= \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx \Big|_{x_0}^{x_2}$ Finnum stofnfallið.

$= \frac{A}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{B}{2}(x_2^2 - x_0^2) + C(x_2 - x_0)$ Reiknum gildi stofnfallsins.

$$= \frac{A}{3}(x_2 - x_0)(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2)$$

$$\frac{+B}{2}(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + C(x_2 - x_0)$$

$= \frac{x_2 - x_0}{6}(2A(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + 3B(x_2 + x_0) + 6C)$ Tökum þátt út fyrir sviga $\frac{x_2 - x_0}{6}$.

$$= \frac{\Delta x}{3}((Ax_2^2 + Bx_2 + C) + (Ax_0^2 + Bx_0 + C)$$

$$+ A(x_2^2 + 2x_2x_0 + x_0^2) + 2B(x_2 + x_0) + 4C)$$

$=\frac{\Delta x}{3}(f(x_2)+f(x_0)+A(x_2+x_0)^2+2B(x_2+x_0)+4C)$ Umröðum liðunum.

Þáttum og setjum inn.
$f(x_2)=Ax_2{}^2+Bx_2+C$ og
$f(x_0)=Ax_0{}^2+Bx_0+C$.

$=\frac{\Delta x}{3}(f(x_2)+f(x_0)+A(2x_1)^2+2B(2x_1)+4C)$ Setjum inn $x_2+x_0=2x_1$.

$=\frac{\Delta x}{3}(f(x_2)+4f(x_1)+f(x_0))$. Margföldum upp úr svigum og setjum inn $f(x_1)=Ax_1{}^2+Bx_1+C$.

Ef við nálgum $\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx$ með sömu aðferð sjáum við að

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_4)+4f(x_3)+f(x_2)\right).$$

Þegar nálganirnar tvær eru sameinaðar fæst

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right).$$

Sama mynstur endurtekur sig þegar pörum hlutbila er bætt við nálgunina. Almennu regluna má setja fram þannig.

SETNING 3.6

Regla Simpsons

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ sé samfellt á $[a,b]$. Látum n vera jákvæða slétta heiltölu og $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Skiptum $[a,b]$ í n hlutbil, hvert með lengd Δx, þar sem endapunktarnir mynda mengið $P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Skilgreinum

$$S_n=\frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right).$$

(3.14)

Þá gildir

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx.$$

Rétt eins og trapisureglan er meðaltal vinstri og hægri endapunktsreglnanna við mat á ákveðnum heildum má fá reglu Simpsons úr miðpunktsreglunni og trapisureglunni með vegnu meðaltali. Sýna má að $S_{2n}=\left(\frac{2}{3}\right)M_n+\left(\frac{1}{3}\right)T_n$.

Einnig er hægt að finna efri mörk skekkjunnar þegar regla Simpsons er notuð til að nálga ákveðið heildi. Skekkjumörkin eru gefin með eftirfarandi reglu:

REGLA: SKEKKJUMÖRK FYRIR REGLU SIMPSONS

Látum $f(x)$ vera samfellt fall á $[a,b]$ sem hefur fjórðu afleiðu $f^{(4)}(x)$, og er hún skilgreind á öllu bilinu. Ef M er stærsta gildi $\left|f^{(4)}(x)\right|$ á $[a,b]$, þá eru efri mörk skekkjunnar þegar S_n er notað til að meta $\int_a^b f(x)\,dx$ gefin með

$$\text{Skekkja í } S_n \le \frac{M(b-a)^5}{180\,n^4}.$$

(3.15)

DÆMI 3.45

Reglu Simpsons beitt: fyrra dæmi

Notið S_2 til að nálga $\int_0^1 x^3\,dx$. Metið skekkjumörk fyrir S_2.

Lausn

Þar sem $[0,1]$ er skipt í tvö hlutbil hefur hvort þeirra lengdina $\Delta x=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}$. Endapunktar hlutbilanna eru $\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$. Ef við skilgreinum $f(x)=x^3$, fæst

$S_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right)=\frac{1}{6}\left(0+4\cdot\frac{1}{8}+1\right)=\frac{1}{4}$. Þar sem $f^{(4)}(x)=0$ og þar af leiðandi $M=0$, sjáum við að

$$\text{Skekkja í } S_2 \le \frac{0(1)^5}{180\cdot 2^4}=0.$$

Þessi mörk gefa til kynna að gildið sem fæst með reglu Simpsons sé nákvæmt. Fljótleg athugun staðfestir að $\int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}$.

DÆMI 3.46

Reglu Simpsons beitt: síðara dæmi

Notið S_6 til að meta bogalengd ferilsins $y=\frac{1}{2}x^2$ á bilinu $[1,4]$.

Lausn

Bogalengd ferilsins $y=\frac{1}{2}x^2$ á bilinu $[1,4]$ er $\int_1^4 \sqrt{1+x^2}\,dx$. Ef $[1,4]$ er skipt í sex hlutbil hefur hvert hlutbil lengdina $\Delta x=\frac{4-1}{6}=\frac{1}{2}$, og endapunktar hlutbilanna eru $\left\{1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4\right\}$. Skilgreinum $f(x)=\sqrt{1+x^2}$,

$$S_6=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(f(1)+4f\left(\frac{3}{2}\right)+2f(2)+4f\left(\frac{5}{2}\right)+2f(3)+4f\left(\frac{7}{2}\right)+f(4)\right).$$

Eftir innsetningu fæst

$$S_6=\frac{1}{6}(1{,}4142+4\cdot 1{,}80278+2\cdot 2{,}23607+4\cdot 2{,}69258+2\cdot 3{,}16228$$
$$+4\cdot 3{,}64005+4{,}12311)$$
$$\approx 8{,}14594.$$

STÖÐUMAT 3.26

Notið S_2 til að meta $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Æfingar úr undirkafla 3.6

Nálgið eftirfarandi heildi með miðpunktsreglunni, trapisureglunni eða reglu Simpsons eins og tilgreint er. (Námundið svör að þremur aukastöfum.)

299. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; trapisuregla; $n=5$

300. $\int_0^3 \sqrt{4+x^3}\,dx$; trapisuregla; $n=6$

301. $\int_0^3 \sqrt{4+x^3}\,dx$; trapisuregla; $n=3$

302. $\int_0^{12} x^2\,dx$; miðpunktsregla; $n=6$

303. $\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx$; miðpunktsregla; $n=3$

304. Notið miðpunktsregluna með átta hlutbilum til að meta $\int_2^4 x^2\,dx$.

305. Notið trapisuregluna með fjórum hlutbilum til að meta $\int_2^4 x^2\,dx$.

306. Finnið nákvæmt gildi $\int_2^4 x^2\,dx$. Finnið skekkjuna milli nákvæma gildisins og gildisins sem fæst með trapisureglunni með fjórum hlutbilum. Teiknið graf til skýringar.

Nálgið heildið að þremur aukastöfum með tilgreindri reglu.

3

307. $\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx$; trapisuregla; $n=6$

308. $\int_0^3 \frac{1}{1+x^3}\,dx$; trapisuregla; $n=6$

309. $\int_0^3 \frac{1}{1+x^3}\,dx$; trapisuregla; $n=3$

310. $\int_0^{0,8} e^{-x^2}\,dx$; trapisuregla; $n=4$

311. $\int_0^{0,8} e^{-x^2}\,dx$; regla Simpsons; $n=4$

312. $\int_0^{0,4} \sin(x^2)\,dx$; trapisuregla; $n=4$

313. $\int_0^{0,4} \sin(x^2)\,dx$; regla Simpsons; $n=4$

314. $\int_{0,1}^{0,5} \frac{\cos x}{x}\,dx$; trapisuregla; $n=4$

315. $\int_{0,1}^{0,5} \frac{\cos x}{x}\,dx$; regla Simpsons; $n=4$

316. Reiknið $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ nákvæmlega og sýnið að niðurstaðan sé $\pi/4$. Finnið síðan nálgunargildi heildisins með trapisureglunni og $n=4$ hlutbilum. Notið niðurstöðuna til að nálga gildi π.

317. Nálgið $\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx$ að fjórum aukastöfum með miðpunktsreglunni og fjórum hlutbilum.

318. Nálgið $\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx$ að fjórum aukastöfum með trapisureglunni og átta hlutbilum.

319. Notið trapisuregluna með fjórum hlutbilum til að meta $\int_0^{0,8} x^3\,dx$ að fjórum aukastöfum.

320. Notið trapisuregluna með fjórum hlutbilum til að meta $\int_0^{0,8} x^3\,dx$. Berið gildið saman við nákvæma gildið og finnið skekkjumatið.

321. Notið reglu Simpsons með fjórum hlutbilum til að finna $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$.

322. Sýnið að nákvæmt gildi $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$. Finnið algildu skekkjuna þegar heildið er nálgað með miðpunktsreglunni og 16 hlutbilum.

323. Miðað við að $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$, notið þá trapisuregluna með 16 hlutbilum til að nálga heildið og finnið algildu skekkjuna.

324. Finnið efri mörk skekkjunnar þegar $\int_0^3 (5x+4)\,dx$ er metið með trapisureglunni og sex hlutbilum.

325. Finnið efri mörk skekkjunnar þegar $\int_4^5 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ er metið með trapisureglunni og sjö hlutbilum.

326. Finnið efri mörk skekkjunnar þegar $\int_0^3 (6x^2-1)\,dx$ er metið með reglu Simpsons og $n=10$ hlutbilum.

327. Finnið efri mörk skekkjunnar þegar $\int_2^5 \frac{1}{x-1}\,dx$ er metið með reglu Simpsons og $n=10$ hlutbilum.

328. Finnið efri mörk skekkjunnar þegar $\int_0^{\pi} 2x\cos(x)\,dx$ er metið með reglu Simpsons og fjórum hlutbilum.

329. Metið minnsta fjölda hlutbila sem þarf til að nálga heildið $\int_1^4 (5x^2+8)\,dx$ með trapisureglunni þannig að algildi skekkjunnar sé minna en 0.0001.

330. Ákvarðið gildi n þannig að trapisureglan nálgi $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ með skekkju sem er ekki meiri en 0,01.

331. Metið minnsta fjölda hlutbila sem þarf til að nálga heildið $\int_2^3 \left(2x^3+4x\right)dx$ með trapisureglunni þannig að algildi skekkjunnar sé minna en 0.0001.

332. Metið minnsta fjölda hlutbila sem þarf til að nálga heildið $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx$ með trapisureglunni þannig að algildi skekkjunnar sé minna en 0.0001.

333. Notið reglu Simpsons með fjórum hlutbilum til að nálga flatarmálið undir þéttleikafallinu $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ frá $x=0$ til $x=0{,}4$.

334. Notið reglu Simpsons með $n=14$ til að nálga með þriggja aukastafa nákvæmni flatarmál svæðisins sem afmarkast af gröfum $y=0$, $x=0$, og $x=\pi/2$.

3

335. Lengd eins boga ferilsins $y=3\sin\left(2x\right)$ er gefin með $L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+36\cos^2\left(2x\right)}dx$. Metið L með trapisureglunni og $n=6$.

336. Lengd sporbaugsins $x=a\cos\left(t\right)$, $y=b\sin\left(t\right)$, $0\le t\le 2\pi$ er gefin með $L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2\left(t\right)}dt$, þar sem e er miðskekkja sporbaugsins. Notið reglu Simpsons með $n=6$ hlutbilum til að meta lengd sporbaugsins þegar $a=2$ og $e=1/3$.

337. Metið flatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=\cos\left(2x\right)$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ er snúið um x-ásinn. Notið trapisuregluna með sex hlutbilum.

338. Metið flatarmál snúðflatarins sem myndast þegar ferlinum $y=2x^2$, $0\le x\le 3$ er snúið um x-ásinn. Notið reglu Simpsons með $n=6$.

339. Vaxtarhraði tiltekins trés, mældur í metrum á ári, er gefinn með $y=\frac{2}{t+1}+e^{-t^2/2}$, þar sem t er tími í árum. Metið vöxt trésins til loka annars árs með reglu Simpsons og tveimur hlutbilum. (Námundið svarið að næsta hundraðshluta.)

340. **[T]** Notið reiknivél til að nálga $\int_0^1 \sin\left(\pi x\right)dx$ með miðpunktsreglunni og 25 hlutbilum. Reiknið hlutfallslegu skekkjuna í nálguninni.

341. **[T]** Miðað við að $\int_1^5 \left(3x^2-2x\right)dx=100$, nálgið þá gildi heildisins með trapisureglunni og 16 hlutbilum og ákvarðið algildu skekkjuna.

342. Hvers vegna þarf að þróa tölulegar aðferðir til að reikna ákveðin heildi þótt við þekkjum undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar?

343. Taflan sýnir hnitin (x, y) sem marka lóð. Mælieiningarnar eru metrar. Notið trapisuregluna til að meta flatarmál lóðarinnar í fermetrum.

x	*y*	*x*	*y*
0	125	600	95
100	125	700	88
200	120	800	75
300	112	900	35
400	90	1000	0
500	90		

344. Veljið rétt svar. Þegar regla Simpsons er notuð til að nálga ákveðið heildi þarf fjöldi hlutbila að vera _____

a. slétt tala
b. oddatala
c. annaðhvort slétt tala eða oddatala
d. margfeldi af 4

345. „Simpsons-summan“ byggist á flatarmálinu undir _____.

346. Skekkjuformúlan fyrir reglu Simpsons veltur á ____.

a. $f(x)$
b. $f^{'}(x)$
c. $f^{(4)}(x)$
d. fjölda hlutbila

3.7 Óeiginleg heildi

NÁMSMARKMIÐ

- 3.7.1 Reikna heildi yfir óendanlegt bil.
- 3.7.2 Reikna heildi yfir lokað bil þar sem fallið hefur óendanlega ósamfelldni innan bilsins.
- 3.7.3 Nota samanburðarsetninguna til að ákvarða hvort ákveðið heildi sé samleitið.

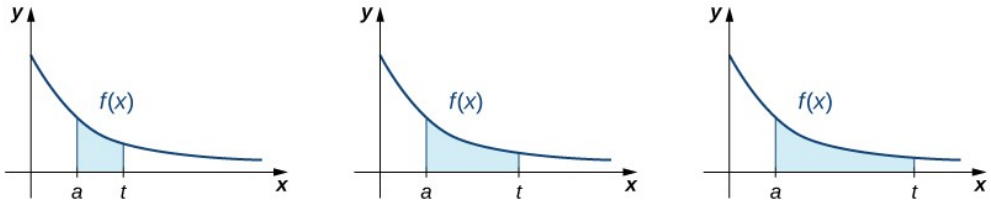
Er flatarmálið milli grafs $f(x)=\frac{1}{x}$ og x-ássins yfir bilið $[1,+\infty)$ endanlegt eða óendanlegt? Ef sama svæði er snúið um x-ásinn, er rúmmálið þá endanlegt eða óendanlegt? Það kemur á óvart að flatarmál svæðisins er óendanlegt en rúmmál snúðsins sem fæst með því að snúa svæðinu um x-ásinn er endanlegt.

Í þessum undirkafla skilgreinum við heildi yfir óendanleg bil og heildi falla sem hafa ósamfelldni á heildunarbili. Heildi af þessum gerðum kallast óeiginleg heildi. Við skoðum nokkrar aðferðir til að reikna óeiginleg heildi og allar fela þær í sér markgildi.

Heildun yfir óendanlegt bil

Hvernig ættum við að skilgreina heildi af gerðinni $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$? Við getum reiknað $\int_a^t f(x)\,dx$ fyrir öll gildi t, og því er eðlilegt að skoða hegðun heildisins þegar við setjum sífellt stærri gildi inn fyrir t. Mynd 3.17 sýnir að túlka má $\int_a^t f(x)\,dx$ sem flatarmál fyrir ýmis gildi t. Með öðrum orðum má skilgreina óeiginlegt heildi sem markgildi þegar annað heildunarmarkið vex eða minnkar án takmarkana.

3



Mynd 3.17 Til að heilda fall yfir óendanlegt bil skoðum við markgildi heildisins þegar efra heildunarmarkið vex án takmarkana.

SKILGREINING

1. Látum $f(x)$ vera samfellt á bili af gerðinni $[a, +\infty)$. Þá er

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

(3.16)

að því gefnu að markgildið sé til.

2. Látum $f(x)$ vera samfellt á bili af gerðinni $(-\infty, b]$. Þá er

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

(3.17)

að því gefnu að markgildið sé til.

Í hvoru tilviki fyrir sig er óeiginlega heildið sagt samleitið ef markgildið er til. Ef markgildið er ekki til er óeiginlega heildið sagt ósamleitið.

3. Látum $f(x)$ vera samfellt á $(-\infty,+\infty)$. Þá er

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

(3.18)

að því gefnu að $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ og $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ séu bæði samleitin. Ef annað heildið eða bæði eru ósamleitin er $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ósamleitið. (Sýna má að raunar gildir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ fyrir sérhvert gildi a.)

Í fyrsta dæminu snúum við aftur að spurningunni í upphafi undirkaflans: Er flatarmálið milli grafs $f(x)=\frac{1}{x}$ og x-ássins yfir bilinu $[1,+\infty)$ endanlegt eða óendanlegt?

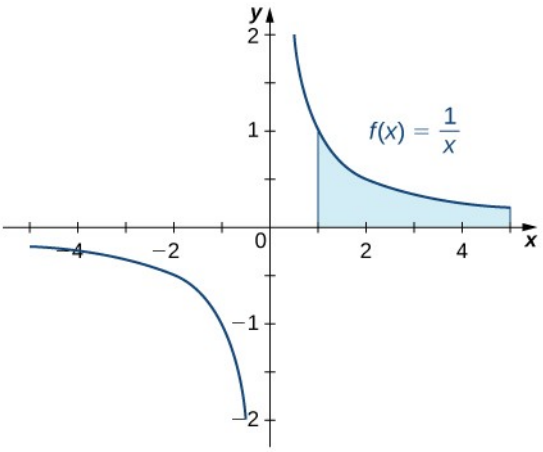
DÆMI 3.47

Flatarmál fundið

Ákvarðið hvort flatarmálið milli grafs $f(x)=\frac{1}{x}$ og x-ássins yfir bilinu $[1,+\infty)$ sé endanlegt eða óendanlegt.

Lausn

Við byrjum á að teikna grófa mynd af svæðinu, eins og sýnt er á grafinu hér á eftir.



Mynd 3.18 Við getum fundið flatarmálið milli ferilsins $f(x)=1/x$ og x-ássins á óendanlegu bili.

Við sjáum að flatarmál svæðisins er $A=\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Þá fæst

$$A = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

$= \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx$ Endurritum óeiginlega heildið sem markgildi.

$= \lim_{t \to +\infty} \ln|x|\Big|_1^t$ Finnum stofnfallið.

$= \lim_{t \to +\infty} \left(\ln|t| - \ln\ 1\right)$ Reiknum gildi stofnfallsins.

$= +\infty$. Reiknum markgildið.

Þar sem óeiginlega heildið stefnir á $+\infty$, er það ósamleitið og flatarmál svæðisins óendanlegt.

3

DÆMI 3.48

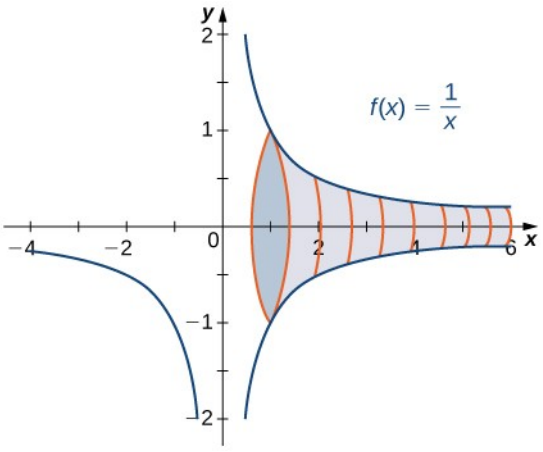
Rúmmál fundið

Finnið rúmmál snúðsins sem fæst þegar svæðinu sem afmarkast af grafi $f(x) = \frac{1}{x}$ og x-ásnum yfir bilinu $[1, +\infty)$ er snúið um x-ásinn.

Lausn

Snúðurinn er sýndur á mynd 3.19. Með skífuaðferðinni sjáum við að rúmmálið V er

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$



Mynd 3.19 Snúðinn má mynda með því að snúa svæði með óendanlegt flatarmál um x-ásinn.

Þá fæst

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \pi \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx && \text{Endurritum sem markgildi.} \\
&= \pi \lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^t && \text{Finnum stofnfallið.} \\
&= \pi \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{1}{t}+1\right) && \text{Reiknum gildi stofnfallsins.} \\
&= \pi .
\end{aligned}
$$

Óeiginlega heildið er samleitið að π. Rúmmál snúðsins er því π.

Þótt flatarmál svæðisins milli x-ássins og grafs $f(x)=1/x$ yfir bilinu $[1,+\infty)$ sé óendanlegt er rúmmál snúðsins sem fæst þegar svæðinu er snúið um x-ásinn endanlegt. Snúðurinn kallast lúður Gabríels.

MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu má lesa nánar um lúður Gabríels.

DÆMI 3.49

Kaflaupphaf: Umferðarslys í borg



Mynd 3.20 (heimild: breytt verk eftir David McKelvey, Flickr)

Í kaflaupphafinu settum við fram eftirfarandi verkefni: Gerum ráð fyrir að á fjölförnum gatnamótum verði umferðarslys að meðaltali einu sinni á þriggja mánaða fresti. Eftir að íbúar

kvörtuðu var umferðarljósunum á gatnamótunum breytt. Nú eru liðnir tíu mánuðir frá breytingunum og ekkert slys hefur orðið. Báru breytingarnar árangur eða er 10 mánaða tímabilið án slyss tilviljun?

Lausn

Endurskoðuð lausn: Látum x tákna tímann þar til næsta slys verður. Við viljum vita hversu líklegt er að $x>10$. Skilgreinum tíðnistikuna λ sem meðalfjölda slysa á mánuði. Samkvæmt líkindafræði gildir fyrir $a>0$ að

$$P(x>a)=\int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx,$$

Í þessu dæmi verður að meðaltali eitt slys á þriggja mánaða fresti og því er $\lambda=\frac{1}{3}$. Líkurnar sem við leitum að eru

$$\begin{aligned}
P(x>10) &= \int_{10}^{\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{10}^{t} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} -e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_{10}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(-e^{-\frac{t}{3}}+e^{-\frac{10}{3}}\right) \\
&\approx 0{,}0357
\end{aligned}$$

Gildið $3{,}8\times 10^{-11}$ táknar líkurnar á því að ekkert slys verði á 8 mánuðum við upphaflegar aðstæður. Gildið er ákaflega lítið og því er eðlilegt að álykta að breytingarnar hafi borið árangur.

DÆMI 3.50

Óeiginlegt heildi yfir óendanlegt bil reiknað

Reiknið $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx$. Segið hvort óeiginlega heildið sé samleitið eða ósamleitið.

Lausn

Byrjið á að endurrita $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx$ sem markgildi með jöfnu 3.17 úr skilgreiningunni. Þá fæst

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{x\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+4}\,dx \quad \text{Endurritum sem markgildi.}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\Big|_{t}^{0} \quad \text{Finnum stofnfallið.}$$

$= \frac{1}{2} \lim_{t \to -\infty} \left(\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} \frac{t}{2} \right)$ Reiknum gildi stofnfallsins.

$= \frac{\pi}{4}.$ Reiknum markgildið og einföldum.

Óeiginlega heildið er samleitið að $\frac{\pi}{4}$.

DÆMI 3.51

Óeiginlegt heildi reiknað á $(-\infty, +\infty)$

Reiknið $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^x \, dx$. Segið hvort óeiginlega heildið sé samleitið eða ósamleitið.

Lausn

Byrjið á að skipta heildinu í tvennt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^x \, dx = \int_{-\infty}^{0} x e^x \, dx + \int_{0}^{+\infty} x e^x \, dx.$$

Ef annaðhvort $\int_{-\infty}^{0} x e^x \, dx$ eða $\int_{0}^{+\infty} x e^x \, dx$ er ósamleitið er $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^x \, dx$ ósamleitið. Reiknið heildin hvort í sínu lagi. Fyrra heildið gefur

$\int_{-\infty}^{0} x e^x \, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} x e^x \, dx$ Endurritum sem markgildi.

$= \lim_{t \to -\infty} \left(x e^x - e^x \right) \Big|_{t}^{0}$ Notum hlutheildun til að finna stofnfallið. (Hér $u = x$ og $dv = e^x dx$.)

$= \lim_{t \to -\infty} \left(-1 - t e^t + e^t \right)$ Reiknum gildi stofnfallsins.

$= -1.$ Reiknum markgildið. *Athugið:* $\lim_{t \to -\infty} t e^t$ er óákveðið af gerðinni $0 \cdot \infty$. Því fæst

$\lim_{t \to -\infty} t e^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{-1}{e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} -e^t = 0$ með reglu l'Hôpital.

Fyrra óeiginlega heildið er samleitið. Fyrir síðara heildið fæst

$\int_{0}^{+\infty} x e^x \, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{0}^{t} x e^x \, dx$ Endurritum sem markgildi.

$= \lim_{t \to +\infty} \left(x e^x - e^x \right) \Big|_{0}^{t}$ Finnum stofnfallið.

$= \lim_{t \to +\infty} \left(t e^t - e^t + 1 \right)$ Reiknum gildi stofnfallsins.

$= \lim_{t \to +\infty} \left((t-1)e^t + 1 \right)$ Endurritum. ($t\,e^t - e^t$ er óákveðið.)

$= +\infty$. Reiknum markgildið.

Því er $\int_0^{+\infty} x\,e^x\,dx$ ósamleitið. Þar sem þetta heildi er ósamleitið er $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^x\,dx$ einnig ósamleitið.

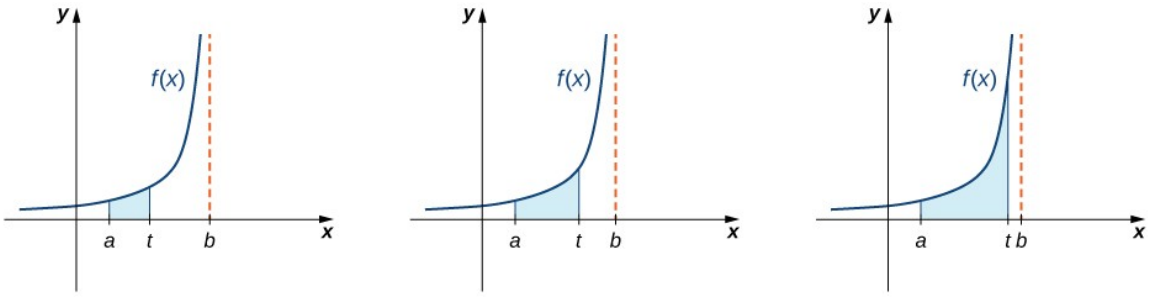
STÖÐUMAT 3.27

Reiknið $\int_{-3}^{+\infty} e^{-x}\,dx$. Segið hvort óeiginlega heildið sé samleitið eða ósamleitið.

3

Heildun ósamfellds heildisstofns

Skoðum nú heildi falla sem hafa óendanlega ósamfelldni á heildunarbili. Lítum á heildi af gerðinni $\int_a^b f(x)\,dx$, þar sem $f(x)$ er samfellt á $[a,b)$ og ósamfellt í b. Þar sem fallið $f(x)$ er samfellt á $[a,t]$ fyrir öll gildi t sem uppfylla $a<t<b$, er heildið $\int_a^t f(x)\,dx$ skilgreint fyrir öll slík gildi t. Því er eðlilegt að skoða gildi $\int_a^t f(x)\,dx$ þegar t stefnir á b og $a<t<b$. Með öðrum orðum skilgreinum við $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$, að því gefnu að markgildið sé til. Mynd 3.21 sýnir $\int_a^t f(x)\,dx$ sem flatarmál svæða fyrir gildi t sem nálgast b.



Mynd 3.21 Þegar t stefnir á b frá vinstri stefnir flatarmálið frá a til t á flatarmálið frá a til b.

Við notum sambærilega aðferð til að skilgreina $\int_a^b f(x)\,dx$, þegar $f(x)$ er samfellt á $(a,b]$ og ósamfellt í a. Nú setjum við fram formlega skilgreiningu.

SKILGREINING

1. Látum $f(x)$ vera samfellt á $[a,b)$. Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx.$$

(3.19)

2. Látum $f(x)$ vera samfellt á $(a,b]$. Þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx.$$

(3.20)

Í báðum tilvikum er óeiginlega heildið sagt samleitið ef markgildið er til. Ef markgildið er ekki til er óeiginlega heildið sagt ósamleitið.

3. Ef $f(x)$ er samfellt á $[a,b]$ nema í punkti c í (a,b), þá er

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

(3.21)

að því gefnu að bæði $\int_a^c f(x)\,dx$ og $\int_c^b f(x)\,dx$ séu samleitin. Ef annað heildið er ósamleitið er $\int_a^b f(x)\,dx$ ósamleitið.

Dæmin hér á eftir sýna hvernig skilgreiningin er notuð.

DÆMI 3.52

Heildun ósamfellds heildisstofns

Reiknið $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$, ef unnt er. Segið hvort heildið sé samleitið eða ósamleitið.

Lausn

Fallið $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$ er samfellt á $[0,4)$ og ósamfellt í 4. Notið jöfnu 3.19 úr skilgreiningunni til að endurrita $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$ sem markgildi:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx = \lim_{t\to 4^-}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx$$ Endurritum sem markgildi.

$= \lim_{t \to 4^-} \left(-2\sqrt{4-x} \right) \Big|_0^t$ Finnum stofnfallið.

$= \lim_{t \to 4^-} \left(-2\sqrt{4-t} + 4 \right)$ Reiknum gildi stofnfallsins.

$= 4$. Reiknum markgildið.

Óeiginlega heildið er samleitið.

DÆMI 3.53

Heildun ósamfellds heildisstofns

Reiknið $\int_0^2 x \ln x \, dx$. Segið hvort heildið sé samleitið eða ósamleitið.

Lausn

Þar sem $f(x) = x \ln x$ er samfellt á $(0, 2]$ en ósamfellt í núlli getum við notað jöfnu 3.20 til að endurrita heildið á markgildisformi:

$\int_0^2 x \ln x \, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^2 x \ln x \, dx$ Endurritum sem markgildi.

$= \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right) \Big|_t^2$ Reiknum $\int x \ln x \, dx$ með hlutheildun þar sem $u = \ln x$ og $dv = x\,dx$.

$= \lim_{t \to 0^+} \left(2 \ln 2 - 1 - \frac{1}{2} t^2 \ln t + \frac{1}{4} t^2 \right)$. Reiknum gildi stofnfallsins.

$= 2 \ln 2 - 1$. Reiknum markgildið. $\lim_{t \to 0^+} t^2 \ln t$ er óákveðið. Til að reikna það endurritum við það sem kvóta og beitum reglu l'Hôpital.

Óeiginlega heildið er samleitið.

DÆMI 3.54

Heildun ósamfellds heildisstofns

Reiknið $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$. Segið hvort óeiginlega heildið sé samleitið eða ósamleitið.

Lausn

Þar sem $f(x) = 1/x^3$ er ósamfellt í núlli getum við með jöfnu 3.21 ritað

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx.$$

Ef annað heildanna er ósamleitið er upprunalega heildið ósamleitið. Byrjum á $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx &= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^3}\,dx && \text{Endurritum sem markgildi.}\\
&= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^{t} && \text{Finnum stofnfallið.}\\
&= \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right) && \text{Reiknum gildi stofnfallsins.}\\
&= -\infty. && \text{Reiknum markgildið.}
\end{aligned}$$

Því er $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx$ ósamleitið. Þar sem $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\,dx$ er ósamleitið er $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$ ósamleitið.

3

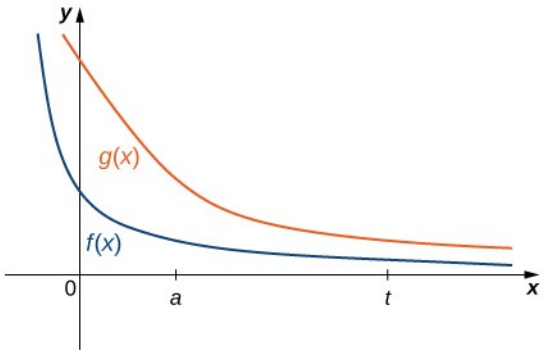
STÖÐUMAT 3.28

Reiknið $\int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx$. Segið hvort heildið sé samleitið eða ósamleitið.

Samanburðarsetning

Ekki er alltaf auðvelt eða jafnvel mögulegt að reikna óeiginlegt heildi beint. Með því að bera það saman við annað vandlega valið heildi má þó stundum ákvarða hvort það sé samleitið eða ósamleitið. Skoðum tvö samfelld föll $f(x)$ og $g(x)$ sem uppfylla $0 \le f(x) \le g(x)$ fyrir $x \ge a$ (mynd 3.22). Í þessu tilviki má túlka heildi fallanna yfir bil af gerðinni $[a, t]$ sem flatarmál og því gildir

$$0 \le \int_{a}^{t} f(x)\,dx \le \int_{a}^{t} g(x)\,dx \text{ fyrir } t \ge a.$$



Mynd 3.22 Ef $0 \le f(x) \le g(x)$ fyrir $x \ge a$, þá gildir, fyrir $t \ge a$, að $\int_{a}^{t} f(x)\,dx \le \int_{a}^{t} g(x)\,dx$.

Ef

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = +\infty,$$

Þá er

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)\,dx = +\infty$ gildir einnig. Með öðrum orðum, ef flatarmálið milli grafs $f(x)$ og x-ássins yfir $[a,+\infty)$ er óendanlegt, þá er flatarmálið milli grafs $g(x)$ og x-ássins yfir $[a,+\infty)$ einnig óendanlegt.

Ef hins vegar

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)\,dx = L$ fyrir einhverja rauntölu L, þá

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ hlýtur að vera samleitið að gildi sem er minna en eða jafnt og L, þar sem $\int_a^t f(x)\,dx$ vex þegar t vex og $\int_a^t f(x)\,dx \le L$ fyrir öll $t \ge a$.

Ef flatarmálið milli grafs $g(x)$ og x-ássins yfir $[a,+\infty)$ er endanlegt, þá er flatarmálið milli grafs $f(x)$ og x-ássins yfir $[a,+\infty)$ einnig endanlegt.

Setningin hér á eftir dregur þessar niðurstöður saman.

SETNING 3.7

Samanburðarsetning

Látum $f(x)$ og $g(x)$ vera samfelld á $[a,+\infty)$. Gerum ráð fyrir að $0 \le f(x) \le g(x)$ fyrir $x \ge a$.

i. Ef $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = +\infty$, þá er $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)\,dx = +\infty$.

ii. Ef $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t g(x)\,dx = L$, þar sem L er rauntala, þá er

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx = M$ fyrir einhverja rauntölu $M \le L$.

DÆMI 3.55

Samanburðarsetningunni beitt

Notið samanburð til að sýna að $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,e^x}\,dx$ sé samleitið.

Lausn

Við sjáum að

$$0 \leq \frac{1}{x e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x},$$

Ef $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ er samleitið gildir það sama um $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x e^x}\,dx$. Til að reikna $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$, endurritum við það fyrst sem markgildi:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-x}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t e^{-x}dx \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_1^t \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t}+e^{-1}\right) \\ &= e^{-1}.\end{aligned}$$

Fyrst $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ er samleitið gildir það sama um $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x e^x}\,dx$.

DÆMI 3.56

Samanburðarsetningunni beitt

Notið samanburðarsetninguna til að sýna að $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ sé ósamleitið fyrir öll $p<1$.

Lausn

Fyrir $p<1$, gildir $1/x \leq 1/\left(x^p\right)$ á $[1,+\infty)$. Í dæmi 3.47 sýndum við að $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$. Því er $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ ósamleitið fyrir öll $p<1$.

STÖÐUMAT 3.29

Notið samanburð til að sýna að $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ sé ósamleitið.

NEMENDAVERKEFNI

Laplace-vörpun

Í síðustu köflum höfum við skoðað ýmsar leiðir til að leysa hagnýt verkefni með heildun. Í þessu verkefni könnum við flóknara notkunarsvið heildunar. Nánar tiltekið lýsum við Laplace-vörpuninni og nokkrum eiginleikum hennar sem dæmi um heildavarpanir. Laplace-vörpun er notuð í verkfræði og eðlisfræði til að einfalda útreikninga við lausn tiltekinna

verkefna. Hún tekur föll af tíma og varpar þeim í föll af tíðni. Í mörgum tilvikum eru útreikningar á tíðnisviði mun einfaldari en samsvarandi útreikningar á tímasviði.

Laplace-vörpunin er skilgreind með heildinu

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt.$$

Takið eftir að inntak Laplace-vörpunar er fall af tíma, $f(t)$, en úttakið er fall af tíðni, $F(s)$. Í mörgum hagnýtum dæmum þarf að nota tvinntölur (með þvertölunni $i=\sqrt{-1}$), en í þessu verkefni takmörkum við okkur við föll af rauntölum.

Byrjum á einföldu dæmi. Hér reiknum við Laplace-vörpun $f(t)=t$. Þá fæst

3

$$L\{t\}=\int_0^\infty t\,e^{-st}\,dt.$$

Þetta er óeiginlegt heildi og því setjum við það fram sem markgildi:

$$L\{t\}=\int_0^\infty t\,e^{-st}\,dt=\lim_{z\to\infty}\int_0^z t\,e^{-st}\,dt.$$

Nú reiknum við heildið með hlutheildun. Takið eftir að heildað er með tilliti til t og því lítum við á breytuna s sem fasta. Þá fæst

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= e^{-st}dt \\ du &= dt & v &= -\tfrac{1}{s}e^{-st}. \end{aligned}$$

Þá fáum við

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty}\int_0^z te^{-st}dt &= \lim_{z\to\infty}\left[\left[-\tfrac{t}{s}e^{-st}\right]\Big|_0^z+\tfrac{1}{s}\int_0^z e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{z\to\infty}\left[\left[-\tfrac{z}{s}e^{-sz}+\tfrac{0}{s}e^{-0s}\right]+\tfrac{1}{s}\int_0^z e^{-st}dt\right] \\ &= \lim_{z\to\infty}\left[\left[-\tfrac{z}{s}e^{-sz}+0\right]-\tfrac{1}{s}\left[\tfrac{e^{-st}}{s}\right]\Big|_0^z\right] \\ &= \lim_{z\to\infty}\left[\left[-\tfrac{z}{s}e^{-sz}\right]-\tfrac{1}{s^2}[e^{-sz}-1]\right] \\ &= \lim_{z\to\infty}\left[-\tfrac{z}{se^{sz}}\right]-\lim_{z\to\infty}\left[\tfrac{1}{s^2e^{sz}}\right]+\lim_{z\to\infty}\tfrac{1}{s^2} \\ &= 0-0+\tfrac{1}{s^2} \\ &= \tfrac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

1. Reiknið Laplace-vörpun $f(t)=1$.
2. Reiknið Laplace-vörpun $f(t)=e^{-3t}$.
3. Reiknið Laplace-vörpun $f(t)=t^2$. (Athugið að hlutheilda þarf tvisvar.)

Laplace-varpanir eru oft notaðar til að leysa deildajöfnur. Deildajöfnur verða ekki teknar ítarlega fyrir fyrr en síðar í bókinni. Skoðum nú sambandið milli Laplace-vörpunar falls

og Laplace-vörpunar afleiðu þess.

Byrjum á skilgreiningu Laplace-vörpunarinnar. Þá er

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt=\lim_{z\to\infty}\int_0^{z} e^{-st}f(t)\,dt.$$

4. Notið hlutheildun til að reikna $\lim_{z\to\infty}\int_0^{z} e^{-st}f(t)\,dt$. (Látum $u=f(t)$ og $dv=e^{-st}dt$.)

Eftir hlutheildun og útreikning markgildisins má sjá að

$$L\{f(t)\}=\frac{f(0)}{s}+\frac{1}{s}\left[L\{f'(t)\}\right].$$

Þá er

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0).$$

Deildun á tímasviði jafngildir því margföldun með s á tíðnisviði.

Að lokum skoðum við í þessu verkefni sambandið milli Laplace-vörpunar $f(t)$ og Laplace-vörpunar stofnfalls þess. Látum $g(t)=\int_0^{t} f(u)\,du$. Þá er

$$L\{g(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}g(t)\,dt=\lim_{z\to\infty}\int_0^{z} e^{-st}g(t)\,dt.$$

5. Notið hlutheildun til að reikna $\lim_{z\to\infty}\int_0^{z} e^{-st}g(t)\,dt$. (Látum $u=g(t)$ og $dv=e^{-st}dt$. Athugið jafnframt að samkvæmt skilgreiningu $g(t)$, er $du=f(t)\,dt$.)

Eins og vænta má ætti að fást

$$L\{g(t)\}=\frac{1}{s}\cdot L\{f(t)\}.$$

Heildun á tímasviði jafngildir deilingu með s á tíðnisviði.

Æfingar úr undirkafla 3.7

Reiknið eftirfarandi heildi. Ef heildið er ekki samleitið, svarið „ósamleitið“.

347.

$$\int_2^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}$$

348.

$$\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

349.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

350.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$$

351.

$$\int_1^\infty x e^{-x}\,dx$$

352.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

353. Ákvarðið án heildunar hvort heildið $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ sé samleitið eða ósamleitið með því að bera fallið $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ saman við $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

354. Ákvarðið án heildunar hvort heildið $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ sé samleitið eða ósamleitið.

Ákvarðið hvort óeiginlegu heildin séu samleitin eða ósamleitin. Finnið gildi samleitnu heildanna ef unnt er.

355.

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$$

356.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$$

357.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

358.

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

359.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} \, dx$$

360.

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

361.

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(1+x)^2}$$

362.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx$$

363.

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

364.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$$

365.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

366.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$$

367.

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$$

368.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

369.

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

370.

$$\int_1^\infty \frac{5}{x^3}\,dx$$

371.

$$\int_3^5 \frac{5}{(x-4)^2}\,dx$$

Ákvarðið hvort heildin hér á eftir séu samleitin með því að bera þau saman við gefna heildið. Ef heildið er samleitið, finnið markgildi þess.

372. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x}$; berið saman við $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

373. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; berið saman við $\int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Reiknið heildin. Ef heildi er ósamleitið, svarið „ósamleitið“.

374.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^e}$$

375.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\pi}$$

376.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

377.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$$

378.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$$

379.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

380.

$$\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x} dx$$

381.

$$\int_{0}^{e} \ln(x) dx$$

382.

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx$$

383.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$$

384.

$$\int_{0}^{\infty} e^{x} dx$$

Reiknið óeiginlegu heildin. Hvert þeirra hefur óendanlega ósamfelldni, annaðhvort í endapunkti eða í innri punkti bilsins.

385.

$$\int_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$$

386.

$$\int_{-27}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$$

387.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

388.

$$\int_6^{24} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-36}}$$

389.

$$\int_0^4 x\ln(4x)\,dx$$

3

390.

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

391. Reiknið $\int_{,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Farið varlega!) (Gefið svarið með þremur aukastöfum.)

392. Reiknið $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$. (Gefið svarið á nákvæmu formi.)

393. Reiknið $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$.

394. Finnið flatarmál svæðisins í fyrsta fjórðungi milli ferilsins $y=e^{-6x}$ og x-ássins.

395. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af ferlinum $y=\frac{7}{x^2}$, x-ásnum og til vinstri af línunni $x=1$.

396. Finnið flatarmálið undir ferlinum $y=\frac{1}{(x+1)^{3/2}}$, sem afmarkast til vinstri af $x=3$.

397. Finnið flatarmálið undir $y=\frac{5}{1+x^2}$ í fyrsta fjórðungi.

398. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast við snúning um x-ás á svæðinu undir ferlinum $y=\frac{3}{x}$ frá $x=1$ til $x=\infty$.

399. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast við snúning um y-ás á svæðinu undir ferlinum $y=6e^{-2x}$ í fyrsta fjórðungi.

400. Finnið rúmmál snúðsins sem myndast við snúning um x-ás á svæðinu undir ferlinum $y=3e^{-x}$ í fyrsta fjórðungi.

Laplace-vörpun samfellds falls á bilinu $[0,\infty)$ er skilgreind með $F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$ (sjá Nemendaverkefni). Skilgreiningin er notuð til að leysa mikilvæg upphafsgildisverkefni fyrir deildajöfnur eins og rætt verður síðar. Skilgreiningarmengi F er mengi allra rauntalna s sem gera óeiginlega heildið samleitið. Finnið Laplace-vörpunina F fyrir hvert fallanna hér á eftir og gefið upp skilgreiningarmengi F.

401.

$$f(x)=1$$

402.

$$f(x)=x$$

403.

$$f(x)=\cos(2x)$$

404.

$$f(x)=e^{ax}$$

405. Notið formúluna fyrir bogalengd til að sýna að ummál hringsins $x^2+y^2=1$ sé 2π.

Óneikvætt fall er þéttleikafall líkindadreifingar ef það uppfyllir skilgreininguna $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=1$. Líkurnar á að slembibreyta x liggi milli a og b eru $P(a\le x\le b)=\int_a^b f(t)\,dt$.

406. Sýnið að $f(x)=\begin{cases}0 & \text{ef } x<0\\ 7e^{-7x} & \text{ef } x\ge 0\end{cases}$ sé þéttleikafall líkindadreifingar.

407. Finnið líkurnar á að x liggi milli 0 og 0,3. (Notið fallið sem skilgreint var í verkefninu á undan.) Gefið svarið með fjórum aukastöfum.

Lykilhugtök

algild skekkja

ef B er mat á stærð með raungildið A, þá er algilda skekkjan gefin með $|A-B|$

tölvualgebrukerfi (CAS)

tækni sem leysir margs konar stærðfræðileg verkefni, þar á meðal heildun

óeiginlegt heildi
heildi yfir óendanlegt bil eða heildi falls sem hefur óendanlega ósamfelldni á bilinu; óeiginlegt heildi er skilgreint með markgildi. Óeiginlega heildið er samleitið ef markgildið er endanleg rauntala; annars er það ósamleitið

hlutheildun
heildunaraðferð sem breytir einu heildi í annað með formúlunni $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

heildatafla
tafla yfir heildunarformúlur

miðpunktsregla
regla sem notar Riemann-summu af gerðinni $M_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$, þar sem m_i er miðpunktur i-ta hlutbilsins; summan nálgar $\int_a^b f(x)\,dx$

töluleg heildun
safn tölulegra aðferða sem notaðar eru til að nálga gildi ákveðins heildis, þar á meðal miðpunktsreglan, trapisureglan og regla Simpsons

stofnbrotaliðun
aðferð til að liða rætt fall í summu einfaldra ræðra falla

veldislækkunarformúla
regla sem breytir heildi veldis hornafalls í heildi með lægra veldi

hlutfallsleg skekkja
algild skekkja sem hlutfall af algildi raungildisins, gefin með $\left|\frac{A-B}{A}\right| = \left|\frac{A-B}{A}\right| \cdot 100\,\%$

regla Simpsons
regla sem nálgar $\int_a^b f(x)\,dx$ með því að heilda bútavíst annars stigs fall. Nálgunin S_n á $\int_a^b f(x)\,dx$ er gefin með

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}\left(\begin{array}{c} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) \\ + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{array}\right)$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ með trapisum

heildi hornafalla
heildi sem inniheldur veldi og margfeldi hornafalla

innsetning með hornaföllum

heildunaraðferð sem breytir algebrulegu heildi sem inniheldur segðir af gerðinni $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, eða $\sqrt{x^2-a^2}$ í heildi hornafalla

Lykiljöfnur

Hlutheildunarformúlan	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
Hlutheildunarformúla fyrir ákveðin heildi	$\int_a^b u\,dv = uv\Big\|_a^b - \int_a^b v\,du$

Til að heilda margfeldi sem innihalda $\sin(ax)$, $\sin(bx)$, $\cos(ax)$, og $\cos(bx)$, skal nota innsetningarnar.

Margfeldi sínusfalla	$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)x) - \frac{1}{2}\cos((a+b)x)$
Margfeldi sínus- og kósínusfalla	$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\sin((a-b)x) + \frac{1}{2}\sin((a+b)x)$
Margfeldi kósínusfalla	$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\cos((a-b)x) + \frac{1}{2}\cos((a+b)x)$
Veldislækkunarformúla	$\int \sec^n x\,dx = \frac{sec^{n-2}x\ \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx\,;n\neq 1$
Veldislækkunarformúla	$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2}x\,dx$

Miðpunktsregla	$M_n=\sum_{i=1}^{n} f\left(m_i\right)\Delta x$
Trapisuregla	$T_n=\frac{1}{2}\Delta x\left(f\left(x_0\right)+2f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)+\cdots+2f\left(x_{n-1}\right)+f\left(x_n\right)\right)$
Regla Simpsons	$S_n=\frac{\Delta x}{3}\left(\begin{array}{c} f\left(x_0\right)+4f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)+4f\left(x_3\right)+2f\left(x_4\right)+4f\left(x_5\right)+\cdots+2f\left(x_{n-2}\right) \\ +4f\left(x_{n-1}\right)+f\left(x_n\right) \end{array}\right)$
Skekkjumörk miðpunktsreglu	Skekkja í $M_n\leq\frac{M\left(b-a\right)^3}{24n^2}$
Skekkjumörk trapisureglu	Skekkja í $T_n\leq\frac{M\left(b-a\right)^3}{12n^2}$
Skekkjumörk reglu Simpsons	Skekkja í $S_n\leq\frac{M\left(b-a\right)^5}{180n^4}$
Óeiginleg heildi	$\int_a^{+\infty} f\left(x\right)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f\left(x\right)dx$ $\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f\left(x\right)dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^0 f\left(x\right)dx+\int_0^{+\infty} f\left(x\right)dx$

3

Meginatriði

3.1 Hlutheildun

- Með hlutheildunarformúlunni má skipta einu heildi út fyrir annað sem kann að vera auðveldara að reikna.
- Hlutheildun má nota fyrir bæði ákveðin og óákveðin heildi.

3.2 Heildi hornafalla

- Heildi hornafalla má reikna með ýmsum aðferðum. Þær eru meðal annars
  1. Að beita samsemdum hornafalla til að endurrita heildið svo reikna megi það með u-innsetningu

2. Að nota hlutheildun
3. Að beita samsemdum hornafalla til að endurrita margfeldi sínus- og kósínusfalla með mismunandi rökum sem summu stakra sínus- og kósínusfalla
4. Að beita lækkunarformúlum

3.3 Innsetning með hornaföllum

- Fyrir heildi sem innihalda $\sqrt{a^2 - x^2}$, skal nota innsetninguna $x = a\sin\theta$ og $dx = a\cos\theta\, d\theta$.
- Fyrir heildi sem innihalda $\sqrt{a^2 + x^2}$, skal nota innsetninguna $x = a\tan\theta$ og $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$.
- Fyrir heildi sem innihalda $\sqrt{x^2 - a^2}$, skal nota innsetninguna $x = a\sec\theta$ og $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$.

3.4 Stofnbrotaliðun

- Stofnbrotaliðun er aðferð til að liða rætt fall í summu einfaldra ræðra falla sem má heilda með aðferðum sem áður hafa verið kynntar.
- Þegar stofnbrotaliðun er beitt þarf að ganga úr skugga um að stig teljarans sé lægra en stig nefnarans. Ef svo er ekki þarf fyrst að gera langdeilingu.
- Form liðunarinnar ræðst af gerð þáttanna í nefnaranum. Þeir geta verið einfaldir línulegir þættir, endurteknir línulegir þættir, einfaldir núllstöðvalausir annars stigs þættir og endurteknir núllstöðvalausir annars stigs þættir.

3.5 Aðrar heildunaraðferðir

- Nota má heildatöflu til að reikna óákveðin heildi.
- Nota má tölvualgebrukerfi (CAS) til að reikna óákveðin heildi.
- Það getur kostað nokkra vinnu að sýna fram á að lausnir sem fást með ólíkum aðferðum séu jafngildar.

3.6 Töluleg heildun

- Nota má tölulega heildun til að nálga gildi ákveðinna heilda þegar erfitt er að setja heildið fram á lokuðu formi eða þegar aðeins þarf nálgunargildi þess.
- Algengustu aðferðirnar við tölulega heildun eru miðpunktsreglan, trapisureglan og regla Simpsons.
- Miðpunktsreglan nálgar ákveðna heildið með rétthyrningum en trapisureglan með trapisum.
- Regla Simpsons nálgar ákveðna heildið með því að nálga fyrst upprunalega fallið með föllum sem eru annars stigs á köflum.

3.7 Óeiginleg heildi

- Heildi falla yfir óendanleg bil eru skilgreind með markgildum.
- Heildi falls yfir bil þar sem fallið er ósamfellt í endapunkti bilsins má skilgreina með markgildi.
- Ákvarða má hvort óeiginlegt heildi sé samleitið eða ósamleitið með því að bera það saman við annað óeiginlegt heildi sem vitað er um hvort sé samleitið eða ósamleitið.

Yfirlitsverkefni

Ákvarðið í verkefnunum hér á eftir hvort staðhæfingin sé sönn eða ósönn. Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi.

408. Ekki er hægt að heilda $\int e^x \sin(x)\,dx$ með hlutheildun.

409. Ekki er hægt að heilda $\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$ með stofnbrotaliðun.

410. Í tölulegri heildun minnkar skekkjan þegar punktum er fjölgað.

411. Með hlutheildun má alltaf reikna heildið.

Í eftirfarandi verkefnum skal reikna heildið með tilgreindri aðferð.

412. $\int x^2 \sin(4x)\,dx$ með hlutheildun

413. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+16}}\,dx$ með innsetningu með hornaföllum

414. $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$ með hlutheildun

415. $\int \frac{3x}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$ með stofnbrotaliðun

416. $\int \frac{x^5}{\left(4x^2+4\right)^{5/2}}\,dx$ með innsetningu með hornaföllum

417. $\int \frac{\sqrt{4-\sin^2(x)}}{\sin^2(x)}\cos(x)\,dx$ með heildatöflu eða tölvualgebrukerfi (CAS)

Í eftirfarandi verkefnum skal heilda með aðferð að eigin vali.

418.

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx$$

419.

$$\int x^3\sqrt{x^2+2}\,dx$$

420.

$$\int \frac{3x^2+1}{x^4-2x^3-x^2+2x}\,dx$$

421.

$$\int \frac{1}{x^4+4}\,dx$$

422.

$$\int \frac{\sqrt{3+16x^4}}{x^3}\,dx$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nálga heildin með miðpunktsreglunni, trapisureglunni og reglu Simpsons. Notið fjögur hlutbil og námundið að þremur aukastöfum.

423. **[T]** $\int_1^2 \sqrt{x^5+2}\,dx$

424. **[T]** $\int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-\sin\left(x^2\right)}\,dx$

425. **[T]** $\int_1^4 \frac{\ln(1/x)}{x}\,dx$

Í eftirfarandi verkefnum skal reikna heildin ef hægt er.

426. $\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx$, ákvarðið fyrir hvaða gildi n heildið er samleitið og fyrir hvaða gildi það er ósamleitið.

427.

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skoða gammafallið sem er skilgreint með

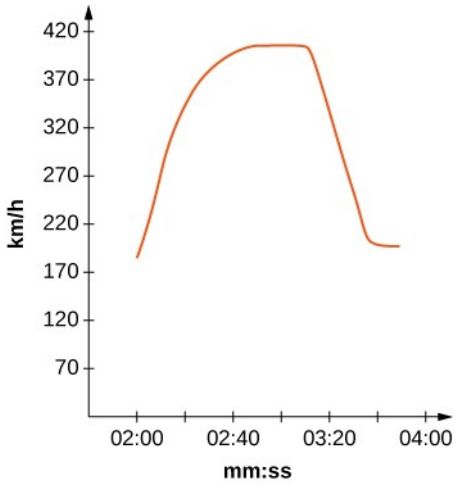
$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-y}\,y^{a-1}\,dy$.

428. Sýnið að $\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)$.

429. Almennið niðurstöðuna og sýnið að $\Gamma(a)=(a-1)!$, að því gefnu að a sé jákvæð heiltala.

3

Hraðskreiðasti bíll í heimi, Bugatti Veyron, getur náð allt að 408 km/h. Grafið sýnir hraða hans.



430. **[T]** Notið grafið til að meta hraðann á 20 sek. fresti og lýsið gögnunum með grafi af gerðinni $v(t)=a\exp^{bx}\sin(cx)+d$. (Vísbending: Gætið að tímaeiningunum.)

431. **[T]** Notið fallið úr verkefninu á undan til að finna nákvæmlega hversu langt Bugatti Veyron ók á þeim 1 mín. 40 sek. sem grafið nær yfir.

4. KAFLI

Inngangur að deildajöfnum



Mynd 4.1 Virginíuhjörtur (Odocoileus virginianus) í austurhluta Bandaríkjanna. Nota má deildajöfnur til að rannsaka dýrastofna. (Mynd: breytt verk eftir Rachel Kramer, Flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 4.1 Grunnatriði deildajafna
- 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir
- 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur
- 4.4 Lógistíska jafnan
- 4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur

Inngangur

Mörgum raunverulegum fyrirbærum má lýsa með stærðfræðilegum líkönum sem byggjast á deildajöfnum. Stofnvöxtur, geislavirk hrörnun, líkön af samspili rándýra og bráðar og gormkerfi með massa eru fjögur dæmi um slík fyrirbæri. Í þessum kafla skoðum við nokkur slík hagnýt viðfangsefni.

Gerum ráð fyrir að við viljum rannsaka hvernig stofn hjartardýra breytist með tímanum og ákvarða heildarfjölda dýranna á tilteknu svæði. Fyrst getum við fylgst með stofninum um nokkurt skeið, áætlað heildarfjölda hjartardýranna og síðan leitt út stærðfræðilegt líkan fyrir mismunandi aðstæður út frá ýmsum forsendum. Oft er tekið tillit til þátta eins og umhverfisáhrifa, þröskuldsgilda stofnstærðar og rándýra. Í þessum kafla sjáum við hvernig nota má deildajöfnur til að spá fyrir um hvernig stofnstærð þróast með tímanum (sjá dæmi 4.14).

Annað markmið kaflans er að þróa lausnaraðferðir fyrir mismunandi gerðir deildajafna. Eftir því sem jöfnurnar verða flóknari verða lausnaraðferðirnar einnig flóknari. Raunar mætti helga heilt námskeið því að rannsaka slíkar jöfnur. Í þessum kafla skoðum við nokkrar gerðir deildajafna og viðeigandi lausnaraðferðir.

4

4.1 Grunnatriði deildajafna

NÁMSMARKMIÐ

- 4.1.1 Ákvarða stig deildajöfnu.
- 4.1.2 Útskýra hvað átt er við með lausn deildajöfnu.
- 4.1.3 Greina á milli almennrar lausnar og sérlausnar deildajöfnu.
- 4.1.4 Þekkja upphafsgildisverkefni.
- 4.1.5 Ákvarða hvort gefið fall sé lausn deildajöfnu eða upphafsgildisverkefnis.

Stærðfræðigreining fjallar um breytingar og breytingarhraði er settur fram með afleiðum. Ein algengasta leiðin til að nota stærðfræðigreiningu er því að setja fram jöfnu sem inniheldur óþekkt fall $y=f(x)$ og afleiðu þess. Slík jafna nefnist deildajafna. Lausnir slíkra jafna veita oft upplýsingar um hvernig stærðir breytast og varpa gjarnan ljósi á hvernig og hvers vegna breytingarnar verða.

Aðferðir við að leysa deildajöfnur geta verið af ýmsum toga, svo sem bein lausn, notkun grafa eða tölvureikningar. Í þessum kafla kynnum við meginhugmyndirnar og síðar í námskeiðinu verður fjallað nánar um þær. Í þessum undirkafla skoðum við hvað deildajöfnur eru, hvernig staðfesta má lausnir þeirra, nokkrar aðferðir við að leysa þær og dæmi um algengar og gagnlegar jöfnur.

Almennar deildajöfnur

Skoðum jöfnuna $y' = 3x^2$, sem er dæmi um deildajöfnu vegna þess að hún inniheldur afleiðu. Tengsl eru milli breytanna x og y: y er óþekkt fall af x. Vinstri hlið jöfnunnar er enn fremur

afleiða y. Við getum því túlkað jöfnuna þannig: Byrjum með eitthvert fall $y=f(x)$ og finnum afleiðu þess. Niðurstaðan verður að vera jöfn $3x^2$. Hvaða fall hefur afleiðu sem er jöfn $3x^2$? Eitt slíkt fall er $y=x^3$, og það telst því lausn deildajöfnunnar.

SKILGREINING

Deildajafna er jafna sem inniheldur óþekkt fall $y=f(x)$ og eina eða fleiri afleiður þess. Lausn deildajöfnu er fall $y=f(x)$ sem uppfyllir deildajöfnuna þegar fallið f og afleiður þess eru sett inn í jöfnuna.

MARGMIÐLUN

Farið á þessa vefsíðu til að kanna efnið nánar.

Nokkur dæmi um deildajöfnur og lausnir þeirra eru sýnd í töflu 4.1.

Tafla 4.1 Dæmi um deildajöfnur og lausnir þeirra

Jafna	Lausn
$y'=2x$	$y=x^2$
$y'+3y=6x+11$	$y=e^{-3x}+2x+3$
$y''-3y'+2y=24e^{-2x}$	$y=3e^{x}-4e^{2x}+2e^{-2x}$

Athugið að lausn deildajöfnu er ekki endilega einstök, einkum vegna þess að afleiða fasta er núll. Til dæmis er $y=x^2+4$ einnig lausn fyrstu deildajöfnunnar í töflu 4.1. Við snúum aftur að þessari hugmynd síðar í þessum undirkafla. Skoðum fyrst hvað felst í því að fall sé lausn deildajöfnu.

DÆMI 4.1

Lausnir deildajafna sannreyndar

Sannreynið að fallið $y=e^{-3x}+2x+3$ sé lausn deildajöfnunnar $y'+3y=6x+11$.

Lausn

Til að sannreyna lausnina reiknum við fyrst y' með keðjureglunni fyrir afleiður. Þá fæst $y'=-3e^{-3x}+2$. Næst setjum við y og y' inn í vinstri hlið deildajöfnunnar:

$$\left(-3e^{-3x}+2\right)+3\left(e^{-3x}+2x+3\right).$$

Segðina sem fæst má einfalda með því að margfalda fyrst inn í svigana:

$$-3e^{-3x}+2+3e^{-3x}+6x+9.$$

Þegar samstofna liðir eru teknir saman fæst segðin $6x+11$, sem er jöfn hægri hlið deildajöfnunnar. Þar með er staðfest að $y=e^{-3x}+2x+3$ sé lausn deildajöfnunnar.

STÖÐUMAT 4.1

Sannreynið að $y=2e^{3x}-2x-2$ sé lausn deildajöfnunnar $y'-3y=6x+4$.

Hentugt er að skilgreina eiginleika deildajafna sem auðvelda okkur að ræða um þær og flokka þær. Grunneiginleiki deildajöfnu er stig hennar.

SKILGREINING

Stig deildajöfnu er stig hæstu afleiðu óþekkta fallsins sem kemur fyrir í jöfnunni.

DÆMI 4.2

Stig deildajöfnu ákvarðað

Hvert er stig hverrar deildajöfnu hér fyrir neðan?

a. $y'-4y=x^2-3x+4$

b. $x^2y'''-3xy''+xy'-3y=\sin x$

c. $\frac{4}{x}y^{(4)}-\frac{6}{x^2}y''+\frac{12}{x^4}y=x^3-3x^2+4x-12$

Lausn

a. Hæsta afleiðan í jöfnunni er y', og því er stigið 1.

b. Hæsta afleiðan í jöfnunni er y''', og því er stigið 3.

c. Hæsta afleiðan í jöfnunni er $y^{(4)}$, og því er stigið 4.

STÖÐUMAT 4.2

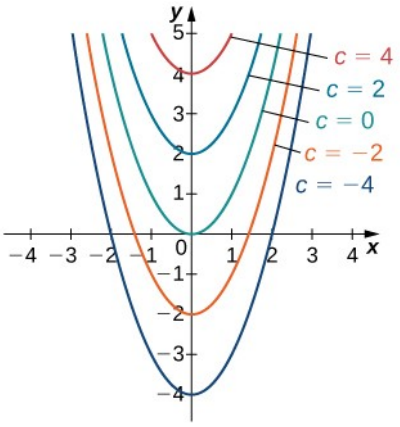
Hvert er stig eftirfarandi deildajöfnu?

$$\left(x^4-3x\right)y^{(5)}-\left(3x^2+1\right)y'+3y=\sin x\cos x$$

Almennar lausnir og sérlausnir

Við höfum þegar séð að deildajafnan $y'=2x$ hefur að minnsta kosti tvær lausnir: $y=x^2$ og $y=x^2+4$. Eini munurinn á þessum tveimur lausnum er síðasti liðurinn, sem er fasti. Hvað gerist ef síðasti liðurinn er annar fasti? Verður segðin þá enn lausn deildajöfnunnar? Raunar er hvert fall af gerðinni $y=x^2+C$, þar sem C táknar einhvern fasta, einnig lausn. Ástæðan er sú að afleiða x^2+C er $2x$, óháð gildi C. Sýna má að hver lausn þessarar deildajöfnu verði að vera af gerðinni $y=x^2+C$. Þetta er dæmi um almenna lausn deildajöfnu. Gröf nokkurra

slíkra lausna eru sýnd á mynd 4.2. (Athugið: Á grafinu notuðum við jafnar heiltölur fyrir C á bilinu frá -4 til 4. Engin takmörkun er þó á gildi C; það þarf ekki að vera heiltala.)



Mynd 4.2 Lausnafjölskylda deildajöfnunnar $y' = 2x$.

Í þessu dæmi getum við valið hvaða lausn sem er. Til dæmis tilheyrir $y = x^2 - 3$ lausnafjölskyldu deildajöfnunnar. Slík lausn nefnist sérlausn deildajöfnunnar. Oft má ákvarða sérlausn ótvírætt ef frekari upplýsingar um verkefnið eru gefnar.

DÆMI 4.3

Sérlausn fundin

Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' = 2x$ sem fer í gegnum punktinn $(2, 7)$.

Lausn

Hvert fall af gerðinni $y = x^2 + C$ er lausn þessarar deildajöfnu. Til að ákvarða gildi C, setjum við gildin $x = 2$ og $y = 7$ inn í jöfnuna og leysum jöfnuna með tilliti til C:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + C \\ 7 &= 2^2 + C = 4 + C \\ C &= 3. \end{aligned}$$

Sérlausnin sem fer í gegnum punktinn $(2, 7)$ er því $y = x^2 + 3$.

STÖÐUMAT 4.3

Finnið sérlausn deildajöfnunnar

$$y' = 4x + 3$$

sem fer í gegnum punktinn $(1, 7)$, að því gefnu að $y = 2x^2 + 3x + C$ sé almenn lausn deildajöfnunnar.

Upphafsgildisverkefni

Yfirleitt hefur gefin deildajafna óendanlega margar lausnir og því er eðlilegt að spyrja hvaða lausn eigi að nota. Til að velja eina lausn þarf frekari upplýsingar. Meðal gagnlegra upplýsinga er upphafsgildi, það er röðuð tvennd sem notuð er til að finna sérlausn.

Deildajafna ásamt einu eða fleiri upphafsgildum nefnist upphafsgildisverkefni. Almenna reglan er sú að upphafsgildisverkefni þurfi jafnmörg upphafsgildi og stig deildajöfnunnar segir til um. Ef deildajafnan er til dæmis $y' = 2x$, þá er $y(3) = 7$ upphafsgildi og saman mynda jöfnurnar upphafsgildisverkefni. Deildajafnan $y'' - 3y' + 2y = 4e^x$ er annars stigs og því þarf tvö upphafsgildi. Í upphafsgildisverkefnum af hærra stigi en einu skal nota sama gildi óháðu breytunnar. Dæmi um upphafsgildi fyrir þessa annars stigs jöfnu eru $y(0) = 2$ og $y'(0) = -1$. Þessi tvö upphafsgildi ásamt deildajöfnunni mynda upphafsgildisverkefni. Heitið vísar til þess að óháða breytan í óþekkta fallinu er oft t, sem táknar tíma. Gildið $t = 0$ táknar þá upphaf verkefnisins.

DÆMI 4.4

4

Lausn upphafsgildisverkefnis sannreynd

Sannreynið að fallið $y = 2e^{-2t} + e^t$ sé lausn upphafsgildisverkefnisins

$$y' + 2y = 3e^t, \quad y(0) = 3.$$

Lausn

Til að fall uppfylli upphafsgildisverkefni verður það að uppfylla bæði deildajöfnuna og upphafsskilyrðið. Til að sýna að y uppfylli deildajöfnuna byrjum við á að reikna y'. Þá fæst $y' = -4e^{-2t} + e^t$. Næst setjum við bæði y og y' inn í vinstri hlið deildajöfnunnar og einföldum:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= \left(-4e^{-2t} + e^t\right) + 2\left(2e^{-2t} + e^t\right) \\ &= -4e^{-2t} + e^t + 4e^{-2t} + 2e^t \\ &= 3e^t. \end{aligned}$$

Þetta er jafnt hægri hlið deildajöfnunnar og því leysir $y = 2e^{-2t} + e^t$ deildajöfnuna. Næst reiknum við $y(0)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= 2e^{-2(0)} + e^0 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Niðurstaðan staðfestir upphafsgildið. Gefna fallið uppfyllir því upphafsgildisverkefnið.

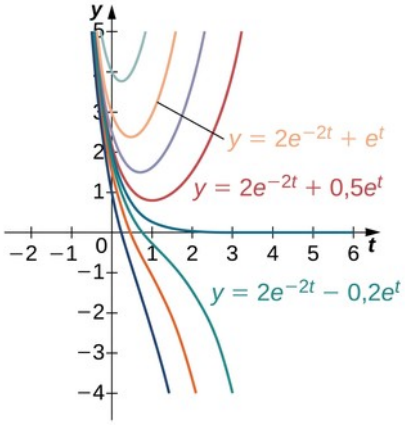
STÖÐUMAT 4.4

Sannreynið að $y = 3e^{2t} + 4\sin t$ sé lausn upphafsgildisverkefnisins

$$y' - 2y = 4\cos t - 8\sin t, \quad y(0) = 3.$$

Í dæmi 4.4 var upphafsgildisverkefnið tvískipt. Fyrri hlutinn var deildajafnan $y' + 2y = 3e^t$, og síðari hlutinn var upphafsgildið $y(0) = 3$. Saman mynduðu þessar tvær jöfnur upphafsgildisverkefnið.

Þetta gildir almennt. Upphafsgildisverkefni er tvískipt: það inniheldur deildajöfnu og upphafsskilyrði. Deildajafnan hefur lausnafjölskyldu en upphafsskilyrðið ákvarðar gildi C. Lausnafjölskylda deildajöfnunnar í dæmi 4.4 er gefin með $y = 2e^{-2t} + Ce^t$. Lausnafjölskyldan er sýnd á mynd 4.3 og sérlausnin $y = 2e^{-2t} + e^t$ er merkt inn á hana.



Mynd 4.3 Lausnafjölskylda deildajöfnunnar $y' + 2y = 3e^t$. Sérlausnin $y = 2e^{-2t} + e^t$ er merkt inn á myndina.

DÆMI 4.5

Upphafsgildisverkefni leyst

Leysið eftirfarandi upphafsgildisverkefni:

$$y' = 3e^x + x^2 - 4,\ y(0) = 5.$$

Lausn

Til að leysa upphafsgildisverkefnið finnum við fyrst almenna lausnafjölskyldu. Til þess finnum við stofnfall beggja hliða deildajöfnunnar

$$\int y'\,dx = \int \left(3e^x + x^2 - 4\right) dx,$$

það er

$$y + C_1 = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_2.$$

(4.1)

Við getum heildað báðar hliðar vegna þess að y-liðurinn stendur einn. Athugið að heildunarfastarnir eru tveir: C_1 og C_2. Þegar jafna 4.1 er leyst með tilliti til y fæst

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + C_2 - C_1.$$

Þar sem C_1 og C_2 eru báðir fastar er $C_2 - C_1$ einnig fasti. Við getum því skilgreint $C = C_2 - C_1$, og þá fæst jafnan

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + C.$$

Næst ákvarðum við gildi C. Til þess setjum við $x = 0$ og $y = 5$ inn í jöfnu 4.1 og leysum jöfnuna með tilliti til C:

$$\begin{aligned} 5 &= 3e^0 + \tfrac{1}{3}0^3 - 4(0) + C \\ 5 &= 3 + C \\ C &= 2. \end{aligned}$$

Nú setjum við gildið $C = 2$ inn í jöfnu 4.1. Lausn upphafsgildisverkefnisins er

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2.$$

Greining

Munurinn á almennri lausn og sérlausn er sá að almenn lausn felur í sér fjölskyldu falla af óháðu breytunni, sem eru skilgreind annaðhvort beint eða óbeint. Upphafsgildið eða upphafsgildin ákvarða hvaða sérlausn í lausnafjölskyldunni uppfyllir tiltekin skilyrði.

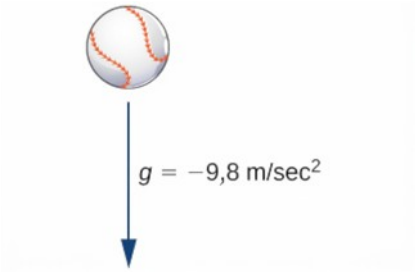
4

STÖÐUMAT 4.5

Leysið upphafsgildisverkefnið

$$y' = x^2 - 4x + 3 - 6e^x, y(0) = 8.$$

Í hagnýtum verkefnum í eðlisfræði og verkfræði skoðum við oft kraftana sem verka á hlut og notum þær upplýsingar til að skilja hreyfinguna sem af þeim getur hlotist. Ef við byrjum til dæmis með hlut við yfirborð jarðar er þyngdarkrafturinn meginkrafturinn sem verkar á hann. Eðlisfræðingar og verkfræðingar geta notað þessar upplýsingar ásamt öðru lögmáli Newtons um hreyfingu (á jöfnuforminu $F = ma$, þar sem F táknar kraft, m táknar massa og a táknar hröðun) til að leiða út jöfnu sem unnt er að leysa.



Mynd 4.4 Á hafnabolta sem fellur í lofti verkar aðeins þyngdarkrafturinn ef loftmótstaða er hunsuð.

Á mynd 4.4 gerum við ráð fyrir að eini krafturinn sem verkar á hafnabolta sé þyngdarkrafturinn. Með þeirri forsendu er loftmótstaða hunsuð. (Krafturinn vegna

loftmótstöðu verður skoðaður síðar.) Þyngdarhröðunin við yfirborð jarðar, g, er um það bil $9{,}8\ \text{m/s}^2$. Við veljum viðmiðunarkerfi þar sem yfirborð jarðar er í hæðinni 0 metrar. Látum $v(t)$ tákna hraða hlutarins í metrum á sekúndu. Ef $v(t)>0$, er boltinn á uppleið en ef $v(t)<0$, er hann á niðurleið (mynd 4.5).



Mynd 4.5 Mögulegir hraðar hafnabolta á upp- og niðurleið.

Markmið okkar er að finna hraðann $v(t)$ á hverjum tíma t. Til þess setjum við upp upphafsgildisverkefni. Gerum ráð fyrir að massi boltans sé m, þar sem m er mælt í kílógrömmum. Við notum annað lögmál Newtons, sem segir að krafturinn sem verkar á hlut sé jafn massa hans margfölduðum með hröðun hans $(F=ma)$. Hröðun er afleiða hraða og því er $a(t)=v'(t)$. Krafturinn sem verkar á hafnaboltann er því gefinn með $F=mv'(t)$. Þessi kraftur verður hins vegar að vera jafn þyngdarkraftinum sem verkar á hlutinn. Með öðru lögmáli Newtons er sá kraftur gefinn með $F_g=-mg$, því að hann verkar niður á við. Við fáum því jöfnuna $F=F_g$, sem verður $mv'(t)=-mg$. Þegar báðum hliðum jöfnunnar er deilt með m fæst jafnan

$$v'(t)=-g.$$

Athugið að deildajafnan er óháð massa hlutarins.

Nú þurfum við upphafsgildi. Við viljum finna hraða og því er eðlilegt í þessu verkefni að gera ráð fyrir að upphafshraðinn sé þekktur, en það er hraðinn á tíma $t=0$. Hann er táknaður með $v(0)=v_0$.

DÆMI 4.6

Hraði hafnabolta á hreyfingu

A baseball is thrown upward from a height of 3 meters above Earth's surface with an initial velocity of $10\ \text{m/s}$, and the only force acting on it is gravity. The ball has a mass of $0{,}15\ \text{kg}$.

a. Finnið hraða hafnaboltans $v(t)$ á tíma t.

b. Hver er hraði hans eftir 2 sekúndur?

Lausn

a. Af umfjölluninni hér á undan sést að í þessum aðstæðum gildir deildajafnan

$$v'(t) = -g,$$

þar sem $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Upphafsskilyrðið er $v(0) = v_0$, þar sem $v_0 = 10\,\text{m/s}$.
Upphafsgildisverkefnið er því $v'(t) = -9{,}8\ \text{m/s}^2, v(0) = 10\ \text{m/s}$.
Til að leysa það finnum við fyrst stofnfall beggja hliða deildajöfnunnar. Þá fæst

$$\begin{aligned} \int v'(t)\,dt &= \int -9{,}8\,dt \\ v(t) &= -9{,}8t + C. \end{aligned}$$

Næst leysum við jöfnuna með tilliti til C. Til þess setjum við inn $t = 0$ og $v(0) = 10$:

$$\begin{aligned} v(t) &= -9{,}8t + C \\ v(0) &= -9{,}8(0) + C \\ 10 &= C. \end{aligned}$$

Því er $C = 10$ og hraðafallið er gefið með $v(t) = -9{,}8t + 10$.

b. Til að finna hraðann eftir 2 sekúndur setjum við $t = 2$ inn í $v(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) &= -9{,}8t + 10 \\ v(2) &= -9{,}8(2) + 10 \\ v(2) &= -9{,}6. \end{aligned}$$

Eining hraðans er metrar á sekúndu. Þar sem svarið er neikvætt fellur hluturinn með hraðanum $9{,}6\ \text{m/s}$.

STÖÐUMAT 4.6

Gerum ráð fyrir að steinn falli úr kyrrstöðu úr 100 metra hæð og að eini krafturinn sem verki á hann sé þyngdarkrafturinn. Finnið jöfnu fyrir hraðann $v(t)$ sem fall af tíma, mældan í metrum á sekúndu.

Þegar verkefni af þessari gerð hefur verið leyst er eðlilegt að spyrja í hvaða hæð yfir yfirborði jarðar hluturinn verði á tilteknum tíma. Látum $s(t)$ tákna hæð hlutarins yfir yfirborði jarðar, mælda í metrum. Þar sem hraði er afleiða staðsetningar, í þessu tilviki hæðar, fæst jafnan $s'(t) = v(t)$. Upphafsgildi er nauðsynlegt og hér hentar upphafshæð hlutarins vel. Látum upphafshæðina vera gefna með jöfnunni $s(0) = s_0$. Saman gefa þessar forsendur upphafsgildisverkefnið

$$s'(t) = v(t), s(0) = s_0.$$

Ef hraðafallið er þekkt er einnig unnt að finna staðsetningarfallið.

DÆMI 4.7

Hæð hafnabolta á hreyfingu

A baseball is thrown upward from a height of 3 meters above Earth's surface with an initial velocity of 10 m/s , and the only force acting on it is gravity. The ball has a mass of 0,15 kilogram.

a. Finnið staðsetningu hafnaboltans $s(t)$ á tíma t.

b. Hver er hæð hans eftir 2 sekúndur?

Lausn

a. Við vitum þegar að hraðafall þessa verkefnis er $v(t) = -9{,}8t + 10$. Upphafshæð hafnaboltans er 3 metrar og því er $s_0 = 3$. Upphafsgildisverkefnið í þessu dæmi er því Til að leysa upphafsgildisverkefnið finnum við fyrst stofnföllin:

$$\begin{aligned} \int s'(t)\, dt &= \int -9{,}8t + 10\, dt \\ s(t) &= -4{,}9t^2 + 10t + C. \end{aligned}$$

Næst setjum við inn $t = 0$ og leysum jöfnuna með tilliti til C:

$$\begin{aligned} s(t) &= -4{,}9t^2 + 10t + C \\ s(0) &= -4{,}9(0)^2 + 10(0) + C \\ 3 &= C. \end{aligned}$$

Staðsetningarfallið er því $s(t) = -4{,}9t^2 + 10t + 3$.

b. Hæð hafnaboltans eftir 2 s er gefin með $s(2)$:

$$\begin{aligned} s(2) &= -4{,}9(2)^2 + 10(2) + 3 \\ &= -4{,}9(4) + 23 \\ &= 3{,}4. \end{aligned}$$

Hafnaboltinn er því 3,4 metra yfir yfirborði jarðar eftir 2 sekúndur. Athygli vekur að massi boltans styttist alveg út þegar verkefnið er leyst.

Æfingar úr undirkafla 4.1

Ákvarðið stig eftirfarandi deildajafna.

1.

$$y' + y = 3y^2$$

2.

$$(y')^2 = y' + 2y$$

3.

$$y''' + y''\,y' = 3x^2$$

4.

$$y' = y'' + 3t^2$$

5.

$$\frac{dy}{dt} = t$$

6.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 3x^4$$

7.

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8\frac{dy}{dt} + 3y = 4t$$

Sannreynið að eftirfarandi föll séu lausnir gefnu deildajafnanna.

8. $y = \frac{x^3}{3}$ leysir $y' = x^2$

9. $y = 2e^{-x} + x - 1$ leysir $y' = x - y$

10. $y = e^{3x} - \frac{e^x}{2}$ leysir $y' = 3y + e^x$

11. $y = \frac{1}{1-x}$ leysir $y' = y^2$

12. $y = e^{x^2/2}$ leysir $y' = xy$

13. $y = 4 + \ln x$ leysir $xy' = 1$

14. $y = 3 - x + x\ln x$ leysir $y' = \ln x$

15. $y = 2e^x - x - 1$ leysir $y' = y + x$

16. $y = e^x + \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$ leysir $y' = \cos x + y$

17. $y = \pi e^{-\cos x}$ leysir $y' = y\sin x$

Sannreynið eftirfarandi almennu lausnir og finnið sérlausnina.

18. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' = 4x^2$ sem fer í gegnum $(-3, -30)$, að því gefnu að $y = C + \frac{4x^3}{3}$ sé almenn lausn.

19. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' = 3x^3$ sem fer í gegnum $(1; 4{,}75)$, að því gefnu að $y = C + \frac{3x^4}{4}$ sé almenn lausn.

20. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' = 3x^2 y$ sem fer í gegnum $(0, 12)$, að því gefnu að $y = C e^{x^3}$ sé almenn lausn.

21. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' = 2xy$ sem fer í gegnum $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, að því gefnu að $y = C e^{x^2}$ sé almenn lausn.

22. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' = (2xy)^2$ sem fer í gegnum $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, að því gefnu að $y = -\frac{3}{C + 4x^3}$ sé almenn lausn.

23. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y' x^2 = y$ sem fer í gegnum $\left(1, \frac{2}{e}\right)$, að því gefnu að $y = C e^{-1/x}$ sé almenn lausn.

24. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $8\frac{dx}{dt} = -2\cos(2t) - \cos(4t)$ sem fer í gegnum (π, π), að því gefnu að $x = C - \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{32}\sin(4t)$ sé almenn lausn.

25. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $\frac{du}{dt} = \tan u$ sem fer í gegnum $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, að því gefnu að $u = \sin^{-1}\left(e^{C+t}\right)$ sé almenn lausn.

26. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $\frac{dy}{dt} = e^{(t+y)}$ sem fer í gegnum $(1, 0)$, að því gefnu að $y = -\ln\left(C - e^t\right)$ sé almenn lausn.

27. Finnið sérlausn deildajöfnunnar $y'\left(1 - x^2\right) = 1 + y$ sem fer í gegnum $(0, -2)$, að því gefnu að $y = C\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} - 1$ sé almenn lausn.

Finnið almenna lausn deildajöfnunnar í eftirfarandi verkefnum.

28.

$$y' = 3x + e^x$$

29.

$$y' = \ln x + \tan x$$

30.

$$y' = \sin x \, e^{\cos x}$$

31.

$$y' = 4^x$$

32.

$$y' = \sin^{-1}(2x)$$

33.

$$y' = 2t\sqrt{t^2+16}$$

34.

$$x' = \coth t + \ln t + 3t^2$$

35.

$$x' = t\sqrt{4+t}$$

36.

$$y' = y$$

37.

$$y' = \frac{y}{x}$$

Leysið eftirfarandi upphafsgildisverkefni með upphafsgildunum $y(0)=1$ og $y(0)=-1$. Teiknið báðar lausnirnar á sama graf.

38.

$$\frac{dy}{dt} = 2t$$

39.

$$\frac{dy}{dt} = -t$$

40.

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

41.

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

42.

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

Leysið eftirfarandi upphafsgildisverkefni með upphafsgildinu $y_0 = 10$. Á hvaða tíma vex y upp í 100 eða lækkar niður í 1?

43.

$$\frac{dy}{dt} = 4t$$

44.

$$\frac{dy}{dt} = 4y$$

45.

$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

46.

$$\frac{dy}{dt} = e^{4t}$$

47.

$$\frac{dy}{dt} = e^{-4t}$$

Munið að lausnafjölskylda inniheldur lausnir deildajöfnu sem eru ólíkar um fasta. Notið reiknivél í eftirfarandi verkefnum til að teikna lausnafjölskyldu gefinnar deildajöfnu. Notið upphafsskilyrði frá $y(t=0) = -10$ til $y(t=0) = 10$ með skreflengdinni 2. Er einhver markpunktur þar sem hegðun lausnarinnar tekur að breytast?

48. **[T]** $y' = y(x)$

49. **[T]** $x\,y' = y$

50. **[T]** $y' = t^3$

51. **[T]** $y' = x + y$ (Vísbending: $y = C\,e^x - x - 1$ er almenna lausnin)

52. **[T]** $y' = x \ln x + \sin x$

53. Finnið almennu lausnina sem lýsir hraða bolta af massanum 1 kg sem kastað er upp með hraðanum a m/s.

54. Í verkefninu á undan er upphafshraði boltans sem kastað er upp $a=25$ m/s. Ritið sérlausn fyrir hraða boltans. Leysið jöfnuna til að finna hvenær boltinn lendir á jörðinni.

55. Tveimur hlutum með ólíkan massa, m_1 og m_2, er kastað upp með sama upphafshraða a m/s. Hver er munurinn á hraða þeirra eftir 1 sekúndu?

56. **[T]** Bolta af massanum 1 kílógramm er kastað upp með hraðanum $a=25$ m/s á Mars, þar sem þyngdarhröðunin er $g=-3{,}711$ m/s². Notið reiknivél til að nálga hve miklu lengur boltinn er á lofti á Mars en á jörðinni, þar sem $g=-9{,}8\,m/s^2$.

57. **[T]** Notið reiknivél í verkefninu á undan til að nálga hve miklu hærra boltinn fór á Mars, þar sem $g=-9{,}8\,m/s^2$.

58. **[T]** Bíll á hraðbraut hefur hröðunina $a=24\cos(\pi t)$, þar sem t er mælt í klukkustundum og hröðunin í km/klst². Setjið upp og leysið deildajöfnuna til að ákvarða hraða bílsins ef upphafshraði hans er 80 km/klst. Hver er hraði ökumannsins eftir 40 mínútna akstur?

59. **[T]** Finnið segð fyrir vegalengdina sem bíllinn í verkefninu á undan hefur ekið á tímanum t, að því gefnu að upphafsvegalengdin sé 0. Hve lengi er bíllinn að aka 160 km? Námundið svarið að klukkustundum og mínútum.

60. **[T]** Finnið heildarvegalengdina sem ekin er á fyrstu klukkustundinni í verkefninu á undan.

61. Setjið $y=Be^{3t}$ inn í $y'-y=8e^{3t}$ til að finna sérlausn.

62. Setjið $y=a\cos(2t)+b\sin(2t)$ inn í $y'+y=4\sin(2t)$ til að finna sérlausn.

63. Setjið $y=a+bt+ct^2$ inn í $y'+y=1+t^2$ til að finna sérlausn.

64. Setjið $y=ae^t\cos t+be^t\sin t$ inn í $y'=2e^t\cos t$ til að finna sérlausn.

65. Leysið $y'=e^{kt}$ með upphafsskilyrðinu $y(0)=0$ og leysið $y'=1$ með sama upphafsskilyrði. Þegar k stefnir á 0, hverju takið þið þá eftir?

4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir

NÁMSMARKMIÐ

- 4.2.1 Teikna stefnuvið fyrir gefna fyrsta stigs deildajöfnu.
- 4.2.2 Nota stefnuvið til að teikna lausnarferil fyrsta stigs deildajöfnu.
- 4.2.3 Nota aðferð Eulers til að nálga lausn fyrsta stigs deildajöfnu.

Það sem eftir er kaflans beinum við sjónum að ýmsum aðferðum til að leysa deildajöfnur og greina hegðun lausna þeirra. Stundum er hægt að segja fyrir um eiginleika lausnar

deildajöfnu án þess að þekkja lausnina sjálfa. Við skoðum einnig tölulegar aðferðir til að leysa deildajöfnur. Þær má forrita í ýmsum forritunarmálum eða jafnvel útfæra í töflureikni á borð við Microsoft Excel.

Stefnuvið búin til

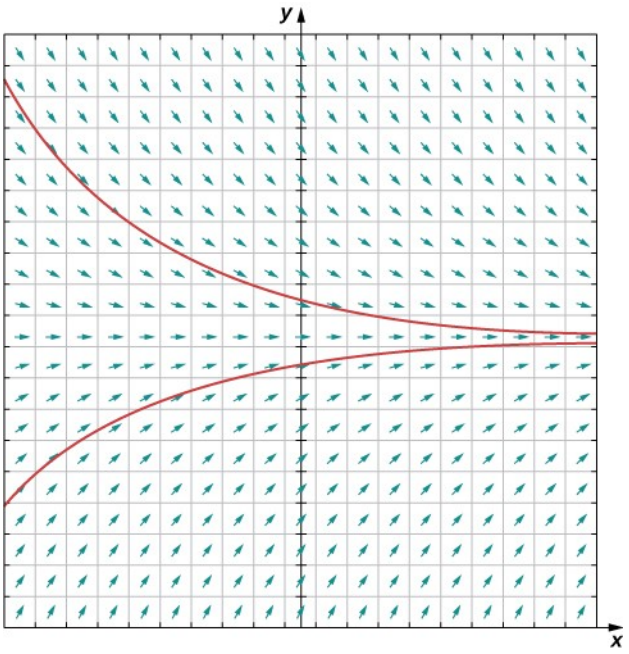
Stefnuvið (einnig kölluð hallasvið) nýtast vel til að rannsaka fyrsta stigs deildajöfnur. Við skoðum sérstaklega fyrsta stigs deildajöfnu á forminu

$$y' = f(x, y).$$

Hagnýtt dæmi um deildajöfnu af þessu tagi kemur fyrir í kólnunarlögmáli Newtons, sem við leysum nákvæmlega síðar í kaflanum. Fyrst búum við þó til stefnuvið fyrir deildajöfnuna

$$T'(t) = -0{,}4(T - 22).$$

Hér táknar $T(t)$ hitastig hlutar (í gráðum á Celsíus) á tímanum t, en umhverfishitinn er $22\,^\circ\mathrm{C}$. Mynd 4.6 sýnir stefnuvið jöfnunnar.



Mynd 4.6 Stefnuvið deildajöfnunnar $T'(t) = -0{,}4(T - 22)$. Tvær lausnir eru teiknaðar: önnur hefur lægra upphafshitastig en $22\,^\circ\mathrm{C}$ en hin hærra upphafshitastig en $22\,^\circ\mathrm{C}$.

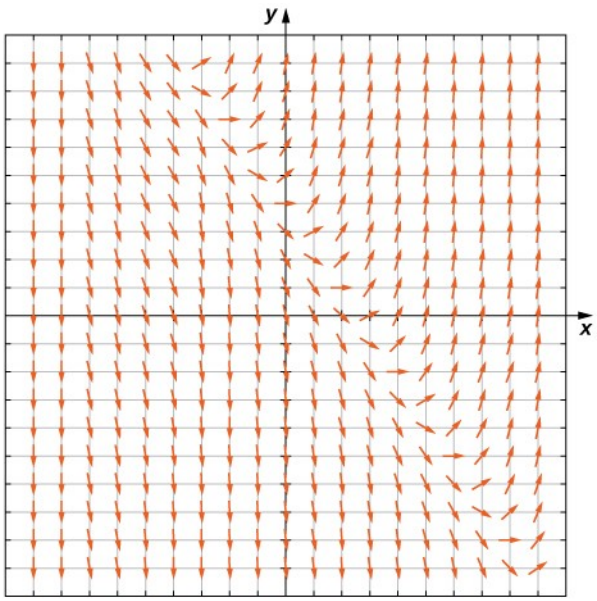
Hugmyndin að baki stefnuviði byggist á því að afleiða falls í tilteknum punkti er hallatala snertils við graf fallsins í sama punkti. Önnur dæmi um deildajöfnur sem hægt er að búa til stefnuvið fyrir eru

$$y' = 3x + 2y - 4$$
$$y' = x^2 - y^2$$
$$y' = \frac{2x+4}{y-2}.$$

Til að búa til stefnuvið byrjum við á fyrstu jöfnunni: $y' = 3x + 2y - 4$. Látum (x_0, y_0) vera einhverja raðaða tvennd og setjum tölurnar inn í hægri hlið deildajöfnunnar. Ef við veljum til dæmis $x = 1$ og $y = 2$, fæst þegar við setjum þessi gildi inn í hægri hlið deildajöfnunnar

$$\begin{aligned} y' &= 3x + 2y - 4 \\ &= 3(1) + 2(2) - 4 = 3. \end{aligned}$$

Þetta segir okkur að ef lausn deildajöfnunnar $y' = 3x + 2y - 4$ fer í gegnum punktinn $(1, 2)$, þá verður hallatala lausnarinnar í þeim punkti að vera 3. Við byrjum að búa til stefnuviðið með því að teikna stutt strik í punktinum $(1, 2)$ sem hefur hallatöluna 3. Þetta má gera fyrir hvern punkt í formengi fallsins $f(x, y) = 3x + 2y - 4$, en það eru allar raðaðar tvenndir (x, y) í $\mathbb{R}^2$. Þannig tengist hallatala hverjum punkti í kartesíska planinu, að því gefnu að lausn deildajöfnunnar fari í gegnum punktinn. Stefnuvið deildajöfnunnar $y' = 3x + 2y - 4$ er sýnt á mynd 4.7.



Mynd 4.7 Stefnuvið deildajöfnunnar $y' = 3x + 2y - 4$.

Við getum búið til stefnuvið af þessu tagi fyrir sérhverja deildajöfnu á forminu $y' = f(x, y)$.

SKILGREINING

Stefnuvið (hallasvið) er stærðfræðilegt fyrirbæri sem sýnir lausnir fyrsta stigs deildajöfnu á myndrænan hátt. Í hverjum punkti stefnuviðsins er strik sem hefur sömu hallatölu og lausn deildajöfnunnar sem fer í gegnum punktinn.

Stefnuvið notuð

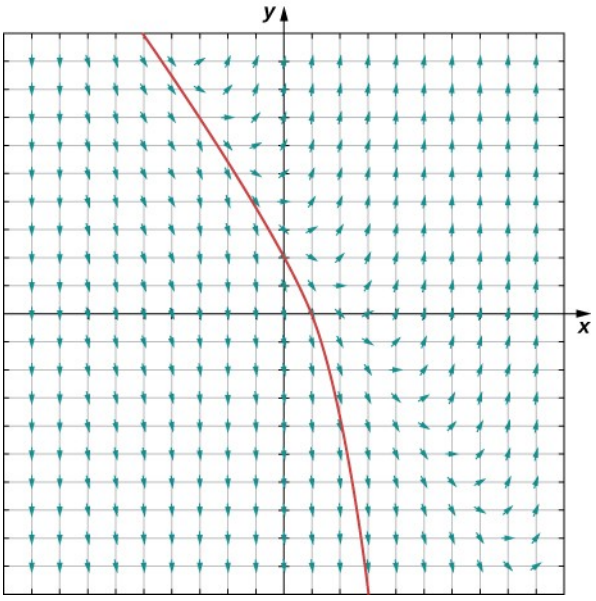
Með stefnuviði getum við sagt fyrir um hegðun lausna deildajöfnu án þess að þekkja lausnina sjálfa. Stefnuviðið á mynd 4.7 leiðbeinir okkur til dæmis um hegðun lausna deildajöfnunnar $y' = 3x + 2y - 4$.

Til að nota stefnuvið veljum við fyrst einhvern punkt í stefnuviðinu. Strikið í punktinum er eins konar vegvísir sem sýnir í hvaða átt halda skal þaðan. Ef lausn deildajöfnunnar fer til dæmis í gegnum punktinn $(0,1)$, er hallatala lausnarinnar í punktinum gefin með $y' = 3(0) + 2(1) - 4 = -2$. Látum nú x aukast lítillega, til dæmis í $x = 0{,}1$. Með línulegri nálgun fæst formúla fyrir nálgað gildi y þegar $x = 0{,}1$. Nánar tiltekið fæst

$$\begin{aligned} L(x) &= y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= 1 - 2(x - 0) \\ &= 1 - 2x. \end{aligned}$$

Þegar $x = 0{,}1$ er sett inn í $L(x)$ fæst nálgaða y-gildið $0{,}8$.

Í þessum punkti breytist hallatala lausnarinnar, aftur samkvæmt deildajöfnunni. Við getum haldið áfram, endurreiknað hallatölu lausnarinnar eftir hvert lítið skref til hægri og fylgst með hegðun hennar. Mynd 4.8 sýnir graf lausnarinnar sem fer í gegnum punktinn $(0,1)$.



Mynd 4.8 Stefnuvið deildajöfnunnar $y' = 3x + 2y - 4$ ásamt lausninni sem fer í gegnum punktinn $(0,1)$.

Ferillinn er graf lausnar upphafsgildisverkefnisins

$$y' = 3x + 2y - 4,\ y(0) = 1.$$

Þessi ferill nefnist lausnarferillinn sem fer í gegnum punktinn $(0,1)$. Nákvæm lausn upphafsgildisverkefnisins er

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{4}e^{2x},$$

og graf lausnarinnar fellur saman við ferilinn á mynd 4.8.

STÖÐUMAT 4.7

Búið til stefnuvið deildajöfnunnar $y'=x^2-y^2$ og skissið lausnarferil sem fer í gegnum punktinn $(-1,2)$.

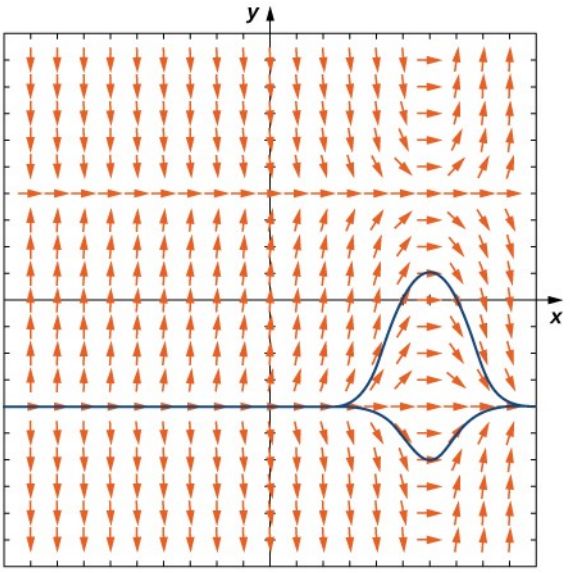
MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu má fræðast nánar um hallasvið.

Skoðum nú stefnuvið deildajöfnunnar $y'=(x-3)(y^2-4)$, sem sýnt er á mynd 4.9. Stefnuviðið hefur nokkra athyglisverða eiginleika. Í fyrsta lagi sjást lárétt strik þvert yfir grafið þegar $y=-2$ og $y=2$, sem merkir að ef $y=-2$, þá er $y'=0$. Þegar þessi stæða er sett inn í hægri hlið deildajöfnunnar fæst

$$\begin{aligned}(x-3)(y^2-4) &= (x-3)((-2)^2-4)\\ &= (x-3)(0)\\ &= 0\\ &= y\prime.\end{aligned}$$

Því er $y=-2$ lausn deildajöfnunnar. Á sama hátt er $y=2$ lausn hennar. Þetta eru einu fastalausnir deildajöfnunnar, eins og eftirfarandi rök sýna. Gerum ráð fyrir að $y=k$ sé fastalausn deildajöfnunnar. Þá er $y'=0$. Þegar þessi stæða er sett inn í deildajöfnuna fæst $0=(x-3)(k^2-4)$. Jafnan verður að gilda fyrir öll gildi x, svo seinni þátturinn verður að vera núll. Þá fæst jafnan $k^2-4=0$. Lausnir hennar eru $k=-2$ og $k=2$, en það eru fastalausnirnar sem við höfum þegar nefnt. Þær kallast jafnvægislausnir deildajöfnunnar.



Mynd 4.9 Stefnuvið deildajöfnunnar $y'=(x-3)(y^2-4)$ ásamt tveimur lausnum. Lausnirnar liggja mjög nálægt hvor annarri, en önnur er rétt ofan við jafnvægislausnina $y=-2$ og hin rétt neðan við sömu jafnvægislausn.

SKILGREINING

Skoðum deildajöfnuna $y'=f(x,y)$. Jafnvægislausn er sérhver lausn deildajöfnunnar á forminu $y=c$, þar sem c er fasti.

Til að finna jafnvægislausnir deildajöfnunnar $y'=f(x,y)$, setjum við hægri hliðina jafna núlli. Jafnvægislausn deildajöfnunnar er sérhvert fall á forminu $y=k$ þannig að $f(x,k)=0$ fyrir öll gildi x í formengi f.

Mikilvægur eiginleiki jafnvægislausna er hvort þær nálgast línuna $y=k$ sem aðfellu fyrir stór gildi x.

SKILGREINING

Skoðum deildajöfnuna $y'=f(x,y)$, og gerum ráð fyrir að allar lausnir hennar séu skilgreindar fyrir $x\geq x_0$. Látum $y=k$ vera jafnvægislausn deildajöfnunnar.

1. $y=k$ er aðfellustöðug lausn deildajöfnunnar ef til er $\varepsilon>0$ þannig að fyrir sérhvert gildi $c\in(k-\varepsilon,k+\varepsilon)$ stefnir lausn upphafsgildisverkefnisins

   $$y'=f(x,y),\ y(x_0)=c$$

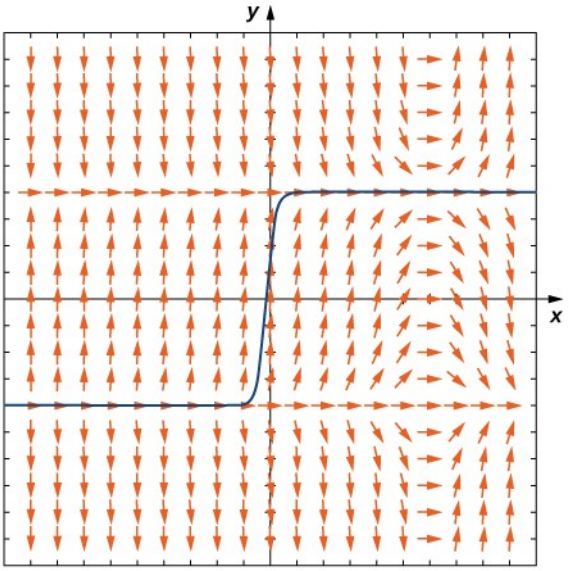
   á k þegar x stefnir á óendanlegt.
2. $y=k$ er aðfelluóstöðug lausn deildajöfnunnar ef til er $\varepsilon>0$ þannig að fyrir sérhvert gildi $c\in(k-\varepsilon,k+\varepsilon)$ stefnir lausn upphafsgildisverkefnisins

$y'=f(x,y), y(x_0)=c$

aldrei á k þegar x stefnir á óendanlegt.

3. $y=k$ er aðfelluhálfstöðug lausn deildajöfnunnar ef hún er hvorki aðfellustöðug né aðfelluóstöðug.

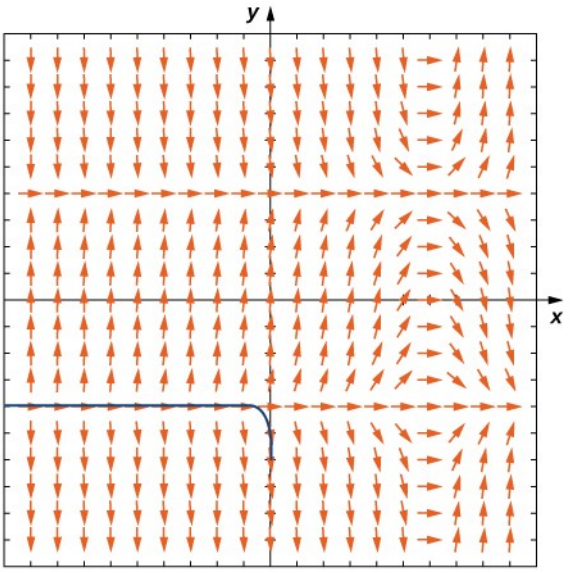
Snúum okkur nú aftur að deildajöfnunni $y'=(x-3)(y^2-4)$, með upphafsskilyrðinu $y(0)=0{,}5$. Stefnuvið upphafsgildisverkefnisins ásamt samsvarandi lausn er sýnt á mynd 4.10.



Mynd 4.10 Stefnuvið upphafsgildisverkefnisins $y'=(x-3)(y^2-4), y(0)=0{,}5$.

Gildi lausnar upphafsgildisverkefnisins haldast á milli $y=-2$ og $y=2$, sem eru jafnvægislausnir deildajöfnunnar. Lausn upphafsgildisverkefnis sem byrjar með $-2<y<2$ getur hins vegar aldrei farið yfir jafnvægislausnirnar $y=2$ og $y=-2$. Þar sem $y^2-4<0$ og $x>3$, $y'=(x-3)(y^2-4)<0$ er y minnkandi og stefnir því á $y=-2$. Því er $y=-2$ aðfellustöðug lausn deildajöfnunnar.

Hvað gerist þegar upphafsgildið er minna en $y=-2$? Þetta tilvik er sýnt á mynd 4.11 með upphafsgildinu $y(0)=-3$.



Mynd 4.11 Stefnuvið upphafsgildisverkefnisins $y' = (x-3)(y^2-4), y(0) = -3$.

Við sjáum að fyrir upphafsgildi $y < -2$ og þegar $x > 3$, $y' = (x-3)(y^2-4) > 0$ er y vaxandi og stefnir á $y = -2$. Þetta staðfestir enn frekar að $y = -2$ er aðfellustöðug lausn deildajöfnunnar.

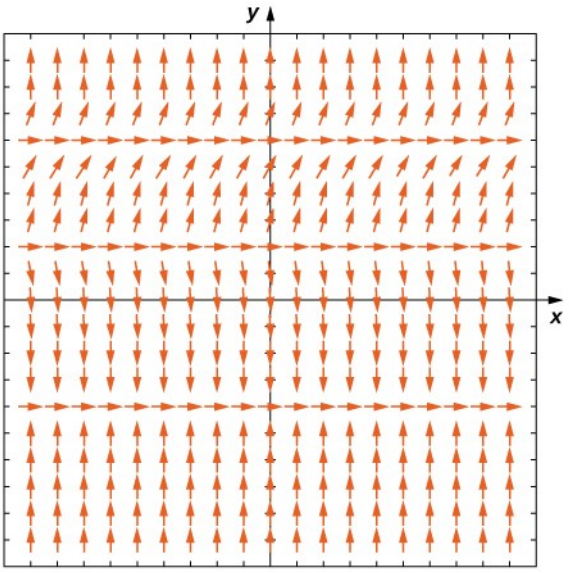
DÆMI 4.8

Stöðugleiki jafnvægislausnar

Búið til stefnuvið deildajöfnunnar $y' = (y-3)^2(y^2+y-2)$ og finnið allar jafnvægislausnir. Flokkið hverja þeirra sem stöðuga, óstöðuga eða hálfstöðuga.

Lausn

Stefnuviðið er sýnt á mynd 4.12.



Mynd 4.12 Stefnuvið deildajöfnunnar $y' = (y-3)^2(y^2+y-2)$.

Jafnvægislausnirnar eru $y=-2$, $y=1$, og $y=3$. Til að flokka lausnirnar skoðum við ör beint ofan eða neðan við hvert þessara gilda. Við $y=-2$ vísa til dæmis örvarnar beint neðan við lausnina upp, en örvarnar beint ofan við hana vísa niður. Öll upphafsskilyrði nálægt $y=-2$ nálgast því $y=-2$, og lausnin er stöðug. Fyrir lausnina $y=1$, hrindast öll upphafsskilyrði ofan og neðan við $y=1$ frá $y=1$, svo lausnin er óstöðug. Lausnin $y=3$ er hálfstöðug því að fyrir upphafsskilyrði örlítið stærri en 3, stefnir lausnin á óendanlegt, en fyrir upphafsskilyrði örlítið minni en 3, stefnir hún á $y=3$.

Greining

Jafnvægislausnir deildajöfnunnar má finna með því að setja hægri hliðina jafna núlli og leysa jöfnuna með tilliti til y. Þessi aðferð gefur sömu jafnvægislausnir og sáust í stefnuviðinu.

STÖÐUMAT 4.8

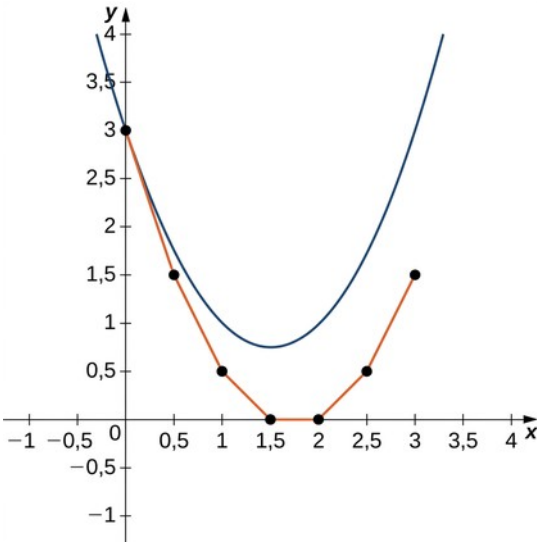
Búið til stefnuvið deildajöfnunnar $y' = (x+5)(y+2)(y^2-4y+4)$ og finnið allar jafnvægislausnir. Flokkið hverja þeirra sem stöðuga, óstöðuga eða hálfstöðuga.

Aðferð Eulers

Skoðum upphafsgildisverkefnið

$$y' = 2x-3, y(0)=3.$$

Þegar við heildum báðar hliðar deildajöfnunnar fæst $y=x^2-3x+C$, og þegar við leysum jöfnuna með tilliti til C fæst sérlausnin $y=x^2-3x+3$. Lausn upphafsgildisverkefnisins er fleygboginn á mynd 4.13.



Mynd 4.13 Aðferð Eulers fyrir upphafsgildisverkefnið $y' = 2x - 3, y(0) = 3$.

Rauða grafið er myndað úr strikum sem nálga lausn upphafsgildisverkefnisins. Grafið byrjar í sama upphafsgildi, $(0, 3)$. Hallatala lausnarinnar í hverjum punkti ræðst síðan af hægri hlið deildajöfnunnar. Lengd striksins ræðst af því að x-gildið er aukið um 0,5 í hvert sinn (það er skrefstærð). Á þessu byggist aðferð Eulers.

Áður en við setjum aðferð Eulers fram sem setningu skulum við skoða annað upphafsgildisverkefni:

$$y' = x^2 - y^2, y(-1) = 2.$$

Hugmyndina að baki stefnuviðum má einnig nota til að rannsaka hegðun lausnar þessa verkefnis. Í punktinum $(-1, 2)$, er hallatala lausnarinnar til dæmis gefin með $y' = (-1)^2 - 2^2 = -3$, svo hallatala snertils við lausnina í punktinum er einnig -3. Skilgreinum nú $x_0 = -1$ og $y_0 = 2$. Þar sem hallatala lausnarinnar í þessum punkti er -3, getum við notað línulega nálgun til að nálga y í grennd við $(-1, 2)$.

$$L(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Hér er $x_0 = -1, y_0 = 2$, og $f'(x_0) = -3$, svo línulega nálgunin verður

$$\begin{aligned} L(x) &= 2 - 3(x - (-1)) \\ &= 2 - 3x - 3 \\ &= -3x - 1. \end{aligned}$$

Nú veljum við skrefstærð. Skrefstærðin er lítið gildi, venjulega 0,1 eða minna, sem notað er til að hækka x; hún er táknuð með breytunni h. Í dæminu látum við $h = 0{,}1$. Þegar x_0 er hækkað um h fæst næsta x-gildi:

$$x_1 = x_0 + h = -1 + 0{,}1 = -0{,}9.$$

Við getum sett $x_1 = -0{,}9$ inn í línulegu nálgunina til að reikna y_1.

$$\begin{aligned} y_1 &= L(x_1) \\ &= -3(-0{,}9) - 1 \\ &= 1{,}7. \end{aligned}$$

Nálgað y-gildi lausnarinnar þegar $x = -0{,}9$ er því $y = 1{,}7$. Við getum síðan endurtekið ferlið og notað $x_1 = -0{,}9$ og $y_1 = 1{,}7$ til að reikna x_2 og y_2. Nýja hallatalan er gefin með $y' = (-0{,}9)^2 - (1{,}7)^2 = -2{,}08$. Fyrst fæst $x_2 = x_1 + h = -0{,}9 + 0{,}1 = -0{,}8$. Með línulegri nálgun fæst síðan

$$\begin{aligned} L(x) &= y_1 + f'(x_1)(x - x_1) \\ &= 1{,}7 - 2{,}08(x - (-0{,}9)) \\ &= 1{,}7 - 2{,}08x - 1{,}872 \\ &= -2{,}08x - 0{,}172. \end{aligned}$$

Að lokum setjum við $x_2 = -0{,}8$ inn í línulegu nálgunina til að reikna y_2.

$$\begin{aligned} y_2 &= L(x_2) \\ &= -2{,}08x_2 - 0{,}172 \\ &= -2{,}08(-0{,}8) - 0{,}172 \\ &= 1{,}492. \end{aligned}$$

4

Therefore the approximate value of the solution to the differential equation is $y = 1{,}492$ þegar $x = -0{,}8$.
Þetta er hugmyndin að baki aðferð Eulers. Með því að endurtaka skrefin fæst listi af gildum lausnarinnar. Tafla 4.2 sýnir gildin námunduð að fjórum aukastöfum.

Tafla 4.2 Aðferð Eulers notuð til að nálga lausnir deildajöfnu

n	0	1	2	3	4	5
x_n	-1	$-0{,}9$	$-0{,}8$	$-0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}5$
y_n	2	1,7	1,492	1,3334	1,2046	1,0955
n	6	7	8	9	10	
x_n	$-0{,}4$	$-0{,}3$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0	
y_n	1,0004	1,9164	1,8414	1,7746	1,7156	

SETNING 4.1

Aðferð Eulers

Skoðum upphafsgildisverkefnið

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

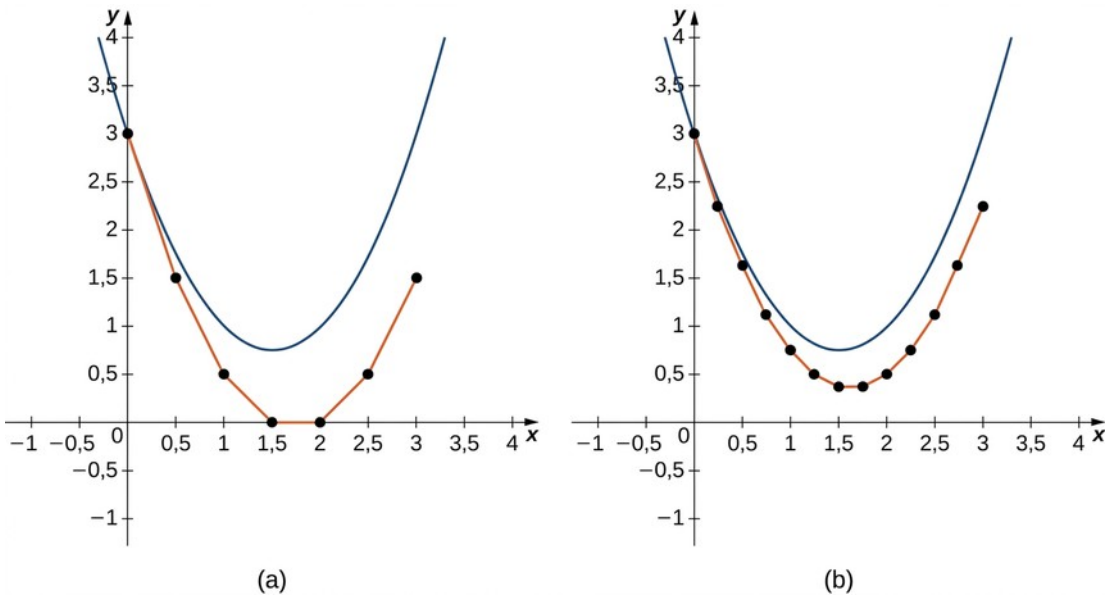
Til að nálga lausn verkefnisins með aðferð Eulers skilgreinum við

$$x_n = x_0 + nh$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

(4.2)

Hér táknar $h>0$ skrefstærðina og n er heiltala sem byrjar á 1. Fjöldi skrefa er táknaður með breytunni n.

Typically h is a small value, say $0{,}1$ eða $0{,}05$. The smaller the value of h, the more calculations are needed. The higher the value of h, the fewer calculations are needed. However, the tradeoff results in a lower degree of accuracy for larger step size, as illustrated in Figure 4.14.



Mynd 4.14 Aðferð Eulers fyrir upphafsgildisverkefnið $y' = 2x - 3, y(0) = 3$ með (a) skrefstærð $h = 0{,}5$; og (b) skrefstærð $h = 0{,}25$.

DÆMI 4.9

Aðferð Eulers notuð

Skoðum upphafsgildisverkefnið

$$y' = 3x^2 - y^2 + 1, y(0) = 2.$$

Use Euler's method with a step size of $0{,}1$ to generate a table of values for the solution for values of x between 0 and 1.

Lausn

Gefið er að $h = 0{,}1$ og $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 1$. Auk þess leiðir upphafsskilyrðið $y(0) = 2$ til þess að $x_0 = 0$ og $y_0 = 2$. Með jöfnu 4.2 og $n = 0$, fæst tafla 4.3.

Tafla 4.3 Aðferð Eulers notuð til að nálga lausnir deildajöfnu

n	x_n	$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$
0	0	2
1	0,1	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1{,}7$
2	0,2	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}514$
3	0,3	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}3968$
4	0,4	$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1{,}3287$
5	0,5	$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1{,}3001$
6	0,6	$y_6 = y_5 + hf(x_5, y_5) = 1{,}3061$
7	0,7	$y_7 = y_6 + hf(x_6, y_6) = 1{,}3435$
8	0,8	$y_8 = y_7 + hf(x_7, y_7) = 1{,}4100$
9	0,9	$y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8) = 1{,}5032$
10	1,0	$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = 1{,}6202$

Með tíu útreikningum getum við nálgað gildi lausnar upphafsgildisverkefnisins þegar x er á milli 0 og 1.

4

MARGMIÐLUN

Í þessu smáforriti má fræðast nánar um aðferð Eulers.

STÖÐUMAT 4.9

Skoðum upphafsgildisverkefnið

$$y' = x^3 + y^2, y(1) = -2.$$

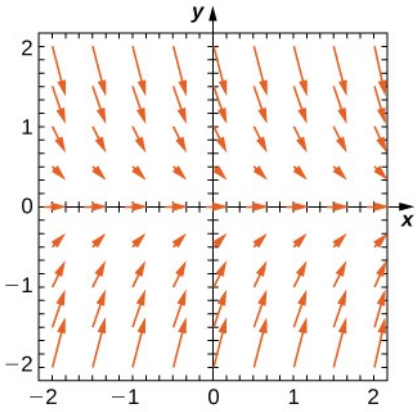
Using a step size of $0{,}1$, generate a table with approximate values for the solution to the initial-value problem for values of x between 1 and 2.

MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu má sjá hvernig efni þessa undirkafla nýtist í reynd.

Æfingar úr undirkafla 4.2

Notið stefnuviðið hér fyrir neðan í næstu verkefnum. Það er stefnuvið deildajöfnunnar $y' = -2y$. Skissið graf lausnarinnar fyrir gefin upphafsskilyrði.



66.

$$y(0) = 1$$

67.

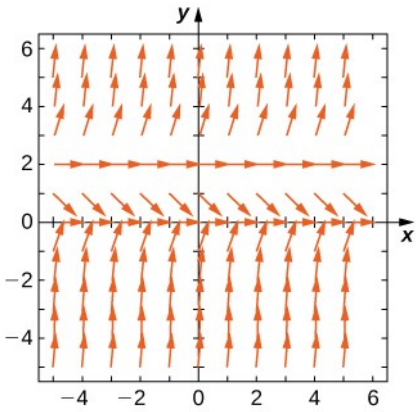
$$y(0) = 0$$

68.

$$y(0) = -1$$

69. Eru til jafnvægislausnir? Hver er stöðugleiki þeirra?

Notið stefnuviðið hér fyrir neðan í næstu verkefnum. Það er stefnuvið deildajöfnunnar $y' = y^2 - 2y$. Skissið graf lausnarinnar fyrir gefin upphafsskilyrði.



70.

$$y(0) = 3$$

71.

$$y(0)=1$$

72.

$$y(0)=-1$$

73. Eru til jafnvægislausnir? Hver er stöðugleiki þeirra?

Teiknið stefnuvið eftirfarandi deildajafna og leysið síðan deildajöfnurnar.

74.

$$y'=t^3$$

75.

$$y'=e^t$$

76.

$$\frac{dy}{dx}=x^2\cos x$$

77.

$$\frac{dy}{dt}=te^t$$

78.

$$\frac{dx}{dt}=\cosh(t)$$

Teiknið stefnuvið eftirfarandi deildajafna. Hvað má segja um hegðun lausnanna? Eru til jafnvægislausnir? Hver er stöðugleiki þeirra?

79.

$$y'=y^2-1$$

80.

$$y'=y-x$$

81.

$$y'=1-y^2-x^2$$

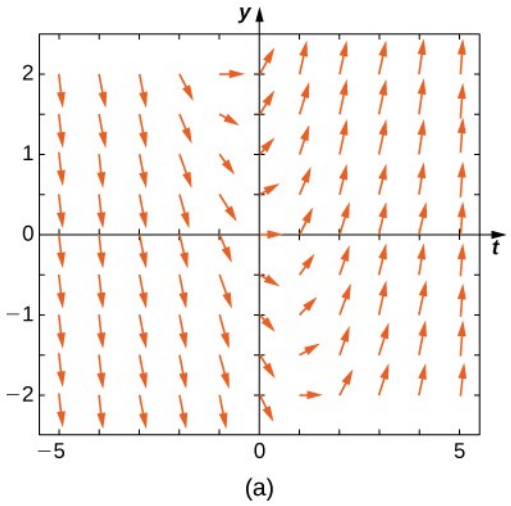
82.

$$y'=t^2\sin y$$

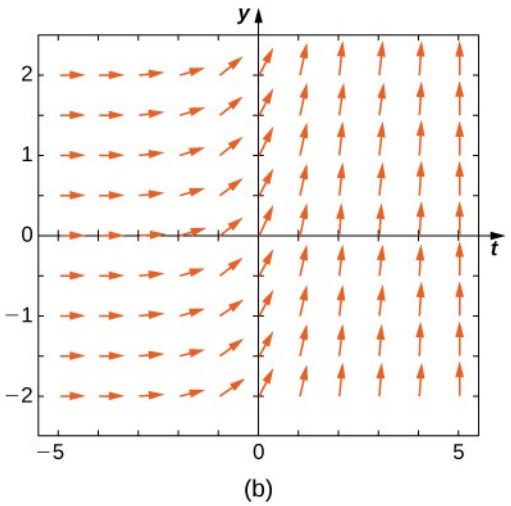
83.

$$y'=3y+xy$$

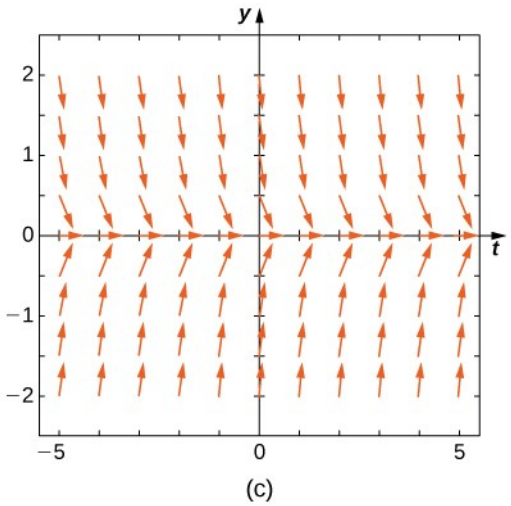
Parið stefnuviðin við gefnar deildajöfnur. Rökstyðjið val ykkar.



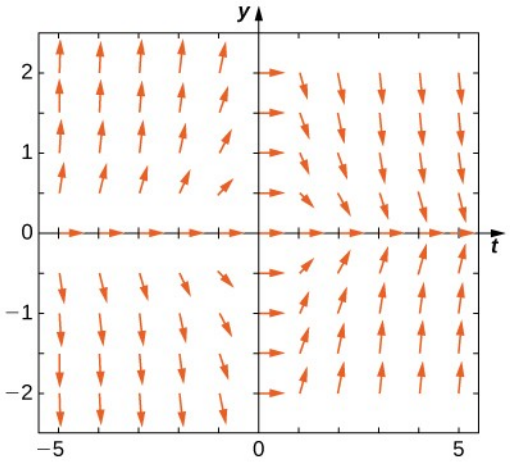
(a)



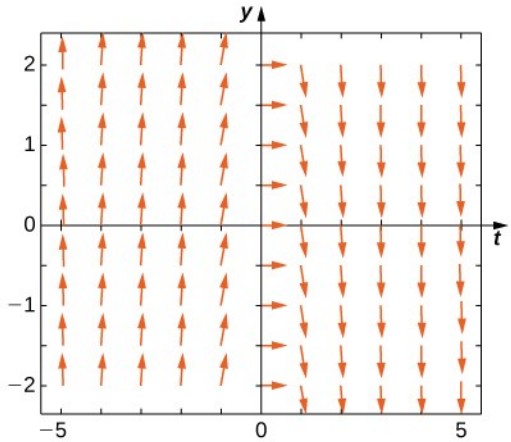
(b)



(c)



(d)



(e)

84.

$$y' = -3y$$

85.

$$y' = -3t$$

86.

$$y' = e^t$$

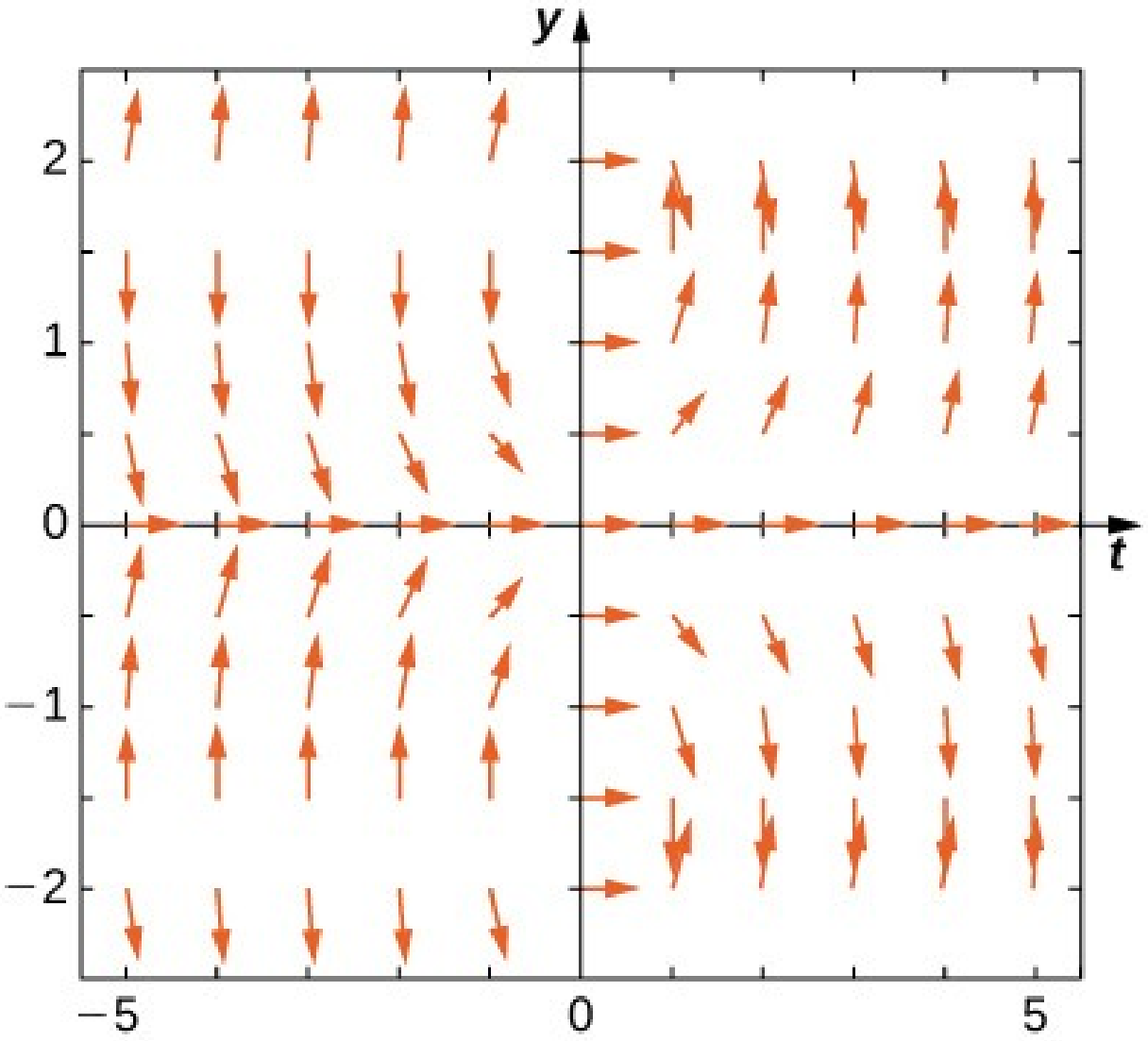
87.

$$y' = \frac{1}{2}y + t$$

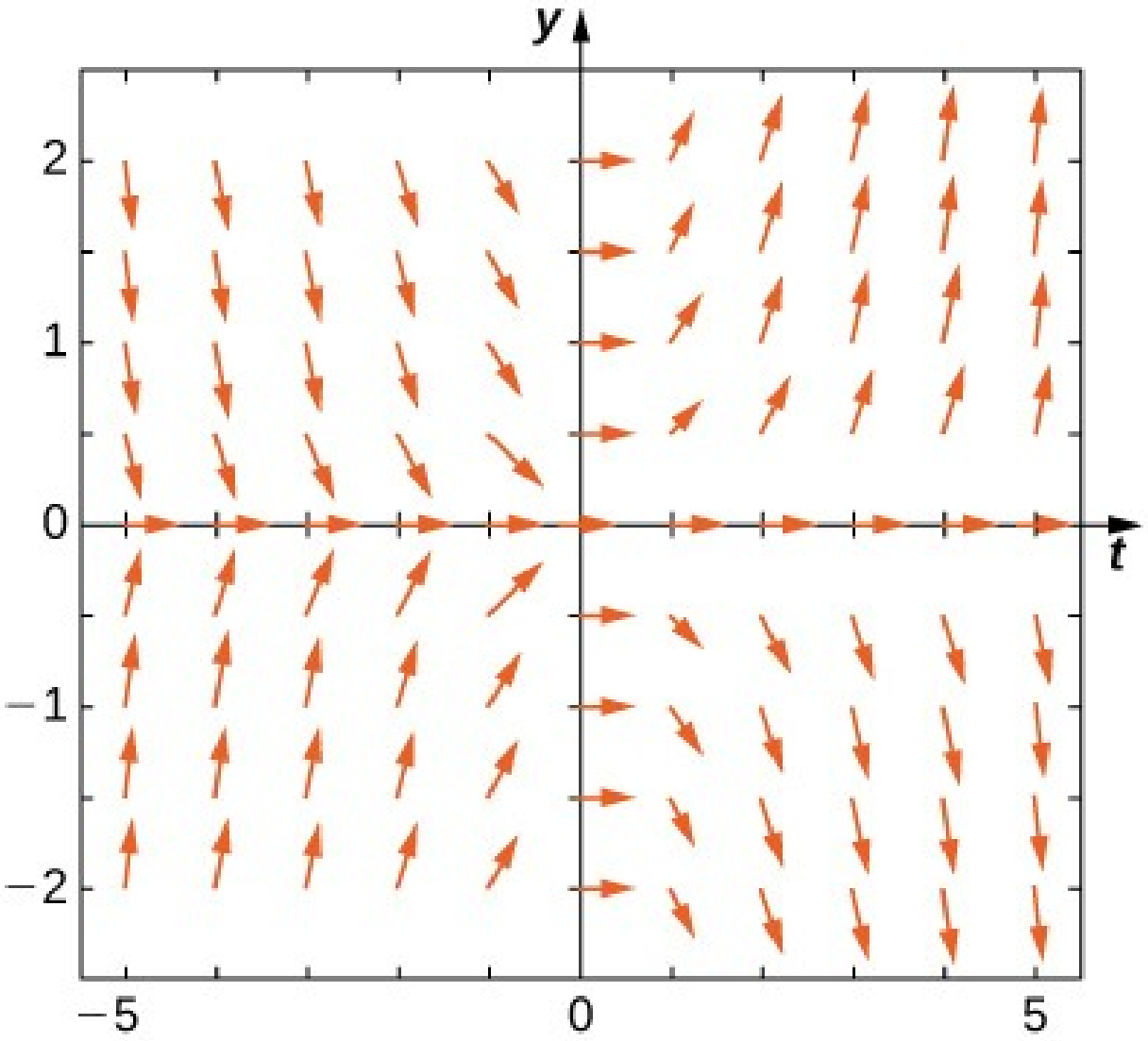
88.

$$y' = -t\,y$$

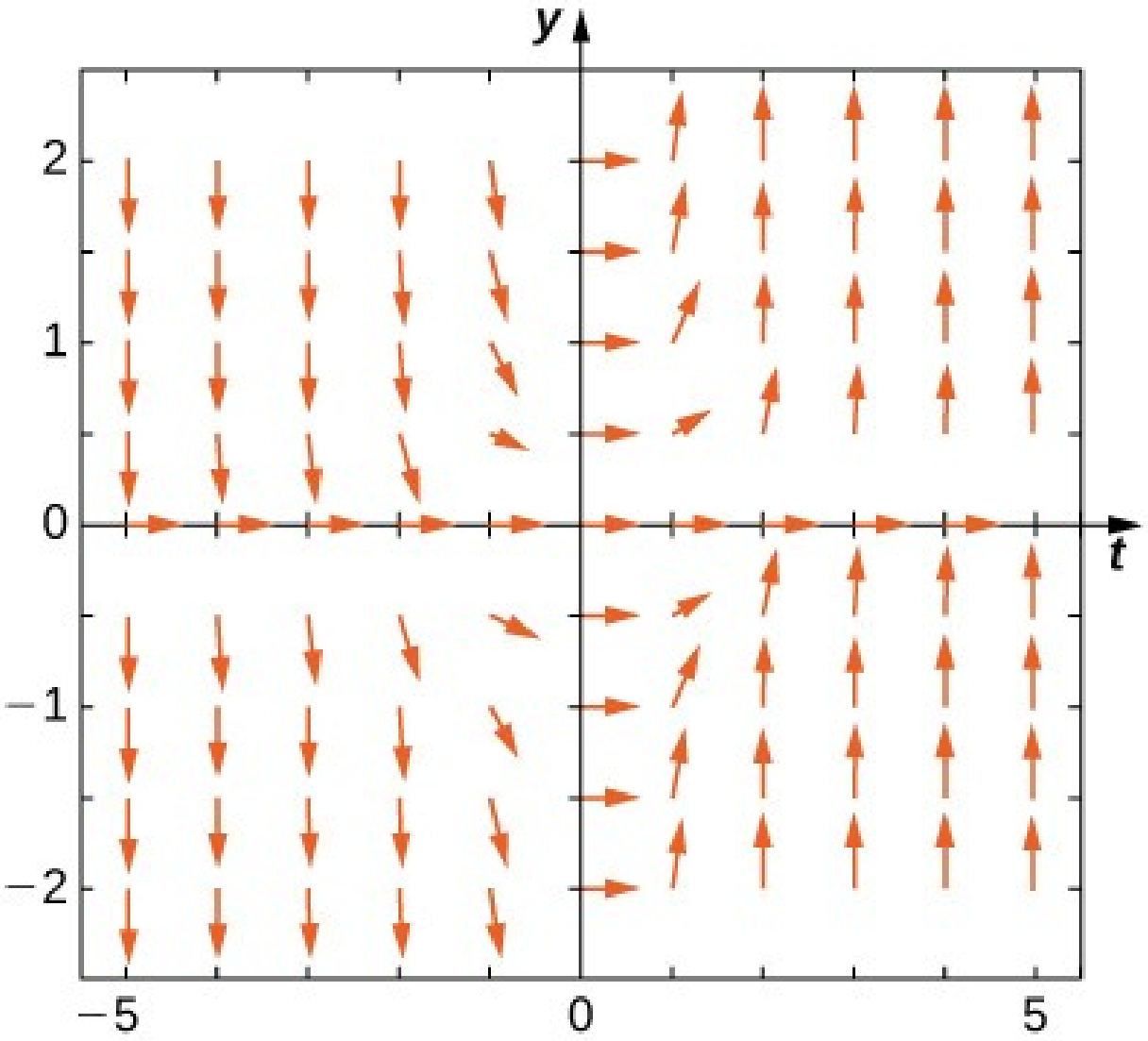
Parið stefnuviðin við gefnar deildajöfnur. Rökstyðjið val ykkar.



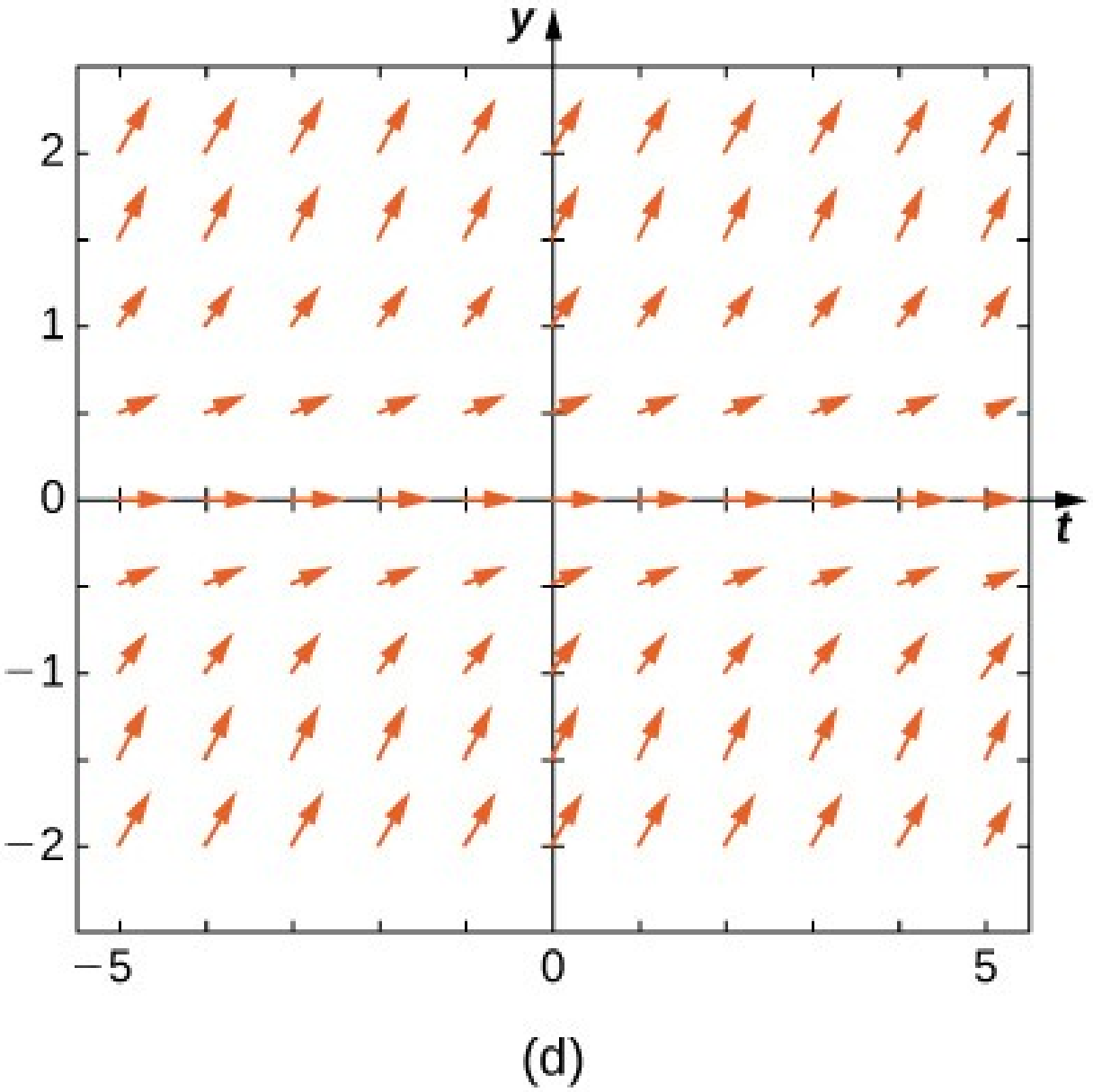
(a)



(b)

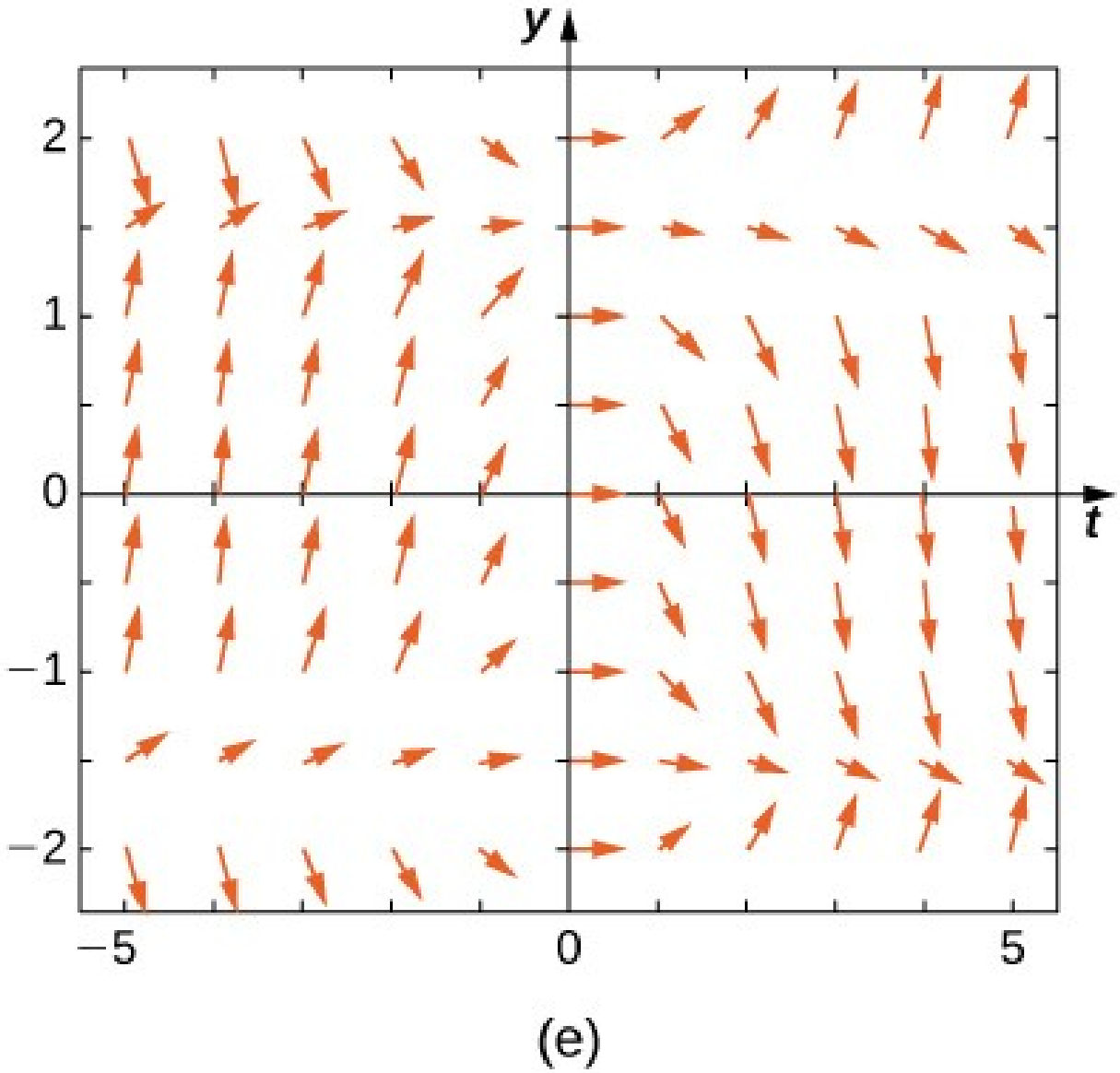


(c)



(d)

4



(e)

89.

$$y' = t \sin y$$

90.

$$y' = -t \cos y$$

91.

$$y' = t \tan y$$

92.

$$y' = \sin^2 y$$

93.

$$y' = y^2 t^3$$

Nálgið eftirfarandi lausnir með aðferð Eulers í $n=5$ skrefum yfir bilið $t=[0,1]$. Ef þið getið leyst upphafsgildisverkefnið nákvæmlega skuluð þið bera nálgunina saman við nákvæmu lausnina. Ef þið getið það ekki er nákvæma lausnin gefin til samanburðar við aðferð Eulers. Hversu nákvæm er aðferð Eulers?

94.

$$y'=-3y, y(0)=1$$

95.

$$y'=t^2, y(0)=2$$

96. $y'=3t-y, y(0)=1$. Nákvæma lausnin er $y=3t+4e^{-t}-3$

97. $y'=y+t^2, y(0)=3$. Nákvæma lausnin er $y=5e^t-2-t^2-2t$

98.

$$y'=2t, y(0)=0$$

99. **[T]** $y'=e^{|x+y|}, y(0)=-1$. Nákvæma lausnin er $y=-\ln\left(e+1-e^x\right)$

100. $y'=y^2\ln(x+1), y(0)=1$. Nákvæma lausnin er $y=-\dfrac{1}{(x+1)(\ln(x+1)-1)}$

101. $y'=2^x, y(0)=0$, Nákvæma lausnin er $y=\dfrac{2^x-1}{\ln(2)}$

102. $y'=y, y(0)=-1$. Nákvæma lausnin er $y=-e^x$.

103. $y'=-5t, y(0)=-2$. Nákvæma lausnin er $y=-\dfrac{5}{2}t^2-2$

Nota má deildajöfnur til að setja fram líkön af farsóttum. Í næstu verkefnum skoðum við hvernig stærð tveggja hópa borgarbúa breytist: þeirra sem eru smitaðir og þeirra sem eru móttækilegir fyrir smiti. S táknar fjölda móttækilegra einstaklinga og I fjölda smitaðra. Við gerum ráð fyrir að þegar móttækilegur einstaklingur hittir smitaðan einstakling séu líkurnar c á því að sá móttækilegi smitist. Hver smitaður einstaklingur nær bata eftir sýkinguna með hraðanum r og verður þá aftur móttækilegur fyrir smiti. Við skoðum inflúensu og gerum ráð fyrir að enginn deyi af völdum sjúkdómsins. Heildarfjöldi einstaklinga í hópunum tveimur er því fastinn N. Deildajöfnurnar sem lýsa stærð hópanna eru

$$S'=rI-cSI \quad \text{og}$$
$$I'=cSI-rI.$$

Hér táknar c snertitíðnina og r batahraðann.

104. Sýnið að samkvæmt forsendunni um fastan heildarfjölda, $(S+I=N)$, megi einfalda kerfið í eina deildajöfnu fyrir I: $I'=c(N-I)I-rI$.

105. Assuming the parameters are $c=0{,}5$, $N=5$, and $r=0{,}5$, draw the resulting directional field.

106. **[T]** Notið tölvuhugbúnað eða reiknivél til að reikna nálgaða lausn upphafsgildisverkefnisins $y'=t\,y$, $y(0)=2$ með aðferð Eulers og gefinni skrefstærð h. Finnið lausnina við $t=1$ sem fall af h. Vísbending: Hér er gervikóði sem sýnir hvernig skrifa má tölvuforrit sem notar aðferð Eulers fyrir $y'=f(t,y)$, $y(0)=y_0$:

- Búið til fallið $f(t,y)$.
- Skilgreinið stikana $y(0)=y_0$, $t(0)=0$, skrefstærðina h, og heildarfjölda skrefa N.
- Skrifið for-lykkju:
  fyrir k = 0 til N
  fn = f(t(k), y(k))
  y(k+1) = y(k) + h*fn
  t(k+1) = t(k) + h

Notið svar ykkar við æfingu 4,106 til að leysa eftirfarandi verkefni.

107. Leysið upphafsgildisverkefnið og finnið nákvæmu lausnina.

108. Teiknið stefnuviðið.

109. Reiknið með $h=1$

110. Reiknið með **[T]** $h=0{,}1$

111. Reiknið með **[T]** $h=0{,}001$

112. Reiknið með **[T]** $h=0{,}0001$

113. **[T]** Reiknið nákvæmu lausnina við $t=1$. Gerið töflu yfir hlutfallslega skekkju lausnarinnar sem fæst með aðferð Eulers miðað við nákvæmu lausnina. Hversu mikið breytist skekkjan? Getið þið útskýrt breytinguna?

Skoðum upphafsgildisverkefnið $y'=-2\,y$, $y(0)=2$.

114. Sýnið að $y=2e^{-2x}$ leysi upphafsgildisverkefnið.

115. Teiknið stefnuvið deildajöfnunnar.

116. **[T]** Notið blað og blýant, reiknivél eða tölvu til að nálga lausnina með aðferð Eulers við $t=10$ og $h=5$.

117. **[T]** Notið reiknivél eða tölvu til að nálga lausnina með aðferð Eulers við $t=10$ og $h=100$.

118. **[T]** Teiknið nákvæmu lausnina og báðar nálganir Eulers (fyrir $h=5$ og $h=100$) inn á stefnuviðið fyrir hvert gildi h. Hvað takið þið eftir?

4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur

NÁMSMARKMIÐ

- 4.3.1 Nota aðskilnað breytistærða til að leysa deildajöfnu.
- 4.3.2 Leysa hagnýt verkefni með aðskilnaði breytistærða.

Nú skoðum við lausnaraðferð sem gefur nákvæmar lausnir á flokki deildajafna sem kallast aðgreinanlegar deildajöfnur. Slíkar jöfnur eru algengar í fjölmörgum fræðigreinum, meðal annars eðlisfræði, efnafræði og verkfræði. Í lok undirkaflans sýnum við nokkur hagnýt dæmi.

Aðskilnaður breytistærða

Við byrjum á skilgreiningu og nokkrum dæmum.

SKILGREINING

Aðgreinanleg deildajafna er jafna sem rita má á forminu

$$y' = f(x)g(y).$$

(4.3)

Orðið „aðgreinanleg“ vísar til þess að hægri hlið jöfnunnar má þátta sem margfeldi falls af x og falls af y. Dæmi um aðgreinanlegar deildajöfnur eru

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^2 - 4\right)(3y + 2) \\ y' &= 6x^2 + 4x \\ y' &= \sec y + \tan y \\ y' &= xy + 3x - 2y - 6. \end{aligned}$$

Önnur jafnan er aðgreinanleg með $f(x) = 6x^2 + 4x$ og $g(y) = 1$, þriðja jafnan er aðgreinanleg með $f(x) = 1$ og $g(y) = \sec y + \tan y$, og hægri hlið fjórðu jöfnunnar má þátta sem $(x - 2)(y + 3)$, svo hún er einnig aðgreinanleg. Þriðja jafnan kallast einnig sjálfstæð deildajafna vegna þess að hægri hlið hennar er eingöngu fall af y. Ef deildajafna er aðgreinanleg má leysa hana með aðferð sem nefnist aðskilnaður breytistærða.

LAUSNARLEIÐ

Aðskilnaður breytistærða

1. Athugið hvort einhver gildi y geri $g(y) = 0$. Þau samsvara fastalausnum.
2. Umritið deildajöfnuna á formið $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$.
3. Heildið báðar hliðar jöfnunnar.
4. Leysið jöfnuna sem fæst með tilliti til y ef hægt er.

5. Ef upphafsskilyrði er gefið, setjið þá viðeigandi gildi x og y inn í jöfnuna og ákvarðið fastann.

Athugið að í skrefi 4 stendur: „Leysið jöfnuna sem fæst með tilliti til y ef hægt er.“ Ekki er alltaf hægt að fá y sem gagngert fall af x. Oft verðum við að láta okkur nægja að finna y sem fólgið fall af x.

DÆMI 4.10

Aðskilnaður breytistærða notaður

Finnið almenna lausn deildajöfnunnar $y' = (x^2 - 4)(3y + 2)$ með aðskilnaði breytistærða.

Lausn

Fylgið fimm skrefa aðferðinni við aðskilnað breytistærða.

1. Í þessu dæmi er $f(x) = x^2 - 4$ og $g(y) = 3y + 2$. Jafnan $g(y) = 0$ gefur $y = -\frac{2}{3}$ sem fastalausn.
2. Umritið deildajöfnuna á formið

$$\frac{dy}{3y+2} = (x^2 - 4)\,dx.$$

3. Heildið báðar hliðar jöfnunnar:

$$\int \frac{dy}{3y+2} = \int (x^2 - 4)\,dx.$$

Látum $u = 3y + 2$. Þá er $du = 3\frac{dy}{dx}\,dx$, svo jafnan verður

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du &= \tfrac{1}{3}x^3 - 4x + C \\ \tfrac{1}{3}\ln|u| &= \tfrac{1}{3}x^3 - 4x + C \\ \tfrac{1}{3}\ln|3y+2| &= \tfrac{1}{3}x^3 - 4x + C. \end{aligned}$$

4. Til að leysa þessa jöfnu með tilliti til y, margföldum við fyrst báðar hliðar hennar með 3.

$$\ln|3y+2| = x^3 - 12x + 3C$$

. Nú skoðum við hvernig fara skal með fastann C. Þar sem C táknar ótiltekinn fasta táknar $3C$ einnig ótiltekinn fasta. Ef við köllum seinni ótiltekna fastann C_1, verður jafnan

$\ln|3y+2| = x^3 - 12x + C_1$.

Nú veldum við báðar hliðar jöfnunnar með grunntölunni e (það er, látum hvora hlið vera veldisvísi e).

$$\begin{aligned} e^{\ln|3y+2|} &= e^{x^3-12x+C_1} \\ |3y+2| &= e^{C_1}e^{x^3-12x} \end{aligned}$$

. Skilgreinum aftur nýjan fasta $C_2 = e^{C_1}$ (athugið að $C_2 > 0$):

$|3y+2| = C_2 e^{x^3-12x}$.

Þetta samsvarar tveimur aðskildum jöfnum: $3y+2 = C_2 e^{x^3-12x}$ og $3y+2 = -C_2 e^{x^3-12x}$.

Lausn hvorrar jöfnu um sig má rita á forminu $y = \dfrac{-2 \pm C_2 e^{x^3-12x}}{3}$.

Þar sem $C_2 > 0$, skiptir ekki máli hvort plús eða mínus er notað, svo fastinn getur haft hvort formerkið sem er. Enn fremur er lágvísirinn við fastann C algerlega valfrjáls og má fella hann brott. Því má rita lausnina sem

$y = \dfrac{-2 + Ce^{x^3-12x}}{3}$.

5. Ekkert upphafsskilyrði er gefið og þar með er verkefnið leyst.

STÖÐUMAT 4.10

Notið aðskilnað breytistærða til að finna almenna lausn deildajöfnunnar $y' = 2xy + 3y - 4x - 6$.

DÆMI 4.11

Upphafsgildisverkefni leyst

Leysið upphafsgildisverkefnið með aðskilnaði breytistærða

$$y' = (2x+3)(y^2-4),\ y(0) = -1.$$

Lausn

Fylgið fimm skrefa aðferðinni við aðskilnað breytistærða.

1. Í þessu dæmi er $f(x) = 2x+3$ og $g(y) = y^2 - 4$. Jafnan $g(y) = 0$ gefur $y = \pm 2$ sem fastalausnir.

2. Deilið báðum hliðum jöfnunnar með y^2-4 og margfaldið með dx. Þá fæst jafnan

$$\frac{dy}{y^2-4}=(2x+3)\,dx.$$

3. Heildið næst báðar hliðar:

$$\int \frac{1}{y^2-4}\,dy=\int (2x+3)\,dx.$$

(4.4)

Notið stofnbrotaliðun til að reikna vinstri hliðina. Þá fæst samsemdin

$$\frac{1}{y^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\right).$$

Jafna 4.4 verður því

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+2}\right)dy &= \int (2x+3)\,dx\\ \tfrac{1}{4}(\ln|y-2|-\ln|y+2|) &= x^2+3x+C.\end{aligned}$$

Þegar báðar hliðar jöfnunnar eru margfaldaðar með 4 og $4C$ skipt út fyrir C_1 fæst

$$\begin{aligned}\ln|y-2|-\ln|y+2| &= 4x^2+12x+C_1\\ \ln\left|\tfrac{y-2}{y+2}\right| &= 4x^2+12x+C_1.\end{aligned}$$

4. Hægt er að leysa þessa jöfnu með tilliti til y. Fyrst hefjum við e í veldi beggja hliða jöfnunnar og skilgreinum $C_2=e^{C_1}$:

$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=C_2e^{4x^2+12x}.$$

Síðan má fjarlægja algildismerkið og leyfa C_2 að vera annaðhvort jákvæður eða neikvæður. Þá margföldum við báðar hliðar með $y+2$.

$$y-2=C_2\,(y+2)e^{4x^2+12x}$$
$$y-2=C_2ye^{4x^2+12x}+2C_2e^{4x^2+12x}.$$

Drögum nú alla liði sem innihalda y saman öðrum megin í jöfnunni og leysum jöfnuna með tilliti til y:

$$\begin{aligned} y-C_2ye^{4x^2+12x} &= 2+2C_2e^{4x^2+12x} \\ y(1-C_2e^{4x^2+12x}) &= 2+2C_2e^{4x^2+12x} \\ y &= \frac{2+2C_2e^{4x^2+12x}}{1-C_2e^{4x^2+12x}}. \end{aligned}$$

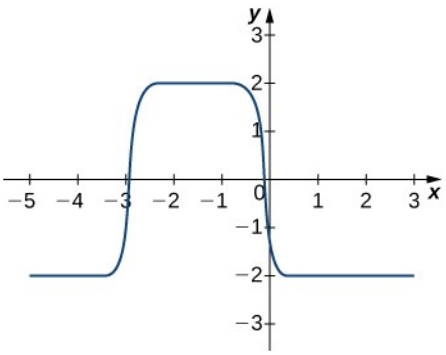
5. Til að ákvarða gildi C_2, setjum við $x=0$ og $y=-1$ inn í almennu lausnina. Einnig má setja sömu gildi inn í fyrri jöfnu, nánar tiltekið jöfnuna $\frac{y-2}{y+2}=C_2e^{4x^2+12}$. Miklu auðveldara er að ákvarða C_2:

$$\begin{aligned} \tfrac{y-2}{y+2} &= C_2e^{4x^2+12x} \\ \tfrac{-1-2}{-1+2} &= C_2e^{4(0)^2+12(0)} \\ C_2 &= -3. \end{aligned}$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er því

$$y=\frac{2-6e^{4x^2+12x}}{1+3e^{4x^2+12x}}.$$

Graf lausnarinnar sést á mynd 4.15.



Mynd 4.15 Graf lausnar upphafsgildisverkefnisins $y'=(2x+3)(y^2-4), y(0)=-1.$

STÖÐUMAT 4.11

Finnið lausn upphafsgildisverkefnisins

$$6\,y' = (2x+1)\left(y^2 - 2y - 8\right),\ y(0) = -3$$

með aðskilnaði breytistærða.

Hagnýting aðskilnaðar breytistærða

Mörgum áhugaverðum verkefnum má lýsa með aðgreinanlegum jöfnum. Við sýnum tvær gerðir verkefna: styrk lausna og kólnunarlögmál Newtons.

Styrkur lausna

Skoðum geymi sem verið er að fylla með saltlausn. Við viljum ákvarða saltmagnið í geyminum sem fall af tíma. Nota má aðskilnað breytistærða til að leysa þetta verkefni og önnur sambærileg verkefni um styrk lausna.

DÆMI 4.12

Saltstyrkur ákvarðaður sem fall af tíma

Geymir sem inniheldur 100 L af saltvatni hefur í upphafi 4 kg af uppleystu salti. Á tímanum $t = 0$, byrjar önnur saltlausn að flæða inn í geyminn með hraðanum 2 L/min. Saltstyrkur þessarar lausnar er 0,5 kg/L. Samtímis er opnaður krani neðst á geyminum svo blandaða lausnin flæðir út með hraðanum 2 L/min, og vökvahæðin í geyminum helst því föst (mynd 4.16). Finnið saltmagnið í geyminum sem fall af tíma, mældum í mínútum, og markgildi saltmagnsins í geyminum, að því gefnu að lausnin í honum sé alltaf vel blönduð.



Mynd 4.16 Saltvatnsgeymir með tiltekið upphafsmagn saltlausnar tekur við innstreymi og skilar útstreymi. Hvernig breytist saltmagnið með tíma?

Lausn

Fyrst skilgreinum við fall $u(t)$ sem táknar saltmagnið í geyminum, mælt í kílógrömmum, sem fall af tíma. Þá táknar $\frac{du}{dt}$ breytingarhraða saltmagnsins í geyminum sem fall af tíma. Auk þess táknar $u(0)$ saltmagnið í geyminum á tímanum $t=0$, en það er 4 kílógrömm.

Almennt form deildajöfnunnar sem við leysum er

$$\frac{du}{dt}=\text{INNSTREYMISHRAÐI}-\text{ÚTSTREYMISHRAÐI}.$$

(4.5)

INNSTREYMISHRAÐI táknar innstreymishraða saltsins í geyminn og ÚTSTREYMISHRAÐI útstreymishraða þess úr geyminum. Lausn streymir inn í geyminn með hraðanum 2 L/min og hver lítri hennar inniheldur 0,5 kílógramm af salti. Því berst $2(0{,}5)=1$ kílógramm af salti í geyminn á hverri mínútu. Þar með er INNSTREYMISHRAÐI = 1.

Til að reikna útstreymishraða saltsins úr geyminum þurfum við að þekkja saltstyrkinn í geyminum á hverjum tíma. Þar sem saltmagnið breytist með tíma breytist saltstyrkurinn einnig. Rúmmál lausnarinnar helst hins vegar fast, 100 lítrar. Saltmagnið (í kílógrömmum) í geyminum á tímanum t er $u(t)$. Saltstyrkurinn er því $\frac{u(t)}{100}$ kg/L og lausnin flæðir úr geyminum með hraðanum 2 L/min. Salt fer því úr geyminum með hraðanum $\frac{u(t)}{100}\cdot 2=\frac{u(t)}{50}$ kg/min og ÚTSTREYMISHRAÐI er $\frac{u(t)}{50}$. Deildajafnan verður því $\frac{du}{dt}=1-\frac{u}{50}$, og upphafsskilyrðið er $u(0)=4$. Upphafsgildisverkefnið sem leysa skal er

$$\frac{du}{dt}=1-\frac{u}{50},u(0)=4.$$

Deildajafnan er aðgreinanleg og því getum við notað fimm skrefa lausnarleiðina.

Skref 1. Jafnan $1-\frac{u}{50}=0$ gefur $u=50$ sem fastalausn. Upphaflegt saltmagn í geyminum er 4 kílógrömm og því á þessi lausn ekki við.

Skref 2. Umritið jöfnuna sem

$$\frac{du}{dt}=\frac{50-u}{50}.$$

Margfaldið svo báðar hliðar með dt og deilið báðum hliðum með $50-u$:

$$\frac{du}{50-u}=\frac{dt}{50}.$$

Skref 3. Heildið báðar hliðar:

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{50-u} &= \int \frac{dt}{50} \\ -\ln|50-u| &= \tfrac{t}{50}+C.\end{aligned}$$

Skref 4. Leysið jöfnuna með tilliti til $u(t)$:

$$\begin{aligned}\ln|50-u| &= -\tfrac{t}{50}-C \\ e^{\ln|50-u|} &= e^{-(t/50)-C} \\ |50-u| &= C_1 e^{-t/50}.\end{aligned}$$

Fjarlægið algildismerkið með því að leyfa fastanum að vera annaðhvort jákvæður eða neikvæður:

$$50-u = C_1 e^{-t/50}.$$

Leysið jöfnuna að lokum með tilliti til $u(t)$:

$$u(t) = 50 - C_1 e^{-t/50}.$$

Skref 5. Ákvarðið C_1:

$$\begin{aligned}u(0) &= 50 - C_1 e^{-0/50} \\ 4 &= 50 - C_1 \\ C_1 &= 46.\end{aligned}$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er $u(t) = 50 - 46\,e^{-t/50}$. Til að finna markgildi saltmagnsins í geyminum tökum við markgildið þegar t stefnir á óendanlegt:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} u(t) &= 50 - 46e^{-t/50} \\ &= 50 - 46\,(0) \\ &= 50.\end{aligned}$$

Athugið að þetta var fastalausn deildajöfnunnar. Ef upphaflegt saltmagn í geyminum er 50 kílógrömm helst það fast. Ef það er minna en 50 kílógrömm í upphafi nálgast það 50 kílógrömm með tímanum.

STÖÐUMAT 4.12

Í geymi eru 3 kílógrömm af salti uppleyst í 75 lítrum af vatni. Saltlausn með styrkinn 0,4 kg salts/L er dælt í geyminn með hraðanum 6 L/min og blandan látin renna út með sama hraða. Finnið saltstyrkinn á tímanum t. Gerið ráð fyrir að blandan í geyminum sé alltaf vel blönduð.

Kólnunarlögmál Newtons

Kólnunarlögmál Newtons segir að breytingarhraði hitastigs hlutar sé í réttu hlutfalli við muninn á hitastigi hlutarins og umhverfishitanum. Ef $T(t)$ táknar hitastig hlutar sem fall af

tíma táknar $\frac{dT}{dt}$ breytingarhraða hitastigsins. Umhverfishita hlutarins má tákna með T_s. Þá má rita kólnunarlögmál Newtons á forminu

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T(t) - T_s\right)$$

eða einfaldlega

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_s\right).$$

(4.6)

Hitastig hlutarins í upphafi hverrar tilraunar er upphafsgildi upphafsgildisverkefnisins. Við táknum þetta hitastig með T_0. Upphafsgildisverkefnið sem leysa þarf er því á forminu

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_s\right), T(0) = T_0,$$

(4.7)

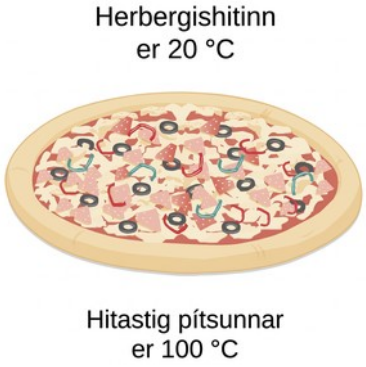
þar sem k er fasti sem annaðhvort þarf að gefa upp eða ákvarða út frá samhengi verkefnisins. Við notum þessar jöfnur í dæmi 4.13.

4

DÆMI 4.13

Beðið eftir að pítsa kólni

Fullbökuð pítsa er tekin úr ofninum og hitastig hennar er þá $100\,^\circ\mathrm{C}$. Hitastigið í eldhúsinu er $20\,^\circ\mathrm{C}$, og eftir 1 mínútu er hitastig pítsunnar $92\,^\circ\mathrm{C}$. Við viljum bíða þar til hitastig hennar er komið niður í $60\,^\circ\mathrm{C}$ áður en hún er skorin og borin fram (mynd 4.17). Hversu miklu lengur þurfum við að bíða?



Mynd 4.17 Samkvæmt kólnunarlögmáli Newtons, ef pítsan kólnar um $8\,^\circ\mathrm{C}$ á 1 mínútu, hversu langur tími líður þar til hún kólnar niður í $60\,^\circ\mathrm{C}$?

Lausn

Umhverfishitinn er $20\,^\circ\mathrm{C}$, svo $T_s = 20$. Hitastig pítsunnar þegar hún kemur úr ofninum er $100\,^\circ\mathrm{C}$, en það er upphafshitastigið (upphafsgildið), svo $T_0 = 100$. Jafna 4.4 verður því

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20), T(0) = 100.$$

Til að leysa deildajöfnuna notum við fimm skrefa aðferðina við lausn aðgreinanlegra jafna.

1. Þegar hægri hliðin er sett jöfn núlli fæst $T = 20$ sem fastalausn. Þar sem hitastig pítsunnar í upphafi er $100\,^\circ\mathrm{C}$, er þetta ekki lausnin sem við leitum að.
2. Umritið deildajöfnuna með því að margfalda báðar hliðar með dt og deila báðum hliðum með $T - 20$:

   $$\frac{dT}{T - 20} = k\,dt.$$
3. Heildið báðar hliðar:

   $$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T-20} &= \int k\,dt \\ \ln|T - 20| &= kt + C. \end{aligned}$$
4. Leysið jöfnuna með tilliti til T með því að velda fyrst báðar hliðar með grunntölunni e:

   $$\begin{aligned} e^{\ln|T-20|} &= e^{kt+C} \\ |T - 20| &= C_1 e^{kt} \\ T - 20 &= C_1 e^{kt} \\ T(t) &= 20 + C_1 e^{kt}. \end{aligned}$$
5. Ákvarðið C_1 með upphafsskilyrðinu $T(0) = 100$:

   $$\begin{aligned} T(t) &= 20 + C_1 e^{kt} \\ T(0) &= 20 + C_1 e^{k(0)} \\ 100 &= 20 + C_1 \\ C_1 &= 80. \end{aligned}$$

   Lausn upphafsgildisverkefnisins er því

   $$T(t) = 20 + 80e^{kt}.$$

   Til að ákvarða gildi k, notum við þá staðreynd að eftir 1 mínútu er hitastig pítsunnar $92\,^\circ\mathrm{C}$. Þar með er $T(1) = 92$. Þegar þessar upplýsingar eru settar inn í lausn upphafsgildisverkefnisins fæst

$$\begin{aligned} T(t) &= 20+80e^{kt} \\ T(1) &= 92=20+80e^{k} \\ 72 &= 80e^{k} \\ \frac{72}{80} &= \frac{9}{10}=e^{k} \\ \ln\ e^{k} &= \ln\left(\frac{9}{10}\right) \\ k &= \ln\left(\frac{9}{10}\right)\approx -,10536 \end{aligned}$$

. Nú höfum við því $T(t)=20+80e^{-,10536t}$. Hvenær er hitastigið $60\,^\circ\mathrm{C}$? Þegar jafnan er leyst með tilliti til t, fæst

$$\begin{aligned} T(t) &= 20+80e^{-,10536t} \\ 60 &= 20+80e^{-,10536t} \\ 40 &= 80e^{-,10536t} \\ \frac{40}{80} &= \frac{1}{2}=e^{-,10536t} \\ -,10536t &= \ln\ \frac{1}{2} \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-,10536}\approx 6,58. \end{aligned}$$

Við þurfum því að bíða í 6,58 mínútur til viðbótar (eftir að hitastig pítsunnar náði $100\,^\circ\mathrm{C}$). Það ætti að vera rétt nægur tími til að ljúka þessum útreikningi.

4

STÖÐUMAT 4.13

Fullbökuð kaka er tekin úr ofninum og hitastig hennar er þá $230\,^\circ\mathrm{C}$. Hitastigið í eldhúsinu er $20\,^\circ\mathrm{C}$, og eftir 10 mínútur er hitastig kökunnar $170\,^\circ\mathrm{C}$.

a. Setjið fram viðeigandi upphafsgildisverkefni sem lýsir aðstæðunum.
b. Leysið upphafsgildisverkefnið og finnið $T(t)$.
c. Hversu langur tími líður þar til minna en $5\,^\circ\mathrm{C}$ munar á hitastigi kökunnar og herbergishita?

Verkefni úr undirkafla 4.3

Leysið eftirfarandi upphafsgildisverkefni með upphafsskilyrðinu $y_0=0$ og teiknið lausnina.

119.

$$\frac{dy}{dt}=y+1$$

120.

$$\frac{dy}{dt} = y - 1$$

121.

$$\frac{dy}{dt} = -y + 1$$

122.

$$\frac{dy}{dt} = -y - 1$$

Finnið almenna lausn deildajöfnunnar.

123.

$$x^2 y' = (x+1)y$$

124.

$$y' = \tan(y)x$$

125.

$$y' = 2xy^2$$

126.

$$\frac{dy}{dt} = y\cos(3t+2)$$

127.

$$2x\frac{dy}{dx} = y^2$$

128.

$$y' = e^y x^2$$

129.

$$(1+x)y' = (x+2)(y-1)$$

130.

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2(x^2+4)$$

131.

$$t\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-y^2}$$

132.

$$y' = e^x e^y$$

Finnið lausn upphafsgildisverkefnisins.

133.

$$y' = e^{y-x}, y(0) = 0$$

134.

$$y' = y^2(x+1), y(0) = 2$$

135.

$$\frac{dy}{dx} = y^3 x e^{x^2}, y(0) = 1$$

136.

$$\frac{dy}{dt} = y^2 e^x \sin(3x), y(0) = 1$$

4

137.

$$y' = \frac{x}{\operatorname{sech}^2 y}, y(0) = 0$$

138.

$$y' = 2xy(1+2y), y(0) = -1$$

139.

$$\frac{dx}{dt} = \ln(t)\sqrt{1-x^2}, x(1) = 0$$

140.

$$y' = 3x^2(y^2+4), y(0) = 0$$

141.

$$y' = e^y 5^x, y(0) = \ln(\ln(5))$$

142.

$$y' = -2x\tan(y), y(0) = \frac{\pi}{6}$$

Notið forrit eða reiknivél í eftirfarandi verkefnum til að búa til stefnuviðin. Leysið jöfnurnar gagngert og teiknið lausnarferla fyrir nokkur upphafsskilyrði. Eru einhver mikilvæg upphafsskilyrði sem breyta hegðun lausnarinnar?

143. **[T]** $y' = 1 - 2y$

144. **[T]** $y' = y^2 x^3$

145. **[T]** $y' = y^3 e^x$

146. **[T]** $y' = e^y$

147. **[T]** $y' = y \ln(x)$

148. Styrkur flestra lyfja í blóðrásinni minnkar samkvæmt jöfnunni $y' = c\,y$, þar sem y er styrkur lyfsins í blóðrásinni. Ef helmingunartími lyfs er 2 klukkustundir, hvaða hlutfall upphafsskammtsins er eftir að 6 klukkustundum liðnum?

149. Lyf er gefið sjúklingi í æð með hraðanum r mg/h og hreinsast úr líkamanum með hraða sem er í réttu hlutfalli við lyfjamagnið sem enn er í líkamanum, d. Setjið upp deildajöfnuna og leysið hana, að því gefnu að ekkert lyf sé í líkamanum í upphafi.

150. **[T]** How often should a drug be taken if its dose is 3 mg, it is cleared at a rate $c = 0{,}1$ mg/h, and 1 mg is required to be in the bloodstream at all times?

151. A tank contains 1 kilogram of salt dissolved in 100 liters of water. A salt solution of 0,1 kg salt/L is pumped into the tank at a rate of 2 L/min and is drained at the same rate. Solve for the salt concentration at time t. Assume the tank is well mixed.

152. A tank containing 10 kilograms of salt dissolved in 1000 liters of water has two salt solutions pumped in. The first solution of 0,2 kg salt/L is pumped in at a rate of 20 L/min and the second solution of 0,05 kg salt/L is pumped in at a rate of 5 L/min. The tank drains at 25 L/min. Assume the tank is well mixed. Solve for the salt concentration at time t.

153. **[T]** Finnið í verkefninu á undan hversu mikið salt er í geyminum 1 klukkustund eftir að ferlið hefst.

154. Lögmál Torricellis fjallar um vatnsgeymi með gati á botninum. Gatið hefur þversniðsflatarmálið A_H og vatnshæðin yfir botni geymisins er h. Lögmálið segir að breytingarhraði vatnsrúmmálsins sem flæðir úr geyminum sé í réttu hlutfalli við kvaðratrót vatnshæðarinnar samkvæmt $\frac{dV}{dt} = -A_H\sqrt{2gh}$, þar sem $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ er þyngdarhröðunin. Athugið að $\frac{dV}{dt} = A_T\frac{dh}{dt}$, þar sem A_T er þversniðsflatarmál geymisins. Leysið upphafsgildisverkefnið sem fæst fyrir vatnshæðina, að því gefnu að geymirinn hafi radíusinn 3 m og hringlaga gat með radíusinn 10 cm. Upphafleg vatnshæð er 4,9 m.

155. Ákvarðið í verkefninu á undan hversu langan tíma það tekur að tæma geyminn.

Notið kólnunarlögmál Newtons í eftirfarandi verkefnum.

156. Fljótandi grunnblanda fyrir ís hefur upphafshitastigið $80\,^\circ\mathrm{C}$ áður en hún er sett í frysti þar sem hitastigið er fast, $-20\,^\circ\mathrm{C}$. Eftir 1 klukkustund hefur hitastig grunnblöndunnar lækkað í $50\,^\circ\mathrm{C}$. Setjið fram og leysið upphafsgildisverkefnið til að ákvarða hitastig íssins.

157. **[T]** Fljótandi grunnblanda fyrir ís hefur upphafshitastigið $100\,^\circ\mathrm{C}$ áður en hún er sett í frysti þar sem hitastigið er fast, $-20\,^\circ\mathrm{C}$. Eftir 2 klukkustundir hefur hitastig grunnblöndunnar lækkað í $70\,^\circ\mathrm{C}$. Hvenær verður ísinn tilbúinn til að borða? Gerið ráð fyrir að $-10\,^\circ\mathrm{C}$ sé kjörhitastig hans til neyslu.

158. **[T]** Þið skipuleggið ísveislu. Útihitinn er $30\,^\circ\mathrm{C}$ og hitastig íssins er $-10\,^\circ\mathrm{C}$. Eftir 10 mínútur hefur hitastig íssins hækkað um $4\,^\circ\mathrm{C}$. Hversu miklu lengur getið þið beðið áður en ísinn bráðnar við $0\,^\circ\mathrm{C}$?

Í verkefnum 159–162 skal gera ráð fyrir kólnunarfastanum $k = -0{,}125$ og að tíminn t sé mældur í mínútum.

159. Þið eruð með kaffibolla við hitastigið $70\,^\circ\mathrm{C}$ og umhverfishitinn í herberginu er $20\,^\circ\mathrm{C}$. Miðað við kólnunarfastann $k = 0{,}125$, skuluð þið setja fram og leysa deildajöfnuna sem lýsir hitastigi kaffisins sem fall af tíma.

160. **[T]** Þið eruð með kaffibolla við hitastigið $70\,^\circ\mathrm{C}$ og setjið hann út þar sem umhverfishitinn er $0\,^\circ\mathrm{C}$. Hversu miklu kaldara er kaffið eftir 5 mínútur?

161. Þið eruð með kaffibolla við hitastigið $70\,^\circ\mathrm{C}$ og hellið strax 1 hluta mjólkur út í 5 hluta kaffis. Upphafshitastig mjólkurinnar er $1\,^\circ\mathrm{C}$. Setjið fram og leysið deildajöfnuna sem ákvarðar hitastig kaffisins.

162. Þið eruð með kaffibolla við hitastigið $70\,^\circ\mathrm{C}$, og látið hann kólna í 10 mínútur áður en þið hellið sama magni af mjólk við $1\,^\circ\mathrm{C}$ út í og í verkefninu á undan. Hvernig er hitastigið í samanburði við fyrri bollann eftir 10 mínútur?

163. Leysið almenna verkefnið $y' = a\,y + b$ með upphafsskilyrðinu $y(0) = c$.

164. Sannið grunnjöfnuna fyrir samfellda vaxtavöxtun. Gerið ráð fyrir upphaflegri innborgun P_0 og vaxtastiginu r, og setjið fram og leysið jöfnu fyrir samfellda vaxtavöxtun.

165. Gerið ráð fyrir að í upphafi séu I kílógrömm af næringarefni í geymi með L lítrum. Lausn með styrkinn c kg/L er dælt inn með hraðanum r L/min. Blandan í geyminum er vel blönduð og rennur út með hraðanum r L/min. Finnið jöfnuna sem lýsir magni næringarefnisins í geyminum.

166. Laufslæða safnast fyrir á skógarbotni með hraðanum 2 g/cm² /ári og brotnar jafnframt niður með hraðanum 90 % á ári. Setjið fram deildajöfnu sem lýsir fjölda gramma af laufslæðu á hvern fersentimetra skógarbotns, að því gefnu að á tímanum 0 sé engin laufslæða á jörðinni. Stefnir magnið á fast gildi? Hvert er það gildi?

167. Laufslæða safnast fyrir á skógarbotni með hraðanum 4 g/cm² /ári. Laufslæðan brotnar niður með hraðanum 10 % á ári. Setjið fram deildajöfnu sem lýsir fjölda gramma af laufslæðu á hvern fersentimetra skógarbotns. Stefnir magnið á fast gildi? Hvert er það gildi?

4.4 Lógistíska jafnan

NÁMSMARKMIÐ

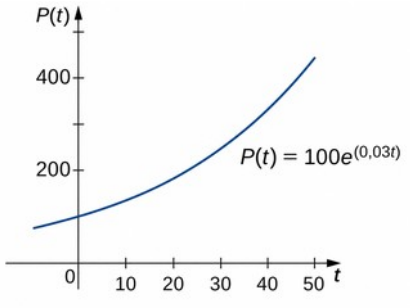
- 4.4.1 Lýsa hugtakinu um burðargetu umhverfis í lógistísku líkani af stofnvexti.
- 4.4.2 Teikna stefnuvið fyrir lógistíska jöfnu og túlka lausnarferlana.
- 4.4.3 Leysa lógistíska jöfnu og túlka niðurstöðurnar.

Nota má deildajöfnur til að lýsa því hvernig stofnstærð breytist með tíma. Við sáum einfaldasta líkanið í fyrri kafla, í undirkaflanum um vísisvöxt og -hnignun. Raunhæfara líkan tekur einnig tillit til annarra þátta sem hafa áhrif á vöxt stofnsins. Í þessum undirkafla skoðum við lógistísku deildajöfnuna og hvernig hún nýtist til að rannsaka stofnþróun í líffræði.

Stofnvöxtur og burðargeta

Til að lýsa stofnvexti með deildajöfnu þurfum við fyrst að skilgreina nokkrar breytur og viðeigandi hugtök. Breytan t. táknar tíma. Tímaeiningarnar geta verið klukkustundir, dagar, vikur, mánuðir eða jafnvel ár. Í hverju verkefni þarf að tilgreina hvaða einingar eru notaðar. Breytan P táknar stofnstærð. Stofnstærðin breytist með tíma og er því fall af tíma. Við ritum $P(t)$ fyrir stofnstærð sem fall af tíma. Ef $P(t)$ er deildanlegt fall táknar fyrsta afleiðan $\frac{dP}{dt}$ augnabliksbreytingarhraða stofnstærðarinnar sem fall af tíma.

Í undirkaflanum Vísisvöxtur og -hnignun rannsökuðum við vísisvöxt og vísishnignun stofna og geislavirkra efna. Dæmi um vísisvaxtarfall er $P(t)=P_0e^{rt}$. Í þessu falli táknar $P(t)$ stofnstærðina á tímanum t, P_0 táknar upphafsstofnstærðina (stofnstærðina á tímanum $t=0$), og fastinn $r>0$ nefnist vaxtarhraði. Mynd 4.18 sýnir graf fallsins $P(t)=100e^{0,03t}$. Hér er $P_0=100$ og $r=0,03$.



Mynd 4.18 Vísisvaxtarlíkan af stofni.

Sannreyna má að fallið $P(t)=P_0 e^{rt}$ leysi upphafsgildisverkefnið

$$\frac{dP}{dt}=rP, P(0)=P_0.$$

Þessi deildajafna hefur áhugaverða túlkun. Vinstri hlið hennar táknar vaxtarhraða (eða hnignunarhraða) stofnsins. Hægri hliðin er jákvæður fasti margfaldaður með núverandi stofnstærð. Deildajafnan segir því að vaxtarhraði stofnsins sé í réttu hlutfalli við stofnstærðina á hverjum tíma. Jafnframt segir hún að hlutfallsfastinn breytist aldrei.

Einn annmarki þessa falls er að það spáir ótakmörkuðum vexti stofnsins þegar fram líða stundir. Slíkt er óraunhæft. Ýmsir þættir takmarka vaxtarhraða stofns, þar á meðal fæðingartíðni, dánartíðni, fæðuframboð og afrán. Vaxtarfastinn r tekur yfirleitt tillit til fæðingar- og dánartíðni en ekki hinna þáttanna. Túlka má hann sem hreinan hlutfallslegan vaxtarhraða, það er fæðingartíðni að frádreginni dánartíðni á hverja tímaeiningu. Eðlilegt er að spyrja hvort vaxtarhraði stofnsins haldist fastur eða breytist með tíma. Líffræðingar hafa komist að því að í mörgum líffræðilegum kerfum vex stofninn þar til hann nær tiltekinni jafnvægisstærð. Vísisvaxtarlíkanið tekur ekki tillit til þessa möguleika. Hugtakið burðargeta gerir hins vegar ráð fyrir að á tilteknu svæði geti aðeins ákveðinn fjöldi lífvera af tiltekinni tegund þrifist án þess að skortur verði á auðlindum.

SKILGREINING

Burðargeta lífveru í tilteknu umhverfi er mesta stofnstærð hennar sem umhverfið getur viðhaldið um ókomna tíð.

Við táknum burðargetuna með breytunni K. Vaxtarhraðann táknum við með breytunni r. Með þessum breytum getum við skilgreint lógistísku deildajöfnuna.

SKILGREINING

Látum K tákna burðargetu tiltekinnar lífveru í tilteknu umhverfi og látum r vera rauntölu sem táknar vaxtarhraðann. Fallið $P(t)$ táknar stofnstærð lífverunnar sem fall af tíma t, og fastinn P_0 táknar upphafsstofnstærðina (stofnstærð lífverunnar á tímanum $t=0$). Þá er lógistíska deildajafnan

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

(4.8)

MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu má finna frekari upplýsingar um lógístísku jöfnuna.

Pierre Verhulst birti lógístísku jöfnuna fyrst árið 1845. Tengja má deildajöfnuna við upphafsskilyrðið $P(0) = P_0$ og mynda þannig upphafsgildisverkefni fyrir $P(t)$.

Gerum ráð fyrir að upphafsstofnstærðin sé lítil miðað við burðargetuna. Þá er $\frac{P}{K}$ lítið, hugsanlega nálægt núlli. Stærðin innan sviganna hægra megin í jöfnu 4.8 er því nálægt 1, og hægri hlið jöfnunnar er nálægt rP. Ef $r > 0$, vex stofninn hratt, líkt og í vísisvexti.

Þegar stofninn vex stækkar hlutfallið $\frac{P}{K}$ einnig, því K er fasti. Ef stofnstærðin helst undir burðargetunni er $\frac{P}{K}$ minna en 1, svo $1 - \frac{P}{K} > 0$. Hægri hlið jöfnu 4.8 er því enn jákvæð, en stærðin innan sviganna minnkar og vaxtarhraðinn lækkar af þeim sökum. Ef $P = K$ er hægri hliðin núll og stofnstærðin breytist ekki.

Gerum nú ráð fyrir að upphafsstofnstærðin sé meiri en burðargetan. Þá er $\frac{P}{K} > 1$, og $1 - \frac{P}{K} < 0$. Hægri hlið jöfnu 4.8 er þá neikvæð og stofninn minnkar. Stofninn minnkar svo lengi sem $P > K$, en hann nær í raun aldrei K, því $\frac{dP}{dt}$ verður sífellt minna. Stofnstærðin nálgast þó burðargetuna þegar t stefnir á óendanlegt. Sýna má þessa greiningu með fasalínu. Fasalína lýsir almennri hegðun lausnar sjálfstæðrar deildajöfnu eftir upphafsskilyrðinu. Fyrir burðargetu í lógístísku jöfnunni er fasalínan eins og sýnt er á mynd 4.19.



Mynd 4.19 Fasalína deildajöfnunnar $\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$.

Fasalínan sýnir að stofninn minnkar með tíma þegar P er minna en núll eða meira en K, en þegar P er milli 0 og K, vex stofninn með tíma.

DÆMI 4.14

Kaflaupphaf: Burðargeta virginíuhjartarstofns könnuð



Mynd 4.20 (Mynd: breytt verk eftir Rachel Kramer, Flickr)

Skoðum virginíuhjartarstofn (Odocoileus virginianus) í Kentucky-fylki. Fisk- og dýralífsstofnun Kentucky (KDFWR) setur reglur um veiðar og fiskveiðar í fylkinu. Stofnunin áætlaði fyrir veiðitímabilið 2004, að stofninn teldi 900.000 dýr. Johnson segir: „Hjartarstofn sem hefur næga fæðu og verður hvorki fyrir veiðum manna né afráni annarra dýra tvöfaldast á þriggja ára fresti.“ (George Johnson, „The Problem of Exploding Deer Populations Has No Attractive Solutions,“ janúar 12, 2001, sótt 9. apríl 2015, http://www.txtwriter.com/onscience/Articles/deerpops.html.) Þessi athugun samsvarar vaxtarhraðanum $r = \frac{\ln(2)}{3} = 0{,}2311$, svo áætlaður vaxtarhraði er 23,11 % á ári. (Þá er gert ráð fyrir vísisvexti stofnsins, sem er eðlileg nálgun, að minnsta kosti til skamms tíma, þegar fæðuframboð er nægt og engin rándýr eru til staðar.) KDFWR birtir einnig þéttleika hjartarstofnsins í 32 sýslum Kentucky. Meðalþéttleikinn er um 10,4248 dýr á ferkílómetra. Gerum ráð fyrir að þetta sé þéttleiki dýranna í öllu fylkinu (102,905 ferkílómetrar).

Burðargetan K er 102,905 ferkílómetrar margfaldaðir með 10,4248 dýrum á ferkílómetra, eða $1.072.764$ dýr.

a. Í þessu verkefni er $P_0 = 900.000$, $K = 1.072.764$, og $r = 0{,}2311$. Setjið þessi gildi inn í jöfnu 4.8 og setjið fram upphafsgildisverkefnið.
b. Leysið upphafsgildisverkefnið úr a-lið.
c. Hver verður stofnstærðin eftir 3 ár samkvæmt þessu líkani? Rifjið upp að Johnson spáði því að tvöföldunartími hjartarstofnsins væri 3 ár. Berið þessi gildi saman.
d. Suppose the population managed to reach $1.200.000$ deer. What does the logistic equation predict will happen to the population in this scenario?

Lausn

a. Upphafsgildisverkefnið er

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}2311\,P\left(1 - \frac{P}{1.072.764}\right), \qquad P(0) = 900.000.$$

b. Lógistíska jafnan er sjálfstæð deildajafna, svo nota má aðskilnað breytistærða.

Skref 1: Þegar hægri hliðin er sett jöfn núlli fást $P = 0$ og $P = 1.072.764$. Þetta merkir að stofn sem byrjar í núlli breytist aldrei og stofn sem byrjar við burðargetuna breytist heldur aldrei.

Skref 2: Umritið deildajöfnuna og margfaldið báðar hliðar með:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 0{,}2311\,P\left(\frac{1.072.764 - P}{1.072.764}\right) \\ dP &= 0{,}2311\,P\left(\frac{1.072.764 - P}{1.072.764}\right) dt. \end{aligned}$$

Deilið báðum hliðum með $P(1.072.764 - P)$:

$$\frac{dP}{P(1.072.764 - P)} = \frac{0{,}2311}{1.072.764}\,dt.$$

Skref 3: Heildið báðar hliðar jöfnunnar með stofnbrotaliðun:

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P(1.072.764 - P)} &= \int \frac{0{,}2311}{1.072.764}\,dt \\ \frac{1}{1.072.764}\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{1.072.764 - P}\right) dP &= \frac{0{,}2311\,t}{1.072.764} + C \\ \frac{1}{1.072.764}\left(\ln|P| - \ln|1.072.764 - P|\right) &= \frac{0{,}2311\,t}{1.072.764} + C. \end{aligned}$$

Skref 4: Margfaldið báðar hliðar með $1.072.764$ og notið kvótareglu logra:

$$\ln\left|\frac{P}{1.072.764-P}\right|=0{,}2311t+C_1.$$

Hér er $C_1=1.072.764\,C$. Veldið því næst báðar hliðar með grunntölunni e og fellið brott algildismerkin:

$$\begin{aligned} e^{\ln\left|\frac{P}{1.072.764-P}\right|} &= e^{0{,}2311t+C_1} \\ \left|\frac{P}{1.072.764-P}\right| &= C_2e^{0{,}2311t} \\ \frac{P}{1.072.764-P} &= C_2e^{0{,}2311t}. \end{aligned}$$

Hér er $C_2=e^{C_1}$, en eftir að algildismerkin hafa verið felld brott getur fastinn einnig verið neikvæður. Leysið nú jöfnuna með tilliti til P:

$$\begin{aligned} P &= C_2e^{0{,}2311t}(1.072.764-P). \\ P &= 1.072.764\,C_2e^{0{,}2311t}-C_2Pe^{0{,}2311t} \\ P+C_2Pe^{0{,}2311t} &= 1.072.764\,C_2e^{0{,}2311t} \\ P(1+C_2e^{0{,}2311t}) &= 1.072.764\,C_2e^{0{,}2311t} \\ P(t) &= \frac{1.072.764\,C_2e^{0{,}2311t}}{1+C_2e^{0{,}2311t}}. \end{aligned}$$

Skref 5: Til að ákvarða gildi C_2, er í raun auðveldara að fara nokkur skref til baka, þangað sem C_2 var skilgreint. Notið nánar tiltekið jöfnuna

$$\frac{P}{1.072.764-P}=C_2e^{0{,}2311t}.$$

Upphafsskilyrðið er $P(0)=900.000$. Skiptið út P fyrir 900.000 og setjið núll í stað t:

$$\begin{aligned} \frac{P}{1.072.764-P} &= C_2e^{0{,}2311t} \\ \frac{900.000}{1.072.764-900.000} &= C_2e^{0{,}2311(0)} \\ \frac{900.000}{172.764} &= C_2 \\ C_2 &= \frac{25.000}{4.799}\approx 5{,}209. \end{aligned}$$

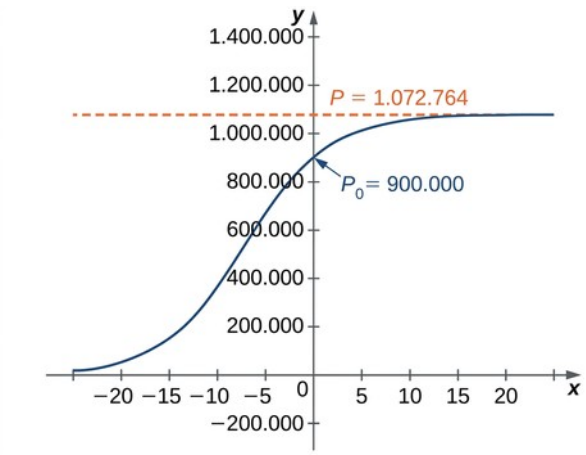
Þegar gildin

$$P(t) = \frac{1.072.764\left(\frac{25000}{4799}\right)e^{0,2311t}}{1+\left(\frac{25000}{4799}\right)e^{0,2311t}} = \frac{1.072.764(25000)e^{0,2311t}}{4799+25000e^{0,2311t}}.$$

Þegar teljara og nefnara er deilt með 25.000 fæst

$$P(t) = \frac{1.072.764e^{0,2311t}}{0,19196+e^{0,2311t}}.$$

Mynd 4.21 sýnir graf þessarar jöfnu.



Mynd 4.21 Lógístískur ferill hjartarstofns með upphafsstofnstærðina 900.000 dýr.

c. Með þessu líkani getum við spáð fyrir um stofnstærðina eftir 3 ár.

$$P(3) = \frac{1.072.764e^{0,2311(3)}}{0,19196+e^{0,2311(3)}} \approx 978.830 \text{ dýr}$$

. Þetta er langt frá því að vera tvöföld upphafsstofnstærð 900.000. Munið að tvöföldunartíminn byggist á þeirri forsendu að vaxtarhraðinn breytist aldrei, en lógístíska líkanið tekur tillit til þess að hann geti breyst.

d. Ef stofninn næði $1.200.000$ dýrum yrði nýja upphafsgildisverkefnið

$$\frac{dP}{dt}=0{,}2311\,P\left(1-\frac{P}{1.072.764}\right),\quad P(0)=1.200.000.$$

Almenna lausn deildajöfnunnar yrði óbreytt.

$$P(t)=\frac{1.072.764\,C_2e^{0{,}2311t}}{1+C_2e^{0{,}2311t}}$$

Til að ákvarða gildi fastans förum við aftur að jöfnunni

$$\frac{P}{1.072.764-P}=C_2e^{0{,}2311t}.$$

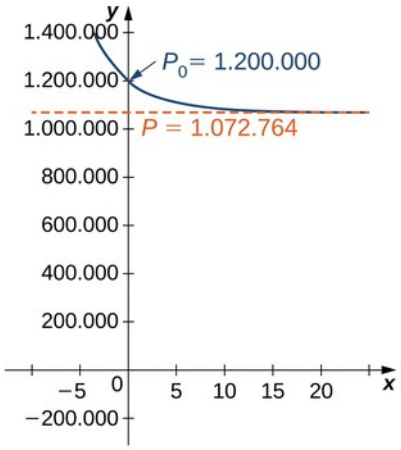
Þegar gildin $t=0$ og $P=1.200.000$, eru sett inn fæst

$$\begin{aligned} C_2e^{0{,}2311(0)} &= \frac{1.200.000}{1.072.764-1.200.000}\\ C_2 &= -\frac{100.000}{10.603}\approx -9{,}431. \end{aligned}$$

Þegar gildin

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1.072.764\,C_2e^{0{,}2311t}}{1+C_2e^{0{,}2311t}}\\ &= \frac{1.072.764\left(-\frac{100.000}{10.603}\right)e^{0{,}2311t}}{1+\left(-\frac{100.000}{10.603}\right)e^{0{,}2311t}}\\ &= -\frac{107.276.400.000\,e^{0{,}2311t}}{100.000\,e^{0{,}2311t}-10.603}\\ &\approx \frac{10.117.551\,e^{0{,}2311t}}{9{,}43129\,e^{0{,}2311t}-1}. \end{aligned}$$

Graf þessarar jöfnu er sýnt á mynd 4.22.



Mynd 4.22 Lógístískur ferill hjartarstofns með upphafsstofnstærðina $1.200.000$ dýr.

Lógístíska deildajafnan leyst

Lógístíska deildajafnan er sjálfstæð deildajafna og því má finna almennu lausnina með aðskilnaði breytistærða, eins og við gerðum í dæmi 4.14.

4

Skref 1: Þegar hægri hliðin er sett jöfn núlli fást fastalausnirnar $P=0$ og $P=K$. Fyrri lausnin segir að stofninn vaxi aldrei ef engar lífverur eru til staðar. Seinni lausnin segir að stofninn breytist aldrei ef upphafsstofnstærðin er jöfn burðargetunni.

Skref 2: Umritið deildajöfnuna á forminu

$$\frac{dP}{dt}=\frac{rP(K-P)}{K}.$$

Margfaldið síðan báðar hliðar með dt og deilið báðum hliðum með $P(K-P)$. Þá fæst

$$\frac{dP}{P(K-P)}=\frac{r}{K}dt.$$

Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með K og heildið:

$$\int\frac{K}{P(K-P)}dP=\int r\,dt.$$

Heilda má vinstri hlið jöfnunnar með stofnbrotaliðun. Sannreynið að

$$\frac{K}{P(K-P)}=\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}.$$

Þá verður jafnan

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}dP &= \int rdt \\ \ln|P|-\ln|K-P| &= rt+C \\ \ln\left|\frac{P}{K-P}\right| &= rt+C.\end{aligned}$$

Veldið nú báðar hliðar jöfnunnar með grunntölunni e til að eyða náttúrulega logranum:

$$\begin{aligned}e^{\ln\left|\frac{P}{K-P}\right|} &= e^{rt+C} \\ \left|\frac{P}{K-P}\right| &= e^{C}e^{rt}.\end{aligned}$$

Við skilgreinum $C_1=e^c$. Þar sem K, $P>0$ og $P<K$, er $\frac{P}{K-P}>0$, má fella brott algildismerkið og jafnan verður

$$\frac{P}{K-P}=C_1e^{rt}.$$

(4.9)

Til að leysa jöfnuna með tilliti til $P(t)$, margföldum við fyrst báðar hliðar með $K-P$ og söfnum liðunum sem innihalda P saman vinstra megin:

$$\begin{aligned}P &= C_1e^{rt}(K-P) \\ P &= C_1Ke^{rt}-C_1Pe^{rt} \\ P+C_1Pe^{rt} &= C_1Ke^{rt}.\end{aligned}$$

Tökum næst P út fyrir sviga vinstra megin og deilum báðum hliðum með hinum þættinum:

$$\begin{aligned}P\left(1+C_1e^{rt}\right) &= C_1Ke^{rt} \\ P(t) &= \frac{C_1Ke^{rt}}{1+C_1e^{rt}}.\end{aligned}$$

(4.10)

Að lokum þarf að ákvarða gildi C_1. Auðveldast er að setja $t=0$ og P_0 í stað P í jöfnu 4.9 og ákvarða C_1:

$$\begin{aligned}\frac{P}{K-P} &= C_1e^{rt} \\ \frac{P_0}{K-P_0} &= C_1e^{r(0)} \\ C_1 &= \frac{P_0}{K-P_0}.\end{aligned}$$

Setjið að lokum segðina fyrir C_1 inn í jöfnu 4.10:

$$P(t)=\frac{C_1Ke^{rt}}{1+C_1e^{rt}}=\frac{\frac{P_0}{K-P_0}Ke^{rt}}{1+\frac{P_0}{K-P_0}e^{rt}}$$

Margfaldið nú teljara og nefnara hægri hliðar með $\left(K-P_0\right)$ og einfaldið:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\frac{P_0}{K-P_0}Ke^{rt}}{1+\frac{P_0}{K-P_0}e^{rt}} \\ &= \frac{\frac{P_0}{K-P_0}Ke^{rt}}{1+\frac{P_0}{K-P_0}e^{rt}} \cdot \frac{K-P_0}{K-P_0} \\ &= \frac{P_0Ke^{rt}}{(K-P_0)+P_0e^{rt}}. \end{aligned}$$

Við setjum niðurstöðuna fram sem setningu.

SETNING 4.2

Lausn lógistísku deildajöfnunnar

Skoðum lógistísku deildajöfnuna með upphafsstofnstærðina P_0, burðargetuna K og vaxtarhraðann r. Lausn samsvarandi upphafsgildisverkefnis er

$$P(t)=\frac{P_0Ke^{rt}}{(K-P_0)+P_0e^{rt}}.$$

(4.11)

4

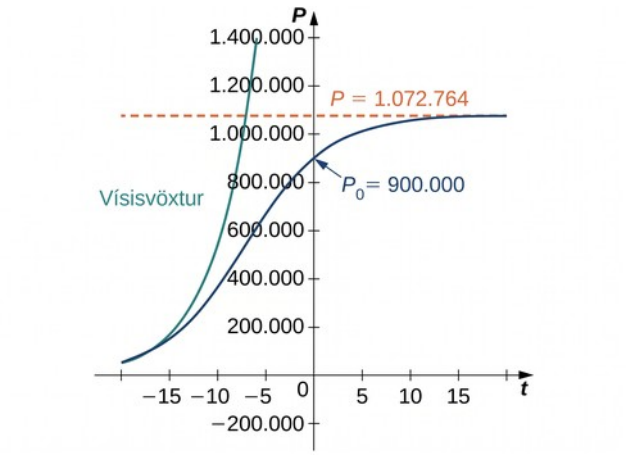
Nú þegar við höfum leyst upphafsgildisverkefnið getum við valið gildi fyrir P_0, r, og K og rannsakað lausnarferilinn. Í dæmi 4.14 notuðum við til dæmis gildið $r=0{,}2311$, $K=1.072.764$, og upphafsstofnstærðina 900.000 dýr. Þá fæst lausnin

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0Ke^{rt}}{(K-P_0)+P_0e^{rt}} \\ &= \frac{900.000(1.072.764)e^{0{,}2311t}}{(1.072.764-900.000)+900.000e^{0{,}2311t}} \\ &= \frac{900.000(1.072.764)e^{0{,}2311t}}{172.764+900.000e^{0{,}2311t}}. \end{aligned}$$

Dividing top and bottom by 900.000 gives

$$P(t)=\frac{1.072.764e^{0{,}2311t}}{0{,}19196+e^{0{,}2311t}}.$$

This is the same as the original solution. The graph of this solution is shown again in blue in Figure 4.23, superimposed over the graph of the exponential growth model with initial population 900.000 and growth rate 0,2311 (appearing in green). The red dashed line represents the carrying capacity, and is a horizontal asymptote for the solution to the logistic equation.



Mynd 4.23 Samanburður á vísisvexti og lógístískum vexti með sömu upphafsstofnstærð, 900.000 lífverur, og sama vaxtarhraða, $23{,}11\,\%$.

Ef gert er ráð fyrir að stofninn vaxi samkvæmt lógístísku deildajöfnunni spáir grafið því að um 20 árum fyrr, árið (1984), hafi vöxtur stofnsins verið mjög nærri vísisvexti. Hreini vaxtarhraðinn hefði þá verið um $23{,}1\,\%$ á ári. Þegar fram líða stundir skiljast gröfin að. Það gerist vegna þess að stofninn vex og lógístíska deildajafnan segir að vaxtarhraðinn minnki þegar stofnstærðin eykst. Þegar stofninn var mældur árið (2004), var hann nálægt burðargetunni og farinn að nálgast jafnvægi.

Lausn lógístísku deildajöfnunnar hefur beygjuskilapunkt. Til að finna punktinn setjum við aðra afleiðuna jafna núlli:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_0 K e^{rt}}{(K-P_0)+P_0 e^{rt}} \\ P'(t) &= \frac{rP_0K(K-P_0)e^{rt}}{((K-P_0)+P_0e^{rt})^2} \\ P''(t) &= \frac{r^2P_0K(K-P_0)^2e^{rt}-r^2P_0^2K(K-P_0)e^{2rt}}{((K-P_0)+P_0e^{rt})^3} \\ &= \frac{r^2P_0K(K-P_0)e^{rt}\left((K-P_0)-P_0e^{rt}\right)}{((K-P_0)+P_0e^{rt})^3}. \end{aligned}$$

Setjum teljarann jafnan núlli:

$$r^2 P_0 K\left(K-P_0\right)e^{rt}\left(\left(K-P_0\right)-P_0e^{rt}\right)=0.$$

Ef $P_0 \neq K$, er öll stærðin fram að og með e^{rt} frábrugðin núlli og því má deila henni brott:

$$\left(K-P_0\right)-P_0e^{rt}=0.$$

Leysum jöfnuna með tilliti til t,

$$\begin{aligned} P_0 e^{rt} &= K - P_0 \\ e^{rt} &= \frac{K-P_0}{P_0} \\ \ln e^{rt} &= \ln \frac{K-P_0}{P_0} \\ rt &= \ln \frac{K-P_0}{P_0} \\ t &= \frac{1}{r} \ln \frac{K-P_0}{P_0}. \end{aligned}$$

Takið eftir að ef $P_0 > K$, er þessi stærð óskilgreind og grafið hefur engan beygjuskilapunkt. Á grafi lógistísku lausnarinnar er beygjuskilapunkturinn þar sem grafið breytist úr því að vera kúpt í að vera hvelft. Þar tekur grafið að fletjast út, því hreini vaxtarhraðinn lækkar þegar stofninn nálgast burðargetuna.

STÖÐUMAT 4.14

A population of rabbits in a meadow is observed to be 200 rabbits at time $t = 0$. After a month, the rabbit population is observed to have increased by $4\,\%$. Using an initial population of 200 and a growth rate of 0,04, with a carrying capacity of 750 rabbits,

4

a. Ritið lógistísku deildajöfnuna og upphafsskilyrði líkansins.
b. Teiknið stefnuvið lógistísku deildajöfnunnar og skissið lausnina þegar upphafsstofnstærðin er 200 kanínur.
c. Leysið upphafsgildisverkefnið og finnið $P(t)$.
d. Notið lausnina til að spá fyrir um stofnstærðina eftir 1 ár.

NEMENDAVERKEFNI

Nemendaverkefni: Lógistíska jafnan með þröskuldsstofni

Bæta má lógistíska líkanið með þröskuldsstofni. Þröskuldsstofn er minnsta stofnstærð sem tegund þarf til að lifa af. Við táknum þröskuldsstofninn með breytunni T. Deildajafna sem tekur bæði tillit til þröskuldsstofnsins T og burðargetunnar K er

$$\frac{dP}{dt} = -rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{P}{T}\right)$$

(4.12)

þar sem r táknar vaxtarhraðann eins og áður.

1. The threshold population is useful to biologists and can be utilized to determine whether a given species should be placed on the endangered list. A group of Australian researchers say they have determined the threshold population for any species to survive: 5000 adults. (Catherine Clabby, "A Magic Number," *American Scientist* 98(1): 24, doi:10.1511/2010.82.24. accessed April 9, 2015, http://www.americanscientist.org/issues/pub/a-magic-number). Therefore we use $T = 5000$ as the threshold population in this project. Suppose that the environmental

carrying capacity in Montana for elk is 25.000. Set up Equation 4.12 using the carrying capacity of 25.000 and threshold population of 5000. Assume an annual net growth rate of 18%.

2. Teiknið stefnuvið deildajöfnunnar úr skrefi 1, ásamt nokkrum lausnum fyrir mismunandi upphafsstofnstærðir. Hverjar eru fastalausnir deildajöfnunnar? Hverju samsvara þessar lausnir í upphaflega stofnlíkaninu, það er í líffræðilegu samhengi?
3. Að hvaða stofnstærð stefnir stofninn fyrir hverja upphafsstofnstærð sem þið völduð í skrefi 2? (Vísbending: Notið stefnuviðið til að sjá hvað gerist fyrir mismunandi upphafsstofnstærðir, það er leitið að láréttum aðfellum lausnanna.)
4. Leysa má þessa jöfnu með aðskilnaði breytistærða. Mjög erfitt er þó að fá lausnina sem gagngert fall af t. Notið upphafsstofnstærðina 18.000 vapítihirti, leysið upphafsgildisverkefnið og setjið lausnina fram sem fólgið fall af t, eða leysið almenna upphafsgildisverkefnið og finnið lausn sem fall af r, K, T, og P_0.

Verkefni úr undirkafla 4.4

Í eftirfarandi verkefnum skal skoða lógistísku jöfnuna á forminu $P' = CP - P^2$. Teiknið stefnuviðið og ákvarðið stöðugleika jafnvægislausnanna.

168.

$$C = 3$$

169.

$$C = 0$$

170.

$$C = -3$$

171. Leysið lógistísku jöfnuna fyrir $C = 10$ með upphafsskilyrðinu $P(0) = 2$.

172. Leysið lógistísku jöfnuna fyrir $C = -10$ með upphafsskilyrðinu $P(0) = 2$.

173. Hjartarstofn í þjóðgarði hefur burðargetuna 200 og vaxtarhraðann 2%. Ef upphafsstofnstærðin er 50 dýr, hver er stofnstærðin á hverjum tíma?

174. Froskastofn í tjörn hefur vaxtarhraðann 5%. Ef upphafsstofnstærðin er 1000 froskar og burðargetan er 6000, hver er stofnstærðin á hverjum tíma?

175. **[T]** Bacteria grow at a rate of 20% per hour in a petri dish. If there is initially one bacterium and a carrying capacity of 1 million cells, how long does it take to reach 500.000 cells?

176. **[T]** Kanínustofn í garði telur 10 kanínur í upphafi og vex með hraðanum 4% á ári. Ef burðargetan er 500, hvenær nær stofninn 100 kanínum?

177. **[T]** Tveir apar eru fluttir til eyju. Eftir 5 ár eru aparnir orðnir 8 og áætluð burðargeta er 25 apar. Hvenær nær apastofninn 16 öpum?

178. [T] Byggt er fiðrildafriðland sem rúmar 2000 fiðrildi og í upphafi eru 400 fiðrildi flutt þangað. Eftir 2 mánuði eru fiðrildin orðin 800. Hvenær nær stofninn 1500 fiðrildum?

Í eftirfarandi verkefnum er lógistíska jafnan skoðuð með viðbótarlið fyrir fækkun, annaðhvort vegna dauðsfalla eða brottflutnings.

179. [T] Stærð silungsstofns í tjörn er lýst með $P' = 0{,}4\,P\left(1 - \frac{P}{10000}\right) - 400$, þar sem 400 silungar eru veiddir á ári. Notið reiknivél eða tölvuhugbúnað til að teikna stefnuvið og nokkrar lausnir. Hvernig búist þið við að stofninn þróist?

180. Hver er stöðugleiki jafnvægislausnanna úr verkefninu á undan, $0 < P_1 < P_2$?

181. [T] Notið hugbúnað í verkefninu á undan til að teikna stefnuvið fyrir gildið $f = 400$. Hver er stöðugleiki jafnvægislausnanna?

182. [T] Notið hugbúnað í verkefnunum á undan til að teikna stefnuvið fyrir gildið $f = 600$. Hver er stöðugleiki jafnvægislausnanna?

183. [T] Skoðið í verkefnunum á undan það tilvik að tilteknum fjölda fiska sé bætt í tjörnina, það er $f = -200$. Hverjar eru óneikvæðu jafnvægislausnirnar og hver er stöðugleiki þeirra?

4

Líklegra er að veiðin ráðist af fjölda fiska í stofninum hverju sinni. Í stað þess að fastur fjöldi fiska sé veiddur er veiðihraðinn því í réttu hlutfalli við núverandi stofnstærð, með hlutfallsfastann k, þannig:

$$P' = 0{,}4\,P\left(1 - \frac{P}{10000}\right) - k\,P.$$

184. [T] For the previous fishing problem, draw a directional field assuming $k = 0{,}1$. Draw some solutions that exhibit this behavior. What are the equilibria and what are their stabilities?

185. [T] Use software or a calculator to draw directional fields for $k = 0{,}4$. What are the nonnegative equilibria and their stabilities?

186. [T] Use software or a calculator to draw directional fields for $k = 0{,}6$. What are the equilibria and their stabilities?

187. Solve this equation, assuming a value of $k = 0{,}05$ and an initial condition of 2000 fish.

188. Leysið jöfnuna fyrir gildið $k = 0{,}05$ og upphafsstofnstærðina 5000 fiska.

Í eftirfarandi verkefnum bætist við lágmarksþröskuldur T, sem tegundin þarf til að lifa af. Deildajafnan verður þá $P'(t) = r\,P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{T}{P}\right)$.

189. Draw the directional field of the threshold logistic equation, assuming $K = 10$, $r = 0{,}1$, $T = 2$. When does the population survive? When does it go extinct?

190. Leysið lógistísku jöfnuna með þröskuldsstofni úr verkefninu á undan fyrir upphafsskilyrðið $P(0)=P_0$.

191. Bengal-tígrisdýr í friðlandi hafa burðargetuna 100 og þurfa að vera að minnsta kosti 10 dýr til að stofninn lifi af. Ef stofninn vex með hraðanum 1 % á ári og upphafsstofnstærðin er 15 tígrisdýr, finnið stofnstærðina sem fall af tíma.

192. Skógur á Madagaskar getur borið 5000 skrautrófu-lemúra og stofn þeirra vex með hraðanum 5 % á ári. Til að stofninn lifi af þurfa dýrin að vera að minnsta kosti 500. Finnið stofnstærð lemúranna sem fall af tíma þegar upphafsstofnstærðin er 600.

193. The population of Florida panthers in the southwestern tip of Florida has an estimated carrying capacity of 250 and grows at a rate of 0,25 % per year and there must be 25 for the population to survive. With an initial population of 30 Florida panthers, how many years will it take to get the Florida panthers off the endangered species list (at least 100)?

Eftirfarandi verkefni fjalla um Gompertz-jöfnuna, breytingu á lógistísku vaxtarlíkani sem oft er notuð til að lýsa vexti krabbameinsæxla, nánar tiltekið fjölda æxlisfrumna.

194. Gompertz-jafnan er $P(t)'=\alpha \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right)P(t)$. Teiknið stefnuvið jöfnunnar þegar allir stikar eru jákvæðir og $K=1$.

195. Assume that for a population, $K=1000$ and $\alpha=0{,}05$. Draw the directional field associated with this differential equation and draw a few solutions. What is the behavior of the population?

196. Leysið Gompertz-jöfnuna fyrir almenn gildi α og K með upphafsskilyrðinu $P(0)=P_0$.

197. **[T]** The Gompertz equation has been used to model tumor growth in the human body. Starting from one tumor cell on day 1 and assuming $\alpha=0{,}1$ and a carrying capacity of 10 million cells, how long does it take to reach “detection” stage at 5 million cells?

198. **[T]** Áætlað er að mannfjöldi heimsins hafi náð 3 milljörðum árið 1959 og 6 milljörðum árið 1999. Gerið ráð fyrir að burðargetan sé 16 milljarðar manna, setjið fram og leysið deildajöfnuna fyrir lógistískan vöxt og ákvarðið hvaða ár mannfjöldinn náði 7 milljörðum.

199. **[T]** Áætlað er að mannfjöldi heimsins hafi náð 3 milljörðum árið 1959 og 6 milljörðum árið 1999. Gerið ráð fyrir að burðargetan sé 16 milljarðar manna, setjið fram og leysið deildajöfnuna fyrir Gompertz-vöxt og ákvarðið hvaða ár mannfjöldinn náði 7 milljörðum. Hvort lýsti lógistískur vöxtur eða Gompertz-vöxtur þróuninni betur, þegar þess er gætt að mannfjöldi heimsins náði 7 milljörðum í október $31, 2011$?

200. Sýnið fram á að stofninn vex hraðast þegar hann nær helmingi burðargetunnar í lógistísku jöfnunni $P'=r\,P\left(1-\frac{P}{K}\right)$.

201. Hvenær vex stofninn hraðast samkvæmt lógistísku jöfnunni með þröskuldsstofni $P'(t)=rP\left(1-\frac{P}{K}\right)\left(1-\frac{T}{P}\right)$?

202. Hvenær vex stofninn hraðast samkvæmt Gompertz-jöfnunni $P(t)'=\alpha \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right)P(t)$?

Taflan hér að neðan sýnir stærð villta söngtranastofnsins frá 1940 til 2000. Stofninn var nærri útdauða en rétti úr kútnum eftir að verndaraðgerðir hófust. Í eftirfarandi verkefnum skal fella stofnlíkön að gögnunum. Gerið ráð fyrir burðargetu upp á 10.000 söngtrönur. Fellið líkanið að gögnunum með árum frá 1940 sem tímabreytu (þannig er upphafsstofnstærðin á tímanum 0 jöfn 22 söngtrönum).

Ár (ár frá upphafi verndaraðgerða)	Stærð söngtranastofns
1940 (0)	22
1950 (10)	31
1960 (20)	36
1970 (30)	57
1980 (40)	91
1990 (50)	159
2000 (60)	256

Source: https://www.savingcranes.org/images/stories/site_images/conservation/whooping_crane/pdfs/historic_wc_numbers.pdf

203. Finnið jöfnuna og stikann r sem falla best að gögnunum fyrir lógistísku jöfnuna.

204. Finnið jöfnuna og stikana r og T sem falla best að gögnunum fyrir lógistísku jöfnuna með þröskuldsstofni.

205. Finnið jöfnuna og stikann α sem falla best að gögnunum fyrir Gompertz-jöfnuna.

206. Teiknið lausnirnar þrjár og gögnin á sama hnitakerfi. Hvaða líkan virðist nákvæmast?

207. Notið jöfnurnar þrjár úr verkefnunum á undan til að áætla stofnstærðina árið 2010, það er 70 árum eftir að verndaraðgerðir hófust. Raunveruleg stofnstærð sem mældist þá var 437. Hvaða líkan er nákvæmast?

4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur

NÁMSMARKMIÐ

- 4.5.1 Rita fyrsta stigs línulega deildajöfnu á staðalformi.

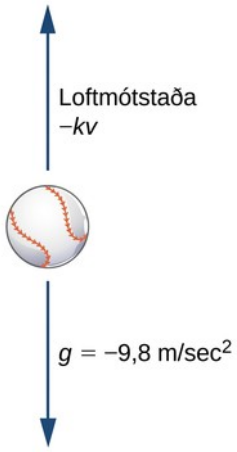
- 4.5.2 Finna heildunarþátt og nota hann til að leysa fyrsta stigs línulega deildajöfnu.
- 4.5.3 Leysa hagnýt verkefni sem fela í sér fyrsta stigs línulegar deildajöfnur.

Áður notuðum við fyrsta stigs deildajöfnu til að finna hraða hlutar. Ef bolta er nánar tiltekið kastað upp með upphafshraðanum v_0 m/s er upphafsgildisverkefnið sem lýsir hraða boltans eftir t sekúndur gefið með

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8, v(0) = v_0.$$

Þetta líkan gerir ráð fyrir að eini krafturinn sem verkar á boltann sé þyngdarkrafturinn. Nú víkkum við verkefnið út og gerum ráð fyrir að loftmótstaða geti einnig verkað á boltann.

Loftmótstaða verkar alltaf í gagnstæða átt við hreyfinguna. Þegar hlutur hreyfist upp verkar loftmótstaðan því niður. Þegar hluturinn fellur verkar hún upp (mynd 4.24). Ekki er til nákvæmt samband milli hraða hlutar og loftmótstöðunnar sem verkar á hann. Fyrir mjög smáa hluti er loftmótstaða í réttu hlutfalli við hraðann; krafturinn vegna loftmótstöðu er sem sagt tölulega jafn margfeldi fastans k og v. Fyrir stærri hluti (t.d. á stærð við hafnabolta) getur loftmótstaðan, eftir lögun hlutarins, verið nokkurn veginn í réttu hlutfalli við annað veldi hraðans. Hún kann raunar að vera í réttu hlutfalli við $v^{1,5}$ eða $v^{0,9}$ eða annað veldi af v.



Mynd 4.24 Kraftar sem verka á hafnabolta á hreyfingu: Þyngdarkrafturinn verkar niður en loftmótstaðan í gagnstæða átt við hreyfinguna.

Við notum línulega nálgun á loftmótstöðu. Ef við gerum ráð fyrir að $k > 0$, þá er krafturinn F_A vegna loftmótstöðu gefinn með $F_A = -kv$. Summa kraftanna sem verka á hlutinn er því jöfn summu þyngdarkraftsins og kraftsins vegna loftmótstöðu. Samkvæmt öðru lögmáli Newtons er hún jafnframt jöfn massa hlutarins margfölduðum með hröðun hans á tímanum t. Því fæst deildajafnan

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg.$$

Að lokum setjum við upphafsskilyrðið $v(0) = v_0$, þar sem v_0 er upphafshraðinn mældur í metrum á sekúndu. Þá er $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Upphafsgildisverkefnið verður

$$m\frac{dv}{dt}=-kv-mg, v(0)=v_0.$$

(4.13)

Deildajafnan í þessu upphafsgildisverkefni er dæmi um fyrsta stigs línulega deildajöfnu. (Munið að deildajafna er af fyrsta stigi ef hæsta stig afleiðu sem kemur fyrir í henni er 1.) Í þessum undirkafla skoðum við fyrsta stigs línulegar deildajöfnur og aðferð til að finna almenna lausn þeirra og leysa upphafsgildisverkefni sem byggjast á þeim.

SKILGREINING

Fyrsta stigs deildajafna er línuleg ef rita má hana á forminu

$$a(x)y'+b(x)y=c(x),$$

(4.14)

þar sem $a(x), b(x)$, og $c(x)$ eru einhver föll af x.

Munið að óþekkta fallið y er háð breytunni x; það er x er óháða breytan og y háða breytan. Dæmi um fyrsta stigs línulegar deildajöfnur eru

$$\begin{aligned}(3x^2-4)y\prime+(x-3)y &= \sin x\\ (\sin x)y\prime-(\cos x)y &= \cot x\\ 4xy\prime+(3\ln x)y &= x^3-4x.\end{aligned}$$

Dæmi um fyrsta stigs ólínulegar deildajöfnur eru

$$\begin{aligned}(y\prime)^4-(y\prime)^3 &= (3x-2)(y+4)\\ 4y\prime+3y^3 &= 4x-5\\ (y\prime)^2 &= \sin y+\cos x.\end{aligned}$$

Þessar jöfnur eru ólínulegar vegna liða á borð við $(y')^4$, y^3, og fleiri slíkra. Vegna þessara liða er ekki hægt að setja jöfnurnar á sama form og jöfnu 4.14.

Staðalform

Skoðum deildajöfnuna

$$(3x^2-4)y'+(x-3)y=\sin x.$$

Meginmarkmið okkar í þessum undirkafla er að leiða út lausnaraðferð fyrir jöfnur af þessu tagi. Hentugt er að stuðullinn við y' sé jafn 1. Til þess deilum við báðum hliðum með $3x^2-4$.

$$y'+\left(\frac{x-3}{3x^2-4}\right)y=\frac{\sin x}{3x^2-4}$$

Þetta nefnist staðalform deildajöfnunnar. Við notum það síðar þegar við finnum lausn almennrar fyrsta stigs línulegrar deildajöfnu. Snúum aftur að jöfnu 4.14. Deila má báðum hliðum hennar með $a(x)$. Þá fæst jafnan

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}.$$

(4.15)

Skilgreinum nú $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ og $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$. Þá verður jafna 4.14

$$y' + p(x)y = q(x).$$

(4.16)

Setja má hverja fyrsta stigs línulega deildajöfnu á þetta form. Það nefnist staðalform fyrsta stigs línulegrar deildajöfnu.

DÆMI 4.15

Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur settar á staðalform

Setjið eftirfarandi fyrsta stigs línulegar deildajöfnur á staðalform. Ákvarðið $p(x)$ og $q(x)$ fyrir hverja jöfnu.

a. $y' = 3x - 4y$

b. $\frac{3xy'}{4y-3} = 2$ (hér er $x \neq 0$)

c. $y = 3y' - 4x^2 + 5$

Lausn

a. Leggið $4y$ við báðar hliðar:

$$y' + 4y = 3x.$$

Í þessari jöfnu er $p(x) = 4$ og $q(x) = 3x$.

b. Margfaldið báðar hliðar með $4y - 3$, og dragið síðan $8y$ frá hvorri hlið:

$$\begin{aligned} \frac{3xy'}{4y-3} &= 2 \\ 3xy' &= 2(4y-3) \\ 3xy' &= 8y - 6 \\ 3xy' - 8y &= -6. \end{aligned}$$

Deilið að lokum báðum hliðum með $3x$ svo stuðullinn við y' verði 1:

$$y' - \frac{8}{3x}y = -\frac{2}{x}.$$

(4.17)

Þetta má gera því að í upphaflega verkefninu gerðum við ráð fyrir að $x \neq 0$. (Ef $x = 0$ verður upprunalega jafnan $0 = 2$, sem er augljóslega ósönn fullyrðing.)

Í þessari jöfnu er $p(x) = -\frac{8}{3x}$ og $q(x) = -\frac{2}{x}$.

c. Dragið y frá hvorri hlið og bætið við $4x^2 - 5$:

$$3y' - y = 4x^2 - 5.$$

Deilið síðan báðum hliðum með 3:

$$y' - \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}.$$

Í þessari jöfnu er $p(x) = -\frac{1}{3}$ og $q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}$.

4

STÖÐUMAT 4.15

Setjið jöfnuna $\frac{(x+3)y'}{2x - 3y - 4} = 5$ á staðalform og ákvarðið $p(x)$ og $q(x)$.

Heildunarþættir

Nú leiðum við út aðferð til að leysa hvaða fyrsta stigs línulega deildajöfnu sem er. Byrjum á staðalformi slíkrar jöfnu:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

(4.18)

Fyrri liðurinn vinstra megin í jöfnu 4.15 er afleiða óþekkta fallsins og seinni liðurinn er margfeldi þekkts falls og óþekkta fallsins. Þetta minnir nokkuð á margfeldisregluna úr undirkaflanum Deildunarreglur. Ef við margföldum jöfnu 4.16 með enn óákveðnu falli $\mu(x)$, verður jafnan

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x).$$

(4.19)

Vinstri hlið jöfnu 4.18 fellur nákvæmlega að margfeldisreglunni:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ef við berum saman lið fyrir lið fæst $y=f(x), g(x)=\mu(x)$, og $g'(x)=\mu(x)p(x)$. Tökum afleiðu af $g(x)=\mu(x)$ og setjum hana jafna hægri hlið $g'(x)=\mu(x)p(x)$; þá fæst

$$\mu'(x)=\mu(x)p(x).$$

Þetta er fyrsta stigs aðgreinanleg deildajafna fyrir $\mu(x)$. Fallið $p(x)$ þekkjum við úr deildajöfnunni sem við erum að leysa. Aðskilnaður breytistærða og heildun gefa

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= p(x) \\
\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx &= \int p(x)\,dx \\
\ln|\mu(x)| &= \int p(x)\,dx + C \\
e^{\ln|\mu(x)|} &= e^{\int p(x)\,dx+C} \\
|\mu(x)| &= C_1 e^{\int p(x)\,dx} \\
\mu(x) &= C_2 e^{\int p(x)\,dx}.
\end{aligned}$$

Hér getur C_2 verið hvaða fasti sem er, jákvæður eða neikvæður. Þannig fæst almenn aðferð til að leysa fyrsta stigs línulega deildajöfnu. Fyrst margföldum við báðar hliðar jöfnu 4.16 með heildunarþættinum $\mu(x)$. Þá fæst

$$\mu(x)y'+\mu(x)p(x)y=\mu(x)q(x).$$

(4.20)

Endurrita má vinstri hlið jöfnu 4.20 sem $\frac{d}{dx}(\mu(x)y)$.

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y)=\mu(x)q(x).$$

(4.21)

Heildum næst báðar hliðar jöfnu 4.21 með tilliti til x.

$$\begin{aligned}
\int \frac{d}{dx}(\mu(x)y)\,dx &= \int \mu(x)q(x)\,dx \\
\mu(x)y &= \int \mu(x)q(x)\,dx.
\end{aligned}$$

(4.22)

Deilum báðum hliðum jöfnu 4.22 með $\mu(x)$:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)q(x)\,dx+C\right].$$

(4.23)

Við höfum þegar reiknað $\mu(x)$ og lausnin er því fundin. Eitt mikilvægt atriði varðar heildunarfastann C: Svo kann að virðast sem við notum heildunarfastann ekki á samræmdan hátt. Heildið sem inniheldur $p(x)$ er þó nauðsynlegt til að finna heildunarþátt fyrir jöfnu 4.15. Aðeins þarf einn heildunarþátt til að leysa jöfnuna og því má velja gildi fyrir C í þessu heildi. Við völdum $C=0$. Þegar við reiknum heildið innan hornklofanna í jöfnu 4.21 þarf hins vegar að halda öllum mögulegum gildum heildunarfastans, því markmiðið er að finna almenna lausnafjölskyldu jöfnu 4.15. Þessi heildunarþáttur tryggir einmitt það.

LAUSNARLEIÐ

Fyrsta stigs línuleg deildajafna leyst

1. Setjið jöfnuna á staðalform og ákvarðið $p(x)$ og $q(x)$.
2. Reiknið heildunarþáttinn $\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$.
3. Margfaldið báðar hliðar deildajöfnunnar með $\mu(x)$.
4. Heildið báðar hliðar jöfnunnar sem fæst í skrefi 3, og deilið báðum hliðum með $\mu(x)$.
5. Ef upphafsskilyrði er gefið, ákvarðið gildi C.

4

DÆMI 4.16

Fyrsta stigs línuleg deildajafna leyst

Finnið almenna lausn deildajöfnunnar $x\,y'+3\,y=4\,x^2-3\,x$. Gerið ráð fyrir að $x>0$.

Lausn

1. Til að setja þessa deildajöfnu á staðalform deilum við báðum hliðum með x:

   $$y'+\frac{3}{x}\,y=4\,x-3.$$

   Því er $p(x)=\frac{3}{x}$ og $q(x)=4\,x-3$.
2. Heildunarþátturinn er $\mu(x)=e^{\int(3/x)\,dx}=e^{3\ln x}=x^3$.
3. Margföldun beggja hliða deildajöfnunnar með $\mu(x)$ gefur

   $$\begin{aligned} x^3y' + x^3\left(\tfrac{3}{x}\right)y &= x^3\,(4x-3) \\ x^3y' + 3x^2y &= 4x^4 - 3x^3 \\ \tfrac{d}{dx}\left(x^3y\right) &= 4x^4 - 3x^3. \end{aligned}$$
4. Heildið báðar hliðar jöfnunnar.

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}\left(x^3 y\right)dx &= \int 4x^4 - 3x^3 dx \\ x^3 y &= \tfrac{4x^5}{5} - \tfrac{3x^4}{4} + C \\ y &= \tfrac{4x^2}{5} - \tfrac{3x}{4} + Cx^{-3}.\end{aligned}$$

5. Ekkert upphafsgildi er gefið og því er verkefnið leyst.

Greining

Þið hafið ef til vill tekið eftir skilyrðinu sem lagt var á deildajöfnuna, nefnilega $x>0$. Fyrir sérhvert gildi C, sem er ekki núll, er almenna lausnin ekki skilgreind í $x=0$. Auk þess breytist heildunarþátturinn þegar $x<0$, Samkvæmt jöfnu 4.19 er heildunarþátturinn $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$. Fyrir þetta $p(x)$ fæst

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int (3/x)dx} = e^{3\ln|x|} = |x|^3,$$

því að $x<0$. Hegðun almennu lausnarinnar breytist í $x=0$ einkum vegna þess að $p(x)$ er ekki skilgreint þar.

STÖÐUMAT 4.16

Finnið almenna lausn deildajöfnunnar $(x-2)y'+y=3x^2+2x$. Gerið ráð fyrir að $x>2$.

Nú notum við sömu aðferð til að finna lausn upphafsgildisverkefnis.

DÆMI 4.17

Fyrsta stigs línulegt upphafsgildisverkefni

Leysið upphafsgildisverkefnið

$$y'+3y=2x-1, y(0)=3.$$

Lausn

1. Þessi deildajafna er nú þegar á staðalformi, þar sem $p(x)=3$ og $q(x)=2x-1$.
2. Heildunarþátturinn er $\mu(x)=e^{\int 3dx}=e^{3x}$.
3. Margföldun beggja hliða deildajöfnunnar með $\mu(x)$ gefur

$$\begin{aligned}e^{3x}y' + 3e^{3x}y &= (2x-1)e^{3x} \\ \tfrac{d}{dx}\left[ye^{3x}\right] &= (2x-1)e^{3x}.\end{aligned}$$

Heildið báðar hliðar jöfnunnar:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d}{dx}\left[ye^{3x}\right]dx &= \int (2x-1)e^{3x}dx \\
ye^{3x} &= \tfrac{e^{3x}}{3}(2x-1) - \int \frac{2}{3}e^{3x}dx \\
ye^{3x} &= \tfrac{e^{3x}(2x-1)}{3} - \tfrac{2e^{3x}}{9} + C \\
y &= \tfrac{2x-1}{3} - \tfrac{2}{9} + Ce^{-3x} \\
y &= \tfrac{2x}{3} - \tfrac{5}{9} + Ce^{-3x}.
\end{aligned}$$

4. Setjið nú $x=0$ og $y=3$ inn í almennu lausnina og ákvarðið C:

$$\begin{aligned}
y &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{9} + Ce^{-3x} \\
3 &= \tfrac{2}{3}(0) - \tfrac{5}{9} + Ce^{-3(0)} \\
3 &= -\tfrac{5}{9} + C \\
C &= \tfrac{32}{9}.
\end{aligned}$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er því

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}+\frac{32}{9}e^{-3x}.$$

4

STÖÐUMAT 4.17

Leysið upphafsgildisverkefnið $y'-2y=4x+3\,y(0)=-2$.

Notkun fyrsta stigs línulegra deildajafna

Við skoðum tvö ólík dæmi um notkun fyrsta stigs línulegra deildajafna. Fyrra tilvikið varðar loftmótstöðu hluta sem hreyfast upp eða falla en hið síðara fjallar um rafrás. Notkunarmöguleikarnir eru mun fleiri en lausnaraðferðin er yfirleitt svipuð.

Frjálst fall með loftmótstöðu

Við fjölluðum um loftmótstöðu í upphafi þessa undirkafla. Næsta dæmi sýnir hvernig beita má hugtakinu á bolta í lóðréttri hreyfingu. Aðrir þættir, svo sem stærð og lögun hlutarins, geta líka haft áhrif á loftmótstöðukraftinn en hér lítum við fram hjá þeim.

DÆMI 4.18

Veggjatennisbolti með loftmótstöðu

A racquetball is hit straight upward with an initial velocity of 2 m/s. The mass of a racquetball is approximately 0,0427 kg. Air resistance acts on the ball with a force numerically equal to $0{,}5v$, where v represents the velocity of the ball at time t.

a. Finnið hraða boltans sem fall af tíma.
b. Hve langan tíma tekur það boltann að ná mestu hæð?
c. Ef boltanum er slegið úr 1 metra upphafshæð, hve hátt kemst hann?

Lausn

a. Massinn er $m=0{,}0427$ kg, $k=0{,}5$, og $g=9{,}8$ m/s^2. Upphafshraðinn er $v_0=2$ m/s. Upphafsgildisverkefnið er því

$$0{,}0427\frac{dv}{dt}=-0{,}5v-0{,}0427(9{,}8),\quad v_0=2.$$

Deiling deildajöfnunnar með 0,0427 gefur

$$\frac{dv}{dt}=-11{,}7096v-9{,}8,\quad v_0=2.$$

Deildajafnan er línuleg. Beitum lausnaraðferðinni fyrir línulegar deildajöfnur:

Skref 1. Endurritið deildajöfnuna sem $\frac{dv}{dt}+11{,}7096v=-9{,}8$. Þá fæst $p(t)=11{,}7096$ og $q(t)=-9{,}8$

Skref 2. Heildunarþátturinn er $\mu(t)=e^{\int 11{,}7096\,dt}=e^{11{,}7096t}$.

Skref 3. Margfaldið deildajöfnuna með $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} e^{11{,}7096t}\frac{dv}{dt}+11{,}7096ve^{11{,}7096t} &= -9{,}8e^{11{,}7096t}\\ \frac{d}{dt}[ve^{11{,}7096t}] &= -9{,}8e^{11{,}7096t}. \end{aligned}$$

Skref 4. Heildið báðar hliðar:

$$\begin{aligned} \int\frac{d}{dt}[ve^{11{,}7096t}]\,dt &= \int -9{,}8e^{11{,}7096t}\,dt\\ ve^{11{,}7096t} &= \frac{-9{,}8}{11{,}7096}e^{11{,}7096t}+C\\ v(t) &= -0{,}8369+Ce^{-11{,}7096t}. \end{aligned}$$

Skref 5. Ákvarðið C með upphafsskilyrðinu $v_0=v(0)=2$:

$$\begin{aligned} v(t) &= -0{,}8369+Ce^{-11{,}7096t}\\ v(0) &= -0{,}8369+Ce^{-11{,}7096(0)}\\ 2 &= -0{,}8369+C\\ C &= 2{,}8369. \end{aligned}$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er því $v(t)=2{,}8369\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369$.

b. Boltinn nær mestu hæð sinni þegar hraðinn er jafn núlli. Ástæðan er sú að boltinn hækkar þegar hraðinn er jákvæður en fellur þegar hann er neikvæður. Þegar hraðinn er núll hækkar boltinn því hvorki né fellur og er í mestu hæð sinni:

$$\begin{aligned}
2{,}8369\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369 &= 0\\
2{,}8369\,e^{-11{,}7096t} &= 0{,}8369\\
e^{-11{,}7096t} &= \frac{0{,}8369}{2{,}8369}\approx 0{,}295\\
\ln\, e^{-11{,}7096t} &= \ln\, 0{,}295\approx -1{,}221\\
-11{,}7096t &= -1{,}221\\
t &\approx 0{,}104.
\end{aligned}$$

Það tekur hann því um $0{,}104$ sekúndu að ná mestu hæð.

c. Til að finna hæð boltans sem fall af tíma notum við að afleiða staðsetningar með tilliti til tíma er hraði. Ef $h(t)$ táknar hæðina á tímanum t, þá er $h'(t)=v(t)$. Þar sem við þekkjum $v(t)$ og upphafshæðina getum við sett upp upphafsgildisverkefni:

$$h'(t)=2{,}8369\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369,\qquad h(0)=1.$$

Heildun beggja hliða deildajöfnunnar með tilliti til t gefur

$$\begin{aligned}
\int h'(t)\,dt &= \int 2{,}8369\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369\,dt\\
h(t) &= -\frac{2{,}8369}{11{,}7096}e^{-11{,}7096t}-0{,}8369t+C\\
h(t) &= -0{,}2423\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369t+C.
\end{aligned}$$

Ákvarðið C með upphafsskilyrðinu:

$$\begin{aligned}
h(t) &= -0{,}2423\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369t+C\\
h(0) &= -0{,}2423\,e^{-11{,}7096(0)}-0{,}8369(0)+C\\
1 &= -0{,}2423+C\\
C &= 1{,}2423.
\end{aligned}$$

Því er

$$h(t)=-0{,}2423\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369t+1{,}2423.$$

Eftir $0{,}104$ sekúndu er hæðin
$h(0{,}104)=-0{,}2423\,e^{-11{,}7096t}-0{,}8369t+1{,}2423\approx 1{,}0836$ metri.

STÖÐUMAT 4.18

The weight of a penny is 2,5 grams (United States Mint, “Coin Specifications,” accessed April 9, 2015, http://www.usmint.gov/about_the_mint/?action=coin_specifications), and the upper observation deck of the Empire State Building is 369 meters above the street. Since the penny is a small and relatively smooth object, air resistance acting on the penny is actually quite small. We assume the air resistance is numerically equal to $0{,}0025\,v$. Furthermore, the penny is dropped with no initial velocity imparted to it.

a. Setjið upp upphafsgildisverkefni sem lýsir fallandi myntinni.
b. Leysið verkefnið og finnið $v(t)$.
c. Hver er lokahraði myntarinnar (reiknið markgildi hraðans þegar t stefnir á óendanlegt)?

Rafrásir

Íspennugjafi (til dæmis rafhlaða eða rafall) kemur af stað rafstraumi í lokaðri rás og straumurinn veldur spennufalli yfir hvert viðnám, hverja spólu og hvern þétti í rásinni. Lykkjuregla Kirchhoffs segir að summa spennufallanna yfir viðnám, spólur og þétta sé jöfn heildaríspennu í lokaðri rás. Við höfum eftirfarandi þrjár niðurstöður:

1. Spennufallið yfir viðnám er gefið með

$$E_R = R\,i,$$

þar sem R er hlutfallsfasti sem nefnist viðnám og i er rafstraumurinn.

2. Spennufallið yfir spólu er gefið með

$$E_L = L\,i',$$

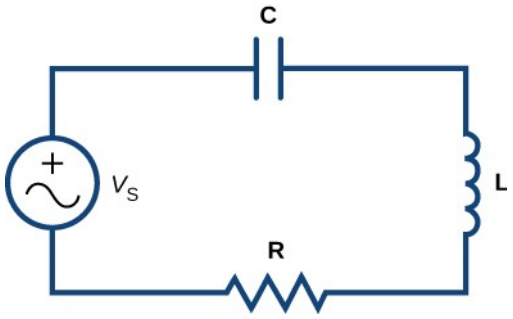
þar sem L er hlutfallsfasti sem nefnist spanstuðull og i táknar aftur rafstrauminn.

3. Spennufallið yfir þétti er gefið með

$$E_C = \frac{1}{C}q,$$

þar sem C er hlutfallsfasti sem nefnist rýmd og q er hleðslan á þéttinum á viðkomandi augnabliki. Sambandið milli i og q er $i = q'$.

Við notum eininguna volt (V) til að mæla spennu E, amper (A) til að mæla rafstraum i, kúlomb (C) til að mæla hleðslu q, óm (Ω) til að mæla viðnám R, henrí (H) til að mæla spanstuðul L, og farad (F) til að mæla rýmd C. Skoðið rásina á mynd 4.25.



Mynd 4.25 Dæmigerð rafrás með spennugjafa (V_S), þétti (C), spólu (L), og viðnámi (R).

Við beitum lykkjureglu Kirchhoffs á þessa rás og látum E tákna íspennuna frá spennugjafanum. Þá er

$$E_L+E_R+E_C=E.$$

Setjum segðirnar fyrir E_L, E_R, og E_C inn í þessa jöfnu og fáum

$$Li'+Ri+\frac{1}{C}q=E.$$

(4.24)

Ef enginn þéttir er í rásinni verður jafnan

$$Li'+Ri=E.$$

(4.25)

Þetta er fyrsta stigs deildajafna fyrir i. Rásin nefnist LR-rás, það er rás með viðnámi og spólu.

Gerum næst ráð fyrir að engin spóla sé í rásinni en þar séu þéttir og viðnám, þannig að $L=0, R\neq 0$, og $C\neq 0$. Þá má endurrita jöfnu 4.23 sem

$$Rq'+\frac{1}{C}q=E,$$

(4.26)

sem er fyrsta stigs línuleg deildajafna. Þessi rás nefnist RC-rás, það er rás með viðnámi og þétti. Í báðum tilvikum getum við sett upp og leyst upphafsgildisverkefni.

DÆMI 4.19

Rafstraumur í RL-rás fundinn

Í rás eru raðtengd íspennugjafi sem gefinn er með $E=50\sin 20t$ V, viðnám upp á $5\,\Omega$, og spóla með spanstuðulinn $0{,}4$ H. Ef upphafsstraumurinn er 0, finnið rafstrauminn á tímanum $t>0$.

Lausn

Viðnám og spóla eru í rásinni og því notum við jöfnu 4.24. Spennufallið yfir viðnámið er gefið með $E_R = Ri = 5i$. Spennufallið yfir spóluna er gefið með $E_L = Li' = 0{,}4i'$. Íspennan verður hægri hlið jöfnu 4.24. Jafna 4.24 verður því

$$0{,}4i' + 5i = 50 \sin 20t.$$

Dividing both sides by 0,4 gives the equation

$$i' + 12{,}5i = 125 \sin 20t.$$

Upphafsstraumurinn er 0 og því fæst upphafsskilyrðið $i(0) = 0$. Við getum leyst þetta upphafsgildisverkefni með fimm skrefa aðferðinni fyrir fyrsta stigs deildajöfnur.

Skref 1. Endurritið deildajöfnuna sem $i' + 12{,}5i = 125 \sin 20t$. Þá fæst $p(t) = 12{,}5$ og $q(t) = 125 \sin 20t$.

Skref 2. Heildunarþátturinn er $\mu(t) = e^{\int 12{,}5\,dt} = e^{12{,}5t}$.

Skref 3. Margfaldið deildajöfnuna með $\mu(t)$:

$$\begin{aligned} e^{12{,}5t} i' + 12{,}5 e^{12{,}5t} i &= 125 e^{12{,}5t} \sin 20t \\ \frac{d}{dt}\left[i e^{12{,}5t} \right] &= 125 e^{12{,}5t} \sin 20t. \end{aligned}$$

Skref 4. Heildið báðar hliðar:

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}\left[i e^{12{,}5t} \right] dt &= \int 125 e^{12{,}5t} \sin 20t \; dt \\ i e^{12{,}5t} &= \left(\frac{250 \sin 20t - 400 \cos 20t}{89} \right) e^{12{,}5t} + C \\ i(t) &= \frac{250 \sin 20t - 400 \cos 20t}{89} + C e^{-12{,}5t}. \end{aligned}$$

Skref 5. Ákvarðið C með upphafsskilyrðinu $v(0) = 2$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{250 \sin 20t - 400 \cos 20t}{89} + C e^{-12{,}5t} \\ i(0) &= \frac{250 \sin 20(0) - 400 \cos 20(0)}{89} + C e^{-12{,}5(0)} \\ 0 &= -\frac{400}{89} + C \\ C &= \frac{400}{89}. \end{aligned}$$

Lausn upphafsgildisverkefnisins er því

$$i(t) = \frac{250 \sin 20t - 400 \cos 20t + 400 e^{-12{,}5t}}{89} = \frac{250 \sin 20t - 400 \cos 20t}{89} + \frac{400 e^{-12{,}5t}}{89}.$$

Endurrita má fyrri liðinn sem eitt kósínusfall. Margfaldið fyrst og deilið með $\sqrt{250^2+400^2}=50\sqrt{89}$:

$$\begin{aligned}\frac{250\sin 20t-400\cos 20t}{89} &= \frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{250\sin 20t-400\cos 20t}{50\sqrt{89}}\right)\\ &= -\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{8\cos 20t}{\sqrt{89}}-\frac{5\sin 20t}{\sqrt{89}}\right).\end{aligned}$$

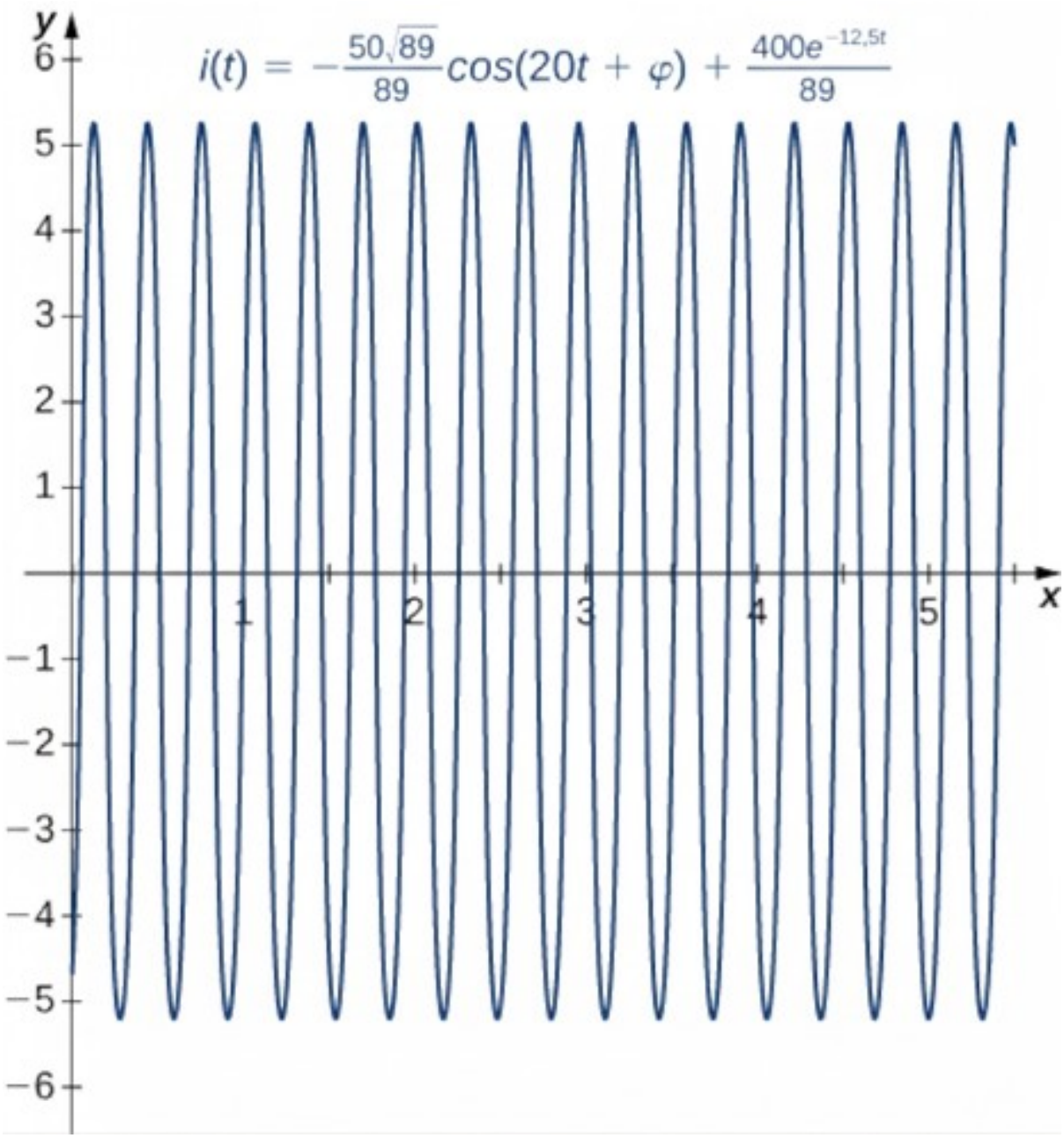
Skilgreinið næst φ sem hvasst horn þannig að $\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{89}}$. Þá er $\sin\varphi=\frac{5}{\sqrt{89}}$ og

$$\begin{aligned}-\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{8\cos 20t}{\sqrt{89}}-\frac{5\sin 20t}{\sqrt{89}}\right) &= -\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\cos\varphi\cos 20t-\sin\varphi\sin 20t\right)\\ &= -\frac{50\sqrt{89}}{89}\cos\left(20t+\varphi\right).\end{aligned}$$

Því má skrifa lausnina sem

$$i(t)=-\frac{50\sqrt{89}}{89}\cos\left(20t+\varphi\right)+\frac{400e^{-12{,}5t}}{89}.$$

Seinni liðurinn nefnist deyfiliður því að hann hverfur hratt þegar t stækkar. Fasahliðrunin er gefin með φ, og sveifluvídd straumsins í stöðugu ástandi með $\frac{50\sqrt{89}}{89}$. Graf lausnarinnar er sýnt á mynd 4.26:



Mynd 4.26

STÖÐUMAT 4.19

Í rás eru raðtengd íspennugjafi sem gefinn er með $E = 20\sin 5t$ V, þéttir með rýmdina 0,02 F og viðnám upp á $8\,\Omega$. Ef upphafshleðslan er 4 C, finnið hleðsluna á tímanum $t > 0$.

Æfingar úr undirkafla 4.5

Eru eftirfarandi deildajöfnur línulegar? Rökstyðjið svarið.

208.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y + \sin x$$

209.

$$\frac{dy}{dt} = t\,y$$

210.

$$\frac{dy}{dt} + y^2 = x$$

211.

$$y' = x^3 + e^x$$

212.

$$y' = y + e^y$$

4

Skrifið eftirfarandi fyrsta stigs deildajöfnur á staðalformi.

213.

$$y' = x^3 y + \sin x$$

214.

$$y' + 3y - \ln x = 0$$

215.

$$-x\,y' = (3x+2)\,y + x e^x$$

216.

$$\frac{dy}{dt} = 4y + t\,y + \tan t$$

217.

$$\frac{dy}{dt} = y\,x(x+1)$$

Hverjir eru heildunarþættir eftirfarandi deildajafna?

218.

$$y' = x\,y + 3$$

219.

$$y' + e^x y = \sin x$$

220.

$$y' = x \ln(x) y + 3x$$

221.

$$\frac{dy}{dx} = \tanh(x) y + 1$$

222.

$$\frac{dy}{dt} + 3t\, y = e^t y$$

Leysið eftirfarandi deildajöfnur með heildunarþáttum.

223.

$$y' = 3y + 2$$

224.

$$y' = 2y - x^2$$

225.

$$xy' = 3y - 6x^2$$

226.

$$(x+2) y' = 3x + y$$

227.

$$y' = 3x + xy$$

228.

$$xy' = x + y$$

229.

$$\sin(x) y' = y + 2x$$

230.

$$y' = y + e^x$$

231.

$$xy' = 3y + x^2$$

232.

$$y' + \ln x = \frac{y}{x}$$

Leysið eftirfarandi deildajöfnur. Notið reiknivél til að teikna lausnafjölskyldu. Eru tiltekin upphafsskilyrði sem breyta hegðun lausnarinnar?

233. **[T]** $(x+2)\,y' = 2\,y - 1$

234. **[T]** $y' = 3e^{t/3} - 2\,y$

235. **[T]** $x\,y' + \frac{y}{2} = \sin(3t)$

236. **[T]** $x\,y' = 2\frac{\cos x}{x} - 3\,y$

237. **[T]** $(x+1)\,y' = 3\,y + x^2 + 2x + 1$

238. **[T]** $\sin(x)\,y' + \cos(x)\,y = 2x$

239. **[T]** $\sqrt{x^2+1}\,y' = y + 2$

240. **[T]** $x^3\,y' + 2x^2\,y = x + 1$

Leysið eftirfarandi upphafsgildisverkefni með heildunarþáttum.

241.

$$y' + y = x,\ y(0) = 3$$

242.

$$y' = y + 2x^2,\ y(0) = 0$$

243.

$$x\,y' = y - 3x^3,\ y(1) = 0$$

244.

$$x^2\,y' = x\,y - \ln x,\ y(1) = 1$$

245.

$$(1+x^2)\,y' = y - 1,\ y(0) = 0$$

246.

$$x\,y' = y + 2x\ln x,\ y(1) = 5$$

247.

$$(2+x)\,y' = y + 2 + x,\ y(0) = 0$$

248.

$$y' = x\,y + 2x\,e^x,\ y(0) = 2$$

249.

$$\sqrt{x}\,y' = y + 2x,\ y(0) = 1$$

250.

$$y' = 2y + xe^{x},\ y(0) = -1$$

251. Fallandi hlutur með massann m getur náð lokahraða þegar viðnámskrafturinn er í réttu hlutfalli við hraðann, með hlutfallsfastann k. Setjið upp deildajöfnuna og finnið hraðann þegar upphafshraðinn er 0.

252. Hver er lokahraðinn samkvæmt segðinni úr síðasta verkefni? (Vísbending: Skoðið markhegðunina; stefnir hraðinn á eitthvert gildi?)

253. **[T]** Notið jöfnuna ykkar fyrir lokahraða til að finna fallvegalengdina. Hve langan tíma tekur að falla 5000 metra ef massinn er 100 kílógrömm, þyngdarhröðunin er 9,8 m/s² og hlutfallsfastinn er 4 ?

254. Nákvæmari lýsing á lokahraða fæst með því að láta viðnámskraftinn vera í réttu hlutfalli við annað veldi hraðans, með hlutfallsfastann k. Setjið upp deildajöfnuna og finnið hraðann.

255. Hver er lokahraðinn samkvæmt segðinni úr síðasta verkefni? (Vísbending: Skoðið markhegðunina; stefnir hraðinn á eitthvert gildi?)

256. **[T]** Notið jöfnuna ykkar fyrir lokahraða til að finna fallvegalengdina. Hve langan tíma tekur að falla 5000 metra ef massinn er 100 kílógrömm, þyngdarhröðunin er $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ og hlutfallsfastinn er 4 ? Tekur það lengri eða skemmri tíma en upphaflega matið ykkar?

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvaða áhrif stikinn a hefur á lausnina.

257. Leysið almennu jöfnuna $y' = ax + y$. Hvaða áhrif hefur breytilegt gildi a á hegðunina?

258. Leysið almennu jöfnuna $y' = ay + x$. Hvaða áhrif hefur breytilegt gildi a á hegðunina?

259. Leysið almennu jöfnuna $y' = ax + xy$. Hvaða áhrif hefur breytilegt gildi a á hegðunina?

260. Leysið almennu jöfnuna $y' = x + axy$. Hvaða áhrif hefur breytilegt gildi a á hegðunina?

261. Leysið $y' - y = e^{kt}$ með upphafsskilyrðinu $y(0) = 0$. Þegar k stefnir á 1, hvað verður um formúluna?

Lykilhugtök

aðfelluhálfstöðug lausn

lausnin $y = k$ ef hún er hvorki aðfellustöðug né aðfelluóstöðug

aðfellustöðug lausn
lausnin $y=k$ ef til er $\varepsilon>0$ þannig að fyrir sérhvert gildi $c\in(k-\varepsilon,k+\varepsilon)$ stefnir lausn þess upphafsgildisverkefnis $y'=f(x,y), y(x_0)=c$ á k þegar x stefnir á óendanlegt

aðfelluóstöðug lausn
lausnin $y=k$ ef til er $\varepsilon>0$ þannig að fyrir sérhvert gildi $c\in(k-\varepsilon,k+\varepsilon)$ stefnir lausn þess upphafsgildisverkefnis $y'=f(x,y), y(x_0)=c$ ekki á k þegar x stefnir á óendanlegt

sjálfstæð deildajafna
jafna þar sem hægri hliðin er eingöngu fall af y

burðargeta
stærsti stofn lífverutegundar sem umhverfið getur borið til frambúðar

deildajafna
jafna sem inniheldur fall $y=y(x)$ og eina eða fleiri afleiður þess

stefnuvið (hallasvið)
stærðfræðileg framsetning sem sýnir lausnir fyrsta stigs deildajöfnu myndrænt; í hverjum punkti stefnuviðsins er línustrik með sömu hallatölu og lausnarferill deildajöfnunnar sem fer um punktinn

jafnvægislausn
sérhver lausn deildajöfnunnar af gerðinni $y=c$, þar sem c er fasti

aðferð Eulers
töluleg aðferð til að nálga lausn upphafsgildisverkefnis

almenn lausn (eða lausnafjölskylda)
mengi allra lausna tiltekinnar deildajöfnu

vaxtarhraði
fastinn $r>0$ í vísisvaxtarfallinu $P(t)=P_0e^{rt}$

upphafsstofnstærð
stærð stofnsins á tímanum $t=0$

upphafsgildi
gildi eða mengi gilda sem lausn deildajöfnu uppfyllir fyrir fast gildi óháðu breytunnar

upphafshraði
hraðinn á tímanum $t=0$

upphafsgildisverkefni
deildajafna ásamt einu eða fleiri upphafsgildum

heildunarþáttur
fall $f(x)$ sem báðar hliðar deildajöfnu eru margfaldaðar með svo að hliðin sem inniheldur óþekkta fallið verði jöfn afleiðu margfeldis tveggja falla

línuleg deildajafna
fyrsta stigs deildajafna sem rita má á forminu $a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$

lógistísk deildajafna
deildajafna sem tekur tillit til burðargetunnar K og vaxtarhraðans r í stofnlíkani

stig deildajöfnu
stig hæstu afleiðu óþekkta fallsins sem kemur fyrir í jöfnunni

sérlausn
lausn úr lausnafjölskyldu deildajöfnu sem uppfyllir tiltekið upphafsskilyrði

fasalína
myndræn framsetning á hegðun lausna sjálfstæðrar deildajöfnu við mismunandi upphafsskilyrði

aðgreinanleg deildajafna
jafna sem rita má á forminu $y' = f(x)\,g(y)$

aðskilnaður breytistærða
aðferð til að leysa aðgreinanlega deildajöfnu

lausnarferill
ferill í stefnuviði sem samsvarar lausn þess upphafsgildisverkefnis sem ákvarðast af tilteknum punkti í stefnuviðinu

lausn deildajöfnu
fall $y = f(x)$ sem uppfyllir tiltekna deildajöfnu

staðalform
form fyrsta stigs línulegrar deildajöfnu sem fæst með því að rita hana á forminu $y' + p(x)\,y = q(x)$

skrefstærð
stærðin h sem bætt er við gildi x í hverju skrefi aðferðar Eulers

þröskuldsstofn
minnsta stofnstærð sem tegundin þarf til að lifa af

Lykiljöfnur

Aðferð Eulers		$x_n = x_0 + n\,h$ $y_n = y_{n-1} + h f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right)$, þar sem h er skrefstærðin
Aðgreinanleg deildajafna	$y' = f(x)\,g(y)$	
Styrkur lausnar	$\frac{du}{dt} = \text{INNSTREYMISHRAÐI} - \text{ÚTSTREYMISHRAÐI}$	
Kólnunarlögmál Newtons	$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_s\right)$	
Lógistísk deildajafna og upphafsgildisverkefni		$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), P(0) = P_0$
Lausn lógistísku deildajöfnunnar og upphafsgildisverkefnisins		$P(t) = \frac{P_0 K e^{rt}}{\left(K - P_0\right) + P_0 e^{rt}}$
Líkan með þröskuldsstofni		$\frac{dP}{dt} = -rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{P}{T}\right)$
Staðalform		$y' + p(x)\,y = q(x)$
Heildunarþáttur		$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

Meginatriði

4.1 Grunnatriði deildajafna

- Deildajafna er jafna sem inniheldur fall $y = f(x)$ og eina eða fleiri afleiður þess. Lausn er fall $y = f(x)$ sem uppfyllir deildajöfnuna þegar f og afleiður þess eru sett inn í jöfnuna.
- Stig deildajöfnu er stig hæstu afleiðu óþekkta fallsins sem kemur fyrir í jöfnunni.
- Deildajafna ásamt upphafsgildi kallast upphafsgildisverkefni. Til að leysa upphafsgildisverkefni finnum við fyrst almenna lausn deildajöfnunnar og ákvörðum síðan gildi fastans. Upphafsgildisverkefni hafa margvíslega hagnýtingu í vísindum og verkfræði.

4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir

- Stefnuvið er stærðfræðileg framsetning sem notuð er til að sýna lausnir fyrsta stigs deildajöfnu á myndrænan hátt.
- Aðferð Eulers er töluleg aðferð sem nota má til að nálga lausnir deildajöfnu.

4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur

- Aðgreinanleg deildajafna er hver sú jafna sem rita má á forminu $y' = f(x)g(y)$.
- Aðskilnaður breytistærða er aðferð til að finna almenna lausn aðgreinanlegrar deildajöfnu.

4.4 Lógistíska jafnan

- Þegar stofnföll eru rannsökuð leiða mismunandi forsendur til mismunandi vaxtarhraða. Dæmi um slíkar forsendur eru vísisvöxtur, lógistískur vöxtur og þröskuldsstofn.
- Lógistíska deildajafnan tekur tillit til burðargetu. Þetta gildi setur stofnstærðinni efri mörk í tilteknu umhverfi.
- Leysa má lógistísku deildajöfnuna fyrir sérhvert jákvætt gildi vaxtarhraða, upphafsstofnstærðar og burðargetu.

4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur

- Sérhverja fyrsta stigs línulega deildajöfnu má rita á forminu $y' + p(x)y = q(x)$.
- Nota má fimm skrefa lausnarleið til að leysa fyrsta stigs línulega deildajöfnu, hvort sem upphafsgildi fylgir eða ekki.
- Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur má meðal annars nota til að ákvarða hreyfingu hlutar sem rís eða fellur með loftmótstöðu og til að finna straum í rafrás.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða mótdæmi.

262. Deildajafnan $y' = 3x^2 y - \cos(x)\, y''$ er línuleg.

263. Deildajafnan $y' = x - y$ er aðgreinanleg.

264. Leysa má allar fyrsta stigs deildajöfnur beint með aðskilnaði breytistærða eða með því að nota heildunarþátt.

265. Hegðun allra fyrsta stigs deildajafna má ákvarða með stefnuviðum eða aðferð Eulers.

Finnið almenna lausn deildajafnanna í verkefnunum hér á eftir.

266.

$$y' = x^2 + 3e^x - 2x$$

267.

$$y' = 2^x + \cos^{-1} x$$

268.

$$y' = y(x^2 + 1)$$

269.

$$y' = e^{-y} \sin x$$

270.

$$y' = 3x - 2y$$

271.

$$y' = y \ln y$$

Finnið lausn upphafsgildisverkefnisins í verkefnunum hér á eftir.

272.

$$y' = 8x - \ln x - 3x^4, y(1) = 5$$

273.

$$y' = 3x - \cos x + 2, y(0) = 4$$

274.

$$xy' = y(x - 2), y(1) = 3$$

275.

$$y' = 3y^2(x + \cos x), y(0) = -2$$

276.

$$(x - 1)y' = y - 2, y(0) = 0$$

277.

$$y' = 3y - x + 6x^2, y(0) = -1$$

Teiknið stefnuvið deildajöfnunnar í verkefnunum hér á eftir og leysið síðan jöfnuna. Teiknið einn lausnarferil á stefnuviðið.

278.

$$y' = 2y - y^2$$

279. $y' = \frac{1}{x} + \ln x - y$, fyrir $x > 0$

Notið aðferð Eulers í verkefnunum hér á eftir, með $n = 5$ skrefum á bilinu $t = [0, 1]$. Leysið síðan upphafsgildisverkefnið nákvæmlega. Hve nálægt nákvæmu gildinu er nálgunin með aðferð Eulers?

280.

$$y' = -4yx, y(0) = 1$$

281.

$$y' = 3^x - 2y, y(0) = 0$$

Setjið upp og leysið deildajöfnurnar í verkefnunum hér á eftir.

282. Bíll ekur á hraðbraut með hröðun sem gefin er með $a = 5\sin(\pi t)$, þar sem t táknar tíma í mínútum. Finnið hraðann á tíma t, að því gefnu að upphafshraði bílsins sé 100 km/klst.

283. Kastið bolta sem hefur massann 2 kg upp í loftið með upphafshraðanum 8 m/s. Finnið nákvæmlega hve lengi boltinn er á lofti, að því gefnu að þyngdarhröðunin sé $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

284. Sleppið bolta sem hefur massann 5 kg úr flugvélarglugga í 5000 m hæð. Hve lengi er boltinn að falla til jarðar?

285. Sleppið sama bolta sem hefur massann 5 kg út um sama flugvélarglugga í sömu hæð. Að þessu sinni er gert ráð fyrir að loftmótstaðan sé í réttu hlutfalli við hraða boltans, þar sem hlutfallsstuðullinn er 3, og að boltinn nái lokahraða. Finnið fallvegalengdina sem fall af tíma. Hve lengi er boltinn að falla til jarðar?

286. A drug is administered to a patient every 24 hours and is cleared at a rate proportional to the amount of drug left in the body, with proportionality constant 0,2. If the patient needs a baseline level of 5 mg to be in the bloodstream at all times, how large should the dose be?

287. A 1000-liter tank contains pure water and a solution of 0,2 kg salt/L is pumped into the tank at a rate of 1 L/min and is drained at the same rate. Solve for total amount of salt in the tank at time t.

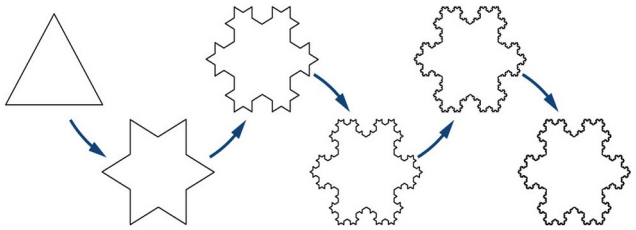
288. Sjóðið vatn til að laga te. Þegar vatninu er hellt í tekönnuna er hitastig þess $100\,°\mathrm{C}$. Eftir 5 mínútur í herbergi þar sem hitinn er $15\,°\mathrm{C}$ er hitastig tesins $85\,°\mathrm{C}$. Leysið jöfnuna til að ákvarða hitastig tesins á tímanum t. Hve lengi þarf að bíða þar til teið nær drykkjarhæfu hitastigi $(72\,°\mathrm{C})$?

289. The human population (in thousands) of Nevada in 1950 was roughly 160. If the carrying capacity is estimated at 10 million individuals, and assuming a growth rate of 2% per year, develop a logistic growth model and solve for the population in Nevada at any time (use 1950 as time = 0). What population does your model predict for 2000? How close is your prediction to the true value of 1.998.257?

290. Endurtakið verkefnið á undan en notið Gompertz-vaxtarlíkan. Hvort líkanið er nákvæmara?

5. KAFLI

Runur og raðir



Mynd 5.1 Koch-snjókornið er myndað með ítrunarferli. Byrjað er á jafnhliða þríhyrningi. Í hverju skrefi ferlisins er miðþriðjungi hvers línustriks skipt út fyrir jafnhliða þríhyrning sem vísar út á við.

Efnisyfirlit kaflans

- 5.1 Runur
- 5.2 Óendanlegar raðir
- 5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið
- 5.4 Samanburðarpróf
- 5.5 Víxlmerkjaraðir
- 5.6 Kvóta- og rótarpróf

Inngangur

Koch-snjókornið er myndað úr óendanlega mörgum jafnhliða þríhyrningum sem skarast ekki. Því má rita flatarmál þess sem summu óendanlega margra liða. Hvernig leggjum við

saman óendanlega marga liði? Getur summa óendanlega margra liða verið endanleg? Til að svara þessum spurningum þurfum við að kynna hugtakið óendanleg röð. Óendanleg röð er summa með óendanlega mörgum liðum. Þegar við höfum skilgreint nauðsynleg hugtök getum við reiknað flatarmál Koch-snjókornsins (sjá dæmi 5.8).

Óendanlegar raðir kunna að virðast ótengdar deildun og heildun. Óendanleg röð með liðum sem innihalda veldi breytu er raunar öflugt verkfæri. Með henni má setja föll fram sem „óendanlegar margliður“. Nota má óendanlegar raðir til að reikna gildi flókinna falla, nálga ákveðin heildi og mynda ný föll. Auk þess eru óendanlegar raðir notaðar til að leysa deildajöfnur sem lýsa eðlisfræðilegum fyrirbærum, allt frá örsmáum rafrásum til gervitungla á braut um jörðu.

5.1 Runur

NÁMSMARKMIÐ

- 5.1.1 Finna formúlu fyrir almenna lið runu.
- 5.1.2 Reikna markgildi runu ef það er til.
- 5.1.3 Ákvarða hvort tiltekin runa sé samleitin eða ósamleitin.

Í þessum undirkafla kynnum við runur og skilgreinum hvað það merkir að runa sé samleitin eða ósamleitin. Við sýnum hvernig finna má markgildi samleitinna runa, oft með því að nota eiginleika markgilda falla sem fjallað var um fyrr. Að lokum setjum við fram setninguna um einhalla runur, sem nota má til að sanna að tilteknar gerðir runa séu samleitnar.

5

Hugtök um runur

Til að fjalla um þetta nýja viðfangsefni þurfum við nokkur ný hugtök og skilgreiningar. Í fyrsta lagi er óendanleg runa röðuð upptalning talna á forminu

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$

Hver tala í rununni kallast liður. Táknið n kallast vísibreyta rununnar. Við notum ritháttinn

$$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}, \text{ eða einfaldlega } \left\{a_n\right\},$$

til að tákna þessa runu. Svipaður ritháttur er notaður fyrir mengi, en ólíkt mengi er runa röðuð upptalning. Vegna þess að til er tiltekin tala a_n fyrir hverja jákvæða heiltölu n, má einnig skilgreina runu sem fall með mengi jákvæðra heiltalna sem skilgreiningarmengi.

Skoðum óendanlegu, röðuðu upptalninguna

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots.$$

Þetta er runa þar sem fyrstu þrír liðirnir eru $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, og $a_3 = 8$. Þið sjáið líklega að liðir rununnar fylgja þessu mynstri:

$$a_1=2^1, a_2=2^2, a_3=2^3, a_4=2^4, \text{og } a_5=2^5.$$

Ef gert er ráð fyrir að mynstrið haldi áfram má rita n-ta lið rununnar á lokaða forminu $a_n=2^n$. Með þessum rithætti má rita rununa sem

$$\left(2^n\right)_{n=1}^{\infty} \text{eða} \left(2^n\right).$$

Einnig má lýsa rununni með öðrum hætti. Þar sem hver liður er tvöfaldur liðurinn á undan má skilgreina rununa með rakningarvenslum og setja n-ta liðinn a_n fram út frá liðnum á undan, a_{n-1}. Nánar tiltekið má skilgreina rununa sem $\left(a_n\right)$ þar sem $a_1=2$ og fyrir öll $n\geq 2$, er hver liður a_n skilgreindur með rakningarvenslunum $a_n=2a_{n-1}$.

SKILGREINING

Óendanleg runa $\left(a_n\right)$ er röðuð upptalning talna á forminu

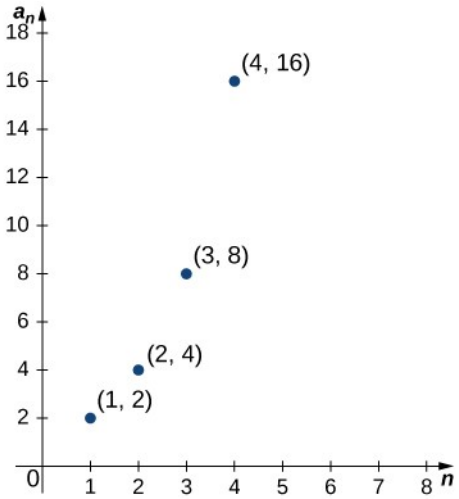
$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Neðri vísirinn n kallast vísibreyta rununnar. Hver tala a_n er liður rununnar. Stundum eru runur skilgreindar á lokuðu formi; þá er $a_n=f\left(n\right)$ fyrir eitthvert fall $f\left(n\right)$ sem er skilgreint á mengi jákvæðra heiltalna. Í öðrum tilvikum eru runur skilgreindar með rakningarvenslum. Þá er einn liður rununnar eða fleiri gefnir beint og síðari liðir skilgreindir með fyrri liðum rununnar.

Athugið að vísirinn þarf ekki að hefjast á $n=1$ heldur getur hann byrjað á öðrum heiltölum. Runa sem gefin er á lokaða forminu $a_n=f\left(n\right)$ gæti til dæmis hafist á $n=0$, og þá væri runan

$$a_0, a_1, a_2, \ldots.$$

Á sama hátt má gefa liðinn a_0 beint fyrir runu sem skilgreind er með rakningarvenslum og skilgreina liðina a_n fyrir $n\geq 1$ út frá a_{n-1}. Runa $\left(a_n\right)$ hefur nákvæmlega eitt gildi fyrir hverja jákvæða heiltölu n, svo að lýsa má henni sem falli með mengi jákvæðra heiltalna sem skilgreiningarmengi. Því er eðlilegt að fjalla um graf runu. Graf rununnar $\left(a_n\right)$ samanstendur af öllum punktum $\left(n, a_n\right)$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Mynd 5.2 sýnir graf $\left(2^n\right)$.



Mynd 5.2 Punktarnir sem sýndir eru mynda graf rununnar $\left(2^n\right)$.

Tvær gerðir runa koma oft fyrir og hafa sérstök heiti: jafnmunarunur og kvótarunur. Í jafnmunarunu er mismunur sérhverra tveggja samliggjandi liða sá sami. Skoðum til dæmis rununa

$$3, 7, 11, 15, 19, \ldots.$$

Sjá má að mismunur sérhverra tveggja samliggjandi liða er 4. Ef gert er ráð fyrir að mynstrið haldi áfram er þetta jafnmunaruna. Lýsa má henni með rakningarvenslunum

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \text{ fyrir } n \geq 2. \end{cases}$$

Athugið að

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 + 4 \\ a_3 &= 3 + 4 + 4 = 3 + 2 \cdot 4 \\ a_4 &= 3 + 4 + 4 + 4 = 3 + 3 \cdot 4. \end{aligned}$$

Því má einnig lýsa rununni með lokaða forminu

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + 4\,(n-1) \\ &= 4n - 1. \end{aligned}$$

Almennt er jafnmunaruna sérhver runa af gerðinni $a_n = cn + b$.

Í kvótarunu er hlutfall sérhverra tveggja samliggjandi liða hið sama. Skoðum til dæmis rununa

$$2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots.$$

Sjá má að hlutfall sérhvers liðar og liðarins á undan er $-\frac{1}{3}$. Ef gert er ráð fyrir að mynstrið haldi áfram er þetta kvótaruna. Skilgreina má hana með rakningarvenslunum

$$a_1 = 2$$
$$a_n = -\frac{1}{3} \cdot a_{n-1} \text{ fyrir } n \geq 2.$$

Einnig gildir að

$$a_2 = -\tfrac{1}{3} \cdot 2$$
$$a_3 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)(2) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot 2$$
$$a_4 = \left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{1}{3}\right)(2) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^3 \cdot 2,$$

og því má lýsa rununni með lokaða forminu

$$a_n = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Runan $\left\{2^n\right\}$ sem fjallað var um fyrr er kvótaruna, þar sem hlutfall sérhvers liðar og liðarins á undan er 2. Almennt er kvótaruna sérhver runa af gerðinni $a_n = c\,r^n$.

DÆMI 5.1

Lokað form fundið

Finnið lokað form n-ta liðar í hverri runu hér á eftir.

a. $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$

b. $\frac{3}{4}, \frac{9}{7}, \frac{27}{10}, \frac{81}{13}, \frac{243}{16}, \ldots$

Lausn

a. Tökum fyrst eftir því að formerki liðanna víxlast á milli neikvæðs og jákvæðs. Oddatöluliðir rununnar eru neikvæðir en sléttutöluliðirnir jákvæðir. Því inniheldur n-ti liðurinn þáttinn $(-1)^n$. Skoðum næst teljararununa $\{1, 2, 3, \ldots\}$ og nefnararununa $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Báðar þessar runur eru jafnmunarunur. n-ti liður teljararununnar er n, og n-ti liður nefnararununnar er $n+1$. Því má lýsa rununni með lokaða forminu

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

b. Teljararunan $3, 9, 27, 81, 243, \ldots$ er kvótaruna. Teljari n-ta liðarins er 3^n Nefnararunan $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$ er jafnmunaruna. Nefnari n-ta liðarins er $4 + 3(n-1) = 3n+1$. Því má lýsa rununni með lokaða forminu $a_n = \frac{3^n}{3n+1}$.

STÖÐUMAT 5.1

Finnið lokað form fyrir n-ta lið rununnar $\left\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \ldots\right\}$.

DÆMI 5.2

Skilgreint með rakningarvenslum

Finnið lokað form fyrir hverja eftirfarandi runu sem skilgreind er með rakningarvenslum.

a. $a_1 = 2$, $a_n = -3a_{n-1}$ fyrir $n \geq 2$

b. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ fyrir $n \geq 2$

Lausn

a. Ef við skrifum fyrstu liðina út fáum við

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= -3a_1 = -3\,(2) \\ a_3 &= -3a_2 = (-3)^2 2 \\ a_4 &= -3a_3 = (-3)^3 2. \end{aligned}$$

5

Almennt gildir

$a_n = 2(-3)^{n-1}$.

b. Skrifum fyrstu liðina út:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{2} \\ a_2 &= a_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \\ a_3 &= a_2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{8} \\ a_4 &= a_3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{7}{8} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16}. \end{aligned}$$

Af þessu mynstri fæst lokaða formið

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

STÖÐUMAT 5.2

Finnið lokað form fyrir rununa sem er skilgreind með rakningarvenslum þannig að $a_1 = -4$ og $a_n = a_{n-1} + 6$.

Markgildi runu

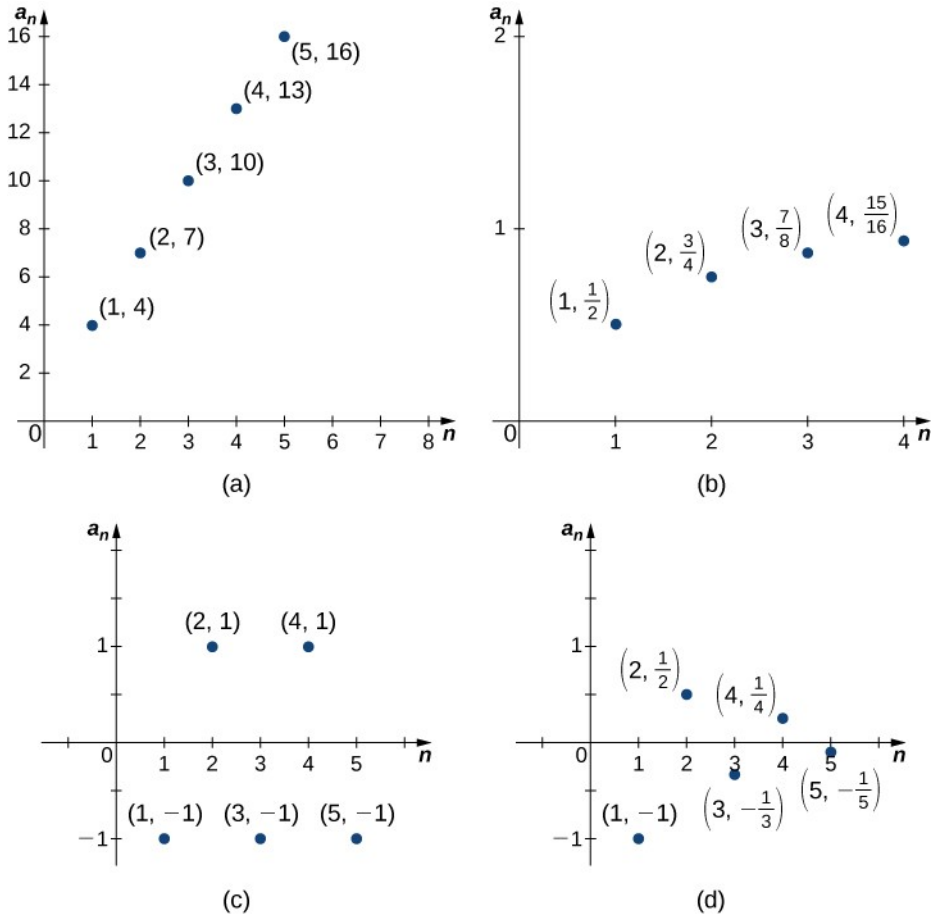
Grundvallarspurning um óendanlegar runur er hvernig liðirnir hegða sér þegar n stækkar. Runa er fall sem skilgreint er á jákvæðu heiltölunum og því er eðlilegt að fjalla um markgildi liðanna þegar $n \to \infty$. Skoðum til dæmis eftirfarandi fjórar runur og mismunandi hegðun þeirra þegar $n \to \infty$ (sjá mynd 5.3):

a. $\{1+3n\} = \{4, 7, 10, 13, \ldots\}$. Liðirnir $1+3n$ verða ótakmarkað stórir þegar $n \to \infty$. Í þessu tilviki segjum við að $1+3n \to \infty$ þegar $n \to \infty$.

b. $\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots\right\}$. Liðirnir $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$ þegar $n \to \infty$.

c. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$. Formerki liðanna víxlast en þeir nálgast ekki eitt tiltekið gildi þegar $n \to \infty$.

d. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. Formerki liðanna í þessari runu víxlast einnig, en $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ þegar $n \to \infty$.



5

Mynd 5.3 (a) Liðir rununnar verða ótakmarkað stórir þegar $n \to \infty$. (b) Liðir rununnar nálgast 1 þegar $n \to \infty$. (c) Liðir rununnar víxlast á milli 1 og -1 þegar $n \to \infty$. (d) Liðir rununnar víxlast á milli jákvæðra og neikvæðra gilda en nálgast 0 þegar $n \to \infty$.

Af þessum dæmum sjáum við að liðir runu geta hegðað sér á ýmsa vegu þegar $n \to \infty$. Í tveimur runanna nálgast liðirnir endanlega tölu þegar $n \to \infty$. Í hinum tveimur gera þeir það ekki. Ef liðir runu nálgast endanlega tölu L þegar $n \to \infty$, segjum við að runan sé samleitin og að rauntalan L sé markgildi rununnar. Hér getum við gefið óformlega skilgreiningu.

SKILGREINING

Látum runu, sem táknuð er með $\{a_n\}$, vera gefna. Ef liðirnir a_n komast eins nálægt endanlegri tölu L og óskað er þegar n verður nægilega stórt, segjum við að $\{a_n\}$ sé samleitin runa og að L sé markgildi rununnar. Þá ritum við

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Ef runa $\{a_n\}$ er ekki samleitin segjum við að hún sé ósamleitin runa.

Af mynd 5.3 sést að liðir rununnar $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ komast eins nálægt 1 og óskað er þegar n verður mjög stórt. Við ályktum að $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ sé samleitin runa með markgildið 1. Aftur á móti sést af mynd 5.3 að liðir rununnar $1+3n$ nálgast ekki endanlega tölu þegar n stækkar. Við segjum að $\{1+3n\}$ sé ósamleitin runa.

Í óformlegu skilgreiningunni á markgildi runu notuðum við orðasamböndin „eins nálægt og óskað er“ og „nægilega stórt“. Þótt þau hjálpi til við að skýra merkingu samleitinnar runu eru þau nokkuð ónákvæm. Til að vera nákvæmari setjum við nú fram formlega skilgreiningu á markgildi runu og sýnum hugmyndirnar með grafi á mynd 5.4.

SKILGREINING

Runa $\{a_n\}$ stefnir á rauntölu L ef fyrir sérhvert $\varepsilon>0$, þá er til heiltala N þannig að $|a_n-L|<\varepsilon$ ef $n\geq N$. Talan L er markgildi rununnar og við ritum

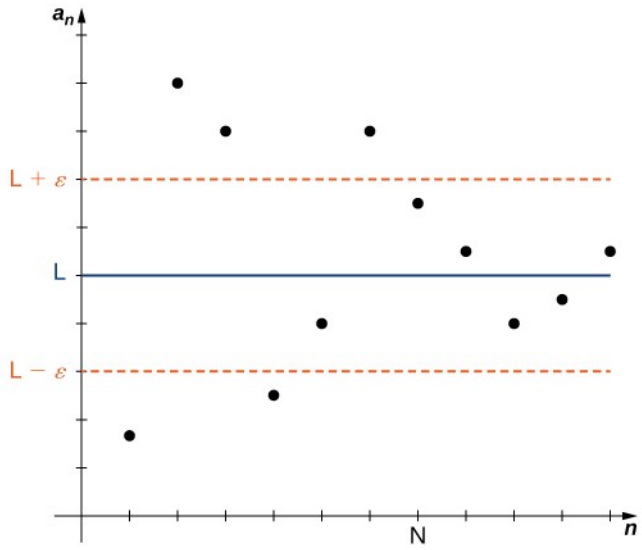
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ eða } a_n \to L.$$

Þá segjum við að runan $\{a_n\}$ sé samleitin. Ef runa er ekki samleitin er hún ósamleitin og við segjum að markgildið sé ekki til.

Tökum eftir því að hvort runa $\{a_n\}$ er samleitin eða ósamleitin fer eingöngu eftir því hvað gerist með liðina a_n þegar $n\to\infty$. Ef endanlegum fjölda liða $b_1, b_2, \ldots, b_N$ er því skotið inn á undan a_1 og ný runa mynduð

$$b_1, b_2, \ldots, b_N, a_1, a_2, \ldots,$$

þá er nýja runan samleitin ef $\{a_n\}$ er samleitin og ósamleitin ef $\{a_n\}$ er ósamleitin. Ef runan $\{a_n\}$ stefnir á L, stefnir nýja runan einnig á L.



Mynd 5.4 Þegar n stækkar nálgast liðirnir a_n töluna L. Þegar $n \geq N$, er fjarlægðin milli sérhvers punkts (n, a_n) og línunnar $y = L$ minni en ε.

Samkvæmt skilgreiningunni hér að framan kallast runa ósamleitin ef hún er ekki samleitin. Runurnar $\{1+3n\}$ og $\{(-1)^n\}$ á mynd 5.4 eru til dæmis ósamleitnar. Ólíkar runur geta þó verið ósamleitnar á ólíkan hátt. Runan $\{(-1)^n\}$ er ósamleitin vegna þess að liðirnir víxlast á milli 1 og -1, en nálgast ekki eitt gildi þegar $n \to \infty$. Runan $\{1+3n\}$ er hins vegar ósamleitin vegna þess að liðirnir $1+3n \to \infty$ þegar $n \to \infty$. Við segjum að runan $\{1+3n\}$ stefni á óendanlegt og ritum $\lim_{n \to \infty}(1+3n) = \infty$. Mikilvægt er að átta sig á að þessi ritháttur felur ekki í sér að markgildi rununnar $\{1+3n\}$ sé til. Runan er í raun ósamleitin. Þegar við ritum að markgildið sé óendanlegt gefum við aðeins nánari upplýsingar um það hvers vegna runan er ósamleitin. Runa getur einnig stefnt á mínus óendanlegt. Runan $\{-5n+2\}$ stefnir til dæmis á mínus óendanlegt vegna þess að $-5n+2 \to -\infty$ þegar $n \to \infty$. Við ritum það sem $\lim_{n \to \infty}(-5n+2) = \to -\infty$.

Þar sem runa er fall með mengi jákvæðra heiltalna sem skilgreiningarmengi getum við notað eiginleika markgilda falla til að ákvarða hvort runa sé samleitin. Skoðum til dæmis runu $\{a_n\}$ og tengt fall f sem skilgreint er á öllum jákvæðum rauntölum þannig að $f(n) = a_n$ fyrir allar heiltölur $n \geq 1$. Þar sem skilgreiningarmengi rununnar er hlutmengi skilgreiningarmengis f, er runan samleitin og hefur sama markgildi ef $\lim_{x \to \infty} f(x)$ er til. Skoðum til dæmis rununa $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ og tengda fallið $f(x) = \frac{1}{x}$. Þar sem fallið f, sem skilgreint er fyrir allar rauntölur $x > 0$, uppfyllir $f(x) = \frac{1}{x} \to 0$ þegar $x \to \infty$, verður runan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ að uppfylla $\frac{1}{n} \to 0$ þegar $n \to \infty$.

SETNING 5.1

Markgildi runu sem skilgreind er með falli

Skoðum runu $\{a_n\}$ þannig að $a_n = f(n)$ fyrir öll $n \geq 1$. Ef til er rauntala L þannig að

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

þá er $\{a_n\}$ samleitin og

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Við getum notað þessa setningu til að reikna $\lim_{n \to \infty} r^n$ fyrir $0 \leq r \leq 1$. Skoðum til dæmis rununa $\{(1/2)^n\}$ og tengda veldisfallið $f(x) = (1/2)^x$. Þar sem $\lim_{x \to \infty} (1/2)^x = 0$, ályktum við að runan $\{(1/2)^n\}$ sé samleitin með markgildið 0. Á sama hátt gildir fyrir sérhverja rauntölu r þannig að $0 \leq r < 1$, að $\lim_{x \to \infty} r^x = 0$, og því er runan $\{r^n\}$ samleitin. Ef $r = 1$, þá er hins vegar $\lim_{x \to \infty} r^x = 1$, og því er markgildi rununnar $\{1^n\}$ jafnt 1. Ef $r > 1$, þá er $\lim_{x \to \infty} r^x = \infty$, og því getum við ekki beitt þessari setningu. Í því tilviki vex fallið r^x þó án takmarka þegar $n \to \infty$, og liðirnir r^n í rununni verða einnig ótakmarkað stórir þegar $n \to \infty$, og því ályktum við að runan $\{r^n\}$ stefni á óendanlegt ef $r > 1$.

Við drögum saman þessar niðurstöður um kvótarununa $\{r^n\}$:

$$r^n \to 0 \text{ ef } 0 < r < 1$$
$$r^n \to 1 \text{ ef } r = 1$$
$$r^n \to \infty \text{ ef } r > 1.$$

Síðar í þessum undirkafla skoðum við tilvikið þegar $r < 0$.

Nú skoðum við aðeins flóknari runur. Skoðum til dæmis rununa $\{(2/3)^n + (1/4)^n\}$. Liðir þessarar runu eru flóknari en í öðrum runum sem við höfum fjallað um, en sem betur fer ræðst markgildi hennar af markgildum runanna tveggja $\{(2/3)^n\}$ og $\{(1/4)^n\}$. Af eftirfarandi algebrureglum um markgildi og þeirri staðreynd að bæði $\{(2/3)^n\}$ og $\{1/4)^n\}$ stefna á 0, má ályktа að runan $\{(2/3)^n + (1/4)^n\}$ stefni á $0 + 0 = 0$. Á sama hátt og reikna má markgildi algebrulegrar samsetningar falla f og g út frá markgildum f og g (sjá Inngang að markgildum) má reikna markgildi runu þar sem liðirnir eru algebrulegar samsetningar a_n og b_n með því að reikna markgildi $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$.

SETNING 5.2

Algebrureglur um markgildi

Gerum ráð fyrir að runurnar $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ séu gefnar. Skoðum einnig rauntöluna c, sem er fasti. Ef til eru fastar A og B þannig að $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, þá gildir

i. $\lim_{n\to\infty} c = c$

ii. $\lim_{n\to\infty} c\,a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = c\,A$

iii. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

iv. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \cdot B$

v. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$, að því gefnu að $B \neq 0$ og sérhvert $b_n \neq 0$.

Sönnun

Við sönnum lið iii.

Látum $\epsilon > 0$. Þar sem $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, þá er til jákvæð heiltala N_1 þannig að $\left|a_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ fyrir öll $n \geq N_1$. Þar sem $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, þá er til jákvæð heiltala N_2 þannig að $\left|b_n - B\right| < \varepsilon/2$ fyrir öll $n \geq N_2$. Látum N vera stærri talnanna N_1 og N_2. Þá gildir fyrir öll $n \geq N$,

$$\left|(a_n + b_n) - (A + B)\right| \leq \left|a_n - A\right| + \left|b_n - B\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Algebrureglurnar um markgildi gera okkur kleift að reikna markgildi margra runa. Skoðum til dæmis rununa $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$. Eins og áður var sýnt er $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Á sama hátt getum við ályktað fyrir sérhverja jákvæða heiltölu k, að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Í næsta dæmi notum við þessa staðreynd ásamt markgildisreglunum til að reikna markgildi annarra runa.

DÆMI 5.3

Samleitni ákvörðuð og markgildi fundin

Ákvarðið fyrir hverja eftirfarandi runu hvort hún sé samleitin. Finnið markgildi hennar ef hún er samleitin.

a. $\left\{5-\frac{3}{n^2}\right\}$

b. $\left\{\frac{3n^4-7n^2+5}{6-4n^4}\right\}$

c. $\left\{\frac{2^n}{n^2}\right\}$

d. $\left\{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right\}$

Lausn

a. Við vitum að $1/n \to 0$. Af því ályktum við að

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0.$$

Því er

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}5-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=5-3\cdot 0=5.$$

Runan er samleitin með markgildið 5.

b. Tökum n^4 út fyrir sviga í teljara og nefnara og notum markgildisreglurnar hér að framan. Þá fæst

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4-7n^2+5}{6-4n^4} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{7}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\frac{6}{n^4}-4}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{7}{n^2}+\frac{5}{n^4}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{n^4}-4\right)}\\ &= \frac{\left(\lim_{n\to\infty}(3)-\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^4}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n^4}-\lim_{n\to\infty}(4)\right)}\\ &= \frac{\left(\lim_{n\to\infty}(3)-7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\right)}{\left(6\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}-\lim_{n\to\infty}(4)\right)}\\ &= \frac{3-7\cdot 0+5\cdot 0}{6\cdot 0-4} = -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Runan er samleitin með markgildið $-3/4$.

c. Skoðum tengda fallið $f(x)=2^x/x^2$ sem skilgreint er fyrir allar rauntölur $x>0$. Þar sem $2^x \to \infty$ og $x^2 \to \infty$ þegar $x \to \infty$, beitum við reglu l'Hôpital og ritum

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x \ln 2}{2x}$$ Tökum afleiður teljara og nefnara.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2^x(\ln 2)^2}{2}$$ Tökum afleiður aftur.

$$= \infty.$$

Við ályktum að runan sé ósamleitin.

d. Skoðum fallið $f(x)=\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$ sem skilgreint er fyrir allar rauntölur $x>0$. Fallið hefur óákveðið form 1^∞ þegar $x \to \infty$. Látum

$$y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x.$$

Tökum nú náttúrlega logrann af báðum hliðum jöfnunnar. Þá fæst

$$\ln(y) = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x\right].$$

Þar sem fallið $f(x)=\ln x$ er samfellt á skilgreiningarmengi sínu má víxla markgildinu og náttúrlega logranum. Því er

$$\ln(y) = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^x\right].$$

Með eiginleikum logra ritum við

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right).$$

Þar sem hægri hlið þessarar jöfnu hefur óákveðið form $\infty \cdot 0$, endurritum við hana sem brot til að geta beitt reglu l'Hôpital. Ritum

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+4/x)}{1/x}.$$

Þar sem hægri hliðin hefur nú óákveðið form $0/0$, getum við beitt reglu l'Hôpital. Við ályktum að

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+4/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+4/x} = 4.$$

Því er $\ln(y)=4$ og $y=e^4$. Þar sem $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=e^4$, getum við því ályktað að runan $\left\{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right\}$ stefni á e^4.

STÖÐUMAT 5.3

Skoðið rununa $\left\{\left(5n^2+1\right)/e^n\right\}$. Ákvarðið hvort runan sé samleitin. Finnið markgildi hennar ef hún er samleitin.

Munum að ef f er samfellt fall í gildinu L, þá er $f(x)\to f(L)$ þegar $x\to L$. Þessi hugmynd á einnig við um runur. Gerum ráð fyrir samleitinni runu $a_n\to L$, og að fall f sé samfellt í L. Þá er $f(a_n)\to f(L)$. Þessi eiginleiki gerir okkur oft kleift að finna markgildi flókinna runa.

Skoðum til dæmis rununa $\sqrt{5-\frac{3}{n^2}}$. Af dæmi 5.3 a vitum við að runan $5-\frac{3}{n^2}\to 5$. Þar sem $\sqrt{x}$ er samfellt fall í $x=5$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{5-\frac{3}{n^2}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n^2}\right)}=\sqrt{5}.$$

SETNING 5.3

5

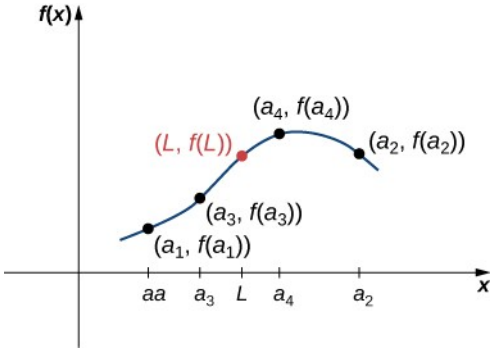
Samfelld föll skilgreind á samleitnum runum

Skoðum runu $\{a_n\}$ og gerum ráð fyrir að til sé rauntala L þannig að runan $\{a_n\}$ stefni á L. Gerum ráð fyrir að f sé samfellt fall í L. Þá er til heiltala N þannig að f er skilgreint fyrir öll gildin a_n fyrir $n\geq N$, og runan $\{f(a_n)\}$ stefnir á $f(L)$ (mynd 5.5).

Sönnun

Látum $\epsilon>0$. Þar sem f er samfellt í L, þá er til $\delta>0$ þannig að $|f(x)-f(L)|<\varepsilon$ ef $|x-L|<\delta$. Þar sem runan $\{a_n\}$ stefnir á L, þá er til N þannig að $|a_n-L|<\delta$ fyrir öll $n\geq N$. Fyrir öll $n\geq N$, þá er $|a_n-L|<\delta$, sem hefur í för með sér að $|f(a_n)-f(L)|<\varepsilon$. Við ályktum að runan $\{f(a_n)\}$ stefni á $f(L)$.

□



Mynd 5.5 Fallið f er samfellt, svo að þegar inntaksgildin $a_1, a_2, a_3, \ldots$ stefna á L, nálgast úttaksgildin $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots$ gildið $f(L)$.

DÆMI 5.4

Markgildi með samfelldum föllum skilgreindum á samleitnum runum

Ákvarðið hvort runan $\left\{\cos\left(3/n^2\right)\right\}$ sé samleitin. Finnið markgildi hennar ef hún er samleitin.

Lausn

Þar sem runan $\left\{3/n^2\right\}$ stefnir á 0 og $\cos x$ er samfellt í $x=0$, getum við ályktað að runan $\left\{\cos\left(3/n^2\right)\right\}$ sé samleitin og að

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{3}{n^2}\right)=\cos(0)=1.$$

5

STÖÐUMAT 5.4

Ákvarðið hvort runan $\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{3n+5}}\right\}$ sé samleitin. Finnið markgildi hennar ef hún er samleitin.

Önnur setning um markgildi runa er útvíkkun á klemmureglunni fyrir markgildi, sem fjallað var um í Inngangi að markgildum.

SETNING 5.4

Klemmureglan fyrir runur

Skoðum runurnar $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, og $\{c_n\}$. Gerum ráð fyrir að til sé heiltala N þannig að

$$a_n \le b_n \le c_n \text{ fyrir öll } n \ge N.$$

Ef til er rauntala L þannig að

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

þá er $\{b_n\}$ samleitin og $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ (mynd 5.6).

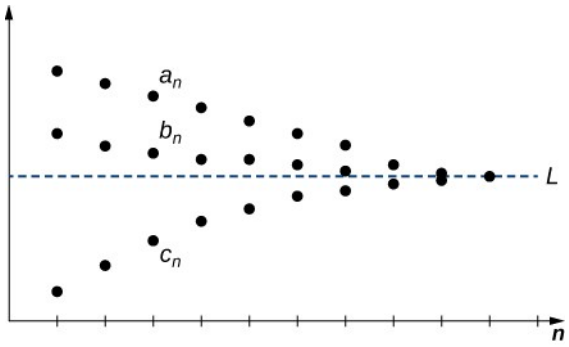
Sönnun

Látum $\varepsilon > 0$. Þar sem runan $\{a_n\}$ stefnir á L, er til heiltala N_1 þannig að $|a_n - L| < \varepsilon$ fyrir öll $n \geq N_1$. Þar sem $\{c_n\}$ stefnir á L, er á sama hátt til heiltala N_2 þannig að $|c_n - L| < \varepsilon$ fyrir öll $n \geq N_2$. Samkvæmt forsendu er til heiltala N þannig að $a_n \leq b_n \leq c_n$ fyrir öll $n \geq N$. Látum M vera stærsta talnanna N_1, N_2, og N. Við þurfum að sýna að $|b_n - L| < \varepsilon$ fyrir öll $n \geq M$. Fyrir öll $n \geq M$,

$$-\varepsilon < -|a_n - L| \leq a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon.$$

Því er $-\varepsilon < b_n - L < \varepsilon$, og við ályktum að $|b_n - L| < \varepsilon$ fyrir öll $n \geq M$, og þar með að runan $\{b_n\}$ stefni á L.

□



Mynd 5.6 Sérhver liður b_n uppfyllir $a_n \leq b_n \leq c_n$ og runurnar $\{a_n\}$ og $\{c_n\}$ stefna á sama markgildi. Því hlýtur runan $\{b_n\}$ einnig að stefna á þetta markgildi.

DÆMI 5.5

Klemmureglan notuð

Notið klemmuregluna til að finna markgildi hverrar eftirfarandi runu.

a. $\left\{\dfrac{\cos n}{n^2}\right\}$

b. $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

Lausn

a. Þar sem $-1 \leq \cos n \leq 1$ fyrir allar heiltölur n, fæst

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Þar sem $-1/n^2 \to 0$ og $1/n^2 \to 0$, ályktum við að einnig sé $\cos n/n^2 \to 0$

b. Þar sem

$$-\frac{1}{2^n} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n, $-1/2^n \to 0$ og $1/2^n \to 0$, getum við ályktað að $(-1/2)^n \to 0$.

STÖÐUMAT 5.5

Finnið $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n - \sin n}{n}$.

Með hugmyndinni úr dæmi 5.5 b ályktum við að $r^n \to 0$ fyrir sérhverja rauntölu r þannig að $-1 < r < 0$. Ef $r < -1$, er runan (r^n) ósamleitin vegna þess að liðirnir sveiflast og tölugildi þeirra verður ótakmarkað stórt. Ef $r = -1$, er runan $(r^n) = ((-1)^n)$ ósamleitin, eins og áður var fjallað um. Hér er samantekt á eiginleikum kvótaruna.

$$r^n \to 0 \text{ ef } |r| < 1 \tag{5.1}$$

$$r^n \to 1 \text{ ef } r = 1 \tag{5.2}$$

$$r^n \to \infty \text{ ef } r > 1 \tag{5.3}$$

$$(r^n) \text{ er ósamleitin ef } r \leq -1 \tag{5.4}$$

Takmarkaðar runur

Nú beinum við sjónum að einni mikilvægustu setningunni um runur: setningunni um einhalla runur. Áður en við setjum hana fram þurfum við að kynna nokkur hugtök og hvatann að baki henni. Við byrjum á að skilgreina hvað það merkir að runa sé takmörkuð.

SKILGREINING

Runa (a_n) er takmörkuð að ofan ef til er rauntala M þannig að

$$a_n \leq M$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

Runa $\{a_n\}$ er takmörkuð að neðan ef til er rauntala M þannig að

$$M \leq a_n$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

Runa $\{a_n\}$ er takmörkuð runa ef hún er takmörkuð bæði að ofan og neðan.

Runa sem er ekki takmörkuð kallast ótakmörkuð runa.

Runan $\{1/n\}$ er til dæmis takmörkuð að ofan vegna þess að $1/n \leq 1$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Hún er einnig takmörkuð að neðan vegna þess að $1/n \geq 0$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Því er $\{1/n\}$ takmörkuð runa. Skoðum hins vegar rununa $\{2^n\}$. Þar sem $2^n \geq 2$ fyrir öll $n \geq 1$, er runan takmörkuð að neðan. Hún er hins vegar ekki takmörkuð að ofan. Því er $\{2^n\}$ ótakmörkuð runa.

Nú fjöllum við um samband takmörkunar og samleitni. Gerum ráð fyrir að runan $\{a_n\}$ sé ótakmörkuð. Þá er hún ekki takmörkuð að ofan, ekki takmörkuð að neðan eða hvorugt. Í öllum tilvikum eru til liðir a_n sem verða ótakmarkað stórir að tölugildi þegar n stækkar. Því getur runan $\{a_n\}$ ekki verið samleitin. Takmörkun er því nauðsynlegt skilyrði fyrir samleitni runu.

SETNING 5.5

Samleitnar runur eru takmarkaðar

Ef runa $\{a_n\}$ er samleitin er hún takmörkuð.

Athugið að takmörkun runu er ekki nægilegt skilyrði fyrir samleitni hennar. Runan $\{(-1)^n\}$ er til dæmis takmörkuð en ósamleitin, því hún sveiflast á milli 1 og -1 og nálgast aldrei endanlega tölu. Nú fjöllum við um nægilegt, en ekki nauðsynlegt, skilyrði fyrir samleitni takmarkaðrar runu.

Skoðum takmarkaða runu $\{a_n\}$. Gerum ráð fyrir að runan $\{a_n\}$ sé vaxandi, það er að $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots$. Þar sem runan er vaxandi sveiflast liðirnir ekki. Tveir möguleikar koma því til greina: runan getur stefnt á óendanlegt eða verið samleitin. Þar sem runan er takmörkuð er hún þó takmörkuð að ofan og getur ekki stefnt á óendanlegt. Við ályktum að $\{a_n\}$ sé samleitin. Skoðum til dæmis rununa

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}.$$

Þar sem þessi runa er vaxandi og takmörkuð að ofan er hún samleitin. Skoðum næst rununa

$$\left\{2,0,3,0,4,0,1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots\right\}.$$

Þótt runan sé ekki vaxandi fyrir öll gildi n, sést að $-1/2<-1/3<-1/4<\cdots$. Frá og með áttunda liðnum, $a_8=-1/2$, er runan því vaxandi. Þá segjum við að runan sé vaxandi frá og með einhverjum lið. Þar sem hún er takmörkuð að ofan er hún samleitin. Einnig gildir að ef runa er fallandi, eða fallandi frá og með einhverjum lið, og takmörkuð að neðan þá er hún samleitin.

SKILGREINING

Runa $\{a_n\}$ er vaxandi fyrir öll $n\geq n_0$ ef

$$a_n\leq a_{n+1} \text{ fyrir öll } n\geq n_0.$$

Runa $\{a_n\}$ er fallandi fyrir öll $n\geq n_0$ ef

$$a_n\geq a_{n+1} \text{ fyrir öll } n\geq n_0.$$

Runa $\{a_n\}$ er einhalla runa fyrir öll $n\geq n_0$ ef hún er annaðhvort vaxandi fyrir öll $n\geq n_0$ eða fallandi fyrir öll $n\geq n_0$.

Nú höfum við nauðsynlegar skilgreiningar til að setja fram setninguna um einhalla runur, sem gefur nægilegt skilyrði fyrir samleitni runu.

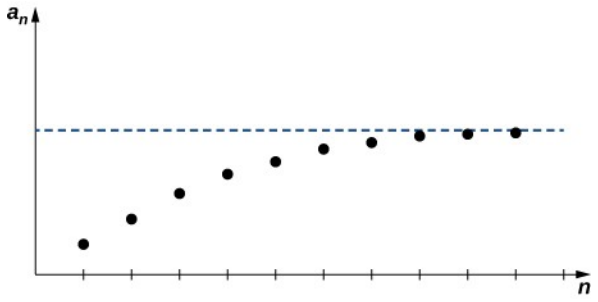
5

SETNING 5.6

Setningin um einhalla runur

Ef $\{a_n\}$ er takmörkuð runa og til er jákvæð heiltala n_0 þannig að $\{a_n\}$ er einhalla fyrir öll $n\geq n_0$, þá er $\{a_n\}$ samleitin.

Sönnun þessarar setningar er utan efnis þessarar bókar. Þess í stað sýnum við með grafi hvers vegna setningin er rökrétt (mynd 5.7).



Mynd 5.7 Þar sem runan $\{a_n\}$ er vaxandi og takmörkuð að ofan hlýtur hún að vera samleitin.

Í eftirfarandi dæmi sýnum við hvernig nota má setninguna um einhalla runur til að sanna samleitni runu.

DÆMI 5.6

Setningin um einhalla runur notuð

Notið setninguna um einhalla runur til að sýna að hver eftirfarandi runa sé samleitin og finnið markgildi hennar.

a. $\left\{\frac{4^n}{n!}\right\}$

b. $\{a_n\}$ skilgreind með rakningarvenslum þannig að

$$a_1 = 2 \text{ og } a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \text{ fyrir öll } n \geq 2.$$

Lausn

a. Þegar fyrstu liðirnir eru skrifaðir út sést að

$$\left\{\frac{4^n}{n!}\right\} = \left\{4, 8, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{128}{15}, \ldots\right\}.$$

Í fyrstu vaxa liðirnir en eftir þriðja liðinn fara þeir að minnka. Reyndar er runan fallandi fyrir öll $n \geq 3$. Þetta má sýna þannig:

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{4}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n!} = \frac{4}{n+1} \cdot a_n \leq a_n \; ef \; n \geq 3.$$

Runan er því fallandi fyrir öll $n \geq 3$. Hún er jafnframt takmörkuð að neðan af 0 vegna þess að $4^n/n! \geq 0$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Samkvæmt setningunni um einhalla runur er runan því samleitin.

Til að finna markgildið notum við þá staðreynd að runan er samleitin og látum $L = \lim_{n \to \infty} a_n$. Athugum nú eitt mikilvægt atriði. Skoðum $\lim_{n \to \infty} a_{n+1}$. Þar sem

$$\{a_{n+1}\} = \{a_2, a_3, a_4, \ldots\},$$

er eini munurinn á rununum $\{a_{n+1}\}$ og $\{a_n\}$ sá að $\{a_{n+1}\}$ sleppir fyrsta liðnum. Þar sem endanlegur fjöldi liða hefur ekki áhrif á samleitni runu er

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Með því að sameina þessa staðreynd við jöfnuna

$$a_{n+1} = \frac{4}{n+1} a_n$$

og taka markgildi beggja hliða jöfnunnar

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} a_n,$$

getum við ályktað að

$$L = 0 \cdot L = 0.$$

b. Þegar fyrstu liðirnir eru skrifaðir út fæst runan

$$\left\{2, \frac{5}{4}, \frac{41}{40}, \frac{3281}{3280}, \ldots\right\}.$$

Þá má setja fram þá tilgátu að runan sé fallandi og takmörkuð að neðan af 1. Til að sýna að runan sé takmörkuð að neðan af 1, getum við sýnt að

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} \geq 1.$$

Til þess endurritum við fyrst

$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}.$$

Þar sem $a_1 > 0$ og a_2 er skilgreint sem summa jákvæðra liða er $a_2 > 0$. Á sama hátt eru allir liðirnir $a_n > 0$. Því er

$$\frac{a_n^2 + 1}{2a_n} \geq 1$$

þá og því aðeins að

$$a_n^2 + 1 \geq 2a_n.$$

Með því að endurrita ójöfnuna $a_n^2 + 1 \geq 2a_n$ sem $a_n^2 - 2a_n + 1 \geq 0$, og nota þá staðreynd að

$$a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0$$

vegna þess að annað veldi sérhverrar rauntölu er ekki neikvætt getum við ályktað að

$$\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}\geq 1.$$

Til að sýna að runan sé fallandi þurfum við að sýna að $a_{n+1}\leq a_n$ fyrir öll $n\geq 1$. Þar sem $1\leq a_n^2$, leiðir af því að

$$a_n^2+1\leq 2a_n^2.$$

Ef báðum hliðum er deilt með $2a_n$, fæst

$$\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}\leq a_n.$$

Af skilgreiningunni á a_{n+1}, ályktum við að

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}\leq a_n.$$

Þar sem $\left(a_n\right)$ er takmörkuð að neðan og fallandi er hún samleitin samkvæmt setningunni um einhalla runur.

Til að finna markgildið látum við $L=\lim_{n\to\infty} a_n$. Með því að nota rakningarvenslin og þá staðreynd að $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$, fæst

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}\right),$$

og þar með

$$L=\frac{L}{2}+\frac{1}{2L}.$$

Ef báðar hliðar jöfnunnar eru margfaldaðar með $2L$, fæst jafnan

$$2L^2=L^2+1.$$

Þegar við leysum jöfnuna fyrir L, ályktum við að $L^2=1$, sem leiðir til $L=\pm 1$. Þar sem allir liðirnir eru jákvæðir er markgildið $L=1$.

STÖÐUMAT 5.6

Skoðið rununa $\left(a_n\right)$ sem er skilgreind með rakningarvenslum þannig að $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}/2$. Notið setninguna um einhalla runur til að sýna að runan sé samleitin og finnið markgildi hennar.

NEMENDAVERKEFNI

Fibonacci-tölur

Fibonacci-tölurnar eru gefnar með rakningarvenslum fyrir rununa $\left(F_n\right)$ þar sem $F_0=0$, $F_1=1$ og fyrir $n\geq 2$,

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}.$$

Hér skoðum við eiginleika Fibonacci-talnanna.

1. Skrifið fyrstu tuttugu Fibonacci-tölurnar.
2. Finnið lokað form fyrir Fibonacci-rununa með eftirfarandi skrefum.
   a. Skoðið rununa $\left(x_n\right)$ sem er skilgreind með rakningarvenslum þar sem $x_o=c$ og $x_{n+1}=a\,x_n$. Sýnið að lýsa megi þessari runu með lokaða forminu $x_n=c\,a^n$ fyrir öll $n\geq 0$.
   b. Með niðurstöðu a-liðar að leiðarljósi skulið þið leita að lausn á jöfnunni

      $$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$$

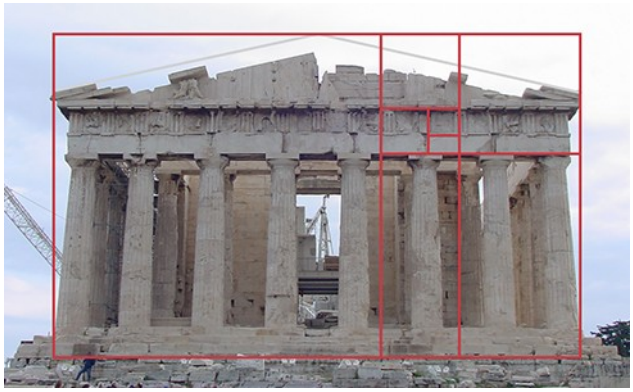
      á forminu $F_n=c\,\lambda^n$. Ákvarðið fyrir hvaða tvö gildi á λ fallið F_n uppfyllir jöfnuna.
   c. Skoðið lausnirnar tvær úr b-lið: λ_1 og λ_2. Látum $F_n=c_1{\lambda_1}^n+c_2{\lambda_2}^n$. Notið upphafsskilyrðin F_0 og F_1 til að ákvarða gildi fastanna c_1 og c_2 og ritið lokaða formið F_n.
3. Notið svarið í 2 c-lið til að sýna að

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

   Talan $\phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ kallast gullinsnið (mynd 5.8 og mynd 5.9).



Mynd 5.8 Fræin í sólblómi mynda spírala sem sveigjast til vinstri og hægri. Fjöldi spírala í hvora átt er alltaf Fibonacci-tala — alltaf. (Mynd byggð á verki Esdras Calderan, Wikimedia Commons.)



Mynd 5.9 Gullinsnið kemur fyrir í mörgum frægum dæmum úr list og byggingarlist. Forngríska hofið Parþenon virðist hafa þessi hlutföll og þau sjást einnig í mörgum smærri atriðum. (Mynd byggð á verki TravelingOtter, Flickr.)

Æfingar í undirkafla 5.1

Finnið fyrstu sex liði hverrar eftirfarandi runu og byrjið á $n=1$.

1. $a_n=1+(-1)^n$ fyrir $n\geq 1$

2. $a_n=n^2-1$ fyrir $n\geq 1$

3. $a_1=1$ og $a_n=a_{n-1}+n$ fyrir $n\geq 2$

4. $a_1=1$, $a_2=1$ og $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ fyrir $n\geq 1$

5. Finnið lokað form fyrir a_n þar sem $a_1=1$ og $a_n=a_{n-1}+n$ fyrir $n\geq 2$.

6. Finnið formúlu a_n fyrir n-ta lið jafnmunarununnar sem hefur fyrsta liðinn $a_1=1$ þannig að $a_{n+1}-a_n=17$ fyrir $n\geq 1$.

7. Finnið formúlu a_n fyrir n-ta lið jafnmunarununnar sem hefur fyrsta liðinn $a_1=-3$ þannig að $a_{n+1}-a_n=4$ fyrir $n\geq 1$.

8. Finnið formúlu a_n fyrir n-ta lið kvótarununnar sem hefur fyrsta liðinn $a_1=1$ þannig að $\frac{a_{n+1}}{a_n}=10$ fyrir $n\geq 1$.

9. Finnið formúlu a_n fyrir n-ta lið kvótarununnar sem hefur fyrsta liðinn $a_1=3$ þannig að $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1/10$ fyrir $n\geq 1$.

10. Finnið lokað form fyrir n-ta lið rununnar sem byrjar á $\{0,3,8,15,24,35,48,63,80,99,\ldots\}$. (Vísbending: Leggið fyrst einn við hvern lið.)

11. Finnið lokað form fyrir n-ta lið rununnar sem uppfyllir $a_1=0$ og $a_n=2a_{n-1}+1$ fyrir $n\geq 2$.

Finnið formúlu fyrir almenna liðinn a_n í hverri eftirfarandi runu.

12. $\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots\}$ (Vísbending: Finnið hvar sin x tekur þessi gildi.)

13.

$$\{1,-1/3,1/5,-1/7,\ldots\}$$

Finnið fall $f(n)$ sem gefur n-ta liðinn a_n í rununum hér á eftir, sem skilgreindar eru með rakningarvenslum, þannig að $a_n=f(n)$.

14. $a_1=1$ og $a_{n+1}=-a_n$ fyrir $n\geq 1$

15. $a_1=2$ og $a_{n+1}=2a_n$ fyrir $n\geq 1$

16. $a_1=1$ og $a_{n+1}=(n+1)a_n$ fyrir $n\geq 1$

17. $a_1=2$ og $a_{n+1}=(n+1)a_n/2$ fyrir $n\geq 1$

18. $a_1=1$ og $a_{n+1}=a_n/2^n$ fyrir $n\geq 1$

Teiknið fyrstu N liði hverrar runu. Segið hvort grafið bendi til þess að runan sé samleitin eða ósamleitin.

19. **[T]** $a_1=1$, $a_2=2$, og fyrir

$$n\geq 2,$$

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2});$$

$$N=30$$

20. **[T]** $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ og fyrir

$$n\geq 4,$$

$$a_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}),$$

$$N=30$$

21. **[T]** $a_1=1$, $a_2=2$, og fyrir

$$n\geq 3,$$

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}};$$

$$N=30$$

22. **[T]** $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, og fyrir

$$n\geq 4,$$

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}};$$

$$N=30$$

Gerum ráð fyrir að $\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-1$, og $0<-b_n<a_n$ fyrir öll n. Reiknið hvert eftirfarandi markgildi, segið að það sé ekki til eða segið að upplýsingar nægi ekki til að ákvarða hvort það sé til.

23.

$$\lim_{n\to\infty}\left(3a_n-4b_n\right)$$

24.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}a_n\right)$$

25.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$$

26.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}$$

Finnið markgildi hverrar eftirfarandi runu og notið reglu l'Hôpital þegar það á við.

27.

$$\frac{n^2}{2^n}$$

28.

$$\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$$

29.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

30. $n^{1/n}$ (Vísbending: $n^{1/n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}$)

Hér á eftir eru gefnir n-tu liðir nokkurra runa. Segið um hverja þeirra hvort hún sé takmörkuð og hvort hún sé einhalla frá og með einhverjum lið, vaxandi eða fallandi.

31.

$$n/2^n,\ n\geq 2$$

32.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

33.

$$\sin n$$

34.

$$\cos\left(n^2\right)$$

35.

$$n^{1/n},\ n\geq 3$$

36.

$$n^{-1/n},\ n\geq 3$$

37.

$$\tan n$$

38. Ákvarðið hvort runan sem skilgreind er hér á eftir hafi markgildi. Finnið markgildið ef það er til.

$a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ og svo framvegis.

39. Ákvarðið hvort runan sem skilgreind er hér á eftir hafi markgildi. Finnið markgildið ef það er til.

$$a_1=3,\ a_n=\sqrt{2a_{n-1}},\ n=2,3,\ldots.$$

Notið klemmuregluna til að finna markgildi hverrar eftirfarandi runu.

40.

$$n\sin(1/n)$$

41.

$$\frac{\cos(1/n)-1}{1/n}$$

42.

$$a_n=\frac{n!}{n^n}$$

43.

$$a_n=\sin n\sin(1/n)$$

Teiknið fyrstu 25 liði hverrar eftirfarandi runu og segið hvort grafið bendi til þess að runan sé samleitin eða ósamleitin.

44. [T] $a_n=\sin n$

45. [T] $a_n=\cos n$

Ákvarðið markgildi rununnar eða sýnið að hún sé ósamleitin. Finnið markgildi hennar ef hún er samleitin.

46.

$$a_n=\tan^{-1}(n^2)$$

47.

$$a_n=(2n)^{1/n}-n^{1/n}$$

48.

$$a_n=\frac{\ln(n^2)}{\ln(2n)}$$

49.

$$a_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

50.

$$a_n=\ln\left(\frac{n+2}{n^2-3}\right)$$

51.

$$a_n=\frac{2^n+3^n}{4^n}$$

52.

$$a_n = \frac{(1000)^n}{n!}$$

53.

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Aðferð Newtons miðar að því að nálga lausn $f(x)=0$ með því að byrja á upphafsnálgun x_0 og skilgreina síðan liðina í rununni með formúlunni $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Fyrir gefin f og x_0, skuluð þið rita formúluna fyrir x_{n+1}. Ef runan virðist vera samleitin skuluð þið gefa nákvæma formúlu fyrir lausnina x, ákvarða síðan markgildið x með nákvæmni upp á fjóra aukastafi og finna minnsta n þannig að x_n og x séu eins upp að fjórða aukastaf.

54. [T]

$$f(x) = x^2 - 2,$$
$$x_0 = 1$$

55. [T]

$$f(x) = (x-1)^2 - 2,$$
$$x_0 = 2$$

56. [T]

$$f(x) = e^x - 2,$$
$$x_0 = 1$$

57. [T]

$$f(x) = \ln x - 1,$$
$$x_0 = 2$$

58. [T] Suppose you start with one liter of vinegar and repeatedly remove 0,1 L, replace with water, mix, and repeat.

a. Finnið formúlu fyrir styrkinn eftir n skref.

b. Eftir hve mörg skref inniheldur blandan minna en 10 % edik?

59. **[T]** Í stöðuvatni eru í upphafi 2000 fiskar. Gerum ráð fyrir að fiskistofninn stækki um 6 % á mánuði ef hvorki rándýr né neitt annað fækkar fiskunum. Þegar allt er tekið með í reikninginn tapast hins vegar 150 fiskar á mánuði.

a. Útskýrið hvers vegna lýsa má fiskistofninum eftir n mánuði með $P_n = 1{,}06\,P_{n-1} - 150$ þar sem $P_0 = 2000$.

b. Hve margir fiskar verða í vatninu eftir eitt ár?

60. **[T]** A bank account earns 5 % interest compounded monthly. Suppose that $1000 is initially deposited into the account, but that $10 is withdrawn each month.

a. Sýnið að innstæða reikningsins eftir n mánuði sé

$$A_n = (1+,05/12)\,A_{n-1} - 10;$$

$$A_0 = 1000.$$

b. Hve mikið verður á reikningnum eftir 1 ár?

c. Fer innstæðan vaxandi eða minnkandi?

d. Suppose that instead of $10, a fixed amount d dollars is withdrawn each month. Find a value of d such that the amount in the account after each month remains $1000.

e. Hvað gerist ef d er stærra en þessi upphæð?

61. **[T]** Nemandi tekur 10.000 € námslán. Ársvextir eru 6 %, og vextirnir reiknast með mánaðarlegri vaxtavöxtun.

a. If the student makes payments of $100 per month, how much does the student owe after 12 months?

b. Eftir hve marga mánuði verður lánið að fullu greitt?

62. **[T]** Skoðið runu sem sameinar kvótarvöxt og línulega lækkun. Látum $a_1 = 1$. Festum $a > 1$ og $0 < b < a$. Setjum $a_{n+1} = a.a_n - b$. Finnið formúlu fyrir a_{n+1} með a^n, a, og b og samband milli a og b þannig að a_n sé samleitin.

63. **[T]** Tvíundarframsetning $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$ tölu x á milli 0 og 1 er skilgreind þannig: Látum $b_1 = 0$ ef $x < 1/2$ og $b_1 = 1$ ef $1/2 \le x < 1$. Látum $x_1 = 2x - b_1$. Látum $b_2 = 0$ ef $x_1 < 1/2$ og $b_2 = 1$ ef $1/2 \le x < 1$. Látum $x_2 = 2x_1 - b_2$ og almennt $x_n = 2x_{n-1} - b_n$ og $b_{n-1} = 0$ ef $x_n < 1/2$ og $b_{n-1} = 1$ ef $1/2 \le x_n < 1$. Finnið tvíundarframsetningu $1/3$.

64. **[T]** Til að finna nálgun á π, setjum við $a_0 = \sqrt{2+1}$, $a_1 = \sqrt{2+a_0}$, og almennt $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Að lokum setjum við $p_n = 3{,}2^{n+1}\sqrt{2-a_n}$. Finnið fyrstu tíu liði p_n og berið gildin saman við π.

Í næstu tveimur æfingum skulið þið gera ráð fyrir að þið hafið aðgang að tölvuforriti eða heimild á netinu sem getur myndað eins langan lista af núllum og ásum og óskað er. Sýndarslembitalnagjafar (PRNGs) gegna mikilvægu hlutverki við að herma eftir slembisuði í eðlisfræðilegum kerfum með því að búa til runur af núllum og ásum sem virðast vera

niðurstaða endurtekinna myntkasta. Ein einfaldasta gerð PRNGs skilgreinir með rakningarvenslum runu N heiltalna $a_1, a_2, \ldots, a_N$ sem lítur út fyrir að vera slembin. Þá eru tvær sérstakar heiltölur K og M festar og a_{n+1} látið vera afganginn þegar $K \cdot a_n$ er deilt með M, en síðan er búin til bitaruna af núllum og ásum þar sem n-ti liðurinn b_n er einn ef a_n er oddatala og núll ef a_n er slétt tala. Ef bitarnir b_n eru sýndarslembnir ætti meðaltal þeirra $\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_N\right)/N$ að hegða sér svipað og meðaltöl raunverulega slembinna bita.

65. **[T]** Byrjið með $K = 16.807$ og $M = 2.147.483.647$, og notið tíu mismunandi upphafsgildi á a_1, til að reikna bitarunur b_n upp að $n = 1000$, og berið meðaltöl þeirra saman við meðaltöl tíu slíkra runa frá slembibitaframleiðanda.

66. **[T]** Finnið fyrstu 1000 tölustafi π með tölvuforriti eða heimild á netinu. Myndið bitarunu b_n með því að láta $b_n = 1$ ef n-ti tölustafur π er oddatala og $b_n = 0$ ef n-ti tölustafur π er slétt tala. Reiknið meðalgildi b_n og meðalgildi $d_n = \left|b_{n+1} - b_n\right|$, $n = 1, \ldots, 999$. Virðist runan b_n vera slembin? Virðist mismunur samliggjandi liða b_n vera slembinn?

5.2 Óendanlegar raðir

NÁMSMARKMIÐ

- 5.2.1 Útskýra merkingu summu óendanlegrar raðar.
- 5.2.2 Reikna summu geómetrískrar raðar.
- 5.2.3 Reikna kíkisröð.

Við höfum séð að runa er röðuð upptalning liða. Ef liðirnir eru lagðir saman fæst röð. Í þessum undirkafla skilgreinum við óendanlega röð og sýnum tengsl raða og runa. Við skilgreinum einnig hvað það merkir að röð sé samleitin eða ósamleitin. Við kynnum eina mikilvægustu gerð raða, geómetríska raðir. Í næsta kafla notum við geómetríska raðir til að rita tiltekin föll sem margliður með óendanlega mörgum liðum. Þetta ferli er mikilvægt því með því getum við reiknað gildi flókinna falla, diffrað þau og heildað þau með hjálp margliða sem auðveldara er að vinna með. Við fjöllum einnig um harmonísku röðina, ef til vill athyglisverðustu ósamleitnu röðina, því hún nær rétt svo ekki að vera samleitin.

Summur og raðir

Óendanleg röð er summa óendanlega margra liða og er rituð á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

En hvað merkir þetta? Við getum ekki lagt saman óendanlega marga liði á sama hátt og endanlega marga liði. Þess í stað er gildi óendanlegrar raðar skilgreint með markgildi hlutsumma. Hlutsumma óendanlegrar raðar er endanleg summa á forminu

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k.$$

Skoðum dæmi sem sýnir hvernig hlutsummur eru notaðar til að reikna óendanlegar raðir. Gerum ráð fyrir að olía leki út í stöðuvatn þannig að 1000 lítrar berist í vatnið fyrstu vikuna. Í annarri viku berast 500 lítrar til viðbótar út í vatnið. Í þriðju vikunni berast 250 lítrar til viðbótar í vatnið. Gerum ráð fyrir að mynstrið haldi áfram þannig að í hverri viku berist helmingi minni olía í vatnið en vikuna á undan. Hvað getum við sagt um olíumagnið í vatninu ef þetta heldur áfram endalaust? Verður olíumagnið ótakmarkað eða getur það nálgast eitthvert endanlegt magn? Til að svara þessari spurningu skoðum við olíumagnið í vatninu eftir k vikur. Látum S_k tákna olíumagnið í vatninu (mælt í þúsundum lítra) eftir k vikur. Þá fæst

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 0{,}5 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$S_4 = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$S_5 = 1 + 0{,}5 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

Af þessu mynstri sést að olíumagnið í vatninu (í þúsundum lítra) eftir k vikur er

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Við viljum vita hvað gerist þegar $k \to \infty$. Með táknum er olíumagnið í vatninu þegar $k \to \infty$ gefið með óendanlegu röðinni

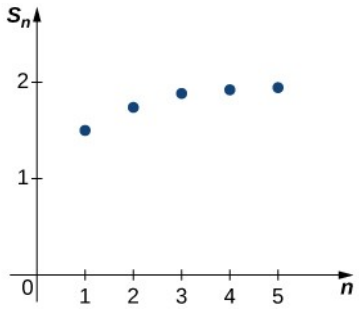
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Jafnframt má reikna olíumagnið í vatninu þegar $k \to \infty$, með því að finna gildi $\lim_{k \to \infty} S_k$. Því má ákvarða hegðun óendanlegu raðarinnar með því að skoða hegðun runu hlutsummanna $\left(S_k\right)$. Ef runa hlutsummanna $\left(S_k\right)$ er samleitin segjum við að óendanlega röðin sé samleitin og summa hennar er þá $\lim_{k \to \infty} S_k$. Ef runan $\left(S_k\right)$ er ósamleitin segjum við að óendanlega röðin sé ósamleitin. Nú beinum við athyglinni að því að finna markgildi rununnar $\left(S_k\right)$.

Einföldum fyrst nokkrar af þessum hlutsummum:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$
$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}.$$

Þegar nokkur þessara gilda eru teiknuð á Mynd 5.10 virðist runan $\left(S_k\right)$ geta nálgast 2.



Mynd 5.10 Grafið sýnir runu hlutsummanna $\left(S_k\right)$. Runa hlutsummanna virðist nálgast gildið 2.

Leitum að sterkari rökum. Í töflunni hér á eftir skráum við gildi S_k fyrir nokkur gildi á k.

k	5	10	15	20
S_k	1,9375	1,998	1,999939	1,999998

5

Þessi gögn renna frekari stoðum undir að runan $\left(S_k\right)$ stefni á 2. Síðar setjum við fram fræðileg rök sem nota má til að sanna að $\lim_{k \to \infty} S_k = 2$. Í bili látum við tölulegu gögnin og grafið sannfæra okkur um að runa hlutsummanna stefni í raun á 2. Þar sem þessi runa hlutsummanna stefnir á 2, segjum við að óendanlega röðin stefni á 2 og ritum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

Snúum okkur aftur að spurningunni um olíuna í vatninu. Þar sem óendanlega röðin stefnir á 2, ályktum við að olíumagnið í vatninu verði eins nálægt 2000 lítrum og vera skal þegar nægilega langur tími er liðinn.

Þessi röð er dæmi um geómetríska röð. Við fjöllum nánar um geómetríska raðir síðar í þessum undirkafla. Fyrst tökum við saman hvað það merkir að óendanleg röð sé samleitin.

SKILGREINING

Óendanleg röð er segð á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Fyrir hverja jákvæða heiltölu k, nefnist summan

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

k-ta hlutsumma óendanlegu raðarinnar. Hlutsummurnar mynda runu $\left(S_k\right)$. Ef runa hlutsummanna stefnir á rauntölu S, er óendanlega röðin samleitin. Ef unnt er að lýsa samleitni raðarinnar með markgildinu S, köllum við S summu raðarinnar og ritum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Ef runa hlutsummanna er ósamleitin er röðin ósamleitin.

Athugið að vísir raðar þarf ekki að hefjast á $n=1$ heldur getur hann hafist á hvaða gildi sem er. Röðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

má til dæmis einnig rita sem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \text{ eða } \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}.$$

Oft er hentugt að vísirinn hefjist á 1, en ef hann hefst af einhverjum ástæðum á öðru gildi má endurvísa röðinni með breytuskiptum. Skoðum til dæmis röðina

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Með því að setja $m = n - 1$, þannig að $n = m + 1$, má endurrita röðina sem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^2}.$$

DÆMI 5.7

Markgildi runu hlutsumma reiknað

Notið runu hlutsummanna til að ákvarða hvort hver röð hér á eftir sé samleitin eða ósamleitin.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Lausn

a. Runa hlutsummanna $\left(S_k\right)$ uppfyllir

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{1}{2} \\
S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \\
S_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} \\
S_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

Athugið að hver liður sem bætt er við er stærri en $1/2$. Af því leiðir að

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{1}{2} \\
S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
S_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 3\left(\tfrac{1}{2}\right) \\
S_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5} > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 4\left(\tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Af þessu mynstri sést að $S_k > k\left(\frac{1}{2}\right)$ fyrir sérhverja heiltölu k. Því er $\left(S_k\right)$ ótakmörkuð og þar af leiðandi ósamleitin. Óendanlega röðin $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n+1)$ er því ósamleitin.

5

b. Runa hlutsummanna $\left(S_k\right)$ uppfyllir

$$
\begin{aligned}
S_1 &= -1 \\
S_2 &= -1 + 1 = 0 \\
S_3 &= -1 + 1 - 1 = -1 \\
S_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Af þessu mynstri sést að runa hlutsummanna er

$$\left(S_k\right) = \left(-1, 0, -1, 0, \ldots\right).$$

Þar sem þessi runa er ósamleitin er óendanlega röðin $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ósamleitin.

c. Runa hlutsummanna $\left(S_k\right)$ uppfyllir

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$
$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$
$$S_5 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{5}{6}.$$

Af þessu mynstri sést að k-ta hlutsumman er gefin með lokaða forminu

$$S_k = \frac{k}{k+1}.$$

Þar sem $k/(k+1) \to 1$, ályktum við að runa hlutsummanna sé samleitin og því stefnir óendanlega röðin á 1. Við höfum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

STÖÐUMAT 5.7

Ákvarðið hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/n$ sé samleitin eða ósamleitin.

5

Harmoníska röðin

Harmoníska röðin er gagnleg röð sem er skilgreind sem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

(5.5)

Þessi röð er athyglisverð því hún er ósamleitin, en sundurleitni hennar er afar hæg. Með því er átt við að liðir runu hlutsummanna $\{S_k\}$ stefni á óendanlegt, en geri það mjög hægt. Við sýnum að röðin er ósamleitin, en fyrst sýnum við hægan vöxt liðanna í rununni $\{S_k\}$ í eftirfarandi töflu.

k	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
S_k	2,92897	5,18738	7,48547	9,78761	12,09015	14,39273

Even after 1.000.000 terms, the partial sum is still relatively small. From this table, it is not clear that this series actually diverges. However, we can show analytically that the sequence of partial sums diverges, and therefore the series diverges.

Til að sýna að runa hlutsummanna sé ósamleitin sýnum við að hún sé ótakmörkuð. Byrjum á að rita fyrstu hlutsummurnar:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$
$$S_3 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$$
$$S_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}.$$

Athugið að eftirfarandi gildir fyrir síðustu tvo liðina í S_4,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

Því ályktum við að

$$S_4>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Með sömu hugmynd fyrir S_8, fæst

$$\begin{aligned} S_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + 3\left(\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Af þessu mynstri sést að $S_1=1$, $S_2=1+1/2$, $S_4>1+2(1/2)$, og $S_8>1+3(1/2)$. Almennt má sýna að $S_{2^j}>1+j(1/2)$ fyrir öll $j>1$. Þar sem $1+j(1/2)\to\infty$, ályktum við að runan $\{S_k\}$ sé ótakmörkuð og því ósamleitin. Í síðasta undirkafla sögðum við að samleitnar runur væru takmarkaðar. Þar sem $\{S_k\}$ er ótakmörkuð er hún því ósamleitin. Harmoníska röðin er þar með ósamleitin.

5

Reiknireglur um samleitnar raðir

Þar sem summa samleitinnar óendanlegrar raðar er skilgreind sem markgildi runu leiða eftirfarandi reiknireglur um raðir beint af reiknireglum um runur.

SETNING 5.7

Reiknireglur um samleitnar raðir

Látum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vera samleitnar raðir. Þá gilda eftirfarandi reiknireglur.

i. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ er samleitin og $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. (summuregla)

ii. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ er samleitin og $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. (mismunaregla)

iii. Fyrir sérhverja rauntölu c, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ samleitin og $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. (regla um margföldun með fasta)

DÆMI 5.8

Reiknireglur um samleitnar raðir notaðar

Reiknið

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n(n+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right].$$

Lausn

Við sýndum áður að

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

og að

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2.$$

Þar sem báðar þessar raðir eru samleitnar getum við beitt reiknireglum um samleitnar raðir til að reikna

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n(n+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right].$$

Með summureglunni ritum við

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n(n+1)}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Með reglunni um margföldun með fasta og summunum hér að ofan getum við síðan ályktað að

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{3}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} &= 3\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n(n+1)}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &= 3\,(1)+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}(2)=3+2\,(2)=7.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 5.8

Reiknið $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^{n-1}}$.

Geómetríska raðir

Geómetrísk röð er hver sú röð sem rita má á forminu

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}.$$

(5.6)

Þar sem hlutfallið milli hvers liðar raðarinnar og liðarins á undan er r kallast talan r hlutfallstala raðarinnar. Við köllum a fyrsta liðinn því hann er fyrsti liður raðarinnar. Röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

er til dæmis geómetrísk röð með fyrsta liðinn $a=1$ og hlutfallstöluna $r=1/2$.

Hvenær er geómetrísk röð almennt samleitin? Skoðum geómetrísku röðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$$

þegar $a>0$. Runa hlutsummanna $\left(S_k\right)$ er gefin með

$$S_k=\sum_{n=1}^{k} a r^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{k-1}.$$

Skoðum tilvikið þegar $r=1$. Þá er

$$S_k=a+a(1)+a(1)^2+\cdots+a(1)^{k-1}=ak.$$

Þar sem $a>0$, vitum við að $ak\to\infty$ þegar $k\to\infty$. Því er runa hlutsummanna ótakmörkuð og þar með ósamleitin. Óendanlega röðin er því ósamleitin fyrir $r=1$. Þegar $r\neq 1$, finnum við markgildi $\left(S_k\right)$, með því að margfalda Jöfnu 5.6 með $1-r$. Þá sést að

$$\begin{aligned}(1-r)S_k &= a\,(1-r)\left(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{k-1}\right)\\ &= a[(1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{k-1})-(r+r^2+r^3+\cdots+r^k)]\\ &= a\left(1-r^k\right).\end{aligned}$$

Allir hinir liðirnir styttast út.

Því fæst

$$S_k=\frac{a\left(1-r^k\right)}{1-r}\text{ fyrir }r\neq 1.$$

Af umfjölluninni í síðasta undirkafla vitum við að geómetríska runan uppfyllir $r^k\to 0$ þegar $|r|<1$ og að runan r^k er ósamleitin ef $|r|>1$ eða $r=\pm 1$. Þegar $|r|<1$, gildir $S_k\to a/(1-r)$ og þá fæst

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}=\frac{a}{1-r}\text{ ef }|r|<1.$$

Ef $|r|\geq 1$, er S_k ósamleitin og því

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}\text{ er ósamleitin ef }|r|\geq 1.$$

SKILGREINING

Geómetrísk röð er röð á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots.$$

Ef $|r| < 1$, er röðin samleitin og

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ fyrir } |r| < 1.$$

(5.7)

Ef $|r| \geq 1$, er röðin ósamleitin.

Geómetrískar raðir birtast stundum á örlítið öðru formi. Vísirinn hefst til dæmis stundum á öðru gildi en $n = 1$ eða veldisvísirinn inniheldur aðra línulega segð í n en $n - 1$. Ef hægt er að endurrita röðina á forminu í Jöfnu 5.5 er hún geómetrísk röð. Skoðum til dæmis röðina

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}.$$

Til að sjá að þetta er geómetrísk röð ritum við fyrstu liðina:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 + \cdots \\ &= \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{4}{9} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Við sjáum að fyrsti liðurinn er $a = 4/9$ og hlutfallstalan er $r = 2/3$. Því má rita röðina sem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

Þar sem $r = 2/3 < 1$, er röðin samleitin og summa hennar er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4/9}{1 - 2/3} = \frac{4}{3}.$$

DÆMI 5.9

Samleitni geómetrískrar raðar ákvörðuð

Ákvarðið hvort hver eftirfarandi geómetrísk röð sé samleitin eða ósamleitin. Ef hún er samleitin, finnið þá summu hennar.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n}$

Lausn

a. Þegar fyrstu liðir raðarinnar eru ritaðir fæst

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{4^{n-1}} &= \tfrac{(-3)^2}{4^0} + \tfrac{(-3)^3}{4} + \tfrac{(-3)^4}{4^2} + \cdots \\ &= (-3)^2 + (-3)^2 \cdot \left(\tfrac{-3}{4}\right) + (-3)^2 \cdot \left(\tfrac{-3}{4}\right)^2 + \cdots \\ &= 9 + 9 \cdot \left(\tfrac{-3}{4}\right) + 9 \cdot \left(\tfrac{-3}{4}\right)^2 + \cdots.\end{aligned}$$

Fyrsti liðurinn er $a=9$ og hlutfallstalan er $r=-3/4$. Þar sem $|r|=3/4<1$, stefnir röðin á

$$\frac{9}{1-(-3/4)}=\frac{9}{7/4}=\frac{36}{7}.$$

b. Þegar röðin er rituð sem

$$e^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^2\right)^{n-1}$$

sést að þetta er geómetrísk röð þar sem $r=e^2>1$. Röðin er því ósamleitin.

5

STÖÐUMAT 5.9

Ákvarðið hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1}$ sé samleitin eða ósamleitin. Ef hún er samleitin, finnið þá summu hennar.

Nú skoðum við skemmtilega notkun geómetríska raða. Við sýnum hvernig nota má þær til að rita endurtekin tugabrot sem brot tveggja heiltalna.

DÆMI 5.10

Endurtekin tugabrot rituð sem brot tveggja heiltalna

Notið geómetríska röð til að rita $3,\overline{26}$ sem brot tveggja heiltalna.

Lausn

Þar sem $3,\overline{26}=3{,}262626\ldots,$ ritum við fyrst

$$\begin{aligned} 3{,}262626\ldots &= 3+\frac{26}{100}+\frac{26}{10.000}+\frac{26}{1.000.000}+\cdots \\ &= 3+\frac{26}{10^2}+\frac{26}{10^4}+\frac{26}{10^6}+\cdots. \end{aligned}$$

Ef við sleppum liðnum 3 er afgangur segðarinnar geómetrísk röð með fyrsta liðinn $a=26/10^2$ og hlutfallstöluna $r=1/10^2$. Summa raðarinnar er því

$$\frac{26/10^2}{1-\left(1/10^2\right)}=\frac{26/10^2}{99/10^2}=\frac{26}{99}.$$

Þar með fæst

$$3{,}262626\ldots=3+\frac{26}{99}=\frac{323}{99}.$$

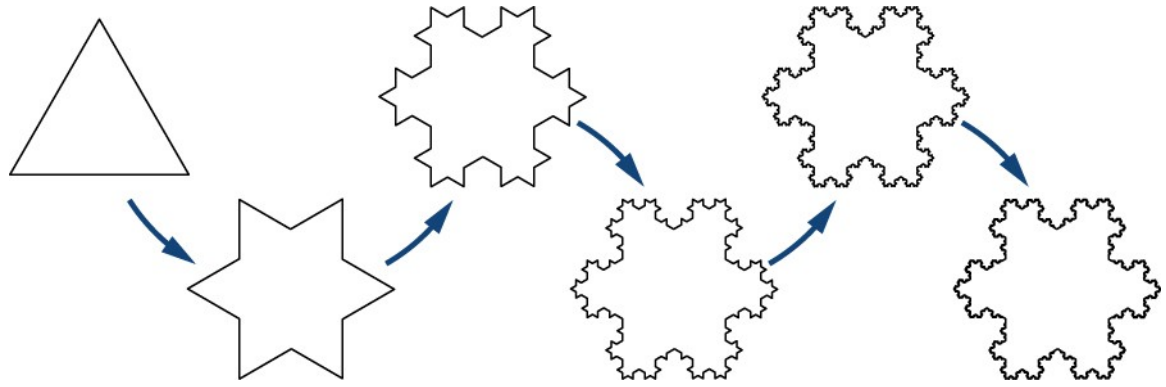
STÖÐUMAT 5.10

Ritið $5{,}2\overline{7}$ sem brot tveggja heiltalna.

DÆMI 5.11

Kaflaupphaf: Flatarmál Koch-snjókornsins fundið

Skilgreinum runu mynda $\left(F_n\right)$ með rakningarvenslum á eftirfarandi hátt (Mynd 5.11). Látum F_0 vera jafnhliða þríhyrning með hliðarlengd 1. Fyrir $n\geq 1$, látum við F_n vera ferilinn sem fæst með því að fjarlægja miðþriðjung hverrar hliðar F_{n-1} og setja í staðinn jafnhliða þríhyrning sem vísar út á við. Markamyndin þegar $n\to\infty$ nefnist Koch-snjókorn.



Mynd 5.11 Fyrstu fjórar myndirnar, $F_0, F_1, F_2,$ og F_3, í smíði Koch-snjókornsins.

a. Finnið lengd ummáls L_n á F_n. Reiknið $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ til að finna lengd ummáls Koch-snjókornsins.

b. Finnið flatarmál A_n myndarinnar F_n. Reiknið $\lim_{n \to \infty} A_n$ til að finna flatarmál Koch-snjókornsins.

Lausn

a. Látum N_n tákna fjölda hliða myndarinnar F_n. Þar sem F_0 er þríhyrningur er $N_0 = 3$. Látum l_n tákna lengd hverrar hliðar F_n. Þar sem F_0 er jafnhliða þríhyrningur með hliðarlengd $l_0 = 1$, þurfum við nú að ákvarða N_1 og l_1. Þar sem F_1 er mynduð með því að fjarlægja miðþriðjung hverrar hliðar og setja tvö línustrik í stað hans, fást fyrir hverja hlið í F_0, fjórar hliðar í F_1. Fjöldi hliða F_1 er því

$$N_1 = 4 \cdot 3.$$

Þar sem lengd hvers nýs línustriks er $1/3$ af lengd línustrikanna í F_0, er lengd línustrikanna í F_1 gefin með

$$l_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Á sama hátt, fyrir F_2, er miðþriðjungur hverrar hliðar F_1 fjarlægður og tvö línustrik sett í stað hans. Fjöldi hliða í F_2 er því gefinn með

$$N_2 = 4\,N_1 = 4\left(4 \cdot 3\right) = 4^2 \cdot 3.$$

Þar sem lengd hverrar þessara hliða er $1/3$ af lengd hliðanna í F_1, er lengd hverrar hliðar myndarinnar F_2 gefin með

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot l_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

Almennt fæst F_n með því að fjarlægja miðþriðjung hverrar hliðar F_{n-1} og setja í stað hans tvö línustrik af lengd $\frac{1}{3} l_{n-1}$ sem mynda jafnhliða þríhyrning. Því vitum við að $N_n = 4\,N_{n-1}$ og $l_n = \frac{l_{n-1}}{3}$. Fjöldi hliða myndarinnar F_n er því

$$N_n = 4^n \cdot 3$$

og lengd hverrar hliðar er

$l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Til að reikna ummál F_n, margföldum við fjölda hliða N_n með lengd hverrar hliðar l_n. Við ályktum að ummál F_n sé gefið með

$$L_n = N_n \cdot l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Lengd ummáls Koch-snjókornsins er því

$$L = \lim_{n \to \infty} L_n = \infty.$$

b. Látum T_n tákna flatarmál hvers nýs þríhyrnings sem myndast við smíði F_n. Fyrir $n = 0$, þá er T_0 flatarmál upphaflega jafnhliða þríhyrningsins. Því er $T_0 = A_0 = \sqrt{3}/4$. Fyrir $n \geq 1$, þá gildir að hliðarlengdir nýja þríhyrningsins eru $1/3$ af hliðarlengdum F_{n-1}, og því er

$$T_n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 T_{n-1} = \frac{1}{9} \cdot T_{n-1}.$$

Þar með fæst $T_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Þar sem nýr þríhyrningur myndast á hverri hlið F_{n-1}, þá er

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + N_{n-1} \cdot T_n \\ &= A_{n-1} + \left(3 \cdot 4^{n-1}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^n \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} \\ &= A_{n-1} + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^n \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Þegar fyrstu liðirnir í A_0, A_1, A_2, eru ritaðir, sést að

$$A_0 = \tfrac{\sqrt{3}}{4}$$
$$A_1 = A_0 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)\right]$$
$$A_2 = A_1 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)\right] + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right) + \tfrac{3}{4} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^2\right].$$

Almennt gildir

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right].$$

Tökum $4/9$ út fyrir hvern lið innan innri sviganna og endurritum segðina sem

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\right].$$

Segðin $1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ er geómetrísk summa. Eins og áður var sýnt uppfyllir þessi summa

$$1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{1 - (4/9)^n}{1 - (4/9)}.$$

Setjum þessa segð inn í segðina að ofan og einföldum. Þá ályktum við að

$$\begin{aligned} A_n &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1-(4/9)^n}{1-(4/9)}\right)\right] \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left[\tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{5}\left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

5

Flatarmál Koch-snjókornsins er því

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Greining

Koch-snjókornið er athyglisvert því flatarmál þess er endanlegt en ummálið óendanlegt. Þetta virðist ef til vill ómögulegt í fyrstu, en munið að þið hafið áður séð svipuð dæmi í bókinni. Skoðum til dæmis svæðið sem afmarkast af ferlinum $y = 1/x^2$ og x-ásnum á bilinu $[1, \infty)$. Þar sem óeiginlega heildið

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

er samleitið er flatarmál svæðisins endanlegt, jafnvel þótt ummálið sé óendanlegt.

Kíkisraðir

Skoðum röðina $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Við fjölluðum um þessa röð í Dæmi 5.7 og sýndum að hún væri samleitin með því að rita fyrstu hlutsummurnar $S_1, S_2, \ldots, S_6$ og taka eftir að þær eru allar á forminu $S_k = \frac{k}{k+1}$. Hér notum við aðra aðferð til að sýna að röðin sé samleitin. Með stofnbrotaliðun má rita

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Því má rita röðina sem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots.$$

Þegar fyrstu liðirnir í runu hlutsummanna $\left(S_k\right)$, eru ritaðir fæst

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3} \\ S_3 &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Almennt gildir

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Við tökum eftir að miðliðirnir styttast út og aðeins fyrsti og síðasti liðurinn standa eftir. Röðin dregst á vissan hátt saman eins og kíkir þar sem hólkarnir renna hver inn í annan og stytta kíkinn. Þess vegna nefnist röð með þennan eiginleika kíkisröð. Þar sem $S_k = 1 - 1/(k+1)$ og $1/(k+1) \to 0$ þegar $k \to \infty$, stefnir runa hlutsummanna á 1, og röðin stefnir því á 1.

SKILGREINING

Kíkisröð er röð þar sem flestir liðir styttast út í hverri hlutsummu og aðeins nokkrir af fyrstu og síðustu liðunum standa eftir.

Sérhver röð á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n - b_{n+1} \right] = \left(b_1 - b_2\right) + \left(b_2 - b_3\right) + \left(b_3 - b_4\right) + \cdots$$

er til dæmis kíkisröð. Þetta sést með því að rita nokkrar hlutsummur. Nánar tiltekið fæst

$$S_1 = b_1 - b_2$$
$$S_2 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) = b_1 - b_3$$
$$S_3 = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) = b_1 - b_4.$$

Almennt er k-ta hlutsumma raðarinnar

$$S_k = b_1 - b_{k+1}.$$

Þar sem einfalda má k-tu hlutsummuna í mismun þessara tveggja liða er runa hlutsummanna $\{S_k\}$ samleitin þá og því aðeins að runan $\{b_{k+1}\}$ sé samleitin. Ef runan b_{k+1} stefnir á einhverja endanlega tölu B, stefnir runa hlutsummanna jafnframt á $b_1 - B$, og því

$$\sum_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}] = b_1 - B.$$

Í næsta dæmi sýnum við hvernig nota má þessar hugmyndir til að greina kíkisröð af þessu tagi.

DÆMI 5.12

Kíkisröð reiknuð

Ákvarðið hvort kíkisröðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \right]$$

sé samleitin eða ósamleitin. Ef hún er samleitin, finnið þá summu hennar.

5

Lausn

Með því að rita liði runu hlutsummanna sést að

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ S_2 &= \left(\cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) = \cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\right) \\ S_3 &= \left(\cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) + \left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{4}\right)\right) \\ &= \cos(1) - \cos\left(\tfrac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Almennt gildir

$$S_k = \cos(1) - \cos\left(\frac{1}{k+1}\right).$$

Þar sem $1/(k+1) \to 0$ þegar $k \to \infty$ og $\cos x$ er samfellt fall gildir $\cos(1/(k+1)) \to \cos(0) = 1$. Við ályktum því að $S_k \to \cos(1) - 1$. Kíkisröðin er samleitin og summa hennar er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \right] = \cos(1) - 1.$$

STÖÐUMAT 5.11

Ákvarðið hvort $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{1/n}-e^{1/(n+1)}\right]$ sé samleitin eða ósamleitin. Ef röðin er samleitin, finnið þá summu hennar.

NEMENDAVERKEFNI

Fasti Eulers

Við höfum sýnt að harmoníska röðin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ er ósamleitin. Hér könnum við hegðun hlutsummanna S_k þegar $k\to\infty$. Nánar tiltekið sýnum við að þær hegða sér eins og náttúrulegi logrinn með því að sýna að til sé fasti γ þannig að

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\ln k\to\gamma \text{ þegar } k\to\infty.$$

Fastinn γ nefnist fasti Eulers.

1. Látum $T_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\ln k$. Reiknið T_k fyrir ýmis gildi á k.
2. Látum T_k vera eins og skilgreint var í lið 1. Sýnið með eftirfarandi skrefum að runan $\left\{T_k\right\}$ sé samleitin.
   a. Sýnið að runan $\left\{T_k\right\}$ sé einhalla fallandi. (Vísbending: Sýnið að $\ln\left(1+1/k>1/\left(k+1\right)\right)$)
   b. Sýnið að runan $\left\{T_k\right\}$ sé takmörkuð að neðan af núlli. (Vísbending: Setjið $\ln k$ fram sem ákveðið heildi.)
   c. Notið setninguna um einhalla runur til að álykta að runan $\left\{T_k\right\}$ sé samleitin. Markgildið γ er fasti Eulers.
3. Metið nú fjarlægð T_k frá γ fyrir gefna heiltölu k. Sannið með eftirfarandi skrefum að fyrir $k\geq 1$, gildi $0<T_k-\gamma\leq 1/k$.
   a. Sýnið að $\ln\left(k+1\right)-\ln k<1/k$.
   b. Notið niðurstöðuna úr a-lið til að sýna að eftirfarandi ójafna gildi fyrir sérhverja heiltölu k,

      $$T_k-T_{k+1}<\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

   c. Fyrir sérhverjar heiltölur k og j þannig að $j>k$, skal setja T_k-T_j fram sem kíkissummu með því að rita

      $$T_k-T_j=\left(T_k-T_{k+1}\right)+\left(T_{k+1}-T_{k+2}\right)+\left(T_{k+2}-T_{k+3}\right)+\cdots+\left(T_{j-1}-T_j\right).$$

Notið niðurstöðuna úr b-lið ásamt þessari kíkissummu til að álykta að

$$T_k - T_j < \frac{1}{k} - \frac{1}{j}.$$

d. Takið markgildi beggja hliða ójöfnunnar í c-lið og ályktið að

$$T_k - \gamma \leq \frac{1}{k}.$$

e. Estimate γ to an accuracy of within $0{,}001$.

Æfingar í undirkafla 5.2

Ritið eftirfarandi segðir sem óendanlegar raðir með summutákni.

67.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

68.

$$1-1+1-1+\cdots$$

69.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

70.

$$\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}+\cdots$$

Reiknið fyrstu fjórar hlutsummurnar $S_1,\ldots,S_4$ fyrir röðina sem hefur n-ta liðinn a_n og byrjar á $n=1$ sem hér segir.

71.

$$a_n = n$$

72.

$$a_n = 1/n$$

73.

$$a_n = \sin(n\pi/2)$$

74.

$$a_n = (-1)^n$$

Reiknið í eftirfarandi verkefnum almenna liðinn a_n í röðinni með gefna hlutsummu S_n. Ef runa hlutsummanna er samleitin, finnið þá markgildi hennar S.

75.

$$S_n = 1 - \frac{1}{n},\ n \geq 2$$

76.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \geq 1$$

77.

$$S_n = \sqrt{n}, n \geq 2$$

78.

$$S_n = 2 - (n+2)/2^n, n \geq 1$$

Notið runu hlutsummanna til að ákvarða hvort hver röð hér á eftir sé samleitin eða ósamleitin.

79.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

80.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (-1)^n\right)$$

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ (Vísbending: Notið stofnbrotaliðun eins og fyrir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.)

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ (Vísbending: Fylgið röksemdafærslunni fyrir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.)

Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, að $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1$, að $a_1 = 2$, og að $b_1 = -3$. Finnið summu tilgreindu raðarinnar.

83.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)$$

84.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - 2b_n\right)$$

85.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - b_n\right)$$

86.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\,a_{n+1} - 4\,b_{n+1}\right)$$

Segið til um hvort gefna röðin sé samleitin og útskýrið hvers vegna.

87. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1000}$ (Vísbending: Endurritið með vísibreytingu.)

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10^{80}}$ (Vísbending: Endurritið með vísibreytingu.)

89.

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$$

90.

$$1+\frac{e}{\pi}+\frac{e^2}{\pi^2}+\frac{e^3}{\pi^3}+\cdots$$

91.

$$1+\frac{\pi}{e^2}+\frac{\pi^2}{e^4}+\frac{\pi^3}{e^6}+\frac{\pi^4}{e^8}+\cdots$$

92.

$$1-\sqrt{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}-\sqrt{\frac{\pi^3}{27}}+\cdots$$

Fyrir a_n hér á eftir skal rita summuna sem geómetríska röð á forminu $\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^n$. Segið til um hvort röðin sé samleitin og ef svo er, finnið gildi $\sum a_n$.

93. $a_1 = -1$ og $a_n/a_{n+1} = -5$ fyrir $n \geq 1$.

94. $a_1 = 2$ og $a_n/a_{n+1} = 1/2$ fyrir $n \geq 1$.

95. $a_1 = 10$ og $a_n/a_{n+1} = 10$ fyrir $n \geq 1$.

96. $a_1 = 1/10$ og $a_n/a_{n+1} = -10$ fyrir $n \geq 1$.

Notið samsemdina $\frac{1}{1-y}=\sum_{n=0}^{\infty} y^n$ til að setja fallið fram sem geómetríska röð í tilgreinda liðnum.

97. $\frac{x}{1+x}$ í x

98. $\frac{\sqrt{x}}{1-x^{3/2}}$ í $\sqrt{x}$

99. $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ í $\sin x$

100. $\sec^2 x$ í $\sin x$

Reiknið eftirfarandi kíkisraðir eða segið til um hvort röðin sé ósamleitin.

101.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1/n}-2^{1/(n+1)}$$

102.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{13}}-\frac{1}{(n+1)^{13}}$$

103.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

104.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin n-\sin(n+1)\right)$$

Setjið eftirfarandi röð fram sem kíkissummu og reiknið n-tu hlutsummu hennar.

105.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)^2}$ (Vísbending: Þáttið nefnarann og notið stofnbrot.)

107.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n \ln(n+1)}$$

108. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^{n+1}}$ (Vísbending: Skoðið $1/(n2^n)$.)

Almenn kíkisröð er röð þar sem allir liðir nema þeir fyrstu styttast út þegar tiltekinn fjöldi samliggjandi liða hefur verið lagður saman.

109. Látum $a_n = f(n) - 2f(n+1) + f(n+2)$, þar sem $f(n) \to 0$ þegar $n \to \infty$. Finnið $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

110. $a_n = f(n) - f(n+1) - f(n+2) + f(n+3)$, þar sem $f(n) \to 0$ þegar $n \to \infty$. Finnið $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

111. Gerum ráð fyrir að $a_n = c_0 f(n) + c_1 f(n+1) + c_2 f(n+2) + c_3 f(n+3) + c_4 f(n+4)$, þar sem $f(n) \to 0$ þegar $n \to \infty$. Finnið skilyrði fyrir stuðlana $c_0, \ldots, c_4$ sem gera þetta að almennri kíkisröð.

112. Reiknið $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (Vísbending: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$)

113. Reiknið $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^3 - n}$.

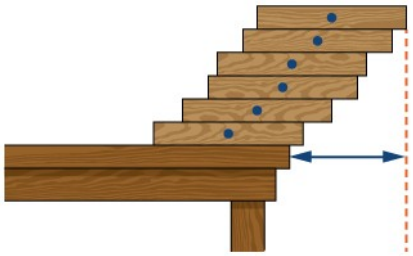
114. Finnið formúlu fyrir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+N)}$ þar sem N er jákvæð heiltala.

5

115. **[T]** Skilgreinið runu $t_k = \sum_{n=1}^{k-1} (1/n) - \ln k$. Notið graf $1/x$ til að sannreyna að t_k sé vaxandi.

Teiknið t_k fyrir $k = 1 \ldots 100$ og segið til um hvort runan virðist vera samleitin.

116. **[T]** Gerum ráð fyrir að N jafnstórum, einsleitum, rétthyrndum kubbum sé staflað hverjum ofan á annan þannig að þeir megi skaga hver fram yfir annan. Vogarlögmál Arkímedesar segir að staflinn af N kubbum sé stöðugur svo lengi sem massamiðja efstu $(N-1)$ kubbanna liggur við brún neðsta kubbsins. Látum x tákna staðsetningu brúnar neðsta kubbsins og hugsum staðsetninguna miðað við miðju næstneðsta kubbsins. Af þessu leiðir að $(N-1)x = \left(\frac{1}{2} - x\right)$ eða $x = 1/(2N)$. Notið þessa segð til að reikna mesta mögulega útskotið, það er staðsetningu brúnar efsta kubbsins fram yfir brún neðsta kubbsins. Sjá eftirfarandi mynd.



Hver eftirfarandi óendanleg röð stefnir á gefið margfeldi af π eða $1/\pi$.

Finnið í hverju tilviki minnsta gildi N þannig að N-ta hlutsumma raðarinnar nálgi vinstri hliðina með gefnum fjölda aukastafa og gefið nálgunargildið. Með 15 aukastöfum er $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$

117. **[T]** $\pi = -3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^n n!^2}{(2n)!}$, skekkja $< 0{,}0001$

118. **[T]** $\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!^2}{(2k+1)!}$, skekkja $< 10^{-4}$

119. **[T]** $\frac{9801}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$, skekkja $< 10^{-12}$

120. **[T]** $\frac{1}{12\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$, skekkja $< 10^{-15}$

121. **[T]** Sanngjörn mynt hefur líkurnar $1/2$ á að lenda með skjaldarmerkið upp þegar henni er kastað.

a. Hverjar eru líkurnar á að sanngjörn mynt lendi n sinnum í röð með fiskinn upp?

b. Finnið líkurnar á að mynt lendi í fyrsta sinn með skjaldarmerkið upp í síðasta kasti af sléttum fjölda kasta.

122. **[T]** Finnið líkurnar á að sanngjarnri mynt sé kastað margfeldi af þremur sinnum áður en hún lendir með skjaldarmerkið upp.

123. **[T]** Finnið líkurnar á að sanngjörn mynt lendi í annað sinn með skjaldarmerkið upp eftir sléttan fjölda kasta.

124. **[T]** Finnið röð sem lýsir líkunum á að sanngjörn mynt lendi í annað sinn með skjaldarmerkið upp í kasti sem er margfeldi af þremur.

125. **[T]** Væntur fjöldi skipta sem sanngjörn mynt lendir með skjaldarmerkið upp er skilgreindur sem summan yfir $n = 1, 2, \ldots$ af n sinnum líkunum á að myntin lendi nákvæmlega n sinnum í röð með skjaldarmerkið upp, það er $n/2^{n+1}$. Reiknið væntan fjölda skipta í röð sem sanngjörn mynt lendir með skjaldarmerkið upp.

126. **[T]** A person deposits $\$10$ at the beginning of each quarter into a bank account that earns $4\,\%$ annual interest compounded quarterly (four times a year).

a. Sýnið að uppsafnaðir vextir eftir n ársfjórðunga séu $10\left(\frac{1{,}01^{n+1}-1}{0{,}01}-n\right)$ €.

b. Finnið fyrstu átta liði rununnar.

c. Hversu miklir vextir hafa safnast upp eftir 2 ár?

127. **[T]** Gerum ráð fyrir að magn lyfs í líkama sjúklings margfaldist á hverri klukkustund með stuðlinum $r<1$. Nýr skammtur er gefinn á N klukkustunda fresti. Finnið segð fyrir magnið $A(n)$ í líkama sjúklingsins eftir n klukkustundir fyrir sérhvert n sem fall af skammtinum d og hlutfallinu r. (Vísbending: Ritið $n=mN+k$, þar sem $0\le k<N$, og leggið saman gildin frá mismunandi skömmtum sem gefnir voru.)

128. **[T]** A certain drug is effective for an average patient only if there is at least 1 mg per kg in the patient's system, while it is safe only if there is at most 2 mg per kg in an average patient's system. Suppose that the amount in a patient's system diminishes by a multiplicative factor of 0,9 each hour after a dose is administered. Find the maximum interval N of hours between doses, and corresponding dose range d (in mg/kg) for this N that will enable use of the drug to be both safe and effective in the long term.

129. Gerum ráð fyrir að $a_n\ge 0$ sé talnaruna. Útskýrið hvers vegna runa hlutsumma raðarinnar með liðum a_n sé vaxandi.

130. **[T]** Gerum ráð fyrir að a_n sé runa jákvæðra talna og að runa S_n hlutsumma a_n sé takmörkuð að ofan. Útskýrið hvers vegna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin. Gildir niðurstaðan enn ef við fellum brott forsenduna $a_n\ge 0$?

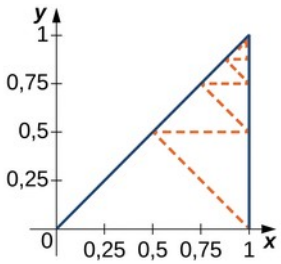
131. **[T]** Gerum ráð fyrir að $a_1=S_1=1$. Fyrir gefnar tölur $S>1$ og $0<k<1$, skilgreinum við $a_{n+1}=k(S-S_n)$ og $S_{n+1}=a_{n+1}+S_n$. Er S_n samleitin? Ef svo er, hvert stefnir hún? (Vísbending: Rökstyðjið fyrst að $S_n<S$ fyrir öll n og að S_n sé vaxandi.)

132. **[T]** Nota má útgáfu af vaxtarlíkani von Bertalanffys til að meta aldur einstaklings innan einsleitrar tegundar út frá lengd hans ef árleg lengdaraukning á ári $n+1$ uppfyllir $a_{n+1}=k(S-S_n)$, þar sem S_n er lengdin á ári n, S er markalengd og k er hlutfallslegur vaxtarfasti. Ef $S_1=3$, $S=9$, og $k=1/2$, metið þá tölulega minnsta gildi n þannig að $S_n\ge 8$. Athugið að $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$. Finnið samsvarandi n þegar $k=1/4$.

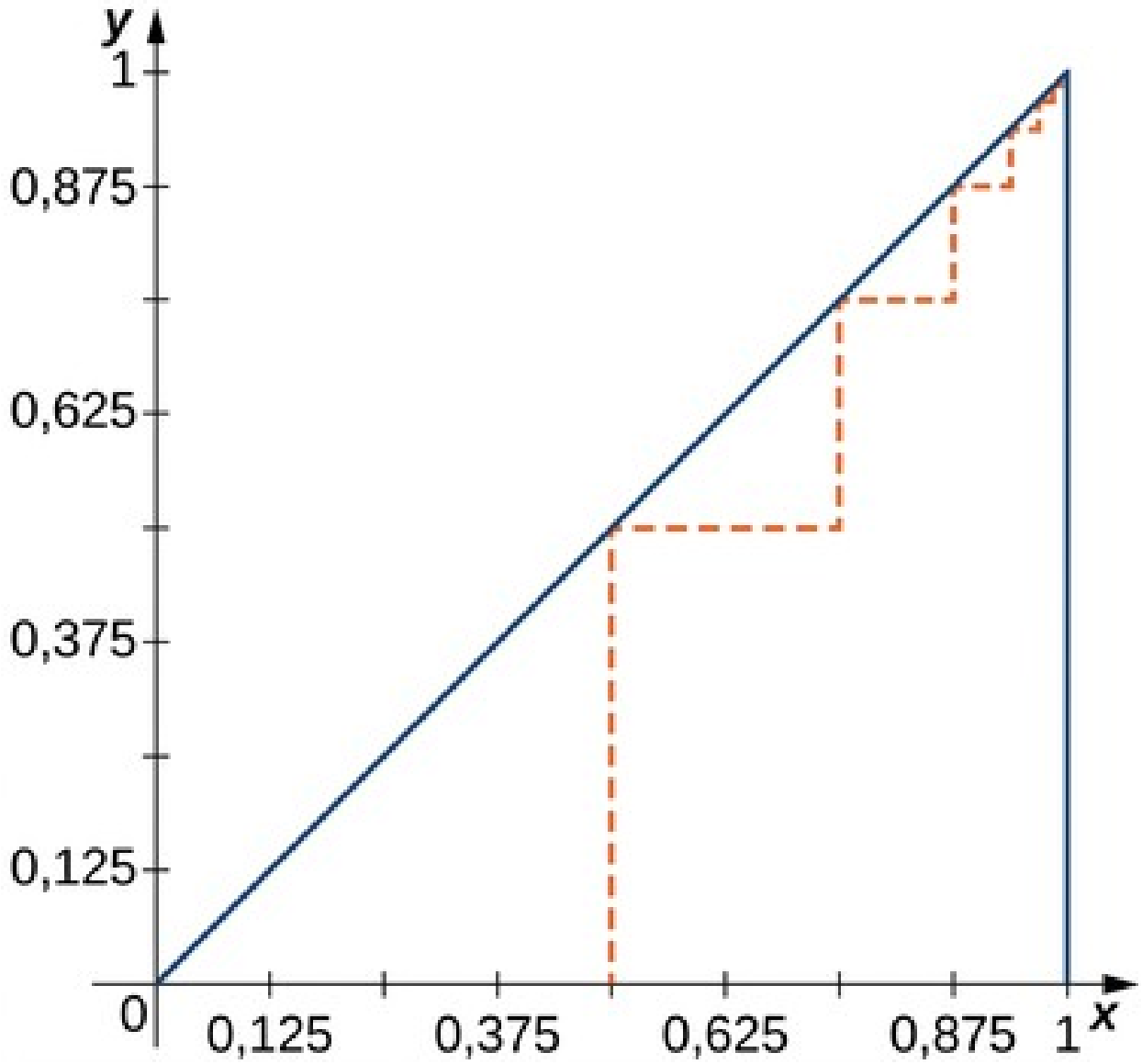
133. **[T]** Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin röð jákvæðra liða. Útskýrið hvers vegna

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n=0.$$

134. **[T]** Finnið lengd strikalaga sikk-sakk-ferilsins á eftirfarandi mynd.

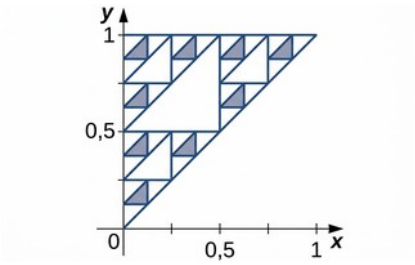


135. **[T]** Finnið heildarlengd strikalaga ferilsins á eftirfarandi mynd.

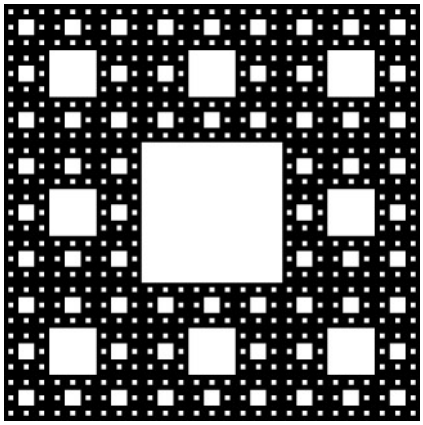


5

136. **[T]** Sierpiński-þríhyrningurinn fæst úr þríhyrningi með því að fjarlægja miðfjórðunginn eins og sýnt er í fyrsta skrefi, fjarlægja miðfjórðung hvers þeirra þriggja eins þríhyrninga sem eftir standa í öðru skrefi og almennt fjarlægja miðfjórðung þríhyrninganna sem eftir standa í hverju skrefi. Gerið ráð fyrir að upphaflegi þríhyrningurinn sé sýndur á myndinni. Finnið flatarmál þeirra hluta upphaflega þríhyrningsins sem eftir standa eftir N skref og heildarlengd jaðra allra þríhyrninganna eftir N skref.



137. [T] Sierpiński-teppið fæst með því að skipta einingarferningi í níu jafnstóra undirferninga, fjarlægja miðferninginn og endurtaka síðan sama ferli á undirferningunum sem eftir standa í hverju skrefi. Myndin sýnir mengið sem eftir stendur að loknum fjórum ítrunum. Reiknið heildarflatarmálið sem hefur verið fjarlægt eftir N skref og heildarlengd ummáls mengisins sem eftir stendur eftir N skref.



5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið

NÁMSMARKMIÐ

- 5.3.1 Nota sundurleitniprófið til að sýna að röð sé ósamleitin.
- 5.3.2 Nota heildisprófið til að ákvarða samleitni raðar.
- 5.3.3 Meta gildi raðar með því að finna efri og neðri mörk fyrir skekkju hlutsummu.

Í fyrri undirkaflanum ákvörðuðum við samleitni eða sundurleitni nokkurra raða með því að reikna beint markgildi runu hlutsummanna $\left(S_k\right)$. Í framkvæmd getur verið erfitt eða ómögulegt að reikna þetta markgildi beint. Sem betur fer eru til ýmis próf sem segja til um samleitni eða sundurleitni margra tegunda raða. Í þessum undirkafla fjöllum við um tvö þeirra: sundurleitniprófið og heildisprófið. Í því sem eftir er af kaflanum skoðum við nokkur önnur próf og tökum síðan saman hvernig og hvenær skuli nota þau.

Sundurleitniprófið

Að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin jafngildir því að runa hlutsummanna (S_k) sé samleitin þegar $k \to \infty$.

Til að sannreyna þetta notum við algebrureglurnar og sjáum að

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(S_k - S_{k-1}\right) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0.$$

Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin, þá gildir um n-ta liðinn að $a_n \to 0$ þegar $n \to \infty$. Af þessu leiðir eftirfarandi mikilvæg setning:

$$\text{Ef } a_n \not\to 0 \text{ þegar } n \to \infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er ósamleitin.}$$

(5.8)

Þetta próf kallast sundurleitniprófið vegna þess að með því má sanna að röð sé ósamleitin.

SETNING 5.8

Sundurleitniprófið

Ef $\lim_{n\to\infty} a_n = c \neq 0$ eða $\lim_{n\to\infty} a_n$ er ekki til, þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

Mikilvægt er að hafa í huga að setningin gildir ekki í hina áttina. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, getum við sem sagt ekki dregið neina ályktun um samleitni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Til dæmis er $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$, en harmoníska röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ er ósamleitin. Í þessum undirkafla og þeim sem eftir eru af kaflanum sjáum við mörg fleiri dæmi um slíkar raðir. Þótt nota megi sundurleitniprófið til að sýna að röð sé ósamleitin er því ekki hægt að nota það til að sanna að röð sé samleitin. Nánar tiltekið, ef $a_n \to 0$, gefur sundurleitniprófið enga niðurstöðu.

5

DÆMI 5.13

Sundurleitniprófið notað

Notið sundurleitniprófið á hverja röð hér á eftir. Ef prófið sýnir að röðin er ósamleitin skuluð þið segja það. Annars skuluð þið segja að prófið gefi enga niðurstöðu.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$

Lausn

a. Þar sem $n/(3n-1) \to 1/3 \neq 0$, getum við samkvæmt sundurleitniprófinu ályktað að

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$$

ósamleitin.

b. Þar sem $1/n^3 \to 0$, gefur sundurleitniprófið enga niðurstöðu.

c. Þar sem $e^{1/n^2} \to 1 \neq 0$, er röðin samkvæmt sundurleitniprófinu

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$$

ósamleitin.

STÖÐUMAT 5.12

Hvað segir sundurleitniprófið okkur um röðina $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(1/n^2\right)$?

Heildisprófið

Í fyrri undirkaflanum sönnuðum við að harmoníska röðin væri ósamleitin með því að skoða runu hlutsummanna $\left\{S_k\right\}$ og sýna að $S_{2^k} > 1 + k/2$ fyrir allar jákvæðar heiltölur k. Hér notum við aðra aðferð til að sanna sundurleitni harmonísku raðarinnar. Aðferðin er mikilvæg vegna þess að hún er notuð til að sanna sundurleitni eða samleitni margra annarra raða. Prófið, sem kallast heildisprófið, ber óendanlega summu saman við óeiginlegt heildi. Mikilvægt er að hafa í huga að aðeins má nota prófið á raðir þar sem allir liðir eru jákvæðir.

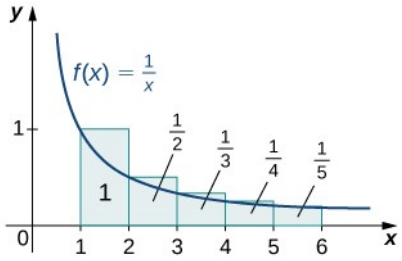
Til að sýna hvernig heildisprófið virkar notum við harmonísku röðina sem dæmi. Á mynd 5.12 sýnum við harmonísku röðina með runu rétthyrninga sem hafa flatarmálin $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ ásamt fallinu $f(x) = 1/x$. Af grafinu sést að

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \int_{1}^{k+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Fyrir hvert k, gildir um k-tu hlutsummuna S_k að

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \int_{1}^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln x \Big|_1^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(1) = \ln(k+1).$$

Þar sem $\lim_{k \to \infty} \ln(k+1) = \infty$, sjáum við að runa hlutsummanna $\left\{S_k\right\}$ er ótakmörkuð. Því er $\left\{S_k\right\}$ ósamleitin og þar af leiðandi er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ einnig ósamleitin.



Mynd 5.12 Summa flatarmála rétthyrninganna er stærri en flatarmálið milli ferilsins $f(x)=1/x$ og x-ássins fyrir $x\geq 1$. Þar sem flatarmálið sem ferillinn afmarkar er óendanlegt, eins og reiknað er með óeiginlegu heildi, er summa flatarmála rétthyrninganna einnig óendanleg.

Lítum nú á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Við sýnum hvernig nota má heildi til að sanna að þessi röð sé samleitin. Á mynd 5.13 teiknum við runu rétthyrninga sem hafa flatarmálin $1, 1/2^2, 1/3^2, \ldots$ ásamt fallinu $f(x)=1/x^2$. Af grafinu sést að

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<1+\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Fyrir hvert k, gildir um k-tu hlutsummuna S_k að

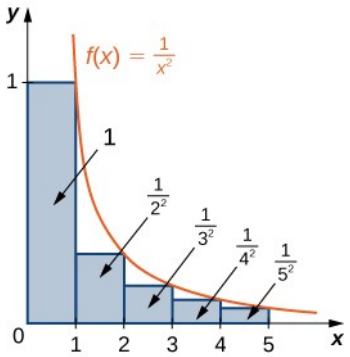
$$S_k=\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}<1+\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx=1-\frac{1}{x}\Big|_1^k=1-\frac{1}{k}+1=2-\frac{1}{k}<2.$$

5

Við ályktum að runa hlutsummanna $\{S_k\}$ sé takmörkuð. Við sjáum einnig að $\{S_k\}$ er vaxandi runa:

$$S_k=S_{k-1}+\frac{1}{k^2} \text{ fyrir } k\geq 2.$$

Þar sem $\{S_k\}$ er vaxandi og takmörkuð er hún samleitin samkvæmt setningunni um einhalla runur. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ er því samleitin.



Mynd 5.13 Summa flatarmála rétthyrninganna er minni en samanlagt flatarmál fyrsta rétthyrningsins og svæðisins milli ferilsins $f(x)=1/x^2$ og x-ássins fyrir $x\geq 1$. Þar sem flatarmálið sem ferillinn afmarkar er endanlegt er summa flatarmála rétthyrninganna einnig endanleg.

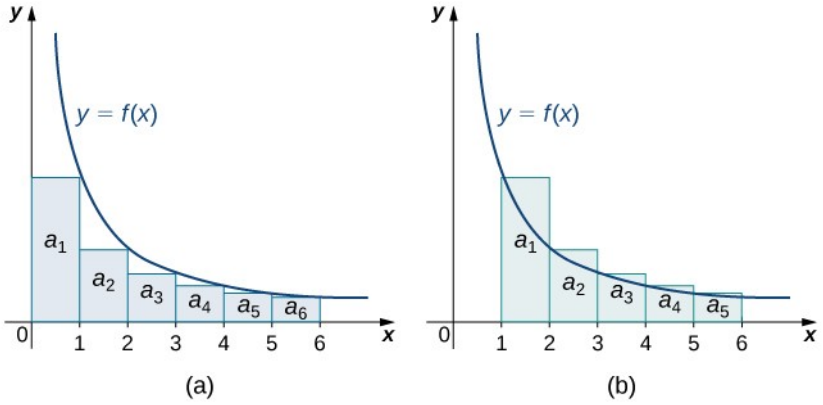
Þessa hugmynd má útvíkka til að sanna samleitni eða sundurleitni margra ólíkra raða. Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé röð með jákvæðum liðum a_n og að til sé samfellt, jákvætt og minnkandi fall f þannig að $f(n)=a_n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur. Þá gildir, eins og á mynd 5.14 (a), fyrir hverja heiltölu k, að k-ta hlutsumman S_k uppfyllir

$$S_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k<a_1+\int_1^k f(x)\,dx<a_1+\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ef $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er samleitið er runa hlutsummanna $\{S_k\}$ því takmörkuð. Þar sem $\{S_k\}$ er vaxandi runa er hún samleitin ef hún er líka takmörkuð. Það leiðir af setningunni um einhalla runur. Við ályktum að ef $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er samleitið, þá sé röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ einnig samleitin. Hins vegar sést af mynd 5.14 (b) að fyrir hverja heiltölu k, uppfyllir k-ta hlutsumman S_k

$$S_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k>\int_1^{k+1} f(x)\,dx.$$

Ef $\lim_{k\to\infty}\int_1^{k+1} f(x)\,dx=\infty$, þá er $\{S_k\}$ ótakmörkuð runa og því ósamleitin. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er þar af leiðandi einnig ósamleitin. Við ályktum að ef $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ er ósamleitið, þá sé $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.



Mynd 5.14 (a) Ef við getum innritað rétthyrninga í svæði sem afmarkast af ferlinum $y=f(x)$ og x-ásnum, og flatarmálið sem þessir ferlar afmarka fyrir $x\geq 1$ er endanlegt, þá er summa flatarmála rétthyrninganna einnig endanleg. (b) Ef rétthyrningar umlykja svæðið sem afmarkast af $y=f(x)$ og x-ásnum fyrir $x\geq 1$, og flatarmál svæðisins er óendanlegt, þá er summa flatarmála rétthyrninganna einnig óendanleg.

SETNING 5.9

Heildisprófið

Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé röð með jákvæðum liðum a_n. Gerum einnig ráð fyrir að til séu fall f og jákvæð heiltala N þannig að eftirfarandi þrjú skilyrði séu uppfyllt:

5

i. Fallið f er samfellt,

ii. Fallið f er minnkandi og

iii. $f(n)=a_n$ fyrir allar heiltölur $n\geq N$.

Þá eru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ og } \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

annaðhvort bæði samleitin eða bæði ósamleitin (sjá mynd 5.14).

Þótt samleitni $\int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$ feli í sér samleitni samsvarandi raðar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, þýðir það ekki að heildið og röðin hafi sama gildi. Gildin geta verið ólík og eru það oft. Til dæmis er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}\right)^2+\left(\frac{1}{e}\right)^3+\cdots$$

geómetrísk röð með upphafsliðinn $a=1/e$ og hlutfallstöluna $r=1/e$, sem stefnir á

$$\frac{1/e}{1-(1/e)}=\frac{1/e}{(e-1)/e}=\frac{1}{e-1}.$$

Hins vegar uppfyllir samsvarandi heildi $\int_1^\infty (1/e)^x\,dx$

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{e}\right)^x dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-b}+e^{-1}\right] = \frac{1}{e}.$$

DÆMI 5.14

Heildisprófið notað

Notið heildisprófið til að ákvarða hvort hver röð hér á eftir sé samleitin eða ósamleitin. Gerið ráð fyrir að öll skilyrði heildisprófsins séu uppfyllt.

a. $\sum_{n=1}^\infty 1/n^3$

b. $\sum_{n=1}^\infty 1/\sqrt{2n-1}$

Lausn

a. Berum saman

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \text{ og } \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx.$$

Við höfum

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Heildið $\int_1^\infty 1/x^3\,dx$ er því samleitið og þar með er eftirfarandi röð einnig samleitin:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}.$$

b. Berum saman

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \text{ og } \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$$

Þar sem

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \lim_{b\to\infty}\sqrt{2x-1}\Big|_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\sqrt{2b-1}-1\right] = \infty,$$

er heildið $\int_1^\infty 1/\sqrt{2x-1}\,dx$ ósamleitið og þar með er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

ósamleitin.

STÖÐUMAT 5.13

Notið heildisprófið til að ákvarða hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+1}$ sé samleitin eða ósamleitin.

p-raðir

Harmoníska röðin $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ og röðin $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ eru báðar dæmi um raðir sem nefnast p-raðir.

5

SKILGREINING

Fyrir hverja rauntölu p, nefnist röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

p-röð.

Við vitum að p-röðin er samleitin ef $p=2$ og ósamleitin ef $p=1$. En hvað um önnur gildi p? Almennt er erfitt, ef ekki ómögulegt, að reikna nákvæmt gildi flestra p-raða. Hins vegar getum við notað prófin sem við höfum þegar kynnt til að skera úr um hvort p-röð sé samleitin eða ósamleitin.

Ef $p<0$, þá er $1/n^p \to \infty$, og ef $p=0$, þá er $1/n^p \to 1$. Samkvæmt sundurleitniprófinu fæst því

$$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p \text{ er ósamleitin ef } p\le 0.$$

Ef $p>0$, þá er $f(x)=1/x^p$ jákvætt, samfellt og minnkandi fall. Fyrir $p>0$, notum við því heildisprófið og berum saman

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ og } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx.$$

Við höfum þegar skoðað tilvikið $p=1$. Hér skoðum við tilvikið $p>0$, $p\neq 1$. Í því tilviki er

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[b^{1-p}-1\right].$$

Vegna þess að

$$b^{1-p} \to 0 \text{ ef } p>1 \text{ og } b^{1-p}\to\infty \text{ ef } p<1,$$

ályktum við að

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{ef } p>1 \\ \infty & \text{ef } p\le 1 \end{cases}.$$

Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ er því samleitin ef $p>1$ og ósamleitin ef $0<p<1$.

Í stuttu máli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{er samleitin ef } p>1 \\ \text{er ósamleitin ef } p\le 1 \end{cases}.$$

(5.9)

5

DÆMI 5.15

Samleitni p-raða prófuð

Ákvarðið hvort hver röð hér á eftir sé samleitin eða ósamleitin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

Lausn

a. Þetta er p-röð með $p=4>1$, og því er röðin samleitin.

b. Þar sem $p=2/3<1$, er röðin ósamleitin.

STÖÐUMAT 5.14

Er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ samleitin eða ósamleitin?

Gildi raðar metið

Gerum ráð fyrir að við vitum að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin og viljum meta summu hennar. Við getum auðvitað nálgað summuna með hverri endanlegri summu $\sum_{n=1}^{N} a_n$, þar sem N er jákvæð heiltala. Spurningin er þessi: Ef við höfum samleitna röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, hversu gott mat á summu hennar fæst þá með $\sum_{n=1}^{N} a_n$? Nánar tiltekið látum við

$$R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$$

vera skekkjuna þegar summa óendanlegrar raðar er nálguð með N-tu hlutsummunni. Hversu stór er R_N? Fyrir sumar raðir getum við notað hugmyndir heildisprófsins til að meta R_N.

SETNING 5.10

Skekkjumat út frá heildisprófinu

Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin röð með jákvæðum liðum. Gerum einnig ráð fyrir að til sé fall f sem uppfyllir eftirfarandi þrjú skilyrði:

5

i. Fallið f er samfellt,
ii. Fallið f er minnkandi og
iii. $f(n) = a_n$ fyrir allar heiltölur $n \geq 1$.

Látum S_N vera N-tu hlutsummuna í $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Fyrir allar jákvæðar heiltölur N,

$$S_N + \int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < S_N + \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Með öðrum orðum uppfyllir skekkjan $R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ eftirfarandi mat:

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(5.10)

Þetta nefnist skekkjumat.

Við sýnum skekkjumatið út frá heildisprófinu á mynd 5.15. Með því að túlka skekkjuna $R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$ sem summu flatarmála rétthyrninga sjáum við að heildarflatarmál þeirra er minna en $\int_N^\infty f(x)\,dx$ en stærra en $\int_{N+1}^\infty f(x)\,dx$. Með öðrum orðum er

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots > \int_{N+1}^\infty f(x)\,dx$$

og

$$R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots < \int_N^\infty f(x)\,dx.$$

ályktum við að

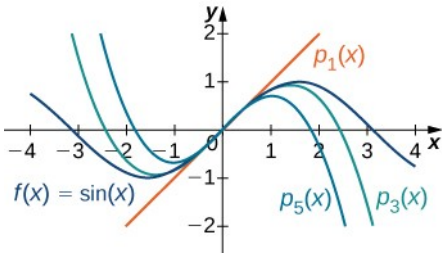
$$\int_{N+1}^\infty f(x)\,dx < R_N < \int_N^\infty f(x)\,dx.$$

Þar sem

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = S_N + R_N,$$

þar sem S_N er N-ta hlutsumman, ályktum við að

$$S_N + \int_{N+1}^\infty f(x)\,dx < \sum_{n=1}^\infty a_n < S_N + \int_N^\infty f(x)\,dx.$$



Mynd 5.15 Gefin séu samfellt, jákvætt og minnkandi fall f og runa jákvæðra liða a_n þannig að $a_n = f(n)$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n, þá gildir annaðhvort (a) fyrir flatarmálin að $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots < \int_N^\infty f(x)\,dx$, eða (b) fyrir flatarmálin að $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots > \int_{N+1}^\infty f(x)\,dx$. Heildið gefur því annaðhvort ofmat eða vanmat á skekkjunni.

DÆMI 5.16

Gildi raðar metið

Lítum á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$.

a. Reiknið $S_{10}=\sum_{n=1}^{10} 1/n^3$ og metið skekkjuna.

b. Ákvarðið minnsta gildi N sem þarf til að S_N nálgi $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ með skekkju innan $0{,}001$.

Lausn

a. Með reiknitæki fæst

$$S_{10}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{10^3}\approx 1{,}19753.$$

Samkvæmt skekkjumatinu vitum við að

$$R_N<\int_N^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx.$$

Við höfum

$$\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{10}^{b}\frac{1}{x^3}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_N^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2N^2}\right]=\frac{1}{2N^2}.$$

Skekkjan er því $R_{10}<1/2(10)^2=0{,}005$.

b. Finnum N þannig að $R_N<0{,}001$. Í a-lið sýndum við að $R_N<1/(2N^2)$. Því gildir $R_N<0{,}001$ svo framarlega sem $1/(2N^2)<0{,}001$. Með öðrum orðum þurfum við $2N^2>1000$. Ef við leysum þessa ójöfnu fyrir N, sjáum við að $N>22{,}36$. Til að tryggja að skekkjan sé innan tilskilinna marka þurfum við að rúnna upp í næstu heiltölu. Minnsta gildið sem dugar er því $N=23$.

STÖÐUMAT 5.15

Fyrir $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, reiknið S_5 og metið skekkjuna R_5.

Æfingar í undirkafla 5.3

Notið sundurleitniprófið á hverja röð hér á eftir. Ef prófið á við skuluð þið annaðhvort taka fram að $\lim_{n\to\infty} a_n$ sé ekki til eða finna $\lim_{n\to\infty} a_n$. Ef prófið á ekki við skuluð þið útskýra hvers vegna.

138.

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$

139.

$$a_n = \frac{n}{5n^2-3}$$

140.

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{3n^2+2n+1}}$$

141.

$$a_n = \frac{(2n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$$

142.

$$a_n = \frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$$

143.

$$a_n = \frac{2^n}{3^{n/2}}$$

144.

$$a_n = \frac{2^n+3^n}{10^{n/2}}$$

145.

$$a_n = e^{-2/n}$$

146.

$$a_n = \cos n$$

147.

$$a_n = \tan n$$

148.

$$a_n = \frac{1 - \cos^2(1/n)}{\sin^2(2/n)}$$

149.

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

150.

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

151.

$$a_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$$

Segið til um hvort gefna p-röðin sé samleitin.

152.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

153.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

154.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

155.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$$

156.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^e}{n^\pi}$$

157.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\pi}{n^{2e}}$$

Notið heildisprófið til að ákvarða hvort eftirfarandi summur séu samleitnar.

158.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$$

159.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$$

160.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

161.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$$

162.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$$

163.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1+n^4}$$

164.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

Ritið eftirfarandi summur sem p-raðir og ákvarðið hvort hver þeirra sé samleitin.

165. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln n}$ (Vísbending: $2^{-\ln n} = 1/n^{\ln 2}$.)

166. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\ln n}$ (Vísbending: $3^{-\ln n} = 1/n^{\ln 3}$.)

167.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-2\ln n}$$

168.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n3^{-2\ln n}$$

Notið matið $R_N \leq \int_N^{\infty} f(t)\,dt$ til að finna efra mark fyrir skekkjuna $R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$, þar sem $a_n = f(n)$.

169.

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$$

170.

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^3}$$

171.

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{1+n^2}$$

172.

$$\sum_{n=1}^{100} n/2^n$$

5

[T] Finnið minnsta gildi N þannig að skekkjumatið $\int_{N+1}^{\infty} f < R_N < \int_N^{\infty} f$ tryggi að $\sum_{n=1}^{N} a_n$ nálgi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, með skekkju innan gefinna marka.

173. $a_n = \frac{1}{n^2}$, skekkja $< 10^{-4}$

174. $a_n = \frac{1}{n^{1,1}}$, skekkja $< 10^{-4}$

175. $a_n = \frac{1}{n^{1,01}}$, skekkja $< 10^{-4}$

176. $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$, skekkja $< 10^{-3}$

177. $a_n = \frac{1}{1+n^2}$, skekkja $< 10^{-3}$

Í næstu verkefnum skuluð þið finna gildi á N þannig að R_N sé minni en tilskilin skekkjumörk. Reiknið samsvarandi summu $\sum_{n=1}^{N} a_n$ og berið hana saman við gefið mat á summu óendanlegu raðarinnar.

178. $a_n = \frac{1}{n^{11}}$, skekkja

$$< 10^{-4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{11}} = 1{,}000494\ldots$$

179. $a_n = \frac{1}{e^n}$, skekkja

$$< 10^{-5},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e-1} = 0{,}581976\ldots$$

180. $a_n = \frac{n}{e^{n^2}}$, skekkja

$$< 10^{-5},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n/e^{n2} = 0{,}40488139857\ldots$$

181. $a_n = 1/n^4$, skekkja

$$< 10^{-4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90 = 1{,}08232\ldots$$

182. $a_n = 1/n^6$, skekkja

$$< 10^{-6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6 = \pi^6/945 = 1{,}01734306\ldots,$$

183. Finnið markgildið, þegar $n \to \infty$, fyrir $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$. (Vísbending: Berið saman við $\int_n^{2n} \frac{1}{t}\,dt$.)

184. Finnið markgildið, þegar $n \to \infty$, fyrir $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}$

Næstu verkefni sýna dæmi um hagnýtingar þar sem hlutsummur harmonísku raðarinnar koma fyrir.

185. Í sumum hagnýtingum líkindafræði, svo sem svokölluðu Watterson-mati til að spá fyrir um stökkbreytingartíðni í stofnerfðafræði, er mikilvægt að hafa nákvæmt mat á tölunni $H_k=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$. Munið að $T_k=H_k-\ln k$ er minnkandi. Reiknið $T=\lim_{k\to\infty} T_k$ með fjórum aukastöfum. (Vísbending: $\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$.)

186. **[T]** Úrtaka með endurvali þar til allir hlutir hafa verið valdir, stundum kölluð safnaravandamálið, er sett fram svona: Gerum ráð fyrir að í íláti séu N ólíkir hlutir. Í hverju skrefi er hlutur valinn af handahófi, auðkenndur og settur aftur í ílátið. Spurt er hver væntur fjöldi skrefa $E(N)$ sé þar til hver hlutur hefur verið valinn að minnsta kosti einu sinni. Í ljós kemur að $E(N)=N$. $H_N=N\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$. Finnið $E(N)$ fyrir $N=10, 20,$ og 50.

187. **[T]** Einfaldasta leiðin til að stokka spil er að taka efsta spilið og setja það inn á handahófskenndan stað í stokknum. Þetta nefnist slembiinsetning efsta spils og ferlið er síðan endurtekið. Við teljum stokkinn nægilega slembistokkaðan þegar nógu margar slembiinsetningar efsta spils hafa verið gerðar til að spilið sem var neðst í upphafi hafi færst efst og síðan verið sett inn af handahófi. Ef n spil eru í stokknum eru líkurnar á að spilið sé sett fyrir neðan spilið sem var neðst í upphafi (köllum það spil B), jafnar $1/n$. Væntur fjöldi slembiinsetninga efsta spils þar til B er ekki lengur neðst er því n. Þegar eitt spil er komið fyrir neðan B, eru tveir staðir fyrir neðan B og líkurnar á að spil sem sett er inn af handahófi lendi fyrir neðan B eru $2/n$. Væntur fjöldi slembiinsetninga efsta spils áður en það gerist er $n/2$. Spilin tvö fyrir neðan B eru nú í slembiröð. Haldið áfram á sama hátt og finnið formúlu fyrir væntan fjölda slembiinsetninga efsta spils sem þarf svo telja megi stokkinn nægilega slembistokkaðan.

188. Gerum ráð fyrir að vespa komist 100 km á fullum eldsneytisgeymi. Gerum líka ráð fyrir að flytja megi eldsneyti milli vespa, en aðeins í geymum þeirra. Lýsið aðferð sem gerir einni vespanna kleift að komast $100\,H_N$ km, þar sem $H_N=1+1/2+\cdots+1/N$.

189. Sýnið að til að skekkjumatið gildi á $[N,\infty)$ nægi að $f(x)$ sé minnkandi á $[N,\infty)$, en f þurfi ekki að vera minnkandi á $[1,\infty)$.

190. **[T]** Notið skekkjumatið og hlutheildun til að nálga $\sum_{n=1}^{\infty} n/e^n$ með skekkju minni en $0{,}0001$.

191. Er $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ samleitin ef gildi p er nægilega stórt? Ef svo er, fyrir hvaða gildi p?

192. **[T]** Gerum ráð fyrir að tölva geti lagt saman eina milljón liða á sekúndu úr ósamleitinni röðinni $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Notið heildisprófið til að meta hversu margar sekúndur það tekur að leggja saman nógu marga liði til að hlutsumman verði stærri en 100.

193. **[T]** Öflug tölva getur lagt saman eina milljón liða á sekúndu úr ósamleitinni röðinni $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n \ln n}$. Notið heildisprófið til að meta hversu margar sekúndur það tekur að leggja saman nógu marga liði til að hlutsumman verði stærri en 100.

5.4 Samanburðarpróf

NÁMSMARKMIÐ

- 5.4.1 Nota samanburðarprófið til að kanna samleitni raðar.
- 5.4.2 Nota samanburð með markgildi til að ákvarða samleitni raðar.

Við höfum séð að heildisprófið gerir okkur kleift að ákvarða samleitni eða sundurleitni raðar með því að bera hana saman við samsvarandi óeiginlegt heildi. Í þessum undirkafla sýnum við hvernig nota má samanburðarpróf til að ákvarða samleitni eða sundurleitni raðar. Þá berum við hana saman við röð sem við vitum hvort er samleitin eða ósamleitin. Yfirleitt eru þessi próf notuð til að ákvarða samleitni raða sem líkjast geómetrískum röðum eða p-röðum.

5

Samanburðarprófið

Í síðustu tveimur undirköflum fjölluðum við um tvo stóra flokka raða: geómetrískar raðir og p-raðir. Við vitum nákvæmlega hvenær þessar raðir eru samleitnar og hvenær þær eru ósamleitnar. Hér sýnum við hvernig nota má samleitni eða sundurleitni þeirra til að sanna samleitni eða sundurleitni annarra raða með aðferð sem kallast samanburðarprófið.

Lítum til dæmis á röðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Þessi röð líkist samleitnu röðinni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Þar sem liðir beggja raðanna eru jákvæðir er runa hlutsummanna fyrir hvora röð einhalla vaxandi. Þar að auki gildir

$$0<\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n, svo að k-ta hlutsumman S_k í röðinni $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ uppfyllir

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2+1}<\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

(Sjá mynd 5.16 (a) og töflu 5.1.) Þar sem röðin hægra megin er samleitin er runan $\{S_k\}$ takmörkuð að ofan. Við ályktum að $\{S_k\}$ sé einhalla vaxandi runa sem er takmörkuð að ofan. Samkvæmt setningunni um einhalla runur er $\{S_k\}$ því samleitin og þar með er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

samleitin.
Lítum á sambærilegan hátt á röðina

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1/2}.$$

Þessi röð líkist ósamleitnu röðinni

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

5

Runa hlutsummanna er einhalla vaxandi fyrir hvora röð og

$$\frac{1}{n-1/2}>\frac{1}{n}>0$$

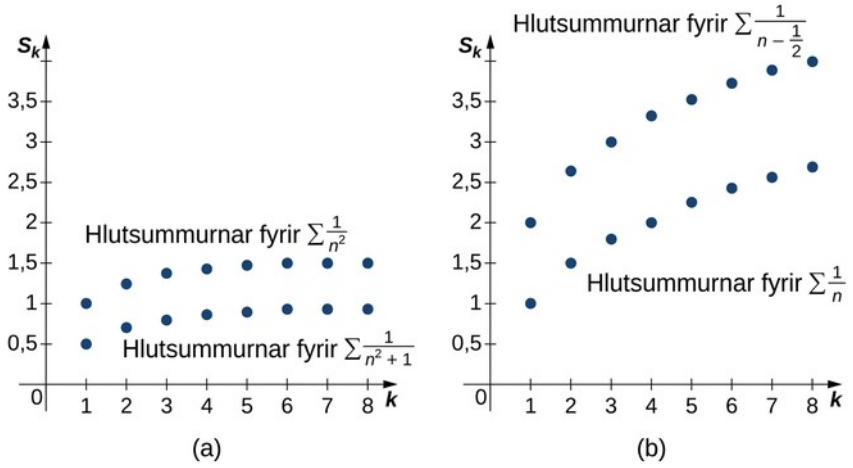
fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n. Því uppfyllir k-ta hlutsumman S_k í röðinni $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1/2}$

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n-1/2}>\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}.$$

(Sjá mynd 5.16 (b) og töflu 5.2.) Þar sem röðin $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ stefnir á óendanlegt og er því ósamleitin, er runa hlutsummanna $\sum_{n=1}^{k}1/n$ ótakmörkuð. Þar af leiðandi er $\{S_k\}$ ótakmörkuð runa og því ósamleitin. Við ályktum að

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1/2}$$

sé ósamleitin.



Mynd 5.16 (a) Sérhver hlutsumma gefnu raðarinnar er minni en samsvarandi hlutsumma samleitnu $p-$raðarinnar. (b) Sérhver hlutsumma gefnu raðarinnar er stærri en samsvarandi hlutsumma ósamleitnu harmonísku raðarinnar.

Tafla 5.1 Röð borin saman við *p*-röð (*p* = 2)

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+1}$	0,5	0,7	0,8	0,8588	0,8973	0,9243	0,9443	0,9597
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$	1	1,25	1,3611	1,4236	1,4636	1,4914	1,5118	1,5274

Tafla 5.2 Röð borin saman við harmonísku röðina

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n-1/2}$	2	2,6667	3,0667	3,3524	3,5746	3,7564	3,9103	4,0436
$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$	1	1,5	1,8333	2,0933	2,2833	2,45	2,5929	2,7179

SETNING 5.11

Samanburðarprófið

i. Gerum ráð fyrir að til sé heiltala N þannig að $0 \le a_n \le b_n$ fyrir öll $n \ge N$. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

ii. Gerum ráð fyrir að til sé heiltala N þannig að $a_n \geq b_n \geq 0$ fyrir öll $n \geq N$. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

Sönnun

Við sönnum i-lið. Sönnun ii-liðar er mótgilding i-liðar. Látum $\left(S_k\right)$ vera runu hlutsummanna sem tilheyrir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, og látum $L = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Þar sem liðirnir $a_n \geq 0$,

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} = S_{k+1}.$$

Runa hlutsummanna er því vaxandi. Þar að auki, þar sem $a_n \leq b_n$ fyrir öll $n \geq N$, fæst

$$\sum_{n=N}^{k} a_n \leq \sum_{n=N}^{k} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = L.$$

Því fæst fyrir öll $k \geq 1$,

$$S_k = \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}\right) + \sum_{n=N}^{k} a_n \leq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}\right) + L.$$

Þar sem $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}$ er endanleg tala ályktum við að runan $\left(S_k\right)$ sé takmörkuð að ofan. Því er $\left(S_k\right)$ vaxandi runa sem er takmörkuð að ofan. Samkvæmt setningunni um einhalla runur er $\left(S_k\right)$ samleitin og þar með er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

□

Til að ákvarða með samanburðarprófinu samleitni eða sundurleitni raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, þarf að finna hentuga röð til samanburðar. Þar sem við þekkjum samleitnieiginleika geómetrískra raða og p-raða eru þær oft notaðar. Ef til er heiltala N þannig að fyrir öll $n \geq N$, sé sérhver liður a_n minni en samsvarandi liður í þekktri samleitinni röð, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin. Á sambærilegan hátt, ef til er heiltala N þannig að fyrir öll $n \geq N$, sé sérhver liður a_n stærri en samsvarandi liður í þekktri ósamleitinni röð, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

DÆMI 5.17

Samanburðarprófið notað

Notið samanburðarprófið til að ákvarða hvort hver eftirfarandi röð sé samleitin eða ósamleitin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

c. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

Lausn

a. Berum saman við $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ er p-röð með $p=3$, er hún samleitin. Þar að auki gildir

$$\frac{1}{n^3+3n+1} < \frac{1}{n^3}$$

fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n. Við getum því ályktað að $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n+1}$ sé samleitin.

b. Berum saman við $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ er geómetrísk röð með $r=1/2$ og $|1/2|<1$, er hún samleitin. Einnig gildir

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$$

fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n. Því sjáum við að $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ er samleitin.

c. Berum saman við $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$. Þar sem

$$\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$$

fyrir sérhverja heiltölu $n \geq 2$ og $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n$ er ósamleitin, fæst að $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ er ósamleitin.

STÖÐUMAT 5.16

Notið samanburðarprófið til að ákvarða hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n+1}$ sé samleitin eða ósamleitin.

Samanburður með markgildi

Samanburðarprófið virkar vel ef við getum fundið samanburðarröð sem uppfyllir forsendur prófsins. Stundum getur þó verið erfitt að finna hentuga röð. Lítum á röðina

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

Eðlilegt er að bera þessa röð saman við samleitnu röðina

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Hún uppfyllir þó ekki þá forsendu sem þarf til að nota samanburðarprófið, því

$$\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$$

fyrir allar heiltölur $n \geq 2$. Við gætum leitað að annarri röð til samanburðar við $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\left(n^2-1\right)$, en sýnum þess í stað hvernig samanburður með markgildi er notaður til að bera saman

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \text{ og } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5

Skoðum hugmyndina að baki samanburði með markgildi. Lítum á tvær raðir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Táknum jákvæða liði þeirra með a_n og b_n. Þá reiknum við

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Ef

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0,$$

þá gildir, þegar n er nægilega stórt, að $a_n \approx L\, b_n$. Því eru annaðhvort báðar raðirnar samleitnar eða báðar ósamleitnar. Fyrir raðirnar $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\left(n^2-1\right)$ og $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2$, sjáum við að

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/\left(n^2-1\right)}{1/n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1.$$

Þar sem $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2$ er samleitin ályktum við að

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

samleitin.

Samanburð með markgildi má nota í tveimur öðrum tilvikum. Gerum ráð fyrir að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Í þessu tilviki er $\left(a_n/b_n\right)$ takmörkuð runa. Því er til fasti M þannig að $a_n \le M\, b_n$. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ því samleitin. Gerum hins vegar ráð fyrir að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

Í þessu tilviki er $\left(a_n/b_n\right)$ ótakmörkuð runa. Fyrir sérhvern fasta M er því til heiltala N þannig að $a_n \ge M\, b_n$ fyrir öll $n \ge N$. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ því einnig ósamleitin.

SETNING 5.12

Samanburður með markgildi

Gerum ráð fyrir að $a_n, b_n \ge 0$ fyrir öll $n \ge 1$.

i. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L \neq 0$, þá eru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ annaðhvort báðar samleitnar eða báðar ósamleitnar.

ii. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

iii. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

Athugið að ef $a_n/b_n \to 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin, þá gefur samanburður með markgildi engar upplýsingar. Á sama hátt gefur prófið engar upplýsingar ef $a_n/b_n \to \infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin.

Lítum til dæmis á raðirnar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Þær eru báðar p-raðir með $p = 1/2$ og $p = 2$, talið í sömu röð. Þar sem $p = 1/2 < 1$, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ ósamleitin. Hins vegar, þar sem

$p=2>1$, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ samleitin. Gerum nú ráð fyrir að við reynum að beita samanburði með markgildi og notum samleitnu $p-$röðina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ sem samanburðarröð. Fyrst sjáum við að

$$\frac{1/\sqrt{n}}{1/n^3}=\frac{n^3}{\sqrt{n}}=n^{5/2}\to\infty \text{ þegar } n\to\infty.$$

Á sama hátt sjáum við að

$$\frac{1/n^2}{1/n^3}=n\to\infty \text{ þegar } n\to\infty.$$

Ef $a_n/b_n\to\infty$ þegar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin, fáum við því engar upplýsingar um samleitni eða sundurleitni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

DÆMI 5.18

Samanburður með markgildi notaður

Notið samanburð með markgildi til að ákvarða hvort hver eftirfarandi röð sé samleitin eða ósamleitin. Ef prófið á ekki við skuluð þið taka það fram.

5

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

Lausn

a. Berum þessa röð saman við $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Reiknum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(\sqrt{n}+1)}{1/\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/\sqrt{n}}=1.$$

Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er ósamleitin leiðir af samanburði með markgildi að $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ er ósamleitin.

b. Berum þessa röð saman við $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Við sjáum að

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^n+1\right)/3^n}{2^n/3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=1.$$

Því er

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^n+1\right)/3^n}{2^n/3^n}=1.$$

Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ er samleitin ályktum við að $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$ sé samleitin.

c. Þar sem $\ln n<n$, berum við saman við $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Við sjáum að

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n/n^2}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Til að ákvarða $\lim_{n\to\infty}\ln n/n$, reiknum við, þegar $x\to\infty$, markgildi raungilda fallsins $\ln(x)/x$. Þessi tvö markgildi eru jöfn og með því að skipta þannig yfir getum við notað reglu l'Hôpital. Við fáum

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Því er $\lim_{n\to\infty}\ln n/n=0$, og þar af leiðandi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n/n^2}{1/n}=0.$$

Þar sem markgildið er 0 en $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ er ósamleitin, gefur samanburður með markgildi engar upplýsingar.

Berum þess í stað saman við $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ Í því tilviki er

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n/n^2}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}\cdot\frac{n^2}{1}=\lim_{n\to\infty}\ln n=\infty.$$

Þar sem markgildið er ∞ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er samleitin, gefur prófið enn engar upplýsingar.

Prófum því röð sem liggur milli þeirra tveggja sem við höfum þegar prófað. Veljum röðina $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, og sjáum að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n/n^2}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} \cdot \frac{n^{3/2}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Til að ákvarða $\lim_{n\to\infty} \ln n/\sqrt{n}$, reiknum við, þegar $x \to \infty$, markgildi raungilda fallsins $\ln x/\sqrt{x}$. Með reglu l'Hôpital fæst

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Þar sem markgildið er 0 og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ er samleitin, getum við ályktað að $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ sé samleitin.

5

STÖÐUMAT 5.17

Notið samanburð með markgildi til að ákvarða hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+2}$ sé samleitin eða ósamleitin.

Æfingar í undirkafla 5.4

Notið samanburðarprófið til að ákvarða hvort eftirfarandi raðir séu samleitnar.

194. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þar sem $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

195. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þar sem $a_n = \frac{1}{n(n+1/2)}$

196.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$$

197.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2(n-1)}$$

198.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^2}$$

199.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$$

200.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

201.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n^2}$$

202.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$$

203.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{(\sqrt{n})^3}$$

204.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1,2}-1}{n^{2,3}+1}$$

205.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

206.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n^4+n^2}}$$

Notið samanburð með markgildi til að ákvarða hvort hver eftirfarandi röð sé samleitin eða ósamleitin.

207.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

208.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{0,6}}\right)^2$$

209.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}$$

210.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$$

211.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n-3^n}$$

212.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n\sin n}$$

213.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{(1,1)n}-3^n}$$

214.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{(1,01)n}-3^n}$$

215.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$$

216.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{1+1/n} n^{1+1/n}}$$

217.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

218.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

219.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} n \right)$$

220. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$ (Vísbending: $\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \to 1/e$.)

221. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-1/n} \right)$ (Vísbending: $1/e \approx (1 - 1/n)^n$, og því $1 - e^{-1/n} \approx 1/n$.)

222. Er $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ samleitin ef gildi p er nægilega stórt? Ef svo er, fyrir hvaða gildi p?

223. Er $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\ln n)}{n} \right)^p$ samleitin ef gildi p er nægilega stórt? Ef svo er, fyrir hvaða gildi p?

224. Fyrir hvaða gildi p er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{pn}/3^n$ samleitin?

225. Fyrir hvaða gildi $p > 0$ er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$ samleitin?

226. Fyrir hvaða gildi $r > 0$ er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n^2}}{2^n}$ samleitin?

227. Fyrir hvaða gildi $r > 0$ er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{r^{n^2}}$ samleitin?

228. Finnið öll gildi p og q þannig að $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{(n!)^q}$ sé samleitin.

229. Er $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2} \right)$ samleitin eða ósamleitin? Útskýrið.

230. Sýnið að fyrir sérhvert n, sé að minnsta kosti ein talnanna í $\{|\sin n|, |\sin(n+1)|, \ldots, |\sin n+6|\}$ stærri en $1/2$. Notið þessi tengsl til að kanna samleitni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$.

231. Gerum ráð fyrir að $a_n \geq 0$ og $b_n \geq 0$ og að $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b^2{}_n$ séu samleitnar. Sannið að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sé samleitin og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)$.

232. Er $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\ln\ln n}$ samleitin? (Vísbending: Ritið $2^{\ln\ln n}$ sem veldi af $\ln n$.)

233. Er $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$ samleitin? (Vísbending: Notið $n = e^{\ln(n)}$ til að bera saman við $p-$röð.)

234. Er $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln\ln n}$ samleitin? (Vísbending: Berið a_n saman við $1/n$.)

235. Sýnið að ef $a_n \geq 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin, þá sé $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ samleitin. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ er samleitin, þarf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þá endilega að vera samleitin?

236. Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$ fyrir öll n og að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin. Gerum ráð fyrir að b_n sé valfrjáls runa núlla og ása. Þarf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ þá endilega að vera samleitin?

237. Gerum ráð fyrir að $a_n > 0$ fyrir öll n og að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé ósamleitin. Gerum ráð fyrir að b_n sé valfrjáls runa núlla og ása, með óendanlega marga liði jafna einum. Þarf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ þá endilega að vera ósamleitin?

238. Fyllið inn í eftirfarandi röksemdafærslu: Ef $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hefur endanlegu summuna s, þá gildir $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ og $s - \frac{1}{2}s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$. Hvers vegna leiðir þetta til mótsagnar?

239. Sýnið að ef $a_n \geq 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ er samleitin, þá sé $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(a_n)$ samleitin.

240. Gerum ráð fyrir að $a_n / b_n \to 0$ í samanburðarprófinu, þar sem $a_n \geq 0$ og $b_n \geq 0$. Sannið að ef $\sum b_n$ er samleitin, þá sé $\sum a_n$ samleitin.

241. Látum b_n vera óendanlega runu núlla og ása. Hvert er stærsta mögulega gildi $x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n$?

242. Látum d_n vera óendanlega runu tölustafa, það er að segja að d_n taki gildi í $\{0,1,\ldots,9\}$. Hvert er stærsta mögulega gildi $x=\sum_{n=1}^{\infty} d_n/10^n$ þannig að röðin sé samleitin?

243. Ef $x>1/2$, útskýrið hvers vegna ekki er hægt að rita x sem $x=\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}\left(b_n=0 \text{ eða } 1, b_1=0\right)$.

244. **[T]** Evelyn hefur fullkomna jafnvægisvog, ótakmarkaðan fjölda 1-kg lóða og eitt lóð af hverri stærð $1/2$-kg, $1/4$-kg, $1/8$-kg, og svo framvegis. Hún vill vega loftstein af ótilgreindum uppruna með eins mikilli nákvæmni og óskað er. Að því gefnu að vogin sé nægilega stór, getur hún það? Hvernig tengist þetta óendanlegum röðum?

245. **[T]** Robert wants to know his body mass to arbitrary precision. He has a big balancing scale that works perfectly, an unlimited collection of 1-kg weights, and nine each of $0{,}1$-kg, $0{,}01$-kg, $0{,}001$-kg, and so on weights. Assuming the scale is big enough, can he do this? What does this have to do with infinite series?

246. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ er helmingur harmonísku raðarinnar og er því ósamleitin. Hún fæst úr harmonísku röðinni með því að eyða öllum liðum þar sem n er oddatala. Látum $m>1$ vera fast. Sýnið almennt að ef öllum liðum $1/n$, þar sem $n=mk$ fyrir einhverja heiltölu k, er eytt, fæst einnig ósamleitin röð.

247. Með hliðsjón af fyrra verkefni kann að koma á óvart að hlutröð harmonísku raðarinnar geti verið samleitin þótt um það bil fimmti hver liður sé fjarlægður. Skert harmonísk röð fæst úr $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ með því að fjarlægja sérhvern lið $1/n$ ef tiltekinn tölustafur, til dæmis 9, er einn af tölustöfunum í n. Rökstyðjið að þessi skerta harmoníska röð sé samleitin með því að svara eftirfarandi spurningum.

a. Hversu margar jákvæðar heiltölur n hafa d tölustafi?

b. Ákvarðið hve margar d-stafa heiltölur eru; táknið fjöldann með $h(d)$. Fjöldinn skal aðeins ná til talna sem innihalda ekki 9 sem tölustaf.

c. Hver er minnsta d-stafa talan $m(d)$?

d. Útskýrið hvers vegna skerta harmoníska röðin er takmörkuð að ofan af $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{m(d)}$.

e. Sýnið að $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{m(d)}$ sé samleitin.

248. Gerum ráð fyrir að talnaruna $a_n > 0$ hafi þann eiginleika að $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} S_n$, þar sem $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Er hægt að ákvarða hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin? (Vísbending: S_n er einhalla.)

249. Gerum ráð fyrir að talnaruna $a_n > 0$ hafi þann eiginleika að $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} S_n$, þar sem $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Er hægt að ákvarða hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin? (Vísbending: $S_2 = a_2 + a_1 = a_2 + S_1 = a_2 + 1 = 1 + 1/4 = (1 + 1/4) S_1$, $S_3 = \frac{1}{3^2} S_2 + S_2 = (1 + 1/9) S_2 = (1 + 1/9)(1 + 1/4) S_1$, og svo framvegis. Skoðið $\ln(S_n)$, og notið

$$\ln(1+t) \leq t,$$

$$t > 0.)$$

5.5 Víxlmerkjaraðir

NÁMSMARKMIÐ

- 5.5.1 Nota prófið fyrir víxlmerkjaraðir til að kanna samleitni víxlmerkjaraðar.
- 5.5.2 Meta summu víxlmerkjaraðar.
- 5.5.3 Útskýra merkingu alsamleitni og skilyrtrar samleitni.

Hingað til höfum við í þessum kafla aðallega fjallað um raðir með jákvæðum liðum. Í þessum undirkafla kynnum við víxlmerkjaraðir, það er raðir þar sem formerki liðanna skiptast á. Í síðari kafla sýnum við að slíkar raðir koma oft fyrir þegar við skoðum veldaraðir. Þegar við höfum skilgreint víxlmerkjaraðir kynnum við prófið fyrir víxlmerkjaraðir, sem segir til um hvort slík röð sé samleitin.

Prófið fyrir víxlmerkjaraðir

Röð þar sem liðirnir skiptast á að vera jákvæðir og neikvæðir nefnist víxlmerkjaröð. Til dæmis eru raðirnar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

(5.11)

og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(5.12)
báðar víxlmerkjaraðir.

SKILGREINING

Allar raðir þar sem liðirnir skiptast á að vera jákvæðir og neikvæðir nefnast víxlmerkjaraðir. Víxlmerkjaröð má rita á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$$

(5.13)

eða

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$$

(5.14)

þar sem $b_n > 0$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

Röð (1), sem sýnd er í jöfnu 5.11, er geómetrísk röð. Þar sem $|r| = |-1/2| < 1$, er röðin samleitin. Röð (2), sem sýnd er í jöfnu 5.12, nefnist víxlmerkta harmoníska röðin. Við munum sýna að harmoníska röðin er ósamleitin en víxlmerkta harmoníska röðin samleitin.

Til að sanna þetta skoðum við runu hlutsummanna $\{S_k\}$ (mynd 5.17).

5

Sönnun

Skoðum oddatöluliðina S_{2k+1} fyrir $k \geq 0$. Þar sem $1/(2k+1) < 1/2k$,

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} < S_{2k-1}.$$

Því er $\{S_{2k+1}\}$ fallandi runa. Einnig gildir

$$S_{2k+1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} > 0.$$

Því er $\{S_{2k+1}\}$ takmörkuð að neðan. Þar sem $\{S_{2k+1}\}$ er fallandi runa sem er takmörkuð að neðan er $\{S_{2k+1}\}$ samleitin samkvæmt setningunni um einhalla runur. Á sama hátt mynda slétttöluliðirnir $\{S_{2k}\}$ vaxandi runu sem er takmörkuð að ofan, því

$$S_{2k} = S_{2k-2} + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} > S_{2k-2}$$

og

$$S_{2k} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2k-1}\right) - \frac{1}{2k} < 1.$$

Samkvæmt setningunni um einhalla runur er runan $\left(S_{2k}\right)$ því einnig samleitin. Þar sem

$$S_{2k+1}=S_{2k}+\frac{1}{2k+1},$$

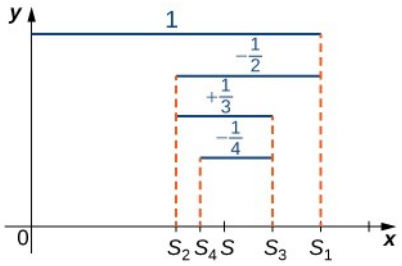
vitum við að

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}=\lim_{k\to\infty} S_{2k}+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}.$$

Látum $S=\lim_{k\to\infty} S_{2k+1}$ og notum að $1/\left(2k+1\right)\to 0$, þá fæst $\lim_{k\to\infty} S_{2k}=S$. Þar sem oddatöluliðirnir og slétttöluliðirnir í runu hlutsummanna stefna á sama markgildi S, má sýna að runa hlutsummanna stefnir á S, og því stefnir víxlmerkta harmoníska röðin á S.

Einnig má sýna að $S=\ln 2$, og því má rita

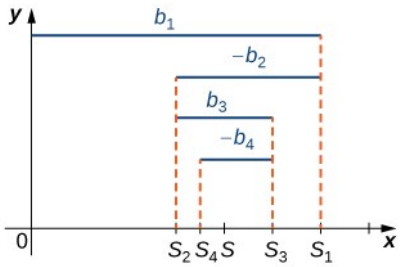
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln\left(2\right).$$



Mynd 5.17 Fyrir víxlmerktu harmonísku röðina eru oddatöluliðirnir S_{2k+1} í runu hlutsummanna fallandi og takmarkaðir að neðan. Slétttöluliðirnir S_{2k} eru vaxandi og takmarkaðir að ofan.

□

Almennt er sérhver víxlmerkjaröð á formi (3) (jöfnu 5.13) eða (4) (jöfnu 5.14) samleitin svo framarlega sem $b_1\geq b_2\geq b_3\geq\cdots$ og $b_n\to 0$ (mynd 5.18). Sönnunin er hliðstæð sönnuninni fyrir víxlmerktu harmonísku röðina.



Mynd 5.18 Fyrir víxlmerkjaröðina $b_1-b_2+b_3-\cdots$, þar sem $b_1>b_2>b_3>\cdots$, eru oddatöluliðirnir S_{2k+1} í runu hlutsummanna fallandi og takmarkaðir að neðan. Slétttöluliðirnir S_{2k} eru vaxandi og takmarkaðir að ofan.

SETNING 5.13

Próf fyrir víxlmerkjaraðir

Víxlmerkjaröð á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n \text{ eða } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$$

er samleitin ef

i. $0<b_{n+1}\leq b_n$ fyrir öll $n\geq 1$ og

ii. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Þetta nefnist prófið fyrir víxlmerkjaraðir.

Setningin gildir raunar almennar: Nóg er að til sé heiltala N þannig að $0<b_{n+1}\leq b_n$ fyrir öll $n\geq N$.

DÆMI 5.19

Samleitni víxlmerkjaraða

Ákvarðið hvort hver eftirfarandi víxlmerkjaröð sé samleitin eða ósamleitin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^2$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n/(n+1)$

Lausn

a. Þar sem

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n^2} \text{ og } \frac{1}{n^2}\to 0,$$

er röðin samleitin.

b. Þar sem $n/(n+1)\not\to 0$ þegar $n\to\infty$, er ekki hægt að beita prófinu fyrir víxlmerkjaraðir. Þess í stað beitum við sundurleitniprófinu á n-ta liðinn. Þar sem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n+1}\neq 0,$$

er röðin ósamleitin.

STÖÐUMAT 5.18

Ákvarðið hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n/2^n$ sé samleitin eða ósamleitin.

Skekkja í víxlmerkjaröðum

Erfitt er að reikna summu flestra víxlmerkjaraða nákvæmlega og því er hún yfirleitt nálguð með hlutsummu. Þá viljum við vita hversu mikil skekkjan í nálguninni er. Lítum á víxlmerkjaröðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

sem uppfyllir skilyrði prófsins fyrir víxlmerkjaraðir. Látum S tákna summu raðarinnar og $\left(S_k\right)$ vera samsvarandi runu hlutsummanna. Af mynd 5.18 sjáum við að fyrir sérhverja heiltölu $N \geq 1$, uppfyllir skekkjan R_N

$$\left|R_N\right| = \left|S - S_N\right| \leq \left|S_{N+1} - S_N\right| = b_{n+1}.$$

SETNING 5.14

Skekkja í víxlmerkjaröðum

Lítum á víxlmerkjaröð á forminu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \text{ eða } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n$$

sem uppfyllir skilyrði prófsins fyrir víxlmerkjaraðir. Látum S tákna summu raðarinnar og S_N tákna N-tu hlutsummuna. Fyrir sérhverja heiltölu $N \geq 1$, uppfyllir skekkjan $R_N = S - S_N$

$$\left|R_N\right| \leq b_{N+1}.$$

Með öðrum orðum: Ef skilyrði prófsins fyrir víxlmerkjaraðir eru uppfyllt og óendanlega röðin er nálguð með N-tu hlutsummunni S_N er tölugildi skekkjunnar í mesta lagi stærð næsta liðar b_{N+1}.

DÆMI 5.20

Skekkja víxlmerkjaraðar metin

Lítum á víxlmerkjaröðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Notið skekkjumatið til að ákvarða efra mark fyrir skekkjuna R_{10} þegar summa raðarinnar er nálguð með hlutsummunni S_{10}.

Lausn

Af setningunni hér að framan fæst

$$|R_{10}| \leq b_{11} = \frac{1}{11^2} \approx 0{,}008265.$$

STÖÐUMAT 5.19

Finnið efra mark fyrir R_{20} þegar $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ er nálguð með S_{20}.

Alsamleitni og skilyrt samleitni

Lítum á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og tengdu röðina $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Hér skoðum við hvernig samleitni þessara tveggja raða getur tengst. Lítum til dæmis á víxlmerktu harmonísku röðina $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$. Röðin sem myndast af tölugildum þessara liða er harmoníska röðin, því $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1}/n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Þar sem víxlmerkta harmoníska röðin er samleitin en harmoníska röðin ósamleitin segjum við að víxlmerkta harmoníska röðin sé skilyrt samleitin.

Til samanburðar skulum við líta á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^2$. Röðin sem myndast af tölugildum liða þessarar raðar er $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Þar sem báðar raðirnar eru samleitnar segjum við að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^2$ sé alsamleitin.

5

SKILGREINING

Röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er alsamleitin ef $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin. Röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er skilyrt samleitin ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin en $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ósamleitin.

Eins og víxlmerkta harmoníska röðin sýnir getur röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verið samleitin þótt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sé ósamleitin. Í næstu setningu sýnum við hins vegar að ef $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

SETNING 5.15

Alsamleitni felur í sér samleitni

Ef $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sé samleitin. Við sýnum niðurstöðuna með því að nota að $a_n = |a_n|$ eða $a_n = -|a_n|$ og því $|a_n| + a_n = 2|a_n|$ eða $|a_n| + a_n = 0$. Því gildir $0 \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|$. Þar sem $2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin leiðir af samanburðarprófinu að röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + a_n \right)$$

er samleitin. Með reiknireglum samleitinna raða ályktum við að

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n| + a_n \right) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

sé samleitin.

□

5

DÆMI 5.21

Alsamleitni og skilyrt samleitni borin saman

Ákvarðið fyrir hverja eftirfarandi röð hvort hún sé alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} / (3n+1)$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) / n^2$

Lausn

a. Við sjáum að

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$$

er ósamleitin með samanburði með markgildi við harmonísku röðina.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(3n+1)}{1/n}=\frac{1}{3}$$

Samkvæmt setningu 5.13 getur röðin því ekki verið alsamleitin. Af prófinu fyrir víxlmerkjaraðir sjáum við hins vegar að röðin er samleitin.

$$\frac{1}{3(n+1)+1}<\frac{1}{3n+1}\text{ og }\frac{1}{3n+1}\to 0,$$

Við getum ályktað að $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/(3n+1)$ sé skilyrt samleitin.

b. Þar sem $|\cos n|\le 1$, getum við kannað hvort röðin sé alsamleitin með því að bera

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$$

saman við röðina $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$. Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$ er samleitin leiðir af samanburðarprófinu að $\sum_{n=1}^{\infty}|\cos n/n^2|$ er samleitin og því er $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n/n^2$ alsamleitin.

STÖÐUMAT 5.20

5

Ákvarðið hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n/(2n^3+1)$ sé alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

Til að sjá muninn á alsamleitni og skilyrtri samleitni skulum við skoða hvað gerist þegar við umröðum liðum víxlmerktu harmonísku raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$. Við sýnum að hægt er að umraða liðunum þannig að nýja röðin verði ósamleitin. Ef við umröðum liðum endanlegrar summu breytist summan auðvitað ekki. Í óendanlegri summu getur hins vegar ýmislegt áhugavert gerst.

Byrjum á að leggja saman nógu marga jákvæða liði til að summan verði stærri en einhver rauntala $M>0$. Látum til dæmis $M=10$, og finnum heiltölu k þannig að

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2k-1}>10.$$

(Þetta er hægt vegna þess að röðin $\sum_{n=1}^{\infty}1/(2n-1)$ stefnir á óendanlegt.) Drögum síðan frá $1/2$. Leggjum svo fleiri jákvæða liði við þar til summan verður að minnsta kosti 100. Finnum með öðrum orðum aðra heiltölu $j>k$ þannig að

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2k+1}+\cdots+\frac{1}{2j+1}>100.$$

Drögum síðan frá $1/4$. Með því að halda svona áfram höfum við umraðað liðum vixlmerktu harmonísku raðarinnar þannig að runa hlutsummanna í umröðuðu röðinni er ótakmörkuð og þar með ósamleitin.

Einnig má umraða liðum vixlmerktu harmonísku raðarinnar þannig að nýja röðin stefni á annað gildi. Í dæmi 5.22 sýnum við hvernig liðum er umraðað svo að nýja röðin stefni á $3\ln(2)/2$. Vixlmerktu harmonísku röðinni má raunar umraða þannig að röðin stefni á sérhverja rauntölu r; en sönnun þess er utan ramma þessarar bókar.

Almennt má umraða sérhverri röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sem er skilyrt samleitin þannig að nýja röðin verði ósamleitin eða stefni á aðra rauntölu. Alsamleitin röð hefur ekki þennan eiginleika. Fyrir sérhverja alsamleitna röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hefur $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sama gildi óháð umröðun liðanna. Þessi niðurstaða nefnist umröðunarsetning Riemanns, en hún er utan efnis þessarar bókar.

DÆMI 5.22

Umröðun raða

Notið þá staðreynd að

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2$$

til að umraða liðum vixlmerktu harmonísku raðarinnar þannig að summa umraðaðrar raðar verði $3\ln(2)/2$.

Lausn

Látum

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots.$$

Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\ln(2)$, fæst af reiknireglum samleitinna raða að

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\ln 2}{2}.$$

Skilgreinum nú röðina $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ þannig að fyrir öll $n\geq 1$, $b_{2n-1}=0$ og $b_{2n}=a_n/2$. Þá fæst

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\ln 2}{2}.$$

Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eru samleitnar leiðir af reiknireglum um samleitnar raðir að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ er samleitin og

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ln 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{3 \ln 2}{2}.$$

Ef við leggjum nú saman samsvarandi liði, a_n og b_n, sjáum við að

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= (1+0) + \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + 0\right) + \left(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + 0\right) + \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\right) \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{7} + 0\right) + \left(-\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots. \end{aligned}$$

Röðin hægra megin við jafnaðarmerkið er umröðun víxlmerktu harmonísku raðarinnar. Þar sem $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 3\ln(2)/2$, ályktum við að

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3\ln(2)}{2}.$$

Við höfum því fundið umröðun víxlmerktu harmonísku raðarinnar sem hefur þann eiginleika sem við leituðum að.

5

Æfingar í undirkafla 5.5

Tilgreinið hvort hver eftirfarandi röð sé alsamleitin, skilyrt samleitin eða alls ekki samleitin.

250.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+3}$$

251.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}$$

252.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

253.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+3}}{n}$$

254.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

255.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$$

256.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$$

257.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

258.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^2 n$$

259.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^2 n$$

260.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin^2 (1/n)$$

261.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^2 (1/n)$$

262.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln (1/n)$$

263.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

264.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{1+n^4}$$

265.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^e}{1+n^\pi}$$

266.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{1/n}$$

267.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{1/n}$$

268. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-n^{1/n}\right)$ (Vísbending: $n^{1/n}\approx 1+\ln(n)/n$ fyrir stór gildi n.)

269. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (Vísbending: $\cos(1/n)\approx 1-1/n^2$ fyrir stór gildi n.)

270. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (Vísbending: Gerið teljarann ræðan.)

271. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ (Vísbending: Finnið samnefnara og gerið síðan teljarann ræðan.)

272.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\ln(n+1)-\ln n\right)$$

273. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}n\right)$ (Vísbending: Notið meðalgildissetninguna.)

274.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left((n+1)^2-n^2\right)$$

275.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

276.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

277.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{1/n}}$$

278.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

279.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi/2)\sin(1/n)$$

Notið í hverju eftirfarandi verkefni matið $|R_N| \le b_{N+1}$ til að finna gildi N sem tryggir að summa fyrstu N liða víxlmerkjaraðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ víki frá summu óendanlegu raðarinnar um í mesta lagi tilgreinda skekkju. Reiknið hlutsummuna S_N fyrir þetta gildi N.

280. **[T]** $b_n = 1/n$, skekkja $< 10^{-5}$

281. **[T]** $b_n = 1/\ln(n)$, $n \ge 2$, skekkja $< 10^{-1}$

282. **[T]** $b_n = 1/\sqrt{n}$, skekkja $< 10^{-3}$

283. **[T]** $b_n = 1/2^n$, skekkja $< 10^{-6}$

284. **[T]** $b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, skekkja $< 10^{-3}$

285. **[T]** $b_n = 1/n^2$, skekkja $< 10^{-6}$

Tilgreinið í eftirfarandi verkefnum hvort fullyrðingin sé sönn eða ósönn. Ef hún er ósönn skuluð þið gefa dæmi þar sem hún gildir ekki.

286. Ef $b_n \ge 0$ er fallandi og $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n})$ alsamleitin.

287. Ef $b_n \ge 0$ er fallandi þá er $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{2n-1} - b_{2n})$ alsamleitin.

288. Ef $b_n \ge 0$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ þá er $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2}(b_{3n-2} + b_{3n-1}) - b_{3n})$ samleitin.

289. Ef $b_n \geq 0$ er fallandi og $\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_{3n-2} + b_{3n-1} - b_{3n} \right)$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} b_{3n-2}$ samleitin.

290. Ef $b_n \geq 0$ er fallandi og $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ er skilyrt samleitin en ekki alsamleitin þá stefnir b_n ekki á núll.

291. Látum $a_n^+ = a_n$ ef $a_n \geq 0$ og $a_n^- = -a_n$ ef $a_n < 0$. (Einnig gildir $a_n^+ = 0$ ef $a_n < 0$ og $a_n^- = 0$ ef $a_n \geq 0$.) Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er skilyrt samleitin en ekki alsamleitin þá eru hvorki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ né $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ samleitnar.

292. Gerum ráð fyrir að a_n sé runa jákvæðra rauntalna og að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin.

Gerum ráð fyrir að b_n sé valfrjáls runa ása og mínusása. Þarf $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ þá endilega að vera samleitin?

293. Gerum ráð fyrir að a_n sé runa þannig að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sé samleitin fyrir sérhverja mögulega runu b_n núlla og ása. Er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þá alsamleitin?

Eftirfarandi raðir uppfylla ekki forsendur prófsins fyrir víxlmerkjaraðir eins og prófið er sett fram.

Tilgreinið í hverju tilviki hvaða forsenda er ekki uppfyllt. Tilgreinið hvort röðin sé alsamleitin.

294.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{n}$$

295.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos^2 n}{n}$$

296.

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

297.

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

298. Sýnið að víxlmerkjaröðin $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ sé ekki samleitin. Hvaða forsenda prófsins fyrir víxlmerkjaraðir er ekki uppfyllt?

299. Gerum ráð fyrir að $\sum a_n$ sé alsamleitin. Sýnið að röðin sem mynduð er af jákvæðu liðunum a_n sé einnig samleitin.

300. Sýnið að víxlmerkjaröðin $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{4}{7}-\frac{5}{9}+\cdots$ sé ekki samleitin. Hvaða forsenda prófsins fyrir víxlmerkjaraðir er ekki uppfyllt?

301. Formúlan $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots$ verður leidd út í næsta kafla. Notið skekkjumatið $\left|R_N\right|\le b_{N+1}$ til að finna efra mark fyrir skekkjuna þegar $\cos\theta$ er nálgað með fimmtu hlutsummunni $1-\theta^2/2!+\theta^4/4!-\theta^6/6!+\theta^8/8!$ fyrir $\theta=1$, $\theta=\pi/6$, og $\theta=\pi$.

302. Formúlan $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots$ verður leidd út í næsta kafla. Notið skekkjumatið $\left|R_N\right|\le b_{N+1}$ til að finna efra mark fyrir skekkjuna þegar $\sin\theta$ er nálgað með fimmtu hlutsummunni $\theta-\theta^3/3!+\theta^5/5!-\theta^7/7!+\theta^9/9!$ fyrir $\theta=1$, $\theta=\pi/6$, og $\theta=\pi$.

303. Hversu marga liði í $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots$ þarf til að nálga $\cos 1$ með skekkju sem er í mesta lagi 0,00001?

304. Hversu marga liði í $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots$ þarf til að nálga $\sin 1$ með skekkju sem er í mesta lagi 0,00001?

305. Stundum stefnir víxlmerkjaröðin $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ hraðar á tiltekið brot af alsamleitnu röðinni $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Út frá því að $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, finnið $12=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$. Hvor raðanna $6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ og $S\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ gefur betra mat á π^2 þegar 1000 liðir eru notaðir?

Eftirfarandi víxlmerkjaraðir stefna á gefin margfeldi af π. Finnið gildið N sem skekkjumatið gefur þannig að N-ta hlutsumma raðarinnar nálgi vinstri hliðina með skekkju innan tilgreindra marka. Finnið minnsta N sem uppfyllir skekkjumörkin og gefið umbeðið nálgunargildi í hverju tilviki. Með 15 aukastöfum er $\pi=3{,}141592653589793\ldots$.

306. **[T]** $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, skekkja $<0{,}0001$

307. **[T]** $\frac{\pi}{\sqrt{12}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^{-k}}{2k+1}$, skekkja $<0{,}0001$

308. **[T]** Röðin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x+\pi n)}{x+\pi n}$ gegnir mikilvægu hlutverki í merkjavinnslu. Sýnið að $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x+\pi n)}{x+\pi n}$ sé samleitin þegar $0<x<\pi$. (Vísbending: Notið samlagningarformúlu sínuss.)

309. **[T]** Ef $\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \to \ln 2$, hvert er þá

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots ?$$

310. **[T]** Teiknið röðina $\sum_{n=1}^{100} \frac{\cos(2\pi n x)}{n}$ fyrir $0\le x<1$. Útskýrið hvers vegna $\sum_{n=1}^{100} \frac{\cos(2\pi n x)}{n}$ er ósamleitin þegar $x=0,1$. Hvernig hegðar röðin sér fyrir önnur gildi x?

311. **[T]** Teiknið röðina $\sum_{n=1}^{100} \frac{\sin(2\pi n x)}{n}$ fyrir $0\le x<1$ og lýsið hegðun hennar.

312. **[T]** Teiknið röðina $\sum_{n=1}^{100} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^2}$ fyrir $0\le x<1$ og lýsið grafi hennar.

313. **[T]** Víxlmerkta harmoníska röðin er samleitin vegna þess að liðir hennar styttast út hver á móti öðrum. Summa hennar er þekkt því að hægt er að lýsa þessari styttingu nákvæmlega. Slembin harmonísk röð er á forminu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{n}$, þar sem s_n er slembin runa með liðunum ± 1 og gildin ± 1 koma fyrir með jöfnum líkum. Notið slembitalnagjafa til að búa til 1000 slembin ± 1-gildi og teiknið hlutsummurnar $S_N=\sum_{n=1}^{N} \frac{s_n}{n}$ í slembnu harmonísku röðinni frá $N=1$ upp í 1000. Berið saman við graf fyrstu 1000 hlutsumma harmonísku raðarinnar.

314. **[T]** Flýta má samleitni mats á $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ með því að rita hlutsummurnar sem $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)}$ og hafa í huga að $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{N+1}$ stefnir á einn þegar $N\to\infty$. Berið saman matið á $\pi^2/6$ sem fæst með summunum $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2}$ og matið sem fæst með $1+\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

315.

[T] Euler-vörpunin umritar $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ sem $S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}b_{n-m}$.

Fyrir víxlmerktu harmonísku röðina tekur hún formið $\ln(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. Reiknið hlutsummur $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ þar til þær nálga $\ln(2)$ með skekkju sem er minni en $0{,}0001$. Hversu marga liði þarf? Berið svarið saman við þann fjölda liða víxlmerktu harmonísku raðarinnar sem þarf til að meta $\ln(2)$.

316. **[T]** Í textanum kom fram að umraða megi skilyrt samleitinni röð þannig að hún stefni á hvaða tölu sem er. Hér er örlítið einfaldari en hliðstæð niðurstaða. Ef $a_n \geq 0$ er þannig að $a_n \to 0$ þegar $n \to \infty$ en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er ósamleitin, þá má fyrir sérhverja tölu A finna runu s_n sem tekur aðeins gildin ± 1 þannig að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n \to A$. Sýnið þetta fyrir $A>0$ á eftirfarandi hátt.

a. Skilgreinið s_n með rakningarvenslum þannig að $s_n=1$ ef $S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_k < A$ og $s_n=-1$ annars.

b. Útskýrið hvers vegna að lokum gildir $S_n \geq A$, og hvers vegna fyrir sérhvert m sem er stærra en

$$n,$$

$$A - a_m \leq S_m \leq A + a_m.$$

c. Útskýrið hvers vegna þetta leiðir til þess að $S_n \to A$ þegar $n \to \infty$.

5.6 Kvóta- og rótarpróf

NÁMSMARKMIÐ

- 5.6.1 Nota kvótaprófið til að ákvarða alsamleitni raðar.
- 5.6.2 Nota rótarprófið til að ákvarða alsamleitni raðar.
- 5.6.3 Lýsa aðferð við að kanna samleitni gefinnar raðar.

Í þessum undirkafla sönnum við síðustu tvö samleitniprófin fyrir raðir: kvótaprófið og rótarprófið. Þessi próf eru sérlega hentug því ekki þarf að finna röð til samanburðar. Kvótaprófið verður sérstaklega gagnlegt í umfjölluninni um veldaraðir í næsta kafla.

Í þessum kafla höfum við séð að ekkert eitt samleitnipróf hentar öllum röðum. Í lok þessa undirkafla fjöllum við því um aðferð við að velja samleitnipróf fyrir gefna röð.

Kvótaprófið

Lítum á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Af fyrri umfjöllun og dæmum vitum við að $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ er ekki nægilegt skilyrði fyrir samleitni raðarinnar. Ekki nægir að $a_n \to 0$, heldur þarf $a_n \to 0$ nógu hratt. Lítum til dæmis á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ og röðina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Við vitum að $1/n \to 0$ og $1/n^2 \to 0$. Aðeins röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ er þó samleitin. Röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ er ósamleitin því liðir runnunnar $\left(1/n\right)$ nálgast núll ekki nógu hratt þegar $n \to \infty$. Hér kynnum við kvótaprófið, sem mælir hversu hratt liðir raðar nálgast núll.

SETNING 5.16

Kvótaprófið

Látum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vera röð sem hefur enga núlliði. Látum

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

i. Ef $0 \le \rho < 1$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alsamleitin.

ii. Ef $\rho > 1$ eða $\rho = \infty$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

iii. Ef $\rho = 1$, gefur prófið engar upplýsingar.

Sönnun

Látum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vera röð með liðum sem eru ekki núll.

Við byrjum á sönnun i-liðar. Í þessu tilviki gildir $\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Þar sem $0 \le \rho < 1$, er til tala R þannig að $0 \le \rho < R < 1$. Látum $\varepsilon = R - \rho > 0$. Samkvæmt skilgreiningu á markgildi runu er til heiltala N þannig að

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \rho \right| < \varepsilon \text{ fyrir öll } n \ge N.$$

Því gildir

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho + \varepsilon = R \text{ fyrir öll } n \ge N$$

og þar með

$$\begin{aligned}
&|a_{N+1}| < R\,|a_N| \\
&|a_{N+2}| < R\,|a_{N+1}| < R^2\,|a_N| \\
&|a_{N+3}| < R\,|a_{N+2}| < R^2\,|a_{N+1}| < R^3\,|a_N| \\
&|a_{N+4}| < R\,|a_{N+3}| < R^2\,|a_{N+2}| < R^3\,|a_{N+1}| < R^4\,|a_N| \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Þar sem $R<1$, er geómetríska röðin

$$R\left|a_N\right|+R^2\left|a_N\right|+R^3\left|a_N\right|+\cdots$$

samleitin. Samkvæmt ójöfnunum hér að framan getum við beitt samanburðarprófinu og ályktað að röðin

$$\left|a_{N+1}\right|+\left|a_{N+2}\right|+\left|a_{N+3}\right|+\left|a_{N+4}\right|+\cdots$$

sé samleitin. Þar sem

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{N}|a_n|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|$$

þar sem $\sum_{n=1}^{N}|a_n|$ er endanleg summa og $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|$ er samleitin, ályktum við að $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ sé samleitin.

5

Sönnum nú ii-lið.

Gerum nú ráð fyrir að $\rho=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$.

Þá er til N þannig að $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$ fyrir öll $n\geq N$.

Þá er $\left|a_{n-}\right|>\left|a_n\right|$.

Þar sem $\left|a_{n-}\right|>\left|a_n\right|$ fyrir öll $n\geq N$ vitum við að $\left|a_n\right|\neq 0$.

Af þessu leiðir að $\left|a_n\right|\neq 0$.

Samkvæmt sundurleitniprófinu er röðin $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ósamleitin.

$$\left|a_{N+1}\right|+\left|a_{N+2}\right|+\left|a_{N+3}\right|+\cdots$$

er ósamleitin og því er röðin $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ósamleitin.

Fyrir iii-lið sýnum við að prófið gefur engar upplýsingar ef $\rho=1$ með því að skoða $p-$röð $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$. Fyrir hverja rauntölu p,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1.$$

Við vitum hins vegar að ef $p \leq 1$, er $p-$röð $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ ósamleitin, en $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ er samleitin ef $p > 1$.

□

Kvótaprófið er sérlega gagnlegt fyrir raðir þar sem liðirnir innihalda aðfeldi eða veldisliði, því kvóti liðanna einfaldar þá segðina. Prófið er hentugt þar sem ekki þarf að finna samanburðarröð. Ókosturinn er að það gefur stundum engar upplýsingar um samleitni.

DÆMI 5.23

Kvótaprófið notað

Notið kvótaprófið til að ákvarða hvort eftirfarandi raðir séu samleitnar eða ósamleitnar.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!}$

Lausn

a. Af kvótaprófinu sjáum við að

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}.$$

Þar sem $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

Þar sem $\rho < 1$, er röðin samleitin.

b. Við sjáum að

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.\end{aligned}$$

Þar sem $\rho > 1$, er röðin ósamleitin.

c. Þar sem

$$\begin{aligned}\left|\frac{(-1)^{n+1}((n+1)!)^2/(2(n+1))!}{(-1)^n(n!)^2/(2n)!}\right| &= \frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\end{aligned}$$

sjáum við að

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Þar sem $\rho < 1$, er röðin samleitin.

STÖÐUMAT 5.21

Notið kvótaprófið til að ákvarða hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ sé samleitin eða ósamleitin.

Rótarprófið

Aðferð rótarprófsins er hliðstæð aðferð kvótaprófsins. Lítum á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ þannig að $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ fyrir einhverja rauntölu ρ. Þegar N er nógu stórt gildir þá $|a_N| \approx \rho^N$. Því getum við nálgað $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ með því að rita

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots \approx \rho^N + \rho^{N+1} + \rho^{N+2} + \cdots.$$

Segðin hægra megin er geómetrísk röð. Líkt og í kvótaprófinu er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alsamleitin ef $0 \le \rho < 1$ og ósamleitin ef $\rho \ge 1$. Ef $\rho = 1$, gefur prófið engar upplýsingar. Fyrir hverja p-röð $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, sjáum við til dæmis að

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^p}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/n}}.$$

Til að reikna þetta markgildi notum við náttúrlega lografallið. Þá sjáum við að

$$\ln\rho = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p/n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{p/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{p}{n}\cdot\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{p\ln(1/n)}{n}.$$

Með reglu l'Hôpital fæst $\ln\rho = 0$, og því $\rho = 1$ fyrir öll p. Við vitum hins vegar að p-röðin er aðeins samleitin ef $p > 1$ og ósamleitin ef $p < 1$.

SETNING 5.17

Rótarprófið

Lítum á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Látum

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

i. Ef $0 \le \rho < 1$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alsamleitin.

ii. Ef $\rho > 1$ eða $\rho = \infty$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

iii. Ef $\rho = 1$, gefur prófið engar upplýsingar.

Rótarprófið nýtist fyrir raðir þar sem veldisliðir koma fyrir í liðunum. Sérstaklega gildir fyrir röð þar sem liðirnir a_n uppfylla $|a_n| = b_n^n$, að $\sqrt[n]{|a_n|} = b_n$ og þá þarf aðeins að reikna $\lim_{n\to\infty} b_n$.

DÆMI 5.24

Rótarprófið notað

Notið rótarprófið til að ákvarða hvort eftirfarandi raðir séu samleitnar eða ósamleitnar.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3n)^n}{(4n^2+5)^n}$

b. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(\ln(n))^n}$

Lausn

a. Til að beita rótarprófinu reiknum við

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n^2+3n)^n/(4n^2+5)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{4n^2+5} = \frac{1}{4}.$$

Þar sem $\rho<1$, er röðin alsamleitin.

b. Við höfum

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n/(\ln n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=\infty \text{ samkvæmt reglu l'Hôpital.}$$

Þar sem $\rho=\infty$, er röðin ósamleitin.

STÖÐUMAT 5.22

Notið rótarprófið til að ákvarða hvort röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ sé samleitin eða ósamleitin.

Val samleitniprófs

Nú höfum við langan lista yfir samleitnipróf. Ekki er þó hægt að nota öll prófin fyrir allar raðir. Þegar röð er gefin þarf að ákvarða hvaða próf hentar best. Hér er aðferð til að finna heppilegasta prófið.

LAUSNARLEIÐ

Samleitnipróf valið fyrir röð

5

Lítum á röðina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Í skrefunum hér á eftir lýsum við aðferð til að ákvarða hvort röðin sé samleitin.

1. Er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kunnugleg röð? Er hún til dæmis harmoníska röðin, sem er ósamleitin, eða víxlmerkta harmoníska röðin, sem er samleitin? Er hún p − röð eða geómetrísk röð? Ef svo er skal kanna veldisvísinn p eða hlutfallstöluna r til að ákvarða hvort röðin sé samleitin.
2. Er hún víxlmerkjaröð? Höfum við áhuga á alsamleitni eða aðeins samleitni? Ef aðeins á að kanna hvort röðin sé samleitin skal beita prófinu fyrir víxlmerkjaraðir. Ef kanna á alsamleitni skal fara í skref 3, og skoða röð tölugildanna $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
3. Líkist röðin p − röð eða geómetríska röð? Ef svo er skal prófa samanburðarprófið eða samanburð með markgildi.
4. Innihalda liðir raðarinnar aðfeldi eða veldi? Ef liðirnir eru veldi þannig að $a_n=b_n^n$, skal prófa rótarprófið fyrst. Annars skal prófa kvótaprófið fyrst.
5. Notið sundurleitniprófið. Ef það gefur engar upplýsingar skal prófa heildisprófið.

MARGMIÐLUN

Á þessari vefsíðu eru frekari upplýsingar um hvernig kanna megi samleitni raða, ásamt almennum upplýsingum um runur og raðir.

DÆMI 5.25

Samleitnipróf notuð

Ákvarðið fyrir hverja eftirfarandi röð hvaða samleitnipróf hentar best og útskýrið hvers vegna. Ákvarðið síðan hvort röðin sé samleitin eða ósamleitin. Ef hún er víxlmerkjaröð skal ákvarða hvort hún sé alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3n+1)}{n!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^n}$

Lausn

a. Skref 1. Röðin er hvorki p – röð né geómetrísk röð.
Skref 2. Röðin er ekki víxlmerkjaröð.
Skref 3. Fyrir stór gildi n, nálgum við lið raðarinnar með segðinni

$$\frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1} \approx \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}.$$

Því virðist eðlilegt að beita samanburðarprófinu eða samanburði með markgildi við röðina $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Með samanburði með markgildi sjáum við að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n)/(n^3+3n^2+1)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2}{n^3+3n^2+1} = 1.$$

Þar sem röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ er ósamleitin er þessi röð einnig ósamleitin.

b. Skref 1. Röðin er ekki kunnugleg röð.
Skref 2. Röðin er víxlmerkjaröð. Þar sem við höfum áhuga á alsamleitni skoðum við röðina

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)!}.$$

Skref 3. Röðin líkist hvorki p-röð né geómetríska röð.
Skref 4. Þar sem hver liður inniheldur aðfeldi beitum við kvótaprófinu. Við sjáum að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3(n+1))/(n+1)!}{(3n+1)/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{(n+1)(3n+1)} = 0.$$

Því er þessi röð samleitin og við ályktum að upphaflega röðin sé alsamleitin og þar með samleitin.

c. Skref 1. Röðin er ekki kunnugleg röð.
Skref 2. Hún er ekki víxlmerkjaröð.
Skref 3. Engin augljós röð er til samanburðar.
Skref 4. Ekkert aðfeldi kemur fyrir. Veldi kemur fyrir, en aðstæður henta rótarprófinu ekki vel.
Skref 5. Til að beita sundurleitniprófinu reiknum við

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^3} = \infty.$$

Samkvæmt sundurleitniprófinu er röðin því ósamleitin.

d. Skref 1. Röðin er ekki kunnugleg röð.
Skref 2. Hún er ekki víxlmerkjaröð.
Skref 3. Engin augljós röð er til samanburðar.
Skref 4. Þar sem hver liður er veldi af n, getum við beitt rótarprófinu. Þar sem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0,$$

Skref 3. Engin augljós röð er til samanburðar.

STÖÐUMAT 5.23

Ákvarðið hvaða samleitnipróf hentar best fyrir röðina $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$, og útskýrið hvers vegna.

Tafla 5.3 tekur saman samleitniprófin og hvenær má beita hverju þeirra. Athugið að samanburðarprófið, samanburður með markgildi og heildisprófið krefjast þess að röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

hafi óneikvæða liði. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hefur neikvæða liði má þó beita þessum prófum á $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ til að kanna alsamleitni.

Tafla 5.3 Yfirlit yfir samleitnipróf

Röð eða próf	Niðurstöður	Athugasemdir
Sundurleitniprófið. Fyrir sérhverja röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, skal reikna $\lim_{n\to\infty} a_n$.	Ef $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, gefur prófið enga niðurstöðu. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, er röðin ósamleitin.	Þetta próf getur ekki sannað samleitni raðar.
Geómetrískar raðir $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$	Ef $\lvert r\rvert < 1$, stefnir röðin á $a/(1-r)$. Ef $\lvert r\rvert \geq 1$, er röðin ósamleitin.	Með því að breyta vísinum má rita sérhverja geómetríska röð á forminu $a + ar + ar^2 + \cdots$, þar sem a er upphafsliðurinn og r er hlutfallstalan.
***p*-röð** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	Ef $p > 1$, er röðin samleitin. Ef $p \leq 1$, er röðin ósamleitin.	Fyrir $p = 1$, fæst harmoníska röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.
Samanburðarprófið. Fyrir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ með óneikvæðum liðum skal bera saman við þekkta röð $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	Ef $a_n \leq b_n$ fyrir öll $n \geq N$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin. Ef $a_n \geq b_n$ fyrir öll $n \geq N$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.	Yfirleitt notað fyrir röð sem líkist geómetrískri röð eða p-röð. Stundum getur verið erfitt að finna hentuga röð.
Samanburður með markgildi. Fyrir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ með jákvæðum liðum skal bera saman við röð $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ með því að reikna $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.	Ef L er rauntala og $L \neq 0$, þá eru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ annaðhvort báðar samleitnar eða báðar ósamleitnar. Ef $L = 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.	Yfirleitt notað fyrir röð sem líkist geómetrískri röð eða p-röð. Oft auðveldara í notkun en samanburðarprófið.

Röð eða próf	Niðurstöður	Athugasemdir
	Ef $L=\infty$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.	
Heildisprófið. Ef til er jákvætt, samfellt og fallandi fall f þannig að $a_n=f(n)$ fyrir öll $n\geq N$, skal reikna $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$.	$\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eru annaðhvort bæði samleitin eða bæði ósamleitin.	Takmarkast við raðir þar sem auðvelt er að heilda samsvarandi fall f.
Víxlmerkjaraðir $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ eða $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$	Ef $b_{n+1}\leq b_n$ fyrir öll $n\geq 1$ og $b_n\to 0$, þá er röðin samleitin.	Á aðeins við um víxlmerkjaraðir.
Kvótaprófið. Fyrir sérhverja röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ með liðum sem eru ekki núll skal láta $\rho=\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert$.	Ef $0\leq\rho<1$, er röðin alsamleitin. Ef $\rho>1$ eða $\rho=\infty$, er röðin ósamleitin. Ef $\rho=1$, gefur prófið enga niðurstöðu.	Oft notað fyrir raðir sem innihalda aðfeldi eða veldisliði.
Rótarprófið. Fyrir sérhverja röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, skal láta $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}$.	Ef $0\leq\rho<1$, er röðin alsamleitin. Ef $\rho>1$ eða $\rho=\infty$, er röðin ósamleitin. Ef $\rho=1$, gefur prófið enga niðurstöðu.	Oft notað fyrir raðir þar sem $\lvert a_n\rvert=b_n^n$.

5

NEMENDAVERKEFNI

Raðir sem stefna á π og $1/\pi$

Til eru tugir raða sem stefna á π eða algebrulega segð sem inniheldur π. Hér skoðum við nokkur dæmi og berum saman samleitnihraða þeirra. Með samleitnihraða er átt við þann fjölda liða sem þarf til að hlutsumma sé innan tiltekinnar fjarlægðar frá rétta gildinu. Framsetningu π sem raðar í fyrstu tveimur dæmunum má skýra með Maclaurin-röðum, sem fjallað er um í næsta kafla. Þriðja dæmið byggir á efni sem er utan ramma þessarar bókar.

1. Röðina

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \cdots$$

uppgötvuðu Gregory og Leibniz seint á 1600-árunum. Þessi niðurstaða leiðir af Maclaurin-röðinni fyrir $f(x) = \tan^{-1} x$. Fjallað verður um þessa röð í næsta kafla.

a. Sannið að röðin sé samleitin.
b. Reiknið hlutsummurnar S_n fyrir $n = 10, 20, 50, 100$.
c. Notið skekkjumat víxlmerkjaraða til að fá efra mark fyrir skekkjuna R_n.
d. Hvert er minnsta gildi N sem tryggir $|R_N| < 0{,}01$? Reiknið S_N.

2. Röðina

$$\begin{aligned}\pi &= 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)} \\ &= 6\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2\cdot 3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\left(\tfrac{1}{2}\right)^7 + \cdots\right)\end{aligned}$$

hefur verið eignuð Newton seint á 1600-árunum. Í sönnun niðurstöðunnar er notuð Maclaurin-röðin fyrir $f(x) = \sin^{-1} x$.

a. Sannið að röðin sé samleitin.
b. Reiknið hlutsummurnar S_n fyrir $n = 5, 10, 20$.
c. Berið S_n saman við π fyrir $n = 5, 10, 20$ og ræðið fjölda réttra aukastafa.

3. Röðina

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

uppgötvaði Ramanujan snemma á 1900-árunum. William Gosper yngri notaði röðina til að reikna π með meira en 17 milljóna tölustafa nákvæmni á miðjum 1980-árunum. Það var þá heimsmet. Síðan hafa þessi röð og aðrar raðir Ramanujans orðið stærðfræðingum tilefni til að finna margar aðrar raðaframsetningar fyrir π og $1/\pi$.

a. Sannið að röðin sé samleitin.
b. Reiknið fyrsta lið raðarinnar. Berið töluna saman við gildi π úr reiknivél. Að hve mörgum aukastöfum eru tölurnar jafnar? Hvað gerist ef fyrstu tveir liðir raðarinnar eru lagðir saman?

c. Kynnið ykkur ævi Srinivasa Ramanujans $(1887-1920)$ og skrifið stutta samantekt. Ævisaga Ramanujans er ein sú áhugaverðasta í sögu stærðfræðinnar. Hann var að mestu sjálfmenntaður og án formlegrar stærðfræðimenntunar en lagði engu að síður margt frumlegt af mörkum á ýmsum sviðum æðri stærðfræði.

Æfingar í undirkafla 5.6

Notið kvótaprófið til að ákvarða hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin, þar sem liðurinn a_n er gefinn í eftirfarandi verkefnum. Takið fram ef kvótaprófið gefur enga niðurstöðu.

317.

$$a_n = 1/n!$$

318.

$$a_n = 10^n/n!$$

319.

$$a_n = n^2/2^n$$

320.

$$a_n = n^{10}/2^n$$

321.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

322.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$$

323.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

324.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}$$

325.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n/e)^n}$$

326.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n/e)^{2n}}$$

327.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)^{2n}}$$

Notið rótarprófið til að ákvarða hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin, þar sem liðurinn a_n er skilgreindur hér á eftir.

328.

$$a_k = \left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k$$

329.

$$a_k = \left(\frac{2k^2-1}{k^2+3}\right)^k$$

330.

$$a_n = \frac{(\ln n)^{2n}}{n^n}$$

331.

$$a_n = n/2^n$$

332.

$$a_n = n/e^n$$

333.

$$a_k = \frac{k^e}{e^k}$$

334.

$$a_k = \frac{\pi^k}{k^\pi}$$

335.

$$a_n = \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right)^n$$

336.

$$a_k = \frac{1}{(1+\ln k)^k}$$

Í þessu verkefni byrjar n á 2.

337.

$$a_n = \frac{(\ln(1+\ln n))^n}{(\ln n)^n}$$

Notið kvótaprófið eða rótarprófið, eftir því sem við á, í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort röðin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, með gefnum liðum a_k, sé samleitin. Takið fram ef prófið gefur enga niðurstöðu.

338.

$$a_k = \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}$$

339.

$$a_k = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}{(2k)!}$$

340.

$$a_k = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{3^k k!}$$

341.

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

342. $a_k = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k}\right)^k$ (Vísbending: Berið $a_k^{1/k}$ saman við $\int_k^{2k} \frac{dt}{t}$.)

343.

$$a_k = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{3k}\right)^k$$

344.

$$a_n = \left(n^{1/n} - 1\right)^n$$

Notið kvótaprófið til að ákvarða hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin. Takið fram ef kvótaprófið gefur enga niðurstöðu.

345.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$$

346.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n n!}$$

Notið rótarprófið og samanburð með markgildi til að ákvarða hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin.

347. $a_n = 1/x_n^n$ þar sem $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$, $x_1 = 1$ (Vísbending: Finnið markgildi $\left(x_n\right).$)

Notið hentugt próf í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort röðin sé samleitin.

348.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^3+n^2+n+1}$$

349.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^3+3n^2+3n+1}$$

350.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3+(1{,}1)^n}$$

351.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(n+1)^n}$$

352. $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ (Vísbending: $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \approx e.$)

353.

$$a_k = 1/2^{\sin^2 k}$$

354.

$$a_k = 2^{-\sin(1/k)}$$

355.

$a_n = 1/\binom{n+2}{n}$ þar sem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

356.

$$a_k = 1/\binom{2k}{k}$$

357.

$$a_k = 2^k/\binom{3k}{k}$$

358. $a_k = \left(\frac{k}{k+\ln k}\right)^k$ (Vísbending: $a_k = \left(1+\frac{\ln k}{k}\right)^{-(k/\ln k)\ln k} \approx e^{-\ln k}$.)

359. $a_k = \left(\frac{k}{k+\ln k}\right)^{2k}$ (Vísbending: $a_k = \left(1+\frac{\ln k}{k}\right)^{-(k/\ln k)\ln k^2}$.)

Eftirfarandi raðir eru samleitnar samkvæmt kvótaprófinu. Notið hlutun við summun, $\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1}-b_k) = \left[a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1\right] - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}(a_{k+1}-a_k)$, til að finna summu gefinnar raðar.

360. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ (Vísbending: Látum $a_k = k$ og $b_k = 2^{1-k}$.)

361. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{c^k}$, þar sem $c > 1$ (Vísbending: Látum $a_k = k$ og $b_k = c^{1-k}/(c-1)$.)

362.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

363.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$$

k-ti liður hverrar eftirfarandi raðar hefur þáttinn x^k. Finnið fyrir hvaða gildi x kvótaprófið sýnir að röðin sé samleitin.

364.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

365.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$$

366.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^k}$$

367.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

368. Er til tala p þannig að $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p}$ sé samleitin?

369. Látum $0<r<1$. Fyrir hvaða rauntölur p er $\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$ samleitin?

370. Gerum ráð fyrir að $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p$. Fyrir hvaða gildi p hlýtur $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ að vera samleitin?

371. Gerum ráð fyrir að $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = p$. Fyrir hvaða gildi $r>0$ er tryggt að $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n$ sé samleitin?

372. Gerum ráð fyrir að $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le (n+1)^p$ fyrir öll $n=1,2,\ldots$, þar sem p er föst rauntala. Fyrir hvaða gildi p er tryggt að $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, a_n$ sé samleitin?

373. Fyrir hvaða gildi $r>0$, ef þau eru einhver, er $\sum_{n=1}^{\infty} r^{\sqrt{n}}$ samleitin? (Vísbending: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} a_n$.)

374. Gerum ráð fyrir að $\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| \le r<1$ fyrir öll n. Er hægt að álykta að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin?

375. Látum $a_n = 2^{-[n/2]}$, þar sem $[x]$ er stærsta heiltalan sem er minni en eða jöfn x. Ákvarðið hvort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sé samleitin og rökstyðjið svarið.

Í eftirfarandi erfiðari verkefnum er notað alhæft kvótapróf til að ákvarða samleitni raða sem koma fyrir í tilteknum hagnýtingum. Prófin í þessum kafla, þar á meðal kvótaprófið og

rótarprófið, duga ekki til að ákvarða samleitni þessara raða. Samkvæmt prófinu gildir að ef $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}<1/2$, þá er $\sum a_n$ samleitin, en ef $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n}>1/2$, þá er $\sum a_n$ ósamleitin.

376. Látum $a_n=\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$. Útskýrið hvers vegna kvótaprófið getur ekki ákvarðað samleitni raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Notið að $1-1/(4k)$ vex með k til að meta $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}$.

377. Látum $a_n=\frac{1}{1+x}\frac{2}{2+x}\cdots\frac{n}{n+x}\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)\cdots(n+x)}$. Sýnið að $a_{2n}/a_n\le e^{-x/2}/2$. Fyrir hvaða $x>0$ leiðir alhæfða kvótaprófið til samleitni raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? (Vísbending: Ritið $2a_{2n}/a_n$ sem margfeldi n þátta sem hver er minni en $1/(1+x/(2n))$.)

378. Látum $a_n=\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$. Sýnið að $\frac{a_{2n}}{a_n}\to 0$ þegar $n\to\infty$.

Lykilhugtök

5

alsamleitni

Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ er samleitin, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sögð alsamleitin.

víxlmerkjaröð

Röð á forminu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ eða $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, þar sem $b_n\ge 0$, kallast víxlmerkjaröð.

próf fyrir víxlmerkjaraðir

Fyrir víxlmerkjaröð á öðru hvoru forminu gildir að ef $b_{n+1}\le b_n$ fyrir allar heiltölur $n\ge 1$ og $b_n\to 0$, þá er röðin samleitin.

jafnmunaruna

Runa þar sem mismunur tveggja samliggjandi liða er alltaf sá sami kallast jafnmunaruna.

takmörkuð að ofan

Runa (a_n) er takmörkuð að ofan ef til er fasti M þannig að $a_n\le M$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

takmörkuð að neðan

Runa (a_n) er takmörkuð að neðan ef til er fasti M þannig að $M\le a_n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

takmörkuð runa

Runa $\{a_n\}$ er takmörkuð ef til er fasti M þannig að $|a_n| \leq M$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n.

samanburðarprófið

Ef $0 \leq a_n \leq b_n$ fyrir öll $n \geq N$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin; ef $a_n \geq b_n \geq 0$ fyrir öll $n \geq N$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er ósamleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

skilyrt samleitni

Ef röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er samleitin en röðin $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er ósamleitin, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sögð skilyrt samleitin.

samleitni raðar

Röð er samleitin ef runa hlutsummanna er samleitin.

samleitin runa

Samleitin runa er runa $\{a_n\}$ þar sem til er rauntala L þannig að a_n er eins nálægt L og óskað er þegar n er nógu stórt.

ósamleitni raðar

Röð er ósamleitin ef runa hlutsummanna er ósamleitin.

sundurleitniprófið

Ef $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

ósamleitin runa

Runa sem er ekki samleitin er ósamleitin.

lokað form

Runu má skilgreina með lokuðu formi, þar sem $a_n = f(n)$.

kvótaruna

Runa $\{a_n\}$ þar sem hlutfallið a_{n+1}/a_n er hið sama fyrir allar jákvæðar heiltölur n kallast kvótaruna.

geómetrísk röð

Geómetrísk röð er röð sem má rita á forminu ∑ n = 1 ∞ a r n − 1 = a + a r + a r 2 + a r 3 + ….

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

harmoníska röðin

Harmoníska röðin er á forminu ∑ n = 1 ∞ 1/n = 1 + 1/2 + 1/3 + ….

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

vísibreyta

Neðri vísirinn sem notaður er til að skilgreina liði runu kallast vísibreyta.

óendanleg röð

Óendanleg röð er segð á forminu a 1 + a 2 + a 3 + … = ∑ n = 1 ∞ a n.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

heildisprófið

Fyrir röð $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ með jákvæða liði a_n, gildir að ef til er samfellt, fallandi fall f þannig að $f(n)=a_n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n, þá eru

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ og } \int_{1}^{\infty}f(x)\,dx$$

annaðhvort bæði samleitin eða bæði ósamleitin

samanburður með markgildi

Gerum ráð fyrir að $a_n, b_n \geq 0$ fyrir öll $n \geq 1$. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to L \neq 0$, þá eru $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ annaðhvort báðar samleitnar eða báðar ósamleitnar; ef $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to 0$ og $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ samleitin. Ef $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \to \infty$, og $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ er ósamleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ósamleitin.

markgildi runu

Rauntalan L sem runa stefnir á kallast markgildi rununnar.

einhalla runa

vaxandi eða fallandi runa

***p*-röð**

Röð á forminu $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$.

hlutsumma

k-ta hlutsumma óendanlegu raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er endanlega summan

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$$

kvótaprófið

Fyrir röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sem hefur enga núllliði látum við $\rho = \lim_{n \to \infty} \left| a_{n+1} / a_n \right|$; ef $0 \leq \rho < 1$, er röðin alsamleitin; ef $\rho > 1$, er röðin ósamleitin; ef $\rho = 1$, gefur prófið enga niðurstöðu.

rakningarvensl

Í rakningarvenslum er liður a_n í runu skilgreindur út frá fyrri liðum rununnar.

skekkjumat

Fyrir röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ með jákvæða liði a_n og samfellt, fallandi fall f þannig að $f(n) = a_n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n, uppfyllir skekkjan $R_N = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n$ eftirfarandi mat:

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

rótarprófið

Fyrir röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, látum við $\rho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| a_n \right|}$; ef $0 \leq \rho < 1$, er röðin alsamleitin; ef $\rho > 1$, er röðin ósamleitin; ef $\rho = 1$, gefur prófið enga niðurstöðu.

runa

Raðaður listi talna á forminu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er runa.

kíkisröð

Kíkisröð er röð þar sem flestir liðir styttast út í hverri hlutsummu.

liður

Talan a_n í rununni $\{a_n\}$ kallast n-ti liður rununnar.

ótakmörkuð runa

Runa sem er ekki takmörkuð kallast ótakmörkuð.

Lykiljöfnur

Harmoníska röðin	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$
Summa geómetrískrar raðar	$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ fyrir $\lvert r \rvert < 1$
Sundurleitniprófið	Ef $a_n \not\to 0$ þegar $n \to \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er ósamleitin.
***p*-röð**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{er samleitin ef } p > 1 \\ \text{er ósamleitin ef } p \leq 1 \end{cases}$
Skekkjumat samkvæmt heildisprófinu	$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$
Víxlmerkjaröð	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ eða $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} b_n = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$

5

Meginatriði

5.1 Runur

- Til að ákvarða samleitni runu sem gefin er með lokuðu formi $a_n = f(n)$, notum við reiknireglur markgilda falla.
- Ef $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ eru samleitnar runur sem stefna á A og B, í sömu röð, og c er einhver rauntala, þá stefnir runan $\{c\,a_n\}$ á $c \cdot A$, runurnar $\{a_n \pm b_n\}$ stefna á $A \pm B$, runan $\{a_n \cdot b_n\}$ stefnir á $A \cdot B$, og runan $\{a_n / b_n\}$ stefnir á A/B, að því gefnu að $B \neq 0$.
- Ef runa er takmörkuð og einhalla, er hún samleitin, en ekki eru allar samleitnar runur einhalla.
- Ef runa er ótakmörkuð, er hún ósamleitin, en ekki eru allar ósamleitnar runur ótakmarkaðar.
- Kvótarunan $\{r^n\}$ er samleitin þá og því aðeins að $\lvert r \rvert < 1$ eða $r = 1$.

5.2 Óendanlegar raðir

- Um óendanlegu röðina

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

  og samsvarandi runu hlutsummanna $\left(S_k\right)$, þar sem

  $$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

  gildir að röðin er samleitin þá og því aðeins að runan $\left(S_k\right)$ sé samleitin.

- Geómetríska röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ er samleitin ef $|r|<1$ og ósamleitin ef $|r| \geq 1$. Fyrir $|r|<1$,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

- Harmoníska röðin

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

  er ósamleitin.

- Röð á forminu $\sum_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}] = [b_1 - b_2] + [b_2 - b_3] + [b_3 - b_4] + \cdots + [b_n - b_{n+1}] + \cdots$
  er kíkisröð. k-ta hlutsumma raðarinnar er $S_k = b_1 - b_{k+1}$. Röðin er samleitin þá og því aðeins að $\lim_{k \to \infty} b_{k+1}$ sé til. Þá gildir

  $$\sum_{n=1}^{\infty} [b_n - b_{n+1}] = b_1 - \lim_{k \to \infty} \left(b_{k+1}\right).$$

5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið

- Ef $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, þá er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.
- Ef $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, getur röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ verið samleitin eða ósamleitin.

- Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er röð með jákvæða liði a_n og f er samfellt, fallandi fall þannig að $f(n)=a_n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n, þá eru

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ og } \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

  annaðhvort bæði samleit eða bæði ósamleit. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er jafnframt samleitin, þá nálgar N-ta hlutsumman S_N summuna með skekkju R_N, þar sem $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_N < \int_N^{\infty} f(x)\,dx$.
- p-röðin $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ er samleitin ef $p>1$ og ósamleitin ef $p \le 1$.

5.4 Samanburðarpróf

- Samanburðarprófin eru notuð til að ákvarða samleitni eða ósamleitni raða með jákvæða liði.
- Þegar samanburðarprófin eru notuð er röð $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oft borin saman við geómetríska röð eða p-röð.

5.5 Víxlmerkjaraðir

- Fyrir víxlmerkjaröð $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$, ef $b_{k+1} \le b_k$ fyrir öll k og $b_k \to 0$ þegar $k \to \infty$, þá er röðin samleitin.
- Ef $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

5.6 Kvóta- og rótarpróf

- Í kvótaprófinu skoðum við

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Ef $\rho < 1$, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alsamleitin. Ef $\rho > 1$, er röðin ósamleitin. Ef $\rho = 1$, gefur prófið engar upplýsingar. Prófið hentar vel fyrir raðir þar sem liðirnir innihalda aðfeldi.

- Í rótarprófinu skoðum við

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ef $\rho < 1$, er röðin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alsamleitin. Ef $\rho > 1$, er röðin ósamleitin. Ef $\rho = 1$, gefur prófið engar upplýsingar. Rótarprófið hentar vel fyrir raðir þar sem liðirnir innihalda veldi.

- Þegar röð líkist geómetrískri röð eða p − röð, skuluð þið nota annað samanburðarprófanna.

Yfirlitsverkefni

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið með sönnun eða gagndæmi.

379. Ef $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

380. Ef $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ósamleitin.

381. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ samleitin.

382. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ er samleitin, þá er $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n a_n$ samleitin.

Er runan takmörkuð, einhalla og samleitin eða ósamleitin? Ef hún er samleitin, finnið markgildið.

383.

$$a_n = \frac{3 + n^2}{1 - n}$$

384.

$$a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

385.

$$a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

386.

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{5^n}$$

387.

$$a_n = \frac{\ln(\cos n)}{n}$$

Er röðin samleitin eða ósamleitin?

388.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+4}$$

389.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

390.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

391.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$$

392.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(n+1/n)}$$

Er röðin samleitin eða ósamleitin? Ef hún er samleitin, er hún þá alsamleitin?

393.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

394.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n}$$

395.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$$

396.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

397.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) e^{-n}$$

Reiknið

398.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+4}}{7^n}$$

399.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

400. Samkvæmt indverskri þjóðsögu fann stærðfræðingur upp skák fyrir konung. Konungurinn hafði svo gaman af leiknum að hann leyfði stærðfræðingnum að velja sér hvaða laun sem hann vildi. Stærðfræðingurinn bað um eitt hrísgrjón fyrir fyrsta reit skákborðsins, tvö hrísgrjón fyrir annan reitinn, fjögur fyrir þriðja reitinn og svo framvegis. Finnið nákvæma segð fyrir heildarfjölda hrísgrjónanna sem stærðfræðingurinn fór fram á. Gerum ráð fyrir að 40,000 hrísgrjón séu í 1 kílógrammi og 1000 kílógrömm í 1 tonni. Hversu mörg tonn af hrísgrjónum reyndi stærðfræðingurinn að fá?

Næstu verkefni fjalla um einfalt stofnlíkan fyrir húsflugur sem lýsa má með rakningarformúlunni $x_{n+1} = b\,x_n$, þar sem x_n er fjöldi húsflugna í kynslóð n, en b er meðalfjöldi afkvæma hverrar húsflugu sem lifa fram á næstu kynslóð. Gerum ráð fyrir upphafsstofni x_0.

401. Finnið $\lim_{n\to\infty} x_n$ ef $b>1$, $b<1$, og $b=1$.

402. Finnið segð fyrir $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ sem fall af b og x_0. Hvað táknar segðin í þessu samhengi?

403. Ef $b=\frac{3}{4}$ og $x_0=100$, finnið þá S_{10} og $\lim_{n\to\infty} S_n$

404. Fyrir hvaða gildi b er röðin samleitin og fyrir hvaða gildi er hún ósamleitin? Að hvaða gildi stefnir röðin?

6. KAFLI

Veldaraðir



Mynd 6.1 Ef þú vinnur í happdrætti, færðu meira fé með því að taka vinninginn út í einu lagi eða þiggja fastar greiðslur yfir tiltekið tímabil? (mynd: verk Robert Huffstutter á Flickr, aðlagað)

Efnisyfirlit kaflans

- 6.1 Veldaraðir og föll
- 6.2 Eiginleikar veldaraða
- 6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir
- 6.4 Vinna með Taylor-raðir

Inngangur

Þegar einstaklingur vinnur í happdrætti getur hann stundum valið milli þess að fá allan vinninginn greiddan í einu lagi og þess að fá lægri greiðslur með föstu millibili. Til dæmis gætir þú valið milli þess að fá 20 milljónir evra í dag og þess að fá 1,5 milljónir evra á ári næstu 20 árin. Hvort er hagstæðara? Vissulega jafngilda 1,5 milljónir evra á ári í 20 ár samtals 30 milljónum evra. Ef þú fengir 20 milljónir evra í dag gætir þú hins vegar fjárfest féð.

En hvað ef valið stæði milli þess að fá 1 milljón evra á ári um ókomna tíð (og greiðslurnar gengju til erfingja þinna) og þess að fá 20 milljónir evra í dag? Hvort væri hagstæðara? Til að svara þessum spurningum þarftu að kunna að nota óendanlegar raðir til að reikna núvirði reglubundinna greiðslna (sjá dæmi 6.7).

Óendanleg röð á forminu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kallast veldaröð. Liðirnir innihalda breytuna x og því má nota veldaraðir til að skilgreina föll. Með þeim má tákna tiltekin föll. Þær eru líka mikilvægar af því að með þeim má rita föll sem aðeins er hægt að setja fram sem „óendanlegar margliður“. Auk þess er auðvelt að deilda og heilda veldaraðir. Því nýtast þær vel til að leysa deildajöfnur og heilda flókin föll. Einnig má stýfa óendanlega röð og fá þannig endanlega margliðu sem nota má til að nálga fallgildi. Veldaraðir nýtast á ýmsum sviðum, þar á meðal í eðlisfræði, efnafræði, líffræði og hagfræði. Í þessum kafla sjáum við að ef föll eru sett fram sem veldaraðir getum við leyst stærðfræðileg vandamál sem ekki verða leyst með öðrum aðferðum.

6.1 Veldaraðir og föll

6

NÁMSMARKMIÐ

- 6.1.1 Þekkja veldaraðir og geta gefið dæmi um þær.
- 6.1.2 Ákvarða samleitnigeisla og samleitnibil veldaraðar.
- 6.1.3 Nota veldaröð til að setja fram fall.

Veldaröð er röð þar sem liðirnir innihalda breytu. Nánar tiltekið: Ef breytan er x innihalda allir liðir raðarinnar veldi af x. Því má líta á veldaröð sem óendanlega margliðu. Veldaraðir eru notaðar til að setja fram algeng föll og einnig til að skilgreina ný föll. Í þessum undirkafla skilgreinum við veldaraðir og sýnum hvernig ákvarða má hvenær veldaröð er samleitin og hvenær hún er ósamleitin. Við sýnum einnig hvernig setja má tiltekin föll fram með veldaröðum.

Almennt form veldaraðar

Röð á forminu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

þar sem x er breyta og stuðlarnir c_n eru fastar tölur, kallast veldaröð. Röðin

$$1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

er dæmi um veldaröð. Þar sem þessi röð er geómetrísk röð með hlutfallstöluna $r=x$, vitum við að hún er samleitin ef $|x|<1$ og ósamleitin ef $|x|\geq 1$.

SKILGREINING

Röð á forminu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=c_0+c_1 x+c_2 x^2+\cdots$$

(6.1)

er veldaröð með miðju í $x=0$. Röð á forminu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

(6.2)

er veldaröð með miðju í $x=a$.

Til að gera þessa skilgreiningu nákvæma gerum við ráð fyrir að $x^0=1$ og $(x-a)^0=1$ jafnvel þegar $x=0$ og $x=a$, eftir því sem við á.

Raðirnar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

og að

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n=1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\cdots$$

eru báðar veldaraðir með miðju í $x=0$. Röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}=1+\frac{x-2}{2\cdot 3}+\frac{(x-2)^2}{3\cdot 3^2}+\frac{(x-2)^3}{4\cdot 3^3}+\cdots$$

er veldaröð með miðju í $x=2$.

Samleitni veldaraða

Þar sem liðir veldaraðar innihalda breytuna x getur röðin verið samleitin fyrir sum gildi x en ósamleitin fyrir önnur gildi x. Fyrir veldaröð með miðju í $x=a$, er gildi raðarinnar þegar $x=a$ jafnt c_0. Veldaröð er því alltaf samleitin í miðju sinni. Sumar veldaraðir eru aðeins samleitnar

fyrir þetta eina gildi x. Flestar veldaraðir eru þó samleitnar fyrir fleiri en eitt gildi x. Þá er veldaröðin annaðhvort samleitin fyrir allar rauntölur x eða fyrir öll x á endanlegu bili.

Geómetríska röðin $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er til dæmis samleitin fyrir öll x á bilinu $(-1,1)$, en ósamleitin fyrir öll x utan þess bils. Nú tökum við saman þessa þrjá möguleika fyrir almenna veldaröð.

SETNING 6.1

Samleitni veldaraða

Skoðum veldaröðina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Hún hefur nákvæmlega einn af eftirfarandi eiginleikum:

i. Röðin er samleitin þegar $x=a$ og ósamleitin fyrir öll $x \neq a$.
ii. Röðin er samleitin fyrir allar rauntölur x.
iii. Til er rauntala $R>0$ þannig að röðin er samleitin ef $|x-a|<R$ og ósamleitin ef $|x-a|>R$. Fyrir þau gildi x þar sem $|x-a|=R$, getur röðin ýmist verið samleitin eða ósamleitin.

Sönnun

Gerum ráð fyrir að veldaröðin hafi miðju í $a=0$. (Fyrir röð með miðju í a-gildi sem er ekki núll fæst niðurstaðan með því að láta $y=x-a$ og skoða röðina $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n$.) Fyrst þurfum við að sanna eftirfarandi staðreynd:

Ef til er rauntala $d \neq 0$ þannig að $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ alsamleitin fyrir öll x sem uppfylla $|x|<|d|$.

Þar sem $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ er samleitin gildir um n-ta liðinn að $c_n d^n \to 0$ þegar $n \to \infty$. Því er til heiltala N þannig að $|c_n d^n| \leq 1$ fyrir öll $n \geq N$. Skrifum nú

$$|c_n x^n| = |c_n d^n| \left|\frac{x}{d}\right|^n,$$

fæst að fyrir öll $n \geq N$,

$$|c_n x^n| \leq \left|\frac{x}{d}\right|^n.$$

Raðirnar

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{x}{d}\right|^n$$

er geómetrísk röð sem er samleitin ef $\left|\frac{x}{d}\right|<1$. Af samanburðarprófinu leiðir því að $\sum_{n=N}^{\infty} c_n x^n$ er einnig samleitin þegar $|x|<|d|$. Þar sem bæta má endanlegum fjölda liða við samleitna röð fæst að $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er samleitin þegar $|x|<|d|$.

Með þessari niðurstöðu getum við nú sannað setninguna. Skoðum röðina

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

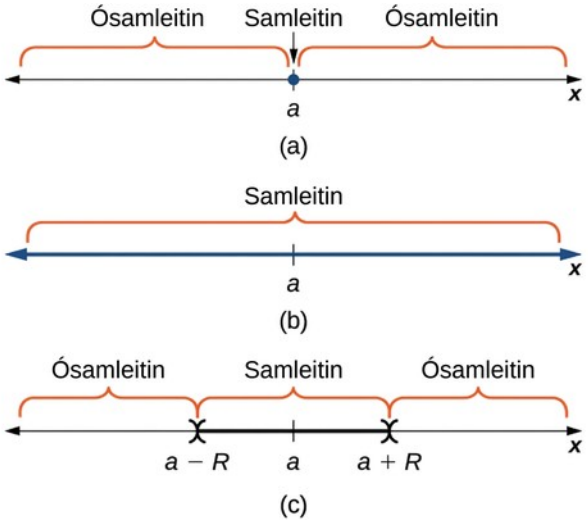
og látum S vera mengi þeirra rauntalna sem röðin er samleitin fyrir. Gerum ráð fyrir að mengið $S=\{0\}$. Þá fellur röðin undir tilvik i. Gerum næst ráð fyrir að S sé mengi allra rauntalna. Þá fellur röðin undir tilvik ii. Gerum loks ráð fyrir að $S\neq\{0\}$ en S sé ekki mengi allra rauntalna. Þá er til rauntala $x*\neq 0$ sem röðin er ekki samleitin fyrir. Röðin getur því ekki verið samleitin fyrir neitt x sem uppfyllir $|x|>|x*|$. Mengið S hlýtur þar af leiðandi að vera takmarkað og á sér því minnsta efra mark. (Þetta leiðir af frumsendunni um efra mark fyrir rauntölur, sem er utan efnis þessarar bókar en um hana er fjallað í námskeiðum í raungreiningu.) Köllum minnsta efra markið R. Vegna þess að $S\neq\{0\}$, fæst $R>0$. Röðin er því samleitin fyrir öll x sem uppfylla $|x|<R$, og fellur undir tilvik iii.

□

Ef röð $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ fellur undir tilvik iii í setningunni um samleitni veldaraða, þá er hún samleitin fyrir öll x sem uppfylla $|x-a|<R$ fyrir eitthvert $R>0$, og ósamleitin fyrir öll x sem uppfylla $|x-a|>R$. Röðin getur verið samleitin eða ósamleitin fyrir þau gildi x þar sem $|x-a|=R$. Mengi þeirra gilda x sem röðin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ er samleitin fyrir kallast samleitnibil. Þar sem röðin er ósamleitin fyrir öll gildi x þar sem $|x-a|>R$, er lengd bilsins 2 R og geisli þess því R. Gildið R kallast samleitnigeisli. Röðin $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er til dæmis samleitin fyrir öll gildi x á bilinu $(-1,1)$ og ósamleitin fyrir öll x sem uppfylla $|x|\geq 1$, og því er samleitnibil hennar $(-1,1)$. Þar sem lengd bilsins er 2 er samleitnigeislinn 1.

SKILGREINING

Skoðum veldaröðina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$. Mengi þeirra rauntalna x sem röðin er samleitin fyrir kallast samleitnibil. Ef til er rauntala $R>0$ þannig að röðin er samleitin þegar $|x-a|<R$ og ósamleitin þegar $|x-a|>R$, er R samleitnigeislinn. Ef röðin er aðeins samleitin þegar $x=a$, segjum við að samleitnigeislinn sé $R=0$. Ef röðin er samleitin fyrir allar rauntölur x, segjum við að samleitnigeislinn sé $R=\infty$ (mynd 6.2).



Mynd 6.2 Fyrir röðina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ sýnir mynd (a) samleitnigeislann $R=0$, mynd (b) sýnir samleitnigeislann $R=\infty$, og mynd (c) sýnir samleitnigeislann R. Á mynd (c) getur röðin ýmist verið samleitin eða ósamleitin í endapunktunum $x=a+R$ og $x=a-R$.

Til að ákvarða samleitnibil veldaraðar notum við yfirleitt kvótaprófið. Í dæmi 6.1 sýnum við möguleikana þrjá sem sjást á mynd 6.2.

DÆMI 6.1

Ákvörðun samleitnibils og samleitnigeisla

Finnið samleitnibil og samleitnigeisla hverrar raðar hér á eftir.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$

c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$

Lausn

a. Til að kanna samleitni beitum við kvótaprófinu. Við fáum

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

fyrir öll gildi x. Röðin er því samleitin fyrir allar rauntölur x. Samleitnibilið er $(-\infty,\infty)$ og samleitnigeislinn er $R=\infty$.

b. Beitum kvótaprófinu. Fyrir $x\neq 0$, sjáum við að

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}|(n+1)x| \\ &= |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Röðin er því ósamleitin fyrir öll $x\neq 0$. Þar sem röðin hefur miðju í $x=0$, hlýtur hún að vera samleitin þar og er því aðeins samleitin þegar $x=0$. Samleitnibilið er eina gildið $x=0$ og samleitnigeislinn er $R=0$.

c. Til að beita kvótaprófinu skoðum við

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)3^n}{(x-2)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)(n+1)}{3(n+2)}\right| \\ &= \frac{|x-2|}{3}.\end{aligned}$$

Hlutfallið $\rho<1$ ef $|x-2|<3$. Þar sem $|x-2|<3$ leiðir af sér $-3<x-2<3$, er röðin alsamleitin ef $-1<x<5$. Hlutfallið $\rho>1$ ef $|x-2|>3$. Röðin er því ósamleitin ef $x<-1$ eða $x>5$. Kvótaprófið gefur enga niðurstöðu ef $\rho=1$. Hlutfallið $\rho=1$ þá og því aðeins að $x=-1$ eða $x=5$. Við þurfum að prófa þessi gildi x sérstaklega. Þegar $x=-1$, er röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Þetta er víxlmerkta harmoníska röðin og því er hún samleitin. Röðin er þannig samleitin þegar $x = -1$. Þegar $x = 5$, er röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

Þetta er harmoníska röðin, sem er ósamleitin. Veldaröðin er því ósamleitin þegar $x = 5$. Samleitnibilið er þar af leiðandi $[-1, 5)$ og samleitnigeislinn er $R = 3$.

STÖÐUMAT 6.1

Finnið samleitnibil og samleitnigeisla raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Framsetning falla með veldaröðum

Það er öflugt verkfæri að geta sett fall fram sem „óendanlega margliðu“. Margliðuföll eru auðveldust allra falla í greiningu, því þau byggjast aðeins á grunnaðgerðunum samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu. Ef við getum sett flókið fall fram sem óendanlega margliðu getum við notað margliðuframsetninguna til að deilda eða heilda fallið. Auk þess getum við notað stýfða útgáfu margliðunnar til að nálga fallgildi. Spurningin er því: Hvenær getum við sett fall fram með veldaröð?

Skoðum aftur geómetrísku röðina

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

(6.3)

Rifjum upp að geómetríska röðin

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

er samleitin þá og því aðeins að $|r| < 1$. Þá stefnir hún á $\frac{a}{1-r}$. Ef $|x| < 1$, er röðin í dæmi 6.3 því samleitin að $\frac{1}{1-x}$ og við ritum

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \text{ fyrir } |x| < 1.$$

Við getum því sett fallið $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fram með veldaröðinni

$1+x+x^2+x^3+\cdots$ þegar $|x|<1$.

Nú sýnum við myndrænt hvernig röðin setur fram fallið $f(x)=\frac{1}{1-x}$ með því að bera graf f saman við gröf nokkurra hlutsumma óendanlegu raðarinnar.

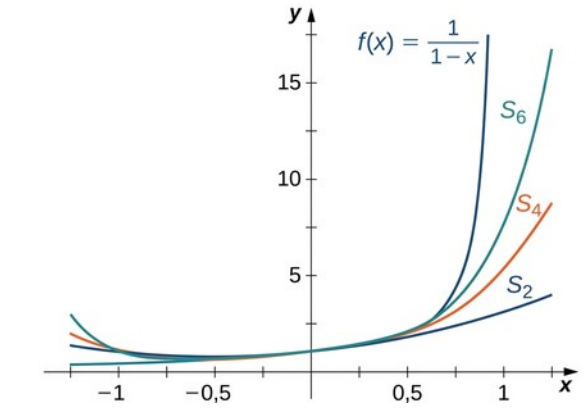
DÆMI 6.2

Graf falls og hlutsummur veldaraðar þess

Teiknið graf $f(x)=\frac{1}{1-x}$ og gröf samsvarandi hlutsumma $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} x^n$ fyrir $N=2,4,6$ á bilinu $(-1,1)$. Lýsið nálguninni S_N þegar N stækkar.

Lausn

Af grafinu á mynd 6.3 sést að þegar N stækkar verður S_N æ betri nálgun á $f(x)=\frac{1}{1-x}$ fyrir x á bilinu $(-1,1)$.



Mynd 6.3 Grafið sýnir fall og þrjár nálganir á því með hlutsummum veldaraðar.

STÖÐUMAT 6.2

Teiknið graf $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ og gröf samsvarandi hlutsumma $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} x^{2n}$ fyrir $N=2,4,6$ á bilinu $(-1,1)$.

Næst skoðum við föll sem innihalda segð sem svipar til summu geómetrískrar raðar og sýnum hvernig setja má þessi föll fram með veldaröðum.

DÆMI 6.3

Fall sett fram með veldaröð

Setjið fram með veldaröð hvert eftirfarandi fall f. Finnið samleitnibilið.

a. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$

b. $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$

Lausn

a. Þekkja má fallið f sem summu geómetrískrar raðar því

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{1-\left(-x^3\right)}.$$

Notum þá staðreynd að þegar $|r|<1$, $\dfrac{a}{1-r}$ summa raðarinnar

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=a+ar+ar^2+\cdots,$$

en sú röð er geómetrísk. Þá sjáum við að þegar $\left|-x^3\right|<1$,
gildir

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{1+x^3} &= \tfrac{1}{1-(-x^3)}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^3\right)^n\\ &=1-x^3+x^6-x^9+\cdots.\end{aligned}$$

Þar sem þessi röð er samleitin þá og því aðeins að $\left|-x^3\right|<1$, er samleitnibilið $(-1,1)$, og við fáum

$$\frac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6-x^9+\cdots \text{ fyrir } |x|<1.$$

b. Þetta fall er ekki nákvæmlega á formi summu geómetrískrar raðar. Með smávegis algebru má þó tengja f við geómetríska röð. Með því að taka 4 út fyrir sviga úr liðunum tveimur í nefnaranum fáum við

6

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4-x^2} &= \frac{x^2}{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} \\ &= \frac{x^2}{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}.\end{aligned}$$

Því er

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4-x^2} &= \frac{x^2}{4\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)} \\ &= \frac{\frac{x^2}{4}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

Röðin er samleitin svo lengi sem $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2\right| < 1$ (athugið að þegar $\left|\left(\frac{x}{2}\right)^2\right| = 1$ er röðin ekki samleitin). Með því að leysa þessa ójöfnu fáum við að samleitnibilið er $(-2, 2)$ og að

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{4^{n+1}} \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2} + \frac{x^6}{4^3} + \cdots\end{aligned}$$

þegar $|x| < 2$.

6

STÖÐUMAT 6.3

Setjið fallið $f(x) = \frac{x^3}{2-x}$ fram með veldaröð og finnið samleitnibilið.

Í þeim undirköflum kaflans sem eftir eru sýnum við hvernig leiða má út veldaraðaframsetningar margra annarra falla. Við sýnum líka hvernig nota má þessar framsetningar til að reikna gildi ýmissa falla, deilda þau og heilda.

Æfingar í undirkafla 6.1

Segið í eftirfarandi verkefnum hvort hver staðhæfing sé sönn. Ef hún er ósönn, gefið þá dæmi sem sýnir það.

1. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ er samleitin, þá gildir $a_n x^n \to 0$ þegar $n \to \infty$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ er samleitin þegar $x=0$ fyrir allar rauntölur a_n.

3. Ef gefin er runa a_n, er alltaf til eitthvert $R>0$, sem kann að vera mjög lítið, þannig að $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin á $(-R, R)$.

4. Ef $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ hefur samleitnigeislann $R>0$ og $|b_n| \leq |a_n|$ fyrir öll n, þá er samleitnigeisli $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ að minnsta kosti R.

5. Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ sé samleitin þegar $x=6$. Í hverjum af eftirfarandi punktum gæti röðin verið ósamleitin? Notið þá staðreynd að ef $\sum a_n (x-c)^n$ er samleitin fyrir x, þá er hún samleitin í öllum punktum sem eru nær c en x.

a. $x=1$
b. $x=2$
c. $x=3$
d. $x=0$
e. $x=5{,}99$
f. $x=0{,}000001$

6. Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ sé samleitin þegar $x=-2$. Í hverjum af eftirfarandi punktum hlýtur röðin einnig að vera samleitin? Notið þá staðreynd að ef $\sum a_n (x-c)^n$ er samleitin fyrir x, þá er hún samleitin í öllum punktum sem eru nær c en x.

6

a. $x=2$
b. $x=-1$
c. $x=-3$
d. $x=0$
e. $x=0{,}99$
f. $x=0{,}000001$

Gerum í eftirfarandi verkefnum ráð fyrir að $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ þegar $n \to \infty$. Finnið samleitnigeisla hverrar raðar.

Z.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n x^n$$

8.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{2^n}$$

9.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pi^n x^n}{e^n}$$

10.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (-1)^n x^n}{10^n}$$

11.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n x^{2n}$$

12.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-4)^n x^{2n}$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum samleitnigeislann R og samleitnibil $\sum a_n x^n$ fyrir gefna stuðla a_n.

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$$

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$$

16.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{e^n}$$

17.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

18.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^e x^k}{e^k}$$

19.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k x^k}{k^\pi}$$

20.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

21.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n!}$$

22.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\ln(2n)}$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum samleitnigeisla hverrar raðar.

23.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 x^k}{(2k)!}$$

24.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{n^{2n}}$$

25.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} x^k$$

26.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}{(2k)!} x^k$$

27.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$$ þar sem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

28.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n\, x^n$$

Notið í eftirfarandi verkefnum kvótaprófið til að ákvarða samleitnigeisla hverrar raðar.

29.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$$

30.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}(n!)^3}{(3n)!} x^n$$

31.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

32.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} x^n$$

Í eftirfarandi verkefnum er gefið að $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ sé samleitin á $(-1,1)$, og þið skuluð finna veldaröð hvers falls með gefna miðju a og ákvarða samleitnibil hennar.

33. $f(x) = \frac{1}{x}; a = 1$ (Vísbending: $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)}$)

34.

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}; a = 0$$

35.

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}; a = 0$$

36.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2};a=0$$

37.

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2};a=0$$

38.

$$f(x)=\frac{1}{2-x};a=1$$

39.

$$f(x)=\frac{1}{1-2x};a=0.$$

40.

$$f(x)=\frac{1}{1-4x^2};a=0$$

41.

$$f(x)=\frac{x^2}{1-4x^2};a=0$$

42.

$$f(x)=\frac{x^2}{5-4x+x^2};a=2$$

6

Notið næsta verkefni til að finna samleitnigeisla raðanna í verkefnunum þar á eftir.

43. Útskýrið hvers vegna, ef $\left|a_n\right|^{1/n}\to r>0$, þá gildir $\left|a_n x^n\right|^{1/n}\to |x|r<1$ þegar $|x|<\frac{1}{r}$ og hvers vegna samleitnigeisli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ er því $R=\frac{1}{r}$.

44.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$$

45.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k x^k$$

46.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k^2-1}{k^2+3}\right)^k x^k$$

47.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\left(n^{1/n}-1\right)^n x^n$$

48. Gerum ráð fyrir að $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og að $a_n=0$ þegar n er slétt tala. Útskýrið hvers vegna $p(x)=-p(-x)$.

49. Gerum ráð fyrir að $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og að $a_n=0$ þegar n er oddatala. Útskýrið hvers vegna $p(x)=p(-x)$.

50. Gerum ráð fyrir að $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin á $(-1,1]$. Finnið samleitnibil $p(Ax)$.

51. Gerum ráð fyrir að $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin á $(-1,1]$. Finnið samleitnibil $p(2x-1)$.

Gerum í eftirfarandi verkefnum ráð fyrir að $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uppfylli $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ þar sem $a_n\geq 0$ fyrir hvert n. Segið hvort hver röð sé samleitin á öllu bilinu $(-1,1)$, eða hvort upplýsingar skorti til að draga ályktun. Notið samanburðarprófið þegar það á við.

52.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$$

53.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$$

54.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^n \left(\textit{Vísbending}: x=\pm\sqrt{x^2}\right)$$

55. $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n^2} x^{n^2}$ (Vísbending: Látið $b_k=a_k$ ef $k=n^2$ fyrir eitthvert n, en annars $b_k=0$.)

56. Gerum ráð fyrir að $p(x)$ sé margliða af stigi N. Finnið samleitnigeisla og samleitnibil $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n$.

57. **[T]** Teiknið gröf $\frac{1}{1-x}$ og hlutsummanna $S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$ fyrir $n = 10, 20, 30$ á bilinu $[-0{,}99; 0{,}99]$. Lýsið nálgun $\frac{1}{1-x}$ með S_N nálægt $x = -1$ og $x = 1$ þegar N stækkar.

58. **[T]** Teiknið gröf $-\ln(1-x)$ og hlutsummanna $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$ fyrir $n = 10, 50, 100$ á bilinu $[-0{,}99; 0{,}99]$. Lýsið hegðun summanna nálægt $x = -1$ og $x = 1$ þegar N stækkar.

59. **[T]** Teiknið gröf hlutsummanna $S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n^2}$ fyrir $n = 10, 50, 100$ á bilinu $[-0{,}99; 0{,}99]$. Lýsið hegðun summanna nálægt $x = -1$ og $x = 1$ þegar N stækkar.

60. **[T]** Teiknið gröf hlutsummanna $S_N = \sum_{n=1}^{N} \sin n\, x^n$ fyrir $n = 10, 50, 100$ á bilinu $[-0{,}99; 0{,}99]$. Lýsið hegðun summanna nálægt $x = -1$ og $x = 1$ þegar N stækkar.

61. **[T]** Teiknið gröf hlutsummanna $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ fyrir $n = 3, 5, 10$ á bilinu $[-2\pi, 2\pi]$. Lýsið hvernig gröfin nálga $\sin x$ þegar N stækkar.

62. **[T]** Teiknið gröf hlutsummanna $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ fyrir $n = 3, 5, 10$ á bilinu $[-2\pi, 2\pi]$. Lýsið hvernig gröfin nálga $\cos x$ þegar N stækkar.

6

6.2 Eiginleikar veldaraða

NÁMSMARKMIÐ

- 6.2.1 Sameina veldaraðir með samlagningu eða frádrætti.
- 6.2.2 Mynda nýja veldaröð með því að margfalda með veldi af breytunni eða með fasta, eða með innsetningu.
- 6.2.3 Margfalda saman tvær veldaraðir.
- 6.2.4 Deilda og heilda veldaraðir lið fyrir lið.

Í fyrri undirkaflanum um veldaraðir og föll sýndum við hvernig setja má tiltekin föll fram með veldaröðum. Í þessum undirkafla fjöllum við um hvernig sameina, deilda eða heilda má veldaraðir til að mynda nýjar veldaraðir. Þetta nýtist einkum af tveimur ástæðum. Í fyrsta lagi getum við fundið veldaraðaframsetningar tiltekinna grunnfalla með því að rita þau með

föllum sem hafa þekkta veldaröð. Ef veldaraðaframsetning $f(x)=\frac{1}{1-x}$, er þekkt getum við til dæmis fundið veldaraðaframsetningu $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. Í öðru lagi getum við með nýjum veldaröðum skilgreint ný föll sem ekki er hægt að rita með grunnföllum. Þetta kemur sérstaklega að gagni við að leysa deildajöfnur sem hafa enga lausn sem hægt er að setja fram með grunnföllum.

Sameining veldaraða

Ef tvær veldaraðir hafa sama samleitnibil getum við lagt þær saman eða dregið aðra frá hinni og þannig myndað nýja veldaröð með sama samleitnibil. Á sama hátt getum við margfaldað veldaröð með veldi af x eða reiknað gildi hennar í x^m fyrir jákvæða heiltölu m og þannig myndað nýja veldaröð. Þannig má finna veldaraðaframsetningar tiltekinna falla út frá veldaraðaframsetningum annarra falla. Þar sem við þekkjum til dæmis veldaraðaframsetningu $f(x)=\frac{1}{1-x}$, getum við fundið veldaraðaframsetningar skyldra falla, svo sem

$$y=\frac{3x}{1-x^2} \text{ og } y=\frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Í setningunni um sameiningu veldaraða setjum við fram niðurstöður um samlagningu og frádrátt veldaraða, samsetningu veldaraðar og margföldun veldaraðar með veldi af breytunni. Til einföldunar setjum við setninguna fram fyrir veldaraðir með miðju í $x=0$. Sambærilegar niðurstöður gilda um veldaraðir með miðju í $x=a$.

SETNING 6.2

Sameining veldaraða

Gerum ráð fyrir að veldaraðirnar tvær $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ séu samleitnar að föllunum f og g, í sömu röð, á sameiginlegu bili I.

i. Veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n x^n \pm d_n x^n\right)$ er samleitin að $f \pm g$ á I.

ii. Fyrir sérhverja heiltölu $m \geq 0$ og sérhverja rauntölu b er veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} b\,x^m c_n x^n$ samleitin að $b\,x^m f(x)$ á I.

iii. Fyrir sérhverja heiltölu $m \geq 0$ og sérhverja rauntölu b er röðin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(b\,x^m\right)^n$ samleitin að $f\left(b\,x^m\right)$ fyrir öll x þannig að $b\,x^m$ tilheyri I.

Sönnun

Við sönnum lið i fyrir röðina $\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n x^n+d_n x^n\right)$. Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ séu samleitnar að föllunum f og g, í sömu röð, á bilinu I. Látum x vera punkt í I og látum $S_N(x)$ og $T_N(x)$ tákna N-tu hlutsummur raðanna $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, í sömu röð. Þá er runan $\left\{S_N(x)\right\}$ samleitin að $f(x)$ og runan $\left\{T_N(x)\right\}$ samleitin að $g(x)$. Jafnframt er N-ta hlutsumma $\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n x^n+d_n x^n\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left(c_n x^n+d_n x^n\right) &= \sum_{n=0}^{N} c_n x^n+\sum_{n=0}^{N} d_n x^n \\ &= S_N(x)+T_N(x).\end{aligned}$$

Þar sem

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left(S_N(x)+T_N(x)\right) &= \lim_{N\to\infty} S_N(x)+\lim_{N\to\infty} T_N(x) \\ &= f(x)+g(x),\end{aligned}$$

ályktum við að röðin $\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n x^n+d_n x^n\right)$ sé samleitin að $f(x)+g(x)$.

□

Við skoðum margfeldi veldaraða í síðari setningu. Fyrst sýnum við nokkra notkunarmöguleika setningarinnar um sameiningu veldaraða og hvernig finna má samleitnibil veldaraðar þegar samleitnibil skyldrar veldaraðar er þekkt.

DÆMI 6.4

Sameining veldaraða

Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé veldaröð með samleitnibilið $(-1,1)$, og að $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sé veldaröð með samleitnibilið $(-2,2)$.

a. Finnið samleitnibil raðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n+b_n x^n\right)$.

b. Finnið samleitnibil raðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n x^n$.

Lausn

a. Þar sem bilið $(-1,1)$ er sameiginlegt samleitnibil raðanna $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, er samleitnibil raðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n + b_n x^n\right)$ jafnt $(-1,1)$.

b. Þar sem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er veldaröð með miðju í núlli og samleitnigeisla 1 er hún samleitin fyrir öll x á bilinu $(-1,1)$. Samkvæmt setningunni um sameiningu veldaraða er röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (3x)^n$$

samleitin ef 3 x tilheyrir bilinu $(-1,1)$. Röðin er því samleitin fyrir öll x á bilinu $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

STÖÐUMAT 6.4

Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hafi samleitnibilið $(-1,1)$. Finnið samleitnibil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Í næsta dæmi sýnum við hvernig nota má setninguna um sameiningu veldaraða og veldaröð falls f til að mynda veldaraðir fyrir föll sem tengjast f. Nánar tiltekið skoðum við föll sem tengjast fallinu $f(x) = \frac{1}{1-x}$ og notum að

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

fyrir $|x| < 1$.

DÆMI 6.5

Veldaraðir myndaðar út frá þekktum veldaröðum

Notið veldaraðaframsetningu $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ásamt setningunni um sameiningu veldaraða til að mynda veldaröð fyrir hvert eftirfarandi fall. Finnið samleitnibil veldaraðarinnar.

a. $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$

b. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

Lausn

a. Ritið fyrst $f(x)$ sem

$$f(x)=3x\left(\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}\right).$$

Með veldaraðaframsetningu $f(x)=\frac{1}{1-x}$ og liðum ii og iii í setningunni um sameiningu veldaraða fæst veldaraðaframsetning f sem

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3x\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n x^{2n+1}.$$

Þar sem samleitnibil raðarinnar fyrir $\frac{1}{1-x}$ er $(-1,1)$, er samleitnibil nýju raðarinnar mengi þeirra rauntalna x sem uppfylla $|x^2|<1$. Samleitnibilið er því $(-1,1)$.

b. Notið stofnbrotaliðun til að rita $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-3)}$ sem summu tveggja brota. Við fáum

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{(x-1)(x-3)} &= \tfrac{-1/2}{x-1}+\tfrac{1/2}{x-3}\\ &= \tfrac{1/2}{1-x}-\tfrac{1/2}{3-x}\\ &= \tfrac{1/2}{1-x}-\tfrac{1/6}{1-\frac{x}{3}}.\end{aligned}$$

Með lið ii í setningunni um sameiningu veldaraða fæst fyrst

$$\frac{1/2}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^n \text{ fyrir } |x|<1.$$

Með liðum ii og iii í setningunni um sameiningu veldaraða fæst síðan

$$\frac{1/6}{1-x/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{x}{3}\right)^n \text{ fyrir } |x|<3.$$

Þar sem þessar tvær veldaraðir eru sameinaðar verður samleitnibil mismunarins minna bilanna tveggja. Af þessari staðreynd og lið i í setningunni um sameiningu veldaraða fæst

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right)x^n$$

6

þar sem samleitnibilið er $(-1,1)$.

STÖÐUMAT 6.5

Notið röðina fyrir $f(x)=\frac{1}{1-x}$ á $|x|<1$ til að mynda röð fyrir $\frac{1}{(1-x)(x-2)}$. Ákvarðið samleitnibilið.

Í dæmi 6.5 sýndum við hvernig finna má veldaraðir fyrir tiltekin föll. Í dæmi 6.6 gerum við hið gagnstæða og finnum hvaða fall gefin veldaröð táknar.

DÆMI 6.6

Ákvörðun fallsins sem gefin veldaröð táknar

Skoðið veldaröðina $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$. Finnið fallið f sem röðin táknar. Ákvarðið samleitnibil raðarinnar.

Lausn

Ritum gefnu röðina sem

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n,$$

og þekkjum hana þá sem veldaröð fyrir

$$f(x)=\frac{1}{1-2x}.$$

Þar sem þetta er geómetrísk röð er röðin samleitin þá og því aðeins að $|2x|<1$. Samleitnibilið er því $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

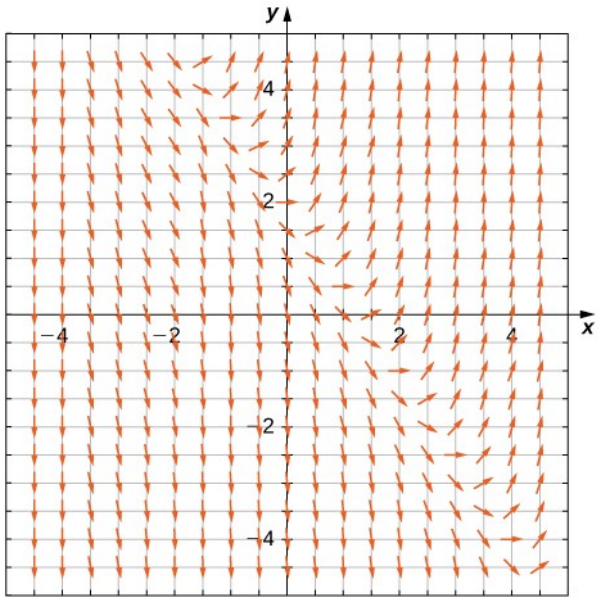
STÖÐUMAT 6.6

Skoðið veldaröðina $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n$. Ákvarðið hvaða fall hún táknar og samleitnibil hennar.

Rifjum upp spurningarnar úr upphafi kaflans um hvaða leið sé hagstæðust til að taka við greiðslum af happdrættisvinningi. Við snúum nú aftur að þessum spurningum og sýnum hvernig nota má raðir til að bera saman verðmæti greiðslna yfir tíma og eingreiðslu í dag. Við reiknum hvers virði framtíðargreiðslur eru á verðlagi dagsins í dag, að því gefnu að hægt sé að ávaxta vinninginn. Verðmæti framtíðargreiðslna á verðlagi dagsins í dag kallast núvirði þeirra.

DÆMI 6.7

Kaflaupphaf: Núvirði framtíðarvinninga



Mynd 6.4 (mynd: verk Robert Huffstutter á Flickr, aðlagað)

Gerum ráð fyrir að þið vinnið í happdrætti og fáið eftirfarandi þrjá valkosti: (1) fá 20 milljónir evra í dag; (2) fá 1,5 milljónir evra á ári næstu 20 árin; eða (3) fá 1 milljón evra á ári um ókomna tíð, þannig að greiðslurnar erfast. Hvaða kostur er hagstæðastur ef ársvextir eru 5%? Til að svara því förum við í gegnum eftirfarandi spurningar í röð.

a. Hvert er núvirði 1,5 milljóna evra sem eru greiddar árlega í 20 ár, ef ársvextir eru 5%?
b. Notið svarið við a-lið til að finna almenna formúlu fyrir núvirði greiðslna að fjárhæð C evrur sem berast árlega næstu n árin, að gefnum meðalársvöxtum r.
c. Finnið formúlu fyrir núvirðið ef árlegar greiðslur að fjárhæð C evrur halda áfram um ókomna tíð, að gefnum meðalársvöxtum r.
d. Notið svarið við c-lið til að ákvarða núvirði árlegrar greiðslu að fjárhæð 1 milljón evra um ókomna tíð.
e. Notið svörin við a- og d-lið til að ákvarða hver kostanna þriggja er hagstæðastur.

Lausn

a. Skoðum greiðslu að fjárhæð 1,5 milljónir Bandaríkjadala sem fer fram í lok fyrsta árs. Ef hægt væri að fá greiðsluna í dag en ekki eftir eitt ár mætti ávaxta féð og afla 5% vaxta. Núvirðið P_1 uppfyllir því jöfnuna $P_1(1+0{,}05)=1{,}5$ milljónir evra. Við ályktum að

$$P_1=\frac{1{,}5}{1{,}05}=1{,}429 \text{ milljónir evra}.$$

Skoðum á sama hátt greiðslu að fjárhæð 1,5 milljónir Bandaríkjadala sem fer fram í lok annars árs. Ef hægt væri að fá greiðsluna í dag mætti ávaxta féð í tvö ár, afla 5% vaxta og

leggja vextina við höfuðstólinn árlega. Núvirðið P_2 uppfyllir því jöfnuna $P_2(1+0{,}05)^2 = 1{,}5$ milljónir evra. Við ályktum að

$$P_2 = \frac{1{,}5}{(1{,}05)^2} = 1{,}361 \text{ milljónir evra}.$$

Núvirði framtíðargreiðslnanna er summa núvirðisgildanna $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ fyrir hverja árlega greiðslu. Núvirðið P_k uppfyllir

$$P_k = \frac{1{,}5}{(1{,}05)^k}.$$

Því er

$$\begin{aligned} P &= \frac{1{,}5}{1{,}05} + \frac{1{,}5}{(1{,}05)^2} + \cdots + \frac{1{,}5}{(1{,}05)^{20}} \\ &= 18{,}693 \text{ milljónir evra}. \end{aligned}$$

b. Af niðurstöðunni í a-lið sést að núvirði P árlegra greiðslna að fjárhæð C Bandaríkjadala í n ár, að gefnum ársvöxtum r, er

$$P = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^n} \text{ Bandaríkjadalir}.$$

c. Af niðurstöðunni í b-lið sést að núvirði jafngreiðsluraðar sem heldur áfram um ókomna tíð má lýsa með óendanlegu röðinni

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{(1+r)^{n+1}}.$$

Líta má á núvirðið sem veldaröð í r sem er samleitin svo lengi sem $\left|\frac{1}{1+r}\right| < 1$. Þar sem $r > 0$, er röðin samleitin. Ef við ritum röðina sem

$$P = \frac{C}{(1+r)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^n,$$

sem er samleitin svo lengi sem

$$f(r) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{r}{1+r}\right)} = \frac{1+r}{r}.$$

Við ályktum að núvirði þessarar jafngreiðsluraðar sé

$$P=\frac{C}{1+r}\cdot\frac{1+r}{r}=\frac{C}{r}.$$

d. Af niðurstöðunni í c-lið ályktum við að núvirðið P, þegar $C=1$ milljón Bandaríkjadala er greidd árlega um ókomna tíð að gefnum ársvöxtum $r=0{,}05$, sé

$$P=\frac{1}{0{,}05}=20 \text{ milljónir evra}.$$

e. Af a-lið sést að greiðslur að fjárhæð 1,5 milljónir evra á 20 árum hafa núvirðið 18,693 milljónir evra. Af d-lið sést að greiðslur að fjárhæð 1 milljón evra á ári um ókomna tíð hafa núvirðið 20 milljónir evra. Eingreiðsla að fjárhæð 20 milljónir evra í dag og árlegar greiðslur að fjárhæð 1 milljón evra um ókomna tíð hafa því sama núvirði.

Margföldun veldaraða

Einnig má mynda nýjar veldaraðir með því að margfalda veldaraðir saman. Margföldun tveggja veldaraða gefur aðra leið til að finna veldaraðaframsetningar falla.

Við margföldum þær á svipaðan hátt og margliður. Gerum til dæmis ráð fyrir að við viljum margfalda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1 x+c_2 x^2+\cdots$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = d_0+d_1 x+d_2 x^2+\cdots.$$

6

Margfeldið virðist þá uppfylla

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=-0}^{\infty} d_n x^n\right) &= \left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\right)\cdot\left(d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots\right)\\ &= c_0d_0+(c_1d_0+c_0d_1)\,x+(c_2d_0+c_1d_1+c_0d_2)\,x^2+\cdots.\end{aligned}$$

Í setningunni um margföldun veldaraða setjum við fram meginniðurstöðuna um margföldun veldaraða. Hún sýnir að ef $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ eru samleitnar á sameiginlegu bili I má margfalda raðirnar með þessum hætti og röðin sem fæst er einnig samleitin á bilinu I.

SETNING 6.3

Margföldun veldaraða

Gerum ráð fyrir að veldaraðirnar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ séu samleitnar að f og g, í sömu röð, á sameiginlegu bili I. Látum

$$\begin{aligned} e_n &= c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + c_2 d_{n-2} + \cdots + c_{n-1} d_1 + c_n d_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}. \end{aligned}$$

Þá er

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$$

og

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n \text{ er samleitin að } f(x) \cdot g(x) \text{ á } I.$$

Röðin $\sum_{n=0}^{\infty} e_n x^n$ nefnist Cauchy-margfeldi raðanna $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$.

Við sleppum sönnun þessarar setningar þar sem hún er utan efnissviðs bókarinnar og er yfirleitt tekin fyrir í framhaldsnámskeiði. Við sýnum nú dæmi um notkun setningarinnar með því að finna veldaraðaframsetningu fyrir

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

með veldaraðaframsetningum fyrir

$$y = \frac{1}{1-x} \text{ og } y = \frac{1}{1-x^2}.$$

DÆMI 6.8

Margföldun veldaraða

Margfaldið veldaraðaframsetninguna

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

fyrir $|x| < 1$ með veldaraðaframsetningunni

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^2\right)^n \\ &= 1+x^2+x^4+x^6+\cdots\end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$ til að mynda veldaröð fyrir $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ á bilinu $(-1,1)$.

Lausn

Við þurfum að margfalda

$$\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right).$$

Þegar fyrstu liðirnir eru ritaðir út sést að margfeldið er

$$\begin{aligned}&\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)+\left(x+x^3+x^5+x^7+\cdots\right)+\left(x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots\right)+\left(x^3+x^5+x^7+x^9+\cdots\right)\\ &=1+x+(1+1)x^2+(1+1)x^3+(1+1+1)x^4+(1+1+1)x^5+\cdots\\ &=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+\cdots.\end{aligned}$$

Þar sem raðirnar fyrir $y=\dfrac{1}{1-x}$ og $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ eru báðar samleitnar á bilinu $(-1,1)$, er röðin fyrir margfeldið einnig samleitin á bilinu $(-1,1)$.

STÖÐUMAT 6.7

Margfaldið röðina $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ með sjálfri sér til að mynda röð fyrir $\dfrac{1}{(1-x)(1-x)}$.

Deildun og heildun veldaraða

6

Skoðum veldaröðina $\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$ sem er samleitin á einhverju bili I og látum f vera fallið sem röðin skilgreinir. Hér fjöllum við um tvær spurningar um f.

- Er f deildanlegt og ef svo er, hvernig finnum við afleiðuna f'?
- Hvernig reiknum við óákveðið heildi $\int f(x)\,dx$?

Við vitum að fyrir margliðu með endanlega mörgum liðum má reikna afleiðuna með því að deilda hvern lið sérstaklega. Á sama hátt má reikna óákveðið heildi með því að heilda hvern lið sérstaklega. Hér sýnum við að hið sama má gera fyrir samleitnar veldaraðir. Það er, ef

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

er samleitin á einhverju bili I, þá eru

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots$$

og

$$\int f(x)\,dx = C + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 \frac{x^3}{3} + \cdots$$

samleitnar á I. Eins og bent er á hér á eftir þarf að kanna hegðunina í endapunktum bilsins sérstaklega.

Að reikna afleiðu og óákveðið heildi með þessum hætti kallast deildun veldaraðar lið fyrir lið og heildun veldaraðar lið fyrir lið. Með því að deilda og heilda veldaraðir lið fyrir lið má einnig nota þekktar veldaraðaframsetningar til að finna veldaraðaframsetningar annarra falla. Út frá veldaröðinni fyrir $f(x)=\frac{1}{1-x}$, má til dæmis deilda lið fyrir lið til að finna veldaröðina fyrir $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. Á sama hátt má nota veldaröðina fyrir $g(x)=\frac{1}{1+x}$, og heilda lið fyrir lið til að finna veldaröðina fyrir $G(x)=\ln(1+x)$, sem er stofnfall g. Við sýnum hvernig þetta er gert í dæmi 6.9 og dæmi 6.10. Fyrst setjum við fram setninguna um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið, sem gefur meginniðurstöðuna um deildun og heildun veldaraða.

SETNING 6.4

Deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið

Gerum ráð fyrir að veldaröðin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ sé samleitin á bilinu $(a-R, a+R)$ fyrir eitthvert $R>0$. Látum f vera fallið sem röðin skilgreinir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

fyrir $|x-a|<R$. Þá er f deildanlegt á bilinu $(a-R, a+R)$ og finna má f' með því að deilda röðina lið fyrir lið:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1} \\ &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

fyrir $|x-a|<R$. Til að finna $\int f(x)\,dx$, má jafnframt heilda röðina lið fyrir lið. Röðin sem fæst er samleitin á $(a-R, a+R)$, og við höfum

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\ &= C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots \end{aligned}$$

fyrir $|x-a|<R$.

Sönnun þessarar niðurstöðu er utan efnis bókarinnar og er því sleppt. Athugið að þótt setningin um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið tryggi sama samleitnigeisla þegar veldaröð er deilduð eða heilduð lið fyrir lið, segir hún ekkert um það sem gerist í endapunktunum. Veldaraðirnar sem fást við deildun og heildun geta hegðað sér öðruvísi í endapunktunum en upphaflega röðin. Við sjáum slíka hegðun í næstu dæmum.

DÆMI 6.9

Veldaraðir deildaðar

a. Notið veldaraðaframsetninguna

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$ til að finna veldaraðaframsetningu fyrir

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

á bilinu $(-1,1)$. Ákvarðið hvort röðin sem fæst sé samleitin í endapunktunum.

b. Notið niðurstöðuna úr a-lið til að reikna summu raðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n}$.

6

Lausn

a. Þar sem $g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ er afleiða $f(x)=\frac{1}{1-x}$, getum við fundið veldaraðaframsetningu fyrir g með því að deilda veldaröðina fyrir f lið fyrir lið. Niðurstaðan er

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{(1-x)^2} \\ &= \tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{1-x}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) \\ &= \tfrac{d}{dx}\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right) \\ &= 0+1+2x+3x^2+4x^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$. Setningin um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið tryggir ekkert um hegðun þessarar raðar í endapunktunum. Þegar endapunktarnir eru prófaðir með sundurleitniprófinu kemur í ljós að röðin er ósamleitin í báðum endapunktunum $x=\pm 1$. Athugið að þetta er sama niðurstaða og fékkst í dæmi 6.8.

b. Af a-lið vitum við að

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Því er

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \tfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \tfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \tfrac{16}{9}. \end{aligned}$$

6

STÖÐUMAT 6.8

Deildið röðina $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ lið fyrir lið til að finna veldaraðaframsetningu fyrir $\frac{2}{(1-x)^3}$ á bilinu $(-1,1)$.

DÆMI 6.10

Veldaraðir heildaðar

Fyrir hvert eftirfarandi fall f skuluð þið finna veldaraðaframsetningu fyrir f með því að heilda veldaröðina fyrir f' og ákvarða samleitnibil hennar.

a. $f(x)=\ln(1+x)$

b. $f(x)=\tan^{-1}x$

Lausn

a. Fyrir $f(x)=\ln(1+x)$, er afleiðan $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Við vitum að

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1-(-x)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\\ &= 1-x+x^2-x^3+\cdots\end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$. Til að finna veldaröð fyrir $f(x)=\ln(1+x)$, heildum við röðina lið fyrir lið.

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx &= \int\left(1-x+x^2-x^3+\cdots\right)dx\\ &= C+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\end{aligned}$$

Þar sem $f(x)=\ln(1+x)$ er stofnfall $\dfrac{1}{1+x}$, á aðeins eftir að finna fastann C. Þar sem $\ln(1+0)=0$, höfum við $C=0$. Veldaraðaframsetning fyrir $f(x)=\ln(1+x)$ er því

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$. Setningin um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið tryggir ekkert um hegðun þessarar veldaraðar í endapunktunum. Þegar endapunktarnir eru kannaðir kemur hins vegar í ljós að við $x=1$ er röðin víxlmerkta harmoníska röðin, sem er samleitin. Við $x=-1$, er röðin hins vegar harmoníska röðin, sem er ósamleitin. Mikilvægt er að hafa í huga að þótt röðin sé samleitin við $x=1$, tryggir setningin um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið ekki að röðin sé í raun samleitin að $\ln(2)$. Röðin er raunar samleitin að $\ln(2)$, en til að sýna það þarf þróaðri aðferðir. (Setning Abels, sem fjallað er um í lengra komnum kennslubókum, tekur á þessu tæknilega atriði.) Samleitnibilið er $(-1,1]$.

b. Afleiða $f(x)=\tan^{-1}x$ er $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Við vitum að

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n\\ &= 1-x^2+x^4-x^6+\cdots\end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$. Til að finna veldaröð fyrir $f(x)=\tan^{-1}x$, heildum við röðina lið fyrir lið.

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx &= \int\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)dx\\ &= C+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\end{aligned}$$

Þar sem $\tan^{-1}(0)=0$, höfum við $C=0$. Veldaraðaframsetning fyrir $f(x)=\tan^{-1}x$ er því

$$\begin{aligned}\tan^{-1}x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$. Setningin um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið tryggir heldur ekkert um samleitni þessarar raðar í endapunktunum. Þegar endapunktarnir eru kannaðir með prófinu fyrir víxlmerkjaraðir kemur hins vegar í ljós að röðin er samleitin við $x=1$ og $x=-1$. Eins og rætt var í a-lið má með setningu Abels sýna að röðin er í raun samleitin að $\tan^{-1}(1)$ og $\tan^{-1}(-1)$ við $x=1$ og $x=-1$, í sömu röð. Samleitnibilið er því $[-1,1]$.

STÖÐUMAT 6.9

Heildið veldaröðina $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ lið fyrir lið til að reikna $\int\ln(1+x)\,dx$.

Hingað til höfum við sýnt nokkrar aðferðir til að finna veldaraðaframsetningar falla. En hvernig vitum við að þessar veldaraðaframsetningar séu ótvíræðar? Ef gefin eru fallið f og veldaröð fyrir f með miðju í a, gæti þá verið til önnur veldaröð fyrir f með miðju í a sem við hefðum fundið með annarri aðferð? Svarið er nei. Það ætti ekki að koma á óvart ef litið er á veldaraðir sem margliður með óendanlega mörgum liðum. Eðlilegt er að ætla að ef

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots=d_0+d_1x+d_2x^2+\cdots$$

fyrir öll gildi x á einhverju opnu bili I sem inniheldur núll ættu stuðlarnir c_n að vera jafnir d_n fyrir $n \geq 0$. Við setjum þessa niðurstöðu nú fram formlega í setningunni um ótvíræðni veldaraða.

SETNING 6.5

Ótvíræðni veldaraða

Látum $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$ vera tvær samleitnar veldaraðir þannig að

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$

fyrir öll x á opnu bili sem inniheldur a. Þá er $c_n = d_n$ fyrir öll $n \geq 0$.

Sönnun

Látum

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \\ &= d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Þá er $f(a) = c_0 = d_0$. Samkvæmt setningunni um deildun og heildun veldaraða lið fyrir lið má deilda báðar raðirnar lið fyrir lið. Því er

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \\ &= d_1 + 2d_2(x-a) + 3d_3(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

og þar með $f'(a) = c_1 = d_1$. Á sama hátt

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \cdots \\ &= 2d_2 + 3 \cdot 2d_3(x-a) + \cdots \end{aligned}$$

leiðir af sér að $f''(a) = 2c_2 = 2d_2$, og því $c_2 = d_2$. Almennt gildir fyrir sérhverja heiltölu $n \geq 0$, $f^{(n)}(a) = n!\,c_n = n!\,d_n$, og þar af leiðandi $c_n = d_n$ fyrir öll $n \geq 0$.

□

Í þessum undirkafla höfum við sýnt hvernig finna má veldaraðaframsetningar tiltekinna falla með ýmsum algebruaðgerðum, deildun eða heildun. Enn sem komið er getum við þó aðeins fundið veldaraðaframsetningar fyrir takmarkaðan hóp falla. Næst kynnum við Taylor-raðir og sýnum hvernig finna má með þeim veldaraðaframsetningar mun fleiri falla.

Æfingar í undirkafla 6.2

63. Ef $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ og $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$, finnið veldaraðirnar fyrir $\frac{1}{2}(f(x)+g(x))$ og $\frac{1}{2}(f(x)-g(x))$.

64. Ef $C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ og $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, finnið veldaraðirnar fyrir $C(x)+S(x)$ og $C(x)-S(x)$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota stofnbrotaliðun til að finna veldaröð hvers falls.

65.

$$\frac{4}{(x-3)(x+1)}$$

66.

$$\frac{3}{(x+2)(x-1)}$$

67.

$$\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}$$

68.

$$\frac{30}{(x^2+1)(x^2-9)}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið setja hverja röð fram sem rætt fall.

69.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$$

70.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}}$$

71.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x-3)^{2n-1}}$$

72.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x-3)^{2n-1}}-\frac{1}{(x-2)^{2n-1}}\right)$$

Eftirfarandi verkefni fjalla um hagnýt dæmi um jafngreiðsluraðir.

73. Calculate the Núvirðis P of an annuity in which \$10.000 is to be paid out annually for a period of 20 years, assuming interest rates of $r=0{,}03$, $r=0{,}05$, and $r=0{,}07$.

74. Calculate the Núvirðis P of annuities in which \$9.000 is to be paid out annually perpetually, assuming interest rates of $r=0{,}03$, $r=0{,}05$ and $r=0{,}07$.

75. Calculate the annual payouts C to be given for 20 years on annuities having Núvirði \$100.000 assuming respective interest rates of $r=0{,}03$, $r=0{,}05$, and $r=0{,}07$.

76. Calculate the annual payouts C to be given perpetually on annuities having Núvirði \$100.000 assuming respective interest rates of $r=0{,}03$, $r=0{,}05$, and $r=0{,}07$.

77. Gerum ráð fyrir að jafngreiðsluröð hafi núvirðið $P=1$ milljón Bandaríkjadala. Hvaða vextir r myndu gera kleift að greiða \$50.000 árlega um ókomna tíð?

78. Gerum ráð fyrir að jafngreiðsluröð hafi núvirðið $P=10$ milljónir Bandaríkjadala. Hvaða vextir r myndu gera kleift að greiða \$100.000 árlega um ókomna tíð?

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið setja summu hverrar veldaraðar fram með geómetrískum röðum og síðan sem rætt fall.

79. $x+x^2-x^3+x^4+x^5-x^6+\cdots$ (Vísbending: Flokkið saman veldin x^{3k}, x^{3k-1}, og x^{3k-2}.)

80. $x+x^2-x^3-x^4+x^5+x^6-x^7-x^8+\cdots$ (Vísbending: Flokkið saman veldin x^{4k}, x^{4k-1}, o.s.frv.)

81. $x-x^2-x^3+x^4-x^5-x^6+x^7-\cdots$ (Vísbending: Flokkið saman veldin x^{3k}, x^{3k-1}, og x^{3k-2}.)

82. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^5}{32}-\frac{x^6}{64}+\cdots$ (Vísbending: Flokkið saman veldin $\left(\frac{x}{2}\right)^{3k}$, $\left(\frac{x}{2}\right)^{3k-1}$, og $\left(\frac{x}{2}\right)^{3k-2}$.)

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna veldaröð $f(x)g(x)$ út frá föllunum f og g sem gefin eru.

83.

$$f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\,x^n$$

84. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n, g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$. Setjið stuðla $f(x)g(x)$ fram með $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

85.

$$f(x)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

86.

$$f(x)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið deilda gefna raðaframsetningu f lið fyrir lið til að fá samsvarandi raðaframsetningu fyrir afleiðu f.

87.

$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

88.

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið heilda gefna raðaframsetningu f lið fyrir lið frá núlli til x til að fá samsvarandi raðaframsetningu fyrir óákveðið heildi fallsins f.

89.

$$f(x)=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)x^{2n-1}$$

90.

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna hverja óendanlega röð með því að bera kennsl á hana sem gildi afleiðu eða heildis geómetrískrar raðar.

91. Reiknið $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ sem $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ þar sem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

92. Reiknið $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ sem $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ þar sem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

93. Reiknið $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^n}$ sem $f''\left(\frac{1}{2}\right)$ þar sem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

94. Reiknið $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ sem $\int_0^1 f(t)\,dt$ þar sem $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$.

Í eftirfarandi verkefnum er gefið að $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, og þið skuluð nota deildun eða heildun lið fyrir lið til að finna veldaröð hvers falls með miðju í gefnum punkti.

95. $f(x)=\ln x$ með miðju í $x=1$ (Vísbending: $x=1-(1-x)$)

96. $\ln(1-x)$ með miðju í $x=0$

97. $\ln(1-x^2)$ með miðju í $x=0$

98. $f(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ með miðju í $x=0$

99. $f(x)=\tan^{-1}(x^2)$ með miðju í $x=0$

100. $f(x)=\ln(1+x^2)$ með miðju í $x=0$

101. $f(x)=\int_0^x \ln t\,dt$ þar sem $\ln(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$

102. **[T]** Reiknið veldaraðaframsetninguna $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ við $x=1$ til að sýna að $\ln(2)$ sé summa víxlmerktu harmonísku raðarinnar. Notið prófið fyrir víxlmerkjaraðir til að ákvarða hversu marga liði summunnar þarf til að nálga $\ln(2)$ með skekkju minni en 0,001 og finnið slíka nálgun.

103. **[T]** Dragið óendanlegu röðina fyrir $\ln(1-x)$ frá $\ln(1+x)$ til að fá veldaröð fyrir $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Reiknið hana við $x=\frac{1}{3}$. Hvert er minnsta N þannig að N-ta hlutsumma raðarinnar nálgi $\ln(2)$ með skekkju minni en 0,001?

6

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið setja hverja röð fram með grunnföllum, með innsetningu ef hún er gefin, og finna samleitnigeisla summunnar.

104.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^k-x^{2k+1}\right)$$

105.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{6k}$$

106. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+x^2\right)^{-k}$ með $y=\frac{1}{1+x^2}$

107. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-kx}$ með $y=2^{-x}$

108. Sýnið að upp að veldunum x^3 og y^3 uppfylli $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ jöfnuna $E(x+y)=E(x)E(y)$.

109. Deildið röðina $E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ lið fyrir lið til að sýna að $E(x)$ sé jafnt afleiðu sinni.

110. Sýnið að ef $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er summa sléttra velda, það er $a_n=0$ þegar n er oddatala, þá sé $F=\int_0^x f(t)\,dt$ summa oddavelda, en að ef f er summa oddavelda þá sé F summa sléttra velda.

111. **[T]** Gerum ráð fyrir að stuðlarnir a_n í röðinni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ séu skilgreindir með rakningarvenslunum $a_n=\frac{a_{n-1}}{n}+\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$. Fyrir $a_0=0$ og $a_1=1$, skuluð þið reikna og teikna gröf summanna $S_N=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ fyrir $N=2,3,4,5$ á $[-1,1]$.

112. **[T]** Gerum ráð fyrir að stuðlarnir a_n í röðinni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ séu skilgreindir með rakningarvenslunum $a_n=\frac{a_{n-1}}{\sqrt{n}}-\frac{a_{n-2}}{\sqrt{n(n-1)}}$. Fyrir $a_0=1$ og $a_1=0$, skuluð þið reikna og teikna gröf summanna $S_N=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ fyrir $N=2,3,4,5$ á $[-1,1]$.

113. **[T]** Gefin er veldaraðaframsetningin $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, og þið skuluð ákvarða hversu marga liði N í summunni, reiknaðri við $x=-1/2$, þarf til að nálga $\ln(2)$ með skekkju minni en 1/1000. Reiknið samsvarandi hlutsummu $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

114. **[T]** Gefin er veldaraðaframsetningin $\tan^{-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, og þið skuluð nota prófið fyrir víxlmerkjaraðir til að ákvarða hversu marga liði N í summunni, reiknaðri við $x=1$, þarf til að nálga $\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$ með skekkju minni en 1/1000. Reiknið samsvarandi hlutsummu $\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

115. [T] Rifjið upp að $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$. Miðað við nákvæmt gildi $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, skuluð þið áætla $\frac{\pi}{6}$ með því að reikna hlutsummur $S_N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ af veldaraðaframsetningunni $\tan^{-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ við $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Hvert er minnsta N þannig að $6\,S_N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ nálgi π með skekkju minni en 0,001? Hversu marga liði þarf til að skekkjan verði minni en 0,00001?

6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir

NÁMSMARKMIÐ

- 6.3.1 Lýsa aðferðinni við að finna Taylor-margliðu af tilteknu stigi fyrir fall.
- 6.3.2 Útskýra merkingu og mikilvægi setningar Taylors um skekkju.
- 6.3.3 Meta skekkju í nálgun tiltekins falls með Taylor-röð.

Í síðustu tveimur undirköflum ræddum við hvernig finna má veldaraðaframsetningar tiltekinna gerða falla, einkum falla sem tengjast geómetrískum röðum. Hér fjöllum við um veldaraðaframsetningar annarra gerða falla. Við leitum einkum svara við þessum spurningum: Hvaða föll má setja fram með veldaröðum og hvernig finnum við slíkar framsetningar? Ef við getum fundið veldaraðaframsetningu fyrir tiltekið fall f og röðin er samleitin á einhverju bili, hvernig sönnum við þá að röðin sé í raun samleitin að f?

Yfirlit um Taylor- og Maclaurin-raðir

Skoðum fall f sem hefur veldaraðaframsetningu með miðju í $x=a$. Þá er röðin á forminu

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots. \tag{6.4}$$

Hvaða gildi eiga stuðlarnir að hafa? Að svo stöddu lítum við fram hjá samleitni og einbeitum okkur þess í stað að því hvert form raðarinnar ætti að vera, sé hún til. Við snúum aftur að samleitni síðar í þessum undirkafla. Ef röðin í jöfnu 6.4 er framsetning fyrir f með miðju í $x=a$, viljum við að sjálfsögðu að röðin sé jöfn $f(a)$ þegar $x=a$. Þegar röðin er reiknuð við $x=a$, sést að

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n &= c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots \\ &= c_0.\end{aligned}$$

Röðin er því jöfn $f(a)$ ef stuðullinn $c_0 = f(a)$. Jafnframt viljum við að fyrsta afleiða veldaraðarinnar sé jöfn $f'(a)$ þegar $x = a$. Með því að deilda jöfnu 6.4 lið fyrir lið sést að

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots.$$

Þegar $x = a$, er afleiðan því

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) &= c_1 + 2c_2(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + \cdots \\ &= c_1.\end{aligned}$$

Afleiða raðarinnar er því jöfn $f'(a)$ ef stuðullinn $c_1 = f'(a)$. Með því að halda áfram á þennan hátt leitum við að stuðlum c_n þannig að allar afleiður veldaraðarinnar í jöfnu 6.4 séu jafnar samsvarandi afleiðum f þegar $x = a$. Önnur og þriðja afleiða jöfnu 6.4 eru

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots$$

og að

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(x-a)^2 + \cdots.$$

Þegar $x = a$, eru önnur og þriðja afleiðan

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) &= 2c_2 + 3\cdot 2c_3(a-a) + 4\cdot 3c_4(a-a)^2 + \cdots \\ &= 2c_2\end{aligned}$$

og að

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right) &= 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(a-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(a-a)^2 + \cdots \\ &= 3\cdot 2c_3\end{aligned}$$

jafnar $f''(a)$ og $f'''(a)$, í sömu röð, ef $c_2 = \frac{f''(a)}{2}$ og $c_3 = \frac{f'''(a)}{3\cdot 2}$. Almennt sést að ef f hefur veldaraðaframsetningu með miðju í $x = a$, ættu stuðlarnir að vera $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Röðin ætti sem sagt að vera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots.$$

Þessi veldaröð fyrir f nefnist Taylor-röð f með miðju í a. Ef $a=0$, nefnist röðin Maclaurin-röð f.

SKILGREINING

Ef f hefur afleiður af öllum stigum þegar $x=a$, er Taylor-röð fallsins f með miðju í a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

(6.5)

Taylor-röð f með miðju í 0 nefnist Maclaurin-röð f.

Síðar í þessum undirkafla sýnum við dæmi um hvernig finna má Taylor-raðir og ræðum hvenær Taylor-röð falls er samleitin að fallinu. Hér setjum við fram mikilvæga niðurstöðu. Rifjum upp úr setningunni um ótvíræðni veldaraða að veldaraðaframsetningar eru ótvírætt ákvarðaðar. Ef fall f hefur veldaröð með miðju í a, hlýtur hún því að vera Taylor-röð f með miðju í a.

SETNING 6.6

Taylor-raðir eru ótvírætt ákvarðaðar

Ef fall f hefur veldaröð með miðju í a sem er samleitin að f á einhverju opnu bili sem inniheldur a, þá er veldaröðin Taylor-röð f með miðju í a.

Sönnunin leiðir beint af setningunni um ótvíræðni veldaraða.

Til að ákvarða hvort Taylor-röð sé samleitin þurfum við að skoða runu hlutsumma hennar. Þessar hlutsummur eru endanlegar margliður sem nefnast Taylor-margliður.

6

MARGMIÐLUN

Heimsækið MacTutor-sögusafn stærðfræðinnar og lesið stuttar ævisögur um Brook Taylor og Colin Maclaurin og um það hvernig þeir þróuðu hugtökin sem kennd eru við þá.

Taylor-margliður

n-ta hlutsumma Taylor-raðar falls f með miðju í a nefnist n-ta Taylor-margliðan. Til dæmis eru fyrstu fjórar hlutsummur Taylor-raðarinnar

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f(a),\\
p_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a),\\
p_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2,\\
p_3(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \tfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3,
\end{aligned}
$$

í sömu röð. Þessar hlutsummur nefnast núllta, fyrsta, önnur og þriðja Taylor-margliða f með miðju í a, í sömu röð. Ef $a=0$, nefnast margliðurnar Maclaurin-margliður f. Við setjum nú fram formlega skilgreiningu á Taylor- og Maclaurin-margliðum falls f.

SKILGREINING

Ef f hefur n afleiður þegar $x=a$, er n-ta Taylor-margliða f með miðju í a

$$p_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

n-ta Taylor-margliða f með miðju í 0 nefnist n-ta Maclaurin-margliða f.

Við sýnum nú hvernig nota má þessa skilgreiningu til að finna nokkrar Taylor-margliður $f(x)=\ln x$ með miðju í $x=1$.

DÆMI 6.11

Taylor-margliður fundnar

Finnið Taylor-margliðurnar p_0, p_1, p_2 og p_3 fyrir $f(x)=\ln x$ með miðju í $x=1$. Notið teikniforrit til að bera graf f saman við gröf p_0, p_1, p_2 og p_3.

Lausn

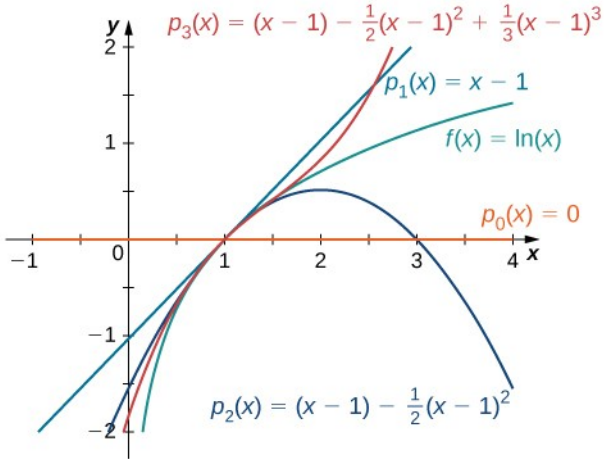
Til að finna þessar Taylor-margliður þurfum við að reikna f og fyrstu þrjár afleiður fallsins þegar $x=1$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(1) &= 0\\
f'(x) &= \tfrac{1}{x} & f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -\tfrac{1}{x^2} & f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= \tfrac{2}{x^3} & f'''(1) &= 2
\end{aligned}
$$

Því er

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f(1) = 0,\\
p_1(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) = x-1,\\
p_2(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2,\\
p_3(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \tfrac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \tfrac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3\\
&= (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3.
\end{aligned}
$$

Gröf $y=f(x)$ og fyrstu þriggja Taylor-margliðanna eru sýnd á mynd 6.5.



Mynd 6.5 Fallið $y=\ln x$ og Taylor-margliðurnar p_0, p_1, p_2 og p_3 með miðju í $x=1$ eru teiknuð á grafinu.

STÖÐUMAT 6.10

Finnið Taylor-margliðurnar p_0, p_1, p_2 og p_3 fyrir $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ með miðju í $x=1$.

6

Við sýnum nú hvernig finna má Maclaurin-margliður fyrir e^x, $\sin x$, og $\cos x$. Eins og fram kom hér að framan eru Maclaurin-margliður Taylor-margliður með miðju í núlli.

DÆMI 6.12

Maclaurin-margliður fundnar

Fyrir hvert eftirfarandi fall skuluð þið finna formúlur fyrir Maclaurin-margliðurnar p_0, p_1, p_2 og p_3. Finnið formúlu fyrir n-tu Maclaurin-margliðuna og ritið hana með summutákni. Notið teikniforrit til að bera gröf p_0, p_1, p_2 og p_3 saman við f.

a. $f(x)=e^x$

b. $f(x)=\sin x$

c. $f(x)=\cos x$

Lausn

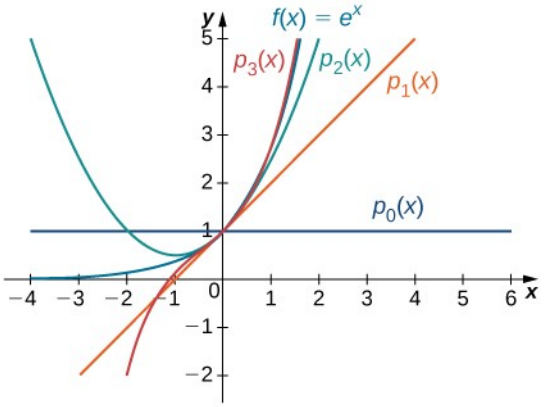
a. Þar sem $f(x)=e^x$, vitum við að $f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Því er

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$$

fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Við höfum því

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= f(0)=1,\\
p_1(x) &= f(0)+f'(0)x=1+x,\\
p_2(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2=1+x+\frac{1}{2}x^2,\\
p_3(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3,\\
p_n(x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\
&= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Fallið og fyrstu þrjár Maclaurin-margliðurnar eru sýnd á mynd 6.6.



Mynd 6.6 Grafið sýnir fallið $y=e^x$ og Maclaurin-margliðurnar p_0, p_1, p_2 og p_3.

b. Fyrir $f(x)=\sin x$, eru gildi fallsins og fyrstu fjögurra afleiða þess þegar $x=0$ eftirfarandi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Þar sem fjórða afleiðan er $\sin x$, endurtekur mynstrið sig. Það er að segja $f^{(2m)}(0)=0$ og $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m$ fyrir $m \geq 0$. Því höfum við

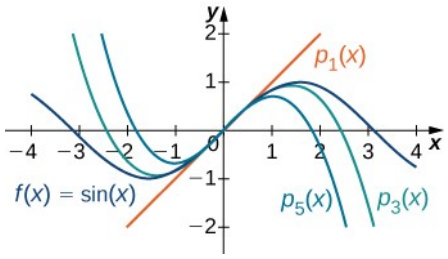
$$\begin{aligned} p_0(x) &= 0, \\ p_1(x) &= 0 + x = x, \\ p_2(x) &= 0 + x + 0 = x, \\ p_3(x) &= 0 + x + 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 = x - \tfrac{x^3}{3!}, \\ p_4(x) &= 0 + x + 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 + 0 = x - \tfrac{x^3}{3!}, \\ p_5(x) &= 0 + x + 0 - \tfrac{1}{3!}x^3 + 0 + \tfrac{1}{5!}x^5 = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!}, \end{aligned}$$

og fyrir $m \geq 0$,
gildir

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(x) &= p_{2m+2}(x) \\ &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \tfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

6

Gröf fallsins og Maclaurin-margliða þess eru sýnd á mynd 6.7.



Mynd 6.7 Grafið sýnir fallið $y=\sin x$ og Maclaurin-margliðurnar p_1, p_3 og p_5.

c. Fyrir $f(x)=\cos x$, eru gildi fallsins og fyrstu fjögurra afleiða þess þegar $x=0$ eftirfarandi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

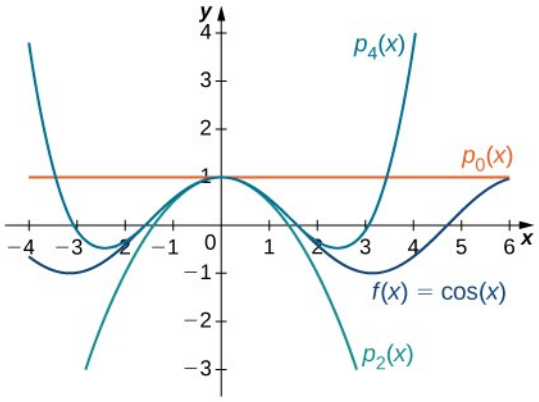
Þar sem fjórða afleiðan er $\cos x$, endurtekur mynstrið sig. Með öðrum orðum, $f^{(2m)}(0)=(-1)^m$ og $f^{(2m+1)}=0$ fyrir $m\geq 0$. Því er

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= 1+0=1, \\ p_2(x) &= 1+0-\tfrac{1}{2!}x^2 = 1-\tfrac{x^2}{2!}, \\ p_3(x) &= 1+0-\tfrac{1}{2!}x^2+0 = 1-\tfrac{x^2}{2!}, \\ p_4(x) &= 1+0-\tfrac{1}{2!}x^2+0+\tfrac{1}{4!}x^4 = 1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}, \\ p_5(x) &= 1+0-\tfrac{1}{2!}x^2+0+\tfrac{1}{4!}x^4+0 = 1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}, \end{aligned}$$

og fyrir $n\geq 0$,
gildir

$$\begin{aligned} p_{2m}(x) &= p_{2m+1}(x) \\ &= 1-\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\tfrac{x^{2m}}{(2m)!} \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\tfrac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Gröf fallsins og Maclaurin-margliðanna eru sýnd á mynd 6.8.



Mynd 6.8 Fallið $y = \cos x$ og Maclaurin-margliðurnar p_0, p_2 og p_4 eru teiknuð á grafinu.

STÖÐUMAT 6.11

Finnið formúlur fyrir Maclaurin-margliðurnar p_0, p_1, p_2 og p_3 fyrir $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Finnið formúlu fyrir n-tu Maclaurin-margliðuna og ritið svarið með summutákni.

Setning Taylors um skekkju

Rifjum upp að n-ta Taylor-margliða falls f með miðju í a er n-ta hlutsumma Taylor-raðar f með miðju í a. Til að ákvarða hvort Taylor-röðin sé samleitin þurfum við því að ákvarða hvort runa Taylor-margliðanna (p_n) sé samleitin. Við viljum þó ekki aðeins vita hvort runa Taylor-margliðanna sé samleitin heldur hvort hún sé samleitin að f. Til að svara því skilgreinum við skekkjuna $R_n(x)$ sem

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Til að runa Taylor-margliðanna sé samleitin að f, þarf skekkjan R_n að stefna á núll. Til að ákvarða hvort R_n stefni á núll kynnum við setningu Taylors um skekkju. Setningin er ekki aðeins gagnleg til að sanna að Taylor-röð sé samleitin að samsvarandi falli heldur gerir hún okkur einnig kleift að mæla hversu vel n-ta Taylor-margliðan nálgar fallið.

Hér leitum við að efra marki á $|R_n|$. Skoðum einfaldasta tilvikið: $n = 0$. Látum p_0 vera Taylor-margliðuna af stigi 0 með miðju í a fyrir fallið f. Skekkjan R_0 uppfyllir

$$\begin{aligned} R_0(x) &= f(x) - p_0(x) \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

Ef f er deildanlegt á bili I sem inniheldur a og x, þá er samkvæmt meðalgildissetningunni til rauntala c milli a og x þannig að $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$. Því er

$$R_0(x) = f'(c)(x-a).$$

Með því að nota meðalgildissetninguna á svipaðan hátt má sýna að ef f er n sinnum deildanlegt á bili I sem inniheldur a og x, þá uppfyllir n-ta skekkjan R_n

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

fyrir einhverja rauntölu c milli a og x. Mikilvægt er að hafa í huga að gildið c í teljaranum hér að ofan er ekki miðjan a heldur óþekkt gildi c milli a og x. Þessi formúla gerir okkur kleift að finna efra mark á skekkjuna R_n. Ef við vitum að $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ er takmarkað af einhverri rauntölu M á bilinu I, þá er

$$\left|R_n(x)\right|\leq\frac{M}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}$$

fyrir öll x á bilinu I.

Við setjum nú fram setningu Taylors, sem lýsir formlegu sambandi milli falls f og Taylor-margliðu þess af stigi n, $p_n(x)$. Setningin gerir okkur kleift að finna efra mark á skekkju þegar Taylor-margliða er notuð til að nálga fallgildi og verður mikilvæg þegar sýnt er að Taylor-röð f sé samleitin að f.

SETNING 6.7

Setning Taylors um skekkju

Látum f vera fall sem má deilda $n+1$ sinnum á bili I sem inniheldur rauntöluna a. Látum p_n vera n-tu Taylor-margliðu f með miðju í a og látum

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

vera n-tu skekkjuna. Fyrir hvert x á bilinu I er þá til rauntala c milli a og x þannig að

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Ef til er rauntala M þannig að $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$ fyrir öll $x\in I$, þá er

$$\left|R_n(x)\right|\leq\frac{M}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}$$

fyrir öll x í I.

Sönnun

Festum punkt $x\in I$ og skilgreinum fallið g þannig að

$$g(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}.$$

Við fullyrðum að g uppfylli skilyrði setningar Rolles. Þar sem g er margliðufall í t er það deildanlegt. Jafnframt er g núll við $t=a$ og $t=x$ vegna þess að

$$\begin{aligned} g(a) &= f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-R_n(x) \\ &= f(x)-p_n(x)-R_n(x) \\ &= 0, \\ g(x) &= f(x)-f(x)-0-\cdots-0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fallið g uppfyllir því setningu Rolles og þar af leiðandi er til c milli a og x þannig að $g'(c)=0$. Við reiknum nú g'. Með margfeldisreglunni fæst

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]=\frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Þar af leiðandi

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(t)+[f'(t)-f''(t)(x-t)]+\left[f''(t)(x-t)-\tfrac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right]+\cdots \\ &\quad+\left[\tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]+(n+1)R_n(x)\tfrac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Við sjáum að liðirnir styttast út á kíkishátt. Því er

$$g'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+(n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}.$$

Af setningu Rolles ályktum við að til sé tala c milli a og x þannig að $g'(c)=0$. Þar sem

$$g'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+(n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

ályktum við að

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+(n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}=0.$$

Þegar fyrsta liðnum vinstra megin er bætt við báðar hliðar jöfnunnar og báðum hliðum er deilt með $\frac{(n+1)(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$, fæst

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

eins og sýna átti. Af þessu leiðir að ef til er M þannig að $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$ fyrir öll x í I, þá er

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}.$$

6

□

Setning Taylors gerir okkur ekki aðeins kleift að sanna að Taylor-röð sé samleitin að falli heldur einnig að meta hversu vel Taylor-margliður nálga fallgildi. Við byrjum á því að skoða línulega nálgun og annars stigs nálgun á $f(x)=\sqrt[3]{x}$ með miðju í $x=8$ og ákvarða hversu nákvæmlega þær meta $\sqrt[3]{11}$.

DÆMI 6.13

Fallgildi metin með línulegri nálgun og annars stigs nálgun

Skoðum fallið $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

a. Finnið fyrstu og aðra Taylor-margliðu f með miðju í $x=8$. Notið teikniforrit til að bera margliðurnar saman við f í grennd við $x=8$.

b. Notið þessar tvær margliður til að meta $\sqrt[3]{11}$.

c. Notið setningu Taylors til að finna efra mark á skekkjuna.

Lausn

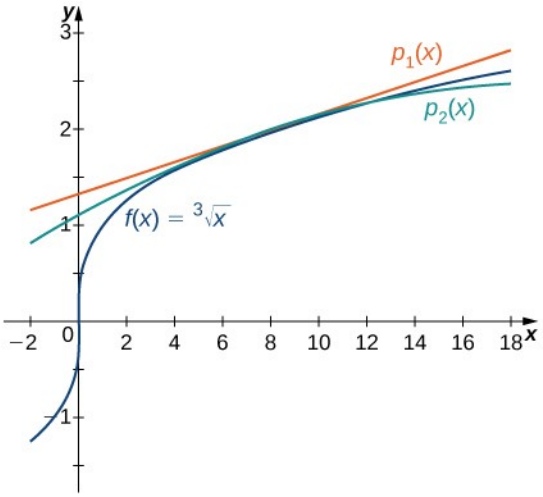
a. Fyrir $f(x)=\sqrt[3]{x}$, eru gildi fallsins og fyrstu tveggja afleiða þess þegar $x=8$ eftirfarandi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{3x^{2/3}} & f'(8) &= \frac{1}{12} \\ f''(x) &= \frac{-2}{9x^{5/3}} & f''(8) &= -\frac{1}{144}. \end{aligned}$$

Fyrsta og önnur Taylor-margliðan með miðju í $x=8$ eru því

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(8)+f'(8)(x-8) \\ &= 2+\tfrac{1}{12}(x-8) \\ p_2(x) &= f(8)+f'(8)(x-8)+\tfrac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2+\tfrac{1}{12}(x-8)-\tfrac{1}{288}(x-8)^2. \end{aligned}$$

Fallið og Taylor-margliðurnar eru sýnd á mynd 6.9.



Mynd 6.9 Gröf $f(x)=\sqrt[3]{x}$ og línulegu og annars stigs nálgananna $p_1(x)$ og $p_2(x)$.

b. Með fyrstu Taylor-margliðunni með miðju í $x=8$, getum við metið

$$\sqrt[3]{11}\approx p_1(11)=2+\frac{1}{12}(11-8)=2{,}25.$$

Með annarri Taylor-margliðunni með miðju í $x=8$, fæst

$$\sqrt[3]{11}\approx p_2(11)=2+\frac{1}{12}(11-8)-\frac{1}{288}(11-8)^2=2{,}21875.$$

c. Samkvæmt setningu Taylors um skekkju er til c á bilinu $(8,11)$ þannig að skekkjan þegar $\sqrt[3]{11}$ er nálgað með fyrstu Taylor-margliðunni uppfyllir

$$R_1(11)=\frac{f''(c)}{2!}(11-8)^2.$$

Við þekkjum ekki nákvæmt gildi c og finnum því efra mark á $R_1(11)$ með því að ákvarða hágildi f'' á bilinu $(8,11)$. Þar sem $f''(x)=-\frac{2}{9x^{5/3}}$, fæst stærsta gildi $\left|f''(x)\right|$ á bilinu þegar $x=8$. Með því að nota $f''(8)=-\frac{1}{144}$, fæst

$$|R_1(11)|\le\frac{1}{144\cdot 2!}(11-8)^2=0{,}03125.$$

Til að meta $R_2(11)$, notum við á svipaðan hátt að

$$R_2(11)=\frac{f'''(c)}{3!}(11-8)^3.$$

Þar sem $f'''(x)=\dfrac{10}{27x^{8/3}}$, er hágildi f''' á bilinu $(8,11)$ jafnt $f'''(8)\approx 0{,}0014468$. Því er

$$|R_2(11)|\le\frac{0{,}0011468}{3!}(11-8)^3\approx 0{,}0065104.$$

STÖÐUMAT 6.12

Finnið fyrstu og aðra Taylor-margliðu $f(x)=\sqrt{x}$ með miðju í $x=4$. Notið margliðurnar til að meta $\sqrt{6}$. Notið setningu Taylors til að finna efra mark á skekkjuna.

DÆMI 6.14

sin x nálgað með Maclaurin-margliðum

Af b-lið dæmis 6.12 eru Maclaurin-margliðurnar fyrir $\sin x$

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(x) &= p_{2m+2}(x) \\ &= x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\tfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^m\tfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

fyrir $m=0,1,2,\ldots$.

a. Notið fimmtu Maclaurin-margliðu $\sin x$ til að nálga $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)$ og finnið efra mark á skekkjuna.

b. Fyrir hvaða gildi x nálgar fimmta Maclaurin-margliðan $\sin x$ með skekkju minni en 0,0001?

Lausn

a. Fimmta Maclaurin-margliðan er

$$p_5(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}.$$

Með henni fæst eftirfarandi mat:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) &\approx p_5\left(\frac{\pi}{18}\right) \\ &=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 \\ &\approx 0{,}173648. \end{aligned}$$

Til að meta skekkjuna notum við að sjötta Maclaurin-margliðan er $p_6(x)=p_5(x)$ og finnum efra mark á $R_6\left(\frac{\pi}{18}\right)$. Samkvæmt setningunni um ótvíræðni Taylor-raða er skekkjan

$$R_6\left(\frac{\pi}{18}\right)=\frac{f^{(7)}(c)}{7!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^7$$

fyrir eitthvert c milli 0 og $\frac{\pi}{18}$. Þar sem $\left|f^{(7)}(x)\right|\leq 1$ fyrir öll x fæst að tölugildi skekkjunnar er í mesta lagi

$$\frac{1}{7!}\cdot\left(\frac{\pi}{18}\right)^7\leq 9{,}8\ \times\ 10^{-10}.$$

b. Við þurfum að finna þau gildi x sem uppfylla

$$\frac{1}{7!}|x|^7\leq 0{,}0001.$$

Þegar ójafnan er leyst fyrir x fæst að fimmta Maclaurin-margliðan gefur mat með skekkju minni en 0,0001 svo lengi sem $|x|<0{,}907$.

STÖÐUMAT 6.13

Notið fjórðu Maclaurin-margliðu $\cos x$ til að nálga $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

6

Nú þegar við getum fundið efra mark á skekkjuna $R_n(x)$, getum við notað það til að sanna að Taylor-röð f með miðju í a sé samleitin að f.

Föll sett fram með Taylor- og Maclaurin-röðum

Við fjöllum nú um samleitni Taylor-raða. Við byrjum á að sýna hvernig finna má Taylor-röð falls og samleitnibil hennar.

DÆMI 6.15

Taylor-röð fundin

Finnið Taylor-röð $f(x)=\frac{1}{x}$ með miðju í $x=1$. Ákvarðið samleitnibilið.

Lausn

Fyrir $f(x)=\frac{1}{x}$, eru gildi fallsins og fyrstu fjögurra afleiða þess þegar $x=1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{x} & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= -\tfrac{1}{x^2} & f'(1) &= -1 \\ f''(x) &= \tfrac{2}{x^3} & f''(1) &= 2! \\ f'''(x) &= -\tfrac{3\cdot 2}{x^4} & f'''(1) &= -3! \\ f^{(4)}(x) &= \tfrac{4\cdot 3\cdot 2}{x^5} & f^{(4)}(1) &= 4!. \end{aligned}$$

Það er að segja $f^{(n)}(1)=(-1)^n n!$ fyrir öll $n\geq 0$. Taylor-röð f með miðju í $x=1$ er því

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n.$$

Til að finna samleitnibilið notum við kvótaprófið. Við fáum

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\left|(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}\right|}{\left|(-1)^n(x-1)^n\right|}=|x-1|.$$

Röðin er því samleitin ef $|x-1|<1$. Hún er sem sagt samleitin fyrir $0<x<2$. Næst þurfum við að kanna endapunktana. Við $x=2$, fæst

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

sem er ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu. Á sama hátt fæst við $x=0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(0-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}1$$

er ósamleitin. Samleitnibilið er því $(0,2)$.

STÖÐUMAT 6.14

Finnið Taylor-röð $f(x)=\frac{1}{2x}$ með miðju í $x=2$ og ákvarðið samleitnibil hennar.

Við vitum að Taylor-röðin sem fannst í þessu dæmi er samleitin á bilinu $(0,2)$, en hvernig vitum við að hún sé í raun samleitin að f? Rétt á eftir skoðum við spurninguna í almennara samhengi, en í þessu dæmi getum við svarað henni með því að rita

$$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{1-(1-x)}.$$

Með öðrum orðum má setja f fram með geómetrísku röðinni $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$. Þar sem þetta er geómetrísk röð er hún samleitin að $\frac{1}{x}$ svo lengi sem $|1-x|<1$. Taylor-röðin sem fannst í dæmi 6.15 er því samleitin að $f(x)=\frac{1}{x}$ á $(0,2)$.

Skoðum nú almennari spurningu: Ef Taylor-röð falls f er samleitin á einhverju bili, hvernig getum við ákvarðað hvort hún sé í raun samleitin að f ? Til að svara því rifjum við upp að röð er samleitin að tilteknu gildi þá og því aðeins að runa hlutsumma hennar sé samleitin að gildinu. Fyrir Taylor-röð f með miðju í a er n-ta hlutsumman n-ta Taylor-margliðan p_n. Til að ákvarða hvort Taylor-röðin sé samleitin að f , þurfum við því að ákvarða hvort

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x)=f(x).$$

Þar sem skekkjan $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$, er Taylor-röðin samleitin að f þá og því aðeins að

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Við setjum þessa niðurstöðu nú fram formlega.

SETNING 6.8

Samleitni Taylor-raða

Gerum ráð fyrir að f hafi afleiður af öllum stigum á bili I sem inniheldur a. Þá er Taylor-röðin

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

samleitin að $f(x)$ fyrir öll x í I þá og því aðeins að

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

fyrir öll x í I.

Með þessari setningu getum við sannað að Taylor-röð f með miðju í a sé samleitin að f ef við getum sannað að skekkjan $R_n(x)\to 0$. Til að sanna að $R_n(x)\to 0$, notum við yfirleitt efra markið

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

úr setningu Taylors um skekkju.

Í næsta dæmi finnum við Maclaurin-raðir fyrir e^x og $\sin x$ og sýnum að raðirnar eru samleitnar að samsvarandi föllum fyrir allar rauntölur með því að sanna að skekkjurnar $R_n(x)\to 0$ fyrir allar rauntölur x.

DÆMI 6.16

Maclaurin-raðir fundnar

Finnið Maclaurin-röð og samleitnibil hvers eftirfarandi falls. Notið setningu Taylors um skekkju til að sanna að Maclaurin-röð f sé samleitin að f á bilinu.

a. e^x

b. $\sin x$

Lausn

a. Með n-tu Maclaurin-margliðunni fyrir e^x sem fannst í a-lið dæmis 6.12 fæst að Maclaurin-röð e^x er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Til að ákvarða samleitnibilið notum við kvótaprófið. Þar sem

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1},$$

höfum við

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

fyrir öll x. Röðin er því alsamleitin fyrir öll x og samleitnibilið er $(-\infty, \infty)$. Til að sýna að röðin sé samleitin að e^x fyrir öll x notum við að $f^{(n)}(x) = e^x$ fyrir öll $n \geq 0$ og að e^x er vaxandi fall á $(-\infty, \infty)$. Fyrir hverja rauntölu b er hágildi e^x fyrir öll $|x| \leq b$ því e^b. Þar með er

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^b}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Þar sem við sýndum rétt í þessu að

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

sé samleitin fyrir öll x vitum við af sundurleitniprófinu að

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

fyrir hverja rauntölu x. Með þessu og klemmureglunni fæst $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

b. Með n-tu Maclaurin-margliðunni fyrir $\sin x$ sem fannst í b-lið dæmis 6.12 fæst að Maclaurin-röð $\sin x$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

-tu Maclaurin-margliðunni fyrir

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}}=\frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)}.$$

Þar sem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)}=0$$

fyrir öll x fæst samleitnibilið $(-\infty,\infty)$. Til að sýna að Maclaurin-röðin sé samleitin að $\sin x$, skoðum við $R_n(x)$. Fyrir hvert x er til rauntala c milli o og x þannig að

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Þar sem $\left|f^{(n+1)}(c)\right|\le 1$ fyrir allar heiltölur n og allar rauntölur c höfum við

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

fyrir allar rauntölur x. Með sömu hugmynd og í a-lið fæst $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ fyrir öll x og því er Maclaurin-röð $\sin x$ samleitin að $\sin x$ fyrir öll raungildi x.

STÖÐUMAT 6.15

Finnið Maclaurin-röð $f(x)=\cos x$. Notið kvótaprófið til að sýna að samleitnibilið sé $(-\infty,\infty)$. Sýnið að Maclaurin-röðin sé samleitin að $\cos x$ fyrir allar rauntölur x.

NEMENDAVERKEFNI

Sönnun þess að e sé óræð tala

Í þessu verkefni notum við Maclaurin-margliður fyrir e^x til að sanna að e sé óræð tala. Sönnunin byggist á því að gera ráð fyrir að e sé ræð tala og komast að mótsögn út frá þeirri forsendu. Í eftirfarandi skrefum gerum við því ráð fyrir að $e=r/s$ þar sem r og s eru heiltölur og $s\neq 0$.

1. Ritið Maclaurin-margliðurnar $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ fyrir e^x. Reiknið $p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1), p_4(1)$ til að meta e.
2. Látum $R_n(x)$ tákna skekkjuna þegar $p_n(x)$ er notað til að meta e^x. Þá er $R_n(x)=e^x-p_n(x)$, og $R_n(1)=e-p_n(1)$. Að því gefnu að $e=\frac{r}{s}$ fyrir heiltölur r og s, reiknið $R_0(1), R_1(1), R_2(1), R_3(1), R_4(1)$.
3. Notið niðurstöðurnar úr 2. lið til að sýna að fyrir hverja skekkju $R_0(1), R_1(1), R_2(1), R_3(1), R_4(1)$, megi finna heiltölu k þannig að $k\,R_n(1)$ sé heiltala fyrir $n=0,1,2,3,4$.
4. Ritið formúluna fyrir n-tu Maclaurin-margliðuna $p_n(x)$ fyrir e^x og samsvarandi skekkju $R_n(x)$. Sýnið að $s\,n!\,R_n(1)$ sé heiltala.
5. Notið setningu Taylors til að rita beina formúlu fyrir $R_n(1)$. Álykti ð að $R_n(1)\neq 0$, og þar með $s\,n!\,R_n(1)\neq 0$.
6. Notið setningu Taylors til að finna mat á $R_n(1)$. Notið matið ásamt niðurstöðunni úr 5. lið til að sýna að $\left|s\,n!\,R_n(1)\right|<\frac{s\,e}{n+1}$. Álykti ð að ef n er nógu stórt, þá sé $\left|s\,n!\,R_n(1)\right|<1$. Því er $s\,n!\,R_n(1)$ heiltala með tölugildi minna en 1 og þar með $s\,n!\,R_n(1)=0$. En af 5. lið vitum við að $s\,n!\,R_n(1)\neq 0$. Við erum komin að mótsögn og upphaflega forsendan um að e sé ræð tala hlýtur því að vera röng.

Æfingar í undirkafla 6.3

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna annars stigs Taylor-margliðu gefins falls með miðju í gefnum punkti.

116. $f(x)=1+x+x^2$ með miðju í $a=1$

117. $f(x)=1+x+x^2$ með miðju í $a=-1$

118. $f(x)=\cos(2x)$ með miðju í $a=\pi$

119. $f(x)=\sin(2x)$ með miðju í $a=\frac{\pi}{2}$

120. $f(x)=\sqrt{x}$ með miðju í $a=4$

121. $f(x)=\ln x$ með miðju í $a=1$

122. $f(x)=\frac{1}{x}$ með miðju í $a=1$

123. $f(x)=e^x$ með miðju í $a=1$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið sannreyna að tilgreint val á n í skekkjumatinu $|R_n|\le\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, þar sem M er hágildi $|f^{(n+1)}(z)|$ á bilinu milli a og tilgreinds punkts, gefi $|R_n|\le\frac{1}{1000}$. Finnið gildi Taylor-margliðunnar p_n fyrir f í tilgreindum punkti. Ef $|Rn|$ er ekki minna en 1/1000, ákvarðið þá hvert það er.

124. [T] $\sqrt{10}; a=9, n=3$

125. [T] $(28)^{1/3}; a=27, n=1$

126. [T] $\sin(6); a=2\pi, n=5$

127. [T] e^2; $a=0, n=9$

128. [T] $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right); a=0, n=4$

129. [T] $\ln(2); a=1, n=1000$

130. Heildið nálgunina $\sin t\approx t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{5040}$, reiknaða við πt, til að nálga $\int_0^1\frac{\sin\pi t}{\pi t}dt$.

131. Heildið nálgunina $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^6}{720}$, reiknaða við $-x^2$, til að nálga $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna minnsta gildi n þannig að skekkjumatið $|R_n|\le\frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, þar sem M er hágildi $|f^{(n+1)}(z)|$ á bilinu milli a og tilgreinda punktsins, gefi $|R_n|\le\frac{1}{1000}$ á tilgreinda bilinu.

132. $f(x)=\sin x$ á $[-\pi,\pi], a=0$

133. $f(x)=\cos x$ á $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], a=0$

134. $f(x)=e^{-2x}$ á $[-1,1], a=0$

135. $f(x)=e^{-x}$ á $[-3,3], a=0$

Í eftirfarandi verkefnum fæst hágildi hægri hliðar skekkjumatsins $|R_1| \leq \frac{\max|f''(z)|}{2} R^2$ á $[a-R, a+R]$ við a eða $a \pm R$. Metið stærsta gildi R þannig að $\frac{\max|f''(z)|}{2} R^2 \leq 0{,}1$ á $[a-R, a+R]$ með því að teikna þetta hágildi sem fall af R.

136. [T] e^x nálgað með $1+x, a=0$

137. [T] $\sin x$ nálgað með x, $a=0$

138. [T] $\ln x$ nálgað með $x-1, a=1$

139. [T] $\cos x$ nálgað með $1, a=0$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna Taylor-röð gefins falls með miðju í tilgreindum punkti.

140. x^4 með miðju í $a=-1$

141. $1+x+x^2+x^3$ með miðju í $a=-1$

142. $\sin x$ með miðju í $a=\pi$

143. $\cos x$ með miðju í $a=2\pi$

144. $\sin x$ með miðju í $x=\frac{\pi}{2}$

145. $\cos x$ með miðju í $x=\frac{\pi}{2}$

146. e^x með miðju í $a=-1$

147. e^x með miðju í $a=1$

148. $\frac{1}{(x-1)^2}$ með miðju í $a=0$ (Vísbending: Deildið $\frac{1}{1-x}$.)

149. $\frac{1}{(x-1)^3}$ með miðju í $a=0$

150. $F(x)=\int_0^x \cos(\sqrt{t})\,dt; f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(2n)!}$ með miðju í $a=0$ (Athugið: f er Taylor-röð $\cos(\sqrt{t})$.)

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna Taylor-röð hvers falls umhverfis $x=1$.

151.

$$f(x)=2-x$$

152.

$$f(x)=x^3$$

153.

$$f(x)=(x-2)^2$$

154.

$$f(x)=\ln x$$

155.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

156.

$$f(x)=\frac{1}{2x-x^2}$$

157.

$$f(x)=\frac{x}{4x-2x^2-1}$$

158.

$$f(x)=e^{-x}$$

159.

$$f(x)=e^{2x}$$

[T] Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna gildi x þannig að gefna röðin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sé gildi Maclaurin-raðar $f(x)$ við x. Nálgið gildi $f(x)$ með $S_{10}=\sum_{n=0}^{10} a_n$.

6

160.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

161.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

162.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

163.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Í eftirfarandi verkefnum eru notuð föllin $S_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ og $C_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ á $[-\pi, \pi]$.

164. **[T]** Teiknið graf $\sin^2 x - (S_5(x))^2$ á $[-\pi, \pi]$. Berið hágildi mismunarins saman við annað veldi skekkjumats Taylors fyrir $\sin x$.

165. **[T]** Teiknið graf $\cos^2 x - (C_4(x))^2$ á $[-\pi, \pi]$. Berið hágildi mismunarins saman við annað veldi skekkjumats Taylors fyrir $\cos x$.

166. **[T]** Teiknið graf $\left|2 S_5(x) C_4(x) - \sin(2x)\right|$ á $[-\pi, \pi]$.

167. **[T]** Berið $\frac{S_5(x)}{C_4(x)}$ á $[-1, 1]$ saman við $\tan x$. Berið þetta saman við skekkjumat Taylors fyrir nálgun $\tan x$ með $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$.

168. **[T]** Teiknið graf $e^x - e_4(x)$ þar sem $e_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ á $[0, 2]$. Berið hágildi skekkjunnar saman við skekkjumat Taylors.

169. (Taylor-nálganir og rótaleit.) Rifjið upp að aðferð Newtons $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ nálgar lausnir $f(x) = 0$ í grennd við inntaksgildið x_0.

a. Ef f og g eru andhverf föll, útskýrið hvers vegna lausn $g(x) = a$ sé gildið $f(a)$ fallsins f.

b. Látum $p_N(x)$ vera N-ta stigs Maclaurin-margliðu e^x. Notið aðferð Newtons til að nálga lausnir $p_N(x) - 2 = 0$ fyrir $N = 4, 5, 6$.

c. Útskýrið hvers vegna nálgaðar rætur $p_N(x) - 2 = 0$ séu nálgunargildi $\ln(2)$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna hvert markgildi með Taylor-röðum. Notið þá staðreynd að ef $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ er samleitin á bili sem inniheldur c, þá er $\lim_{x \to c} q(x) = a_0$.

170.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

171.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{x^2}$$

172.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x^4}$$

173.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{2x}$$

6.4 Vinna með Taylor-raðir

NÁMSMARKMIÐ

- 6.4.1 Rita liði tvíliðuröðarinnar.
- 6.4.2 Þekkja Taylor-raðaframsetningar algengra falla.
- 6.4.3 Þekkja og beita aðferðum til að finna Taylor-röð falls.
- 6.4.4 Nota Taylor-raðir til að leysa deildajöfnur.
- 6.4.5 Nota Taylor-raðir til að reikna heildi án grunnstofnfalla.

Í síðasta undirkafla skilgreindum við Taylor-raðir og sýndum hvernig finna má Taylor-raðir nokkurra algengra falla með því að reikna stuðla Taylor-margliðanna beint. Í þessum undirkafla sýnum við hvernig nota má þessar Taylor-raðir til að leiða út Taylor-raðir annarra falla. Síðan kynnum við tvær algengar hagnýtingar veldaraða. Í fyrsta lagi sýnum við hvernig nota má veldaraðir til að leysa deildajöfnur. Í öðru lagi sýnum við hvernig nota má veldaraðir til að reikna heildi þegar stofnfall heildisstofnsins verður ekki sett fram með grunnföllum. Í einu dæmi skoðum við $\int e^{-x^2}\,dx$, heildi sem kemur oft fyrir í líkindafræði.

6

Tvíliðuröðin

Fyrsta markmið okkar í þessum undirkafla er að ákvarða Maclaurin-röð fallsins $f(x)=(1+x)^r$ fyrir allar rauntölur r. Maclaurin-röð þessa falls nefnist tvíliðuröð. Við byrjum á einfaldasta tilvikinu: r er óneikvæð heiltala. Rifjum upp að fyrir $r=0,1,2,3,4$, $f(x)=(1+x)^r$ má rita

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^0 = 1,\\
f(x) &= (1+x)^1 = 1+x,\\
f(x) &= (1+x)^2 = 1+2x+x^2,\\
f(x) &= (1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3,\\
f(x) &= (1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4.
\end{aligned}$$

Segðirnar hægra megin nefnast tvíliðuliðanir og stuðlarnir nefnast tvíliðustuðlar. Almennt gildir að fyrir hverja óneikvæða heiltölu r, er tvíliðustuðull x^n í tvíliðuliðun $(1+x)^r$ gefinn með

$$\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!\,(r-n)!}$$

(6.6)

og

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^r \\ &= \binom{r}{0}1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots + \binom{r}{r-1}x^{r-1} + \binom{r}{r}x^r \\ &= \sum_{n=0}^{r}\binom{r}{n}x^n. \end{aligned}$$

(6.7)

Til dæmis sést með þessari formúlu fyrir $r=5$, að

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^5 \\ &= \binom{5}{0}1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5 \\ &= \tfrac{5!}{0!5!}1 + \tfrac{5!}{1!4!}x + \tfrac{5!}{2!3!}x^2 + \tfrac{5!}{3!2!}x^3 + \tfrac{5!}{4!1!}x^4 + \tfrac{5!}{5!0!}x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5. \end{aligned}$$

Skoðum nú tilvikið þegar veldisvísirinn r er hvaða rauntala sem er, ekki endilega óneikvæð heiltala. Ef r er ekki óneikvæð heiltala er ekki hægt að rita $f(x)=(1+x)^r$ sem endanlega margliðu. Við getum hins vegar fundið veldaröð fyrir f. Nánar tiltekið leitum við að Maclaurin-röð f. Til þess finnum við afleiður f og reiknum gildi þeirra við $x=0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^r & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= r(1+x)^{r-1} & f\prime(0) &= r \\ f''(x) &= r(r-1)(1+x)^{r-2} & f''(0) &= r(r-1) \\ f'''(x) &= r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3} & f'''(0) &= r(r-1)(r-2) \\ f^{(n)}(x) &= r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} & f^{(n)}(0) &= r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1) \end{aligned}$$

Við ályktum að stuðlarnir í tvíliðuröðinni séu gefnir með

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

(6.8)

Athugum að ef r er óneikvæð heiltala, er $(r+1)$-ta afleiðan $f^{(r+1)}$ núllfallið og röðin endar. Ef r er óneikvæð heiltala, er formúlan í jöfnu 6.8 fyrir stuðlana jafnframt í samræmi við jöfnu 6.6 og formúlan fyrir tvíliðuröðina í samræmi við jöfnu 6.7 fyrir endanlegu tvíliðuliðunina. Til að tákna tvíliðustuðla með hvaða rauntölu sem er í stað r, notum við eftirfarandi táknmál.

$$\binom{r}{n} = \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

Með þessu táknmáli getum við ritað tvíliðuröð $(1+x)^r$ sem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \frac{r\,(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r\,(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

(6.9)

Nú þurfum við að ákvarða samleitnibil tvíliðuraðarinnar í jöfnu 6.9. Við notum kvótaprófið og skoðum því

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{|r(r-1)(r-2)\cdots(r-n)|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)||x|^n} \\ &= \frac{|r-n||x|}{|n+1|}.\end{aligned}$$

Þar sem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| < 1$$

þá og því aðeins að $|x|<1$, ályktum við að samleitnibil tvíliðuraðarinnar sé $(-1,1)$. Hegðunin í endapunktunum veltur á r. Hægt er að sýna að fyrir $r \geq 0$ sé röðin samleitin í báðum endapunktum; fyrir $-1<r<0$, sé hún samleitin við $x=1$ en ósamleitin við $x=-1$; og fyrir $r<-1$, sé hún ósamleitin í báðum endapunktum. Tvíliðuröðin er samleitin að $(1+x)^r$ á $(-1,1)$ fyrir allar rauntölur r, en erfitt er að sanna það með því að sýna að skekkjan $R_n(x) \to 0$.

SKILGREINING

6

Fyrir hverja rauntölu r, er Maclaurin-röð $f(x)=(1+x)^r$ tvíliðuröðin. Hún er samleitin að f fyrir $|x|<1$, og við ritum

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \\ &= 1 + rx + \tfrac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \tfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots\end{aligned}$$

fyrir $|x|<1$.

Við getum notað þessa skilgreiningu til að finna tvíliðuröð $f(x)=\sqrt{1+x}$ og notað röðina til að nálga $\sqrt{1{,}5}$.

DÆMI 6.17

Tvíliðuröð fundin

a. Finnið tvíliðuröð $f(x)=\sqrt{1+x}$.

b. Notið þriðja stigs Maclaurin-margliðuna $p_3(x)$ til að meta $\sqrt{1{,}5}$. Notið setningu Taylors til að finna efra mark á skekkjuna. Notið teikniforrit til að bera saman gröf f og p_3.

Lausn

a. Hér er $r=\frac{1}{2}$. Með skilgreiningu tvíliðuraðarinnar fæst 1 + x = 1 + 1/2 x + (1 / 2) (− 1 / 2)/2! x 2 + (1 / 2) (− 1 / 2) (− 3 / 2)/3! x 3 + … = 1 + 1/2 x − 1/2! 1/2 2 x 2 + 1/3! 1 · 3/2 3 x 3 − … + (−1) n + 1/n! 1 · 3 · 5 … (2 n − 3)/2 n x n + … = 1 + ∑ n = 1 ∞ (−1) n + 1/n! 1 · 3 · 5 … (2 n − 3)/2 n x n.

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{(1/2)(-1/2)}{2!}x^2+\tfrac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}x^3+\cdots\\ &= 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2!}\,\tfrac{1}{2^2}x^2+\tfrac{1}{3!}\,\tfrac{1\cdot 3}{2^3}x^3-\cdots+\tfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^n+\cdots\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^n.\end{aligned}$$

b. Af niðurstöðunni í a-lið er þriðja stigs Maclaurin-margliðan

$$p_3(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3.$$

Því er

$$\begin{aligned}\sqrt{1{,}5} &= \sqrt{1+0{,}5}\\ &\approx 1+\frac{1}{2}(0{,}5)-\frac{1}{8}(0{,}5)^2+\frac{1}{16}(0{,}5)^3\\ &\approx 1{,}2266.\end{aligned}$$

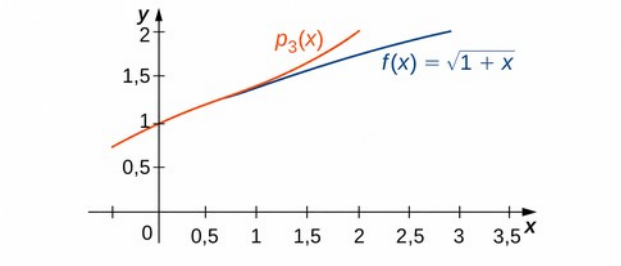
Samkvæmt setningu Taylors uppfyllir skekkjan

$$R_3(0{,}5)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0{,}5)^4$$

fyrir eitthvert c milli 0 og 0,5. Þar sem $f^{(4)}(x)=-\dfrac{15}{2^4(1+x)^{7/2}}$, og hágildi $\left|f^{(4)}(x)\right|$ á bilinu $]0\,;0{,}5[$ fæst við $x=0$, höfum við

$$|R_3(0{,}5)| \le \frac{15}{4!\,2^4}(0{,}5)^4 \approx 0{,}00244.$$

Fallið og Maclaurin-margliðan p_3 eru teiknuð á mynd 6.10.



Mynd 6.10 Þriðja stigs Maclaurin-margliðan $p_3(x)$ gefur góða nálgun á $f(x)=\sqrt{1+x}$ fyrir x nálægt núlli.

STÖÐUMAT 6.16

Finnið tvíliðuröð $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Algeng föll sett fram með Taylor-röðum

Hingað til höfum við leitt út Maclaurin-raðir fyrir vísisföll, hornaföll og lograföll, auk falla af gerðinni $f(x)=(1+x)^r$. Í töflu 6.1 tökum við saman niðurstöðurnar. Athugum að samleitni Maclaurin-raðarinnar fyrir $f(x)=\ln(1+x)$ í endapunktinum $x=1$ og Maclaurin-raðarinnar fyrir $f(x)=\tan^{-1}x$ í endapunktunum $x=1$ og $x=-1$ styðst við ítarlegri setningu en hér er fjallað um. (Sjá setningu Abels til frekari umfjöllunar um þetta tæknilega atriði.)

Tafla 6.1 Maclaurin-raðir algengra falla

Fall	Maclaurin-röð	Samleitnibil
$f(x)=\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$-1<x<1$
$f(x)=e^x$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$-\infty<x<\infty$
$f(x)=\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$-\infty<x<\infty$
$f(x)=\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$-\infty<x<\infty$
$f(x)=\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$-1<x\leq 1$
$f(x)=\tan^{-1} x$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$-1\leq x\leq 1$
$f(x)=(1+x)^r$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$	$-1<x<1$

Fyrr í kaflanum sýndum við hvernig sameina má veldaraðir til að mynda nýjar veldaraðir. Hér notum við þessa eiginleika ásamt Maclaurin-röðunum í töflu 6.1 til að mynda Maclaurin-raðir annarra falla.

DÆMI 6.18

Maclaurin-raðir leiddar af þekktum röðum

Finnið Maclaurin-röð hvers falls hér á eftir. Notið eina af röðunum í töflu 6.1.

a. $f(x)=\cos\sqrt{x}$

b. $f(x)=\sinh x$

Lausn

a. Með Maclaurin-röðinni fyrir $\cos x$ sést að Maclaurin-röð $\cos\sqrt{x}$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$
$$= 1 - \tfrac{x}{2!} + \tfrac{x^2}{4!} - \tfrac{x^3}{6!} + \tfrac{x^4}{8!} - \cdots.$$

Þessi röð er samleitin að $\cos\sqrt{x}$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi $\cos\sqrt{x}$; það er fyrir öll $x \geq 0$.

b. Til að finna Maclaurin-röð $\sinh x$, notum við að

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Af Maclaurin-röðinni fyrir e^x, sést að n-ti liður Maclaurin-raðarinnar fyrir $\sinh x$ er

$$\frac{x^n}{n!} - \frac{(-x)^n}{n!}.$$

Þegar n er slétt tala er þessi liður núll. Þegar n er oddatala er liðurinn $\frac{2x^n}{n!}$. Maclaurin-röð $\sinh x$ hefur því aðeins liði þar sem veldisvísirinn er oddatala og er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

STÖÐUMAT 6.17

Finnið Maclaurin-röð $\sin\left(x^2\right)$.

Fyrr í þessum kafla sýndum við einnig hvernig deilda má veldaraðir lið fyrir lið til að mynda nýjar veldaraðir. Í dæmi 6.19 deildum við tvíliðuröð $\sqrt{1+x}$ lið fyrir lið til að finna tvíliðuröð $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Athugið að finna mætti tvíliðuröð $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ beint út frá skilgreiningunni, en einfaldara er að deilda tvíliðuröð $\sqrt{1+x}$

DÆMI 6.19

Röð deilduð til að finna nýja röð

Notið tvíliðuröð $\sqrt{1+x}$ til að finna tvíliðuröð $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Lausn

Föllin tvö tengjast með jöfnunni

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

og tvíliðuröð $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ er því

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\sqrt{1+x}} &= 2\tfrac{d}{dx}\sqrt{1+x}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}x^n.\end{aligned}$$

STÖÐUMAT 6.18

Finnið tvíliðuröð $f(x)=\frac{1}{(1+x)^{3/2}}$

Í þessu dæmi deildum við þekkta Taylor-röð til að mynda Taylor-röð fyrir annað fall. Veldaraðir eru öflugt verkfæri til að leysa deildajöfnur af því að deilda má þær lið fyrir lið. Nú sýnum við hvernig það er gert.

Deildajöfnur leystar með veldaröðum

Skoðum deildajöfnuna

$$y'(x)=y.$$

Rifjum upp að þetta er fyrsta stigs aðgreinanleg deildajafna og lausn hennar er $y=Ce^x$. Auðvelt er að leysa þessa jöfnu með aðferðum sem fjallað var um fyrr í bókinni. Fyrir flestar deildajöfnur höfum við hins vegar ekki enn aðferðir til að finna nákvæma lausn. Veldaraðir eru afar gagnlegt verkfæri til að leysa margar gerðir deildajafna. Með þessari aðferð leitum við að lausn á forminu $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ og finnum hverjir stuðlarnir þurfa að vera. Í næsta dæmi skoðum við upphafsgildisverkefni með deildajöfnunni $y'=y$ til að sýna aðferðina.

DÆMI 6.20

Veldaraðarlausn deildajöfnu

Notið veldaraðir til að leysa upphafsgildisverkefnið

$$y'=y,\ y(0)=3.$$

Lausn

Gerum ráð fyrir að til sé veldaraðarlausn

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\cdots.$$

Með því að deilda röðina lið fyrir lið fæst

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots.$$

Ef y uppfyllir deildajöfnuna, þá er

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_3x^3 + \cdots.$$

Af setningunni um ótvíræðni veldaraða vitum við að raðirnar geta aðeins verið jafnar ef stuðlar þeirra eru jafnir. Því er

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1, \\ c_1 &= 2c_2, \\ c_2 &= 3c_3, \\ c_3 &= 4c_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Með upphafsskilyrðinu $y(0) = 3$ og veldaraðaframsetningunni

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots,$$

fæst $c_0 = 3$. Nú getum við fundið stuðlana sem eftir eru. Með því að nota $c_0 = 3$, fæst

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 = 3 = \tfrac{3}{1!}, \\ c_2 &= \tfrac{c_1}{2} = \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2!}, \\ c_3 &= \tfrac{c_2}{3} = \tfrac{3}{3\cdot 2} = \tfrac{3}{3!}, \\ c_4 &= \tfrac{c_3}{4} = \tfrac{3}{4\cdot 3\cdot 2} = \tfrac{3}{4!}. \end{aligned}$$

Því er

$$\begin{aligned} y &= 3\left[1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots\right] \\ &= 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Þið kannist ef til vill við

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

sem Taylor-röð e^x. Lausnin er því $y = 3e^x$.

STÖÐUMAT 6.19

Notið veldaraðir til að leysa $y' = 2y$, $y(0) = 5$.

Nú skoðum við deildajöfnu sem ekki er hægt að leysa með aðferðunum sem fjallað hefur verið um.

$$y'' - x\,y = 0$$

Þessi deildajafna nefnist jafna Airys. Hún kemur víða við sögu í stærðfræðilegri eðlisfræði, til dæmis í líkönum af ljósbognun. Hér sýnum við hvernig leysa má hana með veldaröðum.

DÆMI 6.21

Veldaraðarlausn jöfnu Airys

Notið veldaraðir til að leysa

$$y'' - x\,y = 0$$

með upphafsskilyrðunum $y(0) = a$ og $y'(0) = b$.

Lausn

Við leitum að lausn á forminu

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots.$$

Með því að deilda fallið lið fyrir lið fæst

$$\begin{aligned} y' &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots, \\ y'' &= 2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + 4 \cdot 3 c_4 x^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Ef y uppfyllir jöfnu $y'' = x\,y$, þá er

$$2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + 4 \cdot 3 c_4 x^2 + \cdots = x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right).$$

Af setningunni um ótvíræðni veldaraða vitum við að stuðlar við sama veldi verða að vera jafnir. Því er

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 c_2 &= 0, \\ 3 \cdot 2 c_3 &= c_0, \\ 4 \cdot 3 c_4 &= c_1, \\ 5 \cdot 4 c_5 &= c_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Almennt gildir fyrir $n \geq 3$, að $n \cdot (n-1) c_n = c_{n-3}$. Reyndar má rita alla stuðlana með c_0 og c_1. Til að sjá það athugum við fyrst að $c_2 = 0$. Þá er

$$\begin{aligned} c_3 &= \tfrac{c_0}{3 \cdot 2}, \\ c_4 &= \tfrac{c_1}{4 \cdot 3}. \end{aligned}$$

Fyrir c_5, c_6, c_7, sést að

$$c_5 = \frac{c_2}{5\cdot 4} = 0,$$
$$c_6 = \frac{c_3}{6\cdot 5} = \frac{c_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2},$$
$$c_7 = \frac{c_4}{7\cdot 6} = \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}.$$

Veldaraðarlausn deildajöfnunnar er því

$$y = c_0 + c_1 x + 0\cdot x^2 + \frac{c_0}{3\cdot 2}x^3 + \frac{c_1}{4\cdot 3}x^4 + 0\cdot x^5 + \frac{c_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \cdots.$$

Af upphafsskilyrðinu $y(0)=a$ leiðir að $c_0=a$. Með því að deilda röðina lið fyrir lið og nota $y'(0)=b$, ályktum við að $c_1=b$. Lausn upphafsgildisverkefnisins er því

$$y = a\left(1 + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \cdots\right) + b\left(x + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} + \cdots\right).$$

STÖÐUMAT 6.20

Notið veldaraðir til að leysa $y'' + x^2 y = 0$ með upphafsskilyrðunum $y(0)=a$ og $y'(0)=b$.

Heildi án grunnstofnfalla reiknuð

Veldaraðir eru oft notaðar til að leysa deildajöfnur. Nú snúum við okkur að annarri hagnýtingu. Við sýnum hvernig nota má veldaraðir til að reikna heildi falla þegar ekki er hægt að setja stofnföll þeirra fram með grunnföllum.

Eitt heildi sem kemur oft fyrir í líkindafræði er $\int e^{-x^2}\,dx$. Því miður er stofnfall heildisstofnsins e^{-x^2} ekki grunnfall. Með grunnfalli er átt við fall sem má rita með endanlega mörgum algebrulegum samsetningum eða samskeytingum vísisfalla, lografalla, hornafalla eða veldisfalla. Athugið að hugtakið „grunnfall“ er ekki samheiti við einfalt fall. Til dæmis er fallið $f(x)=\sqrt{x^2-3x}+e^{x^3}-\sin(5x+4)$ grunnfall þótt það virðist ekki sérlega einfalt. Heildi af gerðinni $\int f(x)\,dx$, þar sem stofnfall f er ekki hægt að rita sem grunnfall, nefnist heildi án grunnstofnfalls.

Ekki er hægt að reikna heildi án grunnstofnfalla með grunnaðferðum heildunar sem fjallað var um fyrr. Ein leið til að reikna slík heildi er að setja heildisstofninn fram sem veldaröð og heilda lið fyrir lið. Við sýnum þessa aðferð með því að skoða $\int e^{-x^2}\,dx$.

DÆMI 6.22

Taylor-röð notuð til að reikna ákveðið heildi

a. Setjið $\int e^{-x^2}\,dx$ fram sem óendanlega röð.

b. Reiknið $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ með skekkju minni en 0,01.

Lausn

a. Maclaurin-röð e^{-x^2} er

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} \\ &= 1 - x^2 + \tfrac{x^4}{2!} - \tfrac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}. \end{aligned}$$

Því er

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} dx &= \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx \\ &= C + x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5 \cdot 2!} - \tfrac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots. \end{aligned}$$

b. Af niðurstöðunni í a-lið fæst

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots.$$

Summa fyrstu fjögurra liðanna er um það bil $0{,}74$. Samkvæmt prófinu fyrir víxlmerkjaraðir er skekkja þessa mats minni en $\frac{1}{216} \approx 0{,}0046296 < 0{,}01$.

6

STÖÐUMAT 6.21

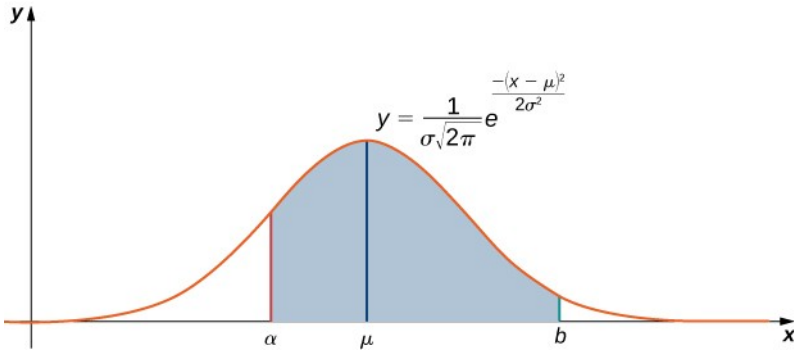
Setjið $\int \cos\sqrt{x}\, dx$ fram sem óendanlega röð. Reiknið $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$ með skekkju minni en $0{,}01$.

Eins og áður kom fram kemur heildið $\int e^{-x^2} dx$ oft fyrir í líkindafræði. Nánar tiltekið er það notað þegar gagnasöfn fylgja normaldreifingu, en þá liggja gagnagildin undir bjöllulaga ferli. Ef gagnasafn er til dæmis normaldreift með meðaltali μ og staðalfráviki σ, eru líkurnar á að gildi sem valið er af handahófi liggi milli $x = a$ og $x = b$ gefnar með

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

(6.10)

(Sjá mynd 6.11.)



Mynd 6.11 Ef gagnagildi eru normaldreifð með meðaltali μ og staðalfráviki σ, eru líkurnar á að gagnagildi sem valið er af handahófi liggi milli a og b jafnar flatarmálinu undir ferlinum $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ milli $x = a$ og $x = b$.

Til að einfalda heildið látum við venjulega $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. Stærðin z nefnist z-gildi gagnagildis.

Með þessari einföldun verður heildið í jöfnu 6.10

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} e^{-z^2/2}\, dz.$$

(6.11)

Í dæmi 6.23 sýnum við hvernig nota má heildið til að reikna líkur.

DÆMI 6.23

Maclaurin-röð notuð til að nálga líkur

Gerum ráð fyrir að stig á stöðluðu prófi séu normaldreifð með meðaltali $\mu = 100$ og staðalfráviki $\sigma = 50$. Notið jöfnu 6.11 og fyrstu sex liði Maclaurin-raðarinnar fyrir $e^{-x^2/2}$ til að nálga líkurnar á að prófstig sem valið er af handahófi liggi milli $x = 100$ og $x = 200$. Notið prófið fyrir víxlmerkjaraðir til að finna hversu nákvæm nálgunin er.

Lausn

Þar sem $\mu = 100, \sigma = 50$, og við viljum ákvarða flatarmálið undir ferlinum frá $a = 100$ til $b = 200$, verður heildið í jöfnu 6.11

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2} e^{-z^2/2}\, dz.$$

Maclaurin-röð $e^{-x^2/2}$ er

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} \\ &= 1 - \tfrac{x^2}{2^1 \cdot 1!} + \tfrac{x^4}{2^2 \cdot 2!} - \tfrac{x^6}{2^3 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}. \end{aligned}$$

Því er

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-z^2/2} dz &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(1 - \frac{z^2}{2^1 \cdot 1!} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 2!} - \frac{z^6}{2^3 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots\right) dz \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(C + z - \tfrac{z^3}{3 \cdot 2^1 \cdot 1!} + \tfrac{z^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \tfrac{z^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1) 2^n \cdot n!} + \cdots\right) \\ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{-z^2/2} dz &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2 - \tfrac{8}{6} + \tfrac{32}{40} - \tfrac{128}{336} + \tfrac{512}{3456} - \tfrac{2^{11}}{11 \cdot 2^5 \cdot 5!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Using the first five terms, we estimate that the probability is approximately $0{,}4922$. By the alternating series test, we see that this estimate is accurate to within

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{2^{13}}{13 \cdot 2^6 \cdot 6!} \approx 0{,}00546.$$

Greining

If you are familiar with probability theory, you may know that the probability that a data value is within two standard deviations of the mean is approximately $95\,\%$. Here we calculated the probability that a data value is between the mean and two standard deviations above the mean, so the estimate should be around $47{,}5\,\%$. The estimate, combined with the bound on the accuracy, falls within this range.

STÖÐUMAT 6.22

Notið fyrstu fimm liði Maclaurin-raðarinnar fyrir $e^{-x^2/2}$ til að meta líkurnar á að prófstig sem valið er af handahófi liggi milli 100 og 150. Notið prófið fyrir víxlmerkjaraðir til að finna hversu nákvæmt matið er.

Heildi án grunnstofnfalls kemur líka fyrir þegar sveiflutími pendúls er reiknaður. Heildið er

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Heildi af þessu formi nefnist sporgert heildi af fyrstu gerð. Sporgert heildi komu fyrst fram þegar reynt var að reikna bogalengd sporbaugs. Nú sýnum við hvernig nota má veldaraðir til að nálga þetta heildi.

DÆMI 6.24

Sveiflutími pendúls

Sveiflutími pendúls er sá tími sem pendúllinn þarf til að ljúka einni sveiflu fram og til baka. Fyrir pendúl sem er L að lengd og myndar hámarkshornið $\theta_{\max}$ við lóðrétta stefnu er sveiflutíminn T gefinn með

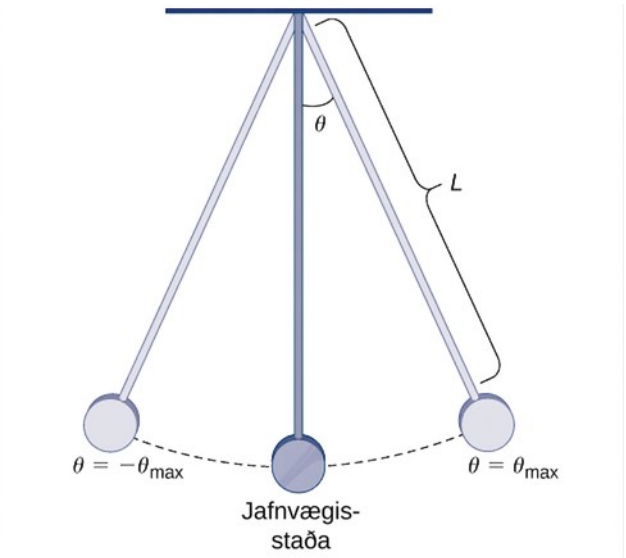
$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

þar sem g er þyngdarhröðunin og $k = \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)$ (sjá mynd 6.12). (Athugið að þessi formúla fyrir sveiflutímann er leidd af ólínulegu líkani pendúls. Í sumum tilvikum er notað línugert líkan til einföldunar og $\sin\theta$ nálgað með θ.) Notið tvíliðuröðina

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}x^n$$

til að meta sveiflutíma þessa pendúls. Nálgið sveiflutímann þegar

a. aðeins fyrsti liður tvíliðuraðarinnar er notaður, og
b. fyrstu tveir liðir tvíliðuraðarinnar eru notaðir.



Mynd 6.12 Pendúllinn er L að lengd og myndar hámarkshornið $\theta_{\max}$ við lóðrétta stefnu.

Lausn

Við notum tvíliðuröðina og skiptum x út fyrir $-k^2\sin^2\theta$. Þá má rita sveiflutímann sem

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta + \frac{1\cdot 3}{2!\,2^2}k^4\sin^4\theta + \cdots\right)d\theta.$$

a. Ef aðeins fyrsti liður heildisstofnsins er notaður er fyrsta stigs matið

$$T \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ef $\theta_{\max}$ er lítið, þá er $k = \sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)$ lítið. Við fullyrðum að þetta sé gott mat þegar k er lítið.

Til að rökstyðja fullyrðinguna skoðum við

$$\int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta + \frac{1\cdot 3}{2!\,2^2}k^4\sin^4\theta + \cdots\right) d\theta.$$

Þar sem $|\sin x| \leq 1$, er heildið takmarkað af

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1.3}{2!\,2^2}k^4 + \cdots\right) d\theta < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1\cdot 3}{2!\,2^2}k^4 + \cdots\right).$$

Jafnframt má sýna að hver stuðull hægra megin er minni en 1 og að segðin er því takmörkuð af

$$\frac{\pi k^2}{2}\left(1 + k^2 + k^4 + \cdots\right) = \frac{\pi k^2}{2} \cdot \frac{1}{1-k^2},$$

sem er lítið þegar k er lítið.

b. Fyrir stærri gildi $\theta_{\max}$, getum við nálgað T með fleiri liðum heildisstofnsins. Með fyrstu tveimur liðunum fæst matið

$$\begin{aligned} T &\approx 4\sqrt{\tfrac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta\right) d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{\tfrac{L}{g}} \left(1 + \tfrac{k^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Dæmin í þessum undirkafla um hagnýtingu Taylor-raða eiga að sýna hve mikilvægar þær eru. Almennt eru Taylor-raðir gagnlegar af því að með þeim má setja þekkt föll fram með margliðum. Þannig fáum við verkfæri til að nálga fallgildi og meta flókin heildi. Auk þess má með þeim skilgreina ný föll sem veldaraðir. Þannig fáum við öflugt verkfæri til að leysa deildajöfnur.

Æfingar í undirkafla 6.4

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota viðeigandi innsetningar til að rita Maclaurin-röð gefinnar tvíliðusegðar.

174.

$$(1-x)^{1/3}$$

175.

$$(1+x^2)^{-1/3}$$

176.

$$(1-x)^{1,01}$$

177.

$$(1-2x)^{2/3}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota innsetninguna $(b+x)^r=(b+a)^r\left(1+\frac{x-a}{b+a}\right)^r$ í tvíliðuliðuninni til að finna Taylor-röð hvers falls með gefinni miðju.

178. $\sqrt{x+2}$ með miðju í $a=0$

179. $\sqrt{x^2+2}$ með miðju í $a=0$

180. $\sqrt{x+2}$ með miðju í $a=1$

181. $\sqrt{2x-x^2}$ með miðju í $a=1$ (Vísbending: $2x-x^2=1-(x-1)^2$)

182. $(x-8)^{1/3}$ með miðju í $a=9$

183. $\sqrt{x}$ með miðju í $a=4$

184. $x^{1/3}$ með miðju í $a=27$

185. $\sqrt{x}$ með miðju í $a=9$

6

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota tvíliðusetninguna til að meta hverja tölu og reikna nógu marga liði til að skekkja matsins sé í mesta lagi $1/1000$.

186. [T] $(15)^{1/4}$ með $(16-x)^{1/4}$

187. [T] $(1001)^{1/3}$ með $(1000+x)^{1/3}$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota tvíliðunarnálgunina $\sqrt{1-x}\approx 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\frac{7x^5}{256}$ fyrir $|x|<1$ til að nálga hverja tölu. Berið niðurstöðuna saman við gildið úr vísindareiknivél.

188. [T] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ með $x=\frac{1}{2}$ í $(1-x)^{1/2}$

189. [T] $\sqrt{5}=5\times\frac{1}{\sqrt{5}}$ með $x=\frac{4}{5}$ í $(1-x)^{1/2}$

190. **[T]** $\sqrt{3}=\frac{3}{\sqrt{3}}$ með $x=\frac{2}{3}$ í $(1-x)^{1/2}$

191. **[T]** $\sqrt{6}$ með $x=\frac{5}{6}$ í $(1-x)^{1/2}$

192. Heildið tvíliðunarnálgun $\sqrt{1-x}$ til að finna nálgun á $\int_0^x \sqrt{1-t}\,dt$.

193. **[T]** Rifjið upp að graf $\sqrt{1-x^2}$ er efri hálfhringur með geisla 1. Heildið tvíliðunarnálgun $\sqrt{1-x^2}$ upp að stigi 8 frá $x=-1$ til $x=1$ til að meta $\frac{\pi}{2}$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota liðunina $(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\cdots$ til að rita fyrstu fimm liði hverrar segðar, en þeir mynda ekki endilega fjórða stigs margliðu.

194.

$$(1+4x)^{1/3};a=0$$

195.

$$(1+4x)^{4/3};a=0$$

196.

$$(3+2x)^{1/3};a=-1$$

197.

$$(x^2+6x+10)^{1/3};a=-3$$

198. Notið $(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\frac{10}{243}x^4+\cdots$ með $x=1$ til að nálga $2^{1/3}$.

199. Notið nálgunina $(1-x)^{2/3}=1-\frac{2x}{3}-\frac{x^2}{9}-\frac{4x^3}{81}-\frac{7x^4}{243}-\frac{14x^5}{729}+\cdots$ fyrir $|x|<1$ til að nálga $2^{1/3}=2,2^{-2/3}$.

200. Finnið 25-tu afleiðu $f(x)=(1+x^2)^{13}$ við $x=0$.

201. Finnið 99-tu afleiðu við $x=0$ af $f(x)=(1+x^4)^{25}$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna Maclaurin-röð hvers falls.

202.

$$f(x)=xe^{2x}$$

203.

$$f(x)=2^x$$

204.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

205.

$$f(x)=\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}},(x>0),$$

206.

$$f(x)=\sin\left(x^2\right)$$

207.

$$f(x)=e^{x^3}$$

208. $f(x)=\cos^2 x$ með samsemdinni $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$

209. $f(x)=\sin^2 x$ með samsemdinni $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna Maclaurin-röð $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ með því að heilda Maclaurin-röð f lið fyrir lið. Ef f er ekki skilgreint í núlli má nota gildi Maclaurin-raðarinnar í núlli í staðinn.

210.

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\,;f(t)=e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}$$

211.

$$F(x)=\tan^{-1}x\,;f(t)=\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

212.

$$F(x)=\tanh^{-1}x\,;f(t)=\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$$

213.

$$F(x)=\sin^{-1}x;\;\; f(t)=\tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\frac{t^{2k}}{k!}$$

214.

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,;f(t)=\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

215.

$$F(x)=\int_0^x \cos\left(\sqrt{t}\right)dt\,;f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}$$

216.

$$F(x)=\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt\,;f(t)=\frac{1-\cos t}{t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+2)!}$$

217.

$$F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt\,;f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n+1}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna að minnsta kosti fyrstu þrjá liðina sem eru ekki núll (þeir mynda ekki endilega annars stigs margliðu) í Maclaurin-röð f.

218.

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

219.

$$f(x)=\tan x$$

220.

$$f(x)=\ln(\cos x)$$

221.

$$f(x)=e^x\cos x$$

222.

$$f(x)=e^{\sin x}$$

223.

$$f(x)=\sec^2 x$$

224.

$$f(x)=\tanh x$$

225. $f(x)=\frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (sjá liðun fyrir $\tan x$)

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna samleitnigeisla Maclaurin-raðar hvers falls.

226.

$$\ln(1+x)$$

227.

$$\frac{1}{1+x^2}$$

228.

$$\tan^{-1}x$$

229.

$$\ln(1+x^2)$$

230. Finnið Maclaurin-röð $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

231. Finnið Maclaurin-röð $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

232. Deildið Maclaurin-röð $\sinh x$ lið fyrir lið og berið niðurstöðuna saman við Maclaurin-röð $\cosh x$.

233. **[T]** Látum $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ og $C_n(x)=\sum_{n=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ tákna annars vegar Maclaurin-margliðu af stigi $2n+1$ fyrir $\sin x$ og hins vegar Maclaurin-margliðu af stigi $2n$ fyrir $\cos x$. Teiknið skekkjurnar $\frac{S_n(x)}{C_n(x)}-\tan x$ fyrir $n=1,..,5$ og berið þær saman við $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}-\tan x$ á $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

234. Notið samsemdina $2\sin x\cos x=\sin(2x)$ til að finna veldaraðaframsetningu $\sin^2 x$ við $x=0$. (Vísbending: Heildið Maclaurin-röð $\sin(2x)$ lið fyrir lið.)

235. Ef $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, finnið veldaraðaframsetningar $x\,y'$ og x^2y''.

236. **[T]** Gerum ráð fyrir að $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ uppfylli $y'=-2xy$ og $y(0)=0$. Sýnið að $a_{2k+1}=0$ fyrir öll k og að $a_{2k+2}=\frac{-a_{2k}}{k+1}$. Teiknið hlutsummuna S_{20} af y á bilinu $[-4,4]$.

237. **[T]** Gerum ráð fyrir að stig á stöðluðu prófi séu normaldreifð með meðaltali $\mu=100$ og staðalfráviki $\sigma=10$. Setjið upp heildi sem táknar líkurnar á að prófstig liggi milli 90 og 110 og notið heildi Maclaurin-margliðu af stigi 10 fyrir $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ til að meta þessar líkur.

238. **[T]** Gerum ráð fyrir að stig á stöðluðu prófi séu normaldreifð með meðaltali $\mu=100$ og staðalfráviki $\sigma=10$. Setjið upp heildi sem táknar líkurnar á að prófstig liggi milli 70 og 130 og notið heildi Maclaurin-margliðu af stigi 50 fyrir $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ til að meta þessar líkur.

239. **[T]** Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin að falli $f(x)$ sem uppfyllir $f(0)=1, f'(0)=0$, og $f''(x)=-f(x)$. Finnið formúlu fyrir a_n og teiknið hlutsummuna S_N fyrir $N=20$ á $[-5,5]$.

240. **[T]** Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin að falli $f(x)$ sem uppfyllir $f(0)=0, f'(0)=1$, og $f''(x)=-f(x)$. Finnið formúlu fyrir a_n og teiknið hlutsummuna S_N fyrir $N=10$ á $[-5,5]$.

241. Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin að falli y sem uppfyllir $y''-y'+y=0$, þar sem $y(0)=1$ og $y'(0)=0$. Finnið formúlu sem tengir a_{n+2}, a_{n+1}, og a_n og reiknið $a_0,\ldots,a_5$.

242. Gerum ráð fyrir að $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sé samleitin að falli y sem uppfyllir $y''-y'+y=0$, þar sem $y(0)=0$ og $y'(0)=1$. Finnið formúlu sem tengir a_{n+2}, a_{n+1}, og a_n og reiknið $a_1,\ldots,a_5$.

Skekkjan við að nálga heildið $\int_a^b f(t)\,dt$ með heildi Taylor-nálgunarinnar $\int_a^b P_n(t)\,dt$ er í mesta lagi $\int_a^b R_n(t)\,dt$. Í eftirfarandi verkefnum tryggir skekkjumat Taylors $R_n \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ að heildi Taylor-margliðunnar af gefnu stigi nálgi heildi f með skekkju minni en $\frac{1}{10}$.

a. Reiknið heildi viðeigandi Taylor-margliðu og sannreynið að það nálgi gildið úr tölvualgebrukerfi (CAS) með skekkju minni en $\frac{1}{100}$.

b. Berið nákvæmni matsins með heildi margliðunnar saman við skekkjumatið.

243. **[T]** $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt\,;\, P_s = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}$ (Gera má ráð fyrir að algildi níundu afleiðunnar $\frac{\sin t}{t}$ sé takmarkað af $0{,}1$.)

244. **[T]** $\int_0^{2} e^{-x^2}\,dx\,;\, p_{11} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots - \frac{x^{22}}{11!}$ (Gera má ráð fyrir að algildi 23. afleiðu e^{-x^2} sé minna en 2×10^{14}.)

Eftirfarandi verkefni fjalla um Fresnel-heildi.

245. Fresnel-heildin eru skilgreind með $C(x) = \int_0^{x} \cos\left(t^2\right) dt$ og $S(x) = \int_0^{x} \sin\left(t^2\right) dt$. Reiknið veldaraðir $C(x)$ og $S(x)$ og teiknið summurnar $C_N(x)$ og $S_N(x)$ af fyrstu $N = 50$ liðunum sem eru ekki núll á $[0, 2\pi]$.

246. **[T]** Fresnel-heildi eru meðal annars notuð við hönnun vega og járnbrauta vegna sveigjueiginleika ferilsins með hnitin $(C(t), S(t))$. Teiknið ferilinn (C_{50}, S_{50}) fyrir $0 \le t \le 2\pi$, en hnit hans voru reiknuð í síðasta verkefni.

247. Metið $\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\,dx$ með því að nálga $\sqrt{1-x}$ með tvíliðunarnálguninni $1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{2128} - \frac{7x^5}{256}$.

248. **[T]** Notið tvíliðunarnálgun Newtons $\sqrt{1-x^2}$ til að nálga π á eftirfarandi hátt.

Hringurinn sem hefur miðju í $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ og geisla $\frac{1}{2}$ hefur efri hálfhringinn $y = \sqrt{x}\sqrt{1-x}$.

Geiri hringsins sem afmarkast af x-ásnum milli $x = 0$ og $x = \frac{1}{2}$ og línunni sem tengir $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ samsvarar $\frac{1}{6}$ af hringnum og hefur flatarmálið $\frac{\pi}{24}$. Geirinn samanstendur af rétthyrndum þríhyrningi með hæð $\frac{\sqrt{3}}{4}$ og grunnlínu $\frac{1}{4}$ ásamt svæðinu undir grafinu milli $x = 0$ og $x = \frac{1}{4}$. Til að finna flatarmál svæðisins má rita $y = \sqrt{x}\sqrt{1-x} = \sqrt{x} \times (\text{tvíliðuliðun fyrir } \sqrt{1-x})$ og heilda lið fyrir lið. Notið þessa aðferð ásamt tvíliðunarnálguninni úr síðasta verkefni til að meta π.

249. Notið nálgunina $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right)$ til að nálga sveiflutíma pendúls sem er 10 metrar að lengd og hefur hámarkshornið $\theta_{\max}=\frac{\pi}{6}$, þar sem $k=\sin\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right)$. Berið niðurstöðuna saman við smáhornanálgunina $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

250. Gerum ráð fyrir að pendúll eigi að hafa sveiflutímann 2 sekúndur og hámarkshornið $\theta_{\max}=\frac{\pi}{6}$. Notið $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right)$ til að nálga æskilega lengd pendúlsins. Hvaða lengd gefur smáhornanálgunin $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$?

251. Reiknið $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, d\theta$ í nálguninni $T=4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{3}{8}k^4\sin^4\theta+\cdots\right)d\theta$ til að fá nákvæmara mat á T.

252. **[T]** Jafngild formúla fyrir sveiflutíma pendúls með sveifluvíddina $\theta_{\max}$ er $T\left(\theta_{\max}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_{\max}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\left(\theta_{\max}\right)}}$, þar sem L er lengd pendúlsins og g er þyngdarhröðunin. Þegar $\theta_{\max}=\frac{\pi}{3}$ fæst $\frac{1}{\sqrt{\cos t-1/2}} \approx \sqrt{2}\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{3}+\frac{181t^6}{720}\right)$. Heildið þessa nálgun til að meta $T\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sem fall af L og g. Gerið ráð fyrir að $g=9{,}806$ metrar á sekúndu í öðru veldi og finnið nálgaða lengd L þannig að $T\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$ sekúndur.

Lykilhugtök

tvíliðuröð

Maclaurin-röðin fyrir $f(x)=(1+x)^r$; hún er gefin með

$$(1+x)^r=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n=1+rx+\tfrac{r(r-1)}{2!}x^2+\cdots+\tfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n+\cdots \quad |x|<1$$

samleitnibil

mengi þeirra rauntalna x sem veldaröðin er samleitin fyrir

Maclaurin-margliða

Taylor-margliða með miðju í 0; n-ta Taylor-margliðan fyrir f við 0 er n-ta Maclaurin-margliðan fyrir f

Maclaurin-röð

Taylor-röð fyrir fall f við $x=0$ nefnist Maclaurin-röð fyrir f

heildi án grunnstofnfalls

heildi þar sem ekki er hægt að skrifa stofnfall heildisstofnsins sem grunnfall

veldaröð

röð af gerðinni $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er veldaröð með miðju í $x=0$; röð af gerðinni $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ er veldaröð með miðju í $x=a$

samleitnigeisli

ef til er rauntala $R>0$ þannig að veldaröð með miðju í $x=a$ sé samleitin þegar $|x-a|<R$ en ósamleitin þegar $|x-a|>R$, er R samleitnigeisli hennar; ef veldaröðin er aðeins samleitin þegar $x=a$, er samleitnigeislinn $R=0$; ef veldaröðin er samleitin fyrir allar rauntölur x, er samleitnigeislinn $R=\infty$

Taylor-margliður

n-ta Taylor-margliðan fyrir f við $x=a$ er

$$p_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor-röð

veldaröð með miðju í a sem er samleitin að fallinu f á einhverju opnu bili sem inniheldur a

setning Taylors um skekkju

að gefnu falli f og n-tu Taylor-margliðu fyrir f við $x=a$, uppfyllir skekkjan $R_n(x)=f(x)-p_n(x)$ jöfnuna $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

fyrir eitthvert c milli x og a; ef til er bil I sem inniheldur a ásamt rauntölu M þannig að $|f^{(n+1)}(x)|\le M$ fyrir öll x í I, þá gildir $|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$

deildun veldaraðar lið fyrir lið

aðferð til að reikna afleiðu veldaraðar $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ með því að deilda hvern lið fyrir sig og mynda þannig nýju veldaröðina $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

heildun veldaraðar lið fyrir lið

aðferð til að heilda veldaröð $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ með því að heilda hvern lið fyrir sig og mynda þannig nýju veldaröðina $C+\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Lykiljöfnur

Veldaröð með miðju í $x=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$
Veldaröð með miðju í $x=a$	$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$
Taylor-röð fallsins f með miðju í $x=a$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$

Lykilatriði

6.1 Veldaraðir og föll

- Fyrir veldaröð með miðju í $x=a$, á eitt af þremur tilvikum við:
  - **i.** Veldaröðin er aðeins samleitin þegar $x=a$. Í því tilviki segjum við að samleitnigeislinn sé $R=0$.
  - **ii.** Veldaröðin er samleitin fyrir allar rauntölur x. Í því tilviki segjum við að samleitnigeislinn sé $R=\infty$.
  - **iii.** Til er rauntala R þannig að röðin er samleitin þegar $|x-a|<R$ en ósamleitin þegar $|x-a|>R$. Í því tilviki er samleitnigeislinn R.
- Ef veldaröð er samleitin á endanlegu bili getur hún verið samleitin eða ósamleitin í endapunktunum.
- Oft má nota kvótaprófið til að ákvarða samleitnigeislann.
- Geómetríska röðin $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ fyrir $|x|<1$ gerir okkur kleift að setja tiltekin föll fram sem geómetrískar raðir.

6

6.2 Eiginleikar veldaraða

- Að gefnum tveimur veldaröðum $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ sem eru samleitnar að föllunum f og g á sameiginlegu bili I eru summa og mismunur raðanna hvort um sig samleitin að $f \pm g$, á I. Auk þess gildir fyrir hverja rauntölu b og heiltölu $m \geq 0$, að röðin $\sum_{n=0}^{\infty} b\, x^m c_n x^n$ er samleitin að $b\, x^m f(x)$ og röðin $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(b\, x^m\right)^n$ er samleitin að $f\left(b\, x^m\right)$ þegar bx^m tilheyrir bilinu I.
- Ef tvær veldaraðir eru samleitnar á bilinu $(-R, R)$, er Cauchy-margfeldi þeirra samleitið á bilinu $(-R, R)$.
- Ef veldaröð er samleitin að fallinu f á bilinu $(-R, R)$, má deilda hana lið fyrir lið og röðin sem fæst er samleitin að f' á $(-R, R)$. Einnig má heilda röðina lið fyrir lið og röðin sem fæst er samleitin að $\int f(x)\, dx$ á $(-R, R)$.

6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir

- Taylor-margliður eru notaðar til að nálga föll í grennd við gildið $x = a$. Maclaurin-margliður eru Taylor-margliður með miðju í $x = 0$.
- Taylor-margliður af stigi n fyrir fall f eru hlutsummur Taylor-raðarinnar fyrir f.
- Ef fall f hefur veldaraðaframsetningu með miðju í $x = a$, þá er fallið gefið með Taylor-röð sinni með miðju í $x = a$.
- Taylor-röðin fyrir f er samleitin að f þá og því aðeins að $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ þar sem $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$.
- Taylor-raðirnar fyrir e^x, $\sin x$, og $\cos x$ eru samleitnar að samsvarandi föllum fyrir allar rauntölur x.

6.4 Hagnýting Taylor-raða

- Tvíliðuröðin er Maclaurin-röð fallsins $f(x) = (1+x)^r$. Hún er samleitin þegar $|x| < 1$.
- Oft má leiða Taylor-raðir falla út frá þekktri Taylor-röð með algebruaðgerðum eða með því að deilda eða heilda þekktu röðina.
- Nota má veldaraðir til að leysa deildajöfnur.
- Nota má Taylor-raðir til að nálga heildi sem ekki er unnt að reikna með öðrum aðferðum.

Upprifjunardæmi

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svarið í verkefnunum hér á eftir með sönnun eða gagndæmi.

253. Ef samleitnigeisli veldaraðarinnar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ er 5, þá er samleitnigeisli raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ einnig 5.

254. Nota má veldaraðir til að sýna að afleiða e^x er e^x. (Vísbending: Rifjið upp að $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.)

255. Fyrir lítil gildi x, $\sin x \approx x$.

256. Samleitnigeisli Maclaurin-raðarinnar fyrir $f(x) = 3^x$ er 3.

Finnið samleitnigeisla og samleitnibil raðarinnar í hverju verkefni hér á eftir.

257.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x-1)^n$$

258.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

259.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n x^n}{12^n}$$

260.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^n} (x-e)^n$$

Finnið veldaraðaframsetningu fallsins í hverju verkefni hér á eftir. Ákvarðið síðan samleitnigeisla og samleitnibil raðarinnar.

261.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3}$$

262.

$$f(x) = \frac{8x+2}{2x^2-3x+1}$$

Finnið veldaröð fallsins í hverju verkefni hér á eftir með deildun eða heildun lið fyrir lið.

263.

$$f(x)=\tan^{-1}(2x)$$

264.

$$f(x)=\frac{x}{(2+x^2)^2}$$

Reiknið fjórða stigs Taylor-margliðu fallsins í gefna punktinum í hverju verkefni hér á eftir. Hver er skekkja nálgunarinnar?

265.

$$f(x)=x^3-2x^2+4\,,a=-3$$

266.

$$f(x)=e^{1/(4x)}\,,a=4$$

Finnið Maclaurin-röð fallsins í hverju verkefni hér á eftir.

267.

$$f(x)=\cos(3x)$$

268.

$$f(x)=\ln(x+1)$$

Finnið Taylor-röð fallsins með miðju í gefna gildinu í hverju verkefni hér á eftir.

269.

$$f(x)=\sin x\,,a=\frac{\pi}{2}$$

6

270.

$$f(x)=\frac{3}{x}\,,a=1$$

Finnið Maclaurin-röð fallsins í hverju verkefni hér á eftir.

271.

$$f(x)=e^{-x^2}-1$$

272.

$$f(x)=\cos x-x\sin x$$

Finnið í verkefnunum hér á eftir Maclaurin-röð $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ með því að heilda Maclaurin-röð $f(x)$ lið fyrir lið.

273.

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

274.

$$f(x)=1-e^{x}$$

275. Notið veldaraðir til að sanna formúlu Eulers: $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Eftirfarandi verkefni fjalla um greiðslur úr jafngreiðsluröð.

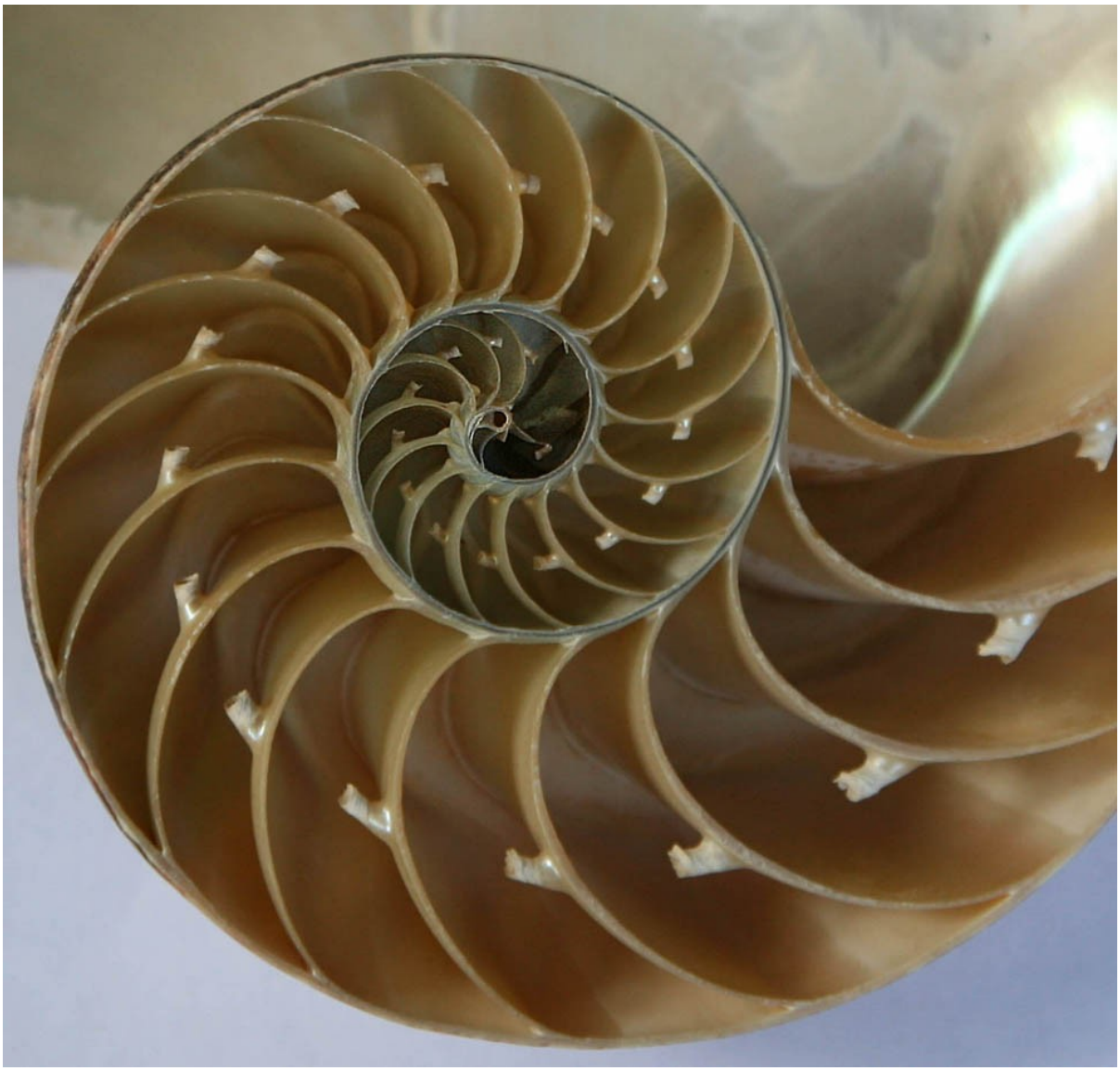
276. Reiknið árlegar greiðslur úr jafngreiðsluröð sem hefur núvirðið $\$1$ milljón og greiðist út í 25 ár, miðað við vextina $1\%, 5\%,$ og 10%.

277. Vinningshafi í happdrætti á jafngreiðsluröð sem hefur núvirðið $\$10$ milljónir evra. Hve háa vexti þyrfti vinningshafinn til að geta lifað á ævarandi árlegum greiðslum að fjárhæð 250.000 € ?

278. Reiknið hve hátt núvirði jafngreiðsluröð þarf að hafa til að greiða 15.000 € árlega í 25 ár, miðað við vextina $1\%, 5\%,$ og 10%.

7. KAFLI

Stikajöfnur og skauthnit



Mynd 7.1 Perlusnekkjan er sjávardýr sem lifir í hitabeltishluta Kyrrahafsins. Vísindamenn telja að tegundin hafi verið að mestu óbreytt í um 500 milljónir ára. (Mynd: breyting á verki eftir Jitze Couperus, Flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 7.1 Stikajöfnur
- 7.2 Stærðfræðigreining stikaðra ferla
- 7.3 Skauthnit
- 7.4 Flatarmál og bogalengd í skauthnitum
- 7.5 Keilusnið

Inngangur

Perlusnekkjan er heillandi skepna. Hún nærist á kuðungakröbbum, fiskum og öðrum krabbadýrum. Hún hefur harða ytri skel með mörgum hólfum sem raðast í kuðungsferil og getur dregið sig inn í skelina til að forðast afræningja. Þegar hluti skeljarinnar er skorinn burt kemur fullkominn kuðungsferill í ljós og hólfin inni í skelinni minna að nokkru leyti á árhringi í tré.

Stærðfræðifallið sem lýsir kuðungsferli má setja fram í rétthyrndum hnitum (eða kartesískum hnitum). Ef við skiptum hins vegar yfir í hnitakerfi sem hentar hringlaga mynstrum betur verður mun einfaldara að lýsa fallinu. Skauthnitakerfið hentar vel til að lýsa ferlum af þessu tagi. Hvernig getum við notað þetta hnitakerfi til að lýsa kuðungsferlum og öðrum geislalaga myndum? (Sjá dæmi 7.14.)

Í þessum kafla rannsökum við einnig stikajöfnur, sem eru þægileg leið til að lýsa ferlum eða stöðu agnar eða hlutar í tveimur víddum sem fall af tíma. Síðar í bókinni notum við stikajöfnur og skauthnit til að lýsa mörgum viðfangsefnum.

7.1 Stikajöfnur

NÁMSMARKMIÐ

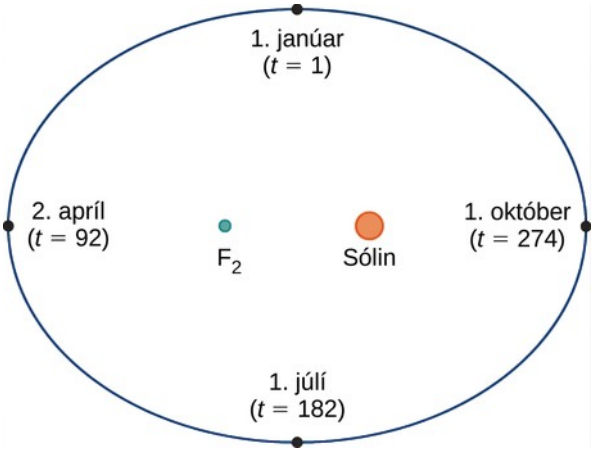
- 7.1.1 Teikna feril sem lýst er með stikajöfnum.
- 7.1.2 Umrita stikajöfnur ferils á formið $y=f(x)$.
- 7.1.3 Þekkja stikajöfnur einfaldra ferla, svo sem línu og hrings.
- 7.1.4 Þekkja stikajöfnur hjólferils.

Í þessum undirkafla skoðum við stikajöfnur og gröf þeirra. Í tvívíðu hnitakerfi nýtast stikajöfnur til að lýsa ferlum sem eru ekki endilega gröf falla. Stikinn er óháð breyta sem bæði x og y eru háð, og þegar stikinn vex rekja gildi x og y slóð eftir ferli í sléttu. Ef stikinn er til dæmis t (algengt val) getur t táknað tíma. Þá eru x og y skilgreind sem föll af tíma og $(x(t), y(t))$ getur lýst staðsetningu tiltekins hlutar í sléttunni þegar hann hreyfist eftir boginni slóð.

Stikajöfnur og gröf þeirra

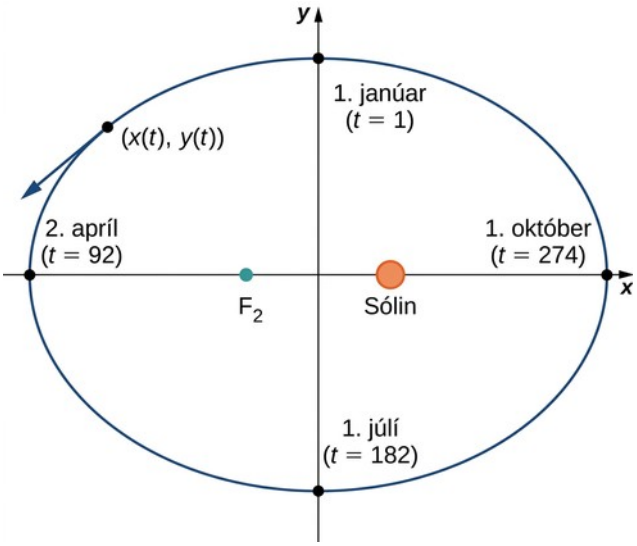
Skoðum braut jarðar um sólina. Árið er um 365,25 dagar að lengd, en í þessari umfjöllun notum við 365 daga. Þann 1. janúar ár hvert er staðsetning jarðar gagnvart sólu nánast sú sama, nema á hlaupárum, þegar viðbótin — $\frac{1}{4}$ úr degi á hverri umferð — er tekin með í dagatalinu. Við köllum 1. janúar „dag 1“ ársins. Þá er 31. dagur ársins til dæmis 31. janúar og 59. dagur ársins er 28. febrúar og svo framvegis.

Númer dags innan árs má líta á sem breytu sem ákvarðar stöðu jarðar á braut sinni. Þegar jörðin gengur um sólina breytist staðsetning hennar miðað við sólina. Að einu heilu ári liðnu erum við aftur á upphafsstað og nýtt ár hefst. Samkvæmt lögmálum Keplers um hreyfingu reikistjarna er brautin sporöskjulaga og sólin er í öðrum brennipunkti sporbaugsins. Þessa hugmynd skoðum við nánar í Keilusniðum.



Mynd 7.2 Braut jarðar um sólina á einu ári.

Mynd 7.2 sýnir braut jarðar um sólina á einu ári. Punkturinn merktur F_2 er annar brennipunktur sporbaugsins; sólin er í hinum. Ef við leggjum hnitaása yfir grafið getum við úthlutað hverjum punkti á sporbaugnum röðuðu pari (mynd 7.3). Hvert x-gildi á grafinu gefur þá x-hnit staðsetningarinnar sem fall af tíma og hvert y-gildi gefur y-hnitið á sama hátt. Hver punktur á grafinu samsvarar því staðsetningu jarðar á tilteknum tíma.



Mynd 7.3 Hnitaásar lagðir yfir braut jarðar.

Við getum ákvarðað föllin fyrir $x(t)$ og $y(t)$, og þannig stikað braut jarðar um sólina. Breytan t nefnist óháður stiki og táknar hér tíma frá upphafi hvers árs.

Feril í (x, y)-sléttunni má setja fram með stikajöfnum. Jöfnurnar sem skilgreina ferilinn nefnast stikajöfnur.

SKILGREINING

Ef x og y eru samfelld föll af t á bili I, þá nefnast jöfnurnar

$$x = x(t) \text{ og } y = y(t)$$

stikajöfnur og t nefnist stiki. Punktamengið (x, y) sem fæst þegar t tekur gildi á bilinu I nefnist graf stikajafnanna. Graf stikajafnanna nefnist stikaður ferill eða ferill í sléttu og er táknað með C.

Athugið að í þessari skilgreiningu eru x og y notuð á tvo vegu. Í fyrra tilvikinu eru þau föll af óháðu breytunni t. Þegar t tekur gildi á bilinu I mynda föllin $x(t)$ og $y(t)$ mengi raðaðra para (x, y). Þetta mengi raðaðra para myndar graf stikajafnanna. Í síðara tilvikinu eru x og y breytur sem tákna röðuðu pörin. Mikilvægt er að greina breyturnar x og y frá föllunum $x(t)$ og $y(t)$.

7

DÆMI 7.1

Ferill sem skilgreindur er með stikajöfnum teiknaður

Teiknið ferlana sem eftirfarandi stikajöfnur lýsa:

a. $x(t) = t - 1, y(t) = 2t + 4, -3 \leq t \leq 2$

b. $x(t) = t^2 - 3, y(t) = 2t + 1, -2 \leq t \leq 3$

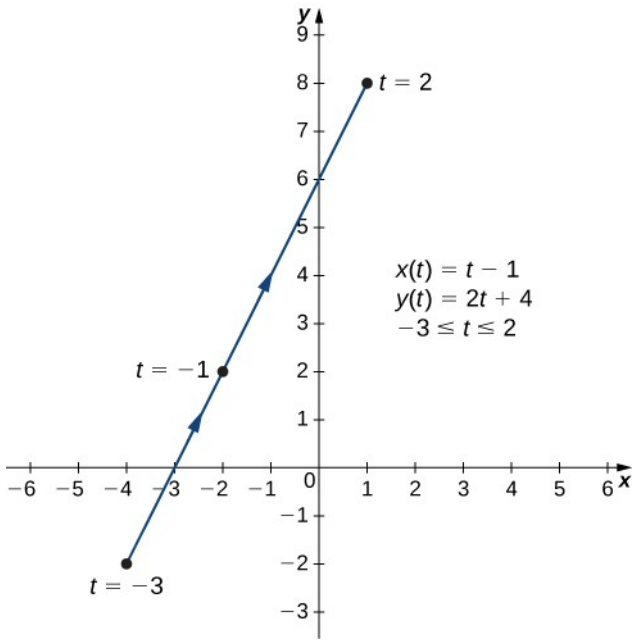
c. $x(t)=4\cos t\,,\,y(t)=4\sin t\,,0\le t\le 2\pi$

Lausn

a. Til að teikna þennan feril setjum við fyrst upp gildistöflu. Þar sem óháða breytan í föllunum $x(t)$ og $y(t)$ er t látum við t vera í fyrsta dálki. Þá verða $x(t)$ og $y(t)$ í öðrum og þriðja dálki töflunnar.

t	$x(t)$	$y(t)$
−3	−4	−2
−2	−3	0
−1	−2	2
0	−1	4
1	0	6
2	1	8

Annar og þriðji dálkur töflunnar gefa punktamengi sem á að teikna. Graf þessara punkta sést á mynd 7.4. Örvarnar á grafinu sýna stefnu grafsins, þ.e. í hvaða átt punktur færist eftir grafinu þegar t breytist frá −3 til 2.

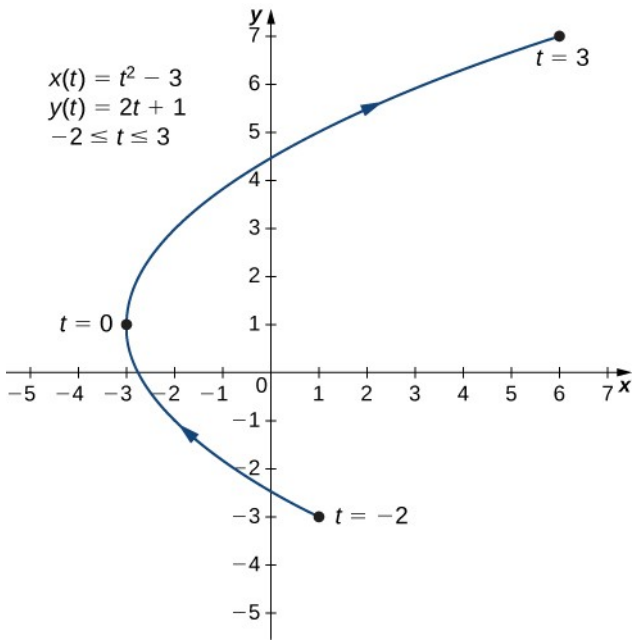


Mynd 7.4 Graf ferilsins í sléttu sem stikajöfnurnar í a-lið lýsa.

b. Til að teikna þennan feril setjum við aftur upp gildatöflu.

t	$x(t)$	$y(t)$
−2	1	−3
−1	−2	−1
0	−3	1
1	−2	3
2	1	5
3	6	7

Annar og þriðji dálkur töflunnar gefa punktamengi sem á að teikna (mynd 7.5). Fyrsti punkturinn á grafinu (sem samsvarar $t=-2$) hefur hnitin $(1,-3)$, og síðasti punkturinn (sem samsvarar $t=3$) hefur hnitin $(6,7)$. Þegar t breytist frá −2 til 3 færist punkturinn á ferlinum eftir fleygboga. Sú átt sem punkturinn færist í nefnist stefna og er sýnd á grafinu.

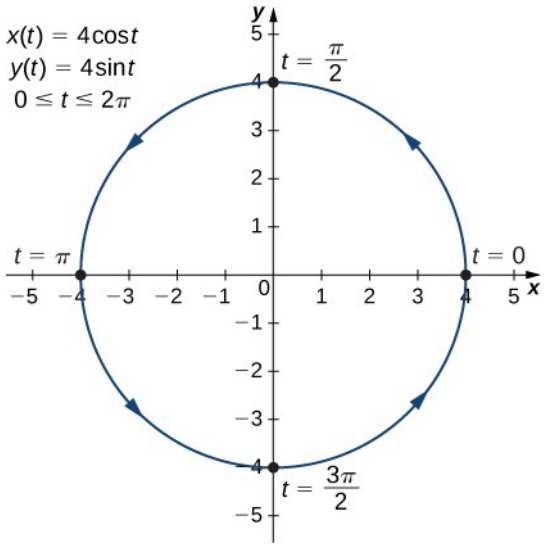


Mynd 7.5 Graf ferilsins í sléttu sem stikajöfnurnar í b-lið lýsa.

c. Í þessu tilviki notum við margfeldi af $\pi/6$ fyrir t og búum til aðra gildistöflu:

t	$x(t)$	$y(t)$	t	$x(t)$	$y(t)$
0	4	0	$\frac{7\pi}{6}$	$-2\sqrt{3}\approx -3{,}5$	2
$\frac{\pi}{6}$	$2\sqrt{3}\approx 3{,}5$	2	$\frac{4\pi}{3}$	-2	$-2\sqrt{3}\approx -3{,}5$
$\frac{\pi}{3}$	2	$2\sqrt{3}\approx 3{,}5$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-4
$\frac{\pi}{2}$	0	4	$\frac{5\pi}{3}$	2	$-2\sqrt{3}\approx -3{,}5$
$\frac{2\pi}{3}$	-2	$2\sqrt{3}\approx 3{,}5$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\sqrt{3}\approx 3{,}5$	2
$\frac{5\pi}{6}$	$-2\sqrt{3}\approx -3{,}5$	2	2π	4	0
π	-4	0			

Graf þessa ferils í sléttu sést á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.6 Graf ferilsins í sléttu sem stikajöfnurnar í c-lið lýsa.

Þetta er graf hrings með geisla 4 og miðju í upphafspunkti; stefnan er rangsælis. Upphafs- og endapunktur ferilsins hafa báðir hnitin $(4,0)$.

STÖÐUMAT 7.1

Teiknið ferilinn sem stikajöfnurnar lýsa

$$x(t)=3t+2,\ y(t)=t^2-1,\ -3\le t\le 2.$$

Stikanum eytt

Til að skilja betur graf ferils sem settur er fram með stikajöfnum er gagnlegt að umrita jöfnurnar tvær sem eina jöfnu sem tengir breyturnar x og y. Þá getum við notað það sem við vitum nú þegar um jöfnur ferla í sléttu til að bera kennsl á ferilinn. Jöfnurnar sem lýsa ferlinum í sléttu í dæmi 7.1, b-lið, eru til dæmis

$$x(t)=t^2-3,\ y(t)=2t+1,\ -2\le t\le 3.$$

Ef seinni jafnan er leyst með tilliti til t fæst

$$t=\frac{y-1}{2}.$$

Þetta má setja inn í fyrri jöfnuna:

$$x=\left(\frac{y-1}{2}\right)^2-3=\frac{y^2-2y+1}{4}-3=\frac{y^2-2y-11}{4}.$$

Þessi jafna lýsir x sem falli af y. Þessi skref eru dæmi um að eyða stikanum. Graf fallsins er fleygbogi sem opnast til hægri. Rifjum upp að ferillinn í sléttunni hófst í $(1,-3)$ og endaði í $(6,7)$. Þessir endapunktar ráðast af skorðunni sem sett var á stikann t.

DÆMI 7.2

Stikanum eytt

Eyðið stikanum úr hverjum ferli í sléttu sem eftirfarandi stikajöfnur lýsa og lýsið grafinu sem fæst.

a. $x(t)=\sqrt{2t+4},\ y(t)=2t+1,\ -2\le t\le 6$

b. $x(t)=4\cos t,\ y(t)=3\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

Lausn

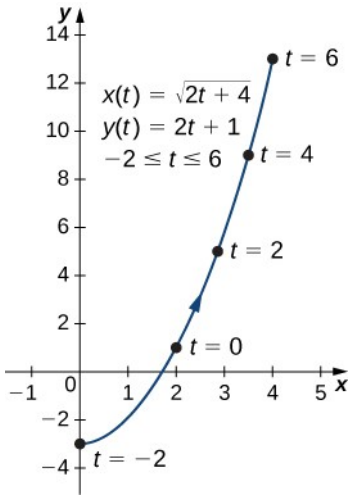
a. Til að eyða stikanum getum við leyst aðra hvora jöfnuna með tilliti til t. Ef fyrri jafnan er til dæmis leyst með tilliti til t fæst

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2t+4} \\ x^2 &= 2t+4 \\ x^2-4 &= 2t \\ t &= \tfrac{x^2-4}{2}. \end{aligned}$$

Athugið að þegar við hefjum báðar hliðar í annað veldi er mikilvægt að hafa í huga að $x \geq 0$. Ef $t = \dfrac{x^2-4}{2}$ er sett inn í $y(t)$ fæst

$$\begin{aligned} y(t) &= 2t+1 \\ y &= 2\left(\tfrac{x^2-4}{2}\right)+1 \\ y &= x^2-4+1 \\ y &= x^2-3. \end{aligned}$$

Þetta er jafna fleygboga sem opnast upp á við. Skilgreiningarmengið er þó skert vegna markanna sem sett eru á stikann t. Þegar $t=-2$, $x=\sqrt{2(-2)+4}=0$, og þegar $t=6$, $x=\sqrt{2(6)+4}=4$. Graf þessa ferils í sléttu sést hér á eftir.



Mynd 7.7 Graf ferilsins í sléttu sem stikajöfnurnar í a-lið lýsa.

b. Stundum þarf að sýna dálitla útsjónarsemi þegar stikanum er eytt. Stikajöfnurnar í þessu dæmi eru

$x(t)=4\cos t$ og $y(t)=3\sin t$.

Ekki er ráðlegt að leysa aðra hvora jöfnuna beint með tilliti til t því sínus og kósínus eru

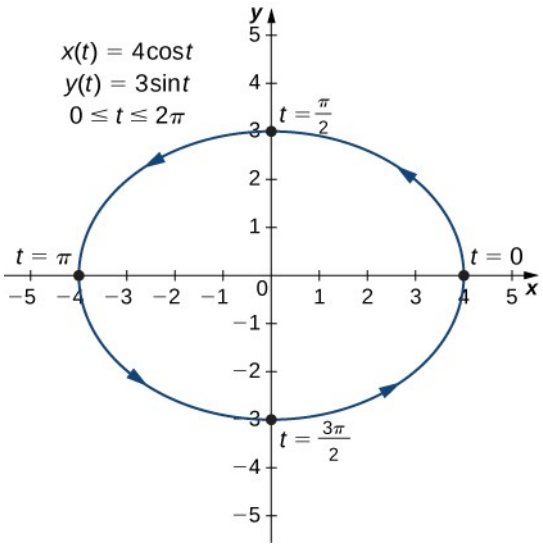
ekki eintæk föll. Ef hins vegar er deilt í fyrri jöfnuna með 4 og í þá seinni með 3 (og t sleppt) fæst

$$\cos t = \frac{x}{4} \text{ og } \sin t = \frac{y}{3}.$$

Notum nú Pýþagórasarsamsemdina $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ og skiptum segðunum fyrir $\sin t$ og $\cos t$ út fyrir jafngildar segðir með x og y. Þá fæst

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 &= 1 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Þetta er jafna lárétts sporbaugs með miðju í upphafspunkti, langhálfás 4 og skammhálfás 3, eins og sýnt er á grafinu hér á eftir.



Mynd 7.8 Graf ferilsins í sléttu sem stikajöfnurnar í b-lið lýsa.

Þegar t vex frá 0 til 2π, fer punktur á ferlinum einu sinni um sporbauginn rangsælis. Í inngangi kaflans kom fram að braut jarðar um sólina er einnig sporöskjulaga. Þetta er ágætt dæmi um hvernig nota má stikaða ferla til að setja fram líkan af raunverulegu fyrirbæri.

STÖÐUMAT 7.2

Eyðið stikanum úr ferlinum í sléttu sem eftirfarandi stikajöfnur skilgreina og lýsið grafinu sem fæst.

$$x(t)=2+\frac{3}{t}, y(t)=t-1, 2\leq t\leq 6$$

Hingað til höfum við séð aðferð til að eyða stikanum þegar gefnar eru stikajöfnur sem lýsa ferli í sléttu. En hvað ef við viljum byrja á jöfnu ferils og finna par stikajafna fyrir ferilinn? Það er vel hægt og raunar má stika sama feril á marga vegu. Ferlið kallast stikun ferils.

DÆMI 7.3

Stikun ferils

Finnið tvö mismunandi pör stikajafna sem lýsa grafinu á $y=2x^2-3$.

Lausn

Í fyrsta lagi er alltaf hægt að stika feril með því að skilgreina $x(t)=t$, og skipta síðan x út fyrir t í jöfnunni fyrir $y(t)$. Þá fæst stikunin

$$x(t)=t, y(t)=2t^2-3.$$

Þar sem engin skorða er á skilgreiningarmengi upprunalega grafsins er engin skorða á gildum t.

Við höfum frjálsar hendur við val á annarri stikun. Við getum til dæmis valið $x(t)=3t-2$. Það eina sem þarf að ganga úr skugga um er að engar skorður séu lagðar á x, það er að segja að myndmengi $x(t)$ sé mengi allra rauntalna. Það á við um $x(t)=3t-2$. Þar sem $y=2x^2-3$, getum við nú sett $x(t)=3t-2$ í stað x. Þá fæst

$$\begin{aligned} y(t) &= 2(3t-2)^2-3 \\ &= 2\left(9t^2-12t+4\right)-3 \\ &= 18t^2-24t+8-3 \\ &= 18t^2-24t+5. \end{aligned}$$

Því má rita aðra stikun ferilsins sem

$$x(t)=3t-2 \text{ og } y(t)=18t^2-24t+5.$$

7

STÖÐUMAT 7.3

Finnið tvö mismunandi stikajöfnupör sem lýsa grafinu á $y=x^2+2x$.

Hjólferlar og aðrir stikaðir ferlar

Ímyndið ykkur hjólreiðatúr um sveitina. Dekkin snerta veginn og snúast með fyrirsjáanlegum hætti. Gerum nú ráð fyrir að mjög ákveðinn maur sé þreyttur eftir langan dag og vilji komast heim. Hann hangir því utan á dekkinu og fær ókeypis far. Ferillinn sem maurinn fylgir eftir beinum vegi kallast hjólferill (mynd 7.9). Hringur (eða reiðhjólshjól) með radíus a myndar hjólferil sem er gefinn með stikajöfnunum

$$x(t)=a(t-\sin t),\ y(t)=a(1-\cos t).$$

Til að sjá hvers vegna þetta er rétt skulum við skoða feril miðju hjólsins. Miðjan hreyfist eftir x-ásnum í fastri hæð sem er jöfn radíus hjólsins. Ef radíusinn er a má gefa hnit miðjunnar með jöfnunum

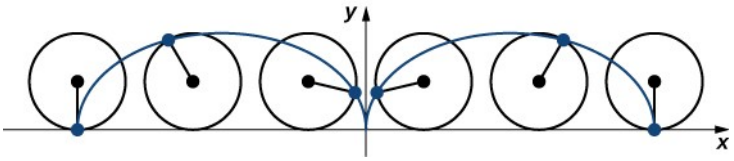
$$x(t)=at,\ y(t)=a$$

fyrir sérhvert gildi t. Skoðum næst maurinn, sem snýst um miðjuna eftir hringferli. Ef reiðhjólið hreyfist frá vinstri til hægri snúast hjólin réttsælis. Ein möguleg stikun hringhreyfingar maursins (miðað við miðju hjólsins) er

$$x(t)=-a\sin t,\ y(t)=-a\cos t.$$

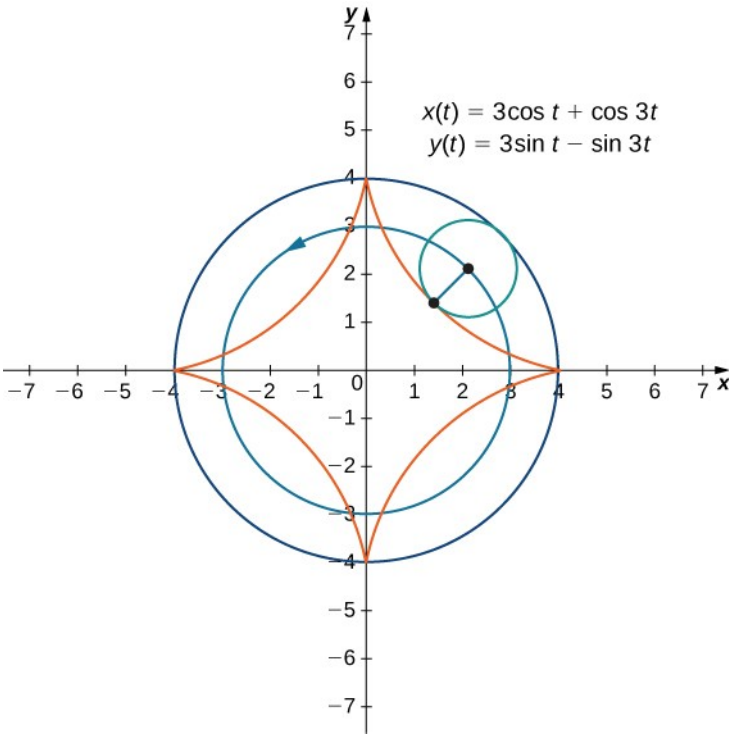
(Mínusmerkið þarf til að snúa stefnu ferilsins við. Ef mínusmerkið væri ekki til staðar þyrftum við að hugsa okkur að hjólið snerist rangsælis.) Þegar þessar jöfnur eru lagðar saman fást jöfnur hjólferilsins.

$$x(t)=a(t-\sin t),\ y(t)=a(1-\cos t).$$



Mynd 7.9 Hjól sem rúllar eftir vegi án þess að skríða; punktur á jaðri hjólsins dregur upp hjólferil.

Gerum nú ráð fyrir að reiðhjólshjólið fari ekki eftir beinum vegi heldur rúlli eftir innra borði stærra hjóls, eins og á mynd 7.10. Á grafinu fer græni hringurinn rangsælis um bláa hringinn. Punktur á jaðri græna hringsins dregur upp rauða grafið, sem kallast innhjólferill.



Mynd 7.10 Graf innhjólferilsins sem stikajöfnurnar á myndinni lýsa.

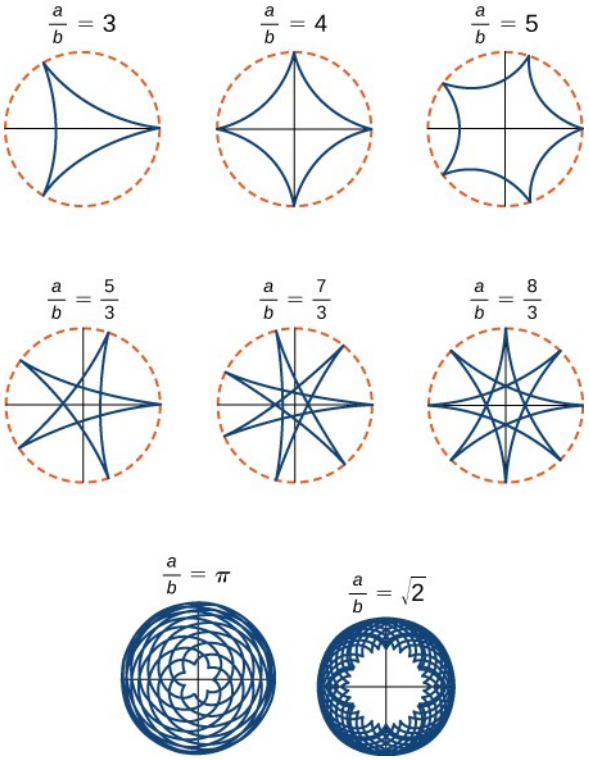
Almennar stikajöfnur innhjólferils eru

$$x(t) = (a-b)\cos t + b\cos\left(\tfrac{a-b}{b}\right)t$$
$$y(t) = (a-b)\sin t - b\sin\left(\tfrac{a-b}{b}\right)t.$$

Þessar jöfnur eru dálítið flóknari en útleiðsla þeirra er nokkuð svipuð útleiðslu jafna hjólferilsins. Hér gerum við ráð fyrir að geisli stærri hringsins sé a og geisli minni hringsins b. Þá fer miðja hjólsins eftir hring með geisla $a-b$. Þetta skýrir fyrri lið hvorrar jöfnu hér að framan. Lotulengd seinna hornafallsins í $x(t)$ og $y(t)$ er $\frac{2\pi b}{a-b}$.

Hlutfallið $\frac{a}{b}$ tengist fjölda odda á grafinu (oddar eru hornin eða hvössu endarnir á grafinu), eins og sýnt er á mynd 7.11. Þetta hlutfall getur gefið mjög áhugaverð gröf eftir því hvort það er ræð tala eða ekki. Mynd 7.10 samsvarar $a=4$ og $b=1$. Útkoman er innhjólferill með fjórum oddum. Mynd 7.11 sýnir fleiri möguleika. Síðustu tveir innhjólferlarnir hafa óræð gildi á $\frac{a}{b}$. Í þeim tilvikum hafa innhjólferlarnir óendanlega marga odda og snúa því aldrei aftur á upphafspunktinn. Þetta eru dæmi um svokallaða rúmfyllandi ferla.

7



Mynd 7.11 Gröf ýmissa innhjólferla sem samsvara mismunandi gildum hlutfallsins a/b.

NEMENDAVERKEFNI

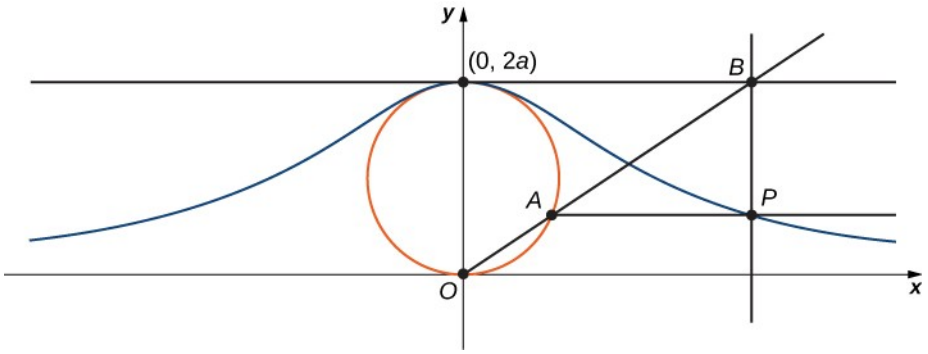
Agnesarhaddur

Í stærðfræði eru margir ferlar í sléttu kenndir við þá sem fyrstir rannsökuðu þá, svo sem Descartes-laufið eða Arkimedesarspíralinn. En ef til vill ber Agnesarhaddur undarlegasta heiti allra ferla. Hvers vegna haddur?

Maria Gaetana Agnesi (1718–1799) var ein fárra viðurkenndra kvenstærðfræðinga á Ítalíu á átjándu öld. Hún skrifaði vinsæla bók um hnitarúmfræði sem kom út 1748. Í henni var meðal annars fjallað um áhugaverðan feril sem Fermat hafði rannsakað árið 1630. Stærðfræðingurinn Guido Grandi sýndi árið 1703 hvernig mætti teikna ferilinn og nefndi hann síðar „versoria“, latneskt orð yfir siglingareipi. Agnesi notaði ítalska heitið á reipinu, „versiera“, en á latínu merkir sama orð „kvenkyns púki“. Þegar bók Agnesi var þýdd á ensku árið 1801 notaði þýðandinn orðið „witch“, norn, um ferilinn í stað reipis. Enska heitið „witch of Agnesi“ hefur haldist síðan.

Agnesarhaddur er ferill sem er skilgreindur á eftirfarandi hátt: Byrjið á hring með geisla a þannig að punktarnir $(0,0)$ og $(0,2a)$ liggi á hringnum (mynd 7.12). Látum O tákna upphafspunktinn. Veljið annan punkt A á hringnum og teiknið sniðilinn OA. Látum B tákna skurðpunkt línunnar OA og láréttu línunnar um $(0,2a)$. Lóðrétta línan um B sker láréttu línuna um A í punktinum P. Þegar punkturinn A færist eftir hringnum fylgir punkturinn P Agnesarhaddi hringsins.

Agnesarhaddar nýtast í eðlisfræði, meðal annars til að lýsa vatnsbylgjum og dreifingu litrófslína. Í líkindafræði lýsir ferillinn þéttleikafalli Cauchy-dreifingarinnar. Í þessu verkefni skuluð þið stika slíka ferla.



Mynd 7.12 Þegar punkturinn A færist eftir hringnum dregur punkturinn P upp Agnesarhadd hringsins.

1. Merkið eftirfarandi punkta, lengdir og horn inn á myndina:
   a. *C er punkturinn á x-ásnum með sama x-hnit og A.*
   b. *x er x-hnit P og y er y-hnit P.*
   c. *E er punkturinn* $(0, a)$.
   d. *F er punkturinn á línustrikinu OA þannig að línustrikið EF sé hornrétt á línustrikið OA.*
   e. *b er fjarlægðin frá O til F.*
   f. *c er fjarlægðin frá F til A.*
   g. *d er fjarlægðin frá O til B.*
   h. θ er stærð hornsins $\angle COA$.

   Markmið verkefnisins er að stika Agnesarhaddinn með θ sem stika. Til þess skuluð þið rita jöfnur fyrir x og y eingöngu með θ.
2. Sýnið að $d = \dfrac{2a}{\sin\theta}$.
3. Athugið að $x = d\cos\theta$. Sýnið að $x = 2a\cot\theta$. Þegar því er lokið hafið þið stikað x-hnit ferilsins með tilliti til θ. Ef þið getið fundið sambærilega jöfnu fyrir y hafið þið stikað ferilinn.
4. Út frá θ, hvernig má þá setja fram hornið $\angle EOA$?
5. Sýnið að $b + c = 2a\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.
6. Sýnið að $y = 2a\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\theta$.
7. Sýnið að $y = 2a\sin^2\theta$. Nú hafið þið stikað y-hnit ferilsins með tilliti til θ.
8. Ályktið að stikun gefins Agnesarhadds sé

   $x = 2a\cot\theta,\ y = 2a\sin^2\theta,\ -\infty < \theta < \infty$.

7

9. Notið stikunina til að sýna að gefni Agnesarhaddurinn er graf fallsins $f(x)=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

NEMENDAVERKEFNI

Ferðalög með maurnum mínum: skamm- og langsveifarferlar

Fyrr í þessum kafla skoðuðum við stikajöfnur hjólferils, það er ferils sem punktur á jaðri hjóls dregur upp þegar hjólið rúllar eftir beinni braut. Í þessu verkefni skoðum við tvö afbrigði hjólferilsins, skammsveifarferil og langsveifarferil.

Rifjum fyrst upp hvernig stikajöfnur hjólferils voru leiddar út. Við skoðuðum staðfastan maur sem reyndi að komast heim með því að hanga á jaðri reiðhjóladekks. Við gerðum ráð fyrir að maurinn hefði klifrað upp á dekkið alveg við jaðarinn þar sem dekkið snertir jörðina. Þegar hjólið rúllar hreyfist maurinn með jaðri dekksins (mynd 7.13).

Eins og áður hefur komið fram höfum við mikið svigrúm þegar ferill er stikaður. Hér látum við stikann t tákna hornið sem dekkið hefur snúist um. Á mynd 7.13 sést að þegar dekkið hefur snúist um hornið t er staða miðju hjólsins, $C=(x_C, y_C)$, gefin með

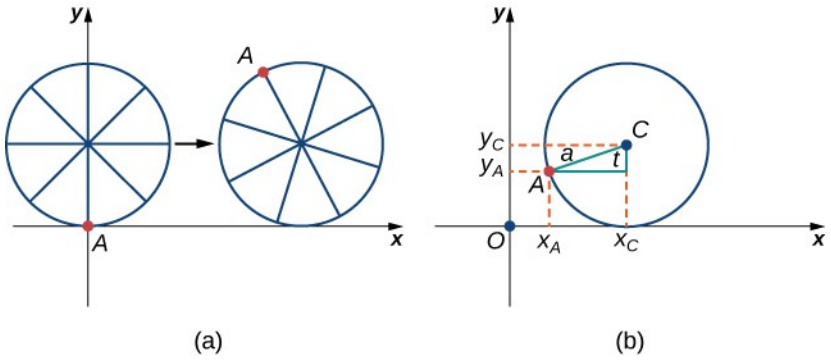
$$x_C=at \text{ og } y_C=a.$$

Látum jafnframt $A=(x_A, y_A)$ tákna stöðu maursins. Þá sjáum við að

$$x_C-x_A=a\sin t \text{ og } y_C-y_A=a\cos t.$$

Þá er

$$x_A = x_C - a\sin t = at - a\sin t = a(t-\sin t)$$
$$y_A = y_C - a\cos t = a - a\cos t = a(1-\cos t).$$

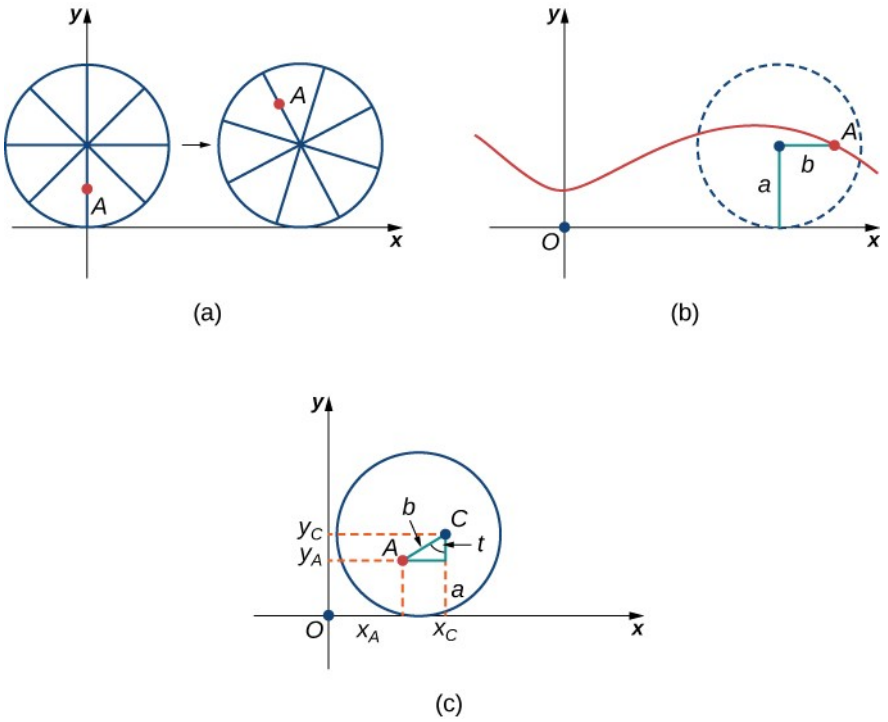


Mynd 7.13 (a) Maurinn hangir á jaðri reiðhjóladekksins þegar dekkið rúllar eftir jörðinni. (b) Rúmfræði er notuð til að ákvarða stöðu maursins eftir að dekkið hefur snúist um hornið t.

Athugið að þetta eru sömu stikaframsetningar og áður, en nú höfum við gefið stikabreytunni t efnislega merkingu.

Eftir nokkra stund fer maurinn að svima af því að snúast sífellt á jaðri dekksins. Hann klifrar því eftir einum teininum í átt að miðju hjólsins. Með því breytir maurinn hreyfiferli sínum.

Nýi ferillinn sveiflast minna upp og niður og kallast skammsveifarferill (mynd 7.14). Eins og sýnt er á myndinni látum við b tákna fjarlægðina eftir teininum frá miðju hjólsins að maurnum. Sem fyrr látum við t tákna hornið sem dekkið hefur snúist um. Jafnframt látum við $C=(x_C, y_C)$ tákna stöðu miðju hjólsins og $A=(x_A, y_A)$ stöðu maursins.



Mynd 7.14 (a) Maurinn klifrar eftir einum teininum í átt að miðju hjólsins. (b) Hreyfiferill maursins eftir að hann færist nær miðju hjólsins. Hann kallast skammsveifarferill. (c) Ný uppsetning eftir að maurinn hefur færst nær miðju hjólsins.

1. Hver er staða miðju hjólsins eftir að dekkið hefur snúist um hornið t?
2. Notið rúmfræði til að finna segðir fyrir $x_C - x_A$ og $y_C - y_A$.
3. Hverjar eru stikajöfnur skammsveifarferilsins samkvæmt svörum ykkar við liðum 1 og 2?

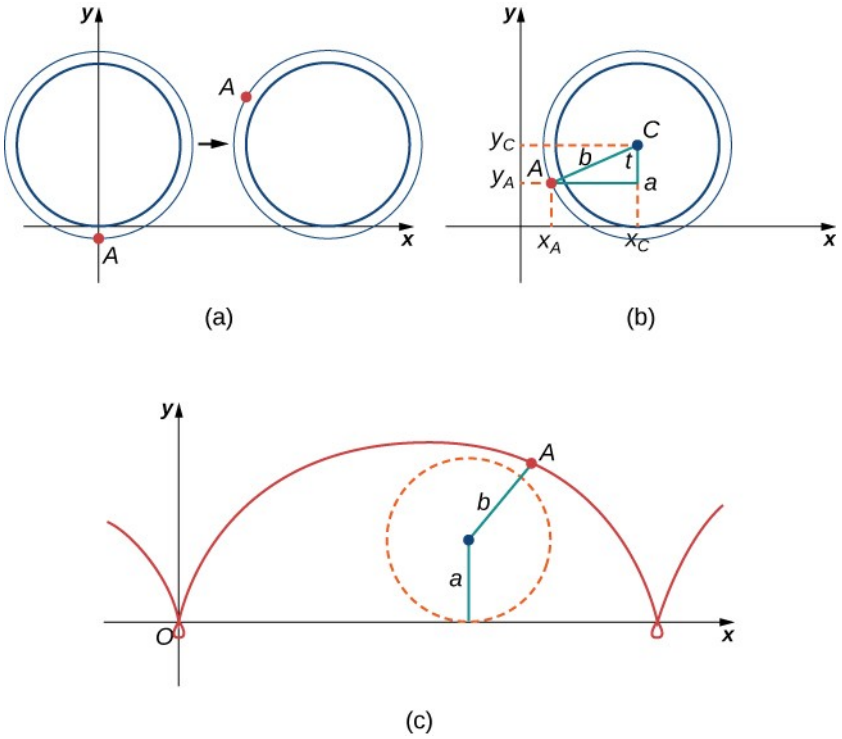
Þegar maurinn hættir að svima áttar hann sig á að hjólreiðamaðurinn hefur beygt og stefnir nú frá heimili hans. Hann sleppir því takinu á reiðhjóladekkinu og lítur í kringum sig. Sem betur fer eru járnbrautarteinar skammt frá og liggja í rétta átt. Maurinn fer að teinunum og bíður. Eftir nokkra stund kemur lest í rétta átt og honum tekst að stökkva upp og ná taki á jaðri lestarhjólsins (án þess að kremjast!).

Maurinn óttast enn svimann en lestarhjólið er sleipt og án teina sem hann gæti klifrað eftir. Hann ákveður því að hanga á jaðri hjólsins og vona það besta. Lestarhjól hafa flans sem heldur hjólinu á sporinu. Þar sem maurinn hangir yst á flansinum er fjarlægðin frá miðju hjólsins að maurnum meiri en geisli hjólsins (mynd 7.15).

Uppsetningin er í meginatriðum sú sama og þegar maurinn klifraði eftir teininum á reiðhjólshjólinu. Látum b tákna fjarlægðina frá miðju hjólsins að maurnum og t hornið sem dekkið hefur snúist um. Jafnframt látum við $C=(x_C, y_C)$ tákna stöðu miðju hjólsins og $A=(x_A, y_A)$ stöðu maursins (mynd 7.15).

Þegar fjarlægðin frá miðju hjólsins að maurnum er meiri en geisli hjólsins kallast

hreyfiferill hans langsveifarferill. Graf langsveifarferils er sýnt á myndinni.



Mynd 7.15 (a) Maurinn hangir á flansi lestarhjólsins. (b) Ný uppsetning eftir að maurinn hefur stokkið á lestarhjólið. (c) Maurinn fylgir langsveifarferli.

4. Notið sömu aðferð og í liðum 1–3 til að finna stikajöfnur hreyfiferils maursins.
5. Hverju takið þið eftir þegar þið berið saman svör ykkar við liðum 3 og 4?
   Athugið að maurinn hreyfist stundum aftur á bak („lykkjurnar“ á grafinu), þótt lestin haldi áfram. Hann verður líklega orðinn *mjög* sviminn þegar hann loks kemst heim!

Æfingar í kafla 7.1

Teiknið ferlana í eftirfarandi dæmum með því að eyða stikanum t. Tilgreinið stefnu ferilsins.

1.

$$x=t^2+2t,\ y=t+1$$

2.

$$x=\cos(t), y=\sin(t), [0,2\pi]$$

3.

$$x=2t+4, y=t-1$$

4.

$$x=3-t, y=2t-3, 1{,}5\le t\le 3$$

Eyðið stikanum og teiknið gröfin í eftirfarandi dæmum.

5.

$$x=2t^2, y=t^4+1$$

Notið tæknibúnað (tölvualgebrukerfi eða reiknivél) til að teikna stikajöfnurnar í eftirfarandi dæmum.

6.

[T] $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - 1$

7.

[T] $x = e^{-t}, \quad y = e^{2t} - 1$

8.

[T] $x = 3\cos t, \quad y = 4\sin t$

9.

[T] $x = \sec t, \quad y = \cos t$

Teiknið stikajöfnurnar í eftirfarandi dæmum með því að eyða stikanum. Tilgreinið allar aðfellur grafsins.

10.

$$x=e^t, y=e^{2t}+1$$

11.

$$x=6\sin(2\theta), y=4\cos(2\theta)$$

12.

$$x = \cos\theta, \quad y = 2\sin(2\theta)$$

13.

$$x = 3 - 2\cos\theta, \quad y = -5 + 3\sin\theta$$

14.

$$x = 4 + 2\cos\theta, \quad y = -1+\sin\theta$$

15.

$$x = \sec t, \quad y = \tan t$$

16.

$$x = \ln(2t), \quad y = t^2$$

17.

$$x = e^t, \quad y = e^{2t}$$

18.

$$x = e^{-2t}, \quad y = e^{3t}$$

19.

$$x = t^3, \quad y = 3\ln t$$

20.

$$x = 4\sec\theta, \quad y = 3\tan\theta$$

Umritið stikajöfnur ferilsins á kartesískt form í eftirfarandi dæmum. Ekki þarf að teikna. Tilgreinið skilgreiningarmengi kartesísku jöfnunnar.

21.

$$x = t^2 - 1, \quad y = \tfrac{t}{2}$$

22.

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{t+1}}, \quad y = \tfrac{t}{1+t}, t > -1$$

23.

$$x = 4\cos\theta\,, y = 3\sin\theta\,, \theta \in (0\,, 2\pi]$$

24.

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t$$

25.

$$x = 2t - 3, \quad y = 6t - 7$$

26.

$$x = t^2, \quad y = t^3$$

27.

$$x = 1+\cos t, \quad y = 3-\sin t$$

28.

$$x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4$$

29.

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \pi \leq t < \tfrac{3\pi}{2}$$

30.

$$x = 2\cosh t, \quad y = 4\sinh t$$

31.

$$x = \cos(2t), \quad y = \sin t$$

32.

$$x=4t+3, y=16t^2-9$$

33.

$$x = t^2, \quad y = 2\ln t, t \geq 1$$

34.

$$x = t^3, \quad y = 3\ln t, t \geq 1$$

35.

$x = t^n, \quad y = n\ln t, t \geq 1,$ þar sem n er náttúrleg tala

36.

$x = \ln(5t)$
$y = \ln(t^2)$ þar sem $1 \leq t \leq e$

37.

$$x = 2\sin(8t)$$
$$y = 2\cos(8t)$$

38.

$$x = \tan t$$
$$y = \sec^2 t - 1$$

Stikajöfnupörin í eftirfarandi dæmum lýsa línum, fleygbogum, hringum, sporbaugum eða breiðbogum. Nefnið þá grunngerð ferils sem hvert jöfnupar lýsir.

39.

$$x = 3t + 4$$
$$y = 5t - 2$$

7

40.

$$x - 4 = 5t$$
$$y + 2 = t$$

41.

$$x = 2t + 1$$
$$y = t^2 - 3$$

42.

$$x = 3\cos t$$
$$y = 3\sin t$$

43.

$$x = 2\cos(3t)$$
$$y = 2\sin(3t)$$

44.

$$x = \cosh t$$
$$y = \sinh t$$

45.

$$x = 3\cos t$$
$$y = 4\sin t$$

46.

$$x = 2\cos(3t)$$
$$y = 5\sin(3t)$$

47.

$$x = 3\cosh(4t)$$
$$y = 4\sinh(4t)$$

48.

$$x = 2\cosh t$$
$$y = 2\sinh t$$

49.

Sýnið að $\begin{aligned} x &= h + r\cos\theta \\ y &= k + r\sin\theta \end{aligned}$ lýsir hring.

50. Notið jöfnurnar í dæminu á undan til að finna stikajöfnur hrings með geisla 5 og miðju $(-2, 3)$.

Notið grafteiknitæki í eftirfarandi dæmum til að teikna ferilinn sem stikajöfnurnar lýsa og berið kennsl á ferilinn út frá jöfnu hans.

51.

[T]
$$x = \theta + \sin\theta$$
$$y = 1 - \cos\theta$$

52.

[T]
$$x = 2t - 2\sin t$$
$$y = 2 - 2\cos t$$

53. **[T]** $\begin{matrix} x = t - 0{,}5\ \sin\ t \\ y = 1 - 1{,}5\ \cos\ t \end{matrix}$

54. Flugvél flýgur lárétt með hraðanum 100 m/s yfir sléttu landi í 4000 metra hæð og þarf að sleppa neyðarpakka að marki á jörðu niðri. Ferill pakkans er gefinn með $x = 100t$, $y = -4{,}9t^2 + 4000$, $t \geq 0$ þar sem upphafspunkturinn er á jörðinni beint undir flugvélinni þegar pakkanum er sleppt. Hve langt frá markinu, mælt lárétt, á að sleppa pakkanum svo hann hitti markið?

55. Ferill kúlu er gefinn með $x = v_0(\cos\alpha)t$, $y = v_0(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ þar sem $v_0 = 500$ m/s, $g = 9{,}8 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, og $\alpha = 30$ gráður. Hvenær lendir kúlan á jörðinni? Hve langt frá byssunni lendir hún?

56. **[T]** Notið tæknibúnað til að teikna ferilinn sem lýst er með $x = \sin(4t)$, $y = \sin(3t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

57. **[T]** Notið tæknibúnað til að teikna $x = 2\tan(t)$, $y = 3\sec(t)$, $-\pi < t < \pi$.

58. Teiknið ferilinn sem nefnist útsveifarferill og lýsir braut punkts á hring með radíus b þegar hringurinn rúllar utan á hring með radíus a. Jöfnurnar eru

$$x = (a+b)\cos t - c\cdot\cos\left[\tfrac{(a+b)t}{b}\right]$$

$$y = (a+b)\sin t - c\cdot\sin\left[\tfrac{(a+b)t}{b}\right].$$

Látum $a = 1, b = 2, c = 1$.

59. **[T]** Notið tæknibúnað til að teikna kuðungsferilinn sem $x = t\cos(t)$, $y = t\sin(t)$ lýsir á bilinu $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

60. **[T]** Notið tæknibúnað til að teikna ferilinn sem lýst er með stikajöfnunum $x = 2\cot(t)$, $y = 1 - \cos(2t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. Ferillinn nefnist Agnesarhaddur.

61.

[T] Teiknið ferilinn sem lýst er með stikajöfnunum $\begin{matrix} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t), \end{matrix}$ þar sem $-2 \leq t \leq 2$.

7

7.2 Stærðfræðigreining stikaðra ferla

NÁMSMARKMIÐ

- 7.2.1 Ákvarða afleiður og jöfnur snertla við stikaða ferla.
- 7.2.2 Finna flatarmálið undir stikuðum ferli.
- 7.2.3 Nota jöfnuna fyrir bogalengd stikaðs ferils.
- 7.2.4 Beita formúlunni fyrir yfirborðsflatarmál á snúð sem stikaður ferill myndar.

Nú þegar við höfum kynnt hugtakið stikaður ferill er næsta skref að læra að beita stærðfræðigreiningu á slíka ferla. Ef við þekkjum til dæmis stikun tiltekins ferils, getum við þá reiknað hallatölu snertils við ferilinn? Hvað um bogalengd ferilsins eða flatarmálið undir honum?

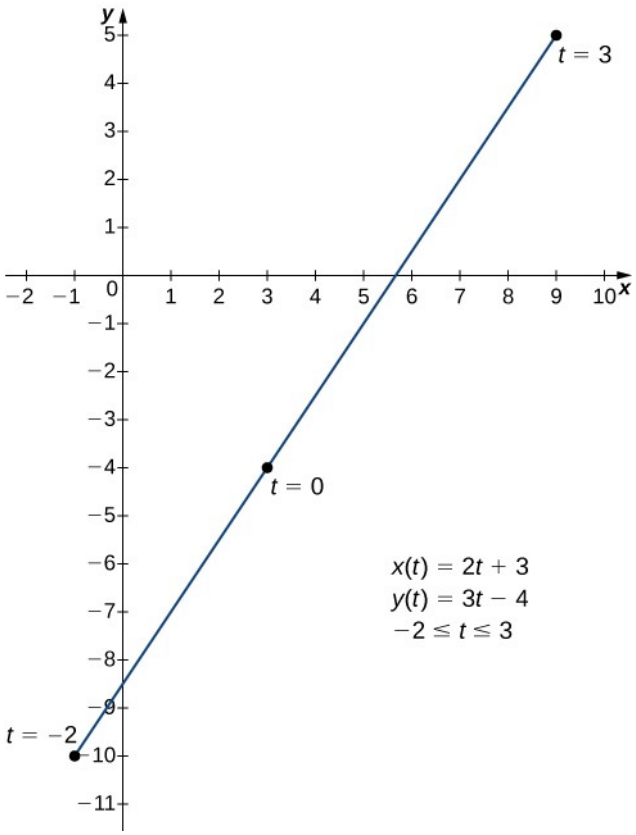
Skoðum annað dæmi. Gerum ráð fyrir að við viljum lýsa staðsetningu hafnabolta eftir að hann yfirgefur hönd kastarans. Ef staðsetning boltans er gefin með ferlinum $(x(t), y(t))$, ættum við að geta notað stærðfræðigreiningu til að finna hraða boltans á hverjum tíma. Jafnframt ættum við að geta reiknað hversu langt boltinn hefur farið sem fall af tíma.

Afleiður stikajafna

Við byrjum á að skoða hvernig reikna má hallatölu snertils við stikaðan feril í tilteknum punkti. Skoðum ferilinn sem stikajöfnurnar skilgreina

$$x(t)=2t+3,\ y(t)=3t-4,\ -2\le t\le 3.$$

Graf ferilsins er sýnt á mynd 7.16. Það er línustrik sem hefst í $(-1,-10)$ og endar í $(9,5)$.



Mynd 7.16 Graf línustriksins sem lýst er með stikajöfnunum.

Við getum eytt stikanum með því að leysa fyrst jöfnuna $x(t)=2t+3$ með tilliti til t:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t+3 \\ x-3 &= 2t \\ t &= \tfrac{x-3}{2}. \end{aligned}$$

Þegar þetta er sett inn í $y(t)$, fæst

$$\begin{aligned} y(t) &= 3t-4 \\ y &= 3\left(\tfrac{x-3}{2}\right)-4 \\ y &= \tfrac{3x}{2}-\tfrac{9}{2}-4 \\ y &= \tfrac{3x}{2}-\tfrac{17}{2}. \end{aligned}$$

Hallatala línunnar er $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$. Næst reiknum við $x'(t)$ og $y'(t)$. Þá fæst $x'(t)=2$ og $y'(t)=3$.

Athugið að $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3}{2}$. Þetta er engin tilviljun, eins og næsta setning sýnir.

SETNING 7.1

Afleiða stikajafna

Skoðum stikajöfnurnar $x=x(t)$ og $y=y(t)$. Þær skilgreina feril. Gerum ráð fyrir að $x'(t)$ og $y'(t)$ séu til og að $x'(t)\neq 0$. Þá er afleiðan $\frac{dy}{dx}$ gefin með

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

(7.1)

Sönnun

Setninguna má sanna með keðjureglunni. Gerum nánar tiltekið ráð fyrir að eyða megi stikanum t og fá deildanlegt fall $y=F(x)$. Þá er $y(t)=F(x(t))$. Ef við deildum báðar hliðar jöfnunnar með keðjureglunni fæst

$$y'(t)=F'(x(t))x'(t),$$

og því

$$F'(x(t))=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

En $F'(x(t))=\frac{dy}{dx}$, og þar með er setningin sönnuð.

□

Nota má jöfnu 7.1 til að reikna afleiður ferla og finna stöðupunkta. Rifjum upp að stöðupunktur deildanlegs falls $y=f(x)$ er hver sá punktur $x=x_0$ þar sem annaðhvort

$f'(x_0)=0$ eða $f'(x_0)$ er ekki til. Samkvæmt jöfnu 7.1 fæst formúla fyrir hallatölu snertils við stikaðan feril, hvort sem lýsa má ferlinum með falli $y=f(x)$ eða ekki.

DÆMI 7.4

Afleiða stikaðs ferils fundin

Reiknið afleiðuna $\frac{dy}{dx}$ fyrir hvern eftirfarandi stikaðan feril og finnið alla stöðupunkta á grafi hans.

a. $x(t)=t^2-3, y(t)=2t-1, -3\leq t\leq 4$

b. $x(t)=2t+1, y(t)=t^3-3t+4, -2\leq t\leq 2$

c. $x(t)=5\cos t, y(t)=5\sin t, 0\leq t\leq 2\pi$

Lausn

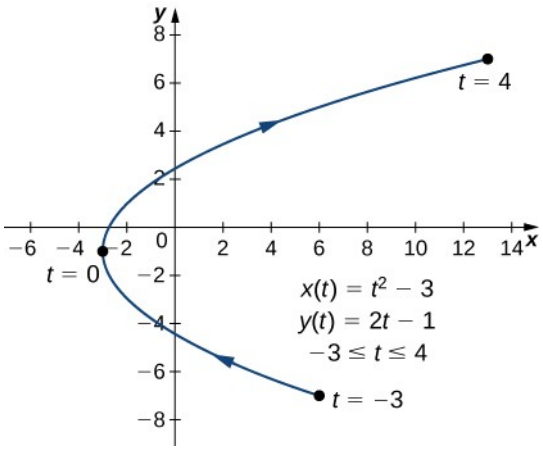
a. Til að beita jöfnu 7.1 reiknum við fyrst $x'(t)$ og $y'(t)$:

$$x'(t)=2t$$
$$y'(t)=2.$$

Setjum þetta því næst inn í jöfnuna:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2t}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{t}.$$

Afleiðan er ekki skilgreind þegar $t=0$. Þegar $x(0)$ og $y(0)$ eru reiknuð fæst $x(0)=(0)^2-3=-3$ og $y(0)=2(0)-1=-1$, sem samsvarar punktinum $(-3,-1)$ á grafinu. Graf ferilsins er fleygbogi sem opnast til hægri og punkturinn $(-3,-1)$ er topppunktur hans, eins og sýnt er.



Mynd 7.17 Graf fleygbogans sem stikajöfnurnar í a-lið lýsa.

b. Til að beita jöfnu 7.1 reiknum við fyrst $x'(t)$ og $y'(t)$:

$$x'(t) = 2$$
$$y'(t) = 3t^2 - 3.$$

Setjum þetta því næst inn í jöfnuna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2-3}{2}.$$

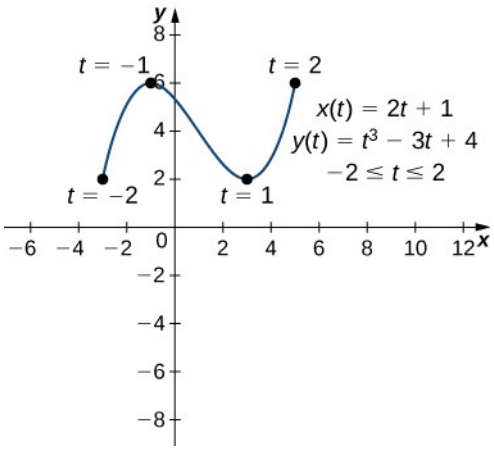
Afleiðan er núll þegar $t = \pm 1$. Þegar $t = -1$ er

$x(-1) = 2(-1) + 1 = -1$ og $y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = -1 + 3 + 4 = 6$,

sem samsvarar punktinum $(-1, 6)$ á grafinu. Þegar $t = 1$ er

$x(1) = 2(1) + 1 = 3$ og $y(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$,

sem samsvarar punktinum $(3, 2)$ á grafinu. Punkturinn $(3, 2)$ er staðbundinn lággildispunktur og punkturinn $(-1, 6)$ er staðbundinn hágildispunktur, eins og sést á eftirfarandi grafi.



Mynd 7.18 Graf ferilsins sem stikajöfnurnar í b-lið lýsa.

c. Til að beita jöfnu 7.1 reiknum við fyrst $x'(t)$ og $y'(t)$:

$$x'(t) = -5\sin t$$
$$y'(t) = 5\cos t.$$

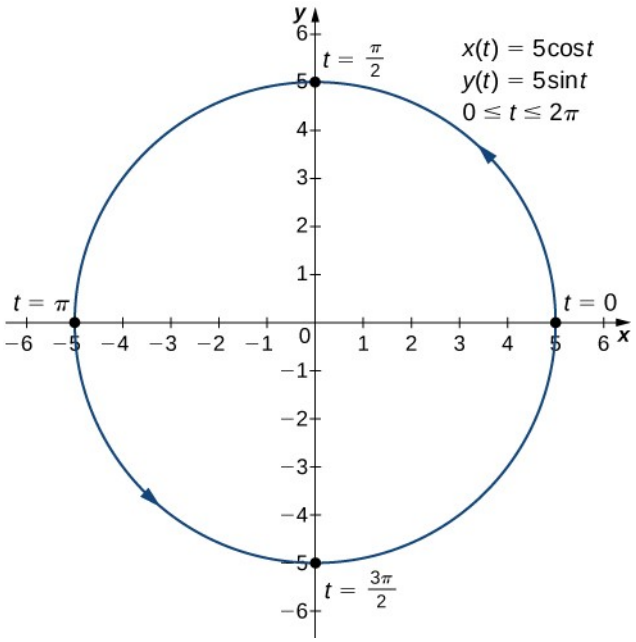
Setjum þetta því næst inn í jöfnuna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\cos t}{-5\sin t}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\cot t.$$

Afleiðan er núll þegar $\cos t = 0$ og er ekki skilgreind þegar $\sin t = 0$. Stöðupunktar fást því fyrir $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, og 2π, þar sem t er stikinn. Þegar hvert þessara gilda er sett inn í $x(t)$ og $y(t)$, fæst

t	$x(t)$	$y(t)$
0	5	0
$\frac{\pi}{2}$	0	5
π	−5	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	−5
2π	5	0

Punktarnir samsvara vinstri og hægri hlið hringsins, toppi hans og botni, en hringnum er lýst með stikajöfnunum (mynd 7.19). Afleiðan er ekki skilgreind á vinstri og hægri hlið hringsins en er núll efst og neðst á honum.



Mynd 7.19 Graf ferilsins sem stikajöfnurnar í c-lið lýsa.

STÖÐUMAT 7.4

Reiknið afleiðuna $d\,y/d\,x$ fyrir ferilinn sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=t^2-4t\,,\,y(t)=2t^3-6t\,,\,-2\le t\le 3$$

og finnið alla stöðupunkta á grafi hans.

DÆMI 7.5

Jafna snertils fundin

Finnið jöfnu snertils við ferilinn sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=t^2-3,\, y(t)=2t-1,\, -3\le t\le 4 \text{ þegar } t=2.$$

Lausn

Finnum fyrst hallatölu snertilsins með jöfnu 7.1 en til þess þarf að reikna $x'(t)$ og $y'(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2t \\ y'(t) &= 2. \end{aligned}$$

Setjum þetta því næst inn í jöfnuna:

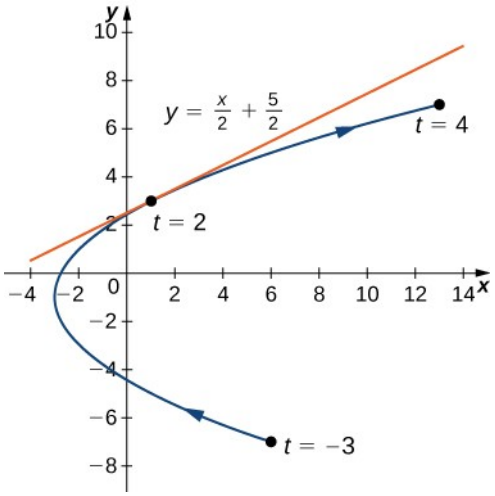
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{2t} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Þegar $t=2$, er $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$, og það er því hallatala snertilsins. Þegar $x(2)$ og $y(2)$ eru reiknuð fæst

$$x(2)=(2)^2-3=1 \text{ og } y(2)=2(2)-1=3,$$

sem samsvarar punktinum $(1,3)$ á grafinu (mynd 7.20). Notum nú punkthallaform línu til að finna jöfnu snertilsins:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 3 &= \tfrac{1}{2}(x - 1) \\ y - 3 &= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} \\ y &= \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$



Mynd 7.20 Snertill við fleygbogann sem gefnu stikajöfnurnar lýsa þegar $t = 2$.

STÖÐUMAT 7.5

Finnið jöfnu snertils við ferilinn sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t) = t^2 - 4t,\ y(t) = 2t^3 - 6t,\ -2 \le t \le 10 \text{ þegar } t = 5.$$

Önnur afleiða

Næsta markmið er að sjá hvernig finna má aðra afleiðu falls sem er skilgreint með stikajöfnum. Önnur afleiða falls $y = f(x)$ er skilgreind sem afleiða fyrstu afleiðunnar, það er

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right].$$

Þar sem $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, getum við skipt y beggja vegna jöfnunnar út fyrir $\frac{dy}{dx}$. Þá fæst

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt}.$$

(7.2)

Ef við þekkjum dy/dx sem fall af t, er auðvelt að beita þessari formúlu.

DÆMI 7.6

Önnur afleiða fundin

Reiknið aðra afleiðuna d^2y/dx^2 fyrir ferilinn sem skilgreindur er með stikajöfnunum $x(t)=t^2-3, y(t)=2t-1, -3\le t\le 4$.

Lausn

Úr dæmi 7.4 vitum við að $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$. Með jöfnu 7.2 fæst

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt}=\frac{(d/dt)(1/t)}{2t}=\frac{-t^{-2}}{2t}=-\frac{1}{2t^3}.$$

STÖÐUMAT 7.6

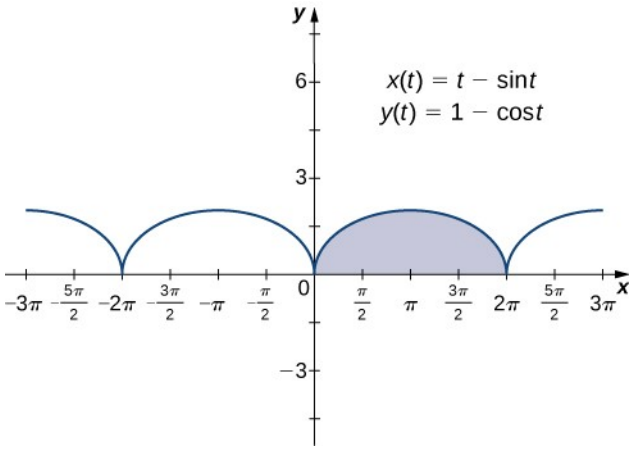
Reiknið aðra afleiðuna d^2y/dx^2 fyrir ferilinn sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=t^2-4t, y(t)=2t^3-6t, -2\le t\le 3$$

og finnið alla stöðupunkta á grafi hans.

Heildi með stikajöfnum

Nú þegar við höfum séð hvernig reikna má afleiðu ferils er næsta spurning þessi: Hvernig finnum við flatarmálið undir ferli sem skilgreindur er með stikajöfnum? Rifjum upp hjólferilinn sem skilgreindur er með jöfnunum $x(t)=t-\sin t, y(t)=1-\cos t$. Gerum ráð fyrir að við viljum finna flatarmál skyggða svæðisins á eftirfarandi grafi.

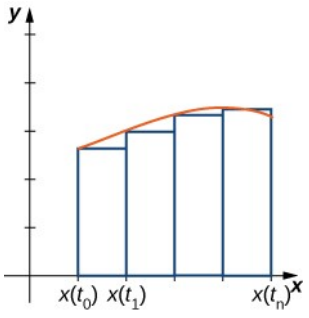


Mynd 7.21 Graf hjólferils þar sem boginn yfir $[0,2\pi]$ er auðkenndur.

Til að leiða út formúlu fyrir flatarmálið undir ferlinum sem föllin skilgreina

$$x=x(t), y=y(t), a\le t\le b,$$

gerum við ráð fyrir að $x(t)$ sé vaxandi á bilinu $t \in [a, b]$ og að $x(t)$ sé deildanlegt. Við byrjum á jafnri skiptingu bilsins $a \le t \le b$. Gerum ráð fyrir að $t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ og skoðum eftirfarandi graf.



Mynd 7.22 Flatarmálið undir stikuðum ferli nálgað.

Við nálgum flatarmálið undir ferlinum með rétthyrningum. Hæð *i*-ta rétthyrningsins er $y(t_{i-1})$ og því er nálgun á flatarmálinu

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} y(t_{i-1})(x(t_i) - x(t_{i-1})) \\ = & \sum_{i=1}^{n} y(t_{i-1}) \frac{(x(t_i) - x(t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1})} (t_i - t_{i-1}) \\ & \to \int_a^b y(t) x'(t)\, dt \text{ þegar } \max\{(t_i - t_{i-1})\} \to 0 \end{aligned}$$

Þetta leiðir af niðurstöðum sem fengust í Stærðfræðigreiningu 1 fyrir fallið $y(t_{i-1}) \frac{(x(t_i) - x(t_{i-1}))}{(t_i - t_{i-1})}$.

Riemann-summa fyrir flatarmálið er þá

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} y\left(\bar{t}_i\right)\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right).$$

Ef hvert flatarmál er margfaldað með $t_i - t_{i-1}$ og síðan deilt með sömu stærð fæst

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} y\left(x\left(\bar{t}_i\right)\right)\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{\Delta t}\right)\Delta t.$$

Þegar markgildið er tekið þar sem *n* stefnir á óendanlegt fæst

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \int_a^b y(t) x'(t)\, dt.$$

Ef x er minnkandi fall fyrir $a \le t \le b$ sýnir sams konar útleiðsla að flatarmálið er gefið með - $\int_a^b y(t) x'(t)\, dt$ $= \int_a^b y(t) x'(t)\, dt$

Þetta leiðir til eftirfarandi setningar.

SETNING 7.2

Flatarmál undir stikuðum ferli

Skoðum feril sem sker ekki sjálfan sig og er skilgreindur með stikajöfnunum

$$x=x(t), y=y(t), a\le t\le b$$

og gerum ráð fyrir að $x(t)$ sé deildanlegt. Flatarmálið undir ferlinum er þá gefið með

$$A=\int_a^b y(t)x'(t)\,dt.$$

(7.3)

DÆMI 7.7

Flatarmál undir stikuðum ferli fundið

Finnið flatarmálið undir hjólferlinum sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=t-\sin t, y(t)=1-\cos t, 0\le t\le 2\pi.$$

Lausn

Með jöfnu 7.3 fæst

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b y(t)x'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (1-2\cos t+\cos^2 t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{\cos 2t}{2}\right)dt \\
&= \tfrac{3t}{2}-2\sin t+\tfrac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{2\pi} \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

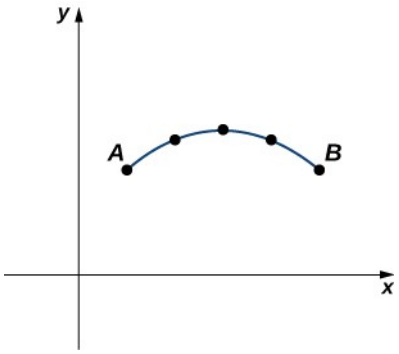
STÖÐUMAT 7.7

Finnið flatarmálið undir innhjólferlinum sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=3\cos t+\cos 3t, y(t)=3\sin t-\sin 3t, 0\le t\le \pi.$$

Bogalengd stikaðs ferils

Auk þess að finna flatarmálið undir stikuðum ferli þurfum við stundum að finna bogalengd hans. Þegar um línustrik er að ræða er bogalengdin jöfn fjarlægðinni milli endapunktanna. Ef ögn fer frá punkti A til punkts B eftir ferli er vegalengdin sem hún fer jöfn bogalengdinni. Til að leiða út formúlu fyrir bogalengd byrjum við á nálgun með línustrikum eins og sýnt er á eftirfarandi grafi.



Mynd 7.23 Ferill nálgaður með línustrikum.

Gefinn sé ferill sem föllin $x=x(t), y=y(t), a\le t\le b$, skilgreina. Við byrjum á að skipta bilinu $[a,b]$ í n jafnlöng undirbil: $t_0=a<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$. Breidd hvers undirbils er $\Delta t=(b-a)/n$. Við getum reiknað lengd hvers línustriks:

$$d_1=\sqrt{(x(t_1)-x(t_0))^2+(y(t_1)-y(t_0))^2}$$
$$d_2=\sqrt{(x(t_2)-x(t_1))^2+(y(t_2)-y(t_1))^2} \text{ o.s.frv..}$$

Síðan leggjum við lengdirnar saman. Látum s tákna nákvæma bogalengd og s_n nálgunina með n línustrikum:

$$s\approx\sum_{k=1}^{n}s_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}.$$

(7.4)

Ef við gerum ráð fyrir að $x(t)$ og $y(t)$ séu deildanleg föll af t, má beita meðalgildissetningunni (Inngangur að hagnýtingu afleiðna). Á hverju undirbili $[t_{k-1},t_k]$ eru til gildi $\hat{t}_k$ og $\tilde{t}_k$ þannig að

$$x(t_k)-x(t_{k-1})=x'\left(\hat{t}_k\right)(t_k-t_{k-1})=x'\left(\hat{t}_k\right)\Delta t$$
$$y(t_k)-y(t_{k-1})=y'\left(\tilde{t}_k\right)(t_k-t_{k-1})=y'\left(\tilde{t}_k\right)\Delta t.$$

Jafna 7.4 verður því

$$\begin{aligned} s &\approx \sum_{k=1}^{n} s_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'\left(\hat{t}_k\right)\Delta t\right)^2 + \left(y'\left(\tilde{t}_k\right)\Delta t\right)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'\left(\hat{t}_k\right)\right)^2 (\Delta t)^2 + \left(y'\left(\tilde{t}_k\right)\right)^2 (\Delta t)^2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'\left(\hat{t}_k\right)\right)^2 + \left(y'\left(\tilde{t}_k\right)\right)^2}\right) \Delta t. \end{aligned}$$

Þetta er Riemann-summa sem nálgar bogalengdina yfir skiptingu bilsins $[a, b]$. Ef við gerum jafnframt ráð fyrir að afleiðurnar séu samfelldar og að fjöldi skiptipunkta vaxi án takmarka, stefnir nálgunin á nákvæma bogalengd. Því fæst

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'\left(\hat{t}_k\right)\right)^2 + \left(y'\left(\tilde{t}_k\right)\right)^2}\right) \Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Þegar markgildið er tekið liggja gildin $\hat{t}_k$ og $\tilde{t}_k$ bæði á sama síminnkandi bili með breidd Δt, og hljóta því að stefna á sama gildi.

Aðferðina má draga saman í eftirfarandi setningu.

SETNING 7.3

Bogalengd stikaðs ferils

Skoðum ferilinn sem stikajöfnurnar skilgreina

$$x = x(t), y = y(t), t_1 \le t \le t_2$$

og gerum ráð fyrir að $x(t)$ og $y(t)$ séu deildanleg föll af t. Bogalengd ferilsins er þá gefin með

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

(7.5)

Stutt útleiðsla sýnir nú hvernig þessi niðurstaða leiðir til formúlunnar fyrir bogalengd sem við höfum áður séð. Gerum nánar tiltekið ráð fyrir að eyða megi stikanum og fá fall $y = F(x)$. Þá er $y(t) = F(x(t))$ og samkvæmt keðjureglunni er $y'(t) = F'(x(t))x'(t)$. Þegar þetta er sett inn í jöfnu 7.5 fæst

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(F'(x)\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left(1 + (F'(x))^2\right)}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt. \end{aligned}$$

Hér höfum við gert ráð fyrir að $x'(t) > 0$, sem er eðlileg forsenda. Samkvæmt keðjureglunni er $dx = x'(t)\,dt$, og með því að láta $a = x(t_1)$ og $b = x(t_2)$ fæst formúlan

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

sem er formúlan fyrir bogalengd sem leidd var út í Inngangi að hagnýtingu heildunar.

DÆMI 7.8

Bogalengd stikaðs ferils fundin

Finnið bogalengd hálfhringsins sem jöfnurnar skilgreina

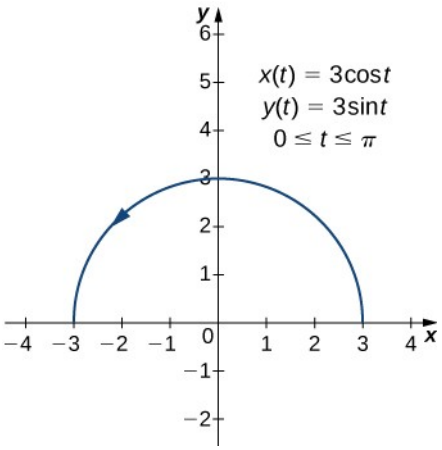
$$x(t) = 3\cos t,\ y(t) = 3\sin t,\ 0 \le t \le \pi.$$

Lausn

Gildin frá $t = 0$ til $t = \pi$ rekja rauða ferilinn á mynd 7.23. Til að ákvarða lengd hans notum við jöfnu 7.5:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{9\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} 3\, dt = 3t\big|_0^{\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

Athugið að formúlan fyrir bogalengd hálfhrings er πr og radíus þessa hrings er 3. Þetta er gott dæmi um hvernig nota má stærðfræðigreiningu til að leiða út þekkta formúlu fyrir rúmfræðilega stærð.



Mynd 7.24 Bogalengd hálfhringsins er jöfn margfeldi geisla hans og π.

STÖÐUMAT 7.8

Finnið bogalengd ferilsins sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=3t^2, y(t)=2t^3, 1\le t\le 3.$$

Snúum nú aftur að verkefninu í upphafi hlutans um hafnabolta sem yfirgefur hönd kastarans. Ef áhrif loftmótstöðu eru hunsuð (nema boltinn snúist í flugi!) fer boltinn eftir fleygboga. Gerum ráð fyrir að hönd kastarans sé í upphafspunktinum og að boltinn fari frá vinstri til hægri í stefnu jákvæða x-ássins. Þá má rita stikajöfnur ferilsins sem

$$x(t)=42t, \quad y(t)=-4{,}9t^2+0{,}7t$$

þar sem t táknar tíma í sekúndum og vegalengdir eru mældar í metrum. Fyrst reiknum við vegalengdina sem boltinn fer sem fall af tíma. Þessi vegalengd er bogalengdin. Við getum breytt bogalengdarformúlunni lítillega. Byrjum á að rita föllin $x(t)$ og $y(t)$ með v sem óháðri breytu til að forðast rugling við stikann t:

$$x(v)=42v, \quad y(v)=-4{,}9v^2+0{,}7v.$$

Þá ritum við bogalengdarformúluna þannig:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2}\,dv \\ &= \int_0^t \sqrt{42^2+(-9{,}8v+0{,}7)^2}\,dv. \end{aligned}$$

Breytan v er gervibreyta sem hverfur við heildunina og eftir stendur bogalengdin sem fall af tímanum t. Til að heilda segðina getum við notað formúlu úr viðauka A,

$$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right|+C.$$

Látum $a=42$ og $u=-9{,}8\,v+0{,}7$. Þá er $du=-9{,}8\,dv$, og því $dv=-\frac{1}{9{,}8}du$. Þar með fæst

$$\int\sqrt{42^2+(-9{,}8\,v+0{,}7)^2}\,dv \qquad =-\frac{1}{9{,}8}\int\sqrt{a^2+u^2}\,du$$

$$=-\frac{1}{9{,}8}\left[\begin{array}{c}\frac{(-9{,}8\,v+0{,}7)}{2}\sqrt{42^2+(-9{,}8\,v+0{,}7)^2}\\ \frac{+42^2}{2}\ln|(-9{,}8\,v+0{,}7)+\sqrt{42^2+(-9{,}8\,v+0{,}7)^2}|\end{array}\right]+C$$

og að

$$s(t)=-\frac{1}{9{,}8}\left[\frac{(-9{,}8\,t+0{,}7)}{2}\sqrt{42^2+(-9{,}8\,t+0{,}7)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{42^2}{2}\ln|(-9{,}8\,t+0{,}7)+\sqrt{42^2+(-9{,}8\,t+0{,}7)^2}|\right]$$

$$+\frac{1}{9{,}8}\left[\frac{0{,}7}{2}\sqrt{42^2+0{,}7^2}+\frac{42^2}{2}\ln|0{,}7+\sqrt{42^2+0{,}7^2}|\right]$$

$$=\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{28}\right)\sqrt{96{,}04\,t^2-13{,}72\,t+1764{,}49}$$

$$-90\ln|(-9{,}8\,t+0{,}7)+\sqrt{96{,}04\,t^2-13{,}72\,t+1764{,}49}|$$

$$+\frac{\sqrt{1764{,}49}}{28}+90\ln\left(0{,}7+\sqrt{1764{,}49}\right).$$

Þetta fall gefur vegalengd boltans sem fall af tíma. Til að reikna hraðann tökum við afleiðu fallsins með tilliti til t. Þótt það kunni að virðast erfitt má fá svarið beint með undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\,du=f(x).$$

7

Því er

$$\begin{aligned}s'(t) &=\frac{d}{dt}[s(t)]\\ &=\frac{d}{dt}[\int_0^t\sqrt{42^2+(-9{,}8\,v+0{,}7)^2}\,dv]\\ &=\sqrt{42^2+(-9{,}8\,t+0{,}7)^2}\\ &=\sqrt{96{,}04\,t^2-13{,}72\,t+1764{,}49}\\ &=0{,}7\sqrt{196\,t^2-28\,t+3601}.\end{aligned}$$

Þriðjungi sekúndu eftir að boltinn yfirgefur hönd kastarans er vegalengdin sem hann hefur farið

$$\begin{aligned} s\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1/3}{2}-\frac{1}{28}\right)\sqrt{96{,}04\left(\frac{1}{3}\right)^2-13{,}72\left(\frac{1}{3}\right)+1764{,}49} \\ &\quad -90\ln\left|\left(-9{,}8\left(\frac{1}{3}\right)+0{,}7\right)+\sqrt{96{,}04\left(\frac{1}{3}\right)^2-13{,}72\left(\frac{1}{3}\right)+1764{,}49}\right| \\ &\quad +\frac{\sqrt{1764{,}49}}{28}+90\ln\left(0{,}7+\sqrt{1764{,}49}\right) \\ &\approx 14{,}01\ \text{m}. \end{aligned}$$

Þetta er rétt rúmlega þrír fjórðu hlutar leiðarinnar að heimahöfninni. Hraði boltans er

$$s'\left(\frac{1}{3}\right)=0{,}7\sqrt{196\left(\frac{1}{3}\right)^2-28\left(\frac{1}{3}\right)+3601}\approx 42{,}08\ \text{m/s}.$$

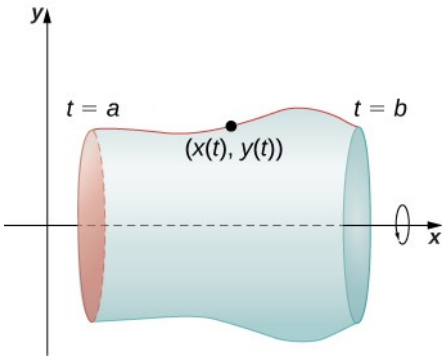
Þetta jafngildir um það bil 151 km/klst — sannkölluðum hraðbolta í efstu deild.

Yfirborðsflatarmál sem stikaður ferill myndar

Rifjum upp hvernig finna má yfirborðsflatarmál snúðflatar. Í Bogalengd og yfirborðsflatarmáli leiddum við út formúlu fyrir yfirborðsflatarmál snúðflatarins sem fallið $y=f(x)$ myndar frá $x=a$ til $x=b$, þegar því er snúið um x-ásinn:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Skoðum nú snúð sem myndast þegar stikuðum ferli $x=x(t)$, $y=y(t)$, $a\le t\le b$ er snúið um x-ásinn, eins og sýnt er á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.25 Snúðflötur sem stikaður ferill myndar.

Samsvarandi formúla fyrir stikaðan feril er

$$S=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt$$

(7.6)

að því gefnu að $y(t)$ sé óneikvætt á $[a,b]$.

DÆMI 7.9

Yfirborðsflatarmál fundið

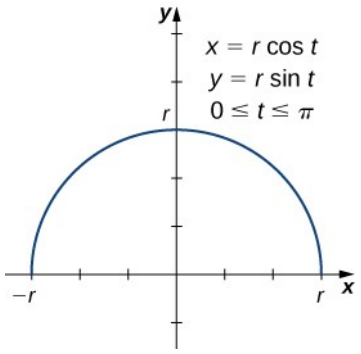
Finnið yfirborðsflatarmál kúlu með radíus r og miðju í upphafspunktinum.

Lausn

Við byrjum á ferlinum sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=r\cos t\,,\, y(t)=r\sin t\,, 0\le t\le \pi\,.$$

Þetta myndar efri hálfhring með radíus r og miðju í upphafspunktinum, eins og sýnt er á eftirfarandi grafi.



Mynd 7.26 Hálfhringur sem stikajöfnur mynda.

Þegar þessum ferli er snúið um x-ásinn myndar hann kúlu með radíus r. Til að reikna yfirborðsflatarmál kúlunnar notum við jöfnu 7.6:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b y\,(t)\sqrt{\left(x'\,(t)\right)^2+\left(y'\,(t)\right)^2}dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r\sin t\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r\sin t\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r\sin t\sqrt{r^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}dt \\ &= 2\pi \int_0^\pi r^2\sin t\,dt \\ &= 2\pi r^2(-\cos t|_0^\pi) \\ &= 2\pi r^2\left(-\cos\pi+\cos 0\right) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Þetta er einmitt formúlan fyrir yfirborðsflatarmál kúlu.

STÖÐUMAT 7.9

Finnið yfirborðsflatarmálið sem myndast þegar ferlinum sem jöfnurnar skilgreina

$$x(t)=t^3, y(t)=t^2, 0\le t\le 1$$

er snúið um x-ásinn.

Æfingar í kafla 7.2

Í eftirfarandi verkefnum lýsir hvert stikajöfnupar línu. Finnið hallatölu hverrar línu án þess að eyða stikanum.

62.

$$x = 3 + t, \quad y = 1 - t$$

63.

$$x = 8 + 2t, \quad y = 1$$

64.

$$x = 4 - 3t, \quad y = -2 + 6t$$

65.

$$x = -5t + 7, \quad y = 3t - 1$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða hallatölu snertilsins og finna síðan jöfnu snertilsins við gefið gildi stikans.

66.

$$x = 3\sin t, \quad y = 3\cos t, \quad t = \tfrac{\pi}{4}$$

67.

$$x = \cos t, \quad y = 8\sin t, t = \tfrac{\pi}{2}$$

68.

$$x = 2t, \quad y = t^3, \quad t = -1$$

69.

$$x = t + \tfrac{1}{t}, \quad y = t - \tfrac{1}{t}, \quad t = 1$$

70.

$$x = \sqrt{t}, \quad y = 2t, \quad t = 4$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna alla punkta á ferlinum þar sem hallatalan hefur gefið gildi.

71.

$x = 4\cos t, \quad y = 4\sin t,$ hallatala = 0,5

72.

$$x=2\ \cos\ t, \qquad y=8\ \sin\ t,\ \text{hallatala}=-1$$

73.

$$x=t+\frac{1}{t}, \qquad y=t-\frac{1}{t},\ \text{hallatala}=1$$

74.

$$x=2+\sqrt{t}, \qquad y=2-4t,\ \text{hallatala}=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið rita jöfnu snertilsins í kartesískum hnitum fyrir gefið gildi stikans t.

75.

$$x = e^{\sqrt{t}},\ \ y = 1-\ln t^2,\quad t = 1$$

76.

$$x = t\ln t,\ \ y = \sin^2 t, t = \tfrac{\pi}{4}$$

77.

$$x=e^t, \qquad y=(t-1)^2, \quad \text{við}\,(1,1)$$

78. Gefnar eru jöfnurnar $x=\sin(2t)$, $y=2\sin t$ þar sem $0\le t<2\pi$. Finnið öll gildi t þar sem láréttur snertill er til.

79. Gefnar eru jöfnurnar $x=\sin(2t)$, $y=2\sin t$ þar sem $0\le t<2\pi$. Finnið öll gildi t þar sem lóðréttur snertill er til.

80. Finnið alla punkta á ferlinum $x=4\sin(t)$, $y=4\cos(t)$ þar sem hallatalan er 0,5

81. Finnið $\frac{dy}{dx}$ fyrir $x=\sin(t)$, $y=\cos(t)$.

82. Finnið jöfnu snertils við $x=\sin(t)$, $y=\cos(t)$ í $t=\frac{\pi}{4}$.

83. Finnið hallatölu og kúpni ferilsins $x=4t$, $y=3t-2$, þegar $t=3$.

84. Finnið hallatölu og kúpni stikaða ferilsins $x=4\cos\theta$, $y=4\sin\theta$, þegar $\theta=\frac{\pi}{4}$.

85. Finnið hallatölu og kúpni ferilsins $x=2+\sec\theta$, $y=1+2\tan\theta$ þegar $\theta=\frac{\pi}{6}$.

86. Finnið alla punkta á ferlinum $x=t+4$, $y=t^3-3t$ þar sem snertillinn er lóðréttur eða láréttur.

87. Finnið alla punkta á ferlinum $x=\sec\theta$, $y=\tan\theta$ þar sem láréttur eða lóðréttur snertill er til.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna d^2y/dx^2.

88.

$$x = t^4 - 1, \quad y = t - t^2$$

89.

$$x = \sin(\pi t), \quad y = \cos(\pi t)$$

90.

$$x = e^{-t}, \quad y = te^{2t}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna þá punkta á ferlinum þar sem snertillinn er láréttur eða lóðréttur.

91.

$$x = t(t^2 - 3), \quad y = 3(t^2 - 3)$$

92.

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna dy/dx við gefið gildi stikans.

93.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t = \tfrac{3\pi}{4}$$

94.

$$x = \sqrt{t}, \quad y = 2t + 4, \quad t = 9$$

95.

$$x = 4\cos(2\pi s), \quad y = 3\sin(2\pi s), \quad s = -\tfrac{1}{4}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna d^2y/dx^2 í gefnum punkti án þess að eyða stikanum.

96.

$$x = \tfrac{1}{2}t^2, \quad y = \tfrac{1}{3}t^3, \quad t = 2$$

97.

$$x=\sqrt{t}, y=2t+4, t=1$$

98. Finnið þau bil fyrir t þar sem ferillinn $x=3t^2$, $y=t^3-t$ er annars vegar kúptur og hins vegar hvelfdur.

99. Ákvarðið kúpni ferilsins $x=2t+\ln t$, $y=2t-\ln t$.

100. Teiknið og finnið flatarmálið undir einum boga hjólferilsins $x=r(\theta-\sin\theta)$, $y=r(1-\cos\theta)$.

101. Finnið flatarmálið sem afmarkast af ferlinum $x=\cos t$, $y=e^t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ og línunum $y=1$ og $x=0$.

102. Finnið flatarmál svæðisins sem afmarkast af sporbaugnum $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$, $0\le\theta<2\pi$.

103. Finnið flatarmál þess svæðis sem afmarkast af ferlinum $x=2\sin^2\theta$, $y=2\sin^2\theta\tan\theta$, fyrir $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna flatarmál svæðanna sem stikuðu ferlarnir og tilgreind gildi stikans afmarka.

104.

$$x=2\cot\theta,\ y=2\sin^2\theta,\ 0\le\theta\le\pi$$

105. [T]

$$x=2a\cos t-a\cos(2t),\ y=2a\sin t-a\sin(2t),\ 0\le t<2\pi$$

106. [T] $x=a\sin(2t)$, $y=b\sin(t)$, $0\le t<2\pi$ („tímaglasið“)

107. [T] $x=2a\cos t-a\sin(2t)$, $y=b\sin t$, $0\le t<2\pi$ („tárdropinn“)

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna bogalengd ferilsins á tilgreindu bili stikans.

108.

$$x=4t+3,\ y=3t-2,\ 0\le t\le 2$$

109.

$$x=\tfrac{1}{3}t^3,\quad y=\tfrac{1}{2}t^2,\quad 0\le t\le 1$$

110.

$$x=\cos(2t),\quad y=\sin(2t),\quad 0\le t\le\tfrac{\pi}{2}$$

111.

$$x=1+t^2,\quad y=(1+t)^3,\quad 0\le t\le 1$$

112.

$x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ (Notið tölvualgebrukerfi og gefið svarið sem tugabrot námundað að þremur aukastöfum.)

113. $x=a\cos^3\theta$, $y=a\sin^3\theta$ á bilinu $[0,2\pi)$ (innhjólferillinn)

114. Finnið lengd eins boga hjólferilsins $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$.

115.

Finnið vegalengd agnar með staðsetninguna (x, y) þegar t tekur gildi á gefna tímabilinu: $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \le t \le 3\pi$.

116. Finnið lengd eins boga hjólferilsins $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

117. Sýnið að heildarlengd sporbaugsins $x = 4\sin\theta$, $y = 3\cos\theta$ sé $L = 16\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\, d\theta$,

þar sem $e = \frac{c}{a}$ og $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

118. Finnið lengd ferilsins $x = e^t - t$, $y = 4e^{t/2}$, $-8 \le t \le 3$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna yfirborðsflatarmálið sem fæst þegar gefnum ferli er snúið um x-ásinn.

119.

$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 1$$

120.

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta, \quad 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}$$

121. **[T]** Notið tölvualgebrukerfi til að finna yfirborðsflatarmálið sem myndast þegar $x = t + t^3$, $y = t - \frac{1}{t^2}$, $1 \le t \le 2$ er snúið um x-ásinn. (Gefið svarið með þremur aukastöfum.)

122. Finnið yfirborðsflatarmálið sem fæst þegar $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $0 \le t \le 5$ er snúið um y-ásinn.

123. Finnið yfirborðsflatarmálið sem myndast þegar $x = t^2$, $y = 2t$, $0 \le t \le 4$ er snúið um x-ásinn.

124. Finnið yfirborðsflatarmálið sem myndast þegar $x = t^2$, $y = 2t^2$, $0 \le t \le 1$ er snúið um y-ásinn.

7.3 Skauthnit

7

NÁMSMARKMIÐ

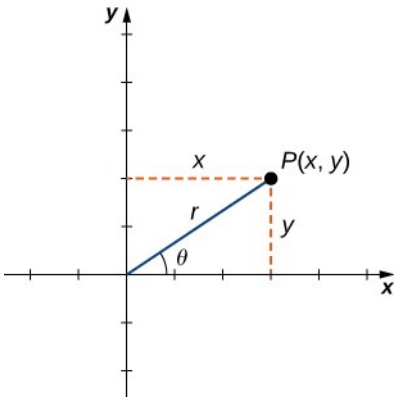
- 7.3.1 Staðsetja punkta í sléttu með skauthnitum.
- 7.3.2 Umrita hnit punkta milli rétthyrndra hnita og skauthnita.
- 7.3.3 Teikna skauthnitaferla út frá gefnum jöfnum.
- 7.3.4 Umrita jöfnur milli rétthyrndra hnita og skauthnita.
- 7.3.5 Greina samhverfu skauthnitaferla og skauthnitajafna.

Rétthyrnda hnitakerfið (eða kartesíska sléttan) gerir kleift að varpa punktum á raðtvenndir og raðtvenndum á punkta. Þetta kallast gagntæk vörpun milli punkta sléttunnar og

raðtvennda. Skauthnitakerfið er önnur leið til að varpa punktum á raðtvenndir. Í þessum kafla sjáum við að við vissar aðstæður geta skauthnit verið gagnlegri en rétthyrnd hnit.

Skilgreining skauthnita

Til að finna hnit punkts í skauthnitakerfinu skoðum við mynd 7.27. Punkturinn P hefur kartesísku hnitin (x, y). Línustrikið sem tengir upphafspunktinn við punktinn P sýnir fjarlægðina frá upphafspunktinum til P og hefur lengdina r. Hornið milli jákvæða x -ássins og línustriksins hefur stærðina θ. Þetta bendir til að eðlileg samsvörun sé milli hnitaparsins (x, y) og gildanna r og θ. Þessi samsvörun er undirstaða skauthnitakerfisins. Athugið að sérhverjum punkti í kartesísku sléttunni tengjast tvö gildi (þess vegna er talað um raðtvennd). Í skauthnitakerfinu tengjast sérhverjum punkti einnig tvö gildi: r og θ.



Mynd 7.27 Ótiltekinn punktur í kartesísku sléttunni.

Samkvæmt hornafræði rétthyrndra þríhyrninga gilda eftirfarandi jöfnur fyrir punktinn P:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ svo } x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \text{ svo } y = r\sin\theta.$$

Ennfremur gildir

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ og } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Því má tákna sérhvern punkt (x, y) í kartesíska hnitakerfinu sem raðtvennd (r, θ) í skauthnitakerfinu. Fyrra hnitið kallast geislahnit og hið síðara hornhnit. Sérhvern punkt í sléttunni má tákna á þessu formi.

Athugið að jafnan $\tan\theta = y/x$ hefur óendanlega margar lausnir fyrir sérhverja raðtvennd (x, y). Ef við takmörkum hins vegar lausnirnar við gildi milli 0 og 2π getum við valið einkvæma lausn sem samsvarar þeim fjórðungi þar sem upphaflegi punkturinn (x, y) liggur. Samsvarandi gildi r er þá jákvætt, svo $r^2 = x^2 + y^2$.

SETNING 7.4

Umritun punkta milli hnitakerfa

Fyrir punkt P í sléttunni með kartesísku hnitin (x, y) og skauthnitin (r, θ), má nota eftirfarandi umritunarformúlur:

$$x = r\cos\theta \text{ og } y = r\sin\theta,$$

(7.7)

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ og } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

(7.8)

Þessar formúlur má nota til að umrita rétthyrnd hnit sem skauthnit eða skauthnit sem rétthyrnd hnit.

DÆMI 7.10

Umritun milli rétthyrndra hnita og skauthnita

Umritið hnit eftirfarandi punkta í skauthnit.

a. $(1, 1)$
b. $(-3, 4)$
c. $(0, 3)$
d. $(5\sqrt{3}, -5)$

Umritið hnit eftirfarandi punkta í rétthyrnd hnit.

e. $(3, \pi/3)$
f. $(2, 3\pi/2)$
g. $(6, -5\pi/6)$

Lausn

a. Notið $x = 1$ og $y = 1$ í jöfnu 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ &= 1^2 + 1^2 \\ r &= \sqrt{2} \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{1}{1} = 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Því má tákna þennan punkt með $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ í skauthnitum.

b. Notið $x=-3$ og $y=4$ í jöfnu 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2 \\ &= (-3)^2+(4)^2 \\ r &= 5 \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= -\frac{4}{3} \\ \theta &= \pi-\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \\ &\approx 2,21. \end{aligned}$$

Punkturinn $(-3,4)$ liggur í fjórðungi II. Dragið viðmiðunarhornið $\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ frá π til að finna stærð θ í radíönum.

Því má tákna þennan punkt með $(5;2,21)$ í skauthnitum.

c. Notið $x=0$ og $y=3$ í jöfnu 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2 \\ &= (3)^2+(0)^2 \\ &= 9+0 \\ r &= 3 \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{3}{0}. \end{aligned}$$

Ef seinni jafnan er notuð beint þarf að deila með núlli. Þegar punkturinn $(0,3)$ er teiknaður í rétthyrnda hnitakerfinu sést að hann liggur á jákvæða y-ásnum. Hornið milli jákvæða x-ássins og jákvæða y-ássins er $\frac{\pi}{2}$. Því má tákna þennan punkt með $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$ í skauthnitum.

d. Notið $x=5\sqrt{3}$ og $y=-5$ í jöfnu 7.8:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2 \\ &= (5\sqrt{3})^2+(-5)^2 \\ &= 75+25 \\ r &= 10 \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} \tan\theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{-5}{5\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \theta &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Því má tákna þennan punkt með $\left(10,-\frac{\pi}{6}\right)$ í skauthnitum.

e. Notið $r=3$ og $\theta=\frac{\pi}{3}$ í jöfnu 7.7:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{og} \quad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Því má tákna þennan punkt með $\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ í rétthyrndum hnitum.

f. Notið $r=2$ og $\theta=\frac{3\pi}{2}$ í jöfnu 7.7:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 2(0)=0 \end{aligned} \quad \text{og} \quad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= 2(-1)=-2. \end{aligned}$$

Því má tákna þennan punkt með $(0,-2)$ í rétthyrndum hnitum.

g. Notið $r=6$ og $\theta=-\frac{5\pi}{6}$ í jöfnu 7.7:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= 6\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{3} \end{aligned} \quad \text{og} \quad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= 6\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 6\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -3. \end{aligned}$$

Því má tákna þennan punkt með $(-3\sqrt{3},-3)$ í rétthyrndum hnitum.

STÖÐUMAT 7.10

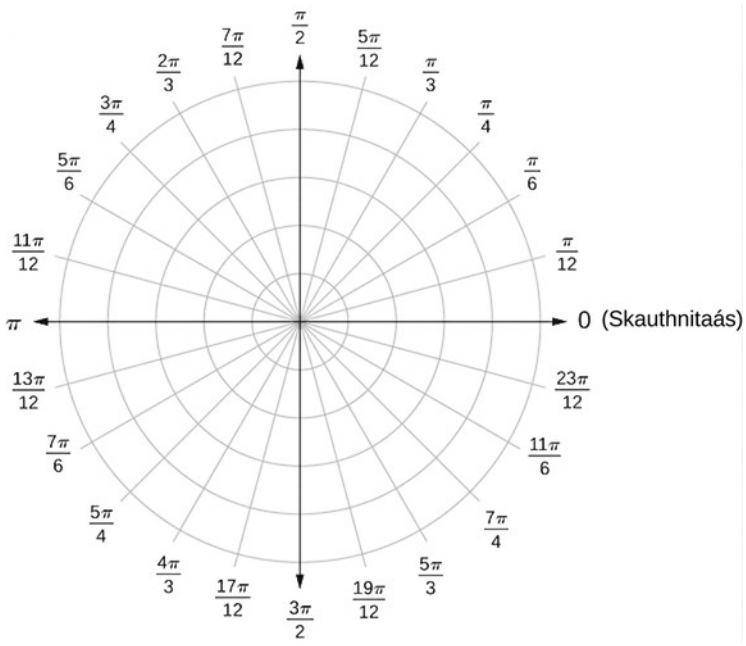
Umritið $(-8,-8)$ sem skauthnit og $\left(4,\frac{2\pi}{3}\right)$ sem rétthyrnd hnit.

Skauthnit punkts eru ekki ótvíræð. Til dæmis tákna skauthnitin $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ og $\left(2,\frac{7\pi}{3}\right)$ bæði punktinn $(1,\sqrt{3})$ í rétthyrnda hnitakerfinu. Gildi r má einnig vera neikvætt. Punkturinn með skauthnitin $\left(-2,\frac{4\pi}{3}\right)$ táknar því einnig punktinn $(1,\sqrt{3})$ í rétthyrnda hnitakerfinu, eins og sjá má með jöfnu 7.8:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ &= -2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -2\left(-\frac{1}{2}\right)=1 \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} y &= r\sin\theta \\ &= -2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Hver punktur í sléttunni á sér óendanlega margar framsetningar í skauthnitum. Í rétthyrnda hnitakerfinu hefur hann hins vegar aðeins eina framsetningu.

Athugið að framsetning punkts í skauthnitum hefur einnig rúmfræðilega túlkun. Gildið r er stefnubundna fjarlægðin frá upphafspunktinum til punktsins og θ mælir hornið sem línustrikið frá upphafspunktinum til punktsins myndar við jákvæða x -ásinn. Jákvæð horn eru mæld rangsælis og neikvæð horn réttsælis. Skauthnitakerfið er sýnt á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.28 Skauthnitakerfið.

Línustrikið sem liggur frá miðju grafsins til hægri (kallað jákvæði x-ásinn í kartesíska kerfinu) er skauthnitaásinn. Miðpunkturinn er skaut hnitakerfisins, eða upphafspunktur þess, og samsvarar $r=0$. Innsti hringurinn á mynd 7.28 inniheldur alla punkta í einnar einingar fjarlægð frá skautinu og er táknaður með jöfnunni $r=1$. Síðan táknar $r=2$ mengi punkta sem eru 2 einingar frá skautinu og svo koll af kolli. Línustrikin sem liggja frá skautinu samsvara föstum hornum. Til að teikna punkt í skauthnitakerfinu er byrjað á horninu. Ef hornið er jákvætt er það mælt rangsælis frá skauthnitaásnum. Ef það er neikvætt er það mælt réttsælis. Ef gildi r er jákvætt er sú vegalengd farin eftir endageisla hornsins. Ef það er neikvætt er farið eftir geislanum sem liggur gagnstætt endageisla gefna hornsins.

DÆMI 7.11

Punktar teiknaðir í skauthnitakerfi

Teiknið hvern eftirfarandi punkt í skauthnitakerfið.

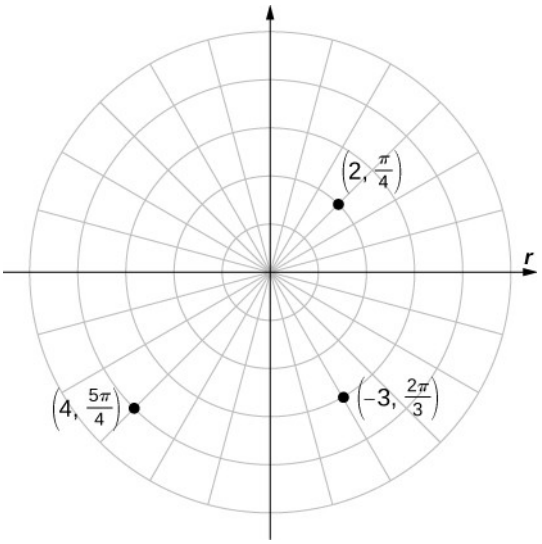
a. $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$

b. $\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$

c. $\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$

Lausn

Punktarnir þrír eru teiknaðir á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.29 Þrír punktar teiknaðir í skauthnitakerfi.

STÖÐUMAT 7.11

Teiknið $\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ og $\left(-3, -\frac{7\pi}{2}\right)$ í skauthnitakerfið.

7

Skauthnitaferlar

Nú þegar við kunnum að teikna punkta í skauthnitakerfið getum við rætt hvernig ferlar eru teiknaðir. Í rétthyrnda hnitakerfinu getum við teiknað graf fallsins $y = f(x)$ og þannig myndað feril í kartesísku sléttunni. Á sama hátt getum við teiknað feril með fallinu $r = f(\theta)$.

Grunnhugmyndin við að teikna graf falls í skauthnitum er sú sama og þegar fall er teiknað í rétthyrndum hnitum. Byrjið á lista yfir gildi óháðu breytunnar (θ í þessu tilviki) og reiknið samsvarandi gildi háðu breytunnar r. Þannig fæst listi raðtvennda sem má teikna í

skauthnitakerfið. Tengið loks punktana og nýtið þau mynstur sem kunna að koma fram. Fallið gæti til dæmis verið lotubundið, sem merkir að aðeins þarf takmarkaðan fjölda gilda óháðu breytunnar.

LAUSNARLEIÐ

Ferill teiknaður í skauthnitum

1. Búið til töflu með tveimur dálkum. Fyrri dálkurinn er fyrir θ, og sá síðari fyrir r.
2. Búið til lista yfir gildi θ.
3. Reiknið samsvarandi r -gildi fyrir hvert θ.
4. Teiknið hverja raðtvennd (r, θ) í hnitakerfið.
5. Tengið punktana og leitið að mynstri.

MARGMIÐLUN

Horfið á myndbandið til að fá frekari upplýsingar um hvernig skauthnitaferlar eru teiknaðir.

DÆMI 7.12

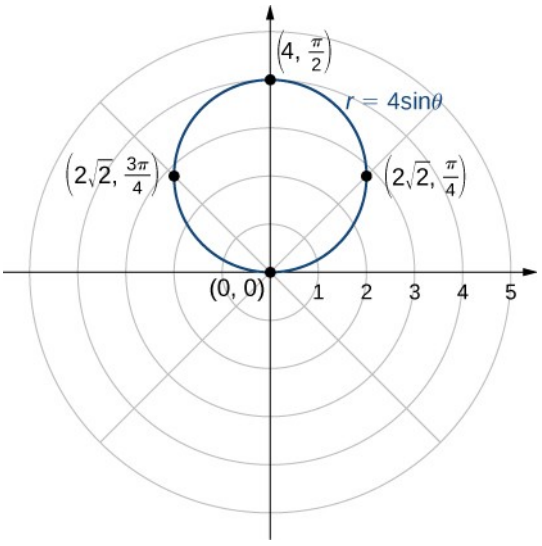
Graf falls teiknað í skauthnitum

Teiknið ferilinn sem skilgreindur er með fallinu $r = 4\sin\theta$. Greinið ferilinn og umritið jöfnuna í rétthyrnd hnit.

Lausn

Fallið er margfeldi af sínusfalli og er því lotubundið með lotuna 2π, svo notið gildi θ milli 0 og 2π. Niðurstöður skrefa 1–3 eru sýndar í eftirfarandi töflu. Mynd 7.30 sýnir grafið sem byggist á töflunni.

θ	$r=4\sin\theta$	θ	$r=4\sin\theta$
0	0	π	0
$\frac{\pi}{6}$	2	$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{\pi}{4}$	$2\sqrt{2}\approx 2{,}8$	$\frac{5\pi}{4}$	$-2\sqrt{2}\approx -2{,}8$
$\frac{\pi}{3}$	$2\sqrt{3}\approx 3{,}4$	$\frac{4\pi}{3}$	$-2\sqrt{3}\approx -3{,}4$
$\frac{\pi}{2}$	4	$\frac{3\pi}{2}$	-4
$\frac{2\pi}{3}$	$2\sqrt{3}\approx 3{,}4$	$\frac{5\pi}{3}$	$-2\sqrt{3}\approx -3{,}4$
$\frac{3\pi}{4}$	$2\sqrt{2}\approx 2{,}8$	$\frac{7\pi}{4}$	$-2\sqrt{2}\approx -2{,}8$
$\frac{5\pi}{6}$	2	$\frac{11\pi}{6}$	-2
		2π	0



Mynd 7.30 Graf fallsins $r=4\sin\theta$ er hringur.

Þetta er graf hrings. Umrita má jöfnuna $r=4\sin\theta$ í rétthyrnd hnit með því að margfalda fyrst báðar hliðar með r. Þá fæst jafnan $r^2=4r\sin\theta$. Notum næst staðreyndirnar $r^2=x^2+y^2$ og $y=r\sin\theta$. Þá fæst $x^2+y^2=4y$. Til að setja jöfnuna á staðalform drögum við $4y$ frá báðum hliðum hennar og fyllum í ferningslið:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4y &= 0 \\ x^2 + \left(y^2 - 4y\right) &= 0 \\ x^2 + \left(y^2 - 4y + 4\right) &= 0 + 4 \\ x^2 + (y-2)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Þetta er jafna hrings með geisla 2 og miðju $(0,2)$ í rétthyrnda hnitakerfinu.

STÖÐUMAT 7.12

Teiknið graf ferilsins sem skilgreindur er með fallinu $r = 4 + 4\cos\theta$.

Grafið í dæmi 7.12 var hringur. Umrita má jöfnu hringsins í rétthyrnd hnit með umritunarformúlunum í jöfnu 7.8. Dæmi 7.14 sýnir fleiri dæmi um hvernig föll eru umrituð úr skauthnitum í rétthyrnd hnit.

DÆMI 7.13

Skauthnitajöfnur umritaðar í rétthyrnd hnit

Umritið hverja eftirfarandi jöfnu í rétthyrnd hnit og greinið graf hennar.

a. $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

b. $r = 3$

c. $r = 6\cos\theta - 8\sin\theta$

Lausn

a. Takið tangens af báðum hliðum. Þá fæst $\tan\theta = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Þar sem $\tan\theta = y/x$ er vinstri hlið jöfnunnar y/x. Þá fæst $y/x = \sqrt{3}$, sem má umrita sem $y = x\sqrt{3}$. Þetta er jafna beinnar línu sem liggur gegnum upphafspunktinn og hefur hallatöluna $\sqrt{3}$. Almennt táknar sérhver skauthnitajafna af gerðinni $\theta = K$ beina línu gegnum skautið með hallatöluna $\tan K$.

b. Hefjum báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. Þá fæst $r^2 = 9$. Í stað r^2 setjum við $x^2 + y^2$. Þá fæst jafnan $x^2 + y^2 = 9$, sem er jafna hrings með miðju í upphafspunktinum og geisla 3. Almennt táknar sérhver skauthnitajafna af gerðinni $r = k$, þar sem k er jákvæður fasti, hring með geisla k og miðju í upphafspunktinum. (Athugið: Þegar báðar hliðar jöfnu eru hafnar í annað veldi geta nýir punktar bæst óvart við. Þetta þarf alltaf að hafa í huga. Í þessu tilviki bætast þó engir nýir punktar við. Til dæmis táknar $\left(-3, \dfrac{\pi}{3}\right)$ sama punkt og $\left(3, \dfrac{4\pi}{3}\right)$.)

c. Margföldum báðar hliðar jöfnunnar með r. Þá fæst $r^2 = 6r\cos\theta - 8r\sin\theta$. Notum næst formúlurnar

$r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Þá fæst

$$\begin{aligned} r^2 &= 6\,(r\cos\theta) - 8\,(r\sin\theta) \\ x^2 + y^2 &= 6x - 8y. \end{aligned}$$

Til að setja jöfnuna á staðalform færum við fyrst breyturnar frá hægri hlið jöfnunnar yfir á vinstri hlið og fyllum síðan í ferningslið.

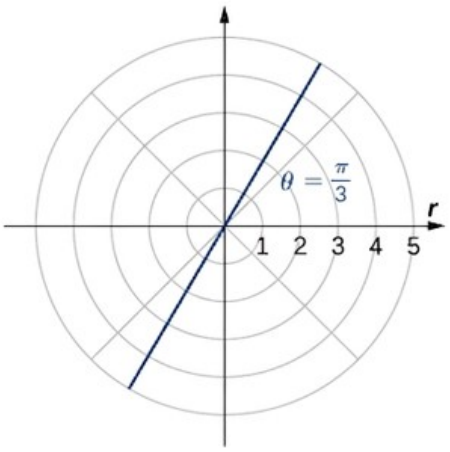
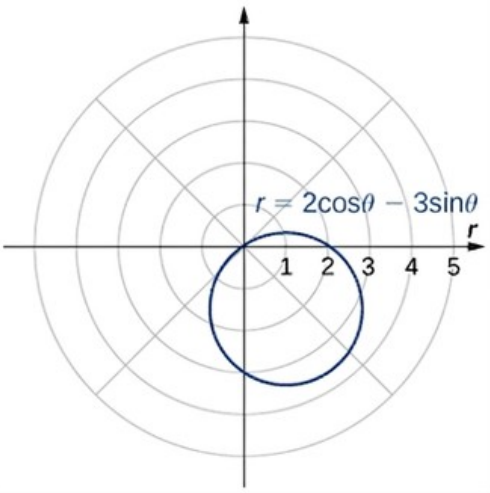
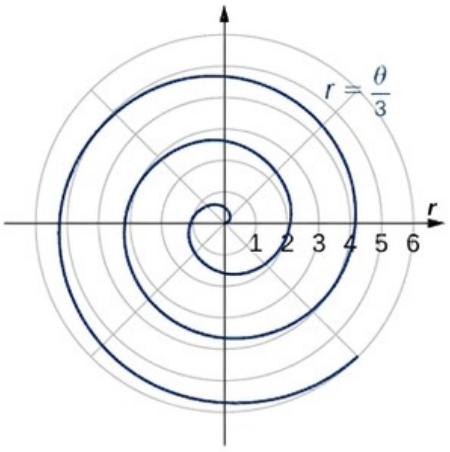
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 6x - 8y \\ x^2 - 6x + y^2 + 8y &= 0 \\ \left(x^2 - 6x\right) + \left(y^2 + 8y\right) &= 0 \\ \left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 + 8y + 16\right) &= 9 + 16 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Þetta er jafna hrings með miðju í $(3, -4)$ og geisla 5. Athugið að hringurinn liggur gegnum upphafspunktinn þar sem miðjan er í 5 eininga fjarlægð frá honum.

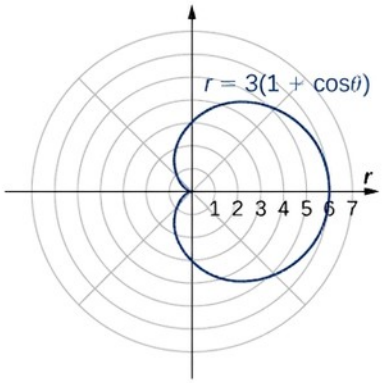
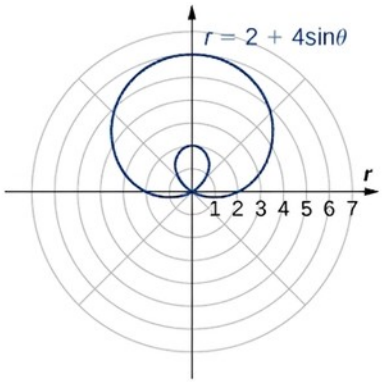
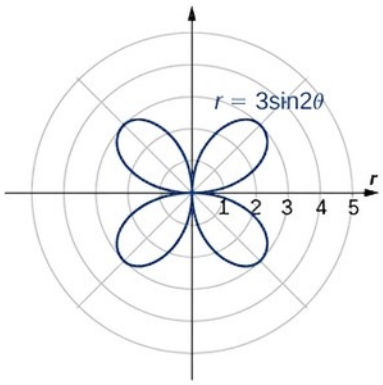
STÖÐUMAT 7.13

Umritið jöfnuna $r = \sec\theta\tan\theta$ í rétthyrnd hnit og greinið graf hennar.

Við höfum nú séð nokkur dæmi um hvernig teikna má gröf ferla sem skauthnitajöfnur skilgreina. Eftirfarandi töflur draga saman nokkra algenga ferla. Í hverri jöfnu eru a og b ótilteknir fastar.

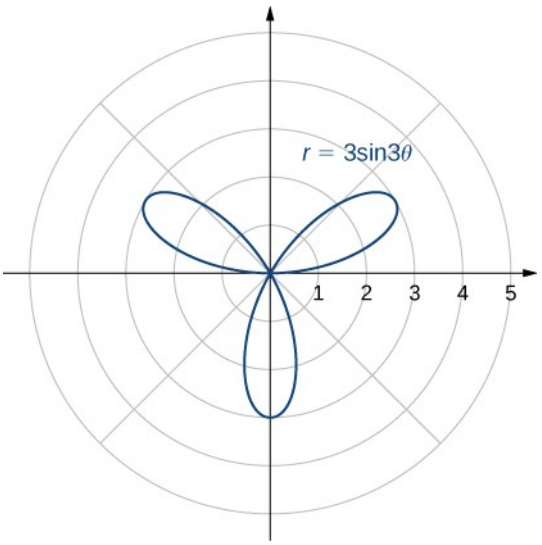
Nafn	Jafna	Dæmi
Lína sem liggur í gegnum pólinn með hallatöluna tan K	$\theta = K$	
Hringur	$r = a\cos\theta + b\sin\theta$	
Spírall	$r = a + b\theta$	

Mynd 7.31

Heiti	Jafna	Dæmi
Hjartaferill	$r = a(1 + \cos\theta)$ $r = a(1 - \cos\theta)$ $r = a(1 + \sin\theta)$ $r = a(1 - \sin\theta)$	
Snigilferill	$r = a\cos\theta + b$ $r = a\sin\theta + b$	
Rós	$r = a\cos(b\theta)$ $r = a\sin(b\theta)$	

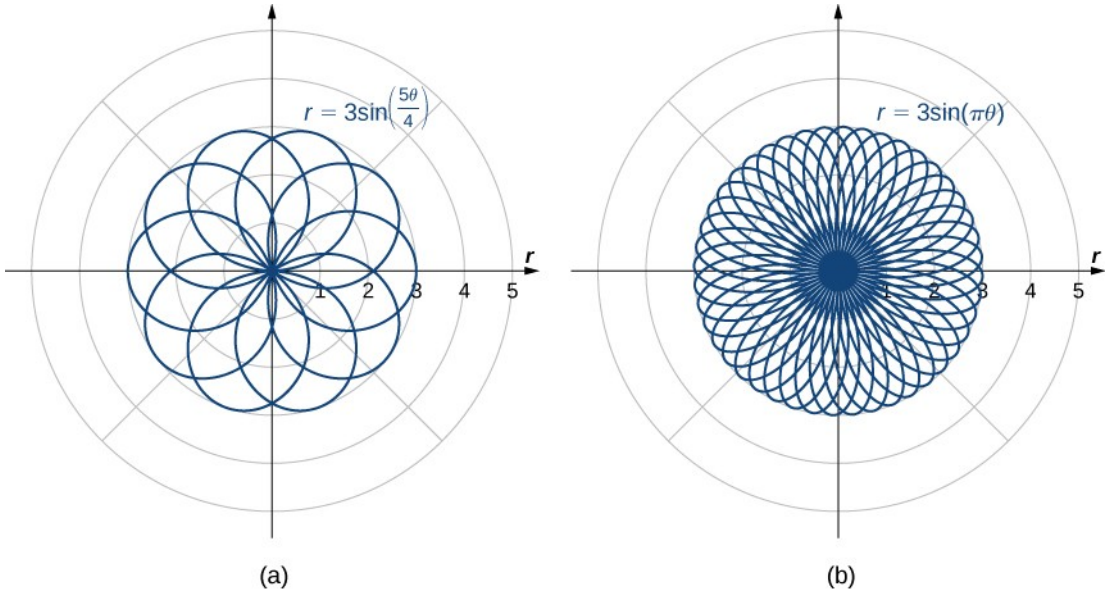
Mynd 7.32

Hjartaferill er sértilvik snigilferils (limaçon, borið fram „lí-ma-son“) þar sem $a = b$ eða $a = -b$. Rósin er mjög áhugaverður ferill. Athugið að grafið fyrir $r = 3\sin 2\theta$ hefur fjögur krónublöð. Grafið fyrir $r = 3\sin 3\theta$ hefur hins vegar þrjú krónublöð, eins og sýnt er.



Mynd 7.33 Graf $r = 3\sin 3\theta$.

Ef stuðull θ er slétt tala hefur grafið tvöfalt fleiri krónublöð en stuðullinn segir til um. Ef stuðull θ er oddatala er fjöldi krónublaða jafn stuðlinum. Kannið sjálf hvers vegna þetta gerist. Enn áhugaverðari gröf myndast þegar stuðull θ er ekki heiltala. Ef hann er til dæmis ræð tala er ferillinn lokaður, sem merkir að hann endar að lokum þar sem hann hófst (mynd 7.34 (a)). Ef stuðullinn er hins vegar óræð tala lokast ferillinn aldrei (mynd 7.34 (b)). Þótt ferillinn kunni að virðast lokaður sýnir nánari athugun að krónublöðin rétt ofan við jákvæða r-ásinn eru örlítið þykkari. Ástæðan er sú að krónublaðið fellur ekki alveg saman við upphafspunktinn.

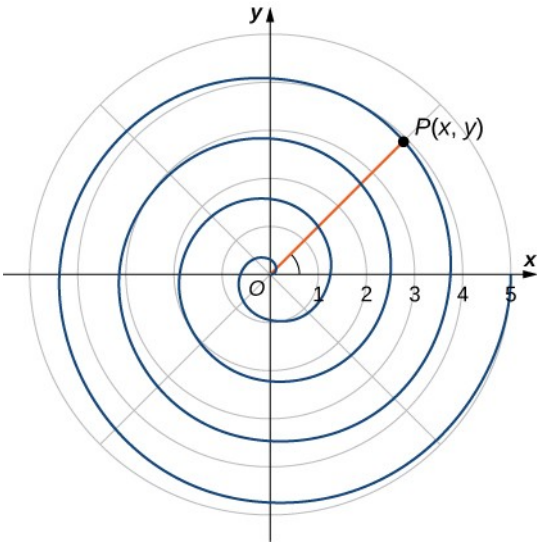


Mynd 7.34 Gröf skauthnitarósa fyrir föll með (a) ræðum stuðli og (b) óræðum stuðli. Athugið að rósin í (b) fyllir ekki skífuna með radíus 3 og miðju í upphafspunktinum, þótt svo virðist. Til að sjá það nægir að athuga að á sérhverjum föstum geisla frá upphafspunktinum eru aðeins teljanlega mörg gildi þeta sem gefa punkt á grafinu eftir þeim geisla. Hins vegar má segja að fyrir sérhvern punkt í skífunni séu punktar á grafinu eins nálægt honum og óskað er.

DÆMI 7.14

Upphaf kaflans: Vefju lýst

Rifjið upp hólfaskiptu perlusnekkjuna sem kynnt var í upphafi kaflans. Þegar helmingur ytri skeljar hennar er skorinn burt sést vefjulögun. Hægt er að lýsa vefju með rétthyrndum hnitum. Mynd 7.35 sýnir vefju í rétthyrndum hnitum. Hvernig getum við lýst þessum ferli stærðfræðilega?



Mynd 7.35 Hvernig getum við lýst grafi vefju stærðfræðilega?

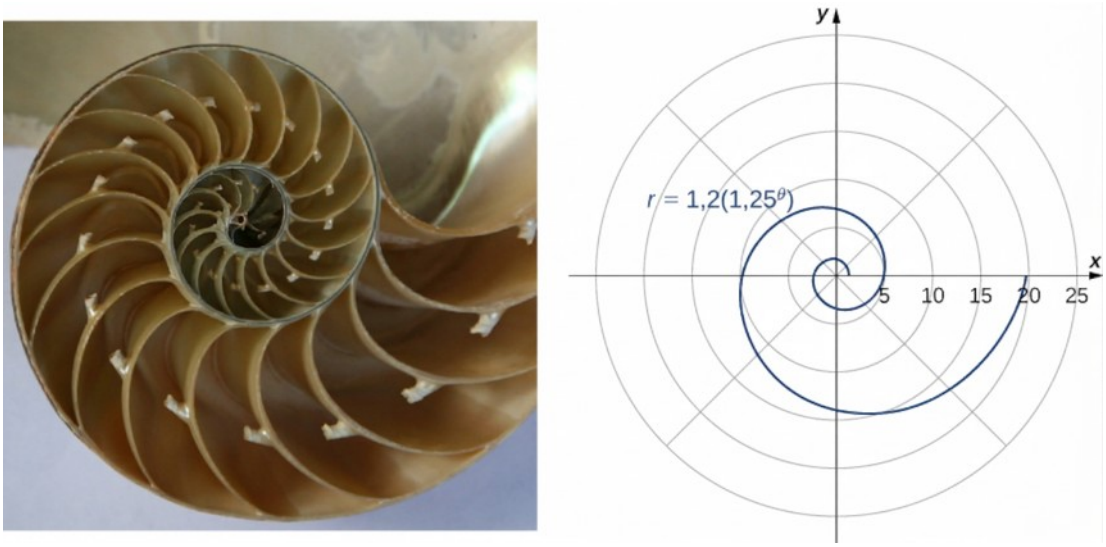
Lausn

Þegar punkturinn P færist rangsælis eftir vefjunni eykst fjarlægð hans d frá upphafspunktinum. Gerum ráð fyrir að fjarlægðin d sé fast margfeldi k af horninu θ sem línustrikið OP myndar við jákvæða r-ásinn. Því er $d(P,O)=k\theta$, þar sem O er upphafspunkturinn. Notum nú fjarlægðarformúluna og hornafræði:

$$\begin{aligned} d(P,O) &= k\theta \\ \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} &= k\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \\ \sqrt{x^2+y^2} &= k\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \\ \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) &= \tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{k} \\ y &= x\tan\left(\tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{k}\right). \end{aligned}$$

Þótt þessi jafna lýsi vefjunni er hvorki hægt að leysa hana beint fyrir x né y. Ef við notum skauthnit verður jafnan hins vegar mun einfaldari. Nánar tiltekið er $d(P,O)=r$, og θ er síðara hnitið. Jafna vefjunnar verður því $r=k\theta$. Athugið að ef $\theta=0$ þá er einnig $r=0$, svo vefjan hefst í upphafspunktinum. Við getum aflétt þessari takmörkun með því að bæta fasta við jöfnuna. Þá verður jafna vefjunnar $r=a+k\theta$ fyrir einhverja fasta a og k. Þetta kallast vefja Arkimedesar, eftir gríska stærðfræðingnum Arkimedesi.

Önnur gerð vefju er logravefja, sem lýst er með fallinu $r = a \cdot b^{\theta}$. Graf fallsins $r = 1{,}2\left(1{,}25^{\theta}\right)$ er sýnt á mynd 7.36. Þessi vefja lýsir lögun skeljar hólfaskiptrar perlusnekkju.



Mynd 7.36 Logravefja líkist lögun skeljar hólfaskiptrar perlusnekkju. (mynd: breytt verk eftir Jitze Couperus, Flickr)

Gerum ráð fyrir að ferli sé lýst í skauthnitakerfinu með fallinu $r = f\left(\theta\right)$. Þar sem umritunarformúlurnar úr skauthnitum í rétthyrnd hnit eru

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta,$$

má umrita þær með fallinu

$$x = f\left(\theta\right)\cos\theta$$
$$y = f\left(\theta\right)\sin\theta.$$

Þetta skref gefur stikun ferilsins í rétthyrndum hnitum þar sem θ er stiki. Vefjuformúlan $r = a + b\,\theta$ á mynd 7.31 verður til dæmis

$$x = (a + b\theta)\cos\theta$$
$$y = (a + b\theta)\sin\theta.$$

Þegar θ tekur gildi frá $-\infty$ til ∞ myndast öll vefjan.

Samhverfa í skauthnitum

Þegar samhverfa falla í rétthyrndum hnitum er rannsökuð (þ.e. á forminu $y = f\left(x\right)$), er rætt um samhverfu um y-ásinn og samhverfu um upphafspunktinn. Ef $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f, er f jafnstætt fall og graf þess samhverft um y-ásinn. Ef $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f, er f oddstætt fall og graf þess samhverft um upphafspunktinn. Ef við finnum hvers konar samhverfu graf hefur vitum við meira um lögun

þess og útlit. Samhverfa getur einnig leitt í ljós aðra eiginleika fallsins sem myndar grafið. Samhverfa skauthnitaferla virkar á svipaðan hátt.

SETNING 7.5

Samhverfa skauthnitaferla og skauthnitajafna

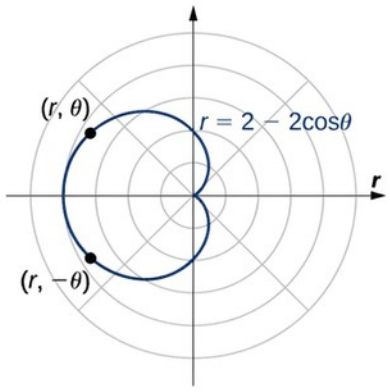
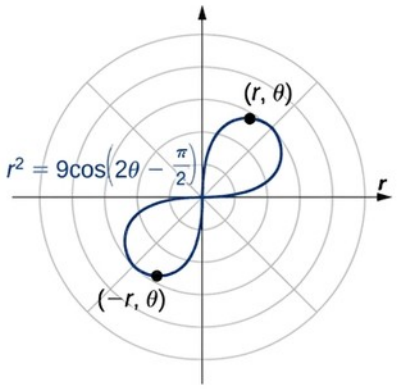
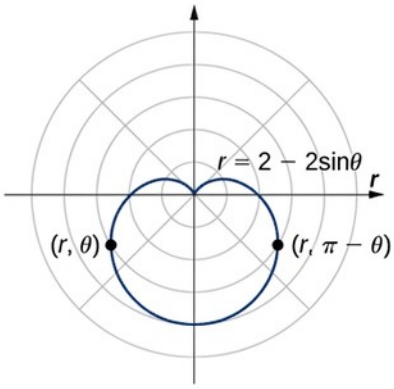
Skoðum feril sem fallið $r=f(\theta)$ myndar í skauthnitum.

i. Ferillinn er samhverfur um skauthnitaásinn ef sérhverjum punkti (r,θ) á grafinu fylgir einnig punkturinn $(r,-\theta)$ á því. Á sama hátt helst jafnan $r=f(\theta)$ óbreytt þegar θ er skipt út fyrir $-\theta$.

ii. Ferillinn er samhverfur um skautið ef sérhverjum punkti (r,θ) á grafinu fylgir einnig punkturinn $(r,\pi+\theta)$ á því. Á sama hátt helst jafnan $r=f(\theta)$ óbreytt þegar r er skipt út fyrir $-r$, eða θ skipt út fyrir $\pi+\theta$.

iii. Ferillinn er samhverfur um lóðréttu línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$ ef sérhverjum punkti (r,θ) á grafinu fylgir einnig punkturinn $(r,\pi-\theta)$ á því. Á sama hátt helst jafnan $r=f(\theta)$ óbreytt þegar θ er skipt út fyrir $\pi-\theta$.

Eftirfarandi tafla sýnir dæmi um hverja gerð samhverfu.

Samhverfa um skautásinn: Fyrir sérhvern punkt (r, θ) á grafinu er einnig punktur sem er speglun hans um lárétta ásinn (skautásinn).	
Samhverfa um skautið: Fyrir sérhvern punkt (r, θ) á grafinu er einnig punktur á grafinu sem er speglun hans um skautið.	
Samhverfa um lóðréttu línuna $\theta = \frac{\pi}{2}$: Fyrir sérhvern punkt (r, θ) á grafinu er einnig punktur sem er speglun hans um lóðrétta ásinn.	

7

DÆMI 7.15

Samhverfa notuð til að teikna skauthnitajöfnu

Finnið samhverfu rósarinnar sem jafnan $r = 3\sin(2\theta)$ skilgreinir og teiknið graf hennar.

Lausn

Gerum ráð fyrir að punkturinn (r, θ) sé á grafi $r = 3\sin(2\theta)$.

i. Til að kanna samhverfu um skauthnitaásinn reynum við fyrst að skipta θ út fyrir $-\theta$. Þá fæst $r = 3\sin(2(-\theta)) = -3\sin(2\theta)$. Þar sem þetta breytir upphaflegu jöfnunni stenst hún ekki þetta próf. Förum hins vegar aftur að upphaflegu jöfnunni og skiptum r út fyrir $-r$

og θ út fyrir $\pi - \theta$. Þá fæst

$$\begin{aligned} -r &= 3\sin\left(2\left(\pi - \theta\right)\right) \\ -r &= 3\sin\left(2\pi - 2\theta\right) \\ -r &= 3\sin\left(-2\theta\right) \\ -r &= -3\sin 2\theta. \end{aligned}$$

Þegar báðar hliðar þessarar jöfnu eru margfaldaðar með -1 fæst $r = 3\sin 2\theta$, sem er upphaflega jafnan. Þetta sýnir að grafið er samhverft um skauthnitaásinn.

ii. Til að kanna samhverfu um skautið skiptum við fyrst r út fyrir $-r$, þá fæst $-r = 3\sin\left(2\theta\right)$. Þegar báðar hliðar eru margfaldaðar með -1 fæst $r = -3\sin\left(2\theta\right)$, sem er ekki í samræmi við upphaflegu jöfnuna. Jafnan stenst því ekki prófið fyrir þessa samhverfu. Förum hins vegar aftur að upphaflegu jöfnunni og skiptum θ út fyrir $\theta + \pi$. Þá fæst

$$\begin{aligned} r &= 3\sin\left(2\left(\theta + \pi\right)\right) \\ &= 3\sin\left(2\theta + 2\pi\right) \\ &= 3\left(\sin 2\theta\cos 2\pi + \cos 2\theta\sin 2\pi\right) \\ &= 3\sin 2\theta. \end{aligned}$$

Þar sem niðurstaðan er í samræmi við upphaflegu jöfnuna er grafið samhverft um skautið.

iii. Til að kanna samhverfu um lóðréttu línuna $\theta = \frac{\pi}{2}$, skiptum við fyrst bæði r út fyrir $-r$ og θ út fyrir $-\theta$.

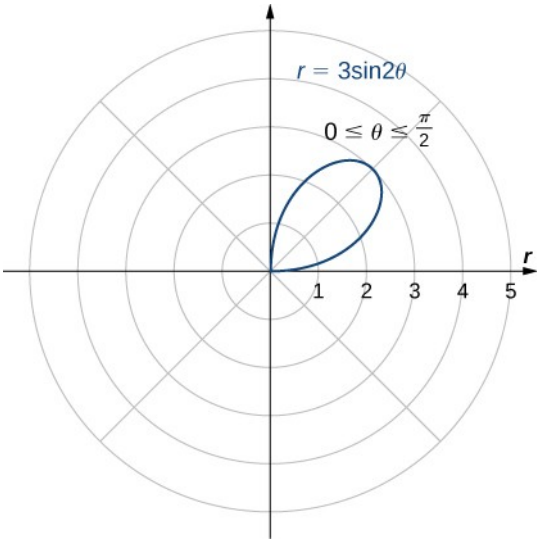
$$\begin{aligned} -r &= 3\sin\left(2\left(-\theta\right)\right) \\ -r &= 3\sin\left(-2\theta\right) \\ -r &= -3\sin 2\theta. \end{aligned}$$

Þegar báðar hliðar þessarar jöfnu eru margfaldaðar með -1 fæst $r = 3\sin 2\theta$, sem er upphaflega jafnan. Grafið er því samhverft um lóðréttu línuna $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Þetta graf er samhverft um skauthnitaásinn, upphafspunktinn og lóðréttu línuna gegnum skautið. Til að teikna graf fallsins setjum við upp töflu með gildum θ milli 0 og $\pi/2$ og speglum síðan grafið sem fæst.

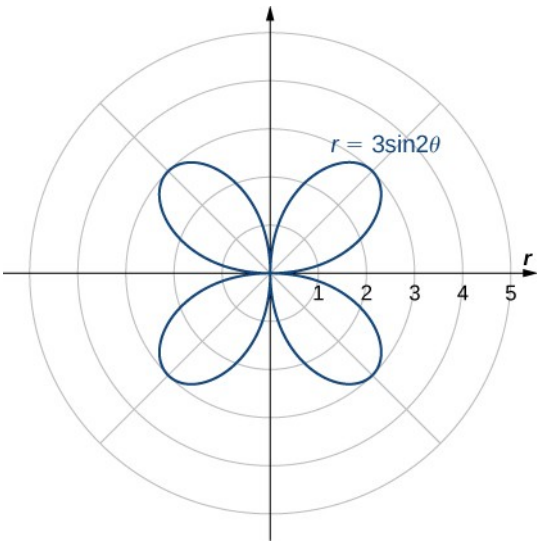
θ	r
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$
$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$
$\frac{\pi}{2}$	0

Þannig fæst eitt krónublað rósarinnar, eins og eftirfarandi graf sýnir.



Mynd 7.37 Graf jöfnunnar milli $\theta = 0$ og $\theta = \pi/2$.

Þegar þessi mynd er spegluð í hina þrjá fjórðungana fæst allt grafið, eins og sýnt er.



Mynd 7.38 Allt graf jöfnunnar kallast fjögurra krónublaða rós.

STÖÐUMAT 7.14

Ákvarðið samhverfu grafsins sem jafnan $r = 2\cos(3\theta)$ skilgreinir og teiknið það.

Æfingar í kafla 7.3

Í eftirfarandi æfingum teiknið punktinn sem hefur gefin skauthnit með því að mynda fyrst hornið θ og merkja síðan fjarlægðina r eftir geislanum.

125.

$$\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$$

126.

$$\left(-2, \frac{5\pi}{3}\right)$$

127.

$$\left(0, \frac{7\pi}{6}\right)$$

128.

$$\left(-4, \frac{3\pi}{4}\right)$$

129.

$$\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

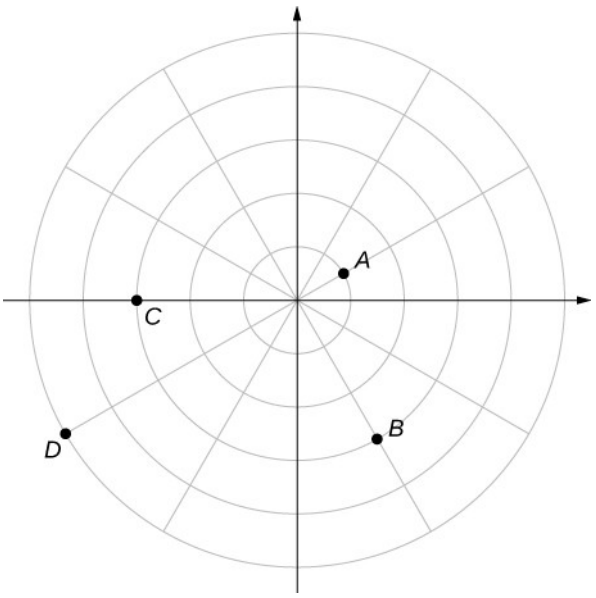
130.

$$\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$$

131.

$$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skoðið skauthnitagrafið hér fyrir neðan. Gefið tvö skauthnitapör fyrir hvern punkt.



132. Hnit punkts A.

133. Hnit punkts B.

134. Hnit punkts C.

135. Hnit punkts D.

Í eftirfarandi æfingum eru gefin rétthyrnd hnit punkts. Finnið tvö skauthnitapör fyrir punktinn á bilinu $\left[0, 2\pi\right]$. Námundið að þremur aukastöfum.

136.

$$\left(2, 2\right)$$

137.

$$\left(3, -4\right)$$

138.

$$(8,15)$$

139.

$$(-6,8)$$

140.

$$(4,3)$$

141.

$$(3,-\sqrt{3})$$

Í eftirfarandi æfingum finnið rétthyrnd hnit fyrir gefinn punkt í skauthnitum.

142.

$$\left(2,\frac{5\pi}{4}\right)$$

143.

$$\left(-2,\frac{\pi}{6}\right)$$

144.

$$\left(5,\frac{\pi}{3}\right)$$

145.

$$\left(1,\frac{7\pi}{6}\right)$$

146.

$$\left(-3,\frac{3\pi}{4}\right)$$

147.

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

148.

$$(-4{,}5\,;6{,}5)$$

Í eftirfarandi æfingum ákvarðið hvort graf hverrar skauthnitajöfnu sé samhverft um x -ásinn, y -ásinn eða upphafspunktinn.

149.

$$r=3\sin\left(2\theta\right)$$

150.

$$r^2=9\cos\theta$$

151.

$$r=\cos\left(\frac{\theta}{5}\right)$$

152.

$$r=2\sec\theta$$

153.

$$r=1+\cos\theta$$

Í eftirfarandi æfingum lýsið grafi hverrar skauthnitajöfnu. Staðfestið lýsinguna með því að umrita jöfnuna í rétthyrnd hnit.

154.

$$r=3$$

155.

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

156.

$$r=\sec\theta$$

157.

$$r=\csc\theta$$

Í eftirfarandi æfingum umritið rétthyrndu jöfnuna á skauthnitaform og skissið graf hennar.

158.

$$x^2+y^2=16$$

159.

$$x^2-y^2=16$$

160.

$$x=8$$

Í eftirfarandi æfingum umritið rétthyrndu jöfnuna á skauthnitaform og skissið graf hennar.

161.

$$3x - y = 2$$

162.

$$y^2 = 4x$$

Í eftirfarandi æfingum umritið skauthnitajöfnuna á rétthyrnt form og skissið graf hennar.

163.

$$r = 4\sin\theta$$

164.

$$r = 6\cos\theta$$

165.

$$r = \theta$$

166.

$$r = \cot\theta\csc\theta$$

Í eftirfarandi æfingum skissið graf skauthnitajöfnunnar og greinið hvers kyns samhverfu.

167.

$$r = 1 + \sin\theta$$

168.

$$r = 3 - 2\cos\theta$$

169.

$$r = 2 - 2\sin\theta$$

170.

$$r = 5 - 4\sin\theta$$

171.

$$r = 3\cos(2\theta)$$

172.

$$r = 3\sin(2\theta)$$

173.

$$r = 2\cos(3\theta)$$

174.

$$r=3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

175.

$$r^2=4\cos(2\theta)$$

176.

$$r^2=4\sin\theta$$

177.

$$r=2\theta$$

178. [T] Jafna ferilsins er $r=2\cos(2\theta)\sec(\theta)$. Ferillinn nefnist strophoid-ferill. Notið grafteikniforrit til að skissa grafið og ákvarðið aðfelluna út frá því.

179. [T] Notið grafteikniforrit til að skissa grafið fyrir $r=\frac{6}{2\sin\theta-3\cos\theta}$.

180. [T] Notið grafteikniforrit til að teikna $r=\frac{1}{1-\cos\theta}$.

181. [T] Notið tækni til að teikna grafið fyrir $r=e^{\sin(\theta)}-2\cos(4\theta)$.

182. [T] Notið tækni til að teikna $r=\sin\left(\frac{3\theta}{7}\right)$ (notið bilið $0\le\theta\le 14\pi$).

183. Skissið eftirfarandi skauthnitaferil án þess að nota tækni: $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

184. [T] Notið grafteikniforrit til að teikna $r=\theta\sin\theta$ fyrir $-\pi\le\theta\le\pi$.

185. [T] Notið tækni til að teikna $r=e^{-0,1\theta}$ fyrir $-10\le\theta\le 10$.

186. [T] Til er ferill sem kallast „svartholið“. Notið tækni til að teikna $r=e^{-0,01\theta}$ fyrir $-100\le\theta\le 100$.

187. [T] Notið niðurstöður dæmanna tveggja hér á undan til að kanna gröf $r=e^{-0,001\theta}$ og $r=e^{-0,0001\theta}$ fyrir $|\theta|>100$.

7.4 Flatarmál og bogalengd í skauthnitum

NÁMSMARKMIÐ

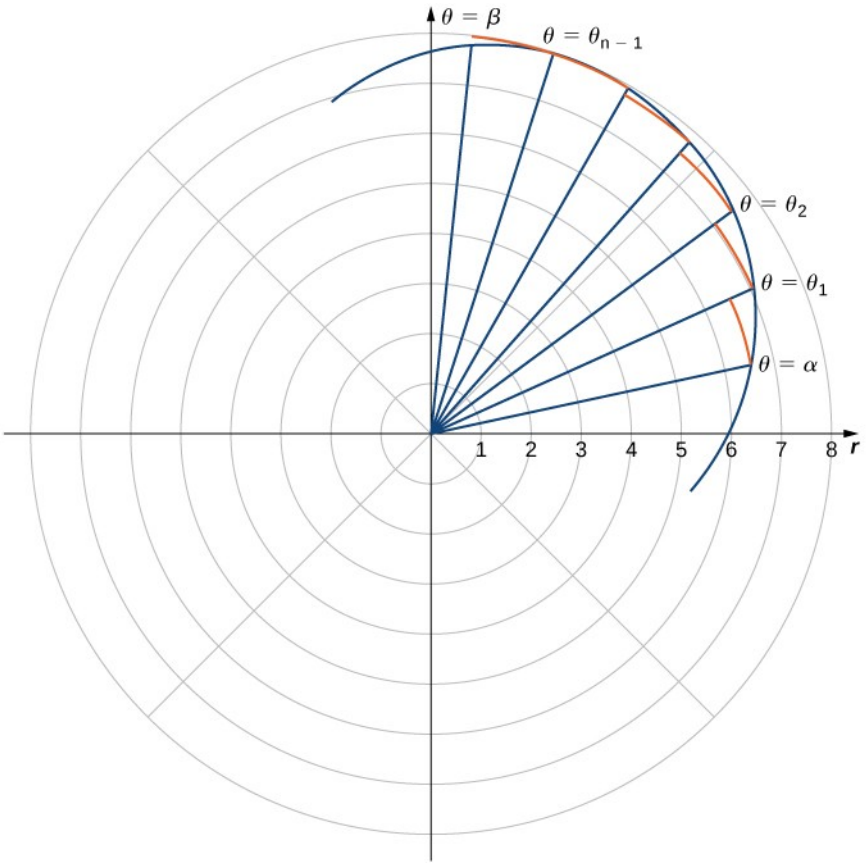
- 7.4.1 Beita formúlunni fyrir flatarmál svæðis í skauthnitum.
- 7.4.2 Ákvarða bogalengd skauthnitaferils.

Í rétthyrnda hnitakerfinu má nota ákveðið heildi til að reikna flatarmálið undir ferli. Ef við höfum fallið $y=f(x)$ sem er skilgreint frá $x=a$ til $x=b$ þar sem $f(x)>0$ á þessu bili, er flatarmálið milli ferilsins og x-ássins gefið með $A=\int_a^b f(x)\,dx$. Þessi staðreynd ásamt formúlunni til að reikna heildið er dregin saman í undirstöðusetningu stærðfræðigreiningarinnar. Á sama hátt er bogalengd ferilsins gefin með $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$. Í þessum undirkafla skoðum við hliðstæðar formúlur fyrir flatarmál og bogalengd í skauthnitakerfinu.

Flatarmál svæða sem afmarkast af skauthnitaferlum

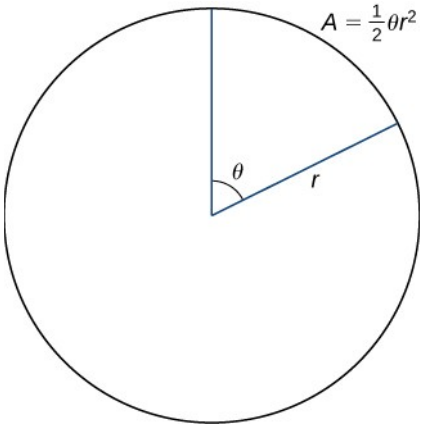
Við höfum skoðað formúlur fyrir flatarmál undir ferli í rétthyrndum hnitum og undir stikuðum ferlum. Nú leiðum við út formúlu fyrir flatarmál svæðis sem skauthnitaferill afmarkar. Rifjið upp að í sönnun undirstöðusetningar stærðfræðigreiningarinnar var Riemann-summa notuð til að nálga flatarmálið undir ferli með rétthyrningum. Fyrir skauthnitaferla notum við aftur Riemann-summu en hringgeirar koma í stað rétthyrninganna.

Skoðum ferilinn sem skilgreindur er með fallinu $r=f(\theta)$, þar sem $\alpha\le\theta\le\beta$. Fyrsta skrefið er að skipta bilinu $[\alpha,\beta]$ í n jafnbreið hlutbil. Breidd hvers hlutbils er gefin með formúlunni $\Delta\theta=(\beta-\alpha)/n$, og i-ti skiptipunkturinn θ_i er gefinn með formúlunni $\theta_i=\alpha+i\,\Delta\theta$. Hver skiptipunktur $\theta=\theta_i$ skilgreinir línu sem liggur gegnum skautið með hallatöluna $\tan\theta_i$ eins og grafið hér á eftir sýnir.



Mynd 7.39 Skipting dæmigerðs ferils í skauthnitum.

Línustrikin eru tengd með bogum með föstum radíus. Þannig myndast hringgeirar og flatarmál hvers þeirra má reikna með rúmfræðilegri formúlu. Flatarmál hvers hringgeira er síðan notað til að nálga flatarmálið milli tveggja samliggjandi línustrika. Næst leggjum við flatarmál hringgeiranna saman til að nálga heildarflatarmálið. Þessi aðferð nálgar heildarflatarmálið með Riemann-summu. Formúlan fyrir flatarmál hringgeira er sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.40 Flatarmál hringgeira er gefið með $A=\frac{1}{2}\theta r^2$.

Rifjið upp að flatarmál hrings er $A=\pi r^2$. Þegar horn eru mæld í radíönum jafngilda 360 gráður 2π radíönum. Því má mæla hluta hrings með miðhorninu θ. Hluti hringsins er gefinn með $\frac{\theta}{2\pi}$, svo flatarmál hringgeirans er þetta hlutfall margfaldað með heildarflatarmálinu:

$$A=\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\pi r^2=\frac{1}{2}\theta r^2.$$

Geisli dæmigerðs hringgeira á mynd 7.39 er gefinn með $r_i=f\left(\theta_i\right)$, svo að flatarmál i-ta hringgeirans er gefið með

$$A_i=\frac{1}{2}(\Delta\theta)\left(f\left(\theta_i\right)\right)^2.$$

Því er Riemann-summan sem nálgar flatarmálið gefin með

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\Delta\theta)\left(f\left(\theta_i\right)\right)^2.$$

Við tökum markgildið þegar $n\to\infty$ til að fá nákvæmt flatarmál:

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(f\left(\theta\right)\right)^2d\theta.$$

Þá fæst eftirfarandi setning.

SETNING 7.6

Flatarmál svæðis sem skauthnitaferill afmarkar

Gerum ráð fyrir að f sé samfellt og ekki neikvætt á bilinu $\alpha\le\theta\le\beta$ þar sem $0<\beta-\alpha\le2\pi$. Flatarmál svæðisins sem graf $r=f\left(\theta\right)$ afmarkar milli geislalínanna $\theta=\alpha$ og $\theta=\beta$ er

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f\left(\theta\right)\right]^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2d\theta.$$

(7.9)

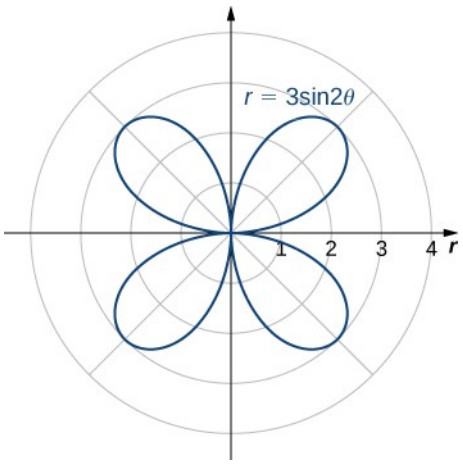
DÆMI 7.16

Flatarmál svæðis í skauthnitum fundið

Finnið flatarmál eins krónublaðs rósarinnar sem skilgreind er með jöfnunni $r=3\sin\left(2\theta\right)$.

Lausn

Graf $r=3\sin\left(2\theta\right)$ er sýnt hér á eftir.



Mynd 7.41 Graf $r=3\sin(2\theta)$.

Þegar $\theta=0$ er $r=3\sin(2(0))=0$. Næsta gildi þar sem $r=0$ er $\theta=\pi/2$. Þetta má sjá með því að leysa jöfnuna $3\sin(2\theta)=0$ með tilliti til θ. Gildin frá $\theta=0$ til $\theta=\pi/2$ rekja því fyrsta krónublað rósarinnar. Til að finna flatarmálið innan þessa krónublaðs notum við jöfnu 7.9 með $f(\theta)=3\sin(2\theta)$, $\alpha=0$, og $\beta=\pi/2$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}[3\sin(2\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 9\sin^2(2\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Til að reikna þetta heildi notum við formúluna $\sin^2\alpha=(1-\cos(2\alpha))/2$ með $\alpha=2\theta$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 9\sin^2(2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{9}{2}\int_{0}^{\pi/2}\frac{(1-\cos(4\theta))}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{4}\left(\int_{0}^{\pi/2} 1-\cos(4\theta)\, d\theta\right) \\ &= \frac{9}{4}\left(\theta-\frac{\sin(4\theta)}{4}\right)_{0}^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin 2\pi}{4}\right)-\frac{9}{4}\left(0-\frac{\sin 4(0)}{4}\right) \\ &= \frac{9\pi}{8}. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 7.15

Finnið flatarmálið innan hjartaferilsins sem skilgreindur er með jöfnunni $r=1-\cos\theta$.

Í dæmi 7.16 var flatarmálið innan eins ferils fundið. Við getum einnig notað setninguna um flatarmál svæðis sem skauthnitaferill afmarkar til að finna flatarmálið milli tveggja skauthnitaferla. Oft þarf þó að finna skurðpunkta ferlanna og ákvarða hvaða fall skilgreinir ytri ferilinn og hvaða fall þann innri milli þessara punkta.

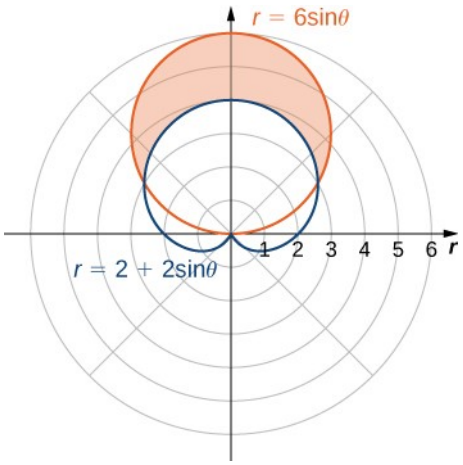
DÆMI 7.17

Flatarmál milli tveggja skauthnitaferla fundið

Finnið flatarmálið utan hjartaferilsins $r = 2 + 2\sin\theta$ og innan hringsins $r = 6\sin\theta$.

Lausn

Teiknum fyrst graf sem sýnir báða ferlana.



Mynd 7.42 Svæðið milli ferlanna $r = 2 + 2\sin\theta$ og $r = 6\sin\theta$.

Til að ákvarða heildunarmörkin finnum við fyrst skurðpunkta ferlanna með því að setja föllin jöfn og leysa með tilliti til θ:

$$\begin{aligned} 6\sin\theta &= 2 + 2\sin\theta \\ 4\sin\theta &= 2 \\ \sin\theta &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Þá fást lausnirnar $\theta = \frac{\pi}{6}$ og $\theta = \frac{5\pi}{6}$, sem eru heildunarmörkin. Hringurinn $r = 3\sin\theta$ er rauða grafið og ytra fallið, en hjartaferillinn $r = 2 + 2\sin\theta$ er bláa grafið og innra fallið. Til að reikna flatarmálið milli ferlanna byrjum við á flatarmálinu innan hringsins milli $\theta = \frac{\pi}{6}$ og $\theta = \frac{5\pi}{6}$, og drögum síðan frá flatarmálið innan hjartaferilsins milli $\theta = \frac{\pi}{6}$ og $\theta = \frac{5\pi}{6}$:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{hringur} - \text{hjartaferill} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}[6\ \sin\ \theta]^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}[2+2\ \sin\ \theta]^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}36\ \sin^2\theta\ \,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}[4+8\ \sin\ \theta+4\ \sin^2\theta]\ \,d\theta \\
&= 18\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta - 2\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[1+2\ \sin\ \theta+\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right]d\theta \\
&= 9\left[\theta-\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} - 2\left[\frac{3\theta}{2}-2\ \cos\ \theta-\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\
&= 9\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\sin\ 2(5\pi/6)}{2}\right)-9\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sin\ 2(\pi/6)}{2}\right) \\
&-\left(3\left(\frac{5\pi}{6}\right)-4\ \cos\ \frac{5\pi}{6}-\frac{\sin\ 2(5\pi/6)}{2}\right)+\left(3\left(\frac{\pi}{6}\right)-4\ \cos\ \frac{\pi}{6}-\frac{\sin\ 2(\pi/6)}{2}\right) \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

STÖÐUMAT 7.16

Finnið flatarmálið innan hringsins $r=4\cos\theta$ og utan hringsins $r=2$.

Í dæmi 7.17 fundum við flatarmálið innan hringsins og utan hjartaferilsins með því að finna fyrst skurðpunkta þeirra. Athugið að þegar jafnan var leyst beint með tilliti til θ fengust tvær lausnir: $\theta=\frac{\pi}{6}$ og $\theta=\frac{5\pi}{6}$. Á grafinu eru hins vegar þrír skurðpunktar. Þriðji skurðpunkturinn er upphafspunkturinn. Hann kom ekki fram sem lausn vegna þess að upphafspunkturinn er á báðum gröfunum en fyrir mismunandi gildi θ. Fyrir hjartaferilinn fæst til dæmis

$$
\begin{aligned}
2+2\sin\theta &= 0 \\
\sin\theta &= -1,
\end{aligned}
$$

svo gildi θ sem leysa þessa jöfnu eru $\theta=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, þar sem n er einhver heiltala. Fyrir hringinn fæst

$$6\sin\theta=0.$$

Lausnir þessarar jöfnu eru á forminu $\theta=n\pi$ fyrir hvert heiltölugildi n. Þessi tvö lausnamengi eiga enga punkta sameiginlega. Þrátt fyrir það skerast ferlarnir í upphafspunktinum. Þetta tilvik þarf alltaf að hafa í huga.

Bogalengd skauthnitaferla

Hér leiðum við út formúlu fyrir bogalengd ferils sem er skilgreindur í skauthnitum.

Í rétthyrndum hnitum er bogalengd stikaðs ferils $(x(t), y(t))$ fyrir $a\le t\le b$ gefin með

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Í skauthnitum skilgreinum við ferilinn með jöfnunni $r=f(\theta)$, þar sem $\alpha\le\theta\le\beta$. Til að laga bogalengdarformúluna að skauthnitaferli notum við jöfnurnar

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \text{ og } y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta,$$

og skiptum stikanum t út fyrir θ. Þá fæst

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\\ \frac{dy}{d\theta} &= f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.\end{aligned}$$

Við skiptum dt út fyrir $d\theta$, og neðri og efri heildunarmörkin eru α og β, í þeirri röð. Þá verður bogalengdarformúlan

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta\right)^2+\left(f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta\right)^2}\,d\theta\\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\left(f(\theta)\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\,d\theta\\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2+\left(f(\theta)\right)^2}\,d\theta\\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.\end{aligned}$$

Þá fæst eftirfarandi setning.

SETNING 7.7

Bogalengd ferils sem skauthnitafall skilgreinir

Látum f vera fall sem hefur samfellda afleiðu á bilinu $\alpha\le\theta\le\beta$. Lengd grafs $r=f(\theta)$ frá $\theta=\alpha$ til $\theta=\beta$ er

$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[f(\theta)\right]^2+\left[f'(\theta)\right]^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

(7.10)

DÆMI 7.18

Bogalengd skauthnitaferils fundin

Finnið bogalengd hjartaferilsins $r=2+2\cos\theta$.

Lausn

Þegar $\theta=0$, $r=2+2\cos 0=4$. Enn fremur er hjartaferillinn rakinn nákvæmlega einu sinni þegar θ færist frá 0 til 2π, og því eru þetta heildunarmörkin. Með því að nota $f(\theta)=2+2\cos\theta$, $\alpha=0$, og $\beta=2\pi$, verður jafna 7.10

$$\begin{aligned} L &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{[2+2\cos\theta]^2+[-2\sin\theta]^2}\,d\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4+8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{4+8\cos\theta+4\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\,d\theta \\ &= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{8+8\cos\theta}\,d\theta \\ &= 2\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

Notum næst samsemdina $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$, leggjum 1 við báðar hliðar og margföldum með 2. Þá fæst $2+2\cos(2\alpha)=4\cos^2\alpha$. Þegar $\alpha=\theta/2$ er sett inn fæst $2+2\cos\theta=4\cos^2(\theta/2)$, svo heildið verður

$$\begin{aligned} L &= 2\int_{0}^{2\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}d\theta \\ &= 2\int_{0}^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta \\ &= 2\int_{0}^{2\pi} 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta. \end{aligned}$$

Algildið er nauðsynlegt vegna þess að kósínusfallið er neikvætt fyrir sum gildi í skilgreiningarmengi sínu. Til að leysa þetta heildum við frá 0 til π og tvöföldum svarið. Þessi aðferð virkar vegna þess að kósínusfallið er jákvætt milli 0 og $\frac{\pi}{2}$. Því fæst

$$\begin{aligned} L &= 4\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta \\ &= 8\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= 8\left(2\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)_0^{\pi} \\ &= 16. \end{aligned}$$

STÖÐUMAT 7.17

Finnið heildarbogalengd $r = 3\sin\theta$.

Æfingar í kafla 7.4

Í eftirfarandi æfingum finnið ákveðið heildi sem táknar flatarmálið.

188. Svæðið sem afmarkast af $r = 4$

189. Svæðið sem afmarkast af $r = 3\sin\theta$

190. Svæðið í fyrsta fjórðungi innan hjartaferilsins $r = 1 + \sin\theta$

191. Svæðið innan eins krónublaðs $r = 8\sin(2\theta)$

192. Svæðið innan eins krónublaðs $r = \cos(3\theta)$

193. Svæðið neðan skauthnitaássins sem afmarkast af $r = 1 - \sin\theta$

194. Svæðið í fyrsta fjórðungi sem afmarkast af $r = 2 - \cos\theta$

195. Svæðið innan innri lykkju $r = 2 - 3\sin\theta$

196. Svæðið innan innri lykkju $r = 3 - 4\cos\theta$

197. Svæðið sem $r = 1 - 2\cos\theta$ afmarkar utan innri lykkjunnar

198. Sameiginlegt svæði $r = 3\sin\theta$ og $r = 2 - \sin\theta$

199. Sameiginlegt svæði $r = 2$ og $r = 4\cos\theta$

200. Sameiginlegt svæði $r = 3\cos\theta$ og $r = 3\sin\theta$

Í eftirfarandi æfingum finnið flatarmál svæðisins sem lýst er.

201. Afmarkað af $r = 6\sin\theta$

202. Ofan skauthnitaássins og afmarkað af $r = 2 + \sin\theta$

203. Neðan skauthnitaássins og afmarkað af $r = 2 - \cos\theta$

204. Afmarkað af einu krónublaði $r = 4\cos(3\theta)$

205. Afmarkað af einu krónublaði $r = 3\cos(2\theta)$

206. Afmarkað af $r = 1 + \sin\theta$

207. Afmarkað af innri lykkju $r=3+6\cos\theta$

208. Afmarkað af $r=2+4\cos\theta$ utan innri lykkjunnar

209. Sameiginlegt innra svæði $r=4\sin(2\theta)$ og $r=2$

210. Sameiginlegt innra svæði $r=3-2\sin\theta$ og $r=-3+2\sin\theta$

211. Sameiginlegt innra svæði $r=6\sin\theta$ og $r=3$

212. Innan $r=1+\cos\theta$ og utan $r=\cos\theta$

213. Sameiginlegt innra svæði $r=2+2\cos\theta$ og $r=2\sin\theta$

Í eftirfarandi æfingum finnið ákveðið heildi sem táknar bogalengdina.

214.

$$r=4\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

215. $r=1+\sin\theta$ á bilinu $0\le\theta\le2\pi$

216.

$$r=2\sec\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$$

217.

$$r=e^{\theta} \text{ á bilinu } 0\le\theta\le1$$

Í eftirfarandi æfingum finnið lengd ferilsins á gefna bilinu.

218.

$$r=6 \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

219.

$$r=e^{3\theta} \text{ á bilinu } 0\le\theta\le2$$

220.

$$r=6\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

221.

$$r=8+8\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

222.

$$r=1-\sin\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le2\pi$$

Í eftirfarandi æfingum notið heildunarvirkni reiknivélar til að nálga lengd ferilsins.

223. **[T]** $r=3\theta$ á bilinu $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

224. **[T]** $r=\frac{2}{\theta}$ á bilinu $\pi\le\theta\le 2\pi$

225. **[T]** $r=\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ á bilinu $0\le\theta\le\pi$

226. **[T]** $r=2\theta^2$ á bilinu $0\le\theta\le\pi$

227. **[T]** $r=\sin(3\cos\theta)$ á bilinu $0\le\theta\le\pi$

Í eftirfarandi æfingum notið þekkta rúmfræðiformúlu til að finna flatarmál svæðisins sem lýst er og staðfestið síðan niðurstöðuna með ákveðnu heildi.

228.

$$r=3\sin\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

229.

$$r=\sin\theta+\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

230.

$$r=6\sin\theta+8\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

Í eftirfarandi æfingum notið þekkta rúmfræðiformúlu til að finna lengd ferilsins og staðfestið síðan niðurstöðuna með ákveðnu heildi.

231.

$$r=3\sin\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

232.

$$r=\sin\theta+\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

233.

$$r=6\sin\theta+8\cos\theta \text{ á bilinu } 0\le\theta\le\pi$$

234. Sannreynið að ef $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$, þá er $\frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$.

Í eftirfarandi æfingum finnið hallatölu snertils við skauthnitaferilinn $r=f(\theta)$. Látum $x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta$ og $y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$, þannig að skauthnitajafnan $r=f(\theta)$ er nú rituð á stikaformi.

235. Notið skilgreiningu afleiðunnar $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$ og margfeldisregluna til að leiða út afleiðu skauthnitajöfnu.

236.

$$r=1-\sin\theta;\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{6}\right)$$

237.

$$r=4\cos\theta;\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$$

238.

$$r=8\sin\theta;\left(4,\frac{5\pi}{6}\right)$$

239.

$$r=4+\sin\theta;\left(3,\frac{3\pi}{2}\right)$$

240.

$$r=6+3\cos\theta;\left(3,\pi\right)$$

241. $r=4\cos\left(2\theta\right)$; oddar krónublaðanna

242. $r=2\sin\left(3\theta\right)$; oddar krónublaðanna

243.

$$r=2\theta;\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$$

244. Finnið punktana á bilinu $-\pi\le\theta\le\pi$ þar sem hjartaferillinn $r=1-\cos\theta$ hefur lóðréttan eða láréttan snertil.

245. Finnið hallatölu snertils við hjartaferilinn $r=1+\sin\theta$, þegar $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Í eftirfarandi æfingum finnið hallatölu snertils við gefinn skauthnitaferil í punktinum sem samsvarar gildi θ.

7

246.

$$r=3\cos\theta,\theta=\frac{\pi}{3}$$

247.

$$r=\theta,\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

248.

$$r=\ln\theta\,,\ \theta=e$$

249. **[T]** Notið tækni: $r=2+4\cos\theta$ þegar $\theta=\frac{\pi}{6}$

Í eftirfarandi æfingum finnið punktana þar sem eftirfarandi skauthnitaferlar hafa láréttan eða lóðréttan snertil.

250.

$$r=4\cos\theta$$

251.

$$r^2=4\cos(2\theta)$$

252.

$$r=2\sin(2\theta)$$

253. Hjartaferillinn $r=1+\sin\theta$

254. Sýnið að ferillinn $r=\sin\theta\tan\theta$ (kallaður klifurferill Díóklesar) hefur línuna $x=1$ sem lóðrétta aðfellu.

7.5 Keilusnið

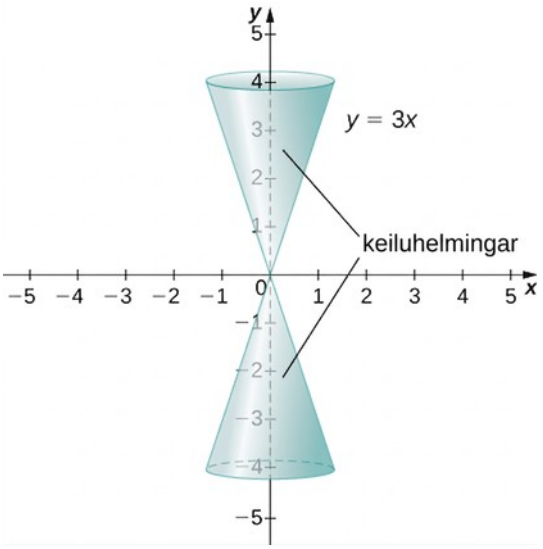
NÁMSMARKMIÐ

- 7.5.1 Ákvarða jöfnu fleygboga á staðalformi út frá gefnum brennipunkti og stýrilínu.
- 7.5.2 Ákvarða jöfnu sporbaugs á staðalformi út frá gefnum brennipunktum.
- 7.5.3 Ákvarða jöfnu breiðboga á staðalformi út frá gefnum brennipunktum.
- 7.5.4 Þekkja fleygboga, sporbaug eða breiðboga út frá miðskekkju hans.
- 7.5.5 Rita skauthnitajöfnu keilusniðs með miðskekkju e.
- 7.5.6 Ákvarða hvenær almenn annars stigs jafna lýsir fleygboga, sporbaug eða breiðboga.

Keilusnið hafa verið rannsökuð frá tímum Forn-Grikkja og voru talin mikilvægt stærðfræðihugtak. Allt frá 320 f.Kr. heilluðust grískir stærðfræðingar á borð við Menaikhmos, Apollonios og Arkimedes af þessum ferlum. Apollonios skrifaði heilt ritverk í átta bindum um keilusnið þar sem hann leiddi meðal annars út sérstaka rúmfræðilega aðferð til að þekkja keilusnið. Síðan hafa komið fram mikilvæg hagnýtingarsvið keilusniða, til dæmis í stjörnufræði, og eiginleikar þeirra eru nýttir í útvarpssjónaukum, gervihnattadiskum og jafnvel byggingarlist. Í þessum undirkafla fjöllum við um keilusniðin þrjú, nokkra eiginleika þeirra og jöfnur.

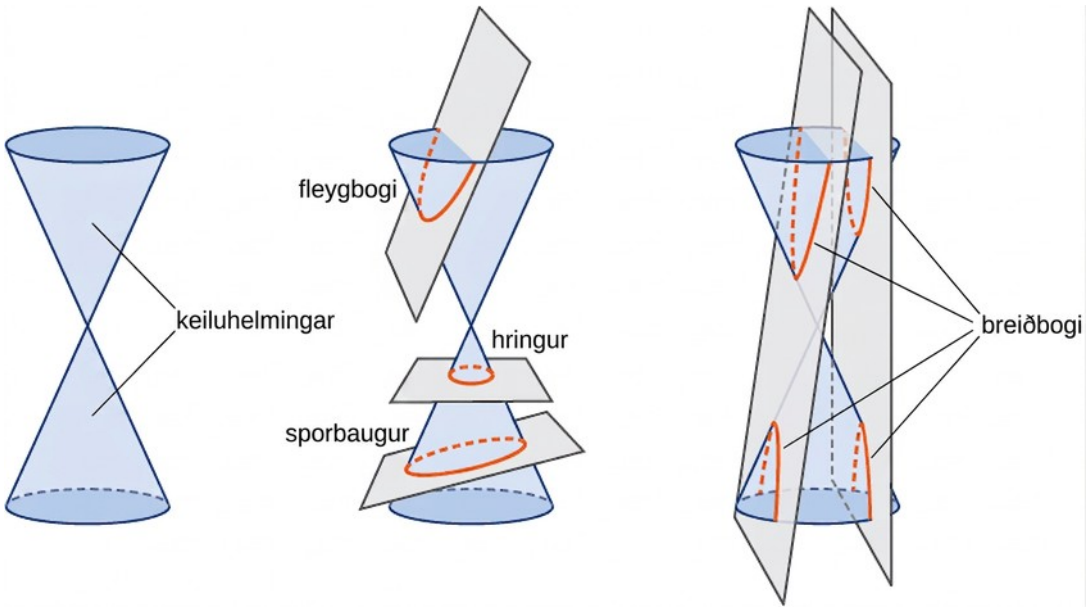
Keilusnið draga nafn sitt af því að þau má mynda með skurði plans og keilu. Keila hefur tvo einslaga hluta sem kallast keiluhelmingar. Annar keiluhelmingurinn er það sem flestir

eiga við með „keilu“ og líkist veisluhatti. Mynda má rétta hringkeilu með því að snúa línu sem liggur gegnum upphafspunktinn um y-ásinn eins og sýnt er.



Mynd 7.43 Keila sem myndast þegar línunni $y=3x$ er snúið um y-ásinn.

Keilusnið myndast þar sem plan sker keilu (mynd 7.44). Ef planið sker báða keiluhelmingana er keilusniðið breiðbogi. Ef planið er samsíða myndlínunni er keilusniðið fleygbogi. Ef planið er hornrétt á snúningsásinn er keilusniðið hringur. Ef planið sker annan keiluhelminginn undir horni við ásinn (öðru en $90°$), er keilusniðið sporbaugur.



Mynd 7.44 Keilusniðin fjögur. Hvert keilusnið ræðst af horninu sem planið myndar við ás keilunnar.

Fleygbogar

Fleygbogi myndast þegar plan sker keilu samsíða myndlínunni. Þá sker planið aðeins annan keiluhelminginn. Einnig má skilgreina fleygboga út frá fjarlægðum.

SKILGREINING

Fleygbogi er mengi allra punkta sem eru jafnlangt frá föstum punkti, sem kallast brennipunktur, og fastri línu, sem kallast stýrilína. Punkturinn mitt á milli brennipunktsins og stýrilínunnar kallast topppunktur fleygbogans.

Graf dæmigerðs fleygboga er sýnt á mynd 7.45. Með þessari mynd og fjarlægðarformúlunni getum við leitt út jöfnu fleygboga. Rifjið upp fjarlægðarformúluna: Ef punkturinn P hefur hnitin (x_1, y_1) og punkturinn Q hnitin (x_2, y_2), er fjarlægðin milli þeirra gefin með formúlunni

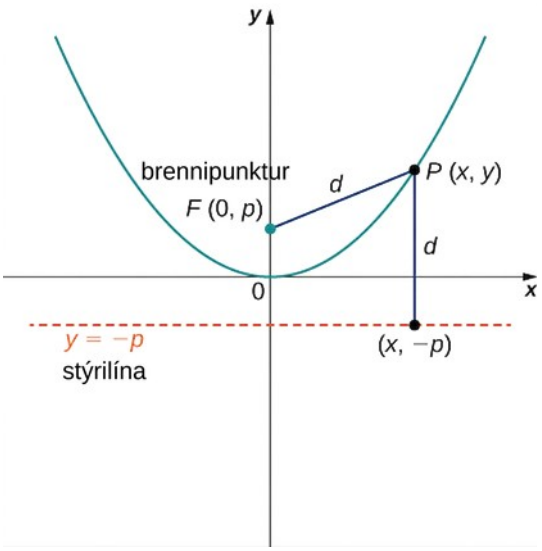
$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Af skilgreiningu fleygboga og mynd 7.45 fæst þá

$$\begin{aligned} d(F,P) &= d(P,Q) \\ \sqrt{(0-x)^2+(p-y)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(-p-y)^2}. \end{aligned}$$

Þegar báðar hliðar eru settar í annað veldi og einfaldaðar fæst

$$\begin{aligned} x^2+(p-y)^2 &= 0^2+(-p-y)^2 \\ x^2+p^2-2py+y^2 &= p^2+2py+y^2 \\ x^2-2py &= 2py \\ x^2 &= 4py. \end{aligned}$$



Mynd 7.45 Dæmigerður fleygbogi þar sem fjarlægðin frá brennipunkti að topppunkti er táknuð með breytunni p.

Gerum nú ráð fyrir að við viljum færa topppunktinn. Við notum breyturnar (h,k) til að tákna hnit hans. Ef brennipunkturinn er beint ofan við topppunktinn hefur hann þá hnitin $(h,k+p)$ og stýrilínan jöfnuna $y=k-p$. Sama útleiðsla gefur formúluna $(x-h)^2=4p(y-k)$. Þegar jafnan er leyst með tilliti til y fæst eftirfarandi setning.

SETNING 7.8

Jöfnur fleygboga

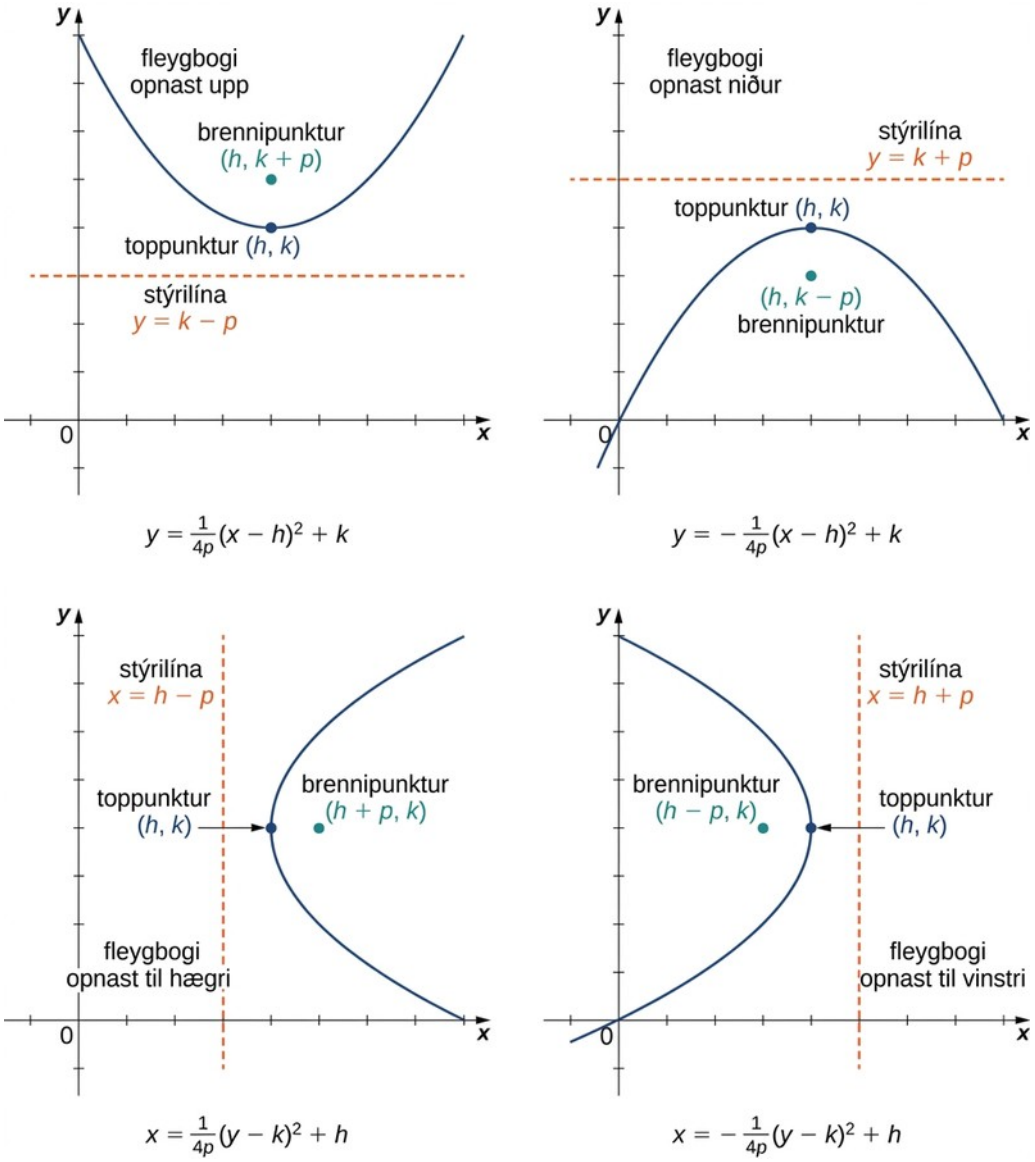
Fleygbogi sem opnast upp og hefur topppunktinn (h, k) og brennipunktinn $(h, k+p)$, þar sem p er fasti, hefur jöfnuna

$$y = \frac{1}{4p}(x-h)^2 + k.$$

(7.11)

Þetta er staðalform fleygboga.

Við getum einnig skoðað tilvikin þegar fleygboginn opnast niður, til vinstri eða til hægri. Jöfnu hvers tilviks má einnig rita á staðalformi eins og eftirfarandi gröf sýna.



Mynd 7.46 Fjórir fleygbogar sem opnast í ólíkar áttir ásamt jöfnum sínum á staðalformi.

Jöfnu fleygboga má enn fremur rita á almennu formi, þótt gildi h, k og p sjáist ekki strax á því formi. Almennt form fleygboga er

$$a\,x^2+b\,x+c\,y+d=0 \text{ eða } a\,y^2+b\,x+c\,y+d=0.$$

Fyrri jafnan táknar fleygboga sem opnast annaðhvort upp eða niður. Seinni jafnan táknar fleygboga sem opnast annaðhvort til vinstri eða hægri. Notið aðferðina að fylla í ferninginn til að færa jöfnuna á staðalform.

DÆMI 7.19

Jöfnu fleygboga breytt af almennu formi á staðalform

Færið jöfnuna $x^2-4\,x-8\,y+12=0$ á staðalform og teiknið graf fleygbogans sem fæst.

Lausn

Þar sem y er ekki í öðru veldi í þessari jöfnu vitum við að fleygboginn opnast annaðhvort upp eða niður. Við þurfum því að leysa jöfnuna með tilliti til y og færa hana þannig á staðalform. Byrjum á að leggja $8\,y$ við báðar hliðar jöfnunnar:

$$8\,y=x^2-4\,x+12.$$

Næst fyllum við í ferninginn hægra megin. Byrjum á að setja fyrstu tvo liðina hægra megin innan sviga:

$$8\,y=\left(x^2-4\,x\right)+12.$$

Næst finnum við fastann sem bæta þarf við innan svigans svo að stæðan þar verði fullkominn ferningsþríliður. Til þess tökum við helming stuðuls x og setjum í annað veldi. Þá fæst $\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$. Leggjum 4 við innan svigans og drögum 4 frá utan hans svo gildi jöfnunnar breytist ekki:

$$8\,y=\left(x^2-4\,x+4\right)+12-4.$$

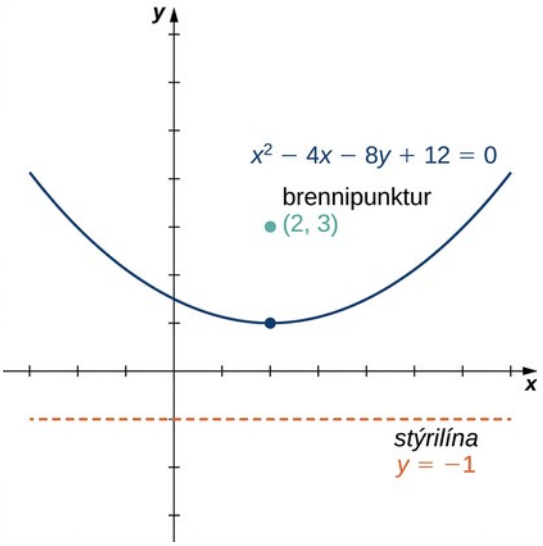
Sameinum nú líka liði og þáttum stæðuna innan svigans:

$$8\,y=\left(x-2\right)^2+8.$$

Deilum að lokum með 8:

$$y=\frac{1}{8}\left(x-2\right)^2+1.$$

Jafnan er nú á staðalformi. Samanburður við jöfnu 7.11 gefur $h=2$, $k=1$, og $p=2$. Fleygboginn opnast upp, hefur topppunktinn $(2,1)$, brennipunktinn $(2,3)$, og stýrilínuna $y=-1$. Grafið er sýnt hér á eftir.

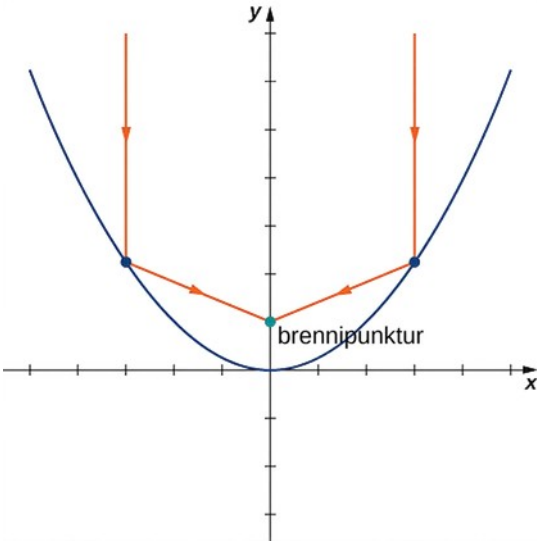


Mynd 7.47 Fleygboginn í dæmi 7.19.

STÖÐUMAT 7.18

Færið jöfnuna $2y^2 - x + 12y + 16 = 0$ á staðalform og teiknið graf fleygbogans sem fæst.

Samhverfuás lóðrétts fleygboga, sem opnast upp eða niður, er lóðrétt lína gegnum topppunktinn. Fleygboginn hefur athyglisverðan speglunareiginleika. Hugsum okkur gervihnattadisk með fleygbogalaga þversniði. Ef geisli rafsegulbylgna, svo sem ljós- eða útvarpsbylgna, berst eftir beinni línu frá gervihnetti inn á diskinn, samsíða samhverfuásnum, endurkastast bylgjurnar af diskinum og safnast í brennipunkti fleygbogans eins og sýnt er.



Skoðum fleygbogalaga disk sem ætlaður er til að safna merkjum frá gervihnetti í geimnum. Disknum er beint nákvæmlega að gervihnettinum og móttakari er í brennipunkti fleygbogans. Útvarpsbylgjur frá gervihnettinum endurkastast af yfirborði disksins að móttakaranum, sem tekur við stafrænu merkjunum og afkóðar þau. Þannig getur lítill

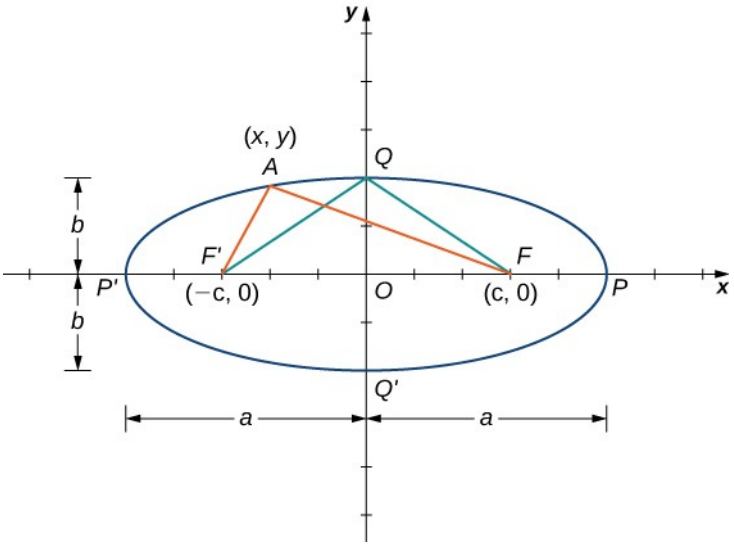
móttakari safnað merkjum frá stóru svæði á himninum. Vasaljós og bílljós virka eftir sömu reglu en í öfuga átt: ljósgjafinn, það er ljósaperan, er í brennipunktinum og endurkastandi yfirborð fleygbogaspegilsins beinir geislanum beint fram. Þannig getur lítil pera lýst upp stórt svæði fyrir framan vasaljósið eða bílinn.

Sporbaugar

Einnig má skilgreina sporbaug út frá fjarlægðum. Sporbaugur hefur tvo brennipunkta og tvær stýrilínur. Við skoðum stýrilínurnar nánar síðar í þessum undirkafla.

SKILGREINING

Sporbaugur er mengi allra punkta þannig að summa fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum, brennipunktunum, er föst.



Mynd 7.48 Dæmigerður sporbaugur þar sem summa fjarlægða sérhvers punkts á sporbaugnum frá brennipunktunum er föst.

Graf dæmigerðs sporbaugs er sýnt á mynd 7.48. Brennipunktarnir eru merktir F og F'. Báðir eru í sömu föstu fjarlægð frá upphafspunktinum, táknaðri með breytunni c. Hnit F eru því $(c, 0)$ og hnit F' eru $(-c, 0)$. Punktarnir P og P' eru á endum langáss sporbaugsins og hafa hnitin $(a, 0)$ og $(-a, 0)$, í sömu röð. Langásinn er alltaf lengsta línustrikið þvert yfir sporbauginn og getur verið láréttur eða lóðréttur. Lengd langássins í þessum sporbaug er því 2 a. Punktarnir P og P' kallast topppunktar sporbaugsins. Punktarnir Q og Q' eru á endum skammássins og hafa hnitin $(0, b)$ og $(0, -b)$, í sömu röð. Skammásinn er stysta línustrikið þvert yfir sporbauginn og er hornréttur á langásinn.

Samkvæmt skilgreiningu sporbaugs getum við valið hvaða punkt sem er á sporbaugnum og summa fjarlægða hans frá brennipunktunum tveimur er föst. Veljum punktinn P. Þar sem hnit P eru $(a, 0)$, er summa fjarlægðanna

$$d(P,F)+d(P,F')=(a-c)+(a+c)=2a.$$

Summa fjarlægðanna frá hvaða punkti A sem er með hnitin (x,y) er því einnig 2 a. Með fjarlægðarformúlunni fæst

$$\begin{aligned} d(A,F)+d(A,F') &= 2a \\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Drögum seinni kvaðratrótina frá báðum hliðum og setjum báðar hliðar í annað veldi:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\ (x-c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2 \\ x^2-2cx+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2 \\ -2cx &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2cx. \end{aligned}$$

Einangrum nú kvaðratrótina hægra megin og setjum aftur í annað veldi:

$$\begin{aligned} -2cx &= 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2cx \\ 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 4a^2+4cx \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= a+\tfrac{cx}{a} \\ (x+c)^2+y^2 &= a^2+2cx+\tfrac{c^2x^2}{a^2} \\ x^2+2cx+c^2+y^2 &= a^2+2cx+\tfrac{c^2x^2}{a^2} \\ x^2+c^2+y^2 &= a^2+\tfrac{c^2x^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Einangrum breyturnar vinstra megin og fastana hægra megin:

$$\begin{aligned} x^2-\tfrac{c^2x^2}{a^2}+y^2 &= a^2-c^2 \\ \tfrac{(a^2-c^2)x^2}{a^2}+y^2 &= a^2-c^2. \end{aligned}$$

7

Deilum báðum hliðum með a^2-c^2. Þá fæst jafnan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Ef við lítum aftur á mynd 7.48 er lengd hvors grænu línustriksins a. Það gildir vegna þess að summa fjarlægðanna frá Q að brennipunktunum F og F' er 2 a og línustrikin tvö eru jafnlöng. Línustrikið myndar rétthyrndan þríhyrning með langhliðina a og skammhliðarnar b og c. Samkvæmt setningu Pýþagórasar er $c^2=b^2=a^2$ og $b^2+a^2=c^2$. Jafna sporbaugsins verður því

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ef miðja sporbaugsins er að lokum færð úr upphafspunktinum í punktinn (h,k), fæst eftirfarandi staðalform sporbaugs.

SETNING 7.9

Jafna sporbaugs á staðalformi

Skoðum sporbaug með miðju (h,k), láréttan langás af lengdinni 2 a og lóðréttan skammás af lengdinni 2 b. Þá er jafna sporbaugsins á staðalformi

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

(7.12)

og brennipunktarnir eru $(h\pm c,k)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Jöfnur stýrilínanna eru $x=h\pm\frac{a^2}{c}$.

Ef langásinn er lóðréttur verður jafna sporbaugsins

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

(7.13)

og brennipunktarnir eru $(h,k\pm c)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Jöfnur stýrilínanna eru þá $y=k\pm\frac{a^2}{c}$.

Ef langásinn er láréttur kallast sporbaugurinn láréttur, en ef langásinn er lóðréttur kallast hann lóðréttur. Jafna sporbaugs er á almennu formi ef hún er á forminu $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, þar sem A og B eru annaðhvort bæði jákvæð eða bæði neikvæð. Notið aðferðina að fylla í ferninginn til að færa jöfnuna úr almennu formi á staðalform.

DÆMI 7.20

Staðlað form sporbaugs fundið

Færið jöfnuna $9x^2+4y^2-36x+24y+36=0$ á staðalform og teiknið graf sporbaugsins sem fæst.

Lausn

Drögum fyrst 36 frá báðum hliðum jöfnunnar:

$$9x^2+4y^2-36x+24y=-36.$$

Setjum næst x-liðina saman og y-liðina saman og tökum sameiginlegan þátt út fyrir sviga:

$$\begin{aligned}(9x^2 - 36x) + (4y^2 + 24y) &= -36\\ 9\left(x^2 - 4x\right) + 4\left(y^2 + 6y\right) &= -36.\end{aligned}$$

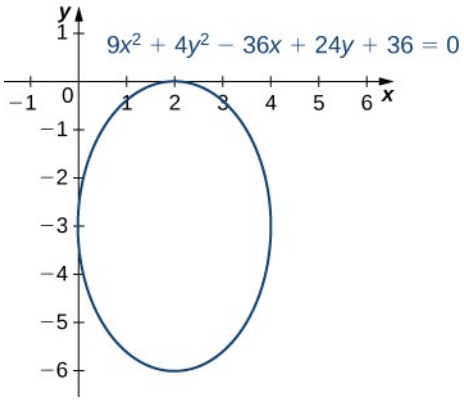
Við þurfum að finna fastann sem bæta þarf við innan hvors sviga svo að úr verði fullkominn ferningur. Í fyrri sviganum tökum við helming stuðuls x og setjum í annað veldi. Þá fæst $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$. Í seinni sviganum tökum við helming stuðuls y og setjum í annað veldi. Þá fæst $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$. Leggjum þessi gildi við innan hvors sviga. Þar sem 9 stendur fyrir framan fyrri svigann leggjum við í raun 36 við vinstri hliðina. Á sama hátt leggjum við 36 við vegna seinni svigans. Jafnan verður því

$$\begin{aligned}9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y^2 + 6y + 9\right) &= -36 + 36 + 36\\ 9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y^2 + 6y + 9\right) &= 36.\end{aligned}$$

Þáttum nú báða svigana og deilum með 36:

$$\begin{aligned}9(x-2)^2 + 4(y+3)^2 &= 36\\ \tfrac{9(x-2)^2}{36} + \tfrac{4(y+3)^2}{36} &= 1\\ \tfrac{(x-2)^2}{4} + \tfrac{(y+3)^2}{9} &= 1.\end{aligned}$$

Jafnan er nú á staðalformi. Samanburður við jöfnu 7.14 gefur $h=2$, $k=-3$, $a=3$, og $b=2$. Þetta er lóðréttur sporbaugur með miðju í $(2,-3)$, langás 6 og skammás 4. Graf sporbaugsins er sýnt hér á eftir.



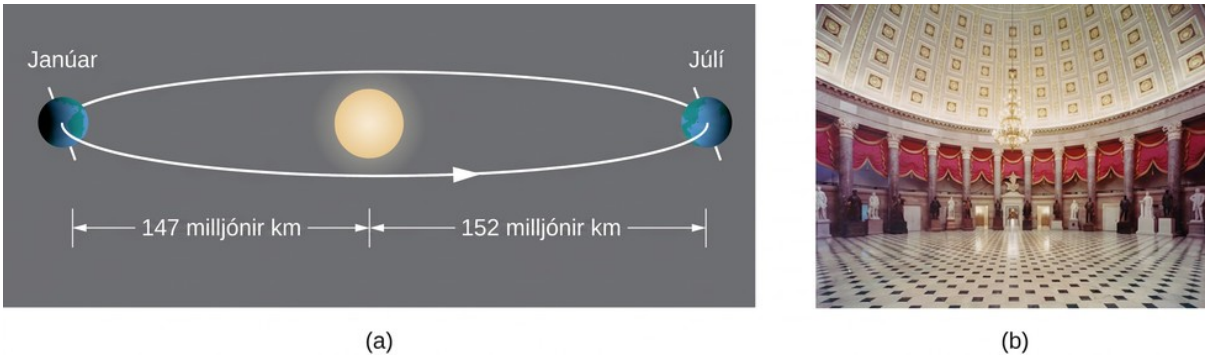
Mynd 7.49 Sporbaugurinn í dæmi 7.20.

STÖÐUMAT 7.19

Færið jöfnuna $9x^2+16y^2+18x-64y-71=0$ á staðalform og teiknið graf sporbaugsins sem fæst.

Samkvæmt fyrsta lögmáli Keplers um hreyfingu reikistjarna er braut reikistjörnu um sólina sporbaugur með sólina í öðrum brennipunktinum, eins og sýnt er á mynd 7.50(a). Þar sem braut jarðar er sporbaugur breytist fjarlægðin frá sólinni yfir árið. Algengur misskilningur er að jörðin sé nær sólinni á sumrin. Þegar sumar er á norðurhveli er jörðin í raun fjær sólinni en þegar þar er vetur. Árstíðamunurinn stafar af möndulhalla jarðar miðað við brautarplanið. Halastjörnur á braut um sólina, svo sem Halley-halastjarnan, hafa einnig sporöskjulaga brautir, rétt eins og tungl á braut um reikistjörnur og gervihnettir á braut um jörðu.

Sporbaugar hafa einnig athyglisverða speglunareiginleika: Ljósgeisli sem leggur af stað frá öðrum brennipunktinum fer um hinn eftir að hafa endurkastast af sporbaugnum. Hið sama gildir um hljóðbylgjur. National Statuary Hall í þinghúsi Bandaríkjanna í Washingtonborg er frægur sporöskjulaga salur sem sýndur er á mynd 7.50(b). Salurinn var fundarstaður fulltrúadeildar Bandaríkjaþings í nær fimmtíu ár. Brennipunktarnir tveir í þessum hálfsporöskjulaga sal eru greinilega merktir á gólfinu. Jafnvel þótt salurinn sé fullur af gestum geta tveir sem standa á þessum stöðum og tala saman heyrt mun betur hvor í öðrum en í þeim sem stendur rétt hjá. Sagan segir að John Quincy Adams hafi haft skrifborð sitt á öðrum brennipunktinum og getað hlerað samtöl allra annarra í fulltrúadeildinni án þess að standa nokkru sinni upp. Þótt sagan sé góð er hún líklega ósönn, því upphaflega loftið olli svo miklu bergmáli að hengja þurfti teppi um allan salinn til að draga úr hávaðanum. Loftið var endurbyggt árið 1902 og fyrst þá komu hin frægu hvíslunaráhrif fram. Annað frægt hvíslaragallerí, þar sem mörg bónorð hafa verið borin upp, er í Grand Central-lestarstöðinni í New York.



Mynd 7.50 (a) Braut jarðar um sólina er sporbaugur með sólina í öðrum brennipunktinum. (b) Statuary Hall í þinghúsi Bandaríkjanna er hvíslaragallerí með sporöskjulaga þversniði.

7

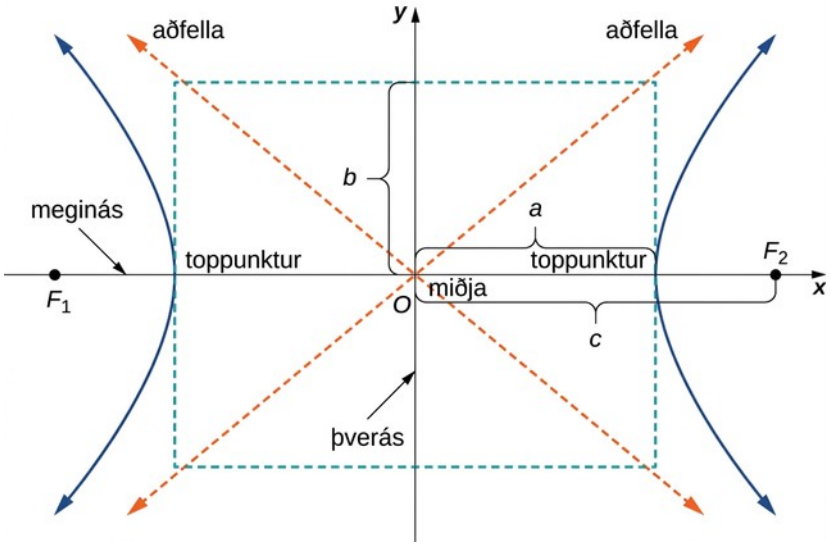
Breiðbogar

Einnig má skilgreina breiðboga út frá fjarlægðum. Breiðbogi hefur tvo brennipunkta, tvær stýrilínur og tvær aðfellur.

SKILGREINING

Breiðbogi er mengi allra punkta þannig að mismunur fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum, brennipunktunum, er fastur.

Graf dæmigerðs breiðboga er sýnt hér á eftir.



Mynd 7.51 Dæmigerður breiðbogi þar sem mismunur fjarlægða sérhvers punkts á breiðboganum frá brennipunktunum er fastur. Meginásinn er einnig kallaður langás og þverásinn einnig skammás.

Útleiðsla jöfnu breiðboga á staðalformi er nánast eins og útleiðsla jöfnu sporbaugs. Þó er einn lítill hængur á skilgreiningunni: Algildi mismunar fjarlægðanna tveggja er alltaf jákvætt. Látum P vera punkt á breiðboganum með hnitin (x, y). Þá gefur skilgreining breiðbogans $\left|d(P, F_1) - d(P, F_2)\right| = \text{fasti}$. Til einföldunar gerum við ráð fyrir að P sé á hægri grein breiðbogans svo sleppa megi algildisstrikunum. Ef hann er á vinstri greininni snýst frádrátturinn við. Topppunktur hægri greinarinnar hefur hnitin $(a, 0)$, og því er

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = (c + a) - (c - a) = 2a.$$

Þessi jafna gildir því um sérhvern punkt á breiðboganum. Notum aftur hnitin (x, y) fyrir P:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) - d(P, F_2) &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Leggjum seinni kvaðratrótina við báðar hliðar og setjum báðar hliðar í annað veldi:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\ -2cx &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx. \end{aligned}$$

Einangrum nú kvaðratrótina hægra megin og setjum aftur í annað veldi:

$$\begin{aligned} -2cx &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 2cx \\ 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= -4a^2 - 4cx \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= -a - \tfrac{cx}{a} \\ (x+c)^2+y^2 &= a^2 + 2cx + \tfrac{c^2x^2}{a^2} \\ x^2+2cx+c^2+y^2 &= a^2 + 2cx + \tfrac{c^2x^2}{a^2} \\ x^2+c^2+y^2 &= a^2 + \tfrac{c^2x^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Einangrum breyturnar vinstra megin og fastana hægra megin:

$$\begin{aligned} x^2 - \tfrac{c^2x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2 \\ \tfrac{(a^2-c^2)x^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2. \end{aligned}$$

Deilum að lokum báðum hliðum með $a^2 - c^2$. Þá fæst jafnan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Við skilgreinum nú b þannig að $b^2 = c^2 - a^2$. Þetta er mögulegt vegna þess að $c > a$. Jafna breiðbogans verður því

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ef miðja breiðbogans er að lokum færð úr upphafspunktinum í punktinn (h, k), fæst eftirfarandi staðalform breiðboga.

SETNING 7.10

Jafna breiðboga á staðalformi

Skoðum breiðboga með miðju (h, k), láréttan meginás og lóðréttan þverás. Þá er jafna breiðbogans

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(7.14)

og brennipunktarnir eru $(h \pm c, k)$, þar sem $c^2 = a^2 + b^2$. Jöfnur aðfellanna eru $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$.

Jöfnur stýrilínanna eru

$$x = h \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = h \pm \frac{a^2}{c}.$$

Ef meginásinn er lóðréttur verður jafna breiðbogans

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

(7.15)

og brennipunktarnir eru $(h, k\pm c)$, þar sem $c^2=a^2+b^2$. Jöfnur aðfellanna eru $y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$.

Jöfnur stýrilínanna eru

$$y=k\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=k\pm\frac{a^2}{c}.$$

Ef meginás breiðbogans er láréttur kallast breiðboginn láréttur, en ef meginásinn er lóðréttur kallast hann lóðréttur. Jafna breiðboga er á almennu formi ef hún er á forminu $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, þar sem A og B hafa ólík formerki. Notið aðferðina að fylla í ferninginn til að færa jöfnuna úr almennu formi á staðalform.

DÆMI 7.21

Staðlað form breiðboga fundið

Færið jöfnuna $9x^2-16y^2+36x+32y-124=0$ á staðalform og teiknið graf breiðbogans sem fæst. Hverjar eru jöfnur aðfellanna?

Lausn

Leggjum fyrst 124 við báðar hliðar jöfnunnar:

$$9x^2-16y^2+36x+32y=124.$$

Setjum næst x-liðina saman og y-liðina saman og tökum sameiginlega þætti út fyrir sviga:

$$\begin{aligned}(9x^2+36x)-(16y^2-32y) &= 124\\ 9(x^2+4x)-16(y^2-2y) &= 124.\end{aligned}$$

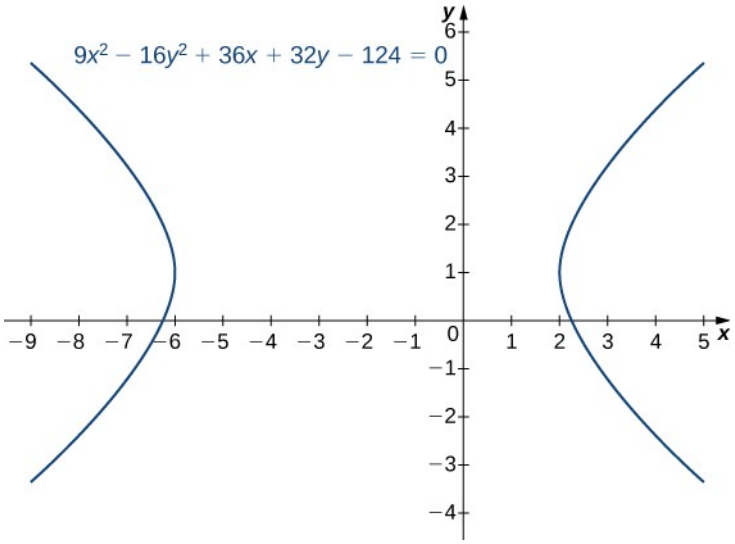
Við þurfum að finna fastann sem bæta þarf við innan hvors sviga svo að úr verði fullkominn ferningur. Í fyrri sviganum tökum við helming stuðuls x og setjum í annað veldi. Þá fæst $\left(\frac{4}{2}\right)^2=4$. Í seinni sviganum tökum við helming stuðuls y og setjum í annað veldi. Þá fæst $\left(\frac{-2}{2}\right)^2=1$. Leggjum þessi gildi við innan hvors sviga. Þar sem 9 stendur fyrir framan fyrri svigann leggjum við í raun 36 við vinstri hliðina. Á sama hátt drögum við 16 frá vegna seinni svigans. Jafnan verður því

$$9\left(x^2+4x+4\right)-16\left(y^2-2y+1\right)=124+36-16$$
$$9\left(x^2+4x+4\right)-16\left(y^2-2y+1\right)=144.$$

Þáttum næst báða svigana og deilum með 144:

$$\begin{aligned} 9(x+2)^2-16(y-1)^2 &= 144 \\ \frac{9(x+2)^2}{144}-\frac{16(y-1)^2}{144} &= 1 \\ \frac{(x+2)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Jafnan er nú á staðalformi. Samanburður við jöfnu 7.15 gefur $h=-2$, $k=1$, $a=4$, og $b=3$. Þetta er láréttur breiðbogi með miðju í $(-2,1)$; aðfellur hans eru gefnar með jöfnunum $y=1\pm\frac{3}{4}(x+2)$. Graf breiðbogans er sýnt á eftirfarandi mynd.

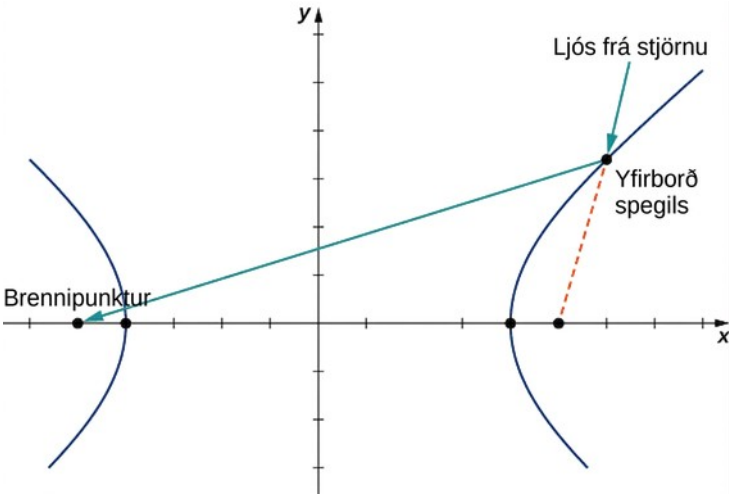


Mynd 7.52 Graf breiðbogans í dæmi 7.21.

STÖÐUMAT 7.20

Færið jöfnuna $4y^2-9x^2+16y+18x-29=0$ á staðalform og teiknið graf breiðbogans sem fæst. Hverjar eru jöfnur aðfellanna?

Breiðbogar hafa einnig athyglisverða speglunareiginleika. Geisli sem beinist að öðrum brennipunkti breiðboga endurkastast af breiðbogalaga spegli í átt að hinum brennipunktinum. Þetta er sýnt á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.53 Breiðbogalaga spegill sem safnar ljósi frá fjarlægum stjörnum.

Þessi eiginleiki breiðbogans hefur mikilvæg hagnýtingarsvið. Hann er notaður við stefnumiðun útvarpsmerkja, því mismunur merkja frá tveimur möstrum er fastur eftir breiðbogum, og við smíði spegla í sjónaukum, þar sem ljós frá fleygbogaspegli er endurkastað að augnglerinu. Önnur athyglisverð staðreynd um breiðboga varðar halastjörnu sem kemur inn í sólkerfið: Ef hraði hennar er nægur til að sleppa úr þyngdarsviði sólarinnar er ferill hennar gegnum sólkerfið breiðbogi.

Miðskekkja og stýrilína

Önnur leið til að lýsa keilusniði byggist á stýrilínum, brennipunktum og nýjum eiginleika sem kallast miðskekkja. Við sjáum að gildi miðskekkjunnar getur ákvarðað keilusniðið ótvírætt.

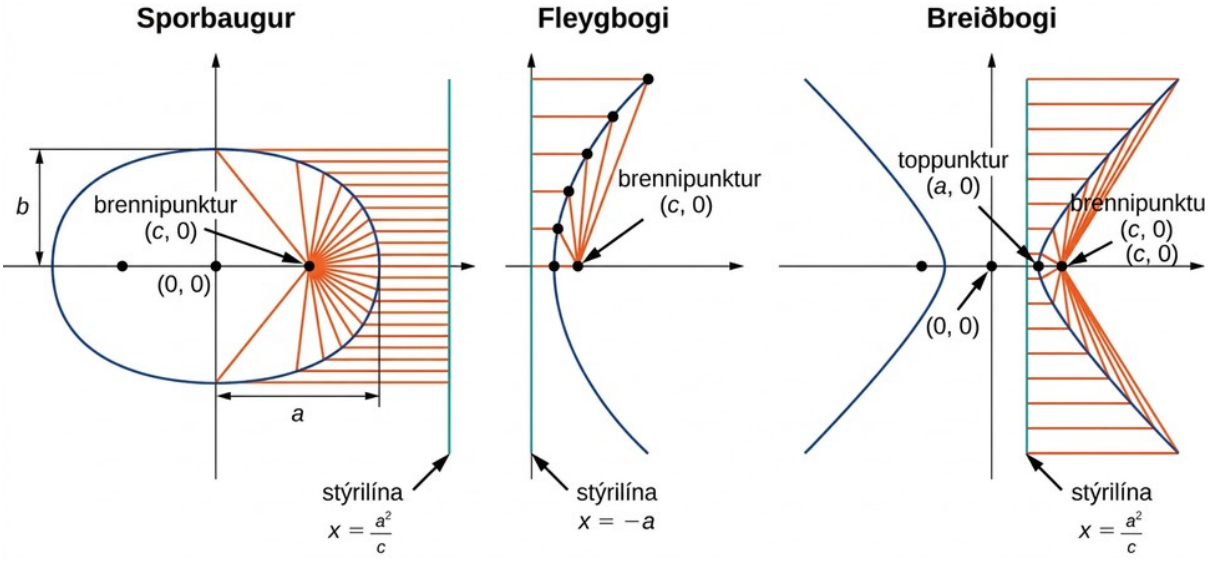
SKILGREINING

Miðskekkja e keilusniðs er skilgreind sem fjarlægðin frá hvaða punkti á keilusniðinu sem er að brennipunkti þess, deilt með hornréttri fjarlægð frá punktinum að næstu stýrilínu. Þetta gildi er fast fyrir hvert keilusnið og getur jafnframt ákvarðað gerð þess:

1. Ef $e = 1$, er keilusniðið fleygbogi.
2. Ef $e < 1$, er það sporbaugur.
3. Ef $e > 1$, er það breiðbogi.

Miðskekkja hrings er núll. Stýrilína keilusniðs er sú lína sem ásamt brennipunktinum skilgreinir keilusniðið. Breiðbogar og sporbaugar sem eru ekki hringir hafa tvo brennipunkta og tvær samsvarandi stýrilínur. Fleygbogar hafa einn brennipunkt og eina stýrilínu.

Keilusniðin þrjú ásamt stýrilínum sínum eru sýnd á eftirfarandi mynd.



Mynd 7.54 Keilusniðin þrjú ásamt brennipunktum og stýrilínum.

Munið að samkvæmt skilgreiningu fleygboga er fjarlægðin frá hverjum punkti á fleygboganum að brennipunktinum jöfn fjarlægðinni frá sama punkti að stýrilínunni. Miðskekkja fleygboga hlýtur því að vera 1 samkvæmt skilgreiningu. Jöfnur stýrilína lárétts sporbaugs eru $x = \pm\frac{a^2}{c}$. Hægri topppunktur sporbaugsins er $(a, 0)$ og hægri brennipunkturinn $(c, 0)$. Fjarlægðin frá topppunktinum að brennipunktinum er því $a - c$ og fjarlægðin frá topppunktinum að hægri stýrilínunni $\frac{a^2}{c} - a$. Þá fæst miðskekkjan

$$e = \frac{a-c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{c(a-c)}{a^2 - ac} = \frac{c(a-c)}{a(a-c)} = \frac{c}{a}.$$

Þar sem $c < a$, sýnir þetta skref að miðskekkja sporbaugs er minni en 1. Stýrilínur lárétts breiðboga eru einnig $x = \pm\frac{a^2}{c}$, og sambærilegur reikningur sýnir að miðskekkja breiðboga er $e = \frac{c}{a}$. Í þessu tilviki er hins vegar $c > a$, og því er miðskekkja breiðboga meiri en 1.

7

DÆMI 7.22

Miðskekkja keilusniðs ákvörðuð

Ákvarðið miðskekkju sporbaugsins sem jafnan lýsir

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

Lausn

Af jöfnunni sjáum við að $a=5$ og $b=4$. Gildi c má reikna með jöfnunni $a^2=b^2+c^2$ fyrir sporbaug. Þegar gildi a og b eru sett inn og leyst með tilliti til c fæst $c=3$. Miðskekkja sporbaugsins er því $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

STÖÐUMAT 7.21

Ákvarðið miðskekkju breiðbogans sem jafnan lýsir

$$\frac{(y-3)^2}{49}-\frac{(x+2)^2}{25}=1.$$

Skauthnitajöfnur keilusniða

Stundum er gagnlegt að rita eða þekkja jöfnu keilusniðs á skauthnitaformi. Til þess þurfum við hugtakið brennistiki. Brennistiki p keilusniðs er fjarlægðin frá brennipunkti að næstu stýrilínu. Eftirfarandi tafla gefur brennistika ólíkra keilusniða, þar sem a er hálf lengd langássins, c er fjarlægðin frá upphafspunktinum að brennipunktinum og e er miðskekkjan. Fyrir fleygboga táknar a fjarlægðina frá topppunktinum að brennipunktinum.

Tafla 7.1 Miðskekkja og brennistiki keilusniða

Keilusnið	e	p
Sporbaugur	$0<e<1$	$\frac{a^2-c^2}{c}=\frac{a(1-e^2)}{e}$
Fleygbogi	$e=1$	$2a$
Breiðbogi	$e>1$	$\frac{c^2-a^2}{c}=\frac{a(e^2-1)}{e}$

Með skilgreiningum á brennistika og miðskekkju keilusniðs getum við leitt út jöfnu hvers keilusniðs í skauthnitum. Við gerum sérstaklega ráð fyrir að annar brennipunktur keilusniðsins sé í skautinu. Með fjarlægðarskilgreiningum keilusniðanna má þá sanna eftirfarandi setningu.

7

SETNING 7.11

Skauthnitajafna keilusniða

Skauthnitajafna keilusniðs með brennistika p er gefin með

$$r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}\text{ eða }r=\frac{ep}{1\pm e\sin\theta}.$$

Í jöfnunni til vinstri er langás keilusniðsins láréttur en í jöfnunni til hægri er hann lóðréttur. Þegar unnið er með keilusnið á skauthnitaformi skal fyrst gera fastaliðinn í nefnaranum jafnan 1. Það má gera með því að deila bæði teljara og nefnara brotsins með fastanum sem stendur á undan plús- eða mínusmerkinu í nefnaranum. Stuðull sínus eða kósínus í nefnaranum er þá miðskekkjan. Gildið ákvarðar gerð keilusniðsins. Ef kósínus kemur fyrir í nefnaranum er keilusniðið lárétt. Ef sínus kemur fyrir er það lóðrétt. Ef bæði koma fyrir er ásunum snúið. Miðja keilusniðsins er ekki endilega í upphafspunktinum. Hún er aðeins þar ef keilusniðið er hringur (það er þegar $e=0$).

DÆMI 7.23

Graf keilusniðs í skauthnitum teiknað

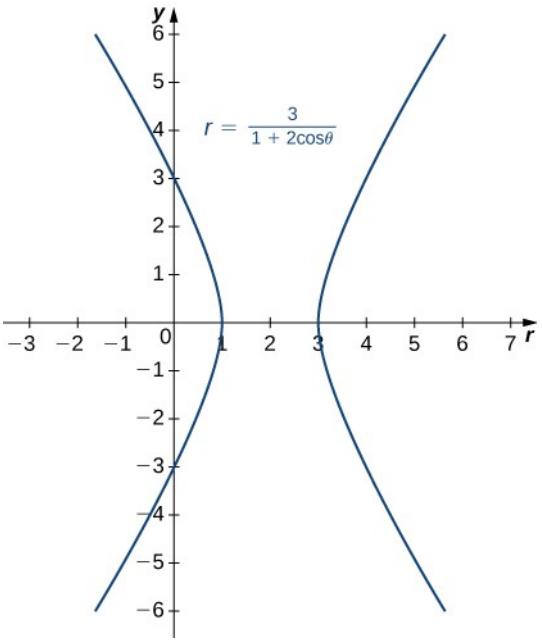
Þekkið keilusniðið sem jafnan lýsir og teiknið graf þess

$$r=\frac{3}{1+2\cos\theta}.$$

Lausn

Fastaliðurinn í nefnaranum er 1 og því er miðskekkja keilusniðsins 2. Þetta er breiðbogi. Brennistikann p má reikna með jöfnunni $e\,p=3$. Þar sem $e=2$, fæst $p=\frac{3}{2}$. Kósínusfallið kemur fyrir í nefnaranum og því er breiðboginn láréttur. Veljið nokkur gildi θ og búið til gildatöflu. Þá getum við teiknað breiðbogann (mynd 7.55).

θ	r	θ	r
0	1	π	−3
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{1+\sqrt{2}}\approx 1{,}2426$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3}{1-\sqrt{2}}\approx -7{,}2426$
$\frac{\pi}{2}$	3	$\frac{3\pi}{2}$	3
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3}{1-\sqrt{2}}\approx -7{,}2426$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3}{1+\sqrt{2}}\approx 1{,}2426$



Mynd 7.55 Graf breiðbogans sem lýst er í dæmi 7.23.

STÖÐUMAT 7.22

Þekkið keilusniðið sem jafnan lýsir og teiknið graf þess

$$r = \frac{4}{1 - 0{,}8\ \sin\ \theta}.$$

Almennar annars stigs jöfnur

Almenna annars stigs jöfnu má rita á forminu

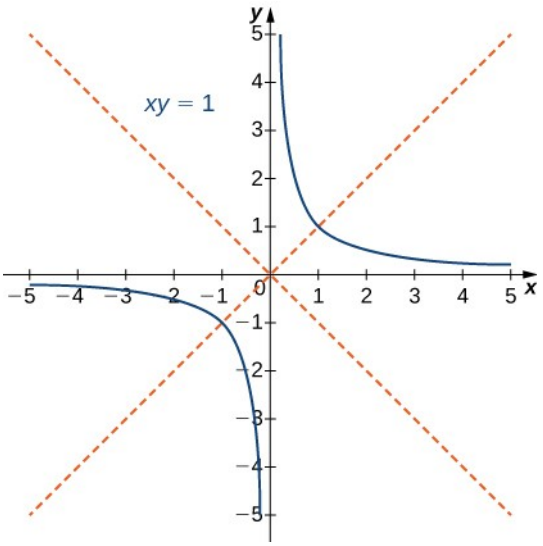
$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0.$$

Graf jöfnu á þessu formi er keilusnið. Ef $B \neq 0$ er hnitásunum snúið. Til að þekkja keilusniðið notum við aðgreini þess, $4\,A\,C - B^2$. Eitt eftirfarandi tilvika hlýtur að eiga við:

7

1. $4\,A\,C - B^2 > 0$. Þá lýsir jafnan sporbaug.
2. $4\,A\,C - B^2 = 0$. Þá lýsir jafnan fleygboga.
3. $4\,A\,C - B^2 < 0$. Þá lýsir jafnan breiðboga.

Einfaldasta dæmið um annars stigs jöfnu með krosslið er $x\,y = 1$. Jöfnuna má leysa með tilliti til y og fá $y = \frac{1}{x}$. Graf fallsins kallast rétthyrndur breiðbogi og er sýnt hér á eftir.



Mynd 7.56 Graf jöfnunnar $x\,y=1$; rauðu línurnar sýna snúna ása.

Aðfellur þessa breiðboga eru x- og y-hnitásarnir. Til að ákvarða snúningshornið θ notum við formúluna $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$. Hér er $A=C=0$ og $B=1$, svo $\cot 2\theta=(0-0)/1=0$ og $\theta=45°$.

Þegar graf keilusniðs með snúnum ásum er teiknað þarf að ákvarða stuðla keilusniðsins í snúna hnitakerfinu. Nýju stuðlarnir eru merktir $A',B',C',D',E',\text{og}\,F'$, og gefnir með formúlunum

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta \\ B' &= 0 \\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' &= D\cos\theta + E\sin\theta \\ E' &= -D\sin\theta + E\cos\theta \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Ferlið við að teikna keilusnið með snúnum ásum er þetta:

1. Ákvarðið gerð keilusniðsins með aðgreininum $4\,AC-B^2$.
2. Ákvarðið θ með formúlunni $\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}$.
3. Reiknið $A',B',C',D',E',\text{og}\,F'$.
4. Endurritið upphaflegu jöfnuna með $A',B',C',D',E',\text{og}\,F'$.
5. Teiknið graf með snúnu jöfnunni.

DÆMI 7.24

Gerð snúins keilusniðs ákvörðuð

Þekkið keilusniðið og reiknið snúningshorn ásanna fyrir ferilinn sem jafnan lýsir

$$13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 256 = 0.$$

Lausn

Í þessari jöfnu er $A = 13, B = -6\sqrt{3}, C = 7, D = 0, E = 0$, og $F = -256$. Aðgreinir jöfnunnar er $4AC - B^2 = 4(13)(7) - \left(-6\sqrt{3}\right)^2 = 364 - 108 = 256$. Keilusniðið er því sporbaugur.

Snúningshorn ásanna reiknum við með formúlunni $\cot 2\theta = \dfrac{A - C}{B}$. Þá fæst

$$\begin{aligned} \cot 2\theta &= \tfrac{A-C}{B} \\ &= \tfrac{13-7}{-6\sqrt{3}} \\ &= -\tfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Því er $2\theta = 120^\circ$ og $\theta = 60^\circ$, sem er snúningshorn ásanna.

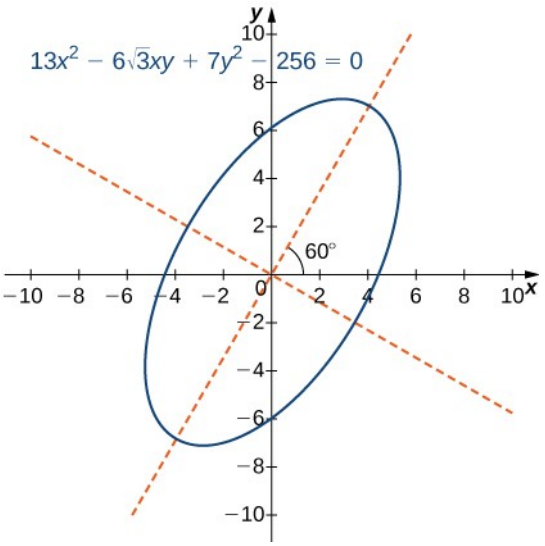
Notum formúlurnar hér að framan til að ákvarða stuðlana í snúna hnitakerfinu:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta \\ &= 13\cos^2 60 + \left(-6\sqrt{3}\right)\cos 60 \sin 60 + 7\sin^2 60 \\ &= 13\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 6\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 7\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 4, \\ B' &= 0, \\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ &= 13\sin^2 60 + \left(-6\sqrt{3}\right)\sin 60\cos 60 = 7\cos^2 60 \\ &= \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 6\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) + 7\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &= 16, \\ D' &= D\cos\theta + E\sin\theta \\ &= (0)\cos 60 + (0)\sin 60 \\ &= 0, \\ E' &= -D\sin\theta + E\cos\theta \\ &= -(0)\sin 60 + (0)\cos 60 \\ &= 0, \\ F' &= F \\ &= -256. \end{aligned}$$

Jafna keilusniðsins í snúna hnitakerfinu verður

$$\begin{aligned} 4(x')^2 + 16(y')^2 &= 256 \\ \tfrac{(x')^2}{64} + \tfrac{(y')^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

Graf keilusniðsins er sýnt hér á eftir.



Mynd 7.57 Graf sporbaugsins sem lýst er með jöfnunni $13\,x^2-6\sqrt{3}\,x\,y+7\,y^2-256=0$. Ásunum er snúið um $60°$. Rauðu strikalínurnar sýna snúnu ásana.

STÖÐUMAT 7.23

Þekkið keilusniðið og reiknið snúningshorn ásanna fyrir ferilinn sem jafnan lýsir

$$3\,x^2+5\,x\,y-2\,y^2-125=0.$$

Æfingar í kafla 7.5

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum jöfnu fleygbogans út frá gefnum upplýsingum.

255. Brennipunktur $(4\,,0)$ og stýrilína $x=-4$

256. Brennipunktur $(0\,,-3)$ og stýrilína $y=3$

257. Brennipunktur $(0\,;0{,}5)$ og stýrilína $y=-0{,}5$

258. Brennipunktur $(2\,,3)$ og stýrilína $x=-2$

259. Brennipunktur $(0\,,2)$ og stýrilína $y=4$

260. Brennipunktur $(-1\,,4)$ og stýrilína $x=5$

261. Brennipunktur $(-3\,,5)$ og stýrilína $y=1$

262. Brennipunktur $\left(\frac{5}{2},-4\right)$ og stýrilína $x=\frac{7}{2}$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum jöfnu sporbaugsins út frá gefnum upplýsingum.

263. Endapunktar langássins eru $(4\,,0),(-4\,,0)$ og brennipunktarnir $(2\,,0),(-2\,,0)$

264. Endapunktar langássins eru $(0\,,5),(0\,,-5)$ og brennipunktarnir $(0\,,3),(0\,,-3)$

265. Endapunktar skammássins eru $(0,2),(0,-2)$ og brennipunktarnir $(3,0),(-3,0)$

266. Endapunktar langássins eru $(-3,3),(7,3)$ og brennipunktarnir $(-2,3),(6,3)$

267. Endapunktar langássins eru $(-3,5),(-3,-3)$ og brennipunktarnir $(-3,3),(-3,-1)$

268. Endapunktar skammássins eru $(0,0),(0,4)$ og brennipunktarnir $(5,2),(-5,2)$

269. Brennipunktarnir eru $(2,0),(-2,0)$ og miðskekkjan $\frac{1}{2}$

270. Brennipunktarnir eru $(0,-3),(0,3)$ og miðskekkjan $\frac{3}{4}$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum jöfnu breiðbogans út frá gefnum upplýsingum.

271. Topppunktarnir eru $(5,0),(-5,0)$ og brennipunktarnir $(6,0),(-6,0)$

272. Topppunktarnir eru $(0,2),(0,-2)$ og brennipunktarnir $(0,3),(0,-3)$

273. Endapunktar þverássins eru $(0,3),(0,-3)$ og brennipunktarnir $(4,0),(-4,0)$

274. Topppunktarnir eru $(0,1),(6,1)$ og brennipunkturinn $(8,1)$

275. Topppunktarnir eru $(-2,0),(-2,-4)$ og brennipunkturinn $(-2,-8)$

276. Endapunktar þverássins eru $(3,2),(3,4)$ og brennipunkturinn $(3,7)$

277. Brennipunktarnir eru $(-6,0),(6,0)$ og miðskekkjan 3

278. $(0,10),(0,-10)$ og miðskekkjan $2{,}5$

Skoðið í eftirfarandi æfingum gefnu skauthnitajöfnurnar fyrir keilusnið. Ákvarðið miðskekkjuna og gerð keilusniðsins.

279.

$$r=\frac{-1}{1+\cos\theta}$$

280.

$$r=\frac{8}{2-\sin\theta}$$

281.

$$r=\frac{5}{2+\sin\theta}$$

282.

$$r=\frac{5}{-1+2\sin\theta}$$

283.

$$r=\frac{3}{2-6\sin\theta}$$

284.

$$r=\frac{3}{-4+3\sin\theta}$$

Finnið í eftirfarandi æfingum skauthnitajöfnu keilusniðsins sem hefur brennipunkt í upphafspunktinum og gefna miðskekkju og stýrilínu.

285.

$$\text{Stýrilína: } x=4\,;e=\frac{1}{5}$$

286.

$$\text{Stýrilína: } x=-4\,;e=5$$

287.

$$\text{Stýrilína: } y=2\,;e=2$$

288.

$$\text{Stýrilína: } y=-2\,;e=\frac{1}{2}$$

Teiknið í eftirfarandi æfingum skissu af grafi hvers keilusniðs.

289.

$$r=\frac{1}{1+\sin\theta}$$

290.

$$r=\frac{1}{1-\cos\theta}$$

291.

$$r=\frac{4}{1+\cos\theta}$$

292.

$$r=\frac{10}{5+4\sin\theta}$$

293.

$$r=\frac{15}{3-2\cos\theta}$$

294.

$$r=\frac{32}{3+5\sin\theta}$$

295.

$$r\left(2+\sin\theta\right)=4$$

296.

$$r=\frac{3}{2+6\sin\theta}$$

297.

$$r=\frac{3}{-4+2\sin\theta}$$

298.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

299.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

300.

$$4x^2+9y^2=36$$

301.

$$25x^2-4y^2=100$$

302.

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

303.

$$x^2=12y$$

304.

$$y^2=20x$$

305.

$$12x = 5y^2$$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvaða keilusniði hver jafna lýsir.

306.

$$xy = 4$$

307.

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$$

308.

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$$

309.

$$x^2 - xy + y^2 - 2 = 0$$

310.

$$34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$$

311.

$$52x^2 - 72xy + 73y^2 + 40x + 30y - 75 = 0$$

312. Spegill bílljóss hefur fleygbogalaga þversnið og ljósaperan er í brennipunktinum. Á skýringarmynd er jafna fleygbogans $x^2 = 4y$. Í hvaða hnitum á að koma ljósaperunni fyrir?

313. Gervihnattadiskur hefur lögun snúðfleygboga og móttakaranum á að koma fyrir í brennipunktinum. Ef op disksins er 1,2 m á breidd og diskurinn er 0,4 m á dýpt í miðjunni, hvar á þá að koma móttakaranum fyrir?

314. Skoðum gervihnattadiskinn í verkefninu á undan. Ef op disksins er 0,8 m á breidd og diskurinn 0,2 m á dýpt, hvar á þá að koma móttakaranum fyrir?

315. Leitarljós hefur lögun snúðfleygboga. Ljósgjafi er 0,2 m frá grunninum eftir samhverfuásnum. Ef op leitarljóssins er 1,2 m á breidd, finnið dýptina.

316. Hvíslaragallerí eru salir með sporöskjulaga lofti. Sá sem stendur í öðrum brennipunktinum getur hvíslað og sá sem stendur í hinum heyrir í honum, því allar hljóðbylgjur sem ná loftinu endurkastast að hinum brennipunktinum. Ef hvíslaragallerí er 40 m á lengd og brennipunktarnir eru 12 m frá miðjunni, finnið hæð loftsins í miðjunni.

317. Maður stendur 3 m frá næsta vegg í hvíslaragalleríi. Ef hann er í öðrum brennipunktinum og hinn brennipunkturinn er 24 m í burtu, hver eru lengd gallerísins og hæð þess í miðjunni?

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum skauthnitajöfnu brautar halastjörnu eða reikistjörnu út frá lengd langáss og miðskekkju brautarinnar. Fjarlægð er gefin í stjarnfræðieiningum (SE).

318. Halley-halastjarnan: lengd langáss = 35,88, miðskekkja = 0,967

319. Hale–Bopp-halastjarnan: lengd langáss = 525,91, miðskekkja = 0,995

320. Mars: lengd langáss = 3,049, miðskekkja = 0,0934

321. Júpíter: lengd langáss = 10,408, miðskekkja = 0,0484

Lykilhugtök

hornhnit
hornið θ sem línustrik frá upphafspunktinum að punkti í skauthnitakerfinu myndar við jákvæða skauthnitaásinn (x-ásinn), mælt rangsælis

hjartaferill
ferill í planinu sem punktur á jaðri hrings dregur upp þegar hringurinn rúllar utan um fastan hring með sama geisla; jafna hjartaferils er $r = a(1+\sin\theta)$ eða $r = a(1+\cos\theta)$

keilusnið
keilusnið er hver sá ferill sem myndast þegar plan sker tvíkeilu

oddur
hvass endi eða sá hluti þar sem tveir ferlar mætast

hjólferill
ferillinn sem punktur á jaðri hringlaga hjóls dregur upp þegar hjólið rúllar án þess að renna eftir beinni línu

stýrilína
stýrilína (fleirtala: stýrilínur) er lína sem er notuð til að mynda og skilgreina keilusnið; fleygbogi hefur eina stýrilínu en sporbaugar og breiðbogar hafa tvær

aðgreinir
gildið $4AC - B^2$, sem er notað til að ákvarða gerð keilusniðs þegar jafnan inniheldur lið með xy, kallast aðgreinir

miðskekkja
miðskekkja er fjarlægðin frá hvaða punkti sem er á keilusniðinu að brennipunkti þess, deilt með hornréttri fjarlægð sama punkts frá næstu stýrilínu

brennistiki
brennistiki er fjarlægðin frá brennipunkti keilusniðs að næstu stýrilínu

brennipunktur
brennipunktur (fleirtala: brennipunktar) er punktur sem er notaður til að mynda og skilgreina keilusnið; fleygbogi hefur einn brennipunkt en sporbaugur og breiðbogi hafa tvo

almennt form
jafna keilusniðs sem er rituð sem almenn annars stigs jafna

snigilferill
graf jöfnunnar $r = a + b\sin\theta$ eða $r = a + b\cos\theta$. Ef $a = b$ er graf jöfnunnar hjartaferill

langás
langás keilusniðs liggur gegnum topppunktinn ef keilusniðið er fleygbogi en gegnum báða topppunktana ef það er sporbaugur eða breiðbogi; hann er líka samhverfuás keilusniðsins og kallast einnig meginás

skammás
skammás er hornréttur á langásinn og sker hann í miðju keilusniðsins eða í topppunktinum ef keilusniðið er fleygbogi; hann kallast einnig þverás

keiluhelmingur
keiluhelmingur er annar helmingur tvíkeilu

stefna
sú átt sem punktur færist í eftir grafinu þegar stikinn vex

stiki
óháð breyta sem bæði x og y ráðast af á stikuðum ferli; hún er yfirleitt táknuð með breytunni t

stikun ferils
að umrita jöfnu ferils sem skilgreindur er með fallinu $y = f(x)$ yfir í stikajöfnur

stikaður ferill
graf stikajafnanna $x(t)$ og $y(t)$ á bilinu $a \le t \le b$, ásamt stikajöfnunum sjálfum

stikajöfnur
jöfnurnar $x = x(t)$ og $y = y(t)$ sem skilgreina stikaðan feril

skauthnitaás
lárétti ásinn í skauthnitakerfinu sem samsvarar $r \ge 0$

skauthnitakerfi
kerfi til að staðsetja punkta í planinu; hnitin eru r, geislahnitið, og θ, hornhnitið

skauthnitajafna
jafna eða fall sem tengir geislahnitið við hornhnitið í skauthnitakerfinu

skaut
miðpunktur skauthnitakerfisins, sem samsvarar upphafspunkti kartesísks hnitakerfis

geislahnit
r-hnitið í skauthnitakerfinu sem mælir fjarlægð punkts í planinu frá skautinu

rós
graf skauthnitajöfnunnar $r=a\cos 2\theta$ eða $r=a\sin 2\theta$ fyrir jákvæðan fasta a

rúmfyllandi ferill
ferill sem þekur að fullu tvívítt hlutmengi rauntalnaplansins

staðalform
jafna keilusniðs sem sýnir eiginleika þess, svo sem staðsetningu topppunktsins eða lengdir langáss og skammáss

topppunktur
topppunktur er útgildispunktur keilusniðs. Fleygbogi hefur einn topppunkt, þar sem ferillinn snýr við. Sporbaugur hefur tvo topppunkta, sinn við hvorn enda langássins, og breiðbogi hefur tvo topppunkta, sinn þar sem hvor grein snýr við

Lykiljöfnur

Afleiða stikajafna	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$
Önnur afleiða stikajafna	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(d/dt)(dy/dx)}{dx/dt}$
Flatarmál undir stikuðum ferli	$A=\int_a^b y(t)x'(t)\,dt$
Bogalengd stikaðs ferils	$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$
Yfirborðsflatarmál snúðflatar sem stikaður ferill myndar	$S=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$
Flatarmál svæðis sem skauthnitaferill afmarkar	$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$
Bogalengd skauthnitaferils	$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[f(\theta)]^2+[f'(\theta)]^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$

Lykilatriði

7.1 Stikajöfnur

- Stikajöfnur eru hentug leið til að lýsa ferli. Stiki getur táknað tíma eða aðra stærð sem hefur merkingu í viðfangsefninu.
- Oft er hægt að eyða stikanum úr stikuðum ferli og fá þannig fall eða vensl sem lýsa ferlinum.
- Feril er alltaf hægt að stika á fleiri en einn hátt.
- Stikajöfnur geta lýst flóknum ferlum sem erfitt eða jafnvel ómögulegt er að lýsa með kartesískum hnitum.

7.2 Stærðfræðigreining stikaðra ferla

- Afleiðu stikaða ferilsins $x=x(t)$ og $y=y(t)$ má reikna með formúlunni $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$. Með afleiðunni má finna jöfnu snertils við stikaðan feril.
- Flatarmál milli stikaðs ferils og x-áss má ákvarða með formúlunni $A=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$.
- Bogalengd stikaðs ferils má reikna með formúlunni $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$.
- Yfirborðsflatarmál snúðflatar sem myndast þegar ferlinum er snúið um x-ásinn er gefið með $S=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$. Ef ferlinum er snúið um y-ásinn er formúlan $S=2\pi\int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.

7.3 Skauthnit

- Skauthnitakerfið er önnur leið til að staðsetja punkta í planinu.
- Umritið punkta milli kartesískra hnita og skauthnita með formúlunum

  $x=r\cos\theta$ og $y=r\sin\theta$

  og

  $r=\sqrt{x^2+y^2}$ og $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

- Til að teikna skauthnitaferil út frá gefnu skauthnitafalli skal gera gildatöflu og nýta lotubundna eiginleika.
- Notið umritunarformúlurnar til að umrita jöfnur milli kartesískra hnita og skauthnita.
- Greinið samhverfu skauthnitaferla; hún getur verið um skautið, lárétta ásinn eða lóðrétta ásinn.

7.4 Flatarmál og bogalengd í skauthnitum

- Flatarmál svæðis í skauthnitum sem skilgreint er með jöfnunni $r=f(\theta)$ þar sem $\alpha\le\theta\le\beta$ er gefið með heildinu $A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$.
- Til að finna flatarmál milli tveggja ferla í skauthnitakerfinu skal fyrst finna skurðpunkta þeirra og draga síðan samsvarandi flatarmál frá hvort öðru.
- Bogalengd skauthnitaferils sem skilgreindur er með jöfnunni $r=f(\theta)$ þar sem $\alpha\le\theta\le\beta$ er gefin með heildinu $L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[f(\theta)\right]^2+\left[f'(\theta)\right]^2}\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$.

7.5 Keilusnið

- Jafna lóðrétts fleygboga á staðalformi með tiltekinn brennipunkt og stýrilínu er $y=\frac{1}{4p}(x-h)^2+k$ þar sem p er fjarlægðin frá topppunktinum að brennipunktinum og (h,k) eru hnit topppunktsins.
- Jafna lárétts sporbaugs á staðalformi er $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ þar sem miðjan hefur hnitin (h,k), langásinn hefur lengdina 2 a, skammásinn hefur lengdina 2 b og hnit brennipunktanna eru $(h\pm c,k)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$.
- Jafna lárétts breiðboga á staðalformi er $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ þar sem miðjan hefur hnitin (h,k), topppunktarnir eru í $(h\pm a,k)$, og hnit brennipunktanna eru $(h\pm c,k)$, þar sem $c^2=a^2+b^2$.
- Miðskekkja sporbaugs er minni en 1, miðskekkja fleygboga er jöfn 1 og miðskekkja breiðboga er meiri en 1. Miðskekkja hrings er 0.
- Skauthnitajafna keilusniðs með miðskekkju e er $r=\frac{ep}{1\pm e\cos\theta}$ eða $r=\frac{ep}{1\pm e\sin\theta}$, þar sem p táknar brennistika keilusniðsins.

- Til að ákvarða gerð keilusniðsins sem myndast af jöfnunni $A x^2+B x y+C y^2+D x+E y+F=0$, skal fyrst reikna aðgreininn $D=4AC-B^2$. Ef $D>0$ er keilusniðið sporbaugur, ef $D=0$ er keilusniðið fleygbogi og ef $D<0$ er keilusniðið breiðbogi.

Upprifjunardæmi

Satt eða ósatt? Rökstyðjið svar ykkar með sönnun eða gagndæmi.

322. Kartesísk hnit punktsins $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ eru $\left(2\sqrt{3}, -2\right)$.

323. Jöfnurnar $x=\cosh(3t)$, og $y=2\sinh(3t)$ lýsa breiðboga.

324. Bogalengd vefjunnar sem gefin er með $r=\frac{\theta}{2}$ fyrir $0\le\theta\le 3\pi$ er $\frac{9}{4}\pi^3$.

325. Ef $x=f(t)$ og $y=g(t)$, og $\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{dx}$, þá er $f(t)=g(t)+C$, þar sem C er fasti.

Teiknið í eftirfarandi æfingum stikaða ferilinn og eyðið stikanum til að finna kartesíska jöfnu hans.

326.

$$x=1+t,\ y=t^2-1,\ -1\le t\le 1$$

327.

$$x=e^t,\ y=1-e^{3t},\ 0\le t\le 1$$

328.

$$x=\sin\theta,\ y=1-\csc\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

329.

$$x=4\cos\phi,\ y=1-\sin\phi,\ 0\le\phi\le 2\pi$$

Teiknið í eftirfarandi æfingum skauthnitaferilinn og ákvarðið hvort hann sé samhverfur og þá hvernig.

330.

$$r=4\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

331.

$$r=5\cos(5\theta)$$

Finnið í eftirfarandi æfingum skauthnitajöfnu ferilsins sem gefinn er með kartesískri jöfnu.

332.

$$x+y=5$$

333.

$$y^2=4+x^2$$

Finnið í eftirfarandi æfingum jöfnu snertils við gefna ferilinn. Teiknið bæði fallið og snertil þess.

334.

$$x=\ln(t),\ y=t^2-1,\ t=1$$

335.

$$r=3+\cos(2\theta),\ \theta=\frac{3\pi}{4}$$

336. Finnið $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$, og $\frac{d^2x}{dy^2}$ fyrir $y=(2+e^{-t})$, og $x=1-\sin(t)$

Finnið í eftirfarandi æfingum flatarmál svæðisins.

337.

$$x=t^2,\ y=\ln(t),\ 0\le t\le e$$

338. $r=1-\sin\theta$ í fyrsta fjórðungi

Finnið í eftirfarandi æfingum bogalengd ferilsins á gefna bilinu.

339.

$$x=3t+4,\ y=9t-2,\ 0\le t\le 3$$

340. $r=6\cos\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$. Sannreynið svarið með rúmfræðilegum rökum.

Finnið í eftirfarandi æfingum kartesísku jöfnurnar sem lýsa gefnu formunum.

341. Fleygbogi með brennipunktinn $(2,-5)$ og stýrilínuna $x=6$

342. Sporbaugur með langás að lengd 10 og brennipunkta í $(-7,2)$ og $(1,2)$

343. Breiðbogi með topppunkta í $(-2,3)$ og $(-2,-5)$ og brennipunkta í $(-2,-6)$ og $(-2,4)$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum miðskekkjuna og gerð keilusniðsins. Teiknið keilusniðið.

344.

$$r=\frac{6}{1+3\cos(\theta)}$$

345.

$$r=\frac{4}{3-2\cos\theta}$$

346.

$$r = \frac{7}{5 - 5\cos\theta}$$

347. Ákvarðið kartesísku jöfnuna sem lýsir braut Plútós, sem hefur mesta miðskekkju allra brauta um sólina. Lengd langássins er 39,26 stjarnfræðieiningar (SE) og skammássins 38,07 stjarnfræðieiningar. Hver er miðskekkjan?

348. Halastjarnan C/1980 E1 sást árið 1980. Miðskekkjan er 1,057 og sólnándin (sá punktur brautarinnar sem er næstur sólinni) er 3,364 SE. Finnið kartesískar jöfnur sem lýsa braut halastjörnunnar. Er öruggt að við sjáum þessa halastjörnu aftur? (Vísbending: Gerið ráð fyrir að sólin sé í punktinum $(0, 0)$.)

Viðauki A Heildistafla

Grunnheildi

1. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
3. $\int e^u\,du = e^u + C$
4. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
7. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$
8. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
9. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$
10. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$
11. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$
12. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
13. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
14. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$
16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$
17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

Heildi hornafalla

18. $\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$
19. $\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$
20. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$
21. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$
22. $\int \sin^3 u\,du = -\frac{1}{3}\left(2 + \sin^2 u\right)\cos u + C$
23. $\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right)\sin u + C$

A

24. $\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

25. $\int \cot^3 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

26.

$$\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$$

27.

$$\int \csc^3 u\,du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$$

28.

$$\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du$$

29.

$$\int \cos^n u\,du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\,du$$

30.

$$\int \tan^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\,du$$

31.

$$\int \cot^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\,du$$

32.

$$\int \sec^n u\,du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\,du$$

33.

$$\int \csc^n u\,du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\,du$$

34.

$$\int \sin au \sin bu\,du = \frac{\sin\left((a-b)u\right)}{2(a-b)} - \frac{\sin\left((a+b)u\right)}{2(a+b)} + C$$

35.

$$\int \cos au \cos bu\,du = \frac{\sin\left((a-b)u\right)}{2(a-b)} + \frac{\sin\left((a+b)u\right)}{2(a+b)} + C$$

36.

$$\int \sin au \cos bu\,du = -\frac{\cos\left((a-b)u\right)}{2(a-b)} - \frac{\cos\left((a+b)u\right)}{2(a+b)} + C$$

37. $\int u \sin u\,du = \sin u - u\cos u + C$

38. $\int u \cos u\,du = \cos u + u\sin u + C$

39.

$$\int u^n \sin u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du$$

40.

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$$

41.

$$\begin{aligned}\int \sin^n u \cos^m u\,du &= -\tfrac{\sin^{n-1}u\cos^{m+1}u}{n+m} + \tfrac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}u\cos^m u\,du \\ &= \tfrac{\sin^{n+1}u\cos^{m-1}u}{n+m} + \tfrac{m-1}{n+m}\int \sin^n u\cos^{m-2}u\,du\end{aligned}$$

Heildi vísis- og lografalla

42. $\int u e^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

43.

$$\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$$

44.

$$\int e^{au}\sin bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu - b\cos bu) + C$$

45.

$$\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\sin bu) + C$$

46. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

47. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\left[(n+1)\ln u - 1\right] + C$

48. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln\left|\ln u\right| + C$

Heildi breiðbogafalla

49. $\int \sinh u\,du = \cosh u + C$

50. $\int \cosh u\,du = \sinh u + C$

51. $\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$
52. $\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + C$
53. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\sinh u| + C$
54. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh\frac{1}{2}u\right| + C$
55. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$
56. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$
57. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$
58. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

Heildi andhverfra hornafalla

59. $\int \sin^{-1} u\,du = u\sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
60. $\int \cos^{-1} u\,du = u\cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
61.

$$\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + C$$

62.

$$\int u\sin^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

63.

$$\int u\cos^{-1} u\,du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

64. $\int u\tan^{-1} u\,du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
65.

$$\int u^n \sin^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$$

66.

$$\int u^n \cos^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$$

67.

$$\int u^n \tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], n \neq -1$$

Heildi sem innihalda $a^2 + u^2$, $a > 0$

68.

$$\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

69.

$$\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}\left(a^2+2u^2\right)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

70.

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right|+C$$

71.

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

72. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$

73.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\left(\sqrt{a^2+u^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right)+C$$

74. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right|+C$

75. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u}+C$

76. $\displaystyle\int \frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}}+C$

Heildi sem innihalda $u^2 - a^2$, $a > 0$

77.

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

78.

$$\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

79. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

80.

$$\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

81. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

82.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$$

83. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u} + C$

84a. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

84b. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Heildi sem innihalda $a^2 - u^2$, $a > 0$

85. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

86.

$$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

87.

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$$

88. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

89.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

90. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

91. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2 u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

92.

$$\int \left(a^2-u^2\right)^{3/2} du = -\frac{u}{8}\left(2u^2-5a^2\right)\sqrt{a^2-u^2}+\frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C$$

93a. $\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$

93b. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|+C$

Heildi sem innihalda 2au – u², a > 0

94.

$$\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$$

95. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$

96.

$$\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2}+\frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right)+C$$

97. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+C$

Heildi sem innihalda a + bu, a ≠ 0

98. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a+bu-a\ln|a+bu|\right)+C$

99.

$$\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2-4a(a+bu)+2a^2\ln|a+bu|\right]+C$$

100. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|+C$

101. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

102.

$$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)}+\frac{1}{b^2}\ln|a+bu|+C$$

103.

$$\int \frac{u\,du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

104.

$$\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$$

105. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$

106. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$

107.

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$$

108.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{ef } a>0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \quad \text{ef } a<0$$

109. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

110. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

111.

$$\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$$

112.

$$\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$$

113.

$$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

Viðauki B Afleiðutafla

Almennar formúlur

1. $\frac{d}{dx}(c)=0$
2. $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=f'(x)+g'(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}(x^n)=n\,x^{n-1}$, fyrir rauntölur n
5. $\frac{d}{dx}(c\,f(x))=c\,f'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=f'(x)-g'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8. $\frac{d}{dx}[f(g(x))]=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Hornaföll

9. $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$
10. $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$
12. $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$
13. $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$
14. $\frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

B

Andhverf hornaföll

15. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

18. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2}$

20. $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Vísis- og lograföll

21. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$

22. $\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)=\frac{1}{x}$

23. $\frac{d}{dx}\left(b^x\right)=b^x\ln b$

24. $\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right)=\frac{1}{x\ln b}$

Breiðbogaföll

25. $\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)=\cosh x$

26. $\frac{d}{dx}\left(\tanh x\right)=\operatorname{sech}^2 x$

27. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech} x\right)=-\operatorname{sech} x\tanh x$

28. $\frac{d}{dx}\left(\cosh x\right)=\sinh x$

29. $\frac{d}{dx}\left(\coth x\right)=-\operatorname{csch}^2 x$

30. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch} x\right)=-\operatorname{csch} x\coth x$

Andhverf breiðbogaföll

31. $\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

32. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(|x|<1\right)$

33. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\left(0<x<1\right)$

34. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(x>1\right)$

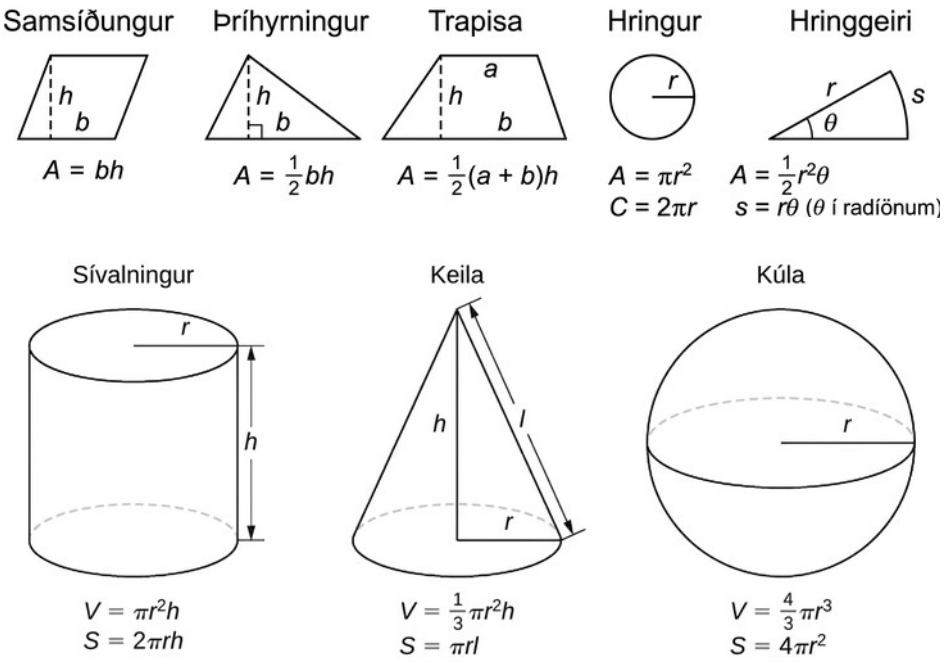
35. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(|x|>1\right)$

36. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1}x\right)=-\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\left(x\neq 0\right)$

Viðauki C Upprifjun fyrir stærðfræðigreiningu

Formúlur úr rúmfræði

$A =$ flatarmál, $V =$ rúmmál, og $S =$ hliðarflatarmál



Formúlur úr algebru

Veldisreglur

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Sérstakar þáttanir

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Lausnarformúla annars stigs

Ef $ax^2+bx+c=0$, þá er $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Tvíliðusetningin

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n,$$

þar sem $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

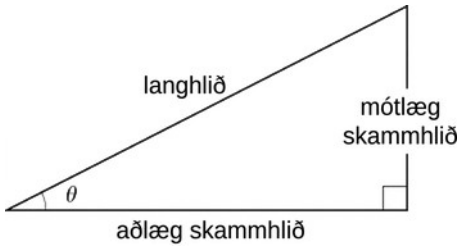
Formúlur úr hornafræði

Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningum

$$\sin\theta = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{langhlið}}{\text{mótlæg skammhlið}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{langhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{mótlæg skammhlið}}$$



Hornaföll mikilvægra horna

θ	Radíanar	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$45°$	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$60°$	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\pi/2$	1	0	—

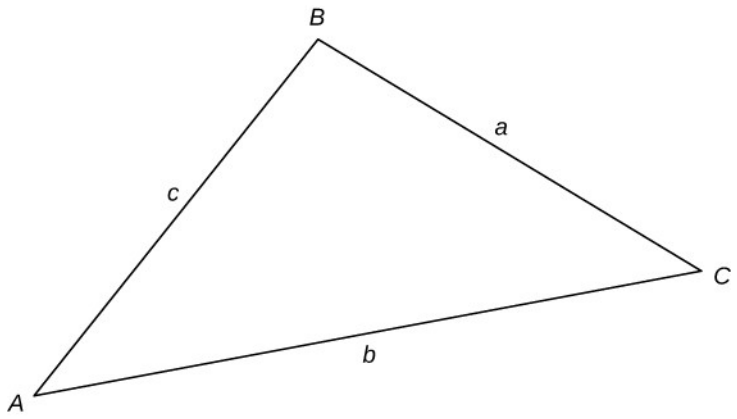
Grundvallarsamsemdir

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 & \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
1 + \tan^2\theta &= \sec^2\theta & \cos(-\theta) &= \cos\theta \\
1 + \cot^2\theta &= \csc^2\theta & \tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\theta & \sin(\theta + 2\pi) &= \sin\theta \\
\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\theta & \cos(\theta + 2\pi) &= \cos\theta \\
\tan\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot\theta & \tan(\theta + \pi) &= \tan\theta
\end{aligned}$$

Sínusreglan

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

C



Kósínusreglan

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Samlagningar- og frádráttarformúlur

$$\begin{aligned} \sin{(x+y)} &= \sin x\cos y + \cos x\sin y \\ \sin{(x-y)} &= \sin x\cos y - \cos x\sin y \\ \cos{(x+y)} &= \cos x\cos y - \sin x\sin y \\ \cos{(x-y)} &= \cos x\cos y + \sin x\sin y \\ \tan{(x+y)} &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} \\ \tan{(x-y)} &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} \end{aligned}$$

Tvöföldunarformúlur

$$\begin{aligned} \sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

Helmingunarformúlur

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \end{aligned}$$

C

Svarlykill

Kafli 1

Stöðumat

1.1

$$\sum_{i=3}^{6} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 120$$

1.2

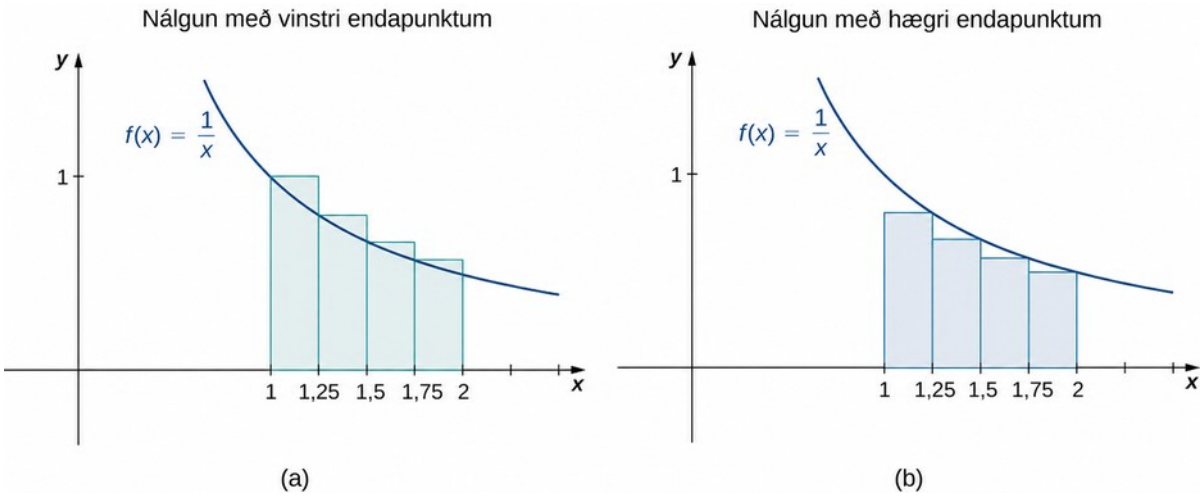
15.550

1.3

440

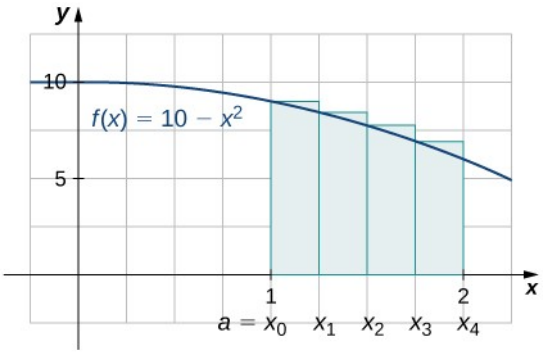
1.4

Nálgunin með vinstri endapunktum er 0,7595. Nálgunin með hægri endapunktum er 0,6345.



1.5

a. Efri summa $= 8{,}0313$.



1.6

$$A \approx 1{,}125$$

1.7

6

1.8

18 flatarmálseiningar

1.9

6

1.10

18

1.11

$$6\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 3\,dx$$

1.12

-7

1.13

3

1.14

$$\text{Meðalgildi} = 1{,}5\,;\, c = 3$$

1.15

$$c = \sqrt{3}$$

1.16

$$g'(r) = \sqrt{r^2+4}$$

1.17

$$F'(x) = 3x^2 \cos x^3$$

1.18

$$F'(x) = 2x \cos x^2 - \cos x$$

1.19

$$\frac{7}{24}$$

1.20

Kathy vinnur enn, en með mun meiri yfirburðum: James skautar 12,6 metra á 3 sekúndum en Kathy skautar 14,3634 metra á 3 sekúndum.

1.21

$$-\frac{10}{3}$$

1.22

Nettófærsla: $\frac{e^2-9}{2} \approx -0{,}8055$ m; heildarvegalengd: $4 \ \ln \ 4 - 7{,}5 + \frac{e^2}{2} \approx 1{,}740$ m

1.23

17,5 km

1.24

$$\frac{64}{5}$$

1.25

$$\int 3x^2\left(x^3-3\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x^3-3\right)^3 + C$$

1.26

$$\frac{\left(x^3+5\right)^{10}}{30} + C$$

1.27

$$-\frac{1}{\sin t} + C$$

1.28

$$-\frac{\cos^4 t}{4} + C$$

1.29

$$\frac{91}{3}$$

1.30

$$\frac{2}{3\pi} \approx 0{,}2122$$

1.31

$$\int x^2 e^{-2x^3}\,dx = -\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$$

1.32

$$\int e^x\left(3e^x - 2\right)^2 dx = \frac{1}{9}\left(3e^x - 2\right)^3$$

1.33

$$\int 2x^3 e^{x^4}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^4}$$

1.34

$$\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\,du = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$$

1.35

$Q(t) = \frac{2^t}{\ln 2} + 8{,}557$. Eftir 3 klukkustundir eru 20,099 bakteríur í skálinni.

1.36

Flugurnar eru 116 talsins.

1.37

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{4x^{-2}}\,dx = \frac{1}{8}\left[e^4 - e\right]$$

1.38

$$\ln|x+2| + C$$

1.39

$$\frac{x}{\ln 3}\left(\ln x - 1\right) + C$$

1.40

$$\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(4x\right) + C$$

1.41

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

1.42

$$\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right)+C$$

1.43

$$\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

1.44

$$\frac{\pi}{8}$$

Æfingar í kafla 1.1

1. a. Þær eru jafnar; báðar tákna summu fyrstu 10 heilu talnanna. b. Þær eru jafnar; báðar tákna summu fyrstu 10 heilu talnanna. c. Þær eru jafnar þegar $j=i-1$. er sett inn. d. Þær eru jafnar; með því að taka sameiginlegan þátt út fyrir sviga í fyrri summunni fást liðir seinni summunnar.

3.

$$385-30=355$$

5.

$$15-(-12)=27$$

7.

$$5(15)+4(-12)=27$$

9.

$$\sum_{j=1}^{50} j^2-2\sum_{j=1}^{50} j=\frac{(50)(51)(101)}{6}-\frac{2(50)(51)}{2}=40,375$$

11.

$$4\sum_{k=1}^{25} k^2-100\sum_{k=1}^{25} k=\frac{4(25)(26)(51)}{6}-50(25)(26)=-10,400$$

13.

$$R_4=-0,25$$

15.

$$R_6=0,372$$

17.

$$L_4 = 2{,}20$$

19.

$$L_8 = 0{,}6875$$

21. $L_6 = 9{,}000 = R_6$. Graf f myndar þríhyrning með flatarmálið 9.

23. $L_6 = 13{,}12899 = R_6$. Þær eru jafnar.

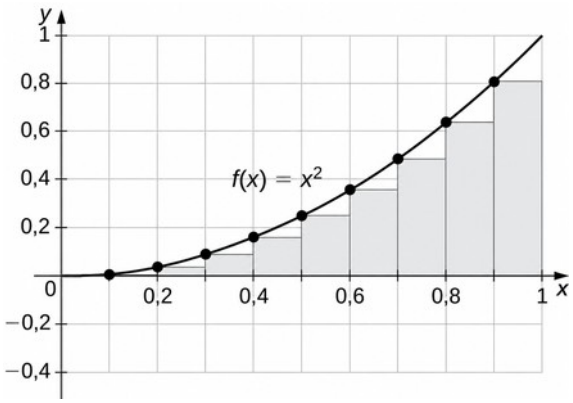
25.

$$L_{10} = \frac{4}{10}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{4-\left(-2+4\frac{(i-1)}{10}\right)^2}$$

27.

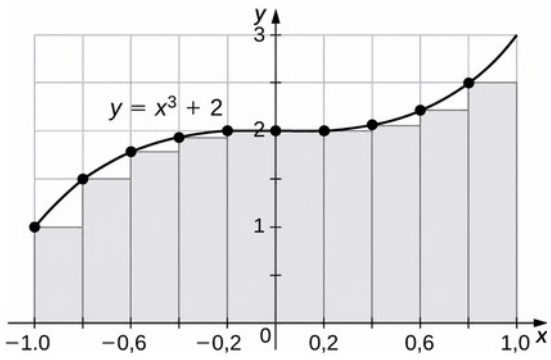
$$R_{100} = \frac{e-1}{100}\sum_{i=1}^{100}\ln\left(1+(e-1)\frac{i}{100}\right)$$

29.



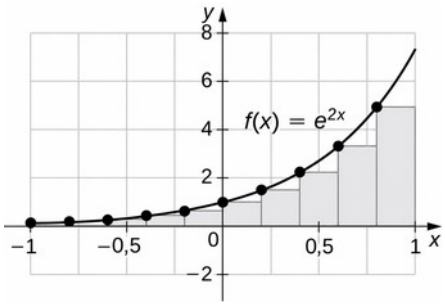
$R_{100} = 0{,}33835$, $L_{100} = 0{,}32835$. Grafið sýnir að vinstri Riemann-summan er vanmat þar sem fallið er vaxandi. Á sama hátt er hægri Riemann-summan ofmat. Flatarmálið liggur á milli vinstri og hægri Riemann-summunnar. Tíu rétthyrningar eru sýndir til glöggvunar. Sama hegðun helst þegar rétthyrningunum fjölgar.

31.



$L_{100}=3{,}980$, $R_{100}=4{,}020$, $R_{100}>L_{100}$. Summan með vinstri endapunktum er vanmat þar sem fallið er vaxandi. Á sama hátt er nálgun með hægri endapunktum ofmat. Flatarmálið liggur á milli nálgananna með vinstri og hægri endapunktum.

33.



$L_{100}=3{,}555$, $R_{100}=3{,}670$ Grafið sýnir að vinstri Riemann-summan er vanmat þar sem fallið er vaxandi. Tíu rétthyrningar eru sýndir til glöggvunar. Sama hegðun helst þegar rétthyrningunum fjölgar.

35. Summan táknar uppsafnaða úrkomu í janúar 2009.

37. Heildarvegalengdin er

$$7\times\sum_{i=1}^{25}\left(1+\frac{(i-1)}{10}\right)=7\times 25+\frac{7}{10}\times 12\times 25=385\,\text{km}.$$

39. Leggið tölurnar saman og fáið 206 mm heildarhækkun.

41. 309.389.957

43.

$$L_8=3+2+1+2+3+4+5+4=24$$

45.

$$L_8=3+5+7+6+8+6+5+4=44$$

47.

$$L_{10} \approx 1{,}7604\,,\ L_{30} \approx 1{,}7625\,,\ L_{50} \approx 1{,}76265$$

49. $R_1 = -1\,, L_1 = 1\,, R_{10} = -0{,}1\,, L_{10} = 0{,}1\,, L_{100} = 0{,}01$, og $R_{100} = -0{,}01$. Vegna samhverfu grafsins er nákvæma flatarmálið núll.

51.

$$R_1 = 0\,, L_1 = 0\,, R_{10} = 2{,}4499\,, L_{10} = 2{,}4499\,, R_{100} = 2{,}1365\,, L_{100} = 2{,}1365$$

53. Ef $[c\,, d]$ er hlutbil af $[a\,, b]$ undir einum rétthyrningi summunnar með vinstri endapunktum, þá er flatarmál rétthyrningsins sem leggur til nálgunarinnar $f(c)(d-c)$. En $f(c) \le f(x)$ þegar $c \le x \le d$, svo flatarmálið undir grafi f milli c og d er $f(c)(d-c)$ að viðbættu jákvæðu flatarmáli neðan við graf f en ofan við lárétta línustrikið í hæðinni $f(c)$, Þar sem þetta gildir á hverju hlutbili summunnar með vinstri endapunktum er vinstri Riemann-summan minni en eða jöfn flatarmálinu undir grafi f á $[a\,, b]$.

55. $L_N = \dfrac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b-a)\dfrac{i-1}{N}\right) = \dfrac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + (b-a)\dfrac{i}{N}\right)$ og $R_N = \dfrac{b-a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b-a)\dfrac{i}{N}\right)$. Vinstri summan hefur lið sem samsvarar $i = 0$ og hægri summan lið sem samsvarar $i = N$. Í $R_N - L_N$, kemur sérhver liður sem samsvarar $i = 1\,, 2\,, \ldots\,, N-1$ einu sinni fyrir með plúsmerki og einu sinni með mínusmerki, svo allir slíkir liðir styttast út og eftir stendur

$$R_N - L_N = \frac{b-a}{N}\left(f\left(a + (b-a)\frac{N}{N}\right) - \left(f(a) + (b-a)\frac{0}{N}\right)\right) = \frac{b-a}{N}\left(f(b) - f(a)\right).$$

57. Graf 1: a. $L(A) = 0\,, B(A) = 20$; b. $U(A) = 20$. Graf 2: a. $L(A) = 9$; b. $B(A) = 11\,, U(A) = 20$. Graf 3: a. $L(A) = 11{,}0$; b. $B(A) = 4{,}5\,, U(A) = 15{,}5$.

59. Látum A tákna flatarmál einingarhringsins. Hringurinn umlykur n eins þríhyrninga sem hver hefur flatarmálið $\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$, svo $\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\leq A$. Á sama hátt er hringurinn innan n eins þríhyrninga sem hver hefur flatarmálið $\frac{BH}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, svo $A\leq\frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2$. Þar sem $n\to\infty, \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)}A\to\pi$, ályktum við að $\pi\leq A$. Þar sem einnig $n\to\infty, \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\to 1$, fáum við jafnframt $A\leq\pi$. Af klemmureglunni fyrir markgildi ályktum við að $A=\pi$.

Æfingar í kafla 1.2

61.

$$\int_0^2\left(5x^2-3x^3\right)dx$$

63.

$$\int_0^1\cos^2\left(2\pi x\right)dx$$

65.

$$\int_0^1 x\,dx$$

67.

$$\int_3^6 x\,dx$$

69.

$$\int_1^2 x\log\left(x^2\right)dx$$

71.

$$1+2\cdot 2+3\cdot 3=14$$

73.

$$1-4+9=6$$

75.

$$1-2\pi+9=10-2\pi$$

77. Heildið er flatarmál þríhyrningsins, $\frac{1}{2}$

79. Heildið er flatarmál þríhyrningsins, 9.

81. Heildið er flatarmálið $\frac{1}{2}\pi r^2=2\pi$.

83. Heildið er flatarmál „stóra“ þríhyrningsins að frádregnu flatarmáli þríhyrningsins sem „vantar“, $9-\frac{1}{2}$.

85.

$$L=2+0+10+5+4=21, R=0+10+10+2+0=22, \frac{L+R}{2}=21{,}5$$

87.

$$L=0+4+0+4+2=10, R=4+0+2+4+0=10, \frac{L+R}{2}=10$$

89.

$$\int_2^4 f(x)\,dx+\int_2^4 g(x)\,dx=8-3=5$$

91.

$$\int_2^4 f(x)\,dx-\int_2^4 g(x)\,dx=8+3=11$$

93.

$$4\int_2^4 f(x)\,dx-3\int_2^4 g(x)\,dx=32+9=41$$

95. Heildisstofninn er oddstætt fall; heildið er núll.

97. Heildisstofninn er andsamhverfur um $x=3$. Heildið er núll.

99.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

101.

$$\int_0^1 \left(1-6x+12x^2-8x^3\right)dx=\left(x-3x^2+4x^3-2x^4\right)=(1-3+4-2)(0-0+0-0)=0$$

103.

$$7-\frac{5}{4}=\frac{23}{4}$$

105. Heildisstofninn er neikvæður á $[-2,3]$.

107. $x\le x^2$ á $[1,2]$, svo $\sqrt{1+x}\le\sqrt{1+x^2}$ á $[1,2]$.

109. $\cos(t)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$. Margfaldið með lengd bilsins til að fá ójöfnuna.

111.

$$f_{\text{ave}}=0\,;c=0$$

113. $\frac{3}{2}$ þegar $c=\pm\frac{3}{2}$

115.

$$f_{\text{ave}}=0\,;c=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

117. $L_{100}=1{,}294$, $R_{100}=1{,}301$; nákvæma meðaltalið liggur milli þessara gilda.

119.

$$L_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5178,\ R_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5294$$

121. $L_1=0$, $L_{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)=8{,}743493$, $L_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=12{,}861728$. Nákvæma svarið er $\approx 26{,}799$, svo L_{100} er ekki nægilega nákvæmt.

123. $L_1\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=1{,}352$, $L_{10}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}1837$, $L_{100}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}2956$. Nákvæma svarið er $\approx -0{,}303$, svo L_{100} er ekki nákvæmt upp á einn aukastaf.

125. Notið $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$. Þá fæst $B-A=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}1\,dx=\frac{\pi}{2}$.

127. $\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\pi$, svo deila skal með lengdinni 2π á bilinu. $\cos^2 t$ hefur lotuna π, svo fullyrðingin er sönn.

129. Heildið verður stærst þegar notað er stærsta bilið þar sem p er ekki neikvætt. Því er $A=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ og $B=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

131. Ef $f(t_0)>g(t_0)$ fyrir eitthvert $t_0\in[a,b]$, þá er $f-g$ samfellt og því er til bil um t_0 þar sem $f(t)>g(t)$ á bilinu $[c,d]$, þá er $\int_d^d f(t)\,dt>\int_c^d g(t)\,dt$ á þessu bili.

133.

Heildi f yfir bil er jafnt heildi meðalgildis f yfir sama bil. Því er

$$\int_a^b f(t)dt=\int_{a_0}^{a_1} f(t)dt+\int_{a_1}^{a_2} f(t)dt+\cdots+\int_{a_{N+1}}^{a_N} f(t)dt=\int_{a_0}^{a_1} 1dt+\int_{a_1}^{a_2} 1dt+\cdots+\int_{a_{N+1}}^{a_N} 1dt$$
$$=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_N-a_{N-1})=a_N-a_0=b-a.$$

Þegar deilt er í gegn með $b-a$ fæst umbeðin jafna.

135.

$$\int_0^N f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{N}\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{N} i^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

137. $L_{10}=1{,}815$, $R_{10}=1{,}515$, $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}=1{,}665$, svo matið er nákvæmt upp á tvo aukastafi.

139. Meðaltalið er $1/2$, sem í þessu tilviki er jafnt heildinu.

141. a. Grafið er andsamhverft um $t=\frac{1}{2}$ á $[0,1]$, svo meðalgildið er núll. b. Fyrir sérhvert gildi á a er grafið á $[a,a+1]$ hliðrun á grafinu á $[0,1]$, nettóflatarmálið ofan og neðan við ásinn breytist því ekki og meðalgildið helst núll.

143. Já, heildið er hið sama yfir sérhvert bil af lengdinni 1.

Æfingar í kafla 1.3

145. Já. Það leiðir af meðalgildissetningunni fyrir heildi.

147. $F'(2)=-1$; meðalgildi F' á $[1,2]$ er $-1/2$.

149.

$$e^{\cos x}$$

151.

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$$

153.

$$\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2}$$

155.

$$-\sqrt{1-\cos^2 x}\,\frac{d}{dx}\cos x = |\sin x|\sin x$$

157.

$$2x\,\frac{|x|}{1+x^2}$$

159.

$$\ln\left(e^{2x}\right)\frac{d}{dx}e^x = 2x\,e^x$$

161. a. f er jákvætt á $(1,2)$ og $(5,6)$, neikvætt á $(0,1)$ og $(3,4)$, og núll á $(2,3)$ og $(4,5)$. b. Hámarksgildið er 2 og lágmarksgildið er −3. c. Meðalgildið er 0.

163. a. f er jákvætt á $(0,1)$ og $(3,6)$, og neikvætt á $(1,3)$. b. Það er vaxandi á $(0,1)$ og $(3,5)$, og fast á $(1,3)$ og $(5,6)$. c. Meðalgildið er $\frac{1}{3}$.

165.

$$T_{10} = 49{,}08,\ \int_{-4}^{3}\left(x^3+6x^2+x-5\right)dx = 48$$

167.

$$T_{10} = 260{,}836,\ \int_{1}^{9}\left(\sqrt{x}+x^2\right)dx = 260$$

169.

$$T_{10} = 3{,}058,\ \int_{1}^{4}\frac{4}{x^2}\,dx = 3$$

171.

$$F(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-5x,\ F(3)-F(-2) = -\frac{35}{6}$$

173.

$$F(x) = -\frac{t^5}{5}+\frac{13t^3}{3}-36t,\ F(3)-F(2) = \frac{62}{15}$$

175.

$$F(x) = \frac{x^{100}}{100},\ F(1)-F(0) = \frac{1}{100}$$

177.

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}, F(4)-F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1125}{64}$$

179.

$$F(x)=\sqrt{x}, F(4)-F(1)=1$$

181.

$$F(x)=\frac{4}{3}t^{3/4}, F(16)-F(1)=\frac{28}{3}$$

183.

$$F(x)=-\cos x, F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=1$$

185.

$$F(x)=\sec x, F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)=\sqrt{2}-1$$

187.

$$F(x)=-\cot(x), F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

189.

$$F(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}, F(-1)-F(-2)=\frac{7}{8}$$

191.

$$F(x)=e^x-e$$

193.

$$F(x)=0$$

195.

$$\int_{-2}^{-1}\left(t^2-2t-3\right)dt-\int_{-1}^{3}\left(t^2-2t-3\right)dt+\int_{3}^{4}\left(t^2-2t-3\right)dt=\frac{46}{3}$$

197.

$$-\int_{-\pi/2}^{0}\sin t\,dt+\int_{0}^{\pi/2}\sin t\,dt=2$$

199. a. Meðaltalið er $42{,}4\times10^9$ lítrar á mánuði þar sem $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ hefur lotuna 12 og heildið 0 yfir hverja lotu. Neyslan er jöfn meðaltalinu þegar $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=0$, þegar $t=3$, og þegar $t=9$. b. Heildarneyslan er meðalhraðinn margfaldaður með tímalengdinni: $42{,}4\times12\times10^9=5{,}09\times10^{11}$. c.

$$10^9\left(42{,}4-\frac{3{,}8}{6}\int_3^9\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)dt\right)=10^9\left(42{,}4+\frac{7{,}6}{\pi}\right)=44{,}82\times10^9$$

201. Ef f er ekki fast fall er meðalgildi þess stranglega minna en hámarksgildið og stærra en lágmarksgildið. Samkvæmt útgildissetningunni er báðum útgildunum náð á $[a,b]$.

203. a. $d^2\theta=(a\cos\theta+c)^2+b^2\sin^2\theta=a^2+c^2\cos^2\theta+2ac\cos\theta=(a+c\cos\theta)^2$; b. $\bar{d}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a+c\cos\theta)\,d\theta=a$

205. Meðalþyngdarkraftur = $\frac{GmM}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(a+2\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta\right)^2}d\theta$.

Æfingar í kafla 1.4

207.

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int x^{1/2}dx-\int x^{-1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}+C_1-2x^{1/2}+C_2=\frac{2}{3}x^{3/2}-2x^{1/2}+C$$

209.

$$\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C$$

211.

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx-\int_0^{\pi}\cos x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}-(\sin x)\Big|_0^{\pi}=(-(-1)+1)-(0-0)=2$$

213. $P(s)=4s$, svo $\frac{dP}{ds}=4$ og $\int_2^4 4\,ds=8$.

215.

$$\int_1^2 N\,ds=N$$

217. Látum p hafa sömu merkingu og í dæminu á undan. Flatarmál hvers hinna 12 fimmhyrninga eykst úr 2 p í 4 p ferningseiningar, svo nettóaukning flatarmáls tólfflötungsins er 36 p ferningseiningar.

219.

$$18s^2 = 6\int_s^{2s} 2x\,dx$$

221.

$$12\pi R^2 = 8\pi\int_R^{2R} r\,dr$$

223. $d(t) = \int_0^t v(s)\,ds = 4t - t^2$. Heildarvegalengdin er $d(2) = 4\,\text{m}$.

225. $d(t) = \int_0^t v(s)\,ds$. Þegar $t < 3$, $d(t) = \int_0^t (6-2t)\,dt = 6t - t^2$. Þegar $t > 3$, $d(t) = d(3) + \int_3^t (2t-6)\,dt = 9 + \left(t^2 - 6t\right)\Big|_3^6$. Heildarvegalengdin er $d(6) = 18\,\text{m}$.

227. $v(t) = 40 - 9{,}8t\ \text{m/sec}\,;\ h(t) = 1{,}5 + 40t - 4{,}9t^2\ \text{m/s}$

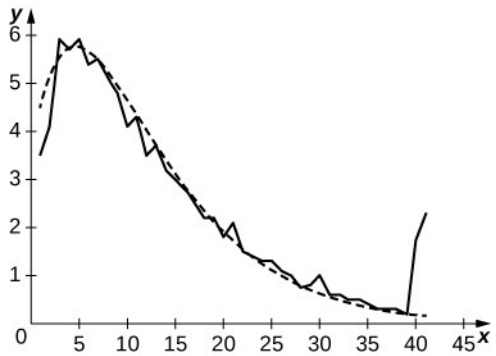
229. Nettóaukningin er 1 eining.

231. Þegar $t = 5$, er vatnshæðin $x = \left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}\,\text{m}$.. Nettóbreyting hæðarinnar frá $t = 5$ til $t = 10$ er $\left(\frac{30}{\pi}\right)^{1/3} - \left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}\,\text{m}$.

233. Heildarorkunotkun dagsins er metin sem summa aflsins á hverri klukkustund, eða 911 GW-klst.

235. 17 kJ

237. a. 54,3%; b. 27,00%; c. Ferillinn á grafinu hér á eftir er $2{,}35(t+3)e^{-0{,}15(t+3)}$.



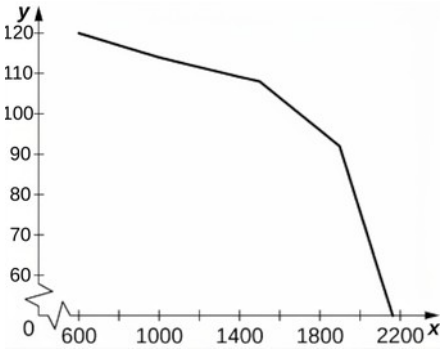
239. Við þurrar aðstæður, með upphafshraðann $v_0 = 30$ m/s, er $D = 64{,}3$ og þegar $v_0 = 25$, $D = 44{,}64$. Við blautar aðstæður gildir fyrir $v_0 = 30$, að $D = 180$ og fyrir $v_0 = 25$, $D = 125$.

241. 225 kal

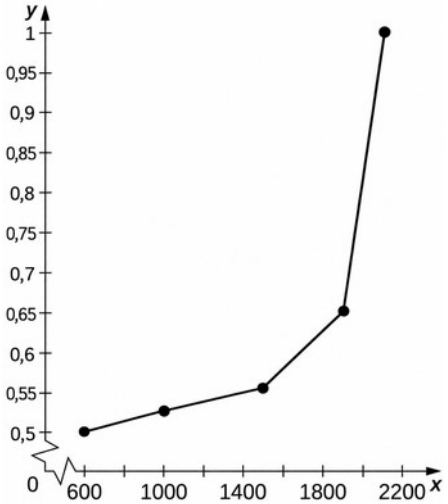
243.

$$E(100) = 12{,}8,\ E(200) = 10{,}8,\ E(300) = 8{,}8$$

245. a.



b. Milli 600 og 1000 er meðalbreyting hraðans −0,015 km/klst. fyrir hvert ökutæki á klukkustund á akrein. Milli 1000 og 1500 er hún −0,012 km/klst. og milli 1500 og 2100 er hún −0,08 km/klst. fyrir hvert ökutæki á klukkustund á akrein. Lækkunin er því ekki línuleg.
c.



Grafið er ólínulegt og mínútum á hvern kílómetra fjölgar hratt þegar fjöldi ökutækja á klukkustund á hverri akrein nálgast 2000.

247.

$$\frac{1}{37}\int_0^{37} p(t)\,dt = \frac{0{,}07(37)^3}{4}+\frac{2{,}42(37)^2}{3}-\frac{25{,}63(37)}{2}+521{,}23\approx 2037$$

249. Meðalhröðunin er

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{0{,}35}{3}\,t^3+\frac{0{,}72}{2}\,t^2+5{,}22\,t\right]\Big|_0^5=\frac{1}{5}\left(-\frac{0{,}35}{3}\,(5^3)+\frac{0{,}72}{2}\,(5^2)+5{,}22\,(5)\right)\approx 4{,}1 \text{ m/sek.}^2$$

251.

$$s(t)=\int v(t)\,dt=\int\left(-\frac{7}{60}\,t^3+0{,}36\,t^2+5{,}22\,t+15\right)dt$$

$$=-\frac{7}{240}\,t^4+0{,}12\,t^3+2{,}61\,t^2+15\,t+C,\quad C=0,\quad s(5)\approx 137 \text{ m}$$

253.

$$\frac{1}{40}\int_0^{40}(-0{,}068t+5{,}14)\,dt=-\frac{0{,}068(40)}{2}+5{,}14=3{,}78\,\text{m/sec}$$

Æfingar í kafla 1.5

255.

$$u=h(x)$$

257.

$$f(u)=\frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}$$

259.

$$du=8x\,dx;\, f(u)=\frac{1}{8\sqrt{u}}$$

261.

$$\frac{1}{5}(x+1)^5+C$$

263.

$$-\frac{1}{12(2x-3)^6}+C$$

265.

$$\sqrt{x^2+1}+C$$

267.

$$\frac{1}{8}\left(x^2-2x\right)^4+C$$

269.

$$\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}+C$$

271.

$$\frac{\left(1-x\right)^{101}}{101}-\frac{\left(1-x\right)^{100}}{100}+C$$

273.

$$\int\left(11x-7\right)^{-2}dx=-\frac{1}{22\left(11x-7\right)^2}+C$$

275.

$$-\frac{\cos^4\theta}{4}+C$$

277.

$$-\frac{\cos^3\left(\pi t\right)}{3\pi}+C$$

279.

$$-\frac{1}{4}\cos^2\left(t^2\right)+C$$

281.

$$-\frac{1}{3\left(x^3-3\right)}+C$$

283.

$$-\frac{2\left(y^3-2\right)}{3\sqrt{1-y^3}}+C$$

285.

$$\frac{1}{33}\left(1-\cos^3\theta\right)^{11}+C$$

287.

$$\frac{1}{12}\left(\sin^3\theta - 3\sin^2\theta\right)^4 + C$$

289. $L_{50} = -8{,}5779$. Nákvæma flatarmálið er $\frac{-81}{8}$

291. $L_{50} = -0{,}006399\ldots$ Nákvæma flatarmálið er 0.

293.

$$u = 1 + x^2, du = 2x\,dx, \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2}\,du = \sqrt{2} - 1$$

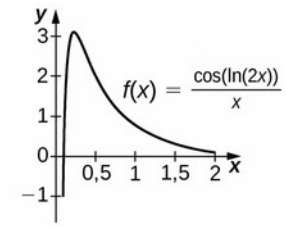
295.

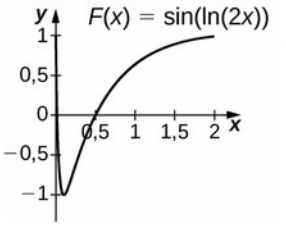
$$u = 1 + t^3, du = 3t^2\,dt, \frac{1}{3}\int_1^2 u^{-1/2}\,du = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

297.

$$u = \cos\theta, du = -\sin\theta\,d\theta, \int_{1/\sqrt{2}}^1 u^{-4}\,du = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

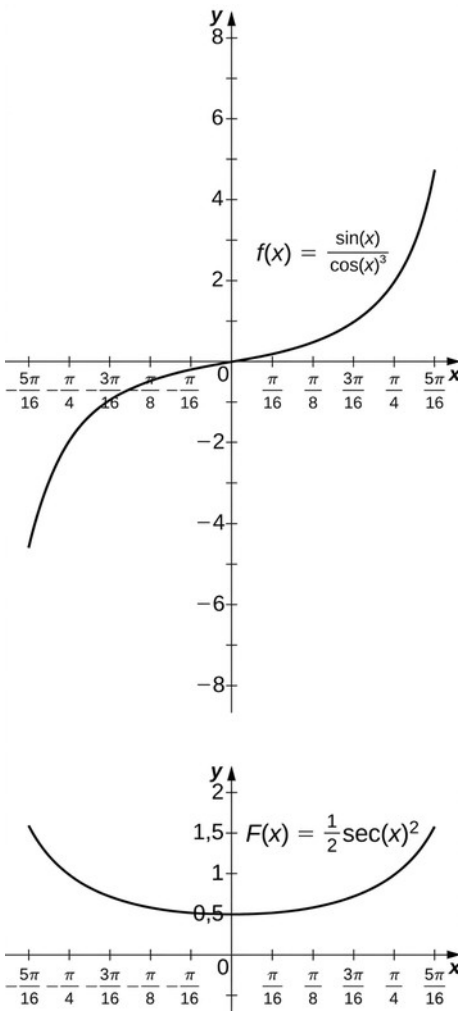
299.





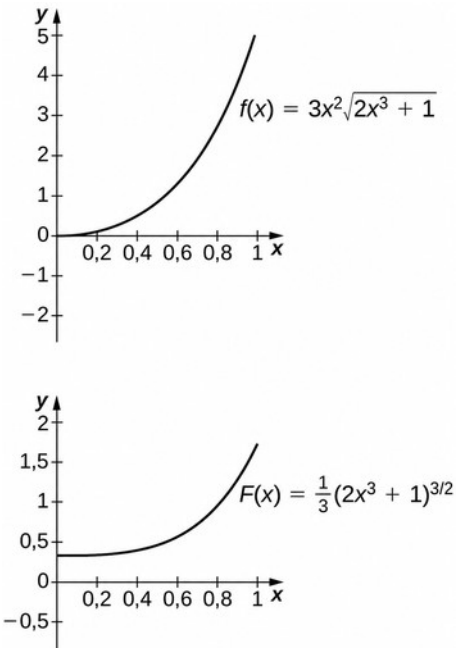
Stofnfallið er $y = \sin\left(\ln\left(2x\right)\right)$. Þar sem stofnfallið er ekki samfellt í $x = 0$, er ekki hægt að finna gildi C þannig að $y = \sin\left(\ln\left(2x\right)\right) - C$ gefi gildi ákveðna heildisins.

301.



Stofnfallið er $y=\frac{1}{2}\sec^2 x$. Velja skal $C=-2$ þannig að $F\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

303.



Stofnfallið er $y=\frac{1}{3}\left(2x^3+1\right)^{3/2}$. Velja skal $C=-\frac{1}{3}$.

305. Nei, því heildisstofninn er ósamfelldur í $x=1$.

307. $u=\sin\left(t^2\right)$; heildið verður $\frac{1}{2}\int_0^0 u\,du$.

309. $u=\left(1+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)$; heildið verður $-\int_{5/4}^{5/4}\frac{1}{u}du$.

311.

$u=1-t$; þá verður heildið

$$\int_1^{-1} u\cos\left(\pi\left(1-u\right)\right)du$$

$$=\int_1^{-1} u\left[\cos\pi\cos\pi u-\sin\pi\sin\pi u\right]du$$

$$=-\int_1^{-1} u\cos\pi u du$$

$$=\int_{-1}^{1} u\cos\pi u du=0$$

þar sem heildisstofninn er oddstætt fall.

313. Með því að setja $u=c\,x$ og $d\,u=c\,d\,x$ fæst

$$\frac{1}{\frac{b}{c}-\frac{a}{c}}\int_{a/c}^{b/c} f(cx)\,dx=\frac{c}{b-a}\int_{u=a}^{u=b} f(u)\frac{du}{c}=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\,du.$$

315. $\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{u=1-x^2}^{1}\frac{du}{u^a}=\frac{1}{2(1-a)}u^{1-a}\Big|_{u=1-x^2}^{1}=\frac{1}{2(1-a)}\left(1-\left(1-x^2\right)^{1-a}\right)$. Þegar $x\to 1$ er markgildið $\frac{1}{2(1-a)}$ ef $a<1$, en markgildið stefnir á $+\infty$ ef $a\geq 1$.

317.

$$\int_{t=\pi}^{0} b\sqrt{1-\cos^2 t}\times(-a\sin t)\,dt=\int_{t=0}^{\pi} ab\sin^2 t\,dt$$

319.

$$f(t)=2\cos(3t)-\cos(2t);\int_0^{\pi}\left(2\cos(3t)-\cos(2t)\right)dt=0$$

Æfingar í kafla 1.6

321.

$$\frac{-1}{3}e^{-3x}+C$$

323.

$$-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$$

325.

$$2\ln|x|+C \text{ eða } \ln\left(x^2\right)+\text{C}$$

327.

$$2\sqrt{x}+C$$

329.

$$-\frac{1}{\ln x}+C$$

331.

$$\ln\left(\ln\left(\ln x\right)\right)+C$$

333.

$$\ln\left(x\cos x\right)+C$$

335.

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\cos\left(x\right)\right)\right)^2+C$$

337.

$$\frac{-e^{-x^3}}{3}+C$$

339.

$$e^{\tan x}+C$$

341.

$$t+C$$

343.

$$\frac{2}{9}x^3\left(\ln\left(x^3\right)-1\right)+C$$

345.

$$2\sqrt{x}\left(\ln x-2\right)+C$$

347.

$$\int_0^{\ln x} e^t\,dt=e^t|_0^{\ln x}=e^{\ln x}-e^0=x-1$$

349.

$$-\frac{1}{3}\ln\left|\sin\left(3x\right)+\cos\left(3x\right)\right|+\mathrm{C}$$

351.

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\csc\left(x^2\right)+\cot\left(x^2\right)\right|+C$$

353.

$$-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\csc x\right)\right)^2+C$$

355.

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{26}{7}\right)$$

357.

$$\ln\left(\sqrt{3}-1\right)$$

359.

$$\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

361.

$$y-2\ln\left|y+1\right|+C$$

363.

$$\ln\left|\sin x-\cos x\right|+C$$

365.

$$-\frac{1}{3}\left(1-\left(\ln x\right)^2\right)^{3/2}+C$$

367. Nákvæm lausn: $\frac{e-1}{e}$, $R_{50}=0{,}6258$. Þar sem f er minnkandi vanmetur nálgunin með hægri endapunktum flatarmálið.

369. Nákvæm lausn: $\frac{2\ \ln\left(3\right)-\ln\left(6\right)}{2}$, $R_{50}=0{,}2033$. Þar sem f er vaxandi ofmetur nálgunin með hægri endapunktum flatarmálið.

371. Nákvæm lausn: $-\frac{1}{\ln\left(4\right)}$, $R_{50}=-0{,}7164$. Þar sem f er neikvætt og vaxandi á bilinu ofmetur nálgunin með hægri endapunktum gildi heildisins en vanmetur flatarmál svæðisins, það er algildi heildisins.

373.

$$\frac{11}{2}\ln 2$$

375.

$$\frac{1}{\ln\left(65.536\right)}$$

377. $\int_N^{N+1} x\,e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(e^{-N^2}-e^{-\left(N+1\right)^2}\right)$. Stærðin er minni en 0,01 þegar $N=2$.

379.

$$\int_a^b \frac{dx}{x}=\ln\left(b\right)-\ln\left(a\right)=\ln\left(\frac{1}{a}\right)-\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\int_{1/b}^{1/a}\frac{dx}{x}$$

381. 23

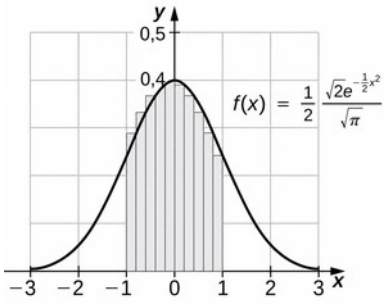
383. Gera má ráð fyrir að $x>1$, því $\frac{1}{x}<1$. Þá er $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}$. Gerum nú innsetninguna $u=\frac{1}{t}$, svo $du=-\frac{dt}{t^2}$ og $\frac{du}{u}=-\frac{dt}{t}$, og breytum endapunktunum: $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}=-\int_1^{x} \frac{du}{u}=-\ln x$.

385. Svör eru breytileg.

387. $x=E(\ln(x))$. Þá er $1=\frac{E'(\ln x)}{x}$ eða $x=E'(\ln x)$. Þar sem sérhverja tölu t má rita sem $t=\ln x$ fyrir eitthvert x og fyrir slíkt t gildir $x=E(t)$, fæst að fyrir sérhvert t, $E'(t)=E(t)$.

389.

$$R_{10}=0{,}6811\,,\ R_{100}=0{,}6827$$



Æfingar í kafla 1.7

391.

$$\sin^{-1}x\,|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\pi}{3}$$

393.

$$\tan^{-1}x\,|_{\sqrt{3}}^{1}=-\frac{\pi}{12}$$

395.

$$\sec^{-1}|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$$

397.

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

399.

$$\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

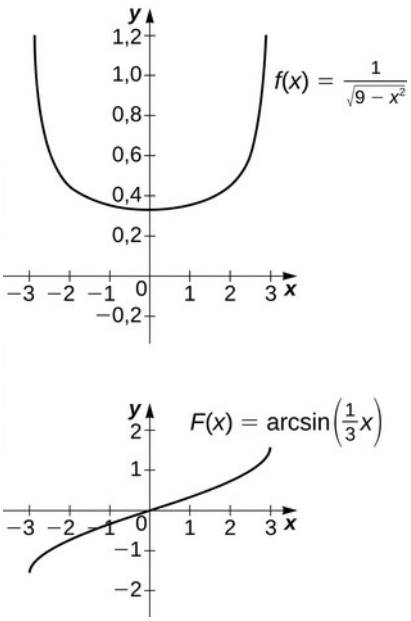
401.

$$\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

403. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$. Því er $\sin^{-1}t=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}t$. Munurinn á þeim er fasti.

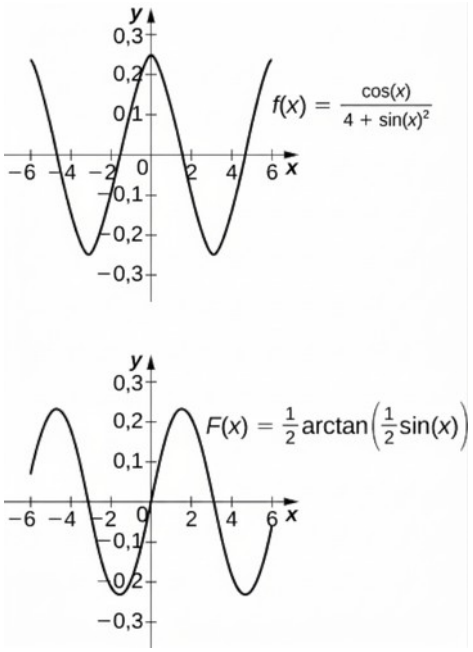
405. $\sqrt{1-t^2}$ er ekki skilgreint sem rauntala þegar $t>1$.

407.



Stofnfallið er $\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$. Með því að velja $C=\frac{\pi}{2}$ fæst gildi ákveðna heildisins.

409.



Stofnfallið er $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right)+C$. Með því að velja $C=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sin(6)}{2}\right)$ fæst gildi ákveðna heildisins.

411.

$$\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}t\right)^2+C$$

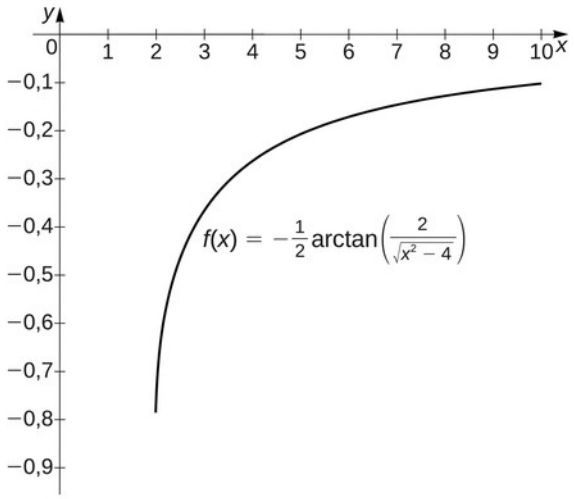
413.

$$\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2t)\right)^2+C$$

415.

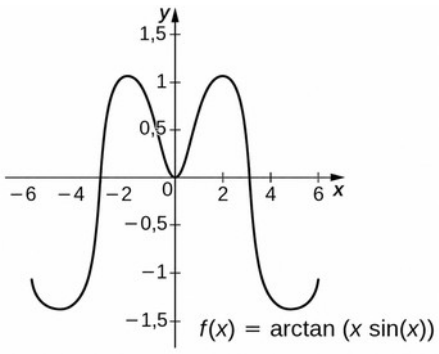
$$\frac{1}{4}\left(\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)+C$$

417.



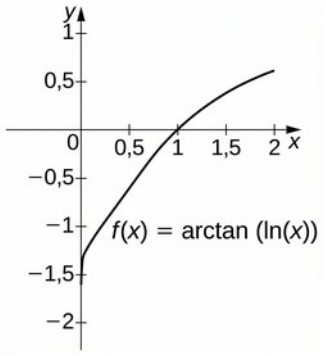
Stofnfallið er $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$. Með því að velja $C=0$ fæst gildi ákveðna heildisins á $[2,6]$.

419.



Almenna stofnfallið er $\tan^{-1}(x\sin x)+C$. Með því að velja $C=-\tan^{-1}(6\sin(6))$ fæst gildi ákveðna heildisins.

421.



Almenna stofnfallið er $\tan^{-1}(\ln x)+C$. Með því að velja $C=\frac{\pi}{2}=\tan^{-1}\infty$ fæst gildi ákveðna heildisins.

423.

$$\sin^{-1}(e^t)+C$$

425.

$$\sin^{-1}(\ln t)+C$$

427.

$$-\frac{1}{4}\left(\cos^{-1}(2t)\right)^2+C$$

429.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

431.

$$1-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

433. $2\tan^{-1}(A)\to\pi$ þegar $A\to\infty$

435. Með vísbendingunni fæst $\int\frac{\csc^2 x}{\csc^2 x+\cot^2 x}\,dx=\int\frac{\csc^2 x}{1+2\cot^2 x}\,dx$. Setjum $u=\sqrt{2}\cot x$. Þá er $du=-\sqrt{2}\csc^2 x$ og heildið er $-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\sqrt{2}\cot x)+C$. Ef samsemdin $\tan^{-1}s+\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi}{2}$, er notuð má einnig rita þetta sem $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

437. $x \approx \pm 1{,}7321$. The left endpoint estimate with $N = 100$ is 4,781 and these decimals persist for $N = 500$.

Upprifjunaræfingar

439. Ósatt

441. Satt

443. $L_4 = 5{,}25$, $R_4 = 3{,}25$, nákvæmt svar: 4

445. $L_4 = 5{,}364$, $R_4 = 5{,}364$, nákvæmt svar: 5,870

447.

$$-\frac{4}{3}$$

449. 1

451.

$$-\frac{1}{2(x+4)^2}+C$$

453.

$$\frac{4}{3}\sin^{-1}\left(x^3\right)+C$$

455.

$$\frac{\sin t}{\sqrt{1+t^2}}$$

457.

$$4\frac{\ln x}{x}+1$$

459. \$6.328.113

461. \$73,36

463.

485 m/s

Kafli 2

Stöðumat

2.1

12 einingar²

2.2

$\frac{3}{10}$ eining²

2.3

$2+2\sqrt{2}$ einingar²

2.4

$\frac{5}{3}$ einingar²

2.5

$\frac{5}{3}$ einingar²

2.7

$$\frac{\pi}{2}$$

2.8

8π einingar³

2.9

21π einingar³

2.10

$\frac{10\pi}{3}$ einingar³

2.11

60π einingar³

2.12

$\frac{15\pi}{2}$ einingar³

2.13

8π einingar³

2.14

12π einingar³

2.15

$\frac{11\pi}{6}$ einingar³

2.16

$\frac{\pi}{6}$ einingar³

2.17

Notið hringkragaaðferðina; $V=\int_{-1}^{1}\pi\left[\left(2-x^2\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx$

2.18

$$\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)\approx 1{,}697$$

2.19

$$\text{Bogalengd}\approx 3{,}8202$$

2.20

$$\text{Bogalengd}=3{,}15018$$

2.21

$$\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\approx 3{,}133$$

2.22

$$12\pi$$

2.23

$$70/3$$

2.24

$$24\pi$$

2.25

1,6 J

2.26

Um það bil 6,793,286 J

2.27

156.800 N

2.28

Um það bil 30,757,940,000 N eða 30,757,940 kN

2.29

$$M=24\,,\,\bar{x}=\frac{2}{5}\,\text{m}$$

2.30

$\left(-1\,,-1\right)$ m

2.31

Þungamiðja svæðisins er $\left(3/2\,,6/5\right)$.

2.32

Þungamiðja svæðisins er $(1, 13/5)$.

2.33

Þungamiðja svæðisins er $(0, 2/5)$.

2.34

$6\pi^2$ einingar³

2.35

a. $\frac{d}{dx}\ln(2x^2+x)=\frac{4x+1}{2x^2+x}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\ln(x^3)\right)^2=\frac{6\ln(x^3)}{x}$

2.36

$$\int \frac{x^2}{x^3+6}\,dx=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+6\right|+C$$

2.37

$$4\ln 2$$

2.38

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right)=e^{x^2-5x}(2x-5)$

b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3=6e^{6t}$

2.39

$$\int \frac{4}{e^{3x}}\,dx=-\frac{4}{3}e^{-3x}+C$$

2.40

a. $\frac{d}{dt}4^{t^4}=4^{t^4}(\ln 4)(4t^3)$

b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{x}{(\ln 3)(x^2+1)}$

2.41

$$\int x^2 2^{x^3}\,dx=\frac{1}{3\ln 2}2^{x^3}+C$$

2.42

There are 81.377.396 bacteria in the population after 4 hours. The population reaches 100 million bacteria after 244,12 minutes.

2.43

Við 5 % vexti þarf hún að fjárfesta 223.130,16 €. Við 6 % vexti þarf hún að fjárfesta 165.298,89 €.

2.44

38,90 mánuðir

2.45

Kaffið hefur fyrst kólnað nægilega til framreiðslu um 3,5 mínútum eftir að því er hellt upp á. Það verður of kalt til að bera það fram um 7 mínútum eftir að því er hellt upp á.

2.46

A total of 94,13 g of carbon remains. The artifact is approximately 13.300 years old.

2.47

a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2+3x\right)\right)=\left(\operatorname{sech}^2\left(x^2+3x\right)\right)\left(2x+3\right)$

b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\left(\sinh x\right)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)^{-2}=-2\left(\sinh x\right)^{-3}\cosh x$

2.48

a. $\int \sinh^3 x\cosh x\,dx=\frac{\sinh^4 x}{4}+C$

b. $\int \operatorname{sech}^2\left(3x\right)dx=\frac{\tanh\left(3x\right)}{3}+C$

2.49

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}\left(3x\right)\right)=\frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$

b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1}x\right)^3=\frac{3\left(\coth^{-1}x\right)^2}{1-x^2}$

2.50

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx=-\operatorname{sech}^{-1}\left(e^x\right)+C$

2.51

52,95 m

Æfingar í kafla 2.1

1.

$$\frac{32}{3}$$

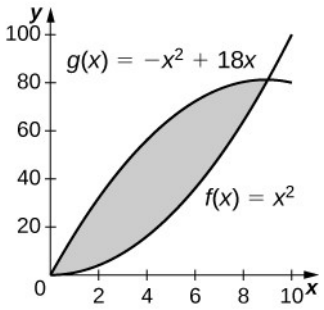
3.

$$\frac{13}{12}$$

5.

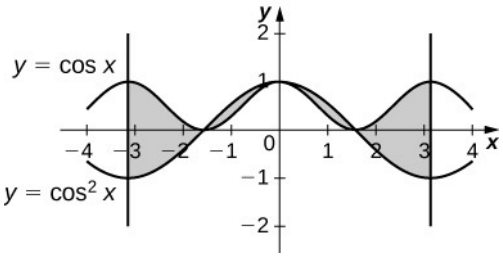
$$36$$

7.



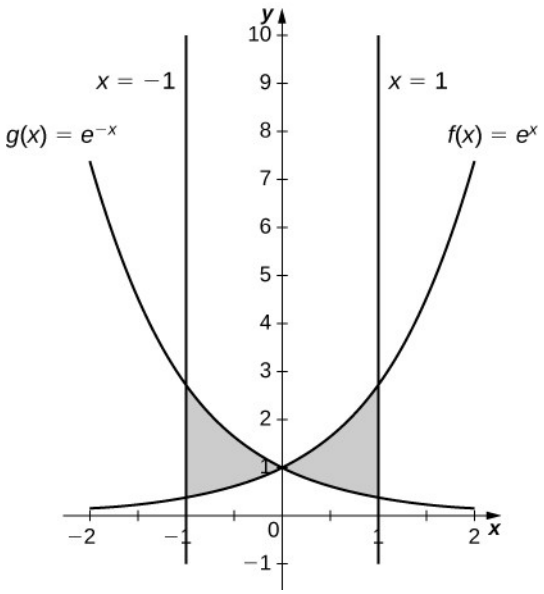
243 flatarmálseiningar

9.



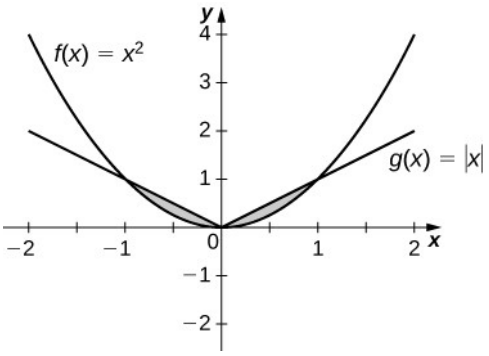
4

11.



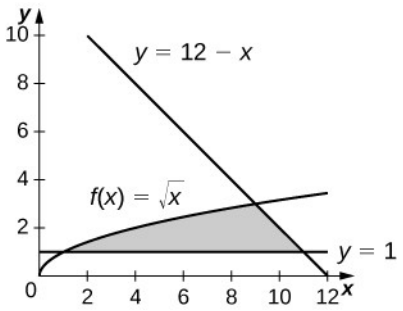
$$\frac{2(e-1)^2}{e}$$

13.



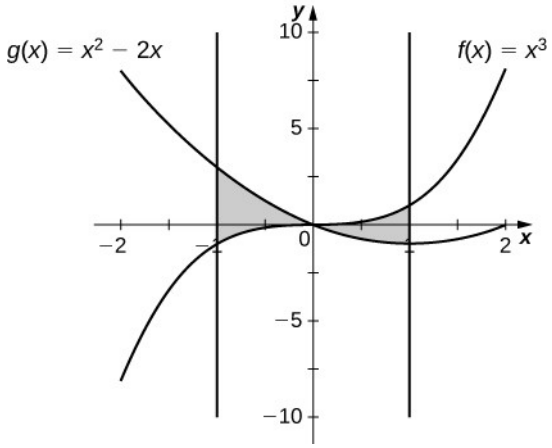
$$\frac{1}{3}$$

15.



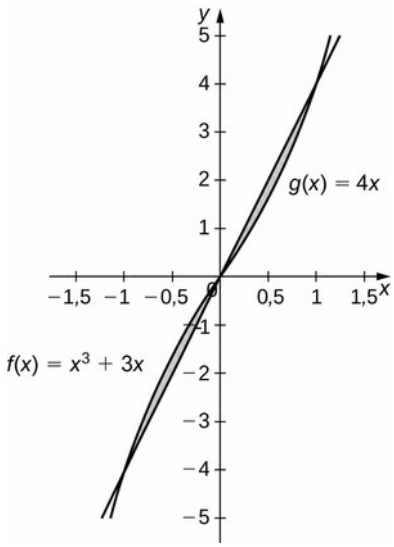
$$\frac{34}{3}$$

17.



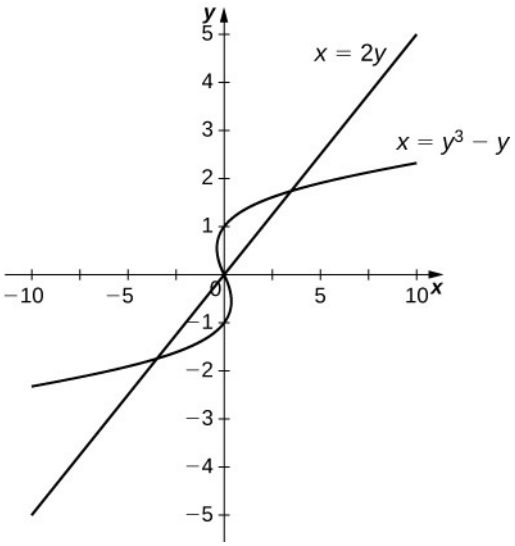
$$\frac{5}{2}$$

19.



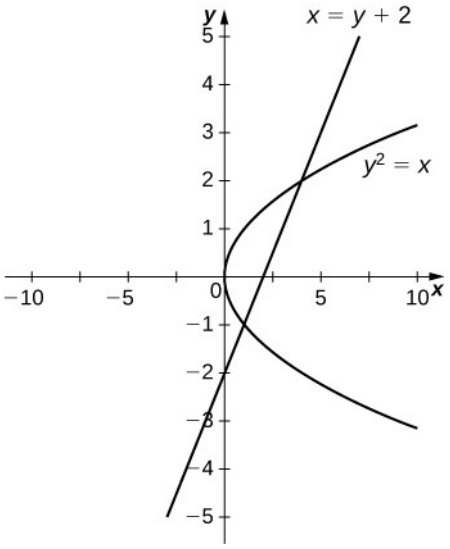
$$\frac{1}{2}$$

21.



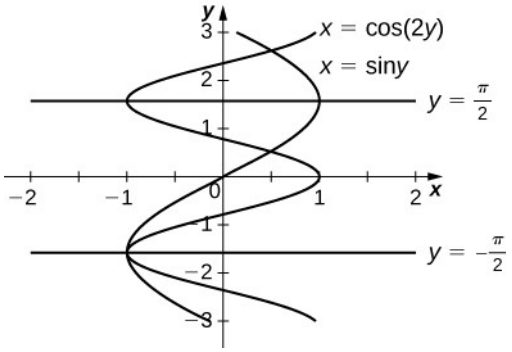
$$\frac{9}{2}$$

23.



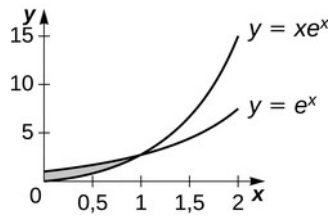
$$\frac{9}{2}$$

25.



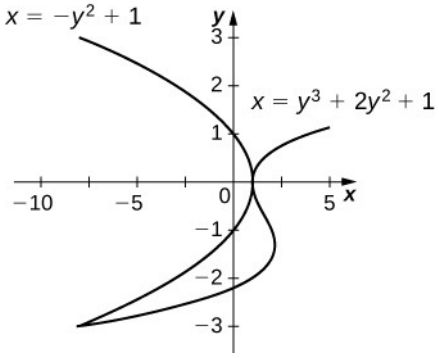
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

27.



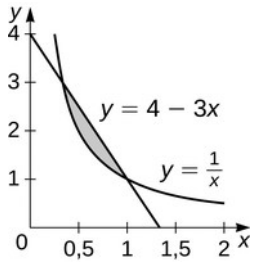
$$e-2$$

29.



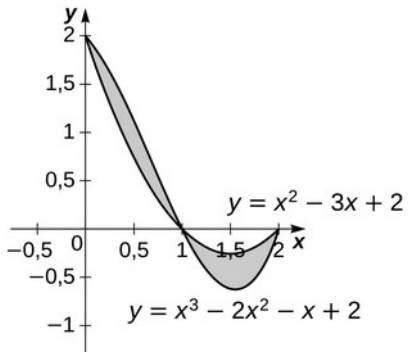
$$\frac{27}{4}$$

31.



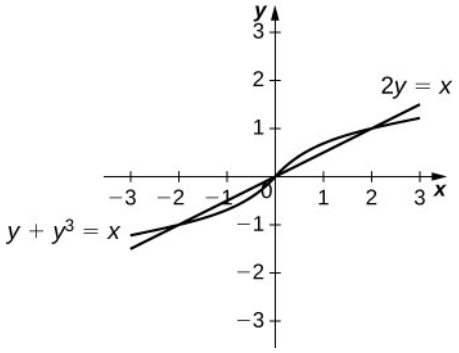
$$\frac{4}{3} - \ln(3)$$

33.



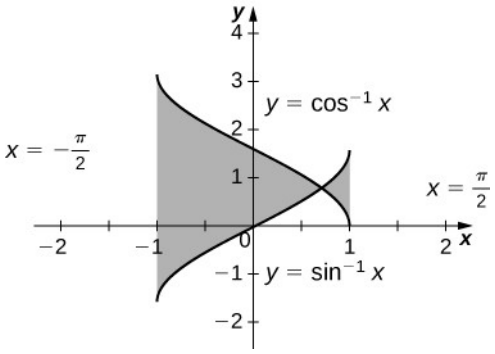
$$\frac{1}{2}$$

35.



$$\frac{1}{2}$$

37.



$$-2\left(\sqrt{2}-\pi\right)$$

39.

1,067

41.

1,605

43.

7,523

45.

$$\frac{3\pi-4}{12}$$

47.

1,429

49. 33.333,33 € total profit for 200 cell phones sold

51. 3,32 km tákna hversu langt hérinn er kominn fram úr skjaldbökunni

53.

$$\frac{343}{24}$$

55.

$$4\sqrt{3}$$

57.

$$\pi - \frac{32}{25}$$

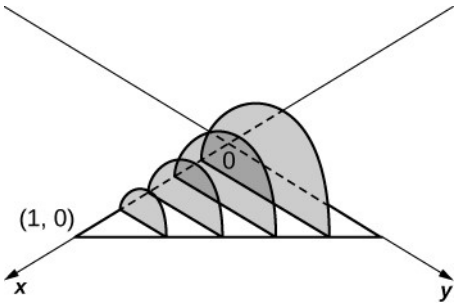
Æfingar í kafla 2.2

63. 8 einingar^3

65. $\frac{32}{3\sqrt{2}}$ einingar^3

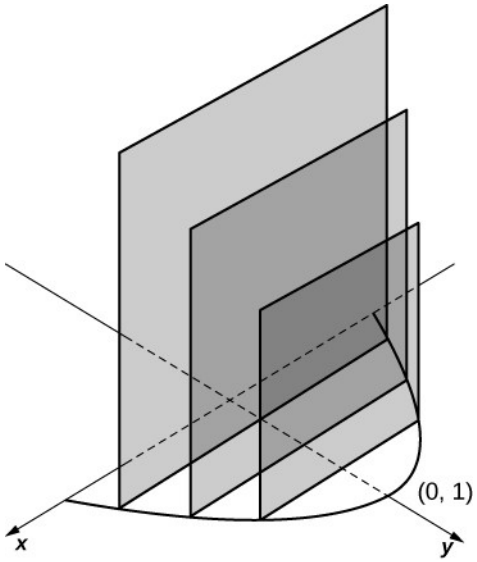
67. $\frac{7}{24}\pi r^2 h$ einingar^3

69.



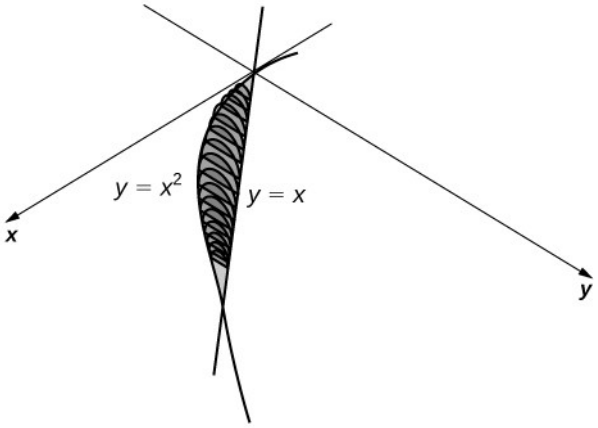
$\frac{\pi}{24}$ einingar^3

71.



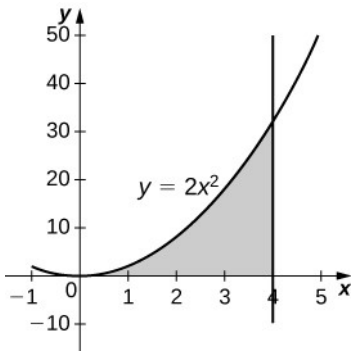
2 einingar^3

73.



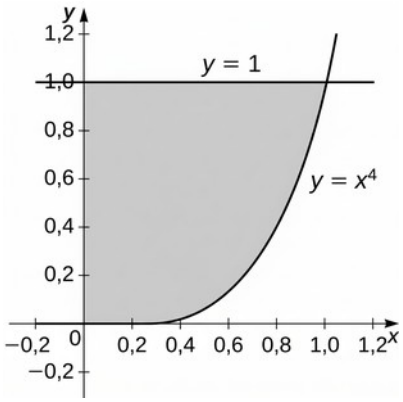
$\frac{\pi}{240}$ einingar^3

7.5.



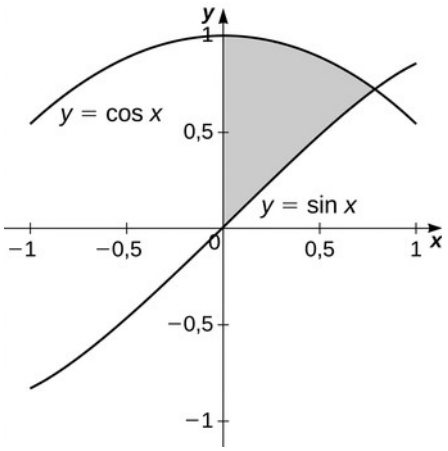
$\frac{4096\pi}{5}$ einingar³

7.7.



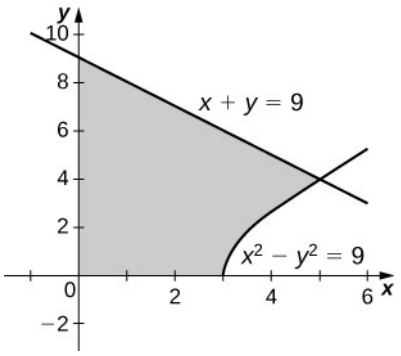
$\frac{8\pi}{9}$ einingar³

79.



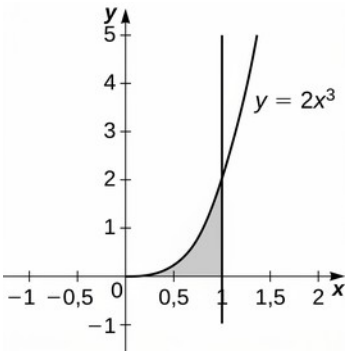
$\frac{\pi}{2}$ einingar^3

81.



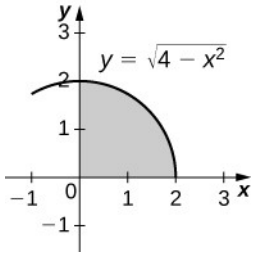
$207\,\pi$ einingar^3

83.



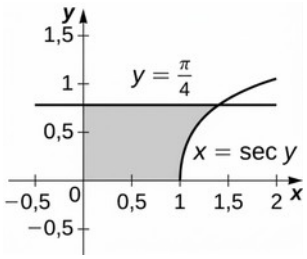
$\frac{4\,\pi}{5}$ einingar^3

85.



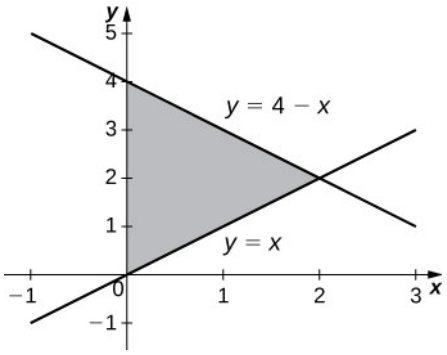
$\frac{16\pi}{3}$ einingar^3

87.



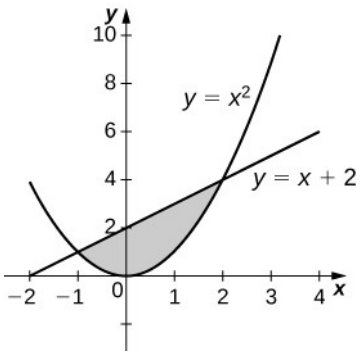
π einingar^3

89.



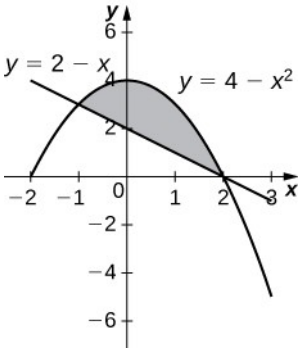
$\frac{16\pi}{3}$ einingar^3

91.



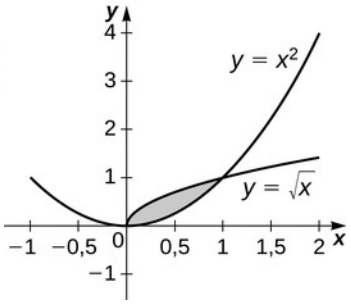
$\frac{72\pi}{5}$ einingar³

93.



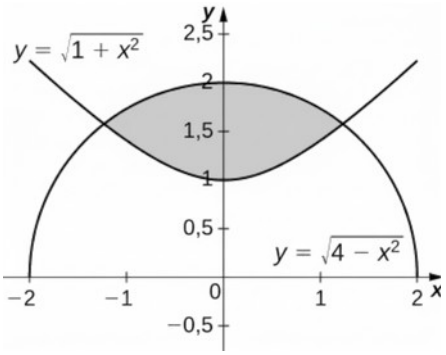
$\frac{108\pi}{5}$ einingar³

95.



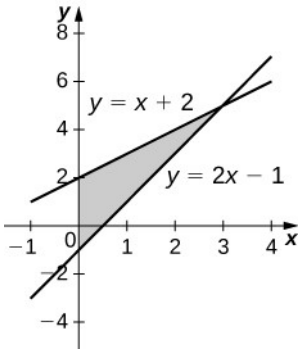
$\frac{3\pi}{10}$ einingar³

97.



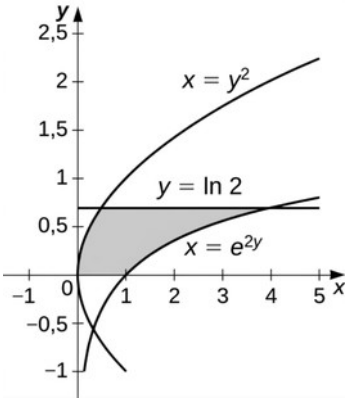
$2\sqrt{6}\,\pi$ einingar³

99.



$9\,\pi$ einingar³

101.



$\frac{\pi}{20}\left(75 - 4\ln^5(2)\right)$ einingar³

103. $\frac{m^2\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ einingar³

105. $\frac{4a^2b\pi}{3}$ einingar³

107. $2\pi^2$ einingar³

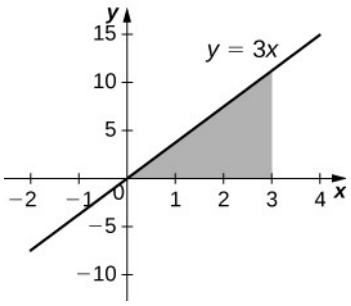
109. $\frac{2ab^2\pi}{3}$ einingar³

111. $V=\frac{2\pi}{3}(2r+h)(r-h)^2$ einingar³

113. $\frac{\pi}{3}(h+R)(h-2R)^2$ einingar³

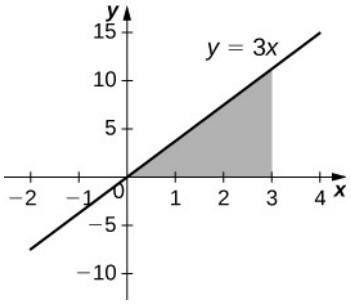
Æfingar í kafla 2.3

115.



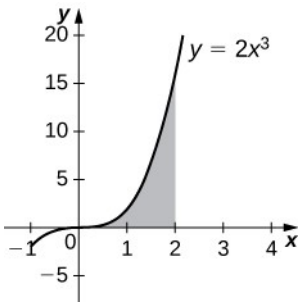
54π einingar³

117.



81π einingar³

119.



$\frac{512\pi}{7}$ einingar³

121. 2π einingar³

123. $\frac{2\pi}{3}$ einingar³

125. 2π einingar³

127. $\frac{4\pi}{5}$ einingar³

129. $\frac{64\pi}{3}$ einingar³

131. $\frac{32\pi}{5}$ einingar³

133.

$$\frac{7\pi}{6}$$

135.

$$48\pi$$

137.

$$\frac{308\pi}{5}$$

139.

$$\frac{512\pi}{7}$$

141.

$$\frac{8\pi}{5}$$

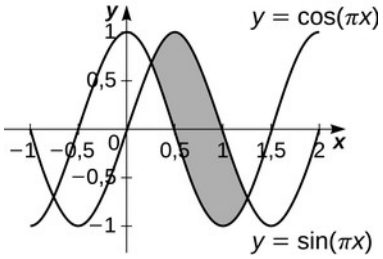
143. $\frac{28\pi}{15}$ einingar³

145. $\frac{3\pi}{10}$ einingar³

147. $\pi\left(\frac{6\cdot 2^{2/3}}{5}-\frac{11}{10}\right)=\frac{\pi}{10}\left(12\cdot 2^{2/3}-11\right)\approx 2,5286$ einingar³

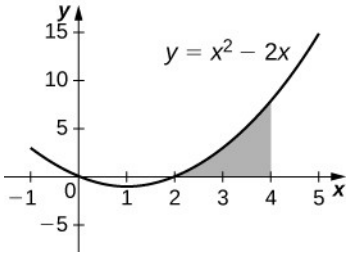
149. 0,9876 einingar³

151.



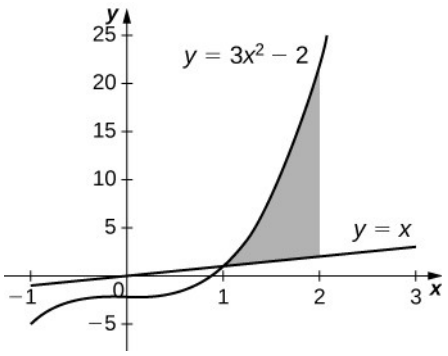
$3\sqrt{2}$ einingar³

153.



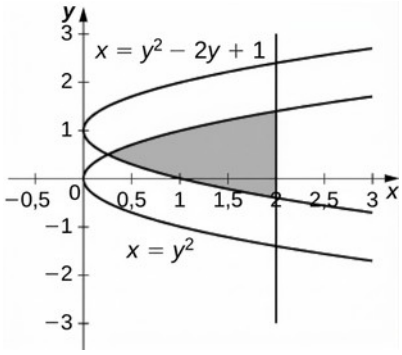
$\frac{496\pi}{15}$ einingar³

155.



$\frac{398\pi}{15}$ einingar³

157.



15,9074 einingar³

159. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ einingar³

161. $\pi r^2 h$ einingar³

163. πa^2 einingar³

Æfingar í kafla 2.4

165.

$$2\sqrt{26}$$

167.

$$2\sqrt{17}$$

169.

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$$

171.

$$\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

173.

$$\frac{4}{3}$$

175.

$$2{,}0035$$

177.

$$\frac{123}{32}$$

179.

$$10$$

181.

$$\frac{20}{3}$$

183.

$$\frac{1}{675}\left(229\sqrt{229}-8\right)$$

185.

$$\frac{1}{8}\left(4\sqrt{5}+\ln\left(9+4\sqrt{5}\right)\right)$$

187.

$$1{,}201$$

189.

$$15{,}2341$$

191.

$$\frac{49\pi}{3}$$

193.

$$70\pi\sqrt{2}$$

195.

$$8\pi$$

197.

$$120\pi\sqrt{26}$$

199.

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

201.

$$9\sqrt{2}\pi$$

203.

$$\frac{10\sqrt{10}\pi}{27}\left(73\sqrt{73}-1\right)$$

205.

$$25{,}645$$

207.

$$\pi\left(2+\pi\right)$$

209.

$$10{,}5017$$

211. 24 m

213.

$$2$$

215. Svör eru breytileg.

217. Frekari upplýsingar má finna með því að leita að lúðri Gabríels.

Æfingar í kafla 2.5

219. 245 J

221.

$$200\,\mathrm{J}$$

223. 1 J

225.

$$\frac{7}{2}$$

227.

$$\ln\left(7776\right)$$

229.

$$\frac{3625\,\pi}{3}$$

231.

$$100\,\pi$$

233.

$$20\,\pi\,\sqrt{15}$$

235. 6 J

237. 5 cm

239. 36 J

241. 18.750 J

243. Þyngd $=7{,}2\ \times\ 10^{10}$ N

Vinna $=2{,}7\ \times\ 10^{12}$ J

245.

$$9{,}71\ \times\ 10^{8}\ \text{N m}$$

247. a. 470,400,000 N, b. 117,600,000 N

249. $36{,}75\,\pi$ milljón J

251.

$$\frac{A\,\rho\,H^{2}}{2}$$

253. Svör eru breytileg.

Æfingar í kafla 2.6

255.

$$\frac{5}{4}$$

257.

$$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

259.

$$\left(\frac{7}{4},\frac{3}{2}\right)$$

261.

$$\frac{3L}{4}$$

263.

$$\frac{\pi}{2}$$

265.

$$\frac{e^2+1}{e^2-1}$$

267.

$$\frac{\pi^2-4}{\pi}$$

269.

$$\frac{1}{4}\left(1+e^2\right)$$

271.

$$\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right)$$

273.

$$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$$

275.

$$\left(0,3\right)$$

277.

$$\left(0,\frac{4}{\pi}\right)$$

279.

$$\left(\frac{5}{8},\frac{1}{3}\right)$$

281.

$$\frac{2m\pi}{3}$$

283.

$$\pi a^2 b$$

285.

$$\left(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}\right)$$

287.

$$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$$

289.

$$\left(0,\frac{28}{9\pi}\right)$$

291. Massamiðja: $\left(\frac{3a}{8},\frac{2a^2}{5}\right)$, rúmmál: $\frac{\pi a^4}{2}$

293. Rúmmál: $2\pi^2 a^2(b+a)$

Æfingar í kafla 2.7

295.

$$\frac{1}{x}$$

297.

$$-\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

299.

$$\ln(x+1)+C$$

301.

$$\ln(x)+1$$

303.

$$\cot(x)$$

305.

$$\frac{7}{x}$$

307.

$$\csc(x)\sec x$$

309.

$$-2\tan x$$

311.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

313.

$$2-\frac{1}{2}\ln(5)$$

315.

$$\frac{1}{\ln(2)}-1$$

317.

$$\frac{1}{2}\ln(2)$$

319.

$$\frac{1}{3}(\ln x)^3$$

321.

$$\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}}$$

323.

$$x^{-2-(1/x)}(\ln x-1)$$

325.

$$e\,x^{e-1}$$

327.

$$1$$

329.

$$-\frac{1}{x^2}$$

331.

$$\pi - \ln(2)$$

333.

$$\frac{1}{x}$$

335.

$$e^5 - 6 \text{ einingar}^2$$

337.

$$\ln(4) - 1 \text{ einingar}^2$$

339.

$$2{,}8656$$

341.

$$3{,}1502$$

Æfingar í kafla 2.8

349. Satt

351. Satt; $k = \frac{\ln(2)}{t}$

353. 20 klukkustundir

355. Nei. Minjagripurinn er um það bil 871 ára gamall.

357. 73 ár

359. 5 dagar, 6 klukkustundir og 27 mínútur

361.

$$12$$

363.

$$8{,}618\,\%$$

365.

$$6766{,}76\ €$$

367. 9 klukkustundir og 13 mínútur

369. 239.179 ár

371. $P'(t)=43\,e^{0{,}01604t}$. Stofninn stækkar stöðugt.

373. Mannfjöldinn nær 10 milljörðum árið 2032.

375. $P'(t)=2{,}259\,e^{0{,}06407t}$. Stofninn stækkar stöðugt.

Æfingar í kafla 2.9

377.

$$e^{x}\text{ og }e^{-x}$$

379. Svör eru breytileg.

381. Svör eru breytileg.

383. Svör eru breytileg.

385.

$$3\sinh(3x+1)$$

387.

$$-\tanh(x)\operatorname{sech}(x)$$

389.

$$4\cosh(x)\sinh(x)$$

391.

$$\frac{x\operatorname{sech}^{2}\left(\sqrt{x^{2}+1}\right)}{\sqrt{x^{2}+1}}$$

393.

$$6\sinh^{5}(x)\cosh(x)$$

395.

$$\frac{1}{2}\sinh(2x+1)+C$$

397.

$$\frac{1}{2}\sinh\left(x^2\right)+C$$

399.

$$\frac{1}{3}\cosh^3\left(x\right)+C$$

401.

$$\ln\left(1+\cosh\left(x\right)\right)+C$$

403.

$$\cosh\left(x\right)+\sinh\left(x\right)+C$$

405.

$$\frac{4}{1-16\,x^2}$$

407.

$$\frac{\sinh\left(x\right)}{\sqrt{\cosh^2\left(x\right)+1}}$$

409.

$$-\csc\left(x\right)$$

411.

$$-\frac{1}{\left(x^2-1\right)\tanh^{-1}\left(x\right)}$$

413.

$$\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

415.

$$\sqrt{x^2+1}+C$$

417.

$$\cosh^{-1}\left(e^x\right)+C$$

419. Svör eru breytileg.

421.

$$37{,}30$$

423.

$$y=\frac{1}{c}\cosh\left(c\,x\right)$$

425.

$$-0{,}521095$$

427.

$$10$$

Upprifjunaræfingar

435. Ósatt

437. Ósatt

439.

$$16\sqrt{3}\,einingar^3$$

441.

$$\frac{162\,\pi}{5}$$

443. a. 4, b. $\frac{128\,\pi}{7}$, c. $\frac{64\,\pi}{5}$

445. a. $1{,}949$, b. $21{,}952$, c. $17{,}099$

447. a. $\frac{31}{6}$, b. $\frac{452\,\pi}{15}$, c. $\frac{31\,\pi}{6}$

449.

$$\pi\ln 17$$

451. Massi: $\frac{1}{2}$, massamiðja: $\left(\frac{18}{35},\frac{9}{22}\right)$

453.

$$\sqrt{17}+\frac{1}{8}\ln\left(33+8\sqrt{17}\right)$$

455. Rúmmál: $\frac{3\,\pi}{4}$, yfirborðsflatarmál: $\pi\left(\sqrt{2}-\sinh^{-1}\left(1\right)+\sinh^{-1}\left(16\right)-\frac{\sqrt{257}}{16}\right)$

457. 11:02 a.m.

459.

$$\pi\left(1+\sinh\left(1\right)\cosh\left(1\right)\right)$$

Kafli 3

Stöðumat

3.1

$$\int x\,e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x\,e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

3.2

$$\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

3.3

$$-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

3.4

$$\frac{\pi}{2}-1$$

3.5

$$\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

3.6

$$\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

3.7

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin\left(2x\right)+C$$

3.8

$$\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

3.9

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin\left(6x\right)+C$$

3.10

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{22}\sin\left(11x\right)+C$$

3.11

$$\frac{1}{6}\tan^{6}x+C$$

3.12

$$\frac{1}{9}\sec^{9}x-\frac{1}{7}\sec^{7}x+C$$

3.13

$$\int\sec^{5}x\,dx=\frac{1}{4}\sec^{3}x\tan x+\frac{3}{4}\int\sec^{3}x$$

3.14

$$\int 125\sin^{3}\theta\,d\theta$$

3.15

$$\int 32\tan^{3}\theta\sec^{3}\theta\,d\theta$$

3.16

$$\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^{2}-4}}{2}\right|+C$$

3.17

$$x-5\ln\left|x+2\right|+C$$

3.18

$$\frac{2}{5}\ln\left|x+3\right|+\frac{3}{5}\ln\left|x-2\right|+C$$

3.19

$$\frac{x+2}{\left(x+3\right)^{3}\left(x-4\right)^{2}}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{\left(x+3\right)^{2}}+\frac{C}{\left(x+3\right)^{3}}+\frac{D}{\left(x-4\right)}+\frac{E}{\left(x-4\right)^{2}}$$

3.20

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+2)(x-3)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+4}+\frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}$$

3.21

Mögulegar lausnir eru meðal annars $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$ og $\ln\left|\sqrt{x^2+4}+x\right|+C$.

3.22

$$\frac{24}{35}$$

3.23

$$\frac{17}{24}$$

3.24

0,0074, 1,1%

3.25

$$\frac{1}{192}$$

3.26

$$\frac{25}{36}$$

3.27

e^3, er samleitið

3.28

$+\infty$, er ósamleitið

3.29

Þar sem $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=+\infty$, er $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$ ósamleitið.

Æfingar í kafla 3.1

1.

$$u=x^3$$

3.

$$u=y^3$$

5.

$$u=\sin(2x)$$

7.

$$-x+x\ln x+C$$

9.

$$x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

11.

$$-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$$

13.

$$e^{-x}(-1-x)+C$$

15.

$$2x\cos x+\left(-2+x^2\right)\sin x+C$$

17.

$$\frac{1}{2}(1+2x)(-1+\ln(1+2x))+C$$

19.

$$\frac{1}{2}e^x(-\cos x+\sin x)+C$$

21.

$$-\frac{e^{-x^2}}{2}+C$$

23.

$$-\frac{1}{2}x\cos[\ln(2x)]+\frac{1}{2}x\sin[\ln(2x)]+C$$

25.

$$2x-2x\ln x+x(\ln x)^2+C$$

27.

$$\left(-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{3}x^3\ln x\right)+C$$

29.

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+x\cos^{-1}(2x)+C$$

31.

$$-\left(-2+x^2\right)\cos x+2x\sin x+C$$

33.

$$-x\left(-6+x^2\right)\cos x+3\left(-2+x^2\right)\sin x+C$$

35.

$$\frac{1}{2}x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\cdot\sec^{-1}x\right)+C$$

37.

$$-\cosh x+x\sinh x+C$$

39.

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{4e^2}$$

41. 2

43.

$$2\pi$$

45.

$$-2+\pi$$

47.

$$-\sin(x)+\ln\left[\sin(x)\right]\sin x+C$$

49. Svör eru breytileg.

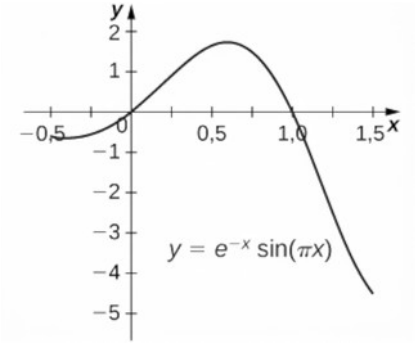
51. a. $\frac{2}{5}(1+x)(-3+2x)^{3/2}+C$ b. $\frac{2}{5}(1+x)(-3+2x)^{3/2}+C$

53. Notið ekki hlutheildun. Setjið u = $\ln x$, þá er heildið af gerðinni $\int u^2\,du$.

55. Notið ekki hlutheildun. Látum $u=x^2-3$, þá má setja heildið fram á forminu $\int e^u\,du$.

57. Notið ekki hlutheildun. Notið u-innsetninguna $u=3x^3+2$; þá má setja heildið fram á forminu $\int \sin(u)\,du$.

59. Flatarmálið undir grafinu er 0,39535.



61.

$$2\pi e$$

63. 2,05

65.

$$12\pi$$

67.

$$8\pi^2$$

Æfingar í kafla 3.2

69.

$$\cos^2 x$$

71.

$$\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

73.

$$\frac{\sin^4 x}{4}+C$$

75.

$$\frac{1}{12}\tan^6(2x)+C$$

77.

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)+C_1 \text{ eða } \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+C_2$$

79.

$$-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

81. $-\frac{1}{2}\cos^2 x+C$ eða $\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

83.

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C$$

85.

$$\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$$

87.

$$\sec x+C$$

89.

$$\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln(\sec x+\tan x)+C$$

91.

$$\frac{2\tan x}{3}+\frac{1}{3}\sec(x)^2\tan x\ =\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}+C$$

93.

$$-\ln|\cot x+\csc x|+C$$

95.

$$\frac{\sin^3(a\,x)}{3\,a}+C$$

97.

$$\frac{\pi}{2}$$

99.

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{12}\sin(6\,x)+C$$

101.

$$x+C$$

103. 0

105. 0

107. 0

109. Um það bil 0,239

111.

$$\sqrt{2}$$

113. 1,0

115. 0

117.

$$\frac{3\theta}{8}-\frac{1}{4\pi}\sin(2\pi\theta)+\frac{1}{32\pi}\sin(4\pi\theta)+C=f(x)$$

119.

$$\ln(\sqrt{3})$$

121.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)\cos(3x)\,dx=0$$

123.

$$\sqrt{\tan(x)}\,x\left(\frac{8\tan x}{21}\ \frac{+2}{7}\sec x^2\tan x\right)+C=f(x)$$

125. Seinna heildið er erfiðara því fyrra heildið má reikna með einfaldri u-innsetningu.

Æfingar í kafla 3.3

127.

$$9\tan^2\theta$$

129.

$$a^2\cosh^2\theta$$

131.

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

133.

$$-(x+1)^2+5$$

135.

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{a}\right|+C$$

137.

$$\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{9x^2+1}+3x\right|+C$$

139.

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

141.

$$9\left[\frac{x\sqrt{x^2+9}}{18}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right|\right]+C$$

143.

$$-\frac{1}{3}\sqrt{9-\theta^2}\left(18+\theta^2\right)+C$$

145.

$$\frac{\left(-1+x^2\right)\left(2+3x^2\right)\sqrt{x^6-x^8}}{15x^3}+C$$

147.

$$-\frac{x}{9\sqrt{-9+x^2}}+C$$

149.

$$\frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+x\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

151.

$$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$$

153.

$$\frac{1}{8}\left(x\left(5-2x^2\right)\sqrt{1-x^2}+3\arcsin x\right)+C$$

155.

$$\ln x - \ln\left|1+\sqrt{1-x^2}\right|+C$$

157.

$$-\frac{\sqrt{-1+x^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{-1+x^2}\right|+C$$

159.

$$-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+\operatorname{arcsinh} x+C$$

161.

$$-\frac{1}{1+x}+C$$

163.

$$\arcsin\left(\frac{x-5}{5}\right)+C$$

165. $\frac{9\pi}{2}$*;* flatarmál hálfhrings með geisla að lengd 3

167. $\arcsin(x)+C$ er algengasta svarið.

169. $\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$ fæst með báðum aðferðum.

171. Notið innsetningu með hornaföllum. Látum $x=\sec(\theta)$.

173. 4,367

175.

$$\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{4}$$

177.

$$y=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+8}{x-8}\right|+3$$

179. 24,6 m^3

181.

$$\frac{2\pi}{3}$$

Æfingar í kafla 3.4

183.

$$-\frac{2}{x+1}+\frac{5}{2(x+2)}+\frac{1}{2x}$$

185.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}$$

187.

$$2x^2+4x+8+\frac{16}{x-2}$$

189.

$$-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

191.

$$-\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{6x}+\frac{1}{6(x-3)}$$

193.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

195.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{x}{x^2+4}-\frac{1}{(x^2+4)^2}$$

197.

$$\ln|x-2|+2\ln|x+4|+C$$

199.

$$\frac{1}{2}\ln|4-x^2|+C$$

201.

$$2\left(x+\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1+x}{3}\right)\right)+C$$

203.

$$2\ln|x|-3\ln|1+x|+C$$

205.

$$\frac{1}{16}\left(-\frac{4}{-2+x}-\ln\left|-2+x\right|+\ln\left|2+x\right|\right)+C$$

207.

$$\frac{1}{30}\left(-2\sqrt{5}\arctan\left[\frac{1+x}{\sqrt{5}}\right]+2\ln\left|-4+x\right|-\ln\left|6+2x+x^2\right|\right)+C$$

209.

$$-\frac{3}{x}+4\ln\left|x+2\right|+x+C$$

211.

$$-\ln\left|3-x\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C$$

213.

$$\ln\left|x-2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+C$$

215.

$$-x+\ln\left|1-e^x\right|+C$$

217.

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\cos x+3}{\cos x-2}\right|+C$$

219.

$$\frac{1}{2-2e^{2t}}+C$$

221.

$$2\sqrt{1+x}-2\ln\left|1+\sqrt{1+x}\right|+C$$

223.

$$\ln\left|\frac{\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

225.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$

227.

$$x-\ln\left(1+e^{x}\right)+C$$

229.

$$6\,x^{1/6}-3\,x^{1/3}+2\sqrt{x}-6\ln\left(1+x^{1/6}\right)+C$$

231.

$$\frac{4}{3}\pi\,\operatorname{arctanh}\left[\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}\pi\ln 4$$

233.

$$x=-\ln|t-3|+\ln|t-4|+\ln 2$$

235.

$$x=\ln|t-1|-\sqrt{2}\ \arctan\left(\sqrt{2}\,t\right)-\frac{1}{2}\ln\left(t^{2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\ \arctan\left(2\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\ 4{,}5$$

237.

$$\frac{2}{5}\pi\ln\frac{28}{13}$$

239.

$$\frac{\arctan\left[\frac{-1+2\,x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6}\ln\left|1-x+x^{2}\right|+C$$

241. 2,0 cm²

243.

$$\begin{gathered}3\left(-8+x\right)^{1/3}\\-2\sqrt{3}\arctan\left[\frac{-1+\left(-8+x\right)^{1/3}}{\sqrt{3}}\right]\\-2\ln\left[2+\left(-8+x\right)^{1/3}\right]\\+\ln\left[4-2\left(-8+x\right)^{1/3}+\left(-8+x\right)^{2/3}\right]+C\end{gathered}$$

Æfingar í kafla 3.5

245.

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^{2}+2\,x+2\right|+2\arctan\left(x+1\right)+C$$

247.

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)+C$$

249.

$$\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2}+C$$

251.

$$\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+C$$

253.

$$-\frac{1}{2}\csc(2w)+C$$

255.

$$9-6\sqrt{2}$$

257.

$$2-\frac{\pi}{2}$$

259.

$$\frac{1}{12}\tan^4(3x)-\frac{1}{6}\tan^2(3x)+\frac{1}{3}\ln\left|\sec(3x)\right|+C$$

261.

$$2\cot\left(\frac{w}{2}\right)-2\csc\left(\frac{w}{2}\right)+w+C$$

263.

$$\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2(5+4\sin t-3\cos t)}{4\cos t+3\sin t}\right|$$

265.

$$6x^{1/6}-3x^{1/3}+2\sqrt{x}-6\ln\left[1+x^{1/6}\right]+C$$

267.

$$-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$$

269.

$$\frac{1}{2}\left(x^2+\ln\left|1+e^{-x^2}\right|\right)+C$$

271.

$$2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right)+C$$

273.

$$0{,}5=\frac{1}{2}$$

275. 8,0

277.

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(x+2)\right)+C$$

279.

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$$

281.

$$\ln\left(e^x+\sqrt{-4+e^{2x}}\right)+C$$

283.

$$\ln x-\frac{1}{6}\ln\left(x^6+1\right)-\frac{\arctan\left(x^3\right)}{3x^3}+C$$

285.

$$\ln\left|x+\sqrt{16+x^2}\right|+C$$

287.

$$-\frac{1}{4}\cot(2x)+C$$

289.

$$\frac{1}{2}\arctan 10$$

291. 1276,14

293. 7,21

295.

$$\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\left|\frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}\right|$$

297.

$$\frac{1}{3}\arctan(3)\approx 0{,}416$$

Æfingar í kafla 3.6

299. 0,696

301. 9,484

303. 0,5000

305.

$$T_4 = 18{,}75$$

307. 0,500

309. 1,129

311. 0,6577

313. 0,0213

315. 1,5629

317. 1,9133

319.

$$\mathrm{T}(4) = 0{,}1088$$

321. 1,0

323. Áætluð skekkja er 0,000325.

325.

$$\frac{1}{7938}$$

327.

$$\frac{81}{25.000}$$

329. 475

331. 174

333. 0,1544

335. 6,2807

337. 4,606

339. 3,41 m

341. $T_{16} = 100{,}125$; algild skekkja = 0,125

343. um það bil 89.250 m²

345. fleygbogi

Æfingar í kafla 3.7

347. ósamleitið

349.

$$\frac{\pi}{2}$$

351.

$$\frac{2}{e}$$

353. Samleitið

355. Heildið er samleitið og hefur gildið 1/2.

357. −4

359.

$$\pi$$

361. ósamleitið

363. ósamleitið

365. 1,5

367. ósamleitið

369. ósamleitið

371. ósamleitið

373. Bæði heildin eru ósamleitin.

375. ósamleitið

377. ósamleitið

379.

$$\pi$$

381. 0,0

383. 0,0

385. 6,0

387.

$$\frac{\pi}{2}$$

389.

$$8\ln\left(16\right)-4$$

391.

$$1{,}047$$

393.

$$-1+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

395. 7,0

397.

$$\frac{5\pi}{2}$$

399.

$$3\pi$$

401.

$$\frac{1}{s},s>0$$

403.

$$\frac{s}{s^2+4},s>0$$

405. Svör eru breytileg.

407. 0,8775

Upprifjunaræfingar

409. Ósatt

411. Ósatt

413.

$$-\frac{\sqrt{x^2+16}}{16x}+C$$

415.

$$\frac{1}{10}\left(4\ln\left(2-x\right)+5\ln\left(x+1\right)-9\ln\left(x+3\right)\right)+C$$

417.

$$-\frac{\sqrt{4-\sin^2\left(x\right)}}{\sin\left(x\right)}-\frac{x}{2}+C$$

419.

$$\frac{1}{15}\left(x^2+2\right)^{3/2}\left(3x^2-4\right)+C$$

421.

$$\frac{1}{16}\ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right)-\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(1-x\right)+\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(x+1\right)+C$$

423.

$$\mathrm{M}_4=3{,}312\,,\mathrm{T}_4=3{,}354\,,S_4=3{,}326$$

425.

$$\mathrm{M}_4=-0{,}982\,,\mathrm{T}_4=-0{,}917\,,S_4=-0{,}952$$

427. um það bil 0,2194

431. Answers may vary. Ex: 9,405 km

Kafli 4

Stöðumat

4.2

5

4.3

$$y=2x^2+3x+2$$

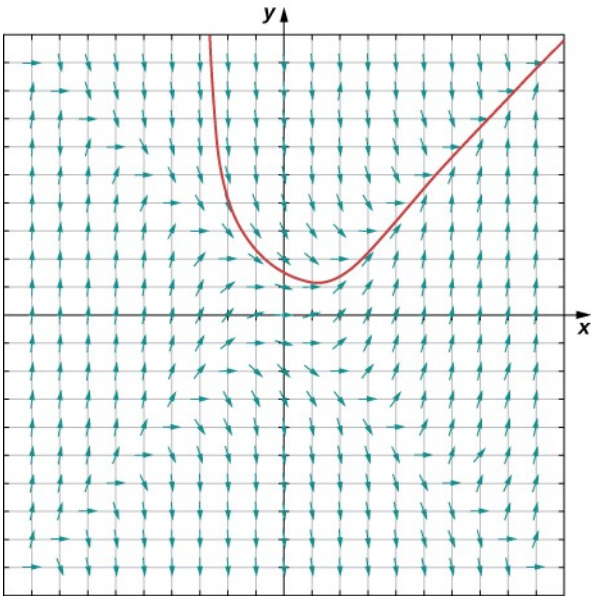
4.5

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-6e^x+14$$

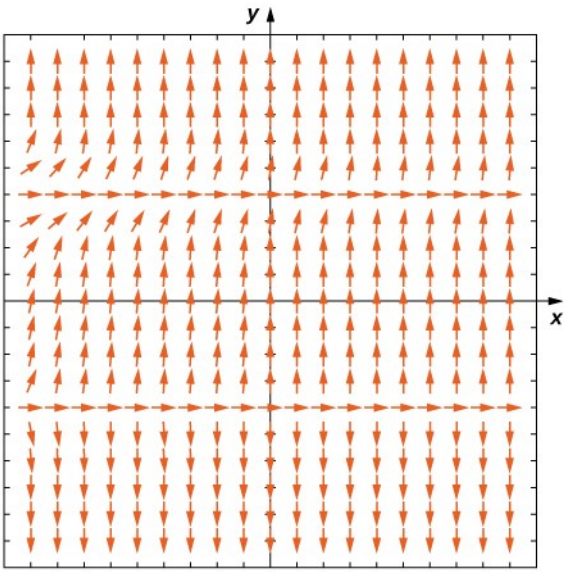
4.6

$$v(t)=-9{,}8t$$

4.7



4.8



Jafnvægislausnirnar eru $y=-2$ og $y=2$. Fyrir þessa jöfnu er $y=-2$ óstöðug jafnvægislausn en $y=2$ hálfstöðug jafnvægislausn.

4.9

n	x_n	$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$
0	1	-2
1	1,1	$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = -1{,}5$
2	1,2	$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = -1{,}1419$
3	1,3	$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = -0{,}8387$
4	1,4	$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = -0{,}5487$
5	1,5	$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = -0{,}2442$
6	1,6	$y_6 = y_5 + hf(x_5, y_5) = 0{,}0993$
7	1,7	$y_7 = y_6 + hf(x_6, y_6) = 0{,}5099$
8	1,8	$y_8 = y_7 + hf(x_7, y_7) = 1{,}0272$
9	1,9	$y_9 = y_8 + hf(x_8, y_8) = 1{,}7159$
10	2	$y_{10} = y_9 + hf(x_9, y_9) = 2{,}6962$

4.10

$$y = 2 + Ce^{x^2+3x}$$

4.11

$$y = \frac{4 + 14e^{x^2+x}}{1 - 7e^{x^2+x}}$$

4.12

Upphafsgildisverkefni:

$$\frac{du}{dt} = 2{,}4 - \frac{2u}{25}, \quad u(0) = 3$$

Lausn: $u(t) = 30 - 27e^{-2t/25}$

Styrkur: $30 - 27e^{\frac{-2t}{25}}$

4.13

a. Upphafsgildisverkefni

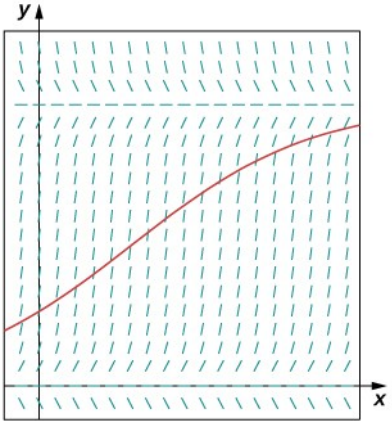
$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20), T(0) = 230$$

b. $T(t) = 20 + 210e^{kt}$

c. Um það bil 111 mínútur.

4.14

a. $\frac{dP}{dt}=0{,}04\left(1-\frac{P}{750}\right), \quad P(0)=200$



b. $P(t)=\frac{3000\,e^{,04t}}{11+4\,e^{,04t}}$

c. Eftir 12 mánuði verður stofninn $P(12)\approx 278$ kanínur.

4.15

$$y'+\frac{15}{x+3}\,y=\frac{10x-20}{x+3}\,;\, p(x)=\frac{15}{x+3} \text{ og } q(x)=\frac{10x-20}{x+3}$$

4.16

$$y=\frac{x^3+x^2+C}{x-2}$$

4.17

$$y=-2x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{2x}$$

4.18

a. $\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -v-9{,}8\\ v(0) &= 0\end{aligned}$

b. $v(t)=9{,}8\left(e^{-t}-1\right)$

c. $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(9{,}8\left(e^{-t}-1\right)\right)=-9{,}8\,\text{m/s}\approx -35{,}28\,\text{km/klst}$

4.19

Upphafsgildisverkefni:

$$8q'+\frac{1}{0{,}02}q=20\,\sin\,5t, \quad q(0)=4$$

$$q(t)=\frac{10\ \sin\ 5t-8\ \cos\ 5t+172e^{-6,25t}}{41}$$

Æfingar í kafla 4.1

1.

$$1$$

3.

$$3$$

5.

$$1$$

7.

$$1$$

19.

$$y=4+\frac{3x^4}{4}$$

21.

$$y=\frac{1}{2}e^{x^2}$$

23.

$$y=2e^{-1/x}$$

25.

$$u=\sin^{-1}\left(e^{-1+t}\right)$$

27.

$$y=-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}-1$$

29.

$$y=C-x+x\ln x-\ln\left(\cos x\right)$$

31.

$$y=C+\frac{4^x}{\ln\left(4\right)}$$

33.

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{t^2+16}\left(t^2+16\right)+C$$

35.

$$x=\frac{2}{15}\sqrt{4+t}\left(3t^2+4t-32\right)+C$$

37.

$$y=Cx$$

39.

$$y=1-\frac{t^2}{2}, y=-\frac{t^2}{2}-1$$

41.

$$y=e^{-t}, y=-e^{-t}$$

43.

$$y=2\left(t^2+5\right), t=3\sqrt{5}$$

45.

$$y=10e^{-2t}, t=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

47. $y=\frac{1}{4}\left(41-e^{-4t}\right)$, aldrei

49. Lausnin breytist úr vaxandi í minnkandi þegar $y\left(0\right)=0$

51. Lausnin breytist úr vaxandi í minnkandi þegar $y\left(0\right)=0$

53.

$$v\left(t\right)=-9{,}8t+a$$

55. 0 m/s

57. 52,354 metrar

59. $x=80t-\frac{24}{\pi^2}\cos\left(\pi t\right)+\frac{24}{\pi^2}$, 2 klukkustundir og 0 mínútur

61.

$$y=4e^{3t}$$

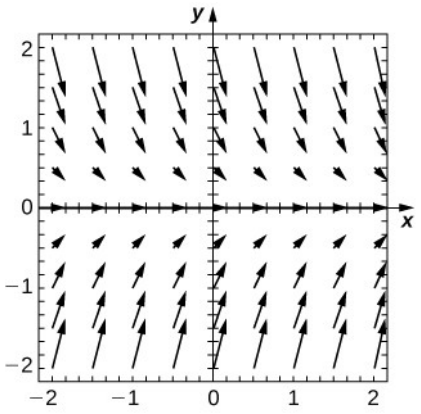
63.

$$y = 3 - 2t + t^2$$

65. $y = \frac{1}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$ og $y = x$

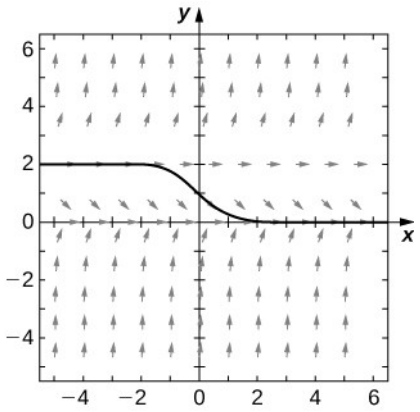
Æfingar í kafla 4.2

67.



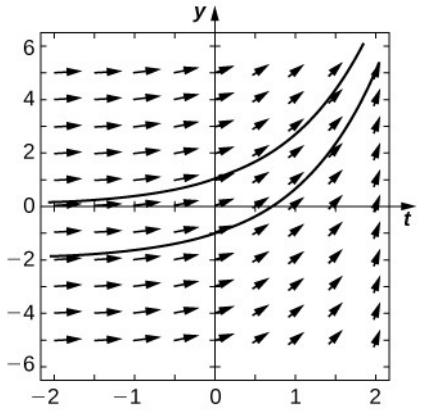
69. $y = 0$ er stöðug jafnvægislausn

71.

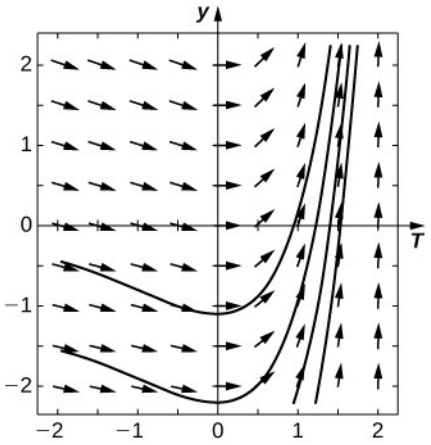


73. $y = 0$ er stöðug jafnvægislausn en $y = 2$ er óstöðug jafnvægislausn

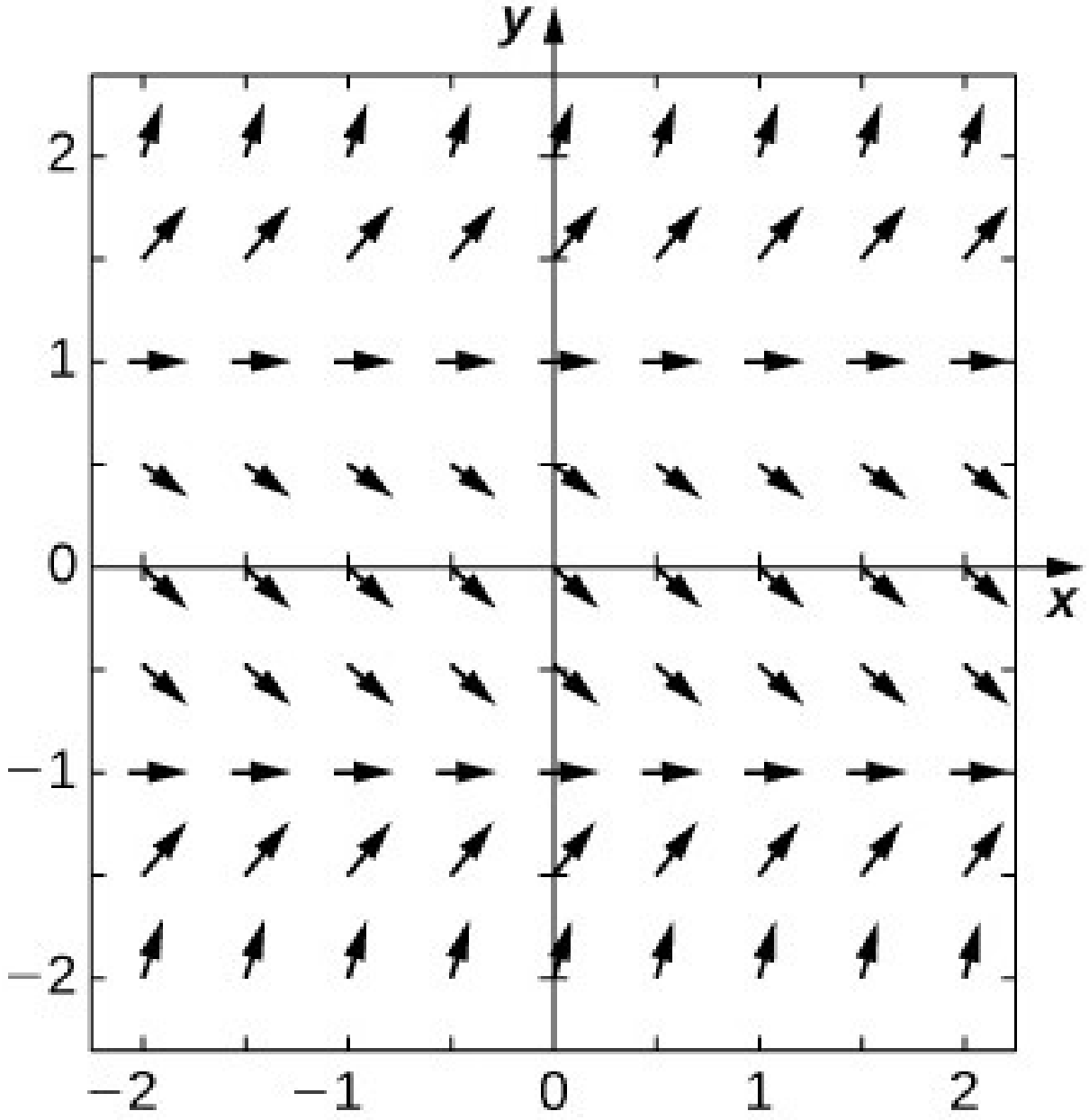
75. Almenna lausnin er $y = e^t + C$.



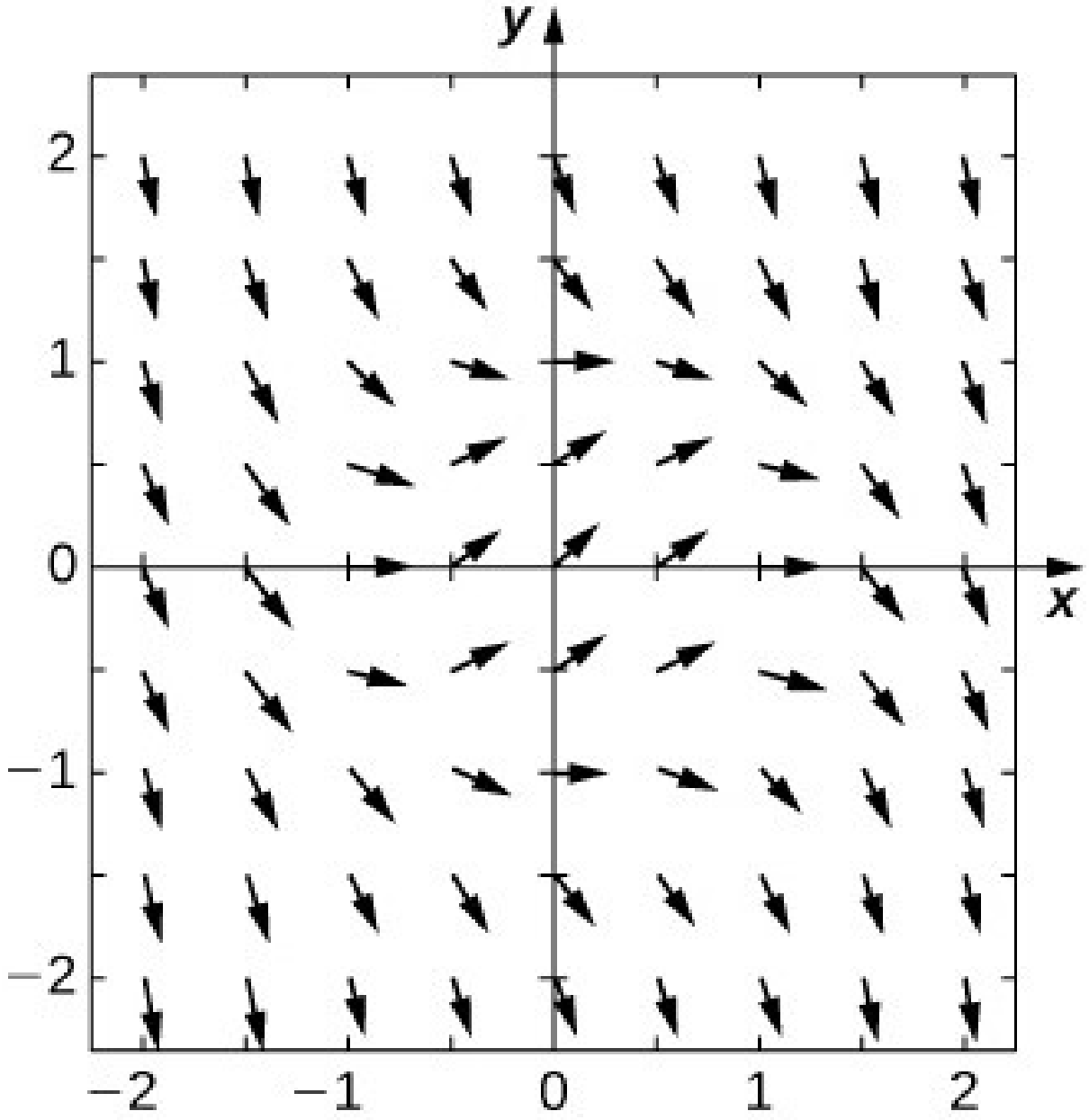
77. Almenna lausnin er $y = e^t(t-1) + C$.



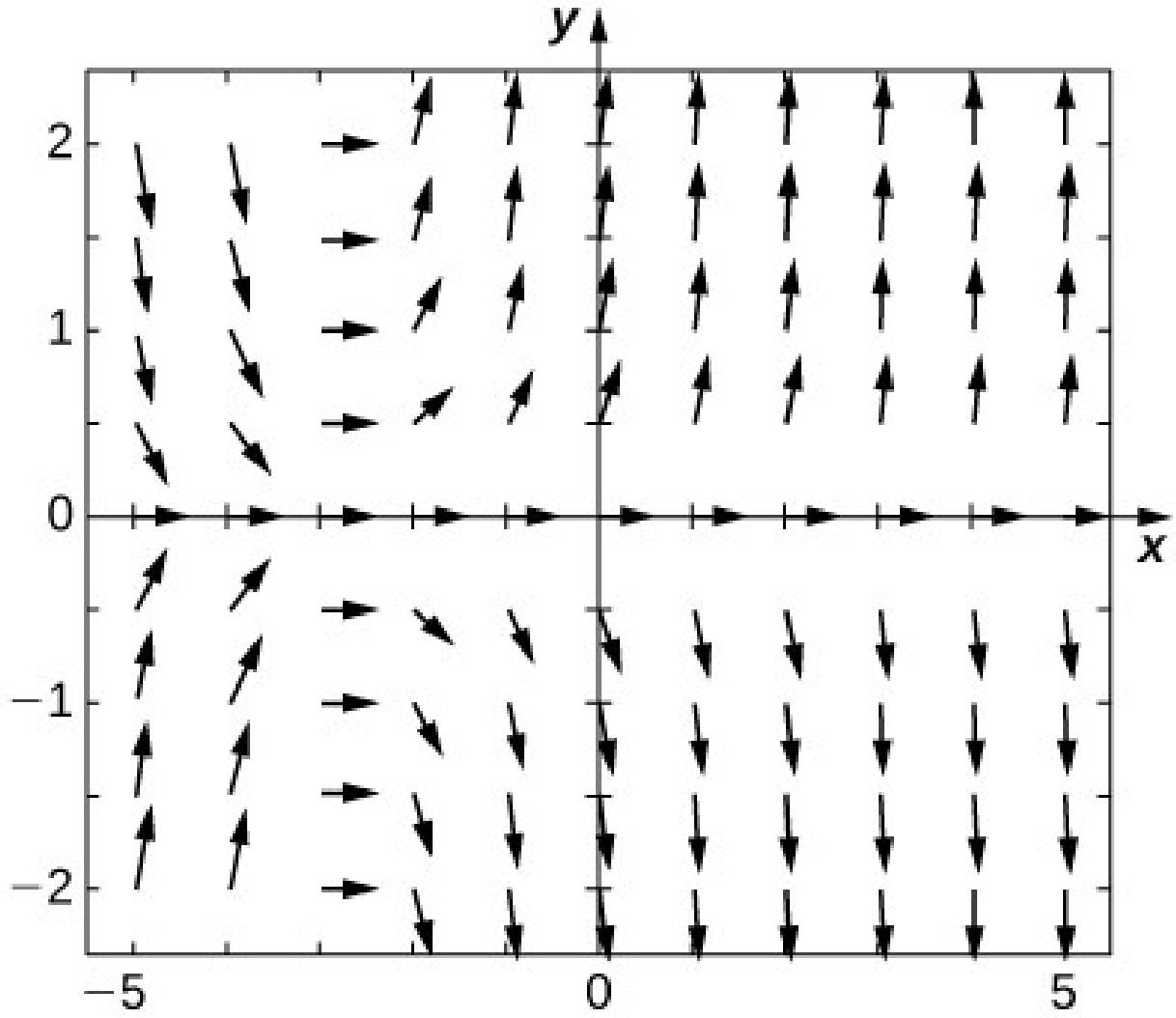
79.



81.



83.



85. E

87. A

89. B

91. A

93. C

95. $2{,}24$, nákvæmt gildi: 2

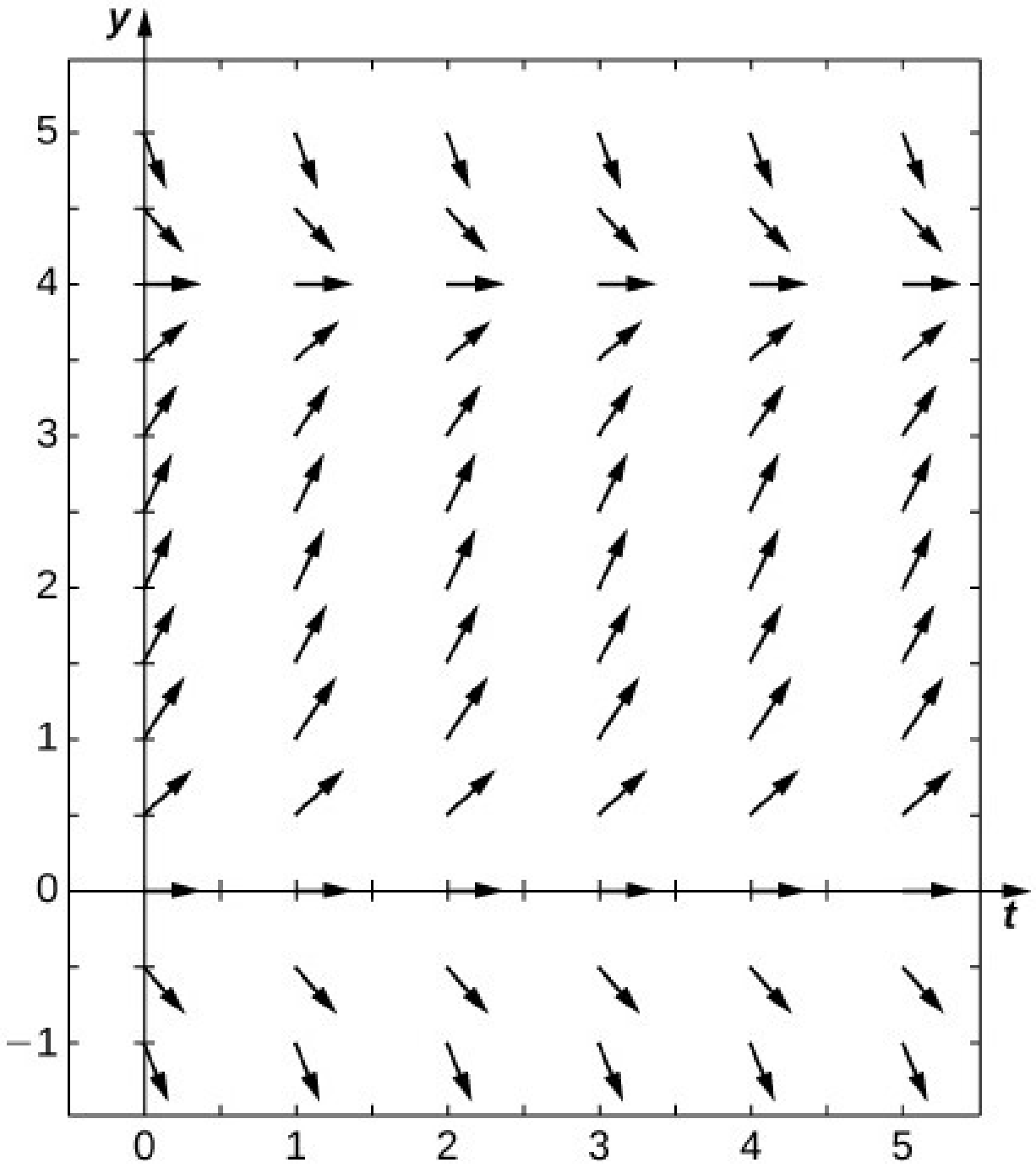
97. $7{,}739364$, nákvæmt gildi: $5(e-1)$

99. $-0{,}2535$ nákvæmt gildi: 0

101. $1{,}345$, nákvæmt gildi: $\dfrac{1}{\ln(2)}$

103. -4, nákvæmt gildi: $-1/2$

105.



107.

$$y' = 2e^{t^2/2}$$

109.

111.

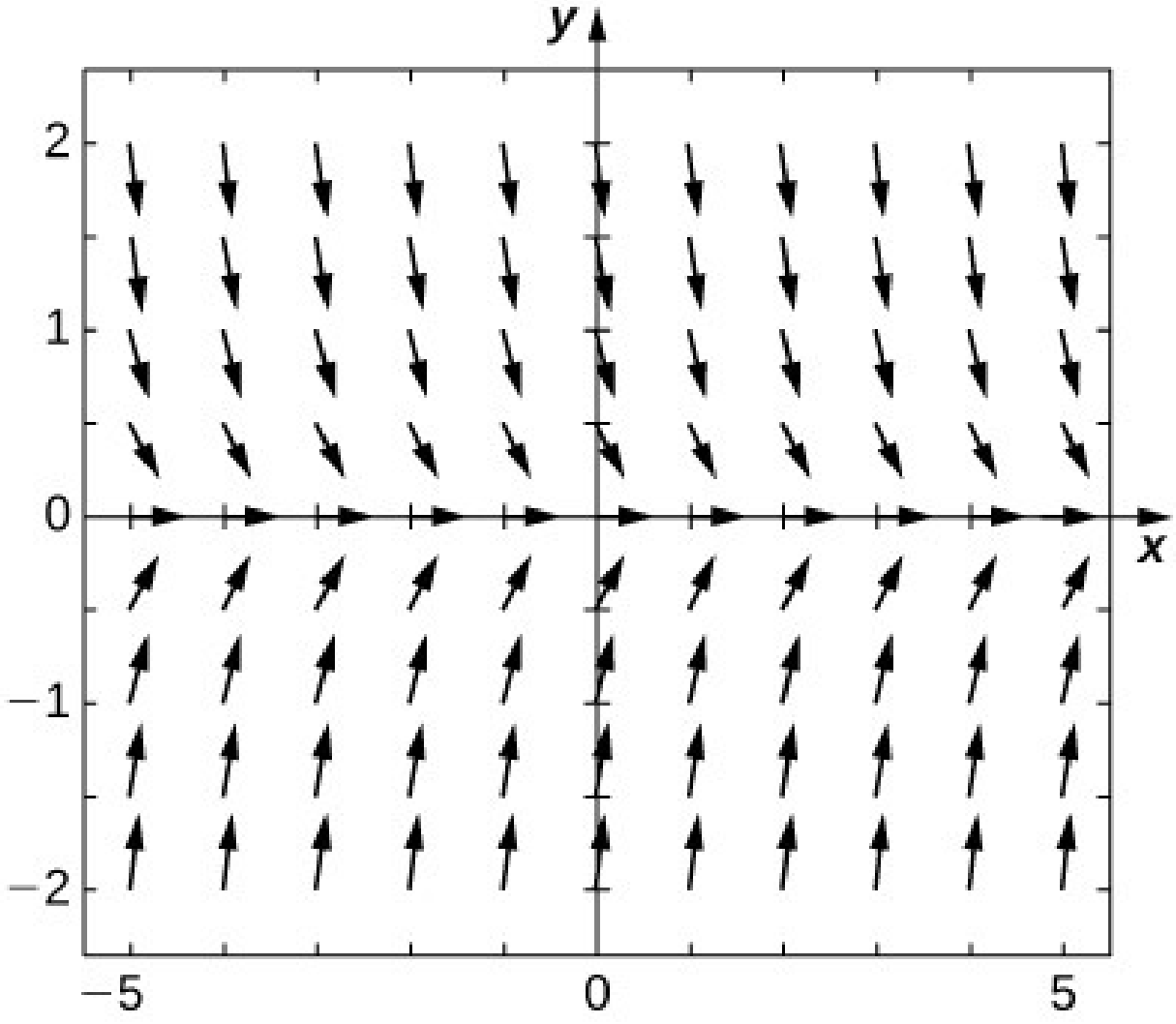
$$3{,}2756$$

113.

$$2\sqrt{e}$$

Skrefstærð	Hlutfallsleg skekkja
$h=0{,}1$	0,3935
$h=0{,}01$	0,06163
$h=0{,}001$	0,006612
$h=0{,}0001$	0,0006661

115.



117.

$$4{,}0741\,e^{-10}$$

Æfingar í kafla 4.3

119.

$$y = e^{t} - 1$$

121.

$$y = 1 + C\,e^{-t}$$

123.

$$y = C\,x\,e^{-1/x}$$

125.

$$y = \frac{1}{C - x^{2}}$$

127.

$$y = -\frac{2}{C + \ln x}$$

129.

$$y = C\,e^{x}(x+1) + 1$$

131.

$$y = \sin(\ln t + C)$$

133.

$$y = -\ln\left(e^{-x}\right)$$

135.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 - e^{x^{2}}}}$$

137.

$$y = \tanh^{-1}\left(\frac{x^{2}}{2}\right)$$

139.

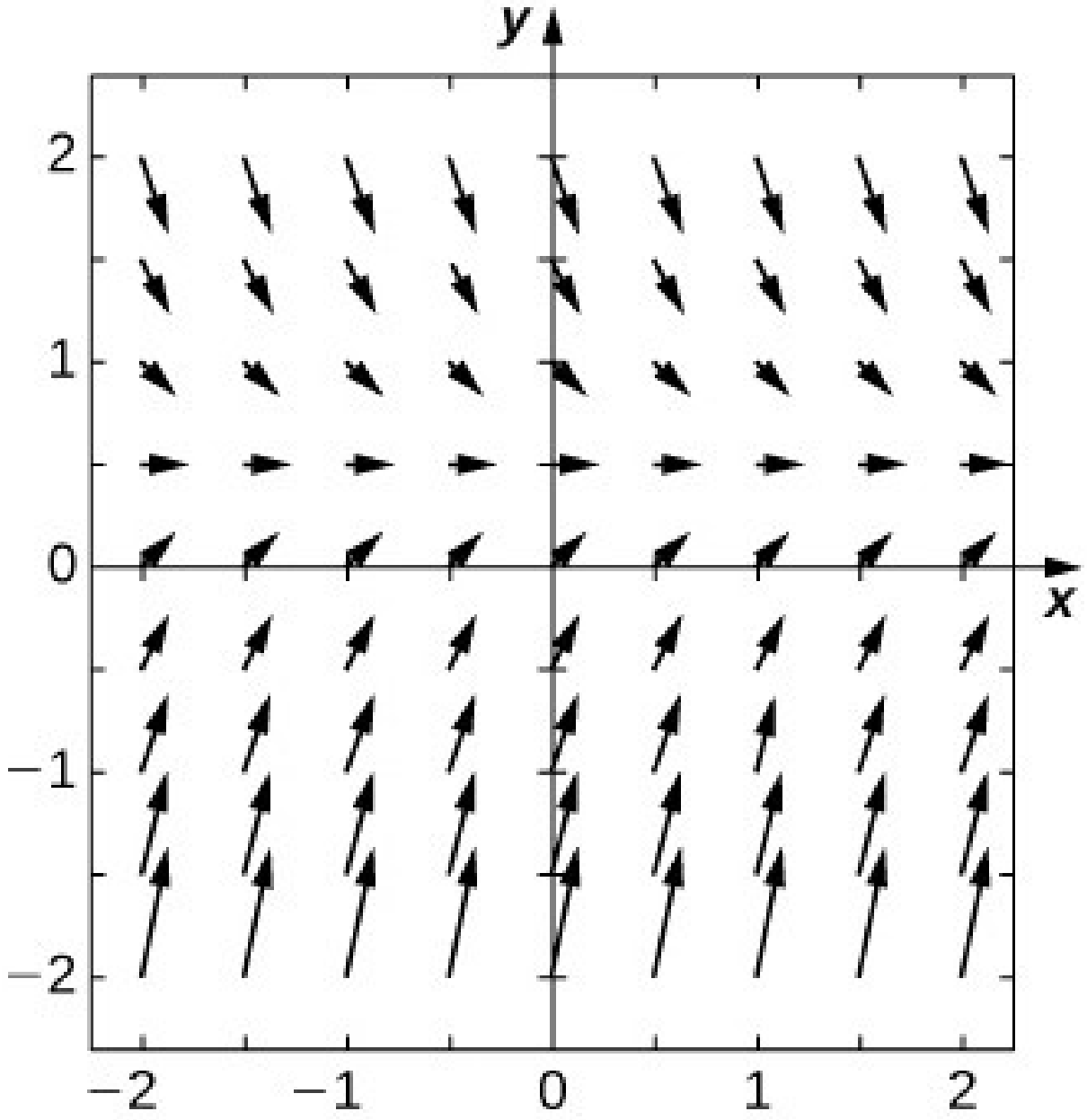
$$x = \sin(1 - t + t\ln t)$$

141.

$$y=\ln\left(\ln\left(5\right)\right)-\ln\left(2-5^{x}\right)$$

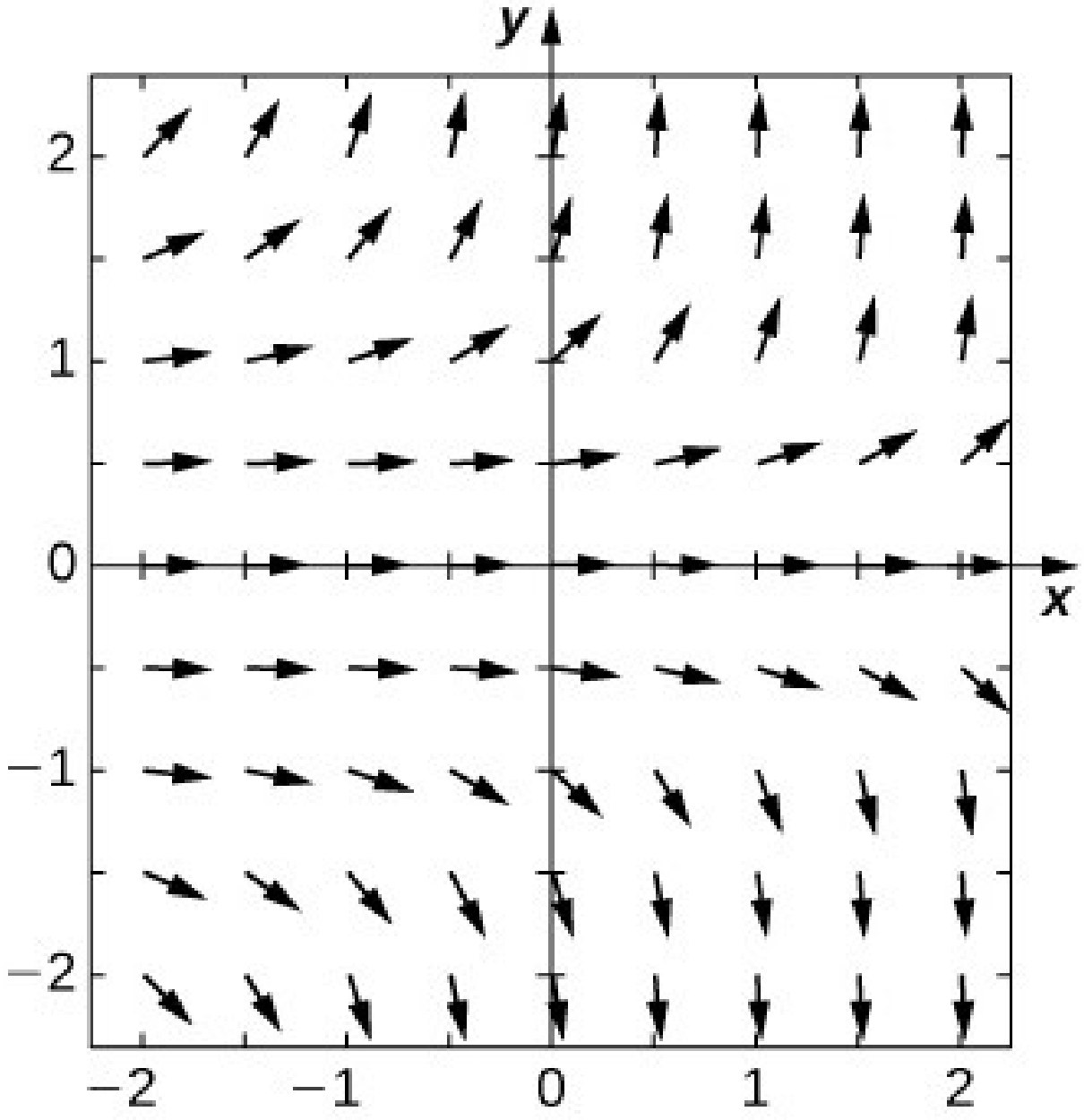
143.

$$y=Ce^{-2x}+\frac{1}{2}$$



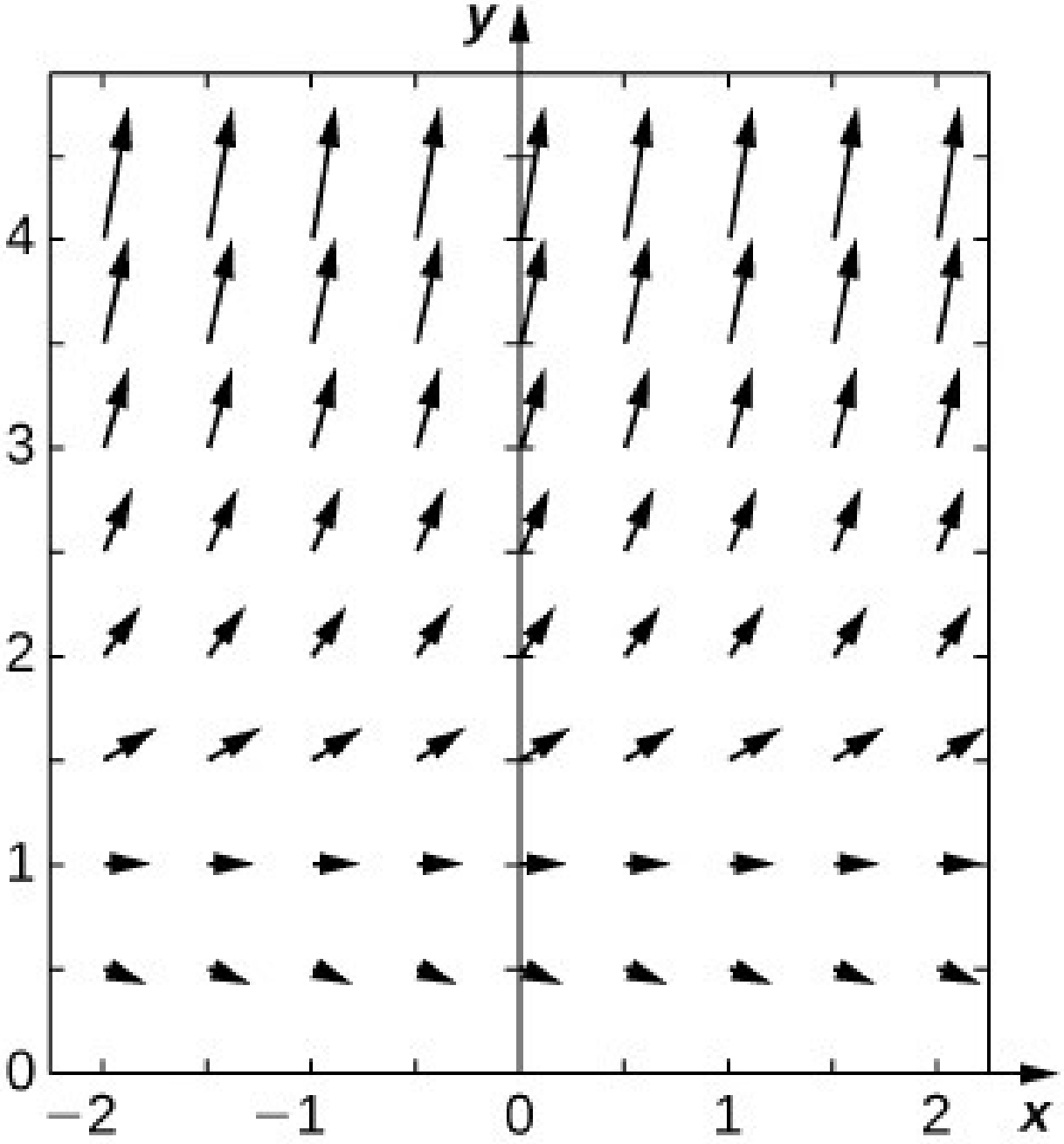
145.

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{C-e^{x}}}$$



147.

$$y = C e^{-x} x^{x}$$



149.

$$y=\frac{r}{d}\left(1-e^{-dt}\right)$$

151.

$$y(t)=10-9e^{-x/50}$$

153. 134,3 kílógrömm

155. 900 sekúndur

157. 17 klukkustundir og 17 mínútur

159.

$$T(t)=20+50e^{-0,125t}$$

161.

$$T(t)=20+38,5e^{-0,125t}$$

163.

$$y=\left(c+\frac{b}{a}\right)e^{ax}-\frac{b}{a}$$

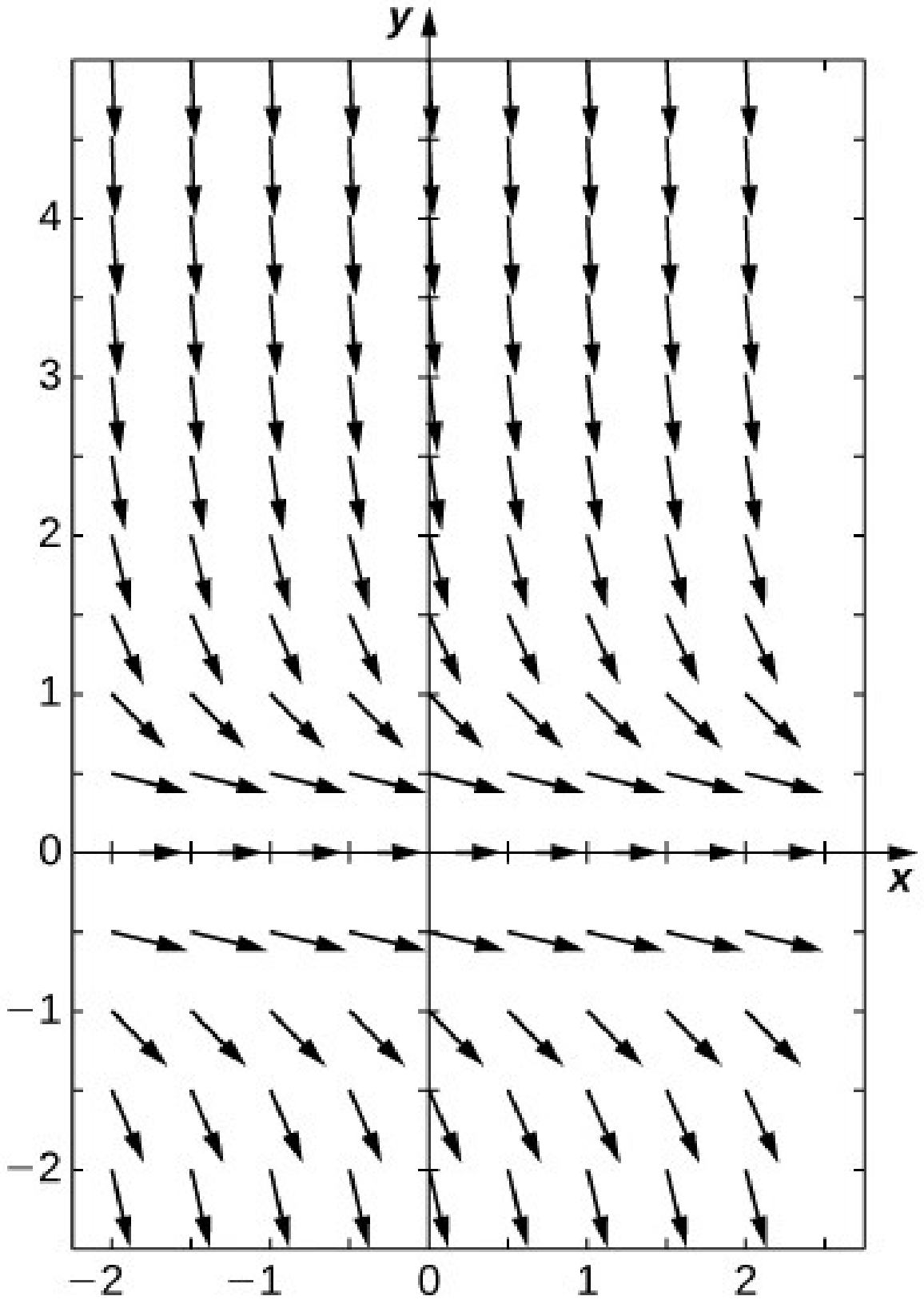
165.

$$y(t)=cL+(I-cL)e^{-rt/L}$$

167. $y=40\left(1-e^{-0,1t}\right)$, 40 g/cm²

Æfingar í kafla 4.4

169.



$P=0$ er hálfstöðug jafnvægislausn

171.

$$P=\frac{10e^{10x}}{e^{10x}+4}$$

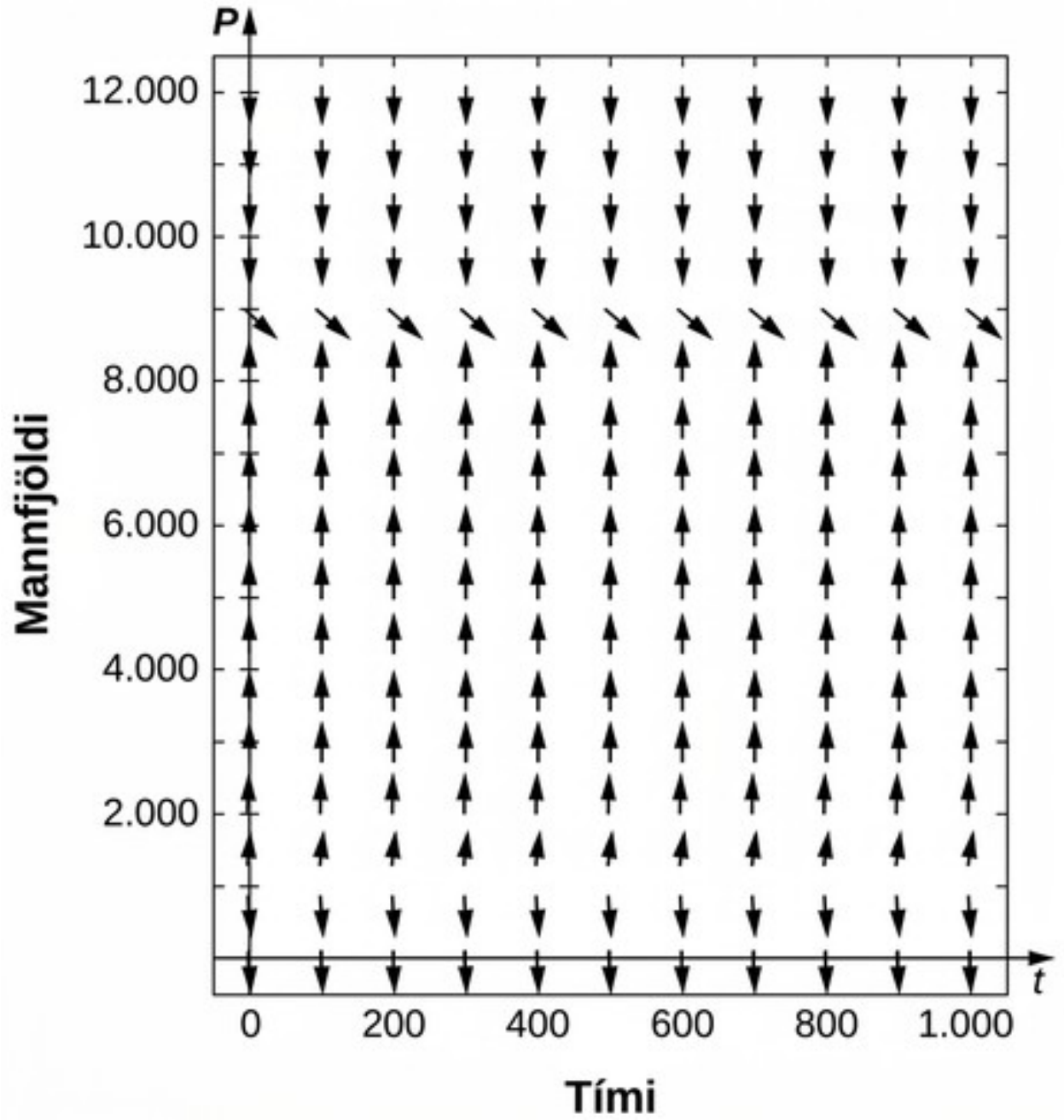
173.

$$P(t)=\frac{10000e^{0,02t}}{150+50e^{0,02t}}$$

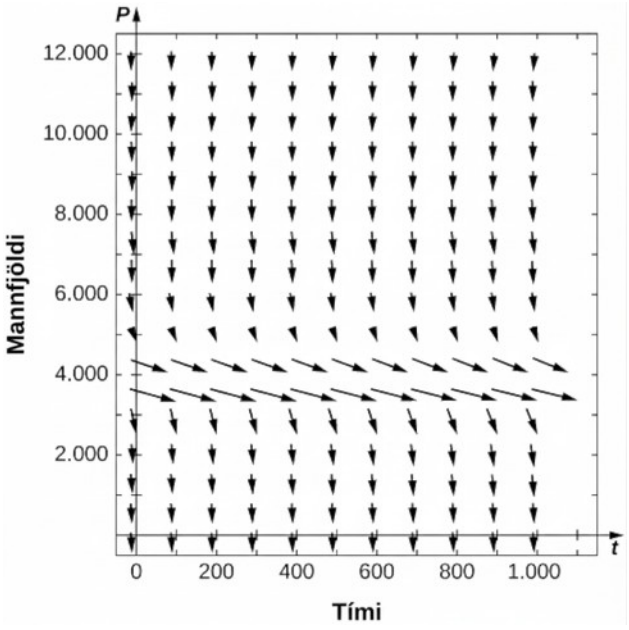
175. 69 klukkustundir og 5 mínútur

177. 8 ár og 11 mánuðir

179.

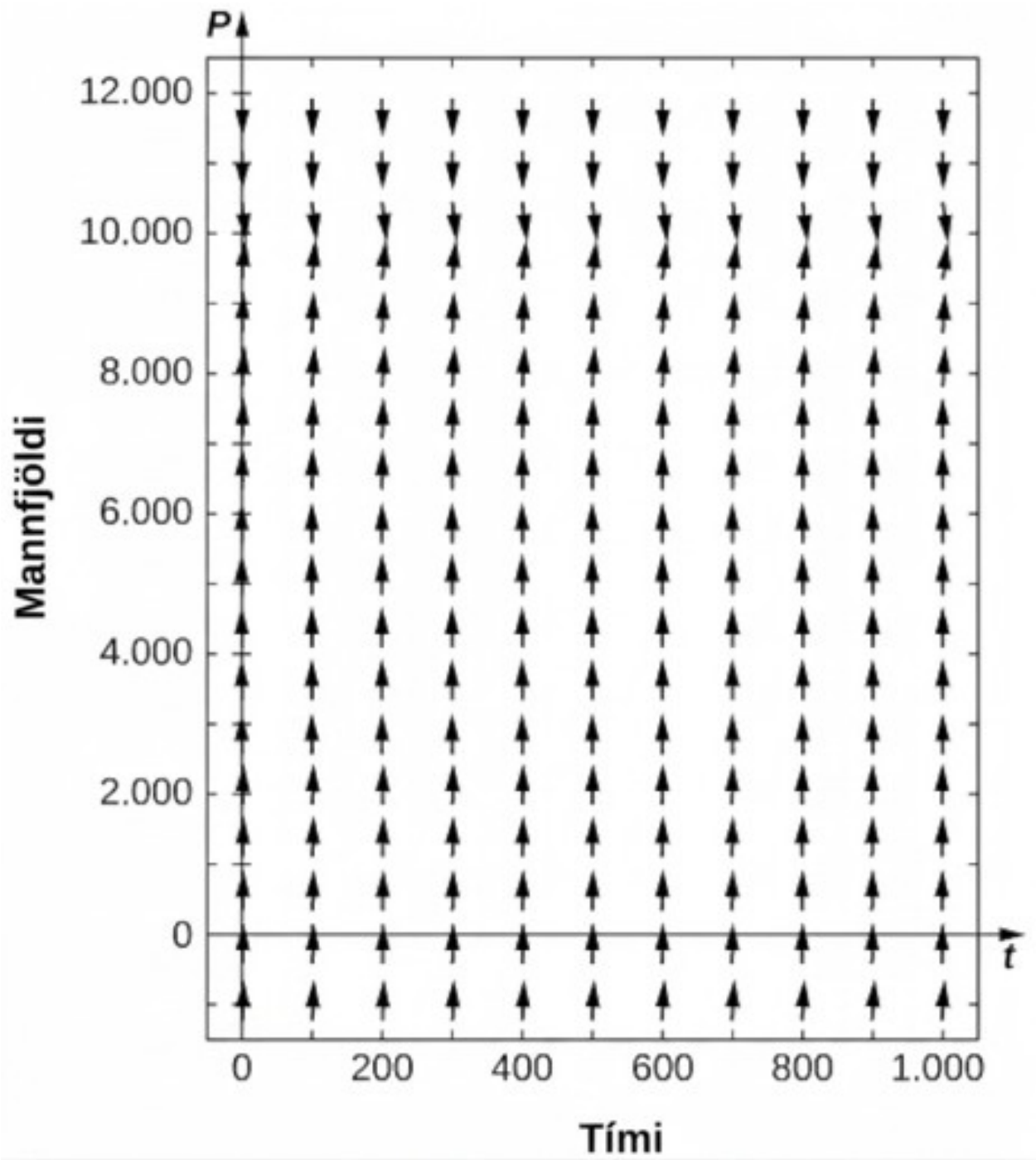

P
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
Mannfjöldi
t
0
200
400
600
800
1.000
Tími

181.



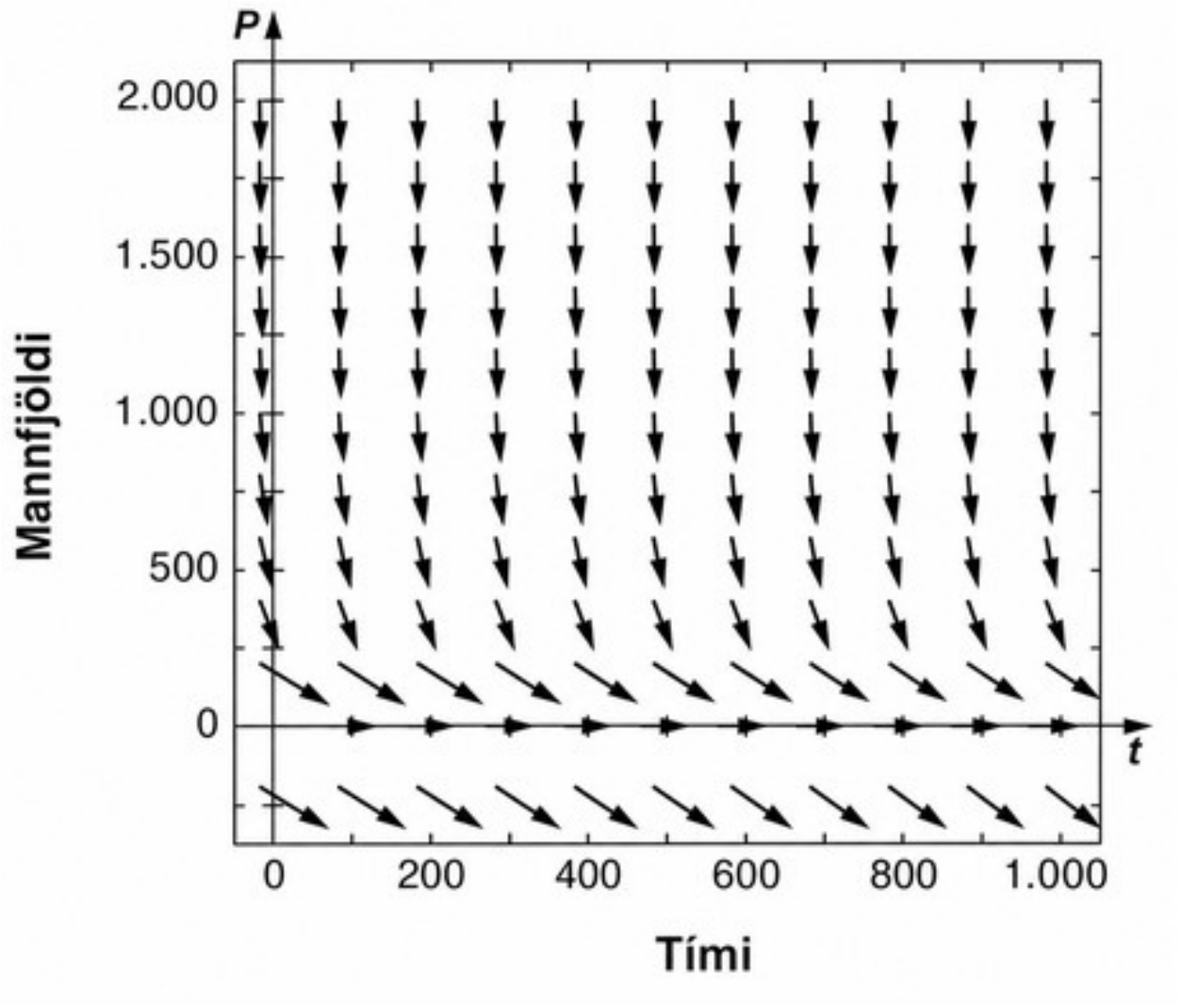
P_1 er hálfstöðug jafnvægislausn

183.



P_2>0 er stöðug jafnvægislausn

185.

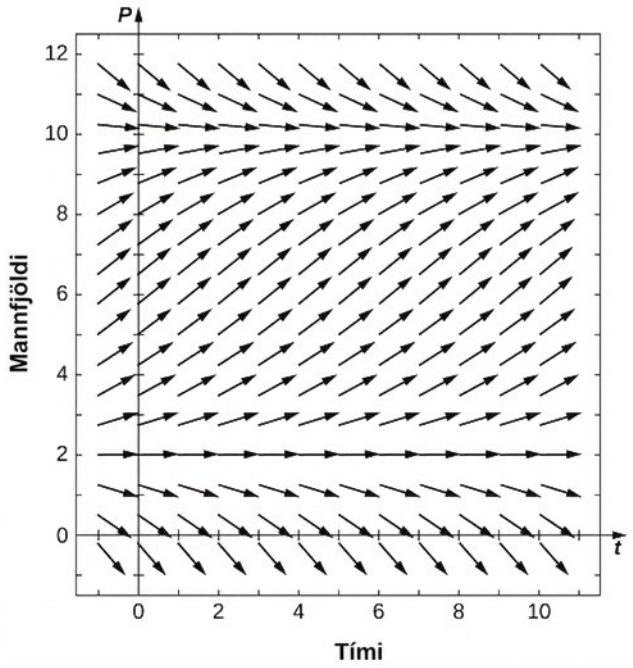


$P_1 = 0$ er hálfstöðug jafnvægislausn

187.

$$P(t) = \frac{3500}{\left(4 + 3e^{-035t}\right)}$$

189.

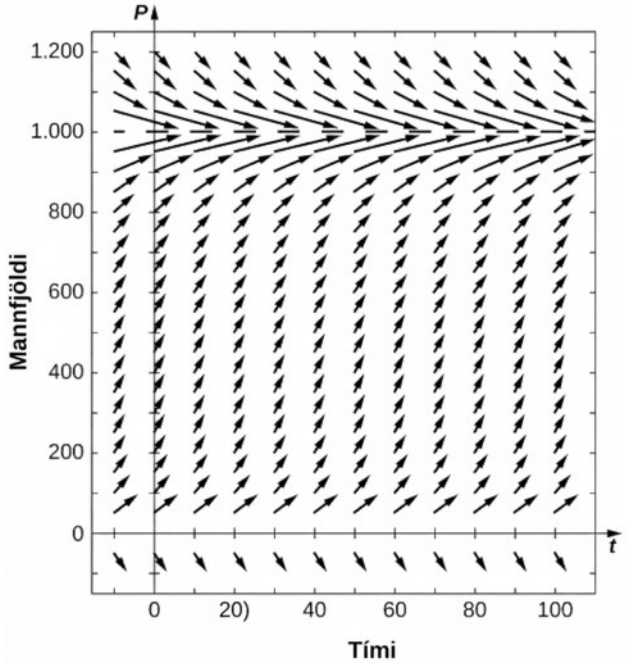


191.

$$P(t)=\frac{850+500\,e^{0,009\,t}}{85+5\,e^{0,009\,t}}$$

193. 13 ár

195.



197. 31,465 dagar

199. september 2008

201.

$$\frac{K+T}{2}$$

203.

$$r=0{,}0405$$

205.

$$\alpha=0{,}0081$$

207. Lógistísk jafna: 361, Lógistísk jafna með þröskuldsstofni: 436, Gompertz-jafna: 309.

Æfingar í kafla 4.5

209. Já

211. Já

213.

$$y'-x^3y=\sin x$$

215.

$$y'+\frac{(3x+2)}{x}y=-e^x$$

217.

$$\frac{dy}{dt}-yx(x+1)=0$$

219.

$$e^{(e^x)}$$

221.

$$-\ln(\cosh x)$$

223.

$$y=Ce^{3x}-\frac{2}{3}$$

225.

$$y=Cx^3+6x^2$$

227.

$$y = C\,e^{x^2/2} - 3$$

229.

$$y = C\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2x + 4\tan\left(\frac{x}{2}\right)\ln\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

231.

$$y = C\,x^3 - x^2$$

233.

$$y = C(x+2)^2 + \frac{1}{2}$$

235.

$$y = \frac{C}{\sqrt{x}} + 2\sin(3t)$$

237.

$$y = C(x+1)^3 - x^2 - 2x - 1$$

239.

$$y = C\,e^{\sinh^{-1}x} - 2$$

241.

$$y = x + 4\,e^{-x} - 1$$

243.

$$y = -\frac{3x}{2}\left(x^2 - 1\right)$$

245.

$$y = 1 - e^{\tan^{-1}x}$$

247.

$$y = (x+2)\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

249.

$$y = 2\,e^{2\sqrt{x}} - 2x - 2\sqrt{x} - 1$$

251.

$$v(t)=\frac{g\,m}{k}\left(1-e^{-k\,t/m}\right)$$

253. 40,451 sekúndur

255.

$$\sqrt{\frac{g\,m}{k}}$$

257.

$$y=C\,e^{x}-a\left(x+1\right)$$

259.

$$y=C\,e^{x^{2}/2}-a$$

261.

$$y=\frac{e^{k\,t}-e^{t}}{k-1}$$

Upprifjunaræfingar

263. F

265. T

267.

$$y\left(x\right)=\frac{2^{x}}{\ln\left(2\right)}+x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^{2}}+C$$

269.

$$y\left(x\right)=\ln\left(C-\cos x\right)$$

271.

$$y\left(x\right)=e^{e^{C+x}}$$

273.

$$y\left(x\right)=4+\frac{3}{2}x^{2}+2\,x-\sin x$$

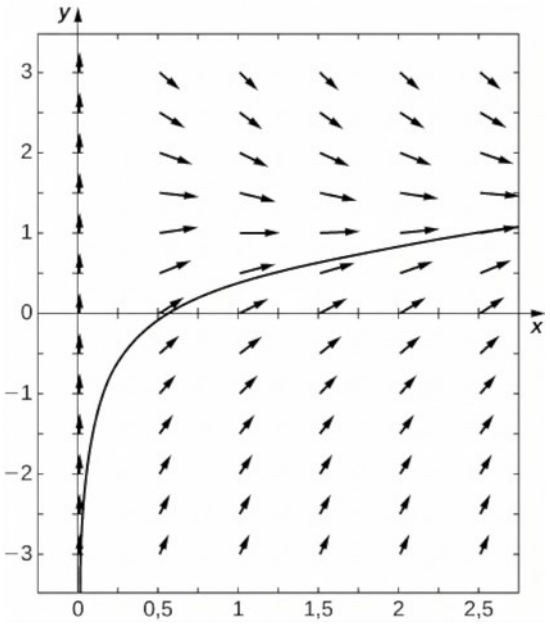
275.

$$y\left(x\right)=-\frac{2}{1+3\left(x^{2}+2\sin x\right)}$$

277.

$$y(x)=-2x^2-2x-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}e^{3x}$$

279.



$$y(x)=Ce^{-x}+\ln x$$

281. Aðferð Eulers: $0{,}6939$, nákvæm lausn: $y(x)=\frac{3^x-e^{-2x}}{2+\ln(3)}$

283. $\frac{40}{49}$ úr sekúndu

285. $x(t)=5000+\frac{245}{9}-\frac{49}{3}t-\frac{245}{9}e^{-5/3t}$, $t=307{,}8$ sekúndur

287.

$$T(t)=200\left(1-e^{-t/1000}\right)$$

289.

$$P(t)=\frac{1600000e^{0{,}02t}}{9840+160e^{0{,}02t}}$$

Kafli 5

Stöðumat

5.1

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3+2n}$$

5.2

$$a_n = 6n - 10$$

5.3
Runan er samleitin og markgildi hennar er 0.

5.4
Runan er samleitin og markgildi hennar er $\sqrt{2/3}$.

5.5

$$2$$

5.6

$$0.$$

5.7
Röðin er ósamleitin vegna þess að k-ta hlutsumman uppfyllir $S_k > k$.

5.8

$$10.$$

5.9

$$5/7$$

5.10

$$475/90$$

5.11

$$e - 1$$

5.12
Röðin er ósamleitin.

5.13
Röðin er ósamleitin.

5.14
Röðin er samleitin.

5.15

$$S_5 \approx 1{,}09035\,,\ R_5 < 0{,}00267$$

5.16
Röðin er samleitin.
5.17
Röðin er ósamleitin.
5.18
Röðin er samleitin.
5.19

$$0{,}04762$$

5.20
Röðin er alsamleitin.
5.21
Röðin er samleitin.
5.22
Röðin er samleitin.
5.23
Samanburðarprófið, því að $2^n/\left(3^n+n\right)<2^n/3^n$ fyrir allar jákvæðar heiltölur n. Einnig mætti nota samanburð með markgildi.

Æfingar í undirkafla 5.1

1. $a_n=0$ ef n er oddatala og $a_n=2$ ef n er slétt tala

3.

$$\left(a_n\right)=\left(1,3,6,10,15,21,\ldots\right)$$

5.

$$a_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$$

7.

$$a_n=4n-7$$

9.

$$a_n=3{,}10^{1-n}=30{,}10^{-n}$$

11.

$$a_n=2^{n-1}-1$$

13.

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

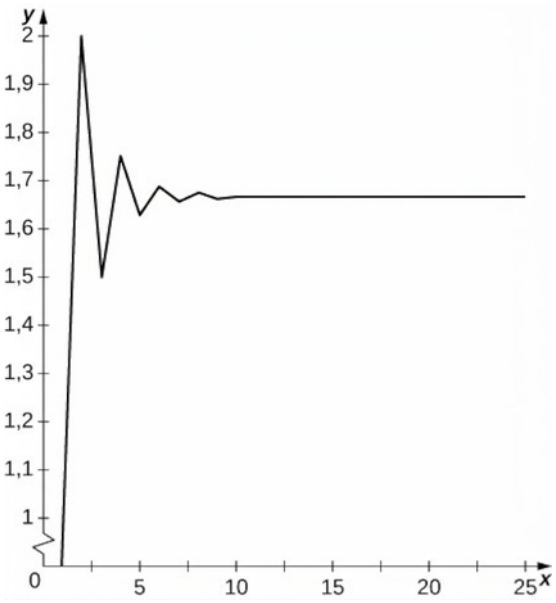
15.

$$f(n) = 2^n$$

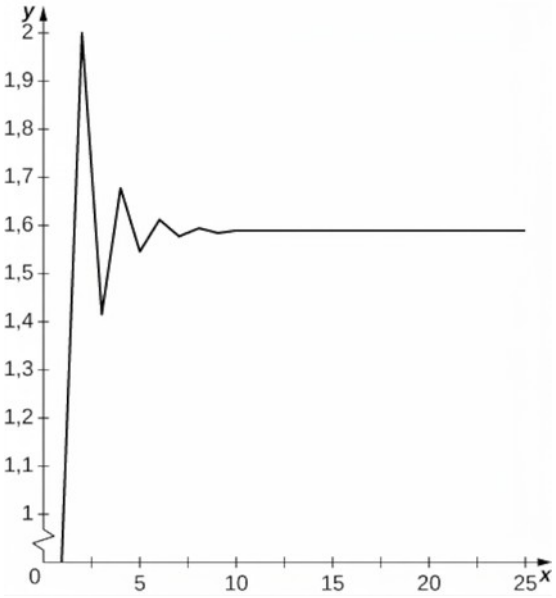
17.

$$f(n) = n!/2^{n-2}$$

19. Liðirnir sveiflast fyrir ofan og neðan $5/3$ og virðast stefna á $5/3$.



21. Terms oscillate above and below $y \approx 1{,}57\ldots$ and appear to converge to a limit.



23.

$$7$$

25.

$$0$$

27.

$$0$$

29.

$$1$$

31. takmörkuð, minnkandi þegar $n \geq 2$

33. takmörkuð, ekki einhalla

35. takmörkuð, minnkandi

37. ekki einhalla, ekki takmörkuð

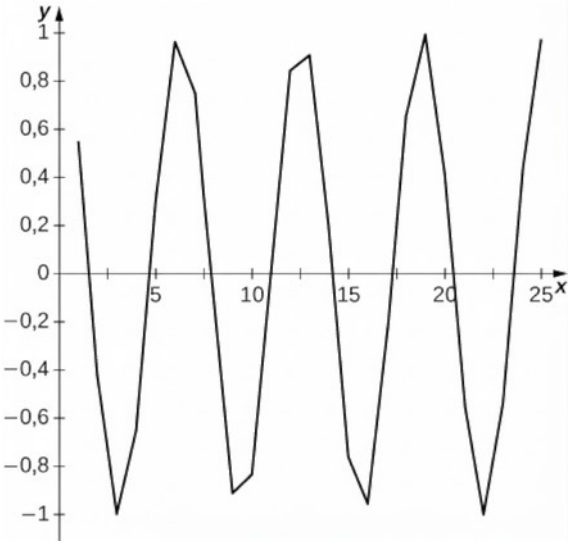
39. a_n er minnkandi og takmörkuð að neðan með 2. Markgildið a verður að uppfylla $a = \sqrt{2a}$ og því er $a = 2$, óháð upphafsgildinu.

41.

$$0$$

43. $0 : |\sin x| \leq |x|$ og $|\sin x| \leq 1$ og því $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$).

45. Grafið sveiflast og bendir til þess að ekkert markgildi sé til.



47. $n^{1/n} \to 1$ og $2^{1/n} \to 1$, og því $a_n \to 0$

49. Þar sem $(1+1/n)^n \to e$, fæst $(1-2/n)^n \approx (1+k)^{-2k} \to e^{-2}$ þegar $k \to \infty$.

51. $2^n + 3^n \le 2 \cdot 3^n$ og $3^n/4^n \to 0$ þegar $n \to \infty$, og því $a_n \to 0$ þegar $n \to \infty$.

53. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = n!/(n+1)(n+2)\cdots(2n) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} < 1/2^n$. Sér í lagi gildir $a_{n+1}/a_n \le 1/2$, og því $a_n \to 0$ þegar $n \to \infty$.

55.

$$x_{n+1} = x_n - \left((x_n - 1)^2 - 2\right)/2(x_n - 1);\ x = 1+\sqrt{2},\ x \approx 2{,}4142,\ n = 5$$

57.

$$x_{n+1} = x_n - x_n\left(\ln(x_n) - 1\right);\ x = e,\ x \approx 2{,}7183,\ n = 5$$

59. a. Án affalla myndi stofninn fylgja $P_n = 1{,}06\,P_{n-1}$. Frádrátturinn 150 samsvarar afföllum fiskistofnsins. b. Eftir 12 mánuði fæst $P_{12} \approx 1494$.

61. a. The student owes $\$9383$ after 12 months. b. The loan will be paid in full after 139 months or eleven and a half years.

63. $b_1 = 0$, $x_1 = 2/3$, $b_2 = 1$, $x_2 = 4/3 - 1 = 1/3$, mynstrið endurtekur sig því og $1/3 = 0{,}010101\ldots$.

65. Fyrir upphafsgildin $a_1=1$, $a_2=2,\ldots,$ $a_1=10$, eru samsvarandi bitameðaltöl sem reiknuð eru með tilgreindri aðferð $0{,}5220$, $0{,}5000$, $0{,}4960$, $0{,}4870$, $0{,}4860$, $0{,}4680$, $0{,}5130$, $0{,}5210$, $0{,}5040$, og $0{,}4840$. Hér er dæmi um tíu samsvarandi meðaltöl strengja með 1000 bitum sem slembitölugjafi framleiðir: $0{,}4880$, $0{,}4870$, $0{,}5150$, $0{,}5490$, $0{,}5130$, $0{,}5180$, $0{,}4860$, $0{,}5030$, $0{,}5050$, $0{,}4980$. Hvorug tegund meðaltala sýnir greinilegt mynstur. Meðaltölin úr slembitölugjafanum eru á bilinu $0{,}4860$ til $0{,}5490$, sem spannar $0{,}0630$, en reiknuðu bitameðaltöl sýndarslembitölugjafans eru á bilinu $0{,}4680$ til $0{,}5220$, sem spannar $0{,}0540$.

Æfingar í undirkafla 5.2

67.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

69.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

71.

$$1,3,6,10$$

73.

$$1,1,0,0$$

75. $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$. Röðin hefur summuna $S=1$.

77. $a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$. Röðin er ósamleitin vegna þess að hlutsummurnar eru ótakmarkaðar.

79. $S_1=1/3$, $S_2=1/3+2/4>1/3+1/3=2/3$, $S_3=1/3+2/4+3/5>3\cdot(1/3)=1$. Almennt gildir $S_k>k/3$. Röðin er ósamleitin.

81.

$$S_1=1/(2,3)=1/6=2/3-1/2,$$

$$S_2=1/(2,3)+1/(3,4)=2/12+1/12=1/4=3/4-1/2,$$

$$S_3=1/(2,3)+1/(3,4)+1/(4,5)=10/60+5/60+3/60=3/10=4/5-1/2,$$

$$S_4=1/(2,3)+1/(3,4)+1/(4,5)+1/(5,6)=10/60+5/60+3/60+2/60=1/3$$

$$=5/6-1/2.$$

Mynstrið er $S_k=(k+1)/(k+2)-1/2$ og röðin hefur summuna $1/2$.

83.

$$0$$

85.

$$-3$$

87. ósamleitin, $\sum_{n=1001}^{\infty}\frac{1}{n}$

89. samleitin geómetrísk röð, $r=1/10<1$

91. samleitin geómetrísk röð, $r=\pi/e^2<1$

93. $\sum_{n=1}^{\infty}5\cdot(-1/5)^n$, hefur summuna $-5/6$

95. $\sum_{n=1}^{\infty}100\cdot(1/10)^n$, hefur summuna $100/9$

97.

$$x\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$$

99.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sin^{2n}(x)$$

101. $S_k=2-2^{1/(k+1)}\to 1$ þegar $k\to\infty$.

103. $S_k=1-\sqrt{k+1}$ er ósamleitin

105.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln n-\ln(n+1),\ S_k=-\ln(k+1)$$

107. $a_n=\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{\ln(n+1)}$ og $S_k=\frac{1}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(k+1)}\to\frac{1}{\ln(2)}$

109.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=f(1)-f(2)$$

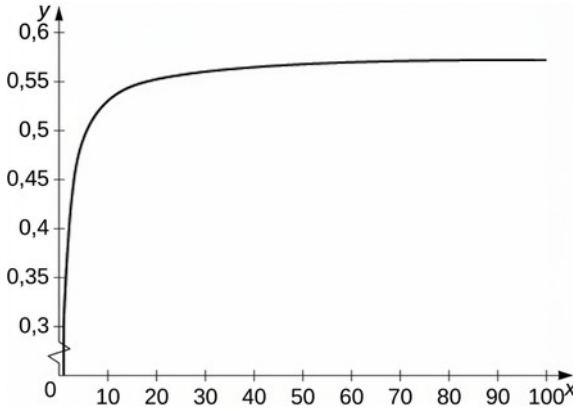
111.

$$c_0+c_1+c_2+c_3+c_4=0$$

113.

$$\frac{2}{n^3-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1},\ S_n=(1-1+1/3)+(1/2-2/3+1/4)$$
$$+(1/3-2/4+1/5)+(1/4-2/5+1/6)+\cdots=1/2$$

115. t_k er samleitin að $0{,}57721\ldots$ t_k og er summa rétthyrninga með hæðina $1/k$ yfir bilinu $[k,k+1]$ sem liggja ofan við graf $1/x$.



117.

$$N=22,\ S_N=6{,}1415$$

119.

$$N=3,\ S_N=1{,}559877597243667\ldots$$

121. a. Líkurnar á sérhverri tiltekinni raðaðri útkomurunu í n myntköstum eru $1/2^n$. b. Líkurnar á að skjaldarmerki komi fyrst upp í n. kasti eru líkurnar á runnunni $TT\ldots TH$, það er $1/2^n$. Líkurnar á að skjaldarmerki komi fyrst upp í kasti með sléttri raðtölu eru $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{2n}$ eða $1/3$.

123.

5/9

125. $E=\sum_{n=1}^{\infty} n/2^{n+1}=1$, eins og sýna má með hlutsummun

127. Sá hluti fyrsta skammtsins sem er eftir n klukkustundir er dr^n, sá hluti annars skammtsins er dr^{n-N}, og almennt er eftirstandandi hluti m-ta skammtsins dr^{n-mN}, og því

$$A(n)=\sum_{l=0}^{m} dr^{n-lN}=\sum_{l=0}^{m} dr^{k+(m-l)N}=\sum_{q=0}^{m} dr^{k+qN}=dr^k\sum_{q=0}^{m} r^{Nq}=dr^k\frac{1-r^{(m+1)N}}{1-r^N},\ n=k+mN.$$

129.

$$S_{N+1}=a_{N+1}+S_N\geq S_N$$

131. Þar sem $S>1$, $a_2>0$, og þar sem $k<1$, $S_2=1+a_2<1+(S-1)=S$. Ef $S_n>S$ fyrir eitthvert n, þá er til minnsta slíkt n. Fyrir þetta n er $S>S_{n-1}$, og því $S_n=S_{n-1}+k(S-S_{n-1})$ $=kS+(1-k)S_{n-1}<S$, sem er mótsögn. Því er $S_n<S$ og $a_{n+1}>0$ fyrir öll n, svo S_n er vaxandi og takmörkuð að ofan með S. Látum $S_*=\lim S_n$. Ef $S_*<S$, þá er $\delta=k(S-S_*)>0$, en finna má n þannig að $S_*-S_n<\delta/2$, sem leiðir til $S_{n+1}=S_n+k(S-S_n)>S_*+\delta/2$, sem stangast á við að S_n stefni á S_*. Því er $S_n\to S$.

133. Látum $S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n$ og $S_k\to L$. Þá verður S_k að lokum eins nálægt L, og óskað er, sem merkir að $L-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$ verður eins lítið og óskað er þegar $N\to\infty$.

135.

$$L=\left(1+\frac{1}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n=\frac{3}{2}.$$

137. Á fyrsta stigi er fjarlægður ferningur með flatarmálið $1/9$; á stigi 2 eru fjarlægðir 8 ferningar, hver með flatarmálið $1/9^2$, á þriðja stigi eru fjarlægðir 8^2 ferningar, hver með flatarmálið $1/9^3$, og þannig áfram. Heildarflatarmálið sem hefur verið fjarlægt eftir N stig er $\sum_{n=0}^{N-1}8^N/9^{N+1}=\frac{1}{8}\left(1-(8/9)^N\right)/(1-8/9)\to 1$

þegar $N\to\infty$. Heildarummálið er $4+4\sum_{n=0}^{}8^N/3^{N+1}\to\infty$.

Æfingar í undirkafla 5.3

139. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Sundurleitniprófið á ekki við.

141. $\lim_{n\to\infty}a_n=2$. Röðin er ósamleitin.

143. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ (er ekki til). Röðin er ósamleitin.

145. $\lim_{n\to\infty}a_n=1$. Röðin er ósamleitin.

147. $\lim_{n\to\infty}a_n$ er ekki til. Röðin er ósamleitin.

149. $\lim_{n\to\infty}a_n=1/e^2$. Röðin er ósamleitin.

151. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Sundurleitniprófið á ekki við.

153. Röðin er samleitin, $p>1$.

155. Röðin er samleitin, $p=4/3>1$.

157. Röðin er samleitin, $p=2e-\pi>1$.

159. Röðin er ósamleitin samkvæmt samanburði við $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+5)^{1/3}}$.

161. Röðin er ósamleitin samkvæmt samanburði við $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$.

163. Röðin er samleitin samkvæmt samanburði við $\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^4}dx$.

165. $2^{-\ln n}=1/n^{\ln 2}$. Þar sem $\ln 2<1$, er röðin ósamleitin samkvæmt samanburði við p-röð.

167. $2^{-2\ln n}=1/n^{2\ln 2}$. Þar sem $2\ln 2-1<1$, er röðin ósamleitin samkvæmt samanburði við p-röð.

169.

$$R_{1000}\le \int_{1000}^\infty \frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}\Big|_{1000}^\infty=0{,}001$$

171.

$$R_{1000}\le \int_{1000}^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}(1000)=\pi/2-\tan^{-1}(1000)\approx 0{,}000999$$

173.

$$R_N<\int_N^\infty \frac{dx}{x^2}=1/N,\ N>10^4$$

175.

$$R_N<\int_N^\infty \frac{dx}{x^{1{,}01}}=100\,N^{-0{,}01},\ N>10^{600}$$

177.

$$R_N<\int_N^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\pi/2-\tan^{-1}(N),\ N>\tan(\pi/2-10^{-3})\approx 1000$$

179. $R_N<\int_N^\infty \frac{dx}{e^x}=e^{-N}$, $N>5\ln(10)$, nægir ef $N=12$; $\sum_{n=1}^{12} e^{-n}=0{,}581973\ldots$. Matið samsvarar $1/(e-1)$ með fimm aukastöfum.

181. $R_N < \int_N^\infty dx/x^4 = 1/3\,N^3$, $N > \left(10^4/3\right)^{1/3}$, nægir ef $N = 15$;

$\sum_{n=1}^{15} 1/n^4 = 1{,}08226\ldots$. Matið samsvarar summunni með þremur aukastöfum.

183.

$$\ln(2)$$

185.

$$T = 0{,}5772\ldots$$

187. Væntur fjöldi slembiinsetninga sem þarf til að færa B efst er $n + n/2 + n/3 + \cdots + n/(n-1)$. Þá setur ein viðbótarinnsetning B aftur inn á slembinn stað. Væntur fjöldi stokkunaraðgerða sem þarf til að slembiraða stokknum er því $n(1 + 1/2 + \cdots + 1/n)$.

189. Látum $b_n = a_{n+N}$ og $g(t) = f(t+N)$ þannig að f sé minnkandi á $[t, \infty)$.

191. Röðin er samleitin þegar $p > 1$ samkvæmt heildisprófinu með breytuskiptum.

193. $N = e^{e^{100}} \approx e^{10^{43}}$ liðir eru nauðsynlegir.

Æfingar í undirkafla 5.4

195. Samleitin samkvæmt samanburði við $1/n^2$.

197. Summan er hálf harmonísk röð, sem er ósamleitin.

199. $a_n = 1/(n+1)(n+2) < 1/n^2$. Samleitin samkvæmt samanburði við p-röðina $p = 2$.

201. $\sin(1/n) \le 1/n$, og er því samleitin samkvæmt samanburði við p-röðina $p = 2$.

203. $\sin(1/n) \le 1$, svo röðin er samleitin samkvæmt samanburði við p-röð, $p = 3/2$.

205. Þar sem $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/\left(\sqrt{n+1/2} + \sqrt{n}\right) \le 2/\sqrt{n}$, er röðin samleitin samkvæmt samanburði við p-röð þegar $p = 1{,}5$.

207. Samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við p-röð þegar $p > 1$.

209. Samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við p-röðina $p = 2$.

211. Samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við 4^{-n}.

213. Samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við $1/e^{1{,}1n}$.

215. Ósamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við harmonísku röðina.

217. Samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við p-röðina $p = 3$.

219. Samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við p-röðina $p = 2$.

221. Ósamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við $1/n$.

223. Samleitin þegar $p>1$ samkvæmt samanburði við p-röð með örlítið minna p.

225. Samleitin fyrir allar $p>0$.

227. Samleitin fyrir allar $r>1$. Ef $r>1$, þá er $r^n>4$, segjum, þegar $n>\ln(2)/\ln(r)$, og þá er röðin samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við geómetrísku röðina með hlutfallstöluna $1/2$.

229. Teljarinn er 1 þegar n er oddatala og 0 þegar n er slétt tala. Því má endurrita röðina sem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$, sem er ósamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við harmonísku röðina.

231. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ eða $a^2+b^2\geq 2ab$, og því leiðir samleitnin af samanburði $2a_nb_n$ við $a^2{}_n+b^2{}_n$. Þar sem hlutsummurnar vinstra megin eru takmarkaðar af hlutsummunum hægra megin gildir ójafnan einnig fyrir óendanlegu raðirnar.

233. $(\ln n)^{-\ln n}=e^{-\ln(n)\ln\ln(n)}$. Ef n er nægilega stórt, þá er $\ln\ln n>2$, og því $(\ln n)^{-\ln n}<1/n^2$, og röðin er samleitin samkvæmt samanburði við $p-$röð.

235. $a_n\to 0$, og því $a^2{}_n\leq|a_n|$ fyrir stór n. Samleitnin leiðir af samanburði með markgildi. $\sum 1/n^2$ er samleitin en $\sum 1/n$ er það ekki, svo samleitni $\sum_{n=1}^{\infty} a^2{}_n$ felur ekki í sér samleitni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

237. Nei. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ er ósamleitin. Látum $b_k=0$ nema $k=n^2$ fyrir eitthvert n. Þá er $\sum_k b_k/k=\sum 1/k^2$ samleitin.

239. $|\sin t|\leq|t|$, og niðurstaðan leiðir því af samanburðarprófinu.

241. Samkvæmt samanburðarprófinu er $x=\sum_{n=1}^{\infty} b_n/2^n\leq\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n=1$.

243. Ef $b_1=0$, þá fæst samkvæmt samanburði $x\leq\sum_{n=2}^{\infty} 1/2^n=1/2$.

245. Já. Bætið við 1-kg lóðum þar til vogin sígur að lóðahliðinni. Ef vogin er í fullkomnu jafnvægi með Robert hinum megin skal hætta. Annars skal fjarlægja eitt af 1-kg lóðunum og bæta við $0{,}1$ -kg lóðum einu í einu. Ef jafnvægi næst eftir að nokkrum þeirra hefur verið bætt við skal hætta. Ef vogin sígur að lóðunum skal annars fjarlægja síðasta $0{,}1$ -kg lóðið. Byrjið að bæta við $0{,}01$ -kg lóðum. Ef jafnvægi næst skal hætta. Ef vogin sígur að lóðahliðinni skal fjarlægja síðasta $0{,}01$ -kg lóðið sem var bætt við. Haldið þannig áfram með $0{,}001$ -kg lóðin og síðan koll af kolli. Eftir endanlegan fjölda skrefa fæst endanleg röð á forminu $A+\sum_{n=1}^{N} s_n/10^n$, þar sem A er fjöldi heilla kílógrammalóða og d_n er fjöldi $1/10^n$-kg lóða sem bætt var við. Ef röðin er á einhverju stigi nákvæm þyngd Roberts stöðvast ferlið. Annars táknar hún N -tu hlutsummu óendanlegrar raðar sem gefur nákvæma þyngd Roberts, og skekkja summunnar er í mesta lagi $1/10^N$.

247. a. $10^d - 10^{d-1} < 10^d$ b. $h(d) < 9^d$ c. $m(d) = 10^{d-1}+1$ d. Flokkið liði skertu harmonísku raðarinnar eftir fjölda tölustafa. $h(d)$ takmarkar fjölda liða og hver liður er í mesta lagi $1/m(d)$. $\sum_{d=1}^{\infty} h(d)/m(d) \le \sum_{d=1}^{\infty} 9^d/(10)^{d-1} \le 90$. Í raun má nota samanburð til að meta gildið sem minna en 80. Raungildið er minna en 23.

249. Ef ábendingunni er fylgt áfram fæst $S_N = \left(1+1/N^2\right)\left(1+1/(N-1)^2 \ldots (1+1/4)\right)$. Þá er $\ln(S_N) = \ln\left(1+1/N^2\right) + \ln\left(1+1/(N-1)^2\right) + \cdots + \ln(1+1/4)$. Þar sem $\ln(1+t)$ er takmarkað að ofan með föstu margfeldi af t, þegar $0<t<1$, fæst $\ln(S_N) \le C\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$, sem er samleitin samkvæmt samanburði við p-röð þegar $p=2$.

Æfingar í undirkafla 5.5

251. Ekki samleitin samkvæmt sundurleitniprófinu. Liðirnir stefna ekki á núll.

253. Skilyrt samleitin samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir, þar sem $\sqrt{n+3}/n$ er minnkandi. Ekki alsamleitin samkvæmt samanburði við p-röðina $p=1/2$.

255. Alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við til dæmis $3^n/4^n$,

257. Ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu þar sem $\lim_{n\to\infty} |a_n| = e$.

259. Ekki samleitin. Liðirnir stefna ekki á núll.

261. $\lim_{n\to\infty} \cos^2(1/n) = 1$. Ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu.

263. Samleitin samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir.

265. Skilyrt samleitin samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir. Ekki alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við p-röðina $p = \pi - e$

267. Ósamleitin; liðirnir stefna ekki á núll.

269. Samleitin samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir. Ekki alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við harmonísku röðina.

271. Alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við p-röðina $p=3/2$, eftir að ábendingunni hefur verið beitt.

273. Samleitin samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir þar sem $n\left(\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}n\right)$ minnkar að núlli fyrir stór n. Ekki alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við harmonísku röðina eftir að ábendingunni hefur verið beitt.

275. Alsamleitin þar sem $a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ eru liðir kíkisraðar.

277. Liðirnir stefna ekki á núll. Röðin er ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu.

279. Samleitin samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir. Ekki alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við harmonísku röðina.

281.

$$\ln(N+1)>10,\ N+1>e^{10},\ N\geq 22026;\ S_{22026}=-0{,}9743\ldots$$

283. $2^{N+1}>10^6$ eða $N+1>6\ \ln(10)/\ln(2)=19{,}93$. eða

$$N\geq 19;$$

$$S_{19}=0{,}333333969\ldots$$

285. $(N+1)^2>10^6$ eða

$$N>999;$$

$$S_{1000}\approx 0{,}822466.$$

287. Satt. b_n þarf ekki að stefna á núll því að ef $c_n=b_n-\lim b_n$, þá er $c_{2n-1}-c_{2n}=b_{2n-1}-b_{2n}$.

289. Satt. $b_{3n-1}-b_{3n}\geq 0$, og því leiðir samleitni $\sum b_{3n-2}$ af samanburðarprófinu.

291. Satt. Ef önnur röðin er samleitin verður hin einnig að vera það, sem felur í sér alsamleitni.

293. Já. Látum $b_n=1$ ef $a_n\geq 0$ og $b_n=0$ ef $a_n<0$. Þá er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\sum_{n:a_n\geq 0} a_n$ samleitin. Á sama hátt má sýna að $\sum_{n:a_n<0} a_n$ sé samleitin. Þar sem báðar raðirnar eru samleitnar verður röðin að vera alsamleitin.

295. Ekki minnkandi. Ekki alsamleitin.

297. Ekki víxlmerkjaröð. Má rita sem $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\right)$, sem er ósamleitin samkvæmt samanburði við $\sum\frac{1}{3n-2}$.

299. Látum $a^+_n=a_n$ ef $a_n\geq 0$ og $a^+_n=0$ ef $a_n<0$. Þá er $a^+_n\leq|a_n|$ fyrir öll n, svo runa hlutsummanna fyrir a^+_n er vaxandi og takmörkuð að ofan með runu hlutsummanna fyrir $|a_n|$, sem er samleitin. Því er $\sum_{n=1}^{\infty}a^+_n$ samleitin.

301. Fyrir $N=5$ er $|R_N|b_6=\theta^{10}/10!$. Þegar $\theta=1$, er $R_5\leq 1/10!\approx 2{,}75\times 10^{-7}$. Þegar $\theta=\pi/6$, er $R_5\leq(\pi/6)^{10}/10!\approx 4{,}26\times 10^{-10}$. Þegar $\theta=\pi$, er $R_5\leq\pi^{10}/10!=0{,}0258$.

303. Látum $b_n=1/(2n-2)!$. Þá er $R_N\leq 1/(2N)!<0{,}00001$ þegar $(2N)!>10^5$ eða $N=5$ og $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}=0{,}540325\ldots$, en $\cos 1=0{,}5403023\ldots$

305. Látum $T=\sum\frac{1}{n^2}$. Þá er $T-S=\frac{1}{2}T$, og því

$$S=T/2.$$

$$\sqrt{6\times\sum_{n=1}^{1000}1/n^2}=3{,}140638\ldots;$$

$$\sqrt{12\times\sum_{n=1}^{1000}(-1)^{n-1}/n^2}=3{,}141591\ldots;$$

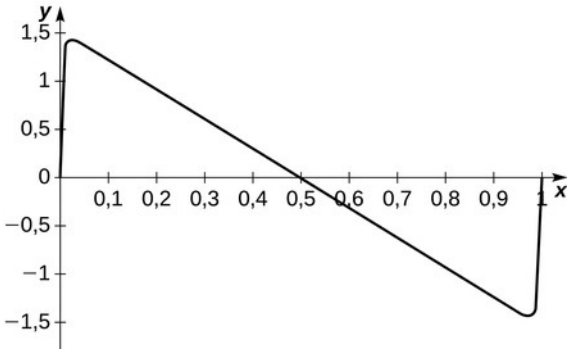
$\pi=3{,}141592\ldots$. The alternating series is more accurate for 1000 terms.

307.

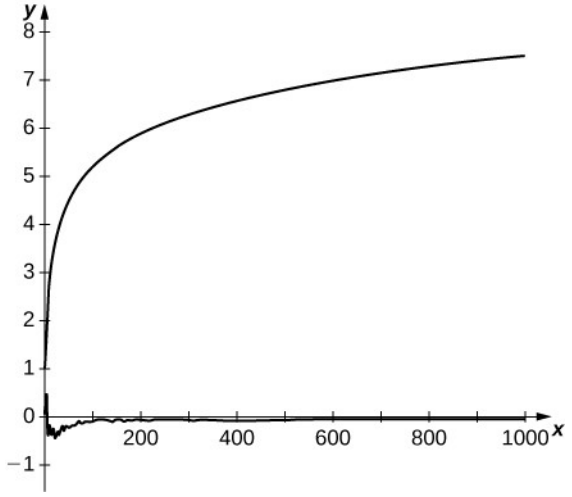
$$N=6,\ S_N=0{,}9068$$

309. $\ln(2)$. $3n$-ta hlutsumman er sú sama og fyrir víxlmerktu harmonísku röðina.

311. Hlutsummurnar breytast snögglega nálægt endapunktunum. Fyrir x fjarri endapunktunum líkist grafið $\pi(1/2-x)$.



313. Hér er dæmigerð niðurstaða. Efri ferillinn sýnir hlutsummur harmonísku raðarinnar. Neðri ferillinn sýnir hlutsummur slembinnar harmonískrar raðar.



315. Samkvæmt prófi fyrir víxlmerkjaraðir er $\left|S_n - S\right| \le b_{n+1}$, og því þarf 10^4 liði víxlmerktu harmonísku raðarinnar til að meta $\ln(2)$ með skekkju minni en $0{,}0001$. Fyrstu 10 hlutsummur raðarinnar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ eru, með fjögurra aukastafa nákvæmni, $0{,}5000, 0{,}6250, 0{,}6667, 0{,}6823, 0{,}6885, 0{,}6911, 0{,}6923, 0{,}6928, 0{,}6930, 0{,}6931$, og tíunda hlutsumman víkur minna en $0{,}0001$ frá $\ln(2) = 0{,}6931\ldots$.

Æfingar í undirkafla 5.6

317. $a_{n+1}/a_n \to 0$. Samleitin.

319. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to 1/2 < 1$. Samleitin.

321. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/27 < 1$. Samleitin.

323. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 4/e^2 < 1$. Samleitin.

325. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$. Kvótaprófið gefur enga niðurstöðu.

327. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 1/e^2$. Samleitin.

329. $\left(a_k\right)^{1/k} \to 2>1$. Ósamleitin.

331. $\left(a_n\right)^{1/n} \to 1/2<1$. Samleitin.

333. $\left(a_k\right)^{1/k} \to 1/e<1$. Samleitin.

335. $a_n^{1/n}=\frac{1}{e}+\frac{1}{n} \to \frac{1}{e}<1$. Samleitin.

337. $a_n^{1/n}=\frac{\left(\ln\left(1+\ln n\right)\right)}{\left(\ln n\right)} \to 0$ samkvæmt reglu l'Hôpitals. Samleitin.

339. $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{1}{2k+1} \to 0$. Samleitin samkvæmt kvótaprófinu.

341. $\left(a_n\right)^{1/n} \to 1/e$. Samleitin samkvæmt rótarprófinu.

343. $a_k^{1/k} \to \ln\left(3\right)>1$. Ósamleitin samkvæmt rótarprófinu.

345. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3^{2n+1}}{2^{3n^2+3n+1}} \to 0$. Röðin er samleitin.

347. Samleitin samkvæmt rótarprófinu og samanburði með markgildi þar sem $x_n \to \sqrt{2}$.

349. Alsamleitin samkvæmt samanburði með markgildi við

$$p-\text{röð},$$

$$p=2.$$

351. $\lim_{n\to\infty} a_n=1/e^2\neq 0$. Röðin er ósamleitin.

353. Liðirnir stefna ekki á núll: $a_k \geq 1/2$, þar sem $\sin^2 x \leq 1$.

355. $a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$, sem er samleitin samkvæmt samanburði við $p-$röð þegar $p=2$.

357. $a_k=\frac{2^k 1\cdot 2\cdots k}{(2k+1)(2k+2)\cdots 3k} \leq (2/3)^k$ er samleitin samkvæmt samanburði við geómetrísku röðina.

359. $a_k \approx e^{-\ln k^2}=1/k^2$. Röðin er samleitin samkvæmt samanburði með markgildi við

$$p-\text{röð},$$

$$p=2.$$

361. Ef $b_k=c^{1-k}/(c-1)$ og $a_k=k$, þá er $b_{k+1}-b_k=-c^{-k}$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{c^k}=a_1b_1+\frac{1}{c-1}\sum_{k=1}^{\infty}c^{-k}=\frac{c}{(c-1)^2}.$$

363.

$$6+4+1=11$$

365.

$$|x|\le 1$$

367.

$$|x|<\infty$$

369. Öll raungildi p samkvæmt kvótaprófinu.

371.

$$r<1/p$$

373. $0<r<1$. Athugið að kvóta- og rótarprófin gefa enga niðurstöðu. Samkvæmt ábendingunni eru $2k$ liðir $r^{\sqrt{n}}$ þegar $k^2\le n<(k+1)^2$, og þegar $r<1$ er hver liður að minnsta kosti r^k. Því er $\sum_{n=1}^{\infty}r^{\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}r^{\sqrt{n}}\ge\sum_{k=1}^{\infty}2kr^k$, sem er samleitin samkvæmt kvótaprófinu þegar $r<1$. Þegar $r\ge 1$ er röðin ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu.

375. Hér gildir $a_1=1$, $a_2=a_3=1/2,\ldots a_{2n}=a_{2n+1}=1/2^n$. Kvótaprófið á ekki við þar sem $a_{n+1}/a_n=1$ ef n er slétt tala. Hins vegar er $a_{n+2}/a_n=1/2$, og því er röðin samleitin samkvæmt verkefninu á undan. Röðin er auðvitað aðeins tvítekin geómetrísk röð.

377. $a_{2n}/a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+1+x}\frac{n+2}{n+2+x}\cdots\frac{2n}{2n+x}$. Andhverfa k-ta þáttarins er $(n+k+x)/(n+k)>1+x/(2n)$ og því er margfeldið minna en $(1+x/(2n))^{-n}\approx e^{-x/2}$. Fyrir $x>0$, er því $\frac{a_{2n}}{a_n}\le\frac{1}{2}e^{-x/2}$. Röðin er samleitin þegar $x>0$.

Upprifjunaræfingar

379. Ósatt

381. Satt

383. ótakmörkuð, ekki einhalla, ósamleitin

385. takmörkuð, einhalla, samleitin, 0

387. ótakmörkuð, ekki einhalla, ósamleitin

389. ósamleitin

391. samleitin

393. samleitin en ekki alsamleitin

395. alsamleitin

397. alsamleitin

399.

$$\frac{1}{2}$$

401.

$$\infty\,,\ 0\,,\ x_0$$

403.

$$S_{10}\approx 383\,,\ \lim_{n\to\infty} S_n = 400$$

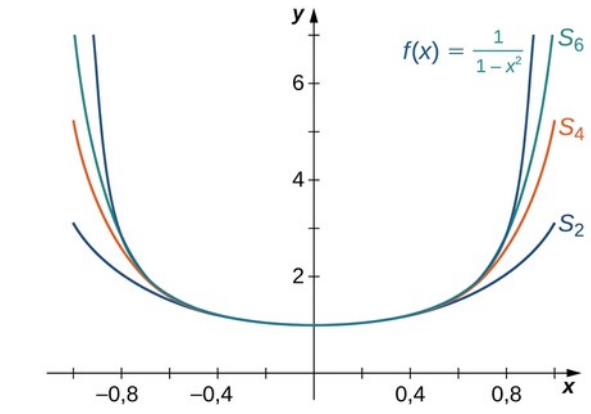
Kafli 6

Stöðumat

6.1

Samleitnibilið er $[-1,1)$. Samleitnigeislinn er $R=1$.

6.2



6.3

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{2^{n+1}}$ með samleitnibilið $(-2,2)$

6.4

Samleitnibilið er $(-2,2)$.

6.5

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$. Samleitnibilið er $(-1,1)$.

6.6

$f(x)=\frac{3}{3-x}$. Samleitnibilið er $(-3,3)$.

6.7

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

6.8

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$$

6.9

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$$

6.10

$$p_0(x)=1;\ p_1(x)=1-2(x-1);\ p_2(x)=1-2(x-1)+3(x-1)^2;\ p_3(x)$$
$$=1-2(x-1)+3(x-1)^2-4(x-1)^3$$

6.11

$$p_0(x)=1;\ p_1(x)=1-x;\ p_2(x)=1-x+x^2;\ p_3(x)=1-x+x^2-x^3;\ p_n(x)$$
$$=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$$

6.12

$$p_1(x)=2+\frac{1}{4}(x-4);\ p_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2;\ \ p_1(6)=2{,}5;\ p_2(6)=2{,}4375;$$

$$|R_1(6)|\le 0{,}0625;\ |R_2(6)|\le 0{,}015625$$

6.13

0,96593

6.14

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-x)^n}{2^{(x-2)}}$. Samleitnibilið er $(0,4)$.

6.15

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Samkvæmt kvótaprófinu er samleitnibilið $(-\infty,\infty)$. Þar sem $\left|R_n(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, er röðin samleitin og summa hennar er $\cos x$ fyrir allar rauntölur x.

6.16

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

6.17

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

6.18

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}x^n$$

6.19

$$y=5e^{2x}$$

6.20

$$y=a\left(1-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\cdots\right)+b\left(x-\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\cdots\right)$$

6.21

$C+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(2n-2)!}$ Ákveðna heildið er um það bil 0,514 með skekkju minni en 0,01.

6.22

The estimate is approximately 0,3414. This estimate is accurate to within 0,0000094.

Æfingar í undirkafla 6.1

1. Satt. Ef röð er samleitin stefna liðir hennar á núll.

3. Ósatt. Það myndi fela í sér að $a_n x^n \to 0$ þegar $|x|<R$. Ef $a_n=n^n$, þá stefnir $a_n x^n=(nx)^n$ ekki á núll fyrir neitt $x\neq 0$.

5. Hún verður að vera samleitin á $(0,6]$ og því fyrir: a. $x=1$; b. $x=2$; c. $x=3$; d. $x=0$; e. $x=5{,}99$; og f. $x=0{,}000001$.

7. $\left|\frac{a_{n+1}2^{n+1}x^{n+1}}{a_n 2^n x^n}\right| = 2|x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 2|x|$ og því $R=\frac{1}{2}$

9. $\left|\frac{a_{n+1}\left(\frac{\pi}{e}\right)^{n+1}x^{n+1}}{a_n\left(\frac{\pi}{e}\right)^{n}x^{n}}\right|=\frac{\pi|x|}{e}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\frac{\pi|x|}{e}$ og því $R=\frac{e}{\pi}$

11. $\left|\frac{a_{n+1}(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{a_n(-1)^{n}x^{2n}}\right|=|x^2|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to|x^2|$ og því $R=1$

13. $a_n=\frac{2^n}{n}$ Þá er $\frac{a_{n+1}x}{a_n}\to 2x$. Þá er $R=\frac{1}{2}$. Þegar $x=\frac{1}{2}$ er röðin harmonísk og ósamleitin.

Þegar $x=-\frac{1}{2}$ er röðin víxlmerkt harmonísk röð og samleitin. Samleitnibilið er

$I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

15. $a_n=\frac{n}{2^n}$ og því $\frac{a_{n+1}x}{a_n}\to\frac{x}{2}$ og því $R=2$. Þegar $x=\pm 2$ er röðin ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu. Samleitnibilið er $I=(-2,2)$.

17. $a_n=\frac{n^2}{2^n}$ og því $R=2$. Þegar $x=\pm 2$ er röðin ósamleitin samkvæmt sundurleitniprófinu. Samleitnibilið er $I=(-2,2)$.

19. $a_k=\frac{\pi^k}{k^\pi}$ og því $R=\frac{1}{\pi}$. Þegar $x=\pm\frac{1}{\pi}$ er röðin alsamleitin p-röð. Samleitnibilið er

$I=\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]$.

21. $a_n=\frac{10^n}{n!},\frac{a_{n+1}x}{a_n}=\frac{10x}{n+1}\to 0<1$ og því er röðin samleitin fyrir öll x samkvæmt kvótaprófinu og $I=(-\infty,\infty)$.

23. $a_k=\frac{(k!)^2}{(2k)!}$ og því $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)}\to\frac{1}{4}$ og því $R=4$

25. $a_k=\frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$ og því $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2}$ og því $R=2$

27.

$a_n=\frac{1}{\binom{2n}{n}}$ svo $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{2n!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\to\frac{1}{4}$ og því er $R=4$

29. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\to\frac{1}{27}$ og því $R=27$

31. $a_n=\frac{n!}{n^n}$ og því $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{1}{e}$ og því $R=e$

33. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ á $I=(0,2)$

35. $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$ á $I=(-1,1)$

37. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+2}$ á $I=(-1,1)$

39. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ á $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

41. $\sum_{n=0}^{\infty}4^n x^{2n+2}$ á $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

43. $\left|a_n x^n\right|^{1/n}=|a_n|^{1/n}|x|\to|x|r$ þegar $n\to\infty$ og $|x|r<1$ þegar $|x|<\frac{1}{r}$. Því er $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ samleitin þegar $|x|<\frac{1}{r}$ samkvæmt n-tu rótarprófi.

45. $a_k=\left(\frac{k-1}{2k+3}\right)^k$ og því $(a_k)^{1/k}\to\frac{1}{2}<1$ og því $R=2$

47. $a_n=\left(n^{1/n}-1\right)^n$ og því $(a_n)^{1/n}\to 0$ og því $R=\infty$

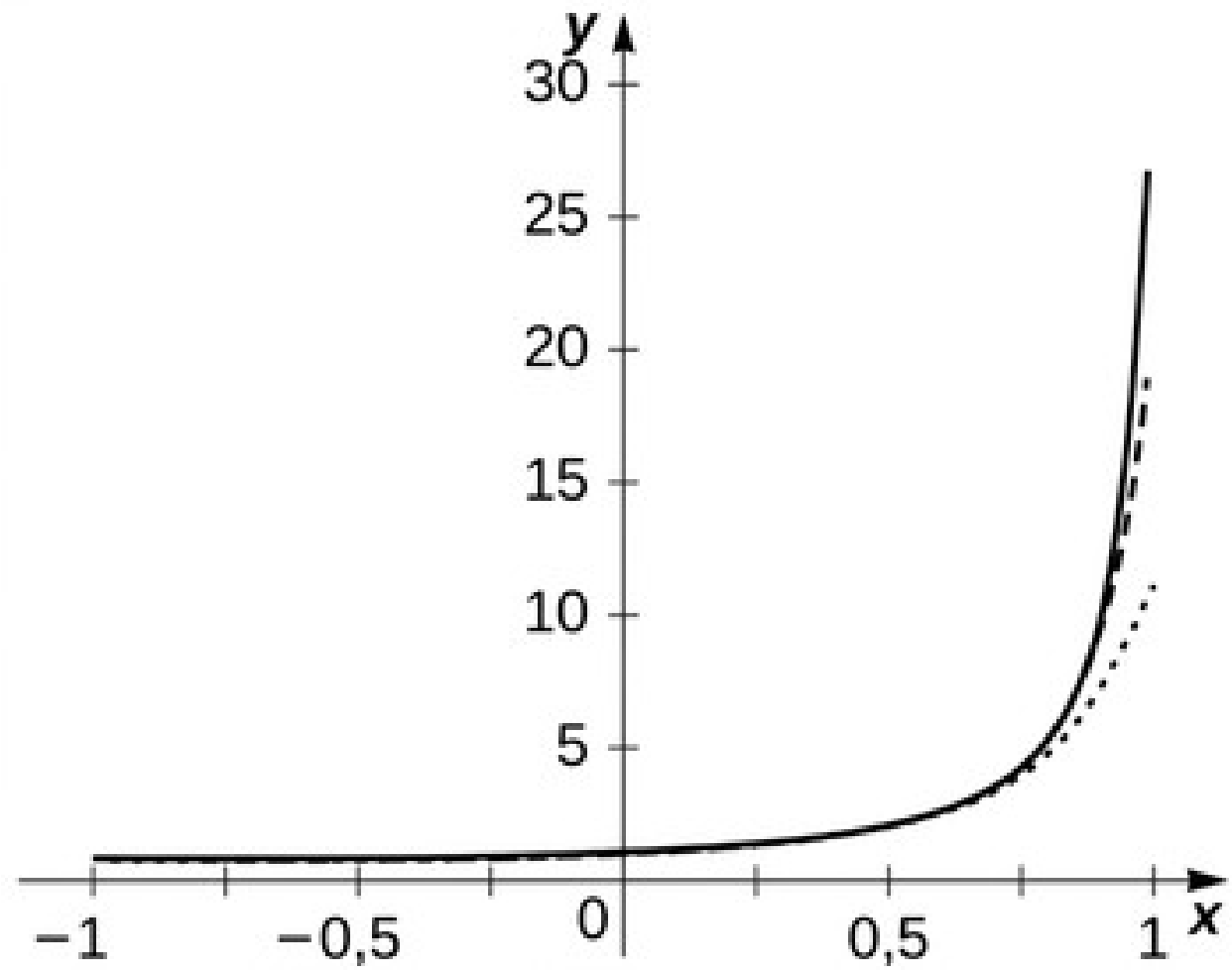
49. Endurrita má $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}$ og $p(x)=p(-x)$. Þar sem aðeins slétt veldi af x standa eftir er $p(x)$ jafnstætt fall, en samkvæmt skilgreiningu gildir þá $p(x)=p(-x)$.

51. Ef $x\in[0,1]$, þá er $y=2x-1\in[-1,1]$ og því er $p(2x-1)=p(y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n y^n$ samleitin.

53. Samleitin á $(-1,1)$ samkvæmt kvótaprófinu

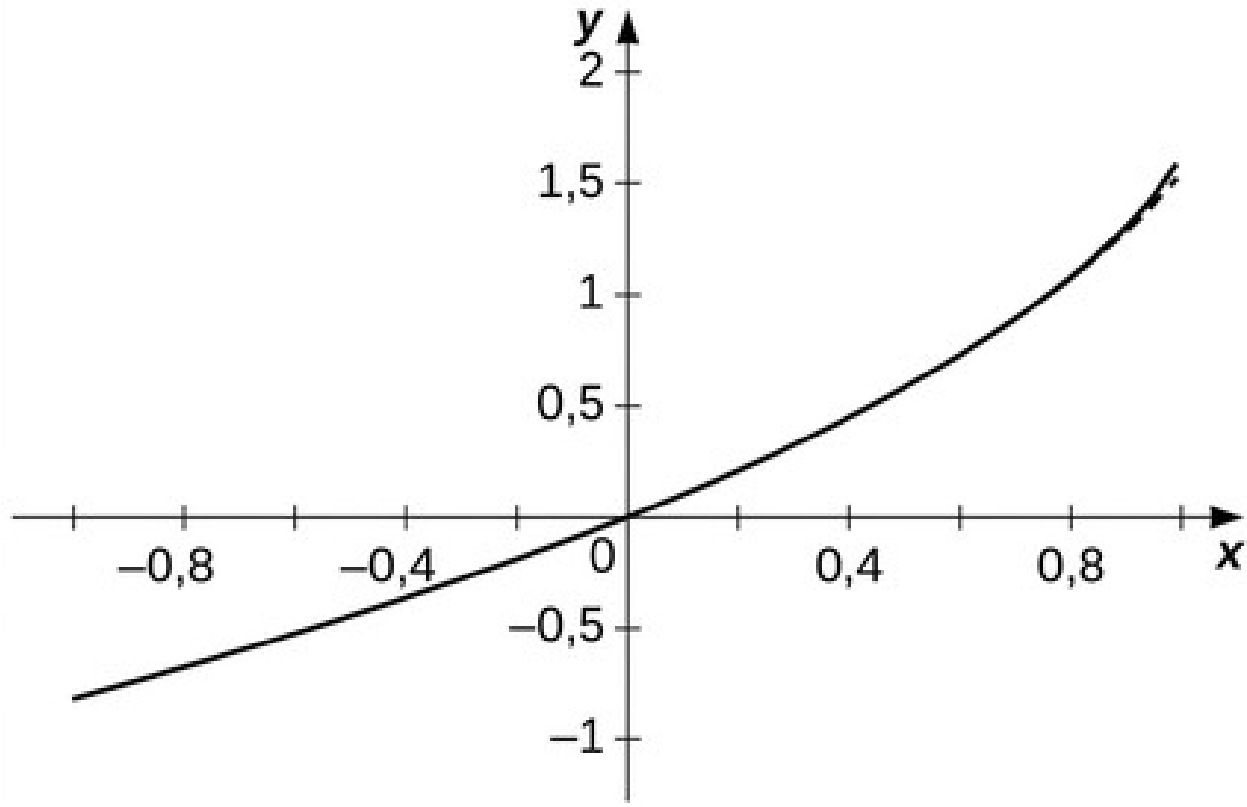
55. Skoðum röðina $\sum b_k x^k$, þar sem $b_k=a_k$ ef $k=n^2$ og $b_k=0$ annars. Þá er $b_k\le a_k$ og því er röðin samleitin á $(-1,1)$ samkvæmt samanburðarprófinu.

57.



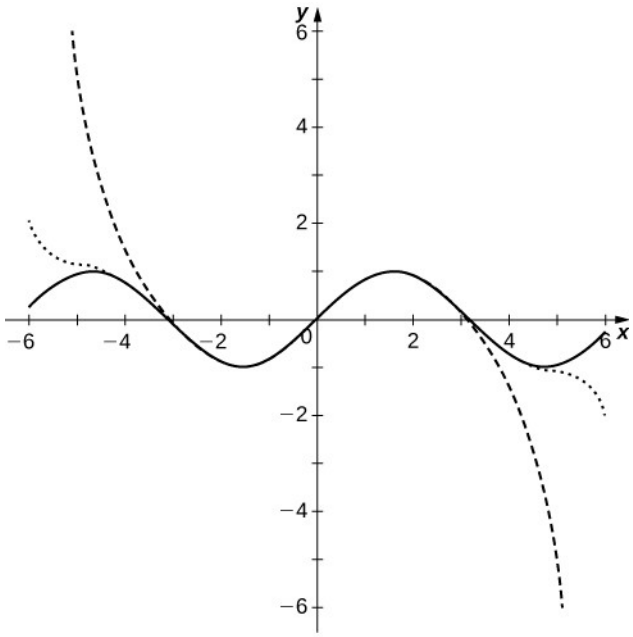
Nálgunin er nákvæmari nálægt $x = -1$. Hlutsummurnar fylgja $\frac{1}{1-x}$ því betur sem N stækkar en verða aldrei nákvæmar nálægt $x = 1$ þar sem röðin er ósamleitin.

59.



Nálgunin virðist verða fljótt stöðug nálægt báðum $x = \pm 1$.

61.



Margliðuferlarnir hafa núllstöðvar nálægt núllstöðvum $\sin x$ upp að stigi sínu, en síðan víkja margliðurnar frá $\sin x$.

Æfingar í undirkafla 6.2

63. $\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ og $\frac{1}{2}\left(f(x)-g(x)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

65.

$$\frac{4}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}-\frac{1}{1-(-x)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$$

67.

$$\frac{5}{(x^2+4)(x^2-1)}=\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+(-1)\cdot^{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}\right)x^{2n}$$

69.

$$\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$$

71.

$$\frac{1}{x-3}\frac{1}{1-\frac{1}{(x-3)^2}}=\frac{x-3}{(x-3)^2-1}$$

73. $P=P_1+\cdots+P_{20}$, þar sem $P_k=10.000\frac{1}{(1+r)^k}$. Þá er $P=10,000\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(1+r)^k}=10,000\frac{1-(1+r)^{-20}}{r}$. Þegar $r=0{,}03$, $P\approx 10.000\ \times\ 14{,}8775=148.775$. Þegar $r=0{,}05$, $P\approx 10.000\ \times\ 12{,}4622=124.622$. Þegar $r=0{,}07$, $P\approx 105.940$.

75. Almennt er $P=\frac{C\left(1-(1+r)^{-N}\right)}{r}$ fyrir N greiðsluár, eða $C=\frac{Pr}{1-(1+r)^{-N}}$. Fyrir $N=20$ og $P=100.000$, er $C=6721{,}57$ þegar $r=0{,}03$; $C=8024{,}26$, þegar $r=0{,}05$; og $C\approx 9439{,}29$ þegar $r=0{,}07$.

77. Almennt er $P=\frac{C}{r}$. Því er $r=\frac{C}{P}=5\ \times\ \frac{10^4}{10^6}=0{,}05$.

79.

$$\left(x+x^2-x^3\right)\left(1+x^3+x^6+\cdots\right)=\frac{x+x^2-x^3}{1-x^3}$$

81.

$$\left(x-x^2-x^3\right)\left(1+x^3+x^6+\cdots\right)=\frac{x-x^2-x^3}{1-x^3}$$

83. $a_n=2$, $b_n=n$ og því $c_n=\sum_{k=0}^{n}b_k a_{n-k}=2\sum_{k=0}^{n}k=(n)(n+1)$ og $f(x)g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$

85. $a_n=b_n=2^{-n}$ og því $c_n=\sum_{k=1}^{n}b_k a_{n-k}=2^{-n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{2^n}$ og $f(x)g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x}{2}\right)^n$

87. Afleiða f er $-\frac{1}{(1+x)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

89. Óákveðið heildi f er $-\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$.

91. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}; f'\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1/2}=\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1/2}=4$ og því $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$.

93. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}; f''\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^{n-2}}=\frac{d^2}{dx^2}(1-x)^{-1}\Big|_{x=1/2}=\frac{2}{(1-x)^3}\Big|_{x=1/2}=16$ og því $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2^n}=4$.

95.

$$\int\sum(1-x)^n dx=\int\sum(-1)^n(x-1)^n dx=\sum\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

97.

$$-\int_{t=0}^{x^2}\frac{1}{1-t}dt=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{x^2}t^n dx-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$$

99.

$$\int_0^{x^2}\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^{x^2}t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{t=0}^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

101. Heildun lið fyrir lið gefur

$$\int_0^x\ln t\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)(x-1)^{n+1}$$
$$=(x-1)\ln x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}=x\ln x-x.$$

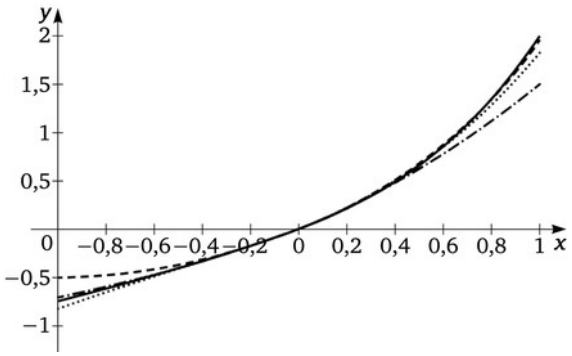
103. Gildir $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ og því $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Þar með er $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n-1}\right)\frac{x^n}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Þegar $x=\frac{1}{3}$ fæst $\ln(2)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$. Gildir $2\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}=0{,}69300\ldots$, en jafnframt $2\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}=0{,}69313\ldots$ og $\ln(2)=0{,}69314\ldots$; og því er $N=4$.

105. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-\ln(1-x)$ og því $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{3k}}{6k}=-\frac{1}{6}\ln(1-x^3)$. Samkvæmt kvótaprófinu er samleitnigeislinn 1.

107. Ef $y=2^{-x}$, þá er $\sum_{k=1}^{\infty} y^k=\frac{y}{1-y}=\frac{2^{-x}}{1-2^{-x}}=\frac{1}{2^x-1}$. Ef $a_k=2^{-kx}$, þá er $\frac{a_{k+1}}{a_k}=2^{-x}<1$ þegar $x>0$. Því er röðin samleitin fyrir öll $x>0$.

109. Svör geta verið mismunandi.

111.



Samfelldi ferillinn er S_5. Strikaði ferillinn er S_2, punktalínan er S_3 og punktastrikaði ferillinn er S_4

113. Þegar $x=-\frac{1}{2}$, $-\ln(2)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$. Þar sem $\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{n2^n}<\sum_{n=11}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{10}}$, fæst $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n2^n}=0{,}69306\ldots$ en $\ln(2)=0{,}69314\ldots$; Því er $N=10$.

115. $6S_N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$. Gildir $\pi-6S_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}00101\ldots$ og $\pi-6S_5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}00028\ldots$ og því er $N=5$ lægsta gildi N sem gefur skekkju minni en 0,001. Einnig er $\pi-6S_7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}00002\ldots$ en $\pi-6S_8\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-0{,}000007\ldots$ og því er $N=8$ lægsta gildi N sem gefur skekkju minni en 0,00001.

Æfingar í undirkafla 6.3

117.

$$f(-1)=1;f'(-1)=-1;f''(-1)=2;f(x)=1-(x+1)+(x+1)^2$$

119.

$$f'(x)=2\cos(2x);f''(x)=-4\sin(2x);p_2(x)=-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

121.

$$f'(x)=\frac{1}{x};\ f''(x)=-\frac{1}{x^2};\ p_2(x)=0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$$

123.

$$p_2(x)=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2$$

125. $\frac{d^2}{dx^2}x^{1/3}=-\frac{2}{9x^{5/3}}\geq -0{,}00092\ldots$ þegar $x\geq 28$ og því gildir skekkjumatið fyrir línulegu nálgunina $x^{1/3}\approx p_1(27)=3+\frac{x-27}{27}$, sem gefur $(28)^{1/3}\approx 3+\frac{1}{27}=3{,}0\overline{37}$, en $(28)^{1/3}\approx 3{,}03658$.

127. Með matinu $\frac{2^{10}}{10!}<0{,}000283$ má nota Taylor-liðun af stigi 9 til að meta e^x við $x=2$. Þá fæst $e^2\approx p_9(2)=1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{6}+\cdots+\frac{2^9}{9!}=7{,}3887\ldots$ en $e^2\approx 7{,}3891$.

129. Þar sem $\frac{d^n}{dx^n}(\ln x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$, $R_{1000}\approx\frac{1}{1001}$. Þá fæst $p_{1000}(1)=\sum_{n=1}^{1000}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\approx 0{,}6936$ en $\ln(2)\approx 0{,}6931\cdots$.

131.

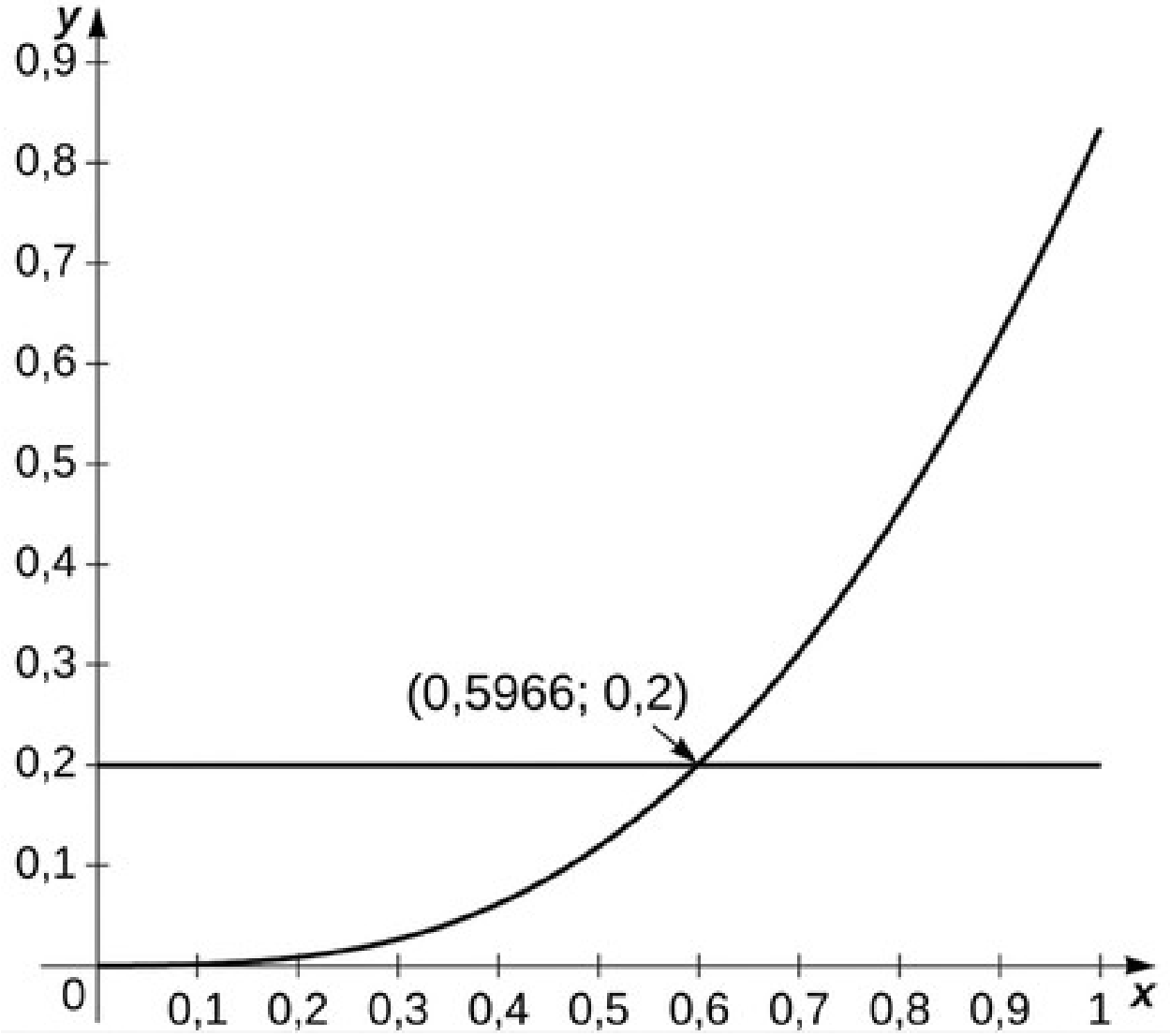
$$\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^{12}}{720}\right)dx$$

$$=1-\frac{1^3}{3}+\frac{1^5}{10}-\frac{1^7}{42}+\frac{1^9}{9\cdot 24}-\frac{1^{11}}{120\cdot 11}+\frac{1^{13}}{720\cdot 13}\approx 0{,}74683 \text{ en } \int_0^1 e^{-x^2}dx\approx 0{,}74682.$$

133. Þar sem $f^{(n+1)}(z)$ er $\sin z$ eða $\cos z$, er $M=1$. Þar sem $|x-0|\leq\frac{\pi}{2}$, leitum við að minnsta n þannig að $\frac{\pi^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\leq 0{,}001$. Minnsta slíka gildið er $n=7$. Skekkjumatið er $R_7\leq 0{,}00092$.

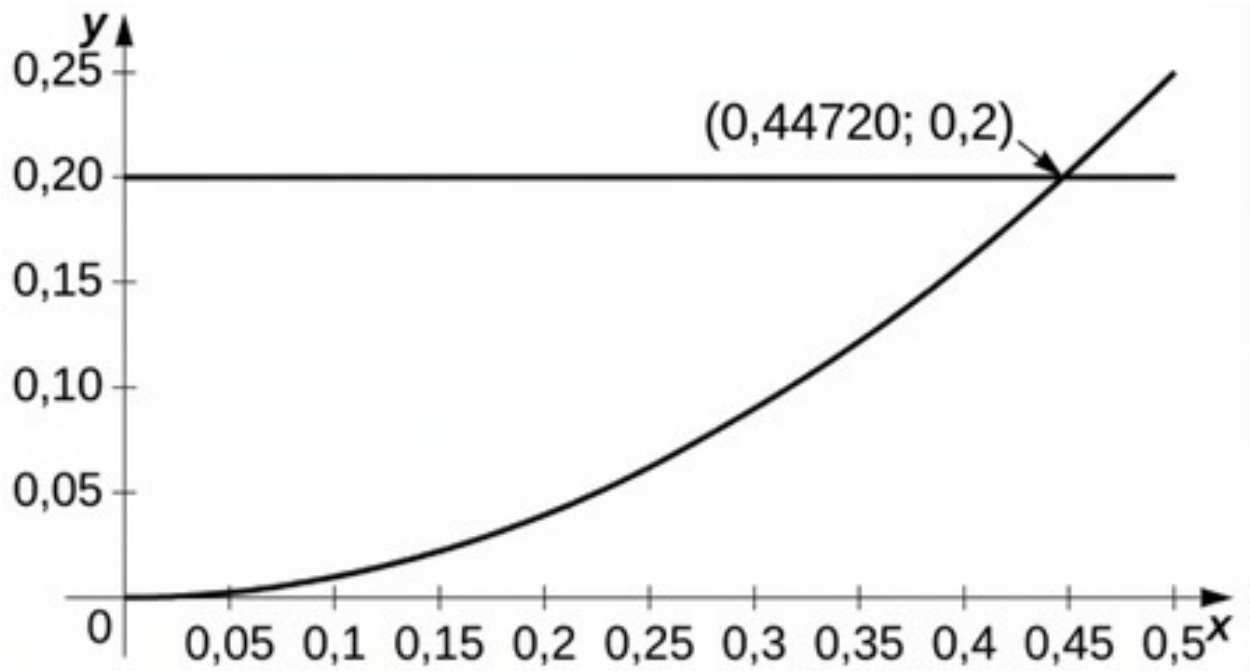
135. Þar sem $f^{(n+1)}(z)=\pm e^{-z}$ er $M=e^3$. Þar sem $|x-0|\leq 3$, leitum við að minnsta n þannig að $\frac{3^{n+1}e^3}{(n+1)!}\leq 0{,}001$. Minnsta slíka gildið er $n=14$. Skekkjumatið er $R_{14}\leq 0{,}000220$.

137.



Þar sem $\sin x$ er vaxandi fyrir lítil x og þar sem $sin'' x = -\sin x$, gildir matið þegar $R^2 \sin(R) \leq 0{,}2$, það er allt að $R = 0{,}596$.

139.



Þar sem önnur afleiða $\cos x$ er $-\cos x$ og þar sem $\cos x$ er minnkandi þegar fjær dregur frá $x=0$, gildir matið þegar $R^2\cos\ R\le 0{,}2$ eða $R\le 0{,}447$.

141.

$$(x+1)^3-2(x+1)^2+2(x+1)$$

143. Gildi afleiðanna eru þau sömu og fyrir $x=0$ og því $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2\pi)^{2n}}{(2n)!}$

145. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ og því $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, sem er einnig $-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

147. Afleiðurnar eru $f^{(n)}(1)=e$ og því $e^x=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$.

149.

$$\frac{1}{(x-1)^3}=-\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+2)(n+1)x^n}{2}\right)$$

151.

$$2-x=1-(x-1)$$

153.

$$\left((x-1)-1\right)^2=(x-1)^2-2(x-1)+1$$

155.

$$\frac{1}{1-(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

157.

$$x\sum_{n=0}^{\infty}2^n(1-x)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}2^n(x-1)^{2n}$$

159.

$$e^{2x}=e^{2|x-1|+2}=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n!}$$

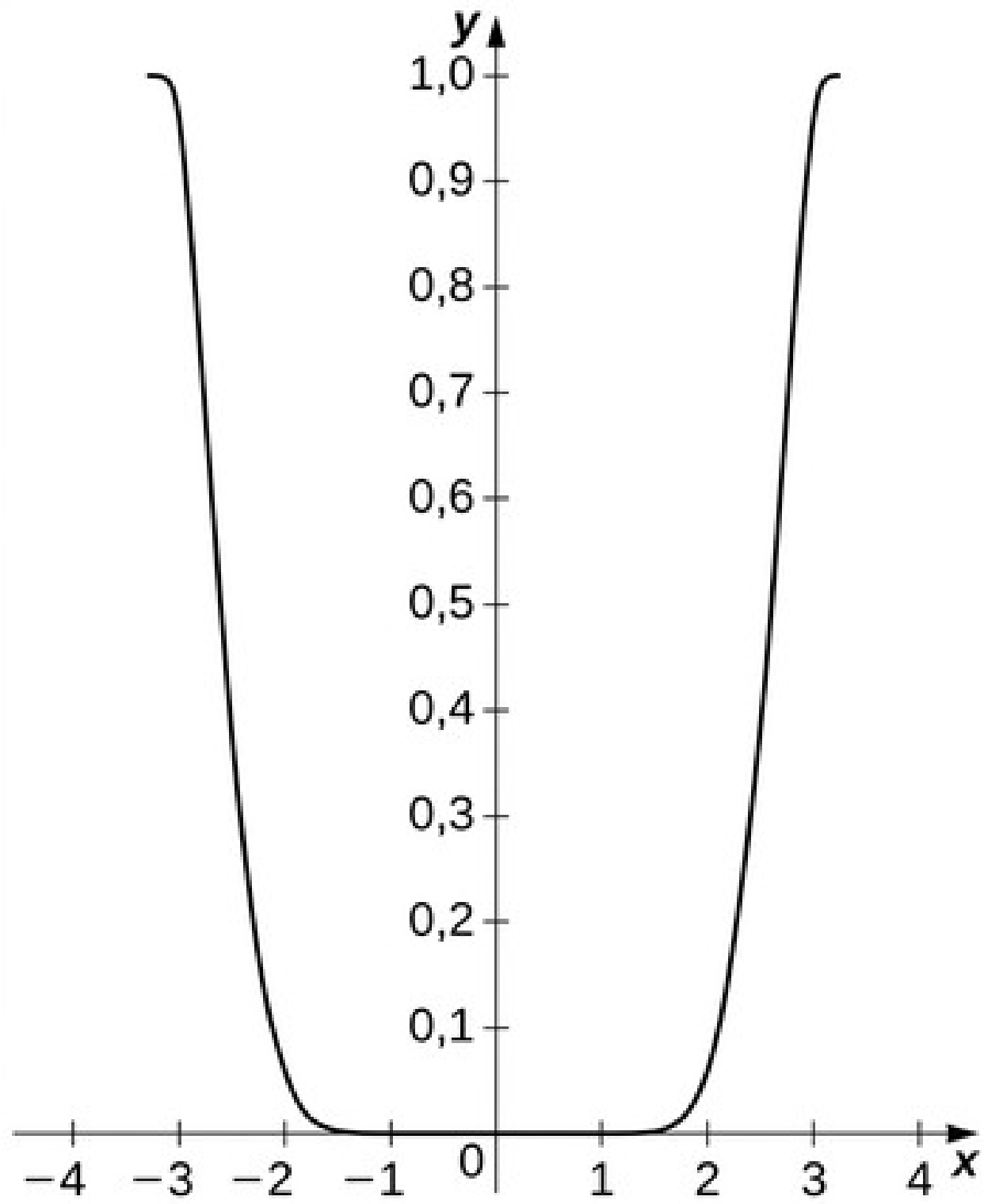
161.

$$x=e^2;S_{10}=\frac{34.913}{4725}\approx 7{,}3889947$$

163.

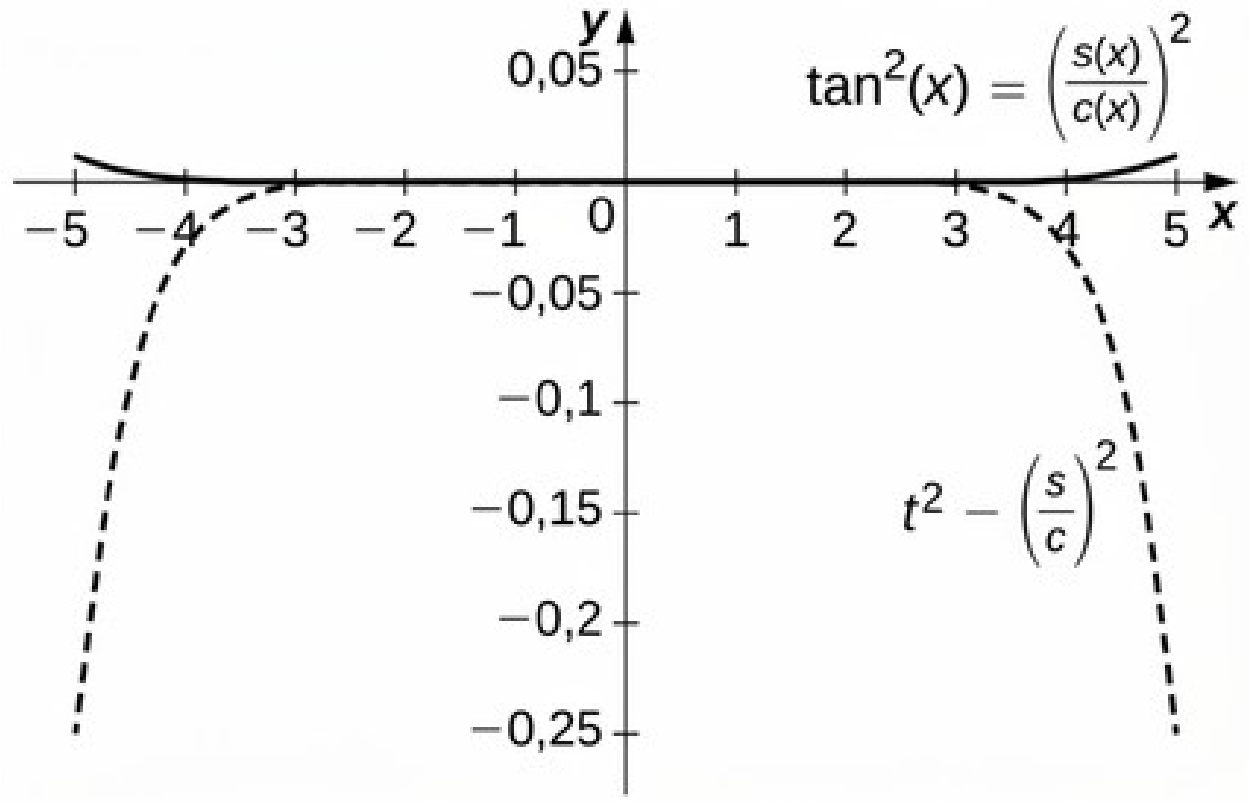
$$\sin(2\pi)=0;S_{10}=8{,}27\ \times\ 10^{-5}$$

165.



Mismunurinn er lítill innan bilsins en stefnir á 1 nálægt endapunktunum. Skekkjumatið er $|R_4| = \frac{\pi^5}{120} \approx 2{,}552$.

167.



Mismunurinn er af stærðargráðunni 10^{-4} á $[-1,1]$ en skekkja Taylor-nálgunarinnar er um 0,1 nálægt ± 1. Efri ferillinn sýnir $\tan^2 x - \left(\frac{S_5(x)}{C_4(x)}\right)^2$ og neðri strikaði ferillinn sýnir $t^2 - \left(\frac{S_5}{C_4}\right)^2$.

169. a. Svör eru breytileg. b. Eftirfarandi eru x_n gildin eftir 10 ítrekanir á aðferð Newtons til að nálga núllstöð $p_N(x) - 2 = 0$: fyrir $N = 4$, $x = 0{,}6939\ldots$; fyrir $N = 5$, $x = 0{,}6932\ldots$; fyrir $N = 6$, $x = 0{,}69315\ldots$;. (Athugið: $\ln(2) = 0{,}69314\ldots$) c. Svör eru breytileg.

171.

$$\frac{\ln\left(1 - x^2\right)}{x^2} \to -1$$

173.

$$\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1}{2x} \approx \frac{\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \cdots\right) - 1}{2x} \to -\frac{1}{4}$$

Æfingar í undirkafla 6.4

175.

$$\left(1+x^2\right)^{-1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}x^{2n}$$

177.

$$(1-2x)^{2/3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n\binom{\frac{2}{3}}{n}x^n$$

179.

$$\sqrt{2+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{(1/2)-n}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^{2n};\left(\left|x^2\right|<2\right)$$

181.

$\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ svo $\sqrt{2x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-1)^{2n}$

183.

$\sqrt{x}=2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}$ svo $\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{1-2n}\binom{\frac{1}{2}}{n}(x-4)^n$

185.

$$\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}3^{1-2n}\left(\frac{1}{2}n\right)(x-9)^n$$

187.

$10\left(1+\frac{x}{1000}\right)^{1/3}=\sum_{n=0}^{\infty}10^{1-3n}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^n.$ Ef til dæmis er notuð fjórða stigs nálgun við $x=1$ fæst

$$\begin{aligned}(1001)^{1/3}&\approx 10\left(1+\binom{\frac{1}{3}}{1}10^{-3}+\binom{\frac{1}{3}}{2}10^{-6}+\binom{\frac{1}{3}}{3}10^{-9}+\binom{\frac{1}{3}}{4}10^{-12}\right)\\&=10\left(1+\frac{1}{3,10^3}-\frac{1}{9,10^6}+\frac{5}{81,10^9}-\frac{10}{243,10^{12}}\right)=10{,}00333222\ldots\end{aligned}$$

en $(1001)^{1/3}=10{,}00332222839093\ldots$. Tveir liðir myndu nægja fyrir þriggja stafa nákvæmni.

189. The approximation is 2,3152; the CAS value is 2,23….

191. Nálgunin er 2,583…; gildi tölvualgebrukerfisins er 2,449….

193.

$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$. Því

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{7\cdot 16}-\frac{5x^9}{9\cdot 128}+\cdots\Big|_{-1}^{1}\approx 2-\frac{1}{3}-\frac{1}{20}-\frac{1}{56}-\frac{10}{9\cdot 128}+\text{skekkja}$$
$$=1{,}590\ldots$$

en $\frac{\pi}{2}=1{,}570\ldots$

195.

$$\begin{aligned}(1+4x)^{4/3} &= (1+4x)(1+4x)^{1/3}\\ &= (1+4x)\left(1+\tfrac{4x}{3}-\tfrac{16x^3}{9}+\tfrac{320x^3}{81}-\tfrac{2560x^4}{243}\right)\\ &= 1+\tfrac{16}{3}x+\tfrac{32}{9}x^2-\tfrac{256}{81}x^3+\tfrac{1280}{243}x^4-\tfrac{10240}{243}x^5\end{aligned}$$

197.

$$\left(1+(x+3)^2\right)^{1/3}=1+\frac{1}{3}(x+3)^2-\frac{1}{9}(x+3)^4+\frac{5}{81}(x+3)^6-\frac{10}{243}(x+3)^8+\cdots$$

199. Tvöföld nálgunin er $1{,}260\ldots$ en $2^{1/3}=1{,}2599\ldots$.

201.

$$f^{(99)}(0)=0$$

203.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln(2)x)^n}{n!}$$

205. Fyrir

$$x>0,\sin\left(\sqrt{x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(2n+1)/2}}{\sqrt{x}(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}.$$

207.

$$e^{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n!}$$

209.

$$\sin^2 x=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}x^{2k}}{(2k)!}$$

211.

$$\tan^{-1}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

213.

$$\sin^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

215.

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(2n)!}$$

217.

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$$

219.

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

221.

$$1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\cdots$$

223.

$$1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+\cdots$$

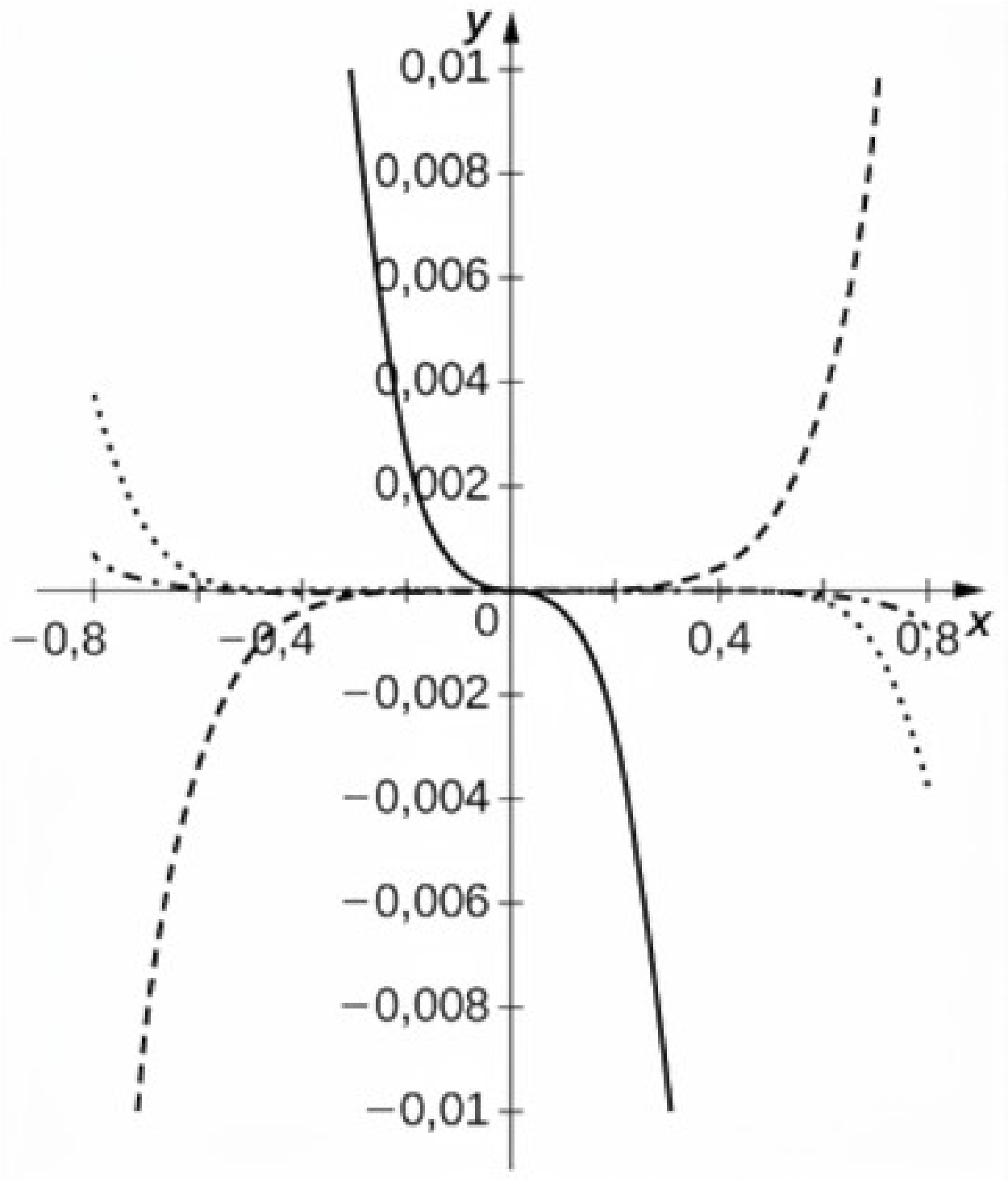
225. Með liðunarformúlunni fyrir $\tan x$ fæst $1+\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{15}$.

227. $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ og því $R=1$ samkvæmt kvótaprófinu.

229. $\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}$ og því $R=1$ samkvæmt kvótaprófinu.

231. Leggið raðirnar fyrir e^x og e^{-x} saman lið fyrir lið. Liðirnir með odda veldisvísa styttast út og $\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

233.



Hlutfallið $\frac{S_n(x)}{C_n(x)}$ nálgar $\tan x$ betur en $p_7(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}$ þegar $N\geq 3$. Strikuðu

ferlarnir eru $\frac{S_n}{C_n}-\tan$ þegar $n=1,2$. Punktalínan samsvarar $n=3$, og punktastrikaði ferillinn samsvarar $n=4$. Heili ferillinn er $p_7-\tan x$.

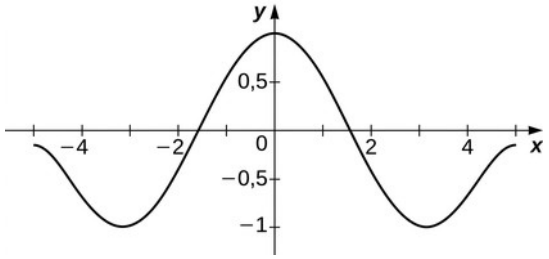
235. Samkvæmt setningunni um deildun lið fyrir lið er $y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ og því

$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\; x\,y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$, en $y'=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ og því $x\,y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$.

237. Líkurnar eru $p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(a-\mu)/\sigma}^{|b-\mu|/\sigma} e^{-x^2/2}\,dx$, þar sem $a=90$ og $b=100$, það er

$$p=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{5}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^n n!}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{5}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)2^n n!}\approx 0{,}6827.$$

239.



Eins og í verkefninu á undan fæst $a_n=0$ ef n er oddatala og $a_n=-(n+2)(n+1)a_{n+2}$ ef n er slétt tala, og því leiðir $a_0=1$ til $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

241. $y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ og $y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ og því felur $y''-y'+y=0$ í sér að

$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+a_n=0$ eða $a_n=\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$ fyrir öll $n\cdot y(0)=a_0=1$ og

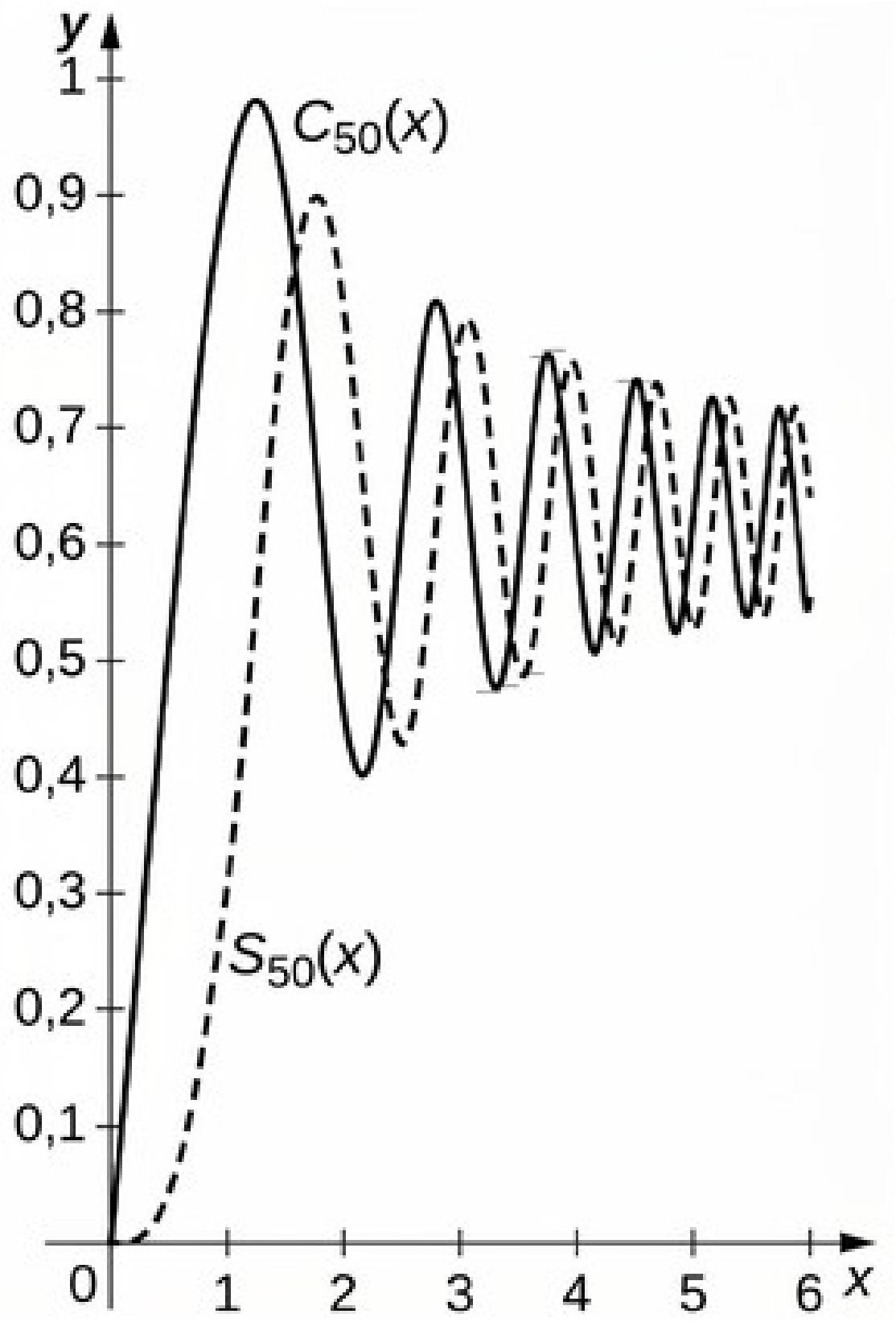
$y'(0)=a_1=0$, og því $a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{6}, a_4=0$, og $a_5=-\frac{1}{120}$.

243. a. (Sönnun) b. Hér er $R_s\le\frac{0{,}1}{(9)!}\pi^9\approx 0{,}0082<0{,}01$. Hér er

$\int_0^{\pi}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}\right)dx=\pi-\frac{\pi^3}{3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{5\cdot 5!}-\frac{\pi^7}{7\cdot 7!}+\frac{\pi^9}{9\cdot 9!}=1{,}852\ldots$, en

$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=1{,}85194\ldots$, og því er raungild skekkja um það bil $0{,}00006$.

245.



Þar sem $\cos\left(t^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{t^{4n}}{\left(2n\right)!}$ og $\sin\left(t^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{t^{4n+2}}{\left(2n+1\right)!}$, fæst $S\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{4n+3}}{\left(4n+3\right)\left(2n+1\right)!}$ og $C\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{4n+1}}{\left(4n+1\right)\left(2n\right)!}$. Summur fyrstu 50 liða sem eru ekki núll eru sýndar hér að neðan, þar sem $C_{50}\left(x\right)$ er heili ferillinn og $S_{50}\left(x\right)$ strikaði ferillinn.

247.

$$\int_0^{1/4}\sqrt{x}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\frac{7x^5}{256}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}2^{-3}-\frac{1}{2}\ \frac{2}{5}2^{-5}-\frac{1}{8}\ \frac{2}{7}2^{-7}-\frac{1}{16}\ \frac{2}{9}2^{-9}-\frac{5}{128}\ \frac{2}{11}2^{-11}-\frac{7}{256}\ \frac{2}{13}2^{-13}=0{,}0767732\ldots$$

en $\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,dx=0{,}076773$.

249. $T\approx2\pi\sqrt{\frac{10}{9{,}8}}\left(1+\frac{\sin^2\left(\theta/12\right)}{4}\right)\approx6{,}453$ sekúndur. Smáhornanálgunin er $T\approx2\pi\sqrt{\frac{10}{9{,}8}}\approx6{,}347$. Hlutfallslega skekkjan er um 2 prósent.

251. $\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3\pi}{16}$. Því er $T\approx2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}+\frac{9}{256}k^4\right)$.

Upprifjunaræfingar

253. Satt

255. Satt

257. Samleitnigeisli: 1; Samleitnibil: $\left(0,2\right)$

259. Samleitnigeisli: 12; Samleitnibil: $\left(-12,12\right)$

261. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{3^{n+1}}x^{n+2}$; Samleitnigeisli: 3; Samleitnibil: $\left(-3,3\right)$

263. heildun: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}\left(2x\right)^{2n+1}$

265. $p_4\left(x\right)=\left(x+3\right)^3-11\left(x+3\right)^2+39\left(x+3\right)-41$; nákvæmt

267.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n\left(3x\right)^{2n}}{2n!}$$

269.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

271.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

273.

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}$$

275. Svör geta verið mismunandi.

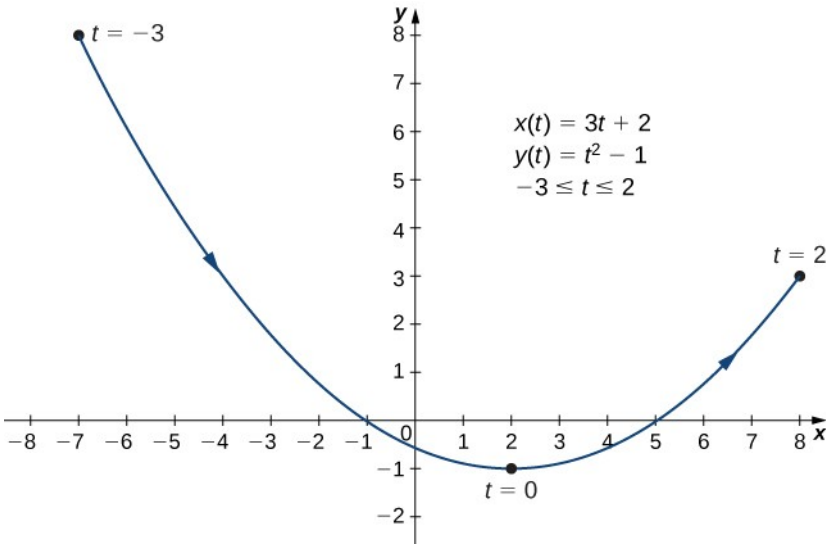
277.

$$2{,}5\,\%$$

Kafli 7

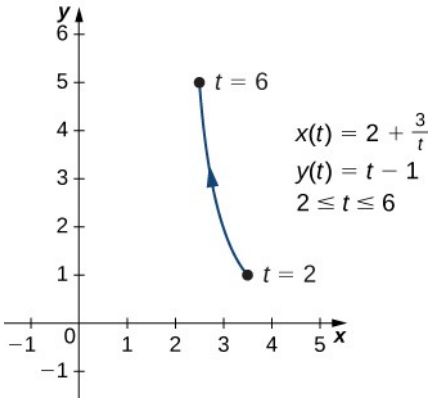
Stöðumat

7.1



7.2

$x=2+\frac{3}{y+1}$, eða $y=-1+\frac{3}{x-2}$. Þessi jafna lýsir hluta réttstæðs breiðboga með miðju í $(2,-1)$.



7.3

Einn möguleiki er $x(t)=t$, $y(t)=t^2+2t$. Annar möguleiki er

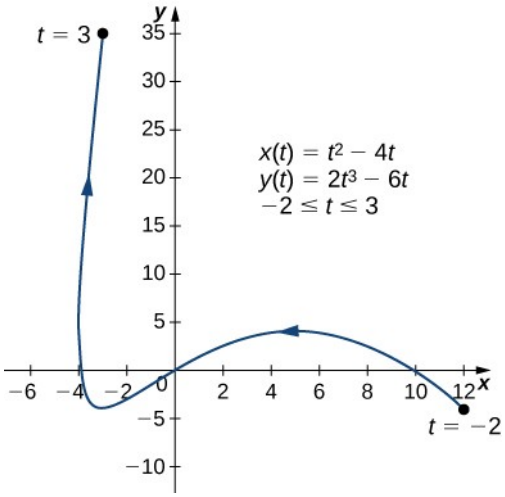
$$x(t)=2t-3,\ y(t)=(2t-3)^2+2(2t-3)=4t^2-8t+3.$$

Möguleikarnir eru í raun óendanlega margir.

7.4

$x'(t)=2t-4$ og $y'(t)=6t^2-6$, og því $\frac{dy}{dx}=\frac{6t^2-6}{2t-4}=\frac{3t^2-3}{t-2}$.

Þessi segð er óskilgreind þegar $t=2$ og jöfn núlli þegar $t=\pm 1$.



7.5

Jafna snertilsins er $y=24x+100$.

7.6

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3t^2-12t+3}{2(t-2)^3}$. Markpunktar $(5,4),(-3,-4)$, og $(-4,4)$.

7.7

$A=3\pi$ (Athugið að heildisformúlan gefur í raun neikvætt svar. Ástæðan er sú að $x(t)$ er minnkandi fall á bilinu $[0,2\pi]$; það er að ferillinn er rakinn frá hægri til vinstri.)

7.8

$$s=2\left(10^{3/2}-2^{3/2}\right)\approx 57{,}589$$

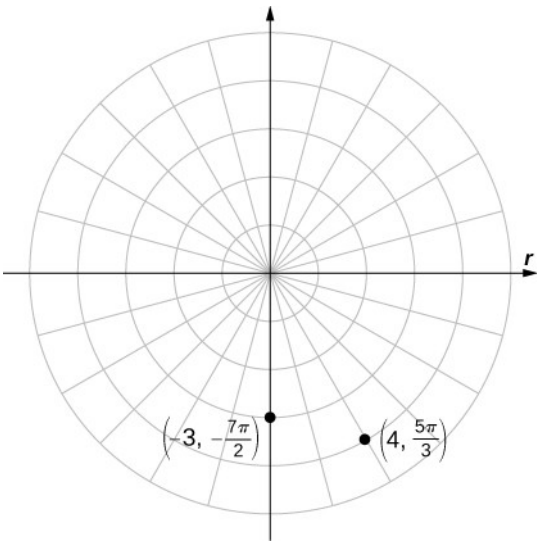
7.9

$$A=\frac{\pi\left(494\sqrt{13}+128\right)}{1215}$$

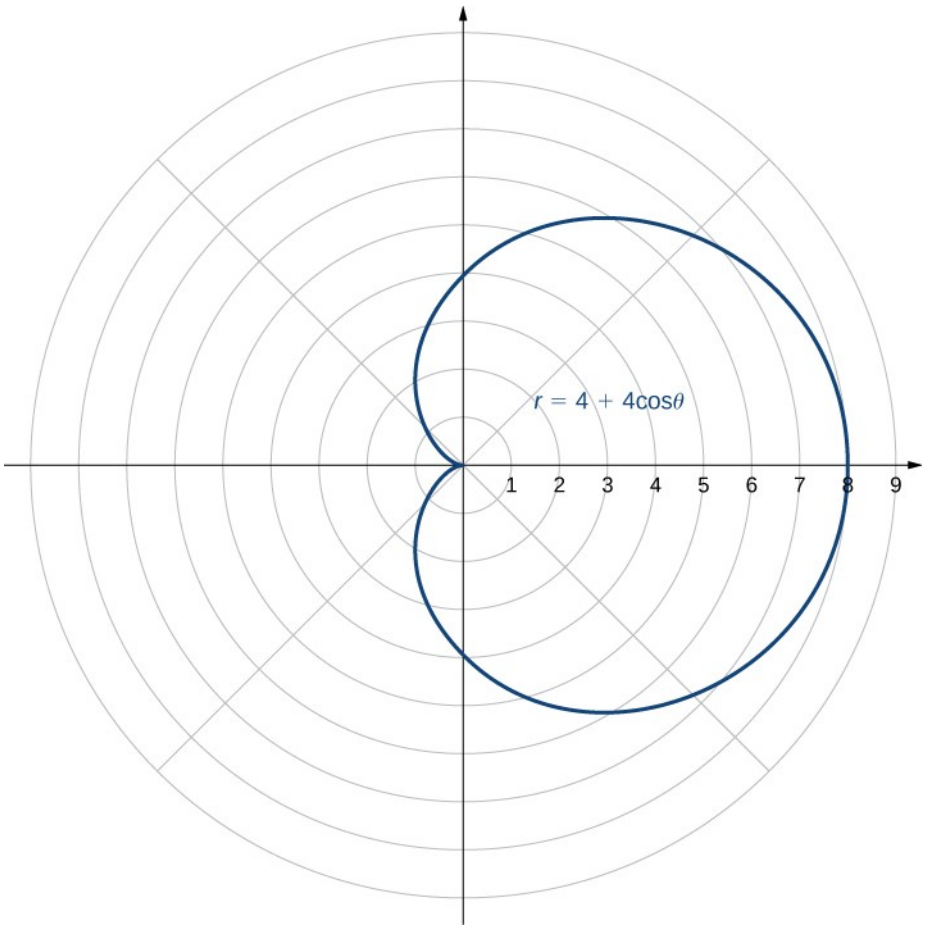
7.10

$\left(8\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ og $\left(-2,2\sqrt{3}\right)$

7.11



7.12



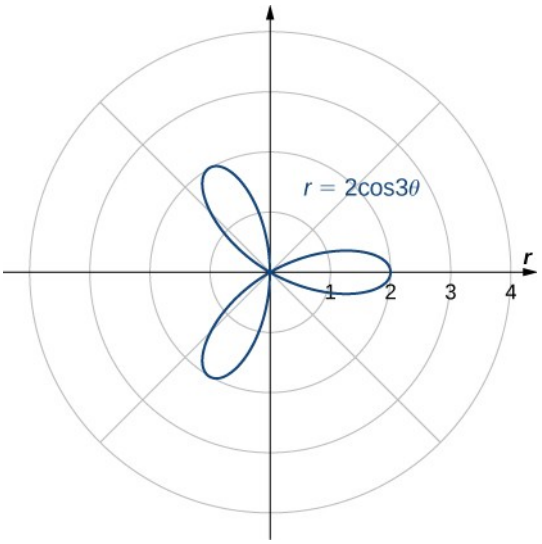
Þessi ferill nefnist hjartaferill og verður rannsakaður nánar síðar í þessum undirkafla.

7.13

$y = x^2$, sem er jafna fleygboga sem opnast upp.

7.14

Samhverft um skauthnitaásinn.



7.15

$$A=3\pi/2$$

7.16

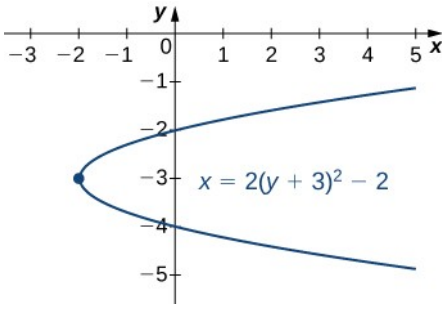
$$A=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$$

7.17

$$s=3\pi$$

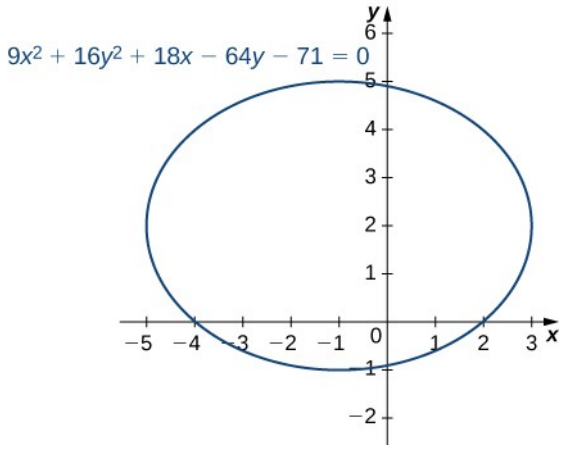
7.18

$$x=2\left(y+3\right)^2-2$$



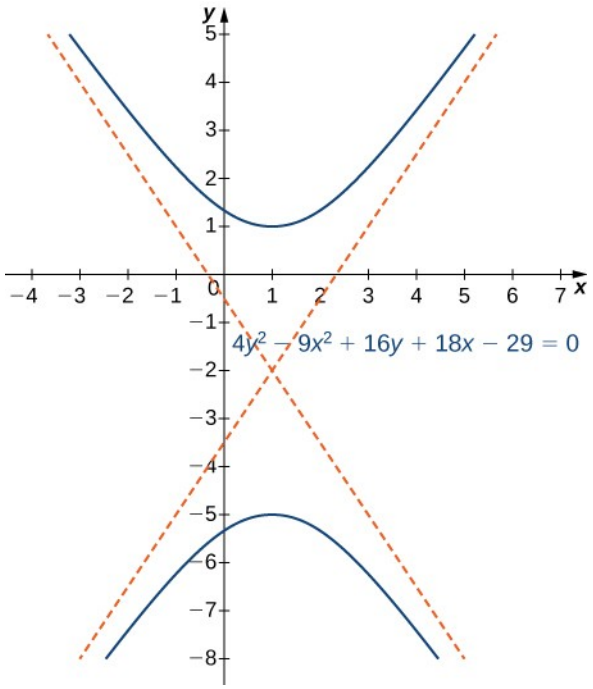
7.19

$$\frac{\left(x+1\right)^2}{16}+\frac{\left(y-2\right)^2}{9}=1$$



7.20

$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$. Þetta er lóðréttur breiðbogi. Aðfellur $y = -2 \pm \frac{3}{2}(x-1)$.

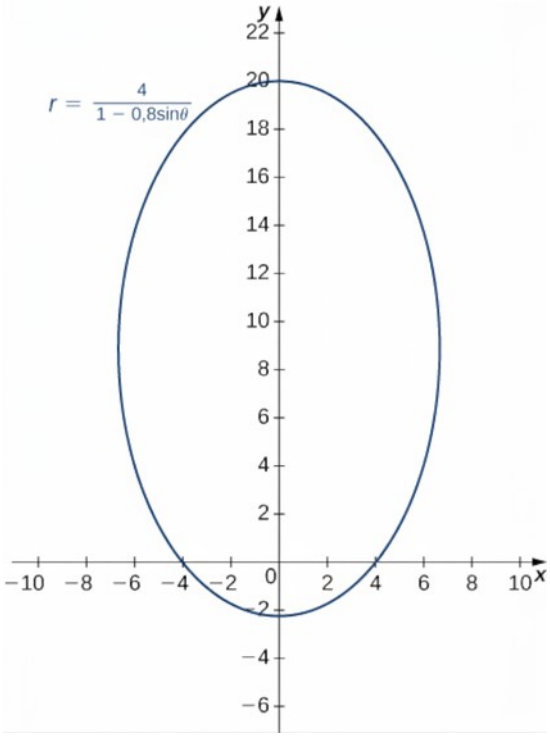


7.21

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{74}}{7} \approx 1{,}229$$

7.22

Here $e = 0{,}8$ and $p = 5$. This conic section is an ellipse.

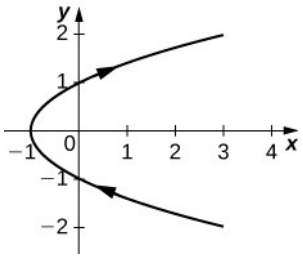


7.23

Keilusniðið er breiðbogi og snúningshorn ásanna er $\theta = 22{,}5°$.

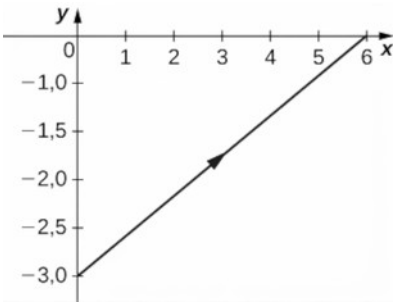
Æfingar í undirkafla 7.1

1.



stefna: neðan frá og upp

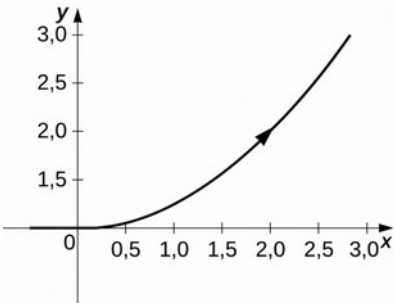
3.



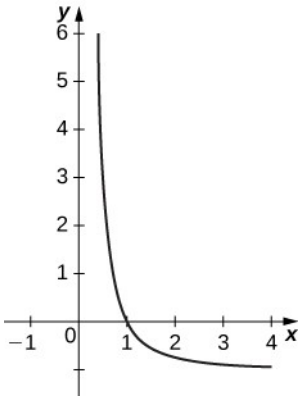
stefna: frá vinstri til hægri

5.

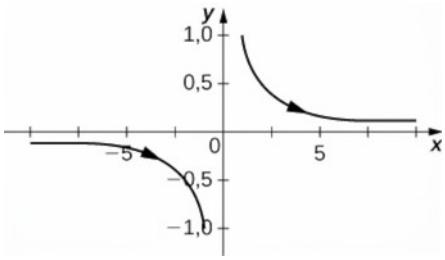
$$y=\frac{x^2}{4}+1$$



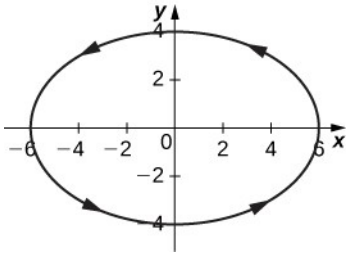
7.



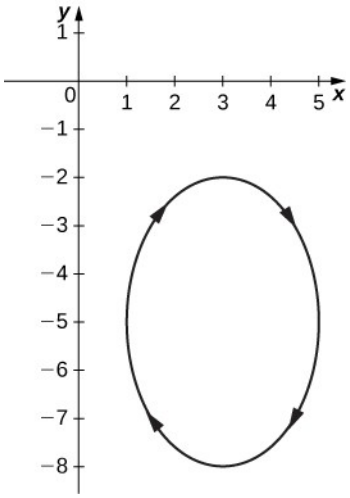
9.



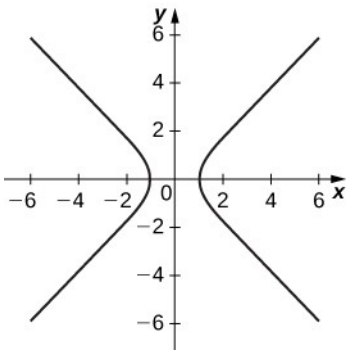
11.



13.

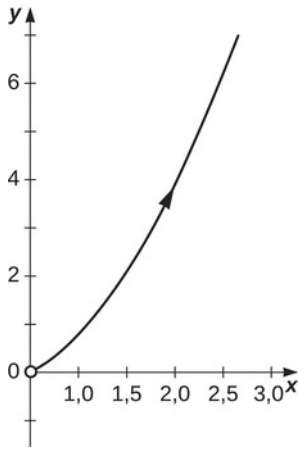


15.

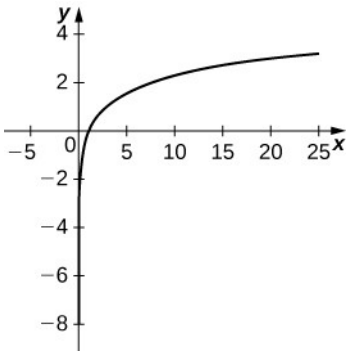


Aðfellurnar eru $y = x$ og $y = -x$

17.



19.



21. $y=\frac{\sqrt{x+1}}{2}$; skilgreiningarmengi: $x\in[-1,\infty)$.

23. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; skilgreiningarmengi $x\in[-4,4]$.

25. $y=3x+2$; skilgreiningarmengi: allar rauntölur.

27. $(x-1)^2+(y-3)^2=1$; skilgreiningarmengi: $x\in[0,2]$.

29. $y=\sqrt{x^2-1}$; skilgreiningarmengi: $x\in(-\infty,-1]$.

31. $y^2=\frac{1-x}{2}$; skilgreiningarmengi: $x\in[-1,1]$.

33. $y=\ln x$; skilgreiningarmengi: $x\in[1,\infty)$.

35. $y=\ln x$; skilgreiningarmengi: $x\in(0,\infty)$.

37. $x^2+y^2=4$; skilgreiningarmengi: $x\in[-2,2]$.

39. lína

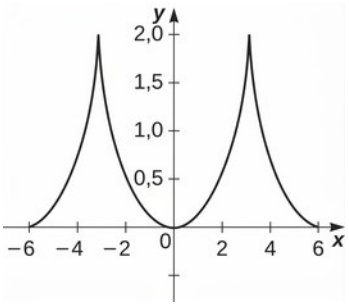
41. fleygbogi

43. hringur

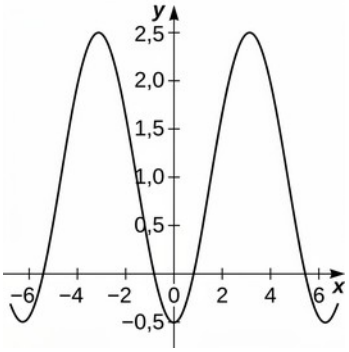
45. sporbaugur

47. breiðbogi

51. Jöfnurnar lýsa hjólferli.

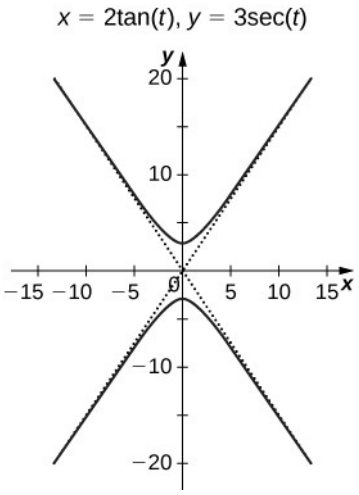


53.

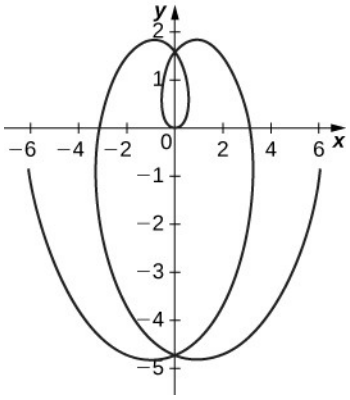


55. 22.092 metrar eftir um það bil 51 sekúndur.

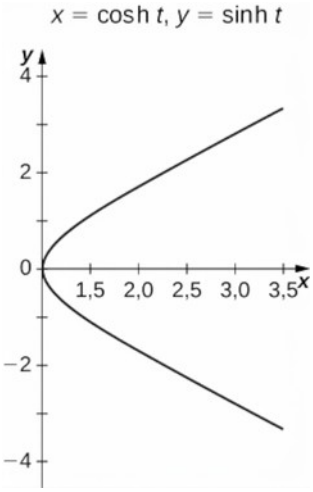
57.



59.



61.



Æfingar í undirkafla 7.2

63. 0

65.

$$\frac{-3}{5}$$

67.

$$\text{Hallatala} = 0;\ y = 8.$$

69. Hallatalan er óskilgreind; $x = 2$.

71. $\tan t = -2$ $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-8}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{-8}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$.

73. Engir slíkir punktar eru til; óskilgreind segð.

75.

$$y=-\left(\frac{4}{e}\right)x+5$$

77.

$$y=-2x+3$$

79.

$$\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

81.

$$\frac{dy}{dx}=-\tan(t)$$

83. $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}$ og $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, og því er ferillinn hvorki kúptur upp né niður í $t=3$. Grafið er því línulegt og hefur fasta hallatölu en enga kúptni.

85. $\frac{dy}{dx}=4, \frac{d^2y}{dx^2}=-6\sqrt{3}$; ferillinn er kúptur niður í $\theta=\frac{\pi}{6}$.

87. Engir láréttir snertlar. Lóðréttir snertlar í $(1,0),(-1,0)$.

89.

$$-\sec^3(\pi t)$$

91. Láréttir $(0,-9)$; lóðréttir $(\pm 2,-6)$.

93. 1

95. 0

97. 4

99. Kúpt upp þegar $t>0$.

101.

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$$

103.

$$\frac{3\pi}{2}$$

105.

$$6\pi a^2$$

107.

$$2\pi ab$$

109.

$$\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

111.

$$7{,}075$$

113.

$$6a$$

115.

$$6\sqrt{2}$$

119.

$$\frac{2\pi\left(247\sqrt{13}+64\right)}{1215}$$

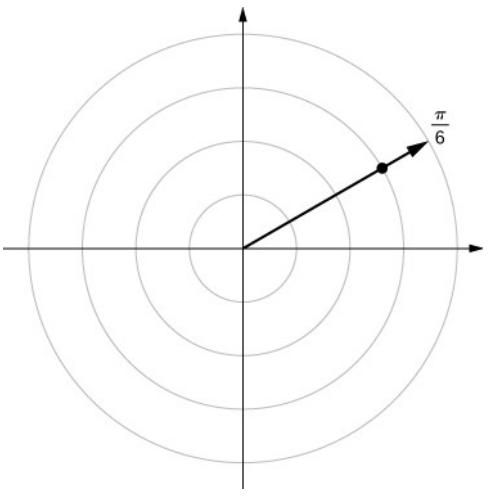
121. 59,101

123.

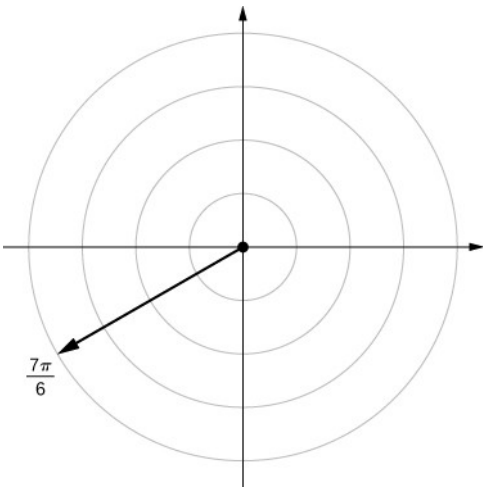
$$\frac{8\pi}{3}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Æfingar í undirkafla 7.3

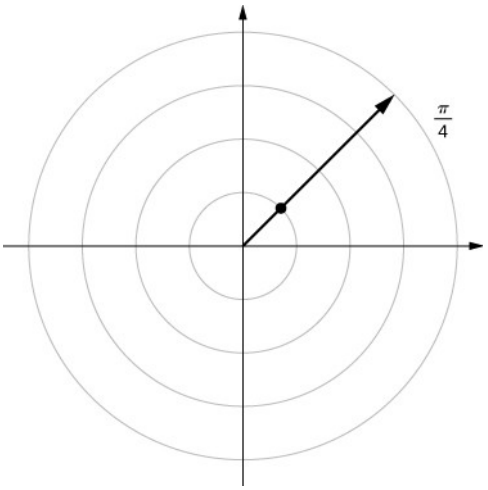
125.



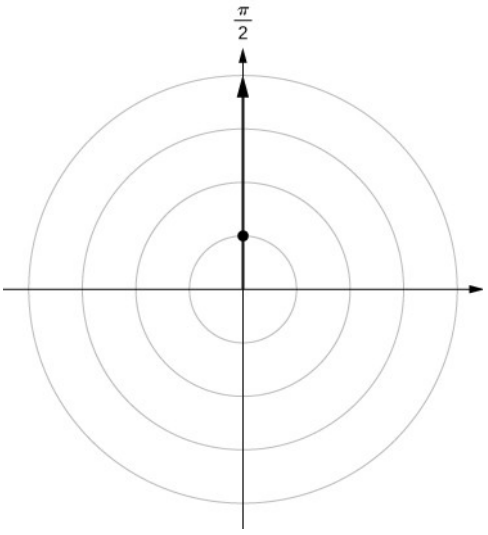
127.



129.



131.



133.

$$B\left(3, \frac{-\pi}{3}\right) \quad B\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$$

135.

$$D\left(5, \frac{7\pi}{6}\right) D\left(-5, \frac{\pi}{6}\right)$$

137.

$$(5, 5.356)(-5, 2.214)$$

139.

$$(10, 2.214)(-10, 5.356)$$

141.

$$\left(2\sqrt{3}, \frac{11\pi}{6}\right)\left(-2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

143.

$$\left(-\sqrt{3}, \quad -1\right)$$

145.

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1}{2}\right)$$

147.

$$(0, \quad 0)$$

149. Samhverfa um x-ásinn, y-ásinn og upphafspunktinn.

151. Aðeins samhverft um x-ásinn.

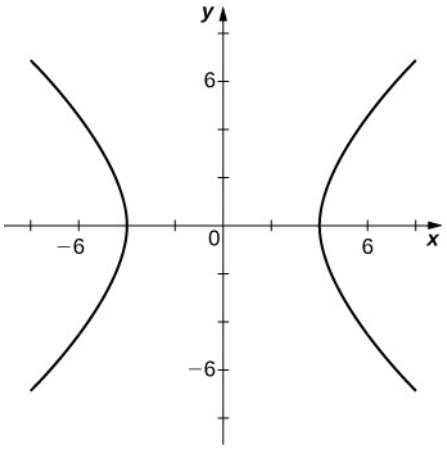
153. Aðeins samhverfa um x-ásinn.

155. Lína $y = x$

157.

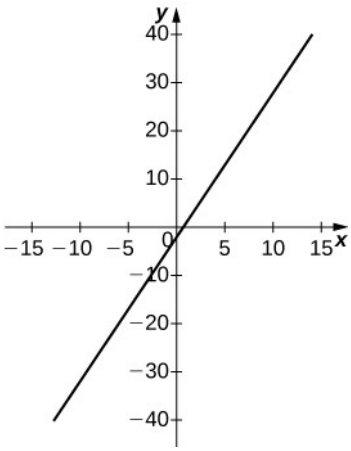
$$y = 1$$

159. Breiðbogi; skauthnitaform $r^2 \cos(2\theta) = 16$ eða $r^2 = 16 \sec(2\theta)$.



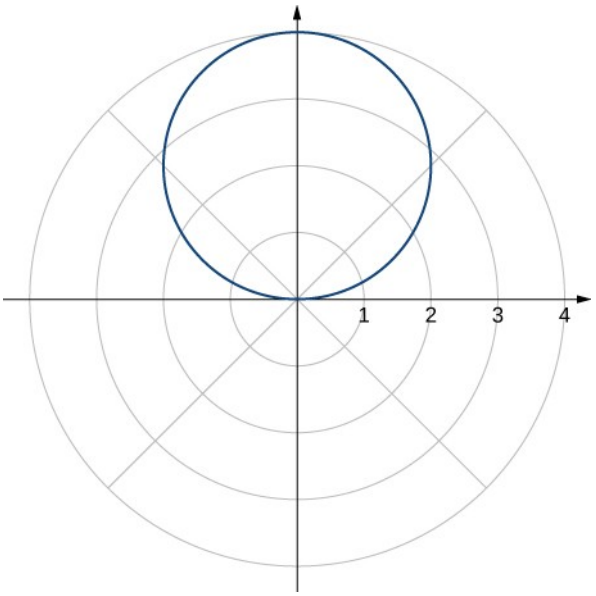
161.

$$r = \frac{2}{3\cos\theta - \sin\theta}$$



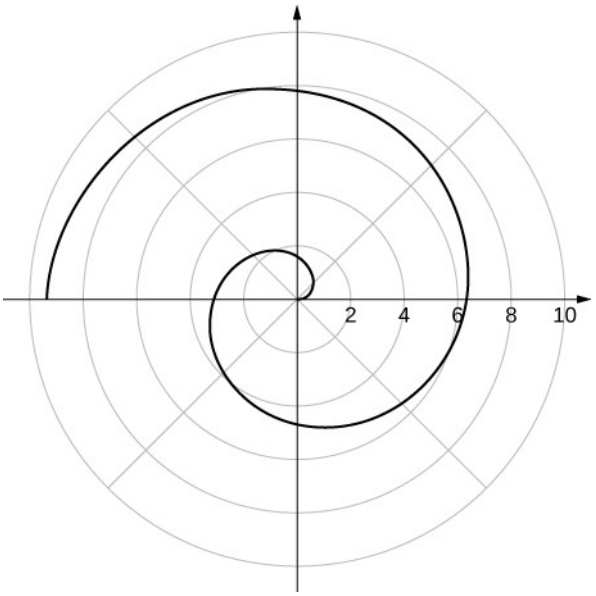
163.

$$x^2 + y^2 = 4y$$

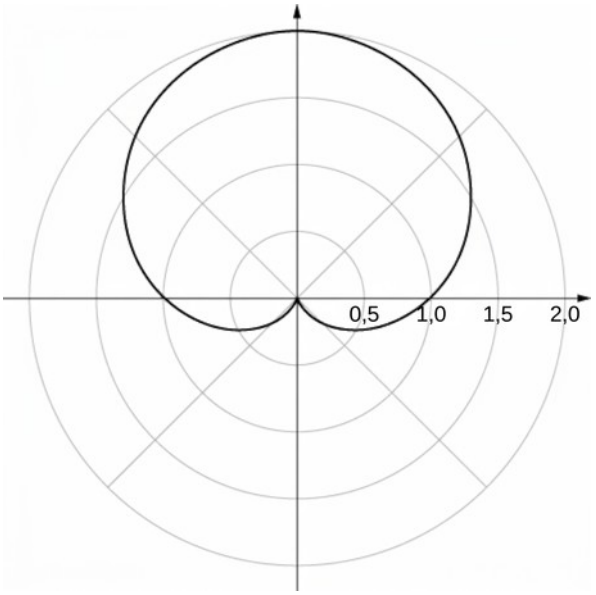


165.

$$x \tan \sqrt{x^2 + y^2} = y$$

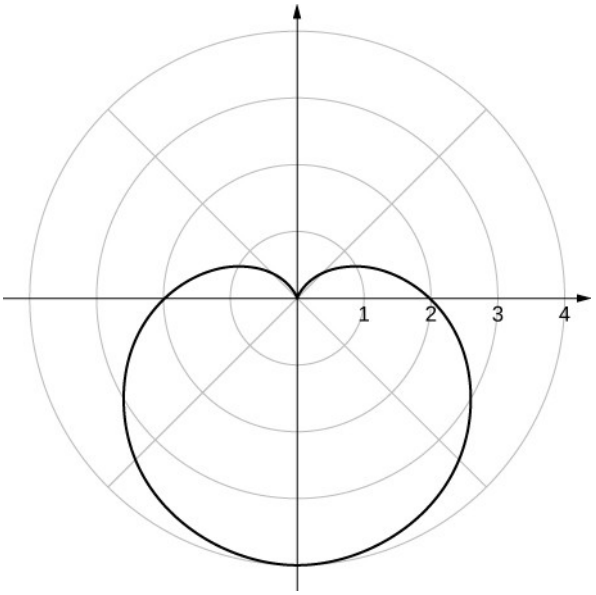


167.



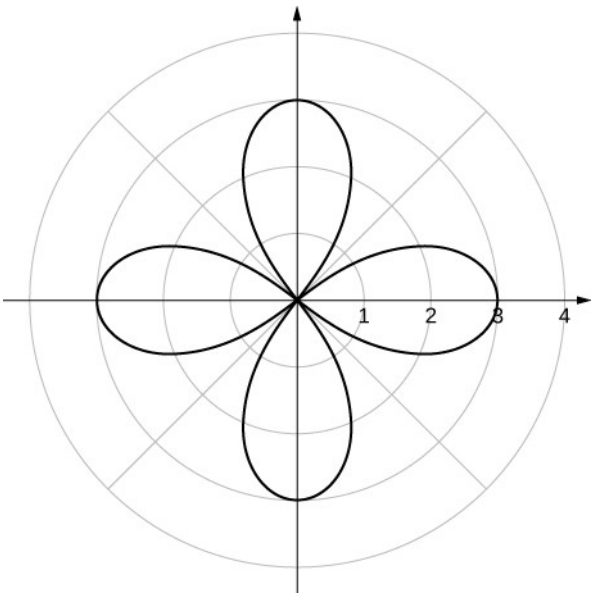
samhverfa um y-ás

169.



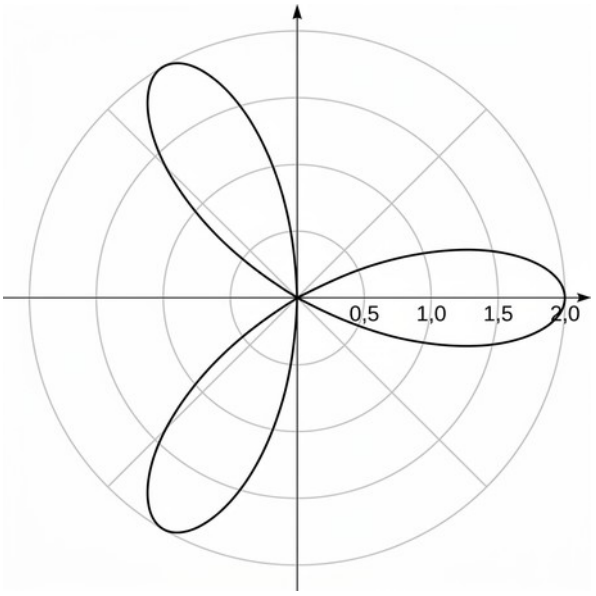
samhverfa um y-ás

171.



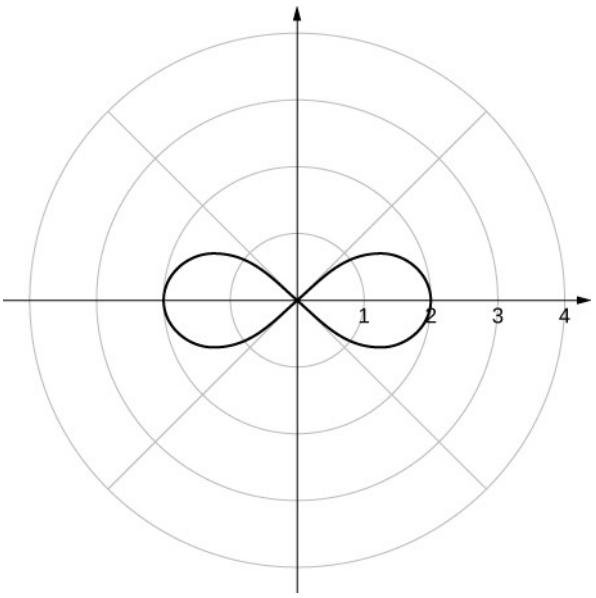
samhverfa um x- og y-ásana og um skautið

173.



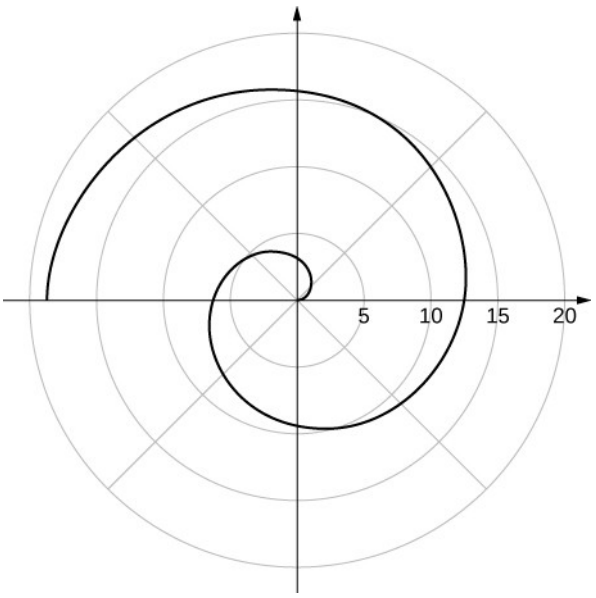
samhverfa um *x*-ás

175.



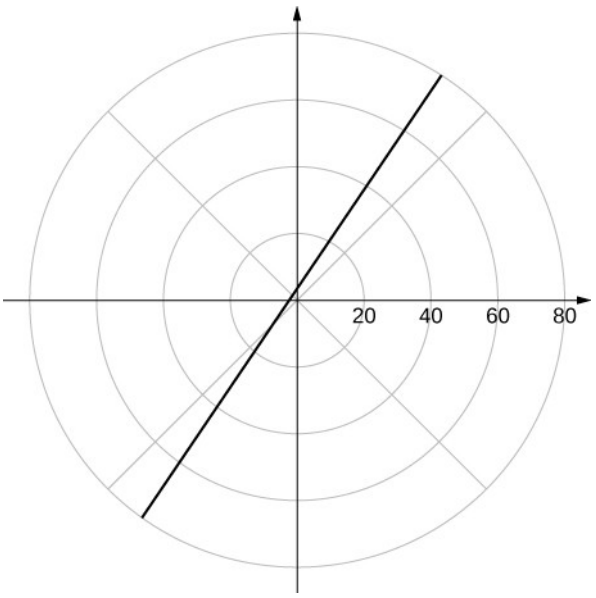
samhverfa um x- og y-ásana og um skautið

177.



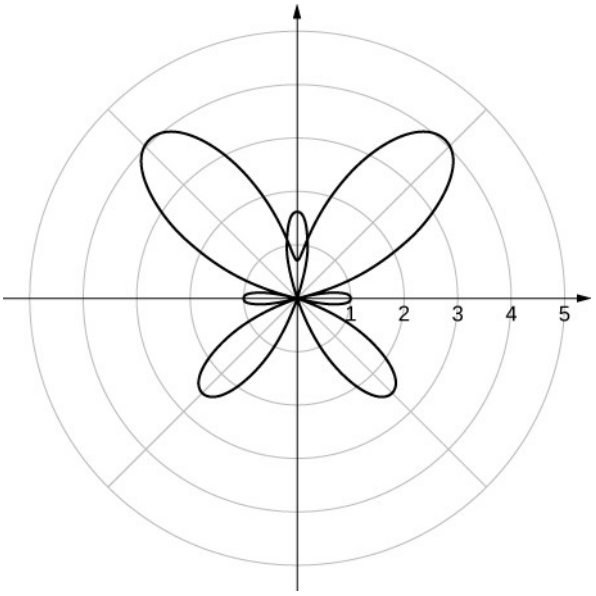
engin samhverfa

179.

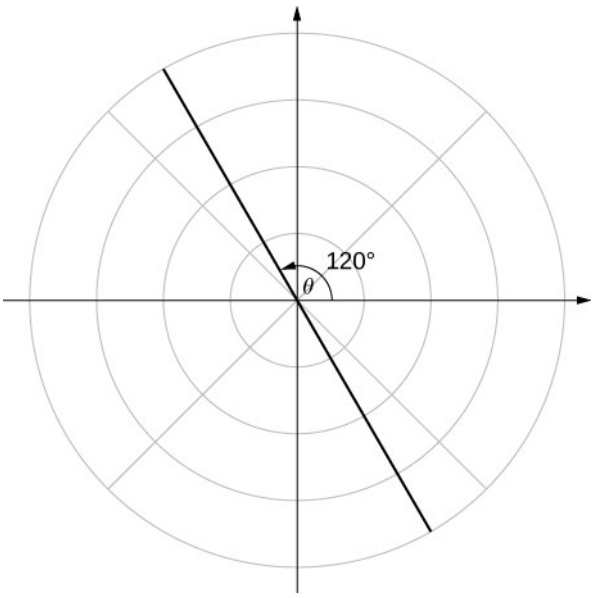


lína

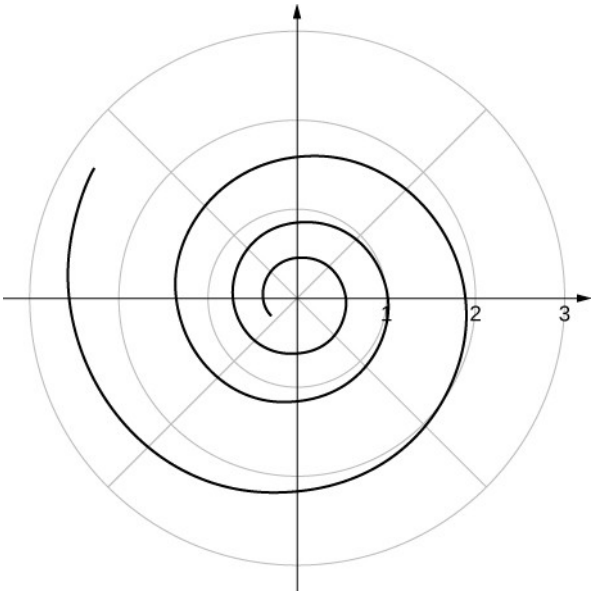
181.



183.



185.



187. Svör geta verið mismunandi. Einn möguleiki er að bilið milli vefjulínanna minnki og heildarfjöldi vafninga aukist.

Æfingar í undirkafla 7.4

189.

$$\frac{9}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta$$

191.

$$32\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2}(2\theta)\,d\theta$$

193.

$$\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}(1-\sin\theta)^{2}\,d\theta$$

195.

$$\int_{\sin^{-1}(2/3)}^{\pi/2}(2-3\sin\theta)^{2}\,d\theta$$

197.

$$\int_{\pi/3}^{\pi}(1-2\cos\theta)^{2}\,d\theta-\int_{0}^{\pi/3}(1-2\cos\theta)^{2}\,d\theta$$

199.

$$4\int_{0}^{\pi/3}d\theta+16\int_{\pi/3}^{\pi/2}(\cos^{2}\theta)\,d\theta$$

201.

$$9\pi$$

203.

$$\frac{9\pi}{4}$$

205.

$$\frac{9\pi}{8}$$

207.

$$\frac{18\pi-27\sqrt{3}}{2}$$

209.

$$\frac{4}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$$

211.

$$\frac{3}{2}(4\pi-3\sqrt{3})$$

213.

$$2\pi - 4$$

215.

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}\, d\theta$$

217.

$$\sqrt{2}\int_0^1 e^{\theta}\, d\theta$$

219.

$$\frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^6-1\right)$$

221. 32

223. 6,238

225. 2

227. 4,39

229.

$$A=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\text{og}\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}$$

231.

$$C=2\pi\left(\frac{3}{2}\right)=3\pi\,\text{og}\int_0^{\pi} 3\,d\theta=3\pi$$

233.

$$C=2\pi(5)=10\pi\,\text{og}\int_0^{\pi} 10\,d\theta=10\pi$$

235.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}$$

237. Hallatalan er $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

239. Hallatalan er 0.

241. Í $(4,0)$, er hallatalan óskilgreind. Í $\left(-4,\frac{\pi}{2}\right)$, er hallatalan 0.

243. Hallatalan er óskilgreind í $\frac{4+\pi}{4-\pi}$

245. Hallatala = −1.

247. Hallatalan er $\frac{-2}{\pi}$.

249. Reiknivélin gefur −0,836.

251. Láréttur snertill í

$$\left(\pm\sqrt{2},\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\left(\pm\sqrt{2},-\frac{\pi}{6}\right).$$

253. Láréttir snertlar í $\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$. Lóðréttir snertlar í $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ og einnig í skautinu $(0,0)$.

Æfingar í undirkafla 7.5

255.

$$y^2=16x$$

257.

$$x^2=2y$$

259.

$$x^2=-4(y-3)$$

261.

$$(x+3)^2=8(y-3)$$

263.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

265.

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$$

267.

$$\frac{(y-1)^2}{16}+\frac{(x+3)^2}{12}=1$$

269.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

271.

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$$

273.

$$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$$

275.

$$\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{32}=1$$

277.

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$$

279. $e=1$, fleygbogi

281. $e=\frac{1}{2}$, sporbaugur

283. $e=3$, breiðbogi

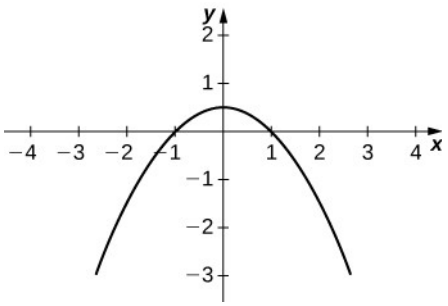
285.

$$r=\frac{4}{5+\cos\theta}$$

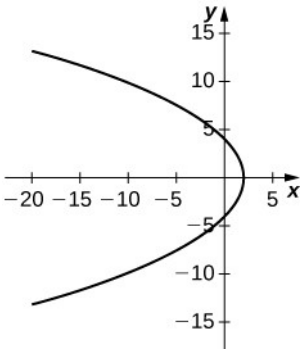
287.

$$r=\frac{4}{1+2\sin\theta}$$

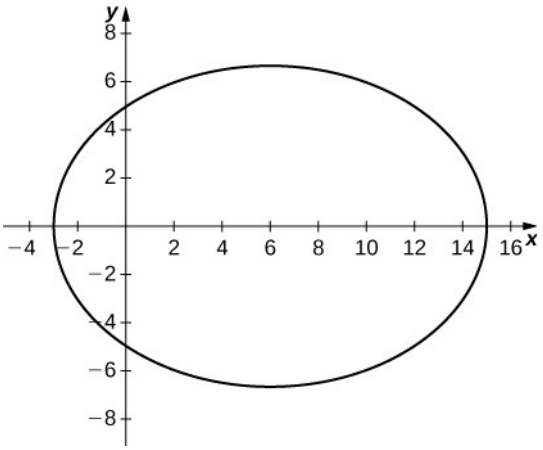
289.


y
x
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

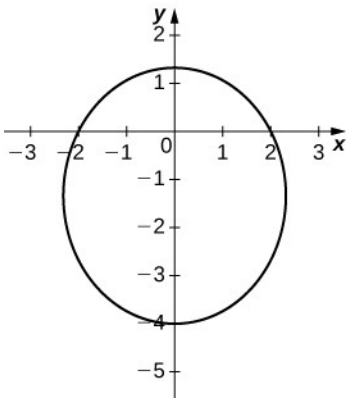
291.


y
x
15
10
5
−5
−10
−15
−20
−15
−10
−5
5

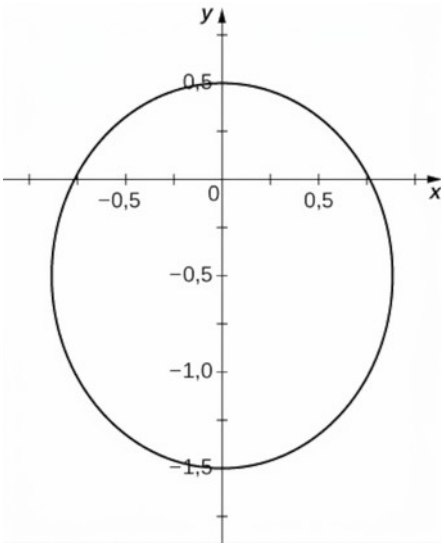
293.


y
x
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
16

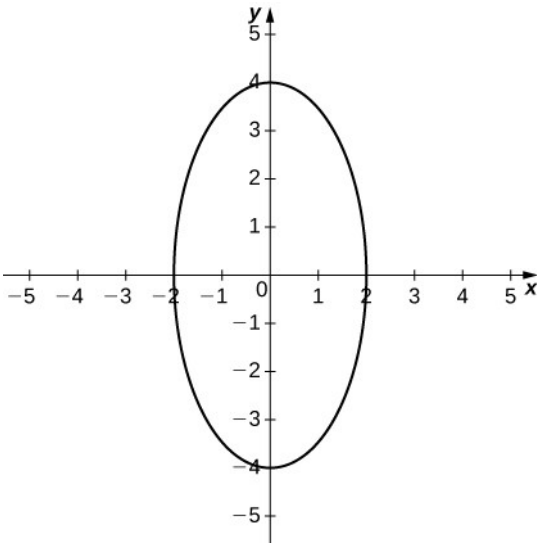
295.


y
x
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−3
−2
−1
1
2
3

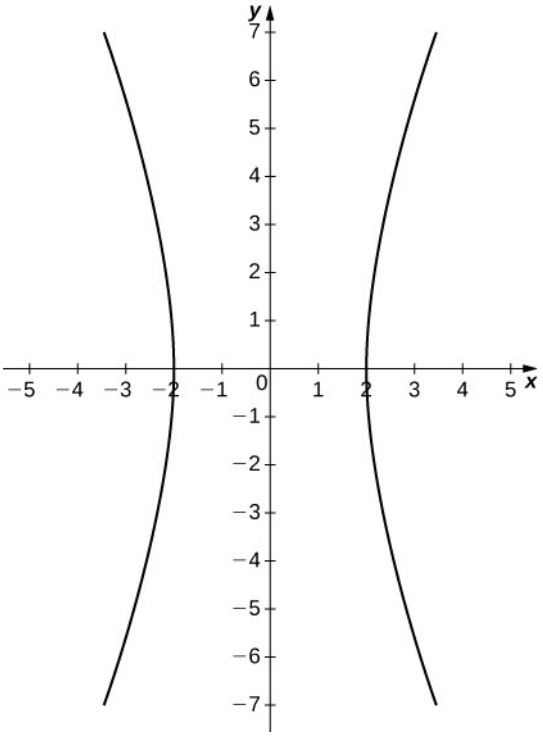
297.


y
x
0,5
0
−0,5
−1,0
−1,5
−0,5
0,5

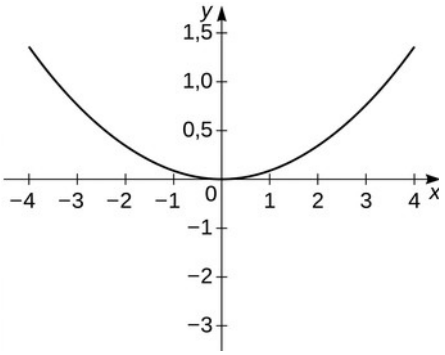
299.


y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

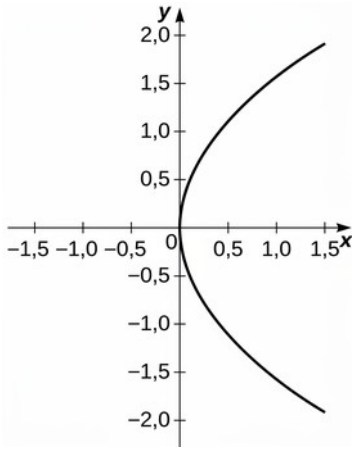
301.


y
x
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5

303.


y
x
1,5
1,0
0,5
0
−1
−2
−3
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

305.


y
x
2,0
1,5
1,0
0,5
0
−0,5
−1,0
−1,5
−2,0
−1,5 −1,0 −0,5 0,5 1,0 1,5

307. breiðbogi

309. sporbaugur

311. sporbaugur

313. Í punktinum 0,225 m ofan við oddpunktinn.

315. 0.45 m

317. Lengdin er 30 m og hæðin er 9 m.

319.

$$r=\frac{2{,}616}{1+0{,}995\ \cos\ \theta}$$

321.

$$r=\frac{5{,}192}{1+0{,}0484\ \cos\ \theta}$$

Upprifjunaræfingar

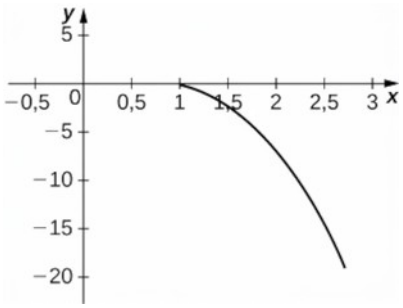
323. Satt.

325. Ósatt. Skoðið

$$y=t+1,$$

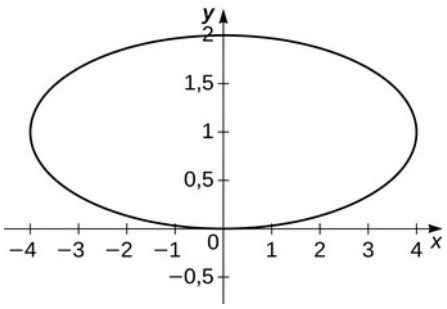
$$x=-t+1.$$

327.



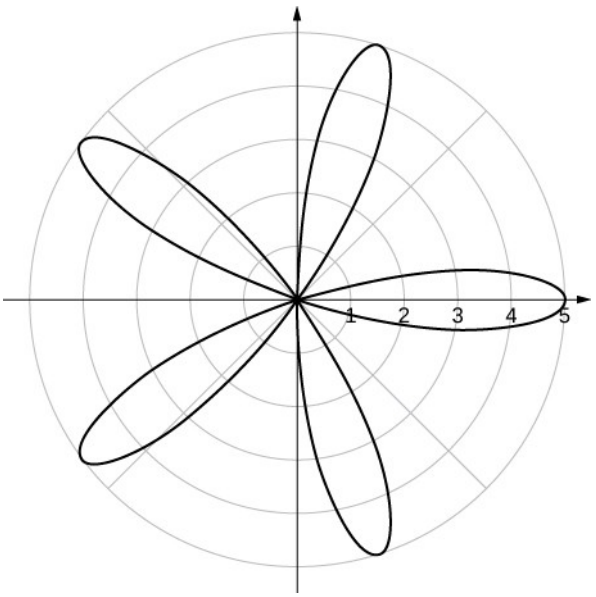
$$y=1-x^3$$

329.



$$\frac{x^2}{16}+(y-1)^2=1$$

331.

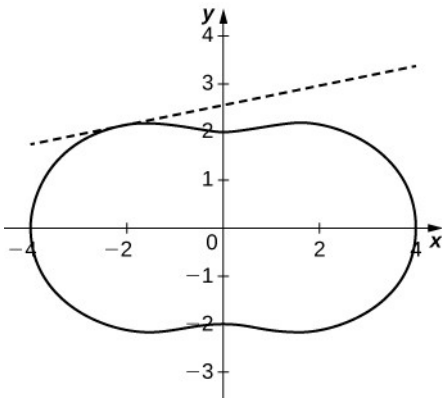


Samhverft um skauthnitaásinn

333.

$$r^2=\frac{4}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

335.



$$y=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{5}\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

337.

$$\frac{e^2}{2}$$

339.

$$9\sqrt{10}$$

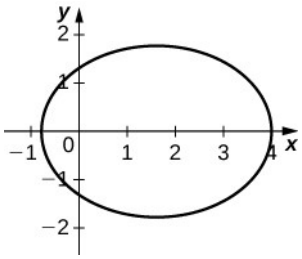
341.

$$(y+5)^2=-8x+32$$

343.

$$\frac{(y+1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$$

345. $e=\frac{2}{3}$, sporbaugur



347.

$$\frac{y^2}{19{,}03^2}+\frac{x^2}{19{,}63^2}=1,\ e=0{,}2447$$

Atriðisorðaskrá

A

aðfelluhálfstöðug lausn 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir

aðfelluóstöðug lausn 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir

aðfellustöðug lausn 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir

aðferð Eulers 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir

aðgreinanleg deildajafna 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur

aðgreinir 7.5 Keilusnið

aðskilnaður breytistærða 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur

Agnesarhaddur 7.1 Stikajöfnur

algebrufall 3.1 Hlutheildun

algild skekkja 3.6 Töluleg heildun

almenn lausn 4.1 Grunnatriði deildajafna

almennt form 7.5 Keilusnið

alríkistekjuskattur 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

alsamleitni 5.5 Víxlmerkjaraðir

annað hreyfilögmál Newtons 4.1 Grunnatriði deildajafna

Arkímedes 1.1 Nálgun á flatarmáli

Á

ákveðið heildi 1.2 Ákveðið heildi

ávaxtaflugur 1.6 Heildi sem innihalda vísis- og lograföll

B

bakteríuvöxtur 1.6 Heildi sem innihalda vísis- og lograföll

bogalengd 2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál

braut jarðar 7.1 Stikajöfnur

brennipunktur 7.5 Keilusnið

brennistiki 7.5 Keilusnið

breytingarhraði 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu

breytuskipti 1.5 Innsetning

burðargeta 4.4 Lógistíska jafnan

D
deildajafna 4.1 Grunnatriði deildajafna
deildun veldaraðar lið fyrir lið 6.2 Eiginleikar veldaraða
E
efri summa 1.1 Nálgun flatarmáls
einfaldir vextir 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
einhalla runa 5.1 Runur
Euler-vörpun 5.5 Víxlmerkjaraðir
F
f_{ave} 1.2 Ákveðið heildi
fallhlífarstökkvari 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
farsóttir 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir
fasalína 4.4 Lógistíska jafnan
fasti Eulers 5.2 Óendanlegar raðir
Fibonacci-tölur 5.1 Runur
flatarmál undir ferli 1.1 Nálgun á flatarmáli
flatarþéttleiki 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
formerkt flatarmál 1.2 Ákveðið heildi
formúla Eulers 6 Yfirlitsverkefni
Fresnel-heildi 6.4 Hagnýting Taylor-raða
færsla 1.2 Ákveðna heildið, 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
G
geislahnit 7.3 Skauthnit
geislakolsgreining 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
geislaþéttleiki 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
geómetrísk röð 5.2 Óendanlegar raðir
gervibreyta 1.1 Nálgun á flatarmáli, 1.2 Ákveðna heildið
Gompertz-jafna 4.4 Lógistíska jafnan
gormstuðull 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
greiðslur úr jafngreiðsluröð 6 Yfirlitsverkefni
gullinsnið 5.1 Runur
H
hangandi strengir 2.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla
harmoníska röðin 5.2 Óendanlegar raðir
heildanlegt fall 1.2 Ákveðið heildi
heildarflatarmál 1.2 Ákveðið heildi
heildi án grunnstofnfalls 6.4 Vinna með Taylor-raðir

heildi hornafalla 3.2 Heildi hornafalla
heildismörk 1.2 Ákveðið heildi
heildisprófið 5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið
heildisstofn 1.2 Ákveðið heildi
heildistöflur 3.5 Aðrar heildunaraðferðir
heildun með innsetningu 1.5 Innsetning
heildun veldaraðar lið fyrir lið 6.2 Eiginleikar veldaraða
heildunarbreyta 1.2 Ákveðið heildi
heildunarþáttur 4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur
helmingunartími 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
hjartaferill 7.3 Skauthnit
hjólferill 7.1 Stikajöfnur
hlutfallsleg skekkja 3.6 Töluleg heildun
hlutheildun 3.1 Hlutheildun
hlutsumma 5.2 Óendanlegar raðir
Hoover-stíflan 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
hornhnit 7.3 Skauthnit
hraðaminnkun 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
hraði 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
hringkragaaðferð 2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
hylkjaaðferð 2.3 Rúmmál snúða: sívalningshylki
I
innhjólferill 7.1 Stikajöfnur
innsetning með hornaföllum 3.3 Innsetning með hornaföllum
Í
ísskúta 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
J
jafna Airys 6.4 Hagnýting Taylor-raða
jafngreiðsluraðir 6.2 Eiginleikar veldaraða
jafnmunaruna 5.1 Runur
jafnstætt fall 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
jafnvægislausn 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir
júl 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
K

keðjuferill 2.9 Stærðfræðigreining breiðbogafalla
keiluhelmingar 7.5 Keilusnið
keilusnið 7.5 Keilusnið
keilustúfur 2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
kíkisröð 5.2 Óendanlegar raðir
klifurferill Díóklesar 7.4 Flatarmál og bogalengd í skauthnitum
Koch-snjókorn 5.2 Óendanlegar raðir
kólnunarlögmál Newtons 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun, 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur
kvótaprófið 5.6 Kvóta- og rótarpróf
kvótaruna 5.1 Runur
L
langás 7.5 Keilusnið
langsveifarferill 7.1 Stikajöfnur
Laplace-vörpun 3.7 Óeiginleg heildi, 3.7 Óeiginleg heildi
lausn deildajöfnu 4.1 Grunnatriði deildajafna
lausnarferill 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir
Leibniz 1.2 Ákveðið heildi
liður 5.1 Runur
líkindþéttleikafall 3.7 Óeiginleg heildi
línuleg 4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur
loftmótstaða 4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur
lografall 3.1 Hlutheildun
lokaðar formúlur 5.1 Runur
lógistísk deildajafna 4.4 Lógistíska jafnan
lúður Gabríels 3.7 Óeiginleg heildi
lyf í blóðrás 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur
lögmál Hookes 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
lögmál Pascals 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
M
Maclaurin-margliður 6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir
Maclaurin-röð 6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir
markgildi runu 5.1 Runur
markviss innsetning 3.4 Stofnbrotaliðun
massamiðja 2.6 Vægi og massamiðjur
meðalgildi falls 1.2 Ákveðna heildið
meðalgildissetningin fyrir heildi 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
miðpunktsreglan 3.6 Töluleg heildun

miðskekkja 7.5 Keilusnið
N
nálgun með hægri endapunktum 1.1 Nálgun flatarmáls
nálgun með vinstri endapunktum 1.1 Nálgun flatarmáls
neðri summa 1.1 Nálgun flatarmáls
Newton 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
núvirði 6.2 Eiginleikar veldaraða
O
oddar 7.1 Stikajöfnur
oddpunktur 7.5 Keilusnið
oddstætt fall 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
Ó
óákveðin heildi 3.1 Hlutheildun
óeiginlegt heildi 3.7 Óeiginleg heildi
óendanleg runa 5.1 Runur
óendanleg röð 5.2 Óendanlegar raðir
ósamleitin runa 5.1 Runur
ótakmörkuð runa 5.1 Runur
P
p-röð 5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið
Papposarsetning um rúmmál 2.6 Vægi og massamiðjur
pasköl 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
perlusnekkja Inngangur, 7.3 Skauthnit
próf fyrir víxlmerkjaraðir 5.5 Víxlmerkjaraðir
R
rakningarvensl 5.1 Runur, 5.1 Runur
Ramanujan 5.6 Kvóta- og rótarpróf
RC-rás 4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur
regla Simpsons 3.6 Töluleg heildun
regluleg skipting 1.1 Nálgun flatarmáls
reiknisetningin 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
Riemann-summa 1.1 Nálgun flatarmáls
Riemann-summur 3.6 Töluleg heildun
ritháttur með summutákni 1.1 Nálgun á flatarmáli
rós 7.3 Skauthnit
rótarprófið 5.6 Kvóta- og rótarpróf
rúmfyllandi ferlar 7.1 Stikajöfnur

ræð föll 3.4 Stofnbrotaliðun
S
safnaravandamálið 5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið
samanburðarprófið 5.4 Samanburðarpróf
samanburður með markgildi 5.4 Samanburðarpróf
samhverfa 7.3 Skauthnit
samhverfureglan 2.6 Vægi og massamiðjur
samleitin runa 5.1 Runur
samleitni raðar 5.2 Óendanlegar raðir
samleitnibil 6.1 Veldaraðir og föll
samleitnigeisli 6.1 Veldaraðir og föll
setning Taylors um skekkju 6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir
setningin um heildarbreytingu 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
sérlausn 4.1 Grunnatriði deildajafna
Sierpiński-þríhyrningur 5.2 Óendanlegar raðir
sjálfstæð deildajafna 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur
skallaörn 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
skammás 7.5 Keilusnið
skammsveifarferill 7.1 Stikajöfnur
skaut 7.3 Skauthnit
skauthnitaás 7.3 Skauthnit
skauthnitajöfnur 7.3 Skauthnit
skauthnitakerfi 7.3 Skauthnit
skekkjumat 5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið
skilyrt samleitni 5.5 Víxlmerkjaraðir
skipting 1.1 Nálgun flatarmáls
skífuaðferð 2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
skrefstærð 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir
sneiðaaðferð 2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
snigilferill 7.3 Skauthnit
snúður 2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum
sólfirrð 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
sólnánd 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
sporgert heildi 6.4 Hagnýting Taylor-raða
staðalform 4.5 Fyrsta stigs línulegar deildajöfnur, 7.5 Keilusnið

stefna 7.1 Stikajöfnur
stefnuvið (hallatalnasvið) 4.2 Stefnuvið og tölulegar aðferðir
stig deildajöfnu 4.1 Grunnatriði deildajafna
stikaður ferill 7.1 Stikajöfnur
stikajöfnur 7.1 Stikajöfnur
stiki 7.1 Stikajöfnur
stikun ferils 7.1 Stikajöfnur
stofnbrotaliðun 3.4 Stofnbrotaliðun
stofnvöxtur 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
stuðlasamanburður 3.4 Stofnbrotaliðun
styrkur lausnar 4.3 Aðgreinanlegar deildajöfnur
stýrilína 7.5 Keilusnið
summur og veldi heiltalna 1.1 Nálgun á flatarmáli
summutákn 1.1 Nálgun flatarmáls
sundurleitni raðar 5.2 Óendanlegar raðir
sundurleitniprófið 5.3 Sundurleitniprófið og heildisprófið
T
takmörkuð að neðan 5.1 Runur
takmörkuð að ofan 5.1 Runur
takmörkuð runa 5.1 Runur
Taylor-margliður 6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir
Taylor-röð 6.3 Taylor- og Maclaurin-raðir
Tour de France 1.4 Heildunarreglur og setningin um heildarbreytingu
trapisureglan 3.6 Töluleg heildun
tvíliðuröð 6.4 Vinna með Taylor-raðir
tvöföldunartími 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
tæmingaraðferð 1.1 Nálgun á flatarmáli
töluleg heildun 3.6 Töluleg heildun
tölvualgebrukerfi (CAS) 3.5 Aðrar heildunaraðferðir
U
umferðarslys 3.7 Óeiginleg heildi
undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, hluti 1 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar, hluti 2 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
upphafsgildi 4.1 Grunnatriði deildajafna
upphafsgildisverkefni 4.1 Grunnatriði deildajafna

upphafshraði 4.1 Grunnatriði deildajafna
upphafsstofn 4.4 Lógistíska jafnan
Ú
útsveifarferill 7.1 Stikajöfnur
V
vaxtarhraði 4.4 Lógistíska jafnan
vaxtarlíkan von Bertalanffys 5.2 Óendanlegar raðir
vaxtavextir 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
vefja Arkimedesar 7.3 Skauthnit
veldaröð 6.1 Veldaraðir og föll
veldislækkunarformúlur 3.2 Heildi hornafalla
veldislækkunarsamsemdir 3.2 Heildi hornafalla
verð–eftirspurnarfall 1.6 Heildi sem innihalda vísis- og lograföll
vinna 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
vísibreyta 5.1 Runur
vísir 1.1 Nálgun á flatarmáli
vísishnignun 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
vísisvöxtur 2.8 Vísisvöxtur og -hnignun
víxlmerkjaröð 5.5 Víxlmerkjaraðir
vægi 2.6 Vægi og massamiðjur
vængjabúningar 1.3 Undirstöðusetning stærðfræðigreiningarinnar
vökvastöðuþrýstingur 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
Y
yfirborðsflatarmál 2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
Þ
þéttleikafall 2.5 Hagnýting í eðlisfræði
þjáll 2.4 Bogalengd ferils og yfirborðsflatarmál
þröskuldsstofn 4.4 Lógistíska jafnan
þungamiðja 2.6 Vægi og massamiðjur
þunn plata 2.6 Vægi og massamiðjur
þversnið 2.2 Rúmmál reiknað með sneiðum