NÁMSGÖGN.IS

STÆRÐFRÆÐI

# Grunnatriði algebru

2e

## Grunnatriði algebru, 2. útgáfa

Námsgögn.is

NÁMSGÖGN

# Grunnatriði algebru, 2. útgáfa

*Bókin í heild*

namsgogn.is

# Efnisyfirlit

**Formáli** ..... **7**

**1 Undirstöður** ..... **14**

Inngangur ..... 14
1.1 Núll og jákvæðar heiltölur ..... 15
1.2 Tungumál algebrunnar ..... 35
1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna ..... 63
1.4 Margföldun og deiling heiltalna ..... 91
1.5 Myndræn framsetning brota ..... 111
1.6 Samlagning og frádráttur brota ..... 137
1.7 Tugabrot ..... 163
1.8 Rauntölur ..... 190
1.9 Reiknireglur rauntalna ..... 212
1.10 Mælikerfi ..... 240
Lykilhugtök ..... 261
Meginatriði ..... 264
Yfirlitsverkefni ..... 273
Æfingapróf ..... 304

**2 Lausnir línulegra jafna og ójafna** ..... **307**

Inngangur ..... 307
2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar ..... 308
2.2 Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu ..... 329
2.3 Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum ..... 351
2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur ..... 365
2.5 Leysið jöfnur með brotum eða tugabrotum ..... 384
2.6 Einangrið tiltekna breytu í formúlu ..... 401
2.7 Leysið línulegar ójöfnur ..... 411
Lykilhugtök ..... 435
Meginatriði ..... 435
Upprifjunarverkefni ..... 439
Æfingapróf ..... 449

**3 Stærðfræðilíkön** ..... **453**

Inngangur ..... 453
3.1 Beitið verkefnalausnaraðferð ..... 454
3.2 Leysið prósentuverkefni ..... 475
3.3 Leysið blöndunarverkefni ..... 500

3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar.....522
3.5 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða.....550
3.6 Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum.....564
Lykilhugtök.....575
Meginatriði.....576
Upprifjunarverkefni.....580
Æfingapróf.....587

**4 Gröf.....589**
Inngangur.....589
4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi.....590
4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum.....617
4.3 Teiknið graf með skurðpunktum við ása.....645
4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu.....665
4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu.....705
4.6 Finnið jöfnu línu.....741
4.7 Gröf línulegra ójafna.....765
Lykilhugtök.....786
Meginatriði.....788
Yfirlitsverkefni.....792
Æfingapróf.....811

**5 Línuleg jöfnuhneppi.....815**
Inngangur.....815
5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð.....816
5.2 Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.....845
5.3 Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð.....866
5.4 Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum.....888
5.5 Leysið blöndunarverkefni með jöfnuhneppum.....910
5.6 Teiknið gröf línulegra ójöfnuhneppa.....925
Lykilhugtök.....945
Meginatriði.....946
Upprifjunarverkefni.....949
Æfingapróf.....956

**6 Margliður.....959**
Inngangur.....959
6.1 Leggið saman og dragið frá margliður.....960
6.2 Notið margföldunarreglur velda.....978
6.3 Margfaldið margliður.....998
6.4 Sérstök margfeldi.....1023
6.5 Deilið einliðum.....1039

6.6 Deilið margliðum....1065
6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna....1083
Lykilhugtök....1109
Meginatriði....1110
Upprifjunarverkefni....1114
Æfingapróf....1129

**7 Þáttun....1133**
Inngangur....1133
7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun....1134
7.2 Þáttið þríliði af gerðinni x2 +bx + c....1154
7.3 Þáttið þríliði af gerðinni ax2 +bx + c....1173
7.4 Þáttið sérstök margfeldi....1196
7.5 Almenn aðferð við þáttun margliða....1220
7.6 Annars stigs jöfnur....1234
Lykilhugtök....1254
Meginatriði....1254
Upprifjunarverkefni....1258
Æfingapróf....1266

**8 Ræðar stæður og jöfnur....1269**
Inngangur....1269
8.1 Einfaldið ræðar stæður....1270
8.2 Margfaldið og deilið ræðum stæðum....1296
8.3 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara....1316
8.4 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum....1330
8.5 Einfaldið flóknar ræðar stæður....1353
8.6 Leysið ræðar jöfnur....1372
8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum....1393
8.8 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða og vinnu....1413
8.9 Notið bein og öfug hlutföll....1426
Lykilhugtök....1441
Meginatriði....1442
Upprifjunarverkefni....1445
Æfingapróf....1456

**9 Rætur og rótarstæður....1459**
Inngangur....1459
9.1 Einfaldið og notið ferningsrætur....1460
9.2 Einfaldið ferningsrætur....1474
9.3 Leggið saman og dragið frá ferningsrótum....1496
9.4 Margfaldið ferningsrætur....1512

9.5 Deilið ferningsrótum....1531
9.6 Leysið jöfnur með ferningsrótum....1552
9.7 Hærri rætur....1572
9.8 Ræðir veldisvísar....1595
Lykilhugtök....1621
Meginatriði....1622
Upprifjunarverkefni....1626
Æfingapróf....1640

**10 Annars stigs jöfnur....1643**
Inngangur....1643
10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni....1644
10.2 Leysið annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning....1661
10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni....1682
10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum....1701
10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum....1714
Lykilhugtök....1742
Meginatriði....1743
Upprifjunarverkefni....1746
Æfingapróf....1755

**Svarlykill....1757**
Kafli 1....1757
Kafli 2....1813
Kafli 3....1854
Kafli 4....1870
Kafli 5....1939
Kafli 6....1967
Kafli 7....2009
Kafli 8....2040
Kafli 9....2083
Kafli 10....2128

**Atriðisorðaskrá....2156**

# Formáli

Velkomin í Grunnatriði algebru, 2. útgáfu, námsefni frá OpenStax. Bókin var samin til að auka aðgang nemenda að vönduðu námsefni sem stenst ströngustu fræðilegar kröfur og er fáanlegt ókeypis eða gegn mjög vægu gjaldi.

## Um OpenStax

OpenStax er hluti af Rice-háskóla, sem er 501(c)(3)-góðgerðarstofnun sem ekki er rekin í hagnaðarskyni. Sem menntaverkefni er markmið okkar að bæta aðgengi allra að menntun og námi. Með samstarfi við góðgerðarsamtök og önnur fyrirtæki á sviði menntunar vinnum við að því að ryðja algengustu hindrunum í námi úr vegi. Við teljum að öll eigi og geti haft aðgang að þekkingu.

### *Um námsefni OpenStax*

#### *Sérsnið*

*Bókin Grunnatriði algebru, 2. útgáfa, er gefin út með notkunarleyfinu Creative Commons Nafngreining-Ekki í hagnaðarskyni-Deilist áfram 4.0 alþjóðlegt (CC BY-NC-SA). Það merkir að heimilt er að dreifa efninu, endurblanda því og byggja á því í óviðskiptalegum tilgangi, að því tilskildu að OpenStax og þeirra sem lögðu efni til bókarinnar sé getið og allt afleitt efni sé gefið út með sama leyfi.*

Bækur okkar eru gefnar út með opnu notkunarleyfi og því er ykkur frjálst að nota bókina í heild eða velja þá hluta sem henta best þörfum námskeiðsins. Þið getið raðað efninu að vild með því að tilgreina ákveðna kafla og hluta í kennsluáætluninni í þeirri röð sem þið kjósið. Einnig er hægt að setja beinan tengil í kennsluáætlunina á viðkomandi hluta í vefútgáfu bókarinnar.

Kennarar geta einnig búið til sérsniðna útgáfu af OpenStax-bókinni sinni. Hægt er að bjóða nemendum sérsniðnu útgáfuna á prentuðu eða stafrænu formi gegn vægu gjaldi í bóksölu skólans. Nánari upplýsingar er að finna á síðu bókarinnar á openstax.org.

#### *Myndhöfundatilvísanir í bókinni Grunnatriði algebru, 2. útgáfa*

Í bókinni Grunnatriði algebru, 2. útgáfa, fylgja flestum myndum upplýsingar í myndatexta um heiti, höfund eða rétthafa, hýsingarvettvang og notkunarleyfi. Sumar myndir eru birtar með sérstöku leyfi og má aðeins nota með þeim höfundatilvísunum eða takmörkunum sem koma fram í heimildarupplýsingum. Ef mynd er gefin út með opnu leyfi mega notendur og samtök sem starfa ekki í viðskiptalegum tilgangi endurnýta hana að því tilskildu að sömu höfundatilvísunar og í frumheimildinni sé getið. Viðskiptalegir aðilar skulu hafa samband við OpenStax til að ræða endurnýtingarrétt og leyfi. Til að bæta læsileika og flæði efnisins fylgja höfundatilvísanir ekki öllum myndum í megintextanum. Ef mynd án höfundatilvísunar úr bókinni er endurnýtt skal nota þessa tilvísun: Höfundarréttur Rice-háskóla, OpenStax, samkvæmt CC BY-NC-SA 4.0-notkunarleyfi.

### *Leiðréttingar*

Allar kennslubækur OpenStax fara í gegnum ítarlegt ritrýningarferli. Engu að síður geta villur komið fyrir, rétt eins og í öðrum faglega unnum kennslubókum. Bækur okkar eru vefbækur og því getum við uppfært þær reglulega þegar kennslufræðileg þörf krefur. Ef þið viljið leggja til leiðréttingu skuluð þið senda hana í gegnum tengilinn á síðu bókarinnar á openstax.org. Sérfræðingar á viðkomandi fræðasviði fara yfir allar tillögur að leiðréttingum. OpenStax leggur áherslu á gagnsæi um allar uppfærslur og því er einnig að finna lista yfir fyrri leiðréttingar á síðu bókarinnar á openstax.org.

### *Útgáfusnið*

Hægt er að nálgast þessa kennslubók ókeypis sem vefútgáfu eða PDF-skjal á openstax.org og kaupa prentaða útgáfu gegn vægu gjaldi.

### *Um bókina Grunnatriði algebru*

*Bókin Grunnatriði algebru, 2. útgáfa, er samin til að uppfylla kröfur um umfang og efnisröð námskeiðs í grunnatriðum algebru sem stendur yfir eitt misseri. Vegna skipulags bókarinnar er auðvelt að laga hana að ólíkum kennsluáætlunum. Efnið dýpkar grundvallarhugtök algebru og tekur um leið mið af nemendum með ólíkan bakgrunn og mismunandi námsstíl. Hvert viðfangsefni byggir á efni sem þegar hefur verið kynnt og sýnir þannig innra samhengi og byggingu stærðfræðinnar.*

### *Efnisumfjöllun og umfang*

*Í bókinni Grunnatriði algebru, 2. útgáfa, er efnið sett fram með óhefðbundnum hætti. Byggt er á efni bókarinnar Prealgebra og viðfangsefnin eru sett fram í röð stuttra skrefa svo nemendur öðlist trú á eigin getu til að ná árangri í námskeiðinu. Viðfangsefnunum var raðað vandlega til að undirstrika rökrétta framvindu námskeiðsins og hjálpa nemendum að skilja hvert hugtak til fulls. Þegar nýjar hugmyndir eru kynntar eru tengsl þeirra við fyrri viðfangsefni skýrð sérstaklega.*

- **Kafli 1:**
  Undirstöður Í 1. kafla eru rifjaðar upp reikniaðgerðir með núll og jákvæðum heiltölum, heiltölum, brotum og tugabrotum. Þannig fá nemendur traustan grunn fyrir algebrunámið.
- **Kafli 2:**
  Lausnir línulegra jafna og ójafna Í 2. kafla læra nemendur að sannreyna lausn jöfnu, leysa jöfnur með því að leggja sömu tölu við eða draga sömu tölu frá báðum hliðum, leysa jöfnur með því að margfalda eða deila báðum hliðum með sömu tölu, leysa jöfnur með breytum og föstum báðum megin, nota almenna aðferð til að leysa línulegar jöfnur, leysa jöfnur með brotum eða tugabrotum, einangra tiltekna breytu í formúlu og leysa línulegar ójöfnur.
- **Kafli 3:**
  Stærðfræðilíkön Þegar nemendur hafa öðlast þá færni sem þarf til að leysa jöfnur nota þeir hana í 3. kafla til að leysa orðadæmi og talnadæmi.

- **Kafli 4:**
  Gröf Í 4. kafla er fjallað um rétthyrnt hnitakerfi, sem liggur til grundvallar flestum gröfum sem fólk sér í daglegu lífi. Nemendur læra að merkja punkta í rétthyrnt hnitakerfi, teikna gröf línulegra jafna með tveimur breytum, teikna gröf með skurðpunktum við ása, skilja hallatölu línu, nota hallatöluform jöfnu línu, finna jöfnu línu og teikna gröf línulegra ójafna.
- **Kafli 5:**
  Línuleg jöfnuhneppi Í 5. kafla læra nemendur að leysa jöfnuhneppi með grafískri aðferð, innsetningaraðferð og eyðingaraðferð. Þeir læra einnig að leysa hagnýt verkefni og blöndunarverkefni með jöfnuhneppum og að teikna gröf línulegra ójöfnuhneppa.
- **Kafli 6:**
  Margliður Í 6. kafla læra nemendur að leggja saman og draga frá margliður, nota margföldunarreglur velda, margfalda margliður, nota sérstök margfeldi, deila einliðum og margliðum og skilja heiltöluveldisvísa og staðalform talna.
- **Kafli 7:**
  Þáttun Í 7. kafla kanna nemendur hvernig stæður eru þáttaðar og sjá hvernig þáttun er notuð til að leysa tilteknar gerðir jafna.
- **Kafli 8:**
  Ræðar stæður og jöfnur Í 8. kafla vinna nemendur með ræðar stæður, leysa ræðar jöfnur og nota þær við lausn fjölbreyttra hagnýtra verkefna.
- **Kafli 9:**
  Rætur og rótarstæður Í 9. kafla kynnast nemendur eiginleikum ferningsróta og læra að beita þeim. Síðan læra nemendur að yfirfæra þessar hugmyndir á hærri rætur og ræða veldisvísa.
- **Kafli 10:**
  Annars stigs jöfnur Í 10. kafla rannsaka nemendur eiginleika annars stigs jafna og læra að leysa þær og teikna gröf þeirra. Nemendur læra einnig að nota þær til að lýsa ýmsum aðstæðum.

Öllum köflum er skipt í marga hluta en heiti þeirra má sjá í efnisyfirlitinu.

### *Breytingar í annarri útgáfu*

Við endurskoðun 2. útgáfu bókarinnar Grunnatriði algebru var lögð áhersla á skýrleika og nákvæmni stærðfræðinnar. Fjölmargir sérfræðingar úr hópi háskólakennara fóru yfir öll sýnidæmi, verkefni undir fyrirsögninni „Reynið sjálf“, verkefni hluta, yfirlitsverkefni og atriði æfingaprófa og höfundar sannreyndu þau síðan. Þessi umfangsmikla vinna leiddi til hundruða breytinga á texta, orðalagi verkefna, svörum, kennaralausnum og myndefni.

OpenStax og höfundar okkar gera sér grein fyrir þeim vandkvæðum sem breytingar á númerum dæma og verkefna geta valdið þegar kennslubækur eru endurskoðaðar. Til að umskiptin yfir í 2. útgáfu verði eins hnökralaus og kostur er höfum við haldið breytingum á númerum verkefna í lágmarki. Þar sem breytinga var þörf skiptum við til dæmis út verkefnum í stað þess að eyða þeim eða bæta nýjum við og héldum þannig númeraröðinni óbreyttri. Í nær öllum köflum breytast verkefnanúmer því ekki og þar sem þau breytast eru

breytingarnar litlar. Kennarar og umsjónarmenn námskeiða ættu því að geta tekið nýju útgáfuna í notkun án vandkvæða.

Til þæginda birtast svör við undirbúningsverkefnunum nú í almennu lausnaheftunum í stað þess að vera í sérstöku fylgiskjali.

Í kennaraefninu á openstax.org er ítarlegur leiðarvísir um umskiptin yfir í nýju útgáfuna.

### *Helstu efnisþættir og rammar*

#### *Sýnidæmi*

Hverju námsmarkmiði fylgja eitt eða fleiri leyst sýnidæmi sem sýna þær aðferðir við lausn verkefna sem nemendur þurfa að ná tökum á. Yfirleitt fylgja mörg sýnidæmi hverju námsmarkmiði til að sýna ólíkar aðferðir við sömu gerð verkefnis eða kynna sambærileg verkefni sem verða smám saman flóknari.

Öll sýnidæmi fylgja einföldu sniði í tveimur eða þremur hlutum. Fyrst er sett fram verkefni eða spurning. Næst er lausnin sýnd og hvert skref útskýrt. Í sumum sýnidæmum er að lokum sýnt hvernig sannreyna má lausnina. Flest sýnidæmi eru sett upp í tveimur dálkum með skýringu vinstra megin og stærðfræði hægra megin. Uppsetningin líkir eftir því hvernig kennarar útskýra sýnidæmi um leið og þeir skrifa þau á töfluna í kennslustund.

#### *Undirbúningur*

Frá og með hluta 2.1 hefst hver hluti á nokkrum undirbúningsverkefnum svo nemendur geti metið hvort þeir hafi náð tökum á þeirri undirstöðufærni sem þarf fyrir hlutann. Vísað er í tiltekin sýnidæmi úr fyrri hlutum svo nemendur sem þurfa frekari upprifjun geti auðveldlega fundið skýringar. Svör við verkefnunum er að finna í fylgiefni bókarinnar.

#### *Reynið sjálf*



Verkefni undir fyrirsögninni „Reynið sjálf“ kemur strax á eftir sýnidæmi og gefur nemendum tækifæri til að leysa sambærilegt verkefni þegar í stað. Svör við þessum verkefnum eru í svarlyklinum í PDF-skjalinu og vefútgáfu bókarinnar.

#### *Aðferð*



Aðferðarreitur kemur yfirleitt á eftir verkefnum undir fyrirsögninni „Reynið sjálf“ og lýsir skrefunum sem þarf að fylgja til að leysa verkefnið í sýnidæminu á undan.

### *Miðlar*

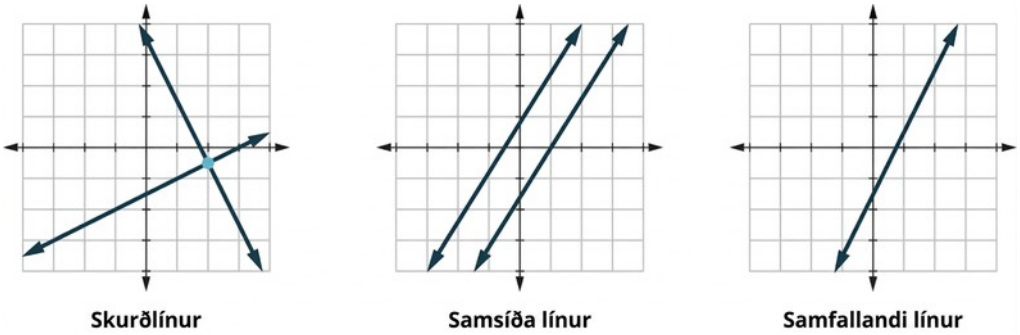
Táknið „Miðlar“ birtist í lok hvers hluta, rétt á undan verkefnum hlutans. Táknið auðkennir lista með tenglum á kennslumyndskeið á netinu sem styðja við þau hugtök og þá færni sem fjallað er um í hlutanum.

Fyrirvari: Við höfum valið kennslumyndskeið sem falla vel að námsmarkmiðum okkar en við gerðum þau ekki sjálf. Þau voru hvorki gerð sérstaklega fyrir bókina Prealgebra 2e né aðlöguð að henni.

**Sjálfsmat Í sjálfsmatinu eru námsmarkmið hlutans talin upp svo nemendur geti metið eigin kunnáttu og gert skýrar áætlanir um það hvernig þeir geti bætt sig.**

### *Myndefni*

*Bókin Grunnatriði algebru, 2. útgáfa, inniheldur fjölda mynda og skýringarteikninga. Myndefnið í bókinni fylgir skýrum og látlausum stíl sem beinir athyglinni að mikilvægustu upplýsingum hverrar myndar og dregur jafnframt úr sjónrænu áreiti.*




### *Verkefni hluta*

Hverjum hluta hvers kafla lýkur með fjölbreyttum verkefnum sem hægt er að leggja fyrir sem heimavinnu eða velja úr til stýrðrar þjálfunar. Verkefnasöfnin nefnast Æfingin skapar meistarann til að hvetja nemendur til að ljúka heimaverkefnum.

- Verkefnin tengjast námsmarkmiðunum. Þannig er auðveldara að útbúa einstaklingsmiðaðar námsáætlanir sem taka mið af þörfum hvers nemanda.
- Verkefnunum er raðað vandlega til að byggja færni upp stig af stigi.
- Gildi fasta og stuðla voru valin til að æfa og styrkja grundvallaratriði reiknings.
- Verkefni sem merkt eru sléttum tölum mynda pör með verkefnum sem merkt eru oddatölum.
- Verkefnin fylgja sýnidæmum textans, þróa þau áfram og nota sömu fyrirmæli svo nemendur eigi auðvelt með að sjá tengslin.
- Hagnýtu verkefnin sækja efni sitt bæði í daglegt líf og í hefðbundin viðfangsefni kennslubóka í háskólastærðfræði.
- **Stærðfræði daglegs lífs dregur fram hagnýtar aðstæður þar sem hugtök viðkomandi hluta eru notuð.**

- **Ritunarverkefni eru í hverju verkefnasafni til að efla hugtakaskilning, gagnrýna hugsun og læsi.**

### *Yfirlitsefni kafla*

Hverjum kafla lýkur með yfirliti yfir mikilvægustu atriðin og viðbótarverkefnum sem nemendur geta notað til að undirbúa sig fyrir próf.

- **Lykilhugtök veita formlega skilgreiningu á hverju feitletruðu hugtaki í kaflanum.**
- **Meginatriði draga saman mikilvægustu hugmyndir hvers hluta og vísa aftur í viðeigandi sýnidæmi ef nemendur þurfa upprifjun.**
- **Yfirlitsverkefni kafla innihalda æfingar sem rifja upp mikilvægustu hugtök hvers hluta.**
- **Æfingapróf inniheldur viðbótarverkefni sem meta mikilvægustu námsmarkmið kaflans.**
- **Svarlykill inniheldur svör við öllum verkefnum undir fyrirsögninni „Reynið sjálf“ og svör við öðru hverju verkefni úr verkefnasöfnum hluta, yfirlitsverkefnum kafla og æfingaprófum.**

### *Svör við spurningum í bókinni*

Svör við sýnidæmum birtast beint fyrir neðan spurninguna í bókinni. Öll svör við verkefnum undir fyrirsögninni „Reynið sjálf“ eru í svarlyklinum. Þar fá nemendur einnig svör við þeim verkefnum úr verkefnasöfnum hluta, yfirlitsverkefnum kafla og æfingaprófum sem merkt eru oddatölum. Svör við verkefnum sem merkt eru sléttum tölum eru aðeins aðgengileg kennurum í lausnahefti kennara á síðu kennaraefnis.

## *Viðbótarefni*

### *Efni fyrir nemendur og kennara*

Við höfum tekið saman viðbótarefni fyrir nemendur og kennara, þar á meðal leiðbeiningar fyrir byrjendur, vinnublöð fyrir áþreifanleg námsgögn í stærðfræði og svarlykil að undirbúningsverkefnum. Til að fá aðgang að kennaraefni þarf staðfestan kennarareikning. Hægt er að sækja um slíkan reikning við innskráningu á openstax.org. Nýtið þetta efni til viðbótar við OpenStax-bókina.

### *Efni samstarfsaðila*

Samstarfsaðilar OpenStax styðja markmið okkar um að gera vandað námsefni ódýrt og aðgengilegt nemendum og kennurum alls staðar. Verkfæri þeirra falla hnökralaust að OpenStax-bókunum og eru fáanleg gegn vægu gjaldi. Efni samstarfsaðila fyrir bókina er aðgengilegt á síðu hennar á openstax.org.

## *Um höfundana*

### *Aðalhöfundar*

Lynn Marecek og MaryAnne Anthony-Smith hafa kennt stærðfræði við Santa Ana-háskóla í mörg ár og unnið saman að nokkrum verkefnum sem miða að því að efla nám nemenda í undirbúningsáföngum í stærðfræði. Þær eru höfundar bókarinnar Strategies for Success: Study Skills for the College Math Student, sem Pearson HigherEd gaf út.

**Lynn Marecek, Santa Ana-háskóli**
**MaryAnne Anthony-Smith, Santa Ana-háskóli**
**Andrea Honeycutt Mathis, Samfélagsháskólinn í norðausturhluta Mississippi**

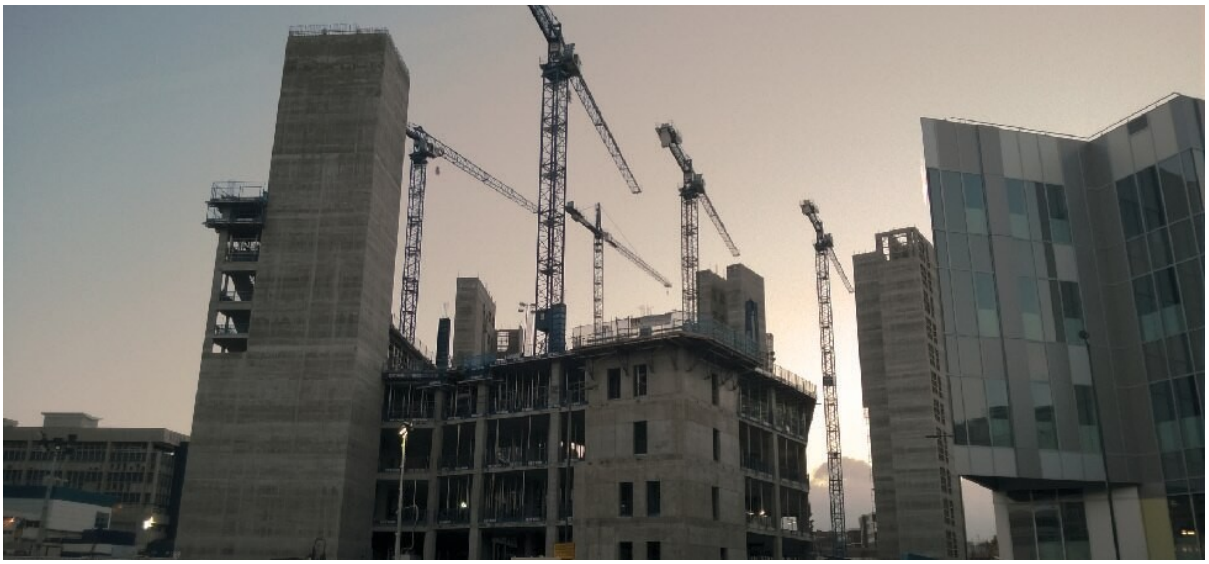
### *Ritrýnar*

Jay Abramson, Ríkisháskólinn í Arizona Bryan Blount, Kentucky Wesleyan-háskóli Gale Burtch, Ivy Tech-samfélagsháskóli Tamara Carter, Texas A&M-háskóli Danny Clarke, Truckee Meadows-samfélagsháskóli Michael Cohen, Hofstra-háskóli Christina Cornejo, Erie-samfélagsháskóli Denise Cutler, Bay de Noc-samfélagsháskóli Lance Hemlow, Samfélagsháskólinn í Raritan-dal John Kalliongis, Saint Louis-háskóli Stephanie Krehl, Mid-South-samfélagsháskóli Laurie Lindstrom, Bay de Noc-samfélagsháskóli Beverly Mackie, Lone Star-háskólakerfið Allen Miller, Northeast Lakeview-háskóli Christian Roldán-Johnson, Samfélagsháskólinn í Lake-sýslu Martha Sandoval-Martinez, Santa Ana-háskóli Gowribalan Vamadeva, Blue Ash-deild Háskólans í Cincinnati Kim Watts, North Lake-háskóli Libby Watts, Tidewater-samfélagsháskóli Allen Wolmer, Atlantic-gyðingaskóli John Zarske, Santa Ana-háskóli

1

1. KAFLI

# Undirstöður



Mynd 1.1 Til að bygging sé traust þarf að vanda gerð undirstöðunnar.

## Yfirlit kaflans


- 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur
- 1.2 Tungumál algebrunnar
- 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna
- 1.4 Margföldun og deiling heiltalna
- 1.5 Myndræn framsetning brota
- 1.6 Samlagning og frádráttur brota
- 1.7 Tugabrot
- 1.8 Rauntölur
- 1.9 Reiknireglur rauntalna
- 1.10 Mælikerfi

# Inngangur



Rétt eins og bygging þarf traustan grunn til að standa þarf algebrunámið að byggja á traustum grunni. Því hefjum við bókina á upprifjun reikniaðgerða með núlli og jákvæðum heiltölum, öllum heiltölum, almennum brotum og tugabrotum. Þannig verður til traustur grunnur fyrir áframhaldandi algebrunám.

# 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Sætisgildi núlls og jákvæðra heiltalna
- Margfeldi og deilanleikapróf
- Frumþáttun og minnsta sameiginlega margfeldi

**UNDIRBÚNINGUR 1.1**

Ítarlegri kynningu á viðfangsefnum þessa hluta er að finna í bókinni Prealgebra, í köflunum Núll og jákvæðar heiltölur og Tungumál algebrunnar.

Nú þegar við hefjum nám í grunnatriðum algebru þurfum við að rifja upp ýmsa færni og hugtök. Í þessum kafla er fjallað um núll og jákvæðar heiltölur, allar heiltölur, almenn brot, tugabrot og rauntölur. Við byrjum einnig að nota táknmál og hugtök algebrunnar.

## Sætisgildi núlls og jákvæðra heiltalna

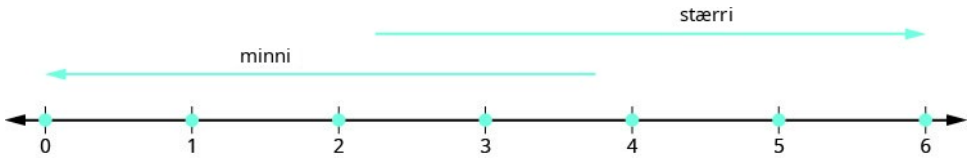
Einföldustu tölurnar í algebru eru þær sem við notum til að telja hluti: 1, 2, 3, 4 og svo framvegis. Þær kallast talningartölur og einnig náttúrlegar tölur. Ef núlli er bætt við talningartölurnar fæst mengi allra heiltalna sem eru núll eða jákvæðar.

Talningartölur: 1, 2, 3, ...

Núll og jákvæðar heiltölur: 0, 1, 2, 3, ...

Táknið „...“ nefnist úrfellingarpunktar og merkir „og svo framvegis“ eða að mynstrið haldi áfram endalaust.

Talningartölur og heiltölur sem eru núll eða jákvæðar má sýna á talnalínu (sjá mynd 1.2).




Mynd 1.2 Tölurnar á talnalínunni stækka frá vinstri til hægri og minnka frá hægri til vinstri. Þótt þessi talnalína sýni aðeins heiltölurnar frá 0 til 6 halda tölurnar áfram án enda.

1

### ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN

Verkefnið „Talnalína – 1. hluti“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja betur talningartölur og heiltölur sem eru núll eða jákvæðar.

Talnakerfið okkar byggist á sætisgildi vegna þess að gildi tölustafs ræðst af sæti hans í tölu. Mynd 1.3 sýnir sætisgildin. Sætunum er skipt í þriggja stafa flokka sem nefnast talnaflokkar. Flokkarnir eru einingar, þúsundir, milljónir, milljarðar og billjónir og svo framvegis. Í ritaðri tölu eru talnaflokkarnir aðgreindir með punktum.

| Sætisgildi | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Billjónir | | | Milljarðar | | | Milljónir | | | Þúsundir | | | Einingar | | |
| Hundruð billjóna | Tugir billjóna | Billjónir | Hundruð milljarða | Tugir milljarða | Milljarðar | Hundruð milljóna | Tugir milljóna | Milljónir | Hundruð þúsunda | Tugir þúsunda | Þúsundir | Hundruð | Tugir | Einingar |
| | | | | | | | | 5 | 2 | 7 | 8 | 1 | 9 | 4 |

Mynd 1.3 Talan 5.278.194 er sýnd í töflunni. Tölustafurinn 5 er í milljónasæti. Tölustafurinn 2 er í hundraðþúsundasæti. Tölustafurinn 7 er í tugþúsundasæti. Tölustafurinn 8 er í þúsundasæti. Tölustafurinn 1 er í hundraðasæti. Tölustafurinn 9 er í tugasæti. Tölustafurinn 4 er í einingasæti.

### SÝNIDÆMI 1.1

Finnið sætisgildi hvers tölustafs í tölunni 63.407.218:

1. ⓐ 7
2. ⓑ 0
3. ⓒ 1
4. ⓓ 6
5. ⓔ 3

## Lausn

Setjið töluna í sætisgildistöflu:

| Billjónir | | | Milljarðar | | | Milljónir | | | Þúsundir | | | Einingar | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hundruð billjóna | Tugir billjóna | Billjónir | Hundruð milljarða | Tugir milljarða | Milljarðar | Hundruð milljóna | Tugir milljóna | Milljónir | Hundruð þúsunda | Tugir þúsunda | Þúsundir | Hundruð | Tugir | Einingar |
| | | | | | | | 6 | 3 | 4 | 0 | 7 | 2 | 1 | 8 |

ⓐ 7 er í þúsundasæti. ⓑ 0 er í tugþúsundasæti. ⓒ 1 er í tugasæti. ⓓ 6 er í tugmilljónasæti. ⓔ 3 er í milljónasæti.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.1**

Finnið sætisgildi hvers tölustafs í tölunni 27.493.615:

ⓐ 2 ⓑ 1 ⓒ 4 ⓓ 7 ⓔ 5

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.2**

Finnið sætisgildi hvers tölustafs í tölunni 519.711.641.328:

ⓐ 9 ⓑ 4 ⓒ 2 ⓓ 6 ⓔ 7

Þegar ávísun er skrifuð er talan rituð bæði með orðum og tölustöfum. Til að rita tölu með orðum skal rita töluna í hverjum talnaflokki og síðan heiti flokksins í viðeigandi mynd. Byrjið vinstra megin, þar sem flokkarnir hafa hæst gildi. Heiti einingaflokksins er ekki ritað. Punktarnir skilja talnaflokkana að og því skal setja kommu milli orðanna þar sem punktur er í tölunni (sjá mynd 1.4). Talan 74.218.369 er rituð sjötíu og fjórar milljónir, tvö hundruð og átján þúsund, þrjú hundruð sextíu og níu.




Mynd 1.4

1

AÐFERÐ

### Ritið núll eða jákvæða heiltölu með orðum.

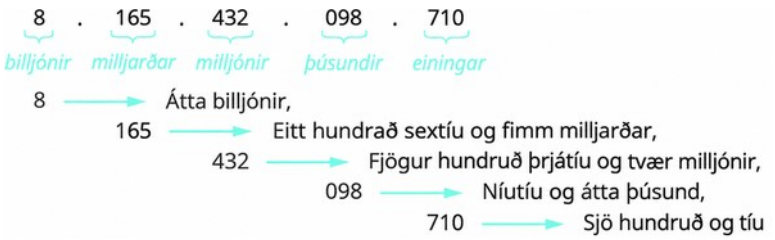
1. Skref 1. Byrjið vinstra megin og ritið töluna í hverjum talnaflokki og síðan heiti flokksins.
2. Skref 2. Setjið kommur í heiti tölunnar til að aðgreina talnaflokkana.
3. Skref 3. Ekki rita heiti einingaflokksins.

SÝNIDÆMI 1.2

Ritið töluna 8.165.432.098.710 með orðum.

### Lausn

Ritið töluna í hverjum talnaflokki og síðan heiti flokksins.




Setjið kommur í heitið til að aðgreina talnaflokkana.

Því er talan 8.165.432.098.710 lesin: átta billjónir, eitt hundrað sextíu og fimm milljarðar, fjögur hundruð þrjátíu og tvær milljónir, níutíu og átta þúsund, sjö hundruð og tíu.

REYNIÐ SJÁLF 1.3

Ritið töluna 9.258.137.904.061 með orðum.

REYNIÐ SJÁLF 1.4

Ritið töluna 17.864.325.619.004 með orðum.

Nú snúum við ferlinu við og ritum tölustafina út frá heiti tölunnar. Til að rita töluna með tölustöfum finnum við fyrst orðin sem vísa til talnaflokkanna. Gagnlegt er að teikna þrjú auð sæti fyrir hvern flokk sem þarf, fylla þau með tölustöfum og aðgreina flokkana með punktum.

AÐFERÐ

### Ritið núll eða jákvæða heiltölu með tölustöfum.

1. Skref 1. Finnið orðin sem vísa til talnaflokka. (Munið að einingaflokkurinn er aldrei nefndur.)
2. Skref 2. Teiknið þrjú auð sæti fyrir hvern talnaflokk sem þarf. Aðgreinið flokkana með punktum.

**3.** Skref 3. Lesið töluna í hverjum talnaflokki og setjið tölustafina í rétt sæti.

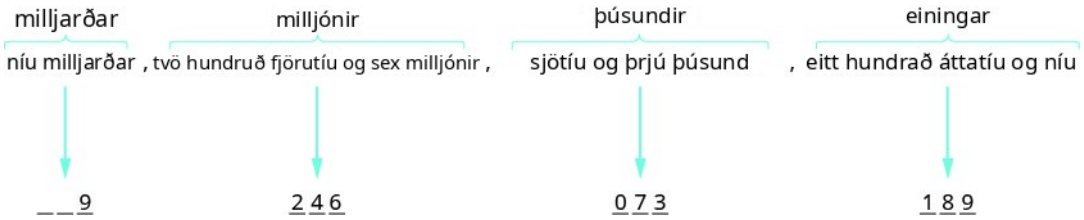


**SÝNIDÆMI 1.3**

Ritið níu milljarða, tvö hundruð fjörutíu og sex milljónir, sjötíu og þrjú þúsund, eitt hundrað áttatíu og níu með tölustöfum.

### Lausn

Finnið orðin sem vísa til talnaflokka. Allir talnaflokkar nema sá fremsti verða að hafa þrjú sæti. Teiknið þrjú auð sæti fyrir hvern talnaflokk sem þarf og aðgreinið flokkana með punktum. Ritið síðan tölustafina í hvern flokk.




Talan er 9.246.073.189.

**REYNIÐ SJÁLF 1.5**

Ritið töluna tvo milljarða, fjögur hundruð sextíu og sex milljónir, sjö hundruð og fjórtán þúsund, fimmtíu og einn með tölustöfum.

**REYNIÐ SJÁLF 1.6**

Ritið töluna ellefu milljarða, níu hundruð tuttugu og eina milljón, átta hundruð og þrjátíu þúsund, eitt hundrað og sex með tölustöfum.

Árið 2013 áætlaði manntalsskrifstofa Bandaríkjanna að íbúafjöldi New York-ríkis væri 19.651.127. Því mætti segja að íbúafjöldinn hafi verið um 20 milljónir. Oft er nákvæmt gildi óþarft og nálgun nægir.

Það að nálga tölu kallast námundun. Tölur eru námundaðar að tilteknu sætisgildi eftir því hversu mikillar nákvæmni er þörf. Þegar við segjum að íbúar New York séu um 20 milljónir höfum við námundað að milljónasæti.

**SÝNIDÆMI 1.4**

### Að námunda núll og jákvæðar heiltölur

Námundið 23.658 að næsta hundraði.

## Lausn

1

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið tilgreint sætisgildi og merkið það með ör. Allir tölustafir vinstra megin haldast óbreyttir. | Finnið hundraðasætið í 23.658. | hundraðasæti<br>↓<br>23.658 |
| **Skref 2.** Undirstrikið tölustafinn hægra megin við tilgreint sætisgildi. | Undirstrikið 5, sem er hægra megin við hundraðasætið. | hundraðasæti<br>↓<br>23.658 |
| **Skref 3.** Er þessi tölustafur stærri en eða jafn 5?<br><br>Já — bætið 1 við tölustafinn í viðkomandi sæti.<br><br>Nei — breytið *ekki* tölustafnum í viðkomandi sæti. | Bætið 1 við tölustafinn 6 í hundraðasætinu, þar sem 5 er stærra en eða jafnt 5. | 23.658<br>↗<br>bætið 1 við |
| **Skref 4.** Setjið núll í stað allra tölustafa hægra megin við tiltekið sætisgildi. | Setjið núll í stað allra tölustafa hægra megin við hundraðasætið. | 23.758<br>↖<br>setjið 0 í staðinn<br>Því er 23.700 námundað að næsta hundraði. |

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.7**

Námundið að næsta hundraði: 17.852.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.8**

Námundið að næsta hundraði: 468.751.

---

**AÐFERÐ**

### Námundið núll og jákvæðar heiltölur.

1. Skref 1. Finnið tilgreint sætisgildi og merkið það með ör. Allir tölustafir vinstra megin við örina haldast óbreyttir.
2. Skref 2. Undirstrikið tölustafinn hægra megin við tilgreint sætisgildi.
3. Skref 3.
   Er gildi þessa tölustafs stærra en eða jafnt og 5?
   - Já – bætið 1 við tölustafinn í tilgreinda sætinu.
   - Nei – látið tölustafinn í tilgreinda sætinu standa óbreyttan.
4. Skref 4. Skiptið öllum tölustöfum hægra megin við tilgreint sætisgildi út fyrir núll.

---

**SÝNIDÆMI 1.5**

Námundið 103.978 að næsta:

1. ⓐ hundraði
2. ⓑ þúsundi

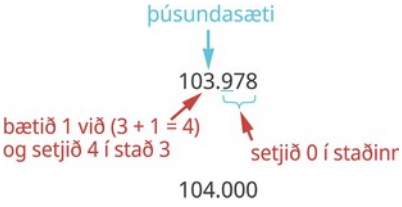
**3.** ⓒ tugþúsundi

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| Finnið hundraðasætið í 103.978. |  |
| Undirstrikið tölustafinn hægra megin við hundraðasætið. |  |
| Bætið 1 við 9 af því að 7 er stærra en eða jafnt og 5. Skiptið öllum tölustöfum hægra megin við hundraðasætið út fyrir núll. |  |
| | Því fæst 104.000 þegar 103.978 er námunduð að næsta hundraði. |

ⓑ

| | |
|---|---|
| Finnið þúsundasætið og undirstrikið tölustafinn hægra megin við það. |  |
| Bætið 1 við 3 af því að 9 er stærra en eða jafnt og 5. Skiptið öllum tölustöfum hægra megin við þúsundasætið út fyrir núll. |  |
| | Því fæst 104.000 þegar 103.978 er námunduð að næsta þúsundi. |

ⓒ

| | |
|---|---|
| Finnið tugþúsundasætið og undirstrikið tölustafinn hægra megin við það. |  |
| Látið 0 standa óbreytt af því að 3 er minna en 5. Skiptið síðan tölustöfunum hægra megin út fyrir núll. | 100.000 |
| | Því fæst 100.000 þegar 103.978 er námunduð að næsta tugþúsundi. |

1

**REYNIÐ SJÁLF 1.9**

Námundið 206.981 að næsta: ⓐ hundraði ⓑ þúsundi ⓒ tugþúsundi.

**REYNIÐ SJÁLF 1.10**

Námundið 784.951 að næsta: ⓐ hundraði ⓑ þúsundi ⓒ tugþúsundi.

Í algebru notum við bókstaf til að tákna tölu sem getur breyst eða er óþekkt. Algeng tákn eru a, b, c, m, n, x og y. Nánar verður fjallað um fasta og breytur síðar í þessum hluta.

## Margfeldi og deilanleikapróf

Tölurnar 2, 4, 6, 8, 10 og 12 kallast margfeldi af 2. Margfeldi af 2 má rita sem margfeldi tölunnar 2 og talningartölu.

| 2, | 4, | 6, | 8, | 10, | 12, ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $2 \cdot 1$, | $2 \cdot 2$, | $2 \cdot 3$, | $2 \cdot 4$, | $2 \cdot 5$, | $2 \cdot 6$ |

Á sama hátt er margfeldi af 3 margfeldi talningartölu og 3.

| 3, | 6, | 9, | 12, | 15, | 18, ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $3 \cdot 1$, | $3 \cdot 2$, | $3 \cdot 3$, | $3 \cdot 4$, | $3 \cdot 5$, | $3 \cdot 6$ |

Með því að halda þessu ferli áfram má finna margfeldi hvaða tölu sem er.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Margfeldi“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja margfeldi betur.

Tafla 1.1 sýnir margfeldi talnanna 2 til 9 fyrir fyrstu 12 talningartölurnar.

Tafla 1.1

| Talningartala | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Margfeldi af 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| Margfeldi af 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 |
| Margfeldi af 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 |
| Margfeldi af 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
| Margfeldi af 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 |
| Margfeldi af 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 |
| Margfeldi af 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 |
| Margfeldi af 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 |
| Margfeldi af 10 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |

**MARGFELDI TÖLU**

Tala er margfeldi af n ef hún er margfeldi talningartölu og n.

Önnur leið til að segja að 15 sé margfeldi af 3 er að segja að 15 sé deilanleg með 3. Það merkir að þegar 15 er deilt með 3 fæst talningartala. Reyndar er $15 \div 3$ jafnt 5, svo 15 er $5 \cdot 3$.

**DEILANLEG MEÐ TÖLU**

Ef talan m er margfeldi af n, þá er talan m sögð deilanleg með n.

Skoðið margfeldi af 5 í töflu 1.1. Þau enda öll á 5 eða 0. Tölur þar sem síðasti tölustafurinn er 5 eða 0 eru deilanlegar með 5. Með því að leita að öðrum mynstrum í töflu 1.1, sem sýnir margfeldi talnanna 2 til 9, má finna þessi deilanleikapróf:

**DEILANLEIKAPRÓF**

Tala er deilanleg með:

- 2 ef síðasti tölustafurinn er 0, 2, 4, 6 eða 8.
- 3 ef summa tölustafanna er deilanleg með 3.
- 5 ef síðasti tölustafurinn er 5 eða 0.
- 6 ef talan er deilanleg bæði með 2 og 3.
- 10 ef talan endar á 0.

**SÝNIDÆMI 1.6**

Er 5.625 deilanleg með 2? Með 3? Með 5? Með 6? Með 10?

## Lausn

| | |
|---|---|
| Er 5.625 deilanleg með 2? | |
| Endar talan á 0, 2, 4, 6 eða 8? | Nei. Talan 5.625 er ekki deilanleg með 2. |
| Er 5.625 deilanleg með 3? | |
| Hver er summa tölustafanna? | $5+6+2+5=18$ |
| Er summan deilanleg með 3? | Já. Talan 5.625 er deilanleg með 3. |
| Er 5.625 deilanleg með 5 eða 10? | |
| Hver er síðasti tölustafurinn? Hann er 5. | Talan 5.625 er deilanleg með 5 en ekki með 10. |
| Er 5.625 deilanleg með 6? | |
| Er talan deilanleg bæði með 2 og 3? | Nei. Talan 5.625 er ekki deilanleg með 2 og því er talan 5.625 ekki deilanleg með 6. |

1

**REYNIÐ SJÁLF 1.11**

Ákvarðið hvort 4.962 sé deilanleg með 2, 3, 5, 6 og 10.

**REYNIÐ SJÁLF 1.12**

Ákvarðið hvort 3.765 sé deilanleg með 2, 3, 5, 6 og 10.

## Frumþáttun og minnsta sameiginlega margfeldi

Í stærðfræði má oft orða sömu hugmyndir á fleiri en einn hátt. Við höfum séð að ef m er margfeldi af n má segja að m sé deilanleg með n. Þar sem 72 er margfeldi af 8 segjum við til dæmis að 72 sé deilanleg með 8. Þar sem 72 er margfeldi af 9 segjum við að 72 sé deilanleg með 9. Þetta má einnig orða á annan hátt.

Þar sem $8 \cdot 9 = 72$, segjum við að 8 og 9 séu þættir tölunnar 72. Þegar við ritum $72 = 8 \cdot 9$, segjum við að 72 hafi verið þáttuð.

$$\underbrace{8 \cdot 9}_{\text{þættir}} = \underbrace{72}_{\text{margfeldi}}$$

Aðrar leiðir til að þátta 72 eru $1 \cdot 72$, $2 \cdot 36$, $3 \cdot 24$, $4 \cdot 18$, og $6 \cdot 12$. Talan sjötíu og tveir hefur marga þætti: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 36 og 72.

**ÞÆTTIR**

Í stæðunni $a \cdot b$ eru a og b kallaðir þættir. Ef $a \cdot b = m$ og bæði a og b eru heiltölur, þá eru a og b einnig þættir tölunnar m.

Sumar tölur, svo sem 72, hafa marga þætti. Aðrar tölur hafa aðeins tvo þætti.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Líkan af margföldun og þáttun“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja margföldun og þáttun betur.

**FRUMTÖLUR OG SAMSETTAR TÖLUR**

Sérhver frumtala er talningartala stærri en 1 og einu þættir hennar eru 1 og talan sjálf.

Sérhver samsett tala er talningartala sem er ekki frumtala. Samsett tala hefur aðra þætti en 1 og töluna sjálfa.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Frumtölur“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja frumtölur betur.

Talningartölurnar frá 2 til 19 eru sýndar ásamt þáttum sínum á mynd 1.5. Athugið hvort merkingin „frumtala“ eða „samsett tala“ við hverja tölu sé rétt.

| Tala | Þættir | Frumtala eða samsett tala? |
|---|---|---|
| 2 | 1, 2 | Frumtala |
| 3 | 1, 3 | Frumtala |
| 4 | 1, 2, 4 | Samsett tala |
| 5 | 1, 5 | Frumtala |
| 6 | 1, 2, 3, 6 | Samsett tala |
| 7 | 1, 7 | Frumtala |
| 8 | 1, 2, 4, 8 | Samsett tala |
| 9 | 1, 3, 9 | Samsett tala |
| 10 | 1, 2, 5, 10 | Samsett tala |

| Tala | Þættir | Frumtala eða samsett tala? |
|---|---|---|
| 11 | 1, 11 | Frumtala |
| 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | Samsett tala |
| 13 | 1, 13 | Frumtala |
| 14 | 1, 2, 7, 14 | Samsett tala |
| 15 | 1, 3, 5, 15 | Samsett tala |
| 16 | 1, 2, 4, 8, 16 | Samsett tala |
| 17 | 1, 17 | Frumtala |
| 18 | 1, 2, 3, 6, 9, 18 | Samsett tala |
| 19 | 1, 19 | Frumtala |

Mynd 1.5

Eftirfarandi frumtölur eru minni en 20: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 og 19. Takið eftir að eina slétta frumtalan er 2.

Samsetta tölu má rita sem ótvírætt margfeldi frumtalna. Það nefnist frumþáttun tölunnar. Að finna frumþáttun samsettrar tölu kemur að gagni síðar í námskeiðinu.

---

**FRUMÞÁTTUN**

Með frumþáttun tölu er átt við margfeldi frumtalna sem er jafnt tölunni. Frumtölurnar nefnast frumþættir.

Til að finna frumþáttun samsettrar tölu skal finna tvo þætti hennar og teikna tvær greinar út frá þeim. Ef þáttur er frumtala er sú grein fullgerð. Dragið hring um frumtöluna.

Ef þátturinn er ekki frumtala skal finna tvo þætti hans og halda ferlinu áfram. Þegar hringur hefur verið dreginn um frumtölu á enda hverrar greinar er þáttuninni lokið. Þá má rita samsettu töluna sem margfeldi frumtalna.

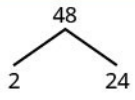
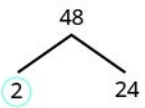
---

**SÝNIDÆMI 1.7**

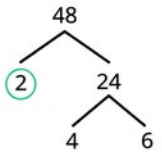
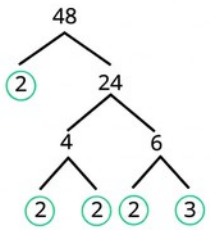
## Að finna frumþáttun samsettrar tölu

Þáttið 48.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið tvo þætti sem hafa gefnu töluna sem margfeldi. Notið þessa þætti til að mynda tvær greinar. | $48 = 2 \cdot 24$ |  |
| **Skref 2.** Ef þáttur er frumtala er þeirri grein lokið. Dragið hring um frumtöluna. | 2 er frumtala.<br>Dragið hring um frumtöluna. |  |

1

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 3.** Ef þáttur er ekki frumtala skaltu rita hann sem margfeldi tveggja þátta og halda ferlinu áfram. | 24 er ekki frumtala. Þáttaðu hana í tvo þætti til viðbótar. |  |
| | 4 og 6 eru ekki frumtölur. Þáttaðu hvora tölu í tvo þætti. |  |
| | 2 og 3 eru frumtölur, svo dragðu hring utan um þær. | |
| **Skref 4.** Ritið samsettu töluna sem margfeldi allra frumtalnanna sem dreginn var hringur um. | | $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ |

Við segjum að $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ sé frumþáttun 48. Frumþættirnir eru yfirleitt ritaðir í vaxandi röð. Margfaldið þættina til að sannreyna svarið.

Ef við hefðum fyrst þáttað 48 á annan hátt, til dæmis sem $6 \cdot 8$, hefði niðurstaðan samt orðið sú sama. Ljúkið frumþáttuninni og sannreynið þetta sjálf.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.13**

Finnið frumþáttun 80.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.14**

Finnið frumþáttun 60.

---

**AÐFERÐ**

### Finnið frumþáttun samsettrar tölu.

1. Skref 1. Finnið tvo þætti sem hafa gefnu töluna sem margfeldi og notið þá til að mynda tvær greinar.
2. Skref 2. Ef þáttur er frumtala er greinin fullgerð. Dragið hring um frumtöluna eins og brum á trénu.
3. Skref 3. Ef þáttur er ekki frumtala skal rita hann sem margfeldi tveggja þátta og halda ferlinu áfram.
4. Skref 4. Ritið samsettu töluna sem margfeldi allra frumtalnanna sem hringur var dreginn um.

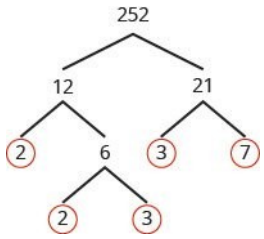
---

**SÝNIDÆMI 1.8**

Finnið frumþáttun 252.

## Lausn

**Skref 1.** Finnið tvo þætti sem hafa 252 sem margfeldi. 12 og 21 eru ekki frumtölur. Skiptið 12 og 21 í tvo þætti til viðbótar. Haldið áfram þar til allir lokaþættir eru frumtölur.




**Skref 2.** Ritið 252 sem margfeldi allra frumtalnanna sem hringur var dreginn um.

$$252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

### REYNIÐ SJÁLF 1.15

Finnið frumþáttun 126.

### REYNIÐ SJÁLF 1.16

Finnið frumþáttun 294.

Ein ástæða þess að við skoðum margfeldi og frumtölur er að þessar aðferðir nýtast við að finna minnsta sameiginlega margfeldi tveggja talna. Það kemur að gagni þegar almenn brot með mismunandi nefnurum eru lögð saman eða dregin frá. Tvær aðferðir eru algengastar við að finna minnsta sameiginlega margfeldið og við skoðum þær báðar.

Fyrri aðferðin felst í því að skrá margfeldi. Til að finna minnsta sameiginlega margfeldi 12 og 18 skráum við nokkur fyrstu margfeldi 12 og 18:

**12:** 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, **108**...
18: 18, **36**, 54, **72**, 90, **108**...
**Sameiginleg margfeldi:** 36, 72, 108...
**Minnsta sameiginlega margfeldi:** 36

Takið eftir að sumar tölur koma fyrir í báðum listum. Þær eru sameiginleg margfeldi 12 og 18.

Fyrstu sameiginlegu margfeldi 12 og 18 eru 36, 72 og 108. Talan 36 er minnst þeirra og kallast því minnsta sameiginlega margfeldið. Oft er það skammstafað MSM.

### MINNSTA SAMEIGINLEGA MARGFELDI

Minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) tveggja talna er minnsta talan sem er margfeldi beggja talnanna.

Aðferðarreiturinn sýnir skrefin við að finna minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni sem var notuð hér að framan fyrir 12 og 18.

### AÐFERÐ

**Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með því að skrá margfeldi.**

1. Skref 1. Skráið nokkur margfeldi hvorrar tölu.

2. Skref 2. Finnið minnstu töluna sem kemur fyrir í báðum listum.
3. Skref 3. Þessi tala er minnsta sameiginlega margfeldið.

1

**SÝNIDÆMI 1.9**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi 15 og 20 með því að skrá margfeldi.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Skráið nokkur fyrstu margfeldi 15 og 20 og notið listana til að finna minnsta sameiginlega margfeldið. | **15:** 15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, 120<br>**20:** 20, 40, **60**, 80, 100, 120, 140, 160 |
| Finnið minnstu töluna sem kemur fyrir í báðum listum. | Fyrsta talan sem kemur fyrir í báðum listum er 60, svo 60 er minnsta sameiginlega margfeldi 15 og 20. |

Takið eftir að 120 kemur einnig fyrir í báðum listum. Talan er sameiginlegt margfeldi en ekki minnsta sameiginlega margfeldið.

**REYNIÐ SJÁLF 1.17**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með því að skrá margfeldi: 9 og 12.

**REYNIÐ SJÁLF 1.18**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með því að skrá margfeldi: 18 og 24.

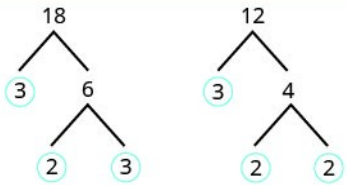
Seinni aðferðin við að finna minnsta sameiginlega margfeldi tveggja talna er frumþáttaaðferðin. Finnum aftur minnsta sameiginlega margfeldi 12 og 18, nú með frumþáttum talnanna.

**SÝNIDÆMI 1.10**

### Að finna minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) 12 og 18 með frumþáttaaðferðinni.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Ritið hverja tölu sem margfeldi frumtalna. | |   |
| **Skref 2.** Skráið frumþætti hvorrar tölu. Látið samsvarandi frumþætti standa lóðrétt hvern undir öðrum þegar hægt er. | Skráið frumþætti 12.<br><br>Skráið frumþætti 18. Raðið þeim undir frumþætti 12 þegar hægt er; annars skal bæta við dálki. | $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>$18 = 2 \cdot \quad 3 \cdot 3$ |
| **Skref 3.** Færið töluna niður úr hverjum dálki. | | $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>$18 = 2 \cdot \quad 3 \cdot 3$<br>$\text{MSM} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ |
| **Skref 4.** Margfaldið þættina. | | MSM = 36 |

Takið eftir að frumþættir 12 $(2 \cdot 2 \cdot 3)$ og frumþættir 18 $(2 \cdot 3 \cdot 3)$ eru allir í MSM $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)$. Því er 36 minnsta sameiginlega margfeldi 12 og 18.

Með því að raða sameiginlegu frumþáttunum saman er hver þeirra aðeins notaður einu sinni. Þannig getið þið verið viss um að 36 sé minnsta sameiginlega margfeldið.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.19**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni: 9 og 12.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.20**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni: 18 og 24.

---

**AÐFERÐ**

### Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni.

1. Skref 1. Ritið hvora tölu sem margfeldi frumtalna.
2. Skref 2. Skráið frumþætti hvorrar tölu. Látið samsvarandi frumþætti standa lóðrétt hvern undir öðrum þegar hægt er.
3. Skref 3. Færið tölurnar niður úr hverjum dálki.
4. Skref 4. Margfaldið þættina.

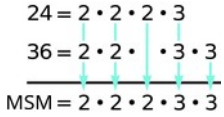
---

**SÝNIDÆMI 1.11**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) 24 og 36 með frumþáttaaðferðinni.

## Lausn

1

| | |
|---|---|
| Finnið frumþætti 24 og 36. Látið samsvarandi frumþætti standa lóðrétt hvern undir öðrum þegar hægt er. Færið tölurnar niður úr öllum dálkunum. |  |
| Margfaldið þættina. | MSM = 72 |
| | Minnsta sameiginlega margfeldi 24 og 36 er 72. |

**REYNIÐ SJÁLF 1.21**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni: 21 og 28.

**REYNIÐ SJÁLF 1.22**

Finnið minnsta sameiginlega margfeldið með frumþáttaaðferðinni: 24 og 32.

**MIÐLAR**

Opnið þetta efni á netinu til að fá meiri kennslu og æfingu í að nota núll og jákvæðar heiltölur. Virkja þarf Java í vafranum til að nota forritið.

- Sigti Eratosþenesar

## Verkefni hluta 1.1

### *Æfingin skapar meistarann*

### Sætisgildi núlls og jákvæðra heiltalna

Finnið sætisgildi hvers tölustafs í gefnu tölunum í eftirfarandi verkefnum.

**1.** 51.493 ⓐ 1, ⓑ 4, ⓒ 9, ⓓ 5, ⓔ 3

**2.** 87.210 ⓐ 2 ⓑ 8 ⓒ 0 ⓓ 7 ⓔ 1

**3.** 164.285 ⓐ 5, ⓑ 6, ⓒ 1, ⓓ 8, ⓔ 2

**4.** 395.076 ⓐ 5 ⓑ 3 ⓒ 7 ⓓ 0 ⓔ 9

**5.** 93.285.170 ⓐ 9 ⓑ 8 ⓒ 7 ⓓ 5 ⓔ 3

**6.** 36.084.215 ⓐ 8 ⓑ 6 ⓒ 5 ⓓ 4 ⓔ 3

**7.** 7.284.915.860.132 ⓐ 7 ⓑ 4 ⓒ 5 ⓓ 3 ⓔ 0

**8.** 2.850.361.159.433 ⓐ 9 ⓑ 8 ⓒ 6 ⓓ 4 ⓔ 2



Ritið hverja tölu með orðum í eftirfarandi verkefnum.

**9.** 1.078

**10.** 5.902

**11.** 364.510

**12.** 146.023

**13.** 5.846.103

**14.** 1.458.398

**15.** 37.889.005

**16.** 62.008.465

Ritið hverja tölu með tölustöfum í eftirfarandi verkefnum.

**17.** fjögur hundruð og tólf

**18.** tvö hundruð fimmtíu og þrír

**19.** þrjátíu og fimm þúsund, níu hundruð sjötíu og fimm

**20.** sextíu og eitt þúsund, fjögur hundruð og fimmtán

**21.** ellefu milljónir, fjörutíu og fjögur þúsund, eitt hundrað sextíu og sjö

**22.** átján milljónir, eitt hundrað og tvö þúsund, sjö hundruð áttatíu og þrír

**23.** þrír milljarðar, tvö hundruð tuttugu og sex milljónir, fimm hundruð og tólf þúsund, sautján

**24.** ellefu milljarðar, fjögur hundruð sjötíu og ein milljón, þrjátíu og sex þúsund, eitt hundrað og sex

Námundið að tilgreindu sætisgildi í eftirfarandi verkefnum.

**25.** Námundið að næsta tug.

ⓐ 386 ⓑ 2.931

**26.** Námundið að næsta tug.

ⓐ 792 ⓑ 5.647

**27.** Námundið að næsta hundraði.

ⓐ 13.748 ⓑ 391.794

**28.** Námundið að næsta hundraði.

ⓐ 28.166 ⓑ 481.628

**29.** Námundið að næsta tug.

ⓐ 1.492 ⓑ 1.497

**30.** Námundið að næsta tug.

ⓐ 2.791 ⓑ 2.795

**31.** Námundið að næsta hundraði.

ⓐ 63.994 ⓑ 63.940

**32.** Námundið að næsta hundraði.

ⓐ 49.584 ⓑ 49.548

Námundið hverja tölu í eftirfarandi verkefnum að næsta ⓐ hundraði, ⓑ þúsundi og ⓒ tugþúsundi.

**33.** 392.546

**34.** 619.348

**35.** 2.586.991

**36.** 4.287.965

### Margfeldi og þættir

Notið deilanleikaprófin í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort hver tala sé deilanleg með 2, 3, 5, 6 og 10.

**37.** 84

**38.** 9.696

**39.** 75

**40.** 78

**41.** 900

**42.** 800

**43.** 986

**44.** 942

**45.** 350

**46.** 550

**47.** 22.335

**48.** 39.075

### Frumþáttun og minnsta sameiginlega margfeldi

Finnið frumþáttunina í eftirfarandi verkefnum.

**49.** 86

**50.** 78

**51.** 132

**52.** 455

**53.** 693

**54.** 400

**55.** 432

**56.** 627

**57.** 2.160

**58.** 2.520

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi hvers talnapars í eftirfarandi verkefnum með því að skrá margfeldi.

**59.** 8, 12

**60.** 4, 3

**61.** 12, 16

**62.** 30, 40

**63.** 20, 30

**64.** 44, 55

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi hvers talnapars í eftirfarandi verkefnum með frumþáttaaðferðinni.

**65.** 8, 12

**66.** 12, 16

**67.** 28, 40

**68.** 84, 90

**69.** 55, 88

**70.** 60, 72

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**71.** **Að skrifa** ávísun Jorge keypti bíl á $24.493 og greiddi með ávísun. Ritið kaupverðið með orðum.

**72.** **Að skrifa** ávísun Endurbætur á eldhúsi Marissu kostuðu $18.549. Hún skrifaði verktakanum ávísun. Ritið upphæðina með orðum.

**73.** **Bílakaup Jorge** keypti bíl á $24.493. Námundið verðið að næsta ⓐ tug, ⓑ hundraði, ⓒ þúsundi og ⓓ tugþúsundi.

**74.** **Endurbætur á eldhúsi** Endurbætur á eldhúsi Marissu kostuðu $18.549. Námundið kostnaðinn að næsta ⓐ tug, ⓑ hundraði, ⓒ þúsundi og ⓓ tugþúsundi.

**75.** **Mannfjöldi** Íbúar Kína voru 1.339.724.852 þann 1. nóvember 2010. Námundið mannfjöldann að næsta ⓐ milljarði, ⓑ hundraði milljóna og ⓒ milljón.

**76.** **Stjörnufræði** Meðalfjarlægð jarðar frá sólu er 149.597.888 kílómetrar. Námundið fjarlægðina að næsta ⓐ hundraði milljóna, ⓑ tug milljóna og ⓒ milljón.

**77.** **Matvöruinnkaup Pylsur eru seldar í pakkningum með 10 stykkjum en pylsubrauð í pakkningum með átta stykkjum. Hver er minnsti fjöldi pylsa og brauða sem fæst í heilum pakkningum af hvoru?**

**78.** **Matvöruinnkaup Pappadiskar eru seldir í pakkningum með 12 stykkjum en veisluglös í pakkningum með átta stykkjum. Hver er minnsti fjöldi diska og glasa sem fæst í heilum pakkningum af hvoru?**

### *Ritunarverkefni*

**79.** Nefnið dæmi úr daglegu lífi þar sem gagnlegt er að námunda tölur.

**80.** Ef tala er deilanleg með 2 og 3, hvers vegna er hún þá einnig deilanleg með 6?

**81.** Hver er munurinn á frumtölum og samsettum tölum?

**82.** Útskýrið með eigin orðum hvernig finna má frumþáttun samsettrar tölu með aðferð að eigin vali.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Að loknum verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð námsmarkmiðum hlutans.

| Ég get··· | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað sætisgildi núlls og jákvæðra heiltalna. | | | |
| borið kennsl á margfeldi og beitt deilanleikaprófum. | | | |
| fundið frumþáttanir og minnstu samfeldi. | | | |

ⓑ Ef flest merkin ykkar voru við:

...örugglega. Til hamingju! Þið hafið náð námsmarkmiðum þessa hluta. Hugleiðið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo þið getið haldið áfram að beita þeim. Hvað gerðuð þið til að öðlast fullvissu um að þið réðuð við þessi viðfangsefni? Nefnið tiltekin atriði.

...með nokkurri hjálp. Bregðast þarf fljótt við, því viðfangsefni sem þið hafið ekki náð tökum á verða að hindrunum á leiðinni að árangri. Í stærðfræði byggist hvert viðfangsefni á fyrra námi. Mikilvægt er að tryggja traustan grunn áður en lengra er haldið. Hvern getið þið beðið um hjálp? Samnemendur og kennari eru góðir stuðningsaðilar. Er hægt að fá aðstoð stærðfræðileiðbeinenda í skólanum? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

...nei – ég skil þetta ekki! Þetta er viðvörunarmerki sem ekki má hunsa. Leitið strax aðstoðar, annars getur álagið fljótt orðið yfirþyrmandi. Ræðið stöðuna við kennarann eins fljótt og hægt er. Saman getið þið gert áætlun um hvernig þið fáið þá aðstoð sem þið þurfið.



# 1.2 Tungumál algebrunnar

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Notið breytur og algebrutákn
- Einfaldið stæður samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða
- Reiknið gildi stæðu
- Berið kennsl á og sameinið samkynja liði
- Þýðið orðalag yfir á algebrustæðu

**UNDIRBÚNINGUR 1.2**

Ítarlegri kynningu á viðfangsefnum þessa hluta er að finna í bókinni Prealgebra, í kaflanum Tungumál algebrunnar.

## Notið breytur og algebrutákn

Gerum ráð fyrir að Greg sé 20 ára á þessu ári og Alex 23 ára. Alex er því 3 árum eldri en Greg. Þegar Greg var 12 ára var Alex 15 ára. Þegar Greg verður 35 ára verður Alex 38 ára. Sama hversu gamall Greg er, verður Alex alltaf 3 árum eldri, er það ekki? Á máli algebrunnar segjum við að aldur Gregs og aldur Alex séu breytur en 3 sé fasti. Aldur þeirra breytist en 3 ára munurinn helst alltaf óbreyttur. Aldursmunurinn á Greg og Alex verður alltaf 3 ár og því er talan 3 fastinn.
Í algebru notum við bókstafi til að tákna breytur. Ef við látum aldur Gregs vera g, getum við notað $g+3$ til að tákna aldur Alex. Sjá töflu 1.2.

Tafla 1.2

| Aldur Gregs | Aldur Alex |
|---|---|
| 12 | 15 |
| 20 | 23 |
| 35 | 38 |
| $g$ | $g+3$ |

Bókstafirnir sem tákna breytilegan aldur þeirra kallast breytur. Algengustu bókstafirnir fyrir breytur eru x, y, a, b og c.

1

**BREYTA**

Breyta er bókstafur sem táknar tölu sem getur haft breytilegt gildi.

**FASTI**

Fasti er tala sem hefur alltaf sama gildi.

Til að skrifa á máli algebrunnar þurfum við tákn fyrir reikniaðgerðir auk talna og breyta. Við munum nota nokkrar gerðir tákna.

Helstu reikniaðgerðirnar fjórar eru samlagning, frádráttur, margföldun og deiling. Í töflunni hér á eftir skráum við táknin sem notuð eru fyrir þessar aðgerðir. Þið þekkið líklega sum þeirra.

| Reikniaðgerð | Táknun | Lesið: | Niðurstaðan er ... |
|---|---|---|---|
| Samlagning | $a+b$ | *a plús b* | summa a og b |
| Frádráttur | $a-b$ | *a mínus b* | mismunur a og b |
| Margföldun | $a\cdot b, ab, (a)(b), (a)b, a(b)$ | *a sinnum b* | margfeldi a og b |
| Deiling | $a\div b, a/b, \frac{a}{b}, b\,a$ | *a deilt með b* | kvóti a og b, a nefnist deilistofn og b nefnist deilir |

Við notum þessar reikniaðgerðir á tvær tölur. Þegar þýtt er úr táknmáli yfir á íslensku eða úr íslensku yfir á táknmál þarf að huga sérstaklega að orðunum „af“ og „og“.

- Orðalagið „mismunur 9 og 2“ merkir að draga eigi 2 frá 9, það er 9 mínus 2. Á táknmáli er það ritað $9-2$.
- Orðalagið „margfeldi 4 og 8“ merkir að margfalda eigi 4 og 8 saman, það er 4 sinnum 8. Á táknmáli er það ritað $4\cdot 8$.

Í algebru er krossmerkið $\times$, ekki notað til að tákna margföldun vegna þess að það getur valdið misskilningi. Hvort táknar 3xy stæðuna $3\times y$ („þrír sinnum y“) eða $3\cdot x\cdot y$ („þrír sinnum x sinnum y“)? Til að koma í veg fyrir misskilning má nota $\cdot$ eða sviga til að tákna margföldun.

Þegar tvær stærðir hafa sama gildi segjum við að þær séu jafnar og tengjum þær með jafnaðarmerki.

**JAFNAÐARMERKI**

$a=b$ er lesið „a er jafnt og b“

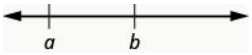
Táknið “=” nefnist jafnaðarmerki.

Á talnalínunni stækka tölurnar frá vinstri til hægri. Nota má talnalínuna til að útskýra táknin „<“ og „>“.

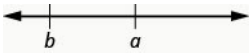
**ÓJAFNA**



$a < b$ lesist „$a$ er minna en $b$"
$a$ er vinstra megin við $b$ á talnalínunni




$a > b$ lesist „$a$ er stærra en $b$"
$a$ er hægra megin við $b$ á talnalínunni




Stæðurnar a < b og a > b má lesa frá vinstri til hægri eða hægri til vinstri, en á íslensku er yfirleitt lesið frá vinstri til hægri (tafla 1.3). Almennt er a < b jafngilt b > a. Til dæmis er 7 < 11 jafngilt 11 > 7. Einnig er a > b jafngilt b < a. Til dæmis er 17 > 4 jafngilt 4 < 17.

Tafla 1.3

| Ójöfnutákn | Orðalag |
|---|---|
| $a \neq b$ | *a er ekki jafnt og b* |
| $a < b$ | *a er minna en b* |
| $a \leq b$ | *a er minna en eða jafnt og b* |
| $a > b$ | *a er stærra en b* |
| $a \geq b$ | *a er stærra en eða jafnt og b* |

**SÝNIDÆMI 1.12**

Þýðið úr táknmáli algebrunnar yfir á íslensku:

ⓐ $17 \leq 26$ ⓑ $8 \neq 17 - 3$ ⓒ $12 > 27 \div 3$ ⓓ $y + 7 < 19$

## Lausn

ⓐ $17 \leq 26$
17 er minna en eða jafnt og 26 ⓑ

$8 \neq 17 - 3$
8 er ekki jafnt og 17 mínus 3 ⓒ

$12 > 27 \div 3$
12 er stærra en 27 deilt með 3 ⓓ

$y+7<19$
y plús 7 er minna en 19



**REYNIÐ SJÁLF 1.23**

Þýðið úr táknmáli algebrunnar yfir á íslensku:

ⓐ $14 \leq 27$ ⓑ $19-2 \neq 8$ ⓒ $12>4 \div 2$ ⓓ $x-7<1$

**REYNIÐ SJÁLF 1.24**

Þýðið úr táknmáli algebrunnar yfir á íslensku:

ⓐ $19 \geq 15$ ⓑ $7=12-5$ ⓒ $15 \div 3<8$ ⓓ $y+3>6$

Svigar í algebru gegna svipuðu hlutverki og kommur, tvípunktar og önnur greinarmerki í íslensku. Þeir sýna hvaða stæður eiga að standa saman, aðskildar frá öðrum stæðum. Nú kynnumst við þremur gerðum sviga.

**SVIGAR**

| | |
|---|---|
| Hringsvigar | $( )$ |
| Hornklofar | $[ ]$ |
| Slaufusvigar | $\{ \}$ |

Hér eru nokkur dæmi um stæður sem innihalda sviga. Síðar í þessum hluta einföldum við stæður af þessu tagi.

$$8(14-8) \qquad 21-3[2+4(9-8)] \qquad 24 \div \{13-2[1(6-5)+4]\}$$

Hver er munurinn á orðasambandi og setningu? Orðasamband tjáir eina hugsun en er ekki heilt eitt og sér. Setning er hins vegar heil fullyrðing. „Að hlaupa mjög hratt“ er orðasamband en „Knattspyrnumaðurinn hljóp mjög hratt“ er setning. Setning hefur frumlag og sögn. Í algebru höfum við stæður og jöfnur.

**STÆÐA**

Stæða er tala, breyta eða samsetning talna og breyta með reikniaðgerðartáknum.

Stæða samsvarar orðasambandi. Hér eru nokkur dæmi um stæður:

| Stæða | Orðalag | Íslenskt orðasamband |
|---|---|---|
| $3+5$ | 3 plús 5 | summa þriggja og fimm |
| $n-1$ | *n mínus einn* | mismunur n og eins |
| $6 \cdot 7$ | 6 sinnum 7 | margfeldi sex og sjö |
| $\frac{x}{y}$ | *x deilt með y* | kvóti x og y |

Athugið að orðasamböndin mynda ekki heila setningu vegna þess að í þeim er engin sögn.

Jafna er mynduð úr tveimur stæðum sem tengdar eru með jafnaðarmerki. Þegar við lesum jöfnu með orðum verður til heil setning á íslensku. Jafnaðarmerkið gegnir hlutverki sagnarinnar.

**JAFNA**

Jafna er mynduð úr tveimur stæðum sem tengdar eru með jafnaðarmerki.

Hér eru nokkur dæmi um jöfnur.

| Jafna | Íslensk setning |
|---|---|
| $3+5=8$ | Summa þriggja og fimm er jöfn átta. |
| $n-1=14$ | *n mínus einn er jafnt og fjórtán.* |
| $6 \cdot 7=42$ | Margfeldi sex og sjö er jafnt og fjörutíu og tvö. |
| $x=53$ | *x er jafnt og fimmtíu og þrír.* |
| $y+9=2y-3$ | *y plús níu er jafnt og tvö y mínus þrír.* |

**SÝNIDÆMI 1.13**

Ákvarðið hvort hvert atriði sé stæða eða jafna:

ⓐ $2(x+3)=10$ ⓑ $4(y-1)+1$ ⓒ $x \div 25$ ⓓ $y+8=40$

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ $2(x+3)=10$ | Þetta er jafna — tvær stæður eru tengdar með jafnaðarmerki. |
| ⓑ $4(y-1)+1$ | Þetta er stæða — ekkert jafnaðarmerki. |
| ⓒ $x \div 25$ | Þetta er stæða — ekkert jafnaðarmerki. |
| ⓓ $y+8=40$ | Þetta er jafna — tvær stæður eru tengdar með jafnaðarmerki. |

1

**REYNIÐ SJÁLF 1.25**

Ákvarðið hvort hvert atriði sé stæða eða jafna: ⓐ $3(x-7)=27$ ⓑ $5(4y-2)-7$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.26**

Ákvarðið hvort hvert atriði sé stæða eða jafna: ⓐ $y^3 \div 14$ ⓑ $4x-6=22$.

Gerum ráð fyrir að margfalda þurfi 2 með sjálfri sér níu sinnum. Skrifa mætti þetta sem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Þetta er seinlegt og erfitt getur verið að halda utan um allar tvíurnar, svo við notum veldisvísa. Við skrifum $2 \cdot 2 \cdot 2$ sem $2^3$ og $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ sem $2^9$. Í stæðum eins og $2^3$, nefnist 2 grunntala og 3 veldisvísir. Veldisvísirinn segir hve oft margfalda á grunntöluna með sjálfri sér.




Við lesum $2^3$ sem „tveir í þriðja veldi“ eða „tveir í þriðja“.

Við segjum að $2^3$ sé skrifað á veldarithætti en $2 \cdot 2 \cdot 2$ með útvíkkaðri ritun.

**VELDARITHÁTTUR**

$a^n$ merkir að a sé margfaldað með sjálfu sér n sinnum.




Stæð $a^n$ er lesin „a í $n$-ta veldi“.

Þótt við lesum $a^n$ sem „a í $n$-ta veldi“ lesum við yfirleitt:

- $a^2$ „a í öðru veldi“
- $a^3$ „a í þriðja veldi“

Síðar sjáum við hvers vegna $a^2$ og $a^3$ bera sérstök heiti.
Tafla 1.4 sýnir hvernig nokkrar stæður með veldisvísum eru lesnar.

Tafla 1.4

| Stæða | Lesið með orðum |
|---|---|
| $7^2$ | 7 í öðru veldi eða 7 í öðru |
| $5^3$ | 5 í þriðja veldi eða 5 í þriðja |
| $9^4$ | 9 í fjórða veldi |
| $12^5$ | 12 í fimmta veldi |

**SÝNIDÆMI 1.14**

Einfaldið: $3^4$.

### Lausn

| | $3^4$ |
|---|---|
| Skrifið stæðuna með útvíkkaðri ritun. | $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ |
| Margfaldið frá vinstri til hægri. | $9 \cdot 3 \cdot 3$ |
| Margfaldið. | $27 \cdot 3$ |
| Margfaldið. | 81 |

**REYNIÐ SJÁLF 1.27**

Einfaldið: ⓐ $5^3$ ⓑ $1^7$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.28**

Einfaldið: ⓐ $7^2$ ⓑ $0^5$.

## Einfaldið stæður samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða

Að einfalda stæðu merkir að framkvæma alla mögulega útreikninga. Til að einfalda $4 \cdot 2+1$ margföldum við fyrst $4 \cdot 2$ og fáum 8. Síðan leggjum við 1 við og fáum 9. Gott er að venja sig á að vinna niður síðuna og skrifa hvert skref fyrir neðan skrefið á undan. Dæmið sem var lýst lítur svona út:

$$\begin{gathered} 4 \cdot 2+1 \\ 8+1 \\ 9 \end{gathered}$$

Með því að nota ekki jafnaðarmerki þegar þið einfaldið stæðu getið þið forðast að rugla saman stæðum og jöfnum.

**EINFÖLDUN STÆÐU**

Að einfalda stæðu merkir að framkvæma allar reikniaðgerðir í stæðunni.

Við höfum nú kynnt flest tákn og ritvenjur algebrunnar. Næst þurfum við að skýra forgangsröð reikniaðgerða. Annars geta stæður haft mismunandi merkingu og gefið mismunandi gildi. Skoðum til dæmis stæðuna:

$$4+3 \cdot 7$$

Hvað fáið þið þegar þið einfaldið þessa stæðu?

1

Sumir nemendur segja 49,

| | |
|---|---|
| | $4+3\cdot 7$ |
| Þar sem $4+3$ gefur $7$. | $7\cdot 7$ |
| Og $7\cdot 7$ er $49$. | $49$ |

Aðrir segja 25,

| | |
|---|---|
| | $4+3\cdot 7$ |
| Þar sem $3\cdot 7$ er $21$. | $4+21$ |
| Og $21+4$ gefur $25$. | $25$ |

Hugsið ykkur ruglinginn í bankakerfinu ef hvert dæmi hefði fleiri en eitt rétt svar!

Sama stæða á alltaf að gefa sömu niðurstöðu. Stærðfræðingar settu því snemma reglur sem nefnast forgangsröð reikniaðgerða.

---

**LEIÐBEININGAR**

## Fylgið forgangsröð reikniaðgerða.

1. Skref 1.
   Svigar
   - Einfaldið allar stæður innan sviga og byrjið á innstu svigunum.
2. Skref 2.
   Veldi
   - Einfaldið allar stæður með veldisvísum.
3. Skref 3.
   Margföldun og deiling
   - Framkvæmið alla margföldun og deilingu frá vinstri til hægri. Þessar reikniaðgerðir hafa jafnan forgang.
4. Skref 4.
   Samlagning og frádráttur
   - Framkvæmið alla samlagningu og frádrátt frá vinstri til hægri. Þessar reikniaðgerðir hafa jafnan forgang.

---

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Í verkefninu „Leikurinn 24“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum æfið þið ykkur í að nota forgangsröð reikniaðgerða.

Nemendur spyrja oft: „Hvernig á ég að muna röðina?“ Gott er að leggja þessa röð á minnið:

| | |
|---|---|
| Svigar | fyrst |
| Veldi | svo |
| Margföldun og deiling | þá, frá vinstri til hægri |
| Samlagning og frádráttur | loks, frá vinstri til hægri |

Margföldun og deiling standa saman í sömu línu. Það minnir okkur á að þær hafa jafnan forgang. Við margföldum ekki alltaf á undan deilingu og deilum ekki alltaf á undan margföldun, heldur reiknum við þær í röð frá vinstri til hægri.

Á sama hátt standa samlagning og frádráttur saman í sömu línu. Það minnir okkur á að þær hafa líka jafnan forgang og að við reiknum þær í röð frá vinstri til hægri.

Skoðum dæmi.

**SÝNIDÆMI 1.15**

Einfaldið: ⓐ $4+3 \cdot 7$ ⓑ $(4+3) \cdot 7$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $4+3 \cdot 7$ |
| Eru einhverjir svigar? Nei. | |
| Eru einhverjir veldisvísar? Nei. | |
| Er einhver margföldun eða deiling? Já. | |
| Margfaldið fyrst. | $4+3 \cdot 7$ |
| Leggið saman. | $4+21$ |
| | $25$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $(4+3) \cdot 7$ |
| Eru einhverjir svigar? Já. | $(4+3) \cdot 7$ |
| Einfaldið innan sviganna. | $(7)7$ |
| Eru einhverjir veldisvísar? Nei. | |
| Er einhver margföldun eða deiling? Já. | |
| Margfaldið. | $49$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.29**

Einfaldið: ⓐ $12-5 \cdot 2$ ⓑ $(12-5) \cdot 2$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.30**

Einfaldið: ⓐ $8+3 \cdot 9$ ⓑ $(8+3) \cdot 9$.

**SÝNIDÆMI 1.16**

Einfaldið: $18 \div 6 + 4(5-2)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Svigar? Já, dragið fyrst frá. | $18 \div 6 + 4(5-2)$<br>$18 \div 6 + 4(3)$ |
| Veldisvísar? Nei. | |
| Margföldun eða deiling? Já. | $18 \div 6 + 4(3)$ |
| Deilið fyrst því margföldun og deiling eru framkvæmdar frá vinstri til hægri. | $3 + 4(3)$ |
| Er einhver frekari margföldun eða deiling? Já. | |
| Margfaldið. | $3 + 12$ |
| Er einhver frekari margföldun eða deiling? Nei. | |
| Er einhver samlagning eða frádráttur? Já. | $15$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.31**

Einfaldið: $30 \div 5 + 10(3-2)$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.32**

Einfaldið: $70 \div 10 + 4(6-2)$.

Þegar margir svigar koma fyrir einföldum við fyrst innan innstu sviganna og vinnum okkur síðan út á við.

**SÝNIDÆMI 1.17**

Einfaldið: $5 + 2^3 + 3\left[6 - 3(4-2)\right]$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $5 + 2^3 + 3[6 - 3(4-2)]$ |
| Eru einhverjir svigar? Já. | |
| Byrjið á hringsvigunum innan hornklofanna. | $5 + 2^3 + 3[6 - 3(4-2)]$ |
| Dragið frá. | $5 + 2^3 + 3[6 - 3(2)]$ |
| Haldið áfram innan hornklofanna og margfaldið. | $5 + 2^3 + 3[6 - 6]$ |
| Haldið áfram innan hornklofanna og dragið frá. | $5 + 2^3 + 3[0]$ |

| | |
|---|---|
| Ekki er hægt að einfalda stæðuna innan hornklofanna frekar. | |
| Eru einhverjir veldisvísar? Já. | $5+2^3+3[0]$ |
| Einfaldið veldin. | $5+8+3[0]$ |
| Er einhver margföldun eða deiling? Já. | |
| Margfaldið. | $5+8+0$ |
| Er einhver samlagning eða frádráttur? Já. | |
| Leggið saman. | $13+0$ |
| Leggið saman. | $13$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.33**

Einfaldið: $9+5^3-\left[4\left(9+3\right)\right]$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.34**

Einfaldið: $7^2-2\left[4\left(5+1\right)\right]$.

## Reiknið gildi stæðu

Í síðustu dæmum einfölduðum við stæður samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða. Nú reiknum við gildi nokkurra stæðna og fylgjum aftur forgangsröðinni. Að reikna gildi stæðu merkir að finna gildi hennar þegar gefin tala er sett inn fyrir breytuna.

**REIKNIÐ GILDI STÆÐU**

Að reikna gildi stæðu merkir að finna gildi hennar þegar gefin tala er sett inn fyrir breytuna.

Til að reikna gildi stæðu setjum við töluna inn fyrir breytuna og einföldum síðan stæðuna.

**SÝNIDÆMI 1.18**

Reiknið gildi $7x-4$, þegar ⓐ $x=5$ og ⓑ $x=1$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| þegar $x = 5$ | $7x - 4$ |
| | $7(5) - 4$ |
| Margfaldið. | $35 - 4$ |
| Dregið frá. | $31$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| þegar $x = 1$ | $7x - 4$ |
| | $7(1) - 4$ |
| Margfaldið. | $7 - 4$ |
| Dregið frá. | $3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.35**

Reiknið gildi $8x - 3$, þegar ⓐ $x = 2$ og ⓑ $x = 1$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.36**

Reiknið gildi $4y - 4$, þegar ⓐ $y = 3$ og ⓑ $y = 5$.

**SÝNIDÆMI 1.19**

Reiknið eftirfarandi gildi þegar $x = 4$, ⓐ $x^2$ ⓑ $3^x$.

## Lausn

ⓐ

| | $x^2$ |
|---|---|
| Setjið 4 í stað $x$. | $4^2$ |
| Notið skilgreiningu veldis. | $4 \cdot 4$ |
| Einfaldið. | $16$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $3^x$ |
| Setjið 4 í stað $x$. | $3^x$ |
| Notið skilgreiningu veldis. | $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ |
| Einfaldið. | $81$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.37**

Reiknið gildi $x=3$, þegar ⓐ $x^2$ ⓑ $4^x$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.38**

Reiknið gildi $x=6$, þegar ⓐ $x^3$ ⓑ $2^x$.

**SÝNIDÆMI 1.20**

Reiknið gildi $2x^2+3x+8$ þegar $x=4$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $2x^2+3x+8$ |
| Setjið $x=4$ inn. | $2x^2+3x+8$ |
| Fylgið forgangsröð reikniaðgerða. | $2(16)+3(4)+8$ |
| | $32+12+8$ |
| | $52$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.39**

Reiknið gildi $3x^2+4x+1$ þegar $x=3$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.40**

Reiknið gildi $6x^2-4x-7$ þegar $x=2$.

## Berið kennsl á og sameinið samkynja liði

Algebrustæður eru gerðar úr liðum. Liður er fasti eða margfeldi fasta og einnar eða fleiri breytna.

**LIÐUR**

Liður er fasti eða margfeldi fasta og einnar eða fleiri breytna.

Dæmi um liði eru $7$, $y$, $5x^2$, $9a$, og $b^5$.

Fastinn sem margfaldar breytuna nefnist stuðull.

**STUÐULL**

Stuðull liðar er fastinn sem margfaldar breytuna í liðnum.

Lítið á stuðulinn sem töluna fyrir framan breytuna. Stuðull liðarins 3x er 3. Þegar við skrifum x er stuðullinn 1, þar sem $x = 1 \cdot x$.

**SÝNIDÆMI 1.21**

Finnið stuðul hvers liðar: ⓐ 14y ⓑ $15x^2$ ⓒ a.

## Lausn

ⓐ Stuðull 14y er 14. ⓑ Stuðull

$15x^2$ er 15. ⓒ Stuðull a er 1, þar sem

$a = 1a$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.41**

Finnið stuðul hvers liðar: ⓐ $17x$ ⓑ $41b^2$ ⓒ z.

**REYNIÐ SJÁLF 1.42**

Finnið stuðul hvers liðar: ⓐ 9p ⓑ $13a^3$ ⓒ $y^3$.

Sumir liðir eiga sameiginleg einkenni. Skoðið þessa 6 liði. Hvaða liðir virðast eiga eitthvað sameiginlegt?

$$5x \qquad 7 \qquad n^2 \qquad 4 \qquad 3x \qquad 9n^2$$

7 og 4 eru báðir fastaliðir.

Liðirnir 5x og 3x hafa báðir breytuna x.

Liðirnir $n^2$ og $9n^2$ eru báðir með $n^2$.

Þegar tveir liðir eru fastaliðir eða hafa sömu breytu og sama veldisvísi segjum við að þeir séu samkynja liðir.

- 7 og 4 eru samkynja liðir.
- 5x og 3x eru samkynja liðir.
- $x^2$ og $9x^2$ eru samkynja liðir.

**SAMKYNJA LIÐIR**

Liðir sem eru annaðhvort fastaliðir eða hafa sömu breytur í sömu veldum nefnast samkynja liðir.

**SÝNIDÆMI 1.22**

Finnið samkynja liði: $y^3$, $7x^2$, 14, 23, $4y^3$, 9x, $5x^2$.

## Lausn

$y^3$ og $4y^3$ eru samkynja liðir því báðir hafa $y^3$;; breytan og veldisvísirinn eru eins.

$7x^2$ og $5x^2$ eru samkynja liðir því báðir hafa $x^2$;; breytan og veldisvísirinn eru eins.

14 og 23 eru samkynja liðir því báðir eru fastaliðir.

Enginn annar liður er samkynja liðnum 9x.

**REYNIÐ SJÁLF 1.43**

Finnið samkynja liði:

$$9,$$

$$2x^3,$$

$$y^2,$$

$$8x^3,$$

$$15,$$

$$9y,$$

$$11y^2.$$

**REYNIÐ SJÁLF 1.44**

Finnið samkynja liði: $4x^3$, $8x^2$, 19, $3x^2$, 24, $6x^3$.

Stæða myndast þegar við leggjum liði saman eða drögum þá frá. Í stæðunni $2x^2+3x+8$, úr sýnidæmi 1.20 eru liðirnir þrír $2x^2, 3x$, og 8.

**SÝNIDÆMI 1.23**

Finnið liðina í hverri stæðu.

1. ⓐ $9x^2+7x+12$
2. ⓑ $8x+3y$

### Lausn

1. ⓐ Liðir stæðunnar $9x^2+7x+12$ eru $9x^2$, 7x og 12.

2. ⓑ Liðir stæðunnar $8x+3y$ eru 8x og 3y.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.45**

Finnið liðina í stæðunni $4x^2+5x+17$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.46**

Finnið liðina í stæðunni $5x+2y$.

Ef samkynja liðir eru í stæðu má einfalda hana með því að sameina þá. Hvað haldið þið að $4x+7x+x$ einfaldist í? Ef þið sögðuð 12x höfðuð þið rétt fyrir ykkur!

$$\begin{gathered} 4x+7x+x \\ x+x+x+x \quad +x+x+x+x+x+x+x \quad +x \\ 12x \end{gathered}$$

Leggið stuðlana saman og haldið sömu breytu. Gildi x skiptir ekki máli. Ef þið hafið 4 af einhverju, bætið við 7 af því sama og síðan 1 til viðbótar verða þau samtals 12. Til dæmis eru 4 appelsínur plús 7 appelsínur plús 1 appelsína samtals 12 appelsínur. Síðar fjöllum við um stærðfræðireglurnar að baki þessu.

Einfaldið: $4x+7x+x$.

Leggið stuðlana saman. 12x

---

**SÝNIDÆMI 1.24**

### Að sameina samkynja liði

Einfaldið: $2x^2+3x+7+x^2+4x+5$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Finndu samstæðuliðina. | $2x^2+3x+7+x^2+4x+5$<br>$2x^2+3x+7+x^2+4x+5$ |
| **Skref 2.** Endurraðið stæðunni þannig að samkynja liðir standi saman. | $2x^2+x^2+3x+4x+7+5$ |
| **Skref 3.** Sameinið samstæð liði. | $3x^2+7x+12$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.47**

Einfaldið: $3x^2+7x+9+7x^2+9x+8$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.48**

Einfaldið: $4y^2+5y+2+8y^2+4y+5$.



**LEIÐBEININGAR**

## Sameinið samkynja liði.

1. Skref 1. Berið kennsl á samkynja liði.
2. Skref 2. Endurraðið stæðunni þannig að samkynja liðir standi saman.
3. Skref 3. Leggið stuðlana saman eða dragið þá frá og haldið sömu breytu fyrir hvern flokk samkynja liða.

## Þýðið orðalag yfir á algebrustæðu

Í síðasta hluta töldum við upp mörg reikniaðgerðartákn sem notuð eru í algebru. Síðan þýddum við stæður og jöfnur yfir á íslensk orðasambönd og setningar. Nú snúum við ferlinu við og þýðum íslenskt orðalag yfir á algebrustæður. Táknin og breyturnar sem við höfum fjallað um hjálpa okkur við það. Tafla 1.5 dregur þau saman.

Tafla 1.5

| Reikniaðgerð | Orðalag | Stæða |
|---|---|---|
| Samlagning | *a plús b summa*<br>$a$ og b<br>$a$ aukið um b b meira en<br>$a$<br>samanlagt $a$ og b b lagt við<br>$a$ | $a+b$ |
| Frádráttur | $a$ mínus b mismunur<br>$a$ og b<br>$a$ minnkað um b b minna en<br>$a$<br>b dregið frá $a$ | $a-b$ |
| Margföldun | $a$ sinnum b margfeldi<br>$a$ og b tvöfalt<br>$a$ | $a\cdot b, ab, a(b), (a)(b)$<br>2a |
| Deiling | $a$ deilt með b kvóti<br>$a$ og b hlutfall<br>$a$ og b b gengur upp í<br>$a$ | $a\div b, a/b, \frac{a}{b}, b\overline{)a}$ |

Skoðið vel þetta orðalag fyrir reikniaðgerðirnar fjórar:

**summa** *a og b*
**mismunur** *a og b*
**margfeldi** *a og b*
**kvóti** *a og b*

1

Hvert orðasamband segir okkur að reikna eigi með tveimur tölum. Tölurnar standa hvor sínum megin við orðið „og“.

---

**SÝNIDÆMI 1.25**

Þýðið hvert orðalag yfir á algebrustæðu: ⓐ mismunur $17\,x$ og $5$ ⓑ kvóti $10\,x^2$ og $7$.

## Lausn

1. ⓐ Lykilorðið er mismunur, sem sýnir að reikniaðgerðin er frádráttur. Leitið að tölunum sem standa hvor sínum megin við orðið „og“ til að sjá hvaða tölur á að draga hvora frá annarri.

   *mismunurinn á* $17x$ *og* $5$
   $17x$ mínus $5$
   $17x - 5$

2. ⓑ Lykilorðið er „kvóti“, sem sýnir að reikniaðgerðin er deiling.

   kvóti $10x^2$ *og* $7$
   deilið $10x^2$ með $7$
   $10x^2 \div 7$

Þetta má einnig skrifa $10\,x^2/7$ eða $\frac{10\,x^2}{7}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.49**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ mismunur $14\,x^2$ og $13$ ⓑ kvóti $12x$ og $2$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.50**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ summa $17\,y^2$ og $19$ ⓑ margfeldi $7$ og $y$.

Hve gömul verðið þið eftir átta ár? Hver verður aldur ykkar þá, átta árum hærri en nú? Lögðuð þið 8 við núverandi aldur? Orðalagið „8 meira en núverandi aldur“ merkir að sú tala sé lögð við aldurinn. Hve gömul voruð þið fyrir sjö árum? Þá voruð þið 7 árum yngri en nú. Þið dragið 7 frá núverandi aldri. Orðalagið „7 minna en núverandi aldur“ merkir að sú tala sé dregin frá honum.

**SÝNIDÆMI 1.26**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ Sautján meira en y ⓑ Níu minna en $9x^2$.

## Lausn

1. ⓐ Lykilorðin eru meira en. Þau sýna að reikniaðgerðin er samlagning. Meira en merkir „lagt við“.

   Sautján meira en $y$
   Sautján lagt við $y$
   $y+17$

2. ⓑ Lykilorðin eru minna en. Þau sýna að draga á frá. Minna en merkir „dregið frá“.

   Níu minna en $9x^2$
   Níu dregið frá $9x^2$
   $9x^2-9$

**REYNIÐ SJÁLF 1.51**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ Ellefu meira en $x$ ⓑ Fjórtán minna en $11a$.

**REYNIÐ SJÁLF 1.52**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ 13 meira en z ⓑ 18 minna en 8x.

**SÝNIDÆMI 1.27**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ fimm sinnum summan af m og n ⓑ summan af fimm sinnum m og n.

## Lausn

Tvö orð vísa til reikniaðgerða: sinnum segir okkur að margfalda og summa segir okkur að leggja saman.

1. ⓐ Af því að við margföldum 5 sinnum summuna þurfum við sviga utan um summuna af m og n, $(m+n)$. Það tryggir að summan sé reiknuð fyrst. (Munið forgangsröð reikniaðgerða.)

   fimm sinnum summan af $m$ og $n$
   $5\ (m+n)$

**2.** ⓑ Til að finna liðina í summu leitum við að orðinu og. Hér leggjum við saman fimm sinnum m og n.



summan af fimm sinnum $m$ og $n$
$5m+n$

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.53**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ fjórum sinnum summan af p og q ⓑ summan af fjórum sinnum p og q.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.54**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu: ⓐ mismunur tvöfalds x og 8, ⓑ tvöfaldur mismunur x og 8.

Síðar í námskeiðinu notum við kunnáttu okkar í algebru til að leysa hagnýt dæmi. Fyrsta skrefið verður að þýða orðalag yfir á algebrustæðu. Næstu tvö sýnidæmi sýna hvernig það er gert.

---

**SÝNIDÆMI 1.28**

Lengd rétthyrnings er 6 minni en breiddin. Látum w tákna breidd rétthyrningsins. Skrifið stæðu fyrir lengd hans.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Skrifið orðalag um lengd rétthyrningsins. | 6 minna en breiddin |
| Setjið $w$ í stað „breiddarinnar“. | 6 minna en $w$ |
| Endurritið „minna en“ sem „dregið frá“. | 6 dregið frá $w$ |
| Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu. | $w-6$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.55**

Lengd rétthyrnings er 7 minni en breiddin. Látum w tákna breidd rétthyrningsins. Skrifið stæðu fyrir lengd hans.

---

**REYNIÐ SJÁLF 1.56**

Breidd rétthyrnings er 6 minni en lengdin. Látum l tákna lengd rétthyrningsins. Skrifið stæðu fyrir breidd hans.

**SÝNIDÆMI 1.29**

June er með tíusenta og 25 senta myntir í veskinu. Fjöldi tíusenta mynta er þremur færri en fjórfaldur fjöldi 25 senta mynta. Látum q tákna fjölda 25 senta mynta. Skrifið stæðu fyrir fjölda tíusenta mynta.

### Lausn

| | |
|---|---|
| Skrifið orðalag um fjölda tíusenta mynta. | þremur færri en fjórfaldur fjöldi 25 senta mynta |
| Setjið $q$ í stað fjölda 25 senta mynta. | 3 minna en 4 sinnum $q$ |
| Þýðið „4 sinnum $q$“. | 3 minna en $4\,q$ |
| Þýðið orðalagið yfir á algebrustæðu. | $4\,q - 3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 1.57**

Geoffrey er með tíusenta og 25 senta myntir í vasanum. Fjöldi tíusenta mynta er átta færri en fjórfaldur fjöldi 25 senta mynta. Látum q tákna fjölda 25 senta mynta. Skrifið stæðu fyrir fjölda tíusenta mynta.

**REYNIÐ SJÁLF 1.58**

Lauren er með tíusenta og fimm senta myntir í veskinu. Fjöldi tíusenta mynta er þremur fleiri en sjöfaldur fjöldi fimm senta mynta. Látum n tákna fjölda fimm senta mynta. Skrifið stæðu fyrir fjölda tíusenta mynta.

## Verkefni úr hluta 1.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Notið breytur og algebrutákn**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið þýða úr táknmáli algebrunnar yfir á íslensku.

83.

$$16 - 9$$

84.

$$3 \cdot 9$$

85.

$$28 \div 4$$

86.

$$x + 11$$

87.

$$(2)(7)$$

1

88.

$$(4)(8)$$

89.

$$14<21$$

90.

$$17<35$$

91.

$$36\geq 19$$

92.

$$6n=36$$

93.

$$y-1>6$$

94.

$$y-4>8$$

95.

$$2\leq 18\div 6$$

96.

$$a\neq 1\cdot 12$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða hvort hvert atriði sé stæða eða jafna.

97.

$$9\cdot 6=54$$

98.

$$7\cdot 9=63$$

99.

$$5\cdot 4+3$$

100.

$$x+7$$

101.

$$x+9$$

102.

$$y-5=25$$

**Einfaldið stæður samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

103.

$$5^3$$

104.

$$8^3$$

105.

$$2^8$$

106.

$$10^5$$

Einfaldið samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða í eftirfarandi verkefnum.

**107.** ⓐ $3+8\cdot 5$ ⓑ $(3+8)\cdot 5$

**108.** ⓐ $2+6\cdot 3$ ⓑ $(2+6)\cdot 3$

109.

$$2^3-12\div(9-5)$$

110.

$$3^2-18\div(11-5)$$

111.

$$3\cdot 8+5\cdot 2$$

112.

$$4\cdot 7+3\cdot 5$$

113.

$$2+8(6+1)$$

114.

$$4+6(3+6)$$

1

115.

$$4 \cdot 12/8$$

116.

$$2 \cdot 36/6$$

117.

$$(6+10) \div (2+2)$$

118.

$$(9+12) \div (3+4)$$

119.

$$20 \div 4+6 \cdot 5$$

120.

$$33 \div 3+8 \cdot 2$$

121.

$$3^2+7^2$$

122.

$$(3+7)^2$$

123.

$$3(1+9 \cdot 6)-4^2$$

124.

$$5(2+8 \cdot 4)-7^2$$

125.

$$2[1+3(10-2)]$$

126.

$$5[2+4(3-2)]$$

**Reiknið gildi stæðu**

Reiknið gildi eftirfarandi stæðna í verkefnunum hér á eftir.

**127.** $7x+8$ þegar $x=2$

**128.** $8x-6$ þegar $x=7$

**129.** $x^2$ þegar $x=12$

**130.** $x^3$ þegar $x=5$

**131.** $x^5$ þegar $x=2$

**132.** $4^x$ þegar $x=2$

**133.** $x^2+3x-7$ þegar $x=4$

**134.** $6x+3y-9$ þegar
$x=6, y=9$

**135.** $(x-y)^2$ þegar
$x=10, y=7$

**136.** $(x+y)^2$ þegar $x=6, y=9$

**137.** $a^2+b^2$ þegar $a=3, b=8$

**138.** $r^2-s^2$ þegar $r=12, s=5$

**139.** $2l+2w$ þegar
$l=15, w=12$

**140.** $2l+2w$ þegar
$l=18, w=14$

**Einfaldið stæður með því að sameina samkynja liði**
Finnið stuðul hvers liðar í eftirfarandi verkefnum.

**141.** $8a$

**142.** $13m$

143.

$$5r^2$$

144.

$$6x^3$$

Finnið samkynja liði í eftirfarandi verkefnum.

145.

$$x^3, 8x, 14, 8y, 5, 8x^3$$

146.

$$6z, 3w^2, 1, 6z^2, 4z, w^2$$

147.

$$9a, a^2, 16, 16b^2, 4, 9b^2$$

148.

$$3,25r^2,10s,10r,4r^2,3s$$

1

Finnið liðina í hverri stæðu í eftirfarandi verkefnum.

149.

$$15x^2+6x+2$$

150.

$$11x^2+8x+5$$

151.

$$10y^3+y+2$$

152.

$$9y^3+y+5$$

Einfaldið eftirfarandi stæður með því að sameina samkynja liði.

153.

$$10x+3x$$

154.

$$15x+4x$$

155.

$$4c+2c+c$$

156.

$$6y+4y+y$$

157.

$$7u+2+3u+1$$

158.

$$8d+6+2d+5$$

159.

$$10a+7+5a-2+7a-4$$

160.

$$7c+4+6c-3+9c-1$$

161.

$$3x^2+12x+11+14x^2+8x+5$$

162.

$$5b^2+9b+10+2b^2+3b-4$$

**Þýðið orðalag yfir á algebrustæðu**

Þýðið orðalagið yfir á algebrustæður í eftirfarandi verkefnum.

**163.** mismunur 14 og 9

**164.** mismunur 19 og 8

**165.** margfeldi 9 og 7

**166.** margfeldi 8 og 7

**167.** kvóti 36 og 9

**168.** kvóti 42 og 7

**169.** summa 8x og 3x

**170.** summa 13x og 3x

**171.** kvóti y og 3

**172.** kvóti y og 8

**173.** áttfaldur mismunur y og níu

**174.** sjöfaldur mismunur y og eins

**175.** Eric er með geisladiska með rokki og klassískri tónlist í bílnum. Fjöldi rokkdiska er 3 meiri en fjöldi klassískra diska. Látum c tákna fjölda klassískra diska. Skrifið stæðu fyrir fjölda rokkdiska.

**176.** Fjöldi stúlkna í 2. bekk er 4 minni en fjöldi drengja. Látum b tákna fjölda drengja. Skrifið stæðu fyrir fjölda stúlkna.

**177.** Greg er með fimm senta og eins senta myntir í vasanum. Fjöldi eins senta mynta er sjö minni en tvöfaldur fjöldi fimm senta mynta. Látum *n* tákna fjölda fimm senta mynta. Skrifið stæðu fyrir fjölda eins senta mynta.

**178.** Jeannette er með $5 og $10 seðla í veskinu. Fjöldi fimm dala seðla er þremur meiri en sexfaldur fjöldi tíu dala seðla. Látum t tákna fjölda tíu dala seðla. Skrifið stæðu fyrir fjölda fimm dala seðla.

1

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**179.** **Bílatrygging** Justins er með $750 eigin áhættu fyrir hvert tjón. Það merkir að hann greiðir $750 og tryggingafélagið allan kostnað umfram $750. Ef Justin leggur fram tjónskröfu að fjárhæð $2.100:

1. ⓐ hve mikið greiðir hann?
2. ⓑ hve mikið greiðir tryggingafélagið?

**180.** **Heimilistrygging** Armandos er með $2.500 eigin áhættu fyrir hvert tjón. Það merkir að hann greiðir $2.500 og tryggingafélagið allan kostnað umfram $2.500. Ef Armando leggur fram tjónskröfu að fjárhæð $19.400:

1. ⓐ hve mikið greiðir hann?
2. ⓑ hve mikið greiðir tryggingafélagið?

### *Ritunarverkefni*

**181.** Útskýrið muninn á stæðu og jöfnu.

**182.** Hvers vegna er mikilvægt að fylgja forgangsröð reikniaðgerða þegar stæða er einfölduð?

**183.** Útskýrið hvernig þið finnið samkynja liði í stæðunni $8a^2+4a+9-a^2-1$.

**184.** Útskýrið muninn á orðalaginu „4 sinnum summan af x og y“ og „summan af 4 sinnum x og y“.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Notið þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað breytur og algebrutákn. | | | |
| einfaldað stæður með því að beita forgangsröð reikniaðgerða. | | | |
| reiknað gildi stæðu. | | | |
| greint og sameinað samkynja liði. | | | |
| þýtt orðalag yfir á algebrustæður. | | | |

ⓑ Þið hafið farið yfir gátlistann. Hvað ætlið þið nú að gera til að verða örugg með öll markmiðin?

# 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna



**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

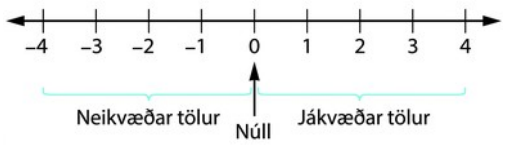
- Notkun neikvæðra talna og samlagningarandhverfa
- Einföldun stæða með tölugildi
- Samlagning heiltalna
- Frádráttur heiltalna

**UNDIRBÚNINGUR 1.3**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta er að finna í kaflanum Heiltölur í bókinni Prealgebra.

## Notkun neikvæðra talna og samlagningarandhverfa

Hingað til höfum við aðeins unnið með talningartölur og heiltölur sem eru núll eða jákvæðar. Ef þið hafið einhvern tíma fundið fyrir hitastigi undir frostmarki eða tekið óvart meira út af bankareikningi en innistæðan nam, þekkið þið þó þegar neikvæðar tölur. Neikvæðar tölur eru tölur minni en 0. Neikvæðar tölur eru vinstra megin við núll á talnalínunni. Sjá mynd 1.6.

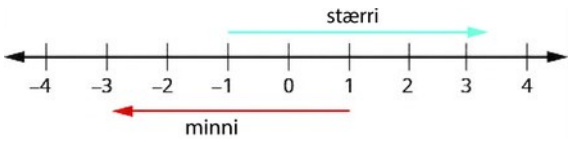



Mynd 1.6 Talnalínan sýnir staðsetningu jákvæðra og neikvæðra talna.

Örvarnar á endum talnalínunnar sýna að tölurnar halda endalaust áfram. Engin jákvæð tala er stærst og engin neikvæð tala er minnst.

Er núll jákvæð eða neikvæð tala? Tölur stærri en núll eru jákvæðar og tölur minni en núll eru neikvæðar. Núll er hvorki jákvætt né neikvætt.

Skoðum röð talnanna á talnalínunni. Frá vinstri til hægri hækkar gildi talnanna. Frá hægri til vinstri lækkar gildi þeirra. Sjá mynd 1.7.




Mynd 1.7 Gildi talna á talnalínu hækkar frá vinstri til hægri og lækkar frá hægri til vinstri.

**STÆRÐFRÆÐI MEÐ ÁÞREIFANLEGUM HJÁLPARGÖGNUM**

Verkefnið „Talnalína – 2. hluti“ hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á heiltölum.

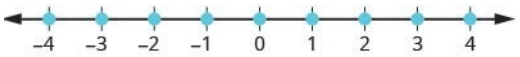
Munið að við notum þessa táknritun:

1

*$a < b$ (lesið „a er minna en b“) þegar a er vinstra megin við b á talnalínunni.*

*$a > b$ (lesið „a er stærra en b“) þegar a er hægra megin við b á talnalínunni.*

Nú þurfum við að lengja talnalínuna sem sýndi núll og jákvæðar heiltölur þannig að hún nái einnig yfir neikvæðar tölur. Tölurnar sem merktar eru með punktum á mynd 1.8 kallast heiltölur. Heiltölurnar eru $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$



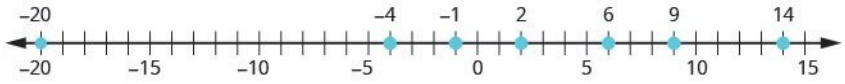

Mynd 1.8 Allar merktu tölurnar kallast heiltölur.

**SÝNIDÆMI 1.30**

Raðið tölunum í hverju talnapari hér á eftir með því að nota < eða >: ⓐ $14 ___ 6$ ⓑ $-1 ___ 9$ ⓒ $-1 ___ -4$ ⓓ $2 ___ -20$.

## Lausn

Gagnlegt getur verið að styðjast við talnalínuna á myndinni.




| | |
|---|---|
| ⓐ 14 er hægra megin við 6 á talnalínunni. | $14 ___ 6$<br>$14 > 6$ |
| ⓑ −1 er vinstra megin við 9 á talnalínunni. | $-1 ___ 9$<br>$-1 < 9$ |
| ⓒ −1 er hægra megin við −4 á talnalínunni. | $-1 ___ -4$<br>$-1 > -4$ |
| ⓓ 2 er hægra megin við −20 á talnalínunni. | $2 ___ -20$<br>$2 > -20$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.59**

Raðið tölunum í hverju talnapari hér á eftir með því að nota < eða >: ⓐ $15 ___ 7$ ⓑ $-2 ___ 5$ ⓒ $-3 ___ -7$
ⓓ $5 ___ -17$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.60**

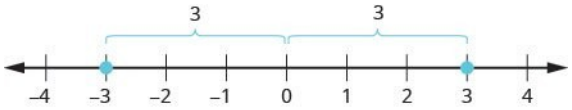
Raðið tölunum í hverju talnapari hér á eftir með því að nota < eða >: ⓐ $8 ___ 13$ ⓑ $3 ___ -4$ ⓒ $-5 ___ -2$
ⓓ $9 ___ -21$.

Þið hafið ef til vill tekið eftir því að á talnalínunni eru neikvæðu tölurnar spegilmynd þeirra jákvæðu með núll í miðjunni. Tölurnar 2 og $-2$ eru jafnfjarlægar núlli og kallast því samlagningarandhverfur. Samlagningarandhverfa 2 er $-2$, og samlagningarandhverfa $-2$ er 2.

**SAMLAGNINGARANDHVERFA**

Samlagningarandhverfa tölu er sú tala sem er jafnfjarlæg núlli á talnalínunni en hinum megin við núll.

Mynd 1.9 skýrir skilgreininguna.




Mynd 1.9 Samlagningarandhverfa 3 er $-3$.

Í algebru getur sama táknið stundum haft mismunandi merkingu. Rétt eins og með sum orð ræðst merkingin af því hvernig táknið er notað. Þið hafið séð táknið „–“ notað á þrjá mismunandi vegu.

Tafla 1.6

| | |
|---|---|
| $10-4$ | Milli tveggja talna táknar það frádrátt. Við lesum $10-4$ sem „10 mínus 4.“ |
| $-8$ | Framan við tölu táknar það neikvæða tölu. Við lesum −8 sem „mínus átta“. |
| $-x$ | Framan við breytu táknar það samlagningarandhverfu. Við lesum $-x$ sem „samlagningarandhverfu $x$.“ |
| $-(-2)$ | Hér eru tvö „–“-merki. Merkið innan sviganna segir að talan sé mínus 2. Merkið utan sviganna segir að taka eigi samlagningarandhverfu −2. Við lesum $-(-2)$ sem „samlagningarandhverfu tölunnar mínus tveir“. |

**TÁKNRITUN SAMLAGNINGARANDHVERFU**

$-a$ táknar samlagningarandhverfu tölunnar a.

Táknritunin $-a$ er lesin „samlagningarandhverfa a“.

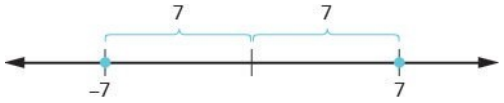
**SÝNIDÆMI 1.31**

Finnið: ⓐ samlagningarandhverfu $7$ ⓑ samlagningarandhverfu $-10$ ⓒ $-(-6)$.

1

## Lausn

ⓐ $-7$ er jafnfjarri 0 og 7 en hinum megin við 0.




Samlagningarandhverfa 7 er $-7$.

ⓑ 10 er jafnfjarri 0 og $-10$ en hinum megin við 0.




Samlagningarandhverfa $-10$ er 10.

ⓒ $-(-6)$ (samlagningarandhverfa $-6$).




Samlagningarandhverfa $-(-6)$ er 6.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.61**

Finnið: ⓐ samlagningarandhverfu $4$ ⓑ samlagningarandhverfu $-3$ ⓒ $-(-1)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.62**

Finnið: ⓐ samlagningarandhverfu $8$ ⓑ samlagningarandhverfu $-5$ ⓒ $-(-5)$.

Með samlagningarandhverfum getum við nú skilgreint heiltölur. Núll og jákvæðar heiltölur ásamt samlagningarandhverfum sínum kallast heiltölur. Heiltölurnar eru
$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$

**HEILTÖLUR**

Núll og jákvæðar heiltölur ásamt samlagningarandhverfum sínum kallast heiltölur.

Heiltölurnar eru

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Þegar við finnum samlagningarandhverfu breytu verðum við að gæta sérstakrar varúðar. Án þess að vita hvort breytan stendur fyrir jákvæða eða neikvæða tölu vitum við ekki hvort $-x$ er jákvætt eða neikvætt. Þetta sést í sýnidæmi 1.32.

**SÝNIDÆMI 1.32**

Reiknið ⓐ $-x$, þegar $x = 8$ ⓑ $-x$, þegar $x = -8$.

## Lausn

**1.** ⓐ

| Að reikna gildið þegar $x = 8$ merkir að setja 8 í stað $x$. | | |
|---|---|---|
| | | $-x$ |
| Setjið 8 í stað $x$. | Setjið 8 í stað $x$. | $-(8)$ |
| Skrifið samlagningarandhverfu 8. | | $-8$ |

**2.** ⓑ

| Að reikna gildið þegar $x = -8$ merkir að setja $-8$ í stað $-x$. | | |
|---|---|---|
| | | $-x$ |
| Setjið $-8$ inn fyrir $x$. | Setjið $-8$ inn fyrir $x$. | $-(-8)$ |
| Skrifið samlagningarandhverfu $-8$. | | 8 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.63**

Reiknið $-n$, þegar ⓐ $n=4$ ⓑ $n=-4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.64**

Reiknið $-m$, þegar ⓐ $m=11$ ⓑ $m=-11$.

## Einföldun stæða með tölugildi

Við sáum að tölur eins og 2 og $-2$ eru samlagningarandhverfur vegna þess að þær eru jafnfjarlægar 0 á talnalínunni. Báðar eru tvær einingar frá 0. Fjarlægðin milli 0 og hvaða tölu sem er á talnalínunni kallast tölugildi þeirrar tölu.

**TÖLUGILDI**

Tölugildi tölu er fjarlægð hennar frá 0 á talnalínunni.

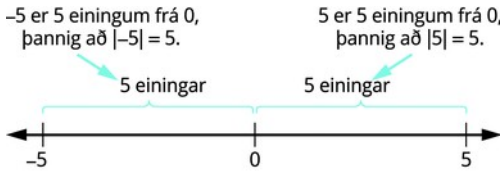
Tölugildi tölunnar n er ritað $|n|$.

Til dæmis:

- $-5$ er 5 einingum frá 0, og því $|-5|=5$.
- 5 er 5 einingum frá 0, og því $|5|=5$.

Mynd 1.10 skýrir þetta.

1




Mynd 1.10 Heiltölurnar $5$ og $-5$ eru $5$ einingum frá $0$.

Tölugildi tölu er aldrei neikvætt, enda getur fjarlægð ekki verið neikvæð. Eina talan sem hefur tölugildið núll er núll sjálft, því fjarlægðin frá $0$ til $0$ á talnalínunni er núll einingar.

---

**REGLA UM TÖLUGILDI**

$|n| \geq 0$ fyrir allar tölur

Tölugildi eru alltaf stærri en eða jöfn núlli!

Stærðfræðingar orða þetta nákvæmar: „Tölugildi eru alltaf óneikvæð.“ Óneikvætt merkir stærra en eða jafnt núlli.

---

**SÝNIDÆMI 1.33**

Einfaldið: ⓐ $|3|$ ⓑ $|-44|$ ⓒ $|0|$.

## Lausn

Tölugildi tölu er fjarlægðin frá tölunni að núlli. Fjarlægð er aldrei neikvæð og því er tölugildi aldrei neikvætt.

ⓐ $|3|$

$3$

ⓑ $|-44|$

$44$

ⓒ

$$|0|$$

$$0$$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.65**

Einfaldið: ⓐ $|4|$ ⓑ $|-28|$ ⓒ $|0|$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.66**

Einfaldið: ⓐ $|-13|$ ⓑ $|47|$ ⓒ $|0|$.

Í næsta sýnidæmi röðum við stæðum með tölugildum. Munið að jákvæðar tölur eru alltaf stærri en neikvæðar tölur!

**SÝNIDÆMI 1.34**

Setjið $<, >,$ eða $=$ milli talnanna í hverju talnapari hér á eftir:

ⓐ $|-5| ___ -|-5|$ ⓑ $8 ___ -|-8|$ ⓒ $-9 ___ -|-9|$ ⓓ $-(-16) ___ -|-16|$

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Einfaldið. Raðið. | $\begin{aligned} \lvert-5\rvert &___ -\lvert-5\rvert \\ 5 &___ -5 \\ 5 &> -5 \\ \lvert-5\rvert &> -\lvert-5\rvert \end{aligned}$ |
| ⓑ Einfaldið. Raðið. | $\begin{aligned} 8 &___ -\lvert-8\rvert \\ 8 &___ -8 \\ 8 &> -8 \\ 8 &> -\lvert-8\rvert \end{aligned}$ |
| ⓒ Einfaldið. Raðið. | $\begin{aligned} -9 &___ -\lvert-9\rvert \\ -9 &___ -9 \\ -9 &= -9 \\ -9 &= -\lvert-9\rvert \end{aligned}$ |
| ⓓ Einfaldið. Raðið. | $\begin{aligned} -(-16) &___ -\lvert-16\rvert \\ 16 &___ -16 \\ 16 &> -16 \\ -(-16) &> -\lvert-16\rvert \end{aligned}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.67**

Setjið $<, >$ eða $=$ milli talnanna í hverju talnapari hér á eftir: ⓐ $|-9| ___ -|-9|$ ⓑ $2 ___ -|-2|$ ⓒ $-8 ___ |-8|$ ⓓ $-(-9) ___ -|-9|$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.68**

Setjið $<, >$ eða $=$ milli talnanna í hverju talnapari hér á eftir: ⓐ $7 ___ -|-7|$ ⓑ $-(-10) ___ -|-10|$ ⓒ $|-4| ___ -|-4|$ ⓓ $-1 ___ |-1|$.

Nú bætum við tölugildisstrikum við sviga og önnur afmörkunartákn. Þegar við fylgjum forgangsröð reikniaðgerða einföldum við fyrst stæðuna milli tölugildisstrikanna eins mikið og unnt er og finnum síðan tölugildi niðurstöðunnar.

1

**SVIGAR OG ÖNNUR AFMÖRKUNARTÁKN**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Hringsvigar | $()$ | Slaufusvigar | $\{\}$ |
| Hornklofar | $[]$ | Tölugildi | $\lvert\ \rvert$ |

Í næsta sýnidæmi einföldum við fyrst stæðurnar milli tölugildisstrikanna, rétt eins og stæður innan sviga.

**SÝNIDÆMI 1.35**

Einfaldið: $24-\lvert 19-3(6-2)\rvert$.

## Lausn

| | $24-\lvert 19-3(6-2)\rvert$ |
|---|---|
| Reiknið fyrst innan sviganna: dragið 2 frá 6. | $24-\lvert 19-3(4)\rvert$ |
| Margfaldið 3(4). | $24-\lvert 19-12\rvert$ |
| Dragið frá milli tölugildisstrikanna. | $24-\lvert 7\rvert$ |
| Finnið tölugildið. | $24-7$ |
| Dragið frá. | $17$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.69**

Einfaldið: $19-\lvert 11-4(3-1)\rvert$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.70**

Einfaldið: $9-\lvert 8-4(7-5)\rvert$.

**SÝNIDÆMI 1.36**

Reiknið: ⓐ $\lvert x\rvert$ þegar $x=-35$ ⓑ $\lvert -y\rvert$ þegar $y=-20$ ⓒ $-\lvert u\rvert$ þegar $u=12$ ⓓ $-\lvert p\rvert$ þegar $p=-14$.

## Lausn

ⓐ $\lvert x\rvert$ þegar $x=-35$

| | |
|---|---|
| | $\lvert x \rvert$ |
| Setjið $-35$ í stað $x$. | $\lvert -35 \rvert$ |
| Finnið tölugildið. | 35 |

ⓑ $\lvert -y \rvert$ þegar $y = -20$

| | |
|---|---|
| | $\lvert -y \rvert$ |
| Setjið $-20$ í stað $y$. | $\lvert -(-20) \rvert$ |
| Einfaldið. | $\lvert 20 \rvert$ |
| Finnið tölugildið. | 20 |

ⓒ $-\lvert u \rvert$ þegar $u = 12$

| | |
|---|---|
| | $-\lvert u \rvert$ |
| Setjið $12$ í stað $u$. | $-\lvert 12 \rvert$ |
| Finnið tölugildið. | $-12$ |

ⓓ $-\lvert p \rvert$ þegar $p = -14$

| | |
|---|---|
| | $-\lvert p \rvert$ |
| Setjið $-14$ í stað p. | $-\lvert -14 \rvert$ |
| Finnið tölugildið. | $-14$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.71**

Reiknið: ⓐ $\lvert x \rvert$ þegar $x = -17$ ⓑ $\lvert -y \rvert$ þegar $y = -39$ ⓒ $-\lvert m \rvert$ þegar $m = 22$ ⓓ $-\lvert p \rvert$ þegar $p = -11$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.72**

Reiknið: ⓐ $\lvert y \rvert$ þegar $y = -23$ ⓑ $\lvert -y \rvert$ þegar $y = -21$ ⓒ $-\lvert n \rvert$ þegar $n = 37$ ⓓ $-\lvert q \rvert$ þegar $q = -49$.

## Samlagning heiltalna

1

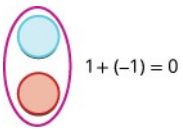
Flestir nemendur kunna vel að leggja saman og draga frá jákvæðar tölur. Samlagning og frádráttur með bæði jákvæðum og neikvæðum tölum getur hins vegar reynst erfiðari.

### STÆRÐFRÆÐI MEÐ ÁÞREIFANLEGUM HJÁLPARGÖGNUM

Verkefnið „Samlagning formerktra talna“ hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á samlagningu heiltalna.

Við notum tvílitar talnaskífur til að sýna samlagningu og frádrátt neikvæðra talna, svo þið getið séð aðferðirnar fyrir ykkur í stað þess að leggja reglurnar á minnið.

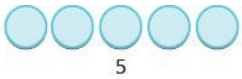
Annar liturinn, blár, táknar jákvæðar tölur. Hinn liturinn, rauður, táknar neikvæðar tölur. Ein jákvæð talnaskífa og ein neikvæð talnaskífa hafa saman gildið núll. Þær mynda núllpar og gildi parsins er núll.




Við notum talnaskífurnar til að sýna fjögur samlagningardæmi með tölunum $5, -5$ og $3, -3$.

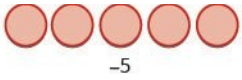
$$5+3 \qquad -5+(-3) \qquad -5+3 \qquad 5+(-3)$$

Til að leggja saman $5+3$, lítum við á $5+3$ sem summu $5$ og $3$.

| | |
|---|---|
| Við byrjum með 5 jákvæðar talnaskífur. |   |
| Síðan bætum við við 3 jákvæðum talnaskífum. |   |
| Nú höfum við 8 jákvæðar talnaskífur. Summa 5 og 3 er 8. |   |

Nú leggjum við saman $-5+(-3)$. Takið eftir því sem er líkt með þessu og síðasta dæminu $5+3=8$.

Til að leggja saman $-5+(-3)$, lítum við á þetta sem summuna $-5$ og $-3$.

| | |
|---|---|
| Við byrjum með 5 neikvæðar talnaskífur. |   |
| Síðan bætum við við 3 neikvæðum talnaskífum. |   |
| Nú höfum við 8 neikvæðar talnaskífur. Summa −5 og −3 er −8. |   |

Hvað var líkt með þessum fyrstu tveimur dæmum?

- Í fyrra dæminu er 5 jákvæðum talnaskífum og 3 jákvæðum talnaskífum bætt saman; allar skífurnar eru jákvæðar.
- Í seinna dæminu er 5 neikvæðum talnaskífum og 3 neikvæðum talnaskífum bætt saman; allar skífurnar eru neikvæðar.

Í báðum tilvikum fengum við 8: annaðhvort 8 jákvæðar eða 8 neikvæðar talnaskífur.

Þegar formerkin voru eins voru allar talnaskífurnar eins á litinn og því lögðum við þær saman.



8 jákvæðar talnaskífur
$5+3=8$



8 neikvæðar talnaskífur
$-5+(-3)=-8$

**SÝNIDÆMI 1.37**

Leggið saman: ⓐ $1+4$ ⓑ $-1+(-4)$.

## Lausn

ⓐ



$1+4$

$5$

1 jákvæð talnaskífa ásamt 4 jákvæðum talnaskífum gefur 5 jákvæðar talnaskífur.

ⓑ



$-1+(-4)$

$-5$

1 neikvæð talnaskífa ásamt 4 neikvæðum talnaskífum gefur 5 neikvæðar talnaskífur.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.73**

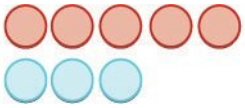
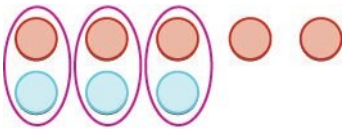
Leggið saman: ⓐ $2+4$ ⓑ $-2+(-4)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.74**

Leggið saman: ⓐ $2+5$ ⓑ $-2+(-5)$.

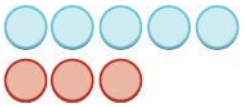
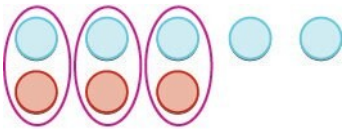
Hvað gerist þegar formerkin eru ólík? Leggjum saman $-5+3$. Þetta er summa $-5$ og 3. Þegar talnaskífurnar voru eins á litinn lögðum við þær í röð. Þegar þær eru ekki eins á litinn röðum við skífum annars litarins undir skífur hins.

1

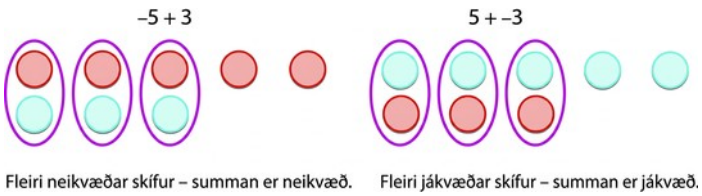
| | |
|---|---|
| | −5 + 3 táknar summu −5 og 3. |
| Við byrjum með 5 neikvæðar talnaskífur. |  |
| Síðan bætum við við 3 jákvæðum talnaskífum. |  |
| Við fjarlægjum öll núllpör. |  |
| Eftir eru 2 neikvæðar talnaskífur. |  2 neikvæðar talnaskífur |
| Summa −5 og 3 er −2. | −5 + 3 = −2 |

Takið eftir að neikvæðu talnaskífurnar voru fleiri en þær jákvæðu og niðurstaðan varð því neikvæð.

Leggjum nú saman síðustu samsetninguna, $5+(-3)$.

| | |
|---|---|
| | 5 + (−3) táknar summu 5 og −3. |
| Við byrjum með 5 jákvæðar talnaskífur. |  |
| Síðan bætum við við 3 neikvæðum talnaskífum. |  |
| Við fjarlægjum öll núllpör. |  |
| Eftir eru 2 jákvæðar talnaskífur. |  2 jákvæðar talnaskífur |
| Summa 5 og −3 er 2. | 5 + (−3) = 2 |

Þegar talnaskífur eru notaðar til að sýna samlagningu jákvæðra og neikvæðra heiltalna sést auðveldlega hvort jákvæðu eða neikvæðu skífurnar eru fleiri. Því vitum við hvort summan verður jákvæð eða neikvæð.




**SÝNIDÆMI 1.38**

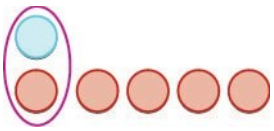
Leggið saman: ⓐ $-1+5$ ⓑ $1+(-5)$.

## Lausn

ⓐ

| | $-1+5$ |
|---|---|
| |  |
| Jákvæðu talnaskífurnar eru fleiri og summan er því jákvæð. | 4 |

ⓑ

| | $1+(-5)$ |
|---|---|
| |  |
| Neikvæðu talnaskífurnar eru fleiri og summan er því neikvæð. | $-4$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.75**

Leggið saman: ⓐ $-2+4$ ⓑ $2+(-4)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.76**

Leggið saman: ⓐ $-2+5$ ⓑ $2+(-5)$.

Nú þegar við höfum lagt saman litlar jákvæðar og neikvæðar heiltölur með líkani getum við séð það fyrir okkur þegar við einföldum dæmi með hvaða tölum sem er.

Þegar leggja þarf saman tölur eins og $37+(-53)$, viljið þið tæplega telja upp 37 bláar talnaskífur og 53 rauðar. Getið þið séð fyrir ykkur hvernig dæmið væri leyst með líkaninu?

Sjáið fyrir ykkur 37 bláar talnaskífur og 53 rauðar skífur í röð fyrir neðan þær. Rauðu (neikvæðu) skífurnar væru fleiri en þær bláu (jákvæðu) og því yrði summan neikvæð. Hve miklu fleiri væru rauðu skífurnar? Þar sem $53-37=16$, eru rauðu skífurnar 16 fleiri.

Því er summa $37+(-53)$ jöfn $-16$.

$$37+(-53)=-16$$

Prófum annað dæmi og leggjum saman $-74+(-27)$. Sjáið aftur fyrir ykkur 74 rauðar talnaskífur og 27 rauðar til viðbótar, alls 101 rauða skífu. Summan er því $-101$.

$$-74+(-27)=-101$$

Skoðum aftur niðurstöður ólíkra samlagninga á $5, -5$ og $3, -3$.

1

---

**SAMLAGNING JÁKVÆÐRA OG NEIKVÆÐRA HEILTALNA**

$$5+3$$
$$8$$
báðar jákvæðar, summan jákvæð

$$-5+(-3)$$
$$-8$$
báðar neikvæðar, summan neikvæð

Þegar formerkin eru eins eru allar talnaskífurnar eins á litinn og þá leggjum við þær saman.

$$-5+3$$
$$-2$$
ólík formerki, fleiri neikvæðar tölur, summan neikvæð

$$5+(-3)$$
$$2$$
ólík formerki, fleiri jákvæðar tölur, summan jákvæð

Þegar formerkin eru ólík mynda sumar talnaskífurnar núllpör. Þá drögum við frá til að finna hve margar verða eftir.

Sjáið líkanið fyrir ykkur þegar þið einfaldið stæðurnar í sýnidæmunum hér á eftir.

---

**SÝNIDÆMI 1.39**

Einfaldið: ⓐ $19+(-47)$ ⓑ $-14+(-36)$.

## Lausn

1. ⓐ Formerkin eru ólík og því drögum við 19 frá 47. Svarið verður neikvætt vegna þess að neikvæðu talnaskífurnar eru fleiri en þær jákvæðu.

$$19+(-47)$$
Leggið saman. $$-28$$

2. Formerkin eru eins og því leggjum við saman. Svarið verður neikvætt vegna þess að allar talnaskífurnar eru neikvæðar.

$$-14+(-36)$$
Leggið saman. $$-50$$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.77**

Einfaldið: ⓐ $-31+(-19)$ ⓑ $15+(-32)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.78**

Einfaldið: ⓐ $-42+(-28)$ ⓑ $25+(-61)$.

Aðferðirnar sem við höfum notað hingað til gilda einnig um flóknari dæmi eins og þau sem við höfum áður séð. Munið að fylgja forgangsröð reikniaðgerða!

**SÝNIDÆMI 1.40**

Einfaldið: $-5+3(-2+7)$.

### Lausn

| | $-5+3(-2+7)$ |
|---|---|
| Einfaldið innan sviganna. | $-5+3(5)$ |
| Margfaldið. | $-5+15$ |
| Leggið saman frá vinstri til hægri. | $10$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.79**

Einfaldið: $-2+5(-4+7)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.80**

Einfaldið: $-4+2(-3+5)$.

## Frádráttur heiltalna

**STÆRÐFRÆÐI MEÐ ÁÞREIFANLEGUM HJÁLPARGÖGNUM**

Verkefnið „Frádráttur formerktra talna“ hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á frádrætti heiltalna.

Við höldum áfram að nota talnaskífur til að sýna frádrátt. Munið að bláu skífurnar tákna jákvæðar tölur og þær rauðu neikvæðar tölur.

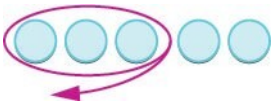
Þegar þið voruð yngri lásuð þið ef til vill “$5-3$” sem “$5$ að frádregnum $3$.” Með talnaskífum má hugsa um frádrátt á sama hátt!

Við sýnum fjögur frádráttardæmi með tölunum $5$ og $3$.

$$5-3 \qquad -5-(-3) \qquad -5-3 \qquad 5-(-3)$$

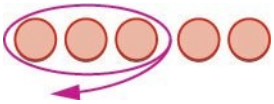
Til að draga frá $5-3$, umorðum við dæmið sem “$5$ að frádregnum $3$.”

1

| | |
|---|---|
| Við byrjum með 5 jákvæðar talnaskífur. |  |
| Við „tökum burt“ 3 jákvæðar talnaskífur. |  |
| Eftir eru 2 jákvæðar talnaskífur. | |
| Mismunur 5 og 3 er 2. | 2 |

Nú drögum við frá $-5-(-3)$. Takið eftir því sem er líkt með þessu og síðasta dæminu $5-3=2$.

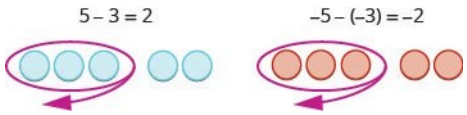
Til að draga frá $-5-(-3)$, umorðum við þetta sem “$-5$ að frádregnum $-3$”

| | |
|---|---|
| Við byrjum með 5 neikvæðar talnaskífur. |  |
| Við „tökum burt“ 3 neikvæðar talnaskífur. |  |
| Eftir eru 2 neikvæðar talnaskífur. | |
| Mismunur −5 og −3 er −2. | −2 |

Takið eftir að þessi tvö dæmi eru mjög lík. Í fyrra dæminu drögum við 3 jákvæðar talnaskífur frá 5 jákvæðum og fáum 2 jákvæðar talnaskífur.

Í seinna dæminu drögum við 3 neikvæðar talnaskífur frá 5 neikvæðum og fáum 2 neikvæðar talnaskífur.

Í hvoru dæmi voru aðeins notaðar talnaskífur í einum lit og því var auðvelt að nota frádráttarlíkanið þar sem skífur eru teknar burt.




**SÝNIDÆMI 1.41**

Dragið frá: ⓐ $7-5$ ⓑ $-7-(-5)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Takið 5 jákvæðar talnaskífur af 7 jákvæðum; eftir verða 2 jákvæðar talnaskífur. | $7-5$<br>$2$ |
| ⓑ Takið 5 neikvæðar talnaskífur af 7 neikvæðum; eftir verða 2 neikvæðar talnaskífur. | $-7-(-5)$<br>$-2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.81**

Dragið frá: ⓐ $6-4$ ⓑ $-6-(-4)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.82**

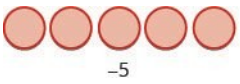
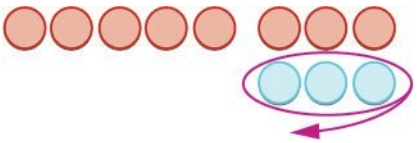
Dragið frá: ⓐ $7-4$ ⓑ $-7-(-4)$.

Hvað gerist þegar draga þarf jákvæða tölu frá neikvæðri eða neikvæða frá jákvæðri? Þá þurfum við bæði bláar og rauðar talnaskífur og nokkur núllpör. Þegar núllpari er bætt við breytist gildið ekki. Þetta er eins og að skipta hundraðkrónupeningi í fimm tuttugukrónupeninga: gildið er hið sama þótt framsetningin breytist.

- Til að draga frá $-5-3$, umorðum við það sem $-5$ að frádregnum 3.

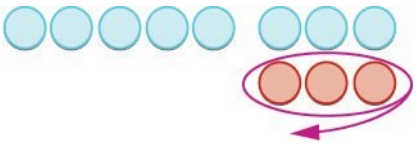
Við byrjum með 5 neikvæðar talnaskífur. Taka þarf burt 3 jákvæðar skífur en við höfum engar slíkar til að taka burt.

Munið að gildi núllpars er núll. Ef 0 er bætt við 5 er gildið enn 5. Við bætum núllpörum við 5 neikvæðu talnaskífurnar þar til við höfum 3 jákvæðar skífur til að taka burt.

| | $-5-3$ táknar $-5$ að frádregnum 3. |
|---|---|
| Við byrjum með 5 neikvæðar talnaskífur. |  |
| Nú bætum við við nægilega mörgum núllpörum til að fá 3 jákvæðar talnaskífur. |  |
| Við fjarlægjum 3 jákvæðu talnaskífurnar. |  |
| Eftir eru 8 neikvæðar talnaskífur. |  |
| Mismunur $-5$ og 3 er $-8$. | $-5-3=-8$ |

Skoðum nú fjórða tilvikið, $5-(-3)$. Við byrjum með 5 jákvæðar talnaskífur. Taka þarf burt 3 neikvæðar skífur en engar slíkar eru fyrir. Því bætum við við núllpörum þar til við höfum 3 neikvæðar skífur til að taka burt.

1

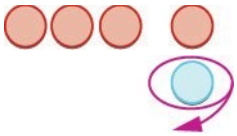
| | |
|---|---|
| | 5 – (−3) táknar 5 að frádregnum −3. |
| Við byrjum með 5 jákvæðar talnaskífur. |  |
| Nú bætum við við nauðsynlegum núllpörum. |  |
| Við fjarlægjum 3 neikvæðu talnaskífurnar. |  |
| Eftir eru 8 jákvæðar talnaskífur. |  |
| Mismunur 5 og −3 er 8. | 5 – (−3) = 8 |

**SÝNIDÆMI 1.42**

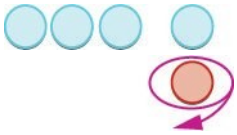
Dragið frá: ⓐ $-3-1$ ⓑ $3-(-1)$.

## Lausn

ⓐ

| | | |
|---|---|---|
| Takið 1 jákvæða talnaskífu úr núllparinu sem bætt var við. |  | −3 − 1<br>−4 |

ⓑ

| | | |
|---|---|---|
| Takið 1 neikvæða talnaskífu úr núllparinu sem bætt var við. |  | 3 – (−1)<br>4 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.83**

Dragið frá: ⓐ $-6-4$ ⓑ $6-(-4)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.84**

Dragið frá: ⓐ $-7-4$ ⓑ $7-(-4)$.

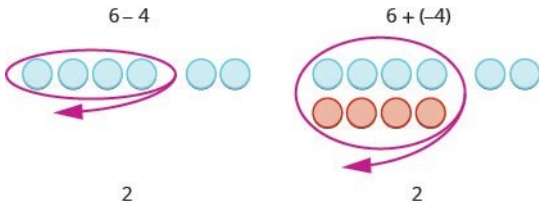
Hafið þið tekið eftir að draga má formerktar tölur frá með því að leggja samlagningarandhverfuna við? Í sýnidæmi 1.42 er $-3-1$ hið sama og $-3+(-1)$ og $3-(-1)$ hið sama og $3+1$. Þessa hugmynd, frádráttarregluna, sjáið þið oft ritaða þannig:

**FRÁDRÁTTARREGLA**

$$a-b=a+(-b)$$

Að draga tölu frá er hið sama og að leggja samlagningarandhverfu hennar við.

Skoðið þessi tvö dæmi.




$6-4$ gefur sama svar og $6+(-4)$.

Þegar frádráttardæmi inniheldur aðeins jákvæðar tölur, eins og $6-4$, drögum við einfaldlega frá. Þið lærðuð fyrir löngu að reikna $6-4$. Að vita að $6-4$ gefur sama svar og $6+(-4)$ hjálpar hins vegar þegar neikvæðar tölur eru dregnar frá. Gangið úr skugga um að þið skiljið hvers vegna $6-4$ og $6+(-4)$ gefa sömu niðurstöðu!

**SÝNIDÆMI 1.43**

Einfaldið: ⓐ $13-8$ og $13+(-8)$ ⓑ $-17-9$ og $-17+(-9)$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| ⓐ Dragið frá. | $13-8$<br>$5$ | $13+(-8)$<br>$5$ |
| ⓑ Dragið frá. | $-17-9$<br>$-26$ | $-17+(-9)$<br>$-26$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.85**

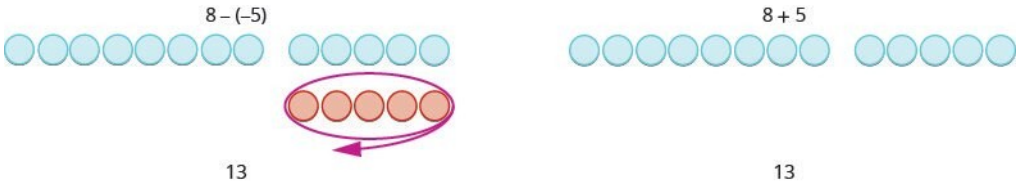
Einfaldið: ⓐ $21-13$ og $21+(-13)$ ⓑ $-11-7$ og $-11+(-7)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.86**

Einfaldið: ⓐ $15-7$ og $15+(-7)$ ⓑ $-14-8$ og $-14+(-8)$.

Skoðum hvað gerist þegar neikvæð tala er dregin frá.

1




$8-(-5)$ gefur sama svar og $8+5$

*Að draga neikvæða tölu frá er eins og að leggja jákvæða tölu við!*
Þetta er oft ritað $a-(-b)=a+b$.
Gildir þetta einnig um aðrar tölur? Prófum næsta sýnidæmi.

---

**SÝNIDÆMI 1.44**

Einfaldið: ⓐ $9-(-15)$ og $9+15$ ⓑ $-7-(-4)$ og $-7+4$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| ⓐ Dragið frá. | $9-(-15)$<br>$24$ | $9+15$<br>$24$ |
| ⓑ Dragið frá. | $-7-(-4)$<br>$-3$ | $-7+4$<br>$-3$ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.87**

Einfaldið: ⓐ $6-(-13)$ og $6+13$ ⓑ $-5-(-1)$ og $-5+1$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.88**

Einfaldið: ⓐ $4-(-19)$ og $4+19$ ⓑ $-4-(-7)$ og $-4+7$.

Skoðum aftur niðurstöður ólíkra frádrátta með $5, -5$ og $3, -3$.

---

**FRÁDRÁTTUR HEILTALNA**

$$5-3$$
$$2$$

5 jákvæðar tölur, drögum frá 3 jákvæðar tölur
2 jákvæðar tölur

$$-5-(-3)$$
$$-2$$

5 neikvæðar tölur, drögum frá 3 neikvæðar tölur
2 neikvæðar tölur

Þegar nóg er af talnaskífum í þeim lit sem fjarlægja á drögum við frá.

$$-5-3$$
$$-8$$

5 neikvæðar tölur, viljum draga frá 3 jákvæðar tölur
þarf núllpör

$$5-(-3)$$
$$8$$

5 jákvæðar tölur, viljum draga frá 3 neikvæðar tölur
þarf núllpör

Þegar ekki er nóg af talnaskífum í þeim lit sem fjarlægja á bætum við við núllpörum.

Hvað gerist þegar heiltölurnar eru fleiri en þrjár? Þá fylgjum við forgangsröð reikniaðgerða eins og venjulega.

---

**SÝNIDÆMI 1.45**

Einfaldið: $7-(-4-3)-9$.

## Lausn

Tafla 1.7

| | $7-(-4-3)-9$ |
|---|---|
| Einfaldið fyrst innan sviganna. | $7-(-7)-9$ |
| Framkvæmið frádrátt frá vinstri til hægri. | $14-9$ |
| Dragið frá. | $5$ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.89**

Einfaldið: $8-(-3-1)-9$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.90**

Einfaldið: $12-(-9-6)-14$.

---

**MIÐLAR**

Notið þessi netgögn til frekari leiðsagnar og æfingar í samlagningu og frádrætti heiltalna. Virkja þarf Java í vafranum til að nota forritin.

- Samlagning með lituðum talnaskífum
- Frádráttur með lituðum talnaskífum

## Verkefni úr hluta 1.3

1

***Æfingin skapar meistarann***

**Notkun neikvæðra talna og samlagningarandhverfa heiltalna**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið raða tölunum í hverju talnapari með því að nota < eða >.

**185.**

ⓐ $9 ___ 4$
ⓑ $-3 ___ 6$
ⓒ $-8 ___ -2$
ⓓ $1 ___ -10$

**186.**

ⓐ $-7 ___ 3$
ⓑ $-10 ___ -5$
ⓒ $2 ___ -6$
ⓓ $8 ___ 9$

Finnið samlagningarandhverfu hverrar tölu í eftirfarandi verkefnum.

**187.** ⓐ 2 ⓑ $-6$

**188.** ⓐ 9ⓑ $-4$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

189.

$$-(-4)$$

190.

$$-(-8)$$

191.

$$-(-15)$$

192.

$$-(-11)$$

Reiknið í eftirfarandi verkefnum.

**193.** $-c$ þegar ⓐ $c=12$ⓑ $c=-12$

**194.** $-d$ þegar ⓐ
$d=21$
ⓑ $d=-21$

**Einföldun stæða með tölugildi**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**195.** ⓐ $|-32|$ ⓑ $|0|$ ⓒ $|16|$

**196.** ⓐ $|0|$
ⓑ $|-40|$ ⓒ $|22|$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið setja $<$, $>$ eða $=$ milli talnanna í hverju talnapari.

**197.** ⓐ $-6 ___ |-6|$ ⓑ $-|-3| ___ -3$

**198.** ⓐ $|-5| ___ -|-5|$ ⓑ $9 ___ -|-9|$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

199.

$$-(-5) \text{ og } -|-5|$$

200.

$$-|-9| \text{ og } -(-9)$$

201.

$$8|-7|$$

202.

$$5|-5|$$

203.

$$|15-7|-|14-6|$$

204.

$$|17-8|-|13-4|$$

205.

$$18-|2(8-3)|$$

206.

$$18-|3(8-5)|$$

Reiknið í eftirfarandi verkefnum.

**207.**
ⓐ $-|p|$ þegar $p=19$
ⓑ $-|q|$ þegar $q=-33$

**208.**
ⓐ $-|a|$ þegar $a=60$
ⓑ $-|b|$ þegar $b=-12$

1

**Samlagning heiltalna**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

209.

$$-21+(-59)$$

210.

$$-35+(-47)$$

211.

$$48+(-16)$$

212.

$$34+(-19)$$

213.

$$-14+(-12)+4$$

214.

$$-17+(-18)+6$$

215.

$$135+(-110)+83$$

216.

$$-38+27+(-8)+12$$

217.

$$19+2(-3+8)$$

218.

$$24+3(-5+9)$$

**Frádráttur heiltalna**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

219.

$$8-2$$

220.

$$-6-(-4)$$

221.

$$-5-4$$

222.

$$-7-2$$

223.

$$8-(-4)$$

224.

$$7-(-3)$$

**225.** ⓐ $44-28$ ⓑ $44+(-28)$

**226.** ⓐ $35-16$ ⓑ $35+(-16)$

**227.** ⓐ $27-(-18)$ ⓑ $27+18$

**228.** ⓐ $46-(-37)$ ⓑ $46+37$

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

229.

$$15-(-12)$$

230.

$$14-(-11)$$

231.

$$48-87$$

232.

$$45-69$$

233.

$$-17-42$$

234.

$$-19-46$$

235.

$$-103-(-52)$$

236.

$$-105-(-68)$$

237.

$$-45-(-54)$$

1

238.

$$-58-(-67)$$

239.

$$8-3-7$$

240.

$$9-6-5$$

241.

$$-5-4+7$$

242.

$$-3-8+4$$

243.

$$-14-(-27)+9$$

244.

$$64+(-17)-9$$

245.

$$(2-7)-(3-8)$$

246.

$$(1-8)-(2-9)$$

247.

$$-(6-8)-(2-4)$$

248.

$$-(4-5)-(7-8)$$

249.

$$25-\left[10-(3-12)\right]$$

250.

$$32-\left[5-(15-20)\right]$$

251.

$$6\cdot 3-4\cdot 3-7\cdot 2$$

252.

$$5 \cdot 7 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 9$$

253.

$$5^2 - 6^2$$

254.

$$6^2 - 7^2$$

***Stærðfræði daglegs lífs***

**255. Hæð yfir sjávarmáli Hæsti staður Bandaríkjanna er McKinley-fjall í Alaska, 20.320 fet yfir sjávarmáli. Lægsti staðurinn er Dauðadalur í Kaliforníu, 282 fet undir sjávarmáli.**

Notið heiltölur til að skrá hæð eftirfarandi staða:
ⓐ McKinley-fjall. ⓑ Dauðadalur.

**256. Öfgahitastig Hæsti hiti** sem mælst hefur á jörðinni var 57 ° á Celsíus. Lægsti mældi hitinn var 90 ° undir 0 ° á Celsíus.

Notið heiltölur til að skrá:

1. ⓐ hæsta mælda hitann.
2. ⓑ lægsta mælda hitann.

**257. Fjárlög fylkja** Í júní 2011 áætlaði Pennsylvanía-fylki að afgangur fjárlaga yrði $540 milljónir. Í sama mánuði áætlaði Texas-fylki að fjárlagahallinn yrði $27 milljarðar.

Notið heiltölur til að skrá fjárlagastöðu:
ⓐ Pennsylvaníu. ⓑ Texas.

**258. Innritun í háskóla** Í Bandaríkjunum fjölgaði nemendum í tveggja ára háskólum um 1.400.000 frá hausti 2007 til hausts 2010. Í Kaliforníu fækkaði nemendum í slíkum skólum um 110.171 frá hausti 2009 til hausts 2010.

Notið heiltölur til að skrá breytingu á nemendafjölda:

1. ⓐ í Bandaríkjunum frá hausti 2007 til hausts 2010.
2. ⓑ í Kaliforníu frá hausti 2009 til hausts 2010.

**259. Hlutabréfamarkaður** Vikan sem hófst 15. september 2008 var ein sveiflukenndasta vika í sögu bandaríska hlutabréfamarkaðarins. Lokagildi Dow Jones-vísitölunnar hvern dag voru þessi:

1

| | |
|---|---|
| Mánudagur | $-504$ |
| Þriðjudagur | $+142$ |
| Miðvikudagur | $-449$ |
| Fimmtudagur | $+410$ |
| Föstudagur | $+369$ |

Hver var heildarbreyting vikunnar? Var hún jákvæð eða neikvæð?

**260.** **Hlutabréfamarkaður** Vikuna sem hófst 22. júní 2009 voru lokagildi Dow Jones-vísitölunnar hvern dag þessi:

| | |
|---|---|
| Mánudagur | $-201$ |
| Þriðjudagur | $-16$ |
| Miðvikudagur | $-23$ |
| Fimmtudagur | $+172$ |
| Föstudagur | $-34$ |

Hver var heildarbreyting vikunnar? Var hún jákvæð eða neikvæð?

### *Ritunarverkefni*

**261.** Nefnið dæmi um neikvæða tölu úr eigin reynslu.

**262.** Á hvaða þrjá vegu er táknið " $-$ " notað í algebru? Útskýrið muninn.

**263.** Útskýrið hvers vegna summa $-8$ og $2$ er neikvæð en summa $8$ og $-2$ jákvæð.

**264.** Nefnið dæmi úr eigin reynslu þar sem tvær neikvæðar tölur eru lagðar saman.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar verkefnunum er lokið skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað neikvæðar heiltölur og samlagningarandhverfur heiltalna. | | | |
| einfaldað stæður með tölugildi. | | | |
| lagt saman heiltölur. | | | |
| dregið heiltölur frá. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um það hve vel þið hafið náð tökum á efni hlutans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?

# 1.4 Margföldun og deiling heiltalna



**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Margföldun heiltalna
- Deiling heiltalna
- Einföldun stæðna með heiltölum
- Gildi breytustæða með heiltölum
- Þýðing orðalags yfir á algebrustæður
- Notkun heiltalna í hagnýtum dæmum

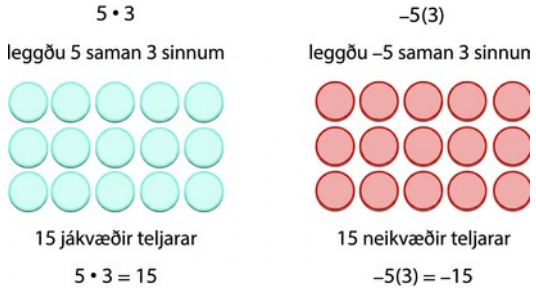
**UNDIRBÚNINGUR 1.4**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta er að finna í kaflanum Heiltölur í bókinni Prealgebra.

## Margföldun heiltalna

Margföldun er stytting fyrir endurtekna samlagningu og því má auðveldlega nota líkanið okkar til að sýna margföldun heiltalna. Skoðum þetta áþreifanlega líkan til að sjá hvaða mynstur koma í ljós. Við notum sömu dæmi og áður við samlagningu og frádrátt. Hér notum við líkanið aðeins til að hjálpa okkur að greina mynstrið.

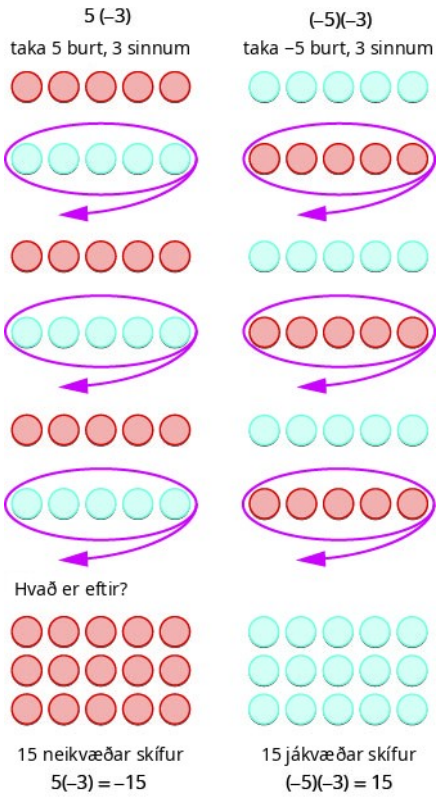
Við munum að $a \cdot b$ merkir að leggja a saman b sinnum.




Næstu tvö dæmi eru áhugaverðari.

Hvað merkir að margfalda 5 með $-3$? Það merkir að draga 5 frá, 3 sinnum. Ef við lítum á frádrátt sem „að taka burt“ merkir það að taka 5 burt, 3 sinnum. En ekkert er til að taka burt, svo að við byrjum á því að setja núllpör á vinnusvæðið. Síðan tökum við 5 burt þrisvar.

1




Í stuttu máli:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 &= 15 & \qquad -5\,(3) &= -15 \\ 5\,(-3) &= -15 & \qquad (-5)\,(-3) &= 15 \end{aligned}$$

Takið eftir að þegar tvær tölur með formerki eru margfaldaðar:

- ef formerkin eru eins er margfeldið jákvætt.
- ef formerkin eru ólík er margfeldið neikvætt.

Við drögum þetta allt saman í töflunni hér fyrir neðan.

---

**MARGFÖLDUN TALNA MEÐ FORMERKI**

Þegar tvær tölur með formerki eru margfaldaðar:

| **Sömu formerki** | **Margfeldi** | **Dæmi** |
|---|---|---|
| Tvær jákvæðar Tvær neikvæðar | Jákvætt Jákvætt | $7 \cdot 4 = 28$<br>$-8\,(-6) = 48$ |
| **Ólík formerki** | **Margfeldi** | **Dæmi** |
| Jákvætt · neikvætt Neikvætt · jákvætt | Neikvætt Neikvætt | $7\,(-9) = -63$<br>$-5 \cdot 10 = -50$ |

---

**SÝNIDÆMI 1.46**

Margfaldið: ⓐ $-9 \cdot 3$ ⓑ $-2(-5)$ ⓒ $4(-8)$ ⓓ $7 \cdot 6$.

## Lausn

Tafla 1.8

| | |
|---|---|
| ⓐ Margfaldið og takið eftir að formerkin eru ólík, svo margfeldið er neikvætt. | $-9 \cdot 3$<br>$-27$ |
| ⓑ Margfaldið og takið eftir að formerkin eru eins, svo margfeldið er jákvætt. | $-2(-5)$<br>$10$ |
| ⓒ Margfaldið; formerkin eru ólík. | $4(-8)$<br>$-32$ |
| ⓓ Margfaldið; formerkin eru eins. | $7 \cdot 6$<br>$42$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.91**

Margfaldið: ⓐ $-6 \cdot 8$ ⓑ $-4(-7)$ ⓒ $9(-7)$ ⓓ $5 \cdot 12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.92**

Margfaldið: ⓐ $-8 \cdot 7$ ⓑ $-6(-9)$ ⓒ $7(-4)$ ⓓ $3 \cdot 13$.

Þegar við margföldum tölu með 1 fæst sama tala. Hvað gerist þegar við margföldum tölu með $-1$? Margföldum fyrst jákvæða tölu og síðan neikvæða tölu með $-1$ til að sjá hvað fæst.

$$-1 \cdot 4 \qquad -1(-3)$$

$$\text{Margfaldið.} \qquad -4 \qquad 3$$

$-4$ er samlagningarandhverfa $4$. $3$ er samlagningarandhverfa $-3$.

Í hvert sinn sem við margföldum tölu með $-1$, fáum við samlagningarandhverfu hennar!

**MARGFÖLDUN MEÐ $-1$**

$$-1a = -a$$

Þegar tala er margfölduð með $-1$ fæst samlagningarandhverfa hennar.

**SÝNIDÆMI 1.47**

Margfaldið: ⓐ $-1 \cdot 7$ ⓑ $-1(-11)$.

## Lausn

1

Tafla 1.9

| | |
|---|---|
| ⓐ Margfaldið og takið eftir að formerkin eru ólík, svo margfeldið er neikvætt. | $-1\cdot 7$<br>$-7$<br>$-7$ er samlagningarandhverfa $7$. |
| ⓑ Margfaldið og takið eftir að formerkin eru eins, svo margfeldið er jákvætt. | $-1(-11)$<br>$11$<br>$11$ er samlagningarandhverfa $-11$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.93**

Margfaldið: ⓐ $-1\cdot 9$ ⓑ $-1\cdot(-17)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.94**

Margfaldið: ⓐ $-1\cdot 8$ ⓑ $-1\cdot(-16)$.

## Deiling heiltalna

Hvað með deilingu? Deiling er andhverf reikniaðgerð margföldunar. Því er $15\div 3=5$ vegna þess að $5\cdot 3=15$. Í orðum merkir þetta að skipta má 15 í þrjá hópa með fimm í hverjum, því að ef fimm er lagt saman þrisvar fæst 15. Skoðið nokkur dæmi um margföldun heiltalna til að finna reglurnar um deilingu heiltalna.

$$\begin{aligned} 5\cdot 3 &= 15 \text{ því } 15\div 3 = 5 \\ (-5)(-3) &= 15 \text{ því } 15\div(-3) = -5 \\ -5(3) &= -15 \text{ því } -15\div 3 = -5 \\ 5(-3) &= -15 \text{ því } -15\div(-3) = 5 \end{aligned}$$

Um deilingu gilda sömu reglur og um margföldun!
Þegar tveimur tölum með formerki er deilt:

- ef formerkin eru eins er kvótinn jákvæður.
- ef formerkin eru ólík er kvótinn neikvæður.

Munið einnig að alltaf má sannreyna svar við deilingardæmi með margföldun.

**MARGFÖLDUN OG DEILING TALNA MEÐ FORMERKI**

Þegar tvær tölur með formerki eru margfaldaðar eða annarri þeirra deilt með hinni:

- Ef formerkin eru eins er niðurstaðan jákvæð.
- Ef formerkin eru ólík er niðurstaðan neikvæð.

| Sömu formerki | Niðurstaða |
|---|---|
| Tvær jákvæðar Tvær neikvæðar | Jákvætt Jákvætt |
| Ef formerkin eru eins er niðurstaðan jákvæð. | |
| **Ólík formerki** | **Niðurstaða** |
| Jákvætt og neikvætt Neikvætt og jákvætt | Neikvætt Neikvætt |
| Ef formerkin eru ólík er niðurstaðan neikvæð. | |

**SÝNIDÆMI 1.48**

Deilið: ⓐ $-27 \div 3$ ⓑ $-100 \div (-4)$.

## Lausn

Tafla 1.10

| | |
|---|---|
| ⓐ Deilið. Formerkin eru ólík, svo kvótinn er neikvæður. | $-27 \div 3$<br>$-9$ |
| ⓑ Deilið. Formerkin eru eins, svo kvótinn er jákvæður. | $-100 \div (-4)$<br>$25$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.95**

Deilið: ⓐ $-42 \div 6$ ⓑ $-117 \div (-3)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.96**

Deilið: ⓐ $-63 \div 7$ ⓑ $-115 \div (-5)$.

## Einföldun stæðna með heiltölum

Hvað gerist þegar fleiri en tvær tölur eru í stæðu? Forgangsröð reikniaðgerða gildir áfram þegar neikvæðar tölur koma fyrir. Munið þið röðina: svigar, veldi, margföldun og deiling, síðan samlagning og frádráttur?

Prófum nokkur dæmi. Við einföldum stæður sem nota allar fjórar reikniaðgerðirnar með heiltölum: samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu. Munið að fylgja forgangsröð reikniaðgerða.

**SÝNIDÆMI 1.49**

Einfaldið: $7(-2)+4(-7)-6$.

## Lausn

1

Tafla 1.11

| | $7(-2)+4(-7)-6$ |
|---|---|
| Margfaldið fyrst. | $-14+(-28)-6$ |
| Leggið saman. | $-42-6$ |
| Dragið frá. | $-48$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.97**

Einfaldið: $8(-3)+5(-7)-4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.98**

Einfaldið: $9(-3)+7(-8)-1$.

**SÝNIDÆMI 1.50**

Einfaldið: ⓐ $(-2)^4$ ⓑ $-2^4$.

## Lausn

Tafla 1.12

| ⓐ Skrifið með útvíkkaðri ritun. Margfaldið. Margfaldið. Margfaldið. | $(-2)^4$<br>$(-2)(-2)(-2)(-2)$<br>$4(-2)(-2)$<br>$-8(-2)$<br>$16$ |
|---|---|
| ⓑ Skrifið með útvíkkaðri ritun. Finna á samlagningarandhverfu $2^4$. Margfaldið. Margfaldið. Margfaldið. | $-2^4$<br>$-(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)$<br>$-(4\cdot 2\cdot 2)$<br>$-(8\cdot 2)$<br>$-16$ |

Takið eftir muninum á liðum ⓐ og ⓑ. Í lið ⓐ merkir veldisvísirinn að það sem er innan svigans, $(-2)$, sé hafið í veldið $4$. Í lið ⓑ merkir veldisvísirinn að aðeins $2$ sé hafið í veldið $4$ og síðan sé tekin samlagningarandhverfan.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.99**

Einfaldið: ⓐ $(-3)^4$ ⓑ $-3^4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.100**

Einfaldið: ⓐ $(-7)^2$ ⓑ $-7^2$.

Næsta dæmi minnir okkur á að einfalda fyrst innan sviga.

**SÝNIDÆMI 1.51**

Einfaldið: $12-3(9-12)$.

## Lausn

Tafla 1.13

| | $12-3(9-12)$ |
|---|---|
| Dragið fyrst frá innan svigans. | $12-3(-3)$ |
| Margfaldið. | $12-(-9)$ |
| Dragið frá. | $21$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.101**

Einfaldið: $17-4(8-11)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.102**

Einfaldið: $16-6(7-13)$.

**SÝNIDÆMI 1.52**

Einfaldið: $8(-9)\div(-2)^3$.

## Lausn

Tafla 1.14

| | $8(-9)\div(-2)^3$ |
|---|---|
| Reiknið veldin fyrst. | $8(-9)\div(-8)$ |
| Margfaldið. | $-72\div(-8)$ |
| Deilið. | $9$ |

1

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.103**

Einfaldið: $12(-9)\div(-3)^3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.104**

Einfaldið: $18(-4)\div(-2)^3$.

**SÝNIDÆMI 1.53**

Einfaldið: $-30\div 2+(-3)(-7)$.

## Lausn

Tafla 1.15

| | $-30\div 2+(-3)(-7)$ |
|---|---|
| Margfaldið og deilið frá vinstri til hægri; deilið því fyrst. | $-15+(-3)(-7)$ |
| Margfaldið. | $-15+21$ |
| Leggið saman. | $6$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.105**

Einfaldið: $-27\div 3+(-5)(-6)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.106**

Einfaldið: $-32\div 4+(-2)(-7)$.

## Gildi breytustæða með heiltölum

Munið að til að finna gildi stæðu setjum við tölu í stað breytunnar í stæðunni. Nú getum við notað bæði neikvæðar og jákvæðar tölur.

**SÝNIDÆMI 1.54**

Þegar $n=-5$, finnið gildið: ⓐ $n+1$ ⓑ $-n+1$.

## Lausn

ⓐ

| | $n+1$ |
|---|---|
| Setjið $-5$ í stað $n$. | $-5+1$ |
| Einfaldið. | $-4$ |

ⓑ

| | $-n+1$ |
|---|---|
| Setjið $-5$ í stað $n$. | $-(-5)+1$ |
| Einfaldið. | $5+1$ |
| Leggið saman. | 6 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.107**

Þegar $n=-8$, finnið gildið ⓐ $n+2$ ⓑ $-n+2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.108**

Þegar $y=-9$, finnið gildið ⓐ $y+8$ ⓑ $-y+8$.

**SÝNIDÆMI 1.55**

Finnið gildi $(x+y)^2$ þegar $x=-18$ og $y=24$.

## Lausn

| | $(x+y)^2$ |
|---|---|
| Setjið $-18$ inn fyrir $x$ og $24$ inn fyrir $y$. | $(-18+24)^2$ |
| Leggið saman innan svigans. | $(6)^2$ |
| Einfaldið. | 36 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.109**

Finnið gildi $(x+y)^2$ þegar $x=-15$ og $y=29$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.110**

Finnið gildi $(x+y)^3$ þegar $x=-8$ og $y=10$.

**SÝNIDÆMI 1.56**

Finnið gildi $20 - z$ þegar ⓐ $z = 12$ og ⓑ $z = -12$.

1

## Lausn

ⓐ

| | $20 - z$ |
|---|---|
| Setjið 12 í stað $z$. | $20 - 12$ |
| Dragið frá. | 8 |

ⓑ

| | $20 - z$ |
|---|---|
| Setjið $-12$ í stað $z$. | $20 - (-12)$ |
| Dragið frá. | 32 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.111**

Finnið gildi: $17 - k$ þegar ⓐ $k = 19$ og ⓑ $k = -19$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.112**

Finnið gildi: $-5 - b$ þegar ⓐ $b = 14$ og ⓑ $b = -14$.

**SÝNIDÆMI 1.57**

Finnið gildi: $2x^2 + 3x + 8$ þegar $x = 4$.

## Lausn

Setjið inn 4 fyrir $x$. Notið sviga til að sýna margföldun.

| | $2x^2 + 3x + 8$ |
|---|---|
| Setjið inn. | $2(4)^2 + 3(4) + 8$ |
| Reiknið veldin. | $2(16) + 3(4) + 8$ |
| Margfaldið. | $32 + 12 + 8$ |
| Leggið saman. | 52 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.113**

Finnið gildi: $3x^2 - 2x + 6$ þegar $x = -3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.114**

Finnið gildi: $4x^2 - x - 5$ þegar $x = -2$.

## Þýðing orðalags yfir á stæður með heiltölum

Við getum þýtt orðalag með bæði jákvæðum og neikvæðum tölum yfir á algebru á sama hátt og áður.

**SÝNIDÆMI 1.58**

Þýðið og einfaldið: summa 8 og $-12$, aukin um 3.

### Lausn

Tafla 1.16

| | summa 8 og $-12$,, aukin um 3. |
|---|---|
| Þýðið. | $\left[8+\left(-12\right)\right]+3$ |
| Einfaldið. Gætið þess að rugla hornklofunum ekki saman við tölugildisstrik. | $\left(-4\right)+3$ |
| Leggið saman. | $-1$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.115**

Þýðið og einfaldið summu 9 og $-16$, aukna um 4.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.116**

Þýðið og einfaldið summu $-8$ og $-12$, aukna um 7.

Þegar við kynntum reikniaðgerðartáknin fyrst sáum við að lesa má stæðuna á nokkra vegu. Mismunandi leshættir eru sýndir í töflunni hér fyrir neðan.

| $a - b$ |
|---|
| $a$ mínus $b$<br>mismunur $a$ og $b$<br>$b$ dregið frá $a$<br>$b$ minna en $a$ |

Gætið þess að hafa a og b í réttri röð!

**SÝNIDÆMI 1.59**

Þýðið og einfaldið síðan ⓐ mismun 13 og $-21$ ⓑ dragið 24 frá $-19$.

1

## Lausn

Tafla 1.17

| | |
|---|---|
| ⓐ Þýðið. Einfaldið. | Reiknið **mismun** *talnanna* 13 *og* $-21$<br>$13-(-21)$<br>34 |
| ⓑ Þýðið. Munið að „draga $b$ frá $a$“ merkir $a-b$. Einfaldið. | dragið 24 frá $-19$<br>$-19-24$<br>$-43$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.117**

Þýðið og einfaldið ⓐ mismun 14 og $-23$ ⓑ dragið 21 frá $-17$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.118**

Þýðið og einfaldið ⓐ mismun 11 og $-19$ ⓑ dragið 18 frá $-11$.

Aftur má nota sömu aðferð til að þýða orðalag um margföldun og deilingu heiltalna yfir á algebru. Munið að lykilorðið fyrir margföldun er „margfeldi“ og fyrir deilingu „kvóti“.

**SÝNIDÆMI 1.60**

Þýðið yfir á algebrustæðu og einfaldið ef hægt er: margfeldi $-2$ og 14.

## Lausn

Tafla 1.18

| | margfeldi talnanna $-2$ og 14 |
|---|---|
| Þýðið. | $(-2)(14)$ |
| Einfaldið. | $-28$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.119**

Þýðið yfir á algebrustæðu og einfaldið ef hægt er: margfeldi $-5$ og 12.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.120**

Þýðið yfir á algebrustæðu og einfaldið ef hægt er: margfeldi 8 og $-13$.

**SÝNIDÆMI 1.61**

Þýðið yfir á algebrustæðu og einfaldið ef hægt er: kvóti $-56$ og $-7$.

### Lausn

Tafla 1.19

| | kvóti talnanna $-56$ og $-7$ |
|---|---|
| Þýðið. | $-56 \div (-7)$ |
| Einfaldið. | $8$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.121**

Þýðið yfir á algebrustæðu og einfaldið ef hægt er: kvóti $-63$ og $-9$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.122**

Þýðið yfir á algebrustæðu og einfaldið ef hægt er: kvóti $-72$ og $-9$.

## Notkun heiltalna í hagnýtum dæmum

Við setjum fram áætlun til að leysa hagnýt dæmi. Erfitt er að finna eitthvað ef við vitum ekki að hverju við leitum eða hvað við eigum að kalla það. Þegar við leysum hagnýtt dæmi þurfum við því fyrst að ákvarða hvað spurt er um. Síðan skrifum við orðasamband sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. Við þýðum orðasambandið yfir á stæðu og einföldum stæðuna til að fá svarið. Að lokum tökum við svarið saman í setningu til að ganga úr skugga um að það sé rökrétt.

**SÝNIDÆMI 1.62**

### Að beita aðferð til að leysa hagnýt dæmi með heiltölum

Um morguninn var hitinn í Urbana í Illinois 11 gráður. Um miðjan eftirmiðdag hafði hitinn fallið í $-9$ gráður. Hver var munurinn á morgunhitanum og síðdegishitanum?

## Lausn

1

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Gætið þess að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. | |
| **Skref 2.** Ákvarðið hvað við eigum að finna. | mismuninn á hitastiginu að morgni og síðdegis |
| **Skref 3.** Skrifið orðasamband sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | mismunurinn á 11 og −9 |
| **Skref 4.** Þýddu orðasambandið yfir í stæðu. | 11 − (−9) |
| **Skref 5.** Einfaldið segðina. | 20 |
| **Skref 6.** Skrifið heila setningu sem svarar spurningunni. | Munurinn á hitastiginu var 20 gráður. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.123**

Um morguninn var hitinn í Anchorage í Alaska 15 gráður. Um miðjan eftirmiðdag hafði hitinn fallið í 30 gráður undir núlli. Hver var munurinn á morgunhitanum og síðdegishitanum?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.124**

Hitinn í Denver var − 6 gráður í hádeginu. Við sólsetur hafði hitinn fallið í − 15 gráður. Hver var munurinn á hitastiginu í hádeginu og við sólsetur?

**AÐFERÐ**

### Beitið aðferð til að leysa hagnýt dæmi með heiltölum.

1. Skref 1. Lesið dæmið. Gætið þess að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg
2. Skref 2. Finnið hvað beðið er um.
3. Skref 3. Skrifið orðasamband sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið.
4. Skref 4. Þýðið orðasambandið yfir á stæðu.
5. Skref 5. Einfaldið stæðuna.
6. Skref 6. Svarið spurningunni með heilli setningu.

**SÝNIDÆMI 1.63**

Mustangs-fótboltaliðið fékk þrjár refsingar í þriðja leikhluta. Við hverja refsingu missti liðið fimmtán jarda. Hversu marga jarda missti liðið?

## Lausn

Tafla 1.20

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Gætið þess að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað beðið er um. | fjölda jardanna sem liðið missti |
| **Skref 3.** Skrifið orðasamband sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | þrisvar sinnum 15 jarda tap |
| **Skref 4.** Þýðið orðasambandið yfir á stæðu. | $3(-15)$ |
| **Skref 5.** Einfaldið stæðuna. | $-45$ |
| **Skref 6.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Liðið missti 45 jarda. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.125**

Bears-liðið lék illa og fékk sjö refsingar í leiknum. Við hverja refsingu missti liðið 15 jarda. Hversu marga jarda missti liðið vegna refsinga?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.126**

Bill notar hraðbankann á háskólasvæðinu vegna þess að það er þægilegt. Hann þarf þó að greiða $2 í gjald í hvert sinn. Í síðasta mánuði notaði hann hraðbankann átta sinnum. Hversu mikið greiddi hann samtals í hraðbankagjöld?

## Verkefni úr hluta 1.4

### *Æfingin skapar meistarann*

**Margföldun heiltalna**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum.

265.

$$-4 \cdot 8$$

266.

$$-3 \cdot 9$$

267.

$$9(-7)$$

268.

$$13(-5)$$

269.

$$-1 \cdot 6$$

270.

$$-1 \cdot 3$$

271.

$$-1(-14)$$

272.

$$-1(-19)$$

**Deiling heiltalna**

Deilið í eftirfarandi verkefnum.

273.

$$-24 \div 6$$

274.

$$35 \div (-7)$$

275.

$$-52 \div (-4)$$

276.

$$-84 \div (-6)$$

277.

$$-180 \div 15$$

278.

$$-192 \div 12$$

**Einföldun stæðna með heiltölum**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

279.

$$5(-6)+7(-2)-3$$

280.

$$8(-4)+5(-4)-6$$

281.

$$(-2)^6$$

282.

$$(-3)^5$$

283.

$$-4^2$$

284.

$$-6^2$$

285.

$$-3(-5)(6)$$

286.

$$-4(-6)(3)$$

287.

$$(8-11)(9-12)$$

288.

$$(6-11)(8-13)$$

289.

$$26-3(2-7)$$

290.

$$23-2(4-6)$$

291.

$$65\div(-5)+(-28)\div(-7)$$

292.

$$52\div(-4)+(-32)\div(-8)$$

293.

$$9-2\left[3-8(-2)\right]$$

294.

$$11-3\left[7-4(-2)\right]$$

295.

$$(-3)^2-24\div(8-2)$$

296.

$$(-4)^2 - 32 \div (12 - 4)$$

1

**Gildi breytustæða með heiltölum**

Finnið gildi hverrar stæðu í eftirfarandi verkefnum.

**297.** $y + (-14)$ þegar ⓐ $y = -33$ ⓑ $y = 30$

**298.** $x + (-21)$ þegar ⓐ $x = -27$ ⓑ $x = 44$

299.

1. ⓐ $a + 3$ þegar $a = -7$
2. ⓑ $-a + 3$ þegar $a = -7$

300.

1. ⓐ $d + (-9)$ þegar $d = -8$
2. ⓑ $-d + (-9)$ þegar $d = -8$

**301.** $m + n$ þegar
$m = -15, n = 7$

**302.** $p + q$ þegar
$p = -9, q = 17$

**303.** $r + s$ þegar $r = -9, s = -7$

**304.** $t + u$ þegar $t = -6, u = -5$

**305.** $(x + y)^2$ þegar
$x = -3, y = 14$

**306.** $(y + z)^2$ þegar
$y = -3, z = 15$

**307.** $-2x + 17$ þegar

1. ⓐ $x = 8$
2. ⓑ $x = -8$

**308.** $-5y + 14$ þegar ⓐ
$y = 9$
ⓑ $y = -9$

**309.** $10 - 3m$ þegar ⓐ
$m = 5$
ⓑ $m = -5$

**310.** $18-4n$ þegar ⓐ
$n=3$
ⓑ $n=-3$

**311.** $2w^2-3w+7$ þegar
$w=-2$

**312.** $3u^2-4u+5$ þegar $u=-3$

**313.** $9a-2b-8$ þegar
$a=-6$ og $b=-3$

**314.** $7m-4n-2$ þegar
$m=-4$ og $n=-9$

**Þýðing orðalags yfir á algebrustæður**
Þýðið yfir á algebrustæðu í eftirfarandi verkefnum og einfaldið ef hægt er.

**315.** summa 3 og $-15$, aukin um 7

**316.** summa $-8$ og $-9$, aukin um 23

**317.** mismunur 10 og $-18$

**318.** dragið 11 frá $-25$

**319.** mismunur $-5$ og $-30$

**320.** dragið $-6$ frá $-13$

**321.** margfeldi $-3$ og 15

**322.** margfeldi $-4$ og 16

**323.** kvóti $-60$ og $-20$

**324.** kvóti $-40$ og $-20$

**325.** kvóti $-6$ og summu a og b

**326.** kvóti $-7$ og summu m og n

**327.** margfeldi $-10$ og mismunar $p$ og $q$

**328.** margfeldi $-13$ og mismunar $c$ og $d$

**Notkun heiltalna í hagnýtum dæmum**
Leysið eftirfarandi dæmi.

**329.** **Hitastig** Þann 15. janúar var hæsti hiti á Fahrenheit-kvarða í Anaheim í Kaliforníu $84°$. Sama dag var hæsti hiti í Embarrass í Minnesota $-12°$. Hver var munurinn á hitastiginu í Anaheim og Embarrass?

**330.** **Hitastig** Þann 21. janúar var hæsti hiti á Fahrenheit-kvarða í Palm Springs í Kaliforníu $89°$, og hæsti hiti í Whitefield í New Hampshire var $-31°$. Hver var munurinn á hitastiginu í Palm Springs og Whitefield?

**331.** **Ameríkskur** fótbolti Í fyrstu tilraun var Chargers-liðið með boltann á eigin 25 jarda línu. Liðið missti 6 jarda í fyrstu tilraun, vann 10 jarda í annarri tilraun og missti 8 jarda í þriðju tilraun. Á hvaða jardalínu var boltinn í lok þriðju tilraunar?

**332.** **Ameríkskur** fótbolti Í fyrstu tilraun var Steelers-liðið með boltann á eigin 30 jarda línu. Liðið vann 9 jarda í fyrstu tilraun, missti 14 jarda í annarri tilraun og missti 2 jarda í þriðju tilraun. Á hvaða jardalínu var boltinn í lok þriðju tilraunar?

**333.** **Tékkareikningur Mayra á $124 á tékkareikningi sínum. Hún skrifar ávísun að upphæð $152. Hver er ný staða reikningsins?**

**334.** **Tékkareikningur Selina á $165 á tékkareikningi sínum. Hún skrifar ávísun að upphæð $207. Hver er ný staða reikningsins?**

**335.** **Tékkareikningur Staðan á tékkareikningi Diontre er** $-\$38$. Hann leggur $225 inn á reikninginn. Hver er ný staða reikningsins?

**336.** **Tékkareikningur Staðan á tékkareikningi Reymonte er** $-\$49$. Hann leggur $281 inn á reikninginn. Hver er ný staða reikningsins?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**337.** **Hlutabréfamarkaður Javier** á 300 hlutabréf í einu fyrirtæki. Á þriðjudaginn lækkaði verð hlutabréfanna um $12 á hlut. Hver voru heildaráhrifin á verðbréfasafn Javiers?

**338.** **Þyngdartap** Fyrstu viku megrunaráætlunar misstu átta konur að meðaltali 3 pund hver. Hver var heildarbreytingin á þyngd kvennanna átta?

### *Ritunarverkefni*

**339.** Lýsið með eigin orðum reglunum um margföldun heiltalna.

**340.** Lýsið með eigin orðum reglunum um deilingu heiltalna.

**341.** Hvers vegna er $-2^4 \neq (-2)^4$?

**342.** Hvers vegna er $-4^3 = (-4)^3$?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| margfaldað heiltölur. | | | |
| deilt heiltölum. | | | |
| einfaldað stæður með heiltölum. | | | |
| reiknað gildi breytustæða með heiltölum. | | | |
| þýtt orðalag yfir á algebrustæður. | | | |
| notað heiltölur í hagnýtum verkefnum. | | | |

ⓑ Hvernig mynduð þið meta leikni ykkar í þessum hluta á kvarðanum 1–10 með hliðsjón af svörunum á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt hana?

# 1.5 Myndræn framsetning brota

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Jafngild brot fundin
- Stytting brota
- Margföldun brota
- Deiling brota
- Einföldun stæða sem eru ritaðar með brotastriki
- Þýðing orðasambanda yfir á stæður með brotum

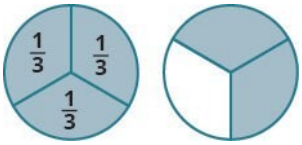
**UNDIRBÚNINGUR 1.5**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta er að finna í kaflanum „Brot“ í bókinni Foralgebra.

## Jafngild brot fundin

**Brot** tákna hluta af heild. Brotið $\frac{1}{3}$ merkir að einni heild hefur verið skipt í 3 jafna hluta og hver hluti er einn af þeim þremur jöfnu hlutum. Sjá mynd 1.11. Brotið $\frac{2}{3}$ táknar tvo af þremur jöfnum hlutum. Í brotinu $\frac{2}{3}$, kallast 2 teljari og 3 nefnari.

1




Mynd 1.11 Hringnum vinstra megin hefur verið skipt í 3 jafna hluta. Hver hluti er $\frac{1}{3}$ af 3 jöfnu hlutunum. Í hringnum hægra megin er brotið $\frac{2}{3}$ af hringnum skyggt (2 af 3 jöfnum hlutum).

---

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Brotalíkön“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á brotum, teljurum þeirra og nefnurum.

---

**BROT**

Hvert brot er ritað $\frac{a}{b}$, þar sem $b \neq 0$ og

- *a er teljari og b er nefnari.*

Brot táknar hluta af heild. Nefnarinn b segir í hve marga jafna hluta heildinni hefur verið skipt og teljarinn a segir hve margir hlutanna eru teknir með.

Ef heil baka hefur verið skorin í 6 hluta og við borðum alla 6 hlutana höfum við borðað $\frac{6}{6}$ hluta, eða með öðrum orðum eina heila böku.



Því er $\frac{6}{6} = 1$. Þetta leiðir okkur að reglunni um einn. Hún segir að þegar tölu, annarri en núlli, er deilt með sjálfri sér fáist 1.

---

**REGLAN UM EINN**

$$\frac{a}{a} = 1 \qquad (a \neq 0)$$

Ef tölu, annarri en núlli, er deilt með sjálfri sér fæst einn.

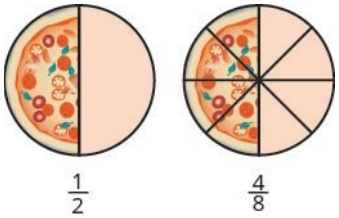
### ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN

Verkefnið „Brot sem jafngilda einum“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á brotum sem jafngilda einum.

Ef bökunni var skipt í 6 hluta og við borðuðum alla 6, borðuðum við $\frac{6}{6}$ hluta, eða með öðrum orðum eina heila böku. Ef bökunni var skipt í 8 hluta og við borðuðum alla 8, borðuðum við $\frac{8}{8}$ hluta, eða eina heila böku. Við borðuðum jafnmikið — eina heila böku.

Brotin $\frac{6}{6}$ og $\frac{8}{8}$ hafa sama gildi, 1, og kallast því jafngild brot. Jafngild brot eru brot sem hafa sama gildi.

Hugsum nú um pítsur. Mynd 1.12 sýnir tvær myndir: eina pítsu vinstra megin sem hefur verið skipt í tvo jafna hluta og aðra jafnstóra pítsu hægra megin sem hefur verið skipt í átta hluta. Þannig má sýna að $\frac{1}{2}$ jafngildir $\frac{4}{8}$. Með öðrum orðum eru þetta jafngild brot.

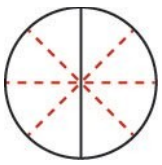



Mynd 1.12 Þar sem jafnstór hluti hvorrar pítsu er skyggður sjáum við að $\frac{1}{2}$ jafngildir $\frac{4}{8}$. Þetta eru jafngild brot.

### JAFNGILD BROT

**Jafngild brot eru brot sem hafa sama gildi.**

Hvernig getum við með stærðfræði breytt $\frac{1}{2}$ í $\frac{4}{8}$? Hvernig gætum við tekið pítsu sem skipt er í 2 hluta og skipt henni í 8 hluta? Við gætum skipt hvorum 2 stærri hlutanna í 4 minni hluta! Þá væri allri pítsunni skipt í 8 hluta í stað aðeins 2. Með stærðfræðitáknum má rita það sem við höfum lýst þannig: $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$. Sjá mynd 1.13.



Mynd 1.13 Þegar hvorum helmingi pítsunnar er skipt í $4$ hluta verður pítsunni skipt í 8 hluta: $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8}$.

Þetta líkan leiðir okkur að þessari reglu:

1

**REGLA UM JAFNGILD BROT**

Ef $a, b, c$ eru tölur þannig að $b \neq 0, c \neq 0$, þá

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Ef við hefðum skipt pítsunni á annan hátt hefðum við getað fengið

$$\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} \text{ því } \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$
$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \text{ því } \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 10} = \frac{10}{20} \text{ því } \frac{1}{2} = \frac{10}{20}$$

Því segjum við að $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$, og $\frac{10}{20}$ séu jafngild brot.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Jafngild brot“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja betur hvað felst í því að tvö brot séu jafngild.

**SÝNIDÆMI 1.64**

Finnið þrjú brot sem jafngilda $\frac{2}{5}$.

## Lausn

Til að finna brot sem jafngildir $\frac{2}{5}$, margföldum við teljarann og nefnarann með sömu tölu.

Við getum valið hvaða tölu sem er, nema núll. Margföldum þá með 2, 3 og síðan 5.

$$\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \quad \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \quad \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{10}{25}$$

Því jafngilda $\frac{4}{10}, \frac{6}{15}$, og $\frac{10}{25}$ brotinu $\frac{2}{5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.127**

Finnið þrjú brot sem jafngilda $\frac{3}{5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.128**

Finnið þrjú brot sem jafngilda $\frac{4}{5}$.



## Stytting brota

Brot telst fullstytt ef teljari þess og nefnari eiga engan sameiginlegan þátt annan en 1.

Til dæmis:

- $\frac{2}{3}$ er fullstytt vegna þess að 2 og 3 eiga engan sameiginlegan þátt.
- $\frac{10}{15}$ er ekki fullstytt vegna þess að 5 er sameiginlegur þáttur talnanna 10 og 15.

**FULLSTYTT BROT**

Brot telst fullstytt ef teljari þess og nefnari eiga engan sameiginlegan þátt.

Orðasambandið að stytta brot merkir að einfalda brotið. Við einföldum, eða styttum, brot með því að fella burt sameiginlega þætti teljarans og nefnarans. Brot er ekki fullstytt fyrr en allir sameiginlegir þættir hafa verið felldir burt. Ef stæða inniheldur brot er hún ekki fullkomlega einfölduð fyrr en brotin hafa verið fullstytt.

Í sýnidæmi 1.64 notuðum við regluna um jafngild brot til að finna jafngild brot. Nú notum við regluna í öfuga átt til að stytta brot. Við getum endurritað regluna þannig að báðar gerðir hennar sjáist saman.

**REGLA UM JAFNGILD BROT**

Ef $a, b, c$ eru tölur þannig að $b \neq 0, c \neq 0$,

$$\text{þá } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \text{ og } \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

**SÝNIDÆMI 1.65**

Styttið: $-\frac{32}{56}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-\frac{32}{56}$ |
| Endurritið teljarann og nefnarann þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. | $-\frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 8}$ |
| Styttið með reglunni um jafngild brot. | $-\frac{4}{7}$ |

1

Takið eftir að brotið $-\frac{4}{7}$ er fullstytt vegna þess að ekki eru fleiri sameiginlegir þættir.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.129**

Styttið: $-\frac{42}{54}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.130**

Styttið: $-\frac{45}{81}$.

Stundum er ekki auðvelt að finna sameiginlega þætti teljarans og nefnarans. Þá er gott að frumþátta teljarann og nefnarann. Deilið síðan út sameiginlegum þáttum með reglunni um jafngild brot.

---

**SÝNIDÆMI 1.66**

### Að stytta brot

Styttið: $-\frac{210}{385}$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Umritaðu teljarann og nefnarann þannig að sameiginlegir þættir sjáist. Ef þörf krefur skaltu fyrst frumþátta teljarann og nefnarann. | | $-\frac{210}{385}$<br>$-\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{5 \cdot 7 \cdot 11}$ |
| **Skref 2.** Einfaldið með því að nota eiginleika jafngildra brota og stytta út sameiginlega þætti. | Merkið sameiginlegu þættina 5 og 7.<br>Styttið út sameiginlegu þættina. | $-\frac{2 \cdot 3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7}}{\cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot 11}$<br>$-\frac{2 \cdot 3}{11}$ |
| **3. skref.** Margfaldið þá þætti sem eftir eru, ef þörf krefur. | | $-\frac{6}{11}$ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.131**

Styttið: $-\frac{69}{120}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.132**

Styttið: $-\frac{120}{192}$.

Nú tökum við saman skrefin sem þið eigið að fylgja þegar þið styttið brot.



**AÐFERÐ**

### Að stytta brot.

1. Skref 1. Endurritið teljarann og nefnarann þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. Frumþáttið teljarann og nefnarann fyrst ef þörf krefur.

2. Skref 2. Styttið með reglunni um jafngild brot með því að deila út sameiginlegum þáttum.
3. Skref 3. Margfaldið þá þætti sem eftir eru ef þess þarf.

**SÝNIDÆMI 1.67**

Styttið: $\frac{5x}{5y}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5x}{5y}$ |
| Endurritið þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist og deilið þeim síðan út. | $\frac{5x}{5y}$<br>Skrifið aftur þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist og styttið síðan með sameiginlegu þáttunum. $\frac{5 \cdot x}{5 \cdot y}$<br>Einfaldið. $\frac{x}{y}$ |
| Styttið. | $\frac{x}{y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.133**

Styttið: $\frac{7x}{7y}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.134**

Styttið: $\frac{3a}{3b}$.

### Margföldun brota

Mörgum finnst auðveldara að margfalda og deila brotum en að leggja saman og draga frá brotum. Við byrjum því á margföldun brota.

1

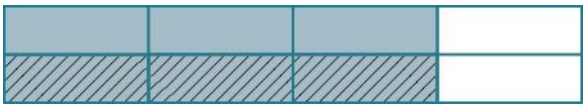
**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Brotamargföldun sýnd með líkani“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á margföldun brota.

Við notum líkan til að sýna hvernig tvö brot eru margfölduð og til að auðvelda ykkur að muna aðferðina. Byrjum á $\frac{3}{4}$.



Nú tökum við $\frac{1}{2}$ af $\frac{3}{4}$.



Takið eftir að heildinni er nú skipt í 8 jafna hluta. Því er $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

Til að margfalda brot margföldum við teljarana saman og nefnarana saman.

**MARGFÖLDUN BROTA**

Ef $a$, $b$, $c$ og $d$ eru tölur þannig að $b \neq 0$ og $d \neq 0$, þá

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Til að margfalda brot skal margfalda teljarana saman og nefnarana saman.

Þegar brot eru margfölduð gilda að sjálfsögðu enn reglurnar um jákvæðar og neikvæðar tölur. Gott er að ákvarða formerki margfeldisins í fyrsta skrefi. Í sýnidæmi 1.68 margföldum við neikvætt brot og jákvætt brot og því verður margfeldið neikvætt.

**SÝNIDÆMI 1.68**

Margfaldið: $-\frac{11}{12} \cdot \frac{5}{7}$.

## Lausn

Fyrsta skrefið er að finna formerki margfeldisins. Formerkin eru ólík og því er margfeldið neikvætt.

Tafla 1.21

| | |
|---|---|
| | $-\frac{11}{12}\cdot\frac{5}{7}$ |
| Ákvarðið formerki margfeldisins og margfaldið. | $-\frac{11\cdot 5}{12\cdot 7}$ |
| Eiga teljarinn og nefnarinn einhverja sameiginlega þætti? Nei. | $-\frac{55}{84}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.135**

Margfaldið: $-\frac{10}{28}\cdot\frac{8}{15}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.136**

Margfaldið: $-\frac{9}{20}\cdot\frac{5}{12}$.

Þegar brot er margfaldað með heiltölu getur verið gagnlegt að rita heiltöluna sem brot. Hverja heiltölu a má rita sem $\frac{a}{1}$. Til dæmis er $3=\frac{3}{1}$.

**SÝNIDÆMI 1.69**

Margfaldið: $-\frac{12}{5}(-20x)$.

## Lausn

Ákvarðið formerki margfeldisins. Formerkin eru eins og því er margfeldið jákvætt.

| | |
|---|---|
| | $-\frac{12}{5}(-20x)$ |
| Ritið $20x$ sem brot. | $\frac{12}{5}\left(\frac{20x}{1}\right)$ |
| Margfaldið. | |
| Endurritið 20 þannig að sameiginlegi þátturinn 5 sjáist og deilið honum út. | $\frac{12\cdot 4\cdot \cancel{5}x}{\cancel{5}\cdot 1}$ |
| Styttið. | $48x$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.137**

1

Margfaldið: $\frac{11}{3}(-9a)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.138**

Margfaldið: $\frac{13}{7}(-14b)$.

## Deiling brota

Nú þegar við kunnum að margfalda brot erum við næstum tilbúin til að deila. Áður en við gerum það þurfum við að læra eitt hugtak.

Margföldunarandhverfa brots fæst með því að hvolfa brotinu. Þá færist teljarinn í nefnarann og nefnarinn í teljarann. Margföldunarandhverfa $\frac{2}{3}$ er $\frac{3}{2}$.

Takið eftir að $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er 1.

Til að margfeldi tveggja talna verði jákvæða talan 1 verða tölurnar að hafa sama formerki. Margföldunarandhverfur hafa því sama formerki.

Margföldunarandhverfa $-\frac{10}{7}$ er $-\frac{7}{10}$, því að $-\frac{10}{7}\left(-\frac{7}{10}\right) = 1$.

**MARGFÖLDUNARANDHVERFA**

Margföldunarandhverfa brotsins $\frac{a}{b}$ er $\frac{b}{a}$.

Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er einn: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Deiling brota sýnd með líkani“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á deilingu brota.

Til að deila brotum margföldum við fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara.

**DEILING BROTA**

Ef $a$, $b$, $c$ og $d$ eru tölur þannig að $b \neq 0$, $c \neq 0$ og $d \neq 0$, þá

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Til að deila brotum margföldum við fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara.

Við verðum að taka það fram að $b \neq 0$, $c \neq 0$ og $d \neq 0$ til að tryggja að ekki sé deilt með núlli!



**SÝNIDÆMI 1.70**

Deilið: $-\frac{2}{3} \div \frac{n}{5}$.

## Lausn

Tafla 1.22

| | $-\frac{2}{3} \div \frac{n}{5}$ |
|---|---|
| Til að deila skal margfalda fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara. | $-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{n}$ |
| Margfaldið. | $-\frac{10}{3n}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.139**

Deilið: $-\frac{3}{5} \div \frac{p}{7}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.140**

Deilið: $-\frac{5}{8} \div \frac{q}{3}$.

**SÝNIDÆMI 1.71**

Finnið kvótann: $-\frac{7}{18} \div \left(-\frac{14}{27}\right)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-\frac{7}{18} \div \left(-\frac{14}{27}\right)$ |
| Til að deila skal margfalda fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara. | $-\frac{7}{18} \cdot -\frac{27}{14}$ |
| Ákvarðið formerki margfeldisins og margfaldið síðan. | $\frac{7 \cdot 27}{18 \cdot 14}$ |
| Endurritið þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. | $\frac{7 \cdot 9 \cdot 3}{9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2}$ |
| Fellið sameiginlega þætti burt. | $\frac{3}{2 \cdot 2}$ |
| Styttið. | $\frac{3}{4}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.141**

Finnið kvótann: $-\frac{7}{27} \div \left(-\frac{35}{36}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.142**

Finnið kvótann: $-\frac{5}{14} \div \left(-\frac{15}{28}\right)$.

Til eru ýmsar leiðir til að muna skrefin við að margfalda eða deila brotum. Ein leið er að þylja minnisreglurnar fyrir sjálfum ykkur. Ef þið gerið það í hvert sinn sem þið leysið dæmi lærið þið skrefin utan að.

- „Til að margfalda brot skal margfalda teljarana saman og nefnarana saman.“
- „Til að deila brotum skal margfalda fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara.“

Önnur leið er að hafa tvö dæmi í huga:

Fjórðungur af tveimur pítsum jafngildir hálfri pítsu. Í $2,00 eru átta 25 senta myntir.



$2 \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{2}{4}$

$\frac{1}{2}$

$2 \div \frac{1}{4}$

$\frac{2}{1} \div \frac{1}{4}$

$\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{1}$

8

Í teljara eða nefnara sumra brota eru önnur brot. Brot þar sem teljarinn eða nefnarinn er brot kallast samsett brot.

---

**SAMSETT BROT**

Samsett brot er brot þar sem teljarinn eða nefnarinn inniheldur brot.

Hér eru nokkur dæmi um samsett brot:

$$\frac{\frac{6}{7}}{3} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} \quad \frac{\frac{x}{2}}{\frac{5}{6}}$$

Til að einfalda samsett brot minnumst við þess að brotastrikið táknar deilingu. Til dæmis merkir samsetta brotið $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ stæðuna $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8}$.

---

**SÝNIDÆMI 1.72**

Einfaldið: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$.

## Lausn

1

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ |
| Endurritið sem deilingu. | $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8}$ |
| Margfaldið fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara. | $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5}$ |
| Margfaldið. | $\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5}$ |
| Leitið að sameiginlegum þáttum. | $\frac{3 \cdot \cancel{4} \cdot 2}{\cancel{4} \cdot 5}$ |
| Deilið út sameiginlegum þáttum og einfaldið. | $\frac{6}{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.143**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.144**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{6}{11}}$.

**SÝNIDÆMI 1.73**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{xy}{6}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\dfrac{xy}{6}}$ |
| Endurritið sem deilingu. | $\dfrac{x}{2} \div \dfrac{xy}{6}$ |
| Margfaldið fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara. | $\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{6}{xy}$ |
| Margfaldið. | $\dfrac{x \cdot 6}{2 \cdot xy}$ |
| Leitið að sameiginlegum þáttum. | $\dfrac{x \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot x \cdot y}$ |
| Deilið út sameiginlegum þáttum og einfaldið. | $\dfrac{3}{y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.145**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{a}{8}}{\dfrac{ab}{6}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.146**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{p}{2}}{\dfrac{pq}{8}}$.

## Einföldun stæða með brotastriki

Línan sem skilur teljara frá nefnara í broti kallast brotastrik. Brotastrik hefur sama hlutverk og svigi. Samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða einföldum við þá fyrst teljarann og síðan nefnarann. Að lokum deilum við.

Til að einfalda stæðuna $\dfrac{5-3}{7+1}$, einföldum við fyrst teljarann og nefnarann hvorn fyrir sig. Síðan deilum við.

$$\frac{5-3}{7+1}$$

$$\frac{2}{8}$$

$$\frac{1}{4}$$

1

**AÐFERÐ**

## Að einfalda stæðu með brotastriki.

1. Skref 1. Einfaldið stæðuna í teljaranum. Einfaldið stæðuna í nefnaranum.
2. Skref 2. Styttið brotið.

**SÝNIDÆMI 1.74**

Einfaldið: $\frac{4-2(3)}{2^2+2}$.

## Lausn

| | $\frac{4-2(3)}{2^2+2}$ |
|---|---|
| Notið forgangsröð reikniaðgerða til að einfalda teljarann og nefnarann. | $\frac{4-6}{4+2}$ |
| Einfaldið teljarann og nefnarann. | $\frac{-2}{6}$ |
| Einfaldið. Ef neikvæðri tölu er deilt með jákvæðri tölu fæst neikvæð tala. | $-\frac{1}{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.147**

Einfaldið: $\frac{6-3(5)}{3^2+3}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.148**

Einfaldið: $\frac{4-4(6)}{3^2+3}$.

Hvar á mínusmerkið að vera í broti? Venjulega er mínusmerkið fyrir framan brotið en stundum sést brot með neikvæðum teljara eða neikvæðum nefnara. Munið að brot tákna deilingu. Þegar teljarinn og nefnarinn hafa ólík formerki er kvótinn neikvæður.

$$\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3} \qquad \frac{\text{neikvætt}}{\text{jákvætt}}=\text{neikvætt}$$

$$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3} \qquad \frac{\text{jákvætt}}{\text{neikvætt}}=\text{neikvætt}$$

**STAÐSETNING MÍNUSMERKIS Í BROTI**

Fyrir allar jákvæðar tölur a og b,

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

**SÝNIDÆMI 1.75**

Einfaldið: $\frac{4(-3)+6(-2)}{-3(2)-2}$.

## Lausn

Tafla 1.23

| | $\frac{4(-3)+6(-2)}{-3(2)-2}$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $\frac{-12+(-12)}{-6-2}$ |
| Styttið. | $\frac{-24}{-8}$ |
| Deilið. | $3$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.149**

Einfaldið: $\frac{8(-2)+4(-3)}{-5(2)+3}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.150**

Einfaldið: $\frac{7(-1)+9(-3)}{-5(3)-2}$.

## Þýðing orðasambanda yfir á stæður með brotum

Nú þegar við höfum unnið nokkuð með brot erum við tilbúin að þýða orðasambönd yfir á stæður með brotum.

Orðin kvóti og hlutfall eru oft notuð til að lýsa brotum. Munið að kvóti er niðurstaða deilingar. Kvóti $a$ og $b$ er niðurstaðan sem fæst þegar $a$ er deilt með $b$, eða $\frac{a}{b}$.

1

---

**SÝNIDÆMI 1.76**

Þýðið orðasambandið yfir á algebrustæðu: kvóti mismunarins á m og n og tölunnar p.

### Lausn

Við leitum að kvóta mismunarins á m og n og tölunnar p. Það merkir að við viljum deila mismuninum á $m$ og $n$ með $p$.

$$\frac{m-n}{p}$$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.151**

Þýðið orðasambandið yfir á algebrustæðu: kvóti mismunarins á a og b og margfeldisins cd.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.152**

Þýðið orðasambandið yfir á algebrustæðu: kvóti summu $p$ og $q$, og $r$

## Æfingar úr hluta 1.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Jafngild brot fundin**

Finnið í eftirfarandi æfingum þrjú brot sem jafngilda gefna brotinu. Sýnið útreikninga ykkar með myndum eða algebru.

343.

$$\frac{3}{8}$$

344.

$$\frac{5}{8}$$

345.

$$\frac{5}{9}$$

346.

$$\frac{1}{8}$$

**Stytting brota**

Styttið brotin í eftirfarandi æfingum.

347.

$$-\frac{40}{88}$$

348.

$$-\frac{63}{99}$$

349.

$$-\frac{108}{63}$$

350.

$$-\frac{104}{48}$$

351.

$$\frac{120}{252}$$

352.

$$\frac{182}{294}$$

353.

$$-\frac{3x}{12y}$$

354.

$$-\frac{4x}{32y}$$

355.

$$\frac{14x^2}{21y}$$

356.

$$\frac{24a}{32b^2}$$

**Margföldun brota**

Margfaldið í eftirfarandi æfingum.

1

357.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10}$$

358.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{7}$$

359.

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}\right)$$

360.

$$-\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{9}\right)$$

361.

$$-\frac{5}{9} \cdot \frac{3}{10}$$

362.

$$-\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{15}$$

363.

$$\left(-\frac{14}{15}\right)\left(\frac{9}{20}\right)$$

364.

$$\left(-\frac{9}{10}\right)\left(\frac{25}{33}\right)$$

365.

$$\left(-\frac{63}{84}\right)\left(-\frac{44}{90}\right)$$

366.

$$\left(-\frac{33}{60}\right)\left(-\frac{40}{88}\right)$$

367.

$$4 \cdot \frac{5}{11}$$

368.

$$5 \cdot \frac{8}{3}$$

369.

$$\frac{3}{7} \cdot 21n$$

370.

$$\frac{5}{6} \cdot 30m$$

371.

$$-8\left(\frac{17}{4}\right)$$

372.

$$(-1)\left(-\frac{6}{7}\right)$$

**Deiling brota**

Deilið í eftirfarandi æfingum.

373.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$$

374.

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{4}$$

375.

$$-\frac{7}{9} \div \left(-\frac{7}{4}\right)$$

376.

$$-\frac{5}{6} \div \left(-\frac{5}{6}\right)$$

1

377.

$$\frac{3}{4} \div \frac{x}{11}$$

378.

$$\frac{2}{5} \div \frac{y}{9}$$

379.

$$\frac{5}{18} \div \left( -\frac{15}{24} \right)$$

380.

$$\frac{7}{18} \div \left( -\frac{14}{27} \right)$$

381.

$$\frac{8u}{15} \div \frac{12v}{25}$$

382.

$$\frac{12r}{25} \div \frac{18s}{35}$$

383.

$$-5 \div \frac{1}{2}$$

384.

$$-3 \div \frac{1}{4}$$

385.

$$\frac{3}{4} \div (-12)$$

386.

$$-15 \div \left( -\frac{5}{3} \right)$$

Styttið brotin í eftirfarandi æfingum.

387.

$$\frac{-\frac{8}{21}}{\frac{12}{35}}$$

388.

$$\frac{-\frac{9}{16}}{\frac{33}{40}}$$

389.

$$\frac{-\frac{4}{5}}{2}$$

390.

$$\frac{\frac{5}{3}}{10}$$

391.

$$\frac{\frac{m}{3}}{\frac{n}{2}}$$

392.

$$\frac{-\frac{3}{8}}{-\frac{y}{12}}$$

**Einföldun stæða sem eru ritaðar með brotastriki**

Styttið brotin í eftirfarandi æfingum.

393.

$$\frac{22+3}{10}$$

394.

$$\frac{19-4}{6}$$

1

395.

$$\frac{48}{24-15}$$

396.

$$\frac{46}{4+4}$$

397.

$$\frac{-6+6}{8+4}$$

398.

$$\frac{-6+3}{17-8}$$

399.

$$\frac{4\cdot 3}{6\cdot 6}$$

400.

$$\frac{6\cdot 6}{9\cdot 2}$$

401.

$$\frac{4^2-1}{25}$$

402.

$$\frac{7^2+1}{60}$$

403.

$$\frac{8\cdot 3+2\cdot 9}{14+3}$$

404.

$$\frac{9\cdot 6-4\cdot 7}{22+3}$$

405.

$$\frac{5\cdot 6-3\cdot 4}{4\cdot 5-2\cdot 3}$$

406.

$$\frac{8 \cdot 9 - 7 \cdot 6}{5 \cdot 6 - 9 \cdot 2}$$

407.

$$\frac{5^2 - 3^2}{3 - 5}$$

408.

$$\frac{6^2 - 4^2}{4 - 6}$$

409.

$$\frac{7 \cdot 4 - 2(8 - 5)}{9 \cdot 3 - 3 \cdot 5}$$

410.

$$\frac{9 \cdot 7 - 3(12 - 8)}{8 \cdot 7 - 6 \cdot 6}$$

411.

$$\frac{9(8 - 2) - 3(15 - 7)}{6(7 - 1) - 3(17 - 9)}$$

412.

$$\frac{8(9 - 2) - 4(14 - 9)}{7(8 - 3) - 3(16 - 9)}$$

**Þýðing orðasambanda yfir á stæður með brotum**

Þýðið hvert orðasamband yfir á algebrustæðu í eftirfarandi æfingum.

**413.** kvóti r og summu s og 10

**414.** kvóti A og mismunar 3 og B

**415.** kvóti mismunarins á $x$ og $y$, og $-3$

**416.** kvóti summu $m$ og $n$, og $4q$

1

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**417.** **Bakstur.** Í uppskrift að súkkulaðibitakökum þarf $\frac{3}{4}$ bolla af púðursykri. Imelda vill tvöfalda uppskriftina. ⓐ Hve mikinn púðursykur þarf Imelda? Sýnið útreikninga. ⓑ Mælibollar eru venjulega seldir í settum með $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, og 1 bolla. Teiknið mynd sem sýnir tvær ólíkar leiðir sem Imelda getur notað til að mæla púðursykurinn sem þarf í tvöfalda uppskrift.

**418.** **Bakstur.** Nína útbýr 4 form af súkkulaðikonfekti til að bera fram eftir tónleika. Í hvert form þarf hún $\frac{2}{3}$ bolla af niðursoðinni mjólk. ⓐ Hve mikla niðursoðna mjólk þarf Nína? Sýnið útreikninga. ⓑ Mælibollar eru venjulega seldir í settum með $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, og 1 bolla. Teiknið mynd sem sýnir tvær ólíkar leiðir sem Nína getur notað til að mæla niðursoðnu mjólkina sem þarf í 4 form af súkkulaðikonfekti.

**419.** **Skammtar.** Don keypti stóran sælgætispakka sem vegur 5 pund. Hann vill selja sælgætið í litlum pokum sem taka $\frac{1}{4}$ pund hver. Hve marga litla sælgætispoka getur hann fyllt úr stóra pakkanum?

**420.** **Skammtar.** Kristen á $\frac{3}{4}$ jarda af borða sem hún vill skipta í 6 jafna hluta til að búa til hárborða fyrir 6 dúkkur dóttur sinnar. Hve langur verður hárborði hverrar dúkku?

### *Ritunarverkefni*

**421.** Rafael vildi panta hálfa miðlungsstóra pítsu á veitingastað. Þjónninn sagði honum að hægt væri að skera miðlungsstóra pítsu í 6 eða 8 sneiðar. Vildi hann frekar 3 af 6 sneiðum eða 4 af 8 sneiðum? Rafael svaraði að þar sem hann væri ekki mjög svangur vildi hann frekar 3 af 6 sneiðum. Útskýrið hvað er rangt við röksemdafærslu Rafaels.

**422.** Nefnið dæmi úr daglegu lífi sem sýnir að $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ er $\frac{1}{3}$.

**423.** Útskýrið hvernig margföldunarandhverfa brots er fundin.

**424.** Útskýrið hvernig margföldunarandhverfa neikvæðrar tölu er fundin.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Notið þennan gátlista að æfingunum loknum til að meta hve vel þið hafið náð námsmarkmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| fundið jafngild brot. | | | |
| einfaldað brot. | | | |
| margfaldað brot. | | | |
| deilt brotum. | | | |
| einfaldað stæður sem eru skrifaðar með brotastriki. | | | |
| breytt orðasamböndum í stæður með brotum. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur vel undirbúin fyrir næsta hluta? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# 1.6 Samlagning og frádráttur brota

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Samlagning og frádráttur brota með sama nefnara
- Samlagning og frádráttur brota með ólíkum nefnurum
- Forgangsröð reikniaðgerða notuð til að einfalda samsett brot
- Gildi stæða með breytum og brotum reiknað

**UNDIRBÚNINGUR 1.6**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta er að finna í kaflanum „Brot“ í bókinni Foralgebra.

## Samlagning og frádráttur brota með sama nefnara

Þegar við margfölduðum brot margfölduðum við teljarana saman og nefnarana saman. Til að leggja saman eða draga frá brotum verða þau hins vegar að hafa sama nefnara.

**SAMLAGNING OG FRÁDRÁTTUR BROTA**

Ef $a$, $b$, og $c$ eru tölur þannig að $c \neq 0$, þá

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \text{ og } \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Til að leggja saman eða draga frá brotum leggjum við teljarana saman eða drögum síðari teljarann frá þeim fyrri. Niðurstöðuna setjum við svo yfir sameiginlega nefnarann.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnin „Samlagning brota sýnd með líkani“ og „Frádráttur brota sýndur með líkani“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpa ykkur að skilja betur samlagningu og frádrátt brota.

**SÝNIDÆMI 1.77**

Finnið summuna: $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$.

## Lausn

Tafla 1.24

| | $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$ |
|---|---|
| Leggið teljarana saman og setjið summuna yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{x+2}{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.153**

Finnið summuna: $\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.154**

Finnið summuna: $\frac{y}{8}+\frac{5}{8}$.

**SÝNIDÆMI 1.78**

Finnið mismuninn: $-\frac{23}{24}-\frac{13}{24}$.

## Lausn

| | $-\frac{23}{24}-\frac{13}{24}$ |
|---|---|
| Dragið síðari teljarann frá þeim fyrri og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{-23-13}{24}$ |
| Einfaldið. | $\frac{-36}{24}$ |
| Einfaldið. Munið að $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$. | $-\frac{3}{2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.155**

Finnið mismuninn: $-\frac{19}{28}-\frac{7}{28}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.156**

Finnið mismuninn: $-\frac{27}{32}-\frac{1}{32}$.

**SÝNIDÆMI 1.79**

Einfaldið: $-\frac{10}{x}-\frac{4}{x}$.

## Lausn

| | $-\frac{10}{x}-\frac{4}{x}$ |
|---|---|
| Dragið síðari teljarann frá þeim fyrri og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{-14}{x}$ |
| Endurritið þannig að formerkið sé fyrir framan brotið. | $-\frac{14}{x}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.157**

Finnið mismuninn: $-\frac{9}{x}-\frac{7}{x}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.158**

Finnið mismuninn: $-\frac{17}{a}-\frac{5}{a}$.

Nú tökum við dæmi með bæði samlagningu og frádrætti.

**SÝNIDÆMI 1.80**

Einfaldið: $\frac{3}{8}+\left(-\frac{5}{8}\right)-\frac{1}{8}$.

### Lausn

1

Tafla 1.25

| | |
|---|---|
| Leggið brotin saman og dragið frá. Hafa þau sama nefnara? Já. | $\frac{3}{8}+\left(-\frac{5}{8}\right)-\frac{1}{8}$ |
| Leggið teljarana saman og dragið frá. Setjið niðurstöðuna yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{3+(-5)-1}{8}$ |
| Einfaldið frá vinstri til hægri. | $\frac{-2-1}{8}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{3}{8}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.159**

Einfaldið: $-\frac{2}{9}+\left(-\frac{4}{9}\right)-\frac{7}{9}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.160**

Einfaldið: $\frac{5}{9}+\left(-\frac{4}{9}\right)-\frac{7}{9}$.

## Samlagning og frádráttur brota með ólíkum nefnurum

Eins og við höfum séð verða nefnarar brota að vera eins svo hægt sé að leggja brotin saman eða draga þau frá. Minnsti samnefnari (MSN) tveggja brota er minnsta talan sem hægt er að nota sem sameiginlegan nefnara brotanna. Minnsti samnefnari brotanna er minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) nefnara þeirra.

**MINNSTI SAMNEFNARI**

Minnsti samnefnari (MSN) tveggja brota er minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) nefnara þeirra.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Minnsti samnefnari fundinn“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja betur hvað minnsti samnefnari er.

Þegar við höfum fundið minnsta samnefnara tveggja brota breytum við brotunum í jafngild brot með minnsta samnefnaranum. Með þessum skrefum getum við lagt brotin saman og dregið þau frá því að nefnarar þeirra verða þá eins!

**SÝNIDÆMI 1.81**

## Að leggja saman eða draga frá brotum

Leggið saman: $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Hafa brotin samnefnara?<br><br>Nei — umritið hvort brot með minnsta samnefnaranum. | Nei.<br><br>Finnið minnsta samnefnara 12 og 18.<br><br>Umritið sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum 36.<br><br>Ekki fullstytta jafngildu brotin! Ef það er gert fást upphaflegu brotin aftur og samnefnarinn glatast! | $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>$18 = 2 \cdot \quad 3 \cdot 3$<br>$\text{MSN} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$<br>$\text{MSN} = 36$<br><br>$\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$<br><br>$\frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2}$<br><br>$\frac{21}{36} + \frac{10}{36}$ |
| **Skref 2.** Leggið saman eða dragið frá brotin. | Leggið saman. | $\frac{31}{36}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið, ef unnt er. | Þar sem 31 er frumtala á hún enga sameiginlega þætti með 36. Svarið er fullstytt. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.161**

Leggið saman: $\frac{7}{12}+\frac{11}{15}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.162**

Leggið saman: $\frac{13}{15}+\frac{17}{20}$.

**AÐFERÐ**

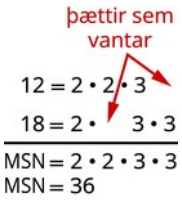
## Að leggja saman eða draga frá brotum.

1. Skref 1.
   Hafa brotin sama nefnara?
   - Já — farið í skref 2.
   - Nei — endurritið hvort brot með minnsta samnefnaranum (MSN). Finnið minnsta samnefnarann. Breytið hvoru broti í jafngilt brot með minnsta samnefnaranum sem nefnara.
2. Skref 2. Leggið brotin saman eða dragið þau frá.
3. Skref 3. Einfaldið ef hægt er.

1

Þegar við finnum jafngild brot með sameiginlegum nefnara er til fljótleg leið til að finna töluna sem margfalda þarf bæði teljarann og nefnarann með. Aðferðin virkar ef minnsti samnefnarinn var fundinn með frumþáttun.

Skoðið þætti minnsta samnefnarans og síðan hvern dálk fyrir ofan þá. Þættirnir sem „vantar“ í hvern nefnara eru tölurnar sem við þurfum.




Í sýnidæmi 1.81 inniheldur minnsti samnefnarinn, 36, tvo þætti sem eru 2 og tvo þætti sem eru 3.

Talan 12 inniheldur tvo þætti sem eru 2 en aðeins einn sem er 3. Hana „vantar“ því einn þátt sem er 3 og við margföldum teljarann og nefnarann með 3.

Töluna 18 vantar einn þátt sem er 2 og því margföldum við teljarann og nefnarann með 2.

Við notum þessa aðferð þegar við drögum brotin frá í sýnidæmi 1.82.

---

**SÝNIDÆMI 1.82**

Dragið frá: $\frac{7}{15} - \frac{19}{24}$.

## Lausn

Hafa brotin sama nefnara? Nei, svo að við þurfum að finna minnsta samnefnarann.

| | |
|---|---|
| Finnið minnsta samnefnarann.<br>$\frac{7}{15} - \frac{19}{24}$<br>$15 = 3 \cdot 5$<br>$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>minnsti samnefnari $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$<br>minnsti samnefnari $= 120$ | |
| Takið eftir að 15 „vantar“ þrjá þætti sem eru 2 og 24 „vantar“ 5 úr þáttum minnsta samnefnarans. Við margföldum því með 8 í fyrra brotinu og 5 í því síðara til að fá minnsta samnefnarann. | |
| Endurritið sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum. | $\frac{7 \cdot 8}{15 \cdot 8} - \frac{19 \cdot 5}{24 \cdot 5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{56}{120} - \frac{95}{120}$ |
| Dragið frá. | $-\frac{39}{120}$ |
| Kannið hvort hægt sé að stytta svarið. | $-\frac{13 \cdot 3}{40 \cdot 3}$ |
| Bæði 39 og 120 hafa þáttinn 3. | |
| Einfaldið. | $-\frac{13}{40}$ |

Ekki stytta jafngildu brotin! Ef þið gerið það fáið þið upphaflegu brotin aftur og missið sameiginlega nefnarann!

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.163**

Dragið frá: $\frac{13}{24} - \frac{17}{32}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.164**

Dragið frá: $\frac{21}{32} - \frac{9}{28}$.

Í næsta dæmi er breyta í teljara annars brotsins. Takið eftir að við fylgjum sömu skrefum og þegar báðir teljararnir eru tölur.

**SÝNIDÆMI 1.83**

Leggið saman: $\frac{3}{5} + \frac{x}{8}$.

## Lausn

Brotin hafa ólíka nefnara.

1

| | |
|---|---|
| | $\frac{3}{5}+\frac{x}{8}$ |
| Finnið minnsta samnefnarann.<br>$5=$<br>$8=2\cdot2\cdot2$<br>$\text{MSN}=2\cdot2\cdot2\cdot5$<br>$\text{MSN}=40$ | 5 |
| Endurritið sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum. | $\frac{3\cdot8}{5\cdot8}+\frac{x\cdot5}{8\cdot5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{24}{40}+\frac{5x}{40}$ |
| Leggið saman. | $\frac{24+5x}{40}$ |

Munið að aðeins er hægt að leggja saman samkynja liði: 24 og 5 x eru ekki samkynja liðir.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.165**

Leggið saman: $\frac{y}{6}+\frac{7}{9}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.166**

Leggið saman: $\frac{x}{6}+\frac{7}{15}$.

Nú höfum við lært allar fjórar reikniaðgerðirnar með brotum. Tafla 1.26 dregur saman reikniaðgerðir með brotum.



Tafla 1.26

| **Margföldun brota** | **Deiling brota** |
|---|---|
| $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ | $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ |
| Margfaldið teljarana saman og nefnarana saman | Margfaldið fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara. |
| **Samlagning brota** | **Frádráttur brota** |
| $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ | $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ |
| Leggið teljarana saman og setjið summuna yfir sameiginlega nefnarann. | Dragið síðari teljarann frá þeim fyrri og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. |
| Ekki þarf minnsta samnefnara til að margfalda eða deila brotum. Minnsti samnefnari er nauðsynlegur til að leggja saman eða draga frá brotum. | |

**SÝNIDÆMI 1.84**

Einfaldið: ⓐ $\frac{5x}{6} - \frac{3}{10}$ ⓑ $\frac{5x}{6} \cdot \frac{3}{10}$.

## Lausn

Spyrjið fyrst: „Hver er reikniaðgerðin?“ Þegar við höfum greint reikniaðgerðina vitum við hvort við þurfum sameiginlegan nefnara. Munið að við þurfum sameiginlegan nefnara til að leggja saman eða draga frá, en ekki til að margfalda eða deila.

1

ⓐ Hver er reikniaðgerðin? Reikniaðgerðin er frádráttur. Hafa brotin sama nefnara? Nei. Endurritið hvort brot sem jafngilt brot með minnsta samnefnaranum. Dragið síðari teljarann frá þeim fyrri og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. Einfaldið ef hægt er. Engir sameiginlegir þættir eru til staðar. Brotið er fullstytt.

$$\frac{5x}{6} - \frac{3}{10}$$
$$\frac{5x \cdot 5}{6 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3}$$
$$\frac{25x}{30} - \frac{9}{30}$$
$$\frac{25x-9}{30}$$

ⓑ Hver er reikniaðgerðin? Margföldun. Til að margfalda brot skal margfalda teljarana saman og nefnarana saman. Endurritið þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. Fellið sameiginlegu þættina burt. Einfaldið.

$$\frac{5x}{6} \cdot \frac{3}{10}$$
$$\frac{5x \cdot 3}{6 \cdot 10}$$
$$\frac{\cancel{5}\, x \cdot \cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}$$
$$\frac{x}{4}$$

Takið eftir að við þurftum minnsta samnefnara til að leggja saman $\frac{5x}{6} - \frac{3}{10}$, en ekki til að margfalda $\frac{5x}{6} \cdot \frac{3}{10}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.167**

Einfaldið: ⓐ $\frac{3a}{4} - \frac{8}{9}$ ⓑ $\frac{3a}{4} \cdot \frac{8}{9}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.168**

Einfaldið: ⓐ $\frac{4k}{5} - \frac{1}{6}$ ⓑ $\frac{4k}{5} \cdot \frac{1}{6}$.

## Forgangsröð reikniaðgerða notuð til að einfalda samsett brot

Við höfum séð að samsett brot er brot þar sem teljari eða nefnari inniheldur brot. Brotastrikið táknar deilingu. Við einfölduðum samsetta brotið $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ með því að deila $\frac{3}{4}$ með $\frac{5}{8}$.

Nú skoðum við samsett brot þar sem teljarinn eða nefnarinn inniheldur stæðu sem hægt er að einfalda. Fyrst verðum við því að einfalda teljarann og nefnarann hvorn fyrir sig að fullu samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða. Síðan deilum við teljaranum með nefnaranum.

**SÝNIDÆMI 1.85**

## Að einfalda samsett brot

Einfaldið: $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4+3^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Einfaldaðu teljarann.<br>* Mundu að, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ þýðir $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$. | $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4+3^2}$<br>$\dfrac{\frac{1}{4}}{4+3^2}$ |
| **Skref 2.** Einfaldið nefnarann. | $\dfrac{\frac{1}{4}}{4+9}$<br>$\dfrac{\frac{1}{4}}{13}$ |
| **Skref 3.** Deilið teljaranum með nefnaranum. Fullstyttið ef hægt er.<br>* Munið að $13=\frac{13}{1}$ | $\frac{1}{4}\div 13$<br>$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{13}$<br>$\frac{1}{52}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.169**

Einfaldið: $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2^3+2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.170**

Einfaldið: $\dfrac{1+4^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$.

**AÐFERÐ**

## Að einfalda samsett brot.

1. Skref 1. Einfaldið teljarann.
2. Skref 2. Einfaldið nefnarann.
3. Skref 3. Deilið teljaranum með nefnaranum. Einfaldið ef hægt er.

**SÝNIDÆMI 1.86**

1

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}$.

## Lausn

Gagnlegt getur verið að setja sviga utan um teljarann og nefnarann.

Tafla 1.27

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)}$ |
| Einfaldið teljarann (MSN = 6) og nefnarann (MSN = 12). | $\dfrac{\left(\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\right)}{\left(\frac{9}{12}-\frac{2}{12}\right)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{\left(\frac{7}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}\right)}$ |
| Deilið teljaranum með nefnaranum. | $\frac{7}{6} \div \frac{7}{12}$ |
| Einfaldið. | $\frac{7}{6} \cdot \frac{12}{7}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{6 \cdot 7}$ |
| Einfaldið. | $2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.171**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.172**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$.

## Gildi stæða með breytum og brotum reiknað

Við höfum áður reiknað gildi stæða, en nú getum við reiknað gildi stæða sem innihalda brot. Munið að til að reikna gildi stæðu setjum við gildi breytunnar inn í stæðuna og einföldum síðan.

**SÝNIDÆMI 1.87**

Reiknið gildi $x+\frac{1}{3}$ þegar ⓐ $x=-\frac{1}{3}$ ⓑ $x=-\frac{3}{4}$.

### Lausn

**1.** ⓐ Til að reikna gildi $x+\frac{1}{3}$ þegar $x=-\frac{1}{3}$, setjið $-\frac{1}{3}$ í stað $x$ í stæðuna.

| | |
|---|---|
| | $x+\frac{1}{3}$ |
| Setjið $-\frac{1}{3}$ í stað x. | $-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ |
| Einfaldið. | 0 |

**2.** ⓑ Til að reikna gildi $x+\frac{1}{3}$ þegar $x=-\frac{3}{4}$, setjum við $-\frac{3}{4}$ í stað x í stæðuna.

| | |
|---|---|
| | $x+\frac{1}{3}$ |
| Setjið $-\frac{3}{4}$ í stað x. | $-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ |
| Endurritið sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum, 12. | $-\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{9}{12}+\frac{4}{12}$ |
| Leggið saman. | $-\frac{5}{12}$ |

1

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.173**

Reiknið gildi $x+\frac{3}{4}$ þegar ⓐ $x=-\frac{7}{4}$ ⓑ $x=-\frac{5}{4}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.174**

Reiknið gildi $y+\frac{1}{2}$ þegar ⓐ $y=\frac{2}{3}$ ⓑ $y=-\frac{3}{4}$.

**SÝNIDÆMI 1.88**

Reiknið gildi $-\frac{5}{6}-y$ þegar $y=-\frac{2}{3}$.

## Lausn

| | $-\frac{5}{6}-y$ |
|---|---|
| Setjið $-\frac{2}{3}$ í stað y. | $-\frac{5}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)$ |
| Endurritið sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum, 6. | $-\frac{5}{6}-\left(-\frac{4}{6}\right)$ |
| Dragið frá. | $\frac{-5-(-4)}{6}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{1}{6}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.175**

Reiknið gildi $-\frac{1}{2}-y$ þegar $y=-\frac{1}{4}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.176**

Reiknið gildi $-\frac{3}{8}-y$ þegar $y=-\frac{5}{2}$.

**SÝNIDÆMI 1.89**

Reiknið gildi $2x^2y$ þegar $x=\frac{1}{4}$ og $y=-\frac{2}{3}$.

## Lausn

Setjið gildin inn í stæðuna.

| | |
|---|---|
| | $2x^2y$ |
| Setjið $\frac{1}{4}$ í stað $x$ og $-\frac{2}{3}$ í stað $y$. | $2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(-\frac{2}{3}\right)$ |
| Reiknið veldin fyrst. | $2\left(\frac{1}{16}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$ |
| Margfaldið. Fellið út sameiginlega þætti. Takið eftir að við skrifum 16 sem $2 \cdot 2 \cdot 4$ svo auðvelt sé að fella sameiginlega þætti burt. | $-\frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{1}{12}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.177**

Reiknið gildi $3ab^2$ þegar $a=-\frac{2}{3}$ og $b=-\frac{1}{2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.178**

Reiknið gildi $4c^3d$ þegar $c=-\frac{1}{2}$ og $d=-\frac{4}{3}$.

Í næsta dæmi verða aðeins breytur en engir fastar.

**SÝNIDÆMI 1.90**

Reiknið gildi $\frac{p+q}{r}$ þegar $p=-4, q=-2,$ og $r=8$.

## Lausn

Til að reikna gildi $\frac{p+q}{r}$ þegar $p=-4, q=-2,$ og $r=8$, setjum við gildin inn í stæðuna.

| | |
|---|---|
| | $\frac{p+q}{r}$ |
| Setjið $-4$ í stað $p$, $-2$ í stað $q$ og $8$ í stað $r$. | $\frac{-4+(-2)}{8}$ |
| Leggið fyrst saman í teljaranum. | $\frac{-6}{8}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{3}{4}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.179**

1

Reiknið gildi $\frac{a+b}{c}$ þegar $a=-8$, $b=-7$, og $c=6$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.180**

Reiknið gildi $\frac{x+y}{z}$ þegar $x=9$, $y=-18$, og $z=-6$.

## Æfingar úr hluta 1.6

***Æfingin skapar meistarann***

**Samlagning og frádráttur brota með sama nefnara**

Leggið saman í eftirfarandi æfingum.

425.

$$\frac{6}{13}+\frac{5}{13}$$

426.

$$\frac{4}{15}+\frac{7}{15}$$

427.

$$\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$$

428.

$$\frac{8}{q}+\frac{6}{q}$$

429.

$$-\frac{3}{16}+\left(-\frac{7}{16}\right)$$

430.

$$-\frac{5}{16}+\left(-\frac{9}{16}\right)$$

431.

$$-\frac{8}{17}+\frac{15}{17}$$

432.

$$-\frac{9}{19}+\frac{17}{19}$$

433.

$$\frac{6}{13}+\left(-\frac{10}{13}\right)+\left(-\frac{12}{13}\right)$$

434.

$$\frac{5}{12}+\left(-\frac{7}{12}\right)+\left(-\frac{11}{12}\right)$$

Dragið frá í eftirfarandi æfingum.

435.

$$\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$$

436.

$$\frac{9}{13}-\frac{4}{13}$$

437.

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{12}$$

438.

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}$$

439.

$$\frac{19}{21}-\frac{4}{21}$$

440.

$$\frac{17}{21}-\frac{8}{21}$$

441.

$$\frac{5y}{8}-\frac{7}{8}$$

1

442.

$$\frac{11z}{13} - \frac{8}{13}$$

443.

$$-\frac{23}{u} - \frac{15}{u}$$

444.

$$-\frac{29}{v} - \frac{26}{v}$$

445.

$$-\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)$$

446.

$$-\frac{3}{7} - \left(-\frac{5}{7}\right)$$

447.

$$-\frac{7}{9} - \left(-\frac{5}{9}\right)$$

448.

$$-\frac{8}{11} - \left(-\frac{5}{11}\right)$$

**Blandaðar æfingar**

Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

449.

$$-\frac{5}{18} \cdot \frac{9}{10}$$

450.

$$-\frac{3}{14} \cdot \frac{7}{12}$$

451.

$$\frac{n}{5} - \frac{4}{5}$$

452.

$$\frac{6}{11}-\frac{s}{11}$$

453.

$$-\frac{7}{24}+\frac{2}{24}$$

454.

$$-\frac{5}{18}+\frac{1}{18}$$

455.

$$\frac{8}{15}\div\frac{12}{5}$$

456.

$$\frac{7}{12}\div\frac{9}{28}$$

**Samlagning og frádráttur brota með ólíkum nefnurum**

Leggið saman eða dragið frá í eftirfarandi æfingum.

457.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$$

458.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{8}$$

459.

$$\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{9}\right)$$

460.

$$\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{8}\right)$$

461.

$$\frac{7}{12}+\frac{5}{8}$$

1

462.

$$\frac{5}{12}+\frac{3}{8}$$

463.

$$\frac{7}{12}-\frac{9}{16}$$

464.

$$\frac{7}{16}-\frac{5}{12}$$

465.

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{8}$$

466.

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$$

467.

$$-\frac{11}{30}+\frac{27}{40}$$

468.

$$-\frac{9}{20}+\frac{17}{30}$$

469.

$$-\frac{13}{30}+\frac{25}{42}$$

470.

$$-\frac{23}{30}+\frac{5}{48}$$

471.

$$-\frac{39}{56}-\frac{22}{35}$$

472.

$$-\frac{33}{49}-\frac{18}{35}$$

473.

$$-\frac{2}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)$$

474.

$$-\frac{3}{4}-\left(-\frac{4}{5}\right)$$

475.

$$1+\frac{7}{8}$$

476.

$$1-\frac{3}{10}$$

477.

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$$

478.

$$\frac{y}{2}+\frac{2}{3}$$

479.

$$\frac{y}{4}-\frac{3}{5}$$

480.

$$\frac{x}{5}-\frac{1}{4}$$

**Blandaðar æfingar**

Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

**481.** ⓐ $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ ⓑ $\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}$

**482.** ⓐ $-\frac{2}{5}-\frac{1}{8}$ ⓑ $-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}$

**483.** ⓐ $\frac{5n}{6}\div\frac{8}{15}$ ⓑ $\frac{5n}{6}-\frac{8}{15}$

**484.** ⓐ $\frac{3a}{8}\div\frac{7}{12}$ ⓑ $\frac{3a}{8}-\frac{7}{12}$

1

485.

$$-\frac{3}{8}\div\left(-\frac{3}{10}\right)$$

486.

$$-\frac{5}{12}\div\left(-\frac{5}{9}\right)$$

487.

$$-\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$$

488.

$$-\frac{1}{8}+\frac{7}{12}$$

489.

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{9}$$

490.

$$\frac{5}{9}-\frac{1}{6}$$

491.

$$-\frac{7}{15}-\frac{y}{4}$$

492.

$$-\frac{3}{8}-\frac{x}{11}$$

493.

$$\frac{11}{12a}\cdot\frac{9a}{16}$$

494.

$$\frac{10y}{13}\cdot\frac{8}{15y}$$

**Forgangsröð reikniaðgerða notuð til að einfalda samsett brot**
Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

495.

$$\frac{2^3+4^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

496.

$$\frac{3^3-3^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

497.

$$\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2}{\left(\frac{3}{7}\right)^2}$$

498.

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{5}{8}\right)^2}$$

499.

$$\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$$

500.

$$\frac{5}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}$$

501.

$$\frac{\frac{7}{8}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}$$

502.

$$\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}}$$

1

503.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{12}$$

504.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$$

505.

$$1-\frac{3}{5}\div\frac{1}{10}$$

506.

$$1-\frac{5}{6}\div\frac{1}{12}$$

507.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{3}{4}$$

508.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}$$

509.

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{6}+\frac{3}{4}$$

510.

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}$$

511.

$$12\left(\frac{9}{20}-\frac{4}{15}\right)$$

512.

$$8\left(\frac{15}{16}-\frac{5}{6}\right)$$

513.

$$\frac{\frac{5}{8}+\frac{1}{6}}{\frac{19}{24}}$$

514.

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{3}{10}}{\frac{14}{30}}$$

515.

$$\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{6}\right)\div\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

516.

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)\div\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{3}\right)$$

**Gildi stæða með breytum og brotum reiknað**

Reiknið gildið í eftirfarandi æfingum.

**517.** $x+\left(-\frac{5}{6}\right)$ þegar ⓐ $x=\frac{1}{3}$ ⓑ $x=-\frac{1}{6}$

**518.** $x+\left(-\frac{11}{12}\right)$ þegar ⓐ $x=\frac{11}{12}$ ⓑ $x=\frac{3}{4}$

**519.** $x-\frac{2}{5}$ þegar ⓐ $x=\frac{3}{5}$ ⓑ $x=-\frac{3}{5}$

**520.** $x-\frac{1}{3}$ þegar ⓐ $x=\frac{2}{3}$ ⓑ $x=-\frac{2}{3}$

**521.** $\frac{7}{10}-w$ þegar ⓐ $w=\frac{1}{2}$ ⓑ $w=-\frac{1}{2}$

**522.** $\frac{5}{12}-w$ þegar ⓐ $w=\frac{1}{4}$ ⓑ $w=-\frac{1}{4}$

1

**523.** $2x^2y^3$ þegar $x=-\frac{2}{3}$ og $y=-\frac{1}{2}$

**524.** $8u^2v^3$ þegar $u=-\frac{3}{4}$ og $v=-\frac{1}{2}$

**525.** $\frac{a+b}{a-b}$ þegar $a=-3, b=8$

**526.** $\frac{r-s}{r+s}$ þegar $r=10, s=-5$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**527.** **Skreytingar.** Laronda saumar ver utan um skrautpúðana í sófanum sínum. Í hvert púðaver þarf hún $\frac{1}{2}$ jarda af mynstruðu efni og $\frac{3}{8}$ jarda af einlitu efni. Hve mikið efni þarf Laronda samtals í hvert púðaver?

**528.** **Bakstur.** Vanessa bakar súkkulaðibitakökur og hafrakökur. Hún þarf $\frac{1}{2}$ bolla af sykri í súkkulaðibitakökurnar og $\frac{1}{4}$ af sykri í hafrakökurnar. Hve mikinn sykur þarf hún samtals?

### *Ritunarverkefni*

**529.** Hvers vegna þurfa brot að hafa samnefnara svo hægt sé að leggja þau saman eða draga þau frá? Útskýrið.

**530.** Hvernig finnið þið minnsta samnefnara 2 brota?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið við æfingarnar skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð námsmarkmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| lagt saman og dregið frá brot með ólíkum nefnurum. | | | |
| borið kennsl á og beitt reikniaðgerðum með brotum. | | | |
| notað forgangsröð reikniaðgerða til að einfalda brotabrot. | | | |
| reiknað gildi stæðna með breytum og brotum. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur vel undirbúin fyrir næsta kafla? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# 1.7 Tugabrot



**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Lesið og ritið tugabrot
- Námundið tugabrot
- Leggið saman og dragið frá með tugabrotum
- Margfaldið og deilið með tugabrotum
- Breytið milli tugabrota, almennra brota og prósenta

**UNDIRBÚNINGUR 1.7**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta er að finna í kaflanum Tugabrot í bókinni Foralgebra.

## Lesið og ritið tugabrot

**Tugabrot eru** önnur leið til að rita almenn brot sem hafa nefnara sem eru veldi af 10.

$$0{,}1 = \frac{1}{10} \qquad 0{,}1 \text{ er „einn tíundi hluti“}$$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} \qquad 0{,}01 \text{ er „einn hundraðasti hluti“}$$

$$0{,}001 = \frac{1}{1.000} \qquad 0{,}001 \text{ er „einn þúsundasti hluti“}$$

$$0{,}0001 = \frac{1}{10.000} \qquad 0{,}0001 \text{ er „einn tíuþúsundasti hluti“}$$

Takið eftir að „tíu þúsund“ er tala stærri en einn en „einn tíuþúsundasti hluti“ er tala minni en einn. Ending raðtölunnar, „-asti“, gefur til kynna að talan sé minni en einn.

Þegar við lesum heila tölu samsvarar heitið sætisgildinu sem byggist á veldum af tíu. Við lesum 10.000 sem „tíu þúsund“ og 10.000.000 sem „tíu milljónir“. Á sama hátt samsvara heiti tugabrotasætanna brotagildum þeirra. Mynd 1.14 sýnir heiti sætisgildanna vinstra og hægra megin við tugabrotskommuna.

| Sætisgildi | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hundruð þúsunda | Tugir þúsunda | Þúsundir | Hundruð | Tugir | Einingar | , | Tíundu hlutar | Hundraðshlutar | Þúsundustu hlutar | Tíuþúsundustu hlutar | Hundraðþúsundustu hlutar |
| | | | | | | , | | | | | |

Mynd 1.14 Sætisgildi tugabrota eru sýnd vinstra og hægra megin við tugabrotskommuna.

**SÝNIDÆMI 1.91**

## Hvernig á að lesa tugabrot

1

Lesið tugabrotið 4,3.

## Lausn




**PRÓFIÐ SJÁLF 1.181**

Lesið tugabrotið: 6,7.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.182**

Lesið tugabrotið: 5,8.

Hér fyrir neðan tökum við saman skrefin til að lesa tugabrot.

**AÐFERÐ**

## Lesið tugabrot.

1. Skref 1. Lesið töluna vinstra megin við tugabrotskommuna.
2. Skref 2. Skrifið „og“ fyrir tugabrotskommuna.
3. Skref 3. Lesið töluhlutann hægra megin við tugabrotskommuna eins og hann væri heil tala.
4. Skref 4. Nefnið tugabrotasæti síðasta tölustafsins.

**SÝNIDÆMI 1.92**

Lesið tugabrotið: $-15{,}571$.

## Lausn

| | $-15{,}571$ |
|---|---|
| Lesið töluna vinstra megin við tugabrotskommuna. | mínus fimmtán _____ |
| Skrifið „og“ fyrir tugabrotskommuna. | mínus fimmtán og _____ |
| Lesið töluna hægra megin við tugabrotskommuna. | mínus fimmtán og fimm hundruð sjötíu og einn _____ |
| Tölustafurinn 1 er í þúsundustuhlutasætinu. | mínus fimmtán og fimm hundruð sjötíu og einn þúsundustu hlutar |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.183**

Lesið tugabrotið: $-13{,}461$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.184**

Lesið tugabrotið: $-2{,}053$.

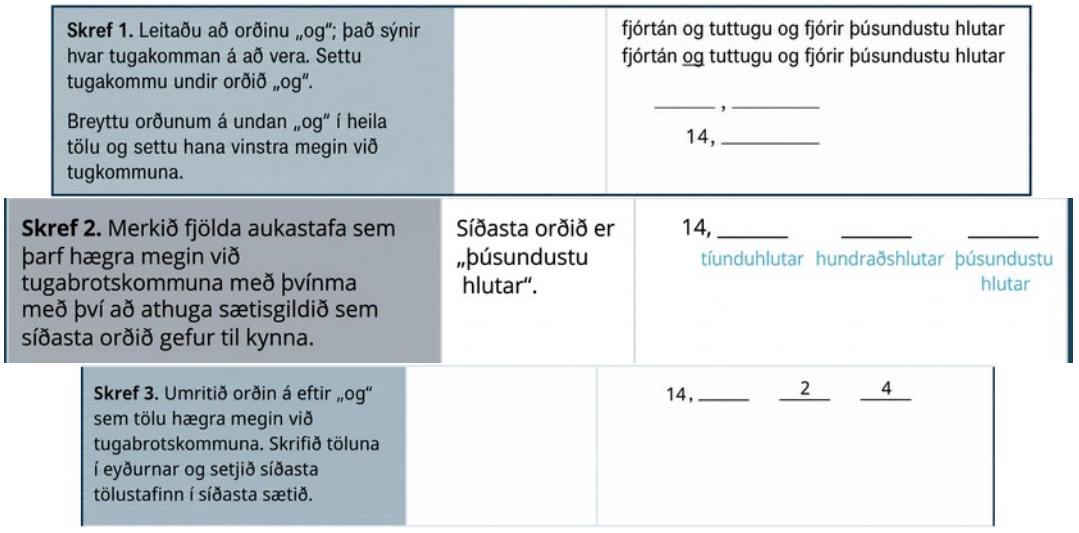
Þegar við skrifum ávísun ritum við töluna bæði með tölustöfum og bókstöfum. Skoðum nú hvernig við ritum tugabrot þegar heiti þess er gefið.

**SÝNIDÆMI 1.93**

### Hvernig á að rita tugabrot

Ritið „fjórtán og tuttugu og fjórir þúsundustu hlutar“ sem tugabrot.

## Lausn



| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Setjið núll í auð sæti eftir þörfum. | Núll þarf í tíundasætið. | 14, 0 2 4<br>Fjórtán og tuttugu og fjórir þúsundustu hlutar er ritað 14,024. |

1

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.185**

Ritið sem tugabrot: þrettán og sextíu og átta þúsundustu hlutar.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.186**

Ritið sem tugabrot: fimm og níutíu og fjórir þúsundustu hlutar.

Hér tökum við saman skrefin til að rita tugabrot.

**AÐFERÐ**

### Ritið tugabrot.

1. Skref 1.
   Finnið orðið „og“; það sýnir hvar tugabrotskomman er.
   - Setjið tugabrotskommu undir orðið „og“. Breytið orðunum á undan „og“ í heila tölu og setjið hana vinstra megin við tugabrotskommuna.
   - Ef orðið „og“ kemur ekki fyrir, skrifið „0“ og setjið tugabrotskommu hægra megin við það.
2. Skref 2. Merkið fyrir tugabrotasætunum hægra megin við tugabrotskommuna.
   Sætisgildið sem síðasta orðið nefnir segir til um hve mörg þau eiga að vera.
3. Skref 3. Breytið orðunum á eftir „og“ í töluna hægra megin við tugabrotskommuna.
   Skrifið töluna í auðu svæðin og setjið síðasta tölustafinn í síðasta sætið.
4. Skref 4. Fyllið eftir þörfum upp í auðu sætin með núllum.

### Námundið tugabrot

Tugabrot eru námunduð á mjög svipaðan hátt og núll og jákvæðar heiltölur. Við notum aðferð sem byggist á þeirri sem við notuðum til að námunda slíkar tölur.

**SÝNIDÆMI 1.94**

### Hvernig á að námunda tugabrot

Námundið 18,379 að næsta hundraðshluta.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið tilgreinda sætisgildið og merkið það með ör. | | hundraðshlutasæti ↓ 18,379 |
| **Skref 2.** Strikið undir tölustafinn hægra megin við tilgreinda sætið. | | hundraðshlutasæti ↓ 18,379 |
| **Skref 3.** Er þessi tölustafur stærri en eða jafn 5?<br>**Já:** Bætið 1 við tölustafinn í tilgreinda sætinu.<br>**Nei:** Breytið ekki tölustafnum í tilgreinda sætinu. | Þar sem 9 er stærri en eða jafnt og 5 bætum við 1 við 7. | 18,37 9<br>bætið 1 við — eyðið |
| **Skref 4.** Skrifið töluna aftur og fjarlægið alla tölustafi hægra megin við námundunarstafinn. | | 18,38<br>18,38 er 18,379 námundað að næsta hundraðshluta. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.187**

Námundið að næsta hundraðshluta: 1,047.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.188**

Námundið að næsta hundraðshluta: 9,173.

Hér tökum við saman skrefin við námundun tugabrots.

**AÐFERÐ**

### Námundið tugabrot.

1. Skref 1. Finnið tilgreinda sætisgildið og merkið það með ör.
2. Skref 2. Strikið undir tölustafinn hægra megin við tilgreinda sætið.
3. Skref 3.
   Er þessi tölustafur stærri en eða jafn 5?
   - Já – leggið 1 við tölustafinn í tilgreinda sætinu.
   - Nei – breytið ekki tölustafnum í tilgreinda sætinu.
4. Skref 4. Endurritið töluna og eyðið öllum tölustöfum hægra megin við námundunarstafinn.

**SÝNIDÆMI 1.95**

Námundið 18,379: ⓐ að næsta tíunduhluta ⓑ að næstu heiltölu.

### Lausn

Námundið 18,379

**1.** ⓐ að næsta tíunduhluta

1

| | |
|---|---|
| Finnið tíunduhlutasætið og merkið það með ör. |   |
| Strikið undir tölustafinn hægra megin við tilgreinda sætið. |   |
| Þar sem talan 7 er stærri en eða jöfn 5 leggjum við 1 við 3. |   |
| Endurritið töluna og eyðið öllum tölustöfum hægra megin við námundunarstafinn. |   |
| Takið eftir að við settum ekki núll í stað tölustafanna sem við eyddum. | Því er 18,379 námundað að næsta tíunduhluta 18,4. |

**2.** ⓑ að næstu heiltölu

| | |
|---|---|
| Finnið einingasætið og merkið það með ör. |   |
| Strikið undir tölustafinn hægra megin við tilgreinda sætið. |   |
| Þar sem talan 3 er ekki stærri en eða jöfn 5 leggjum við ekki 1 við 8. |   |
| Endurritið töluna og eyðið öllum tölustöfum hægra megin við námundunarstafinn. |   |
| | Því er 18,379 námundað að næstu heiltölu 18. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.189**

Námundið 6,582: ⓐ að næsta hundraðshluta ⓑ að næsta tíunduhluta ⓒ að næstu heiltölu.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.190**

Námundið 15,2175: ⓐ að næsta þúsundasta hluta ⓑ að næsta hundraðshluta ⓒ að næsta tíunduhluta.

## Leggið saman og dragið frá með tugabrotum

Til að leggja saman eða draga frá tugabrot setjum við tugabrotskommurnar hverja undir aðra. Þannig getum við lagt saman eða dregið frá samsvarandi sætisgildi. Síðan reiknum við eins og

um væri að ræða tölur án tugabrotskommu og setjum loks tugabrotskommuna í niðurstöðuna.



**AÐFERÐ**

### Leggið saman eða dragið frá með tugabrotum.

1. Skref 1. Ritið tölurnar þannig að tugabrotskommurnar standi lóðrétt hver undir annarri.
2. Skref 2. Notið núll eftir þörfum til að fylla upp í auð sæti.
3. Skref 3. Leggið tölurnar saman eða dragið þær frá án þess að taka tillit til tugabrotskomma. Setjið síðan tugabrotskommuna í svarið undir tugabrotskommunum talnanna sem gefnar eru.

**SÝNIDÆMI 1.96**

Leggið saman: $23{,}5+41{,}38$.

### Lausn

Tafla 1.28

| | |
|---|---|
| Ritið tölurnar þannig að tugabrotskommurnar standi lóðrétt hver undir annarri. | $\begin{array}{r} 23{,}5 \\ +41{,}38 \\ \hline \end{array}$ |
| Setjið 0 á eftir 5 í 23,5 til að fylla upp í auða sætið. Munið að $\frac{5}{10}=\frac{50}{100}$ því $0{,}5=0{,}50$. | $\begin{array}{r} 23{,}50 \\ +41{,}38 \\ \hline \end{array}$ |
| Leggið tölurnar saman án þess að taka tillit til tugabrotskomma. Setjið síðan tugabrotskommuna í summuna. | $\begin{array}{r} 23{,}50 \\ +41{,}38 \\ \hline 64{,}88 \end{array}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.191**

Leggið saman: $4{,}8+11{,}69$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.192**

Leggið saman: $5{,}123+18{,}47$.

**SÝNIDÆMI 1.97**

Dragið frá: $20-14{,}65$.

## Lausn

1

Tafla 1.29

| | $20-14{,}65$ |
|---|---|
| Ritið tölurnar þannig að tugabrotskommurnar standi lóðrétt hver undir annarri. Munið að 20 er heiltala og því á tugabrotskomman að koma á eftir 0. | $\begin{array}{r} 20{,} \\ -\,14{,}65 \\ \hline \end{array}$ |
| Setjið núll hægra megin til að fylla upp í auðu sætin. | $\begin{array}{r} 20{,}00 \\ -\,14{,}65 \\ \hline \end{array}$ |
| Dragið frá og setjið tugabrotskommuna í svarið. | $\begin{array}{r} {\scriptstyle 9}\quad{\scriptstyle 9} \\ 1\,10\;\;10\,10 \\ 20{,}00 \\ -\,14{,}65 \\ \hline 5{,}35 \end{array}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.193**

Dragið frá: $10-9{,}58$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.194**

Dragið frá: $50-37{,}42$.

## Margfaldið og deilið með tugabrotum

Að margfalda tugabrot er mjög líkt venjulegri margföldun. Við þurfum aðeins að finna hvar tugabrotskomman á að vera. Aðferðin verður skiljanleg ef við breytum tugabrotunum fyrst í almenn brot og margföldum síðan.

Skoðum því hvaða margfeldi fæst ef við breytum tugabrotunum fyrst í almenn brot. Við reiknum tvö dæmi hlið við hlið. Leitið að mynstri!

| | $\underbrace{(0{,}3)}_{1\text{ sæti}}\ \underbrace{(0{,}7)}_{1\text{ sæti}}$ | $\underbrace{(0{,}2)}_{1\text{ sæti}}\ \underbrace{(0{,}46)}_{2\text{ sæti}}$ |
|---|---|---|
| Breytið í almenn brot. | $\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}$ | $\frac{2}{10}\cdot\frac{46}{100}$ |
| Margfaldið. | $\frac{21}{100}$ | $\frac{92}{1000}$ |
| Breytið í tugabrot. | $\underbrace{0{,}21}_{2\text{ tugabrotasæti}}$ | $\underbrace{0{,}092}_{3\text{ tugabrotasæti}}$ |

Takið eftir að í fyrra dæminu margfölduðum við tvær tölur sem höfðu hvor um sig einn tölustaf á eftir tugabrotskommu. Margfeldið hafði tvö tugabrotasæti. Í seinna dæminu margfölduðum við saman tölu með einu tugabrotasæti og tölu með tveimur tugabrotasætum. Margfeldið hafði þrjú tugabrotasæti.

Við margföldum tölurnar án þess að taka tillit til tugabrotskomma. Síðan teljum við saman tugabrotasætin í þáttunum. Summan segir okkur hve mörg tugabrotasæti eru í margfeldinu.

Reglurnar um margföldun jákvæðra og neikvæðra talna gilda að sjálfsögðu einnig um tugabrot!

Þegar við margföldum tvær tölur,

- ef formerki þeirra eru eins er margfeldið jákvætt.
- ef formerki þeirra eru ólík er margfeldið neikvætt.

Þegar við margföldum tugabrot með formerki ákvarðum við fyrst formerki margfeldisins og margföldum síðan eins og báðar tölurnar væru jákvæðar. Að lokum ritum við margfeldið með réttu formerki.

---

**AÐFERÐ**

### Margfaldið tugabrot.

1. Skref 1. Ákvarðið formerki margfeldisins.
2. Skref 2. Ritið tölurnar lóðrétt og hægristillið þær. Margfaldið tölurnar án þess að taka tillit til tugabrotskomma.
3. Skref 3. Setjið tugabrotskommuna á réttan stað. Fjöldi tugabrotasæta í margfeldinu er summa fjölda tugabrotasæta í þáttunum.
4. Skref 4. Ritið margfeldið með réttu formerki.

---

**SÝNIDÆMI 1.98**

Margfaldið: $(-3{,}9)(4{,}075)$.

### Lausn

| | $(-3{,}9)(4{,}075)$ |
|---|---|
| Formerkin eru ólík. Margfeldið verður neikvætt. | |
| Ritið tölurnar lóðrétt og hægristillið þær. | $\begin{array}{r} 4{,}075 \\ \times\ 3{,}9 \\ \hline \end{array}$ |
| Margfaldið. | $\begin{array}{r} 4{,}075 \\ \times\ 3{,}9 \\ \hline 36675 \\ 12225 \\ \hline 158925 \end{array}$ |
| Leggið saman fjölda tugabrotasæta í þáttunum (1 + 3). Setjið tugabrotskommuna 4 sæti frá hægri. $(-3{,}9)$ (1 sæti) $(4{,}075)$ (3 sæti) | $\begin{array}{r} 4{,}075 \\ \times\ 3{,}9 \\ \hline 36675 \\ 12225 \\ \hline 15{,}8925 \end{array}$ 4 aukastafir |
| Formerkin eru ólík og því er margfeldið neikvætt. | $(-3{,}9)(4{,}075) = -15{,}8925$ |

1

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.195**

Margfaldið: $-4{,}5(6{,}107)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.196**

Margfaldið: $-10{,}79(8{,}12)$.

Í mörgum öðrum námsgreinum, sérstaklega raunvísindum, munuð þið margfalda tugabrot með veldum af 10 (10, 100, 1000 o.s.frv.). Ef þið reiknið nokkur slík margfeldi á blaði gætuð þið séð tengsl milli fjölda núlla í veldinu af 10 og þess hve mörg sæti tugabrotskomman færist til hægri í margfeldinu.

**AÐFERÐ**

## Margfaldið tugabrot með veldi af tíu.

1. Skref 1. Færið tugabrotskommuna jafn mörg sæti til hægri og núllin eru mörg í veldinu af 10.
2. Skref 2. Bætið núllum við enda tölunnar eftir þörfum.

**SÝNIDÆMI 1.99**

Margfaldið 5,63 ⓐ með 10 ⓑ með 100 ⓒ með 1.000.

## Lausn

Fjöldi núlla í margfeldinu af tíu segir okkur hve mörg sæti þarf að færa tugabrotskommuna til hægri.

ⓐ

| | 5,63(10) |
|---|---|
| 1 er fjöldi núlla í 10 og því færum við tugabrotskommuna 1 sæti til hægri. | 5,63<br>56,3 |

ⓑ

| | 5,63(100) | |
|---|---|---|
| 2 er fjöldi núlla í 100 og því færum við tugabrotskommuna 2 sæti til hægri. | Það eru 2 núll í 100, svo færa skal kommu um 2 sæti til hægri. | 5,63 (100)<br>5,63<br>563 |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | 5,63(1.000) |
| 3 er fjöldi núlla í 1.000 og því færum við tugabrotskommuna 3 sæti til hægri. | 5,63 |
| Bæta þarf núlli við í endann. | 5.630 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.197**

Margfaldið 2,58 ⓐ með 10 ⓑ með 100 ⓒ með 1.000.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.198**

Margfaldið 14,2 ⓐ með 10 ⓑ með 100 ⓒ með 1.000.

Rétt eins og margföldun tugabrota er deiling þeirra mjög svipuð venjulegri deilingu. Við þurfum aðeins að finna hvar tugabrotskomman á að vera.

Til að deila tugabrotum finnið þið fyrst með hvaða veldi af 10 þarf að margfalda nefnarann svo hann verði heiltala. Margfaldið síðan teljarann með sama veldi af 10. Vegna reglunnar um jafngild brot höfum við ekki breytt gildi brotsins! Við þetta færast tugabrotskommurnar í teljara og nefnara jafnmörg sæti til hægri. Til dæmis:

$$\frac{0{,}8}{0{,}4}$$
$$\frac{0{,}8(10)}{0{,}4(10)}$$
$$\frac{8}{4}$$

Reglurnar um deilingu jákvæðra og neikvæðra talna gilda einnig um tugabrot. Þegar við deilum tugabrotum með formerki ákvarðum við fyrst formerki kvótans og deilum síðan eins og báðar tölurnar væru jákvæðar. Að lokum ritum við kvótann með réttu formerki.

Við rifjum upp tákn og orðaforða deilingar:

$$\underset{\text{deilistofn}}{a} \div \underset{\text{deilir}}{b} = \underset{\text{kvóti}}{c} \qquad \underset{\text{deilir}}{b} \overset{c}{\underset{\text{kvóti}}{\phantom{x}}} \underset{\text{deilistofn}}{a}$$

Við skráum skrefin við deilingu tugabrota svo auðvelt sé að fletta þeim upp.

**AÐFERÐ**

## Deilið tugabrotum.

1

1. Skref 1. Ákvarðið formerki kvótans.
2. Skref 2. Gerið deilinn að heiltölu með því að „færa“ tugabrotskommuna alla leið til hægri. „Færið“ tugabrotskommuna í deilistofninum jafnmörg sæti og bætið við núllum eftir þörfum.
3. Skref 3. Deilið. Setjið tugabrotskommuna í kvótann beint fyrir ofan tugabrotskommuna í deilistofninum.
4. Skref 4. Ritið kvótann með réttu formerki.

**SÝNIDÆMI 1.100**

Deilið: $-25{,}65 \div (-0{,}06)$.

## Lausn

Munið að við megum „færa“ tugabrotskommurnar í deili og deilistofni vegna reglunnar um jafngild brot.

| | $-25{,}65 \div (-0{,}06)$ |
|---|---|
| Formerkin eru eins. | Kvótinn er jákvæður. |
| Gerið deilinn að heiltölu með því að „færa“ tugabrotskommuna alla leið til hægri. | |
| „Færið“ tugabrotskommuna í deilistofninum jafnmörg sæti. | $0{,}06\overline{)25{,}65}$ |
| Deilið. Setjið tugabrotskommuna í kvótann beint fyrir ofan tugabrotskommuna í deilistofninum. | $\begin{array}{r} 427{,}5 \\ 006,\overline{)2565{,}0} \\ -24 \\ \hline 16 \\ -12 \\ \hline 45 \\ -42 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline \end{array}$ |
| Ritið kvótann með réttu formerki. | $-25{,}65 \div (-0{,}06) = 427{,}5$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.199**

Deilið: $-23{,}492 \div (-0{,}04)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.200**

Deilið: $-4{,}11 \div (-0{,}12)$.

Við deilum oft tugabroti með heiltölu þegar við viljum finna einingarverð, það er verð á einum hlut sem er seldur í fjölpakkningu. Gerum til dæmis ráð fyrir að kassi með 24 vatnsflöskum kosti $3,99. Til að finna verð einnar vatnsflösku deilum við $3,99 með 24. Þessi

deiling er sýnd í sýnidæmi 1.101. Í útreikningum með peninga námundum við svarið að næsta senti, það er hundraðshluta.



**SÝNIDÆMI 1.101**

Deilið: $\$3{,}99 \div 24$.

### Lausn

| | $\$3{,}99 \div 24$ |
|---|---|
| Setjið tugabrotskommuna í kvótann beint fyrir ofan tugabrotskommuna í deilistofninum. | |
| Deilið á venjulegan hátt. Hvenær eigum við að hætta? Þar sem þessi deiling fjallar um peninga námundum við að næsta senti, það er hundraðshluta. Til þess þurfum við að halda deilingunni áfram að þúsundustuhlutasætinu. | $\begin{array}{r} 0{,}166 \\ 24\overline{)3{,}990} \\ \underline{24} \\ 159 \\ \underline{144} \\ 150 \\ \underline{144} \\ 6 \end{array}$ |
| Námundið að næsta senti. | $\$0{,}166 \approx \$0{,}17$<br>$\$3{,}99 \div 24 \approx \$0{,}17$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.201**

Deilið: $\$6{,}99 \div 36$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.202**

Deilið: $\$4{,}99 \div 12$.

## Breytið milli tugabrota, almennra brota og prósenta

Við breytum tugabroti í almennt brot með því að finna sætisgildi síðasta tölustafsins, þess sem er lengst til hægri. Í tugabrotinu 0,03 er 3 í hundraðshlutasætinu og því er 100 nefnari almenna brotsins sem er jafngilt 0,03.

$$0\ \ 0{,}03 = \frac{3}{100}$$

Takið eftir að þegar talan vinstra megin við tugabrotskommuna er núll fáum við brot þar sem teljarinn er minni en nefnarinn. Slík brot kallast eiginleg brot.

Skrefin við að breyta tugabroti í almennt brot eru tekin saman í aðferðarreitnum.

**AÐFERÐ**

### Breytið tugabroti í eiginlegt brot.

1. Skref 1. Ákvarðið sætisgildi síðasta tölustafsins.

**2.** Skref 2.
Ritið brotið.
- teljari—„talan“ hægra megin við tugabrotskommuna
- nefnari—sætisgildið sem samsvarar síðasta tölustafnum

1

**SÝNIDÆMI 1.102**

Ritið 0,374 sem almennt brot.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $0{,}374$ |
| Ákvarðið sætisgildi síðasta tölustafsins. | 0,3 tíunduhlutar; 7 hundraðshlutar; 4 þúsundustu hlutar |
| Ritið almenna brotið fyrir 0,374:<br>• Teljarinn er 374.<br>• Nefnarinn er 1.000. | $\frac{374}{1000}$ |
| Einfaldið brotið. | $\frac{2 \cdot 187}{2 \cdot 500}$ |
| Deilið út sameiginlegum þáttum. | $\frac{187}{500}$<br>því er $0{,}374 = \frac{187}{500}$ |

Tókuð þið eftir að fjöldi núlla í nefnara $\frac{374}{1.000}$ er sá sami og fjöldi tugabrotasæta í 0,374?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.203**

Ritið 0,234 sem almennt brot.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.204**

Ritið 0,024 sem almennt brot.

Við höfum lært að breyta tugabrotum í almenn brot. Nú gerum við hið gagnstæða og breytum almennum brotum í tugabrot. Munið að brotastrikið táknar deilingu. Því má rita $\frac{4}{5}$ sem $4 \div 5$ eða $5\overline{)4}$. Af þessu fæst aðferðin hér á eftir til að breyta almennu broti í tugabrot.

**AÐFERÐ**

### Breytið almennu broti í tugabrot.

Til að breyta almennu broti í tugabrot deilið þið teljara brotsins með nefnara þess.

**SÝNIDÆMI 1.103**

Ritið $-\frac{5}{8}$ sem tugabrot.

## Lausn

Brotastrik táknar deilingu og því byrjum við á að rita $\frac{5}{8}$ sem $85$. Deilið síðan.

$$\begin{array}{r} 0{,}625 \\ 8\overline{)5{,}000} \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \end{array}$$

$$\text{því, } -\frac{5}{8} = -0{,}625$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.205**

Ritið $-\frac{7}{8}$ sem tugabrot.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.206**

Ritið $-\frac{3}{8}$ sem tugabrot.

Við deilingu fáum við ekki alltaf afganginn núll. Stundum verður kvótinn lotubundið tugabrot. Lotubundið tugabrot er tugabrot þar sem síðasti tölustafurinn eða síðasta tölustafarunan endurtekur sig endalaust. Við setjum strik yfir endurteknu tölustafarununa til að sýna að hún endurtekur sig.

**LOTUBUNDIÐ TUGABROT**

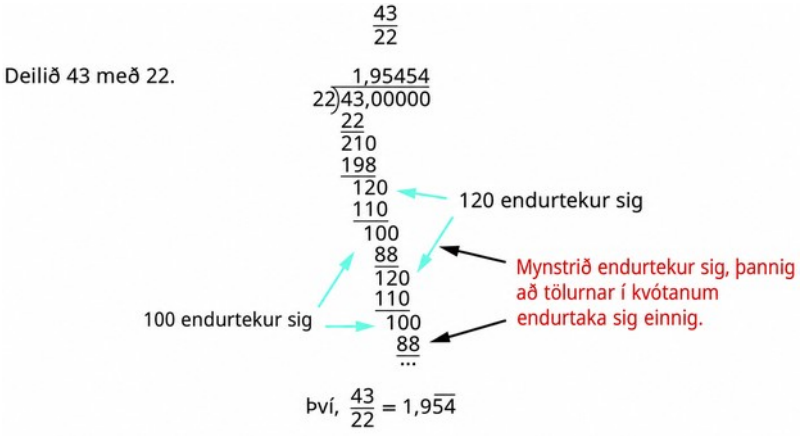
Lotubundið tugabrot er tugabrot þar sem síðasti tölustafurinn eða síðasta tölustafarunan endurtekur sig endalaust.

Við setjum strik yfir endurteknu tölustafarununa til að sýna að hún endurtekur sig.

**SÝNIDÆMI 1.104**

Ritið $\frac{43}{22}$ sem tugabrot.

## Lausn




---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.207**

Ritið $\frac{27}{11}$ sem tugabrot.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.208**

Ritið $\frac{51}{22}$ sem tugabrot.

Stundum þurfum við að einfalda stæður með bæði almennum brotum og tugabrotum.

---

**SÝNIDÆMI 1.105**

Einfaldið: $\frac{7}{8}+6{,}4$.

## Lausn

Fyrst verðum við að breyta annarri tölunni svo báðar séu á sama rithætti. Við getum breytt almenna brotinu í tugabrot eða tugabrotinu í almennt brot. Yfirleitt er auðveldara að breyta almenna brotinu í tugabrot.

| | | |
|---|---|---|
| | | $\frac{7}{8}+6,4$ |
| Breytið $\frac{7}{8}$ í tugabrot. | $8\overline{)7,000}$ $0,875$ $64$ $60$ $56$ $40$ $40$ $0$ | |
| Leggið saman. | | $0,875+6,4$ |
| | | $7,275$ |
| | | Því er $\frac{7}{8}+6,4=7,275$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.209**

Einfaldið: $\frac{3}{8}+4,9$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.210**

Einfaldið: $5,7+\frac{13}{20}$.

Prósenta er hlutfall þar sem nefnarinn er 100. Orðið prósent merkir af hverju hundraði. Við notum prósentumerkið, %, til að tákna prósent.

**PRÓSENTA**

Prósenta er hlutfall þar sem nefnarinn er 100.

Prósenta er hlutfall og því er auðvelt að rita hana sem almennt brot. Prósent merkir af hverju hundraði (100) og því er nefnari brotsins 100. Síðan breytum við brotinu í tugabrot með því að deila teljaranum með nefnaranum.

Tafla 1.30

| | 6 % | 78 % | 135 % |
|---|---|---|---|
| Ritið sem hlutfall þar sem nefnarinn er 100. | $\frac{6}{100}$ | $\frac{78}{100}$ | $\frac{135}{100}$ |
| Breytið brotinu í tugabrot með því að deila teljaranum með nefnaranum. | 0,06 | 0,78 | 1,35 |

Sjáið þið mynstrið? Til að breyta prósentutölu í tugabrot færum við tugabrotskommuna um tvö sæti til vinstri.

1

6% 78% 2,7% 135%

0,06 0,78 0,027 1,35

**SÝNIDÆMI 1.106**

Breytið hverri prósentu í tugabrot: ⓐ 62% ⓑ 135% ⓒ 35,7%.

## Lausn

| ⓐ | |
|---|---|
| | 62% |
| Færið tugabrotskommuna um tvö sæti til vinstri. | 0,62 |
| ⓑ | |
| | 135% |
| Færið tugabrotskommuna um tvö sæti til vinstri. | 1,35 |
| ⓒ | |
| | 35,7% |
| Færið tugabrotskommuna um tvö sæti til vinstri. | 0,357 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.211**

Breytið hverri prósentu í tugabrot: ⓐ 9 % ⓑ 87 % ⓒ 3,9%.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.212**

Breytið hverri prósentu í tugabrot: ⓐ 3% ⓑ 91% ⓒ 8,3%.

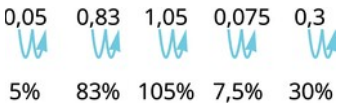
Auðvelt er að skilja hvernig tugabroti er breytt í prósent ef við munum skilgreininguna á prósentu og höfum sætisgildi í huga.

Til að breyta tugabroti í prósent skuluð þið muna að prósent merkir af hverju hundraði. Ef við breytum tugabrotinu í brot þar sem nefnarinn er 100 er auðvelt að breyta brotinu í prósent.

Tafla 1.31

| | 0,83 | 1,05 | 0,075 |
|---|---|---|---|
| Ritið sem almennt brot. | $\frac{83}{100}$ | $1\frac{5}{100}$ | $\frac{75}{1000}$ |
| Nefnarinn er 100. | | $\frac{105}{100}$ | $\frac{7,5}{100}$ |
| Ritið hlutfallið sem prósent. | 83 % | 105 % | 7,5 % |

Þekkið þið mynstrið? Til að breyta tugabroti í prósent færum við tugabrotskommuna um tvö sæti til hægri og bætum síðan við prósentumerkinu.




**SÝNIDÆMI 1.107**

Breytið hverju tugabroti í prósent: ⓐ 0,51 ⓑ 1,25 ⓒ 0,093.

## Lausn

| ⓐ | |
|---|---|
| |  |
| Færið tugabrotskommuna um tvö sæti til hægri. | 51 % |
| ⓑ | |
| |  |
| Færið tugabrotskommuna um tvö sæti til hægri. | 125 % |
| ⓒ | |
| |  |
| Færið tugabrotskommuna um tvö sæti til hægri. | 9,3 % |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.213**

Breytið hverju tugabroti í prósent: ⓐ 0,17 ⓑ 1,75 ⓒ 0,0825.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.214**

Breytið hverju tugabroti í prósent: ⓐ 0,41 ⓑ 2,25 ⓒ 0,0925.

## Æfingar úr hluta 1.7

1

***Æfingin skapar meistarann***

**Lesið og ritið tugabrot**

Ritið sem tugabrot í eftirfarandi æfingum.

**531.** Tuttugu og níu og áttatíu og einn hundraðshluti

**532.** Sextíu og einn og sjötíu og fjórir hundraðshlutar

**533.** Sjö tíunduhlutar

**534.** Sex tíunduhlutar

**535.** Tuttugu og níu þúsundustu hlutar

**536.** Þrjátíu og fimm þúsundustu hlutar

**537.** Mínus ellefu og níu tíuþúsundustu hlutar

**538.** Mínus fimmtíu og níu og tveir tíuþúsundustu hlutar

Lesið hvert tugabrot í eftirfarandi æfingum.

**539.** 5,5

**540.** 14,02

**541.** 8,71

**542.** 2,64

**543.** 0,002

**544.** 0,479

545.

$$-17{,}9$$

546.

$$-31{,}4$$

**Námundið tugabrot**

Námundið hverja tölu að næsta tíunduhluta í eftirfarandi æfingum.

**547.** 0,67

**548.** 0,49

**549.** 2,84

**550.** 4,63

Námundið hverja tölu að næsta hundraðshluta í eftirfarandi æfingum.

**551.** 0,845

**552.** 0,761

**553.** 0,299

**554.** 0,697

**555.** 4,098

**556.** 7,096

Námundið hverja tölu í eftirfarandi æfingum: ⓐ að næsta hundraðshluta ⓑ að næsta tíunduhluta ⓒ að næstu heiltölu.

**557.** 5,781

**558.** 1,6381

**559.** 63,479

560.

$$84,281$$

**Leggið saman og dragið frá með tugabrotum**

Leggið saman eða dragið frá í eftirfarandi æfingum.

561.

$$16{,}92+7{,}56$$

562.

$$248{,}25-91{,}29$$

563.

$$21{,}76-30{,}99$$

564.

$$38{,}6+13{,}67$$

565.

$$-16{,}53-24{,}38$$

566.

$$-19{,}47-32{,}58$$

567.

$$-38{,}69+31{,}47$$

568.

$$29{,}83+19{,}76$$

569.

$$72{,}5 - 100$$

570.

$$86{,}2 - 100$$

571.

$$15 + 0{,}73$$

572.

$$27 + 0{,}87$$

573.

$$91{,}95 - (-10{,}462)$$

574.

$$94{,}69 - (-12{,}678)$$

575.

$$55{,}01 - 3{,}7$$

576.

$$59{,}08 - 4{,}6$$

577.

$$2{,}51 - 7{,}4$$

578.

$$3{,}84 - 6{,}1$$

**Margfaldið og deilið með tugabrotum**

Margfaldið í eftirfarandi æfingum.

579.

$$(0{,}24)(0{,}6)$$

580.

$$(0{,}81)(0{,}3)$$

581.

$$(5{,}9)(7{,}12)$$

582.

$$(2{,}3)(9{,}41)$$

583.

$$(-4{,}3)(2{,}71)$$

584.

$$(-8{,}5)(1{,}69)$$

585.

$$(-5{,}18)(-65{,}23)$$

586.

$$(-9{,}16)(-68{,}34)$$

587.

$$(0{,}06)(21{,}75)$$

588.

$$(0{,}08)(52{,}45)$$

589.

$$(9{,}24)(10)$$

590.

$$(6{,}531)(10)$$

591.

$$(55{,}2)(1000)$$

592.

$$(99{,}4)(1000)$$

Deilið í eftirfarandi æfingum.

593.

$$4{,}75 \div 25$$

594.

$$12{,}04 \div 43$$

595.

$$\$\,117{,}25 \div 48$$

1

596.

$$\$\,109{,}24 \div 36$$

597.

$$0{,}6 \div 0{,}2$$

598.

$$0{,}8 \div 0{,}4$$

599.

$$1{,}44 \div (-0{,}3)$$

600.

$$1{,}25 \div (-0{,}5)$$

601.

$$-1{,}75 \div (-0{,}05)$$

602.

$$-1{,}15 \div (-0{,}05)$$

603.

$$5{,}2 \div 2{,}5$$

604.

$$6{,}5 \div 3{,}25$$

605.

$$11 \div 0{,}55$$

606.

$$14 \div 0{,}35$$

**Breytið milli tugabrota, almennra brota og prósenta**

Ritið hvert tugabrot sem almennt brot í eftirfarandi æfingum.

**607.** 0,04

**608.** 0,19

**609.** 0,52

**610.** 0,78

**611.** 1,25

**612.** 1,35

**613.** 0,375

**614.** 0,464

**615.** 0,095

**616.** 0,085

Breytið hverju almennu broti í tugabrot í eftirfarandi æfingum.

617.

$$\frac{17}{20}$$

618.

$$\frac{13}{20}$$

619.

$$\frac{11}{4}$$

620.

$$\frac{17}{4}$$

621.

$$-\frac{310}{25}$$

622.

$$-\frac{284}{25}$$

623.

$$\frac{15}{11}$$

624.

$$\frac{18}{11}$$

625.

$$\frac{15}{111}$$

626.

$$\frac{25}{111}$$

627.

$$2{,}4+\frac{5}{8}$$

628.

$$3{,}9+\frac{9}{20}$$

Breytið hverri prósentu í tugabrot í eftirfarandi æfingum.

**629.** 1%

**630.** 2%

**631.** 63%

**632.** 71%

**633.** 150%

**634.** 250%

**635.** 21,4%

**636.** 39,3%

**637.** 7,8%

**638.** 6,4%

Breytið hverju tugabroti í prósent í eftirfarandi æfingum.

**639.** 0,01

**640.** 0,03

**641.** 1,35

**642.** 1,56

**643.** 3

**644.** 4

**645.** 0,0875

**646.** 0,0625

**647.** 2,254

**648.** 2,317

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**649.** **Launahækkun. Danny** fékk launahækkun og fær nú $58.965,95 á ári. Námundið töluna að næsta ⓐ dal ⓑ þúsundi dala ⓒ tugþúsundi dala.

**650.** **Nýr bíll.** Nýi bíllinn hennar Selenu kostaði $23.795,95. Námundið töluna að næsta ⓐ dal ⓑ þúsundi dala ⓒ tugþúsundi dala.

**651.** **Söluskattur.** Hyo Jin býr í San Diego. Hún keypti ísskáp á $1.624,99 og þegar afgreiðslumaðurinn reiknaði söluskattinn varð hann nákvæmlega $142,186625. Námundið söluskattinn að næsta ⓐ senti og ⓑ dal.

**652.** **Söluskattur.** Jennifer keypti borðstofuhúsgögn á $1.038,99 fyrir heimili sitt í Cincinnati. Hún reiknaði út að söluskatturinn væri nákvæmlega $67,53435. Námundið söluskattinn að næsta ⓐ senti og ⓑ dal.

**653.** **Laun. Annie er í tveimur störfum. Hún fær $14,04 á klukkustund fyrir kennslu við Borgarháskólann og $8,75 á klukkustund á kaffihúsi. Í síðustu viku kenndi hún í 8 klukkustundir og vann á kaffihúsinu í 15 klukkustundir. ⓐ Hve mikið þénaði hún? ⓑ Hve miklu meira hefði hún þénað ef hún hefði unnið allar 23 klukkustundirnar við kennslu í stað þess að vinna bæði störfin?**

**654.** **Laun. Jake er í tveimur störfum. Hann fær $7,95 á klukkustund í mötuneyti háskólans og $20,25 á listasafni. Í síðustu viku vann hann 12 klukkustundir í mötuneytinu og 5 klukkustundir á listasafninu. ⓐ Hve mikið þénaði hann? ⓑ Hve miklu meira hefði hann þénað ef hann hefði unnið allar 17 klukkustundirnar á listasafninu í stað þess að vinna bæði störfin?**

### *Ritunarverkefni*

**655.** Hvernig hjálpar það ykkur að læra um tugabrot að þekkja bandaríska peninga?

**656.** Útskýrið hvernig „þrír og níu hundraðshlutar“ eru ritaðir sem tugabrot.

**657.** Án þess að leysa dæmið „Hvaða tala er þannig að 44 er 80% af henni?“ skuluð þið hugsa um hvert svarið gæti verið. Ætti talan að vera stærri en 44 eða minni en 44? Útskýrið röksemdafærsluna.

**658.** Þegar Szeto-fjölskyldan seldi heimili sitt var söluverðið 500% af því sem hún hafði greitt fyrir húsið 30 árum áður. Útskýrið hvað 500% merkir í þessu samhengi.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið við æfingarnar skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð námsmarkmiðum hlutans.

1

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| nefnt og skrifað tugabrot. | | | |
| námundað tugabrot. | | | |
| lagt saman og dregið frá tugabrot. | | | |
| margfaldað og deilt með tugabrotum. | | | |
| umritað tugabrot, almenn brot og prósentur hvert yfir í annað. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn ykkur um hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 1.8 Rauntölur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið stæður með ferningsrótum
- Þekkið heiltölur, ræðar tölur, óræðar tölur og rauntölur
- Staðsetjið almenn brot á talnalínunni
- Staðsetjið tugabrot á talnalínunni

**UNDIRBÚNINGUR 1.8**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta er að finna í köflunum Tugabrot og Eiginleikar rauntalna í bókinni Foralgebra.

## Einfaldið stæður með ferningsrótum

Munið að þegar tala n er margfölduð með sjálfri sér ritum við $n^2$ og lesum það „n í öðru veldi“. Niðurstaðan kallast ferningur tölunnar n. Til dæmis,

$8^2$ lesið „8 í öðru veldi“
64 64 nefnist ferningur af 8.

Á sama hátt er 121 ferningur 11 þar sem $11^2$ er 121.

**FERNINGUR TÖLU**

Ef $n^2 = m$, þá er m ferningur tölunnar sem táknuð er með n.

**STÆRÐFRÆÐI MEÐ ÁÞREIFANLEGUM HJÁLPARGÖGNUM**

Verkefnið „Ferningstölur“ í Stærðfræði með áþreifanlegum hjálpargögnum hjálpar ykkur að skilja ferningstölur betur.

Ljúkið við eftirfarandi töflu til að sýna ferninga talningartalnanna frá 1 til 15.

| Tala | $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ferningur | $n^2$ | | | | | | | | 64 | | | 121 | | | | |

Tölurnar í annarri röðinni kallast ferningstölur. Gagnlegt er að læra að þekkja ferningstölurnar.

Ferningar talningartalnanna eru jákvæðar tölur. En hvað um ferninga neikvæðra talna? Við vitum að þegar formerki tveggja talna eru eins er margfeldi þeirra jákvætt. Ferningur hverrar neikvæðrar tölu er því líka jákvæður.

$$(-3)^2 = 9 \qquad (-8)^2 = 64 \qquad (-11)^2 = 121 \qquad (-15)^2 = 225$$

Tókuð þið eftir að þessir ferningar eru þeir sömu og ferningar jákvæðu talnanna?

Stundum þurfum við að skoða samband talna og ferninga þeirra í öfuga átt. Þar sem $10^2 = 100$, segjum við að 100 sé ferningur 10. Við segjum einnig að 10 sé ferningsrót af 100. Tala sem hefur ferninginn $m$ kallast ferningsrót af m.

---

**FERNINGSRÓT TÖLU**

Ef $n^2 = m$, þá er n ferningsrót af m.

Athugið einnig að $(-10)^2 = 100$, svo $-10$ er einnig ferningsrót af 100. Því eru bæði 10 og $-10$ ferningsrætur af 100.

Hver jákvæð tala hefur því tvær ferningsrætur, aðra jákvæða og hina neikvæða. En hvað ef við viljum aðeins jákvæðu ferningsrótina af jákvæðri tölu? Rótarmerkið, $\sqrt{\ }$,, táknar jákvæðu ferningsrótina. Hún kallast jákvæða ferningsrótin. Þegar við notum rótarmerkið er alltaf átt við jákvæðu ferningsrótina.

Við notum rótarmerkið einnig fyrir ferningsrót núlls. Þar sem $0^2 = 0$, $\sqrt{0} = 0$. Takið eftir að núll hefur aðeins eina ferningsrót.

---

**RITHÁTTUR FERNINGSRÓTAR**

$\sqrt{m}$ er lesið „ferningsrótin af m“




Ef $m = n^2$, þá $\sqrt{m} = n$, fyrir $n \geq 0$.

Ferningsrótin af m, $\sqrt{m}$, er jákvæða talan sem hefur ferninginn m.

Þar sem 10 er jákvæða ferningsrótin af 100 ritum við $\sqrt{100} = 10$. Gott getur verið að fylla út töfluna hér á eftir svo að þið eigið auðveldara með að þekkja ferningsrætur.

| $\sqrt{1}$ | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{25}$ | $\sqrt{36}$ | $\sqrt{49}$ | $\sqrt{64}$ | $\sqrt{81}$ | $\sqrt{100}$ | $\sqrt{121}$ | $\sqrt{144}$ | $\sqrt{169}$ | $\sqrt{196}$ | $\sqrt{225}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 10 | | | | | |



**SÝNIDÆMI 1.108**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{25}$ ⓑ $\sqrt{121}$.

## Lausn

Tafla 1.32

| | |
|---|---|
| ⓐ Þar sem $5^2=25$ | $\sqrt{25}$<br>$5$ |
| ⓑ Þar sem $11^2=121$ | $\sqrt{121}$<br>$11$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.215**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{36}$ ⓑ $\sqrt{169}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.216**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{16}$ ⓑ $\sqrt{196}$.

Við vitum að hver jákvæð tala hefur tvær ferningsrætur og að rótarmerkið táknar þá jákvæðu. Við ritum $\sqrt{100}=10$. Ef við viljum finna neikvæða ferningsrót tölu setjum við mínusmerki fyrir framan rótarmerkið. Til dæmis $-\sqrt{100}=-10$. Við lesum $-\sqrt{100}$ sem „samlagningarandhverfu ferningsrótarinnar af 100“.

**SÝNIDÆMI 1.109**

Einfaldið: ⓐ $-\sqrt{9}$ ⓑ $-\sqrt{144}$.

## Lausn

Tafla 1.33

| | |
|---|---|
| ⓐ Mínusmerkið er fyrir framan rótarmerkið. | $-\sqrt{9}$<br>$-3$ |
| ⓑ Mínusmerkið er fyrir framan rótarmerkið. | $-\sqrt{144}$<br>$-12$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.217**

Einfaldið: ⓐ $-\sqrt{4}$ ⓑ $-\sqrt{225}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.218**

Einfaldið: ⓐ $-\sqrt{81}$ ⓑ $-\sqrt{100}$.



## Þekkið heiltölur, ræðar tölur, óræðar tölur og rauntölur

Við höfum þegar flokkað tölur sem talningartölur, núll og jákvæðar heiltölur og allar heiltölur. Hver er munurinn á þessum talnaflokkum?

| | |
|---|---|
| Talningartölur | $1, 2, 3, 4, \ldots$ |
| Núll og jákvæðar heiltölur | $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ |
| Heiltölur | $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ |

Hvaða tölur fengjum við ef við byrjuðum með allar heiltölurnar og bættum síðan öllum almennum brotum við? Tölurnar sem við fengjum mynda mengi ræðra talna. Ræð tala er tala sem má rita sem hlutfall tveggja heiltalna.

**RÆÐ TALA**

Ræð tala er tala á forminu $\frac{p}{q}$, þar sem p og q eru heiltölur og $q \neq 0$.

Ræða tölu má rita sem hlutfall tveggja heiltalna.

Öll brot með formerki, svo sem $\frac{4}{5}, -\frac{7}{8}, \frac{13}{4}, -\frac{20}{3}$, eru ræðar tölur. Allir teljararnir og nefnararnir eru heiltölur.

Eru heiltölur ræðar tölur? Til að ákveða hvort heiltala sé ræð tala reynum við að rita hana sem hlutfall tveggja heiltalna. Hverja heiltölu má rita á marga vegu sem hlutfall heiltalna. Til dæmis er 3 jafngilt $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5} \ldots$

Einföld leið til að rita heiltölu sem hlutfall heiltalna er að rita hana sem brot þar sem nefnarinn er einn.

$$3 = \tfrac{3}{1} \qquad -8 = -\tfrac{8}{1} \qquad 0 = \tfrac{0}{1}$$

Fyrst hverja heiltölu má rita sem hlutfall tveggja heiltalna eru allar heiltölur ræðar tölur! Munið að talningartölurnar og núll og jákvæðar heiltölur eru einnig heiltölur og þar með ræðar tölur.

Hvað um tugabrot? Eru þau ræð? Skoðum nokkur og athugum hvort við getum ritað hvert þeirra sem hlutfall tveggja heiltalna.

Við höfum þegar séð að heiltölur eru ræðar tölur. Heiltöluna $-8$ mætti rita sem tugabrotið $-8{,}0$. Sum tugabrot eru því greinilega ræð.

Hugsið um tugabrotið 7,3. Getum við ritað það sem hlutfall tveggja heiltalna? Þar sem 7,3 merkir $7\frac{3}{10}$, getum við ritað það sem óeiginlega brotið $\frac{73}{10}$. Því er 7,3 hlutfall heiltalnanna 73 og 10. Það er ræð tala.

Almennt gildir að hvert tugabrot sem endar eftir ákveðinn fjölda tölustafa (svo sem 7,3 eða $-1{,}2684$), er ræð tala. Ritið tugabrotið einfaldlega sem blandna tölu.

1

**SÝNIDÆMI 1.110**

Ritið sem hlutfall tveggja heiltalna: ⓐ $-27$ ⓑ $7{,}31$.

## Lausn

Tafla 1.34

| | |
|---|---|
| ⓐ Ritið hana sem brot þar sem nefnarinn er 1. | $-27$<br>$\frac{-27}{1}$ |
| ⓑ Ritið hana sem blandna tölu. Munið að 7 er heiltöluhlutinn og tugabrotshlutinn, 0,31, táknar hundraðshluta. Breytið í óeiginlegt brot. | $7{,}31$<br>$7\frac{31}{100}$<br>$\frac{731}{100}$ |

Við sjáum því að $-27$ og $7{,}31$ eru báðar ræðar tölur því að hægt er að rita þær sem hlutfall tveggja heiltalna.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.219**

Ritið sem hlutfall tveggja heiltalna: ⓐ $-24$ ⓑ $3{,}57$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.220**

Ritið sem hlutfall tveggja heiltalna: ⓐ $-19$ ⓑ $8{,}41$.

Skoðum tugabrotsrithátt talnanna sem við vitum að eru ræðar.

Við höfum séð að sérhver heiltala er ræð tala, enda gildir $a=\frac{a}{1}$ fyrir sérhverja heiltölu a.

Einnig má breyta hverri heiltölu í tugabrot með því að bæta við tugabrotskommu og núlli.

| Heiltala | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tugabrotsform | $-2{,}0$ | $-1{,}0$ | $0{,}0$ | $1{,}0$ | $2{,}0$ | $3{,}0$ |

Þessi tugabrot enda.

Við höfum einnig séð að sérhvert almennt brot er ræð tala. Lítið á tugabrotsrithátt brotanna sem við skoðuðum hér að framan.

| Hlutfall heiltalna | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{7}{8}$ | $\frac{13}{4}$ | $-\frac{20}{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| Tugabrotsformið | $0{,}8$ | $-0{,}875$ | $3{,}25$ | $-6{,}666\ldots$<br>$-6{,}\overline{6}$ |

Þessi tugabrot annaðhvort enda eða eru lotubundin.

Hvað segja þessi dæmi okkur?

*Sérhverja ræða tölu má bæði rita sem hlutfall heiltalna,* ($\frac{p}{q}$,, þar sem p og q eru heiltölur og $q \neq 0$),, og sem tugabrot sem annaðhvort endar eða er lotubundið.

Hér eru tölurnar sem við skoðuðum hér að framan ritaðar sem hlutfall heiltalna og sem tugabrot:

| **Almenn brot** | | | | | **Heiltölur** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tala | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{7}{8}$ | $\frac{13}{4}$ | $-\frac{20}{3}$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| Hlutfall heiltalna | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{7}{8}$ | $\frac{13}{4}$ | $-\frac{20}{3}$ | $-\frac{2}{1}$ | $-\frac{1}{1}$ | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ |
| Tugabrotsritháttur | $0{,}8$ | $-0{,}875$ | $3{,}25$ | $-6{,}\overline{6}$ | $-2{,}0$ | $-1{,}0$ | $0{,}0$ | $1{,}0$ | $2{,}0$ | $3{,}0$ |

**RÆÐ TALA**

Ræð tala er tala á forminu $\frac{p}{q}$, þar sem p og q eru heiltölur og $q \neq 0$.

Tugabrotsritháttur hennar endar eða er lotubundinn.

Eru til tugabrot sem hvorki enda né eru lotubundin? Já!

Talan $\pi$, gríski stafurinn pí, sem skiptir miklu máli þegar hringjum er lýst, hefur tugabrotsrithátt sem hvorki endar né er lotubundinn.

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

Við getum jafnvel búið til tugabrotamynstur sem hvorki endar né er lotubundið, til dæmis

$$2{,}01001000100001\ldots$$

Ef tugabrotsritháttur tölu hvorki endar né er lotubundinn er ekki hægt að rita hana sem hlutfall heiltalna. Við köllum slíkar tölur óræðar.

**ÓRÆÐ TALA**

Óræð tala er tala sem ekki er hægt að rita sem hlutfall tveggja heiltalna.

Tugabrotsritháttur hennar endar ekki og er ekki lotubundinn.

Tökum saman aðferð til að ákvarða hvort tala sé ræð eða óræð.

**RÆÐ EÐA ÓRÆÐ?**

Ef tugabrotsritháttur tölu

- *er lotubundinn eða endar, er talan ræð.*
- *er ekki lotubundinn og endar ekki, er talan óræð.*

1

**SÝNIDÆMI 1.111**

Fyrir tölurnar $0{,}58\overline{3}, 0{,}47, 3{,}605551275\ldots$ skráið ⓐ ræðu tölurnar ⓑ óræðu tölurnar.

## Lausn

Tafla 1.35

| | |
|---|---|
| ⓐ Leitið að tugabrotum sem eru lotubundin eða enda. | Tölustafurinn 3 endurtekur sig í $0{,}58\overline{3}$. Tugabrotið 0,47 endar við tölustafinn 7. Því eru $0{,}58\overline{3}$ og 0,47 ræðar tölur. |
| ⓑ Leitið að tugabrotum sem hvorki enda né eru lotubundin. | $3{,}605551275\ldots$ hefur enga endurtekna tölustafarunu og endar ekki. Því er $3{,}605551275\ldots$ óræð tala. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.221**

Skoðið tölurnar og skráið ⓐ ræðu tölurnar ⓑ óræðu tölurnar: $0{,}29, 0{,}81\overline{6}, 2{,}515115111\ldots$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.222**

Skoðið tölurnar og skráið ⓐ ræðu tölurnar ⓑ óræðu tölurnar: $2{,}6\overline{3}, 0{,}125, 0{,}418302\ldots$

**SÝNIDÆMI 1.112**

Ákvarðið hvort hver tala sé ræð eða óræð: ⓐ $\sqrt{36}$ ⓑ $\sqrt{44}$.

## Lausn

1. ⓐ Takið eftir að 36 er ferningstala þar sem $6^2=36$. Því gildir $\sqrt{36}=6$, og $\sqrt{36}$ er þar af leiðandi ræð tala.
2. ⓑ Munið að $6^2=36$ og $7^2=49$, og því er 44 ekki ferningstala. Tugabrotsritháttur $\sqrt{44}$ verður því aldrei lotubundinn og endar aldrei, svo að $\sqrt{44}$ er óræð tala.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.223**

Ákvarðið hvort hver tala sé ræð eða óræð: ⓐ $\sqrt{81}$ ⓑ $\sqrt{17}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.224**

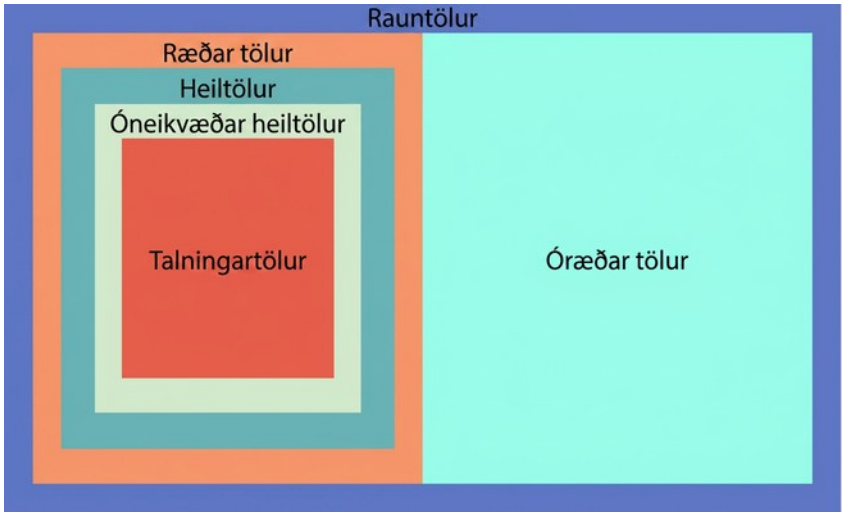
Ákvarðið hvort hver tala sé ræð eða óræð: ⓐ $\sqrt{116}$ ⓑ $\sqrt{121}$.

Við höfum séð að allar talningartölur eru núll eða jákvæðar heiltölur, allar slíkar tölur eru heiltölur og allar heiltölur eru ræðar tölur. Óræðar tölur eru tölur sem hafa tugabrotsrithátt sem hvorki endar né er lotubundinn. Þegar við sameinum ræðu og óræðu tölurnar fáum við mengi rauntalna.

**RAUNTALA**

Rauntala er tala sem er annaðhvort ræð eða óræð.

Allar tölur sem við notum í grunnalgebru eru rauntölur. Mynd 1.15 sýnir hvernig talnamengin sem við höfum fjallað um í þessum hluta tengjast.




Mynd 1.15 Þessi mynd sýnir talnamengin sem mynda mengi rauntalna. Finnst ykkur heitið „rauntölur“ undarlegt? Eru til tölur sem eru ekki „raunverulegar“ og ef svo er, hvaða tölur gætu það verið?

Getum við einfaldað $\sqrt{-25}$? Er til tala sem hefur ferninginn $-25$?

$$(\quad)^2 = -25\,?$$

Engin þeirra talna sem við höfum fengist við hingað til hefur ferninginn $-25$. Hvers vegna? Ferningur sérhverrar jákvæðrar tölu er jákvæður. Ferningur sérhverrar neikvæðrar tölu er einnig jákvæður. Því segjum við að engin rauntala sé jöfn $\sqrt{-25}$.

Ferningsrót neikvæðrar tölu er ekki rauntala.

**SÝNIDÆMI 1.113**

Ákvarðið hvort hver tala sé rauntala eða ekki: ⓐ $\sqrt{-169}$ ⓑ $-\sqrt{64}$.

## Lausn

1. ⓐ Engin rauntala hefur ferninginn $-169$. Því er $\sqrt{-169}$ ekki rauntala.

**2.** ⓑ Þar sem mínusmerkið er fyrir framan rótarmerkið er $-\sqrt{64}$ jafnt og $-8$. Þar sem $-8$ er rauntala er $-\sqrt{64}$ rauntala.



---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.225**

Ákvarðið hvort hver tala sé rauntala eða ekki: ⓐ $\sqrt{-196}$ ⓑ $-\sqrt{81}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.226**

Ákvarðið hvort hver tala sé rauntala eða ekki: ⓐ $-\sqrt{49}$ ⓑ $\sqrt{-121}$.

---

**SÝNIDÆMI 1.114**

Fyrir tölurnar $-7, \frac{14}{5}, 8, \sqrt{5}, 5{,}9, -\sqrt{64}$, skráið ⓐ núll og jákvæðu heiltölurnar ⓑ heiltölurnar ⓒ ræðu tölurnar ⓓ óræðu tölurnar ⓔ rauntölurnar.

## Lausn

**1.** ⓐ Munið að núll og jákvæðu heiltölurnar eru 0, 1, 2, 3, ... og 8 er eina gefna talan úr þeim hópi.

**2.** ⓑ Heiltölurnar eru núll (0), jákvæðu heiltölurnar og samlagningarandhverfur þeirra. Talan 8 er því heiltala og $-7$ er samlagningarandhverfa jákvæðrar heiltölu. Því er $-7$ líka heiltala. Takið einnig eftir að 64 er ferningur 8 og því $-\sqrt{64} = -8$. Heiltölurnar eru því $-7, 8, -\sqrt{64}$.

**3.** ⓒ Þar sem allar heiltölur eru ræðar eru $-7, 8, -\sqrt{64}$ ræðar. Til ræðra talna teljast einnig almenn brot og tugabrot sem enda eða eru lotubundin og því eru $\frac{14}{5}$ og $5{,}9$ ræðar.

Listinn yfir ræðu tölurnar er því $-7, \frac{14}{5}, 8, 5{,}9, -\sqrt{64}$.

**4.** ⓓ Munið að 5 er ekki ferningstala og því er $\sqrt{5}$ óræð tala.

**5.** ⓔ Allar tölurnar á listanum eru rauntölur.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.227**

Skoðið tölurnar og skráið ⓐ núll og jákvæðu heiltölurnar ⓑ heiltölurnar ⓒ ræðu tölurnar ⓓ óræðu tölurnar ⓔ rauntölurnar: $-3, -\sqrt{2}, 0, \bar{3}, \frac{9}{5}, 4, \sqrt{49}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.228**

Skoðið tölurnar og skráið ⓐ núll og jákvæðu heiltölurnar ⓑ heiltölurnar ⓒ ræðu tölurnar ⓓ óræðu tölurnar ⓔ rauntölurnar: $-\sqrt{25}, -\frac{3}{8}, -1{,}6, \sqrt{121}, 2{,}041975\ldots$

## Staðsetjið almenn brot á talnalínunni

Síðast þegar við skoðuðum talnalínuna voru aðeins jákvæðar og neikvæðar heiltölur á henni. Nú viljum við einnig merkja almenn brot og tugabrot á hana.

---

**STÆRÐFRÆÐI MEÐ ÁÞREIFANLEGUM HJÁLPARGÖGNUM**

Verkefnið „Talnalína, hluti 3“ í Stærðfræði með áþreifanlegum hjálpargögnum hjálpar ykkur að skilja betur hvernig almenn brot eru staðsett á talnalínunni.

Byrjum á almennum brotum og staðsetjum $\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, 3, \frac{7}{4}, -\frac{9}{2}, -5$, og $\frac{8}{3}$ á talnalínunni.

Við byrjum á tölunum $3$ og $-5$., sem eru núll eða jákvæðar heiltölur, því að auðveldast er að merkja þær. Sjá mynd 1.16.

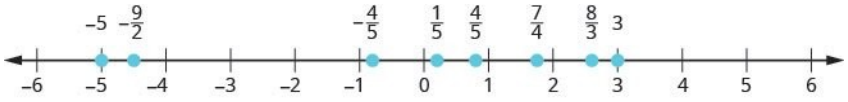
Eiginlegu brotin á listanum eru $\frac{1}{5}$ og $-\frac{4}{5}$. Við vitum að eiginlega brotið $\frac{1}{5}$ er minna en einn og liggur því milli $0$ og $1$. Nefnarinn er $5$ og því skiptum við einingunni frá $0$ til $1$ í $5$ jafna hluta $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. Við merkjum $\frac{1}{5}$. Sjá mynd 1.16.

Á sama hátt er $-\frac{4}{5}$ milli $0$ og $-1$. Við skiptum einingunni í $5$ jafna hluta og merkjum $-\frac{4}{5}$. Sjá mynd 1.16.

Að lokum skulum við skoða óeiginlegu brotin $\frac{7}{4}, -\frac{9}{2}, \frac{8}{3}$. Þetta eru brot þar sem teljarinn er stærri en nefnarinn. Auðveldara getur verið að staðsetja punktana ef þið breytið hverju broti í blandna tölu. Sjá mynd 1.16.

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \qquad -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2} \qquad \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Mynd 1.16 sýnir talnalínuna með öllum punktunum merktum.




Mynd 1.16

---

**SÝNIDÆMI 1.115**

Staðsetjið og merkið þessar tölur á talnalínu: $4, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -3, \frac{6}{5}, -\frac{5}{2}$, og $\frac{7}{3}$.

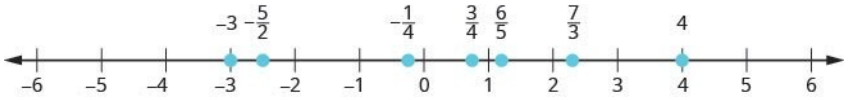
### Lausn

Staðsetjið og merkið heiltölurnar $4, -3$.

1

Staðsetjið fyrst eiginlega brotið $\frac{3}{4}$. Brotið $\frac{3}{4}$ er milli 0 og 1. Skiptið bilinu milli 0 og 1 í fjóra jafna hluta og merkið síðan $\frac{3}{4}$. Merkið á sama hátt töluna $-\frac{1}{4}$.

Staðsetjið nú óeiginlegu brotin $\frac{6}{5}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{3}$. Auðveldara er að merkja þau ef við breytum þeim fyrst í blandnar tölur og merkjum þau svo eins og lýst var hér að framan:
$\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}, \frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.




---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.229**

Staðsetjið og merkið þessar tölur á talnalínu: $-1, \frac{1}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{4}, \frac{9}{2}, 5, -\frac{8}{3}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.230**

Staðsetjið og merkið þessar tölur á talnalínu: $-2, \frac{2}{3}, \frac{7}{5}, -\frac{7}{4}, \frac{7}{2}, 3, -\frac{7}{3}$.

Í dæmi 1.116 notum við ójöfnumerki til að raða almennum brotum. Í fyrri köflum notuðum við talnalínuna til að raða tölum.

- $a < b$ *„a er minna en b“ þegar a er vinstra megin við b á talnalínunni*
- $a > b$ *„a er stærra en b“ þegar a er hægra megin við b á talnalínunni*

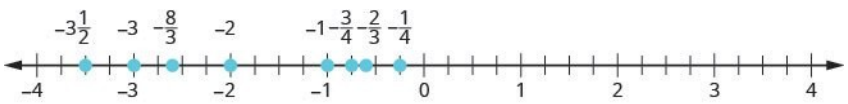
Gildin hækka þegar við færum okkur frá vinstri til hægri eftir talnalínu.

---

**SÝNIDÆMI 1.116**

Raðið hverju talnapari hér á eftir með < eða >. Gagnlegt getur verið að skoða mynd 1.17.

ⓐ $-\frac{2}{3} ___ -1$ ⓑ $-3\frac{1}{2} ___ -3$ ⓒ $-\frac{3}{4} ___ -\frac{1}{4}$ ⓓ $-2 ___ -\frac{8}{3}$




Mynd 1.17

## Lausn

Tafla 1.36

| | |
|---|---|
| ⓐ $-\frac{2}{3}$ er hægra megin við $-1$ á talnalínunni. | $-\frac{2}{3}___-1$<br>$-\frac{2}{3} > -1$ |
| ⓑ $-3\frac{1}{2}$ er hægra megin við $-3$ á talnalínunni. | $-3\frac{1}{2}___-3$<br>$-3\frac{1}{2} < -3$ |
| ⓒ $-\frac{3}{4}$ er hægra megin við $-\frac{1}{4}$ á talnalínunni. | $-\frac{3}{4}___-\frac{1}{4}$<br>$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{4}$ |
| ⓓ $-2$ er hægra megin við $-\frac{8}{3}$ á talnalínunni. | $-2___-\frac{8}{3}$<br>$-2 > -\frac{8}{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.231**

Raðið hverju talnapari hér á eftir með < eða >:

ⓐ $-\frac{1}{3}___-1$ ⓑ $-1\frac{1}{2}___-2$ ⓒ $-\frac{2}{3}___-\frac{1}{3}$ ⓓ $-3___-\frac{7}{3}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.232**

Raðið hverju talnapari hér á eftir með < eða >:

ⓐ $-1___-\frac{2}{3}$ ⓑ $-2\frac{1}{4}___-2$ ⓒ $-\frac{3}{5}___-\frac{4}{5}$ ⓓ $-4___-\frac{10}{3}$.

## Staðsetjið tugabrot á talnalínunni

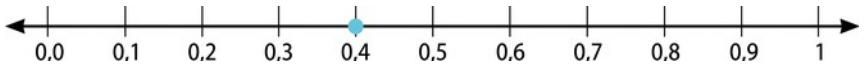
Tugabrot eru ein gerð almennra brota. Því staðsetjum við tugabrot á talnalínunni á svipaðan hátt og almenn brot.

**SÝNIDÆMI 1.117**

Staðsetjið 0,4 á talnalínunni.

## Lausn

Eiginlegt brot er minna en einn. Tugabrotið 0,4 jafngildir $\frac{4}{10}$,, sem er eiginlegt brot, og því er 0,4 milli 0 og 1. Skiptið bilinu milli 0 og 1 á talnalínu í 10 jafna hluta. Merkið nú hlutana 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0. Við ritum 0 sem 0,0 og 1 sem 1,0 svo að tölurnar séu allar ritaðar í tíundu hlutum. Merkið að lokum 0,4 á talnalínuna. Sjá mynd 1.18.




Mynd 1.18

1

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.233**

Staðsetjið á talnalínunni: 0,6.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.234**

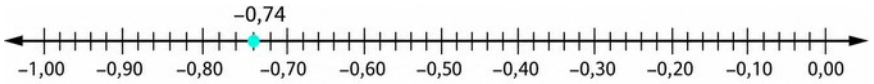
Staðsetjið á talnalínunni: 0,9.

**SÝNIDÆMI 1.118**

Staðsetjið $-0{,}74$ á talnalínunni.

### Lausn

Tugabrotið $-0{,}74$ jafngildir $-\frac{74}{100}$, og er því milli 0 og $-1$. Merkið hundraðshlutana á bilinu milli 0 og $-1$. á talnalínu. Sjá mynd 1.19.




Mynd 1.19

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.235**

Staðsetjið á talnalínunni: $-0{,}6$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.236**

Staðsetjið á talnalínunni: $-0{,}7$.

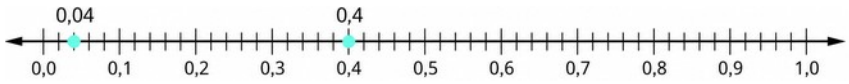
Hvor talan er stærri, 0,04 eða 0,40? Ef þið hugsið um þetta sem peninga vitið þið að \$0,40 (fjörutíu sent) er meira en \$0,04 (fjögur sent). Því gildir

$$0{,}40 > 0{,}04$$

Við getum aftur notað talnalínuna til að raða tölum.

- $a < b$ *„a er minna en b“ þegar a er vinstra megin við b á talnalínunni*
- $a > b$ *„a er stærra en b“ þegar a er hægra megin við b á talnalínunni*

Hvar eru 0,04 og 0,40 á talnalínunni? Sjá mynd 1.20.




Mynd 1.20



Við sjáum að 0,40 er hægra megin við 0,04 á talnalínunni. Þetta er önnur leið til að sýna að 0,40 > 0,04.

Hvernig ber 0,31 saman við 0,308? Hér hjálpar ekki að hugsa um peningaupphæðir til að bera tölurnar saman. En ef við breytum 0,31 og 0,308 í almenn brot getum við séð hvor talan er stærri.

| | 0,31 | 0,308 |
|---|---|---|
| Breytið í almenn brot. | $\frac{31}{100}$ | $\frac{308}{1000}$ |
| Við þurfum samnefnara til að bera þau saman. | $\frac{31 \cdot 10}{100 \cdot 10}$ | $\frac{308}{1000}$ |
| | $\frac{310}{1000}$ | $\frac{308}{1000}$ |

Þar sem 310 > 308 vitum við að $\frac{310}{1000} > \frac{308}{1000}$. Því er 0,31 > 0,308.

Takið eftir hvað við gerðum þegar við breyttum 0,31 í almennt brot: Við byrjuðum með brotið $\frac{31}{100}$ og enduðum með jafngilda brotið $\frac{310}{1000}$. Þegar $\frac{310}{1000}$ er breytt aftur í tugabrot fæst 0,310. Því jafngildir 0,31 tölunni 0,310. Gildi tugabrots breytist ekki þótt núllum sé bætt aftan við það!

$$\frac{31}{100} = \frac{310}{1000} \quad \text{og} \quad 0{,}31 = 0{,}310$$

Við segjum að 0,31 og 0,310 séu jafngild tugabrot.

**JAFNGILD TUGABROT**

Tvö tugabrot eru jafngild ef þau gefa jafngild almenn brot þegar þeim er breytt.

Við notum jafngild tugabrot þegar við röðum tugabrotum.

Hér eru skrefin sem við fylgjum þegar við röðum tugabrotum.

**AÐFERÐ**

### Röðun tugabrota

1. Skref 1. Ritið tölurnar hverja undir annarri þannig að tugabrotskommurnar standist á.
2. Skref 2. Athugið hvort báðar tölurnar hafi jafnmarga tölustafi. Ef ekki, bætið núllum aftan við töluna sem hefur færri tölustafi svo að fjöldinn verði sá sami.
3. Skref 3. Berið tölurnar saman án þess að taka tillit til tugabrotskomma.

**4.** Skref 4. Raðið tölunum með viðeigandi ójöfnumerki.

1

**SÝNIDÆMI 1.119**

Raðið $0{,}64 _ _ _ 0{,}6$ með < eða >.

## Lausn

Tafla 1.37

| | |
|---|---|
| Ritið tölurnar hverja undir annarri þannig að tugabrotskommurnar standist á. | $0{,}64$<br>$0{,}6$ |
| Bætið núlli aftan við 0,6 svo að tugabrotið hafi 2 tugabrotasæti. Nú eru báðar tölurnar ritaðar í hundraðshlutum. | $0{,}64$<br>$0{,}60$ |
| 64 er stærra en 60. | $64>60$ |
| 64 hundraðshlutar eru fleiri en 60 hundraðshlutar. | $0{,}64>0{,}60$ |
| | $0{,}64>0{,}6$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.237**

Raðið hverju talnapari hér á eftir með <eða>: $0{,}42 ___ 0{,}4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.238**

Raðið hverju talnapari hér á eftir með <eða>: $0{,}18 ___ 0{,}1$.

**SÝNIDÆMI 1.120**

Raðið $0{,}83 _ _ _ 0{,}803$ með < eða >.

## Lausn

Tafla 1.38

| | |
|---|---|
| | $0{,}83 _ _ _ 0{,}803$ |
| Ritið tölurnar hverja undir annarri þannig að tugabrotskommurnar standist á. | $0{,}83$<br>$0{,}803$ |
| Tölurnar hafa ekki jafnmarga tölustafi. Bætið einu núlli aftan við 0,83. | $0{,}830$<br>$0{,}803$ |
| Þar sem $830 > 803$ eru 830 þúsundustu hlutar fleiri en 803 þúsundustu hlutar. | $0{,}830 > 0{,}803$ |
| | $0{,}83 > 0{,}803$ |

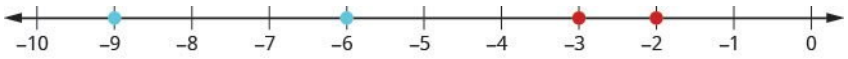
**PRÓFIÐ SJÁLF 1.239**

Raðið þessu talnapari með <eða>: $0{,}76 ___ 0{,}706$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.240**

Raðið þessu talnapari með <eða>: $0{,}305 ___ 0{,}35$.

Þegar við röðum neikvæðum tugabrotum er mikilvægt að muna hvernig neikvæðum heiltölum er raðað. Munið að stærri tölur eru hægra megin á talnalínunni. Þar sem $-2$ er til dæmis hægra megin við $-3$ á talnalínunni vitum við að $-2 > -3$. Á sama hátt eru minni tölur vinstra megin á talnalínunni. Þar sem $-9$ er til dæmis vinstra megin við $-6$ á talnalínunni vitum við að $-9 < -6$. Sjá mynd 1.21.




Mynd 1.21

Ef við stækkuðum bilið milli 0 og $-1$, eins og sýnt er í dæmi 1.121, sæjum við á sama hátt að $-0{,}2 > -0{,}3$ og $-0{,}9 < -0{,}6$.

**SÝNIDÆMI 1.121**

Notið < eða > til að raða $-0{,}1 _ _ _ -0{,}8$.

## Lausn

1

Tafla 1.39

| | $-0,1 _ _ _ -0,8$ |
|---|---|
| Ritið tölurnar hverja undir annarri þannig að tugabrotskommurnar standist á. Þær hafa jafnmarga tölustafi. | $-0,1$<br>$-0,8$ |
| Af $-1>-8$ leiðir að −1 tíundi hluti er stærri en −8 tíundu hlutar. | $-0,1>-0,8$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.241**

Raðið þessu talnapari með < eða >: $-0,3 _ _ _ -0,5$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.242**

Raðið þessu talnapari með < eða >: $-0,6 _ _ _ -0,7$.

## Æfingar úr kafla 1.8

### *Æfingin skapar meistarann*

### Einfaldið stæður með ferningsrótum

Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

659.

$$\sqrt{36}$$

660.

$$\sqrt{4}$$

661.

$$\sqrt{64}$$

662.

$$\sqrt{169}$$

663.

$$\sqrt{9}$$

664.

$$\sqrt{16}$$

665.

$$\sqrt{100}$$

666.

$$\sqrt{144}$$

667.

$$-\sqrt{4}$$

668.

$$-\sqrt{100}$$

669.

$$-\sqrt{1}$$

670.

$$-\sqrt{121}$$

**Þekkið heiltölur, ræðar tölur, óræðar tölur og rauntölur**

Ritið sem hlutfall tveggja heiltalna í eftirfarandi æfingum.

**671.** ⓐ 5 ⓑ 3,19

**672.** ⓐ 8 ⓑ 1,61

**673.** ⓐ $-12$ ⓑ 9,279

**674.** ⓐ $-16$ ⓑ 4,399

Skráið í eftirfarandi æfingum ⓐ ræðu tölurnar, ⓑ óræðu tölurnar

675.

$$0{,}75\,,\,0{,}22\overline{3}\,,\,1{,}39174\ldots$$

676.

$$0{,}36\,,\,0{,}94729\ldots\,,\,2{,}52\overline{8}$$

677.

$$0{,}4\overline{5}\,,\,1{,}919293\ldots\,,\,3{,}59$$

678.

$$0{,}1\overline{3}\,,\,0{,}42982\ldots\,,\,1{,}875$$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort hver tala sé ræð eða óræð.

**679.** ⓐ $\sqrt{25}$ ⓑ $\sqrt{30}$

**680.** ⓐ $\sqrt{44}$ ⓑ $\sqrt{49}$

**681.** ⓐ $\sqrt{164}$ ⓑ $\sqrt{169}$

**682.** ⓐ $\sqrt{225}$ ⓑ $\sqrt{216}$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort hver tala sé rauntala eða ekki.

**683.** ⓐ $-\sqrt{81}$ ⓑ $\sqrt{-121}$

**684.** ⓐ $-\sqrt{64}$ ⓑ $\sqrt{-9}$

**685.** ⓐ $\sqrt{-36}$ ⓑ $-\sqrt{144}$

**686.** ⓐ $\sqrt{-49}$ ⓑ $-\sqrt{144}$

Skráið fyrir hvert talnamengi í eftirfarandi æfingum ⓐ núll og jákvæðu heiltölurnar, ⓑ heiltölurnar, ⓒ ræðu tölurnar, ⓓ óræðu tölurnar, ⓔ rauntölurnar.

687.

$$-8, 0, 1{,}95286\ldots, \frac{12}{5}, \sqrt{36}, 9$$

688.

$$-9, -3\frac{4}{9}, -\sqrt{9}, 0{,}40\overline{9}, \frac{11}{6}, 7$$

689.

$$-\sqrt{100}, -7, -\frac{8}{3}, -1, 0{,}77, 3\frac{1}{4}$$

690.

$$-6, -\frac{5}{2}, 0, 0, 7\overline{14285}, 2\frac{1}{5}, \sqrt{14}$$

**Staðsetjið almenn brot á talnalínunni**

Staðsetjið tölurnar á talnalínu í eftirfarandi æfingum.

691.

$$\frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{3}$$

692.

$$\frac{1}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{3}$$

693.

$$\frac{3}{10}, \frac{7}{2}, \frac{11}{6}, 4$$

694.

$$\frac{7}{10}, \frac{5}{2}, \frac{13}{8}, 3$$

695.

$$\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}$$

696.

$$\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}$$

697.

$$\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, 1\frac{2}{3}, -1\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$$

698.

$$\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 1\frac{3}{4}, -1\frac{3}{4}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}$$

Raðið hverju talnapari í eftirfarandi æfingum með < eða >.

699.

$$-1 ___ -\frac{1}{4}$$

700.

$$-1 ___ -\frac{1}{3}$$

701.

$$-2\frac{1}{2} ___ -3$$

702.

$$-1\frac{3}{4} ___ -2$$

703.

$$-\frac{5}{12} ___ -\frac{7}{12}$$

704.

$$-\frac{9}{10} ___ -\frac{3}{10}$$

1

705.

$$-3 ___ -\frac{13}{5}$$

706.

$$-4 ___ -\frac{23}{6}$$

Staðsetjið tugabrot á talnalínunni. Staðsetjið töluna á talnalínu í eftirfarandi æfingum.

**707.** 0,8

708.

$$-0{,}9$$

709.

$$-1{,}6$$

**710.** 3,1

Raðið hverju talnapari í eftirfarandi æfingum með < eða >.

711.

$$0{,}37 _ _ _ 0{,}63$$

712.

$$0{,}86 _ _ _ 0{,}69$$

713.

$$0{,}91 _ _ _ 0{,}901$$

714.

$$0{,}415 _ _ _ 0{,}41$$

715.

$$-0{,}5 _ _ _ -0{,}3$$

716.

$$-0{,}1 _ _ _ -0{,}4$$

717.

$$-0{,}62 _ _ _ -0{,}619$$

718.

$$-7{,}31 _ _ _ -7{,}3$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**719.** Vettvangsferð. Allir nemendur í 5. bekk Lincoln-grunnskólans fara í vettvangsferð á vísindasafnið. Þegar öll börnin, kennararnir og fylgdarmennirnir eru taldir verða þátttakendur 147. Hver rúta tekur 44 manns.

ⓐ Hversu margar rútur þarf? ⓑ Hvers vegna verður svarið að vera heiltala? ⓒ Hvers vegna ætti ekki að námunda svarið á venjulegan hátt með því að velja heiltöluna sem er næst nákvæma svarinu?

**720.** Barnagæsla. Serena vill opna barnagæslu með starfsleyfi. Í fylki hennar mega vera mest 12 börn á hvern kennara. Hún vill geta tekið á móti 40 börnum.

ⓐ Hversu marga kennara þarf? ⓑ Hvers vegna verður svarið að vera heiltala? ⓒ Hvers vegna ætti ekki að námunda svarið á venjulegan hátt með því að velja heiltöluna sem er næst nákvæma svarinu?

### *Ritunaræfingar*

**721.** Útskýrið með eigin orðum muninn á ræðri og óræðri tölu.

**722.** Útskýrið hvernig talnamengin (talningartölur, núll og jákvæðar heiltölur, heiltölur, ræðar tölur, óræðar tölur og rauntölur) tengjast hvert öðru.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skulið þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiði kaflans.

| Ég get... | Án aðstoðar | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| einfaldað stæður með ferningsrótum. | | | |
| þekkt heiltölur, ræðar tölur, óræðar tölur og rauntölur. | | | |
| staðsett almenn brot á talnalínunni. | | | |
| staðsett tugabrot á talnalínunni. | | | |

ⓑ Hvernig metið þið færni ykkar í efni kaflans á kvarðanum $1-10$, með hliðsjón af svörum ykkar á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt ykkur?

# 1.9 Reiknireglur rauntalna

1

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Notið víxlreglu og tengireglu
- Notið hlutleysureglur og andhverfureglur samlagningar og margföldunar
- Notið reglur um núll
- Einfaldið stæður með dreifireglu

**UNDIRBÚNINGUR 1.9**

Ítarlegri kynningu á efni þessa hluta má finna í kaflanum Reiknireglur rauntalna í bókinni Foralgebra.

## Notið víxlreglu og tengireglu

Hugsum okkur að tvær tölur séu lagðar saman, til dæmis 5 og 3. Það skiptir ekki máli í hvaða röð við leggjum þær saman, eða hvað?

$$\begin{array}{cc} 5+3 & 3+5 \\ 8 & 8 \end{array}$$

$$5+3=3+5$$

Niðurstöðurnar eru þær sömu.
Eins og við sjáum skiptir ekki máli í hvaða röð við leggjum saman!
Hvað gerist þegar við margföldum 5 og 3 ?

$$\begin{array}{cc} 5 \cdot 3 & 3 \cdot 5 \\ 15 & 15 \end{array}$$

$$5 \cdot 3=3 \cdot 5$$

Aftur eru niðurstöðurnar þær sömu!
Það skiptir ekki máli í hvaða röð við margföldum!
Þessi dæmi sýna víxlregluna. Þegar lagt er saman eða margfaldað fæst sama niðurstaða þótt röðinni sé breytt.

**VÍXLREGLA**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| fyrir samlagningu | Ef $a, b$ eru rauntölur, þá | $a+b$ | $=$ | $b+a$ |
| fyrir margföldun | Ef $a, b$ eru rauntölur, þá | $a \cdot b$ | $=$ | $b \cdot a$ |

Þegar lagt er saman eða margfaldað fæst sama niðurstaða þótt röðinni sé breytt.

Víxlreglan snýst um röð. Ef röð talnanna er breytt við samlagningu eða margföldun verður niðurstaðan sú sama.

En hvað um frádrátt? Skiptir röðin máli þegar tölur eru dregnar frá? Gefur $7-3$ sömu niðurstöðu og $3-7$?

$$\begin{array}{cc} 7-3 & 3-7 \\ 4 & -4 \end{array}$$

$$4 \neq -4$$
$$7-3 \neq 3-7$$

Niðurstöðurnar eru ekki þær sömu.

Við fengum ekki sömu niðurstöðu þegar við breyttum röðinni í frádrættinum og því vitum við að frádráttur er ekki víxlanlegur.

Skoðum hvað gerist þegar tveimur tölum er deilt. Er deiling víxlanleg?

$$\begin{array}{cc} 12 \div 4 & 4 \div 12 \\ \frac{12}{4} & \frac{4}{12} \\ 3 & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$3 \neq \frac{1}{3}$$
$$12 \div 4 \neq 4 \div 12$$

Niðurstöðurnar eru ekki þær sömu.

Þar sem breyting á röðinni í deilingunni gaf ekki sömu niðurstöðu er deiling ekki víxlanleg. Víxlreglan gildir aðeins um samlagningu og margföldun!

- Samlagning og margföldun eru víxlanlegar.
- Frádráttur og deiling eru ekki víxlanleg.

Ef þið ættuð að einfalda þessa stæðu, hvernig mynduð þið gera það og hvert yrði svarið?

$$7+8+2$$

Sumir myndu fyrst reikna $7+8$ er $15$ og síðan $15+2$ er $17$. Aðrir gætu byrjað á $8+2$ gefur $10$ og síðan reiknað $7+10$ gefur $17$.

Báðar leiðir gefa sömu niðurstöðu. Munið að við notum hringsviga til að sýna hvaða reikniaðgerð eigi að framkvæma fyrst.

1

Tafla 1.40

| | |
|---|---|
| Leggið saman $7+8$. Leggið saman. | $(7+8)+2$<br>$15+2$<br>$17$ |
| Leggið saman $8+2$. Leggið saman. | $7+(8+2)$<br>$7+10$<br>$17$ |
| | $(7+8)+2=7+(8+2)$ |

Þegar þrjár tölur eru lagðar saman fæst sama niðurstaða þótt flokkun talnanna sé breytt. Þetta gildir einnig um margföldun.

Tafla 1.41

| | |
|---|---|
| Margfaldið. $5 \cdot \frac{1}{3}$ Margfaldið. | $\left(5 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 3$<br>$\frac{5}{3} \cdot 3$<br>$5$ |
| Margfaldið. $\frac{1}{3} \cdot 3$. Margfaldið. | $5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)$<br>$5 \cdot 1$<br>$5$ |
| | $\left(5 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 3=5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)$ |

Þegar þrjár tölur eru margfaldaðar fæst sama niðurstaða þótt flokkun talnanna sé breytt.

Þið vitið þetta líklega nú þegar en heitið gæti verið nýtt fyrir ykkur. Þessi dæmi sýna tengiregluna.

**TENGIREGLA**

| | |
|---|---|
| fyrir samlagningu | Ef $a,b,c$ eru rauntölur, þá $(a+b)+c=a+(b+c)$ |
| fyrir margföldun | Ef $a,b,c$ eru rauntölur, þá $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ |

Þegar lagt er saman eða margfaldað fæst sama niðurstaða þótt flokkuninni sé breytt.

Skoðum aftur margföldunina $5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3$. Við fengum sömu niðurstöðu með báðum leiðum en hvor leiðin var auðveldari? Ef $\frac{1}{3}$ og 3 eru margfaldaðar fyrst, eins og sýnt er hægra megin hér að framan, hverfur brotið í fyrsta skrefi. Tengireglan getur auðveldað reikninginn!

Tengireglan snýst um flokkun. Ef við breytum því hvernig tölurnar eru flokkaðar verður niðurstaðan sú sama. Takið eftir að þetta eru sömu þrjár tölurnar í sömu röð; eini munurinn er flokkunin.

Við sáum að frádráttur og deiling eru ekki víxlanleg. Tengireglan gildir heldur ekki um þær.

Þegar við einföldum stæðu er alltaf gott að skipuleggja skrefin. Til að sameina samkynja liði í næsta sýnidæmi notum við víxlreglu samlagningar til að rita samkynja liðina saman.

**SÝNIDÆMI 1.122**

Einfaldið: $18\,p+6\,q+15\,p+5\,q$.

## Lausn

Tafla 1.42

| | $18\,p+6\,q+15\,p+5\,q$ |
|---|---|
| Notið víxlreglu samlagningar til að breyta röðinni þannig að samkynja liðir standi saman. | $18\,p+15\,p+6\,q+5\,q$ |
| Leggið saman samkynja liði. | $33\,p+11\,q$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.243**

Einfaldið: $23\,r+14\,s+9\,r+15\,s$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.244**

Einfaldið: $37\,m+21\,n+4\,m-15\,n$.

Þegar við þurfum að einfalda algebrustæður getum við oft auðveldað vinnuna með því að nota fyrst víxlreglu eða tengireglu í stað þess að fylgja forgangsröð reikniaðgerða sjálfkrafa. Þegar þið leggið saman almenn brot eða dragið þau frá skuluð þið fyrst sameina þau sem hafa sama nefnara.

**SÝNIDÆMI 1.123**

Einfaldið: $\left(\frac{5}{13}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}$.

## Lausn

Tafla 1.43

| | $\left(\frac{5}{13}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}$ |
|---|---|
| Takið eftir að síðustu 2 liðirnir hafa sama nefnara og breytið því flokkuninni. | $\frac{5}{13}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$ |
| Leggið fyrst saman innan sviga. | $\frac{5}{13}+\left(\frac{4}{4}\right)$ |
| Styttið brotið. | $\frac{5}{13}+1$ |
| Leggið saman. | $1\frac{5}{13}$ |
| Breytið í óeiginlegt brot. | $\frac{18}{13}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.245**

Einfaldið: $\left(\frac{7}{15}+\frac{5}{8}\right)+\frac{3}{8}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.246**

Einfaldið: $\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{12}\right)+\frac{5}{12}$.

**SÝNIDÆMI 1.124**

Notið tengireglu til að einfalda $6(3x)$.

## Lausn

Tafla 1.44

| | $6(3x)$ |
|---|---|
| Breytið flokkuninni. | $(6\cdot 3)x$ |
| Margfaldið innan sviganna. | $18x$ |

Takið eftir að við getum margfaldað $6\cdot 3$ en við gætum ekki margfaldað 3 x án þess að þekkja gildi x.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.247**

Notið tengireglu til að einfalda $8(4\ x)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.248**

Notið tengireglu til að einfalda $-9(7\ y)$.

## Notið hlutleysureglur og andhverfureglur samlagningar og margföldunar

Hvað gerist þegar 0 er lagt við hvaða tölu sem er? Gildið breytist ekki þegar 0 er lagt við. Þess vegna köllum við 0 samlagningarhlutleysu.

Til dæmis

$$\begin{array}{lll} 13+0 & -14+0 & 0+(-8) \\ 13 & -14 & -8 \end{array}$$

Þessi dæmi sýna hlutleysureglu samlagningar, sem segir að fyrir sérhverja rauntölu $a$, gildi $a+0=a$ og $0+a=a$.

Hvað gerist þegar við margföldum hvaða tölu sem er með einum? Gildið breytist ekki þegar margfaldað er með 1. Þess vegna köllum við 1 margföldunarhlutleysu.

Til dæmis

$$\begin{array}{lll} 43\cdot 1 & -27\cdot 1 & 1\cdot\frac{3}{5} \\ 43 & -27 & \frac{3}{5} \end{array}$$

Þessi dæmi sýna hlutleysureglu margföldunar, sem segir að fyrir sérhverja rauntölu $a$, gildi $a\cdot 1=a$ og $1\cdot a=a$.

Hlutleysureglurnar eru teknar saman hér fyrir neðan.

**HLUTLEYSUREGLA**

fyrir samlagningu Fyrir sérhverja rauntölu $a$: $a+0=a$ $0+a=a$
0 er samlagningarhlutleysan

fyrir margföldun Fyrir sérhverja rauntölu $a$: $a\cdot 1=a$ $1\cdot a=a$
1 er margföldunarhlutleysan

Hvaða tala lögð við 5 gefur samlagningarhlutleysuna, 0?
$5+_____=0$ Við vitum að $5+(-5)=0$

Hvaða tala lögð við −6 gefur samlagningarhlutleysuna, 0?
$-6+_____=0$ Við vitum að $-6+6=0$

Takið eftir að í báðum tilvikum var talan sem vantaði samlagningarandhverfa tölunnar!

Við köllum $-a$. samlagningarandhverfu a. Samlagningarandhverfa tölu er talan með gagnstæðu formerki. Summa tölu og samlagningarandhverfu hennar er núll, sem er samlagningarhlutleysan. Þetta leiðir til andhverfureglu samlagningar, sem gildir fyrir

sérhverja rauntölu $a$, $a+(-a)=0$. Munið að summa tölu og samlagningarandhverfu hennar er núll.

1

Hvaða tala margfölduð með $\frac{2}{3}$ gefur margföldunarhlutleysuna 1? Með öðrum orðum, hvað þarf að margfalda $\frac{2}{3}$ með til að fá 1?

$\frac{2}{3} \cdot ___ = 1$ Við vitum að $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

Hvaða tala margfölduð með 2 gefur margföldunarhlutleysuna 1? Með öðrum orðum, hvað þarf að margfalda 2 með til að fá 1?

$2 \cdot ___ = 1$ Við vitum að $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Takið eftir að í báðum tilvikum var talan sem vantaði margföldunarandhverfa tölunnar!

Við köllum $\frac{1}{a}$ margföldunarandhverfu a. Margföldunarandhverfa tölunnar *a er talan sem gefur einn þegar hún er margfölduð með henni. Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er einn, sem er margföldunarhlutleysan. Þetta leiðir til andhverfureglu margföldunar, sem gildir fyrir sérhverja rauntölu* $a, a \neq 0, a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Hér eru andhverfureglurnar settar fram formlega:

**ANDHVERFUREGLA**

Tafla 1.45

| | | |
|---|---|---|
| **samlagningar** | Fyrir sérhverja rauntölu $a$ er $-a$ samlagningarandhverfa $a$. Summa tölu og samlagningarandhverfu hennar er núll. | $a+(-a)=0$ |
| **margföldunar** | Fyrir sérhverja rauntölu $a$ er $\frac{1}{a}$ margföldunarandhverfa $a$. Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er einn. | $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ |

**SÝNIDÆMI 1.125**

Finnið samlagningarandhverfu ⓐ $\frac{5}{8}$ ⓑ $0{,}6$ ⓒ $-8$ ⓓ $-\frac{4}{3}$.

## Lausn

Til að finna samlagningarandhverfuna finnum við töluna með gagnstæðu formerki.

1. ⓐ Samlagningarandhverfa $\frac{5}{8}$ er talan með gagnstæðu formerki við $\frac{5}{8}$.
   Samlagningarandhverfa $\frac{5}{8}$ er $-\frac{5}{8}$.

2. ⓑ Samlagningarandhverfa 0,6 er talan með gagnstæðu formerki við 0,6.
   Samlagningarandhverfa 0,6 er $-0{,}6$.

3. ⓒ Samlagningarandhverfa $-8$ er talan með gagnstæðu formerki við $-8$. Við ritum töluna með gagnstæðu formerki við $-8$ sem $-(-8)$, og einföldum síðan í 8. Því er samlagningarandhverfa $-8$ talan 8.

4. ⓓ Samlagningarandhverfa $-\frac{4}{3}$ er talan með gagnstæðu formerki við $-\frac{4}{3}$. Við ritum þetta sem $-\left(-\frac{4}{3}\right)$, og einföldum síðan í $\frac{4}{3}$. Því er samlagningarandhverfa $-\frac{4}{3}$ talan $\frac{4}{3}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.249**

Finnið samlagningarandhverfu: ⓐ $\frac{7}{9}$ ⓑ $1{,}2$ ⓒ $-14$ ⓓ $-\frac{9}{4}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.250**

Finnið samlagningarandhverfu: ⓐ $\frac{7}{13}$ ⓑ $8{,}4$ ⓒ $-46$ ⓓ $-\frac{5}{2}$.

---

**SÝNIDÆMI 1.126**

Finnið margföldunarandhverfu ⓐ 9 ⓑ $-\frac{1}{9}$ ⓒ $0{,}9$.

## Lausn

Til að finna margföldunarandhverfuna snúum við teljara og nefnara við.

1

1. ⓐ Margföldunarandhverfa 9 fæst með því að snúa 9 við, sem gefur $\frac{1}{9}$. Því er margföldunarandhverfa 9 talan $\frac{1}{9}$.
2. ⓑ Margföldunarandhverfa $-\frac{1}{9}$ fæst með því að snúa $-\frac{1}{9}$, við, sem gefur $-9$. Því er margföldunarandhverfa $-\frac{1}{9}$ talan $-9$.
3. ⓒ Til að finna margföldunarandhverfu 0,9 breytum við fyrst 0,9 í almenna brotið $\frac{9}{10}$. Síðan snúum við brotinu við. Þegar $\frac{9}{10}$ er snúið við fæst $\frac{10}{9}$. Því er margföldunarandhverfa 0,9 talan $\frac{10}{9}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.251**

Finnið margföldunarandhverfu ⓐ 4 ⓑ $-\frac{1}{7}$ ⓒ 0,3

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.252**

Finnið margföldunarandhverfu ⓐ 18 ⓑ $-\frac{4}{5}$ ⓒ 0,6.

## Notið reglur um núll

Hlutleysuregla samlagningar segir að þegar 0 er lagt við hvaða tölu sem er verði niðurstaðan sama tala. Hvað gerist þegar tala er margfölduð með 0? Þegar margfaldað er með 0 verður margfeldið núll.

---

**MARGFÖLDUN MEÐ NÚLLI**

Fyrir sérhverja rauntölu a gildir:

$$a \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot a = 0$$

Margfeldi sérhverrar rauntölu og 0 er 0.

En hvað um deilingu þar sem núll kemur við sögu? Hvað er $0 \div 3$ ?? Tökum dæmi úr daglegu lífi: Ef engar smákökur eru í kökukrukkunni og 3 eiga að skipta þeim á milli sín, hversu margar smákökur fær hver? Engar smákökur eru til skiptanna og því fær hver 0 smákökur. Því gildir

$$0 \div 3 = 0$$

Við getum sannreynt deilinguna með samsvarandi margföldun.

$12 \div 6 = 2$ vegna þess að $2 \cdot 6 = 12$.

Við vitum því að $0 \div 3 = 0$ vegna þess að $0 \cdot 3 = 0$.



**DEILING NÚLLS**

Fyrir sérhverja rauntölu a, nema $0$, $\frac{0}{a} = 0$ og $0 \div a = 0$.

Núll deilt með sérhverri rauntölu annarri en núlli er núll.

Hugsum nú um deilingu með núlli. Hvað fæst þegar 4 er deilt með 0? Samsvarandi margföldun, $4 \div 0 = ?$, merkir $? \cdot 0 = 4$. Er til tala sem margfölduð með 0 gefur 4? Allar rauntölur margfaldaðar með 0 gefa 0. Því er engin rauntala til sem gefur 4 þegar hún er margfölduð með 0.

Við ályktum að $4 \div 0$ eigi ekkert svar og segjum því að deiling með 0 sé óskilgreind.

**DEILING MEÐ NÚLLI**

Fyrir sérhverja rauntölu a, nema 0, eru $\frac{a}{0}$ og $a \div 0$ óskilgreind.

Deiling með núlli er óskilgreind.

Reglurnar um núll eru teknar saman hér fyrir neðan.

**REGLUR UM NÚLL**

**Margföldun með núlli: Fyrir sérhverja rauntölu a gildir**

Tafla 1.46

| | |
|---|---|
| $a \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot a = 0$ | Margfeldi sérhverrar tölu og 0 er 0. |

**Deiling núlls og deiling með núlli:** Fyrir sérhverja rauntölu $a, a \neq 0$

Tafla 1.47

| | |
|---|---|
| $\frac{0}{a} = 0$ | Núll deilt með sérhverri rauntölu annarri en núlli er núll. |
| $\frac{a}{0}$ er óskilgreint | Deiling með núlli er óskilgreind. |

**SÝNIDÆMI 1.127**

Einfaldið: ⓐ $-8 \cdot 0$ ⓑ $\frac{0}{-2}$ ⓒ $\frac{-32}{0}$.

## Lausn

Tafla 1.48

| | |
|---|---|
| ⓐ Margfeldi sérhverrar rauntölu og 0 er 0. | $-8 \cdot 0$<br>$0$ |
| ⓑ Margfeldi sérhverrar rauntölu og 0 er 0. | $\frac{0}{-2}$<br>$0$ |
| ⓒ Deiling með 0 er óskilgreind. | $\frac{-32}{0}$<br>Óskilgreint |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.253**

Einfaldið: ⓐ $-14 \cdot 0$ ⓑ $\frac{0}{-6}$ ⓒ $\frac{-2}{0}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.254**

Einfaldið: ⓐ $0(-17)$ ⓑ $\frac{0}{-10}$ ⓒ $\frac{-5}{0}$.

Nú æfum við okkur í að nota hlutleysureglur, andhverfureglur og reglur um núll til að einfalda stæður.

**SÝNIDÆMI 1.128**

Einfaldið: ⓐ $\frac{0}{n+5}$, þar sem $n \neq -5$ ⓑ $\frac{10-3p}{0}$, þar sem $10-3p \neq 0$.

## Lausn

Tafla 1.49

| | |
|---|---|
| ⓐ Núll deilt með sérhverri rauntölu annarri en núlli er 0. | $\frac{0}{n+5}$<br>$0$ |
| ⓑ Deiling með 0 er óskilgreind. | $\frac{10-3p}{0}$<br>Óskilgreint |

**SÝNIDÆMI 1.129**

Einfaldið: $-84n+(-73n)+84n$.

## Lausn

Tafla 1.50

| | |
|---|---|
| | $-84n+(-73n)+84n$ |
| Takið eftir að fyrsti og þriðji liðurinn eru samlagningarandhverfur. Notið víxlreglu samlagningar til að breyta röð liðanna. | $-84n+84n+(-73n)$ |
| Leggið saman frá vinstri til hægri. | $0+(-73n)$ |
| Leggið saman. | $-73n$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.255**

Einfaldið: $-27a+(-48a)+27a$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.256**

Einfaldið: $39x+(-92x)+(-39x)$.

Nú sjáum við hvernig það hjálpar að þekkja margföldunarandhverfur. Leitið að margföldunarandhverfum áður en þið margfaldið frá vinstri til hægri, því að margfeldi þeirra er 1.

**SÝNIDÆMI 1.130**

Einfaldið: $\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{23}\cdot\frac{15}{7}$.

## Lausn

Tafla 1.51

| | |
|---|---|
| | $\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{23}\cdot\frac{15}{7}$ |
| Takið eftir að fyrsti og þriðji þátturinn eru margföldunarandhverfur. Notið því víxlreglu margföldunar til að breyta röð þáttanna. | $\frac{7}{15}\cdot\frac{15}{7}\cdot\frac{8}{23}$ |
| Margfaldið frá vinstri til hægri. | $1\cdot\frac{8}{23}$ |
| Margfaldið. | $\frac{8}{23}$ |

1

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.257**

Einfaldið: $\frac{9}{16} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{16}{9}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.258**

Einfaldið: $\frac{6}{17} \cdot \frac{11}{25} \cdot \frac{17}{6}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.259**

Einfaldið: ⓐ $\frac{0}{m+7}$, þar sem $m \neq -7$ ⓑ $\frac{18-6c}{0}$, þar sem $18-6c \neq 0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.260**

Einfaldið: ⓐ $\frac{0}{d-4}$, þar sem $d \neq 4$ ⓑ $\frac{15-4q}{0}$, þar sem $15-4q \neq 0$.

**SÝNIDÆMI 1.131**

Einfaldið: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}(6x+12)$.

## Lausn

Tafla 1.52

| | $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}(6x+12)$ |
|---|---|
| Ekkert er hægt að reikna innan sviganna og því margföldum við fyrst brotin tvö; takið eftir að þau eru margföldunarandhverfur. | $1(6x+12)$ |
| Einfaldið með því að þekkja margföldunarhlutleysuna. | $6x+12$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.261**

Einfaldið: $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}(20y+50)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.262**

Einfaldið: $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}(12z+16)$.



## Einfaldið stæður með dreifireglu

Hugsum okkur að þrír vinir ætli í bíó. Hver þeirra þarf $9,25 til að borga miðann, eða 9 dali og 1 fjórðungsmynt. Hversu mikla peninga þurfa þeir samtals?

Þið getið reiknað dalina og fjórðungsmyntirnar sitt í hvoru lagi. Þeir þurfa 3 sinnum $9, sem eru $27, og 3 sinnum 1 fjórðungsmynt, sem eru 75 sent. Samtals þurfa þeir $27,75. Þegar þið reiknið á þennan hátt er dreifireglan notuð.

**DREIFIREGLA**

Ef $a, b, c$ eru rauntölur, þá $a(b+c)=ab+ac$

Einnig,

$$(b+c)a=ba+ca$$
$$a(b-c)=ab-ac$$
$$(b-c)a=ba-ca$$

Snúum aftur að vinunum í bíóinu. Heildarupphæðina sem þeir þurfa má finna svona:

$$\begin{aligned} & 3(9{,}25) \\ 3(9 &+ 0{,}25) \\ 3(9) &+ 3(0{,}25) \\ 27 &+ 0{,}75 \end{aligned}$$

$$27{,}75$$

Í algebru notum við dreifireglu til að fjarlægja sviga þegar við einföldum stæður.

Ef við eigum til dæmis að einfalda stæðuna $3(x+4)$, segir forgangsröð reikniaðgerða að fyrst eigi að reikna innan sviganna. En ekki er hægt að leggja x og 4 saman þar sem þau eru ekki samkynja liðir. Því notum við dreifiregluna eins og sýnt er í sýnidæmi 1.132.

**SÝNIDÆMI 1.132**

Einfaldið: $3(x+4)$.

## Lausn

1

Tafla 1.53

| | $3(x+4)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $3 \cdot x+3 \cdot 4$ |
| Margfaldið. | $3x+12$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.263**

Einfaldið: $4(x+2)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.264**

Einfaldið: $6(x+7)$.

Sumum nemendum finnst gagnlegt að teikna örvar til að minna sig á hvernig dreifireglunni er beitt. Þá liti fyrsta skrefið í sýnidæmi 1.132 svona út:




**SÝNIDÆMI 1.133**

Einfaldið: $8\left(\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\right)$.

## Lausn

| | $8\left(\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\right)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $8 \cdot \frac{3}{8}x+8 \cdot \frac{1}{4}$ |
| Margfaldið. | $3x+2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.265**

Einfaldið: $6\left(\frac{5}{6}y+\frac{1}{2}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.266**

Einfaldið: $12\left(\frac{1}{3}n+\frac{3}{4}\right)$.

Notkun dreifireglunnar eins og sýnt er í sýnidæmi 1.134 kemur að miklu gagni þegar við leysum verkefni um peninga í síðari köflum.



**SÝNIDÆMI 1.134**

Einfaldið: $100(0{,}3+0{,}25q)$.

## Lausn

| | $100(0{,}3 + 0{,}25q)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $100(0{,}3) + 100(0{,}25q)$ |
| Margfaldið. | $30 + 25q$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.267**

Einfaldið: $100(0{,}7+0{,}15p)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.268**

Einfaldið: $100(0{,}04+0{,}35d)$.

Þegar við notum dreifireglu með neikvæðri tölu verðum við að gæta sérstaklega vel að formerkjunum!

**SÝNIDÆMI 1.135**

Einfaldið: $-2(4y+1)$.

## Lausn

| | $-2(4y + 1)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $-2 \cdot 4y + (-2) \cdot 1$ |
| Margfaldið. | $-8y - 2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.269**

Einfaldið: $-3(6m+5)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.270**

Einfaldið: $-6(8n+11)$.

**SÝNIDÆMI 1.136**

Einfaldið: $-11(4-3a)$.

1

## Lausn

| | |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $-11(4-3a)$ |
| Margfaldið. | $-11 \cdot 4-(-11) \cdot 3a$<br>$-44-(-33a)$ |
| Einfaldið. | $-44+33a$ |

Takið eftir að einnig mætti rita niðurstöðuna sem $33a-44$. Vitið þið hvers vegna?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.271**

Einfaldið: $-5(2-3a)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.272**

Einfaldið: $-7(8-15y)$.

Sýnidæmi 1.137 sýnir hvernig dreifireglan er notuð til að finna samlagningarandhverfu stæðu.

**SÝNIDÆMI 1.137**

Einfaldið: $-(y+5)$.

## Lausn

Tafla 1.54

| | $(y+5)$ |
|---|---|
| Margföldun með −1 gefur samlagningarandhverfuna. | $-1(y+5)$ |
| Beitið dreifireglu. | $-1 \cdot y+(-1) \cdot 5$ |
| Einfaldið. | $-y+(-5)$ |
| | $-y-5$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.273**

Einfaldið: $-(z-11)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.274**

Einfaldið: $-(x-4)$.

Stundum þarf að nota dreifiregluna sem hluta af forgangsröð reikniaðgerða. Byrjið á að skoða svigana. Ef ekki er hægt að einfalda stæðuna innan þeirra er næsta skref að margfalda með dreifireglunni og fjarlægja þannig svigana. Næstu tvö dæmi sýna þetta.

**SÝNIDÆMI 1.138**

Einfaldið: $8-2(x+3)$.

Gætið þess að fylgja forgangsröð reikniaðgerða. Margföldun kemur á undan frádrætti og því notum við fyrst dreifireglu með 2 og drögum síðan frá.

## Lausn

Tafla 1.55

| | $8-2(x+3)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $8-2\cdot x-2\cdot 3$ |
| Margfaldið. | $8-2x-6$ |
| Sameinið samkynja liði. | $-2x+2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.275**

Einfaldið: $9-3(x+2)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.276**

Einfaldið: $7x-5(x+4)$.

**SÝNIDÆMI 1.139**

Einfaldið: $4(x-8)-(x+3)$.

## Lausn

Tafla 1.56

| | $4(x-8)-(x+3)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $4x-32-x-3$ |
| Sameinið samkynja liði. | $3x-35$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.277**

Einfaldið: $6(x-9)-(x+12)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.278**

Einfaldið: $8(x-1)-(x+5)$.

1

Allar reiknireglur rauntalna sem við höfum notað í þessum kafla eru teknar saman í töflu 1.57.

Tafla 1.57

| | |
|---|---|
| **Víxlregla** | |
| samlagningar: Ef $a, b$ eru rauntölur, gildir víxlreglan; margföldunar: Ef $a, b$ eru rauntölur, gildir víxlreglan. | $a+b=b+a$<br>$a \cdot b=b \cdot a$ |
| **Tengiregla** | |
| samlagningar: Ef $a, b, c$ eru rauntölur, gildir tengireglan; margföldunar: Ef $a, b, c$ eru rauntölur, gildir tengireglan. | $(a+b)+c=a+(b+c)$<br>$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ |
| **Dreifiregla** | |
| Ef $a, b, c$ eru rauntölur gildir dreifireglan. | $a(b+c)=ab+ac$ |
| **Hlutleysuregla** | |
| samlagningar Fyrir sérhverja rauntölu $a$: er 0 samlagningarhlutleysan margföldunar Fyrir sérhverja rauntölu $a$: er $1$ margföldunarhlutleysan | $a+0=a$<br>$0+a=a$<br>$a \cdot 1=a$<br>$1 \cdot a=a$ |
| **Andhverfuregla** | |
| samlagningar Fyrir sérhverja rauntölu $a$, er $-a$ samlagningarandhverfa $a$ | $a+(-a)=0$ |
| margföldunar Fyrir sérhverja rauntölu $a, a \neq 0$ er $\frac{1}{a}$ margföldunarandhverfa $a$. | $a \cdot \frac{1}{a}=1$ |
| **Reglur um núll** | |

| | |
|---|---|
| Fyrir sérhverja rauntölu a, Fyrir sérhverja rauntölu | $a \cdot 0 = 0$<br>$0 \cdot a = 0$ |
| $a, a \neq 0$ | $\frac{0}{a} = 0$ |
| Fyrir sérhverja rauntölu $a, a \neq 0$ | $\frac{a}{0}$ er óskilgreint |



## Æfingar úr kafla 1.9

### *Æfingin skapar meistarann*

**Notið víxlreglu og tengireglu**

Notið tengireglu til að einfalda í eftirfarandi æfingum.

**723.** $3(4x)$

**724.** $4(7m)$

725.

$$(y+12)+28$$

726.

$$(n+17)+33$$

Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

727.

$$\frac{1}{2}+\frac{7}{8}+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

728.

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{12}+\left(-\frac{2}{5}\right)$$

729.

$$\frac{3}{20} \cdot \frac{49}{11} \cdot \frac{20}{3}$$

730.

$$\frac{13}{18} \cdot \frac{25}{7} \cdot \frac{18}{13}$$

1

731.

$$-24 \cdot 7 \cdot \frac{3}{8}$$

732.

$$-36 \cdot 11 \cdot \frac{4}{9}$$

733.

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{8}{15}\right)+\frac{7}{15}$$

734.

$$\left(\frac{11}{12}+\frac{4}{9}\right)+\frac{5}{9}$$

**735.** $17(0{,}25)(4)$

**736.** $36(0{,}2)(5)$

**737.** $[2{,}48(12)](0{,}5)$

**738.** $[9{,}731(4)](0{,}75)$

**739.** $7(4a)$

**740.** $9(8w)$

741.

$$-15(5m)$$

742.

$$-23(2n)$$

743.

$$12\left(\frac{5}{6}p\right)$$

744.

$$20\left(\frac{3}{5}q\right)$$

745.

$$43m+(-12n)+(-16m)+(-9n)$$

746.

$$-22p+17q+(-35p)+(-27q)$$

747.

$$\frac{3}{8}g+\frac{1}{12}h+\frac{7}{8}g+\frac{5}{12}h$$

748.

$$\frac{5}{6}a+\frac{3}{10}b+\frac{1}{6}a+\frac{9}{10}b$$

749.

$$6{,}8p+9{,}14q+(-4{,}37p)+(-0{,}88q)$$

750.

$$9{,}6m+7{,}22n+(-2{,}19m)+(-0{,}65n)$$

**Notið hlutleysureglur og andhverfureglur samlagningar og margföldunar**
Finnið samlagningarandhverfu hverrar tölu í eftirfarandi æfingum.

**751.** ⓐ $\frac{2}{5}$ ⓑ $4{,}3$ ⓒ $-8$ ⓓ $-\frac{10}{3}$

**752.** ⓐ $\frac{5}{9}$ ⓑ $2{,}1$ ⓒ $-3$ ⓓ $-\frac{9}{5}$

**753.** ⓐ $-\frac{7}{6}$ ⓑ $-0{,}075$ ⓒ $23$ ⓓ $\frac{1}{4}$

**754.** ⓐ $-\frac{8}{3}$ ⓑ $-0{,}019$ ⓒ $52$ ⓓ $\frac{5}{6}$

Finnið margföldunarandhverfu hverrar tölu í eftirfarandi æfingum.

**755.** ⓐ $6$ ⓑ $-\frac{3}{4}$ ⓒ $0{,}7$

**756.** ⓐ $12$ ⓑ $-\frac{9}{2}$ ⓒ $0{,}13$

**757.** ⓐ $\frac{11}{12}$ ⓑ $-1{,}1$ ⓒ $-4$

**758.** ⓐ $\frac{17}{20}$ ⓑ $-1{,}5$ ⓒ $-3$

1

### Notið reglur um núll

Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

759.

$$\frac{0}{6}$$

760.

$$\frac{3}{0}$$

761.

$$0 \div \frac{11}{12}$$

762.

$$\frac{6}{0}$$

763.

$$\frac{0}{3}$$

764.

$$0 \cdot \frac{8}{15}$$

765.

$$(-3{,}14)(0)$$

766.

$$\frac{\frac{1}{10}}{0}$$

### Blandaðar æfingar

Einfaldið í eftirfarandi æfingum.

767.

$$19a + 44 - 19a$$

768.

$$27c + 16 - 27c$$

769.

$$10(0{,}1\,d)$$

770.

$$100(0{,}01\,p)$$

**771.** $\frac{0}{u-4{,}99}$, þar sem $u \neq 4{,}99$

**772.** $\frac{0}{v-65{,}1}$, þar sem $v \neq 65{,}1$

**773.** $0 \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$, þar sem $x \neq \frac{1}{2}$

**774.** $0 \div \left(y - \frac{1}{6}\right)$, þar sem $y \neq \frac{1}{6}$

**775.** $\frac{32-5\,a}{0}$, þar sem

$32 - 5\,a \neq 0$

**776.** $\frac{28-9\,b}{0}$, þar sem

$28 - 9\,b \neq 0$

**777.** $\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{10}\,m\right) \div 0$ þar sem

$\frac{3}{4} + \frac{9}{10}\,m \neq 0$

**778.** $\left(\frac{5}{16}\,n - \frac{3}{7}\right) \div 0$ þar sem

$\frac{5}{16}\,n - \frac{3}{7} \neq 0$

779.

$$15 \cdot \frac{3}{5}(4\,d + 10)$$

780.

$$18 \cdot \frac{5}{6}(15\,h + 24)$$

**Einfaldið stæður með dreifireglu**

Einfaldið með dreifireglu í eftirfarandi æfingum.

1

781.

$$8(4y+9)$$

782.

$$9(3w+7)$$

783.

$$6(c-13)$$

784.

$$7(y-13)$$

785.

$$\frac{1}{4}(3q+12)$$

786.

$$\frac{1}{5}(4m+20)$$

787.

$$9\left(\frac{5}{9}y-\frac{1}{3}\right)$$

788.

$$10\left(\frac{3}{10}x-\frac{2}{5}\right)$$

789.

$$12\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}r\right)$$

790.

$$12\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{4}s\right)$$

791.

$$r(s-18)$$

792.

$$u(v-10)$$

793.

$$(y+4)p$$

794.

$$(a+7)x$$

795.

$$-7(4p+1)$$

796.

$$-9(9a+4)$$

797.

$$-3(x-6)$$

798.

$$-4(q-7)$$

799.

$$-(3x-7)$$

800.

$$-(5p-4)$$

801.

$$16-3(y+8)$$

802.

$$18-4(x+2)$$

803.

$$4-11(3c-2)$$

804.

$$9-6(7n-5)$$

805.

$$22-(a+3)$$

806.

$$8-(r-7)$$

1

807. $(5m-3)-(m+7)$

808. $(4y-1)-(y-2)$

809. $5(2n+9)+12(n-3)$

810. $9(5u+8)+2(u-6)$

811. $9(8x-3)-(-2)$

812. $4(6x-1)-(-8)$

813. $14(c-1)-8(c-6)$

814. $11(n-7)-5(n-1)$

815. $6(7y+8)-(30y-15)$

816. $7(3n+9)-(4n-13)$

***Stærðfræði daglegs lífs***

**817. Greiðsluþátttaka vegna tannlækninga.** Carrie þurfti að fá 5 fyllingar. Hver fylling kostaði $80. Samkvæmt tannlæknatryggingunni þurfti hún sjálf að greiða 20% kostnaðarins. Reiknið greiðsluþátttöku Carrie:

1. ⓐ Fyrst með því að margfalda 0,20 með 80 til að finna greiðsluþátttöku hennar fyrir hverja fyllingu og margfalda síðan svarið með 5 til að finna heildargreiðsluþátttöku hennar fyrir 5 fyllingar.
2. ⓑ Síðan með því að margfalda [5(0,20)](80)
3. ⓒ Hvaða reikniregla rauntalna segir að svörin í a-lið, þar sem þið margfölduðuð 5[(0,20)(80)], og b-lið, þar sem þið margfölduðuð [5(0,20)](80), eigi að vera jöfn?

**818.** **Eldunartími. Helen** keypti kalkún sem vó 24 pund fyrir þakkargjörðarkvöldverð fjölskyldunnar og vill vita hvenær hún á að setja hann í ofninn. Hún ætlar að miða við 20 mínútna eldunartíma fyrir hvert pund. Reiknið hve lengi þarf að steikja kalkúninn:

1. ⓐ Fyrst með því að margfalda $24 \cdot 20$ til að finna heildarfjölda mínútna og margfalda síðan svarið með $\frac{1}{60}$ til að breyta mínútum í klukkustundir.
2. ⓑ Síðan með því að margfalda $24\left(20 \cdot \frac{1}{60}\right)$.
3. ⓒ Hvaða reikniregla rauntalna segir að svörin í a-lið, þar sem þið margfölduðuð $(24 \cdot 20)\frac{1}{60}$,, og b-lið, þar sem þið margfölduðuð $24\left(20 \cdot \frac{1}{60}\right)$,, eigi að vera jöfn?

**819.** **Kaup í heilum** kössum. Matvöruverslanir Trader Joe's seldu vínflösku sem þær kölluðu „Two Buck Chuck" á $1,99. Þær seldu kassa með 12 flöskum á $23,88. Til að finna verð 12 flaskna á $1,99 hver skuluð þið taka eftir því að 1,99 er $2 - 0{,}01$.

1. ⓐ Margfaldið 12(1,99) með því að beita dreifireglu til að margfalda $12(2 - 0{,}01)$.
2. ⓑ Var hagstæðara að kaupa „Two Buck Chuck" í heilum kassa?

**820.** **Kaup á fjölpakkningu. Hver** flaska af sjampóinu sem Adele notar kostar $3,99 í matvöruversluninni. Í vöruhúsaversluninni er sama sjampó selt í 3 flaskna pakkningu á $10,49. Til að finna verð 3 flaskna á $3,99 hver skuluð þið taka eftir því að 3,99 er $4 - 0{,}01$.

1. ⓐ Margfaldið 3(3,99) með því að beita dreifireglu til að margfalda $3(4 - 0{,}01)$.
2. ⓑ Hversu mikið myndi Adele spara með því að kaupa 3 flöskur í vöruhúsaversluninni í stað matvöruverslunarinnar?

### *Ritunarverkefni*

**821.** Lýsið víxlreglu samlagningar með eigin orðum.

**822.** Hver er munurinn á samlagningarandhverfu tölu og margföldunarandhverfu hennar?

**823.** Einfaldið $8\left(x - \frac{1}{4}\right)$ með dreifireglu og útskýrið hvert skref.

**824.** Útskýrið hvernig hægt er að margfalda 4($5,97) án þess að nota blað eða reiknivél með því að líta á $5,97 sem $6 - 0{,}03$ og beita síðan dreifireglu.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið við verkefnin skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

1

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað víxlreglu og tengireglu. | | | |
| notað hlutleysureglu og andhverfureglu samlagningar og margföldunar. | | | |
| notað reglur um núll. | | | |
| einfaldað stæður með dreifireglunni. | | | |

ⓑ Hvað ætlið þið að gera eftir að hafa farið yfir gátlistann til að öðlast öryggi í öllum markmiðunum?

# 1.10 Mælikerfi

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Umreiknað einingar í bandaríska einingakerfinu
- Notað blandaðar mælieiningar í bandaríska einingakerfinu
- Umreiknið einingar í metrakerfinu
- Notið blandaðar mælieiningar í metrakerfinu
- Breytt á milli bandaríska einingakerfisins og metrakerfisins
- Umreiknið hitastig milli Fahrenheit- og Celsíuskvarða

**UNDIRBÚNINGUR 1.10**

Ítarlegri kynningu á viðfangsefnum þessa hluta er að finna í kaflanum Reiknireglur rauntalna í bókinni Foralgebra.

## Umreiknið einingar í bandaríska einingakerfinu

Tvö mælikerfi eru almennt notuð í heiminum. Flest lönd nota metrakerfið. Bandaríkin nota annað mælikerfi sem venjulega er kallað bandaríska einingakerfið. Við skoðum bandaríska einingakerfið fyrst.

Í bandaríska einingakerfinu eru tommur, fet, jardar og mílur notaðar til að mæla lengd en pund og tonn til að mæla þyngd. Rúmtak er mælt í bollum, pintum, kvartum og gallonum. Bæði bandaríska einingakerfið og metrakerfið mæla tíma í sekúndum, mínútum og klukkustundum.

Jafngildi mælieininganna eru sýnd í töflu 1.58. Í töflunni eru einnig sýndar algengar skammstafanir fyrir hverja mælieiningu innan sviga.



Tafla 1.58

**Bandaríska einingakerfið**

| | |
|---|---|
| Lengd<br>1 fet = 12 tommur<br>1 jardi = 3 fet<br>1 míla = 5.280 fet | Rúmtak<br>3 teskeiðar = 1 matskeið<br>16 matskeiðar = 1 bolli<br>1 bolli = 8 vökvaúnsur<br>1 pint = 2 bollar<br>1 kvart = 2 pintar<br>1 gallon = 4 kvartar |
| Þyngd<br>1 pund = 16 únsur<br>1 tonn = 2000 pund | Tími<br>1 mínúta = 60 sekúndur<br>1 klukkustund = 60 mínútur<br>1 dagur = 24 klukkustundir<br>1 vika = 7 dagar<br>1 ár = 365 dagar |

Í mörgum raunverulegum viðfangsefnum þurfum við að breyta á milli mælieininga, svo sem feta og jarda, mínútna og sekúndna eða kvarta og gallona. Við notum hlutleysureglu margföldunar við þessa umreikninga. Hér rifjum við hana upp svo auðvelt sé að vísa til hennar.

**HLUTLEYSUREGLA MARGFÖLDUNAR**

Fyrir sérhverja rauntölu $a$: $a \cdot 1 = a \quad 1 \cdot a = a$
1 er margföldunarhlutleysan

Til að nota hlutleysureglu margföldunar ritum við 1 á formi sem hjálpar okkur að breyta einingunum. Segjum til dæmis að við viljum breyta tommum í fet. Við vitum að 1 fet jafngildir 12 tommum og ritum því 1 sem brotið $\frac{1\text{ fet}}{12\text{ tommur}}$. Þegar við margföldum með þessu broti breytum við ekki gildinu heldur aðeins einingunum.

En $\frac{12\text{ tommur}}{1\text{ fet}}$ jafngildir einnig 1. Hvernig ákveðum við hvort margfalda eigi með $\frac{1\text{ fet}}{12\text{ tommur}}$ eða $\frac{12\text{ tommur}}{1\text{ fet}}$? Við veljum brotið sem lætur einingarnar sem breyta á úr styttast út. Farið með heiti eininganna eins og þætti og „styttið út“ sameiginlegar einingar eins og sameiginlega þætti. Ef við viljum breyta 66 tommum í fet, hvor margföldunin lætur tommurnar styttast út?

$66 \text{ tommur} \cdot \frac{1 \text{ fet}}{12 \text{ tommur}}$ eða $66 \text{ tommur} \cdot \frac{12 \text{ tommur}}{1 \text{ fet}}$

Fyrra formið virkar þar sem 66 tommur $\cdot \frac{1 \text{ fet}}{12 \text{ tommur}}$).

1

Tommurnar styttast út og aðeins fet standa eftir. Í síðara forminu eru engar einingar sem styttast út og það gagnast okkur því ekki.

---

**SÝNIDÆMI 1.140**

### Hvernig á að umreikna einingar

MaryAnne er 66 tommur á hæð. Breytið hæð hennar í fet.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Margfaldið stærðina sem á að umreikna með 1; ritið 1 sem brot sem tengir saman gefnu einingarnar og einingarnar sem óskað er eftir. | Margfaldið 66 tommur með 1 og ritið 1 sem brot sem tengir saman tommur og fet. Við þurfum að hafa tommur í nefnaranum svo að tommurnar styttist út! | $66 \text{ tommur} \cdot 1$<br>$66 \text{ tommur} \cdot \frac{1 \text{ fet}}{12 \text{ tommur}}$ |
| **Skref 2.** Margfaldið. | Lítið á 66 tommur sem $\frac{66 \text{ tommur}}{1}$. | $\frac{66 \text{ tommur} \cdot 1 \text{ fet}}{12 \text{ tommur}}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið brotið. | Athugið: tommurnar styttast út. | $\frac{66 \text{ tommur} \cdot 1 \text{ fet}}{12 \text{ tommur}}$<br>$\frac{66 \text{ fet}}{12}$ |
| **Skref 4.** Einfaldið. | Deilið 66 með 12. | 5,5 fet |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.279**

Lexie er 30 tommur á hæð. Breytið hæð hennar í fet.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.280**

Rene keypti 18 jarda langa slöngu. Breytið lengdinni í fet.

---

**AÐFERÐ**

### Umreiknið einingar.

1. Skref 1. Margfaldið stærðina sem á að umreikna með 1; ritið 1 sem brot sem tengir saman gefnu einingarnar og einingarnar sem óskað er eftir.
2. Skref 2. Margfaldið.
3. Skref 3. Einfaldið brotið.
4. Skref 4. Einfaldið.

Þegar við notum hlutleysureglu margföldunar til að umreikna einingar þurfum við að gæta þess að einingarnar sem við viljum breyta úr styttist út. Yfirleitt þýðir það að þessar einingar þurfa að vera í nefnara umreikningsbrotsins.



**SÝNIDÆMI 1.141**

Ndula, fíll í safarígarðinum í San Diego, vegur næstum 3,2 tonn. Breytið þyngd hennar í pund.

## Lausn

Við breytum 3,2 tonnum í pund. Við notum hlutleysureglu margföldunar og ritum 1 sem brotið $\frac{2000\,\text{pund}}{1\,\text{tonn}}$.

| | |
|---|---|
| | $3{,}2\ \text{tonn}$ |
| Margfaldið stærðina sem á að umreikna með 1. | $3{,}2\ \text{tonn} \cdot 1$ |
| Ritið 1 sem brot sem tengir saman tonn og pund. | $3{,}2\ \text{tonn} \cdot \frac{2.000\ \text{pund}}{1\ \text{tonn}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3{,}2\ \text{tonn} \cdot 2.000\ \text{pund}}{1\ \text{tonn}}$ |
| Margfaldið. | $6.400\ \text{pund}$ |
| | Ndula vegur næstum 6.400 pund. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.281**

Jeppi Arnolds vegur um 4,3 tonn. Breytið þyngdinni í pund.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.282**

Skemmtiferðaskipið Carnival Destiny vegur 51.000 tonn. Breytið þyngdinni í pund.

Stundum þarf að fara í gegnum nokkrar millieiningar til að breyta úr einni einingu í aðra og þá þurfum við að margfalda með nokkrum brotum.

**SÝNIDÆMI 1.142**

Juliet fer með fjölskyldu sinni í sumarbústaðinn þeirra. Hún verður fjarri kærastanum sínum í 9 vikur. Breytið tímanum í mínútur.

## Lausn

Til að breyta vikum í mínútur breytum við fyrst vikum í daga, síðan dögum í klukkustundir og loks klukkustundum í mínútur. Til þess margföldum við með umreiknistuðlum sem jafngilda

**1.**

1

| | |
|---|---|
| | 9 vikur |
| Ritið 1 sem $\frac{7 \text{ dagar}}{1 \text{ vika}}$, $\frac{24 \text{ klukkustundir}}{1 \text{ dagur}}$ og $\frac{60 \text{ mínútur}}{1 \text{ klukkustund}}$. | $\frac{9 \text{ vikur}}{1} \cdot \frac{7 \text{ dagar}}{1 \text{ vika}} \cdot \frac{24 \text{ klst.}}{1 \text{ dagur}} \cdot \frac{60 \text{ mín.}}{1 \text{ klst.}}$ |
| Styttið sameiginlegu einingarnar út. | $\frac{9 \cancel{\text{ vikur}}}{1} \cdot \frac{7 \cancel{\text{ dagar}}}{1 \cancel{\text{ vika}}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{ klst.}}}{1 \cancel{\text{ dagur}}} \cdot \frac{60 \text{ mín.}}{1 \cancel{\text{ klst.}}}$ |
| Margfaldið. | $\frac{9 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \text{ mín.}}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$ |
| Margfaldið. | 90.720 mín. |

Juliet og kærastinn hennar verða aðskilin í 90.720 mínútur (þótt þeim kunni að finnast það heil eilífð!).

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.283**

Fjarlægðin milli jarðar og tungls er um 250.000 mílur. Breytið þessari lengd í jarda.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.284**

Geimfarar í leiðangri 28 á Alþjóðlegu geimstöðinni dvelja 15 vikur í geimnum. Breytið tímanum í mínútur.

**SÝNIDÆMI 1.143**

Hve margar únsur eru í 1 galloni?

## Lausn

Við breytum gallonum í únsur með því að margfalda með nokkrum umreiknistuðlum. Sjá töflu 1.58.

| | |
|---|---|
| | 1 gallon |
| Margfaldið stærðina sem á að umreikna með 1. | $\frac{1 \text{ gallon}}{1} \cdot \frac{4 \text{ kvartar}}{1 \text{ gallon}} \cdot \frac{2 \text{ pintar}}{1 \text{ kvart}} \cdot \frac{2 \text{ bollar}}{1 \text{ pint}} \cdot \frac{8 \text{ únsur}}{1 \text{ bolli}}$ |
| Notið umreiknistuðla til að fá réttu einingunina. Einfaldið. | $\frac{\cancel{1 \text{ gallon}}}{1} \cdot \frac{\cancel{4 \text{ kvartar}}}{\cancel{1 \text{ gallon}}} \cdot \frac{\cancel{2 \text{ pintar}}}{\cancel{1 \text{ kvart}}} \cdot \frac{\cancel{2 \text{ bollar}}}{\cancel{1 \text{ pint}}} \cdot \frac{8 \text{ únsur}}{\cancel{1 \text{ bolli}}}$ |
| Margfaldið. | $\frac{1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \text{ únsur}}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$ |
| Einfaldið. | 128 únsur<br>Það eru 128 únsur í galloni. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.285**

Hve margir bollar eru í 1 galloni?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.286**

Hve margar teskeiðar eru í 1 bolla?

## Notið blandaðar mælieiningar í bandarísku einingakerfinu

Við notum oft blandaðar mælieiningar í daglegu lífi. Segjum að Joe sé 5 fet og 10 tommur á hæð, dvelji 7 klukkustundir og 45 mínútur í vinnunni og borði síðan steik sem vegur 1 pund og 2 únsur í kvöldmat. Allar þessar mælingar nota blandaðar einingar.

Farið varlega þegar þið reiknið með mælingum í blönduðum einingum. Gætið þess að leggja aðeins saman eða draga frá sams konar einingar!

**SÝNIDÆMI 1.144**

Seymour keypti þrjár steikur fyrir grillveislu. Þær vógu 14 únsur, 1 pund og 2 únsur og 1 pund og 6 únsur. Hve mörg pund af steik keypti hann alls?

### Lausn

Við leggjum saman þyngd steikanna til að finna heildarþyngdina.

1

| | |
|---|---|
| Leggið únsurnar saman. Leggið síðan pundin saman. | 14 únsur<br>1 pund 2 únsur<br>+ 1 pund 6 únsur<br>2 pund 22 únsur |
| Breytið 22 únsum í pund og únsur. | 2 pund + 1 pund, 6 únsur |
| Leggið pundin saman. | 3 pund, 6 únsur |
| | Seymour keypti 3 pund og 6 únsur af steik. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.287**

Laura eignaðist þríbura sem vógu 3 pund og 3 únsur, 3 pund og 3 únsur og 2 pund og 9 únsur. Hver var samanlögð fæðingarþyngd barnanna þriggja?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.288**

Stan skar tvo loftlista fyrir fjölskylduherbergið. Þeir voru 8 fet og 7 tommur og 12 fet og 11 tommur á lengd. Hver var samanlögð lengd listanna?

**SÝNIDÆMI 1.145**

Anthony keypti fjóra viðarplanka sem voru hver um sig 6 fet og 4 tommur á lengd. Hver er samanlögð lengd viðarins sem hann keypti?

## Lausn

Við margföldum lengd eins planka með fjölda plankanna til að finna heildarlengdina.

| | |
|---|---|
| Margfaldið fyrst tommurnar og síðan fetin. | 6 fet 4 tommur<br>× 4<br>24 fet 16 tommur |
| Breytið 16 tommunum í fet. Leggið fetin saman. | 24 fet + 1 fet 4 tommur<br>25 fet 4 tommur |
| | Anthony keypti 25 fet og 4 tommur af viði. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.289**

Henri vill þrefalda uppskrift að spagettísósu sem notar 1 pund og 8 únsur af kalkúnahakki. Hve mörg pund af kalkúnahakki þarf hann?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.290**

Joellen vill tvöfalda lausn sem er 5 gallon og 3 kvartar. Hve marga gallona af lausn fær hún alls?



## Umreiknið einingar í metrakerfinu

Í metrakerfinu tengjast einingar með veldum af 10. Forskeyti einingaheitanna endurspegla þessi tengsl. Grunneining lengdar er til dæmis metri. Einn kílómetri er 1.000 metrar; forskeytið kíló merkir þúsund. Einn sentimetri er $\frac{1}{100}$ úr einum metra, rétt eins og eitt sent er $\frac{1}{100}$ úr einum dal.

Jafngildi mælieininga í metrakerfinu eru sýnd í töflu 1.59. Algengar skammstafanir fyrir hverja mælieiningu eru gefnar innan sviga.

Tafla 1.59

| **Metrakerfið** | | |
|---|---|---|
| **Lengd** | **Massi** | **Rúmtak** |
| 1 kílómetri (km) = 1.000 m 1 hektómetri (hm) = 100 m 1 dekametri (dam) = 10 m 1 metri (m) = 1 m 1 desimetri (dm) = 0,1 m 1 sentimetri (cm) = 0,01 m 1 millimetri (mm) = 0,001 m | 1 kílógramm (kg) = 1.000 g 1 hektógramm (hg) = 100 g 1 dekagramm (dag) = 10 g 1 gramm (g) = 1 g 1 desigramm (dg) = 0,1 g 1 sentigramm (cg) = 0,01 g 1 milligramm (mg) = 0,001 g | 1 kílólítri (kL) = 1.000 L 1 hektólítri (hL) = 100 L 1 dekalítri (daL) = 10 L 1 lítri (L) = 1 L 1 desilítri (dL) = 0,1 L 1 sentilítri (cL) = 0,01 L 1 millilítri (mL) = 0,001 L |
| 1 metri = 100 sentimetrar 1 metri = 1.000 millimetrar | 1 gramm = 100 sentigrömm 1 gramm = 1.000 milligrömm | 1 lítri = 100 sentilítrar 1 lítri = 1.000 millilítrar |

Við notum sömu aðferð til að umreikna einingar í metrakerfinu og í bandaríska einingakerfinu. Með hlutleysureglu margföldunar margföldum við með umreiknistuðli sem jafngildir einum til að fá réttar einingar.

Hafið þið einhvern tíma tekið þátt í 5 km eða 10 km hlaupi? Lengd slíkra hlaupa er mæld í kílómetrum. Metrakerfið er almennt notað í Bandaríkjunum þegar rætt er um lengd hlaupa.

1

**SÝNIDÆMI 1.146**

Nick hljóp 10 km hlaup. Hve marga metra hljóp hann?

### Lausn

Við breytum kílómetrum í metra með hlutleysureglu margföldunar.

| | 10 kílómetrar |
|---|---|
| Margfaldið stærðina sem á að umreikna með 1. | $10\ \text{kílómetrar} \cdot 1$ |
| Ritið 1 sem brot sem tengir saman kílómetra og metra. | $10\ \text{kílómetrar} \cdot \frac{1.000\ \text{metrar}}{1\ \text{kílómetri}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{10\ \cancel{\text{km}} \cdot 1.000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}$ |
| Margfaldið. | 10.000 metrar |
| | Nick hljóp 10.000 metra. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.291**

Sandy lauk sínu fyrsta 5 km hlaupi! Hve marga metra hljóp hún?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.292**

Herman keypti mottu sem var 2,5 metrar á lengd. Hve löng er mottan í sentimetrum?

**SÝNIDÆMI 1.147**

Nýfætt barn Eleanor vó 3.200 grömm. Hve mörg kílógrömm vó barnið?

### Lausn

Við breytum grömmum í kílógrömm.

| | |
|---|---|
| | $3.200\ \text{grömm}$ |
| Margfaldið stærðina sem á að umreikna með 1. | $3.200\ \text{grömm} \cdot 1$ |
| Ritið 1 sem brot sem tengir saman kílógrömm og grömm. | $3.200\ \text{grömm} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1.000\ \text{grömm}}$ |
| Einfaldið. | $3.200\ \cancel{\text{grömm}} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1.000\ \cancel{\text{grömm}}}$ |
| Margfaldið. | $\frac{3.200\ \text{kílógrömm}}{1.000}$ |
| Deilið. | 3,2 kílógrömm. Barnið vó 3,2 kílógrömm. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.293**

Nýfætt barn Kari vó 2.800 grömm. Hve mörg kílógrömm vó barnið?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.294**

Anderson fékk pakka sem var merktur 4.500 grömm. Hve mörg kílógrömm vó pakkinn?

Þegar þið kynnist metrakerfinu betur takið þið kannski eftir mynstri. Kerfið byggist á tugveldum og því margföldum við með tugveldum í útreikningunum. Við höfum lært að einfalda þessa útreikninga með því að færa tugabrotskommuna.

Til að margfalda með 10, 100 eða 1.000 færum við tugabrotskommuna um eitt, tvö eða þrjú sæti til hægri. Til að margfalda með 0,1, 0,01 eða 0,001 færum við tugabrotskommuna um eitt, tvö eða þrjú sæti til vinstri.

Við getum notað þetta mynstur þegar við umreiknum mælieiningar í metrakerfinu. Í sýnidæmi 1.147 breyttum við 3.200 grömmum í kílógrömm með því að margfalda með $\frac{1}{1000}$ (eða 0,001). Það jafngildir því að færa tugabrotskommuna um þrjú sæti til vinstri.

$$3.200 \cdot \frac{1}{1.000} \qquad 3.200,$$
$$3,2 \qquad 3,2$$

**SÝNIDÆMI 1.148**

Breytið ⓐ 350 L í kílólítra ⓑ 4,1 L í millilítra.

## Lausn

**1.** ⓐ Við breytum lítrum í kílólítra. Í töflu 1.59 sjáum við að 1 kílólítri = 1.000 lítrar.

| | |
|---|---|
| | $350\text{ L}$ |
| Margfaldið með 1 og ritið 1 sem brot sem tengir saman lítra og kílólítra. | $350\text{ L}\cdot\frac{1\text{ kL}}{1.000\text{ L}}$ |
| Einfaldið. | $350\text{ L}\cdot\frac{1\text{ kL}}{1.000\text{ L}}$ |
| Færið kommu um 3 sæti til vinstri. (350,) | $0{,}35\text{ kL}$ |

**2.** ⓑ Við breytum lítrum í millilítra. Í töflu 1.59 sjáum við að 1 lítri $=$ 1.000 millilítrar.

| | |
|---|---|
| | $4{,}1\text{ L}$ |
| Margfaldið með 1 og ritið 1 sem brot sem tengir saman lítra og millilítra. | $4{,}1\text{ L}\cdot\frac{1.000\text{ mL}}{1\text{ L}}$ |
| Einfaldið. | $4{,}1\not{\text{L}}\cdot\frac{1.000\text{ mL}}{1\not{\text{L}}}$ |
| Færið tugabrotskommuna um 3 sæti til hægri. | $4{,}100\text{ mL}$ |
| | $4.100\text{ mL}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.295**

Breytið: ⓐ 725 L í kílólítra ⓑ 6,3 L í millilítra

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.296**

Breytið: ⓐ 350 hL í lítra ⓑ 4,1 L í sentilítra

## Notið blandaðar mælieiningar í metrakerfinu

Þegar reiknað er með mælingum í blönduðum einingum í metrakerfinu þarf að fara jafn varlega og í bandaríska einingakerfinu. Það getur þó verið auðveldara, því að einingarnar tengjast veldum af 10. Gætið þess að leggja aðeins saman eða draga frá sams konar einingar.

**SÝNIDÆMI 1.149**

Ryland er 1,6 metrar á hæð. Yngri bróðir hans er 85 sentimetrar á hæð. Hve miklu hærri er Ryland en yngri bróðir hans?

### Lausn

Við getum breytt báðum mælingunum annaðhvort í sentimetra eða metra. Metrinn er stærri einingin og því drögum við aðra lengdina frá hinni í metrum. Við breytum 85 sentimetrum í metra með því að færa tugabrotskommuna um 2 sæti til vinstri.

Tafla 1.60

| | |
|---|---|
| Ritið 85 sentimetrana sem metra. | $\begin{array}{r} 1{,}60\ \text{m} \\ -\,0{,}85\ \ \text{m} \\ \hline 0{,}75\ \text{m} \end{array}$ |

Ryland er 0,75 m hærri en bróðir hans.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.297**

Mariella er 1,58 metrar á hæð. Dóttir hennar er 75 sentimetrar á hæð. Hve miklu hærri er Mariella en dóttir hennar? Gefið svarið í sentimetrum.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.298**

Girðingin umhverfis lóð Hanks er 2 metrar á hæð. Hank er 96 sentimetrar á hæð. Hve miklu lægri er Hank en girðingin? Gefið svarið í metrum.

**SÝNIDÆMI 1.150**

Í uppskrift Denu að linsubaunasúpu eru notaðir 150 millilítrar af ólífuolíu. Dena vill þrefalda uppskriftina. Hve marga lítra af ólífuolíu þarf hún?

## Lausn

Við finnum fyrst magn ólífuolíunnar í millilítrum og breytum því síðan í lítra.

Tafla 1.61

| | |
|---|---|
| | Þrefaldið $150\ \text{mL}$ |
| Þýðið yfir á algebrustæðu. | $3 \cdot 150\,\text{mL}$ |
| Margfaldið. | $450\ \text{mL}$ |
| Breytið í lítra. | $450 \cdot \frac{0{,}001\ \text{L}}{1\ \text{mL}}$ |
| Einfaldið. | $0{,}45\ \text{L}$ |
| | Dena þarf 0,45 lítra af ólífuolíu. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.299**

Í uppskrift að Alfredo-sósu eru 250 millilítrar af mjólk. Renata eldar pasta með Alfredo-sósu fyrir stóra veislu og þarf að margfalda magnið í uppskriftinni með 8. Hve marga lítra af mjólk þarf hún?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.300**

1

Til að búa til einn bakka af baklava þarf Dorothea 400 grömm af filódeigi. Ef hún ætlar að búa til 6 bakka, hve mörg kílógrömm af filódeigi þarf hún?

## Breytið milli bandarískra einingakerfisins og metrakerfisins

Í Bandaríkjunum eru margar mælingar gerðar í einingum metrakerfisins. Gosdrykkir fást til dæmis í 2-lítra flöskum, kalsíum í 500-mg hylkjum og fólk tekur þátt í 5 km hlaupum. Til að eiga auðvelt með að nota bæði kerfin þurfum við að geta breytt á milli þeirra.
Tafla 1.62 sýnir nokkra algengustu umreikningana.

Tafla 1.62

**Umreiknistuðlar milli bandarískra einingakerfisins og metrakerfisins**

| Lengd | Massi | Rúmtak |
|---|---|---|
| 1 tomma = 2,54 cm | 1 pund = 0,45 kg | 1 kvart = 0,95 L |
| 1 fet = 0,305 m | 1 únsa = 28 g | 1 vökvaúnsa = 30 mL |
| 1 jardi = 0,914 m | 1 kg = 2,2 pund | 1 L = 1,06 kvartar |
| 1 míla = 1,61 km | | |
| 1 m = 3,28 fet | | |

Mynd 1.22 sýnir samband tomma og sentimetra á reglustiku.




Mynd 1.22 Þessi reglustika sýnir tommur og sentimetra.

Mynd 1.23 sýnir merkingar fyrir únsur og millilítra á mælibolla.




Mynd 1.23 Þessi mælibolli sýnir únsur og millilítra.

Mynd 1.24 sýnir hvernig pund og kílógrömm eru merkt á baðvog.



Mynd 1.24 Þessi vog sýnir pund og kílógrömm.

Við breytum á milli kerfanna á sama hátt og innan þeirra, með því að margfalda með umreiknistuðlum eininga.

**SÝNIDÆMI 1.151**

Vatnsflaska Lees rúmar 500 mL af vatni. Hve margar únsur eru í flöskunni? Námundið að næsta tíundahluta úr únsu.

## Lausn

Tafla 1.63

| | |
|---|---|
| | $500\text{ mL}$ |
| Margfaldið með umreiknistuðli sem tengir saman mL og únsur. | $500\,\text{millilítrar} \cdot \frac{1\,\text{únsa}}{30\,\text{millilítrar}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{500\text{ únsur}}{30}$ |
| Deilið. | $16{,}7\text{ únsur.}$ |
| | Vatnsflaskan inniheldur 16,7 únsur. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.301**

Hve margir kvartar af gosdrykk eru í 2 L flösku?

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.302**

Hve margir lítrar eru í 4 kvartum af mjólk?

**SÝNIDÆMI 1.152**

Soleil var á ferðalagi og sá skilti þar sem stóð að næsti áningarstaður væri í 100 kílómetra fjarlægð. Hve margar mílur eru að næsta áningarstað?

### Lausn

1

Tafla 1.64

| | |
|---|---|
| | $100$ kílómetrar |
| Margfaldið með umreiknistuðli sem tengir saman km og mílur. | $100 \text{ kílómetrar} \cdot \frac{1 \text{ míla}}{1{,}61 \text{ kílómetri}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{100 \text{ mílur}}{1{,}61}$ |
| Deilið. | $62$ mílur. |
| | Soleil ferðast 62 mílur. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.303**

Kilimanjaro-fjall er 5.895 metrar á hæð. Breytið hæðinni í fet.

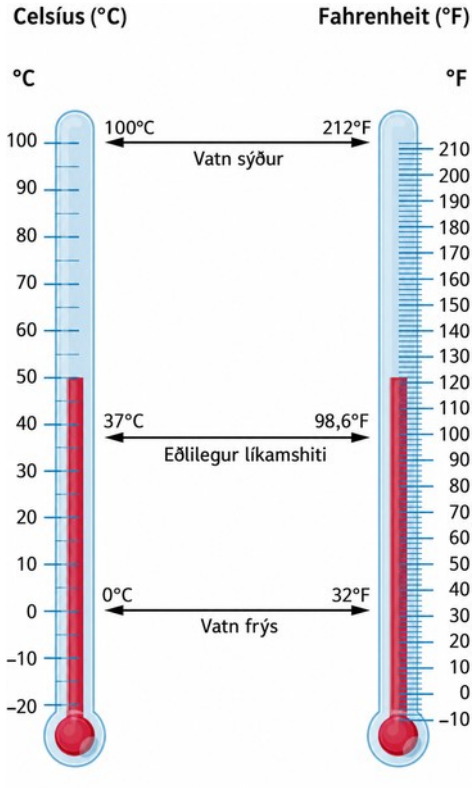
**PRÓFIÐ SJÁLF 1.304**

Flugleiðin frá New York til Lundúna er 5.586 kílómetrar. Breytið vegalengdinni í mílur.

## Umreiknið hitastig milli Fahrenheit- og Celsíuskvarða

Hafið þið einhvern tíma verið í erlendu landi og heyrt veðurspána? Ef spáð er $22\,^\circ\text{C}$,, hvað þýðir það?

Bandaríska einingakerfið og metrakerfið nota ólíka kvarða til að mæla hitastig. Bandaríska kerfið notar Fahrenheit-gráður, ritaðar $^\circ\text{F}$. Metrakerfið notar Celsíusgráður, ritaðar $^\circ\text{C}$. Mynd 1.25 sýnir samband kvarðanna.




Mynd 1.25 Myndin sýnir eðlilegan líkamshita ásamt frostmarki og suðumarki vatns í gráðum á Fahrenheit og Celsíus.

**UMREIKNINGUR HITASTIGS**

Notið formúluna hér á eftir til að breyta hitastigi F á Fahrenheit-kvarða í hitastig C á Celsíus-kvarða.

$$C=\frac{5}{9}(F-32).$$

Notið formúluna hér á eftir til að breyta hitastigi C á Celsíus-kvarða í hitastig F á Fahrenheit-kvarða.

$$F=\frac{9}{5}C+32.$$

**SÝNIDÆMI 1.153**

Breytið $50\,°$ á Fahrenheit í gráður á Celsíus.

## Lausn

Við setjum $50\,°$ F inn í formúluna til að finna C.

1

| | |
|---|---|
| | $C=\frac{5}{9}(F-32)$ |
| Setjið 50 inn fyrir F. | $C=\frac{5}{9}(50-32)$ |
| Einfaldið innan sviganna. | $C=\frac{5}{9}(18)$ |
| Margfaldið. | $C=10$ |
| | Við höfum því fundið að 50°F jafngildir 10°C. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.305**

Breytið hitastiginu á Fahrenheit í gráður á Celsíus: 59° á Fahrenheit.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.306**

Breytið hitastiginu á Fahrenheit í gráður á Celsíus: 41° á Fahrenheit.

**SÝNIDÆMI 1.154**

Þegar Woody heimsótti París sá hann að hitastigið var 20° á Celsíus. Breytið hitastiginu í gráður á Fahrenheit.

## Lausn

Við setjum 20°C inn í formúluna til að finna F.

| | |
|---|---|
| | $F=\frac{9}{5}C+32$ |
| Setjið 20 í stað C. | $F=\frac{9}{5}(20)+32$ |
| Margfaldið. | $F=36+32$ |
| Leggið saman. | $F=68$ |
| | Við höfum því fundið að 20°C jafngildir 68°F. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.307**

Breytið hitastiginu á Celsíus í gráður á Fahrenheit: Hitastigið í Helsinki í Finnlandi var 15° á Celsíus.

**PRÓFIÐ SJÁLF 1.308**

Breytið hitastiginu á Celsíus í gráður á Fahrenheit: Hitastigið í Sydney í Ástralíu var 10° á Celsíus.

## Æfingar úr hluta 1.10

***Æfingin skapar meistarann***

**Umreiknið einingar í bandaríska einingakerfinu**

Umreiknið einingarnar í æfingunum hér á eftir.

**825.** Garðbekkur er 6 fet á lengd. Breytið lengdinni í tommur.

**826.** Gólfflís er 2 fet á breidd. Breytið breiddinni í tommur.

**827.** Borði er 18 tommur á lengd. Breytið lengdinni í fet.

**828.** Carson er 45 tommur á hæð. Breytið hæð hans í fet.

**829.** Völlur í amerískum fótbolta er 160 fet á breidd. Breytið breiddinni í jarda.

**830.** Á hafnaboltavelli er fjarlægðin frá heimahöfn að fyrstu höfn 30 jardar. Breytið vegalengdinni í fet.

**831.** Ulises býr 1,5 mílur frá skólanum. Breytið vegalengdinni í fet.

**832.** Denver í Colorado er 5.183 fet yfir sjávarmáli. Breytið hæðinni í mílur.

**833.** Háhyrningur vegur 4,6 tonn. Breytið þyngdinni í pund.

**834.** Steypireyðar geta vegið allt að 150 tonnum. Breytið þyngdinni í pund.

**835.** Tómur strætisvagn vegur 35.000 pund. Breytið þyngdinni í tonn.

**836.** Við flugtak vegur flugvél 220.000 pund. Breytið þyngdinni í tonn.

**837.** Rocco beið í $1\frac{1}{2}$ klukkustundir eftir bókuðum tíma. Breytið biðtímanum í sekúndur.

**838.** Skurðaðgerð Misty stóð í $2\frac{1}{4}$ klukkustundir. Breytið tímanum í sekúndur.

**839.** Hve margar teskeiðar eru í pinti?

**840.** Hve margar matskeiðar eru í galloni?

**841.** Köttur JJ, Posy, vegur 14 pund. Breytið þyngd hennar í únsur.

**842.** Hundur April, Beans, vegur 8 pund. Breytið þyngd hans í únsur.

**843.** Crista ætlar að bera fram 20 bolla af safa í veislu sonar síns. Breytið rúmmálinu í gallon.

**844.** Lance þarf 50 bolla af vatni fyrir hlaupara í keppni. Breytið rúmmálinu í gallon.

**845.** Jon er 6 fet og 4 tommur á hæð. Breytið hæð hans í tommur.

**846.** Faye er 4 fet og 10 tommur á hæð. Breytið hæð hennar í tommur.

**847.** Sigling Mayflower-skipsins stóð í 2 mánuði og 5 daga. Breytið tímanum í daga.

**848.** Skemmtisigling Lynn stóð í 6 daga og 18 klukkustundir. Breytið ferðatímanum í klukkustundir.

**849.** Preston vó 7 pund og 3 únsur við fæðingu. Breytið þyngd hans í únsur.

**850.** Audrey vó 6 pund og 15 únsur við fæðingu. Breytið þyngd hennar í únsur.

1

**Notið blandaðar mælieiningar í bandaríska einingakerfinu**
Leysið verkefnin hér á eftir.

**851.** Eli veiddi þrjá fiska. Þeir vógu 2 pund og 4 únsur, 1 pund og 11 únsur og 4 pund og 14 únsur. Hver var samanlögð þyngd fiskanna þriggja?

**852.** Judy keypti 1 pund og 6 únsur af möndlum, 2 pund og 3 únsur af valhnetum og 8 únsur af kasjúhnetum. Hve mörg pund af hnetum keypti Judy?

**853.** Dag einn skráði Anya hve margar mínútur hún ók. Hún skráði 45, 10, 8, 65, 20 og 35. Hve margar klukkustundir ók Anya alls?

**854.** Á síðasta ári fór Eric í 6 viðskiptaferðir. Ferðirnar stóðu í 5, 2, 8, 12, 6 og 3 daga. Hve margar vikur var Eric í viðskiptaferðum á síðasta ári?

**855.** Renee tengdi 6 feta og 6 tommu framlengingarsnúru við 3 feta og 8 tommu rafmagnssnúru tölvunnar. Hver var samanlögð lengd snúranna?

**856.** Jeppi Fawzi er 6 fet og 4 tommur á hæð. Ef hann setur kassa sem er 2 fet og 10 tommur á hæð ofan á jeppann, hver er samanlögð hæð jeppans og kassans?

**857.** Leilani vill búa til 8 diskamottur. Í hverja mottu þarf hún 18 tommur af efni. Hve marga jarda af efni þarf hún í 8 mottur?

**858.** Mireille þarf að klippa 24 tommur af borða fyrir hverja af 12 stúlkunum í danshópnum sínum. Hve marga jarda af borða þarf hún alls?

**Umreiknið einingar í metrakerfinu**
Umreiknið einingarnar í æfingunum hér á eftir.

**859.** Ghalib hljóp 5 kílómetra. Breytið lengdinni í metra.

**860.** Kitaka gekk 8 kílómetra. Breytið lengdinni í metra.

**861.** Estrella er 1,55 metrar á hæð. Breytið hæð hennar í sentimetra.

**862.** Grunna laugin er 2,45 metrar á breidd. Breytið breiddinni í sentimetra.

**863.** Whitney-fjall er 3.072 metrar á hæð. Breytið hæðinni í kílómetra.

**864.** Maríanadjúpið er 10.911 metrar á dýpt. Breytið dýptinni í kílómetra.

**865.** Fjölvítamín June inniheldur 1.500 milligrömm af kalsíumi. Breytið magninu í grömm.

**866.** Dæmigerður rauðbarkakólibrífugl vegur 3 grömm. Breytið þyngdinni í milligrömm.

**867.** Ein smjörstöng inniheldur 91,6 grömm af fitu. Breytið magninu í milligrömm.

**868.** Einn skammtur af úrvalsís inniheldur 25 grömm af fitu. Breytið magninu í milligrömm.

**869.** Hámarksmassi flugpóstbréfs er 2 kílógrömm. Breytið massanum í grömm.

**870.** Dóttir Dimitris vó 3,8 kílógrömm við fæðingu. Breytið þyngdinni í grömm.

**871.** Vínflaska rúmaði 750 millilítra. Breytið rúmmálinu í lítra.

**872.** Lyfjaflaska rúmaði 300 millilítra. Breytið rúmmálinu í lítra.

**Notið blandaðar mælieiningar í metrakerfinu**
Leysið verkefnin hér á eftir.

**873.** Matthias er 1,8 metrar á hæð. Sonur hans er 89 sentimetrar á hæð. Hve miklu hærri er Matthias en sonur hans?

**874.** Stavros er 1,6 metrar á hæð. Systir hans er 95 sentimetrar á hæð. Hve miklu hærri er Stavros en systir hans?

**875.** Dæmigerð dúfa vegur 345 grömm. Dæmigerð önd vegur 1,2 kílógrömm. Hver er þyngdarmunur andarinnar og dúfunnar í grömmum?

**876.** Concetta átti 2 kílógramma poka af hveiti. Hún notaði 180 grömm af hveiti í tvíbökur. Hve mörg kílógrömm af hveiti eru eftir í pokanum?

**877.** Harry sendi 5 pakka sem vógu 420 grömm hver. Hver var samanlögð þyngd pakkanna í kílógrömmum?

**878.** Eitt glas af appelsínusafa veitir 560 milligrömm af kalíumi. Linda drekkur eitt glas af appelsínusafa á hverjum morgni. Hve mörg grömm af kalíumi fær Linda úr safanum á 30 dögum?

**879.** Jonas drekkur 200 millilítra af vatni 8 sinnum á dag. Hve marga lítra af vatni drekkur Jonas á dag?

**880.** Einn skammtur af heilkorna samlokubrauði veitir 6 grömm af prótíni. Hve mörg milligrömm af prótíni veita 7 skammtar af brauðinu?

**Breytið milli bandarískra einingakerfisins og metrakerfisins**
Umreiknið einingarnar í verkefnunum hér á eftir. Námundið að næsta tíunda hluta.

**881.** Bill er 75 tommur á hæð. Breytið hæð hans í sentimetra.

**882.** Frankie er 42 tommur á hæð. Breytið hæð hans í sentimetra.

**883.** Marcus kastaði bolta 24 jarda í amerískum fótbolta. Breytið lengd kastsins í metra.

**884.** Connie keypti 9 jarda af efni í gluggatjöld. Breytið lengd efnisins í metra.

**885.** Hver Bandaríkjamaður hendir að meðaltali 1.650 pundum af rusli á ári. Breytið þyngdinni í kílógrömm.

**886.** Bandaríkjamaður hendir að meðaltali 90.000 pundum af rusli á ævinni. Breytið þyngdinni í kílógrömm.

**887.** 5 km hlaup er 5 kílómetrar á lengd. Breytið lengdinni í mílur.

**888.** Kathryn er 1,6 metrar á hæð. Breytið hæð hennar í fet.

**889.** Ferðataska Dawn vó 20 kílógrömm. Breytið þyngdinni í pund.

**890.** Bakpoki Jacksons vó 15 kílógrömm. Breytið þyngdinni í pund.

**891.** Ozzie setti 14 gallon af bensíni á pallbílinn sinn. Breytið rúmmálinu í lítra.

**892.** Bernard keypti 8 gallon af málningu. Breytið rúmmálinu í lítra.

1

**Umreiknið hitastig milli Fahrenheit- og Celsíuskvarða**

Breytið hitastigi á Fahrenheit-kvarða í Celsíusgráður í æfingunum hér á eftir. Námundið að næsta tíundahluta.

**893.** 86 ° á Fahrenheit-kvarða

**894.** 77 ° á Fahrenheit-kvarða

**895.** 104 ° á Fahrenheit-kvarða

**896.** 14 ° á Fahrenheit-kvarða

**897.** 72 ° á Fahrenheit-kvarða

**898.** 4 ° á Fahrenheit-kvarða

**899.** 0 ° á Fahrenheit-kvarða

**900.** 120 ° á Fahrenheit-kvarða

Breytið hitastigi á Celsíus-kvarða í Fahrenheit-gráður í æfingunum hér á eftir. Námundið að næsta tíundahluta.

**901.** 5 ° á Celsíus-kvarða

**902.** 25 ° á Celsíus-kvarða

**903.** −10 ° á Celsíus-kvarða

**904.** −15 ° á Celsíus-kvarða

**905.** 22 ° á Celsíus-kvarða

**906.** 8 ° á Celsíus-kvarða

**907.** 43 ° á Celsíus-kvarða

**908.** 16 ° á Celsíus-kvarða

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**909.** **Næring: Julian** drekkur eina dós af gosdrykk á dag. Hver dós inniheldur 40 grömm af sykri. Hve mörg kílógrömm af sykri fær Julian úr gosdrykkjum á 1 ári?

**910.** **Endurskinsmerki:** Endurskinsmerkin í hverri akreinamerkingu á þjóðvegi eru með 16 jarda millibili. Hve mörg endurskinsmerki þarf í einnar mílu langa akreinamerkingu?

### *Ritunarverkefni*

**911.** Sumir telja 65 ° til 75 ° á Fahrenheit-kvarða vera kjörhitabil.

1. ⓐ Hvert er kjörhitabil ykkar? Hvers vegna finnst ykkur það?
2. ⓑ Breytið kjörhitabilinu ykkar úr Fahrenheit-gráðum í Celsíusgráður.

912.

1. ⓐ Ólust þið upp við bandaríska einingakerfið eða metrakerfið?
2. ⓑ Lýsið tveimur dæmum úr eigin lífi þar sem þið þurftuð að umreikna mælieiningar milli kerfanna tveggja.



***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Án vandkvæða | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| skilgreint bandarískar mælieiningar og umreiknað úr einni einingu í aðra. | | | |
| notað bandarískar mælieiningar. | | | |
| skilgreint mælieiningar metrakerfisins og umreiknað úr einni einingu í aðra. | | | |
| notað mælieiningar metrakerfisins. | | | |
| umreiknað milli bandarískra mælikerfisins og metrakerfisins. | | | |
| umreiknað milli Fahrenheit- og Celsíushitastigs. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur á heildina litið vel undirbúin fyrir næsta kafla? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# Lykilhugtök

**tölugildi**

Tölugildi tölu er fjarlægð hennar frá 0 á talnalínunni. Tölugildi tölunnar $n$ er ritað $|n|$.

**samlagningarhlutleysa**

Samlagningarhlutleysan er talan 0; gildi tölu breytist ekki þegar 0 er lagt við hana.

**samlagningarandhverfa**

Móttala tölu er samlagningarandhverfa hennar. Summa tölu og samlagningarandhverfu hennar er 0.

**stuðull**

Stuðull liðar er fastinn sem margfaldar breytuna í liðnum.

**samsett brot**

Samsett brot er brot þar sem teljarinn eða nefnarinn inniheldur brot.

**samsett tala**

Samsett tala er talningartala sem er ekki frumtala. Samsett tala hefur aðra þætti en 1 og sjálfa sig.

**fasti**

Fasti er tala sem hefur alltaf sama gildi.

**talningartölur**

Talningartölurnar eru 1, 2, 3, ...

**tugabrot**

Tugabrot er önnur leið til að rita brot þar sem nefnarinn er veldi af tíu.

**nefnari**

Nefnarinn er talan fyrir neðan brotastrikið. Hann segir í hve marga jafna hluta heildinni hefur verið skipt.

**deilanleg með tölu**

Ef talan $m$ er margfeldi af $n$, þá er $m$ deilanleg með $n$. (Ef 6 er margfeldi af 3, þá er 6 deilanleg með 3.)

**jafnaðarmerki**

Táknið „ = “ kallast jafnaðarmerki. Við lesum $a = b$ sem „$a$ er jafnt og $b$.“

**jafna**

Jafna samanstendur af tveimur stæðum sem jafnaðarmerki tengir saman.

**jafngild tugabrot**

Tvö tugabrot eru jafngild ef þau verða að jafngildum brotum þegar þeim er breytt í almenn brot.

**jafngild brot**

Jafngild brot eru brot sem hafa sama gildi.

**reikna gildi stæðu**

Að reikna gildi stæðu merkir að finna gildi hennar þegar breytunni er skipt út fyrir tiltekna tölu.

**stæða**

Stæða er tala, breyta eða samsetning talna og breytna með reikniaðgerðartáknum.

**þættir**

Ef $a \cdot b = m$, þá eru $a$ og $b$ þættir tölunnar $m$. Af því að $3 \cdot 4 = 12$ eru 3 og 4 þættir tölunnar 12.

**brot**

Brot er ritað $\frac{a}{b}$, þar sem $b \neq 0$. $a$ er teljarinn og $b$ er nefnarinn. Brot táknar hluta af heild.

Nefnarinn $b$ segir í hve marga jafna hluta heildinni hefur verið skipt og teljarinn $a$ segir hve margir hlutar eru teknir með.

**heiltölur**

Núll, jákvæðar heiltölur og móttölur þeirra kallast heiltölur:...−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...

**óræð tala**
Óræð tala er tala sem ekki er hægt að rita sem hlutfall tveggja heiltalna. Tugabrotsform hennar er hvorki endanlegt né lotubundið.

**minnsti samnefnari**
Minnsti samnefnari (MSN) tveggja brota er minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) nefnara þeirra.

**minnsta sameiginlega margfeldi**
Minnsta sameiginlega margfeldi tveggja talna er minnsta talan sem er margfeldi beggja talnanna.

**samkynja liðir**
Liðir sem eru annaðhvort fastaliðir eða hafa sömu breytur í sömu veldum kallast samkynja liðir.

**margfeldi tölu**
Tala er margfeldi af n ef hún er margfeldi talningartölu og n.

**margföldunarhlutleysa**
Margföldunarhlutleysan er talan 1; gildi tölu breytist ekki þegar hún er margfölduð með 1.

**margföldunarandhverfa**
Margföldunarandhverfa tölu er tala sem gefur einn þegar hún er margfölduð með upphaflegu tölunni.

**talnalína**
Talnalína er notuð til að sýna tölur myndrænt. Tölurnar á talnalínunni stækka frá vinstri til hægri og minnka frá hægri til vinstri.

**teljari**
Teljarinn er talan fyrir ofan brotastrikið. Hann segir hve margir hlutar heildarinnar eru teknir með.

**móttala**
Móttala tölu er talan sem er í sömu fjarlægð frá núlli á talnalínunni en hinum megin við núllið: $-a$ táknar móttölu tölunnar. Ritháttur $-a$ er lesinn „móttala $a$.“

**upphafspunktur**
Upphafspunkturinn er punkturinn sem merktur er 0 á talnalínu.

**prósenta**
Prósenta er hlutfall með nefnara 100.

**frumþáttun**
Frumþáttun tölu er margfeldi frumtalna sem er jafnt tölunni.

**frumtala**
Frumtala er talningartala stærri en 1 sem hefur aðeins þættina 1 og sjálfa sig.

**rótarmerki**

Rótarmerki er táknið $\sqrt{m}$ sem táknar jákvæðu ferningsrótina.

1

**ræð tala**

Ræð tala er tala á forminu $\frac{p}{q}$, þar sem p og q eru heiltölur og $q \neq 0$. Ræða tölu má rita sem hlutfall tveggja heiltalna. Tugabrotsform hennar er endanlegt eða lotubundið.

**rauntala**

Rauntala er tala sem er annaðhvort ræð eða óræð.

**margföldunarandhverfa**

Margföldunarandhverfa $\frac{a}{b}$ er $\frac{b}{a}$. Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er einn: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

**lotubundið tugabrot**

Lotubundið tugabrot er tugabrot þar sem síðasti tölustafurinn eða síðasti tölustafahópurinn endurtekur sig endalaust.

**fullstytt brot**

Brot telst fullstytt ef teljari þess og nefnari hafa engan sameiginlegan þátt.

**einfalda stæðu**

Til að einfalda stæðu skal framkvæma allar reikniaðgerðir í henni.

**ferningur og ferningsrót**

Ef $n^2 = m$, þá er $m$ ferningur $n$ og $n$ er ferningsrót $m$.

**liður**

Liður er fasti eða margfeldi fasta og einnar eða fleiri breytna.

**breyta**

Breyta er bókstafur sem táknar tölu sem getur haft mismunandi gildi.

**núll og jákvæðar heiltölur**

Núll og jákvæðu heiltölurnar eru 0, 1, 2, 3, ...

# Meginatriði

## 1.1 Inngangur að núlli og jákvæðum heiltölum

- **Sætisgildi eins og á** mynd 1.3.
- **Rita núll eða jákvæða heiltölu með orðum**

1. Skref 1. Byrjið vinstra megin og ritið töluna í hverjum talnaflokki og síðan heiti flokksins.
2. Skref 2. Setjið kommur í heiti tölunnar til að aðgreina talnaflokkana.
3. Skref 3. Ekki rita heiti einingaflokksins.

- **Rita núll eða jákvæða heiltölu með tölustöfum**
  1. Skref 1. Finnið orðin sem gefa til kynna talnaflokka. Munið að einingaflokkurinn er aldrei nefndur.
  2. Skref 2. Teiknið 3 eyður fyrir sætin sem þarf í hverjum talnaflokki. Aðgreinið talnaflokkana með punktum.
  3. Skref 3. Nefnið töluna í hverjum talnaflokki og setjið tölustafina í rétt sæti.
- **Námunda núll eða jákvæða heiltölu**
  1. Skref 1. Finnið tilgreint sætisgildi og merkið það með ör. Allir tölustafir vinstra megin við örina haldast óbreyttir.
  2. Skref 2. Undirstrikið tölustafinn hægra megin við tilgreint sætisgildi.
  3. Skref 3.
     Er þessi tölustafur stærri en eða jafn 5?
     - Já — leggið 1 við tölustafinn í tilgreinda sætinu.
     - Nei — breytið ekki tölustafnum í tilgreinda sætinu.
  4. Skref 4. Skiptið öllum tölustöfum hægra megin við tilgreint sætisgildi út fyrir núll.
- **Deilanleikapróf:** Tala er deilanleg með:
  - 2 ef síðasti tölustafurinn er 0, 2, 4, 6 eða 8.
  - 3 ef summa tölustafanna er deilanleg með 3.
  - 5 ef síðasti tölustafurinn er 5 eða 0.
  - 6 ef talan er deilanleg bæði með 2 og 3.
  - 10 ef talan endar á 0.
- **Finna frumþáttun samsettrar tölu**
  1. Skref 1. Finnið tvo þætti sem hafa gefnu töluna sem margfeldi og notið þá til að mynda tvær greinar.
  2. Skref 2. Ef þáttur er frumtala er greinin fullgerð. Dragið hring um frumtöluna eins og brum á trénu.
  3. Skref 3. Ef þáttur er ekki frumtala skal rita hann sem margfeldi tveggja þátta og halda ferlinu áfram.
  4. Skref 4. Ritið samsettu töluna sem margfeldi allra frumtalnanna sem hringur var dreginn um.
- **Finna minnsta sameiginlega margfeldi með því að skrá margfeldi**
  1. Skref 1. Skráið nokkur margfeldi hvorrar tölu.
  2. Skref 2. Finnið minnstu töluna sem kemur fyrir í báðum listum.
  3. Skref 3. Þessi tala er minnsta sameiginlega margfeldið.
- **Finna minnsta sameiginlega margfeldi með frumþáttun**
  1. Skref 1. Ritið hvora tölu sem margfeldi frumtalna.
  2. Skref 2. Skráið frumþætti hvorrar tölu. Látið samsvarandi frumþætti standa lóðrétt hvern undir öðrum þegar hægt er.
  3. Skref 3. Færið tölurnar niður úr hverjum dálki.

4. Skref 4. Margfaldið þættina.

1

## 1.2 Tungumál algebrunnar

- **Táknmál** **Niðurstaðan er ...**
  - $a+b$ summan af $a$ og $b$
  - $a-b$ mismunurinn á $a$ og $b$
  - $a\cdot b, ab, (a)(b)\ (a)b, a(b)$ margfeldið af $a$ og $b$
  - $a\div b, a/b, \frac{a}{b}, b\,a$ kvótinn af $a$ og $b$
- **Ójafna**
  - $a<b$ er lesið „$a$ er minna en $b$“
  - $a>b$ er lesið „$a$ er stærra en $b$“

  $a$ er vinstra megin við $b$ á talnalínunni
  $a$ er hægra megin við $b$ á talnalínunni
- **Ójöfnumerki** **Orð**
  - $a\neq b$ $a$ er ekki jafnt og $b$
  - $a<b$ $a$ er minna en $b$
  - $a\leq b$ $a$ er minna en eða jafnt og $b$
  - $a>b$ $a$ er stærra en $b$
  - $a\geq b$ $a$ er stærra en eða jafnt og $b$
- **Svigar**
  - Hringsvigar $(\ )$
  - Hornklofar $[\ ]$
  - Slaufusvigar $\{\ \}$
- **Veldaritháttur**
  - $a^n$ merkir að margfalda $a$ með sjálfu sér $n$ sinnum. Stæðan $a^n$ er lesin $a$ í $n$-ta veldi.
- **Forgangsröð reikniaðgerða:** Þegar þið einfaldið stæður skuluð þið gera reikniaðgerðirnar í þessari röð:
  1. Skref 1. Hringsvigar og aðrir svigar: Einfaldið allar stæður innan hringsviga eða annarra sviga og byrjið á innstu svigunum.
  2. Skref 2. Veldi: Einfaldið allar stæður með veldum.

3. Skref 3. Margföldun og deiling: Framkvæmið alla margföldun og deilingu frá vinstri til hægri. Þessar reikniaðgerðir hafa sama forgang.
4. Skref 4. Samlagning og frádráttur: Framkvæmið alla samlagningu og frádrátt frá vinstri til hægri. Þessar reikniaðgerðir hafa sama forgang.

- **Sameina samkynja liði**
  1. Skref 1. Finnið samkynja liði.
  2. Skref 2. Endurraðið stæðunni þannig að samkynja liðir standi saman.
  3. Skref 3. Leggið stuðlana saman eða dragið þá frá og haldið sömu breytu fyrir hvern hóp samkynja liða.

## 1.3 Leggja saman og draga frá heiltölur

- **Samlagning jákvæðra og neikvæðra heiltalna**

| | |
|---|---|
| $5+3$ | $-5+(-3)$ |
| $8$ | $-8$ |
| báðar jákvæðar, | báðar neikvæðar, |
| summan jákvæð | summan neikvæð |

| | |
|---|---|
| $-5+3$ | $5+(-3)$ |
| $-2$ | $2$ |
| ólík formerki, | ólík formerki, |
| fleiri neikvæðar | fleiri jákvæðar |
| summan neikvæð | summan jákvæð |

- **Regla um tölugildi:** $|n| \geq 0$ fyrir allar tölur. Tölugildi eru alltaf stærri en eða jöfn núlli!
- **Frádráttur heiltalna**

| | |
|---|---|
| $5-3$ | $-5-(-3)$ |
| $2$ | $-2$ |
| $5$ jákvæðar | $5$ neikvæðar |
| draga frá $3$ jákvæðar | draga frá $3$ neikvæðar |
| 2 jákvæðar | 2 neikvæðar |

| | |
|---|---|
| $-5-3$ | $5-(-3)$ |
| $-8$ | $8$ |
| $5$ neikvæðar, viljum | $5$ jákvæðar, viljum |
| draga frá $3$ jákvæðar | draga frá $3$ neikvæðar |
| þarf núllpör | þarf núllpör |

- **Frádráttarregla: Að draga tölu frá er hið sama og að leggja móttölu hennar við.**

1

## 1.4 Margfalda og deila heiltölum

- **Margföldun og deiling tveggja talna með formerki**
  - Sömu formerki — margfeldið er jákvætt
  - Ólík formerki — margfeldið er neikvætt
- **Aðferð við hagnýt verkefni**
  1. Skref 1. Finnið hvað beðið er um.
  2. Skref 2. Ritið orðasamband sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið.
  3. Skref 3. Þýðið orðasambandið yfir í stæðu.
  4. Skref 4. Einfaldið stæðuna.
  5. Skref 5. Svarið spurningunni með heilli setningu.

## 1.5 Sýna brot myndrænt

- **Regla um jafngild brot: Ef** $a, b, c$ eru tölur þar sem $b \neq 0, c \neq 0$, þá $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ og $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$.
- **Deiling brota: Ef** $a, b, c$ og $d$ eru tölur þar sem $b \neq 0, c \neq 0,$ og $d \neq 0$, þá $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

  Til að deila brotum skal margfalda fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara.
- **Margföldun brota: Ef** $a, b, c$ og $d$ eru tölur þar sem $b \neq 0,$ og $d \neq 0$, þá $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Til að margfalda brot skal margfalda teljarana saman og nefnarana saman.
- **Staðsetning mínusmerkis í broti:** Fyrir sérhverjar jákvæðar tölur

$$a \text{ og } b,$$

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

- **Reglan um einn:** $\frac{a}{a} = 1$*;* Ef tölu, sem er ekki núll, er deilt með sjálfri sér er útkoman einn.
- **Stytta brot**
  1. Skref 1. Endurritið teljarann og nefnarann þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. Frumþáttið teljarann og nefnarann fyrst ef þörf krefur.
  2. Skref 2. Styttið brotið samkvæmt reglunni um jafngild brot með því að stytta út sameiginlega þætti.
  3. Skref 3. Margfaldið saman þá þætti sem eftir eru.
- **Einfalda stæðu með brotastriki**
  1. Skref 1. Einfaldið stæðuna í teljaranum. Einfaldið stæðuna í nefnaranum.
  2. Skref 2. Styttið brotið.

## 1.6 Leggja saman og draga frá brot

- **Samlagning og frádráttur brota: Ef** $a$, $b$, og $c$ eru tölur þar sem $c \neq 0$, þá $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ og $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$.
  Til að leggja saman eða draga frá brot skal leggja teljarana saman eða draga þá frá og setja niðurstöðuna yfir samnefnarann.
- **Aðferð við að leggja saman eða draga frá brot**
  1. Skref 1. Hafa brotin samnefnara? Já — farið í skref 2. Nei — endurritið hvert brot þannig að minnsti samnefnarinn verði nefnari þess. Finnið fyrst minnsta samnefnarann og breytið síðan hverju broti í jafngilt brot með þeim nefnara.
  2. Skref 2. Leggið brotin saman eða dragið þau frá.
  3. Skref 3. Styttið ef hægt er. Ekki þarf minnsta samnefnara til að margfalda eða deila brotum. Minnsta samnefnara þarf til að leggja saman eða draga frá brot.
- **Einfalda samsett brot**
  1. Skref 1. Einfaldið teljarann.
  2. Skref 2. Einfaldið nefnarann.
  3. Skref 3. Deilið teljaranum með nefnaranum. Styttið ef hægt er.

## 1.7 Tugabrot

- **Lesa tugabrot**
  1. Skref 1. Lesið töluna vinstra megin við tugabrotskommuna.
  2. Skref 2. Segið „komma“ fyrir tugabrotskommuna.
  3. Skref 3. Lesið töluhlutann hægra megin við tugabrotskommuna eins og um væri að ræða tölu án tugabrotskommu.
  4. Skref 4. Nefnið tugabrotasæti síðasta tölustafsins.
- **Rita tugabrot**
  1. Skref 1. Leitið að orðinu „komma“ — það sýnir stað tugabrotskommu. Setjið tugabrotskommu undir orðið „komma“. Þýðið orðin á undan „komma“ yfir í heilu töluna og setjið hana vinstra megin við tugabrotskommuna. Ef „komma“ kemur ekki fyrir skal rita „0“ og tugabrotskommu hægra megin við það.
  2. Skref 2. Merkið þann fjölda tugabrotasæta sem þarf hægra megin við tugabrotskommuna með hliðsjón af sætisgildinu sem síðasta orðið gefur til kynna.
  3. Skref 3. Þýðið orðin á eftir „komma“ yfir í töluna hægra megin við tugabrotskommuna. Ritið töluna í eyðurnar og setjið síðasta tölustafinn í síðasta sætið.
  4. Skref 4. Fyllið eftir þörfum upp í auðu sætin með núllum.
- **Námunda tugabrot**

1. Skref 1. Finnið tilgreint sætisgildi og merkið það með ör.
2. Skref 2. Undirstrikið tölustafinn hægra megin við tilgreint sætisgildi.
3. Skref 3. Er þessi tölustafur stærri en eða jafn 5? Já — leggið 1 við tölustafinn í tilgreinda sætinu. Nei — breytið ekki tölustafnum í tilgreinda sætinu.
4. Skref 4. Endurritið töluna og sleppið öllum tölustöfum hægra megin við námundunarsætið.

- **Leggja saman eða draga frá tugabrot**
  1. Skref 1. Ritið tölurnar þannig að tugabrotskommurnar standi lóðrétt hver undir annarri.
  2. Skref 2. Notið núll eftir þörfum til að fylla upp í auð sæti.
  3. Skref 3. Leggið tölurnar saman eða dragið þær frá eins og um væri að ræða tölur án tugabrotskommu. Setjið síðan tugabrotskommuna í svarið undir tugabrotskommurnar í gefnu tölunum.
- **Margfalda tugabrot**
  1. Skref 1. Ákvarðið formerki margfeldisins.
  2. Skref 2. Ritið tölurnar lóðrétt og hægristillið þær. Margfaldið tölurnar eins og um væri að ræða tölur án tugabrotskommu og lítið tímabundið fram hjá tugabrotskommunum.
  3. Skref 3. Setjið tugabrotskommuna. Fjöldi tugabrotasæta í margfeldinu er summa tugabrotasæta þáttanna.
  4. Skref 4. Ritið margfeldið með réttu formerki.
- **Margfalda tugabrot með veldi af tíu**
  1. Skref 1. Færið tugabrotskommuna jafnmörg sæti til hægri og núllin eru mörg í veldinu af 10.
  2. Skref 2. Bætið núllum aftan við töluna eftir þörfum.
- **Deila tugabrotum**
  1. Skref 1. Ákvarðið formerki kvótans.
  2. Skref 2. Gerið deilinn að tölu án tugabrotskommu með því að „færa“ tugabrotskommuna alla leið til hægri. „Færið“ tugabrotskommuna jafnmörg sæti í deilistofninum og bætið við núllum eftir þörfum.
  3. Skref 3. Deilið. Setjið tugabrotskommuna í kvótann beint fyrir ofan tugabrotskommuna í deilistofninum.
  4. Skref 4. Ritið kvótann með réttu formerki.
- **Breyta tugabroti í eiginlegt brot**
  1. Skref 1. Ákvarðið sætisgildi síðasta tölustafsins.
  2. Skref 2. Ritið brotið: teljari — tölustafirnir hægra megin við tugabrotskommuna; nefnari — sætisgildið sem samsvarar síðasta tölustafnum.
- **Breyta broti í tugabrot Deilið teljara brotsins með nefnaranum.**

## 1.8 Rauntölur

- **Ritháttur inn fyrir ferningsrót**
  $\sqrt{m}$ er lesinn „ferningsrótin af m“. Ef $m=n^2$, þá $\sqrt{m}=n$, fyrir $n\geq 0$.
- **Raða tugabrotum**
  1. Skref 1. Ritið tölurnar hverja undir annarri þannig að tugabrotskommurnar standist á.
  2. Skref 2. Athugið hvort báðar tölurnar hafi jafnmarga tölustafi. Ef ekki, bætið núllum aftan við töluna sem hefur færri tölustafi svo fjöldinn verði sá sami.
  3. Skref 3. Berið tölurnar saman eins og um væri að ræða tölur án tugabrotskommu.
  4. Skref 4. Raðið tölunum með viðeigandi ójöfnumerki.

## 1.9 Reiknireglur rauntalna

- **Víxlregla fyrir**
  - **Samlagning: Ef** $a, b$ eru rauntölur, þá $a+b=b+a$.
  - **Margföldun: Ef** $a, b$ eru rauntölur, þá $a \cdot b=b \cdot a$. Þegar lagt er saman eða margfaldað fæst sama niðurstaða þótt röðinni sé breytt.
- **Tengiregla fyrir**
  - **Samlagning: Ef** $a, b, c$ eru rauntölur, þá $(a+b)+c=a+(b+c)$.
  - **Margföldun: Ef** $a, b, c$ eru rauntölur, þá $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$.
    Þegar lagt er saman eða margfaldað fæst sama niðurstaða þótt svigunum sé breytt.
- **Dreifiregla: Ef** $a, b, c$ eru rauntölur, þá a ( b + c ) = a b + a c ( b + c ) a = b a + c a a ( b − c ) = a b − a c ( b − c ) a = b a − c a
  - $a(b+c)=a\,b+a\,c$
  - $(b+c)a=b\,a+c\,a$
  - $a(b-c)=a\,b-a\,c$
  - $(b-c)a=b\,a-c\,a$
- **Hlutleysuregla**
  - **fyrir samlagningu: Fyrir sérhverja rauntölu** $a: a+0=a\,0+a=a$
    0 er samlagningarhlutleysan.
  - **fyrir margföldun:** Fyrir sérhverja rauntölu $a: a \cdot 1=a\,1 \cdot a=a$
    1 er margföldunarhlutleysan.
- **Andhverfuregla**
  - **fyrir samlagningu: Fyrir sérhverja rauntölu** $a, a+(-a)=0$. Summa tölu og móttölu hennar er núll. $-a$ er samlagningarandhverfa $a$.
  - **fyrir margföldun:** Fyrir sérhverja rauntölu $a, (a\neq 0)\, a \cdot \frac{1}{a}=1$. Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er einn. $\frac{1}{a}$ er margföldunarandhverfa $a$.
- **Reglur um núll**

- Fyrir sérhverja rauntölu $a$,
  $a \cdot 0 = 0\,0 \cdot a = 0$ – Margfeldi sérhverrar rauntölu og o er o.
- $\frac{0}{a} = 0$ fyrir $a \neq 0$ – Núll deilt með sérhverri rauntölu annarri en núlli er núll.
- $\frac{a}{0}$ er óskilgreint – Deiling með núlli er óskilgreind.

## 1.10 Mælikerfi

- **Metrakerfið**
  - **Lengd**

| | | |
|---|---|---|
| 1 kílómetri (km) | = | 1.000 m |
| 1 hektómetri (hm) | = | 100 m |
| 1 dekametri (dam) | = | 10 m |
| 1 metri (m) | = | 1 m |
| 1 desímetri (dm) | = | 0,1 m |
| 1 sentimetri (cm) | = | 0,01 m |
| 1 millimetri (mm) | = | 0,001 m |
| 1 metri | = | 100 sentimetrar |
| 1 metri | = | 1.000 millimetrar |

  - **Massi**

| | | |
|---|---|---|
| 1 kílógramm (kg) | = | 1.000 g |
| 1 hektógramm (hg) | = | 100 g |
| 1 dekagramm (dag) | = | 10 g |
| 1 gramm (g) | = | 1 g |
| 1 desígramm (dg) | = | 0,1 g |
| 1 sentígramm (cg) | = | 0,01 g |
| 1 milligramm (mg) | = | 0,001 g |
| 1 gramm | = | 100 sentígrömm |
| 1 gramm | = | 1.000 milligrömm |

  - **Rúmtak**

| | | |
|---|---|---|
| 1 kílólítri (kL) | = | 1.000 L |
| 1 hektólítri (hL) | = | 100 L |
| 1 dekalítri (daL) | = | 10 L |
| 1 lítri (L) | = | 1 L |
| 1 desílítri (dL) | = | 0,1 L |
| 1 sentílítri (cL) | = | 0,01 L |
| 1 millilítri (mL) | = | 0,001 L |
| 1 lítri | = | 100 sentílítrar |
| 1 lítri | = | 1.000 millilítrar |

- **Umreikningur hitastigs**
  - Til að breyta hitastigi F á Fahrenheit-kvarða í hitastig C á Celsíus-kvarða skal nota formúluna $C=\frac{5}{9}(F-32)$
  - Til að breyta hitastigi C á Celsíus-kvarða í hitastig F á Fahrenheit-kvarða skal nota formúluna $F=\frac{9}{5}C+32$

# Yfirlitsverkefni

## Inngangur að núlli og jákvæðum heiltölum

**Notið sætisgildi núlls og jákvæðra heiltalna**

Finnið sætisgildi hvers tölustafs í eftirfarandi verkefnum.

**913.** 26.915

ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 9 ⓓ 5 ⓔ 6

**914.** 359.417

ⓐ 9 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 7 ⓔ 1

**915.** 58.129.304

ⓐ 5 ⓑ 0 ⓒ 1 ⓓ 8 ⓔ 2

**916.** 9.430.286.157

ⓐ 6 ⓑ 4 ⓒ 9 ⓓ 0 ⓔ 5

Nefnið hverja tölu í eftirfarandi verkefnum.

**917.** 6.104

**918.** 493.068

**919.** 3.975.284

**920.** 85.620.435

Ritið hverja tölu með tölustöfum í eftirfarandi verkefnum.

**921.** þrjú hundruð og fimmtán

**922.** sextíu og fimm þúsund, níu hundruð og tólf

**923.** níutíu milljónir, fjögur hundruð tuttugu og fimm þúsund og sextán

**924.** einn milljarður, fjörutíu og þrjár milljónir, níu hundruð tuttugu og tvö þúsund, þrjú hundruð og ellefu

Námundið að tilgreindu sætisgildi í eftirfarandi verkefnum.

**925.** Námundið að næsta tug.

ⓐ 407 ⓑ 8.564

**926.** Námundið að næsta hundraði.

ⓐ 25.846 ⓑ 25.864

Námundið hverja tölu í eftirfarandi verkefnum að næsta ⓐ hundraði ⓑ þúsundi ⓒ tugþúsundi.

**927.** 864.951

**928.** 3.972.849

**Margfeldi og þættir**

Notið deilanleikareglurnar í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort hver tala sé deilanleg með 2, 3, 5, 6 og 10.

**929.** 168

**930.** 264

**931.** 375

**932.** 750

**933.** 1430

**934.** 1080

**Frumþáttun og minnsta sameiginlega margfeldi**

Finnið frumþáttunina í eftirfarandi verkefnum.

**935.** 420

**936.** 115

**937.** 225

**938.** 2475

**939.** 1560

**940.** 56

**941.** 72

**942.** 168

**943.** 252

**944.** 391

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi talnanna í eftirfarandi verkefnum með því að skrá margfeldi þeirra.

**945.** 6,15

**946.** 60, 75

Finnið minnsta sameiginlega margfeldi talnanna í eftirfarandi verkefnum með frumþáttun.

**947.** 24, 30

**948.** 70, 84

Tungumál algebrunnar

**Notið breytur og algebrutákn**

Þýðið eftirfarandi úr algebrumáli yfir á íslensku.

949.

$$25-7$$

950.

$$5\cdot 6$$

951.

$$45\div 5$$

952.

$$x+8$$

953.

$$42\geq 27$$

954.

$$3n=24$$

955.

$$3\leq 20\div 4$$

956.

$$a\neq 7\cdot 4$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort hvert atriði sé stæða eða jafna.

957.

$$6\cdot 3+5$$

958.

$$y-8=32$$

1

**Einfaldið stæður samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

959.

$$3^5$$

960.

$$10^8$$

Einfaldið eftirfarandi stæður.

961.

$$6+10/2+2$$

962.

$$9+12/3+4$$

963.

$$20\div(4+6)\cdot 5$$

964.

$$33\div(3+8)\cdot 2$$

965.

$$(4^2+5^2)^2$$

966.

$$(4+5)^2$$

**Reiknið gildi stæðu**

Reiknið gildi stæðnanna í eftirfarandi verkefnum.

**967.** $9x+7$ þegar $x=3$

**968.** $5x-4$ þegar $x=6$

**969.** $x^4$ þegar $x=3$

**970.** $3^x$ þegar $x=3$

**971.** $x^2+5x-8$ þegar $x=6$

**972.** $2x+4y-5$ þegar $x=7, y=8$

**Einfaldið stæður með því að sameina samkynja liði**

Finnið stuðul hvers liðar í eftirfarandi verkefnum.

973.

$$12n$$

974.

$$9x^2$$

Finnið samkynja liði í eftirfarandi verkefnum.

975.

$$3n, n^2, 12, 12p^2, 3, 3n^2$$

976.

$$5, 18r^2, 9s, 9r, 5r^2, 5s$$

Finnið liðina í hverri stæðu í eftirfarandi verkefnum.

977.

$$11x^2+3x+6$$

978.

$$22y^3+y+15$$

Einfaldið eftirfarandi stæður með því að sameina samkynja liði.

979.

$$17a+9a$$

980.

$$18z+9z$$

981.

$$9x+3x+8$$

982.

$$8a+5a+9$$

983.

$$7p+6+5p-4$$

984.

$$8x+7+4x-5$$

**Þýðið orðalag yfir í algebrustæðu**

Þýðið eftirfarandi orðasambönd yfir í algebrustæður.

1

**985.** summan af 8 og 12

**986.** summan af 9 og 1

**987.** mismunurinn á $x$ og 4

**988.** mismunurinn á $x$ og 3

**989.** margfeldið af 6 og $y$

**990.** margfeldið af 9 og $y$

**991.** Adele keypti pils og blússu. Pilsið kostaði \$15 meira en blússan. Látum $b$ tákna verð blússunnar. Ritið stæðu fyrir verð pilsins.

**992.** Marcella á 6 færri frændur en frænkur. Látum $g$ tákna fjölda frænka hennar. Ritið stæðu fyrir fjölda frænda hennar.

Samlagning og frádráttur heiltalna

**Notkun neikvæðra talna og móttalna heiltalna**

Berið saman hvert eftirfarandi talnapar með því að setja < eða > á milli talnanna.

**993.**

ⓐ $6 ___ 2$
ⓑ $-7 ___ 4$
ⓒ $-9 ___ -1$
ⓓ $9 ___ -3$

**994.**

ⓐ $-5 ___ 1$
ⓑ $-4 ___ -9$
ⓒ $6 ___ 10$
ⓓ $3 ___ -8$

Finnið móttölu hverrar tölu í eftirfarandi verkefnum.

**995.** ⓐ $-8$ ⓑ $1$

**996.** ⓐ $-2$ ⓑ $6$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

997.

$$-(-19)$$

998.

$$-(-53)$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**999.** $-m$ þegar ⓐ
$m=3$
ⓑ $m=-3$

**1000.** $-p$ þegar ⓐ
$p=6$
ⓑ $p=-6$

### Einföldun stæða með tölugildi

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**1001.** ⓐ $|7|$ ⓑ $|-25|$ ⓒ $|0|$

**1002.** ⓐ $|5|$ ⓑ $|0|$ ⓒ $|-19|$

Setjið <, > eða = á milli talnanna í hverju eftirfarandi talnapari.

**1003.**
ⓐ $-8 ___ |-8|$
ⓑ $-|-2| ___ -2$

**1004.**
ⓐ $|-3| ___ -|-3|$
ⓑ $4 ___ -|-4|$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1005.

$$|8-4|$$

1006.

$$|9-6|$$

1007.

$$8\left(14-2|-2|\right)$$

1008.

$$6\left(13-4|-2|\right)$$

Reiknið gildið í eftirfarandi verkefnum.

**1009.** ⓐ $|x|$ þegar $x=-28$ ⓑ $|x|$ þegar $x=-15$

**1010.**
ⓐ $|y|$ þegar $y=-37$
ⓑ $|-z|$ þegar $z=-24$

### Samlagning heiltalna

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

1011.

$$-200+65$$

1

1012.

$$-150+45$$

1013.

$$2+(-8)+6$$

1014.

$$4+(-9)+7$$

1015.

$$140+(-75)+67$$

1016.

$$-32+24+(-6)+10$$

**Frádráttur heiltalna**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1017.

$$9-3$$

1018.

$$-5-(-1)$$

**1019.** ⓐ $15-6$ ⓑ $15+(-6)$

**1020.** ⓐ $12-9$ ⓑ $12+(-9)$

**1021.** ⓐ $8-(-9)$ ⓑ $8+9$

**1022.** ⓐ $4-(-4)$ ⓑ $4+4$

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

1023.

$$10-(-19)$$

1024.

$$11-(-18)$$

1025.

$$31-79$$

1026.

$$39-81$$

1027.

$$-31-11$$

1028.

$$-32-18$$

1029.

$$-15-(-28)+5$$

1030.

$$71+(-10)-8$$

1031.

$$-16-(-4+1)-7$$

1032.

$$-15-(-6+4)-3$$

**Margföldun heiltalna**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1033.

$$-5(7)$$

1034.

$$-8(6)$$

1035.

$$-18(-2)$$

1036.

$$-10(-6)$$

**Deiling heiltalna**

Deilið í eftirfarandi verkefnum.

1037.

$$-28\div 7$$

1038.

$$56\div(-7)$$

1039.

$$-120 \div (-20)$$

1

1040.

$$-200 \div 25$$

**Einföldun stæðna með heiltölum**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

1041.

$$-8(-2)-3(-9)$$

1042.

$$-7(-4)-5(-3)$$

1043.

$$(-5)^3$$

1044.

$$(-4)^3$$

1045.

$$-4 \cdot 2 \cdot 11$$

1046.

$$-5 \cdot 3 \cdot 10$$

1047.

$$-10(-4) \div (-8)$$

1048.

$$-8(-6) \div (-4)$$

1049.

$$31-4(3-9)$$

1050.

$$24-3(2-10)$$

**Gildi breytustæða með heiltölum**

Finnið gildi hverrar stæðu í eftirfarandi verkefnum.

**1051.** $x+8$ þegar ⓐ $x=-26$ ⓑ $x=-95$

**1052.** $y+9$ þegar ⓐ $y=-29$ ⓑ $y=-84$

**1053.** Þegar $b=-11$, reiknið gildi stæðnanna: ⓐ $b+6$ ⓑ $-b+6$

**1054.** Þegar $c=-9$, reiknið gildi stæðnanna: ⓐ $c+(-4)$ ⓑ $-c+(-4)$

**1055.** $p^2-5p+2$ þegar $p=-1$

**1056.** $q^2-2q+9$ þegar $q=-2$

**1057.** $6x-5y+15$ þegar $x=3$ og $y=-1$

**1058.** $3p-2q+9$ þegar $p=8$ og $q=-2$

**Þýðing orðasambanda yfir í algebrustæður**

Þýðið yfir í algebrustæðu í eftirfarandi verkefnum og einföldið ef hægt er.

**1059.** summan af $-4$ og $-17$, aukin um 32

**1060.** ⓐ mismunurinn á 15 og $-7$ ⓑ dragið 15 frá $-7$

**1061.** kvótinn af $-45$ og $-9$

**1062.** margfeldið af $-12$ og mismuninum á $c$ og $d$

**Notkun heiltalna í hagnýtum dæmum**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**1063.** **Hitastig:** Hæsti hiti einn dag í Miami Beach í Flórída var 76° á Fahrenheit. Þennan sama dag var hæsti hiti í Buffalo í New York $-8$° á Fahrenheit. Hve mikill var munurinn á hitastiginu í Miami Beach og Buffalo?

**1064.** **Staða** reiknings: Adrianne á $-\$22$ inni á tékkareikningi sínum. Hún leggur \$301 inn á reikninginn. Hver er ný staða reikningsins?

Myndræn framsetning brota

**Jafngild brot fundin**

Finnið í eftirfarandi verkefnum þrjú brot sem jafngilda gefna brotinu. Sýnið með myndum eða algebru hvernig þið komust að niðurstöðunni.

1065.

$$\frac{1}{4}$$

1066.

$$\frac{1}{3}$$

1067.

$$\frac{5}{6}$$

1068.

$$\frac{2}{7}$$

1

**Stytting brota**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1069.

$$\frac{7}{21}$$

1070.

$$\frac{8}{24}$$

1071.

$$\frac{15}{20}$$

1072.

$$\frac{12}{18}$$

1073.

$$-\frac{168}{192}$$

1074.

$$-\frac{140}{224}$$

1075.

$$\frac{11x}{11y}$$

1076.

$$\frac{15a}{15b}$$

**Margföldun brota**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1077.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$$

1078.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}$$

1079.

$$\frac{7}{12}\left(-\frac{8}{21}\right)$$

1080.

$$\frac{5}{12}\left(-\frac{8}{15}\right)$$

1081.

$$-28\,p\left(-\frac{1}{4}\right)$$

1082.

$$-51\,q\left(-\frac{1}{3}\right)$$

1083.

$$\frac{14}{5}(-15)$$

1084.

$$-1\left(-\frac{3}{8}\right)$$

**Deiling brota**

Deilið í eftirfarandi verkefnum.

1085.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$$

1086.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$$

1087.

$$-\frac{4}{5} \div \frac{4}{7}$$

1088.

$$-\frac{3}{4}\div\frac{3}{5}$$

1089.

$$\frac{5}{8}\div\frac{a}{10}$$

1090.

$$\frac{5}{6}\div\frac{c}{15}$$

1091.

$$\frac{7p}{12}\div\frac{21p}{8}$$

1092.

$$\frac{5q}{12}\div\frac{15q}{8}$$

1093.

$$\frac{2}{5}\div(-10)$$

1094.

$$-18\div-\left(\frac{9}{2}\right)$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1095.

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}$$

1096.

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{15}}$$

1097.

$$\frac{-\frac{9}{10}}{3}$$

1098.

$$\frac{\frac{2}{5}}{8}$$

1099.

$$\frac{\frac{r}{5}}{\frac{s}{3}}$$

1100.

$$\frac{-\frac{x}{6}}{-\frac{8}{9}}$$

**Einföldun stæða sem eru ritaðar með brotastriki**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1101.

$$\frac{4+11}{8}$$

1102.

$$\frac{9+3}{7}$$

1103.

$$\frac{30}{7-12}$$

1104.

$$\frac{15}{4-9}$$

1105.

$$\frac{22-14}{19-13}$$

1106.

$$\frac{15+9}{18+12}$$

1107.

$$\frac{5 \cdot 8}{-10}$$

1108.

$$\frac{3 \cdot 4}{-24}$$

1109.

$$\frac{15 \cdot 5 - 5^2}{2 \cdot 10}$$

1110.

$$\frac{12 \cdot 9 - 3^2}{3 \cdot 18}$$

1111.

$$\frac{2+4(3)}{-3-2^2}$$

1112.

$$\frac{7+3(5)}{-2-3^2}$$

**Þýðing orðasambanda yfir í stæður með brotum**

Þýðið hvert orðasamband yfir í algebrustæðu í eftirfarandi verkefnum.

**1113.** kvótinn af c og summunni af d og 9.

**1114.** kvótinn af mismuninum á h og k og $-5$.

Samlagning og frádráttur brota

**Samlagning og frádráttur brota með sama nefnara**

Leggið saman í eftirfarandi verkefnum.

1115.

$$\frac{4}{9}+\frac{1}{9}$$

**1116.**

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$$

**1117.**

$$\frac{y}{3}+\frac{2}{3}$$

**1118.**

$$\frac{7}{p}+\frac{9}{p}$$

**1119.**

$$-\frac{1}{8}+\left(-\frac{3}{8}\right)$$

**1120.**

$$-\frac{1}{8}+\left(-\frac{5}{8}\right)$$

Dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

**1121.**

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}$$

**1122.**

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$$

**1123.**

$$\frac{y}{17}-\frac{9}{17}$$

**1124.**

$$\frac{x}{19}-\frac{8}{19}$$

**1125.**

$$-\frac{8}{d}-\frac{3}{d}$$

1126.

$$-\frac{7}{c}-\frac{7}{c}$$

1

**Samlagning og frádráttur brota með ólíkum nefnurum**

Leggið saman eða dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

1127.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

1128.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

1129.

$$\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{10}\right)$$

1130.

$$\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)$$

1131.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

1132.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$$

1133.

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{8}$$

1134.

$$\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$$

1135.

$$-\frac{9}{16}-\left(-\frac{4}{5}\right)$$

1136.

$$-\frac{7}{20}-\left(-\frac{5}{8}\right)$$

1137.

$$1+\frac{5}{6}$$

1138.

$$1-\frac{5}{9}$$

**Notið forgangsröð reikniaðgerða til að einfalda samsett brot**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1139.

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2+3^2}$$

1140.

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{5+2^2}$$

1141.

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}$$

1142.

$$\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}$$

**Reiknið gildi breytustæða með brotum**

Reiknið gildið í eftirfarandi verkefnum.

1

**1143.** $x+\frac{1}{2}$ þegar ⓐ

$x=-\frac{1}{8}$

ⓑ $x=-\frac{1}{2}$

**1144.** $x+\frac{2}{3}$ þegar ⓐ

$x=-\frac{1}{6}$

ⓑ $x=-\frac{5}{3}$

**1145.** $4p^2q$ þegar $p=-\frac{1}{2}$ og $q=\frac{5}{9}$

**1146.** $5m^2n$ þegar $m=-\frac{2}{5}$ og $n=\frac{1}{3}$

**1147.** $\frac{u+v}{w}$ þegar

$u=-4, v=-8, w=2$

**1148.** $\frac{m+n}{p}$ þegar

$m=-6, n=-2, p=4$

Tugabrot

**Nefnið og ritið tugabrot**

Ritið sem tugabrot í eftirfarandi æfingum.

**1149.** Átta og þrír hundraðshlutar

**1150.** Níu og sjö hundraðshlutar

**1151.** Einn þúsundasti

**1152.** Níu þúsundustu

Lesið hvert tugabrot í eftirfarandi æfingum.

**1153.** 7,8

**1154.** 5,01

**1155.** 0,005

**1156.** 0,381

**Námundið tugabrot**

Námundið hverja tölu í eftirfarandi verkefnum: ⓐ að næsta hundraðshluta ⓑ að næsta tíunduhluta ⓒ að næstu heiltölu.

**1157.** 5,7932

**1158.** 3,6284

**1159.** 12,4768

**1160.** 25,8449

### Leggið saman og dragið frá með tugabrotum

Leggið saman eða dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

1161.

$$18{,}37+9{,}36$$

1162.

$$256{,}37-85{,}49$$

1163.

$$15{,}35-20{,}88$$

1164.

$$37{,}5+12{,}23$$

1165.

$$-4{,}2+(-9{,}3)$$

1166.

$$-8{,}6+(-8{,}6)$$

1167.

$$100-64{,}2$$

1168.

$$100-65{,}83$$

1169.

$$2{,}51+40$$

1170.

$$9{,}38+60$$

### Margfaldið og deilið með tugabrotum

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1171.

$$(0{,}3)(0{,}4)$$

1172.

$$(0{,}6)(0{,}7)$$

1

1173.

$$(8{,}52)(3{,}14)$$

1174.

$$(5{,}32)(4{,}86)$$

1175.

$$(0{,}09)(24{,}78)$$

1176.

$$(0{,}04)(36{,}89)$$

Deilið í eftirfarandi verkefnum.

1177.

$$0{,}15 \div 5$$

1178.

$$0{,}27 \div 3$$

1179.

$$\$8{,}49 \div 12$$

1180.

$$\$16{,}99 \div 9$$

1181.

$$12 \div 0{,}08$$

1182.

$$5 \div 0{,}04$$

**Breytið milli tugabrota, brota og prósenta**

Ritið hvert tugabrot sem almennt brot í eftirfarandi æfingum.

**1183.** 0,08

**1184.** 0,17

**1185.** 0,425

**1186.** 0,184

**1187.** 1,75

**1188.** 0,035

Breytið hverju almennu broti í tugabrot í eftirfarandi æfingum.

1189.

$$\frac{2}{5}$$

1190.

$$\frac{4}{5}$$

1191.

$$-\frac{3}{8}$$

1192.

$$-\frac{5}{8}$$

1193.

$$\frac{5}{9}$$

1194.

$$\frac{2}{9}$$

1195.

$$\frac{1}{2}+6{,}5$$

1196.

$$\frac{1}{4}+10{,}75$$

Breytið hverri prósentu í tugabrot í eftirfarandi æfingum.

**1197.** 5%

**1198.** 9%

**1199.** 40%

**1200.** 50%

**1201.** 115%

**1202.** 125%

Breytið hverju tugabroti í prósent í eftirfarandi æfingum.

**1203.** 0,18

**1204.** 0,15

**1205.** 0,009

**1206.** 0,008

**1207.** 1,5

**1208.** 2,2

Rauntölur

**Einfaldið stæður með ferningsrótum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1209.

$$\sqrt{64}$$

1210.

$$\sqrt{144}$$

1211.

$$-\sqrt{25}$$

1212.

$$-\sqrt{81}$$

**Flokkið tölur sem heiltölur, ræðar tölur, óræðar tölur eða rauntölur**

Ritið sem hlutfall tveggja heiltalna í eftirfarandi æfingum.

**1213.** ⓐ 9 ⓑ 8,47

**1214.** ⓐ $-15$ ⓑ 3,591

Skráið í eftirfarandi verkefnum ⓐ ræðu tölurnar og ⓑ óræðu tölurnar.

1215.

$$0{,}84\,,0{,}79132\ldots,1\,,\overline{3}$$

1216.

$$2{,}3\overline{8}\,,0{,}572\,,4{,}93814\ldots$$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort hver tala sé ræð eða óræð.

**1217.** ⓐ $\sqrt{121}$ ⓑ $\sqrt{48}$

**1218.** ⓐ $\sqrt{56}$ ⓑ $\sqrt{16}$

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort hver tala sé rauntala eða ekki.

**1219.** ⓐ $\sqrt{-9}$ ⓑ $-\sqrt{169}$

**1220.** ⓐ $\sqrt{-64}$ ⓑ $-\sqrt{81}$

Skráið í hverju talnasafni í eftirfarandi verkefnum ⓐ núll og jákvæðar heiltölur, ⓑ heiltölurnar, ⓒ ræðu tölurnar, ⓓ óræðu tölurnar og ⓔ rauntölurnar.

1221.

$$-4, 0, \frac{5}{6}, \sqrt{16}, \sqrt{18}, 5{,}2537\ldots$$

1222.

$$-\sqrt{4}, 0, \overline{36}, \frac{13}{3}, 6{,}9152\ldots, \sqrt{48}, 10\frac{1}{2}$$

**Staðsetjið almenn brot á talnalínunni**

Staðsetjið tölurnar á talnalínu í eftirfarandi æfingum.

1223.

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{12}{5}$$

1224.

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{4}, \frac{13}{5}$$

1225.

$$2\frac{1}{3}, -2\frac{1}{3}$$

1226.

$$1\frac{3}{5}, -1\frac{3}{5}$$

Berið saman hvert eftirfarandi talnapar með því að setja < eða > á milli talnanna.

1227.

$$-1 ___ -\frac{1}{8}$$

1228.

$$-3\frac{1}{4} ___ -4$$

1229.

$$-\frac{7}{9} __ -\frac{4}{9}$$

1

1230.

$$-2 __ -\frac{19}{8}$$

**Staðsetjið tugabrot á talnalínunni**

Merkið tölurnar á talnalínu í eftirfarandi verkefnum.

1231.

$$0{,}3$$

1232.

$$-0{,}2$$

1233.

$$-2{,}5$$

**1234.** 2,7

Berið saman hvert eftirfarandi talnapar með því að setja < eða > á milli talnanna.

1235.

$$0{,}9 _ _ _ 0{,}6$$

1236.

$$0{,}7 _ _ _ 0{,}8$$

1237.

$$-0{,}6 _ _ _ -0{,}59$$

1238.

$$-0{,}27 _ _ _ -0{,}3$$

Eiginleikar rauntalna

**Notið víxlreglu og tengireglu**

Notið tengiregluna til að einfalda í eftirfarandi verkefnum.

1239.

$$-12(4m)$$

1240.

$$30\left(\frac{5}{6}q\right)$$

1241.

$$(a+16)+31$$

1242.

$$(c+0{,}2)+0{,}7$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1243.

$$6y+37+(-6y)$$

1244.

$$\frac{1}{4}+\frac{11}{15}+\left(-\frac{1}{4}\right)$$

1245.

$$\frac{14}{11}+\frac{35}{9}+\left(-\frac{14}{11}\right)$$

1246.

$$-18\cdot 15\cdot \frac{2}{9}$$

1247.

$$\left(\frac{7}{12}+\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}$$

1248.

$$(3{,}98d+0{,}75d)+1{,}25d$$

1249.

$$11x+8y+16x+15y$$

1250.

$$52m+(-20n)+(-18m)+(-5n)$$

**Notið hlutleysureglur og andhverfureglur samlagningar og margföldunar**

Finnið samlagningarandhverfu hverrar tölu í eftirfarandi æfingum.

1

**1251.**

ⓐ $\frac{1}{3}$

ⓑ $5{,}1$

ⓒ $-14$

ⓓ $-\frac{8}{5}$

**1252.**

ⓐ $-\frac{7}{8}$

ⓑ $-0{,}03$

ⓒ $17$

ⓓ $\frac{12}{5}$

Finnið margföldunarandhverfu hverrar tölu í eftirfarandi æfingum.

**1253.** ⓐ $10$ ⓑ $-\frac{4}{9}$ ⓒ $0{,}6$

**1254.** ⓐ $-\frac{9}{2}$ ⓑ $-7$ ⓒ $2{,}1$

### Notið reglur um núll

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1255.

$$83 \cdot 0$$

1256.

$$\frac{0}{9}$$

1257.

$$\frac{5}{0}$$

1258.

$$0 \div \frac{2}{3}$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

1259.

$$43+39+(-43)$$

1260.

$$(n+6{,}75)+0{,}25$$

1261.

$$\frac{5}{13}\cdot 57\cdot\frac{13}{5}$$

1262.

$$\frac{1}{6}\cdot 17\cdot 12$$

1263.

$$\frac{2}{3}\cdot 28\cdot\frac{3}{7}$$

1264.

$$9(6x-11)+15$$

**Einfaldið stæður með dreifireglu**

Einfaldið með dreifireglunni í eftirfarandi verkefnum.

1265.

$$7(x+9)$$

1266.

$$9(u-4)$$

1267.

$$-3(6m-1)$$

1268.

$$-8(-7a-12)$$

1269.

$$\frac{1}{3}(15n-6)$$

1270.

$$(y+10)\cdot p$$

1271.

$$(a-4)-(6a+9)$$

1272.

$$4(x+3)-8(x-7)$$

1

Mælikerfi

**1.1 Skilgreinið bandarískar mælieiningar og breytið úr einni einingu í aðra**

Umreiknið einingarnar í eftirfarandi verkefnum. Námundið að næsta tíundahluta.

**1273.** Blómabogi er 7 fet á hæð. Breytið hæðinni í tommur.

**1274.** Myndarammi er 42 tommur á breidd. Breytið breiddinni í fet.

**1275.** Kelly er 5 fet og 4 tommur á hæð. Breytið hæð hennar í tommur.

**1276.** Leikvöllur er 45 fet á breidd. Breytið breiddinni í jarda.

**1277.** Shasta-fjall er 14.179 fet á hæð. Breytið hæðinni í mílur.

**1278.** Shamu vegur 4,5 tonn. Breytið þyngdinni í pund.

**1279.** Leikritið tók

$$1\frac{3}{4}$$

klukkustundir. Umreiknið tímann í mínútur.

**1280.** Hve margar matskeiðar eru í einu kvarti?

**1281.** Barn Naomi vó 5 pund og 14 únsur við fæðingu. Breytið þyngdinni í únsur.

**1282.** Trinh þarf 30 bolla af málningu fyrir myndlistarverkefni bekkjarins. Breytið rúmtakinu í gallon.

**Notið blandaðar mælieiningar í bandaríska einingakerfinu.**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**1283.** John veiddi 4 humra. Humrarnir vógu 1 pund og 9 únsur, 1 pund og 12 únsur, 4 pund og 2 únsur og 2 pund og 15 únsur. Hver var heildarþyngd humranna?

**1284.** Pedro skráði á hverjum degi í síðustu viku hve margar mínútur hann las. Mínúturnar voru 50, 25, 83, 45, 32, 60 og 135. Hve margar klukkustundir las Pedro alls?

**1285.** Fouad er 6 fet og 2 tommur á hæð. Ef hann stendur á þrepi stiga sem er 8 fet og 10 tommur yfir jörðu, hve hátt yfir jörðu er þá hvirfill Fouad?

**1286.** Dalila ætlar að sauma púðaver. Í hvert ver þarf 30 tommur af efni. Hve marga jarda af efni þarf hún í 4 ver?

**Umreiknið einingar í metrakerfinu**

Umreiknið einingarnar í eftirfarandi verkefnum.

**1287.** Donna er 1,7 metrar á hæð. Breytið hæð hennar í sentimetra.

**1288.** Everest-fjall er 8.850 metrar á hæð. Breytið hæðinni í kílómetra.

**1289.** Einn bolli af jógúrt inniheldur 488 milligrömm af kalsíumi. Umreiknið magnið í grömm.

**1290.** Einn bolli af jógúrt inniheldur 13 grömm af prótíni. Breytið magninu í milligrömm.

**1291.** Sergio vó 2,9 kílógrömm við fæðingu. Breytið þyngdinni í grömm.

**1292.** Vatnsflaska innihélt 650 millilítra. Breytið magninu í lítra.

**Notið blandaðar mælieiningar í metrakerfinu**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**1293.** Minh er 2 metrar á hæð. Dóttir hans er 88 sentimetrar á hæð. Hve miklu hærri er Minh en dóttir hans?

**1294.** Selma átti vatnsflösku sem rúmaði 1 lítra. Hve mikið vatn var eftir í flöskunni ef hún drakk 145 millilítra?

**1295.** Einn skammtur af trönuberjasafa inniheldur 30 grömm af sykri. Hve mörg kílógrömm af sykri eru í 30 skömmtum af trönuberjasafa?

**1296.** Í einni únsu af tófú eru 2 grömm af prótíni. Hve mörg milligrömm af prótíni eru í 5 únsum af tófú?

**Breytið milli bandarískra mælikerfisins og metrakerfisins**

Umreiknið einingarnar í eftirfarandi verkefnum. Námundið að næsta tíundahluta.

**1297.** Majid er 69 tommur á hæð. Breytið hæð hans í sentimetra.

**1298.** Körfuboltavöllur í háskóla er 84 fet á lengd. Breytið lengdinni í metra.

**1299.** Caroline gekk 2,5 kílómetra. Breytið vegalengdinni í mílur.

**1300.** Lucas vegur 78 kílógrömm. Breytið þyngd hans í pund.

**1301.** Bensíntankur bíls Steve rúmar 55 lítra. Breytið rúmmálinu í gallon.

**1302.** Kassi af bókum vegur 25 pund. Breytið þyngdinni í kílógrömm.

**Umreiknið hitastig milli Fahrenheit-kvarða og Celsíus-kvarða**

Breytið hitastigi á Fahrenheit-kvarða í Celsíusgráður í eftirfarandi verkefnum. Námundið að næsta tíundahluta.

**1303.** 95° á Fahrenheit-kvarða

**1304.** 23° á Fahrenheit-kvarða

**1305.** 20° á Fahrenheit-kvarða

**1306.** 64° á Fahrenheit-kvarða

Breytið hitastigi á Celsíus-kvarða í Fahrenheit-gráður í eftirfarandi verkefnum. Námundið að næsta tíundahluta.

**1307.** 30° á Celsíus-kvarða

**1308.** −5° á Celsíus-kvarða

**1309.** $-12^\circ$ á Celsíus-kvarða

**1310.** $24^\circ$ á Celsíus-kvarða



## Æfingapróf

**1311.** Ritið með tölustöfum: tvö hundruð og fimm þúsund, sex hundruð og sautján.

**1312.** Finnið frumþáttun 504.

**1313.** Finnið minnsta sameiginlega margfeldi 18 og 24.

**1314.** Sameinið samkynja liði: $5n+8+2n-1$.

Reiknið gildið í verkefnunum hér á eftir.

**1315.** $-|x|$ þegar $x=-2$

**1316.** $11-a$ þegar $a=-3$

**1317.** Þýðið yfir í algebrustæðu og einfaldið: tuttugu minna en mínus 7.

**1318.** Monique á $-\$18$ inni á tékkareikningi sínum. Hún leggur \$152 inn á reikninginn. Hver er ný staða reikningsins?

**1319.** Námundið 677,1348 að næsta hundraðshluta.

**1320.** Breytið $\frac{4}{5}$ í tugabrot.

**1321.** Breytið 1,85 í prósent.

**1322.** Merkið $\frac{2}{3}, -1{,}5$, og $\frac{9}{4}$ á talnalínu.

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir.

1323.

$$4+10(3+9)-5^2$$

1324.

$$-85+42$$

1325.

$$-19-25$$

1326.

$$(-2)^4$$

1327.

$$-5(-9)\div 15$$

1328.

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{11}{12}$$

1329.

$$\frac{4}{5} \div \frac{9}{20}$$

1330.

$$\frac{12+3 \cdot 5}{15-6}$$

1331.

$$\frac{m}{7}+\frac{10}{7}$$

1332.

$$\frac{7}{12}-\frac{3}{8}$$

1333.

$$-5{,}8+(-4{,}7)$$

1334.

$$100-64{,}25$$

1335.

$$(0{,}07)(31{,}95)$$

1336.

$$9 \div 0{,}05$$

1337.

$$-14\left(\frac{5}{7}p\right)$$

1338.

$$(u+8)-9$$

1339.

$$6x+(-4y)+9x+8y$$

1340.

$$\frac{0}{23}$$

1341.

$$\frac{75}{0}$$

1342.

$$-2(13q-5)$$

**1343.** Kvikmyndin tók $1\frac{2}{3}$ klukkustundir. Hve margar mínútur tók hún? (1 klukkustund = 60 mínútur)

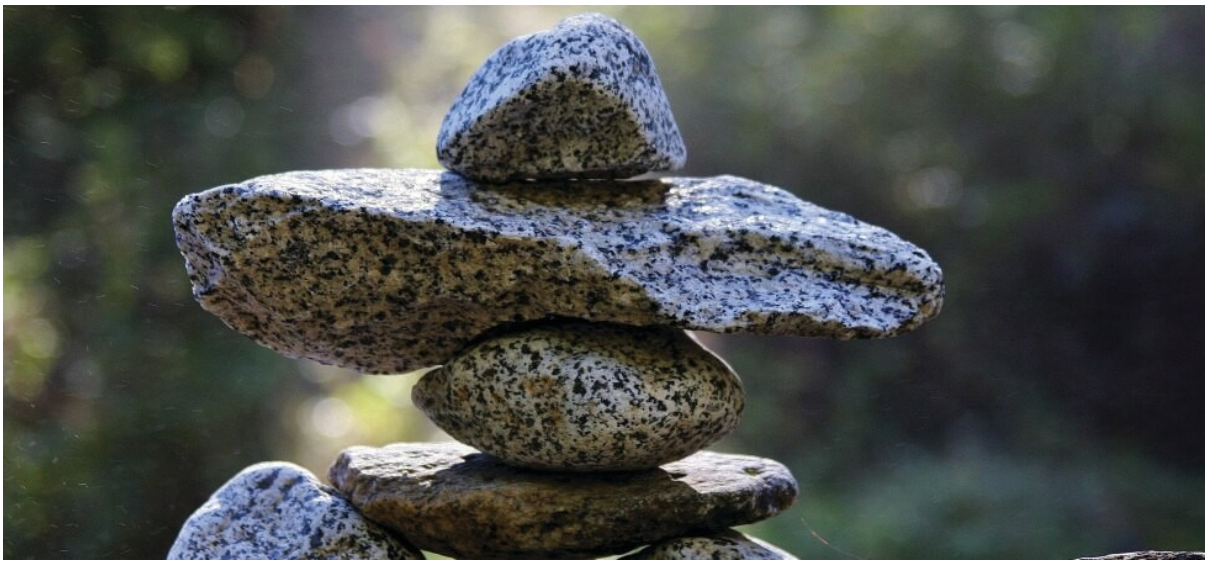
**1344.** Jeppi Mikes er 5 fet og 11 tommur á hæð. Hann ætlar að setja farangurspoka á þak jeppans. Pokinn er 1 fet og 6 tommur á hæð. Hve hár verður jeppinn með farangurspokann á þakinu? (1 fet = 12 tommur)

**1345.** Jennifer hljóp 2,8 mílur. Umreiknið vegalengdina í kílómetra. (1 míla = 1,61 kílómetrar)

2. KAFLI



# Lausnir línulegra jafna og ójafna



Mynd 2.1 Steinarnir í þessari hleðslu verða að vera í fullkomnu jafnvægi um miðjuna til þess að hleðslan haldi lögun sinni.

## Yfirlit kaflans


- 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
- 2.2 Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu
- 2.3 Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum
- 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur
- 2.5 Leysið jöfnur með brotum eða tugabrotum
- 2.6 Einangrið tiltekna breytu í formúlu
- 2.7 Leysið línulegar ójöfnur

# Inngangur

Ef við legðum fleiri jafnþunga steina varlega beggja vegna hleðslunnar héldist hún áfram í jafnvægi. Á sama hátt haldast stæðurnar sitt hvorum megin við jafnaðarmerkið jafngildar þegar við leggjum sömu stærð við báðar hliðar jöfnunnar. Í þessum kafla leysum við jöfnur og munum að það sem við gerum við aðra hlið jöfnunnar verðum við líka að gera við hina.

2

## 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Sannreynið lausn jöfnu
- Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
- Leysið jöfnur sem þarf að einfalda
- Setjið orðalag fram sem jöfnu og leysið hana
- Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau

**UNDIRBÚNINGUR 2.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Reiknið gildi $x+4$ þegar $x=-3$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.54.

**UNDIRBÚNINGUR 2.2**

Reiknið gildi $15-y$ þegar $y=-5$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.56.

**UNDIRBÚNINGUR 2.3**

Einfaldið $4(4n+1)-15n$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.138.

**UNDIRBÚNINGUR 2.4**

Setjið orðalagið „5 minna en $x$“ fram á algebrumáli. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 1.26.

## Sannreynið lausn jöfnu

Að leysa jöfnu líkist því að finna lausn á gátu. Markmiðið er að finna það gildi eða þau gildi breytunnar sem gera báðar hliðar jöfnunnar jafnar og gefa þannig sanna fullyrðingu. Hvert það gildi breytunnar sem gerir jöfnuna sanna kallast lausn jöfnunnar. Það er svarið við gátunni.



**LAUSN JÖFNU**

Lausn jöfnu er gildi breytu sem gerir jöfnuna að sannri fullyrðingu þegar gildið er sett inn fyrir breytuna.

**AÐFERÐ**

### Til að ákvarða hvort tala sé lausn jöfnu.

1. Skref 1. Setjið töluna inn fyrir breytuna í jöfnunni.
2. Skref 2. Einfaldið stæðurnar báðum megin við jafnaðarmerkið.
3. Skref 3.
   Ákvarðið hvort jafnan sem fæst sé sönn, það er hvort vinstri hliðin sé jöfn þeirri hægri.
   - Ef hún er sönn er talan lausn.
   - Ef hún er ekki sönn er talan ekki lausn.

**DÆMI 2.1**

Ákvarðið hvort $x=\frac{3}{2}$ sé lausn jöfnunnar $4x-2=2x+1$.

### Lausn

Lausn jöfnu er gildi breytunnar sem gerir jöfnuna sanna. Við byrjum því á að setja gildið sem við prófum inn fyrir breytuna.

| | $4x-2=2x+1$ |
|---|---|
| Setjið $\frac{3}{2}$ inn fyrir $x$. | $4\left(\frac{3}{2}\right)-2\stackrel{?}{=}2\left(\frac{3}{2}\right)+1$ |
| Margfaldið. | $6-2\stackrel{?}{=}3+1$ |
| Dragið frá. | $4=4\checkmark$ |

Þar sem $x=\frac{3}{2}$ gefur sanna jöfnu (4 er í raun jafnt 4) er $\frac{3}{2}$ lausn jöfnunnar $4x-2=2x+1$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.1**

Er $y=\frac{4}{3}$ lausn jöfnunnar $9y+2=6y+3$?

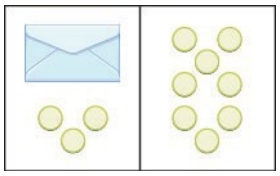
**PRÓFIÐ SJÁLF 2.2**

Er $y=\frac{7}{5}$ lausn jöfnunnar $5y+3=10y-4$?

## Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar



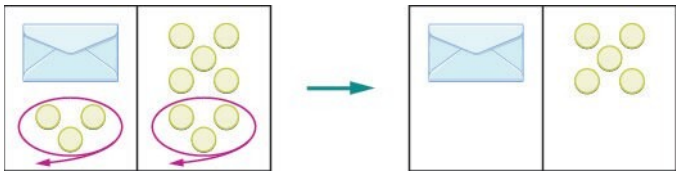
Við notum líkan til að skýra hvernig jafna er leyst. Umslag táknar breytuna, því að innihald þess er óþekkt, og hver talningarskífa táknar töluna einn. Við leggjum eitt umslag og nokkrar talningarskífur á vinnusvæðið eins og sýnt er á mynd 2.2. Á báðum hliðum vinnusvæðisins er sami fjöldi talningarskífa en nokkrar þeirra eru „faldar“ í umslaginu. Getið þið sagt hve margar talningarskífur eru í umslaginu?



Mynd 2.2 Myndin sýnir líkan af jöfnu með einni breytu. Vinstra megin á vinnusvæðinu er óþekkt stærð, táknuð með umslagi, og þrjár talningarskífur en hægra megin eru átta talningarskífur.

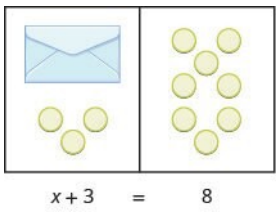
Hvað eruð þið að hugsa? Hvaða skref takið þið í huganum til að finna hve margar talningarskífur eru í umslaginu?

Ef til vill hugsið þið: „Ég þarf að fjarlægja 3 talningarskífurnar neðst til vinstri svo að umslagið standi eitt eftir. Para má 3 skífurnar vinstra megin við 3 skífur hægra megin og því má taka þær af báðum hliðum. Þá verða fimm eftir hægra megin og því hljóta 5 talningarskífur að vera í umslaginu.“ Sjá mynd 2.3 sem sýnir þetta ferli.



Mynd 2.3 Myndin sýnir líkan til að leysa jöfnu með einni breytu. Þrjár talningarskífur eru fjarlægðar af báðum hliðum vinnusvæðisins. Þá stendur óþekkta stærðin, táknuð með umslagi, ein eftir vinstra megin og fimm talningarskífur hægra megin. Óþekkta stærðin er því jöfn fimm.

Hvaða algebrujafna lýsir þessum aðstæðum? Á mynd 2.4 táknar hvor hlið vinnusvæðisins stæðu og miðlínan kemur í stað jafnaðarmerkisins. Við látum $x$ standa fyrir innihald umslagsins.




Mynd 2.4 Myndin sýnir líkan af jöfnunni $x+3=8$.



Ritum nú með algebrutáknum skrefin sem við tókum til að finna hve margar talningarskífur voru í umslaginu:

| | |
|---|---|
| | $x+3=8$ |
| Fyrst fjarlægðum við þrjár talningarskífur frá báðum hliðum. | $x+3-3=8-3$ |
| Þá stóðu fimm eftir. | $x=5$ |

Sannprófun:

Fimm talningarskífur í umslaginu og þrjár í viðbót eru samtals átta.

$$5+3=8$$

Líkanið hefur gefið okkur hugmynd um hvernig leysa má eina gerð jafna. Markmiðið er að einangra breytuna öðrum megin við jafnaðarmerkið. Til að leysa slíkar jöfnur notum við regluna um að draga sömu tölu frá báðum hliðum jöfnu.

**FRÁDRÁTTARREGLA JAFNAÐAR**

Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c gildir:

$$\begin{array}{lccc} \text{Ef} & a & = & b, \\ \text{þá} & a-c & = & b-c \end{array}$$

Ef við drögum sömu stærð frá báðum hliðum jöfnu eru hliðarnar áfram jafnar.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Frádráttarregla jafnaðar“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja betur hvernig leysa má jöfnur með

Skoðum hvernig við notum þessa reglu til að leysa jöfnu. Munið að markmiðið er að einangra breytuna öðrum megin við jafnaðarmerkið. Til að sannreyna lausnina setjum við gildið inn í jöfnuna og athugum hvort fullyrðingin sé sönn.

**DÆMI 2.2**

Leysið: $y+37=-13$.

### Lausn

Til að einangra y drögum við 37 frá báðum hliðum samkvæmt frádráttarreglu jafnaðar.

| | |
|---|---|
| | $y+37=-13$ |
| Dragið 37 frá báðum hliðum til að snúa samlagningunni við. | $y+37-37=-13-37$ |
| Einfaldið. | $y=-50$ |
| Sannprófun: $y+37=-13$ | |
| Setjið inn $y=-50$ | $-50+37=-13$ |
| | $-13\stackrel{?}{=}-13$ ✓ |

Þar sem $y=-50$ gerir $y+37=-13$ að sannri fullyrðingu höfum við fundið lausn jöfnunnar.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.3**

Leysið: $x+19=-27$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.4**

Leysið: $x+16=-34$.

Hvað gerist þegar tala er dregin frá breytunni, eins og í jöfnunni $x-5=8$? Þá notum við aðra jafnaðarreglu. Við viljum einangra breytuna og leggjum því töluna við báðar hliðar til að snúa frádrættinum við. Til þess notum við samlagningarreglu jafnaðar.

**SAMLAGNINGARREGLA JAFNAÐAR**

Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c gildir:

$$\begin{array}{lccc} \text{Ef} & a & = & b, \\ \text{þá} & a+c & = & b+c \end{array}$$

Ef við leggjum sömu stærð við báðar hliðar jöfnu eru hliðarnar áfram jafnar.

Í dæmi 2.2 var 37 lagt við y og því drógum við 37 frá til að snúa samlagningunni við. Í dæmi 2.3 þurfum við að snúa frádrætti við með samlagningarreglu jafnaðar.

**DÆMI 2.3**

Leysið: $a-28=-37$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | | $a-28=-37$ |
| Leggið 28 við báðar hliðar til að snúa frádrættinum við. | | $a-28+28=-37+28$ |
| Einfaldið. | | $a=-9$ |
| Sannprófun: | $a-28=-37$ | |
| Setjið inn $a=-9$ | $-9-28=-37$ | |
| | $-37\stackrel{?}{=}-37\checkmark$ | |
| | | Lausn jöfnunnar $a-28=-37$ er $a=-9$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.5**

Leysið: $n-61=-75$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.6**

Leysið: $p-41=-73$.

**DÆMI 2.4**

Leysið: $x-\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $x-\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$ |
| Notið samlagningarreglu jafnaðar. | $x-\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$ |
| Finnið minnsta samnefnarann til að leggja saman brotin hægra megin. | $x-\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ |
| Einfaldið. | $x=\frac{11}{8}$ |

Sannprófun:

$$x-\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$$

Setjið inn $x=\frac{11}{8}$.

$$\frac{11}{8}-\frac{5}{8}\stackrel{?}{=}\frac{3}{4}$$

Dragið frá.

$$\frac{6}{8}\stackrel{?}{=}\frac{3}{4}$$

Einfaldið.

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\checkmark$$

Lausn jöfnunnar $x-\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$ er $x=\frac{11}{8}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.7**

Leysið: $p-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.8**

Leysið: $q-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.

Í næsta dæmi er jafna með tugabrotum.

**DÆMI 2.5**

Leysið: $n-0{,}63=-4{,}2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $n - 0{,}63 = -4{,}2$ |
| Notið samlagningarreglu jafnaðar. | $n - 0{,}63 + 0{,}63 = -4{,}2 + 0{,}63$ |
| Leggið saman. | $n = -3{,}57$ |
| Sannprófun: | $n = -3{,}57$ |
| Látum $n = -3{,}57$. | $-3{,}57 - 0{,}63 \stackrel{?}{=} -4{,}2$ |
| | $-4{,}2 = -4{,}2$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.9**

Leysið: $b - 0{,}47 = -2{,}1$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.10**

Leysið: $c - 0{,}93 = -4{,}6$.

## Leysið jöfnur sem þarf að einfalda

Í dæmunum á undan gátum við einangrað breytuna með einni reikniaðgerð. Flestar jöfnur í algebru þarf að leysa í fleiri skrefum. Yfirleitt þarf að einfalda aðra eða báðar hliðar jöfnu áður en við notum frádráttar- eða samlagningarreglu jafnaðar.

Einfaldið alltaf eins mikið og hægt er áður en þið reynið að einangra breytuna. Að einfalda stæðu merkir að framkvæma allar reikniaðgerðir hennar. Einfaldið eina hlið jöfnunnar í einu. Athugið að einföldun er annað en að leysa jöfnu. Þegar við leysum jöfnu notum við sömu reikniaðgerð á báðar hliðar.

**DÆMI 2.6**

## Hvernig leysa á jöfnur sem þarf að einfalda

Leysið: $9x - 5 - 8x - 6 = 7$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Einfaldið stæðurnar hvorum megin eins og unnt er. | Endurraðið liðunum með víxlreglu samlagningar.<br>Dragið saman líka liði.<br>Athugið að nú hefur hvor hlið verið einfölduð eins og unnt er. | $9x - 5 - 8x - 6 = 7$<br>$9x - 8x - 5 - 6 = 7$<br>$x - 11 = 7$ |
| **Skref 2.** Einangrið breytuna. | Einangrið nú $x$.<br>Eyðið frádrættinum með því að leggja 11 við báðar hliðar. | $x - 11 + 11 = 7 + 11$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 3.** Einfaldið stæðurnar báðum megin við jöfnuna. | | $x = 18$ |
| **4. skref.** Athugið lausnina. | | **Athugun:** Setjið $x = 18$ inn.<br>$9x - 5 - 8x - 6 = 7$<br>$9(18) - 5 - 8(18) - 6 \stackrel{?}{=} 7$<br>$162 - 5 - 144 - 6 \stackrel{?}{=} 7$<br>$157 - 144 - 6 \stackrel{?}{=} 7$<br>$13 - 6 \stackrel{?}{=} 7$<br>$7 = 7$ ✓<br>Lausn jöfnunnar $9x - 5 - 8x - 6 = 7$ er $x = 18$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.11**

Leysið: $8y - 4 - 7y - 7 = 4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.12**

Leysið: $6z + 5 - 5z - 4 = 3$.

**DÆMI 2.7**

Leysið: $5(n - 4) - 4n = -8$.

## Lausn

Við einföldum báðar hliðar jöfnunnar eins mikið og hægt er áður en við reynum að einangra breytuna.

| | |
|---|---|
| | $5(n-4)-4n=-8$ |
| Beitið dreifireglunni vinstra megin. | $5n-20-4n=-8$ |
| Notið víxlregluna til að endurraða liðunum. | $5n-4n-20=-8$ |
| Sameinið samkynja liði. | $n-20=-8$ |
| Hvor hlið er nú einfölduð eins mikið og hægt er. Einangrið næst $n$. | |
| Snúið frádrættinum við með samlagningarreglu jafnaðar. | $n-20+20=-8+20$ |
| Leggið saman. | $n=12$ |
| Sannprófið. Setjið $n=12$. $5(n-4)-4n=-8$ $5(12-4)-4(12) \stackrel{?}{=} -8z$ $5(8)-48 \stackrel{?}{=} -8$ $40-48 \stackrel{?}{=} -8$ $-8=-8$ ✓ | |
| | Lausn jöfnunnar $5(n-4)-4n=-8$ er $n=12$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.13**

Leysið: $5(p-3)-4p=-10$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.14**

Leysið: $4(q+2)-3q=-8$.

**DÆMI 2.8**

Leysið: $3(2y-1)-5y=2(y+1)-2(y+3)$.

## Lausn

Við einföldum báðar hliðar jöfnunnar áður en við einangrum breytuna.

| | |
|---|---|
| | $3(2y-1)-5y=2(y+1)-2(y+3)$ |
| Beitið dreifireglunni báðum megin. | $6y-3-5y=2y+2-2y-6$ |
| Notið víxlreglu samlagningar. | $6y-5y-3=2y-2y+2-6$ |
| Sameinið samkynja liði. | $y-3=-4$ |
| Hvor hlið er nú einfölduð eins mikið og hægt er. Einangrið næst $y$. | |
| Snúið frádrættinum við með samlagningarreglu jafnaðar. | $y-3+3=-4+3$ |
| Leggið saman. | $y=-1$ |
| Sannprófið. Látum $y=-1$. $3(2y-1)-5y=2(y+1)-2(y+3)$ $3(2(-1)-1)-5(-1)\stackrel{?}{=}2(-1+1)-2(-1+3)$ $3(-2-1)+5\stackrel{?}{=}2(0)-2(2)$ $3(-3)+5\stackrel{?}{=}-4$ $-9+5\stackrel{?}{=}-4$ $-4=-4\checkmark$ | |
| | Lausn jöfnunnar $3(2y-1)-5y=2(y+1)-2(y+3)$ er $y=-1$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.15**

Leysið: $4(2h-3)-7h=6(h-2)-6(h-1)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.16**

Leysið: $2(5x+2)-9x=3(x-2)-3(x-4)$.

## Setjið orðalag fram sem jöfnu og leysið hana

Til að leysa hagnýt verkefni með algebru byrjum við á að setja íslenskar setningar fram sem jöfnur. Fyrsta skrefið er að leita að orðinu eða orðunum sem tákna jafnaðarmerki. Tafla 2.1 sýnir nokkur algeng slík orð og orðasambönd.

Tafla 2.1

| **Jafnt og =** |
|---|
| er |
| er jafnt og |
| er sama og |
| niðurstaðan er |
| gefur |
| var |
| verður |



Hér á eftir eru skrefin sem við notum til að setja setningu fram sem jöfnu.

**AÐFERÐ**

### Að setja íslenska setningu fram sem algebrujöfnu.

1. Skref 1. Finnið orð eða orðasamband sem táknar jafnaðartengsl og skrifið jafnaðarmerki (=) í stað þess.
2. Skref 2. Setjið orðin vinstra megin við orðalagið um jafnaðartengsl fram sem algebrustæðu.
3. Skref 3. Setjið orðin hægra megin við orðalagið um jafnaðartengsl fram sem algebrustæðu.

**DÆMI 2.9**

Þýðið og leysið: Ellefu meira en x er jafnt og 54.

### Lausn

| | | | |
|---|---|---|---|
| Þýðið. | Ellefu meira en $x$ | er jafnt og | 54 |
| | $x+11$ | = | 54 |
| Dragið 11 frá báðum hliðum. | $x+11-11$ | = | $54-11$ |
| Einfaldið. | $x$ | = | 43 |

Sannprófun: Er 54 ellefu meira en 43?

$$\begin{aligned} 43+11 &\overset{?}{=} 54 \\ 54 &= 54\checkmark \end{aligned}$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.17**

Þýðið og leysið: Tíu meira en x er jafnt og 41.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.18**

Þýðið og leysið: Tólf minna en x er jafnt og 51.

**DÆMI 2.10**

Þýðið og leysið: Mismunurinn á $12t$ og $11t$ er $-14$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| Þýðið. | Mismunur 12t og 11$t$ er $-14$<br>$12t - 11t = -14$ |
| Einfaldið. | $t = -14$ |
| Sannprófun: | $12(-14) - 11(-14) \stackrel{?}{=} -14$<br>$-168 + 154 \stackrel{?}{=} -14$<br>$-14 = -14$✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.19**

Þýðið og leysið: Mismunurinn á $4x$ og $3x$ er 14.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.20**

Þýðið og leysið: Mismunurinn á $7a$ og $6a$ er $-8$.

## Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau

Flestar spurningar sem leysa þarf með algebru spretta af aðstæðum úr daglegu lífi. Í upphafi er spurningin sett fram á venjulegu máli en ekki með stærðfræðitáknum. Því er mikilvægt að geta sett hversdagslegar aðstæður fram á algebrumáli.

Við byrjum á að endursegja verkefnið í einni setningu, velja breytu og setja síðan setninguna fram sem jöfnu sem við leysum. Veljið bókstaf fyrir breytuna sem minnir á það sem leitað er að. Til dæmis mætti nota m fyrir fjölda mynta í verkefni um peninga.

**DÆMI 2.11**

## Hvernig setja á hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysa þau

MacIntyre-fjölskyldan safnaði dagblöðum til endurvinnslu í tvo mánuði. Dagblöðin frá báðum mánuðunum vógu samtals 57 pund. Seinni mánuðinn vógu þau 28 pund. Hve mikið vógu dagblöðin fyrri mánuðinn?

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1. Lesið** dæmið. Gangið úr skugga um að öll orð og hugtök séu skilin. | Dæmið fjallar um þyngd dagblaða. | |
| **Skref 2.** Ákvarðið hvað beðið er um að finna. | Hvað er beðið um að finna? | „Hversu mikið vógu dagblöðin fyrsta mánuðinn?“ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 3. Nefnið** það sem við leitum að. Veljið breytu til að tákna þá stærð. | Veljið breytu. | Látum $w$ = þyngd dagblaðanna fyrsta mánuðinn |
| **Skref 4. Setjið fram jöfnu.** Það getur verið gagnlegt að endursegja dæmið í einni setningu með mikilvægustu upplýsingunum. | Endursegið dæmið.<br><br>Við vitum að dagblöðin vega 28 pund í öðrum mánuðinum.<br>Setjið fram jöfnu með breytunni $w$. | Þyngd dagblaðanna í fyrsta mánuðinum að viðbættri þyngd dagblaðanna í öðrum mánuðinum er 57 pund.<br>Þyngdin í fyrsta mánuðinum að viðbættum 28 er 57.<br>$w + 28 = 57$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna með viðurkenndum algebruaðferðum. | Leysið. | $w + 28 - 28 = 57 - 28$<br>$w = 29$ |
| **Skref 6. Athugið** svarið við dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. | Er samanlögð þyngd fyrsta og annars mánaðar 57 pund? | **Athugun:**<br>Er samanlögð þyngd fyrsta og annars mánaðar 57 pund?<br>$29 + 28 \stackrel{?}{=} 57$<br>$57 = 57$ ✓ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Skrifið setningu sem svarar spurningunni „Hvað vógu dagblöðin fyrsta mánuðinn?“ | Fyrsta mánuðinn vógu dagblöðin 29 pund. |

2

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.21**

Setjið fram sem algebrujöfnu og leysið:

Pappas-fjölskyldan á tvo ketti, Seif og Aþenu. Saman vega þeir 23 pund. Seifur vegur 16 pund. Hve mikið vegur Aþena?

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.22**

Setjið fram sem algebrujöfnu og leysið:

Sam og Henry eru herbergisfélagar. Saman eiga þeir 68 bækur. Sam á 26 bækur. Hve margar bækur á Henry?

**AÐFERÐ**

## Að leysa hagnýtt verkefni.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að þið skiljið öll orð og allar hugmyndir.
2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með mikilvægustu upplýsingunum.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi verkefnisins og athugið hvort það sé skynsamlegt.

**7.** Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

---

**DÆMI 2.12**

Randell greiddi $28.675 fyrir nýja bílinn sinn. Það var $875 undir listaverði. Hvert var listaverð bílsins?



## Lausn

Tafla 2.2

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | „Hvert var listaverð bílsins?“ |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana. | Látum $s =$ tákna listaverð bílsins. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Endursegið það í einni setningu. | $28.675 er $875 undir listaverðinu |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $28.675 er $875 undir $\begin{aligned} 28.675 &= s - 875 \\ s28.675+875 &= s - 875+875 \\ 29.550 &= s \end{aligned}$ |
| **Skref 6.** Sannprófið svarið. Ef $875 eru dregnir frá $29.550, fæst þá $28.675?<br><br>$29.550 - 875 \overset{?}{=} 28.675$<br>$28.675 = 28.675 \checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Listaverð bílsins var $29.550. |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.23**

Setjið fram sem algebrujöfnu og leysið:

Eddie greiddi $19.875 fyrir nýja bílinn sinn. Það var $1.025 undir listaverði. Hvert var listaverð bílsins?

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.24**

Setjið fram sem algebrujöfnu og leysið:

Aðgangseyrir í bíó á daginn er $7,75. Hann er $3,25 lægri en verðið á kvöldin. Hvað kostar í bíó á kvöldin?

## Verkefni úr hluta 2.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Sannreynið lausn jöfnu**

Ákvarðið í verkefnunum hér á eftir hvort gefna gildið sé lausn jöfnunnar.

**1.** Er $y=\frac{5}{3}$ lausn jöfnunnar

$6y+10=12y$?

**2.** Er $x=\frac{9}{4}$ lausn jöfnunnar

$4x+9=8x$?

**3.** Er $u=-\frac{1}{2}$ lausn jöfnunnar

$8u-1=6u$?

**4.** Er $v=-\frac{1}{3}$ lausn jöfnunnar

$9v-2=3v$?

**Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar**

Leysið hverja jöfnu hér á eftir með frádráttar- og samlagningarreglu jafnaðar.

5.

$$x+24=35$$

6.

$$x+17=22$$

7.

$$y+45=-66$$

8.

$$y+39=-83$$

9.

$$b+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

10.

$$a+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$

11.

$$p+2{,}4=-9{,}3$$

12.

$$m+7{,}9=11{,}6$$

13.

$$a-45=76$$

14.

$$a-30=57$$

15.

$$m-18=-200$$

16.

$$m-12=-12$$

17.

$$x-\frac{1}{3}=2$$

18.

$$x-\frac{1}{5}=4$$

19.

$$y-3{,}8=10$$

20.

$$y-7{,}2=5$$

21.

$$x-165=-420$$

22.

$$z-101=-314$$

23.

$$z+0{,}52=-8{,}5$$

24.

$$x+0{,}93=-4{,}1$$

25.

$$q+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

26.

$$p+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

27.

$$p-\frac{2}{5}=\frac{2}{3}$$

28.

$$y-\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

**Leysið jöfnur sem þarf að einfalda**

Leysið hverja jöfnu hér á eftir.

29.

$$c+31-10=46$$

30.

$$m+16-28=5$$

31.

$$9x+5-8x+14=20$$

32.

$$6x+8-5x+16=32$$

33.

$$-6x-11+7x-5=-16$$

34.

$$-8n-17+9n-4=-41$$

35.

$$5(y-6)-4y=-6$$

36.

$$9(y-2)-8y=-16$$

37.

$$8(u+1{,}5)-7u=4{,}9$$

38.

$$5(w+2{,}2)-4w=9{,}3$$

39.

$$6a-5(a-2)+9=-11$$

40.

$$8c-7(c-3)+4=-16$$

41.

$$6(y-2)-5y=4(y+3)\\-4(y-1)$$

42.

$$9(x-1)-8x=-3(x+5)\\+3(x-5)$$

43.

$$3(5n-1)-14n+9\\=10(n-4)-6n-4(n+1)$$

44.

$$2(8m+3)-15m-4\\=9(m+6)-2(m-1)-7m$$

45.

$$-(j+2)+2j-1=5$$

46.

$$-(k+7)+2k+8=7$$

47.

$$-\left(\frac{1}{4}a-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}a=-2$$

48.

$$-\left(\frac{2}{3}d-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{3}d=-4$$

49.

$$\begin{aligned}&8(4x+5)-5(6x)-x\\&=53-6(x+1)+3(2x+2)\end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned}&6(9y-1)-10(5y)-3y\\&=22-4(2y-12)+8(y-6)\end{aligned}$$

**Setjið orðalag fram sem jöfnu og leysið hana**

Setjið hverja setningu hér á eftir fram sem jöfnu og leysið hana.

**51.** Níu meira en $x$ er jafnt og 52.

**52.** Summan af x og $-15$ er 23.

**53.** Tíu minna en m er $-14$.

**54.** Þremur minna en y er $-19$.

**55.** Summan af y og $-30$ er 40.

**56.** Tólf meira en p er jafnt og 67.

**57.** Mismunurinn á $9x$ og $8x$ er 107.

**58.** Mismunurinn á $5c$ og $4c$ er 602.

**59.** Mismunurinn á $n$ og $\frac{1}{6}$ er $\frac{1}{2}$.

**60.** Mismunurinn á $f$ og $\frac{1}{3}$ er $\frac{1}{12}$.

**61.** Summan af $-4n$ og $5n$ er $-82$.

**62.** Summan af $-9m$ og $10m$ er $-95$.

**Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau**

Setjið hvert verkefni hér á eftir fram sem jöfnu og leysið það.

**63.** **Vegalengd:** Avril hjólaði samtals 18 mílur, fyrst að heiman á bókasafnið og þaðan á ströndina. Vegalengdin frá heimili Avril að bókasafninu er 7 mílur. Hve langt er frá bókasafninu að ströndinni?

**64.** **Lestur:** Jeff las samtals 54 blaðsíður í kennslubókum sínum í sögu og félagsfræði. Hann las 41 blaðsíðu í sögubókinni. Hve margar blaðsíður las hann í félagsfræðibókinni?

**65.** **Aldur:** Dóttir Evu er 15 árum yngri en sonur hennar. Sonur Evu er 22 ára. Hve gömul er dóttir hennar?

**66.** **Aldur:** Faðir Pablos er 3 árum eldri en móðir hans. Móðir Pablos er 42 ára. Hve gamall er faðir hans?

**67.** **Matarinnkaup:** Fyrir afmæliskvöldverð fjölskyldunnar keypti Celeste kalkún sem var 5 pundum léttari en sá sem hún keypti fyrir þakkargjörðarhátíðina. Afmæliskalkúnninn vó 16 pund. Hve mikið vó kalkúnninn fyrir þakkargjörðarhátíðina?

**68.** **Þyngd:** Allie er 8 pundum léttari en tvíburasystir hennar, Lorrie. Allie vegur 124 pund. Hve mikið vegur Lorrie?

**69.** **Heilsa:** Hitastig Connors var 0,7 gráðum hærra í morgun en kvöldið áður. Hitastig hans í morgun var 101,2 gráður. Hvert var hitastig hans kvöldið áður?

**70.** **Heilsa:** Hjúkrunarfræðingurinn sagði að dóttir Triciu hefði þyngst um 4,2 pund frá síðustu skoðun og vægi nú 31,6 pund. Hve mikið vó hún við síðustu skoðun?

**71.** **Laun:** Laun Rons þessa viku voru $17,43 lægri en vikuna áður. Hann fékk $103,76 í laun þessa viku. Hve há voru laun hans vikuna áður?

**72.** **Kennslubækur:** Stærðfræðibók Melissu var $22,85 ódýrari en myndlistarbókin hennar. Stærðfræðibókin kostaði $93,75. Hvað kostaði myndlistarbókin?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**73.** **Smíðar:** Miguel vill bora gat fyrir skrúfu sem er $\frac{5}{8}$ tomma að þvermáli. Þvermál gatsins á að vera $\frac{1}{12}$ tommu minna en þvermál skrúfunnar. Látum $d$ tákna þvermál gatsins sem hann á að bora. Leysið jöfnuna $d+\frac{1}{12}=\frac{5}{8}$ til að finna rétt þvermál gatsins.

**74.** **Bakstur**: Kelsey vantar $\frac{2}{3}$ bolla af sykri í smákökuuppskriftina. Hún á aðeins $\frac{3}{8}$ bolla og ætlar að fá afganginn lánaðan hjá nágranna sínum. Látum $s$ tákna sykurmagnið sem hún fær lánað. Leysið jöfnuna $\frac{3}{8}+s=\frac{2}{3}$ til að finna hve mikinn sykur hún þarf að fá lánaðan.

### *Ritunarverkefni*

**75.** Er $-8$ lausn jöfnunnar $3x=16-5x$? Hvernig vitið þið það?

**76.** Hvert er fyrsta skrefið í lausn ykkar á jöfnunni $10x+2=4x+26$?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| sannreynt lausn jöfnu. | | | |
| leyst jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar. | | | |
| leyst jöfnur sem þarf að einfalda. | | | |
| sett verkefni fram sem jöfnu og leyst hana. | | | |
| sett upp og leyst orðadæmi. | | | |



ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

**... örugglega.** Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Hugleiðið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo að þið getið notað þær áfram. Hvað gerðuð þið til að öðlast öryggi í þessum atriðum? Verið nákvæm.

**... með nokkurri hjálp.** Bregðist fljótt við, því að atriði sem þið náið ekki tökum á verða hindranir á leiðinni að árangri. Stærðfræði byggist upp í röð og hvert viðfangsefni styðst við fyrri þekkingu. Mikilvægt er að hafa traustan grunn áður en þið haldið áfram. Hvern getið þið beðið um hjálp? Samnemendur og kennari geta veitt góða aðstoð. Er hægt að fá aðstoð stærðfræðileiðbeinanda í skólanum? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**... nei – ég skil þetta ekki!** Þetta er alvarlegt og þið megið ekki hunsa það. Þið þurfið að fá hjálp strax, annars getur efnið fljótt orðið ykkur ofviða. Ræðið sem fyrst við kennarann um stöðuna. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

## 2.2 Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu
- Leysið jöfnur sem þarf að einfalda
- Setjið orðalag fram sem jöfnu og leysið hana
- Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau

**UNDIRBÚNINGUR 2.5**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Einfaldið: $-7\left(\frac{1}{-7}\right)$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.68.

**UNDIRBÚNINGUR 2.6**

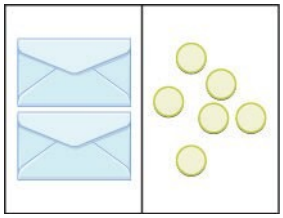
Reiknið gildi $9x+2$ þegar $x=-3$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.57.

## Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu

2

Þið hafið ef til vill tekið eftir því að allar jöfnurnar sem við höfum leyst hingað til hafa verið af gerðinni $x+a=b$ eða $x-a=b$. Við gátum einangrað breytuna með því að leggja fastaliðinn við eða draga hann frá þeirri hlið jöfnunnar sem innihélt breytuna. Nú skoðum við jöfnur þar sem breyta er margfölduð með fasta og því þarf að deila til að einangra breytuna.

Skoðum aftur gátuna með umslögunum og talningarskífunum á mynd 2.5.

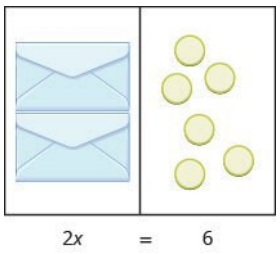


Mynd 2.5 Myndin sýnir líkan af jöfnu þar sem ein breyta er margfölduð með fasta. Vinstra megin á vinnusvæðinu eru tvö eintök af óþekktu stærðinni, táknuð með umslögum, en hægra megin eru sex talningarskífur.

Á myndinni eru tvö eins umslög sem innihalda sama fjölda talningarskífa. Munið að vinstri hlið vinnusvæðisins verður að vera jöfn þeirri hægri en skífurnar vinstra megin eru „faldar“ í umslögunum. Hve margar talningarskífur eru þá í hvoru umslagi?

Hvernig finnum við fjöldann? Við þurfum að skipta skífunum hægra megin í tvo jafnstóra hópa sem samsvara umslögunum tveimur vinstra megin. Þegar 6 talningarskífum er skipt í 2 jafna hópa verða 3 skífur í hvorum hópi, því að $6\div 2=3$.

Hvaða jafna lýsir aðstæðunum á mynd 2.6? Þar eru tvö umslög og í hvoru þeirra eru $x$ talningarskífur. Saman verða umslögin tvö að innihalda alls 6 skífur.




Mynd 2.6 Myndin sýnir líkan af jöfnunni $2x=6$.

| | |
|---|---|
| | $2x = 6$ |
| Ef við deilum báðum hliðum jöfnunnar með 2, eins og við gerðum með umslögin og talningarskífurnar, | $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$ |
| fáum við: | $x = 3$ |

Við fundum að í hvoru umslagi eru 3 talningarskífur. Stenst það? Við vitum að $2 \cdot 3 = 6$, svo svarið stenst. Þrjár skífur í hvoru umslagi eru samtals sex.

Þetta dæmi leiðir okkur að reglunni um að deila báðum hliðum jöfnu með sömu tölu.



**REGLAN UM AÐ DEILA BÁÐUM HLIÐUM JÖFNU MEÐ SÖMU TÖLU**

Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c, þar sem $c \neq 0$, gildir:

$$\begin{aligned} &\text{Ef} && a = b, \\ &\text{þá} && \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Þegar báðum hliðum jöfnu er deilt með sömu tölu sem er ekki núll eru hliðar jöfnunnar áfram jafnar.

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Deilingarregla jafnaðar“ í áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja betur hvernig leysa má jöfnur með því að deila báðum hliðum jöfnu með sömu tölu.

Þegar við leysum jöfnu er markmiðið að snúa við reikniaðgerðinni sem gerð er á breytunni. Í næsta dæmi er breytan margfölduð með 5 og því deilum við báðum hliðum með 5 til að snúa margföldueninni við.

**DÆMI 2.13**

Leysið: $5x = -27$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Til að einangra $x$ „snúum við margföldun með 5 við“. | | $5x = -27$ |
| Deilið til að snúa margfölduninni við. | | $\frac{5x}{5} = -\frac{27}{5}$ |
| Einfaldið. | | $x = -\frac{27}{5}$ |
| Sannprófun: | $5x = -27$ | |
| Setjið $-\frac{27}{5}$ inn fyrir $x$. | $5\left(-\frac{27}{5}\right) \stackrel{?}{=} -27$ | |
| | $-27 = -27$ ✓ | |
| | | Þetta er sönn fullyrðing og því er $x = -\frac{27}{5}$ lausn jöfnunnar $5x = -27$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.25**

Leysið: $3y = -41$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.26**

Leysið: $4z = -55$.

Skoðum jöfnuna $\frac{x}{4} = 3$. Við viljum finna hvaða tala deild með 4 gefur 3. Til að snúa deilingunni við þurfum við því að margfalda með 4. Reglan um að margfalda báðar hliðar jöfnu með sömu tölu gerir okkur þetta kleift. Hún segir að ef tvær jafnar stærðir eru báðar margfaldaðar með sömu tölu verði niðurstöðurnar jafnar.

**REGLAN UM AÐ MARGFALDA BÁÐAR HLIÐAR JÖFNU MEÐ SÖMU TÖLU**

Fyrir hvaða tölur sem er a, bog c,

$$\begin{array}{lccc} \text{Ef} & a & = & b, \\ \text{þá} & ac & = & bc \end{array}$$

Þegar báðar hliðar jöfnu eru margfaldaðar með sömu tölu eru hliðar jöfnunnar áfram jafnar.

**DÆMI 2.14**

Leysið: $\frac{y}{-7} = -14$.

## Lausn

Hér er $y$ deilt með $-7$. Við verðum að margfalda með $-7$ til að einangra $y$.

| | |
|---|---|
| | $\frac{y}{-7}=-14$ |
| Margfaldið báðar hliðar með $-7$. | $-7\left(\frac{y}{-7}\right)=-7(-14)$ |
| Margfaldið. | $\frac{-7y}{7}=98$ |
| Einfaldið. | $y=98$ |

Sannprófun: $\frac{y}{-7}=-14$

| | |
|---|---|
| Setjið inn $y=98$. | $\frac{98}{-7}\stackrel{?}{=}-14$ |
| Deilið. | $-14=-14\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.27**

Leysið: $\frac{a}{-7}=-42$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.28**

Leysið: $\frac{b}{-6}=-24$.

**DÆMI 2.15**

Leysið: $-n=9$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-n=9$ |
| Munið að jafnan $-n$ er jafngild jöfnunni $-1n$. | $-1n=9$ |
| Deilið báðum hliðum með $-1$. | $\frac{-1n}{-1}=\frac{9}{-1}$ |
| Deilið. | $n=-9$ |

Takið eftir að leysa má $-n=9$ á tvo aðra vegu. Einnig má leysa jöfnuna með því að margfalda báðar hliðar með $-1$ eða með því að finna móttölu beggja hliða.

| | |
|---|---|
| Sannprófun: | $-n=9$ |
| Setjið inn $n=-9$. | $-(-9)\stackrel{?}{=}9$ |
| Einfaldið. | $9=9\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.29**

Leysið: $-k=8$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.30**

Leysið: $-g=3$.

2

**DÆMI 2.16**

Leysið: $\frac{3}{4}x=12$.

## Lausn

Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er 1. Því einangrum við $x$ með því að margfalda með margföldunarandhverfu $\frac{3}{4}$.

| | |
|---|---|
| | $\frac{3}{4}x=12$ |
| Margfaldið með margföldunarandhverfu $\frac{3}{4}$. | $\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{4}{3}\cdot 12$ |
| Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er 1. | $1x=\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{1}$ |
| Margfaldið. | $x=16$ |
| Takið eftir að við hefðum getað deilt báðum hliðum jöfnunnar $\frac{3}{4}x=12$ með $\frac{3}{4}$ til að einangra $x$. Það hefði virkað en flestum þykir auðveldara að margfalda með margföldunarandhverfunni. | |
| Sannprófun: | $\frac{3}{4}x=12$ |
| Setjið inn $x=16$. | $\frac{3}{4}\cdot 16\stackrel{?}{=}12$ |
| | $12=12\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.31**

Leysið: $\frac{2}{5}n=14$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.32**

Leysið: $\frac{5}{6}y=15$.

Í næsta dæmi eru allir breytuliðirnir hægra megin í jöfnunni. Eins og alltaf er markmiðið að einangra breytuna.

**DÆMI 2.17**

Leysið: $\frac{8}{15}=-\frac{4}{5}x$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{8}{15}=-\frac{4}{5}x$ |
| Margfaldið með margföldunarandhverfu $-\frac{4}{5}$. | $\left(-\frac{5}{4}\right)\left(\frac{8}{15}\right)=\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{4}{5}x\right)$ |
| Margfeldi tölu og margföldunarandhverfu hennar er 1. | $-\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot 2}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{5}}=1x$ |
| Margfaldið. | $-\frac{2}{3}=x$ |
| Sannprófun: | $\frac{8}{15}=-\frac{4}{5}x$ |
| Látum $x=-\frac{2}{3}$. | $\frac{8}{15}=-\frac{4}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)$ |
| | $\frac{8}{15}=\frac{8}{15}$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.33**

Leysið: $\frac{9}{25}=-\frac{4}{5}z$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.34**

Leysið: $\frac{5}{6}=-\frac{8}{3}r$.

## Leysið jöfnur sem þarf að einfalda

Margar jöfnur eru í upphafi flóknari en þær sem við höfum unnið með.

Þegar jöfnur eru flóknari er fyrsta skrefið að einfalda báðar hliðar þeirra eins mikið og hægt er. Yfirleitt þarf þá að sameina samkynja liði eða nota dreifiregluna.

**DÆMI 2.18**

Leysið: $14-23=12y-4y-5y$.

## Lausn

Byrjið á að einfalda hvora hlið jöfnunnar.

| | |
|---|---|
| | $14-23=12y-4y-5y$ |
| Einfaldið hvora hlið. | $-9=3y$ |
| Deilið báðum hliðum með $3$. | $-3=y$ |
| Sannprófun: | $14-23=12y-4y-5y$ |
| Setjið inn $y=-3$. | $14-23=12(-3)-4(-3)-5(-3)$ |
| | $-9=-36+12+15$ |
| | $-9=-9$ ✓ |



**PRÓFIÐ SJÁLF 2.35**

Leysið: $18-27=15c-9c-3c$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.36**

Leysið:$18-22=12x-x-4x$.

**DÆMI 2.19**

Leysið: $-4(a-3)-7=25$.

## Lausn

Hér einföldum við fyrst hvora hlið jöfnunnar með því að nota dreifiregluna.

| | |
|---|---|
| | $-4(a-3)-7=25$ |
| Beitið dreifireglu. | $-4a+12-7=25$ |
| Einfaldið. | $-4a+5=25$ |
| Einfaldið. | $-4a=20$ |
| Deilið báðum hliðum með $-4$ til að einangra $a$. | $\frac{-4a}{-4}=\frac{20}{-4}$ |
| Deilið. | $a=-5$ |
| Sannprófun: | $-4(a-3)-7=25$ |
| Setjið inn $a=-5$. | $-4(-5-3)-7\stackrel{?}{=}25$ |
| | $-4(-8)-7\stackrel{?}{=}25$ |
| | $32-7\stackrel{?}{=}25$ |
| | $25=25$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.37**

Leysið: $-4(q-2)-8=24$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.38**

Leysið: $-6(r-2)-12=30$.



Nú höfum við farið yfir allar fjórar reglur jafnaðar: frádráttar-, samlagningar-, deilingar- og margföldunarregluna. Hér eru þær allar teknar saman á einum stað svo að auðvelt sé að fletta upp í þeim.

**REGLUR JAFNAÐAR**

Frádráttarregla jafnaðar
Fyrir hvaða rauntölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a = b$,
þá $a-c = b-c$.

Deilingarregla jafnaðar
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b,$ og $c,$ og $c \neq 0$,
ef $a = b$,
þá $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Samlagningarregla jafnaðar
Fyrir hvaða rauntölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a = b$,
þá $a+c = b+c$.

Margföldunarregla jafnaðar
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a = b$,
þá $ac = bc$.

Hliðar jöfnu eru áfram jafnar ef við leggjum sömu stærð við báðar hliðar, drögum hana frá báðum hliðum, margföldum báðar hliðar með henni eða deilum báðum hliðum með henni.

## Setjið orðalag fram sem jöfnu og leysið hana

Í næstu dæmum setjum við setningar fram sem jöfnur og leysum þær síðan. Gagnlegt gæti verið að rifja upp töfluna í fyrri kafla sem sýnir hvernig orð eru skrifuð með algebrutáknum.

**DÆMI 2.20**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Talan 143 er margfeldið af $-11$ og y.

### Lausn

Byrjið á að setja setninguna fram sem jöfnu.

| | |
|---|---|
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | Talan 143 er margfeldi talnanna −11 og $y$.<br>$143 = -11y$ |
| Deilið með $-11$. | $\frac{143}{-11} = \frac{-11y}{-11}$ |
| Einfaldið. | $-13 = y$ |
| Sannprófun:<br>$143 = -11y$<br>$143 \stackrel{?}{=} -11(-13)$<br>$143 = 143\checkmark$ | |

2

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.39**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Talan 132 er margfeldið af −12 og y.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.40**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Talan 117 er margfeldið af −13 og z.

**DÆMI 2.21**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: $n$ deilt með 8 er $-32$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Byrjið á að setja setninguna fram sem jöfnu. Setjið hana fram sem jöfnu. | $n$ deilt með 8 er $-32$.<br>$\frac{n}{8} = -32$ |
| Margfaldið báðar hliðar með 8. | $8 \cdot \frac{n}{8} = 8(-32)$ |
| Einfaldið. | $n = -256$ |
| Sannprófun: | Er $n$ deilt með 8 jafnt og $-32$? |
| Látum $n = -256$. | Er $-256$ deilt með 8 jafnt og $-32$? |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $\frac{-256}{8} \stackrel{?}{=} -32$ |
| Einfaldið. | $-32 = -32\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.41**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: $n$ deilt með 7 er jafnt og $-21$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.42**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: $n$ deilt með 8 er jafnt og $-56$.

**DÆMI 2.22**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Kvótinn af $y$ og $-4$ er 68.

## Lausn

Byrjið á að setja setninguna fram sem jöfnu.

| | | |
|---|---|---|
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | | Kvóti $y$ og $-4$ er 68.<br>$\frac{y}{-4} = 68$ |
| Margfaldið báðar hliðar með $-4$. | | $-4\left(\frac{y}{-4}\right) = -4(68)$ |
| Einfaldið. | | $y = -272$ |
| Sannprófun: | Er kvótinn af $y$ og $-4$ jafn 68? | |
| Látum $y = -272$. | Er kvótinn af $-272$ og $-4$ jafn 68? | |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $\frac{-272}{-4} \stackrel{?}{=} 68$ | |
| Einfaldið. | $68 = 68 \checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.43**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Kvótinn af $q$ og $-8$ er 72.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.44**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Kvótinn af $p$ og $-9$ er 81.

**DÆMI 2.23**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Þrír fjórðu hlutar af $p$ eru 18.

## Lausn

Byrjið á að setja setninguna fram sem jöfnu. Munið að orðið „af“ táknar margföldun.

| | | |
|---|---|---|
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | | Þrír fjórðu hlutar af $p$ eru 18.<br>$\frac{3}{4}p = 18$ |
| Margfaldið báðar hliðar með $\frac{4}{3}$. | | $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}p = \frac{4}{3} \cdot 18$ |
| Einfaldið. | | $p = 24$ |
| Sannprófun: | Eru þrír fjórðu hlutar af p jafnir og 18? | |
| Látum $p = 24$. | Eru þrír fjórðu hlutar af 24 jafnir og 18? | |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $\frac{3}{4} \cdot 24 \stackrel{?}{=} 18$ | |
| Einfaldið. | $18 = 18 \checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.45**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Tveir fimmtu hlutar af $f$ eru 16.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.46**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Þrír fjórðu hlutar af $f$ eru 21.

**DÆMI 2.24**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Summan af þremur áttundu hlutum og $x$ er einn helmingur.

## Lausn

Byrjið á að setja setninguna fram sem jöfnu.

| | |
|---|---|
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | Summa þriggja áttundu hluta og $x$ er $\frac{1}{2}$<br>$\frac{3}{8} + x = \frac{1}{2}$ |
| Dragið $\frac{3}{8}$ frá báðum hliðum. | $\frac{3}{8}-\frac{3}{8} + x = \frac{1}{2}-\frac{3}{8}$ |
| Einfaldið og skrifið brotin með samnefnara. | $x = \frac{4}{8}-\frac{3}{8}$ |
| Einfaldið. | $x = \frac{1}{8}$ |
| Sannprófun: | Er summan af þremur áttundu hlutum og $x$ jöfn einum helmingi? |
| Látum $x=\frac{1}{8}$. | Er summan af þremur áttundu hlutum og einum áttunda hluta jöfn einum helmingi? |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4}{8}\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.47**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Summan af fimm áttundu hlutum og x er einn fjórði hluti.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.48**

Setjið fram sem jöfnu og leysið: Summan af þremur fjórðu hlutum og x er fimm sjöttu hlutar.

## Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau

Við leysum hagnýt verkefni með reglunum um að deila báðum hliðum jöfnu með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu og fylgjum sömu skrefum og í síðasta hluta. Við endursegjum verkefnið í einni setningu, skilgreinum breytu og setjum síðan setninguna fram sem jöfnu sem við leysum.

**DÆMI 2.25**

Denae keypti 6 pund af vínberjum fyrir $10,74. Hvað kostaði hvert pund af vínberjum?

## Lausn

Tafla 2.3

| | |
|---|---|
| Hvað eigið þið að finna? | Verð á 1 pundi af vínberjum |
| Skilgreinið breytu. | Látum $c$ = verð á einu pundi. |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Verðið á 6 pundum er $10,74. |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $6c = 10,74$ |
| Leysið. | $\frac{6c}{6} = \frac{10,74}{6}$<br>$c = 1,79$ |
| | Vínberin kosta $1,79 á pundið. |
| Sannprófun: Ef eitt pund kostar $1,79, kosta þá 6 pund 10,74 dollara?<br>$6(1,79) \stackrel{?}{=} 10,74$<br>$10,74 = 10,74 \checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.49**

Setjið fram sem jöfnu og leysið:

Arianna keypti pakka með 24 vatnsflöskum fyrir $9,36. Hvað kostaði hver vatnsflaska?

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.50**

Setjið fram sem jöfnu og leysið:

Í keiluhöll JB geta 6 manns spilað á einni braut fyrir $34,98. Hvað kostar á mann?

**DÆMI 2.26**

Andreas keypti notaðan bíl fyrir $12.000. Bíllinn var 4 ára og því var verðið $\frac{3}{4}$ af upphaflegu verði hans þegar hann var nýr. Hvert var upphaflegt verð bílsins?

## Lausn

Tafla 2.4

| | |
|---|---|
| Hvað eigið þið að finna? | Upphaflegt verð bílsins |
| Skilgreinið breytu. | Látum $p$ = upphaflegt verð. |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | \$12.000 eru $\frac{3}{4}$ hlutar af upphaflega verðinu. |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $12.000=\frac{3}{4}p$ |
| Leysið. | $\frac{4}{3}(12.000)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}p$<br>$16.000=p$ |
| | Upphaflegt verð bílsins var \$16.000. |
| Sannprófun: Eru $\frac{3}{4}$ hlutar af \$16.000 jafnir \$12.000?<br>$\frac{3}{4}\cdot 16.000 \stackrel{?}{=} 12.000$<br>$12.000 = 12.000\checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.51**

Setjið fram sem jöfnu og leysið:

Árlegur fasteignaskattur af húsi Mehta-fjölskyldunnar er \$1.800 og er reiknaður sem $\frac{15}{1.000}$ af fasteignamati hússins. Hvert er fasteignamat þess?

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.52**

Setjið fram sem jöfnu og leysið:

Stella plantaði 14 bökkum af blómplöntum í $\frac{2}{3}$ af garðinum sínum. Hve marga bakka þyrfti hún til að fylla allan garðinn?

## Verkefni úr hluta 2.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu**

Leysið hverja jöfnu hér á eftir með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu. Sannreynið lausnina.

77.

$$8x = 56$$

78.

$$7p = 63$$

79.

$$-5c = 55$$

80.

$$-9x = -27$$

81.

$$-809 = 15y$$

82.

$$-731 = 19y$$

83.

$$-37p = -541$$

84.

$$-19m = -586$$

85.

$$0{,}25z = 3{,}25$$

86.

$$0{,}75a = 11{,}25$$

87.

$$-13x = 0$$

88.

$$24x = 0$$

89.

$$\frac{x}{4} = 35$$

90.

$$\frac{z}{2}=54$$

91.

$$-20=\frac{q}{-5}$$

92.

$$\frac{c}{-3}=-12$$

93.

$$\frac{y}{9}=-16$$

94.

$$\frac{q}{6}=-38$$

95.

$$\frac{m}{-12}=45$$

96.

$$-24=\frac{p}{-20}$$

97.

$$-y=6$$

98.

$$-u=15$$

99.

$$-v=-72$$

100.

$$-x=-39$$

101.

$$\frac{2}{3}y=48$$

102.

$$\frac{3}{5}r=75$$

103.

$$-\frac{5}{8}w=40$$

104.

$$24=-\frac{3}{4}x$$

105.

$$-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}a$$

106.

$$-\frac{1}{3}q=-\frac{5}{6}$$

107.

$$-\frac{7}{10}x=-\frac{14}{3}$$

108.

$$\frac{3}{8}y=-\frac{1}{4}$$

109.

$$\frac{7}{12}=-\frac{3}{4}p$$

110.

$$\frac{11}{18}=-\frac{5}{6}q$$

111.

$$-\frac{5}{18}=-\frac{10}{9}u$$

112.

$$-\frac{7}{20}=-\frac{7}{4}v$$

### Leysið jöfnur sem þarf að einfalda

Leysið hverja jöfnu hér á eftir. Einfaldið hana fyrst.

113.

$$100-16=4p-10p-p$$

114.

$$-18-7=5t-9t-6t$$

115.

$$\frac{7}{8}n-\frac{3}{4}n=9+2$$

116.

$$\frac{5}{12}q+\frac{1}{2}q=25-3$$

117.

$$0{,}25d+0{,}10d=6-0{,}75$$

118.

$$0{,}05p-0{,}01p=2+0{,}24$$

119.

$$-10(q-4)-57=93$$

120.

$$-12(d-5)-29=43$$

121.

$$-10(x+4)-19=85$$

122.

$$-15(z+9)-11=75$$

### Blandaðar æfingar

Leysið hverja jöfnu hér á eftir.

123.

$$\frac{9}{10}x=90$$

124.

$$\frac{5}{12}y=60$$

125.

$$y+46=55$$

126.

$$x+33=41$$



127.

$$\frac{w}{-2}=99$$

128.

$$\frac{s}{-3}=-60$$

129.

$$27=6a$$

130.

$$-a=7$$

131.

$$-x=2$$

132.

$$z-16=-59$$

133.

$$m-41=-14$$

134.

$$0{,}04r=52{,}60$$

135.

$$63{,}90=0{,}03p$$

136.

$$-15x=-120$$

137.

$$84=-12z$$

138.

$$19{,}36 = x - 0{,}2\,x$$

139.

$$c - 0{,}3\,c = 35{,}70$$

140.

$$-y = -9$$

141.

$$-x = -8$$

**Setjið orðalag fram sem jöfnu og leysið hana**

Setjið hverja setningu hér á eftir fram sem jöfnu og leysið hana síðan.

**142.** 187 er margfeldið af $-17$ og m.

**143.** 133 er margfeldið af $-19$ og n.

**144.** $-184$ er margfeldið af 23 og p.

**145.** $-152$ er margfeldið af 8 og q.

**146.** *u deilt með 7 er jafnt og* $-49$.

**147.** *r deilt með 12 er jafnt og* $-48$.

**148.** *h deilt með* $-13$ er jafnt og $-65$.

**149.** *j deilt með* $-20$ er jafnt og $-80$.

**150.** Kvótinn af $c$ og $-19$ er 38.

**151.** Kvótinn af $b$ og $-6$ er 18.

**152.** Kvótinn af $h$ og 26 er $-52$.

**153.** Kvótinn af $k$ og 22 er $-66$.

**154.** Fimm sjöttu hlutar af y eru 15.

**155.** Þrír tíundu hlutar af x eru 15.

**156.** Fjórir þriðju hlutar af w eru 36.

**157.** Fimm helmingar af v eru 50.

**158.** Summan af níu tíundu hlutum og g er tveir þriðju hlutar.

**159.** Summan af tveimur fimmtu hlutum og f er einn helmingur.

**160.** Mismunurinn á p og eins sjötta hluta er tveir þriðju hlutar.

**161.** Mismunurinn á q og eins áttunda hluta er þrír fjórðu hlutar.

**Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau**
Setjið hvert verkefni hér á eftir fram sem jöfnu og leysið hana.

**162.** **Leikskóli** Í leikskólabekk Connie eru 24 börn. Hún vill skipta þeim í 4 jafnstóra hópa. Hve mörg börn verða í hverjum hópi?

**163.** **Blöðrur** Ramona keypti 18 blöðrur fyrir veislu. Hún vill skipta þeim í 3 jafnstóra knippi. Hve margar blöðrur verða í hverju knippi?



**164.** **Miðar** Mollie greiddi $36,25 fyrir 5 bíómiða. Hvað kostaði hver miði?

**165.** **Innkaup** Serena greiddi $12,96 fyrir pakka með 12 pörum af íþróttasokkum. Hvað kostaði hvert par?

**166.** **Saumaskapur** Nancy notaði 14 jarda af efni til að sauma fána fyrir þriðjung skrúðgönguliðs. Hve mikið efni þyrfti hún í fána fyrir allt liðið?

**167.** **Eldsneytisnýting** Jeppinn hans Johns ekur 18 mílur á hverju galloni. Það er helmingur þeirrar vegalengdar sem tvinnbíll eiginkonu hans ekur á hverju galloni. Hve margar mílur ekur tvinnbíllinn á hverju galloni?

**168.** **Hæð Aiden er 27 tommur á hæð. Hæð hans er** $\frac{3}{8}$ af hæð föður hans. Hve hár er faðirinn?

**169.** **Fasteignasala** Bea fékk $11.700 í sölulaun fyrir að selja hús, reiknuð sem $\frac{6}{100}$ af söluverðinu. Hvert var söluverð hússins?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**170.** **Sölulaun** Í hverri viku fær Perry $150 auk 12% af heildarsölu sinni umfram $1.250. Leysið jöfnuna $840 = 150 + 0{,}12(a - 1250)$ fyrir atil að finna hve miklu Perry þarf að selja fyrir til að fá $840 í laun eina vikuna.

**171.** **Frímerki** Travis keypti 49 senta og 21 senta frímerki fyrir samtals $9,45. Frímerkin sem kostuðu 21 sent voru 5 færri en þau sem kostuðu 49 sent. Leysið jöfnuna $0{,}49s + 0{,}21(s - 5) = 9{,}45$ fyrir s til að finna fjölda 49 senta frímerkja sem Travis keypti.

### *Ritunarverkefni*

**172.** Frida byrjaði að leysa jöfnuna $-3x = 36$ með því að leggja 3 við báðar hliðar. Útskýrið hvers vegna aðferð hennar leysir ekki jöfnuna.

**173.** Emiliano telur að $x = 40$ sé lausn jöfnunnar $\frac{1}{2}x = 80$. Útskýrið hvers vegna það er rangt.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Að verkefnunum loknum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve góðum tökum þið hafið náð á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Án aðstoðar | Með nokkurri aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst jöfnur með því að margfalda eða deila báðum hliðum með sömu tölu. | | | |
| leyst jöfnur sem þarf að einfalda. | | | |
| sett upp jöfnu út frá texta og leyst hana. | | | |
| sett upp og leyst orðadæmi. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um hve góðum tökum þið hafið náð á efni hlutans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?



# 2.3 Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Leyst jöfnu með föstum á báðum hliðum
- Leyst jöfnu með breytum á báðum hliðum
- Leyst jöfnu með breytum og föstum á báðum hliðum

**UNDIRBÚNINGUR 2.7**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $4y-9+9$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.129.

## Leysið jöfnur með föstum á báðum hliðum

Í öllum jöfnunum sem við höfum leyst hingað til hafa allir breytuliðirnir verið öðrum megin en föstu liðirnir hinum megin. Svo er þó ekki alltaf. Nú lærum við að leysa jöfnur þar sem breytuliðir, fastir liðir eða hvorir tveggja eru á báðum hliðum jöfnunnar.

Aðferðin felst í að velja aðra hlið jöfnunnar sem „breytuhlið“ og hina sem „fastahlið“. Síðan notum við frádráttar- og samlagningarreglur jafnaðar til að færa alla breytuliði öðrum megin og alla fasta liði hinum megin.

Þannig umbreytum við jöfnu sem hefur breytuliði og fasta liði á báðum hliðum í jöfnu á forminu $ax=b$. Við kunnum þegar að leysa jöfnur af þessu formi með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu.

**DÆMI 2.27**

Leysið: $7x+8=-13$.

## Lausn

Í þessari jöfnu er breytan aðeins vinstra megin. Því er eðlilegt að kalla vinstri hliðina „breytuhlið“. Hægri hliðin verður þá „fastahlið“. Við skrifum heitin fyrir ofan jöfnuna til að minna okkur á hvað á að vera hvorum megin.

$$\overset{\text{breyta}}{7x+8}=\overset{\text{fasti}}{-13}$$

2

Vinstri hliðin er „$x$“-hliðin, eða breytuhliðin, og því er 8 á röngum stað. Við þurfum að snúa samlagningunni við með því að draga 8 frá. Til að hliðar jöfnunnar verði áfram jafnar verðum við að draga 8 frá báðum hliðum.

| | |
|---|---|
| | $\overset{\text{breyta}}{7x+8}=\overset{\text{fasti}}{-13}$ |
| Notið frádráttarreglu jafnaðar. | $7x+8-8=-13-8$ |
| Einfaldið. | $7x=-21$ |
| Nú eru allar breyturnar vinstra megin og fasti liðurinn hægra megin. Jafnan er nú eins og jöfnurnar sem þið lærðuð áður að leysa. | |
| Deilið báðum hliðum með sömu tölu. | $\frac{7x}{7}=\frac{-21}{7}$ |
| Einfaldið. | $x=-3$ |
| Sannprófun: | $7x+8=-13$ |
| Látum $x=-3$. | $7(-3)+8\stackrel{?}{=}-13$ |
| | $-21+8\stackrel{?}{=}-13$ |
| | $-13=-13\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.53**

Leysið: $3x+4=-8$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.54**

Leysið: $5a+3=-37$.

**DÆMI 2.28**

Leysið: $8y-9=31$.

## Lausn

Takið eftir að breytan er aðeins vinstra megin í jöfnunni. Við köllum því þá hlið „breytuhlið“ og þá hægri „fastahlið“. Vinstri hliðin er breytuhlið og því er 9 á röngum stað. Það er dregið

frá $8y$, svo til að snúa frádrættinum við leggjum við 9 við báðar hliðar. Munið að það sem þið gerið vinstra megin verðið þið líka að gera hægra megin.

| | |
|---|---|
| | breyta fasti<br>$8y - 9 = 31$ |
| Leggið 9 við báðar hliðar. | $8y - 9 + 9 = 31 + 9$ |
| Einfaldið. | $8y = 40$ |
| | Breyturnar eru nú öðrum megin og föstu liðirnir hinum megin. Héðan höldum við áfram eins og áður. |
| Deilið báðum hliðum með 8. | $\frac{8y}{8} = \frac{40}{8}$ |
| Einfaldið. | $y = 5$ |

| | |
|---|---|
| Sannprófun: | $8y - 9 = 31$ |
| Látum $y = 5$. | $8 \cdot 5 - 9 \stackrel{?}{=} 31$ |
| | $40 - 9 \stackrel{?}{=} 31$ |
| | $31 = 31$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.55**

Leysið: $5y - 9 = 16$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.56**

Leysið: $3m - 8 = 19$.

## Leysið jöfnur með breytum á báðum hliðum

Hvað gerum við ef breytur eru á báðum hliðum jöfnunnar? Byrjið eins og hér að framan: veljið „breytuhlið“ og „fastahlið“ og notið síðan frádráttar- og samlagningarreglur jafnaðar til að færa alla breytuliði öðrum megin og alla fasta liði hinum megin.

**DÆMI 2.29**

Leysið: $9x = 8x - 6$.

### Lausn

Hér er breytan báðum megin en föstu liðirnir aðeins hægra megin. Við veljum því hægri hliðina sem „fastahlið“. Vinstri hliðin verður þá „breytuhlið“.

| | |
|---|---|
| | breyta fasti<br>$9x = 8x - 6$ |
| Við viljum enga $x$-liði hægra megin, svo við drögum $8x$ frá báðum hliðum. | $9x - 8x = 8x - 8x - 6$ |
| Einfaldið. | $x = -6$ |
| Nú eru breyturnar öðrum megin og föstu liðirnir hinum megin og við höfum fundið lausnina. | |
| Sannprófun: | $9x = 8x - 6$ |
| Látum $x = -6$. | $9(-6) \stackrel{?}{=} 8(-6) - 6$ |
| | $-54 \stackrel{?}{=} -48 - 6$ |
| | $-54 = -54$ ✓ |

2

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.57**

Leysið: $6n = 5n - 10$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.58**

Leysið: $-6c = -7c - 1$.

**DÆMI 2.30**

Leysið: $5y - 9 = 8y$.

## Lausn

Eini fasti liðurinn er vinstra megin en $y$-liðirnir eru báðum megin. Látum fasta liðinn vera áfram vinstra megin og færum breyturnar til hægri.

| | |
|---|---|
| | fasti liðurinn breyta<br>$5y - 9 = 8y$ |
| Dragið $5y$ frá báðum hliðum. | $5y - 5y - 9 = 8y - 5y$ |
| Einfaldið. | $-9 = 3y$ |
| Nú eru y-liðirnir hægra megin og föstu liðirnir vinstra megin. Deilið báðum hliðum með 3. | $\frac{-9}{3} = \frac{3y}{3}$ |
| Einfaldið. | $-3 = y$ |
| Sannprófun: | $5y - 9 = 8y$ |
| Látum $y = -3$. | $5(-3) - 9 \stackrel{?}{=} 8(-3)$ |
| | $-15 - 9 \stackrel{?}{=} -24$ |
| | $-24 = -24$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.59**

Leysið: $3p-14=5p$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.60**

Leysið: $8m+9=5m$.



**DÆMI 2.31**

Leysið: $12x=-x+26$.

### Lausn

Eini fasti liðurinn er hægra megin, svo við veljum vinstri hliðina sem „breytuhlið“.

| | breyta fasti<br>$12x = -x + 26$ |
|---|---|
| Fjarlægið $-x$ frá hægri hliðinni með því að leggja $x$ við báðar hliðar. | $12x + x = -x + x + 26$ |
| Einfaldið. | $13x = 26$ |
| Allir $x$-liðirnir eru vinstra megin og föstu liðirnir hægra megin. Deilið báðum hliðum með 13. | $\frac{13x}{13} = \frac{26}{13}$ |
| Einfaldið. | $x = 2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.61**

Leysið: $12j=-4j+32$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.62**

Leysið: $8h=-4h+12$.

## Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum

Næsta dæmi er það fyrsta þar sem bæði breytuliðir og fastir liðir eru á báðum hliðum jöfnunnar. Það getur tekið nokkur skref að leysa hana og því þurfum við skýra og skipulega aðferð.

**DÆMI 2.32**

### Aðferð til að leysa jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum

Leysið: $7x+5=6x+2$.

2

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Veljið hvor hliðin verður „breytuhliðin“—hin hliðin verður „fastahliðin“. | Breytuliðirnir eru $7x$ og $6x$. Þar sem 7 er stærra en 6 látum við vinstri hliðina vera „x-hliðina“. Hægri hliðin verður „fastahliðin“. | breyta fasti<br>$7x + 5 = 6x + 2$ |
| **Skref 2.** Safnið breytuliðunum á „breytuhlið“ jöfnunnar með samlagningar- eða frádráttareiginleika jafna. | Þar sem hægri hliðin er „fastahliðin“ er $6x$ á rangri hlið. Dragið því $6x$ frá báðum hliðum.<br><br>Sameinið samkynja liði.<br><br>Nú er breytan aðeins vinstra megin! | $7x - 6x + 5 = 6x - 6x + 2$<br><br>$x + 5 = 2$ |
| **Skref 3.** Færið alla fasta yfir á hina hlið jöfnunnar með því að nota samlagningar- eða frádráttareiginleika jafnaðar. | Hægri hliðin er hlið „fastanna“ og því er talan 5 ekki á réttum stað. Dragið 5 frá báðum hliðum.<br><br>Einfaldið. | $x + 5 - 5 = 2 - 5$<br><br>$x = -3$ |
| **Skref 4.** Gerið stuðul breytunnar jafnan 1 með því að nota margföldunar- eða deilingareiginleika jafna. | Stuðull $x$ er einn. Jafnan er leyst. | |
| **Skref 5.** Athugið. | Látum $x = -3$<br><br>Einfaldið.<br><br>Leggið saman. | **Athugun:**<br>$7x + 6 = 6x + 2$<br>$(-3) + 5 = 6(-3) + 2$<br>$-21 + 5 = -18 + 2$<br>$-16 = -16$ ✓ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.63**

Leysið: $12x + 8 = 6x + 2$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.64**

Leysið: $9y + 4 = 7y + 12$.

Við skráum skrefin hér á eftir svo auðvelt sé að vísa í þau. Við köllum þetta þó „upphafsaðferðina“ því síðar í kaflanum bætum við við fleiri skrefum.

---

**AÐFERÐ**

### Upphafleg aðferð til að leysa jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum jöfnunnar

1. Skref 1. Veljið hvor hliðin verður breytuhlið; hin verður fastahlið.
2. Skref 2. Safnið breytuliðunum á breytuhlið jöfnunnar með samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.

3. Skref 3. Safnið öllum föstum liðum hinum megin í jöfnunni með samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.
4. Skref 4. Gerið stuðul breytunnar jafnan 1 með því að margfalda báðar hliðar með sömu tölu eða deila þeim með sömu tölu sem er ekki núll.
5. Skref 5. Sannreynið lausnina með því að setja hana inn í upphaflegu jöfnuna.

Í skrefi 1 er gott að velja sem breytuhlið þá hlið þar sem breytan hefur stærri stuðul. Það auðveldar yfirleitt reikningana.



**DÆMI 2.33**

Leysið: $8n-4=-2n+6$.

## Lausn

Veljið breytuhlið í fyrsta skrefinu með því að bera saman stuðla breytuliðanna á báðum hliðum.

| | |
|---|---|
| Þar sem $8>-2$ veljum við vinstri hliðina sem breytuhlið. | $\overset{\text{breyta}}{8n} - 4 = \overset{\text{fasti}}{-2n+6}$ |
| Við viljum enga breytuliði hægra megin. Leggið $2n$ við báðar hliðar svo aðeins fastir liðir verði eftir hægra megin. | $8n+2n-4=-2n+2n+6$ |
| Sameinið samkynja liði. | $10n-4=6$ |
| Við viljum enga fasta liði vinstra megin, svo leggið $4$ við báðar hliðar. | $10n-4+4=6+4$ |
| Einfaldið. | $10n=10$ |
| Breytuliðurinn er vinstra megin og fasti liðurinn hægra megin. Til að gera stuðul $n$ jafnan einum deilum við báðum hliðum með 10. | $\frac{10n}{10}=\frac{10}{10}$ |
| Einfaldið. | $n=1$ |
| Sannprófun: | $8n-4=-2n+6$ |
| Látum $n=1$. | $8\cdot 1-4\overset{?}{=}-2\cdot 1+6$ |
| | $8-4\overset{?}{=}-2+6$ |
| | $4=4\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.65**

Leysið: $8q-5=-4q+7$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.66**

Leysið: $7n-3=n+3$.

**DÆMI 2.34**

Leysið: $7a-3=13a+7$.

## Lausn

Veljið breytuhlið í fyrsta skrefinu með því að bera saman stuðla breytuliðanna á báðum hliðum.

Þar sem $13>7$ veljum við hægri hliðina sem breytuhlið og vinstri hliðina sem fastahlið.

| | fasti breyta<br>$7a-3=13a+7$ |
|---|---|
| Dragið $7a$ frá báðum hliðum til að fjarlægja breytuliðinn vinstra megin. | $7a-7a-3=13a-7a+7$ |
| Sameinið samkynja liði. | $-3=6a+7$ |
| Dragið $7$ frá báðum hliðum til að fjarlægja fasta liðinn hægra megin. | $-3-7=6a+7-7$ |
| Einfaldið. | $-10=6a$ |
| Deilið báðum hliðum með $6$ til að gera $1$ að stuðli $a$. | $\frac{-10}{6}=\frac{6a}{6}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{5}{3}=a$ |
| Sannprófun: | $7a-3=13a+7$ |
| Látum $a=-\frac{5}{3}$. | $7\left(-\frac{5}{3}\right)-3\stackrel{?}{=}13\left(-\frac{5}{3}\right)+7$ |
| | $-\frac{35}{3}-\frac{9}{3}\stackrel{?}{=}-\frac{65}{3}+\frac{21}{3}$ |
| | $-\frac{44}{3}=-\frac{44}{3}$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.67**

Leysið: $2a-2=6a+18$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.68**

Leysið: $4k-1=7k+17$.

Í síðasta dæmi hefðum við getað valið vinstri hliðina sem breytuhlið en þá hefði breytuliðurinn fengið neikvæðan stuðul. Prófið það! Við getum unnið með neikvæðan stuðul en við gerum síður villur þegar stuðlarnir eru jákvæðir. Aðferðin hér að framan hjálpar okkur að forðast neikvæða stuðla.

Til að leysa jöfnu með brotum fylgjum við einfaldlega skrefum aðferðarinnar þar til lausnin fæst.

**DÆMI 2.35**

Leysið: $\frac{5}{4}x+6=\frac{1}{4}x-2$.

## Lausn

Þar sem $\frac{5}{4}>\frac{1}{4}$ veljum við vinstri hliðina sem breytuhlið og hægri hliðina sem fastahlið.

| | breyta fasti<br>$\frac{5}{4}x+6=\frac{1}{4}x-2$ |
|---|---|
| Dragið $\frac{1}{4}x$ frá báðum hliðum. | $\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}x+6=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x-2$ |
| Sameinið samkynja liði. | $x+6=-2$ |
| Dragið $6$ frá báðum hliðum. | $x+6-6=-2-6$ |
| Einfaldið. | $x=-8$ |

Sannprófun: $\frac{5}{4}x+6$

$=\ \frac{1}{4}x-2$

Látum $x=-8$. $\frac{5}{4}(-8)+6 \stackrel{?}{=}$

$\frac{1}{4}(-8)-2$

$-10+6$

$\stackrel{?}{=}-2-2$

$-4=-4\checkmark$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.69**

Leysið: $\frac{7}{8}x-12=-\frac{1}{8}x-2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.70**

Leysið: $\frac{7}{6}y+11=\frac{1}{6}y+8$.

Við notum sömu aðferð til að finna lausn jöfnu með tugabrotum.

**DÆMI 2.36**

Leysið: $7{,}8x+4=5{,}4x-8$.

### Lausn

Þar sem $7{,}8 > 5{,}4$ veljum við vinstri hliðina sem breytuhlið og hægri hliðina sem fastahlið.

| | breytuhlið fastahlið<br>$7{,}8x + 4 = 5{,}4x - 8$ |
|---|---|
| Dragið $5{,}4\,x$ frá báðum hliðum. | $7{,}8x - 5{,}4x + 4 = 5{,}4x - 5{,}4x - 8$ |
| Sameinið samkynja liði. | $2{,}4x + 4 = -8$ |
| Dragið $4$ frá báðum hliðum. | $2{,}4x + 4 - 4 = -8 - 4$ |
| Einfaldið. | $2{,}4x = -12$ |
| Deilið báðum hliðum með sömu tölu. | $\frac{2{,}4x}{2{,}4} = \frac{-12}{2{,}4}$ |
| Einfaldið. | $x = -5$ |
| Sannprófun: | $7{,}8x + 4 = 5{,}4x - 5$ |
| Látum $x = -5$. | $7{,}8(-5) + 4 = 5{,}4(-5) - 8$ |
| | $-39 + 4 \stackrel{?}{=} -27 - 8$ |
| | $-35 = -35$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.71**

Leysið: $2{,}8\,x + 12 = -1{,}4\,x - 9$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.72**

Leysið: $3{,}6\,y + 8 = 1{,}2\,y - 4$.

## Verkefni úr hluta 2.3

### *Æfingin skapar meistarann*

**Leysið jöfnur með föstum á báðum hliðum**

Leysið þessar jöfnur með föstum á báðum hliðum.

174.

$$9\,x - 3 = 60$$

175.

$$12\,x - 8 = 64$$

176.

$$14\,w + 5 = 117$$

177.

$$15y+7=97$$

178.

$$2a+8=-28$$

179.

$$3m+9=-15$$

180.

$$-62=8n-6$$

181.

$$-77=9b-5$$

182.

$$35=-13y+9$$

183.

$$60=-21x-24$$

184.

$$-12p-9=9$$

185.

$$-14q-2=16$$

**Leysið jöfnur með breytum á báðum hliðum**

Leysið þessar jöfnur með breytum á báðum hliðum.

186.

$$19z=18z-7$$

187.

$$21k=20k-11$$

188.

$$9x+36=15x$$

189.

$$8x+27=11x$$

190.

$$c=-3c-20$$

191.

$$b=-4b-15$$

192.

$$9q=44-2q$$

193.

$$5z=39-8z$$

194.

$$6y+\frac{1}{2}=5y$$

195.

$$4x+\frac{3}{4}=3x$$

196.

$$-18a-8=-22a$$

197.

$$-11r-8=-7r$$

**Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum**

Leysið þessar jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum.

198.

$$8x-15=7x+3$$

199.

$$6x-17=5x+2$$

200.

$$26+13d=14d+11$$

201.

$$21+18f=19f+14$$

202.

$$2p-1=4p-33$$

203.

$$12q-5=9q-20$$

204.

$$4a+5=-a-40$$

205.

$$8c+7=-3c-37$$

206.

$$5y-30=-5y+30$$

207.

$$7x-17=-8x+13$$

208.

$$7s+12=5+4s$$

209.

$$9p+14=6+4p$$

210.

$$2z-6=23-z$$

211.

$$3y-4=12-y$$

212.

$$\frac{5}{3}c-3=\frac{2}{3}c-16$$

213.

$$\frac{7}{4}m-7=\frac{3}{4}m-13$$

214.

$$8-\frac{2}{5}q=\frac{3}{5}q+6$$

215.

$$11-\frac{1}{5}a=\frac{4}{5}a+4$$

216.

$$\frac{4}{3}n+9=\frac{1}{3}n-9$$

217.

$$\frac{5}{4}a+15=\frac{3}{4}a-5$$



218.

$$\frac{1}{4}y+7=\frac{3}{4}y-3$$

219.

$$\frac{3}{5}p+2=\frac{4}{5}p-1$$

220.

$$14\,n+8{,}25=9\,n+19{,}60$$

221.

$$13\,z+6{,}45=8\,z+23{,}75$$

222.

$$2{,}4\,w-100=0{,}8\,w+28$$

223.

$$2{,}7\,w-80=1{,}2\,w+10$$

224.

$$5{,}6\,r+13{,}1=3{,}5\,r+57{,}2$$

225.

$$6{,}6\,x-18{,}9=3{,}4\,x+54{,}7$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**226.** **Tónleikamiðar** Á skólatónleikum seldust miðar fyrir samtals $1.506. Nemendamiðar kostuðu $6 og fullorðinsmiðar $9. Fjöldi seldra fullorðinsmiða var 5 minni en 3 sinnum fjöldi nemendamiða. Finnið fjölda seldra nemendamiða, s, með því að leysa jöfnuna $6\,s+27\,s-45=1506$.

**227.** **Girðing** Jovani á 150 fet af girðingarefni og ætlar að girða af rétthyrndan garð í bakgarðinum sínum. Hann vill að lengdin sé 15 fetum meiri en breiddin. Finnið breiddina, w, með því að leysa jöfnuna $150=2\,w+30+2\,w$.

### *Ritunarverkefni*

**228.** Leysið jöfnuna $\frac{6}{5}y-8=\frac{1}{5}y+7$ og útskýrið öll skref lausnarinnar eins og gert er í dæmunum í þessum hluta.

**229.** Leysið jöfnuna $10x+14=-2x+38$ og útskýrið öll skref lausnarinnar eins og gert er í dæmunum í þessum hluta.

**230.** Þegar þið leysið jöfnu með breytum á báðum hliðum, hvers vegna er þá yfirleitt betra að velja sem breytuhlið þá hlið þar sem stuðull $x$ er stærri?

**231.** Er $x=-2$ lausn jöfnunnar $5-2x=-4x+1$? Hvernig vitið þið það?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Að verkefnunum loknum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve góðum tökum þið hafið náð á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst jöfnu með föstum á báðum hliðum. | | | |
| leyst jöfnu með breytum á báðum hliðum. | | | |
| leyst jöfnu með breytum og föstum á báðum hliðum. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um hve góðum tökum þið hafið náð á efni hlutans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?

## 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Leyst jöfnur með almennri aðferð
- Flokkið jöfnur

**UNDIRBÚNINGUR 2.8**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $-(a-4)$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.137.

**UNDIRBÚNINGUR 2.9**

Margfaldið: $\frac{3}{2}(12x+20)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.133.

**UNDIRBÚNINGUR 2.10**

Einfaldið: $5-2(n+1)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.138.

**UNDIRBÚNINGUR 2.11**

Margfaldið: $3(7y+9)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.132.

**UNDIRBÚNINGUR 2.12**

Margfaldið: $(2{,}5)(6{,}4)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.97.

## Leysið jöfnur með almennri aðferð

Hingað til höfum við leyst eina tiltekna gerð línulegra jafna í einu. Nú setjum við fram eina almenna aðferð sem nota má til að leysa hvaða línulega jöfnu sem er. Sumar jöfnur þurfa ekki öll skrefin en margar þurfa þau.

Ef við byrjum á að einfalda hvora hlið jöfnunnar verða næstu skref auðveldari.

**DÆMI 2.37**

### Hvernig leysa má línulegar jöfnur með almennri aðferð

Leysið: $-6(x+3)=24$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **1. skref.** Einfaldið hvora hlið jöfnunnar eins mikið og unnt og er. | Beitið dreifireglunni.<br>Athugið að hvor hlið jöfnunnar er einfölduð eins mikið og unnt er. | $-6(x+3)=24$<br>$-6x-18=24$ |
| **Skref 2.** Safnið öllum breytuliðum öðrum megin í jöfnunni. | Ekkert þarf að gera – öll $x$-in eru vinstra megin. | |
| **3. skref.** Safnið fastaliðunum saman hinum megin við jöfnuna. | Til að hafa fastaliðina eingöngu hægra megin skal bæta 18 við báðar hliðar.<br>Einfaldið. | $-6x-18+18=24+18$<br>$-6x=42$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Gerið stuðul breytuliðarins jafnan 1. | Deilið báðum hliðum með −6. | $\frac{-6x}{-6} = \frac{42}{-6}$ |
| | Einfaldið. | $x = -7$ |
| **Skref 5.** Athugið lausnina. | Látum $x = -7$ | **Athugun:** |
| | | $-6(x + 3) = 24$ |
| | Einfaldið. | $-6(-7 + 3) \stackrel{?}{=} 24$ |
| | Margfaldið. | $-6(-4) \stackrel{?}{=} 24$ |
| | | $24 = 24$ ✓ |



**PRÓFIÐ SJÁLF 2.73**

Leysið: $5(x+3)=35$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.74**

Leysið: $6(y-4)=-18$.

**AÐFERÐ**

## Almenn aðferð til að leysa línulegar jöfnur

1. Skref 1. Einfaldið hvora hlið jöfnunnar eins mikið og hægt er. Notið dreifiregluna til að losna við sviga. Sameinið samkynja liði.

2. Skref 2. Færið alla breytuliði öðrum megin í jöfnunni. Beitið samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.

3. Skref 3. Færið alla fasta liði á hina hlið jöfnunnar. Beitið samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.

4. Skref 4. Gerið stuðul breytuliðarins jafnan 1. Margfaldið báðar hliðar með sömu tölu eða deilið þeim með sömu tölu sem er ekki núll. Tilgreinið lausn jöfnunnar.

5. Skref 5. Sannreynið lausnina. Setjið lausnina inn í upphaflegu jöfnuna til að ganga úr skugga um að niðurstaðan sé sönn fullyrðing.

**DÆMI 2.38**

Leysið: $-(y+9)=8$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-(y+9)=8$ |
| Einfaldið hvora hlið jöfnunnar eins mikið og hægt er með því að dreifa inn í sviga. | $-y-9=8$ |
| Eini $y$-liðurinn er vinstra megin, svo allir breytuliðir eru vinstra megin í jöfnunni. | |
| Leggið $9$ við báðar hliðar til að færa alla fasta liði hægra megin í jöfnunni. | $-y-9+9=8+9$ |
| Einfaldið. | $-y=17$ |
| Endurritið $-y$ sem $-1y$. | $-1y=17$ |
| Gerið stuðul breytuliðarins jafnan $1$ með því að deila báðum hliðum með $-1$. | $\frac{-1y}{-1}=\frac{17}{-1}$ |
| Einfaldið. | $y=-17$ |

Sannprófun: Látum $y=-17$.

$$-(y+9)=8$$
$$-(-17+9)\stackrel{?}{=}8$$
$$-(-8)\stackrel{?}{=}8$$
$$8=8\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.75**

Leysið: $-(y+8)=-2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.76**

Leysið: $-(z+4)=-12$.

**DÆMI 2.39**

Leysið: $5(a-3)+5=-10$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $5(a-3)+5=-10$ |
| Einfaldið hvora hlið jöfnunnar eins mikið og hægt er. | |
| Beitið dreifireglu. | $5a-15+5=-10$ |
| Sameinið samkynja liði. | $5a-10=-10$ |
| Eini $a$-liðurinn er vinstra megin, svo allir breytuliðir eru öðrum megin í jöfnunni. | |

| | |
|---|---|
| Leggið $10$ við báðar hliðar til að færa alla fasta liði á hina hlið jöfnunnar. | $5a-10+10=-10+10$ |
| Einfaldið. | $5a=0$ |
| Gerið stuðul breytuliðarins jafnan $1$ með því að deila báðum hliðum með $5$. | $\frac{5a}{5}=\frac{0}{5}$ |
| Einfaldið. | $a=0$ |
| Sannprófun: | $5(a-3)+5=-10$ |
| Látum $a=0$. | $5(0-3)+5\stackrel{?}{=}-10$ |
| | $5(-3)+5\stackrel{?}{=}-10$ |
| | $-15+5\stackrel{?}{=}-10$ |
| | $-10=-10$ ✓ |



**PRÓFIÐ SJÁLF 2.77**

Leysið: $2(m-4)+3=-1$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.78**

Leysið: $7(n-3)-8=-15$.

**DÆMI 2.40**

Leysið: $\frac{2}{3}(6m-3)=8-m$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2}{3}(6m-3)=8-m$ |
| Beitið dreifireglu. | $4m-2=8-m$ |
| Leggið $m$ við svo breyturnar verði aðeins vinstra megin. | $4m+m-2=8-m+m$ |
| Einfaldið. | $5m-2=8$ |
| Leggið $2$ við svo föstu liðirnir verði aðeins hægra megin. | $5m-2+2=8+2$ |
| Einfaldið. | $5m=10$ |
| Deilið með $5$. | $\frac{5m}{5}=\frac{10}{5}$ |
| Einfaldið. | $m=2$ |

Sannprófun:

$$\frac{2}{3}(6m-3)=8-m$$

Látum $m=2$.

$$\frac{2}{3}(6\cdot 2-3)\stackrel{?}{=}8-2$$

$$\frac{2}{3}(12-3)\stackrel{?}{=}6$$

$$\frac{2}{3}(9)\stackrel{?}{=}6$$

$$6=6\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.79**

Leysið: $\frac{1}{3}(6u+3)=7-u$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.80**

Leysið: $\frac{2}{3}(9x-12)=8+2x$.

**DÆMI 2.41**

Leysið: $8-2(3y+5)=0$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $8-2(3y+5)=0$ |
| Einfaldið með því að beita dreifireglunni. | $8-6y-10=0$ |
| Sameinið samkynja liði. | $-6y-2=0$ |
| Leggið $2$ við báðar hliðar til að færa föstu liðina hægra megin. | $-6y-2+2=0+2$ |

| | |
|---|---|
| Einfaldið. | $-6y = 2$ |
| Deilið báðum hliðum með $-6$. | $\frac{-6y}{-6} = \frac{2}{-6}$ |
| Einfaldið. | $y = -\frac{1}{3}$ |

Sannprófun: Látum $y = -\frac{1}{3}$.

$$8 - 2(3y + 5) = 0$$

$$8 - 2\left[3\left(-\frac{1}{3}\right) + 5\right] = 0$$

$$8 - 2(-1 + 5) \stackrel{?}{=} 0$$

$$8 - 2(4) \stackrel{?}{=} 0$$

$$8 - 8 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \checkmark$$



**PRÓFIÐ SJÁLF 2.81**

Leysið: $12 - 3(4j + 3) = -17$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.82**

Leysið: $-6 - 8(k - 2) = -10$.

**DÆMI 2.42**

Leysið: $4(x - 1) - 2 = 5(2x + 3) + 6$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $4(x - 1) - 2 = 5(2x + 3) + 6$ |
| Beitið dreifireglu. | $4x - 4 - 2 = 10x + 15 + 6$ |
| Sameinið samkynja liði. | $4x - 6 = 10x + 21$ |
| Dragið $4x$ frá svo breyturnar verði aðeins hægra megin, þar sem $10 > 4$. | $4x - 4x - 6 = 10x - 4x + 21$ |
| Einfaldið. | $-6 = 6x + 21$ |
| Dragið $21$ frá svo föstu liðirnir verði vinstra megin. | $-6 - 21 = 6x + 21 - 21$ |
| Einfaldið. | $-27 = 6x$ |
| Deilið með 6. | $\frac{-27}{6} = \frac{6x}{6}$ |

| | |
|---|---|
| Einfaldið. | $-\frac{9}{2}=x$ |
| Sannprófun: | $4(x-1)-2=5(2x+3)+6$ |
| Látum $x=-\frac{9}{2}$. | $4\left(-\frac{9}{2}-1\right)-2\stackrel{?}{=}5\left[2\left(-\frac{9}{2}\right)+3\right]+6$ |
| | $4\left(-\frac{11}{2}\right)-2\stackrel{?}{=}5(-9+3)+6$ |
| | $-22-2\stackrel{?}{=}5(-6)+6$ |
| | $-24\stackrel{?}{=}-30+6$ |
| | $-24=-24$ ✓ |

2

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.83**

Leysið: $6(p-3)-7=5(4p+3)-12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.84**

Leysið: $8(q+1)-5=3(2q-4)-1$.

**DÆMI 2.43**

Leysið: $10[3-8(2s-5)]=15(40-5s)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $10[3-8(2s-5)]=15(40-5s)$ |
| Einfaldið fyrst innan innstu sviganna. | $10[3-16s+40]=15(40-5s)$ |
| Sameinið samkynja liði innan hornklofanna. | $10[43-16s]=15(40-5s)$ |
| Beitið dreifireglu. | $430-160s=600-75s$ |
| Leggið $160s$ við svo s-liðirnir verði hægra megin. | $430-160s+160s=600-75s+160s$ |
| Einfaldið. | $430=600+85s$ |
| Dragið 600 frá svo föstu liðirnir verði vinstra megin. | $430-600=600+85s-600$ |
| Einfaldið. | $-170=85s$ |
| Deilið. | $\frac{-170}{85}=\frac{85s}{85}$ |
| Einfaldið. | $-2=s$ |
| Sannprófun: | $10[3-8(2s-5)]=15(40-5s)$ |
| Setjið inn $s=-2$. | $10[3-8(2(-2)-5)]\stackrel{?}{=}15(40-5(-2))$ |
| | $10[3-8(-4-5)]\stackrel{?}{=}15(40+10)$ |

$10[3-8(-9)] \stackrel{?}{=} 15(50)$

$10[3+72] \stackrel{?}{=} 750$

$10[75] \stackrel{?}{=} 750$

$750 = 750$ ✓



**PRÓFIÐ SJÁLF 2.85**

Leysið: $6\left[4-2\left(7y-1\right)\right]=8\left(13-8y\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.86**

Leysið: $12\left[1-5\left(4z-1\right)\right]=3\left(24+11z\right)$.

**DÆMI 2.44**

Leysið: $0{,}36\left(100n+5\right)=0{,}6\left(30n+15\right)$.

## Lausn

$0.36(100n + 5) = 0.6(30n + 15)$

| | |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $36n + 1{,}8 = 18n + 9$ |
| Dragið $18n$ frá svo breyturnar verði vinstra megin. | $36n - 18n + 1{,}8 = 18n - 18n + 9$ |
| Einfaldið. | $18n + 1{,}8 = 9$ |
| Dragið $1{,}8$ frá svo föstu liðirnir verði hægra megin. | $18n + 1{,}8 - 1{,}8 = 9 - 1{,}8$ |
| Einfaldið. | $18n = 7{,}2$ |
| Deilið. | $\frac{18n}{18} = \frac{7{,}2}{18}$ |
| Einfaldið. | $n = 0{,}4$ |
| Sannprófun: | $0{,}36(100n + 5) = 0{,}6(30n + 15)$ |
| Látum $n=0{,}4$. | $0{,}36(100(0{,}4) + 5) \stackrel{?}{=} 0{,}6(30(0{,}4) + 15)$ |
| | $0{,}36(40+5) \stackrel{?}{=} 0{,}6(12+15)$ |
| | $0{,}36(45) \stackrel{?}{=} 0{,}6(27)$ |
| | $16{,}2 = 16{,}2$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.87**

Leysið: $0{,}55\left(100n+8\right)=0{,}6\left(85n+14\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.88**

Leysið: $0{,}15(40m-120)=0{,}5(60m+12)$.

## Flokkið jöfnur



Skoðum jöfnuna $7x+8=-13$. Lausnin sem við fundum var $x=-3$. Það merkir að jafnan $7x+8=-13$ er sönn þegar breytunni x er skipt út fyrir gildið $-3$. Við sýndum þetta þegar við sannreyndum lausnina $x=-3$ og reiknuðum gildi $7x+8=-13$ fyrir $x=-3$.

$$\begin{aligned} 7(-3)+8 &\stackrel{?}{=} -13 \\ -21+8 &\stackrel{?}{=} -13 \\ -13 &= -13 \checkmark \end{aligned}$$

Ef við reiknum gildi $7x+8$ fyrir annað gildi x verður vinstri hliðin ekki $-13$.

Jafnan $7x+8=-13$ er sönn þegar breytunni x er skipt út fyrir gildið $-3$, en ekki þegar x er skipt út fyrir annað gildi. Hvort jafnan $7x+8=-13$ er sönn fer eftir gildi breytunnar. Slíkar jöfnur kallast skilyrtar jöfnur.

Allar jöfnurnar sem við höfum leyst hingað til eru skilyrtar jöfnur.

**SKILYRT JAFNA**

Jafna sem er sönn fyrir eitt eða fleiri gildi breytunnar en ósönn fyrir öll önnur gildi hennar kallast skilyrt jafna.

Skoðum nú jöfnuna $2y+6=2(y+3)$. Takið þið eftir því að vinstri og hægri hliðin eru jafngildar? Skoðum hvað gerist þegar við leysum fyrir y.

| | $2y+6=2(y+3)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $2y+6=2y+6$ |
| Dragið $2y$ frá til að færa $y$-liðunum öðrum megin. | $2y-2y+6=2y-2y+6$ |
| Einfaldið — $y$-liðirnir hverfa! | $6=6$ |

En $6=6$ er sönn fullyrðing.

Þetta merkir að jafnan $2y+6=2(y+3)$ er sönn fyrir hvaða gildi y sem er. Allar rauntölur eru því lausnir jöfnunnar. Jafna sem er sönn fyrir hvaða gildi breytunnar sem er kallast samsemd.

**SAMSEMD**

Jafna sem er sönn fyrir hvaða gildi breytunnar sem er kallast samsemd.

Lausnamengi samsemdar er mengi allra rauntalna.

Hvað gerist þegar við leysum jöfnuna $5z=5z-1$?

| | |
|---|---|
| | $5z = 5z - 1$ |
| Dragið $5z$ frá svo fasti liðurinn verði einn hægra megin. | $5z - 5z = 5z - 5z - 1$ |
| Einfaldið —$z$-liðirnir hverfa! | $0 \neq -1$ |

En $0 \neq -1$.

Þegar við leystum jöfnuna $5z = 5z - 1$ fengum við ósönnu fullyrðinguna $0 = -1$. Jafnan $5z = 5z - 1$ er ekki sönn fyrir neitt gildi z. Hún hefur enga lausn. Jafna sem hefur enga lausn, eða er ósönn fyrir öll gildi breytunnar, kallast mótsögn.



**MÓTSÖGN**

Jafna sem er ósönn fyrir öll gildi breytunnar kallast mótsögn.

Mótsögn hefur enga lausn.

**DÆMI 2.45**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn. Tilgreinið síðan lausnina.

$$6(2n-1)+3=2n-8+5(2n+1)$$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $6(2n-1)+3=2n-8+5(2n+1)$ |
| Beitið dreifireglu. | $12n-6+3=2n-8+10n+5$ |
| Sameinið samkynja liði. | $12n-3=12n-3$ |
| Dragið $12n$ frá til að færa $n$-liðunum öðrum megin. | $12n-12n-3=12n-12n-3$ |
| Einfaldið. | $-3=-3$ |
| Þetta er sönn fullyrðing. | Jafnan er samsemd. Allar rauntölur eru lausnir hennar. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.89**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina:

$$4+9(3x-7)=-42x-13+23(3x-2)$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.90**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina:

$$8(1-3x)+15(2x+7)=2(x+50)+4(x+3)+1$$

**DÆMI 2.46**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn. Tilgreinið síðan lausnina.

$$10+4(p-5)=0$$

## Lausn

2

| | $10+4(p-5)=0$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $10+4p-20=0$ |
| Sameinið samkynja liði. | $4p-10=0$ |
| Leggið $10$ við báðar hliðar. | $4p-10+10=0+10$ |
| Einfaldið. | $4p=10$ |
| Deilið. | $\frac{4p}{4}=\frac{10}{4}$ |
| Einfaldið. | $p=\frac{5}{2}$ |
| Jafnan er sönn þegar $p=\frac{5}{2}$. | Þetta er skilyrt jafna. Lausnin er $p=\frac{5}{2}$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.91**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina:
$11(q+3)-5=19$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.92**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina:
$6+14(k-8)=95$

**DÆMI 2.47**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn. Tilgreinið síðan lausnina.

$$5m+3(9+3m)=2(7m-11)$$

### Lausn

| | $5m + 3(9 + 3m) = 2(7m - 11)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $5m + 27 + 9m = 14m - 22$ |
| Sameinið samkynja liði. | $14m + 27 = 14m - 22$ |
| Dragið $14m$ frá báðum hliðum. | $14m + 27 - 14m = 14m - 22 - 14m$ |
| Einfaldið. | $27 \neq -22$ |
| En $27 \neq -22$. | Jafnan er mótsögn. Hún hefur enga lausn. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.93**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina:

$$12c+5(5+3c)=3(9c-4)$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.94**

Flokkið jöfnuna sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina:

$$4(7d+18)=13(3d-2)-11d$$

Tafla 2.5

| Tegund jöfnu | Hvað gerist þegar hún er leyst? | Lausn |
|---|---|---|
| **Skilyrt jafna** | Sönn fyrir eitt eða fleiri gildi breytunnar og ósönn fyrir öll önnur gildi | Eitt eða fleiri gildi |
| **Samsemd** | **Sönn fyrir hvaða gildi breytunnar sem er** | Allar rauntölur |
| **Mótsögn** | **Ósönn fyrir öll gildi breytunnar** | Engin lausn |

## Verkefni úr hluta 2.4

### *Æfingin skapar meistarann*

### Leysið línulegar jöfnur með almennri aðferð

Leysið hverja línulega jöfnu í verkefnunum hér á eftir.

232.

$$15(y-9)=-60$$

233.

$$21(y-5)=-42$$

234.

$$-9(2n+1)=36$$

235.

$$-16(3n+4)=32$$

236.

$$8(22+11r)=0$$

237.

$$5(8+6p)=0$$

238.

$$-(w-12)=30$$

239.

$$-(t-19)=28$$

240.

$$9(6a+8)+9=81$$

241.

$$8(9b-4)-12=100$$

242.

$$32+3(z+4)=41$$

243.

$$21+2(m-4)=25$$

244.

$$51+5(4-q)=56$$

245.

$$-6+6(5-k)=15$$

246.

$$2(9s-6)-62=16$$

247.

$$8(6t-5)-35=-27$$

248.

$$3(10-2x)+54=0$$

249.

$$-2(11-7x)+54=4$$

250.

$$\frac{2}{3}(9c-3)=22$$

251.

$$\frac{3}{5}(10x-5)=27$$

252.

$$\frac{1}{5}(15c+10)=c+7$$

253.

$$\frac{1}{4}(20d+12)=d+7$$

254.

$$18-(9r+7)=-16$$

255.

$$15-(3r+8)=28$$

256.

$$5-(n-1)=19$$

257.

$$-3-(m-1)=13$$

258.

$$11-4(y-8)=43$$

259.

$$18-2(y-3)=32$$

260.

$$24-8(3v+6)=0$$

261.

$$35-5(2w+8)=-10$$

262.

$$4(a-12)=3(a+5)$$

263.

$$-2(a-6)=4(a-3)$$

264.

$$2(5-u)=-3(2u+6)$$

265.

$$5(8-r)=-2(2r-16)$$

266.

$$3(4n-1)-2=8n+3$$

267.

$$9(2m-3)-8=4m+7$$

268.

$$12+2(5-3y)=-9(y-1)-2$$

269.

$$-15+4(2-5y)=-7(y-4)+4$$

270.

$$8(x-4)-7x=14$$

271.

$$5(x-4)-4x=14$$

272.

$$5+6(3s-5)=-3+2(8s-1)$$

273.

$$-12+8(x-5)=-4+3(5x-2)$$

274.

$$4(u-1)-8=6(3u-2)-7$$

275.

$$7(2n-5)=8(4n-1)-9$$

276.

$$4(p-4)-(p+7)=5(p-3)$$

277.

$$3(a-2)-(a+6)=4(a-1)$$

278.

$$-(9y+5)-(3y-7)=16-(4y-2)$$

279.

$$-(7m+4)-(2m-5)=14-(5m-3)$$

280.

$$4\left[5-8(4c-3)\right]=12(1-13c)-8$$

281.

$$5\left[9-2(6d-1)\right]=11(4-10d)-139$$

282.

$$3\left[-9+8(4h-3)\right]=2(5-12h)-19$$

283.

$$3\left[-14+2(15k-6)\right]=8(3-5k)-24$$

284.

$$5\left[2(m+4)+8(m-7)\right]=2\left[3(5+m)-(21-3m)\right]$$

285.

$$10\left[5(n+1)+4(n-1)\right]=11\left[7(5+n)-(25-3n)\right]$$

286.

$$5(1{,}2u-4{,}8)=-12$$

287.

$$4(2{,}5v-0{,}6)=7{,}6$$



288.

$$0{,}25(q-6)=0{,}1(q+18)$$

289.

$$0{,}2(p-6)=0{,}4(p+14)$$

290.

$$0{,}2(30n+50)=28$$

291.

$$0{,}5(16m+34)=-15$$

**Flokkið jöfnur**

Flokkið hverja jöfnu í verkefnunum hér á eftir sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn. Tilgreinið síðan lausnina.

292.

$$23z+19=3(5z-9)+8z+46$$

293.

$$15y+32=2(10y-7)-5y+46$$

294.

$$5(b-9)+4(3b+9)=6(4b-5)-7b+21$$

295.

$$9(a-4)+3(2a+5)=7(3a-4)-6a+7$$

296.

$$18(5j-1)+29=47$$

297.

$$24(3d-4)+100=52$$

298.

$$22(3m-4)=8(2m+9)$$

299.

$$30(2n-1)=5(10n+8)$$

300.

$$7v+42=11(3v+8)-2(13v-1)$$

301.

$$18u-51=9(4u+5)-6(3u-10)$$

302.

$$3(6q-9)+7(q+4)=5(6q+8)-5(q+1)$$

303.

$$5(p+4)+8(2p-1)=9(3p-5)-6(p-2)$$

304.

$$12(6h-1)=8(8h+5)-4$$

305.

$$9(4k-7)=11(3k+1)+4$$

306.

$$45(3y-2)=9(15y-6)$$

307.

$$60(2x-1)=15(8x+5)$$

308.

$$16(6n+15)=48(2n+5)$$

309.

$$36(4m+5)=12(12m+15)$$

310.

$$9(14d+9)+4d=13(10d+6)+3$$

311.

$$11(8c+5)-8c=2(40c+25)+5$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**312.** **Girðing** Micah á 44 fet af girðingarefni til að gera hundagerði í garðinum sínum. Hann vill að lengdin sé 2,5 fetum meiri en breiddin. Finnið lengdina, L, með því að leysa jöfnuna $2L+2(L-2{,}5)=44$.

**313.** **Myntir** Rhonda á $1,90 í fimm og tíu senta myntum. Tíu senta myntirnar eru einni færri en tvöfaldur fjöldi fimm senta myntanna. Finnið fjölda fimm senta mynta, n, með því að leysa jöfnuna $0{,}05n+0{,}10(2n-1)=1{,}90$.

2

### *Ritunarverkefni*

**314.** Teljið með eigin orðum upp skref almennu aðferðarinnar við að leysa línulegar jöfnur.

**315.** Útskýrið hvers vegna þið eigið að einfalda báðar hliðar jöfnu eins mikið og hægt er áður en þið færið breytuliðina öðrum megin og föstu liðina hinum megin.

**316.** Hvert er fyrsta skrefið þegar þið leysið jöfnuna $3-7(y-4)=38$? Hvers vegna er það fyrsta skrefið?

**317.** Leysið jöfnuna $\frac{1}{4}(8x+20)=3x-4$ og útskýrið öll skref lausnarinnar eins og gert er í dæmunum í þessum hluta.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Að verkefnunum loknum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve góðum tökum þið hafið náð á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst jöfnur með almennu aðferðinni við lausn línulegra jafna. | | | |
| flokkað jöfnur. | | | |

ⓑ Hvernig metið þið tök ykkar á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt tökin?

## 2.5 Leysið jöfnur með brotum eða tugabrotum

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Leysið jöfnur með brotastuðlum
- Leysið jöfnur með tugabrotastuðlum

**UNDIRBÚNINGUR 2.13**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Margfaldið: $8 \cdot \frac{3}{8}$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.69.

---

**UNDIRBÚNINGUR 2.14**

Finnið minnsta samnefnara $\frac{5}{6}$ og $\frac{1}{4}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.82.



---

**UNDIRBÚNINGUR 2.15**

Margfaldið 4,78 með 100. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.98.

## Leysið jöfnur með brotastuðlum

Notum almennu aðferðina til að leysa línulegar jöfnur, sem kynnt var fyrr, á jöfnuna $\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ |
| Til að einangra $x$-liðinn drögum við $\frac{1}{2}$ frá báðum hliðum. | $\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ |
| Einfaldið vinstri hliðina. | $\frac{1}{8}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ |
| Ritið föstu liðina sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum. | $\frac{1}{8}x=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}$ |
| Dragið frá. | $\frac{1}{8}x=-\frac{1}{4}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með margföldunarandhverfu $\frac{1}{8}$. | $\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{8}x=\frac{8}{1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ |
| Einfaldið. | $x=-2$ |

Þessi aðferð virkaði vel en margir nemendur eru ekki fyllilega öruggir þegar þeir sjá öll þessi brot. Því sýnum við aðra aðferð til að leysa jöfnur með brotum. Hún losar jöfnuna við brotin.

Við notum regluna um að margfalda báðar hliðar jöfnu með sömu tölu. Við margföldum báðar hliðar jöfnunnar með minnsta samnefnara allra brotanna í henni. Þá fæst ný jafna sem er jafngild þeirri fyrri en er án brota. Þetta ferli kallast að losa jöfnu við brot.

Leysum svipaða jöfnu en notum nú aðferðina sem losar jöfnuna við brot.

**DÆMI 2.48**

### Aðferð til að leysa jöfnur með brotastuðlum

Leysið: $\frac{1}{6}y-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið minnsta samnefnara allra brotanna í jöfnunni. | Hver er MSN $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, og $\frac{5}{6}$? | $\frac{1}{6}y-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ MSN = 6 |
| **Skref 2.** Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með þessum minnsta samnefnara. Þá hverfa brotin. | Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með minnsta samnefnaranum 6.<br>Notið dreifiregluna.<br>Einfaldið — og takið eftir að nú eru engin brot eftir! | $6\left(\frac{1}{6}y-\frac{1}{3}\right)=6\left(\frac{5}{6}\right)$<br>$6\cdot\frac{1}{6}y-6\cdot\frac{1}{3}=6\cdot\frac{5}{6}$<br>$y-2=5$ |
| **Skref 3.** Leysið með almennu aðferðinni við að leysa línulegar jöfnur. | Til að einangra „$y$“-liðinn skal bæta 2 við.<br>Einfaldið. | $y-2+2=5+2$<br>$y=7$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.95**

Leysið: $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.96**

Leysið: $\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Takið eftir að í dæmi 2.48 var jafnan losuð við brot og varð þá eins og jöfnurnar sem við leystum fyrr í kaflanum. Við breyttum verkefninu í verkefni sem við kunnum þegar að leysa. Síðan notuðum við almennu aðferðina til að leysa línulegar jöfnur.

**AÐFERÐ**

### Aðferð til að leysa jöfnur með brotastuðlum

1. Skref 1. Finnið minnsta samnefnara allra brotanna í jöfnunni.
2. Skref 2. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með þessum minnsta samnefnara. Þá hverfa brotin.
3. Skref 3. Leysið með almennu aðferðinni til að leysa línulegar jöfnur.

**DÆMI 2.49**

Leysið: $6=\frac{1}{2}v+\frac{2}{5}v-\frac{3}{4}v$.

## Lausn

Við viljum losa jöfnuna við brot með því að margfalda báðar hliðar hennar með minnsta samnefnara allra brotanna í henni.

| | |
|---|---|
| Finnið minnsta samnefnara allra brotanna í jöfnunni. | $6=\frac{1}{2}v+\frac{2}{5}v-\frac{3}{4}v$ |
| Minnsti samnefnarinn er 20. | |
| Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með 20. | $20(6)=20\cdot\left(\frac{1}{2}v+\frac{2}{5}v-\frac{3}{4}v\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $20(6)=20\cdot\frac{1}{2}v+20\cdot\frac{2}{5}v-20\cdot\frac{3}{4}v$ |
| Einfaldið og takið eftir að brotin eru horfin! | $120=10v+8v-15v$ |
| Sameinið samkynja liði. | $120=3v$ |
| Deilið með 3. | $\frac{120}{3}=\frac{3v}{3}$ |
| Einfaldið. | $40=v$ |
| Sannprófun: | $6=\frac{1}{2}v+\frac{2}{5}v-\frac{3}{4}v$ |
| Látum $v=40$. | $6\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}(40)+\frac{2}{5}(40)-\frac{3}{4}(40)$ |
| | $6\stackrel{?}{=}20+16-30$ |
| | $6=6\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.97**

Leysið: $7=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}x$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.98**

Leysið: $-1=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}u-\frac{2}{3}u$.

Í næsta dæmi eru breytuliðir aftur á báðum hliðum jöfnunnar.

**DÆMI 2.50**

Leysið: $a+\frac{3}{4}=\frac{3}{8}a-\frac{1}{2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $a+\frac{3}{4}=\frac{3}{8}a-\frac{1}{2}$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra brotanna í jöfnunni. Minnsti samnefnarinn er 8. | |
| Margfaldið báðar hliðar með minnsta samnefnaranum. | $8\left(a+\frac{3}{4}\right)=8\left(\frac{3}{8}a-\frac{1}{2}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $8\cdot a+8\cdot\frac{3}{4}=8\cdot\frac{3}{8}a-8\cdot\frac{1}{2}$ |
| Einfaldið — brotin eru horfin. | $8a+6=3a-4$ |
| Dragið $3a$ frá báðum hliðum. | $8a-3a+6=3a-3a-4$ |
| Einfaldið. | $5a+6=-4$ |
| Dragið 6 frá báðum hliðum. | $5a+6-6=-4-6$ |
| Einfaldið. | $5a=-10$ |
| Deilið með 5. | $\frac{5a}{5}=\frac{-10}{5}$ |
| Einfaldið. | $a=-2$ |
| Sannprófun: | $a+\frac{3}{4}=\frac{3}{8}a-\frac{1}{2}$ |
| Látum $a=-2$. | $-2+\frac{3}{4}\stackrel{?}{=}\frac{3}{8}(-2)-\frac{1}{2}$ |
| | $-\frac{8}{4}+\frac{3}{4}\stackrel{?}{=}-\frac{16}{8}-\frac{4}{8}$ |
| | $-\frac{5}{4}=-\frac{10}{8}$ |
| | $-\frac{5}{4}=-\frac{5}{4}$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.99**

Leysið: $x+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.100**

Leysið: $c+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}c-\frac{1}{4}$.

Í næsta dæmi byrjum við á að beita dreifireglunni. Með því skrefi hverfa brotin strax.

**DÆMI 2.51**

Leysið: $-5=\frac{1}{4}(8x+4)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-5=\frac{1}{4}(8x+4)$ |
| Beitið dreifireglu. | $-5=\frac{1}{4}\cdot 8x+\frac{1}{4}\cdot 4$ |
| Einfaldið. Nú eru engin brot eftir. | $-5=2x+1$ |
| Dragið 1 frá báðum hliðum. | $-5-1=2x+1-1$ |
| Einfaldið. | $-6=2x$ |
| Deilið með 2. | $\frac{-6}{2}=\frac{2x}{2}$ |
| Einfaldið. | $-3=x$ |
| Sannprófun: | $-5=\frac{1}{4}(8x+4)$ |
| Látum $x=-3$. | $-5\stackrel{?}{=}\frac{1}{4}(4(-3)+2)$ |
| | $-5\stackrel{?}{=}\frac{1}{4}(-12+2)$ |
| | $-5\stackrel{?}{=}\frac{1}{4}(-10)$ |
| | $-5=-5$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.101**

Leysið: $-11=\frac{1}{2}(6p+2)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.102**

Leysið: $8=\frac{1}{3}(9q+6)$.

Í næsta dæmi þarf enn að fjarlægja brot eftir að við höfum beitt dreifireglunni.

**DÆMI 2.52**

Leysið: $\frac{1}{2}(y-5)=\frac{1}{4}(y-1)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{2}(y-5)=\frac{1}{4}(y-1)$ |
| Beitið dreifireglu. | $\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{1}{4}\cdot y-\frac{1}{4}\cdot 1$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}=\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}$ |
| Margfaldið með minnsta samnefnaranum, 4. | $4\left(\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}\right)=4\left(\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $4\cdot\frac{1}{2}y-4\cdot\frac{5}{2}=4\cdot\frac{1}{4}y-4\cdot\frac{1}{4}$ |
| Einfaldið. | $2y-10=y-1$ |
| Færið breytuliðina til vinstri. | $2y-y-10=y-y-1$ |
| Einfaldið. | $y-10=-1$ |
| Færið föstu liðina til hægri. | $y-10+10=-1+10$ |
| Einfaldið. | $y=9$ |
| Sannprófun: | $\frac{1}{2}(y-5)=\frac{1}{4}(y-1)$ |
| Látum $y=9$. | $\frac{1}{2}(9-5)\stackrel{?}{=}\frac{1}{4}(9-1)$ |
| Ljúkið sannprófuninni sjálf. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.103**

Leysið: $\frac{1}{5}(n+3)=\frac{1}{4}(n+2)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.104**

Leysið: $\frac{1}{2}(m-3)=\frac{1}{4}(m-7)$.

**DÆMI 2.53**

Leysið: $\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}$ |
| Margfaldið með minnsta samnefnaranum, 4. | $4\left(\frac{5x-3}{4}\right)=4\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| Einfaldið. | $5x-3=2x$ |
| Færið breytuliðina til hægri. | $5x-5x-3=2x-5x$ |
| Einfaldið. | $-3=-3x$ |
| Deilið. | $\frac{-3}{-3}=\frac{-3x}{-3}$ |
| Einfaldið. | $1=x$ |
| Sannprófun: | $\frac{5x-3}{4}=\frac{x}{2}$ |
| Látum $x=1$. | $\frac{5(1)-3}{4}\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}$ |
| | $\frac{2}{4}\stackrel{?}{=}\frac{1}{2}$ |
| | $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.105**

Leysið: $\frac{4y-7}{3}=\frac{y}{6}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.106**

Leysið: $\frac{-2z-5}{4}=\frac{z}{8}$.

**DÆMI 2.54**

Leysið: $\frac{a}{6}+2=\frac{a}{4}+3$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{a}{6}+2=\frac{a}{4}+3$ |
| Margfaldið með minnsta samnefnaranum, 12. | $12\left(\frac{a}{6}+2\right)=12\left(\frac{a}{4}+3\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $12\cdot\frac{a}{6}+12\cdot 2=12\cdot\frac{a}{4}+12\cdot 3$ |
| Einfaldið. | $2a+24=3a+36$ |
| Færið breytuliðina til hægri. | $2a-2a+24=3a-2a+36$ |
| Einfaldið. | $24=a+36$ |
| Færið föstu liðina til vinstri. | $24-36=a+36-36$ |
| Einfaldið. | $a=-12$ |
| Sannprófun: | $\frac{a}{6}+2=\frac{a}{4}+3$ |
| Látum $a=-12$. | $\frac{-12}{6}+2\stackrel{?}{=}\frac{-12}{4}+3$ |
| | $-2+2\stackrel{?}{=}-3+3$ |
| | $0=0\checkmark$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.107**

Leysið: $\frac{b}{10}+2=\frac{b}{4}+5$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.108**

Leysið: $\frac{c}{6}+3=\frac{c}{3}+4$.

**DÆMI 2.55**

Leysið: $\frac{4q+3}{2}+6=\frac{3q+5}{4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{4q+3}{2}+6=\frac{3q+5}{4}$ |
| Margfaldið með minnsta samnefnaranum, 4. | $4\left(\frac{4q+3}{2}+6\right)=4\left(\frac{3q+5}{4}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $4\left(\frac{4q+3}{2}\right)+4\cdot 6=4\cdot\left(\frac{3q+5}{4}\right)$ |

| | |
|---|---|
| Einfaldið. | $2(4q+3)+24=3q+5$<br>$8q+6+24=3q+5$<br>$8q+30=3q+5$ |
| Færið breytuliðina til vinstri. | $8q-3q+30=3q-3q+5$ |
| Einfaldið. | $5q+30=5$ |
| Færið föstu liðina til hægri. | $5q+30-30=5-30$ |
| Einfaldið. | $5q=-25$ |
| Deilið með 5. | $\frac{5q}{5}=\frac{-25}{5}$ |
| Einfaldið. | $q=-5$ |
| Sannprófun: | $\frac{4q+3}{2}+6=\frac{3q+5}{4}$ |
| Látum $q=-5$. | $\frac{4(-5)+3}{2}+6\stackrel{?}{=}\frac{3(-5)+5}{4}$ |
| Ljúkið sannprófuninni sjálf. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.109**

Leysið: $\frac{3r+5}{6}+1=\frac{4r+3}{3}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.110**

Leysið: $\frac{2s+3}{2}+1=\frac{3s+2}{4}$.

## Leysið jöfnur með tugabrotastuðlum

Sumar jöfnur innihalda tugabrot. Slíkar jöfnur koma fyrir þegar við leysum verkefni um peninga eða prósentur. Tugabrot má þó einnig rita sem almenn brot, til dæmis $0{,}3=\frac{3}{10}$ og $0{,}17=\frac{17}{100}$. Í jöfnum með tugabrotum getum við því notað sömu aðferð og þegar við losuðum jöfnur við almenn brot: að margfalda báðar hliðar jöfnunnar með minnsta samnefnaranum.

**DÆMI 2.56**

Leysið: $0{,}06x+0{,}02=0{,}25x-1{,}5$.

### Lausn

Skoðið tugabrotin og hugsið um jafngild almenn brot.

$$0{,}06=\frac{6}{100} \quad 0{,}02=\frac{2}{100} \quad 0{,}25=\frac{25}{100} \quad 1{,}5=1\frac{5}{10}$$

Takið eftir að minnsti samnefnarinn er 100.

Með því að margfalda með minnsta samnefnaranum fjarlægjum við tugabrotin úr jöfnunni.

| | |
|---|---|
| | $0{,}06x + 0{,}02 = 0{,}25x - 1{,}5$ |
| Margfaldið báðar hliðar með 100. | $100(0{,}06x + 0{,}02) = 100(0{,}25x - 1{,}5)$ |
| Beitið dreifireglu. | $100(0{,}06x) + 100(0{,}02) = 100(0{,}25x) - 100(1{,}5)$ |
| Margfaldið; nú eru engin tugabrot eftir. | $6x + 2 = 25x - 150$ |
| Færið breytuliðina til hægri. | $6x - 6x + 2 = 25x - 6x - 150$ |
| Einfaldið. | $2 = 19x - 150$ |
| Færið föstu liðina til vinstri. | $2 + 150 = 19x - 150 + 150$ |
| Einfaldið. | $152 = 19x$ |
| Deilið með 19. | $\frac{152}{19} = \frac{19x}{19}$ |
| Einfaldið. | $8 = x$ |
| Sannprófun: | Látum $x = 8$.<br>$0{,}06(8) + 0{,}02 \stackrel{?}{=} 0{,}25(8) - 1{,}5$<br>$0{,}48 + 0{,}02 \stackrel{?}{=} 2{,}00 - 1{,}5$<br>$0{,}50 = 0{,}50$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.111**

Leysið: $0{,}14\,h + 0{,}12 = 0{,}35\,h - 2{,}4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.112**

Leysið: $0{,}65\,k - 0{,}1 = 0{,}4\,k - 0{,}35$.

Jafnan í næsta dæmi er dæmigerð fyrir verkefnin um peninga í næsta kafla. Takið eftir að við beitum dreifireglunni á tugabrotið áður en við fjarlægjum öll tugabrotin.

**DÆMI 2.57**

Leysið: $0{,}25\,x + 0{,}05\,(x + 3) = 2{,}85$.

## Lausn

| | $0{,}25x + 0{,}05(x + 3) = 2{,}85$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglunni fyrst. | $0{,}25x + 0{,}05x + 0{,}15 = 2{,}85$ |
| Sameinið samkynja liði. | $0{,}30x + 0{,}15 = 2{,}85$ |
| Margfaldið með 100 til að fjarlægja tugabrotin. | $100(0{,}30x + 0{,}15) = 100(2{,}85)$ |
| Beitið dreifireglu. | $30x + 15 = 285$ |
| Dragið 15 frá báðum hliðum. | $30x + 15 - 15 = 285 - 15$ |
| Einfaldið. | $30x = 270$ |
| Deilið með 30. | $\frac{30x}{30} = \frac{270}{30}$ |
| Einfaldið. | $x = 9$ |
| Sannprófið sjálf með því að setja $x = 9$ inn í upphaflegu jöfnuna. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.113**

Leysið: $0{,}25\,n + 0{,}05\,(n + 5) = 2{,}95$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.114**

Leysið: $0{,}10\,d + 0{,}05\,(d - 5) = 2{,}15$.

## Æfingar úr kafla 2.5

### *Æfingin skapar meistarann*

### Leysið jöfnur með brotastuðlum

Leysið hverja jöfnu með brotastuðlum í æfingunum hér á eftir.

318.

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$$

319.

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

320.

$$\frac{5}{6}y - \frac{2}{3} = -\frac{3}{2}$$

321.

$$\frac{5}{6}y-\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$$

322.

$$\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

323.

$$\frac{5}{8}b+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

324.

$$2=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x$$

325.

$$2=\frac{3}{5}x-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x$$

326.

$$\frac{1}{4}m-\frac{4}{5}m+\frac{1}{2}m=-1$$

327.

$$\frac{5}{6}n-\frac{1}{4}n-\frac{1}{2}n=-2$$

328.

$$x+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}$$

329.

$$x+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$$

330.

$$\frac{1}{3}w+\frac{5}{4}=w-\frac{1}{4}$$

331.

$$\frac{3}{2}z+\frac{1}{3}=z-\frac{2}{3}$$

332.

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}$$

333.

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}a+\frac{1}{12}$$

334.

$$\frac{1}{3}b+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}b-\frac{3}{5}$$

335.

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}$$

336.

$$1=\frac{1}{6}(12x-6)$$

337.

$$1=\frac{1}{5}(15x-10)$$

338.

$$\frac{1}{4}(p-7)=\frac{1}{3}(p+5)$$

339.

$$\frac{1}{5}(q+3)=\frac{1}{2}(q-3)$$

340.

$$\frac{1}{2}(x+4)=\frac{3}{4}$$

341.

$$\frac{1}{3}(x+5)=\frac{5}{6}$$

342.

$$\frac{5q-8}{5}=\frac{2q}{10}$$

343.

$$\frac{4m+2}{6}=\frac{m}{3}$$

344.

$$\frac{4n+8}{4}=\frac{n}{3}$$



345.

$$\frac{3p+6}{3}=\frac{p}{2}$$

346.

$$\frac{u}{3}-4=\frac{u}{2}-3$$

347.

$$\frac{v}{10}+1=\frac{v}{4}-2$$

348.

$$\frac{c}{15}+1=\frac{c}{10}-1$$

349.

$$\frac{d}{6}+3=\frac{d}{8}+2$$

350.

$$\frac{3x+4}{2}+1=\frac{5x+10}{8}$$

351.

$$\frac{10y-2}{3}+3=\frac{10y+1}{9}$$

352.

$$\frac{7u-1}{4}-1=\frac{4u+8}{5}$$

353.

$$\frac{3v-6}{2}+5=\frac{11v-4}{5}$$

**Leysið jöfnur með tugabrotastuðlum**

Leysið hverja jöfnu með tugabrotastuðlum í æfingunum hér á eftir.

354.

$$0{,}6\,y+3=9$$

355.

$$0{,}4\,y-4=2$$

356.

$$3{,}6\,j-2=5{,}2$$

357.

$$2{,}1\,k+3=7{,}2$$

358.

$$0{,}4\,x+0{,}6=0{,}5\,x-1{,}2$$

359.

$$0{,}7\,x+0{,}4=0{,}6\,x+2{,}4$$

360.

$$0{,}23\,x+1{,}47=0{,}37\,x-1{,}05$$

361.

$$0{,}48\,x+1{,}56=0{,}58\,x-0{,}64$$

362.

$$0{,}9\,x-1{,}25=0{,}75\,x+1{,}75$$

363.

$$1{,}2\,x-0{,}91=0{,}8\,x+2{,}29$$

364.

$$0{,}05\,n+0{,}10\left(n+8\right)=2{,}15$$

365.

$$0{,}05\,n+0{,}10\left(n+7\right)=3{,}55$$

366.

$$0{,}10\,d+0{,}25\left(d+5\right)=4{,}05$$

367.

$$0{,}10d+0{,}25(d+7)=5{,}25$$

368.

$$0{,}05(q-5)+0{,}25q=3{,}05$$

369.

$$0{,}05(q-8)+0{,}25q=4{,}10$$

2

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**370.** **Smámynt** Taylor á $2,00 í tíeyringum og einseyringum. Einseyringarnir eru 2 fleiri en tíeyringarnir. Leysið jöfnuna $0{,}10d+0{,}01(d+2)=2$ fyrir $d$, sem táknar fjölda tíeyringa.

**371.** **Frímerki** Paula keypti $22,82 virði af 49 senta og 21 senta frímerkjum. 21 senta frímerkin voru 8 færri en 49 senta frímerkin. Leysið jöfnuna $0{,}49s+0{,}21(s-8)=22{,}82$ fyrir s til að finna hve mörg 49 senta frímerki Paula keypti.

### *Ritunarverkefni*

**372.** Útskýrið hvernig þið finnið minnsta samnefnara brotanna $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{6}$ og $\frac{2}{3}$.

**373.** Ef mörg brot eru í jöfnu, hvernig auðveldar það lausnina að margfalda báðar hliðar hennar með minnsta samnefnaranum?

**374.** Ef brot eru aðeins öðrum megin í jöfnu, hvers vegna þarf þá að margfalda báðar hliðar jöfnunnar með minnsta samnefnaranum?

**375.** Hver er minnsti samnefnarinn í jöfnunni $0{,}35x+2{,}1=3{,}85$? Hvernig vitið þið það?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst jöfnur með brotastuðlum. | | | |
| leyst jöfnur með tugabrotastuðlum. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur þá í heildina vel undirbúin fyrir næsta kafla? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# 2.6 Einangrið tiltekna breytu í formúlu

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Notið formúluna fyrir vegalengd, hraða og tíma
- Einangrið tiltekna breytu í formúlu



**UNDIRBÚNINGUR 2.16**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leysið: $15t = 120$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.13.

**UNDIRBÚNINGUR 2.17**

Leysið: $6x + 24 = 96$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.27.

## Notið formúluna fyrir vegalengd, hraða og tíma

Ein formúla sem þið notið oft í algebru og daglegu lífi er formúlan fyrir vegalengd hlutar sem hreyfist með jöfnum hraða. Hraði segir til um hversu hratt hluturinn fer. Þið þekkið ef til vill þegar grunnhugmyndina um hraða. Vitið þið hvaða vegalengd þið farið ef þið akið með jöfnum hraða, 60 mílur á klukkustund, í 2 klukkustundir? (Það gæti gerst ef þið notið hraðastilli bílsins á þjóðveginum.) Ef þið svöruðuð 120 mílur kunnið þið þegar að nota formúluna!

**VEGALENGD, HRAÐI OG TÍMI**

Þegar hlutur hreyfist með jöfnum (föstum) hraða tengir þessi formúla saman farna vegalengd, liðinn tíma og hraða:

$$d = rt \quad \text{þar sem} \quad \begin{array}{lcl} d & = & \text{vegalengd} \\ r & = & \text{hraði} \\ t & = & \text{tími} \end{array}$$

Við notum aðferðina til að leysa orðadæmi sem við notuðum fyrr í þessum kafla. Þegar verkefnið krefst formúlu breytum við skrefi 4. Í stað þess að skrifa setningu skrifum við viðeigandi formúlu. Hér eru breyttu skrefin til viðmiðunar.

**AÐFERÐ**

### Leysið orðadæmi (með formúlu).

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að þið skiljið öll orð og allar hugmyndir.

2. Skref 2. Ákveðið hvaða stærðar er leitað.
3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Ritið viðeigandi formúlu fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.



Gott getur verið að gera litla töflu til að draga saman upplýsingarnar í verkefninu. Skoðið töfluna í fyrsta dæminu.

---

**DÆMI 2.58**

Jamal hjólar á jöfnum hraða, 12 mílur á klukkustund, í $3\frac{1}{2}$ klukkustundir. Hvaða vegalengd hefur hann farið?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Ákveðið hvaða stærðar er leitað. | farin vegalengd |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum d = vegalengd. |
| **Skref 4.** Setjið fram: Ritið viðeigandi formúlu. | $d = r\,t$ |
| | $d = ?$<br>$r = 12\ \frac{\text{mílur}}{\text{klst.}}$<br>$t = 3\frac{1}{2}$ klst. |
| Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna. | $d = 12 \cdot 3\frac{1}{2}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $d = 42$ mílur |
| **Skref 6. Sannprófið** | |
| Er 42 mílna vegalengd raunhæf? | |
| Jamal hjólar: | |
| 12 mílur á 1 klst.,<br>24 mílur á 2 klst.,<br>36 mílur á 3 klst., 42 mílur á $3\frac{1}{2}$ klst. er raunhæft<br>48 mílur á 4 klst. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Jamal hjólaði 42 mílur. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.115**

Lindsay ók í $5\frac{1}{2}$ klukkustundir á 60 mílna hraða. Hvaða vegalengd fór hún?

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.116**

Trinh gekk í $2\frac{1}{3}$ klukkustundir á 3 mílna hraða. Hversu langt gekk hún?



**DÆMI 2.59**

Rey ætlar að aka frá heimili sínu í San Diego til að heimsækja ömmu sína í Sacramento. Vegalengdin er 520 mílur. Ef hann getur ekið með jöfnum hraða, 65 mílur á klukkustund, hversu margar klukkustundir tekur ferðin?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Ákveðið hvaða stærðar er leitað. | Fjöldi klukkustunda (tími) |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum t = tími. |
| | $d = 520$ mílur<br>$r = 65$ mílur á klukkustund<br>$t = ?$ klukkustundir |
| **Skref 4.** Setjið fram: Ritið viðeigandi formúlu. | $d = rt$ |
| Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna. | $520 = 65t$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $t = 8$ |
| **Skref 6.** Sannprófið. Setjið tölurnar inn í formúluna og gangið úr skugga um að niðurstaðan sé sönn fullyrðing. | |

$$\begin{aligned} d &= rt \\ 520 &\stackrel{?}{=} 65 \cdot 8 \\ 520 &= 520 \checkmark \end{aligned}$$

**Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. Ferð Reys tekur 8 klukkustundir.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.117**

Lee ætlar að aka frá Phoenix að íbúð bróður síns í San Francisco. Vegalengdin er 770 mílur. Ef hann ekur með jöfnum hraða, 70 mílur á klukkustund, hversu margar klukkustundir tekur ferðin?

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.118**

Yesenia er 168 mílur frá Chicago. Ef hún þarf að vera komin til Chicago eftir 3 klukkustundir, á hvaða hraða þarf hún að aka?

## Einangrið tiltekna breytu í formúlu



Þið kannist líklega við nokkrar formúlur úr rúmfræði. Formúla er stærðfræðileg lýsing á sambandi breyta. Formúlur eru einnig notaðar í vísindum, svo sem efnafræði, eðlisfræði og líffræði. Í læknisfræði eru þær notaðar til að reikna lyfjaskammta eða líkamsþyngdarstuðul. Töflureiknar byggja útreikninga á formúlum. Mikilvægt er að þekkja formúlur og geta umritað þær auðveldlega.

Í dæmi 2.58 og dæmi 2.59 notuðum við formúluna $d=r\,t$. Hún gefur $d$, vegalengdina, út frá $r$ og $t$, hraða og tíma. Í dæmi 2.59 þurftum við hins vegar að finna $t$. Fyrst settum við inn $d$ og $r$; síðan einangruðum við $t$ með algebru. Ef þetta væri gert oft væri hentugt að hafa formúlu sem gæfi $t$ beint út frá $d$ og $r$. Slíka formúlu fáum við með því að umrita $d=r\,t$ þannig að $t$ sé einangrað.

Að einangra tiltekna breytu í formúlu merkir að breytan stendur ein öðrum megin við jafnaðarmerkið með stuðulinn 1. Allar aðrar breytur og fastar tölur eru hinum megin við jafnaðarmerkið. Við byrjum á formúlunni fyrir vegalengd, hraða og tíma til að sjá hvernig tiltekin breyta er einangruð í formúlu.

**DÆMI 2.60**

Umritið formúluna $d=r\,t$ og einangrið $t$:

1. ⓐ þegar $d=520$ og $r=65$
2. ⓑ almennt

### Lausn

Við ritum lausnirnar hlið við hlið til að sýna að skrefin eru þau sömu hvort sem við einangrum breytuna almennt eða setjum fyrst tölur inn í formúluna.

| ⓐ þegar $d=520$ og $r=65$ | | ⓑ almennt | |
|---|---|---|---|
| Ritið formúluna. | $d=r\,t$ | Ritið formúluna. | $d=r\,t$ |
| Setjið inn. | $520=65\,t$ | | |
| Deilið til að einangra $t$. | $\frac{520}{65}=\frac{65\,t}{65}$ | Deilið til að einangra $t$. | $\frac{d}{r}=\frac{r\,t}{r}$ |
| Einfaldið. | $8=t$ | Einfaldið. | $\frac{d}{r}=t$ |

Við segjum að formúlan $t=\frac{d}{r}$ hafi verið umrituð þannig að $t$ sé einangrað.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.119**

Umritið formúluna $d=r\,t$ og einangrið $r$:

ⓐ þegar $d=180$ og $t=4$ ⓑ almennt

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.120**

Umritið formúluna $d=r\,t$ og einangrið $r$:

ⓐ þegar $d=780$ og $t=12$ ⓑ almennt

**DÆMI 2.61**

Umritið formúluna $A=\frac{1}{2}b\,h$ og einangrið $h$:

ⓐ þegar $A=90$ og $b=15$ ⓑ almennt

## Lausn

| ⓐ þegar $A=90$ og $b=15$ | | ⓑ almennt | |
|---|---|---|---|
| Ritið formúluna. | $A=\frac{1}{2}bh$ | Ritið formúluna. | $A=\frac{1}{2}bh$ |
| Setjið inn. | $90=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot h$ | | |
| Losið jöfnuna við brotin. | $2\cdot 90=2\cdot\frac{1}{2}15h$ | Losið jöfnuna við brotin. | $2\cdot A=2\cdot\frac{1}{2}bh$ |
| Einfaldið. | $180=15h$ | Einfaldið. | $2A=bh$ |
| Einangrið $h$. | $12=h$ | Einangrið $h$. | $\frac{2A}{b}=h$ |

Nú getum við fundið hæð þríhyrnings út frá flatarmáli hans og grunnlínu með formúlunni $h=\frac{2\,A}{b}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.121**

Notið formúluna $A=\frac{1}{2}b\,h$ og einangrið $h$:

ⓐ þegar $A=170$ og $b=17$ ⓑ almennt

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.122**

Notið formúluna $A=\frac{1}{2}b\,h$ og einangrið $b$:

ⓐ þegar $A=62$ og $h=31$ ⓑ almennt

Formúlan $I = P\,r\,t$ er notuð til að reikna einfalda vexti, I, af höfuðstól, P, sem ber vexti á vaxtaprósentunni r í t ár.

**DÆMI 2.62**

Umritið formúluna $I = P\,r\,t$ til að finna höfuðstólinn, $P$:

ⓐ þegar $I = \$5.600, r = 4\%, t = 7$ ár ⓑ almennt

2

## Lausn

| ⓐ $I = \$5.600, r = 4\%, t = 7$ ár | | ⓑ almennt | |
|---|---|---|---|
| Ritið formúluna. | $I = Prt$ | Ritið formúluna. | $I = Prt$ |
| Setjið inn. | $5600 = P(0{,}04)(7)$ | | |
| Einfaldið. | $5600 = P(0{,}28)$ | Einfaldið. | $I = P(rt)$ |
| Deilið til að einangra P. | $\frac{5600}{0{,}28} = \frac{P(0,28)}{0{,}28}$ | Deilið til að einangra P. | $\frac{I}{rt} = \frac{P(rt)}{rt}$ |
| Einfaldið. | $20.000 = P$ | Einfaldið. | $\frac{I}{rt} = P$ |
| Höfuðstóllinn er | $20.000 | | $P = \frac{I}{rt}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.123**

Notið formúluna $I = P\,r\,t$ til að finna höfuðstólinn, $P$:

ⓐ þegar $I = \$2.160, r = 6\%, t = 3$ ár ⓑ almennt

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.124**

Notið formúluna $I = P\,r\,t$ til að finna höfuðstólinn, $P$:

ⓐ þegar $I = \$5.400, r = 12\%, t = 5$ ár ⓑ almennt

Síðar í þessu námskeiði og í frekara algebrunámi munuð þið kynnast jöfnum sem tengja tvær breytur, yfirleitt x og y. Stundum fáið þið jöfnu þar sem y er einangrað og þá þarf að einangra x, eða öfugt. Í næsta dæmi fáum við jöfnu þar sem bæði x og y eru sömu megin við jafnaðarmerkið og við einangrum y.

**DÆMI 2.63**

Umritið formúluna $3x + 2y = 18$ og einangrið y:

ⓐ þegar $x = 4$ ⓑ almennt

## Lausn

| ⓐ þegar $x=4$ | | ⓑ almennt | |
|---|---|---|---|
| | $3x+2y=18$ | | $3x+2y=18$ |
| Setjið inn. | $3(4)+2y=18$ | | |
| Dragið frá til að einangra $y$-liðinn. | $12-12+2y=18-12$ | Dragið frá til að einangra $y$-liðinn. | $3x-3x+2y=18-3x$ |
| Deilið. | $\frac{2y}{2}=\frac{6}{2}$ | Deilið. | $\frac{2y}{2}=\frac{18}{2}-\frac{3x}{2}$ |
| Einfaldið. | $y=3$ | Einfaldið. | $y=-\frac{3x}{2}+9$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.125**

Umritið formúluna $3x+4y=10$ og einangrið y:

ⓐ þegar $x=\frac{14}{3}$ ⓑ almennt

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.126**

Umritið formúluna $5x+2y=18$ og einangrið y:

ⓐ þegar $x=4$ ⓑ almennt

Í dæmum 1.60 til 1.64 notuðum við tölurnar í a-lið til að leiða okkur að almennu lausninni í b-lið. Nú umritum við formúlu almennt án þess að styðjast við tölur.

**DÆMI 2.64**

Umritið formúluna $P=a+b+c$ og einangrið $a$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Við einangrum $a$ á annarri hlið jöfnunnar. | $P=a+b+c$ |
| Bæði $b$ og $c$ eru lögð við $a$, svo við drögum þau frá báðum hliðum jöfnunnar. | $P-b-c=a+b+c-b-c$ |
| Einfaldið. | $P-b-c=a$<br>$a=P-b-c$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.127**

Umritið formúluna $P=a+b+c$ og einangrið b.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.128**

Umritið formúluna $P=a+b+c$ og einangrið c.

**DÆMI 2.65**

Umritið formúluna $6x+5y=13$ og einangrið y.

2

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $6x+5y=13$ |
| Dragið $6x$ frá báðum hliðum til að einangra liðinn með $y$. | $6x-6x+5y=13-6x$ |
| Einfaldið. | $5y=13-6x$ |
| Deilið með 5 svo stuðullinn verði 1. | $\frac{5y}{5}=\frac{13-6x}{5}$ |
| Einfaldið. | $y=\frac{13-6x}{5}$ |

Brotið er fullstytt. Ekki er hægt að deila $13-6x$ með 5.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.129**

Umritið formúluna $4x+7y=9$ og einangrið y.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.130**

Umritið formúluna $5x+8y=1$ og einangrið y.

## Æfingar úr kafla 2.6

***Æfingin skapar meistarann***

**Notið formúluna fyrir vegalengd, hraða og tíma**

Leysið verkefnin hér á eftir.

**376.** Steve ók í $8\frac{1}{2}$ klukkustundir á 72 mílna hraða. Hvaða vegalengd fór hann?

**377.** Socorro ók í $4\frac{5}{6}$ klukkustundir á 60 mílna hraða. Hvaða vegalengd fór hún?

**378.** Yuki gekk í $1\frac{3}{4}$ klukkustundir á 4 mílna hraða. Hversu langt gekk hún?

**379.** Francie hjólaði í $2\frac{1}{2}$ klukkustundir á 12 mílna hraða. Hversu langt hjólaði hún?

**380.** Connor ætlar að aka frá Tucson að Miklagljúfri. Vegalengdin er 338 mílur. Ef hann ekur með jöfnum hraða, 52 mílur á klukkustund, hversu margar klukkustundir tekur ferðin?

**381.** Megan tekur rútu frá New York-borg til Montréal. Vegalengdin er 380 mílur og rútan ekur með jöfnum hraða, 76 mílur á klukkustund. Hversu lengi tekur rútuferðin?

**382.** Aurelia ekur frá Miami til Orlando og fer 65 mílur á klukkustund. Vegalengdin er 235 mílur. Hversu lengi tekur ferðin, námundað að næsta tíunda hluta klukkustundar?



**383.** Kareem ætlar að hjóla frá St. Louis til Champaign í Illinois. Vegalengdin er 180 mílur. Ef hann hjólar með jöfnum hraða, 16 mílur á klukkustund, hversu margar klukkustundir tekur ferðin?

**384.** Javier ekur til Bangor, sem er í 240 mílna fjarlægð. Ef hann þarf að vera kominn til Bangor eftir 4 klukkustundir, á hvaða hraða þarf hann að aka?

**385.** Alejandra ekur til Cincinnati, sem er í 450 mílna fjarlægð. Ef hún vill vera komin þangað eftir 6 klukkustundir, á hvaða hraða þarf hún að aka?

**386.** Aisha tók lest frá Spokane til Seattle. Vegalengdin er 280 mílur og ferðin tók 3,5 klukkustundir. Hver var hraði lestarinnar?

**387.** Philip fékk far með vini sínum frá Denver til Las Vegas. Vegalengdin er 750 mílur. Hversu hratt ók vinurinn ef ferðin tók 10 klukkustundir?

**Einangrið tiltekna breytu í formúlu**

Notið formúluna $d = r\,t$ í verkefnunum hér á eftir.

**388.** Einangrið $t$ ⓐ þegar $d = 350$ og $r = 70$ ⓑ almennt

**389.** Einangrið $t$ ⓐ þegar $d = 240$ og $r = 60$ ⓑ almennt

**390.** Einangrið $t$ ⓐ þegar $d = 510$ og $r = 60$ ⓑ almennt

**391.** Einangrið $t$

ⓐ þegar $d = 175$ og $r = 50$

ⓑ almennt

**392.** Einangrið $r$

ⓐ þegar $d = 204$ og $t = 3$ ⓑ almennt

**393.** Einangrið $r$ ⓐ þegar $d = 420$ og $t = 6$ ⓑ almennt

**394.** Einangrið $r$ ⓐ þegar $d = 160$ og $t = 2{,}5$ ⓑ almennt

**395.** Einangrið $r$ ⓐ þegar $d = 180$ og $t = 4{,}5$ ⓑ almennt

Notið formúluna $A = \frac{1}{2}b\,h$ í verkefnunum hér á eftir.

**396.** Einangrið $b$ ⓐ þegar $A = 126$ og $h = 18$ ⓑ almennt

**397.** Einangrið $h$
ⓐ þegar $A=176$ og $b=22$ ⓑ almennt

**398.** Einangrið $h$ ⓐ þegar $A=375$ og $b=25$ ⓑ almennt

**399.** Einangrið $b$ ⓐ þegar $A=65$ og $h=13$ ⓑ almennt

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið nota formúluna I = Prt.

2

**400.** Einangrið höfuðstólinn, P, ⓐ þegar $I=\$5.480$, $r=4\,\%$, $t=7$ ár ⓑ almennt

**401.** Einangrið höfuðstólinn, P, ⓐ þegar
$I=\$3.950$, $r=6\,\%$, $t=5$ ár ⓑ almennt

**402.** Einangrið tímann, t, ⓐ þegar $I=\$2.376$, $P=\$9.000$, $r=4{,}4\,\%$ ⓑ almennt

**403.** Einangrið tímann, t ⓐ þegar
$I=\$624$, $P=\$6.000$, $r=5{,}2\,\%$ ⓑ almennt

Leysið verkefnin hér á eftir.

**404.** Umritið formúluna $2x+3y=12$ og einangrið y ⓐ þegar $x=3$ ⓑ almennt

**405.** Umritið formúluna $5x+2y=10$ og einangrið y ⓐ þegar $x=4$ ⓑ almennt

**406.** Umritið formúluna $3x-y=7$ og einangrið y ⓐ þegar $x=-2$ ⓑ almennt

**407.** Umritið formúluna $4x+y=5$ og einangrið y ⓐ þegar $x=-3$ ⓑ almennt

**408.** Umritið $a+b=90$ og einangrið $b$.

**409.** Umritið $a+b=90$ og einangrið $a$.

**410.** Umritið $180=a+b+c$ og einangrið $a$.

**411.** Umritið $180=a+b+c$ og einangrið $c$.

**412.** Umritið formúluna $8x+y=15$ og einangrið y.

**413.** Umritið formúluna $9x+y=13$ og einangrið y.

**414.** Umritið formúluna $-4x+y=-6$ og einangrið y.

**415.** Umritið formúluna $-5x+y=-1$ og einangrið y.

**416.** Umritið formúluna $4x+3y=7$ og einangrið y.

**417.** Umritið formúluna $3x+2y=11$ og einangrið y.

**418.** Umritið formúluna $x-y=-4$ og einangrið y.

**419.** Umritið formúluna $x-y=-3$ og einangrið y.

**420.** Umritið formúluna $P=2L+2W$ og einangrið $L$.

**421.** Umritið formúluna $P=2L+2W$ og einangrið $W$.

**422.** Umritið formúluna $C=\pi d$ og einangrið $d$.

**423.** Umritið formúluna $C = \pi d$ og einangrið $\pi$.

**424.** Umritið formúluna $V = LWH$ og einangrið $L$.

**425.** Umritið formúluna $V = LWH$ og einangrið $H$.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**426.** **Umreikningur hitastigs** Á ferðalagi um Grikkland sá Tatyana að hitastigið var 40° á Celsíus-kvarða. Einangrið F í formúlunni $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ til að finna hitastigið á Fahrenheit-kvarða.

**427.** **Umreikningur hitastigs** Yon var í heimsókn í Bandaríkjunum og sá að hitastigið í Seattle einn daginn var 50° á Fahrenheit-kvarða. Einangrið C í formúlunni $F = \frac{9}{5}C + 32$ til að finna hitastigið á Celsíus-kvarða.

### *Ritunarverkefni*

**428.** Umritið jöfnuna $2x + 3y = 6$ og einangrið $y$ ⓐ þegar $x = -3$ ⓑ almennt ⓒ Hvor lausnin finnst ykkur auðveldari, ⓐ eða ⓑ? Hvers vegna?

**429.** Umritið jöfnuna $5x - 2y = 10$ og einangrið $x$ ⓐ þegar $y = 10$ ⓑ almennt ⓒ Hvor lausnin finnst ykkur auðveldari, ⓐ eða ⓑ? Hvers vegna?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað formúluna fyrir vegalengd, hraða og tíma. | | | |
| einangrað tiltekna breytu í formúlu. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um það hversu vel þið hafið náð tökum á efni kaflans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

## 2.7 Leysið línulegar ójöfnur

**NÁMSMARKMIÐ**

Að loknum þessum hluta eigið þið að geta:

- Sýnið ójöfnur á talnalínu
- Leysið ójöfnur með reglum um frádrátt og samlagningu í ójöfnum
- Leysið ójöfnur með reglum um deilingu og margföldun í ójöfnum
- Leysið ójöfnur sem þarf að einfalda

- Setjið orðalag fram sem ójöfnu og leysið hana

---

**UNDIRBÚNINGUR 2.18**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Skrifið á íslensku: $15 > x$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.12.



---

**UNDIRBÚNINGUR 2.19**

Leysið: $n - 9 = -42$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.3.

---

**UNDIRBÚNINGUR 2.20**

Leysið: $-5p = -23$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.13.

---

**UNDIRBÚNINGUR 2.21**

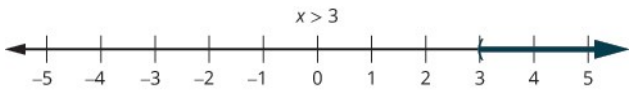
Leysið: $3a - 12 = 7a - 20$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.34.

## Sýnið ójöfnur á talnalínu

Munið þið hvað það merkir að tala sé lausn jöfnu? Lausn jöfnu er gildi breytu sem gerir jöfnuna að sannri fullyrðingu þegar það er sett í stað breytunnar.

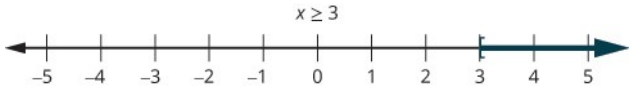
Hvað með lausn ójöfnu? Hvaða tala gerir ójöfnuna $x > 3$ sanna? Hugsið þið: „x gæti verið 4“? Það er rétt, en x gæti líka verið 5, 20 eða jafnvel 3,001. Hver tala sem er stærri en 3 er lausn ójöfnunnar $x > 3$.

Við sýnum lausnir ójöfnunnar $x > 3$ á talnalínunni með því að lita allar tölur hægra megin við 3 til að sýna að allar tölur stærri en 3 eru lausnir. Talan 3 sjálf er ekki lausn og því setjum við opinn hringsviga við 3. Graf ójöfnunnar $x > 3$ er sýnt á mynd 2.7. Takið eftir þessari venju: þykkar örvar vísa í jákvæða stefnu og þunnar örvar í neikvæða stefnu.




Mynd 2.7 Ójafnan $x > 3$ er sýnd á þessari talnalínu.

Graf ójöfnunnar $x \geq 3$ er mjög líkt grafi $x > 3$, en nú þarf einnig að sýna að 3 sé lausn. Það gerum við með því að setja hornklofa við $x = 3$, eins og sýnt er á mynd 2.8.




Mynd 2.8 Ójafnan $x \geq 3$ er sýnd á þessari talnalínu.

Takið eftir að opni hringsviginn, (, sýnir að endapunktur ójöfnunnar er ekki meðtalinn. Opni hornklofinn, [, sýnir að endapunkturinn er meðtalinn.



---

**DÆMI 2.66**

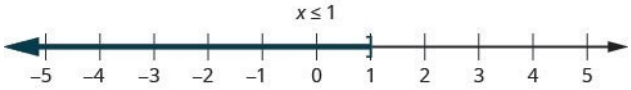
Sýnið á talnalínu:

ⓐ $x \leq 1$ ⓑ $x < 5$ ⓒ $x > -1$

## Lausn

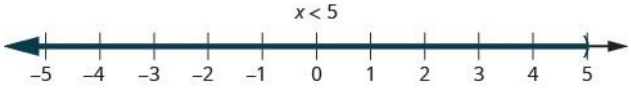
1. ⓐ $x \leq 1$

   Þetta merkir allar tölur sem eru minni en eða jafnar 1. Við litum allar tölur vinstra megin við 1 á talnalínunni og setjum hornklofa við $x = 1$ til að sýna að talan sé meðtalin.




2. ⓑ $x < 5$

   Þetta merkir allar tölur minni en 5, en 5 er ekki meðtalin. Við litum allar tölur vinstra megin við 5 á talnalínunni og setjum hringsviga við $x = 5$ til að sýna að talan sé ekki meðtalin.




3. ⓒ $x > -1$

   Þetta merkir allar tölur stærri en $-1$, en ekki töluna $-1$. Við litum allar tölur hægra megin við $-1$ á talnalínunni og setjum síðan hringsviga við $x = -1$ til að sýna að talan sé ekki meðtalin.




---

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.131**

Sýnið á talnalínu: ⓐ $x \leq -1$ ⓑ $x > 2$ ⓒ $x < 3$

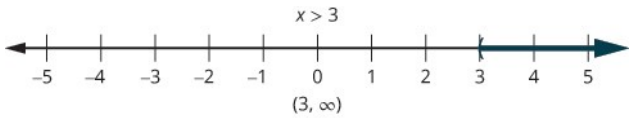
---

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.132**

Sýnið á talnalínu: ⓐ $x > -2$ ⓑ $x < -3$ ⓒ $x \geq -1$

Einnig má tákna ójöfnur með biltáknum. Eins og við sáum hér að framan merkir ójafnan $x > 3$ allar tölur stærri en 3. Lausnamengi ójöfnunnar á sér engin efri mörk. Með biltáknum ritum

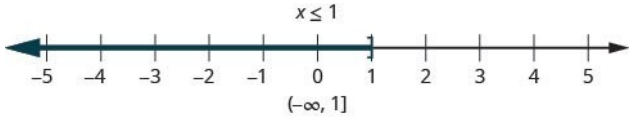
við $x>3$ sem $(3,\infty)$. Táknið $\infty$ er lesið „óendanleiki“. Það er ekki raunveruleg tala. Mynd 2.9 sýnir bæði talnalínuna og biltáknunina.




Mynd 2.9 Ójafnan $x>3$ er sýnd á þessari talnalínu og rituð með biltáknum.



Ójafnan $x\leq 1$ merkir allar tölur minni en eða jafnar 1. Lausnamengið hefur engin neðri mörk. Með biltáknum ritum við $x\leq 1$ sem $(-\infty,1]$. Táknið $-\infty$ er lesið „mínus óendanlegt“. Mynd 2.10 sýnir bæði talnalínuna og biltáknunina.




Mynd 2.10 Ójafnan $x\leq 1$ er sýnd á þessari talnalínu og rituð með biltáknum.

### ÓJÖFNUR, TALNALÍNUR OG BILTÁKN




Tókuð þið eftir því hvernig hringsviginn eða hornklofinn í biltáknuninni samsvarar tákninu við endapunkt örvarinnar? Þessi tengsl eru sýnd á mynd 2.11.




Mynd 2.11 Þegar ójöfnur eru sýndar á talnalínu og með biltáknum eru notuð svipuð tákn til að sýna endapunkta bila.

### DÆMI 2.67

Sýnið á talnalínu og ritið með biltáknum.

ⓐ $x\geq -3$ ⓑ $x<2{,}5$ ⓒ $x\leq -\frac{3}{5}$

## Lausn

**1.** ⓐ

| | |
|---|---|
| | $x \geq -3$ |
| Litið hægra megin við $-3$ og setjið hornklofa við $-3$. |   |
| Ritið með biltáknum. | $[-3, \infty)$ |

**2.**
ⓑ

| | |
|---|---|
| | $x < 2{,}5$ |
| Litið vinstra megin við $2{,}5$ og setjið hringsviga við $2{,}5$. |   |
| Ritið með biltáknum. | $(-\infty; 2{,}5)$ |

**3.**
ⓒ

| | |
|---|---|
| | $x \leq -\frac{3}{5}$ |
| Litið vinstra megin við $-\frac{3}{5}$ og setjið hornklofa við $-\frac{3}{5}$. |   |
| Ritið með biltáknum. | $\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right]$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.133**

Sýnið á talnalínu og ritið með biltáknum:

ⓐ $x > 2$ ⓑ $x \leq -1{,}5$ ⓒ $x \geq \frac{3}{4}$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.134**

Sýnið á talnalínu og ritið með biltáknum:

ⓐ $x \leq -4$ ⓑ $x \geq 0{,}5$ ⓒ $x < -\frac{2}{3}$

## Leysið ójöfnur með reglum um frádrátt og samlagningu í ójöfnum

Frádráttar- og samlagningarreglur jafna segja að ef tvær stærðir eru jafnar verði niðurstöðurnar einnig jafnar þegar sama tala er lögð við báðar stærðir eða dregin frá þeim.



**REGLUR JAFNAÐAR**

Frádráttarregla jafnaðar
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a = b$,
þá $a - c = b - c$.

Samlagningarregla jafnaðar
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a = b$,
þá $a + c = b + c$.

Samsvarandi reglur gilda um ójöfnur.

| | |
|---|---|
| Til dæmis vitum við að $-4$ er minna en 2. | $-4 < 2$ |
| Ef við drögum 5 frá báðum stærðum, er vinstri hliðin þá enn minni en sú hægri? | $-4 - 5 \,?\, 2 - 5$ |
| Við fáum $-9$ vinstra megin og $-3$ hægra megin. | $-9 \,?\, -3$ |
| Við vitum að $-9$ er minna en $-3$. | $-9 < -3$ |
| | **Ójöfnumerkið breyttist ekki.** |

Á sama hátt mætti sýna að ójöfnumerkið breytist ekki við samlagningu.
Þetta leiðir okkur að reglum um frádrátt og samlagningu í ójöfnum.

**REGLUR ÓJAFNA**

Frádráttarregla ójafna
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a < b$
þá $a - c < b - c$.

ef $a > b$
þá $a - c > b - c$.

Samlagningarregla ójafna
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b,$ og $c$,
ef $a < b$
þá $a + c < b + c$.

ef $a > b$
þá $a + c > b + c$.

Við notum þessar reglur til að leysa ójöfnur og fylgjum sömu skrefum og þegar við leysum jöfnur. Skrefin við að leysa ójöfnuna $x + 5 > 9$ líta svona út:

Tafla 2.6

| | |
|---|---|
| | $x + 5 > 9$ |
| Dragið 5 frá báðum hliðum til að einangra $x$. | $x + 5 - 5 > 9 - 5$ |
| Einfaldið. | $x > 4$ |

Hver tala sem er stærri en 4 er lausn ójöfnunnar.

**DÆMI 2.68**

Leysið ójöfnuna $n-\frac{1}{2}\leq\frac{5}{8}$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $n-\frac{1}{2}\leq\frac{5}{8}$ |
| Leggið $\frac{1}{2}$ við báðar hliðar ójöfnunnar. | $n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\leq\frac{5}{8}+\frac{1}{2}$ |
| Einfaldið. | $n\leq\frac{9}{8}$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $\left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.135**

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$p-\frac{3}{4}\geq\frac{1}{6}$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.136**

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$r-\frac{1}{3}\leq\frac{7}{12}$$

## Leysið ójöfnur með reglum um deilingu og margföldun í ójöfnum

Deilingar- og margföldunarreglur jafna segja að ef tvær stærðir eru jafnar verði niðurstöðurnar einnig jafnar þegar báðum stærðum er deilt eða þær margfaldaðar með sömu tölu, að því gefnu að ekki sé deilt með 0.

**REGLUR JAFNAÐAR**

Deilingarregla jafnaðar
Fyrir hvaða tölur sem er $a, b, c,$ og $c\neq 0$,
ef $a = b$,
þá $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

Margföldunarregla jafnaðar
Fyrir hvaða rauntölur sem er $a, b, c$,
ef $a = b$,
þá $ac = bc$.

Gilda samsvarandi reglur um ójöfnur? Hvað gerist við ójöfnu þegar báðum hliðum hennar er deilt eða þær margfaldaðar með fasta?

2

Skoðið nokkur talnadæmi.

| | $10 < 15$ | | $10 < 15$ |
|---|---|---|---|
| Deilið báðum hliðum með 5. | $\frac{10}{5} \,?\, \frac{15}{5}$ | Margfaldið báðar hliðar með 5. | $10(5) \,?\, 15(5)$ |
| Einfaldið. | $2 \,?\, 3$ | | $50 \,?\, 75$ |
| Fyllið inn ójöfnumerkin. | $2 < 3$ | | $50 < 75$ |

Ójöfnumerkin héldust óbreytt.

Helst ójöfnumerkið óbreytt þegar við deilum eða margföldum með neikvæðri tölu?

| | $10 < 15$ | | $10 < 15$ |
|---|---|---|---|
| Deilið báðum hliðum með $-5$. | $\frac{10}{-5} \,?\, \frac{15}{-5}$ | Margfaldið báðar hliðar með $-5$. | $10(-5) \,?\, 15(-5)$ |
| Einfaldið. | $-2 \,?\, -3$ | | $-50 \,?\, -75$ |
| Fyllið inn ójöfnumerkin. | $-2 > -3$ | | $-50 > -75$ |

Ójöfnumerkin snerust við.

Þegar við margföldum eða deilum ójöfnu með jákvæðri tölu helst ójöfnumerkið óbreytt. Þegar við margföldum eða deilum ójöfnu með neikvæðri tölu snýst ójöfnumerkið við.

Hér eru reglur um deilingu og margföldun í ójöfnum til viðmiðunar.

### DEILINGAR- OG MARGFÖLDUNARREGLUR ÓJAFNA

Fyrir hvaða rauntölur sem er $a, b, c$

$$\text{ef } a<b \text{ og } c>0, \text{þá } \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \text{ og } ac<bc.$$
$$\text{ef } a>b \text{ og } c>0, \text{þá } \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \text{ og } ac>bc.$$
$$\text{ef } a<b \text{ og } c<0, \text{þá } \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \text{ og } ac>bc.$$
$$\text{ef } a>b \text{ og } c<0, \text{þá } \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \text{ og } ac<bc.$$

Þegar við deilum ójöfnu eða margföldum hana með:

- **jákvæðri** tölu helst ójöfnumerkið óbreytt.
- **neikvæðri** tölu snýst ójöfnumerkið við.

### DÆMI 2.69

Leysið ójöfnuna $7y<42$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $7y < 42$ |
| Deilið báðum hliðum ójöfnunnar með 7. Þar sem $7>0$, helst ójöfnumerkið óbreytt. | $\frac{7y}{7} < \frac{42}{7}$ |
| Einfaldið. | $y < 6$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $(-\infty, 6)$ |

### PRÓFIÐ SJÁLF 2.137

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$c-8>0$$

### PRÓFIÐ SJÁLF 2.138

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$12d \leq 60$$

**DÆMI 2.70**

Leysið ójöfnuna $-10a \geq 50$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-10a \geq 50$ |
| Deilið báðum hliðum ójöfnunnar með −10. Þar sem $-10 < 0$, snýst ójöfnumerkið við. | $\frac{-10a}{-10} \leq \frac{50}{-10}$ |
| Einfaldið. | $a \leq -5$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $(-\infty, -5]$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.139**

Leysið hverja ójöfnu, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$-8q < 32$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.140**

Leysið hverja ójöfnu, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$-7r \leq -70$$

**LAUSN ÓJAFNA**

Stundum stendur breytan hægra megin þegar ójafna hefur verið leyst. Þá getum við ritað ójöfnuna í öfugri röð svo breytan standi vinstra megin.

$x > a$ merkir það sama og $a < x$

Hugsið þetta þannig: „Ef Xavier er hærri en Alex, þá er Alex lægri en Xavier.“

**DÆMI 2.71**

Leysið ójöfnuna $-20 < \frac{4}{5}u$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-20 < \frac{4}{5}u$ |
| Margfaldið báðar hliðar ójöfnunnar með $\frac{5}{4}$. Þar sem $\frac{5}{4} > 0$, helst ójöfnumerkið óbreytt. | $\frac{5}{4}(-20) < \frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}u\right)$ |
| Einfaldið. | $-25 < u$ |
| Ritið ójöfnuna þannig að breytan standi vinstra megin. | $u > -25$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $(-25, \infty)$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.141**

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$24 \leq \frac{3}{8}m$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.142**

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$-24 < \frac{4}{3}n$$

**DÆMI 2.72**

Leysið ójöfnuna $\frac{t}{-2} \geq 8$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{t}{-2} \geq 8$ |
| Margfaldið báðar hliðar ójöfnunnar með $-2$. Þar sem $-2<0$, snýst ójöfnumerkið við. | $-2\left(\frac{t}{-2}\right) \leq -2(8)$ |
| Einfaldið. | $t \leq -16$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $(-\infty, -16]$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.143**

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$\frac{k}{-12} \leq 15$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.144**

Leysið ójöfnuna, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

$$\frac{u}{-4} \geq -16$$

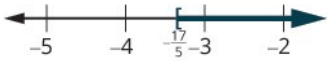
## Leysið ójöfnur sem þarf að einfalda

Flestar ójöfnur þarf að leysa í fleiri en einu skrefi. Við fylgjum sömu skrefum og í almennu aðferðinni til að leysa línulegar jöfnur en gætum sérstaklega að okkur þegar við margföldum eða deilum.

**DÆMI 2.73**

Leysið ójöfnuna $4m \leq 9m + 17$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $4m \le 9m + 17$ |
| Dragið $9m$ frá báðum hliðum til að færa breytuliðina til vinstri. | $4m - 9m \le 9m - 9m + 17$ |
| Einfaldið. | $-5m \le 17$ |
| Deilið báðum hliðum ójöfnunnar með −5 og snúið ójöfnumerkinu við. | $\frac{-5m}{-5} \ge \frac{17}{-5}$ |
| Einfaldið. | $m \ge -\frac{17}{5}$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $\left[-\frac{17}{5}, \infty\right)$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.145**

Leysið ójöfnuna $3q \ge 7q - 23$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.146**

Leysið ójöfnuna $6x < 10x + 19$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**DÆMI 2.74**

Leysið ójöfnuna $8p + 3(p - 12) > 7p - 28$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Einfaldið hvora hlið eins mikið og unnt er. | $8p+3(p-12)>7p-28$ |
| Beitið dreifireglu. | $8p+3p-36>7p-28$ |
| Sameinið samkynja liði. | $11p-36>7p-28$ |
| Dragið $7p$ frá báðum hliðum til að færa breytuliðina til vinstri. | $11p-36-7p>7p-28-7p$ |
| Einfaldið. | $4p-36>-28$ |
| Leggið 36 við báðar hliðar til að færa föstu liðina til hægri. | $4p-36+36>-28+36$ |
| Einfaldið. | $4p>8$ |
| Deilið báðum hliðum ójöfnunnar með 4; ójöfnumerkið helst óbreytt. | $\frac{4p}{4}>\frac{8}{4}$ |
| Einfaldið. | $p>2$ |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $(2,\infty)$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.147**

Leysið ójöfnuna $9y+2(y+6)>5y-24$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.148**

Leysið ójöfnuna $6u+8(u-1)>10u+32$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

Rétt eins og sumar jöfnur eru samsemdir og aðrar mótsagnir geta ójöfnur einnig verið samsemdir eða mótsagnir. Við þekkjum þessi form þegar aðeins fastar standa eftir við lausn ójöfnunnar. Ef niðurstaðan er sönn fullyrðing er ójafnan samsemd. Ef niðurstaðan er ósönn fullyrðing er ójafnan mótsögn.

**DÆMI 2.75**

Leysið ójöfnuna $8x-2(5-x)<4(x+9)+6x$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Einfaldið hvora hlið eins mikið og unnt er. | $8x-2(5-x)<4(x+9)+6x$ |
| Beitið dreifireglu. | $8x-10+2x<4x+36+6x$ |
| Sameinið samkynja liði. | $10x-10<10x+36$ |
| Dragið $10x$ frá báðum hliðum til að færa breytuliðina til vinstri. | $10x-10-10x<10x+36-10x$ |
| Einfaldið. | $-10<36$ |
| Liðir með $x$ eru horfnir og eftir stendur sönn fullyrðing. | Ójafnan er samsemd. Lausnamengið er mengi allra rauntalna. |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | $(-\infty,\infty)$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.149**

Leysið ójöfnuna $4b-3(3-b)>5(b-6)+2b$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.150**

Leysið ójöfnuna $9h-7(2-h)<8(h+11)+8h$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**DÆMI 2.76**

Leysið ójöfnuna $\frac{1}{3}a-\frac{1}{8}a>\frac{5}{24}a+\frac{3}{4}$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{3}a-\frac{1}{8}a>\frac{5}{24}a+\frac{3}{4}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með minnsta samnefnaranum, 24, til að eyða brotunum. | $24\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{8}a\right)>24\left(\frac{5}{24}a+\frac{3}{4}\right)$ |
| Einfaldið. | $8a-3a>5a+18$ |
| Sameinið samkynja liði. | $5a>5a+18$ |
| Dragið $5a$ frá báðum hliðum til að færa breytuliðina til vinstri. | $5a-5a>5a-5a+18$ |
| Einfaldið. | $0>18$ |
| Fullyrðingin er ósönn! | Ójafnan er mótsögn. |
| | Engin lausn er til. |
| Sýnið lausnina á talnalínu. |   |
| Ritið lausnina með biltáknum. | Engin lausn er til. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.151**

Leysið ójöfnuna $\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}x>\frac{1}{6}x+\frac{7}{8}$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.152**

Leysið ójöfnuna $\frac{2}{5}z-\frac{1}{3}z<\frac{1}{15}z-\frac{3}{5}$, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

## Setjið orðalag fram sem ójöfnu og leysið hana

Til að setja setningar fram sem ójöfnur þurfum við að þekkja orðasamböndin sem gefa ójöfnu til kynna. Sum þeirra eru auðskilin, svo sem „stærra en“ og „minna en“, en önnur eru ekki eins augljós.

Hugsið um orðasambandið „að minnsta kosti“. Hvað merkir að vera „að minnsta kosti 21 árs“? Það merkir 21 árs eða eldri. „Að minnsta kosti“ merkir það sama og „stærra en eða jafnt“.

Tafla 2.7 sýnir nokkur algeng orðasambönd sem gefa ójöfnur til kynna.

Tafla 2.7

| $>$ | $\geq$ | $<$ | $\leq$ |
|---|---|---|---|
| er stærra en | er stærra en eða jafnt | er minna en | er minna en eða jafnt |
| er meira en | er að minnsta kosti | er minna en | er í mesta lagi |
| er stærra en | er ekki minna en | hefur færri en | er ekki meira en |
| er meira en | er lágmarkið | er minna en | er hámarkið |



**DÆMI 2.77**

Setjið fram sem ójöfnu og leysið. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

Tólf sinnum c er ekki meira en 96.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Setjið fram sem ójöfnu. | Tólf sinnum $c$ er ekki meira en 96<br>$12c \leq 96$ |
| Leysið — deilið báðum hliðum með 12. | $\frac{12c}{12} \leq \frac{96}{12}$ |
| Einfaldið. | $c \leq 8$ |
| Ritið með biltáknum. | $(-\infty, 8]$ |
| Sýnið á talnalínu. |  |



**PRÓFIÐ SJÁLF 2.153**

Setjið fram sem ójöfnu og leysið. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

Tuttugu sinnum y er í mesta lagi 100

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.154**

Setjið fram sem ójöfnu og leysið. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

Níu sinnum z er ekki minna en 135

**DÆMI 2.78**

Setjið fram sem ójöfnu og leysið. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

Þrjátíu minna en x er að minnsta kosti 45.

### Lausn

| | |
|---|---|
| Setjið fram sem ójöfnu. | Þrjátíu minna en $x$ er að minnsta kosti 45.<br>$x - 30 \geq 45$ |
| Leysið — leggið 30 við báðar hliðar. | $x - 30 + 30 \geq 45 + 30$ |
| Einfaldið. | $x \geq 75$ |
| Ritið með biltáknum. | $[75, \infty)$ |
| Sýnið á talnalínu. |  |

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.155**

Setjið fram sem ójöfnu og leysið. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

Nítján minna en p er ekki minna en 47

**PRÓFIÐ SJÁLF 2.156**

Setjið fram sem ójöfnu og leysið. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

Fjórum meira en a er í mesta lagi 15.

## Æfingar úr kafla 2.7

### *Æfingin skapar meistarann*

**Sýnið ójöfnur á talnalínu**

Sýnið hverja ójöfnu á talnalínu í eftirfarandi verkefnum.

**430.**

ⓐ $x \leq -2$

ⓑ $x > -1$ ⓒ $x < 0$

**431.** ⓐ $x > 1$ ⓑ $x < -2$

ⓒ $x \geq -3$

**432.**

ⓐ $x \geq -3$ ⓑ $x < 4$ ⓒ $x \leq -2$

**433.**

ⓐ $x \leq 0$ ⓑ $x > -4$ ⓒ $x \geq -1$

Sýnið hverja ójöfnu á talnalínu og ritið hana með biltáknum í eftirfarandi verkefnum.

**434.**

ⓐ $x<-2$ ⓑ $x\geq -3,5$ ⓒ $x\leq \frac{2}{3}$

**435.**

ⓐ $x>3$ ⓑ $x\leq -0,5$ ⓒ $x\geq \frac{1}{3}$

**436.**

ⓐ $x\geq -4$ ⓑ $x<2,5$ ⓒ $x>-\frac{3}{2}$

**437.**

ⓐ $x\leq 5$ ⓑ $x\geq -1,5$ ⓒ $x<-\frac{7}{3}$

**Leysið ójöfnur með reglum um frádrátt og samlagningu í ójöfnum**

Leysið hverja ójöfnu, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum í eftirfarandi verkefnum.

438.

$$n-11<33$$

439.

$$m-45\leq 62$$

440.

$$u+25>21$$

441.

$$v+12>3$$

442.

$$a+\frac{3}{4}\geq \frac{7}{10}$$

443.

$$b+\frac{7}{8}\geq \frac{1}{6}$$

444.

$$f-\frac{13}{20}<-\frac{5}{12}$$

445.

$$g-\frac{11}{12}<-\frac{5}{18}$$

**Leysið ójöfnur með reglum um deilingu og margföldun í ójöfnum**

Leysið hverja ójöfnu, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum í eftirfarandi verkefnum.

2

446.

$$8x>72$$

447.

$$6y<48$$

448.

$$7r\leq 56$$

449.

$$9s\geq 81$$

450.

$$-5u\geq 65$$

451.

$$-8v\leq 96$$

452.

$$-9c<126$$

453.

$$-7d>105$$

454.

$$20>\frac{2}{5}h$$

455.

$$40<\frac{5}{8}k$$

456.

$$\frac{7}{6}j\geq 42$$

457.

$$\frac{9}{4}g \leq 36$$

458.

$$\frac{a}{-3} \leq 9$$

459.

$$\frac{b}{-10} \geq 30$$

460.

$$-25 < \frac{p}{-5}$$

461.

$$-18 > \frac{q}{-6}$$

462.

$$9t \geq -27$$

463.

$$7s < -28$$

464.

$$\frac{2}{3}y > -36$$

465.

$$\frac{3}{5}x \leq -45$$

**Leysið ójöfnur sem þarf að einfalda**

Leysið hverja ójöfnu, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum í eftirfarandi verkefnum.

466.

$$4v \geq 9v - 40$$

467.

$$5u \leq 8u - 21$$

468.

$$13q<7q-29$$

469.

$$9p>14p-18$$

470.

$$12x+3(x+7)>10x-24$$

471.

$$9y+5(y+3)<4y-35$$

472.

$$6h-4(h-1)\leq 7h-11$$

473.

$$4k-(k-2)\geq 7k-26$$

474.

$$8m-2(14-m)\geq 7(m-4)+3m$$

475.

$$6n-12(3-n)\leq 9(n-4)+9n$$

476.

$$\frac{3}{4}b-\frac{1}{3}b<\frac{5}{12}b-\frac{1}{2}$$

477.

$$9u+5(2u-5)\geq 12(u-1)+7u$$

478.

$$\frac{2}{3}g-\frac{1}{2}(g-14)\leq\frac{1}{6}(g+42)$$

479.

$$\frac{5}{6}a-\frac{1}{4}a>\frac{7}{12}a+\frac{2}{3}$$

480.

$$\frac{4}{5}h-\frac{2}{3}(h-9)\geq\frac{1}{15}(2h+90)$$

481.

$$12v+3(4v-1)\leq 19(v-2)+5v$$

**Blönduð æfing**

Leysið hverja ójöfnu, sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum í eftirfarandi verkefnum.

482.

$$15k\leq -40$$

483.

$$35k\geq -77$$

484.

$$23p-2(6-5p)>3(11p-4)$$

485.

$$18q-4(10-3q)<5(6q-8)$$

486.

$$-\frac{9}{4}x\geq -\frac{5}{12}$$

487.

$$-\frac{21}{8}y\leq -\frac{15}{28}$$

488.

$$c+34<-99$$

489.

$$d+29>-61$$

490.

$$\frac{m}{18}\geq -4$$

491.

$$\frac{n}{13}\leq -6$$

**Setjið orðalag fram sem ójöfnu og leysið hana**

Setjið orðalag fram sem ójöfnu og leysið í eftirfarandi verkefnum. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

**492.** Fjórtán sinnum d er meira en 56.

**493.** Níutíu sinnum c er minna en 450.

**494.** Átta sinnum z er minna en $-40$.

**495.** Tíu sinnum y er í mesta lagi $-110$.

**496.** Þremur meira en h er ekki minna en 25.

**497.** Sex meira en k er meira en 25.

**498.** Tíu minna en w er að minnsta kosti 39.

**499.** Tólf minna en x er ekki minna en 21.

**500.** Mínus fimm sinnum r er ekki meira en 95.

**501.** Mínus tveir sinnum s er minna en 56.

**502.** Nítján minna en b er í mesta lagi $-22$.

**503.** Fimmtán minna en a er að minnsta kosti $-7$.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**504.** **Öryggi** Hæð barns, h, verður að vera að minnsta kosti 57 tommur til að barnið geti setið örugglega í framsæti bíls. Ritið þetta sem ójöfnu.

**505.** **Orrustuflugmenn** Hámarkshæð orrustuflugmanns, h, er 77 tommur. Ritið þetta sem ójöfnu.

**506.** **Lyftur** Heildarþyngd farþega í lyftu, w, má ekki vera meiri en 1.200 pund. Ritið þetta sem ójöfnu.

**507.** **Innkaup** Fjöldi vara, n, sem viðskiptavinur má hafa við hraðkassa er í mesta lagi 8. Ritið þetta sem ójöfnu.

### *Ritunarverkefni*

**508.** Nefnið dæmi úr eigin lífi þar sem orðasambandið „að minnsta kosti“ er notað.

**509.** Nefnið dæmi úr eigin lífi þar sem orðasambandið „í mesta lagi“ er notað.

**510.** Útskýrið hvers vegna þarf að snúa ójöfnumerkinu við þegar ójafnan $-5x > 10$ er leyst.

**511.** Útskýrið hvers vegna þarf að snúa ójöfnumerkinu við þegar ójafnan $\frac{n}{-3} < 12$ er leyst.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið við verkefnin skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| teiknað ójöfnur á talnalínu. | | | |
| leyst ójöfnur með því að nota frádráttar- og samlagningarreglur ójafna. | | | |
| leyst ójöfnur með því að nota deilingar- og margföldunarreglur ójafna. | | | |
| leyst ójöfnur sem þarf að einfalda. | | | |
| sett dæmi fram sem ójöfnu og leyst hana. | | | |



ⓑ Hvað segir gátlistinn ykkur um hversu vel þið hafið náð tökum á efni kaflans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?

# Lykilhugtök

**skilyrt jafna**

Jafna sem er sönn fyrir eitt eða fleiri gildi breytunnar en ósönn fyrir öll önnur gildi hennar kallast skilyrt jafna.

**mótsögn**

Jafna sem er ósönn fyrir öll gildi breytunnar kallast mótsögn. Mótsögn hefur enga lausn.

**samsemd**

Jafna sem er sönn fyrir öll gildi breytunnar kallast samsemd. Lausnamengi samsemdar er mengi allra rauntalna.

**lausn jöfnu**

Lausn jöfnu er gildi breytu sem gerir jöfnuna að sannri fullyrðingu þegar það er sett í stað breytunnar.

# Meginatriði

## 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar

- **Til að ákvarða hvort tala sé lausn jöfnu**
  1. Skref 1. Setjið töluna í stað breytunnar í jöfnunni.
  2. Skref 2. Einfaldið stæðurnar báðum megin við jafnaðarmerkið.
  3. Skref 3.
     **Ákvarðið hvort fullyrðingin sem fæst sé sönn.**
     - Ef hún er sönn er talan lausn.
     - Ef hún er ekki sönn er talan ekki lausn.
- **Samlagningarregla jafnaðar**
  - Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c, ef $a=b$, þá $a+c=b+c$.
- **Frádráttarregla jafnaðar**

- Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c, ef $a=b$, þá $a-c=b-c$.

- **Setjið setningu fram sem jöfnu**
  1. Skref 1. Finnið orðalagið sem táknar jafnaðartengsl. Setjið jafnaðarmerki (=).
  2. Skref 2. Setjið orðin vinstra megin við orðalagið um jafnaðartengsl fram sem algebrustæðu.
  3. Skref 3. Setjið orðin hægra megin við orðalagið um jafnaðartengsl fram sem algebrustæðu.
- **Til að leysa hagnýtt verkefni**
  1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
  2. Skref 2. Ákvarðið að hverju er leitað.
  3. Skref 3. Gefið stærðinni sem leitað er að heiti. Veljið breytu sem táknar hana.
  4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með mikilvægustu upplýsingunum.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

## 2.2 Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu

- **Regla um að deila báðum hliðum jöfnu með sömu tölu—Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c, og** $c\neq 0$, ef $a=b$, þá $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$. Þegar báðum hliðum jöfnu er deilt með sömu tölu, annarri en núlli, helst jafnan sönn.

- **Regla um að margfalda báðar hliðar jöfnu með sömu tölu—Fyrir hvaða tölur sem er a, b og c, ef** $a=b$, þá $ac=bc$. Þegar báðar hliðar jöfnu eru margfaldaðar með sömu tölu helst jafnan sönn.

## 2.3 Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum

- **Upphafsaðferð til að leysa jöfnu með breytum og föstum á báðum hliðum jöfnunnar**
  1. Skref 1. Veljið hvor hliðin verður breytuhlið; hin verður fastahlið.
  2. Skref 2. Færið breytuliðina á breytuhlið jöfnunnar með samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.
  3. Skref 3. Færið alla föstu liðina hinum megin við jöfnuna með samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.

4. Skref 4. Gerið stuðul breytunnar jafnan 1 með því að margfalda báðar hliðar eða deila þeim með sömu tölu.
5. Skref 5. Sannreynið lausnina með því að setja hana í stað breytunnar í upphaflegu jöfnunni.

## 2.4 Notið almenna aðferð til að leysa línulegar jöfnur



- **Almenn aðferð til að leysa línulegar jöfnur**
  1. Skref 1. Einfaldið hvora hlið jöfnunnar eins mikið og unnt er. Beitið dreifireglu til að fjarlægja sviga. Sameinið samkynja liði.
  2. Skref 2. Færið alla breytuliði öðrum megin við jöfnuna. Beitið samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.
  3. Skref 3. Færið alla fasta liði hinum megin við jöfnuna. Beitið samlagningar- eða frádráttarreglu jafnaðar.
  4. Skref 4. Gerið stuðul breytuliðarins jafnan 1. Margfaldið báðar hliðar eða deilið þeim með sömu tölu. Tilgreinið lausn jöfnunnar.
  5. Skref 5. Sannreynið lausnina. Setjið lausnina í stað breytunnar í upphaflegu jöfnunni.

## 2.5 Leysið jöfnur með brotum eða tugabrotum

- **Aðferð til að leysa jöfnu með brotastuðlum**
  1. Skref 1. Finnið minnsta samnefnara allra brotanna í jöfnunni.
  2. Skref 2. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með þessum minnsta samnefnara. Þannig losnar jafnan við brotin.
  3. Skref 3. Leysið með almennu aðferðinni fyrir línulegar jöfnur.

## 2.6 Einangrið tiltekna breytu í formúlu

- **Til að leysa hagnýtt verkefni með formúlu**
  1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
  2. Skref 2. Ákvarðið að hverju er leitað.
  3. Skref 3. Gefið stærðinni sem leitað er að heiti. Veljið breytu sem táknar hana.

4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Ritið viðeigandi formúlu fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn í formúluna.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.



- **Vegalengd, hraði og tími**
  Fyrir hlut sem hreyfist með jöfnum hraða tengjast farin vegalengd, liðinn tími og hraði með formúlunni: $d = r\,t$ þar sem d = vegalengd, r = hraði, t = tími.
- **Að einangra tiltekna breytu í formúlu** merkir að láta breytuna standa eina öðrum megin við jöfnuna með stuðulinn 1 en allar aðrar breytur og fastar tölur hinum megin.

## 2.7 Leysið línulegar ójöfnur

- **Regla um frádrátt í ójöfnum**
  Fyrir hvaða tölur a, b og c sem er, ef
  $a<b$ þá $a-c<b-c$ og ef
  $a>b$ þá $a-c>b-c$.
- **Regla um samlagningu í ójöfnum**
  Fyrir hvaða tölur a, b og c sem er, ef
  $a<b$ þá $a+c<b+c$ og ef
  $a>b$ þá $a+c>b+c$.
- **Reglur um deilingu og margföldun í ójöfnum**
  Fyrir hvaða tölur a, b og c sem er, ef
  $a<b$ og $c>0$, þá $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ og $a\,c>b\,c$. ef
  $a>b$ og $c>0$, þá $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ og $a\,c>b\,c$. ef
  $a<b$ og $c<0$, þá $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ og $a\,c>b\,c$. ef
  $a>b$ og $c<0$, þá $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ og $a\,c<b\,c$.

- Þegar við deilum eða margföldum ójöfnu með:
  - **jákvæðri** tölu helst ójöfnumerkið óbreytt.
  - **neikvæðri** tölu snýst ójöfnumerkið við.

# Upprifjunarverkefni

## Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar

**Sannreynið lausn jöfnu**

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort hver tala sé lausn jöfnunnar.

512.

$$10x-1=5x;x=\frac{1}{5}$$

513.

$$w+2=\frac{5}{8};w=\frac{3}{8}$$

514.

$$-12n+5=8n;n=-\frac{5}{4}$$

515.

$$6a-3=-7a,a=\frac{3}{13}$$

**Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar**

Leysið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum með því að draga sömu tölu frá báðum hliðum.

516.

$$x+7=19$$

517.

$$y+2=-6$$

518.

$$a+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

519.

$$n+3{,}6=5{,}1$$

Leysið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum með því að leggja sömu tölu við báðar hliðar.

520.

$$u-7=10$$

521.

$$x-9=-4$$

522.

$$c-\frac{3}{11}=\frac{9}{11}$$



523.

$$p-4{,}8=14$$

Leysið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum.

524.

$$n-12=32$$

525.

$$y+16=-9$$

526.

$$f+\frac{2}{3}=4$$

527.

$$d-3{,}9=8{,}2$$

**Leysið jöfnur sem þarf að einfalda**

Leysið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum.

528.

$$y+8-15=-3$$

529.

$$7x+10-6x+3=5$$

530.

$$6(n-1)-5n=-14$$

531.

$$8(3p+5)-23(p-1)=35$$

**Setjið fram sem jöfnu og leysið hana**

Setjið hverja setningu í eftirfarandi verkefnum fram sem algebrujöfnu og leysið hana síðan.

**532.** Summa $-6$ og $m$ er 25.

**533.** Talan sem er fjórum minni en $n$ er 13.

**Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau**

Setjið hvert eftirfarandi verkefni fram sem algebrujöfnu og leysið það.

**534.** Dóttir Rochelle er 11 ára. Sonur hennar er 3 árum yngri. Hvað er sonur hennar gamall?

**535.** Tan vegur 146 pund. Minh vegur 15 pundum meira en Tan. Hve þungur er Minh?

**536.** Peter greiddi $9,75 fyrir að fara í bíó. Sú upphæð var $46,25 lægri en það sem hann greiddi fyrir að fara á tónleika. Hve mikið greiddi hann fyrir tónleikana?

**537.** Elissa þénaði $152,84 í þessari viku. Sú upphæð var $21,65 hærri en það sem hún þénaði í síðustu viku. Hve mikið þénaði hún í síðustu viku?



Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu

**Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu**

Leysið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu. Sannreynið síðan lausnina.

538.

$$8x = 72$$

539.

$$13a = -65$$

540.

$$0{,}25p = 5{,}25$$

541.

$$-y = 4$$

542.

$$\frac{n}{6} = 18$$

543.

$$\frac{y}{-10} = 30$$

544.

$$36 = \frac{3}{4}x$$

545.

$$\frac{5}{8}u=\frac{15}{16}$$

546.

$$-18m=-72$$



547.

$$\frac{c}{9}=36$$

548.

$$0{,}45x=6{,}75$$

549.

$$\frac{11}{12}=\frac{2}{3}y$$

**Leysið jöfnur sem þarf að einfalda**

Leysið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum. Einfalda þarf jöfnurnar fyrst.

550.

$$5r-3r+9r=35-2$$

551.

$$24x+8x-11x=-7-14$$

552.

$$\frac{11}{12}n-\frac{5}{6}n=9-5$$

553.

$$-9(d-2)-15=-24$$

**Setjið fram sem jöfnu og leysið hana**

Setjið hvert eftirfarandi verkefni fram sem jöfnu og leysið hana síðan.

**554.** 143 er margfeldi $-11$ og y.

**555.** Kvóti b og 9 er $-27$.

**556.** Summa q og eins fjórða hluta er einn.

**557.** Mismunur s og eins tólfta hluta er einn fjórði hluti.

**Setjið hagnýt verkefni fram sem jöfnur og leysið þau**

Setjið hvert eftirfarandi verkefni fram sem jöfnu og leysið það.

**558.** Ray greiddi $21 fyrir 12 miða á héraðshátíð. Hvað kostaði hver miði?

**559.** Janet fær $24 á klukkustund. Hún heyrði að það væri $\frac{3}{4}$ af því sem Adam fær greitt.

Hvað fær Adam greitt á klukkustund?

Leysið jöfnur með breytuliðum og föstum liðum á báðum hliðum

**Leysið jöfnu með föstum liðum báðum megin**

Leysið eftirfarandi jöfnur með föstum liðum á báðum hliðum.

560.

$$8p+7=47$$

561.

$$10w-5=65$$

562.

$$3x+19=-47$$

563.

$$32=-4-9n$$

**Leysið jöfnu með breytuliðum báðum megin**

Leysið eftirfarandi jöfnur með breytuliðum á báðum hliðum.

564.

$$7y=6y-13$$

565.

$$5a+21=2a$$

566.

$$k=-6k-35$$

567.

$$4x-\frac{3}{8}=3x$$

**Leysið jöfnu með breytuliðum og föstum liðum báðum megin**

Leysið eftirfarandi jöfnur með breytuliðum og föstum liðum á báðum hliðum.

568.

$$12x-9=3x+45$$

569.

$$5n-20=-7n-80$$

570.

$$4u+16=-19-u$$

571.

$$\frac{5}{8}c-4=\frac{3}{8}c+4$$

2

Notið almenna aðferð til að leysa línulegar jöfnur

**Leysið jöfnur með almennu aðferðinni til að leysa línulegar jöfnur**

Leysið hverja línulega jöfnu í eftirfarandi verkefnum.

572.

$$6(x+6)=24$$

573.

$$9(2p-5)=72$$

574.

$$-(s+4)=18$$

575.

$$8+3(n-9)=17$$

576.

$$23-3(y-7)=8$$

577.

$$\frac{1}{3}(6m+21)=m-7$$

578.

$$4(3{,}5y+0{,}25)=365$$

579.

$$0{,}25(q-8)=0{,}1(q+7)$$

580.

$$8(r-2)=6(r+10)$$

581.

$$5+7(2-5x)=2(9x+1)-(13x-57)$$

582.

$$(9n+5)-(3n-7)=20-(4n-2)$$

583.

$$2[-16+5(8k-6)]=8(3-4k)-32$$



**Flokkið jöfnur**

Flokkið hverja jöfnu í eftirfarandi verkefnum sem skilyrta jöfnu, samsemd eða mótsögn og tilgreinið síðan lausnina.

584.

$$17y-3(4-2y)=11(y-1)+12y-1$$

585.

$$9u+32=15(u-4)-3(2u+21)$$

586.

$$-8(7m+4)=-6(8m+9)$$

587.

$$21(c-1)-19(c+1)=2(c-20)$$

Leysið jöfnur með brotum og tugabrotum

**Leysið jöfnur með brotastuðlum**

Leysið hverja jöfnu með brotastuðlum í eftirfarandi verkefnum.

588.

$$\frac{2}{5}n-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

589.

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}x=8$$

590.

$$\frac{3}{4}a-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}a-\frac{5}{6}$$

591.

$$\frac{1}{2}(k-3)=\frac{1}{3}(k+16)$$

592.

$$\frac{3x-2}{5}=\frac{3x+4}{8}$$



593.

$$\frac{5y-1}{3}+4=\frac{-8y+4}{6}$$

**Leysið jöfnur með tugabrotastuðlum**

Leysið hverja jöfnu með tugabrotastuðlum í eftirfarandi verkefnum.

594.

$$0{,}8x-0{,}3=0{,}7x+0{,}2$$

595.

$$0{,}36u+2{,}55=0{,}41u+6{,}8$$

596.

$$0{,}6p-1{,}9=0{,}78p+1{,}7$$

597.

$$0{,}7y+2{,}5=0{,}95y-9{,}25$$

Einangrið tiltekna breytu í formúlu

**Notið formúluna fyrir vegalengd, hraða og tíma**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**598.** Natalie ók í $7\frac{1}{2}$ klukkustundir á hraðanum 60 mílur á klukkustund. Hve langt ók hún?

**599.** Mallory ferðast með rútu frá St. Louis til Chicago. Vegalengdin er 300 mílur og rútan ekur með jöfnum hraða, 60 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tekur ferðin?

**600.** Vinur Aarons ók honum frá Buffalo til Cleveland. Vegalengdin er 187 mílur og ferðin tók 2,75 klukkustundir. Hve hratt ók vinur Aarons?

**601.** Link hjólaði með jöfnum hraða, 15 mílur á klukkustund, í $2\frac{1}{2}$ klukkustundir. Hve langt hjólaði hann?

**Einangrið tiltekna breytu í formúlu**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**602.** Notið formúluna $d = r\,t$ til að einangra t ⓐ þegar
$d = 510$ og $r = 60$
ⓑ almennt

**603.** Notið formúluna $d = r\,t$ til að einangra $r$
ⓐ þegar $d = 451$ og $t = 5{,}5$
ⓑ almennt

**604.** Notið formúluna $A = \frac{1}{2}b\,h$ til að einangra $b$
ⓐ þegar $A = 390$ og $h = 26$
ⓑ almennt

**605.** Notið formúluna $A = \frac{1}{2}b\,h$ til að einangra $h$
ⓐ þegar $A = 153$ og $b = 18$
ⓑ almennt

**606.** Notið formúluna $I = P\,r\,t$ til að einangra höfuðstólinn, P, fyrir ⓐ
$I = \$2.501$, $r = 4{,}1\%$,
$t = 5$ ár
ⓑ almennt

**607.** Umritið formúluna $4x + 3y = 6$ og einangrið y ⓐ þegar
$x = -2$
ⓑ almennt

**608.** Umritið $180 = a + b + c$ og einangrið $c$.

**609.** Umritið formúluna $V = L\,W\,H$ og einangrið $H$.

Leysið línulegar ójöfnur

**Sýnið ójöfnur á talnalínu**

Sýnið hverja ójöfnu á talnalínu í eftirfarandi verkefnum.

**610.**
ⓐ $x \leq 4$
ⓑ $x > -2$
ⓒ $x < 1$

**611.**
ⓐ $x > 0$
ⓑ $x < -3$
ⓒ $x \geq -1$

Sýnið hverja ójöfnu í eftirfarandi verkefnum á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

**612.**

ⓐ $x < -1$

ⓑ $x \geq -2{,}5$

ⓒ $x \leq \frac{5}{4}$

**613.**

ⓐ $x > 2$

ⓑ $x \leq -1{,}5$

ⓒ $x \geq \frac{5}{3}$



**Leysið ójöfnur með reglum um frádrátt og samlagningu í ójöfnum**

Leysið hverja ójöfnu í eftirfarandi verkefnum. Sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

614.

$$n - 12 \leq 23$$

615.

$$m + 14 \leq 56$$

616.

$$a + \frac{2}{3} \geq \frac{7}{12}$$

617.

$$b - \frac{7}{8} \geq -\frac{1}{2}$$

**Leysið ójöfnur með reglum um deilingu og margföldun í ójöfnum**

Leysið hverja ójöfnu í eftirfarandi verkefnum. Sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

618.

$$9x > 54$$

619.

$$-12d \leq 108$$

620.

$$\frac{5}{6} j < -60$$

621.

$$\frac{q}{-2} \geq -24$$

**Leysið ójöfnur sem þarf að einfalda**

Leysið hverja ójöfnu í eftirfarandi verkefnum. Sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.



622.

$$6p > 15p - 30$$

623.

$$9h - 7(h-1) \leq 4h - 23$$

624.

$$5n - 15(4-n) < 10(n-6) + 10n$$

625.

$$\frac{3}{8}a - \frac{1}{12}a > \frac{5}{12}a + \frac{3}{4}$$

**Setjið fram sem ójöfnu og leysið hana**

Setjið hvert eftirfarandi verkefni fram sem ójöfnu og leysið hana. Ritið síðan lausnina með biltáknum og sýnið hana á talnalínu.

**626.** Summa z og fimm er í mesta lagi 19.

**627.** Mismunur c og þriggja er að minnsta kosti 360.

**628.** Níföld tala n er stærri en 42.

**629.** Mínus tvöföld tala a er í mesta lagi 8.

***Stærðfræði daglegs lífs***

**630.** Lýsið því hvernig þið hafið notað tvö viðfangsefni úr þessum kafla í daglegu lífi utan stærðfræðitíma síðasta mánuðinn.

# Æfingapróf

**631.** Ákvarðið hvort hvor tala sé lausn jöfnunnar $6x - 3 = x + 20$.

ⓐ $5$ ⓑ $\frac{23}{5}$

Leysið hverja jöfnu hér á eftir.

632.

$$n-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$$

633.

$$\frac{9}{2}c=144$$

634.

$$4y-8=16$$

635.

$$-8x-15+9x-1=-21$$

636.

$$-15a=120$$

637.

$$\frac{2}{3}x=6$$

638.

$$x-3{,}8=8{,}2$$

639.

$$10y=-5y-60$$

640.

$$8n-2=6n-12$$

641.

$$9m-2-4m-m=42-8$$

642.

$$-5(2x-1)=45$$

643.

$$-(d-9)=23$$

644.

$$\frac{1}{4}(12m-28)=6-2(3m-1)$$

645.

$$2(6x-5)-8=-22$$

646.

$$8(3a-5)-7(4a-3)=20-3a$$

647.

$$\frac{1}{4}p-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

648.

$$0{,}1d+0{,}25(d+8)=4{,}1$$

649.

$$14n-3(4n+5)=-9+2(n-8)$$

650.

$$9(3u-2)-4[6-8(u-1)]=3(u-2)$$

**651.** Umritið formúluna $x-2y=5$ og einangrið y ⓐ þegar

$x=-3$

ⓑ almennt

Sýnið hverja ójöfnu hér á eftir á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

652.

$$x\geq -3{,}5$$

653.

$$x<\frac{11}{4}$$

Leysið hverja ójöfnu hér á eftir. Sýnið lausnina á talnalínu og ritið hana með biltáknum.

654.

$$8k\geq 5k-120$$

655.

$$3c-10(c-2)<5c+16$$

Skrifið hvert verkefni hér á eftir sem jöfnu eða ójöfnu og leysið það.

**656.** Talan sem er 4 minni en tvöfalt x er 16.

**657.** Summa n og fimmtán er að minnsta kosti 48.

**658.** Samuel greiddi $25,82 fyrir eldsneyti í þessari viku. Sú upphæð var $3,47 lægri en það sem hann greiddi í síðustu viku. Hve mikið greiddi hann í síðustu viku?

**659.** Jenna keypti kápu á útsölu fyrir $120. Söluverðið var $\frac{2}{3}$ af upphaflega verðinu. Hvert var upphaflegt verð kápunnar?

**660.** Sean ferðaðist með rútu frá Seattle til Boise, 506 mílna leið. Ferðin tók $7\frac{2}{3}$ klukkustundir. Hver var hraði rútunnar?

3. KAFLI

# Stærðfræðilíkön





Mynd 3.1 Flókin stærðfræðilíkön eru notuð til að spá fyrir um umferðarmynstur á þjóðvegum Bandaríkjanna.

## Yfirlit kaflans


- 3.1 Beitið verkefnalausnaraðferð
- 3.2 Leysið prósentuverkefni
- 3.3 Leysið blöndunarverkefni
- 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
- 3.5 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða
- 3.6 Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum


## Inngangur

Stærðfræðiformúlur lýsa fyrirbærum á öllum sviðum lífsins. Þær eru notaðar til að skýra atburði og spá fyrir um niðurstöður, til dæmis í samgöngum, viðskiptum, hagfræði,

læknisfræði, efnafræði, verkfræði og á mörgum öðrum sviðum. Í þessum kafla notum við færni okkar í að leysa jöfnur til að leysa verkefni við ýmsar aðstæður.

# 3.1 Beitið verkefnalausnaraðferð

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Takist á við orðadæmi með jákvæðu hugarfari
- Beitið verkefnalausnaraðferð við orðadæmi
- Leysið talnadæmi



**UNDIRBÚNINGUR 3.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Setjið „6 minna en tvöfalt x“ fram sem algebrustæðu. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 1.26.

**UNDIRBÚNINGUR 3.2**

Leysið: $\frac{2}{3}x=24$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.16.

Leysið: $3x+8=14$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.27.

## Takist á við orðadæmi með jákvæðu hugarfari

„Hvort sem þú heldur að þú getir ... eða getir ekki ... hefurðu rétt fyrir þér.“ — Henry Ford

Heimurinn er fullur af orðadæmum! Duga tekjur mínar til að leigja þessa íbúð? Hve mikinn drykk þarf ég að útbúa fyrir veisluna? Hve stóran demant hef ég efni á að kaupa handa kærustunni minni? Ætti ég að fljúga eða aka á ættarmótið?

Hve mikið kostar að fylla bílinn af eldsneyti? Hve mikið þjórfé ætti ég að skilja eftir á veitingastað? Hve mörg sokkapör ætti ég að taka með í fríið? Hve stóran kalkún þarf ég fyrir þakkargjörðarkvöldverðinn og hvenær þarf ég síðan að setja hann í ofninn? Ef við systir mín kaupum gjöf handa móður okkar, hve mikið greiðir hvort okkar?

Nú þegar við kunnum að leysa jöfnur getum við notað nýju færnina í orðadæmum. Þekkið þið einhvern sem hefur áður átt í erfiðleikum með orðadæmi? Hafið þið einhvern tíma hugsað eins og nemandinn hér fyrir neðan?




Mynd 3.2 Neikvæðar hugsanir geta hindrað árangur.

Þegar okkur finnst við ekki hafa neina stjórn og endurtökum neikvæðar hugsanir reisum við hindranir í vegi fyrir árangri. Við þurfum að sefa óttann og breyta neikvæðu hugarfari okkar.

Byrjið upp á nýtt og hugsið jákvætt. Ef við tökum stjórnina og trúum því að okkur takist þetta, getum við náð tökum á orðadæmum! Lesið jákvæðu hugsanirnar á mynd 3.3 upphátt.




Mynd 3.3 Jákvæðar hugsanir eru fyrsta skrefið í átt að árangri.

Hugsið um eitthvað utan skólans sem þið getið gert núna en gátuð ekki gert fyrir 3 árum. Er það að aka bíl? Fara á snjóbretti? Elda dýrindis máltíð? Tala nýtt tungumál? Fyrri reynsla ykkar af orðadæmum er frá því að þið voruð yngri. Nú eruð þið eldri og tilbúin til að ná árangri!

## Beitið verkefnalausnaraðferð við orðadæmi

Við höfum rifjað upp hvernig orðasambönd eru sett fram sem algebrustæður með helstu orðum og táknum stærðfræðinnar. Við höfum einnig sett setningar fram sem algebrujöfnur og leyst nokkur orðadæmi. Í orðadæmunum var stærðfræði notuð við daglegar aðstæður. Við endursögðum aðstæðurnar í einni setningu, völdum breytu og settum síðan fram jöfnu til að leysa verkefnið. Þessi aðferð virkar svo lengi sem aðstæðurnar eru kunnuglegar og stærðfræðin er ekki of flókin.

Nú víkkum við aðferðina svo hægt sé að nota hana til að leysa hvaða orðadæmi sem er. Fyrst setjum við aðferðina fram og notum hana síðan til að leysa nokkur verkefni. Hér fyrir neðan er yfirlit yfir árangursríka verkefnalausnaraðferð.

3

---

**AÐFERÐ**

### Beitið verkefnalausnaraðferð við orðadæmi.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að þið skiljið öll orð og allar hugmyndir.
2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. Setjið síðan setninguna fram sem algebrujöfnu.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

---

**DÆMI 3.1**

Pilar keypti handtösku á útsölu fyrir $18. Söluverðið var helmingur upphaflega verðsins. Hvert var upphaflegt verð handtöskunnar?

### Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið. Lesið það tvisvar eða oftar ef þörf krefur. Flettið ókunnugum orðum upp í orðabók eða á netinu.

- *Er ljóst um hvað er fjallað í þessu verkefni? Þekkið þið öll orðin?*

**Skref 2.** Ákvarðið að hverju er leitað. Hafið þið einhvern tíma farið inn í svefnherbergið til að sækja eitthvað en síðan gleymt hverju þið leituðuð að? Erfitt er að finna eitthvað ef þið vitið ekki hvað það er! Lesið verkefnið aftur og leitið að orðum sem gefa til kynna að hverju er leitað.

- *Í þessu verkefni segja orðin „hvert var upphaflegt verð handtöskunnar“ okkur hvað þarf að finna.*

**Skref 3.** Gefið heiti stærðinni sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar hana. Nota má hvaða bókstaf sem er en veljið bókstaf sem auðvelt er að tengja við stærðina.

- Látum $p=$ tákna upphaflegt verð handtöskunnar.

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. Setjið setninguna fram sem algebrujöfnu.

Lesið verkefnið aftur vandlega til að sjá hvernig upplýsingarnar tengjast. Oft koma þær fram í einni setningu. Einnig getur hjálpað að skrifa eina setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. Leitið að vísbendingarorðum sem hjálpa ykkur að setja setninguna fram með algebrutáknum. Setjið setninguna fram sem jöfnu.

| | |
|---|---|
| Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. | 18 er helmingur upphaflega verðsins. |
| Setjið fram sem jöfnu. | $18 = \frac{1}{2} \cdot p$ |

**Skref 5.** Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum. Notið vandaðar algebruaðferðir hér, jafnvel þótt þið sjáið lausnina strax. Það býr ykkur betur undir verkefni þar sem svarið er ekki augljóst.

| | |
|---|---|
| Leysið jöfnuna. | $18 = \frac{1}{2}p$ |
| Margfaldið báðar hliðar með 2. | $2 \cdot 18 = 2 \cdot \frac{1}{2}p$ |
| Einfaldið. | $36 = p$ |

**Skref 6.** Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Við leystum jöfnuna og fengum $p=36$, sem merkir að upphaflega verðið var $36.

- *Er $36 skynsamlegt svar við verkefninu? Já, því 18 er helmingur 36 og handtaskan var á útsölu á hálfvirði.*

**Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. Í verkefninu var spurt: „Hvert var upphaflegt verð handtöskunnar?“

- *Svarið við spurningunni er: „Upphaflegt verð handtöskunnar var $36.“*

Ef þetta væri heimaverkefni gæti lausnin litið svona út:

Pilar keypti handtösku á útsölu fyrir $18. Söluverðið var helmingur upphaflega verðsins. Hvert var upphaflegt verð handtöskunnar?

| | |
|---|---|
| | Látum $p=$ tákna upphaflega verðið. |
| | 18 er helmingur upphaflega verðsins. |
| | $18=\frac{1}{2}p$ |
| Margfaldið báðar hliðar með 2. | $2\cdot 18=2\cdot\frac{1}{2}p$ |
| Einfaldið. | $36=p$ |
| Sannreynið. Er $36 sanngjarnt verð fyrir handtösku? | |
| Já. | |
| Er 18 helmingur 36? | |
| $18\overset{?}{=}\frac{1}{2}\cdot 36$ | |
| $18=18\checkmark$ | |
| | Upphaflegt verð handtöskunnar var $36. |

3

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.1**

Joaquin keypti bókahillu á útsölu fyrir $120. Söluverðið var tveir þriðju hlutar af upphaflega verðinu. Hvert var upphaflegt verð bókahillunnar?

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.2**

Tveir fimmtu hlutar laganna á spilunarlista Mariel eru kántrílög. Ef kántrílögin eru 16, hve mörg lög eru alls á spilunarlistanum?

Prófum þessa aðferð með öðru dæmi.

**DÆMI 3.2**

Ginny og bekkjarfélagar hennar stofnuðu námshóp. Fjöldi stúlkna í hópnum var þremur meiri en tvöfaldur fjöldi drengja. Í námshópnum voru 11 stúlkur. Hve margir drengir voru í hópnum?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Hve margir drengir voru í námshópnum? |
| **Skref 3.** Gefið heiti. Veljið breytu sem táknar fjölda drengja. | Látum $n=$ tákna fjölda drengja. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið fram. Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. | Fjöldi stúlkna (11) var þremur meiri en tvöfaldur fjöldi drengja |
| Setjið fram sem jöfnu. | $11 = 2b + 3$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $11 = 2b + 3$ |
| Dragið 3 frá báðum hliðum. | $11 - 3 = 2b + 3 - 3$ |
| Einfaldið. | $8 = 2b$ |
| Deilið báðum hliðum með 2. | $\frac{8}{2} = \frac{2b}{2}$ |
| Einfaldið. | $4 = b$ |
| **Skref 6.** Sannreynið. Er svarið skynsamlegt? Já, 4 drengir í námshópi virðast eðlilegur fjöldi. Í verkefninu segir að stúlkurnar hafi verið 3 fleiri en tvöfaldur fjöldi drengjanna. Ef drengirnir eru fjórir, verða stúlkurnar þá ellefu? Tvöfaldur fjöldi 4 drengja er 8. Þremur meira en 8 er 11. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Í námshópnum voru 4 drengir. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.3**

Guillermo keypti kennslubækur og stílabækur í bókabúðinni. Fjöldi kennslubóka var 3 meiri en tvöfaldur fjöldi stílabóka. Hann keypti 7 kennslubækur. Hve margar stílabækur keypti hann?

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.4**

Gerry leysti Sudoku-þrautir og krossgátur í þessari viku. Fjöldi Sudoku-þrauta sem hann leysti var átta meiri en tvöfaldur fjöldi krossgáta. Hann leysti 22 Sudoku-þrautir. Hve margar krossgátur leysti hann?

## Leysið talnadæmi

Nú þegar við höfum verkefnalausnaraðferð notum við hana til að leysa nokkrar gerðir orðadæma. Fyrsta gerðin sem við skoðum eru „talnadæmi“. Í talnadæmum eru gefnar vísbendingar um eina eða fleiri tölur. Við notum vísbendingarnar til að setja fram jöfnu. Talnadæmi koma sjaldan fyrir í daglegu lífi en með þeim er gott að byrja að æfa verkefnalausnaraðferðina sem lýst var hér að framan.

**DÆMI 3.3**

Mismunur tölu og sex er 13. Finnið töluna.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Þekkið þið öll orðin? | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | talan |
| **Skref 3.** Gefið heiti. Veljið breytu sem táknar töluna. | Látum $n=$ tákna töluna. |
| **Skref 4.** Setjið fram. Munið að leita að vísbendingarorðum á borð við „mismunur ... og ...“. | |
| Endursegið verkefnið í einni setningu. | Mismunur tölunnar og 6 er 13 |
| Setjið fram sem jöfnu. | $n-6 = 13$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $n-6=13$ |
| Einfaldið. | $n=19$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | |
| Mismunur 19 og 6 er 13. Svarið stenst sannprófun! | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Talan er 19. |

3

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.5**

Mismunur tölu og átta er 17. Finnið töluna.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.6**

Mismunur tölu og ellefu er $-7$. Finnið töluna.

**DÆMI 3.4**

Summa tvöfaldrar tölu og sjö er 15. Finnið töluna.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | talan |
| **Skref 3.** Gefið heiti. Veljið breytu sem táknar töluna. | Látum $n=$ tákna töluna. |
| **Skref 4. Setjið fram.** | |
| Endursegið verkefnið í einni setningu. | Summa tvöfaldrar tölu og 7 er 15 |
| Setjið fram sem jöfnu. | $2n+7 = 15$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $2n+7=15$ |
| Dragið 7 frá báðum hliðum og einfaldið. | $2n=8$ |
| Deilið báðum hliðum með 2 og einfaldið. | $n=4$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | |
| Er summa tvöfalds 4 og 7 jöfn 15? | |
| $2\cdot 4+7 \stackrel{?}{=} 15$<br>$15 = 15\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Talan er 4. |

Tókuð þið eftir því að við slepptum nokkrum skrefum þegar við leystum jöfnuna? Ef þið eruð ekki tilbúin til að sleppa þessum skrefum skuluð þið skrifa niður eins mörg þeirra og þið þurfið.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.7**

Summa fjórfaldrar tölu og tveggja er 14. Finnið töluna.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.8**

Summa þrefaldrar tölu og sjö er 25. Finnið töluna.

Í sumum talnadæmum þarf að finna tvær eða fleiri tölur. Freistandi getur verið að tákna þær allar með ólíkum breytum en hingað til höfum við aðeins leyst jöfnur með einni breytu. Til að þurfa ekki fleiri en eina breytu skilgreinum við tölurnar út frá sömu breytunni. Lesið verkefnið vandlega til að komast að því hvernig allar tölurnar tengjast.

**DÆMI 3.5**

Ein tala er fimm stærri en önnur. Summa talnanna er 21. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | | Við leitum að tveimur tölum. |
| **Skref 3.** Gefið heiti. Við þurfum að tákna tvær tölur og gefa hvorri sitt heiti. | | |
| Veljið breytu sem táknar fyrri töluna. | | Látum $n=1.$ tölu. |
| Hvað vitum við um hina töluna? | | Ein tala er fimm stærri en önnur. |
| | | $n+5=2.$ tala |
| **Skref 4.** Setjið fram. Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. | | Summa 1. tölunnar og 2. tölunnar er 21. |
| Setjið fram sem jöfnu. | | 1. tala + 2. tala = 21 |
| Setjið breytustæðurnar inn í jöfnuna. | | $n + n+5 = 21$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | | $n+n+5=21$ |
| Sameinið samkynja liði. | | $2n+5=21$ |
| Dragið 5 frá báðum hliðum og einfaldið. | | $2n=16$ |
| Deilið með 2 og einfaldið. | | $n=8$ 1. tala |
| Finnið einnig hina töluna. | | $n+5$ 2. tala |
| | | $8+5$ |
| | | 13 |
| **Skref 6. Sannreynið.** | | |
| Standast þessar tölur sannprófun í verkefninu? | | |
| Er önnur talan 5 stærri en hin? | $13\stackrel{?}{=}8+5$ | |
| Er þrettán 5 stærri en 8? Já. | $13=13\checkmark$ | |
| Er summa talnanna 21? | $8+13\stackrel{?}{=}21$ | |
| | $21=21\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | | Tölurnar eru 8 og 13. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.9**

Ein tala er sex stærri en önnur. Summa talnanna er tuttugu og fjórir. Finnið tölurnar.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.10**

Summa tveggja talna er fimmtíu og átta. Ein tala er fjórum stærri en hin. Finnið tölurnar.

**DÆMI 3.6**

Summa tveggja talna er mínus fjórtán. Ein tala er fjórum minni en hin. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | | Við leitum að tveimur tölum. |
| **Skref 3. Gefið heiti.** | | |
| Veljið breytu. | | Látum $n = 1.$ tölu. |
| Ein tala er 4 minni en hin. | | $n - 4 = 2.$ tala |
| **Skref 4. Setjið fram.** | | |
| Ritið sem eina setningu. | | Summa 2 talnanna er mínus 14. |
| Setjið fram sem jöfnu. | | 1. tala + 2. tala er mínus fjórtán |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | | $n + n - 4 = -14$ |
| Sameinið samkynja liði. | | $n + n - 4 = -14$ |
| Leggið 4 við báðar hliðar og einfaldið. | | $2n - 4 = -14$ |
| Einfaldið. | | $2n = -10$ |
| | | $n = -5$ 1. tala |
| | | $n - 4$ 2. tala |
| | | $-5 - 4$ |
| | | $-9$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | | |
| Er −9 fjórum minni en −5? | $-5 - 4 \stackrel{?}{=} -9$ | |
| | $-9 = -9 \checkmark$ | |
| Er summa þeirra −14? | $-5 + (-9) \stackrel{?}{=} -14$ | |
| | $-14 = -14 \checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | | Tölurnar eru −5 og −9. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.11**

Summa tveggja talna er mínus tuttugu og þrír. Ein tala er sjö minni en hin. Finnið tölurnar.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.12**

Summa tveggja talna er $-18$. Ein tala er 40 stærri en hin. Finnið tölurnar.

**DÆMI 3.7**

Ein tala er tíu stærri en tvöföld önnur tala. Summa þeirra er einn. Finnið tölurnar.



## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | Við leitum að tveimur tölum. |
| **Skref 3. Gefið heiti.** | |
| Veljið breytu. | Látum $x=1.$ tölu. |
| Ein tala er 10 stærri en tvöföld önnur tala. | $2x+10=2.$ tala |
| **Skref 4. Setjið fram.** | |
| Endursegið sem eina setningu. | Summa þeirra er einn. |
| | Summa talnanna tveggja er 1. |
| Setjið fram sem jöfnu. | $x+2x+10=1$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | |
| Sameinið samkynja liði. | $x+2x+10=1$ |
| Dragið 10 frá báðum hliðum. | $3x+10=1$ |
| Deilið báðum hliðum með 3. | $3x=-9$ |
| | $x=-3$ 1. tala |
| | $2x+10$ 2. tala |
| | $2(-3)+10$ |
| | $4$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | |
| Er talan sem er tíu stærri en tvöföld −3 jöfn 4? | $2(-3)+10\stackrel{?}{=}4$ |
| | $-6+10\stackrel{?}{=}4$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $4=4\checkmark$ | |
| Er summa þeirra 1? | $-3+4\stackrel{?}{=}1$ | |
| | $1=1\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | | Tölurnar eru −3 og 4. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.13**

Ein tala er átta stærri en tvöföld önnur tala. Summa þeirra er mínus fjórir. Finnið tölurnar.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.14**

Ein tala er þremur stærri en þreföld önnur tala. Summa þeirra er $-5$. Finnið tölurnar.

Í sumum talnadæmum koma samliggjandi heiltölur fyrir. Samliggjandi heiltölur eru heiltölur sem koma hver á eftir annarri. Dæmi um samliggjandi heiltölur eru:

$$1, 2, 3, 4$$
$$-10, -9, -8, -7$$
$$150, 151, 152, 153$$

Takið eftir að hver tala er einum stærri en talan á undan. Ef fyrsta heiltalan er táknuð með n er næsta samliggjandi heiltala $n+1$. Heiltalan þar á eftir er einum stærri en $n+1$, svo hún er $n+1+1$, sem er $n+2$.

| | |
|---|---|
| $n$ | $1^{\cdot}$ heiltala |
| $n+1$ | $2^{\cdot}$ samliggjandi heiltala |
| $n+2$ | $3^{\cdot}$ samliggjandi heiltala . . . o.s.frv. |

**DÆMI 3.8**

Summa tveggja samliggjandi heiltalna er 47. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | tvær samliggjandi heiltölur |
| **Skref 3.** Gefið heiti hverri tölu. | Látum $n=1^{\cdot}$ heiltölu. |
| | $n+1=$ næsta samliggjandi heiltala |
| **Skref 4. Setjið fram.** | |
| Endursegið sem eina setningu. | Summa heiltalnanna er 47. |

| | |
|---|---|
| Setjið fram sem jöfnu. | $n+n+1=47$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $n+n+1=47$ |
| Sameinið samkynja liði. | $2n+1=47$ |
| Dragið 1 frá báðum hliðum. | $2n=46$ |
| Deilið báðum hliðum með 2. | $n=23$ fyrsta heiltalan |
| | $n+1$ næsta heiltala í röð |
| | $23+1$ |
| | $24$ |

3

**Skref 6. Sannreynið.**

$$23+24 \stackrel{?}{=} 47$$
$$47 = 47\checkmark$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Samliggjandi heiltölurnar tvær eru 23 og 24. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.15**

Summa tveggja samliggjandi heiltalna er $95$. Finnið tölurnar.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.16**

Summa tveggja samliggjandi heiltalna er $-31$. Finnið tölurnar.

**DÆMI 3.9**

Finnið þrjár samliggjandi heiltölur sem hafa summuna $-42$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | þrjár samliggjandi heiltölur |
| **Skref 3.** Gefið heiti hverri talnanna þriggja. | Látum $n=1^{\cdot}$ heiltölu. |
| | $n+1=$ 2. samliggjandi heiltala |
| | $n+2=$ 3. samliggjandi heiltala |
| **Skref 4. Setjið fram.** | |
| Endursegið sem eina setningu. | Summa heiltalnanna þriggja er $-42$. |
| Setjið fram sem jöfnu. | $n+n+1+n+2=-42$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $n+n+1+n+2=-42$ |
| Sameinið samkynja liði. | $3n+3=-42$ |
| Dragið 3 frá báðum hliðum. | $3n=-45$ |
| Deilið báðum hliðum með 3. | $n=-15$ 1. heiltala |
| | $n+1$ önnur heiltala |
| | $-15+1$ |
| | $-14$ |
| | $n+2$ 3. heiltala |
| | $-15+2$ |
| | $-13$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | |
| $-13+(-14)+(-15) \stackrel{?}{=} -42$<br>$-42 = -42\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Samliggjandi heiltölurnar þrjár eru −13, −14 og −15. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.17**

Finnið þrjár samliggjandi heiltölur sem hafa summuna $-96$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.18**

Finnið þrjár samliggjandi heiltölur sem hafa summuna $-36$.

Nú þegar við höfum unnið með samliggjandi heiltölur víkkum við umfjöllunina og tökum einnig fyrir samliggjandi sléttar heiltölur og samliggjandi oddatölur. Samliggjandi sléttar heiltölur eru sléttar heiltölur sem koma hver á eftir annarri. Dæmi um samliggjandi sléttar heiltölur eru:

$$18, 20, 22$$

$$64, 66, 68$$

$$-12, -10, -8$$

Takið eftir að hver heiltala er 2 stærri en talan á undan. Ef sú fyrsta er táknuð með n er sú næsta $n+2$. Þar á eftir kæmi $n+2+2$ eða $n+4$.

| | |
|---|---|
| $n$ | 1. slétt heiltala |
| $n+2$ | 2. samliggjandi slétt heiltala |
| $n+4$ | 3. samliggjandi slétt heiltala . . . o.s.frv. |

*Samliggjandi oddatölur eru oddatölur sem koma hver á eftir annarri. Skoðið samliggjandi oddatölurnar 77, 79 og 81.*

$$77, 79, 81$$

$$n, n+2, n+4$$

| | |
|---|---|
| $n$ | $1^{\cdot}$ oddatala |
| $n+2$ | $2^{\cdot}$ samliggjandi oddatala |
| $n+4$ | $3^{\cdot}$ samliggjandi oddatala . . . o.s.frv. |

Virðist undarlegt að leggja 2 (slétta tölu) við til að fara frá einni oddatölu til þeirrar næstu? Fæst oddatala eða slétt tala þegar 2 er lagt við 3? Við 11? Við 47?

Hvort sem í verkefninu er spurt um samliggjandi sléttar tölur eða oddatölur þarf ekki að breyta aðferðinni. Mynstrið er það sama: Leggið 2 við til að fara frá einni oddatölu eða sléttri heiltölu til þeirrar næstu.

3

**DÆMI 3.10**

Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna 84.

## Lausn

Tafla 3.1

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | þrjár samliggjandi sléttar heiltölur |
| **Skref 3.** Gefið heiti heiltölunum. | Látum $n=1^{\cdot}$ slétta heiltölu.<br>$n+2=2^{\cdot}$ samliggjandi slétta heiltala<br>$n+4=3^{\cdot}$ samliggjandi slétta heiltala |
| **Skref 4. Setjið fram.** | |
| Endursegið sem eina setningu. | Summa sléttu heiltalnanna þriggja er 84. |
| Setjið fram sem jöfnu. | $n+n+2+n+4=84$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | |
| Sameinið samkynja liði. | $n+n+2+n+4=84$ |
| Dragið 6 frá báðum hliðum. | $3n+6=84$ |
| Deilið báðum hliðum með 3. | $3n=78$ |

| | |
|---|---|
| | $n=26$ 1. heiltala |
| | $n+2$ 2. heiltala<br>$26+2$<br>$28$ |
| | $n+4$ 3. heiltala<br>$26+4$<br>$30$ |

**Skref 6. Sannreynið.**

$$26+28+30 \stackrel{?}{=} 84$$
$$84=84 \checkmark$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Samliggjandi sléttu heiltölurnar þrjár eru 26, 28 og 30. |



**PRÓFIÐ SJÁLF 3.19**

Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna 102.

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.20**

Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna $-24$.

**DÆMI 3.11**

Hjón þéna saman $110.000 á ári. Laun konunnar eru $16.000 lægri en tvöföld laun eiginmannsins. Hve mikið þénar eiginmaðurinn?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Hve mikið þénar eiginmaðurinn? |
| **Skref 3.** Gefið heiti. | |
| Veljið breytu sem táknar þá fjárhæð sem eiginmaðurinn þénar. | Látum $h=$ tákna þá fjárhæð sem eiginmaðurinn þénar. |
| Laun konunnar eru $16.000 lægri en tvöföld laun eiginmannsins. | $2h-16.000$ fjárhæðin sem konan þénar |
| **Skref 4. Setjið fram.** | Eiginmaðurinn og konan þéna saman $110.000. |

| | |
|---|---|
| Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. | Tekjur eiginmannsins plús tekjur eiginkonunnar eru $110.000 |
| Setjið fram sem jöfnu. | $h + 2h - 16.000 = 110.000$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | h + 2h − 16.000 = 110.000 |
| Sameinið samkynja liði. | 3h − 16.000 = 110.000 |
| Leggið 16.000 við báðar hliðar og einfaldið. | 3h = 126.000 |
| Deilið báðum hliðum með 3. | h = 42.000 |
| | $42.000 fjárhæðin sem eiginmaðurinn þénar |
| | 2h − 16.000 fjárhæðin sem konan þénar |
| | 2(42.000) − 16.000 |
| | 84.000 − 16.000 |
| | 68.000 |
| **Skref 6. Sannreynið.** | |
| Ef konan þénar $68.000 og eiginmaðurinn $42.000, er summan þá $110.000? Já! | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Eiginmaðurinn þénar $42.000 á ári. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.21**

Samkvæmt Landssamtökum bílasala í Bandaríkjunum var meðalverð bifreiðar árið 2014 $28.500. Það verð var $1.500 lægra en 6-falt verðið árið 1975. Hvert var meðalverð bifreiðar árið 1975?

**PRÓFIÐ SJÁLF 3.22**

Gögn úr bandaríska manntalinu sýna að miðgildi verðs á nýju íbúðarhúsi í Bandaríkjunum í nóvember 2014 var $280.900. Það verð var $10.700 hærra en 14-falt verðið í nóvember 1964. Hvert var miðgildi verðs á nýju íbúðarhúsi í nóvember 1964?

## Verkefni úr hluta 3.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Takist á við orðadæmi með jákvæðu hugarfari**

Útbúið listana sem lýst er í verkefnunum hér á eftir.



1. Skráið fimm jákvæðar hugsanir sem þið getið sagt við ykkur sjálf. Þær eiga að hjálpa ykkur að takast á við orðadæmi með jákvæðu hugarfari. Þið getið skrifað þær á blað og sett fremst í stílabókina svo þið getið lesið þær oft.
2. Skráið fimm neikvæðar hugsanir sem þið hafið áður sagt við ykkur sjálf. Slíkar hugsanir geta hindrað framfarir ykkar í orðadæmum. Þið getið skrifað hverja þeirra á lítinn pappírsmiða og rifið hann svo í tætlur. Þannig eyðið þið neikvæðu hugsuninni á táknrænan hátt.

**Beitið verkefnalausnaraðferð við orðadæmi**

Leysið verkefnin hér á eftir með verkefnalausnaraðferðinni við orðadæmi. Munið að svara hverri spurningu með heilli setningu.

3. Tveir þriðju hlutar barnanna í fjórða bekk eru stúlkur. Ef stúlkurnar eru 20, hve mörg börn eru alls í bekknum?
4. Þrír fimmtu hlutar kórfélaganna eru konur. Ef konurnar eru 24, hve margir eru alls í kórnum?
5. Zachary á 25 geisladiska með kántrítónlist. Þeir eru einn fimmti hluti af geisladiskasafni hans. Hve marga geisladiska á Zachary?
6. Fjórðungur sælgætismolanna í M&M-poka er rauður. Ef rauðu molarnir eru 23, hve margir molar eru í pokanum?
7. Í skólaklúbbi eru 16 stúlkur. Fjöldi stúlkna er fjórum meiri en tvöfaldur fjöldi drengja. Finnið fjölda drengja.
8. Ungskátarnir eru 18 í sveit 645. Fjöldi skátanna er þremur meiri en fimmfaldur fjöldi fullorðinna leiðtoga. Finnið fjölda fullorðinna leiðtoga.
9. Huong flokkar kiljur og innbundnar bækur fyrir sölu klúbbsins á notuðum bókum. Fjöldi kilja er 12 minni en þrefaldur fjöldi innbundinna bóka. Huong var með 162 kiljur. Hve margar innbundnar bækur voru þar?
10. Jeff raðar upp barna- og fullorðinshjólum í reiðhjólaversluninni þar sem hann vinnur. Fjöldi barnahjóla er níu minni en þrefaldur fjöldi fullorðinshjóla. Fullorðinshjólin eru 42. Hve mörg barnahjól eru þar?

**11.** Philip greiðir $1.620 í leigu á mánuði. Leigugjaldið er $120 hærra en tvöfalt leigugjaldið sem Paul bróðir hans greiðir. Hve háa leigu greiðir Paul?

**12.** Marc keypti nýlega sportjeppa fyrir $54.000. Kaupverðið var $7.400 lægra en tvöföld sú upphæð sem eiginkona hans greiddi fyrir bílinn sinn í fyrra. Hve mikið greiddi eiginkonan fyrir bílinn?

**13.** Laurie hefur fjárfest $46.000 í hlutabréfum og skuldabréfum. Fjárfestingin í hlutabréfum er $8.000 lægri en þreföld fjárfestingin í skuldabréfum. Hve mikið hefur Laurie fjárfest í skuldabréfum?

**14.** Erica þénaði samtals $50.450 í tveimur störfum sínum í fyrra. Tekjurnar af starfinu í versluninni voru $1.250 hærri en þrefaldar tekjurnar af starfinu við háskólann. Hve mikið þénaði hún í starfinu við háskólann?

3

**Leysið talnadæmi**

Leysið talnadæmin hér á eftir.

**15.** Summa tölu og átta er 12. Finnið töluna.

**16.** Summa tölu og níu er 17. Finnið töluna.

**17.** Mismunur tölu og 12 er þrír. Finnið töluna.

**18.** Mismunur tölu og átta er fjórir. Finnið töluna.

**19.** Summa þrefaldrar tölu og átta er 23. Finnið töluna.

**20.** Summa tvöfaldrar tölu og sex er 14. Finnið töluna.

**21.** Mismunur tvöfaldrar tölu og sjö er 17. Finnið töluna.

**22.** Mismunur fjórfaldrar tölu og sjö er 21. Finnið töluna.

**23.** Þreföld summa tölu og níu er 12. Finnið töluna.

**24.** Sexföld summa tölu og átta er 30. Finnið töluna.

**25.** Ein tala er sex stærri en hin. Summa þeirra er 42. Finnið tölurnar.

**26.** Ein tala er fimm stærri en hin. Summa þeirra er 33. Finnið tölurnar.

**27.** Summa tveggja talna er 20. Ein tala er fjórum minni en hin. Finnið tölurnar.

**28.** Summa tveggja talna er 27. Ein tala er sjö minni en hin. Finnið tölurnar.

**29.** Summa tveggja talna er $-45$. Ein tala er níu stærri en hin. Finnið tölurnar.

**30.** Summa tveggja talna er $-61$. Ein tala er 35 stærri en hin. Finnið tölurnar.

**31.** Summa tveggja talna er $-316$. Ein tala er 94 minni en hin. Finnið tölurnar.

**32.** Summa tveggja talna er $-284$. Ein tala er 62 minni en hin. Finnið tölurnar.

**33.** Ein tala er 14 minni en önnur. Ef sjö er lagt við summu þeirra verður útkoman 85. Finnið tölurnar.

**34.** Ein tala er 11 minni en önnur. Ef átta er lagt við summu þeirra verður útkoman 71. Finnið tölurnar.

**35.** Ein tala er fimm stærri en önnur. Ef níu er lagt við summu þeirra verður útkoman 60. Finnið tölurnar.

**36.** Ein tala er átta stærri en önnur. Ef 17 er lagt við summu þeirra verður útkoman 95. Finnið tölurnar.

**37.** Ein tala er einum stærri en tvöföld önnur tala. Summa þeirra er $-5$. Finnið tölurnar.

**38.** Ein tala er sex stærri en fimmföld önnur tala. Summa þeirra er sex. Finnið tölurnar.

**39.** Summa tveggja talna er 14. Ein tala er tveimur minni en þreföld hin talan. Finnið tölurnar.

**40.** Summa tveggja talna er núll. Ein tala er níu minni en tvöföld hin talan. Finnið tölurnar.

**41.** Summa tveggja samliggjandi heiltalna er 77. Finnið heiltölurnar.

**42.** Summa tveggja samliggjandi heiltalna er 89. Finnið heiltölurnar.

**43.** Summa tveggja samliggjandi heiltalna er $-23$. Finnið heiltölurnar.

**44.** Summa tveggja samliggjandi heiltalna er $-37$. Finnið heiltölurnar.

**45.** Summa þriggja samliggjandi heiltalna er 78. Finnið heiltölurnar.

**46.** Summa þriggja samliggjandi heiltalna er 60. Finnið heiltölurnar.

**47.** Finnið þrjár samliggjandi heiltölur sem hafa summuna $-36$.

**48.** Finnið þrjár samliggjandi heiltölur sem hafa summuna $-3$.

**49.** Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna 258.

**50.** Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna 222.

**51.** Finnið þrjár samliggjandi oddatölur sem hafa summuna 171.

**52.** Finnið þrjár samliggjandi oddatölur sem hafa summuna 291.

**53.** Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna $-36$.

**54.** Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur sem hafa summuna $-84$.

**55.** Finnið þrjár samliggjandi oddatölur sem hafa summuna $-213$.

**56.** Finnið þrjár samliggjandi oddatölur sem hafa summuna $-267$.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**57.** **Útsöluverð** Patty greiddi $35 fyrir handtösku á útsölu. Söluverðið var $10 lægra en upphaflega verðið. Hvert var upphaflegt verð handtöskunnar?

**58.** **Útsöluverð** Travis keypti stígvél á útsölu með $25 afslætti af upphaflega verðinu. Hann greiddi $60 fyrir stígvélin. Hvert var upphaflegt verð þeirra?

**59.** **Magnkaup** Minh eyddi $6,25 í fimm límmiðabækur handa systursonum sínum. Finnið verð hverrar límmiðabókar.

**60.** **Magnkaup** Alicia keypti pakka með átta ferskjum fyrir $3,20. Finnið verð hverrar ferskju.

**61.** **Verð án söluskatts** Tom greiddi $1.166,40 fyrir nýjan ísskáp, að meðtöldum $86,40 í skatti. Hvert var verð ísskápsins fyrir skatt?

**62.** **Verð án söluskatts** Kenji greiddi $2.279 fyrir ný húsgögn í stofuna, að meðtöldum $129 í skatti. Hvert var verð húsgagnanna fyrir skatt?

3

### *Ritunarverkefni*

**63.** Hver er fyrri reynsla ykkar af því að leysa orðadæmi?

**64.** Hvernig ákveðið þið hvað breytan á að tákna þegar þið byrjið að leysa orðadæmi?

**65.** Hvað eru samliggjandi oddatölur? Nefnið þrjár samliggjandi oddatölur milli 50 og 60.

**66.** Hvað eru samliggjandi sléttar heiltölur? Nefnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur milli $-50$ og $-40$.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið við verkefnin skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| tekist á við orðadæmi með jákvæðu hugarfari. | | | |
| beitt verkefnalausnaraðferð við orðadæmi. | | | |
| leyst talnadæmi. | | | |

ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

... af öryggi. Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum hlutans. Hugleiðið hvaða námstækni þið notuðuð svo þið getið haldið áfram að beita henni. Hvað gerðuð þið til að verða örugg um að þið gætuð leyst þessi verkefni? Verið nákvæm!

... með nokkurri hjálp. Bregðist fljótt við, því að hvert viðfangsefni sem þið náið ekki tökum á getur orðið hola á leið ykkar til árangurs. Stærðfræðin er stigskipt og hvert viðfangsefni byggir á því fyrra. Mikilvægt er að hafa traustan grunn áður en þið haldið áfram. Hvern getið þið beðið um hjálp? Gott er að leita til bekkjarfélaga og kennara. Er einhvers staðar í skólanum hægt að fá aðstoð hjá stærðfræðileiðbeinendum? Getið þið bætt námstækni ykkar?

... nei — ég skil þetta ekki! Þetta er alvarlegt og þið megið ekki hunsa það. Þið þurfið tafarlaust að fá hjálp, annars verður efnið fljótt yfirþyrmandi. Ræðið við kennarann eins fljótt og unnt er. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

# 3.2 Leysið prósentuverkefni

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Setjið fram og leysið einfaldar prósentujöfnur
- Leysið prósentuverkefni
- Finnið prósentuhækkun og prósentulækkun
- Leysið verkefni um einfalda vexti
- Leysið verkefni um afslátt eða álagningu



**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.3**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Umbreytið 4,5% í tugabrot. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp Dæmi 1.106.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.4**

Umbreytið 0,6 í prósent. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp Dæmi 1.107.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.5**

Námundið 0,875 að næsta hundraðshluta. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
Dæmi 1.94.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.6**

Margfaldið (4,5)(2,38). Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp Dæmi 1.98.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.7**

Leysið $3{,}5 = 0{,}7n$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp Dæmi 2.13.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.8**

Dragið frá $50 - 37{,}45$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp Dæmi 1.26.

## Setjið fram og leysið einfaldar prósentujöfnur

Við leysum prósentujöfnur með sömu aðferðum og við notuðum til að leysa jöfnur með almennum brotum eða tugabrotum. Án algebru var best að setja prósentuverkefni upp sem hlutfallajöfnur. Nú þegar þið lærið algebru getið þið einfaldlega þýtt setningarnar yfir á algebrujöfnur og leyst þær síðan.

Nota má hvaða bókstaf sem er sem breytu en skynsamlegt er að velja bókstaf sem minnir á það sem leitað er að. Munið að breyta prósentunni í tugabrot þegar þið setjið hana inn í jöfnuna.

3

**DÆMI 3.12**

Setjið fram og leysið: Hvaða tala er 35% af 90?

### Lausn

| | Hvaða tala er 35% af 90? |
|---|---|
| Setjið fram á algebrumáli. Látum $n$ = töluna. | $n = 0{,}35 \cdot 90$ |
| Munið að „af“ merkir margföldun og „er“ samsvarar jafnaðarmerki. | |
| Margfaldið. | $n = 31{,}5$ |
| | 31,5 er 35 % af 90 |

**REYNIÐ SJÁLF 3.23**

Setjið fram og leysið:

Hvaða tala er 45% af 80?

**REYNIÐ SJÁLF 3.24**

Setjið fram og leysið:

Hvaða tala er 55% af 60?

Við þurfum að vanda okkur sérstaklega við orðalagið í næsta dæmi. Óþekkta stærðin verður ekki einangruð í upphafi eins og hún var í Dæmi 3.12. Við setjum setninguna aftur beint fram sem jöfnu.

**DÆMI 3.13**

Setjið fram og leysið: 6,5% af hvaða tölu eru $1,17?

## Lausn

| | 6,5% af hvaða tölu eru $1,17? |
|---|---|
| Setjið fram. Látum $n=$ tákna töluna. | $0{,}065 \cdot n = 1{,}17$ |
| Margfaldið. | $0{,}065n = 1{,}17$ |
| Deilið í báðar hliðar með 0,065 og einfaldið. | $n = 18$ |
| | 6,5 % af $\$18$ er $\$1{,}17$ |

**REYNIÐ SJÁLF 3.25**

Setjið fram og leysið:

7,5% af hvaða tölu eru $1,95?

**REYNIÐ SJÁLF 3.26**

Setjið fram og leysið:

8,5% af hvaða tölu eru $3,06?

Í næsta dæmi leitum við að prósentunni.

**DÆMI 3.14**

Setjið fram og leysið: 144 er hve mörg prósent af 96?

## Lausn

| | 144 er hve mörg prósent af 96? |
|---|---|
| Setjið fram á algebrumáli. Látum $p=$ tákna prósentuna. | $144 = p \cdot 96$ |
| Margfaldið. | $144 = 96\,p$ |
| Deilið með 96 og einfaldið. | $1{,}5 = p$ |
| Umbreytið í prósent. | $150\% = p$ |
| | 144 er 150 % af 96 |

Athugið að spurt er um prósentu og því verður lokasvarið að vera í prósentum.

**REYNIÐ SJÁLF 3.27**

Setjið fram og leysið:

110 er hve mörg prósent af 88?

**REYNIÐ SJÁLF 3.28**

Setjið fram og leysið:

126 er hve mörg prósent af 72?

## Leysið prósentuverkefni

Mörg verkefni um prósentur koma fyrir í daglegu lífi, svo sem verkefni um þjórfé, söluskatt, afslátt og vexti. Til að leysa þau setjum við upplýsingarnar fram sem einfalda prósentujöfnu, rétt eins og í dæmunum hér á undan. Þegar við höfum sett setninguna fram sem prósentujöfnu kunnum við að leysa hana.

Hér er aftur verkefnalausnaraðferðin sem við notuðum áður, svo að hún sé við höndina.



**AÐFERÐ**

### Beitið verkefnalausnaraðferð við orðadæmi.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum. Setjið síðan setninguna fram sem algebrujöfnu.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Nú höfum við aðferðina til hliðsjónar og höfum æft okkur í að leysa einfaldar prósentujöfnur. Við erum því tilbúin að leysa prósentuverkefni. Spyrjið ykkur alltaf hvort lokasvarið sé skynsamlegt. Mörg verkefnanna fjalla um hversdagslegar aðstæður og því getið þið stuðst við eigin reynslu.

**DÆMI 3.15**

Dezohn og kærasta hans snæddu góðan kvöldverð á veitingastað og reikningurinn hans var $68,50. Hann vill skilja eftir 18% þjórfé. Ef þjórféð á að vera 18% af heildarreikningnum, hve mikið þjórfé ætti hann að skilja eftir?

### Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | upphæð þjórfjárins sem Dezohn ætti að skilja eftir |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum t tákna upphæð þjórfjárins. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. | Þjórféð er 18% af reikningnum. |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Þjórféð er 18% af $68,50 |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | $t = 0{,}18 \cdot 68{,}50$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Margfaldið. | $t = 12{,}33$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Já, 20% af $70 eru $14. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Dezohn ætti að skilja eftir $12,33 í þjórfé. |

Athugið að við notuðum t til að tákna hina óþekktu upphæð þjórfjárins.

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.29**

Cierra og systir hennar snæddu kvöldverð á veitingastað og reikningurinn var $81,50. Ef hún vill skilja eftir 18% af heildarreikningnum í þjórfé, hve mikið ætti hún að skilja eftir?

**REYNIÐ SJÁLF 3.30**

Kimngoc borðaði hádegisverð á uppáhaldsveitingastaðnum sínum. Hún vill skilja eftir 15% af heildarreikningnum í þjórfé. Ef reikningurinn var $14,40, hve mikið skilur hún eftir í þjórfé?

**DÆMI 3.16**

Á umbúðum morgunkorns Masaos kom fram að einn skammtur innihéldi 85 milligrömm (mg) af kalíni, sem eru 2% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af kalíni?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | ráðlagðan heildarskammt af kalíni |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |

| | |
|---|---|
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $a=$ ráðlagðan heildarskammt af kalíni. |
| **Skref 4.** Setjið fram. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna stærðina. | 85 mg er 2% af heildarmagninu |
| Setjið fram sem jöfnu. | $85 = 0{,}02 \cdot a$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $4.250 = a$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Já, 2% er lítil prósenta og 85 er lítill hluti af 4.250. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Ráðlagður skammtur af kalíni er 4.250 mg. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.31**

Einn skammtur af hveitikornum inniheldur sjö grömm af trefjum, sem samsvara 28% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af trefjum?

**REYNIÐ SJÁLF 3.32**

Einn skammtur af hrísgrjónakorni inniheldur 190 mg af natríni, sem samsvara 8% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af natríni?

**DÆMI 3.17**

Mitzi fékk sælkerasúkkulaðikökur að gjöf. Á umbúðunum stóð að hver kaka hefði 480 hitaeiningar og þar af væru 240 hitaeiningar úr fitu. Hve mörg prósent af heildarhitaeiningum hverrar köku koma úr fitu?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | prósentuhlutfall heildarhitaeininganna sem kemur úr fitu |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $p=$ prósentuhlutfall fitu. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið fram. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna stærðina. | Hve mörg prósent af 480 eru 240? |
| Setjið fram sem jöfnu. | $p \cdot 480 = 240$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $480\,p = 240$ |
| Deilið með 480. | $p = 0{,}5$ |
| Setjið fram sem prósentu. | $p = 50\%$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Já, 240 er helmingurinn af 480 og því eru 50% skynsamleg niðurstaða. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Af heildarhitaeiningum hverrar köku koma 50% úr fitu. |



**REYNIÐ SJÁLF 3.33**

Leysið. Námundið að næsta heila prósenti.

Veronica ætlar að baka muffinskökur úr tilbúinni blöndu. Á umbúðunum stendur að hver kaka hafi 230 hitaeiningar og að 60 hitaeiningar komi úr fitu. Hve mörg prósent af heildarhitaeiningunum koma úr fitu?

**REYNIÐ SJÁLF 3.34**

Leysið. Námundið að næsta heila prósenti.

Á blöndunni sem Ricardo ætlar að nota til að baka súkkulaðikökur stendur að hver kaka hafi 190 hitaeiningar og að 76 hitaeiningar komi úr fitu. Hve mörg prósent af heildarhitaeiningunum koma úr fitu?

## Finnið prósentuhækkun og prósentulækkun

Í fjölmiðlum er oft fjallað um hve mikið stærð hefur hækkað eða lækkað á tilteknu tímabili. Yfirleitt er hækkunin eða lækkunin gefin upp í prósentum.

Til að finna prósentuhækkun finnum við fyrst hækkunina, það er mismun nýja gildisins og upphaflega gildisins. Síðan finnum við hve mörg prósent hækkunin er af upphaflega gildinu.

**AÐFERÐ**

### Finnið prósentuhækkunina.

1. Skref 1. Finnið hækkunina.

$$\text{nýtt gildi} - \text{upphaflegt gildi} = \text{hækkun}$$

2. Skref 2. Finnið prósentuhækkunina. Hækkunin er hve mörg prósent af upphaflega gildinu?

---

**DÆMI 3.18**

Árið 2011 lagði ríkisstjóri Kaliforníu til að gjöld í samfélagsháskólum hækkuðu úr $26 fyrir hverja einingu í $36 fyrir hverja einingu. Finnið prósentuhækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

3

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | prósentuhækkunina |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $p =$ prósentuna. |
| **Skref 4.** Setjið fram. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna stærðina. | |
| Finnið fyrst hækkunina. | nýtt gildi – upphaflegt gildi = hækkun |
| | $36 - 26 = 10$ |
| Finnið prósentuna. | Hækkunin er hve mörg prósent af upphaflega gildinu? |
| | 10 er hve mörg prósent af 26? |
| Setjið fram sem jöfnu. | $10 = p \cdot 26$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $10 = 26\,p$ |
| Deilið með 26. | $0{,}385 = p$ |
| Umbreytið í prósentuform og námundið að næsta tíunda hluta. | $38{,}5\% = p$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Já, 38,4% er nálægt $\frac{1}{3}$ og 10 er nálægt $\frac{1}{3}$ af 26. | |

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Nýju gjöldin fela í sér 38,5% hækkun frá eldri gjöldunum. |

Athugið að við námunduðum útkomu deilingarinnar að næsta þúsundasta hluta til að geta námundað prósentuna að næsta tíunda hluta.

**REYNIÐ SJÁLF 3.35**

Finnið prósentuhækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

Árið 2011 hækkuðu bandarísk skattyfirvöld frádráttarbæran aksturskostnað úr 51 senti í 55,5 sent.



**REYNIÐ SJÁLF 3.36**

Finnið prósentuhækkunina.

Árið 1995 var almennt fargjald með strætisvagni í Chicago $1,50. Árið 2008 var almenna fargjaldið $2,25.

Við finnum prósentulækkun á mjög svipaðan hátt og prósentuhækkun, en nú er lækkunin mismunur upphaflega gildisins og nýja gildisins. Síðan finnum við hve mörg prósent lækkunin er af upphaflega gildinu.

**AÐFERÐ**

### Finnið prósentulækkunina.

1. Skref 1. Finnið lækkunina.

$$\text{upphaflegt gildi} - \text{nýtt gildi} = \text{lækkun}$$

2. Skref 2. Finnið prósentulækkunina. Lækkunin er hve mörg prósent af upphaflega gildinu?

**DÆMI 3.19**

Meðalverð á einu galloni af bensíni í tiltekinni borg í júní 2014 var $3,71. Í júlí var meðalverðið í borginni $3,64. Finnið prósentulækkunina.

### Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | prósentulækkunina |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |

| | |
|---|---|
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $p=$ prósentulækkunina. |
| **Skref 4.** Setjið fram. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna stærðina. | |
| Finnið fyrst lækkunina. | $3{,}71-3{,}64=0{,}07$ |
| Finnið prósentuna. | Lækkunin er hve mörg prósent af upphaflega gildinu? |
| | $\underbrace{0{,}07}\ \underbrace{\text{er}}\ \underbrace{\text{hve mörg prósent}}\ \underbrace{\text{af}}\ \underbrace{3{,}71?}$ |
| Setjið fram sem jöfnu. | $0{,}07 = p \cdot 3{,}71$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $0{,}07 = 3{,}71\,p$ |
| Deilið með 3,71. | $0{,}019 = p$ |
| Umbreytið í prósentuform og námundið að næsta tíunda hluta. | $1{,}9\% = p$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Já, ef upphaflega verðið var $4 þá samsvarar 2% lækkun 8 sentum. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Bensínverðið lækkaði um 1,9%. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.37**

Finnið prósentulækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

Íbúafjöldi Norður-Dakóta var um 672.000 árið 2010. Spáð er að íbúafjöldinn verði um 630.000 árið 2020.

**REYNIÐ SJÁLF 3.38**

Finnið prósentulækkunina.

Á síðasta ári voru árslaun Sheilu $42.000. Vegna launalausra leyfisdaga voru árslaun hennar í ár $37.800.

## Leysið verkefni um einfalda vexti

Vissuð þið að bankar greiða ykkur fyrir að geyma peningana ykkar? Fjárhæðin sem viðskiptavinur leggur inn í banka kallast höfuðstóll, P, og greiðslan frá bankanum kallast vextir. Vextirnir eru reiknaðir sem tiltekið hlutfall af höfuðstólnum. Þetta hlutfall kallast vaxtaprósenta, r. Vaxtaprósentan er yfirleitt gefin upp sem prósenta á ári og í útreikningum

notum við hana sem tugabrot. Breytan t (fyrir tíma) táknar fjölda ára sem peningarnir eru á reikningnum.

Til að finna vextina notum við formúluna fyrir einfalda vexti, $I = P\,r\,t$.

---

**EINFALDIR VEXTIR**

Ef fjárhæðin P, sem kallast höfuðstóll, er fjárfest í t ár með árlegri vaxtaprósentu r, þá eru áunnu vextirnir I

$$I = P\,r\,t$$

þar sem

$I$ = vextir
$P$ = höfuðstóll
$r$ = vaxtaprósenta
$t$ = tími

Vextir sem reiknast samkvæmt þessari formúlu kallast einfaldir vextir.

Einnig má reikna vexti með annarri aðferð sem kallast vaxtavextir. Fjallað verður um þá í síðari stærðfræðiáföngum.

Formúlan sem við notum til að reikna einfalda vexti er $I = P\,r\,t$. Til að nota formúluna setjum við gefin gildi breytanna inn í hana og einangrum síðan óþekktu breytuna. Gagnlegt getur verið að raða upplýsingunum í töflu.

---

**DÆMI 3.20**

Nathaly lagði $12.500 inn á bankareikning með 4% vöxtum. Hve mikla vexti fær Nathaly á 5 árum?

$$\begin{aligned} I &= ? \\ P &= \$12.500 \\ r &= 4\,\% \\ t &= 5 \text{ ár} \end{aligned}$$

## Lausn

Tafla 3.2

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | upphæð áunninna vaxta |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana. | Látum $I =$ upphæð vaxtanna. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. Skrifið formúluna. Setjið gefnu upplýsingarnar inn. | $I = Prt$<br>$I = (12.500)(,04)(5)$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $I = 2.500$ |
| **Skref 6.** Athugið: Er þetta skynsamlegt? Eru $2.500 eðlilegir vextir af $12.500? Já. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Vextirnir eru $2.500. |



**REYNIÐ SJÁLF 3.39**

Areli fjárfesti $950 höfuðstól á bankareikningi með 3% vöxtum. Hve mikla vexti fékk hún á 5 árum?

**REYNIÐ SJÁLF 3.40**

Susana fjárfesti $36.000 höfuðstól á bankareikningi með 6,5% vöxtum. Hve mikla vexti fékk hún á 3 árum?

Stundum þekkjum við vextina sem hafa safnast af tilteknum höfuðstól á ákveðnu tímabili en ekki vaxtaprósentuna. Til að finna hana setjum við gefin gildi höfuðstóls og tíma inn í formúluna fyrir einfalda vexti og einangrum síðan vaxtaprósentuna.

**DÆMI 3.21**

Loren lánaði bróður sínum $3.000 til að hjálpa honum að kaupa bifreið. Eftir 4 ár endurgreiddi bróðir hans $3.000 höfuðstólinn auk $660 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

$$\begin{aligned} I &= \$660 \\ P &= \$3.000 \\ r &= ? \\ t &= 4 \text{ ár} \end{aligned}$$

## Lausn

Tafla 3.3

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | vaxtaprósentuna |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana. | Látum $r=$ vaxtaprósentuna. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. Skrifið formúluna. Setjið gefnu upplýsingarnar inn. | $I=Prt$<br>$660=(3.000)r(4)$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Deilið. Umbreytið í prósentuform. | $660=(12.000)r$<br>$0,055=r$<br>$5,5\%=r$ |
| **Skref 6.** Athugið: Er þetta skynsamlegt?<br>$I=Prt$<br>$660\overset{?}{=}(3.000)(0,055)(4)$<br>$660=660\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Vaxtaprósentan var 5,5%. |

Athugið að í þessu dæmi greiddi bróðir Lorens honum vexti, rétt eins og banki hefði greitt Loren vexti ef hann hefði fjárfest peningana þar.

**REYNIÐ SJÁLF 3.41**

Jim lánaði systur sinni $5.000 til að hjálpa henni að kaupa hús. Eftir 3 ár greiddi hún honum $5.000 höfuðstólinn auk $900 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

**REYNIÐ SJÁLF 3.42**

Hang fékk $7.500 að láni hjá foreldrum sínum til að greiða skólagjöld. Eftir 5 ár greiddi hún þeim $1.500 í vexti auk $7.500 sem hún hafði fengið að láni. Hver var vaxtaprósentan?

**DÆMI 3.22**

Eduardo sá í gögnum um nýja bílalánið sitt að með 7,5% vöxtum myndi hann greiða $6.596,25 í vexti á 5 árum. Hve mikið fékk hann að láni til að greiða fyrir bifreiðina?

## Lausn

Tafla 3.4

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | lánsfjárhæðina (höfuðstólinn) |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana. | Látum $P=$ lánshöfuðstólinn. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. Skrifið formúluna. Setjið gefnu upplýsingarnar inn. | $I = Prt$<br>$6.596{,}25 = P(0{,}075)(5)$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Deilið. | $6.596{,}25 = 0{,}375P$<br>$17.590 = P$ |
| **Skref 6.** Athugið: Er þetta skynsamlegt?<br>$I=Prt$<br>$6.596{,}25 \stackrel{?}{=} (17.590)(0{,}075)(5)$<br>$6.596{,}25=6.596{,}25\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Höfuðstóllinn var $17.590. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.43**

Á yfirliti yfir nýja bílalánið hans Seans stóð að hann myndi greiða $4.866,25 í vexti á 5 árum með 8,5% vöxtum. Hve mikið fékk hann að láni til að kaupa nýju bifreiðina?

**REYNIÐ SJÁLF 3.44**

Á 5 árum bar bankareikningur Gloriu 5% vexti og skilaði $2.400 í vöxtum. Hve mikið hafði hún lagt inn á reikninginn?

## Leysið verkefni um afslátt eða álagningu

Verkefni um afslátt eru mjög algeng í smásölu. Þegar vara er keypt á útsölu hefur tiltekin fjárhæð verið dregin frá upphaflega verðinu. Hugtakið afsláttarhlutfall, sem yfirleitt er gefið upp í prósentum, er notað til að finna afsláttarfjárhæðina. Til að finna afsláttarfjárhæðina margföldum við afsláttarhlutfallið með upphaflega verðinu.

Afsláttarlíkanið er dregið saman í rammanum hér fyrir neðan.

**AFSLÁTTUR**

$$\text{afsláttarfjárhæð} = \text{afsláttarhlutfall} \times \text{upphaflegt verð}$$
$$\text{útsöluverð} = \text{upphaflegt verð} - \text{afsláttarfjárhæð}$$

Hafið í huga að útsöluverð á alltaf að vera lægra en upphaflegt verð.

**DÆMI 3.23**

Elise keypti kjól með 35% afslætti af upphaflega verðinu, sem var $140. Hver var ⓐ afsláttarfjárhæðin og ⓑ útsöluverð kjólsins?

## Lausn



Tafla 3.5

| ⓐ | |
|---|---|
| Upphaflegt verð = $140<br>Afsláttarhlutfall = 35%<br>Afsláttur = ? | |
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | afsláttarfjárhæðina |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana. | Látum $d =$ afsláttarfjárhæðina. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna stærðina. Setjið hana fram sem jöfnu. | Afslátturinn er 35% af $140.<br>$d = 0{,}35(140)$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $d = 49$ |
| **Skref 6.** Athugið: Er þetta skynsamlegt? Er $49 afsláttur eðlilegur af kjól sem kostar $140? Já. | |
| **Skref 7.** Skrifið heila setningu sem svarar spurningunni. | Afsláttarfjárhæðin var $49. |

ⓑ Lesið verkefnið aftur.

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Finnið það sem leitað er að. | útsöluverð kjólsins |
| **Skref 2.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $s =$ útsöluverðið. |
| **Skref 3.** Setjið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Söluverðið er 140 dollarar að frádregnum 49 dollara afslættinum |
| Setjið fram sem jöfnu. | $s = 140 - 49$ |
| **Skref 4.** Leysið jöfnuna. | $s = 91$ |
| **Skref 5.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Er útsöluverðið lægra en upphaflega verðið? | |
| Já, $91 er lægra en $140. | |
| **Skref 6.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Útsöluverð kjólsins var $91. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.45**

Finnið ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ útsöluverðið:

Sergio keypti belti með 40% afslætti af upphaflega verðinu, sem var $29.

**REYNIÐ SJÁLF 3.46**

Finnið ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ útsöluverðið:

Oscar keypti grill með 65% afslætti af upphaflega verðinu, sem var $395.

Stundum þekkjum við upphaflega verðið og útsöluverðið en viljum finna afsláttarhlutfallið. Þá finnum við fyrst afsláttarfjárhæðina og notum hana síðan til að reikna hlutfall hennar af upphaflega verðinu. Dæmi 3.24 sýnir slíkt tilvik.

**DÆMI 3.24**

Jeannette keypti sundföt á $13,95 útsöluverði. Upphaflegt verð sundfatanna var $31. Finnið ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ afsláttarhlutfallið.

## Lausn

Tafla 3.6

| |
|---|
| ⓐ<br>Upphaflegt verð $=$ $\$31$<br>Afsláttur $=$ $?$<br>Útsöluverð $=$ $\$13{,}95$ |
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. afsláttarfjárhæðina |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana. Látum $d=$ afsláttarfjárhæðina. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna stærðina. Setjið hana fram sem jöfnu. Afslátturinn er mismunur upphaflega verðsins og útsöluverðsins.<br>$d=31-13{,}95$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. $d=17{,}05$ |
| **Skref 6.** Athugið: Er þetta skynsamlegt? Er verðið 17,05 lægra en 31? Já. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. Afsláttarfjárhæðin var $17,05. |

ⓑ Lesið verkefnið aftur.

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Finnið það sem leitað er að. | afsláttarhlutfallið |
| **Skref 2.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $r=$ afsláttarhlutfallið. |
| **Skref 3.** Setjið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Afslátturinn, $17,05, er hve mörg prósent af $31? |
| Setjið fram sem jöfnu. | $17{,}05 = r \cdot 31$ |
| **Skref 4.** Leysið jöfnuna. | $17{,}05 = 31r$ |
| Deilið í báðar hliðar með 31. | $0{,}55 = r$ |

| | |
|---|---|
| Umbreytið í prósentuform. | $r = 55\%$ |
| **Skref 5.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Er \$17,05 jafnt og 55% af \$31? | |
| $17{,}05 \stackrel{?}{=} 0{,}55(31)$ | |
| $17{,}05 = 17{,}05 \checkmark$ | |
| **Skref 6.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Afsláttarhlutfallið var 55%. |



**REYNIÐ SJÁLF 3.47**

Finnið ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ afsláttarhlutfallið.

Lena keypti eldhúsborð á \$375,20 útsöluverði. Upphaflegt verð borðsins var \$560.

**REYNIÐ SJÁLF 3.48**

Finnið ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ afsláttarhlutfallið.

Nick keypti loftkælingu fyrir mörg herbergi á \$340 útsöluverði. Upphaflegt verð loftkælingarinnar var \$400.

Verkefni um álagningu eru mjög algeng í smásölu. Verðið sem smásali greiðir fyrir vöru kallast kostnaðarverð. Smásalinn bætir síðan álagningu við kostnaðarverðið og fær þannig listaverðið, það er verðið sem varan er seld á. Álagningin er yfirleitt reiknuð sem prósenta af kostnaðarverðinu. Til að finna álagningarfjárhæðina margföldum við álagningarhlutfallið með kostnaðarverðinu.

Álagningarlíkanið er dregið saman í rammanum hér fyrir neðan.

**ÁLAGNING**

$$\text{álagningarfjárhæð} = \text{álagningarhlutfall} \times \text{kostnaðarverð}$$
$$\text{listaverð} = \text{kostnaðarverð} + \text{álagningarfjárhæð}$$

Hafið í huga að listaverðið á alltaf að vera hærra en kostnaðarverðið.

**DÆMI 3.25**

Listagallerí Adams keypti ljósmynd á \$250 kostnaðarverði. Adam lagði 40% á verðið. Finnið ⓐ álagningarfjárhæðina og ⓑ listaverð ljósmyndarinnar.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | álagningarfjárhæðina |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $m=$ álagningarfjárhæðina. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Álagningin er 40% af upphaflega kostnaðarverðinu, $250 |
| Setjið fram sem jöfnu. | $m = 0{,}40 \cdot 250$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $m = 100$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Já, 40% er minna en helmingur og 100 er lægra en helmingurinn af 250. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Álagningin á ljósmyndina var $100. |

ⓑ

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið aftur. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | listaverðið |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | |
| Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $p=$ listaverðið. |
| **Skref 4.** Setjið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Listaverðið er upprunalegt kostnaðarverð að viðbættri álagningunni |
| Setjið fram sem jöfnu. | $p = 250 + 100$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $p = 350$ |
| **Skref 6.** Athugið. Er þetta skynsamlegt? | |
| Er listaverðið hærra en kostnaðarverðið? Er listaverðið $350 hærra en kostnaðarverðið $250? Já. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Listaverð ljósmyndarinnar var $350. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.49**

Finnið ⓐ álagningarfjárhæðina og ⓑ listaverðið.

Hljóðfæraverslun Jims keypti gítar á $1.200 kostnaðarverði. Jim lagði 50% á verðið.

**REYNIÐ SJÁLF 3.50**

Finnið ⓐ álagningarfjárhæðina og ⓑ listaverðið.

Bílasalan keypti Toyota-bifreið Pablos á $8.500. Hún lagði 35% á verðið.

## Verkefni úr hluta 3.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Setjið fram og leysið einfaldar prósentujöfnur**

Setjið verkefnin hér á eftir fram sem jöfnur og leysið þau.

**67.** Hvaða tala er 45% af 120?

**68.** Hvaða tala er 65% af 100?

**69.** Hvaða tala er 24% af 112?

**70.** Hvaða tala er 36% af 124?

**71.** 250% af 65 er hvaða tala?

**72.** 150% af 90 er hvaða tala?

**73.** 800% af 2250 er hvaða tala?

**74.** 600% af 1740 er hvaða tala?

**75.** 28 er 25% af hvaða tölu?

**76.** 36 er 25% af hvaða tölu?

**77.** 81 er 75% af hvaða tölu?

**78.** 93 er 75% af hvaða tölu?

**79.** 8,2% af hvaða tölu eru $2,87?

**80.** 6,4% af hvaða tölu eru $2,88?

**81.** 11,5% af hvaða tölu eru $108,10?

**82.** 12,3% af hvaða tölu eru $92,25?

**83.** Hve mörg prósent af 260 eru 78?

**84.** Hve mörg prósent af 215 eru 86?

**85.** Hve mörg prósent af 1500 eru 540?

**86.** Hve mörg prósent af 1800 eru 846?

**87.** 30 er hve mörg prósent af 20?

**88.** 50 er hve mörg prósent af 40?

**89.** 840 er hve mörg prósent af 480?

**90.** 790 er hve mörg prósent af 395?

**Leysið prósentuverkefni**

Leysið verkefnin hér á eftir.

**91.** Geneva bauð foreldrum sínum í kvöldverð á uppáhaldsveitingastaðnum þeirra. Reikningurinn var $74,25. Geneva vill skilja eftir 16% af heildarreikningnum í þjórfé. Hve hátt ætti þjórféð að vera?

**92.** Þegar Hiro og samstarfsfólk hans borðuðu hádegisverð á veitingastað nálægt vinnustaðnum var reikningurinn $90,50. Þau vilja skilja eftir 18% af heildarreikningnum í þjórfé. Hve hátt ætti þjórféð að vera?

**93.** 12% hverrar launagreiðslu Trongs eru sjálfkrafa lögð inn á sparnaðarreikning hans. Síðasta launagreiðslan var $2165. Hve mikið var lagt inn á sparnaðarreikning Trongs?

**94.** Cherise leggur 8% hverrar launagreiðslu inn á lífeyrisreikning sinn. Síðasta launagreiðslan var $1.485. Hve mikið lagði Cherise inn á lífeyrisreikninginn?

**95.** Einn skammtur af hafragraut inniheldur átta grömm af trefjum, sem eru 33% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af trefjum?

**96.** Einn skammtur af hnetu- og ávaxtablöndu inniheldur 67 grömm af kolvetnum, sem eru 22% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af kolvetnum?

**97.** Beikonostborgari á vinsælum skyndibitastað inniheldur 2070 milligrömm (mg) af natríni, sem eru 86% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af natríni?

3

**98.** Salat með grilluðum kjúklingi á vinsælum skyndibitastað inniheldur 650 milligrömm (mg) af natríni, sem eru 27% af ráðlögðum dagskammti. Hver er ráðlagður heildardagskammtur af natríni?

**99.** Eftir 3 mánuði á sérstöku mataræði hafði Lisa misst 12% af upphaflegri líkamsþyngd sinni. Hún léttist um 21 pund. Hver var upphafleg líkamsþyngd Lisu?

**100.** Tricia fékk 6% hækkun á vikulaunum sínum. Hækkunin var $30 á viku. Hver voru upphafleg vikulaun hennar?

**101.** Yuki keypti kjól á útsölu á $72. Útsöluverðið var 60% af upphaflega verðinu. Hvert var upphaflegt verð kjólsins?

**102.** Kim keypti skó á útsölu á $40,50. Útsöluverðið var 45% af upphaflega verðinu. Hvert var upphaflegt verð skónna?

**103.** Tim skildi eftir $9 í þjórfé af $50 reikningi á veitingastað. Hve mörg prósent gaf hann í þjórfé?

**104.** Rashid skildi eftir $15 í þjórfé af $75 reikningi á veitingastað. Hve mörg prósent gaf hann í þjórfé?

**105.** Samkvæmt næringarupplýsingum skyndibitastaðar hefur fiskisamloka 380 hitaeiningar og 171 þeirra kemur úr fitu. Hve mörg prósent af heildarhitaeiningunum koma úr fitu?

**106.** Samkvæmt næringarupplýsingum skyndibitastaðar hefur lítill skammtur af kjúklingabitum 190 hitaeiningar og 114 þeirra koma úr fitu. Hve mörg prósent af heildarhitaeiningunum koma úr fitu?

**107.** Emma fær $3.000 í mánaðarlaun. Hún greiðir $750 á mánuði í leigu. Hve mörg prósent mánaðarlaunanna fara í leigu?

**108.** Dimple fær $3.200 í mánaðarlaun. Hún greiðir $960 á mánuði í leigu. Hve mörg prósent mánaðarlaunanna fara í leigu?

**Finnið prósentuhækkun og prósentulækkun**

Leysið verkefnin hér á eftir.

**109.** Tímakaup Tamaniku hækkaði úr $15,50 í $17,36. Finnið prósentuhækkunina.

**110.** Tímakaup Ayodele hækkaði úr $24,50 í $25,48. Finnið prósentuhækkunina.

**111.** Árleg skólagjöld við Kaliforníuháskóla hækkuðu úr um $4.000 árið 2000 í um $12.000 árið 2010. Finnið prósentuhækkunina.

**112.** Verð eins hlutabréfs hækkaði úr $12,50 í $50. Finnið prósentuhækkunina.

**113.** Samkvæmt tímaritinu Time jókst árleg neysla fisks og sjávarafurða í heiminum úr 22 pundum á mann á sjöunda áratugnum í 38 pund á mann árið 2011. Finnið prósentuhækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

**114.** Á einum mánuði hækkaði miðgildi íbúðaverðs á norðaustursvæðinu úr $225.400 í $241.500. Finnið prósentuhækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

**115.** Matvöruverslun lækkaði verð á brauði úr $2,80 í $2,73. Finnið prósentulækkunina.

**116.** Verð eins hlutabréfs lækkaði úr $8,75 í $8,54. Finnið prósentulækkunina.

**117.** Árslaun Hernandos voru $49.500 í fyrra. Í ár voru þau lækkuð í $44.055. Finnið prósentulækkunina.

**118.** Á 10 árum fækkaði íbúum Detroit úr 950.000 í um 712.500. Finnið prósentulækkunina.

**119.** Á 1 mánuði lækkaði miðgildi íbúðaverðs á vestursvæðinu úr $203.400 í $192.300. Finnið prósentulækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

**120.** Sala tölvuleikja og leikjatölva minnkaði úr $1.150 milljónum í $1.030 milljónir á 1 ári. Finnið prósentulækkunina. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

**Leysið verkefni um einfalda vexti**

Leysið verkefnin hér á eftir.

**121.** Casey lagði $1.450 inn á bankareikning með 4% vöxtum. Hve miklir vextir söfnuðust á tveimur árum?

**122.** Terrence lagði $5.720 inn á bankareikning með 6% vöxtum. Hve miklir vextir söfnuðust á 4 árum?

**123.** Robin lagði $31.000 inn á bankareikning með 5,2% vöxtum. Hve miklir vextir söfnuðust á 3 árum?

**124.** Carleen lagði $16.400 inn á bankareikning með 3,9% vöxtum. Hve miklir vextir söfnuðust á 8 árum?

**125.** Hilaria fékk $8.000 að láni hjá afa sínum til að greiða fyrir háskólanám. Fimm árum síðar endurgreiddi hún $8.000 höfuðstólinn auk $1.200 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

**126.** Kenneth lánaði frænku sinni $1.200 til að kaupa tölvu. Tveimur árum síðar endurgreiddi hún $1.200 höfuðstólinn auk $96 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

**127.** Lebron lánaði dóttur sinni $20.000 til að hjálpa henni að kaupa íbúð. Þegar hún seldi íbúðina fjórum árum síðar greiddi hún honum $20.000 höfuðstólinn auk $3.000 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

**128.** Pablo fékk $50.000 að láni til að stofna fyrirtæki. Þremur árum síðar endurgreiddi hann $50.000 höfuðstólinn auk $9.375 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

**129.** Á 10 árum söfnuðust $18.375 í vexti á bankareikningi með 5,25% vöxtum. Hver var höfuðstóll reikningsins?

**130.** Á 25 árum söfnuðust $2.375 í vexti af skuldabréfi með 4,75% vöxtum. Hver var höfuðstóll skuldabréfsins?

**131.** Á yfirliti yfir tölvulán Joshuas stóð að hann myndi greiða $1.244,34 í vexti af 3 ára láni með 12,4% vöxtum. Hve mikið fékk Joshua að láni til að kaupa tölvuna?

**132.** Á yfirliti yfir bílalán Margaretar stóð að hún myndi greiða $7.683,20 í vexti af 5 ára láni með 9,8% vöxtum. Hve mikið fékk Margaret að láni til að kaupa bifreiðina?

3

**Leysið verkefni um afslátt eða álagningu**

Finnið útsöluverðið í verkefnunum hér á eftir.

**133.** Perla keypti farsíma á útsölu með $50 afslætti. Upphaflegt verð farsímans var $189.

**134.** Sophie sá kjól sem henni líkaði á útsölu með $15 afslætti. Upphaflegt verð kjólsins var $96.

**135.** Rick vill kaupa verkfærasett sem kostar upphaflega $165. Í næstu viku verður settið á útsölu með $40 afslætti.

**136.** Sjónvörp eru á útsölu í verslun Angelos. Eitt sjónvarp, sem kostar upphaflega $859, er selt með $125 afslætti.

Finnið í verkefnunum hér á eftir ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ útsöluverðið.

**137.** Janelle keypti strandstól á útsölu með 60% afslætti. Upphaflega verðið var $44,95.

**138.** Errol keypti hjólabrettahjálm á útsölu með 40% afslætti. Upphaflega verðið var $49,95.

**139.** Kathy vill kaupa myndavél með $389 listaverði. Myndavélin er á útsölu með 33% afslætti.

**140.** Colleen keypti jakkaföt með 25% afslætti af upphaflega verðinu, sem var $245.

**141.** Erys keypti hlaupabretti á útsölu með 35% afslætti. Upphaflega verðið var $949,95 (námundið að næsta senti).

**142.** Jay keypti gítar á útsölu með 45% afslætti. Upphaflega verðið var $514,75 (námundið að næsta senti).

Finnið í verkefnunum hér á eftir ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ afsláttarhlutfallið. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti ef þörf krefur.)

**143.** Larry og Donna keyptu sófa á $1.344 útsöluverði. Upphaflegt verð sófans var $1.920.

**144.** Hiroshi keypti sláttuvél á $240 útsöluverði. Upphaflegt verð sláttuvélarinnar var $300.

**145.** Patty keypti barnavagn á útsölu á $301,75. Upphaflegt verð vagnsins var $355.

**146.** Bill fann bók sem hann vildi kaupa á útsölu á $20,80. Upphaflegt verð bókarinnar var $32.

**147.** Nikki keypti garðhúsgögn á útsölu á $480. Upphaflega verðið var $850. Hvert var afsláttarhlutfallið, námundað að næsta tíunda hluta úr prósenti?

**148.** Stella keypti lítið borðstofusett á útsölu á $725. Upphaflega verðið var $1.299. Hvert var afsláttarhlutfallið, námundað að næsta tíunda hluta úr prósenti?

Finnið í eftirfarandi verkefnum ⓐ álagningarfjárhæðina og ⓑ listaverðið.

**149.** Daria keypti armband á $16 kostnaðarverði til að selja í handverksverslun sinni. Hún lagði 45% á verðið.

**150.** Regina keypti handgerða bútasaumssæng á $120 kostnaðarverði til að selja í sængurverslun sinni. Hún lagði 55% á verðið.

**151.** Tom greiddi $0,60 fyrir pundið af tómötum sem hann ætlaði að selja í grænmetisverslun sinni. Hann bætti við 33% álagningu.

**152.** Flora greiddi birgi sínum $0,74 fyrir hvern rósastilk sem hún ætlaði að selja í blómaverslun sinni. Hún bætti við 85% álagningu.

**153.** Alan keypti notað reiðhjól á $115. Eftir að hafa gert það upp bætti hann við 225% álagningu og auglýsti það síðan til sölu.

**154.** Michael keypti fornbifreið á $8.500. Hann gerði hana upp og bætti síðan við 150% álagningu áður en hann auglýsti hana til sölu.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**155.** **Þjórfé** Við kaffivagninn á háskólasvæðinu kostar meðalstór kaffibolli $1,65. MaryAnne tekur $2,00 með sér þegar hún kaupir kaffibolla og skilur afganginn eftir sem þjórfé. Hve mörg prósent gefur hún í þjórfé?

**156.** **Reikningi skipt** Fjórir vinir fóru saman í hádegisverð og reikningurinn var $53,75. Þeir ákváðu að bæta við nægu þjórfé til að heildarfjárhæðin yrði $64, svo auðvelt væri að skipta reikningnum jafnt. Hve mörg prósent gáfu þeir í þjórfé?

### *Ritunarverkefni*

**157.** Án þess að leysa verkefnið „44 er 80% af hvaða tölu?“ skuluð þið hugleiða hver lausnin gæti verið. Ætti talan að vera stærri en 44 eða minni en 44? Útskýrið röksemdafærsluna.

**158.** Án þess að leysa verkefnið „Hvaða tala er 20% af 300?“ skuluð þið hugleiða hver lausnin gæti verið. Ætti talan að vera stærri en 300 eða minni en 300? Útskýrið röksemdafærsluna.

**159.** Eftir heimkomu úr fríi sagði Alex að hann hefði átt að pakka 50% færri stuttbuxum og 200% fleiri skyrtum. Útskýrið hvað Alex átti við.

**160.** Vegna vegaframkvæmda í tiltekinni borg var fólki ráðlagt að gera ráð fyrir að ferðin til vinnu á mánudagsmorgni tæki 150% af venjulegum ferðatíma. Útskýrið hvað það merkir.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð námsmarkmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| umritað og leyst einfaldar prósentujöfnur. | | | |
| leyst prósentuverkefni. | | | |
| fundið prósentuhækkun og prósentulækkun. | | | |
| leyst verkefni um einfalda vexti. | | | |
| leyst verkefni um afslátt eða álagningu. | | | |



ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann skuluð þið ákveða hvað þið gerið til að ná öllum markmiðunum af öryggi.

## 3.3 Leysið blöndunarverkefni

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið orðadæmi um myntir
- Leysið orðadæmi um miða og frímerki
- Leysið orðadæmi um blöndur
- Notað blöndulíkanið til að leysa fjárfestingarverkefni með einföldum vöxtum

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.9**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Margfaldið: 14(0,25). Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
Dæmi 1.97.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.10**

Leysið: $0{,}25\,x+0{,}10\left(x+4\right)=2{,}5$.
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp Dæmi 2.44.

**VERIÐ UNDIRBÚIN 3.11**

Fjöldi tíusenta mynta er þremur meiri en fjöldi 25 senta mynta. Látum q tákna fjölda 25 senta mynta. Skrifið stæðu fyrir fjölda tíusenta mynta. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
Dæmi 1.26.

## Leysið orðadæmi um myntir

Í blöndunarverkefnum eru tvö eða fleiri efni eða vörur með mismunandi gildi blönduð saman. Matvöruverslanir og barþjónar nota blöndulíkanið til að tryggja sanngjarnt verð á söluvörum sínum. Margir aðrir sérfræðingar nota það einnig, svo sem efnafræðingar, fjárfestingarbankamenn og landslagshönnuðir.

---

**VERKLEG STÆRÐFRÆÐI**

Verkefnið *Myntatilraun* í verklegri stærðfræði hjálpar ykkur að öðlast betri skilning á orðadæmum um blöndur.

Við byrjum á að skoða viðfangsefni sem allir þekkja — peninga!

Ímyndið ykkur að við tökum lófafylli af myntum úr vasa eða veski og leggjum þær á borð. Hvernig finnum við virði myntanna? Ef við setjum upp aðferð í skrefum til að finna heildarvirði þeirra verður auðveldara að byrja að leysa orðadæmi um myntir.

Hvað gerum við þá? Til að koma skipulagi á myntirnar getum við flokkað þær í hrúgur eftir verðgildi. Allar 25 senta myntir fara saman, allar tíusenta myntir saman, allar fimm senta myntir saman og svo framvegis. Heildarvirði allra myntanna fæst með því að leggja saman virði hverrar hrúgu.



Hvernig finnum við virði hverrar hrúgu? Hugsum um hrúguna af tíusenta myntum — hvert er virði hennar? Ef við teljum myntirnar vitum við fjölda tíusenta mynta.

Þetta segir okkur þó ekki heildarvirði tíusenta myntanna. Segjum að við höfum talið 17 tíusenta myntir. Hvert er virði þeirra? Hver tíusenta mynt er $0,10 virði, það er virði einnar myntar. Til að finna heildarvirði hrúgunnar með 17 tíusenta myntum margföldum við 17 með $0,10 og fáum $1,70. Þetta er heildarvirði allra 17 myntanna. Þessi aðferð gefur okkur líkanið hér fyrir neðan.

---

**HEILDARVIRÐI MYNTA**

Heildarvirði tiltekins fjölda mynta af sömu gerð fæst með líkaninu

$$fjöldi \cdot virði = heildarvirði$$

þar sem fjöldi er fjöldi mynta

virði er virði hverrar myntar

heildarvirði er samanlagt virði allra myntanna

Fjöldi tíusenta mynta margfaldaður með virði hverrar myntar er jafn heildarvirði tíusenta myntanna.

$$\begin{array}{rcl} \text{fjöldi} \cdot \text{virði} & = & \text{heildarvirði} \\ 17 \cdot \$0{,}10 & = & \$1{,}70 \end{array}$$

Við getum endurtekið þetta fyrir hverja gerð mynta og þannig fundið heildarvirði hverrar gerðar. Heildarvirði allra myntanna fæst með því að leggja saman heildarvirði allra myntgerða.

Skoðum tiltekið dæmi. Gerum ráð fyrir að við séum með 14 25 senta myntir, 17 tíusenta myntir, 21 fimm senta mynt og 39 eins senta myntir.



| Gerð | Fjöldi • | Verðgildi ($) = | Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|
| 25 senta myntir | 14 | 0,25 | 3,50 |
| Tíusenta myntir | 17 | 0,10 | 1,70 |
| Fimm senta myntir | 21 | 0,05 | 1,05 |
| Eins senta myntir | 39 | 0,01 | 0,39 |
| | | | 6,64 |

Heildarvirði allra myntanna er $6,64.

Athugið hve vel taflan hjálpar okkur að skipuleggja allar upplýsingarnar. Skoðum hvernig aðferðin er notuð til að leysa orðadæmi um myntir.

---

**DÆMI 3.26**

Adalberto er með $2,25 í tíusenta og fimm senta myntum í vasanum. Hann er með níu fleiri fimm senta myntir en tíusenta myntir. Hve margar myntir af hvorri gerð er hann með?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið. Gætið þess að skilja öll orð og hugmyndir.

- Finnið hvaða myntgerðir koma við sögu. Hugsið um aðferðina sem við notuðum til að finna virði myntanna í lófanum. Fyrst þarf að athuga hvaða myntgerðir koma við sögu. Adalberto er með tíusenta og fimm senta myntir.

- **Búið til töflu** til að skipuleggja upplýsingarnar. Sjá töfluna hér fyrir neðan.
  - Merkið dálkana „gerð“, „fjöldi“, „virði“ og „heildarvirði“.
  - Skráið myntgerðirnar.
  - Skráið virði hverrar myntgerðar.
  - Skráið heildarvirði allra myntanna.

  Reikna má verkefnið annaðhvort í sentum eða dölum. Hér reiknum við í dölum og setjum dollaramerkið ($) í töfluna til að minna á það. Virði tíusenta myntar er $0,10 og virði fimm senta myntar er $0,05. Heildarvirði allra myntanna er $2,25. Taflan hér fyrir neðan sýnir þessar upplýsingar.

| Gerð | Fjöldi | • | Virði ($) | = | Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|---|---|
| Tíusenta myntir | | | 0,10 | | |
| Fimm senta myntir | | | 0,05 | | |
| | | | | | 2,25 |

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

- Við eigum að finna fjölda tíusenta og fimm senta mynta sem Adalberto er með.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina.

- Notið stæður með breytum til að tákna fjölda mynta af hvorri gerð og skráið þær í töfluna.
- Margfaldið fjöldann með virðinu til að fá heildarvirði hverrar myntgerðar.



Næst töldum við myntir af hverri gerð. Í þessu verkefni getum við ekki talið þær, því fjöldinn er einmitt það sem leitað er að, en við höfum vísbendingu. Fimm senta myntirnar eru níu fleiri en tíusenta myntirnar. Fjöldi fimm senta mynta er því níu meiri en fjöldi tíusenta mynta.

$$\begin{aligned} \text{Látum } d &= \text{fjöldi tíusenta mynta.} \\ d+9 &= \text{fjöldi fimm senta mynta} \end{aligned}$$

Fyllið út dálkinn „fjöldi“ í töflunni til að skipuleggja upplýsingarnar.

| Tegund | Fjöldi | • | Virði ($) | = | Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|---|---|
| Tíusenta myntir | $d$ | | 0,10 | | |
| Fimm senta myntir | $d+9$ | | 0,05 | | |
| | | | | | 2,25 |

Nú höfum við allar upplýsingarnar sem við þurfum úr verkefninu.

Við margföldum fjöldann með virðinu til að fá heildarvirði hverrar myntgerðar. Þótt við þekkjum ekki sjálfan fjöldann höfum við stæðu sem táknar hann.

Margfaldið því nú $\textit{fjöldi} \cdot \textit{virði} = \textit{heildarvirði}$. Sjáið hvernig þetta er gert í töflunni hér fyrir neðan.

| Tegund | Fjöldi | • | Virði ($) | = | Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|---|---|
| Tíusenta myntir | $d$ | | 0,10 | | $0{,}10d$ |
| Fimm senta myntir | $d+9$ | | 0,05 | | $0{,}05(d+9)$ |
| | | | | | 2,25 |

Athugið að fyrirsögn töflunnar sýnir líkanið.

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu. Setjið setninguna síðan fram sem algebrujöfnu.

Skrifið jöfnuna með því að leggja saman heildarvirði allra myntgerðanna.

| | Verðmæti tíu senta mynta | + | Verðmæti fimm senta mynta | = | heildarverðmæti myntanna |
|---|---|---|---|---|---|
| Setjið fram sem jöfnu. | $0{,}10d$ | + | $0{,}05(d+9)$ | = | $2{,}25$ |

**Skref 5.** Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.

| | |
|---|---|
| Leysið nú jöfnuna. | $0{,}10d + 0{,}05(d+9) = 2{,}25$ |
| Beitið dreifireglu. | $0{,}10d + 0{,}05d + 0{,}45 = 2{,}25$ |
| Sameinið samkynja liði. | $0{,}15d + 0{,}45 = 2{,}25$ |
| Dragið 0,45 frá báðum hliðum. | $0{,}15d = 1{,}80$ |
| Deilið. | $d = 12$ |
| Fjöldi tíusenta mynta er því 12. | |
| Fjöldi fimm senta mynta er $d+9$. | $d+9$ |
| | $12+9$ |
| | 21 |

**Skref 6.** Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.

Stenst þetta?

Tafla 3.7

| | |
|---|---|
| 12 tíusenta myntir | $12(0{,}10)=1{,}20$ |
| 21 fimm senta mynt | $21(0{,}05)=1{,}05$ |
| | $\$2{,}25\checkmark$ |

**Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu.

- Adalberto er með tólf tíusenta myntir og tuttugu og eina fimm senta mynt.

Ef þetta væri heimaverkefni gæti lausnin litið svona út.

Adalberto er með $2,25 í tíusenta og fimm senta myntum í vasanum. Hann er með níu fleiri fimm senta myntir en tíusenta myntir.

Hvað er hann með margar myntir af hvorri tegund?

| Tegund | Fjöldi • Verðgildi ($) | | = Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| Tíusenta myntir | d | 0,10 | 0,10d |
| fimm senta myntir | d + 9 | 0,05 | 0,05(d + 9) |
| | | | 2,25 ✓ |

$0,10d + 0,05d + 0,45 = 2,25$

$0,15d + 0,45 = 2,25$

$0,15d = 1,80$

$d = 12$ tíusenta myntir

d + 9

12 + 9

21 fimm senta myntir

12 tíusenta myntir 12(0,10) = 1,20

21 fimm senta myntir 21(0,05) = 1,05

$2,25 ✓

Adalberto er með tólf tíusenta myntir og tuttugu og eina fimm senta mynt.

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.51**

Michaela er með $2,05 í tíusenta og fimm senta myntum í peningaveskinu. Hún er með sjö fleiri tíusenta myntir en fimm senta myntir. Hve margar myntir af hvorri gerð er hún með?

**REYNIÐ SJÁLF 3.52**

Liliana er með $2,10 í fimm senta og 25 senta myntum í bakpokanum. Hún er með 12 fleiri fimm senta myntir en 25 senta myntir. Hve margar myntir af hvorri gerð er hún með?

**AÐFERÐ**

## Leysið orðadæmi um myntir.

1. Skref 1.
   **Skref 1. Lesið verkefnið. Gætið þess að skilja öll orð og hugmyndir.**

   - Finnið hvaða myntgerðir koma við sögu.
   - Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.
   - Merkið dálkana „gerð“, „fjöldi“, „virði“ og „heildarvirði“.
   - Skráið myntgerðirnar.
   - Skráið virði hverrar myntgerðar.
   - Skráið heildarvirði allra myntanna.

| Gerð | Fjöldi | • Virði ($) | = Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
3. Skref 3.

**Skref 3. Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina.**

- Notið stæður með breytum til að tákna fjölda mynta af hvorri gerð og skráið þær í töfluna.
- Margfaldið fjöldann með virðinu til að fá heildarvirði hverrar myntgerðar.

4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Setjið setninguna síðan fram sem jöfnu. Skrifið jöfnuna með því að leggja saman heildarvirði allra myntgerðanna.



5. Skref 5. Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

---

**DÆMI 3.27**

Maria er með $2,43 í 25 senta og eins senta myntum í veskinu. Fjöldi eins senta mynta er tvöfaldur fjöldi 25 senta mynta. Hve margar myntir af hvorri gerð er hún með?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið.

Finnið hvaða myntgerðir koma við sögu.

Við vitum að Maria er með 25 senta og eins senta myntir.

Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

- Merkið dálkana „gerð“, „fjöldi“, „virði“ og „heildarvirði“.
- Skráið myntgerðirnar.
- Skráið virði hverrar myntgerðar.
- Skráið heildarvirði allra myntanna.

| Tegund | Fjöldi | • Virði ($) | = Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|
| 25 senta myntir | | 0,25 | |
| 1 senta myntir | | 0,01 | |
| | | | 2,43 |

**Skref 2.** Finnið að hverju er leitað.

- Við leitum að fjölda 25 senta og eins senta mynta.

**Skref 3.** Nefnið. Táknið fjölda 25 senta og eins senta mynta með breytum.

- Við vitum að fjöldi eins senta mynta Mariu er tvöfaldur fjöldi 25 senta myntanna. Fjöldi eins senta mynta er því skilgreindur út frá fjölda 25 senta mynta.
- Látum q tákna fjölda 25 senta mynta.
- Þá er fjöldi eins senta mynta 2q.

| Tegund | Fjöldi | • Virði ($) | = Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|
| 25 senta myntir | $q$ | 0,25 | |
| 1 senta myntir | $2q$ | 0,01 | |
| | | | 2,43 |

Margfaldið „fjölda“ og „virði“ til að fá „heildarvirði“ hverrar myntgerðar.

| Tegund | Fjöldi | • Virði ($) | = Heildarvirði ($) |
|---|---|---|---|
| Fjórðungsdollarar | $q$ | 0,25 | $0,25q$ |
| Sent | $2q$ | 0,01 | $0,01(2q)$ |
| | | | 2,43 |

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Skrifið jöfnuna með því að leggja saman „heildarvirði“ allra myntgerðanna.



Tafla 3.8

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $0,25q+0,01(2q)=2,43$ |
| Margfaldið. | $0,25q+0,02q=2,43$ |
| Sameinið samkynja liði. | $0,27q=2,43$ |
| Deilið með 0,27. | $q=9$ 25 senta myntir |
| Fjöldi eins senta mynta er $2q$. | $2q$<br>$2\cdot 9$<br>18 eins senta myntir |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið í samhengi verkefnisins. | |
| Maria er með 9 25 senta myntir og 18 eins senta myntir. Er heildarvirðið $2,43? | |
| 9 25 senta myntir $9(0,25) = 2,25$<br>18 eins senta myntir $18(0,01) = 0,18$<br>Samtals $\$2,43\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Maria er með níu 25 senta myntir og átján eins senta myntir. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.53**

Sumanta er með $4,20 í fimm senta og tíusenta myntum í sparibauknum. Fjöldi fimm senta mynta er tvöfaldur fjöldi tíusenta mynta. Hve margar myntir af hvorri gerð er hún með?

**REYNIÐ SJÁLF 3.54**

Í veskinu hennar Alison er fjöldi tíusenta mynta þrefaldur fjöldi 25 senta mynta. Hún er með samtals $9,35. Hve margar myntir af hvorri gerð er hún með?

Í næsta dæmi sýnum við aðeins útfylltu töfluna. Munið eftir skrefunum sem þarf til að fylla hana út.

**DÆMI 3.28**

Danny er með eins senta og fimm senta myntir að virði $2,14 í sparibauknum. Fjöldi fimm senta mynta er tveimur meiri en tífaldur fjöldi eins senta mynta. Hve margar fimm senta og eins senta myntir á Danny?



## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| Finnið hvaða myntgerðir koma við sögu. | eins senta og fimm senta myntir |
| Búið til töflu. | |
| Skráið virði hverrar myntgerðar. | Eins senta myntir eru $0,01 virði. Fimm senta myntir eru $0,05 virði. |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | fjölda eins senta og fimm senta mynta |
| **Skref 3.** Nefnið. Táknið fjölda mynta af hvorri gerð með breytum. | |
| Fjöldi fimm senta mynta er skilgreindur út frá fjölda eins senta mynta og því byrjum við á eins senta myntunum. | Látum $p=$ fjölda eins senta mynta. |
| Fjöldi fimm senta mynta er tveimur meiri en tífaldur fjöldi eins senta mynta. | $10p+2=$ fjölda fimm senta mynta. |
| Margfaldið fjöldann með virðinu til að fá heildarvirði hverrar myntgerðar. | |

| Tegund | Fjöldi • Verðgildi ($) = Heildarverðmæti ($) | | |
|---|---|---|---|
| eins senta myntir | $p$ | 0,01 | $0,01p$ |
| fimm senta myntir | $10p + 2$ | 0,05 | $0,05(10p + 2)$ |
| | | | $2,14 |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Skrifið jöfnuna með því að leggja saman heildarvirði allra myntgerðanna. | $0,01p + 0,05(10p + 2) = 2,14$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $0,01p + 0,50p + 0,10 = 2,14$<br>$0,51p + 0,10 = 2,14$<br>$0,51p = 2,04$<br>$p = 4$ einseyringar |

| | |
|---|---|
| Hve margar fimm senta myntir? | $10p + 2$<br>$10(4) + 2$<br>42 fimm senta myntir |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Danny er með fjórar eins senta myntir og 42 fimm senta myntir. Er heildarvirðið \$2,14?4 ( 0,01 ) + 42 ( 0,05 ) ≟ 2,14 2,14 = 2,14 ✓<br><br>$4(0{,}01)+42(0{,}05) \stackrel{?}{=} 2{,}14$<br>$2{,}14 = 2{,}14 \checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Danny er með fjórar eins senta myntir og 42 fimm senta myntir. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.55**

Jesse er með 25 senta og fimm senta myntir að virði \$6,55 í vasanum. Fjöldi fimm senta mynta er fimm meiri en tvöfaldur fjöldi 25 senta mynta. Hve margar fimm senta og 25 senta myntir á Jesse?

**REYNIÐ SJÁLF 3.56**

Elane er með samtals \$7,00 í tíusenta og fimm senta myntum í myntkrukkunni. Fjöldi tíusenta mynta er sjö minni en þrefaldur fjöldi fimm senta mynta. Hve margar myntir af hvorri gerð á Elane?

## Leysið orðadæmi um miða og frímerki

Verkefni um miða eða frímerki eru mjög svipuð myntaverkefnum. Hver tegund miða og frímerkja hefur tiltekið verðgildi, rétt eins og hver myntgerð. Við fylgjum því sömu skrefum og við notuðum til að leysa myntaverkefni.

**DÆMI 3.29**

Á skólatónleikum var heildarverðmæti seldra miða \$1.506. Nemendamiðar kostuðu \$6 hver og fullorðinsmiðar \$9 hver. Fjöldi seldra fullorðinsmiða var fimm minni en þrefaldur fjöldi seldra nemendamiða. Hve margir nemenda- og fullorðinsmiðar voru seldir?

### Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið.

- Finnið hvaða miðategundir koma við sögu. Um er að ræða nemendamiða og fullorðinsmiða.
- Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

| Tegund | Fjöldi | • Verðmæti ($) = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| Nemandi | | 6 | |
| Fullorðinn | | 9 | |
| | | | 1506 |

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

- Við leitum að fjölda nemenda- og fullorðinsmiða.

**Skref 3.** Nefnið. Táknið fjölda miða af hvorri gerð með breytum.

Við vitum að fjöldi seldra fullorðinsmiða var fimm minni en þrefaldur fjöldi seldra nemendamiða.

3

- Látum s tákna fjölda nemendamiða.
- Þá er $3s - 5$ fjöldi fullorðinsmiða

Margfaldið fjöldann með verðinu til að fá heildarverðmæti hvorrar miðategundar.

| Tegund | Fjöldi | • Verðmæti ($) = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| Nemandi | $s$ | 6 | $6s$ |
| Fullorðinn | $3s - 5$ | 9 | $9(3s - 5)$ |
| | | | 1506 |

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Skrifið jöfnuna með því að leggja saman heildarverðmæti beggja miðategunda.

$$6s + 9(3s - 5) = 1506$$

**Skref 5.** Leysið jöfnuna.

$$\begin{aligned} 6s + 27s - 45 &= 1506 \\ 33s - 45 &= 1506 \\ 33s &= 1551 \\ s &= 47 \text{ nemendamiðar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3s - 5 \\ 3(47) - 5 \end{aligned}$$

136 fullorðinsmiðar

**Skref 6.** Athugið svarið.

Seldir voru 47 nemendamiðar á $6 hver og 136 fullorðinsmiðar á $9 hver. Er heildarverðmætið $1.506? Við finnum heildarverðmæti hvorrar miðategundar með því að margfalda fjöldann með verðinu og leggjum niðurstöðurnar síðan saman.

$$\begin{aligned} 47 \cdot 6 &= 282 \\ 136 \cdot 9 &= 1.224 \\ \hline & 1.506 \checkmark \end{aligned}$$

**Skref 7.** Svarið spurningunni. Seldir voru 47 nemendamiðar og 136 fullorðinsmiðar.

**REYNIÐ SJÁLF 3.57**

Á fyrsta degi vatnapólómóts var heildarverðmæti seldra miða $17.610. Dagsmiðar kostuðu $20 og mótsmiðar $30. Seldir mótsmiðar voru 37 fleiri en seldir dagsmiðar. Hve margir dags- og mótsmiðar voru seldir?

**REYNIÐ SJÁLF 3.58**

Heildarverðmæti seldra bíómiða var $2.612,50. Fullorðinsmiðar kostuðu $10 hver og miðar fyrir eldri borgara og börn kostuðu $7,50 hver. Seldir miðar fyrir eldri borgara og börn voru 25 færri en tvöfaldur fjöldi seldra fullorðinsmiða. Hve margir miðar fyrir eldri borgara og börn og hve margir fullorðinsmiðar voru seldir?



Við höfum lært að finna heildarfjölda miða þegar fjöldi annarrar miðategundarinnar er gefinn út frá fjölda hinnar. Næst skoðum við dæmi þar sem heildarfjöldinn er þekktur en finna þarf sambandið milli miðategundanna tveggja.

Gerum ráð fyrir að Bianca hafi selt alls 100 miða. Hver miði var annaðhvort fullorðins- eða barnamiði. Ef hún seldi 20 barnamiða, hve marga fullorðinsmiða seldi hún?

- *Sögðuð þið „80“? Hvernig funduð þið svarið? Drógu þið 20 frá 100?*

Ef hún seldi 45 barnamiða, hve marga fullorðinsmiða seldi hún?

- *Sögðuð þið „55“? Hvernig funduð þið svarið? Með því að draga 45 frá 100?*

Hvað ef hún seldi 75 barnamiða? Hve marga fullorðinsmiða seldi hún?

- *Fjöldi fullorðinsmiða hlýtur að vera* $100 - 75$. *Hún seldi 25 fullorðinsmiða.*

Gerum nú ráð fyrir að Bianca hafi selt x barnamiða. Hve marga fullorðinsmiða seldi hún þá? Við fylgjum sömu rökum og hér að ofan. Í hverju tilviki drógum við fjölda barnamiða frá 100 til að fá fjölda fullorðinsmiða. Nú gerum við það sama með x.

Þetta er dregið saman hér fyrir neðan.

| Barnamiðar | Fullorðinsmiðar |
|---|---|
| 20 | 80 |
| 45 | 55 |
| 75 | 25 |
| $x$ | $100 - x$ |

Nota má sömu aðferðir í öðrum dæmum.

**DÆMI 3.30**

Galen seldi 810 miða á skemmtihátíð safnaðarins fyrir samtals $2.820. Barnamiðar kostuðu $3 hver og fullorðinsmiðar $5 hver. Hve marga barna- og fullorðinsmiða seldi hann?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið.

- Finnið hvaða miðategundir koma við sögu. Um er að ræða barna- og fullorðinsmiða.
- Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

| Tegund | Fjöldi | • Verðmæti ($) = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| Börn | | 3 | |
| Fullorðnir | | 5 | |
| | | | 2820 |

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

- Við leitum að fjölda barna- og fullorðinsmiða.

**Skref 3.** Nefnið. Táknið fjölda miða af hvorri gerð með breytum.

- Við vitum að alls voru seldir 810 miðar. Fjöldi barnamiða og fjöldi fullorðinsmiða verða því samanlagt 810.
- Látum c tákna fjölda barnamiða.
- Þá er $810 - c$ fjöldi fullorðinsmiða.
- Margfaldið fjöldann með verðinu til að fá heildarverðmæti hvorrar miðategundar.

| Tegund | Fjöldi | • Verðmæti ($) = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| Börn | $c$ | 3 | $3c$ |
| Fullorðnir | $810 - c$ | 5 | $5(810 - c)$ |
| | | | 2820 |

**Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.**

- Skrifið jöfnuna með því að leggja saman heildarverðmæti beggja miðategunda.

**Skref 5.** Leysið jöfnuna.

$$\begin{aligned} 3c + 5(810 - c) &= 2.820 \\ 3c + 4.050 - 5c &= 2.820 \\ -2c &= -1.230 \\ c &= 615 \text{ barnamiðar} \end{aligned}$$

Hve margir fullorðinsmiðar?

$$810 - c$$

$$810 - 615$$

$$195 \text{ fullorðinsmiðar}$$

**Skref 6.** Athugið svarið. Seldir voru 615 barnamiðar á $3 hver og 195 fullorðinsmiðar á $5 hver. Er heildarverðmætið $2.820?

$$\begin{aligned} 615 \cdot 3 &= 1845 \\ 195 \cdot 5 &= 975 \\ &\underline{\quad\quad} \\ &2.820 \checkmark \end{aligned}$$

**Skref 7.** Svarið spurningunni. Galen seldi 615 barnamiða og 195 fullorðinsmiða.

**REYNIÐ SJÁLF 3.59**

Á vakt sinni í miðasölu safnsins seldi Leah 115 miða fyrir samtals $1.163. Fullorðinsmiðar kostuðu $12 og nemendamiðar $5. Hve marga fullorðins- og nemendamiða seldi Leah?

**REYNIÐ SJÁLF 3.60**

Í hvalaskoðunarferð voru 40 farþegar um borð sem greiddu fargjald. Samtals fengust $1.196 fyrir miðana. Farþegar með fullt fargjald greiddu $32 hver en farþegar með afsláttarfargjald $26 hver. Hve margir farþegar greiddu fullt fargjald og hve margir greiddu afsláttarfargjald?

Nú skoðum við dæmi þar sem taflan er fyllt út í einu lagi.



**DÆMI 3.31**

Monica greiddi $8,36 fyrir frímerki. Fjöldi 41 senta frímerkja var fjórum meiri en tvöfaldur fjöldi tveggja senta frímerkja. Hve mörg 41 senta og tveggja senta frímerki keypti Monica?

## Lausn

Frímerkisgerðirnar eru 41 senta og tveggja senta frímerki. Heitin gefa jafnframt upp verðgildið.

„Fjöldi 41 senta frímerkja var fjórum meiri en tvöfaldur fjöldi tveggja senta frímerkja.“

$$\text{Látum } x = \text{fjöldi tveggja senta frímerkja.}$$
$$2x + 4 = \text{fjöldi 41 senta frímerkja}$$

| Tegund | Fjöldi • | Verðgildi ($) = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| 41 senta frímerki | $2x+4$ | 0,41 | $0{,}41(2x+4)$ |
| 2 senta frímerki | $x$ | 0,02 | $0{,}02x$ |
| | | | 8,36 |

Tafla 3.9

| | |
|---|---|
| Skrifið jöfnuna út frá heildarverðmætunum. | $0{,}41(2x+4)+0{,}02x=8{,}36$ |
| Leysið jöfnuna. | $\begin{aligned} 0{,}82x+1{,}64+0{,}02x &= 8{,}36 \\ 0{,}84x+1{,}64 &= 8{,}36 \\ 0{,}84x &= 6{,}72 \\ x &= 8 \end{aligned}$ |
| Monica keypti átta tveggja senta frímerki. | $2x+4$ fyrir $x=8$. |
| Finnið fjölda 41 senta frímerkja sem hún keypti með því að reikna stæðuna. | $\begin{aligned} &2x+4 \\ &2(8)+4 \\ &20 \end{aligned}$ |
| Athugið. | $\begin{aligned} 8(0{,}02)+20(0{,}41) &\overset{?}{=} 8{,}36 \\ 0{,}16+8{,}20 &\overset{?}{=} 8{,}36 \\ 8{,}36 &= 8{,}36\checkmark \end{aligned}$ |
| | Monica keypti átta tveggja senta frímerki og 20 41 senta frímerki. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.61**

Eric greiddi $13,36 fyrir frímerki. Fjöldi 41 senta frímerkja var átta meiri en tvöfaldur fjöldi tveggja senta frímerkja. Hve mörg 41 senta og tveggja senta frímerki keypti Eric?

**REYNIÐ SJÁLF 3.62**

Kailee greiddi $12,66 fyrir frímerki. Fjöldi 41 senta frímerkja var fjórum minni en þrefaldur fjöldi 20 senta frímerkja. Hve mörg 41 senta og 20 senta frímerki keypti Kailee?

## Leysið orðadæmi um blöndur

Nú notum við blöndulíkanið til að leysa nokkur almennari dæmi. Starfsfólk matvöruverslana og barþjónar nota blöndulíkanið til að ákvarða sanngjarnt verð vöru sem er búin til með því að blanda saman tveimur eða fleiri hráefnum. Fjármálaráðgjafar nota blöndulíkanið þegar þeir dreifa fjárfestingum á ólíka reikninga og vilja finna heildarvaxtahlutfallið. Landslagsarkitektar nota blöndulíkanið þegar þeir velja úr ýmsum plöntum innan fastrar fjárhagsáætlunar. Viðburðastjórar gera það sama þegar þeir velja forrétti og aðalrétti fyrir veislu.

Í fyrsta orðadæminu um blöndur búum við til hnetu- og rúsínublöndu.

**DÆMI 3.32**

Henning blandar saman rúsínum og hnetum til að búa til 10 pund af hnetu- og rúsínublöndu. Rúsínur kosta $2 pundið og hnetur kosta $6 pundið. Ef Henning vill að blandan kosti $5,20 pundið, hve mörg pund af rúsínum og hve mörg pund af hnetum á hann að nota?

## Lausn

Eins og áður fyllum við út töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

10 pundin af blöndunni verða til með því að blanda saman rúsínum og hnetum.

$$\text{Látum } x = \text{fjöldi punda af rúsínum.}$$
$$10 - x = \text{fjöldi punda af hnetum}$$



Við færum inn verð á hvert pund fyrir hvora vöru.

Við margföldum magnið með verðinu til að fá heildarverðmætið.

| Tegund | Fjöldi punda | • | Verð á pund ($) | = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|---|---|
| Rúsínur | $x$ | | 2 | | $2x$ |
| Hnetur | $10 - x$ | | 6 | | $6(10 - x)$ |
| Blanda | 10 | | 5,20 | | $10(5,20)$ |

Takið eftir að síðasta röð töflunnar gefur upplýsingarnar um heildarmagn blöndunnar.

Við vitum að verðmæti rúsínanna að viðbættu verðmæti hnetanna er jafnt verðmæti blöndunnar.

| | |
|---|---|
| Skrifið jöfnuna út frá heildarverðmætunum. | $2x + 6(10 - x) = 10(5,20)$ |
| Leysið jöfnuna. | $2x + 60 - 6x = 52$ |
| | $-4x = -8$ |
| | $x = 2$ pund af rúsínum |
| Finnið fjölda punda af hnetum. | $10 - x$ |
| | $10 - 2$ |
| | 8 pund af hnetum |
| Athugið. $2(\$2) + 8(\$6) \stackrel{?}{=} 10(\$5,20)$ <br> $\$4 + \$48 \stackrel{?}{=} \$52$ <br> $\$52 = \$52\checkmark$ | |
| | Henning blandaði saman tveimur pundum af rúsínum og átta pundum af hnetum. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.63**

Orlando blandar saman hnetum og morgunkornspúðum til að búa til naslblöndu. Hnetur seljast á $7 pundið og morgunkornspúðar á $4 pundið. Orlando vill búa til 30 pund af naslblöndu sem kostar $6,50 pundið. Hve mörg pund af hnetum og hve mörg pund af morgunkornspúðum á hann að nota?

**REYNIÐ SJÁLF 3.64**

Becca vill blanda saman ávaxtasafa og gosi til að búa til ávaxtadrykk. Hún getur keypt ávaxtasafa á $3 gallonið og gos á $4 gallonið. Ef hún vill búa til 28 gallon af ávaxtadrykk sem kostar $3,25 gallonið, hve mörg gallon af ávaxtasafa og hve mörg gallon af gosi á hún að kaupa?



Við getum einnig notað blöndulíkanið til að leysa fjárfestingardæmi með einföldum vöxtum. Við höfum notað formúluna fyrir einfalda vexti, $I = P\,r\,t$, þar sem $t$ táknaði fjölda ára. Þegar við þurfum aðeins að finna vextina fyrir eitt ár er $t = 1$, og því $I = P\,r$.

**DÆMI 3.33**

Stacey hefur $20.000 til að leggja inn á tvo ólíka bankareikninga. Annar reikningurinn ber 3% vexti á ári en hinn 5% vexti á ári. Hve mikið á hún að leggja inn á hvorn reikning ef hún vill fá 4,5% vexti á ári af heildarupphæðinni?

## Lausn

Við fyllum út töflu til að skipuleggja upplýsingarnar. Við notum formúluna fyrir einfalda vexti til að finna vextina sem fást af reikningunum.

Við leggjum saman vextina af reikningnum sem ber 3% og vextina af reikningnum sem ber 5%. Þannig fáum við heildarvextina af $20.000.

| | | |
|---|---|---|
| Látum $x$ | = | upphæð lögð inn á reikning með 3% vöxtum. |
| $20.000 - x$ | = | upphæð lögð inn á reikning með 5% vöxtum |

Upphæðin sem er lögð inn er höfuðstóll hvors reiknings.

Við færum inn vaxtaprósentu hvors reiknings.

Við margföldum upphæðina sem er lögð inn með vaxtaprósentunni til að fá vextina.

| Tegund | Upphæð sem er lögð inn | • Vaxtaprósenta | = Vextir |
|---|---|---|---|
| 3% | $x$ | 0,03 | $0,03x$ |
| 5% | $20.000 - x$ | 0,05 | $0,05(20.000 - x)$ |
| 4,5% | 20.000 | 0,045 | 0,045(20.000) |

Takið eftir að heildarupphæðin sem er lögð inn, 20.000, er summa upphæðarinnar sem er lögð inn á 3% reikninginn og upphæðarinnar sem er lögð inn á 5% reikninginn.

Heildarvextirnir, $0{,}045(20.000)$, eru jafnframt summa vaxtanna af 3% reikningnum og vaxtanna af 5% reikningnum.

Líkt og í öðrum blöndudæmum gefur síðasti dálkur töflunnar jöfnuna sem við eigum að leysa.

| | |
|---|---|
| Skrifið jöfnuna út frá vöxtunum sem fást. Leysið jöfnuna. | $0{,}03x+0{,}05(20.000-x)$<br>$=0{,}045(20.000)$<br>$0{,}03x+1.000-0{,}05x=900$<br>$-0{,}02x+1.000=900$<br>$-0{,}02x=-100$<br>$x=5.000$<br>upphæð lögð inn á 3% reikning |
| Finnið upphæðina sem er lögð inn á 5% reikninginn. | $20.000-x$<br>$20.000-5.000$<br>15.000 = upphæð á 5% vöxtum |
| Athugið.<br>$0{,}03x$<br>$+0{,}05(15.000+x)\stackrel{?}{=}0{,}045(20.000)$<br>$150+750\stackrel{?}{=}900$<br>$900=900\checkmark$ | |
| | Stacey á að leggja $5.000 inn á reikninginn sem ber 3% vexti og $15.000 inn á reikninginn sem ber 5% vexti. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.65**

Remy hefur $14.000 til að fjárfesta í tveimur verðbréfasjóðum. Annar sjóðurinn gefur 4% vexti á ári en hinn 7% vexti á ári. Hve mikið á hún að fjárfesta í hvorum sjóði ef hún vill fá 6,1% vexti af heildarupphæðinni?

**REYNIÐ SJÁLF 3.66**

Marco hefur $8.000 til að leggja fyrir vegna háskólanáms dóttur sinnar. Hann vill skipta upphæðinni milli reiknings sem ber 3,2% vexti á ári og annars reiknings sem ber 8% vexti á ári. Hve mikið á hann að leggja inn á hvorn reikning ef hann vill fá 6,5% vexti af heildarupphæðinni?

## Æfingar í kafla 3.3

### *Æfingin skapar meistarann*

**Leysið orðadæmi um myntir**

Leysið hvert orðadæmi um myntir í æfingunum hér á eftir.

**161.** Jaime á tíusenta og fimm senta myntir að verðmæti $2,60. Tíusenta myntirnar eru 14 fleiri en fimm senta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**162.** Lee á tíusenta og fimm senta myntir að verðmæti $1,75. Fimm senta myntirnar eru 11 fleiri en tíusenta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**163.** Ngo á safn tíusenta og 25 senta mynta að heildarverðmæti $3,50. Tíusenta myntirnar eru sjö fleiri en 25 senta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**164.** Connor á tíusenta og 25 senta myntir að heildarverðmæti $6,30. Tíusenta myntirnar eru 14 fleiri en 25 senta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**165.** Í peningakassa eru eins og fimm dollara seðlar, samtals $45. Eins dollara seðlarnir eru þremur fleiri en fimm dollara seðlarnir. Hve margir seðlar af hvorri gerð eru í kassanum?

**166.** Í veski Joes eru eins og fimm dollara seðlar að verðmæti $47. Eins dollara seðlarnir eru fimm fleiri en fimm dollara seðlarnir. Hve marga seðla á hann af hvorri gerð?

**167.** Rachelle er með fimm senta og 25 senta myntir að verðmæti $6,30 í buddunni sinni. Fimm senta myntirnar eru tvöfalt fleiri en 25 senta myntirnar. Hve margar myntir á hún af hvorri gerð?

**168.** Deloise er með eins senta og fimm senta myntir að verðmæti $1,20 í krukku á skrifborðinu sínu. Eins senta myntirnar eru þrefalt fleiri en fimm senta myntirnar. Hve margar myntir á hún af hvorri gerð?

**169.** Harrison á eins senta og tíusenta myntir að verðmæti $9,30. Tíusenta myntirnar eru þrefalt fleiri en eins senta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**170.** Ivan er með fimm senta og 25 senta myntir að verðmæti $8,75 í skrifborðsskúffunni sinni. Fimm senta myntirnar eru tvöfalt fleiri en 25 senta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**171.** Í peningaskúffu eru $125 í fimm og tíu dollara seðlum. Tíu dollara seðlarnir eru tvöfalt fleiri en fimm dollara seðlarnir. Hve margir seðlar eru af hvorri gerð í skúffunni?

**172.** John er með $175 í fimm og tíu dollara seðlum í skúffunni sinni. Fimm dollara seðlarnir eru þrefalt fleiri en tíu dollara seðlarnir. Hve margir seðlar eru af hvorri gerð í skúffunni?

**173.** Carolyn er með fimm senta og tíusenta myntir að verðmæti $2,55 í buddunni sinni. Fimm senta myntirnar eru níu færri en þrefaldur fjöldi tíusenta myntanna. Finnið fjölda mynta af hvorri gerð.

**174.** Julio er með fimm senta og tíusenta myntir að verðmæti $2,75 í vasanum. Tíusenta myntirnar eru 10 færri en tvöfaldur fjöldi fimm senta myntanna. Finnið fjölda mynta af hvorri gerð.

**175.** Chi á tíusenta og 25 senta myntir að verðmæti $11,30. Tíusenta myntirnar eru þremur fleiri en þrefaldur fjöldi 25 senta myntanna. Hve margar myntir eru af hvorri gerð?

**176.** Tyler á tíusenta og 25 senta myntir að verðmæti $9,70. 25 senta myntirnar eru átta fleiri en fjórfaldur fjöldi tíusenta myntanna. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**177.** Mukul er með 25 senta, tíusenta og fimm senta myntir að verðmæti $3,75 í vasanum. Hann er með fimm fleiri tíusenta myntir en 25 senta myntir og níu fleiri fimm senta myntir en 25 senta myntir. Hve margar myntir af hverri gerð eru í vasanum?

**178.** Vina er með 25 senta, tíusenta og fimm senta myntir að verðmæti $4,70 í buddunni sinni. Hún er með átta fleiri tíusenta myntir en 25 senta myntir og sex fleiri fimm senta myntir en 25 senta myntir. Hve margar myntir af hverri gerð eru í buddunni?

**Leysið orðadæmi um miða og frímerki**

Leysið hvert orðadæmi um miða eða frímerki í æfingunum hér á eftir.

**179.** Eitt kvöldið seldust miðar á skólaleiksýningu fyrir $550. Fullorðinsmiðarnir á $8 voru 10 færri en tvöfaldur fjöldi barnamiðanna á $5. Hve margir miðar seldust af hvorri gerð?

**180.** Ef barnamiðarnir á $8 voru sautján færri en þrefaldur fjöldi fullorðinsmiðanna á $12 og miðasalan nam $584, hve margir miðar seldust af hvorri gerð?

**181.** Kvikmyndahús fékk $1.220 í miðasölu eitt mánudagskvöld. Barnamiðarnir á $7 voru tíu fleiri en tvöfaldur fjöldi fullorðinsmiðanna á $9. Hve margir miðar seldust af hvorri gerð?

**182.** Einn laugardag seldust miðar á boltaleik fyrir $1.340. Fullorðinsmiðarnir á $12 voru 15 fleiri en tvöfaldur fjöldi barnamiðanna á $5. Hve margir miðar seldust af hvorri gerð?

**183.** Skautahöllin seldi 95 miða á síðdegisskautatímann fyrir samtals $828. Almennt aðgangsgjald var $10 og ungmennamiðar kostuðu $8. Hve margir miðar á almennu verði og hve margir ungmennamiðar seldust?

**184.** Á sýninguna klukkan 7:30 seldust 140 bíómiðar. Tekjur af fullorðinsmiðunum á $13 og miðunum fyrir eldri borgara á $10 voru samtals $1.664. Hve margir fullorðinsmiðar og hve margir miðar fyrir eldri borgara seldust?

**185.** Miðasalan seldi 360 miða á tónleika í háskólanum. Heildartekjurnar voru $4.170. Miðar á almennu verði kostuðu $15 og nemendamiðar $10. Hve margir miðar seldust af hvorri gerð?

**186.** Síðasta laugardag seldi miðasala safnsins 281 miða fyrir samtals $3.954. Fullorðinsmiðar kostuðu $15 og nemendamiðar $12. Hve margir miðar seldust af hvorri gerð?

**187.** Julie fór á pósthúsið og keypti bæði frímerki á $0,41 og póstkort á $0,26. Hún eyddi $51,40. Frímerkin voru 20 fleiri en tvöfaldur fjöldi póstkortanna. Hve mörg keypti hún af hvoru?

**188.** Jason fór á pósthúsið, keypti bæði frímerki á $0,41 og póstkort á $0,26 og eyddi $10,28. Frímerkin voru fjórum fleiri en tvöfaldur fjöldi póstkortanna. Hve mörg keypti hann af hvoru?

**189.** Maria eyddi $12,50 á pósthúsinu. Hún keypti þrefalt fleiri $0,41 frímerki en $0,02 frímerki. Hve mörg keypti hún af hvorri gerð?

**190.** Hector eyddi $33,20 á pósthúsinu. Hann keypti fjórfalt fleiri $0,41 frímerki en $0,02 frímerki. Hve mörg keypti hann af hvorri gerð?

**191.** Hilda á hlutabréf að verðmæti $210 sem kosta $10 og $12 hvert. Hlutabréfin á $10 eru fimm fleiri en tvöfaldur fjöldi hlutabréfanna á $12. Hve mörg hlutabréf á hún af hvorri gerð?

**192.** Mario fjárfesti $475 í hlutabréfum sem kostuðu $45 og $25 hvert. Hlutabréfin á $25 voru fimm færri en þrefaldur fjöldi hlutabréfanna á $45. Hve mörg hlutabréf keypti hann af hvorri gerð?

**Leysið orðadæmi um blöndur**

Leysið hvert orðadæmi um blöndur í æfingunum hér á eftir.



**193.** Lauren býr til 15 lítra af mímósum fyrir hádegisveislu. Appelsínusafi kostar hana $1,50 á lítrann og freyðivín $12 á lítrann. Hve marga lítra af appelsínusafa og hve marga lítra af freyðivíni á hún að nota svo að mímósurnar kosti hana $5 á lítrann?

**194.** Macario býr til 12 pund af hnetublöndu úr makadamíuhnetum og möndlum. Makadamíuhnetur kosta $9 pundið og möndlur $5,25 pundið. Hve mörg pund af makadamíuhnetum og hve mörg pund af möndlum á Macario að nota svo að blandan kosti $6,50 pundið?

**195.** Kaapo blandar saman Kona-kaffibaunum og Maui-kaffibaunum til að búa til 25 pund af kaffiblöndu. Kona-baunirnar kosta Kaapo $15 pundið og Maui-baunirnar $24 pundið. Hve mörg pund af hvorri baunategund á Kaapo að nota svo að blandan kosti hann $17,70 pundið?

**196.** Estelle býr til 30 pund af ávaxtasalati úr jarðarberjum og bláberjum. Jarðarber kosta $1,80 pundið og bláber $4,50 pundið. Ef Estelle vill að ávaxtasalatið kosti hana $2,52 pundið, hve mörg pund af hvorri berjategund á hún að nota?

**197.** Carmen vill flísaleggja gólfið í húsinu sínu. Hann þarf 1.000 ferfet af flísum. Hann ætlar að leggja flísar sem kosta $1,50 á ferfet á stærstan hluta gólfsins en vill einnig nota skrautflísar sem kosta $9,00 á ferfet. Hve marga ferfeta af hvorri flísagerð á hann að nota ef hann vill að heildarkostnaðurinn verði $3 á ferfet?

**198.** Riley ætlar að sá grasflöt í garðinum sínum. Hann þarf níu pund af grasfræi. Hann vill blanda saman Bermúdagrasfræi sem kostar $4,80 pundið og vingulsfræi sem kostar $3,50 pundið. Hve mikið á hann að kaupa af hvorri frætegund svo að heildarkostnaðurinn verði $4,02 á pund?

**199.** Vartan fékk $25.000 greidda fyrir farsímaforrit sem hann skrifaði og vill fjárfesta fénu til að leggja fyrir vegna náms sonar síns. Hann vill setja hluta fjárins í skuldabréf sem ber 4% vexti á ári og afganginn í hlutabréf sem bera 9% vexti á ári. Ef hann vill fá 7,4% vexti af heildarupphæðinni, hve mikið á hann að fjárfesta í hvoru?

**200.** Vern seldi Ford Mustang-bíl sinn af árgerð 1964 fyrir $55.000 og vill fjárfesta fénu þannig að það skili 5,8% vöxtum á ári. Hann setur hluta fjárins í sjóð A sem gefur 3% vexti á ári og afganginn í sjóð B sem gefur 10% vexti á ári. Hve mikið á hann að fjárfesta í hvorum sjóði ef hann vill fá 5,8% vexti á ári af heildarupphæðinni?

**201.** Stephanie erfði $40.000. Hún vill setja hluta fjárins á bundinn innlánsreikning sem ber 2,1% vexti á ári og afganginn í verðbréfasjóð sem gefur 6,5% á ári. Hve mikið á hún að fjárfesta í hvoru ef hún vill fá 5,4% vexti á ári af heildarupphæðinni?

**202.** Avery og Caden hafa safnað $27.000 fyrir útborgun í húsi. Þau vilja geyma hluta fjárins á bankareikningi sem ber 2,4% vexti á ári og afganginn í hlutabréfasjóði sem gefur 7,2% vexti á ári. Hve mikið eiga þau að leggja inn á hvorn reikning svo að þau fái 6% vexti á ári?

**203.** Dominic greiðir 7% vexti af námsláninu sínu að upphæð $15.000 og 12% vexti af bílaláninu sínu að upphæð $11.000. Hvaða meðaltalsvaxtaprósentu greiðir hann af heildarskuldinni upp á $26.000? (Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr prósentu.)

**204.** Liam tók samtals $35.000 að láni til að greiða fyrir háskólanám. Hann greiðir foreldrum sínum 3% vexti af $8.000 sem hann fékk að láni hjá þeim og bankanum 6,8% vexti af afganginum. Hvaða meðaltalsvaxtaprósentu greiðir hann af heildarupphæðinni $35.000? (Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr prósentu.)

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**205.** Laney er gjaldkeri skátasveitar dóttur sinnar. Hún safnaði greiðslum frá nokkrum stúlkum og fullorðnum fyrir þriggja daga skátabúðir. Hver stúlka greiddi $75 og hver fullorðinn $30. Alls söfnuðust $765. Ef stúlkurnar voru þrefalt fleiri en fullorðnu þátttakendurnir, hve margar stúlkur og hve margir fullorðnir greiddu fyrir búðirnar?

**206.** Laurie var að ganga frá skýrslu gjaldkera skátasveitar sonar síns við lok skólaársins. Hún mundi ekki hve margir drengir höfðu greitt $15 skráningargjald fyrir heilt ár og hve margir höfðu greitt $10 gjald fyrir hluta úr ári. Hún vissi að drengirnir sem greiddu fyrir heilt ár voru tíu fleiri en þeir sem greiddu fyrir hluta úr ári. Ef $250 söfnuðust í skráningargjöld, hve margir drengir greiddu fyrir heilt ár og hve margir fyrir hluta úr ári?

### *Ritunaræfingar*

**207.** Gerið ráð fyrir að þið eigið sex 25 senta myntir, níu tíusenta myntir og fjórar eins senta myntir. Útskýrið hvernig þið finnið heildarverðmæti allra myntanna.

**208.** Finnst ykkur gagnlegt að nota töflu þegar þið leysið verkefni um myntir? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

**209.** Í töflunni sem notuð er til að leysa verkefni um myntir er einn dálkur merktur „fjöldi“ og annar „verðgildi“. Hver er munurinn á „fjölda“ og „verðgildi“?

**210.** Hvaða líkindi og mun sáuð þið á því að leysa verkefni um myntir annars vegar og verkefni um miða og frímerki hins vegar?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst orðadæmi um mynt. | | | |
| leyst orðadæmi um miða og frímerki. | | | |
| leyst orðadæmi um blöndur. | | | |

ⓑ Hvað ætlið þið að gera eftir að hafa farið yfir gátlistann til að ná öruggum tökum á öllum markmiðunum?



# 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið verkefni með eiginleikum þríhyrninga
- Notið setningu Pýþagórasar
- Leysið dæmi með eiginleikum rétthyrninga

**UNDIRBÚNINGUR 3.12**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $\frac{1}{2}(6h)$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.122.

**UNDIRBÚNINGUR 3.13**

Lengd rétthyrnings er þremur minni en breiddin. Látum w tákna breiddina. Skrifið stæðu fyrir lengd rétthyrningsins. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.26.

**UNDIRBÚNINGUR 3.14**

Einangrið $A=\frac{1}{2}bh$ í b þegar $A=260$ og $h=52$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.61.

**UNDIRBÚNINGUR 3.15**

Einfaldið: $\sqrt{144}$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.111.

## Leysið verkefni með eiginleikum þríhyrninga

Í þessum hluta notum við nokkrar algengar rúmfræðiformúlur. Við lögum verkefnalausnaraðferðina að rúmfræðiverkefnum. Rúmfræðiformúlan skilgreinir breyturnar og gefur okkur jöfnuna sem leysa þarf. Öll verkefnin fjalla líka um einhvers konar flatarmyndir og því finnst flestum gagnlegt að teikna mynd og merkja gefnar upplýsingar inn á hana. Við bætum því við fyrsta skref verkefnalausnaraðferðarinnar fyrir rúmfræðiverkefni.

---

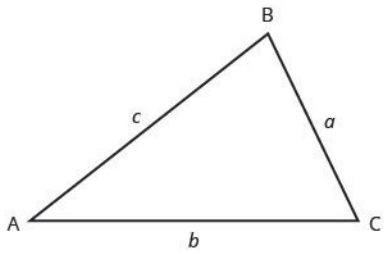
**AÐFERÐ**

### Leysið rúmfræðiverkefni.

1. Skref 1. Lesið verkefnið og gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir skiljist. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana.
2. Skref 2. Finnið að hverju er leitað.
3. Skref 3. Merkið það sem leitað er að með því að velja breytu sem táknar það.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið með því að setja það aftur inn í jöfnuna sem leyst var í skrefi 5 og ganga úr skugga um að það sé skynsamlegt í samhengi dæmisins.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Við byrjum rúmfræðiverkefnin á því að skoða eiginleika þríhyrninga. Rifjum fyrst upp nokkur grunnatriði um þríhyrninga. Þríhyrningar hafa þrjár hliðar og þrjú innri horn. Hver hlið er yfirleitt merkt með lágstaf sem samsvarar hástaf hornpunktsins á móti henni.

Fleirtala orðsins hornpunktur er hornpunktar. Allir þríhyrningar hafa þrjá hornpunkta. Þríhyrningar eru nefndir eftir hornpunktum sínum: Þríhyrningurinn á mynd 3.4 nefnist $\triangle ABC$.




Mynd 3.4 Þríhyrningurinn ABC hefur hornpunktana A, B og C. Lengdir hliðanna eru a, b og c.

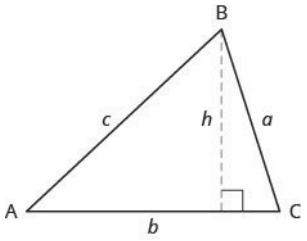
Hornin þrjú í þríhyrningi tengjast á sérstakan hátt. Summa stærða þeirra er $180°$. Takið eftir að $m\angle A$ er lesið „stærð horns A“. Fyrir $\triangle ABC$ á mynd 3.4 er því

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$$

Þar sem ummál forms er lengd jaðars þess er ummál $\triangle ABC$ summa lengda hliðanna þriggja.

$$P = a + b + c$$

Til að finna flatarmál þríhyrnings þurfum við að þekkja grunnlínu hans og hæð. Hæðin er lína sem tengir grunnlínuna við gagnstæðan hornpunkt og myndar $90°$ horn við grunnlínuna. Við teiknum $\triangle ABC$ aftur og sýnum nú einnig hæðina, h. Sjá mynd 3.5.

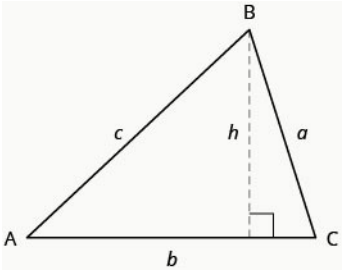





Mynd 3.5 Formúlan fyrir flatarmál $\triangle ABC$ er $A=\frac{1}{2}bh$, þar sem b er grunnlínan og h er hæðin.

---

**EIGINLEIKAR ÞRÍHYRNINGA**




Fyrir $\triangle ABC$

**Stærðir horna:**

$$m\angle A+m\angle B+m\angle C=180$$

- Summa stærða horna þríhyrnings er $180°$.

**Ummál:**

$$P=a+b+c$$

- Ummálið er summa lengda hliða þríhyrningsins.

**Flatarmál:**

$$A=\frac{1}{2}bh, b=\text{grunnlína}, h=\text{hæð}$$

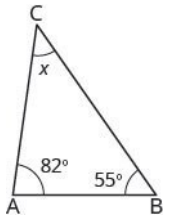
- Flatarmál þríhyrnings er helmingur margfeldis grunnlínu og hæðar.

---

**DÆMI 3.34**

Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 55 og 82 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | stærð þriðja horns þríhyrningsins |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $x=$ stærð hornsins. |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.** | |
| Skrifið viðeigandi formúlu og setjið gildin inn. | $m\angle A+m\angle B+m\angle C=180$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $\begin{aligned} 55+82+x &= 180 \\ 137+x &= 180 \\ x &= 43 \end{aligned}$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | $\begin{aligned} 55+82+43 &\stackrel{?}{=} 180 \\ 180 &= 180\checkmark \end{aligned}$ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Stærð þriðja hornsins er 43 gráður. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.67**

Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 31 og 128 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

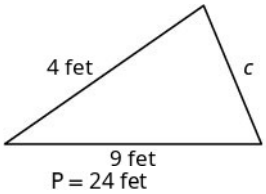
**REYNIÐ SJÁLF 3.68**

Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 49 og 75 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

**DÆMI 3.35**

Ummál þríhyrningslaga garðs er 24 fet. Tvær hliðanna eru fjögur fet og níu fet á lengd. Hve löng er þriðja hliðin?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengd þriðju hliðar þríhyrnings |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $c=$ þriðju hliðina. |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.** | |
| Skrifið viðeigandi formúlu og setjið gildin inn. | $\underbrace{P}_{24\text{ fet}} = \underbrace{a}_{4\text{ fet}} + \underbrace{b}_{9\text{ fet}} + \underbrace{c}_{c}$ |
| Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna. | $24 = 4 + 9 + c$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $24 = 13 + c$<br>$11 = c$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | $\begin{aligned} P &= a+b+c \\ 24 &\stackrel{?}{=} 4+9+11 \\ 24 &= 24\checkmark \end{aligned}$ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Þriðja hliðin er 11 fet á lengd. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.69**

Ummál þríhyrningslaga garðs er 48 fet. Tvær hliðanna eru 18 fet og 22 fet á lengd. Hve löng er þriðja hliðin?

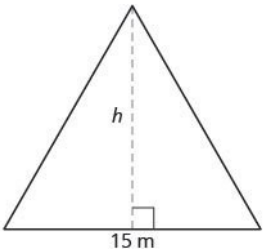
**REYNIÐ SJÁLF 3.70**

Tvær hliðar þríhyrningslaga glugga eru sjö fet og fimm fet á lengd. Ummálið er 18 fet. Hve löng er þriðja hliðin?

**DÆMI 3.36**

Flatarmál þríhyrningslaga kirkjuglugga er 90 fermetrar. Grunnlína gluggans er 15 metrar. Hver er hæð gluggans?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. | <br>Flatarmál $=90\,m^2$ |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | hæð þríhyrnings |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $h=$ hæðina. |

| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.** | |
|---|---|
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ |
| Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna. | $90\ \text{m}^2 = \frac{1}{2} \cdot 15\ \text{m} \cdot h$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $90 = \frac{15}{2}h$<br>$12 = h$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | $A = \frac{1}{2}bh$<br>$90 \overset{?}{=} \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12$<br>$90 = 90\checkmark$ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Hæð þríhyrningsins er 12 metrar. |



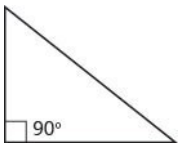
**REYNIÐ SJÁLF 3.71**

Flatarmál þríhyrningslaga málverks er 126 fertommur. Grunnlínan er 18 tommur. Hver er hæðin?

**REYNIÐ SJÁLF 3.72**

Þríhyrningslaga tjalddyr hafa flatarmálið 15 ferfet. Hæðin er fimm fet. Hver er lengd grunnlínunnar?

Eiginleikar þríhyrninga sem við höfum notað hingað til gilda um alla þríhyrninga. Nú skoðum við ákveðna gerð þríhyrnings — rétthyrndan þríhyrning. Rétthyrndur þríhyrningur hefur eitt $90^\circ$ horn sem við merkjum yfirleitt með litlum ferningi í horninu.



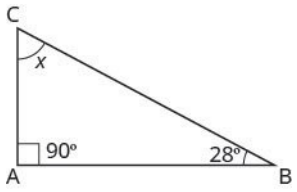

**RÉTTHYRNDUR ÞRÍHYRNINGUR**

Rétthyrndur þríhyrningur hefur eitt $90^\circ$ horn sem oft er merkt með ferningi við hornpunktinn.

**DÆMI 3.37**

Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er $28^\circ$. Hver er stærð þriðja hornsins?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | stærð horns |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $x=$ stærð hornsins. |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.** | $m\angle A+m\angle B+m\angle C=180$ |
| Skrifið viðeigandi formúlu og setjið gildin inn. | $x+90+28=180$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $x+118 = 180$<br>$x = 62$ |
| **Skref 6. Sannreynið.**<br>$180 \stackrel{?}{=} 90+28+62$<br>$180 = 180\checkmark$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Stærð þriðja hornsins er $62^\circ$. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.73**

Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er $56°$. Hver er stærð hins hvassa hornsins?

**REYNIÐ SJÁLF 3.74**

Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er $45°$. Hver er stærð hins hvassa hornsins?

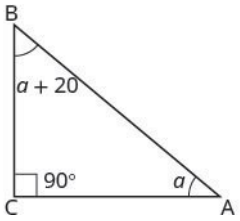
Í dæmunum hingað til höfum við getað teiknað mynd og merkt inn á hana strax eftir að dæmið var lesið. Í næsta dæmi þurfum við að skilgreina eitt horn út frá öðru. Við bíðum því með að teikna myndina þar til við höfum skrifað stæður fyrir öll hornin sem leitað er að.

**DÆMI 3.38**

Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 20 gráðum stærra en minnsta hornið. Finnið stærðir allra hornanna þriggja.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | stærðir hornanna þriggja |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $a = 1^{\cdot}$ horn.<br>$a + 20 = 2^{\cdot}$ horn<br>$90 = 3^{\cdot}$ horn (rétta hornið) |
| Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana |  |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu** | $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$ |
| Skrifið viðeigandi formúlu. Setjið gildin inn í formúluna. | $a + (a + 20) + 90 = 180$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $2a + 110 = 180$<br>$2a = 70$<br>$a = 35$ fyrsta horn<br>$a + 20$ annað horn<br>$35 + 20$<br>55 90 þriðja hornið |
| **Skref 6. Sannreynið.** | $35 + 55 + 90 \stackrel{?}{=} 180$<br>$180 = 180\checkmark$ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Hornin þrjú eru 35˚, 55˚ og 90˚. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.75**

Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 50° stærra en minnsta hornið. Finnið stærðir allra hornanna þriggja.

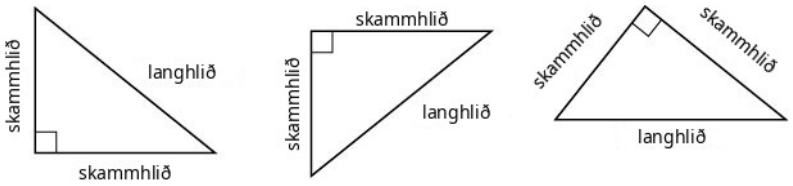
**REYNIÐ SJÁLF 3.76**

Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 30° stærra en minnsta hornið. Finnið stærðir allra hornanna þriggja.

## Notið setningu Pýþagórasar

Við höfum lært hvernig stærðir horna í þríhyrningi tengjast. Nú lærum við hvernig lengdir hliðanna tengjast. Mikilvægur eiginleiki sem lýsir sambandinu milli lengda hliðanna þriggja í rétthyrndum þríhyrningi kallast setning Pýþagórasar. Setningin hefur verið notuð víða um heim frá fornu fari. Hún er kennd við gríska heimspekinginn og stærðfræðinginn Pýþagóras sem var uppi um 500 f.Kr.

Áður en við setjum fram setningu Pýþagórasar þurfum við að kynna nokkur hugtök um hliðar þríhyrnings. Munið að rétthyrndur þríhyrningur hefur eitt $90°$ horn sem er merkt með litlum ferningi í horninu. Hliðin á móti $90°$ horninu nefnist langhlið en hinar tvær nefnast skammhliðar.




3

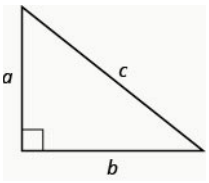
Setning Pýþagórasar lýsir tengslunum milli lengda hliðanna þriggja í rétthyrndum þríhyrningi. Hún segir að í hverjum rétthyrndum þríhyrningi sé summa ferninga lengda skammhliðanna jöfn ferningi lengdar langhliðarinnar. Með táknum segjum við: Í hverjum rétthyrndum þríhyrningi gildir $a^2+b^2=c^2$, þar sem $a$ og $b$ eru lengdir skammhliðanna og $c$ er lengd langhliðarinnar.

Skrifið formúluna í hverju dæmi og segið hana upphátt um leið. Það getur hjálpað ykkur að muna setningu Pýþagórasar.

---

**SETNING PÝÞAGÓRASAR**

Í hverjum rétthyrndum þríhyrningi gildir $a^2+b^2=c^2$.




þar sem a og b eru lengdir skammhliðanna og c er lengd langhliðarinnar.

Til að leysa dæmi með setningu Pýþagórasar þurfum við að finna ferningsrætur. Við höfum notað ritháttinn $\sqrt{m}$ og skilgreininguna:

Ef $m=n^2$, þá $\sqrt{m}=n$, fyrir $n\geq 0$.

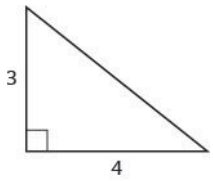
Til dæmis fundum við að $\sqrt{25}$ er 5 vegna þess að $25=5^2$.

Í setningu Pýþagórasar eru breytur í öðru veldi og því þurfum við að nota ferningsrætur til að finna lengd hliðar í rétthyrndum þríhyrningi.

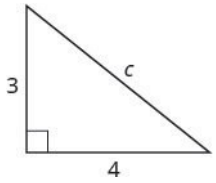
---

**DÆMI 3.39**

Notið setningu Pýþagórasar til að finna lengd langhliðarinnar sem sýnd er hér fyrir neðan.

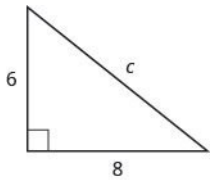



## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengd langhliðar þríhyrningsins |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar lengdina. Merkið hlið c á myndinni. | Látum c = lengd langhliðarinnar.<br> |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.** | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $a^2+b^2=c^2$ |
| Setjið inn. | $3^2+4^2=c^2$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $9+16=c^2$ |
| Einfaldið. | $25=c^2$ |
| Notið skilgreiningu ferningsrótar. | $\sqrt{25}=c$ |
| Einfaldið. | $5=c$ |
| **Skref 6. Sannreynið.**<br>$3^2+4^2 \stackrel{?}{=} 5^2$<br>$9+16 \stackrel{?}{=} 25$<br>$25=25$ ✓ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengd langhliðarinnar er 5. |

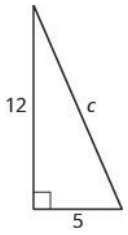
**REYNIÐ SJÁLF 3.77**

Notið setningu Pýþagórasar til að finna lengd langhliðar þríhyrningsins hér fyrir neðan.




**REYNIÐ SJÁLF 3.78**

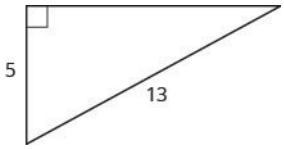
Notið setningu Pýþagórasar til að finna lengd langhliðar þríhyrningsins hér fyrir neðan.



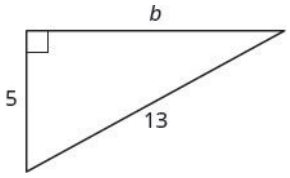



**DÆMI 3.40**

Notið setningu Pýþagórasar til að finna lengd skammhliðarinnar sem sýnd er hér fyrir neðan.




## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengd skammhliðar þríhyrningsins |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum b = skammhlið þríhyrningsins. |
| Merkið hlið b. |   |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu** | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $a^2+b^2=c^2$ |
| Setjið inn. | $5^2+b^2=13^2$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $25+b^2=169$ |
| Einangrið liðinn með breytunni. | $b^2=144$ |

| | |
|---|---|
| Notið skilgreiningu ferningsrótar. | $b^2=\sqrt{144}$ |
| Einfaldið. | $b=12$ |

**Skref 6. Sannreynið.**

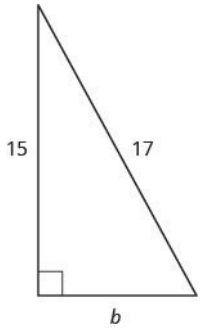
$$5^2+12^2 \stackrel{?}{=} 13^2$$
$$25+144 \stackrel{?}{=} 169$$
$$169=169\ \checkmark$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengd skammhliðarinnar er 12. |



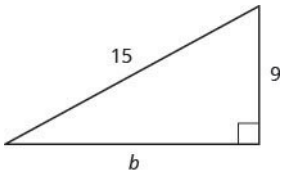
**REYNIÐ SJÁLF 3.79**

Notið setningu Pýþagórasar til að finna lengd skammhliðar þríhyrningsins hér fyrir neðan.

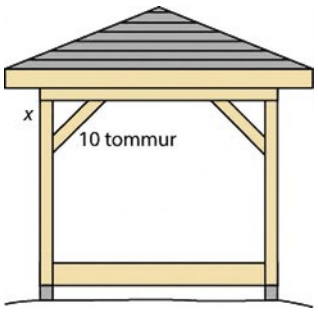



**REYNIÐ SJÁLF 3.80**

Notið setningu Pýþagórasar til að finna lengd skammhliðar þríhyrningsins hér fyrir neðan.




**DÆMI 3.41**




Kelvin er að byggja garðskála og vill styrkja hvert horn með því að setja 10” timburstífu á ská eins og sýnt er hér fyrir ofan.

Ef hann festir timbrið þannig að endar stífunnar séu jafnlangt frá horninu, hver er þá lengd skammhliða rétthyrnda þríhyrningsins sem myndast? Námundið að næsta tíunda hluta úr tommu.

## Lausn

Tafla 3.10

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | fjarlægðina frá horninu þar sem festa á stífuna |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $x =$ fjarlægðina frá horninu. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Skrifið viðeigandi formúlu og setjið gildin inn. | $a^2 + b^2 = c^2$<br>$x^2 + x^2 = 10^2$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Einangrið breytuna. Notið skilgreiningu ferningsrótar. Einfaldið. Námundið að næsta tíunda hluta. | $2x^2 = 100$<br>$x^2 = 50$<br>$x = \sqrt{50}$<br>$x \approx 7{,}1$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** $a^2+b^2 = c^2$<br>$(7{,}1)^2+(7{,}1)^2 \approx 10^2$ Já. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Kelvin á að festa hvora timburstífu um það bil 7,1 tommu frá horninu. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.81**

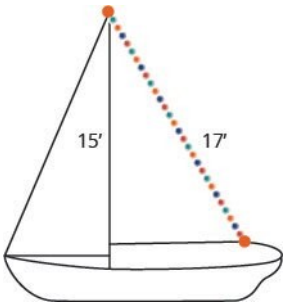
John stillir neðri enda 13 feta stiga fimm fet frá húsveggnum eins og sýnt er hér fyrir neðan. Hve hátt upp á vegginn nær stiginn?




**REYNIÐ SJÁLF 3.82**

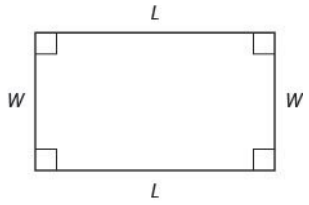
Randy vill festa 17 feta ljósaseríu efst á 15 feta mastur seglbáts síns eins og sýnt er hér fyrir neðan. Hve langt frá mastrinu á hann að festa hinn enda ljósaseríunnar?






## Leysið dæmi með eiginleikum rétthyrninga

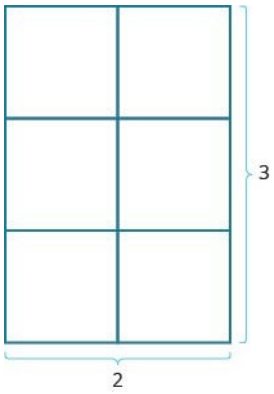
Þið þekkið ef til vill nú þegar eiginleika rétthyrninga. Rétthyrningur hefur fjórar hliðar og fjögur rétt $(90°)$ horn. Gagnstæðar hliðar rétthyrnings eru jafnlangar. Við köllum aðra hlið rétthyrningsins lengdina, L, og aðlægu hliðina breiddina, W.




Vegalengdin umhverfis rétthyrninginn er $L+W+L+W$, eða $2L+2W$. Þetta er ummál hans, P.

$$P=2L+2W$$

Hvað með flatarmál rétthyrnings? Ímyndið ykkur rétthyrnda gólfmottu sem er 2 fet á lengd og 3 fet á breidd. Flatarmál hennar er 6 ferfet. Sex ferningar eru á myndinni.




3

$$A = 6$$
$$A = 2 \cdot 3$$
$$A = L \cdot W$$

Flatarmálið er margfeldi lengdar og breiddar.

Formúlan fyrir flatarmál rétthyrnings er $A = L\,W$.

---

**EIGINLEIKAR RÉTTHYRNINGA**

Rétthyrningur hefur fjórar hliðar og fjögur rétt $(90°)$ horn.

Gagnstæðar hliðar eru jafnlangar.

Ummál rétthyrnings er summan af tvöfaldri lengdinni og tvöfaldri breiddinni.

$$P = 2\,L + 2\,W$$

Flatarmál rétthyrnings er margfeldi lengdar og breiddar.

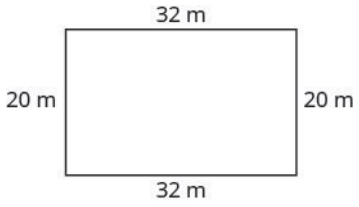
$$A = L \cdot W$$

---

**DÆMI 3.42**

Lengd rétthyrnings er 32 metrar og breiddin 20 metrar. Hvert er ummálið?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |   |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | ummál rétthyrnings |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum P = ummálið. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $P = 2L + 2W$ |
| Setjið inn. | $P = 2(32\text{ m}) + 2(20\text{ m})$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $P = 64 + 40$<br>$P = 104$ |

**Skref 6. Sannreynið.**

$$\begin{aligned} P &\stackrel{?}{=} 104 \\ 20 + 32 + 20 + 32 &\stackrel{?}{=} 104 \\ 104 &= 104\checkmark \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Ummál rétthyrningsins er 104 metrar. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.83**

Lengd rétthyrnings er 120 jardar og breiddin 50 jardar. Hvert er ummálið?

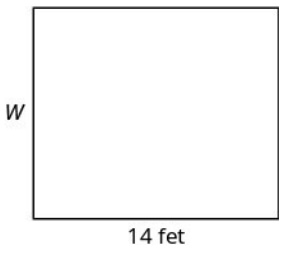
**REYNIÐ SJÁLF 3.84**

Lengd rétthyrnings er 62 fet og breiddin 48 fet. Hvert er ummálið?

**DÆMI 3.43**

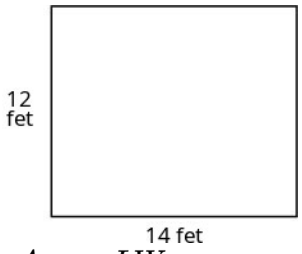
Flatarmál rétthyrnds herbergis er 168 ferfet. Lengdin er 14 fet. Hver er breiddin?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | breidd rétthyrnds herbergis |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum W = breiddina. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $A = LW$ |
| Setjið inn. | $168 = 14W$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $\frac{168}{14}=\frac{14W}{14}$<br>$12=W$ |

**Skref 6. Sannreynið.**




$$\begin{aligned} A &= LW \\ 168 &\stackrel{?}{=} 14 \cdot 12 \\ 168 &= 168\checkmark \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Breidd herbergisins er 12 fet. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.85**

Flatarmál rétthyrnings er 598 ferfet. Lengdin er 23 fet. Hver er breiddin?

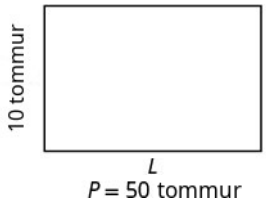
**REYNIÐ SJÁLF 3.86**

Breidd rétthyrnings er 21 metri. Flatarmálið er 609 fermetrar. Hver er lengdin?

**DÆMI 3.44**

Finnið lengd rétthyrnings með ummálið 50 tommur og breiddina 10 tommur.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengd rétthyrningsins |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum L = lengdina. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $P=2L+2W$ |
| Setjið inn. | $50=2L+2(10)$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $50 - 20 = 2L + 20 - 20$<br>$30 = 2L$<br>$\frac{30}{2} = \frac{2L}{2}$<br>$15 = L$ |

**Skref 6. Sannreynið.**




$$\begin{aligned} P &= 50 \\ 15 + 10 + 15 + 10 &\stackrel{?}{=} 50 \\ 50 &= 50\checkmark \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengdin er 15 tommur. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.87**

Finnið lengd rétthyrnings með ummálið 80 og breiddina 25.

**REYNIÐ SJÁLF 3.88**

Finnið lengd rétthyrnings með ummálið 30 og breiddina 6.

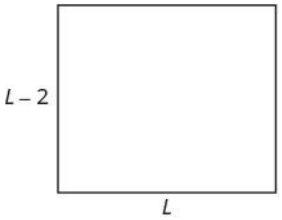
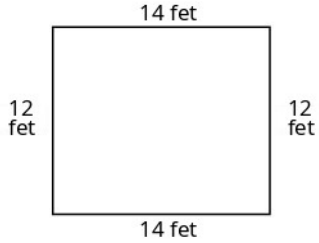
Við höfum leyst dæmi þar sem annaðhvort lengdin eða breiddin var gefin ásamt ummáli eða flatarmáli. Nú lærum við að leysa dæmi þar sem breiddin er skilgreind út frá lengdinni. Við bíðum með að teikna myndina þar til við höfum skrifað stæðu fyrir breiddina svo að við getum merkt aðra hliðina með þeirri stæðu.

**DÆMI 3.45**

Breidd rétthyrnings er tveimur fetum minni en lengdin. Ummálið er 52 fet. Finnið lengdina og breiddina.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengd og breidd rétthyrnings |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar stærðina. Þar sem breiddin er skilgreind út frá lengdinni látum við L = lengdina. Breiddin er tveimur fetum minni en lengdin og því látum við L − 2 = breiddina. |  $P=52$ fet |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. Formúlan fyrir ummál rétthyrnings tengir saman allar upplýsingarnar. | $P=2L+2W$ |
| Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna. | $52=2L+2(L-2)$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $52=2L+2L-4$ |
| Sameinið samkynja liði. | $52=4L-4$ |
| Leggið 4 við báðar hliðar. | $56=4L$ |
| Deilið með 4. | $\frac{56}{4}=\frac{4L}{4}$<br>$14=L$<br>Lengdin er 14 fet. |
| Nú þurfum við að finna breiddina. | Breiddin er $L-2$.Breiddin er 12 fet.<br>$L-2$<br>$14-2$<br>$12$ |
| **Skref 6.** Sannreynið. Þar sem $14+12+14+12=52$ gengur þetta upp!  | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengdin er 14 fet og breiddin 12 fet. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.89**

Breidd rétthyrnings er sjö metrum minni en lengdin. Ummálið er 58 metrar. Finnið lengdina og breiddina.

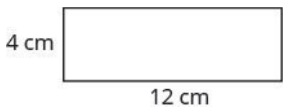
**REYNIÐ SJÁLF 3.90**

Lengd rétthyrnings er átta fetum meiri en breiddin. Ummálið er 60 fet. Finnið lengdina og breiddina.

**DÆMI 3.46**

Lengd rétthyrnings er fjórum sentímetrum meiri en tvöföld breiddin. Ummálið er 32 sentímetrar. Finnið lengdina og breiddina.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengdina og breiddina |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar breiddina. | Látum $W$ = breidd |
| Lengdin er fjórum meiri en tvöföld breiddin. | $2W + 4 =$ lengd<br><br><br>$P = 32$ cm |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu** | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $P = 2L + 2W$ |
| Setjið gefnar upplýsingar inn í formúluna. | $32 = 2(2W + 4) + 2W$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $32 = 4W + 8 + 2W$<br>$32 = 6W + 8$<br>$24 = 6W$<br>$4 = W$ (breidd)<br>$2W + 4$ (lengd)<br><br>$2(4) + 4$<br>12Lengdin er 12 cm. |
| **Skref 6. Sannreynið.** | <br><br>$P = 2L + 2W$<br>$32 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 12 + 2 \cdot 4$<br>$32 = 32\checkmark$ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengdin er 12 cm og breiddin 4 cm. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.91**

Lengd rétthyrnings er átta meiri en tvöföld breiddin. Ummálið er 64. Finnið lengdina og breiddina.

**REYNIÐ SJÁLF 3.92**

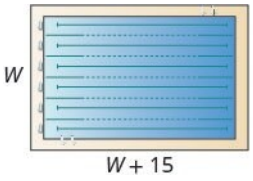
Breidd rétthyrnings er sex minni en tvöföld lengdin. Ummálið er 18. Finnið lengdina og breiddina.



**DÆMI 3.47**

Ummál rétthyrndrar sundlaugar er 150 fet. Lengdin er 15 fetum meiri en breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  $P = 150$ fet |
| **Skref 2.** Finnið að hverju er leitað. | lengd og breidd laugarinnar |
| **Skref 3.** Nefnið. Veljið breytu sem táknar breiddina. Lengdin er 15 fetum meiri en breiddin. | Látum $W$ = breidd<br>$W + 15$ = lengd |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu** | |
| Skrifið viðeigandi formúlu. | $P = 2L + 2W$ |
| Setjið inn. | $150 = 2(W + 15) + 2W$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $150 = 2W + 30 + 2W$<br>$150 = 4W + 30$<br>$120 = 4W$<br>$30 = W$ (breidd laugarinnar)<br>$W + 15$ (lengd laugarinnar)<br>$30 + 15$<br>$45$ |
| **Skref 6. Sannreynið.** | $P = 2L + 2W$<br>$150 \stackrel{?}{=} 2(45) + 2(30)$<br>$150 = 150$✓ |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengd laugarinnar er 45 fet og breiddin 30 fet. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.93**

Ummál rétthyrndrar sundlaugar er 200 fet. Lengdin er 40 fetum meiri en breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

**REYNIÐ SJÁLF 3.94**

Lengd rétthyrnds garðs er 30 jördum meiri en breiddin. Ummálið er 300 jardar. Finnið lengdina og breiddina.

## Verkefni úr hluta 3.4



***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið dæmi með eiginleikum þríhyrninga**

Leysið verkefnin hér á eftir með eiginleikum þríhyrninga.

**211.** Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 26 og 98 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

**212.** Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 61 og 84 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

**213.** Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 105 og 31 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

**214.** Stærðir tveggja horna í þríhyrningi eru 47 og 72 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

**215.** Ummál þríhyrningslaga laugar er 36 jardar. Tvær hliðanna eru 10 jardar og 15 jardar á lengd. Hve löng er þriðja hliðin?

**216.** Þríhyrningslaga húsagarður hefur ummálið 120 metra. Tvær hliðanna eru 30 metrar og 50 metrar á lengd. Hve löng er þriðja hliðin?

**217.** Ef tvær hliðar þríhyrnings eru 6 fet og 9 fet og ummálið 23 fet, hve löng er þá þriðja hliðin?

**218.** Ef tvær hliðar þríhyrnings eru 14 sentímetrar og 18 sentímetrar og ummálið 49 sentímetrar, hve löng er þá þriðja hliðin?

**219.** Þríhyrningslaga fáni hefur grunnlínuna eitt fet og hæðina 1,5 fet. Hvert er flatarmál hans?

**220.** Þríhyrningslaga gluggi hefur átta feta grunnlínu og sex feta hæð. Hvert er flatarmál hans?

**221.** Hver er lengd grunnlínu þríhyrnings með flatarmálið 207 fertommur og hæðina 18 tommur?

**222.** Hver er hæð þríhyrnings með flatarmálið 893 fertommur og grunnlínuna 38 tommur?

**223.** Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 33 gráður. Hver er stærð hins hvassa hornsins?

**224.** Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 51 gráða. Hver er stærð hins hvassa hornsins?

**225.** Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 22,5 gráður. Hver er stærð hins hvassa hornsins?

**226.** Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 36,5 gráður. Hver er stærð hins hvassa hornsins?

**227.** Ummál þríhyrnings er 39 fet. Ein hlið þríhyrningsins er einu feti lengri en önnur hliðin. Þriðja hliðin er tveimur fetum lengri en önnur hliðin. Finnið lengd hverrar hliðar.

**228.** Ummál þríhyrnings er 35 fet. Ein hlið þríhyrningsins er fimm fetum lengri en önnur hliðin. Þriðja hliðin er þremur fetum lengri en önnur hliðin. Finnið lengd hverrar hliðar.

**229.** Ein hlið þríhyrnings er tvöfalt lengri en stysta hliðin. Þriðja hliðin er fimm fetum lengri en stysta hliðin. Ummálið er 17 fet. Finnið lengdir hliðanna þriggja.

**230.** Ein hlið þríhyrnings er þrefalt lengri en stysta hliðin. Þriðja hliðin er þremur fetum lengri en stysta hliðin. Ummálið er 13 fet. Finnið lengdir hliðanna þriggja.

3

**231.** Hvössu hornin tvö í rétthyrndum þríhyrningi eru jafnstór. Finnið stærðir hornanna þriggja.

**232.** Minnsta hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 20° minna en næststærsta hornið. Finnið stærðir hornanna þriggja.

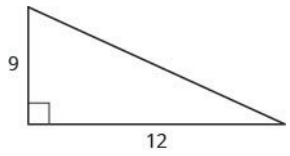
**233.** Horn þríhyrnings eru þannig að eitt hornið er tvöfalt stærra en minnsta hornið og þriðja hornið þrefalt stærra en minnsta hornið. Finnið stærðir hornanna þriggja.

**234.** Horn þríhyrnings eru þannig að eitt hornið er 20° stærra en minnsta hornið og þriðja hornið þrefalt stærra en minnsta hornið. Finnið stærðir hornanna þriggja.

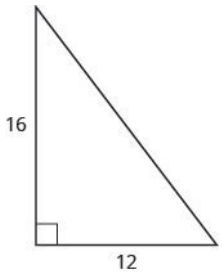
**Notið setningu Pýþagórasar**

Finnið lengd langhliðarinnar í verkefnunum hér á eftir með setningu Pýþagórasar.

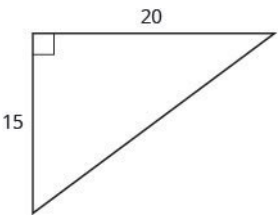
235.



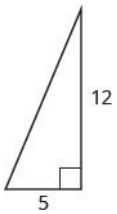

236.




237.

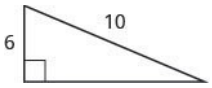


238.

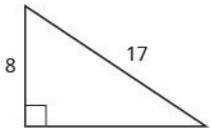



Finnið lengd skammhliðarinnar í verkefnunum hér á eftir með setningu Pýþagórasar. Námundið að næsta tíunda hluta ef þörf krefur.

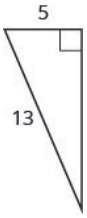
239.



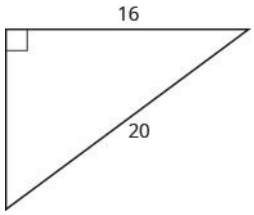

240.



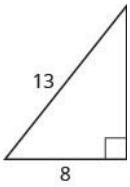

241.



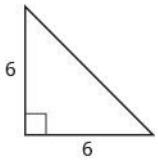

242.



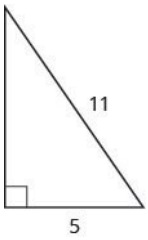

243.



244.

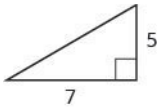



245.



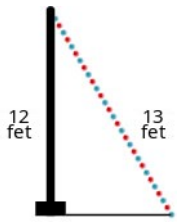



246.




Leysið verkefnin hér á eftir með setningu Pýþagórasar. Námundið að næsta tíunda hluta ef þörf krefur.

**247.** 13 feta ljósasería verður fest efst á 12 feta staur sem hluti af hátíðarskreytingu eins og sýnt er hér fyrir neðan. Hve langt frá neðri enda staursins á að festa hinn enda ljósaseríunnar?




**248.** Pam vill hengja borða á ská yfir bílskúrshurðina sína, eins og sýnt er hér fyrir neðan, til að óska syni sínum til hamingju með háskólaútskriftina. Bílskúrshurðin er 12 fet á hæð og 16 fet á breidd. Hve langur þarf borðinn að vera til að ná yfir hurðina?



**249.** Chi ætlar að leggja stíg úr hellusteinum þvert yfir blómagarðinn sinn eins og sýnt er hér fyrir neðan. Blómagarðurinn er ferningur með 10 feta hlið. Hve langur verður stígurinn?




**250.** Brian fékk lánaðan 20 feta útdraganlegan stiga til að nota þegar hann málar húsið sitt. Ef hann stillir neðri enda stigans 6 fet frá húsinu eins og sýnt er hér fyrir neðan, hve hátt upp nær efri endi stigans?




**Leysið dæmi með eiginleikum rétthyrninga**

Leysið verkefnin hér á eftir með eiginleikum rétthyrninga.

**251.** Lengd rétthyrnings er 85 fet og breiddin 45 fet. Hvert er ummálið?

**252.** Lengd rétthyrnings er 26 tommur og breiddin 58 tommur. Hvert er ummálið?

**253.** Rétthyrnt herbergi er 15 fet á breidd og 14 fet á lengd. Hvert er ummálið?

**254.** Innkeyrsla er rétthyrningur sem er 20 fet á breidd og 35 fet á lengd. Hvert er ummálið?

**255.** Flatarmál rétthyrnings er 414 fermetrar. Lengdin er 18 metrar. Hver er breiddin?

**256.** Flatarmál rétthyrnings er 782 fersentímetrar. Breiddin er 17 sentímetrar. Hver er lengdin?

**257.** Breidd rétthyrnds glugga er 24 tommur. Flatarmálið er 624 fertommur. Hver er lengdin?

**258.** Lengd rétthyrnds veggspjalds er 28 tommur. Flatarmálið er 1.316 fertommur. Hver er breiddin?

**259.** Finnið lengd rétthyrnings með ummálið 124 og breiddina 38.

**260.** Finnið breidd rétthyrnings með ummálið 92 og lengdina 19.

**261.** Finnið breidd rétthyrnings með ummálið 16,2 og lengdina 3,2.

**262.** Finnið lengd rétthyrnings með ummálið 20,2 og breiddina 7,8.

**263.** Lengd rétthyrnings er níu tommum meiri en breiddin. Ummálið er 46 tommur. Finnið lengdina og breiddina.

**264.** Breidd rétthyrnings er átta tommum meiri en lengdin. Ummálið er 52 tommur. Finnið lengdina og breiddina.

**265.** Ummál rétthyrnings er 58 metrar. Breidd rétthyrningsins er fimm metrum minni en lengdin. Finnið lengd og breidd rétthyrningsins.

**266.** Ummál rétthyrnings er 62 fet. Breiddin er sjö fetum minni en lengdin. Finnið lengdina og breiddina.



**267.** Breidd rétthyrningsins er 0,7 metrum minni en lengdin. Ummál rétthyrningsins er 52,6 metrar. Finnið mál rétthyrningsins.

**268.** Lengd rétthyrningsins er 1,1 metrum minni en breiddin. Ummál rétthyrningsins er 49,4 metrar. Finnið mál rétthyrningsins.

**269.** Ummál rétthyrnings er 150 fet. Lengd rétthyrningsins er tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd rétthyrningsins.

**270.** Lengd rétthyrnings er þreföld breiddin. Ummál rétthyrningsins er 72 fet. Finnið lengd og breidd rétthyrningsins.

**271.** Lengd rétthyrnings er þremur metrum minni en tvöföld breiddin. Ummál rétthyrningsins er 36 metrar. Finnið mál rétthyrningsins.

**272.** Lengd rétthyrnings er fimm tommum meiri en tvöföld breiddin. Ummálið er 34 tommur. Finnið lengdina og breiddina.

**273.** Ummál rétthyrnds svæðis er 560 jardar. Lengdin er 40 jördum meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd svæðisins.

**274.** Ummál rétthyrnds innigarðs er 160 fet. Lengdin er 16 fetum meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd innigarðsins.

**275.** Rétthyrnt bílastæði hefur ummálið 250 fet. Lengdin er fimm fetum meiri en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd bílastæðisins.

**276.** Rétthyrnd gólfmotta hefur ummálið 240 tommur. Lengdin er 12 tommum meiri en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd mottunnar.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**277.** Christa vill setja girðingu umhverfis þríhyrningslaga blómabeð sitt. Hliðar blómabeðsins eru sex fet, átta fet og 10 fet. Hve mörg fet af girðingarefni þarf hún til að girða beðið af?

**278.** Jose fjarlægði nýlega leiktæki barnanna úr bakgarðinum til að rýma fyrir rétthyrndum matjurtagarði. Hann vill girða garðinn af svo að hundurinn komist ekki inn. Í bílskúrnum á hann 50 feta rúllu af girðingarefni sem hann ætlar að nota. Til að garðurinn komist fyrir í bakgarðinum þarf breidd hans að vera 10 fet. Hve langan getur hann haft garðinn?

### *Ritunaræfingar*

**279.** Ef þið þurfið að flísaleggja eldhúsgólfið, þurfið þið þá að þekkja ummál eða flatarmál eldhússins? Rökstyðjið svarið.

**280.** Ef þið þurfið að girða bakgarðinn af, þurfið þið þá að þekkja ummál eða flatarmál hans? Rökstyðjið svarið.

**281.** Skoðið myndirnar tvær hér fyrir neðan.




1. ⓐ Hvor myndin virðist hafa stærra flatarmál?
2. ⓑ Hvor myndin virðist hafa stærra ummál?
3. ⓒ Reiknið nú flatarmál og ummál hvorrar myndar.
4. ⓓ Hvor myndin hefur stærra flatarmál?
5. ⓔ Hvor myndin hefur stærra ummál?

**282.** Skrifið rúmfræðilegt orðadæmi sem tengist eigin reynslu, leysið það síðan og útskýrið öll skrefin.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst verkefni með því að nota eiginleika þríhyrninga. | | | |
| notað setningu Pýþagórasar. | | | |
| leyst verkefni með því að nota eiginleika rétthyrninga. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um hve vel þið hafið náð tökum á efni kaflans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 3.5 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

**UNDIRBÚNINGUR 3.16**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

3

Finnið vegalengdina sem bíll fer á 70 mílna hraða á klukkustund í 3 klukkustundir. Ef þið náðuð ekki að leysa dæmið skuluð þið rifja upp
dæmi 2.58.

**UNDIRBÚNINGUR 3.17**

Leysið $x+1{,}2(x-10)=98$.
Ef þið náðuð ekki að leysa dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 2.39.

**UNDIRBÚNINGUR 3.18**

Umreiknið 90 mínútur í klukkustundir. Ef þið náðuð ekki að leysa dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 1.140.

## Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

Þegar ferðalag er skipulagt er oft gagnlegt að vita hve langan tíma tekur að komast á áfangastað eða hve langt á að aka á hverjum degi. Þá notum við formúluna fyrir vegalengd, hraða og tíma, $D=rt$, sem við höfum þegar séð.

Í þessum hluta notum við formúluna í verkefnum sem kalla á aðeins meiri algebru en þau sem við höfum séð áður. Yfirleitt berum við saman tvær aðstæður, svo sem tvö farartæki á ólíkum hraða eða í gagnstæðar áttir. Þegar hraði hvors farartækis er fastur köllum við slík dæmi verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða.

Verkefnalausnaraðferðin gildir áfram, en við bætum atriði við fyrsta skrefið. Í fyrsta skrefi teiknum við nú líka mynd sem sýnir hvað gerist í dæminu. Myndin hjálpar okkur að skilja aðstæðurnar svo að við getum sett upp rétta jöfnu. Síðan búum við til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar, eins og við gerðum í myntaverkefnunum.

Hér er verkefnalausnaraðferðin til hliðsjónar.

**AÐFERÐ**

### Notið verkefnalausnaraðferð við verkefni um vegalengd, hraða og tíma.

1. Skref 1.

**Skref 1. Lesið verkefnið. Gætið þess að skilja öll orð og hugmyndir.**

- Teiknið mynd sem sýnir hvað gerist.
- Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.
- Merkið dálkana hraði, tími og vegalengd.
- Skráið aðstæðurnar tvær.
- Færið inn upplýsingarnar sem þið þekkið.

| | Hraði | • | Tími | = | Vegalengd |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |



2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
3. Skref 3.
   **Skref 3. Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina.**

   - Fyllið út töfluna.
   - Notið stæður með breytum til að tákna stærðina í hverri röð.
   - Margfaldið hraðann með tímanum til að fá vegalengdina.
4. Skref 4.
   **Setjið fram sem jöfnu.**

   - Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum.
   - Setjið síðan setninguna fram sem jöfnu.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

---

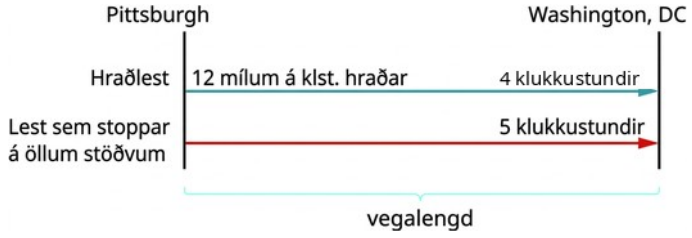
**DÆMI 3.48**

Hraðlest og lest sem stoppar á öllum stöðvum leggja af stað frá Pittsburgh til Washington, D.C. Hraðlestin fer leiðina á 4 klukkustundum en hin lestin er 5 klukkustundir á leiðinni. Hraðlestin fer 12 mílum hraðar á klukkustund en hin lestin. Finnið hraða beggja lestanna.

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið. Gætið þess að skilja öll orð og hugmyndir.

- Teiknið mynd sem sýnir hvað gerist. Hér fyrir neðan er skissa af aðstæðunum í dæminu.



| | Hraði (mílur/klst.) | • | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Hraðlest | | | 4 | | |
| Lest sem stoppar á öllum stöðvum | | | 5 | | |

- Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.
- Merkið dálkana „Hraði“, „Tími“ og „Vegalengd“.
- Skráið aðstæðurnar tvær.
- Færið inn upplýsingarnar sem þið þekkið.

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

3

- Við eigum að finna hraða beggja lestanna.
- Takið eftir að í formúlunni fyrir vegalengd er talað um hraða, sama orð og notað er í daglegu máli um farartæki.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina.

- Fyllið út töfluna
- Notið stæður með breytum til að tákna stærðina í hverri röð.
- Við leitum að hraða lestanna. Látum r tákna hraða staðarlestarinnar. Hraðlestin fer 12 mílum hraðar á klukkustund, svo að við táknum hraða hennar með $r+12$.

$$\begin{aligned} r &= \text{hraði staðarlestarinnar} \\ r+12 &= \text{hraði hraðlestarinnar} \end{aligned}$$

Færið hraðana inn í töfluna.

| | Hraði (mílur/klst.) | • | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Hraðlest | $r+12$ | | 4 | | |
| Staðarlest | $r$ | | 5 | | |

Margfaldið hraðann með tímanum til að fá vegalengdina.

| | Hraði (mílur/klst.) | • | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Hraðlest | $r+12$ | | 4 | | $4(r+12)$ |
| Lest sem stoppar á öllum stöðvum | $r$ | | 5 | | $5r$ |

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu.

- Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum.
- Setjið síðan setninguna fram sem jöfnu.
- Jafnan sem lýsir aðstæðunum byggist á sambandi vegalengdanna. Skoðið myndina sem við teiknuðum hér að ofan. Hvernig tengist vegalengdin sem hraðlestin fer vegalengdinni sem staðarlestin fer?
- Báðar lestirnar fara frá Pittsburgh til Washington, D.C., og fara því sömu vegalengd. Við skrifum því:

| | vegalengd sem hraðlestin fer | = | vegalengd sem stoppalestin fer |
|---|---|---|---|
| Setjið fram sem jöfnu. | $4(r+12)$ | = | $5r$ |

**Skref 5.** Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.

| | |
|---|---|
| Leysið nú jöfnuna. | $4(r+12)=5r$<br>$4r+48=5r$<br>$48=r$<br>Hraði staðarlestarinnar er því 48 mílur á klukkustund. |
| Finnið hraða hraðlestarinnar. | $r+12$<br>$48+12$<br>$60$<br>Hraði hraðlestarinnar er 60 mílur á klukkustund. |

**Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.

Tafla 3.11

| | |
|---|---|
| hraðlest | 60 mílur á klukkustund (4 klukkustundir) = 240 mílur |
| staðarlest | 48 mílur á klukkustund (5 klukkustundir) = 240 mílur ✓ |

**Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu.

- Hraði staðarlestarinnar er 48 mílur á klukkustund og hraði hraðlestarinnar 60 mílur á klukkustund.

### REYNIÐ SJÁLF 3.95

Wayne og Dennis hjóla gjarnan eftir hjólastígnum frá Riverside-garðinum að ströndinni. Dennis hjólar sjö mílum hraðar á klukkustund en Wayne. Því tekur ferðin Wayne 2 klukkustundir en Dennis 1,5 klukkustundir. Finnið hraða beggja hjólreiðamannanna.

### REYNIÐ SJÁLF 3.96

Jeromy getur ekið frá heimili sínu í Cleveland í háskólann sinn í Chicago á 4,5 klukkustundum. Móðir hans er 6 klukkustundir að aka sömu leið. Jeromy ekur 20 mílum hraðar á klukkustund en móðir hans. Finnið hraða þeirra beggja.

Í dæmi 3.48, dæminu hér á undan, fóru tvær lestir sömu vegalengd. Myndin og taflan hjálpuðu okkur að setja upp jöfnuna sem við leystum. Skoðum hvernig þetta virkar við aðrar aðstæður.

### DÆMI 3.49

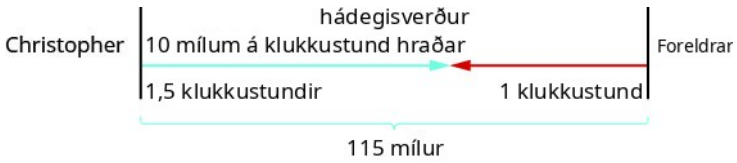
Christopher og foreldrar hans búa í 115 mílna fjarlægð hvert frá öðru. Þau hittust á veitingastað milli heimila sinna til að halda upp á afmæli móður hans. Christopher ók í 1,5 klukkustundir en foreldrar hans í 1 klukkustund að veitingastaðnum. Meðalhraði

Christophers var 10 mílum meiri á klukkustund en meðalhraði foreldra hans. Hver var meðalhraði Christophers og foreldra hans á leiðinni að veitingastaðnum?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið. Gætið þess að skilja öll orð og hugmyndir.

- Teiknið mynd sem sýnir hvað gerist. Hér fyrir neðan er skissa af aðstæðunum í dæminu.




3

- Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.
- Merkið dálkana hraði, tími og vegalengd.
- Skráið aðstæðurnar tvær.
- Færið inn upplýsingarnar sem þið þekkið.

| | Hraði (mílur/klst.) | • | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Christopher | | | 1,5 | | |
| Foreldrar | | | 1 | | |
| | | | | | 115 |

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

- Við eigum að finna meðalhraða Christophers og foreldra hans.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina.

- Fyllið út töfluna.
- Notið stæður með breytum til að tákna stærðina í hverri röð.
- Við leitum að meðalhraða þeirra. Látum r tákna meðalhraða foreldranna. Christopher fer 10 mílum hraðar á klukkustund, svo að við táknum hraða hans með $r+10$.

Færið hraðana inn í töfluna.

| | Hraði (mílur/klst.) | • | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Christopher | $r+10$ | | 1,5 | | $1{,}5(r+10)$ |
| Foreldrar | $r$ | | 1 | | $r$ |
| | | | | | 115 |

Margfaldið hraðann með tímanum til að fá vegalengdina.

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu.

- Endursegið verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægu upplýsingunum.
- Setjið síðan setninguna fram sem jöfnu.

- Aftur þurfum við að finna samband milli vegalengdanna til að geta sett upp jöfnu. Skoðið myndina hér að ofan og takið eftir sambandinu milli vegalengdarinnar sem Christopher fór og vegalengdarinnar sem foreldrar hans fóru.

Vegalengdin sem Christopher fór og vegalengdin sem foreldrar hans fóru verða samanlagt að vera 115 mílur. Við skrifum því:

| | vegalengdin sem Christopher fór | + | vegalengdin sem foreldrar hans fóru | = 115 |
|---|---|---|---|---|
| Setjið fram sem jöfnu. | $1{,}5(r+10)$ | + | $r$ | = 115 |

**Skref 5.** Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.



Tafla 3.12

| | |
|---|---|
| Leysið nú jöfnuna. | $\begin{aligned} 1{,}5(r+10)+r &= 115 \\ 1{,}5r+15+r &= 115 \\ 2{,}5r+15 &= 115 \\ 2{,}5r &= 100 \\ r &= 40 \end{aligned}$ |
| | Hraði foreldranna var því 40 mílur á klukkustund. |
| Hraði Christophers er $r+10$. | $\begin{aligned} r+10 \\ 40+10 \\ 50 \end{aligned}$ |
| | Hraði Christophers var 50 mílur á klukkustund. |

**Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.

Tafla 3.13

| | |
|---|---|
| Christopher ók | 50 mílur á klukkustund (1,5 klukkustundir) $=$ 75 mílur |
| Foreldrar hans óku | 40 mílur á klukkustund (1 klukkustund) $=$ 40 mílur |
| | 115 mílur |

Tafla 3.14

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Hraði Christophers var 50 mílur á klukkustund. Hraði foreldra hans var 40 mílur á klukkustund. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.97**

Carina ekur frá heimili sínu í Anaheim til Berkeley sama dag og bróðir hennar ekur frá Berkeley til Anaheim. Þau ákveða því að hittast í hádegisverði á leiðinni í Buttonwillow. Vegalengdin frá Anaheim til Berkeley er 410 mílur. Carina er 3 klukkustundir að aka til

Buttonwillow en bróðir hennar ekur þangað á 4 klukkustundum. Meðalhraði bróður Carinu var 15 mílum meiri á klukkustund en meðalhraði hennar. Finnið meðalhraða Carinu og bróður hennar.

---

**REYNIÐ SJÁLF 3.98**

Ashley stundar háskólanám í Minneapolis, 234 mílur frá heimili sínu í Sioux Falls. Hún vill að foreldrar hennar færi henni meiri vetrarfatnað og því ákveða þau að hittast á veitingastað við veginn milli Minneapolis og Sioux Falls. Ashley og foreldrar hennar óku öll í 2 klukkustundir að veitingastaðnum. Meðalhraði Ashley var sjö mílum meiri á klukkustund en meðalhraði foreldra hennar. Finnið meðalhraða Ashley og foreldra hennar.



Þegar þið lesið næsta dæmi skuluð þið íhuga sambandið milli vegalengdanna. Hvoru dæmanna tveggja hér á undan svipar meira til þessara aðstæðna?

---

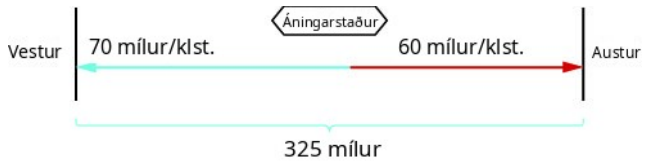
**DÆMI 3.50**

Tveir vörubílstjórar leggja samtímis af stað frá áningarstað við þjóðveg. Annar vörubíllinn ekur í austur en hinn í vestur. Vörubíllinn á vesturleið ekur á 70 mílna hraða á klukkustund og meðalhraði vörubílsins á austurleið er 60 mílur á klukkustund. Hve lengi aka þeir áður en 325 mílur eru á milli þeirra?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið. Gætið þess að skilja öll orð og hugmyndir.

- Teiknið mynd sem sýnir hvað gerist.




- Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

| | Hraði (mílur/klst.) | • | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Vestur | 70 | | | | |
| Austur | 60 | | | | |
| | | | | | 325 |

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

- Við eigum að finna hve lengi vörubílarnir aka þar til 325 mílur eru á milli þeirra.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina.

- Við leitum að ferðatímanum. Báðir vörubílarnir aka jafn lengi. Köllum tímann t. Hraði þeirra er ólíkur og því fara þeir ólíkar vegalengdir.
- Fyllið út töfluna.

| | Hraði (mílur/klst.) • | Tími (klst.) | = Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|
| Vestur | 70 | $t$ | $70t$ |
| Austur | 60 | $t$ | $60t$ |
| | | | 325 |

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu.

- Við þurfum að finna samband milli vegalengdanna til að geta sett upp jöfnu. Skoðið myndina. Hvernig tengjast vegalengdirnar sem vörubílarnir fara?
- Vegalengdin sem vörubíllinn á vesturleið fer og vegalengdin sem vörubíllinn á austurleið fer verða samanlagt að vera 325 mílur. Við skrifum því:



vegalengd sem vörubíllinn á vesturleið fer + vegalengd sem vörubíllinn á austurleið fer = 325

Setjið fram sem jöfnu. $70t + 60t = 325$

**Skref 5.** Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.

Tafla 3.15

| | |
|---|---|
| Leysið nú jöfnuna. | $70t + 60t = 325$<br>$130t = 325$<br>$t = 2{,}5$ |

Það tekur vörubílana því 2,5 klukkustundir að verða 325 mílur hvor frá öðrum.

**Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.

Tafla 3.16

| | |
|---|---|
| Vörubíll á vesturleið | 70 mílur á klukkustund (2,5 klukkustundir) = 175 mílur |
| Vörubíll á austurleið | 60 mílur á klukkustund (2,5 klukkustundir) = 150 mílur<br>325 mílur |

Tafla 3.17

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Það tekur vörubílana 2,5 klukkustundir að verða 325 mílur hvor frá öðrum. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.99**

Pierre og Monique leggja samtímis af stað að heiman í Portland. Pierre ekur norður eftir hraðbrautinni á 75 mílna hraða á klukkustund en Monique ekur suður á 68 mílna hraða á klukkustund. Hve langur tími líður þar til 429 mílur eru á milli þeirra?

**REYNIÐ SJÁLF 3.100**

Thanh og Nhat leggja samtímis af stað frá skrifstofu sinni í Sacramento. Thanh ekur norður eftir I-5 á 72 mílna hraða á klukkustund. Nhat ekur suður eftir I-5 á 76 mílna hraða á klukkustund. Hve langur tími líður þar til 330 mílur eru á milli þeirra?

**SAMRÆMIÐ MÆLIEININGAR Í VERKEFNUM**

Þegar formúlan fyrir vegalengd, hraða og tíma er notuð er mikilvægt að mælieiningarnar passi saman. Ef hraðinn er til dæmis gefinn í mílum á klukkustund verður tíminn að vera í klukkustundum.

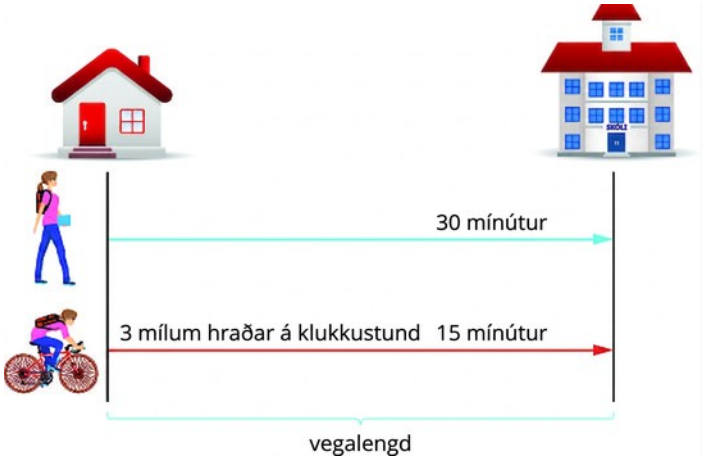
3

**DÆMI 3.51**

Þegar Katie Mae gengur í skólann tekur það hana 30 mínútur. Þegar hún hjólar tekur það hana 15 mínútur. Á hjólinu fer hún þremur mílum hraðar á klukkustund en þegar hún gengur. Hver er gönguhraði hennar og hjólahraði?

## Lausn

Fyrst teiknum við mynd af aðstæðunum til að auðvelda okkur að sjá hvað gerist.




Við eigum að finna gönguhraða hennar og hjólahraða. Köllum gönguhraðann r. Hjólahraðinn er þremur mílum meiri á klukkustund, svo að við köllum hann $r+3$. Færum hraðana inn í töfluna.

Hraðinn er gefinn í mílum á klukkustund og því þurfum við líka að gefa tímann í klukkustundum svo að mælieiningarnar passi saman. Munið að ein klukkustund er 60 mínútur. Því fæst:

$$30 \text{ mínútur eru } \frac{30}{60} \text{ eða } \frac{1}{2} \text{ klukkustund}$$

$$15 \text{ mínútur eru } \frac{15}{60} \text{ eða } \frac{1}{4} \text{ klukkustund}$$

Næst margföldum við hraðann með tímanum og fyllum út dálkinn fyrir vegalengd.

| | Hraði (mílur/klst.) $\cdot$ | Tími (klst.) | = Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|
| Ganga | $r$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}r$ |
| Hjóla | $r+3$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}(r+3)$ |

Jafnan byggist á því að vegalengdin frá heimili Katie Mae í skólann er sú sama hvort sem hún gengur eða hjólar.

Við segjum því:

| | vegalengd gengin = vegalengd farin á hjóli |
|---|---|
| Setjið fram sem jöfnu. | $\frac{1}{2}r = \frac{1}{4}(r+3)$ |
| Leysið jöfnuna. | $\frac{1}{2}r = \frac{1}{4}(r+3)$ |
| Losið jöfnuna við brotastuðlana með því að margfalda með minnsta samnefnara allra brotanna. | $8 \cdot \frac{1}{2}r = 8 \cdot \frac{1}{4}(r+3)$ |
| Einfaldið. | $4r = 2(r+3)$<br>$4r = 2r+6$<br>$2r = 6$<br>$r = 3$ mílur/klst. (gönguhraði Katie Mae)<br>$r+3$ hjólreiðahraði<br>$3+3$<br>6 mílur á klukkustund (hjólahraði Katie Mae) |
| Athugum hvort þetta stenst. Ganga 3 mílur á klukkustund (0,5 klukkustund) = 1,5 mílur Hjóla 6 mílur á klukkustund (0,25 klukkustund) = 1,5 mílur | |
| Já, Katie Mae fer 1,5 mílur í skólann hvort sem hún gengur eða hjólar. | Gönguhraði Katie Mae er 3 mílur á klukkustund. Hjólahraði hennar er 6 mílur á klukkustund. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.101**

Suzy er 50 mínútur að ganga upp brekkuna frá bílastæðinu að útsýnisturninum. Hún er 30 mínútur að ganga aftur niður á bílastæðið. Hraði hennar niður brekkuna er 1,2 mílum meiri á klukkustund en hraðinn upp brekkuna. Finnið hraða Suzy upp og niður brekkuna.

**REYNIÐ SJÁLF 3.102**

Llewyn er 45 mínútur að sigla bátnum á móti straumi frá bryggjunni að uppáhaldsveiðistaðnum sínum. Hann er 30 mínútur að sigla aftur með straumi að bryggjunni. Hraði bátsins með straumi er fjórum mílum meiri á klukkustund en hraðinn á móti straumi. Finnið hraða bátsins á móti straumi og með straumi.

Í formúlunni fyrir vegalengd, hraða og tíma táknar tími raunverulegan liðinn tíma (í klukkustundum, mínútum o.s.frv.). Ef upphafs- og lokatími eru gefnir sem tímasetningar á klukku í verkefni verðum við að finna liðna tímann áður en við notum formúluna.

3

**DÆMI 3.52**

Hamilton hefur gaman af að ferðast til Las Vegas, sem er 255 mílur frá heimili hans í Orange-sýslu. Í síðustu ferð lagði hann af stað að heiman klukkan 14:00. Fyrri hluta leiðarinnar ók hann í mikilli umferð á hraðbrautum borgarinnar. Klukkan 16:00 dró úr umferðinni og hann gat ekið um eyðimörkina 1,75 sinnum hraðar en í umferðarþunganum. Hann kom til Las Vegas klukkan 18:30. Hve hratt ók hann á hvorum hluta leiðarinnar?

## Lausn

Mynd hjálpar okkur að setja ferðina fram stærðfræðilega.




Næst búum við til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

Við vitum að heildarvegalengdin er 255 mílur. Við leitum að hraðanum á hvorum hluta ferðarinnar. Hraðinn í eyðimörkinni er 1,75 sinnum hraðinn í borginni. Ef við látum $r =$ hraðann í borginni er hraðinn í eyðimörkinni $1{,}75\,r$.

Hér eru tímarnir gefnir sem tímasetningar á klukku. Hamilton lagði af stað að heiman klukkan 14:00 og kom inn í eyðimörkina klukkan 16:00. Hann ók því í tvær klukkustundir á umferðarþungum hraðbrautum borgarinnar. Síðan ók hann hraðar um eyðimörkina frá klukkan 16:00 til 18:30. Hann ók því í 2,5 klukkustundir í eyðimörkinni.

Nú margföldum við hraðana með tímunum.

| | Hraði (mílur/klst.) | · | Tími (klst.) | = | Vegalengd (mílur) |
|---|---|---|---|---|---|
| Borg | $r$ | | 2 | | $2r$ |
| Eyðimörk | $1{,}75r$ | | 2,5 | | $2{,}5(1{,}75r)$ |
| | | | | | 255 |

Af myndinni hér fyrir neðan sést að samanlögð vegalengd í borginni og eyðimörkinni er 255 mílur.

| | |
|---|---|
| | vegalengd ekin í borginni + vegalengd ekin í eyðimörkinni = 255 |
| Setjið fram sem jöfnu. | $2r + 2{,}5(1{,}75r) = 255$ |
| Leysið jöfnuna. | $2r + 2{,}5(1{,}75r) = 255$<br>$2r + 4{,}375r = 255$<br>$6{,}375r = 255$<br>$r = 40$ mílur/klst. í borginni<br>$1{,}75r$ hraði í eyðimörkinni<br>$1{,}75(40)$<br>70 mílur/klst. |
| Sannreynið.<br>Borg 40 mílur/klst. (2 klst.) = 80 mílur<br>Eyðimörk 70 mílur/klst. (2,5 klst.) = 175 mílur<br>255 mílur | |
| | Hamilton ók á 40 mílna hraða á klukkustund í borginni og 70 mílna hraða á klukkustund í eyðimörkinni. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.103**

Cruz æfir fyrir þríþraut. Hann lagði af stað að heiman klukkan 6:00 og hljóp til klukkan 7:30. Síðan hjólaði hann til klukkan 9:45. Hann fór samtals 51 mílu. Hjólahraði hans var 1,6 sinnum hlaupahraðinn. Finnið hjóla- og hlaupahraða Cruz.

**REYNIÐ SJÁLF 3.104**

Phuong lagði af stað að heiman á hjóli klukkan 10:00. Hann hjólaði eftir sléttum vegi til klukkan 11:15 og síðan upp brekku til klukkan 11:45. Hann hjólaði samtals 31 mílu. Hraði hans upp brekkuna var 0,6 sinnum hraðinn á slétta veginum. Finnið hraða hans upp brekkuna og á slétta veginum.

## Æfingar í kafla 3.5

### *Æfingin skapar meistarann*

**Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**283.** Lilah er að flytja frá Portland til Seattle. Lestarferðin tekur hana þrjár klukkustundir. Mason ekur frá lestarstöðinni í Portland til lestarstöðvarinnar í Seattle með alla kassa Lilah í bílnum. Hann er 2,4 klukkustundir að aka til Seattle og ekur 15 mílum hraðar á klukkustund en lestin. Finnið hraða Masons og lestarinnar.

**284.** Kathy og Cheryl ganga í fjáröflun. Kathy lýkur leiðinni á 4,8 klukkustundum en Cheryl á 8 klukkustundum. Kathy gengur tveimur mílum hraðar á klukkustund en Cheryl. Finnið gönguhraða þeirra beggja.

**285.** Tvær rútur aka frá Sacramento til San Diego. Hraðrútan fer leiðina á 6,8 klukkustundum en rútan sem stoppar á öllum stöðvum er 10,2 klukkustundir á leiðinni. Hraðrútan fer 25 mílum hraðar á klukkustund en hin rútan. Finnið hraða beggja rútanna.

**286.** Farþegaþota og einkaflugvél fljúga frá Denver til Phoenix. Flugið tekur farþegaþotuna 1,1 klukkustund en einkaflugvélina 1,8 klukkustundir. Farþegaþotan flýgur 210 mílum hraðar á klukkustund en einkaflugvélin. Finnið hraða beggja flugvélanna.



**287.** Saul ók vörubílnum sínum í 3 klukkustundir frá Dallas í átt að Kansas City og stoppaði á vörubílaáningarstað til að borða kvöldmat. Þar hitti hann Erwin, sem hafði ekið í 4 klukkustundir frá Kansas City í átt að Dallas. Vegalengdin milli Dallas og Kansas City er 542 mílur og Erwin ók átta mílum hægar á klukkustund en Saul. Finnið hraða vörubílstjóranna tveggja.

**288.** Charlie og Violet hittust í hádegisverði á veitingastað milli Memphis og New Orleans. Charlie lagði af stað frá Memphis og ók í 4,8 klukkustundir í átt að New Orleans. Violet lagði af stað frá New Orleans og ók í 2 klukkustundir í átt að Memphis á 10 mílna meiri hraða á klukkustund en Charlie. Vegalengdin milli Memphis og New Orleans er 394 mílur. Finnið hraða ökumannanna tveggja.

**289.** Systurnar Helen og Anne búa 332 mílur hvor frá annarri. Á þakkargjörðarhátíðinni hittust þær heima hjá annarri systur sinni, á leiðinni milli heimila þeirra. Helen ók í 3,2 klukkustundir og Anne í 2,8 klukkustundir. Meðalhraði Helen var fjórum mílum meiri á klukkustund en meðalhraði Anne. Finnið meðalhraða þeirra beggja.

**290.** Ethan og Leo byrja að hjóla hvor á sínum enda 65 mílna hjólastígs. Eftir að Ethan hefur hjólað í 1,5 klukkustundir og Leo í 2 klukkustundir mætast þeir á stígnum. Ethan hjólar sex mílum hraðar á klukkustund en Leo. Finnið hraða hjólreiðamannanna tveggja.

**291.** Elvira og Aletheia búa 3,1 mílu hvor frá annarri við sömu götu. Þær eru í námshópi sem hittist á kaffihúsi milli heimila þeirra. Elvira var hálfa klukkustund og Aletheia tvo þriðju úr klukkustund að ganga á kaffihúsið. Aletheia gengur 0,6 mílum hægar á klukkustund en Elvira. Finnið gönguhraða þeirra beggja.

**292.** DaMarcus og Fabian búa 23 mílur hvor frá öðrum og spila fótbolta í garði milli heimila sinna. DaMarcus hjólaði í þrjá fjórðu úr klukkustund en Fabian í hálfa klukkustund til að komast í garðinn. Fabian hjólaði sex mílum hraðar á klukkustund en DaMarcus. Finnið hraða beggja fótboltamannanna.

**293.** Cindy og Richard leggja samtímis af stað frá heimavist sinni í Charleston. Cindy hjólar norður á 18 mílna hraða á klukkustund. Richard hjólar suður á 14 mílna hraða á klukkustund. Hve langur tími líður þar til 96 mílur eru á milli þeirra?

**294.** Matt og Chris leggja samtímis af stað frá húsi frænda síns í Phoenix. Matt ekur vestur eftir I-60 á 76 mílna hraða á klukkustund. Chris ekur austur eftir I-60 á 82 mílna hraða á klukkustund. Hve margar klukkustundir líða þar til 632 mílur eru á milli þeirra?

**295.** Tvær rútur leggja samtímis af stað frá Billings. Seattle-rútan ekur vestur eftir I-90 á 73 mílna hraða á klukkustund en Chicago-rútan austur á 79 mílna hraða á klukkustund. Hve margar klukkustundir líða þar til 532 mílur eru á milli þeirra?

**296.** Tveir bátar leggja samtímis af stað frá sömu bryggju í Cairo. Annar siglir norður eftir Mississippi-fljóti en hinn suður. Báturinn á norðurleið fer fjórar mílur á klukkustund en báturinn á suðurleið átta. Hve langur tími líður þar til 54 mílur eru á milli þeirra?

**297.** Lorena gengur stíginn umhverfis garðinn á 30 mínútum. Ef hún skokkar tekur það hana 20 mínútur. Skokkhraði hennar er 1,5 mílum meiri á klukkustund en gönguhraðinn. Finnið göngu- og skokkhraða Lorenu.

**298.** Julian hjólar upp brekku í 45 mínútur, snýr síðan við og hjólar niður. Hann er 15 mínútur að komast aftur á upphafsstað. Hraði hans upp brekkuna er 3,2 mílum minni á klukkustund en hraðinn niður. Finnið hraða Julians upp og niður brekkuna.

**299.** Cassius siglir bátnum á móti straumi í 45 mínútur. Hann er 30 mínútur að snúa aftur með straumi. Hraði hans á móti straumi er þremur mílum minni á klukkustund en hraðinn með straumi. Finnið hraða hans á móti straumi og með straumi.

**300.** Darline er 20 mínútur að aka í vinnuna í lítilli umferð. Heimleiðin tekur hana 36 mínútur þegar umferðin er þung. Hraði hennar í lítilli umferð er 24 mílum meiri á klukkustund en í þungri umferð. Finnið hraða hennar við báðar aðstæður.

**301.** Klukkan 1:30 lagði Marlon af stað að heiman til strandarinnar, sem er 7,6 mílur í burtu. Hann fór á hjólabretti til klukkan 2:15 og gekk síðan það sem eftir var. Hann kom á ströndina klukkan 3:00. Hraði Marlons á hjólabrettinu er 2,5 sinnum gönguhraði hans. Finnið hraða hans á hjólabrettinu og gangandi.

**302.** Aaron lagði af stað klukkan 9:15 og ók að fjallakofanum sínum, sem er 108 mílur í burtu. Hann ók eftir hraðbrautinni til klukkan 10:45 og síðan eftir fjallveginum. Hann kom á áfangastað klukkan 11:05. Hraði hans á hraðbrautinni var þrefaldur hraðinn á fjallveginum. Finnið hraða Aarons á hraðbrautinni og fjallveginum.

**303.** Marisol lagði af stað frá Los Angeles klukkan 2:30 og ók til Santa Barbara, sem er 95 mílur í burtu. Umferðin var þung til klukkan 3:20. Hún ók það sem eftir var í mjög lítilli umferð og kom á áfangastað klukkan 4:20. Hraði hennar í þungri umferð var 40 mílum minni á klukkustund en í lítilli umferð. Finnið hraða hennar við báðar aðstæður.

**304.** Lizette æfir fyrir maraþon. Klukkan 7:00 lagði hún af stað að heiman og hljóp til klukkan 8:15. Síðan gekk hún til klukkan 11:15. Hún fór samtals 19 mílur. Hlaupahraði hennar var fimm mílum meiri á klukkustund en gönguhraðinn. Finnið hlaupa- og gönguhraða hennar.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**305.** John lagði af stað að heiman í Irvine klukkan 8:35 fyrir hádegi til að aka á fund í Los Angeles, 45 mílur í burtu. Hann kom á fundinn klukkan 9:50. Klukkan 3:30 síðdegis lagði hann af stað heim af fundinum. Hann kom heim klukkan 5:18.

1. ⓐ Hver var meðalhraði hans á leiðinni frá Irvine til Los Angeles?
2. ⓑ Hver var meðalhraði hans á leiðinni frá Los Angeles til Irvine?
3. ⓒ Hve lengi var hann samtals að aka til og frá fundinum?
4. ⓓ John ók samtals 90 mílur fram og til baka. Finnið meðalhraða hans. (Námundið að næsta tíunda hluta.)



**306.** Sarah vill koma í brúðkaup vinkonu sinnar klukkan 3:00. Vegalengdin frá heimili Söruh að brúðkaupinu er 95 mílur. Miðað við venjulegt umferðarmynstur áætlar Sarah að hún geti ekið fyrstu 15 mílurnar á 60 mílna hraða á klukkustund, næstu 10 mílurnar á 30 mílna hraða á klukkustund og það sem eftir er á 70 mílna hraða á klukkustund.

1. ⓐ Hve lengi er Sarah að aka fyrstu 15 mílurnar?
2. ⓑ Hve lengi er Sarah að aka næstu 10 mílurnar?
3. ⓒ Hve lengi er Sarah að aka það sem eftir er leiðarinnar?
4. ⓓ Hvenær þarf Sarah að leggja af stað að heiman?

### *Ritunaræfingar*

**307.** Þegar þið leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða, hvernig hjálpar það ykkur að teikna mynd af aðstæðunum?

**308.** Þegar þið leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða, hvernig hjálpar það ykkur að búa til töflu?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um hve vel þið hafið náð tökum á efni kaflans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

## 3.6 Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum

**UNDIRBÚNINGUR 3.19**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Skrifið sem ójöfnu: x er að minnsta kosti 30. Ef þið náðuð ekki að leysa dæmið skuluð þið rifja upp
dæmi 2.77.

**UNDIRBÚNINGUR 3.20**

Leysið $8-3y<41$.
Ef þið náðuð ekki að leysa dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 2.73.



## Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum

Við margar raunverulegar aðstæður þurfum við að leysa ójöfnur. Dæmi með ójöfnum eru raunar svo algeng að við gerum okkur oft ekki grein fyrir því að við séum að nota algebru. Hve mörg gallon af bensíni er til dæmis hægt að setja á bílinn fyrir $20? Ráðum við við leiguna á íbúðinni? Er nægur tími fram að kennslustund til að sækja hádegismat, borða hann og koma aftur? Hve mikið má jólagjöf hvers fjölskyldumeðlims kosta án þess að fara fram úr fjárhagsáætlun?

Aðferðin sem við notum til að leysa hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum er mjög lík aðferðinni sem við notuðum við verkefni með jöfnum. Við lesum verkefnið og göngum úr skugga um að öll orð skiljist. Næst finnum við að hverju er leitað og veljum breytu sem táknar það. Við endursegjum verkefnið í einni setningu svo auðvelt sé að setja hana fram sem ójöfnu. Síðan leysum við ójöfnuna.

**DÆMI 3.53**

Emma fékk nýja vinnu og þarf að flytja. Mánaðartekjur hennar verða $5.625. Til að fá að leigja íbúð þurfa mánaðartekjur Emmu að vera að minnsta kosti þrefaldar á við leiguna. Hver er hæsta leigan sem Emma uppfyllir skilyrði fyrir?

### Lausn

Tafla 3.18

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | hæsta leigan sem Emma uppfyllir skilyrði fyrir |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $r=$ leiguna. |
| **Skref 4.** Þýðið yfir á ójöfnu. Skrifið fyrst setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Mánaðartekjur Emmu þurfa að vera að minnsta kosti þrefaldar á við leiguna. |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið ójöfnuna. Munið að $a > x$ merkir það sama og $x < a$. | $5.625 \geq 3r$<br>$1.875 \geq r$<br>$r \leq 1.875$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Hámarksleiga upp á $1.875 virðist eðlileg miðað við $5.625 í tekjur. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Hámarksleigan er $1.875. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.105**

Alan hleður kössum á vörubretti og vegur hver kassi 45 pund. Óhætt er að setja í mesta lagi 900 pund á vörubrettið. Hve marga kassa getur hann hlaðið á vörubrettið án þess að fara yfir hámarksþyngdina?

**REYNIÐ SJÁLF 3.106**

Á skilti í lyftunni í fjölbýlishúsinu þar sem Yehire býr stendur að hún beri í mesta lagi 2.100 pund. Ef meðalþyngd manns er 150 pund, hve margir geta farið saman í lyftunni án hættu?

Stundum þarf lausn dæmis að vera heil tala þótt algebrulausn ójöfnunnar sé ekki heil tala. Þá verðum við að námunda algebrulausnina að heilli tölu. Samhengi dæmisins ræður því hvort námundað er upp eða niður. Til að sannreyna slík dæmi námundum við svarið að tölu sem auðvelt er að reikna með og göngum úr skugga um að hún geri ójöfnuna sanna.

**DÆMI 3.54**

Dawn fékk $4.000 styrk til að kaupa spjaldtölvur fyrir kennslustofuna sína. Spjaldtölvurnar sem hún vill kaupa kosta $254,12 hver með skatti og sendingu. Hve margar spjaldtölvur getur Dawn keypt í mesta lagi?

## Lausn

Tafla 3.19

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | mesti fjöldi spjaldtölva sem Dawn getur keypt |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $n =$ fjölda spjaldtölva. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Þýðið. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. Þýðið yfir á ójöfnu. | $254,12 sinnum fjöldi spjaldtölva er í mesta lagi $4.000.<br>$254,12n \leq 4.000$ |
| **Skref 5.** Leysið ójöfnuna. Þar sem<br>$n$ þarf að vera heill fjöldi spjaldtölva er námundað að 15. | $n \leq 15,74$<br>$n \leq 15$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Ef verðið er námundað niður í $250 kosta 15 spjaldtölvur $3.750, en 16 spjaldtölvur kosta $4.000. Því virðist eðlilegt að hægt sé að kaupa í mesta lagi 15 spjaldtölvur á $254,12 hverja. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Dawn getur keypt í mesta lagi 15 spjaldtölvur. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.107**

Angie hefur $20 til að kaupa fernur af ávaxtasafa fyrir leikskólaferð sonar síns. Hver pakkning kostar $2,63. Hve margar pakkningar getur hún keypt í mesta lagi?

**REYNIÐ SJÁLF 3.108**

Daniel vill koma kærustu sinni á óvart með afmælisveislu á uppáhaldsveitingastað hennar. Kvöldverðurinn kostar $42,75 á mann með þjórfé og skatti. Fjárhagsáætlun hans fyrir veisluna er $500. Hve margir geta í mesta lagi verið í veislunni?

**DÆMI 3.55**

Pete vinnur í tölvuverslun. Vikulaun hans verða annaðhvort föst upphæð, $925, eða $500 að viðbættum 12% af heildarsölu hans. Hve mikil þarf heildarsalan að vera til þess að breytilegu launin verði hærri en fasta upphæðin $925?

## Lausn

Tafla 3.20

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | heildarsöluna sem þarf til þess að breytilegu launin verði hærri en fasta upphæðin $925 |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $s =$ heildarsöluna. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Þýðið. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. Þýðið yfir á ójöfnu. Munið að breyta prósentunni í tugabrot. | $500+0{,}12\,s>925$ |
| **Skref 5.** Leysið ójöfnuna. | $0{,}12\,s > 425$<br>$s > 3.541{,}\overline{66}$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Ef heildarsalan er námunduð upp í $4.000 sést að<br>$500+0{,}12(4.000)=980$, sem er meira en $925. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Heildarsalan þarf að vera meiri en $3.541,67. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.109**

Tiffany lauk nýlega háskólanámi og fær $20.000 í árslaun að viðbættum 2% af allri sölu. Hún vill fá að minnsta kosti $100.000 á ári. Hve mikil þarf heildarsalan að vera svo hún nái markmiði sínu?

**REYNIÐ SJÁLF 3.110**

Christian hefur fengið atvinnutilboð með $24.000 í árslaun að viðbættum 3% af sölu. Við hve mikla heildarsölu verða launin í nýja starfinu hærri en $60.000 árslaunin í núverandi starfi hans?

**DÆMI 3.56**

Sergio og Lizeth hafa mjög þrönga fjárhagsáætlun fyrir fríið. Þau ætla að leigja bíl hjá fyrirtæki sem tekur $75 á viku og $0,25 á hverja mílu. Hve margar mílur geta þau ekið án þess að fara fram úr $200 fjárhagsáætluninni?

## Lausn

Tafla 3.21

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | fjölda mílna sem Sergio og Lizeth geta ekið |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $m=$ fjölda mílna. |
| **Skref 4.** Þýðið. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. Þýðið yfir á ójöfnu. | \$75 að viðbættu 0,25 sinnum fjölda mílna er minna en eða jafnt og \$200.<br>$75+0{,}25\,m\le 200$ |
| **Skref 5.** Leysið ójöfnuna. | $0{,}25\,m \le 125$<br>$m \le 500$ mílur |
| **Skref 6.** Athugið svarið í dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Já, $75+0{,}25(500)=200$. | |
| **Skref 7.** Skrifið setningu sem svarar spurningunni. | Sergio og Lizeth geta ekið 500 mílur án þess að fara fram úr fjárhagsáætlun. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.111**

Símaáskrift Taleishu kostar \$28,80 á mánuði og að auki \$0,20 fyrir hver textaskilaboð. Hve mörg textaskilaboð getur hún sent ef símareikningurinn á að vera í mesta lagi \$50 á mánuði?

**REYNIÐ SJÁLF 3.112**

Hitareikningur Rameens er \$5,42 á mánuði og að auki \$1,08 fyrir hverja varmaeiningu. Hve margar varmaeiningar getur Rameen notað ef hitareikningurinn á að vera í mesta lagi \$87,50?

Algengt markmið fyrirtækja er að skila hagnaði. Hagnaður er það fé sem verður eftir þegar útgjöld hafa verið dregin frá tekjum. Í næsta dæmi finnum við hve mörg verk smáfyrirtækiseigandi þarf að vinna í hverjum mánuði til að ná tilteknum hagnaði.

**DÆMI 3.57**

Elliot rekur fyrirtæki sem sinnir viðhaldi lóða. Mánaðarleg útgjöld hans eru \$1.100. Ef hann tekur \$60 fyrir hvert verk, hve mörg verk þarf hann að vinna til að fá að minnsta kosti \$4.000 í hagnað á mánuði?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | hve mörg verk Elliot þarf að vinna |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar það. | Látum $j =$ fjölda verka. |
| **Skref 4.** Þýðið. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | $60 sinnum fjöldi verka að frádregnum $1.100 er að minnsta kosti $4.000. |
| Þýðið yfir á ójöfnu. | $60j - 1.100 \geq 4.000$ |
| | $60j \geq 5.100$ |
| **Skref 5.** Leysið ójöfnuna. | $j \geq 85$ störf |
| **Skref 6.** Athugið svarið í dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Ef Elliot ynni 90 verk væri hagnaður hans $60(90) - 1.100$, eða $\$4.300$. Það er meira en $\$4.000$. | |
| **Skref 7.** Skrifið setningu sem svarar spurningunni. | Elliot þarf að vinna að minnsta kosti 85 verk. |

3

**REYNIÐ SJÁLF 3.113**

Caleb rekur gæludýrapössun og tekur $32 á klukkustund. Mánaðarleg útgjöld hans eru $2.272. Hve margar klukkustundir þarf hann að vinna til að fá að minnsta kosti $800 í hagnað á mánuði?

**REYNIÐ SJÁLF 3.114**

Felicity rekur skrautskriftarþjónustu og tekur $2,50 fyrir hvert brúðkaupsboðskort. Mánaðarleg útgjöld hennar eru $650. Hve mörg boðskort þarf hún að skrifa til að fá að minnsta kosti $2.800 í hagnað á mánuði?

Stundum verður lífið flókið! Í mörgum aðstæðum mynda nokkrar stærðir saman heildarútgjöldin. Þegar við leysum slík dæmi verðum við að gæta þess að taka tillit til allra útgjaldaliðanna.

**DÆMI 3.58**

Brúðkaup bestu vinkonu Brendu verður haldið fjarri heimabyggð og Brenda þarf því að gista 3 nætur á hóteli. Brenda á $500 í sparifé og getur unnið sér inn $15 á klukkustund með barnapössun. Hún gerir ráð fyrir að greiða $350 fyrir flug, $375 fyrir mat og afþreyingu og $60 á nótt fyrir sinn hluta af hótelherbergi. Hve margar klukkustundir þarf hún að passa börn til að eiga nóg fyrir ferðinni?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | fjölda klukkustunda sem Brenda þarf að passa börn |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $h=$ fjölda klukkustunda. |
| **Skref 4.** Þýðið. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. Þýðið yfir á ójöfnu. | Útgjöldin mega ekki vera meiri en tekjurnar. Kostnaður við flug, mat og afþreyingu ásamt hótelreikningnum má ekki vera meiri en sparifé ásamt tekjunum af barnapössun.<br>$\$350+\$375+\$60(3)\leq\$500+\$15h$ |
| **Skref 5.** Leysið ójöfnuna. | $\begin{aligned} 905 &\leq 500+15h \\ 405 &\leq 15h \\ 27 &\leq h \\ h &\geq 27 \end{aligned}$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í dæminu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. Við setjum 27 inn í ójöfnuna.<br>$905 \leq 500+15h$<br>$905 \leq 500+15\,(27)$<br>$905 \leq 905$ | |
| **Skref 7.** Skrifið setningu sem svarar spurningunni. | Brenda þarf að passa börn í að minnsta kosti 27 klukkustundir. |

**REYNIÐ SJÁLF 3.115**

Malik er að skipuleggja 6 daga sumarleyfisferð. Hann á $840 í sparifé og fær $45 á klukkustund fyrir einkakennslu. Ferðin kostar hann $525 í flug, $780 í mat og skoðunarferðir og $95 á nótt fyrir hótel. Hve margar klukkustundir þarf hann að kenna til að eiga nóg fyrir ferðinni?

**REYNIÐ SJÁLF 3.116**

Josue vill fara í 10 daga bílferð næsta vor. Bensín kostar hann $180, matur $450 og mótel $49 á nótt. Hann á $520 í sparifé og getur unnið sér inn $30 fyrir hverja innkeyrslu sem hann mokar snjó af. Hve margar innkeyrslur þarf hann að moka til að eiga nóg fyrir ferðinni?

## Æfingar úr kafla 3.6

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum**

Leysið verkefnin hér á eftir.

**309.** Mona er að skipuleggja afmælisveislu sonar síns og hefur $285 til ráðstöfunar. Fun Zone tekur $19 fyrir hvert barn. Hve mörg börn geta komið í veisluna án þess að kostnaðurinn fari fram úr fjárhagsáætluninni?

**310.** Carlos skoðar íbúðir með þremur vinum sínum. Þau vilja að mánaðarleigan verði ekki hærri en $2.360. Ef leigjendurnir fjórir skipta leigunni jafnt sín á milli, hve háa leigu greiðir hvert þeirra í mesta lagi?

**311.** Farþegabátur ber í mesta lagi 1.800 pund. Ef meðalþyngd manns er 150 pund, hve margir geta farið saman í bátnum án hættu?

**312.** Marcela er að skrá sig í háskólanámskeið sem kosta $105 á einingu. Í hve margar einingar getur hún skráð sig ef kostnaðurinn má vera í mesta lagi $1.365?

**313.** Arleen fékk $20 gjafakort á kaffihús. Uppáhaldsísdrykkurinn hennar kostar $3,79. Hve marga drykki getur hún keypt í mesta lagi fyrir gjafakortið?

**314.** Teegan finnst gaman að spila golf. Hann hefur áætlað $60 fyrir æfingasvæðið í næsta mánuði. Í hvert sinn sem hann fer þangað kostar fata af golfkúlum $10,55. Hve oft getur hann farið á æfingasvæðið í mesta lagi í næsta mánuði?

**315.** Joni selur eldhússvuntur á netinu á $32,50 stykkið. Hve margar svuntur þarf hún að selja í næsta mánuði ef hún vill fá að minnsta kosti $1.000 í tekjur?

**316.** Ryan tekur $17,50 fyrir að þvo bíl nágranna. Hve marga bíla þarf hann að þvo næsta sumar ef markmið hans er að fá að minnsta kosti $1.500 í tekjur?

**317.** Keshad fær $2.400 á mánuði auk 6% af sölu sinni. Bróðir hans fær $3.300 á mánuði. Hve mikil þarf heildarsala Keshads að vera til þess að mánaðarlaun hans verði hærri en mánaðarlaun bróður hans?

**318.** Kimuyen þarf að fá $4.150 á mánuði til að greiða öll útgjöld sín. Í starfi sínu fær hún $3.475 á mánuði auk 4% af heildarsölunni. Hve mikil þarf heildarsala Kimuyen að vera að lágmarki svo hún geti greitt öll útgjöld sín?

**319.** Andre hefur fengið atvinnutilboð í byrjendastarf. Fyrirtækið bauð honum $48.000 á ári auk 3,5% af heildarsölu hans. Andre veit að meðallaun í starfinu eru $62.000. Hve mikil þarf heildarsala Andres að vera til þess að laun hans verði að minnsta kosti jafnhá og meðallaunin í starfinu?

**320.** Nataly íhugar tvö atvinnutilboð. Í fyrra starfinu fengi hún $83.000 á ári. Í síðara starfinu fengi hún $66.500 auk 15% af heildarsölunni. Hve mikil þyrfti heildarsala hennar að vera til þess að launin samkvæmt síðara tilboðinu yrðu hærri en samkvæmt því fyrra?

**321.** Vatnsreikningur Jakes er $24,80 á mánuði auk $2,20 fyrir hverja ccf-einingu (hundrað rúmfet) af vatni. Hve margar ccf-einingar getur Jake notað í mesta lagi ef reikningurinn má ekki vera hærri en $60?

**322.** Símaáskrift Kiyoshis kostar $17,50 á mánuði auk $0,15 fyrir hver textaskilaboð. Hve mörg textaskilaboð getur Kiyoshi sent í mesta lagi svo símareikningurinn verði ekki hærri en $56,50?

**323.** Sjónvarpsáskrift Marlons kostar $49,99 á mánuði auk $5,49 fyrir hverja nýja kvikmynd. Hve margar nýjar kvikmyndir getur hann horft á ef mánaðarreikningurinn má vera í mesta lagi $100?

**324.** Kellen vill leigja veislusal á veitingastað fyrir veislu í tilefni væntanlegs barns frænku sinnar. Veitingastaðurinn tekur $350 fyrir salinn auk $32,50 á mann fyrir hádegisverð. Hve margir geta komið í veisluna ef Kellen vill að kostnaðurinn verði í mesta lagi $1.500?

**325.** Moshde rekur hárgreiðsluþjónustu heima hjá sér. Hún tekur $45 fyrir klippingu og hárgreiðslu. Mánaðarleg útgjöld hennar eru $960. Hún vill leggja að minnsta kosti $1.200 á mánuði inn á sparnaðarreikning til að geta opnað eigin hárgreiðslustofu. Hve margar klippingar og hárgreiðslur þarf hún að vinna til að spara að minnsta kosti $1.200 á mánuði?

**326.** Noe setur upp og stillir hugbúnað í heimilistölvum. Hann tekur $125 fyrir hvert verk. Mánaðarleg útgjöld hans eru $1.600. Hve mörg verk þarf hann að vinna til að fá að minnsta kosti $2.400 í hagnað?

**327.** Katherine er einkakokkur. Hún tekur $115 fyrir máltíð handa fjórum. Mánaðarleg útgjöld hennar eru $3.150. Hve margar máltíðir fyrir fjóra þarf hún að selja til að fá að minnsta kosti $1.900 í hagnað?

**328.** Melissa býr til hálsmen og selur þau á netinu. Hún tekur $88 fyrir hvert hálsmen. Mánaðarleg útgjöld hennar eru $3.745. Hve mörg hálsmen þarf hún að selja ef hún vill fá að minnsta kosti $1.650 í hagnað?

**329.** Fimm fulltrúar nemendafélags vilja fara á fylkisþing. Skráningin kostar þá $110, samgöngur og matur $375 og hótelið $42 á mann. Á sparnaðarreikningi nemendafélagsins eru $450 eyrnamerkt ferðinni. Þeir geta aflað þess sem upp á vantar með bílaþvotti. Ef þeir taka $5 fyrir hvern bíl, hve marga bíla þurfa þeir að þvo til að eiga nóg fyrir ferðinni?

**330.** Cesar er að skipuleggja 4 daga ferð til að heimsækja vin sinn í háskóla í öðru fylki. Flugið kostar hann $198, ferðir á staðnum $56 og matur $45 á dag. Hann á $189 í sparifé og getur unnið sér inn $35 fyrir hverja grasflöt sem hann slær. Hve margar grasflatir þarf hann að slá til að eiga nóg fyrir ferðinni?

**331.** Alonzo vinnur við bílahreinsun og tekur $175 fyrir hvern bíl. Hann hyggst flytja úr foreldrahúsum og leigja sína fyrstu íbúð. Hann þarf að greiða $120 í umsóknargjald, $950 í tryggingu og leigu fyrir fyrsta og síðasta mánuðinn, $1.140 á mánuði. Hann á $1.810 í sparifé. Hve marga bíla þarf hann að þrífa vandlega til að eiga nóg fyrir íbúðarleigunni?

**332.** Eun-Kyung kennir einkatíma og fær $60 á klukkustund. Hún á $792 í sparifé og er að skipuleggja brúðkaupsafmælisveislu fyrir foreldra sína. Hún vill bjóða 40 gestum. Matur og drykkir kosta $1.520 og ljósmyndari $150. Hún ætlar einnig að gefa hverjum gesti smágjöf sem kostar $7,50. Hve margar klukkustundir þarf hún að kenna til að eiga nóg fyrir veislunni?



### *Stærðfræði daglegs lífs*

**333.** **Hámarksálag á svið** Árið 2014 hrundi svið í framhaldsskóla í Fullerton í Kaliforníu þegar 250 nemendur fóru upp á sviðið í lokaatriði söngleiks. Tuttugu og fjórir nemendur slösuðust. Sviðið þoldi að hámarki 12.750 pund. Ef gert er ráð fyrir að meðalþyngd nemanda sé 140 pund, hver var mesti fjöldi nemenda sem gat verið á sviðinu án hættu?

**334.** **Hámarksþyngd í bát** Árið 2004 sökk farþegabátur í höfninni í Baltimore og fimm manns drukknuðu. Báturinn bar að hámarki 3.500 pund (25 manns sem vógu að meðaltali 140 pund). Þeir 25 sem voru í bátnum þegar hann sökk vógu að meðaltali 168 pund hver. Hve margir af þessari þyngd hefðu að hámarki átt að vera í bátnum?

**335.** **Fjárhagsáætlun brúðkaups** Adele og Walter fundu fullkominn stað fyrir brúðkaupsveisluna. Leiga hans kostar $9.850 fyrir allt að 100 gesti og að auki $38 fyrir hvern viðbótargest. Hve margir gestir geta komið ef Adele og Walter vilja að heildarkostnaðurinn verði ekki meiri en $12.500?

**336.** **Fjárhagsáætlun veislu** Penny er að skipuleggja veislu í tilefni væntanlegs barns tengdadóttur sinnar. Veitingastaðurinn tekur $950 fyrir allt að 25 gesti og að auki $31,95 fyrir hvern viðbótargest. Hve margir gestir geta komið ef Penny vill að heildarkostnaðurinn verði ekki meiri en $1.500?

### *Ritunarverkefni*

**337.** Finnið símareikning síðasta mánaðar og tímakaupið sem þið fáið í vinnunni. (Ef þið eruð ekki í vinnu skuluð þið nota raunhæft tímakaup sem þið gætuð fengið.) Reiknið hve margar klukkustundir þið þyrftuð að vinna til að eiga að minnsta kosti fyrir símareikningnum. Setjið fram viðeigandi ójöfnu og leysið hana.

**338.** Finnið hve margar námseiningar þið eigið eftir að þessari önn lokinni til að ná markmiði ykkar í háskólanámi og áætlið hve margar einingar þið getið tekið á hverri önn. Reiknið hve margar annir þið þurfið til að ná markmiðinu. Setjið fram viðeigandi ójöfnu og leysið hana.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið við æfingarnar skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn ykkur um það hve vel þið hafið náð tökum á efni kaflans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?



# Lykilhugtök

**afsláttarfjárhæð**

Afsláttarfjárhæð er sú upphæð sem fæst þegar afsláttarhlutfall er margfaldað með upphaflegu verði vöru.

**afsláttarhlutfall**

Afsláttarhlutfall er prósentan sem notuð er til að reikna afsláttarfjárhæð. Það er algengt í smásölu.

**vextir**

Vextir eru það fé sem banki greiðir viðskiptavinum sínum fyrir að geyma fé þeirra í bankanum.

**listaverð**

Listaverð er það verð sem smásali selur vöru á.

**álagning**

Álagning er hlutfall af kostnaðarverði sem notað er til að hækka verð vöru.

**blöndunarverkefni**

Í blöndunarverkefnum er tveimur eða fleiri vörum eða stærðum með mismunandi gildi blandað saman.

**kostnaðarverð**

Í smásölu er kostnaðarverð það verð sem smásali greiðir fyrir vöru.

**höfuðstóll**

Höfuðstóll er upphaflega fjárhæðin sem er fjárfest eða fengin að láni um tiltekinn tíma á tiltekinni vaxtaprósentu.

**vaxtaprósenta**

Vaxtaprósenta er prósenta af höfuðstólnum og er yfirleitt gefin upp sem árleg prósenta.

**einfaldir vextir**

Einfaldir vextir eru vextir sem reiknast samkvæmt formúlunni $I = P\,r\,t$.

# Meginatriði

## 3.1 Beitið aðferð við lausn verkefna

- **Verkefnalausnaraðferð**
  1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
  4. Skref 4. Þýðið yfir á jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja dæmið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Þýðið síðan setninguna yfir á algebrujöfnu.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.
- **Samliggjandi heiltölur**
  Samliggjandi heiltölur eru heiltölur sem koma hver á eftir annarri.

| | |
|---|---|
| $n$ | 1. heiltala |
| $n+1$ | 2. heiltala; samliggjandi heiltala |
| $n+2$ | 3. samliggjandi heiltala . . . o.s.frv. |

Samliggjandi sléttar heiltölur eru sléttar heiltölur sem koma hver á eftir annarri.

| | |
|---|---|
| $n$ | 1. heiltala |
| $n+2$ | 2. heiltala; samliggjandi heiltala |
| $n+4$ | 3. samliggjandi heiltala . . . o.s.frv. |

Samliggjandi oddatölur eru oddatölur sem koma hver á eftir annarri.

| | |
|---|---|
| $n$ | 1. heiltala |
| $n+2$ | 2. heiltala; samliggjandi heiltala |
| $n+4$ | 3. samliggjandi heiltala . . . o.s.frv. |

## 3.2 Leysið prósentuverkefni

- **Prósentuhækkun** Til að finna prósentuhækkun:
  1. Skref 1. Finnið hækkunina.

$$\text{hækkun} = \text{nýtt gildi} - \text{upphaflegt gildi}$$

2. Skref 2. Finnið prósentuhækkunina. Hve mörg prósent af upphaflega gildinu er hækkunin?

- **Prósentulækkun** Til að finna prósentulækkun:
  1. Skref 1. Finnið lækkunina.

$$\text{lækkun} = \text{upphaflegt gildi} - \text{nýtt gildi}$$

  2. Skref 2. Finnið prósentulækkunina. Hve mörg prósent af upphaflega gildinu er lækkunin?
- **Einfaldir vextir** Ef fjárhæð, P, sem nefnist höfuðstóll, er fjárfest í t ár á árlegum vöxtum r, þá eru áunnir vextir, I, jafnir

$$I = Prt$$

þar sem $I$ = vextir
$P$ = höfuðstóll
$r$ = vaxtaprósenta
$t$ = tími

- **Afsláttur**
  - afsláttarfjárhæð er afsláttarhlutfall · upphaflegt verð
  - útsöluverð er upphaflegt verð – afsláttur
- **Álagning**
  - álagningarfjárhæð er álagningarhlutfall · kostnaðarverð
  - listaverð er kostnaðarverð + álagning

## 3.3 Leysið blöndunarverkefni

- **Heildarverðmæti mynta** Heildarverðmæti tiltekins fjölda mynta af sömu gerð má finna með líkaninu.
  *fjöldi · verðgildi = heildarverðmæti* þar sem fjöldi er fjöldi myntanna og verðgildi er verðgildi hverrar myntar; heildarverðmæti er samanlagt verðmæti allra myntanna
- **Verkefnalausnaraðferð fyrir myntaverkefni**
  1. Skref 1.
     **verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir skiljist. Finnið hvaða myntgerðir koma við sögu.**

     - Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.
     - Merkið dálkana gerð, fjöldi, verðgildi og heildarverðmæti.
     - Skráið myntgerðirnar.
     - Skráið verðgildi hverrar myntgerðar.
     - Skráið heildarverðmæti allra myntanna.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. Notið stæður með breytum til að tákna fjölda mynta af hverri gerð og skráið þær í töfluna.

Margfaldið fjöldann með verðgildinu til að fá heildarverðmæti hverrar myntgerðar.

4. Skref 4. Þýðið yfir á jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja dæmið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Þýðið síðan setninguna yfir á jöfnu. Skrifið jöfnuna með því að leggja saman heildarverðmæti allra myntgerðanna.

5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.



## 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og regla Pýþagórasar

- **Verkefnalausnaraðferð fyrir rúmfræðiverkefni**
  1. Skref 1. Lesið dæmið og gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. Teiknið mynd og merkið inn á hana upplýsingarnar sem gefnar eru.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að með því að velja breytu sem táknar stærðina.
  4. Skref 4. Þýðið yfir í jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.
- **Eiginleikar þríhyrningsins** $\triangle ABC$

  Hornastærðir:

  – $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

  Ummál:

  – $P = a + b + c$

  Flatarmál:

  – $A = \frac{1}{2} b\,h$, b = grunnlína, h = hæð

  Rétthyrndur þríhyrningur hefur eitt $90°$ horn.
- **Setning Pýþagórasar** Í hverjum rétthyrndum þríhyrningi gildir $a^2 + b^2 = c^2$ þar sem c er lengd langhliðarinnar og a og b eru lengdir skammhliðanna.
- **Eiginleikar rétthyrninga**
  – Rétthyrningar hafa fjórar hliðar og fjögur rétt (90°) horn.

- Gagnstæðar hliðar eru jafnlangar.
- Ummál rétthyrnings er summan af tvöfaldri lengdinni og tvöfaldri breiddinni: $P = 2L + 2W$. Flatarmál rétthyrnings er lengdin margfölduð með breiddinni: $A = LW$.

## 3.5 Leysið verkefni um jafna hreyfingu

- **Vegalengd, hraði og tími**
  - *$D = rt$ þar sem $D$ = vegalengd, $r$ = hraði, $t$ = tími*
- **Verkefnalausnaraðferð fyrir verkefni um vegalengd, hraða og tíma**
  1. Skref 1. Lesið dæmið. Gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. Teiknið skýringarmynd af aðstæðunum. Búið til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar: Merkið dálkana hraði, tími og vegalengd. Skráið aðstæðurnar tvær. Skráið upplýsingarnar sem þið þekkið.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. Fyllið út töfluna. Notið stæður með breytum til að tákna stærðina í hverri röð. Margfaldið hraðann með tímanum til að fá vegalengdina.
  4. Skref 4. Setjið upp jöfnu. Endursegið dæmið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Þýðið síðan setninguna yfir á jöfnu.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

## 3.6 Leysið dæmi með línulegum ójöfnum

- **Verkefnalausnaraðferð fyrir línulegar ójöfnur**
  1. Skref 1. Lesið dæmið.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
  4. Skref 4. Þýðið. Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. Þýðið yfir á ójöfnu.
  5. Skref 5. Leysið ójöfnuna.

6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

# Upprifjunarverkefni

## 3.1 Beiting aðferðar við lausn orðadæma

**Takist á við orðaverkefni með jákvæðu hugarfari**

Íhugið í verkefnunum hér á eftir hvernig þið takist á við orðaverkefni.



**339.** Hvernig hefur viðhorf ykkar til þess að leysa orðaverkefni breyst eftir að þið fóruð yfir þennan kafla? Útskýrið.

**340.** Hjálpaði verkefnalausnaraðferðin ykkur að leysa orðaverkefnin í þessum kafla? Útskýrið.

**Beitið verkefnalausnaraðferð við orðaverkefni**

Leysið eftirfarandi verkefni með verkefnalausnaraðferðinni. Munið að svara hverri spurningu með heilli setningu.

**341.** Þrír fjórðu hlutar fólksins á tónleikum eru börn. Ef börnin eru 87, hve margir eru þá samtals á tónleikunum?

**342.** Í hljómsveitinni eru níu saxófónleikarar. Fjöldi saxófónleikara er einum færri en tvöfaldur fjöldi túbuleikara. Finnið fjölda túbuleikara.

**Leysið talnaverkefni**

Leysið hvert talnaverkefni hér á eftir.

**343.** Summa tölu og þriggja er fjörutíu og einn. Finnið töluna.

**344.** Tvöfaldur mismunur tölu og tíu er fimmtíu og fjórir. Finnið töluna.

**345.** Önnur talan er níu lægri en hin. Summa þeirra er mínus tuttugu og sjö. Finnið tölurnar.

**346.** Önnur talan er ellefu hærri en hin. Ef sautján er bætt við summu þeirra fæst 90. Finnið tölurnar.

**347.** Önnur talan er tveimur hærri en fjórföld hin talan. Summa þeirra er $-13$. Finnið tölurnar.

**348.** Summa tveggja samliggjandi heiltalna er $-135$. Finnið tölurnar.

**349.** Finnið þrjár samliggjandi heiltölur sem hafa summuna $-141$.

**350.** Finnið þrjár samliggjandi sléttar heiltölur með summuna 234.

**351.** Finnið þrjár samliggjandi oddatölur með summuna 51.

**352.** Koji á $5.502 á sparnaðarreikningi. Það er $30 minna en sexföld upphæðin á tékkareikningi hans. Hve mikið fé á Koji á tékkareikningnum?

3.2 Leysið prósentuverkefni

**Setjið fram og leysið einfaldar prósentujöfnur**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnur og leysið þær.

**353.** Hvaða tala er 67% af 250?

**354.** 300% af 82 er hvaða tala?

**355.** 12,5% af hvaða tölu er 20?

**356.** 72 er 30% af hvaða tölu?

**357.** Hve mörg prósent af 125 eru 150?

**358.** 127,5 eru hve mörg prósent af 850?



**Lausn prósentuverkefna**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**359.** Reikningurinn fyrir hádegisverð Dinos var $19,45. Hann vildi skilja eftir 20% af heildarreikningnum í þjórfé. Hve hátt á þjórféð að vera?

**360.** Reza veiktist alvarlega og léttist um 15% af upphaflegri líkamsþyngd sinni. Hann léttist um 27 pund. Hver var upphafleg líkamsþyngd hans?

**361.** Dolores keypti barnarúm á útsölu fyrir $350. Útsöluverðið var 40% af upphaflega verðinu. Hvert var upphaflegt verð barnarúmsins?

**362.** Jaden fær $2.680 í mánaðarlaun. Hann greiðir $938 á mánuði í leigu. Hve hátt hlutfall mánaðarlauna hans fer í leigu?

**Finnið prósentuhækkun og prósentulækkun**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**363.** Árslaun Angels hækkuðu úr $55.400 í $56.785. Finnið prósentuhækkunina.

**364.** Mánaðarlegur bensínreikningur Rowenu lækkaði úr $83,75 í síðasta mánuði í $56,95 í þessum mánuði. Finnið prósentulækkunina.

**Leysið verkefni um einfalda vexti**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**365.** Winston lagði $3.294 inn á bankareikning með 2,6% vöxtum. Hve háir vextir fengust á 5 árum?

**366.** Moira fékk $4.500 að láni hjá afa sínum til að greiða fyrir fyrsta árið í háskóla. Þremur árum síðar endurgreiddi hún $4.500 ásamt $243 í vexti. Hver var vaxtaprósentan?

**367.** Á yfirliti yfir ísskápalán Jaimes kom fram að hann myndi greiða $1.026 í vexti af 4 ára láni með 13,5% vöxtum. Hve mikið fé tók Jaime að láni til að kaupa ísskápinn?

**368.** Á 12 árum gaf skuldabréf með 6,35% vöxtum $7.620 í vaxtatekjur. Hver var höfuðstóll skuldabréfsins?

**Leysið verkefni um afslátt eða álagningu**

Finnið útsöluverðið í eftirfarandi verkefnum.

**369.** Upphaflegt verð handtösku var $84. Carole keypti hana á útsölu með $21 afslætti.

**370.** Marian vill kaupa stofuborð sem kostar $495. Í næstu viku verður borðið á útsölu með $149 afslætti.

Finnið í eftirfarandi verkefnum ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ útsöluverðið.

**371.** Emmett keypti skópar á útsölu með 40% afslætti af upphaflegu verði, $138.

**372.** Anastasia keypti kjól á útsölu með 75% afslætti af upphaflegu verði, $280.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ afsláttarhlutfallið. (Námundið að næsta tíunda hluta úr prósenti ef þess þarf.)

3

**373.** Zack keypti prentara fyrir skrifstofuna sína á útsölu fyrir $380. Upphaflegt verð prentarans var $450.

**374.** Lacey keypti stígvélapar á útsölu fyrir $95. Upphaflegt verð stígvélanna var $200.

Finnið í eftirfarandi verkefnum ⓐ álagningarfjárhæðina og ⓑ listaverðið.

**375.** Nga og Lauren keyptu kistu á flóamarkaði fyrir $50. Þær gerðu hana upp og bættu síðan við 350% álagningu.

**376.** Carly keypti vatn í flöskum í lágvöruverðsverslun fyrir $0,24 flöskuna. Hún bætti við 75% álagningu áður en hún seldi flöskurnar á fótboltaleiknum.

3.3 Leysið blöndunarverkefni

**Leysið myntaverkefni**

Leysið hvert myntaverkefni hér á eftir.

**377.** Francie á $4,35 í tíusenta og 25 senta myntum. Tíusenta myntirnar eru fimm fleiri en 25 senta myntirnar. Hve margar myntir á hún af hvorri gerð?

**378.** Scott á $0,39 í eins senta og fimm senta myntum. Eins senta myntirnar eru átta sinnum fleiri en fimm senta myntirnar. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**379.** Paulette á $140 í $5 og $10 seðlum. Fjöldi $10 seðla er einum minni en tvöfaldur fjöldi $5 seðla. Hve marga seðla á hún af hvorri gerð?

**380.** Lenny á $3,69 í eins senta, tíusenta og 25 senta myntum. Eins senta myntirnar eru þremur fleiri en tíusenta myntirnar. Fjöldi 25 senta mynta er tvöfaldur fjöldi tíusenta mynta. Hve margar myntir á hann af hverri gerð?

**Leysið miða- og frímerkjaverkefni**

Leysið hvert miða- eða frímerkjaverkefni hér á eftir.

**381.** Hádegisverður á vegum kirkju skilaði $842 í tekjur. Fullorðinsmiðar kostuðu $10 hver og barnamiðar $6 hver. Börnin voru 12 fleiri en tvöfaldur fjöldi fullorðinna. Hve margir miðar af hvorri gerð voru seldir?

**382.** Miðar á körfuboltaleik kosta $2 fyrir nemendur og $5 fyrir fullorðna. Nemendurnir voru þremur færri en tífaldur fjöldi fullorðinna. Heildartekjur af miðasölunni voru $619. Hve margir miðar af hvorri gerð voru seldir?

**383.** 125 miðar voru seldir á tónleika djasshljómsveitarinnar fyrir samtals $1.022. Nemendamiðar kostuðu $6 hver og almennir miðar $10 hver. Hve margir miðar af hvorri gerð voru seldir?

**384.** Einn eftirmiðdag seldi vatnagarðurinn 525 miða fyrir samtals $13.545. Barnamiðar kostuðu $19 hver og fullorðinsmiðar $40 hver. Hve margir miðar af hvorri gerð voru seldir?

**385.** Ana eyddi $4,06 í frímerki. Hún keypti fimm fleiri $0,41 frímerki en $0,26 frímerki. Hve mörg frímerki keypti hún af hvorri gerð?



**386.** Yumi eyddi $34,15 í frímerki. Fjöldi $0,56 frímerkja sem hún keypti var 10 minni en fjórfaldur fjöldi $0,41 frímerkja. Hve mörg frímerki keypti hún af hvorri gerð?

**Leysið blöndunarverkefni**

Leysið hvert blöndunarverkefni hér á eftir.

**387.** Marquese ætlar að útbúa 10 pund af hnetu- og rúsínublöndu. Rúsínur kosta $3,45 pundið og hnetur $7,95 pundið. Hve mörg pund af rúsínum og hve mörg pund af hnetum á hann að nota svo blandan kosti $6,96 pundið?

**388.** Amber vill flísaleggja vegginn milli borðplötu og skápa í eldhúsinu sínu. Hún þarf 36 ferfet af flísum. Hún ætlar að nota einfaldar flísar sem kosta $8 á ferfet og skrautflísar sem kosta $20 á ferfet. Hve mörg ferfet af hvorri flísagerð á hún að nota svo heildarkostnaðurinn verði $10 á ferfet?

**389.** Shawn á $15.000 til fjárfestingar. Hún leggur hluta fjárins í sjóð sem greiðir 4,5% ársvexti og afganginn á bundinn innlánsreikning sem greiðir 1,8% ársvexti. Hve mikið á hún að leggja á hvorn reikning ef hún vill fá 4,05% ársvexti af heildarupphæðinni?

**390.** Enrique fékk $23.500 að láni til að kaupa bíl. Hann greiðir frænda sínum 2% vexti af þeim $4.500 sem hann fékk að láni hjá honum og bankanum 11,5% vexti af afganginum. Hver er meðalvaxtaprósentan af heildarláninu að upphæð $23.500? (Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr prósenti.)

## 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar

**Leysið verkefni með eiginleikum þríhyrninga**

Leysið eftirfarandi verkefni með eiginleikum þríhyrninga.

**391.** Tvö horn þríhyrnings eru 22 og 85 gráður. Finnið stærð þriðja hornsins.

**392.** Leiksvæði við verslunarmiðstöð er þríhyrningur með ummálið 48 fet. Tvær hliðar hans eru 19 fet og 14 fet. Hve löng er þriðja hliðin?

**393.** Þríhyrningslaga umferðarmerki hefur grunnlínuna 30 tommur og hæðina 40 tommur. Hvert er flatarmál þess?

**394.** Hver er hæð þríhyrnings með flatarmálið 67,5 fermetra og grunnlínuna 9 metra?

**395.** Eitt horn þríhyrnings er 30° stærra en minnsta hornið. Stærsta hornið er summa hinna hornanna. Finnið stærð allra hornanna þriggja.

**396.** Eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 58°. Hver er stærð hinna hornanna í þríhyrningnum?

**397.** Minnsta horn rétthyrnds þríhyrnings er 45° minna en næststærsta hornið. Finnið stærð allra hornanna þriggja.

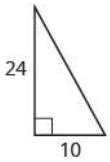
**398.** Ummál þríhyrnings er 97 fet. Ein hlið hans er ellefu fetum lengri en stysta hliðin. Þriðja hliðin er sex fetum lengri en tvöföld stysta hliðin. Finnið lengd allra hliðanna.

3

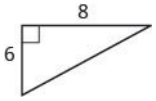
### Notið setningu Pýþagórasar

Notið setningu Pýþagórasar í eftirfarandi verkefnum til að finna lengd langhliðarinnar.

399.

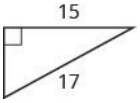



400.

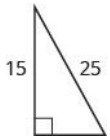



Notið setningu Pýþagórasar í verkefnunum hér á eftir til að finna lengd hliðarinnar sem vantar. Námundið að næsta tíunda hluta ef þess þarf.

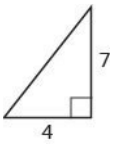
401.



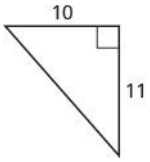

402.




403.



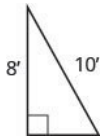
404.



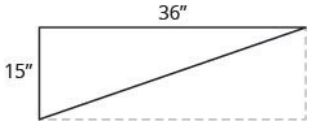

Leysið eftirfarandi verkefni. Námundið að næsta tíunda hluta ef þess þarf.

**405.** Sergio þarf að festa vír til að styðja loftnetið á húsþakinu eins og myndin sýnir. Loftnetið er 8 fet á hæð og Sergio er með 10 feta langan vír. Hve langt frá neðri enda loftnetsins getur hann fest vírinn?






**406.** Seong er að smíða hillur í bílskúrnum sínum. Hillurnar eru 36 tommur á breidd og 15 tommur á hæð. Hann vill setja skástífu þvert yfir bakið til að styrkja hillurnar eins og myndin sýnir. Hve löng á stífan að vera?




**Leysið verkefni með eiginleikum rétthyrninga**

Leysið eftirfarandi verkefni með eiginleikum rétthyrninga.

**407.** Lengd rétthyrnings er 36 fet og breiddin 19 fet. Finnið ⓐ ummálið og ⓑ flatarmálið.

**408.** Gangstétt framan við hús Kathy er rétthyrningur sem er fjögur fet á breidd og 45 fet á lengd. Finnið ⓐ ummálið og ⓑ flatarmálið.

**409.** Flatarmál rétthyrnings er 2.356 fermetrar. Lengdin er 38 metrar. Hver er breiddin?

**410.** Breidd rétthyrnings er 45 sentimetrar. Flatarmálið er 2.700 fersentimetrar. Hver er lengdin?

**411.** Lengd rétthyrnings er 12 cm meiri en breiddin. Ummálið er 74 cm. Finnið lengdina og breiddina.

**412.** Breidd rétthyrnings er þremur meiri en tvöföld lengdin. Ummálið er 96 tommur. Finnið lengdina og breiddina.

3.5 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

**Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**413.** Þegar Gabe ekur frá Sacramento til Redding tekur ferðin hann 2,2 klukkustundir. Elsa ekur sömu vegalengd á 2 klukkustundum. Hraði Elsu er sjö mílum á klukkustund meiri en hraði Gabes. Finnið hraða Gabes og Elsu.

**414.** Louellen og Tracy hittust á veitingastað við veginn milli Chicago og Nashville. Louellen hafði lagt af stað frá Chicago og ekið í 3,2 klukkustundir í átt að Nashville. Tracy hafði lagt af stað frá Nashville og ekið í 4 klukkustundir í átt að Chicago, einni mílu hraðar á klukkustund en Louellen. Vegalengdin milli Chicago og Nashville er 472 mílur. Finnið hraða Louellen og Tracy.

**415.** Tvær rútur leggja samtímis af stað frá Amarillo. Rútan til Albuquerque ekur vestur eftir I-40 á 72 mílna hraða og rútan til Oklahoma City ekur austur eftir I-40 á 78 mílna hraða. Eftir hve margar klukkustundir verða 375 mílur á milli þeirra?

**416.** Kyle reri bátnum sínum á móti straumi í 50 mínútur. Það tók hann 30 mínútur að róa til baka með straumi. Hraði hans á móti straumi er tveimur mílum minni á klukkustund en hraðinn með straumi. Finnið hraða Kyles á móti og með straumi.

3

**417.** Klukkan 6:30 lagði Devon af stað að heiman og hjólaði eftir sléttum vegi til klukkan 7:30. Þá byrjaði hún að hjóla upp brekku og hjólaði til klukkan 8:00. Hún hjólaði samtals 15 mílur. Hraði hennar á slétta veginum var þremur mílum á klukkustund meiri en hraðinn upp brekkuna. Finnið hraða Devon á slétta veginum og upp brekkuna.

**418.** Anthony ók frá New York-borg til Baltimore, vegalengd sem er 192 mílur. Hann lagði af stað klukkan 3:45 og umferðin var þung til klukkan 5:30. Umferðin var lítil það sem eftir var ferðarinnar og hann kom á áfangastað klukkan 7:30. Hraði hans í lítilli umferð var fjórum mílum á klukkustund meiri en tvöfaldur hraði hans í þungri umferð. Finnið akstursrhaða Anthonys í þungri og lítilli umferð.

3.6 Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum

**Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**419.** Julianne hefur vikulega fjárhagsáætlun upp á $231 fyrir mat fjölskyldunnar. Ef hún ætlar að nota jafnmikið alla sjö daga vikunnar, hve miklu má hún þá í mesta lagi eyða í mat á dag?

**420.** Rogelio málar vatnslitamyndir. Hann fékk $100 gjafakort í listvöruverslun og vill nota það til að kaupa $12" \times 16"$ striga. Hver strigi kostar $10,99. Hve marga striga getur hann í mesta lagi keypt fyrir gjafakortið?

**421.** Briana hefur fengið boð um sölustarf í annarri borg. Boðið hljóðar upp á $42.500 auk 8% af heildarsölu hennar. Til að flutningurinn borgi sig þarf Briana að fá að minnsta kosti $66.500 í árslaun. Hve há þyrfti heildarsala hennar að vera til að hún flytti?

**422.** Bílakostnaður Renee er $195 á mánuði auk $0,09 fyrir hverja mílu. Hve margar mílur getur hún ekið ef mánaðarlegur bílakostnaður má ekki vera meiri en $250?

**423.** Costa er endurskoðandi. Á framtalstímabilinu tekur hann $125 fyrir að útbúa einfalt skattframtal. Útgjöld hans vegna hugbúnaðarkaupa, skrifstofuleigu og auglýsinga eru $6.000. Hve mörg skattframtöl þarf hann að útbúa ef hann vill fá að minnsta kosti $8.000 í hagnað?

**424.** Jenna er að skipuleggja 5 daga dvöl á orlofsstað með þremur vinkonum sínum. Flugfarið kostar hana $279, matur og afþreying $300 og hennar hlutur í gistingu $65 á dag. Hún hefur safnað $550 fyrir ferðinni og getur fengið $25 á klukkustund sem aðstoðarmaður á ljósmyndastofu frænda síns. Hve margar klukkustundir þarf hún að vinna til að eiga fyrir ferðinni?

## Æfingapróf

**425.** Fjórir fimmtu hlutar fólksins í gönguferð eru börn. Ef börnin eru 12, hve margir eru þá samtals í gönguferðinni?

**426.** Önnur talan er þremur hærri en tvöföld hin talan. Summa þeirra er $-63$. Finnið tölurnar.

**427.** Summa tveggja samliggjandi oddatalna er $-96$. Finnið tölurnar.

**428.** Morgunverður Mörlu var 525 hitaeiningar. Það var 35% af öllum hitaeiningum sem hún fékk þann dag. Hve margar hitaeiningar fékk hún þann dag?

**429.** Tímakaup Humbertos hækkaði úr $16,25 í $17,55. Finnið prósentuhækkunina.

**430.** Melinda lagði $5.985 inn á bankareikning með 1,9% vaxtaprósentu. Hve mikla vexti fékk hún á 2 árum?

**431.** Dotty keypti frystikistu á útsölu fyrir $486,50. Upphaflegt verð hennar var $695. Finnið ⓐ afsláttarfjárhæðina og ⓑ afsláttarhlutfallið.

**432.** Bonita er með $2,95 í tíusenta og 25 senta myntum í vasanum. Ef hún er með fimm fleiri tíusenta myntir en 25 senta myntir, hve margar myntir er hún þá með af hvorri gerð?

**433.** Á tónleikum seldust miðar fyrir $1.600. Fullorðinsmiðar kostuðu $9 hver og barnamiðar $4 hver. Ef fjöldi fullorðinsmiða var 30 minni en tvöfaldur fjöldi barnamiða, hve margir miðar af hvorri gerð seldust?

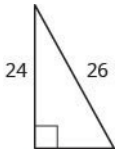
**434.** Kim ætlar að útbúa átta gallon af ávaxtadrykk úr ávaxtasafa og gosdrykk. Ávaxtasafinn kostar $6,04 gallonið og gosdrykkurinn $4,28 gallonið. Hve mikið af ávaxtasafa og gosdrykk á hún að nota svo drykkurinn kosti $5,71 gallonið?

**435.** Eitt horn þríhyrnings er tvisvar sinnum stærra en minnsta hornið. Þriðja hornið er 14 gráðum stærra en minnsta hornið. Finnið stærð allra hornanna þriggja.

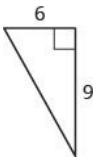
**436.** Hver er hæð þríhyrnings með flatarmálið 277,2 fertommur og grunnlínuna 44 tommur?

Notið setningu Pýþagórasar í næstu verkefnum til að finna lengd hliðarinnar sem vantar. Námundið að næsta tíunda hluta ef þess þarf.

437.

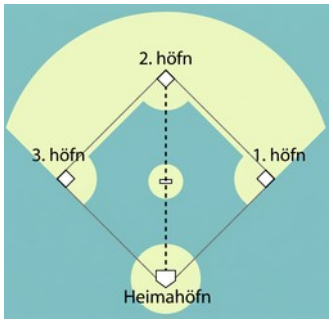



438.




3

**439.** Hafnaboltavöllur er í raun ferningur með 90 feta langar hliðar. Hve langt er frá heimahöfn að annarri höfn eins og myndin sýnir?




**440.** Lengd rétthyrnings er tveimur fetum meiri en fimmföld breiddin. Ummálið er 40 fet. Finnið mál rétthyrningsins.

**441.** Tvær flugvélar leggja samtímis af stað frá Dallas. Önnur flýgur austur á 428 mílna hraða á klukkustund. Hin flýgur vestur á 382 mílna hraða á klukkustund. Eftir hve margar klukkustundir verða 2.025 mílur á milli þeirra?

**442.** Leon ók frá heimili sínu í Cincinnati til heimilis systur sinnar í Cleveland, alls 252 mílur. Ferðin tók $4\frac{1}{2}$ klukkustundir. Fyrsta hálftímann var umferðin þung. Það sem eftir var ferðarinnar var hraði hans fimm mílum á klukkustund minni en tvöfaldur hraði hans í þungri umferð. Hver var hraði hans í þungri umferð?

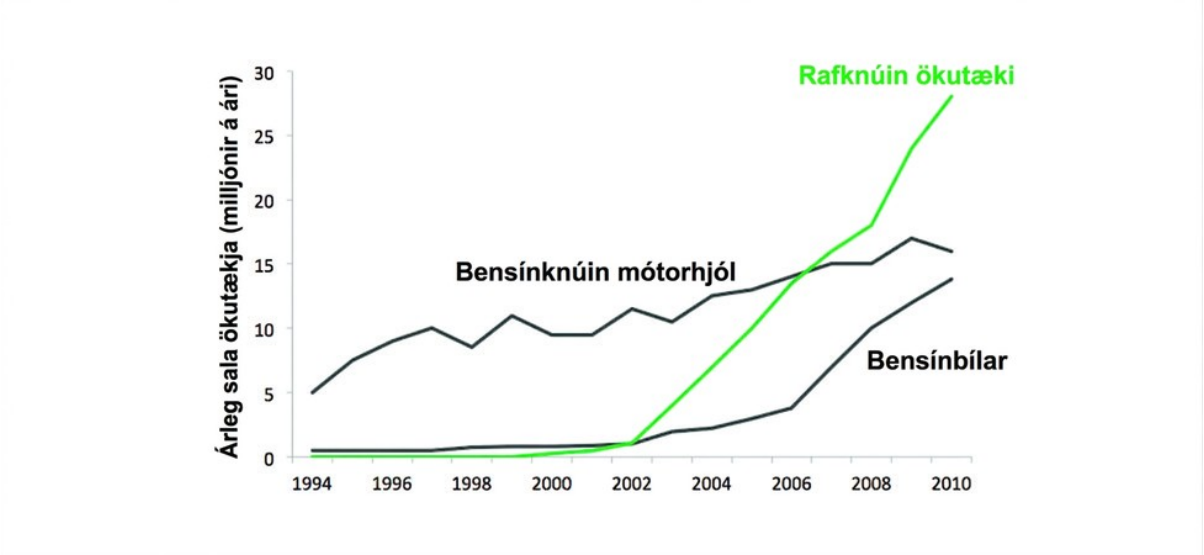
**443.** Chloe hefur $800 til ráðstöfunar í búninga fyrir 18 meðlimi söngleikjahópsins síns. Ef allir búningarnir kosta það sama, hve miklu má hún í mesta lagi eyða í hvern búning?

**444.** Frank fann bílaleigutilboð á netinu þar sem leigan var $49 á viku auk $0,24 fyrir hverja mílu. Hve margar mílur gæti hann ekið ef heildarkostnaður einnar viku má ekki vera meiri en $150?

4. KAFLI

# Gröf






Mynd 4.1 Þetta graf sýnir árlega sölu bensínknúinna mótorhjóla, bensínbíla og rafknúinna ökutækja frá 1994 til 2010. Þetta er línurit með x- og y-ásum, ein algengasta gerð grafa. (mynd: Steve Jurvetson, Flickr)

## Yfirlit kaflans


- 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
- 4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum
- 4.3 Teiknið graf með skurðpunktum við ása
- 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
- 4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu
- 4.6 Finnið jöfnu línu
- 4.7 Gröf línulegra ójafna

# Inngangur

Gröf eru alls staðar í daglegu lífi. Þau birtast í auglýsingum sem sýna hvaða farsímafyrirtæki er með besta dreifikerfið, í bankayfirlitum og fréttagreinum og á stjórnarfundum stórfyrirtækja. Í þessum kafla kynnumst við rétthyrnda hnitakerfinu, sem er undirstaða flestra grafa sem neytendur sjá. Við skoðum línuleg gröf, hallatölur lína, jöfnur lína og línulegar ójöfnur.

## 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:



- Merkið punkta í rétthyrnt hnitakerfi
- Sannreynið lausnir jöfnu með tveimur breytum
- Fyllið út lausnatöflu línulegrar jöfnu
- Fundið lausnir línulegrar jöfnu með tveimur breytum

**UNDIRBÚNINGUR 4.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Reiknið gildi $x+3$ þegar $x=-1$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.54.

**UNDIRBÚNINGUR 4.2**

Reiknið gildi $2x-5y$ þegar $x=3$ og $y=-2$.
Ef verkefnið reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.55.

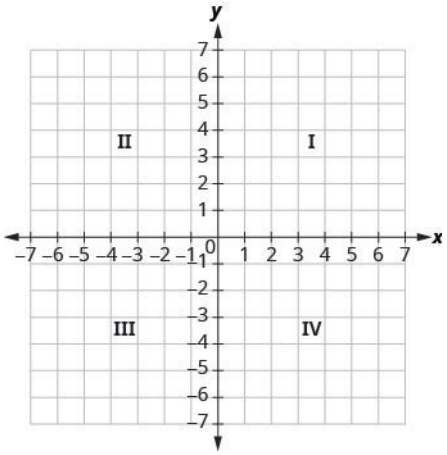
**UNDIRBÚNINGUR 4.3**

Leysið með tilliti til $y$: $40-4y=20$. Ef verkefnið reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.27.

### Merkið punkta í rétthyrnt hnitakerfi

Kort nota reitakerfi til að sýna staðsetningar. Á sama hátt er reitakerfi notað í algebru til að sýna samband tveggja breyta í rétthyrndu hnitakerfi. Rétthyrnda hnitakerfið er einnig kallað xy-hnitaplan eða einfaldlega hnitaplan.

Lárétta talnalínan kallast x-ás. Lóðrétta talnalínan kallast y-ás. Saman mynda x-ásinn og y-ásinn rétthyrnda hnitakerfið. Ásarnir skipta hnitaplaninu í fjögur svæði sem kallast fjórðungar. Fjórðungarnir eru merktir með rómverskum tölum. Byrjað er efst til hægri og haldið áfram rangsælis. Sjá mynd 4.2.




Mynd 4.2 Orðið „fjórðungur“ vísar til þess að ásarnir skipta hnitaplaninu í fjóra hluta.

Í rétthyrnda hnitakerfinu táknum við hvern punkt með raðaðri tvennd. Fyrri talan í tvenndinni er x-hnit punktsins og seinni talan y-hnit hans.



---

**RÖÐUÐ TVENND**

Röðuð tvennd, $(x, y)$, gefur hnit punkts í rétthyrndu hnitakerfi.




Fyrri talan er x-hnitið.

Seinni talan er y-hnitið.

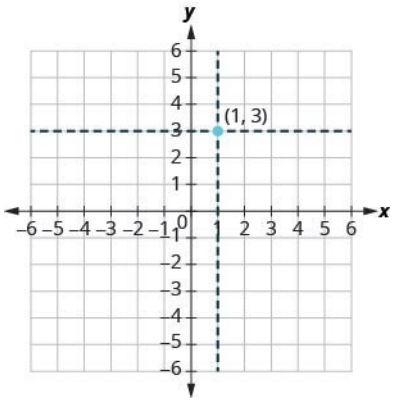
Heitið „röðuð tvennd“ merkir að röðin skiptir máli. Hver er raðaða tvenndin fyrir punktinn þar sem ásarnir skerast? Þar eru bæði hnitin núll og tvenndin því $(0, 0)$. Punkturinn $(0, 0)$ hefur sérstakt heiti. Hann kallast upphafspunktur.

---

**UPPHAFSPUNKTURINN**

Punkturinn $(0, 0)$ kallast upphafspunktur. Þar skerast x-ásinn og y-ásinn.

Við notum hnit til að staðsetja punkt á xy-hnitaplaninu. Merkjum punktinn $(1, 3)$ sem dæmi. Finnið fyrst 1 á x-ásnum og dragið daufa lóðrétta línu í gegnum $x = 1$. Finnið síðan 3 á y-ásnum og dragið lárétta línu í gegnum $y = 3$. Finnið loks punktinn þar sem línurnar mætast. Það er punkturinn með hnitin $(1, 3)$.




Takið eftir að lóðrétti línubúturinn í gegnum $x=1$ og lárétti línubúturinn í gegnum $y=3$ eru ekki hluti af grafinu. Við notuðum þá aðeins til að hjálpa okkur að staðsetja punktinn $(1,3)$.

---

4

**DÆMI 4.1**

Merkið hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi og tilgreinið í hvaða fjórðungi hann liggur:

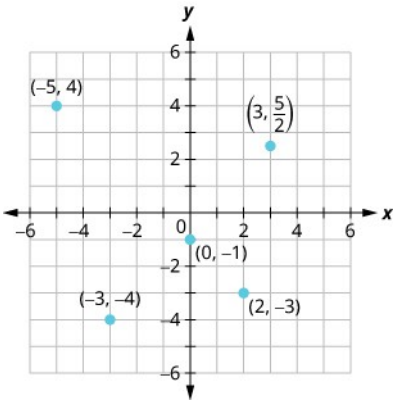
ⓐ $(-5,4)$ ⓑ $(-3,-4)$ ⓒ $(2,-3)$ ⓓ $(-2,3)$ ⓔ $\left(3,\frac{5}{2}\right)$.

## Lausn

Fyrri talan í hnitatvenndinni er x-hnitið og seinni talan er y-hnitið.

1. ⓐ Þar sem $x=-5$, liggur punkturinn vinstra megin við y-ásinn. Þar sem $y=4$, liggur hann einnig ofan við x-ásinn. Punkturinn $(-5,4)$ liggur í fjórðungi II.
2. ⓑ Þar sem $x=-3$, liggur punkturinn vinstra megin við y-ásinn. Þar sem $y=-4$, liggur hann einnig neðan við x-ásinn. Punkturinn $(-3,-4)$ liggur í fjórðungi III.
3. ⓒ Þar sem $x=2$, liggur punkturinn hægra megin við y-ásinn. Þar sem $y=-3$, liggur hann neðan við x-ásinn. Punkturinn $(2,-3)$ liggur í fjórðungi IV.
4. ⓓ Þar sem $x=-2$, liggur punkturinn vinstra megin við y-ásinn. Þar sem $y=3$, liggur hann ofan við x-ásinn. Punkturinn $(-2,3)$ liggur í fjórðungi II.
5. ⓔ Þar sem $x=3$ liggur punkturinn hægra megin við y-ásinn. Þar sem $y=\frac{5}{2}$ liggur hann ofan við x-ásinn. (Gagnlegt getur verið að rita $\frac{5}{2}$ sem blandna tölu eða tugabrot.)

   Punkturinn $\left(3,\frac{5}{2}\right)$ liggur í fjórðungi I.




Mynd 4.3



**REYNIÐ SJÁLF 4.1**

Merkið hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi og tilgreinið í hvaða fjórðungi hann liggur:

ⓐ $(-2,1)$ ⓑ $(-3,-1)$ ⓒ $(4,-4)$ ⓓ $(-4,4)$ ⓔ $\left(-4,\frac{3}{2}\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.2**

Merkið hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi og tilgreinið í hvaða fjórðungi hann liggur:

ⓐ $(-4,1)$ ⓑ $(-2,3)$ ⓒ $(2,-5)$ ⓓ $(-2,5)$ ⓔ $\left(-3,\frac{5}{2}\right)$.

Hvaða áhrif hafa formerkin á staðsetningu punktanna? Þið tókuð ef til vill eftir ákveðnu mynstri þegar þið merktuð punktana í dæminu á undan.

Skoðið punktinn á mynd 4.3 í fjórðungi IV. Hverju takið þið eftir varðandi formerki hnitanna? Hvað um formerki hnita punkta í þriðja fjórðungi? Öðrum fjórðungi? Fyrsta fjórðungi?

Getið þið séð á hnitunum einum í hvaða fjórðungi punkturinn $(-2,5)$ liggur? Í hvaða fjórðungi liggur $(2,-5)$?

**FJÓRÐUNGAR**

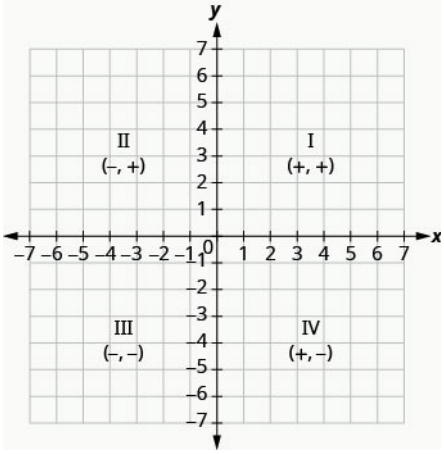
Mynstur formerkjanna í fjórðungunum má draga saman á þennan hátt.

Fjórðungur I
$(x,y)$
$(+,+)$

Fjórðungur II
$(x,y)$
$(-,+)$

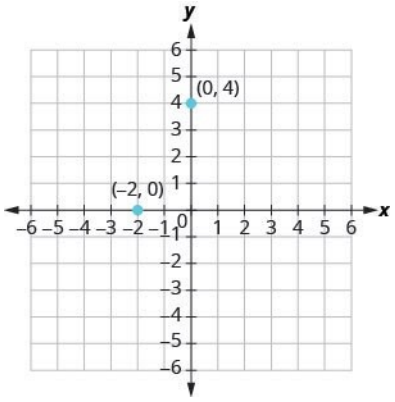
Fjórðungur III
$(x, y)$
$(-, -)$

Fjórðungur IV
$(x, y)$
$(+, -)$




4

Hvað gerist ef annað hnitið er núll eins og sýnt er á mynd 4.4? Hvar liggur punkturinn $(0, 4)$? Hvar liggur punkturinn $(-2, 0)$?




Mynd 4.4

Punkturinn $(0, 4)$ liggur á y-ásnum og punkturinn $(-2, 0)$ á x-ásnum.

---

**PUNKTAR Á ÁSUNUM**

Punktar með y-hnit sem er jafnt o liggja á x-ásnum og hafa hnitin $(a, 0)$.

Punktar með x-hnit sem er jafnt o liggja á y-ásnum og hafa hnitin $(0, b)$.

---

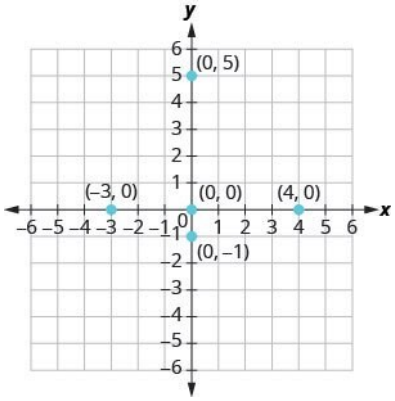
**DÆMI 4.2**

Merkið hvern punkt:

ⓐ $(0,5)$ ⓑ $(4,0)$ ⓒ $(-3,0)$ ⓓ $(0,0)$ ⓔ $(0,-1)$.

### Lausn

1. ⓐ Þar sem $x=0$, liggur punkturinn með hnitin $(0,5)$ á y-ásnum.
2. ⓑ Þar sem $y=0$, liggur punkturinn með hnitin $(4,0)$ á x-ásnum.
3. ⓒ Þar sem $y=0$, liggur punkturinn með hnitin $(-3,0)$ á x-ásnum.
4. ⓓ Þar sem $x=0$ og $y=0$, er punkturinn með hnitin $(0,0)$ upphafspunkturinn.
5. ⓔ Þar sem $x=0$, liggur punkturinn með hnitin $(0,-1)$ á y-ásnum.






---

**REYNIÐ SJÁLF 4.3**

Merkið hvern punkt:

ⓐ $(4,0)$ ⓑ $(-2,0)$ ⓒ $(0,0)$ ⓓ $(0,2)$ ⓔ $(0,-3)$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.4**

Merkið hvern punkt:

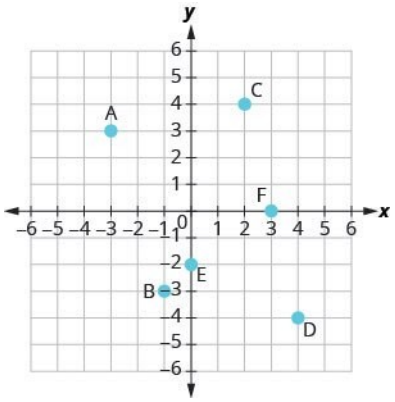
ⓐ $(-5,0)$ ⓑ $(3,0)$ ⓒ $(0,0)$ ⓓ $(0,-1)$ ⓔ $(0,4)$.

Í algebru er jafn mikilvægt að geta fundið hnit punkts á grafi og að geta merkt punkt. Til að finna x-hnit punkts á grafi skuluð þið lesa töluna á x-ásnum beint fyrir ofan eða neðan punktinn. Til að finna y-hnit punkts skuluð þið lesa töluna á y-ásnum beint til vinstri eða hægri við punktinn. Munið að rita röðuðu tvenndina í réttri röð, $(x,y)$.

---

**DÆMI 4.3**

Nefnið röðuðu tvenndina fyrir hvern punkt sem sýndur er í hnitakerfinu.




## Lausn

Punktur A er fyrir ofan $-3$ á x-ásnum og x-hnit hans er því $-3$.

- Punkturinn er vinstra megin við 3 á y-ásnum og y-hnit hans er því 3.
- Hnit punktsins eru $(-3,3)$.

4

Punktur B er fyrir neðan $-1$ á x-ásnum og x-hnit hans er því $-1$.

- Punkturinn er vinstra megin við $-3$ á y-ásnum og y-hnit hans er því $-3$.
- Hnit punktsins eru $(-1,-3)$.

Punktur C er fyrir ofan 2 á x-ásnum og x-hnit hans er því 2.

- Punkturinn er hægra megin við 4 á y-ásnum og y-hnit hans er því 4.
- Hnit punktsins eru $(2,4)$.

Punktur D er fyrir neðan 4 á x-ásnum og x-hnit hans er því 4.

- Punkturinn er hægra megin við $-4$ á y-ásnum og y-hnit hans er því $-4$.
- Hnit punktsins eru $(4,-4)$.

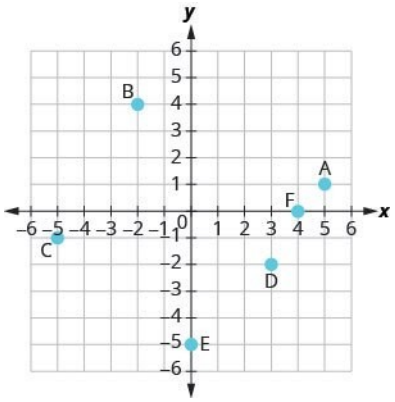
Punktur E liggur á y-ásnum við $y=-2$. Hnit punkts E eru $(0,-2)$.

Punktur F liggur á x-ásnum við $x=3$. Hnit punkts F eru $(3,0)$.

---

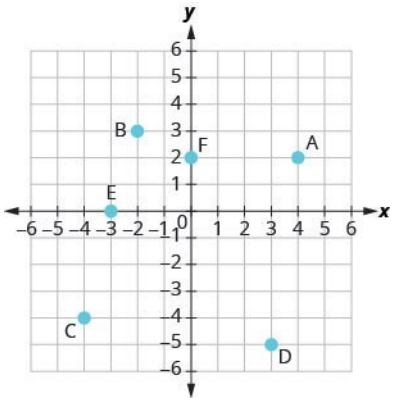
**REYNIÐ SJÁLF 4.5**

Nefnið röðuðu tvenndina fyrir hvern punkt sem sýndur er í hnitakerfinu.




**REYNIÐ SJÁLF 4.6**

Nefnið röðuðu tvenndina fyrir hvern punkt sem sýndur er í hnitakerfinu.




## Sannreynið lausnir jöfnu með tveimur breytum

Hingað til hafa allar jöfnurnar sem þið hafið leyst aðeins haft eina breytu. Í nær öllum tilvikum fenguð þið nákvæmlega eina lausn. Þegar þið leystuð jöfnuna enduðuð þið á fullyrðingu á borð við $x = 4$. (Síðan sannreynduð þið lausnina með því að setja hana aftur inn í jöfnuna.)

Hér er dæmi um jöfnu með einni breytu og eina lausn hennar.

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 17 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Jöfnur geta þó haft fleiri en eina breytu. Jöfnur með tveimur breytum geta verið á forminu $A\,x + B\,y = C$. Jöfnur af þessu tagi kallast línulegar jöfnur með tveimur breytum.

**LÍNULEG JAFNA**

Jafna á forminu $A\,x + B\,y = C$, þar sem $A$ og $B$ eru ekki bæði núll, kallast línuleg jafna með tveimur breytum.

Takið eftir orðinu lína í orðinu línuleg. Hér er dæmi um línulega jöfnu með tveimur breytum, $x$ og $y$.

$$Ax + By = C$$
$$x + 4y = 8$$
$$A = 1,\ B = 4,\ C = 8$$

Jafnan $y = -3x + 5$ er einnig línuleg jafna. Hún virðist þó ekki vera á forminu $Ax + By = C$. Við getum notað samlagningarreglu jafnaðar til að umrita hana á formið $Ax + By = C$.

Tafla 4.1

| | $y = -3x + 5$ |
|---|---|
| Leggið við báðar hliðar. | $y + 3x = -3x + 5 + 3x$ |
| Einfaldið. | $y + 3x = 5$ |
| Notið víxlregluna til að færa hana á formið $Ax + By = C$. | $3x + y = 5$ |

Með því að umrita $y = -3x + 5$ sem $3x + y = 5$, sjáum við auðveldlega að þetta er línuleg jafna með tveimur breytum því hún er á forminu $Ax + By = C$. Þegar jafna er á forminu $Ax + By = C$, segjum við að hún sé á staðalformi.

**STAÐALFORM LÍNULEGRAR JÖFNU**

Línuleg jafna er á staðalformi þegar hún er rituð $Ax + By = C$.

Þótt það sé ekki nauðsynlegt kjósa flestir að $A$, $B$ og $C$ séu heiltölur og að $A \geq 0$ þegar línuleg jafna er rituð á staðalformi.

Línulegar jöfnur hafa óendanlega margar lausnir. Fyrir hverja tölu sem sett er inn fyrir $x$ er samsvarandi gildi fyrir $y$. Þetta gildapar er lausn línulegu jöfnunnar og er táknað með röðuðu tvenndinni $(x, y)$. Þegar við setjum þessi gildi $x$ og $y$ inn í jöfnuna fæst sönn fullyrðing því gildið vinstra megin er jafnt gildinu hægra megin.

**LAUSN LÍNULEGRAR JÖFNU MEÐ TVEIMUR BREYTUM**

Röðuð tvennd $(x, y)$ er lausn línulegu jöfnunnar $Ax + By = C$ ef jafnan verður sönn fullyrðing þegar x- og y-gildi tvenndarinnar eru sett inn í hana.

**DÆMI 4.4**

Ákvarðið hvaða röðuðu tvenndir eru lausnir jöfnunnar $x + 4y = 8$.

ⓐ $(0, 2)$ ⓑ $(2, -4)$ ⓒ $(-4, 3)$

## Lausn

Setjið x- og y-gildi hverrar raðaðrar tvenndar inn í jöfnuna og kannið hvort sönn fullyrðing fæst.

| (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|
| (0, 2) | (2, –4) | (–4, 3) |
| $x = 0, y = 2$ | $x = 2, y = -4$ | $x = -4, y = 3$ |
| $x + 4y = 8$ | $x + 4y = 8$ | $x + 4y = 8$ |
| $0 + 4 \cdot 2 \stackrel{?}{=} 8$ | $2 + 4(-4) \stackrel{?}{=} 8$ | $-4 + 4 \cdot 3 \stackrel{?}{=} 8$ |
| $0 + 8 \stackrel{?}{=} 8$ | $2 + (-16) \stackrel{?}{=} 8$ | $-4 + 12 \stackrel{?}{=} 8$ |
| $8 = 8$ ✓ | $-14 \neq 8$ | $8 = 8$ ✓ |
| (0, 2) er lausn. | (2, –4) er ekki lausn. | (–4, 3) er lausn. |

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.7**

Hverjar af þessum röðuðu tvenndum eru lausnir á $2x+3y=6$?

ⓐ $(3,0)$ ⓑ $(2,0)$ ⓒ $(6,-2)$

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.8**

Hverjar af þessum röðuðu tvenndum eru lausnir jöfnunnar $4x-y=8$?

ⓐ $(0,8)$ ⓑ $(2,0)$ ⓒ $(1,-4)$

---

**DÆMI 4.5**

Hverjar af þessum röðuðu tvenndum eru lausnir jöfnunnar $y=5x-1$?

ⓐ $(0,-1)$ ⓑ $(1,4)$ ⓒ $(-2,-7)$

## Lausn

Setjið x- og y-gildi hverrar raðaðrar tvenndar inn í jöfnuna og kannið hvort sönn fullyrðing fæst.

| (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|
| (0, –1) | (1, 4) | (–2, –7) |
| $x = 0, y = -1$ | $x = 1, y = 4$ | $x = -2, y = -7$ |
| $y = 5x - 1$ | $y = 5x - 1$ | $y = 5x - 1$ |
| $-1 \stackrel{?}{=} 5(0) - 1$ | $4 \stackrel{?}{=} 5(1) - 1$ | $-7 \stackrel{?}{=} 5(-2) - 1$ |
| $-1 \stackrel{?}{=} 0 - 1$ | $4 \stackrel{?}{=} 5 - 1$ | $-7 \stackrel{?}{=} -10 - 1$ |
| $-1 = -1$ ✓ | $4 = 4$ ✓ | $-7 \neq -11$ |
| (0, –1) er lausn. | (1, 4) er lausn. | (–2, –7) er ekki lausn. |

**REYNIÐ SJÁLF 4.9**

Hverjar af þessum röðuðu tvenndum eru lausnir jöfnunnar $y = 4x - 3$?

ⓐ $(0, 3)$ ⓑ $(1, 1)$ ⓒ $(-1, -1)$

**REYNIÐ SJÁLF 4.10**

Hverjar af þessum röðuðu tvenndum eru lausnir jöfnunnar $y = -2x + 6$?

ⓐ $(0, 6)$ ⓑ $(1, 4)$ ⓒ $(-2, -2)$

## Fyllið út lausnatöflu línulegrar jöfnu með tveimur breytum

Í dæmunum hér á undan settum við x- og y-gildi gefinnar raðaðrar tvenndar inn í línulega jöfnu til að kanna hvort tvenndin væri lausn hennar. En hvernig finnið þið raðaðar tvenndir þegar þær eru ekki gefnar? Það er einfaldara en ætla mætti: Veljið gildi fyrir $x$ og leysið síðan jöfnuna með tilliti til $y$. Eða veljið gildi fyrir $y$ og leysið með tilliti til $x$.

Byrjum á að skoða lausnir jöfnunnar $y = 5x - 1$ sem við fundum í dæmi 4.5. Við getum dregið upplýsingarnar saman í lausnatöflu eins og sýnt er í töflu 4.2.

Tafla 4.2

| $y = 5x - 1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
| 0 | $-1$ | $(0, -1)$ |
| 1 | 4 | $(1, 4)$ |

Til að finna þriðju lausnina látum við $x = 2$ og leysum með tilliti til $y$.

| | |
|---|---|
| | $y = 5x - 1$ |
| Setjið $x = 2$ inn. | $y = 5(2) - 1$ |
| Margfaldið. | $y = 10 - 1$ |
| Einfaldið. | $y = 9$ |

Raðaða tvenndin $(2, 9)$ er lausn á $y = 5x - 1$. Við bætum henni við töflu 4.3.

Tafla 4.3

| $y = 5x - 1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
| 0 | $-1$ | $(0, -1)$ |
| 1 | 4 | $(1, 4)$ |
| 2 | 9 | $(2, 9)$ |



Við getum fundið fleiri lausnir jöfnunnar með því að setja inn hvaða gildi sem er fyrir $x$ eða $y$ og leysa jöfnuna sem fæst. Þannig fáum við aðra raðaða tvennd sem er lausn. Jafnan hefur óendanlega margar lausnir.

**DÆMI 4.6**

Fyllið út töflu 4.4 til að finna þrjár lausnir jöfnunnar $y = 4x - 2$.

Tafla 4.4

| $y = 4x - 2$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
| 0 | | |
| $-1$ | | |
| 2 | | |

## Lausn

Setjið $x = 0$, $x = -1$ og $x = 2$ inn í $y = 4x - 2$.

| | | |
|---|---|---|
| $x = 0$ | $x = -1$ | $x = 2$ |
| $y = 4x - 2$ | $y = 4x - 2$ | $y = 4x - 2$ |
| $y = 4 \cdot 0 - 2$ | $y = 4(-1) - 2$ | $y = 4 \cdot 2 - 2$ |
| $y = 0 - 2$ | $y = -4 - 2$ | $y = 8 - 2$ |
| $y = -2$ | $y = -6$ | $y = 6$ |
| $(0, -2)$ | $(-1, -6)$ | $(2, 6)$ |

Niðurstöðurnar eru dregnar saman í töflu 4.5.

Tafla 4.5

| $y=4x-2$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-2$ | $(0,-2)$ |
| $-1$ | $-6$ | $(-1,-6)$ |
| 2 | 6 | $(2,6)$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.11**

Fyllið út töfluna til að finna þrjár lausnir þessarar jöfnu: $y=3x-1$.

| $y=3x-1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | | |
| $-1$ | | |
| 2 | | |

**REYNIÐ SJÁLF 4.12**

Fyllið út töfluna til að finna þrjár lausnir þessarar jöfnu: $y=6x+1$.

| $y=6x+1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | | |
| 1 | | |
| $-2$ | | |

**DÆMI 4.7**

Fyllið út töflu 4.6 til að finna þrjár lausnir jöfnunnar $5x-4y=20$.

Tafla 4.6

| $5x-4y=20$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | | |
| | 0 | |
| | 5 | |

## Lausn

Setjið gefna gildið inn í jöfnuna $5x-4y=20$ og leysið með tilliti til hinnar breytunnar. Fyllið síðan gildin inn í töfluna.

| $x=0$ | $y=0$ | $y=5$ |
|---|---|---|
| $5x-4y=20$ | $5x-4y=20$ | $5x-4y=20$ |
| $5\cdot 0-4y=20$ | $5x-4\cdot 0=20$ | $5x-4\cdot 5=20$ |
| $0-4y=20$ | $5x-0=20$ | $5x-20=20$ |
| $-4y=20$ | $5x=20$ | $5x=40$ |
| $y=-5$ | $x=4$ | $x=8$ |
| $(0,-5)$ | $(4,0)$ | $(8,5)$ |

Niðurstöðurnar eru dregnar saman í töflu 4.7.

Tafla 4.7

| $5x-4y=20$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-5$ | $(0,-5)$ |
| 4 | 0 | $(4,0)$ |
| 8 | 5 | $(8,5)$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.13**

Fyllið út töfluna til að finna þrjár lausnir þessarar jöfnu: $2x-5y=20$.

| $2x-5y=20$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | | |
| | 0 | |
| $-5$ | | |

**REYNIÐ SJÁLF 4.14**

Fyllið út töfluna til að finna þrjár lausnir þessarar jöfnu: $3x-4y=12$.

| $3x-4y=12$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | | |
| | 0 | |
| $-4$ | | |

## Finnið lausnir línulegrar jöfnu

Til að finna lausn línulegrar jöfnu getið þið valið hvaða tölu sem er og sett hana inn í jöfnuna fyrir $x$ eða $y$. Þið notið töluna síðan til að leysa með tilliti til hinnar breytunnar. Því er skynsamlegt að velja tölu sem auðvelt er að vinna með.

Þegar jafnan er leyst með tilliti til y, með y einangrað öðrum megin í jöfnunni, er yfirleitt auðveldara að velja gildi fyrir $x$ og leysa síðan með tilliti til $y$.

**DÆMI 4.8**

Finnið þrjár lausnir jöfnunnar $y=-3x+2$.

### Lausn

Við getum sett hvaða gildi sem er inn fyrir $x$ eða hvaða gildi sem er fyrir $y$. Þar sem jafnan er á y-formi er auðveldara að setja inn gildi fyrir $x$. Veljum $x=0$, $x=1$ og $x=-1$.

| | $x=0$ | $x=1$ | $x=-1$ |
|---|---|---|---|
| | $y=-3x+2$ | $y=-3x+2$ | $y=-3x+2$ |
| Setjið gildið inn í jöfnuna. | $y=-3\cdot 0+2$ | $y=-3\cdot 1+2$ | $y=-3(-1)+2$ |
| Einfaldið. | $y=0+2$ | $y=-3+2$ | $y=3+2$ |
| Einfaldið. | $y=2$ | $y=-1$ | $y=5$ |
| Ritið röðuðu tvenndina. | (0, 2) | (1, −1) | (−1, 5) |
| Athugið. | | | |
| $y=-3x+2$ | $y=-3x+2$ | $y=-3x+2$ | |
| $2\stackrel{?}{=}-3\cdot 0+2$ | $-1\stackrel{?}{=}-3\cdot 1+2$ | $5\stackrel{?}{=}-3(-1)+2$ | |
| $2\stackrel{?}{=}0+2$ | $-1\stackrel{?}{=}-3+2$ | $5\stackrel{?}{=}3+2$ | |
| $2=2\checkmark$ | $-1=-1\checkmark$ | $5=5\checkmark$ | |

Því eru $(0,2)$, $(1,-1)$ og $(-1,5)$ allar lausnir á $y=-3x+2$. Þær eru sýndar í töflu 4.8.

Tafla 4.8

| $y=-3x+2$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 2 | $(0,2)$ |
| 1 | $-1$ | $(1,-1)$ |
| $-1$ | 5 | $(-1,5)$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.15**

Finnið þrjár lausnir þessarar jöfnu: $y=-2x+3$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.16**

Finnið þrjár lausnir þessarar jöfnu: $y=-4x+1$.

Við höfum séð að ef núll er notað sem gildi $x$ verður auðvelt að finna gildi $y$. Þegar jafna er á staðalformi, með bæði $x$ og $y$ sömu megin, er yfirleitt auðveldast að finna fyrst lausn þegar $x=0$, aðra lausn þegar $y=0$ og að lokum þriðju lausnina.

**DÆMI 4.9**

Finnið þrjár lausnir jöfnunnar $3x+2y=6$.

## Lausn

Við getum sett hvaða gildi sem er inn fyrir $x$ eða $y$. Þar sem jafnan er á staðalformi veljum við fyrst $x=0$, síðan $y=0$ og finnum loks þriðja punktinn.

| | $x=0$ | $y=0$ | $x=1$ |
|---|---|---|---|
| | $3x+2y=6$ | $3x+2y=6$ | $3x+2y=6$ |
| Setjið gildið inn í jöfnuna. | $3(0)+2y=6$ | $3x+2(0)=6$ | $3(1)+2y=6$ |
| Einfaldið. | $0+2y=6$ | $3x+0=6$ | $3+2y=6$ |
| Leysið. | $2y=6$ | $3x=6$ | $2y=3$ |
| | $y=3$ | $x=2$ | $y=\frac{3}{2}$ |
| Ritið röðuðu tvenndina. | (0, 3) | (2, 0) | $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ |

| Athugið. | | |
|---|---|---|
| $3x+2y=6$ | $3x+2y=6$ | $3x+2y=6$ |
| $3\cdot 0+2\cdot 3\stackrel{?}{=}6$ | $3\cdot 2+2\cdot 0\stackrel{?}{=}6$ | $3\cdot 1+2\cdot\frac{3}{2}\stackrel{?}{=}6$ |
| $0+6\stackrel{?}{=}6$ | $6+0\stackrel{?}{=}6$ | $3+3\stackrel{?}{=}6$ |
| $6=6\checkmark$ | $6=6\checkmark$ | $6=6\checkmark$ |

Því eru $(0,3)$, $(2,0)$ og $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ allar lausnir jöfnunnar $3x+2y=6$. Við getum skráð lausnirnar þrjár í töflu 4.9.

Tafla 4.9

| $3x+2y=6$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 3 | $(0,3)$ |
| 2 | 0 | $(2,0)$ |
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.17**

Finnið þrjár lausnir jöfnunnar $2x+3y=6$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.18**

Finnið þrjár lausnir jöfnunnar $4x+2y=8$.

## Verkefni úr hluta 4.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Merkið punkta í rétthyrnt hnitakerfi**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið merkja hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi og tilgreina í hvaða fjórðungi hann liggur.

1.

1. ⓐ $(-4,2)$
2. ⓑ $(-1,-2)$
3. ⓒ $(3,-5)$
4. ⓓ $(-3,5)$

   ⓔ $\left(\frac{5}{3},2\right)$

2.

1. ⓐ $(-2,-3)$
2. ⓑ $(3,-3)$
3. ⓒ $(-4,1)$
4. ⓓ $(4,-1)$
5. ⓔ $\left(\frac{3}{2},1\right)$

3.

1. ⓐ $(3,-1)$
2. ⓑ $(-3,1)$
3. ⓒ $(-2,2)$
4. ⓓ $(-4,-3)$
5. ⓔ $\left(1,\frac{14}{5}\right)$

4.

1. ⓐ $(-1,1)$
2. ⓑ $(-2,-1)$
3. ⓒ $(2,1)$
4. ⓓ $(1,-4)$
5. ⓔ $\left(3,\frac{7}{2}\right)$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið merkja hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi.

5.

1. ⓐ $(-2,0)$

2. ⓑ $(-3,0)$
3. ⓒ $(0,0)$
4. ⓓ $(0,4)$
5. ⓔ $(0,2)$

6.

1. ⓐ $(0,1)$
2. ⓑ $(0,-4)$
3. ⓒ $(-1,0)$
4. ⓓ $(0,0)$
5. ⓔ $(5,0)$

7.



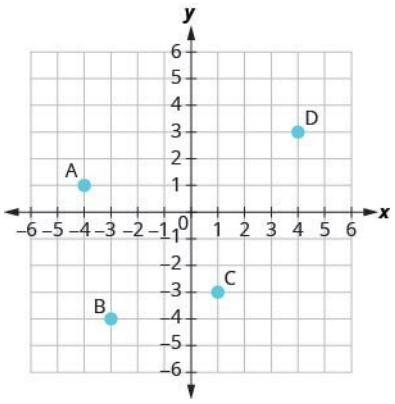
1. ⓐ $(0,0)$
2. ⓑ $(0,-3)$
3. ⓒ $(-4,0)$
4. ⓓ $(1,0)$
5. ⓔ $(0,-2)$

8.

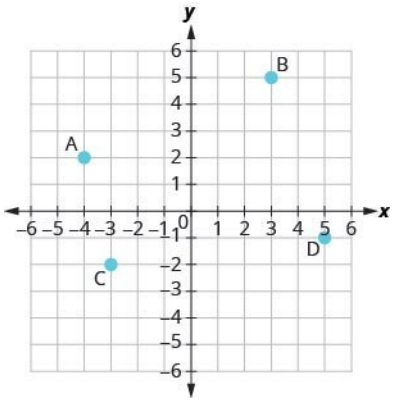
1. ⓐ $(-3,0)$
2. ⓑ $(0,5)$
3. ⓒ $(0,-2)$
4. ⓓ $(2,0)$
5. ⓔ $(0,0)$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nefna röðuðu tvenndina fyrir hvern punkt sem sýndur er í rétthyrnda hnitakerfinu.

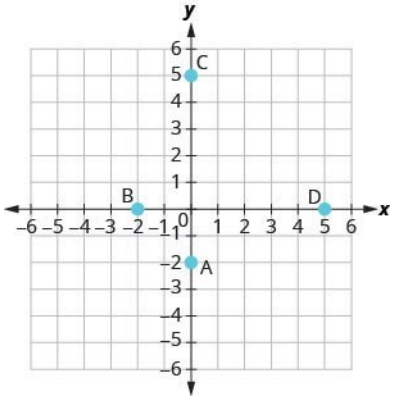
9.



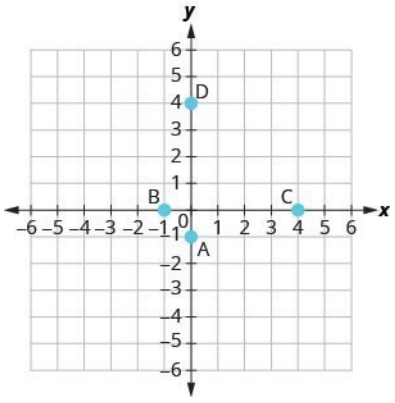
**10.**




**11.**




**12.**




### Sannreynið lausnir jöfnu með tveimur breytum

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna hvaða röðuðu tvenndir eru lausnir jafnanna sem eru gefnar.

**13.**

$$2x+y=6$$

1. ⓐ $(1,4)$
2. ⓑ $(3,0)$

3. ⓒ $(2,3)$

14.

$$x+3y=9$$

1. ⓐ $(0,3)$
2. ⓑ $(6,1)$
3. ⓒ $(-3,-3)$

15.

$$4x-2y=8$$

1. ⓐ $(3,2)$
2. ⓑ $(1,4)$
3. ⓒ $(0,-4)$



16.

$$3x-2y=12$$

1. ⓐ $(4,0)$
2. ⓑ $(2,-3)$
3. ⓒ $(1,6)$

17.

$$y=4x+3$$

1. ⓐ $(4,3)$
2. ⓑ $(-1,-1)$
3. ⓒ $\left(\frac{1}{2},5\right)$

18.

$$y=2x-5$$

1. ⓐ $(0,-5)$
2. ⓑ $(2,1)$
3. ⓒ $\left(\frac{1}{2},-4\right)$

19.

$$y=\frac{1}{2}x-1$$

1. ⓐ $(2,0)$

**2.** ⓑ $(-6,-4)$

**3.** ⓒ $(-4,-1)$

**20.**

$$y=\frac{1}{3}x+1$$

**1.** ⓐ $(-3,0)$

**2.** ⓑ $(9,4)$

**3.** ⓒ $(-6,-1)$

### Fyllið út lausnatöflu línulegrar jöfnu

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið fylla út töfluna til að finna lausnir hverrar línulegrar jöfnu.

**21.**

$$y=2x-4$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| $-1$ | | |

**22.**

$$y=3x-1$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| $-1$ | | |

**23.**

$$y=-x+5$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 3 | | |
| $-2$ | | |

**24.**

$$y=-x+2$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 3 | | |
| $-2$ | | |

25.

$$y=\frac{1}{3}x+1$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 3 | | |
| 6 | | |



26.

$$y=\frac{1}{2}x+4$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| 4 | | |

27.

$$y=-\frac{3}{2}x-2$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 2 | | |
| $-2$ | | |

28.

$$y=-\frac{2}{3}x-1$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 3 | | |
| $-3$ | | |

29.

$$x+3y=6$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 3 | | |
| | 0 | |

30.

$$x+2y=8$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 4 | | |
| | 0 | |

31.

$$2x-5y=10$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 10 | | |
| | 0 | |

32.

$$3x-4y=12$$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 8 | | |
| | 0 | |

**Finnið lausnir línulegrar jöfnu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna þrjár lausnir hverrar línulegrar jöfnu.

33.

$$y=5x-8$$

34.

$$y=3x-9$$

35.

$$y=-4x+5$$

36.

$$y=-2x+7$$

37.

$$x+y=8$$

38.

$$x+y=6$$

39.

$$x+y=-2$$

40.

$$x+y=-1$$

41.

$$3x+y=5$$

42.

$$2x+y=3$$

43.

$$4x-y=8$$

44.

$$5x-y=10$$

45.

$$2x+4y=8$$

46.

$$3x+2y=6$$

47.

$$5x - 2y = 10$$

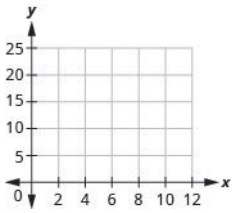
48.

$$4x - 3y = 12$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**49. Þyngd ungbarns.** Mackenzie skráði þyngd barnsins síns á tveggja mánaða fresti. Aldur barnsins í mánuðum og þyngd þess í pundum eru skráð í töflunni hér fyrir neðan og sýnd sem röðuð tvennd í þriðja dálkinum.

ⓐ Merkið punktana inn á hnitaplan.

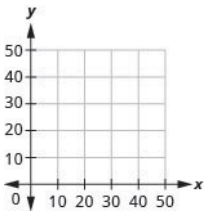



ⓑ Hvers vegna þarf aðeins að nota fjórðung I?

| **Aldur** $x$ | **Þyngd** $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 7 | (0, 7) |
| 2 | 11 | (2, 11) |
| 4 | 15 | (4, 15) |
| 6 | 16 | (6, 16) |
| 8 | 19 | (8, 19) |
| 10 | 20 | (10, 20) |
| 12 | 21 | (12, 21) |

**50. Þyngd barns.** Latresha skráði hæð og þyngd sonar síns árlega. Hæð hans í tommum og þyngd í pundum eru skráðar í töflunni hér fyrir neðan og sýndar sem röðuð tvennd í þriðja dálkinum.

ⓐ Merkið punktana inn á hnitaplan.




ⓑ Hvers vegna þarf aðeins að nota fjórðung I?

| Hæð $x$ | Þyngd $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 28 | 22 | (28, 22) |
| 31 | 27 | (31, 27) |
| 33 | 33 | (33, 33) |
| 37 | 35 | (37, 35) |
| 40 | 41 | (40, 41) |
| 42 | 45 | (42, 45) |

### *Ritunarverkefni*

**51.** Útskýrið með orðum hvernig þið merkið punktinn $(4, -2)$ í rétthyrnt hnitakerfi.

**52.** Hvernig ákvarðið þið hvort röðuð tvennd sé lausn tiltekinnar jöfnu?

**53.** Liggur punkturinn $(-3, 0)$ á x-ásnum eða y-ásnum? Hvernig vitið þið það?

**54.** Liggur punkturinn $(0, 8)$ á x-ásnum eða y-ásnum? Hvernig vitið þið það?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| merkt punkta í rétthyrnt hnitakerfi. | | | |
| þekkt punkta á grafi. | | | |
| staðfest lausnir jöfnu með tveimur breytum. | | | |
| lokið við töflu yfir lausnir línulegrar jöfnu. | | | |
| fundið lausnir línulegrar jöfnu. | | | |

ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

**... örugglega.** Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Íhugið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo þið getið haldið áfram að nota þær. Hvað gerðuð þið til að öðlast öryggi í þessum viðfangsefnum? Nefnið tiltekin atriði.

**... með nokkurri hjálp.** Bregðist fljótt við, því viðfangsefni sem þið náið ekki tökum á geta orðið hindranir á leiðinni að árangri. Í stærðfræði byggir hvert viðfangsefni á fyrri vinnu. Mikilvægt er að tryggja traustan grunn áður en haldið er áfram. Hvern getið þið beðið um aðstoð? Gott er að leita til samnemenda og kennarans. Er staður í skólanum þar sem hægt er að fá aðstoð stærðfræðileiðbeinenda? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**... nei — ég skil þetta ekki!** Þetta er viðvörunarmerki sem ekki má hunsa. Þið þurfið að fá aðstoð strax svo viðfangsefnið verði ekki yfirþyrmandi. Ræðið stöðuna við kennarann eins fljótt og unnt er. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

# 4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Greinið sambandið milli lausna jöfnu og grafs hennar
- Teiknið graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta
- Teiknið gröf lóðréttra og láréttra lína

**UNDIRBÚNINGUR 4.4**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Reiknið gildi $3x+2$ þegar $x=-1$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.57.

**UNDIRBÚNINGUR 4.5**

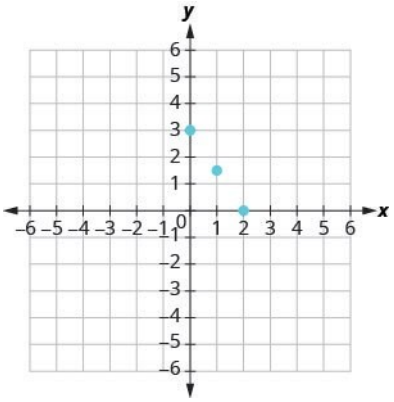
Leysið $3x+2y=12$ með tilliti til $y$ almennt. Ef verkefnið reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.63.

## Greinið sambandið milli lausna jöfnu og grafs hennar

Í hlutanum á undan fundum við nokkrar lausnir jöfnunnar $3x+2y=6$. Þær eru skráðar í töflu 4.10. Röðuðu tvenndirnar $(0,3)$, $(2,0)$ og $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ eru því nokkrar af lausnum jöfnunnar $3x+2y=6$. Við getum merkt lausnirnar í rétthyrnda hnitakerfið eins og sýnt er á mynd 4.5.

Tafla 4.10

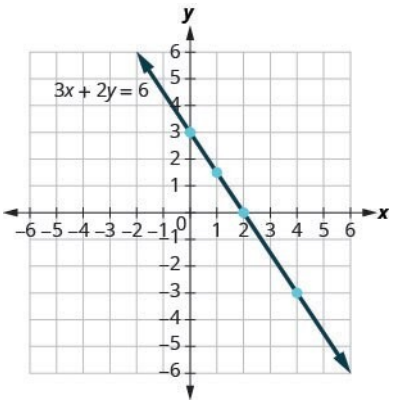
| $3x+2y=6$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 3 | $(0,3)$ |
| 2 | 0 | $(2,0)$ |
| 1 | $\frac{3}{2}$ | $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ |




Mynd 4.5

Takið eftir að punktarnir raðast nákvæmlega á línu. Við tengjum þá með línu og fáum graf jöfnunnar $3x+2y=6$. Sjá mynd 4.6. Takið eftir örvunum á báðum endum línunnar. Þær sýna að línan heldur áfram.

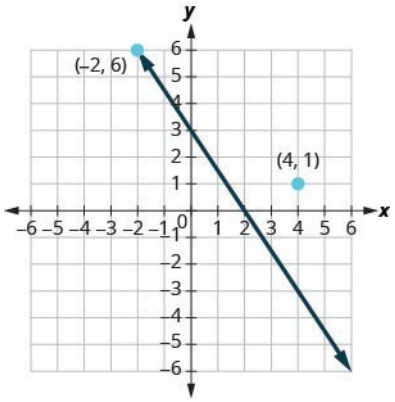





Mynd 4.6

Hver punktur á línunni er lausn jöfnunnar. Eins er hver lausn jöfnunnar punktur á línunni. Punktar sem liggja ekki á línunni eru ekki lausnir.

Takið eftir að punkturinn með hnitin $(-2,6)$ liggur á línunni á mynd 4.7. Ef $x=-2$ og $y=6$ eru sett inn í jöfnuna sést að tvenndin er lausn hennar.




Mynd 4.7

Prófun $(-2, 6)$

$$3x + 2y = 6$$
$$3(-2) + 2(6) = 6$$
$$-6 + 12 = 6$$
$$6 = 6 \checkmark$$

Punkturinn $(-2, 6)$ er því lausn jöfnunnar $3x + 2y = 6$. (Orðalagið „punkturinn með hnitin $(-2, 6)$“ er oft stytt í „punkturinn $(-2, 6)$“.)

Hvað með $(4, 1)$?

$$3x + 2y = 6$$
$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 6$$
$$12 + 2 \stackrel{?}{=} 6$$
$$14 \neq 6$$

Því er $(4, 1)$ ekki lausn jöfnunnar $3x + 2y = 6$. Punkturinn $(4, 1)$ liggur því ekki á línunni. Sjá mynd 4.6. Hér á vel við orðtakið „Mynd segir meira en þúsund orð.“ Línan sýnir allar lausnir jöfnunnar. Hver punktur á línunni er lausn jöfnunnar og hver lausn jöfnunnar liggur á línunni. Línan kallast graf jöfnunnar $3x + 2y = 6$.

---

**GRAF LÍNULEGRAR JÖFNU**

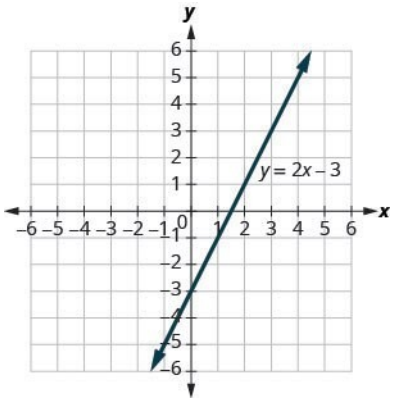
Graf línulegrar jöfnu $Ax + By = C$ er lína.

- Hver punktur á línunni er lausn jöfnunnar.
- Hver lausn jöfnunnar er punktur á línunni.

---

**DÆMI 4.10**

Graf $y = 2x - 3$ er sýnt.




Svarið þessum spurningum fyrir hverja raðaða tvennd:

ⓐ Er raðaða tvenndin lausn jöfnunnar? ⓑ Liggur punkturinn á línunni?

$\mathrm{A}(0,-3)$ $\mathrm{B}(3,3)$ $\mathrm{C}(2,-3)$ $\mathrm{D}(-1,-5)$

4

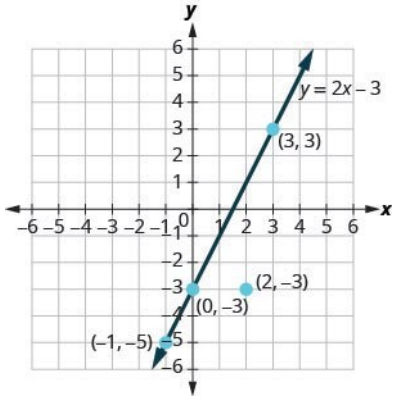
## Lausn

Setjið x- og y-gildin inn í jöfnuna til að kanna hvort raðaða tvenndin sé lausn hennar.

**1.** ⓐ

| A: (0, –3) | B: (3, 3) | C: (2, –3) | D: (–1, –5) |
|---|---|---|---|
| $y = 2x - 3$ | $y = 2x - 3$ | $y = 2x - 3$ | $y = 2x - 3$ |
| $-3 \stackrel{?}{=} 2(0) - 3$ | $3 \stackrel{?}{=} 2(3) - 3$ | $-3 \stackrel{?}{=} 2(2) - 3$ | $-5 \stackrel{?}{=} 2(-1) - 3$ |
| $-3 = -3$ ✓ | $3 = 3$ ✓ | $-3 \neq 1$ | $-5 = -5$ ✓ |
| (0, –3) er lausn. | (3, 3) er lausn. | (2, –3) er ekki lausn. | (–1, –5) er lausn. |

**2.** ⓑ Merkið punktana $\mathrm{A}(0,3)$, $\mathrm{B}(3,3)$, $\mathrm{C}(2,-3)$, og $\mathrm{D}(-1,-5)$.




Punktarnir $(0,3)$, $(3,3)$ og $(-1,-5)$ liggja á línunni $y=2x-3$, en punkturinn $(2,-3)$ liggur ekki á henni.

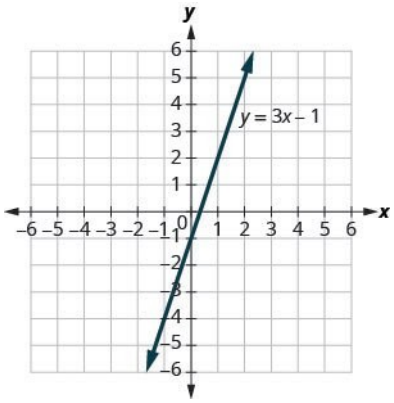
Punktarnir sem eru lausnir á $y=2x-3$ liggja á línunni en punkturinn sem er ekki lausn liggur ekki á henni.

**REYNIÐ SJÁLF 4.19**

Notið graf $y=3x-1$ til að ákvarða fyrir hverja raðaða tvennd hvort hún sé:

- lausn jöfnunnar.
- á línunni.

ⓐ $(0,-1)$ ⓑ $(2,5)$



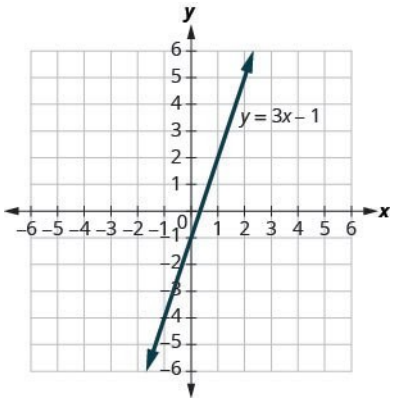



**REYNIÐ SJÁLF 4.20**

Notið graf $y=3x-1$ til að ákvarða fyrir hverja raðaða tvennd hvort hún sé:

- lausn jöfnunnar
- á línunni

ⓐ $(3,-1)$ ⓑ $(-1,-4)$




## Teiknið graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta

Nokkrar aðferðir má nota til að teikna graf línulegrar jöfnu. Aðferðin sem við notuðum til að teikna graf $3x+2y=6$ kallast að merkja punkta eða punktaaðferðin.

**DÆMI 4.11**

## Hvernig á að teikna graf jöfnu með því að merkja punkta

Teiknið graf jöfnunnar $y = 2x + 1$ með því að merkja punkta.

## Lausn

**Skref 1.** Finnið þrjá punkta sem hafa hnit sem eru lausnir jöfnunnar.

Þið getið valið hvaða gildi sem er fyrir $x$ eða $y$.

Í þessu tilviki er auðveldara að velja gildi fyrir $x$, þar sem $y$ stendur eitt og sér vinstra megin í jöfnunni.

$y = 2x + 1$

$x = 0$
$y = 2x + 1$
$y = 2 \cdot 0 + 1$
$y = 0 + 1$
$y = 1$

$x = 1$
$y = 2x + 1$
$y = 2 \cdot 1 + 1$
$y = 2 + 1$
$y = 3$

$x = -2$
$y = 2x + 1$
$y = 2(-2) + 1$
$y = -4 + 1$
$y = -3$

Setjið lausnirnar skipulega upp í töflu.

Setjið lausnirnar þrjár í töflu.

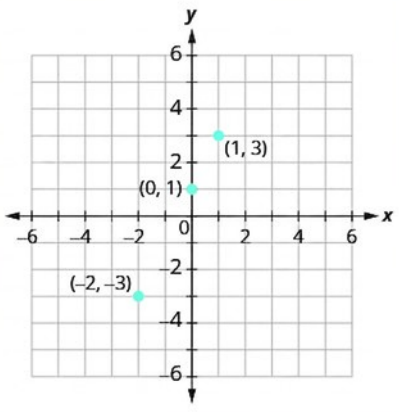
| $y = 2x + 1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
| 0 | 1 | (0, 1) |
| 1 | 3 | (1, 3) |
| –2 | –3 | (–2, –3) |

**2. skref.** Teiknið punktana í rétthyrnt hnitakerfi.

Athugið hvort punktarnir liggi á sömu línu. Ef svo er ekki, farið þá vandlega yfir lausnina!

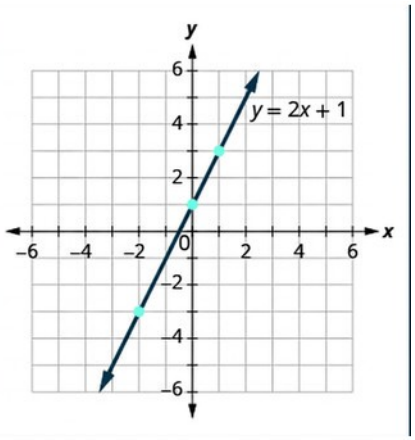
Teiknið:
(0, 1), (1, 3), (–2, –3).

Liggja punktarnir á sömu línu?
Já, punktarnir liggja á sömu línu.



**Skref 3.** Dragið línuna í gegnum punktana þrjá. Framlengið línuna þannig að hún nái yfir allt hnitanetið og setjið örvar á báða enda hennar.

Þessi lína er graf jöfnunnar $y = 2x + 1$.




**REYNIÐ SJÁLF 4.21**

Teiknið graf jöfnunnar með því að merkja punkta: $y = 2x - 3$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.22**

Teiknið graf jöfnunnar með því að merkja punkta: $y = -2x + 4$.

Skrefin við að teikna graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta eru dregin saman hér á eftir.

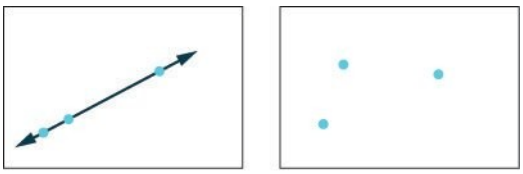
**AÐFERÐ**

### Teiknið graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta.

1. Skref 1. Finnið þrjá punkta með hnit sem eru lausnir jöfnunnar. Skráið þá í töflu.
2. Skref 2. Merkið punktana í rétthyrnt hnitakerfi. Athugið að þeir liggi á sömu línu. Ef svo er ekki skuluð þið fara vandlega yfir vinnuna.
3. Skref 3. Dragið línu í gegnum punktana þrjá. Framlengið línuna að jöðrum rúðunetsins og setjið örvar á báða enda.

Að vísu nægja tveir punktar til að ákvarða línu en góð regla er að nota þrjá. Ef þið merkið aðeins tvo punkta og annar þeirra er rangur getið þið samt dregið línu, en hún sýnir þá ekki lausnir jöfnunnar. Hún verður röng.

Ef þið notið þrjá punkta og einn er rangur liggja þeir ekki á sömu línu. Þá vitið þið að eitthvað er rangt og að þið þurfið að fara yfir vinnuna. Skoðið muninn á a-lið og b-lið á mynd 4.8.




Mynd 4.8

Skoðum annað dæmi. Nú sýnum við síðustu tvö skrefin saman í einu rúðuneti.

---

**DÆMI 4.12**

Teiknið graf jöfnunnar $y = -3x$.

## Lausn

4

Finnið þrjá punkta sem eru lausnir jöfnunnar. Hér er aftur auðveldara að velja gildi fyrir $x$. Sjáið þið hvers vegna?

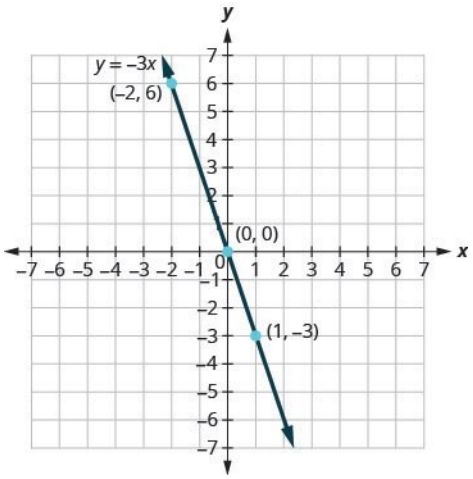
| | | |
|---|---|---|
| $x = 0$ | $x = 1$ | $x = -2$ |
| $y = -3x$ | $y = -3x$ | $y = -3x$ |
| $y = -3 \cdot 0$ | $y = -3 \cdot 1$ | $y = -3(-2)$ |
| $y = 0$ | $y = -3$ | $y = 6$ |

Við skráum punktana í töflu 4.11.

Tafla 4.11

| $y = -3x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
| 0 | 0 | $(0, 0)$ |
| 1 | $-3$ | $(1, -3)$ |
| $-2$ | 6 | $(-2, 6)$ |

Merkið punktana, athugið að þeir liggi á sömu línu og dragið línuna.




**REYNIÐ SJÁLF 4.23**

Teiknið graf jöfnunnar með því að merkja punkta: $y = -4x$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.24**

Teiknið graf jöfnunnar með því að merkja punkta: $y = x$.

Þegar stuðull $x$ í jöfnu er brot getum við samt sett hvaða tölur sem er inn fyrir $x$. Reikningarnir verða þó auðveldari ef við veljum hentug gildi fyrir $x$. Þá forðumst við brot í svörunum, sem erfitt er að merkja nákvæmlega á graf.

**DÆMI 4.13**

Teiknið graf jöfnunnar $y = \frac{1}{2}x + 3$.

## Lausn

Finnið þrjá punkta sem eru lausnir jöfnunnar. Brotið $\frac{1}{2}$ er stuðull $x$, og því veljum við gildi $x$ vandlega. Við notum núll í einu tilviki og margfeldi 2 í hinum. Hvers vegna eru margfeldi 2 hentug gildi fyrir $x$?

| | | |
|---|---|---|
| $x = 0$ | $x = 2$ | $x = 4$ |
| $y = \frac{1}{2}x + 3$ | $y = \frac{1}{2}x + 3$ | $y = \frac{1}{2}x + 3$ |
| $y = \frac{1}{2}(0) + 3$ | $y = \frac{1}{2}(2) + 3$ | $y = \frac{1}{2}(4) + 3$ |
| $y = 0 + 3$ | $y = 1 + 3$ | $y = 2 + 3$ |
| $y = 3$ | $y = 4$ | $y = 5$ |

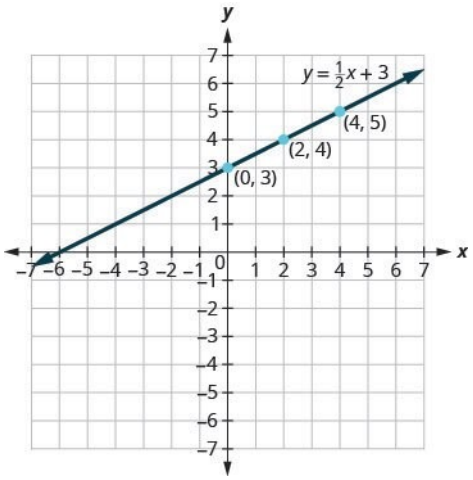
Punktarnir eru sýndir í töflu 4.12.

Tafla 4.12

| $y=\frac{1}{2}x+3$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 3 | $(0,3)$ |
| 2 | 4 | $(2,4)$ |
| 4 | 5 | $(4,5)$ |

Merkið punktana, athugið að þeir liggi á sömu línu og dragið línuna.






**REYNIÐ SJÁLF 4.25**

Teiknið graf jöfnunnar $y=\frac{1}{3}x-1$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.26**

Teiknið graf jöfnunnar $y=\frac{1}{4}x+2$.

Í öllum jöfnunum sem við höfum teiknað gröf af hingað til hefur $y$ staðið eitt öðrum megin og verið ritað sem stæða í $x$. Nú teiknum við graf jöfnu þar sem $x$ og $y$ eru sömu megin. Skoðum jöfnuna $2x+y=3$. Ef $y=0$, hvert er þá gildi $x$?

$$
\begin{aligned}
y &= 0 \\
2x + y &= 3 \\
2x + 0 &= 3 \\
2x &= 3 \\
x &= \frac{3}{2} \\
&\left(\frac{3}{2}, 0\right)
\end{aligned}
$$

x-hnit þessa punkts er brot. Þótt hægt sé að merkja hann er erfitt að merkja brot nákvæmlega á graf. Munið að í dæmi $y=\frac{1}{2}x+3$ völdum við gildi fyrir $x$ vandlega til að þurfa ekki að merkja brot. Ef við leysum jöfnuna $2x+y=3$ með tilliti til $y$, verður auðveldara að finna þrjár lausnir hennar.

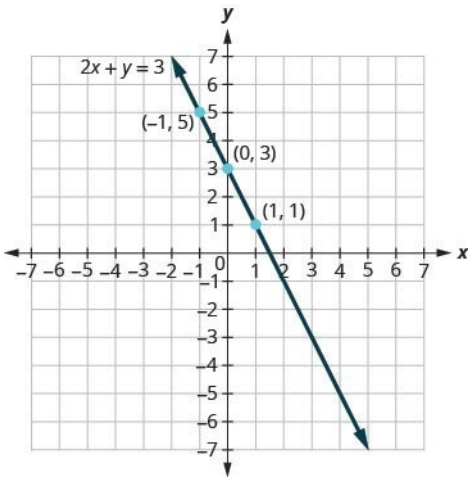
$$
\begin{aligned}
2x + y &= 3 \\
y &= -2x + 3
\end{aligned}
$$

Lausnirnar fyrir $x=0$, $x=1$ og $x=-1$ eru sýndar í töflu 4.13. Grafið er sýnt á mynd 4.9.



Tafla 4.13

| $2x+y=3$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 3 | $(0,3)$ |
| 1 | 1 | $(1,1)$ |
| $-1$ | 5 | $(-1,5)$ |




Mynd 4.9

Getið þið fundið punktinn $\left(\frac{3}{2},0\right)$, sem við fengum með því að láta $y=0$, á línunni?

**DÆMI 4.14**

Teiknið graf jöfnunnar $3x+y=-1$.

## Lausn

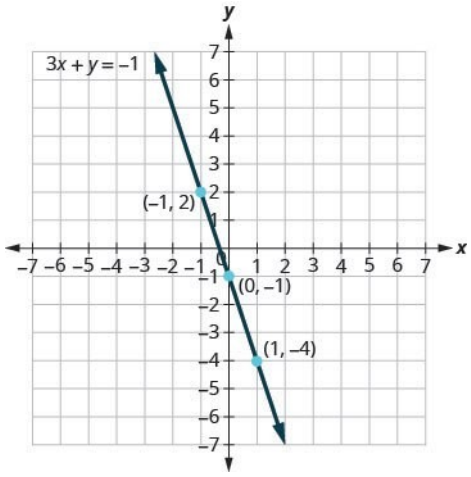
Tafla 4.14

| | |
|---|---|
| Finnið þrjá punkta sem eru lausnir jöfnunnar. | $3x+y=-1$ |
| Leysið fyrst jöfnuna með tilliti til $y$. | $y=-3x-1$ |

Við látum $x$ vera 0, 1 og $-1$ til að finna 3 punkta. Röðuðu tvenndirnar eru sýndar í töflu 4.15. Merkið punktana, athugið að þeir liggi á sömu línu og dragið línuna. Sjá mynd 4.10.

Tafla 4.15

| $3x+y=-1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-1$ | $(0,-1)$ |
| 1 | $-4$ | $(1,-4)$ |
| $-1$ | 2 | $(-1,2)$ |




Mynd 4.10

**REYNIÐ SJÁLF 4.27**

Teiknið graf jöfnunnar $2x+y=2$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.28**

Teiknið graf jöfnunnar $4x+y=-3$.

Ef velja má hvaða þrjá punkta sem er til að teikna graf línu, hvernig vitið þið þá hvort grafið ykkar er eins og svarið í bókinni? Gröfin eru eins ef skurðpunktar þeirra við x- og y-ásana eru þeir sömu.

Jafnan í dæmi 4.14 var rituð á staðalformi með bæði $x$ og $y$ sömu megin. Við leystum hana með tilliti til $y$ í einu skrefi. Aðrar jöfnur á staðalformi er ekki jafnauðvelt að leysa með tilliti til $y$ og því höfum við þær áfram á staðalformi. Við finnum samt fyrsta punktinn með því að láta $x=0$ og leysa með tilliti til $y$. Við finnum annan punkt með því að láta $y=0$ og leysa með tilliti til $x$. Loks finnum við þriðja punktinn með öðru gildi fyrir $x$ eða $y$.

---

**DÆMI 4.15**

Teiknið graf jöfnunnar $2x-3y=6$.

## Lausn

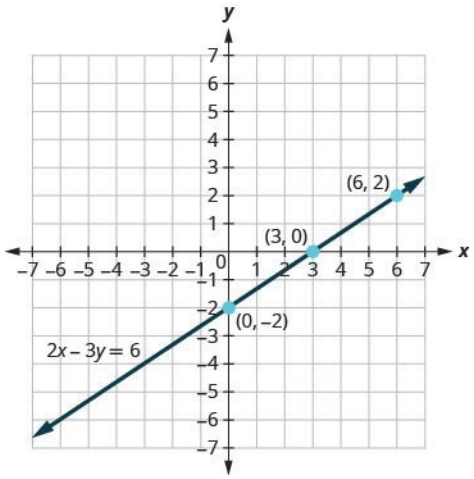
Tafla 4.16

| | |
|---|---|
| Finnið þrjá punkta sem eru lausnir jöfnunnar. | $2x-3y=6$ |
| Látum fyrst $x=0$. | $2(0)-3y=6$ |
| Einangrið $y$. | $-3y=6$<br>$y=-2$ |
| Látum nú $y=0$. | $2x-3(0)=6$ |
| Einangrið $x$. | $2x=6$<br>$x=3$ |
| Við þurfum þriðja punktinn. Munið að við getum valið hvaða gildi sem er fyrir $x$ eða $y$. Látum $x=6$ . | $2(6)-3y=6$ |
| Einangrið $y$. | $12-3y=6$<br>$-3y=-6$<br>$y=2$ |

Við skráum röðuðu tvenndirnar í töflu 4.17. Merkið punktana, athugið að þeir liggi á sömu línu og dragið línuna. Sjá mynd 4.11.

Tafla 4.17

| $2x-3y=6$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-2$ | $(0,-2)$ |
| 3 | 0 | $(3,0)$ |
| 6 | 2 | $(6,2)$ |




Mynd 4.11

**REYNIÐ SJÁLF 4.29**

Teiknið graf jöfnunnar $4x+2y=8$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.30**

Teiknið graf jöfnunnar $2x-4y=8$.

## Teiknið gröf lóðréttra og láréttra lína

Getum við teiknað graf jöfnu með aðeins einni breytu? Aðeins $x$ og ekkert $y$, eða aðeins $y$ án $x$? Hvernig búum við til gildatöflu til að fá punkta sem hægt er að merkja?

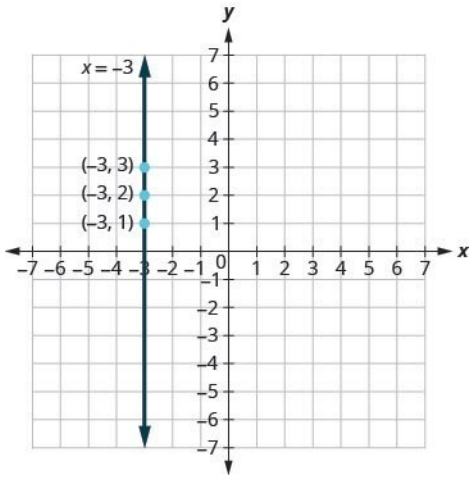
Skoðum jöfnuna $x=-3$. Hún hefur aðeins eina breytu $x$. Jafnan segir að $x$ sé alltaf jafnt $-3$, og gildi þess er því óháð $y$. Sama hvert gildi $y$ er, er gildi $x$ alltaf $-3$.

Til að búa til gildatöflu skráum við því $-3$ fyrir öll gildi $x$ og veljum síðan hvaða gildi sem er fyrir $y$. Þar sem $x$ er óháð $y$, má velja hvaða tölur sem er. Til að punktarnir rúmist í hnitakerfinu notum við þó 1, 2 og 3 sem y-hnit. Sjá töflu 4.18.

Tafla 4.18

| $x=-3$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| $-3$ | 1 | $(-3,1)$ |
| $-3$ | 2 | $(-3,2)$ |
| $-3$ | 3 | $(-3,3)$ |

Merkið punktana úr töflu 4.18 og tengið þá með beinni línu. Takið eftir á mynd 4.12 að grafið er lóðrétt lína.




Mynd 4.12

**LÓÐRÉTT LÍNA**

Lóðrétt lína er graf jöfnu á forminu $x=a$.

Línan sker x-ásinn í $(a,0)$.

**DÆMI 4.16**

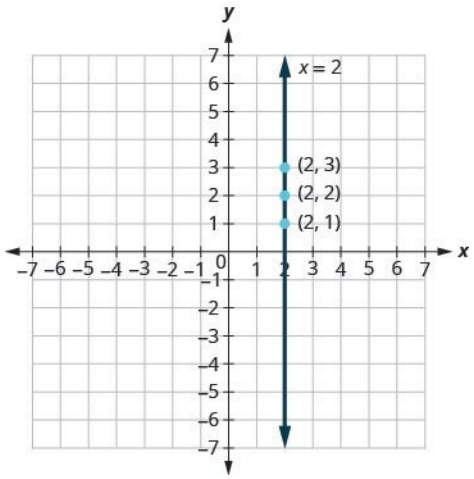
Teiknið graf jöfnunnar $x=2$.

## Lausn

Jafnan hefur aðeins eina breytu $x$, og $x$ er alltaf jafnt 2. Við búum til töflu 4.19 þar sem $x$ er alltaf 2 og veljum síðan hvaða gildi sem er fyrir $y$. Grafið er lóðrétt lína sem sker x-ásinn í 2. Sjá mynd 4.13.

Tafla 4.19

| $x=2$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 2 | 1 | $(2,1)$ |
| 2 | 2 | $(2,2)$ |
| 2 | 3 | $(2,3)$ |




Mynd 4.13

**REYNIÐ SJÁLF 4.31**

Teiknið graf jöfnunnar $x=5$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.32**

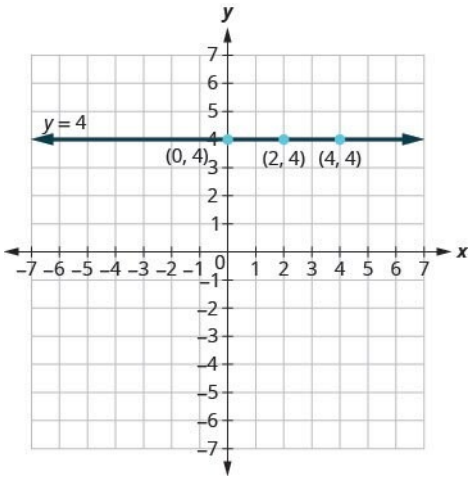
Teiknið graf jöfnunnar $x=-2$.

Hvað ef jafnan hefur $y$ en ekkert $x$? Teiknum graf jöfnunnar $y=4$. Nú er y-gildið fast og því er $y$ óháð $x$. Skráið 4 fyrir öll $y$-gildin í töflu 4.20 og veljið síðan hvaða gildi sem er fyrir $x$. Við notum 0, 2 og 4 sem x-hnit.

Tafla 4.20

| $y=4$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 4 | $(0,4)$ |
| 2 | 4 | $(2,4)$ |
| 4 | 4 | $(4,4)$ |

Grafið er lárétt lína sem sker y-ásinn í 4. Sjá mynd 4.14.




Mynd 4.14

**LÁRÉTT LÍNA**

Lárétt lína er graf jöfnu á forminu $y=b$.

Línan sker y-ásinn í $(0,b)$.

**DÆMI 4.17**

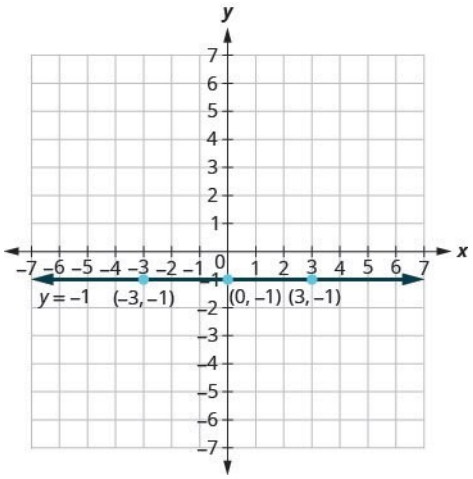
Teiknið graf jöfnunnar $y=-1$.

## Lausn

Jafnan $y=-1$ hefur aðeins eina breytu, $y$. Gildi $y$ er fast. Allar röðuðu tvenndirnar í töflu 4.21 hafa sama y-hnit. Grafið er lárétt lína sem sker y-ásinn í $-1$, eins og sýnt er á mynd 4.15.

Tafla 4.21

| $y=-1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-1$ | $(0,-1)$ |
| 3 | $-1$ | $(3,-1)$ |
| $-3$ | $-1$ | $(-3,-1)$ |




Mynd 4.15



**REYNIÐ SJÁLF 4.33**

Teiknið graf jöfnunnar $y=-4$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.34**

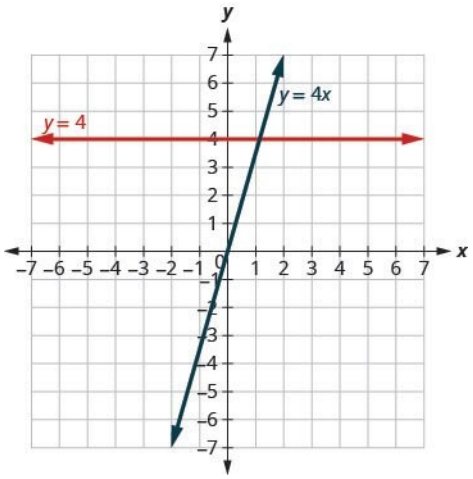
Teiknið graf jöfnunnar $y=3$.

Jöfnur lóðréttra og láréttra lína líkjast mjög jöfnum á borð við $y=4x$. Hver er munurinn á jöfnunum $y=4x$ og $y=4$?

Jafnan $y=4x$ hefur bæði $x$ og $y$. Gildi $y$ er háð gildi $x$. Y-hnitið breytist með gildi $x$. Jafnan $y=4$ hefur aðeins eina breytu. Gildi $y$ er fast. Y-hnitið er alltaf 4. Það er óháð gildi $x$. Sjá töflu 4.22.

Tafla 4.22

| $y=4x$ | | | $y=4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ | $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 0 | $(0,0)$ | 0 | 4 | $(0,4)$ |
| 1 | 4 | $(1,4)$ | 1 | 4 | $(1,4)$ |
| 2 | 8 | $(2,8)$ | 2 | 4 | $(2,4)$ |




Mynd 4.16

Takið eftir á mynd 4.16 að jafnan $y=4x$ gefur skálínu en $y=4$ gefur lárétta línu.

**DÆMI 4.18**

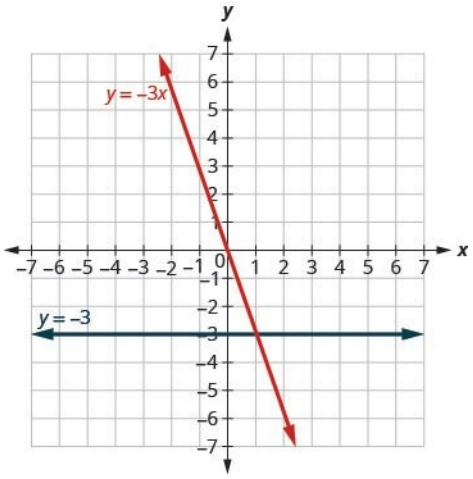
Teiknið gröf $y=-3x$ og $y=-3$ í sama rétthyrnda hnitakerfinu.

## Lausn

Takið eftir að fyrri jafnan hefur breytuna $x$, en sú síðari ekki. Sjá töflu 4.23. Gröfin tvö eru sýnd á mynd 4.17.

Tafla 4.23

| $y=-3x$ | | | $y=-3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ | $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 0 | $(0,0)$ | 0 | $-3$ | $(0,-3)$ |
| 1 | $-3$ | $(1,-3)$ | 1 | $-3$ | $(1,-3)$ |
| 2 | $-6$ | $(2,-6)$ | 2 | $-3$ | $(2,-3)$ |




Mynd 4.17

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.35**

Teiknið gröf $y=-4x$ og $y=-4$ í sama rétthyrnda hnitakerfinu.

**REYNIÐ SJÁLF 4.36**

Teiknið gröf $y=3$ og $y=3x$ í sama rétthyrnda hnitakerfinu.

## Verkefni úr hluta 4.2

***Æfingin skapar meistarann***

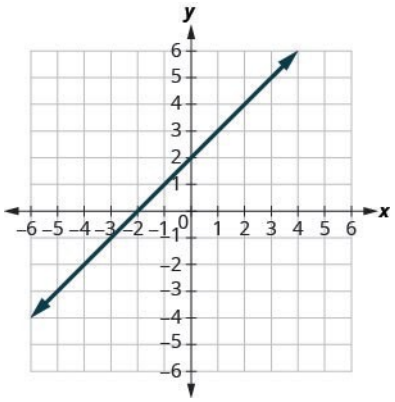
**Greinið sambandið milli lausna jöfnu og grafs hennar**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið ákvarða fyrir hverja raðaða tvennd:
ⓐ Er raðaða tvenndin lausn jöfnunnar? ⓑ Liggur punkturinn á línunni?

55.

$$y=x+2$$

1. ⓐ $(0,2)$
2. ⓑ $(1,2)$
3. ⓒ $(-1,1)$
4. ⓓ $(-3,-1)$

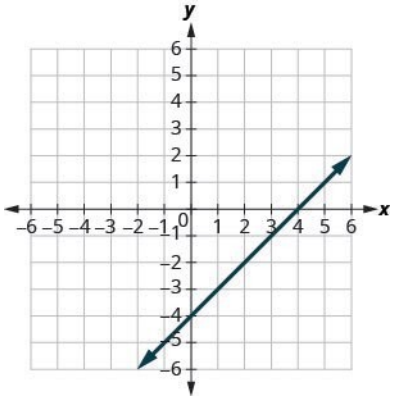



56.

$$y = x - 4$$

1. ⓐ $(0, -4)$
2. ⓑ $(3, -1)$
3. ⓒ $(2, 2)$
4. ⓓ $(1, -5)$

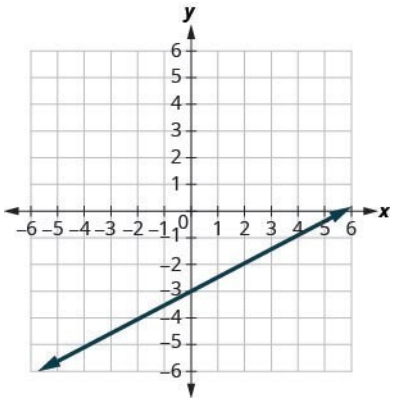





57.

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

1. ⓐ $(0, -3)$
2. ⓑ $(2, -2)$
3. ⓒ $(-2, -4)$
4. ⓓ $(4, 1)$

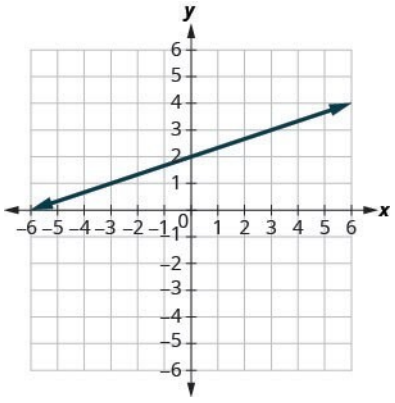


58.

$$y=\frac{1}{3}x+2$$

4

1. ⓐ $(0,2)$
2. ⓑ $(3,3)$
3. ⓒ $(-3,2)$
4. ⓓ $(-6,0)$



**Teiknið graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið teikna graf hverrar jöfnu með því að merkja punkta.

59.

$$y=3x-1$$

60.

$$y=2x+3$$

61.

$$y=-2x+2$$

62.

$$y=-3x+1$$

63.

$$y=x+2$$

64.

$$y=x-3$$

65.

$$y=-x-3$$

66.

$$y=-x-2$$

67.

$$y=2x$$

68.

$$y=3x$$

69.

$$y=-4x$$

70.

$$y=-2x$$

71.

$$y=\frac{1}{2}x+2$$

72.

$$y=\frac{1}{3}x-1$$

73.

$$y=\frac{4}{3}x-5$$

74.

$$y=\frac{3}{2}x-3$$

75.

$$y=-\frac{2}{5}x+1$$

76.

$$y=-\frac{4}{5}x-1$$

77.

$$y=-\frac{3}{2}x+2$$

78.

$$y=-\frac{5}{3}x+4$$

79.

$$x+y=6$$



80.

$$x+y=4$$

81.

$$x+y=-3$$

82.

$$x+y=-2$$

83.

$$x-y=2$$

84.

$$x-y=1$$

85.

$$x-y=-1$$

86.

$$x-y=-3$$

87.

$$3x+y=7$$

88.

$$5x+y=6$$

89.

$$2x+y=-3$$

90.

$$4x+y=-5$$

91.

$$\frac{1}{3}x+y=2$$

92.

$$\frac{1}{2}x+y=3$$

93.

$$\frac{2}{5}x-y=4$$

94.

$$\frac{3}{4}x-y=6$$

95.

$$2x+3y=12$$

96.

$$4x+2y=12$$

97.

$$3x-4y=12$$

98.

$$2x-5y=10$$

99.

$$x-6y=3$$

100.

$$x-4y=2$$

101.

$$5x+2y=4$$

102.

$$3x+5y=5$$

**Teiknið gröf lóðréttra og láréttra lína**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið teikna graf hverrar jöfnu.

103.

$$x=4$$

104.

$$x=3$$

105.

$$x=-2$$



106.

$$x=-5$$

107.

$$y=3$$

108.

$$y=1$$

109.

$$y=-5$$

110.

$$y=-2$$

111.

$$x=\frac{7}{3}$$

112.

$$x=\frac{5}{4}$$

113.

$$y=-\frac{15}{4}$$

114.

$$y=-\frac{5}{3}$$

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið teikna gröf beggja jafna í hverju pari í sama rétthyrnda hnitakerfinu.

**115.** $y=2x$ og $y=2$

**116.** $y=5x$ og $y=5$

**117.** $y=-\frac{1}{2}x$ og $y=-\frac{1}{2}$

**118.** $y=-\frac{1}{3}x$ og $y=-\frac{1}{3}$

### *Blönduð verkefni*

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið teikna graf hverrar jöfnu.

119.

$$y=4x$$

120.

$$y=2x$$

121.

$$y=-\frac{1}{2}x+3$$

122.

$$y=\frac{1}{4}x-2$$

123.

$$y=-x$$

124.

$$y=x$$

125.

$$x-y=3$$

126.

$$x+y=-5$$

127.

$$4x+y=2$$

128.

$$2x+y=6$$

129.

$$y=-1$$

130.

$$y=5$$

131.

$$2x+6y=12$$



132.

$$5x+2y=10$$

133.

$$x=3$$

134.

$$x=-4$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**135. Kostnaður við húsbíl.** Robinson-fjölskyldan leigði húsbíl í eina viku fyrir sumarleyfisferð. Leigan kostaði $594 auk $0,32 fyrir hverja mílu, þannig að línulega jafnan $y=594+0{,}32x$ gefur kostnaðinn $y$ við að aka $x$ mílur. Reiknið leigukostnaðinn við að aka 400, 800 og 1.200 mílur og teiknið síðan graf línunnar.

**136. Vikulegar tekjur.** Á listagalleríinu þar sem Salvador vinnur fær hann $200 á viku auk 15% af sölu sinni. Jafnan $y=200+0{,}15x$ gefur því upphæðina $y$ sem hann fær fyrir að selja listaverk fyrir $x$ dali. Reiknið tekjur Salvadors þegar salan er $900, $1.600 og $2.000 og teiknið síðan graf línunnar.

### *Ritunarverkefni*

**137.** Útskýrið hvernig þið mynduð velja þrjú x-gildi til að búa til töflu og teikna graf línunnar $y=\frac{1}{5}x-2$.

**138.** Hver er munurinn á jöfnum lóðréttrar og láréttrar línu?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| áttað mig á tengslunum milli lausna jöfnu og grafs hennar. | | | |
| teiknað graf línulegrar jöfnu með því að merkja inn punkta. | | | |
| teiknað lóðréttar og láréttar línur. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann skuluð þið ákveða hvað þið ætlið að gera til að ná góðum tökum á öllum markmiðum hlutans.

# 4.3 Teiknið graf með skurðpunktum við ása



**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Greinið skurðpunkta við x- og y-ás á grafi
- Finnið skurðpunktana við x- og y-ás út frá jöfnu línu
- Teiknið graf línu með skurðpunktum við ása

**UNDIRBÚNINGUR 4.6**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Leysið: $3 \cdot 0+4\,y=-2$.
Ef verkefnið reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.17.

## Greinið skurðpunkta við x- og y-ás á grafi

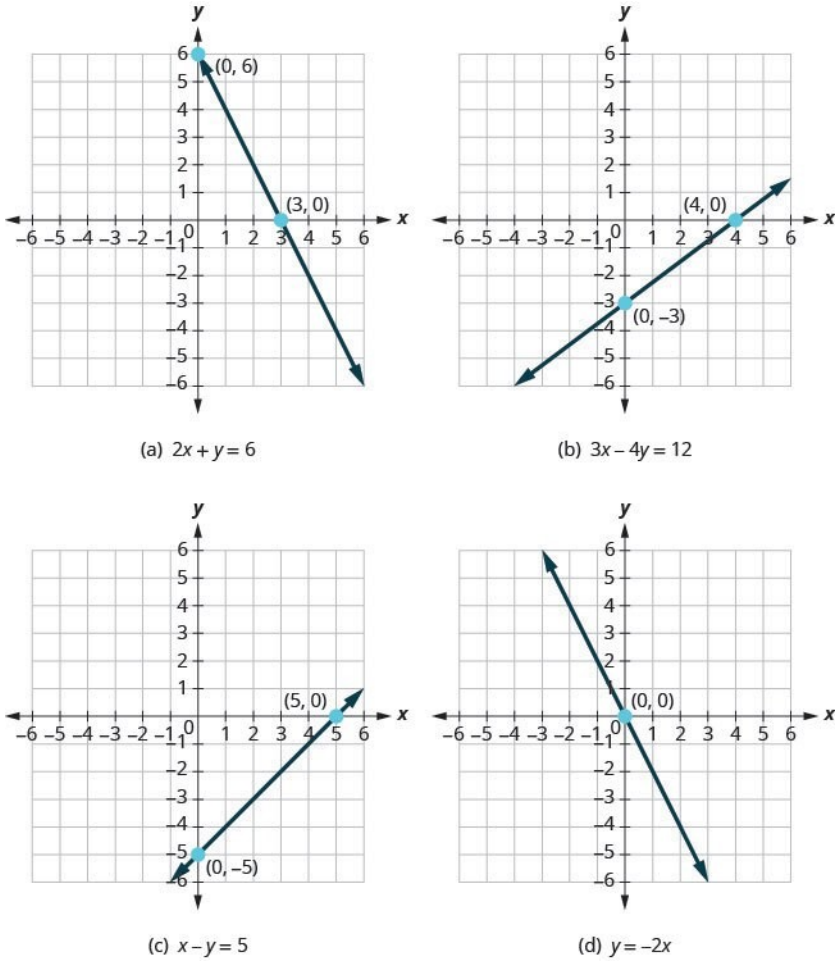
Hverja línulega jöfnu má tákna með einni ákveðinni línu sem sýnir allar lausnir jöfnunnar. Við höfum séð að þegar graf línu er teiknað með því að merkja punkta má nota hvaða þrjár lausnir sem er. Tveir sem teikna sömu línu gætu því hvor um sig valið aðra þrjá punkta en hinn.

Við fyrstu sýn virðast línurnar tvær ef til vill ekki vera eins, því mismunandi punktar eru merktir á þær. Ef allt er rétt gert eiga línurnar þó að vera nákvæmlega eins. Til að sjá að þetta er sama línan má skoða hvar hún sker x-ásinn og y-ásinn. Þessir punktar kallast skurðpunktar línunnar við ásana.

**SKURÐPUNKTAR LÍNU VIÐ ÁSA**

Punktarnir þar sem lína sker x-ásinn og y-ásinn kallast skurðpunktar línunnar við ása.

Skoðum gröf línanna á mynd 4.18.




Mynd 4.18 Dæmi um gröf sem skera x-ásinn.

Takið fyrst eftir hvar hver lína sker $x$-ásinn. Sjá mynd 4.18.

Tafla 4.24

| Mynd | Línan sker x-ásinn í: | Röðuð tvennd punktsins |
|---|---|---|
| Mynd (a) | 3 | $(3,0)$ |
| Mynd (b) | 4 | $(4,0)$ |
| Mynd (c) | 5 | $(5,0)$ |
| Mynd (d) | 0 | $(0,0)$ |

Sjáið þið eitthvert mynstur?

Í hverri röð er y-hnit punktsins þar sem línan sker x-ásinn núll. Punkturinn þar sem línan sker x-ásinn er á forminu $(a,0)$ og kallast skurðpunktur línunnar við x-ás. Skurðpunkturinn við x-ás fæst þegar $y$ er núll.

Skoðum nú punktana þar sem línurnar skera y-ásinn. Sjá töflu 4.25.

Tafla 4.25

| Mynd | Línan sker y-ásinn í: | Röðuð tvennd punktsins |
|---|---|---|
| Mynd (a) | 6 | $(0,6)$ |
| Mynd (b) | $-3$ | $(0,-3)$ |
| Mynd (c) | $-5$ | $(0,-5)$ |
| Mynd (d) | 0 | $(0,0)$ |

Hvert er mynstrið hér?

Í hverri röð er x-hnit punktsins þar sem línan sker y-ásinn núll. Punkturinn þar sem línan sker y-ásinn er á forminu $(0,b)$ og kallast skurðpunktur línunnar við y-ás. Skurðpunkturinn við y-ás fæst þegar $x$ er núll.



### SKURÐPUNKTAR VIÐ X- OG Y-ÁS

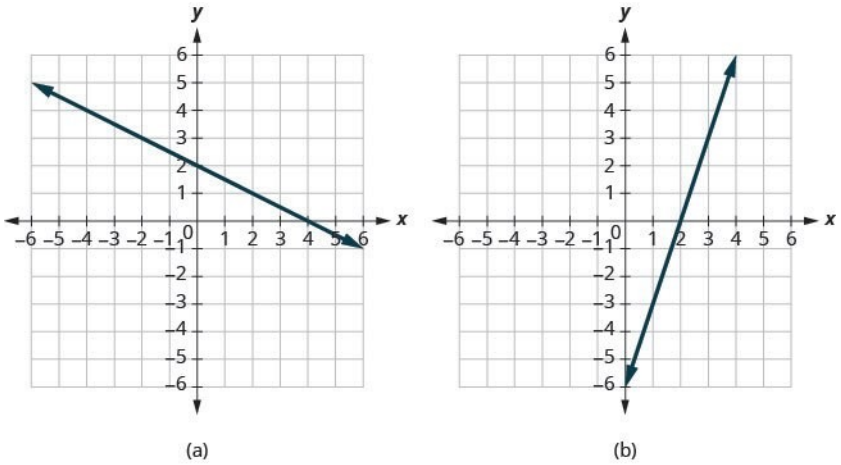
Skurðpunkturinn við x-ás er punkturinn $(a,0)$ þar sem línan sker x-ásinn.

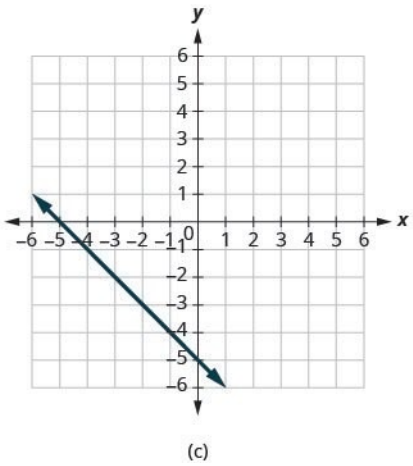
Skurðpunkturinn við y-ás er punkturinn $(0,b)$ þar sem línan sker y-ásinn.

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| • Skurðpunktur við $x$-ás fæst þegar $y$ er núll. | $a$ | 0 |
| • Skurðpunktur við $y$-ás fæst þegar $x$ er núll. | 0 | $b$ |

### DÆMI 4.19

Finnið skurðpunktana við x- og y-ás á hverju grafi.




4

## Lausn

1. ⓐ Grafið sker x-ásinn í punktinum $(4,0)$. Skurðpunkturinn við x-ás er $(4,0)$. Grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,2)$. Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,2)$.

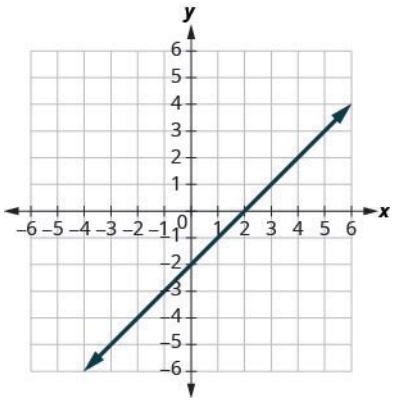
2. ⓑ Grafið sker x-ásinn í punktinum $(2,0)$. Skurðpunkturinn við x-ás er $(2,0)$. Grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,-6)$. Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,-6)$.

3. ⓒ Grafið sker x-ásinn í punktinum $(-5,0)$. Skurðpunkturinn við x-ás er $(-5,0)$. Grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,-5)$. Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,-5)$.

---

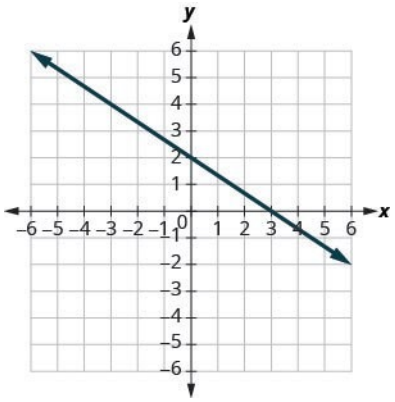
**REYNIÐ SJÁLF 4.37**

Finnið skurðpunktana við x- og y-ás á grafinu.




**REYNIÐ SJÁLF 4.38**

Finnið skurðpunktana við x- og y-ás á grafinu.




## Finnið skurðpunktana við x- og y-ás út frá jöfnu línu

Skurðpunkturinn við x-ás fæst þegar y er núll og skurðpunkturinn við y-ás fæst þegar x er núll. Því getum við fundið skurðpunkta línu við ása út frá jöfnu hennar. Til að finna skurðpunktinn við x-ás látum við $y=0$ og leysum með tilliti til x. Til að finna skurðpunktinn við y-ás látum við $x=0$ og leysum með tilliti til y.

**FINNIÐ SKURÐPUNKTANA VIÐ X- OG Y-ÁS ÚT FRÁ JÖFNU LÍNU**

Notið jöfnu línunnar. Til að finna:

- skurðpunkt línunnar við x-ás skuluð þið láta $y=0$ og leysa með tilliti til $x$.
- skurðpunkt línunnar við y-ás skuluð þið láta $x=0$ og leysa með tilliti til $y$.

**DÆMI 4.20**

Finnið skurðpunkta línunnar $2x+y=6$.

## Lausn

Við látum $y=0$ til að finna skurðpunktinn við x-ás og $x=0$ til að finna skurðpunktinn við y-ás. Við fyllum út töfluna sem minnir okkur á hvað þarf að finna.

| $2x+y=6$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| | 0 |
| 0 | |

skurðpunktur við $x$-ás

skurðpunktur við $y$-ás

Til að finna skurðpunktinn við x-ás látum við $y=0$.

4

| | |
|---|---|
| | $2x+y=6$ |
| Látum y = 0. | $2x+0=6$ |
| Einfaldið. | $2x=6$ |
| | $x=3$ |
| Skurðpunkturinn við x-ás er | (3, 0) |
| Til að finna skurðpunktinn við y-ás látum við x = 0. | |
| | $2x+y=6$ |
| Látum x = 0. | $2\cdot 0+y=6$ |
| Einfaldið. | $0+y=6$ |
| | $y=6$ |
| Skurðpunkturinn við y-ás er | (0, 6) |

Skurðpunktarnir eru $(3,0)$ og $(0,6)$, eins og sýnt er í töflu 4.26.

Tafla 4.26

| $2x+y=6$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | 0 |
| 0 | 6 |

**REYNIÐ SJÁLF 4.39**

Finnið skurðpunkta línunnar $3x+y=12$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.40**

Finnið skurðpunkta línunnar $x+4y=8$.

**DÆMI 4.21**

Finnið skurðpunkta línunnar $4x-3y=12$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Til að finna skurðpunktinn við x-ás látum við y = 0. | |
| | $4x-3y=12$ |
| Látum y = 0. | $4x-3\cdot 0=12$ |
| Einfaldið. | $4x-0=12$ |
| | $4x=12$ |
| | $x=3$ |
| Skurðpunkturinn við x-ás er | (3, 0) |
| Til að finna skurðpunktinn við y-ás látum við x = 0. | |
| | $4x-3y=12$ |
| Látum x = 0. | $4\cdot 0-3y=12$ |
| Einfaldið. | $0-3y=12$ |
| | $-3y=12$ |
| | $y=-4$ |
| Skurðpunkturinn við y-ás er | (0, −4) |

Skurðpunktarnir eru (3, 0) og (0, −4), eins og sýnt er í töflunni hér á eftir.

| $4x-3y=12$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | 0 |
| 0 | $-4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.41**

Finnið skurðpunkta línunnar $3x-4y=12$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.42**

Finnið skurðpunkta línunnar $2x-4y=8$.

## Teiknið graf línu með skurðpunktum við ása

Til að teikna graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta þarf að finna þrjá punkta með hnit sem eru lausnir jöfnunnar. Skurðpunktana við x- og y-ás má nota sem tvo þessara þriggja punkta. Finnið skurðpunktana og síðan þriðja punktinn til að tryggja nákvæmni. Gangið úr skugga um að punktarnir liggi á sömu línu og dragið hana síðan. Þetta er oft fljótlegasta aðferðin til að teikna graf línu.

---

**DÆMI 4.22**

### Hvernig á að teikna graf línu með skurðpunktum við ása

Teiknið graf $-x+2y=6$ með skurðpunktum við ása.

### Lausn

4

**Skref 1.** Finnið skurðpunkta línunnar við $x$- og $y$-ás.

Setjið $y=0$ og leysið fyrir $x$.
Setjið $x=0$ og leysið fyrir $y$.

Finnið skurðpunktinn við $x$-ás.

Setjið $y=0$

$$-x+2y=6$$
$$-x+2(0)=6$$
$$-x=6$$
$$x=-6$$

Skurðpunkturinn við $x$-ás er $(-6, 0)$.

Finnið skurðpunktinn við $y$-ás.

Setjið $x=0$

$$-x+2y=6$$
$$-0+2y=6$$
$$2y=6$$
$$y=3$$

Skurðpunkturinn við $y$-ás er $(0, 3)$.

**Skref 2.** Finnið aðra lausn á jöfnunni.

Við notum $x=2$.

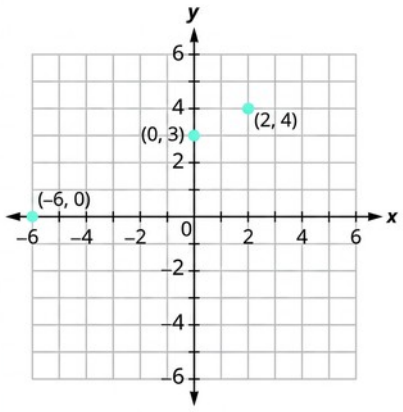
Látum $x=2$

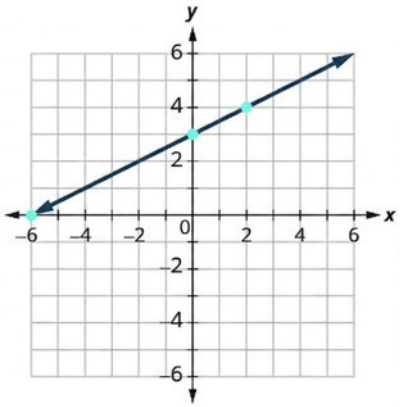
$$-x+2y=6$$
$$-2+2y=6$$
$$2y=8$$
$$y=4$$

Þriðji punkturinn er $(2, 4)$.

**Skref 3.** Merkið punktana þrjá inn á hnitakerfið. Athugið hvort punktarnir liggi á beinni línu.

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| $-6$ | 0 | $(-6, 0)$ |
| 0 | 3 | $(0, 3)$ |
| 2 | 4 | $(2, 4)$ |



| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Teiknið línuna. | Sjáið grafið. |  |



**REYNIÐ SJÁLF 4.43**

Teiknið graf $x-2\,y=4$ með skurðpunktum við ása.

**REYNIÐ SJÁLF 4.44**

Teiknið graf $-x+3\,y=6$ með skurðpunktum við ása.

Skrefin til að teikna graf línulegrar jöfnu með skurðpunktum við ása eru dregin saman hér á eftir.

**AÐFERÐ**

### Teiknið graf línulegrar jöfnu með skurðpunktum við ása.

1. Skref 1.
   Finnið skurðpunkta línunnar við x- og y-ás.
   - Látið $y=0$ og leysið með tilliti til $x$
   - Látið $x=0$ og leysið með tilliti til $y$.
2. Skref 2. Finnið þriðju lausn jöfnunnar.
3. Skref 3. Merkið punktana þrjá og athugið að þeir liggi á sömu línu.
4. Skref 4. Dragið línuna.

**DÆMI 4.23**

Teiknið graf $4\,x-3\,y=12$ með skurðpunktum við ása.

### Lausn

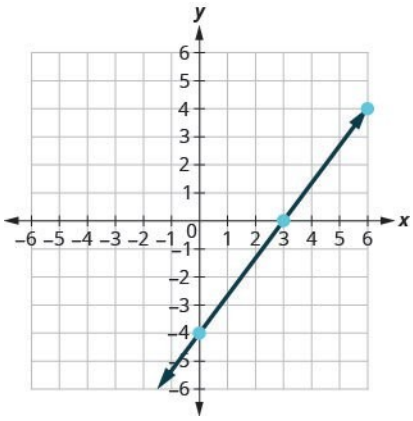
Finnið skurðpunktana og þriðja punktinn.

| $x$-skurðpunktur, látum $y=0$ | $y$-skurðpunktur, látum $x=0$ | þriðji punktur, látum $y=4$ |
|---|---|---|
| $4x-3y=12$ | $4x-3y=12$ | $4x-3y=12$ |
| $4x-3(0)=12$ | $4(0)-3y=12$ | $4x-3(4)=12$ |
| $4x=12$ | $-3y=12$ | $4x-12=12$ |
| $x=3$ | $y=-4$ | $4x=24$ |
| | | $x=6$ |

Við skráum punktana í töflu 4.27 og sýnum grafið hér á eftir.

Tafla 4.27

| $4x-3y=12$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 3 | 0 | $(3,0)$ |
| 0 | $-4$ | $(0,-4)$ |
| 6 | 4 | $(6,4)$ |




**REYNIÐ SJÁLF 4.45**

Teiknið graf $5x-2y=10$ með skurðpunktum við ása.

**REYNIÐ SJÁLF 4.46**

Teiknið graf $3x-4y=12$ með skurðpunktum við ása.

**DÆMI 4.24**

Teiknið graf $y=5x$ með skurðpunktum við ása.

## Lausn

| skurðpunktur við $x$-ás<br>Látum $y = 0$. | skurðpunktur við $y$-ás<br>Látum $x = 0$. |
|---|---|
| $y = 5x$ | $y = 5x$ |
| $0 = 5x$ | $y = 5 \cdot 0$ |
| $0 = x$ | $y = 0$ |
| (0, 0) | (0, 0) |

Þessi lína hefur aðeins einn skurðpunkt við ása. Hann er punkturinn $(0,0)$.

Til að tryggja nákvæmni þurfum við að merkja þrjá punkta. Skurðpunktarnir við x- og y-ás eru sami punkturinn og því þurfum við tvo punkta til viðbótar til að teikna graf línunnar.

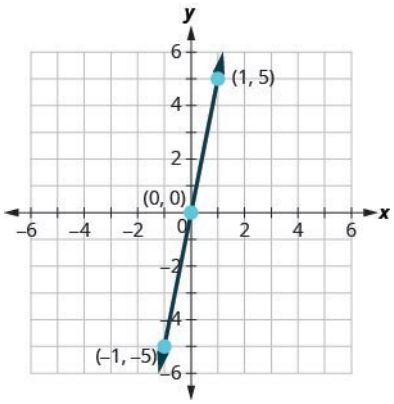
| Látum $x = 1$. | Látum $x = -1$. |
|---|---|
| $y = 5x$ | $y = 5x$ |
| $y = 5 \cdot 1$ | $y = 5(-1)$ |
| $y = 5$ | $y = -5$ |

Sjá töflu 4.28.

Tafla 4.28

| $y=5x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 0 | $(0,0)$ |
| 1 | 5 | $(1,5)$ |
| $-1$ | $-5$ | $(-1,-5)$ |

Merkið punktana þrjá, athugið að þeir liggi á sömu línu og dragið línuna.




**REYNIÐ SJÁLF 4.47**

Teiknið graf $y=4x$ með skurðpunktum við ása.

**REYNIÐ SJÁLF 4.48**

Teiknið graf $y = -x$ með skurðpunktunum við ása.

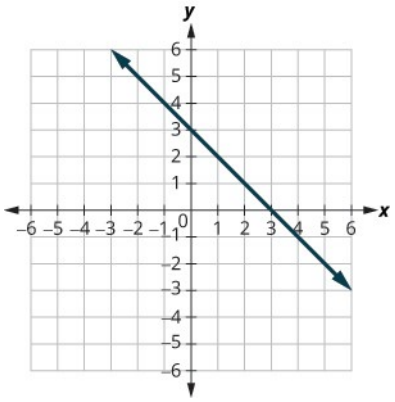
## Verkefni úr hluta 4.3

***Æfingin skapar meistarann***

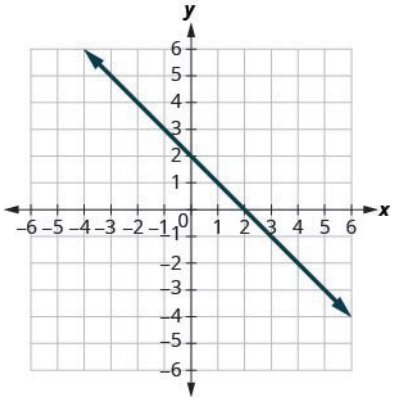
**Greinið skurðpunkta við x- og y-ás á grafi**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna skurðpunktana við x- og y-ás á hverju grafi.

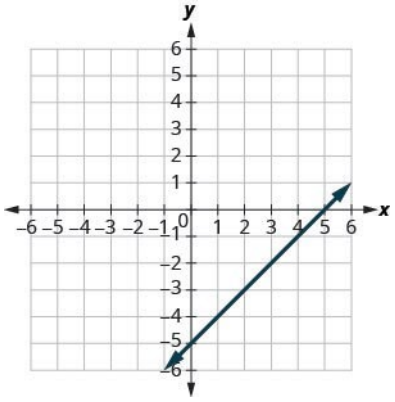
139.



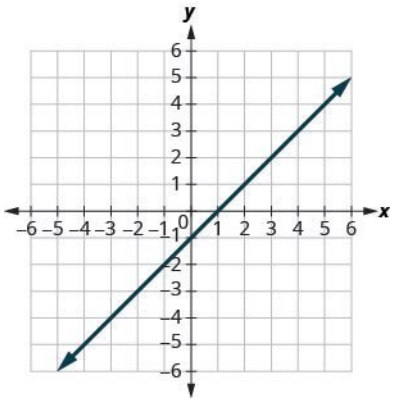

140.



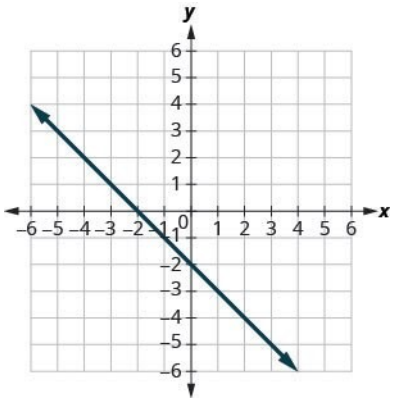

141.



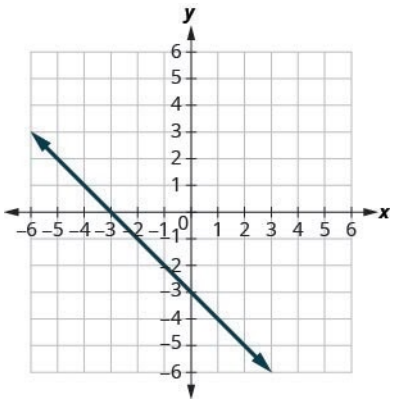
142.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6

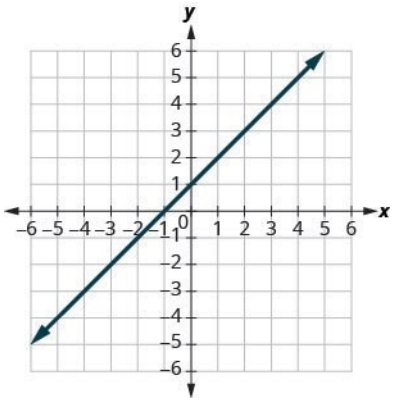
143.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6

144.

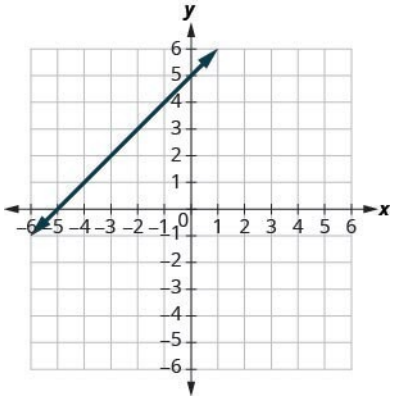

y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6

145.

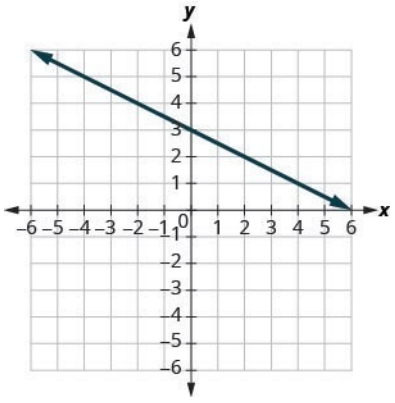

y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

146.

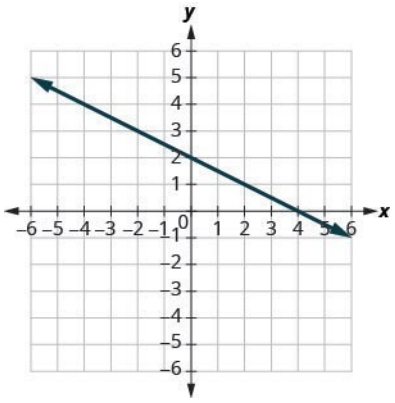



y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

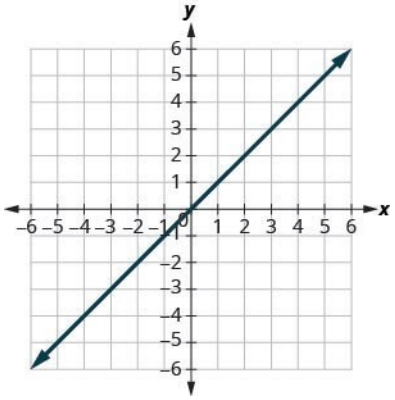
147.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

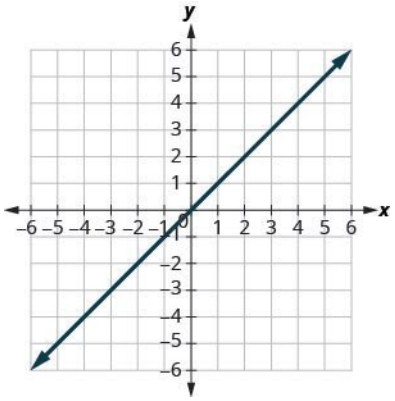
148.




149.




150.




**Finnið skurðpunktana við x- og y-ás út frá jöfnu línu**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna skurðpunkta við ásа fyrir hverja jöfnu.

151.

$$x+y=4$$

152.

$$x+y=3$$

153.

$$x+y=-2$$

154.

$$x+y=-5$$

155.

$$x-y=5$$

156.

$$x-y=1$$

157.

$$x-y=-3$$



158.

$$x-y=-4$$

159.

$$x+2y=8$$

160.

$$x+2y=10$$

161.

$$3x+y=6$$

162.

$$3x+y=9$$

163.

$$x-3y=12$$

164.

$$x-2y=8$$

165.

$$4x-y=8$$

166.

$$5x-y=5$$

167.

$$2x+5y=10$$

168.

$$2x+3y=6$$

169.

$$3x-2y=12$$

170.

$$3x-5y=30$$

171.

$$y=\frac{1}{3}x+1$$

172.

$$y=\frac{1}{4}x-1$$

173.

$$y=\frac{1}{5}x+2$$

174.

$$y=\frac{1}{3}x+4$$

175.

$$y=3x$$

176.

$$y=-2x$$

177.

$$y=-4x$$

178.

$$y=5x$$

**Teiknið graf línu með skurðpunktum við ása**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið teikna graf hverrar jöfnu með skurðpunktum við ása.

179.

$$-x+5y=10$$

180.

$$-x+4y=8$$

181.

$$x+2y=4$$

182.

$$x+2y=6$$

183.

$$x+y=2$$



184.

$$x+y=5$$

185.

$$x+y=-3$$

186.

$$x+y=-1$$

187.

$$x-y=1$$

188.

$$x-y=2$$

189.

$$x-y=-4$$

190.

$$x-y=-3$$

191.

$$4x+y=4$$

192.

$$3x+y=3$$

193.

$$2x+4y=12$$

194.

$$3x+2y=12$$

195.

$$3x-2y=6$$

196.

$$5x-2y=10$$

197.

$$2x-5y=-20$$

198.

$$3x-4y=-12$$

199.

$$3x-y=-6$$

200.

$$2x-y=-8$$

201.

$$y=-2x$$

202.

$$y=-4x$$

203.

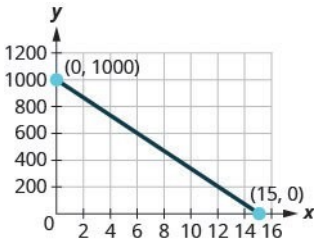
$$y=x$$

204.

$$y=3x$$

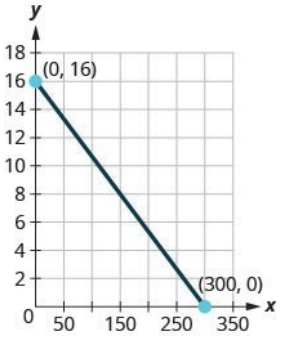
### *Stærðfræði daglegs lífs*

**205.** **Bílferð.** Damien ekur frá Chicago til Denver, sem er 1000 mílna leið. x-ásinn á grafinu hér á eftir sýnir tímann í klukkustundum frá því Damien lagði af stað frá Chicago. y-ásinn sýnir vegalengdina sem hann á eftir að aka.




1. ⓐ Finnið skurðpunktana við x- og y-ás.
2. ⓑ Útskýrið hvað skurðpunktarnir við x- og y-ás merkja fyrir Damien.

**206.** **Bílferð.** Ozzie fyllti á tankinn á vörubílnum sínum og lagði af stað í bílferð. x-ásinn á grafinu hér á eftir sýnir hve margar mílur Ozzie hefur ekið frá því hann fyllti á tankinn. y-ásinn sýnir hve mörg gallon af eldsneyti eru í tanki vörubílsins.




1. ⓐ Finnið skurðpunktana við x- og y-ás.
2. ⓑ Útskýrið hvað skurðpunktarnir við x- og y-ás merkja fyrir Ozzie.

### *Ritunarverkefni*

**207.** Hvernig finnið þið skurðpunkt grafsins við x-ás fyrir jöfnuna $3x - 2y = 6$?

**208.** Viljið þið frekar nota punktaaðferðina eða aðferðina með skurðpunktum við ásа til að teikna graf jöfnunnar $4x + y = -4$? Hvers vegna?

**209.** Viljið þið frekar nota punktaaðferðina eða aðferðina með skurðpunktum við ásа til að teikna graf jöfnunnar $y = \frac{2}{3}x - 2$? Hvers vegna?

**210.** Viljið þið frekar nota punktaaðferðina eða aðferðina með skurðpunktum við ásа til að teikna graf jöfnunnar $y = 6$? Hvers vegna?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Án vandkvæða | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| fundið skurðpunkta grafs við *x*- og *y*-ás. | | | |
| fundið skurðpunkta línu við *x*- og *y*-ás út frá jöfnu hennar. | | | |
| teiknað graf línu með því að nota skurðpunktana við ásana. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn ykkur um tök ykkar á efni þessa hluta? Hvað ætlið þið að gera til að bæta þau?

## 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Notið pinnabretti til að sýna hallatölu
- Notið $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna hallatölu línu út frá grafi hennar
- Finnið hallatölu láréttra og lóðréttra lína
- Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línu milli tveggja punkta
- Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin
- Leysið hagnýt verkefni um hallatölu

**UNDIRBÚNINGUR 4.7**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $\frac{1-4}{8-2}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.74.

**UNDIRBÚNINGUR 4.8**

Deilið: $\frac{0}{4}, \frac{4}{0}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.127.

**UNDIRBÚNINGUR 4.9**

Einfaldið: $\frac{15}{-3}, \frac{-15}{3}, \frac{-15}{-3}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.65.

Þegar þið teiknið gröf línulegra jafna takið þið ef til vill eftir að sumar línur halla upp á við frá vinstri til hægri en aðrar niður á við. Sumar línur eru mjög brattar en aðrar flatari. Hvað ræður því hvort lína hallar upp eða niður og hvort hún er brött eða flöt?

Í stærðfræði kallast halli línu hallatala hennar. Hallatala kemur víða við sögu í daglegu lífi. Þakhalli, veghalli og skábraut fyrir hjólastóla eru dæmi þar sem halla má sjá með berum augum. Þegar þið hjólið finnið þið líka fyrir hallanum þegar þið stígið upp brekku eða rennið niður hana.

Í þessum hluta könnum við hugtakið hallatala.

## Notið pinnabretti til að sýna hallatölu

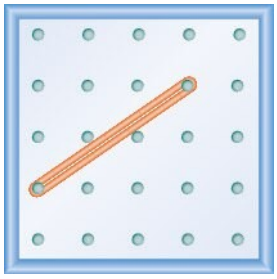
Pinnabretti er bretti með reglulegu neti pinna. Með teygjum á pinnabretti getum við sýnt línur í hnitakerfi á áþreifanlegan hátt. Með því að strekkja teygju milli tveggja pinna getum við uppgötvað hvernig hallatala línu er fundin.

4

### ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN

Verkefnið „Hallatala könnuð“ með áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja hallatölu línu betur. Ef þið hafið ekki pinnabretti getið þið notað rúðustrikaðan pappír.

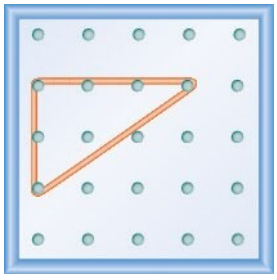
Við byrjum á að strekkja teygju milli tveggja pinna eins og sýnt er á mynd 4.19.



Mynd 4.19

Lítur þetta ekki út eins og lína?

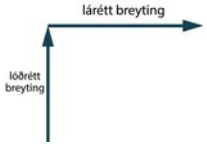
Nú teygjum við hluta teygjunnar beint upp frá vinstri pinnanum og um þriðja pinna til að mynda skammhliðar rétthyrnds þríhyrnings, eins og sýnt er á mynd 4.20



Mynd 4.20

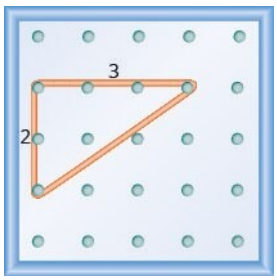
Við myndum vandlega 90° horn umhverfis þriðja pinnann svo önnur nýja línan verði lóðrétt og hin lárétt.

Til að finna hallatölu línunnar mælum við vegalengdina eftir lóðréttri og láréttri skammhlið þríhyrningsins. Lóðrétta vegalengdin kallast lóðrétt breyting og sú lárétta lárétt breyting, eins og sýnt er á mynd 4.21.




Mynd 4.21

Ef pinnabrettið okkar og teygjan líta út eins og á mynd 4.22, er lóðrétta breytingin 2. Teygjan fer 2 einingar upp. Hvert bil er ein eining.




Mynd 4.22 Lóðrétta breytingin á þessu pinnabretti er 2, því teygjan fer tvær einingar upp.

Hver er lárétta breytingin?

Teygjan nær 3 einingar þvert yfir. Lárétta breytingin er 3 (sjá mynd 4.22).

Hallatala línu er hlutfall lóðréttu breytingarinnar og láréttu breytingarinnar. Í stærðfræði er hún alltaf táknuð með stafnum $m$.

---

**HALLATALA LÍNU**

Hallatala línu er $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$.

Lóðrétta breytingin mælir lóðrétta færslu og lárétta breytingin lárétta færslu milli tveggja punkta á línunni.

Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu á mynd 4.22?

$$m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$$

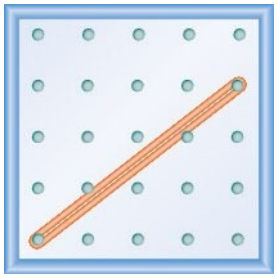
$$m = \frac{2}{3}$$

Hallatala línunnar er $\frac{2}{3}$. Það merkir að línan hækkar um 2 einingar fyrir hverjar 3 einingar í lárétta stefnu.

Þegar unnið er með pinnabretti er góð venja að byrja við pinna vinstra megin og tengja hann við pinna hægra megin. Ef lóðrétta breytingin stefnir upp er hún jákvæð en ef hún stefnir niður er hún neikvæð. Lárétta breytingin stefnir frá vinstri til hægri og er því jákvæð.

**DÆMI 4.25**

Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu sem sýnt er?



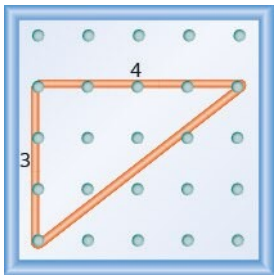


## Lausn

Notið skilgreiningu hallatölu:

$$m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}.$$

Byrjið við vinstri pinnann og teljið bilin upp og til hægri að hinum pinnanum.



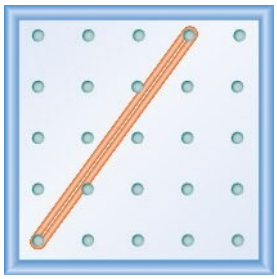

Tafla 4.29

| | |
|---|---|
| Lóðrétta breytingin er 3. | $m=\frac{3}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Lárétta breytingin er 4. | $m=\frac{3}{4}$ |
| | Hallatalan er $\frac{3}{4}$. |

Það merkir að línan hækkar um 3 einingar fyrir hverjar 4 einingar í lárétta stefnu.

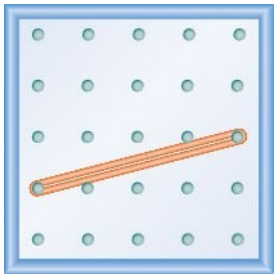
**REYNIÐ SJÁLF 4.49**

Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu sem sýnt er?



**REYNIÐ SJÁLF 4.50**

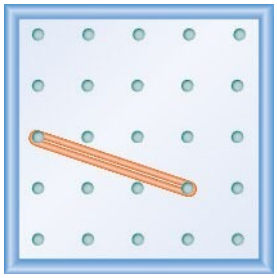
Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu sem sýnt er?





**DÆMI 4.26**

Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu sem sýnt er?

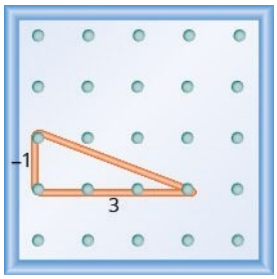


## Lausn

Notið skilgreiningu hallatölu:

$$m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}.$$

Byrjið við vinstri pinnann og teljið einingarnar niður og til hægri að hinum pinnanum.



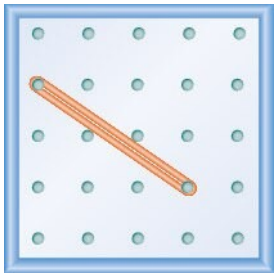

Tafla 4.30

| | |
|---|---|
| Lóðrétta breytingin er −1. | $= \frac{-1}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Lárétta breytingin er 3. | $m = \frac{-1}{3}$<br>$m = -\frac{1}{3}$ |
| | Hallatalan er $-\frac{1}{3}$. |

Það merkir að línan lækkar um 1 einingu fyrir hverjar 3 einingar í lárétta stefnu.

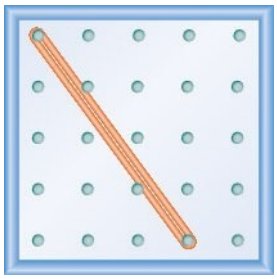
**REYNIÐ SJÁLF 4.51**

Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu?

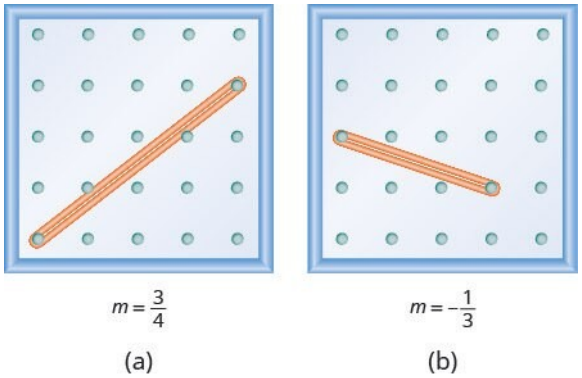


**REYNIÐ SJÁLF 4.52**

Hver er hallatala línunnar á pinnabrettinu?



Takið eftir að í dæmi 4.25 er hallatalan jákvæð en í dæmi 4.26 neikvæð. Sjáið þið einhvern mun á línunum tveimur á mynd 4.23(a) og mynd 4.23(b)?




Mynd 4.23

Við „lesum“ línu frá vinstri til hægri, rétt eins og íslenskan texta. Þegar lesið er frá vinstri til hægri hækkar línan á mynd 4.23(a) og hefur jákvæða hallatölu. Línan á mynd 4.23(b) lækkar og hefur neikvæða hallatölu.



**JÁKVÆÐ OG NEIKVÆÐ HALLATALA**




**DÆMI 4.27**

Notið pinnabretti til að sýna línu með hallatöluna $\frac{1}{2}$.

## Lausn

Til að sýna línu á pinnabretti þurfum við lóðréttu og láréttu breytinguna.

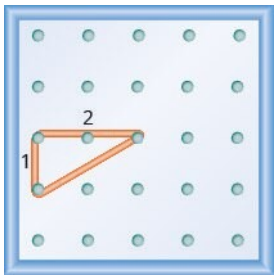
Tafla 4.31

| | |
|---|---|
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Setjið $m$ í stað $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |

Lóðrétta breytingin er því 1 og sú lárétta 2.

Byrjið við pinna neðst til vinstri á pinnabrettinu.

Teygið teygjuna 1 einingu upp og síðan 2 einingar til hægri.




Langhlið rétthyrnda þríhyrningsins sem teygjan myndar táknar línu með hallatöluna $\frac{1}{2}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.53**

Sýnið hallatöluna $m=\frac{1}{3}$. Teiknið mynd af niðurstöðunni.



---

**REYNIÐ SJÁLF 4.54**

Sýnið hallatöluna $m=\frac{3}{2}$. Teiknið mynd af niðurstöðunni.

---

**DÆMI 4.28**

Notið pinnabretti til að sýna línu með hallatöluna $\frac{-1}{4}$.

## Lausn

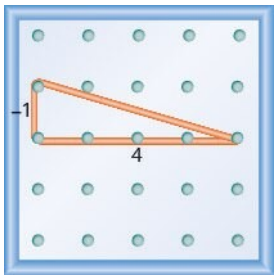
Tafla 4.32

| | |
|---|---|
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Setjið $m$ í stað $\frac{-1}{4}$. | $\frac{-1}{4}=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |

Lóðrétta breytingin er því $-1$ og sú lárétta 4.

Lóðrétta breytingin er neikvæð og því veljum við upphafspinna efst til vinstri. Þá er pláss til að telja niður.

Við teygjum teygjuna 1 einingu niður og síðan 4 einingar til hægri, eins og sýnt er.




Langhlið rétthyrnda þríhyrningsins sem teygjan myndar táknar línu með hallatöluna $\frac{-1}{4}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.55**

Sýnið hallatöluna $m=\frac{-2}{3}$. Teiknið mynd af niðurstöðunni.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.56**

Sýnið hallatöluna $m=\frac{-1}{3}$. Teiknið mynd af niðurstöðunni.

### Notið $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna hallatölu línu út frá grafi hennar

Nú skoðum við nokkur gröf í $x$ $y$-hnitakerfi og sjáum hvernig hallatölur þeirra eru fundnar. Aðferðin er mjög lík þeirri sem við sýndum á pinnabrettunum.

Til að finna hallatöluna verðum við að telja lóðréttu og láréttu breytinguna. En hvar byrjum við?

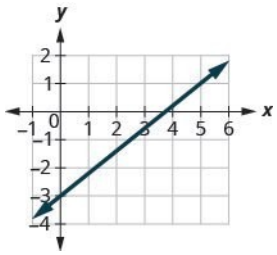
Við finnum tvo punkta á línunni sem hafa heiltöluhnit. Síðan byrjum við við punktinn vinstra megin og teiknum rétthyrndan þríhyrning svo hægt sé að telja lóðréttu og láréttu breytinguna.

---

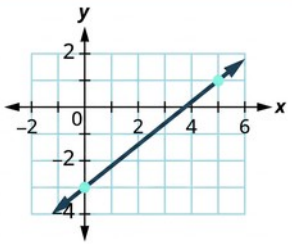
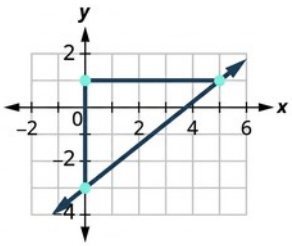
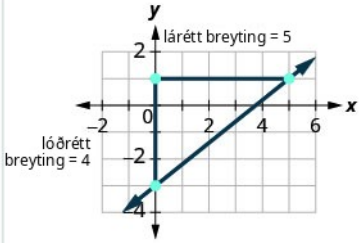
**DÆMI 4.29**

### Hvernig nota á $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna hallatölu línu út frá grafi hennar

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.

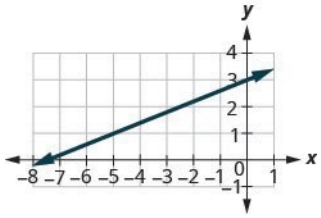



## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið tvo punkta á grafinu sem hafa heiltöluhnit. | Merkið (0, –3) og (5, 1). |  |
| **Skref 2.** Byrjið á punktinum til vinstri og teiknið rétthyrndan frá fyrri punktinum að þeim síðari. | Byrjið í punktinum (0, –3) og teiknið rétthyrndan þríhyrning að punktinum (5, 1). |  |
| **Skref 3.** Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna á skammhliðum þríhyrningsins. | Teljið lóðréttu breytinguna.<br>Teljið láréttu breytinguna. | <br>Lóðrétta breytingin er 4.<br>Lárétta breytingin er 5. |
| **Skref 4.** Reiknið hlutfall lóðréttrar breytingar og láréttrar breytingar til að finna hallatöluna.<br>$m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ | Notið formúluna fyrir hallatölu.<br><br>Setjið inn gildin fyrir lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$<br><br>$m = \frac{4}{5}$<br><br>Hallatala línunnar er 4/5.<br><br>Þetta þýðir að $y$ hækkar um 4 einingar þegar $x$ hækkar um 5 einingar. |

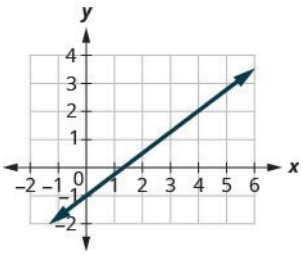
**REYNIÐ SJÁLF 4.57**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.




**REYNIÐ SJÁLF 4.58**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.






**AÐFERÐ**

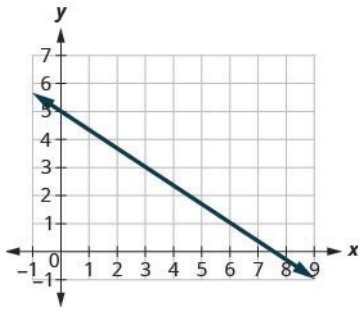
### Finnið hallatölu línu út frá grafi hennar með

$$m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}.$$

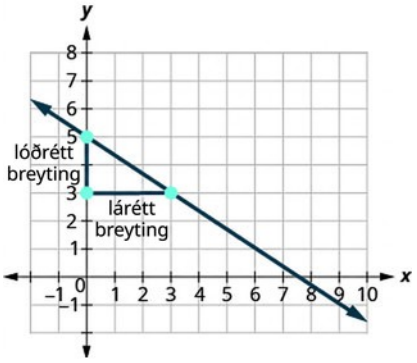
1. Skref 1. Finnið tvo punkta á línunni sem hafa heiltöluhnit.
2. Skref 2. Byrjið við punktinn vinstra megin og teiknið rétthyrndan þríhyrning þannig að langhliðin liggi frá fyrri punktinum að þeim síðari.
3. Skref 3. Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna eftir skammhliðum þríhyrningsins.
4. Skref 4. Reiknið hlutfall lóðréttu og láréttu breytingarinnar til að finna hallatöluna, $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$.

**DÆMI 4.30**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.



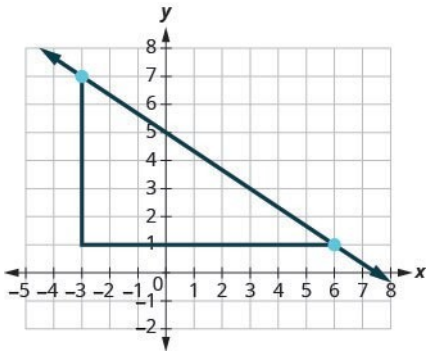

## Lausn

| | |
|---|---|
| Finnið tvo punkta á grafinu sem hafa heiltöluhnit. | $(0,5)$ og $(3,3)$ |
| Hvor punkturinn er vinstra megin? | $(0,5)$ |
| Byrjið í $(0,5)$ og teiknið rétthyrndan þríhyrning að $(3,3)$. |  |
| Teljið lóðréttu breytinguna — hún er neikvæð. | Lóðrétta breytingin er $-2$. |
| Teljið láréttu breytinguna. | Lárétta breytingin er 3. |
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Setjið gildi lóðréttu og láréttu breytingarinnar inn í formúluna. | $m=\frac{-2}{3}$ |
| Einfaldið. | $m=-\frac{2}{3}$ |
| | Hallatala línunnar er $-\frac{2}{3}$. |



Því lækkar $y$ um 2 einingar þegar $x$ hækkar um 3 einingar.

Hvað ef við notuðum punktana $(-3,7)$ og $(6,1)$ til að finna hallatölu línunnar?



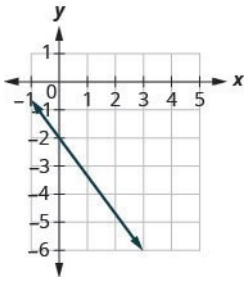

Lóðrétta breytingin væri $-6$ og sú lárétta 9. Þá er $m=\frac{-6}{9}$, sem einfaldast í $m=-\frac{2}{3}$. Munið að það skiptir ekki máli hvaða punkta þið notið — hallatala línunnar er alltaf sú sama.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.59**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.

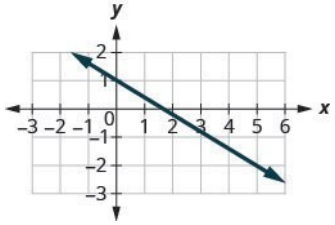





---

**REYNIÐ SJÁLF 4.60**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.

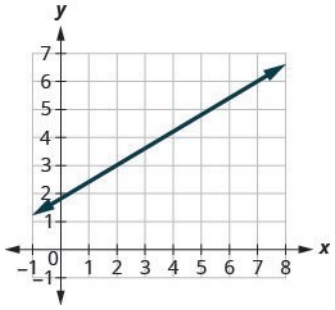



Í síðustu tveimur dæmum voru skurðpunktar línanna við y-ás með heiltöluhnit. Því var hentugt að nota skurðpunktinn við y-ás sem annan punktinn þegar hallatalan var reiknuð. Í næsta dæmi er y-hnit skurðpunktsins við y-ás brot. Í stað þess að nota þann punkt leitum við að tveimur öðrum punktum með heiltöluhnit. Þá verður auðveldara að reikna hallatöluna.

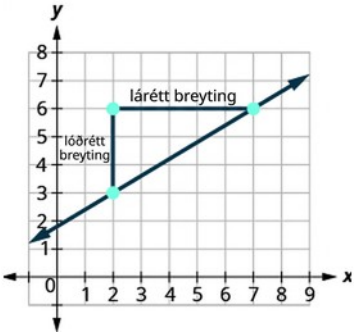
---

**DÆMI 4.31**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.




## Lausn

| | |
|---|---|
| Finnið tvo punkta á grafinu sem hafa heiltöluhnit. | $(2,3)$ og $(7,6)$ |
| Hvor punkturinn er vinstra megin? | $(2,3)$ |
| Byrjið í $(2,3)$ og teiknið rétthyrndan þríhyrning að $(7,6)$. |  |
| Teljið lóðréttu breytinguna. | Lóðrétta breytingin er 3. |
| Teljið láréttu breytinguna. | Lárétta breytingin er 5. |
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Setjið gildi lóðréttu og láréttu breytingarinnar inn í formúluna. | $m=\frac{3}{5}$ |
| | Hallatala línunnar er $\frac{3}{5}$. |

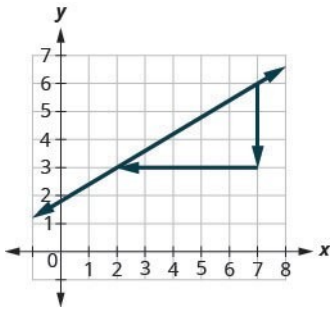


Þetta þýðir að $y$ hækkar um 5 einingar þegar $x$ hækkar um 3 einingar.

Þegar við kynntum hugtakið hallatala með pinnabrettum sögðum við að alltaf skyldi byrja við punktinn vinstra megin og telja lóðréttu og láréttu breytinguna að punktinum hægra megin. Þannig var lárétta breytingin alltaf jákvæð og sú lóðrétta réð því hvort hallatalan var jákvæð eða neikvæð.

Hvað myndi gerast ef við byrjuðum við punktinn hægra megin?

Notum aftur punktana $(2,3)$ og $(7,6)$ en byrjum nú í $(7,6)$.



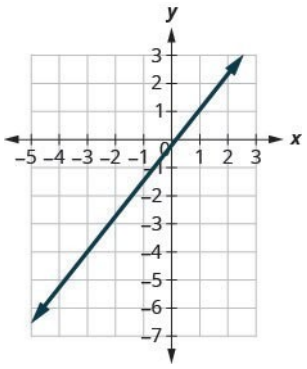

Tafla 4.33

| | |
|---|---|
| Teljið lóðréttu breytinguna. | Lóðrétta breytingin er $-3$. |
| Teljið láréttu breytinguna. Hún liggur frá hægri til vinstri og er því neikvæð. | Lárétta breytingin er $-5$. |
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Setjið gildi lóðréttu og láréttu breytingarinnar inn í formúluna. | $m=\frac{-3}{-5}$ |
| | Hallatala línunnar er $\frac{-3}{-5}$. |

Það skiptir ekki máli hvar þið byrjið — hallatala línunnar er alltaf sú sama.

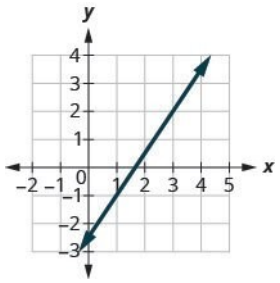
**REYNIÐ SJÁLF 4.61**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.




**REYNIÐ SJÁLF 4.62**

Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er.



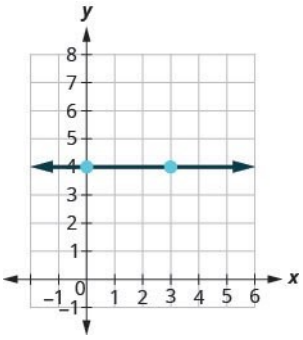

## Finnið hallatölu láréttra og lóðréttra lína

Munið þið hvað var sérstakt við láréttar og lóðréttar línur? Jöfnur þeirra höfðu aðeins eina breytu.

| Lárétt lína $y=b$ | Lóðrétt lína $x=a$ |
|---|---|
| y -hnitin eru eins. | x -hnitin eru eins. |

4

Hvernig finnum við þá hallatölu láréttu línunnar $y=4$? Ein leið er að teikna línuna, finna tvo punkta á henni og telja lóðréttu og láréttu breytinguna. Skoðum hvað gerist þegar við gerum þetta.




Tafla 4.34

| | |
|---|---|
| Hver er lóðrétta breytingin? | Lóðrétta breytingin er $0$. |
| Teljið láréttu breytinguna. | Lárétta breytingin er $3$. |
| Hver er hallatalan? | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$<br>$m=\frac{0}{3}$<br>$m=0$ |
| | Hallatala láréttu línunnar $y=4$ er $0$. |

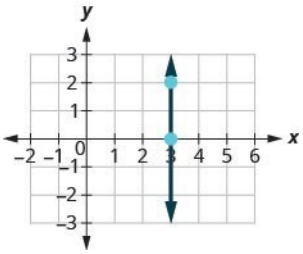
Allar láréttar línur hafa hallatöluna 0. Þegar y-hnitin eru eins er lóðrétta breytingin 0.

**HALLATALA LÁRÉTTRAR LÍNU**

Hallatala láréttrar línu, $y=b$, er 0.

Gólfið í herberginu ykkar er lárétt. Hallatala þess er 0. Ef þið legðuð bolta varlega á gólfið myndi hann ekki rúlla af stað.

Nú skoðum við lóðrétta línu.




Tafla 4.35

| | |
|---|---|
| Hver er lóðrétta breytingin? | Lóðrétta breytingin er $2$. |
| Teljið láréttu breytinguna. | Lárétta breytingin er $0$. |
| Hver er hallatalan? | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$<br>$m=\frac{2}{0}$ |

En við getum ekki deilt með 0. Deiling með 0 er ekki skilgreind. Við segjum því að hallatala lóðréttu línunnar $x=3$ sé óskilgreind.

Hallatala allra lóðréttra lína er óskilgreind. Þegar öll x-hnit punkta línu eru eins er lárétta breytingin 0.

**HALLATALA LÓÐRÉTTRAR LÍNU**

Hallatala lóðréttrar línu, $x=a$, er óskilgreind.

**DÆMI 4.32**

Finnið hallatölu hvorrar línu:

ⓐ $x=8$ ⓑ $y=-5$.

## Lausn

**1.** ⓐ $x=8$

Þetta er lóðrétt lína. Hallatala hennar er óskilgreind.

**2.** ⓑ $y=-5$

Þetta er lárétt lína. Hallatala hennar er 0.

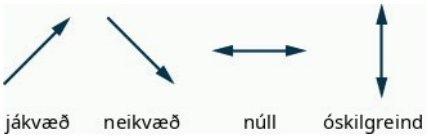
**REYNIÐ SJÁLF 4.63**

Finnið hallatölu línunnar: $x=-4$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.64**

Finnið hallatölu línunnar: $y=7$.

**FLÝTILEIÐARVÍSIR UM HALLATÖLUR LÍNA**




Munið að við „lesum“ línu frá vinstri til hægri, rétt eins og ritað mál.

4

## Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línu milli tveggja punkta

**ÁÞREIFANLEG STÆRÐFRÆÐINÁMSGÖGN**

Verkefnið „Hallatala línu milli tveggja punkta“ í Áþreifanlegum stærðfræðinámsgögnum hjálpar ykkur að skilja betur hvernig hallatala línu milli tveggja punkta er fundin.

Stundum þurfum við að finna hallatölu línu milli tveggja punkta án þess að hafa graf til að telja lóðréttu og láréttu breytinguna. Við gætum merkt punktana inn á rúðustrikaðan pappír og talið breytingarnar þar, en eins og við munum sjá er hægt að finna hallatöluna án þess að teikna graf. Áður en við skoðum þá aðferð þurfum við að læra nýjan rithátt í algebru.

Við höfum séð að röðuð tvennd $(x, y)$ gefur hnit punkts. En þegar við vinnum með hallatölur notum við tvo punkta. Hvernig getur sama táknið $(x, y)$ táknað tvo ólíka punkta? Stærðfræðingar nota lágvísa til að greina punktana að.

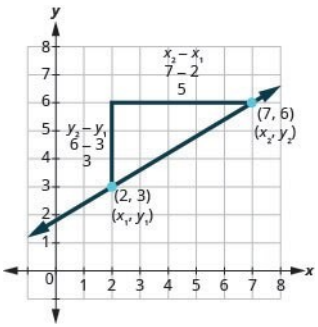
$(x_1, y_1)$ lesið „ $x$ lágvísir 1, $y$ lágvísir 1“
$(x_2, y_2)$ lesið „ $x$ lágvísir 2, $y$ lágvísir 2“

Lágvísar eru notaðir í stærðfræði á svipaðan hátt og fyrsti stafur eftirnafns er notaður í grunnskóla til að greina á milli nemenda sem heita sama nafni. Kannski munið þið eftir Láru B. og Láru M. í þriðja bekk?

Við notum $(x_1, y_1)$ fyrir fyrri punktinn og $(x_2, y_2)$ fyrir seinni punktinn.

Ef punktarnir væru fleiri en tveir gætum við notað $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$ og svo framvegis.

Skoðum tengsl lóðréttu og láréttu breytingarinnar við hnit punktanna tveggja með því að skoða aftur hallatölu línunnar milli punktanna $(2,3)$ og $(7,6)$.




Við höfum tvo punkta og notum því rithátt með lágvísum, $\left(\overset{x_1}{2}, \overset{y_1}{3}\right)\left(\overset{x_2}{7}, \overset{y_2}{6}\right)$.

Á grafinu töldum við lóðréttu breytinguna 3 og láréttu breytinguna 5.
Takið eftir að lóðrétta breytingin 3 fæst með því að draga y-hnitin 6 og 3 hvort frá öðru.

$$3 = 6 - 3$$

Lárétta breytingin 5 fæst með sama hætti með því að draga x-hnitin 7 og 2 hvort frá öðru.

$$5 = 7 - 2$$

Við vitum að $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$. Því er $m = \frac{3}{5}$.

Við endurritum lóðréttu og láréttu breytinguna með því að setja inn hnitin $m = \frac{6-3}{7-2}$.

En 6 er $y_2$, y-hnit seinni punktsins, og 3 er $y_1$, y-hnit fyrri punktsins.

Við getum því endurritað hallatöluna með lágvísum. $m = \frac{y_2 - y_1}{7 - 2}$

Einnig er 7 jafnt $x_2$, x-hniti seinni punktsins, og 2 jafnt $x_1$, x-hniti fyrri punktsins.

Við endurritum því hallatöluna aftur með lágvísum. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Við höfum sýnt að $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ er í raun önnur útgáfa af $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$. Við getum notað þessa formúlu til að finna hallatölu línu þegar við þekkjum tvo punkta á henni.

---

**FORMÚLA FYRIR HALLATÖLU**

Hallatala línunnar milli punktanna $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ er

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Þetta er formúlan fyrir hallatölu.

Hallatalan er:

$y$ seinni punktsins mínus $y$ fyrri punktsins
deilt með

$x$ seinni punktsins mínus $x$ fyrri punktsins.

**DÆMI 4.33**

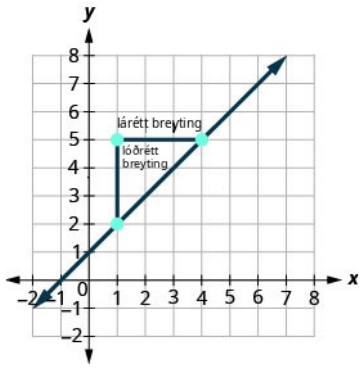
Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línunnar milli punktanna $(1,2)$ og $(4,5)$.

## Lausn

Tafla 4.36

| | |
|---|---|
| Við köllum $(1,2)$ punkt nr. 1 og $(4,5)$ punkt nr. 2. | $\overset{x_1,y_1}{(1,\ 2)}\overset{x_2,y_2}{(4,\ 5)}$ |
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$ |
| Setjið gildin inn. | |
| $y$ seinni punktsins mínus $y$ fyrri punktsins | $m=\frac{5-2}{x_2-x_1}.$ |
| $x$ seinni punktsins mínus $x$ fyrri punktsins | $m=\frac{5-2}{4-1}.$ |
| Einfaldið teljarann og nefnarann. | $m=\frac{3}{3}.$ |
| Einfaldið. | $m=1.$ |

Staðfestum þetta með því að telja breytingarnar á grafi með $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$.




Það skiptir ekki máli hvorn punktinn þið kallið punkt nr. 1 og hvorn punkt nr. 2. Hallatalan verður sú sama. Prófið útreikninginn sjálf.

**REYNIÐ SJÁLF 4.65**

Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línunnar gegnum punktana $(8,5)$ og $(6,3)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.66**

Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línunnar gegnum punktana $(1,5)$ og $(5,9)$.

**DÆMI 4.34**

Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línunnar gegnum punktana $(-2,-3)$ og $(-7,4)$.

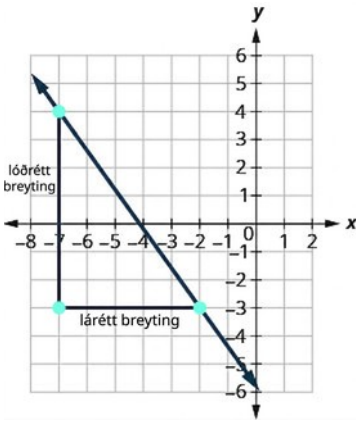
## Lausn



Tafla 4.37

| | |
|---|---|
| Við köllum $(-2,-3)$ punkt nr. 1 og $(-7,4)$ punkt nr. 2. | $\overset{x_1,y_1}{(-2,-3)}\overset{x_2,y_2}{(-7,4)}$ |
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$ |
| Setjið gildin inn. | |
| $y$ seinni punktsins mínus $y$ fyrri punktsins | $m=\frac{4-(-3)}{x_2-x_1}.$ |
| $x$ seinni punktsins mínus $x$ fyrri punktsins | $m=\frac{4-(-3)}{-7-(-2)}.$ |
| Einfaldið. | $m=\frac{7}{-5}$<br>$m=-\frac{7}{5}$ |

Staðfestum hallatöluna á grafinu sem sýnt er.




$$m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$$
$$m = \frac{-7}{5}$$
$$m = -\frac{7}{5}$$

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.67**

Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línunnar gegnum punktana $(-3, 4)$ og $(2, -1)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.68**

Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línunnar gegnum punktana $(-2, 6)$ og $(-3, -4)$.

## Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin

Fram að þessu höfum við í þessum kafla teiknað gröf lína með því að merkja inn punkta, nota skurðpunkta við ása og þekkja láréttar og lóðréttar línur.

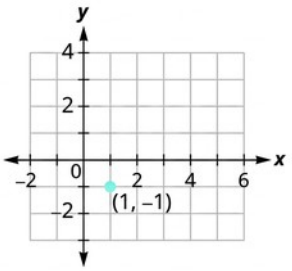
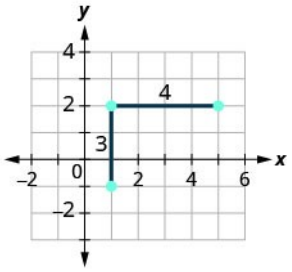
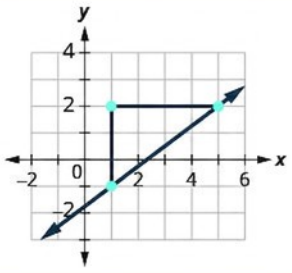
Önnur aðferð til að teikna gröf lína kallast punkthallaaðferð. Við notum hana þegar við þekkjum einn punkt og hallatölu línunnar. Fyrst merkjum við punktinn inn og notum síðan skilgreiningu hallatölu til að teikna graf línunnar.

**DÆMI 4.35**

### Aðferð: Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin

Teiknið graf línunnar sem liggur um punktinn $(1, -1)$ og hefur hallatöluna $m = \frac{3}{4}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Merkið inn gefna punktinn. | Merkið inn (1, –1). |   |
| **Skref 2.** Notið hallatöluformúluna $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna lóðréttu og láréttu breytinguna. | Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m = \frac{3}{4}$ $\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}} = \frac{3}{4}$ lóðrétt breyting = 3 lárétt breyting = 4 |
| **Skref 3.** Byrjið í gefna punktinum og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn. | Byrjið í (1, –1) og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna. Farið 3 einingar upp og 4 einingar til hægri. |   |
| **Skref 4.** Tengið punktana saman með línu. | Tengið punktana tvo saman með línu. |   |

**REYNIÐ SJÁLF 4.69**

Teiknið graf línunnar sem liggur um punktinn $(2, -2)$ og hefur hallatöluna $m = \frac{4}{3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.70**

Teiknið graf línunnar sem liggur um punktinn $(-2, 3)$ og hefur hallatöluna $m = \frac{1}{4}$.

AÐFERÐ

### Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin.

1. Skref 1. Merkið gefna punktinn inn.
2. Skref 2. Notið formúluna fyrir hallatölu $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna lóðréttu og láréttu breytinguna.
3. Skref 3. Byrjið við gefna punktinn og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn.
4. Skref 4. Tengið punktana með línu.

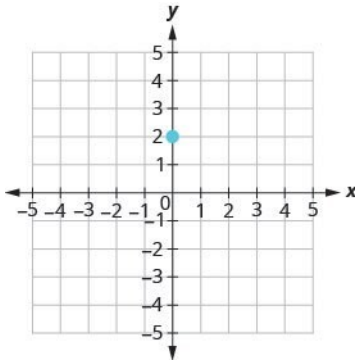
DÆMI 4.36

Teiknið graf línunnar sem hefur skurðpunktinn 2 við y-ás og hallatöluna $m=-\frac{2}{3}$.

4

## Lausn

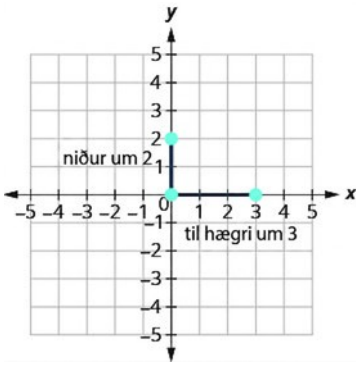
Merkið inn gefna punktinn, skurðpunktinn við y-ás $(0,2)$.



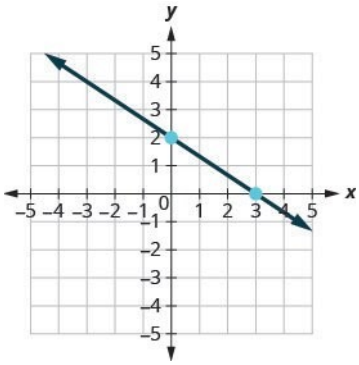

Tafla 4.38

| | |
|---|---|
| Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m=-\frac{2}{3}$ |
| | $\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}=\frac{-2}{3}$ |
| | $\text{lóðrétt breyting}=-2$ |
| | $\text{lárétt breyting}=3$ |

Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna. Merkið seinni punktinn inn.




Tengið punktana tvo með línu.




Þið getið athugað lausnina með því að finna þriðja punkt. Hallatalan er $m=-\frac{2}{3}$ og því má líka rita hana sem $m=\frac{2}{-3}$. Farið aftur í $(0,2)$ og teljið lóðréttu breytinguna, 2, og þá láréttu, $-3$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.71**

Teiknið graf línunnar sem hefur skurðpunktinn 4 við y-ás og hallatöluna $m=-\frac{5}{2}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.72**

Teiknið graf línunnar sem hefur skurðpunktinn við x-ás $-3$ og hallatöluna $m=-\frac{3}{4}$.

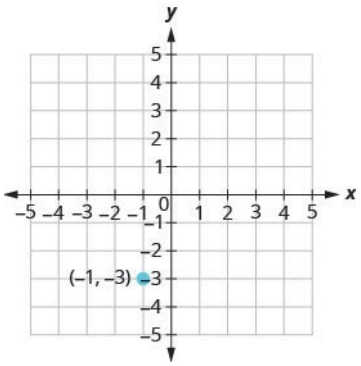
---

**DÆMI 4.37**

Teiknið graf línunnar sem liggur um punktinn $(-1,-3)$ og hefur hallatöluna $m=4$.

## Lausn

Merkið gefna punktinn inn.

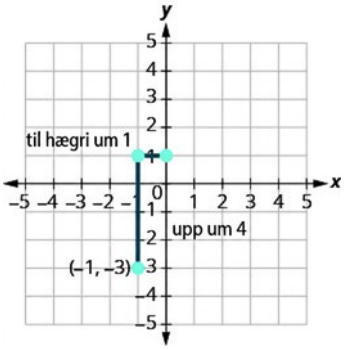



Tafla 4.39

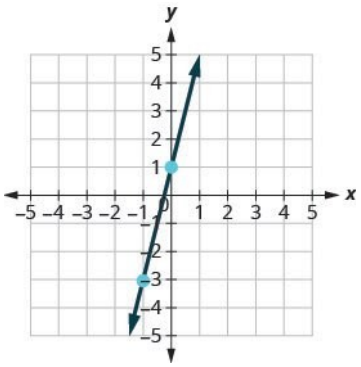
| | |
|---|---|
| Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m=4$ |
| Ritið 4 sem brot. | $\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}=\frac{4}{1}$ |
| | lóðrétt breyting $=4$, lárétt breyting $=1$ |

4

Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna og merkið seinni punktinn inn.




Tengið punktana tvo með línu.




Þið getið athugað lausnina með því að finna þriðja punkt. Hallatalan er $m=4$ og því má líka rita hana sem $m=\frac{-4}{-1}$. Farið aftur í $(-1,-3)$ og teljið lóðréttu breytinguna, $-4$, og þá láréttu, $-1$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.73**

Teiknið graf línunnar sem liggur um punktinn $(-2,1)$ og hefur hallatöluna $m=3$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.74**

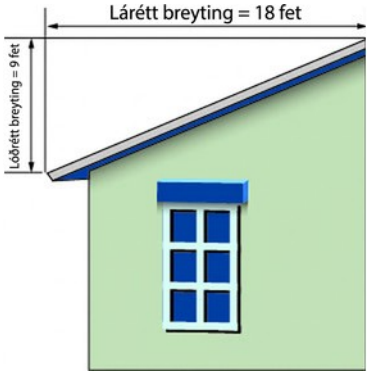
Teiknið graf línunnar sem liggur um punktinn $(4,-2)$ og hefur hallatöluna $m=-2$.

## Leysið hagnýt verkefni um hallatölu

Í upphafi þessa hluta sögðum við að hallatala kæmi víða við sögu í daglegu lífi. Skoðum nú nokkur dæmi.

**DÆMI 4.38**

„Þakhalli“ byggingar er hallatala þaksins. Mikilvægt er að þekkja þakhallann á svæðum þar sem snjóar mikið. Ef þakið er of flatt getur snjóþunginn valdið því að það hrynur. Hver er hallatala þaksins sem sýnt er?




## Lausn

Tafla 4.40

| | |
|---|---|
| Notið formúluna fyrir hallatölu. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| Setjið inn gildi lóðréttu og láréttu breytingarinnar. | $m=\frac{9}{18}$ |
| Einfaldið. | $m=\frac{1}{2}$ |
| Hallatala þaksins er $\frac{1}{2}$. | |
| | Þakið hækkar um 1 fet þegar lárétta breytingin er 2 fet. |

**REYNIÐ SJÁLF 4.75**

Notið dæmi 4.38, en setjið lóðrétt breyting = 14 og lárétt breyting = 24 inn í stað fyrri gilda.

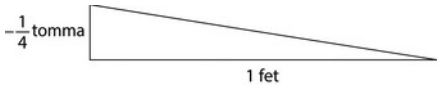
**REYNIÐ SJÁLF 4.76**

Notið dæmi 4.38, en setjið lóðrétt breyting = 15 og lárétt breyting = 36 inn í stað fyrri gilda.

**DÆMI 4.39**

Hafið þið einhvern tíma hugsað um frárennslislagnirnar sem liggja frá húsinu ykkar að götunni? Þær verða að halla niður um $\frac{1}{4}$ tommu á hvert fet til að vatnið renni rétt. Hver þarf hallatalan að vera?






## Lausn

Notið formúluna fyrir hallatölu.

$$m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$$

$$m=\frac{-\frac{1}{4}\text{ tomma}}{1\text{ fet}}$$

$$m=\frac{-\frac{1}{4}\text{ tomma}}{12\text{ tommur}}$$

Einfaldið.

$$m=-\frac{1}{48}$$

Hallatala lagnarinnar er $-\frac{1}{48}$.

Lögnin lækkar um 1 tommu fyrir hverjar 48 tommur í lárétta átt.

**REYNIÐ SJÁLF 4.77**

Finnið hallatölu lagnar sem hallar niður um $\frac{1}{3}$ tommu á hvert fet.

**REYNIÐ SJÁLF 4.78**

Finnið hallatölu lagnar sem hallar niður um $\frac{3}{4}$ tommu á hvert jard.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Notið þessi vefgögn til að fá frekari leiðsögn og æfingu í að skilja hallatölu línu.

- Æfið hallatölu með stafrænu pinnabretti
- Lítil, miðlungsstór og stór stafræn pinnabretti
- Kannið flatarmál og ummál með pinnabretti

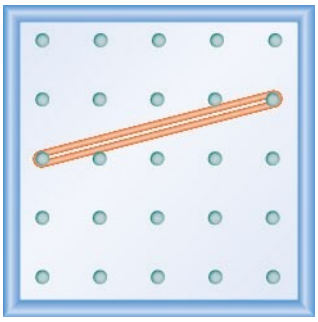
## Æfingar úr kafla 4.4

### *Æfingin skapar meistarann*

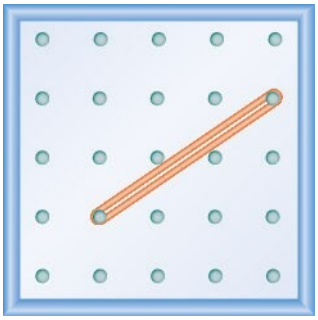
**Notið pinnabretti til að sýna hallatölu**

Finnið hallatöluna sem sýnd er á hverju pinnabretti í eftirfarandi æfingum.

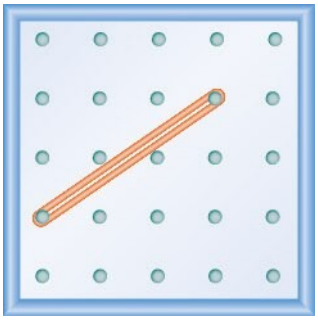
211.



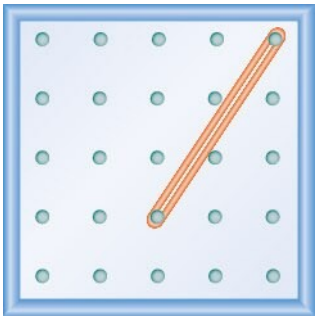
212.



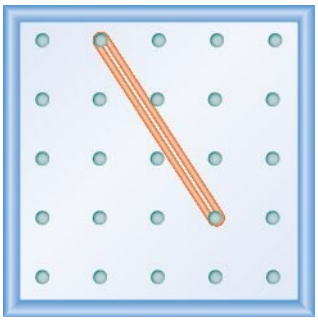
213.



214.

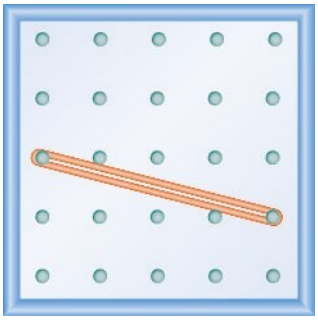


215.

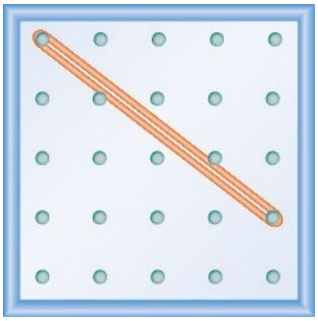




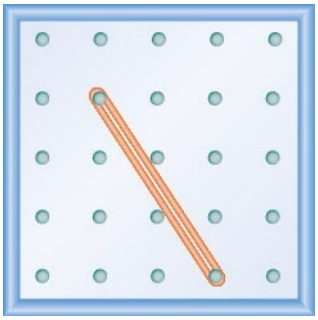
216.



217.



218.



Sýnið hverja hallatölu í eftirfarandi æfingum. Teiknið mynd af niðurstöðunni.

219.

$$\frac{2}{3}$$

220.

$$\frac{3}{4}$$

221.

$$\frac{1}{4}$$

222.

$$\frac{4}{3}$$

223.

$$-\frac{1}{2}$$

224.

$$-\frac{3}{4}$$

225.

$$-\frac{2}{3}$$

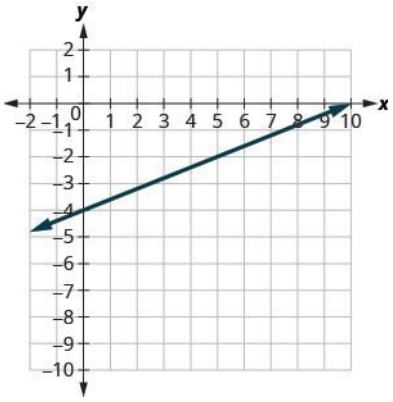
226.

$$-\frac{3}{2}$$

**Notið** $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna hallatölu línu út frá grafi hennar

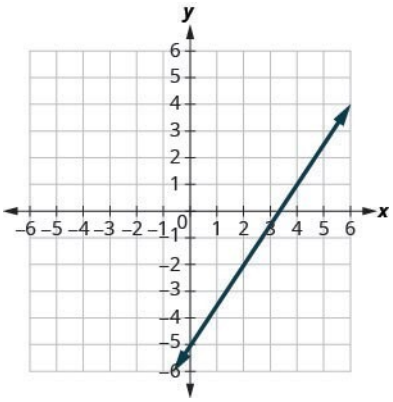
Finnið hallatölu hverrar línu sem sýnd er í eftirfarandi æfingum.

227.

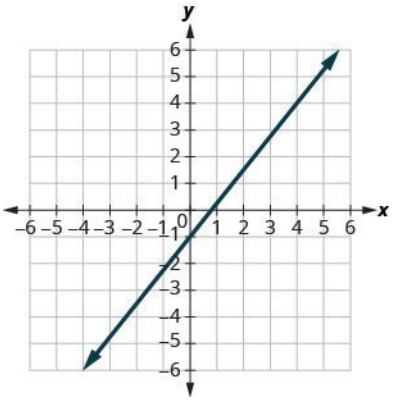


4

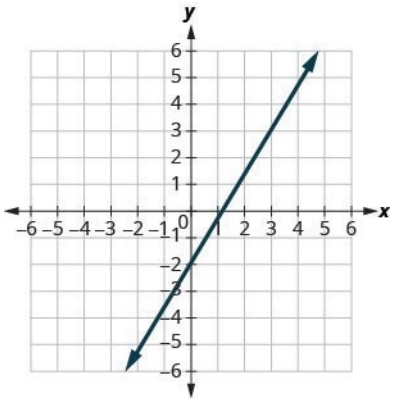
228.



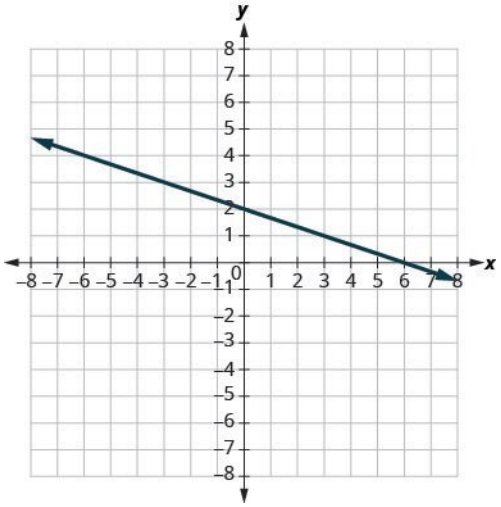
229.



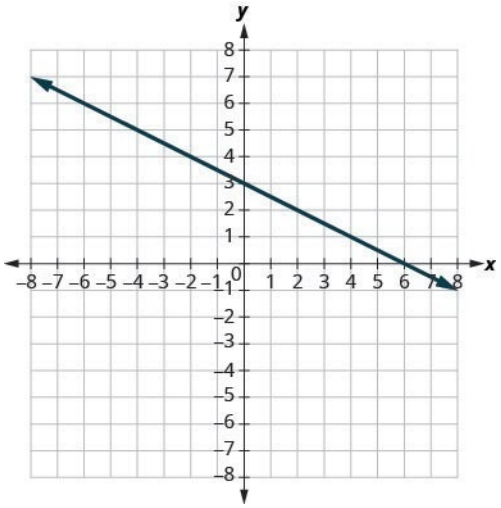
230.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6

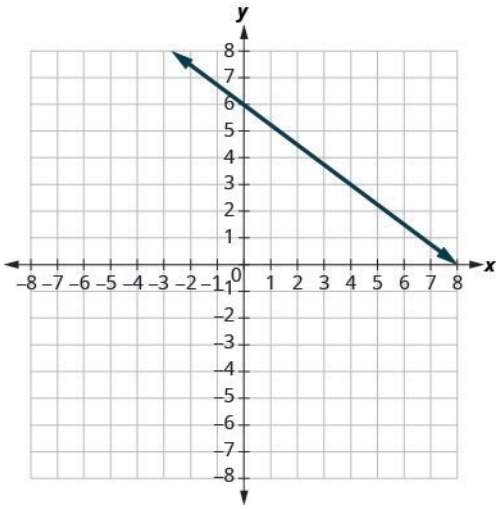
231.


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8

232.

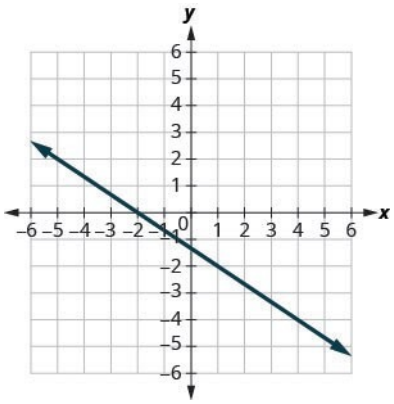

y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8

233.

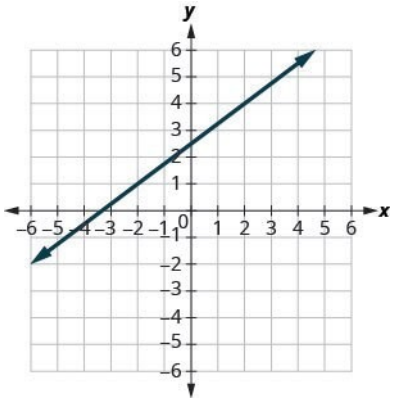

y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8

4

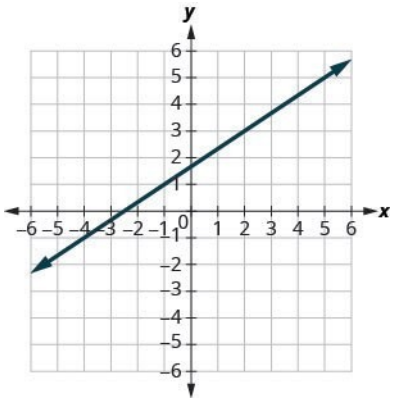
234.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
–6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6
–2
–3
–4
–5
–6

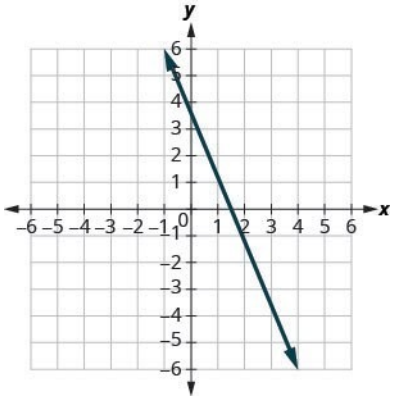
235.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
–6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6
–2
–3
–4
–5
–6

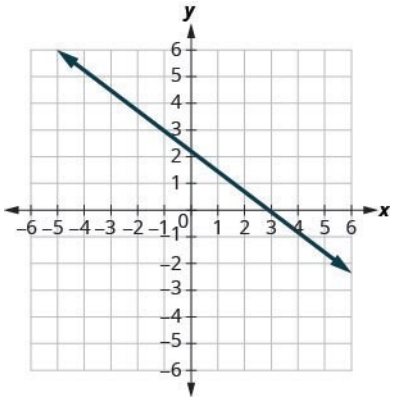
236.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

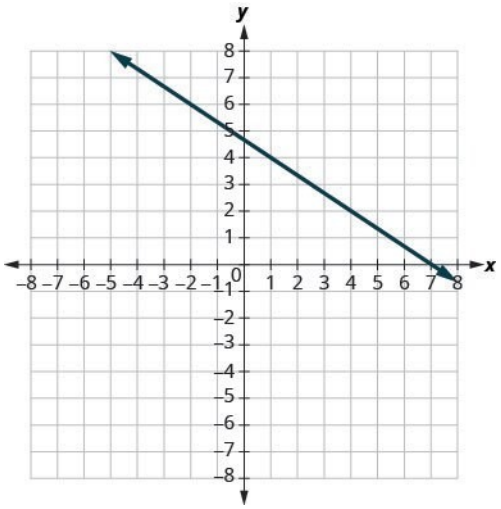
237.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

238.

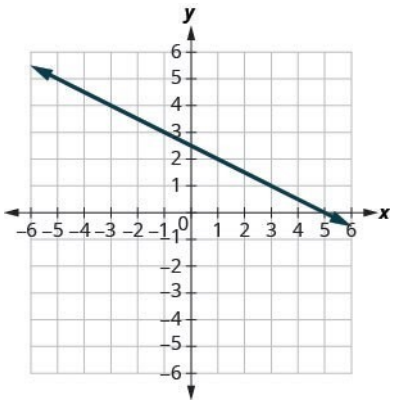

y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−1
−2
−3
−4
−5
−6

239.

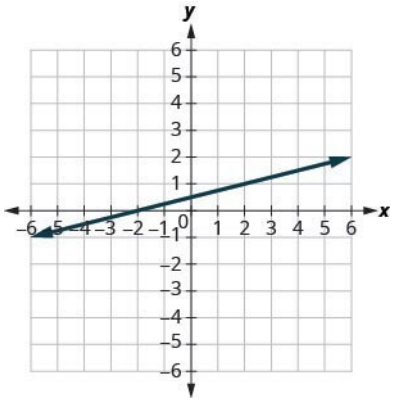

y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6 7 8
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8

4

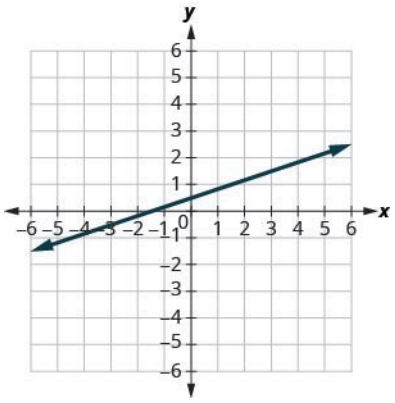
240.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
–6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6
–1
–2
–3
–4
–5
–6

241.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
–6 –5 –4 –3 –2 –1 1 2 3 4 5 6
–1
–2
–3
–4
–5
–6

242.




**Finnið hallatölu láréttra og lóðréttra lína**

Finnið hallatölu hverrar línu í eftirfarandi æfingum.

243.

$$y=3$$

244.

$$y=1$$

245.

$$x=4$$

246.

$$x=2$$

247.

$$y=-2$$

248.

$$y=-3$$

249.

$$x=-5$$

250.

$$x=-4$$

**Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línu milli tveggja punkta**

Notið formúluna fyrir hallatölu í eftirfarandi æfingum til að finna hallatölu línunnar milli hvers punktapars.

251.

$$(1,4),(3,9)$$

252.

$$(2,3),(5,7)$$

253.

$$(0,3),(4,6)$$

254.

$$(0,1),(5,4)$$

255.

$$(2,5),(4,0)$$

256.

$$(3,6),(8,0)$$

4

257.

$$(-3,3),(4,-5)$$

258.

$$(-2,4),(3,-1)$$

259.

$$(-1,-2),(2,5)$$

260.

$$(-2,-1),(6,5)$$

261.

$$(4,-5),(1,-2)$$

262.

$$(3,-6),(2,-2)$$

**Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin**

Teiknið graf hverrar línu í eftirfarandi æfingum með gefnum punkti og hallatölu.

**263.** $(1,-2);\ m=\frac{3}{4}$

**264.** $(1,-1);\ m=\frac{2}{3}$

**265.** $(2,5);\ m=-\frac{1}{3}$

**266.** $(1,4)$; $m=-\frac{1}{2}$

**267.** $(-3,4)$; $m=-\frac{3}{2}$

**268.** $(-2,5)$; $m=-\frac{5}{4}$

**269.** $(-1,-4)$; $m=\frac{4}{3}$

**270.** $(-3,-5)$; $m=\frac{3}{2}$

**271.** *skurðpunktur við y-ás 3;* $m=-\frac{2}{5}$

**272.** *skurðpunktur við y-ás 5;* $m=-\frac{4}{3}$

**273.** *skurðpunktur við x-ás* $-2$; $m=\frac{3}{4}$

**274.** *skurðpunktur við x-ás* $-1$; $m=\frac{1}{5}$

**275.** $(-3,3)$; $m=2$

**276.** $(-4,2)$; $m=4$

**277.** $(1,5)$; $m=-3$

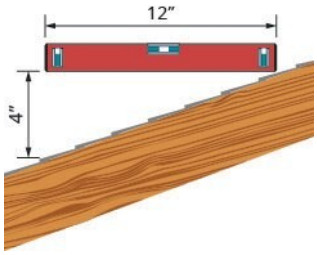
**278.** $(2,3)$; $m=-1$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

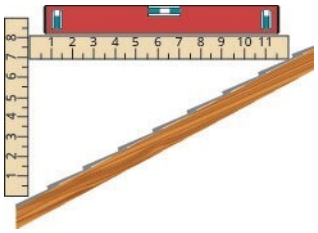
**279.** **Þakhalli.** Einföld leið til að finna hallatölu þaks er að leggja annan enda 12 tommu hallamáls á þakflötinn og halda því láréttu. Mælið síðan frá hinum enda hallamálsins niður að þakfletinum með málbandi eða reglustiku. Þannig fæst hallatala þaksins. Byggingarmenn kalla þetta stundum þakhalla og lýsa honum sem „$x$ á móti 12 halla“, sem merkir $\frac{x}{12}$, þar sem $x$ er fjarlægðin frá þakinu að hallamálinu — lóðrétta breytingin. Stundum er þetta einnig kallað „$x$ á móti 12 halli“.

**1.** ⓐ Hver er hallatala þaksins á þessari mynd?

**2.** ⓑ Hver er þakhallinn eins og byggingarmenn gefa hann upp?




**280.** Hallatala þaksins sem sýnt er hér er mæld með 12 tommu hallamáli og reglustiku. Hver er hallatala þaksins?




4

**281.** **Veghalli.** Vegur í nágrenninu hefur hallann 6%. Veghalli er hallatala vegarins gefin upp í prósentum. Finnið hallatölu vegarins sem brot og fullstyttið það. Hvaða lóðréttu og láréttu breytingar samsvara þessari hallatölu eða þessum veghalla?

**282.** **Hallatala þjóðvegar.** Vegur í nágrenninu hækkar um 2 fet þegar lárétta vegalengdin er 50 fet.

1. ⓐ Hver er hallatala vegarins?
2. ⓑ Veghalli er hallatala vegar gefin upp í prósentum. Hver er veghalli þessa vegar?

**283.** **Hjólastólarampur.** Samkvæmt reglum um hjólastólarampa má lóðrétt hækkun að hámarki vera 1 tomma fyrir hverjar 12 tommur í lárétta átt.

1. ⓐ Hversu langur þarf rampurinn að vera til að ná 24 tommu hækkun upp að dyrunum?
2. ⓑ Búið til líkan af rampinum.

**284.** **Hjólastólarampur.** Ef lóðrétt hækkun er 1 tomma fyrir hverjar 16 tommur í lárétta átt er auðveldara fyrir hjólastólanotanda að fara upp rampinn.

1. ⓐ Hversu langur þarf rampur að vera svo auðvelt sé að ná 24 tommu hækkun upp að dyrunum?
2. ⓑ Búið til líkan af rampinum.

### *Ritunaræfingar*

**285.** Hvað segir formerki hallatölunnar um línu?

**286.** Hvernig er graf línu með hallatöluna $m=\frac{1}{2}$ frábrugðið grafi línu með hallatöluna $m=2$ ?

**287.** Hvers vegna er hallatala lóðréttrar línu „óskilgreind“?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu góðum tökum þið hafið náð á markmiðum kaflans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað pinnabretti til að sýna hallatölu. | | | |
| notað $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna hallatölu línu út frá grafi hennar. | | | |
| fundið hallatölu láréttra og lóðréttra lína. | | | |
| notað hallatöluformúluna til að finna hallatölu línu milli tveggja punkta. | | | |
| teiknað graf línu út frá punkti og hallatölu. | | | |
| leyst hagnýt verkefni um hallatölu. | | | |

ⓑ Lítið á svörin á gátlistanum. Hversu góðum tökum teljið þið ykkur hafa náð á efni kaflans á kvarðanum 1–10? Hvernig getið þið bætt ykkur?



# 4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Greinið tengslin milli grafs og hallatöluforms jöfnu línu
- Fundið hallatölu og skurðpunkt við y-ás út frá jöfnu línu
- Teiknið graf línu með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás
- Veljið hentugustu aðferðina til að teikna graf línu
- Teiknið gröf og túlkið hagnýt dæmi með hallatöluformi
- Notið hallatölur til að þekkja samsíða línur
- Notið hallatölur til að þekkja hornréttar línur

**UNDIRBÚNINGUR 4.10**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leggið saman: $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$.

Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 1.77.

**UNDIRBÚNINGUR 4.11**

Finnið margföldunarandhverfu $\frac{3}{7}$.

Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 1.70.

**UNDIRBÚNINGUR 4.12**

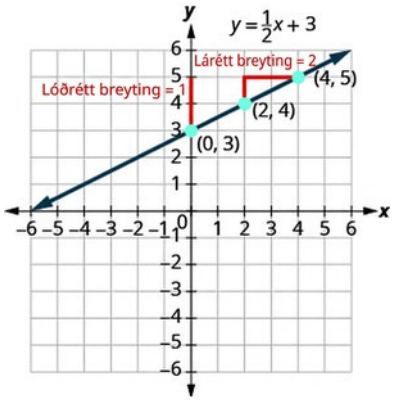
Leysið $2x - 3y = 12$ fyrir $y$. Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 2.63.

## Greinið tengslin milli grafs og hallatöluforms jöfnu línu

Við höfum teiknað gröf línulegra jafna með því að merkja inn punkta, nota skurðpunkta við ása, þekkja láréttar og lóðréttar línur og beita punkthallaaðferðinni. Þegar við höfum séð hvernig jafna á hallatöluformi tengist grafi hennar höfum við enn eina aðferð til að teikna gröf lína.

Í kaflanum Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum, teiknuðum við graf jöfnunnar $y = \frac{1}{2}x + 3$ með því að merkja inn punkta. Sjá mynd 4.24. Finnum hallatölu línunnar.






Mynd 4.24

Rauðu línurnar sýna að lóðrétta breytingin er 1 og sú lárétta 2. Setjum gildin inn í formúluna fyrir hallatölu:

$$m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Hver er skurðpunktur línunnar við y-ás? Skurðpunkturinn við y-ás er þar sem línan sker y-ásinn og er því $(0, 3)$. Jafna línunnar er:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Takið eftir að línan hefur:

hallatala $m = \frac{1}{2}$ og skurðpunktur við $y$-ás $(0, 3)$

Þegar línuleg jafna hefur verið leyst með tilliti til $y$ er stuðull $x$-liðsins hallatalan og fasti liðurinn y-hnit skurðpunktsins við y-ás. Við segjum að jafnan $y=\frac{1}{2}x+3$ sé á hallatöluformi.

$m = \frac{1}{2}$; skurðpunktur við y-ás er $(0, 3)$

$y = \frac{1}{2}x + 3$

$y = mx + b$

**HALLATÖLUFORM JÖFNU LÍNU**

Hallatöluform jöfnu línu með hallatöluna $m$ og skurðpunktinn við y-ás $(0, b)$ er

$$y = mx + b$$

Hallatöluformið er stundum kallað „y-form“.

4

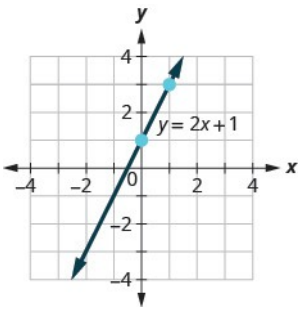
**DÆMI 4.40**

Notið grafið til að finna hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $y=2x+1$.

Berið þessi gildi saman við jöfnuna $y=mx+b$.

## Lausn

Til að finna hallatölu línunnar þurfum við að velja tvo punkta á henni. Við notum punktana $(0,1)$ og $(1,3)$.

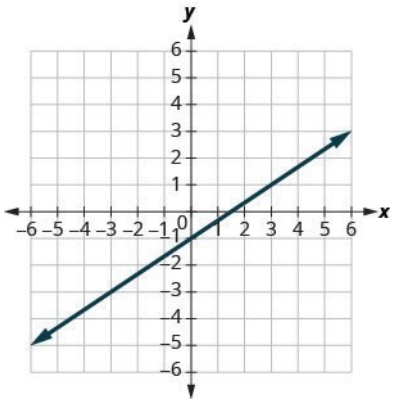



| | |
|---|---|
| Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| | $m = \frac{2}{1}$ |
| | $m = 2$ |
| Finnið skurðpunkt línunnar við y-ás. | Punkturinn (0, 1) er skurðpunkturinn við y-ás. |
| Við fundum hallatöluna $m = 2$ og skurðpunktinn við $y$-ás $(0, 1)$. | $y = 2x + 1$<br>$y = mx + b$ |

Hallatalan er jöfn stuðli $x$ og y-hnit skurðpunktsins við y-ás er jafnt fasta liðnum.

**REYNIÐ SJÁLF 4.79**

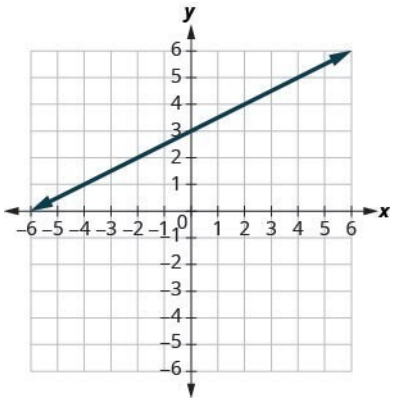
Notið grafið til að finna hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $y=\frac{2}{3}x-1$. Berið þessi gildi saman við jöfnuna $y=mx+b$.






**REYNIÐ SJÁLF 4.80**

Notið grafið til að finna hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $y=\frac{1}{2}x+3$. Berið þessi gildi saman við jöfnuna $y=mx+b$.




## Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás út frá jöfnu línu

Í kaflanum Skiljið hallatölu línu teiknuðum við graf línu með hallatölu og einum punkti. Þegar jafna á hallatöluformi er gefin getum við notað skurðpunktinn við y-ás sem punktinn og talið breytingarnar þaðan samkvæmt hallatölunni. Æfum okkur að finna hallatölu og skurðpunkt við y-ás út frá jöfnu línu.

**DÆMI 4.41**

Finnið hallatölu og skurðpunkt línunnar við y-ás með jöfnuna $y=-3x+5$.

## Lausn

Við berum jöfnuna okkar saman við hallatöluform jöfnu.

| | $y = mx + b$ |
|---|---|
| Ritið jöfnu línunnar. | $y = -3x + 5$ |
| Finnið hallatöluna. | $m = -3$ |
| Finnið skurðpunktinn við y-ás. | skurðpunktur við $y$-ás er $(0, 5)$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.81**

Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $y = \frac{2}{5}x - 1$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.82**

Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $y = -\frac{4}{3}x + 1$.

Þegar jafna línu er ekki gefin á hallatöluformi er fyrsta skrefið að leysa jöfnuna með tilliti til $y$.

**DÆMI 4.42**

Finnið hallatölu og skurðpunkt línunnar við y-ás með jöfnuna $x + 2y = 6$.

## Lausn

Jafnan er ekki á hallatöluformi. Til að bera hana saman við hallatöluformið verðum við fyrst að leysa hana með tilliti til $y$.

| | |
|---|---|
| Leysið með tilliti til y. | $x+2y=6$ |
| Dragið x frá báðum hliðum. | $2y=-x+6$ |
| Deilið báðum hliðum með 2. | $\frac{2y}{2}=\frac{-x+6}{2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2y}{2}=\frac{-x}{2}+\frac{6}{2}$ |
| $\left(\text{Munið: } \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$ | |
| Einfaldið. | $y=-\frac{1}{2}x+3$ |
| Ritið hallatöluform jöfnu línunnar. | $y=mx+b$ |
| Ritið jöfnu línunnar. | $y=-\frac{1}{2}x+3$ |
| Finnið hallatöluna. | $m=-\frac{1}{2}$ |
| Finnið skurðpunktinn við y-ás. | skurðpunktur við y-ás er $(0, 3)$ |

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.83**

Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $x+4y=8$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.84**

Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $3x+2y=12$.

## Teiknið graf línu með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás

Nú þegar við kunnum að finna hallatölu línu og skurðpunkt hennar við y-ás út frá jöfnunni getum við teiknað grafið með því að merkja skurðpunktinn inn og nota síðan hallatöluna til að finna annan punkt.

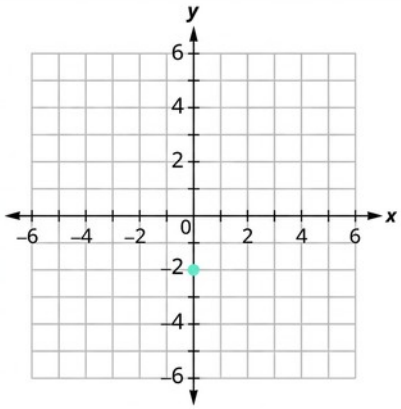
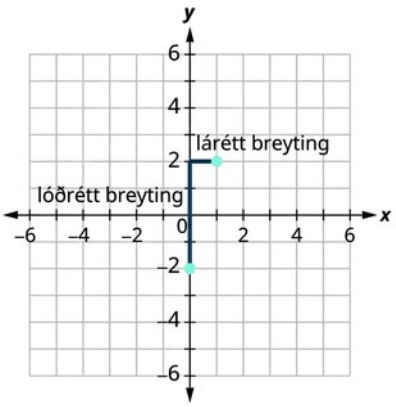
**DÆMI 4.43**

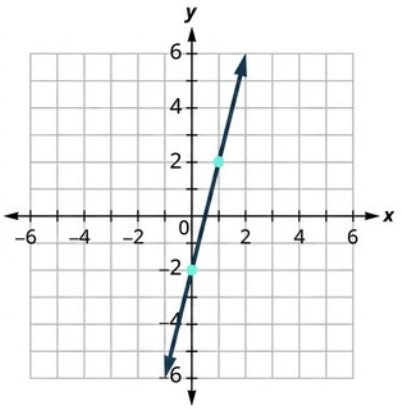
### Aðferð: Teiknið graf línu með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=4x-2$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið hallatöluform jöfnunnar. | Þessi jafna er á hallatöluformi. | $y=4x-2$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 2.** Ákvarðið **hallatöluna** og **skurðpunktinn** við *y*-ás. | Notið $y = mx + b$<br>Finnið hallatöluna.<br>Finnið skurðpunktinn við *y*-ás. | $y = mx + b$<br>$y = 4x + (-2)$<br>$m = 4$<br>$b = -2, (0, -2)$ |
| **Skref 3.** Merkið skurðpunktinn við *y*-ásinn. | Merkið punktinn (0, –2). |  |
| **Skref 4.** Notið hallatöluformúluna $m = \frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna lóðréttu og láréttu breytinguna. | Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m = 4$<br>$\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}} = \frac{4}{1}$<br>lóðrétt breyting = 4<br>lárétt breyting = 1 |
| **Skref 5.** Byrjið í skurðpunktinum við *y*-ás og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn. | Byrjið í (0, –2) og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna. Upp um 4, til hægri um 1. |  |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 6.** Tengið punktana saman með línu. | Tengið punktana tvo saman með línu. |  |



**REYNIÐ SJÁLF 4.85**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=4x+1$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.86**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=2x-3$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

**AÐFERÐ**

## Teiknið graf línu með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás

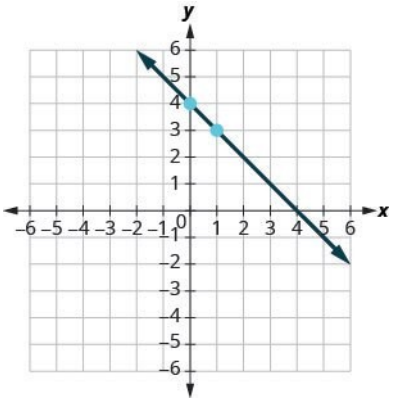
1. Skref 1. Finnið hallatöluform jöfnu línunnar.
2. Skref 2. Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás.
3. Skref 3. Merkið skurðpunktinn við $y$-ás inn.
4. Skref 4. Notið formúluna fyrir hallatölu $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna lóðréttu og láréttu breytinguna.
5. Skref 5. Byrjið við skurðpunktinn við y-ás og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn.
6. Skref 6. Tengið punktana með línu.

**DÆMI 4.44**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=-x+4$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

## Lausn

| | $y=mx+b$ |
|---|---|
| Jafnan er á hallatöluformi. | $y=-x+4$ |

| | |
|---|---|
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás. | $m=-1$ |
| | *Skurðpunkturinn við y-ás er (0, 4)* |
| Merkið skurðpunktinn við y-ás inn. | Sjá grafið hér fyrir neðan. |
| Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m=\frac{-1}{1}$ |
| Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn. | lóðrétt breyting −1, lárétt breyting 1 |
| Dragið línuna. |  |
| Þið getið yfirfarið lausnina með því að finna annan punkt á línunni og ganga úr skugga um að hann sé lausn jöfnunnar. Á grafinu sést að línan liggur um (4, 0). | |
| Athugið. $y = -x+4$ $0 \stackrel{?}{=} -4+4$ $0 = 0\checkmark$ | |



**REYNIÐ SJÁLF 4.87**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=-x-3$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

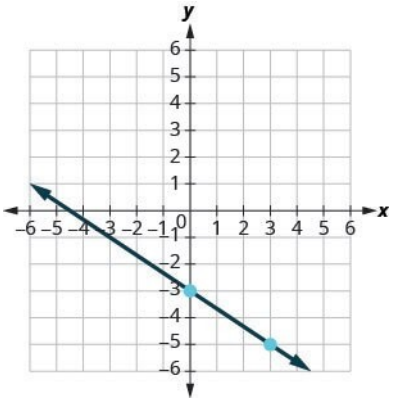
**REYNIÐ SJÁLF 4.88**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=-x-1$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

**DÆMI 4.45**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=-\frac{2}{3}x-3$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

## Lausn

| | $y=mx+b$ |
|---|---|
| Jafnan er á hallatöluformi. | $y=-\frac{2}{3}x-3$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás. | $m=-\frac{2}{3}$; skurðpunkturinn við y-ás er (0, −3) |
| Merkið skurðpunktinn við y-ás inn. | Sjá grafið hér fyrir neðan. |
| Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna. | |
| Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn. | |
| Dragið línuna. |  |



4

**REYNIÐ SJÁLF 4.89**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=-\frac{5}{2}x+1$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

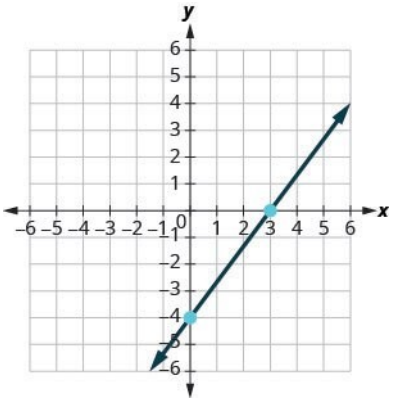
**REYNIÐ SJÁLF 4.90**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=-\frac{3}{4}x-2$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

**DÆMI 4.46**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $4x-3y=12$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $4x-3y=12$ |
| Finnið hallatöluform jöfnunnar. | $-3y=-4x+12$ |
| | $-\frac{3y}{3}=\frac{-4x+12}{-3}$ |
| Jafnan er nú á hallatöluformi. | $y=\frac{4}{3}x-4$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás. | $m=\frac{4}{3}$ |
| | *Skurðpunkturinn við y-ás er (0, −4)* |
| Merkið skurðpunktinn við y-ás inn. | Sjá grafið hér fyrir neðan. |
| Finnið lóðréttu og láréttu breytinguna; teljið þær síðan til að merkja inn seinni punktinn. | |
| Dragið línuna. |  |



**REYNIÐ SJÁLF 4.91**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $2x-y=6$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

**REYNIÐ SJÁLF 4.92**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $3x-2y=8$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

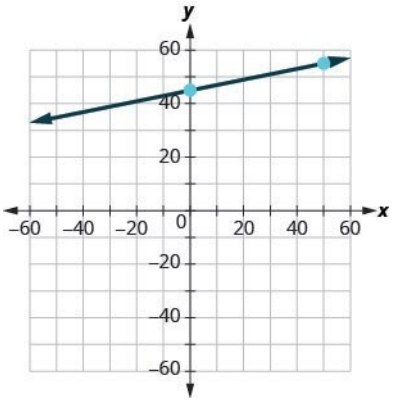
Við höfum hingað til notað hnitakerfi þar sem bæði $x$ og $y$ ná frá um $-10$ til 10 fyrir allar jöfnurnar sem við höfum teiknað. Ekki er hægt að teikna allar línulegar jöfnur í svo litlu hnitakerfi. Oft, einkum í hagnýtum dæmum með raunverulegum gögnum, þurfum við að láta ásana ná að stærri jákvæðum eða lægri neikvæðum tölum.

**DÆMI 4.47**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=0{,}2\,x+45$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

## Lausn

Við notum hnitakerfi þar sem ásarnir ná frá um $-80$ til 80.

| | $y=mx+b$ |
|---|---|
| Jafnan er á hallatöluformi. | $y=0{,}2\,x+45$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás. | $m=0{,}2$ |
| | Skurðpunkturinn við y-ás er (0, 45) |
| Merkið skurðpunktinn við y-ás inn. | Sjá grafið hér fyrir neðan. |
| Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn. Hallatalan er $m=0{,}2$; rituð sem brot er hún $m=\frac{2}{10}$. Vegna kvarðans á grafinu er auðveldara að nota jafngilda brotið $m=\frac{10}{50}$. | |
| Dragið línuna. |  |



**REYNIÐ SJÁLF 4.93**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=0{,}5\,x+25$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

**REYNIÐ SJÁLF 4.94**

Teiknið graf línunnar sem hefur jöfnuna $y=0{,}1\,x-30$ með því að nota hallatölu hennar og skurðpunkt við y-ás.

Nú þegar við höfum teiknað gröf lína með hallatölu og skurðpunkti við y-ás skulum við draga saman allar aðferðirnar sem við höfum notað. Sjá mynd 4.25.

**Aðferðir til að teikna gröf lína**

| Punktaritun | Hallatöluform | Skurðpunktar við ása | Þekkið lóðréttar og láréttar línur |
|---|---|---|---|
| $x$ \| $y$ | $y = mx + b$ | $x$ \| $y$<br>0 \|<br>\| 0 | |
| Finnið þrjá punkta. Merkið punktana inn, gangið úr skugga um að þeir liggi á sömu línu og teiknið síðan línuna. | Finnið hallatöluna og skurðpunktinn við $y$-ás. Byrjið í skurðpunktinum við $y$-ás og færið ykkur síðan samkvæmt hallatölunni til að finna annan punkt. | Finnið skurðpunktana við ásana og þriðja punktinn. Merkið punktana inn, gangið úr skugga um að þeir liggi á sömu línu og teiknið síðan línuna. | Jafnan hefur aðeins eina breytu.<br>$x = a$ er lóðrétt lína<br>$y = b$ er lárétt lína |

Mynd 4.25

## Veljið hentugustu aðferðina til að teikna graf línu

Nú höfum við séð nokkrar aðferðir til að teikna gröf lína. Hvernig vitum við hvaða aðferð hentar tiltekinni jöfnu?

Við getum alltaf merkt inn punkta, notað hallatöluformið eða fundið skurðpunkta við ása fyrir hvaða jöfnu sem er. Vinnan verður þó auðveldari ef við þekkjum hentugustu leiðina fyrir hverja gerð jöfnu. Yfirleitt er ekki skilvirkast að teikna graf línu með því að merkja inn punkta. Við sáum betri aðferðir í köflum 4,3 og 4,4 og fyrr í þessum kafla. Skoðum nokkur mynstur sem hjálpa okkur að velja hentugustu aðferðina.

Hér eru sex jöfnur sem við teiknuðum gröf af í þessum kafla og aðferðin sem við notuðum fyrir hverja þeirra.

| | Jafna | Aðferð |
|---|---|---|
| #1 | $x=2$ | Lóðrétt lína |
| #2 | $y=4$ | Lárétt lína |
| #3 | $-x+2y=6$ | Skurðpunktar |
| #4 | $4x-3y=12$ | Skurðpunktar |
| #5 | $y=4x-2$ | Hallatöluform |
| #6 | $y=-x+4$ | Hallatöluform |

Jöfnur nr. 1 og 2 hafa aðeins eina breytu hvor. Munið að í jöfnum af þessu tagi er gildi breytunnar fasti og óháð gildi hinnar breytunnar. Gröf slíkra jafna eru lóðréttar eða láréttar línur.

Í jöfnum nr. 3 og 4 eru bæði $x$ og $y$ sömu megin við jafnaðarmerkið. Jöfnurnar eru á forminu $Ax+By=C$. Við settum $y=0$ inn til að finna skurðpunktinn við x-ás og $x=0$ til að finna skurðpunktinn við y-ás. Síðan fundum við þriðja punktinn með því að velja annað gildi fyrir $x$ eða $y$.

Jöfnur nr. 5 og 6 eru ritaðar á hallatöluformi. Eftir að hafa fundið hallatölu og skurðpunkt við y-ás út frá jöfnunni notuðum við þau til að teikna graf línunnar.

Af þessu fæst aðferðin hér á eftir.

**AÐFERÐ TIL AÐ VELJA HENTUGUSTU LEIÐINA VIÐ AÐ TEIKNA GRAF LÍNU**

Skoðið form jöfnunnar.

- Ef jafnan hefur aðeins eina breytu er grafið lóðrétt eða lárétt lína.
  - $x=a$ er lóðrétt lína sem sker x-ásinn í $a$.
  - $y=b$ er lárétt lína sem sker y-ásinn í $b$.
- Ef $y$ er einangrað öðrum megin við jafnaðarmerkið, á forminu $y=mx+b$, skal teikna grafið með hallatölu og skurðpunkti við y-ás.
  - Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás og teiknið síðan grafið.
- Ef jafnan er á forminu $Ax+By=C$, skuluð þið finna skurðpunktana við ásа.
  - Finnið skurðpunktana við x- og y-ás og þriðja punktinn og teiknið síðan grafið.

**DÆMI 4.48**

4

Ákvarðið hentugustu aðferðina til að teikna graf hverrar línu.

ⓐ $y=-6$ ⓑ $5x-3y=15$ ⓒ $x=7$ ⓓ $y=\frac{2}{5}x-1$.

## Lausn

1. ⓐ $y=-6$

   Jafnan hefur aðeins eina breytu, $y$. Graf hennar er lárétt lína sem sker y-ásinn í $-6$.

2. ⓑ $5x-3y=15$

   Jafnan er á forminu $Ax+By=C$. Auðveldast er að teikna graf hennar með því að finna skurðpunktana við ásа og einn punkt til viðbótar.

3. ⓒ $x=7$

   Jafnan hefur aðeins eina breytu, $x$. Grafið er lóðrétt lína sem sker x-ásinn í $7$.

4. ⓓ $y=\frac{2}{5}x-1$

   Þar sem jafnan er á $y=mx+b$ formi er auðveldast að teikna graf línunnar með hallatölu og skurðpunkti við y-ás.

**REYNIÐ SJÁLF 4.95**

Ákvarðið hentugustu aðferðina til að teikna graf hverrar línu: ⓐ $3x+2y=12$ ⓑ $y=4$ ⓒ $y=\frac{1}{5}x-4$ ⓓ $x=-7$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.96**

Ákvarðið hentugustu aðferðina til að teikna graf hverrar línu: ⓐ $x=6$ ⓑ $y=-\frac{3}{4}x+1$ ⓒ $y=-8$ ⓓ $4x-3y=-1$.

## Teiknið gröf og túlkið hagnýt dæmi með hallatöluformi

Línulegar jöfnur lýsa mörgum aðstæðum úr daglegu lífi. Hér skoðum við nokkur dæmi til að sjá hvernig jöfnur á hallatöluformi tengjast raunverulegum aðstæðum.

Þegar línuleg jafna lýsir raunverulegum aðstæðum eru yfirleitt notaðir aðrir bókstafir fyrir breyturnar en x og y. Heiti breytanna minna okkur á hvaða stærðir eru mældar.

---

**DÆMI 4.49**

Jafnan $F=\frac{9}{5}C+32$ er notuð til að umreikna hitastig $C$ á Celsíus-kvarða í hitastig $F$ á Fahrenheit-kvarða.

ⓐ Finnið Fahrenheit-hitastigið þegar Celsíus-hitastigið er 0. ⓑ Finnið Fahrenheit-hitastigið þegar Celsíus-hitastigið er 20. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við F-ás. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

4

### Lausn

Tafla 4.41

| | |
|---|---|
| ⓐ Finnið Fahrenheit-hitastigið þegar Celsíus-hitastigið er 0. Finnið<br><br>$F$ þegar $C=0$. Einfaldið. | $F=\frac{9}{5}C+32$<br>$F=\frac{9}{5}(0)+32$<br>$F=32$ |
| ⓑ Finnið Fahrenheit-hitastigið þegar Celsíus-hitastigið er 20. Finnið<br><br>$F$ þegar $C=20$. Einfaldið. Einfaldið. | $F=\frac{9}{5}C+32$<br>$F=\frac{9}{5}(20)+32$<br>$F=36+32$<br>$F=68$ |

ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við F-ás.

Þótt jafnan noti $F$ og $C$, er hún samt á hallatöluformi.

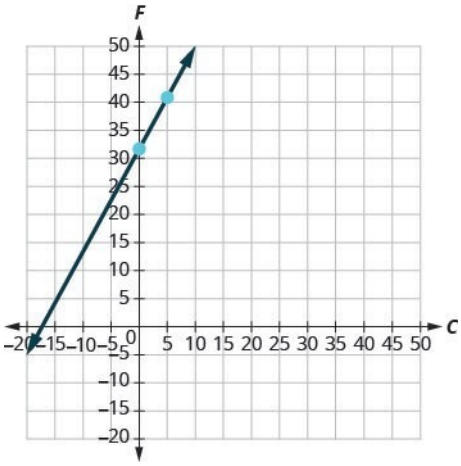
$$y=mx+b$$
$$F=mC+b$$
$$F=\frac{9}{5}C+32$$

Hallatalan $\frac{9}{5}$ merkir að Fahrenheit-hitastigið (F) hækkar um 9 gráður þegar Celsíus-hitastigið (C) hækkar um 5 gráður.

Skurðpunkturinn við F-ás merkir að þegar hitastigið er $0°$ á Celsíus-kvarða er það $32°$ á Fahrenheit-kvarða.

ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

Við þurfum stærri kvarða en venjulega. Byrjið við skurðpunktinn við F-ás $(0, 32)$ og teljið síðan lóðréttu breytinguna 9 og þá láréttu 5 til að finna seinni punktinn. Sjá mynd 4.26.




Mynd 4.26

**REYNIÐ SJÁLF 4.97**

Jafnan $h = 2s + 50$ er notuð til að áætla hæð konu í tommum, h, út frá skóstærð hennar, s.

1. ⓐ Áætlið hæð barns sem notar skóstærð 0 í skóstærðakerfi kvenna.
2. ⓑ Áætlið hæð konu með skóstærð 8.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við h-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**REYNIÐ SJÁLF 4.98**

Jafnan $T = \frac{1}{4}n + 40$ er notuð til að áætla Fahrenheit-hitastigið T út frá fjölda tísta frá krybbum, n, á einni mínútu.

1. ⓐ Áætlið hitastigið þegar engin tíst heyrast.
2. ⓑ Áætlið hitastigið þegar fjöldi tísta á einni mínútu er 100.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við T-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

Rekstrarkostnaður sumra fyrirtækja skiptist í tvo hluta: fastan kostnað og breytilegan kostnað. Fasti kostnaðurinn er alltaf sá sami óháð því hversu margar einingar eru framleiddar. Þar undir falla húsaleiga, tryggingar, búnaður, auglýsingar og aðrir liðir sem

greiða þarf reglulega. Breytilegi kostnaðurinn ræðst af fjölda framleiddra eininga og nær til efnis og vinnu sem þarf fyrir hverja vöru.

**DÆMI 4.50**

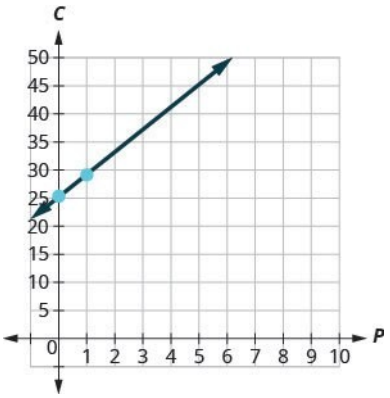
Stella rekur heimafyrirtæki sem selur sælkerapítsur. Jafnan $C=4\,p+25$ lýsir tengslunum milli vikulegs kostnaðar hennar C í dölum og fjölda pítsa p sem hún selur.

ⓐ Finnið kostnað Stellu í viku þegar hún selur enga pítsu. ⓑ Finnið kostnaðinn í viku þegar hún selur 15 pítsur. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Finnið kostnað Stellu í viku þegar hún selur enga pítsu. | $C = 4p + 25$ |
| Finnið C þegar $p=0$. | $C = 4(0) + 25$ |
| Einfaldið. | $C = 25$ |
| | Fastur kostnaður Stellu er $25 þegar hún selur enga pítsu. |
| ⓑ Finnið kostnaðinn í viku þegar hún selur 15 pítsur. | $C = 4p + 25$ |
| Finnið C þegar $p=15$. | $C = 4(15) + 25$ |
| Einfaldið. | $C = 60 + 25$ |
| | $C = 85$ |
| | Kostnaður Stellu er $85 þegar hún selur 15 pítsur. |
| ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás. | $y = mx + b$<br>$C = 4p + 25$ |
| | Hallatalan 4 merkir að kostnaðurinn hækkar um $4 fyrir hverja pítsu sem Stella selur. Skurðpunkturinn við C-ás merkir að vikulegur kostnaður hennar er $25 jafnvel þegar hún selur enga pítsu. |

ⓓ Teiknið graf jöfnunnar. Við þurfum stærri kvarða en venjulega. Byrjið við skurðpunktinn við C-ás (0, 25) og teljið síðan lóðréttu breytinguna 4 og þá láréttu 1 til að finna seinni punktinn.




**REYNIÐ SJÁLF 4.99**

Sam ekur sendibíl. Jafnan $C = 0{,}5\,m + 60$ lýsir tengslunum milli vikulegs kostnaðar hans C í dölum og fjölda mílna m sem hann ekur.

ⓐ Finnið kostnað Sams í viku þegar hann ekur 0 mílur. ⓑ Finnið kostnaðinn í viku þegar hann ekur 250 mílur. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

4

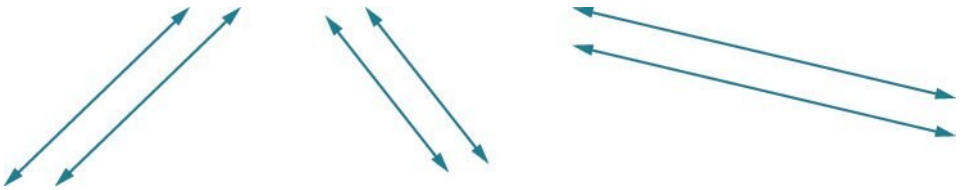
**REYNIÐ SJÁLF 4.100**

Loreen rekur skrautskriftarfyrirtæki. Jafnan $C = 1{,}8\,n + 35$ lýsir tengslunum milli vikulegs kostnaðar hennar C í dölum og fjölda brúðkaupsboðskorta n sem hún skrifar.

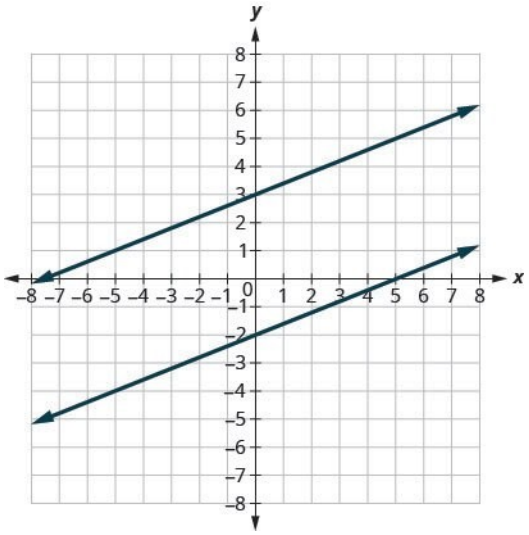
1. ⓐ Finnið kostnað Loreen í viku þegar hún skrifar engin boðskort.
2. ⓑ Finnið kostnaðinn í viku þegar hún skrifar 75 boðskort.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

## Notið hallatölur til að þekkja samsíða línur

Hallatala línu segir til um hve brött hún er og hvort hún hækkar eða lækkar þegar hún er lesin frá vinstri til hægri. Tvær línur með sömu hallatölu kallast samsíða línur. Samsíða línur skerast aldrei.



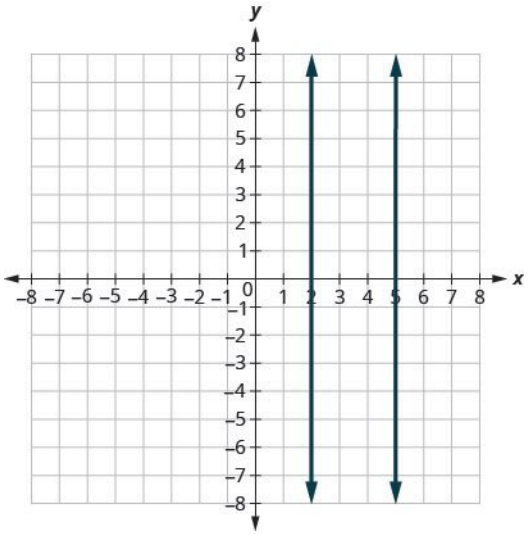
Formlegri lýsing í rétthyrndu hnitakerfi er þessi: Tvær línur með sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás kallast samsíða línur. Sjá mynd 4.27.




Mynd 4.27 Sannreynið að báðar línurnar hafi sömu hallatöluna $m=\frac{2}{5}$ en ólíka skurðpunkta við y-ás.



Hvað um lóðréttar línur? Hallatala lóðréttrar línu er óskilgreind og því falla lóðréttar línur ekki undir skilgreininguna hér að ofan. Við segjum að lóðréttar línur með ólíka skurðpunkta við x-ás séu samsíða. Sjá mynd 4.28.




Mynd 4.28 Lóðréttar línur með ólíka skurðpunkta við x-ás eru samsíða.

---

**SAMSÍÐA LÍNUR**

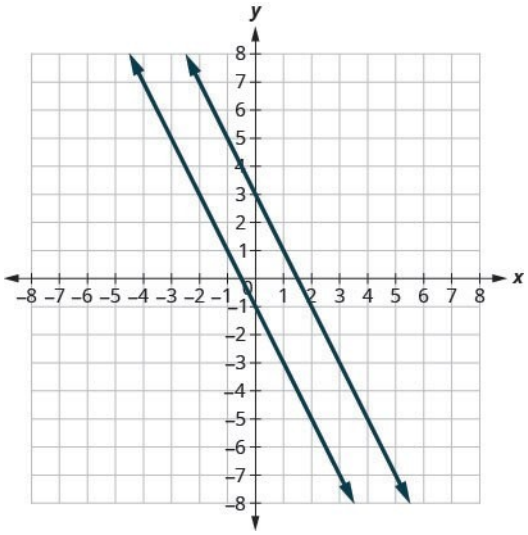
Samsíða línur eru línur í sama fleti sem skerast ekki.

- Samsíða línur hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás.
- Ef $m_1$ og $m_2$ eru hallatölur tveggja samsíða lína, þá er $m_1=m_2$.
- Samsíða lóðréttar línur hafa ólíka skurðpunkta við x-ás.

Teiknum gröf jafnanna $y=-2x+3$ og $2x+y=-1$ í sama hnitakerfi. Fyrri jafnan er þegar á hallatöluformi: $y=-2x+3$. Við leysum seinni jöfnuna með tilliti til $y$:

$$\begin{aligned} 2x+y &= -1 \\ y &= -2x-1 \end{aligned}$$

Teiknið gröf línanna.




Takið eftir að línurnar virðast samsíða. Hver er hallatala hvorrar línu? Hver er skurðpunktur hvorrar línu við y-ás?

$$\begin{aligned} y &= mx+b \\ y &= -2x+3 \\ m &= -2 \\ b &= 3, (0,3) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= mx+b \\ y &= -2x-1 \\ m &= -2 \\ b &= -1, (0,-1) \end{aligned}$$

Hallatölur línanna eru eins en skurðpunktarnir við y-ás ólíkir. Við vitum því að línurnar eru samsíða.

Þar sem samsíða línur hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás getum við nú einfaldlega skoðað hallatöluform jafna línanna og ákvarðað hvort þær séu samsíða.

---

**DÆMI 4.51**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $3x-2y=6$ og $y=\frac{3}{2}x+1$ séu samsíða.

## Lausn

Tafla 4.42

| | | | |
|---|---|---|---|
| Leysið fyrri jöfnuna með tilliti til $y$. | $\begin{aligned} 3x-2y &= 6 \\ -2y &= -3x+6 \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{-3x+6}{-2} \end{aligned}$ | og | $y=\frac{3}{2}x+1$ |
| Jafnan er nú á hallatöluformi. | $y=\frac{3}{2}x-3$ | | |
| Jafna seinni línunnar er þegar á hallatöluformi. | | | $y=\frac{3}{2}x+1$ |
| Finnið hallatölu og $y$-skurðpunkt beggja lína. | $\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{2}x-3 \\ y &= mx+b \\ m &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$ | | $\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{2}x+1 \\ y &= mx+b \\ m &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$ |
| | $y$-skurðpunkturinn er $(0, -3)$ | | $y$-skurðpunkturinn er $(0, 1)$ |

Línurnar hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás og eru því samsíða. Þið getið teiknað gröf línanna til að staðfesta að þær séu samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.101**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $2x+5y=5$ og $y=-\frac{2}{5}x-4$ séu samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.102**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $4x-3y=6$ og $y=\frac{4}{3}x-1$ séu samsíða.

**DÆMI 4.52**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $y=-4$ og $y=3$ séu samsíða.

## Lausn

Tafla 4.43

| | $y=-4$<br>$y=0x-4$ | og | $y=3$<br>$y=0x+3$ |
|---|---|---|---|
| Ritið hvora jöfnu á hallatöluformi. | $y=0\,x-4$ | | $y=0\,x+3$ |
| Þar sem enginn $x$ -liður er til staðar ritum við $0\,x$. | $y=m\,x+b$ | | $y=m\,x+b$ |
| Finnið hallatölu og $y$-skurðpunkt beggja lína. | $m=0$ | | $m=0$ |
| | $y$-skurðpunkturinn er (0, 4) | | $y$-skurðpunkturinn er (0, 3) |

Línurnar hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás og eru því samsíða.

Einnig má skoða dæmið á annan hátt. Ef þið sjáið strax af jöfnunum að línurnar eru láréttar vitið þið að hallatala beggja er 0. Þar sem láréttu línurnar skera y-ásinn í $y=-4$ og $y=3$ vitum við að skurðpunktarnir við y-ás eru $(0,-4)$ og $(0,3)$. Línurnar hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás og eru því samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.103**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $y=8$ og $y=-6$ séu samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.104**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $y=1$ og $y=-5$ séu samsíða.

**DÆMI 4.53**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $x=-2$ og $x=-5$ séu samsíða.

## Lausn

$$x=-2 \text{ og } x=-5$$

Þar sem ekkert $y$ er í jöfnunum er ekki hægt að rita þær á hallatöluformi. Við sjáum hins vegar að þær eru jöfnur lóðréttra lína. Skurðpunktar þeirra við x-ás eru $-2$ og $-5$. Þar sem skurðpunktarnir við x-ás eru ólíkir eru lóðréttu línurnar samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.105**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $x=1$ og $x=-5$ séu samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.106**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $x=8$ og $x=-6$ séu samsíða.

**DÆMI 4.54**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $y=2x-3$ og $-6x+3y=-9$ séu samsíða. Þið getið einnig teiknað gröf línanna til að sjá hvernig þær líta út.

## Lausn

Tafla 4.44

| | $y=2x-3$ | og | $-6x+3y=-9$ |
|---|---|---|---|
| Fyrri jafnan er þegar á hallatöluformi. | $y=2x-3$ | | |
| Leysið seinni jöfnuna með tilliti til $y$. | | | $\begin{aligned} -6x+3y &= -9 \\ 3y &= 6x-9 \\ \frac{3y}{3} &= \frac{6x-9}{3} \\ y &= 2x-3 \end{aligned}$ |
| Seinni jafnan er nú á hallatöluformi. | $y=2x-3$ | | |
| Finnið hallatölu og $y$-skurðpunkt beggja lína. | $\begin{aligned} y &= 2x-3 \\ y &= mx+b \\ m &= 2 \end{aligned}$ | | $\begin{aligned} y &= 2x-3 \\ y &= mx+b \\ m &= 2 \end{aligned}$ |
| | $y$-skurðpunkturinn er $(0, -3)$ | | $y$-skurðpunkturinn er $(0, -3)$ |

Línurnar hafa sömu hallatölu og einnig sama skurðpunkt við y-ás. Jöfnurnar tákna því sömu línuna. Þær eru ekki samsíða línur heldur ein og sama línan.

**REYNIÐ SJÁLF 4.107**

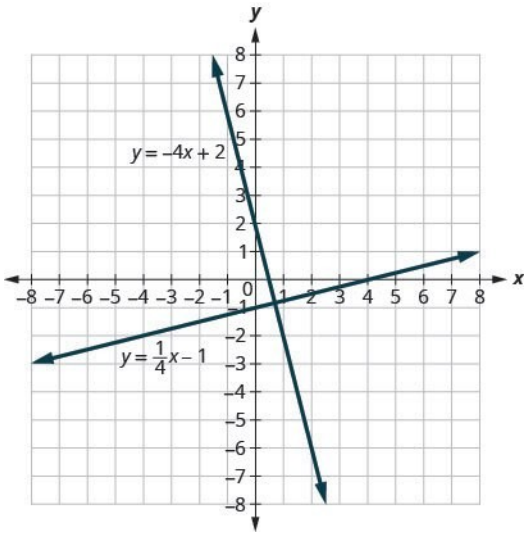
Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $y=-\frac{1}{2}x-1$ og $x+2y=2$ séu samsíða.

**REYNIÐ SJÁLF 4.108**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás til að ákvarða hvort línurnar $y=\frac{3}{4}x-3$ og $3x-4y=12$ séu samsíða.

## Notið hallatölur til að þekkja hornréttar línur

Skoðum línurnar með jöfnurnar $y=\frac{1}{4}x-1$ og $y=-4x+2$ sem sýndar eru á mynd 4.29.




Mynd 4.29

Línurnar liggja í sama fleti og skerast hornrétt. Við köllum þær hornréttar.

Hvað takið þið eftir við hallatölur línanna? Þegar lesið er frá vinstri til hægri hækkar línan $y=\frac{1}{4}x-1$ og hallatala hennar er því jákvæð. Línan $y=-4x+2$ lækkar frá vinstri til hægri og hefur því neikvæða hallatölu. Er rökrétt að hallatölur tveggja hornréttra lína hafi gagnstæð formerki?

Ef við skoðum hallatölu fyrri línunnar, $m_1=\frac{1}{4}$, og hallatölu þeirrar síðari, $m_2=-4$, sjáum við að þær eru neikvæðar margföldunarandhverfur hvor annarrar. Þegar þær eru margfaldaðar saman er margfeldið $-1$.

$$m_1 \cdot m_2$$
$$\tfrac{1}{4}(-4)$$
$$-1$$

Þetta gildir alltaf um hornréttar línur og leiðir til eftirfarandi skilgreiningar.

**HORNRÉTTAR LÍNUR**

**Hornréttar línur** eru línur í sama fleti sem mynda rétt horn.

Ef $m_1$ og $m_2$ eru hallatölur tveggja hornréttra lína, þá:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ og } m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

Lóðréttar og láréttar línur eru alltaf hornréttar hvorar á aðrar.

Við gátum skoðað hallatöluform línulegra jafna og ákvarðað hvort línurnar væru samsíða. Sama aðferð gildir um hornréttar línur.

Við finnum hallatöluform jöfnunnar og athugum hvort hallatölurnar séu neikvæðar margföldunarandhverfur. Ef margfeldi hallatalnanna er $-1$ eru línurnar hornréttar. Hornréttar línur geta haft sama skurðpunkt við y-ás.

---

**DÆMI 4.55**

Notið hallatölur til að ákvarða hvort línurnar $y = -5x - 4$ og $x - 5y = 5$ séu hornréttar.

4

## Lausn

| | |
|---|---|
| Fyrri jafnan er þegar á hallatöluformi. | $y = -5x - 4$ |
| Leysið seinni jöfnuna með tilliti til $y$. | $x - 5y = 5$<br>$-5y = -x + 5$<br>$\frac{-5y}{-5} = \frac{-x+5}{-5}$<br>$y = \frac{1}{5}x - 1$ |
| Finnið hallatölu hvorrar línu. | $y = -5x - 4$<br>$y = mx + b$<br>$m_1 = -5$<br><br>$y = \frac{1}{5}x - 1$<br>$y = mx + b$<br>$m_2 = \frac{1}{5}$ |

Hallatölurnar eru neikvæðar margföldunarandhverfur hvor annarrar og því eru línurnar hornréttar. Við staðfestum þetta með því að margfalda hallatölurnar:

$$m_1 \cdot m_2$$
$$-5\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$-1 \checkmark$$

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.109**

Notið hallatölur til að ákvarða hvort línurnar $y = -3x + 2$ og $x - 3y = 4$ séu hornréttar.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.110**

Notið hallatölur til að ákvarða hvort línurnar $y = 2x - 5$ og $x + 2y = -6$ séu hornréttar.

**DÆMI 4.56**

Notið hallatölur til að ákvarða hvort línurnar $7x+2y=3$ og $2x+7y=5$ séu hornréttar.

## Lausn

Tafla 4.45

| | | |
|---|---|---|
| Leysið jöfnurnar með tilliti til $y$. | $\begin{aligned} 7x+2y &= 3 \\ 2y &= -7x+3 \\ \frac{2y}{2} &= \frac{-7x+3}{2} \\ y &= -\frac{7}{2}x+\frac{3}{2} \end{aligned}$ | $\begin{aligned} 2x+7y &= 5 \\ 7y &= -2x+5 \\ \frac{7y}{7} &= \frac{-2x+5}{7} \\ y &= -\frac{2}{7}x+\frac{5}{7} \end{aligned}$ |
| Finnið hallatölu hvorrar línu. | $\begin{aligned} y &= mx+b \\ m_1 &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$ | $\begin{aligned} y &= mx+b \\ m_2 &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$ |

Hallatölurnar eru margföldunarandhverfur en hafa sama formerki. Þar sem þær eru ekki neikvæðar margföldunarandhverfur eru línurnar ekki hornréttar.

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.111**

Notið hallatölur til að ákvarða hvort línurnar $5x+4y=1$ og $4x+5y=3$ séu hornréttar.

**REYNIÐ SJÁLF 4.112**

Notið hallatölur til að ákvarða hvort línurnar $2x-9y=3$ og $9x-2y=1$ séu hornréttar.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Notið þetta vefefni til að fá frekari leiðsögn og æfingu í gröfum.

- Kannið tengsl grafs og hallatöluforms jöfnu línu

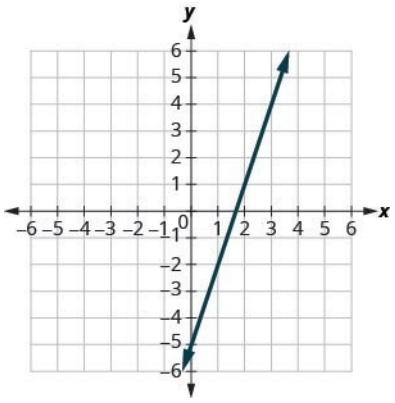
## Æfingar úr kafla 4.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Greinið tengslin milli grafs og hallatöluforms jöfnu línu**

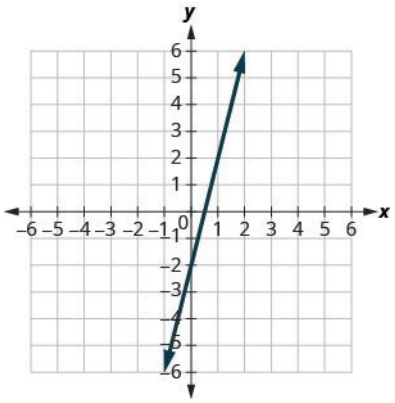
Notið grafið í eftirfarandi æfingum til að finna hallatölu og skurðpunkt við y-ás hverrar línu. Berið gildin saman við jöfnuna $y=mx+b$.

288.



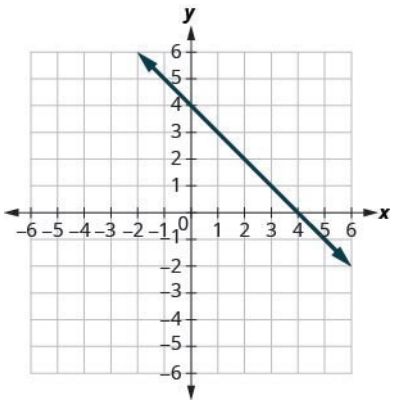

$y=3x-5$

289.



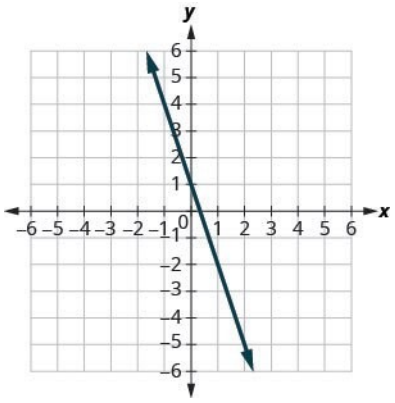

$y=4x-2$

290.



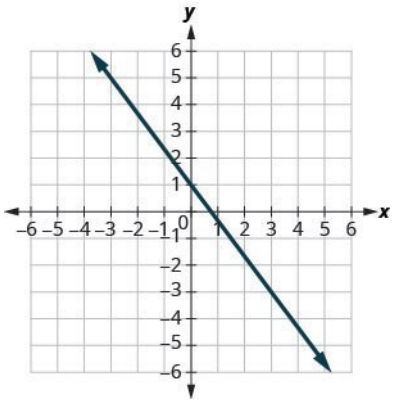

$y=-x+4$

291.



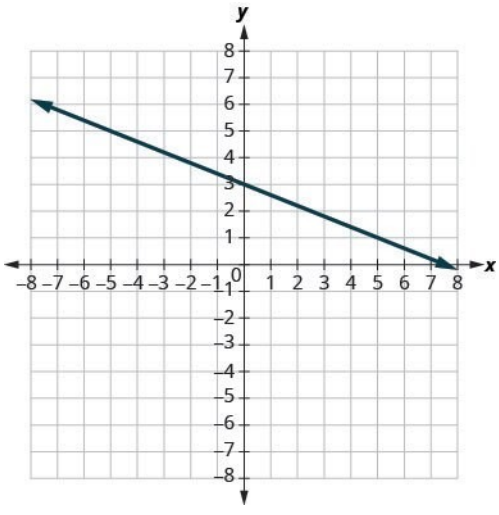
$$y=-3x+1$$

292.



$$y=-\frac{4}{3}x+1$$

293.



$$y=-\frac{2}{5}x+3$$

### Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás út frá jöfnu línu

Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás hverrar línu í eftirfarandi æfingum.

294.

$$y=-7x+3$$

295.

$$y=-9x+7$$

296.

$$y=6x-8$$

297.

$$y=4x-10$$

298.

$$3x+y=5$$

299.

$$4x+y=8$$

300.

$$6x+4y=12$$

301.

$$8x+3y=12$$

302.

$$5x-2y=6$$

303.

$$7x-3y=9$$

### Teiknið graf línu með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás

Teiknið graf línunnar fyrir hverja jöfnu í eftirfarandi æfingum með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás.

304.

$$y=x+3$$

305.

$$y=x+4$$

306.

$$y=3x-1$$

307.

$$y=2x-3$$

308.

$$y=-x+2$$

309.

$$y=-x+3$$

310.

$$y=-x-4$$

311.

$$y=-x-2$$

312.

$$y=-\frac{3}{4}x-1$$

313.

$$y=-\frac{2}{5}x-3$$

314.

$$y=-\frac{3}{5}x+2$$

315.

$$y=-\frac{2}{3}x+1$$

316.

$$3x-4y=8$$

317.

$$4x-3y=6$$

318.

$$y=0{,}1x+15$$

319.

$$y=0{,}3x+25$$

**Veljið hentugustu aðferðina til að teikna graf línu**

Ákvarðið hentugustu aðferðina til að teikna graf hverrar línu í eftirfarandi æfingum.

320.

$$x=2$$

321.

$$y=4$$

322.

$$y=5$$

323.

$$x=-3$$

324.

$$y=-3x+4$$

325.

$$y=-5x+2$$

326.

$$x-y=5$$

327.

$$x-y=1$$

328.

$$y=\frac{2}{3}x-1$$

329.

$$y=\frac{4}{5}x-3$$

330.

$$y=-3$$

331.

$$y=-1$$

332.

$$3x - 2y = -12$$

333.

$$2x - 5y = -10$$

334.

$$y = -\frac{1}{4}x + 3$$

335.

$$y = -\frac{1}{3}x + 5$$

4

### Teiknið gröf og túlkið hagnýt dæmi með hallatöluformi

**336.** Jafnan $P = 31 + 1{,}75w$ lýsir tengslunum milli mánaðarlegs vatnsreiknings Tuyet P í dölum og fjölda notaðra vatnseininga w.

1. ⓐ Finnið greiðslu Tuyet fyrir mánuð þegar 0 vatnseiningar eru notaðar.
2. ⓑ Finnið greiðslu Tuyet fyrir mánuð þegar 12 vatnseiningar eru notaðar.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við P-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**337.** Jafnan $P = 28 + 2{,}54w$ lýsir tengslunum milli mánaðarlegrar greiðslu Randys fyrir vatnsnotkun P í dölum og fjölda notaðra vatnseininga w.

1. ⓐ Finnið greiðsluna fyrir mánuð þegar Randy notaði 0 vatnseiningar.
2. ⓑ Finnið greiðsluna fyrir mánuð þegar Randy notaði 15 vatnseiningar.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við P-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**338.** Bruce notar bílinn sinn í vinnunni. Jafnan $R = 0{,}575m + 42$ lýsir tengslunum milli endurgreiðslunnar R í dölum og fjölda mílna m sem hann ekur á einum degi.

1. ⓐ Finnið upphæðina sem Bruce fær endurgreidda fyrir dag þegar hann ekur 0 mílur.
2. ⓑ Finnið upphæðina sem Bruce fær endurgreidda fyrir dag þegar hann ekur 220 mílur.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við R-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**339.** Janelle hyggst leigja bíl í fríinu. Jafnan $C = 0{,}32m + 15$ lýsir tengslunum milli daglegs kostnaðar C í dölum og fjölda mílna m sem hún ekur á einum degi.

1. ⓐ Finnið kostnaðinn ef Janelle ekur bílnum 0 mílur á einum degi.
2. ⓑ Finnið kostnaðinn fyrir dag þegar Janelle ekur bílnum 400 mílur.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**340.** Cherie vinnur við smásölu og vikulaun hennar fela í sér söluþóknun. Jafnan $S = 400 + 0{,}15\,c$ lýsir tengslunum milli vikulauna hennar S í dölum og söluupphæðarinnar c í dölum.

1. ⓐ Finnið vikulaun Cherie þegar sala hennar var 0.
2. ⓑ Finnið vikulaun Cherie þegar sala hennar var 3600.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við S-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**341.** Vikulaun Patels fela í sér grunnlaun og söluþóknun. Jafnan $S = 750 + 0{,}09\,c$ lýsir tengslunum milli vikulauna hans S í dölum og söluupphæðarinnar c í dölum.

1. ⓐ Finnið vikulaun Patels þegar sala hans var 0.
2. ⓑ Finnið vikulaun Patels þegar sala hans var 18.540.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við S-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**342.** Costa skipuleggur hádegisverðarveislu. Jafnan $C = 450 + 28\,g$ lýsir tengslunum milli veislukostnaðarins C í dölum og fjölda gesta g.

1. ⓐ Finnið kostnaðinn ef gestirnir eru 40.
2. ⓑ Finnið kostnaðinn ef gestirnir eru 80.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**343.** Margie skipuleggur kvöldverðarveislu. Jafnan $C = 750 + 42\,g$ lýsir tengslunum milli veislukostnaðarins C í dölum og fjölda gesta g.

1. ⓐ Finnið kostnaðinn ef gestirnir eru 50.
2. ⓑ Finnið kostnaðinn ef gestirnir eru 100.
3. ⓒ Túlkið hallatölu og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

### Notið hallatölur til að þekkja samsíða línur

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás í eftirfarandi æfingum til að ákvarða hvort línurnar séu samsíða.

344.

$$y = \frac{3}{4}x - 3\,;\, 3x - 4y = -2$$

345.

$$y = \frac{2}{3}x - 1\,;\, 2x - 3y = -2$$

346.

$$2x - 5y = -3\,;\, y = \frac{2}{5}x + 1$$

347.

$$3x-4y=-2;y=\frac{3}{4}x-3$$

348.

$$2x-4y=6;x-2y=3$$

349.

$$6x-3y=9;2x-y=3$$

350.

$$4x+2y=6;6x+3y=3$$

351.

$$8x+6y=6;12x+9y=12$$

352.

$$x=5;x=-6$$

353.

$$x=7;x=-8$$

354.

$$x=-4;x=-1$$

355.

$$x=-3;x=-2$$

356.

$$y=2;y=6$$

357.

$$y=5;y=1$$

358.

$$y=-4;y=3$$

359.

$$y=-1;y=2$$

360.

$$x-y=2;2x-2y=4$$

361.

$$4x+4y=8;x+y=2$$

362.

$$x-3y=6;2x-6y=12$$

363.

$$5x-2y=11;5x-y=7$$

364.

$$3x-6y=12;6x-3y=3$$

365.

$$4x-8y=16;x-2y=4$$

366.

$$9x-3y=6;3x-y=2$$

367.

$$x-5y=10;5x-y=-10$$

368.

$$7x-4y=8;4x+7y=14$$

369.

$$9x-5y=4;5x+9y=-1$$

**Notið hallatölur til að þekkja hornréttar línur**

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás í eftirfarandi æfingum til að ákvarða hvort línurnar séu hornréttar.

370.

$$3x-2y=8;2x+3y=6$$

371.

$$x-4y=8;4x+y=2$$

372.

$$2x+5y=3;5x-2y=6$$

373.

$$2x+3y=5;3x-2y=7$$

374.

$$3x-2y=1;2x-3y=2$$

375.

$$3x-4y=8;4x-3y=6$$

376.

$$5x+2y=6;2x+5y=8$$

377.

$$2x+4y=3;6x+3y=2$$

378.

$$4x-2y=5;3x+6y=8$$

379.

$$2x-6y=4;12x+4y=9$$

380.

$$6x-4y=5;8x+12y=3$$

381.

$$8x-2y=7;3x+12y=9$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**382.** Jöfnuna $C=\frac{5}{9}F-17{,}8$ má nota til að umreikna Fahrenheit-hitastig F í Celsíus-hitastig C.

1. ⓐ Útskýrið hvað hallatala jöfnunnar merkir.
2. ⓑ Útskýrið hvað skurðpunktur jöfnunnar við C-ás merkir.

**383.** Jafnan $n=4T-160$ er notuð til að áætla fjölda tísta frá krybbum, n, á einni mínútu út frá hitastiginu T á Fahrenheit-kvarða.

1. ⓐ Útskýrið hvað hallatala jöfnunnar merkir.
2. ⓑ Útskýrið hvað skurðpunktur jöfnunnar við n-ás merkir. Eru þetta raunhæfar aðstæður?

### *Ritunaræfingar*

**384.** Útskýrið með eigin orðum hvernig þið ákveðið hvaða aðferð skuli nota til að teikna graf línu.

**385.** Hvers vegna eru allar láréttar línur samsíða?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið æfingunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu góðum tökum þið hafið náð á markmiðum kaflans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| séð sambandið milli grafs línu og hallatöluforms jöfnu hennar. | | | |
| fundið hallatölu og $y$-skurðpunkt út frá jöfnu línu. | | | |
| teiknað graf línu út frá hallatölu hennar og skurðpunkti. | | | |
| valið hentugustu aðferðina til að teikna graf línu. | | | |
| teiknað gröf og túlkað hagnýt verkefni sem tengjast hallatöluformi. | | | |
| notað hallatölur til að bera kennsl á samsíða línur. | | | |

ⓑ Nú hafið þið skoðað gátlistann. Teljið þið ykkur vel undirbúin fyrir næsta kafla? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?



# 4.6 Finnið jöfnu línu

**NÁMSMARKMIÐ**

Við lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Finnið jöfnu línu þegar hallatala og skurðpunktur við $y$-ás eru gefin
- Finnið jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin
- Finnið jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir
- Finnið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu
- Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu

**UNDIRBÚNINGUR 4.13**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Leysið: $\frac{2}{3}=\frac{x}{5}$. Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 2.14.

**UNDIRBÚNINGUR 4.14**

Einfaldið: $-\frac{2}{5}(x-15)$. Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 1.133.

Hvernig vita netverslanir að ykkur gæti einnig líkað við tiltekna vöru út frá því sem þið hafið nýlega pantað? Hvernig geta hagfræðingar vitað hvaða áhrif hækkun lágmarkslauna hefur á atvinnuleysi? Hvernig geta læknavísindamenn þróað lyf sem beinast gegn krabbameinsfrumum? Hvernig geta umferðarverkfræðingar spáð fyrir um hvernig hækkun eða lækkun eldsneytisverðs hefur áhrif á ferðatíma ykkar til og frá vinnu? Allt byggist þetta á stærðfræði.

Þið hafið náð spennandi áfanga í stærðfræðináminu. Stærðfræðin sem þið lærið á sér áhugaverð not í raunveruleikanum.

Í raunvísindum, félagsvísindum og viðskiptalífinu eru fjölmargar aðstæður sem hægt er að lýsa með línulegum jöfnum sem tengja saman tvær breytur. Gögnum er safnað og þau sett fram á grafi. Ef gagnapunktarnir virðast liggja á beinni línu má nota jöfnu línunnar til að spá fyrir um gildi annarrar breytunnar út frá gildi hinnar.

Til að búa til stærðfræðilegt líkan af línulegum tengslum tveggja breyta þurfum við að geta fundið jöfnu línunnar. Í þessum hluta skoðum við nokkrar leiðir til að skrifa jöfnu línu. Upplýsingarnar sem gefnar eru ráða því hvaða aðferð við notum.

4

## Finnið jöfnu línu þegar hallatala og skurðpunktur við y-ás eru gefin

Við getum auðveldlega fundið hallatölu línu og skurðpunkt hennar við y-ás ef jafnan er skrifuð á hallatöluformi, $y = mx + b$. Nú snúum við ferlinu við: Við byrjum á hallatölunni og skurðpunktinum við y-ás og notum þessar upplýsingar til að finna jöfnu línunnar.

---

**DÆMI 4.57**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $-7$ og skurðpunktinn $(0, -1)$ við y-ás.

### Lausn

Hallatala línunnar og skurðpunktur hennar við y-ás eru gefin. Því getum við sett gildin inn í hallatöluformið, $y = mx + b$.

| | |
|---|---|
| Tilgreinið hallatöluna. | $m = -7$ |
| Tilgreinið skurðpunktinn við y-ás. | skurðpunktur við y-ás $(0, -1)$ |
| Setjið gildin inn í $y = mx + b$. | $y = mx + b$ |
| | $y = -7x + (-1)$ |
| | $y = -7x - 1$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.113**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $\frac{2}{5}$ og skurðpunktinn $(0, 4)$ við y-ás.

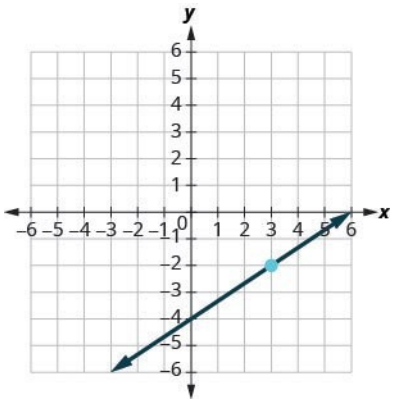
**REYNIÐ SJÁLF 4.114**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $-1$ og skurðpunktinn $(0,-3)$ við y-ás.

Stundum þarf að lesa hallatölu og skurðpunkt af grafi.

**DÆMI 4.58**

Finnið jöfnu línunnar sem sýnd er.




## Lausn

Við þurfum að lesa hallatölu línunnar og skurðpunkt hennar við y-ás af grafinu svo við getum sett viðeigandi gildi inn í hallatöluformið, $y=mx+b$.

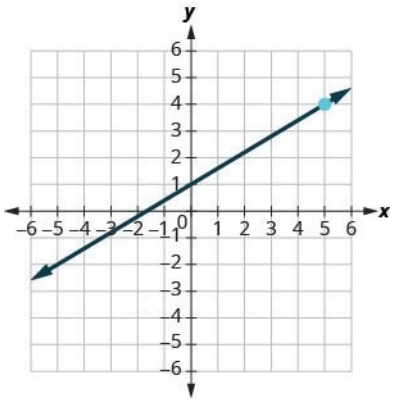
Til að finna hallatöluna veljum við tvo punkta á grafinu.

Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,-4)$ og grafið liggur um $(3,-2)$.

| | |
|---|---|
| Finnið hallatöluna með því að telja lóðréttu og láréttu breytinguna. | $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ |
| | $m=\frac{2}{3}$ |
| Finnið skurðpunktinn við y-ás. | skurðpunktur við y-ás $(0,-4)$ |
| Setjið gildin inn í $y=mx+b$. | $y=mx+b$ |
| | $y=\frac{2}{3}x-4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.115**

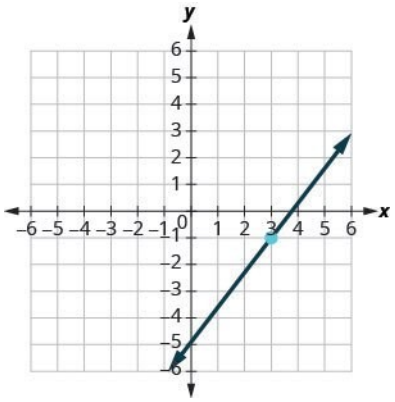
Finnið jöfnu línunnar sem sýnd er á grafinu.




**REYNIÐ SJÁLF 4.116**

Finnið jöfnu línunnar sem sýnd er á grafinu.






## Finnið jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin

Það hentar vel að nota hallatöluform jöfnu til að finna jöfnu línu þegar hallatalan og skurðpunkturinn við y-ás eru gefin eða þegar lesa má þau af grafi. En hvað gerum við þegar annar punktur er gefinn í stað skurðpunktsins við y-ás?

Við notum formúluna fyrir hallatölu til að leiða út annað form á jöfnu línu. Gerum ráð fyrir að lína hafi hallatöluna $m$ og liggi um tiltekinn punkt $(x_1, y_1)$ og einhvern annan punkt sem við köllum einfaldlega $(x, y)$. Við getum skrifað hallatölu línunnar og síðan umritað jöfnuna.

Tafla 4.46

| | $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ |
|---|---|
| Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með $x-x_1$. | $m(x-x_1) = \left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)(x-x_1)$ |
| Einfaldið. | $m(x-x_1) = y-y_1$ |
| Umritið jöfnuna þannig að $y$-liðirnir séu vinstra megin. | $y-y_1 = m(x-x_1)$ |

Þetta form kallast punkthallaform jöfnu línu.

**PUNKTHALLAFORM JÖFNU LÍNU**

Jafna línu á punkthallaformi með hallatöluna $m$ sem liggur um punktinn $(x_1, y_1)$ er

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Við getum notað punkthallaform jöfnu til að finna jöfnu línu þegar hallatalan og einn punktur eru gefin. Síðan umritum við jöfnuna á hallatöluform. Í flestum hagnýtum dæmum um línulegar jöfnur er hallatöluformið notað.

**DÆMI 4.59**

## Finnið jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $m=\frac{2}{5}$ sem liggur um punktinn $(10, 3)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið hallatöluna. | Hallatalan er gefin. | $m=\frac{2}{5}$ |
| **Skref 2.** Finnið punktinn. | Punkturinn er gefinn. | $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 10, & 3 \end{pmatrix}$ |
| **Skref 3.** Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m(x-x_1)$. | Einfaldið. | $y-y_1=m(x-x_1)$<br>$y-3=\frac{2}{5}(x-10)$<br>$y-3=\frac{2}{5}x-4$ |
| **Skref 4.** Skrifið jöfnuna á hallatölu–skurðpunktsformi. | | $y=\frac{2}{5}x-1$ |

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.117**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $m=\frac{5}{6}$ sem liggur um punktinn $(6,3)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.118**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $m=\frac{2}{3}$ sem liggur um punktinn $(9,2)$.

**AÐFERÐ**

### Finnið jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin.

1. Skref 1. Tilgreinið hallatöluna.
2. Skref 2. Tilgreinið punktinn.
3. Skref 3. Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m(x-x_1)$.
4. Skref 4. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**DÆMI 4.60**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $m=-\frac{1}{3}$ sem liggur um punktinn $(6,-4)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

Punktur og hallatala línunnar eru gefin og því getum við sett gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m(x-x_1)$.

| | |
|---|---|
| Finnið hallatöluna. | $m=-\frac{1}{3}$ |
| Tilgreinið punktinn. | $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 6, & -4 \end{pmatrix}$ |
| Setjið gildin inn í $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$. | $y-y_1=m(x-x_1)$ |
| | $y-(-4)=-\frac{1}{3}(x-6)$ |
| Einfaldið. | $y+4=-\frac{1}{3}x+2$ |
| Skrifið á hallatöluformi. | $y=-\frac{1}{3}x-2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.119**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $m=-\frac{2}{5}$ sem liggur um punktinn $\left(10,-5\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.120**

Finnið jöfnu línu með hallatöluna $m=-\frac{3}{4}$, sem liggur um punktinn $\left(4,-7\right)$.

**DÆMI 4.61**

Finnið jöfnu láréttrar línu sem liggur um punktinn $\left(-1,2\right)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

## Lausn

Allar láréttar línur hafa hallatöluna 0. Við getum sett hallatöluna og punktinn inn í punkthallaformið, $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.

| | |
|---|---|
| Finnið hallatöluna. | $m=0$ |
| Tilgreinið punktinn. | $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -1, & 2 \end{pmatrix}$ |
| Setjið gildin inn í $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$. | $y-y_1=m(x-x_1)$ |
| | $y-2=0(x-(-1))$ |
| Einfaldið. | $y-2=0(x+1)$ |
| | $y-2=0$ |
| | $y=2$ |
| Skrifið á hallatöluformi. | Breytan yer einangruð en einnig mætti skrifa jöfnuna $y=0\,x+2$. |

Fengum við form láréttrar línu, $y=a$?

**REYNIÐ SJÁLF 4.121**

Finnið jöfnu láréttrar línu sem liggur um punktinn $(-3,8)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.122**

Finnið jöfnu láréttrar línu sem liggur um punktinn $(-1,4)$.

## Finnið jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir

Þegar gögnum úr raunveruleikanum er safnað má búa til línulegt líkan út frá tveimur gagnapunktum. Í næsta dæmi sjáum við hvernig finna má jöfnu línu þegar aðeins tveir punktar eru gefnir.

Hingað til höfum við tvo valkosti til að finna jöfnu línu: hallatöluform og punkthallaform. Við þekkjum tvo punkta og því er eðlilegra að nota punkthallaformið.

En þá þurfum við hallatöluna. Getum við fundið hana út frá aðeins tveimur punktum? Já. Þegar hallatalan er fundin getum við notað hana ásamt öðrum gefna punktinum til að finna jöfnuna.



**DÆMI 4.62**

## Finnið jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(5,4)$ og $(3,6)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið hallatöluna út frá gefnu punktunum. | Til að nota punkthallaformið finnum við fyrst hallatöluna. | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$<br>$m=\frac{6-4}{3-5}$<br>$m=\frac{2}{-2}$<br>$m=-1$ |
| **Skref 2.** Veljið einn punkt. | Veljið annan hvorn punktinn. | $\begin{pmatrix} x_1, y_1 \\ 5, 4 \end{pmatrix}$ |
| **3. skref.** Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m(x-x_1)$. | Einfaldið. | $y-y_1=m(x-x_1)$<br>$y-4=-1(x-5)$<br>$y-4=-1x+5$ |
| **Skref 4.** Skrifið jöfnuna á hallatöluformi. | | $y=-1x+9$ |

Notið punktinn $(3,6)$ og sannreynið að sama jafna fáist.

**REYNIÐ SJÁLF 4.123**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(3,1)$ og $(5,6)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.124**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(1,4)$ og $(6,2)$.

**AÐFERÐ**

### Finnið jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir.

1. Skref 1. Finnið hallatöluna með gefnu punktunum.
2. Skref 2. Veljið annan punktinn.
3. Skref 3. Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y - y_1 = m(x - x_1)$.
4. Skref 4. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.



**DÆMI 4.63**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(-3,-1)$ og $(2,-2)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

Tveir punktar eru gefnir og því finnum við jöfnu línunnar með punkthallaforminu. Fyrsta skrefið er að finna hallatöluna.

| | |
|---|---|
| Finnið hallatölu línunnar sem liggur um (−3, −1) og (2, −2). | $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ |
| | $m = \frac{-2-(-1)}{2-(-3)}$ |
| | $m = \frac{-1}{5}$ |
| | $m = -\frac{1}{5}$ |
| Veljið hvorn punktinn sem er. | $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 2, & -2 \end{pmatrix}$ |
| Setjið gildin inn í $y - y_1 = m(x - x_1)$. | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| | $y-(-2) = -\frac{1}{5}(x-2)$ |
| | $y+2 = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ |
| Skrifið á hallatöluformi. | $y = -\frac{1}{5}x - \frac{8}{5}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.125**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(-2,-4)$ og $(1,-3)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.126**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(-4,-3)$ og $(1,-5)$.

**DÆMI 4.64**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(-2,4)$ og $(-2,-3)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

## Lausn

Aftur er fyrsta skrefið að finna hallatöluna.

| | |
|---|---|
| Finnið hallatölu línunnar sem liggur um $(-2,4)$ og $(-2,-3)$. | $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ |
| | $m=\frac{-3-4}{-2-(-2)}$ |
| | $m=\frac{-7}{0}$ |
| | Hallatalan er óskilgreind. |

Þetta segir okkur að línan sé lóðrétt. Báðir punktarnir hafa x-hnitið $-2$. Jafna línunnar er því $x=-2$. Þar sem $y$ kemur ekki fyrir getum við ekki skrifað jöfnuna á hallatöluformi.

Gott getur verið að skissa graf með gefnu punktunum tveimur. Samræmist grafið þeirri niðurstöðu okkar að línan sé lóðrétt?

**REYNIÐ SJÁLF 4.127**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(5,1)$ og $(5,-4)$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.128**

Finnið jöfnu línu sem liggur um punktana $(-4,4)$ og $(-4,3)$.

Við höfum séð að nota má annaðhvort hallatöluformið eða punkthallaformið til að finna jöfnu línu. Upplýsingarnar sem gefnar eru ráða því hvaða form við notum. Þetta er tekið saman í töflu 4.47.

Tafla 4.47

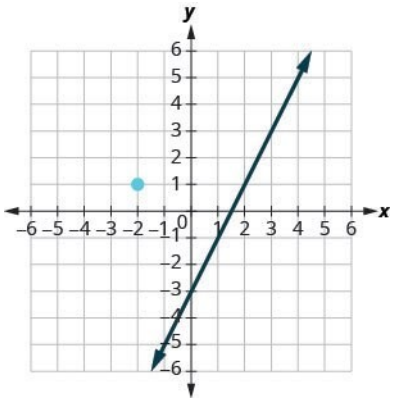
| Til að skrifa jöfnu línu | | |
|---|---|---|
| Ef gefið er: | Notið: | Jöfnuform: |
| Hallatala og skurðpunktur við y-ás | hallatöluform | $y=mx+b$ |
| Hallatala og punktur | punkthallaform | $y-y_1=m(x-x_1)$ |
| Tveir punktar | punkthallaform | $y-y_1=m(x-x_1)$ |

## Finnið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu

Gerum ráð fyrir að við þurfum að finna jöfnu línu sem liggur um tiltekinn punkt og er samsíða gefinni línu. Við getum nýtt okkur að samsíða línur hafa sömu hallatölu. Við höfum því punkt og hallatölu, einmitt það sem þarf til að nota punkthallaformið.

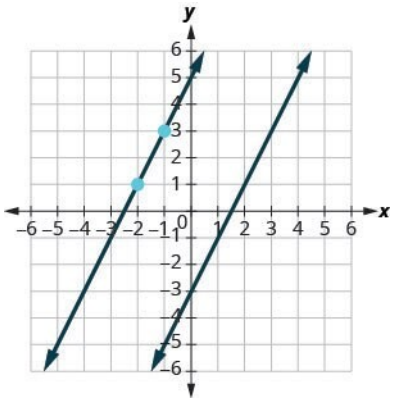
Skoðum þetta fyrst á grafi.

Grafið sýnir graf $y=2x-3$. Við viljum teikna línu sem er samsíða þessari línu og liggur um punktinn $(-2,1)$.




Við vitum að samsíða línur hafa sömu hallatölu. Seinni línan hefur því sömu hallatölu og $y=2x-3$. Hallatalan er $m_{\parallel}=2$. Við notum táknið $m_{\parallel}$ fyrir hallatölu línu sem er samsíða línu með hallatöluna $m$. (Takið eftir að lágvísirinn $\parallel$ líkist tveimur samsíða línum.)

Seinni línan liggur um $(-2,1)$ og hefur $m=2$. Til að teikna línuna byrjum við í $(-2,1)$ og teljum lóðréttu og láréttu breytinguna. Með $m=2$ (eða $m=\frac{2}{1}$), teljum við lóðréttu breytinguna 2 og láréttu breytinguna 1. Síðan drögum við línuna.




Virðast línurnar vera samsíða? Liggur seinni línan um $(-2,1)$?

Skoðum nú hvernig þetta er gert með algebru.

Við getum notað annaðhvort hallatöluformið eða punkthallaformið til að finna jöfnu línu. Hér þekkjum við einn punkt og getum fundið hallatöluna. Við notum því punkthallaformið.

4

---

**DÆMI 4.65**

### Hvernig finna á jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu

Finnið jöfnu línu sem er samsíða $y=2x-3$ og liggur um punktinn $(-2,1)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið hallatölu gefnu línunnar. | Línan er á hallatöluformi, $y = 2x - 3$. | $m = 2$ |
| **Skref 2.** Finnið hallatölu samsíða línunnar. | Samsíða línur hafa sömu hallatölu. | $m_{\parallel} = 2$ |
| **Skref 3.** Finnið punktinn. | Gefni punkturinn er (–2, 1). | $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -2, & 1 \end{pmatrix}$ |
| **Skref 4.** Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y - y_1 = m(x - x_1)$. | Einfaldið. | $y - y_1 = m(x - x_1)$<br>$y - 1 = 2(x - (-2))$<br>$y - 1 = 2(x + 2)$<br>$y - 1 = 2x + 4$ |
| **Skref 5.** Skrifið jöfnuna á hallatöluformi. | | $y = 2x + 5$ |

Er jafnan skynsamleg? Hver er skurðpunktur línunnar við y-ás? Hver er hallatalan?

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.129**

Finnið jöfnu línu sem er samsíða línunni $y=3x+1$ og liggur um punktinn $(4,2)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**REYNIÐ SJÁLF 4.130**

Finnið jöfnu línu sem er samsíða línunni $y=\frac{1}{2}x-3$ og liggur um punktinn $(6,4)$.

**AÐFERÐ**

### Finnið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu.

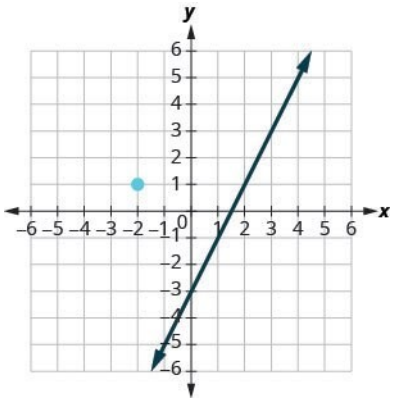
1. Skref 1. Finnið hallatölu gefnu línunnar.
2. Skref 2. Finnið hallatölu samsíða línunnar.
3. Skref 3. Tilgreinið punktinn.
4. Skref 4. Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m(x-x_1)$.
5. Skref 5. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.



### Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu

Skoðum nú hornréttar línur. Gerum ráð fyrir að við þurfum að finna línu sem liggur um tiltekinn punkt og er hornrétt á gefna línu. Við getum nýtt okkur að hallatölur hornréttra lína eru neikvæðar margföldunarandhverfur hvor annarrar. Líkt og með samsíða línurnar notum við aftur punkthallaformið.

Grafið sýnir graf $y=2x-3$. Nú viljum við teikna línu sem er hornrétt á þessa línu og liggur um $(-2,1)$.

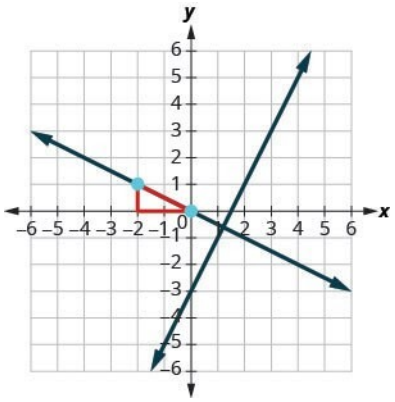



Við vitum að hallatölur hornréttra lína eru neikvæðar margföldunarandhverfur hvor annarrar. Við notum táknið $m_\perp$ fyrir hallatölu línu sem er hornrétt á línu með hallatöluna $m$. (Takið eftir að lágvísirinn $\perp$ líkist réttu hornunum sem tvær hornréttar línur mynda.)

$$y=2x-3 \qquad \text{hornrétt lína}$$
$$m=2 \qquad m_\perp=-\frac{1}{2}$$

Við vitum nú að hornrétta línan liggur um $(-2,1)$ og hefur $m_\perp=-\frac{1}{2}$.

Til að teikna línuna byrjum við í $(-2,1)$ og teljum lóðréttu breytinguna $-1$ og láréttu breytinguna 2. Síðan drögum við línuna.




Virðast línurnar vera hornréttar? Liggur seinni línan um $(-2,1)$?

Skoðum nú hvernig þetta er gert með algebru. Við getum notað annaðhvort hallatöluformið eða punkthallaformið til að finna jöfnu línu. Í þessu dæmi þekkjum við einn punkt og getum fundið hallatöluna og því notum við punkthallaformið.

4

---

**DÆMI 4.66**

## Hvernig finna á jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á $y=2x-3$ og liggur um punktinn $(-2,1)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið hallatölu gefnu línunnar. | Línan er á hallatöluformi, $y = 2x - 3$. | $m = 2$ |
| **Skref 2.** Finnið hallatölu hornréttu línunnar. | Hallatölur hornréttra lína eru neikvæðar margföldunarandhverfur. | $m_{\perp} = -\frac{1}{2}$ |
| **Skref 3.** Ákvarðið punktinn. | Punkturinn sem gefinn er er er (-2, 1) | $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -2, & 1 \end{pmatrix}$ |
| **4. skref.** Setjið gildin inn í punkthallaformið. | Einfaldið. | $y - y_1 = m(x - x_1)$<br>$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - (-2))$<br>$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$<br>$y - 1 = -\frac{1}{2}x - 1$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 5.** Skrifið jöfnuna á hallatöluformi. | | $y=-\frac{1}{2}x$ |

**REYNIÐ SJÁLF 4.131**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $y=3x+1$ og liggur um punktinn $(4,2)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**REYNIÐ SJÁLF 4.132**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $y=\frac{1}{2}x-3$ og liggur um punktinn $(6,4)$.



**AÐFERÐ**

### Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu.

1. Skref 1. Finnið hallatölu gefnu línunnar.
2. Skref 2. Finnið hallatölu hornréttu línunnar.
3. Skref 3. Tilgreinið punktinn.
4. Skref 4. Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m(x-x_1)$.
5. Skref 5. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**DÆMI 4.67**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á $x=5$ og liggur um punktinn $(3,-2)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

Við þekkjum einn punkt og því virðist punkthallaformið aftur vænlegra en hallatöluformið. Til að nota það þurfum við hallatöluna og við vitum að nýja línan verður hornrétt á $x=5$. Sú lína er lóðrétt og því verður hornrétta línan lárétt. Þetta segir okkur að $m_1=0$.

| | |
|---|---|
| Tilgreinið punktinn. | $(3,-2)$ |
| Tilgreinið hallatölu hornréttu línunnar. | $m_1=0$ |
| Setjið gildin inn í $y-y_1=m(x-x_1)$. | $y-y_1=m(x-x_1)$<br>$y-(-2)=0(x-3)$<br>$y+2=0$ |
| Einfaldið. | $y=-2$ |

Skissið gröf beggja lína. Virðast þær vera hornréttar?

**REYNIÐ SJÁLF 4.133**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $x=4$ og liggur um punktinn $(4,-5)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

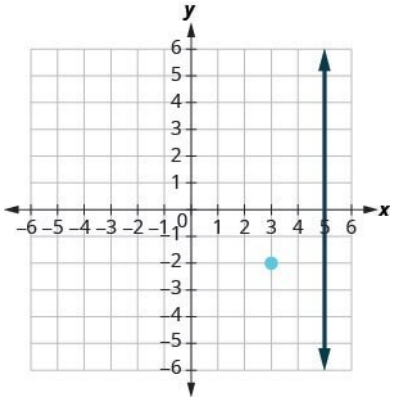
**REYNIÐ SJÁLF 4.134**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $x=2$ og liggur um punktinn $(2,-1)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

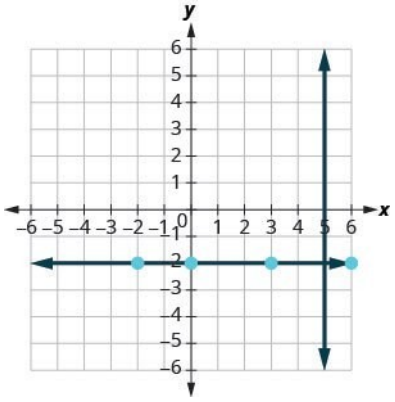
Í dæmi 4.67 notuðum við punkthallaformið til að finna jöfnuna. Við hefðum líka getað skoðað dæmið á annan hátt.

Við viljum finna línu sem er hornrétt á $x=5$ og liggur um punktinn $(3,-2)$. Grafið sýnir línuna $x=5$ og punktinn $(3,-2)$.






Við vitum að allar línur sem eru hornréttar á lóðrétta línu eru láréttar. Því skissum við láréttu línuna sem liggur um $(3,-2)$.




Virðast línurnar vera hornréttar?

Ef við skoðum nokkra punkta á þessari láréttu línu sjáum við að allir hafa y-hnitið $-2$. Jafna línunnar sem er hornrétt á lóðréttu línuna $x=5$ er því $y=-2$.

**DÆMI 4.68**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á $y=-4$ og liggur um punktinn $(-4,2)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

### Lausn

Línan $y=-4$ er lárétt. Allar línur sem eru hornréttar á hana verða að vera lóðréttar og á forminu $x=a$. Þar sem hornrétta línan er lóðrétt og liggur um $(-4,2)$ hafa allir punktar hennar x-hnitið $-4$. Jafna hornréttu línunnar er $x=-4$. Gott getur verið að skissa línurnar. Virðast þær vera hornréttar?

**REYNIÐ SJÁLF 4.135**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $y=1$ og liggur um punktinn $(-5,1)$. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.



**REYNIÐ SJÁLF 4.136**

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna $y=-5$ og liggur um punktinn $(-4,-5)$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta netefni til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í að finna jöfnu línu.

- Notið punkthallaform jöfnu línu

## Verkefni úr hluta 4.6

***Æfingin skapar meistarann***

**Finnið jöfnu línu þegar hallatala og skurðpunktur við y-ás eru gefin**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu línu með gefna hallatölu og skurðpunkt við y-ás. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**386.** hallatala 3 og skurðpunktur við y-ás $(0,5)$

**387.** hallatala 4 og skurðpunktur við y-ás $(0,1)$

**388.** hallatala 6 og skurðpunktur við y-ás $(0,-4)$

**389.** hallatala 8 og skurðpunktur við y-ás $(0,-6)$

**390.** hallatala $-1$ og skurðpunktur við y-ás $(0,3)$

**391.** hallatala $-1$ og skurðpunktur við y-ás $(0,7)$

**392.** hallatala $-2$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-3)$

**393.** hallatala $-3$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-1)$

**394.** hallatala $\frac{3}{5}$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-1)$

**395.** hallatala $\frac{1}{5}$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-5)$

**396.** hallatala $-\frac{3}{4}$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-2)$

**397.** hallatala $-\frac{2}{3}$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-3)$

**398.** hallatala 0 og skurðpunktur við y-ás $(0,-1)$

**399.** hallatala 0 og skurðpunktur við y-ás $(0,2)$

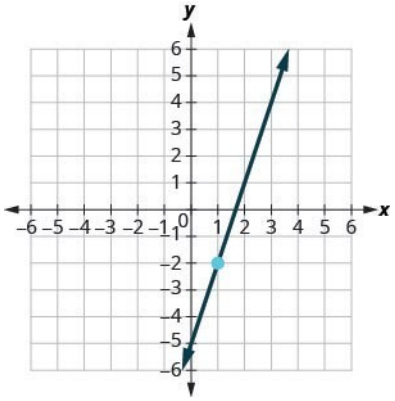
**400.** hallatala $-3$ og skurðpunktur við y-ás $(0,0)$

**401.** hallatala $-4$ og skurðpunktur við y-ás $(0,0)$

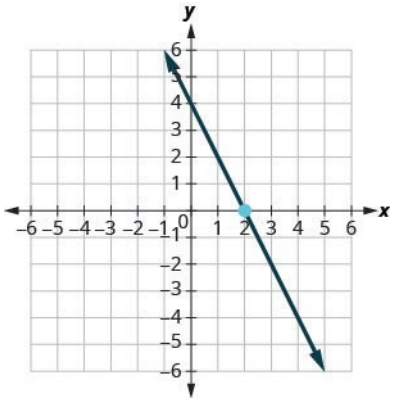
4

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu línunnar sem sýnd er á hverju grafi. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

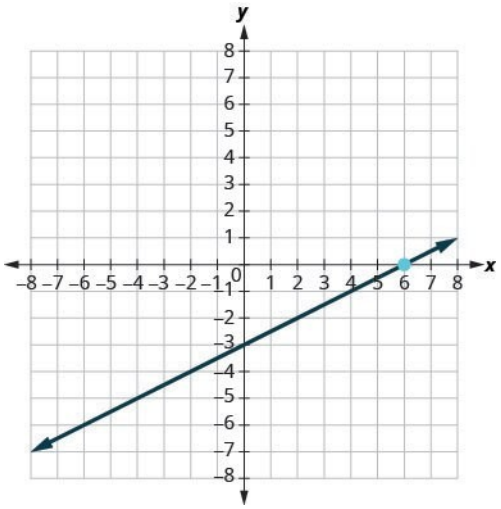
402.



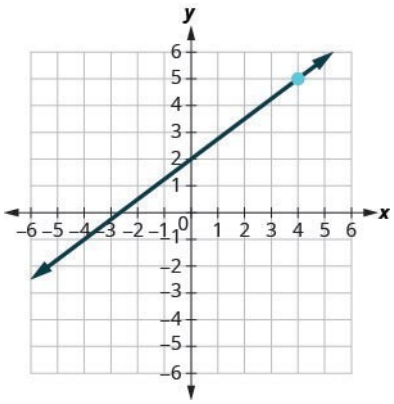

403.



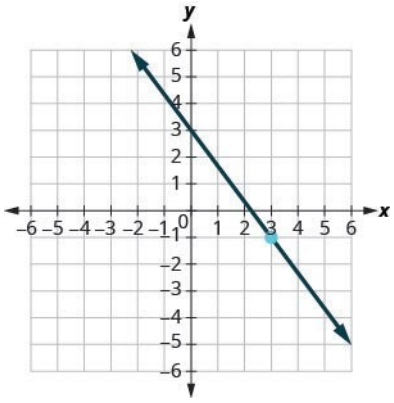
404.


y
x
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8

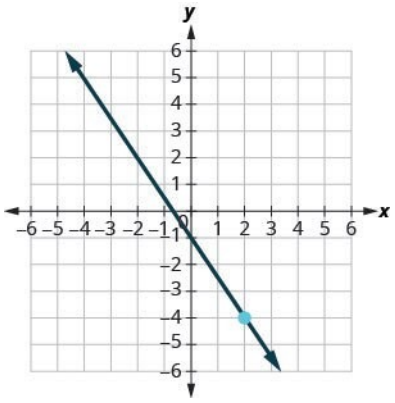
405.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−2
−3
−4
−5
−6

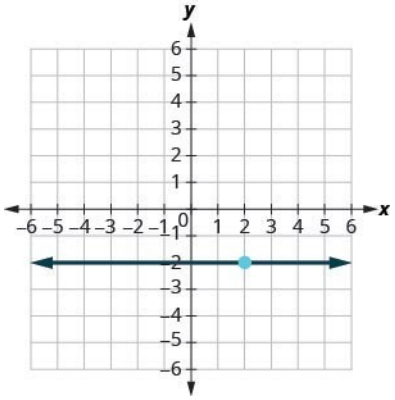
406.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6
−2
−3
−4
−5
−6

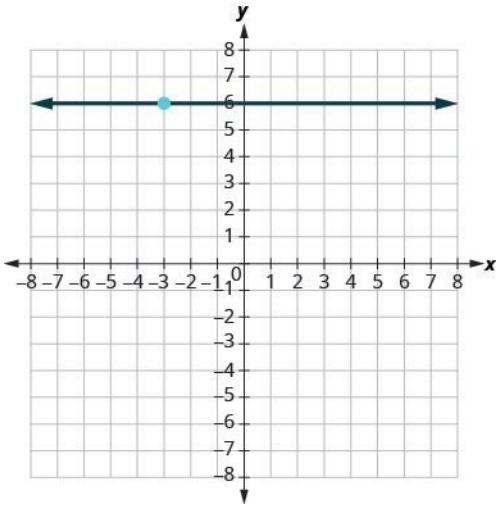
407.



408.



409.



**Finnið jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu línu með gefna hallatölu sem liggur um gefna punktinn. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**410.** $m=\frac{5}{8}$, punktur $(8,3)$

**411.** $m=\frac{3}{8}$, punktur $(8,2)$

**412.** $m=\frac{1}{6}$, punktur $(6,1)$

**413.** $m=\frac{5}{6}$, punktur $(6,7)$

**414.** $m=-\frac{3}{4}$, punktur $(8,-5)$

**415.** $m=-\frac{3}{5}$, punktur $(10,-5)$

**416.** $m=-\frac{1}{4}$, punktur $(-12,-6)$

**417.** $m=-\frac{1}{3}$, punktur $(-9,-8)$



**418.** Lárétt lína sem liggur um $(-2,5)$

**419.** Lárétt lína sem liggur um $(-1,4)$

**420.** Lárétt lína sem liggur um $(-2,-3)$

**421.** Lárétt lína sem liggur um $(-1,-7)$

**422.** $m=-\frac{3}{2}$, punktur $(-4,-3)$

**423.** $m=-\frac{5}{2}$, punktur $(-8,-2)$

**424.** $m=-7$, punktur $(-1,-3)$

**425.** $m=-4$, punktur $(-2,-3)$

**426.** Lárétt lína sem liggur um $(2,-3)$

**427.** Lárétt lína sem liggur um $(4,-8)$

**Finnið jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu línu sem liggur um gefnu punktana. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**428.** $(2,6)$ og $(5,3)$

**429.** $(3,1)$ og $(2,5)$

**430.** $(4,3)$ og $(8,1)$

**431.** $(2,7)$ og $(3,8)$

**432.** $(-3,-4)$ og $(5-2)$

**433.** $(-5,-3)$ og $(4,-6)$

**434.** $(-1,3)$ og $(-6,-7)$

**435.** $(-2,8)$ og $(-4,-6)$

**436.** $(6,-4)$ og $(-2,5)$

**437.** $(3,-2)$ og $(-4,4)$

**438.** $(0,4)$ og $(2,-3)$

**439.** $(0,-2)$ og $(-5,-3)$

**440.** $(7,2)$ og $(7,-2)$

**441.** $(4,2)$ og $(4,-3)$

**442.** $(-7,-1)$ og $(-7,-4)$

**443.** $(-2,1)$ og $(-2,-4)$

**444.** $(6,1)$ og $(0,1)$

**445.** $(6,2)$ og $(-3,2)$

**446.** $(3,-4)$ og $(5,-4)$

**447.** $(-6,-3)$ og $(-1,-3)$

**448.** $(4,3)$ og $(8,0)$

**449.** $(0,0)$ og $(1,4)$

**450.** $(-2,-3)$ og $(-5,-6)$

**451.** $(-3,0)$ og $(-7,-2)$

**452.** $(8,-1)$ og $(8,-5)$

**453.** $(3,5)$ og $(-7,5)$

### Finnið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu línu sem er samsíða gefnu línunni og liggur um gefna punktinn. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**454.** lína $y=4x+2$, punktur $(1,2)$

**455.** lína $y=3x+4$, punktur $(2,5)$

**456.** lína $y=-2x-3$, punktur $(-1,3)$

**457.** lína $y=-3x-1$, punktur $(2,-3)$

**458.** lína $3x - y = 4$, punktur $(3, 1)$

**459.** lína $2x - y = 6$, punktur $(3, 0)$

**460.** lína $4x + 3y = 6$, punktur $(0, -3)$

**461.** lína $2x + 3y = 6$, punktur $(0, 5)$

**462.** lína $x = -3$, punktur $(-2, -1)$

**463.** lína $x = -4$, punktur $(-3, -5)$

**464.** lína $x - 2 = 0$, punktur $(1, -2)$

**465.** lína $x - 6 = 0$, punktur $(4, -3)$

**466.** lína $y = 5$, punktur $(2, -2)$

**467.** lína $y = 1$, punktur $(3, -4)$

**468.** lína $y + 2 = 0$, punktur $(3, -3)$

**469.** lína $y + 7 = 0$, punktur $(1, -1)$

**Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu línu sem er hornrétt á gefnu línuna og liggur um gefna punktinn. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**470.** lína $y = -2x + 3$, punktur $(2, 2)$

**471.** lína $y = -x + 5$, punktur $(3, 3)$

**472.** lína $y = \frac{3}{4}x - 2$, punktur $(-3, 4)$

**473.** lína $y = \frac{2}{3}x - 4$, punktur $(2, -4)$

**474.** lína $2x - 3y = 8$, punktur $(4, -1)$

**475.** lína $4x - 3y = 5$, punktur $(-3, 2)$

**476.** lína $2x + 5y = 6$, punktur $(0, 0)$

**477.** lína $4x + 5y = -3$, punktur $(0, 0)$

**478.** lína $y - 3 = 0$, punktur $(-2, -4)$

**479.** lína $y - 6 = 0$, punktur $(-5, -3)$

**480.** lína: y-ásinn; punktur $(3, 4)$

**481.** lína: y-ásinn; punktur $(2, 1)$

### *Blönduð verkefni*

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna jöfnu hverrar línu. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**482.** Liggur um punktana $(4,3)$ og $(8,1)$

**483.** Liggur um punktana $(2,7)$ og $(3,8)$

**484.** $m=\frac{1}{6}$, liggur um punktinn $(6,1)$

**485.** $m=\frac{5}{6}$, liggur um punktinn $(6,7)$

**486.** Samsíða línunni $4x+3y=6$, liggur um punktinn $(0,-3)$

**487.** Samsíða línunni $2x+3y=6$, liggur um punktinn $(0,5)$

4

**488.** $m=-\frac{3}{4}$, liggur um punktinn $(8,-5)$

**489.** $m=-\frac{3}{5}$, liggur um punktinn $(10,-5)$

**490.** Hornrétt á línuna $y-1=0$, liggur um punktinn $(-2,6)$

**491.** Hornrétt á y-ásinn og liggur um punktinn $(-6,2)$

**492.** Liggur um punktana $(4,3)$ og $(8,1)$

**493.** Liggur um punktana $(-2,0)$ og $(-3,-2)$

**494.** Samsíða línunni $x=-3$, liggur um punktinn $(-2,-1)$

**495.** Samsíða línunni $x=-4$, liggur um punktinn $(-3,-5)$

**496.** Liggur um punktana $(-3,-4)$ og $(2,-5)$

**497.** Liggur um punktana $(-5,-3)$ og $(4,-6)$

**498.** Hornrétt á línuna $x-2y=5$, liggur um punktinn $(-2,2)$

**499.** Hornrétt á línuna $4x+3y=1$, liggur um punktinn $(0,0)$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**500.** **Kólesteról.** Aldur, $x$, og LDL-kólesterólgildi, $y$, tveggja karla eru gefin með punktunum $(18,68)$ og $(27,122)$. Finnið línulega jöfnu sem lýsir tengslunum milli aldurs og LDL-kólesterólgildis.

**501.** **Eldsneytisnotkun.** Fjöldi mílna á gallon í borgarakstri, $x$, og á þjóðvegi, $y$, fyrir tvo bíla er gefinn með punktunum $(29,40)$ og $(19,28)$. Finnið línulega jöfnu sem lýsir tengslunum milli eldsneytisnýtingar í borgarakstri og á þjóðvegi.

### *Ritunarverkefni*

**502.** Hvers vegna eru allar láréttar línur samsíða?

**503.** Útskýrið með eigin orðum hvers vegna hallatölur tveggja hornréttra lína þurfa að hafa gagnstæð formerki.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| fundið jöfnu línunnar þegar hallatala hennar og $y$-skurðpunktur eru gefin. | | | |
| fundið jöfnu línunnar þegar hallatala hennar og punktur á henni eru gefin. | | | |
| fundið jöfnu línunnar þegar tveir punktar á henni eru gefnir. | | | |
| fundið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu. | | | |
| fundið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu. | | | |

ⓑ Hvernig metið þið tök ykkar á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt þau?



# 4.7 Gröf línulegra ójafna

**NÁMSMARKMIÐ**

Við lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Sannreynið lausnir ójöfnu með tveimur breytum
- Greinið tengslin milli lausna ójöfnu og grafs hennar
- Teiknið gröf línulegra ójafna

**UNDIRBÚNINGUR 4.15**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leysið: $4x+3>23$. Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 2.73.

**UNDIRBÚNINGUR 4.16**

Skrifið með orðum: $x<5$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.12.

**UNDIRBÚNINGUR 4.17**

Reiknið gildi $3x - 2y$ þegar $x = 1$, $y = -2$. Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 1.55.

## Sannreynið lausnir ójöfnu með tveimur breytum

Við höfum lært að leysa ójöfnur með einni breytu. Nú skoðum við ójöfnur með tveimur breytum. Slíkar ójöfnur nýtast á mörgum sviðum. Ef þið rækjuð til dæmis fyrirtæki mynduð þið vilja að tekjurnar væru meiri en kostnaðurinn svo reksturinn skilaði hagnaði.

**LÍNULEG ÓJAFNA**

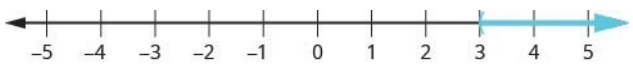
Ójafna kallast línuleg ójafna ef skrifa má hana á einu af þessum formum:

$$Ax + By > C \qquad Ax + By \geq C \qquad Ax + By < C \qquad Ax + By \leq C$$

4

þar sem $A$ og $B$ eru ekki bæði núll.

Munið þið að ójafna með einni breytu getur haft margar lausnir? Lausn ójöfnunnar $x > 3$ er hver tala sem er stærri en 3. Við sýndum þetta á talnalínunni með því að skyggja hana hægra megin við 3 og setja opinn hringsviga við 3. Sjá mynd 4.30.




Mynd 4.30

Á sama hátt hafa ójöfnur með tveimur breytum margar lausnir. Hver röðuð tvennd $(x, y)$ sem gerir ójöfnuna sanna þegar gildin eru sett inn er lausn ójöfnunnar.

**LAUSN LÍNULEGRAR ÓJÖFNU**

Röðuð tvennd $(x, y)$ er lausn línulegrar ójöfnu ef ójafnan er sönn þegar gildi x og y eru sett inn.

**DÆMI 4.69**

Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y > x + 4$:

ⓐ $(0, 0)$ ⓑ $(1, 6)$ ⓒ $(2, 6)$ ⓓ $(-5, -15)$ ⓔ $(-8, 12)$

## Lausn

**1.** ⓐ

| $(0,0)$ | $y > x + 4$ |
|---|---|
| Setjið 0 inn fyrir x og 0 inn fyrir y. | $0 \stackrel{?}{>} 0 + 4$ |
| Einfaldið. | $0 \not> 4$<br>Því er $(0,0)$ ekki lausn ójöfnunnar $y > x + 4$. |

**2.** ⓑ

| $(1,6)$ | $y > x + 4$ |
|---|---|
| Setjið 1 inn fyrir $x$ og 6 inn fyrir $y$. | $6 \stackrel{?}{>} 1 + 4$ |
| Einfaldið. | $6 > 5$<br>Því er $(1,6)$ lausn ójöfnunnar $y > x + 4$. |

**3.** ⓒ

| $(2,6)$ | $y > x + 4$ |
|---|---|
| Setjið 2 í stað $x$ og 6 í stað $y$. | $6 \stackrel{?}{>} 2 + 4$ |
| Einfaldið. | $6 \not> 6$<br>Því er $(2,6)$ ekki lausn ójöfnunnar $y > x + 4$. |

**4.** ⓓ

| $(-5,-15)$ | $y > x + 4$ |
|---|---|
| Setjið –5 inn fyrir x og –15 inn fyrir y. | $-15 \stackrel{?}{>} -5 + 4$ |
| Einfaldið. | $-15 \not> -1$<br>Því er $(-5,-15)$ ekki lausn ójöfnunnar $y > x + 4$. |

**5.** ⓔ

| $(-8,12)$ | $y>x+4$ |
|---|---|
| Setjið $-8$ inn fyrir $x$ og $12$ inn fyrir $y$. | $12 \stackrel{?}{>} -8+4$ |
| Einfaldið. | $12>-4$ |
| | Því er $(-8,12)$ lausn ójöfnunnar $y>x+4$. |

**REYNIÐ SJÁLF 4.137**

Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y>x-3$:

ⓐ $(0,0)$ ⓑ $(4,9)$ ⓒ $(-2,1)$ ⓓ $(-5,-3)$ ⓔ $(5,1)$

4

**REYNIÐ SJÁLF 4.138**

Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y<x+1$:

ⓐ $(0,0)$ ⓑ $(8,6)$ ⓒ $(-2,-1)$ ⓓ $(3,4)$ ⓔ $(-1,-4)$

## Greinið tengslin milli lausna ójöfnu og grafs hennar

Nú skoðum við hvernig lausnir ójöfnu tengjast grafi hennar.

Skoðum aftur talnalínuna á mynd 4.30. Punkturinn $x=3$ skipti talnalínunni í tvo hluta. Öðrum megin við 3 eru allar tölur minni en 3. Hinum megin við 3 eru allar tölur stærri en 3. Sjá mynd 4.31.




Mynd 4.31

Lausnamengi ójöfnunnar $x>3$ er skyggði hluti talnalínunnar hægra megin við $x=3$.

Á sama hátt skiptir línan $y=x+4$ xy-hnitaplaninu í tvö svæði. Öðrum megin við línuna eru punktar þar sem $y<x+4$. Hinum megin eru punktar þar sem $y>x+4$. Við köllum línuna $y=x+4$ markalínu.

**MARKALÍNA**

Línan með jöfnuna $Ax+By=C$ er markalínan sem skilur svæðið þar sem $Ax+By>C$ frá svæðinu þar sem $Ax+By<C$.

Fyrir ójöfnu með einni breytu er endapunkturinn sýndur með sviga eða hornklofa eftir því hvort $a$ tilheyrir lausninni:

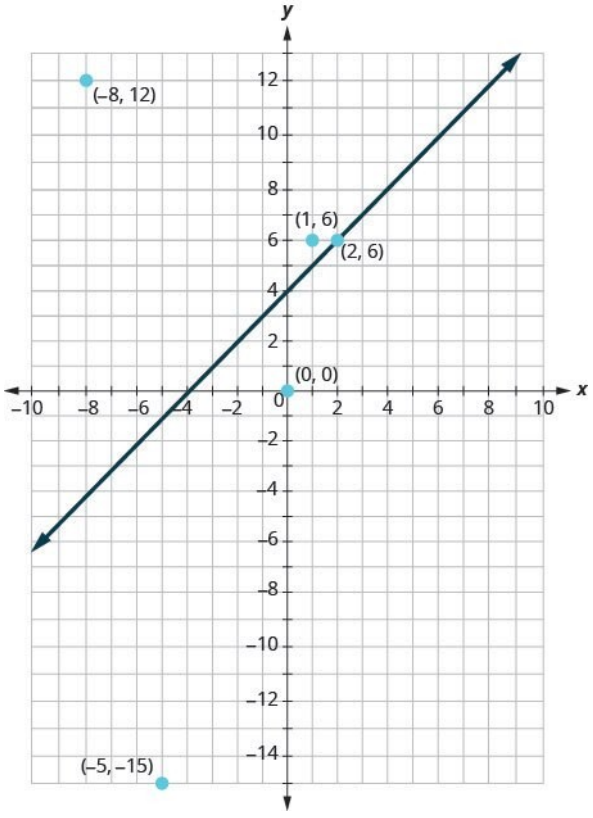



Á sama hátt er markalínan fyrir ójöfnu með tveimur breytum ýmist heil eða slitin eftir því hvort línan sjálf tilheyrir lausninni. Þetta er tekið saman í töflu 4.48.

Tafla 4.48

| | |
|---|---|
| $Ax+By<C$ | $Ax+By\leq C$ |
| $Ax+By>C$ | $Ax+By\geq C$ |
| Markalínan tilheyrir ekki lausninni. | Markalínan tilheyrir lausninni. |
| **Markalínan er slitin.** | **Markalínan er heil.** |

Skoðum nú niðurstöðurnar úr dæmi 4.69. Við byrjum á að teikna línuna $y=x+4$ og merkjum síðan punktana fimm sem við prófuðum. Sjá mynd 4.32.




Mynd 4.32

Í dæmi 4.69 kom í ljós að sumir punktanna voru lausnir ójöfnunnar $y>x+4$ en aðrir ekki.

Hverjir punktanna sem við merktum inn eru lausnir ójöfnunnar $y>x+4$? Punktarnir $(1,6)$ og $(-8,12)$ eru lausnir ójöfnunnar $y>x+4$. Takið eftir að þeir eru báðir sömu megin við markalínuna $y=x+4$.

Punktarnir tveir $(0,0)$ og $(-5,-15)$ eru hinum megin við markalínuna $y=x+4$ og eru ekki lausnir ójöfnunnar $y>x+4$. Fyrir þessa tvo punkta gildir $y<x+4$.

Hvað með punktinn $(2,6)$? Af því að $6=2+4$ er punkturinn lausn jöfnunnar $y=x+4$. Punkturinn $(2,6)$ liggur því á markalínunni.

Veljum annan punkt vinstra megin við markalínuna og könnum hvort hann sé lausn ójöfnunnar $y>x+4$. Punkturinn $(0,10)$ virðist greinilega vera vinstra megin við markalínuna, ekki satt? Er hann lausn ójöfnunnar?

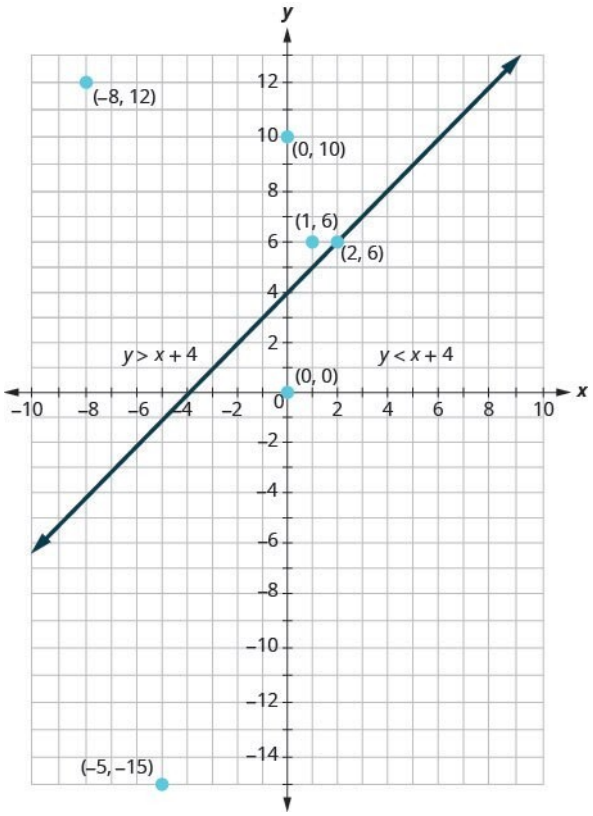
$$\begin{aligned} y &> x+4 \\ 10 &\overset{?}{>} 0+4 \\ 10 &> 4 \end{aligned}$$

Því er $(0,10)$ lausn ójöfnunnar $y>x+4$.

Hver sá punktur sem þið veljið vinstra megin við markalínuna er lausn ójöfnunnar $y>x+4$. Allir punktar vinstra megin eru lausnir.

Á sama hátt eru allir punktar hægra megin við markalínuna, þar sem $(0,0)$ og $(-5,-15)$ liggja, ekki lausnir ójöfnunnar $y>x+4$. Sjá mynd 4.33.

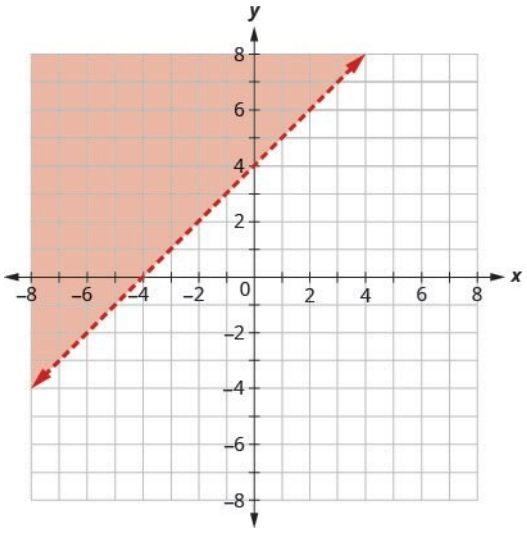
4




Mynd 4.33

Graf ójöfnunnar $y>x+4$ er sýnt á mynd 4.34 hér fyrir neðan. Línan $y=x+4$ skiptir xy-hnitaplaninu í tvö svæði. Skyggða svæðið sýnir lausnir ójöfnunnar $y>x+4$.

Punktarnir á markalínunni, þar sem $y=x+4$, eru ekki lausnir ójöfnunnar $y>x+4$. Línan sjálf tilheyrir því ekki lausninni. Við sýnum þetta með því að hafa línuna slitna en ekki heila.

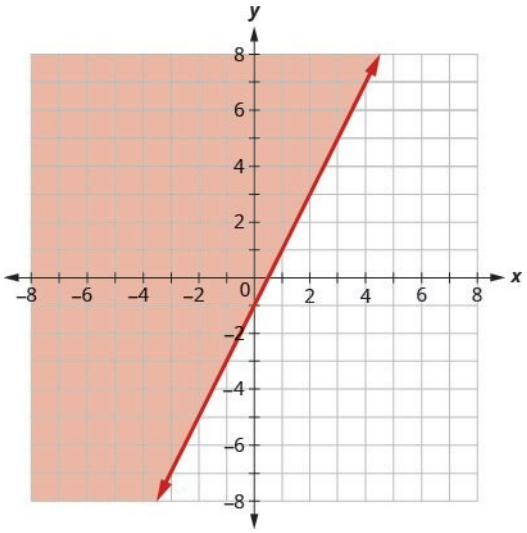



Mynd 4.34 Graf ójöfnunnar $y > x + 4$.



**DÆMI 4.70**

Markalínan sem sýnd er hefur jöfnuna $y = 2x - 1$. Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir.




## Lausn

Línan $y = 2x - 1$ er markalínan. Öðrum megin við hana eru punktarnir þar sem $y > 2x - 1$ og hinum megin punktarnir þar sem $y < 2x - 1$.

Prófum punktinn $(0, 0)$ og könnum hvor ójafnan lýsir þeirri hlið markalínunnar sem hann liggur á.

Athugum hvor ójafnan er sönn í punktinum $(0, 0)$:

$$\begin{array}{lll} y>2x-1 & \text{eða} & y<2x-1\,? \\ y>2x-1 & & y<2x-1 \\ \stackrel{?}{0}>2\cdot 0-1 & & \stackrel{?}{0}<2\cdot 0-1 \\ 0>-1 \text{ Satt} & & 0<-1 \text{ Ósatt} \end{array}$$

Þar sem $y>2x-1$ er sönn er lausnarsvæðið sú hlið línunnar sem $(0,0)$ liggur á. Skyggða svæðið sýnir lausn ójöfnunnar $y>2x-1$.

Markalínan er teiknuð heil og því inniheldur ójafnan jafnaðarmerki.

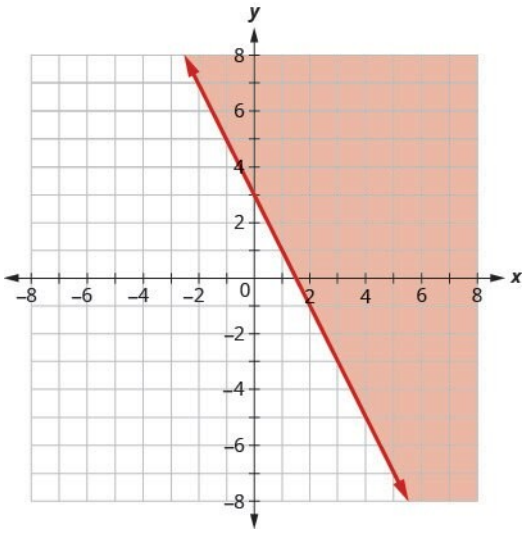
Grafið sýnir ójöfnuna $y\geq 2x-1$.

Við gætum notað hvaða prófunarpunkt sem er, svo framarlega sem hann liggur ekki á línunni. Hvers vegna völdum við $(0,0)$? Vegna þess að auðveldast er að reikna þar. Gott getur verið að velja punkt hinum megin við markalínuna og athuga að $y<2x-1$.

4

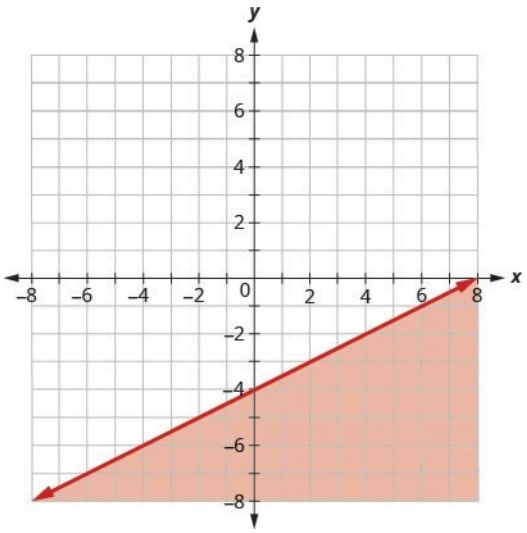
**REYNIÐ SJÁLF 4.139**

Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir þegar markalínan er $y=-2x+3$.



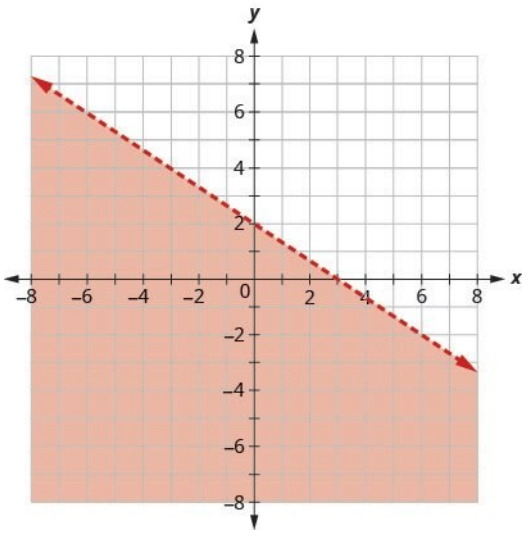

**REYNIÐ SJÁLF 4.140**

Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir þegar markalínan er $y=\frac{1}{2}x-4$.




**DÆMI 4.71**

Markalínan sem sýnd er hefur jöfnuna $2x+3y=6$. Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir.




## Lausn

Línan $2x+3y=6$ er markalínan. Öðrum megin við hana eru punktarnir þar sem $2x+3y>6$ og hinum megin punktarnir þar sem $2x+3y<6$.

Prófum punktinn $(0,0)$ og könnum hvor ójafnan lýsir þeirri hlið markalínunnar sem hann liggur á.

Athugum hvor ójafnan er sönn í punktinum $(0,0)$:

$$\begin{array}{rcl} 2x+3y & > & 6 \\ 2x+3y & > & 6 \\ & \overset{?}{} & \\ 2(0)+3(0) & > & 6 \\ 0 & > & 6 \text{ Ósatt} \end{array} \qquad \text{eða} \qquad \begin{array}{rcl} 2x+3y & < & 6\,? \\ 2x+3y & < & 6 \\ & \overset{?}{} & \\ 2(0)+3(0) & < & 6 \\ 0 & < & 6 \text{ Satt} \end{array}$$

Hliðin þar sem $(0,0)$ liggur er því hliðin þar sem $2x+3y<6$.

(Gott getur verið að velja punkt hinum megin við markalínuna og athuga að $2x+3y>6$.)

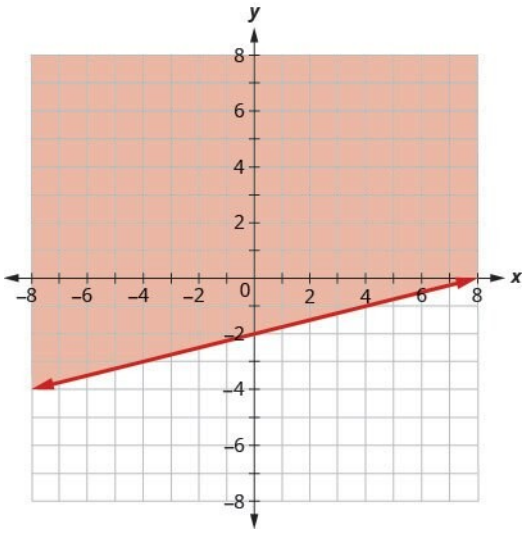
Markalínan er teiknuð slitin og því inniheldur ójafnan ekki jafnaðarmerki.

Grafið sýnir lausn ójöfnunnar $2x+3y<6$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 4.141**

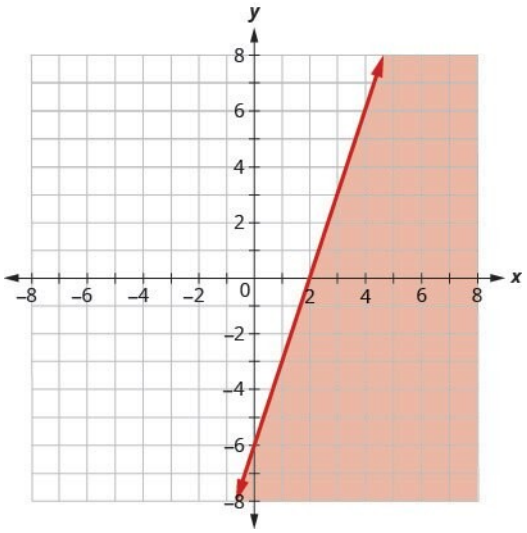
Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $x-4y=8$.




---

**REYNIÐ SJÁLF 4.142**

Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $3x-y=6$.




## Teiknið gröf línulegra ójafna

Nú getum við tengt þetta allt saman og teiknað gröf línulegra ójafna.

**DÆMI 4.72**

## Hvernig teikna á gröf línulegra ójafna

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \geq \frac{3}{4}x - 2$.

## Lausn

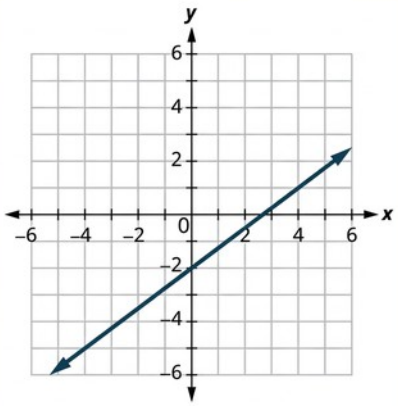
**Skref 1. Finnið jaðarlínuna og teiknið graf hennar.**

- Ef ójöfnumerkið er ≤ eða ≥ er jaðarlínan heil.
- Ef ójöfnumerkið er < eða > er jaðarlínan slitin.

Skiptið ójöfnumerkinu út fyrir jafnaðarmerki til að finna jaðarlínuna.

Teiknið graf jaðarlínunnar $y = \frac{3}{4}x - 2$.

Ójöfnumerkið er ≥ og því teiknum við heila línu.




**Skref 2.** Prófið punkt sem liggur ekki á markalínunni. Er hann lausn ójöfnunnar?

Við prófum (0, 0).

Er punkturinn lausn ójöfnunnar?

Gildir $y \geq \frac{3}{4}x - 2$ í punktinum (0, 0)?

$$0 \stackrel{?}{\geq} \frac{3}{4}(0) - 2$$

$$0 \geq -2$$

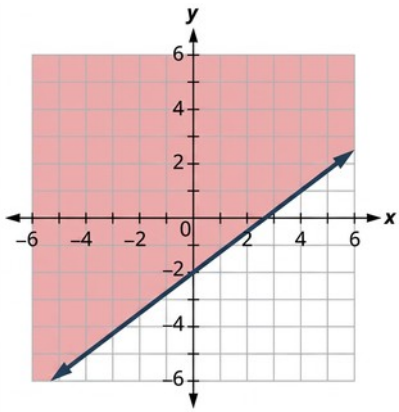
Því er (0, 0) lausn.

**Skref 3. Skyggið öðru megin við markalínuna.**

- Ef prófunarpunkturinn er lausn, skyggið þá svæðið sem inniheldur punktinn.
- Ef prófunarpunkturinn er ekki lausn, skyggið þá svæðið hinum megin.

Prófunarpunkturinn (0, 0) er lausn ójöfnunnar $y \geq \frac{3}{4}x - 2$.

Því skyggjum við það svæði.




**REYNIÐ SJÁLF 4.143**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y > \frac{5}{2}x - 4$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.144**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y < \frac{2}{3}x - 5$.

Skrefin við að teikna graf línulegrar ójöfnu eru tekin saman hér.

---

**AÐFERÐ**

### Teiknið graf línulegrar ójöfnu.

1. Skref 1.
   Finnið markalínuna og teiknið hana.
   - Ef ójafnan er $\leq$ eða $\geq$, er markalínan heil.
   - Ef ójafnan er $<$ eða $>$ er markalínan slitin.
2. Skref 2. Prófið punkt sem liggur ekki á markalínunni. Er hann lausn ójöfnunnar?
3. Skref 3.
   Skyggið aðra hlið markalínunnar.
   - Ef prófunarpunkturinn er lausn skuluð þið skyggja hliðina sem inniheldur punktinn.
   - Ef prófunarpunkturinn er ekki lausn skuluð þið skyggja hina hliðina.



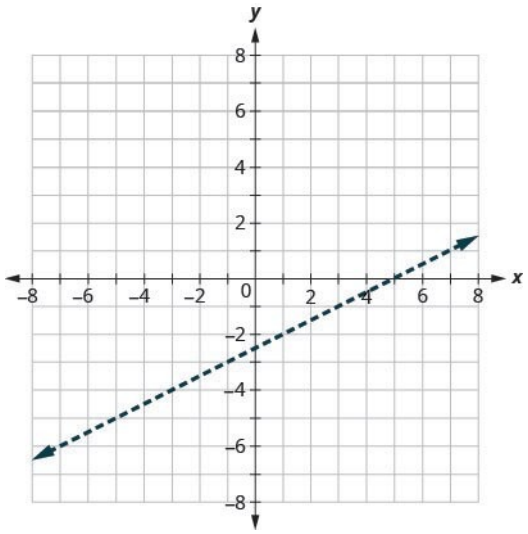
---

**DÆMI 4.73**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x-2y<5$.

### Lausn

Fyrst teiknum við markalínuna $x-2y=5$. Ójafnan er $<$ og því teiknum við slitna línu.

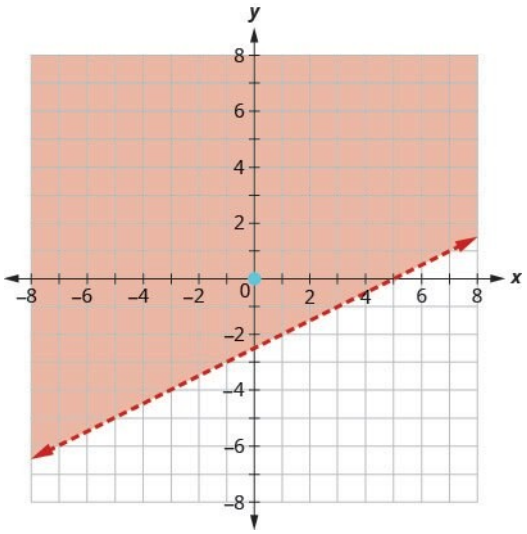



Síðan prófum við punkt. Við notum aftur $(0,0)$ vegna þess að auðvelt er að reikna gildið þar og punkturinn liggur ekki á markalínunni.

Er $(0,0)$ lausn ójöfnunnar $x-2y<5$?

$$0 - 2(0) \stackrel{?}{<} 5$$
$$0 - 0 \stackrel{?}{<} 5$$
$$0 < 5$$

Punkturinn $(0,0)$ er lausn ójöfnunnar $x - 2y < 5$ og því skyggjum við þá hlið markalínunnar.






**REYNIÐ SJÁLF 4.145**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $2x - 3y \leq 6$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.146**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $2x - y > 3$.

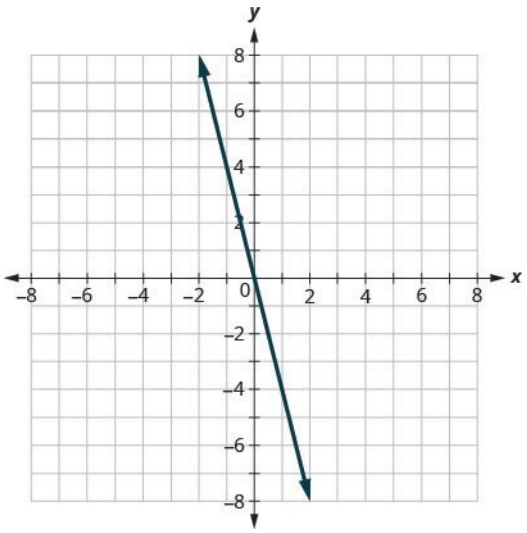
Hvað ef markalínan liggur um upphafspunktinn? Þá getum við ekki notað $(0,0)$ sem prófunarpunkt. Það skiptir ekki máli; við veljum einfaldlega annan punkt sem liggur ekki á markalínunni.

**DÆMI 4.74**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \leq -4x$.

## Lausn

Fyrst teiknum við markalínuna $y = -4x$. Hún er á hallatöluformi með $m = -4$ og $b = 0$. Ójafnan er $\leq$ og því teiknum við heila línu.




Nú þurfum við prófunarpunkt. Við sjáum að punkturinn $(1,0)$ liggur ekki á markalínunni.

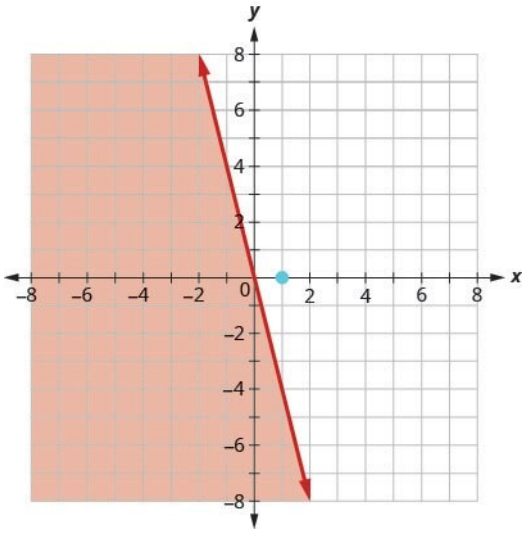
4

Er $(1,0)$ lausn ójöfnunnar $y \leq -4x$?

$$0 \stackrel{?}{\leq} -4(1)$$

$$0 \not\leq -4$$

Punkturinn $(1,0)$ er ekki lausn ójöfnunnar $y \leq -4x$ og því skyggjum við hina hlið markalínunnar. Sjá mynd 4.35.




Mynd 4.35

**REYNIÐ SJÁLF 4.147**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y > -3x$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.148**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \geq -2x$.

Sumar línulegar ójöfnur hafa aðeins eina breytu. Þær geta haft x en ekkert y, eða y en ekkert x. Í slíkum tilvikum er markalínan annaðhvort lóðrétt eða lárétt. Munið þið þetta?

| | |
|---|---|
| $x=a$ | lóðrétt lína |
| $y=b$ | lárétt lína |

**DÆMI 4.75**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y>3$.

## Lausn

Fyrst teiknum við markalínuna $y=3$. Hún er lárétt. Ójafnan er > og því teiknum við slitna línu.

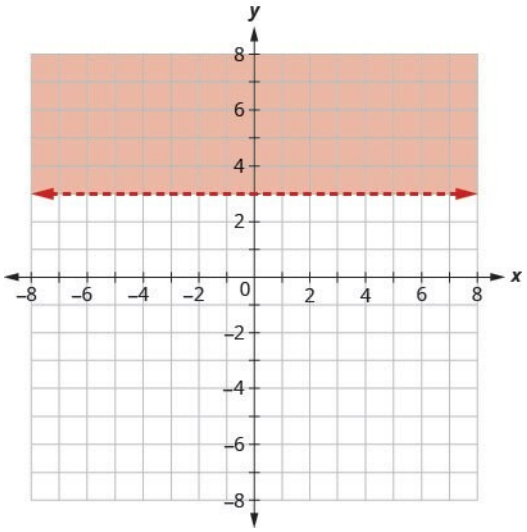
Við prófum punktinn $(0,0)$.

$$y > 3$$

$$0 \not> 3$$

$(0,0)$ er ekki lausn ójöfnunnar $y>3$.

Við skyggjum því hliðina sem inniheldur ekki (0, 0).




**REYNIÐ SJÁLF 4.149**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y<5$.

**REYNIÐ SJÁLF 4.150**

Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \leq -1$.

## Verkefni úr hluta 4.7

***Æfingin skapar meistarann***

**Sannreynið lausnir ójöfnu með tveimur breytum**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið ákvarða hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar sem gefin er.

**504.** Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y > x - 1$:

1. ⓐ $(0, 1)$
2. ⓑ $(-4, -1)$
3. ⓒ $(4, 2)$
4. ⓓ $(3, 0)$
5. ⓔ $(-2, -3)$

**505.** Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y > x - 3$:

1. ⓐ $(0, 0)$
2. ⓑ $(2, 1)$
3. ⓒ $(-1, -5)$
4. ⓓ $(-6, -3)$
5. ⓔ $(1, 0)$

**506.** Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y < x + 2$:

1. ⓐ $(0, 3)$
2. ⓑ $(-3, -2)$
3. ⓒ $(-2, 0)$
4. ⓓ $(0, 0)$
5. ⓔ $(-1, 4)$

**507.** Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y < x + 5$:

1. ⓐ $(-3, 0)$
2. ⓑ $(1, 6)$
3. ⓒ $(-6, -2)$
4. ⓓ $(0, 1)$
5. ⓔ $(5, -4)$

**508.** Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $x+y>4$:

1. ⓐ $(5,1)$
2. ⓑ $(-2,6)$
3. ⓒ $(3,2)$
4. ⓓ $(10,-5)$
5. ⓔ $(0,0)$

**509.** Ákvarðið hvort hver og ein röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $x+y>2$:

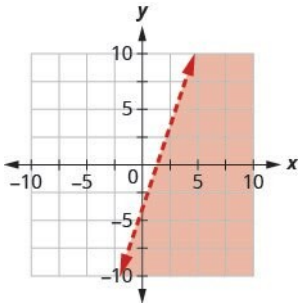
1. ⓐ $(1,1)$
2. ⓑ $(4,-3)$
3. ⓒ $(0,0)$
4. ⓓ $(-8,12)$
5. ⓔ $(3,0)$



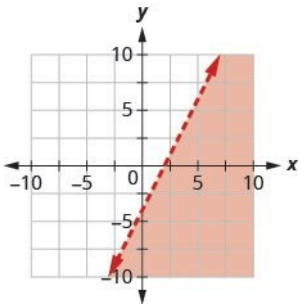
### Greinið tengslin milli lausna ójöfnu og grafs hennar

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið skrifa ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir.

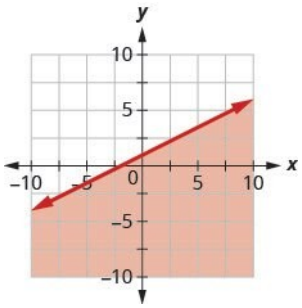
**510.** Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir þegar markalínan er $y=3x-4$.



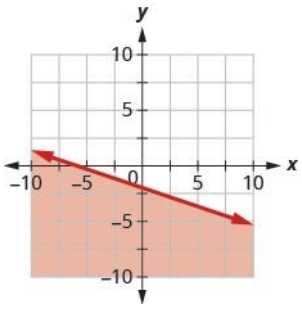

**511.** Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir þegar markalínan er $y=2x-4$.



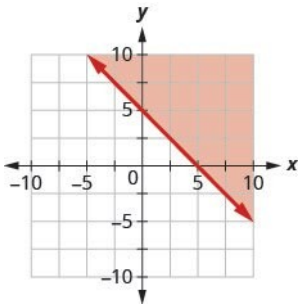

**512.** Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir þegar markalínan er $y=\frac{1}{2}x+1$.



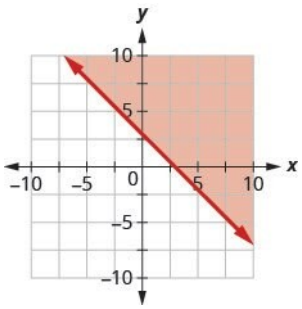

**513.** Skrifið ójöfnuna sem grafið sýnir þegar markalínan er $y = -\frac{1}{3}x - 2$.



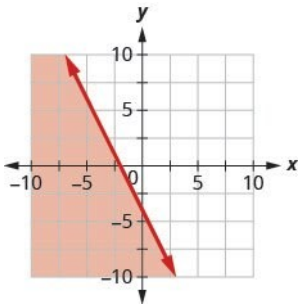

**514.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $x + y = 5$.



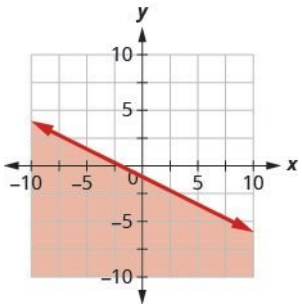

**515.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $x + y = 3$.



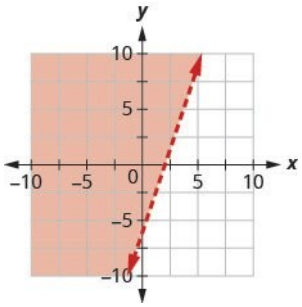

**516.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $2x + y = -4$.



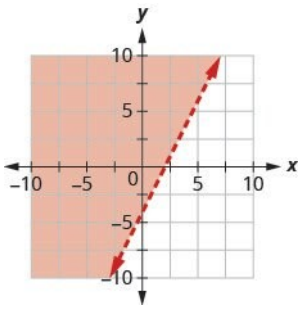

**517.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $x+2y=-2$.



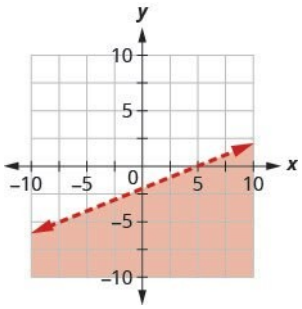

**518.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $3x-y=6$.



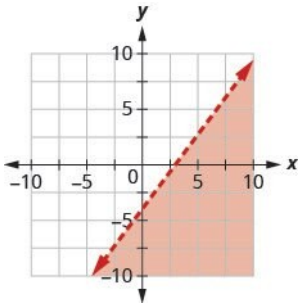

**519.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $2x-y=4$.




**520.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $2x-5y=10$.




**521.** Skrifið ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir þegar markalínan er $4x - 3y = 12$.




4

### Teiknið gröf línulegra ójafna

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið teikna graf hverrar línulegrar ójöfnu.

**522.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y > \frac{2}{3}x - 1$.

**523.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y < \frac{3}{5}x + 2$.

**524.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$.

**525.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \geq -\frac{1}{3}x - 2$.

**526.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x - y \leq 3$.

**527.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x - y \geq -2$.

**528.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $4x + y > -4$.

**529.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x + 5y < -5$.

**530.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $3x + 2y \geq -6$.

**531.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $4x + 2y \geq -8$.

**532.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y > 4x$.

**533.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y > x$.

**534.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \leq -x$.

**535.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \leq -3x$.

**536.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \geq -2$.

**537.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y < -1$.

**538.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y < 4$.

**539.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \geq 2$.

**540.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x \leq 5$.

**541.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x > -2$.

**542.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x > -3$.

**543.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x \leq 4$.

**544.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x - y < 4$.

**545.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x - y < -3$.

**546.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \geq \frac{3}{2}x$.

**547.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y \leq \frac{5}{4}x$.

**548.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y > -2x + 1$.

**549.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y < -3x - 4$.

**550.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x \leq -1$.

**551.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x \geq 0$.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**552. Peningar. Gerry vill hafa í mesta lagi 100 dollara í reiðufé við miðasölubásinn þegar hátíð kirkjunnar hans hefst. Hann verður með 1 dollara og 5 dollara seðla. Ef x er fjöldi 1 dollara seðla og y er fjöldi 5 dollara seðla lýsir ójafnan** $x + 5y \leq 100$ aðstæðunum.

1. ⓐ Teiknið graf ójöfnunnar.
2. ⓑ Skráið þrjár lausnir ójöfnunnar $x + 5y \leq 100$ þar sem bæði x og y eru heiltölur.

**553. Innkaup. Tula hefur 20 dollara til ráðstöfunar á markaði með notaðar bækur. Innbundnar bækur kosta 2 dollara hver og kiljur 0,50 dollara hver. Ef x er fjöldi innbundinna bóka sem Tula getur keypt og y er fjöldi kilja sem hún getur keypt lýsir ójafnan** $2x + \frac{1}{2}y \leq 20$ aðstæðunum.

1. ⓐ Teiknið graf ójöfnunnar.
2. ⓑ Skráið þrjár lausnir ójöfnunnar $2x + \frac{1}{2}y \leq 20$ þar sem bæði x og y eru núll eða jákvæðar heiltölur.

### *Ritunarverkefni*

**554.** Lester telur að lausn hverrar ójöfnu með >-merki sé svæðið ofan við línuna og lausn hverrar ójöfnu með <-merki sé svæðið neðan við hana. Hefur Lester rétt fyrir sér? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.

**555.** Útskýrið hvers vegna markalínan er heil á sumum gröfum línulegra ójafna en slitin á öðrum.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| sannreynt lausnir ójöfnu með tveimur breytum. | | | |
| áttað mig á tengslunum milli lausna ójöfnu og grafs þess. | | | |
| teiknað gröf línulegra ójafna. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um það hversu vel þið hafið náð tökum á efni hlutans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?

## Lykilhugtök

**markalína**

Línan sem hefur jöfnuna $A\,x+B\,y=C$ og skilur svæðið þar sem $A\,x+B\,y>C$ frá svæðinu þar sem $A\,x+B\,y<C$.

**pinnabretti**

Pinnabretti er flötur með pinnum í reglulegu neti.

**graf línulegrar jöfnu**

Graf línulegu jöfnunnar $A\,x+B\,y=C$ er bein lína. Hver punktur á línunni er lausn jöfnunnar og hver lausn jöfnunnar er punktur á línunni.

**lárétt lína**

Lárétt lína er graf jöfnu á forminu $y=b$. Línan sker y-ásinn í $(0\,,b)$.

**skurðpunktar línu við ása**

Punktarnir þar sem lína sker x-ásinn og y-ásinn kallast skurðpunktar línunnar við ásana.

**línuleg jafna**

Jafna á forminu $A\,x+B\,y=C$, þar sem A og B eru ekki bæði jöfn núlli, kallast línuleg jafna með tveimur breytum.

**línuleg ójafna**
Ójafna sem má skrifa á einu af þessum formum:

$$Ax + By > C \qquad Ax + By \geq C \qquad Ax + By < C \qquad Ax + By \leq C$$

þar sem $A$ og $B$ eru ekki bæði jöfn núlli.

**neikvæð hallatala**
Lína með neikvæða hallatölu lækkar þegar farið er frá vinstri til hægri.

**röðuð tvennd**
Röðuð tvennd $(x, y)$ gefur hnit punkts í rétthyrndu hnitakerfi.

**upphafspunktur**
Punkturinn $(0, 0)$ kallast upphafspunktur. Hann er skurðpunktur x-áss og y-áss.

**samsíða línur**
Línur í sama fleti sem skerast ekki.

**hornréttar línur**
Línur í sama fleti sem mynda rétt horn.

**punkthallaform**
Punkthallaform jöfnu línu með hallatöluna $m$ sem liggur um punktinn $(x_1, y_1)$ er $y - y_1 = m(x - x_1)$.

**jákvæð hallatala**
Lína með jákvæða hallatölu hækkar þegar farið er frá vinstri til hægri.

**fjórðungur**
Hnitásarnir sem merktir eru x og y skipta fletinum í fjögur svæði sem kallast fjórðungar.

**rétthyrnt hnitakerfi**
Hnitakerfi sem notað er í algebru til að sýna tengsl tveggja breyta; einnig kallað xy-hnitaplan eða hnitaplan.

**lóðrétt breyting**
Lóðrétt breyting línu er breyting hennar í lóðrétta átt.

**lárétt breyting**
Lárétt breyting línu er breyting hennar í lárétta átt.

**formúla fyrir hallatölu**
Hallatala línunnar milli punktanna $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ er $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

**hallatala línu**

Hallatala línu er $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$. Lóðrétta breytingin segir til um breytingu í lóðrétta átt og sú lárétta um breytingu í lárétta átt.

**hallatöluform jöfnu línu**

Hallatöluform jöfnu línu með hallatöluna $m$ og skurðpunktinn við y-ás $(0,b)$ er $y=mx+b$.

**lausn línulegrar ójöfnu**

Röðuð tvennd $(x,y)$ er lausn línulegrar ójöfnu ef ójafnan verður sönn þegar gildi x og y eru sett inn í hana.

**lóðrétt lína**

Lóðrétt lína er graf jöfnu á forminu $x=a$. Línan sker x-ásinn í $(a,0)$.

***skurðpunktur við x-ás***

Punkturinn $(a,0)$ þar sem línan sker x-ásinn; í skurðpunkti við x-ás er $y$ núll.

***x-hnit***

Fyrri talan í raðaðri tvennd $(x,y)$.

***y-hnit***

Seinni talan í raðaðri tvennd $(x,y)$.

***skurðpunktur við y-ás***

Punkturinn $(0,b)$ þar sem línan sker y-ásinn; í skurðpunkti við y-ás er $x$ núll.

# Meginatriði

## 4.1 Notkun rétthyrnds hnitakerfis

- **Formerki í fjórðungunum**

Fjórðungur I
$(x,y)$
$(+,+)$

Fjórðungur II
$(x,y)$
$(-,+)$

Fjórðungur III
$(x, y)$
$(-, -)$

Fjórðungur IV
$(x, y)$
$(+, -)$

- **Punktar á ásunum**
  - Á x-ásnum er $y=0$. Punktar með y-hnit jafnt og 0 eru á x-ásnum og hafa hnit $(a, 0)$.
  - Á y-ásnum er $x=0$. Punktar með x-hnit jafnt og 0 eru á y-ásnum og hafa hnit $(0, b)$.
- **Lausn línulegrar jöfnu**
  - Röðuð tvennd $(x, y)$ er lausn línulegu jöfnunnar $Ax+By=C$ ef jafnan verður sönn þegar x- og y-gildi tvenndarinnar eru sett inn í hana.



## 4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum

- **Teiknið graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta**
  1. Skref 1. Finnið þrjá punkta þannig að hnit þeirra séu lausnir jöfnunnar. Skráið þá í töflu.
  2. Skref 2. Merkið punktana í rétthyrnt hnitakerfi. Athugið hvort þeir liggi á sömu línu. Ef ekki skuluð þið fara vandlega yfir útreikningana.
  3. Skref 3. Dragið línu í gegnum punktana þrjá. Framlengið línuna að jöðrum rúðunetsins og setjið örvar á báða enda.

## 4.3 Teiknið gröf með skurðpunktum við ásana

- **Finna skurðpunkta við *x*- og *y*-ás út frá jöfnu línu**
  - Notið jöfnu línunnar til að finna skurðpunkt hennar við x-ás: setjið $y=0$ og leysið fyrir x.
  - Notið jöfnu línunnar til að finna skurðpunkt hennar við y-ás: setjið $x=0$ og leysið fyrir y.
- **Teikna graf línulegrar jöfnu með skurðpunktum við ása**
  1. Skref 1. Finnið skurðpunkta línunnar við x- og y-ás. Setjið $y=0$ og leysið fyrir x. Setjið $x=0$ og leysið fyrir y.
  2. Skref 2. Finnið þriðju lausn jöfnunnar.
  3. Skref 3. Merkið punktana þrjá og athugið hvort þeir liggi á sömu línu.
  4. Skref 4. Dragið línuna.
- **Aðferð til að velja hentugustu leiðina til að teikna graf línu:**

- Skoðið form jöfnunnar.
- Ef jafnan hefur aðeins eina breytu er graf hennar lóðrétt eða lárétt lína.
  $x=a$ er lóðrétt lína sem sker x-ásinn í $a$
  . $y=b$ er lárétt lína sem sker y-ásinn í $b$.
- Ef y er einangrað öðrum megin jafnaðarmerkisins skuluð þið teikna grafið með því að merkja punkta.
- Veljið þrjú gildi fyrir x og leysið síðan fyrir samsvarandi y-gildi.
- Ef jafnan er á forminu $a\,x+b\,y=c$, skuluð þið finna skurðpunktana við x- og y-ás og síðan þriðja punktinn.

## 4.4 Skilningur á hallatölu línu

- **Finna hallatölu línu af grafi hennar með**

$$m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$$

1. Skref 1. Finnið tvo punkta á línunni sem hafa heiltöluhnit.
2. Skref 2. Byrjið við punktinn vinstra megin og teiknið rétthyrndan þríhyrning þannig að langhliðin liggi frá fyrri punktinum að þeim síðari.
3. Skref 3. Teljið lóðréttu og láréttu breytinguna eftir skammhliðum þríhyrningsins.
4. Skref 4. Finnið hlutfall lóðréttrar og láréttrar breytingar til að fá hallatöluna.

- **Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin**
  1. Skref 1. Merkið gefna punktinn inn.
  2. Skref 2. Notið formúluna fyrir hallatölu $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna lóðréttu og láréttu breytinguna.
  3. Skref 3. Byrjið við gefna punktinn og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn.
  4. Skref 4. Tengið punktana með línu.

- **Hallatala láréttrar línu**
  - Hallatala láréttrar línu, $y=b$, er 0.
- **Hallatala lóðréttrar línu**
  - Hallatala lóðréttrar línu, $x=a$, er óskilgreind

## 4.5 Notkun hallatöluforms jöfnu línu

- Hallatöluform jöfnu línu með hallatöluna $m$ og skurðpunktinn við y-ás $(0\,,b)$ er $y=m\,x+b$.
- **Teikna graf línu með hallatölu og skurðpunkti við y-ás**
  1. Skref 1. Finnið hallatöluform jöfnu línunnar.

2. Skref 2. Finnið hallatöluna og skurðpunktinn við y-ás.
3. Skref 3. Merkið skurðpunktinn við y-ás.
4. Skref 4. Notið formúluna fyrir hallatölu $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna lóðréttu og láréttu breytinguna.
5. Skref 5. Byrjið í skurðpunktinum við y-ás og teljið lóðréttu og láréttu breytinguna til að merkja inn seinni punktinn.
6. Skref 6. Tengið punktana með línu.

- **Aðferð til að velja hentugustu leiðina til að teikna graf línu:** Skoðið form jöfnunnar.
  - Ef jafnan hefur aðeins eina breytu er graf hennar lóðrétt eða lárétt lína.
    $x=a$ er lóðrétt lína sem sker x-ásinn í $a$.
    $y=b$ er lárétt lína sem sker y-ásinn í $b$.
  - Ef $y$ er einangrað öðrum megin jafnaðarmerkisins á forminu $y=mx+b$, skuluð þið nota hallatöluna og skurðpunktinn við y-ás til að teikna grafið. Finnið hallatöluna og skurðpunktinn við y-ás og teiknið síðan grafið.
  - Ef jafnan er á forminu $Ax+By=C$, skuluð þið finna skurðpunktana við ása. Finnið skurðpunktana við x- og y-ásana, þriðja punktinn og teiknið síðan grafið.

- Samsíða línur eru línur í sama fleti sem skerast ekki.
  - Samsíða línur hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás.
  - Ef m1 og m2 eru hallatölur tveggja samsíða lína þá er $m_1=m_2$.
  - Samsíða lóðréttar línur hafa ólíka skurðpunkta við x-ás.
- Hornréttar línur eru línur í sama fleti sem mynda rétt horn.
  - Ef $m_1$ og $m_2$ eru hallatölur tveggja hornréttra lína þá gilda $m_1 \cdot m_2=-1$ og $m_1=\frac{-1}{m_2}$.
  - Lóðréttar og láréttar línur eru alltaf hornréttar hvorar á aðrar.

## 4.6 Finnið jöfnu línu

- **Finna jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin**
  1. Skref 1. Finnið hallatöluna.
  2. Skref 2. Finnið punktinn.
  3. Skref 3. Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.
  4. Skref 4. Ritið jöfnuna á hallatöluformi.
- **Finna jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir**
  1. Skref 1. Finnið hallatöluna út frá gefnu punktunum.
  2. Skref 2. Veljið annan hvorn punktinn.
  3. Skref 3. Setjið gildin inn í punkthallaformið, $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.
  4. Skref 4. Ritið jöfnuna á hallatöluformi.

- **Rita jöfnu línu**
  - Ef hallatala og skurðpunktur við y-ás eru gefin skuluð þið nota hallatöluformið $y=mx+b$.
  - Ef hallatala og punktur eru gefin skuluð þið nota punkthallaformið $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.
  - Ef tveir punktar eru gefnir skuluð þið nota punkthallaformið $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.
- **Finna jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu**
  1. Skref 1. Finnið hallatölu gefnu línunnar.
  2. Skref 2. Finnið hallatölu samsíða línunnar.
  3. Skref 3. Finnið punktinn.
  4. Skref 4. Setjið gildin inn í punkthallaformið $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.
  5. Skref 5. Ritið jöfnuna á hallatöluformi.
- **Finna jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu**
  1. Skref 1. Finnið hallatölu gefnu línunnar.
  2. Skref 2. Finnið hallatölu hornréttu línunnar.
  3. Skref 3. Finnið punktinn.
  4. Skref 4. Setjið gildin inn í punkthallaformið $y-y_1=m\left(x-x_1\right)$.
  5. Skref 5. Ritið jöfnuna á hallatöluformi.



## 4.7 Gröf línulegra ójafna

- **Teikna graf línulegrar ójöfnu**
  1. Skref 1. Finnið markalínuna og teiknið hana. Ef ójafnan er $\leq$ eða $\geq$, er markalínan heil. Ef ójafnan er $<$ eða $>$ er markalínan slitin.
  2. Skref 2. Prófið punkt sem liggur ekki á markalínunni. Er hann lausn ójöfnunnar?
  3. Skref 3. Skyggið aðra hlið markalínunnar. Ef prófunarpunkturinn er lausn skuluð þið skyggja hliðina sem punkturinn er á. Ef prófunarpunkturinn er ekki lausn skuluð þið skyggja hina hliðina.

# Yfirlitsverkefni

## Rétthyrnt hnitakerfi

**Merkið punkta í rétthyrnt hnitakerfi**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið merkja hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi.

556.

1. ⓐ $\left(-1,-5\right)$
2. ⓑ $\left(-3,4\right)$

3. ⓒ $(2,-3)$
4. ⓓ $\left(1,\frac{5}{2}\right)$

557.

1. ⓐ $(4,3)$
2. ⓑ $(-4,3)$
3. ⓒ $(-4,-3)$
4. ⓓ $(4,-3)$

558.

1. ⓐ $(-2,0)$
2. ⓑ $(0,-4)$
3. ⓒ $(0,5)$
4. ⓓ $(3,0)$

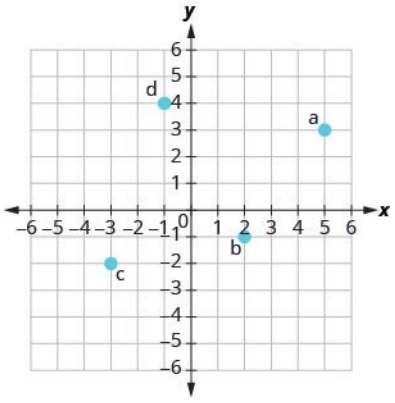
559.

1. ⓐ $\left(2,\frac{3}{2}\right)$
2. ⓑ $\left(3,\frac{4}{3}\right)$
3. ⓒ $\left(\frac{1}{3},-4\right)$
4. ⓓ $\left(\frac{1}{2},-5\right)$

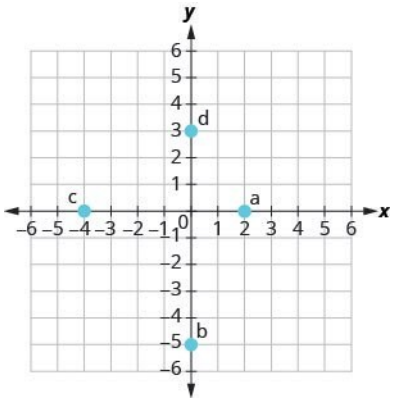
**Greina punkta á grafi**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nefna röðuðu tvenndina fyrir hvern punkt í rétthyrnda hnitakerfinu.

560.



561.




**Sannreynið lausnir jöfnu með tveimur breytum**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna hvaða röðuðu tvenndir eru lausnir gefnu jafnanna.

4

562.

$$5x+y=10$$

1. ⓐ $(5,1)$
2. ⓑ $(2,0)$
3. ⓒ $(4,-10)$

563.

$$y=6x-2$$

1. ⓐ $(1,4)$
2. ⓑ $\left(\frac{1}{3},0\right)$
3. ⓒ $(6,-2)$

**Fyllið út lausnatöflu línulegrar jöfnu með tveimur breytum**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið fylla út töfluna til að finna lausnir hverrar línulegrar jöfnu.

564.

$$y=4x-1$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |
| $-2$ | | |

565.

$$y=-\frac{1}{2}x+3$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 4 | | |
| $-2$ | | |

566.

$$x+2y=5$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| | 0 | |
| 1 | | |
| $-1$ | | |

567.

$$3x+2y=6$$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | | |
| | 0 | |
| $-2$ | | |

**Finna lausnir línulegrar jöfnu með tveimur breytum**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna þrjár lausnir hverrar línulegrar jöfnu.

568.

$$x+y=3$$

569.

$$x+y=-4$$

570.

$$y=3x+1$$

571.

$$y=-x-1$$

Teikna gröf línulegra jafna

**Greina tengslin milli lausna jöfnu og grafs hennar**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða fyrir hverja raðaða tvennd:

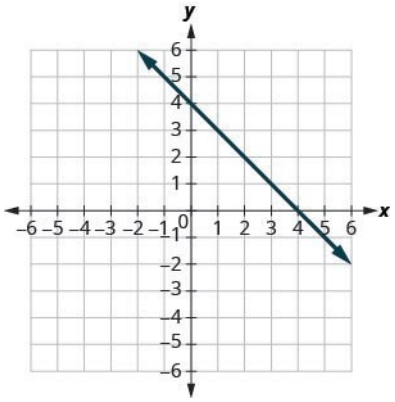
1. ⓐ Er raðaða tvenndin lausn jöfnunnar?
2. ⓑ Liggur punkturinn á línunni?

572.

$$y=-x+4$$

ⓐ $(0,4)$
ⓑ $(-1,3)$
ⓒ $(2,2)$
ⓓ $(-2,6)$

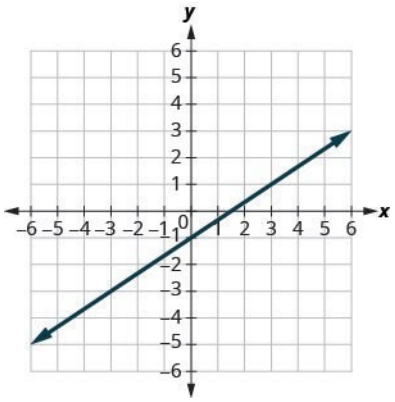





573.

$$y=\frac{2}{3}x-1$$

ⓐ $(0,-1)$
ⓑ $(3,1)$
ⓒ $(-3,-3)$
ⓓ $(6,4)$




### Teiknið graf línulegrar jöfnu með því að merkja punkta

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna gröfin með því að merkja punkta.

574.

$$y = 4x - 3$$

575.

$$y = -3x$$

576.

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

577.

$$x - y = 6$$

578.

$$2x + y = 7$$

579.

$$3x - 2y = 6$$

### Teikna lóðréttar og láréttar línur

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna graf hverrar jöfnu.

580.

$$y = -2$$

581.

$$x = 3$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna gröf beggja jafna í hverju pari í sama rétthyrnda hnitakerfi.

**582.** $y = -2x$ og $y = -2$

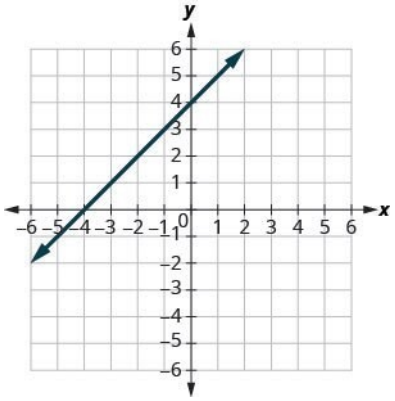
**583.** $y=\frac{4}{3}x$ og $y=\frac{4}{3}$

Teikna graf með skurðpunktum við ása

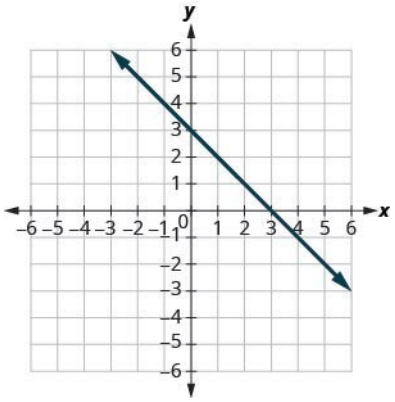
**Finna skurðpunkta við x- og y-ás á grafi**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna skurðpunktana við x- og y-ásana.

584.




585.




**Finna skurðpunkta við x- og y-ás út frá jöfnu línu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna skurðpunkta hverrar jöfnu við ásana.

586.

$$x+y=5$$

587.

$$x-y=-1$$

588.

$$x+2y=6$$

589.

$$2x+3y=12$$

590.

$$y=\frac{3}{4}x-12$$

591.

$$y=3x$$

**Teiknið graf línu með skurðpunktum við ása**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna gröfin með skurðpunktum við ása.

592.

$$-x+3y=3$$

593.

$$x+y=-2$$

594.

$$x-y=4$$

595.

$$2x-y=5$$

596.

$$2x-4y=8$$

597.

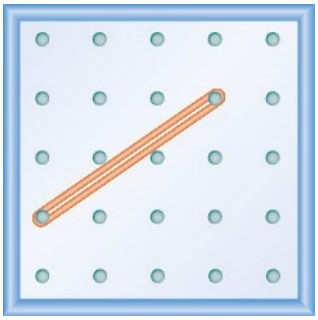
$$y=2x$$

Hallatala línu

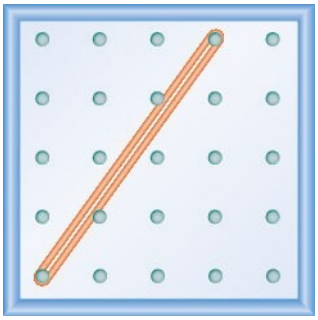
**Notið pinnabretti til að sýna hallatölu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna hallatöluna sem sýnd er á hverju pinnabretti.

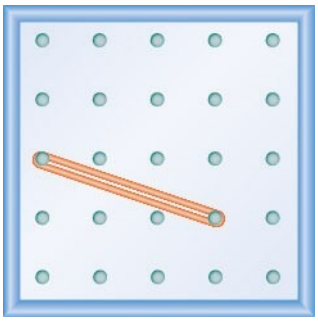
598.



599.

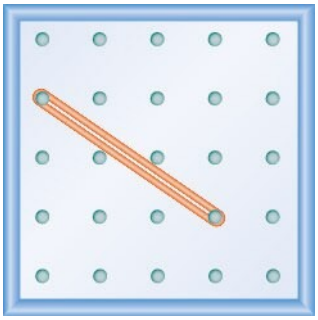


600.





601.



Sýnið hverja hallatölu í eftirfarandi verkefnum. Teiknið mynd af niðurstöðunni.

602.

$$\frac{1}{3}$$

603.

$$\frac{3}{2}$$

604.

$$-\frac{2}{3}$$

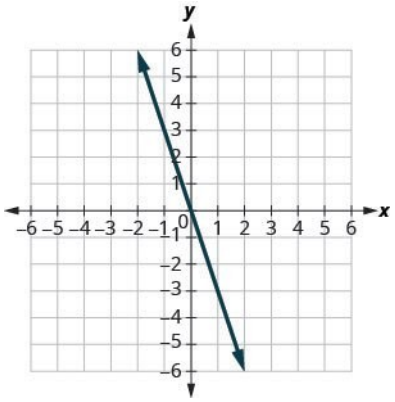
605.

$$-\frac{1}{2}$$

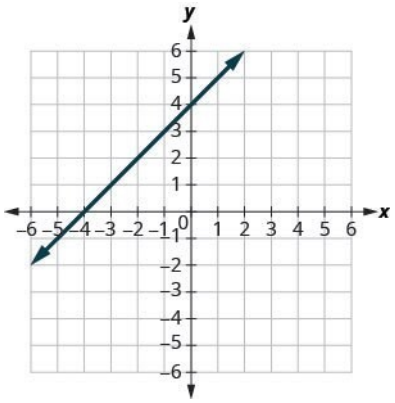
**Notið $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að finna hallatölu línu út frá grafi hennar**

Finnið hallatölu hverrar línu sem sýnd er í eftirfarandi verkefnum.

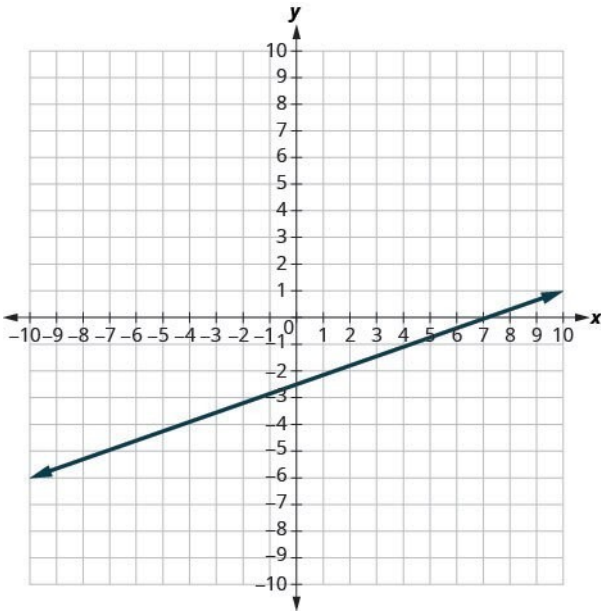
606.




607.

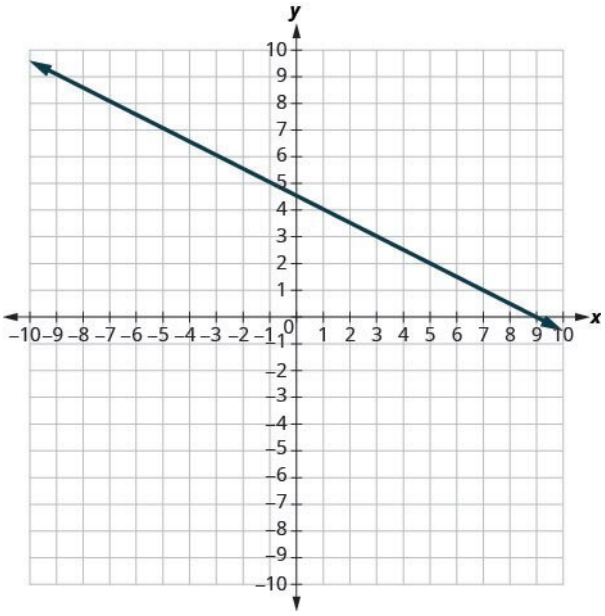


608.




4

609.




**Finnið hallatölu láréttra og lóðréttra lína**

Finnið hallatölu hverrar línu í eftirfarandi verkefnum.

610.

$$y=2$$

611.

$$x=5$$

612.

$$x=-3$$

613.

$$y=-1$$

**Notið formúluna fyrir hallatölu til að finna hallatölu línu milli tveggja punkta**

Notið formúluna fyrir hallatölu í eftirfarandi verkefnum til að finna hallatölu línunnar milli punktanna í hverju pari.

614.

$$(-1,-1),(0,5)$$

615.

$$(3,5),(4,-1)$$

616.

$$(-5,-2),(3,2)$$

617.

$$(2,1),(4,6)$$

**Teiknið graf línu þegar punktur og hallatala eru gefin**

*Teiknið graf hverrar línu í eftirfarandi verkefnum út frá gefnum punkti og hallatölu.*

**618.** $(2,-2)$; $m=\frac{5}{2}$

**619.** $(-3,4)$; $m=-\frac{1}{3}$

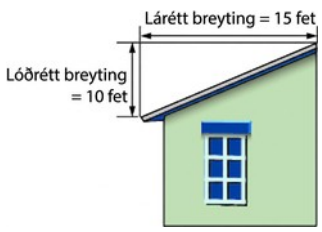
**620.** *x-skurðpunktur* $-4$; $m=3$

**621.** *y-skurðpunktur 1;* $m=-\frac{3}{4}$

**Leysið hagnýt verkefni um hallatölu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leysa verkefnin um hallatölu.

**622.** Lóðrétt breyting þaksins á myndinni er 10 fet og lárétt breyting þess 15 fet. Hver er hallatala þess?



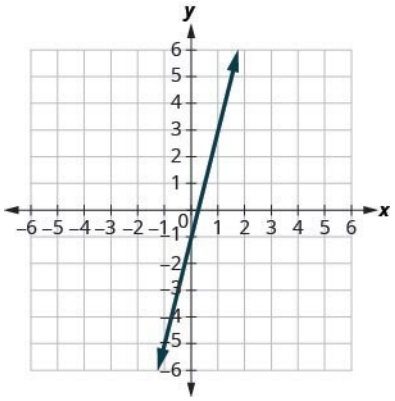
**623.** Fjallvegur hækkar um 50 fet á 500 feta láréttri vegalengd. Hver er hallatala hans?

Hallatöluform jöfnu línu

**Greinið tengsl grafs og hallatöluforms jöfnu línu**

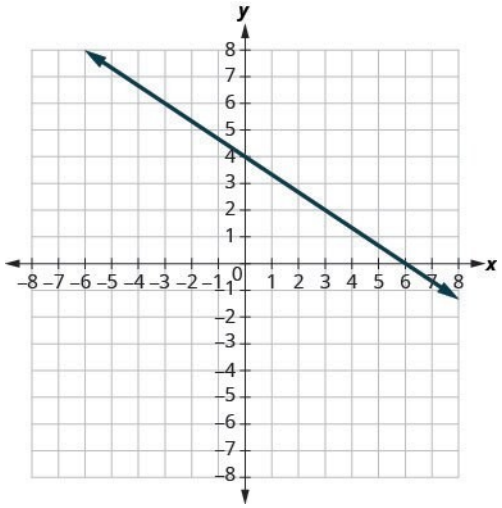
Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota grafið til að finna hallatölu og skurðpunkt hverrar línu við y-ás. Berið gildin saman við jöfnuna $y = mx + b$.

624.



$$y = 4x - 1$$

625.



$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

**Finna hallatölu og skurðpunkt við y-ás út frá jöfnu línu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna hallatölu og skurðpunkt hverrar línu við y-ás.

626.

$$y = -4x + 9$$

627.

$$y=\frac{5}{3}x-6$$

628.

$$5x+y=10$$

629.

$$4x-5y=8$$

**Teiknið graf línu með hallatölu hennar og skurðpunkti við y-ás**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna graf hverrar jöfnu með hallatölunni og skurðpunktinum við y-ás.

630.

$$y=2x+3$$

631.

$$y=-x-1$$

632.

$$y=-\frac{2}{5}x+3$$

633.

$$4x-3y=12$$

Ákvarðið hentugustu aðferðina til að teikna graf hverrar línu í eftirfarandi verkefnum.

634.

$$x=5$$

635.

$$y=-3$$

636.

$$2x+y=5$$

637.

$$x-y=2$$

638.

$$y=x+2$$

639.

$$y=\frac{3}{4}x-1$$

### Teiknið gröf og túlkið hagnýt dæmi á hallatöluformi

**640.** Katherine er einkakokkur. Jafnan $C=6{,}5m+42$ lýsir tengslunum milli vikulegs kostnaðar hennar, C í dollurum, og fjölda máltíða, m, sem hún ber fram.

1. ⓐ Finnið kostnað Katherine í viku þegar hún ber engar máltíðir fram.
2. ⓑ Finnið kostnaðinn í viku þegar hún ber fram 14 máltíðir.
3. ⓒ Túlkið hallatöluna og skurðpunkt jöfnunnar við C-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

**641.** Marjorie kennir á píanó. Jafnan $P=35s-250$ lýsir tengslunum milli vikulegs hagnaðar hennar, P í dollurum, og fjölda pínótíma, s, sem hún kennir.

1. ⓐ Finnið hagnað Marjorie í viku þegar hún kennir enga pínótíma.
2. ⓑ Finnið hagnaðinn í viku þegar hún kennir 20 pínótíma.
3. ⓒ Túlkið hallatöluna og skurðpunkt jöfnunnar við P-ás.
4. ⓓ Teiknið graf jöfnunnar.

### Notið hallatölur til að greina samsíða línur

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort línurnar séu samsíða.

642.

$$4x-3y=-1;\ y=\frac{4}{3}x-3$$

643.

$$2x-y=8;\ x-2y=4$$

### Notið hallatölur til að greina hornréttar línur

Notið hallatölur og skurðpunkta við y-ás í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort línurnar séu hornréttar.

644.

$$y=5x-1;\ 10x+2y=0$$

645.

$$3x-2y=5;\ 2x+3y=6$$

Finnið jöfnu línu

### Finnið jöfnu línu þegar hallatala og skurðpunktur við y-ás eru gefin

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna jöfnu línu með gefinni hallatölu og skurðpunkti við y-ás. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**646.** hallatala $\frac{1}{3}$ og

$y$-skurðpunktur

$(0, -6)$

**647.** hallatala $-5$ og

$y$-skurðpunktur

$(0, -3)$

**648.** hallatala $0$ og

$y$-skurðpunktur

$(0, 4)$

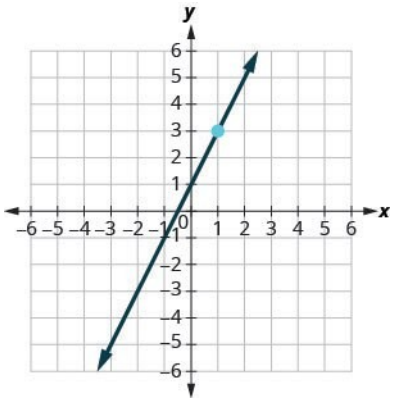
**649.** hallatala $-2$ og

$y$-skurðpunktur

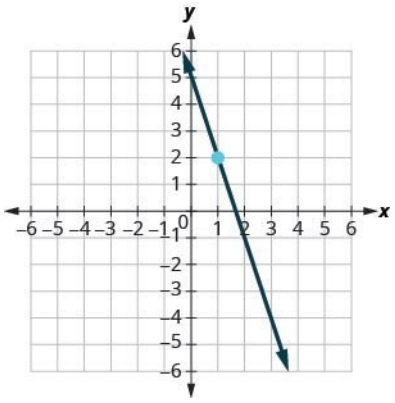
$(0, 0)$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna jöfnu línunnar sem sýnd er á hverju grafi. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

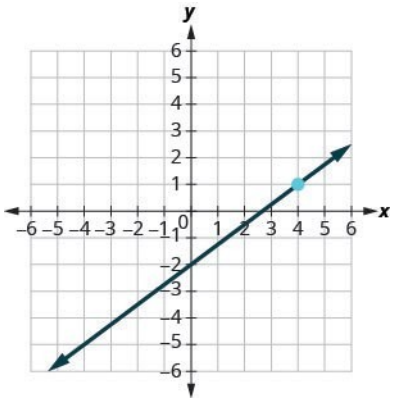
650.



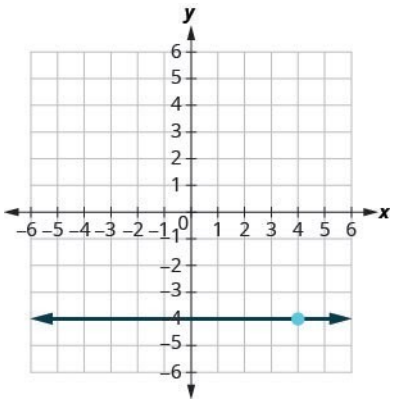
651.



652.



653.



**Finnið jöfnu línu þegar hallatala og punktur eru gefin**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna jöfnu línu sem hefur gefnu hallatöluna og liggur um gefna punktinn. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**654.** $m=-\frac{1}{4}$, punktur $(-8,3)$

**655.** $m=\frac{3}{5}$, punktur $(10,6)$

**656.** Lárétt lína sem liggur um $(-2,7)$

**657.** $m=-2$, punktur $(-1,-3)$

**Finnið jöfnu línu þegar tveir punktar eru gefnir**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna jöfnu línu sem liggur um gefnu punktana. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**658.** $(2,10)$ og $(-2,-2)$

**659.** $(7,1)$ og $(5,0)$

**660.** $(3,8)$ og $(3,-4)$.

**661.** $(5,2)$ og $(-1,2)$

**Finnið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna jöfnu línu sem er samsíða gefnu línunni og liggur um gefna punktinn. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**662.** lína $y=-3x+6$, punktur $(1,-5)$

**663.** lína $2x+5y=-10$, punktur $(10,4)$

**664.** lína $x=4$, punktur $(-2,-1)$

**665.** lína $y=-5$, punktur $(-4,3)$

**Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna jöfnu línu sem er hornrétt á gefnu línuna og liggur um gefna punktinn. Skrifið jöfnuna á hallatöluformi.

**666.** lína $y=-\frac{4}{5}x+2$, punktur $(8,9)$

**667.** lína $2x-3y=9$, punktur $(-4,0)$

**668.** lína $y=3$, punktur $(-1,-3)$

**669.** lína $x=-5$ punktur $(2,1)$

Teiknið gröf línulegra ójafna

**Sannreynið lausnir ójöfnu með tveimur breytum**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða hvort hver röðuð tvennd sé lausn gefnu ójöfnunnar.

**670.** Ákvarðið hvort hver röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $y < x - 3$:

1. ⓐ $(0, 1)$
2. ⓑ $(-2, -4)$
3. ⓒ $(5, 2)$
4. ⓓ $(3, -1)$
5. ⓔ $(-1, -5)$

**671.** Ákvarðið hvort hver röðuð tvennd sé lausn ójöfnunnar $x + y > 4$:

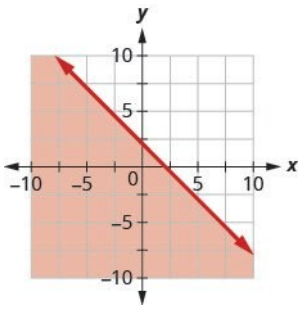
1. ⓐ $(6, 1)$
2. ⓑ $(-3, 6)$
3. ⓒ $(3, 2)$
4. ⓓ $(-5, 10)$
5. ⓔ $(0, 0)$



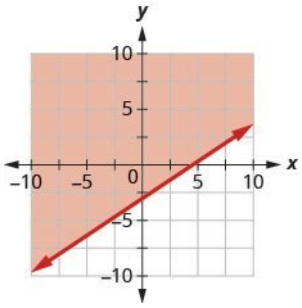
### Greinið tengslin milli lausna ójöfnu og grafs hennar

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið skrifa ójöfnuna sem skyggða svæðið sýnir.

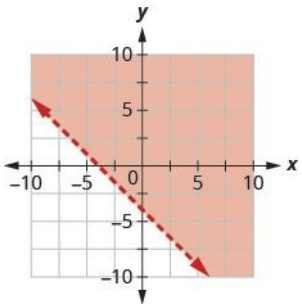
**672.** Skrifið ójöfnuna sem er sýnd á grafinu með markalínunni $y = -x + 2$.



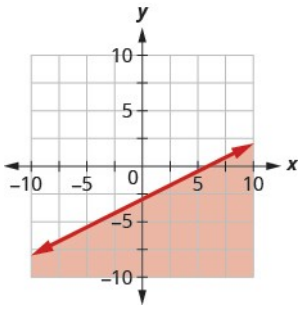

**673.** Skrifið ójöfnuna sem er sýnd á grafinu með markalínunni $y = \frac{2}{3}x - 3$.




**674.** Skrifið ójöfnuna fyrir skyggða svæðið á grafinu með markalínunni $x + y = -4$.




**675.** Skrifið ójöfnuna fyrir skyggða svæðið á grafinu með markalínunni $x-2y=6$.






### Teiknið gröf línulegra ójafna

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna graf hverrar línulegrar ójöfnu.

**676.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y>\frac{2}{5}x-4$.

**677.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y<-\frac{1}{4}x+3$.

**678.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $x-y\leq 5$.

**679.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $3x+2y>10$.

**680.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y\leq -3x$.

**681.** Teiknið graf línulegu ójöfnunnar $y<6$.

## Æfingapróf

**682.** Merkið hvern punkt í rétthyrnt hnitakerfi.

1. ⓐ $(2,5)$
2. ⓑ $(-1,-3)$
3. ⓒ $(0,2)$
4. ⓓ $\left(-4,\frac{3}{2}\right)$
5. ⓔ $(5,0)$

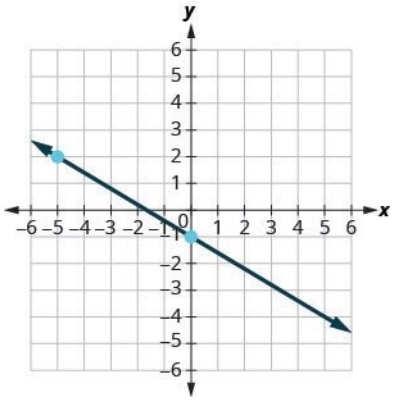
**683.** Hverjar af gefnu röðuðu tvenndunum eru lausnir jöfnunnar $3x - y = 6$?

1. ⓐ $(3, 3)$
2. ⓑ $(2, 0)$
3. ⓒ $(4, -6)$

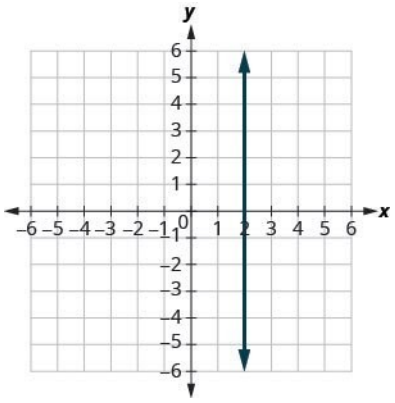
**684.** Finnið þrjár lausnir línulegu jöfnunnar $y = -2x - 4$.

**685.** Finnið skurðpunktana við x- og y-ásana fyrir jöfnuna $4x - 3y = 12$.

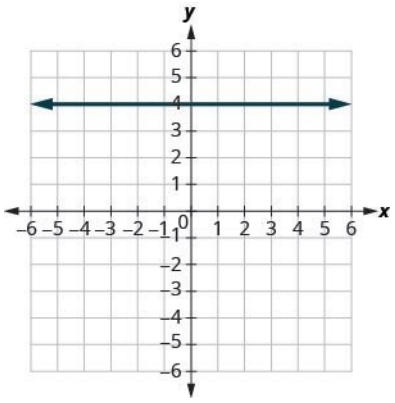
Finnið hallatölu hverrar línu sem sýnd er.
686.




687.



688.




**689.** Finnið hallatölu línunnar milli punktanna $(5,2)$ og $(-1,-4)$.

**690.** Teiknið línuna sem hefur hallatöluna $\frac{1}{2}$ og liggur um punktinn $(-3,-4)$.



Teiknið graf hverrar jöfnu hér á eftir.

691.

$$y=\frac{5}{3}x-1$$

692.

$$y=-x$$

693.

$$x-y=2$$

694.

$$4x+2y=-8$$

695.

$$y=2$$

696.

$$x=-3$$

Finnið jöfnu hverrar línu. Ritið jöfnuna á hallatöluformi.

**697.** hallatala $-\frac{3}{4}$ og skurðpunktur við y-ás $(0,-2)$

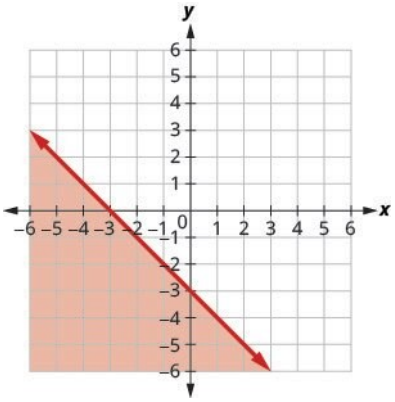
**698.** $m=2$, punktur $(-3,-1)$

**699.** sem liggur um $(10,1)$ og $(6,-1)$

**700.** samsíða línunni $y=-\frac{2}{3}x-1$ og liggur um punktinn $(-3,8)$

**701.** hornrétt á línuna $y=\frac{5}{4}x+2$ og liggur um punktinn $(-10,3)$

**702.** Skrifið ójöfnuna sem grafið með markalínunni $y=-x-3$ sýnir.




4

Teiknið graf hverrar línulegrar ójöfnu.

703.

$$y>\frac{3}{2}x+5$$

704.

$$x-y\geq -4$$

705.

$$y\leq -5x$$

706.

$$y<3$$

5. KAFLI

# Línuleg jöfnuhneppi



Mynd 5.1 Það getur verið krefjandi fyrir arkitekt að ákveða fjölda og stærð glugga í húsi.



## Yfirlit kaflans


- 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
- 5.2 Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð
- 5.3 Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð
- 5.4 Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum
- 5.5 Leysið blöndunarverkefni með jöfnuhneppum
- 5.6 Teiknið gröf línulegra ójöfnuhneppa


## Inngangur

Arkitekt sem hannar hús gæti þurft að virða takmörk á flatarmáli og ummáli glugganna vegna orkunýtingar og burðarþols. Lengd og breidd hvers glugga þurfa þá að uppfylla tvær jöfnur,

aðra fyrir flatarmálið og hina fyrir ummálið. Á sama hátt getur bankastarfsmaður haft fasta fjárhæð til að leggja í tvo fjárfestingarsjóði. Veitingahúsaeigandi kann að vilja auka hagnað en þarf þá að ráða fleira starfsfólk. Sá sem sækir um starf gæti borið saman laun og ferðakostnað til og frá vinnu í tveimur atvinnutilboðum.

Í þessum kafla skoðum við hvernig leysa má slík viðfangsefni með jöfnum með tveimur breytum.

# 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Ákvarða hvort röðuð tvennd sé lausn jöfnuhneppis
- Leysa línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð
- Ákvarðað fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis
- Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með grafískri aðferð

5

**UNDIRBÚNINGUR 5.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Fyrir jöfnuna $y=\frac{2}{3}x-4$

ⓐ Er $(6,0)$ lausn? ⓑ Er $(-3,-2)$ lausn? Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.1.

**UNDIRBÚNINGUR 5.2**

Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir línuna $3x-y=12$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 4.42.

**UNDIRBÚNINGUR 5.3**

Finnið skurðpunktana við x- og y-ásana fyrir línuna $2x-3y=12$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 4.21.

## Ákvarða hvort röðuð tvennd sé lausn jöfnuhneppis

Í kaflanum um lausn línulegra jafna og ójafna lærðum við að leysa línulegar jöfnur með einni breytu. Munið að lausn jöfnu er gildi breytunnar sem gerir jöfnuna sanna þegar það er sett inn í hana.

Nú vinnum við með línuleg jöfnuhneppi, sem samanstanda af tveimur eða fleiri línulegum jöfnum.

---

**LÍNULEGT JÖFNUHNEPPI**

Þegar tvær eða fleiri línulegar jöfnur eru teknar saman mynda þær línulegt jöfnuhneppi.

Hér einbeitum við okkur að hneppum tveggja línulegra jafna með tveimur óþekktum stærðum. Síðar munuð þið ef til vill leysa stærri jöfnuhneppi.

Hér fyrir neðan er dæmi um hneppi tveggja línulegra jafna. Slaufusviginn sýnir að jöfnurnar tvær eru teknar saman og mynda jöfnuhneppi.

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

Línuleg jafna með tveimur breytum, svo sem $2x + y = 7$, hefur óendanlega margar lausnir. Graf hennar er lína. Munið að hver punktur á línunni er lausn jöfnunnar og hver lausn jöfnunnar er punktur á línunni.

Til að leysa hneppi tveggja línulegra jafna viljum við finna gildi breytanna sem eru lausnir beggja jafna. Með öðrum orðum leitum við að röðuðu tvenndunum (x, y) sem gera báðar jöfnurnar sannar. Þær kallast lausnir jöfnuhneppis.

5

---

**LAUSNIR JÖFNUHNEPPIS**

**Lausnir jöfnuhneppis** eru gildi breytanna sem gera allar jöfnurnar sannar. Lausn hneppis tveggja línulegra jafna er táknuð með raðaðri tvennd (x, y).

Til að ákvarða hvort röðuð tvennd sé lausn hneppis tveggja jafna setjum við gildi breytanna inn í hvora jöfnu. Ef tvenndin gerir báðar jöfnurnar sannar er hún lausn hneppisins.

Skoðum hneppið hér fyrir neðan:

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Er raðaða tvenndin $(2, -1)$ lausn?

Við setjum $x = 2$ og $y = -1$ inn í báðar jöfnurnar.

$$\begin{array}{rr} 3x - y = 7 & x - 2y = 4 \\ 3(2) - (-1) \stackrel{?}{=} 7 & 2 - 2(-1) \stackrel{?}{=} 4 \\ 7 = 7 \text{ satt} & 4 = 4 \text{ satt} \end{array}$$

Raðaða tvenndin (2, −1) gerði báðar jöfnurnar sannar. Því er (2, −1) lausn hneppisins.

Prófum aðra raðaða tvennd. Er (3, 2) lausn?

Við setjum $x = 3$ og $y = 2$ inn í báðar jöfnurnar.

$3x - y = 7$ $\quad$ $x - 2y = 4$

$3(3) - 2 \stackrel{?}{=} 7$ $\quad$ $2 - 2(2) \stackrel{?}{=} 4$

$7 = 7$ satt $\quad$ $-1 = 4$ ósatt

Raðaða tvenndin (3, 2) gerði aðra jöfnuna sanna en hina ósanna. Þar sem hún er ekki lausn beggja jafna er hún ekki lausn hneppisins.

---

**DÆMI 5.1**

Ákvarðið hvort raðaða tvenndin sé lausn hneppisins: $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

ⓐ $(-2, -1)$ ⓑ $(-4, -3)$

## Lausn

**1.** ⓐ $(-2, -1)$ gerir ekki báðar jöfnurnar sannar. $(-2, -1)$ er ekki lausn. ⓑ $(-4, -3)$ gerir báðar jöfnurnar sannar. $(-4, -3)$ er lausn.

$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

Við setjum $x = -2$ og $y = -1$ inn í báðar jöfnurnar.

$x - y = -1$ $\quad$ $2x - y = -5$

$-2 - (-1) \stackrel{?}{=} -1$ $\quad$ $2 \cdot -2 - (-1) \stackrel{?}{=} -5$

$-1 = -1$ ✓ $\quad$ $-3 \neq -5$

$(-2, -1)$ gerir ekki báðar jöfnurnar sannar. $\quad$ $(-2, -1)$ er ekki lausn.

Við setjum $x = -4$ og $y = -3$ inn í báðar jöfnurnar.

$x - y = -1$ $\quad$ $2x - y = -5$

$-4 - (-3) \stackrel{?}{=} -1$ $\quad$ $2(-4) - (-3) \stackrel{?}{=} -5$

$-1 = -1$ ✓ $\quad$ $-5 = -5$ ✓

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.1**

Ákvarðið hvort raðaða tvenndin sé lausn hneppisins: $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 2y = -5 \end{cases}$.

ⓐ $(1, -3)$ ⓑ $(0, 0)$

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.2**

Ákvarðið hvort raðaða tvenndin sé lausn hneppisins: $\begin{cases} x - 3y = -8 \\ -3x - y = 4 \end{cases}$.

ⓐ $(2,-2)$ ⓑ $(-2,2)$

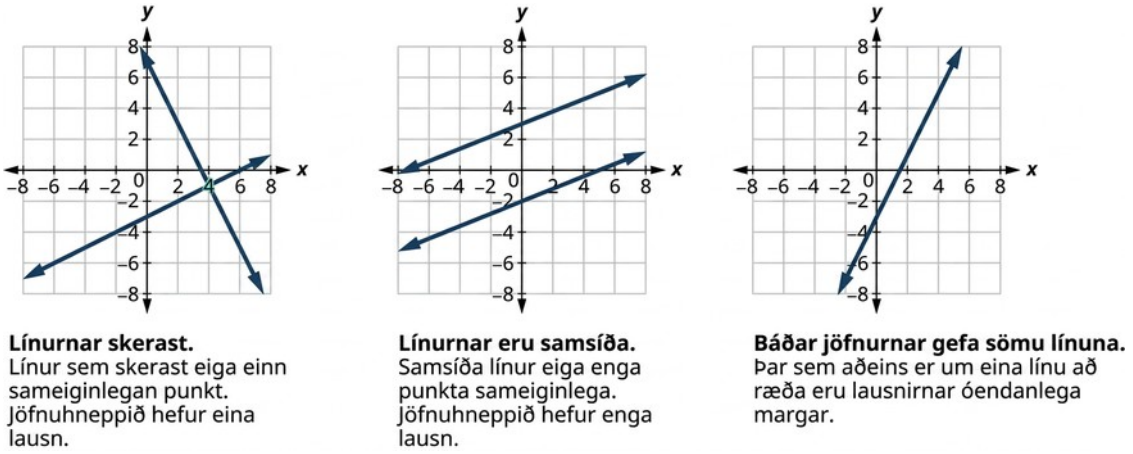
## Leysa línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð

Í þessum kafla notum við þrjár aðferðir til að leysa línulegt jöfnuhneppi. Fyrsta aðferðin er grafísk.

Graf línulegrar jöfnu er lína. Hver punktur á línunni er lausn jöfnunnar. Fyrir hneppi tveggja jafna teiknum við tvær línur. Þá sjáum við alla punkta sem eru lausnir hvorrar jöfnu. Með því að finna hvað línurnar eiga sameiginlegt finnum við lausn hneppisins.

Flestar línulegar jöfnur með einni breytu hafa eina lausn. Við sáum þó að sumar jöfnur, svonefndar mótsagnir, hafa enga lausn en í öðrum jöfnum, svonefndum samsemdum, eru allar tölur lausnir.

Þegar við leysum hneppi tveggja línulegra jafna og teiknum það sem tvær línur í sama fleti koma á sama hátt þrjú tilvik til greina, eins og sjá má á mynd 5.2:




Mynd 5.2

Í fyrsta dæminu um lausn línulegs jöfnuhneppis í þessum hluta og í næstu tveimur hlutum leysum við sama hneppi tveggja línulegra jafna. Við notum þó ólíka aðferð í hverjum hluta. Þegar þið hafið séð þriðju aðferðina getið þið metið hver þeirra var hentugust fyrir þetta hneppi.

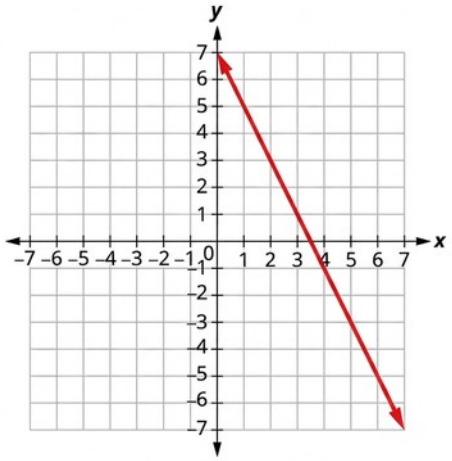
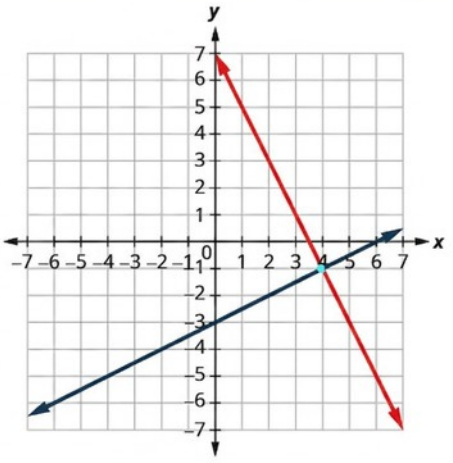
---

**DÆMI 5.2**

## Hvernig leysa á línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-2y=6 \end{cases}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Teiknið graf fyrri jöfnunnar. | Til að teikna fyrri línuna skal rita jöfnuna á hallatölu–skurðpunktsformi.<br>$2x + y = 7$<br>$y = -2x + 7$<br>$m = -2$<br>$b = 7$ | $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$<br> |
| **Skref 2.** Teiknið graf annarrar jöfnunnar í sama rétthyrnda hnitakerfi. | Notið skurðpunkta við ása til að teikna graf seinni línunnar.<br>$x - 2y = 6$<br>$(0, -3)$ $(6, 0)$ |  |
| **Skref 3.** Ákvarðið hvort línurnar skerist, séu samsíða eða séu sama línan. | Skoðið graf línanna. | Línurnar skerast. |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Finnið lausn jöfnuhneppisins.<br>Ef línurnar skerast, finnið skurðpunktinn.<br>Gangið úr skugga um að punkturinn sé lausn beggja jafna. Þetta er lausn jöfnuhneppisins.<br>Ef línurnar eru samsíða hefur jöfnuhneppið enga lausn. Ef línurnar falla saman hefur jöfnuhneppið óendanlega margar lausnir. | Þar sem línurnar skerast, finnið skurðpunktinn.<br>Prófið punktinn í báðum jöfnunum. | Línurnar skerast í punktinum (4, –1).<br>$2x + y = 7$<br>$2(4) + (-1) \stackrel{?}{=} 7$<br>$8 - 1 \stackrel{?}{=} 7$<br>$7 = 7$ ✓<br>$x - 2y = 6$<br>$4 - 2(-1) \stackrel{?}{=} 6$<br>$6 = 6$ ✓<br>Lausnin er (4, –1). |

**REYNIÐ SJÁLF 5.3**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.4**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$.

Hér fyrir neðan eru skrefin til að leysa línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð.

**AÐFERÐ**

### Að leysa línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð

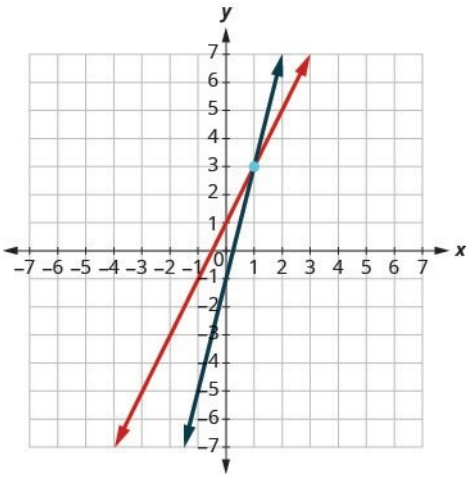
1. Skref 1. Teiknið graf fyrri jöfnunnar.
2. Skref 2. Teiknið graf seinni jöfnunnar í sama rétthyrnda hnitakerfi.
3. Skref 3. Ákvarðið hvort línurnar skerist, séu samsíða eða falli saman.
4. Skref 4.
   Finnið lausn hneppisins.
   - Ef línurnar skerast skuluð þið finna skurðpunktinn. Gangið úr skugga um að hann sé lausn beggja jafna. Hann er lausn hneppisins.
   - Ef línurnar eru samsíða hefur hneppið enga lausn.
   - Ef línurnar falla saman hefur hneppið óendanlega margar lausnir.

**DÆMI 5.3**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 4x - 1 \end{cases}$.

## Lausn

Báðar jöfnurnar í hneppinu eru á hallatöluformi og því notum við hallatölur þeirra og skurðpunkta við y-ás til að teikna gröfin. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 4x - 1 \end{cases}$

| | |
|---|---|
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir fyrri jöfnuna. | $y = 2x + 1$<br>$m = 2$<br>$b = 1$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir fyrri jöfnuna. | $y = 4x - 1$<br>$m = 4$<br>$b = -1$ |
| Teiknið línurnar tvær. | |
| Finnið skurðpunktinn. | Línurnar skerast í (1, 3). |
| |  |
| Athugið lausnina í báðum jöfnum. | $y = 2x + 1$<br>$3 \stackrel{?}{=} 2 \cdot 1 + 1$<br>$3 = 3$ ✓<br>$y = 4x - 1$<br>$3 \stackrel{?}{=} 4 \cdot 1 - 1$<br>$3 = 3$ ✓ |
| | Lausnin er (1, 3). |

**REYNIÐ SJÁLF 5.5**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -x - 4 \end{cases}$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.6**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = 3x + 3 \\ y = -x + 7 \end{cases}$.

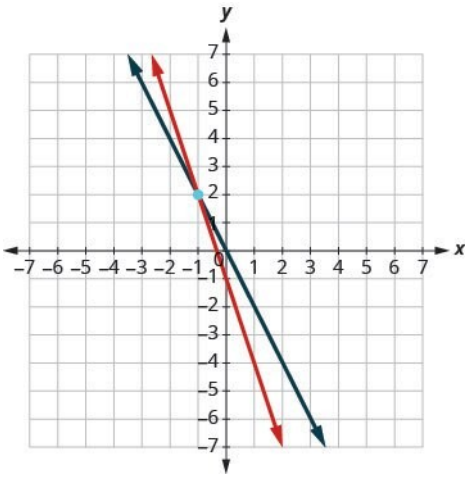
Báðar jöfnurnar í dæmi 5.3 voru gefnar á hallatöluformi og því var fljótlegt og auðvelt að teikna línurnar. Í næsta dæmi ritum við jöfnurnar fyrst á hallatöluformi.

**DÆMI 5.4**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$.

## Lausn

Við leysum báðar jöfnurnar fyrir $y$ svo auðvelt sé að teikna þær með hallatölunum og skurðpunktunum við y-ás. $\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

| | |
|---|---|
| Leysið fyrri jöfnuna fyrir y. Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás. Leysið seinni jöfnuna fyrir y. Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás. | $\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ y &= -3x - 1 \\ m &= -3 \\ b &= -1 \end{aligned}$ <br> $\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ y &= -2x \\ m &= -2 \\ b &= 0 \end{aligned}$ |
| Teiknið gröf línanna. |  |
| Finnið skurðpunktinn. | Línurnar skerast í (−1, 2). |
| Athugið lausnina í báðum jöfnum. | $\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ 3(-1) + 2 &\overset{?}{=} -1 \\ -1 &= -1 \checkmark \end{aligned}$ $\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 2(-1) + 2 &\overset{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$ |
| | Lausnin er (−1, 2). |

**REYNIÐ SJÁLF 5.7**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.8**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Þegar jöfnur eru gefnar á staðalformi er yfirleitt hentugast að teikna þær með skurðpunktum við ása. Það gerum við í dæmi 5.5.

**DÆMI 5.5**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$.

## Lausn

Við finnum skurðpunktana við x- og y-ás fyrir báðar jöfnurnar og notum þá til að teikna línurnar.

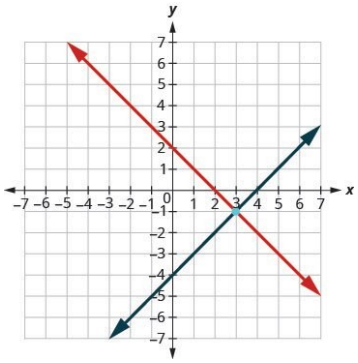
| | |
|---|---|
| | $x+y=2$ |
| Til að finna skurðpunktana setjið x = 0 og leysið fyrir y; setjið síðan y = 0 og leysið fyrir x. | $x+y=2$<br>$0+y=2$<br>$y=2$<br>$x+y=2$<br>$x+0=2$<br>$x=2$ |

| x | y |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 0 |

| | |
|---|---|
| | $x-y=4$ |
| Til að finna skurðpunktana setjið x = 0 og síðan y = 0. | $x-y=4$<br>$0-y=4$<br>$-y=4$<br>$y=-4$<br>$x-y=4$<br>$x-0=4$<br>$x=4$ |

| x | y |
|---|---|
| 0 | –4 |
| 4 | 0 |

Teiknið línuna.




Finnið skurðpunktinn. Línurnar skerast í (3, −1).

Athugið lausnina í báðum jöfnum.

$$\begin{aligned} x+y &= 2 \\ 3+(-1) &\stackrel{?}{=} 2 \\ 2 &= 2\checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y &= 4 \\ 3-(-1) &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &= 4\checkmark \end{aligned}$$

Lausnin er (3, −1).

**REYNIÐ SJÁLF 5.9**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.10**

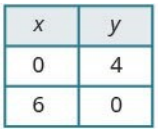
Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-8 \end{cases}$.

Munið þið hvernig teikna á graf línulegrar jöfnu með aðeins einni breytu? Grafið er annaðhvort lóðrétt eða lárétt lína.

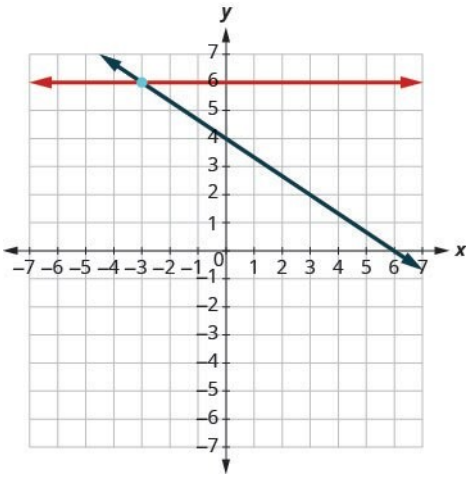
**DÆMI 5.6**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} y=6 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ |
| Við vitum að fyrri jafnan táknar lárétta línu sem sker y-ásinn í 6. | $y = 6$ |
| Hentugast er að teikna graf seinni jöfnunnar með skurðpunktum við ása. | $2x + 3y = 12$ |
| Til að finna skurðpunktana setjið x = 0 og síðan y = 0. |  |

| x | y |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 6 | 0 |

| | |
|---|---|
| Teiknið gröf línanna. |  |
| Finnið skurðpunktinn. | Línurnar skerast í (−3, 6). |
| Athugið lausnina í báðum jöfnum. | $y = 6$ $\quad 6 \overset{?}{=} 6\checkmark$ <br> $2x + 3y = 12$ $\quad 2(-3) + 3(6) \overset{?}{=} 12$ $\quad -6 + 18 \overset{?}{=} 12$ $\quad 12 = 12\checkmark$ |
| | Lausnin er (−3, 6). |

**REYNIÐ SJÁLF 5.11**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = -1 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.12**

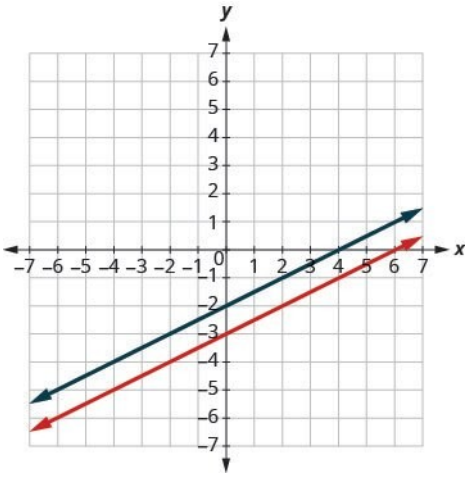
Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} x = 4 \\ 3x - 2y = 24 \end{cases}$.

Í öllum línulegu jöfnuhneppunum hingað til hafa línurnar skorist og lausnin verið einn punktur. Í næstu tveimur dæmum skoðum við hneppi sem hefur enga lausn og hneppi sem hefur óendanlega margar lausnir.

**DÆMI 5.7**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ |
| Við notum hallatölu og skurðpunkt við y-ás til að teikna graf fyrri jöfnunnar. | $y = \frac{1}{2}x - 3$ |
| | $m = \frac{1}{2}$ |
| | $b = -3$ |
| Til að teikna graf seinni jöfnunnar notum við skurðpunkta við ása. | $x - 2y = 4$ |
| | <table><tr><th>$x$</th><th>$y$</th></tr><tr><td>0</td><td>−2</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td></tr></table> |
| Teiknið gröf línanna. |  |
| Finnið skurðpunktinn. | Línurnar eru samsíða. |
| | Þar sem enginn punktur liggur á báðum línunum er engin röðuð tvennd sem gerir báðar jöfnurnar sannar. Engin lausn er á þessu hneppi. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.13**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + 2 \\ x + 4y = -8 \end{cases}$.

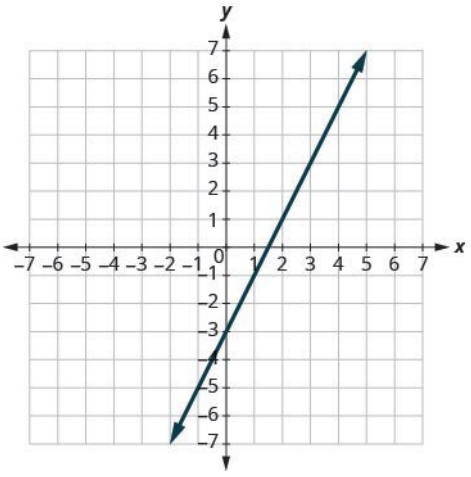
**REYNIÐ SJÁLF 5.14**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$.

**DÆMI 5.8**

Leysið hneppið með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir fyrri jöfnuna. | $y = 2x - 3$<br>$m = 2$<br>$b = -3$ |
| Finnið skurðpunkta seinni jöfnunnar við ásana. | $-6x + 3y = -9$ |
| | $x$ \| $y$<br>0 \| $-3$<br>$\frac{3}{2}$ \| 0 |
| Teiknið gröf línanna. |  |
| Finnið skurðpunktinn. | Línurnar falla saman! |

| | |
|---|---|
| | Þar sem hver punktur á línunni gerir báðar jöfnurnar sannar eru óendanlega margar raðaðar tvenndir sem gera báðar jöfnurnar sannar. |
| | Hneppið hefur óendanlega margar lausnir. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.15**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = -3x - 6 \\ 6x + 2y = -12 \end{cases}$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.16**

Leysið hvert hneppi með grafískri aðferð: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ 2x - 4y = 16 \end{cases}$.

Ef þið ritið seinni jöfnuna í dæmi 5.8 á hallatöluformi sjáið þið ef til vill að jöfnurnar hafa sömu hallatölu og sama skurðpunkt við y-ás.

Þegar við teiknuðum seinni línuna í síðasta dæmi féll hún alveg ofan í þá fyrri. Slíkar línur kallast samanfallandi. Samanfallandi línur hafa sömu hallatölu og sama skurðpunkt við y-ás.

5

**SAMANFALLANDI LÍNUR**

Samanfallandi línur hafa sömu hallatölu og sama skurðpunkt við y-ás.

## Ákvarðið fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis

Stundum viljum við vita hve margar lausnir línulegt jöfnuhneppi hefur án þess að þurfa að finna lausnirnar sjálfar. Því er gagnlegt að geta ákvarðað fjöldann án þess að teikna gröf.

Við höfum séð að tvær línur í sama fleti hljóta annaðhvort að skerast eða vera samsíða. Jöfnuhneppin í dæmi 5.2 til dæmis 5.6 höfðu öll tvær línur sem skárust. Hvert hneppi hafði eina lausn.

Jöfnuhneppi með samsíða línur, eins og í dæmi 5.7, hefur enga lausn. Hvað gerðist í dæmi 5.8? Jöfnurnar tákna samanfallandi línur og því hafði hneppið óendanlega margar lausnir.

Við tökum þessar niðurstöður saman á mynd 5.3 hér fyrir neðan:

| Graf | Fjöldi lausna |
|---|---|
| 2 línur sem skerast | 1 |
| Samsíða línur | Engin |
| Sama lína | Óendanlega margar |

Mynd 5.3

Samsíða línur hafa sömu hallatölu en mismunandi skurðpunkta við y-ás. Ef við ritum báðar jöfnur línulegs jöfnuhneppis á hallatöluformi getum við því séð hve margar lausnir hneppið hefur án þess að teikna gröf. Skoðið hneppið sem við leystum í dæmi 5.7.

$$\begin{cases} y &= \frac{1}{2}x - 3 \\ x - 2y &= 4 \end{cases}$$

Fyrri jafnan er á hallatöluformi. Ef við leysum seinni jöfnuna fyrir $y$, fáum við

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -2y &= -x + 4 \\ y &= \frac{1}{2}x - 2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3 \qquad m = \frac{1}{2}, b = -3 \qquad m = \frac{1}{2}, b = -2$$

Línurnar tvær hafa sömu hallatölu en mismunandi skurðpunkta við y-ás. Þær eru samsíða.

Mynd 5.4 sýnir hvernig ákvarða má fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis út frá hallatölum og skurðpunktum.

5

| Fjöldi lausna línulegs jöfnuhneppis | | | |
|---|---|---|---|
| **Hallatölur** | **Skurðpunktar** | **Tegund lína** | **Fjöldi lausna** |
| Mismunandi | | Línur sem skerast | 1 punktur |
| Sama | Mismunandi | Samsíða | Engin lausn |
| Sama | Sama | Samanfallandi | Óendanlega margar lausnir |

Mynd 5.4

Skoðum aftur jöfnurnar í dæmi 5.7 sem gáfu okkur samsíða línur.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Þegar báðar línurnar voru á hallatöluformi fengum við:

$$y = \frac{1}{2}x - 3 \quad y = \frac{1}{2}x - 2$$

Sjáið þið að ómögulegt er að ein og sama raðaða tvenndin $(x, y)$ sé lausn beggja þessara jafna?

Jöfnuhneppi af þessu tagi kallast ósamkvæmt jöfnuhneppi. Það hefur enga lausn.

Jöfnuhneppi sem hefur að minnsta kosti eina lausn kallast samkvæmt jöfnuhneppi.

---

**SAMKVÆMT OG ÓSAMKVÆMT JÖFNUHNEPPI**

Jöfnuhneppi er samkvæmt ef það hefur að minnsta kosti eina lausn.

Jöfnuhneppi er ósamkvæmt ef það hefur enga lausn.

Við flokkum einnig jöfnurnar í jöfnuhneppi sem óháðar eða háðar. Ef tvær jöfnur eru óháðar jöfnur hefur hvor þeirra sitt eigið lausnamengi. Jöfnur lína sem skerast og samsíða lína eru óháðar.

Ef tvær jöfnur eru háðar eru allar lausnir annarrar jöfnunnar einnig lausnir hinnar. Þegar við teiknum gröf tveggja háðra jafna fáum við samanfallandi línur.

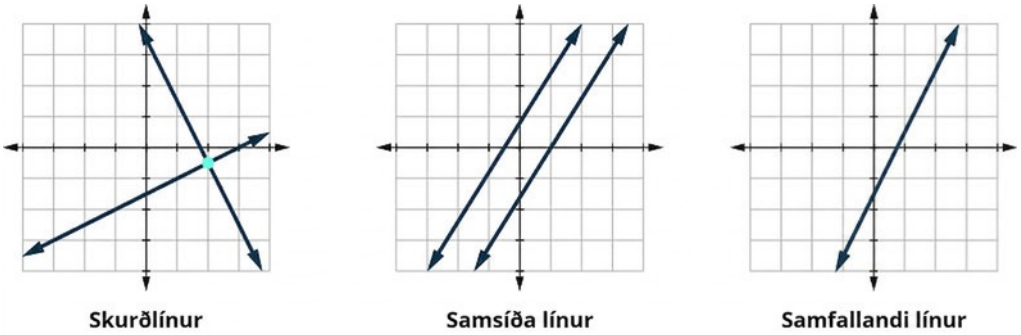
---

**ÓHÁÐAR OG HÁÐAR JÖFNUR**

Tvær jöfnur eru óháðar ef þær hafa mismunandi lausnir.

Tvær jöfnur eru háðar ef allar lausnir annarrar jöfnunnar eru einnig lausnir hinnar.

Tökum þetta saman með því að skoða gröf hinna þriggja gerða jöfnuhneppa. Sjá mynd 5.5 og mynd 5.6.




Mynd 5.5

| Línur | Skerast | Samsíða | Samfallandi |
|---|---|---|---|
| **Fjöldi lausna** | 1 punktur | Engin lausn | Óendanlega margar |
| **Samkvæmt/ósamkvæmt** | Samkvæmt | Ósamkvæmt | Samkvæmt |
| **Háð/óháð** | Óháð | Óháð | Háð |

Mynd 5.6

---

**DÆMI 5.9**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}.$$

### Lausn

| | |
|---|---|
| Við berum saman hallatölur og skurðpunkta línanna tveggja. | $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$. |
| Fyrri jafnan er þegar á hallatöluformi. | $y = 3x - 1$ |
| Ritið seinni jöfnuna á hallatöluformi. | $\begin{aligned} 6x - 2y &= 12 \\ -2y &= -6x + 12 \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{-6x+12}{-2} \\ y &= 3x - 6 \end{aligned}$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt hvorrar línu. | $\begin{aligned} y &= 3x - 1 \\ m &= 3 \\ b &= -1 \end{aligned}$ $\qquad$ $\begin{aligned} y &= 3x - 6 \\ m &= 3 \\ b &= -6 \end{aligned}$ |
| | Þar sem hallatölurnar eru þær sömu en skurðpunktarnir við $y$-ás eru mismunandi eru línurnar samsíða. |

Jöfnuhneppi þar sem gröf jafnanna eru samsíða línur hefur enga lausn og er ósamkvæmt og óháð.

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.17**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} y = -2x - 4 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$$

**REYNIÐ SJÁLF 5.18**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

**DÆMI 5.10**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið:

$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Við berum saman hallatölu og skurðpunkta línanna tveggja. | $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x-5y=5 \end{cases}$ | |
| Ritið báðar jöfnurnar á hallatöluformi. | $\begin{aligned} 2x+y &= -3 \\ y &= -2x-3 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} x-5y=5 &= 5 \\ -5y &= -x+5 \\ \frac{-5y}{-5} &= \frac{-x+5}{-5} \\ y &= \frac{1}{5}x-1 \end{aligned}$ |
| Finnið hallatölu og skurðpunkt hvorrar línu. | $\begin{aligned} y &= -2x-3 \\ m &= -2 \\ b &= -3 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} y &= \frac{1}{5}x-1 \\ m &= \frac{1}{5} \\ b &= -1 \end{aligned}$ |
| | Þar sem hallatölurnar eru mismunandi skerast línurnar. | |

Jöfnuhneppi þar sem gröf jafnanna skerast hefur 1 lausn og er samkvæmt og óháð.

**REYNIÐ SJÁLF 5.19**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

**REYNIÐ SJÁLF 5.20**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} x+4y=12 \\ -x+y=3 \end{cases}$$

**DÆMI 5.11**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið. $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ y=\frac{3}{2}x-2 \end{cases}$

### Lausn

| | |
|---|---|
| Við berum saman hallatölur og skurðpunkta línanna tveggja. | $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ y=\frac{3}{2}x-2 \end{cases}$ |
| Ritið fyrri jöfnuna á hallatöluformi. | $\begin{aligned} 3x-2y &= 4 \\ -2y &= -3x+4 \\ \frac{-2y}{-2} &= \frac{-3x+4}{-2} \\ y &= \frac{3}{2}x-2 \end{aligned}$ |
| Seinni jafnan er þegar á hallatöluformi. | $y=\frac{3}{2}x-2$ |
| | Hallatölurnar eru þær sömu og línurnar hafa sama skurðpunkt við $y$-ás. Því eru þær samanfallandi. |

Jöfnuhneppi þar sem gröf jafnanna eru samanfallandi línur hefur óendanlega margar lausnir og er samkvæmt og háð.

**REYNIÐ SJÁLF 5.21**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} 4x-5y=20 \\ y=\frac{4}{5}x-4 \end{cases}$$

**REYNIÐ SJÁLF 5.22**

Ákvarðið fjölda lausna án þess að teikna gröf og flokkið síðan jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} -2x-4y=8 \\ y=-\frac{1}{2}x-2 \end{cases}$$

## Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með grafískri aðferð

Við notum sömu lausnarstefnu og í kaflanum um stærðfræðilíkön til að setja upp og leysa hagnýt verkefni með línulegum jöfnuhneppum. Hér aðlögum við stefnuna lítillega að jöfnuhneppum.

**AÐFERÐ**

### Notið lausnarstefnu fyrir línuleg jöfnuhneppi.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
3. Skref 3. Nefnið stærðirnar sem leitað er að. Veljið breytur sem tákna þær.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi.

5. Skref 5. Leysið jöfnuhneppið með góðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Í skrefi 5 notum við aðferðina sem kynnt var í þessum hluta. Við teiknum gröf jafnanna og finnum lausnina.

---

**DÆMI 5.12**

Sondra ætlar að búa til 10 kvart af drykk úr ávaxtasafa og sódavatni. Fjöldi kvarta af ávaxtasafa er 4 sinnum fjöldi kvarta af sódavatni. Hve mörg kvart af ávaxtasafa og hve mörg kvart af sódavatni þarf Sondra?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið.

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

Við leitum að fjölda kvarta af ávaxtasafa og fjölda kvarta af sódavatni sem Sondra þarf.

**Skref 3.** Nefnið stærðirnar sem leitað er að. Veljið breytur sem tákna þær.

Látum $f =$ fjöldi kvarta af ávaxtasafa og
$c =$ fjöldi kvarta af sódavatni.

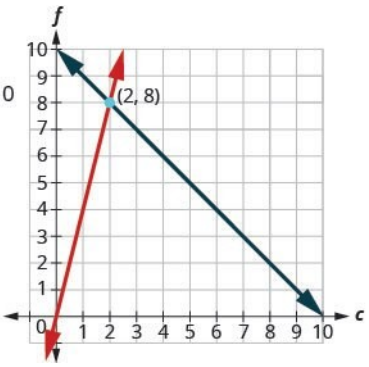
**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi.

| Fjöldi kvarta af ávaxtasafa | og | fjöldi kvarta af sódavatni | er 10 |
|---|---|---|---|
| $f$ | $+$ | $c$ | $= 10$ |
| Fjöldi kvarta af ávaxtasafa | er | fjórum sinnum fjöldi kvarta af sódavatni | |
| $f$ | $=$ | $4c$ | |

Nú höfum við jöfnuhneppið. $\begin{cases} f + c = 10 \\ f = 4c \end{cases}$

**Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið með góðum algebruaðferðum.

$f = 4c$ $f + c = 10$
$m = 4$ $f = -c + 10$
$b = 0$ $m = -1$
$b = 10$




Skurðpunkturinn (2, 8) er lausnin. Það merkir að Sondra þarf 2 kvart af sódavatni og 8 kvart af ávaxtasafa.

**Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.

Er niðurstaðan skynsamleg í samhengi dæmisins?

Já, fjöldi kvarta af ávaxtasafa, 8, er 4 sinnum fjöldi kvarta af sódavatni, 2.

Já, 10 kvart af drykk eru samtals 8 kvart af ávaxtasafa og 2 kvart af sódavatni.

**Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu.

Sondra þarf 8 kvart af ávaxtasafa og 2 kvart af sódavatni.

5

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.23**

Manny ætlar að búa til 12 kvart af appelsínusafa úr þykkni og vatni. Fjöldi kvarta af vatni er 3 sinnum fjöldi kvarta af þykkni. Hve mörg kvart af þykkni og hve mörg kvart af vatni þarf Manny?

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.24**

Alisha ætlar að búa til 18 únsa kaffidrykk úr uppáhelltu kaffi og mjólk. Magn uppáhellts kaffis í únsum er 5 sinnum magn mjólkurinnar. Hve margar únsur af kaffi og hve margar únsur af mjólk þarf Alisha?

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum fáið þið fleiri útskýringar og meiri æfingu í að leysa jöfnuhneppi með grafískri aðferð.

- Kennslumyndband: Línuleg jöfnuhneppi leyst með grafískri aðferð
- Kennslumyndband: Leyst með grafískri aðferð

## Verkefni úr hluta 5.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Ákvarðið hvort röðuð tvennd sé lausn jöfnuhneppis. Ákvarðið í verkefnunum hér á eftir hvort punktarnir séu lausnir jöfnuhneppisins.**

1.

$$\begin{cases} 2x - 6y = 0 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$$

ⓐ $(3,1)$ ⓑ $(-3,4)$

2.

$$\begin{cases} 7x - 4y = -1 \\ -3x - 2y = 1 \end{cases}$$

ⓐ $(1,2)$ ⓑ $(1,-2)$

3.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ⓐ $(4,-3)$ ⓑ $(2,0)$

4.

$$\begin{cases} -3x + y = 8 \\ -x + 2y = -9 \end{cases}$$

ⓐ $(-5,-7)$ ⓑ $(-5,7)$

5.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

ⓐ $\left(\frac{8}{7},\frac{6}{7}\right)$ ⓑ $\left(1,\frac{3}{4}\right)$

6.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = \frac{2}{5}x \end{cases}$$

ⓐ $\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right)$ ⓑ $(5,2)$

7.

$$\begin{cases} x + 5y = 10 \\ y = \frac{3}{5}x + 1 \end{cases}$$

ⓐ $(-10, 4)$ ⓑ $\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)$

8.

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ y = \frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$$

ⓐ $(-6, 5)$ ⓑ $\left(5, \frac{4}{3}\right)$

**Leysið línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð Leysið jöfnuhneppin hér á eftir með grafískri aðferð.**

9.

$$\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

5

10.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} -3x + y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

14.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 2 \\ y = -\frac{1}{3}x - 5 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} -x + y = -3 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} -3x + y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = -8 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ -x + 2y = -2 \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} -x + 3y = 3 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} -2x + 3y = 3 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$$

30.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

31.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

32.

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

33.

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

34.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ y = -3 \end{cases}$$

35.

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

36.

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

37.

$$\begin{cases} x - 3y = -6 \\ x = -3 \end{cases}$$

38.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

39.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 8 \\ 8x - 6y = 14 \end{cases}$$

40.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x - 6y = 3 \end{cases}$$

41.

$$\begin{cases} -2x + 4y = 4 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

42.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ y = -\frac{3}{5}x + 1 \end{cases}$$

43.

$$\begin{cases} x = -3y + 4 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases}$$

44.

$$\begin{cases} 4x = 3y + 7 \\ 8x - 6y = 14 \end{cases}$$

45.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -8x - 4y = -24 \end{cases}$$

46.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ -10x - 4y = -14 \end{cases}$$

47.

$$\begin{cases} x + 3y = -6 \\ 4y = -\frac{4}{3}x - 8 \end{cases}$$

48.

$$\begin{cases} -x + 2y = -6 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

49.

$$\begin{cases} -3x + 2y = -2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

50.

$$\begin{cases} -x + 2y = -2 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

**Ákvarðið fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis** Ákvarðið fjölda lausna í jöfnuhneppunum hér á eftir án þess að teikna gröf. Flokkið síðan hneppin.

51.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$$

52.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ x - 3y = 9 \end{cases}$$

53.

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

54.

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ 9x - 3y = 18 \end{cases}$$

55.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

56.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$$

57.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ 4x - 2y = -6 \end{cases}$$

58.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

59.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

60.

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

61.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

62.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ y = \frac{5}{2}x - 5 \end{cases}$$

**Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með grafískri aðferð Leysið verkefnin hér á eftir.**

**63.** Molly býr til vatn með jarðarberjabragði. Fyrir hverja únsu af jarðarberjasafa notar hún þrefalt fleiri únsur af vatni. Hve margar únsur af jarðarberjasafa og hve margar únsur af vatni þarf hún til að búa til 64 únsur af drykknum?

**64.** Jamal býr til snakkblöndu sem inniheldur aðeins saltkringlur og hnetur. Fyrir hverja únsu af hnetum notar hann 2 únsur af saltkringlum. Hve margar únsur af saltkringlum og hve margar únsur af hnetum þarf hann til að búa til 45 únsur af snakkblöndu?

**65.** Enrique býr til veislublöndu með rúsínum og hnetum. Fyrir hverja únsu af hnetum notar hann tvöfalt magn af rúsínum. Hve margar únsur af hnetum og hve margar únsur af rúsínum þarf hann til að búa til 24 únsur af blöndu?

**66.** Owen býr til límonaði úr þykkni. Fjöldi kvarta af vatni sem hann þarf er 4 sinnum fjöldi kvarta af þykkni. Hve mörg kvart af vatni og hve mörg kvart af þykkni þarf Owen til að búa til 100 kvart af límonaði?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**67.** Leo skipuleggur vorblómagarðinn sinn. Hann vill gróðursetja túlípanalauka og páskaliljulauka. Fjöldi páskaliljulaukanna verður 6 sinnum fjöldi túlípanalaukanna. Ef hann vill gróðursetja 350 lauka, hve marga túlípanalauka á hann að gróðursetja og hve marga páskaliljulauka?

**68.** Markaðsfyrirtæki kannar viðhorf 1.200 einstaklinga. Tvöfalt fleiri konur en karlar tóku þátt. Hve margir karlar og hve margar konur tóku þátt?

5

### *Ritunarverkefni*

**69.** Jöfnurnar tvær í línulegu jöfnuhneppi hafa sömu hallatölu. Lýsið mögulegum lausnum hneppisins.

**70.** Jöfnurnar tvær í línulegu jöfnuhneppi hafa sömu skurðpunkta. Lýsið mögulegum lausnum hneppisins.

### *Sjálfsmat*

Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| ákvarðað hvort raðað talnapar sé lausn á jöfnuhneppi. | | | |
| leyst jöfnuhneppi línulegra jafna með grafískri aðferð. | | | |
| ákvarðað fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis. | | | |
| leyst hagnýt dæmi með jöfnuhneppum með grafískri aðferð. | | | |

Ef flest merkin ykkar voru við:

**... af öryggi.** Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Íhugið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo þið getið haldið áfram að nota þær. Hvað gerðuð þið til að öðlast öryggi í þessum viðfangsefnum? Nefnið tiltekin atriði.

**... með smá aðstoð.** Bregðast þarf fljótt við, því óleyst viðfangsefni geta orðið hindranir á leiðinni að árangri. Í stærðfræði byggir hvert viðfangsefni á fyrri vinnu. Mikilvægt er að tryggja traustan grunn áður en haldið er áfram. Hvern getið þið beðið um aðstoð? Gott er að leita til samnemenda og kennarans. Er hægt að fá aðstoð hjá stærðfræðileiðbeinendum í skólanum? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**...nei – ég skil þetta ekki!** Þetta er viðvörunarmerki sem þið megið ekki hunsa. Leitið strax hjálpar, annars getur efnið fljótt orðið yfirþyrmandi. Ræðið stöðuna við kennarann eins fljótt og þið getið. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

## 5.2 Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð
- Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með innsetningaraðferð



**UNDIRBÚNINGUR 5.4**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið $-5(3-x)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.136.

**UNDIRBÚNINGUR 5.5**

Einfaldið $4-2(n+5)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.123.

**UNDIRBÚNINGUR 5.6**

Leysið fyrir $y$: $8y-8=32-2y$
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.34.

**UNDIRBÚNINGUR 5.7**

Leysið fyrir $x$: $3x-9y=-3$
Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.65.

Þegar línuleg jöfnuhneppi eru leyst með grafískri aðferð sést vel hvers konar lausnir geta komið fram. Oft er þó óhentugt eða ónákvæmt að leysa hneppi með gröfum. Ef gröfin ná út fyrir lítið hnitakerfi þar sem bæði x og y eru milli –10 og 10 getur verið seinlegt að teikna línurnar. Ef lausnir hneppisins eru ekki heiltölur getur einnig verið erfitt að lesa nákvæm gildi þeirra af grafi.

Í þessum hluta leysum við línuleg jöfnuhneppi með innsetningaraðferðinni.

## Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

Við notum sama hneppi og fyrst var leyst með grafískri aðferð.

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

Fyrst leysum við aðra jöfnuna annaðhvort fyrir x eða y. Við getum valið hvora jöfnuna sem er og hvora breytuna sem er, en reynum að velja þannig að reikningurinn verði einfaldur.

Síðan setjum við stæðuna inn í hina jöfnuna. Þá fæst jafna með aðeins einni breytu, og slíkar jöfnur kunnum við að leysa.

Þegar við höfum fundið gildi annarrar breytunnar setjum við það inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysum fyrir hina breytuna. Að lokum sannreynum við lausnina og göngum úr skugga um að hún geri báðar jöfnurnar sannar.

Nú förum við í gegnum öll þessi skref í dæmi 5.13.

---

**DÆMI 5.13**

5

## Að leysa jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Leysið aðra jöfnuna með tilliti til annarrar breytunnar. | Við leysum fyrri jöfnuna með tilliti til $y$. | $2x + y = 7$<br>$y = 7 - 2x$ |
| **Skref 2.** Setjið stæðuna úr skrefi 1 inn í hina jöfnuna. | Við setjum stæðuna $7 - 2x$ í stað $y$ í seinni jöfnunni. | $x - 2y = 6$<br>$x - 2(7 - 2x) = 6$ |
| **Skref 3.** Leysið jöfnuna sem fæst. | Nú höfum við jöfnu með aðeins einni breytu. Við kunnum að leysa hana! | $x - 2(7 - 2x) = 6$<br>$x - 14 + 4x = 6$<br>$5x = 20$<br>$x = 4$ |
| **Skref 4.** Setjið lausnina úr skrefi 3 inn í aðra upprunalegu jöfnuna til að finna hina breytuna. | Við notum fyrri jöfnuna og setjum 4 í stað $x$. | $2x + y = 7$<br>$2(4) + y = 7$<br>$8 + y = 7$<br>$y = -1$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 5.** Skrifið lausnina sem raðað par. | Raðaða parið er (x, y). | (4, –1) |
| **Skref 6.** Gangið úr skugga um að raðaða parið sé lausn á báðum upphaflegu jöfnunum. | Setjið (4, −1) inn í báðar jöfnurnar og gangið úr skugga um að þær séu báðar sannar. | $2x+y=7$ $2(4)+(-1)\stackrel{?}{=}7$ $7=7$ ✓<br>$x-2y=6$ $4-2(-1)\stackrel{?}{=}6$ $6=6$ ✓<br>Báðar jöfnurnar eru sannar.<br>(4, −1) er lausn jöfnuhneppisins. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.25**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} -2x+y=-11 \\ x+3y=9 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.26**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} x+3y=10 \\ 4x+y=18 \end{cases}$



**AÐFERÐ**

## Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.

1. Skref 1. Leysið aðra jöfnuna fyrir aðra hvora breytuna.
2. Skref 2. Setjið stæðuna úr skrefi 1 inn í hina jöfnuna.
3. Skref 3. Leysið jöfnuna sem fæst.
4. Skref 4. Setjið lausnina úr skrefi 3 inn í aðra upphaflegu jöfnuna til að finna hina breytuna.
5. Skref 5. Ritið lausnina sem raðaða tvennd.
6. Skref 6. Athugið að raðaða tvenndin sé lausn beggja upphaflegu jafnanna.

Ef önnur jafnan í hneppinu er gefin á hallatöluformi er skrefi 1 þegar lokið. Þetta sjáum við í dæmi 5.14.

**DÆMI 5.14**

Leysið hneppið með innsetningu.

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ y=x+5 \end{cases}$$

## Lausn

Seinni jafnan er þegar leyst fyrir y. Við setjum stæðuna í stað y í fyrri jöfnunni.

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} x+y=-1 \\ y=x+5 \end{cases}$ |
| Seinni jafnan er þegar leyst fyrir y. Við setjum inn í fyrri jöfnuna. | |
| Skiptið y út fyrir x + 5. | $y=x+5$<br>$x+y=-1$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst fyrir x. | $x+x+5=-1$ |
| | $2x+5=-1$ |
| | $2x=-6$ |
| Setjið x = −3 inn í y = x + 5 til að finna y. | $x=-3$<br>$y=x+5$ |
| | $y=-3+5$ |
| Raðaða tvenndin er (−3, 2). | $y=2$ |
| Athugið röðuðu tvenndina í báðum jöfnum: | |
| $x+y=-1$<br>$-3+2\overset{?}{=}-1$<br>$-1=-1\checkmark$ | $y=x+5$<br>$2\overset{?}{=}-3+5$<br>$2=2\checkmark$ |
| | Lausnin er (−3, 2). |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.27**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} x+y=6 \\ y=3x-2 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.28**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ y=-3x-6 \end{cases}$

Ef jöfnurnar eru gefnar á staðalformi þurfum við að byrja á að leysa fyrir aðra breytuna. Í næsta dæmi leysum við fyrri jöfnuna fyrir y.

**DÆMI 5.15**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+4y=-10 \end{cases}$

## Lausn

Við þurfum að leysa aðra jöfnuna fyrir aðra breytuna. Síðan setjum við stæðuna inn í hina jöfnuna.

| | |
|---|---|
| Leysið fyrir y. Setjið inn í hina jöfnuna. | $3x + y = 5$<br>$y = -3x + 5$<br>$2x + 4y = -10$ |
| Skiptið y út fyrir −3x + 5. | $2x + 4(-3x + 5) = -10$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst fyrir x. | $2x - 12x + 20 = -10$ |
| | $-10x + 20 = -10$<br>$-10x = -30$ |
| Setjið x = 3 inn í 3x + y = 5 til að finna y. | $x = 3$<br>$3x + y = 5$ |
| | $3(3) + y = 5$<br>$9 + y = 5$ |
| Raðaða tvenndin er (3, −4). | $y = -4$ |

Athugið röðuðu tvenndina í báðum jöfnum:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 3 \cdot 3 + (-4) &\stackrel{?}{=} 5 \\ 9 - 4 &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 4y &= -10 \\ 2 \cdot 3 + 4(-4) &= -10 \\ 6 - 16 &\stackrel{?}{=} -10 \\ -10 &= -10 \checkmark \end{aligned}$$

Lausnin er (3, −4).

**REYNIÐ SJÁLF 5.29**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.30**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

Í dæmi 5.15 var auðveldast að leysa fyrri jöfnuna fyrir y því stuðull hennar var 1. Í dæmi 5.16 verður auðveldara að leysa fyrir x.

**DÆMI 5.16**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 3x + 2y = 34 \end{cases}$

## Lausn

Við leysum fyrri jöfnuna fyrir $x$ og setjum síðan stæðuna inn í seinni jöfnuna.

| | |
|---|---|
| | $x - 2y = -2$ |
| Leysið fyrir x. Setjið inn í hina jöfnuna. | $x = 2y - 2$<br>$3x + 2y = 34$ |
| Skiptið x út fyrir 2y − 2. | $3(2y - 2) + 2y = 34$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst fyrir y. | $6y - 6 + 2y = 34$ |
| Setjið y = 5 inn í x − 2y = −2 til að finna x. | $8y - 6 = 34$<br>$8y = 40$<br>$y = 5$<br>$x - 2y = -2$<br>$x - 2 \cdot 5 = -2$<br>$x - 10 = -2$<br>$x = 8$ |
| Raðaða tvenndin er (8, 5). | |
| Athugið röðuðu tvenndina í báðum jöfnum: | $x - 2y = -2$<br>$8 - 2 \cdot 5 \stackrel{?}{=} -2$<br>$8 - 10 \stackrel{?}{=} -2$<br>$-2 = -2$ ✓<br><br>$3x + 2y = 34$<br>$3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \stackrel{?}{=} 34$<br>$24 + 10 \stackrel{?}{=} 34$<br>$34 = 34$ ✓ |
| | Lausnin er (8, 5). |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.31**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} x - 5y = 13 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.32**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$

Þegar báðar jöfnurnar eru þegar leystar fyrir sömu breytu er auðvelt að setja aðra inn í hina.

**DÆMI 5.17**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$

## Lausn

Báðar jöfnurnar eru leystar fyrir y og því getum við sett aðra inn í hina.

| | |
|---|---|
| Setjið $\frac{1}{2}x$ í stað y í fyrri jöfnunni. | $y=\frac{1}{2}x$<br>$y=-2x+5$ |
| Skiptið y út fyrir $\frac{1}{2}x$. | $\frac{1}{2}x=-2x+5$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. Byrjið á að losa jöfnuna við brotið. | $2\left(\frac{1}{2}x\right)=2(-2x+5)$ |
| Leysið fyrir x. | $x=-4x+10$ |
| | $5x=10$ |
| Setjið x = 2 inn í y = $\frac{1}{2}x$ til að finna y. | $x=2$<br>$y=\frac{1}{2}x$<br>$y=\frac{1}{2}\cdot 2$<br>$y=1$ |
| Raðaða tvenndin er (2,1). | |
| Athugið röðuðu tvenndina í báðum jöfnum: | |

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}x \\ 1 &\overset{?}{=} \tfrac{1}{2}\cdot 2 \\ 1 &= 1\checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= -2x+5 \\ 1 &\overset{?}{=} -2\cdot 2+5 \\ 1 &= -4+5 \\ 1 &= 1\checkmark \end{aligned}$$

Lausnin er (2,1).

**REYNIÐ SJÁLF 5.33**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} y=3x-16 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.34**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} y=-x+10 \\ y=\frac{1}{4}x \end{cases}$

Gætið sérstaklega að formerkjunum í næsta dæmi.

**DÆMI 5.18**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 6x - y = 8 \end{cases}$

## Lausn

Við þurfum að leysa aðra jöfnuna fyrir aðra breytuna. Við leysum fyrri jöfnuna fyrir y.

| | |
|---|---|
| | $4x + 2y = 4$ |
| Leysið fyrri jöfnuna fyrir y. | $2y = -4x + 4$ |
| Setjið −2x + 2 í stað y í seinni jöfnunni. | $y = -2x + 2$<br>$6x - y = 8$ |
| Skiptið y út fyrir −2x + 2. | $6x - (-2x + 2) = 8$ |
| Leysið jöfnuna fyrir x. | $6x + 2x - 2 = 8$ |
| | $8x - 2 = 8$<br>$8x = 10$ |
| Setjið $x = \frac{5}{4}$ inn í 4x + 2y = 4 til að finna y. | $x = \frac{5}{4}$<br>$4x + 2y = 4$<br>$4\left(\frac{5}{4}\right) + 2y = 4$<br>$5 + 2y = 4$<br>$2y = -1$<br>$y = -\frac{1}{2}$ |
| Raðaða tvenndin er $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. | |
| Athugið röðuðu tvenndina í báðum jöfnum. | |

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 4 \\ 4\left(\tfrac{5}{4}\right) + 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) &\stackrel{?}{=} 4 \\ 5 - 1 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &= 4\ \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 6x - y &= 8 \\ 6\left(\tfrac{5}{4}\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\right) &\stackrel{?}{=} 8 \\ \tfrac{15}{4} - \left(-\tfrac{1}{2}\right) &\stackrel{?}{=} 8 \\ \tfrac{16}{2} &\stackrel{?}{=} 8 \\ 8 &= 8\ \checkmark \end{aligned}$$

Lausnin er $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.35**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} x - 4y = -4 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.36**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Í dæmi 5.19 þarf aðeins meiri vinnu til að leysa aðra jöfnuna fyrir x eða y.

**DÆMI 5.19**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 15y - 20x = -30 \end{cases}$

## Lausn

Við þurfum að leysa aðra jöfnuna fyrir aðra breytuna. Við leysum fyrri jöfnuna fyrir x.

| | |
|---|---|
| | $4x - 3y = 6$ |
| Leysið fyrri jöfnuna fyrir x. | $4x = 3y + 6$ |
| Setjið $\frac{3}{4}y + \frac{3}{2}$ í stað x í seinni jöfnunni. | $x = \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}$<br>$15y - 20x = -30$ |
| Skiptið x út fyrir $\frac{3}{4}y + \frac{3}{2}$. | $15y - 20\left(\frac{3}{4}y + \frac{3}{2}\right) = -30$ |
| Leysið fyrir y. | $15y - 15y - 30 = -30$ |
| | $0 - 30 = -30$ |
| | $0 = 0$ |

Þar sem 0 = 0 er sönn fullyrðing er hneppið samkvæmt. Jöfnurnar eru háðar og gröf þeirra falla saman. Hneppið hefur óendanlega margar lausnir.

**REYNIÐ SJÁLF 5.37**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -12y + 8x = 48 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.38**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ -4y - 10x = -24 \end{cases}$

Skoðið aftur jöfnurnar í dæmi 5.19. Er hægt að sjá á einhvern hátt að þær lýsa sömu línunni? Skoðum hvað gerist í næsta dæmi.

**DÆMI 5.20**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 5x - 2y = -10 \\ y = \frac{5}{2}x \end{cases}$

### Lausn

Seinni jafnan er þegar leyst fyrir y og því getum við sett stæðuna fyrir y inn í fyrri jöfnuna.

| | |
|---|---|
| Setjið x í stað y í fyrri jöfnunni. | $y = \left(\frac{5}{2}x\right)$<br>$5x - 2y = -10$ |
| Skiptið y út fyrir $\frac{5}{2}x$. | $5x - 2\left(\frac{5}{2}x\right) = -10$ |
| Leysið fyrir x. | $5x - 5x = -10$ |
| | $0 \neq -10$ |

Þar sem $0 = -10$ er ósönn fullyrðing er hneppið ósamkvæmt. Gröf jafnanna eru tvær samsíða línur og hneppið hefur enga lausn.

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.39**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ y = -\frac{3}{2}x + 1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.40**

Leysið hneppið með innsetningu. $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ y = \frac{5}{3}x - 4 \end{cases}$

## Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

Við endurtökum hér verkefnalausnaraðferðina sem við notuðum í hlutanum um lausn jöfnuhneppa með grafískri aðferð. Nú kunnum við að leysa hneppi með innsetningaraðferð og notum hana því í skrefi 5.

**AÐFERÐ**

### Að nota verkefnalausnaraðferð fyrir línuleg jöfnuhneppi

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
2. Skref 2. Finnið hverju er leitað að.
3. Skref 3. Nefnið stærðirnar sem leitað er að. Veljið breytur sem tákna þær.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi.
5. Skref 5. Leysið jöfnuhneppið með góðum algebruaðferðum.

6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Sumum finnst auðveldara að setja hagnýt verkefni fram með tveimur breytum en einni. Einfaldara er að velja breytur þegar aðeins þarf að skrá tvo bókstafi. Hugsið um þetta í næsta dæmi: hvernig hefðuð þið leyst það með aðeins einni breytu?

---

**DÆMI 5.21**

Summa tveggja talna er núll. Önnur talan er níu minni en hin. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að tveimur tölum. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $n=$ tákna fyrri töluna og látum $m=$ tákna seinni töluna. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. | Summa tveggja talna er núll. |
| | $n+m=0$ |
| | Önnur talan er níu minni en hin. |
| | $n=m-9$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases} n+m=0 \\ n=m-9 \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum innsetningu þar sem seinni jafnan er leyst fyrir n. | |
| Setjið m − 9 í stað n í fyrri jöfnunni. | $n=m-9$ <br> $n+m=0$ |
| Leysið fyrir m. | $m-9+m=0$ |
| | $2m-9=0$ |
| | $2m=9$ |
| Setjið $m=\frac{9}{2}$ inn í seinni jöfnuna og leysið síðan fyrir n. | $m=\frac{9}{2}$ <br> $n=m-9$ |
| | $m=\frac{9}{2}-9$ |
| | $m=\frac{9}{2}-\frac{18}{2}$ |

| | |
|---|---|
| | $n=-\frac{9}{2}$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu. | Eru þessar tölur skynsamlegar í samhengi verkefnisins? Við látum ykkur eftir að sannreyna það. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Tölurnar eru $\frac{9}{2}$ og $-\frac{9}{2}$. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.41**

Summa tveggja talna er 10. Önnur talan er 4 minni en hin. Finnið tölurnar.

**REYNIÐ SJÁLF 5.42**

Summa tveggja talna er –6. Önnur talan er 10 minni en hin. Finnið tölurnar.

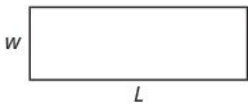
Í dæmi 5.22 notum við formúluna fyrir ummál rétthyrnings, P = 2L + 2W.

5

**DÆMI 5.22**

Ummál rétthyrnings er 88. Lengdin er fimm einingum meiri en tvöföld breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. |   |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Við leitum að lengdinni og breiddinni. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $L=$ tákna lengdina og $W=$ tákna breiddina. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. | Ummál rétthyrnings er 88. |
| | 2L + 2W = P<br>$2L+2W=88$ |
| | Lengdin er fimm einingum meiri en tvöföld breiddin. |
| | $L=2W+5$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases} 2L+2W=88 \\ L=2W+5 \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum innsetningu þar sem seinni jafnan er leyst fyrir L. Setjið 2W + 5 í stað L í fyrri jöfnunni. | $L = 2W + 5$<br>$2L + 2W = 88$ |
| Leysið fyrir W. | $2(2W + 5) + 2W = 88$ |
| | $4W + 10 + 2W = 88$ |
| | $6W + 10 = 88$ |
| | $6W = 78$ |
| Setjið W = 13 inn í seinni jöfnuna og leysið síðan fyrir L. | $W = 13$<br>$L = 2W + 5$ |
| | $L = 2 \cdot 13 + 5$ |
| | $L = 31$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu. | Er rétthyrningur sem er 31 á lengd og 13 á breidd með ummálið 88? Já. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Lengdin er 31 og breiddin 13. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.43**

Ummál rétthyrnings er 40. Lengdin er 4 einingum meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd rétthyrningsins.

**REYNIÐ SJÁLF 5.44**

Ummál rétthyrnings er 58. Lengdin er 5 einingum meiri en þreföld breiddin. Finnið lengd og breidd rétthyrningsins.

Fyrir dæmi 5.23 þurfum við að muna að hornasumma þríhyrnings er 180 gráður og að eitt horn rétthyrnds þríhyrnings er 90 gráður.

**DÆMI 5.23**

Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er tíu gráðum stærra en þreföld stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

## Lausn

Við teiknum mynd og merkjum inn á hana.

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. |   |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Við leitum að stærð hornanna. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $a=$ tákna stærð 1. hornsins og $b=$ tákna stærð 2. hornsins. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. | Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er tíu gráðum stærra en þreföld stærð hins hvassa hornsins. |
| | $a = 3b + 10$ |
| | Hornasumma þríhyrnings er 180. |
| | $a + b + 90 = 180$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases} a = 3b + 10 \\ a + b + 90 = 180 \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum innsetningu þar sem fyrri jafnan er leyst fyrir a. | $a = 3b + 10$ <br> $a + b + 90 = 180$ |
| Setjið 3b + 10 í stað a í seinni jöfnunni. | $(3b + 10) + b + 90 = 180$ |
| Leysið fyrir b. | $4b + 100 = 180$ |
| | $4b = 80$ |
| | $b = 20$ <br> $a = 3b + 10$ |
| Setjið b = 20 inn í fyrri jöfnuna og leysið síðan fyrir a. | $a = 3 \cdot 20 + 10$ <br> $a = 70$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu. | Við látum ykkur eftir að sannreyna þetta. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Hvössu hornin eru 20 og 70. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.45**

Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 2 gráðum stærra en 3 sinnum stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**REYNIÐ SJÁLF 5.46**

Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 18 gráðum minna en tvöföld stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**DÆMI 5.24**

Heather hefur fengið tvo launakosti fyrir starf sem þjálfari í líkamsræktarstöð. Samkvæmt kosti A fær hún $25.000 auk $15 fyrir hvern þjálfunartíma. Samkvæmt kosti B fær hún $10.000 auk $40 fyrir hvern þjálfunartíma. Hve marga þjálfunartíma þarf hún að halda til að launin verði jöfn?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Við leitum að þeim fjölda þjálfunartíma sem gefur sömu laun. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $s=$ tákna laun Heather og $n=$ tákna fjölda þjálfunartíma. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. | Samkvæmt kosti A fær hún $25.000 auk $15 fyrir hvern þjálfunartíma. |
| | $s = 25.000 + 15n$ |
| | Samkvæmt kosti B fær hún $10.000 auk $40 fyrir hvern þjálfunartíma. |
| | $s = 10.000 + 40n$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases} s = 25.000 + 15n \\ s = 10.000 + 40n \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum innsetningu. | $s = 25.000 + 15n$<br>$s = 10.000 + 40n$ |
| Setjið 25.000 + 15n í stað s í seinni jöfnunni. | $25.000 + 15n = 10.000 + 40n$ |
| Leysið fyrir n. | $25.000 = 10.000 + 25n$ |
| | $15.000 = 25n$ |
| | $600 = n$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið. | Eru 600 þjálfunartímar á ári raunhæfir? Gefa kostirnir tveir sömu laun þegar n = 600? |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Launakostirnir gefa sömu laun fyrir 600 þjálfunartíma. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.47**

Geraldine hefur fengið atvinnutilboð frá tveimur tryggingafélögum. Fyrra félagið greiðir $12.000 í laun auk $100 í þóknun fyrir hverja selda tryggingu. Hið síðara greiðir $20.000 í laun auk $50 í þóknun fyrir hverja selda tryggingu. Hve margar tryggingar þarf að selja til að heildarlaunin verði jöfn?

**REYNIÐ SJÁLF 5.48**

Kenneth selur nú jakkaföt fyrir fyrirtæki A og fær $22.000 í laun auk $10 í þóknun fyrir hver seld jakkaföt. Fyrirtæki B býður honum starf með $28.000 í laun auk $4 í þóknun fyrir hver seld jakkaföt. Hve mörg jakkaföt þarf Kenneth að selja til að kostirnir verði jafngildir?

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið fleiri útskýringar og æfingar í að leysa jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.

- Kennslumyndband: Línuleg jöfnuhneppi leyst með innsetningu
- Kennslumyndband: Leyst með innsetningu



## Verkefni úr hluta 5.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð**

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.

71.

$$\begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases}$$

72.

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

73.

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

74.

$$\begin{cases} x - 3y = -9 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$$

75.

$$\begin{cases} 5x - 2y = -6 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$$

76.

$$\begin{cases} -2x + 2y = 6 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

77.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

78.

$$\begin{cases} 2x + 5y = -14 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

79.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

80.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ y = -\frac{2}{5}x + 2 \end{cases}$$

81.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ y = \frac{2}{3}x + 2 \end{cases}$$

82.

$$\begin{cases} -3x - 5y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 5 \end{cases}$$

83.

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -x + y = -5 \end{cases}$$

84.

$$\begin{cases} -2x + y = 10 \\ -x + 2y = 16 \end{cases}$$

85.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -4x + y = 15 \end{cases}$$

86.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

87.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = -5 \end{cases}$$

88.

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

89.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = -15 \end{cases}$$

90.

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ x - 2y = -20 \end{cases}$$

91.

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$$

92.

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases}$$

93.

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ y = \frac{3}{5}x + 6 \end{cases}$$

94.

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x + 7 \end{cases}$$

95.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 8x - y = 1 \end{cases}$$

96.

$$\begin{cases} -x - 12y = -1 \\ 2x - 8y = -6 \end{cases}$$

97.

$$\begin{cases} 15x + 2y = 6 \\ -5x + 2y = -4 \end{cases}$$

98.

$$\begin{cases} 2x - 15y = 7 \\ 12x + 2y = -4 \end{cases}$$

99.

$$\begin{cases} y = 3x \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

100.

$$\begin{cases} x = 2y \\ 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

101.

$$\begin{cases} 2x + 16y = 8 \\ -x - 8y = -4 \end{cases}$$

102.

$$\begin{cases} 15x + 4y = 6 \\ -30x - 8y = -12 \end{cases}$$

103.

$$\begin{cases} y = -4x \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

104.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

105.

$$\begin{cases} y = \frac{7}{8}x + 4 \\ -7x + 8y = 6 \end{cases}$$

106.

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 5 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

**Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með innsetningaraðferð**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið þau.

**107.** Summa tveggja talna er 15. Önnur talan er 3 minni en hin. Finnið tölurnar.

**108.** Summa tveggja talna er 30. Önnur talan er 4 minni en hin. Finnið tölurnar.

**109.** Summa tveggja talna er −26. Önnur talan er 12 minni en hin. Finnið tölurnar.

**110.** Ummál rétthyrnings er 50. Lengdin er 5 einingum meiri en breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

**111.** Ummál rétthyrnings er 60. Lengdin er 10 einingum meiri en breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

**112.** Ummál rétthyrnings er 58. Lengdin er 5 einingum meiri en þreföld breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

**113.** Ummál rétthyrnings er 84. Lengdin er 10 einingum meiri en þreföld breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

**114.** Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 14 gráðum stærra en 3 sinnum stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**115.** Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 26 gráðum stærra en 3 sinnum stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**116.** Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 15 gráðum minna en tvöföld stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**117.** Annað hvassa hornið í rétthyrndum þríhyrningi er 45 gráðum minna en tvöföld stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**118.** Maxim hefur fengið atvinnutilboð frá tveimur bílasölum. Fyrra fyrirtækið greiðir $10.000 í laun auk $1.000 í þóknun fyrir hvern seldan bíl. Hið síðara greiðir $20.000 í laun auk $500 í þóknun fyrir hvern seldan bíl. Hve marga bíla þarf að selja til að heildarlaunin verði jöfn?

**119.** Jackie hefur fengið atvinnutilboð frá tveimur kapalsjónvarpsfyrirtækjum. Fyrra fyrirtækið greiðir $ 14.000 í laun auk $100 í þóknun fyrir hvern seldan sjónvarpspakka. Hið síðara greiðir $20.000 í laun auk $25 í þóknun fyrir hvern seldan sjónvarpspakka. Hve marga sjónvarpspakka þarf að selja til að heildarlaunin verði jöfn?

**120.** Amara selur nú sjónvörp fyrir fyrirtæki A og fær $17.000 í laun auk $100 í þóknun fyrir hvert selt sjónvarp. Fyrirtæki B býður henni starf með $29.000 í laun auk $20 í þóknun fyrir hvert selt sjónvarp. Hve mörg sjónvörp þarf Amara að selja til að kostirnir verði jafngildir?

**121.** Mitchell selur nú eldavélar fyrir fyrirtæki A og fær $12.000 í laun auk $150 í þóknun fyrir hverja selda eldavél. Fyrirtæki B býður honum starf með $24.000 í laun auk $50 í þóknun fyrir hverja selda eldavél. Hve margar eldavélar þarf Mitchell að selja til að kostirnir verði jafngildir?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

122.

Þegar Gloria var 15 mínútur á sporöskjulaga þjálfunartæki og síðan 30 mínútur í stöðvaþjálfun sýndi líkamsræktarforritið að hún hefði brennt 435 hitaeiningum. Þegar hún var 30 mínútur á tækinu og 40 mínútur í stöðvaþjálfun brenndi hún 690 hitaeiningum.

Leysið hneppið fyrir $\begin{cases} 15e + 30c = 435 \\ 30e + 40c = 690 \end{cases}$ $e$, fjölda hitaeininga sem hún brennir á mínútu á tækinu, og $c$, fjölda hitaeininga sem hún brennir á mínútu í stöðvaþjálfun.

123.

Stephanie ók húsbílnum sínum frá Riverside í Kaliforníu norður eftir þjóðvegi 15 í átt að Salt Lake City á hraðanum 56 mílur á klukkustund. Hálfri klukkustund síðar ók Tina frá Riverside sömu leið í bíl sínum á hraðanum 70 mílur á klukkustund. Leysið hneppið.

$$\begin{cases} 56s = 70t \\ s = t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. ⓐ Leysið fyrir $t$ til að finna hve langan tíma það tekur Tinu að ná Stephanie.
2. ⓑ Hvert er gildi $s$, sem táknar fjölda klukkustunda sem Stephanie hefur ekið áður en Tina nær henni?

### *Ritunarverkefni*

124.

Leysið jöfnuhneppið

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

ⓐ með grafískri aðferð. ⓑ með innsetningaraðferð. ⓒ Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

125.

Leysið jöfnuhneppið með innsetningaraðferð og útskýrið öll skrefin með orðum.

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x = y - 8 \end{cases}$$

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst jöfnuhneppi með innsetningaraðferð. | | | |
| leyst hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með innsetningaraðferð. | | | |

ⓑ Þið hafið nú farið yfir gátlistann. Hvað ætlið þið að gera til að ná öruggum tökum á öllum markmiðunum?

# 5.3 Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð
- Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með eyðingaraðferð
- Veljið hentugustu aðferðina til að leysa línulegt jöfnuhneppi

5

**UNDIRBÚNINGUR 5.8**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið $-5(6-3a)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.136.

**UNDIRBÚNINGUR 5.9**

Leysið jöfnuna $\frac{1}{3}x+\frac{5}{8}=\frac{31}{24}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 2.48.

Við höfum leyst línuleg jöfnuhneppi með grafískri aðferð og innsetningaraðferð. Grafísk aðferð hentar vel þegar stuðlar breytanna eru litlir og lausnin hefur heiltölugildi. Innsetningaraðferð hentar vel þegar auðvelt er að leysa aðra jöfnuna fyrir aðra breytuna og stæðan sem fæst inniheldur ekki mörg brot.

Þriðja aðferðin til að leysa línuleg jöfnuhneppi kallast eyðingaraðferð. Þegar við leystum hneppi með innsetningaraðferð byrjuðum við með tvær jöfnur og tvær breytur og breyttum hneppinu í eina jöfnu með einni breytu. Við gerum það sama með eyðingaraðferðinni en förum aðra leið að því.

## Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

Eyðingaraðferðin byggist á samlagningarreglu jafnaðar. Reglan segir að jafnan gildi áfram þegar sama stærð er lögð við báðar hliðar hennar. Við víkkum regluna út: Þegar jafnar stærðir eru lagðar við hvora hlið jöfnu verða útkomurnar jafnar.

Fyrir hvaða stæður a, b, c og d sem er,

$$\begin{array}{llll} \text{ef} & a & = & b \\ \text{og} & c & = & d \\ \text{þá} & a+c & = & b+d \end{array}$$

Til að leysa jöfnuhneppi með eyðingaraðferð byrjum við á að rita báðar jöfnurnar á staðalformi. Síðan ákveðum við hvorri breytunni er auðveldast að eyða. Hvernig veljum við? Við viljum að stuðlar annarrar breytunnar séu samlagningarandhverfur svo við getum lagt jöfnurnar saman og eytt breytunni.

Takið eftir hvað gerist þegar við leggjum þessar tvær jöfnur saman:

$$\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ \underline{2x - y = 0} \\ 5x \quad\; = 5 \end{array}$$

y-liðirnir leggjast saman í núll og eftir stendur ein jafna með einni breytu.

Prófum annað dæmi:

$$\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$$

Í þetta sinn sjáum við enga breytu sem eyðist samstundis þegar jöfnurnar eru lagðar saman.

Ef við margföldum fyrri jöfnuna með −2 verða stuðlar x samlagningarandhverfur. Við verðum að margfalda hvern lið beggja hliða jöfnunnar með −2.

$$\begin{cases} -2(x + 4y) = -2(2) \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 8y = -4 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$$

Nú sjáum við að stuðlar x-liðanna eru samlagningarandhverfur og því eyðist x þegar jöfnurnar tvær eru lagðar saman.

Leggið jöfnurnar sjálf saman. Útkoman ætti að vera −3y = −6. Það er auðvelt að leysa þá jöfnu, ekki satt? Svona lítur reikningurinn út.

$$\begin{array}{r} -2x - 8y = -4 \\ \underline{2x + 5y = -2} \\ -3y = -6 \end{array}$$

Tökum eitt dæmi enn:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$$

Ekki virðist hægt að gera stuðla annarrar breytunnar að samlagningarandhverfum með því að margfalda aðeins aðra jöfnuna með föstum stuðli nema við notum brot. Þess í stað þurfum við að margfalda báðar jöfnurnar með föstum stuðli.

Við getum gert stuðla x að samlagningarandhverfum með því að margfalda fyrri jöfnuna með 3 og þá seinni með −4. Þá fáum við 12x og −12x.

$$3(4x - 3y) = 3(10)$$
$$-4(3x + 5y) = -4(-7)$$

Þetta gefur okkur þessar tvær nýju jöfnur:

$$\begin{cases} 12x - 9y = 30 \\ -12x - 20y = 28 \end{cases}$$

Þegar við leggjum þessar jöfnur saman

$$\begin{cases} 12x - 9y = 30 \\ \underline{-12x - 20y = 28} \\ -29y = 58 \end{cases}$$

eyðast x-liðirnir og eftir stendur −29y = 58.

Þegar við höfum fengið jöfnu með aðeins einni breytu leysum við hana. Síðan setjum við gildið inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysum fyrir breytuna sem eftir er. Eins og alltaf sannreynum við að svarið sé lausn beggja upphaflegu jafnanna.

Nú sjáum við hvernig nota má eyðingaraðferð til að leysa sama jöfnuhneppi og við leystum áður með grafískri aðferð og innsetningaraðferð.

5

---

**DÆMI 5.25**

### Að leysa jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skrifið báðar jöfnurnar á staðalformi. Ef einhverjir stuðlar eru brot skal eyða brotunum. | Báðar jöfnurnar eru á staðalforminu $Ax + By = C$. Engin brot eru í jöfnunum. | $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ |
| **Skref 2.** Látið stuðla annarrar breytunnar vera gagnstæðar tölur. Ákveðið hvorri breytunni á að eyða. Margfaldið aðra jöfnuna eða báðar þannig að stuðlar þeirrar breytu verði gagnstæðar tölur. | Við getum eytt $y$-liðunum með því að margfalda fyrri jöfnuna með 2.<br><br>Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar $2x + y = 7$ með 2. | $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$<br><br>$\begin{cases} 2(2x + y) = 2(7) \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ |
| **Skref 3.** Leggið saman jöfnurnar sem fengust í skrefi 2 til að eyða einni breytu. | Við leggjum saman x-liðina, y-liðina og fastana. | $\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ \underline{x - 2y = 6} \\ 5x \quad\quad = 20 \end{cases}$ |
| **Skref 4.** Leysið fyrir breytuna sem eftir er. | Leysið fyrir $x$. | $x = 4$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 5.** Setjið lausnina úr skrefi 4 inn í aðra af upphaflegu jöfnunum. Leysið síðan fyrir hina breytuna. | Setjið $x = 4$ inn í seinni jöfnuna, $x - 2y = 6$. Leysið síðan fyrir $y$. | $x - 2y = 6$<br>$4 - 2y = 6$<br>$-2y = 2$<br>$y = -1$ |
| **Skref 6.** Skrifið lausnina sem raðað par. | Skrifið hana sem (x, y). | $(4, -1)$ |
| **Skref 7.** Athugið hvort raðaða talnaparið sé lausn á báðum báðum upphaflegu jöfnunum. | Setjið $(4, -1)$ inn í jöfnurnar $2x + y = 7$ og $x - 2y = 6$. Verða báðar jöfnurnar sannar? Já! | $2x + y = 7$ $\quad x - 2y = 6$<br>$2(4) + (-1) \stackrel{?}{=} 7$ $\quad 4 - 2(-1) \stackrel{?}{=} 6$<br>$7 = 7$ ✓ $\quad 6 = 6$ ✓<br>Lausnin er $(4, -1)$. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.49**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.50**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$

Skrefin eru tekin saman hér fyrir neðan svo að auðvelt sé að fletta upp í þeim.

**AÐFERÐ**

## Að leysa jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

1. Skref 1. Ritið báðar jöfnurnar á staðalformi. Ef einhverjir stuðlar eru brot skuluð þið losa jöfnurnar við brotastuðlana.
2. Skref 2.
   Gerið stuðla annarrar breytunnar að samlagningarandhverfum.
   - Ákveðið hvorri breytunni þið ætlið að eyða.
   - Margfaldið aðra eða báðar jöfnurnar þannig að stuðlar breytunnar verði samlagningarandhverfur.
3. Skref 3. Leggið saman jöfnurnar sem fengust í skrefi 2 til að eyða annarri breytunni.
4. Skref 4. Leysið fyrir breytuna sem eftir er.
5. Skref 5. Setjið lausnina úr skrefi 4 inn í aðra upphaflegu jöfnuna. Leysið síðan fyrir hina breytuna.
6. Skref 6. Ritið lausnina sem raðaða tvennd.
7. Skref 7. Athugið að raðaða tvenndin sé lausn beggja upphaflegu jafnanna.

Fyrst tökum við dæmi þar sem hægt er að eyða annarri breytunni strax.

**DÆMI 5.26**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=12 \end{cases}$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\begin{array}{l} x+y=10 \\ x-y=12 \end{array}$ |
| Báðar jöfnurnar eru á staðalformi. | |
| Stuðlar y eru þegar samlagningarandhverfur. | |
| Leggið jöfnurnar tvær saman til að eyða y. Jafnan sem fæst hefur aðeins 1 breytu, x. | $\begin{array}{l} x+y=10 \\ x-y=12 \\ \hline 2x \quad =22 \end{array}$ |
| Leysið fyrir x, breytuna sem eftir er. Setjið x = 11 inn í aðra upphaflegu jöfnuna. | $x=11$ <br> $x+y=10$ |
| | $11+y=10$ |
| Leysið fyrir hina breytuna, y. | $y=-1$ |
| Ritið lausnina sem raðaða tvennd. | Raðaða tvenndin er (11, −1). |
| Athugið að raðaða tvenndin sé lausn beggja upphaflegu jafnanna. | |

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ 11+(-1) &\overset{?}{=} 10 \\ 10 &= 10 \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y &= 12 \\ 11-(-1) &\overset{?}{=} 12 \\ 12 &= 12 \checkmark \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| | Lausnin er (11, −1). |

**REYNIÐ SJÁLF 5.51**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=4 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.52**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} x+y=3 \\ -2x-y=-1 \end{cases}$

Í dæmi 5.27 getum við gert stuðla annarrar breytunnar að samlagningarandhverfum með því að margfalda aðra jöfnuna með föstum stuðli.

**DÆMI 5.27**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$ |
| Báðar jöfnurnar eru á staðalformi. | |
| Engir stuðlanna eru samlagningarandhverfur. | |
| Við getum gert stuðla y að samlagningarandhverfum með því að margfalda fyrri jöfnuna með −3. | $\begin{cases} -3(3x - 2y) = -3(-2) \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$ |
| Einfaldið. | $\begin{cases} -9x + 6y = 6 \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$ |
| Leggið jöfnurnar tvær saman til að eyða y. | $\begin{cases} -9x + 6y = 6 \\ 5x - 6y = 10 \end{cases}$<br>$-4x \quad = 16$ |
| Leysið fyrir breytuna sem eftir er, x. Setjið x = −4 inn í aðra upphaflegu jöfnuna. | $x = -4$<br>$3x - 2y = -2$ |
| | $3(-4) - 2y = -2$ |
| Leysið fyrir y. | $-12 - 2y = -2$<br>$-2y = 10$<br>$y = -5$ |
| Ritið lausnina sem raðaða tvennd. | Raðaða tvenndin er (−4, −5). |
| Athugið að raðaða tvenndin sé lausn beggja upphaflegu jafnanna. | $3x - 2y = -2$<br>$3(-4) - 2(-5) \stackrel{?}{=} -2$<br>$-12 + 10 \stackrel{?}{=} -2$<br>$-2y = -2$ ✓<br><br>$5x - 6y = 10$<br>$3(-4) - 6(-5) \stackrel{?}{=} 10$<br>$-20 + 30 \stackrel{?}{=} 10$<br>$10 = 10$ ✓ |
| | Lausnin er (−4, −5). |

**REYNIÐ SJÁLF 5.53**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 5x - 9y = -4 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.54**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 6x + 5y = 8 \end{cases}$

Nú tökum við dæmi þar sem margfalda þarf báðar jöfnurnar með föstum stuðlum til að gera stuðla annarrar breytunnar að samlagningarandhverfum.

**DÆMI 5.28**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ 7x + 2y = -6 \end{cases}$

## Lausn

Í þessu dæmi getum við ekki fengið stuðla sem eru samlagningarandhverfur með því að margfalda aðeins aðra jöfnuna með föstum stuðli. Við veljum því fasta stuðla til að margfalda báðar jöfnurnar þannig að stuðlarnir verði samlagningarandhverfur.

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} 4x-3y=9 \\ 7x+2y=-6 \end{cases}$ |
| Báðar jöfnurnar eru á staðalformi. Til að gera stuðla y að samlagningarandhverfum margföldum við fyrri jöfnuna með 2 og þá seinni með 3. | $\begin{cases} 2(4x-3y)=2(9) \\ 3(7x+2y)=3(-6) \end{cases}$ |
| Einfaldið. | $\begin{cases} 8x-6y=18 \\ 21x+6y=-18 \end{cases}$ |
| Leggið jöfnurnar tvær saman til að eyða y. | $\begin{cases} 8x-6y=18 \\ 21x+6y=-18 \end{cases}$<br>$29x = 0$ |
| Leysið fyrir x. Setjið x = 0 inn í aðra upphaflegu jöfnuna. | $x=0$<br>$7x+2y=-6$ |
| | $7 \cdot 0+2y=-6$ |
| Leysið fyrir y. | $2y=-6$ |
| | $y=-3$ |
| Ritið lausnina sem raðaða tvennd. | Raðaða tvenndin er (0, −3). |
| Athugið að raðaða tvenndin sé lausn beggja upphaflegu jafnanna. | $4x-3y=9$<br>$4(0)-3(-3) \stackrel{?}{=} 9$<br>$9=9$ ✓<br><br>$7x+2y=-6$<br>$7(0)+2(-3) \stackrel{?}{=} -6$<br>$-6=-6$ ✓ |
| | Lausnin er (0, −3). |

Hvaða aðra fasta stuðla hefðum við getað valið til að eyða annarri breytunni? Hefði lausnin orðið sú sama?

**REYNIÐ SJÁLF 5.55**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 3x-4y=-9 \\ 5x+3y=14 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.56**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 7x+8y=4 \\ 3x-5y=27 \end{cases}$

Þegar jöfnuhneppið inniheldur brot losum við jöfnurnar fyrst við brotastuðlana með því að margfalda hvora jöfnu með sínum minnsta samnefnara.

**DÆMI 5.29**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 6 \\ \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{17}{2} \end{cases}$

## Lausn

Í þessu dæmi innihalda báðar jöfnurnar brot. Fyrsta skrefið er að margfalda hvora jöfnu með sínum minnsta samnefnara til að losa jöfnurnar við brotastuðlana.

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 6 \\ \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{17}{2} \end{cases}$ |
| Margfaldið hvora jöfnu með sínum minnsta samnefnara til að losa jöfnurnar við brotastuðlana. | $\begin{cases} 2\left(x + \frac{1}{2}y\right) = 2(6) \\ 6\left(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y\right) = 6\left(\frac{17}{2}\right) \end{cases}$ |
| Einfaldið. | $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 9x + 4y = 51 \end{cases}$ |
| Nú erum við tilbúin að eyða annarri breytunni. Takið eftir að báðar jöfnurnar eru á staðalformi. | |
| Við getum eytt y með því að margfalda efri jöfnuna með −4. | $\begin{cases} -4(2x + y) = -4(12) \\ 9x + 4y = 51 \end{cases}$ |
| Einfaldið og leggið saman. Setjið x = 3 inn í aðra upphaflegu jöfnuna. | $\begin{cases} -8x - 4y = -48 \\ 9x + 4y = 51 \end{cases}$<br>$x = 3$<br>$x + \frac{1}{2}y = 6$ |
| Leysið fyrir y. | $3 + \frac{1}{2}y = 6$ |
| | $\frac{1}{2}y = 3$ |
| | $y = 6$ |
| Ritið lausnina sem raðaða tvennd. | Raðaða tvenndin er (3, 6). |

Athugið að raðaða tvenndin sé lausn beggja upphaflegu jafnanna.

$$\begin{aligned} x+\tfrac{1}{2}y &= 6 \\ 3+\tfrac{1}{2}(6) &\stackrel{?}{=} 6 \\ 3+3 &\stackrel{?}{=} 6 \\ 6 &= 6\ \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tfrac{3}{2}x+\tfrac{2}{3}y &= \tfrac{17}{2} \\ \tfrac{3}{2}(3)+\tfrac{2}{3}(6) &\stackrel{?}{=} \tfrac{17}{2} \\ \tfrac{9}{2}+4 &\stackrel{?}{=} \tfrac{17}{2} \\ \tfrac{9}{2}+\tfrac{8}{2} &\stackrel{?}{=} \tfrac{17}{2} \\ \tfrac{17}{2} &= \tfrac{17}{2}\ \checkmark \end{aligned}$$

Lausnin er (3, 6).

**REYNIÐ SJÁLF 5.57**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=1 \\ \frac{3}{4}x-y=\frac{5}{2} \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.58**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} x+\frac{3}{5}y=-\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=\frac{5}{6} \end{cases}$

Í kaflanum Leysa jöfnuhneppi með grafískri aðferð sáum við að ekki hafa öll línuleg jöfnuhneppi eina raðaða tvennd sem lausn. Þegar jöfnurnar tvær lýstu sömu línunni voru lausnirnar óendanlega margar. Við kölluðum slíkt hneppi samkvæmt. Þegar jöfnurnar lýstu samsíða línum var engin lausn. Við kölluðum slíkt hneppi ósamkvæmt.

**DÆMI 5.30**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ y=3-\frac{3}{4}x \end{cases}$

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ y=3-\frac{3}{4}x \end{cases}$ |
| Ritið seinni jöfnuna á staðalformi. | $\begin{cases} 3x+4y &= 12 \\ \frac{3}{4}x+y &= 3 \end{cases}$ |
| Losið seinni jöfnuna við brotastuðlana með því að margfalda hana með 4. | $\begin{cases} 3x+4y &= 12 \\ 4\left(\frac{3}{4}x+y\right) &= 4\,(3) \end{cases}$ |
| Einfaldið. | $\begin{cases} 3x+4y &= 12 \\ 3x+4y &= 12 \end{cases}$ |
| Til að eyða breytu margföldum við seinni jöfnuna með $-1$. Einfaldið og leggið saman. | $\begin{cases} 3x+4y &= 12 \\ -3x-4y &= -12 \end{cases}$ <br> $0=0$ |

Þetta er sönn fullyrðing. Hneppið er samkvæmt en jöfnurnar háðar. Gröf þeirra falla saman og hneppið hefur óendanlega margar lausnir.

Tókuð þið eftir því að jöfnurnar tvær urðu eins þegar við höfðum losað seinni jöfnuna við brotastuðlana? Það merkir að línurnar falla saman.

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.59**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 5x-3y=15 \\ y=-5+\frac{5}{3}x \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.60**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} x+2y=6 \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$

**DÆMI 5.31**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} -6x+15y=10 \\ 2x-5y=-5 \end{cases}$

## Lausn

| | |
|---|---|
| Jöfnurnar eru á staðalformi. | $\begin{cases} -6x+15y &= 10 \\ 2x-5y &= -5 \end{cases}$ |
| Margfaldið seinni jöfnuna með 3 til að eyða breytu. | $\begin{cases} -6x+15y &= 10 \\ 3\left(2x-5y\right) &= 3\left(-5\right) \end{cases}$ |
| Einfaldið og leggið saman. | $\begin{cases} -6x+15y &= 10 \\ 6x-15y &= -15 \end{cases}$<br>$0 \neq -5$ |

Þessi fullyrðing er ósönn. Hneppið er ósamkvæmt og því væru gröfin samsíða línur.

Hneppið hefur enga lausn.

**REYNIÐ SJÁLF 5.61**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} -3x+2y=8 \\ 9x-6y=13 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.62**

Leysið hneppið með eyðingu. $\begin{cases} 7x-3y=-2 \\ -14x+6y=8 \end{cases}$

## Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

Sum hagnýt verkefni má setja beint fram sem jöfnur á staðalformi og því leysum við þau með eyðingaraðferð. Eins og áður notum við verkefnalausnaraðferðina til að halda vinnunni markvissri og skipulagðri.

**DÆMI 5.32**

Summa tveggja talna er 39. Mismunur þeirra er 9. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að tveimur tölum. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytu sem táknar stærðina. | Látum $n=$ tákna fyrri töluna og<br>$m=$ tákna seinni töluna. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. Jöfnuhneppið er: | Summa tveggja talna er 39. $n+m=39$ Mismunur þeirra er 9. $$\begin{cases} n-m=9 \\ n+m=39 \\ n-m=9 \end{cases}$$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Notið eyðingu. Jöfnurnar eru á staðalformi og stuðlar $m$ eru samlagningarandhverfur. Leggið saman. Leysið fyrir $n$. Setjið $n=24$ inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysið fyrir $m$. | $$\begin{cases} n+m=39 \\ n-m=9 \end{cases}$$ $$\begin{aligned} 2n &= 48 \\ n &= 24 \\ n+m &= 39 \\ 24+m &= 39 \\ m &= 15 \end{aligned}$$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið. | Þar sem $24+15=39$ og $24-15=9$, standast svörin sannprófun. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Tölurnar eru 24 og 15. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.63**

Summa tveggja talna er 42. Mismunur þeirra er 8. Finnið tölurnar.

**REYNIÐ SJÁLF 5.64**

Summa tveggja talna er −15. Mismunur þeirra er −35. Finnið tölurnar.

**DÆMI 5.33**

Joe kemur við á hamborgarastað á hverjum degi á leið til vinnu. Á mánudaginn fékk hann einn miðlungs skammt af frönskum kartöflum og tvo litla gosdrykki, samtals 620 hitaeiningar. Á þriðjudaginn fékk hann tvo miðlungs skammta af frönskum kartöflum og einn lítinn gosdrykk, samtals 820 hitaeiningar. Hve margar hitaeiningar eru í einum miðlungs skammti af frönskum kartöflum? Hve margar eru í einum litlum gosdrykk?

## Lausn

| |
|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. |

| | |
|---|---|
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að fjölda hitaeininga í einum miðlungs skammti af frönskum kartöflum og í einum litlum gosdrykk. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum f tákna fjölda hitaeininga í 1 miðlungs skammti af frönskum kartöflum og s tákna fjölda hitaeininga í 1 litlum gosdrykk. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi: | einn miðlungs skammtur af frönskum kartöflum og tveir litlir gosdrykkir innihéldu samtals 620 hitaeiningar |
| | $f + 2s = 620$ |
| | tveir miðlungs skammtar af frönskum kartöflum og einn lítill gosdrykkur innihéldu samtals 820 hitaeiningar. |
| | $2f + s = 820$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases} f + 2s = 620 \\ 2f + s = 820 \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Til að leysa jöfnuhneppið skuluð þið nota eyðingu. Jöfnurnar eru á staðalformi. Til að gera stuðla f að samlagningarandhverfum, margfaldið efri jöfnuna með −2. | $\begin{cases} -2(f + 2s) = -2(620) \\ 2f + s = 820 \end{cases}$ |
| Einfaldið og leggið saman. | $\begin{cases} -2f - 4s = -1240 \\ 2f + s = 820 \end{cases}$<br>$-3s = -420$ |
| Leysið fyrir s. | $s = 140$ |
| Setjið s = 140 inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysið síðan fyrir f. | $f + 2s = 620$ |
| | $f + 2 \cdot 140 = 620$ |
| | $f + 280 = 620$ |
| | $f = 340$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 6.** Athugið svarið. | Sannreynið að tölurnar séu skynsamlegar í samhengi dæmisins og að þær séu lausnir beggja jafna. Við látum ykkur eftir að gera það. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Litli gosdrykkurinn inniheldur 140 hitaeiningar og frönsku kartöflurnar 340 hitaeiningar. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.65**

Malik kemur við í matvöruverslun til að kaupa einn pakka af bleyjum og 2 dósir af þurrmjólk. Hann greiðir samtals $37. Vikuna eftir kaupir hann 2 pakka af bleyjum og 5 dósir af þurrmjólk fyrir samtals $87. Hvað kostar einn pakki af bleyjum? Hvað kostar ein dós af þurrmjólk?

**REYNIÐ SJÁLF 5.66**



Til að fá dagskammtinn sinn af ávöxtum borðar Sasha banana og 8 jarðarber á miðvikudegi, samtals 145 hitaeiningar. Næsta miðvikudag borðar hún tvo banana og 5 jarðarber, samtals 235 hitaeiningar úr ávöxtunum. Hve margar hitaeiningar eru í banana? Hve margar eru í jarðarberi?

## Veljið hentugustu aðferðina til að leysa línulegt jöfnuhneppi

Þegar þið leysið línuleg jöfnuhneppi í stærðfræðinámskeiðum síðar meir er yfirleitt ekki tekið fram hvaða aðferð á að nota. Þið þurfið sjálf að velja. Veljið því þá aðferð sem er auðveldust og þar sem minnst hætta er á mistökum.

| Teikniaðferð | Innsetningaraðferð | Eyðingaraðferð |
|---|---|---|
| Notið þegar þið þurfið myndræna framsetningu á aðstæðunum. | Notið þegar ein jafnan hefur þegar verið leyst með tilliti einnar breytu. | Notið þegar jöfnurnar eru á stöðluðu formi. |

**DÆMI 5.34**

Ákvarðið fyrir hvert línulegt jöfnuhneppi hvort hentugra sé að leysa það með innsetningaraðferð eða eyðingaraðferð. Rökstyðjið svarið.

ⓐ $\begin{cases} 3x + 8y = 40 \\ 7x - 4y = -32 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} 5x + 6y = 12 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

### Lausn

1. ⓐ { 3 x + 8 y = 40 7 x − 4 y = −32 Þar sem báðar jöfnurnar eru á staðalformi er hentugast að nota eyðingaraðferð. $\begin{cases} 3x + 8y = 40 \\ 7x - 4y = -32 \end{cases}$

2. ⓑ $\begin{cases} 5x + 6y = 12 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$

Þar sem önnur jafnan er þegar leyst fyrir y er hentugast að nota innsetningaraðferð.

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.67**

Ákvarðið fyrir hvert línulegt jöfnuhneppi hvort hentugra sé að leysa það með innsetningaraðferð eða eyðingaraðferð. Rökstyðjið svarið.

ⓐ ⓑ $\begin{cases} 4x - 5y = -32 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 3x - 5y = -7 \end{cases}$

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.68**

Ákvarðið fyrir hvert línulegt jöfnuhneppi hvort hentugra sé að leysa það með innsetningaraðferð eða eyðingaraðferð. Rökstyðjið svarið.

ⓐ ⓑ $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x - 4y = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ 3x + 7y = -13 \end{cases}$

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið fleiri útskýringar og verkefni um hvernig línuleg jöfnuhneppi eru leyst með eyðingaraðferð.

- Kennslumyndband: Jöfnuhneppi leyst með eyðingu
- Kennslumyndband: Leyst með eyðingu
- Kennslumyndband: Jöfnuhneppi leyst með eyðingu

## Verkefni úr hluta 5.3

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð**

Leysið jöfnuhneppin hér á eftir með eyðingaraðferð.

126.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ -3x - y = 0 \end{cases}$$

127.

$$\begin{cases} -3x + y = -9 \\ x - 2y = -12 \end{cases}$$

128.

$$\begin{cases} 6x - 5y = -1 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$$

129.

$$\begin{cases} 3x - y = -7 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$$

130.

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

131.

$$\begin{cases} x + y = -8 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

132.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + 2y = 9 \end{cases}$$

133.

$$\begin{cases} -7x + 6y = -10 \\ x - 6y = 22 \end{cases}$$

134.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -3 \\ -x - 2y = -19 \end{cases}$$

135.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -5x - 4y = -7 \end{cases}$$

136.

$$\begin{cases} 6x + 4y = -4 \\ -6x - 5y = 8 \end{cases}$$

137.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

138.

$$\begin{cases} 5x - 7y = 29 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$$

139.

$$\begin{cases} 6x - 5y = -75 \\ -x - 2y = -13 \end{cases}$$

140.

$$\begin{cases} -x + 4y = 8 \\ 3x + 5y = 10 \end{cases}$$

141.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x - y = 17 \end{cases}$$

142.

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

143.

$$\begin{cases} 7x + y = -4 \\ 13x + 3y = 4 \end{cases}$$

144.

$$\begin{cases} -3x + 5y = -13 \\ 2x + y = -26 \end{cases}$$

145.

$$\begin{cases} 3x - 5y = -9 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$$

146.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 3 \\ 2x + 5y = -31 \end{cases}$$

147.

$$\begin{cases} 4x + 7y = 14 \\ -2x + 3y = 32 \end{cases}$$

148.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 21 \\ 7x - 4y = 9 \end{cases}$$

149.

$$\begin{cases} 3x + 8y = -3 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$$

150.

$$\begin{cases} 11x + 9y = -5 \\ 7x + 5y = -1 \end{cases}$$

151.



$$\begin{cases} 3x + 8y = 67 \\ 5x + 3y = 60 \end{cases}$$

152.

$$\begin{cases} 2x + 9y = -4 \\ 3x + 13y = -7 \end{cases}$$

153.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = -3 \\ x + \frac{5}{2}y = 2 \end{cases}$$

154.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y = 3 \end{cases}$$

155.

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -2 \end{cases}$$

156.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = -3 \\ \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}y = 3 \end{cases}$$

157.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

158.

$$\begin{cases} x - 4y = -1 \\ -3x + 12y = 3 \end{cases}$$

159.

$$\begin{cases} -3x - y = 8 \\ 6x + 2y = -16 \end{cases}$$

160.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 20x + 15y = 10 \end{cases}$$

161.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -6x - 4y = -12 \end{cases}$$



162.

$$\begin{cases} 5x - 8y = 12 \\ 10x - 16y = 20 \end{cases}$$

163.

$$\begin{cases} -11x + 12y = 60 \\ -22x + 24y = 90 \end{cases}$$

164.

$$\begin{cases} 7x - 9y = 16 \\ -21x + 27y = -24 \end{cases}$$

165.

$$\begin{cases} 5x - 3y = 15 \\ y = \frac{5}{3}x - 2 \end{cases}$$

166.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 7 \\ y = -\frac{1}{2}x - 4 \end{cases}$$

**Leysið hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með eyðingaraðferð**

Setjið verkefnin hér á eftir fram sem jöfnuhneppi og leysið þau.

**167.** Summa tveggja talna er 65. Mismunur þeirra er 25. Finnið tölurnar.

**168.** Summa tveggja talna er 37. Mismunur þeirra er 9. Finnið tölurnar.

**169.** Summa tveggja talna er $-27$. Mismunur þeirra er $-59$. Finnið tölurnar.

**170.** Summa tveggja talna er $-45$. Mismunur þeirra er $-89$. Finnið tölurnar.

**171.** Andrea kaupir nýjar skyrtur og peysur. Hún getur keypt 3 skyrtur og 2 peysur fyrir \$114 eða 2 skyrtur og 4 peysur fyrir \$164. Hvað kostar skyrta? Hvað kostar peysa?

**172.** Peter kaupir skrifstofuvörur. Hann getur keypt 3 pappírspakka og 4 heftara fyrir \$40 eða 5 pappírspakka og 6 heftara fyrir \$62. Hvað kostar pappírspakki? Hvað kostar heftari?

**173.** Heildarmagn natríums í 2 pylsum og 3 bollum af kotasælu er 4720 mg. Heildarmagn natríums í 5 pylsum og 2 bollum af kotasælu er 6300 mg. Hve mikið natríum er í einni pylsu? Hve mikið er í einum bolla af kotasælu?

**174.** Heildarfjöldi hitaeininga í 2 pylsum og 3 bollum af kotasælu er 960. Heildarfjöldi hitaeininga í 5 pylsum og 2 bollum af kotasælu er 1190. Hve margar hitaeiningar eru í einni pylsu? Hve margar eru í einum bolla af kotasælu?

5

### Veljið hentugustu aðferðina til að leysa línulegt jöfnuhneppi

Ákvarðið í verkefnunum hér á eftir hvort hentugra sé að leysa jöfnuhneppið með innsetningaraðferð eða eyðingaraðferð.

175.

ⓐ $\begin{cases} 8x - 15y = -32 \\ 6x + 3y = -5 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} x = 4y - 3 \\ 4x - 2y = -6 \end{cases}$

176.

ⓐ $\begin{cases} y = 7x - 5 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} 12x - 5y = -42 \\ 3x + 7y = -15 \end{cases}$

177.

ⓐ $\begin{cases} y = 4x + 9 \\ 5x - 2y = -21 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} 9x - 4y = 24 \\ 3x + 5y = -14 \end{cases}$

178.

ⓐ $\begin{cases} 14x - 15y = -30 \\ 7x + 2y = 10 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} x = 9y - 11 \\ 2x - 7y = -27 \end{cases}$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

179.

Norris rær 3 mílur á móti straumi á 1 klukkustund. Það er jafn langur tími og það tekur hann að róa 5 mílur með straumi. Leysið hneppið $\begin{cases} r - c = 3 \\ r + c = 5 \end{cases}$

1. ⓐ Leysið fyrir $r$, róðrarhraða hans í kyrru vatni.
2. ⓑ Leysið síðan fyrir $c$, straumhraða árinnar.

180.

Josie vill búa til 10 pund af hnetu- og rúsínublöndu og hún á að kosta samtals $54. Hnetur kosta $6 pundið og rúsínur $3 pundið. Leysið hneppið til að finna $\begin{cases} n + r = 10 \\ 6n + 3r = 54 \end{cases}$ $n$, fjölda punda af hnetum, og $r$, fjölda punda af rúsínum sem hún á að nota.

### *Ritunarverkefni*

181.

Leysið hneppið

$\begin{cases} x + y = 10 \\ 5x + 8y = 56 \end{cases}$

ⓐ með innsetningaraðferð ⓑ með grafískri aðferð ⓒ Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

182.

Leysið hneppið

$\begin{cases} x + y = -12 \\ y = 4 - \frac{1}{2}x \end{cases}$

ⓐ með innsetningaraðferð ⓑ með grafískri aðferð ⓒ Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst jöfnuhneppi með eyðingaraðferð. | | | |
| leyst hagnýt verkefni um jöfnuhneppi með eyðingaraðferð. | | | |
| valið hentugustu aðferðina til að leysa línulegt jöfnuhneppi. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn ykkur um tök ykkar á efni þessa hluta? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 5.4 Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi
- Leysið hagnýt verkefni sem setja má beint fram með jöfnuhneppi
- Leysið rúmfræðiverkefni
- Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

**UNDIRBÚNINGUR 5.10**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Summa tvöfaldrar tölu og níu er 31. Finnið töluna. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 3.4.



**UNDIRBÚNINGUR 5.11**

Samanlagðar tekjur tvíburanna Jons og Rons á síðasta ári voru $96.000. Tekjur Rons voru $8.000 hærri en þrefaldar tekjur Jons. Hve miklar voru tekjur hvors þeirra? Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 3.11.

**UNDIRBÚNINGUR 5.12**

Alessio hjólar í $3\frac{1}{2}$ klukkustundir á hraðanum 10 mílur á klukkustund. Hve langt hjólaði hann? Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 2.58.

Fyrr í þessum kafla leystum við nokkur hagnýt verkefni með línulegum jöfnuhneppum. Í þessum hluta skoðum við tilteknar gerðir verkefna sem tengja tvær stærðir. Við setjum verkefnin fram sem línulegar jöfnur, veljum hentugustu lausnaraðferðina og leysum síðan hneppin.

Við notum verkefnalausnaraðferðina fyrir línuleg jöfnuhneppi.

**AÐFERÐ**

### Notið verkefnalausnaraðferð fyrir línuleg jöfnuhneppi.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.

3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að. Veljið breytur sem tákna þessar stærðir.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram yfir í jöfnuhneppi.
5. Skref 5. Leysið jöfnuhneppið með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannprófið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

## Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi

Mörg verkefnanna sem við leystum fyrr tengdu tvær stærðir. Hér eru tvö verkefni úr kaflanum um stærðfræðilíkön.

- Summa tveggja talna er mínus fjórtán. Ein tala er fjórum minni en hin. Finnið tölurnar.
- Samanlagðar árstekjur hjónanna eru $110.000. Tekjur eiginkonunnar eru $16.000 lægri en tvöfaldar tekjur eiginmannsins. Hverjar eru tekjur eiginmannsins?

Í þeim kafla settum við hverjar aðstæður fram sem eina jöfnu með aðeins einni breytu. Stundum reyndist dálítið snúið að gefa stærðunum tveimur heiti, ekki satt?

Skoðum hvernig setja má þessi tvö verkefni fram sem jöfnuhneppi með tveimur breytum. Við einbeitum okkur að skrefum 1 til 4 í verkefnalausnaraðferðinni.

5

---

**DÆMI 5.35**

## Að setja verkefni fram sem jöfnuhneppi

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi:

Summa tveggja talna er mínus fjórtán. Ein tala er fjórum minni en hin. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að þið skiljið öll orð og hugmyndir. | Þetta er talnadæmi. | Summa tveggja talna er mínus fjórtán. Önnur talan er fjórum minni en hin. Finnið tölurnar. |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | „Finnið tölurnar.“ | Við leitum að 2 tölum. |
| **Skref 3.** Tilgreinið hvað á að finna. Veljið breytur sem tákna þessar stærðir. | Við notum tvær breytur, $m$ og $n$. | Látum $m$ = ein tala<br>$n$ = önnur tala |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Þýðið yfir í jöfnuheppi. | Við skrifum eina jöfnu fyrir hverja setningu. | Summa talnanna er −14<br>$m+n = -14$<br>Önnur talan er fjórum lægri en hin<br>$m = n-4$<br>Jöfnuheppið er: $\begin{cases} m+n=-14 \\ m=n-4 \end{cases}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 5.69**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuheppi:

Summa tveggja talna er mínus tuttugu og þrír. Önnur talan er 7 minni en hin. Finnið tölurnar.

**REYNIÐ SJÁLF 5.70**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuheppi:

Summa tveggja talna er mínus átján. Önnur talan er 40 stærri en hin. Finnið tölurnar.

Í næsta verkefni hættum við þegar við höfum sett fram jöfnuheppið.

**DÆMI 5.36**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuheppi:

Samanlagðar árstekjur hjónanna eru $110.000. Tekjur eiginkonunnar eru $16.000 lægri en tvöfaldar tekjur eiginmannsins. Hverjar eru tekjur eiginmannsins?

## Lausn

| | |
|---|---|
| Við leitum að tekjum hvors hjónanna. | Látum $h=$ tákna tekjur eiginmannsins og<br>$w=$ tákna tekjur eiginkonunnar. |
| Setjið verkefnið fram. | Samanlagðar tekjur hjónanna eru $110.000. |
| | $w+h=110.000$ |
| | Tekjur eiginkonunnar eru $16.000 lægri en tvöfaldar tekjur eiginmannsins. |
| | $w=2h-16.000$ |
| Jöfnuheppið er: | $\begin{cases} w+h=110.000 \\ w=2h-16.000 \end{cases}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 5.71**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi:

Samanlagðar heimilistekjur hjónanna eru $84.000. Tekjur eiginmannsins eru $18.000 lægri en tvöfaldar tekjur eiginkonunnar. Hverjar eru tekjur eiginkonunnar?

**REYNIÐ SJÁLF 5.72**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi:

Tímakaup reynds starfsmanns er $5 lægra en tvöfalt tímakaup nýs starfsmanns. Samanlagt tímakaup þeirra er $43. Hvert er tímakaup hvors starfsmanns?

## Leysið hagnýt verkefni sem setja má beint fram með jöfnuhneppi

Í dæmi 5.35 og dæmi 5.36 settum við fram jöfnuhneppi en leystum þau ekki. Nú setjum við aðstæður fram sem jöfnuhneppi og leysum það síðan.

**DÆMI 5.37**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Devon er 26 árum eldri en sonur hans, Cooper. Samanlagður aldur þeirra er 50 ár. Finnið aldur þeirra.

### Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að aldri Devons og Coopers. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $d=$ tákna aldur Devons og $c=$ tákna aldur Coopers. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram yfir í jöfnuhneppi. | Devon er 26 árum eldri en Cooper. |
| | $d = c + 26$ |
| | Samanlagður aldur þeirra er 50 ár. |
| | $d + c = 50$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases} d = c + 26 \\ d + c = 50 \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Notið innsetningu. | $\begin{cases} d = c + 26 \\ d + c = 50 \end{cases}$ <br> $d + c = 50$ |
| Setjið c + 26 inn í seinni jöfnuna. | $c + 26 + c = 50$ |
| Leysið fyrir c. | $2c + 26 = 50$ |
| | $2c = 24$ |

| | |
|---|---|
| | $c = 12$<br>$d = c + 26$ |
| Setjið c = 12 inn í fyrri jöfnuna og leysið síðan fyrir d. | $d = 12 + 26$ |
| | $d = 38$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu. | Er Devon 26 árum eldri en Cooper? Já, 38 er 26 meira en 12. Er samanlagður aldur þeirra 50 ár? Já, 38 plús 12 er 50. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Devon er 38 ára og Cooper 12 ára. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.73**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Ali er 12 árum eldri en yngsta systir hans, Jameela. Samanlagður aldur þeirra er 40 ár. Finnið aldur þeirra.

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.74**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Aldur föður Jakes er 3 sinnum aldur Jakes að viðbættum 6 árum. Samanlagður aldur þeirra er 42 ár. Finnið aldur þeirra.

**DÆMI 5.38**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Þegar Jenna var í 10 mínútur á sporöskjulaga þjálfunartæki og tók síðan hringþjálfun í 20 mínútur sýndi líkamsræktarforritið að hún hefði brennt 278 hitaeiningum. Þegar hún var í 20 mínútur á þjálfunartækinu og tók hringþjálfun í 30 mínútur brenndi hún 473 hitaeiningum. Hve mörgum hitaeiningum brennir hún á mínútu á þjálfunartækinu? Hve mörgum hitaeiningum brennir hún á mínútu í hringþjálfun?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að fjölda hitaeininga sem Jenna brennir á hverri mínútu á sporöskjulaga þjálfunartækinu og á hverri mínútu í hringþjálfun. |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $e=$ tákna fjölda hitaeininga sem Jenna brennir á mínútu á sporöskjulaga þjálfunartækinu og<br>$c=$ tákna fjölda hitaeininga sem hún brennir á mínútu í hringþjálfun. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram yfir í jöfnuhneppi. | Á 10 mínútum á sporöskjulaga þjálfunartækinu og 20 mínútum í hringþjálfun brenndi Jenna 278 hitaeiningum |
| | $10e+20c=278$ |
| | Á 20 mínútum á sporöskjulaga þjálfunartækinu og 30 mínútum í hringþjálfun brenndi Jenna 473 hitaeiningum |
| | $20e+30c=473$ |
| Jöfnuhneppið er: | $\begin{cases}10e+20c=278\\20e+30c=473\end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. | |
| Margfaldið fyrri jöfnuna með $-2$ til að gera stuðla e að samlagningarandhverfum. | $\begin{cases}-2(10e+20c)=-2(278)\\20e+30c=473\end{cases}$ |
| Einfaldið og leggið jöfnurnar saman. Leysið fyrir c. | $\begin{cases}-20e-40c=-556\\20e+30c=473\end{cases}$<br>$-10c=-83$<br>$c=8{,}3$ |
| Setjið c = 8,3 inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysið fyrir e. | $10e+20c=278$ |
| | $10e+20(8{,}3)=278$ |
| | $10e+166=278$ |
| | $10e=112$ |
| | $e=11{,}2$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu. | Sannreynið útreikningana sjálf. |
| $\begin{cases}10(11{,}2)+20(8{,}3)\stackrel{?}{=}278\\20(11{,}2)+30(8{,}3)\stackrel{?}{=}473\end{cases}$ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Jenna brennir 8,3 hitaeiningum á mínútu í hringþjálfun og 11,2 hitaeiningum á mínútu á sporöskjulaga þjálfunartækinu. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.75**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Mark fór í líkamsrækt og stundaði Bikram-heitt jóga í 40 mínútur og sprellikarlahopp í 10 mínútur. Hann brenndi 510 hitaeiningum. Næst þegar hann fór í líkamsrækt stundaði hann Bikram-heitt jóga í 30 mínútur og sprellikarlahopp í 20 mínútur og brenndi 470 hitaeiningum. Hve mörgum hitaeiningum brenndi hann á hverri mínútu í jóga? Hve mörgum hitaeiningum brenndi hann á hverri mínútu í sprellikarlahoppum?

**REYNIÐ SJÁLF 5.76**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Erin var í 30 mínútur á róðrarvél og lyfti lóðum í 20 mínútur í líkamsræktarstöðinni og brenndi 430 hitaeiningum. Í næstu heimsókn var hún í 50 mínútur á róðrarvélinni og lyfti lóðum í 10 mínútur og brenndi 600 hitaeiningum. Hve mörgum hitaeiningum brenndi hún á hverri mínútu á róðrarvélinni? Hve mörgum hitaeiningum brenndi hún á hverri mínútu í lyftingum?



## Leysið rúmfræðiverkefni

Þegar við lærðum um stærðfræðilíkön leystum við rúmfræðiverkefni með eiginleikum þríhyrninga og rétthyrninga. Nú bætum við nokkrum eiginleikum horna við listann.

Hornastærðir tveggja lagshorna eru samtals 90 gráður. Hornastærðir tveggja frændhorna eru samtals 180 gráður.

**LAGSHORN OG FRÆNDHORN**

Tvö horn eru lagshorn ef hornastærðir þeirra eru samtals 90 gráður.

Tvö horn eru frændhorn ef hornastærðir þeirra eru samtals 180 gráður.

Ef tvö horn eru lagshorn segjum við að annað hornið sé lagshorn hins.

Ef tvö horn eru frændhorn segjum við að annað hornið sé frændhorn hins.

**DÆMI 5.39**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Mismunur tveggja lagshorna er 26 gráður. Finnið hornastærðirnar.

### Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að stærð hvors horns. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $x=$ tákna stærð fyrra hornsins $x=$. Látum $m=$ tákna stærð seinna hornsins. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram yfir í jöfnuhneppi. | Hornin eru lagshorn.<br>$x+y=90$ |
| | Mismunur hornanna tveggja er 26 gráður.<br>$x-y=26$ |
| Jöfnuhneppið er | $\begin{cases} x+y=90 \\ x-y=26 \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið með eyðingaraðferð. | $\begin{cases} x+y=90 \\ x-y=26 \end{cases}$<br>$2x \quad = 116$ |
| Setjið $x=58$ inn í fyrri jöfnuna. | $\begin{aligned} x+y &= 90 \\ 58+y &= 90 \\ y &= 32 \end{aligned}$ |
| **Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu.<br>$58+32 = 90$✓<br>$58-32 = 26$✓ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Hornastærðirnar eru 58 gráður og 32 gráður. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.77**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Mismunur tveggja lagshorna er 20 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**REYNIÐ SJÁLF 5.78**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Mismunur tveggja lagshorna er 80 gráður. Finnið hornastærðirnar.

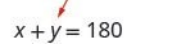
**DÆMI 5.40**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Tvö horn eru frændhorn. Stærð stærra hornsins er tólf gráðum minni en fimmföld stærð þess minna. Finnið stærð beggja hornanna.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að stærð hvors horns. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $x=$ tákna stærð fyrra hornsins og<br>$y=$ tákna stærð seinna hornsins. |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram yfir í jöfnuhneppi. | Hornin eru frændhorn. |
| | $x+y=180$ |
| | Stærð stærra hornsins er tólf gráðum minni en fimmföld stærð þess minna |
| | $y=5x-12$ |
| Jöfnuhneppið er: Skref 5. Leysið jöfnuhneppið með innsetningaraðferð. | $\begin{cases} x+y=180 \\ y=5x-12 \end{cases}$  $x+y=180$ |
| Setjið 5x – 12 inn fyrir y í fyrri jöfnunni. | $x+5x-12=180$ |
| Leysið fyrir x. | $6x-12=180$ |
| | $6x=192$ |
| | $x=32$  $y=5x-12$ |
| Setjið 32 inn fyrir x í seinni jöfnunni og leysið síðan fyrir y. | $y=5\cdot 32-12$ |
| | $y=160-12$ |
| | $y=148$ |

**Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu.

$$\begin{aligned} 32+158 &= 180\ \checkmark \\ 5\cdot 32-12 &= 147\ \checkmark \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Hornastærðirnar eru 148 og 32. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.79**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Tvö horn eru frændhorn. Stærð stærra hornsins er 12 gráðum meiri en þreföld stærð þess minna. Finnið hornastærðirnar.

**REYNIÐ SJÁLF 5.80**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

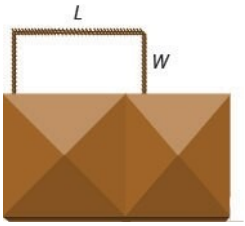
Tvö horn eru frændhorn. Stærð stærra hornsins er 18 gráðum minni en tvöföld stærð þess minna. Finnið hornastærðirnar.

**DÆMI 5.41**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Randall hefur 125 fet af girðingu til að girða af rétthyrndan hluta bakgarðsins við húsið. Hann þarf aðeins að girða þrjár hliðar því fjórða hliðin verður húsveggurinn. Hann vill að lengd hins afgirta svæðis, samsíða húsveggnum, sé 5 fetum meiri en fjórföld breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að lengdinni og breiddinni. |
| |  |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $L=$ tákna lengd afgirta svæðisins og $W=$ tákna breidd þess. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram yfir í jöfnuhneppi. | Ein lengd og tvær breiddir eru samtals 125. |
| | $L+2W=125$ |
| | Lengdin verður 5 fetum meiri en fjórföld breiddin. |
| | $L=4W+5$ |
| Jöfnuhneppið er: Skref 5. Leysið jöfnuhneppið með innsetningaraðferð. | $\begin{cases} L+2W=125 \\ L=4W+5 \end{cases}$<br>$L+2W=125$ |
| Setjið L = 4W + 5 inn í fyrri jöfnuna og leysið síðan fyrir W. | $4W+5+2W=125$ |
| | $6W+5=125$ |
| | $6W=120$ |
| Setjið 20 inn fyrir W í seinni jöfnunni og leysið síðan fyrir L. | $W=20$<br>$L=4W+5$ |
| | $L=4\cdot 20+5$ |
| | $L=80+5$ |
| | $L=85$ |

**Skref 6.** Athugið svarið í verkefninu.

$$\begin{aligned} 20 + 28 + 20 &= 125 \checkmark \\ 85 &= 4 \cdot 20 + 5 \checkmark \end{aligned}$$

**Skref 7.** Svarið spurningunni. Lengdin er 85 fet og breiddin 20 fet.

**REYNIÐ SJÁLF 5.81**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Mario vill setja rétthyrnda girðingu umhverfis sundlaugina í bakgarðinum. Þar sem ein hliðin liggur að húsinu þarf hann aðeins að girða þrjár hliðar. Tvær hliðar eru langar og styttri hliðin liggur samsíða húsinu. Hann þarf 155 fet af girðingu umhverfis sundlaugina. Langhliðin er 10 fetum styttri en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd svæðisins umhverfis sundlaugina.

**REYNIÐ SJÁLF 5.82**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Alexis vill útbúa rétthyrnt hundagerði í garðinum við girðingu nágrannans. Hún notar 136 fet af girðingu til að loka hundagerðinu alveg. Lengd hundagerðisins meðfram girðingu nágrannans verður 16 fetum styttri en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd hundagerðisins.



## Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

Þegar við kynntum verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða notuðum við töflu til að skipuleggja upplýsingarnar. Við höldum áfram að nota töfluna hér. Grunnjafnan var D = rt, þar sem D er vegalengdin, r er hraðinn og t er tíminn.

Fyrsta verkefnið okkar um hreyfingu með jöfnum hraða lýsir aðstæðum sem svipar til þeirra sem við höfum þegar séð, en nú getum við notað tvær breytur og tvær jöfnur.

**DÆMI 5.42**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Joni lagði af stað frá St. Louis eftir þjóðveginum vestur í átt að Denver á hraðanum 65 mílur á klukkustund. Hálfri klukkustund síðar lagði Kelly af stað frá St. Louis sömu leið og Joni, á hraðanum 78 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tekur það Kelly að ná Joni?

### Lausn

Skýringarmynd hjálpar okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur.




**Finnið og nefnið það sem leitað er að. Tafla hjálpar okkur að skipuleggja gögnin. Við þekkjum hraða bæði Joni og Kelly og skráum því báða hraðana í töfluna.**

Við leitum að aksturstíma Kelly, k, og Joni, j. Þar sem

$D = r \cdot t$ getum við fyllt út dálkinn Vegalengd.

| Tegund | Hraði | • Tími | = Vegalengd |
|---|---|---|---|
| Joni | 65 | $j$ | $65j$ |
| Kelly | 78 | $k$ | $78k$ |

**Setjið verkefnið fram** yfir í jöfnuhneppi. Til að setja fram jöfnuhneppið þurfum við að átta okkur á því að Kelly og Joni aka sömu vegalengd. Því er

$65\,j = 78\,k$.

Þar sem Kelly lagði síðar af stað verður aksturstími hennar einnig $\frac{1}{2}$ klukkustund skemur en Joni. Því er

$k = j - \frac{1}{2}$.

Nú höfum við jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} k = j - \frac{1}{2} \\ 65j = 78k \end{cases}$$

**Leysið** jöfnuhneppið með innsetningaraðferð.

$65j = 78k$

Setjið $k = j - \frac{1}{2}$ inn í seinni jöfnuna og leysið síðan fyrir j.

$65j = 78\left(j - \frac{1}{2}\right)$

$65j = 78j - 39$

$-13j = -39$

$j = 3$

Til að finna aksturstíma Kelly skuluð þið setja j = 3 inn í fyrri jöfnuna og leysa síðan fyrir k.

$k = j - \frac{1}{2}$

$k = 3 - \frac{1}{2}$

$k = \frac{5}{2}$ or $k = 2\frac{1}{2}$

**Sannreynið svarið í verkefninu. Joni: 3 klukkustundir (65 mílur á klst.) = 195 mílur. Kelly:**

$2\frac{1}{2}$ klukkustundir (78 mílur á klst.) = 195 mílur.

Já, þær hafa ekið sömu vegalengd þegar Kelly nær Joni.

**Svarið** spurningunni.

Kelly nær Joni eftir $2\frac{1}{2}$ klukkustundir. Þá hefur Joni ekið í 3 klukkustundir.

**REYNIÐ SJÁLF 5.83**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan: Mitchell lagði af stað frá Detroit eftir þjóðveginum suður í átt að Orlando á hraðanum 60 mílur á klukkustund. Clark lagði af stað frá Detroit 1 klukkustund síðar og ók sömu leið og Mitchell á hraðanum 75 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tekur það Clark að ná Mitchell?

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.84**

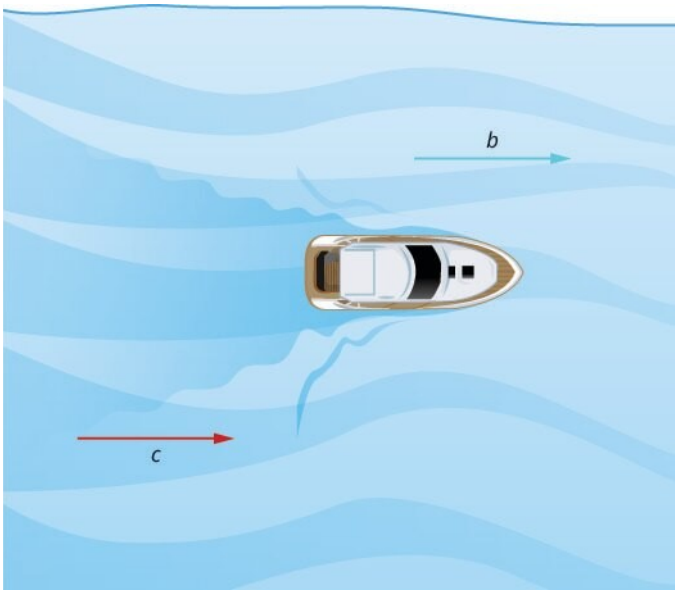
Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan: Charlie lagði af stað frá húsi móður sinnar á meðalhraðanum 36 mílur á klukkustund. Sally systir hans lagði af stað 15 mínútum (1/4 klukkustund) síðar og fór sömu leið á meðalhraðanum 42 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tekur það Sally að ná Charlie?

Í mörgum raunverulegum verkefnum um hreyfingu með jöfnum hraða hafa straumar í vatni eða lofti áhrif á raunverulegan hraða farartækis. Flug þvert yfir Bandaríkin tekur yfirleitt lengri tíma til vesturs en austurs vegna ríkjandi vindstrauma.

Skoðum bát sem siglir eftir ánni. Eftir því í hvora áttina báturinn fer hægir straumurinn annaðhvort á honum eða eykur hraða hans.

Mynd 5.7 og mynd 5.8 sýna hvernig árstraumur hefur áhrif á raunverulegan hraða báts. Við táknum hraða bátsins í kyrru vatni með b og hraða árstraumsins með c.

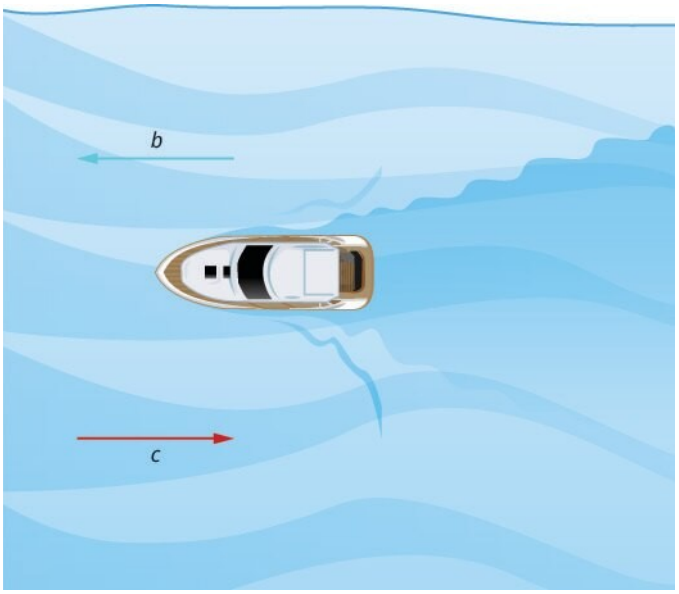
Á mynd 5.7 fer báturinn niður ána, í sömu átt og árstraumurinn. Straumurinn hjálpar bátnum áfram og raunverulegur hraði hans er því meiri en hraðinn í kyrru vatni. Raunverulegur hraði bátsins er b + c.




Mynd 5.7

Á mynd 5.8 fer báturinn upp ána, gegn árstraumnum. Straumurinn vinnur gegn bátnum og raunverulegur hraði hans er því minni en hraðinn í kyrru vatni. Raunverulegur hraði bátsins er $b - c$.






Mynd 5.8

Í dæmi 5.43 setjum við tölur inn í þessar aðstæður.

---

**DÆMI 5.43**

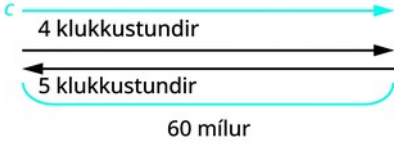
Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Skemmtiferðaskip sigldi 60 mílur niður ána á 4 klukkustundum og var síðan 5 klukkustundir að sigla upp ána aftur að bryggjunni. Finnið hraða skipsins í kyrru vatni og hraða árstraumsins.

## Lausn

**Lesið** verkefnið.

Þetta er verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða og mynd hjálpar okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur.




**Finnið** það sem leitað er að.

Við leitum að hraða skipsins í kyrru vatni og hraða straumsins.

**Nefnið** það sem leitað er að.

Látum $s =$ tákna hraða skipsins í kyrru vatni og $c =$ tákna hraða straumsins.

5

Tafla hjálpar okkur að skipuleggja upplýsingarnar. Skipið siglir niður ána og síðan upp hana. Þegar það siglir niður ána hjálpar straumurinn skipinu og raunverulegur hraði þess er því s + c. Þegar það siglir upp ána hægir straumurinn á skipinu og raunverulegur hraði þess er því s − c.

| | Hraði | • Tími = Vegalengd | |
|---|---|---|---|
| með straumi | $s + c$ | 4 | 60 |
| á móti straumi | $s - c$ | 5 | 60 |

Það tekur 4 klukkustundir að sigla niður ána. Það tekur 5 klukkustundir að sigla upp hana. Vegalengdin er 60 mílur í hvora átt.

**Setjið verkefnið fram** yfir í jöfnuhneppi. Hraði sinnum tími er vegalengd og því getum við skrifað jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} 4(s + c) = 60 \\ 5(s - c) = 60 \end{cases}$$

**Leysið** jöfnuhneppið. Margfaldið inn í sviga til að setja báðar jöfnurnar á staðalform og leysið síðan með eyðingaraðferð.

$$\begin{cases} 4s + 4c = 60 \\ 5s - 5c = 60 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| Margfaldið efri jöfnuna með 5 og neðri jöfnuna með 4. Leggið jöfnurnar saman og leysið síðan fyrir s. | $\begin{aligned} 20s + 20c &= 300 \\ 20s - 20c &= 240 \\ \hline 40s \quad &= 540 \end{aligned}$ |
| Setjið s = 13,5 inn í aðra upphaflegu jöfnuna. | $s = 13{,}5$<br>$4(s + c) = 60$ |
| | $4(13{,}5 + c) = 60$ |
| | $54 + 4c = 60$ |
| | $4c = 6$ |
| | $c = 1{,}5$ |
| **Sannreynið svarið í verkefninu. Hraðinn niður ána væri 13,5 + 1,5 = 15 mílur á klukkustund. Á 4 klukkustundum færi skipið 15 · 4 = 60 mílur. Hraðinn upp ána væri 13,5 − 1,5 = 12 mílur á klukkustund. Á 5 klukkustundum færi skipið 12 · 5 = 60 mílur.** | |
| **Svarið** spurningunni. | Hraði skipsins er 13,5 mílur á klukkustund og hraði straumsins 1,5 mílur á klukkustund. |

5

### REYNIÐ SJÁLF 5.85

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan: Skemmtibátur á Mississippi sigldi 120 mílur upp ána á 12 klukkustundum og var síðan 10 klukkustundir að snúa aftur að bryggjunni. Finnið hraða bátsins í kyrru vatni og hraða árstraumsins.

### REYNIÐ SJÁLF 5.86

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan: Jason réri kanó sínum 24 mílur upp ána á 4 klukkustundum. Það tók hann 3 klukkustundir að róa til baka. Finnið hraða kanósins í kyrru vatni og hraða árstraumsins.

Vindstraumar hafa áhrif á hraða flugvéla á sama hátt og vatnsstraumar á hraða báta. Við sjáum þetta í dæmi 5.44. Vindur í sömu átt og flugvélin flýgur nefnist meðvindur. Vindur gegn flugstefnunni nefnist mótvindur.

**DÆMI 5.44**

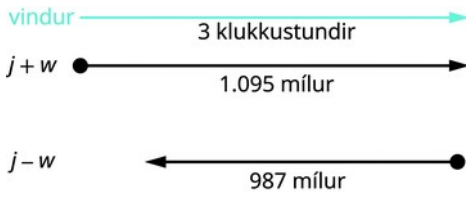
Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan:

Einkaþota getur flogið 1095 mílur á þremur klukkustundum í meðvindi en aðeins 987 mílur á þremur klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

## Lausn

**Lesið** verkefnið.

Þetta er verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða og mynd hjálpar okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur.




5

**Finnið** það sem leitað er að.

Við leitum að hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðanum.

**Nefnið** það sem leitað er að.

Látum $j =$ tákna hraða þotunnar í kyrru lofti og $w =$ tákna vindhraðann.

Tafla hjálpar okkur að skipuleggja upplýsingarnar. Þotan fer tvær ferðir, aðra í meðvindi og hina í mótvindi. Í meðvindi hjálpar vindurinn þotunni og hraðinn er j + w. Í mótvindi hægir vindurinn á þotunni og hraðinn er j − w.

| | Hraði · tími = vegalengd | | |
|---|---|---|---|
| meðvindur | $j + w$ | 3 | 1095 |
| mótvindur | $j - w$ | 3 | 987 |

Hvor ferð tekur 3 klukkustundir. Í meðvindi flýgur þotan 1095 mílur. Í mótvindi flýgur hún 987 mílur.

**Setjið verkefnið fram** yfir í jöfnuhneppi. Hraði sinnum tími er vegalengd og því fáum við jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} 3(j + w) = 1095 \\ 3(j - w) = 987 \end{cases}$$

**Leysið** jöfnuhneppið. Margfaldið inn í sviga og leysið síðan með eyðingaraðferð.

$$\begin{cases} 3j + 3w = 1095 \\ 3j - 3w = 987 \end{cases}$$
$$6j = 2082$$

| | |
|---|---|
| Leggið saman og leysið fyrir j. Setjið j = 347 inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysið síðan fyrir w. | $j = 347$<br>$3(j + w) = 1095$ |
| | $3(347 + w) = 1095$ |
| | $1041 + 3w = 1095$ |
| | $3w = 54$ |
| | $w = 18$ |
| **Sannreynið svarið í verkefninu. Í meðvindi væri raunverulegur hraði þotunnar 347 + 18 = 365 mílur á klukkustund. Á 3 klukkustundum færi þotan 365 · 3 = 1095 mílur. Í mótvindi væri raunverulegur hraði þotunnar 347 − 18 = 329 mílur á klukkustund. Á 3 klukkustundum færi þotan 329 · 3 = 987 mílur.** | |
| **Svarið** spurningunni. | Hraði þotunnar er 347 mílur á klukkustund og vindhraðinn 18 mílur á klukkustund. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.87**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan: Lítil þota getur flogið 1.325 mílur á 5 klukkustundum í meðvindi en aðeins 1035 mílur á 5 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

**REYNIÐ SJÁLF 5.88**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið síðan: Farþegaþota getur flogið 1728 mílur á 4 klukkustundum í meðvindi en aðeins 1536 mílur á 4 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

## Verkefni úr hluta 5.4

***Æfingin skapar meistarann***

**Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið hneppið.

**183.** Summa tveggja talna er fimmtán. Önnur talan er þremur minni en hin. Finnið tölurnar.

**184.** Summa tveggja talna er tuttugu og fimm. Önnur talan er fimm minni en hin. Finnið tölurnar.

**185.** Summa tveggja talna er mínus þrjátíu. Önnur talan er fimmföld hin. Finnið tölurnar.

**186.** Summa tveggja talna er mínus sextán. Önnur talan er sjöföld hin. Finnið tölurnar.

**187.** Tvöföld tala að viðbættri þrefaldri annarri tölu er tuttugu og tveir. Þreföld fyrri talan að viðbættri fjórfaldri seinni tölunni er þrjátíu og einn. Finnið tölurnar.

**188.** Sexföld tala að viðbættri tvöfaldri annarri tölu er fjórir. Tvöföld fyrri talan að viðbættri fjórfaldri seinni tölunni er átján. Finnið tölurnar.

**189.** Þreföld tala að viðbættri þrefaldri annarri tölu er fimmtán. Fjórföld fyrri talan að viðbættri tvöfaldri seinni tölunni er fjórtán. Finnið tölurnar.

**190.** Tvöföld tala að viðbættri þrefaldri annarri tölu er mínus einn. Fyrri talan að viðbættri fjórfaldri seinni tölunni er tveir. Finnið tölurnar.

**191.** Samanlagðar tekjur hjónanna eru $75.000. Tekjur eiginmannsins eru $15.000 hærri en fimmfaldar tekjur eiginkonunnar. Hverjar eru tekjur eiginkonunnar?

**192.** Á tveimur árum í háskóla hafði nemandi samtals $9.500 í tekjur. Seinna árið voru tekjur hennar $500 hærri en tvöfaldar tekjur fyrra ársins. Hverjar voru tekjur hennar fyrra árið?

**193.** Daniela fjárfesti samtals $50.000, hluta á bundnum innlánsreikningi og afganginn í skuldabréfum. Fjárhæðin í skuldabréfum var $5000 meiri en tvöföld fjárhæðin á innlánsreikningnum. Hve mikið fjárfesti hún á hvorum stað?

**194.** Jorge fjárfesti $28.000 á tveimur reikningum. Fjárhæðin á peningamarkaðsreikningnum var $2.000 minni en tvöföld fjárhæðin á bundnum innlánsreikningi. Hve mikið fjárfesti hann á hvorum reikningi?

**195.** Síðustu tvö árin í háskóla fékk Marlene samtals $42.000 að láni. Lánsfjárhæð fyrra ársins var $6.000 lægri en þreföld lánsfjárhæð seinna ársins. Hve hátt lán fékk hún hvort ár?

**196.** Jen og David skulda $22.000 í lán vegna bílanna tveggja. Lánsfjárhæð vegna bíls Jens er $2000 lægri en tvöföld lánsfjárhæð vegna bíls Davids. Hve hátt er hvort bílalán?

**Leysið hagnýt verkefni sem setja má beint fram með jöfnuhneppi**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**197.** Alyssa er tólf árum eldri en Bethany systir hennar. Samanlagður aldur þeirra er fjörutíu og fjögur ár. Finnið aldur þeirra.

**198.** Robert er 15 árum eldri en Helen systir hans. Samanlagður aldur þeirra er sextíu og þrjú ár. Finnið aldur þeirra.

**199.** Aldur föður Noelle er sex árum minni en þrefaldur aldur hennar. Samanlagður aldur þeirra er sjötíu og fjögur ár. Finnið aldur þeirra.

**200.** Aldur föður Marks er 4 árum minni en tvöfaldur aldur hans. Samanlagður aldur þeirra er níutíu og fimm ár. Finnið aldur þeirra.

**201.** Tvö bensínílát rúma samtals fimmtíu gallon. Stóra ílátið rúmar tíu gallonum minna en tvöfalt rúmmál litla ílátsins. Hve mörg gallon rúmar hvort ílát?

**202.** June þarf 48 gallon af drykk fyrir veislu og hefur tvo misstóra kælikassa til að flytja hann. Stærri kassinn rúmar fimmfalt meira en sá minni. Hve mörg gallon rúmar hvor kassi?

**203.** Shelly skokkaði í 10 mínútur og hjólaði í 20 mínútur og brenndi 300 hitaeiningum. Daginn eftir víxlaði hún tímalengdunum, skokkaði í 20 mínútur og hjólaði í 10 mínútur, og brenndi jafnmörgum hitaeiningum. Hve mörgum hitaeiningum brenndi hún á hverri mínútu við skokk og hve mörgum á hverri mínútu við hjólreiðar?

**204.** Drew brenndi 1800 hitaeiningum á föstudegi þegar hann lék körfubolta í eina klukkustund og réri kanó í tvær klukkustundir. Á laugardegi lék hann körfubolta í tvær klukkustundir og réri kanó í þrjár klukkustundir og brenndi 3200 hitaeiningum. Hve mörgum hitaeiningum brenndi hann á klukkustund við körfubolta?

**205.** Troy og Lisa keyptu skólavörur. Þau keyptu bæði sams konar stílabækur og minnislykla en ekki sama fjölda. Troy keypti fjórar stílabækur og fimm minnislykla fyrir $116. Lisa keypti tvær stílabækur og þrjá minnislykla fyrir $68. Finnið verð hverrar stílabókar og hvers minnislykils.

**206.** Nancy keypti sjö pund af appelsínum og þrjú pund af banönum fyrir $17. Síðar keypti eiginmaður hennar þrjú pund af appelsínum og sex pund af banönum fyrir $12. Hvert var pundverð appelsínanna og bananana?

**Leysið rúmfræðiverkefni. Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.**

**207.** Mismunur tveggja lagshorna er 30 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**208.** Mismunur tveggja lagshorna er 68 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**209.** Mismunur tveggja frændhorna er 70 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**210.** Mismunur tveggja frændhorna er 24 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**211.** Mismunur tveggja frændhorna er 8 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**212.** Mismunur tveggja frændhorna er 88 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**213.** Mismunur tveggja lagshorna er 55 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**214.** Mismunur tveggja lagshorna er 17 gráður. Finnið hornastærðirnar.

**215.** Tvö horn eru frændhorn. Stærð stærra hornsins er fjórum gráðum meiri en þreföld stærð þess minna. Finnið stærð beggja hornanna.

**216.** Tvö horn eru frændhorn. Stærð stærra hornsins er fimm gráðum minni en fjórföld stærð þess minna. Finnið stærð beggja hornanna.

**217.** Tvö horn eru lagshorn. Stærð stærra hornsins er tólf gráðum minni en tvöföld stærð þess minna. Finnið stærð beggja hornanna.

**218.** Tvö horn eru lagshorn. Stærð stærra hornsins er tíu gráðum meiri en fjórföld stærð þess minna. Finnið stærð beggja hornanna.

**219.** Wayne hengir 45 feta langa ljósaseríu meðfram þremur hliðum rétthyrndrar verandar við húsið. Lengd verandarinnar, hliðin meðfram húsinu, er fimm fetum meiri en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd verandarinnar.

**220.** Darrin hengir 200 fet af jólaskrauti á þrjár hliðar girðingar um rétthyrndan framgarð. Lengdin, hliðin meðfram húsinu, er fimm fetum minni en þreföld breiddin. Finnið lengd og breidd girðingarinnar.

5

**221.** Ummál ramma utan um rétthyrnda fjölskyldumynd er 60 tommur. Lengdin er fimmtán tommum minni en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd rammans.

**222.** Ummál rétthyrnds leiksvæðis fyrir smábörn er 100 fet. Lengdin er tíu fetum meiri en þreföld breiddin. Finnið lengd og breidd leiksvæðisins.

**Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða. Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.**

**223.** Sarah lagði af stað frá Minneapolis austur eftir þjóðveginum á hraðanum 60 mílur á klukkustund. Systir hennar fór sömu leið tveimur klukkustundum síðar á hraðanum 70 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tekur það systur Söru að ná henni?

**224.** Háskólafélagarnir John og David óku heim í sama bæ um hátíðarnar. John ók á hraðanum 55 mílur á klukkustund en David lagði af stað klukkustund síðar og ók á hraðanum 60 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tekur það David að ná John?

**225.** Í lok vorfrís lagði Lucy af stað frá ströndinni heim á leið á hraðanum 40 mílur á klukkustund. Vinkona hennar lagði af stað heim 30 mínútum, eða hálfri klukkustund, síðar og ók á hraðanum 50 mílur á klukkustund. Hve langan tíma tók það vinkonuna að ná Lucy?

**226.** Felecia lagði af stað að heiman til að heimsækja dóttur sína á hraðanum 45 mílur á klukkustund. Eiginmaður hennar beið eftir að hundapassari kæmi og lagði af stað tuttugu mínútum (1/3 klukkustund) síðar. Hann ók á hraðanum 55 mílur á klukkustund til að ná Feleciu. Hve langan tíma tekur það hann að ná henni?

**227.** Jones-fjölskyldan réri 12 mílur á kanó niður Indian-fljótið á tveimur klukkustundum. Eftir hádegismat tók ferðin upp ána þrjár klukkustundir. Finnið hraða kanósins í kyrru vatni og hraða straumsins.

**228.** Vélbátur siglir 60 mílur niður ána á þremur klukkustundum en er fimm klukkustundir á leiðinni til baka upp ána. Finnið hraða bátsins í kyrru vatni og hraða straumsins.

**229.** Vélbátur sigldi 18 mílur niður ána á tveimur klukkustundum en vegna straumsins tók ferðin til baka upp ána 4,5 klukkustundir. Finnið hraða vélbátsins í kyrru vatni og hraða straumsins.

**230.** Skemmtibátur sigldi 80 mílur niður Mississippi-fljótið á fjórum klukkustundum. Ferðin til baka tók fimm klukkustundir. Finnið hraða bátsins í kyrru vatni og hraða straumsins.

**231.** Lítil þota getur flogið 1.072 mílur á 4 klukkustundum í meðvindi en aðeins 848 mílur á 4 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

**232.** Lítil þota getur flogið 1.435 mílur á 5 klukkustundum í meðvindi en aðeins 1215 mílur á 5 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

**233.** Farþegaþota getur flogið 868 mílur á 2 klukkustundum í meðvindi en aðeins 792 mílur á 2 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

**234.** Farþegaþota getur flogið 1.320 mílur á 3 klukkustundum í meðvindi en aðeins 1.170 mílur á 3 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.



### *Stærðfræði daglegs lífs*

**235.** Á skólatónleikum seldust 425 miðar. Nemendamiðar kostuðu $5 hver og fullorðinsmiðar $8 hver. Heildartekjur tónleikanna voru $2.851. Leysið hneppið

$$\begin{cases} s+a=425 \\ 5\,s+8\,a=2.851 \end{cases}$$

til að finna $s$, fjölda nemendamiða, og $a$, fjölda fullorðinsmiða.

**236.** Nemendur í fyrsta bekk í einum skóla fóru í dýragarðsferð. Heildarfjöldi barna og fullorðinna í ferðinni var 115. Fjöldi fullorðinna var $\frac{1}{4}$ af fjölda barnanna. Leysið hneppið

$$\begin{cases} c+a=115 \\ a=\frac{1}{4}c \end{cases}$$

til að finna $c$, fjölda barna, og $a$, fjölda fullorðinna.

### *Ritunarverkefni*

**237.** Semjið hagnýtt dæmi sem svipar til dæmis 5.37 og notið aldur tveggja vina eða fjölskyldumeðlima. Setjið það síðan fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**238.** Semjið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða sem svipar til dæmis 5.42 og tengist heimabyggð ykkar, vinum eða fjölskyldu. Setjið það síðan fram sem jöfnuhneppi og leysið.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| sett verkefni fram sem jöfnuhneppi. | | | |
| leyst orðadæmi með beinni þýðingu. | | | |
| leyst rúmfræðiverkefni. | | | |
| leyst verkefni um jafna hreyfingu. | | | |

ⓑ Á kvarðanum 1–10, hvernig metið þið tök ykkar á efni hlutans með hliðsjón af svörunum á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt þau?

# 5.5 Leysið blöndunarverkefni með jöfnuhneppum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið blöndunarverkefni
- Leysið vaxtaverkefni

**UNDIRBÚNINGUR 5.13**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Margfaldið 4,025 (1.562).
Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja upp dæmi 1.98.

**UNDIRBÚNINGUR 5.14**

Skrifið 8,2% sem
tugabrot. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja upp dæmi 1.106.

**UNDIRBÚNINGUR 5.15**

Kvöldverðarreikningur Earls var $32,50 og hann vildi skilja eftir 18% í þjórfé. Hve hátt ætti þjórféð að vera? Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja upp
dæmi 3.15.

## Leysið blöndunarverkefni

Þegar við leystum áður blöndunarverkefni með myntum og miðum byrjuðum við á að búa til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar. Í dæmi með fimm senta og tíusenta myntum leit taflan svona út:

| Tegund | Fjöldi | • Gildi ($) | = Heildargildi ($) |
|---|---|---|---|
| fimm senta myntir | | 0,05 | |
| tíusenta myntir | | 0,10 | |

Þegar aðeins ein breyta var notuð þurftum við að tengja fjölda fimm senta mynta við fjölda tíusenta mynta. Við þurftum að ákveða hvort við létum n tákna fjölda fimm senta mynta og skrifuðum síðan fjölda tíusenta mynta með tilliti til n, eða hvort við létum d tákna fjölda tíusenta mynta og skrifuðum fjölda fimm senta mynta með tilliti til d.

Nú þegar við kunnum að leysa jöfnuhneppi með tveimur breytum látum við einfaldlega n tákna fjölda fimm senta mynta og d fjölda tíusenta mynta. Við skrifum eina jöfnu út frá dálkinum „Heildargildi“, eins og áður, og hina út frá dálkinum „Fjöldi“.

Í fyrsta dæminu leysum við miðadæmi þar sem miðaverðin eru í heilum dollurum. Því þurfum við ekki enn að nota tugabrot.

---

**DÆMI 5.45**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Miðasala kvikmyndahúss seldi 147 miða á kvöldsýningu og tekjurnar voru samtals $1.302. Hve margir fullorðinsmiðar á $11 og hve margir barnamiðar á $8 seldust?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | Við búum til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar. |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að fjölda seldra fullorðinsmiða og barnamiða. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $a=$ tákna fjölda fullorðinsmiða og $c=$ fjölda barnamiða. |
| Tafla hjálpar okkur að skipuleggja gögnin. Við höfum tvær gerðir miða: fullorðinsmiða og barnamiða. | Notið a og c til að tákna fjölda miða af hvorri gerð. |
| Skrifið heildarfjölda seldra miða neðst í dálkinn Fjöldi. | Alls seldust 147 miðar. |
| Skrifið verð hvorrar miðagerðar í dálkinn Gildi. | Hver fullorðinsmiði kostar $11. Hver barnamiði kostar $8. |
| Fjöldi sinnum gildi gefur heildargildi. Heildargildi fullorðinsmiðanna er því $a \cdot 11 = 11a$ og heildargildi barnamiðanna $c \cdot 8 = 8c$. | <table><tr><th>Tegund</th><th>Fjöldi</th><th>• Verðmæti ($)</th><th>= Heildarverðmæti ($)</th></tr><tr><td>fullorðinn</td><td>$a$</td><td>11</td><td>$11a$</td></tr><tr><td>barn</td><td>$c$</td><td>8</td><td>$8c$</td></tr><tr><td></td><td>147</td><td></td><td>1302</td></tr></table> |

| | |
|---|---|
| Heildargildi allra miðanna var samtals $1.302. | Fyllið út dálkinn Heildargildi. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. | |
| Dálkarnir Fjöldi og Heildargildi gefa okkur jöfnuhneppið. Við notum eyðingaraðferðina til að leysa það. | $\begin{cases} a + c = 147 \\ 11a + 8c = 1302 \end{cases}$ |
| Margfaldið fyrri jöfnuna með −8. | $\begin{cases} -8(a + c) = -8(147) \\ 11a + 8c = 1302 \end{cases}$ |
| Einfaldið og leggið saman og leysið síðan fyrir a. | $\begin{cases} -8a + 8c = -1176 \\ 11a + 8c = 1302 \end{cases}$<br>$3a = 126$ |
| | $a = 42$ |
| Setjið a = 42 inn í fyrri jöfnuna og leysið síðan fyrir c. | $a + c = 147$<br>$42 + c = 147$ |
| | $c = 105$ |
| **Skref 5.** Sannreynið svarið í verkefninu. 42 fullorðinsmiðar á $11 hver gefa $462. 105 barnamiðar á $8 hver gefa $840. Heildartekjurnar eru $1.302.✓ | |
| **Skref 6.** Svarið spurningunni. | Kvikmyndahúsið seldi 42 fullorðinsmiða og 105 barnamiða. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.89**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Miðasala dýragarðs seldi 553 miða einn dag. Tekjurnar voru samtals $3.936. Hve margir fullorðinsmiðar á $9 og hve margir barnamiðar á $6 seldust?

**REYNIÐ SJÁLF 5.90**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Vísindamiðstöð seldi 1.363 miða um annasama helgi. Tekjurnar voru samtals $12.146. Hve margir fullorðinsmiðar á $12 og hve margir barnamiðar á $7 seldust?

Í dæmi 5.46 leysum við myntdæmi. Nú þegar við kunnum að vinna með jöfnuhneppi með tveimur breytum er auðvelt að nefna breyturnar í dálkinum „Fjöldi“.

**DÆMI 5.46**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Priam á safn fimm senta mynta og 25 senta mynta að heildarverðmæti $7,30. Fimm senta myntirnar eru sex færri en þrefaldur fjöldi 25 senta myntanna. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | Við búum til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar. |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að fjölda fimm senta mynta og 25 senta mynta. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $n=$ tákna fjölda fimm senta mynta og $q=$ fjölda 25 senta mynta. |
| Tafla hjálpar okkur að skipuleggja gögnin. Við höfum tvær myntgerðir: fimm senta myntir og 25 senta myntir. | Skrifið n og q fyrir fjölda hvorrar myntgerðar. |
| Fyllið dálkinn Gildi með verðgildi hvorrar myntgerðar. | Verðgildi hverrar fimm senta myntar er $0,05. Verðgildi hverrar 25 senta myntar er $0,25. |
| Fjöldi sinnum gildi gefur heildargildi. Heildargildi fimm senta myntanna er því n (0,05) = 0,05 n og heildargildi 25 senta myntanna q (0,25) = 0,25 q. Heildarverðmæti myntanna er $7,30. | |

| Tegund | Fjöldi • verðgildi ($) = heildarverðmæti ($) | | |
|---|---|---|---|
| 5 senta myntir | $n$ | 0,05 | $0,05n$ |
| 25 senta myntir | $q$ | 0,25 | $0,25q$ |
| | | | 7,30 |

| | |
|---|---|
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. | |
| Dálkurinn Heildargildi gefur aðra jöfnuna. | $0,05n + 0,25q = 7,30$ |
| Við vitum einnig að fimm senta myntirnar eru sex færri en þrefaldur fjöldi 25 senta myntanna. Setjið sambandið fram sem jöfnu til að fá hina jöfnuna. | $n = 3q - 6$ |
| Nú höfum við jöfnuhneppið sem leysa á. | $\begin{cases} 0,05n + 0,25q = 7,30 \\ n = 3q - 6 \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum innsetningaraðferðina. Setjið n = 3 q − 6 inn í fyrri jöfnuna. Einfaldið og leysið fyrir q. | $0{,}05n + 0{,}25q = 7{,}30$ |
| | $0{,}05(3q - 6) + 0{,}25q = 7{,}3$ |
| | $0{,}15q - 0{,}3 + 0{,}25q = 7{,}3$ |
| | $0{,}4q - 0{,}3 = 7{,}3$ |
| | $0{,}4q = 7{,}6$ |
| | $q = 19$ |
| Til að finna fjölda fimm senta mynta skuluð þið setja q = 19 inn í seinni jöfnuna. | $n = 3q - 6$ |
| | $n = 3 \cdot 19 - 6$ |
| | $n = 51$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið í verkefninu. | |
| 19 25 senta myntir, hver á $\$0{,}25 = \$4{,}75$<br>51 fimm senta myntir, hver á $\$0{,}05 = \$2{,}55$<br>Samtals $= \$7{,}30$ ✓<br>$3 \cdot 19 - 6 = 51$ ✓ | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Priam á 19 25 senta myntir og 51 fimm senta myntir. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.91**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Matilda á nokkrar 25 senta og tíusenta myntir að heildarverðmæti $8,55. Hún á 3 fleiri 25 senta myntir en tvöfaldan fjölda tíusenta mynta. Hve margar tíusenta og hve margar 25 senta myntir á hún?

**REYNIÐ SJÁLF 5.92**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Juan er með fimm senta og tíusenta myntir í vasanum. Heildarverðmæti þeirra er $8,10. Tíusenta myntirnar eru 9 færri en tvöfaldur fjöldi fimm senta myntanna. Hve margar fimm senta og hve margar tíusenta myntir á Juan?

Sum blöndunarverkefni fjalla um að blanda matvælum eða drykkjum. Til dæmis má blanda rúsínum og hnetum í hnetu- og rúsínublöndu eða tveimur tegundum kaffibauna í kaffiblöndu.

**DÆMI 5.47**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Carson vill búa til 20 pund af hnetu- og súkkulaðiblöndu. Fjárhagsáætlunin gerir ráð fyrir að blandan kosti hann $7,60 pundið. Hnetur kosta $9,00 pundið og súkkulaðibitar $2,00 pundið. Hve mörg pund af hnetum og hve mörg pund af súkkulaðibitum á hann að nota?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið. Við búum til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. Við leitum að því hve mörg pund af hnetum og hve mörg pund af súkkulaðibitum þarf.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. Látum $n=$ tákna fjölda punda af hnetum og $c=$ fjölda punda af súkkulaðibitum.

Carson blandar hnetum og súkkulaðibitum í hnetu- og súkkulaðiblöndu. Skrifið n og c fyrir fjölda punda af hnetum og súkkulaðibitum. Blandan verður 20 pund. Skrifið pundverð hvors hráefnis í dálkinn „Gildi“. Fyllið síðasta dálkinn út samkvæmt sambandinu

| Tegund | Fjöldi punda | • Verðmæti ($) = Heildarverðmæti ($) | |
|---|---|---|---|
| hnetur | $n$ | 9,00 | $9n$ |
| súkkulaðibitar | $c$ | 2,00 | $2c$ |
| hnetu- og súkkulaðiblanda | 20 | 7,60 | $7,60(20) = 152$ |

Fjöldi · Gildi = Heildargildi

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. Við fáum jöfnurnar úr dálkunum „Fjöldi“ og „Heildargildi“.

$$\begin{cases} n + c = 20 \\ 9n + 2c = 152 \end{cases}$$

**Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum eyðingaraðferðina.

Margfaldið fyrri jöfnuna með −2 til að eyða c-liðnum.

$$\begin{cases} -2(n + c) = -2(20) \\ 9n + 2c = 152 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| Einfaldið og leggið saman. Leysið fyrir n. | $\begin{cases} -2n-2c=-40 \\ 9n+2c=152 \end{cases}$<br>$7n=112$ |
| | $n=16$ |
| Til að finna fjölda punda af súkkulaðibitum skuluð þið setja n = 16 inn í fyrri jöfnuna og leysa síðan fyrir c. | $n+c=20$<br>$16+c=20$ |
| | $c=4$ |

**Skref 6.** Sannreynið svarið í verkefninu.

$$\begin{aligned} 16+4 &= 20 \checkmark \\ 9\cdot 16+2\cdot 4 &= 152 \checkmark \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Carson á að blanda 16 pundum af hnetum við 4 pund af súkkulaðibitum til að búa til hnetu- og súkkulaðiblönduna. |

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.93**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Greta vill búa til 5 pund af hnetublöndu úr jarðhnetum og kasjúhnetum. Fjárhagsáætlunin gerir ráð fyrir að blandan kosti $6 pundið. Jarðhnetur kosta $4 pundið og kasjúhnetur $9 pundið. Hve mörg pund af hvorri tegund á hún að nota?

**REYNIÐ SJÁLF 5.94**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Sammy á flest hráefnin í stóran skammt af chili. Hann vantar aðeins baunir og nautahakk. Hann þarf samtals 20 pund af baunum og hakki og hefur ráð á að greiða $3 fyrir hvert pund. Baunir kosta $1 pundið og nautahakk $5 pundið. Hve mörg pund af baunum og nautahakki á hann að kaupa?

Önnur gerð blöndunarverkefna fjallar um hreinsiefnaþykkni, önnur efni og blandaða drykki. Styrkurinn er gefinn í prósentum. Til dæmis merkir 20% styrkur heimilishreinsiefnis að 20% af heildarmagninu sé hreinsiefni en afgangurinn vatn. Til að búa til 35 únsur af 20% lausn blandið þið saman 7 únsum (20% af 35) af hreinsiefni og 28 únsum af vatni.

Í blöndunarverkefnum af þessu tagi notum við prósentustyrk í stað gildis í einum dálki töflunnar.

**DÆMI 5.48**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

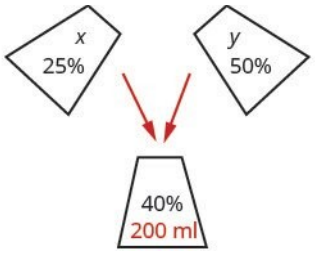
Sasheena er aðstoðarmaður á rannsóknarstofu í háskólanum sínum. Hún þarf að búa til 200 millílítra af 40% brennisteinssýrulausn fyrir tilraun. Á lager eru aðeins 25% og 50% lausnir. Hve miklu af 25% og 50% lausnunum á hún að blanda til að fá 40% lausnina?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið.

Mynd getur hjálpað okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur og síðan búum við til töflu til að skipuleggja upplýsingarnar.

Sasheena þarf að blanda hluta af 25% lausninni og hluta af 50% lausninni til að fá 200 ml af 40% lausn.




**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

Við leitum að því hve mikið hún þarf af hvorri lausn.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að.

Látum $x=$ tákna fjölda millílítra af 25% lausn og $y=$ fjölda millílítra af 50% lausn.

Tafla hjálpar okkur að skipuleggja gögnin. Hún blandar x ml af 25% lausn og y ml af 50% lausn til að fá 200 ml af 40% lausn. Við skrifum prósenturnar sem tugabrot í töfluna. Við margföldum fjölda eininga með styrknum til að fá heildarmagn brennisteinssýru í hvorri lausn.

| Tegund | Fjöldi eininga | • | Styrkur % | = | Magn |
|---|---|---|---|---|---|
| 25% | $x$ | | 0,25 | | $0{,}25x$ |
| 50% | $y$ | | 0,50 | | $0{,}50y$ |
| 40% | 200 | | 0,40 | | $0{,}40(200)$ |

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. Við fáum jöfnurnar úr dálkunum „Fjöldi“ og „Magn“.

Nú höfum við jöfnuhneppið.

$$\begin{cases} x+y=200 \\ 0{,}25x+0{,}50y=0{,}40(200) \end{cases}$$

**Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við leysum það með eyðingaraðferðinni. Margfaldið fyrri jöfnuna með −0,5 til að eyða y-liðnum.

$$\begin{cases} -0{,}5(x+y) = -0{,}5(200) \\ 0{,}25x + 0{,}50y = 80 \end{cases}$$

Einfaldið og leggið saman til að leysa fyrir x.

$$\begin{cases} -0{,}5x - 0{,}5y = -100 \\ 0{,}25x + 0{,}5y = 80 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -0{,}25x &= -20 \\ x &= 80 \end{aligned}$$

Til að leysa fyrir y skuluð þið setja x = 80 inn í fyrri jöfnuna.

$$x + y = 200$$

$$80 + y = 200$$

$$y = 120$$

**Skref 6.** Sannreynið svarið í verkefninu.

$$\begin{aligned} 80+120 &= 200 \ \checkmark \\ 0{,}25(80)+0{,}50(120) &= 80 \ \checkmark \\ &\text{Já!} \end{aligned}$$

**Skref 7.** Svarið spurningunni.

Sasheena á að blanda 80 ml af 25% lausninni við 120 ml af 50% lausninni til að fá 200 ml af 40% lausn.

5

**REYNIÐ SJÁLF 5.95**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

LeBron þarf 150 millílítra af 30% brennisteinssýrulausn fyrir tilraun en hefur aðeins aðgang að 25% og 50% lausnum. Hve miklu af 25% og 50% lausnunum á hann að blanda til að fá 30% lausn?

**REYNIÐ SJÁLF 5.96**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Anatole þarf að búa til 250 millílítra af 25% saltsýrulausn fyrir tilraun. Á lager eru aðeins 10% og 40% lausnir. Hve miklu af 10% og 40% lausnunum á hann að blanda til að fá 25% lausn?

## Leysið vaxtaverkefni

Formúlan fyrir vaxtaverkefni er I = Prt. Vextirnir I eru margfeldi höfuðstólsins P, vaxtaprósentunnar r og tímans t. Hér reiknum við vexti fyrir eitt ár og því er t jafnt 1.

Við breytum heitum dálkanna í blöndunartöflunni svo að þau sýni vaxtaformúluna, eins og sést í dæmi 5.49.

**DÆMI 5.49**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Adnan hefur $40.000 til að fjárfesta og vonast til að fá 7,1% vexti á ári. Hann leggur hluta fjárins í hlutabréfasjóð sem ber 8% ársvexti og afganginn í skuldabréf sem bera 3% ársvexti. Hve mikið á hann að leggja í hvora fjárfestingu?

## Lausn

**Skref 1.** Lesið verkefnið.

Tafla hjálpar okkur að skipuleggja upplýsingarnar.

**Skref 2.** Finnið hvað leitað er að.

Við leitum að fjárhæðinni sem fjárfesta á í hvorum sjóði.

**Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að.

Látum $s =$ tákna fjárhæðina í hlutabréfum og $b =$ fjárhæðina í skuldabréfum.

Skrifið vaxtaprósentu hvorrar fjárfestingar sem tugabrot. Margfaldið samkvæmt sambandinu Höfuðstóll · Vaxtaprósenta · Tími til að fá vaxtafjárhæðina.

| Reikningur | Höfuðstóll • | Vaxtahlutfall • | Tími = | Vextir |
|---|---|---|---|---|
| hlutabréfasjóður | $s$ | 0,08 | 1 | $0,08s$ |
| skuldabréf | $b$ | 0,03 | 1 | $0,03b$ |
| Samtals | 40.000 | 0,071 | | $0,071(40.000)$ |

**Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. Við fáum jöfnuhneppið úr dálkunum „Höfuðstóll“ og „Vextir“.

$$\begin{cases} s + b = 40.000 \\ 0,08s + 0,03b = 0,071(40.000) \end{cases}$$

**Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið með eyðingaraðferðinni. Margfaldið efri jöfnuna með −0,03.

$$\begin{cases} -0,03(s + b) = -0,03(40.000) \\ 0,08s + 0,03b = 2.840 \end{cases}$$

Einfaldið og leggið saman til að leysa fyrir s.

$$\begin{cases} -0,03s - 0,03b = -1.200 \\ 0,08s + 0,03b = 2.840 \end{cases}$$
$$0,05s = 1.640$$
$$s = 32.800$$

Til að finna b skuluð þið setja s = 32.800 inn í fyrri jöfnuna.

$$s + b = 40.000$$
$$32.800 + b = 40.000$$
$$b = 7.200$$

| | |
|---|---|
| **Skref 6.** Sannreynið svarið í verkefninu. | Við látum ykkur eftir að sannreyna svarið. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Adnan á að fjárfesta $32.800 í hlutabréfum og $7.200 í skuldabréfum. |

Tókuð þið eftir því að dálkurinn Höfuðstóll táknar alla fjárhæðina sem er fjárfest en dálkurinn Vextir aðeins vextina sem fást? Fyrri jafnan í hneppinu, s + b = 40.000, táknar alla fjárhæðina sem er fjárfest en seinni jafnan, 0,08 s + 0,03 b = 0,071(40.000), táknar vextina sem fást.

**REYNIÐ SJÁLF 5.97**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Leon hefur $50.000 til að fjárfesta og vonast til að fá 6,2% vexti á ári. Hann leggur hluta fjárins í hlutabréfasjóð sem ber 7% ársvexti og afganginn á sparnaðarreikning sem ber 2% ársvexti. Hve mikið á hann að leggja í hvora fjárfestingu?

**REYNIÐ SJÁLF 5.98**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Julius fjárfesti $7.000 í tveimur hlutabréfum. Annað bar 11% vexti og hitt 13%. Hann fékk 12,5% vexti af heildarfjárfestingunni. Hve mikið lagði hann í hvort hlutabréf?

**DÆMI 5.50**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Rosie skuldar $21.540 í tveimur námslánum. Vaxtaprósenta bankalánsins er 10,5% en vaxtaprósenta alríkislánsins 5,9%. Heildarvextirnir sem hún greiddi á síðasta ári voru $1.669,68. Hver var höfuðstóll hvors láns?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | Tafla hjálpar okkur að skipuleggja upplýsingarnar. |
| **Skref 2.** Finnið hvað leitað er að. | Við leitum að höfuðstól hvors láns. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $b =$ tákna höfuðstól bankalánsins og $f =$ höfuðstól alríkislánsins. |
| Lánin eru samtals $21.540. | |
| Skráið vaxtaprósenturnar sem tugabrot í töfluna. | |

| Reikningur | Höfuðstóll | • Vaxtahlutfall | • Tími | = Vextir |
|---|---|---|---|---|
| banki | $b$ | 0,105 | 1 | $0,105b$ |
| alríki | $f$ | 0,059 | 1 | $0,059f$ |
| Samtals | 21.540 | | | 1669,68 |

| | |
|---|---|
| Margfaldið samkvæmt formúlunni I = Pr t til að fá vextina. | |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi. Jöfnuhneppið fæst úr dálkunum „Höfuðstóll“ og „Vextir“. | $\begin{cases} b + f = 21.540 \\ 0{,}105b + 0{,}059f = 1669{,}68 \end{cases}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuhneppið. Við notum innsetningaraðferðina. Leysið fyrri jöfnuna fyrir b. | $b + f = 21.540$<br>$b = -f + 21.540$ |
| Setjið b = −f + 21.540 inn í seinni jöfnuna. | $0{,}105b + 0{,}059f = 1669{,}68$<br>$0{,}105(-f + 21.540) + 0{,}059f = 1669{,}68$ |
| Einfaldið og leysið fyrir f. | $-0{,}105f + 2261{,}70 + 0{,}059f = 1669{,}68$ |
| | $-0{,}046f + 2261{,}70 = 1669{,}68$ |
| | $-0{,}046f = -592{,}02$ |
| | $f = 12.870$ |
| Til að finna b skuluð þið setja f = 12.870 inn í fyrri jöfnuna. | $b + f = 21.540$<br>$12.870 + b = 21.540$ |
| | $b = 8.670$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið í verkefninu. | Við látum ykkur eftir að sannreyna svarið. |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Höfuðstóll bankalánsins er $12.870 og höfuðstóll alríkislánsins $8.670. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.99**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Laura skuldar $18.000 í námslánum. Vaxtaprósenta bankalánsins er 2,5% en vaxtaprósenta alríkislánsins 6,9 %. Heildarvextirnir sem hún greiddi á síðasta ári voru $1.066. Hver var höfuðstóll hvors láns?

**REYNIÐ SJÁLF 5.100**

Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi og leysið:

Jill's Sandwich Shoppe skuldar $65.200 í tveimur rekstrarlánum, öðru með 4,5% vöxtum og hinu með 7,2% vöxtum. Heildarvextir síðasta árs voru $3.582. Hver var höfuðstóll hvors láns?

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið frekari útskýringar og æfingar í að leysa hagnýt verkefni með línulegum jöfnuhneppum.

- Kostnaðar- og blöndunarverkefni
- Blöndunarverkefni

## Verkefni úr hluta 5.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið blöndunarverkefni**

Setjið verkefnin hér á eftir fram sem jöfnuhneppi og leysið.



**239.** Miðar á Broadway-sýningu kosta $35 fyrir fullorðna og $15 fyrir börn. Tekjur af 1650 miðum á einni sýningu voru samtals $47.150. Hve margir fullorðinsmiðar og hve margir barnamiðar seldust?

**240.** Miðar á sýningu kosta $70 fyrir fullorðna og $50 fyrir börn. Á einni kvöldsýningu seldust 300 miðar og tekjurnar voru samtals $17.200. Hve margir fullorðinsmiðar og hve margir barnamiðar seldust?

**241.** Lestarmiðar kosta $10 fyrir börn og $22 fyrir fullorðna. Josie greiddi $1.200 fyrir samtals 72 miða. Hve marga barnamiða og hve marga fullorðinsmiða keypti hún?

**242.** Miðar á hafnaboltaleik kosta $69 í aðalstúku og $39 á efri palli. Sextán vinir fóru saman á leikinn og greiddu samtals $804 fyrir miðana. Hve marga miða keyptu þeir á hvorum stað?

**243.** Miðar á danssýningu kosta $15 fyrir fullorðna og $7 fyrir börn. Dansflokkurinn seldi 253 miða og tekjurnar voru samtals $2.771. Hve margir fullorðinsmiðar og hve margir barnamiðar seldust?

**244.** Miðar á bæjarhátíð kosta $12 fyrir fullorðna og $5 fyrir börn. Á fyrsta degi hátíðarinnar seldust 312 miðar fyrir samtals $2.204. Hve margir fullorðinsmiðar og hve margir barnamiðar seldust?

**245.** Brandon á 25 senta og tíusenta myntir að heildarverðmæti $3,80. Hann á fjórum færri 25 senta myntir en tvöfaldan fjölda tíusenta mynta. Hve margar myntir á hann af hvorri gerð?

**246.** Sherri safnar fimm senta og tíusenta myntum í buddu fyrir dóttur sína. Heildarverðmæti myntanna er $0,95. Fimm senta myntirnar eru tveimur færri en fimmfaldur fjöldi tíusenta mynta. Hve margar myntir af hvorri gerð eru í buddunni?

**247.** Peter hefur safnað lausamynt í nokkra daga. Þegar hann taldi 25 senta og tíusenta myntirnar var heildarverðmæti þeirra $13,10. Hann átti fimmtán fleiri 25 senta myntir en þrefaldan fjölda tíusenta mynta. Hve margar myntir átti hann af hvorri gerð?

**248.** Lucinda var með tíusenta og 25 senta myntir í vasanum að verðmæti $6,20. Tíusenta myntirnar eru átján fleiri en þrefaldur fjöldi 25 senta myntanna. Hve margar myntir á hún af hvorri gerð?

**249.** Gjaldkeri hefur 30 seðla sem eru allir $10 eða $20 seðlar. Heildarverðmætið er $460. Hve marga seðla hefur gjaldkerinn af hvorri gerð?

**250.** Gjaldkeri hefur 54 seðla sem eru allir $10 eða $20 seðlar. Heildarverðmætið er $910. Hve marga seðla hefur gjaldkerinn af hvorri gerð?

**251.** Marissa vill blanda sælgæti sem kostar $1,80 pundið við sælgæti sem kostar $1,20 pundið þannig að blandan kosti $1,40 pundið. Hún vill búa til 90 pund af blöndunni. Hve mörg pund af hvorri tegund á hún að nota?

**252.** Hve mörgum pundum af hnetum á $6 pundið og rúsínum á $3 pundið á Kurt að blanda saman til að fá 120 pund af hnetu- og rúsínublöndu sem kostar $5 pundið?

**253.** Hannah þarf að búa til tuttugu og fimm gallon af drykk fyrir sameiginlegt matarboð. Drykkurinn er úr gosi og ávaxtadrykk. Gosið kostar $1,79 gallonið og ávaxtadrykkurinn $2,49 gallonið. Fjárhagsáætlunin gerir ráð fyrir að blandan kosti $2,21 gallonið. Hve mörg gallon þarf hún af hvorum drykk?

**254.** Joseph vill búa til 12 pund af kaffiblöndu sem kostar $6,25 pundið. Hann blandar möluðum kaffifífli á $4,40 pundið við Blue Mountain-kaffi frá Jamaíku á $8,84 pundið. Hve mikið á hann að nota af hvorri tegund?

**255.** Julia og eiginmaður hennar eiga kaffihús. Þau prófuðu að blanda ljósristuðu kólumbísku kaffi á $7,80 pundið við dökkristað kólumbískt kaffi á $8,10 pundið til að búa til 20 punda blöndu. Blandan á að kosta þau $7,92 pundið. Hve mikið eiga þau að kaupa af hvorri tegund?

**256.** Melody vill selja poka af sælgætisblöndu í límonaðisölunni sinni. Hún blandar súkkulaðibitum sem kosta $4,89 pokinn við hnetusmjörsbita sem kosta $3,79 pokinn og fær samtals tuttugu og fimm poka. Hún vill að hver poki kosti hana $4,23. Hve marga poka af hvorri tegund á hún að nota?

**257.** Jotham þarf 70 lítra af 50% alkóhóllausn. Hann hefur 30% og 80% lausnir. Hve mörgum lítrum af 30% og 80% lausnunum á hann að blanda til að fá 50% lausnina?

**258.** Joy býr til 15 lítra af 25% saltlausn. Hún hefur aðeins 40% og 10% lausnir á rannsóknarstofunni. Hve mörgum lítrum af 40% og 10% lausnunum á hún að blanda til að fá 25% lausnina?

**259.** Vísindakona þarf 65 lítra af 15% alkóhóllausn. Hún hefur 25% og 12% lausnir. Hve mörgum lítrum af 25% og 12% lausnunum á hún að blanda til að fá 15% lausnina?

**260.** Vísindamaður þarf 120 lítra af 20% sýrulausn fyrir tilraun. Á rannsóknarstofunni eru 25% og 10% lausnir. Hve mörgum lítrum af 25% og 10% lausnunum á að blanda til að fá 20% lausnina?

**261.** Blanda á frostlegi með 40% styrk við frostlög með 70% styrk til að fá 240 lítra af blöndu með 50% styrk. Hve mörgum lítrum af frostlegi með 40% og 70% styrk verður blandað saman?

**262.** Blanda á frostlegi með 90% styrk við frostlög með 75% styrk til að fá 360 lítra af blöndu með 85% styrk. Hve mörgum lítrum af frostlegi með 90% og 75% styrk verður blandað saman?

**Leysið vaxtaverkefni**

Setjið verkefnin hér á eftir fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**263.** Hattie hafði $3.000 til að fjárfesta og vill fá 10,6% vexti á ári. Hún leggur hluta fjárins á reikning sem ber 12% ársvexti og afganginn á reikning sem ber 10% ársvexti. Hve mikið á hún að leggja á hvorn reikning?

**264.** Carol fjárfesti $2.560 á tveimur reikningum. Annar bar 8% vexti og hinn 6%. Hún fékk 7,25% vexti af heildarfjárfestingunni. Hve mikið lagði hún á hvorn reikning?

**265.** Sam fjárfesti $48.000, hluta við 6% vaxtaprósentu og afganginn við 10%. Hve mikið fjárfesti hann við hvora vaxtaprósentu ef hann fékk $4.000 í vexti á einu ári?

**266.** Arnold fjárfesti $64.000, hluta við 5,5% vaxtaprósentu og afganginn við 9%. Hve mikið fjárfesti hann við hvora vaxtaprósentu ef hann fékk $4.500 í vexti á einu ári?

**267.** Eftir fjögur ár í háskóla skuldar Josie $65.800 í námslánum. Vaxtaprósenta alríkislánanna er 4,5% en vaxtaprósenta einkabankalánanna 2%. Heildarvextir eins árs voru $2.878,50. Hver er fjárhæð hvors láns?

**268.** Mark vill fjárfesta $10.000 til að greiða fyrir brúðkaup dóttur sinnar á næsta ári. Hann leggur hluta fjárins á skammtímainnlánsreikning sem ber 12% vexti og afganginn á peningamarkaðsreikning sem ber 5%. Hve mikið á hann að fjárfesta við hvora vaxtaprósentu ef hann vill fá $1.095 í vexti á einu ári?

**269.** Sjóður að verðmæti $25.000 er fjárfestur í tveimur eignasöfnum. Gert er ráð fyrir að annað safnið beri 5,25% vexti á árinu og hitt 4%. Stefnt er að $1150 heildarvöxtum á einu ári. Hve mikið á að fjárfesta við hvora vaxtaprósentu?

**270.** Fyrirtæki er með tvö lán að samtals $85.000. Vaxtaprósenta annars lánsins er 6% en hins 4,5%. Fyrirtækið býst við að greiða $4650 í vexti af lánunum á árinu. Hver er fjárhæð hvors láns?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

Setjið verkefnin hér á eftir fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**271.** Laurie var að ganga frá skýrslu gjaldkera skátasveitar sonar síns við lok skólaársins. Hún mundi ekki hve margir drengir höfðu greitt $15 skráningargjald fyrir heilt ár og hve margir höfðu greitt $10 gjald fyrir hluta árs. Hún vissi að drengirnir sem greiddu fyrir heilt ár voru tíu fleiri en þeir sem greiddu fyrir hluta árs. Ef $250 safnaðist í skráningargjöld, hve margir drengir greiddu fyrir heilt ár og hve margir fyrir hluta árs?

**272.** Sem gjaldkeri skátasveitar dóttur sinnar safnaði Laney greiðslum frá stúlkum og fullorðnum fyrir þriggja daga útilegu. Hver stúlka greiddi $75 og hver fullorðinn $30. Samtals söfnuðust $765. Ef stúlkurnar eru þrisvar sinnum fleiri en fullorðnu þátttakendurnir, hve margar stúlkur og hve margir fullorðnir greiddu fyrir útileguna?

### *Ritunarverkefni*

**273.** Takið handfylli af tveimur gerðum mynta og semjið dæmi sem svipar til dæmis 5.46 og tengir saman heildarfjölda og heildarverðmæti myntanna. Setjið upp jöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum og leysið það.

**274.** Í dæmi 5.50 leystum við jöfnuhneppið með innsetningu. Hefðuð þið notað innsetningaraðferðina eða eyðingaraðferðina til að leysa hneppið? Hvers vegna?

$$\begin{cases} b+f=21.540 \\ 0{,}105\,b+0{,}059\,f=1669{,}68 \end{cases}$$

5

### *Sjálfsmat*

Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst blöndunarverkefni. | | | |
| leyst vaxtaverkefni. | | | |

Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur þá vel undirbúin fyrir næsta hluta? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

## 5.6 Teiknið gröf línulegra ójöfnuhneppa

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Metið hvort röðuð tvennd sé lausn línulegs ójöfnuhneppis
- Leysið línulegt ójöfnuhneppi með grafískri aðferð
- Leysið hagnýt verkefni með ójöfnuhneppum

**UNDIRBÚNINGUR 5.16**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Teiknið graf $x>2$ á talnalínu. Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 2.66.

**UNDIRBÚNINGUR 5.17**

Leysið ójöfnuna $2a<5a+12$. Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 2.73.

**UNDIRBÚNINGUR 5.18**

Metið hvort raðaða tvenndin $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ sé lausn hneppisins. Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja $\begin{cases} x+2y=4 \\ y=6x \end{cases}$ upp dæmi 5.1.

5

## Metið hvort röðuð tvennd sé lausn línulegs ójöfnuhneppis

Skilgreining línulegs ójöfnuhneppis er mjög svipuð skilgreiningu línulegs jöfnuhneppis.

**LÍNULEGT ÓJÖFNUHNEPPI**

Tvær eða fleiri línulegar ójöfnur sem eru settar saman mynda línulegt ójöfnuhneppi.

Línulegt ójöfnuhneppi líkist línulegu jöfnuhneppi en í því eru ójöfnur í stað jafna. Hér fyrir neðan sést hneppi tveggja línulegra ójafna.

$$\begin{cases} x+4y \geq 10 \\ 3x-2y<12 \end{cases}$$

Til að leysa línulegt ójöfnuhneppi finnum við gildi breytanna sem uppfylla báðar ójöfnurnar. Við leysum hneppið með því að teikna graf hvorrar ójöfnu og sýnum lausnina á grafi. Við finnum svæðið í xy-hnitaplaninu sem inniheldur allar raðaðar tvenndir $(x, y)$ sem gera báðar ójöfnurnar sannar.

**LAUSNIR LÍNULEGS ÓJÖFNUHNEPPIS**

Lausnir línulegs ójöfnuhneppis eru þau gildi breytanna sem gera allar ójöfnurnar sannar.

Lausn línulegs ójöfnuhneppis er sýnd sem skyggt svæði í xy-hnitaplaninu. Svæðið inniheldur alla punkta þar sem raðaðar tvenndir gera ójöfnurnar sannar.

Til að meta hvort röðuð tvennd sé lausn hneppis tveggja ójafna setjum við gildi breytanna inn í hvora ójöfnu. Ef raðaða tvenndin gerir báðar ójöfnurnar sannar er hún lausn hneppisins.

---

**DÆMI 5.51**

Metið hvort raðaða tvenndin sé lausn hneppisins. $\begin{cases} x + 4y \geq 10 \\ 3x - 2y < 12 \end{cases}$

ⓐ $(-2, 4)$ ⓑ $(3,1)$

## Lausn

1. ⓐ Er raðaða tvenndin $(-2, 4)$ lausn?

   Við setjum $x = -2$ og $y = 4$ inn í báðar ójöfnurnar.

   $x + 4y \geq 10$ $\qquad$ $3x - 2y < 12$

   $-2 + 4(4) \stackrel{?}{\geq} 10$ $\qquad$ $3(-2) - 2(4) \stackrel{?}{<} 12$

   $14 \geq 10$ satt $\qquad$ $-14 < 12$ satt

Raðaða tvenndin $(-2, 4)$ gerði báðar ójöfnurnar sannar. Því er $(-2, 4)$ lausn hneppisins.

1. ⓑ Er raðaða tvenndin $(3,1)$ lausn?

   Við setjum $x = 3$ og $y = 1$ inn í báðar ójöfnurnar.

   $x + 4y \geq 10$ $\qquad$ $3x - 2y < 12$

   $3 + 4(1) \stackrel{?}{\geq} 10$ $\qquad$ $3(3) - 2(1) \stackrel{?}{<} 12$

   $7 \geq 10$ ósatt $\qquad$ $7 < 12$ satt

Raðaða tvenndin $(3,1)$ gerði aðra ójöfnuna sanna en hina ósanna. Því er $(3,1)$ ekki lausn hneppisins.

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.101**

Metið hvort raðaða tvenndin sé lausn hneppisins.

$\begin{cases} x - 5y > 10 \\ 2x + 3y > -2 \end{cases}$

ⓐ $(3, -1)$ ⓑ $(6, -3)$

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.102**

Metið hvort raðaða tvenndin sé lausn hneppisins.

$\begin{cases} y > 4x - 2 \\ 4x - y < 20 \end{cases}$

ⓐ $(2, 1)$ ⓑ $(4, -1)$

## Leysið línulegt ójöfnuhneppi með grafískri aðferð

Lausn einnar línulegrar ójöfnu er svæðið öðrum megin við markalínuna sem inniheldur alla punkta sem gera ójöfnuna sanna. Lausn hneppis tveggja línulegra ójafna er svæði sem

inniheldur lausnir beggja ójafnanna. Til að finna svæðið teiknum við graf hvorrar ójöfnu fyrir sig og finnum síðan svæðið þar sem þær eru báðar sannar. Lausnin er alltaf sýnd á grafi.

---

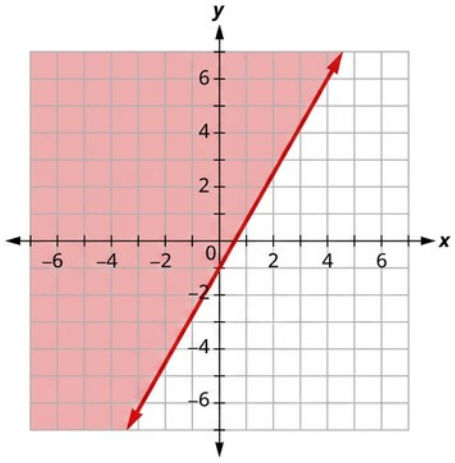
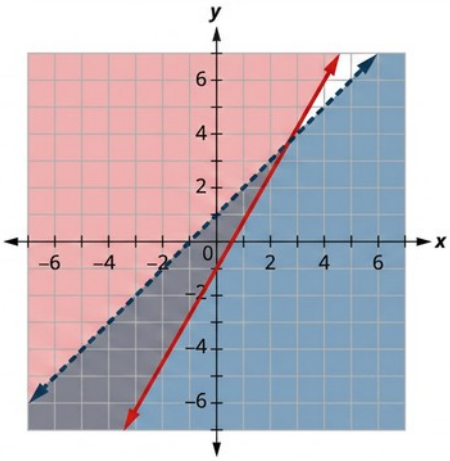
**DÆMI 5.52**

### Hvernig á að leysa línulegt ójöfnuhneppi

Leysið hneppið með grafískri aðferð.

$$\begin{cases} y \geq 2x - 1 \\ y < x + 1 \end{cases}$$

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Teiknið graf fyrri ójöfnunnar.<br><br>Teiknið markalínuna.<br><br>Skyggið svæðið þeim megin við markalínuna þar sem ójafnan er sönn. | Við ætlum að teikna graf ójöfnunnar $y \geq 2x - 1$.<br><br>Við teiknum línuna $y = 2x - 1$. Hún er heil lína vegna þess að ójöfnumerkið er $\geq$.<br><br>Við veljum (0,0) sem prófunarpunkt. Punkturinn er lausn ójöfnunnar $y \geq 2x - 1$, svo við skyggjum svæðið vinstra megin við markalínuna. | $\begin{cases} y \geq 2x - 1 \\ y < x + 1 \end{cases}$<br> |
| **Skref 2.** Teiknið graf síðari ójöfnunnar í sama hnitakerfi.<br><br>Teiknið markalínuna.<br><br>Skyggið þeim megin við markalínuna þar sem ójafnan er sönn. | Við teiknum graf $y < x + 1$ í sama hnitakerfi.<br><br>Við teiknum línuna $y = x + 1$. Hún er strikalína vegna þess að ójöfnumerkið er $<$.<br><br>Aftur notum við (0,0) sem prófunarpunkt. Punkturinn er lausn, svo við skyggjum þeim megin við línuna $y = x + 1$. |  |
| **Skref 3.** Lausnin er svæðið þar sem skyggingin skarast. | Skurðpunktur jaðarlínanna er ekki lausn því hann uppfyllir ekki ójöfnuna $y < x + 1$. | Lausnin er allir punktar á dekkra skyggða svæðinu. |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Athugið með því að velja prófunarpunkt. | Við notum (–1, –1) sem prófunarpunkt. | Er (–1, –1) lausn á ójöfnunni<br>$y \geq 2x - 1$?<br>$-1 \stackrel{?}{\geq} 2(-1) - 1$<br>$-1 \geq -3$ satt<br>Er (–1, –1) lausn á ójöfnunni<br>$y < x + 1$?<br>$-1 \stackrel{?}{<} -1 + 1$<br>$-1 < 0$ satt<br>Svæðið sem inniheldur (–1, –1) er lausnarmengi þessa ójöfnuhneppis. |

**REYNIÐ SJÁLF 5.103**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} y < 3x + 2 \\ y > -x - 1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.104**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} y < -\frac{1}{2}x + 3 \\ y < 3x - 4 \end{cases}$

5

**AÐFERÐ**

### Leysið línulegt ójöfnuhneppi með grafískri aðferð.

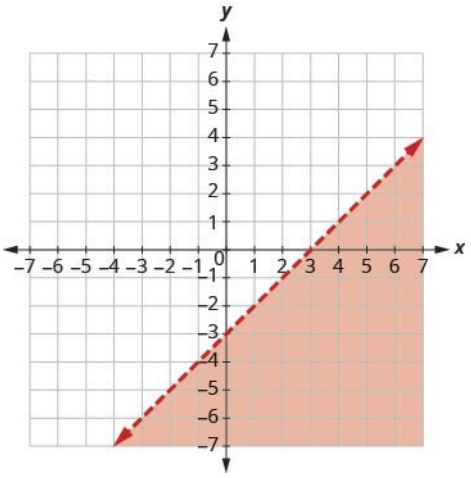
1. Skref 1.
   Teiknið graf fyrri ójöfnunnar.
   - Teiknið markalínuna.
   - Skyggið þeim megin við markalínuna þar sem ójafnan er sönn.
2. Skref 2.
   Teiknið graf seinni ójöfnunnar í sama hnitakerfi.
   - Teiknið markalínuna.
   - Skyggið þeim megin við þá markalínu þar sem ójafnan er sönn.
3. Skref 3. Lausnin er svæðið þar sem skyggingarnar skarast.
4. Skref 4. Sannreynið með því að velja prófunarpunkt.

**DÆMI 5.53**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} x - y > 3 \\ y < -\frac{1}{5}x + 4 \end{cases}$

## Lausn

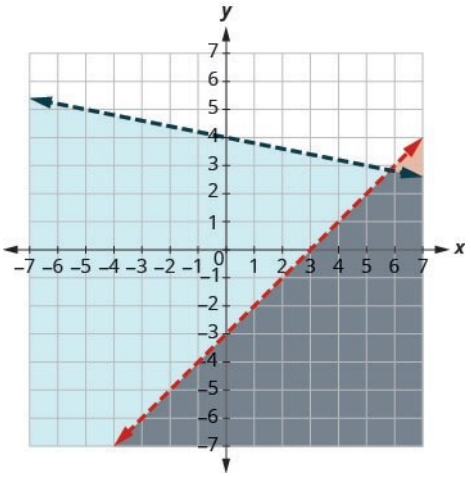
Teiknið graf x − y > 3 með því að teikna x − y = 3 og prófa punkt. Skurðpunktarnir eru x = 3 og y = −3 og markalínan verður slitin lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna ósanna. Skyggið því rauðu þeim megin sem inniheldur ekki (0, 0).




Teiknið graf $y<-\frac{1}{5}x+4$ með því að teikna

$$y=-\frac{1}{5}x+4$$

með hallatölunni $m=-\frac{1}{5}$ og skurðpunktinum við y-ás b = 4. Markalínan verður slitin lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna sanna og því skyggjum við bláu þeim megin sem inniheldur (0, 0). Veljið prófunarpunkt á lausnarsvæðinu og sannreynið að hann uppfylli báðar ójöfnurnar.




Skurðpunktur línanna er ekki með í lausninni því báðar markalínurnar eru slitnar línur. Lausnin er tvískyggða svæðið, sem er dekkra á litinn.

**REYNIÐ SJÁLF 5.105**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ y \geq \frac{2}{3}x-1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.106**

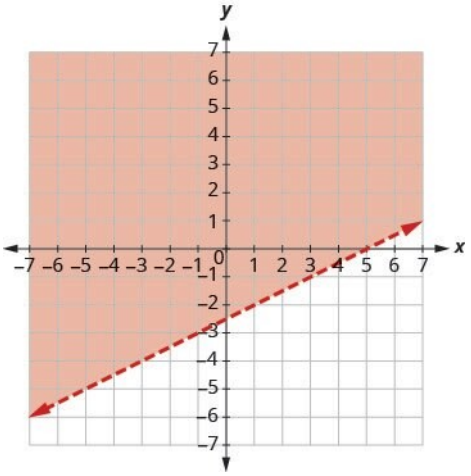
Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} 3x-2y \leq 6 \\ y > -\frac{1}{4}x+5 \end{cases}$

**DÆMI 5.54**

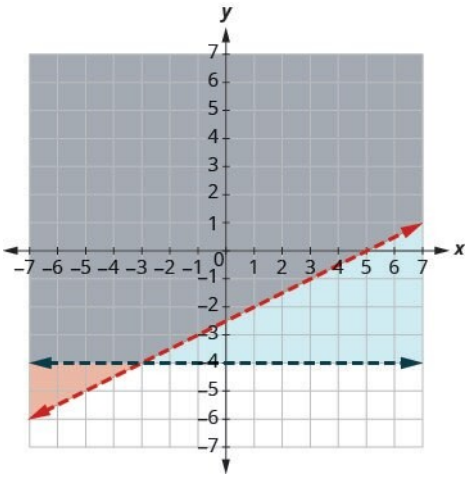
Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} x - 2y < 5 \\ y > -4 \end{cases}$

## Lausn

Teiknið graf $x - 2y < 5$ með því að teikna $x - 2y = 5$ og prófa punkt. Skurðpunktarnir eru x = 5 og y = −2,5 og markalínan verður slitin lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna sanna. Skyggið því rauðu þeim megin sem inniheldur (0, 0).




Teiknið graf y > −4 með því að teikna y = −4 og taka eftir að það er lárétt lína í gegnum y = −4. Markalínan verður slitin lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna sanna. Skyggið því bláu þeim megin sem inniheldur (0, 0).




Punkturinn (0, 0) er á lausnarsvæðinu og við höfum þegar sýnt að hann uppfyllir hvora ójöfnu. Skurðpunktur línanna er ekki með í lausninni því báðar markalínurnar eru slitnar línur.

Lausnin er tvískyggða svæðið, sem er dekkra á litinn.

**REYNIÐ SJÁLF 5.107**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} y \geq 3x - 2 \\ y < -1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.108**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} x > -4 \\ x - 2y \leq -4 \end{cases}$

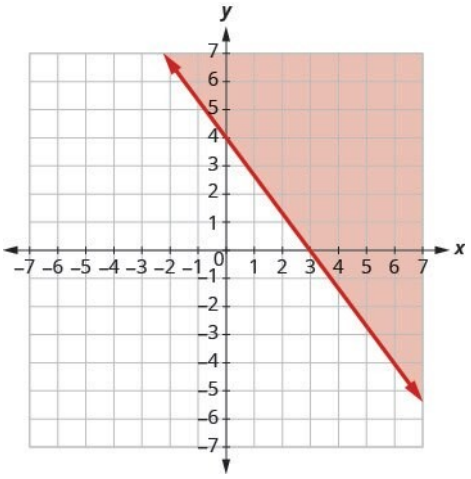
Línuleg ójöfnuhneppi með samsíða markalínur geta verið án lausnar. Við sjáum það í dæmi 5.55.

**DÆMI 5.55**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} 4x+3y \geq 12 \\ y < -\frac{4}{3}x+1 \end{cases}$

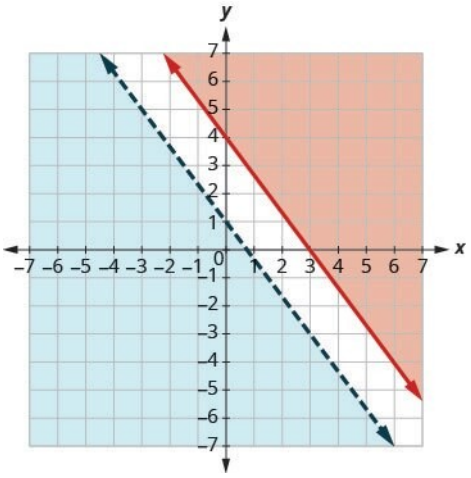
## Lausn

Teiknið graf $4x+3y \geq 12$ með því að teikna $4x+3y=12$ og prófa punkt. Skurðpunktarnir eru x = 3 og y = 4 og markalínan verður heil lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna ósanna. Skyggið því rauðu þeim megin sem inniheldur ekki (0, 0).




Teiknið graf $y<-\frac{4}{3}x+1$ með því að teikna $y=-\frac{4}{3}x+1$ með hallatölunni $m=\frac{4}{3}$ og skurðpunktinum við y-ás b = 1.

Markalínan verður slitin lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna sanna. Skyggið því bláu þeim megin sem inniheldur (0, 0).




Enginn punktur er á báðum skyggðu svæðunum og því hefur hneppið enga lausn. Hneppið hefur enga lausn.

**REYNIÐ SJÁLF 5.109**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} 3x-2y \leq 12 \\ y \geq \frac{3}{2}x+1 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.110**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} x + 3y > 8 \\ y < -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$

**DÆMI 5.56**

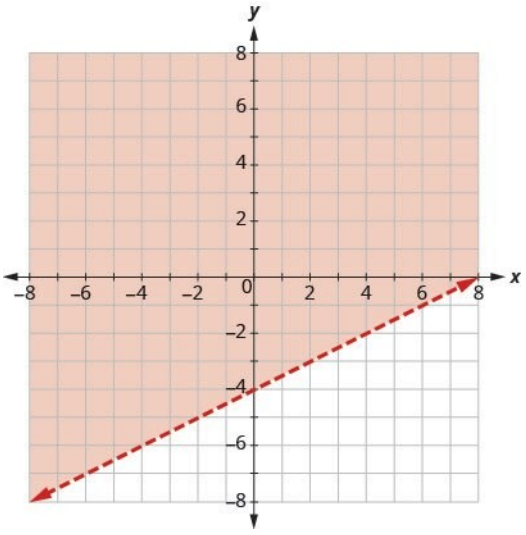
Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} y > \frac{1}{2}x - 4 \\ x - 2y < -4 \end{cases}$

## Lausn

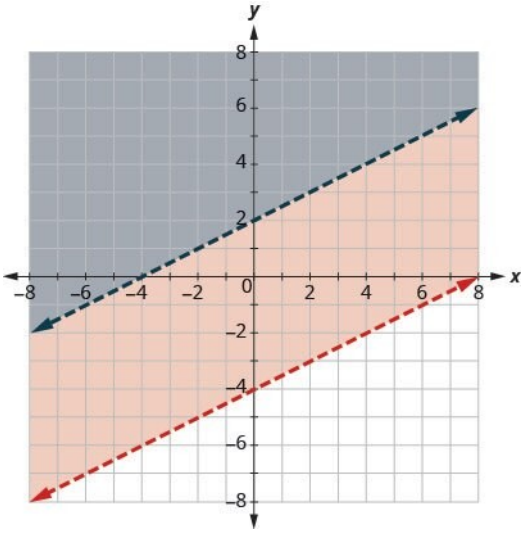
Teiknið graf $y > \frac{1}{2}x - 4$ með því að teikna

$y = \frac{1}{2}x - 4$

með hallatölunni $m = \frac{1}{2}$ og skurðpunktinum við y-ás, b = −4. Markalínan verður slitin lína. Prófið (0, 0). Punkturinn gerir ójöfnuna sanna. Skyggið því rauðu þeim megin sem inniheldur (0, 0).




Teiknið graf $x - 2y < -4$ með því að teikna $x - 2y = -4$ og prófa punkt. Skurðpunktarnir eru x = −4 og y = 2 og markalínan verður slitin lína. Veljið prófunarpunkt á lausnarsvæðinu og sannreynið að hann uppfylli báðar ójöfnurnar.




Enginn punktur á markalínunum er með í lausninni því báðar línurnar eru slitnar.

Lausnin er tvískyggða svæðið, sem er einnig lausn $x - 2y < -4$.

**REYNIÐ SJÁLF 5.111**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} y \geq 3x + 1 \\ -3x + y \geq -4 \end{cases}$

**REYNIÐ SJÁLF 5.112**

Leysið hneppið með grafískri aðferð. $\begin{cases} y \leq -\frac{1}{4}x + 2 \\ x + 4y \leq 4 \end{cases}$

## Leysið hagnýt verkefni með ójöfnuhneppum

Þegar við leysum hagnýt verkefni með ójöfnuhneppum byrjum við á að setja hvert skilyrði fram sem ójöfnu. Síðan teiknum við graf hneppisins eins og hér að framan og finnum svæðið sem inniheldur lausnirnar. Margar aðstæður eru aðeins raunhæfar þegar báðar breyturnar eru jákvæðar og því sýna gröfin aðeins fyrsta fjórðung.

**DÆMI 5.57**



Christy selur ljósmyndir sínar í bás á götumarkaði. Í byrjun dags vill hún hafa að minnsta kosti 25 myndir til sýnis í básnum. Hver lítil mynd sem hún sýnir kostar hana $4 og hver stór mynd $10. Hún vill ekki verja meira en $200 í myndirnar sem hún sýnir.

ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.

ⓑ Teiknið graf hneppisins.

ⓒ Gæti hún sýnt 15 litlar og 5 stórar myndir?

ⓓ Gæti hún sýnt 3 stórar og 22 litlar myndir?

### Lausn

**1.** ⓐ Látum $x =$ fjölda lítilla mynda og $y =$ fjölda stórra mynda. Setjið upplýsingarnar fram sem ójöfnur til að mynda ójöfnuhneppið. Þá höfum við ójöfnuhneppið.

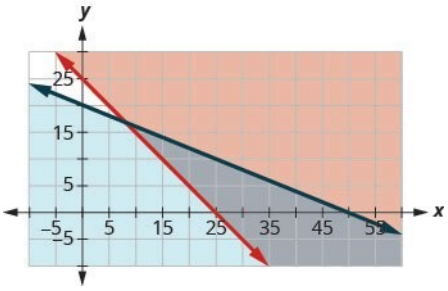
Hún vill hafa að minnsta kosti 25 myndir.
Fjöldi lítilla og stórra mynda saman þarf að vera að minnsta kosti 25.
$x + y \geq 25$
$4 fyrir hverja litla mynd og $10 fyrir hverja stóra mynd mega samtals nema í mesta lagi $200.
$4x + 10y \leq 200$

$$\begin{cases} x + y \geq 25 \\ 4x + 10y \leq 200 \end{cases}$$

**2.** ⓑ

---

Til að teikna graf $x + y \geq 25$ teiknum við x + y = 25 sem heila línu. Veljið (0, 0) sem prófunarpunkt. Hann gerir ójöfnuna ekki sanna og því skyggjum við rauðu þeim megin sem inniheldur ekki (0, 0). Til að teikna graf




$4x + 10y \leq 200$ teiknum við 4x + 10y = 200 sem heila línu. Veljið (0, 0) sem prófunarpunkt. Hann gerir ójöfnuna sanna og því skyggjum við bláu þeim megin sem inniheldur (0, 0).

---

Lausn hneppisins er tvískyggða svæðið, sem er dekkra á litinn.

**3.** ⓒ Til að kanna hvort hægt sé að sýna 10 litlar og 20 stórar myndir athugum við hvort punkturinn (10, 20) sé á lausnarsvæðinu. Hann er það ekki. Christy myndi því ekki sýna 10 litlar og 20 stórar myndir.

**4.** ⓓ Til að kanna hvort hægt sé að sýna 20 litlar og 10 stórar myndir athugum við hvort punkturinn (20, 10) sé á lausnarsvæðinu. Hann er þar. Christy gæti því valið að sýna 20 litlar og 10 stórar myndir.

Athugið að einnig mætti prófa mögulegar lausnir með því að setja gildin inn í hvora ójöfnu.

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.113**

Eftirvagn getur borið að hámarki 160 pund og rúmað að hámarki 15 rúmfet. Örbylgjuofn vegur 30 pund og tekur 2 rúmfet, en prentari vegur 20 pund og tekur 3 rúmfet.

**1.** ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.

**2.** ⓑ Teiknið graf hneppisins.

**3.** ⓒ Er hægt að flytja 4 örbylgjuofna og 2 prentara á eftirvagninum?

**4.** ⓓ Er hægt að flytja 7 örbylgjuofna og 3 prentara á eftirvagninum?

---

**REYNIÐ SJÁLF 5.114**

Mary þarf að kaupa svarblöð og blýanta fyrir samræmt próf sem nemendur á næstsíðasta ári framhaldsskólans taka. Hún þarf að minnsta kosti 5 fleiri svarblöð en blýanta. Blýantarnir kosta $2 og svarblöðin $1. Mary má í mesta lagi eyða $400 í þessar vörur.

ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum. ⓑ Teiknið graf hneppisins. ⓒ Gæti Mary keypt 100 blýanta og 100 svarblöð? ⓓ Gæti Mary keypt 150 blýanta og 150 svarblöð?

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gæti Mary keypt 100 blýanta og 100 svarblöð?
4. ⓓ Gæti Mary keypt 150 blýanta og 150 svarblöð?

---

**DÆMI 5.58**

Omar þarf að borða að minnsta kosti 800 hitaeiningar áður en hann fer á æfingu með liðinu. Hann vill aðeins hamborgara og smákökur og vill ekki eyða meira en $5. Á hamborgarastaðnum nálægt skólanum hans inniheldur hver hamborgari 240 hitaeiningar og kostar $1,40. Hver smákaka inniheldur 160 hitaeiningar og kostar $0,50.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gæti hann borðað 3 hamborgara og 1 smáköku?
4. ⓓ Gæti hann borðað 2 hamborgara og 4 smákökur?

5

## Lausn

ⓐ Látum $h=$ tákna fjölda hamborgara og
$c=$ fjölda smákaka. Setjið upplýsingarnar fram sem ójöfnur til að mynda ójöfnuhneppið. Heildarfjöldi hitaeininga úr hamborgurum, 240 úr hverjum, og smákökum, 160 úr hverri, þarf að vera að minnsta kosti 800.

$$240\,h+160\,c\geq 800$$

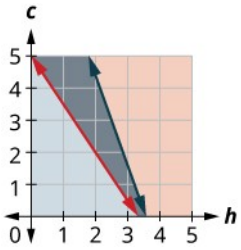
Hver hamborgari kostar $1,40 og hver smákaka $0,50. Samtals má upphæðin vera í mesta lagi $5,00.

$$1{,}40\,h+0{,}50\,c\leq 5$$

Þá höfum við ójöfnuhneppið. $\begin{cases} 240\,h+160\,c\geq 800 \\ 1{,}40\,h+0{,}50\,c\leq 5 \end{cases}$

ⓑ

Til að teikna graf $240h+160c\geq 800$ teiknum við $240h+160c=800$ sem heila línu. Veljið (0, 0) sem prófunarpunkt. Hann gerir ójöfnuna ekki sanna og því skyggjum við rauðu þeim megin sem inniheldur ekki (0, 0). Til að teikna graf




$1{,}40h+0{,}50c\leq 5$ teiknum við $1{,}40h+0{,}50c=5$ sem heila línu. Veljið (0,0) sem prófunarpunkt. Hann gerir ójöfnuna sanna og því skyggjum við bláu þeim megin sem inniheldur punktinn.

Lausn hneppisins er tvískyggða svæðið, sem er dekkra á litinn.

ⓒ Til að kanna hvort 3 hamborgarar og 1 smákaka uppfylli skilyrði Omars athugum við hvort punkturinn (3, 1) sé á lausnarsvæðinu. Hann er þar. Omar gæti valið að borða 3 hamborgara og 1 smáköku. ⓓ Til að kanna hvort 2 hamborgarar og 4 smákökur uppfylli skilyrðin athugum við hvort punkturinn (2, 4) sé á lausnarsvæðinu. Hann er þar. Omar gæti valið að borða 2 hamborgara og 4 smákökur.

Einnig mætti prófa mögulegar lausnir með því að setja gildin inn í hvora ójöfnu.

**REYNIÐ SJÁLF 5.115**

Tenison þarf að neyta að minnsta kosti 1.000 aukahitaeininga á dag til að undirbúa sig fyrir maraþon. Hann hefur aðeins $25 til að kaupa viðbótarmat. Hann ætlar að kaupa kleinuhringi á $0,75 sem innihalda 360 hitaeiningar hver og orkudrykki á $2 sem innihalda 110 hitaeiningar hver.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hann keypt 8 kleinuhringi og 4 orkudrykki?
4. ⓓ Getur hann keypt 1 kleinuhring og 3 orkudrykki?

**REYNIÐ SJÁLF 5.116**

Læknir Philips segir honum að bæta að minnsta kosti 1000 hitaeiningum á dag við venjulegt mataræði. Philip vill kaupa próteinstykki sem kosta $1,80 hvert og innihalda 140

hitaeiningar. Hann vill líka kaupa safa sem kostar $1,25 flaskan og inniheldur 125 hitaeiningar. Hann vill ekki eyða meira en $12.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hann keypt 3 próteinstykki og 5 safaflöskur?
4. ⓒ Getur hann keypt 5 próteinstykki og 3 safaflöskur?

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið fleiri útskýringar og æfingar í að teikna gröf línulegra ójöfnuhneppa.

- Grafísk framsetning ójöfnuhneppis
- Ójöfnuhneppi
- Leysa línuleg ójöfnuhneppi með grafískri aðferð

## Verkefni úr hluta 5.6

***Æfingin skapar meistarann***

5

**Metið hvort röðuð tvennd sé lausn línulegs ójöfnuhneppis**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið meta hvort hver röðuð tvennd sé lausn hneppisins.

275.

$$\begin{cases} 3x + y > 5 \\ 2x - y \leq 10 \end{cases}$$

ⓐ $(3, -3)$ ⓑ $(7, 1)$

276.

$$\begin{cases} 4x - y < 10 \\ -2x + 2y > -8 \end{cases}$$

ⓐ $(5, -2)$ ⓑ $(-1, 3)$

277.

$$\begin{cases} y > \frac{2}{3}x - 5 \\ x + \frac{1}{2}y \leq 4 \end{cases}$$

ⓐ $(6, -4)$ ⓑ $(3, 0)$

278.

$$\begin{cases} y < \frac{3}{2}x + 3 \\ \frac{3}{4}x - 2y < 5 \end{cases}$$

ⓐ $(-4, -1)$ ⓑ $(8, 3)$

279.

$$\begin{cases} 7x + 2y > 14 \\ 5x - y \leq 8 \end{cases}$$

ⓐ $(2, 3)$ ⓑ $(7, -1)$

280.

$$\begin{cases} 6x - 5y < 20 \\ -2x + 7y > -8 \end{cases}$$

ⓐ $(1, -3)$ ⓑ $(-4, 4)$

281.

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 2 \\ 4x - 6y < -1 \end{cases}$$

ⓐ $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ ⓑ $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{6}\right)$

282.

$$\begin{cases} 5x - 3y < -2 \\ 10x + 6y > 4 \end{cases}$$

ⓐ $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right)$ ⓑ $\left(-\frac{3}{10}, \frac{7}{6}\right)$

**Leysið línulegt ójöfnuhneppi með grafískri aðferð**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið leysa hvert hneppi með grafískri aðferð.

283.

$$\begin{cases} y \leq 3x + 2 \\ y > x - 1 \end{cases}$$

284.

$$\begin{cases} y < -2x + 2 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$$

285.

$$\begin{cases} y < 2x - 1 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

286.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + 2 \\ y > 2x - 3 \end{cases}$$

287.

$$\begin{cases} x - y > 1 \\ y < -\frac{1}{4}x + 3 \end{cases}$$

288.

$$\begin{cases} x + 2y < 4 \\ y < x - 2 \end{cases}$$

289.

$$\begin{cases} 3x - y \leq 6 \\ y \geq -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

290.

$$\begin{cases} 2x + 4y \geq 8 \\ y \leq \frac{3}{4}x \end{cases}$$

291.

$$\begin{cases} 2x - 5y < 10 \\ 3x + 4y \geq 12 \end{cases}$$

292.

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 6 \\ -4x - 2y > 8 \end{cases}$$

293.

$$\begin{cases} 2x + 2y > -4 \\ -x + 3y \geq 9 \end{cases}$$

294.

$$\begin{cases} 2x + y > -6 \\ -x + 2y \geq -4 \end{cases}$$

295.

$$\begin{cases} x - 2y < 3 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

296.

$$\begin{cases} x - 3y > 4 \\ y \leq -1 \end{cases}$$

297.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x - 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

298.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{2}{3}x + 5 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

299.

$$\begin{cases} y \geq \frac{3}{4}x - 2 \\ y < 2 \end{cases}$$

300.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x + 3 \\ y < 1 \end{cases}$$

301.

$$\begin{cases} 3x - 4y < 8 \\ x < 1 \end{cases}$$

302.

$$\begin{cases} -3x + 5y > 10 \\ x > -1 \end{cases}$$

303.

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

304.

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

305.

$$\begin{cases} 2x + 4y > 4 \\ y \leq -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

306.

$$\begin{cases} x - 3y \geq 6 \\ y > \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

307.

$$\begin{cases} -2x + 6y < 0 \\ 6y > 2x + 4 \end{cases}$$

308.

$$\begin{cases} -3x + 6y > 12 \\ 4y \leq 2x - 4 \end{cases}$$

309.

$$\begin{cases} y \geq -3x + 2 \\ 3x + y > 5 \end{cases}$$

310.

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x - 1 \\ -2x + 4y \geq 4 \end{cases}$$

311.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{4}x - 2 \\ x + 4y < 6 \end{cases}$$

312.

$$\begin{cases} y \geq 3x - 1 \\ -3x + y > -4 \end{cases}$$

313.

$$\begin{cases} 3y > x + 2 \\ -2x + 6y > 8 \end{cases}$$

314.

$$\begin{cases} y < \frac{3}{4}x - 2 \\ -3x + 4y < 7 \end{cases}$$

**Leysið hagnýt verkefni með ójöfnuhneppum**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið setja hvert verkefni fram sem ójöfnuhneppi og leysa það.

**315.** Caitlyn selur teikningar sínar á héraðshátíð. Hún vill selja að minnsta kosti 60 teikningar og býður upp á andlitsmyndir og landslagsmyndir. Hún selur andlitsmyndirnar á $15 og landslagsmyndirnar á $10. Hún þarf að selja teikningar fyrir að minnsta kosti $800 til að hagnast.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Mun hún hagnast ef hún selur 20 andlitsmyndir og 35 landslagsmyndir?
4. ⓓ Mun hún hagnast ef hún selur 50 andlitsmyndir og 20 landslagsmyndir?

**316.** Jake vill ekki eyða meira en $50 í áburðar- og mómoldarpoka fyrir garðinn. Áburður kostar $2 pokinn og mómold $5 pokinn. Sendibíll Jakes rúmar í mesta lagi 20 poka.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hann keypt 15 poka af áburði og 4 poka af mómold?
4. ⓓ Getur hann keypt 10 poka af áburði og 10 poka af mómold?

**317.** Reiko þarf að senda jólakort og pakka og vill að burðargjaldið verði í mesta lagi $500. Kortin eru að minnsta kosti 4 fleiri en tvöfaldur fjöldi pakkanna. Það kostar $3 að senda kort með myndum og $7 að senda pakka.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hún sent 60 kort og 26 pakka?
4. ⓓ Getur hún sent 90 kort og 40 pakka?

**318.** Juan er að læra fyrir lokapróf í efnafræði og algebru. Hann hefur aðeins 24 klukkustundir til að læra og þarf að verja að minnsta kosti þrisvar sinnum lengri tíma í algebru en í efnafræði.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hann varið 4 klukkustundum í efnafræði og 20 klukkustundum í algebru?
4. ⓓ Getur hann varið 6 klukkustundum í efnafræði og 18 klukkustundum í algebru?

**319.** Jocelyn er barnshafandi og þarf að neyta að minnsta kosti 500 fleiri hitaeininga á dag en venjulega. Dag einn kaupir hún viðbótarmat fyrir $15. Hún kaupir banana sem innihalda 90 hitaeiningar hver og súkkulaðimúslístykki sem innihalda 150 hitaeiningar hvert. Bananarnir kosta $0,35 hver og múslístykkin $2,50 hvert.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gæti hún keypt 5 banana og 6 múslístykki?
4. ⓓ Gæti hún keypt 3 banana og 4 múslístykki?

**320.** Mark reynir að auka vöðvamassa og þarf því að bæta að minnsta kosti 80 grömmum af próteini á dag við mataræðið. Flaska af próteindrykk kostar $3,20 og próteinstykki $1,75. Drykkurinn gefur 27 grömm af próteini og stykkið 16 grömm. Hann hefur $10 til ráðstöfunar.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gæti hann keypt 3 flöskur af próteindrykk og 1 próteinstykki?
4. ⓓ Gæti hann keypt engar flöskur af próteindrykk og 5 próteinstykki?

**321.** Jocelyn vill borða bæði meira prótein og fleiri hitaeiningar. Hún vill bæta að minnsta kosti 35 grömmum af próteini við daglega neyslu sína en bæta í mesta lagi 200 hitaeiningum við hana. Ein únsa af cheddarosti inniheldur 7 grömm af próteini og 110 hitaeiningar. Ein únsa af parmesanosti inniheldur 11 grömm af próteini og 22 hitaeiningar.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gæti hún borðað 1 únsu af cheddarosti og 3 únsur af parmesanosti?
4. ⓓ Gæti hún borðað 2 únsur af cheddarosti og 1 únsu af parmesanosti?

5

**322.** Mark eykur daglega hreyfingu sína með því að hlaupa og ganga samtals að minnsta kosti 4 mílur. Markmið hans er að brenna að minnsta kosti 1.500 hitaeiningum með hreyfingunni. Ganga brennir 270 hitaeiningum á mílu og hlaup 650 hitaeiningum.

ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum. ⓑ Teiknið graf hneppisins. ⓒ Gæti hann náð markmiðinu með því að ganga 3 mílur og hlaupa 1 mílu? ⓓ Gæti hann náð markmiðinu með því að ganga 2 mílur og hlaupa 2 mílur?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**323.** Miðar á leik í bandarísku hafnaboltadeildinni fyrir 3 fullorðna og 3 börn kosta minna en $75, en miðar fyrir 2 fullorðna og 4 börn kosta minna en $62.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir verkefninu.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gætu miðarnir kostað $20 fyrir fullorðna og $8 fyrir börn?
4. ⓓ Gætu miðarnir kostað $15 fyrir fullorðna og $5 fyrir börn?

**324.** Afi og amma bjóða fjölskyldunni í bíó. Miðar á dagssýningu kosta $4 fyrir barn og $4 fyrir fullorðinn. Miðar á kvöldsýningu kosta $6 fyrir barn og $8 fyrir fullorðinn. Þau ætla að verja í mesta lagi $80 í miða á dagssýninguna og í mesta lagi $100 í miða á kvöldsýninguna.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Gætu þau farið með 9 börn og 4 fullorðna á báðar sýningarnar?
4. ⓓ Gætu þau farið með 8 börn og 5 fullorðna á báðar sýningarnar?

### *Ritunarverkefni*

**325.** Teiknið graf ójöfnunnar $x - y \geq 3$. Hvernig vitið þið hvorum megin við línuna $x - y = 3$ á að skyggja?

326.

Teiknið graf hneppisins. Hvað merkir lausnin? $\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ y \geq -\frac{1}{2}x - 4 \end{cases}$

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

5

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| ákveðið hvort raðað talnapar sé lausn á ójöfnuhneppi línulegra ójafna. | | | |
| leyst ójöfnuhneppi línulegra ójafna með grafískri aðferð. | | | |
| leyst hagnýt verkefni með ójöfnuhneppum. | | | |

ⓑ Þið hafið nú farið yfir gátlistann. Hvað ætlið þið að gera til að ná öruggum tökum á öllum markmiðunum?

# Lykilhugtök

**samanfallandi línur**

Samanfallandi línur hafa sömu hallatölu og sama skurðpunkt við y-ás.

**lagshorn**

Tvö horn eru lagshorn ef summa hornastærða þeirra er 90 gráður.

**samkvæmt jöfnuhneppi**

Samkvæmt jöfnuhneppi er jöfnuhneppi sem hefur að minnsta kosti eina lausn.

**háðar jöfnur**

Tvær jöfnur eru háðar ef allar lausnir annarrar jöfnunnar eru einnig lausnir hinnar.

**ósamkvæmt jöfnuhneppi**
Ósamkvæmt jöfnuhneppi er jöfnuhneppi sem hefur enga lausn.

**óháðar jöfnur**
Tvær jöfnur eru óháðar ef þær hafa ólík lausnamengi.

**lausnir jöfnuhneppis**
Lausnir jöfnuhneppis eru þau gildi breytanna sem gera allar jöfnurnar sannar. Lausn hneppis tveggja línulegra jafna er táknuð með raðaðri tvennd (x, y).

**frændhorn**
Tvö horn eru frændhorn ef summa hornastærða þeirra er 180 gráður.

**línulegt jöfnuhneppi**
Tvær eða fleiri línulegar jöfnur sem eru settar saman mynda línulegt jöfnuhneppi.

**línulegt ójöfnuhneppi**
Tvær eða fleiri línulegar ójöfnur sem eru settar saman mynda línulegt ójöfnuhneppi.

5

# Meginatriði

## 5.1 Leysa jöfnuhneppi með grafískri aðferð

- **Leysa línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð**
  1. Skref 1. Teiknið graf fyrri jöfnunnar.
  2. Skref 2. Teiknið graf seinni jöfnunnar í sama rétthyrnda hnitakerfi.
  3. Skref 3. Metið hvort línurnar skerist, séu samsíða eða séu sama línan.
  4. Skref 4. Finnið lausn hneppisins. Ef línurnar skerast skuluð þið finna skurðpunktinn og sannreyna að hann uppfylli báðar jöfnurnar. Hann er lausn hneppisins. Ef línurnar eru samsíða hefur hneppið enga lausn. Ef línurnar eru sama línan hefur hneppið óendanlega margar lausnir.
  5. Skref 5. Sannreynið lausnina í báðum jöfnunum.

- Ákvarðið fjölda lausna út frá grafi línulegs jöfnuhneppis

| Graf | Fjöldi lausna |
|---|---|
| 2 línur sem skerast | 1 |
| Samsíða línur | Engar |
| Sama lína | Óendanlega margar |

- Ákvarðið fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis út frá hallatölum og skurðpunktum

| Fjöldi lausna línulegs jöfnuhneppis | | | |
|---|---|---|---|
| **Hallatölur** | **Skurðpunktar** | **Gerð lína** | **Fjöldi lausna** |
| Ólíkar | | Skerast | 1 punktur |
| Sömu | Ólíkar | Samsíða | Engin lausn |
| Sömu | Sömu | Samfallandi | Óendanlega margar lausnir |

- Ákvarðið fjölda lausna og flokkið jöfnuhneppið

| Línur | Skerast | Samsíða | Samanfallandi |
|---|---|---|---|
| **Fjöldi lausna** | 1 punktur | Engin lausn | Óendanlega margar |
| **Samkvæmt/ósamkvæmt** | Samkvæmt | Ósamkvæmt | Samkvæmt |
| **Háð/óháð** | Óháð | Óháð | Háð |

- **Verkefnalausnaraðferð fyrir línuleg jöfnuhneppi**
  1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að og veljið breytur sem tákna stærðirnar.
  4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnuhneppi.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuhneppið með góðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.



## 5.2 Leysa jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

- **Leysa jöfnuhneppi með innsetningaraðferð**
  1. Skref 1. Einangrið aðra breytuna í annarri jöfnunni.
  2. Skref 2. Setjið stæðuna úr skrefi 1 inn í hina jöfnuna.
  3. Skref 3. Leysið jöfnuna sem fæst.
  4. Skref 4. Setjið lausnina úr skrefi 3 inn í aðra upphaflegu jöfnuna til að finna hina breytuna.
  5. Skref 5. Skrifið lausnina sem raðaða tvennd.
  6. Skref 6. Sannreynið að raðaða tvenndin uppfylli báðar upphaflegu jöfnurnar.

## 5.3 Leysa jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

- **Leysa jöfnuhneppi með eyðingaraðferð**
  1. Skref 1. Skrifið báðar jöfnurnar á staðalformi og losið þær við brotastuðla ef einhverjir stuðlar eru brot.
  2. Skref 2.
     Gerið stuðla annarrar breytunnar að samlagningarandhverfum.

- Veljið breytuna sem eyða á.
- Margfaldið aðra eða báðar jöfnurnar þannig að stuðlar þeirrar breytu verði samlagningarandhverfur.

3. Skref 3. Leggið saman jöfnurnar úr skrefi 2 til að eyða annarri breytunni.
4. Skref 4. Leysið fyrir breytuna sem eftir er.
5. Skref 5. Setjið lausnina úr skrefi 4 inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysið fyrir hina breytuna.
6. Skref 6. Skrifið lausnina sem raðaða tvennd.
7. Skref 7. Sannreynið að raðaða tvenndin uppfylli báðar upphaflegu jöfnurnar.

## 5.5 Leysa blöndunarverkefni með jöfnuhneppum

- **Tafla fyrir mynt- og blönduverkefni**

| Tegund | Fjöldi | • Verðgildi ($) = | Heildarverðmæti ($) |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| Samtals | | | |

- **Tafla fyrir styrkblöndur**

| Tegund | Fjöldi eininga | • Styrkur % | = Magn |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| Samtals | | | |

- **Tafla fyrir vaxtaverkefni**

| Reikningur | Höfuðstóll | • Vextir | • Tími | = Vaxtafjárhæð |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | |
| | | | 1 | |
| Samtals | | | | |

## 5.6 Teikna gröf línulegra ójöfnuhneppa

- **Leysa línulegt ójöfnuhneppi með grafískri aðferð**

1. Skref 1.
   Teiknið graf fyrri ójöfnunnar.
   - Teiknið markalínuna.
   - Skyggið þeim megin við markalínuna þar sem ójafnan er sönn.
2. Skref 2.
   Teiknið graf seinni ójöfnunnar í sama hnitakerfi.
   - Teiknið markalínuna.
   - Skyggið þeim megin við þá markalínu þar sem ójafnan er sönn.
3. Skref 3. Lausnin er svæðið þar sem skyggingarnar skarast.
4. Skref 4. Sannreynið með því að velja prófunarpunkt.

# Upprifjunarverkefni

## Leysa jöfnuhneppi með grafískri aðferð

**Metið hvort röðuð tvennd sé lausn jöfnuhneppis.**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið meta hvort punktarnir séu lausnir gefna jöfnuhneppisins.

327.

$$\begin{cases} x + 3y = -9 \\ 2x - 4y = 12 \end{cases}$$

ⓐ $(-3, -2)$ ⓑ $(0, -3)$

328.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

ⓐ $(6, 2)$ ⓑ $(9, -1)$

**Leysið línulegt jöfnuhneppi með grafískri aðferð**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leysa jöfnuhneppin með grafískri aðferð.

329.

$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$$

330.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$

331.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

332.

$$\begin{cases} x + 4y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

333.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 10 \end{cases}$$

334.

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ y = \frac{1}{2}x - 3 \end{cases}$$

**Ákvarðið fjölda lausna línulegs jöfnuhneppis**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða fjölda lausna án þess að teikna graf og flokka síðan jöfnuhneppið.

335.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + 2 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$$

336.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$$

337.

$$\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ y = \frac{5}{4}x - 5 \end{cases}$$

5

338.

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + 1 \\ 6x + 8y = 8 \end{cases}$$

**Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum með grafískri aðferð**

**339.** LaVelle býr til könnu af mokkakaffi. Fyrir hverja únsu af súkkulaðisírópi notar hún fimm únsur af kaffi. Hve margar únsur af súkkulaðisírópi og hve margar únsur af kaffi þarf hún til að búa til 48 únsur af mokkakaffi?

**340.** Eli býr til snakkblöndu úr saltkringlum og Chex-morgunkorni. Fyrir hvern bolla af saltkringlum notar hann þrjá bolla af Chex. Hve marga bolla af hvoru þarf hann til að búa til 12 bolla af snakkblöndu?

Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

**Leysið jöfnuhneppi með innsetningaraðferð**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leysa jöfnuhneppin með innsetningaraðferð.

341.

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

342.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

343.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 5y = -14 \end{cases}$$

344.

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$

345.

$$\begin{cases} y = -5x \\ 5x + y = 6 \end{cases}$$

346.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 2 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$



**Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum með innsetningaraðferð**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**347.** Summa tveggja talna er 55. Önnur talan er 11 minni en hin. Finnið tölurnar.

**348.** Ummál rétthyrnings er 128. Lengdin er 16 meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd.

**349.** Stærð annars hvassa horns rétthyrnds þríhyrnings er 2 gráðum minni en 3-föld stærð hins hvassa hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**350.** Gabriela starfar hjá tryggingafélagi sem greiðir henni $32.000 í laun auk $100 í þóknun fyrir hverja selda tryggingu. Hún íhugar starf hjá öðru félagi sem greiðir $40.000 í laun auk $80 fyrir hverja selda tryggingu. Hve margar tryggingar þarf Gabriela að selja til að heildarlaunin verði þau sömu?

Leysa jöfnuhneppi með eyðingaraðferð

**Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leysa jöfnuhneppin með eyðingaraðferð.

351.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = -10 \end{cases}$$

352.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -4x - 3y = -9 \end{cases}$$

353.

$$\begin{cases} 3x - 8y = 20 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

354.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 4x + 3y = 8 \end{cases}$$

355.

$$\begin{cases} 9x + 4y = 2 \\ 5x + 3y = 5 \end{cases}$$

356.

$$\begin{cases} -x + 3y = 8 \\ 2x - 6y = -20 \end{cases}$$

5

**Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum með eyðingaraðferð**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**357.** Summa tveggja talna er $-90$. Mismunur þeirra er 16. Finnið tölurnar.

**358.** Omar kemur daglega við á kleinuhringjastað á leið til vinnu. Í síðustu viku fékk hann sér 8 kleinuhringi og 5 cappuccino sem gáfu samtals 3.000 hitaeiningar. Í þessari viku fékk hann sér 6 kleinuhringi og 3 cappuccino sem gáfu samtals 2.160 hitaeiningar. Hve margar hitaeiningar eru í einum kleinuhring? Hve margar eru í einum cappuccino?

**Veljið hentugustu aðferðina til að leysa línulegt jöfnuhneppi**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið meta hvort hentugra sé að leysa jöfnuhneppið með innsetningaraðferð eða eyðingaraðferð.

359.

$$\begin{cases} 6x - 5y = 27 \\ 3x + 10y = -24 \end{cases}$$

360.

$$\begin{cases} y = 3x - 9 \\ 4x - 5y = 23 \end{cases}$$

Leysa hagnýt verkefni með jöfnuhneppum

**Setjið fram sem jöfnuhneppi**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið setja hvert verkefni fram sem jöfnuhneppi án þess að leysa það.

**361.** Summa tveggja talna er $-32$. Önnur talan er tvöföld hin talan að frádregnum tveimur. Finnið tölurnar.

**362.** Fjórföld fyrri talan að viðbættri þrefaldri seinni tölunni er $-9$. Tvöföld fyrri talan að viðbættri seinni tölunni er þrír. Finnið tölurnar.

**363.** Í síðasta mánuði unnu Jim og Debbie sér inn samtals $7.200. Debbie vann sér inn $1.600 meira en Jim. Hve mikið vann hvort þeirra sér inn?

**364.** Henri hefur fjárfest $24.000 í hlutabréfum og skuldabréfum. Fjárhæðin í hlutabréfum er $6.000 meiri en þreföld fjárhæðin í skuldabréfum. Hve mikið er í hvorri fjárfestingu?

**Leysið verkefni með beinni framsetningu**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**365.** Pam er 3 árum eldri en Jan systir hennar. Samanlagður aldur þeirra er 99. Finnið aldur þeirra.

**366.** Mollie vill gróðursetja 200 blómlauka í garðinum sínum og hafa þar eingöngu írisa og túlípana. Hún vill gróðursetja þrisvar sinnum fleiri túlípana en írisa. Hve marga lauka af hvorri tegund á hún að gróðursetja?

**Leysið rúmfræðiverkefni**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**367.** Mismunur tveggja frændhorna er 58 gráður. Finnið stærð hornanna.

**368.** Tvö horn eru lagshorn. Stærð stærra hornsins er fimm gráðum meiri en fjórföld stærð minna hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**369.** Becca hengir 28 feta blómaskreytingu á hliðar og efri brún pergólu fyrir brúðkaup. Hæðin er fjórum fetum minni en breiddin. Finnið hæð og breidd pergólunnar.

**370.** Ummál rétthyrnds borgargarðs er 1428 fet. Lengdin er 78 fetum meiri en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd garðsins.

**Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**371.** Sheila og Lenore óku heim til ömmu sinnar. Lenore lagði af stað einni klukkustund á eftir Sheilu. Sheila ók á 45 mílna hraða á klukkustund og Lenore á 60 mílna hraða. Hve lengi er Lenore að ná Sheilu?

**372.** Bob lagði af stað að heiman á hjóli á 10 mílna hraða á klukkustund áleiðis að vatninu. Eiginkona hans, Cheryl, lagði af stað 45 mínútum ($\frac{3}{4}$ klukkustund) síðar á bíl á 25 mílna hraða. Hve lengi er Cheryl að ná Bob?

**373.** Marcus siglir bátnum sínum 36 mílur niður ána á þremur klukkustundum en er fjórar klukkustundir á leiðinni til baka á móti straumi. Finnið hraða bátsins í kyrru vatni og hraða straumsins.

**374.** Farþegaþota getur flogið 804 mílur á 2 klukkustundum með meðvindi en aðeins 776 mílur á 2 klukkustundum í mótvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

Leysa blöndunarverkefni með jöfnuhneppum

**Leysið blöndunarverkefni**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**375.** Lynn greiddi samtals $2.780 fyrir 261 leikhúsmiða. Nemendamiðar kostuðu $10 og fullorðinsmiðar $15. Hve marga miða af hvorri gerð keypti Lynn?

**376.** Priam er með tíusenta og eins senta myntir í glasahaldara bílsins. Heildarverðmæti þeirra er $4,21. Tíusenta myntirnar eru þremur færri en fjórfaldur fjöldi eins senta myntanna. Hve margar myntir af hvorri gerð eru í glasahaldaranum?

**377.** Yumi vill búa til 12 bolla af snakkblöndu úr sælgæti og hnetum. Blandan má kosta $1,29 á bolla. Sælgætið kostar $2,49 á bolla og hneturnar $0,69 á bolla. Hve marga bolla af hvoru á hún að nota?

5

**378.** Vísindamaður þarf 70 lítra af alkóhóllausn með 40% styrk. Hann hefur lausnir með 30% og 60% styrk tiltækar. Hve marga lítra af lausn með 30% styrk og hve marga af lausn með 60% styrk á hann að blanda til að fá lausn með 40% styrk?

**Leysið vaxtaverkefni**

Setjið eftirfarandi verkefni fram sem jöfnuhneppi og leysið.

**379.** Jack hefur $12.000 til fjárfestingar og vill fá 7,5% vexti á ári. Hann leggur hluta fjárins á sparnaðarreikning sem ber 4% ársvexti og afganginn á bundinn innlánsreikning sem ber 9% ársvexti. Hve mikið á hann að leggja á hvorn reikning?

**380.** Þegar Linda útskrifast úr háskóla skuldar hún $43.000 í námslánum. Vextir alríkislánanna eru 4,5% en vextir einkabankalánanna 2%. Heildarvextir eins árs voru $1585. Hver er höfuðstóll hvors láns?

Teikna gröf línulegra ójöfnuhneppa

**Metið hvort röðuð tvennd sé lausn línulegs ójöfnuhneppis**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið meta hvort hver röðuð tvennd sé lausn hneppisins.

381.

$$\begin{cases} 4x + y > 6 \\ 3x - y \leq 12 \end{cases}$$

ⓐ $(2, -1)$ ⓑ $(3, -2)$

382.

$$\begin{cases} y > \frac{1}{3}x + 2 \\ x - \frac{1}{4}y \leq 10 \end{cases}$$

ⓐ $(6,5)$ ⓑ $(15,8)$

**Leysið línulegt ójöfnuhneppi með grafískri aðferð**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leysa hvert hneppi með grafískri aðferð.

383.

$$\begin{cases} y < 3x + 1 \\ y \geq -x - 2 \end{cases}$$

384.

$$\begin{cases} x - y > -1 \\ y < \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

385.

$$\begin{cases} 2x - 3y < 6 \\ 3x + 4y \geq 12 \end{cases}$$

386.

$$\begin{cases} y \leq -\frac{3}{4}x + 1 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

387.

$$\begin{cases} x + 3y < 5 \\ y \geq -\frac{1}{3}x + 6 \end{cases}$$

388.

$$\begin{cases} y \geq 2x - 5 \\ -6x + 3y > -4 \end{cases}$$

**Leysið hagnýt verkefni með ójöfnuhneppum**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið setja hvert verkefni fram sem ójöfnuhneppi og leysa það.

**389.** Roxana býr til armbönd og hálsmen og selur á bændamarkaði. Hún selur armböndin á $12 hvert og hálsmenin á $18 hvert. Um næstu helgi getur hún sýnt í mesta lagi 40 gripi og þarf að selja fyrir að minnsta kosti $500 til að hagnast.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Ætti hún að sýna 26 armbönd og 14 hálsmen?
4. ⓓ Ætti hún að sýna 39 armbönd og 1 hálsmen?

**390.** Annie hefur $600 til að kaupa kiljubækur og innbundnar bækur fyrir kennslustofuna. Hún vill að innbundnu bækurnar séu að minnsta kosti 5 fleiri en þrefaldur fjöldi kiljubókanna. Kiljubækur kosta $4 hver og innbundnar bækur $15 hver.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hún keypt 8 kiljubækur og 40 innbundnar bækur?
4. ⓓ Getur hún keypt 10 kiljubækur og 37 innbundnar bækur?

## Æfingapróf

5

Metið hvort hver röðuð tvennd sé lausn á jöfnuhneppinu hér á eftir.

391.

$$\begin{cases} x - 4y = -8 \\ 2x + 5y = 10 \end{cases}$$

ⓐ $(0, 2)$ ⓑ $(4, 3)$

Leysið hneppin hér á eftir með grafískri aðferð.

392.

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

393.

$$\begin{cases} x - y > -2 \\ y \leq 3x + 1 \end{cases}$$

Leysið hvert jöfnuhneppi hér á eftir með innsetningaraðferð eða eyðingaraðferð.

394.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

395.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

396.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$$

397.

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x + 1 \\ 8x + 10y = 10 \end{cases}$$

398.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ -4x + 6y = -16 \end{cases}$$

Skrifið hvert verkefni hér á eftir sem jöfnuhneppi og leysið það.

**399.** Summa tveggja talna er −24. Önnur talan er 104 minni en hin. Finnið tölurnar.

**400.** Ramon vill gróðursetja gúrkur og tómata í garðinum. Hann hefur pláss fyrir 16 plöntur og vill hafa þrisvar sinnum fleiri gúrkuplöntur en tómatplöntur. Hve margar plöntur af hvorri tegund á hann að gróðursetja?

**401.** Tvö horn eru lagshorn. Stærð stærra hornsins er sex gráðum meiri en tvöföld stærð minna hornsins. Finnið stærð beggja hornanna.

**402.** Á mánudegi hljóp Lance í 30 mínútur og synti í 20 mínútur. Heilsuforritið hans sagði að hann hefði brennt 610 hitaeiningum. Á miðvikudegi sagði forritið að hann hefði brennt 695 hitaeiningum þegar hann hljóp í 25 mínútur og synti í 40 mínútur. Hve mörgum hitaeiningum brenndi hann á einni mínútu af hlaupi? Hve mörgum á einni mínútu af sundi?

**403.** Kathy lagði af stað að heiman og gekk hratt í átt að verslunarmiðstöðinni á 4 mílna hraða á klukkustund. Systir hennar Abby lagði af stað 15 mínútum síðar og hjólaði að verslunarmiðstöðinni á 10 mílna hraða á klukkustund. Hve lengi er Abby að ná Kathy?

**404.** Það tekur $5\frac{1}{2}$ klukkustundir að fljúga 2.475 mílur á þotu í mótvindi frá San Jose í Kaliforníu til Lihue á Havaí. Flugið til baka frá Lihue til San Jose tekur 5 klukkustundir í meðvindi. Finnið hraða þotunnar í kyrru lofti og vindhraðann.

**405.** Liz greiddi $160 fyrir 28 miða þegar hún fór með skátahóp á vísindasafnið. Barnamiðar kostuðu $5 og fullorðinsmiðar $9. Hve marga miða af hvorri gerð keypti Liz?

**406.** Lyfjafræðingur þarf 20 lítra af saltlausn með 2% styrk. Til eru lausnir með 1% og 5% styrk. Hve marga lítra af lausn með 1% styrk og hve marga af lausn með 5% styrk á að blanda til að fá lausn með 2% styrk?

**407.** Setjið verkefnið fram sem ójöfnuhneppi og leysið það.

Andi vill eyða í mesta lagi $50 í hrekkjavökusælgæti. Hún vill kaupa súkkulaðistykki sem kosta $1 hvert og sleikjóa sem kosta $0,50 hvern. Sleikjóarnir eiga að vera að minnsta kosti þrisvar sinnum fleiri en súkkulaðistykkin.

1. ⓐ Setjið upp ójöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum.
2. ⓑ Teiknið graf hneppisins.
3. ⓒ Getur hún keypt 20 súkkulaðistykki og 70 sleikjóa?
4. ⓓ Getur hún keypt 15 súkkulaðistykki og 65 sleikjóa?

5

6. KAFLI

# Margliður



Mynd 6.1 Arkitektar nota margliður til að hanna sveigð form, svo sem þessa hengibrú, Silfurafmælisbrúna í Halton á Englandi.



## Yfirlit kaflans


- 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður
- 6.2 Notið margföldunarreglur velda
- 6.3 Margfaldið margliður
- 6.4 Sérstök margfeldi
- 6.5 Deilið einliðum
- 6.6 Deilið margliðum
- 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna

# Inngangur

Við höfum séð að gröf línulegra jafna eru beinar línur. Gröf annarra gerða jafna, sem kallast margliðujöfnur, eru ferlar, líkt og útlínur þessarar hengibrúar. Arkitektar nota margliður til að hanna lögun slíkra brúa og teikna uppdrætti þeirra. Verkfræðingar nota margliður til að reikna álagið á stoðir brúarinnar og tryggja að þær beri það álag sem þeim er ætlað. Í þessum kafla kynnið þið ykkur reikniaðgerðir með margliðum og eiginleika þeirra.

# 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Berið kennsl á margliður, einliði, tvíliði og þríliði
- Ákvarðið stig margliða
- Leggið saman og dragið frá einliði
- Leggið saman og dragið frá margliður
- Reiknið gildi margliðu fyrir gefið gildi

**UNDIRBÚNINGUR 6.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $8x+3x$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.24.

**UNDIRBÚNINGUR 6.2**

Dragið frá: $(5n+8)-(2n-1)$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.139.

**UNDIRBÚNINGUR 6.3**

Skrifið á útvíkkuðu formi: $a^5$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.14.

## Berið kennsl á margliður, einliði, tvíliði og þríliði

Þið hafið lært að liður er fasti eða margfeldi fasta og einnar eða fleiri breyta. Fastinn kallast stuðull. Liður af gerðinni $ax^m$, þar sem $a$ er fasti og $m$ heiltala sem er núll eða jákvæð, kallast einliður. Dæmi um einliði eru $8, -2x^2, 4y^3$, og $11z^7$.

**EINLIÐIR**

Hugtakið einliður merkir lið af gerðinni $a\,x^m$, þar sem $a$ er fasti og $m$ heiltala sem er núll eða jákvæð.

Einliður, eða tveir eða fleiri einliðir tengdir með samlagningu eða frádrætti, mynda margliðu. Sumar margliður bera sérstök heiti eftir fjölda liða. Einliður hefur nákvæmlega einn lið, tvíliður tvo liði og þríliður þrjá liði. Margliður með fleiri en þrjá liði bera engin sérstök heiti.

**MARGLIÐUR**

margliða — Einliður, eða tveir eða fleiri einliðir tengdir með samlagningu eða frádrætti, mynda margliðu.

- einliður — Margliða með nákvæmlega einum lið kallast einliður.
- tvíliður — Margliða með nákvæmlega tveimur liðum kallast tvíliður.
- þríliður — Margliða með nákvæmlega þremur liðum kallast þríliður.

Hér eru nokkur dæmi um margliður.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Margliða | $b+1$ | $4y^2-7y+2$ | $4x^4+x^3+8x^2-9x+1$ | |
| Einliða | $14$ | $8y^2$ | $-9x^3y^5$ | $-13$ |
| Tvíliða | $a+7$ | $4b-5$ | $y^2-16$ | $3x^3-9x^2$ |
| Þríliða | $x^2-7x+12$ | $9y^2+2y-8$ | $6m^4-m^3+8m$ | $z^4+3z^2-1$ |

Athugið að allir einliðir, tvíliðir og þríliðir eru líka margliður. Þeir eru sérstakir meðlimir í „fjölskyldu“ margliða og fá því sérstök heiti. Við notum orðin einliður, tvíliður og þríliður um þessar sérstöku margliður en köllum allar hinar einfaldlega margliður.

**DÆMI 6.1**

Ákvarðið hvort hver margliða sé einliður, tvíliður, þríliður eða annars konar margliða.

1. ⓐ $4y^2-8y-6$
2. ⓑ $-5a^4b^2$
3. ⓒ $2x^5-5x^3-9x^2+3x+4$
4. ⓓ $13-5m^3$
5. ⓔ $q$

## Lausn

| | Margliða | Fjöldi liða | Gerð |
|---|---|---|---|
| ⓐ | $4y^2-8y-6$ | 3 | Þríliður |
| ⓑ | $-5a^4b^2$ | 1 | Einliður |
| ⓒ | $2x^5-5x^3-9x^2+3x+4$ | 5 | Margliða |
| ⓓ | $13-5m^3$ | 2 | Tvíliður |
| ⓔ | $q$ | 1 | Einliður |

**REYNIÐ SJÁLF 6.1**

Ákvarðið hvort hver margliða sé einliður, tvíliður, þríliður eða annars konar margliða:

ⓐ $5b$ ⓑ $8y^3-7y^2-y-3$ ⓒ $-3x^2-5x+9$ ⓓ $81-4a^2$ ⓔ $-5x^6$

**REYNIÐ SJÁLF 6.2**

Ákvarðið hvort hver margliða sé einliður, tvíliður, þríliður eða annars konar margliða:

ⓐ $27z^3-8$ ⓑ $12m^3-5m^2-2m$ ⓒ $\frac{5}{6}$ ⓓ $8x^4-7x^2-6x-5$ ⓔ $-n^4$

6

## Ákvarðið stig margliða

Veldisvísar breytunnar ákvarða stig margliðu og stig liða hennar.

Einliður sem hefur enga breytu heldur aðeins fasta er sértilvik. Stig fasta er 0 því að hann hefur enga breytu.

**STIG MARGLIÐU**

Stig liðar er summa veldisvísa breyta hans.

Stig fasta er 0.

Stig margliðu er hæsta stig allra liða hennar.

Skoðum nokkrar margliður til að sjá hvernig þetta virkar. Við förum skref fyrir skref, byrjum á einliðum og höldum síðan áfram að margliðum með fleiri liðum.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Einliða** | 14 | $8y^2$ | $-9x^3y^5$ | $-13a$ |
| Stig | 0 | 2 | 8 | 1 |
| **Tvíliða** | $a+7$ | $4b^2-5b$ | $x^2y^2-16$ | $3n^3-9n^2$ |
| Stig hvers liðar | 1 0 | 2 1 | 4 0 | 3 2 |
| Stig margliðu | 1 | 2 | 4 | 3 |
| **Þríliða** | $x^2-7x+12$ | $9a^2+6ab+b^2$ | $6m^4-m^3n^2+8mn^5$ | $z^4+3z^2-1$ |
| Stig hvers liðar | 2 1 0 | 2 2 2 | 4 5 6 | 4 2 0 |
| Stig margliðu | 2 | 2 | 6 | 4 |
| **Margliða** | $b+1$ | $4y^2-7y+2$ | $4x^4+x^3+8x^2-9x+1$ | |
| Stig hvers liðar | 1 0 | 2 1 0 | 4 3 2 1 0 | |
| Stig margliðu | 1 | 2 | 4 | |

Margliða er á staðalformi þegar liðir hennar eru ritaðir í lækkandi röð eftir stigi. Venjið ykkur á að rita liðinn með hæsta stigið fyrst.

---

**DÆMI 6.2**

Finnið stig þessara margliða.

1. ⓐ $10\,y$
2. ⓑ $4\,x^3-7\,x+5$
3. ⓒ $-15$
4. ⓓ $-8\,b^2+9\,b-2$
5. ⓔ $8\,x\,y^2+2\,y$

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Veldisvísir $y$ er einn. $y=y^1$ | $10\,y$ Stigið er 1. |
| ⓑ Hæsta stig allra liðanna er 3. | $4\,x^3-7\,x+5$ Stigið er 3. |
| ⓒ Stig fasta er 0. | $-15$ Stigið er 0. |
| ⓓ Hæsta stig allra liðanna er 2. | $-8\,b^2+9\,b-2$ Stigið er 2. |
| ⓔ Hæsta stig allra liðanna er 3. | $8\,x\,y^2+2\,y$ Stigið er 3. |

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.3**

Finnið stig þessara margliða:

ⓐ $-15b$ ⓑ $10z^4+4z^2-5$ ⓒ $12c^5d^4+9c^3d^9-7$ ⓓ $3x^2y-4x$ ⓔ $-9$

**REYNIÐ SJÁLF 6.4**

Finnið stig þessara margliða:

ⓐ $52$ ⓑ $a^4b-17a^4$ ⓒ $5x+6y+2z$ ⓓ $3x^2-5x+7$ ⓔ $-a^3$

## Leggið saman og dragið frá einliði

Þið hafið lært að einfalda stæður með því að sameina samkynja liði. Munið að samkynja liðir verða að hafa sömu breytur með sömu veldisvísum. Einliðir eru liðir og því er það sama að leggja saman og draga frá einliði og að sameina samkynja liði. Ef einliðirnir eru samkynja, sameinum við þá með því að leggja stuðlana saman eða draga þá frá.

**DÆMI 6.3**

Leggið saman: $25y^2+15y^2$.

### Lausn

| | $25y^2+15y^2$ |
|---|---|
| Sameinið samkynja liði. | $40y^2$ |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.5**

Leggið saman: $12q^2+9q^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.6**

Leggið saman: $-15c^2+8c^2$.

**DÆMI 6.4**

Dragið frá: $16p-(-7p)$.

### Lausn

| | $16p-(-7p)$ |
|---|---|
| Sameinið samkynja liði. | $23p$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.7**

Dragið frá: $8m-(-5m)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.8**

Dragið frá: $-15z^3-\left(-5z^3\right)$.

Munið að samkynja liðir verða að hafa sömu breytur með sömu veldisvísum.

**DÆMI 6.5**

Einfaldið: $c^2+7d^2-6c^2$.

## Lausn

| | $c^2+7d^2-6c^2$ |
|---|---|
| Sameinið samkynja liði. | $-5c^2+7d^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.9**

Leggið saman: $8y^2+3z^2-3y^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.10**

Leggið saman: $3m^2+n^2-7m^2$.

**DÆMI 6.6**

Einfaldið: $u^2v+5u^2-3v^2$.

## Lausn

| | $u^2v+5u^2-3v^2$ |
|---|---|
| Enga samkynja liði er hægt að sameina. | $u^2v+5u^2-3v^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.11**

Einfaldið: $m^2n^2-8m^2+4n^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.12**

Einfaldið: $pq^2-6p-5q^2$.

## Leggið saman og dragið frá margliður

Þegar við leggjum saman og drögum frá margliður erum við í raun að leggja saman og draga frá röð af einliðum. Leitið að samkynja liðum, það er liðum með sömu breytur og sömu

veldisvísa. Með víxlreglunni getum við raðað liðunum upp á nýtt svo að samkynja liðir standi saman.

**DÆMI 6.7**

Finnið summuna: $\left(5y^2-3y+15\right)+\left(3y^2-4y-11\right)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Berið kennsl á samkynja liði. | $(5y^2-3y+15)+(3y^2-4y-11)$ |
| Endurraðið svo að samkynja liðir standi saman. | $5y^2+3y^2-3y-4y+15-11$ |
| Sameinið samkynja liði. | $8y^2-7y+4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.13**

Finnið summuna: $\left(7x^2-4x+5\right)+\left(x^2-7x+3\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.14**

Finnið summuna: $\left(14y^2+6y-4\right)+\left(3y^2+8y+5\right)$.

6

**DÆMI 6.8**

Finnið mismuninn: $\left(9w^2-7w+5\right)-\left(2w^2-4\right)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(9w^2-7w+5)-(2w^2-4)$ |
| Margfaldið inn í svigana og berið kennsl á samkynja liði. | $9w^2-7w+5-2w^2+4$ |
| Endurraðið liðunum. | $9w^2-2w^2-7w+5+4$ |
| Sameinið samkynja liði. | $7w^2-7w+9$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.15**

Finnið mismuninn: $\left(8x^2+3x-19\right)-\left(7x^2-14\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.16**

Finnið mismuninn: $\left(9b^2-5b-4\right)-\left(3b^2-5b-7\right)$.

**DÆMI 6.9**

Dragið $\left(c^2-4c+7\right)$ frá $\left(7c^2-5c+3\right)$.

## Lausn

| | Dragið $(c^2 - 4c + 7)$ frá $(7c^2 - 5c + 3)$. |
|---|---|
| | $(7c^2 - 5c + 3) - (c^2 - 4c + 7)$ |
| Margfaldið inn í svigana og berið kennsl á samkynja liði. | $7c^2 - 5c + 3 - c^2 + 4c - 7$ |
| Endurraðið liðunum. | $7c^2 - c^2 - 5c + 4c + 3 - 7$ |
| Sameinið samkynja liði. | $6c^2 - c - 4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.17**

Dragið $\left(5z^2-6z-2\right)$ frá $\left(7z^2+6z-4\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.18**

Dragið $\left(x^2-5x-8\right)$ frá $\left(6x^2+9x-1\right)$.

**DÆMI 6.10**

Finnið summuna: $\left(u^2-6uv+5v^2\right)+\left(3u^2+2uv\right)$.

## Lausn

| | $\left(u^2-6uv+5v^2\right)+\left(3u^2+2uv\right)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $u^2-6uv+5v^2+3u^2+2uv$ |
| Endurraðið liðunum svo að samkynja liðir standi saman. | $u^2+3u^2-6uv+2uv+5v^2$ |
| Sameinið samkynja liði. | $4u^2-4uv+5v^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.19**

Finnið summuna: $\left(3x^2-4xy+5y^2\right)+\left(2x^2-xy\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.20**

Finnið summuna: $\left(2x^2-3xy-2y^2\right)+\left(5x^2-3xy\right)$.

**DÆMI 6.11**

Finnið mismuninn: $\left(p^2+q^2\right)-\left(p^2+10\,p\,q-2\,q^2\right)$.

## Lausn

| | $\left(p^2+q^2\right)-\left(p^2+10\,p\,q-2\,q^2\right)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $p^2+q^2-p^2-10\,p\,q+2\,q^2$ |
| Endurraðið liðunum svo að samkynja liðir standi saman. | $p^2-p^2-10\,p\,q+q^2+2\,q^2$ |
| Sameinið samkynja liði. | $-10\,p\,q+3\,q^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.21**

Finnið mismuninn: $\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2+5\,a\,b-6\,b^2\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.22**

Finnið mismuninn: $\left(m^2+n^2\right)-\left(m^2-7\,m\,n-3\,n^2\right)$.

**DÆMI 6.12**

Einfaldið: $\left(a^3-a^2\,b\right)-\left(a\,b^2+b^3\right)+\left(a^2\,b+a\,b^2\right)$.

## Lausn

| | $\left(a^3-a^2\,b\right)-\left(a\,b^2+b^3\right)+\left(a^2\,b+a\,b^2\right)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $a^3-a^2\,b-a\,b^2-b^3+a^2\,b+a\,b^2$ |
| Endurraðið liðunum svo að samkynja liðir standi saman. | $a^3-a^2\,b+a^2\,b-a\,b^2+a\,b^2-b^3$ |
| Sameinið samkynja liði. | $a^3-b^3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.23**

Einfaldið: $\left(x^3-x^2\,y\right)-\left(x\,y^2+y^3\right)+\left(x^2\,y+x\,y^2\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.24**

Einfaldið: $\left(p^3-p^2\,q\right)+\left(p\,q^2+q^3\right)-\left(p^2\,q+p\,q^2\right)$.

## Reiknið gildi margliðu fyrir gefið gildi

Við höfum þegar lært að reikna gildi stæða. Margliður eru stæður og því notum við sömu aðferð til að reikna gildi margliðu. Við setjum gefna gildið inn fyrir breytuna og einföldum síðan samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða.

**DÆMI 6.13**

Reiknið gildi $5x^2 - 8x + 4$ þegar

1. ⓐ $x = 4$
2. ⓑ $x = -2$
3. ⓒ $x = 0$

### Lausn

| ⓐ $x = 4$ | |
|---|---|
| | $5x^2 - 8x + 4$ |
| Setjið 4 í stað $x$. | $5(4)^2 - 8(4) + 4$ |
| Reiknið veldin. | $5 \cdot 16 - 8(4) + 4$ |
| Margfaldið. | $80 - 32 + 4$ |
| Einfaldið. | $52$ |
| ⓑ $x = -2$ | |
| | $5x^2 - 8x + 4$ |
| Setjið $-2$ í stað $x$. | $5(-2)^2 - 8(-2) + 4$ |
| Reiknið veldin. | $5 \cdot 4 - 8(-2) + 4$ |
| Margfaldið. | $20 + 16 + 4$ |
| Einfaldið. | $40$ |
| ⓒ $x = 0$ | |
| | $5x^2 - 8x + 4$ |
| Setjið 0 í stað x. | $5(0)^2 - 8(0) + 4$ |
| Reiknið veldin. | $5 \cdot 0 - 8(0) + 4$ |
| Margfaldið. | $0 + 0 + 4$ |
| Einfaldið. | $4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.25**

Reiknið gildi: $3x^2 + 2x - 15$ þegar

1. ⓐ $x=3$
2. ⓑ $x=-5$
3. ⓒ $x=0$

**REYNIÐ SJÁLF 6.26**

Reiknið gildi: $5z^2-z-4$ þegar

1. ⓐ $z=-2$
2. ⓑ $z=0$
3. ⓒ $z=2$

**DÆMI 6.14**

Margliðan $-16t^2+250$ gefur hæð bolta $t$ sekúndum eftir að honum er sleppt af 250 feta hárri byggingu. Finnið hæðina eftir $t=2$ sekúndur.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $-16t^2+250$ |
| Setjið inn $t=2$. | $-16(2)^2+250$ |
| Einfaldið. | $-16\cdot 4+250$ |
| Einfaldið. | $-64+250$ |
| Einfaldið. | $186$ |
| | Eftir 2 sekúndur er boltinn í 186 feta hæð. |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.27**

Margliðan $-16t^2+250$ gefur hæð bolta $t$ sekúndum eftir að honum er sleppt af 250 feta hárri byggingu. Finnið hæðina eftir $t=0$ sekúndur.

**REYNIÐ SJÁLF 6.28**

Margliðan $-16t^2+250$ gefur hæð bolta $t$ sekúndum eftir að honum er sleppt af 250 feta hárri byggingu. Finnið hæðina eftir $t=3$ sekúndur.

**DÆMI 6.15**

Margliðan $6x^2+15xy$ gefur kostnað í dollurum við að framleiða rétthyrndan kassa. Botn og lok hans eru ferningar með hliðarlengdina x fet og hliðarveggirnir eru y fet á hæð. Finnið kostnaðinn við að framleiða kassa þar sem $x=4$ fet og $y=6$ fet.

## Lausn

| | $6x^2 + 15xy$ |
|---|---|
| Setjið $x = 4$ og $y = 6$ inn. | $6(4)^2 + 15(4)(6)$ |
| Einfaldið. | $6 \cdot 16 + 15(4)(6)$ |
| Einfaldið. | $96 + 360$ |
| Einfaldið. | $456$ |
| | Það kostar $456 að framleiða kassann. |

**REYNIÐ SJÁLF 6.29**

Margliðan $6x^2+15xy$ gefur kostnað í dollurum við að framleiða rétthyrndan kassa. Botn og lok hans eru ferningar með hliðarlengdina x fet og hliðarveggirnir eru y fet á hæð. Finnið kostnaðinn við að framleiða kassa þar sem $x=6$ fet og $y=4$ fet.

**REYNIÐ SJÁLF 6.30**

Margliðan $6x^2+15xy$ gefur kostnað í dollurum við að framleiða rétthyrndan kassa. Botn og lok hans eru ferningar með hliðarlengdina x fet og hliðarveggirnir eru y fet á hæð. Finnið kostnaðinn við að framleiða kassa þar sem $x=5$ fet og $y=8$ fet.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið meiri kennslu og æfingu í að leggja saman og draga frá margliður.

- Leggja saman og draga frá margliður 1
- Leggja saman og draga frá margliður 2
- Leggja saman og draga frá margliður 3
- Leggja saman og draga frá margliður 4

## Verkefni úr hluta 6.1

### *Æfingin skapar meistarann*

**Berið kennsl á margliður, einliði, tvíliði og þríliði**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið ákvarða hvort hver margliða sé einliður, tvíliður, þríliður eða annars konar margliða.

**1.** ⓐ $81b^5-24b^3+1$ ⓑ $5c^3+11c^2-c-8$ ⓒ $\frac{14}{15}y+\frac{1}{7}$

ⓓ $5$ ⓔ $4y+17$

**2.** ⓐ $x^2 - y^2$ ⓑ $-13c^4$ ⓒ $x^2+5x-7$ ⓓ $x^2y^2-2xy+8$ ⓔ 19

**3.** ⓐ $8-3x$ ⓑ $z^2-5z-6$ ⓒ $y^3-8y^2+2y-16$ ⓓ $81b^5-24b^3+1$ ⓔ $-18$

**4.** ⓐ $11y^2$ ⓑ $-73$ ⓒ $6x^2-3xy+4x-2y+y^2$ ⓓ $4y+17$ ⓔ $5c^3+11c^2-c-8$

### Ákvarðið stig margliða

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið ákvarða stig hverrar margliðu.

**5.** ⓐ $6a^2+12a+14$ ⓑ $18xy^2z$ ⓒ $5x+2$ ⓓ $y^3-8y^2+2y-16$ ⓔ $-24$

**6.** ⓐ $9y^3-10y^2+2y-6$ ⓑ $-12p^4$ ⓒ $a^2+9a+18$ ⓓ $20x^2y^2-10a^2b^2+30$ ⓔ 17

**7.** ⓐ $14-29x$ ⓑ $z^2-5z-6$ ⓒ $y^3-8y^2+2y-16$ ⓓ $23ab^2-14$ ⓔ $-3$

**8.** ⓐ $62y^2$ ⓑ 15 ⓒ $6x^2-3xy+4x-2y+y^2$ ⓓ $10-9x$ ⓔ $m^4+4m^3+6m^2+4m+1$

### Leggið saman og dragið frá einliði

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið leggja einliðina saman eða draga þá frá.

9.

$$7x^2+5x^2$$

10.

$$4y^3+6y^3$$

11.

$$-12w+18w$$

12.

$$-3m+9m$$

13.

$$4a-9a$$

14.

$$-y-5y$$

15.

$$28x-(-12x)$$

16.

$$13z-(-4z)$$

17.

$$-5b-17b$$

18.

$$-10x-35x$$

19.

$$12a+5b-22a$$

20.

$$14x-3y-13x$$

21.

$$2a^2+b^2-6a^2$$

22.

$$5u^2+4v^2-6u^2$$

23.

$$xy^2-5x-5y^2$$

24.

$$pq^2-4p-3q^2$$

25.

$$a^2b-4a-5ab^2$$

26.

$$x^2y-3x+7xy^2$$

27.

$$12a+8b$$

28.

$$19y+5z$$

**29.** Leggið saman: $4a, -3b, -8a$

**30.** Leggið saman: $4x, 3y, -3x$

**31.** Dragið frá: $5x^6$ frá $-12x^6$.

**32.** Dragið frá: $2p^4$ frá $-7p^4$.

### Leggið saman og dragið frá margliður

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið leggja margliðurnar saman eða draga þær frá.

33.

$$(5y^2+12y+4)+(6y^2-8y+7)$$

34.

$$(4y^2+10y+3)+(8y^2-6y+5)$$

35.

$$(x^2+6x+8)+(-4x^2+11x-9)$$

36.

$$(y^2+9y+4)+(-2y^2-5y-1)$$

37.

$$(8x^2-5x+2)+(3x^2+3)$$

38.

$$(7x^2-9x+2)+(6x^2-4)$$

39.

$$(5a^2+8)+(a^2-4a-9)$$

40.

$$(p^2-6p-18)+(2p^2+11)$$

41.

$$(4m^2-6m-3)-(2m^2+m-7)$$

42.

$$(3b^2-4b+1)-(5b^2-b-2)$$

43.

$$(a^2+8a+5)-(a^2-3a+2)$$

44.

$$(b^2-7b+5)-(b^2-2b+9)$$

45.

$$(12s^2-15s)-(s-9)$$

46.

$$\left(10r^2-20r\right)-\left(r-8\right)$$

**47.** Dragið $\left(9x^2+2\right)$ frá $\left(12x^2-x+6\right)$.

**48.** Dragið $\left(5y^2-y+12\right)$ frá $\left(10y^2-8y-20\right)$.

**49.** Dragið $\left(7w^2-4w+2\right)$ frá $\left(8w^2-w+6\right)$.

**50.** Dragið $\left(5x^2-x+12\right)$ frá $\left(9x^2-6x-20\right)$.

**51.** Finnið summu $\left(2p^3-8\right)$ og $\left(p^2+9p+18\right)$.

**52.** Finnið summu
$\left(q^2+4q+13\right)$ og $\left(7q^3-3\right)$.

**53.** Finnið summu $\left(8a^3-8a\right)$ og $\left(a^2+6a+12\right)$.

**54.** Finnið summu
$\left(b^2+5b+13\right)$ og $\left(4b^3-6\right)$.

**55.** Finnið mismun
$\left(w^2+w-42\right)$ og
$\left(w^2-10w+24\right)$.

**56.** Finnið mismun
$\left(z^2-3z-18\right)$ og
$\left(z^2+5z-20\right)$.

**57.** Finnið mismun
$\left(c^2+4c-33\right)$ og
$\left(c^2-8c+12\right)$.

**58.** Finnið mismun
$\left(t^2-5t-15\right)$ og
$\left(t^2+4t-17\right)$.

59.

$$\left(7x^2-2xy+6y^2\right)+\left(3x^2-5xy\right)$$

60.

$$\left(-5x^2-4xy-3y^2\right)+\left(2x^2-7xy\right)$$

61.

$$\left(7m^2+mn-8n^2\right)+\left(3m^2+2mn\right)$$

62.

$$\left(2r^2-3rs-2s^2\right)+\left(5r^2-3rs\right)$$

63.

$$\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2+3ab-4b^2\right)$$

64.

$$\left(m^2+2n^2\right)-\left(m^2-8mn-n^2\right)$$

65.

$$\left(u^2-v^2\right)-\left(u^2-4uv-3v^2\right)$$

66.

$$\left(j^2-k^2\right)-\left(j^2-8jk-5k^2\right)$$

67.

$$\left(p^3-3p^2q\right)+\left(2pq^2+4q^3\right)-\left(3p^2q+pq^2\right)$$

68.

$$\left(a^3-2a^2b\right)+\left(ab^2+b^3\right)-\left(3a^2b+4ab^2\right)$$

69.

$$\left(x^3-x^2y\right)-\left(4xy^2-y^3\right)+\left(3x^2y-xy^2\right)$$

70.

$$\left(x^3-2x^2y\right)-\left(xy^2-3y^3\right)-\left(x^2y-4xy^2\right)$$

**Reiknið gildi margliðu fyrir gefið gildi**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið reikna gildi hverrar margliðu fyrir gefið gildi.

**71.** Reiknið gildi $8y^2-3y+2$ þegar:

ⓐ $y=5$ ⓑ $y=-2$ ⓒ $y=0$

**72.** Reiknið gildi $5y^2-y-7$ þegar:

ⓐ $y=-4$ ⓑ $y=1$ ⓒ $y=0$

**73.** Reiknið gildi $4-36x$ þegar:

ⓐ $x=3$ ⓑ $x=0$ ⓒ $x=-1$

**74.** Reiknið gildi $16-36x^2$ þegar:

ⓐ $x=-1$ ⓑ $x=0$ ⓒ $x=2$

**75.** Málari missir pensil af 75 feta háum palli. Margliðan $-16t^2+75$ gefur hæð pensilsins $t$ sekúndum eftir að hann féll. Finnið hæðina eftir $t=2$ sekúndur.

**76.** Stúlka sleppir bolta fram af kletti niður í sjó. Margliðan $-16t^2+250$ gefur hæð boltans $t$ sekúndum eftir að honum er sleppt af 250 feta háum kletti. Finnið hæðina eftir $t=2$ sekúndur.

**77.** Framleiðandi hljómtækjahátalara hefur komist að því að tekjur af sölu hátalara á p dollara stykkið fást með margliðunni $-4p^2+420p$. Finnið tekjurnar þegar $p=60$.

**78.** Framleiðandi nýjustu körfuboltaskónna hefur komist að því að tekjur af sölu skóparanna á p dollara parið fást með margliðunni $-4p^2+420p$. Finnið tekjurnar þegar $p=90$.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**79.** **Eldsneytisnýting** Eldsneytisnýting bíls, í mílum á gallon, þegar ekið er á hraðanum $x$ mílur á klukkustund er gefin með margliðunni $-\frac{1}{150}x^2+\frac{1}{3}x$. Finnið eldsneytisnýtinguna þegar $x=30$ mílur/klst.

**80.** **Stöðvunarvegalengd** Fjöldi feta sem þarf til að stöðva bíl sem ekið er á hraðanum $x$ mílur á klukkustund á þurru, sléttu steinsteyptu yfirborði er gefinn með margliðunni $0{,}06x^2+1{,}1x$. Finnið stöðvunarvegalengdina þegar $x=40$ mílur/klst.

**81.** **Leigukostnaður** Kostnaður við að leigja teppahreinsivél í $d$ daga er gefinn með margliðunni $5{,}50d+25$. Finnið kostnaðinn við að leigja vélina í 6 daga.

**82.** **Hæð skotins hlutar** Hæð hlutar sem skotið er upp, mæld í fetum, er gefin með margliðunni $-16t^2+60t+90$ þar sem $t$ táknar tíma í sekúndum. Finnið hæðina eftir $t=2{,}5$ sekúndur.

**83.** **Umreikningur hitastigs** Hitastig í Fahrenheit-gráðum er gefið með margliðunni $\frac{9}{5}c+32$ þar sem $c$ táknar hitastig í Celsíusgráðum. Finnið hitastigið í Fahrenheit-gráðum þegar $c=65°$.

### *Ritunarverkefni*

**84.** Útskýrið með eigin orðum muninn á einlið, tvílið og þrílið.

**85.** Útskýrið með eigin orðum muninn á margliðu með fimm liðum og margliðu af stigi 5.

**86.** Ariana telur að summan $6y^2+5y^4$ sé $11y^6$. Hvað er rangt við röksemdafærslu hennar?

**87.** Jonathan telur að $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{x}$ séu bæði einliðir. Hvað er rangt við röksemdafærslu hans?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| borið kennsl á margliður, einliður, tvíliður og þríliður. | | | |
| ákvarðað stig margliða. | | | |
| lagt saman og dregið frá einliður. | | | |
| lagt saman og dregið frá margliður. | | | |
| reiknað gildi margliðu fyrir gefið gildi. | | | |

ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

**... af öryggi.** Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Íhugið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo að þið getið haldið áfram að nota þær. Hvað gerðuð þið til að öðlast öryggi í þessum viðfangsefnum? Nefnið tiltekin atriði.

**... með nokkurri hjálp.** Bregðist fljótt við, því að viðfangsefni sem þið hafið ekki náð tökum á geta orðið hindranir á leiðinni að árangri. Í stærðfræði byggir hvert viðfangsefni á fyrri vinnu. Mikilvægt er að hafa traustan grunn áður en þið haldið áfram. Hvern getið þið beðið um aðstoð? Gott er að leita til samnemenda og kennarans. Er staður í skólanum þar sem hægt er að fá aðstoð við stærðfræði? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**...nei—ég skil þetta ekki!** Þetta er viðvörunarmerki sem þið megið ekki hunsa. Þið skuluð leita hjálpar tafarlaust, annars getur námsefnið fljótt orðið yfirþyrmandi. Ræðið stöðuna við kennarann eins fljótt og auðið er. Saman getið þið gert áætlun um að fá þá aðstoð sem þið þurfið.

6

## 6.2 Notið margföldunarreglur velda

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið stæður með veldisvísum
- Einfaldið stæður með margfeldisreglunni fyrir veldi
- Einfaldið stæður með reglunni um veldi af veldi
- Einfaldið stæður með reglunni um margfeldi í veldi
- Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum
- Margfaldið einliði

**UNDIRBÚNINGUR 6.4**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$.

Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.68.

**UNDIRBÚNINGUR 6.5**

Einfaldið: $(-2)(-2)(-2)$.

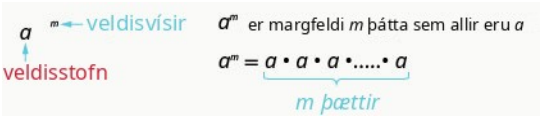
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.50.

## Einfaldið stæður með veldisvísum

Munið að veldisvísir táknar að sama stærðin er margfölduð aftur og aftur. Til dæmis merkir $2^4$ að margfalda töluna 2 með sjálfri sér 4 sinnum og því merkir $2^4$ stæðuna $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

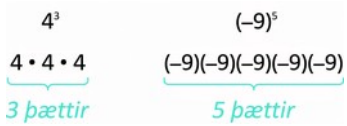
Rifjum upp hugtökin sem notuð eru um stæður með veldisvísum.

**VELDARITHÁTTUR**




Þetta er lesið $a$ í $m$-ta veldi.

Í stæðunni $a^m$ segir veldisvísirinn $m$ til um hve oft grunntalan $a$ er notuð sem þáttur.




Áður en við vinnum með stæður með breytum og veldisvísum skulum við einfalda nokkrar stæður sem innihalda aðeins tölur.

**DÆMI 6.16**

Einfaldið: ⓐ $4^3$ ⓑ $7^1$ ⓒ $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ⓓ $(0{,}63)^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $4^3$ |
| Margfaldið saman þrjá þætti sem allir eru 4. | $4 \cdot 4 \cdot 4$ |
| Einfaldið. | $64$ |
| ⓑ | $7^1$ |
| Margfaldið einn þátt, 7. | $7$ |
| ⓒ | $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ |
| Margfaldið saman tvo þætti. | $\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$ |
| Einfaldið. | $\frac{25}{36}$ |
| ⓓ | $(0{,}63)^2$ |
| Margfaldið saman tvo þætti. | $(0{,}63)(0{,}63)$ |
| Einfaldið. | $0{,}3969$ |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.31**

Einfaldið: ⓐ $6^3$ ⓑ $15^1$ ⓒ $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ ⓓ $(0{,}43)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.32**

Einfaldið: ⓐ $2^5$ ⓑ $21^1$ ⓒ $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ ⓓ $(0{,}218)^2$.

**DÆMI 6.17**

Einfaldið: ⓐ $(-5)^4$ ⓑ $-5^4$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $(-5)^4$ |
| Margfaldið saman fjóra þætti sem allir eru $-5$. | $(-5)(-5)(-5)(-5)$ |
| Einfaldið. | $625$ |
| ⓑ | $-5^4$ |
| Margfaldið saman fjóra þætti sem allir eru 5. | $-(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$ |
| Einfaldið. | $-625$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.33**

Einfaldið: ⓐ $(-3)^4$ ⓑ $-3^4$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.34**

Einfaldið: ⓐ $(-13)^2$ ⓑ $-13^2$.

Takið eftir því hvað er líkt og ólíkt í dæmi 6.17ⓐ og dæmi 6.17ⓑ! Hvers vegna eru svörin ólík? Þegar við fylgjum forgangsröð reikniaðgerða í ⓐ-lið sýna svigarnir að $(-5)$ á að hefja í 4. veldi. Í ⓑ-lið hefjum við aðeins 5 í 4. veldi og tökum síðan samlagningarandhverfuna.

6

## Einfaldið stæður með margfeldisreglunni fyrir veldi

Þið hafið séð að þegar þið leggið saman eða dragið frá samkynja liði verða þeir að hafa sömu grunntölu og sama veldisvísi. Við margföldun og deilingu mega veldisvísarnir hins vegar vera ólíkir og stundum grunntölurnar líka.

Við leiðum veldisreglurnar út með því að leita að mynstrum í nokkrum dæmum.

Fyrst skoðum við dæmi sem leiðir til margfeldisreglunnar.

| | |
|---|---|
| | $x^2 \cdot x^3$ |
| Hvað merkir þetta? Hve margir eru þættirnir samtals? | $\underbrace{x \cdot x}_{\text{2 þættir}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{3 þættir}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{5 þættir}}$ |
| Því höfum við | $x^5$ |
| Athugið að 5 er summa veldisvísanna 2 og 3. | $x^2 \cdot x^3$ eða $x^{2+3}$, eða $x^5$ |

Við ritum:

$$x^2 \cdot x^3$$
$$x^{2+3}$$
$$x^5$$

Grunntalan hélst óbreytt og við lögðum veldisvísana saman. Þetta leiðir til margfeldisreglunnar fyrir veldi.

---

**MARGFELDISREGLA FYRIR VELDI**

Ef $a$ er rauntala og $m$ og $n$ eru talningartölur, þá

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Til að margfalda veldi með sömu grunntölu skal leggja veldisvísana saman.

Dæmi með tölum hjálpar okkur að sannreyna regluna.

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^3 &\overset{?}{=} 2^{2+3} \\ 4 \cdot 8 &\overset{?}{=} 2^5 \\ 32 &= 32 \checkmark \end{aligned}$$

---

**DÆMI 6.18**

Einfaldið: $y^5 \cdot y^6$.

6

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $y^5 \cdot y^6$ |
| Notið margfeldisregluna, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. | $y^{5+6}$ |
| Einfaldið. | $y^{11}$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.35**

Einfaldið: $b^9 \cdot b^8$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.36**

Einfaldið: $x^{12} \cdot x^4$.

---

**DÆMI 6.19**

Einfaldið: ⓐ $2^5 \cdot 2^9$ ⓑ $3 \cdot 3^4$.

## Lausn

**1.** ⓐ

| | |
|---|---|
| | $2^5 \cdot 2^9$ |
| Notið margfeldisregluna, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. | $2^{5+9}$ |
| Einfaldið. | $2^{14}$ |

**2.** ⓑ

| | |
|---|---|
| | $3 \cdot 3^4$ |
| Notið margfeldisregluna, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. | $3^{1+4}$ |
| Einfaldið. | $3^5$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.37**

Einfaldið: ⓐ $5 \cdot 5^5$ ⓑ $4^9 \cdot 4^9$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.38**

Einfaldið: ⓐ $7^6 \cdot 7^8$ ⓑ $10 \cdot 10^{10}$.

**DÆMI 6.20**

Einfaldið: ⓐ $a^7 \cdot a$ ⓑ $x^{27} \cdot x^{13}$.

## Lausn

**1.** ⓐ

| | |
|---|---|
| | $a^7 \cdot a$ |
| Endurritið $a = a^1$. | $a^7 \cdot a^1$ |
| Notið margfeldisregluna, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. | $a^{7+1}$ |
| Einfaldið. | $a^8$ |

**2.** ⓑ

| | |
|---|---|
| | $x^{27} \cdot x^{13}$ |
| Athugið að grunntölurnar eru eins og því leggjum við veldisvísana saman. | $x^{27+13}$ |
| Einfaldið. | $x^{40}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.39**

Einfaldið: ⓐ $p^5 \cdot p$ ⓑ $y^{14} \cdot y^{29}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.40**

Einfaldið: ⓐ $z \cdot z^7$ ⓑ $b^{15} \cdot b^{34}$.

Við getum líka notað margfeldisregluna fyrir veldi á fleiri en tvo þætti.

**DÆMI 6.21**

Einfaldið: $d^4 \cdot d^5 \cdot d^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $d^4 \cdot d^5 \cdot d^2$ |
| Leggið veldisvísana saman þar sem grunntölurnar eru eins. | $d^{4+5+2}$ |
| Einfaldið. | $d^{11}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.41**

Einfaldið: $x^6 \cdot x^4 \cdot x^8$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.42**

Einfaldið: $b^5 \cdot b^9 \cdot b^5$.

## Einfaldið stæður með reglunni um veldi af veldi

Skoðum nú veldisstæðu þar sem veldi er hafið í veldi. Reynið að finna almennu regluna.

| | $(x^2)^3$ |
|---|---|
| Hvað merkir þetta? Hve margir eru þættirnir samtals? | $\underbrace{x^2}_{x \cdot x} \cdot \underbrace{x^2}_{x \cdot x} \cdot \underbrace{x^2}_{x \cdot x}$<br>2 þættir 2 þættir 2 þættir<br>6 þættir |
| Því höfum við | $x^6$ |
| Athugið að 6 er margfeldi veldisvísanna 2 og 3. | $(x^2)^3$ er $x^{2 \cdot 3}$ eða $x^6$ |

Við ritum:

$$\begin{aligned} &\left(x^2\right)^3 \\ &x^{2 \cdot 3} \\ &x^6 \end{aligned}$$

Við margfölduðum veldisvísana. Þetta leiðir til reglunnar um veldi af veldi.

**REGLAN UM VELDI AF VELDI**

Ef $a$ er rauntala og $m$ og $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Þegar veldi er hafið í veldi skal margfalda veldisvísana.

Dæmi með tölum hjálpar okkur að sannreyna regluna.

$$\begin{aligned} \left(3^2\right)^3 &\overset{?}{=} 3^{2 \cdot 3} \\ (9)^3 &\overset{?}{=} 3^6 \\ 729 &= 729 \checkmark \end{aligned}$$

**DÆMI 6.22**

Einfaldið: ⓐ $\left(y^5\right)^9$ ⓑ $\left(4^4\right)^7$.

## Lausn

ⓐ

| | $(y^5)^9$ |
|---|---|
| Notið regluna um veldi af veldi, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. | $y^{5 \cdot 9}$ |
| Einfaldið. | $y^{45}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $(4^4)^7$ |
| Notið regluna um veldi af veldi. | $4^{4 \cdot 7}$ |
| Einfaldið. | $4^{28}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.43**

Einfaldið: ⓐ $\left(b^7\right)^5$ ⓑ $\left(5^4\right)^3$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.44**

Einfaldið: ⓐ $\left(z^6\right)^9$ ⓑ $\left(3^7\right)^7$.

## Einfaldið stæður með reglunni um margfeldi í veldi

Skoðum nú stæðu þar sem margfeldi er hafið í veldi. Getið þið fundið mynstrið?

| | |
|---|---|
| | $(2x)^3$ |
| Hvað merkir þetta? | $2x \cdot 2x \cdot 2x$ |
| Við setjum sams konar þætti saman. | $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x$ |
| Hve margir eru þættirnir 2 og hve margir $x$? | $2^3 \cdot x^3$ |

Athugið að hver þáttur var hafinn í sama veldi og $(2x)^3$ er $2^3 \cdot x^3$.

| | |
|---|---|
| Við ritum: | $(2x)^3$ |
| | $2^3 \cdot x^3$ |

Veldisvísirinn gildir um hvern þátt! Þetta leiðir til reglunnar um margfeldi í veldi.

**REGLAN UM MARGFELDI Í VELDI**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur og $m$ er núll eða jákvæð heiltala, þá

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Þegar margfeldi er hafið í veldi skal hefja hvern þátt í það veldi.

Dæmi með tölum hjálpar okkur að sannreyna regluna:

$$\begin{aligned}(2\cdot 3)^2 &\overset{?}{=} 2^2\cdot 3^2\\ 6^2 &\overset{?}{=} 4\cdot 9\\ 36 &= 36\ \checkmark\end{aligned}$$

**DÆMI 6.23**

Einfaldið: ⓐ $(-9d)^2$ ⓑ $(3mn)^3$.

## Lausn

**1.** ⓐ

| | $(-9d)^2$ |
|---|---|
| Notið regluna um margfeldi í veldi, $(ab)^m = a^m b^m$. | $(-9)^2 d^2$ |
| Einfaldið. | $81d^2$ |

**2.** ⓑ

| | $(3mn)^3$ |
|---|---|
| Notið regluna um margfeldi í veldi, $(ab)^m = a^m b^m$. | $(3)^3 m^3 n^3$ |
| Einfaldið. | $27m^3n^3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.45**

Einfaldið: ⓐ $(-12y)^2$ ⓑ $(2wx)^5$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.46**

Einfaldið: ⓐ $(5wx)^3$ ⓑ $(-3y)^3$.

## Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum

Við höfum nú þrjár reglur til að margfalda stæður með veldisvísum. Tökum þær saman og leysum síðan dæmi þar sem fleiri en ein regla er notuð.

**VELDISREGLUR**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur og $m$ og $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

| | |
|---|---|
| **Margfeldisregla** | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| **Reglan um veldi af veldi** | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ |
| **Reglan um margfeldi í veldi** | $(ab)^m = a^m b^m$ |

Allar veldisreglurnar gilda fyrir hvaða rauntölur $m$ og $n$ sem er. Enn sem komið er notum við aðeins veldisvísa sem eru annaðhvort núll eða jákvæðar heiltölur.

**DÆMI 6.24**

Einfaldið: ⓐ $\left(y^3\right)^6\left(y^5\right)^4$ ⓑ $\left(-6x^4y^5\right)^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $\left(y^3\right)^6\left(y^5\right)^4$ |
| Notið regluna um veldi af veldi. | $y^{18} \cdot y^{20}$ |
| Leggið veldisvísana saman. | $y^{38}$ |
| ⓑ | $\left(-6x^4y^5\right)^2$ |
| Notið regluna um margfeldi í veldi. | $\left(-6\right)^2\left(x^4\right)^2\left(y^5\right)^2$ |
| Notið regluna um veldi af veldi. | $\left(-6\right)^2$ |
| Einfaldið. | $36x^8y^{10}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.47**

Einfaldið: ⓐ $\left(a^4\right)^5\left(a^7\right)^4$ ⓑ $\left(-2c^4d^2\right)^3$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.48**

Einfaldið: ⓐ $\left(-3x^6y^7\right)^4$ ⓑ $\left(q^4\right)^5\left(q^3\right)^3$.

**DÆMI 6.25**

Einfaldið: ⓐ $\left(5m\right)^2\left(3m^3\right)$ ⓑ $\left(3x^2y\right)^4\left(2xy^2\right)^3$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $(5m)^2(3m^3)$ |
| Hefjið $5m$ í annað veldi. | $5^2m^2 \cdot 3m^3$ |
| Einfaldið. | $25m^2 \cdot 3m^3$ |
| Notið víxlregluna. | $25 \cdot 3 \cdot m^2 \cdot m^3$ |
| Margfaldið fastana og leggið veldisvísana saman. | $75m^5$ |
| ⓑ | $(3x^2y)^4(2xy^2)^3$ |
| Notið regluna um margfeldi í veldi. | $(3^4x^8y^4)(2^3x^3y^6)$ |
| Einfaldið. | $(81x^8y^4)(8x^3y^6)$ |
| Notið víxlregluna. | $81 \cdot 8 \cdot x^8 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot y^6$ |
| Margfaldið fastana og leggið veldisvísana saman. | $648x^{11}y^{10}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.49**

Einfaldið: ⓐ $(5n)^2(3n^{10})$ ⓑ $(c^4d^2)^5(3cd^5)^4$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.50**

Einfaldið: ⓐ $(a^3b^2)^6(4ab^3)^4$ ⓑ $(2x)^3(5x^7)$.

## Margfaldið einliði

Við getum notað veldisreglurnar til að margfalda einliði því að einliður er algebrustæða.

**DÆMI 6.26**

Margfaldið: $(3x^2)(-4x^3)$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $(3x^2)(-4x^3)$ |
| Notið víxlregluna til að endurraða liðunum. | $3 \cdot (-4) \cdot x^2 \cdot x^3$ |
| Margfaldið. | $-12x^5$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.51**

Margfaldið: $(5y^7)(-7y^4)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.52**

Margfaldið: $(-6b^4)(-9b^5)$.

**DÆMI 6.27**

Margfaldið: $\left(\frac{5}{6}x^3y\right)(12xy^2)$.

## Lausn

| | $\left(\frac{5}{6}x^3y\right)(12xy^2)$ |
|---|---|
| Notið víxlregluna til að endurraða liðunum. | $\frac{5}{6}\cdot 12\cdot x^3\cdot x\cdot y\cdot y^2$ |
| Margfaldið. | $10x^4y^3$ |



**REYNIÐ SJÁLF 6.53**

Margfaldið: $\left(\frac{2}{5}a^4b^3\right)(15ab^3)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.54**

Margfaldið: $\left(\frac{2}{3}r^5s\right)(12r^6s^7)$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið meiri kennslu og æfingu í að nota margföldunarreglur velda:

- Margföldunarreglur velda

## Verkefni úr hluta 6.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Einfaldið stæður með veldisvísum**

Einfaldið hverja stæðu með veldisvísum í verkefnunum hér á eftir.

**88.** ⓐ $3^5$ ⓑ $9^1$ ⓒ $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ⓓ $(0{,}2)^4$

**89.** ⓐ $10^4$ ⓑ $17^1$ ⓒ $\left(\frac{2}{9}\right)^2$ ⓓ $(0{,}5)^3$

**90.** ⓐ $2^6$ ⓑ $14^1$ ⓒ $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ ⓓ $(0{,}7)^2$

**91.** ⓐ $8^3$ ⓑ $8^1$ ⓒ $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ ⓓ $(0{,}4)^3$

**92.** ⓐ $(-6)^4$ ⓑ $-6^4$

**93.** ⓐ $(-2)^6$ ⓑ $-2^6$

**94.** ⓐ $-\left(\frac{1}{4}\right)^4$ ⓑ $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$

**95.** ⓐ $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ⓑ $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

**96.** ⓐ $-0{,}5^2$ ⓑ $(-0{,}5)^2$

**97.** ⓐ $-0{,}1^4$ ⓑ $(-0{,}1)^4$

### Einfaldið stæður með margfeldisreglunni fyrir veldi

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir með margfeldisreglunni fyrir veldi.

98.

$$d^3 \cdot d^6$$

99.

$$x^4 \cdot x^2$$

100.

$$n^{19} \cdot n^{12}$$

101.

$$q^{27} \cdot q^{15}$$

**102.** ⓐ $4^5 \cdot 4^9$ ⓑ $8^9 \cdot 8$

**103.** ⓐ $3^{10} \cdot 3^6$ ⓑ $5 \cdot 5^4$

**104.** ⓐ $y \cdot y^3$ ⓑ $z^{25} \cdot z^8$

**105.** ⓐ $w^5 \cdot w$ ⓑ $u^{41} \cdot u^{53}$

106.

$$w \cdot w^2 \cdot w^3$$

107.

$$y \cdot y^3 \cdot y^5$$

108.

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^9$$

109.

$$c^5 \cdot c^{11} \cdot c^2$$

110.

$$m^x \cdot m^3$$

111.

$$n^y \cdot n^2$$

112.

$$y^a \cdot y^b$$

113.

$$x^p \cdot x^q$$



**Einfaldið stæður með reglunni um veldi af veldi**

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir með reglunni um veldi af veldi.

**114.** ⓐ $\left(m^4\right)^2$ ⓑ $\left(10^3\right)^6$

**115.** ⓐ $\left(b^2\right)^7$ ⓑ $\left(3^8\right)^2$

**116.** ⓐ $\left(y^3\right)^x$ ⓑ $\left(5^x\right)^y$

**117.** ⓐ $\left(x^2\right)^y$ ⓑ $\left(7^a\right)^b$

**Einfaldið stæður með reglunni um margfeldi í veldi**

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir með reglunni um margfeldi í veldi.

**118.** ⓐ $\left(6a\right)^2$ ⓑ $\left(3xy\right)^2$

**119.** ⓐ $\left(5x\right)^2$ ⓑ $\left(4ab\right)^2$

**120.** ⓐ $\left(-4m\right)^3$ ⓑ $\left(5ab\right)^3$

**121.** ⓐ $\left(-7n\right)^3$ ⓑ $\left(3xyz\right)^4$

**Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum**

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir.

**122.** ⓐ $\left(y^2\right)^4 \cdot \left(y^3\right)^2$ ⓑ $\left(10a^2b\right)^3$

**123.** ⓐ $\left(w^4\right)^3 \cdot \left(w^5\right)^2$ ⓑ $\left(2xy^4\right)^5$

**124.** ⓐ $\left(-2r^3s^2\right)^4$ ⓑ $\left(m^5\right)^3 \cdot \left(m^9\right)^4$

**125.** ⓐ $\left(-10q^2p^4\right)^3$ ⓑ $\left(n^3\right)^{10} \cdot \left(n^5\right)^2$

**126.** ⓐ $\left(3x\right)^2\left(5x\right)$ ⓑ $\left(5t^2\right)^3\left(3t\right)^2$

**127.** ⓐ $\left(2y\right)^3\left(6y\right)$ ⓑ $\left(10k^4\right)^3\left(5k^6\right)^2$

**128.** ⓐ $\left(5a\right)^2\left(2a\right)^3$ ⓑ $\left(\frac{1}{2}y^2\right)^3\left(\frac{2}{3}y\right)^2$

**129.** ⓐ $\left(4b\right)^2\left(3b\right)^3$ ⓑ $\left(\frac{1}{2}j^2\right)^5\left(\frac{2}{5}j^3\right)^2$

**130.** ⓐ $\left(\frac{2}{5}x^2y\right)^3$ ⓑ $\left(\frac{8}{9}xy^4\right)^2$

**131.** ⓐ $\left(2r^2\right)^3\left(4r\right)^2$ ⓑ $\left(3x^3\right)^3\left(x^5\right)^4$

**132.** ⓐ $\left(m^2n\right)^2\left(2mn^5\right)^4$ ⓑ $\left(3pq^4\right)^2\left(6p^6q\right)^2$

### Margfaldið einliði

Margfaldið einliðina í verkefnunum hér á eftir.

133.

$$\left(6y^7\right)\left(-3y^4\right)$$

134.

$$\left(-10x^5\right)\left(-3x^3\right)$$

135.

$$\left(-8u^6\right)\left(-9u\right)$$

136.

$$\left(-6c^4\right)\left(-12c\right)$$

137.

$$\left(\frac{1}{5}f^8\right)\left(20f^3\right)$$

138.

$$\left(\frac{1}{4}d^5\right)\left(36\,d^2\right)$$

139.

$$\left(4\,a^3b\right)\left(9\,a^2b^6\right)$$

140.

$$\left(6\,m^4n^3\right)\left(7\,mn^5\right)$$

141.

$$\left(\frac{4}{7}r\,s^2\right)\left(14\,r\,s^3\right)$$

142.

$$\left(\frac{5}{8}x^3y\right)\left(24\,x^5y\right)$$

143.

$$\left(\frac{2}{3}x^2y\right)\left(\frac{3}{4}x\,y^2\right)$$

144.

$$\left(\frac{3}{5}m^3n^2\right)\left(\frac{5}{9}m^2n^3\right)$$

**Blönduð verkefni**

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir.

145.

$$\left(x^2\right)^4\cdot\left(x^3\right)^2$$

146.

$$\left(y^4\right)^3\cdot\left(y^5\right)^2$$

147.

$$\left(a^2\right)^6\cdot\left(a^3\right)^8$$

148.

$$\left(b^7\right)^5\cdot\left(b^2\right)^6$$

149.

$$\left(2m^6\right)^3$$

150.

$$\left(3y^2\right)^4$$

151.

$$\left(10x^2y\right)^3$$

152.

$$\left(2mn^4\right)^5$$

153.

$$\left(-2a^3b^2\right)^4$$

154.

$$\left(-10u^2v^4\right)^3$$

155.

$$\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3$$

156.

$$\left(\frac{7}{9}pq^4\right)^2$$

157.

$$\left(8a^3\right)^2\left(2a\right)^4$$

158.

$$\left(5r^2\right)^3\left(3r\right)^2$$

159.

$$\left(10p^4\right)^3\left(5p^6\right)^2$$

160.

$$\left(4x^3\right)^3\left(2x^5\right)^4$$

161.

$$\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^4\left(4x^5y^3\right)^2$$

162.

$$\left(\frac{1}{3}m^3n^2\right)^4\left(9m^8n^3\right)^2$$

163.

$$\left(3m^2n\right)^2\left(2mn^5\right)^4$$

164.

$$\left(2pq^4\right)^3\left(5p^6q\right)^2$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**165. Tölvupóstur** Kate sendir tíu vinum sínum auglýsingablað í tölvupósti og biður þá að senda það áfram til tíu vina sinna. Þeir senda það svo áfram til tíu vina sinna og þannig koll af kolli. Fjöldi þeirra sem fá tölvupóstinn í annarri umferð er $10^2$, og í þriðju umferð $10^3$, eins og taflan hér fyrir neðan sýnir. Hve margir fá tölvupóstinn í sjöttu umferð? Einfaldið stæðuna til að sýna fjölda viðtakenda.

| Umferð | Fjöldi fólks |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | $10^2$ |
| 3 | $10^3$ |
| ... | ... |
| 6 | ? |

**166. Laun** Yfirmaður Jamals hækkar laun hans um 3% á afmælisdegi hans ár hvert. Það merkir að laun Jamals verða á hverju ári 1,03 sinnum laun fyrra árs. Ef upphafleg laun hans voru \$35.000 voru launin eftir 1 ár $\$35.000(1{,}03)$, eftir 2 ár $\$35.000(1{,}03)^2$, og eftir 3 ár $\$35.000(1{,}03)^3$, eins og taflan hér fyrir neðan sýnir. Hver verða laun Jamals eftir 10 ár? Einfaldið stæðuna til að sýna launin í dollurum.

| Ár | Laun |
|---|---|
| 1 | $\$35.000(1{,}03)$ |
| 2 | $\$35.000(1{,}03)^2$ |
| 3 | $\$35.000(1{,}03)^3$ |
| ... | ... |
| 10 | ? |

**167.** **Útsala** Stórverslun selur eldri vörur á útsölu til að rýma fyrir nýjum vörum. Til stendur að lækka verð varanna um 30% á viku. Það merkir að verð vöru er í hverri viku 70% af verði vikunnar á undan. Ef upphaflegt verð sófa var $1.000 yrði verðið fyrstu vikuna $\$1.000(0{,}70)$ og aðra vikuna $\$1.000(0{,}70)^2$. Fyllið út töfluna hér fyrir neðan. Hvert verður verð sófans í fimmtu viku? Einfaldið stæðuna til að sýna verðið í dollurum.

| Vika | Verð |
|---|---|
| 1 | $\$1.000(0{,}70)$ |
| 2 | $\$1.000(0{,}70)^2$ |
| 3 | |
| 4 | ... |
| 5 | ? |

**168.** **Afskrift** Um leið og nýjum bíl er ekið frá bílasalanum tekur verðgildi hans að lækka. Á hverju ári lækkar verðgildi bíls um 10%. Það merkir að verðgildi bílsins verður á hverju ári 90% af verðgildi ársins á undan. Ef nýr bíll var keyptur á $20.000 yrði verðgildi hans í lok fyrsta árs $\$20.000(0{,}90)$ og í lok annars árs $\$20.000(0{,}90)^2$. Fyllið út töfluna hér fyrir neðan. Hvert verður verðgildi bílsins í lok áttunda árs? Einfaldið stæðuna til að sýna verðgildið í dollurum.

| Ár | Verð |
|---|---|
| 1 | $\$20.000(0{,}90)$ |
| 2 | $\$20.000(0{,}90)^2$ |
| 3 | |
| ... | ... |
| 8 | ? |

### *Ritunarverkefni*

**169.** Notið margfeldisregluna fyrir veldi til að útskýra hvers vegna $x \cdot x = x^2$.

**170.** Útskýrið hvers vegna $-5^3=(-5)^3$ en $-5^4\neq(-5)^4$.

**171.** Jorge telur að $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ sé 1. Hvað er rangt við röksemdafærslu hans?

**172.** Útskýrið hvers vegna $x^3\cdot x^5$ er $x^8$, en ekki $x^{15}$.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| einfalda stæður með veldum. | | | |
| einfalda stæður með margfeldisreglu velda. | | | |
| einfalda stæður með veldisreglu velda. | | | |
| einfalda stæður með reglu um veldi margfeldis. | | | |
| einfalda stæður með því að beita nokkrum veldareglum. | | | |
| margfalda einliður. | | | |

ⓑ Þið hafið nú farið yfir gátlistann. Hvað ætlið þið að gera til að ná öruggum tökum á öllum markmiðunum?

6

# 6.3 Margfaldið margliður

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Margfaldið margliðu með einlið
- Margfaldið tvílið með tvílið
- Margfaldið þrílið með tvílið

**UNDIRBÚNINGUR 6.6**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Margfaldið inn í svigann: $2(x+3)$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.132.

**UNDIRBÚNINGUR 6.7**

Sameinið samkynja liði: $x^2+9x+7x+63$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.24.

## Margfaldið margliðu með einlið

Við höfum notað dreifiregluna til að einfalda stæður eins og $2(x-3)$. Þið margfölduðuð báða liðina innan svigans, $x$ og $3$, með $2$ og fenguð $2x-6$. Með nýjum orðaforða kaflans getið þið sagt að þið hafið margfaldað tvíliðinn $x-3$ með einliðnum $2$.

Þið kunnið þegar að margfalda tvílið með einlið! Hér er dæmi:

**DÆMI 6.28**

Margfaldið: $4(x+3)$.

### Lausn

| | $4(x+3)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $4 \cdot x + 4 \cdot 3$ |
| Einfaldið. | $4x + 12$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.55**

Margfaldið: $5(x+7)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.56**

Margfaldið: $3(y+13)$.

**DÆMI 6.29**

Margfaldið: $y(y-2)$.

### Lausn

| | $y(y-2)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $y \cdot y - y \cdot 2$ |
| Einfaldið. | $y^2 - 2y$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.57**

Margfaldið: $x(x-7)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.58**

Margfaldið: $d(d-11)$.

**DÆMI 6.30**

Margfaldið: $7x(2x+y)$.

## Lausn

| | $7x(2x+y)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $7x \cdot 2x + 7x \cdot y$ |
| Einfaldið. | $14x^2 + 7xy$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.59**

Margfaldið: $5x(x+4y)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.60**

Margfaldið: $2p(6p+r)$.

**DÆMI 6.31**

Margfaldið: $-2y(4y^2+3y-5)$.

## Lausn

| | $-2y(4y^2 + 3y - 5)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $-2y \cdot 4y^2 + (-2y) \cdot 3y - (-2y) \cdot 5$ |
| Einfaldið. | $-8y^3 - 6y^2 + 10y$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.61**

Margfaldið: $-3y(5y^2+8y-7)$.

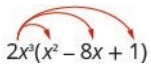
**REYNIÐ SJÁLF 6.62**

Margfaldið: $4x^2(2x^2-3x+5)$.

**DÆMI 6.32**

Margfaldið: $2x^3(x^2-8x+1)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| |  |
| Beitið dreifireglu. | $2x^3 \cdot x^2 + (2x^3) \cdot (-8x) + (2x^3) \cdot 1$ |
| Einfaldið. | $2x^5 - 16x^4 + 2x^3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.63**

Margfaldið: $4x\left(3x^2-5x+3\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.64**

Margfaldið: $-6a^3\left(3a^2-2a+6\right)$.

**DÆMI 6.33**

Margfaldið: $\left(x+3\right)p$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Einliðurinn er seinni þátturinn. |  |
| Beitið dreifireglu. | $x \cdot p + 3 \cdot p$ |
| Einfaldið. | $xp + 3p$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.65**

Margfaldið: $\left(x+8\right)p$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.66**

Margfaldið: $\left(a+4\right)p$.

## Margfaldið tvílið með tvílið

Rétt eins og hægt er að tákna margföldun talna á mismunandi vegu eru til nokkrar aðferðir til að margfalda tvílið með tvílið. Við byrjum á að nota dreifiregluna.

### *Margfaldið tvílið með tvílið með dreifireglunni*

Skoðið dæmi 6.33, þar sem við margfölduðum tvílið með einlið.

| | |
|---|---|
| | $(x+3)p$ |
| Við margfölduðum p inn í svigann og fengum: | $xp+3p$ |
| Hvað ef við höfum (x + 7) í stað p? | $(x+3)(x+7)$ |
| Margfaldið (x + 7) inn í svigann. | $x(x+7)+3(x+7)$ |
| Margfaldið aftur inn í svigann. | $x^2+7x+3x+21$ |
| Sameinið samkynja liði. | $x^2+10x+21$ |

Athugið að áður en samkynja liðir voru sameinaðir voru liðirnir fjórir. Þið margfölduðuð báða liði fyrri tvíliðarins með báðum liðum seinni tvíliðarins, alls fjórar margfaldanir.

**DÆMI 6.34**

Margfaldið: $(y+5)(y+8)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(y+5)(y+8)$ |
| Margfaldið (y + 8) inn í svigann. | $y(y+8)+5(y+8)$ |
| Margfaldið aftur inn í svigann | $y^2+8y+5y+40$ |
| Sameinið samkynja liði. | $y^2+13y+40$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.67**

Margfaldið: $(x+8)(x+9)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.68**

Margfaldið: $(5x+9)(4x+3)$.

**DÆMI 6.35**

Margfaldið: $(2y+5)(3y+4)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(2y+5)(3y+4)$ |
| Margfaldið (3y + 4) inn í svigann. | $2y(3y+4)+5(3y+4)$ |
| Margfaldið aftur inn í svigann | $6y^2+8y+15y+20$ |
| Sameinið samkynja liði. | $6y^2+23y+20$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.69**

Margfaldið: $(3b+5)(4b+6)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.70**

Margfaldið: $(a+10)(a+7)$.

**DÆMI 6.36**

Margfaldið: $(4y+3)(2y-5)$.

## Lausn

| | $(4y+3)(2y-5)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $4y(2y-5)+3(2y-5)$ |
| Margfaldið aftur inn í svigann. | $8y^2-20y+6y-15$ |
| Sameinið samkynja liði. | $8y^2-14y-15$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.71**

Margfaldið: $(5y+2)(6y-3)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.72**

Margfaldið: $(3c+4)(5c-2)$.

**DÆMI 6.37**

Margfaldið: $(x-2)(x-y)$.

## Lausn

| | $(x-2)(x-y)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $x(x-y)-2(x-y)$ |
| Margfaldið aftur inn í svigann. | $x^2-xy-2x+2y$ |
| Enga samkynja liði er hægt að sameina. | |

**REYNIÐ SJÁLF 6.73**

Margfaldið: $(a+7)(a-b)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.74**

Margfaldið: $(x+5)(x-y)$.

### *Margfaldið tvílið með tvílið með FOIL-aðferðinni*

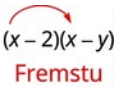
Munið að þegar tvíliður er margfaldaður með tvílið fást fjórir liðir. Stundum má sameina samkynja liði og fá þrílið, en stundum, eins og í dæmi 6.37, er enga samkynja liði hægt að sameina.

Skoðum síðasta dæmið aftur og athugum sérstaklega hvernig liðirnir fjórir fengust.

$$(x-2)(x-y)$$
$$x^2-xy-2x+2y$$

Hvaðan kom fyrsti liðurinn, $x^2$?

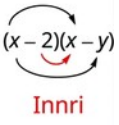
Hann er margfeldi $x$ og $x$, *fremstu* liðanna í $(x-2)$ og $(x-y)$.




Næsti liður, $-xy$, er margfeldi $x$ og $-y$, *ytri* liðanna tveggja.




Þriðji liðurinn, $-2x$, er margfeldi $-2$ og $x$, *innri* liðanna tveggja.



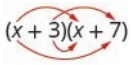

Og síðasti liðurinn, $+2y$, fékkst með því að margfalda *öftustu* liðina tvo, $-2$ og $-y$.




Við skammstöfum ensku orðin „First, Outer, Inner, Last“ sem FOIL. Stafirnir standa fyrir „First (fremstu), Outer (ytri), Inner (innri), Last (öftustu)“. Auðvelt er að muna orðið FOIL og það tryggir að við finnum öll fjögur margfeldin.

$$(x-2)(x-y)$$
$$\underset{F}{x^2}-\underset{O}{xy}-\underset{I}{2x}+\underset{L}{2y}$$

Skoðum $(x+3)(x+7)$.

| Dreifiregla | FOIL |
|---|---|
| $(x+3)(x+7)$ |  |
| $x(x+7)+3(x+7)$ | |
| $x^2+7x+3x+21$<br>$F\quad O\quad I\quad L$ | $x^2+7x+3x+21$<br>$F\quad O\quad I\quad L$ |
| $x^2+10x+21$ | $x^2+10x+21$ |

Athugið hvernig liðirnir í þriðju línu fylgja FOIL-mynstrinu.

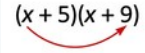
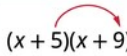
Nú leysum við dæmi þar sem við notum FOIL-mynstrið til að margfalda tvo tvíliði.

**DÆMI 6.38**

### Hvernig á að margfalda tvílið með tvílið með FOIL-aðferðinni

Margfaldið með FOIL-aðferðinni: $(x+5)(x+9)$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Margfaldið *fyrstu* liðina. | $(x+5)(x+9)$<br> | $x^2+_+_+_$<br>$F\quad O\quad I\quad L$ |
| **Skref 2.** Margfaldið *ytri* liðina. | $(x+5)(x+9)$<br> | $x^2+9x+_+_$<br>$F\quad O\quad I\quad L$ |
| **Skref 3.** Margfaldið *innri* liðina. | $(x+5)(x+9)$<br> | $x^2+9x+5x+_$<br>$F\quad O\quad I\quad L$ |
| **Skref 4.** Margfaldið *síðustu* liðina. | $(x+5)(x+9)$<br> | $x^2+9x+5x+45$<br>$F\quad O\quad I\quad L$ |
| **Skref 5.** Sameinið samkynja liði þegar það er hægt. | | $x^2+14x+45$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.75**

Margfaldið með FOIL-aðferðinni: $(x+6)(x+8)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.76**

Margfaldið með FOIL-aðferðinni: $(y+17)(y+3)$.

Hér fyrir neðan eru skref FOIL-aðferðarinnar tekin saman. FOIL-aðferðin á aðeins við þegar tvíliðir eru margfaldaðir, ekki aðrar margliður!

**AÐFERÐ**

## Margfaldið tvo tvíliði með FOIL-aðferðinni

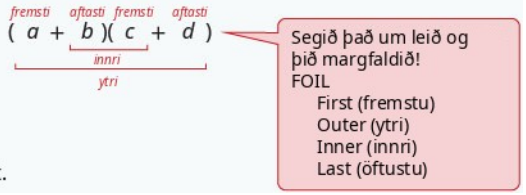
**Skref 1.** Margfaldið *fremstu* liðina.

**Skref 2.** Margfaldið *ytri* liðina.

**Skref 3.** Margfaldið *innri* liðina.

**Skref 4.** Margfaldið *öftustu* liðina.

**Skref 5.** Sameinið samkynja liði þegar það er hægt.




Þegar þið margfaldið með FOIL-aðferðinni hjálpar það að draga línurnar. Þá er auðveldara að einbeita sér að mynstrinu og nota það.

**DÆMI 6.39**

Margfaldið: $(y-7)(y+4)$.

## Lausn

$(y-7)(y+4)$

Margfaldið *fremstu* liðina. $(y-7)(y+4)$ $y^2+_+_+_$ (F O I L)

Margfaldið *ytri* liðina. $(y-7)(y+4)$ $y^2+4y+_+_$ (F O I L)

Margfaldið *innri* liðina. $(y-7)(y+4)$ $y^2+4y-7y+_$ (F O I L)

Margfaldið *öftustu* liðina. $(y-7)(y+4)$ $y^2+4y-7y-28$ (F O I L)

Sameinið samkynja liði. $y^2-3y-28$

**REYNIÐ SJÁLF 6.77**

Margfaldið: $(x-7)(x+5)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.78**

Margfaldið: $(b-3)(b+6)$.

**DÆMI 6.40**

Margfaldið: $(4x+3)(2x-5)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(4x-3)(2x-5)$ |
| | $(4x+3)(2x-5)$ |
| Margfaldið *fremstu* liðina, $4x \cdot 2x$. | $8x^2 + _ + _ + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið *ytri* liðina, $4x \cdot (-5)$. | $8x^2 - 20x + _ + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið *innri* liðina, $3 \cdot 2x$. | $8x^2 - 2x + 6x + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið *öftustu* liðina, $3 \cdot (-5)$. | $8x^2 - 20x + 6x - 15$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Sameinið samkynja liði. | $8x^2 - 14x - 15$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.79**

Margfaldið: $(3x+7)(5x-2)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.80**

Margfaldið: $(4y+5)(4y-10)$.

Lokamargfeldin í síðustu fjórum dæmunum voru þríliðir vegna þess að sameina mátti miðliðina tvo. Svo er ekki alltaf.

**DÆMI 6.41**

Margfaldið: $(3x-y)(2x-5)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(3x-y)(2x-5)$ |
| | $(3x-y)(2x-5)$ |
| Margfaldið fremstu liðina. | $6x^2 + _ + _ + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið ytri liðina. | $6x^2 - 15x + _ + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið innri liðina. | $6x^2 - 15x - 2xy + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið öftustu liðina. | $6x^2 - 15x - 2xy + 5y$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Enga samkynja liði er hægt að sameina. | $6x^2 - 15x - 2xy + 5y$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.81**

Margfaldið: $(10c - d)(c - 6)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.82**

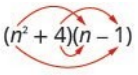
Margfaldið: $(7x - y)(2x - 5)$.

Gætið sérstaklega að veldisvísunum í næsta dæmi.

**DÆMI 6.42**

Margfaldið: $(n^2+4)(n-1)$.

## Lausn

| | $(n^2 + 4)(n - 1)$ |
|---|---|
| |  |
| Margfaldið fremstu liðina. | $n^3 + __ + __ + __$<br>F O I L |
| Margfaldið ytri liðina. | $n^3 - n^2 + __ + __$<br>F O I L |
| Margfaldið innri liðina. | $n^3 - n^2 + 4n + __$<br>F O I L |
| Margfaldið öftustu liðina. | $n^3 - n^2 + 4n - 4$<br>F O I L |
| Enga samkynja liði er hægt að sameina. | $n^3 - n^2 + 4n - 4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.83**

Margfaldið: $(x^2+6)(x-8)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.84**

Margfaldið: $(y^2+7)(y-9)$.

**DÆMI 6.43**

Margfaldið: $(3pq+5)(6pq-11)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(3pq+5)(6pq-11)$ |
| Margfaldið fremstu liðina. | $18p^2q^2 + _ + _ + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið ytri liðina. | $18p^2q^2 - 33pq + _ + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið innri liðina. | $18p^2q^2 - 33pq + 30pq + _$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Margfaldið öftustu liðina. | $18p^2q^2 - 33pq + 30pq - 55$ <br> $F \quad O \quad I \quad L$ |
| Enga samkynja liði er hægt að sameina. | $18p^2q^2 - 3pq - 55$ |




**REYNIÐ SJÁLF 6.85**

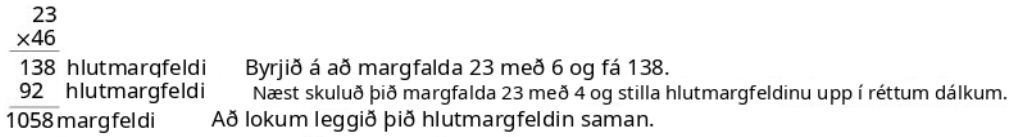
Margfaldið: $(2ab+5)(4ab-4)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.86**

Margfaldið: $(2xy+3)(4xy-5)$.

### *Margfaldið tvílið með tvílið með lóðréttu aðferðinni*

FOIL-aðferðin er yfirleitt fljótlegasta leiðin til að margfalda tvo tvíliði en hún virkar aðeins fyrir tvíliði. Nota má dreifiregluna til að finna margfeldi hvaða tveggja margliða sem er. Önnur aðferð sem virkar fyrir allar margliður er lóðrétta aðferðin. Hún líkist mjög aðferðinni sem þið notið til að margfalda núll og jákvæðar heiltölur. Skoðið vel þetta dæmi þar sem tvær tveggja stafa tölur eru margfaldaðar saman.




Nú notum við sömu aðferð til að margfalda tvo tvíliði.

**DÆMI 6.44**

Margfaldið með lóðréttu aðferðinni: $(3y-1)(2y-6)$.

## Lausn

Það skiptir ekki máli hvor tvíliðurinn er efst.

Margfaldið $3y-1$ með $-6$.
Margfaldið $3y-1$ með 2y.

$$\begin{array}{rl} & 3y-1 \\ \times & 2y-6 \\ \hline & -18y+6 \\ 6y^2-2y & \\ \hline & 6y^2-20y+6 \end{array}$$

hlutamargfeldi
hlutamargfeldi
margfeldi

Sameinið samkynja liði.

Athugið að hlutamargfeldin eru sömu liðir og fást með FOIL-aðferðinni.

$$\begin{array}{ll} (3y-1)(2y-6) & \begin{array}{r} 3y-1 \\ \times\ 2y-6 \\ \hline -18y+6 \\ 6y^2-2y \\ \hline 6y^2-20x+6 \end{array} \\ 6y^2-2y-18y+6 & \\ \hline 6y^2-20y+6 & \end{array}$$

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.87**

Margfaldið með lóðréttu aðferðinni: $(5m-7)(3m-6)$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.88**

Margfaldið með lóðréttu aðferðinni: $(6b-5)(7b-3)$.

Við höfum nú notað þrjár aðferðir til að margfalda tvíliði. Æfið allar aðferðirnar og reynið að ákveða hver þeirra hentar ykkur best. Hér eru þær allar á einum stað svo að auðveldara sé að muna þær.

---

**MARGFÖLDUN TVEGGJA TVÍLIÐA**

Til að margfalda tvíliði má nota þessar aðferðir:

- Dreifiregla
- FOIL-aðferð
- Lóðrétt aðferð

Munið að FOIL virkar aðeins þegar tveir tvíliðir eru margfaldaðir.

## Margfaldið þrílið með tvílið

Við höfum margfaldað einliði með einliðum, einliði með margliðum og tvíliði með tvíliðum. Nú erum við tilbúin að margfalda þrílið með tvílið. Munið að FOIL virkar ekki í þessu tilviki en nota má annaðhvort dreifiregluna eða lóðréttu aðferðina. Fyrst skoðum við dæmi þar sem við notum dreifiregluna.

**DÆMI 6.45**

Margfaldið með dreifireglunni: $(b+3)(2b^2-5b+8)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(b+3)(2b^2-5b+8)$ |
| Beitið dreifireglu. | $b(2b^2-5b+8)+3(2b^2-5b+8)$ |
| Margfaldið. | $2b^3-5b^2+8b+6b^2-15b+24$ |
| Sameinið samkynja liði. | $2b^3+b^2-7b+24$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.89**

Margfaldið með dreifireglunni: $(y-3)(y^2-5y+2)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.90**

Margfaldið með dreifireglunni: $(x+4)(2x^2-3x+5)$.

Nú gerum við sömu margföldun með lóðréttu aðferðinni.

**DÆMI 6.46**

Margfaldið með lóðréttu aðferðinni: $(b+3)(2b^2-5b+8)$.

## Lausn

Auðveldara er að setja margliðuna með færri liðum neðst, því þannig fást færri hlutamargfeldi.

| | |
|---|---|
| Margfaldið ($2b^2$ − 5b + 8) með 3. | $2b^2-5b+8$<br>$\times \quad b+3$<br>$6b^2-15b+24$ |
| Margfaldið ($2b^2$ − 5b + 8) með b. | $2b^3-5b^2+8b$ |
| Sameinið samkynja liði. | $2b^3+b^2-7b+24$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.91**

Margfaldið með lóðréttu aðferðinni: $(y-3)(y^2-5y+2)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.92**

Margfaldið með lóðréttu aðferðinni: $(x+4)(2x^2-3x+5)$.

Við höfum nú séð tvær aðferðir til að margfalda þrílið með tvílið. Eftir að þið hafið æft báðar aðferðirnar finnið þið líklega að önnur hentar ykkur betur. Hér eru þær báðar á einum stað svo að auðvelt sé að fletta upp í þeim.

**MARGFÖLDUN ÞRÍLIÐAR MEÐ TVÍLIÐ**

Til að margfalda þrílið með tvílið má nota þessar aðferðir:

- Dreifiregla
- Lóðrétt aðferð

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Á þessum vefsíðum finnið þið frekari kennslu og fleiri verkefni um margföldun margliða:

- Margföldun velda 1
- Margföldun velda 2
- Margföldun velda 3

## Verkefni úr hluta 6.3



***Æfingin skapar meistarann***

**Margfaldið margliðu með einlið**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda.

173.

$$4(w+10)$$

174.

$$6(b+8)$$

175.

$$-3(a+7)$$

176.

$$-5(p+9)$$

177.

$$2(x-7)$$

178.

$$7(y-4)$$

179.

$$-3(k-4)$$

180.

$$-8(j-5)$$

181.

$$q(q+5)$$

182.

$$k(k+7)$$

183.

$$-b(b+9)$$

184.

$$-y(y+3)$$

185.

$$-x(x-10)$$

186.

$$-p(p-15)$$

187.

$$6r(4r+s)$$

188.

$$5c(9c+d)$$

189.

$$12x(x-10)$$

190.

$$9m(m-11)$$

191.

$$-9a(3a+5)$$

192.

$$-4p(2p+7)$$

193.

$$3\left(p^2+10\,p+25\right)$$

194.

$$6\left(y^2+8\,y+16\right)$$

195.

$$-8\,x\left(x^2+2\,x-15\right)$$

196.

$$-5\,t\left(t^2+3\,t-18\right)$$

197.

$$5\,q^3\left(q^3-2\,q+6\right)$$

198.

$$4\,x^3\left(x^4-3\,x+7\right)$$

199.

$$-8\,y\left(y^2+2\,y-15\right)$$



200.

$$-5\,m\left(m^2+3\,m-18\right)$$

201.

$$5\,q^3\left(q^2-2\,q+6\right)$$

202.

$$9\,r^3\left(r^2-3\,r+5\right)$$

203.

$$-4\,z^2\left(3\,z^2+12\,z-1\right)$$

204.

$$-3\,x^2\left(7\,x^2+10\,x-1\right)$$

205.

$$\left(2\,m-9\right)m$$

206.

$$(8j-1)j$$

207.

$$(w-6)\cdot 8$$

208.

$$(k-4)\cdot 5$$

209.

$$4(x+10)$$

210.

$$6(y+8)$$

211.

$$15(r-24)$$

212.

$$12(v-30)$$

213.

$$-3(m+11)$$

214.

$$-4(p+15)$$

215.

$$-8(z-5)$$

216.

$$-3(x-9)$$

217.

$$u(u+5)$$

218.

$$q(q+7)$$

219.

$$n(n^2-3n)$$

**220.**

$$s\left(s^2-6s\right)$$

**221.**

$$6x\left(4x+y\right)$$

**222.**

$$5a\left(9a+b\right)$$

**223.**

$$5p\left(11p-5q\right)$$

**224.**

$$12u\left(3u-4v\right)$$

**225.**

$$3\left(v^2+10v+25\right)$$

**226.**

$$6\left(x^2+8x+16\right)$$

**227.**

$$2n\left(4n^2-4n+1\right)$$

**228.**

$$3r\left(2r^2-6r+2\right)$$

**229.**

$$-8y\left(y^2+2y-15\right)$$

**230.**

$$-5m\left(m^2+3m-18\right)$$

**231.**

$$5q^3\left(q^2-2q+6\right)$$

**232.**

$$9r^3\left(r^2-3r+5\right)$$

**233.**

$$-4z^2\left(3z^2+12z-1\right)$$

234.

$$-3x^2\left(7x^2+10x-1\right)$$

235.

$$\left(2y-9\right)y$$

236.

$$\left(8b-1\right)b$$

**Margfaldið tvílið með tvílið**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda tvíliðina með: ⓐ dreifireglunni ⓑ FOIL-aðferðinni ⓒ lóðréttu aðferðinni.

237.

$$\left(w+5\right)\left(w+7\right)$$

238.

$$\left(y+9\right)\left(y+3\right)$$

239.

$$\left(p+11\right)\left(p-4\right)$$

240.

$$\left(q+4\right)\left(q-8\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda tvíliðina. Notið hvaða aðferð sem er.

241.

$$\left(x+8\right)\left(x+3\right)$$

242.

$$\left(y+7\right)\left(y+4\right)$$

243.

$$\left(y-6\right)\left(y-2\right)$$

244.

$$\left(x-7\right)\left(x-2\right)$$

245.

$$\left(w-4\right)\left(w+7\right)$$

246.

$$\left(q-5\right)\left(q+8\right)$$

247.

$$(p+12)(p-5)$$

248.

$$(m+11)(m-4)$$

249.

$$(6p+5)(p+1)$$

250.

$$(7m+1)(m+3)$$

251.

$$(2t-9)(10t+1)$$

252.

$$(3r-8)(11r+1)$$

253.

$$(5x-y)(3x-6)$$

254.

$$(10a-b)(3a-4)$$

255.

$$(a+b)(2a+3b)$$

256.

$$(r+s)(3r+2s)$$

257.

$$(4z-y)(z-6)$$

258.

$$(5x-y)(x-4)$$

259.

$$(x^2+3)(x+2)$$

260.

$$(y^2-4)(y+3)$$

261.

$$\left(x^2+8\right)\left(x^2-5\right)$$

262.

$$\left(y^2-7\right)\left(y^2-4\right)$$

263.

$$\left(5ab-1\right)\left(2ab+3\right)$$

264.

$$\left(2xy+3\right)\left(3xy+2\right)$$

265.

$$\left(6pq-3\right)\left(4pq-5\right)$$

266.

$$\left(3rs-7\right)\left(3rs-4\right)$$

**Margfaldið þrílið með tvílið**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda með ⓐ dreifireglunni ⓑ lóðréttu aðferðinni.

267.

$$\left(x+5\right)\left(x^2+4x+3\right)$$

268.

$$\left(u+4\right)\left(u^2+3u+2\right)$$

269.

$$\left(y+8\right)\left(4y^2+y-7\right)$$

270.

$$\left(a+10\right)\left(3a^2+a-5\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda. Notið aðra hvora aðferðina.

271.

$$\left(w-7\right)\left(w^2-9w+10\right)$$

272.

$$\left(p-4\right)\left(p^2-6p+9\right)$$

273.

$$(3q+1)(q^2-4q-5)$$

274.

$$(6r+1)(r^2-7r-9)$$

**Blönduð verkefni**

275.

$$(10y-6)+(4y-7)$$

276.

$$(15p-4)+(3p-5)$$

277.

$$(x^2-4x-34)-(x^2+7x-6)$$

278.

$$(j^2-8j-27)-(j^2+2j-12)$$

279.

$$5q(3q^2-6q+11)$$

280.

$$8t(2t^2-5t+6)$$

281.

$$(s-7)(s+9)$$

282.

$$(x-5)(x+13)$$

283.

$$(y^2-2y)(y+1)$$

284.

$$(a^2-3a)(4a+5)$$

285.

$$(3n-4)(n^2+n-7)$$

286.

$$(6k-1)(k^2+2k-4)$$

287.

$$(7p+10)(7p-10)$$

288.

$$(3y+8)(3y-8)$$

289.

$$(4m^2-3m-7)m^2$$

290.

$$(15c^2-4c+5)c^4$$

291.

$$(5a+7b)(5a+7b)$$

292.

$$(3x-11y)(3x-11y)$$

293.

$$(4y+12z)(4y-12z)$$



### *Stærðfræði daglegs lífs*

**294.** **Hugarreikningur** Nota má margföldun tvíliða til að margfalda tölur án reiknivélar. Segjum að þið þurfið að margfalda 13 með 15. Lítið á 13 sem $10+3$ og 15 sem $10+5$.

1. ⓐ Margfaldið $(10+3)(10+5)$ með FOIL-aðferðinni.
2. ⓑ Margfaldið $13 \cdot 15$ án þess að nota reiknivél.
3. ⓒ Hvor leiðin finnst ykkur auðveldari? Hvers vegna?

**295.** **Hugarreikningur** Nota má margföldun tvíliða til að margfalda tölur án reiknivélar. Segjum að þið þurfið að margfalda 18 með 17. Lítið á 18 sem $20-2$ og 17 sem $20-3$.

1. ⓐ Margfaldið $(20-2)(20-3)$ með FOIL-aðferðinni.
2. ⓑ Margfaldið $18 \cdot 17$ án þess að nota reiknivél.
3. ⓒ Hvor leiðin finnst ykkur auðveldari? Hvers vegna?

### *Ritunarverkefni*

**296.** Hvaða aðferð viljið þið helst nota þegar þið margfaldið tvo tvíliði: dreifiregluna, FOIL-aðferðina eða lóðréttu aðferðina? Hvers vegna?

**297.** Hvaða aðferð viljið þið helst nota þegar þið margfaldið þrílið með tvílið: dreifiregluna eða lóðréttu aðferðina? Hvers vegna?

**298.** Margfaldið eftirfarandi:

$$(x+2)(x-2)$$
$$(y+7)(y-7)$$
$$(w+5)(w-5)$$

Útskýrið mynstrið sem þið sjáið í svörunum.

**299.** Margfaldið eftirfarandi:

$$(m-3)(m+3)$$
$$(n-10)(n+10)$$
$$(p-8)(p+8)$$

Útskýrið mynstrið sem þið sjáið í svörunum.

**300.** Margfaldið eftirfarandi:

$$(p+3)(p+3)$$
$$(q+6)(q+6)$$
$$(r+1)(r+1)$$

Útskýrið mynstrið sem þið sjáið í svörunum.

6

**301.** Margfaldið eftirfarandi:

$$(x-4)(x-4)$$
$$(y-1)(y-1)$$
$$(z-7)(z-7)$$

Útskýrið mynstrið sem þið sjáið í svörunum.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| margfalda margliðu með einliðu. | | | |
| margfalda tvíliðu með tvíliðu. | | | |
| margfalda þríliðu með tvíliðu. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um tök ykkar á efni þessa hluta? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?

# 6.4 Sérstök margfeldi

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Finnið ferning tvíliðar með ferningsreglu tvíliða
- Margfaldið samoka með reglunni um margfeldi samoka
- Þekkið og notið viðeigandi reglu um sérstök margfeldi

**UNDIRBÚNINGUR 6.8**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: ⓐ $9^2$ ⓑ $(-9)^2$ ⓒ $-9^2$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.50.

## Finnið ferning tvíliðar með ferningsreglu tvíliða

Stærðfræðingar leita gjarnan að mynstrum sem auðvelda útreikninga. Gott dæmi um það er að setja tvíliði í annað veldi. Alltaf má finna margfeldið með því að skrifa tvíliðinn tvisvar og nota aðferðir síðasta hluta, en vinnan verður minni ef þið lærið að nota reglu.

| | |
|---|---|
| Byrjum á að skoða $(x+9)^2$. | |
| Hvað merkir þetta? | $(x+9)^2$ |
| Þetta merkir að margfalda stæðuna $(x+9)$ með sjálfri sér. | $(x+9)(x+9)$ |
| Þá fáum við með FOIL-aðferðinni: | $x^2+9x+9x+81$ |
| Þegar samkynja liðir eru sameinaðir fæst: | $x^2+18x+81$ |
| Skoðum annað dæmi: | $(y-7)^2$ |
| Margfaldið $(y-7)$ með sjálfu sér. | $(y-7)(y-7)$ |
| Með FOIL-aðferðinni fáum við: | $y^2-7y-7y+49$ |
| Og þegar samkynja liðir eru sameinaðir: | $y^2-14y+49$ |
| Og eitt dæmi enn: | $(2x+3)^2$ |
| Margfaldið. | $(2x+3)(2x+3)$ |
| Notið FOIL-aðferðina: | $4x^2+6x+6x+9$ |
| Sameinið samkynja liði. | $4x^2+12x+9$ |

Skoðið niðurstöðurnar. Sjáið þið eitthvert mynstur?

Hvað með fjölda liða? Í hverju dæmi settum við tvílið í annað veldi og niðurstaðan var þríliður.

$$(a+b)^2 = ____ + ____ + ____$$

Skoðið nú fyrsta lið hverrar niðurstöðu. Hvaðan kom hann?

| | | |
|---|---|---|
| $(x+9)^2$ | $(y-7)^2$ | $(2x+3)^2$ |
| $(x+9)(x+9)$ | $(y-7)(y-7)$ | $(2x+3)(2x+3)$ |
| $x^2+9x+9x+81$ | $y^2-7y-7y+49$ | $4x^2+6x+6x+9$ |
| $x^2+18x+81$ | $y^2-14y+49$ | $4x^2+12x+9$ |

Fyrsti liðurinn er margfeldi fremstu liða tvíliðanna. Tvíliðirnir eru eins, svo að hann er einfaldlega ferningur fyrsta liðarins!

$$(a+b)^2 = a^2 + ____ + ____$$

Til að fá fyrsta lið margfeldisins skal setja fyrsta liðinn í annað veldi.
Hvaðan kom síðasti liðurinn? Skoðið dæmin og finnið mynstrið.
Síðasti liðurinn er margfeldi öftustu liðanna, sem er ferningur síðasta liðarins.

$$(a+b)^2 = ____ + ____ + b^2$$

*Til að fá síðasta lið margfeldisins skal setja síðasta liðinn í annað veldi.*

6

Skoðið loks miðliðinn. Athugið að hann fékkst með því að leggja saman ytri og innri liðina, sem eru eins! Miðliðurinn er því tvöfalt margfeldi liða tvíliðarins.

$$(a+b)^2 = ____ + 2ab + ____$$
$$(a-b)^2 = ____ - 2ab + ____$$

*Til að fá miðlið margfeldisins skal margfalda liðina og tvöfalda margfeldi þeirra.*

Setjum þetta allt saman:

---

**FERNINGSREGLA TVÍLIÐA**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

| $(a+b)^2$ | = | $a^2$ | + | $2ab$ | + | $b^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (tvíliða)$^2$ | | (fyrri liður)$^2$ | | 2(margfeldi liðanna) | | (síðari liður)$^2$ |

Til að setja tvílið í annað veldi skal:

- setja fyrsta liðinn í annað veldi

- setja síðasta liðinn í annað veldi
- tvöfalda margfeldi þeirra

Með töludæmi getum við sannreynt regluna.

| | $(10+4)^2$ |
|---|---|
| Setjið fyrsta liðinn í annað veldi. | $10^2+___+$ |
| Setjið síðasta liðinn í annað veldi. | $10^2+___+4^2$ |
| Tvöfaldið margfeldi þeirra. | $10^2+2\cdot 10\cdot 4+4^2$ |
| Einfaldið. | $100+80+16$ |
| Einfaldið. | $196$ |

Til að margfalda $(10+4)^2$ mynduð þið venjulega fylgja forgangsröð reikniaðgerða.

$$(10+4)^2$$
$$(14)^2$$
$$196$$

Reglan virkar!

**DÆMI 6.47**

Margfaldið: $(x+5)^2$.

## Lausn

| | $(x+5)^2$ |
|---|---|
| Setjið fyrsta liðinn í annað veldi. | $x^2+___+___$ |
| Setjið síðasta liðinn í annað veldi. | $x^2+___+5^2$ |
| Tvöfaldið margfeldið. | $x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2$ |
| Einfaldið. | $x^2+10x+25$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.93**

Margfaldið: $(x+9)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.94**

Margfaldið: $(y+11)^2$.

**DÆMI 6.48**

Margfaldið: $(y-3)^2$.

## Lausn

| | $(a-b)^2$<br>$(y-3)$ |
|---|---|
| Setjið fyrsta liðinn í annað veldi. | $a^2-2ab+b^2$<br>$y^2-___+___$ |
| Setjið síðasta liðinn í annað veldi. | $a^2-2ab+b^2$<br>$y^2-___+3^2$ |
| Tvöfaldið margfeldið. | $a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$<br>$y^2-2\cdot y\cdot 3+3^2$ |
| Einfaldið. | $y^2-6y+9$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.95**

Margfaldið: $(x-9)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.96**

Margfaldið: $(p-13)^2$.

6

**DÆMI 6.49**

Margfaldið: $(4x+6)^2$.

## Lausn

| | $(a+b)^2$<br>$(4x+6)$ |
|---|---|
| Notið regluna. | $a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$<br>$(4x)^2+2\cdot 4x\cdot 6+6^2$ |
| Einfaldið. | $16x^2+48x+36$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.97**

Margfaldið: $(6x+3)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.98**

Margfaldið: $(4x+9)^2$.

**DÆMI 6.50**

Margfaldið: $(2x-3y)^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(a-b)^2$<br>$(2x-3y)^2$ |
| Notið regluna. | $a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$<br>$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2$ |
| Einfaldið. | $4x^2-12xy+9y^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.99**

Margfaldið: $(2c-d)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.100**

Margfaldið: $(4x-5y)^2$.

**DÆMI 6.51**

Margfaldið: $(4u^3+1)^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(a+b)^2$<br>$(4u^3+1)^2$ |
| Notið regluna. | $a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$<br>$(4u^3)^2+2\cdot 4u^3\cdot 1+(1)^2$ |
| Einfaldið. | $16u^6+8u^3+1$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.101**

Margfaldið: $(2x^2+1)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.102**

Margfaldið: $(3y^3+2)^2$.

## Margfaldið samoka með reglunni um margfeldi samoka

Við sáum rétt í þessu reglu um ferninga tvíliða sem auðveldar okkur að margfalda suma tvíliði. Á sama hátt er til regla um annað margfeldi tvíliða. Áður en við skoðum hana þurfum við þó að kynna nokkur hugtök.

Hvað sjáið þið þegar þið skoðið þessi pör tvíliða?

$$(x-9)(x+9) \qquad (y-8)(y+8) \qquad (2x-5)(2x+5)$$

Skoðið fyrsta lið hvors tvíliðar í hverju pari.

$(x-9)(x+9)$ $(y-8)(y+8)$ $(2x-5)(2x+5)$

*Athugið að fyrstu liðirnir eru eins í hvorum tvílið hvers pars.*

Skoðið síðasta lið hvors tvíliðar í hverju pari.

$(x-9)(x+9)$ $(y-8)(y+8)$ $(2x-5)(2x+5)$

*Athugið að síðustu liðirnir eru eins í hvorum tvílið hvers pars.*

*Athugið að í hverju pari er ein summa og einn mismunur.*

$(x-9)(x+9)$ $(y-8)(y+8)$ $(2x-5)(2x+5)$

(Mismunur) (Summa) (Mismunur) (Summa) (Mismunur) (Summa)

Tveir tvíliðir sem hafa sama fyrsta lið og sama síðasta lið, en annar er summa og hinn mismunur, kallast samokar og eru á forminu $(a-b),(a+b)$.

---

**SAMOKAR**

Tveir samokar eru tvíliðir á forminu

$$(a-b),(a+b).$$

Tvíliðirnir hafa sama fyrsta lið og sama síðasta lið, en annar tvíliðurinn er summa og hinn mismunur.

Til er einföld regla til að finna margfeldi samoka. Auðvitað mætti nota FOIL-aðferðina, en reglan auðveldar útreikningana.

Leitum að mynstrinu með því að margfalda nokkur pör samoka með FOIL-aðferðinni.

| | | |
|---|---|---|
| $(x-9)(x+9)$ | $(y-8)(y+8)$ | $(2x-5)(2x+5)$ |
| $x^2+9x-9x-81$ | $y^2+8y-8y-64$ | $4x^2+10x-10x-25$ |
| $x^2-81$ | $y^2-64$ | $4x^2-25$ |

$(x+9)(x-9)$ $(y-8)(y+8)$ $(2x-5)(2x+5)$

$x^2-9x+9x-81$ $y^2+8y-8y-64$ $4x^2+10x-10x-25$

$x^2-81$ $y^2-64$ $4x^2-25$

Fyrsti liðurinn í hverju margfeldi er margfeldi fremstu liða tvíliðanna. Þeir eru eins, svo að hann er ferningur fyrsta liðarins.

$$(a+b)(a-b)=a^2-____$$

Til að fá fyrsta liðinn skal setja fyrsta liðinn í annað veldi.

Síðasti liðurinn fékkst með því að margfalda öftustu liðina og er ferningur síðasta liðarins.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Til að fá síðasta liðinn skal setja síðasta liðinn í annað veldi.

6

Hvað sjáið þið þegar þið skoðið margfeldin?

Margfeldi tvíliðanna tveggja er einnig tvíliður! Flest margfeldi sem við höfum fengið með FOIL-aðferðinni hafa verið þríliðir.

Hvers vegna er enginn miðliður? Athugið að miðliðirnir tveir sem fást með FOIL-aðferðinni leggjast saman og verða 0 í hverju dæmi, því annar er lagður við en hinn dreginn frá.

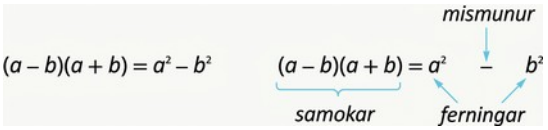
Margfeldi samoka er alltaf á forminu $a^2 - b^2$. Þetta kallast mismunur ferninga.

Þetta leiðir til reglunnar:

---

**REGLAN UM MARGFELDI SAMOKA**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur,




Margfeldið kallast mismunur ferninga.

Til að margfalda samoka skal setja fyrsta liðinn og síðasta liðinn í annað veldi og skrifa margfeldið sem mismun ferninga.

Prófum regluna með töludæmi.

| | $(10-2)(10+2)$ |
|---|---|
| Þetta er margfeldi samoka og niðurstaðan verður því mismunur tveggja ferninga. | $____ - ____$ |
| Setjið fyrsta liðinn í annað veldi. | $10^2 - ____$ |
| Setjið síðasta liðinn í annað veldi. | $10^2 - 2^2$ |
| Einfaldið. | $100 - 4$ |
| Einfaldið. | $96$ |
| Hvað fáið þið ef þið fylgið forgangsröð reikniaðgerða? | |

$$(10-2)(10+2)$$
$$(8)(12)$$
$$96$$

Athugið að niðurstaðan er sú sama!

---

**DÆMI 6.52**

Margfaldið: $(x-8)(x+8)$.

## Lausn

Áttið ykkur fyrst á því að þetta er margfeldi samoka. Tvíliðirnir hafa sömu fyrstu liði og sömu síðustu liði; annar tvíliðurinn er summa og hinn mismunur.

| | |
|---|---|
| Þetta fellur að reglunni. | $(x-8)(x+8)$ |
| Setjið fyrsta liðinn, x í annað veldi. | $x^2-__$ |
| Setjið síðasta liðinn, 8, í annað veldi. | $x^2-8^2$ |
| Margfeldið er mismunur ferninga. | $x^2-64$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.103**

Margfaldið: $(x-5)(x+5)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.104**

Margfaldið: $(w-3)(w+3)$.

**DÆMI 6.53**

Margfaldið: $(2x+5)(2x-5)$.

6

## Lausn

Eru tvíliðirnir samokar?

| | |
|---|---|
| Þetta er margfeldi samoka. | $(2x+5)(2x-5)$ |
| Setjið fyrsta liðinn, 2x, í annað veldi. | $(2x)^2-__$ |
| Setjið síðasta liðinn, 5, í annað veldi. | $(2x)^2-5^2$ |
| Einfaldið. Margfeldið er mismunur ferninga. | $4x^2-25$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.105**

Margfaldið: $(6x+5)(6x-5)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.106**

Margfaldið: $(2x+7)(2x-7)$.

Tvíliðirnir í næsta dæmi virðast ef til vill snúa öfugt, því breytan er í síðari liðnum. Þeir eru samt samokar og því notum við sömu reglu til að margfalda þá.

**DÆMI 6.54**

Finnið margfeldið: $(3+5x)(3-5x)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þetta er margfeldi samoka. | $(a-b)(a+b)$<br>$(3+5x)(3-5x)$ |
| Notið regluna. | $a^2-b^2$<br>$3^2-(5x)^2$ |
| Einfaldið. | $9-25x^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.107**

Margfaldið: $(7+4x)(7-4x)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.108**

Margfaldið: $(9-2y)(9+2y)$.

Nú margföldum við samoka með tveimur breytum.

**DÆMI 6.55**

Finnið margfeldið: $(5m-9n)(5m+9n)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þetta fellur að reglunni. | $(a-b)(a+b)$<br>$(5m-9n)(5m+9n)$ |
| Notið regluna. | $a^2-b^2$<br>$(5m)^2-(9n)^2$ |
| Einfaldið. | $25m^2-81n^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.109**

Finnið margfeldið: $(4p-7q)(4p+7q)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.110**

Finnið margfeldið: $(3x-y)(3x+y)$.

**DÆMI 6.56**

Finnið margfeldið: $(cd-8)(cd+8)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þetta fellur að reglunni. | $(cd-8)(cd+8)$ |
| Notið regluna. | $(cd)^2-(8)^2$ |
| Einfaldið. | $c^2d^2-64$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.111**

Finnið margfeldið: $(xy-6)(xy+6)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.112**

Finnið margfeldið: $(ab-9)(ab+9)$.

**DÆMI 6.57**

Finnið margfeldið: $(6u^2-11v^5)(6u^2+11v^5)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þetta fellur að reglunni. | $(6u^2-11v^5)(6u^2+11v^5)$ |
| Notið regluna. | $(6u^2)^2-(11v^5)^2$ |
| Einfaldið. | $36u^4-121v^{10}$ |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.113**

Finnið margfeldið: $(3x^2-4y^3)(3x^2+4y^3)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.114**

Finnið margfeldið: $(2m^2-5n^3)(2m^2+5n^3)$.

## Þekkið og notið viðeigandi reglu um sérstök margfeldi

Við höfum nú leitt út reglur um ferninga tvíliða og margfeldi samoka. Margfeldin líkjast hvert öðru og því er mikilvægt að þekkja hvenær hvor regla á við og taka eftir muninum á þeim. Skoðið reglurnar saman og athugið hvað er líkt og ólíkt með þeim.

**SAMANBURÐUR Á REGLUM UM SÉRSTÖK MARGFELDI**

| **Ferningar tvíliða** | **Margfeldi samoka** |
|---|---|
| $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ | $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ |
| $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ | |
| – Tvíliður settur í annað veldi | – Samokar margfaldaðir |
| – Margfeldið er þríliður | – Margfeldið er tvíliður |
| – Innri og ytri liðirnir í FOIL-aðferðinni eru eins. | – Innri og ytri liðirnir í FOIL-aðferðinni eru gagnstæðir. |
| – Miðliðurinn er tvöfalt margfeldi liðanna. | – Enginn miðliður er til staðar. |

**DÆMI 6.58**

Veljið viðeigandi reglu og notið hana til að finna margfeldið:

ⓐ $(2x-3)(2x+3)$ ⓑ $(8x-5)^2$ ⓒ $(6m+7)^2$ ⓓ $(5x-6)(6x+5)$

## Lausn

**1.** ⓐ $(2x-3)(2x+3)$ Þetta eru samokar. Þeir hafa sömu fyrstu liði og sömu síðustu liði; annar tvíliðurinn er summa og hinn mismunur. Reglan um margfeldi samoka á því við.

| | |
|---|---|
| Þetta fellur að reglunni. | $(\underset{2x}{a}-\underset{3}{b})(\underset{2x}{a}+\underset{3}{b})$ |
| Notið regluna. | $\underset{(2x)^2}{a^2}-\underset{3^2}{b^2}$ |
| Einfaldið. | $4x^2-9$ |

**2.** ⓑ $(8x-5)^2$ Við eigum að setja tvílið í annað veldi. Hér á ferningsregla tvíliða við.

| | |
|---|---|
| | $(\underset{8x}{a}-\underset{5}{b})^2$ |
| Notið regluna. | $\underset{(8x)^2}{a^2}-\underset{2\cdot 8x\cdot 5}{2ab}+\underset{5^2}{b^2}$ |
| Einfaldið. | $64x^2-80x+25$ |

**3.** ⓒ $(6m+7)^2$ Aftur eigum við að setja tvílið í annað veldi og notum því ferningsreglu tvíliða.

| | $(6m+7)^2$ |
|---|---|
| Notið regluna. | $(6m)^2+2\cdot 6m\cdot 7+7^2$ |
| Einfaldið. | $36m^2+84m+49$ |

**4.** ⓓ $(5x-6)(6x+5)$ Þetta margfeldi fellur ekki að reglunum og því notum við FOIL-aðferðina.

| | $(5x-6)(6x+5)$ |
|---|---|
| Notið FOIL-aðferðina. | $30x^2+25x-36x-30$ |
| Einfaldið. | $30x^2-11x-30$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.115**

Veljið viðeigandi reglu og notið hana til að finna margfeldið:

ⓐ $(9b-2)(2b+9)$ ⓑ $(9p-4)^2$ ⓒ $(7y+1)^2$ ⓓ $(4r-3)(4r+3)$

**REYNIÐ SJÁLF 6.116**

Veljið viðeigandi reglu og notið hana til að finna margfeldið:

ⓐ $(6x+7)^2$ ⓑ $(3x-4)(3x+4)$ ⓒ $(2x-5)(5x-2)$ ⓓ $(6n-1)^2$

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið meiri kennslu og fleiri æfingar um sérstök margfeldi:

- Sérstök margfeldi

## Verkefni úr hluta 6.4

***Æfingin skapar meistarann***

**Finnið ferning tvíliðar með ferningsreglu tvíliða**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið setja hvern tvílið í annað veldi með ferningsreglu tvíliða.

302.

$$(w+4)^2$$

303.

$$(q+12)^2$$

304.

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2$$

305.

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

306.

$$(b-7)^2$$

307.

$$(y-6)^2$$

308.

$$(m-15)^2$$

309.

$$(p-13)^2$$

310.

$$(3d+1)^2$$

311.

$$(4a+10)^2$$

312.

$$\left(2q+\frac{1}{3}\right)^2$$

313.

$$\left(3z+\frac{1}{5}\right)^2$$

314.

$$(3x-y)^2$$

315.

$$(2y-3z)^2$$

316.

$$\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y\right)^2$$

317.

$$\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{9}y\right)^2$$

318.

$$\left(3x^2+2\right)^2$$

319.

$$\left(5u^2+9\right)^2$$

320.

$$\left(4y^3-2\right)^2$$

321.

$$\left(8p^3-3\right)^2$$

**Margfaldið samoka með reglunni um margfeldi samoka**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið margfalda hvert par samoka með reglunni um margfeldi samoka.

6

322.

$$(m-7)(m+7)$$

323.

$$(c-5)(c+5)$$

324.

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

325.

$$\left(b+\frac{6}{7}\right)\left(b-\frac{6}{7}\right)$$

326.

$$(5k+6)(5k-6)$$

327.

$$(8j+4)(8j-4)$$

328.

$$(11k+4)(11k-4)$$

329.

$$(9c+5)(9c-5)$$

330.

$$(11-b)(11+b)$$

331.

$$(13-q)(13+q)$$

332.

$$(5-3x)(5+3x)$$

333.

$$(4-6y)(4+6y)$$

334.

$$(9c-2d)(9c+2d)$$

335.

$$(7w+10x)(7w-10x)$$

336.

$$\left(m+\frac{2}{3}n\right)\left(m-\frac{2}{3}n\right)$$

337.

$$\left(p+\frac{4}{5}q\right)\left(p-\frac{4}{5}q\right)$$

338.

$$(ab-4)(ab+4)$$

339.

$$(xy-9)(xy+9)$$

340.

$$\left(uv-\frac{3}{5}\right)\left(uv+\frac{3}{5}\right)$$

341.

$$\left(rs-\frac{2}{7}\right)\left(rs+\frac{2}{7}\right)$$

342.

$$\left(2x^2-3y^4\right)\left(2x^2+3y^4\right)$$

343.

$$\left(6m^3-4n^5\right)\left(6m^3+4n^5\right)$$

344.

$$\left(12p^3-11q^2\right)\left(12p^3+11q^2\right)$$

345.

$$\left(15m^2-8n^4\right)\left(15m^2+8n^4\right)$$

**Þekkið og notið viðeigandi reglu um sérstök margfeldi**
Finnið hvert margfeldi í verkefnunum hér á eftir.

6

**346.** ⓐ $(p-3)(p+3)$ ⓑ $(t-9)^2$ ⓒ $(m+n)^2$ ⓓ $(2x+y)(x-2y)$

**347.** ⓐ $(2r+12)^2$ ⓑ $(3p+8)(3p-8)$ ⓒ $(7a+b)(a-7b)$ ⓓ $(k-6)^2$

**348.** ⓐ $\left(a^5-7b\right)^2$ ⓑ $\left(x^2+8y\right)\left(8x-y^2\right)$ ⓒ $\left(r^6+s^6\right)\left(r^6-s^6\right)$ ⓓ $\left(y^4+2z\right)^2$

**349.** ⓐ $\left(x^5+y^5\right)\left(x^5-y^5\right)$ ⓑ $\left(m^3-8n\right)^2$ ⓒ $(9p+8q)^2$ ⓓ $\left(r^2-s^3\right)\left(r^3+s^2\right)$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**350.** **Hugarreikningur** Nota má regluna um margfeldi samoka til að margfalda tölur án reiknivélar. Segjum að margfalda þurfi 47 með 53. Lítið á 47 sem $50-3$ og 53 sem $50+3$.

1. ⓐ Margfaldið $(50-3)(50+3)$ með reglunni um margfeldi samoka, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
2. ⓑ Margfaldið $47\cdot 53$ án þess að nota reiknivél.
3. ⓒ Hvor leiðin finnst ykkur auðveldari? Hvers vegna?

**351.** **Hugarreikningur** Nota má ferningsreglu tvíliða til að margfalda tölur án reiknivélar. Segjum að finna þurfi ferning tölunnar 65. Lítið á 65 sem $60+5$.

1. ⓐ Margfaldið $(60+5)^2$ með ferningsreglu tvíliða, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
2. ⓑ Finnið ferning tölunnar 65 án reiknivélar.
3. ⓒ Hvor leiðin finnst ykkur auðveldari? Hvers vegna?

### *Ritunarverkefni*

**352.** Hvernig ákveðið þið hvaða reglu á að nota?

**353.** Hvers vegna verður $(a+b)^2$ að þrílið en $(a-b)(a+b)$ að tvílið?

**354.** Marta leysti dæmið svona í heimavinnunni sinni:

$$\begin{aligned}(3-y)^2\\ 3^2-y^2\\ 9-y^2\end{aligned}$$

Útskýrið hvað er rangt við lausn Mörtu.

**355.** Notið forgangsröð reikniaðgerða til að sýna að $(3+5)^2$ sé 64 og notið síðan töludæmið til að útskýra hvers vegna $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| sett tvíliðu í annað veldi með ferningsreglu tvíliðu. | | | |
| margfaldað saman samoka með reglunni um margfeldi samoka. | | | |
| þekkt og notað viðeigandi reglu um sérstök margfeldi. | | | |

ⓑ Hvernig metið þið tök ykkar á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt tök ykkar?

## 6.5 Deilið einliðum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið stæður með kvótareglu fyrir veldi
- Einfaldið stæður með núllveldi
- Einfaldið stæður með reglunni um kvóta í veldi
- Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum
- Deilið einliðum

**UNDIRBÚNINGUR 6.9**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $\frac{8}{24}$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.65.

---

**UNDIRBÚNINGUR 6.10**

Einfaldið: $\left(2m^3\right)^5$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 6.23.

---

**UNDIRBÚNINGUR 6.11**

Einfaldið: $\frac{12x}{12y}$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.67.

## Einfaldið stæður með kvótareglu fyrir veldi

Fyrr í þessum kafla leiddum við út veldisreglur fyrir margföldun. Þær eru teknar saman hér fyrir neðan.

---

**SAMANTEKT Á VELDISREGLUM FYRIR MARGFÖLDUN**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur og $m$ og $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

| | |
|---|---|
| **Margfeldisregla** | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| **Reglan um veldi af veldi** | $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ |
| **Reglan um margfeldi í veldi** | $\left(ab\right)^m = a^m b^m$ |

Nú skoðum við veldisreglur fyrir deilingu. Gott getur verið að rifja örstutt upp áður en við byrjum. Þið hafið lært að einfalda brot með því að stytta sameiginlega þætti teljara og nefnara samkvæmt reglunni um jafngild brot. Sú regla nýtist einnig við algebrubrot, sem eru líka kvótar.

---

**REGLA UM JAFNGILD BROT**

Ef $a$, $b$, og $c$ eru núll eða jákvæðar heiltölur og $b \neq 0$, $c \neq 0$,

$$\text{þá } \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \text{ og } \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Eins og áður reynum við að finna reglu með því að skoða nokkur dæmi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Skoðið | $\frac{x^5}{x^2}$ | og | $\frac{x^2}{x^3}$ |
| Hvað merkja stæðurnar? | $\frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x}$ | | $\frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x}$ |
| Notið regluna um jafngild brot. | $\frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x}$ | | $\frac{x \cdot x \cdot 1}{x \cdot x \cdot x}$ |
| Einfaldið. | $x^3$ | | $\frac{1}{x}$ |

Athugið að í hverju tilviki voru veldisstofnarnir eins og við drógum veldisvísana frá hvor öðrum.

Þegar stærri veldisvísirinn var í teljaranum urðu þættir eftir í teljaranum.

Þegar stærri veldisvísirinn var í nefnaranum urðu þættir eftir í nefnaranum. Athugið að teljarinn er 1.

Við ritum:

| | |
|---|---|
| $\frac{x^5}{x^2}$ | $\frac{x^2}{x^3}$ |
| $x^{5-2}$ | $\frac{1}{x^{3-2}}$ |
| $x^3$ | $\frac{1}{x}$ |

Þetta leiðir til kvótareglunnar fyrir veldi.

6

**KVÓTAREGLA FYRIR VELDI**

Ef $a$ er rauntala, $a \neq 0$, og $m$ og $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n \text{ og } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, n > m$$

Nokkur töludæmi geta hjálpað okkur að sannreyna regluna.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3^4}{3^2}$ | $=$ | $3^{4-2}$ | $\frac{5^2}{5^3}$ | $=$ | $\frac{1}{5^{3-2}}$ |
| $\frac{81}{9}$ | $=$ | $3^2$ | $\frac{25}{125}$ | $=$ | $\frac{1}{5^1}$ |
| $9$ | $=$ | $9\checkmark$ | $\frac{1}{5}$ | $=$ | $\frac{1}{5}\checkmark$ |

**DÆMI 6.59**

Einfaldið: ⓐ $\frac{x^9}{x^7}$ ⓑ $\frac{3^{10}}{3^2}$.

## Lausn

Til að einfalda stæðu með kvóta þurfum við fyrst að bera saman veldisvísa teljarans og nefnarans.

**1.** ⓐ

| | |
|---|---|
| Þar sem 9 > 7 eru fleiri þættir af x í teljaranum. | $\frac{x^9}{x^7}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. | $x^{9-7}$ |
| Einfaldið. | $x^2$ |

**2.** ⓑ

| | |
|---|---|
| Þar sem 10 > 2 eru fleiri þættir af x í teljaranum. | $\frac{3^{10}}{3^2}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. | $3^{10-2}$ |
| Einfaldið. | $3^8$ |

Athugið að þegar stærri veldisvísirinn er í teljaranum verða þættir eftir í teljaranum.

**REYNIÐ SJÁLF 6.117**

Einfaldið: ⓐ $\frac{x^{15}}{x^{10}}$ ⓑ $\frac{6^{14}}{6^5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.118**

Einfaldið: ⓐ $\frac{y^{43}}{y^{37}}$ ⓑ $\frac{10^{15}}{10^7}$.

**DÆMI 6.60**

Einfaldið: ⓐ $\frac{b^8}{b^{12}}$ ⓑ $\frac{7^3}{7^5}$.

## Lausn

Til að einfalda stæðu með kvóta þurfum við fyrst að bera saman veldisvísa teljarans og nefnarans.

**1.** ⓐ

| | |
|---|---|
| Þar sem 12 > 8 eru fleiri þættir af b í nefnaranum. | $\frac{b^8}{b^{12}}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$. | $\frac{1}{b^{12-8}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{b^4}$ |

**2.** ⓑ

| | |
|---|---|
| Þar sem 5 > 3 eru fleiri þættir af 3 í nefnaranum. | $\frac{7^3}{7^5}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$. | $\frac{1}{7^{5-3}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{7^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{49}$ |

Athugið að þegar stærri veldisvísirinn er í nefnaranum verða þættir eftir í nefnaranum.



**REYNIÐ SJÁLF 6.119**

Einfaldið: ⓐ $\frac{x^{18}}{x^{22}}$ ⓑ $\frac{12^{15}}{12^{30}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.120**

Einfaldið: ⓐ $\frac{m^7}{m^{15}}$ ⓑ $\frac{9^8}{9^{19}}$.

Athugið muninn á dæmunum tveimur hér á undan:

- Ef fleiri þættir eru í teljaranum í upphafi verða þættir eftir í teljaranum.
- Ef fleiri þættir eru í nefnaranum í upphafi verða þættir eftir í nefnaranum.

Þegar stæða er einfölduð með kvótareglu fyrir veldi er fyrsta skrefið að athuga hvort stærri veldisvísirinn sé í teljaranum eða nefnaranum.

**DÆMI 6.61**

Einfaldið: ⓐ $\frac{a^5}{a^9}$ ⓑ $\frac{x^{11}}{x^7}$.

## Lausn

**1.** ⓐ Er veldisvísir $a$ stærri í teljaranum eða nefnaranum? Þar sem $9 > 5$ eru fleiri þættir af $a$'s í nefnaranum og því verða þættir eftir í nefnaranum.

| | |
|---|---|
| | $\frac{a^5}{a^9}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$. | $\frac{1}{a^{9-5}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{a^4}$ |

**2.** ⓑ Athugið að fleiri þættir af $x$ eru í teljaranum þar sem $11 > 7$. Því verða þættir eftir í teljaranum.

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^{11}}{x^7}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$. | $x^{11-7}$ |
| Einfaldið. | $x^4$ |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.121**

Einfaldið: ⓐ $\frac{b^{19}}{b^{11}}$ ⓑ $\frac{z^5}{z^{11}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.122**

Einfaldið: ⓐ $\frac{p^9}{p^{17}}$ ⓑ $\frac{w^{13}}{w^9}$.

## Einfaldið stæður með núllveldi

Sértilvik kvótareglunnar kemur upp þegar veldisvísar teljarans og nefnarans eru jafnir, til dæmis í stæðu eins og $\frac{a^m}{a^m}$. Af fyrri vinnu með brot vitið þið að:

$$\frac{2}{2}=1\quad\frac{17}{17}=1\quad\frac{-43}{-43}=1$$

Með orðum: Tala deilt með sjálfri sér er 1. Því gildir $\frac{x}{x}=1$, fyrir sérhvert $x\,(x\neq 0)$, enda er tala deilt með sjálfri sér 1.

Kvótareglan fyrir veldi sýnir hvernig einfalda má $\frac{a^m}{a^n}$ þegar $m>n$ og þegar $n<m$ með því að draga veldisvísana frá. En hvað ef $m=n$?

Skoðið $\frac{8}{8}$, sem við vitum að er 1.

| | $\frac{8}{8}=1$ |
|---|---|
| Skrifið 8 sem $2^3$. | $\frac{2^3}{2^3}=1$ |
| Dragið veldisvísana frá. | $2^{3-3}=1$ |
| Einfaldið. | $2^0=1$ |

Nú einföldum við $\frac{a^m}{a^m}$ á tvo vegu til að leiða út skilgreiningu núllveldis. Almennt gildir fyrir $a\neq 0$:

$\frac{a^m}{a^m}$ $\quad$ $\frac{a^m}{a^m}$

$a^{m-m}$ $\quad$ $\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{m\text{ þættir}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ þættir}}}$

$a^0$ $\quad$ 1

Við sjáum að $\frac{a^m}{a^m}$ einfaldast bæði í $a^0$ og 1. Því er $a^0=1$.

**NÚLLVELDI**

Ef $a$ er tala önnur en núll, þá er $a^0=1$.

Tala önnur en núll í núllta veldi er alltaf 1.

Í þessari bók gerum við ráð fyrir að breyta sem er hafin í núllta veldi sé ekki núll.

**DÆMI 6.62**

Einfaldið: ⓐ $9^0$ ⓑ $n^0$.

## Lausn

Samkvæmt skilgreiningunni er tala önnur en núll í núllta veldi alltaf 1.

| ⓐ Notið skilgreiningu núllveldis. | $9^0$ |
|---|---|
| | $1$ |
| ⓑ Notið skilgreiningu núllveldis. | $n^0$ |
| | $1$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.123**

Einfaldið: ⓐ $15^0$ ⓑ $m^0$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.124**

Einfaldið: ⓐ $k^0$ ⓑ $29^0$.

Nú höfum við skilgreint núllveldi og getum því látið allar veldisreglurnar ná til veldisvísa sem eru núll eða jákvæðar heiltölur.
Hvað gerist þegar stæða er hafin í núllta veldi? Skoðum $(2x)^0$. Við getum notað regluna um margfeldi í veldi til að endurrita stæðuna.

Tafla 6.1

| | $(2x)^0$ |
|---|---|
| Notið regluna um margfeldi í veldi. | $2^0 x^0$ |
| Notið núllveldisregluna. | $1 \cdot 1$ |
| Einfaldið. | $1$ |

Þetta sýnir að stæða önnur en núll í núllta veldi er alltaf jöfn einum.

6

**DÆMI 6.63**

Einfaldið: ⓐ $(5b)^0$ ⓑ $(-4a^2b)^0$.

## Lausn

| ⓐ | $(5b)^0$ |
|---|---|
| Notið skilgreiningu núllveldis. | $1$ |
| ⓑ | $(-4a^2b)^0$ |
| Notið skilgreiningu núllveldis. | $1$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.125**

Einfaldið: ⓐ $(11z)^0$ ⓑ $(-11pq^3)^0$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.126**

Einfaldið: ⓐ $(-6d)^0$ ⓑ $(-8m^2n^3)^0$.

## Einfaldið stæður með reglunni um kvóta í veldi

Nú skoðum við dæmi sem leiðir okkur að reglunni um kvóta í veldi.

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{x}{y}\right)^3$ |
| Þetta merkir: | $\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}$ |
| Margfaldið brotin. | $\frac{x\cdot x\cdot x}{y\cdot y\cdot y}$ |
| Skrifið með veldisvísum. | $\frac{x^3}{y^3}$ |

Athugið að veldisvísirinn á bæði við teljarann og nefnarann.

| | |
|---|---|
| Við ritum: | $\left(\frac{x}{y}\right)^3$ |
| | $\frac{x^3}{y^3}$ |

Þetta leiðir til reglunnar um kvóta í veldi.

**REGLAN UM KVÓTA Í VELDI**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur, $b\neq 0$, og $m$ er jákvæð heiltala, þá

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

Til að hefja brot í veldi hefjum við bæði teljarann og nefnarann í það veldi.

Töludæmi getur hjálpað ykkur að skilja regluna:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 &= \tfrac{2^3}{3^3}\\ \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} &= \tfrac{8}{27}\\ \tfrac{8}{27} &= \tfrac{8}{27}\checkmark\end{aligned}$$

**DÆMI 6.64**

Einfaldið: ⓐ $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ ⓑ $\left(\frac{b}{3}\right)^4$ ⓒ $\left(\frac{k}{j}\right)^3$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ |
| Notið kvótaregluna, $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$. | $\frac{3^2}{7^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{9}{49}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{b}{3}\right)^4$ |
| Notið kvótaregluna, $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$. | $\frac{b^4}{3^4}$ |
| Einfaldið. | $\frac{b^4}{81}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{k}{j}\right)^3$ |
| Hefjið teljarann og nefnarann í þriðja veldi. | $\frac{k^3}{j^3}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.127**

Einfaldið: ⓐ $\left(\frac{5}{8}\right)^2$ ⓑ $\left(\frac{p}{10}\right)^4$ ⓒ $\left(\frac{m}{n}\right)^7$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.128**

Einfaldið: ⓐ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ⓑ $\left(\frac{-2}{q}\right)^3$ ⓒ $\left(\frac{w}{x}\right)^4$.

## Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum

Nú tökum við allar veldisreglurnar saman á einum stað svo að þið getið flett upp í þeim þegar þið einfaldið stæður með nokkrum reglum. Athugið að þær eru nú skilgreindar fyrir veldisvísa sem eru núll eða jákvæðar heiltölur.

**SAMANTEKT Á VELDISREGLUM**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur og $m$ og $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

| | |
|---|---|
| **Margfeldisregla** | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| **Reglan um veldi af veldi** | $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ |
| **Reglan um margfeldi í veldi** | $\left(a\,b\right)^m = a^m b^m$ |
| **Kvótaregla** | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0, m > n$<br>$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, a \neq 0, n > m$ |
| **Skilgreining núllveldis** | $a^o = 1, a \neq 0$ |
| **Reglan um kvóta í veldi** | $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$ |

**DÆMI 6.65**

Einfaldið: $\frac{\left(y^4\right)^2}{y^6}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\left(y^4\right)^2}{y^6}$ |
| Margfaldið veldisvísana í teljaranum. | $\frac{y^8}{y^6}$ |
| Dragið veldisvísana frá. | $y^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.129**

Einfaldið: $\frac{\left(m^5\right)^4}{m^7}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.130**

Einfaldið: $\frac{\left(k^2\right)^6}{k^7}$.

**DÆMI 6.66**

Einfaldið: $\frac{b^{12}}{\left(b^2\right)^6}$.

## Lausn

| | $\frac{b^{12}}{\left(b^2\right)^6}$ |
|---|---|
| Margfaldið veldisvísana í teljaranum. | $\frac{b^{12}}{b^{12}}$ |
| Dragið veldisvísana frá. | $b^0$ |
| Einfaldið. | $1$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.131**

Einfaldið: $\frac{n^{12}}{\left(n^3\right)^4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.132**

Einfaldið: $\frac{x^{15}}{\left(x^3\right)^5}$.

**DÆMI 6.67**

Einfaldið: $\left(\frac{y^9}{y^4}\right)^2$.

## Lausn

| | $\left(\frac{y^9}{y^4}\right)^2$ |
|---|---|
| Munið að svigar koma á undan veldisvísum. Athugið að veldisstofnarnir eru eins og því getum við einfaldað innan svigans. Dragið veldisvísana frá. | $\left(y^5\right)^2$ |
| Margfaldið veldisvísana. | $y^{10}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.133**

Einfaldið: $\left(\frac{r^5}{r^3}\right)^4$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.134**

Einfaldið: $\left(\frac{v^6}{v^4}\right)^3$.

**DÆMI 6.68**

Einfaldið: $\left(\frac{j^2}{k^3}\right)^4$.

## Lausn

Hér getum við ekki einfaldað innan svigans fyrst þar sem veldisstofnarnir eru ekki eins.

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{j^2}{k^3}\right)^4$ |
| Hefjið teljarann og nefnarann í fjórða veldi með reglunni um kvóta í veldi, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$. | |
| Notið regluna um veldi af veldi og einfaldið. | $\frac{j^8}{k^{12}}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.135**

Einfaldið: $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.136**

Einfaldið: $\left(\frac{q^7}{r^5}\right)^3$.

**DÆMI 6.69**

Einfaldið: $\left(\frac{2m^2}{5n}\right)^4$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{2m^2}{5n}\right)^4$ |
| Hefjið teljarann og nefnarann í fjórða veldi, með reglunni um kvóta í veldi, $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$. | $\frac{\left(2m^2\right)^4}{\left(5n\right)^4}$ |
| Hefjið hvern þátt í fjórða veldi. | $\frac{\left(2m^2\right)^4}{\left(5n\right)^4}$ |
| Notið regluna um veldi af veldi og einfaldið. | $\frac{16m^8}{625n^4}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.137**

Einfaldið: $\left(\frac{7x^3}{9y}\right)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.138**

Einfaldið: $\left(\frac{3x^4}{7y}\right)^2$.

**DÆMI 6.70**

Einfaldið: $\frac{\left(x^3\right)^4\left(x^2\right)^5}{\left(x^6\right)^5}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\left(x^3\right)^4\left(x^2\right)^5}{\left(x^6\right)^5}$ |
| Notið regluna um veldi af veldi, $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$. | $\frac{\left(x^{12}\right)\left(x^{10}\right)}{\left(x^{30}\right)}$ |
| Leggið saman veldisvísana í teljaranum. | $\frac{x^{22}}{x^{30}}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$. | $\frac{1}{x^8}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.139**

Einfaldið: $\frac{\left(a^2\right)^3\left(a^2\right)^4}{\left(a^4\right)^5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.140**

Einfaldið: $\frac{\left(p^3\right)^4\left(p^5\right)^3}{\left(p^7\right)^6}$.

**DÆMI 6.71**

Einfaldið: $\frac{\left(10\,p^3\right)^2}{\left(5\,p\right)^3\left(2\,p^5\right)^4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\left(10\,p^3\right)^2}{\left(5\,p\right)^3\left(2\,p^5\right)^4}$ |
| Notið regluna um margfeldi í veldi, $\left(a\,b\right)^m = a^m b^m$. | $\frac{\left(10\right)^2\left(p^3\right)^2}{\left(5\right)^3\left(p\right)^3\left(2\right)^4\left(p^5\right)^4}$ |
| Notið regluna um veldi af veldi, $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$. | $\frac{100\,p^6}{125\,p^3\cdot 16\,p^{20}}$ |
| Leggið saman veldisvísana í nefnaranum. | $\frac{100\,p^6}{125\cdot 16\,p^{23}}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$. | $\frac{100}{125\cdot 16\,p^{17}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{20\,p^{17}}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.141**

Einfaldið: $\frac{\left(3\,r^3\right)^2\left(r^3\right)^7}{\left(r^3\right)^3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.142**

Einfaldið: $\frac{\left(2x^4\right)^5}{\left(4x^3\right)^2\left(x^3\right)^5}$.

## Deilið einliðum

Nú hafið þið kynnst öllum veldisreglunum og notað þær til að einfalda stæður. Næst sjáið þið hvernig reglurnar eru notaðar til að deila einliðum og síðar til að deila margliðum.

**DÆMI 6.72**

Finnið kvótann: $56x^7 \div 8x^3$.

### Lausn

| | $56x^7 \div 8x^3$ |
|---|---|
| Endurritið sem brot. | $\frac{56x^7}{8x^3}$ |
| Notið margföldun brota. | $\frac{56}{8} \cdot \frac{x^7}{x^3}$ |
| Einfaldið og notið kvótaregluna. | $7x^4$ |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.143**

Finnið kvótann: $42y^9 \div 6y^3$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.144**

Finnið kvótann: $48z^8 \div 8z^2$.

**DÆMI 6.73**

Finnið kvótann: $\frac{45a^2b^3}{-5ab^5}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{45a^2b^3}{-5ab^5}$ |
| Notið margföldun brota. | $\frac{45}{-5}\cdot\frac{a^2}{a}\cdot\frac{b^3}{b^5}$ |
| Einfaldið og notið kvótaregluna. | $-9\cdot a\cdot\frac{1}{b^2}$ |
| Margfaldið. | $-\frac{9a}{b^2}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.145**

Finnið kvótann: $\frac{-72a^7b^3}{8a^{12}b^4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.146**

Finnið kvótann: $\frac{-63c^8d^3}{7c^{12}d^2}$.

**DÆMI 6.74**

Finnið kvótann: $\frac{24a^5b^3}{48ab^4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{24a^5b^3}{48ab^4}$ |
| Notið margföldun brota. | $\frac{24}{48}\cdot\frac{a^5}{a}\cdot\frac{b^3}{b^4}$ |
| Einfaldið og notið kvótaregluna. | $\frac{1}{2}\cdot a^4\cdot\frac{1}{b}$ |
| Margfaldið. | $\frac{a^4}{2b}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.147**

Finnið kvótann: $\frac{16a^7b^6}{24ab^8}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.148**

Finnið kvótann: $\frac{27p^4q^7}{-45p^{12}q}$.

Þegar þið hafið náð tökum á aðferðinni og æft hana skref fyrir skref nokkrum sinnum getið þið ef til vill einfaldað brot í einu skrefi.

**DÆMI 6.75**

Finnið kvótann: $\frac{14x^7y^{12}}{21x^{11}y^6}$.

## Lausn

Gætið þess vel að einfalda $\frac{14}{21}$ með því að stytta sameiginlegan þátt og einfalda breyturnar með því að draga veldisvísana frá.

| | |
|---|---|
| | $\frac{14x^7y^{12}}{21x^{11}y^6}$ |
| Einfaldið og notið kvótaregluna. | $\frac{2y^6}{3x^4}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.149**

Finnið kvótann: $\frac{28x^5y^{14}}{49x^9y^{12}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.150**

Finnið kvótann: $\frac{30m^5n^{11}}{48m^{10}n^{14}}$.

Í öllum dæmunum hingað til þurfti ekki að reikna neitt í teljara eða nefnara áður en brotið var einfaldað. Í næsta dæmi finnum við fyrst margfeldi tveggja einliða í teljaranum og einföldum síðan brotið. Þannig fylgjum við forgangsröð reikniaðgerða. Munið að brotastrik er hópunartákn.

**DÆMI 6.76**

Finnið kvótann: $\frac{\left(6x^2y^3\right)\left(5x^3y^2\right)}{\left(3x^4y^5\right)}$.

## Lausn

| | $\frac{\left(6x^2y^3\right)\left(5x^3y^2\right)}{\left(3x^4y^5\right)}$ |
|---|---|
| Einfaldið teljarann. | $\frac{30x^5y^5}{3x^4y^5}$ |
| Einfaldið. | $10x$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.151**

Finnið kvótann: $\frac{\left(6a^4b^5\right)\left(4a^2b^5\right)}{12a^5b^8}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.152**

Finnið kvótann: $\frac{\left(-12x^6y^9\right)\left(-4x^5y^8\right)}{-12x^{10}y^{12}}$.

6

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Á þessum vefsíðum fáið þið frekari kennslu og æfingu í að deila einliðum:

- Ræðar stæður
- Deiling einliða
- Deiling einliða 2

## Verkefni úr hluta 6.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Einfaldið stæður með kvótareglu fyrir veldi**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**356.** ⓐ $\frac{x^{18}}{x^3}$ ⓑ $\frac{5^{12}}{5^3}$

**357.** ⓐ $\frac{y^{20}}{y^{10}}$ ⓑ $\frac{7^{16}}{7^2}$

**358.** ⓐ $\frac{p^{21}}{p^{7}}$ ⓑ $\frac{4^{16}}{4^{4}}$

**359.** ⓐ $\frac{u^{24}}{u^{3}}$ ⓑ $\frac{9^{15}}{9^{5}}$

**360.** ⓐ $\frac{q^{18}}{q^{36}}$ ⓑ $\frac{10^{2}}{10^{3}}$

**361.** ⓐ $\frac{t^{10}}{t^{40}}$ ⓑ $\frac{8^{3}}{8^{5}}$

**362.** ⓐ $\frac{b}{b^{9}}$ ⓑ $\frac{4}{4^{6}}$

**363.** ⓐ $\frac{x}{x^{7}}$ ⓑ $\frac{10}{10^{3}}$

### Einfaldið stæður með núllveldi

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**364.** ⓐ $20^{0}$ ⓑ $b^{0}$

**365.** ⓐ $13^{0}$ ⓑ $k^{0}$

**366.** ⓐ $-27^{0}$ ⓑ $-\left(27^{0}\right)$

**367.** ⓐ $-15^{0}$ ⓑ $-\left(15^{0}\right)$

**368.** ⓐ $\left(25x\right)^{0}$ ⓑ $25x^{0}$

**369.** ⓐ $\left(6y\right)^{0}$ ⓑ $6y^{0}$

**370.** ⓐ $\left(12x\right)^{0}$ ⓑ $\left(-56p^{4}q^{3}\right)^{0}$

**371.** ⓐ $7y^{0}\left(17y\right)^{0}$ ⓑ $\left(-93c^{7}d^{15}\right)^{0}$

**372.** ⓐ $12n^{0}-18m^{0}$ ⓑ $\left(12n\right)^{0}-\left(18m\right)^{0}$

**373.** ⓐ $15r^{0}-22s^{0}$ ⓑ $\left(15r\right)^{0}-\left(22s\right)^{0}$

### Einfaldið stæður með reglunni um kvóta í veldi

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**374.** ⓐ $\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$ ⓑ $\left(\frac{p}{2}\right)^{5}$ ⓒ $\left(\frac{x}{y}\right)^{6}$

**375.** ⓐ $\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$ ⓑ $\left(\frac{x}{3}\right)^{4}$ ⓒ $\left(\frac{a}{b}\right)^{5}$

**376.** ⓐ $\left(\frac{a}{3b}\right)^{4}$ ⓑ $\left(\frac{5}{4m}\right)^{2}$

**377.** ⓐ $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$ ⓑ $\left(\frac{10}{3q}\right)^4$

### Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

378.

$$\frac{\left(a^2\right)^3}{a^4}$$

379.

$$\frac{\left(p^3\right)^4}{p^5}$$

380.

$$\frac{\left(y^3\right)^4}{y^{10}}$$

381.

$$\frac{\left(x^4\right)^5}{x^{15}}$$

382.

$$\frac{u^6}{\left(u^3\right)^2}$$

383.

$$\frac{v^{20}}{\left(v^4\right)^5}$$

384.

$$\frac{m^{12}}{\left(m^8\right)^3}$$

385.

$$\frac{n^8}{\left(n^6\right)^4}$$

386.

$$\left(\frac{p^9}{p^3}\right)^5$$

387.

$$\left(\frac{q^8}{q^2}\right)^3$$

388.

$$\left(\frac{r^2}{r^6}\right)^3$$

389.

$$\left(\frac{m^4}{m^7}\right)^4$$

390.

$$\left(\frac{p}{r^{11}}\right)^2$$

391.

$$\left(\frac{a}{b^6}\right)^3$$

392.

$$\left(\frac{w^5}{x^3}\right)^8$$

393.

$$\left(\frac{y^4}{z^{10}}\right)^5$$

394.

$$\left(\frac{2j^3}{3k}\right)^4$$

395.

$$\left(\frac{3m^5}{5n}\right)^3$$

396.

$$\left(\frac{3c^2}{4d^6}\right)^3$$

397.

$$\left(\frac{5u^7}{2v^3}\right)^4$$

398.

$$\left(\frac{k^2k^8}{k^3}\right)^2$$

399.

$$\left(\frac{j^2j^5}{j^4}\right)^3$$

400.

$$\frac{\left(t^2\right)^5\left(t^4\right)^2}{\left(t^3\right)^7}$$

401.

$$\frac{\left(q^3\right)^6\left(q^2\right)^3}{\left(q^4\right)^8}$$

402.

$$\frac{\left(-2p^2\right)^4\left(3p^4\right)^2}{\left(-6p^3\right)^2}$$

403.

$$\frac{\left(-2k^3\right)^2\left(6k^2\right)^4}{\left(9k^4\right)^2}$$

404.

$$\frac{\left(-4m^3\right)^2\left(5m^4\right)^3}{\left(-10m^6\right)^3}$$

405.

$$\frac{\left(-10n^2\right)^3\left(4n^5\right)^2}{\left(2n^8\right)^2}$$

**Deilið einliðum**

Deilið einliðunum í eftirfarandi verkefnum.

406.

$$56b^8 \div 7b^2$$

407.

$$63v^{10} \div 9v^2$$

408.

$$-88y^{15} \div 8y^3$$

409.

$$-72u^{12} \div 12u^4$$

410.

$$\frac{45a^6b^8}{-15a^{10}b^2}$$

411.

$$\frac{54x^9y^3}{-18x^6y^{15}}$$

412.

$$\frac{15r^4s^9}{18r^9s^2}$$

413.

$$\frac{20m^8n^4}{30m^5n^9}$$

414.

$$\frac{18a^4b^8}{-27a^9b^5}$$

415.

$$\frac{45x^5y^9}{-60x^8y^6}$$

416.

$$\frac{64q^{11}r^9s^3}{48q^6r^8s^5}$$

417.

$$\frac{65a^{10}b^8c^5}{42a^7b^6c^8}$$

418.

$$\frac{(10m^5n^4)(5m^3n^6)}{25m^7n^5}$$

419.

$$\frac{(-18p^4q^7)(-6p^3q^8)}{-36p^{12}q^{10}}$$

420.

$$\frac{(6a^4b^3)(4ab^5)}{(12a^2b)(a^3b)}$$

421.

$$\frac{(4u^2v^5)(15u^3v)}{(12u^3v)(u^4v)}$$

**Blönduð verkefni**

**422.** ⓐ $24a^5+2a^5$ ⓑ $24a^5-2a^5$ ⓒ $24a^5\cdot 2a^5$ ⓓ $24a^5\div 2a^5$

**423.** ⓐ $15n^{10}+3n^{10}$ ⓑ $15n^{10}-3n^{10}$ ⓒ $15n^{10}\cdot 3n^{10}$ ⓓ $15n^{10}\div 3n^{10}$

**424.** ⓐ $p^4\cdot p^6$ ⓑ $\left(p^4\right)^6$

**425.** ⓐ $q^5\cdot q^3$ ⓑ $\left(q^5\right)^3$

**426.** ⓐ $\frac{y^3}{y}$ ⓑ $\frac{y}{y^3}$

**427.** ⓐ $\frac{z^6}{z^5}$ ⓑ $\frac{z^5}{z^6}$

428.

$$(8x^5)(9x)\div 6x^3$$

429.

$$(4y)(12y^7)\div 8y^2$$

430.

$$\frac{27a^7}{3a^3}+\frac{54a^9}{9a^5}$$

431.

$$\frac{32c^{11}}{4c^5}+\frac{42c^9}{6c^3}$$

432.

$$\frac{32y^5}{8y^2}-\frac{60y^{10}}{5y^7}$$

433.

$$\frac{48x^6}{6x^4}-\frac{35x^9}{7x^7}$$

434.

$$\frac{63r^6s^3}{9r^4s^2}-\frac{72r^2s^2}{6s}$$

435.

$$\frac{56y^4z^5}{7y^3z^3}-\frac{45y^2z^2}{5y}$$



### *Stærðfræði daglegs lífs*

**436.** **Minni** Eitt megabæti er um það bil $10^6$ bæti. Eitt gígabæti er um það bil $10^9$ bæti. Hve mörg megabæti eru í einu gígabæti?

**437.** **Minni** Eitt gígabæti er um það bil $10^9$ bæti. Eitt terabæti er um það bil $10^{12}$ bæti. Hve mörg gígabæti eru í einu terabæti?

### *Ritunarverkefni*

**438.** Jennifer telur að kvótinn $\frac{a^{24}}{a^6}$ einfaldist í $a^4$. Hvað er rangt við röksemd hennar?

**439.** Maurice einfaldar kvótann $\frac{d^7}{d}$ með því að skrifa $\frac{d^7}{d}=7$. Hvað er rangt við röksemd hans?

**440.** Þegar Drake einfaldaði $-3^0$ og $(-3)^0$ fékk hann sömu niðurstöðu. Útskýrið hvers vegna niðurstöðurnar verða ólíkar þegar forgangsröð reikniaðgerða er notuð rétt.

**441.** Robert telur að $x^0$ einfaldist í 0. Hvað mynduð þið segja til að sannfæra Robert um að hann hafi rangt fyrir sér?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Án aðstoðar | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| einfalda stæður með deilireglu veldisvísa. | | | |
| einfalda stæður með núllveldisvísum. | | | |
| einfalda stæður með veldisreglu deilingar. | | | |
| einfalda stæður með því að beita nokkrum reglum. | | | |
| deila einliðum. | | | |

ⓑ Hvernig metið þið tök ykkar á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt tök ykkar?

# 6.6 Deilið margliðum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Deilið margliðu með einlið
- Deilið margliðu með tvílið

**UNDIRBÚNINGUR 6.12**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leggið saman: $\frac{3}{d}+\frac{x}{d}$.

Ef þið réðuð ekki við dæmið skuluð þið rifja upp dæmi 1.77.

**UNDIRBÚNINGUR 6.13**

Einfaldið: $\frac{30\,x\,y^3}{5\,x\,y}$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 6.72.

**UNDIRBÚNINGUR 6.14**

Sameinið samkynja liði: $8\,a^2+12\,a+1+3\,a^2-5\,a+4$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.24.

## Deilið margliðu með einlið

Í síðasta hluta lærðuð þið að deila einlið með einlið. Nú haldið þið áfram að læra um margliður og næsta skref er að deila margliðu sem hefur tvo eða fleiri liði með einlið. Aðferðin sem við notum til að deila margliðu með einlið byggist á reglum um samlagningu brota. Við byrjum því á dæmi sem rifjar upp samlagningu brota.

Tafla 6.2

| | |
|---|---|
| Summan | $\frac{y}{5}+\frac{2}{5},$ |
| einfaldast í | $\frac{y+2}{5}.$ |

Nú snúum við þessu við og skiptum einu broti í aðskilin brot.

Við setjum regluna um samlagningu brota fram eins og þið lærðuð hana og síðan öfugt.

**SAMLAGNING BROTA**

Ef $a$, $b$, og $c$ eru tölur og $c \neq 0$, þá

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \text{ og } \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

6

Við notum formið vinstra megin til að leggja saman brot en formið hægra megin til að deila margliðu með einlið.

Tafla 6.3

| | |
|---|---|
| Til dæmis má | $\frac{y+2}{5}$ |
| skrifa sem | $\frac{y}{5}+\frac{2}{5}.$ |

Við notum þetta form samlagningar brota til að deila margliðum með einliðum.

**DEILING MARGLIÐU MEÐ EINLIÐ**

Til að deila margliðu með einlið skal deila hverjum lið margliðunnar með einliðnum.

**DÆMI 6.77**

Finnið kvótann: $\frac{7y^2+21}{7}.$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{7y^2+21}{7}$ |
| Deilið hverjum lið teljarans með nefnaranum. | $\frac{7y^2}{7}+\frac{21}{7}$ |
| Einfaldið hvert brot. | $y^2+3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.153**

Finnið kvótann: $\frac{8z^2+24}{4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.154**

Finnið kvótann: $\frac{18z^2-27}{9}$.

Munið að tákna má deilingu sem brot. Ef þið eigið að deila margliðu með einlið og stæðan er ekki á brotaformi, skrifið þá brot með margliðuna í teljara og einliðinn í nefnara.

**DÆMI 6.78**

Finnið kvótann: $\left(18x^3-36x^2\right)\div 6x$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\left(18x^3-36x^2\right)\div 6x$ |
| Endurritið sem brot. | $\frac{18x^3-36x^2}{6x}$ |
| Deilið hverjum lið teljarans með nefnaranum. | $\frac{18x^3}{6x}-\frac{36x^2}{6x}$ |
| Einfaldið. | $3x^2-6x$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.155**

Finnið kvótann: $\left(27b^3-33b^2\right)\div 3b$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.156**

Finnið kvótann: $\left(25y^3-55y^2\right)\div 5y$.

Þegar deilt er með neikvæðri stærð þarf að gæta sérstaklega að formerkjunum.

**DÆMI 6.79**

Finnið kvótann: $\frac{12d^2 - 16d}{-4}$.

## Lausn

| | $\frac{12d^2 - 16d}{-4}$ |
|---|---|
| Deilið hverjum lið teljarans með nefnaranum. | $\frac{12d^2}{-4} - \frac{16d}{-4}$ |
| Einfaldið. Munið að það að draga neikvæða stærð frá er það sama og að leggja jákvæða stærð við! | $-3d^2+4d$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.157**

Finnið kvótann: $\frac{25y^2 - 15y}{-5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.158**

Finnið kvótann: $\frac{42b^2 - 18b}{-6}$.

**DÆMI 6.80**

Finnið kvótann: $\frac{105y^5+75y^3}{5y^2}$.

## Lausn

| | $\frac{105y^5+75y^3}{5y^2}$ |
|---|---|
| Aðskiljið liðina. | $\frac{105y^5}{5y^2}+\frac{75y^3}{5y^2}$ |
| Einfaldið. | $21y^3+15y$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.159**

Finnið kvótann: $\frac{60d^7+24d^5}{4d^3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.160**

Finnið kvótann: $\frac{216\,p^7 - 48\,p^5}{6\,p^3}$.

**DÆMI 6.81**

Finnið kvótann: $\left(15\,x^3\,y - 35\,x\,y^2\right) \div \left(-5\,x\,y\right)$.

## Lausn

| | $\left(15\,x^3\,y - 35\,x\,y^2\right) \div \left(-5\,x\,y\right)$ |
|---|---|
| Endurritið sem brot. | $\frac{15\,x^3\,y - 35\,x\,y^2}{-5\,x\,y}$ |
| Aðskiljið liðina. | $\frac{15\,x^3\,y}{-5\,x\,y} - \frac{35\,x\,y^2}{-5\,x\,y}$ |
| Einfaldið. | $-3\,x^2 + 7\,y$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.161**

Finnið kvótann: $\left(32\,a^2\,b - 16\,a\,b^2\right) \div \left(-8\,a\,b\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.162**

Finnið kvótann: $\left(-48\,a^8\,b^4 - 36\,a^6\,b^5\right) \div \left(-6\,a^3\,b^3\right)$.

**DÆMI 6.82**

Finnið kvótann: $\frac{36\,x^3\,y^2 + 27\,x^2\,y^2 - 9\,x^2\,y^3}{9\,x^2\,y}$.

## Lausn

| | $\frac{36\,x^3\,y^2 + 27\,x^2\,y^2 - 9\,x^2\,y^3}{9\,x^2\,y}$ |
|---|---|
| Aðskiljið liðina. | $\frac{36\,x^3\,y^2}{9\,x^2\,y} + \frac{27\,x^2\,y^2}{9\,x^2\,y} - \frac{9\,x^2\,y^3}{9\,x^2\,y}$ |
| Einfaldið. | $4\,x\,y + 3\,y - y^2$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.163**

Finnið kvótann: $\frac{40x^3y^2+24x^2y^2-16x^2y^3}{8x^2y}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.164**

Finnið kvótann: $\frac{35a^4b^2+14a^4b^3-42a^2b^4}{7a^2b^2}$.

**DÆMI 6.83**

Finnið kvótann: $\frac{10x^2+5x-20}{5x}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{10x^2+5x-20}{5x}$ |
| Aðskiljið liðina. | $\frac{10x^2}{5x}+\frac{5x}{5x}-\frac{20}{5x}$ |
| Einfaldið. | $2x+1-\frac{4}{x}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.165**

Finnið kvótann: $\frac{18c^2+6c-9}{6c}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.166**

Finnið kvótann: $\frac{10d^2-5d-2}{5d}$.

## Deilið margliðu með tvílið

Til að deila margliðu með tvílið, fylgjum við mjög svipaðri aðferð og við langdeilingu talna. Skoðum því vandlega skrefin þegar þriggja stafa tölunni 875 er deilt með tveggja stafa tölunni 25.

| | |
|---|---|
| Við setjum upp langdeilinguna | $25\overline{)875}$ |
| Við deilum fyrstu tveimur tölustöfunum, 87, með 25. | $\begin{array}{r} 3 \\ 25\overline{)875} \end{array}$ |
| Við margföldum 3 með 25 og skrifum margfeldið undir 87. | $\begin{array}{r} 3 \\ 25\overline{)875} \\ 75 \end{array}$ |
| Nú drögum við 75 frá 87. | $\begin{array}{r} 3 \\ 25\overline{)875} \\ -75 \\ \hline 12 \end{array}$ |
| Síðan færum við niður þriðja tölustaf deilistofnsins, 5. | $\begin{array}{r} 3 \\ 25\overline{)875} \\ -75 \\ \hline 125 \end{array}$ |
| Endurtakið ferlið og deilið 125 með 25. | $\begin{array}{r} 35 \\ 25\overline{)875} \\ -75 \\ \hline 125 \\ -125 \\ \hline \end{array}$ |

Við athugum deilinguna með því að margfalda kvótann með deilinum.

Ef deilingin er rétt ætti margfeldið að vera jafnt deilistofninum.

$$35 \cdot 25$$
$$875 \checkmark$$

Nú deilum við þrílið með tvílið. Þegar þið lesið dæmið skuluð þið athuga hve lík skrefin eru töludæminu hér fyrir ofan.

6

**DÆMI 6.84**

Finnið kvótann: $\left(x^2+9x+20\right) \div \left(x+5\right)$.

## Lausn

| | $(x^2 + 9x + 20) \div (x + 5)$ |
|---|---|
| Setjið dæmið upp sem langdeilingu. | |
| Gangið úr skugga um að deilistofninn sé á staðalformi. | $x+5\overline{)\,x^2+9x+20}$ |
| Deilið $x^2$ með x. Gott getur verið að spyrja: „Með hverju þarf ég að margfalda x til að fá $x^2$?“ | |
| Skrifið svarið, x, í kvótann fyrir ofan x-liðinn. | $\begin{array}{r} x \\ x+5\overline{)\,x^2+9x+20} \end{array}$ |
| Margfaldið x með x + 5. Raðið samkynja liðum undir deilistofninn. | $\begin{array}{r} x \\ x+5\overline{)\,x^2+9x+20} \\ x^2+5x \end{array}$ |
| Dragið $x^2$ + 5x frá $x^2$ + 9x. | |

| | |
|---|---|
| Þér gæti þótt auðveldara að skipta um formerki og leggja síðan saman.<br>Færið síðan niður síðasta liðinn, 20. | $x$<br>$x+5 \overline{)\, x^2+9x+20}$<br>$-x^2+(-5x)$<br>$4x+20$ |
| Deilið 4x með x. Gott getur verið að spyrja: „Með hverju þarf ég að margfalda x til að fá 4x?“ | |
| Skrifið svarið, 4, í kvótann fyrir ofan fastaliðinn. | $x+4$<br>$x+5 \overline{)\, x^2+9x+20}$<br>$-x^2+(-5x)$<br>$4x+20$ |
| Margfaldið 4 með x + 5. | $x+4$<br>$x+5 \overline{)\, x^2+9x+20}$<br>$-x^2+(-5x)$<br>$4x+20$<br>$4x+20$ |
| Dragið 4x + 20 frá 4x + 20. | $x+4$<br>$x+5 \overline{)\, x^2+9x+20}$<br>$-x^2+(-5x)$<br>$4x+20$<br>$-4x+(-20)$<br>$0$ |
| Sannprófun: | |
| Margfaldið kvótann með deilinum. | |
| $(x+4)(x+5)$ | |
| Útkoman ætti að vera deilistofninn. | |
| $x^2+9x+20$✓ | |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.167**

Finnið kvótann: $\left(y^2+10y+21\right)\div\left(y+3\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.168**

Finnið kvótann: $\left(m^2+9m+20\right)\div\left(m+4\right)$.

Þegar mínusmerki er í deilinum þarf að gæta sérstaklega að formerkjum þegar við margföldum hlutakvótann og drögum síðan frá. Öruggara getur verið að sýna að við breytum formerkjunum og leggjum síðan saman.

**DÆMI 6.85**

Finnið kvótann: $\left(2x^2-5x-3\right)\div\left(x-3\right)$.

## Lausn

| | $(2x^2 - 5x - 3) \div (x - 3)$ |
|---|---|
| Setjið dæmið upp sem langdeilingu. | |
| Gangið úr skugga um að deilistofninn sé á staðalformi. | $x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3}$ |
| Deilið $2x^2$ með x. Skrifið svarið, 2x, í kvótann fyrir ofan x-liðinn. | $\begin{array}{r} 2x \\ x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3} \end{array}$ |
| Margfaldið 2x með x − 3. Raðið samkynja liðum undir deilistofninn. | $\begin{array}{r} 2x \\ x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3} \\ \underline{2x^2 - 6x} \end{array}$ |
| Dragið $2x^2 - 6x$ frá $2x^2 - 5x$. Breytið formerkjunum og leggið síðan saman. Færið því næst síðasta liðinn niður. | $\begin{array}{r} 2x \\ x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3} \\ \underline{-2x^2 + 6x} \\ x - 3 \end{array}$ |
| Deilið x með x. Skrifið svarið, 1, í kvótann fyrir ofan fastaliðinn. | $\begin{array}{r} 2x + 1 \\ x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3} \\ \underline{-2x^2 - (-6x)} \\ x - 3 \end{array}$ |
| Margfaldið 1 með x − 3. | $\begin{array}{r} 2x + 1 \\ x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3} \\ \underline{-2x^2 + 6x} \\ x - 3 \\ \underline{x - 3} \end{array}$ |
| Dragið x − 3 frá x − 3 með því að breyta formerkjunum og leggja saman. | $\begin{array}{r} 2x + 1 \\ x - 3\overline{)2x^2 - 5x - 3} \\ \underline{-2x^2 + 6x} \\ x - 3 \\ \underline{-x + 3} \\ 0 \end{array}$ |
| Til að athuga svarið skal margfalda (x − 3)(2x + 1). | |
| Útkoman ætti að vera $2x^2 - 5x - 3$. | |

**REYNIÐ SJÁLF 6.169**

Finnið kvótann: $\left(2x^2 - 3x - 20\right) \div \left(x - 4\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.170**

Finnið kvótann: $\left(3x^2 - 16x - 12\right) \div \left(x - 6\right)$.

Þegar við deildum 875 með 25 varð enginn afgangur. Stundum verður þó afgangur við deilingu talna og hið sama gildir um deilingu margliða. Í dæmi 6.86 verður afgangur. Við skrifum afganginn sem brot með deilinn í nefnara.

**DÆMI 6.86**

Finnið kvótann: $\left(x^3-x^2+x+4\right)\div\left(x+1\right)$.

## Lausn

| | $(x^3-x^2+x+4)\div(x+1)$ |
|---|---|
| Setjið dæmið upp sem langdeilingu. | |
| Gangið úr skugga um að deilistofninn sé á staðalformi. | $x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4}$ |
| Deilið $x^3$ með x. Skrifið svarið, $x^2$, í kvótann fyrir ofan $x^2$-liðinn. Margfaldið $x^2$ með x + 1. Raðið samkynja liðum undir deilistofninn. | $\begin{array}{r} x^2 \\ x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4} \\ \underline{x^3+x^2} \end{array}$ |
| Dragið $x^3 + x^2$ frá $x^3 - x^2$ með því að breyta formerkjunum og leggja saman. Færið síðan næsta lið niður. | $\begin{array}{r} x^2 \\ x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4} \\ \underline{-x^3+(-x^2)} \\ -2x^2+x \end{array}$ |
| Deilið $-2x^2$ með x. Skrifið svarið, −2x, í kvótann fyrir ofan x-liðinn. Margfaldið −2x með x + 1. Raðið samkynja liðum undir deilistofninn. | $\begin{array}{r} x^2-2x \\ x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4} \\ \underline{-x^3+(-x^2)} \\ -2x^2+x \\ \underline{-2x^2-2x} \end{array}$ |
| Dragið $-2x^2 - 2x$ frá $-2x^2 + x$ með því að breyta formerkjunum og leggja saman. Færið síðan síðasta liðinn niður. | $\begin{array}{r} x^2-2x \\ x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4} \\ \underline{-x^3+(-x^2)} \\ -2x^2+x \\ \underline{+2x^2+2x} \\ 3x+4 \end{array}$ |
| Deilið 3x með x. Skrifið svarið, 3, í kvótann fyrir ofan fastaliðinn. Margfaldið 3 með x + 1. Raðið samkynja liðum undir deilistofninn. | $\begin{array}{r} x^2-2x+3 \\ x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4} \\ \underline{-x^3+(-x^2)} \\ -2x^2+x \\ \underline{+2x^2+2x} \\ 3x+4 \\ \underline{3x+3} \end{array}$ |
| Dragið 3x + 3 frá 3x + 4 með því að breyta formerkjunum og leggja saman. Skrifið afganginn sem brot með deilinn í nefnara. | $\begin{array}{r} x^2-2x+3+\frac{1}{x+1} \\ x+1\overline{)\,x^3-x^2+x+4} \\ \underline{-x^3+(-x^2)} \\ -2x^2+x \\ \underline{+2x^2+2x} \\ 3x+4 \\ \underline{-3x+(-3)} \\ 1 \end{array}$ |

Til að athuga svarið skal margfalda

$$(x+1)\left(x^2-2x+3+\frac{1}{x+1}\right).$$

Útkoman ætti að vera $x^3-x^2+x+4$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.171**

Finnið kvótann: $\left(x^3+5x^2+8x+6\right)\div(x+2)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.172**

Finnið kvótann: $\left(2x^3+8x^2+x-8\right)\div(x+1)$.

Skoðið aftur deilistofnana í dæmi 6.84, dæmi 6.85 og dæmi 6.86. Liðirnir voru skrifaðir í lækkandi stigaröð og ekkert stig vantaði. Deilistofninn í dæmi 6.87 verður $x^4-x^2+5x-2$. Þar vantar $x^3$-lið og við bætum $0x^3$ inn sem staðgengli.

**DÆMI 6.87**

Finnið kvótann: $\left(x^4-x^2+5x-2\right)\div(x+2)$.

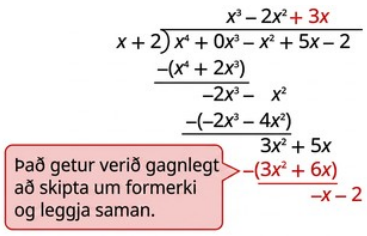
## Lausn

Athugið að enginn $x^3$-liður er í deilistofninum. Við bætum $0x^3$ inn sem staðgengli.

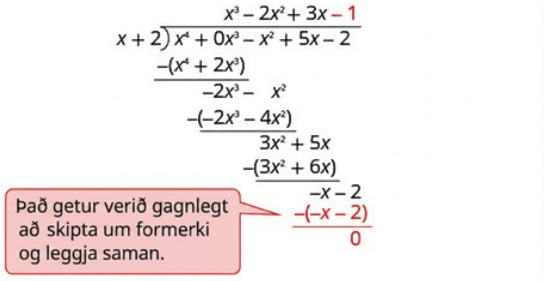
| | $(x^4-x^2+5x-2)\div(x+2)$ |
|---|---|
| Setjið dæmið upp sem langdeilingu. Gangið úr skugga um að deilistofninn sé á staðalformi og að staðgenglar séu fyrir liði sem vantar. | $x+2\overline{)\,x^4-0x^3-x^2+5x-2}$ |
| Deilið $x^4$ með x. Skrifið svarið, $x^3$, í kvótann fyrir ofan $x^3$-liðinn. Margfaldið $x^3$ með x + 2. Raðið samkynja liðum saman. Dragið frá og færið næsta lið niður. | $\begin{array}{r} x^3 \\ x+2\overline{)\,x^4+0x^3-x^2+5x-2} \\ -(x^4+2x^3) \\ \hline -2x^3-x^2 \end{array}$ Það getur verið gagnlegt að breyta formerkjunum og leggja saman. |
| Deilið $-2x^3$ með x. Skrifið svarið, $-2$ $x^2$, í kvótann fyrir ofan $x^2$-liðinn. Margfaldið $-2$ $x^2$ með x + 1. Raðið samkynja liðum saman. Dragið frá og færið næsta lið niður. | $\begin{array}{r} x^3-2x^2 \\ x+2\overline{)\,x^4+0x^3-x^2+5x-2} \\ -(x^4+2x^3) \\ \hline -2x^3-x^2 \\ -(-2x^3-4x^2) \\ \hline 3x^2+5x \end{array}$ Það getur verið gagnlegt að skipta um formerki og leggja saman. |

6

Deilið $3x^2$ með x. Skrifið svarið, 3x, í kvótann fyrir ofan x-liðinn. Margfaldið 3x með x + 1. Raðið samkynja liðum saman. Dragið frá og færið næsta lið niður.




Deilið −x með x. Skrifið svarið, −1, í kvótann fyrir ofan fastaliðinn. Margfaldið −1 með x + 1. Raðið samkynja liðum saman. Breytið formerkjunum og leggið saman.




Til að athuga svarið skal margfalda
$(x+2)(x^3-2x^2+3x-1)$.

Útkoman ætti að vera $x^4-x^2+5x-2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.173**

Finnið kvótann: $(x^3+3x+14)\div(x+2)$.

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.174**

Finnið kvótann: $(x^4-3x^3-1000)\div(x+5)$.

Í dæmi 6.88 deilum við með $2a-3$. Þegar við deilum þurfum við að huga bæði að föstunum og breytunum.

**DÆMI 6.88**

Finnið kvótann: $(8a^3+27)\div(2a+3)$.

## Lausn

Að þessu sinni sýnum við alla deilinguna í einu skrefi. Við þurfum að bæta við tveimur staðgenglum til að geta deilt.

$(8a^3 + 27) \div (2a + 3)$

$$
\begin{array}{r}
4a^2 - 6a + 9 \\
2a+3\,\overline{)\,8a^3 + 0a^2 + 0a + 27} \\
\underline{-(8a^3 + 12a^2)} \qquad \leftarrow 4a^2(2a+3) \\
-12a^2 + 0a \\
\underline{-(-12a^2 - 18a)} \qquad \leftarrow 6a(2a+3) \\
18a + 27 \\
\underline{-(18a + 27)} \qquad \leftarrow 9(2a+3) \\
0
\end{array}
$$

Til að athuga svarið skal margfalda $(2a+3)(4a^2-6a+9)$.

Útkoman ætti að vera $8a^3+27$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.175**

Finnið kvótann: $(x^3-64)\div(x-4)$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.176**

Finnið kvótann: $(125x^3-8)\div(5x-2)$.

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið meiri kennslu og æfingar í deilingu margliða:

- Deilið margliðu með einlið
- Deiling margliðu með einlið 2
- Deiling margliðu með tvílið

## Verkefni úr hluta 6.6

***Æfingin skapar meistarann***

Deilið hverri margliðu með einliðnum í verkefnunum hér á eftir.

442.

$$\frac{45y+36}{9}$$

443.

$$\frac{30b+75}{5}$$

444.

$$\frac{8d^2-4d}{2}$$

445.

$$\frac{42x^2 - 14x}{7}$$

446.

$$\left(16y^2 - 20y\right) \div 4y$$

447.

$$\left(55w^2 - 10w\right) \div 5w$$

448.

$$\left(9n^4 + 6n^3\right) \div 3n$$

449.

$$\left(8x^3 + 6x^2\right) \div 2x$$

450.

$$\frac{18y^2 - 12y}{-6}$$

451.

$$\frac{20b^2 - 12b}{-4}$$

452.

$$\frac{35a^4 + 65a^2}{-5}$$

453.

$$\frac{51m^4 + 72m^3}{-3}$$

454.

$$\frac{310y^4 - 200y^3}{5y^2}$$

455.

$$\frac{412z^8 - 48z^5}{4z^3}$$

456.

$$\frac{46x^3+38x^2}{2x^2}$$

457.

$$\frac{51y^4+42y^2}{3y^2}$$

458.

$$\left(24p^2-33p\right)\div\left(-3p\right)$$

459.

$$\left(35x^4-21x\right)\div\left(-7x\right)$$

460.

$$\left(63m^4-42m^3\right)\div\left(-7m^2\right)$$

461.

$$\left(48y^4-24y^3\right)\div\left(-8y^2\right)$$

462.

$$\left(63a^2b^3+72ab^4\right)\div\left(9ab\right)$$

463.

$$\left(45x^3y^4+60xy^2\right)\div\left(5xy\right)$$

464.

$$\frac{52p^5q^4+36p^4q^3-64p^3q^2}{4p^2q}$$

465.

$$\frac{49c^2d^2-70c^3d^3-35c^2d^4}{7cd^2}$$

466.

$$\frac{66x^3y^2-110x^2y^3-44x^4y^3}{11x^2y^2}$$

467.

$$\frac{72r^5s^2+132r^4s^3-96r^3s^5}{12r^2s^2}$$

468.

$$\frac{4w^2+2w-5}{2w}$$

469.

$$\frac{12q^2+3q-1}{3q}$$

470.

$$\frac{10x^2+5x-4}{-5x}$$

471.

$$\frac{20y^2+12y-1}{-4y}$$

472.

$$\frac{36p^3+18p^2-12p}{6p^2}$$

473.

$$\frac{63a^3-108a^2+99a}{9a^2}$$



**Deilið margliðu með tvílið**

Deilið hverri margliðu með tvíliðnum í verkefnunum hér á eftir.

474.

$$\left(y^2+7y+12\right)\div\left(y+3\right)$$

475.

$$\left(d^2+8d+12\right)\div\left(d+2\right)$$

476.

$$\left(x^2-3x-10\right)\div\left(x+2\right)$$

477.

$$\left(a^2-2a-35\right)\div\left(a+5\right)$$

478.

$$\left(t^2-12t+36\right)\div\left(t-6\right)$$

479.

$$\left(x^2-14x+49\right)\div\left(x-7\right)$$

480.

$$\left(6m^2-19m-20\right)\div\left(m-4\right)$$

481.

$$\left(4x^2-17x-15\right)\div\left(x-5\right)$$

482.

$$\left(q^2+2q+20\right)\div\left(q+6\right)$$

483.

$$\left(p^2+11p+16\right)\div\left(p+8\right)$$

484.

$$\left(y^2-3y-15\right)\div\left(y-8\right)$$

485.

$$\left(x^2+2x-30\right)\div\left(x-5\right)$$

486.

$$\left(3b^3+b^2+2\right)\div\left(b+1\right)$$

487.

$$\left(2n^3-10n+24\right)\div\left(n+3\right)$$

488.

$$\left(2y^3-6y-36\right)\div\left(y-3\right)$$

489.

$$\left(7q^3-5q-2\right)\div\left(q-1\right)$$

490.

$$\left(z^3+1\right)\div\left(z+1\right)$$

491.

$$\left(m^3+1000\right)\div\left(m+10\right)$$

492.

$$\left(a^3-125\right)\div\left(a-5\right)$$

493.

$$\left(x^3-216\right)\div\left(x-6\right)$$

494.

$$\left(64x^3-27\right)\div\left(4x-3\right)$$

495.

$$\left(125y^3-64\right)\div\left(5y-4\right)$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**496.** **Meðalkostnaður** Pictures Plus framleiðir stafræn myndaalbúm. Meðalkostnaður fyrirtækisins, í dölum, við að framleiða $x$ albúm er gefinn með stæðunni $\frac{7x+500}{x}$.

1. ⓐ Finnið kvótann með því að deila teljaranum með nefnaranum.
2. ⓑ Hver verður meðalkostnaðurinn, í dölum, við að framleiða 20 albúm?

**497.** **Handabönd** Á starfsmannafundi tekur hver starfsmaður í höndina á öllum hinum. Fjöldi handabanda er gefinn með stæðunni $\frac{n^2-n}{2}$, þar sem $n$ táknar fjölda starfsmanna. Hve mörg handabönd verða tekin ef 10 starfsmenn eru á fundinum?

6

### *Ritunarverkefni*

**498.** James deilir $48y+6$ með 6 á þennan hátt: $\frac{48y+6}{6}=48y$. Hvað er rangt við röksemd hans?

**499.** Deilið $\frac{10x^2+x-12}{2x}$ og útskýrið með orðum hvernig hver liður kvótans fæst.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| deilt margliðu með einliðu. | | | |
| deilt margliðu með tvíliðu. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann, hvað ætlið þið að gera til að ná öruggum tökum á öllum markmiðunum?

# 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis
- Einfaldið stæður með heiltöluveldisvísum
- Breytið úr tugabrotsrithætti í staðalform talna
- Breytið staðalformi talna í tugabrotsrithátt
- Margfaldið og deilið á staðalformi talna

**UNDIRBÚNINGUR 6.15**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Hvert er sætisgildi 6 í tölunni 64.891? Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.1.

**UNDIRBÚNINGUR 6.16**

Lesið tugabrotið: $0{,}0012$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.91.

**UNDIRBÚNINGUR 6.17**

Dragið frá: $5-(-3)$.
Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 1.42.

## Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis

Við sáum að kvótareglan fyrir veldi, sem kynnt var fyrr í kaflanum, hefur tvö form eftir því hvort stærri veldisvísirinn er í teljara eða nefnara.

**KVÓTAREGLA FYRIR VELDI**

Ef $a$ er rauntala, $a\neq 0$, og $m$ og $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, m>n \quad \text{og} \quad \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}, n>m$$

Hvað gerist ef við drögum veldisvísana einfaldlega frá, sama hvor er stærri?

Skoðum $\frac{x^2}{x^5}$.

Við drögum veldisvísi nefnarans frá veldisvísi teljarans.

$$\frac{x^2}{x^5}$$
$$x^{2-5}$$
$$x^{-3}$$

Við getum einnig einfaldað $\frac{x^2}{x^5}$ með því að stytta sameiginlega þætti:

$$\frac{x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}$$
$$\frac{1}{x^3}$$

Þetta sýnir að $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ og leiðir okkur að skilgreiningu neikvæðs veldisvísis.

---

**NEIKVÆÐUR VELDISVÍSIR**

Ef $n$ er heiltala og $a \neq 0$, þá er $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Neikvæði veldisvísirinn segir okkur að við getum endurritað stæðuna með því að taka margföldunarandhverfu veldisstofnsins og breyta síðan formerki veldisvísisins.

Stæða með neikvæðum veldisvísum telst ekki vera á einfaldasta formi. Við notum skilgreiningu neikvæðs veldisvísis og aðrar veldisreglur til að skrifa stæðuna með eingöngu jákvæðum veldisvísum.

6

Ef við fáum til dæmis stæðuna $x^{-3}$ eftir einföldun tökum við eitt skref til viðbótar og skrifum $\frac{1}{x^3}$. Svarið telst vera á einfaldasta formi þegar það hefur eingöngu jákvæða veldisvísa.

---

**DÆMI 6.89**

Einfaldið: ⓐ $4^{-2}$ ⓑ $10^{-3}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $4^{-2}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{4^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{16}$ |
| ⓑ | $10^{-3}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{10^3}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{1000}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.177**

Einfaldið: ⓐ $2^{-3}$ ⓑ $10^{-7}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.178**

Einfaldið: ⓐ $3^{-2}$ ⓑ $10^{-4}$.

Í dæmi 6.89 hófum við heiltölu í neikvætt veldi. Hvað gerist þegar brot er hafið í neikvætt veldi? Við byrjum á að skoða brot með einum í teljara og heiltölu í neikvæðu veldi í nefnara.

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{a^{-n}}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{\frac{1}{a^n}}$ |
| Einfaldið flókna brotið. | $1\cdot\frac{a^n}{1}$ |
| Margfaldið. | $a^n$ |

Þetta leiðir til reglunnar um neikvæða veldisvísa.

**REGLAN UM NEIKVÆÐA VELDISVÍSA**

Ef $n$ er heiltala og $a\neq 0$, þá er $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$.

**DÆMI 6.90**

Einfaldið: ⓐ $\frac{1}{y^{-4}}$ ⓑ $\frac{1}{3^{-2}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $\frac{1}{y^{-4}}$ |
| Notið regluna um neikvæðan veldisvísi, $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$. | $y^4$ |
| ⓑ | $\frac{1}{3^{-2}}$ |
| Notið regluna um neikvæðan veldisvísi, $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$. | $3^2$ |
| Einfaldið. | $9$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.179**

Einfaldið: ⓐ $\frac{1}{p^{-8}}$ ⓑ $\frac{1}{4^{-3}}$.

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.180**

Einfaldið: ⓐ $\frac{1}{q^{-7}}$ ⓑ $\frac{1}{2^{-4}}$.

Gerum nú ráð fyrir að brot sé hafið í neikvætt veldi. Notum skilgreininguna á neikvæðum veldisvísum til að leiða út nýja reglu.

Tafla 6.4

| | |
|---|---|
| | $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2}}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{1}{\frac{9}{16}}$ |
| Einfaldið flókna brotið. | $\frac{16}{9}$ |
| En við vitum að $\frac{16}{9}$ er $\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$. | |
| Þetta sýnir að: | $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}$ |

Við byrjuðum á brotinu í neikvæðu veldi. Til að fá lokaniðurstöðuna tókum við margföldunarandhverfu veldisstofnsins, sem er brotið, og breyttum formerki veldisvísisins.

Þetta leiðir til reglunnar um kvóta í neikvæðu veldi.



**REGLAN UM KVÓTA Í NEIKVÆÐU VELDI**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur, $a\neq 0$, $b\neq 0$, og $n$ er heiltala, þá er $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

**DÆMI 6.91**

Einfaldið: ⓐ $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$ ⓑ $\left(-\frac{2x}{y}\right)^{-3}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$ |
| Notið regluna um kvóta í neikvæðu veldi, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$. | |
| Takið margföldunarandhverfu brotsins og breytið formerki veldisvísisins. | $\left(\frac{7}{5}\right)^{2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{49}{25}$ |
| ⓑ | $\left(-\frac{2x}{y}\right)^{-3}$ |
| Notið regluna um kvóta í neikvæðu veldi, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$. | |
| Takið margföldunarandhverfu brotsins og breytið formerki veldisvísisins. | $\left(-\frac{y}{2x}\right)^{3}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{y^3}{8x^3}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.181**

Einfaldið: ⓐ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ ⓑ $\left(-\frac{6m}{n}\right)^{-2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.182**

Einfaldið: ⓐ $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ ⓑ $\left(-\frac{a}{2b}\right)^{-4}$.

Þegar við einföldum stæðu með veldisvísum þurfum við að gæta þess að finna réttan veldisstofn.

**DÆMI 6.92**

Einfaldið: ⓐ $(-3)^{-2}$ ⓑ $-3^{-2}$ ⓒ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ⓓ $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Hér á veldisvísirinn við veldisstofninn $-3$. | $(-3)^{-2}$ |
| Takið margföldunarandhverfu veldisstofnsins og breytið formerki veldisvísisins. | $\frac{1}{(-3)^{-2}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{9}$ |
| ⓑ Stæðan $-3^{-2}$ merkir „finnið samlagningarandhverfu $3^{-2}$“. Hér á veldisvísirinn við veldisstofninn $\left(-\frac{1}{3}\right)$. | $-3^{-2}$ |
| Endurritið sem margfeldi með $-1$. | $-1 \cdot 3^{-2}$ |
| Takið margföldunarandhverfu veldisstofnsins og breytið formerki veldisvísisins. | $-1 \cdot \frac{1}{3^2}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{1}{9}$ |
| ⓒ Hér á veldisvísirinn við veldisstofninn $\left(-\frac{1}{3}\right)$. | $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$ |
| Takið margföldunarandhverfu veldisstofnsins og breytið formerki veldisvísisins. | $\left(-\frac{3}{1}\right)^{2}$ |
| Einfaldið. | $9$ |
| ⓓ Stæðan $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ merkir „finnið samlagningarandhverfu $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$“. Hér á veldisvísirinn við veldisstofninn $\left(\frac{1}{3}\right)$. | |
| Endurritið sem margfeldi með $-1$. | $-1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ |
| Takið margföldunarandhverfu veldisstofnsins og breytið formerki veldisvísisins. | $-1 \cdot \left(\frac{3}{1}\right)^{2}$ |
| Einfaldið. | $-9$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.183**

Einfaldið: ⓐ $(-5)^{-2}$ ⓑ $-5^{-2}$ ⓒ $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ ⓓ $-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.184**

Einfaldið: ⓐ $(-7)^{-2}$ ⓑ $-7^{-2}$, ⓒ $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2}$ ⓓ $-\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$.

Við þurfum að fylgja forgangsröð reikniaðgerða vandlega. Liðir ⓐ og ⓑ í næsta dæmi líkjast hvor öðrum en niðurstöðurnar eru ólíkar.

**DÆMI 6.93**

Einfaldið: ⓐ $4 \cdot 2^{-1}$ ⓑ $(4 \cdot 2)^{-1}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Reiknið veldið á undan margfölduninni. | $4 \cdot 2^{-1}$ |
| Notið $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $4 \cdot \frac{1}{2^1}$ |
| Einfaldið. | $2$ |
| ⓑ | $(4 \cdot 2)^{-1}$ |
| Einfaldið fyrst innan svigans. | $(8)^{-1}$ |
| Notið $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{8^1}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{8}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.185**

Einfaldið: ⓐ $6 \cdot 3^{-1}$ ⓑ $(6 \cdot 3)^{-1}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.186**

Einfaldið: ⓐ $8 \cdot 2^{-2}$ ⓑ $(8 \cdot 2)^{-2}$.

Þegar breyta er hafin í neikvætt veldi notum við skilgreininguna á sama hátt og fyrir tölur. Við gerum ráð fyrir að allar breytur séu aðrar en núll.

**DÆMI 6.94**

Einfaldið: ⓐ $x^{-6}$ ⓑ $\left(u^4\right)^{-3}$.

## Lausn

**1.** ⓐ

| | |
|---|---|
| | $x^{-6}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{x^6}$ |

**2.** ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\left(u^4\right)^{-3}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{\left(u^4\right)^3}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{u^{12}}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.187**

Einfaldið: ⓐ $y^{-7}$ ⓑ $\left(z^3\right)^{-5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.188**

Einfaldið: ⓐ $p^{-9}$ ⓑ $\left(q^4\right)^{-6}$.

Þegar bæði margfeldi og veldisvísir koma fyrir þarf að gæta þess að veldisvísirinn gildi um rétta stærð. Samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða einföldum við stæður innan sviga áður en við reiknum veldin. Skoðum þetta í næsta dæmi.

**DÆMI 6.95**

Einfaldið: ⓐ $5y^{-1}$ ⓑ $(5y)^{-1}$ ⓒ $(-5y)^{-1}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $5\,y^{-1}$ |
| Athugið að veldisvísirinn gildir aðeins um veldisstofninn y. Takið margföldunarandhverfu y og breytið formerki veldisvísisins. | $5 \cdot \frac{1}{y^{1}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{5}{y}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $(5\,y)^{-1}$ |
| Hér valda svigarnir því að veldisvísirinn gildir um veldisstofninn 5y. Takið margföldunarandhverfu 5y og breytið formerki veldisvísisins. | $\frac{1}{(5\,y)^{1}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{5\,y}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $(-5\,y)^{-1}$ |
| Veldisstofninn hér er −5y. Takið margföldunarandhverfu −5y og breytið formerki veldisvísisins. | $\frac{1}{(-5\,y)^{1}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{-5\,y}$ |
| Notið $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$. | $-\frac{1}{5\,y}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.189**

Einfaldið: ⓐ $8\,p^{-1}$ ⓑ $(8\,p)^{-1}$ ⓒ $(-8\,p)^{-1}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.190**

Einfaldið: ⓐ $11q^{-1}$ ⓑ $(11q)^{-1}-(11q)^{-1}$ ⓒ $-\frac{1}{11q}$

Þegar neikvæðir veldisvísar eru leyfðir þarf kvótareglan aðeins eitt form $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, fyrir $a\neq 0$.

Þegar veldisvísir nefnarans er stærri en veldisvísir teljarans verður veldisvísir kvótans neikvæður.

## Einfaldið stæður með heiltöluveldisvísum

Allar veldisreglurnar sem við leiddum út fyrr í kaflanum, fyrir veldisvísa sem eru núll eða jákvæðar heiltölur, gilda einnig um heiltöluveldisvísa. Við setjum þær aftur fram hér til að hafa þær allar á einum stað.

**SAMANTEKT Á VELDISREGLUM**

Ef $a$ og $b$ eru rauntölur og $m$ og $n$ eru heiltölur, þá

| | | | |
|---|---|---|---|
| margfeldisregla | $a^m\cdot a^n$ | $=$ | $a^{m+n}$ |
| reglan um veldi af veldi | $(a^m)^n$ | $=$ | $a^{m\cdot n}$ |
| reglan um margfeldi í veldi | $(ab)^m$ | $=$ | $a^m b^m$ |
| kvótaregla | $\frac{a^m}{a^n}$ | $=$ | $a^{m-n}, a\neq 0$ |
| núllveldisregla | $a^0$ | $=$ | $1, a\neq 0$ |
| reglan um kvóta í veldi | $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ | $=$ | $\frac{a^m}{b^m},\quad b\neq 0$ |
| Reglur um neikvæða veldisvísa | $a^{-n}$ | $=$ | $\frac{1}{a^n}$ og $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$ |
| reglan um kvóta í neikvæðu veldi | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ | $=$ | $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ |

**DÆMI 6.96**

Einfaldið: ⓐ $x^{-4}\cdot x^6$ ⓑ $y^{-6}\cdot y^4$ ⓒ $z^{-5}\cdot z^{-3}$.

### Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $x^{-4}\cdot x^6$ |
| Notið margfeldisregluna, $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$. | $x^{-4+6}$ |
| Einfaldið. | $x^2$ |

ⓑ

| | $y^{-6} \cdot y^{4}$ |
|---|---|
| Veldisstofnarnir eru eins og því skal leggja veldisvísana saman. | $y^{-6+4}$ |
| Einfaldið. | $y^{-2}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$. | $\frac{1}{y^{2}}$ |

ⓒ

| | $z^{-5} \cdot z^{-3}$ |
|---|---|
| Leggið veldisvísana saman þar sem veldisstofnarnir eru eins. | $z^{-5-3}$ |
| Einfaldið. | $z^{-8}$ |
| Takið margföldunarandhverfuna og breytið formerki veldisvísisins, samkvæmt skilgreiningu neikvæðs veldisvísis. | $\frac{1}{z^{8}}$ |

6

**REYNIÐ SJÁLF 6.191**

Einfaldið: ⓐ $x^{-3} \cdot x^{7}$ ⓑ $y^{-7} \cdot y^{2}$ ⓒ $z^{-4} \cdot z^{-5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.192**

Einfaldið: ⓐ $a^{-1} \cdot a^{6}$ ⓑ $b^{-8} \cdot b^{4}$ ⓒ $c^{-8} \cdot c^{-7}$.

Í næstu tveimur dæmum byrjum við á að nota víxlregluna til að raða sömu breytunum saman. Þá er auðveldara að finna veldisstofna sem eru eins áður en við notum margfeldisregluna.

**DÆMI 6.97**

Einfaldið: $\left(m^{4}n^{-3}\right)\left(m^{-5}n^{-2}\right)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\left(m^4 n^{-3}\right)\left(m^{-5} n^{-2}\right)$ |
| Notið víxlregluna til að raða sömu veldisstofnunum saman. | $m^4 m^{-5} \cdot n^{-2} n^{-3}$ |
| Leggið saman veldisvísa hvers veldisstofns. | $m^{-1} \cdot n^{-5}$ |
| Takið margföldunarandhverfur og breytið formerkjum veldisvísanna. | $\frac{1}{m^1} \cdot \frac{1}{n^5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{m n^5}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.193**

Einfaldið: $\left(p^6 q^{-2}\right)\left(p^{-9} q^{-1}\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.194**

Einfaldið: $\left(r^5 s^{-3}\right)\left(r^{-7} s^{-5}\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.195**

Einfaldið: $\left(-6 c^{-6} d^4\right)\left(-5 c^{-2} d^{-1}\right)$.

Í næstu tveimur dæmum notum við regluna um veldi af veldi og regluna um margfeldi í veldi.

**DÆMI 6.98**

Einfaldið: $\left(6 k^3\right)^{-2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\left(6 k^3\right)^{-2}$ |
| Notið regluna um margfeldi í veldi, $(a b)^m = a^m b^m$. | $(6)^{-2}\left(k^3\right)^{-2}$ |
| Notið regluna um veldi af veldi, $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$. | $6^{-2} k^{-6}$ |
| Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{k^6}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{36 k^6}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.196**

Einfaldið: $\left(-4x^4\right)^{-2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.197**

Einfaldið: $\left(2b^3\right)^{-4}$.

**DÆMI 6.99**

Einfaldið: $\left(5x^{-3}\right)^2$.

## Lausn

| | $\left(5x^{-3}\right)^2$ |
|---|---|
| Notið regluna um margfeldi í veldi, $(ab)^m = a^m b^m$. | $5^2\left(x^{-3}\right)^2$ |
| Einfaldið 52 og margfaldið veldisvísa x samkvæmt reglunni um veldi af veldi, $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$. | $25 \cdot x^{-6}$ |
| Endurritið x−6 samkvæmt skilgreiningu neikvæðs veldisvísis, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. | $25 \cdot \frac{1}{x^6}$ |
| Einfaldið. | $\frac{25}{x^6}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.198**

Einfaldið: $\left(8a^{-4}\right)^2$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.199**

Einfaldið: $\left(2c^{-4}\right)^3$.

Til að einfalda brot notum við kvótaregluna og drögum veldisvísana frá.

**DÆMI 6.100**

Einfaldið: $\frac{r^5}{r^{-4}}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{r^5}{r^{-4}}$ |
| Notið kvótaregluna, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$. | $r^{5-(-4)}$ |
| Einfaldið. | $r^9$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.200**

Einfaldið: $\frac{x^8}{x^{-3}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.201**

Einfaldið: $\frac{y^8}{y^{-6}}$.

## Breytið úr tugabrotsrithætti í staðalform talna

Munið þið eftir sætisgildum í tugabrotum og í tölum sem eru núll eða jákvæðar heiltölur? Talnakerfið okkar byggist á veldum af 10. Við notum tugi, hundruð, þúsundir og svo framvegis. Tugabrotin byggjast einnig á veldum af tíu: tíunduhlutum, hundraðshlutum, þúsundustu hlutum og svo framvegis. Skoðið tölurnar 4.000 og 0,004. Við vitum að 4.000 merkir $4 \times 1.000$ og 0,004 merkir $4 \times \frac{1}{1.000}$.

Ef við skrifum 1000 sem tíuveldi á veldisformi getum við endurritað tölurnar þannig:

| | |
|---|---|
| 4.000 | 0,004 |
| $4 \times 1.000$ | $4 \times \frac{1}{1.000}$ |
| $4 \times 10^3$ | $4 \times \frac{1}{10^3}$ |
| | $4 \times 10^{-3}$ |

Tala er sögð vera á staðalformi þegar hún er skrifuð sem margfeldi tveggja talna. Fyrri þátturinn er þá tala sem er stærri en eða jöfn einum en minni en 10 og seinni þátturinn er veldi af 10 á veldisformi. Staðalform talna.

**STAÐALFORM TALNA**

Tala er á staðalformi þegar hún er á forminu

$$a \times 10^n \text{ þar sem } 1 \le |a| < 10 \text{ og } n \text{ er heiltala}$$

Á staðalformi talna er venja að nota × sem margföldunarmerki þótt við forðumst merkið annars staðar í algebru.

Ef við skoðum hvernig komman færist sjáum við einfalda aðferð til að breyta úr tugabrotsrithætti í staðalform talna.

| | |
|---|---|
| $4000, = 4 \times 10^3$ | $0{,}004 = 4 \times 10^{-3}$ |
| $4000, = 4 \times 10^3$ | $0{,}004 = 4 \times 10^{-3}$ |
| Komman var færð um 3 sæti til vinstri. | Komman var færð um 3 sæti til hægri. |

Í báðum tilvikum færðum við kommuna um 3 sæti til að fyrri þátturinn yrði á milli 1 og 10.

Veldið af 10 er jákvætt þegar talan er stærri en 1: $4.000 = 4 \times 10^3$

Veldið af 10 er neikvætt þegar talan er á milli 0 og 1: $0{,}004 = 4 \times 10^{-3}$

---

**DÆMI 6.101**

### Hvernig breyta á úr tugabrotsrithætti í staðalform talna

Skrifið á staðalformi: 37.000.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Færið kommuna þannig að fyrri þátturinn sé stærri en eða jafn 1 en minni en 10. | Munið að það er komma í lok tölunnar 37.000.<br><br>Færið kommuna á eftir 3. 3,700 er á milli 1 og 10. | 37.000, |
| **Skref 2.** Teldu fjölda sæta, *n*, sem tugakomman var færð um. | Tugakomman var færð um 4 sæti til vinstri. | 37000, |
| **Skref 3.** Skrifið töluna sem margfeldi með veldi af 10.<br><br>Ef upphaflega talan er:<br><br>Stærri en 1 verður veldi af 10 jafnt og $10^n$.<br>Milli 0 og 1 verður veldi af 10 jafnt og $10^{-n}$. | 37.000 er stærri en 1, þannig að veldið af 10 hefur veldisvísinn 4. | $3{,}7 \times 10^4$ |
| **Skref 4.** Athugið. | Athugið hvort svarið sé raunhæft. | $10^4$ er 10.000 og 10.000 sinnum 3,7 eru 37.000.<br><br>$37.000 = 3{,}7 \times 10^4$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.202**

Skrifið á staðalformi: 96.000.

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.203**

Skrifið á staðalformi: 48.300.

**AÐFERÐ**

### Breytið úr tugabrotsrithætti í staðalform talna

1. Skref 1. Færið kommuna þannig að fyrri þátturinn sé stærri en eða jafn 1 en minni en 10.
2. Skref 2. Teljið hve mörg sæti, n, komman var færð.
3. Skref 3.
   Skrifið töluna sem margfeldi með veldi af 10. Ef upphaflega talan er:

   - stærri en 1, verður tíuveldið $10^{n}$.
   - á milli 0 og 1, verður tíuveldið $10^{-n}$.
4. Skref 4. Athugið.

**DÆMI 6.102**

Skrifið á staðalformi: 0,0052.

### Lausn

Upphaflega talan, 0,0052, er á milli 0 og 1 og því verður tíuveldið neikvætt.

| | 0,0052 |
|---|---|
| Færið kommuna til að fá 5,2, tölu á milli 1 og 10. | 0,0052 |
| Teljið hve mörg sæti komman var færð. | 3 sæti |
| Skrifið sem margfeldi með veldi af 10. | $5{,}2 \times 10^{-3}$ |
| Athugið. | |

$$5{,}2 \times 10^{-3}$$
$$5{,}2 \times \frac{1}{10^{3}}$$
$$5{,}2 \times \frac{1}{1000}$$
$$5{,}2 \times 0{,}001$$

| | |
|---|---|
| 0,0052 | $0{,}0052 = 5{,}2 \times 10^{-3}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.204**

Skrifið á staðalformi: 0,0078.

**REYNIÐ SJÁLF 6.205**

Skrifið á staðalformi: 0,0129.

## Breytið staðalformi talna í tugabrotsrithátt

Hvernig breytum við staðalformi talna í tugabrotsrithátt? Skoðum tvær tölur á staðalformi.

| | |
|---|---|
| $9{,}12 \times 10^{4}$ | $9{,}12 \times 10^{-4}$ |
| $9{,}12 \times 10.000$ | $9{,}12 \times 0{,}0001$ |
| $91.200$ | $0{,}000912$ |

Ef við skoðum hvar komman er sjáum við einfalda aðferð til að breyta tölu úr staðalformi í tugabrotsrithátt.

$$9{,}12 \times 10^{4} = 91.200 \qquad 9{,}12 \times 10^{-4} = 0{,}000912$$

| | |
|---|---|
| $9{,}12 \times 10^{4} = 91.200$ | $9{,}12 \times 10^{-4} = 0{,}000912$ |
| $9{,}12___ \times 10^{4} = 91.200$ | $___9{,}12 \times 10^{-4} = 0{,}000912$ |
| Færðu kommuna um 4 sæti til hægri. | Færðu kommuna um 4 sæti til vinstri. |

Í báðum tilvikum færðist komman um 4 sæti. Þegar veldisvísirinn var jákvæður færðist hún til hægri en þegar hann var neikvæður færðist hún til vinstri.

---

**DÆMI 6.103**

## Hvernig breyta á staðalformi talna í tugabrotsrithátt

Breytið í tugabrotsrithátt: $6{,}2 \times 10^{3}$.

6

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Ákvarðið veldisvísinn $n$ í þættinum 10. | Veldisvísirinn er 3. | $6{,}2 \times 10^{3}$ |
| **Skref 2.** Færið komuna um $n$ sæti og bætið við núllum ef þörf krefur.<br><br>Ef veldisvísirinn er jákvæður skal færa komuna um $n$ sæti til hægri.<br><br>Ef veldisvísirinn er neikvæður skal færa komuna um $\lvert n \rvert$ sæti til vinstri. | Veldisvísirinn er jákvæður, svo færa skal komuna um 3 sæti til hægri. Bæta þarf við 2 núllum sem sætisfyllingum. | 6,200,<br><br>6.200 |
| **Skref 3.** Athugið hvort svarið sé raunhæft. | | $10^{3}$ er 1000 og 1000 sinnum 6,2 er 6.200.<br><br>$6{,}2 \times 10^{3} = 6.200$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 6.206**

Breytið í tugabrotsrithátt: $1{,}3 \times 10^{3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.207**

Breytið í tugabrotsrithátt: $9{,}25 \times 10^{4}$.

Skrefin eru tekin saman hér fyrir neðan.

**AÐFERÐ**

### Breytið staðalformi talna í tugabrotsrithátt.

Til að breyta staðalformi talna í tugabrotsrithátt:

1. Skref 1. Finnið veldisvísinn $n$ á þættinum 10.
2. Skref 2.
   Færið kommuna $n$ sæti og bætið við núllum eftir þörfum.
   - Ef veldisvísirinn er jákvæður skal færa kommuna $n$ sæti til hægri.
   - Ef veldisvísirinn er neikvæður skal færa kommuna $|n|$ sæti til vinstri.
3. Skref 3. Athugið.

**DÆMI 6.104**

Breytið í tugabrotsrithátt: $8{,}9 \times 10^{-2}$.

### Lausn

| | $8{,}9 \times 10^{-2}$ |
|---|---|
| Finnið veldisvísinn ná þættinum 10. | Veldisvísirinn er -2. |
| Veldisvísirinn er neikvæður og því skuluð þið færa kommuna um 2 sæti til vinstri. | 8 , 9 |
| Bætið núllum við sem staðgenglum eftir þörfum. | $8{,}9 \times 10^{-2} = 0{,}089$ |

**REYNIÐ SJÁLF 6.208**

Breytið í tugabrotsrithátt: $1{,}2 \times 10^{-4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 6.209**

Breytið í tugabrotsrithátt: $7{,}5 \times 10^{-2}$.

### Margfaldið og deilið á staðalformi talna

Stjörnufræðingar nota mjög stórar tölur til að lýsa fjarlægðum í alheiminum og aldri stjarna og reikistjarna. Efnafræðingar nota mjög litlar tölur til að lýsa stærð atóms eða hleðslu rafeindar. Þegar vísindamenn reikna með mjög stórum eða mjög litlum tölum nota þeir staðalform talna. Með staðalformi má reikna án þess að skrifa mörg núll. Nú skoðum við hvernig veldisreglurnar eru notaðar til að margfalda og deila tölum á staðalformi.

**DÆMI 6.105**

Margfaldið. Skrifið svörin á tugabrotsformi: $\left(4\times10^{5}\right)\left(2\times10^{-7}\right)$.

## Lausn

$$\left(4\ \times\ 10^{5}\right)\left(2\ \times\ 10^{-7}\right)$$

Notið víxlregluna til að endurraða þáttunum. $4\cdot2\cdot10^{5}\cdot10^{-7}$

Margfaldið. $8\ \times\ 10^{-2}$

Breytið í tugabrotsrithátt með því að færa kommuna um tvö sæti til vinstri. 0,08

**REYNIÐ SJÁLF 6.210**

Margfaldið $\left(3\times10^{6}\right)\left(2\times10^{-8}\right)$. Skrifið svörin á tugabrotsformi.

**REYNIÐ SJÁLF 6.211**

Margfaldið $\left(3\times10^{-2}\right)\left(3\times10^{-1}\right)$. Skrifið svörin á tugabrotsformi.

**DÆMI 6.106**

Deilið. Skrifið svörin á tugabrotsformi: $\frac{9\times10^{3}}{3\times10^{-2}}$.

## Lausn

| | $\frac{9\times10^{3}}{3\times10^{-2}}$ |
|---|---|
| Aðskiljið þættina og endurritið sem margfeldi tveggja brota. | $\frac{9}{3}\times\frac{10^{3}}{10^{-2}}$ |
| Deilið. | $3\times10^{5}$ |
| Breytið í tugabrotsrithátt með því að færa kommuna um fimm sæti til hægri. | 300.000 |

**REYNIÐ SJÁLF 6.212**

Deilið $\frac{8\times10^{4}}{2\times10^{-1}}$. Skrifið svörin á tugabrotsformi.

**REYNIÐ SJÁLF 6.213**

Deilið $\frac{8\times10^{2}}{4\times10^{-2}}$. Skrifið svörin á tugabrotsformi.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessum netgögnum finnið þið frekari kennslu og fleiri verkefni um heiltöluveldisvísa og staðalform talna:

- Neikvæðir veldisvísar
- Staðalform talna
- Staðalform talna 2

## Verkefni úr hluta 6.7

***Æfingin skapar meistarann***

**Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**500.** ⓐ $4^{-2}$ ⓑ $10^{-3}$

**501.** ⓐ $3^{-4}$ ⓑ $10^{-2}$

**502.** ⓐ $5^{-3}$ ⓑ $10^{-5}$

**503.** ⓐ $2^{-8}$ ⓑ $10^{-2}$

**504.** ⓐ $\frac{1}{c^{-5}}$ ⓑ $\frac{1}{3^{-2}}$

**505.** ⓐ $\frac{1}{c^{-5}}$ ⓑ $\frac{1}{5^{-2}}$

**506.** ⓐ $\frac{1}{q^{-10}}$ ⓑ $\frac{1}{10^{-3}}$

**507.** ⓐ $\frac{1}{t^{-9}}$ ⓑ $\frac{1}{10^{-4}}$

**508.** ⓐ $\left(\frac{5}{8}\right)^{-2}$ ⓑ $\left(-\frac{3m}{n}\right)^{-2}$

**509.** ⓐ $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$ ⓑ $\left(-\frac{2}{cd}\right)^{-3}$

**510.** ⓐ $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3}$ ⓑ $\left(-\frac{u^{2}}{2v}\right)^{-5}$

**511.** ⓐ $\left(\frac{7}{2}\right)^{-3}$ ⓑ $\left(-\frac{3}{x\,y^2}\right)^{-3}$

**512.** ⓐ $(-5)^{-2}$ ⓑ $-5^{-2}$ ⓒ $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ ⓓ $-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

**513.** ⓐ $(-7)^{-2}$ ⓑ $-7^{-2}$ ⓒ $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2}$ ⓓ $-\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

**514.** ⓐ $-3^{-3}$ ⓑ $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ ⓒ $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ ⓓ $(-3)^{-3}$

**515.** ⓐ $-5^{-3}$ ⓑ $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$ ⓒ $-\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ ⓓ $(-5)^{-3}$

**516.** ⓐ $3\cdot 5^{-1}$ ⓑ $(3\cdot 5)^{-1}$

**517.** ⓐ $2\cdot 5^{-1}$ ⓑ $(2\cdot 5)^{-1}$

**518.** ⓐ $4\cdot 5^{-2}$ ⓑ $(4\cdot 5)^{-2}$

**519.** ⓐ $3\cdot 4^{-2}$ ⓑ $(3\cdot 4)^{-2}$

**520.** ⓐ $m^{-4}$ ⓑ $\left(x^3\right)^{-4}$

**521.** ⓐ $b^{-5}$ ⓑ $\left(k^2\right)^{-5}$

**522.** ⓐ $p^{-10}$ ⓑ $\left(q^6\right)^{-8}$

**523.** ⓐ $s^{-8}$ ⓑ $\left(a^9\right)^{-10}$

**524.** ⓐ $7n^{-1}$ ⓑ $(7n)^{-1}$ ⓒ $(-7n)^{-1}$

**525.** ⓐ $6r^{-1}$ ⓑ $(6r)^{-1}$ ⓒ $(-6r)^{-1}$

**526.** ⓐ $(3p)^{-2}$ ⓑ $3p^{-2}$ ⓒ $-3p^{-2}$

**527.** ⓐ $(2q)^{-4}$ ⓑ $2q^{-4}$ ⓒ $-2q^{-4}$

### Einfaldið stæður með heiltöluveldisvísum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**528.** ⓐ $b^4b^{-8}$ ⓑ $r^{-2}r^5$ ⓒ $x^{-7}x^{-3}$

**529.** ⓐ $s^3\cdot s^{-7}$ ⓑ $q^{-8}\cdot q^3$ ⓒ $y^{-2}\cdot y^{-5}$

**530.** ⓐ $a^3\cdot a^{-3}$ ⓑ $a\cdot a^3$ ⓒ $a\cdot a^{-3}$

**531.** ⓐ $y^5\cdot y^{-5}$ ⓑ $y\cdot y^5$ ⓒ $y\cdot y^{-5}$

532.

$$p^{5} \cdot p^{-2} \cdot p^{-4}$$

533.

$$x^{4} \cdot x^{-2} \cdot x^{-3}$$

534.

$$\left(w^{4} x^{-5}\right)\left(w^{-2} x^{-4}\right)$$

535.

$$\left(m^{3} n^{-3}\right)\left(m^{-5} n^{-1}\right)$$

536.

$$\left(u v^{-2}\right)\left(u^{-5} v^{-3}\right)$$

537.

$$\left(p q^{-4}\right)\left(p^{-6} q^{-3}\right)$$

538.

$$\left(-6 c^{-3} d^{9}\right)\left(2 c^{4} d^{-5}\right)$$

539.

$$\left(-2 j^{-5} k^{8}\right)\left(7 j^{2} k^{-3}\right)$$

540.

$$\left(-4 r^{-2} s^{-8}\right)\left(9 r^{4} s^{3}\right)$$

541.

$$\left(-5 m^{4} n^{6}\right)\left(8 m^{-5} n^{-3}\right)$$

542.

$$\left(5 x^{2}\right)^{-2}$$

543.

$$\left(4 y^{3}\right)^{-3}$$

544.

$$\left(3 z^{-3}\right)^{2}$$

545.

$$\left(2\,p^{-5}\right)^2$$

546.

$$\frac{t^9}{t^{-3}}$$

547.

$$\frac{n^5}{n^{-2}}$$

548.

$$\frac{x^{-7}}{x^{-3}}$$

549.

$$\frac{y^{-5}}{y^{-10}}$$

**Breytið úr tugabrotsrithætti í staðalform talna**

Skrifið hverja tölu á staðalformi í eftirfarandi verkefnum.



**550.** 57.000

**551.** 340.000

**552.** 8.750.000

**553.** 1.290.000

**554.** 0,026

**555.** 0,041

**556.** 0,00000871

**557.** 0,00000103

**Breytið staðalformi talna í tugabrotsrithátt**

Breytið hverri tölu í tugabrotsrithátt í eftirfarandi verkefnum.

558.

$$5{,}2 \times 10^2$$

559.

$$8{,}3 \times 10^2$$

560.

$$7{,}5 \times 10^{6}$$

561.

$$1{,}6 \times 10^{10}$$

562.

$$2{,}5 \times 10^{-2}$$

563.

$$3{,}8 \times 10^{-2}$$

564.

$$4{,}13 \times 10^{-5}$$

565.

$$1{,}93 \times 10^{-5}$$

**Margfaldið og deilið á staðalformi talna**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum. Skrifið svarið með tugabrotsrithætti.

566.

$$\left(3 \times 10^{-5}\right)\left(3 \times 10^{9}\right)$$

567.

$$\left(2 \times 10^{2}\right)\left(1 \times 10^{-4}\right)$$

568.

$$\left(7{,}1 \times 10^{-2}\right)\left(2{,}4 \times 10^{-4}\right)$$

569.

$$\left(3{,}5 \times 10^{-4}\right)\left(1{,}6 \times 10^{-2}\right)$$

Deilið í eftirfarandi verkefnum. Skrifið svarið með tugabrotsrithætti.

570.

$$\frac{7 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-7}}$$

571.

$$\frac{5 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-10}}$$

572.

$$\frac{6 \times 10^{4}}{3 \times 10^{-2}}$$

573.

$$\frac{8 \times 10^{6}}{4 \times 10^{-1}}$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**574.** Íbúafjöldi Bandaríkjanna 4. júlí 2010 var nærri 310.000.000. Skrifið töluna á staðalformi.

**575.** Íbúafjöldi heimsins 4. júlí 2010 var meiri en 6.850.000.000. Skrifið töluna á staðalformi.

**576.** Meðalþykkt mannshárs er 0,0018 sentímetrar. Skrifið töluna á staðalformi.

**577.** Líkurnar á að vinna Megamillions-happdrættið árið 2010 voru um 0,0000000057. Skrifið töluna á staðalformi.

**578.** Árið 2010 breyttu $2 \times 10^{4}$ Facebook-notendur á dag hjúskaparstöðu sinni í „trúlofuð“. Breytið tölunni í tugabrotsritháttt.

**579.** Í byrjun árs 2012 var halli á fjárlögum alríkisstjórnar Bandaríkjanna meiri en $\$1{,}5 \times 10^{13}$. Breytið tölunni í tugabrotsritháttt.

6

**580.** Styrkur koltvísýrings í andrúmsloftinu er $3{,}9 \times 10^{-4}$. Breytið tölunni í tugabrotsritháttt.

**581.** Breidd róteindar er $1 \times 10^{-5}$ sinnum breidd atóms. Breytið tölunni í tugabrotsritháttt.

**582.** **Heilbrigðiskostnaður** Bandaríska stofnunin sem annast Medicare og Medicaid áætlar að neytendur verji meira en $4 billjónum til heilbrigðisþjónustu fyrir árið 2017.

1. ⓐ Skrifið 4 billjónir á tugabrotsformi.
2. ⓑ Skrifið 4 billjónir á staðalformi.

**583.** **Myntframleiðsla** Árið 1942 framleiddi bandaríska myntsláttan 154.500.000 fimm senta myntir. Skrifið 154.500.000 á staðalformi.

**584.** **Fjarlægð** Fjarlægðin milli jarðar og einnar björtustu stjörnu næturhiminsins er 33,7 ljósár. Eitt ljósár er um 6.000.000.000.000 (6 billjónir) mílna.

1. ⓐ Skrifið fjölda mílna í einu ljósári á staðalformi.
2. ⓑ Notið staðalform talna til að finna fjarlægðina milli jarðar og stjörnunnar í mílum. Skrifið svarið á staðalformi.

**585.** **Skuldir** Í lok fjárlagaársins 2015 var áætlað að heildarskuldir alríkisstjórnar Bandaríkjanna væru um $18.600.000.000.000 ($18,6 billjónir), samkvæmt alríkisfjárlögum. Íbúafjöldi Bandaríkjanna var um 300.000.000 í lok fjárlagaársins 2015.

1. ⓐ Skrifið skuldina á staðalformi.
2. ⓑ Skrifið íbúafjöldann á staðalformi.
3. ⓒ Finnið skuld á mann með því að nota staðalform til að deila skuldinni með íbúafjöldanum. Skrifið svarið á staðalformi.

***Ritunarverkefni***

586.

1. ⓐ Útskýrið merkingu veldisvísisins í stæðunni $2^3$.
2. ⓑ Útskýrið merkingu veldisvísisins í stæðunni $2^{-3}$.

**587.** Þegar þið breytið tölu úr tugabrotsrithætti í staðalform, hvernig vitið þið þá hvort veldisvísirinn verður jákvæður eða neikvæður?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum þessa hluta.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað skilgreiningu neikvæðs veldisvísis. | | | |
| einfaldað stæður með heiltöluveldisvísum. | | | |
| breytt úr tugabrotssniði yfir í staðalform talna. | | | |
| breytt úr staðalformi talna yfir í tugabrotssnið. | | | |
| margfaldað og deilt með staðalformi talna. | | | |

ⓑ Þið hafið nú skoðað gátlistann. Teljið þið ykkur í heildina vel undirbúin fyrir næsta hluta? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# Lykilhugtök

**tvíliður**

Tvíliður er margliða með nákvæmlega tveimur liðum.

**samokar**

Samokar eru tveir tvíliðir af gerðinni $(a-b),(a+b)$; báðir tvíliðirnir hafa sama fyrri lið og sama síðari lið, en annar er summa og hinn mismunur.

**stig fastatölu**

Stig sérhverrar fastatölu er 0.

**stig margliðu**
Stig margliðu er hæsta stig liða hennar.

**stig liðar**
Stig liðar er veldisvísir breytunnar í honum.

**einliður**
Einliður er liður af gerðinni $a\,x^m$, þar sem $a$ er fastatala og $m$ er núll eða jákvæð heiltala; einliður hefur nákvæmlega einn lið.

**neikvæður veldisvísir**
Ef $n$ er jákvæð heiltala og $a \neq 0$, þá er $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

**margliða**
Margliða er einliður eða tveir eða fleiri einliðir sem eru tengdir með samlagningu eða frádrætti.

**staðalform talna**
Tala er á staðalformi þegar hún er á forminu $a \times 10^n$, þar sem $a \geq 1$ og $a < 10$ og $n$ er heiltala.

**staðalform**
Margliða er á staðalformi þegar liðir hennar eru ritaðir í lækkandi röð eftir stigi.

**þríliður**
Þríliður er margliða með nákvæmlega þremur liðum.

6

# Meginatriði

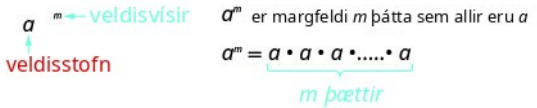
## 6.1 Leggja saman og draga frá margliður

- **Einliður**
  - Einliður er liður af gerðinni $a\,x^m$, þar sem $a$ er fastatala og $m$ er núll eða jákvæð heiltala
- **Margliður**
  - **margliða**— Einliður eða tveir eða fleiri einliðir sem eru tengdir með samlagningu eða frádrætti kallast margliða.
  - **einliður** — Margliða með nákvæmlega einum lið kallast einliður.
  - **tvíliður** — Margliða með nákvæmlega tveimur liðum kallast tvíliður.
  - **þríliður** — Margliða með nákvæmlega þremur liðum kallast þríliður.
- **Stig margliðu**
  - Stig liðar er summa veldisvísa breytna hans.
  - Stig fastatölu er 0.

- Stig margliðu er hæsta stig allra liða hennar.

## 6.2 Nota margföldunarreglur velda

- **Veldaritháttur**




- **Veldisreglur**
  - Ef $a, b$ eru rauntölur og $m, n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

| | | | |
|---|---|---|---|
| margfeldisregla | $a^m \cdot a^n$ | $=$ | $a^{m+n}$ |
| reglan um veldi af veldi | $(a^m)^n$ | $=$ | $a^{m \cdot n}$ |
| reglan um margfeldi í veldi | $(ab)^m$ | $=$ | $a^m b^m$ |

## 6.3 Margfalda margliður

- **FOIL-aðferð við margföldun tveggja tvíliða**— Til að margfalda tvo tvíliði:
  1. Skref 1. Margfaldið fremstu liðina.
  2. Skref 2. Margfaldið ytri liðina.
  3. Skref 3. Margfaldið innri liðina.
  4. Skref 4. Margfaldið öftustu liðina.

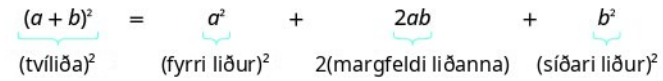
- **Margföldun tveggja tvíliða**—Notið þessar aðferðir til að margfalda tvíliði:
  - Dreifireglu (Dæmi 6.34)
  - FOIL-aðferð (Dæmi 6.39)
  - Lóðréttu aðferðina (Dæmi 6.44)

- **Margföldun þríliðar og tvíliðar**—Notið þessar aðferðir til að margfalda þrílið með tvílið:
  - Dreifireglu (Dæmi 6.45)
  - Lóðréttu aðferðina (Dæmi 6.46)

## 6.4 Sérstök margfeldi

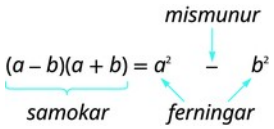
- **Ferningsregla tvíliða**

  - Ef $a$, $b$ eru rauntölur,




  - $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
  - $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
  - Til að hefja tvílið í annað veldi: hefjið fyrri liðinn í annað veldi, hefjið síðari liðinn í annað veldi og tvöfaldið margfeldi þeirra.

- **Reglan um margfeldi samoka**
  - Ef $a$, $b$ eru rauntölur,




  - $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
  - Margfeldið kallast mismunur ferninga.

- **Til að margfalda samoka:**
  - **hefjið fyrri liðinn í annað veldi, hefjið síðari liðinn í annað veldi og ritið niðurstöðuna sem mismun ferninga**

6

## 6.5 Deila einliðum

- **Kvótaregla fyrir veldi:**
  - Ef $a$ er rauntala, $a\neq 0$ og $m$, $n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá gildir:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, m>n \text{ og } \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{m-n}}, n>m$$

- **Núllveldi**
  - Ef $a$ er tala önnur en núll, þá er $a^0=1$.

- **Reglan um kvóta í veldi**:
  - Ef $a$ og $b$ eru rauntölur, $b\neq 0$, og $m$ er jákvæð heiltala, þá gildir:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

  - Til að hefja brot í veldi skal hefja bæði teljarann og nefnarann í það veldi.

- **Samantekt á veldisreglum**
  - Ef $a, b$ eru rauntölur og $m, n$ eru núll eða jákvæðar heiltölur, þá

| | | | |
|---|---|---|---|
| margfeldisregla | $a^m \cdot a^n$ | $=$ | $a^{m+n}$ |
| reglan um veldi af veldi | $(a^m)^n$ | $=$ | $a^{m \cdot n}$ |
| reglan um margfeldi í veldi | $(ab)^m$ | $=$ | $a^m b^m$ |
| kvótaregla | $\frac{a^m}{a^n}$ | $=$ | $a^{m-n}, a \neq 0, m > n$ |
| | $\frac{a^m}{a^n}$ | $=$ | $\frac{1}{a^{n-m}}, a \neq 0, n > m$ |
| Skilgreining núllveldis | $a^o$ | $=$ | $1, a \neq 0$ |
| reglan um kvóta í veldi | $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ | $=$ | $\frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$ |

## 6.6 Deila margliðum

- **Samlagning brota**
  - Ef $a, b,$ og $c$ eru tölur þar sem $c \neq 0$, þá gildir
    $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ og $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

- **Deiling margliðu með einlið**
  - Til að deila margliðu með einlið skal deila hverjum lið margliðunnar með einliðnum.

## 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna

- **Reglan um neikvæða veldisvísa**
  - Ef $n$ er jákvæð heiltala og $a \neq 0$, þá gildir $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$
- **Reglan um kvóta í neikvæðu veldi**
  - Ef $a, b$ eru rauntölur, $b \neq 0$ og $n$ er heiltala, þá gildir $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- **Til að breyta tölu úr tugabrotsrithætti í staðalform:**
  1. Skref 1. Færið kommuna þannig að fyrri þátturinn sé stærri en eða jafn 1 en minni en 10.
  2. Skref 2. Teljið um hve mörg tugabrotssæti, $n$, komman var færð.
  3. Skref 3.
     Ritið töluna sem margfeldi með veldi af 10. Ef upphaflega talan er:
     - stærri en 1, verður veldið af 10 $10^n$

- á milli 0 og 1, verður veldið af 10 $10^{-n}$

4. Skref 4. Athugið.

- **Til að breyta tölu úr staðalformi í tugabrotsrithátt:**
  1. Skref 1. Finnið veldisvísinn $n$, á þættinum 10.
  2. Skref 2.
     Færið tugabrotskommuna um $n$ sæti og bætið við núllum eftir þörfum.
     - Ef veldisvísirinn er jákvæður skal færa kommuna $n$ sæti til hægri.
     - Ef veldisvísirinn er neikvæður skal færa kommuna $|n|$ sæti til vinstri.
  3. Skref 3. Athugið.

# Upprifjunarverkefni

## Leggið saman og dragið frá margliður

**Berið kennsl á margliður, einliði, tvíliði og þríliði**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða hvort hver margliða sé einliður, tvíliður, þríliður eða annars konar margliða.

**588.**

ⓐ $11c^4 - 23c^2 + 1$

ⓑ $9p^3 + 6p^2 - p - 5$

ⓒ $\frac{3}{7}x + \frac{5}{14}$

ⓓ 10 ⓔ $2y - 12$

**589.**

ⓐ $a^2 - b^2$

ⓑ $24d^3$

ⓒ $x^2 + 8x - 10$

ⓓ $m^2n^2 - 2mn + 6$

ⓔ $7y^3 + y^2 - 2y - 4$

**Ákvarðið stig margliða**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða stig hverrar margliðu.

590.

1. ⓐ $3x^2 + 9x + 10$
2. ⓑ $14a^2bc$
3. ⓒ $6y + 1$
4. ⓓ $n^3 - 4n^2 + 2n - 8$

**5.** ⓔ $-19$

591.

**1.** ⓐ $5p^3-8p^2+10p-4$
**2.** ⓑ $-20q^4$
**3.** ⓒ $x^2+6x+12$
**4.** ⓓ $23r^2s^2-4rs+5$
**5.** ⓔ 100

### Leggið saman og dragið frá einliði

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leggja einliðina saman eða draga þá frá.

592.

$$5y^3+8y^3$$

593.

$$-14k+19k$$

594.

$$12q-(-6q)$$

595.

$$-9c-18c$$

596.

$$12x-4y-9x$$

597.

$$3m^2+7n^2-3m^2$$

598.

$$6x^2y-4x+8xy^2$$

599.

$$13a+b$$

### Leggið saman og dragið frá margliður

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið leggja margliðurnar saman eða draga þær frá.

600.

$$(5x^2+12x+1)+(6x^2-8x+3)$$

601.

$$(9p^2-5p+3)+(4p^2-4)$$

602.

$$\left(10m^2-8m-1\right)-\left(5m^2+m-2\right)$$

603.

$$\left(7y^2-8y\right)-\left(y-4\right)$$

**604.** Dragið frá:
$\left(3s^2+10\right)$ frá $\left(15s^2-2s+8\right)$

**605.** Finnið summu $\left(a^2+6a+9\right)$ og $\left(5a^3-7\right)$

**Reiknið gildi margliðu fyrir gefið gildi breytunnar**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna gildi hverrar margliðu fyrir gefið gildi.

**606.** Reiknið gildi $3y^2-y+1$ þegar:

1. ⓐ $y=5$
2. ⓑ $y=-1$
3. ⓒ $y=0$

**607.** Reiknið gildi $10-12x$ þegar:

1. ⓐ $x=3$
2. ⓑ $x=0$
3. ⓒ $x=-1$

6

**608.** Randee lætur stein falla af 200 feta háum kletti niður í sjó. Margliðan $-16t^2+200$ gefur hæð steinsins $t$ sekúndum eftir að honum er sleppt af klettinum. Finnið hæðina eftir $t=3$ sekúndur.

**609.** Framleiðandi hátalara fyrir hljómtæki hefur komist að því að ef hver hátalari kostar p dollara, má reikna tekjurnar af sölunni með margliðunni $-4p^2+460p$. Finnið tekjurnar þegar $p=75$.

Notið margföldunarreglur velda

**Einfaldið stæður með veldisvísum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

610.

$$10^4$$

611.

$$17^1$$

612.

$$\left(\frac{2}{9}\right)^2$$

613.

$$(0{,}5)^3$$

614.

$$(-2)^6$$

615.

$$-2^6$$

**Einfaldið stæður með margfeldisreglunni fyrir veldi**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

616.

$$x^4 \cdot x^3$$

617.

$$p^{15} \cdot p^{16}$$

618.

$$4^{10} \cdot 4^6$$

619.

$$8 \cdot 8^5$$

620.

$$n \cdot n^2 \cdot n^4$$

621.

$$y^c \cdot y^3$$

**Einfaldið stæður með reglunni um veldi af veldi**

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

622.

$$(m^3)^5$$

623.

$$(5^3)^2$$

624.

$$(y^4)^x$$

625.

$$\left(3^{r}\right)^{s}$$

**Einfaldið stæður með reglunni um margfeldi í veldi**
Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.
626.

$$\left(4a\right)^{2}$$

627.

$$\left(-5y\right)^{3}$$

628.

$$\left(2mn\right)^{5}$$

629.

$$\left(10xyz\right)^{3}$$

**Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum**
Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.
630.

$$\left(p^{2}\right)^{5}\cdot\left(p^{3}\right)^{6}$$

631.

$$\left(4a^{3}b^{2}\right)^{3}$$

632.

$$\left(5x\right)^{2}\left(7x\right)$$

633.

$$\left(2q^{3}\right)^{4}\left(3q\right)^{2}$$

634.

$$\left(\frac{1}{3}x^{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{3}$$

635.

$$\left(\frac{2}{5}m^{2}n\right)^{3}$$

**Margfaldið einliði**
Margfaldið einliðina í eftirfarandi verkefnum.

636.

$$\left(-15x^2\right)\left(6x^4\right)$$

637.

$$\left(-9n^7\right)\left(-16n\right)$$

638.

$$\left(7p^5q^3\right)\left(8pq^9\right)$$

639.

$$\left(\frac{5}{9}ab^2\right)\left(27ab^3\right)$$

Margfaldið margliður

**Margfaldið margliðu með einlið**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum.

640.

$$7\left(a+9\right)$$

641.

$$-4\left(y+13\right)$$

642.

$$-5\left(r-2\right)$$

643.

$$p\left(p+3\right)$$

644.

$$-m\left(m+15\right)$$

645.

$$-6u\left(2u+7\right)$$

646.

$$9\left(b^2+6b+8\right)$$

**647.** $3q^2\left(q^2-7q+6\right)3$

648.

$$\left(5z-1\right)z$$

649.

$$(b-4)\cdot 11$$

**Margfaldið tvílið með tvílið**

Margfaldið tvíliðina í eftirfarandi verkefnum með: ⓐ dreifireglunni, ⓑ FOIL-aðferðinni, ⓒ lóðréttu aðferðinni.

650.

$$(x-4)(x+10)$$

651.

$$(6y-7)(2y-5)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda tvíliðina. Notið hvaða aðferð sem er.

652.

$$(x+3)(x+9)$$

653.

$$(y-4)(y-8)$$

654.

$$(p-7)(p+4)$$

655.

$$(q+16)(q-3)$$

656.

$$(5m-8)(12m+1)$$

657.

$$(u^2+6)(u^2-5)$$

658.

$$(9x-y)(6x-5)$$

659.

$$(8mn+3)(2mn-1)$$

**Margfaldið þrílið með tvílið**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum með ⓐ dreifireglunni, ⓑ lóðréttu aðferðinni.

660.

$$(n+1)(n^2+5n-2)$$

661.

$$(3x-4)(6x^2+x-10)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda. Notið aðra hvora aðferðina.

662.

$$(y-2)(y^2-8y+9)$$

663.

$$(7m+1)(m^2-10m-3)$$

Sérstök margfeldi

**Finnið ferning tvíliðar með ferningsreglu tvíliða**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið hefja hvern tvílið í annað veldi með ferningsreglu tvíliða.

664.

$$(c+11)^2$$

665.

$$(q-15)^2$$

666.

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$$

667.

$$(8u+1)^2$$

668.

$$(3n^3-2)^2$$

669.

$$(4a-3b)^2$$

**Margfaldið samoka með reglunni um margfeldi samoka**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið margfalda hvert par samoka með reglunni um margfeldi samoka.

670.

$$(s-7)(s+7)$$

671.

$$\left(y+\frac{2}{5}\right)\left(y-\frac{2}{5}\right)$$

672.

$$(12c+13)(12c-13)$$

673.

$$(6-r)(6+r)$$

674.

$$\left(u+\frac{3}{4}v\right)\left(u-\frac{3}{4}v\right)$$

675.

$$(5p^4-4q^3)(5p^4+4q^3)$$

**Þekkið og notið viðeigandi reglu um sérstök margfeldi**

Finnið hvert margfeldi í eftirfarandi verkefnum.

676.

$$(3m+10)^2$$

677.

$$(6a+11)(6a-11)$$

678.

$$(5x+y)(x-5y)$$

679.

$$(c^4+9d)^2$$

680.

$$(p^5+q^5)(p^5-q^5)$$

681.

$$(a^2+4b)(4a-b^2)$$

Deilið einliðum

**Einfaldið stæður með kvótareglu fyrir veldi**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

682.

$$\frac{u^{24}}{u^{6}}$$

683.

$$\frac{10^{25}}{10^{5}}$$

684.

$$\frac{3^{4}}{3^{6}}$$

685.

$$\frac{v^{12}}{v^{48}}$$

686.

$$\frac{x}{x^{5}}$$

687.

$$\frac{5}{5^{8}}$$



**Einfaldið stæður með núllveldi**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

688.

$$75^{0}$$

689.

$$x^{0}$$

690.

$$-12^{0}$$

691.

$$\left(-12^{0}\right)\left(-12\right)^{0}$$

692.

$$25\,x^{0}$$

693.

$$(25x)^0$$

694.

$$19n^0 - 25m^0$$

695.

$$(19n)^0 - (25m)^0$$

**Einfaldið stæður með reglunni um kvóta í veldi**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

696.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

697.

$$\left(\frac{m}{3}\right)^4$$

698.

$$\left(\frac{r}{s}\right)^8$$

699.

$$\left(\frac{x}{2y}\right)^6$$

**Einfaldið stæður með því að beita nokkrum reglum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

700.

$$\frac{(x^3)^5}{x^9}$$

701.

$$\frac{n^{10}}{(n^5)^2}$$

702.

$$\left(\frac{q^6}{q^8}\right)^3$$

703.

$$\left(\frac{r^8}{r^3}\right)^4$$

704.

$$\left(\frac{c^2}{d^5}\right)^9$$

705.

$$\left(\frac{3x^4}{2y^2}\right)^5$$

706.

$$\left(\frac{v^3 v^9}{v^6}\right)^4$$

707.

$$\frac{\left(3n^2\right)^4\left(-5n^4\right)^3}{\left(-2n^5\right)^2}$$

**Deilið einliðum**

Deilið einliðunum í eftirfarandi verkefnum.

708.

$$-65y^{14} \div 5y^2$$

709.

$$\frac{64a^5b^9}{-16a^{10}b^3}$$

710.

$$\frac{144x^{15}y^8z^3}{18x^{10}y^2z^{12}}$$

711.

$$\frac{\left(8p^6q^2\right)\left(9p^3q^5\right)}{16p^8q^7}$$

Deilið margliðum

**Deilið margliðu með einlið**

Deilið hverri margliðu með einliðnum í eftirfarandi verkefnum.

712.

$$\frac{42z^2-18z}{6}$$

713.

$$\left(35x^2-75x\right)\div 5x$$

714.

$$\frac{81n^4+105n^2}{-3}$$

715.

$$\frac{550p^6-300p^4}{10p^3}$$

716.

$$\left(63xy^3+56x^2y^4\right)\div\left(7xy\right)$$

717.

$$\frac{96a^5b^2-48a^4b^3-56a^2b^4}{8ab^2}$$

6

718.

$$\frac{57m^2-12m+1}{-3m}$$

719.

$$\frac{105y^5+50y^3-5y}{5y^3}$$

**Deilið margliðu með tvílið**

Deilið hverri margliðu með tvíliðnum í eftirfarandi verkefnum.

720.

$$\left(k^2-2k-99\right)\div\left(k+9\right)$$

721.

$$\left(v^2-16v+64\right)\div\left(v-8\right)$$

722.

$$\left(3x^2-8x-35\right)\div\left(x-5\right)$$

723.

$$\left(n^2-3n-14\right)\div\left(n+3\right)$$

724.

$$\left(4m^3+m-5\right)\div\left(m-1\right)$$

725.

$$\left(u^3-8\right)\div\left(u-2\right)$$

Heiltöluveldisvísar og staðalform talna

**Notið skilgreiningu neikvæðs veldisvísis**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

726.

$$9^{-2}$$

727.

$$\left(-5\right)^{-3}$$

728.

$$3\cdot 4^{-3}$$

729.

$$\left(6u\right)^{-3}$$

730.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$

731.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

**Einfaldið stæður með heiltöluveldisvísum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

732.

$$p^{-2}\cdot p^{8}$$

733.

$$q^{-6}\cdot q^{-5}$$

734.

$$\left(c^{-2}d\right)\left(c^{-3}d^{-2}\right)$$

735.

$$\left(y^{8}\right)^{-1}$$

736.

$$\left(q^{-4}\right)^{-3}$$

737.

$$\frac{a^{8}}{a^{12}}$$

738.

$$\frac{n^{5}}{n^{-4}}$$

739.

$$\frac{r^{-2}}{r^{-3}}$$

6

**Breytið tölum úr tugabrotsrithætti í staðalform**
Ritið hverja tölu á staðalformi í eftirfarandi verkefnum.

**740.** 8.500.000

**741.** 0,00429

**742.** Þykkt tíu senta myntar er um 0,053 tommur.

**743.** Árið 2015 var mannfjöldi heimsins um 7.200.000.000 manns.

**Breytið tölum úr staðalformi í tugabrotsrithátt**
Breytið hverri tölu í tugabrotsrithátt í eftirfarandi verkefnum.

744.

$$3{,}8 \times 10^{5}$$

745.

$$1{,}5 \times 10^{10}$$

746.

$$9{,}1 \times 10^{-7}$$

747.

$$5{,}5 \times 10^{-1}$$

**Notið staðalform talna við margföldun og deilingu**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum og ritið svarið á tugabrotsrithætti.

748.

$$\left(2 \times 10^{5}\right)\left(4 \times 10^{-3}\right)$$

749.

$$\left(3{,}5 \times 10^{-2}\right)\left(6{,}2 \times 10^{-1}\right)$$

Deilið í eftirfarandi verkefnum og ritið svarið á tugabrotsrithætti.

750.

$$\frac{8 \times 10^{5}}{4 \times 10^{-1}}$$

751.

$$\frac{9 \times 10^{-5}}{3 \times 10^{2}}$$

# Æfingapróf



**752.** Fyrir margliðuna $10x^4 + 9y^2 - 1$

ⓐ Er hún einliður, tvíliður eða þríliður? ⓑ Hvert er stig hennar?

Einfaldið hverja stæðu í verkefnunum hér á eftir.

753.

$$\left(12a^2 - 7a + 4\right) + \left(3a^2 + 8a - 10\right)$$

754.

$$\left(9p^2 - 5p + 1\right) - \left(2p^2 - 6\right)$$

755.

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3$$

756.

$$u \cdot u^4$$

757.

$$\left(4a^3b^5\right)^2$$

758.

$$\left(-9r^4s^5\right)\left(4rs^7\right)$$

759.

$$3k\left(k^2-7k+13\right)$$

760.

$$\left(m+6\right)\left(m+12\right)$$

761.

$$\left(v-9\right)\left(9v-5\right)$$

762.

$$\left(4c-11\right)\left(3c-8\right)$$

763.

$$\left(n-6\right)\left(n^2-5n+4\right)$$

764.

$$\left(2x-15y\right)\left(5x+7y\right)$$

765.

$$\left(7p-5\right)\left(7p+5\right)$$

766.

$$\left(9v-2\right)^2$$

767.

$$\frac{3^8}{3^{10}}$$

768.

$$\left(\frac{m^4\cdot m}{m^3}\right)^6$$

769.

$$\left(87x^{15}y^3z^{22}\right)^0$$

770.

$$\frac{80\,c^8\,d^2}{16\,c\,d^{10}}$$

771.

$$\frac{12\,x^2+42\,x-6}{2\,x}$$

772.

$$\left(70\,x\,y^4+95\,x^3\,y\right)\div 5\,x\,y$$

773.

$$\frac{64\,x^3-1}{4\,x-1}$$

774.

$$\left(y^2-5\,y-18\right)\div\left(y+3\right)$$

775.

$$5^{-2}$$

776.

$$\left(4\,m\right)^{-3}$$

777.

$$q^{-4}\cdot q^{-5}$$

778.

$$\frac{n^{-2}}{n^{-10}}$$

**779.** Breytið 83.000.000 í staðalform.

**780.** Breytið $6{,}91\ \times\ 10^{-5}$ í tugabrotsrithátt.

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir og skrifið svarið á tugabrotsrithætti.

781.

$$\left(3{,}4\ \times\ 10^{9}\right)\left(2{,}2\ \times\ 10^{-5}\right)$$

782.

$$\frac{8{,}4\ \times\ 10^{-3}}{4\ \times\ 10^{3}}$$

**783.** Þyrla flýgur í 1.000 feta hæð og sleppir björgunarpakka. Margliðan $-16t^2+1000$ gefur hæð pakkans $t$ sekúndum eftir að honum er sleppt. Finnið hæðina eftir $t=6$ sekúndur.

7. KAFLI

# Þáttun



Mynd 7.1 Hafnarbrúin í Sydney er eitt af mest ljósmynduðu kennileitum Ástralíu. Hún er stærsta stálbogabrú heims og efsti hluti hennar er 134 metra yfir höfninni. Sjáið þið hvers vegna heimamenn kalla hana „fatahengið“?



## Yfirlit kaflans


- 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun
- 7.2 Þáttið þríliði af gerðinni x2+bx+c
- 7.3 Þáttið þríliði af gerðinni ax2+bx+c
- 7.4 Þáttið sérstök margfeldi
- 7.5 Almenn aðferð við þáttun margliða
- 7.6 Annars stigs jöfnur


## Inngangur

Annars stigs stæður má nota sem líkön af eðliseiginleikum stórrar brúar, ferli hafnabolta eða eldflaugar og tekjum og hagnaði fyrirtækis. Þegar stæðurnar eru þáttaðar koma tilteknir

eiginleikar líkansins í ljós. Í þessum kafla kannið þið hvernig stæður eru þáttaðar og sjáið hvernig þáttun er notuð til að leysa ákveðnar gerðir jafna.

# 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Finnið stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða
- Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu
- Þáttun með flokkun

**RIFJIÐ UPP 7.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Frumþáttið 56. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 1.7.

**RIFJIÐ UPP 7.2**

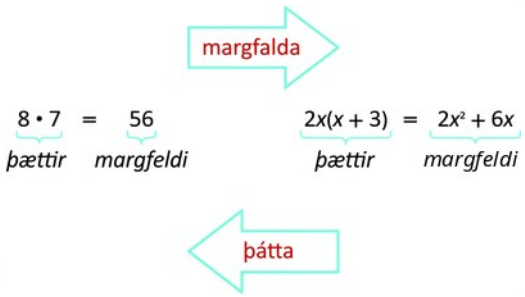
Finnið minnsta sameiginlega margfeldi 18 og 24. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 1.10.

**RIFJIÐ UPP 7.3**

Einfaldið $-3(6a+11)$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp
dæmi 1.135.

## Finnið stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða

Áður margfölduðum við þætti saman til að fá margfeldi. Nú snúum við ferlinu við: byrjum á margfeldi og skiptum því í þætti. Að skipta margfeldi í þætti kallast þáttun.




Við höfum lært að þátta tölur til að finna minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) tveggja eða fleiri talna. Nú þáttum við stæður og finnum stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða. Aðferðin er svipuð þeirri sem við notuðum til að finna MSM.

---

**STÆRSTI SAMEIGINLEGI ÞÁTTUR**

Stærsti sameiginlegi þáttur (SSÞ) tveggja eða fleiri stæða er stærsta stæðan sem er þáttur í þeim öllum.

Fyrst finnum við SSÞ tveggja talna.

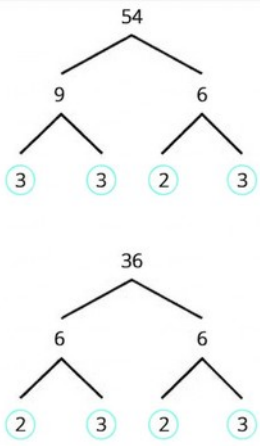
---

**DÆMI 7.1**

### Hvernig finna á stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða

Finnið SSÞ 54 og 36.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Þáttið hvern stuðul í frumþætti. Skrifið allar breytur með veldisvísum á útvíkkuðu formi. | Þáttið 54 og 36. |  |
| **Skref 2.** Dragðu hring um sameiginlegu þættina í hverjum dálki. | Dragðu hring um 2, 3 og 3 sem báðar tölurnar eiga sameiginlega. | $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$<br>$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ |
| **Skref 3.** Færið niður sameiginlegu þættina sem allar stæðurnar eiga sameiginlega. | Færið niður 2, 3 og 3 og margfaldið síðan. | SSÞ = 2 • 3 • 3 |
| **Skref 4.** Margfaldið þættina. | | SSÞ = 18<br>SSÞ talnanna 54 og 36 er 18. |

Takið eftir að SSÞ er þáttur í báðum tölunum og því má rita 54 og 36 sem margfeldi af 18.

$$54 = 18 \cdot 3$$
$$36 = 18 \cdot 2$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.1**

Finnið SSÞ 48 og 80.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.2**

Finnið SSÞ 18 og 40.

Hér tökum við saman skrefin við að finna SSÞ.

**AÐFERÐ**

### Finnið stærsta sameiginlega þátt (SSÞ) tveggja stæða.

1. Skref 1. Frumþáttið hvern stuðul. Ritið allar breytur með veldisvísum í útvíkkaðri ritun.
2. Skref 2. Skráið alla þætti og raðið samsvarandi sameiginlegum þáttum í sama dálk. Dragið hring um sameiginlegu þættina í hverjum dálki.
3. Skref 3. Færið niður sameiginlegu þættina sem allar stæðurnar hafa.
4. Skref 4. Margfaldið þættina.

Í fyrsta dæminu var SSÞ fastatala. Í næstu tveimur dæmum verða breytur í stærsta sameiginlega þættinum.

**DÆMI 7.2**

Finnið stærsta sameiginlega þátt $27\,x^3$ og $18\,x^4$.

7

### Lausn

| | |
|---|---|
| Frumþáttið hvern stuðul og ritið breyturnar með veldisvísum í útvíkkaðri ritun. Dragið hring um sameiginlegu þættina í hverjum dálki. | $27x^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$<br>$18x^4 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ |
| Færið sameiginlegu þættina niður. | $\text{SSÞ} = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$ |
| Margfaldið þættina. | $\text{SSÞ} = 9x^3$ |
| | SSÞ $27\,x^3$ og $18\,x^4$ er $9\,x^3$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.3**

Finnið SSÞ: $12\,x^2, 18\,x^3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.4**

Finnið SSÞ: $16\,y^2, 24\,y^3$.

**DÆMI 7.3**

Finnið SSÞ $4x^2y, 6xy^3$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Frumþáttið hvern stuðul og ritið breyturnar með veldisvísum í útvíkkaðri ritun. Dragið hring um sameiginlegu þættina í hverjum dálki. | $4x^2y = 2 \cdot 2 \quad x \cdot x \cdot y$<br>$6xy^3 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$ |
| Færið sameiginlegu þættina niður. | SSÞ $= 2 \cdot \quad x \cdot \quad y$ |
| Margfaldið þættina. | Stærsti sameiginlegi þáttur = $2xy$ |
| | SSÞ $4x^2y$ og $6xy^3$ er $2xy$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.5**

Finnið SSÞ: $6ab^4, 8a^2b$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.6**

Finnið SSÞ: $9m^5n^2, 12m^3n$.

**DÆMI 7.4**

Finnið SSÞ: $21x^3, 9x^2, 15x$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Frumþáttið hvern stuðul og ritið breyturnar með veldisvísum í útvíkkaðri ritun. Dragið hring um sameiginlegu þættina í hverjum dálki. | $21x^3 = 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x \cdot x$<br>$9x^2 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x$<br>$15x = 3 \cdot 5 \cdot x$ |
| Færið sameiginlegu þættina niður. | SSÞ $= 3 \cdot \quad x$ |
| Margfaldið þættina. | SSÞ $= 3x$ |
| | SSÞ $21x^3$, $9x^2$ og $15x$ er $3x$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.7**

Finnið stærsta sameiginlega þáttinn: $25m^4, 35m^3, 20m^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.8**

Finnið stærsta sameiginlega þáttinn: $14x^3, 70x^2, 105x$.

## Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu

Líkt og í talnareikningi, þar sem stundum er gagnlegt að rita tölu á þáttuðu formi (til dæmis 12 sem $2 \cdot 6$ eða $3 \cdot 4$), getur verið gagnlegt í algebru að rita margliðu á þáttuðu formi. Ein leið er að finna SSÞ allra liðanna. Munið að við margföldum margliðu með einlið svona:

$$\begin{array}{ll} 2(x+7) & \text{þættir} \\ 2\cdot x+2\cdot 7 & \\ 2x+14 & \text{margfeldi} \end{array}$$

Nú byrjum við á margfeldi, til dæmis $2x+14$, og endum með þætti þess, $2(x+7)$. Til þess notum við dreifiregluna afturábak.

Hér sýnum við dreifiregluna eins og þið sáuð hana í fyrri köflum og einnig afturábak.

---

**DREIFIREGLA**

Ef $a, b, c$ eru rauntölur, þá gildir reglan

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \text{og} \qquad ab+ac=a(b+c)$$

Formið vinstra megin er notað til að margfalda. Formið hægra megin er notað til að þátta.

Hvernig er dreifireglan þá notuð til að þátta margliðu? Finnið SSÞ allra liðanna og ritið margliðuna sem margfeldi.

---

**DÆMI 7.5**

## Hvernig taka á stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu

Þáttið: $4x+12$.

7

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið SSÞ allra liða margliðunnar. | Finnið SSÞ $4x$ og $12$. | $4x = 2 \cdot 2 \cdot \ \cdot x$<br>$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>SSÞ $= 2 \cdot 2$<br>SSÞ $= 4$ |
| **Skref 2.** Skrifið hvern lið sem margfeldi með SSÞ. | Skrifið $4x$ og $12$ sem margfeldi af SSÞ þeirra, $4$.<br>$4x = 4 \cdot x$<br>$12 = 4 \cdot 3$ | $4x + 12$<br>$4 \cdot x + 4 \cdot 3$ |
| **Skref 3.** Notið „öfugu“ dreifiregluna til að þátta segðina. | | $4(x + 3)$ |
| **Skref 4.** Athugið með því að margfalda þættina. | | $4(x + 3)$<br>$4 \cdot x + 4 \cdot 3$<br>$4x + 12$ ✓ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.9**

Þáttið: $6a + 24$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.10**

Þáttið: $2b + 14$.

---

**AÐFERÐ**

### Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu.

1. Skref 1. Finnið SSÞ allra liða margliðunnar.
2. Skref 2. Endurritið hvern lið sem margfeldi með SSÞ.
3. Skref 3. Beitið dreifireglunni afturábak til að þátta stæðuna.
4. Skref 4. Sannreynið með því að margfalda þættina.

---

**ÞÁTTUR SEM NAFNORÐ OG SÖGN**

Orðið „þáttur“ er nafnorð en „að þátta“ er sögn.

| | |
|---|---|
| Nafnorð | 7 er *þáttur* í 14 |
| Sögn | *þáttum* 3 út úr $3a + 3$ |

---

**DÆMI 7.6**

Þáttið: $5a + 5$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Finnið SSÞ 5a og 5. | $5a = 5 \cdot a$<br>$5 = 5$<br>SSÞ $= 5$ |
| | $5a + 5$ |
| Endurritið hvern lið sem margfeldi með SSÞ. | $5 \cdot a + 5 \cdot 1$ |
| Beitið dreifireglunni afturábak til að taka SSÞ út fyrir sviga. | $5(a + 1)$ |
| Sannreynið með því að margfalda þættina og fá upphaflegu margliðuna. | |
| $5(a+1)$ | |
| $5 \cdot a+5 \cdot 1$ | |
| $5a+5 \checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.11**

Þáttið: $14x+14$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.12**

Þáttið: $12p+12$.

Stæðurnar í næsta dæmi hafa nokkra sameiginlega þætti. Munið að rita SSÞ sem margfeldi allra sameiginlegu þáttanna.

**DÆMI 7.7**

Þáttið: $12x - 60$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Finnið SSÞ 12x og 60. | $12x = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x$<br>$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$<br>$SSÞ = 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>$SSÞ = 12$ |
| | $12x - 60$ |
| Endurritið hvern lið sem margfeldi með SSÞ. | $12 \cdot x - 12 \cdot 5$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $12(x - 5)$ |
| Sannreynið með því að margfalda þættina. | |
| $12(x-5)$ | |
| $12 \cdot x - 12 \cdot 5$ | |
| $12x - 60$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.13**

Þáttið: $18u - 36$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.14**

Þáttið: $30y - 60$.

Nú tökum við stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í þrílið. Við byrjum á að finna SSÞ allra þriggja liðanna.

**DÆMI 7.8**

Þáttið: $4y^2 + 24y + 28$.

## Lausn

Við byrjum á að finna SSÞ allra þriggja liðanna.

| | |
|---|---|
| Finnið SSÞ $4y^2$, $24y$ og 28. | $4y^2 = 2 \cdot 2 \cdot y \cdot y$<br>$24y = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y$<br>$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$<br>SSÞ $= 2 \cdot 2$<br>SSÞ $= 4$ |
| | $4y^2 + 24y + 28$ |
| Endurritið hvern lið sem margfeldi með SSÞ. | $4 \cdot y^2 + 4 \cdot 6y + 4 \cdot 7$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $4(y^2 + 6y + 7)$ |
| Sannreynið með margföldun. | |
| $4\left(y^2+6y+7\right)$ | |
| $4 \cdot y^2+4 \cdot 6y+4 \cdot 7$ | |
| $4y^2+24y+28$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.15**

Þáttið: $5x^2 - 25x + 15$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.16**

Þáttið: $3y^2 - 12y + 27$.

7

**DÆMI 7.9**

Þáttið: $5x^3 - 25x^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Finnið SSÞ $5x^3$ og $25x^2$. | $5x^3 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x$<br>$25x^2 = 5 \cdot 5 \cdot x \cdot x$<br>Stærsti sameiginlegi þáttur = $5 \cdot x \cdot x$<br>Stærsti sameiginlegi þáttur = $5x^2$ |
| | $5x^3 - 25x^2$ |
| Endurritið hvern lið. | $5x^2 \cdot x - 5x^2 \cdot 5$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $5x^2(x - 5)$ |
| Athugið. | |
| $5x^2(x-5)$ | |
| $5x^2 \cdot x - 5x^2 \cdot 5$ | |
| $5x^3 - 25x^2$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.17**

Þáttið: $2x^3 + 12x^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.18**

Þáttið: $6y^3 - 15y^2$.

**DÆMI 7.10**

Þáttið: $21x^3 - 9x^2 + 15x$.

## Lausn

Í fyrra dæmi fundum við að SSÞ $21x^3, 9x^2, 15x$ er $3x$.

| | |
|---|---|
| | $21x^3 - 9x^2 + 15x$ |
| Endurritið hvern lið með SSÞ, 3x. | $3x \cdot 7x^2 - 3x \cdot 3x + 3x \cdot 5$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $3x(7x^2 - 3x + 5)$ |
| Athugið. | |
| $3x(7x^2 - 3x + 5)$ | |
| $3x \cdot 7x^2 - 3x \cdot 3x + 3x \cdot 5$ | |
| $21x^3 - 9x^2 + 15x$ ✓ | |

7

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.19**

Þáttið: $20x^3 - 10x^2 + 14x$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.20**

Þáttið: $24y^3 - 12y^2 - 20y$.

**DÆMI 7.11**

Þáttið: $8m^3 - 12m^2n + 20mn^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Finnið SSÞ $8m^3$, $12m^2n$, $20mn^2$. | $8m^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot m \cdot m \cdot m$<br>$12m^2n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot m \cdot m \cdot n$<br>$20mn^2 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot m \cdot n \cdot n$<br>$SSÞ = 2 \cdot 2 \cdot m$<br>$SSÞ = 4m$ |
| | $8m^3 - 12m^2n + 20mn^2$ |
| Endurritið hvern lið. | $4m \cdot 2m^2 - 4m \cdot 3mn + 4m \cdot 5n^2$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $4m(2m^2 - 3mn + 5n^2)$ |
| Athugið. | |
| $4m(2m^2 - 3mn + 5n^2)$ | |
| $4m \cdot 2m^2 - 4m \cdot 3mn + 4m \cdot 5n^2$ | |
| $8m^3 - 12m^2n + 20mn^2$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.21**

Þáttið: $9xy^2 + 6x^2y^2 + 21y^3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.22**

Þáttið: $3p^3 - 6p^2q + 9pq^3$.

Þegar forystustuðullinn er neikvæður tökum við mínusmerkið út fyrir sviga sem hluta af SSÞ.

**DÆMI 7.12**

Þáttið: $-8y - 24$.

## Lausn

Þegar forystustuðullinn er neikvæður verður SSÞ neikvæður.

| | |
|---|---|
| Ef formerki liðanna eru hunsuð finnum við fyrst að SSÞ 8y og 24 er 8. Þar sem stæðan −8y − 24 hefur neikvæðan forystustuðul notum við −8 sem SSÞ. | $8y = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot y$<br>$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$<br>SSÞ $= 2 \cdot 2 \cdot 2$<br>SSÞ $= 8$ |
| Endurritið hvern lið með SSÞ. | $-8y - 24$<br>$-8 \cdot y + (-8) \cdot 3$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $-8(y + 3)$ |
| Athugið. | |
| $-8(y+3)$ | |
| $-8 \cdot y + (-8) \cdot 3$ | |
| $-8y - 24$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.23**

Þáttið: $-16z - 64$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.24**

Þáttið: $-9y - 27$.

**DÆMI 7.13**

Þáttið: $-6a^2 + 36a$.

## Lausn

Forystustuðullinn er neikvæður, þannig að SSÞ verður neikvæður.

| | |
|---|---|
| Þar sem forystustuðullinn er neikvæður er SSÞ neikvæður, −6a. | $6a^2 = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a$<br>$36a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a$<br>$\text{SSÞ} = 2 \cdot 3 \cdot a$<br>$\text{SSÞ} = 6a$<br>$-6a^2 + 36a$ |

| | |
|---|---|
| Endurritið hvern lið með SSÞ. | $-6a \cdot a - (-6a) \cdot 6$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $-6a(a - 6)$ |
| Athugið. | |
| $-6a(a-6)$ | |
| $-6a \cdot a + (-6a)(-6)$ | |
| $-6a^2+36a$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.25**

Þáttið: $-4b^2+16b$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.26**

Þáttið: $-7a^2+21a$.

**DÆMI 7.14**

Þáttið: $5q(q+7)-6(q+7)$.

## Lausn

SSÞ er tvíliðurinn $q+7$.

| | |
|---|---|
| | $5q(q+7) - 6(q+7)$ |
| Takið SSÞ, (q + 7), út fyrir sviga. | $(q+7)(5q-6)$ |
| Sannreynið sjálf með margföldun. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.27**

Þáttið: $4m(m+3)-7(m+3)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.28**

Þáttið: $8n(n-4)+5(n-4)$.

## Þáttun með flokkun

Þegar enginn þáttur er sameiginlegur öllum liðum margliðu skuluð þið leita að sameiginlegum þætti sumra liðanna. Ef liðirnir eru fjórir er gott að byrja á að skipta margliðunni í tvo hluta með tveimur liðum í hvorum. Leitið síðan að SSÞ í hvorum hluta. Ef hægt er að þátta margliðuna kemur sami þáttur fram í báðum hlutum.

(Ekki er hægt að þátta allar margliður. Rétt eins og sumar tölur eru frumtölur eru sumar margliður óþáttanlegar.)

---

**DÆMI 7.15**

### Hvernig þátta á með flokkun

Þáttið: $x\,y+3\,y+2\,x+6$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Flokkið saman liði með sameiginlega þætti. | Eiga allir fjórir liðirnir sér stærsta sameiginlega þátt?<br><br>Nei, því skulum við aðgreina fyrstu tvo liðina frá þeim síðari tveimur. | $xy + 3y + 2x + 6$<br><br>$\underbrace{xy + 3y}_{(xy+3y)} + \underbrace{2x + 6}_{(2x+6)}$ |
| **Skref 2.** Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í hverjum flokki. | Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í fyrstu tveimur liðunum.<br><br>Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í seinni tveimur liðunum. | $y(x + 3) + 2x + 6$<br><br>$y(x + 3) + 2(x + 3)$ |
| **Skref 3.** Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í stæðunni. | Athugið að hver liður hefur sameiginlega þáttinn $(x + 3)$.<br><br>Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga. | $y(x + 3) + 2(x + 3)$<br><br>$(x + 3)\,(y + 2)$ |
| **4. skref.** Athugið. | Margfaldið $(x + 3)(y + 2)$. Er margfeldið upphaflega stæðan? | $(x + 3)\,(y + 2)$<br>$xy + 2x + 3y + 6$<br>$xy + 3y + 2x + 6$ ✓ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.29**

Þáttið: $x\,y+8\,y+3\,x+24$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.30**

Þáttið: $a\,b+7\,b+8\,a+56$.

---

**AÐFERÐ**

### Þáttið með flokkun.

1. Skref 1. Flokkið saman liði með sameiginlega þætti.
2. Skref 2. Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í hverjum hópi.
3. Skref 3. Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í stæðunni.

4. Skref 4. Sannreynið með því að margfalda þættina.

---

**DÆMI 7.16**

Þáttið: $x^2+3x-2x-6$.

### Lausn

Enginn þáttur er sameiginlegur öllum fjórum liðunum. $x^2+3x \quad -2x-6$

Skiptið í tvo hluta. $x^2+3x \quad -2x-6$

Takið SSÞ út fyrir sviga í báðum hlutum. Gætið að formerkjunum þegar SSÞ er tekinn út fyrir sviga í síðustu tveimur liðunum.

$$x(x+3)-2(x+3)$$
$$(x+3)(x-2)$$

Sannreynið sjálf með margföldun.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.31**

Þáttið: $x^2+2x-5x-10$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.32**

Þáttið: $y^2+4y-7y-28$.

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Notið þessi netgögn til að fá frekari leiðbeiningar og verkefni um stærsta sameiginlega þætti (SSÞ) og þáttun með flokkun.

- Stærsti sameiginlegi þáttur (SSÞ)
- SSÞ tvíliðar tekinn út fyrir sviga
- Stærsti sameiginlegi þáttur (SSÞ) margliða

## Verkefni úr hluta 7.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Finnið stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða**

Finnið stærsta sameiginlega þáttinn í verkefnunum hér á eftir.

**1.** 8, 18

**2.** 24, 40

**3.** 72, 162

**4.** 150, 275

**5.** $10a$, 50

**6.** $5b$, 30

7.

$$3x, 10x^2$$

8.

$$21b^2, 14b$$

9.

$$8w^2, 24w^3$$

10.

$$30x^2, 18x^3$$

11.

$$10p^3q, 12pq^2$$

12.

$$8a^2b^3, 10ab^2$$

13.

$$12m^2n^3, 30m^5n^3$$

14.

$$28x^2y^4, 42x^4y^4$$

15.

$$10a^3, 12a^2, 14a$$

16.

$$20y^3, 28y^2, 40y$$

17.

$$35x^3, 10x^4, 5x^5$$

18.

$$27p^2, 45p^3, 9p^4$$

**Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu**

Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í hverri margliðu hér á eftir.

19.

$$4x+20$$

20.

$$8y+16$$

21.

$$6m+9$$

22.

$$14p+35$$

23.

$$9q+9$$

24.

$$7r+7$$

25.

$$8m-8$$

26.

$$4n-4$$

27.

$$9n-63$$

28.

$$45b-18$$

29.

$$3x^2+6x-9$$

30.

$$4y^2+8y-4$$

31.

$$8p^2+4p+2$$

32.

$$10q^2+14q+20$$

33.

$$8y^3+16y^2$$

34.

$$12x^3-10x$$

35.

$$5x^3-15x^2+20x$$

36.

$$8m^2-40m+16$$

37.

$$12xy^2+18x^2y^2-30y^3$$

38.

$$21pq^2+35p^2q^2-28q^3$$

39.

$$-2x-4$$

40.

$$-3b+12$$

41.

$$5x(x+1)+3(x+1)$$

42.

$$2x(x-1)+9(x-1)$$

43.

$$3b(b-2)-13(b-2)$$

44.

$$6m(m-5)-7(m-5)$$

**Þáttun með flokkun**

Þáttið með flokkun í verkefnunum hér á eftir.

45.

$$xy+2y+3x+6$$

46.

$$mn+4n+6m+24$$

47.

$$uv-9u+2v-18$$

48.

$$pq-10p+8q-80$$

49.

$$b^2+5b-4b-20$$

50.

$$m^2+6m-12m-72$$

51.

$$p^2+4p-9p-36$$

52.

$$x^2+5x-3x-15$$

**Blönduð verkefni**

Þáttið í verkefnunum hér á eftir.

53.

$$-20x-10$$

54.

$$5x^3-x^2+x$$

55.

$$3x^3-7x^2+6x-14$$

56.

$$x^3+x^2-x-1$$

57.

$$x^2+xy+5x+5y$$

58.

$$5x^3+3x^2-5x-3$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**59.** **Flatarmál rétthyrnings** Lengd rétthyrnings er 6 minni en breiddin. Flatarmál hans er gefið með stæðunni $w^2 - 6w$, þar sem $w =$ breiddin. Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðunni.

**60.** **Hæð hafnabolta** Hæð hafnabolta t sekúndum eftir að hann er sleginn er gefin með stæðunni $-16t^2+80t+4$. Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðunni.

### *Ritunarverkefni*

**61.** Stærsti sameiginlegi þáttur 36 og 60 er 12. Útskýrið hvað það merkir.

**62.** Hver er SSÞ $y^4$, $y^5$, og $y^{10}$? Setjið fram almenna reglu um hvernig finna má SSÞ $y^a$, $y^b$, og $y^c$.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Að loknum verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| fundið stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða. | | | |
| tekið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu. | | | |
| þáttað með flokkun. | | | |

ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

**... Örugglega.** Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Hugleiðið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo að þið getið notað þær áfram. Hvað gerðuð þið til að verða örugg í þessu? Verið nákvæm.

**... Með nokkurri hjálp.** Bregðist fljótt við ef þið hafið ekki náð tökum á efni, því að eyður í þekkingunni verða að hindrunum síðar. Stærðfræði byggist upp í röð og hvert viðfangsefni styðst við fyrri vinnu. Mikilvægt er að hafa traustan grunn áður en þið haldið áfram. Hvern getið þið beðið um aðstoð? Gott er að leita til samnemenda og kennara. Er hægt að fá aðstoð hjá stærðfræðileiðbeinendum í skólanum? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**... nei – ég skil þetta ekki!** Þetta er alvarlegt og þið megið ekki hunsa það. Þið þurfið að fá hjálp strax, annars getur efnið fljótt orðið yfirþyrmandi. Ræðið sem fyrst við kennarann um stöðuna. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

# 7.2 Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+b\,x+c$
- Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+b\,x\,y+c\,y^2$

**RIFJIÐ UPP 7.4**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Margfaldið: $(x+4)(x+5)$.
Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 6.38.

**RIFJIÐ UPP 7.5**

Einfaldið: ⓐ $-9+(-6)$ ⓑ $-9+6$.
Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.37.

**RIFJIÐ UPP 7.6**

Einfaldið: ⓐ $-9(6)$ ⓑ $-9(-6)$.
Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.46.

**RIFJIÐ UPP 7.7**

Einfaldið: ⓐ $|-5|$ ⓑ $|3|$.
Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.33.

## Þáttið þríliði af gerðinni $x^2 + bx + c$

Þið hafið þegar lært að margfalda tvíliði með FOIL-aðferðinni. Nú þurfið þið að snúa margföldunninni við: byrja á margfeldinu og finna þættina. Skoðum dæmi um margföldun tvíliða til upprifjunar.

$(x + 2)(x + 3)$ þættir
F O I L
$x^2 + 3x + 2x + 6$
$x^2 + 5x + 6$ margfeldi

Að þátta þríliðinn merkir að byrja á margfeldinu, $x^2+5\,x+6$, og enda á þáttunum, $(x+2)(x+3)$. Hugið að því hvaðan hver liður þríliðarins kemur.

Fremsti liðurinn fékkst með því að margfalda fremsta lið hvors tvíliðar. Til að fá $x^2$ í margfeldinu verður hvor tvíliður að byrja á x.

$$x^2 + 5x + 6$$
$$(x \quad)(x \quad)$$

Síðasti liðurinn í þríliðnum fékkst með því að margfalda síðasta lið hvors tvíliðar. Margfeldi síðustu liðanna verður því að vera 6.

Hvaða tvær tölur hafa margfeldið 6?

Þættir 6 gætu verið 1 og 6 eða 2 og 3. Hvernig vitið þið hvaða par á að nota?

Skoðið miðliðinn. Hann fékkst með því að leggja saman ytri og innri liðina.

Tölurnar sem þurfa að hafa margfeldið 6 verða að hafa summuna 5. Við prófum báða möguleikana og tökum niðurstöðurnar saman í töflu 7.1. Taflan verður gagnleg þegar unnið er með tölur sem má þátta á marga vegu.

Tafla 7.1

| **Þættir** 6 | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| 1, 6 | $1+6=7$ |
| 2, 3 | $2+3=5$ |

Við sjáum að tölurnar 2 og 3 hafa margfeldið 6 og summuna 5. Við höfum því fundið þætti $x^2+5x+6$: $(x+2)(x+3)$.

| | |
|---|---|
| $x^2+5x+6$ | margfeldi |
| $(x+2)(x+3)$ | þættir |

Sannreynið þetta með margföldun.

Við byrjuðum á $x^2+5x+6$, sem er af gerðinni $x^2+bx+c$, þar sem $b=5$ og $c=6$. Við þáttuðum þríliðinn í tvo tvíliði af gerðinni $(x+m)$ og $(x+n)$.

| | |
|---|---|
| $x^2 + 5x + 6$ | $x^2 + bx + c$ |
| $(x + 2)(x + 3)$ | $(x + m)(x + n)$ |

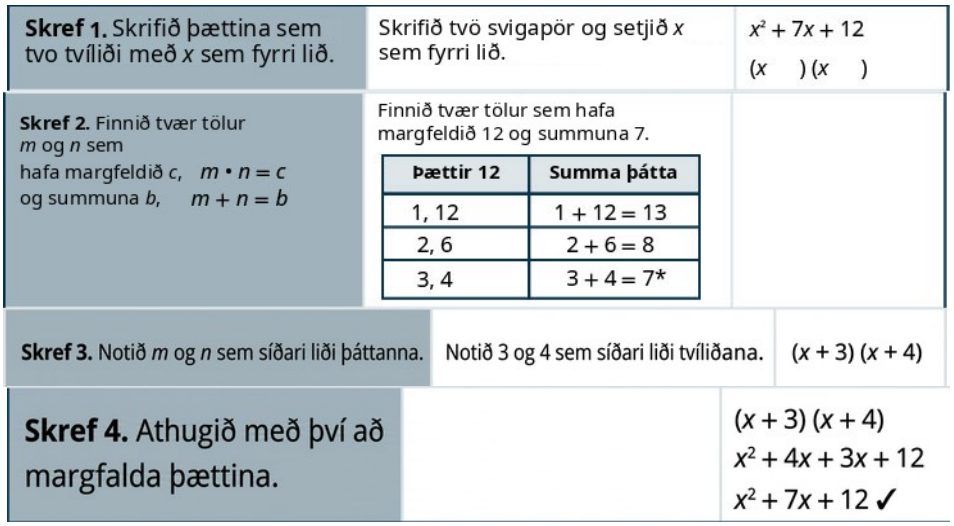
Til að fá rétta þætti fundum við tvær tölur, m og n, sem hafa margfeldið c og summuna b.

**DÆMI 7.17**

### Hvernig þátta á þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$

Þáttið: $x^2+7x+12$.

### Lausn




---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.33**

Þáttið: $x^2+6x+8$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.34**

Þáttið: $y^2+8y+15$.

Tökum saman skrefin sem við notuðum til að finna þættina.

---

**AÐFERÐ**

### Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$.

1. Skref 1. Ritið þættina sem tvo tvíliði þar sem fremstu liðirnir eru x: $(x)(x)$.
2. Skref 2. Finnið tvær tölur m og n þannig að margfeldi þeirra sé c, $m \cdot n = c$ og summan sé b, $m+n=b$
3. Skref 3. Notið m og n sem síðustu liði þáttanna: $(x+m)(x+n)$.
4. Skref 4. Sannreynið með því að margfalda þættina.

---

**DÆMI 7.18**

Þáttið: $u^2+11u+24$.

### Lausn

Takið eftir að breytan er u, og því verður fremsti liður hvors þáttar u.

$$u^2+11u+24$$

Ritið þættina sem tvo tvíliði þar sem fremstu liðirnir eru $u$. $(u \quad)(u \quad)$

Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið 24 og summuna 11.

| **Þættir** 24 | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| 1, 24 | $1+24=25$ |
| 2, 12 | $2+12=14$ |
| 3, 8 | $3+8=11*$ |
| 4, 6 | $4+6=10$ |

Notið 3 og 8 sem síðustu liði tvíliðanna. $(u+3)(u+8)$

Sannreynið.

$$(u+3)(u+8)$$
$$u^2+3u+8u+24$$
$$u^2+11u+24 \ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.35**

Þáttið: $q^2+10q+24$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.36**

Þáttið: $t^2+14t+24$.

**DÆMI 7.19**

Þáttið: $y^2+17y+60$.

## Lausn

$$y^2+17y+60$$

Ritið þættina sem tvo tvíliði þar sem fremstu liðirnir eru $y$. $(y\quad)(y\quad)$

Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið 60 og summuna 17.

| Þættir $60$ | Summa þáttanna |
|---|---|
| $1,60$ | $1+60=61$ |
| $2,30$ | $2+30=32$ |
| $3,20$ | $3+20=23$ |
| $4,15$ | $4+15=19$ |
| $5,12$ | $5+12=17*$ |
| $6,10$ | $6+10=16$ |

Notið $5$ og $12$ sem síðustu liði. $(y+5)(y+12)$

Sannreynið.

$(y+5)(y+12)$
$(y^2+12y+5y+60)$
$(y^2+17y+60)\checkmark$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.37**

Þáttið: $x^2+19x+60$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.38**

Þáttið: $v^2+23v+60$.

7

### *Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$ þar sem $b$ er neikvætt og $c$ er jákvætt*

Í dæmunum hingað til hafa allir liðir þríliðanna verið jákvæðir. Hvað gerist þegar einhverjir liðir eru neikvæðir? Það fer eftir því hvaða liður er neikvæður. Skoðum fyrst þríliði þar sem aðeins miðliðurinn er neikvæður.

Munið: Til að fá neikvæða summu og jákvætt margfeldi verða báðar tölurnar að vera neikvæðar.

Hugið aftur að FOIL-aðferðinni og því hvaðan hver liður þríliðarins kemur. Eins og áður:

- fremsti liðurinn, $x^2$, fæst sem margfeldi fremstu liðanna í hvorum tvíliðaþætti, x og y;
- jákvæði síðasti liðurinn er margfeldi síðustu liðanna tveggja
- neikvæði miðliðurinn er summa ytri og innri liðanna.

Hvernig fást jákvætt margfeldi og neikvæð summa? Með tveimur neikvæðum tölum.

**DÆMI 7.20**

Þáttið: $t^2-11t+28$.

### Lausn

Síðasti liðurinn, 28, er jákvæður og miðliðurinn, $-11t$, er neikvæður. Því þurfum við aftur tvo neikvæða þætti. Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið 28 og summuna $-11$.

$$t^2-11t+28$$

Ritið þættina sem tvo tvíliði þar sem fremstu liðirnir eru $t$. $(t\quad)(t\quad)$

Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið 28 og summuna $-11$.

| **Þættir** 28 | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $-1,-28$ | $-1+(-28)=-29$ |
| $-2,-14$ | $-2+(-14)=-16$ |
| $-4,-7$ | $-4+(-7)=-11*$ |

Notið $-4,-7$ sem síðustu liði tvíliðanna. $(t-4)(t-7)$
Sannreynið.

$$(t-4)(t-7)$$
$$t^2-7t-4t+28$$
$$t^2-11t+28\ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.39**

Þáttið: $u^2-9u+18$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.40**

Þáttið: $y^2-16y+63$.

### *Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$ þar sem c er neikvætt*

Hvað gerist ef síðasti liður þríliðarins er neikvæður? Hugið að FOIL-aðferðinni. Síðasti liðurinn er margfeldi síðustu liða tvíliðanna. Neikvætt margfeldi fæst þegar tvær tölur með gagnstæð formerki eru margfaldaðar. Velja þarf þættina vandlega svo miðliðurinn fái einnig rétt formerki.

Munið: Til að fá neikvætt margfeldi verða tölurnar að hafa gagnstæð formerki.

**DÆMI 7.21**

Þáttið: $z^2+4z-5$.

### Lausn

Til að fá neikvæðan síðasta lið skal margfalda saman jákvæða og neikvæða tölu. Við þurfum þætti $-5$ sem hafa jákvæðu summuna $4$.

| **Þættir** $-5$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1, -5$ | $1+(-5)=-4$ |
| $-1, 5$ | $-1+5=4*$ |

Takið eftir: Við skráðum báða möguleikana $1, -5$ og $-1, 5$ til að tryggja rétt formerki miðliðarins.

| | |
|---|---|
| | $z^2+4z-5$ |
| Þættirnir verða tveir tvíliðir þar sem fremstu liðirnir eru z. | $(z)(z)$ |
| Notið −1 og 5 sem síðustu liði tvíliðanna. | $(z-1)(z+5)$ |
| Athugið. $(z-1)(z+5)$ $z^2+5z-1z-5$ $z^2+4z-5$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.41**

Þáttið: $h^2+4h-12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.42**

Þáttið: $k^2+k-20$.

Breytum síðasta þríliðnum lítillega og skoðum áhrifin á þættina.

**DÆMI 7.22**

Þáttið: $z^2-4z-5$.

### Lausn

Að þessu sinni þurfum við þætti $-5$ sem hafa summuna $-4$.

| **Þættir** $-5$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1, -5$ | $1+(-5)=-4*$ |
| $-1, 5$ | $-1+5=4$ |

| **Þættir** $-5$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| | $z^2-4z-5$ |
| Þættirnir verða tveir tvíliðir þar sem fremstu liðirnir eru z. | $(z)(z)$ |
| Notið 1 og −5 sem síðustu liði tvíliðanna. | $(z+1)(z-5)$ |
| Athugið.<br>$(z+1)(z-5)$<br>$z^2-5z+1z-5$<br>$z^2-4z-5$ ✓ | |

Takið eftir að þættir $z^2-4z-5$ eru mjög líkir þáttum $z^2+4z-5$. Mikilvægt er að velja þáttaparið sem gefur miðliðnum rétt formerki.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.43**

Þáttið: $x^2-4x-12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.44**

Þáttið: $y^2-y-20$.

**DÆMI 7.23**

Þáttið: $q^2-2q-15$.

## Lausn

$$q^2-2q-15$$

Þættirnir verða tveir tvíliðir þar sem fremstu liðirnir eru $q$. $(q\quad)(q\quad)$

Nota má $3,-5$ sem síðustu liði í $(q+3)(q-5)$

.

| **Þættir** $-15$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1,-15$ | $1+(-15)=-14$ |
| $-1,15$ | $-1+15=14$ |
| $3,-5$ | $3+(-5)=-2*$ |
| $-3,5$ | $-3+5=2$ |

Athugið.

$$(q+3)(q-5)$$

$$q^2-5q+3q-15$$

$$q^2-2q-15\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.45**

Þáttið: $r^2-3r-40$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.46**

Þáttið: $s^2-3s-10$.

Sumir þríliðir eru óþáttanlegir. Til að ganga úr skugga um að þríliður sé óþáttanlegur þarf að skrá alla möguleika og sýna að enginn þeirra gengur upp.

**DÆMI 7.24**

Þáttið: $y^2-6y+15$.

## Lausn

| | $y^2-6y+15$ |
|---|---|
| Þættirnir verða tveir tvíliðir þar sem fremstu liðirnir eru y. | $(y)(y)$ |
| **Þættir 15** | **Summa þáttanna** |
| $-1,-15$ | $-1+(-15)=-16$ |
| $-3,-5$ | $-3+(-5)=-8$ |

Eins og taflan sýnir hefur ekkert þáttapar summuna $-6$. Stæðan er því óþáttanleg.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.47**

Þáttið: $m^2+4m+18$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.48**

Þáttið: $n^2-10n+12$.

**DÆMI 7.25**

Þáttið: $2x+x^2-48$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $2x+x^2-48$ |
| Fyrst röðum við liðunum eftir lækkandi stigi. | $x^2+2x-48$ |
| Þættirnir verða tveir tvíliðir þar sem fremstu liðirnir eru x. | $(x)(x)$ |

Eins og taflan sýnir má nota $-6,8$ sem síðustu liði tvíliðanna.

$$(x-6)(x+8)$$

| **Þættir** $-48$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $-1,48$ | $-1+48=47$ |
| $-2,24$ | $-2+24=22$ |
| $-3,16$ | $-3+16=13$ |
| $-4,12$ | $-4+12=8$ |
| $-6,8$ | $-6+8=2$ |

Athugið.

$$(x-6)(x+8)$$

$$x^2-6x+8x-48$$

$$x^2+2x-48\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.49**

Þáttið: $9m+m^2+18$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.50**

Þáttið: $-7n+12+n^2$.

Tökum saman aðferðina sem við þróuðum til að þátta þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$.

**AÐFERÐ**

### Þáttið þríliði.

Þegar þríliður er þáttaður skoðum við fyrst formerki liða hans til að ákvarða formerki tvíliðaþáttanna.

$$x^2+bx+c$$
$$(x+m)(x+n)$$

**Þegar c er jákvætt hafa m og n sama formerki.**

| $b$ jákvætt | $b$ neikvætt |
|---|---|
| $m, n$ jákvætt | $m, n$ neikvætt |
| $x^2+5x+6$ | $x^2-6x+8$ |
| $(x+2)(x+3)$ | $(x-4)(x-2)$ |
| eins formerki | eins formerki |

**Þegar c er neikvætt hafa m og n gagnstæð formerki.**

| | |
|---|---|
| $x^2+x-12$ | $x^2-2x-15$ |
| $(x+4)(x-3)$ | $(x-5)(x+3)$ |
| ólík formerki | ólík formerki |

Takið eftir að þegar m og n hafa gagnstæð formerki hefur talan með stærra algildi sama formerki og b.

## Þáttið þríliði af gerðinni $x^2 + bxy + cy^2$

Stundum þarf að þátta þríliði af gerðinni $x^2+bxy+cy^2$ með tveimur breytum, til dæmis $x^2+12xy+36y^2$. Fremsti liðurinn, $x^2$, er margfeldi fremstu liða tvíliðaþáttanna, $x \cdot x$. $y^2$ í síðasta liðnum merkir að síðari liður hvors tvíliðaþáttar verður að innihalda y. Stuðlana b og c finnið þið með sömu aðferð og lýst var hér á undan.

---

**DÆMI 7.26**

Þáttið: $x^2+12xy+36y^2$.

### Lausn

| | $x^2+12xy+36y^2$ |
|---|---|
| Takið eftir að fremstu liðirnir eru xog síðustu liðirnir innihalda y. | $(x_y)(x_y)$ |

Finnið tölurnar sem hafa margfeldið 36 og summuna 12.

| **Þættir** 36 | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| 1, 36 | $1+36=37$ |
| 2, 18 | $2+18=20$ |
| 3, 12 | $3+12=15$ |
| 4, 9 | $4+9=13$ |
| 6, 6 | $6+6=12*$ |

| **Þættir** $36$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| Notið 6 og 6 sem stuðla síðustu liðanna. | $(x+6y)(x+6y)$ |

Sannreynið svarið.

$$(x+6y)(x+6y)$$
$$x^2+6xy+6xy+36y^2$$
$$x^2+12xy+36y^2 \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.51**

Þáttið: $u^2+11uv+28v^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.52**

Þáttið: $x^2+13xy+42y^2$.

**DÆMI 7.27**

Þáttið: $r^2-8rs-9s^2$.

## Lausn

Við þurfum $r$ í fremsta lið hvors tvíliðar og $s$ í síðari liðnum. Síðasti liður þríliðarins er neikvæður og því verða þættirnir að hafa gagnstæð formerki.

$$r^2-8rs-9s^2$$

Takið eftir: fremstu liðirnir eru $r$, en síðustu liðirnir innihalda $s$. $(r_s)(r_s)$

Finnið tölurnar sem hafa margfeldið $-9$ og summuna $-8$.

| **Þættir** $-9$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1,-9$ | $1+(-9)=-8*$ |
| $-1,9$ | $-1+9=8$ |
| $3,-3$ | $3+(-3)=0$ |

Notið $1, -9$ sem stuðla síðustu liðanna. $(r+s)(r-9s)$
Sannreynið svarið.

$$(r-9s)(r+s)$$
$$r^2+rs-9rs-9s^2$$
$$r^2-8rs-9s^2 \ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.53**

Þáttið: $a^2-11ab+10b^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.54**

Þáttið: $m^2-13mn+12n^2$.

**DÆMI 7.28**

Þáttið: $u^2-9uv-12v^2$.

## Lausn

Við þurfum u í fremsta lið hvors tvíliðar og $v$ í síðari liðnum. Síðasti liður þríliðarins er neikvæður og því verða þættirnir að hafa gagnstæð formerki.

| | $u^2-9uv-12v^2$ |
|---|---|
| Takið eftir að fremstu liðirnir eru uog síðustu liðirnir innihalda v. | $(u_v)(u_v)$ |

Finnið tölurnar sem hafa margfeldið $-12$ og summuna $-9$.

| **Þættir** $-12$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1, -12$ | $1+(-12)=-11$ |
| $-1, 12$ | $-1+12=11$ |
| $2, -6$ | $2+(-6)=-4$ |
| $-2, 6$ | $-2+6=4$ |
| $3, -4$ | $3+(-4)=-1$ |
| $-3, 4$ | $-3+4=1$ |

Takið eftir að ekkert þáttapar hefur summuna $-9$. Þríliðurinn er óþáttanlegur.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.55**

Þáttið: $x^2 - 7xy - 10y^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.56**

Þáttið: $p^2 + 15pq + 20q^2$.

## Æfingar úr hluta 7.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Þáttið þríliði af gerðinni $x^2 + bx + c$**

Þáttið hvern þrílið af gerðinni $x^2 + bx + c$.

63.

$$x^2 + 4x + 3$$

64.

$$y^2 + 8y + 7$$

65.

$$m^2 + 12m + 11$$

66.

$$b^2 + 14b + 13$$

67.

$$a^2 + 9a + 20$$

68.

$$m^2 + 7m + 12$$

69.

$$p^2 + 11p + 30$$

70.

$$w^2 + 10w + 21$$

71.

$$n^2 + 19n + 48$$

72.

$$b^2 + 14b + 48$$

73.

$$a^2+25a+100$$

74.

$$u^2+101u+100$$

75.

$$x^2-8x+12$$

76.

$$q^2-13q+36$$

77.

$$y^2-18y+45$$

78.

$$m^2-13m+30$$

79.

$$x^2-8x+7$$

80.

$$y^2-5y+6$$

81.

$$p^2+5p-6$$

82.

$$n^2+6n-7$$

83.

$$y^2-6y-7$$

84.

$$v^2-2v-3$$

85.

$$x^2-x-12$$

86.

$$r^2-2r-8$$

87.

$$a^2 - 3a - 28$$

88.

$$b^2 - 13b - 30$$

89.

$$w^2 - 5w - 36$$

90.

$$t^2 - 3t - 54$$

91.

$$x^2 + x + 5$$

92.

$$x^2 - 3x - 9$$

93.

$$8 - 6x + x^2$$

94.

$$7x + x^2 + 6$$

95.

$$x^2 - 12 - 11x$$

96.

$$-11 - 10x + x^2$$

**Þáttið þríliði af gerðinni** $x^2 + bxy + cy^2$

Þáttið hvern þrílið af gerðinni $x^2 + bxy + cy^2$. Ef ekki er hægt að þátta þríliðinn skuluð þið svara „óþáttanlegur“.

97.

$$p^2 + 3pq + 2q^2$$

98.

$$m^2 + 6mn + 5n^2$$

99.

$$r^2 + 15rs + 36s^2$$

100.

$$u^2+10uv+24v^2$$

101.

$$m^2-12mn+20n^2$$

102.

$$p^2-16pq+63q^2$$

103.

$$x^2-2xy-80y^2$$

104.

$$p^2-8pq-65q^2$$

105.

$$m^2-64mn-65n^2$$

106.

$$p^2-2pq-35q^2$$

107.

$$a^2+5ab-24b^2$$

108.

$$r^2+3rs-28s^2$$

109.

$$x^2-3xy-14y^2$$

110.

$$u^2-8uv-24v^2$$

111.

$$m^2-5mn+30n^2$$

112.

$$c^2-7cd+18d^2$$

**Blandaðar æfingar**

Þáttið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum.

113.

$$u^2 - 12u + 36$$

114.

$$w^2 + 4w - 32$$

115.

$$x^2 - 14x - 32$$

116.

$$y^2 + 41y + 40$$

117.

$$r^2 - 20rs + 64s^2$$

118.

$$x^2 - 16xy + 64y^2$$

119.

$$k^2 + 34k + 120$$

120.

$$m^2 + 29m + 120$$

121.

$$y^2 + 10y + 15$$

122.

$$z^2 - 3z + 28$$

123.

$$m^2 + mn - 56n^2$$

124.

$$q^2 - 29qr - 96r^2$$

125.

$$u^2 - 17uv + 30v^2$$

126.

$$m^2 - 31mn + 30n^2$$

127.

$$c^2 - 8cd + 26d^2$$

128.

$$r^2 + 11rs + 36s^2$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**129.** **Samliggjandi heiltölur** Deirdre hugsar sér tvær samliggjandi heiltölur sem hafa margfeldið 56. Þríliðurinn $x^2 + x - 56$ lýsir tengslum talnanna. Þáttið þríliðinn.

**130.** **Samliggjandi heiltölur** Deshawn hugsar sér tvær samliggjandi heiltölur sem hafa margfeldið 182. Þríliðurinn $x^2 + x - 182$ lýsir tengslum talnanna. Þáttið þríliðinn.

### *Ritunarverkefni*

**131.** Marga þríliði af gerðinni $x^2 + bx + c$ má þátta sem margfeldi tveggja tvíliða $(x+m)(x+n)$. Útskýrið hvernig þið finnið gildi m og n.

**132.** Hvernig ákvarðið þið hvort nota eigi plús- eða mínusmerki í tvíliðaþáttum þríliðar af gerðinni $x^2 + bx + c$ þar sem $b$ og $c$ geta verið jákvæðar eða neikvæðar tölur?

**133.** Will þáttaði $x^2 - x - 20$ sem $(x+5)(x-4)$. Bill þáttaði stæðuna sem $(x+4)(x-5)$. Phil þáttaði hana sem $(x-5)(x-4)$. Hver hefur rétt fyrir sér? Útskýrið hvers vegna hin svörin tvö eru röng.

**134.** Skoðið dæmi 7.19, þar sem við þáttuðum $y^2 + 17y + 60$. Við gerðum töflu yfir öll þáttapör 60 og summur þeirra. Finnst ykkur slík tafla gagnleg? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

7

### *Sjálfsmat*

ⓐ Að loknum verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| Þáttað þríliði af gerðinni $x^2 + bx + c$. | | | |
| Þáttað þríliði af gerðinni $x^2 + bxy + cy^2$. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann skuluð þið ákveða hvað þið gerið til að ná öllum markmiðunum af öryggi.

# 7.3 Þáttið þríliði af gerðinni $ax^2+bx+c$

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Þekkið grunnferli við fullþáttun margliða
- Þáttið þríliði af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c$ með SSÞ
- Þáttið þríliði með prófun
- Þáttið þríliði með ac-aðferðinni

**RIFJIÐ UPP 7.8**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Finnið SSÞ $45\,p^2$ og $30\,p^6$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 7.2.

**RIFJIÐ UPP 7.9**

Margfaldið $(3\,y+4)(2\,y+5)$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 6.40.

**RIFJIÐ UPP 7.10**

Sameinið samkynja liði í $12\,x^2+3\,x+5\,x+9$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.24.

## Þekkið grunnferli við þáttun

Tökum saman það sem við höfum lært um þáttun margliða hingað til. Í fyrstu tveimur hlutum kaflans notuðum við þrjár aðferðir: tókum SSÞ út fyrir sviga, þáttuðum með flokkun og þáttuðum þrílið með því að snúa FOIL-aðferðinni við. Fleiri aðferðir bætast við síðar í kaflanum og í áframhaldandi algebrunámi.

Hvernig vitið þið hvaða þáttunaraðferð á að nota? Eftir því sem aðferðunum fjölgar þarf að greina hvenær hver þeirra á við. Það hjálpar að raða þeim í ferli sem vísar ykkur á réttu aðferðina.

Þegar þið byrjið að þátta margliðu skuluð þið alltaf spyrja fyrst: „Er til stærsti sameiginlegi þáttur?“ Ef svo er, takið hann þá fyrst út fyrir sviga.

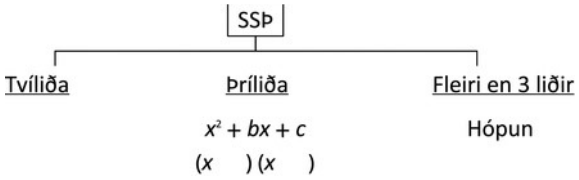
Næst þarf að skoða gerð margliðunnar. Hve marga liði hefur hún? Er hún tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði?

Ef hún er þríliður með forystustuðulinn einn, $x^2+b\,x+c$, snúið þá FOIL-aðferðinni við.

Ef margliðan hefur fleiri en þrjá liði, prófið þá þáttun með flokkun. Það er eina aðferðin sem við höfum fyrir margliður með fleiri en þrjá liði.

Sumar margliður eru óþáttanlegar.

Hér fyrir neðan tökum við saman aðferðirnar sem við höfum lært. Þeim er lýst nánar í Veljið aðferð til að fullþátta margliður.




**AÐFERÐ**

## Veljið aðferð til að fullþátta margliður.

1. Skref 1.
   Er til stærsti sameiginlegi þáttur?
   - Takið hann út fyrir sviga.
2. Skref 2.
   Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði?
   - Ef hún er tvíliður höfum við enn enga aðferð til að þátta hana.
   - Ef hún er þríliður af gerðinni $x^2+b\,x+c$: snúið FOIL-aðferðinni við $(x)(x)$
   - Ef hún hefur fleiri en þrjá liði skal nota þáttun með flokkun.
3. Skref 3. Sannreynið með því að margfalda þættina.

Fylgið grunnferlinu til að fullþátta margliðu. Margliða er fullþáttuð ef allir þættir hennar aðrir en einliðir eru óþáttanlegir.

**DÆMI 7.29**

Veljið bestu aðferðina til að þátta hverja margliðu.

1. ⓐ $6\,y^2-72$
2. ⓑ $r^2-10\,r-24$
3. ⓒ $p^2+5\,p+p\,q+5\,q$

## Lausn

ⓐ

| | $6\,y^2-72$ |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? | Já, 6. |
| Takið 6 út fyrir sviga. | $6\left(y^2-12\right)$ |
| Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en 3 liði? | Hún er tvíliður og við höfum enn enga aðferð til að þátta tvíliði. |

ⓑ

| | $r^2-10r-24$ |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? | Nei, enginn sameiginlegur þáttur er til. |
| Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Hún er þríliður með forystustuðulinn 1, svo við snúum FOIL-aðferðinni við. |

ⓒ

| | $p^2+5p+pq+5q$ |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? | Nei, enginn sameiginlegur þáttur er til. |
| Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Hún hefur fleiri en þrjá liði og því er þáttað með flokkun. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.57**

Veljið bestu aðferðina til að þátta hverja margliðu:

1. ⓐ $4y^2+32$
2. ⓑ $y^2+10y+21$
3. ⓒ $yz+2y+3z+6$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.58**

Veljið bestu aðferðina til að þátta hverja margliðu:

1. ⓐ $ab+a+4b+4$
2. ⓑ $3k^2+15$
3. ⓒ $p^2+9p+8$

## Þáttið þríliði af gerðinni $ax^2 + bx + c$ með SSÞ

Nú þegar við höfum skipulagt það sem komið er getum við þáttað þríliði með forystustuðul sem er ekki 1, það er þríliði af gerðinni $ax^2+bx+c$.

Munið að leita alltaf fyrst að SSÞ. Þegar SSÞ hefur verið tekinn út fyrir sviga verður forystustuðull þríliðarins stundum 1 og þá má nota aðferðir síðasta hluta. Skoðum nokkur dæmi.

Gætið að formerkjunum í næstu tveimur dæmum.

**DÆMI 7.30**

Fullþáttið: $2n^2-8n-42$.

## Lausn

Fylgið grunnferlinu.

| | |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? | $2n^2-8n-42$ |
| Já, SSÞ = 2. Takið hann út fyrir sviga. | $2\left(n^2-4n-21\right)$ |

Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði?

| | |
|---|---|
| Hún er þríliður með forystustuðulinn 1, svo snúið FOIL-aðferðinni við. | $2(n)(n)$ |
| Notið 3 og −7 sem síðari liði tvíliðanna. | $2(n+3)(n-7)$ |

| **Þættir** $-21$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1,-21$ | $1+(-21)=-20$ |
| $3,-7$ | $3+(-7)=-4*$ |

Athugið.

$$2(n+3)(n-7)$$

$$2\left(n^2-7n+3n-21\right)$$

$$2\left(n^2-4n-21\right)$$

$$2n^2-8n-42\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.59**

Fullþáttið: $4m^2-4m-8$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.60**

Fullþáttið: $5k^2-15k-50$.

**DÆMI 7.31**

Fullþáttið: $4y^2-36y+56$.

## Lausn

Fylgið grunnferlinu.

| | |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? | $4y^2-36y+56$ |
| Já, SSÞ = 4. Takið hann út fyrir sviga. | $4\left(y^2-9y+14\right)$ |
| Skref 2. Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | |
| Hún er þríliður með forystustuðulinn 1. Snúið því FOIL-aðferðinni við. | $4(y)(y)$ |
| Notið töflu eins og hér fyrir neðan til að finna tvær tölur sem hafa margfeldið 14 og summuna −9. | |
| Báðir þættir 14 verða að vera neikvæðir. | $4(y-2)(y-7)$ |

| **Þættir** $14$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $-1,-14$ | $-1+(-14)=-15$ |
| $-2,-7$ | $-2+(-7)=-9*$ |

Athugið.

$$4(y-2)(y-7)$$

$$4\left(y^2-7y-2y+14\right)$$

$$4\left(y^2-9y+14\right)$$

$$4y^2-36y+56\checkmark$$

7

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.61**

Fullþáttið: $3r^2-9r+6$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.62**

Fullþáttið: $2t^2-10t+12$.

Í næsta dæmi inniheldur SSÞ breytu.

**DÆMI 7.32**

Fullþáttið: $4u^3+16u^2-20u$.

## Lausn

Fylgið grunnferlinu.

| | |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? | $4u^3+16u^2-20u$ |
| Já, SSÞ = 4u. Takið hann út fyrir sviga. | $4u\left(u^2+4u-5\right)$ |
| Tvíliður, þríliður eða fleiri en þrír liðir? | |
| Þetta er þríliður. Snúið því FOIL-aðferðinni við. | $4u(u)(u)$ |
| Notið töflu eins og hér fyrir neðan til að finna tvær tölur sem hafa margfeldið −5 og summuna 4. | $4u(u-1)(u+5)$ |

| **Þættir** $-5$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $-1,5$ | $-1+5=4*$ |
| $1,-5$ | $1+(-5)=-4$ |

Athugið.

$$4u(u-1)(u+5)$$

$$4u\left(u^2+5u-u-5\right)$$

$$4u\left(u^2+4u-5\right)$$

$$4u^3+16u^2-20u\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.63**

Fullþáttið: $5x^3+15x^2-20x$.

7

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.64**

Fullþáttið: $6y^3+18y^2-60y$.

## Þáttið þríliði með prófun

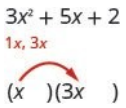
Hvað gerist þegar forystustuðullinn er ekki 1 og enginn SSÞ er til? Nota má nokkrar aðferðir til að þátta slíka þríliði. Fyrst notum við prófunaraðferðina.

Þáttum þríliðinn $3x^2+5x+2$.

Af fyrri dæmum má ætla að hann þáttist í tvo tvíliði.

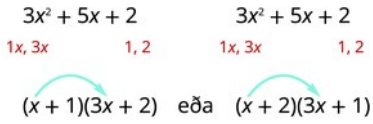
$$3x^2+5x+2$$
$$(\quad)(\quad)$$

Við vitum að fyrri liðir tvíliðaþáttanna margfaldast og gefa $3x^2$. Einu þættir $3x^2$ eru $1x, 3x$. Við getum sett þá í tvíliðina.

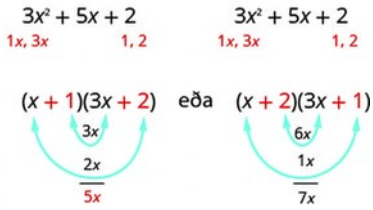



Athugið. Gildir $1x \cdot 3x = 3x^2$?

Við vitum að síðari liðir tvíliðanna margfaldast í 2. Allir liðir þríliðarins eru jákvæðir, svo við þurfum aðeins að skoða jákvæða þætti. Einu þættir 2 eru 1 og 2. Nú þarf þó að skoða tvö tilvik, því röðin skiptir máli: 1, 2 eða 2, 1.




Hvorir þættirnir eru réttir? Til að komast að því margföldum við innri og ytri liðina.




Þar sem miðliður þríliðarins er 5x, virka þættirnir í fyrra tilvikinu. Sannreynum með FOIL-aðferðinni.

$$(x+1)\,(3x+2)$$
$$3x^2+2x+3x+2$$
$$3x^2+5x+2\ \checkmark$$

Niðurstaða þáttunarinnar er:

$$3x^2+5x+2$$
$$(x+1)\,(3x+2)$$

---

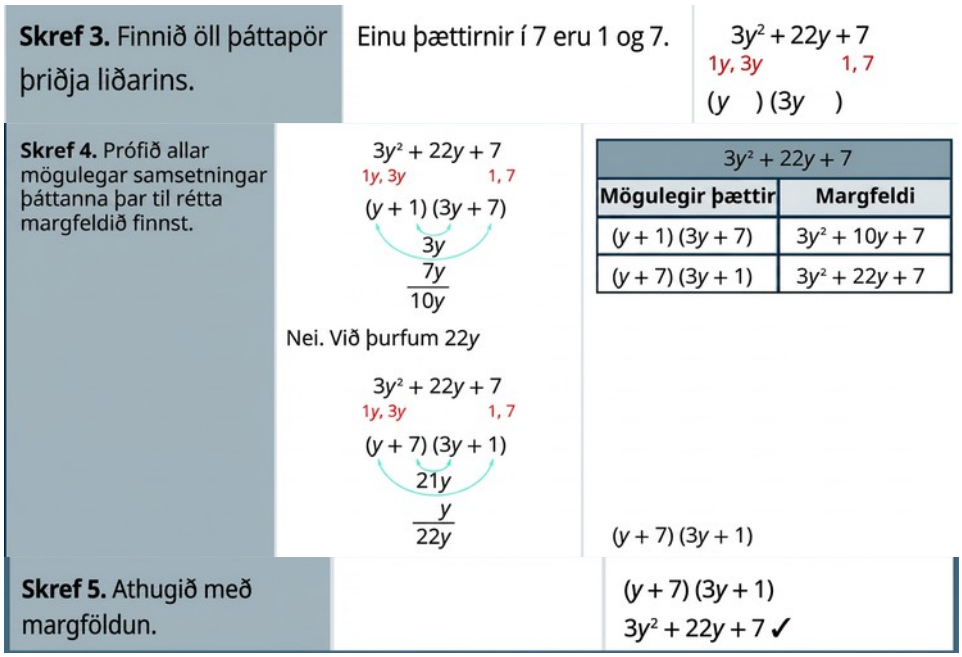
**DÆMI 7.33**

## Hvernig á að þátta þríliði af gerðinni $ax^2+bx+c$ með prófun

Fullþáttið: $3y^2+22y+7$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skrifið þríliðuna í lækkandi veldaröð. | Þríliðan er nú þegar í lækkandi veldaröð. | $3y^2+22y+7$ |
| **Skref 2.** Finnið öll þáttapör fyrsta liðarins. | Einu þættirnir í $3y^2$ eru $1y, 3y$<br><br>Þar sem aðeins er eitt par getum við sett þettina í svigana. | $3y^2+22y+7$<br>$1y, 3y$<br><br>$3y^2+22y+7$<br>$1y, 3y$<br>$(y\ \ )(3y\ \ )$ |




**PRÓFIÐ SJÁLF 7.65**

Fullþáttið: $2a^2+5a+3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.66**

Fullþáttið: $4b^2+5b+1$.

**AÐFERÐ**

7

### Þáttið þríliði af gerðinni $ax^2+bx+c$ með prófun.

1. Skref 1. Ritið þríliðinn eftir lækkandi veldum.
2. Skref 2. Finnið öll þáttapör fyrsta liðarins.
3. Skref 3. Finnið öll þáttapör þriðja liðarins.
4. Skref 4. Prófið allar mögulegar samsetningar þáttanna þar til rétta margfeldið finnst.
5. Skref 5. Sannreynið með margföldun.

Þegar miðliðurinn er neikvæður og síðasti liðurinn jákvæður verða formerkin í báðum tvíliðum að vera neikvæð.

**DÆMI 7.34**

Fullþáttið: $6b^2-13b+5$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þríliðurinn er þegar ritaður eftir lækkandi veldum. | $6b^2 - 13b + 5$ |
| Finnið þætti fyrsta liðarins. | $6b^2 - 13b + 5$<br>$1b \cdot 6b$<br>$2b \cdot 3b$ |
| Finnið þætti síðasta liðarins og gætið að formerkjunum. Þar sem síðasti liðurinn, 5, er jákvæður verða þættir hans annaðhvort báðir jákvæðir eða báðir neikvæðir. Stuðull miðliðarins er neikvæður og því notum við neikvæðu þættina. | $6b^2 - 13b + 5$<br>$1b \cdot 6b$ $\quad -1, -5$<br>$2b \cdot 3b$ |

Skoðið allar samsetningar þáttanna.

$6b^2 - 13b + 5$

| Mögulegir þættir | Margfeldi |
|---|---|
| $(b-1)(6b-5)$ | $6b^2 - 11b + 5$ |
| $(b-5)(6b-1)$ | $6b^2 - 31b + 5$ |
| $(2b-1)(3b-5)$ | $6b^2 - 13b + 5$ * |
| $(2b-5)(3b-1)$ | $6b^2 - 17b + 5$ |
| Réttu þættirnir eru þeir sem hafa upprunalega þríliðinn sem margfeldi. | $(2b-1)(3b-5)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$(2b-1)(3b-5)$$
$$6b^2 - 10b - 3b + 5$$
$$6b^2 - 13b + 5 \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.67**

Fullþáttið: $8x^2 - 14x + 3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.68**

Fullþáttið: $10y^2 - 37y + 7$.

Þegar við þáttum stæðu leitum við alltaf fyrst að stærsta sameiginlega þætti. Ef stæðan hefur engan stærsta sameiginlegan þátt geta þættir hennar heldur ekki haft slíkan þátt. Þetta getur hjálpað okkur að útiloka sumar mögulegar samsetningar.

**DÆMI 7.35**

Fullþáttið: $14x^2 - 47x - 7$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þríliðurinn er þegar ritaður eftir lækkandi veldum. | $14x^2 - 47x - 7$ |
| Finnið þætti fyrsta liðarins. | $14x^2 - 47x - 7$<br>$1x \cdot 14x$<br>$2x \cdot 7x$ |
| Finnið þætti síðasta liðarins og gætið að formerkjunum. Hann er neikvæður, svo annar þátturinn verður jákvæður og hinn neikvæður. | $14x^2 - 47x - 7$<br>$1x \cdot 14x$ $\quad 1, -7$<br>$2x \cdot 7x$ $\quad -1, 7$ |

Skoðið allar samsetningar þáttanna. Notið hvert þáttapar $14\,x^2$ með hverju þáttapari $-7$.

| **Þættir** $14\,x^2$ | **Parið við** | **Þættir** $-7$ |
|---|---|---|
| $x, 14\,x$ | | $1, -7$<br>$-7, 1$<br>(öfug röð) |
| $x, 14\,x$ | | $-1, 7$<br>$7, -1$<br>(öfug röð) |
| $2\,x, 7\,x$ | | $1, -7$<br>$-7, 1$<br>(öfug röð) |
| $2\,x, 7\,x$ | | $-1, 7$<br>$7, -1$<br>(öfug röð) |

Þessi pörun gefur átta samsetningar sem sjást hér á eftir.

7

| $14x^2 - 47x - 7$ | |
|---|---|
| **Mögulegir þættir** | **Margfeldi** |
| $(x + 1)(14x - 7)$ | Kemur ekki til greina |
| $(x - 7)(14x + 1)$ | $14x^2 - 97x - 7$ |
| $(x - 1)(14x + 7)$ | Kemur ekki til greina |
| $(x + 7)(14x - 1)$ | $14x^2 - 97x - 7$ |
| $(2x + 1)(7x - 7)$ | Kemur ekki til greina |
| $(2x - 7)(7x + 1)$ | $14x^2 - 47x - 7$* |
| $(2x - 1)(7x + 7)$ | Kemur ekki til greina |
| $(2x + 7)(7x - 1)$ | $14x^2 - 47x - 7$ |

Ef þríliðan hefur enga sameiginlega þætti getur hvorugur þátturinn innihaldið sameiginlegan þátt. Það merkir að engin þessara samsetninga kemur til greina.

| | |
|---|---|
| Réttu þættirnir eru þeir sem hafa upprunalega þríliðinn sem margfeldi. | $(2\,x - 7)(7\,x + 1)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$(2x - 7)(7x + 1)$$
$$14x^2 + 2x - 49x - 7$$
$$14x^2 - 47x - 7 \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.69**

Fullþáttið: $8a^2 - 3a - 5$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.70**

Fullþáttið: $6b^2 - b - 15$.

**DÆMI 7.36**

Fullþáttið: $18n^2 - 37n + 15$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Þríliðurinn er þegar ritaður eftir lækkandi veldum. | $18n^2 - 37n + 15$ |
| Finnið þætti fyrsta liðarins. | $18n^2 - 37n + 15$<br>$1n \cdot 18n$<br>$2n \cdot 9n$<br>$3n \cdot 6n$ |
| Finnið þætti síðasta liðarins og gætið að formerkjunum. Þar sem 15 er jákvætt og stuðull miðliðarins neikvæður notum við neikvæðu þættina. | $18n^2 - 37n + 15$<br>$1n \cdot 18n$ $\quad -1(-15)$<br>$2n \cdot 9n$ $\quad -3(-5)$<br>$3n \cdot 6n$ |

Skoðið allar samsetningar þáttanna.

| $18n^2 - 37n + 15$ | |
|---|---|
| **Mögulegir þættir** | **Margfeldi** |
| $(n - 1)(18n - 15)$ | Kemur ekki til greina |
| $(n - 15)(18n - 1)$ | $18n^2 - 271n + 15$ |
| $(n - 3)(18n - 5)$ | $18n^2 - 59n + 15$ |
| $(n - 5)(18n - 3)$ | Kemur ekki til greina |
| $(2n - 1)(9n - 15)$ | Kemur ekki til greina |
| $(2n - 15)(9n - 1)$ | $18n^2 - 137n + 15$ |
| $(2n - 3)(9n - 5)$ | $18n^2 - 37n + 15$* |
| $(2n - 5)(9n - 3)$ | Kemur ekki til greina |
| $(3n - 1)(6n - 15)$ | Kemur ekki til greina |
| $(3n - 15)(6n - 1)$ | Kemur ekki til greina |
| $(3n - 3)(6n - 5)$ | Kemur ekki til greina |
| $(3n - 5)(6n - 3)$ | Kemur ekki til greina |

Ef þríliðurinn hefur engan sameiginlegan þátt, þá má hvorugur þátturinn innihalda sameiginlegan þátt. Því kemur þessi samsetning ekki til greina.

| | |
|---|---|
| Réttu þættirnir eru þeir sem hafa upprunalega þríliðinn sem margfeldi. | $(2n - 3)(9n - 5)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$(2n - 3)(9n - 5)$$
$$18n^2 - 10n - 27n + 15$$
$$18n^2 - 37n + 15 \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.71**

Fullþáttið: $18x^2 - 3x - 10$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.72**

Fullþáttið: $30\,y^2 - 53\,y - 21$.

Gleymið ekki að leita fyrst að SSÞ.

**DÆMI 7.37**

Fullþáttið: $10\,y^4 + 55\,y^3 + 60\,y^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $10\,y^4 + 55\,y^3 + 60\,y^2$ |
| Finnið stærsta sameiginlega þáttinn og takið hann fyrst út fyrir sviga. | $15\,y^2\left(2\,y^2 + 11\,y + 12\right)$ |
| Þáttið þríliðinn. | $5y^2(2y^2 + 11y + 12)$<br>$y \cdot 2y$<br>$1 \cdot 12$<br>$2 \cdot 6$<br>$3 \cdot 4$ |

Skoðið allar samsetningar.

| $2y^2 + 11y + 12$ | |
|---|---|
| **Mögulegir þættir** | **Margfeldi** |
| $(y + 1)(2y + 12)$ | Kemur ekki til greina |
| $(y + 12)(2y + 1)$ | $2y^2 + 25y + 12$ |
| $(y + 2)(2y + 6)$ | Kemur ekki til greina |
| $(y + 6)(2y + 2)$ | Kemur ekki til greina |
| $(y + 3)(2y + 4)$ | Kemur ekki til greina |
| $(y + 4)(2y + 3)$ | $2y^2 + 11y + 12$* |

Ef þríliðan hefur enga sameiginlega þætti getur hvorugur þátturinn innihaldið sameiginlegan þátt. Því kemur þessi samsetning ekki til greina.

| | |
|---|---|
| Réttu þættirnir eru þeir sem hafa upprunalega þríliðinn sem margfeldi. Munið að hafa þáttinn 5 $y^2$ með. | $5\,y^2\left(y+4\right)\left(2\,y+3\right)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$5y^2\,(y+4)\,(2y+3)$$
$$5y^2\left(2y^2+8y+3y+12\right)$$
$$10y^4+55y^3+60y^2\ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.73**

Fullþáttið: $15\,n^3 - 85\,n^2 + 100\,n$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.74**

Fullþáttið: $56\,q^3 + 320\,q^2 - 96\,q$.

## Þáttið þríliði með ac-aðferðinni

Önnur leið til að þátta þríliði af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c$ er ac-aðferðin. (Hún er stundum kölluð flokkunaraðferð.) Ac-aðferðin er í raun útvíkkun á aðferðunum sem þið notuðuð í síðasta hluta til að þátta þríliði með forystustuðulinn einn. Aðferðin er mjög skipuleg, hún fer skref fyrir skref og virkar alltaf.

---

**DÆMI 7.38**

### Hvernig á að þátta þríliði með ac-aðferðinni

Þáttið: $6\,x^2+7\,x+2$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Takið út stærsta sameiginlega þáttinn, ef einhver er. | Er stærsti sameiginlegi þátturinn annar en 1? Nei. | $6x^2 + 7x + 2$ |
| **Skref 2.** Finnið margfeldið $ac$. | $a \cdot c$<br>$6 \cdot 2$<br>$12$ | $ax^2 + bx + c$<br>$6x^2 + 7x + 2$ |
| **Skref 3.** Finnið tvær tölur $m$ og $n$ sem:<br>hafa margfeldið $ac$ $\quad m \cdot n = a \cdot c$<br>hafa summuna $b$ $\quad m + n = b$ | Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið 12 og summuna 7.<br>Báðir þættirnir verða að vera jákvæðir.<br>$3 \cdot 4 = 12 \qquad 3 + 4 = 7$ | |
| **Skref 4.** Kljúfið miðliðinn með því að nota $m$ og $n$<br>$ax^2 + bx + c$<br>$ax^2 + mx + nx + c$<br>$ax^2 + mx + nx + c$ | Endurritið $7x$ sem $3x + 4x$.<br>Takið eftir að $6x^2 + 3x + 4x + 2$ er jafnt og $6x^2 + 7x + 2$. Við klufum einfaldlega miðliðinn til að fá hentugra form. | $6x^2 + 7x + 2$<br>$6x^2 + 3x + 4x + 2$ |
| **Skref 5.** Þáttið með því að flokka saman. | | $3x(2x + 1) + 2(2x + 1)$<br>$(2x + 1)(3x + 2)$ |
| **Skref 6.** Athugið með margföldun. | | $(2x + 1)(3x + 2)$<br>$6x^2 + 4x + 3x + 2$<br>$6x^2 + 7x + 2$ ✓ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.75**

Þáttið: $6\,x^2+13\,x+2$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.76**

Þáttið: $4\,y^2+8\,y+3$.

**AÐFERÐ**

### Þáttið þríliði með ac-aðferðinni.

1. Skref 1. Takið SSÞ út fyrir sviga, ef hann er til.
2. Skref 2. Finnið margfeldið ac.
3. Skref 3. Finnið tvær tölur m og n þannig að:

| | |
|---|---|
| margfeldi þeirra sé $ac$ | $m \cdot n = a \cdot c$ |
| summa þeirra sé $b$ | $m + n = b$ |

4. Skref 4. Kljúfið miðliðinn með m og n: $ax^2 + bx + c$ → $ax^2 + mx + nx + c$
5. Skref 5. Þáttið með flokkun.
6. Skref 6. Sannreynið með því að margfalda þættina.

Þegar þriðji liður þríliðarins er neikvæður hafa þættir hans gagnstæð formerki.

**DÆMI 7.39**

Þáttið: $8u^2 - 17u - 21$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur?<br>Nei. | $ax^2 + bx + c$<br>$8u^2 - 17u - 21$ |
| Finnið $a \cdot c$. | $a \cdot c$ |
| | $8(-21)$ |
| | $-168$ |

Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið $-168$ og summuna $-17$. Stærri þátturinn að algildi verður að vera neikvæður.

| **Þættir** $-168$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1, -168$ | $1 + (-168) = -167$ |
| $2, -84$ | $2 + (-84) = -82$ |
| $3, -56$ | $3 + (-56) = -53$ |
| $4, -42$ | $4 + (-42) = -38$ |
| $6, -28$ | $6 + (-28) = -22$ |
| $7, -24$ | $7 + (-24) = -17*$ |
| $8, -21$ | $8 + (-21) = -13$ |

| **Þættir** $-168$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| Kljúfið miðliðinn með $7u$ og $-24u$. | $8u^2 - 17u - 21$<br>$8u^2 + 7u - 24u - 21$ |
| Þáttið með flokkun. | $u(8u+7) - 3(8u+7)$<br>$(8u+7)(u-3)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$(8u+7)(u-3)$$
$$8u^2 - 24u + 7u - 21$$
$$8u^2 - 17u - 21 \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.77**

Þáttið: $20h^2+13h-15$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.78**

Þáttið: $6g^2+19g-20$.

**DÆMI 7.40**

Þáttið: $2x^2+6x+5$.

## Lausn

| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? Nei. | $ax^2 + bx + c$<br>$2x^2 + 6x + 5$ |
|---|---|
| Finnið $a \cdot c$. | $a \cdot c$ |
| | $2(5)$ |
| | $10$ |

Finnið tvær tölur sem hafa margfeldið 10 og summuna 6.

| **Þættir** $10$ | **Summa þáttanna** |
|---|---|
| $1, 10$ | $1+10=11$ |
| $2, 5$ | $2+5=7$ |

Engir þættir hafa margfeldið 10 og summuna 6. Margliðan er óþáttanleg.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.79**

Þáttið: $10t^2+19t-15$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.80**

Þáttið: $3u^2+8u+5$.

Gleymið ekki að leita að sameiginlegum þætti.

**DÆMI 7.41**

Þáttið: $10y^2-55y+70$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Er til stærsti sameiginlegi þáttur? Já. SSÞ er 5. | $10y^2-55y+70$ |
| Takið hann út fyrir sviga. Gætið þess að hafa þáttinn 5 með í hverju skrefi lausnarinnar. | $5(2y^2-11y+14)$ |
| Þríliðurinn innan sviganna hefur forystustuðul sem er ekki 1. | $ax^2+bx+c$<br>$5(2y^2-11y+14)$ |
| Þáttið þríliðinn. | $5(y-2)(2y-7)$ |
| Sannreynið með því að margfalda alla þrjá þættina. | |
| $5\left(2y^2-2y-4y+14\right)$ | |
| $5\left(2y^2-11y+14\right)$ | |
| $10y^2-55y+70\checkmark$ | |

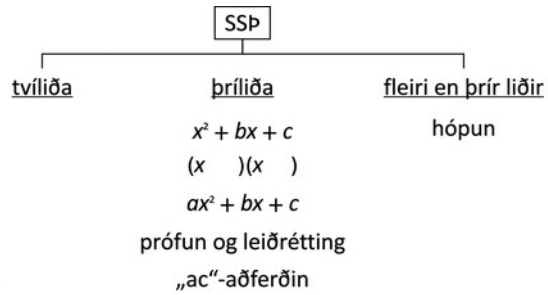
**PRÓFIÐ SJÁLF 7.81**

Þáttið: $16x^2-32x+12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.82**

Þáttið: $18w^2-39w+18$.

Nú getum við uppfært grunnferlið við þáttun, eins og sýnt er á mynd 7.2 og lýst nánar í Veljið aðferð til að fullþátta margliður (uppfært), svo það taki einnig til þríliða af gerðinni $ax^2+bx+c$. Munið að sumar margliður eru óþáttanlegar og því ekki hægt að þátta þær.




Mynd 7.2

---

**AÐFERÐ**

## Veljið aðferð til að fullþátta margliður (uppfært).

1. Skref 1.
   Er til stærsti sameiginlegi þáttur?
   - Takið hann út fyrir sviga.
2. Skref 2.
   Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði?
   - Ef hún er tvíliður höfum við enn enga aðferð til að þátta hana.
   - Ef hún er þríliður af gerðinni $x^2+b\,x+c$
     Snúið FOIL-aðferðinni við $(x)(x)$.
   - Ef hún er þríliður af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c$
     Notið prófun eða ac-aðferðina.
   - Ef hún hefur fleiri en þrjá liði Notið þáttun með flokkun.
3. Skref 3. Sannreynið með því að margfalda þættina.

---

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Opnið þessi netgögn til að fá frekari útskýringar og verkefni um þáttun þríliða af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c$.

- Þáttun þríliða þar sem a er ekki 1

## Verkefni úr hluta 7.3

### *Æfingin skapar meistarann*

**Þekkið grunnferli við fullþáttun margliða**

Veljið bestu aðferðina til að þátta hverja margliðu í verkefnunum hér á eftir.

135.

1. ⓐ $10\,q^2+50$
2. ⓑ $a^2-5\,a-14$

**3.** ⓒ $u\,v+2\,u+3\,v+6$

136.

**1.** ⓐ $n^2+10\,n+24$
**2.** ⓑ $8\,u^2+16$
**3.** ⓒ $p\,q+5\,p+2\,q+10$

137.

**1.** ⓐ $x^2+4\,x-21$
**2.** ⓑ $a\,b+10\,b+4\,a+40$
**3.** ⓒ $6\,c^2+24$

138.

**1.** ⓐ $20\,x^2+100$
**2.** ⓑ $u\,v+6\,u+4\,v+24$
**3.** ⓒ $y^2-8\,y+15$

### Þáttið þríliði af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c$ með SSÞ

Fullþáttið í eftirfarandi verkefnum.

139.

$$5\,x^2+35\,x+30$$

140.

$$12\,s^2+24\,s+12$$

141.

$$2\,z^2-2\,z-24$$

142.

$$3\,u^2-12\,u-36$$

143.

$$7\,v^2-63\,v+56$$

144.

$$5\,w^2-30\,w+45$$

145.

$$p^3-8\,p^2-20\,p$$

146.

$$q^3-5\,q^2-24\,q$$

147.

$$3m^3 - 21m^2 + 30m$$

148.

$$11n^3 - 55n^2 + 44n$$

149.

$$5x^4 + 10x^3 - 75x^2$$

150.

$$6y^4 + 12y^3 - 48y^2$$

**Þáttið þríliði með prófun**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

151.

$$2t^2 + 7t + 5$$

152.

$$5y^2 + 16y + 11$$

153.

$$11x^2 + 34x + 3$$

154.

$$7b^2 + 50b + 7$$

155.

$$4w^2 - 5w + 1$$

156.

$$5x^2 - 17x + 6$$

157.

$$6p^2 - 19p + 10$$

158.

$$21m^2 - 29m + 10$$

159.

$$4q^2 - 7q - 2$$

160.

$$10\,y^2-53\,y-11$$

161.

$$4\,p^2+17\,p-15$$

162.

$$6\,u^2+5\,u-14$$

163.

$$16\,x^2-32\,x+16$$

164.

$$81\,a^2+153\,a-18$$

165.

$$30\,q^3+140\,q^2+80\,q$$

166.

$$5\,y^3+30\,y^2-35\,y$$

**Þáttið þríliði með ac-aðferðinni**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

167.

$$5\,n^2+21\,n+4$$

168.

$$8\,w^2+25\,w+3$$

169.

$$9\,z^2+15\,z+4$$

170.

$$3\,m^2+26\,m+48$$

171.

$$4\,k^2-16\,k+15$$

172.

$$4\,q^2-9\,q+5$$

173.

$$5s^2 - 9s + 4$$

174.

$$4r^2 - 20r + 25$$

175.

$$6y^2 + y - 15$$

176.

$$6p^2 + p - 22$$

177.

$$2n^2 - 27n - 45$$

178.

$$12z^2 - 41z - 11$$

179.

$$3x^2 + 5x + 4$$

180.

$$4y^2 + 15y + 6$$

181.

$$60y^2 + 290y - 50$$

182.

$$6u^2 - 46u - 16$$

183.

$$48z^3 - 102z^2 - 45z$$

184.

$$90n^3 + 42n^2 - 216n$$

185.

$$16s^2 + 40s + 24$$

186.

$$24p^2 + 160p + 96$$

187.

$$48y^2+12y-36$$

188.

$$30x^2+105x-60$$

**Blönduð verkefni**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

189.

$$12y^2-29y+14$$

190.

$$12x^2+36y-24z$$

191.

$$a^2-a-20$$

192.

$$m^2-m-12$$

193.

$$6n^2+5n-4$$

194.

$$12y^2-37y+21$$

195.

$$2p^2+4p+3$$

196.

$$3q^2+6q+2$$

197.

$$13z^2+39z-26$$

198.

$$5r^2+25r+30$$

199.

$$x^2+3x-28$$

200.

$$6u^2+7u-5$$

201.

$$3p^2+21p$$

202.

$$7x^2-21x$$

203.

$$6r^2+30r+36$$

204.

$$18m^2+15m+3$$

205.

$$24n^2+20n+4$$

206.

$$4a^2+5a+2$$

207.

$$x^2+2x-24$$

208.

$$2b^2-7b+4$$



### *Stærðfræði daglegs lífs*

**209.** **Hæð leikfangaeldflaugar** Leikfangaeldflaug er skotið af svölum fjölbýlishúss með upphafshraðann 80 fet á sekúndu. Hæð hennar tengist fjölda sekúndna, t, frá því henni er skotið á loft með þríliðnum $-16t^2+80t+96$. Fullþáttið þríliðinn.

**210.** **Hæð strandbolta** Strandbolta er kastað upp úr 4 feta hæð með upphafshraðann 12 fet á sekúndu. Hæð hans tengist fjölda sekúndna, t, frá kastinu með þríliðnum $-16t^2+12t+4$. Fullþáttið þríliðinn.

### *Ritunarverkefni*

**211.** Teljið í réttri röð upp öll skrefin sem þið takið þegar þið notið ac-aðferðina til að þátta þrílið af gerðinni $ax^2+bx+c$.

**212.** Að hvaða leyti líkist ac-aðferðin því að snúa FOIL-aðferðinni við? Að hvaða leyti er hún ólík?

**213.** Hvaða spurninga spyrjið þið ykkur, í réttri röð, þegar þið byrjið að þátta margliðu? Hvað þurfið þið að gera eftir því hvert svarið við hverri spurningu er?

**214.** Teiknið á blað töfluna sem tekur saman þáttunaraðferðina. Reynið að gera það án þess að líta í bókina. Notið síðan bókina til að ljúka við töfluna eða sannreyna hana.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| valið fyrstu aðferð til að fullþátta margliður. | | | |
| þáttað þríliði af gerðinni $ax^2 + bx + c$ með því að taka stærsta samdeili út fyrir sviga. | | | |
| þáttað þríliði með prófun og leiðréttingu. | | | |
| þáttað þríliði með „*ac*"-aðferðinni. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um það hversu vel þið hafið náð tökum á efni hlutans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 7.4 Þáttið sérstök margfeldi

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Þáttið fullkomna ferningsþríliði
- Þáttið mismun ferninga
- Þáttið summu og mismun teninga
- valið aðferð til að fullþátta margliðu

**RIFJIÐ UPP 7.11**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Einfaldið: $(12x)^2$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 6.23.

**RIFJIÐ UPP 7.12**

Margfaldið: $(m+4)^2$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 6.47.

**RIFJIÐ UPP 7.13**

Margfaldið: $(p-9)^2$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 6.48.

**RIFJIÐ UPP 7.14**

Margfaldið: $(k+3)(k-3)$.

Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 6.52.

Þáttunaraðferðin sem við settum fram í síðasta hluta hjálpar ykkur að þátta flesta tvíliði, þríliði og margliður með fleiri en þrjá liði. Við höfum séð að sumir tvíliðir og þríliðir verða til sem sérstök margfeldi þegar tvíliður er hafinn í annað veldi eða samokar margfaldaðir saman. Ef þið lærið að þekkja þessar gerðir margliða getið þið notað reglur sérstakra margfelda til að þátta þær mun hraðar.

## Þáttið fullkomna ferningsþríliði

Sumir þríliðir eru fullkomnir ferningar. Þeir myndast þegar tvíliður er margfaldaður með sjálfum sér. Hægt er að hefja tvílið í annað veldi með FOIL-aðferðinni, en reglan um annað veldi tvíliðar, sem þið sáuð í fyrri kafla, sparar eitt skref. Rifjum regluna upp með því að hefja tvílið í annað veldi með FOIL-aðferðinni.

$$(3x+4)^2$$
$$(3x+4)(3x+4)$$
$$\underset{9x^2}{F} + \underset{12x}{O} + \underset{12x}{I} + \underset{16}{L}$$
$$9x^2+24x+16$$

Fyrsti liðurinn er annað veldi fyrri liðar tvíliðarins og síðasti liðurinn annað veldi síðari liðarins. Miðliðurinn er tvöfalt margfeldi liðanna tveggja í tvíliðnum.

$$(3x)^2 + 2\,(3x \cdot 4) + 4^2$$
$$9x^2 + 24x + 16$$

Þríliðurinn $9x^2 + 24x + 16$ kallast fullkominn ferningsþríliður. Hann er annað veldi tvíliðarins $3x + 4$.

Hér er reglan um annað veldi tvíliðar aftur svo að þið getið stuðst við hana við þáttun.

**FERNINGSREGLA TVÍLIÐA**

Ef a og b eru rauntölur,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Þegar tvíliður er hafinn í annað veldi er margfeldið fullkominn ferningsþríliður. Í þessum kafla lærið þið þáttun. Nú byrjið þið með fullkominn ferningsþrílið og þáttið hann í óþáttanlega þætti.

Þið gætuð þáttað þennan þrílið með aðferðunum úr síðasta hluta því að hann er af gerðinni $ax^2 + bx + c$. En ef þið sjáið að fyrsti og síðasti liðurinn eru ferningar og þríliðurinn fylgir reglunni um fullkomna ferningsþríliði, sparið þið ykkur mikla vinnu.

Hér er reglan — öfug við regluna um annað veldi tvíliðar.

---

**REGLA UM FULLKOMNA FERNINGSÞRÍLIÐI**

Ef a og b eru rauntölur,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Til að nota regluna þurfið þið að sjá að þríliðurinn fylgi henni. Athugið fyrst hvort forystustuðullinn sé fullkominn ferningur, $a^2$. Athugið síðan hvort síðasti liðurinn sé fullkominn ferningur, $b^2$. Athugið loks miðliðinn: er hann tvöfalt margfeldið, 2ab? Ef allt stenst er auðvelt að rita þættina.

---

**DÆMI 7.42**

## Hvernig á að þátta fullkomna ferningsþríliði

Þáttið: $9x^2+12x+4$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Passar þríliðan við mynstur fullkominnar ferningsþríliðu, $a^2 + 2ab + b^2$? | | |
| • Er fyrsti liðurinn fullkominn ferningur? Ritið hann sem ferning, $a^2$. | Er $9x^2$ fullkominn ferningur? Já—ritið það sem $(3x)^2$. | $9x^2 + 12x + 4$<br>$(3x)^2$ |
| • Er síðasti liðurinn fullkominn ferningur? Ritið hann sem ferning, $b^2$. | Er 4 fullkominn ferningur? Já—ritið það sem $(2)^2$. | $(3x)^2$ $(2)^2$ |
| • Athugið miðliðinn. Er hann $2ab$? | Er $12x$ tvöfalt margfeldi $3x$ og 2? | $(3x)^2$ $(2)^2$ |
| | Stemmir það? Já, þannig að við höfum fullkomna ferningsþríliðu! | $2(3x)(2)$<br>$12x$ |
| **Skref 2.** Skrifið ferning tvíliðunnar. | Skrifið það sem ferning tvíliðu. | $9x^2 + 12x + 4$<br>$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$<br>$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2$<br>$(a + b)^2$<br>$(3x + 2)^2$ |

**Skref 3.** Athugið.

$$(3x+2)^2$$
$$(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2+2^2$$
$$9x^2+12x+4\ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.83**

Þáttið: $4x^2+12x+9$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.84**

Þáttið: $9y^2+24y+16$.

Formerki miðliðarins segir til um hvora regluna við notum. Þegar miðliðurinn er neikvæður notum við regluna $a^2-2ab+b^2$, sem þáttast í $(a-b)^2$.

Skrefin eru tekin saman hér.

**AÐFERÐ**

## Þáttið fullkomna ferningsþríliði.

**Skref 1.** Fylgir þríliðurinn reglunni?

$$a^2+2ab+b^2$$
$$a^2-2ab+b^2$$

• Er fyrsti liðurinn fullkominn ferningur?

$$(a)^2$$
$$(a)^2$$

Ritið hann sem ferning.

• Er síðasti liðurinn fullkominn ferningur?

$$(a)^2 \quad (b)^2$$
$$(a)^2 \quad (b)^2$$

Ritið hann sem ferning.

• Athugið miðliðinn. Er hann

$$2ab\,?\quad (a)^2 \searrow_{2\cdot a\cdot b} \swarrow (b)^2$$
$$(a)^2 \searrow_{2\cdot a\cdot b} \swarrow (b)^2$$

7

**Skref 2.** Ritið annað veldi tvíliðarins.

$$(a+b)^2$$

$$(a-b)^2$$

**Skref 3.** Sannreynið með margföldun.

Nú leysum við dæmi þar sem miðliðurinn er neikvæður.

---

**DÆMI 7.43**

Þáttið: $81y^2-72y+16$.

## Lausn

Fyrsti og síðasti liðurinn eru ferningar. Athugið hvort miðliðurinn fylgi reglunni um fullkominn ferningsþrílið. Miðliðurinn er neikvæður og því væri annað veldi tvíliðarins $(a-b)^2$.

| | |
|---|---|
| | $81y^2-72y+16$ |
| Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir ferningar? | $(9y)^2$ $(4)^2$ |
| Athugið miðliðinn. | $(9y)^2$ $(4)^2$ <br> $2(9y)(4)$ <br> $72y$ |
| Samsvarar hann $(a-b)^2$? Já. | $a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ <br> $(9y)^2-2\cdot 9y\cdot 4+4^2$ |
| Ritið annað veldi tvíliðar. | $(9y-4)^2$ |
| Sannreynið með margföldun. | |
| $(9y-4)^2$ | |
| $(9y)^2-2\cdot 9y\cdot 4+4^2$ | |
| $81y^2-72y+16$ ✓ | |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.85**

Þáttið: $64y^2-80y+25$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.86**

Þáttið: $16z^2-72z+81$.

Næsta dæmi er fullkominn ferningsþríliður með tveimur breytum.

**DÆMI 7.44**

Þáttið: $36\,x^2+84\,x\,y+49\,y^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $36x^2 + 84xy + 49y^2$ |
| Prófið hvern lið til að sannreyna regluna. | $a^2 \quad +2 \quad a \quad b \quad + \quad b^2$<br>$(6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 7y + (7y)^2$ |
| Þáttið. | $(6x + 7y)^2$ |
| Sannreynið með margföldun. | |
| $(6\,x+7\,y)^2$ | |
| $(6\,x)^2+2\cdot 6\,x\cdot 7\,y+(7\,y)^2$ | |
| $36\,x^2+84\,x\,y+49\,y^2$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.87**

Þáttið: $49\,x^2+84\,x\,y+36\,y^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.88**

Þáttið: $64\,m^2+112\,m\,n+49\,n^2$.

**DÆMI 7.45**

Þáttið: $9\,x^2+50\,x+25$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $9x^2 + 50x + 25$ |
| Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir ferningar? | $(3x)^2 \qquad (5)^2$ |
| Athugið miðliðinn — er hann $2\,a\,b$ ? | $(3x)^2$ ↘ $2(3x)(5)$ ↙ $(5)^2$<br>$30x$ |
| Nei! $30\,x \neq 50\,x$ | Þetta fylgir ekki reglunni. |
| Þáttið með ac-aðferðinni. | $9\,x^2+50\,x+25$ |

Takið eftir: $\begin{matrix} a\,c \\ 9\cdot 25 \\ 225 \end{matrix}$ og $\begin{matrix} \\ 5\cdot 45=225 \\ 5+45=50 \end{matrix}$

Klofið miðliðinn. Þáttið með flokkun.

$$9x^2+5x+45x+25$$
$$x\left(9x+5\right)+5\left(9x+5\right)$$
$$\left(9x+5\right)\left(x+5\right)$$

Athugið.

$$\left(9x+5\right)\left(x+5\right)$$
$$9x^2+45x+5x+25$$
$$9x^2+50x+25\ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.89**

Þáttið: $16\,r^2+30\,r\,s+9\,s^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.90**

Þáttið: $9\,u^2+87\,u+100$.

Munið fyrsta skrefið í aðferð okkar við þáttun margliða. Það er að spyrja: „Er til stærsti sameiginlegi þáttur?“ Ef svo er takið þið SSÞ út fyrir sviga áður en þið haldið áfram. Fullkomnir ferningsþríliðir geta haft SSÞ í öllum þremur liðum og þá takið þið hann fyrst út fyrir sviga. Stundum kemur fullkominn ferningsþríliður ekki í ljós fyrr en SSÞ hefur verið tekinn út fyrir sviga.

**DÆMI 7.46**

Þáttið: $36\,x^2\,y-48\,x\,y+16\,y$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $36x^2y-48xy+16y$ |
| Er til SSÞ? Já, 4y, svo takið hann út fyrir sviga. | $4y\left(9x^2-12x+4\right)$ |
| Er þetta fullkominn ferningsþríliður? | |
| Sannreynið regluna. | $4y[(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2]$ <br> $a^2 \quad -2 \quad a \quad b+b^2$ |
| Þáttið. | $4y\left(3x-2\right)^2$ |
| Munið að halda þættinum 4y í lokamargfeldinu. | |
| Athugið. | |
| $4y\left(3x-2\right)^2$ | |
| $4y\left[\left(3x\right)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2\right]$ | |
| $4y\left(9x\right)^2-12x+4$ | |
| $36x^2y-48xy+16y\checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.91**

Þáttið: $8x^2y-24xy+18y$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.92**

Þáttið: $27p^2q+90pq+75q$.

## Þáttið mismun ferninga

Hitt sérstaka margfeldið sem þið sáuð í fyrri kafla var reglan um margfeldi samoka. Þið notuðuð hana til að margfalda tvo samoka tvíliði. Hér er dæmi:

$$(3x-4)(3x+4)$$
$$9x^2-16$$

Munið að þegar samokar tvíliðir eru margfaldaðir leggjast miðliðir margfeldisins saman í 0. Eftir stendur tvíliður, mismunur ferninga.

Margföldun samoka er eina leiðin til að fá tvílið sem margfeldi tveggja tvíliða.

**REGLAN UM MARGFELDI SAMOKA**

Ef a og b eru rauntölur

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

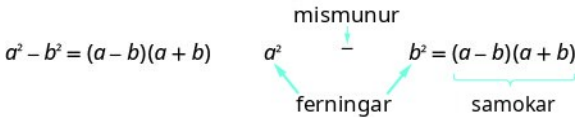
Margfeldið kallast mismunur ferninga.

Til að þátta mismun ferninga notum við margfeldisregluna „afturábak“. Mismunur ferninga þáttast í margfeldi samoka.

---

**REGLA UM MISMUN FERNINGA**

Ef a og b eru rauntölur,




Munið að „mismunur“ vísar til frádráttar. Til að nota regluna þurfið þið því að ganga úr skugga um að þetta sé tvíliður þar sem einn ferningur er dreginn frá öðrum.

---

**DÆMI 7.47**

### Hvernig á að þátta mismun ferninga

Þáttið: $x^2 - 4$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Passar tvíliðan við mynstrið? | | $x^2 - 4$ |
| • Er þetta mismunur? | Já | $x^2 - 4$ |
| • Eru fyrsti og síðasti liðurinn ferningstölur? | Já | |
| **Skref 2.** Skrifið þá sem ferninga. | Skrifið þá sem $x^2$ sem $x^2$. | $a^2 - b^2$<br>$(x)^2 - 2^2$ |
| **Skref 3.** Skrifið margfeldi samokanna. | | $(a-b)\,(a+b)$<br>$(x-2)(x+2)$ |
| **Skref 4.** Athugið. | | $(x-2)(x+2)$<br>$x^2 - 4$ ✓ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.93**

Þáttið: $h^2 - 81$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.94**

Þáttið: $k^2 - 121$.

**AÐFERÐ**

## Þáttið mismun ferninga.

Skref 1. Fylgir tvíliðurinn reglunni? $a^2 - b^2$

- Er þetta mismunur? $____ - ____$
- Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir ferningar?

Skref 2. Ritið þá sem ferninga. $(a)^2 - (b)^2$

Skref 3. Ritið margfeldi samokanna. $(a-b)(a+b)$

Skref 4. Sannreynið með margföldun.

Mikilvægt er að muna að summa ferninga þáttast ekki í margfeldi tvíliða. Engir tvíliðaþættir margfaldast saman og gefa summu ferninga. Þegar hugsanlegur SSÞ hefur verið tekinn út fyrir sviga er stæðan $a^2+b^2$ óþáttanleg.

Gleymið ekki að 1 er fullkominn ferningur. Við þurfum að nota það í næsta dæmi.

**DÆMI 7.48**

Þáttið: $64y^2 - 1$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $64y^2 - 1$ |
| Er þetta mismunur? Já. | $64y^2 - 1$ |
| Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir ferningar? | |
| Já — ritið þá sem ferninga. | $a^2 - b^2$<br>$(8y)^2 - 1^2$ |
| Þáttið sem margfeldi samoka. | $(a - b)(a + b)$<br>$(8y - 1)(8y + 1)$ |
| Sannreynið með margföldun. | |
| $(8y-1)(8y+1)$ | |
| $64y^2 - 1$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.95**

Þáttið: $m^2 - 1$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.96**

Þáttið: $81y^2 - 1$.

**DÆMI 7.49**

Þáttið: $121\,x^2 - 49\,y^2$.

## Lausn

$$121\,x^2 - 49\,y^2$$

Er þetta mismunur ferninga? Já. $(11\,x)^2 - (7\,y)^2$

Þáttið sem margfeldi samoka. $(11\,x - 7\,y)(11\,x + 7\,y)$

Sannreynið með margföldun.

$$(11\,x - 7\,y)(11\,x + 7\,y)$$
$$121\,x^2 - 49\,y^2 \ \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.97**

Þáttið: $196\,m^2 - 25\,n^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.98**

Þáttið: $144\,p^2 - 9\,q^2$.

Tvíliðurinn í næsta dæmi kann að virðast „öfugur“, en hann er samt mismunur ferninga.

**DÆMI 7.50**

Þáttið: $100 - h^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $100 - h^2$ |
| Er þetta mismunur ferninga? Já. | $(10)^2 - (h)^2$ |
| Þáttið sem margfeldi samoka. | $(10 - h)(10 + h)$ |
| Sannreynið með margföldun.<br>$(10 - h)\,(10 + h)$<br>$100 - h^2$ ✓ | |
| Gætið þess að umrita upprunalegu stæðuna ekki sem $h^2 - 100$. | |

Þáttið $h^2 - 100$ sjálf og takið síðan eftir því hvernig niðurstaðan er frábrugðin $(10-h)(10+h)$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.99**

Þáttið: $144 - x^2$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.100**

Þáttið: $169 - p^2$.

Til að fullþátta tvíliðinn í næsta dæmi þáttum við mismun ferninga tvisvar.

---

**DÆMI 7.51**

Þáttið: $x^4 - y^4$.

## Lausn

| | $x^4 - y^4$ |
|---|---|
| Er þetta mismunur ferninga? Já. | $(x^2)^2 - (y^2)^2$ |
| Þáttið hann sem margfeldi samoka. | $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ |
| Takið eftir að fyrri tvíliðurinn er einnig mismunur ferninga. | $((x)^2 - (y)^2)(x^2 + y^2)$ |
| Þáttið hann sem margfeldi samoka. Síðasta þáttinn, summu ferninga, er ekki hægt að þátta. | $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$$
$$[(x-y)(x+y)](x^2+y^2)$$
$$(x^2-y^2)(x^2+y^2)$$
$$x^4 - y^4 \checkmark$$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.101**

Þáttið: $a^4 - b^4$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.102**

Þáttið: $x^4 - 16$.

Þegar þið þáttið stæðu skuluð þið alltaf leita fyrst að sameiginlegum þætti. Stundum getur sameiginlegur þáttur „falið“ mismun ferninga þannig að þið sjáið ekki fullkomnu ferningana fyrr en SSÞ hefur verið tekinn út fyrir sviga.

---

**DÆMI 7.52**

Þáttið: $8\,x^2\,y - 98\,y$.

## Lausn

| | $8\,x^2\,y - 98\,y$ |
|---|---|
| Er til SSÞ? Já, $2y$— takið hann út fyrir sviga! | $2\,y\left(4\,x^2 - 49\right)$ |
| Er tvíliðurinn mismunur ferninga? Já. | $2\,y\left((2\,x)^2 - (7)^2\right)$ |
| Þáttið sem margfeldi samoka. | $2\,y\,(2\,x - 7)(2\,x + 7)$ |

Sannreynið með margföldun.

$$2y\,(2x - 7)\,(2x + 7)$$
$$2y\,[(2x - 7)\,(2x + 7)]$$
$$2y\left(4x^2 - 49\right)$$
$$8x^2y - 98y \checkmark$$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.103**

Þáttið: $7\,x\,y^2 - 175\,x$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.104**

Þáttið: $45\,a^2\,b - 80\,b$.

---

**DÆMI 7.53**

Þáttið: $6\,x^2 + 96$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $6x^2+96$ |
| Er til SSÞ? Já, 6 — takið hann út fyrir sviga. | $6\left(x^2+16\right)$ |
| Er tvíliðurinn mismunur ferninga? Nei, hann er summa ferninga. Summu ferninga er ekki hægt að þátta. | |
| Sannreynið með margföldun.<br>$6\left(x^2+16\right)$<br>$6x^2+96$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.105**

Þáttið: $8a^2+200$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.106**

Þáttið: $36y^2+81$.

## Þáttið summu og mismun teninga

Til er önnur sérstök þáttunarregla sem við notuðum ekki þegar við margfölduðum margliður. Það er reglan um summu og mismun teninga. Fyrst ritum við reglurnar og sannreynum þær síðan með margföldun.

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Við sannreynum fyrri regluna en þið sannreynið þá síðari sjálf.

| | |
|---|---|
| | $(a+b)\,(a^2-ab+b^2)$ |
| Beitið dreifireglu. | $a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$ |
| Margfaldið. | $a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$ |
| Sameinið samkynja liði. | $a^3+b^3$ |

**REGLA UM SUMMU OG MISMUN TENINGA**

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Reglurnar tvær eru mjög líkar, ekki satt? Gætið þó að formerkjunum í þáttunum. Formerki tvíliðaþáttarins er hið sama og í upprunalega tvíliðnum. Formerki miðliðar þríliðaþáttarins er andstætt formerkinu í upprunalega tvíliðnum. Ef þið þekkið formerkjamynstrið getur það auðveldað ykkur að muna reglurnar.

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
sama formerki
andstæð formerki

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
sama formerki
andstæð formerki

Ekki er hægt að þátta þríliðaþáttinn í reglunni um summu og mismun teninga.
Mjög gagnlegt er að læra að þekkja teninga heiltalnanna frá 1 til 10, rétt eins og þið hafið lært að þekkja ferninga. Teningar heiltalnanna frá 1 til 10 eru skráðir í töflu 7.2.

Tafla 7.2

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3$ | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |

**DÆMI 7.54**

7

## Hvernig á að þátta summu eða mismun teninga

Þáttið: $x^3+64$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Fellur tvíliðan að mynstri summu eða mismunar teninga? | | $x^3 + 64$ |
| • Er þetta summa eða mismunur? | Þetta er summa. | $x^3 + 64$ |
| • Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir teningar? | Já | |
| **2. skref.** Skrifið liðina sem þriðju veldi. | Skrifið þá sem $x^3$ og $4^3$ | $a^3 + b^3$<br>$x^3 + 4^3$ |
| **Skref 3.** Notið annaðhvort regluna um summu eða mismun teninga. | Þetta er summa teninga. | $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$<br>$(x + 4)(x^2 - 4x + 4^2)$ |
| **Skref 4.** Einfaldið innan sviganna. | Einfaldið $4^2$. | $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$ |

| | |
|---|---|
| **Skref 5.** Athugið með því að margfalda þættina. | $x^2 - 4x + 16$<br>$x + 4$<br>$4x^2 - 16x + 64$<br>$x^3 - 4x^2 + 16x$<br>$x^3 + 64$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.107**

Þáttið: $x^3+27$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.108**

Þáttið: $y^3+8$.

**AÐFERÐ**

### Þáttið summu eða mismun teninga.

Til að þátta summu eða mismun teninga:

1. Skref 1.
   Fylgir tvíliðurinn reglunni um summu eða mismun teninga?
   - Er þetta summa eða mismunur?
   - Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir teningar?
2. Skref 2. Ritið þá sem teninga.
3. Skref 3. Notið regluna um summu eða mismun teninga.
4. Skref 4. Einfaldið innan sviganna.
5. Skref 5. Sannreynið með því að margfalda þættina.

**DÆMI 7.55**

Þáttið: $x^3 - 1000$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $x^3 - 1000$ |
| Tvíliðurinn er mismunur. Fyrsti og síðasti liðurinn eru fullkomnir teningar. | |
| Ritið liðina sem teninga. | $a^3 - b^3$<br>$x^3 - 10^3$ |
| Notið regluna um mismun teninga. | $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$<br>$(x - 10)(x^2 + 10 \cdot x + 10^2)$ |
| Einfaldið. | $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$<br>$(x - 10)(x^2 + 10x + 100)$ |
| Sannreynið með margföldun. | |

$$
\begin{array}{l}
(x-10)\ \ (x^2+10x+100) \\
x^2+10x+100 \\
\qquad x-100 \\
\hline
x^3+10x^2+100x \\
\quad -10x^2-100x-1000\ \checkmark \\
\hline
x^3 \qquad\qquad -1000
\end{array}
$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.109**

Þáttið: $u^3 - 125$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.110**

Þáttið: $v^3 - 343$.

Gætið þess að nota rétt formerki í þáttum summu og mismunar teninga.

7

**DÆMI 7.56**

Þáttið: $512 - 125\,p^3$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $512 - 125p^3$ |
| Tvíliðurinn er mismunur. Fyrsti og síðasti liðurinn eru fullkomnir teningar. | |
| Ritið liðina sem teninga. | $a^3 - b^3$<br>$8^3 - (5p)^3$ |
| Notið regluna um mismun teninga. | $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$<br>$(8 - 5p)(8^2 + 8 \cdot 5p + (5p)^2)$ |
| Einfaldið. | $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$<br>$(8 - 5p)(64 + 40p + 25p^2)$ |
| Sannreynið með margföldun. | Þið sannreynið þetta sjálf. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.111**

Þáttið: $64 - 27x^3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.112**

Þáttið: $27 - 8y^3$.

**DÆMI 7.57**

Þáttið: $27u^3 - 125v^3$.

## Lausn

| | $27u^3 - 125v^3$ |
|---|---|
| Tvíliðurinn er mismunur. Fyrsti og síðasti liðurinn eru fullkomnir teningar. | |
| Ritið liðina sem teninga. | $(3u)^3 - (5v)^3$ |
| Notið regluna um mismun teninga. | $(3u - 5v)\left((3u)^2 + 3u \cdot 5v + (5v)^2\right)$ |
| Einfaldið. | $(3u - 5v)\left(9u^2 + 15uv + 25v^2\right)$ |
| Sannreynið með margföldun. | Þið sannreynið þetta sjálf. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.113**

Þáttið: $8x^3 - 27y^3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.114**

Þáttið: $1000m^3 - 125n^3$.

Í næsta dæmi tökum við SSÞ fyrst út fyrir sviga. Þá sjáum við að þetta er summa teninga.

**DÆMI 7.58**

Þáttið: $5m^3 + 40n^3$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $5m^3 + 40n^3$ |
| Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga. | $5(m^3 + 8n^3)$ |
| Tvíliðurinn er summa. Fyrsti og síðasti liðurinn eru fullkomnir teningar. | |
| Ritið liðina sem teninga. | $5\left(m^3 + (2n)^3\right)$ |
| Notið regluna um summu teninga. | $5\left(m + 2n\right)\left(m^2 - m \cdot 2n + (2n)^2\right)$ |
| Einfaldið. | $5\left(m + 2n\right)\left(m^2 - 2mn + 4n^2\right)$ |

Sannreynið. Þegar þið sannreynið getur verið auðveldara að margfalda fyrst saman þættina úr summu teninga og margfalda svo útkomuna með 5. Þið sjáið sjálf um margföldunina.

$$5\left(m+2n\right)\left(m^2-2mn+4n^2\right)$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.115**

Þáttið: $500\,p^3+4\,q^3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.116**

Þáttið: $432\,c^3+686\,d^3$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

7

Opnið þessi netgögn til að fá frekari útskýringar og verkefni um þáttun sérstakra margfelda.

- Summa og mismunur teninga
- Þáttun mismunar teninga

## Verkefni úr hluta 7.4

***Æfingin skapar meistarann***

**Þáttið fullkomna ferningsþríliði**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

215.

$$16\,y^2+24\,y+9$$

216.

$$25\,v^2+20\,v+4$$

217.

$$36s^2+84s+49$$

218.

$$49s^2+154s+121$$

219.

$$100x^2-20x+1$$

220.

$$64z^2-16z+1$$

221.

$$25n^2-120n+144$$

222.

$$4p^2-52p+169$$

223.

$$49x^2-28xy+4y^2$$

224.

$$25r^2-60rs+36s^2$$

225.

$$25n^2+25n+4$$

226.

$$100y^2-20y+1$$

227.

$$64m^2-16m+1$$

228.

$$100x^2-25x+1$$

229.

$$10k^2+80k+160$$

230.

$$64x^2-96x+36$$

231.

$$75u^3 - 30u^2v + 3uv^2$$

232.

$$90p^3 + 300p^2q + 250pq^2$$

**Þáttið mismun ferninga**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

233.

$$x^2 - 16$$

234.

$$n^2 - 9$$

235.

$$25v^2 - 1$$

236.

$$169q^2 - 1$$

237.

$$121x^2 - 144y^2$$

238.

$$49x^2 - 81y^2$$

239.

$$169c^2 - 36d^2$$

240.

$$36p^2 - 49q^2$$

241.

$$4 - 49x^2$$

242.

$$121 - 25s^2$$

243.

$$16z^4 - 1$$

244.

$$m^4 - n^4$$

245.

$$5q^2 - 45$$

246.

$$98r^3 - 72r$$

247.

$$24p^2 + 54$$

248.

$$20b^2 + 140$$

**Þáttið summu og mismun teninga**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

249.

$$x^3 + 125$$

250.

$$n^3 + 512$$

251.

$$z^3 - 27$$

252.

$$v^3 - 216$$

253.

$$8 - 343t^3$$

254.

$$125 - 27w^3$$

255.

$$8y^3 - 125z^3$$

256.

$$27x^3 - 64y^3$$

257.

$$7k^3+56$$

258.

$$6x^3-48y^3$$

259.

$$2-16y^3$$

260.

$$-2x^3-16y^3$$

**Blönduð verkefni**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

261.

$$64a^2-25$$

262.

$$121x^2-144$$

263.

$$27q^2-3$$

264.

$$4p^2-100$$

265.

$$16x^2-72x+81$$

266.

$$36y^2+12y+1$$

267.

$$8p^2+2$$

268.

$$81x^2+169$$

269.

$$125-8y^3$$

270.

$$27u^3+1000$$

271.

$$45n^2+60n+20$$

272.

$$48q^3-24q^2+3q$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**273.** **Garðhönnun** Sue og Alan ætla að koma fyrir ferningslaga sundlaug með 15 feta hlið í bakgarðinum. Þau ætla að leggja jafn breitt flísalagt svæði umhverfis laugina á alla vegu. Ef breidd þess er w, er heildarflatarmál laugarinnar og flísalagða svæðisins gefið með þríliðnum $4w^2+60w+225$. Þáttið þríliðinn.

**274.** **Viðgerð á húsi** Tólf feta stigi stendur upp við húsvegg og neðri endi hans er b fet frá húsinu. Hæðin sem stiginn nær upp eftir veggnum er ferningsrót tvíliðarins $144-b^2$. Þáttið tvíliðinn.

### *Ritunarverkefni*

**275.** Hvers vegna var mikilvægt að æfa sig í að nota ferningsreglu tvíliða í kaflanum um margföldun margliða?

**276.** Hvernig þekkið þið regluna um annað veldi tvíliðar?

**277.** Útskýrið hvers vegna $n^2+25 \neq (n+5)^2$. Notið algebru, orð eða myndir.

**278.** Maribel þáttaði $y^2-30y+81$ sem $(y-9)^2$. Hafði hún rétt eða rangt fyrir sér? Hvernig vitið þið það?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| Þáttað fullkomnar ferningsþríliður. | | | |
| Þáttað mismun ferninga. | | | |
| Þáttað summu og mismun teninga. | | | |

ⓑ Á kvarðanum 1–10, hversu góðum tökum teljið þið ykkur hafa náð á efni hlutans í ljósi svaranna á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt ykkur?

# 7.5 Almenn aðferð við þáttun margliða

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Þekkið og notið viðeigandi aðferð til að fullþátta margliðu

**RIFJIÐ UPP 7.15**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Þáttið $y^2 - 2y - 24$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 7.23.

**RIFJIÐ UPP 7.16**

Þáttið $3t^2 + 17t + 10$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 7.38.

**RIFJIÐ UPP 7.17**

Þáttið $36p^2 - 60p + 25$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 7.42.

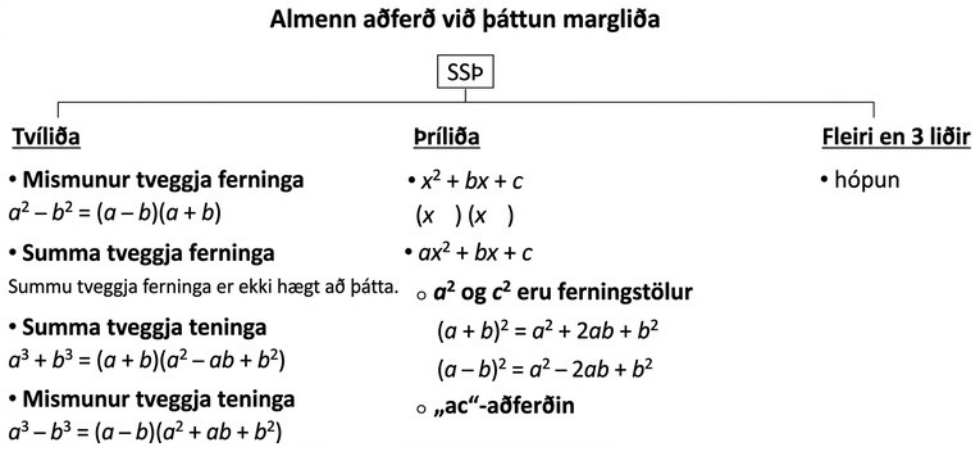
**RIFJIÐ UPP 7.18**

Þáttið $5x^2 - 80$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 7.52.

7

## Þekkið og notið viðeigandi aðferð til að fullþátta margliðu

Nú hafið þið kynnst öllum þáttunaraðferðum sem þið þurfið í þessu námskeiði. (Í næsta algebrunámskeiði bætast fleiri aðferðir við.) Myndin hér fyrir neðan tekur saman allar aðferðirnar sem við höfum farið yfir. Hún sýnir líka almenna aðferð sem þið ættuð að nota þegar þið þáttið margliður.




Mynd 7.3

---

**AÐFERÐ**

## Þáttið margliður.

1. Skref 1.
   Er til stærsti sameiginlegi þáttur?
   – Takið hann út fyrir sviga.
2. Skref 2.
   Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði?
   – Ef hún er tvíliður: Er hún summa?

     • Ferninga? Summu ferninga er ekki hægt að þátta.
     • Teninga? Notið regluna um summu teninga.

     Er hún mismunur?

     • Ferninga? Þáttið sem margfeldi samoka.
     • Teninga? Notið regluna um mismun teninga.

   – Ef hún er þríliður: Er hún af gerðinni
   $x^2 + b\,x + c$? Snúið FOIL-aðferðinni við. Er hún af gerðinni
   $a\,x^2 + b\,x + c$?

     • Ef $a$ og $c$ eru ferningar skuluð þið athuga hvort hún fylgi reglunni um fullkomna ferningsþríliði.
     • Notið prófun eða ac-aðferðina.

   – Ef hún hefur fleiri en þrjá liði: Notið þáttun með flokkun.

3. Skref 3.
   Sannreynið.
   – Er margliðan fullþáttuð?

– Gefur margfeldi þáttanna upprunalegu margliðuna?

Munið að margliða er fullþáttuð þegar allir þættir hennar aðrir en einliðir eru óþáttanlegir.

---

**DÆMI 7.59**

Fullþáttið: $4x^5+12x^4$.

### Lausn

Er til SSÞ? Já, $4x^4$. $4x^5+12x^4$

Takið SSÞ út fyrir sviga. $4x^4(x+3)$

Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? Tvíliður.

Er hann summa? Já.

Ferninga eða teninga? Nei.

Sannreynið.

Er stæðan fullþáttuð? Já.

Margfaldið.

$4x^4(x+3)$

$4x^4\cdot x+4x^4\cdot 3$

$4x^5+12x^4$ ✓

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.117**

Fullþáttið: $3a^4+18a^3$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.118**

Fullþáttið: $45b^6+27b^5$.

---

**DÆMI 7.60**

Fullþáttið: $12x^2-11x+2$.

## Lausn

| | | $12x^2 - 11x + 2$ |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Nei. | |
| Er þetta tvíliður, þríliður eða fleiri en þrír liðir? | Þríliður. | |
| Eru a og c fullkomnir ferningar? | Nei, a = 12, er ekki fullkominn ferningur. | |
| Notið prófun eða ac-aðferðina. Hér notum við prófun. | | $12x^2 - 11x + 2$<br>$1x, 12x$ $\quad -1, -2$<br>$2x, 6x$<br>$3x, 4x$ |

| $12x^2 - 11x + 2$ | |
|---|---|
| **Mögulegir þættir** | **Margfeldi** |
| $(x - 1)(12x - 2)$ | Kemur ekki til greina |
| $(x - 2)(12x - 1)$ | $12x^2 - 25x + 2$ |
| $(2x - 1)(6x - 2)$ | Kemur ekki til greina |
| $(2x - 2)(6x - 1)$ | Kemur ekki til greina |
| $(3x - 1)(4x - 2)$ | Kemur ekki til greina |
| $(3x - 2)(4x - 1)$ | $12x^2 - 11x + 2$ |

Ef þríliðan hefur enga sameiginlega þætti getur hvorugur þátturinn innihaldið sameiginlegan þátt. Það þýðir að engin þessara samsetninga kemur til greina.

Sannreynið.

$$(3x - 2)(4x - 1)$$

$$12x^2 - 3x - 8x + 2$$

$$12x^2 - 11x + 2 \checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.119**

Fullþáttið: $10a^2 - 17a + 6$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.120**

Fullþáttið: $8x^2 - 18x + 9$.

**DÆMI 7.61**

Fullþáttið: $g^3 + 25g$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, g. | $g^3+25g$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | | $g\left(g^2+25\right)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Tvíliður. | |
| Er hún summa? Ferninga? | Já. | Summa ferninga er óþáttanleg. |
| Sannreynið. | | |
| Er stæðan fullþáttuð? | Já. | |
| Margfaldið. $g\left(g^2+25\right)$ $g^3+25g$ ✓ | | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.121**

Fullþáttið: $x^3+36x$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.122**

Fullþáttið: $27y^2+48$.

7

**DÆMI 7.62**

Fullþáttið: $12y^2-75$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, 3. | $12y^2-75$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | | $3\left(4y^2-25\right)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Tvíliður. | |
| Er hún summa? | Nei. | |
| Er hún mismunur? Ferninga eða teninga? | Já, ferninga. | $3\left((2y)^2-(5)^2\right)$ |
| Ritið sem margfeldi samoka. | | $3(2y-5)(2y+5)$ |

| | | |
|---|---|---|
| Sannreynið. | | |
| Er stæðan fullþáttuð? | Já. | |
| Hvorugur tvíliðurinn er mismunur ferninga. | | |
| Margfaldið.<br>$3\,(2y-5)\,(2y+5)$<br>$3\left(4y^2-25\right)$<br>$12y^2-75$ ✓ | | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.123**

Fullþáttið: $16\,x^3-36\,x$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.124**

Fullþáttið: $27\,y^2-48$.

**DÆMI 7.63**

Fullþáttið: $4\,a^2-12\,a\,b+9\,b^2$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Nei. | $4a^2-12ab+9b^2$ |
| Er þetta tvíliður, þríliður eða fleiri liðir? | | |
| Þríliður með $a\neq 1$. Fyrsti liðurinn er þó fullkominn ferningur. | | |
| Er síðasti liðurinn fullkominn ferningur? | Já. | $(2a)^2-12ab+(3b)^2$ |
| Fylgir hann reglunni $a^2-2\,a\,b+b^2$? | Já. | $(2a)^2-12ab+(3b)^2$<br>$-2(2a)(3b)$<br>$12ab$ |
| Ritið hann sem annað veldi. | | $(2a-3b)^2$ |
| Sannreynið svarið. | | |
| Er stæðan fullþáttuð? | | |
| Já. | | |
| Tvíliðurinn er ekki mismunur ferninga. | | |

| |
|---|
| Margfaldið. |
| $(2a-3b)^2$ |
| $(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2$ |
| $4a^2-12ab+9b^2$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.125**

Fullþáttið: $4x^2+20xy+25y^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.126**

Fullþáttið: $9m^2+42mn+49n^2$.

**DÆMI 7.64**

Fullþáttið: $6y^2-18y-60$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, 6. | $6y^2-18y-60$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | | $6(y^2-3y-10)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri liði? | Þríliður með forystustuðulinn 1. | |
| Snúið FOIL-aðferðinni við. | $6(y)(y)$ | $6(y+2)(y-5)$ |
| Sannreynið svarið. | | |
| Er stæðan fullþáttuð? | | Já. |
| Hvorugur tvíliðurinn er mismunur ferninga. | | |

Margfaldið.

$$6(y+2)(y-5)$$
$$6(y^2-5y+2y-10)$$
$$6(y^2-3y-10)$$
$$6y^2-18y-60$$ ✓

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.127**

Fullþáttið: $8y^2+16y-24$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.128**

Fullþáttið: $5u^2-15u-270$.

**DÆMI 7.65**

Fullþáttið: $24x^3+81$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, 3. | $24x^3+81$ |
| Takið hann út fyrir sviga. | | $3\left(8x^3+27\right)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Tvíliður. | |
| Er þetta summa eða mismunur? | Summa. | |
| Ferninga eða teninga? | Summa teninga. | $3\left((2x)^3+(3)^3\right)$ |
| Ritið hana með reglunni um summu teninga. | | $3\left(2x+3\right)\left((2x)^2-2x\cdot 3+3^2\right)$ |
| Er stæðan fullþáttuð? | Já. | $3\left(2x+3\right)\left(4x^2-6x+9\right)$ |
| Sannreynið með margföldun. | | Þið sannreynið svarið sjálf. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.129**

Fullþáttið: $250m^3+432$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.130**

Fullþáttið: $81q^3+192$.

**DÆMI 7.66**

Fullþáttið: $2x^4-32$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, 2. | $2x^4-32$ |
| Takið hann út fyrir sviga. | | $2\left(x^4-16\right)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Tvíliður. | |
| Er þetta summa eða mismunur? | Já. | |
| Ferninga eða teninga? | Mismunur ferninga. | $2\left(\left(x^2\right)^2-\left(4\right)^2\right)$ |
| Ritið hann sem margfeldi samoka. | | $2\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)$ |
| Fyrri tvíliðurinn er aftur mismunur ferninga. | | $2\left(\left(x\right)^2-\left(2\right)^2\right)\left(x^2+4\right)$ |
| Ritið hann sem margfeldi samoka. | | $2\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x^2+4\right)$ |
| Er stæðan fullþáttuð? | Já. | |
| Enginn þessara tvíliða er mismunur ferninga. | | |
| Sannreynið svarið. | | |
| Margfaldið. | | |

$$2(x-2)(x+2)(x^2+4)$$
$$2(x^2-4)(x^2+4)$$
$$2(x^4-16)$$
$$2x^4-32\checkmark$$

7

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.131**

Fullþáttið: $4a^4-64$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.132**

Fullþáttið: $7y^4-7$.

**DÆMI 7.67**

Fullþáttið: $3x^2+6bx-3ax-6ab$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, 3. | $3x^2+6bx-3ax-6ab$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | | $3\left(x^2+2bx-ax-2ab\right)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri liði? | Fleiri en 3 liðir. | |
| Notið þáttun með flokkun. | | $3\left[x\left(x+2b\right)-a\left(x+2b\right)\right]$<br>$3\left(x+2b\right)\left(x-a\right)$ |
| Sannreynið svarið. | | |
| Er stæðan fullþáttuð? Já. | | |
| Margfaldið.<br>$3\left(x+2b\right)\left(x-a\right)$<br>$3\left(x^2-ax+2bx-2ab\right)$<br>$3x^2-3ax+6bx-6ab$ ✓ | | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.133**

Fullþáttið: $6x^2-12xc+6bx-12bc$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.134**

Fullþáttið: $16x^2+24xy-4x-6y$.

**DÆMI 7.68**

Fullþáttið: $10x^2-34x-24$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| Er til SSÞ? | Já, 2. | $10x^2-34x-24$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | | $2\left(5x^2-17x-12\right)$ |
| Er stæðan innan sviganna tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? | Þríliður með $a\neq 1$. | |
| Notið prófun eða ac-aðferðina. | | $2(5x^2-17x-12)$<br>$2(5x+3)(x-4)$ |
| Sannreynið svarið. Er stæðan fullþáttuð? Já. | | |
| Margfaldið.<br>$2(5x+3)(x-4)$<br>$2\left(5x^2-20x+3x-12\right)$<br>$2\left(5x^2-17x-12\right)$<br>$10x^2-34x-24$ ✓ | | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.135**

Fullþáttið: $4p^2-16p+12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 7.136**

Fullþáttið: $6q^2-9q-6$.

## Verkefni úr hluta 7.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Þekkið og notið viðeigandi aðferð til að fullþátta margliðu**

Fullþáttið í verkefnunum hér á eftir.

279.

$$10x^4+35x^3$$

280.

$$18p^6+24p^3$$

281.

$$y^2+10y-39$$

282.

$$b^2 - 17b + 60$$

283.

$$2n^2 + 13n - 7$$

284.

$$8x^2 - 9x - 3$$

285.

$$a^5 + 9a^3$$

286.

$$75m^3 + 12m$$

287.

$$121r^2 - s^2$$

288.

$$49b^2 - 36a^2$$

289.

$$8m^2 - 32$$

290.

$$36q^2 - 100$$

291.

$$25w^2 - 60w + 36$$

292.

$$49b^2 - 112b + 64$$

293.

$$m^2 + 14mn + 49n^2$$

294.

$$64x^2 + 16xy + y^2$$

295.

$$7b^2 + 7b - 42$$

296.

$$3n^2+30n+72$$

297.

$$3x^3-81$$

298.

$$5t^3-40$$

299.

$$k^4-16$$

300.

$$m^4-81$$

301.

$$15pq-15p+12q-12$$

302.

$$12ab-6a+10b-5$$

303.

$$4x^2+40x+84$$

304.

$$5q^2-15q-90$$

305.

$$u^5+u^2$$

306.

$$5n^3+320$$

307.

$$4c^2+20cd+81d^2$$

308.

$$25x^2+35xy+49y^2$$

309.

$$10m^4-6250$$

310.

$$3v^4 - 768$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**311. Vatnsmelóna látin falla** Vorhefð við Kaliforníuháskóla í San Diego er að láta vatnsmelónu falla af sjöundu hæð Urey-byggingarinnar.

1. ⓐ Tvíliðurinn $-16t^2+80$ gefur hæð vatnsmelónunnar $t$ sekúndum eftir að hún er látin falla. Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í tvíliðnum.
2. ⓑ Ef vatnsmelónunni er kastað niður á upphafshraðanum 8 fet á sekúndu er hæð hennar eftir $t$ sekúndur gefin með þríliðnum $-16t^2-8t+80$. Fullþáttið þríliðinn.

**312. Grasker látið falla** Hausthefð við Kaliforníuháskóla í San Diego er að láta grasker falla af elleftu hæð Tioga-byggingarinnar.

1. ⓐ Tvíliðurinn $-16t^2+128$ gefur hæð graskersins t sekúndum eftir að það er látið falla. Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í tvíliðnum.
2. ⓑ Ef graskerinu er kastað niður á upphafshraðanum 32 fet á sekúndu er hæð þess eftir $t$ sekúndur gefin með þríliðnum $-16t^2-32t+128$. Fullþáttið þríliðinn.

### *Ritunarverkefni*

**313.** Mismun ferninganna $y^4-625$ má þátta sem $\left(y^2-25\right)\left(y^2+25\right)$. En stæðan er ekki fullþáttuð. Hvað þarf að gera til viðbótar til að fullþátta hana?

**314.** Af öllum þáttunaraðferðum kaflans — SSÞ, flokkun, að snúa FOIL-aðferðinni við, ac-aðferð og sérstök margfeldi — hver finnst ykkur auðveldust? Hver er erfiðust? Útskýrið svörin.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Með fullu öryggi | Með nokkurri aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| borið kennsl á og notað viðeigandi aðferð til að þátta margliðu að fullu. | | | |

ⓑ Lítið á gátlistann. Teljið þið ykkur í heildina vel undirbúin fyrir næsta hluta? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# 7.6 Annars stigs jöfnur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta getið þið:

- Leyst annars stigs jöfnur með núllmargfeldisreglunni
- Leyst annars stigs jöfnur með þáttun
- Leysið hagnýt verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum

**RIFJIÐ UPP 7.19**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leysið: $5y-3=0$. Ef þið leystuð þetta dæmi ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 2.27.

**RIFJIÐ UPP 7.20**

Leysið: $10a=0$. Ef þið leystuð þetta dæmi ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 2.13.

**RIFJIÐ UPP 7.21**

Sameinið samkynja liði: $12x^2-6x+4x$. Ef þið leystuð þetta dæmi ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.24.

7

**RIFJIÐ UPP 7.22**

Fullþáttið $n^3-9n^2-22n$. Ef þið leystuð þetta dæmi ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.32.

Við höfum þegar leyst línulegar jöfnur, það er jöfnur af gerðinni $ax+by=c$. Í línulegum jöfnum eru breyturnar ekki hafðar í veldi. Annars stigs jöfnur eru jöfnur þar sem breytan er í öðru veldi. Hér eru nokkur dæmi um annars stigs jöfnur:

$$x^2+5x+6=0 \qquad 3y^2+4y=10 \qquad 64u^2-81=0 \qquad n(n+1)=42$$

Í síðustu jöfnunni virðist breytan ekki vera í öðru veldi, en þegar við einföldum stæðuna vinstra megin fáum við $n^2+n$.

Almennt form annars stigs jöfnu er $ax^2+bx+c=0$, þar sem $a\neq 0$.

**ANNARS STIGS JAFNA**

Jafna af gerðinni $ax^2+bx+c=0$ kallast annars stigs jafna.

$a$, $b$, og $c$ eru rauntölur og $a \neq 0$

Til að leysa annars stigs jöfnur þurfum við aðrar aðferðir en þær sem við notuðum til að leysa línulegar jöfnur. Hér skoðum við eina aðferð og síðar, í öðrum kafla, nokkrar aðrar.

## Leysið annars stigs jöfnur með núllmargfeldisreglunni

Fyrst leysum við nokkrar annars stigs jöfnur með núllmargfeldisreglunni. Reglan segir að ef margfeldi tveggja stærða er núll, þá hljóti að minnsta kosti önnur stærðin að vera núll. Eina leiðin til að fá margfeldið núll er að margfalda með núlli.

---

**NÚLLMARGFELDISREGLAN**

Ef $a \cdot b = 0$, þá er annaðhvort $a = 0$ eða $b = 0$, eða hvort tveggja.

Nú notum við núllmargfeldisregluna til að leysa annars stigs jöfnu.

---

**SÝNIDÆMI 7.69**

## Hvernig nota á núllmargfeldisregluna til að leysa annars stigs jöfnu

Leysið: $(x+1)(x-4)=0$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Setjið hvorn þátt jafnan núlli. | Margfeldið er jafnt núlli og því verður að minnsta kosti annar þátturinn að vera jafn núlli. | $(x+1)(x-4)=0$<br>$x+1=0$ eða $x-4=0$ |
| **Skref 2.** Leysið línulegu jöfnurnar. | Leysið hvora jöfnu. | $x=-1$ eða $x=4$ |
| **3. skref.** Athugið. | Setjið hvora lausn fyrir sig inn í upphaflegu jöfnuna. | $x=-1$<br>$(x+1)(x-4)=0$<br>$(-1+1)(-1-4) \stackrel{?}{=} 0$<br>$(0)(-5) \stackrel{?}{=} 0$<br>$0=0$ ✓<br>$x=4$<br>$(x+1)(x-4)=0$<br>$(4+1)(4-4) \stackrel{?}{=} 0$<br>$(5)(0) \stackrel{?}{=} 0$<br>$0=0$ ✓ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 7.137**

Leysið: $(x-3)(x+5)=0$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 7.138**

Leysið: $(y-6)(y+9)=0$.

Yfirleitt þarf að reikna aðeins meira en í síðasta sýnidæmi til að leysa línulegu jöfnurnar sem núllmargfeldisreglan gefur.

**SÝNIDÆMI 7.70**

Leysið: $(5n-2)(6n-1)=0$.

## Lausn

| | $(5n-2)(6n-1)=0$ | |
|---|---|---|
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. | $5n-2=0$ | $6n-1=0$ |
| Leysið jöfnurnar. | $n=\frac{2}{5}$ | $n=\frac{1}{6}$ |
| Sannreynið svörin. | | |

$n=\frac{2}{5}$

$(5n-2)(6n-1)=0$

$\left(5\cdot\frac{2}{5}-2\right)\left(6\cdot\frac{2}{5}-1\right)\stackrel{?}{=}0$

$(2-2)\left(\frac{12}{5}-\frac{5}{5}\right)\stackrel{?}{=}0$

$(0)\left(\frac{7}{5}\right)\stackrel{?}{=}0$

$0=0$ ✓

$n=\frac{1}{6}$

$(5n-2)(6n-1)=0$

$\left(5\cdot\frac{1}{6}-2\right)\left(6\cdot\frac{1}{6}-1\right)\stackrel{?}{=}0$

$\left(\frac{5}{6}-\frac{12}{6}\right)(1-1)\stackrel{?}{=}0$

$\left(-\frac{7}{6}\right)(0)\stackrel{?}{=}0$

$0=0$ ✓

**REYNIÐ SJÁLF 7.139**

Leysið: $(3m-2)(2m+1)=0$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.140**

Leysið: $(4p+3)(4p-3)=0$.

Takið eftir að þegar við sannreyndum lausnirnar gerði hvor þeirra aðeins annan þáttinn jafnan núlli. Margfeldið varð þó núll fyrir báðar lausnirnar.

**SÝNIDÆMI 7.71**

Leysið: $3p(10p+7)=0$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | $3p(10p+7)=0$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. | $3p=0$ | $10p+7=0$ |
| Leysið jöfnurnar. | $p=0$ | $10p=-7$ |
| | | $p=-\frac{7}{10}$ |
| Sannreynið svörin. | | |

$p=0$

$3p(10p+7)=0$

$3\cdot 0(10\cdot 0+7)\stackrel{?}{=}0$

$0(0+7)\stackrel{?}{=}0$

$0(7)\stackrel{?}{=}0$

$0=0$ ✓

$p=-\frac{7}{10}$

$3p(10p+7)=0$

$3\left(-\frac{7}{10}\right)10\left(-\frac{7}{10}\right)+7\stackrel{?}{=}0$

$\left(-\frac{21}{10}\right)(-7+7)\stackrel{?}{=}0$

$\left(\frac{21}{10}\right)(0)\stackrel{?}{=}0$

$0=0$ ✓

**REYNIÐ SJÁLF 7.141**

Leysið: $2u(5u-1)=0$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.142**

Leysið: $w(2w+3)=0$.

Í næsta sýnidæmi kann að virðast sem aðeins einn þáttur sé til staðar. Munið þó að $(y-8)^2$ merkir $(y-8)(y-8)$.

**SÝNIDÆMI 7.72**

Leysið: $(y-8)^2=0$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | $(y-8)^2=0$ | |
| Endurritið vinstri hliðina sem margfeldi. | $(y-8)(y-8)=0$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. | $y-8=0$ | $y-8=0$ |
| Leysið jöfnurnar. | $y=8$ | $y=8$ |
| Þegar sama lausnin kemur fyrir tvisvar köllum við hana tvöfalda rót. | | |
| Sannreynið svarið. | | |

$$\begin{aligned} y &= 8 \\ (y-8)^2 &= 0 \\ (8-8)^2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ (0)^2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

**REYNIÐ SJÁLF 7.143**

Leysið: $(x+1)^2=0$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.144**

Leysið: $(v-2)^2=0$.

## Leysið annars stigs jöfnur með þáttun

Í öllum jöfnunum sem við höfum leyst hingað til í þessum hluta var önnur hliðin á þáttuðu formi. Til að nota núllmargfeldisregluna verður annars stigs jafnan að vera þáttuð og núll að vera öðrum megin. Við verðum því að byrja á annars stigs jöfnu á staðalforminu $ax^2+bx+c=0$. Síðan getum við þáttað stæðuna vinstra megin.

**SÝNIDÆMI 7.73**

### Hvernig leysa á annars stigs jöfnu með þáttun

Leysið: $x^2+2x-8=0$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skrifið annars stigs jöfnuna á staðalformi, $ax^2+bx+c=0$. | Jafnan er nú þegar á staðalformi. | $x^2+2x-8=0$ |
| **Skref 2.** Þáttaðu annars stigs stæðuna. | Þáttaðu $x^2+2x-8$ | $(x+4)(x-2)=0$ |
| **Skref 3.** Notið núllmargfeldisregluna. | Setjið hvorn þátt jafnan núlli. | $x+4=0$ eða $x-2=0$ |
| **Skref 4.** Leysið línulegu jöfnurnar. | Við höfum tvær línulegar jöfnur. | $x=-4$ eða $x=2$ |
| **Skref 5.** Athugið. | Setjið hvora lausn fyrir sig inn í upphaflegu jöfnuna. | $x^2+2x-8=0$<br>$x=-4$<br>$(-4)^2-2(-4)-8\stackrel{?}{=}0$<br>$16+(-8)-8\stackrel{?}{=}0$<br>$0=0$ ✓<br>$x^2+2x-8=0$<br>$x=2$<br>$2^2-2(2)-8\stackrel{?}{=}0$<br>$4+4-8\stackrel{?}{=}0$<br>$0=0$ ✓ |

**REYNIÐ SJÁLF 7.145**

Leysið: $x^2-x-12=0$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.146**

Leysið: $b^2+9b+14=0$.

**AÐFERÐ**

### Leysið annars stigs jöfnu með þáttun.

1. Skref 1. Ritið annars stigs jöfnuna á staðalforminu $ax^2+bx+c=0$.
2. Skref 2. Þáttið annars stigs stæðuna.
3. Skref 3. Notið núllmargfeldisregluna.
4. Skref 4. Leysið línulegu jöfnurnar.
5. Skref 5. Sannreynið.

Áður en við þáttum verðum við að ganga úr skugga um að annars stigs jafnan sé á staðalformi.

**SÝNIDÆMI 7.74**

Leysið: $2y^2=13y+45$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | $2y^2=13y+45$ | |
| Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. | $2y^2-13y-45=0$ | |
| Þáttið annars stigs stæðuna. | $(2y+5)(y-9)=0$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. | $2y+5=0$ | $y-9=0$ |
| Leysið hvora jöfnu. | $y=-\frac{5}{2}$ | $y=9$ |
| Sannreynið svörin. | | |

$y=-\frac{5}{2}$

$2y^2=13y+45$

$2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 13\left(-\frac{5}{2}\right)+45$

$2\left(\frac{25}{4}\right) \stackrel{?}{=} \left(-\frac{65}{2}\right)+\frac{90}{2}$

$\frac{25}{2}=\frac{25}{2}$ ✓

$y=9$

$2y^2=13y+45$

$2(9)^2 \stackrel{?}{=} 13(9)+45$

$2(81) \stackrel{?}{=} 117+45$

$162=162$ ✓

**REYNIÐ SJÁLF 7.147**

Leysið: $3c^2=10c-8$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.148**

Leysið: $2d^2-5d=3$.

**SÝNIDÆMI 7.75**

Leysið: $5x^2-13x=7x$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | $5x^2-13x=7x$ | |
| Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. | $5x^2-20x=0$ | |
| Þáttið vinstri hlið jöfnunnar. | $5x(x-4)=0$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. | $5x=0$ | $x-4=0$ |
| Leysið hvora jöfnu. | $x=0$ | $x=4$ |
| Sannreynið svörin. | | |

$x=0$

$5x^2-13x=7x$

$5(0)^2-13(0)\stackrel{?}{=}7(0)$

$0-0\stackrel{?}{=}0$

$0=0$ ✓

$x=4$

$5x^2-13x=7x$

$5(4)^2-13(4)\stackrel{?}{=}7(4)$

$5(16)-52\stackrel{?}{=}28$

$28=28$ ✓

**REYNIÐ SJÁLF 7.149**

Leysið: $6a^2+9a=3a$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.150**

Leysið: $45b^2-2b=-17b$.

Þegar við leysum annars stigs jöfnur með þáttun nýtast allar þáttunaraðferðirnar sem þið hafið lært í þessum kafla. Kannist þið við regluna um sérstök margfeldi í næsta sýnidæmi?

**SÝNIDÆMI 7.76**

Leysið: $144q^2=25$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | $144q^2 = 25$ | |
| Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. | $144q^2 - 25 = 0$ | |
| Þáttið. Þetta er mismunur ferninga. | $(12q - 5)(12q + 5) = 0$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. | $12q - 5 = 0$ | $12q + 5 = 0$ |
| Leysið hvora jöfnu. | $12q = 5$<br>$q = \frac{5}{12}$ | $12q = -5$<br>$q = -\frac{5}{12}$ |
| Sannreynið svörin. | | |

**REYNIÐ SJÁLF 7.151**

Leysið: $25\,p^2 = 49$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.152**

Leysið: $36\,x^2 = 121$.

Í næsta sýnidæmi er vinstri hliðin þáttuð en hægri hliðin er ekki núll. Til að nota núllmargfeldisregluna verður önnur hlið jöfnunnar að vera núll. Við margföldum þættina og ritum síðan jöfnuna á staðalformi.

7

**SÝNIDÆMI 7.77**

Leysið: $(3\,x - 8)(x - 1) = 3\,x$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| | $(3x - 8)(x - 1) = 3x$ | |
| Margfaldið tvíliðina. | $3x^2 - 11x + 8 = 3x$ | |
| Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. | $3x^2 - 14x + 8 = 0$ | |
| Þáttið þríliðinn. | $(3x - 2)(x - 4) = 0$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. Leysið hvora jöfnu. | $3x - 2 = 0$<br>$3x = 2$<br>$x = \frac{2}{3}$ | $x - 4 = 0$<br>$x = 4$ |
| Sannreynið svörin. | Þið sannreynið lausnina sjálf. | |

**REYNIÐ SJÁLF 7.153**

Leysið: $(2m+1)(m+3)=12m$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.154**

Leysið: $(k+1)(k-1)=8$.

Núllmargfeldisreglan gildir einnig um margfeldi þriggja eða fleiri þátta. Ef margfeldið er núll verður að minnsta kosti einn þáttanna að vera núll. Með núllmargfeldisreglunni getum við leyst sumar jöfnur af hærra stigi en öðru á sama hátt og annars stigs jöfnur.

**SÝNIDÆMI 7.78**

Leysið: $9m^3+100m=60m^2$.

## Lausn

| | $9m^3+100m=60m^2$ | | |
|---|---|---|---|
| Færið alla liði yfir á aðra hliðina þannig að hin hliðin verði núll. | $9m^3-60m^2+100m=0$ | | |
| Takið fyrst stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga. | $m(9m^2-60m+100)=0$ | | |
| Þáttið þríliðinn. | $m(3m-10)(3m-10)=0$ | | |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvern þátt jafnan 0. | $m=0$ | $3m-10=0$ | $3m-10=0$ |
| Leysið hverja jöfnu. | $m=0$ | $m=\frac{10}{3}$ | $m=\frac{10}{3}$ |
| Sannreynið svörin. | Þið sannreynið lausnina sjálf. | | |

**REYNIÐ SJÁLF 7.155**

Leysið: $8x^3=24x^2-18x$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.156**

Leysið: $16y^2=32y^3+2y$.

Þegar við þáttum annars stigs jöfnuna í næsta sýnidæmi fáum við þrjá þætti. Fyrsti þátturinn er þó fasti. Við vitum að sá þáttur getur ekki verið jafn 0.

**SÝNIDÆMI 7.79**

Leysið: $4x^2=16x+84$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $4x^2 = 16x + 84$ |
| Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. | $4x^2 - 16x - 84 = 0$ |
| Takið fyrst stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga. | $4\left(x^2 - 4x - 21\right) = 0$ |
| Þáttið þríliðinn. | $4\left(x - 7\right)\left(x + 3\right) = 0$ |
| Notið núllmargfeldisregluna og setjið hvorn þátt jafnan 0. Leysið hvora jöfnu. | $4 \neq 0$ $\quad x - 7 = 0$ $\quad x + 3 = 0$<br>$4 \neq 0$ $\quad x = 7$ $\quad x = -3$ |
| Sannreynið svörin. | Þið sannreynið lausnina sjálf. |

**REYNIÐ SJÁLF 7.157**

Leysið: $18\,a^2 - 30 = -33\,a$.

**REYNIÐ SJÁLF 7.158**

Leysið: $123\,b = -6 - 60\,b^2$.

## Leysið hagnýt verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum

Verkefnalausnaraðferðin sem við notuðum áður við verkefni sem lýst er með línulegum jöfnum hentar jafn vel við verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum. Hér er aðferðin aftur svo að þið getið haft hana til hliðsjónar.

7

**AÐFERÐ**

### Notið verkefnalausnaraðferð til að leysa orðaverkefni.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
2. Skref 2. Finnið hverju er leitað að.
3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Setjið síðan setninguna fram sem algebrujöfnu.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Við byrjum á talnadæmi til að æfa okkur í að lýsa orðadæmi með annars stigs jöfnu.

**SÝNIDÆMI 7.80**

Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 132. Finnið heiltölurnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að tveimur samliggjandi heiltölum. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $n=$ fyrri heiltalan<br>$n+1=$ næsta samliggjandi heiltala |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Endursegið verkefnið í einni setningu. | Margfeldi samliggjandi heiltalnanna tveggja er 132. |
| | Fyrri heiltalan margfölduð með næstu heiltölu er 132. |
| Setjið fram sem jöfnu. | $n(n+1) = 132$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $n^2+n = 132$ |
| Færið alla liði yfir á aðra hliðina. | $n^2+n-132 = 0$ |
| Þáttið þríliðinn. | $(n-11)(n+12) = 0$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. Leysið jöfnurnar. | $n-11 = 0$ $\quad n+12 = 0$<br>$n = 11$ $\quad n = -12$ |
| Tvö gildi á $n$ leysa verkefnið. Því eru til tvö pör samliggjandi heiltalna sem ganga upp. | |
| Ef fyrri heiltalan er $n=11$<br>þá er næsta heiltala $n+1$<br>$11+1$<br>$12$<br>Ef fyrri heiltalan er $n=-12$<br>þá er næsta heiltala $n+1$<br>$-12+1$<br>$-11$ | |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið. | |
| Samliggjandi heiltölurnar eru $11, 12$ og $-11, -12$. Margfeldið $11 \cdot 12 = 132$ og margfeldið $-11(-12) = 132$. Bæði pör samliggjandi heiltalna eru lausnir. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. Samliggjandi heiltölurnar eru $11, 12$ og $-11, -12$. | |

**REYNIÐ SJÁLF 7.159**

Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 240. Finnið heiltölurnar.

**REYNIÐ SJÁLF 7.160**

Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 420. Finnið heiltölurnar.

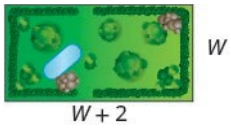
Kom ykkur á óvart að neikvæða heiltalnaparið skyldi vera önnur lausnin í síðasta sýnidæmi? Margfeldi jákvæðu heiltalnanna tveggja og margfeldi neikvæðu heiltalnanna tveggja verða bæði 132.

Í sumum hagnýtum verkefnum gefur algebran neikvæðar lausnir sem eru þó ekki raunhæfar miðað við aðstæður.

**SÝNIDÆMI 7.81**

Rétthyrndur garður er 15 ferfet að flatarmáli. Lengd garðsins er tveimur fetum meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd garðsins.

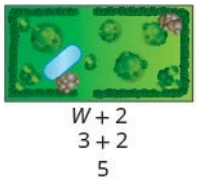
## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Í verkefnum um rúmfræðilegar myndir getur skissa auðveldað ykkur að sjá aðstæðurnar fyrir ykkur. |  | |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Við leitum að lengdinni og breiddinni. | |
| **Skref 3.** Skilgreinið það sem leitað er að. Lengdin er tveimur fetum meiri en breiddin. | Látum $W$ = breidd garðsins.<br>$W + 2$ = lengd garðsins | |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Endursegið mikilvægu upplýsingarnar í einni setningu. | Flatarmál rétthyrnda garðsins er 15 ferfet. | |
| Notið formúluna fyrir flatarmál rétthyrnings. | $A = L \cdot W$ | |
| Setjið breyturnar inn í formúluna. | $15 = (W + 2)W$ | |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Dreifið fyrst úr svigum. | $15 = W^2 + 2W$ | |
| Fáið núll öðrum megin. | $0 = W^2 + 2W - 15$ | |
| Þáttið þríliðinn. | $0 = (W + 5)(W - 3)$ | |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $0 = W + 5$ | $0 = W - 3$ |
| Leysið hvora jöfnu. | $-5 = W$ | $3 = W$ |

| | | |
|---|---|---|
| Þar sem W táknar breidd garðsins er ekki raunhæft að gildið sé neikvætt. Við útilokum því það gildi á W. | $-5=W$<br>$W=3$ | $3=W$<br>Breiddin er 3 fet. |

| | | |
|---|---|---|
| Finnið gildi lengdarinnar. | $W+2=\text{lengd}$ | |
| | $3+2$ | |
| | $5$ | Lengdin er 5 fet. |

**Skref 6.** Sannreynið svarið. Er svarið raunhæft?




$A=L\cdot W$
$A=3\cdot 5$
$A=15$

Já, þetta er raunhæft.

**Skref 7.** Svarið spurningunni. Breidd garðsins er 3 fet og lengdin er 5 fet.

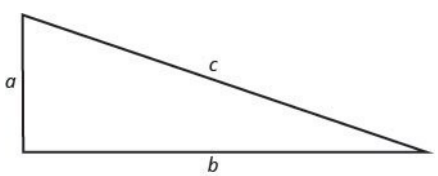
**REYNIÐ SJÁLF 7.161**

Rétthyrnt skilti er 30 ferfet að flatarmáli. Lengd skiltisins er einu feti meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd skiltisins.

**REYNIÐ SJÁLF 7.162**

Rétthyrnd verönd er 180 ferfet að flatarmáli. Breidd verandarinnar er þremur fetum minni en lengdin. Finnið lengd og breidd verandarinnar.

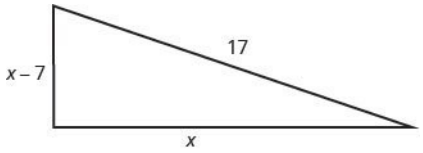
Í fyrri kafla notuðum við setningu Pýþagórasar, $\left(a^2+b^2=c^2\right)$. Hún lýsir sambandinu milli skammhliða og langhliðar rétthyrnds þríhyrnings.




Við notum þessa formúlu í næsta sýnidæmi.

**SÝNIDÆMI 7.82**

Justine ætlar að byggja pall í einu horni bakgarðsins. Pallurinn á að vera í laginu eins og rétthyrndur þríhyrningur, eins og myndin hér fyrir neðan sýnir. Langhliðin verður 17 fet að lengd. Önnur skammhliðin verður 7 fetum styttri en hin. Finnið lengdir hliða pallsins.

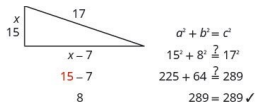



## Lausn

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | | | |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Við leitum að lengdum hliða pallsins. | | |
| **Skref 3.** Skilgreinið það sem leitað er að. Önnur hliðin er 7 styttri en hin. | Látum x = lengd annarrar hliðar pallsins x – 7 = lengd hinnar hliðarinnar | | |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Þar sem þríhyrningurinn er rétthyrndur getum við notað setningu Pýþagórasar. | $a^2+b^2=c^2$ | | |
| Setjið breyturnar inn í formúluna. | $x^2+(x-7)^2=17^2$ | | |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. | $x^2+x^2-14x+49=289$ | | |
| Einfaldið. | $2x^2-14x+49=289$ | | |
| Þetta er annars stigs jafna. Fáið núll öðrum megin. | $2x^2-14x-240=0$ | | |
| Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga. | $2(x^2-7x-120)=0$ | | |
| Þáttið þríliðinn. | $2(x-15)(x+8)=0$ | | |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $2\neq 0$ | $x-15=0$ | $x+8=0$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Leysið. | $2 \neq 0$ | $x = 15$ | $x = -8$ |
| Þar sem x táknar hlið þríhyrningsins er $x = -8$ ekki raunhæft gildi. | $2 \neq 0$ | $x = 15$ | $x = -8$ |
| Finnið lengd hinnar hliðarinnar. | | | |
| Ef lengd annarrar hliðarinnar er | | $x = 15$ | |
| þá er lengd hinnar hliðarinnar | | $x - 7$ | |
| | | $15 - 7$ | |
| | 8 er lengd hinnar hliðarinnar. | | |

**Skref 6.** Sannreynið svarið. Eru þessar tölur raunhæfar?




**Skref 7.** Svarið spurningunni. Hliðar pallsins eru 8, 15 og 17 fet.

**REYNIÐ SJÁLF 7.163**

Segl báts er rétthyrndur þríhyrningur. Önnur skammhlið seglsins er 7 fetum lengri en hin. Langhliðin er 13. Finnið lengdir skammhliða seglsins.

**REYNIÐ SJÁLF 7.164**

Hugleiðslugarður er í laginu eins og rétthyrndur þríhyrningur og önnur skammhliðin er 7 fet. Langhliðin er einu feti lengri en hin skammhliðin. Finnið lengd langhliðarinnar og hinnar skammhliðarinnar.

## Verkefni úr hluta 7.6

### *Æfingin skapar meistarann*

**Notið núllmargfeldisregluna**

Leysið eftirfarandi verkefni.

315.

$$(x-3)(x+7)=0$$

316.

$$(y-11)(y+1)=0$$

317.

$$(3a-10)(2a-7)=0$$

318.

$$(5b+1)(6b+1)=0$$

319.

$$6m(12m-5)=0$$

320.

$$2x(6x-3)=0$$

321.

$$(y-3)^2=0$$

322.

$$(b+10)^2=0$$

323.

$$(2x-1)^2=0$$

324.

$$(3y+5)^2=0$$



**Leysið annars stigs jöfnur með þáttun**

Leysið eftirfarandi verkefni.

325.

$$x^2+7x+12=0$$

326.

$$y^2-8y+15=0$$

327.

$$5a^2-26a=24$$

328.

$$4b^2+7b=-3$$

329.

$$4m^2=17m-15$$

330.

$$n^2=5n-6$$

331.

$$7a^2+14a=7a$$

332.

$$12b^2-15b=-9b$$

333.

$$49m^2=144$$

334.

$$625=x^2$$

335.

$$(y-3)(y+2)=4y$$

336.

$$(p-5)(p+3)=-7$$

337.

$$(2x+1)(x-3)=-4x$$

338.

$$(x+6)(x-3)=-8$$

339.

$$16p^3=24p^2-9p$$

340.

$$m^3-2m^2=-m$$

341.

$$20x^2-60x=-45$$

342.

$$3y^2-18y=-27$$

**Leysið hagnýt verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**343.** Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 56. Finnið heiltölurnar.

**344.** Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 42. Finnið heiltölurnar.

**345.** Rétthyrnd gólfmotta er 28 ferfet að flatarmáli. Lengdin er þremur fetum meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd mottunnar.

**346.** Rétthyrndur stoðveggur er 15 ferfet að flatarmáli. Hæð veggjarins er tveimur fetum minni en lengdin. Finnið hæð og lengd veggjarins.

**347.** Veifa er í laginu eins og rétthyrndur þríhyrningur með 10 feta langhlið. Önnur skammhlið veifunnar er tveimur fetum lengri en hin. Finnið lengd skammhliða veifunnar.

**348.** Spegiltjörn er í laginu eins og rétthyrndur þríhyrningur og önnur skammhliðin liggur meðfram húsvegg. Langhliðin er 9 fetum lengri en hliðin meðfram húsinu. Þriðja hliðin er 7 fetum lengri en hliðin meðfram húsinu. Finnið lengdir allra þriggja hliða tjarnarinnar.

**Blönduð verkefni**

Leysið eftirfarandi verkefni.

349.

$$(x+8)(x-3)=0$$

350.

$$(3y-5)(y+7)=0$$

351.

$$p^2+12p+11=0$$

352.

$$q^2-12q-13=0$$

353.

$$m^2=6m+16$$

354.

$$4n^2+19n=5$$

355.

$$a^3-a^2-42a=0$$

356.

$$4b^2 - 60b + 224 = 0$$

**357.** Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 110. Finnið heiltölurnar.

**358.** Önnur skammhlið rétthyrnds þríhyrnings er þremur fetum lengri en hin. Langhliðin er 15 fet. Finnið lengdir skammhliðanna.

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**359.** **Flatarmál verandar. Ef hver hlið ferningslaga verandar er lengd um 4 fet verður flatarmál hennar 196 ferfet. Leysið jöfnuna** $(s+4)^2 = 196$ fyrir s til að finna lengd hliðar verandarinnar.

**360.** **Vatnsmelónu sleppt.** Vatnsmelónu er sleppt af tíundu hæð byggingar. Leysið jöfnuna $-16t^2 + 144 = 0$ fyrir $t$ til að finna hve margar sekúndur það tekur melónuna að falla til jarðar.

### *Ritunarverkefni*

**361.** Útskýrið hvernig þið leysið annars stigs jöfnu. Hversu mörgum lausnum búist þið við að annars stigs jafna hafi?

**362.** Gefið dæmi um annars stigs jöfnu sem hefur stærsta sameiginlega þátt en enga lausn sem er núll.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

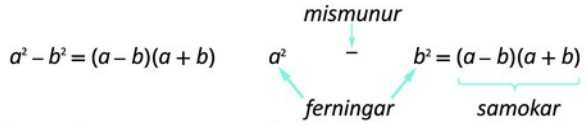
| Ég get... | Örugglega | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst annars stigs jöfnur með því að nota núllmargfeldisregluna. | | | |
| leyst annars stigs jöfnur með þáttun. | | | |
| leyst hagnýt verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur þá í heildina vel undirbúin fyrir næsta hluta? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# Lykilhugtök

**regla um mismun ferninga**

Ef a og b eru rauntölur,




**þáttun**

Þáttun felst í því að skipta margfeldi í þætti; hún er með öðrum orðum öfugt ferli við margföldun.

**stærsti sameiginlegi þáttur**

Stærsta stæðan sem er þáttur í tveimur eða fleiri stæðum kallast stærsti sameiginlegi þátturinn (SSÞ).

**regla um fullkomna ferningsþríliði**

Ef a og b eru rauntölur,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

**óþáttanlegar margliður**

Margliður sem ekki er hægt að þátta kallast óþáttanlegar margliður.

**annars stigs jöfnur**

Annars stigs jafna er jafna þar sem breytan er í öðru veldi.

**regla um summu og mismun teninga**

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

**núllmargfeldisregla**

Núllmargfeldisreglan segir að ef margfeldi tveggja stærða er núll, þá sé að minnsta kosti önnur stærðin núll.

# Meginatriði

## 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun

- **Stærsti sameiginlegi þátturinn (SSÞ) fundinn:** Til að finna SSÞ tveggja stæða:
  1. Skref 1. Frumþáttið hvern stuðul. Ritið allar breytur með veldisvísum í útvíkkaðri ritun.

2. Skref 2. Skráið alla þætti og raðið samsvarandi sameiginlegum þáttum í dálk. Dragið hring um sameiginlegu þættina í hverjum dálki.
3. Skref 3. Færið niður sameiginlegu þættina sem allar stæðurnar hafa.
4. Skref 4. Margfaldið þættina eins og í sýnidæmi 7.2.

- **Stærsti sameiginlegi þátturinn tekinn út fyrir sviga í margliðu:** Til að taka stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu:
  1. Skref 1. Finnið SSÞ allra liða margliðunnar.
  2. Skref 2. Endurritið hvern lið sem margfeldi með SSÞ.
  3. Skref 3. Notið dreifiregluna aftur á bak til að þátta stæðuna.
  4. Skref 4. Sannreynið með því að margfalda þættina eins og í sýnidæmi 7.5.
- **Þáttun með flokkun:** Til að þátta margliðu með 4 eða fleiri liðum:
  1. Skref 1. Flokkið saman liði með sameiginlega þætti.
  2. Skref 2. Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í hverjum hópi.
  3. Skref 3. Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í stæðunni.
  4. Skref 4. Sannreynið með því að margfalda þættina eins og í sýnidæmi 7.15.

## 7.2 Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$

- **Þáttið þríliði af gerðinni** $x^2+b\,x+c$
  1. Skref 1. Ritið þættina sem tvo tvíliði með eftirfarandi fremstu liði: x: $(x)(x)$.
  2. Skref 2. Finnið tvær tölur m og n þannig að margfeldi þeirra sé c,
     $m \cdot n = c$
     summa þeirra sé b, $m+n=b$
  3. Skref 3. Notið m og n sem síðustu liði þáttanna: $(x+m)(x+n)$.
  4. Skref 4. Sannreynið með því að margfalda þættina.

## 7.3 Þáttið þríliði af gerðinni $ax^2+bx+c$

- **Þáttið þríliði af gerðinni** $a\,x^2+b\,x+c$ **með prófunaraðferð: Sjá sýnidæmi** 7.33.
  1. Skref 1. Ritið þríliðinn í lækkandi röð eftir stigi.
  2. Skref 2. Finnið öll þáttapör fyrsta liðarins.
  3. Skref 3. Finnið öll þáttapör þriðja liðarins.
  4. Skref 4. Prófið allar mögulegar samsetningar þáttanna þar til rétta margfeldið finnst.
  5. Skref 5. Sannreynið með margföldun.
- **Þáttið þríliði af gerðinni** $a\,x^2+b\,x+c$ **með ac-aðferðinni: Sjá sýnidæmi** 7.38.
  1. Skref 1. Takið SSÞ út fyrir sviga, ef hann er til.
  2. Skref 2. Finnið margfeldið ac.
  3. Skref 3. Finnið tvær tölur m og n þannig að:

| | |
|---|---|
| Margfeldið á að vera $ac$ | $m \cdot n = a \cdot c$ |
| Summan á að vera $b$ | $m + n = b$ |

4. Skref 4. Kljúfið miðliðinn með m og n:

$$ax^2 + \overset{bx}{\overbrace{mx + nx}} + c$$

5. Skref 5. Þáttið með flokkun.
6. Skref 6. Sannreynið með því að margfalda þættina.

- **Veljið aðferð til að fullþátta margliður (uppfært):**
  1. Skref 1. Er stærsti sameiginlegi þáttur til staðar? Takið hann út fyrir sviga.
  2. Skref 2. Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði? Ef hún er tvíliður höfum við enn enga aðferð til að þátta hana. Ef hún er þríliður af gerðinni

     $x^2 + b\,x + c$

     , snúið FOIL-aðferðinni við: $(x)(x)$. Ef hún er þríliður af gerðinni

     $a\,x^2 + b\,x + c$

     , notið prófunaraðferðina eða ac-aðferðina. Ef hún hefur fleiri en þrjá liði, notið þáttun með flokkun.
  3. Skref 3. Sannreynið með því að margfalda þættina.

## 7.4 Þáttið sérstök margfeldi

- **Þáttið fullkomna ferningsþríliði**. Sjá sýnidæmi 7.42.

  Skref 1. Fylgir þríliðurinn reglunni? $a^2 + 2\,a\,b + b^2$ $a^2 - 2\,a\,b + b^2$

  Er fyrsti liðurinn fullkominn ferningur? $(a)^2$ $(a)^2$

  Ritið hann sem annað veldi.

  Er síðasti liðurinn fullkominn ferningur? $(a)^2$ $(b)^2$ $(a)^2$ $(b)^2$

  Ritið hann sem annað veldi.

  Athugið miðliðinn. Er hann $2\,a\,b$? $(a)^2 \searrow_{2 \cdot a \cdot b} \swarrow (b)^2$ $(a)^2 \searrow_{2 \cdot a \cdot b} \swarrow (b)^2$

  Skref 2. Ritið annað veldi tvíliðarins. $(a+b)^2$ $(a-b)^2$

  Skref 3. Sannreynið með margföldun.
- **Þáttið mismun ferninga**. Sjá sýnidæmi 7.47.

Skref 1. Fylgir tvíliðurinn reglunni? $a^2 - b^2$

Er þetta mismunur? $____^{\,2} - ____^{\,2}$

Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir ferningar?

Skref 2. Ritið þá sem ferninga. $(a)^2 - (b)^2$

Skref 3. Ritið margfeldi samokanna. $(a-b)(a+b)$

Skref 4. Sannreynið með margföldun.

- **Þáttið summu og mismun teninga** Til að þátta summu eða mismun teninga: Sjá sýnidæmi 7.54.
  1. Skref 1. Fylgir tvíliðurinn reglu um summu eða mismun teninga? Er þetta summa eða mismunur? Eru fyrsti og síðasti liðurinn fullkomnir teningar?
  2. Skref 2. Ritið þá sem teninga.
  3. Skref 3. Notið regluna um summu eða mismun teninga.
  4. Skref 4. Einfaldið innan sviganna
  5. Skref 5. Sannreynið með því að margfalda þættina.

## 7.5 Almenn aðferð við þáttun margliða

- **Almenn aðferð við þáttun margliða. Sjá mynd 7.3.**
- **Hvernig þátta á margliður**
  1. Skref 1. Er stærsti sameiginlegi þáttur til staðar? Takið hann út fyrir sviga.
  2. Skref 2.
     Er margliðan tvíliður, þríliður eða hefur hún fleiri en þrjá liði?
     - Ef hún er tvíliður: Er hún summa?
       - Ferninga? Summu ferninga er ekki hægt að þátta.
       - Teninga? Notið regluna um summu teninga.

       Er hún mismunur?
       - Ferninga? Þáttið sem margfeldi samoka.
       - Teninga? Notið regluna um mismun teninga.
     - Ef hún er þríliður: Er hún af gerðinni $x^2+bx+c$? Snúið FOIL-aðferðinni við. Er hún af gerðinni $ax^2+bx+c$?
       - Ef a og c eru fullkomnir ferningar skuluð þið athuga hvort þríliðurinn fylgi reglunni um fullkomna ferningsþríliði.
       - Notið prófunaraðferðina eða ac-aðferðina.
     - Ef hún hefur fleiri en þrjá liði: Notið þáttun með flokkun.
  3. Skref 3. Sannreynið. Er margliðan fullþáttuð? Gefur margfeldi þáttanna upphaflegu margliðuna?

### 7.6 Annars stigs jöfnur

- **Núllmargfeldisreglan. Ef** $a \cdot b = 0$, þá er annaðhvort $a = 0$ eða $b = 0$, eða hvort tveggja. Sjá sýnidæmi 7.69.
- **Leysið annars stigs jöfnu með þáttun** Til að leysa annars stigs jöfnu með þáttun: Sjá sýnidæmi 7.73.
  1. Skref 1. Ritið annars stigs jöfnuna á staðalforminu $a x^2 + b x + c = 0$.
  2. Skref 2. Þáttið annars stigs stæðuna.
  3. Skref 3. Notið núllmargfeldisregluna.
  4. Skref 4. Leysið línulegu jöfnurnar.
  5. Skref 5. Sannreynið.
- **Notið verkefnalausnaraðferð til að leysa orðaverkefni** Sjá sýnidæmi 7.80.
  1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
  4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Setjið síðan setninguna fram sem algebrujöfnu.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

7

# Upprifjunarverkefni

## 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun

**Finnið stærsta sameiginlega þátt tveggja eða fleiri stæða**

Finnið stærsta sameiginlega þáttinn í eftirfarandi verkefnum.

363.

$$42, 60$$

364.

$$450, 420$$

365.

$$90, 150, 105$$

366.

$$60,294,630$$

**Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í margliðu**

Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í hverri margliðu í eftirfarandi verkefnum.

367.

$$24x-42$$

368.

$$35y+84$$

369.

$$15m^4+6m^2n$$

370.

$$24pt^4+16t^7$$

**Þáttun með flokkun**

Þáttið með flokkun í eftirfarandi verkefnum.

371.

$$ax-ay+bx-by$$

372.

$$x^2y-xy^2+2x-2y$$

373.

$$x^2+7x-3x-21$$

374.

$$4x^2-16x+3x-12$$

375.

$$m^3+m^2+m+1$$

376.

$$5x-5y-y+x$$

## 7.2 Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$

**Þáttið þríliði af gerðinni $x^2+bx+c$**

Þáttið hvern þrílið af gerðinni $x^2+bx+c$.

377.

$$u^2+17u+72$$

378.

$$a^2+14a+33$$

379.

$$k^2-16k+60$$

380.

$$r^2-11r+28$$

381.

$$y^2+6y-7$$

382.

$$m^2+3m-54$$

383.

$$s^2-2s-8$$

384.

$$x^2-3x-10$$

**Þáttið þríliði af gerðinni** $x^2+bxy+cy^2$

Þáttið hvern þrílið af gerðinni $x^2+bxy+cy^2$.

385.

$$x^2+12xy+35y^2$$

386.

$$u^2+14uv+48v^2$$

387.

$$a^2+4ab-21b^2$$

388.

$$p^2-5pq-36q^2$$

## 7.3 Þáttun þríliða af gerðinni $ax^2+bx+c$

**Þekkið grunnferlið við fullþáttun margliða**

Veljið bestu aðferðina til að þátta hverja margliðu.

389.

$$y^2 - 17y + 42$$

390.

$$12r^2 + 32r + 5$$

391.

$$8a^3 + 72a$$

392.

$$4m - mn - 3n + 12$$

**Þáttið þríliði af gerðinni $ax^2 + bx + c$ sem hafa stærsta sameiginlegan þátt**

Fullþáttið í eftirfarandi verkefnum.

393.

$$6x^2 + 42x + 60$$

394.

$$8a^2 + 32a + 24$$

395.

$$3n^4 - 12n^3 - 96n^2$$

396.

$$5y^3 + 25y^2 - 70y$$

**Þáttið þríliði með ac-aðferðinni**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

397.

$$2x^2 + 9x + 4$$

398.

$$3y^2 + 17y + 10$$

399.

$$18a^2 - 9a + 1$$

400.

$$8u^2 - 14u + 3$$

401.

$$15p^2 + 2p - 8$$

402.

$$15x^2+x-2$$

403.

$$40s^2-s-6$$

404.

$$20n^2-7n-3$$

**Þáttið þríliði sem hafa stærsta sameiginlegan þátt með ac-aðferðinni**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

405.

$$3x^2+3x-36$$

406.

$$4x^2+4x-8$$

407.

$$60y^2-85y-25$$

408.

$$18a^2-57a-21$$

## 7.4 Þáttun sérstakra margfelda

**Þáttið fullkomna ferningsþríliði**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

409.

$$25x^2+30x+9$$

410.

$$16y^2+72y+81$$

411.

$$36a^2-84ab+49b^2$$

412.

$$64r^2-176rs+121s^2$$

413.

$$40x^2+360x+810$$

414.

$$75u^2+180u+108$$

415.

$$2y^3-16y^2+32y$$

416.

$$5k^3-70k^2+245k$$

**Þáttið mismun ferninga**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

417.

$$81r^2-25$$

418.

$$49a^2-144$$

419.

$$169m^2-n^2$$

420.

$$64x^2-y^2$$

421.

$$25p^2-1$$

422.

$$1-16s^2$$

423.

$$9-121y^2$$

424.

$$100k^2-81$$

425.

$$20x^2-125$$

426.

$$18y^2-98$$

427.

$$49u^3 - 9u$$

428.

$$169n^3 - n$$

**Þáttið summu og mismun teninga**

Þáttið í eftirfarandi verkefnum.

429.

$$a^3 - 125$$

430.

$$b^3 - 216$$

431.

$$2m^3 + 54$$

432.

$$81x^3 + 3$$

## 7.5 Almenn aðferð við þáttun margliða

**Þekkið og notið viðeigandi aðferð til að fullþátta margliðu**

Fullþáttið í eftirfarandi verkefnum.

433.

$$24x^3 + 44x^2$$

434.

$$24a^4 - 9a^3$$

435.

$$16n^2 - 56mn + 49m^2$$

436.

$$6a^2 - 25a - 9$$

437.

$$5r^2 + 22r - 48$$

438.

$$5u^4 - 45u^2$$

439.

$$n^4 - 81$$

440.

$$64\,j^2 + 225$$

441.

$$5x^2 + 5x - 60$$

442.

$$b^3 - 64$$

443.

$$m^3 + 125$$

444.

$$2b^2 - 2bc + 5cb - 5c^2$$

## 7.6 Annars stigs jöfnur

### Notið núllmargfeldisregluna

Leysið eftirfarandi verkefni.

445.

$$(a-3)(a+7)=0$$

446.

$$(b-3)(b+10)=0$$

447.

$$3m(2m-5)(m+6)=0$$

448.

$$7n(3n+8)(n-5)=0$$

### Leysið annars stigs jöfnur með þáttun

Leysið eftirfarandi verkefni.

449.

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

450.

$$y^2 - y - 72 = 0$$

451.

$$2p^2 - 11p = 40$$

452.

$$q^3 + 3q^2 + 2q = 0$$

453.

$$144m^2 - 25 = 0$$

454.

$$4n^2 = 36$$

**Leysið hagnýt verkefni sem sett eru fram sem annars stigs jöfnur**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**455.** Margfeldi tveggja samliggjandi talna er 462. Finnið tölurnar.

**456.** Rétthyrnd verönd er 400 ferfet að flatarmáli. Lengd verandarinnar er 9 fetum meiri en breiddin. Finnið lengdina og breiddina.

## Æfingapróf

Finnið stærsta sameiginlega þáttinn í hverri stæðu í verkefnunum hér á eftir.

457.

$$14y - 42$$

458.

$$-6x^2 - 30x$$

459.

$$80a^2 + 120a^3$$

460.

$$5m(m-1) + 3(m-1)$$

Fullþáttið margliðurnar í verkefnunum hér á eftir.

461.

$$x^2 + 13x + 42$$

462.

$$p^2 + pq - 12q^2$$

463.

$$3a^3 - 6a^2 - 72a$$

464.

$$s^2 - 25s + 84$$

465.

$$5n^2 + 30n + 45$$

466.

$$64y^2 - 49$$

467.

$$xy - 8y + 7x - 56$$

468.

$$40r^2 + 810$$

469.

$$9s^2 - 12s + 4$$

470.

$$n^2 + 12n + 36$$

471.

$$100 - a^2$$

472.

$$6x^2 - 11x - 10$$

473.

$$3x^2 - 75y^2$$

474.

$$c^3 - 1000d^3$$

475.

$$ab - 3b - 2a + 6$$

476.

$$6u^2 + 3u - 18$$

477.

$$8m^2+22m+5$$

Leysið verkefnin hér á eftir.

478.

$$x^2+9x+20=0$$

479.

$$y^2=y+132$$

480.

$$5a^2+26a=24$$

481.

$$9b^2-9=0$$

482.

$$16-m^2=0$$

483.

$$4n^2+19n+21=0$$

484.

$$(x-3)(x+2)=6$$

7

**485.** Margfeldi tveggja samliggjandi heiltalna er 156. Finnið heiltölurnar.

**486.** Rétthyrnd borðmotta er 168 fertommur að flatarmáli. Lengd hennar er tveimur tommum meiri en breiddin. Finnið lengd og breidd borðmottunnar.

8. KAFLI

# Ræðar stæður og jöfnur



Mynd 8.1 Það getur verið mjög afslappandi að róa bát undan straumi, en það krefst mun meiri áreynslu að róa á móti straumnum.

## Yfirlit kaflans


- 8.1 Einfaldið ræðar stæður
- 8.2 Margfaldið og deilið ræðum stæðum
- 8.3 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara
- 8.4 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum
- 8.5 Einfaldið flóknar ræðar stæður
- 8.6 Leysið ræðar jöfnur
- 8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum
- 8.8 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða og vinnu
- 8.9 Notið bein og öfug hlutföll

# Inngangur

Líkt og í róðri er auðvelt að hjóla í aðra áttina, niður brekku, en það getur verið erfiðara að fara í hina áttina, upp brekku. Ferðin á áfangastað getur tekið skamman tíma, en heimferðin, hvort sem hún er á móti straumi eða upp brekku, tekur lengri tíma.

Ræðar jöfnur eru notaðar til að lýsa aðstæðum sem þessum. Í kaflanum vinnum við með ræðar stæður, leysum ræðar jöfnur og notum þær til að leysa fjölbreytt hagnýt verkefni.

# 8.1 Einfaldið ræðar stæður

---

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræð stæða er óskilgreind
- Reiknið gildi ræðra stæða
- Einfaldið ræðar stæður
- Einfaldið ræðar stæður með gagnstæðum þáttum

---

**UNDIRBÚNINGUR 8.1**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í tilgreindan hluta og rifja efnið upp.

Einfaldið: $\frac{90\,y}{15\,y^2}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 6.66.

---

**UNDIRBÚNINGUR 8.2**

Þáttið: $6x^2-7x+2$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.34.

---

**UNDIRBÚNINGUR 8.3**

Þáttið: $n^3+8$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.54.

Í kafla 1 rifjuðum við upp eiginleika brota og reikniaðgerðir með þeim. Við kynntum ræðar tölur, sem eru brot með heiltölum í teljara og nefnara, þar sem nefnarinn er ekki núll.

Í þessum kafla vinnum við með brot þar sem teljari og nefnari eru margliður. Við köllum þau ræðar stæður.

**RÆÐ STÆÐA**

Ræð stæða er stæða af gerðinni $\frac{p(x)}{q(x)}$, þar sem p og q eru margliður og $q \neq 0$.

Munið að deiling með 0 er óskilgreind.

Hér eru nokkur dæmi um ræðar stæður:

$$-\frac{13}{42} \quad \frac{7y}{8z} \quad \frac{5x+2}{x^2-7} \quad \frac{4x^2+3x-1}{2x-8}$$

Takið eftir að fyrsta ræða stæðan hér að ofan, $-\frac{13}{42}$,, er einfaldlega brot. Fasti er margliða af stigi núll. Hlutfall tveggja fasta er því ræð stæða, svo framarlega sem nefnarinn er ekki núll.

Við notum sömu reikniaðgerðir á ræðar stæður og á brot. Við einföldum þær, leggjum saman, drögum frá, margföldum, deilum og notum þær í hagnýtum verkefnum.

## Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræð stæða er óskilgreind

Þegar við vinnum með tölubrot er auðvelt að forðast deilingu með núlli því við sjáum töluna í nefnaranum. Til að forðast deilingu með núlli í ræðri stæðu verðum við að útiloka þau gildi breytunnar sem gera nefnarann jafnan núlli.

Ef nefnarinn er núll er ræða stæðan óskilgreind. Teljari ræðrar stæðu má vera 0 en nefnarinn ekki.

Áður en við notum reikniaðgerð á ræða stæðu skoðum við því fyrst hvaða gildi gera nefnarann jafnan núlli. Þegar við leysum til dæmis ræða jöfnu vitum við þá hvort algebrulausnirnar sem fást séu leyfilegar.

**AÐFERÐ**

### Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræð stæða er óskilgreind.

1. Skref 1. Setjið nefnarann jafnan núlli.
2. Skref 2. Leysið jöfnuna í mengi rauntalna, ef unnt er.



**SÝNIDÆMI 8.1**

Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræða stæðan er óskilgreind:

ⓐ $\frac{9y}{x}$ ⓑ $\frac{4b-3}{2b+5}$ ⓒ $\frac{x+4}{x^2+5x+6}$

### Lausn

Stæðan er óskilgreind þegar nefnarinn er núll.

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\frac{9y}{x}$ |
| Setjið nefnarann jafnan núlli. Einangrið breytuna. | $x=0$ |
| | $\frac{9y}{x}$ er óskilgreind fyrir $x=0$. |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\frac{4b-3}{2b+5}$ |
| Setjið nefnarann jafnan núlli. Einangrið breytuna. | $\begin{aligned} 2b+5 &= 0 \\ 2b &= -5 \\ b &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$ |
| | $\frac{4b-3}{2b+5}$ er óskilgreind fyrir $b=-\frac{5}{2}$. |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\frac{x+4}{x^2+5x+6}$ |
| Setjið nefnarann jafnan núlli. Einangrið breytuna. | $\begin{aligned} x^2+5x+6 &= 0 \\ (x+2)(x+3) &= 0 \\ x+2=0 \text{ eða } x+3 &= 0 \\ x=-2 \text{ eða } x &= -3 \end{aligned}$ |
| | $\frac{x+4}{x^2+5x+6}$ er óskilgreind fyrir $x=-2$ eða $x=-3$. |

Að segja að ræða stæðan $\frac{x+4}{x^2+5x+6}$ sé óskilgreind fyrir $x=-2$ eða $x=-3$ svipar til orðalagsins „ógilt þar sem bannað er“ í keppnisreglum.

**REYNIÐ SJÁLF 8.1**

Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræða stæðan er óskilgreind:

ⓐ $\frac{3y}{x}$ ⓑ $\frac{8n-5}{3n+1}$ ⓒ $\frac{a+10}{a^2+4a+3}$

**REYNIÐ SJÁLF 8.2**

Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræða stæðan er óskilgreind:

ⓐ $\frac{4p}{5q}$ ⓑ $\frac{y-1}{3y+2}$ ⓒ $\frac{m-5}{m^2+m-6}$

## Reiknið gildi ræðra stæða

Til að reikna gildi ræðrar stæðu setjum við gildi breytanna inn í stæðuna og einföldum, rétt eins og við höfum gert við margar aðrar stæður í bókinni.

**SÝNIDÆMI 8.2**

Reiknið gildi $\frac{2x+3}{3x-5}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $x=0$ ⓑ $x=2$ ⓒ $x=-3$

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\frac{2x+3}{3x-5}$ |
| Setjið 0 inn fyrir $x$. | $\frac{2(0)+3}{3(0)-5}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{3}{5}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\frac{2x+3}{3x-5}$ |
| Setjið 2 í stað $x$. | $\frac{2(2)+3}{3(2)-5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4+3}{6-5}$ |
| | $\frac{7}{1}$ |
| | $7$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\frac{2x+3}{3x-5}$ |
| Setjið $-3$ í stað $x$. | $\frac{2(-3)+3}{3(-3)-5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{-6+3}{-9-5}$ |
| | $\frac{-3}{-14}$ |
| | $\frac{3}{14}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.3**

Reiknið gildi $\frac{y+1}{2y-3}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $y=1$ ⓑ $y=-3$ ⓒ $y=0$

**REYNIÐ SJÁLF 8.4**

Reiknið gildi $\frac{5x-1}{2x+1}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $x=1$ ⓑ $x=-1$ ⓒ $x=0$

**SÝNIDÆMI 8.3**

Reiknið gildi $\frac{x^2+8x+7}{x^2-4}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $x=0$ ⓑ $x=2$ ⓒ $x=-1$

8

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^2+8x+7}{x^2-4}$ |
| Setjið $0$ inn fyrir $x$. | $\frac{(0)^2+8(0)+7}{(0)^2-4}$ |
| Einfaldið. | $\frac{7}{-4}$ |
| | $-\frac{7}{4}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^2+8x+7}{x^2-4}$ |
| Setjið $2$ í stað $x$. | $\frac{(2)^2+8(2)+7}{(2)^2-4}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4+16+7}{4-4}$ |
| | $\frac{27}{0}$ |
| Þessi ræða stæða er óskilgreind fyrir x = 2. | |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^2+8x+7}{x^2-4}$ |
| Setjið $-1$ í stað $x$. | $\frac{(-1)^2+8(-1)+7}{(-1)^2-4}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1-8+7}{1-4}$ |
| | $\frac{-7+7}{-3}$ |
| | $\frac{0}{-3}$ |
| | $0$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.5**

Reiknið gildi $\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $x=0$ ⓑ $x=-1$ ⓒ $x=3$

**REYNIÐ SJÁLF 8.6**

Reiknið gildi $\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $x=0$ ⓑ $x=-2$ ⓒ $x=1$

Munið að brot er fullstytt þegar teljari og nefnari hafa engan sameiginlegan þátt annan en 1. Þegar við reiknum gildi ræðrar stæðu fullstyttum við brotið sem fæst.

**SÝNIDÆMI 8.4**

Reiknið gildi $\frac{a^2+2ab+b^2}{3ab^2}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $a=1, b=2$ ⓑ $a=-2, b=-1$ ⓒ $a=\frac{1}{3}, b=0$

## Lausn

ⓐ

| | $\frac{a^2+2ab+b^2}{3ab^2}$ þegar $a=1, b=2$. |
|---|---|
| Setjið 1 í stað $a$ og 2 í stað $b$. | $\frac{(1)^2+2(1)(2)+(2)^2}{3(1)(2)^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1+4+4}{3(4)}$ |
| | $\frac{9}{12}$ |
| | $\frac{3}{4}$ |

ⓑ

| | $\frac{a^2+2ab+b^2}{3ab^2}$ þegar $a=-2, b=-1$. |
|---|---|
| Setjið $-2$ í stað $a$ og $-1$ í stað $b$. | $\frac{(-2)^2+2(-2)(-1)+(-1)^2}{3(-2)(-1)^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4+4+1}{-6}$ |
| | $-\frac{9}{6}$ |
| | $-\frac{3}{2}$ |

8

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\frac{a^2+2ab+b^2}{3ab^2}$ þegar $a=\frac{1}{3}, b=0.$ |
| Setjið $\frac{1}{3}$ í stað $a$ og $0$ í stað $b$. | $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{1}{3}\right)(0)+(0)^2}{3\left(\frac{1}{3}\right)(0)^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{\frac{1}{9}+0+0}{0}$ |
| | $\frac{\frac{1}{9}}{0}$ |
| | Stæðan er óskilgreind. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.7**

Reiknið gildi $\frac{2a^3b}{a^2+2ab+b^2}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $a=-1, b=2$ ⓑ $a=0, b=-1$ ⓒ $a=1, b=\frac{1}{2}$

**REYNIÐ SJÁLF 8.8**

Reiknið gildi $\frac{a^2-b^2}{8ab^3}$ fyrir hvert gildi:

ⓐ $a=1, b=-1$ ⓑ $a=\frac{1}{2}, b=-1$ ⓒ $a=-2, b=1$

8

## Einfaldið ræðar stæður

Rétt eins og brot telst fullstytt ef teljari og nefnari hafa engan sameiginlegan þátt annan en 1, telst ræð stæða einfölduð ef teljari og nefnari hafa engan sameiginlegan þátt annan en 1.

**EINFÖLDUÐ RÆÐ STÆÐA**

Ræð stæða telst einfölduð ef teljari og nefnari hafa enga sameiginlega þætti.

Til dæmis:

- $\frac{2}{3}$ er fullstytt vegna þess að 2 og 3 eiga engan sameiginlegan þátt.

- $\frac{2x}{3x}$ er ekki einfölduð því x er sameiginlegur þáttur í 2 x og 3 x.

Við notum regluna um jafngild brot til að fullstytta tölubrot. Við rifjum hana upp hér því við notum hana einnig til að einfalda ræðar stæður.

---

**REGLA UM JAFNGILD BROT**

Ef a, b og c eru tölur þar sem $b \neq 0, c \neq 0$, þá gilda $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ og $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$.

Takið eftir að í reglunni um jafngild brot eru gildi sem gera nefnara jafna núlli sérstaklega útilokuð. Skilyrðið $b \neq 0, c \neq 0$ er tekið skýrt fram. Í hvert sinn sem við ritum ræða stæðu ættum við að taka fram sambærilegt skilyrði sem útilokar gildi sem gera nefnarann jafnan núlli. Til að geta einbeitt okkur að útreikningunum ritum við skilyrðið þó ekki í sýnidæmunum.

Byrjum á að rifja upp hvernig tölubrot eru fullstytt.

---

**SÝNIDÆMI 8.5**

Einfaldið: $-\frac{36}{63}$.

## Lausn

| | $-\frac{36}{63}$ |
|---|---|
| Endurritið teljarann og nefnarann þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. | $-\frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9}$ |
| Einfaldið með reglunni um jafngild brot. | $-\frac{4}{7}$ |

Takið eftir að brotið $-\frac{4}{7}$ er fullstytt vegna þess að ekki eru fleiri sameiginlegir þættir.

8

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.9**

Einfaldið: $-\frac{45}{81}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.10**

Einfaldið: $-\frac{42}{54}$.

Í öllum þessum kafla gerum við ráð fyrir að öll tölugildi sem gera nefnarann jafnan núlli séu útilokuð. Við ritum ekki takmarkanirnar fyrir hverja ræða stæðu, en hafið í huga að nefnarinn má aldrei vera núll. Í næsta sýnidæmi gilda því $x \neq 0$ og $y \neq 0$.

**SÝNIDÆMI 8.6**

Einfaldið: $\frac{3xy}{18x^2y^2}$.

## Lausn

| | $\frac{3xy}{18x^2y^2}$ |
|---|---|
| Endurritið teljarann og nefnarann þannig að sameiginlegu þættirnir sjáist. | $\frac{1 \cdot 3xy}{6xy \cdot 3xy}$ |
| Einfaldið með reglunni um jafngild brot. | $\frac{1}{6xy}$ |

Tókuð þið eftir að þetta eru sömu skref og við notuðum þegar við deildum einliðum í kaflanum um margliður?

**REYNIÐ SJÁLF 8.11**

Einfaldið: $\frac{4x^2y}{12xy^2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.12**

Einfaldið: $\frac{16x^2y}{2xy^2}$.

Til að einfalda ræðar stæður ritum við fyrst teljara og nefnara á þáttuðu formi. Síðan fellum við út sameiginlega þætti með reglunni um jafngild brot.

Farið mjög varlega þegar þið fellið út sameiginlega þætti. Þættir eru margfaldaðir og mynda margfeldi. Fella má þátt út úr margfeldi en ekki lið úr summu.

| $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ | $\frac{3x(x-9)}{5(x-9)}$ | $\frac{x+5}{x}$ |
|---|---|---|
| $\frac{2}{5}$ | $\frac{3x}{5}$ | ENGIR SAMEIGINLEGIR ÞÆTTIR |
| Við felldum út sameiginlegu þættina 3 og 7. Þeir eru þættir margfeldisins. | Við felldum út sameiginlega þáttinn $(x-9)$. Hann er þáttur margfeldisins. | Þótt $x$ sé bæði í teljaranum og nefnaranum er $x$-ið í teljaranum liður í summu! |

Takið eftir að ef x-in væru felld út úr $\frac{x+5}{x}$ væri það eins og að stytta 2 úr brotinu $\frac{2+5}{2}$!

**SÝNIDÆMI 8.7**

### Hvernig einfalda á ræðar tvíliðastæður

Einfaldið: $\frac{2x+8}{5x+20}$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Þáttið teljara og nefnara að fullu. | Þáttið $2x + 8$ og $5x - 20$. | $\frac{2x+8}{5x+20}$<br>$\frac{2(x+4)}{5(x+4)}$ |
| **Skref 2.** Einfaldið með því að stytta út sameiginlega þætti. | Styttið út sameiginlegu þættina. | $\frac{2\cancel{(x+4)}}{5\cancel{(x+4)}}$<br>$\frac{2}{5}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.13**

Einfaldið: $\frac{3x-6}{2x-4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.14**

Einfaldið: $\frac{7y+35}{5y+25}$.

Nú tökum við saman skrefin sem þið fylgið til að einfalda ræðar stæður.

**AÐFERÐ**

### Einfaldið ræða stæðu.

1. Skref 1. Fullþáttið teljara og nefnara.
2. Skref 2. Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti.

Yfirleitt látum við einfölduðu ræðu stæðuna standa á þáttuðu formi. Þá er auðvelt að sannreyna að allir sameiginlegir þættir hafi verið felldir út.

Í sýnidæmunum hér á eftir notum við aðferðirnar úr kaflanum um þáttun til að þátta margliðurnar í teljurum og nefnurum.

**SÝNIDÆMI 8.8**

Einfaldið: $\frac{x^2+5x+6}{x^2+8x+12}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^2+5x+6}{x^2+8x+12}$ |
| Þáttið teljara og nefnara. | $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+6)}$ |
| Fellið sameiginlega þáttinn $x+2$ út í teljara og nefnara. | $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+6)}$ |
| | $\frac{x+3}{x+6}$ |

Getið þið séð hvaða gildi x þarf að útiloka í þessu sýnidæmi?

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.15**

Einfaldið: $\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.16**

Einfaldið: $\frac{x^2-3x-10}{x^2+x-2}$.

---

**SÝNIDÆMI 8.9**

Einfaldið: $\frac{y^2+y-42}{y^2-36}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{y^2+y-42}{y^2-36}$ |
| Þáttið teljara og nefnara. | $\frac{(y+7)(y-6)}{(y+6)(y-6)}$ |
| Fellið sameiginlega þáttinn $y-6$ út í teljara og nefnara. | $\frac{(y+7)(y-6)}{(y+6)(y-6)}$ |
| | $\frac{y+7}{y+6}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.17**

Einfaldið: $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.18**

Einfaldið: $\frac{x^2+8x+7}{x^2-49}$.

**SÝNIDÆMI 8.10**

Einfaldið: $\frac{p^3-2p^2+2p-4}{p^2-7p+10}$.

## Lausn

$$\frac{p^3-2p^2+2p-4}{p^2-7p+10}$$

Þáttið teljara og nefnara.
Þáttið teljarann með flokkun.

$$\frac{p^2(p-2)+2(p-2)}{(p-5)(p-2)}$$
$$\frac{(p^2+2)(p-2)}{(p-5)(p-2)}$$

Fellið sameiginlega þáttinn $p-2$ út í teljara og nefnara.

$$\frac{(p^2+2)(p-2)}{(p-5)(p-2)}$$
$$\frac{p^2+2}{p-5}$$

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.19**

Einfaldið: $\frac{y^3-3y^2+y-3}{y^2-y-6}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.20**

Einfaldið: $\frac{p^3-p^2+2p-2}{p^2+4p-5}$.

**SÝNIDÆMI 8.11**

Einfaldið: $\frac{2n^2-14n}{4n^2-16n-48}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2n^2-14n}{4n^2-16n-48}$ |
| Þáttið teljara og nefnara, og takið fyrst SSÞ út fyrir sviga. | $\frac{2n(n-7)}{4(n^2-4n-12)}$<br>$\frac{2n(n-7)}{4(n-6)(n+2)}$ |
| Fellið út sameiginlega þáttinn 2. | $\frac{2n(n-7)}{2\cdot 2(n-6)(n+2)}$<br>$\frac{n(n-7)}{2(n-6)(n+2)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.21**

Einfaldið: $\frac{2n^2-10n}{4n^2-16n-20}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.22**

Einfaldið: $\frac{4x^2-16x}{8x^2-16x-64}$.

**SÝNIDÆMI 8.12**

Einfaldið: $\frac{3b^2-12b+12}{6b^2-24}$.

## Lausn

$$\frac{3b^2-12b+12}{6b^2-24}$$

Þáttið teljara og nefnara, og takið fyrst SSÞ út fyrir sviga.

$$\frac{3(b^2-4b+4)}{6(b^2-4)}$$
$$\frac{3(b-2)(b-2)}{6(b+2)(b-2)}$$

Fellið út sameiginlegu þættina $b-2$ og $3$.

$$\frac{3(b-2)(b-2)}{3\cdot 2(b+2)(b-2)}$$
$$\frac{b-2}{2(b+2)}$$

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.23**

Einfaldið: $\frac{2x^2-12x+18}{3x^2-27}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.24**

Einfaldið: $\frac{5y^2-30y+25}{2y^2-50}$.

---

**SÝNIDÆMI 8.13**

Einfaldið: $\frac{m^3+8}{m^2-4}$.

8

## Lausn

$$\frac{m^3+8}{m^2-4}$$

Þáttið teljara og nefnara með reglunum um summu teninga og mismun ferninga.

$$\frac{(m+2)(m^2-2m+4)}{(m+2)(m-2)}$$

Fellið út sameiginlega þáttinn $m+2$.

$$\frac{(m+2)(m^2-2m+4)}{(m+2)(m-2)}$$
$$\frac{m^2-2m+4}{m-2}$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.25**

Einfaldið: $\frac{p^3-64}{p^2-16}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.26**

Einfaldið: $\frac{x^3+8}{x^2-4}$.

## Einfaldið ræðar stæður með gagnstæðum þáttum

Nú skoðum við hvernig einfalda má ræða stæðu þar sem teljari og nefnari hafa gagnstæða þætti. Byrjum á tölubrotinu $\frac{7}{-7}$. Við vitum að brotið einfaldast í $-1$ og sjáum einnig að teljari og nefnari eru gagnstæðar tölur.

Í undirstöðukaflanum kynntum við rithátt fyrir móttölur: móttala $a$ er $-a$. Við munum einnig að $-a=-1\cdot a$.

Við einföldum brotið $\frac{a}{-a}$, þar sem teljari og nefnari eru gagnstæðar tölur, á eftirfarandi hátt:

| | |
|---|---|
| | $\frac{a}{-a}$ |
| Við getum endurritað þetta. | $\frac{1\cdot a}{-1\cdot a}$ |
| Fellið út sameiginlegu þættina. | $\frac{1}{-1}$ |
| Einfaldið. | $-1$ |

Á sama hátt getum við því einfaldað brotið $\frac{x-3}{-(x-3)}$:

| | |
|---|---|
| Við getum endurritað þetta. | $\frac{1\cdot(x-3)}{-1\cdot(x-3)}$ |
| Fellið út sameiginlegu þættina. | $\frac{1}{-1}$ |
| Einfaldið. | $-1$ |

En rita má móttölu $x-3$ á annan hátt:

| | |
|---|---|
| | $-(x-3)$ |
| Beitið dreifireglu. | $-x+3$ |
| Endurskrifið. | $3-x$ |

Þetta merkir að brotið $\frac{x-3}{3-x}$ einfaldast í $-1$.

Almennt má rita móttölu $a-b$ sem $b-a$. Ræða stæðan $\frac{a-b}{b-a}$ einfaldast því í $-1$.

---

**GAGNSTÆÐIR ÞÆTTIR Í RÆÐRI STÆÐU**

Móttala $a-b$ er $b-a$.

$$\frac{a-b}{b-a} = -1 \qquad a \neq b$$

Kvóti stæðu og móttölu hennar er $-1$.

Við notum þennan eiginleika til að einfalda ræðar stæður sem hafa gagnstæða þætti í teljara og nefnara.

---

**SÝNIDÆMI 8.14**

Einfaldið: $\frac{x-8}{8-x}$.

## Lausn

Takið eftir að $x-8$ og $8-x$ eru gagnstæðir þættir.

$$\frac{x-8}{8-x}$$
$$-1$$

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.27**

Einfaldið: $\frac{y-2}{2-y}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.28**

Einfaldið: $\frac{n-9}{9-n}$.

Munið að fyrsta skrefið við einföldun ræðrar stæðu er að fullþátta teljara og nefnara.

---

**SÝNIDÆMI 8.15**

Einfaldið: $\frac{14-2x}{x^2-49}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{14-2x}{x^2-49}$ |
| Þáttið teljarann og nefnarann. | $\frac{2(7-x)}{(x+7)(x-7)}$ |
| Takið eftir að $7-x$ og $x-7$ eru móttölur. | $\frac{2(7-x)}{(x+7)(x-7)}(-1)$ |
| Einfaldið. | $-\frac{2}{x+7}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.29**

Einfaldið: $\frac{10-2y}{y^2-25}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.30**

Einfaldið: $\frac{3y-27}{81-y^2}$.

**SÝNIDÆMI 8.16**

Einfaldið: $\frac{x^2-4x-32}{64-x^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^2-4x-32}{64-x^2}$ |
| Þáttið teljarann og nefnarann. | $\frac{(x-8)(x+4)}{(8-x)(8+x)}$ |
| Berið kennsl á þættina sem eru gagnstæðir. | $(-1)\frac{(x-8)(x+4)}{(8-x)(8+x)}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{x+4}{x+8}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.31**

Einfaldið: $\frac{x^2-4x-5}{25-x^2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.32**

Einfaldið: $\frac{x^2+x-2}{1-x^2}$.

## Verkefni úr hluta 8.1

***Æfingin skapar meistarann***

Ákvarðið í verkefnunum hér á eftir fyrir hvaða gildi ræða stæðan er óskilgreind.

**1.** ⓐ $\frac{2x}{z}$ ⓑ $\frac{4p-1}{6p-5}$ ⓒ $\frac{n-3}{n^2+2n-8}$

**2.**

ⓐ $\frac{10m}{11n}$ ⓑ $\frac{6y+13}{4y-9}$ ⓒ $\frac{b-8}{b^2-36}$

**3.**

ⓐ $\frac{4x^2y}{3y}$ ⓑ $\frac{3x-2}{2x+1}$ ⓒ $\frac{u-1}{u^2-3u-28}$

**4.**

ⓐ $\frac{5pq^2}{9q}$ ⓑ $\frac{7a-4}{3a+5}$ ⓒ $\frac{1}{x^2-4}$

**Reiknið gildi ræðra stæða**

Reiknið í verkefnunum hér á eftir gildi ræðu stæðunnar fyrir gefnu gildin.

5.

$$\frac{2x}{x-1}$$

ⓐ $x=0$ ⓑ $x=2$ ⓒ $x=-1$

6.

$$\frac{4y-1}{5y-3}$$

ⓐ $y=0$ ⓑ $y=2$ ⓒ $y=-1$

7.

$$\frac{2p+3}{p^2+1}$$

ⓐ $p=0$ ⓑ $p=1$ ⓒ $p=-2$

8.

$$\frac{x+3}{2-3x}$$

ⓐ $x=0$ ⓑ $x=1$ ⓒ $x=-2$

9.

$$\frac{y^2+5y+6}{y^2-1}$$

ⓐ $y=0$ ⓑ $y=2$ ⓒ $y=-2$

10.

$$\frac{z^2+3z-10}{z^2-1}$$

ⓐ $z=0$ ⓑ $z=2$ ⓒ $z=-2$

11.

$$\frac{a^2-4}{a^2+5a+4}$$

ⓐ $a=0$ ⓑ $a=1$ ⓒ $a=-2$

12.

$$\frac{b^2+2}{b^2-3b-4}$$

ⓐ $b=0$ ⓑ $b=2$ ⓒ $b=-2$

13.

$$\frac{x^2+3xy+2y^2}{2x^3y}$$

1. ⓐ $x=1, y=-1$
2. ⓑ $x=2, y=1$
3. ⓒ $x=-1, y=-2$

14.

$$\frac{c^2+cd-2d^2}{cd^3}$$

1. ⓐ $c=2, d=-1$
2. ⓑ $c=1, d=-1$
3. ⓒ $c=-1, d=2$

15.

$$\frac{m^2-4n^2}{5mn^3}$$

1. ⓐ $m=2, n=1$
2. ⓑ $m=-1, n=-1$
3. ⓒ $m=3, n=2$

16.

$$\frac{2s^2t}{s^2-9t^2}$$

**1.** ⓐ $s=4, t=1$

**2.** ⓑ $s=-1, t=-1$

**3.** ⓒ $s=0, t=2$

### Einfaldið ræðar stæður

Einfaldið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir.

17.

$$-\frac{4}{52}$$

18.

$$-\frac{44}{55}$$

19.

$$\frac{56}{63}$$

20.

$$\frac{65}{104}$$

21.

$$\frac{6ab^2}{12a^2b}$$

22.

$$\frac{15xy}{3x^3y^3}$$

23.

$$\frac{8m^3n}{12mn^2}$$

24.

$$\frac{36v^3w^2}{27vw^3}$$

25.

$$\frac{3a+6}{4a+8}$$

26.

$$\frac{5b+5}{6b+6}$$

27.

$$\frac{3c-9}{5c-15}$$

28.

$$\frac{4d+8}{9d+18}$$

29.

$$\frac{7m+63}{5m+45}$$

30.

$$\frac{8n-96}{3n-36}$$

31.

$$\frac{12p-240}{5p-100}$$

32.

$$\frac{6q+210}{5q+175}$$

33.

$$\frac{a^2-a-12}{a^2-8a+16}$$

34.

$$\frac{x^2+4x-5}{x^2-2x+1}$$

35.

$$\frac{y^2+3y-4}{y^2-6y+5}$$

36.

$$\frac{v^2+8v+15}{v^2-v-12}$$

37.

$$\frac{x^2-25}{x^2+2x-15}$$

38.

$$\frac{a^2-4}{a^2+6a-16}$$

39.

$$\frac{y^2-2y-3}{y^2-9}$$

40.

$$\frac{b^2+9b+18}{b^2-36}$$

41.

$$\frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+2y+1}$$

42.

$$\frac{p^3+3p^2+4p+12}{p^2+p-6}$$

43.

$$\frac{x^3-2x^2-25x+50}{x^2-25}$$

44.

$$\frac{q^3+3q^2-4q-12}{q^2-4}$$

45.

$$\frac{3a^2+15a}{6a^2+6a-36}$$

46.

$$\frac{8b^2-32b}{2b^2-6b-80}$$

47.

$$\frac{-5c^2-10c}{-10c^2+30c+100}$$

48.

$$\frac{4d^2-24d}{2d^2-4d-48}$$

49.

$$\frac{3m^2+30m+75}{4m^2-100}$$

50.

$$\frac{5n^2+30n+45}{2n^2-18}$$

51.

$$\frac{5r^2+30r-35}{r^2-49}$$

52.

$$\frac{3s^2+30s+72}{3s^2-48}$$

53.

$$\frac{t^3-27}{t^2-9}$$

54.

$$\frac{v^3-1}{v^2-1}$$

55.

$$\frac{w^3+216}{w^2-36}$$

56.

$$\frac{v^3+125}{v^2-25}$$

**Einfaldið ræðar stæður með gagnstæðum þáttum**

Einfaldið hverja ræða stæðu í verkefnunum hér á eftir.

57.

$$\frac{a-5}{5-a}$$

58.

$$\frac{b-12}{12-b}$$

59.

$$\frac{11-c}{c-11}$$

60.

$$\frac{5-d}{d-5}$$

61.

$$\frac{12-2x}{x^2-36}$$

62.

$$\frac{20-5y}{y^2-16}$$

63.

$$\frac{4v-32}{64-v^2}$$

64.

$$\frac{7w-21}{9-w^2}$$

65.

$$\frac{y^2-11y+24}{9-y^2}$$

66.

$$\frac{z^2-9z+20}{16-z^2}$$

67.

$$\frac{a^2-5a-36}{81-a^2}$$

68.

$$\frac{b^2+b-42}{36-b^2}$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**69. Skatthlutföll. Á skattárinu 2015 má finna skatt einhleyps einstaklings með tekjur á milli $37.450 og $90.750 með því að reikna gildi formúlunnar** $0{,}25x-4206{,}25$, þar sem x táknar tekjur. Meðalskatthlutfall þessara tekna má finna með því að reikna gildi formúlunnar $\frac{0{,}25x-4206{,}25}{x}$. Hvert væri meðalskatthlutfall einhleypings með $50.000 í tekjur?

**70. Vinna.** Tímann sem tvær manneskjur þurfa til að ljúka sama verki saman má finna með því að reikna gildi formúlunnar $\frac{xy}{x+y}$. Ef Tom getur málað setustofuna á $x=45$ mínútum og Bobby bróðir hans á $y=60$ mínútum, hversu margar mínútur þurfa þeir ef þeir vinna saman?

### *Ritunarverkefni*

**71.** Útskýrið hvernig þið finnið þau gildi x sem gera ræðu stæðuna $\frac{x^2-x-20}{x^2-4}$ óskilgreinda.

**72.** Útskýrið hvert skref sem þið takið til að einfalda ræðu stæðuna $\frac{p^2+4p-21}{9-p^2}$.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| ákvarðað fyrir hvaða gildi ræð stæða er óskilgreind. | | | |
| reiknað gildi ræðra stæðna. | | | |
| einfaldað ræðar stæður. | | | |
| einfaldað ræðar stæður með gagnstæðum þáttum. | | | |

ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

**... af öryggi.** Til hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Hugleiðið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo að þið getið haldið áfram að nota þær. Hvað gerðuð þið til að öðlast öryggi í þessum atriðum? Verið nákvæm.

**... með nokkurri hjálp.** Bregðist fljótt við, því að atriði sem þið náið ekki tökum á verða hindranir á leiðinni að árangri. Stærðfræði er stigbundin og hvert viðfangsefni byggist á fyrri þekkingu. Mikilvægt er að hafa traustan grunn áður en þið haldið áfram. Hvern getið þið

beðið um hjálp? Samnemendur og kennari geta veitt góða aðstoð. Er hægt að fá aðstoð stærðfræðileiðbeinanda í skólanum? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**... nei – ég skil þetta ekki!** Þetta er alvarlegt og þið megið ekki hunsa það. Þið þurfið að fá hjálp strax, annars verður efnið ykkur fljótt ofviða. Ræðið sem fyrst við kennarann um stöðuna. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

## 8.2 Margfaldið og deilið ræðum stæðum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Margfaldið ræðar stæður
- Deilið ræðum stæðum

**UNDIRBÚNINGUR 8.4**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í hlutann sem vísað er í og rifja efnið upp.

Margfaldið: $\frac{14}{15} \cdot \frac{6}{35}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.68.

**UNDIRBÚNINGUR 8.5**

Deilið: $\frac{14}{15} \div \frac{6}{35}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.71.

8

**UNDIRBÚNINGUR 8.6**

Fullþáttið: $2x^2 - 98$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.62.

**UNDIRBÚNINGUR 8.7**

Fullþáttið: $10n^3 + 10$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.65.

**UNDIRBÚNINGUR 8.8**

Fullþáttið: $10p^2 - 25pq - 15q^2$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.68.

## Margfaldið ræðar stæður

Þegar við margföldum ræðar stæður gerum við það sama og við gerðum með tölubrot. Við margföldum saman teljarana og margföldum saman nefnarana. Ef einhverjir þættir eru sameiginlegir fellum við þá síðan út til að einfalda niðurstöðuna.

---

**MARGFÖLDUN RÆÐRA STÆÐNA**

Ef $p, q, r, s$ eru margliður þar sem $q \neq 0$ og $s \neq 0$, þá gildir

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

Til að margfalda ræðar stæður skal margfalda saman teljarana og margfalda saman nefnarana.

Við leysum fyrsta sýnidæmið með tölubrotum til að rifja upp hvernig við margföldum brot án breyta.

---

**SÝNIDÆMI 8.17**

Margfaldið: $\frac{10}{28} \cdot \frac{8}{15}$.

### Lausn

| | $\frac{10}{28} \cdot \frac{8}{15}$ |
|---|---|
| Margfaldið saman teljarana og nefnarana. | $\frac{10 \cdot 8}{28 \cdot 15}$ |
| Leitið að sameiginlegum þáttum og fellið þá síðan út. | $\frac{2 \cdot \cancel{5} \cdot 2 \cdot \cancel{4}}{7 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{5}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4}{21}$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.33**

Margfaldið: $\frac{6}{10} \cdot \frac{15}{12}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.34**

Margfaldið: $\frac{20}{15} \cdot \frac{6}{8}$.

Munið að í öllum þessum kafla gerum við ráð fyrir að öll gildi sem gera nefnarann að núlli séu útilokuð. Við skrifum ekki takmarkanirnar við hverja ræða stæðu en hafið í huga að nefnarinn má aldrei vera núll. Í næsta sýnidæmi gilda því $x \neq 0$ og $y \neq 0$.

**SÝNIDÆMI 8.18**

Margfaldið: $\frac{2x}{3y^2} \cdot \frac{6xy^3}{x^2y}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2x}{3y^2} \cdot \frac{6xy^3}{x^2y}$ |
| Margfaldið. | $\frac{2x \cdot 6xy^3}{3y^2 \cdot x^2y}$ |
| Fullþáttið teljarann og nefnarann og fellið síðan út sameiginlega þætti. | $\frac{2 \cdot x \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y}{3 \cdot y \cdot y \cdot x \cdot x \cdot y}$ |
| Einfaldið. | 4 |

**REYNIÐ SJÁLF 8.35**

Margfaldið: $\frac{3pq}{q^2} \cdot \frac{5p^2q}{6pq}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.36**

Margfaldið: $\frac{6x^3y}{7x^2} \cdot \frac{2xy^3}{x^2y}$.

**SÝNIDÆMI 8.19**

## Hvernig margfalda á ræðar stæður

Margfaldið: $\frac{2x}{x^2-7x+12} \cdot \frac{x^2-9}{6x^2}$.

8

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Þáttið teljarann og nefnarann að fullu. | Þáttið $x^2 - 9$ og $x^2 - 7x + 12$. | $\frac{2x}{x^2-7x+12} \cdot \frac{x^2-9}{6x^2}$<br>$\frac{2x}{(x-3)(x-4)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{6x^2}$ |
| **Skref 2.** Margfaldið teljarana og nefnarana. | Margfaldið teljarana og nefnarana. Gott er að skrifa einliðurnar fyrst. | $\frac{2x(x-3)(x+3)}{6x^2(x-3)(x-4)}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið með því að stytta út sameiginlega þætti. | Styttið út sameiginlegu þættina.<br>Látið nefnarann vera á þáttaðri mynd. | $\frac{\cancel{2}\cancel{x}\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{x} \cdot x\cancel{(x-3)}(x-4)}$<br>$\frac{(x+3)}{3x(x-4)}$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.37**

Margfaldið: $\frac{5x}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2-4}{10x}$.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.38**

Margfaldið: $\frac{9x^2}{x^2+11x+30} \cdot \frac{x^2-36}{3x^2}$.

---

**AÐFERÐ**

### Margfaldið ræða stæðu.

1. Skref 1. Fullþáttið hvern teljara og nefnara.
2. Skref 2. Margfaldið saman teljarana og nefnarana.
3. Skref 3. Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti.

---

**SÝNIDÆMI 8.20**

Margfaldið: $\frac{n^2-7n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+1}{2n}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{n^2-7n}{n^2+2n+1} \cdot \frac{n+1}{2n}$ |
| Þáttið hvern teljara og nefnara. | $\frac{n(n-7)}{(n+1)(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2n}$ |
| Margfaldið saman teljarana og nefnarana. | $\frac{n(n-7)(n+1)}{(n+1)(n+1)2n}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{n(n-7)(n+1)}{(n+1)(n+1)2n}$ |
| Einfaldið. | $\frac{n-7}{2(n+1)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.39**

Margfaldið: $\frac{x^2-25}{x^2-3x-10} \cdot \frac{x+2}{x}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.40**

Margfaldið: $\frac{x^2-4x}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x+2}{x}$.

**SÝNIDÆMI 8.21**

Margfaldið: $\frac{16-4x}{2x-12} \cdot \frac{x^2-5x-6}{x^2-16}$.

8

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{16-4x}{2x-12} \cdot \frac{x^2-5x-6}{x^2-16}$ |
| Þáttið hvern teljara og nefnara. | $\frac{4(4-x)}{2(x-6)} \cdot \frac{(x-6)(x+1)}{(x-4)(x+4)}$ |
| Margfaldið saman teljarana og nefnarana. | $\frac{4(4-x)(x-6)(x+1)}{2(x-6)(x-4)(x+4)}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $(-1)\frac{2 \cdot 2(4-x)(x-6)(x+1)}{2(x-6)(x-4)(x+4)}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{2(x+1)}{(x+4)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.41**

Margfaldið: $\frac{12x-6x^2}{x^2+8x} \cdot \frac{x^2+11x+24}{x^2-4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.42**

Margfaldið: $\frac{9v-3v^2}{9v+36} \cdot \frac{v^2+7v+12}{v^2-9}$.

**SÝNIDÆMI 8.22**

Margfaldið: $\frac{2x-6}{x^2-8x+15} \cdot \frac{x^2-25}{2x+10}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2x-6}{x^2-8x+15} \cdot \frac{x^2-25}{2x+10}$ |
| Þáttið hvern teljara og nefnara. | $\frac{2(x-3)}{(x-3)(x-5)} \cdot \frac{(x-5)(x+5)}{2(x+5)}$ |
| Margfaldið saman teljarana og nefnarana. | $\frac{2(x-3)(x-5)(x+5)}{2(x-3)(x-5)(x+5)}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{\cancel{2}\cancel{(x-3)}\cancel{(x-5)}\cancel{(x+5)}}{\cancel{2}\cancel{(x-3)}\cancel{(x-5)}\cancel{(x+5)}}$ |
| Einfaldið. | 1 |

**REYNIÐ SJÁLF 8.43**

Margfaldið: $\frac{3a-21}{a^2-9a+14} \cdot \frac{a^2-4}{3a+6}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.44**

Margfaldið: $\frac{b^2-b}{b^2+9b-10} \cdot \frac{b^2-100}{b^2-10b}$.

## Deilið ræðum stæðum

Til að deila ræðum stæðum margföldum við fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara, rétt eins og við gerðum með tölubrot.

Munið að margföldunarandhverfa $\frac{a}{b}$ er $\frac{b}{a}$. Til að finna margföldunarandhverfuna víxlum við einfaldlega á teljara og nefnara. Við „snúum við“ brotinu.

**DEILING RÆÐRA STÆÐNA**

Ef $p, q, r, s$ eru margliður þar sem $q \neq 0, r \neq 0, s \neq 0$, þá gildir

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}$$

Til að deila ræðum stæðum skal margfalda fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara.

**SÝNIDÆMI 8.23**

## Hvernig deila á ræðum stæðum

Deilið: $\frac{x+9}{6-x} \div \frac{x^2-81}{x-6}$.

8

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skrifið deilinguna sem margfeldi fyrri ræðu stæðunnar og umhverfu þeirrar síðari. | „Snúið“ öðru brotinu við og breytið deilingarmerkinu í margföldunarmerki. | $\frac{x+9}{6-x} \div \frac{x^2-81}{x-6}$<br>$\frac{x+9}{6-x} \cdot \frac{x-6}{x^2-81}$ |
| **Skref 2.** Þáttið teljara og nefnara að full fullu. | Þáttið $x^2-81$. | $\frac{x+9}{6-x} \cdot \frac{x-6}{(x-9)(x+9)}$ |
| **Skref 3.** Margfaldið saman teljarana og nefnarana. | | $\frac{(x+9)(x-6)}{(6-x)(x-9)(x+9)}$ |
| **Skref 4.** Einfaldið með því að stytta út sameiginlega þætti. | Styttið út sameiginlegu þættina.<br>Munið að þegar gagnstæðum stæðum er deilt fæst –1. | $(-1)\frac{\cancel{(x+9)}\cancel{(x-6)}}{\cancel{(6-x)}(x-9)\cancel{(x+9)}}$<br>$-\frac{1}{(x-9)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.45**

Deilið: $\frac{c+3}{5-c} \div \frac{c^2-9}{c-5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.46**

Deilið: $\frac{2-d}{d-4} \div \frac{4-d^2}{4-d}$.

**AÐFERÐ**

### Deilið ræðum stæðum.

1. Skref 1. Ritið deilinguna sem margfeldi fyrri ræðu stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari.
2. Skref 2. Fullþáttið teljarana og nefnarana.
3. Skref 3. Margfaldið saman teljarana og nefnarana.
4. Skref 4. Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti.

**SÝNIDÆMI 8.24**

Deilið: $\frac{3n^2}{n^2-4n} \div \frac{9n^2-45n}{n^2-7n+10}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{3n^2}{n^2-4n} \div \frac{9n^2-45n}{n^2-7n+10}$ |
| Ritið deilinguna sem margfeldi fyrri ræðu stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\frac{3n^2}{n^2-4n} \cdot \frac{n^2-7n+10}{9n^2-45n}$ |
| Þáttið teljarana og nefnarana og margfaldið síðan. | $\frac{3 \cdot n \cdot n \cdot (n-5)(n-2)}{n(n-4) \cdot 3 \cdot 3 \cdot n \cdot (n-5)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{\cancel{3} \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{n(n-5)}(n-2)}{\cancel{n}(n-4)\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{n(n-5)}}$ |
| | $\frac{n-2}{3(n-4)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.47**

Deilið: $\frac{2m^2}{m^2-8m} \div \frac{8m^2+24m}{m^2+m-6}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.48**

Deilið: $\frac{15n^2}{3n^2+33n} \div \frac{5n-5}{n^2+9n-22}$.

Munið að fyrst skal rita deilinguna sem margfeldi fyrri stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. Þáttið síðan allt og leitið að sameiginlegum þáttum.

**SÝNIDÆMI 8.25**

Deilið:

$$\frac{2x^2+5x-12}{x^2-16} \div \frac{2x^2-13x+15}{x^2-8x+16}.$$

8

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2x^2+5x-12}{x^2-16} \div \frac{2x^2-13x+15}{x^2-8x+16}$ |
| Ritið deilinguna sem margfeldi fyrri stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\frac{2x^2+5x-12}{x^2-16} \cdot \frac{x^2-8x+16}{2x^2-13x+15}$ |
| Þáttið teljarana og nefnarana og margfaldið síðan. | $\frac{(2x-3)(x+4)(x-4)(x-4)}{(x-4)(x+4)(2x-3)(x-5)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{(2x-3)(x+4)(x-4)(x-4)}{(x-4)(x+4)(2x-3)(x-5)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{x-4}{x-5}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.49**

Deilið:

$$\frac{3a^2-8a-3}{a^2-25} \div \frac{3a^2-14a-5}{a^2+10a+25}.$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.50**

Deilið: $\frac{4b^2+7b-2}{1-b^2} \div \frac{4b^2+15b-4}{b^2-2b+1}$.

**SÝNIDÆMI 8.26**

Deilið: $\frac{p^3+q^3}{2p^2+2pq+2q^2} \div \frac{p^2-q^2}{6}$.

8

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{p^3+q^3}{2p^2+2pq+2q^2} \div \frac{p^2-q^2}{6}$ |
| Ritið deilinguna sem margfeldi fyrri stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\frac{p^3+q^3}{2p^2+2pq+2q^2} \cdot \frac{6}{p^2-q^2}$ |
| Þáttið teljarana og nefnarana og margfaldið síðan. | $\frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)6}{2(p^2+pq+q^2)(p-q)(p+q)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{(p+q)(p^2-pq+q^2)6^3}{2(p^2+pq+q^2)(p-q)(p+q)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3(p^2-pq+q^2)}{(p-q)(p^2+pq+q^2)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.51**

Deilið: $\frac{x^3-8}{3x^2-6x+12} \div \frac{x^2-4}{6}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.52**

Deilið: $\frac{2z^2}{z^2-1} \div \frac{z^3-z^2+z}{z^3-1}$.

Áður en við leysum næsta sýnidæmi skulum við skoða hvernig við deilum broti með heilli tölu. Þegar við deilum $\frac{3}{5} \div 4$ ritum við fyrst 4 sem brot svo að við getum fundið margföldunarandhverfu þess.

$$\frac{3}{5} \div 4$$
$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1}$$
$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

Við gerum það sama þegar við deilum ræðum stæðum.

**SÝNIDÆMI 8.27**

Deilið: $\frac{a^2-b^2}{3ab} \div (a^2+2ab+b^2)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{a^2-b^2}{3ab} \div \left(a^2+2ab+b^2\right)$ |
| Ritið síðari stæðuna sem brot. | $\frac{a^2-b^2}{3ab} \div \frac{a^2+2ab+b^2}{1}$ |
| Ritið deilinguna sem margfeldi fyrri stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\frac{a^2-b^2}{3ab} \cdot \frac{1}{a^2+2ab+b^2}$ |
| Þáttið teljarana og nefnarana og margfaldið síðan. | $\frac{(a-b)(a+b) \cdot 1}{3ab \cdot (a+b)(a+b)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{(a-b)(a+b)}{3ab \cdot (a+b)(a+b)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{(a-b)}{3ab(a+b)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.53**

Deilið: $\frac{2x^2-14x-16}{4} \div \left(x^2+2x+1\right)$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.54**

Deilið: $\frac{y^2-6y+8}{y^2-4y} \div \left(3y^2-12y\right)$.

Munið að brotastrik táknar deilingu. Samsett brot er önnur leið til að skrifa deilingu tveggja brota.

**SÝNIDÆMI 8.28**

Deilið: $\frac{\frac{6x^2-7x+2}{4x-8}}{\frac{2x^2-7x+3}{x^2-5x+6}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\dfrac{6x^2-7x+2}{4x-8}}{\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-5x+6}}$ |
| Ritið með deilingarmerki. | $\dfrac{6x^2-7x+2}{4x-8} \div \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-5x+6}$ |
| Ritið sem margfeldi fyrri stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\dfrac{6x^2-7x+2}{4x-8} \cdot \dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3}$ |
| Þáttið teljarana og nefnarana og margfaldið síðan. | $\dfrac{(2x-1)(3x-2)(x-2)(x-3)}{4(x-2)(2x-1)(x-3)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\dfrac{(2x-1)(3x-2)(x-2)(x-3)}{4(x-2)(2x-1)(x-3)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{3x-2}{4}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.55**

Deilið: $\dfrac{\dfrac{3x^2+7x+2}{4x+24}}{\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2+x-30}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.56**

Deilið: $\dfrac{\dfrac{y^2-36}{2y^2+11y-6}}{\dfrac{2y^2-2y-60}{8y-4}}$.

Ef ræðu stæðurnar eru fleiri en tvær notum við samt sömu aðferð. Fyrsta skrefið er að rita allar deilingar sem margföldun með margföldunarandhverfu. Síðan þáttum við og margföldum.

**SÝNIDÆMI 8.29**

Deilið:

$$\frac{3x-6}{4x-4} \cdot \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-10} \div \frac{2x+12}{8x+16}.$$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{3x-6}{4x-4} \cdot \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-10} \div \frac{2x+12}{8x+16}$ |
| Ritið deilinguna sem margföldun með margföldunarandhverfu. | $\frac{3x-6}{4x-4} \cdot \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-10} \cdot \frac{8x+16}{2x+12}$ |
| Þáttið teljarana og nefnarana og margfaldið síðan. | $\frac{3 \cdot 8(x-2)(x+3)(x-1)(x+2)}{4 \cdot 2(x-1)(x+2)(x-5)(x+6)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{3 \cdot \cancel{8}(x-2)(x+3)\cancel{(x-1)(x+2)}}{\cancel{4} \cdot \cancel{2}\cancel{(x-1)(x+2)}(x-5)(x+6)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3(x-2)(x+3)}{(x-5)(x+6)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.57**

Deilið:

$$\frac{4m+4}{3m-15} \cdot \frac{m^2-3m-10}{m^2-4m-32} \div \frac{12m-36}{6m-48}.$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.58**

Deilið:

$$\frac{2n^2+10n}{n-1} \div \frac{n^2+10n+24}{n^2+8n-9} \cdot \frac{n+4}{8n^2+12n}.$$

## Verkefni úr hluta 8.2

### *Æfingin skapar meistarann*

**Margfaldið ræðar stæður**

Margfaldið í verkefnunum hér á eftir.

73.

$$\frac{12}{16} \cdot \frac{4}{10}$$

74.

$$\frac{32}{5} \cdot \frac{16}{24}$$

75.

$$\frac{18}{10} \cdot \frac{4}{30}$$

76.

$$\frac{21}{36} \cdot \frac{45}{24}$$

77.

$$\frac{5x^2y^4}{12xy^3} \cdot \frac{6x^2}{20y^2}$$

78.

$$\frac{8w^3y}{9y^2} \cdot \frac{3y}{4w^4}$$

79.

$$\frac{12a^3b}{b^2} \cdot \frac{2ab^2}{9b^3}$$

80.

$$\frac{4mn^2}{5n^3} \cdot \frac{mn^3}{8m^2n^2}$$

81.

$$\frac{5p^2}{p^2-5p-36} \cdot \frac{p^2-16}{10p}$$

82.

$$\frac{3q^2}{q^2+q-6} \cdot \frac{q^2-9}{9q}$$

83.

$$\frac{4r}{r^2-3r-10} \cdot \frac{r^2-25}{8r^2}$$

84.

$$\frac{s}{s^2-9s+14} \cdot \frac{s^2-49}{7s^2}$$

85.

$$\frac{x^2-7x}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x+3}{4x}$$

86.

$$\frac{2y^2-10y}{y^2+10y+25}\cdot\frac{y+5}{6y}$$

87.

$$\frac{z^2+3z}{z^2-3z-4}\cdot\frac{z-4}{z^2}$$

88.

$$\frac{2a^2+8a}{a^2-9a+20}\cdot\frac{a-5}{a^2}$$

89.

$$\frac{28-4b}{3b-3}\cdot\frac{b^2+8b-9}{b^2-49}$$

90.

$$\frac{18c-2c^2}{6c+30}\cdot\frac{c^2+7c+10}{c^2-81}$$

91.

$$\frac{35d-7d^2}{d^2+7d}\cdot\frac{d^2+12d+35}{d^2-25}$$

92.

$$\frac{72m-12m^2}{8m+32}\cdot\frac{m^2+10m+24}{m^2-36}$$

93.

$$\frac{4n+20}{n^2+n-20}\cdot\frac{n^2-16}{4n+16}$$

94.

$$\frac{6p^2-6p}{p^2+7p-18}\cdot\frac{p^2-81}{3p^2-27p}$$

95.

$$\frac{q^2-2q}{q^2+6q-16}\cdot\frac{q^2-64}{q^2-8q}$$

96.

$$\frac{2r^2-2r}{r^2+4r-5}\cdot\frac{r^2-25}{2r^2-10r}$$

**Deilið ræðum stæðum**

Deilið í verkefnunum hér á eftir.

97.

$$\frac{t-6}{3-t}\div\frac{t-5}{t^2-9}$$

98.

$$\frac{v-5}{11-v}\div\frac{v^2-25}{v-11}$$

99.

$$\frac{10+w}{w-8}\div\frac{100-w^2}{8-w}$$

100.

$$\frac{7+x}{x-6}\div\frac{49-x^2}{x+6}$$

101.

$$\frac{27y^2}{3y-21}\div\frac{3y^2+18}{y^2+13y+42}$$

102.

$$\frac{24z^2}{2z-8}\div\frac{4z-28}{z^2-11z+28}$$

103.

$$\frac{16a^2}{4a+36}\div\frac{4a^2-24a}{a^2+4a-45}$$

104.

$$\frac{24b^2}{2b-4}\div\frac{12b^2+36b}{b^2-11b+18}$$

105.

$$\frac{5c^2+9c-2}{c^2-4}\div\frac{5c^2-16c+3}{c^2+4c+4}$$

106.

$$\frac{2d^2+d-3}{d^2-16} \div \frac{2d^2-9d-18}{d^2-8d+16}$$

107.

$$\frac{6m^2-11m-2}{9-m^2} \div \frac{6m^2+25m+4}{m^2-6m+9}$$

108.

$$\frac{2n^2-3n-14}{25-n^2} \div \frac{2n^2-13n+21}{n^2-10n+25}$$

109.

$$\frac{3s^2}{s^2-16} \div \frac{s^3+4s^2+16s}{s^3-64}$$

110.

$$\frac{r^2-9}{15} \div \frac{r^3-27}{5r^2+15r+45}$$

111.

$$\frac{p^3+q^3}{3p^2+3pq+3q^2} \div \frac{p^2-q^2}{12}$$

112.

$$\frac{v^3-8w^3}{2v^2+4vw+8w^2} \div \frac{v^2-4w^2}{4}$$

113.

$$\frac{t^2-9}{2t} \div \left(t^2-6t+9\right)$$

114.

$$\frac{x^2+3x-10}{4x} \div \left(2x^2+20x+50\right)$$

115.

$$\frac{2y^2-10yz-48z^2}{2y-1} \div \left(4y^2-32yz\right)$$

**116.**

$$\frac{2m^2-98n^2}{2m+6} \div \left(m^2-7mn\right)$$

**117.**

$$\frac{\dfrac{2a^2-a-21}{5a+20}}{\dfrac{a^2+7a+12}{a^2+8a+16}}$$

**118.**

$$\frac{\dfrac{3b^2+2b-8}{12b+18}}{\dfrac{3b^2+2b-8}{2b^2-7b-15}}$$

**119.**

$$\frac{\dfrac{12c^2-12}{2c^2-3c+1}}{\dfrac{4c+4}{6c^2-13c+5}}$$

**120.**

$$\frac{\dfrac{4d^2+7d-2}{35d+10}}{\dfrac{d^2-4}{7d^2-12d-4}}$$

**121.**

$$\frac{10m^2+80m}{3m-9} \cdot \frac{m^2+4m-21}{m^2-9m+20} \div \frac{5m^2+10m}{2m-10}$$

**122.**

$$\frac{4n^2+32n}{3n+2} \cdot \frac{3n^2-n-2}{n^2+n-30} \div \frac{108n^2-24n}{n+6}$$

123.

$$\frac{12p^2+3p}{p+3} \div \frac{p^2+2p-63}{p^2-p-12} \cdot \frac{p-7}{9p^3-9p^2}$$

124.

$$\frac{6q+3}{9q^2-9q} \div \frac{q^2+14q+33}{q^2+4q-5} \cdot \frac{4q^2+12q}{12q+6}$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**125. Líkur.** Forstjóri stórs fyrirtækis tekur viðtöl við umsækjendur um tvö sams konar störf. Ef $w=$ fjöldi kvenkyns umsækjenda og $m=$ fjöldi karlkyns umsækjenda, þá eru líkurnar á að tvær konur verði valdar í störfin $\frac{w}{w+m} \cdot \frac{w-1}{w+m-1}$.

1. ⓐ Einfaldið líkurnar með því að margfalda ræðu stæðurnar tvær.
2. ⓑ Finnið líkurnar á að tvær konur verði valdar þegar $w=5$ og $m=10$.

**126. Flatarmál þríhyrnings. Flatarmál** þríhyrnings með grunnlínu b og hæð h er $\frac{bh}{2}$. Ef þríhyrningurinn er teygður þannig að nýr þríhyrningur hafi þrefalt lengri grunnlínu og þrefalt meiri hæð en sá upphaflegi, er flatarmálið $\frac{9bh}{2}$. Reiknið hlutfall flatarmáls nýja þríhyrningsins og flatarmáls þess upphaflega með því að deila $\frac{9bh}{2}$ með $\frac{bh}{2}$.

### *Ritunarverkefni*

127.

1. ⓐ Margfaldið $\frac{7}{4} \cdot \frac{9}{10}$ og útskýrið öll skrefin.
2. ⓑ Margfaldið $\frac{n}{n-3} \cdot \frac{9}{n+3}$ og útskýrið öll skrefin.
3. ⓒ Reiknið gildi svarsins við b-lið þegar $n=7$. Fenguð þið sama svar og í a-lið? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

128.

1. ⓐ Deilið $\frac{24}{5} \div 6$ og útskýrið öll skrefin.
2. ⓑ Deilið $\frac{x^2-1}{x} \div (x+1)$ og útskýrið öll skrefin.

**3.** ⓒ Reiknið gildi svarsins við b-lið þegar $x=5$. Fenguð þið sama svar og í a-lið? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð námsmarkmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| margfalda ræð stæður. | | | |
| deila ræðum stæðum. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann, hvað ætlið þið þá að gera til að ná öruggum tökum á öllum námsmarkmiðunum?

# 8.3 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leggið saman ræðar stæður með sameiginlegan nefnara
- Dragið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara
- Leggið saman og dragið frá ræðar stæður þar sem nefnararnir eru móttölur hvor annars

**UNDIRBÚNINGUR 8.9**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í tilgreindan hluta og rifja efnið upp.

Leggið saman: $\frac{y}{3}+\frac{9}{3}$.

Ef þið leystuð verkefnið ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.77.

**UNDIRBÚNINGUR 8.10**

Dragið frá: $\frac{10}{x}-\frac{2}{x}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.79.

**UNDIRBÚNINGUR 8.11**

Fullþáttið: $8n^5 - 20n^3$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.59.

**UNDIRBÚNINGUR 8.12**

Fullþáttið: $45a^3 - 5ab^2$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.62.

## Leggið saman ræðar stæður með sameiginlegan nefnara

Hvert er fyrsta skrefið þegar þið leggið saman tölubrot? Þið athugið hvort þau hafi sameiginlegan nefnara. Ef svo er leggið þið teljarana saman og setjið summuna yfir sameiginlega nefnarann. Ef þau hafa ekki sameiginlegan nefnara finnið þið hann áður en þið leggið brotin saman.

Sama gildir um ræðar stæður. Til að leggja saman ræðar stæður verða þær að hafa sameiginlegan nefnara. Þegar nefnararnir eru eins leggjum við teljarana saman og setjum summuna yfir sameiginlega nefnarann.

**SAMLAGNING RÆÐRA STÆÐNA**

Ef $p$, $q$, og $r$ eru margliður þar sem $r \neq 0$, þá gildir

$$\frac{p}{r} + \frac{q}{r} = \frac{p+q}{r}$$

Til að leggja saman ræðar stæður með sameiginlegan nefnara skal leggja teljarana saman og setja summuna yfir sameiginlega nefnarann.

Við leggjum fyrst saman tvö tölubrot til að rifja upp aðferðina.

**SÝNIDÆMI 8.30**

Leggið saman: $\frac{5}{18} + \frac{7}{18}$.

## Lausn

| | $\frac{5}{18}+\frac{7}{18}$ |
|---|---|
| Brotin hafa sameiginlegan nefnara, svo leggið teljarana saman og setjið summuna yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{5+7}{18}$ |
| Leggið saman í teljaranum. | $\frac{12}{18}$ |
| Þáttið teljarann og nefnarann til að sýna sameiginlegu þættina. | $\frac{6\cdot 2}{6\cdot 3}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{6\cdot 2}{6\cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2}{3}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.59**

Leggið saman: $\frac{7}{16}+\frac{5}{16}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.60**

Leggið saman: $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}$.

Munið að við leyfum ekki gildi sem gera nefnarann jafnan núlli. Hvaða gildi á $y$ þarf að útiloka í næsta sýnidæmi?

**SÝNIDÆMI 8.31**

Leggið saman: $\frac{3y}{4y-3}+\frac{7}{4y-3}$.

## Lausn

| | $\frac{3y}{4y-3}+\frac{7}{4y-3}$ |
|---|---|
| Brotin hafa sameiginlegan nefnara, svo leggið teljarana saman og setjið summuna yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{3y+7}{4y-3}$ |

Ekki er hægt að þátta teljarann eða nefnarann. Brotið er fullkomlega einfaldað.

**REYNIÐ SJÁLF 8.61**

Leggið saman: $\frac{5x}{2x+3}+\frac{2}{2x+3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.62**

Leggið saman: $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x-2}$.

**SÝNIDÆMI 8.32**

Leggið saman: $\frac{7x+12}{x+3}+\frac{x^2}{x+3}$.

## Lausn

| | $\frac{7x+12}{x+3}+\frac{x^2}{x+3}$ |
|---|---|
| Brotin hafa sameiginlegan nefnara, svo leggið teljarana saman og setjið summuna yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{7x+12+x^2}{x+3}$ |
| Raðið veldunum í lækkandi röð. | $\frac{x^2+7x+12}{x+3}$ |
| Þáttið teljarann. | $\frac{(x+3)(x+4)}{x+3}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{(x+3)(x+4)}{x+3}$ |
| Einfaldið. | $x+4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.63**

Leggið saman: $\frac{9x+14}{x+7}+\frac{x^2}{x+7}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.64**

Leggið saman: $\frac{x^2+8x}{x+5}+\frac{15}{x+5}$.

## Dragið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara

Til að draga ræðar stæður frá verða þær einnig að hafa sameiginlegan nefnara. Þegar nefnararnir eru eins drögum við teljarana frá og setjum mismuninn yfir sameiginlega nefnarann.

**FRÁDRÁTTUR RÆÐRA STÆÐNA**

Ef $p$, $q$, og $r$ eru margliður þar sem $r \neq 0$, þá gildir

$$\frac{p}{r}-\frac{q}{r}=\frac{p-q}{r}$$

Til að draga ræðar stæður frá skal draga teljarana frá og setja mismuninn yfir sameiginlega nefnarann.

Við einföldum alltaf ræðar stæður. Gætið þess að þátta ef hægt er eftir að þið hafið dregið teljarana frá. Þá sjáið þið alla sameiginlega þætti.

**SÝNIDÆMI 8.33**

Dragið frá: $\frac{n^2}{n-10}-\frac{100}{n-10}$.

8

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{n^2}{n-10}-\frac{100}{n-10}$ |
| Brotin hafa sameiginlegan nefnara, svo dragið teljarana frá og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{n^2-100}{n-10}$ |
| Þáttið teljarann. | $\frac{(n-10)(n+10)}{n-10}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{(n-10)(n+10)}{n-10}$ |
| Einfaldið. | $n+10$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.65**

Dragið frá: $\frac{x^2}{x+3}-\frac{9}{x+3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.66**

Dragið frá: $\frac{4x^2}{2x-5}-\frac{25}{2x-5}$.

Gætið vel að formerkjunum þegar þið dragið tvílið frá!

**SÝNIDÆMI 8.34**

Dragið frá: $\frac{y^2}{y-6}-\frac{2y+24}{y-6}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{y^2}{y-6}-\frac{2y+24}{y-6}$ |
| Brotin hafa sameiginlegan nefnara, svo dragið teljarana frá og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{y^2-(2y+24)}{y-6}$ |
| Dreifið formerkinu í teljaranum. | $\frac{y^2-2y-24}{y-6}$ |
| Þáttið teljarann. | $\frac{(y-6)(y+4)}{y-6}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{(y-6)(y+4)}{y-6}$ |
| Einfaldið. | $y+4$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.67**

Dragið frá: $\frac{n^2}{n-4}-\frac{n+12}{n-4}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.68**

Dragið frá: $\frac{y^2}{y-1}-\frac{9y-8}{y-1}$.

**SÝNIDÆMI 8.35**

Dragið frá:

$$\frac{5x^2-7x+3}{x^2-3x-18}-\frac{4x^2+x-9}{x^2-3x-18}.$$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5x^2-7x+3}{x^2-3x-18}-\frac{4x^2+x-9}{x^2-3x-18}$ |
| Dragið teljarana frá og setjið mismuninn yfir sameiginlega nefnarann. | $\frac{5x^2-7x+3-\left(4x^2+x-9\right)}{x^2-3x-18}$ |
| Dreifið formerkinu í teljaranum. | $\frac{5x^2-7x+3-4x^2-x+9}{x^2-3x-18}$ |
| Sameinið samkynja liði. | $\frac{x^2-8x+12}{x^2-3x-18}$ |
| Þáttið teljarann og nefnarann. | $\frac{(x-2)(x-6)}{(x+3)(x-6)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{(x-2)(x-6)}{(x+3)(x-6)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{(x-2)}{(x+3)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.69**

Dragið frá:

$$\frac{4x^2-11x+8}{x^2-3x+2}-\frac{3x^2+x-3}{x^2-3x+2}.$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.70**

Dragið frá: $\frac{6x^2-x+20}{x^2-81}-\frac{5x^2+11x-7}{x^2-81}$.



## Leggið saman og dragið frá ræðar stæður þar sem nefnararnir eru móttölur hvor annars

Þegar nefnarar tveggja ræðra stæðna eru móttölur hvor annars er auðvelt að fá sameiginlegan nefnara. Við þurfum aðeins að margfalda annað brotið með $\frac{-1}{-1}$.

Skoðum hvernig þetta virkar.

| | |
|---|---|
| | $\frac{7}{d}+\frac{5}{-d}$ |
| Margfaldið síðara brotið með $\frac{-1}{-1}$. | $\frac{7}{d}+\frac{(-1)5}{(-1)(-d)}$ |
| Nefnararnir eru eins. | $\frac{7}{d}+\frac{-5}{d}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2}{d}$ |

**SÝNIDÆMI 8.36**

Leggið saman: $\frac{4u-1}{3u-1}+\frac{u}{1-3u}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{4u-1}{3u-1}+\frac{u}{1-3u}$ |
| Nefnararnir eru móttölur hvor annars, svo margfaldið síðara brotið með $\frac{-1}{-1}$. | $\frac{4u-1}{3u-1}+\frac{(-1)u}{(-1)(1-3u)}$ |
| Einfaldið síðara brotið. | $\frac{4u-1}{3u-1}+\frac{-u}{3u-1}$ |
| Nefnararnir eru eins. Leggið teljarana saman. | $\frac{4u-1-u}{3u-1}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3u-1}{3u-1}$ |
| Einfaldið. | $1$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.71**

Leggið saman: $\frac{8x-15}{2x-5}+\frac{2x}{5-2x}$.

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.72**

Leggið saman: $\frac{6y^2+7y-10}{4y-7}+\frac{2y^2+2y+11}{7-4y}$.

**SÝNIDÆMI 8.37**

Dragið frá: $\frac{m^2-6m}{m^2-1}-\frac{3m+2}{1-m^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{m^2-6m}{m^2-1}-\frac{3m+2}{1-m^2}$ |
| Nefnararnir eru móttölur hvor annars, svo margfaldið síðara brotið með $\frac{-1}{-1}$. | $\frac{m^2-6m}{m^2-1}-\frac{-1(3m+2)}{-1(1-m^2)}$ |
| Einfaldið síðara brotið. | $\frac{m^2-6m}{m^2-1}-\frac{-3m-2}{m^2-1}$ |
| Nefnararnir eru eins. Dragið teljarana frá. | $\frac{m^2-6m-(-3m-2)}{m^2-1}$ |
| Beitið dreifireglu. | $\frac{m^2-6m+3m+2}{m^2-1}$ |
| Sameinið samkynja liði. | $\frac{m^2-3m+2}{m^2-1}$ |
| Þáttið teljarann og nefnarann. | $\frac{(m-1)(m-2)}{(m-1)(m+1)}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{\cancel{(m-1)}(m-2)}{\cancel{(m-1)}(m+1)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{m-2}{m+1}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.73**

Dragið frá: $\frac{y^2-5y}{y^2-4}-\frac{6y-6}{4-y^2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.74**

Dragið frá: $\frac{2n^2+8n-1}{n^2-1}-\frac{n^2-7n-1}{1-n^2}$.

## Verkefni úr hluta 8.3

### *Æfingin skapar meistarann*

**Leggið saman ræðar stæður með sameiginlegan nefnara**

Leggið saman í verkefnunum hér á eftir.

129.

$$\frac{2}{15}+\frac{7}{15}$$

130.

$$\frac{4}{21}+\frac{3}{21}$$

131.

$$\frac{7}{24}+\frac{11}{24}$$

132.

$$\frac{7}{36}+\frac{13}{36}$$

133.

$$\frac{3a}{a-b}+\frac{1}{a-b}$$

134.

$$\frac{3c}{4c-5}+\frac{5}{4c-5}$$

135.

$$\frac{d}{d+8}+\frac{5}{d+8}$$

136.

$$\frac{7m}{2m+n}+\frac{4}{2m+n}$$

137.

$$\frac{p^2+10p}{p+2}+\frac{16}{p+2}$$

138.

$$\frac{q^2+12q}{q+3}+\frac{27}{q+3}$$

139.

$$\frac{2r^2}{2r-1}+\frac{15r-8}{2r-1}$$

140.

$$\frac{3s^2}{3s-2}+\frac{13s-10}{3s-2}$$

141.

$$\frac{8t^2}{t+4}+\frac{32t}{t+4}$$

142.

$$\frac{6v^2}{v+5}+\frac{30v}{v+5}$$

143.

$$\frac{2w^2}{w^2-16}+\frac{8w}{w^2-16}$$

144.

$$\frac{7x^2}{x^2-9}+\frac{21x}{x^2-9}$$

**Dragið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara**

Dragið frá í verkefnunum hér á eftir.

145.

$$\frac{y^2}{y+8}-\frac{64}{y+8}$$

146.

$$\frac{z^2}{z+2}-\frac{4}{z+2}$$

147.

$$\frac{9a^2}{3a-7}-\frac{49}{3a-7}$$

148.

$$\frac{25b^2}{5b-6}-\frac{36}{5b-6}$$

149.

$$\frac{c^2}{c-8}-\frac{6c+16}{c-8}$$

150.

$$\frac{d^2}{d-9}-\frac{6d+27}{d-9}$$

151.

$$\frac{3m^2}{6m-30}-\frac{21m-30}{6m-30}$$

152.

$$\frac{2n^2}{4n-32}-\frac{18n-16}{4n-32}$$

153.

$$\frac{6p^2+3p+4}{p^2+4p-5}-\frac{5p^2+p+7}{p^2+4p-5}$$

154.

$$\frac{5q^2+3q-9}{q^2+6q+8}-\frac{4q^2+9q+7}{q^2+6q+8}$$

155.

$$\frac{5r^2+7r-33}{r^2-49}-\frac{4r^2+5r+30}{r^2-49}$$

156.

$$\frac{7t^2-t-4}{t^2-25}-\frac{6t^2+12t-44}{t^2-25}$$

**Leggið saman og dragið frá ræðar stæður þar sem nefnararnir eru móttölur hvor annars**

Leggið saman í verkefnunum hér á eftir.

157.

$$\frac{10v}{2v-1}+\frac{2v+4}{1-2v}$$

158.

$$\frac{20w}{5w-2}+\frac{5w+6}{2-5w}$$

159.

$$\frac{10x^2+16x-7}{8x-3}+\frac{2x^2+3x-1}{3-8x}$$

160.

$$\frac{6y^2+2y-11}{3y-7}+\frac{3y^2-3y+17}{7-3y}$$

Dragið frá í verkefnunum hér á eftir.

161.

$$\frac{z^2+6z}{z^2-25}-\frac{3z+20}{25-z^2}$$

162.

$$\frac{a^2+3a}{a^2-9}-\frac{3a-27}{9-a^2}$$

163.

$$\frac{2b^2+30b-13}{b^2-49}-\frac{2b^2-5b-8}{49-b^2}$$

164.

$$\frac{c^2+5c-10}{c^2-16}-\frac{c^2-8c-10}{16-c^2}$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**165.** Sara hljóp 8 mílur og hjólaði síðan 24 mílur. Hraði hennar á hjólinu er 4 mílum á klukkustund meiri en hlaupahraðinn. Ef $r$ táknar hlaupahraða Söru, þá lýsir stæðan $\frac{8}{r}$ hlaupatíma hennar og stæðan $\frac{24}{r+4}$. hjólatímanum. Leggið saman ræðu stæðurnar $\frac{8}{r}+\frac{24}{r+4}$ til að fá stæðu fyrir heildartímann sem Sara hljóp og hjólaði.

**166.** Ef Pétur getur málað vegg á $p$ klukkustundum, getur hann málað $\frac{1}{p}$ af veggnum á einni klukkustund. Það tæki Penelópu 3 klukkustundum lengur en Pétur að mála vegginn, svo hún getur málað $\frac{1}{p+3}$ af veggnum á einni klukkustund. Leggið saman ræðu stæðurnar $\frac{1}{p}+\frac{1}{p+3}$ til að fá stæðu fyrir þann hluta veggjarins sem Pétur og Penelópa myndu mála á einni klukkustund ef þau ynnu saman.

### *Ritunarverkefni*

**167.** Donald telur að $\frac{3}{x}+\frac{4}{x}$ sé $\frac{7}{2x}$. Hefur Donald rétt fyrir sér? Útskýrið.

**168.** Útskýrið hvernig þið finnið minnsta samnefnara $x^2+5x+4$ og $x^2-16$.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| lagt saman ræðar stæður með sameiginlegan nefnara. | | | |
| dregið frá ræðar stæður með sameiginlegan nefnara. | | | |
| lagt saman og dregið frá ræðar stæður þar sem nefnararnir eru gagnstæðir. | | | |

ⓑ Hvað segir þessi gátlisti um tök ykkar á efni hlutans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

## 8.4 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Finnið minnsta samnefnara ræðra stæðna
- Finnið jafngildar ræðar stæður
- Leggið saman ræðar stæður með ólíkum nefnurum
- Dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

**UNDIRBÚNINGUR 8.13**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í tilgreindan hluta og rifja efnið upp.

Leggið saman: $\frac{7}{10}+\frac{8}{15}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.81.

**UNDIRBÚNINGUR 8.14**

Dragið frá: $6(2x+1)-4(x-5)$.

Ef þið leystuð verkefnið ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.139.

**UNDIRBÚNINGUR 8.15**

Finnið stærsta sameiginlega þátt $9x^2y^3$ og $12xy^5$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið
rifja upp sýnidæmi 7.3.

**UNDIRBÚNINGUR 8.16**

Fullþáttið $-48n-12$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.11.

## Finnið minnsta samnefnara ræðra stæðna

Þegar við leggjum saman eða drögum frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum þurfum við að finna sameiginlega nefnara. Ef við rifjum upp aðferðina sem við notuðum við tölubrot vitum við hvað við eigum að gera við ræðar stæður.

Skoðum sýnidæmið $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$ úr Grunnatriðum. Nefnararnir eru ekki eins og því var fyrsta skrefið að finna minnsta samnefnarann (MSN). Munið að MSN er minnsta sameiginlega margfeldi (MSM) nefnaranna. Hann er minnsta talan sem hægt er að nota sem sameiginlegan nefnara.

Til að finna MSN 12 og 18 þáttum við hverja tölu í frumþætti og röðuðum sameiginlegum frumþáttum í dálka. Síðan tókum við einn frumþátt úr hverjum dálki og margfölduðum að lokum þættina til að finna MSN.

$$\begin{aligned} 12&=2\cdot 2\cdot 3\\ 18&=2\cdot 3\cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MSN}&=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\\ \text{MSN}&=36 \end{aligned}$$

Við gerum það sama fyrir ræðar stæður en látum MSN standa á þáttuðu formi.

**AÐFERÐ**

### Finnið minnsta samnefnara ræðra stæðna.

1. Skref 1. Fullþáttið hverja stæðu.
2. Skref 2. Skráið þætti hverrar stæðu. Raðið sameiginlegum þáttum lóðrétt þegar unnt er.
3. Skref 3. Færið tölurnar niður úr hverjum dálki.
4. Skref 4. Margfaldið þættina.

Munið að við útilokum alltaf gildi sem gera nefnarann jafnan núlli. Hvaða gildi á x þarf að útiloka í næsta sýnidæmi?

**SÝNIDÆMI 8.38**

Finnið MSN fyrir $\frac{8}{x^2-2x-3}, \frac{3x}{x^2+4x+3}$.

## Lausn

| | Finnið MSN fyrir $\frac{8}{x^2-2x-3}, \frac{3x}{x^2+4x+3}$. |
|---|---|
| Fullþáttið hverja stæðu og raðið sameiginlegum þáttum saman. Færið einn þátt niður úr hverjum dálki. | $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$<br>$x^2+4x+3=(x+1)\quad(x+3)$<br>$\text{MSN}=(x+1)(x-3)(x+3)$ |
| Margfaldið þættina. | MSN er $(x+1)(x-3)(x+3)$. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.75**

Finnið MSN fyrir $\frac{2}{x^2-x-12}, \frac{1}{x^2-16}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.76**

Finnið MSN fyrir $\frac{x}{x^2+8x+15}, \frac{5}{x^2+9x+18}$.

## Finnið jafngildar ræðar stæður

Þegar við leggjum saman tölubrot finnum við fyrst MSN og ritum síðan hvert brot sem jafngilt brot með MSN.

$$\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$$
$$\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{18\cdot 2}$$
$$\frac{21}{36}+\frac{10}{36}$$

$12=2\cdot 2\cdot 3$
$18=2\cdot \quad 3\cdot 3$
$\text{MSN}=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$
$\text{MSN}=36$

Við gerum það sama fyrir ræðar stæður.

**SÝNIDÆMI 8.39**

Ritið sem jafngildar ræðar stæður með nefnaranum $(x+1)(x-3)(x+3)$:

$\frac{8}{x^2-2x-3}, \frac{3x}{x^2+4x+3}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{8}{x^2-2x-3}, \frac{3x}{x^2+4x+3}$ |
| Þáttið hvern nefnara. | $\frac{8}{(x+1)(x-3)}, \frac{3x}{(x+1)(x+3)}$ |
| Finnið MSN. $\begin{array}{l} x^2-2x-3=(x+1)(x-3) \\ x^2+4x+3=(x+1)(x+3) \\ \text{MSN} \quad =(x+1)(x-3)(x+3) \end{array}$ | |
| Margfaldið hvern nefnara með þættinum sem vantar og margfaldið samsvarandi teljara með sama þætti. | $\frac{8(x+3)}{(x+1)(x-3)(x+3)}, \frac{3x(x-3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)(x+3)}, \frac{3x^2-9x}{(x+1)(x+3)(x-3)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.77**

Ritið sem jafngildar ræðar stæður með nefnaranum $(x+3)(x-4)(x+4)$:

$\frac{2}{x^2-x-12}, \frac{1}{x^2-16}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.78**

Ritið sem jafngildar ræðar stæður með nefnaranum $(x+3)(x+5)(x+6)$:

$\frac{x}{x^2+8x+15}, \frac{5}{x^2+9x+18}$.

## Leggið saman ræðar stæður með ólíkum nefnurum

Nú höfum við öll skrefin sem þarf til að leggja saman ræðar stæður með ólíkum nefnurum. Eins og áður byrjum við á einu sýnidæmi með tölubrotum.

**SÝNIDÆMI 8.40**

Leggið saman: $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$ |
| Finnið MSN 12 og 18. $\begin{array}{l}12=2\cdot 2\cdot 3\\18=2\cdot \quad 3\cdot 3\\ \hline MSN=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\\MSN=36\end{array}$ | |
| Ritið hvert brot sem jafngilt brot með MSN. | $\frac{7\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{18\cdot 2}$ |
| Leggið brotin saman. | $\frac{21}{36}+\frac{10}{36}$ |
| Ekki er hægt að einfalda brotið frekar. | $\frac{31}{36}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.79**

Leggið saman: $\frac{11}{30}+\frac{7}{12}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.80**

Leggið saman: $\frac{3}{8}+\frac{9}{20}$.

Nú leggjum við saman ræðar stæður þar sem nefnararnir eru einliðir.

**SÝNIDÆMI 8.41**

Leggið saman: $\frac{5}{12x^2y}+\frac{4}{21xy^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5}{12x^2y}+\frac{4}{21xy^2}$ |
| Finnið MSN $12x^2y$ og $21xy^2$.<br>$12x^2y = 2\cdot 2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot y$<br>$21xy^2 = 3\cdot 7\cdot x\cdot y\cdot y$<br>$\text{MSN} = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y$<br>$\text{MSN} = 84x^2y^2$ | |
| | $\frac{5}{12x^2y}+\frac{4}{21xy^2}$ |
| Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilt brot með MSN. | $\frac{5\cdot 7y}{12x^2y\cdot 7y}+\frac{4\cdot 4x}{21xy^2\cdot 4x}$ |
| Einfaldið. | $\frac{35y}{84x^2y^2}+\frac{16x}{84x^2y^2}$ |
| Leggið ræðu stæðurnar saman. | $\frac{16x+35y}{84x^2y^2}$ |
| Teljari og nefnari hafa enga sameiginlega þætti. Ekki er hægt að einfalda brotið frekar. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.81**

Leggið saman: $\frac{2}{15a^2b}+\frac{5}{6ab^2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.82**

Leggið saman: $\frac{5}{16c}+\frac{3}{8cd^2}$.

Nú erum við tilbúin að vinna með margliðunefnara.

**SÝNIDÆMI 8.42**

### Hvernig leggja á saman ræðar stæður með ólíkum nefnurum

Leggið saman: $\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-2}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Ákvarðið hvort stæðurnar hafi sameiginlegan nefnara.<br>• Já – Farið í skref 2.<br>• Nei – Umritið hverja ræða stæðu með MSN.<br>o Finnið MSN.<br>o Umritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN. | Nei<br><br>Finnið MSN $(x-3)$ og $(x-2)$.<br><br><br><br>Breytið í jafngildar ræðar stæður með MSN, $(x-3)(x-2)$.<br><br>Haldið nefnurunum þáttuðum! | $x-3 \quad :(x-3)$<br>$x-2 \quad : \quad (x-2)$<br>MSN $:(x-3)(x-2)$<br>$\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-2}$<br><br>$\frac{3(x-2)}{(x-3)(x-2)}+\frac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)}$<br><br>$\frac{3x-6}{(x-3)(x-2)}+\frac{2x-6}{(x-2)(x-3)}$ |
| **Skref 2.** Leggið saman ræðu stæðurnar. | Leggið saman teljarana og setjið summuna yfir samnefnarann. | $\frac{3x-6+2x-6}{(x-3)(x-2)}$<br><br>$\frac{5x-12}{(x-3)(x-2)}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið, ef unnt er. | Þar sem ekki er hægt að þátta $5x-12$ er svarið fulleinfaldað. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.83**

Leggið saman: $\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+3}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.84**

Leggið saman: $\frac{4}{m+3}+\frac{3}{m+4}$.

Skrefin við að leggja saman ræðar stæður eru tekin saman í aðferðarreitnum hér á eftir.

8

**AÐFERÐ**

### Leggið saman ræðar stæður.

1. Skref 1. Ákvarðið hvort stæðurnar hafi sameiginlegan nefnara. Já – farið í skref 2. Nei – ritið hverja ræða stæðu aftur með MSN. Finnið MSN. Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN.

2. Skref 2. Leggið ræðu stæðurnar saman.
3. Skref 3. Einfaldið ef hægt er.

**SÝNIDÆMI 8.43**

Leggið saman: $\frac{2a}{2ab+b^2}+\frac{3a}{4a^2-b^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2a}{2ab+b^2}+\frac{3a}{4a^2-b^2}$ |
| Hafa stæðurnar sameiginlegan nefnara? Nei. Ritið hverja stæðu aftur með MSN. | |
| Finnið MSN. $\begin{array}{l}2ab+b^2=b(2a+b)\\4a^2-b^2=(2a+b)(2a-b)\\\hline\text{Minnsti samnefnari}=b(2a+b)(2a-b)\end{array}$ | |
| Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN. | $\frac{2a(2a-b)}{b(2a+b)(2a-b)}+\frac{3a\cdot b}{(2a+b)(2a-b)\cdot b}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\frac{4a^2-2ab}{b(2a+b)(2a-b)}+\frac{3ab}{b(2a+b)(2a-b)}$ |
| Leggið ræðu stæðurnar saman. | $\frac{4a^2-2ab+3ab}{b(2a+b)(2a-b)}$ |
| Einfaldið teljarann. | $\frac{4a^2+ab}{b(2a+b)(2a-b)}$ |
| Þáttið teljarann. | $\frac{a(4a+b)}{b(2a+b)(2a-b)}$ |
| Teljari og nefnari hafa enga sameiginlega þætti. Ekki er hægt að einfalda brotið frekar. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.85**

Leggið saman: $\frac{5x}{xy-y^2}+\frac{2x}{x^2-y^2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.86**

Leggið saman: $\frac{7}{2m+6}+\frac{4}{m^2+4m+3}$.

Standist freistinguna að einfalda of snemma! Í sýnidæminu hér að ofan verðum við að láta fyrri ræðu stæðuna standa sem $\frac{2a(2a-b)}{b(2a+b)(2a-b)}$ til að geta lagt hana saman við $\frac{3a\cdot b}{(2a+b)(2a-b)\cdot b}$. Einfaldið ekki fyrr en þið hafið sameinað teljarana.

**SÝNIDÆMI 8.44**

Leggið saman: $\frac{8}{x^2-2x-3}+\frac{3x}{x^2+4x+3}$.

## Lausn

| | $\frac{8}{x^2-2x-3}+\frac{3x}{x^2+4x+3}$ |
|---|---|
| Hafa stæðurnar sameiginlegan nefnara? Nei. Ritið hverja stæðu aftur með MSN. | |
| Finnið MSN. $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$, $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$, Minnsti samnefnari $=(x+1)(x-3)(x+3)$ | |
| Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilt brot með MSN. | $\frac{8(x+3)}{(x+1)(x-3)(x+3)}+\frac{3x(x-3)}{(x+1)(x+3)(x-3)}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)(x+3)}+\frac{3x^2-9x}{(x+1)(x+3)(x-3)}$ |
| Leggið ræðu stæðurnar saman. | $\frac{3x^2-x+24}{(x+1)(x-3)(x+3)}$ |
| Einfaldið teljarann. | $\frac{3x^2-x+24}{(x+1)(x-3)(x+3)}$ |
| Teljarinn er óþáttanlegur og því eru engir sameiginlegir þættir. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.87**

Leggið saman: $\frac{1}{m^2-m-2}+\frac{5m}{m^2+3m+2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.88**

Leggið saman: $\frac{2n}{n^2-3n-10}+\frac{6}{n^2+5n+6}$.

## Dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

Við drögum frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum á sama hátt og við leggjum þær saman. Við þurfum aðeins að gæta sérstaklega vel að formerkjunum þegar við drögum teljarana frá.

**SÝNIDÆMI 8.45**

### Hvernig draga á frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

Dragið frá: $\frac{x}{x-3}-\frac{x-2}{x+3}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Ákvarðið hvort stæðurnar hafi samnefnara.<br>• Já – Farið í skref 2.<br>• Nei – Umritið hverja ræða stæðu með minnsta samnefnaranum.<br>○ Finnið minnsta samnefnarann.<br>○ Umritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með minnsta samnefnaranum. | Nei.<br><br>Finnið minnsta samnefnara $(x-3)$ og $(x+3)$.<br><br>Umritið sem jafngild brot með minnsta samnefnaranum $(x-3)(x+3)$.<br><br>Haldið nefnurunum þáttuðum! | $x-3$: $(x-3)$<br>$x+3$: $(x+3)$<br>MSN: $(x-3)(x+3)$<br>$\frac{x}{x-3} - \frac{x-2}{x+3}$<br>$\frac{x(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}$<br>$\frac{x^2+3x}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2-5x+6}{(x-3)(x+3)}$ |
| **Skref 2.** Dragið ræðu stæðurnar frá. | Dragið teljarana frá hvor öðrum og setjið mismuninn yfir samnefnarann.<br><br>Gætið vel að formerkjunum! | $\frac{x^2+3x-(x^2-5x+6)}{(x-3)(x+3)}$<br>$\frac{x^2+3x-x^2+5x-6}{(x-3)(x+3)}$<br>$\frac{8x-6}{(x-3)(x+3)}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið, ef hægt er. | Teljarinn og nefnarinn hafa enga sameiginlega þætti. Svarið er fullkomlega einfaldað. | $\frac{2(4x-3)}{(x-3)(x+3)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.89**

Dragið frá: $\frac{y}{y+4} - \frac{y-2}{y-5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.90**

Dragið frá: $\frac{z+3}{z+2} - \frac{z}{z+3}$.

Skrefin við frádrátt ræðra stæðna eru talin upp hér á eftir.

**AÐFERÐ**

### Dragið frá ræðar stæður.

1. Skref 1. Ákvarðið hvort þær hafi sameiginlegan nefnara. Já – farið í skref 2. Nei – ritið hverja ræða stæðu aftur með MSN. Finnið MSN. Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN.

2. Skref 2. Dragið ræðu stæðurnar frá.
3. Skref 3. Einfaldið ef hægt er.

**SÝNIDÆMI 8.46**

Dragið frá: $\frac{8y}{y^2-16}-\frac{4}{y-4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{8y}{y^2-16}-\frac{4}{y-4}$ |
| Hafa stæðurnar sameiginlegan nefnara? Nei. Ritið hverja stæðu aftur með MSN. | |
| Finnið MSN. $\begin{array}{l} y^2-16=(y-4)(y+4) \\ y-4 \quad =y-4 \\ \hline \text{MSN} \quad =(y-4)(y+4) \end{array}$ | |
| Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN. | $\frac{8y}{(y-4)(y+4)}-\frac{4(y+4)}{(y-4)(y+4)}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\frac{8y}{(y-4)(y+4)}-\frac{4y+16}{(y-4)(y+4)}$ |
| Dragið ræðu stæðurnar frá. | $\frac{8y-4y-16}{(y-4)(y+4)}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\frac{4y-16}{(y-4)(y+4)}$ |
| Þáttið teljarann og leitið að sameiginlegum þáttum. | $\frac{4(y-4)}{(y-4)(y+4)}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{4\cancel{(y-4)}}{\cancel{(y-4)}(y+4)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4}{(y+4)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.91**

Dragið frá: $\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.92**

Dragið frá: $\frac{3}{z+3}-\frac{6z}{z^2-9}$.

Í næsta sýnidæmi eru mörg mínusmerki. Gætið ykkar sérstaklega vel!

**SÝNIDÆMI 8.47**

Dragið frá: $\frac{-3n-9}{n^2+n-6}-\frac{n+3}{2-n}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{-3n-9}{n^2+n-6} - \frac{n+3}{2-n}$ |
| Þáttið nefnarann. | $\frac{-3n-9}{(n-2)(n+3)} - \frac{n+3}{2-n}$ |
| Þar sem $n-2$ og $2-n$ eru móttölur margföldum við síðari ræðu stæðuna með $\frac{-1}{-1}$. | $\frac{-3n-9}{(n-2)(n+3)} - \frac{(-1)(n+3)}{(-1)(2-n)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{-3n-9}{(n-2)(n+3)} + \frac{(n+3)}{(n-2)}$ |
| Hafa stæðurnar sameiginlegan nefnara? Nei. | |
| Finnið MSN. $\begin{array}{r} n^2+n-6=(n-2)(n+3) \\ n-2=(n-2) \\ \hline \text{Minnsti samnefnari}=(n-2)(n+3) \end{array}$ | |
| Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN. | $\frac{-3n-9}{(n-2)(n+3)} + \frac{(n+3)(n+3)}{(n-2)(n+3)}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\frac{-3n-9}{(n-2)(n+3)} + \frac{n^2+6n+9}{(n-2)(n+3)}$ |
| Einfaldið ræðu stæðurnar. | $\frac{-3n-9+n^2+6n+9}{(n-2)(n+3)}$ |
| Einfaldið teljarann. | $\frac{n^2+3n}{(n-2)(n+3)}$ |
| Þáttið teljarann og leitið að sameiginlegum þáttum. | $\frac{n(n+3)}{(n-2)(n+3)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{n}{(n-2)}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.93**

Dragið frá: $\frac{3x-1}{x^2-5x-6} - \frac{2}{6-x}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.94**

Dragið frá: $\frac{-2y-2}{y^2+2y-8} - \frac{y-1}{2-y}$.

Þegar ein stæða er ekki á brotaformi getum við ritað hana sem brot með nefnaranum 1.

**SÝNIDÆMI 8.48**

Dragið frá: $\frac{5c+4}{c-2} - 3$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5c+4}{c-2}-3$ |
| Ritið $3$ sem $\frac{3}{1}$ þannig að ræðu stæðurnar verði 2. | $\frac{5c+4}{c-2}-\frac{3}{1}$ |
| Hafa ræðu stæðurnar sameiginlegan nefnara? Nei. | |
| Finnið MSN $c-2$ og $1$. MSN = $c-2$. | |
| Ritið $\frac{3}{1}$ sem jafngilda ræða stæðu með MSN. | $\frac{5c+4}{c-2}-\frac{3(c-2)}{1(c-2)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{5c+4}{c-2}-\frac{3c-6}{(c-2)}$ |
| Dragið ræðu stæðurnar frá. | $\frac{5c+4-(3c-6)}{c-2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2c+10}{c-2}$ |
| Þáttið til að kanna hvort sameiginlegir þættir séu til staðar. | $\frac{2(c+5)}{c-2}$ |
| Engir sameiginlegir þættir eru til staðar; ræða stæðan er einfölduð. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.95**

Dragið frá: $\frac{2x+1}{x-7}-3$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.96**

Dragið frá: $\frac{4y+3}{2y-1}-5$.

8

**AÐFERÐ**

### Leggið saman eða dragið frá ræðar stæður.

1. Skref 1. Ákvarðið hvort stæðurnar hafi sameiginlegan nefnara. Já – farið í skref 2. Nei – ritið hverja ræða stæðu aftur með MSN. Finnið MSN. Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN.

2. Skref 2. Leggið ræðu stæðurnar saman eða dragið þær frá.
3. Skref 3. Einfaldið ef hægt er.

Við fylgjum sömu skrefum og áður til að finna MSN þegar ræðu stæðurnar eru fleiri en tvær. Í næsta sýnidæmi byrjum við á að þátta alla þrjá nefnarana til að finna MSN þeirra.

**SÝNIDÆMI 8.49**

Einfaldið: $\frac{2u}{u-1}+\frac{1}{u}-\frac{2u-1}{u^2-u}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2u}{u-1}+\frac{1}{u}-\frac{2u-1}{u^2-u}$ |
| Hafa ræðu stæðurnar sameiginlegan nefnara? Nei. | |
| Finnið MSN. $\begin{array}{l} u-1= \quad u-1 \\ u \quad\; =u \\ \hline u^2-u=u(u-1) \\ \text{MSN}=u(u-1) \end{array}$ | |
| Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN. | $\frac{2u\cdot u}{(u-1)u}+\frac{1\cdot(u-1)}{u\cdot(u-1)}-\frac{2u-1}{u(u-1)}$ |
| | $\frac{2u^2}{(u-1)u}+\frac{u-1}{u\cdot(u-1)}-\frac{2u-1}{u(u-1)}$ |
| Ritið sem eina ræða stæðu. | $\frac{2u^2+u-1-2u+1}{u(u-1)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2u^2-u}{u(u-1)}$ |
| Þáttið teljarann og fellið út sameiginlega þætti. | $\frac{u(2u-1)}{u(u-1)}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2u-1}{u-1}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.97**

Einfaldið: $\frac{v}{v+1}+\frac{3}{v-1}-\frac{6}{v^2-1}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.98**

Einfaldið: $\frac{3w}{w+2}+\frac{2}{w+7}-\frac{17w+4}{w^2+9w+14}$.

## Verkefni úr hluta 8.4

### *Æfingin skapar meistarann*

Finnið MSN í eftirfarandi verkefnum.

169.

$$\frac{5}{x^2-2x-8}, \frac{2x}{x^2-x-12}$$

170.

$$\frac{8}{y^2+12y+35}, \frac{3y}{y^2+y-42}$$

171.

$$\frac{9}{z^2+2z-8}, \frac{4z}{z^2-4}$$

172.

$$\frac{6}{a^2+14a+45}, \frac{5a}{a^2-81}$$

173.

$$\frac{4}{b^2+6b+9}, \frac{2b}{b^2-2b-15}$$

174.

$$\frac{5}{c^2-4c+4}, \frac{3c}{c^2-10c+16}$$

175.

$$\frac{2}{3d^2+14d-5}, \frac{5d}{3d^2-19d+6}$$

176.

$$\frac{3}{5m^2-3m-2}, \frac{6m}{5m^2+17m+6}$$



Ritið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir sem jafngildar ræðar stæður með gefnum MSN.

**177.** $\frac{5}{x^2-2x-8}, \frac{2x}{x^2-x-12}$
MSN $(x-4)(x+2)(x+3)$

**178.** $\frac{8}{y^2+12y+35}, \frac{3y}{y^2+y-42}$
MSN $(y+7)(y+5)(y-6)$

**179.** $\frac{9}{z^2+2z-8}, \frac{4z}{z^2-4}$

MSN $(z-2)(z+4)(z+2)$

**180.** $\frac{6}{a^2+14a+45}, \frac{5a}{a^2-81}$

MSN $(a+9)(a+5)(a-9)$

**181.** $\frac{4}{b^2+6b+9}, \frac{2b}{b^2-2b-15}$

MSN $(b+3)(b+3)(b-5)$

**182.** $\frac{5}{c^2-4c+4}, \frac{3c}{c^2-10c+16}$

MSN $(c-2)(c-2)(c-8)$

**183.** $\frac{2}{3d^2+14d-5}, \frac{5d}{3d^2-19d+6}$

MSN $(3d-1)(d+5)(d-6)$

**184.** $\frac{3}{5m^2-3m-2}, \frac{6m}{5m^2+17m+6}$

MSN $(5m+2)(m-1)(m+3)$

Leggið saman í eftirfarandi verkefnum.

185.

$$\frac{5}{24}+\frac{11}{36}$$

186.

$$\frac{7}{30}+\frac{13}{45}$$

187.

$$\frac{9}{20}+\frac{11}{30}$$

188.

$$\frac{8}{27}+\frac{7}{18}$$

189.

$$\frac{7}{10x^2y}+\frac{4}{15xy^2}$$

190.

$$\frac{1}{12a^3b^2}+\frac{5}{9a^2b^3}$$

191.

$$\frac{1}{2m}+\frac{7}{8m^2n}$$

192.

$$\frac{5}{6p^2q}+\frac{1}{4p}$$

193.

$$\frac{3}{r+4}+\frac{2}{r-5}$$

194.

$$\frac{4}{s-7}+\frac{5}{s+3}$$

195.

$$\frac{8}{t+5}+\frac{6}{t-5}$$

196.

$$\frac{7}{v+5}+\frac{9}{v-5}$$

197.

$$\frac{5}{3w-2}+\frac{2}{w+1}$$

198.

$$\frac{4}{2x+5}+\frac{2}{x-1}$$

199.

$$\frac{2y}{y+3}+\frac{3}{y-1}$$

200.

$$\frac{3z}{z-2}+\frac{1}{z+5}$$

201.

$$\frac{5b}{a^2b-2a^2}+\frac{2b}{b^2-4}$$

202.

$$\frac{4}{cd+3c}+\frac{1}{d^2-9}$$

203.

$$\frac{2m}{3m-3}+\frac{5m}{m^2+3m-4}$$

204.

$$\frac{3}{4n+4}+\frac{6}{n^2-n-2}$$

205.

$$\frac{3}{n^2+3n-18}+\frac{4n}{n^2+8n+12}$$

206.

$$\frac{6}{q^2-3q-10}+\frac{5q}{q^2-8q+15}$$

207.

$$\frac{3r}{r^2+7r+6}+\frac{9}{r^2+4r+3}$$

208.

$$\frac{2s}{s^2+2s-8}+\frac{4}{s^2+3s-10}$$

Dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

209.

$$\frac{t}{t-6}-\frac{t-2}{t+6}$$

210.

$$\frac{v}{v-3}-\frac{v-6}{v+1}$$

211.

$$\frac{w+2}{w+4} - \frac{w}{w-2}$$

212.

$$\frac{x-3}{x+6} - \frac{x}{x+3}$$

213.

$$\frac{y-4}{y+1} - \frac{1}{y+7}$$

214.

$$\frac{z+8}{z-3} - \frac{z}{z-2}$$

215.

$$\frac{5a}{a+3} - \frac{a+2}{a+6}$$

216.

$$\frac{3b}{b-2} - \frac{b-6}{b-8}$$

217.

$$\frac{6c}{c^2-25} - \frac{3}{c+5}$$

218.

$$\frac{4d}{d^2-81} - \frac{2}{d+9}$$

8

219.

$$\frac{6}{m+6} - \frac{12m}{m^2-36}$$

220.

$$\frac{4}{n+4} - \frac{8n}{n^2-16}$$

221.

$$\frac{-9p-17}{p^2-4p-21} - \frac{p+1}{7-p}$$

222.

$$\frac{-13q-8}{q^2+2q-24}-\frac{q+2}{4-q}$$

223.

$$\frac{-2r-16}{r^2+6r-16}-\frac{5}{2-r}$$

224.

$$\frac{2t-30}{t^2+6t-27}-\frac{2}{3-t}$$

225.

$$\frac{5v-2}{v+3}-4$$

226.

$$\frac{6w+5}{w-1}+2$$

227.

$$\frac{2x+7}{10x-1}+3$$

228.

$$\frac{8y-4}{5y+2}-6$$

Leggið saman og dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

229.

$$\frac{5a}{a-2}+\frac{9}{a}-\frac{2a+18}{a^2-2a}$$

230.

$$\frac{2b}{b-5}+\frac{3}{2b}-\frac{2b-15}{2b^2-10b}$$

231.

$$\frac{c}{c+2}+\frac{5}{c-2}-\frac{10c}{c^2-4}$$

232.

$$\frac{6d}{d-5}+\frac{1}{d+4}-\frac{7d-5}{d^2-d-20}$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

233.

$$\frac{6a}{3ab+b^2}+\frac{3a}{9a^2-b^2}$$

234.

$$\frac{2c}{2c+10}+\frac{7c}{c^2+9c+20}$$

235.

$$\frac{6d}{d^2-64}-\frac{3}{d-8}$$

236.

$$\frac{5}{n+7}-\frac{10n}{n^2-49}$$

237.

$$\frac{4m}{m^2+6m-7}+\frac{2}{m^2+10m+21}$$

238.

$$\frac{3p}{p^2+4p-12}+\frac{1}{p^2+p-30}$$

239.

$$\frac{-5n-5}{n^2+n-6}+\frac{n+1}{2-n}$$

240.

$$\frac{-4b-24}{b^2+b-30}+\frac{b+7}{5-b}$$

241.

$$\frac{7}{15p}+\frac{5}{18pq}$$

242.

$$\frac{3}{20a^2}+\frac{11}{12ab^2}$$

243.

$$\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x+5}$$

244.

$$\frac{6}{m+4}+\frac{9}{m-8}$$

245.

$$\frac{2q+7}{q+4}-2$$

246.

$$\frac{3y-1}{y+4}-2$$

247.

$$\frac{z+2}{z-5}-\frac{z}{z+1}$$

248.

$$\frac{t}{t-5}-\frac{t-1}{t+5}$$

249.

$$\frac{3d}{d+2}+\frac{4}{d}-\frac{d+8}{d^2+2d}$$

250.

$$\frac{2q}{q+5}+\frac{3}{q-3}-\frac{13q+15}{q^2+2q-15}$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**251.** **Að skreyta bollakökur. Viktoría getur skreytt bollakökupöntun fyrir brúðkaup á** $t$ klukkustundum. Á 1 klukkustund getur hún því skreytt $\frac{1}{t}$ af kökunum. Systir hennar væri 3 klukkustundum lengur að skreyta sömu pöntun. Á 1 klukkustund getur hún því skreytt $\frac{1}{t+3}$ af kökunum.

1. ⓐ Finnið hve stóran hluta skreytingarverksins Viktoría og systir hennar myndu ljúka saman á einni klukkustund með því að leggja saman ræðu stæðurnar $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+3}$.
2. ⓑ Reiknið gildi svarsins við a-lið þegar $t=5$.

**252.** **Kajakróður. Þegar** Trína rær kajak upp ána tekur það hana $\frac{5}{3-c}$ klukkustundir að fara 5 mílur, þar sem $c$ er hraði árstraumsins. Það tekur hana $\frac{5}{3+c}$ klukkustundir að róa 5 mílur niður ána.

1. ⓐ Finnið stæðu sem segir hve margar klukkustundir það tæki Trínu að róa kajak 5 mílur upp ána og síðan til baka með því að leggja saman $\frac{5}{3-c}+\frac{5}{3+c}$.
2. ⓑ Reiknið gildi svarsins við a-lið þegar $c=1$ til að finna hve margar klukkustundir það tæki Trínu ef hraði árstraumsins er 1 míla á klukkustund.

### *Ritunarverkefni*

**253.** Felipe telur að $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ sé $\frac{2}{x+y}$.

1. ⓐ Veljið tölugildi fyrir x og y og reiknið gildi $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.
2. ⓑ Reiknið gildi $\frac{2}{x+y}$ fyrir sömu gildi x og y og þið notuðuð í a-lið.
3. ⓒ Útskýrið hvers vegna Felipe hefur rangt fyrir sér.
4. ⓓ Finnið rétta stæðu fyrir $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

**254.** Einfaldið stæðuna $\frac{4}{n^2+6n+9}-\frac{1}{n^2-9}$ og útskýrið öll skrefin.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| fundið minnsta samnefnara ræðra stæðna. | | | |
| fundið jafngildar ræðar stæður. | | | |
| lagt saman ræðar stæður með ólíkum nefnurum. | | | |
| dregið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum. | | | |

ⓑ Hvernig metið þið tök ykkar á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt þau?

# 8.5 Einfaldið flóknar ræðar stæður

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu
- Einfaldið flókna ræða stæðu með MSN

**UNDIRBÚNINGUR 8.17**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í hlutann sem vísað er í og rifja efnið upp.

Einfaldið: $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{10}}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.72.

**UNDIRBÚNINGUR 8.18**

Einfaldið: $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{4^2+4\cdot 5}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.74.

Flókin brot eru brot þar sem teljari eða nefnari inniheldur brot. Í kafla 1 einfölduðum við flókin brot á borð við þessi:

$$\frac{\frac{3}{4}\ \frac{x}{2}}{\frac{5}{8}\ \frac{xy}{6}}$$

Í þessum hluta einföldum við flóknar ræðar stæður, en það eru ræðar stæður sem hafa ræðar stæður í teljara eða nefnara.

---

**FLÓKIN RÆÐ STÆÐA**

Flókin ræð stæða er ræð stæða þar sem teljari eða nefnari inniheldur ræða stæðu.

Hér eru nokkrar flóknar ræðar stæður:

$$\frac{\frac{4}{y-3}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ \frac{2}{x+6}}{\frac{8}{y^2-9}\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}\ \frac{4}{x-6}-\frac{4}{x^2-36}}$$

Munið að við útilokum alltaf gildi sem gera einhvern nefnara jafnan núlli.
Við notum tvær aðferðir til að einfalda flóknar ræðar stæður.

## Einfaldið flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu

Við höfum áður séð þessa flóknu ræðu stæðu í kaflanum.

$$\frac{\frac{6x^2-7x+2}{4x-8}}{\frac{2x^2-8x+3}{x^2-5x+6}}$$

Við tókum eftir því að brotastrik tákna deilingu og rituðum stæðuna því sem deilingu

$$\left(\frac{6x^2-7x+2}{4x-8}\right)\div\left(\frac{2x^2-8x+3}{x^2-5x+6}\right)$$

Síðan margfölduðum við fyrri ræðu stæðuna með margföldunarandhverfu þeirrar síðari, rétt eins og þegar við deilum einu broti með öðru.

Þetta er ein leið til að einfalda ræðar stæður. Við ritum stæðuna eins og við værum að deila einu broti með öðru.

---

**SÝNIDÆMI 8.50**

Einfaldið: $\frac{\frac{4}{y-3}}{\frac{8}{y^2-9}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\dfrac{4}{y-3}}{\dfrac{8}{y^2-9}}$ |
| Ritið flókna brotið sem deilingu. | $\dfrac{4}{y-3} \div \dfrac{8}{y^2-9}$ |
| Ritið sem margfeldi fyrri stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\dfrac{4}{y-3} \cdot \dfrac{y^2-9}{8}$ |
| Margfaldið. | $\dfrac{4\left(y^2-9\right)}{8(y-3)}$ |
| Þáttið og leitið að sameiginlegum þáttum. | $\dfrac{4(y-3)(y+3)}{4 \cdot 2(y-3)}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\dfrac{4(y-3)(y+3)}{4 \cdot 2(y-3)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{y+3}{2}$ |

Eru einhver gildi $y$ sem eru ekki leyfileg? Einfaldaða ræða stæðan hefur aðeins fasta í nefnara. Upprunalega flókna ræða stæðan hafði þó nefnarana $y-3$ og $y^2-9$. Stæðan væri óskilgreind ef $y=3$ eða $y=-3$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.99**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{2}{x^2-1}}{\dfrac{3}{x+1}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.100**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-7x+12}}{\dfrac{2}{x-4}}$.

Brotastrik virka sem flokkunartákn. Til að fylgja forgangsröð reikniaðgerða einföldum við því teljarann og nefnarann eins mikið og hægt er áður en við deilum.

**SÝNIDÆMI 8.51**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ |
| Einfaldið teljarann og nefnarann. | |
| Finnið MSN og leggið saman brotin í teljaranum.<br>Finnið MSN og leggið saman brotin í nefnaranum. | $\dfrac{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}}{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}}$ |
| Einfaldið teljarann og nefnarann. | $\dfrac{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ |
| Einfaldið teljarann og nefnarann aftur. | $\dfrac{\frac{3}{6}}{\frac{1}{6}}$ |
| Ritið flóknu ræðu stæðuna sem deilingu. | $\frac{3}{6}\div\frac{1}{6}$ |
| Margfaldið fyrri stæðuna með margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\frac{3}{6}\cdot\frac{6}{1}$ |
| Einfaldið. | $3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.101**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{12}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.102**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{8}+\frac{5}{6}}$.

**SÝNIDÆMI 8.52**

## Hvernig einfalda á flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Einfaldið teljarann og nefnarann. | Við einföldum summuna í teljaranum og mismuninn í nefnaranum. | $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ |
| | Finnið samnefnara og leggið saman brotin í teljaranum. | $\dfrac{\frac{1\cdot y}{x\cdot y}+\frac{1\cdot x}{y\cdot x}}{\frac{x\cdot x}{y\cdot x}-\frac{y\cdot y}{x\cdot y}}$ |
| | Finnið samnefnara og dragið brotin frá hvort öðru í teljaranum. | $\dfrac{\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}}{\frac{x^2}{xy}-\frac{y^2}{xy}}$ |
| | Nú er aðeins ein ræð stæða í teljaranum og ein í nefnaranum. | $\dfrac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{x^2-y^2}{xy}}$ |
| **Skref 2.** Endurritið flóknu ræðu stæðuna sem deilingardæmi. | Við skrifum teljarann deilt með nefnaranum. | $\left(\frac{y+x}{xy}\right)\div\left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right)$ |
| **Skref 3.** Deilið stæðunum. | Margfaldið fyrri stæðuna með margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\left(\frac{y+x}{xy}\right)\cdot\left(\frac{xy}{x^2-y^2}\right)$ |
| | Þáttið stæðurnar ef hægt er. | $\dfrac{xy(y+x)}{xy(x-y)(x+y)}$ |
| | Styttið út sameiginlega þætti. | $\dfrac{\cancel{xy}(y+x)}{xy(x-y)\cancel{(x+y)}}$ |
| | Einfaldið. | $\dfrac{1}{x-y}$ |

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.103**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.104**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}$.

**AÐFERÐ**

## Einfaldið flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu.

1. Skref 1. Einfaldið teljarann og nefnarann.
2. Skref 2. Ritið flóknu ræðu stæðuna sem deilingu.
3. Skref 3. Deilið stæðunum.

**SÝNIDÆMI 8.53**

Einfaldið: $\dfrac{n-\frac{4n}{n+5}}{\frac{1}{n+5}+\frac{1}{n-5}}$.

## Lausn

| | $\dfrac{n-\frac{4n}{n+5}}{\frac{1}{n+5}+\frac{1}{n-5}}$ |
|---|---|
| Einfaldið teljarann og nefnarann. | |
| Finnið MSN og leggið saman brotin í teljaranum.<br>Finnið MSN og leggið saman brotin í nefnaranum. | $\dfrac{\frac{n(n+5)}{1(n+5)}-\frac{4n}{n+5}}{\frac{1(n-5)}{(n+5)(n-5)}+\frac{1(n+5)}{(n-5)(n+5)}}$ |
| Einfaldið teljarana. | $\dfrac{\frac{n^2+5n}{n+5}-\frac{4n}{n+5}}{\frac{n-5}{(n+5)(n-5)}+\frac{n+5}{(n-5)(n+5)}}$ |
| Dragið ræðu stæðurnar frá í teljaranum og leggið þær saman í nefnaranum. Einfaldið. | $\dfrac{\frac{n^2+n}{n+5}}{\frac{2n}{(n+5)(n-5)}}$ |
| Ritið sem deilingu brota. | $\dfrac{n^2+n}{n+5}\div\dfrac{2n}{(n+5)(n-5)}$ |
| Margfaldið fyrri stæðuna með margföldunarandhverfu þeirrar síðari. | $\dfrac{n^2+n}{n+5}\cdot\dfrac{(n+5)(n-5)}{2n}$ |
| Þáttið stæðurnar ef hægt er. | $\dfrac{n(n+1)(n+5)(n-5)}{(n+5)2n}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\dfrac{\cancel{n}(n+1)\cancel{(n+5)}(n-5)}{\cancel{(n+5)}2\cancel{n}}$ |

8

| | |
|---|---|
| Einfaldið. | $\frac{(n+1)(n-5)}{2}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.105**

Einfaldið: $\frac{b-\frac{3b}{b+5}}{\frac{2}{b+5}+\frac{1}{b-5}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.106**

Einfaldið: $\frac{1-\frac{3}{c+4}}{\frac{1}{c+4}+\frac{c}{3}}$.

## Einfaldið flókna ræða stæðu með MSN

Þegar við leystum jöfnur með brotum losuðum við okkur við brotin með því að margfalda með MSN. Við getum notað sömu aðferð hér til að einfalda flóknar ræðar stæður. Við margföldum teljarann og nefnarann með MSN allra brotanna í stæðunni.

Skoðum flóknu ræðu stæðuna sem við einfölduðum með annarri aðferð í sýnidæmi 8.51. Hér einföldum við hana með því að margfalda teljarann og nefnarann með minnsta samnefnaranum (MSN). Þegar við margföldum með $\frac{\text{MSN}}{\text{MSN}}$ margföldum við í raun með 1, svo gildið helst óbreytt.

**SÝNIDÆMI 8.54**

Einfaldið: $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ |
| MSN allra brotanna í stæðunni er 6. | |
| Losið stæðuna við brotin með því að margfalda teljarann og nefnarann með þessum MSN. | $\frac{6\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)}{6\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}$ |
| Beitið dreifireglu. | $\frac{6\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{6}}{6\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{3}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2+1}{3-2}$ |
| | $\frac{3}{1}$ |
| | $3$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.107**

Einfaldið: $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{5}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.108**

Einfaldið: $\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}-\frac{5}{16}}$.

8

**SÝNIDÆMI 8.55**

### Hvernig einfalda á flókna ræða stæðu með MSN

Einfaldið: $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið minnsta samnefnara allra brotanna í flóknu ræðu stæðunni. | Minnsti samnefnari allra brotanna er ***xy***. | $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 2.** Margfaldið teljarann og nefnarann með minnsta samnefnaranum. | Margfaldið bæði teljarann og nefnarann með xy. | $\frac{xy \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}{xy \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið stæðuna. | Dreifið. | $\frac{xy \cdot \frac{1}{x} + xy \cdot \frac{1}{y}}{xy \cdot \frac{x}{y} - xy \cdot \frac{y}{x}}$ |
| | | $\frac{y + x}{x^2 - y^2}$ |
| | Einfaldið. | $\frac{\cancel{(y+x)}}{(x-y)\cancel{(x+y)}}$ |
| | Styttið út sameiginlega þætti. | $\frac{1}{x-y}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.109**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.110**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.

**AÐFERÐ**

## Einfaldið flókna ræða stæðu með MSN.

1. Skref 1. Finnið MSN allra brota í flóknu ræðu stæðunni.
2. Skref 2. Margfaldið teljarann og nefnarann með MSN.
3. Skref 3. Einfaldið stæðuna.

Byrjið á að þátta alla nefnarana svo hægt sé að finna MSN.

**SÝNIDÆMI 8.56**

Einfaldið: $\dfrac{\frac{2}{x+6}}{\frac{4}{x-6}-\frac{4}{x^2-36}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\dfrac{2}{x+6}}{\dfrac{4}{x-6}-\dfrac{4}{x^2-36}}$ |
| Finnið MSN allra brota í flóknu ræðu stæðunni.<br>MSN er $(x+6)(x-6)$. | |
| Margfaldið teljarann og nefnarann með MSN. | $\dfrac{(x+6)(x-6)\dfrac{2}{x+6}}{(x+6)(x-6)\left(\dfrac{4}{x-6}-\dfrac{4}{(x+6)(x-6)}\right)}$ |
| Einfaldið stæðuna. | |
| Margfaldið inn í sviga í nefnaranum. | $\dfrac{(x+6)(x-6)\dfrac{2}{x+6}}{(x+6)(x-6)\left(\dfrac{4}{x-6}\right)-(x+6)(x-6)\left(\dfrac{4}{(x+6)(x-6)}\right)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{\cancel{(x+6)}(x-6)\dfrac{2}{\cancel{x+6}}}{(x+6)\cancel{(x-6)}\left(\dfrac{4}{\cancel{x-6}}\right)-\cancel{(x+6)}\cancel{(x-6)}\left(\dfrac{4}{\cancel{(x+6)}\cancel{(x-6)}}\right)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{2(x-6)}{4(x+6)-4}$ |
| Einfaldið nefnarann: Margfaldið inn í svigana og sameinið samkynja liði. | $\dfrac{2(x-6)}{4x+20}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\dfrac{\cancel{2}(x-6)}{\cancel{2}(2x+10)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{x-6}{2x+10}$ |
| Takið eftir að teljari og nefnari hafa ekki lengur neina sameiginlega þætti. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.111**

8

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{3}{x+2}}{\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.112**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{2}{x-7}-\dfrac{1}{x+7}}{\dfrac{6}{x+7}-\dfrac{1}{x^2-49}}$.

**SÝNIDÆMI 8.57**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{4}{m^2-7m+12}}{\dfrac{3}{m-3}-\dfrac{2}{m-4}}$.

## Lausn

| | $\dfrac{\dfrac{4}{m^2-7m+12}}{\dfrac{3}{m-3}-\dfrac{2}{m-4}}$ |
|---|---|
| Finnið MSN allra brota í flóknu ræðu stæðunni.<br>MSN er $(m-3)(m-4)$. | |
| Margfaldið teljarann og nefnarann með MSN. | $\dfrac{(m-3)(m-4)\dfrac{4}{(m-3)(m-4)}}{(m-3)(m-4)\left(\dfrac{3}{m-3}-\dfrac{2}{m-4}\right)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{\cancel{(m-3)(m-4)}\dfrac{4}{\cancel{(m-3)(m-4)}}}{\cancel{(m-3)}(m-4)\left(\dfrac{3}{\cancel{m-3}}\right)-(m-3)\cancel{(m-4)}\left(\dfrac{2}{\cancel{m-4}}\right)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{4}{3(m-4)-2(m-3)}$ |
| Beitið dreifireglu. | $\dfrac{4}{3m-12-2m+6}$ |
| Sameinið samkynja liði. | $\dfrac{4}{m-6}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.113**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{3}{x^2+7x+10}}{\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{1}{x+5}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.114**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{4}{y+5}+\dfrac{2}{y+6}}{\dfrac{3y}{y^2+11y+30}}$.

**SÝNIDÆMI 8.58**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{y}{y+1}}{1+\dfrac{1}{y-1}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{\dfrac{y}{y+1}}{1+\dfrac{1}{y-1}}$ |
| Finnið MSN allra brota í flóknu ræðu stæðunni. | |
| MSN er $(y+1)(y-1)$. | |
| Margfaldið teljarann og nefnarann með MSN. | $\dfrac{(y+1)(y-1)\dfrac{y}{y+1}}{(y+1)(y-1)\left(1+\dfrac{1}{y-1}\right)}$ |
| Margfaldið inn í sviga í nefnaranum og einfaldið. | $\dfrac{\cancel{(y+1)}(y-1)\left(\dfrac{y}{\cancel{y+1}}\right)}{(y+1)(y-1)(1)+(y+1)\cancel{(y-1)}\left(\dfrac{1}{\cancel{y-1}}\right)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{(y-1)y}{(y+1)(y-1)+(y+1)}$ |
| Einfaldið nefnarann og látið teljarann standa þáttaðan. | $\dfrac{y(y-1)}{y^2-1+y+1}$ |
| | $\dfrac{y(y-1)}{y^2+y}$ |
| Þáttið nefnarann og fellið út þætti sem hann á sameiginlega með teljaranum. | $\dfrac{\cancel{y}(y-1)}{\cancel{y}(y+1)}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{y-1}{y+1}$ |

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.115**

Einfaldið: $\dfrac{\dfrac{x}{x+3}}{1+\dfrac{1}{x+3}}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.116**

Einfaldið: $\dfrac{1+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{3}{x+1}}$.

## Verkefni úr hluta 8.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Einfaldið flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu**

Einfaldið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir.

255.

$$\frac{\frac{2a}{a+4}}{\frac{4a^2}{a^2-16}}$$

256.

$$\frac{\frac{3b}{b-5}}{\frac{b^2}{b^2-25}}$$

257.

$$\frac{\frac{5}{c^2+5c-14}}{\frac{10}{c+7}}$$

258.

$$\frac{\frac{8}{d^2+9d+18}}{\frac{12}{d+6}}$$

259.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{7}{9}}$$

260.

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}+\frac{7}{10}}$$

261.

$$\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{9}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}$$

262.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}$$

263.

$$\frac{\frac{n}{m}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{n}{m}}$$

264.

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{p}{q}}{\frac{q}{p}-\frac{1}{q}}$$

265.

$$\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{t}}{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{t^2}}$$

266.

$$\frac{\frac{2}{v}+\frac{2}{w}}{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{w^2}}$$

267.

$$\frac{x-\frac{2x}{x+3}}{\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}}$$

268.

$$\frac{y-\frac{2y}{y-4}}{\frac{2}{y-4}-\frac{2}{y+4}}$$

269.

$$\frac{2-\frac{2}{a+3}}{\frac{1}{a+3}+\frac{a}{2}}$$

270.

$$\frac{4-\frac{4}{b-5}}{\frac{1}{b-5}+\frac{b}{4}}$$

**Einfaldið flókna ræða stæðu með MSN**

Einfaldið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir.

271.

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}$$

272.

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}$$

273.

$$\frac{\frac{5}{6}+\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}-\frac{1}{3}}$$

274.

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{4}{15}}{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}$$

275.

$$\frac{\frac{c}{d}+\frac{1}{d}}{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}$$

276.

$$\frac{\frac{1}{m}+\frac{m}{n}}{\frac{n}{m}-\frac{1}{n}}$$

277.

$$\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}}$$

278.

$$\frac{\frac{2}{r}+\frac{2}{t}}{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{t^2}}$$

279.

$$\frac{\frac{2}{x+5}}{\frac{3}{x-5}+\frac{1}{x^2-25}}$$

280.

$$\frac{\frac{5}{y-4}}{\frac{3}{y+4}+\frac{2}{y^2-16}}$$

281.

$$\frac{\frac{5}{z^2-64}+\frac{3}{z+8}}{\frac{1}{z+8}+\frac{2}{z-8}}$$

282.

$$\frac{\frac{3}{s+6}+\frac{5}{s-6}}{\frac{1}{s^2-36}+\frac{4}{s+6}}$$

283.

$$\frac{\frac{4}{a^2-2a-15}}{\frac{1}{a-5}+\frac{2}{a+3}}$$

284.

$$\frac{\frac{5}{b^2-6b-27}}{\frac{3}{b-9}+\frac{1}{b+3}}$$

285.

$$\frac{\frac{5}{c+2}-\frac{3}{c+7}}{\frac{5c}{c^2+9c+14}}$$

286.

$$\frac{\frac{6}{d-4}-\frac{2}{d+7}}{\frac{2d}{d^2+3d-28}}$$

287.

$$\frac{2+\frac{1}{p-3}}{\frac{5}{p-3}}$$

288.

$$\frac{\frac{n}{n-2}}{3+\frac{5}{n-2}}$$

289.

$$\frac{\frac{m}{m+5}}{4+\frac{1}{m-5}}$$

290.

$$\frac{7+\frac{2}{q-2}}{\frac{1}{q+2}}$$

**Einfaldið**

Notið aðra hvora aðferðina í verkefnunum hér á eftir.

291.

$$\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{5}{14}}$$

292.

$$\frac{\frac{v}{w}+\frac{1}{v}}{\frac{1}{v}-\frac{v}{w}}$$

293.

$$\frac{\frac{2}{a+4}}{\frac{1}{a^2-16}}$$

294.

$$\frac{\frac{3}{b^2-3b-40}}{\frac{5}{b+5}-\frac{2}{b-8}}$$

295.

$$\frac{\frac{3}{m}+\frac{3}{n}}{\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}}$$

296.

$$\frac{\frac{2}{r-9}}{\frac{1}{r+9}+\frac{3}{r^2-81}}$$

297.

$$\frac{x-\frac{3x}{x+2}}{\frac{3}{x+2}+\frac{3}{x-2}}$$

298.

$$\frac{\frac{y}{y+3}}{2+\frac{1}{y-3}}$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**299.** **Rafeindatækni. Viðnám** rásar þar sem tvö viðnám eru tengd samhliða er $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$.

1. ⓐ Einfaldið flókna brotið $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$.
2. ⓑ Finnið viðnám rásarinnar þegar $R_1=8$ og $R_2=12$.

**300.** **Straujun.** Lenóra getur lokið straujun fyrir fjölskyldufyrirtækið á $h$ klukkustundum. Dóttir hennar væri $h+2$ klukkustundir að ljúka verkinu. Ef Lenóra og dóttir hennar vinna saman með 2 straujárn er klukkustundafjöldinn sem verkið tekur $\frac{1}{\frac{1}{h}+\frac{1}{h+2}}$.

1. ⓐ Einfaldið flókna brotið $\frac{1}{\frac{1}{h}+\frac{1}{h+2}}$.
2. ⓑ Finnið hve margar klukkustundir það tæki Lenóru og dóttur hennar að ljúka straujuninni saman þegar $h=4$.

### *Ritunarverkefni*

**301.** Í þessum hluta lærðuð þið að einfalda flókna brotið $\frac{\frac{3}{x+2}}{\frac{x}{x^2-4}}$ á tvo vegu:

með því að rita það sem deilingu
með því að margfalda teljarann og nefnarann með MSN
Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

**302.** Efraím vill byrja að einfalda flókna brotið $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$ með því að fella breyturnar út í teljara og nefnara. Útskýrið hvað er rangt við áætlun Efraíms.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| einfaldað flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu. | | | |
| einfaldað flókna ræða stæðu með minnsta samnefnaranum (MSN). | | | |

ⓑ Nú hafið þið skoðað gátlistann. Teljið þið ykkur vel undirbúin fyrir næsta hluta? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# 8.6 Leysið ræðar jöfnur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið ræðar jöfnur
- Einangrið tiltekna breytu í ræðri jöfnu

8

**UNDIRBÚNINGUR 8.19**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt, farið þá aftur í hlutann sem vísað er í og rifjið efnið upp.

Leysið: $\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 2.48.

**UNDIRBÚNINGUR 8.20**

Leysið: $n^2 - 5n - 36 = 0$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 7.73.

**UNDIRBÚNINGUR 8.21**

Einangrið $y$ með hjálp $x$: $5x + 2y = 10$ fyrir $y$.

Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 2.65.

Eftir að hugtökin stæða og jafna voru skilgreind snemma í Grunnatriðum höfum við notað þau í allri bókinni. Við höfum einfaldað margar gerðir stæðna og leyst margar gerðir jafna. Hingað til í kaflanum höfum við einfaldað margar ræðar stæður. Nú leysum við ræðar jöfnur.

Skilgreining ræðrar jöfnu er svipuð skilgreiningunni á jöfnu sem við notuðum í Grunnatriðum.

**RÆÐ JAFNA**

Ræð jafna er mynduð úr tveimur ræðum stæðum sem jafnaðarmerki tengir saman.

Gætið þess að þekkja muninn á ræðum stæðum og ræðum jöfnum. Í jöfnunni er jafnaðarmerki.

| Ræð stæða | Ræð jafna |
|---|---|
| $\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ |
| $\frac{y+6}{y^2 - 36}$ | $\frac{y+6}{y^2 - 36} = y + 1$ |
| $\frac{1}{n-3} + \frac{1}{n+4}$ | $\frac{1}{n-3} + \frac{1}{n+4} = \frac{15}{n^2 + n - 12}$ |

## Leysið ræðar jöfnur

Við höfum áður leyst línulegar jöfnur með brotum. Við fundum minnsta samnefnara (MSN) allra brota í jöfnunni og margfölduðum síðan báðar hliðar hennar með MSN til að losa jöfnuna við brotin.

Hér er verkefni sem við leystum þegar við unnum með línulegar jöfnur:

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{1}{8}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ | MSN = 8 |
| Við margfölduðum báðar hliðar með MSN. | $8\left(\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{4}\right)$ | |
| Síðan margfölduðum við inn í sviga. | $8 \cdot \frac{1}{8}x + 8 \cdot \frac{1}{2} = 8 \cdot \frac{1}{4}$ | |
| Við einfölduðum og fengum þá jöfnu án brota. | $x + 4 = 2$ | |
| Að lokum leystum við jöfnuna. | $x + 4 - 4 = 2 - 4$ | |
| | $x = -2$ | |

Við notum sömu aðferð til að leysa ræðar jöfnur. Við margföldum báðar hliðar jöfnunnar með MSN. Þá fáum við jöfnu án ræðra stæðna og hana er mun auðveldara að leysa.

En breyta getur verið í nefnara upphaflegu jöfnunnar. Því verðum við að gæta þess að fá ekki lausn sem gerir nefnara jafnan núlli.

Áður en við leysum ræða jöfnu athugum við því hvaða gildi gera einhvern nefnara jafnan núlli. Þegar jafnan er leyst vitum við þá hvort hafna þurfi einhverjum algebrulausnum.

Algebrulausn ræðrar jöfnu sem gerir einhverja ræðu stæðu óskilgreinda kallast aukalausn.

**AUKALAUSN RÆÐRAR JÖFNU**

Aukalausn ræðrar jöfnu er algebrulausn sem gerir einhverja stæðu í upphaflegu jöfnunni óskilgreinda.

Við skráum mögulegar aukalausnir c með því að rita $x \neq c$ við hlið jöfnunnar.

**SÝNIDÆMI 8.59**

## Hvernig leysa á jöfnur með ræðum stæðum

Leysið: $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara að núlli. | Ef $x = 0$, þá er $\frac{1}{x}$ óskilgreint.<br>Því skrifum við $x \neq 0$ við hlið jöfnunnar. | $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, x \neq 0$ |
| **2. skref.** Finnið minnsta samnefnara *allra* nefnara í jöfnunni. | Finnið minnsta samnefnara $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{3}$ og $\frac{5}{6}$. | Minnsti samnefnarinn er $6x$. |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 3.** Eyðið brotunum með því að margfalda báðar hliðar jöfnunnar með minnsta samnefnaranum. | Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með minnsta samnefnaranum, $6x$.<br>Notið dreifiregluna.<br>Einfaldið – og takið eftir að engin brot eru eftir! | $6x \cdot \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right) = 6x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$<br>$6x \cdot \frac{1}{x} + 6x \cdot \frac{1}{3} = 6x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$<br>$6 + 2x = 5x$ |
| **Skref 4.** Leysið jöfnuna sem fæst. | Einfaldið. | $6 = 3x$<br>$2 = x$ |
| **5. skref. Athugið.**<br>• Ef einhver gildanna sem fundust í 1. skrefi eru algebrulegar lausnir skal hafna þeim.<br>• Athugið allar lausnir sem eftir standa í upphaflegu jöfnunni. | Við fengum 0 ekki sem algebrulega lausn.<br>Við setjum $x = 2$ inn í upphaflegu jöfnuna. | $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$<br>$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\stackrel{?}{=}\frac{5}{6}$<br>$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\stackrel{?}{=}\frac{5}{6}$<br>$\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$ ✓ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.117**

Leysið: $\frac{1}{y}+\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.118**

Leysið: $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$.

Skref aðferðarinnar eru sýnd hér á eftir.

**AÐFERÐ**

## Leysið jöfnur með ræðum stæðum.

1. Skref 1. Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli.
2. Skref 2. Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar.
3. Skref 3. Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN.
4. Skref 4. Leysið jöfnuna sem fæst.
5. Skref 5.
   Athugið.
   - Ef einhver gildi úr skrefi 1 eru algebrulausnir skal hafna þeim.
   - Sannreynið allar lausnir sem eftir standa í upphaflegu jöfnunni.

Við byrjum alltaf á að skrá gildin sem gera einhvern nefnara jafnan núlli.

**SÝNIDÆMI 8.60**

Leysið: $1-\frac{5}{y}=-\frac{6}{y^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $1-\frac{5}{y}=-\frac{6}{y^2}$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $1-\frac{5}{y}=-\frac{6}{y^2}, y\neq 0$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar. MSN er $y^2$. | |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN. | $y^2\left(1-\frac{5}{y}\right)=y^2\left(-\frac{6}{y^2}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $y^2\cdot 1-y^2\left(\frac{5}{y}\right)=y^2\left(-\frac{6}{y^2}\right)$ |
| Margfaldið. | $y^2-5y=-6$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. Ritið annars stigs jöfnuna fyrst á staðalformi. | $y^2-5y+6=0$ |
| Þáttið. | $(y-2)(y-3)=0$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $y-2=0$ eða $y-3=0$ |
| Leysið. | $y=2$ eða $y=3$ |
| Athugið. | |
| 0 fékkst ekki sem algebrulausn. | |

Athugið $y = 2$ og $y = 3$ í upphaflegu jöfnunni.

$1-\frac{5}{y}=-\frac{6}{y^2}$ $\quad$ $1-\frac{5}{y}=-\frac{6}{y^2}$

$1-\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{2^2}$ $\quad$ $1-\frac{5}{3}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{3^2}$

$1-\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{4}$ $\quad$ $1-\frac{5}{3}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{9}$

$\frac{2}{2}-\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{3}-\frac{5}{3}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{9}$

$-\frac{3}{2}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{4}$ $\quad$ $-\frac{2}{3}\stackrel{?}{=}-\frac{6}{9}$

$-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ ✓ $\quad$ $-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$ ✓

**REYNIÐ SJÁLF 8.119**

Leysið: $1-\frac{2}{a}=\frac{15}{a^2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.120**

Leysið: $1-\frac{4}{b}=\frac{12}{b^2}$.

**SÝNIDÆMI 8.61**

Leysið: $\frac{5}{3u-2}=\frac{3}{2u}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5}{3u-2}=\frac{3}{2u}$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{5}{3u-2}=\frac{3}{2u}$, $u\neq\frac{2}{3}$, $u\neq 0$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar. MSN er $2u(3u-2)$. | |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN. | $2u\,(3u-2)\left(\frac{5}{3u-2}\right)=2u\,(3u-2)\left(\frac{3}{2u}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $2u\,\cancel{(3u-2)}\left(\frac{5}{\cancel{3u-2}}\right)=\cancel{2u}\,(3u-2)\left(\frac{3}{\cancel{2u}}\right)$ |
| Einfaldið. | $2u\,(5)=(3u-2)(3)$ |
| Margfaldið. | $10u=9u-6$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. | $u=-6$ |
| Hvorki 0 né $\frac{2}{3}$ fékkst sem algebrulausn. | |

Athugið $u=-6$ í upphaflegu jöfnunni.

$$\frac{5}{3u-2}=\frac{3}{2u}$$

$$\frac{5}{3(-6)-2}\stackrel{?}{=}\frac{3}{2(-6)}$$

$$\frac{5}{-20}\stackrel{?}{=}\frac{3}{-12}$$

$$-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\checkmark$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.121**

Leysið: $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{3x}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.122**

Leysið: $\frac{3}{5n+1}=\frac{2}{3n}$.

Þegar einn nefnaranna er annars stigs stæða, munið þá að þátta hann fyrst til að finna MSN.

**SÝNIDÆMI 8.62**

Leysið: $\frac{2}{p+2}+\frac{4}{p-2}=\frac{p-1}{p^2-4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2}{p+2}+\frac{4}{p-2}=\frac{p-1}{p^2-4}$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{2}{p+2}+\frac{4}{p-2}=\frac{p-1}{(p+2)(p+2)}, p\neq -2, p\neq 2$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar. MSN er $(p+2)(p-2)$. | |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN. | $(p+2)(p-2)\left(\frac{2}{p+2}+\frac{4}{p-2}\right)=(p+2)(p-2)\left(\frac{p-1}{p^2-4}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $(p+2)(p-2)\frac{2}{p+2}+(p+2)(p-2)\frac{4}{p-2}=(p+2)(p-2)\left(\frac{p-1}{p^2-4}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\cancel{(p+2)}(p-2)\frac{2}{\cancel{p+2}}+(p+2)\cancel{(p-2)}\frac{4}{\cancel{p-2}}=\cancel{(p+2)}\cancel{(p-2)}\left(\frac{p-1}{\cancel{p^2-4}}\right)$ |
| Einfaldið. | $2(p-2)+4(p+2)=p-1$ |
| Beitið dreifireglu. | $2p-4+4p+8=p-1$ |
| Leysið. | $6p+4=p-1$ |
| | $5p=-5$ |
| | $p=-1$ |

8

$2$ eða $-2$ fékkst ekki sem algebrulausn.

Athugið $p=-1$ í upphaflegu jöfnunni.

$$\frac{2}{p+2}+\frac{4}{p-2}=\frac{p-1}{p^2-4}$$

$$\frac{2}{(-1)+2}+\frac{4}{(-1)-2}\stackrel{?}{=}\frac{(-1)-1}{(-1)^2-4}$$

$$\frac{2}{1}+\frac{4}{-3}\stackrel{?}{=}\frac{-2}{-3}$$

$$\frac{6}{3}-\frac{4}{3}\stackrel{?}{=}\frac{-2}{-3}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\ \checkmark$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.123**

Leysið: $\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.124**

Leysið: $\frac{5}{y+3}+\frac{2}{y-3}=\frac{5}{y^2-9}$.

**SÝNIDÆMI 8.63**

Leysið: $\frac{4}{q-4}-\frac{3}{q-3}=1$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{4}{q-4}-\frac{3}{q-3}=1$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{4}{q-4}+\frac{3}{q-3}=1, \quad q\neq 4, q\neq 3$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar. MSN er $(q-4)(q-3)$. | |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN. | $(q-4)(q-3)\left(\frac{4}{q-4}-\frac{3}{q-3}\right)=(q-4)(q-3)(1)$ |
| Beitið dreifireglu. | $(q-4)(q-3)\left(\frac{4}{q-4}\right)-(q-4)(q-3)\left(\frac{3}{q-3}\right)=(q-4)(q-3)(1)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\cancel{(q-4)}(q-3)\left(\frac{4}{\cancel{q-4}}\right)-(q-4)\cancel{(q-3)}\left(\frac{3}{\cancel{q-3}}\right)=(q-4)(q-3)(1)$ |
| Einfaldið. | $4(q-3)-3(q-4)=(q-4)(q-3)$ |
| Einfaldið. | $4q-12-3q+12=q^2-7q+12$ |
| Sameinið samkynja liði. | $q=q^2-7q+12$ |
| Leysið. Ritið fyrst á staðalformi. | $0=q^2-8q+12$ |
| Þáttið. | $0=(q-2)(q-6)$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $q=2$ eða $q=6$ |
| Hvorki 4 né 3 fékkst sem algebrulausn. | |

Athugið $q=2$ og $q=6$ í upphaflegu jöfnunni.

$$\frac{4}{q-4}-\frac{3}{q-3}=1 \qquad \frac{4}{q-4}-\frac{3}{q-3}=1$$

$$\frac{4}{2-4}-\frac{3}{2-3}\stackrel{?}{=}1 \qquad \frac{4}{6-4}-\frac{3}{6-3}\stackrel{?}{=}1$$

$$\frac{4}{-2}-\frac{3}{-1}\stackrel{?}{=}1 \qquad \frac{4}{2}-\frac{3}{1}\stackrel{?}{=}1$$

$$-2-(-3)\stackrel{?}{=}1 \qquad 2-1\stackrel{?}{=}1$$

$$1=1\checkmark \qquad 1=1\checkmark$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.125**

Leysið: $\frac{2}{x+5}-\frac{1}{x-1}=1.$

**REYNIÐ SJÁLF 8.126**

Leysið: $\frac{3}{x+8}-\frac{2}{x-2}=1.$

**SÝNIDÆMI 8.64**

Leysið: $\frac{m+11}{m^2-5m+4}=\frac{5}{m-4}-\frac{3}{m-1}.$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{m+11}{m^2-5m+4}=\frac{5}{m-4}=\frac{3}{m-1}$ |
| Þáttið alla nefnarana svo hægt sé að skrá öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{m+11}{(m-4)(m-1)}=\frac{5}{m-4}-\frac{3}{m-1},\ m\neq 4, m\neq 1$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar. MSN er $(m-4)(m-1)$. | |
| Losið jöfnuna við brotin. | $(m-4)(m-1)\left(\frac{m+11}{(m-4)(m-1)}\right)=(m-4)(m-1)\left(\frac{5}{m-4}-\frac{3}{m-1}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $(m-4)(m-1)\left(\frac{m+11}{(m-4)(m-1)}\right)=(m-4)(m-1)\frac{5}{m-4}-(m-4)(m-1)\frac{3}{m-1}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\cancel{(m-4)(m-1)}\left(\frac{m+11}{\cancel{(m-4)(m-1)}}\right)=\cancel{(m-4)(m-1)}\frac{5}{\cancel{m-4}}-(m-4)\cancel{(m-1)}\frac{3}{\cancel{m-1}}$ |
| Einfaldið. | $m+11=5(m-1)-3(m-4)$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. | $m+11=5m-5-3m+12$ |
| | $4=m$ |
| Sannreynið. Eina algebrulausnin var 4, en við tókum fram að 4 gerði nefnara jafnan núlli. Algebrulausnin er því aukalausn. Jafnan hefur enga lausn. | |

**REYNIÐ SJÁLF 8.127**

Leysið: $\frac{x+13}{x^2-7x+10}=\frac{6}{x-5}-\frac{4}{x-2}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.128**

Leysið: $\frac{y-14}{y^2+3y-4}=\frac{2}{y+4}+\frac{7}{y-1}$.

Jafnan í sýnidæmi 8.64 hafði aðeins eina algebrulausn, en hún var aukalausn. Jafnan hafði því enga lausn. Sumar jöfnur hafa enga lausn.

**SÝNIDÆMI 8.65**

Leysið: $\frac{n}{12}+\frac{n+3}{3n}=\frac{1}{n}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{n}{12}+\frac{n+3}{3n}=\frac{1}{n}$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{n}{12}+\frac{n+3}{3n}=\frac{1}{n}, n\neq 0$ |
| Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar. MSN er $12n$. | |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN. | $12n\left(\frac{n}{12}+\frac{n+3}{3n}\right)=12n\left(\frac{1}{n}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $12n\left(\frac{n}{12}\right)+12n\left(\frac{n+3}{3n}\right)=12n\left(\frac{1}{n}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $\cancel{12}n\left(\frac{n}{\cancel{12}}\right)+4\cdot\cancel{3n}\left(\frac{n+3}{\cancel{3n}}\right)=12\cancel{n}\left(\frac{1}{\cancel{n}}\right)$ |
| Einfaldið. | $n\cdot n+4(n+3)=12\cdot 1$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. | $n^2+4n+12=12$ |
| | $n^2+4n=0$ |
| | $n(n+4)=0$ |
| | $n=0$ or $n=-4$ |
| Athugið. | |
| $n=0$ er aukalausn. | |

Athugið $n = -4$ í upphaflegu jöfnunni.

$$\frac{n}{12}+\frac{n+3}{3n}=\frac{1}{n}$$

$$\frac{-4}{12}+\frac{-4+3}{3(-4)}\stackrel{?}{=}\frac{1}{-4}$$

$$-\frac{4}{12}+\frac{1}{12}\stackrel{?}{=}-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{12}\stackrel{?}{=}-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\checkmark$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.129**

Leysið: $\frac{x}{18}+\frac{x+6}{9x}=\frac{2}{3x}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.130**

Leysið: $\frac{y+5}{5y}+\frac{y}{15}=\frac{1}{y}$.

**SÝNIDÆMI 8.66**

Leysið: $\frac{y}{y+6}=\frac{72}{y^2-36}+4$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{y}{y+6}=\frac{72}{y^2-36}+4$ |
| Þáttið alla nefnarana svo hægt sé að skrá öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{y}{y+6}=\frac{72}{(y-6)(y+6)}+4, y\neq 6, y\neq -6$ |
| Finnið minnsta samnefnarann. MSN er $(y-6)(y+6)$. | |
| Losið jöfnuna við brotin. | $(y-6)(y+6)\left(\frac{y}{y+6}\right)=(y-6)(y+6)\left(\frac{72}{(y-6)(y+6)}+4\right)$ |
| Einfaldið. | $(y-6)\cdot y=72+(y-6)(y+6)\cdot 4$ |
| Einfaldið. | $y(y-6)=72+4(y^2-36)$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. | $y^2-6y=72+4y^2-144$ |
| | $0=3y^2+6y-72$ |
| | $0=3(y^2+2y-24)$ |
| | $0=3(y+6)(y-4)$ |
| | $y=-6,\ y=4$ |

| |
|---|
| Athugið. |
| $y=-6$ er aukalausn. |
| Athugið $y = 4$ í upphaflegu jöfnunni<br>$\frac{y}{y+6}=\frac{72}{y^2-36}+4$<br>$\frac{4}{4+6}\stackrel{?}{=}\frac{72}{4^2-36}+4$<br>$\frac{4}{10}\stackrel{?}{=}\frac{72}{-20}+4$<br>$\frac{4}{10}\stackrel{?}{=}-\frac{36}{10}+\frac{40}{10}$<br>$\frac{4}{10}=\frac{4}{10}$ ✓ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.131**

Leysið: $\frac{x}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}+5.$

**REYNIÐ SJÁLF 8.132**

Leysið: $\frac{y}{y+8}=\frac{128}{y^2-64}+9.$

**SÝNIDÆMI 8.67**

Leysið: $\frac{x}{2x-2}-\frac{2}{3x+3}=\frac{5x^2-2x+9}{12x^2-12}.$

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{x}{2x-2}-\frac{2}{3x+3}=\frac{5x^2-2x+9}{12x^2-12}$ |
| Við byrjum á að þátta alla nefnara svo auðveldara sé að finna aukalausnir og MSN. | $\frac{x}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+1)}=\frac{5x^2-2x+9}{12(x-1)(x+1)}$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{x}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+1)}=\frac{5x^2-2x+9}{12(x-1)(x+1)}, x\neq 1, x\neq -1$ |
| Finnið minnsta samnefnarann. MSN er $12(x-1)(x+1)$ | |
| Losið jöfnuna við brotin. | $12(x-1)(x+1)\left(\frac{x}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+1)}\right)=12(x-1)(x+1)\left(\frac{5x^2-2x+9}{12(x-1)(x+1)}\right)$ |
| Einfaldið. | $6(x+1)\cdot x-4(x-1)\cdot 2=5x^2-2x+9$ |
| Einfaldið. | $6x(x+1)-4\cdot 2(x-1)=5x^2-2x+9$ |
| Leysið jöfnuna sem fæst. | $6x^2+6x-8x+8=5x^2-2x+9$ |

| |
|---|
| $x^2 - 1 = 0$ |
| $(x - 1)(x + 1) = 0$ |
| $x = 1$ eða $x = -1$ |

Athugið.

$x = 1$ og $x = -1$ eru aukalausnir. Jafnan hefur enga lausn.

**REYNIÐ SJÁLF 8.133**

Leysið:

$$\frac{y}{5y-10} - \frac{5}{3y+6} = \frac{2y^2 - 19y + 54}{15y^2 - 60}.$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.134**

Leysið:

$$\frac{z}{2z+8} - \frac{3}{4z-8} = \frac{3z^2 - 16z - 16}{8z^2 + 16z - 64}.$$

## Einangrið tiltekna breytu í ræðri jöfnu

Þegar við leystum línulegar jöfnur lærðum við að einangra tiltekna breytu í formúlu. Margar formúlur í viðskiptum, vísindum, hagfræði og öðrum greinum nota ræðar jöfnur til að lýsa tengslum tveggja eða fleiri breyta. Nú skoðum við hvernig einangra má tiltekna breytu í ræðri jöfnu.

Við byrjum á formúlu sem tengir vegalengd, hraða og tíma. Við höfum oft notað hana áður, en yfirleitt ekki á þessu formi.

8

**SÝNIDÆMI 8.68**

Leysið: $\frac{D}{T} = R$ fyrir $T$.

## Lausn

| | $\frac{D}{T} = R$ með tilliti til $T$ |
|---|---|
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{D}{T} = R, T \neq 0$ |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN, T. | $T\left(\frac{D}{T}\right) = T(R)$ |
| Einfaldið. | $D = T \cdot R$ |
| Deilið báðum hliðum með R til að einangra T. | $\frac{D}{R} = \frac{RT}{R}$ |
| Einfaldið. | $\frac{D}{R} = T$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.135**

Í jöfnunni $\frac{A}{L} = W$ skuluð þið einangra $L$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.136**

Í jöfnunni $\frac{F}{A} = M$ skuluð þið einangra $A$.

Í sýnidæmi 8.69 notum við formúluna fyrir hallatölu sem við notuðum til að leiða út punkthallaform jöfnu línu.

**SÝNIDÆMI 8.69**

Leysið: $m = \frac{x-2}{y-3}$ fyrir $y$.

## Lausn

| | $m = \frac{x-2}{y-3}$ fyrir $y$ |
|---|---|
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $m = \frac{x-2}{y-3}, y \neq 3$ |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN, $y-3$. | $(y-3)m = (y-3)\left(\frac{x-2}{y-3}\right)$ |
| Einfaldið. | $ym - 3m = x - 2$ |
| Einangrið liðinn sem inniheldur y. | $ym = x - 2 + 3m$ |
| Deilið báðum hliðum með m til að einangra y. | $\frac{ym}{m} = \frac{x-2+3m}{m}$ |
| Einfaldið. | $y = \frac{x-2+3m}{m}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.137**

Í jöfnunni $\frac{y-2}{x+1}=\frac{2}{3}$ skuluð þið einangra $x$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.138**

Í jöfnunni $x=\frac{y}{1-y}$ skuluð þið einangra $y$.

Fylgið öllum skrefunum í sýnidæmi 8.70. Formúlan kann að virðast mjög einföld, en við getum ekki einangrað hvoruga breytuna í nefnurunum strax.

**SÝNIDÆMI 8.70**

Leysið $\frac{1}{c}+\frac{1}{m}=1$ fyrir $c$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{c}+\frac{1}{m}=1$ fyrir $c$ |
| Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli. | $\frac{1}{c}+\frac{1}{m}=1, c\neq 0, m\neq 0$ |
| Losið jöfnuna við brotin með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN, $cm$. | $cm\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{m}\right)=cm(1)$ |
| Beitið dreifireglu. | $cm\left(\frac{1}{c}\right)+cm\,\frac{1}{m}=cm(1)$ |
| Einfaldið. | $m+c=cm$ |
| Safnið liðunum með c hægra megin. | $m=cm-c$ |
| Þáttið stæðuna hægra megin. | $m=c(m-1)$ |
| Til að einangra c skal deila báðum hliðum með $m-1$. | $\frac{m}{m-1}=\frac{c(m-1)}{m-1}$ |
| Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\frac{m}{m-1}=c$ |

Takið eftir því að þótt $c=0$ og $m=0$ hafi verið útilokuð úr upphaflegu jöfnunni verðum við nú einnig að taka fram að $m\neq 1$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.139**

Í jöfnunni $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=c$ skuluð þið einangra $a$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.140**

Í jöfnunni $\frac{2}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{y}$ skuluð þið einangra $y$.

## Verkefni úr hluta 8.6

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið ræðar jöfnur**

Leysið eftirfarandi verkefni.

303.

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$$

304.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{b}=\frac{1}{3}$$

305.

$$\frac{5}{2}-\frac{1}{c}=\frac{3}{4}$$

306.

$$\frac{6}{3}-\frac{2}{d}=\frac{4}{9}$$

307.

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{4}=\frac{2}{v}$$

308.

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{1}{w}$$

309.

$$\frac{7}{9}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$$

310.

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{y}=\frac{1}{4}$$

311.

$$1-\frac{2}{m}=\frac{8}{m^2}$$

312.

$$1+\frac{4}{n}=\frac{21}{n^2}$$

313.

$$1+\frac{9}{p}=\frac{-20}{p^2}$$

314.

$$1-\frac{7}{q}=\frac{-6}{q^2}$$

315.

$$\frac{1}{r+3}=\frac{4}{2r}$$

316.

$$\frac{3}{t-6}=\frac{1}{t}$$

317.

$$\frac{5}{3v-2}=\frac{7}{4v}$$

318.

$$\frac{8}{2w+1}=\frac{3}{w}$$

319.

$$\frac{3}{x+4}+\frac{7}{x-4}=\frac{8}{x^2-16}$$

320.

$$\frac{5}{y-9}+\frac{1}{y+9}=\frac{18}{y^2-81}$$

321.

$$\frac{8}{z-10}+\frac{7}{z+10}=\frac{5}{z^2-100}$$

322.

$$\frac{9}{a+11}+\frac{6}{a-11}=\frac{7}{a^2-121}$$

323.

$$\frac{1}{q+4}-\frac{2}{q-2}=1$$

324.

$$\frac{3}{r+10}-\frac{4}{r-4}=1$$

325.

$$\frac{1}{t+7}-\frac{5}{t-5}=1$$

326.

$$\frac{2}{s+7}-\frac{3}{s-3}=1$$

327.

$$\frac{v-10}{v^2-5v+4}=\frac{3}{v-1}-\frac{6}{v-4}$$

328.

$$\frac{w+8}{w^2-11w+28}=\frac{5}{w-7}+\frac{2}{w-4}$$

329.

$$\frac{x-10}{x^2+8x+12}=\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+6}$$

330.

$$\frac{y-3}{y^2-4y-5}=\frac{1}{y+1}+\frac{8}{y-5}$$

331.

$$\frac{z}{16}+\frac{z+2}{4z}=\frac{1}{2z}$$

332.

$$\frac{a}{9}+\frac{a+3}{3a}=\frac{1}{a}$$

333.

$$\frac{b+3}{3b}+\frac{b}{24}=\frac{1}{b}$$

334.

$$\frac{c+3}{12c}+\frac{c}{36}=\frac{1}{4c}$$

335.

$$\frac{d}{d+3}=\frac{18}{d^2-9}+4$$

336.

$$\frac{m}{m+5}=\frac{50}{m^2-25}+6$$

337.

$$\frac{n}{n+2}=\frac{8}{n^2-4}+3$$

338.

$$\frac{p}{p+7}=\frac{98}{p^2-49}+8$$

339.

$$\frac{q}{3q-9}-\frac{3}{4q+12}=\frac{7q^2+6q+63}{24q^2-216}$$

8

340.

$$\frac{r}{3r-15}-\frac{1}{4r+20}=\frac{3r^2+17r+40}{12r^2-300}$$

341.

$$\frac{s}{2s+6}-\frac{2}{5s+5}=\frac{5s^2-s-18}{10s^2+40s+30}$$

342.

$$\frac{t}{6t-12}-\frac{5}{2t+10}=\frac{t^2-23t+70}{12t^2+36t-120}$$

**Einangrið tiltekna breytu í ræðri jöfnu**

Leysið eftirfarandi verkefni.

343.

$$\frac{C}{r}=2\pi \text{ fyrir } r$$

344.

$$\frac{I}{r}=P \text{ fyrir } r$$

345.

$$\frac{V}{h}=l\,w \text{ fyrir } h$$

346.

$$\frac{2A}{b}=h \text{ fyrir } b$$

347.

$$\frac{v+3}{w-1}=\frac{1}{2} \text{ fyrir } w$$

348.

$$\frac{x+5}{2-y}=\frac{4}{3} \text{ fyrir } y$$

349.

$$a=\frac{b+3}{c-2} \text{ fyrir } c$$

350.

$$m=\frac{n}{2-n} \text{ fyrir } n$$

351.

$$\frac{1}{p}+\frac{2}{q}=4 \text{ fyrir } p$$

352.

$$\frac{3}{s}+\frac{1}{t}=2 \text{ fyrir } s$$

353.

$$\frac{2}{v}+\frac{1}{5}=\frac{3}{w} \text{ fyrir } w$$

354.

$$\frac{6}{x}+\frac{2}{3}=\frac{1}{y} \text{ fyrir } y$$

355.

$$\frac{m+3}{n-2}=\frac{4}{5} \text{ fyrir } n$$

356.

$$\frac{E}{c}=m^2 \text{ fyrir } c$$

357.

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=\frac{1}{4} \text{ fyrir } y$$

358.

$$\frac{R}{T}=W \text{ fyrir } T$$

359.

$$r=\frac{s}{3-t} \text{ fyrir } t$$

360.

$$c=\frac{2}{a}+\frac{b}{5} \text{ fyrir } a$$

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**361. Húsmálun. Alain** getur málað hús á 4 dögum. Spiro væri 7 daga að mála sama hús. Einangrið t í jöfnunni $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{1}{t}$ til að finna hve marga daga það tæki þá að mála húsið saman.

**362.** **Bátasigling.** Ari getur siglt bátnum 18 mílur með straumnum á sama tíma og hann siglir 10 mílur gegn straumnum. Ef hraði bátsins er 7 hnútar, einangrið þá c í jöfnunni $\frac{18}{7+c}=\frac{10}{7-c}$ til að finna hraða straumsins.

***Ritunarverkefni***

**363.** Hvers vegna hefur jafnan $\frac{3}{x-2}=\frac{5}{x-2}$ enga lausn?

**364.** Pétur telur að jafnan $\frac{y}{y+6}=\frac{72}{y^2-36}+4$ hafi tvær lausnir, $y=-6$ og $y=4$. Útskýrið hvers vegna Pétur hefur rangt fyrir sér.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst ræðar jöfnur. | | | |
| leyst ræðar jöfnur með tilliti til tiltekinnar breytu. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann, hvað ætlið þið þá að gera til að ná öruggum tökum á öllum námsmarkmiðunum?

# 8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið hlutfallajöfnur
- Leysið verkefni með líkum myndum

**UNDIRBÚNINGUR 8.22**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í tilgreindan hluta og rifja efnið upp.

Leysið $\frac{n}{3}=30$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 2.21.

**UNDIRBÚNINGUR 8.23**

Ummál þríhyrningslaga glugga er 23 fet. Tvær hliðar eru tíu fet og sex fet. Hve löng er þriðja hliðin? Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp
sýnidæmi 3.35.

## Leysið hlutfallajöfnur

Þegar tvær ræðar stæður eru jafnar kallast jafnan sem tengir þær hlutfallajafna.

**HLUTFALLAJAFNA**

Hlutfallajafna er jafna af gerðinni $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, þar sem $b\neq 0, d\neq 0$.

Hlutfallajafnan er lesin „$a$ á móti $b$, eins og $c$ á móti $d$“.

Jafnan $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ er hlutfallajafna því brotin tvö eru jöfn. Hlutfallajafnan $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ er lesin „1 á móti 2, eins og 4 á móti 8“.

Hlutfallajöfnur eru notaðar í mörgum verkefnum til að stækka stærðir í sama hlutfalli. Við byrjum á mjög einföldu verkefni svo að þið sjáið hvernig hlutfallajöfnur virka. Þótt þið sjáið svarið strax skuluð þið einnig læra að leysa verkefnið með hlutfallajöfnu.

Gerum ráð fyrir að skólastjóri vilji hafa 1 kennara á hverja 20 nemendur. Hún gæti notað hlutfallajöfnu til að finna fjölda kennara fyrir 60 nemendur. Látum x tákna fjölda kennara fyrir 60 nemendur og setjum upp hlutfallajöfnuna:

$$\frac{1\text{ kennari}}{20\text{ nemendur}}=\frac{x\text{ kennarar}}{60\text{ nemendur}}$$

Við gætum þess að einingarnar samsvari, bæði í teljurunum og í nefnurunum: kennarar eru í teljurunum og nemendur í nefnurunum.

Hlutfallajafna er jafna með ræðum stæðum. Við leysum hana því eins og jöfnurnar í hlutanum Leysið ræðar jöfnur. Við margföldum báðar hliðar með minnsta samnefnaranum (MSN) til að losa jöfnuna við brotin og leysum síðan jöfnuna sem fæst.

Ljúkum nú við að leysa verkefni skólastjórans. Við sleppum einingunum fram að síðasta skrefi.

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{20}=\frac{x}{60}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með MSN, 60. | $\frac{1}{20}\cdot 60=\frac{x}{60}\cdot 60$ |
| Einfaldið. | $3=x$ |
| | Skólastjórinn þarf 3 kennara fyrir 60 nemendur. |

Nú leysum við nokkrar tölulegar hlutfallajöfnur án eininga. Síðan leysum við verkefni með hlutföllum.

**SÝNIDÆMI 8.71**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{x}{63}=\frac{4}{7}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{x}{63}=\frac{4}{7}$ |
| Til að einangra $x$ skal margfalda báðar hliðar með MSN, 63. | $63\left(\frac{x}{63}\right)=63\left(\frac{4}{7}\right)$ |
| Einfaldið. | $x=\frac{9\cdot 7\cdot 4}{7}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti. | $x=36$ |
| Sannreynið. Setjið svarið inn í upphaflegu hlutfallajöfnuna. | |
| | $\frac{x}{63}=\frac{4}{7}$ |
| Setjið $x=36$ inn. | $\frac{36}{63}\stackrel{?}{=}\frac{4}{7}$ |
| Sýnið sameiginlega þætti. | $\frac{4\cdot 9}{7\cdot 9}\stackrel{?}{=}\frac{4}{7}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4}{7}=\frac{4}{7}\checkmark$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.141**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{n}{84}=\frac{11}{12}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.142**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{y}{96}=\frac{13}{12}$.

Þegar við vinnum með hlutfallajöfnur útilokum við gildi sem gera annan hvorn nefnarann jafnan núlli, rétt eins og við gerum með aðrar ræðar stæður. Hvaða gildi þarf að útiloka í næsta sýnidæmi?

**SÝNIDÆMI 8.72**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{144}{a}=\frac{9}{4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{144}{a} = \frac{9}{4}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með minnsta samnefnaranum. | $\frac{144}{a} \cdot 4a = \frac{9}{4} \cdot 4a$ |
| Fellið út sameiginlega þætti beggja vegna. | $4 \cdot 144 = a \cdot 9$ |
| Einfaldið. | $576 = 9a$ |
| Deilið báðum hliðum með 9. | $\frac{576}{9} = \frac{9a}{9}$ |
| Einfaldið. | $64 = a$ |
| Sannreynið. | |
| | $\frac{144}{a} = \frac{9}{4}$ |
| Setjið $a = 64$ inn. | $\frac{144}{64} \stackrel{?}{=} \frac{9}{4}$ |
| Sýnið sameiginlega þætti. | $\frac{9 \cdot 16}{4 \cdot 16} \stackrel{?}{=} \frac{9}{4}$ |
| Einfaldið. | $\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ ✓ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.143**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{91}{b} = \frac{7}{5}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.144**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{39}{c} = \frac{13}{8}$.

**SÝNIDÆMI 8.73**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{n}{n+14} = \frac{5}{7}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{n}{n+14}=\frac{5}{7}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með minnsta samnefnaranum. | $7(n+14)\left(\frac{n}{n+14}\right)=7(n+14)\left(\frac{5}{7}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti beggja vegna. | $7n=5(n+14)$ |
| Einfaldið. | $7n=5n+70$ |
| Einangrið $n$. | $2n=70$ |
| | $n=35$ |
| Sannreynið. | |
| | $\frac{n}{n+14}=\frac{5}{7}$ |
| Setjið $n=35$ inn. | $\frac{35}{35+14}\stackrel{?}{=}\frac{5}{7}$ |
| Einfaldið. | $\frac{35}{49}\stackrel{?}{=}\frac{5}{7}$ |
| Sýnið sameiginlega þætti. | $\frac{5\cdot 7}{7\cdot 7}\stackrel{?}{=}\frac{5}{7}$ |
| Einfaldið. | $\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$ ✓ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.145**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{y}{y+55}=\frac{3}{8}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.146**

Leysið hlutfallajöfnuna: $\frac{z}{z-84}=-\frac{1}{5}$.

**SÝNIDÆMI 8.74**

Leysið: $\frac{p+12}{9}=\frac{p-12}{6}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{p+12}{9}=\frac{p-12}{6}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með MSN, 18. | $18\left(\frac{p+12}{9}\right)=18\left(\frac{p-12}{6}\right)$ |
| Einfaldið. | $2(p+12)=3(p-12)$ |
| Beitið dreifireglu. | $2p+24=3p-36$ |
| Einangrið $p$. | $60=p$ |
| Sannreynið. | |
| | $\frac{p+12}{9}=\frac{p-12}{6}$ |
| Setjið $p=60$ inn. | $\frac{60+12}{9}\stackrel{?}{=}\frac{60-12}{6}$ |
| Einfaldið. | $\frac{72}{9}\stackrel{?}{=}\frac{48}{6}$ |
| Deilið. | $8=8\checkmark$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.147**

Leysið: $\frac{v+30}{8}=\frac{v+66}{12}$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.148**

Leysið: $\frac{2x+15}{9}=\frac{7x+3}{15}$.

Þegar við leysum verkefni með hlutföllum fylgjum við venjulegu aðferðinni okkar. Þegar við setjum upp hlutfallajöfnuna verðum við þó að gæta að einingunum: einingarnar í teljurunum verða að samsvara og einingarnar í nefnurunum sömuleiðis.

8

**SÝNIDÆMI 8.75**

Þegar barnalæknar ávísa börnum parasetamóli nota þeir 5 millilítra (ml) fyrir hver 25 pund af líkamsþyngd barnsins. Ef Sædís vegur 80 pund, hve mörgum millilítrum ávísar læknirinn henni?

## Lausn

| | |
|---|---|
| Ákvarðið hvað á að finna og veljið breytu sem táknar það. | Hve mörgum ml af parasetamóli ávísar læknirinn? |
| | Látum $a=ml$ af parasetamóli. |

| | |
|---|---|
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Ef 5 ml er ávísað fyrir hver 25 pund, hve mikið er þá ávísað fyrir 80 pund? |
| Setjið upp hlutfallajöfnu og gætið að einingunum.<br>$\frac{\text{ml}}{\text{pund}} = \frac{\text{ml}}{\text{pund}}$ | $\frac{5}{25} = \frac{a}{80}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með MSN, 400. | $400\left(\frac{5}{25}\right) = 400\left(\frac{a}{80}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti beggja vegna. | $\cancel{25} \cdot 16\left(\frac{5}{\cancel{25}}\right) = \cancel{80} \cdot 5\left(\frac{a}{\cancel{80}}\right)$ |
| Einfaldið en margfaldið ekki vinstra megin. Takið eftir hvert næsta skref verður. | $16 \cdot 5 = 5a$ |
| Einangrið $a$. | $\frac{16 \cdot 5}{5} = \frac{5a}{5}$ |
| Sannreynið. | $16 = a$ |
| Er svarið raunhæft? | |
| Já. Lyfjaskammturinn ætti að vera um 3 sinnum 5 af því að 80 er um 3 sinnum 25. Því eru 16 ml raunhæft svar. | |
| Setjið $a = 16$ inn í upphaflega hlutfallið.<br>$\frac{5}{25} = \frac{a}{80}$<br>$\frac{5}{25} \stackrel{?}{=} \frac{16}{80}$<br>$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ ✓ | |
| Svarið með heilli setningu. | Barnalæknirinn myndi ávísa Sædísi 16 ml af parasetamóli. |

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.149**

Barnalæknar ávísa 5 millilítrum (ml) af parasetamóli fyrir hver 25 pund af líkamsþyngd barns. Hve mörgum millilítrum er ávísað handa Emilíu, sem vegur 60 pund?

**REYNIÐ SJÁLF 8.150**

Fyrir hvert 1 kílógramm (kg) af líkamsþyngd barns ávísa barnalæknar 15 milligrömmum (mg) af hitalækkandi lyfi. Ef Ísabella vegur 12 kg, hve mörgum milligrömmum er ávísað?

**SÝNIDÆMI 8.76**

Ísaður karamellumakkiato sem er 16 únsur inniheldur 230 hitaeiningar. Hve margar hitaeiningar eru í drykk sem er 24 únsur?

## Lausn

| | |
|---|---|
| Ákvarðið hvað á að finna og veljið breytu sem táknar það. | Hve margar hitaeiningar eru í ísuðum karamellumakkiato sem er 24 únsur? |
| | Látum $c =$ hitaeiningar í 24 únsum. |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Ef 230 hitaeiningar eru í 16 únsum, hve margar eru þá í 24 únsum? |
| Setjið upp hlutfallajöfnu og gætið að einingunum. $\frac{\text{hitaeiningar}}{\text{únsa}} = \frac{\text{hitaeiningar}}{\text{únsa}}$ | $\frac{230}{16} = \frac{c}{24}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með MSN, 48. | $48\left(\frac{230}{16}\right) = 48\left(\frac{c}{24}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti beggja vegna. | $16 \cdot 3\left(\frac{230}{16}\right) = 24 \cdot 2\left(\frac{c}{24}\right)$ |
| Einfaldið. | $690 = 2c$ |
| Einangrið $c$. | $\frac{690}{2} = \frac{2c}{2}$ |
| | $345 = c$ |
| Sannreynið. | |
| Er svarið raunhæft? | |
| Já, 345 hitaeiningar í 24 únsum eru fleiri en 290 hitaeiningar í 16 únsum, en ekki miklu fleiri. | |
| Setjið $c = 345$ inn í upphaflega hlutfallið. $\frac{230}{16} = \frac{c}{24}$ $\frac{230}{16} \stackrel{?}{=} \frac{345}{24}$ $\frac{115}{8} = \frac{115}{8}$ ✓ | |
| Svarið með heilli setningu. | Í ísuðum karamellumakkiato sem er 24 únsur eru 345 hitaeiningar. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.151**

Á skyndibitastað eru 850 hitaeiningar í súkkulaðihristingi sem er 22 únsur. Hve margar hitaeiningar eru í hristingi sem er 12 únsur? Námundið að næstu heilu tölu.

**REYNIÐ SJÁLF 8.152**

Yaneli finnst Starburst-sælgæti gott en vill ekki fá meira en 100 hitaeiningar í millibitanum. Ef 8 molar innihalda 160 hitaeiningar, hve marga mola má hún borða?

**SÝNIDÆMI 8.77**

Josiah fór til Mexíkó í vorfríi og skipti $325 Bandaríkjadölum í mexíkóska pesóa. Á þeim tíma jafngilti $1 Bandaríkjadalur 12,54 pesóum. Hve marga pesóa fékk hann?

## Lausn

| | |
|---|---|
| Hvað eigið þið að finna? | Hve marga mexíkóska pesóa fékk Josiah? |
| Skilgreinið breytu. | Látum $p =$ fjöldi mexíkóskra pesóa. |
| Skrifið setningu sem gefur upplýsingarnar sem þarf til að finna svarið. | Ef $1 Bandaríkjadalur jafngildir 12,54 pesóum, hve margir pesóar jafngilda þá $325? |
| Setjið upp hlutfallajöfnu og gætið að einingunum. | |
| $\frac{\$}{\text{pesóar}} = \frac{\$}{\text{pesóar}}$ | $\frac{1}{12{,}54} = \frac{325}{p}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með MSN, $12{,}54\,p$. | $12{,}54p\left(\frac{1}{12{,}54}\right) = 12{,}54p\left(\frac{325}{p}\right)$ |
| Fellið út sameiginlega þætti beggja vegna. | $12{,}54p\left(\frac{1}{12{,}54}\right) = 12{,}54p\left(\frac{325}{p}\right)$ |
| Einfaldið. | $p = 4075{,}5$ |
| Sannreynið. | |
| Er svarið raunhæft? | |
| Já, $100 væru 1.254 pesóar. $325 er rúmlega 3 sinnum sú upphæð, svo 4075,5 pesóar er raunhæft svar. | |
| Setjið $p = 4075{,}5$ inn í upphaflega hlutfallið. Notið reiknivél. $\frac{1}{12{,}54} = \frac{325}{p}$ $\frac{1}{12{,}54} \stackrel{?}{=} \frac{325}{4075{,}5}$ $0{,}07874\ldots = 0{,}07874\ldots$ ✓ | |

8

| | |
|---|---|
| Svarið með heilli setningu. | Josiah fékk 4075,5 pesóa fyrir vorfrísferðina. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.153**

Yurianna fer til Evrópu og vill skipta $800 dölum í evrur. Samkvæmt núverandi gengi jafngildir $1 Bandaríkjadalur 0,738 evru. Hve margar evrur fær hún?

**REYNIÐ SJÁLF 8.154**

Corey og Nicole ferðast til Japans og þurfa að skipta $600 í japönsk jen. Ef hver dalur jafngildir 94,1 jenum, hve mörg jen fá þau?

Í sýnidæminu hér að ofan tengdum við fjölda pesóa við fjölda dala með hlutfallajöfnu. Við getum sagt að fjöldi pesóa sé í hlutfalli við fjölda dala. Þegar tvær stærðir tengjast með hlutfallajöfnu segjum við að þær standi í hlutfalli hvor við aðra.

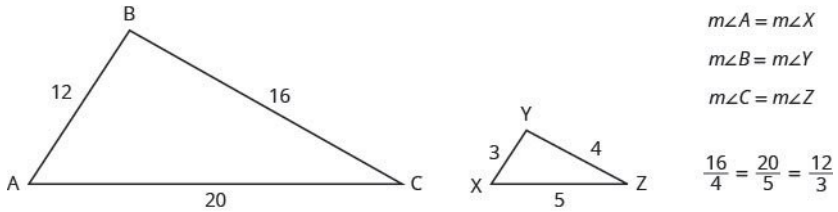
## Leysið verkefni með líkum myndum

Þegar þið minnkið eða stækkið ljósmynd í síma eða spjaldtölvu, finnið vegalengd á korti eða notið snið til að smíða bókaskáp eða sauma kjól eruð þið að vinna með líkar myndir. Tvær myndir eru líkar ef þær hafa nákvæmlega sömu lögun en ólíka stærð. Önnur er kvarðalíkan af hinni. Samsvarandi horn eru jafnstór og samsvarandi hliðar í sama hlutfalli.

**LÍKAR MYNDIR**

Tvær myndir eru líkar ef samsvarandi horn þeirra eru jafnstór og samsvarandi hliðar í sama hlutfalli.

Þríhyrningarnir tveir á mynd 8.2 eru til dæmis líkir. Hver hlið $\Delta ABC$ er 4 sinnum lengri en samsvarandi hlið $\Delta XYZ$.

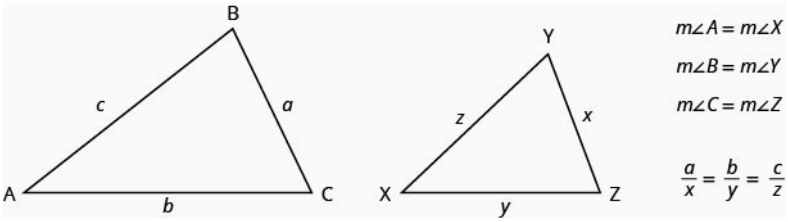



Mynd 8.2

Þetta er tekið saman í eiginleika líkra þríhyrninga.

**EIGINLEIKI LÍKRA ÞRÍHYRNINGA**

Ef $\Delta ABC$ er líkur $\Delta XYZ$, þá eru samsvarandi horn jafnstór og samsvarandi hliðar í sama hlutfalli.




Við leysum verkefni með líkum myndum með sömu rúmfræðilegu verkefnalausnaraðferð og áður.

---

**AÐFERÐ**

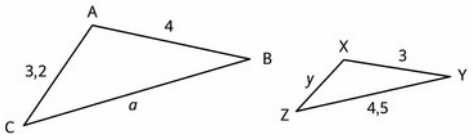
## Leysið rúmfræðiverkefni.

1. Skref 1. Lesið verkefnið og gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. Teiknið mynd og merkið inn á hana upplýsingarnar sem gefnar eru.
2. Skref 2. Finnið hverju er leitað að.
3. Skref 3. Skilgreinið breytu sem táknar stærðina sem leitað er að.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

---

**SÝNIDÆMI 8.78**

$\Delta ABC$ er líkur $\Delta XYZ$. Lengdir tveggja hliða í hvorum þríhyrningi eru gefnar. Finnið lengdir þriðju hliðanna.




## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. | Mynd er gefin. |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | lengdir hliða líkra þríhyrninga |
| **Skref 3.** Skilgreinið breyturnar. | Látum $a =$ lengd þriðju hliðar og $\Delta ABC$.<br>$y =$ lengd þriðju hliðar $\Delta XYZ$ |
| **Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu.** | Þar sem þríhyrningarnir eru líkir eru samsvarandi hliðar í hlutfalli. |

Við þurfum jöfnu sem ber óþekktu hliðina saman við hlutfall tveggja þekktra hliða. Þar sem hlið AB = 4 samsvarar hlið XY = 3 vitum við að $\frac{AB}{XY}=\frac{4}{3}$.

Við ritum því jöfnur með $\frac{AB}{XY}$ til að finna hliðarnar. Gætið þess að para samsvarandi hliðar rétt saman.

$$\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}=\frac{AC}{XZ}.$$

hliðar stóra þríhyrningsins → hliðar litla þríhyrningsins

Til að finna $a$: $\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}$

Til að finna $y$: $\frac{AB}{XY}=\frac{AC}{XZ}$

Setjið inn.

$$\frac{4}{3}=\frac{a}{4,5}$$
$$\frac{4}{3}=\frac{3,2}{y}$$

**Skref 5.** Leysið jöfnuna.

$$3a = 4(4,5)$$
$$4y = 3(3,2)$$

$$a = 6$$
$$y = 2,4$$

**Skref 6. Sannreynið svarið.**

$$\frac{4}{3} \overset{?}{=} \frac{6}{4,5}$$
$$4(4,5) \overset{?}{=} 6(3)$$
$$18 = 18\checkmark$$
$$\frac{4}{3} \overset{?}{=} \frac{3,2}{2,4}$$
$$4(2,4) \overset{?}{=} 3,2(3)$$
$$9,6 = 9,6\checkmark$$

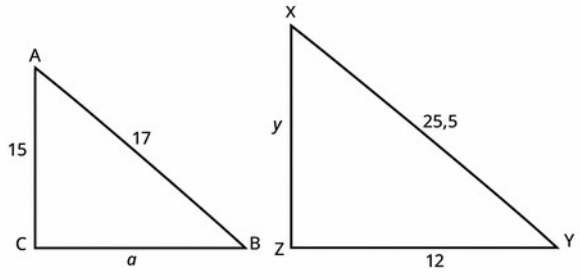
**Skref 7.** Svarið spurningunni.

Þriðja hlið $\Delta ABC$ er 6 og þriðja hlið $\Delta XYZ$ er 2,4.

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.155**

$\Delta ABC$ er líkur $\Delta XYZ$. Lengdir tveggja hliða í hvorum þríhyrningi eru gefnar á myndinni.




Finnið lengd hliðar $a$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.156**

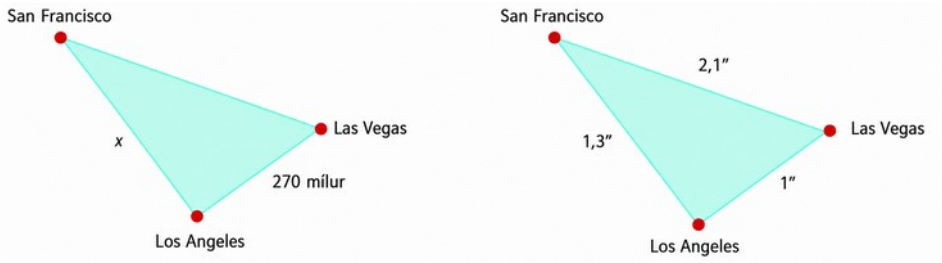
$\Delta ABC$ er líkur $\Delta XYZ$. Lengdir tveggja hliða í hvorum þríhyrningi eru gefnar á myndinni.

Finnið lengd hliðar $y$.

Næsta sýnidæmi sýnir hvernig líkir þríhyrningar eru notaðir með kortum.

**SÝNIDÆMI 8.79**

Á korti mynda San Francisco, Las Vegas og Los Angeles þríhyrning með hliðum sem sýndar eru á myndinni. Raunveruleg vegalengd frá Los Angeles til Las Vegas er 270 mílur. Finnið vegalengdin frá Los Angeles til San Francisco.




## Lausn

| | |
|---|---|
| **Lesið** verkefnið. Teiknið myndirnar og merkið inn gefnar upplýsingar. | Myndirnar eru sýndar hér að ofan. |
| **Ákvarðið hvað á að finna.** | Raunveruleg vegalengd frá Los Angeles til San Francisco. |
| **Skilgreinið breyturnar.** | Látum $x =$ vegalengdin frá Los Angeles til San Francisco. |
| **Setjið upp jöfnu. Þar sem þríhyrningarnir eru líkir eru samsvarandi hliðar í hlutfalli. Notum mílur í teljurum og tommur í nefnurum.** | $\frac{x \text{ mílur}}{1{,}3 \text{ tommur}} = \frac{270 \text{ mílur}}{1 \text{ tomma}}$ |
| **Leysið jöfnuna.** | $1{,}3\left(\frac{x}{1{,}3}\right) = 1{,}3\left(\frac{270}{1}\right)$ |
| | $x = 351$ |
| **Sannreynið.** | |
| Á kortinu er vegalengdin frá Los Angeles til San Francisco meiri en frá Los Angeles til Las Vegas. Þar sem 351 er meira en 270 er svarið raunhæft. | |

Athugið $x = 351$ í upphaflega hlutfallinu.
Notið reiknivél.

$$\frac{x \text{ mílur}}{1{,}3 \text{ tommur}} = \frac{270 \text{ mílur}}{1 \text{ tomma}}$$

$$\frac{351 \text{ mílur}}{1{,}3 \text{ tommur}} \stackrel{?}{=} \frac{270 \text{ mílur}}{1 \text{ tomma}}$$

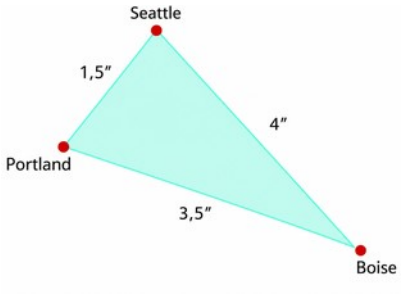
$$\frac{270 \text{ mílur}}{1 \text{ tomma}} = \frac{270 \text{ mílur}}{1 \text{ tomma}} \checkmark$$

**Svarið** spurningunni.

Vegalengdin frá Los Angeles til San Francisco er 351 mílur.

**REYNIÐ SJÁLF 8.157**

Á korti mynda Seattle, Portland og Boise þríhyrning með hliðum sem sýndar eru á myndinni. Raunveruleg vegalengd frá Seattle til Boise er 400 mílur. Finnið vegalengdina frá Seattle til Portland.




**REYNIÐ SJÁLF 8.158**

Notið kortið hér að ofan og finnið vegalengdina frá Portland til Boise.

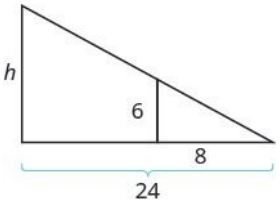
Við getum notað líkar myndir til að finna hæðir sem ekki er hægt að mæla beint.

**SÝNIDÆMI 8.80**

Tyler er 6 fet á hæð. Síðdegis var skuggi hans 8 fet á lengd. Á sama tíma var skuggi trés 24 fet. Finnið hæð trésins.

## Lausn

Lesið verkefnið og teiknið mynd.




Við leitum að h, hæð trésins.

Við setjum upp jöfnu með hjálp líkra þríhyrninga.

Litli þríhyrningurinn er líkur þeim stóra.

$$\frac{h}{24} = \frac{6}{8}$$

| | |
|---|---|
| Leysið hlutfallajöfnuna. | $24\left(\frac{6}{8}\right)=24\left(\frac{h}{24}\right)$ |
| Einfaldið. | $18=h$ |
| Sannreynið. | |
| Tyler er lægri en skuggi hans er langur, svo eðlilegt er að tréð sé lægra en skuggi þess er langur. | |

Athugið $h=18$ í upphaflega hlutfallinu.

$$\frac{6}{8}=\frac{h}{24}$$

$$\frac{6}{8}\stackrel{?}{=}\frac{18}{24}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\ \checkmark$$

**REYNIÐ SJÁLF 8.159**

Símastaur varpar 50 feta löngum skugga. Nálægt varpar 8 feta hátt umferðarskilti 10 feta löngum skugga. Hve hár er símastaurinn?

**REYNIÐ SJÁLF 8.160**

Furutré varpar 80 feta löngum skugga við hlið 30 feta hárrar byggingar sem varpar 40 feta löngum skugga. Hve hátt er furutréð?

## Verkefni úr hluta 8.7

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið hlutfallajöfnur**

Leysið eftirfarandi verkefni.

365.

$$\frac{x}{56}=\frac{7}{8}$$

366.

$$\frac{n}{91}=\frac{8}{13}$$

367.

$$\frac{49}{63}=\frac{z}{9}$$

368.

$$\frac{56}{72}=\frac{y}{9}$$

369.

$$\frac{5}{a}=\frac{65}{117}$$

370.

$$\frac{4}{b}=\frac{64}{144}$$

371.

$$\frac{98}{154}=\frac{-7}{p}$$

372.

$$\frac{72}{156}=\frac{-6}{q}$$

373.

$$\frac{a}{-8}=\frac{-42}{48}$$

374.

$$\frac{b}{-7}=\frac{-30}{42}$$

375.

$$\frac{2{,}7}{j}=\frac{0{,}9}{0{,}2}$$

8

376.

$$\frac{2{,}8}{k}=\frac{2{,}1}{1{,}5}$$

377.

$$\frac{a}{a+12}=\frac{4}{7}$$

378.

$$\frac{b}{b-16}=\frac{11}{9}$$

379.

$$\frac{c}{c-104}=-\frac{5}{8}$$

380.

$$\frac{d}{d-48}=-\frac{13}{3}$$

381.

$$\frac{m+90}{25}=\frac{m+30}{15}$$

382.

$$\frac{n+10}{4}=\frac{40-n}{6}$$

383.

$$\frac{2p+4}{8}=\frac{p+18}{6}$$

384.

$$\frac{q-2}{2}=\frac{2q-7}{18}$$

**385.** Barnalæknar ávísa 5 millilítrum (ml) af parasetamóli fyrir hver 25 pund af líkamsþyngd barns. Hve mörgum millilítrum ávísar læknirinn handa Jocelyn, sem vegur 45 pund?

**386.** Brianna vegur 6 kg og þarf verkjalyf eftir bólusetningu. Börnum er ávísað 15 milligrömmum (mg) fyrir hvert 1 kílógramm líkamsþyngdar. Hve mörgum milligrömmum ávísar læknirinn?

**387.** Dýralæknir ávísaði Sunny, hundi sem vegur 65 pund, sýklalyfi til að fyrirbyggja sýkingu eftir tannhreinsun. Ef skammturinn er 5 mg á hvert pund, hve mikið lyf fékk Sunny?

**388.** Belle er köttur sem vegur 13 pund og er með liðverki. Hve miklu lyfi á dýralæknirinn að ávísa ef skammturinn er 1,8 mg á hvert pund?

**389.** Í auglýsingu fyrir nýjan orkudrykk segir að 8 únsur innihaldi 106 hitaeiningar. Hve margar hitaeiningar eru í 12 únsum?

**390.** Gosdós sem rúmar 12 únsur inniheldur 150 hitaeiningar. Hve margar hitaeiningar fær Josiah ef hann drekkur 32 únsur?

**391.** Í auglýsingu fyrir nýjan sítrónukrapdrykk segir að 7 únsur innihaldi aðeins 140 hitaeiningar. Hve margar únsur má Sally drekka ef hún vill fá 100 hitaeiningar?

**392.** Reese drekkur hollan grænan þeyting. Skammtur sem er 16 únsur inniheldur 170 hitaeiningar. Reese drekkur 24 únsur á dag. Hve margar hitaeiningar fær hann?

**393.** Janice ferðast til Kanada og skiptir $250 Bandaríkjadölum í kanadíska dali. Samkvæmt núverandi gengi jafngildir $1 Bandaríkjadalur $1,01 kanadískum dölum. Hve marga kanadíska dali fær hún?

**394.** Todd ferðast til Mexíkó og skiptir $450 í pesóa. Ef hver dalur jafngildir 12,29 pesóum, hve marga pesóa fær hann?

**395.** Steve skipti $600 í 480 evrur. Hve margar evrur fékk hann fyrir hvern Bandaríkjadal?

**396.** Martha skipti $350 Bandaríkjadölum í 385 ástralska dali. Hve marga ástralska dali fékk hún fyrir hvern Bandaríkjadal?

**397.** Á ferð til Bretlands skipti Bethany $900 í 570 sterlingspund. Hve mörg pund fékk hún fyrir hvern Bandaríkjadal?

**398.** Trúboði í Suður-Afríku þurfti að skipta $500 í suðurafrískt rand á genginu 12,63 rand fyrir hvern dal. Hve mörg rand fékk hann?

**399.** Ronald þarf morgundrykk sem gefur að minnsta kosti 390 hitaeiningar. Einn bolli af appelsínusafa inniheldur 130 hitaeiningar. Hve marga bolla þarf hann?

**400.** Sara drekkur 32 únsur af orkudrykk sem inniheldur 80 hitaeiningar í hverjum 12 únsum. Hve margar hitaeiningar drakk hún?

**401.** Elizabeth snýr aftur til Bandaríkjanna frá Kanada. Hún skiptir 300 kanadískum dölum í $230,05 Bandaríkjadali. Hvers virði var $1 Bandaríkjadalur í kanadískum dölum?

**402.** Ben þarf að skipta $1000 í japönsk jen. Einn Bandaríkjadalur jafngildir 123,3 jenum. Hve mörg jen fær hann?

**403.** Veiðihundur sem vegur 85 pund er með niðurgang. Lyfjaskammturinn er 1 teskeið á hver 5 pund. Hve mikið lyf á hann að fá?

**404.** Lacy er fimm ára og var stungin af býflugu. Skammtur kláðastillandi vökva er 150 mg miðað við líkamsþyngd hennar, 40 pund. Hver er skammturinn á hvert pund?

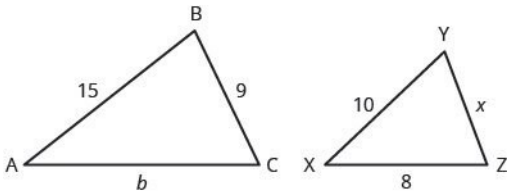
8

**405.** Karen borðar $\frac{1}{2}$ bolla af hafragraut sem telst 2 stig í megrunarkerfi hennar. Eiginmaður hennar, Joe, má fá 3 stig af hafragraut í morgunmat. Hve mikinn hafragraut má hann borða?

**406.** Í hafrakökuuppskrift þarf $\frac{1}{2}$ bolla af smjöri í 4 tylftir af kökum. Hilda þarf að baka 10 tylftir fyrir kökubasar. Hve marga bolla af smjöri þarf hún?

**Leysið verkefni með líkum myndum**

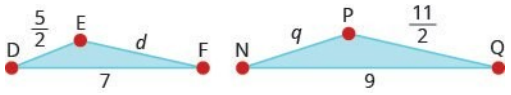
Í næstu dæmum er $\Delta ABC$ líkur $\Delta XYZ$. Finnið lengd tilgreindrar hliðar.




**407.** hlið b

**408.** hlið x

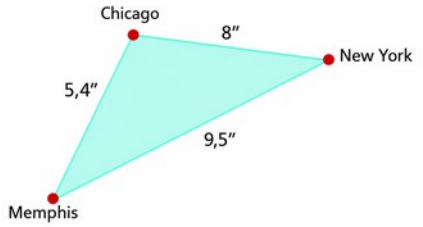
Í næstu dæmum er $\Delta DEF$ líkur $\Delta NPQ$.




**409.** Finnið lengd hliðar d.

**410.** Finnið lengd hliðar q.

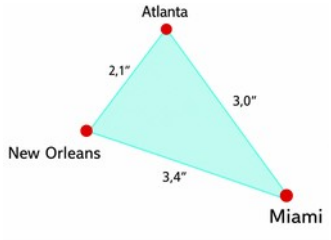
Notið kortið í næstu tveimur dæmum. New York, Chicago og Memphis mynda þríhyrning. Raunveruleg vegalengd frá New York til Chicago er 800 mílur.




**411.** Finnið raunverulega vegalengd frá New York til Memphis.

**412.** Finnið raunverulega vegalengd frá Chicago til Memphis.

Notið kortið í næstu tveimur dæmum. Atlanta, Miami og New Orleans mynda þríhyrning. Raunveruleg vegalengd frá Atlanta til New Orleans er 420 mílur.




**413.** Finnið raunverulega vegalengd frá New Orleans til Miami.

**414.** Finnið raunverulega vegalengd frá Atlanta til Miami.

**415.** 2 feta hár hundur varpar 3 feta skugga þegar köttur varpar eins fets skugga. Hve hár er kötturinn?

**416.** Larry og Tom stóðu saman í bakgarðinum þegar Tom bað Larry að giska á hæð sína. Larry er 6,5 fet á hæð, skuggi hans 8 fet og skuggi Toms 7,75 fet. Hve hár er Tom?

**417.** Vindmylluturn er 212 fet á hæð. Sex feta há manneskja við turninn varpar sjö feta löngum skugga. Hve langur er skuggi vindmyllunnar?

**418.** Frelsisstyttan er 305 fet á hæð. Nicole stendur við styttuna, varpar 6 feta skugga og er 5 fet á hæð. Hve langur ætti skuggi styttunnar að vera?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**419. Hjartsláttur. Í líkamsræktinni mælir Carol púlsinn í 10 sekúndur og telur 19 slög.**

1. ⓐ Hve mörg slög á mínútu eru það?
2. ⓑ Hefur Carol náð markpúlsinum 140 slög á mínútu?

**420. Hjartsláttur. Kevin vill halda púlsinum í 160 slögum á mínútu á æfingu. Hann telur 27 slög á 10 sekúndum.**

1. ⓐ Hve mörg slög á mínútu eru það?
2. ⓑ Hefur Kevin náð markpúlsinum?

**421. Ferðakostnaður. Bíll Jesse kemst 30 mílur á hverju galloni af bensíni.**

1. ⓐ Ef Las Vegas er 285 mílur í burtu, hve mörg gallon þarf í ferðina þangað og heim?
2. ⓑ Ef bensín kostar $3,09 á gallonið, hvað kostar bensínið í ferðina samtals?

**422. Ferðakostnaður. Danny vill aka til Phoenix að hitta afa sinn. Phoenix er 370 mílur frá heimili hans og bíllinn kemst 18,5 mílur á galloni.**

1. ⓐ Hve mörg gallon af bensíni þarf Danny til að aka til Phoenix og heim?
2. ⓑ Ef bensín kostar $3,19 á gallonið, hvað kostar bensínið í ferðina til afa hans samtals?

**423. Grasáburður. Phil** vill bera áburð á grasflötina. Hver áburðarpoki dugar á um 4.000 ferfet en grasflötin er um 13.500 ferfet. Hve marga poka þarf hann?

**424. Húsmálning.** April vill mála húsið að utan. Eitt gallon af málningu dugar á um 350 ferfet og ytra byrði hússins er um 2000 ferfet. Hve mörg gallon þarf hún?

**425. Matreiðsla.** Í pastauppskrift Natalíu þarf 2 pund af pasta fyrir 1 kvart af sósu. Hve mörg pund af pasta á hún að elda ef hún hefur 2,5 kvört af sósu?

**426. Húshitunarolía. Það** kostar $400 að fylla olíutank sem rúmar 275 gallon. Hvað kostar að fylla tank sem rúmar 180 gallon?

### *Ritunarverkefni*

**427.** Marisol leysir hlutfallajöfnuna $\frac{144}{a}=\frac{9}{4}$ með krossmargföldun og fyrsta skref hennar er $4 \cdot 144 = 9 \cdot a$. Útskýrið hvernig það er frábrugðið aðferðinni í sýnidæmi 8.72.

**428.** Finnið prentað kort og semjið og leysið verkefni svipað sýnidæmi 8.79.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta tök ykkar á námsmarkmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst hlutfallajöfnur. | | | |
| leyst verkefni um líkar myndir. | | | |

ⓑ Hvað segir þessi gátlisti um tök ykkar á efni hlutans? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 8.8 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða og vinnu

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða
- Leysið vinnuverkefni

**UNDIRBÚNINGUR 8.24**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í tilgreindan hluta og rifja efnið upp.

Hraðvagn og almenningsvagn fara frá Chicago til Champaign. Hraðvagninn fer leiðina á 2 klukkustundum en almenningsvagninn á 5 klukkustundum. Hraði hraðvagnsins er 42 mílum á klukkustund meiri en hraði almenningsvagnsins. Finnið hraða almenningsvagnsins. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp
sýnidæmi 3.48.

**UNDIRBÚNINGUR 8.25**

Leysið $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=\frac{5}{6}$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið
rifja upp sýnidæmi 3.49.

**UNDIRBÚNINGUR 8.26**

Leysið: $18t^2-30=-33t$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið
rifja upp sýnidæmi 7.79.

## Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða

Í fyrri köflum höfum við leyst verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða með formúlunni $D=r\,t$. Við notuðum töflu eins og þá hér að neðan til að skipuleggja upplýsingarnar og leiða okkur að jöfnunni.

| | Hraði • | Tími = | Vegalengd |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

Formúlan $D=r\,t$ gerir ráð fyrir að r og t séu þekkt og notuð til að finna D. Ef D og r eru þekkt en finna þarf t, einangrum við t í jöfnunni og fáum formúluna $t=\frac{D}{r}$.

Við höfum einnig útskýrt hvernig ferð með eða á móti straumi hefur áhrif á hraða farartækis. Við rifjum þá hugmynd upp í næsta sýnidæmi.

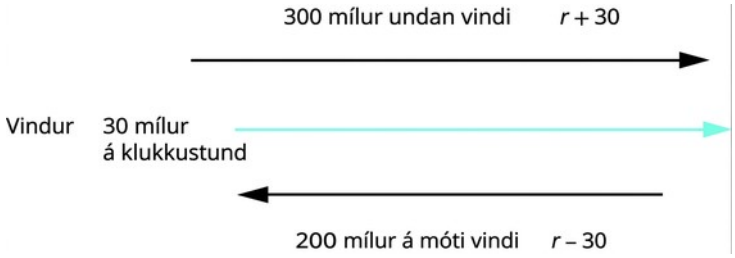
---

**SÝNIDÆMI 8.81**

Flugvél getur flogið 200 mílur í mótvindi sem er 30 mílur á klukkustund á sama tíma og hún flýgur 300 mílur með meðvindi sem er 30 mílur á klukkustund. Hver er hraði flugvélarinnar?

### Lausn

Þetta er dæmi um hreyfingu með jöfnum hraða. Teikning hjálpar okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur.




Við fyllum út töfluna til að skipuleggja upplýsingarnar.

| | |
|---|---|
| Við leitum að hraða flugvélarinnar. | Látum $r=$ tákna hraða flugvélarinnar. |
| Þegar flugvélin flýgur með vindi eykur vindurinn hraða hennar og heildarhraðinn er $r+30$. | |
| Þegar flugvélin flýgur á móti vindi dregur vindurinn úr hraða hennar og heildarhraðinn er $r-30$. | |
| Skráið hraðana og vegalengdirnar. Þar sem $D=r\cdot t$ einangrum við t og fáum $\frac{D}{r}$. Deilið vegalengdinni með hraðanum í hvorri röð og skráið stæðuna í tímadálkinn. | |

| | Hraði • | Tími | = Vegalengd |
|---|---|---|---|
| Mótvindur | $r-30$ | $\frac{200}{r-30}$ | 200 |
| Meðvindur | $r+30$ | $\frac{300}{r+30}$ | 300 |

| | |
|---|---|
| Við vitum að tímarnir eru jafnir og setjum því upp jöfnuna. | $\frac{200}{r-30}=\frac{300}{r+30}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með MSN.<br>$200(r+30)=300(r-30)$ | $(r+30)(r-30)\left(\frac{200}{r-30}\right)=(r+30)(r-30)\left(\frac{300}{r+30}\right)$ |
| Einfaldið. | $(r+30)(200)=(r-30)(300)$ |
| | $200r+6000=300r-9000$ |
| Leysið. | $15000=100r$<br>$150=r$ |
| Sannreynið. | |
| Er hraði upp á 150 mílur á klukkustund raunhæfur fyrir flugvél? Já. Ef flugvélin fer á 150 mílna hraða á klukkustund og vindhraðinn er 30 mílur á klukkustund: | |
| Meðvindur<br>$150+30=180$ mílur/klst. $\quad \frac{300}{180}=\frac{5}{3}$<br>klukkustundir | |
| Mótvindur<br>$150-30=120$ mílur/klst. $\quad \frac{200}{120}=\frac{5}{3}$<br>klukkustundir | |
| Tímarnir eru jafnir og því stenst lausnin prófun. | Flugvélin fór á 150 mílna hraða á klukkustund. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.161**

Link á rafmagnshjól sem fer á jöfnum hraða. Mótvindur dregur úr hraðanum og meðvindur eykur hann. Link getur hjólað 20 mílur í mótvindi sem er 3 mílur á klukkustund á sama tíma og hann hjólar 30 mílur með meðvindi sem er 3 mílur á klukkustund. Hver er hjólahraði Links?

**REYNIÐ SJÁLF 8.162**

Judy getur siglt vélbáti sínum 5 mílur á móti vindi sem er 7 mílur á klukkustund á sama tíma og hún siglir 12 mílur með meðvindi sem er 7 mílur á klukkustund. Hver er hraði báts Judy í logni?

Í næsta sýnidæmi þekkjum við heildartímann þegar ólíkar vegalengdir eru farnar á ólíkum hraða.

**SÝNIDÆMI 8.82**

Jazmine æfði í 3 klukkustundir á laugardaginn. Hún hljóp 8 mílur og hjólaði síðan 24 mílur. Hjólahraði hennar er 4 mílum á klukkustund meiri en hlaupahraðinn. Hver er hlaupahraði hennar?

## Lausn

Þetta er dæmi um hreyfingu með jöfnum hraða. Teikning hjálpar okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur.




Við fyllum út töfluna til að skipuleggja upplýsingarnar.

| | |
|---|---|
| Við leitum að hlaupahraða Jazmine. | Látum $r=$ tákna hlaupahraða Jazmine. |
| Hjólahraði hennar er 4 mílum á klukkustund meiri en hlaupahraðinn. | $r+4=$ táknar hjólahraða hennar |
| Vegalengdirnar eru gefnar; skráið þær í töfluna. | |
| Þar sem $D=r\bullet t$ einangrum við t og fáum $t=\frac{D}{r}$.<br>Deilið vegalengdinni með hraðanum í hvorri röð og skráið stæðuna í tímadálkinn. | <table><tr><th></th><th>Hraði • Tími = Vegalengd</th><th></th><th></th></tr><tr><td>Hlaup</td><td>$r$</td><td>$\frac{8}{r}$</td><td>8</td></tr><tr><td>Hjólreiðar</td><td>$r+4$</td><td>$\frac{24}{r+4}$</td><td>24</td></tr><tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr></table> |
| Skrifið setningu með orðum. | Samanlagður hlaupa- og hjólatími hennar er 3 klukkustundir. |
| Færið setninguna yfir í jöfnu. | $\frac{8}{r}+\frac{24}{r+4}=3$ |
| Leysið. | $\begin{aligned} r(r+4)\left(\frac{8}{r}+\frac{24}{r+4}\right) &= 3\bullet r(r+4) \\ 8(r+4)+24r &= 3r(r+4) \\ 8r+32+24r &= 3r^2+12r \\ 32+32r &= 3r^2+12r \\ 0 &= 3r^2-20r-32 \\ 0 &= (3r+4)(r-8) \end{aligned}$ |
| | $(3r+4)=0(r-8)=0$ |
| | $r=-\frac{4}{3}r=8$ |
| Sannreynið. $r=-\frac{4}{3}\,r=8$ | |

| |
|---|
| Neikvæður hraði hefur enga merkingu í þessu verkefni og því er $r=8$ lausnin. |
| Er hlaupahraði upp á 8 mílur á klukkustund raunhæfur? Já. |
| Hlaup 8 mílur/klst. $\frac{8 \text{ mílur}}{8 \text{ mílur/klst.}}=1$ klukkustund<br>Hjól 12 mílur/klst. $\frac{24 \text{ mílur}}{12 \text{ mílur/klst.}}=2$ klukkustundir<br>Samtals 3 klukkustundir Hlaupahraði Jazmine er 8 mílur/klst |

**REYNIÐ SJÁLF 8.163**

Dennis fór á gönguskíði í 6 klukkustundir á laugardaginn. Hann fór 20 mílur upp brekku og síðan 20 mílur niður aftur að upphafsstaðnum. Hraði hans upp brekkuna var 5 mílum á klukkustund minni en hraðinn niður. Hver var hraði Dennis upp og niður brekkuna?

**REYNIÐ SJÁLF 8.164**

Tony ók í 4 klukkustundir heim til sín, 208 mílur á hraðbraut og 40 mílur á sveitavegum. Ef hann ók 15 mílum á klukkustund hraðar á hraðbrautinni en á sveitavegunum, hver var hraði hans á sveitavegunum?

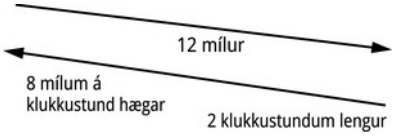
Enn á ný notum við formúluna fyrir hreyfingu með jöfnum hraða eftir að t hefur verið einangrað.

**SÝNIDÆMI 8.83**

Hamilton hjólaði 12 mílur niður á við eftir árstígnum frá húsi sínu að sjónum og hjólaði síðan upp á við heim aftur. Hraði hans upp á við var 8 mílum á klukkustund minni en hraðinn niður. Heimferðin tók 2 klukkustundum lengri tíma en ferðin að sjónum. Finnið hraða Hamiltons niður á við.

## Lausn

Þetta er dæmi um hreyfingu með jöfnum hraða. Teikning hjálpar okkur að sjá aðstæðurnar fyrir okkur.




Við fyllum út töfluna til að skipuleggja upplýsingarnar.

Við leitum að hraða Hamiltons niður á við.

Látum $r=$ tákna hraða Hamiltons niður á við.

Hraði hans upp á við er 8 mílum á klukkustund minni. Skráið hraðana í töfluna.

$r-8=$ táknar hraða Hamiltons upp á við

Vegalengdin er sú sama í báðar áttir, 12 mílur. Þar sem $D=r\cdot t$ einangrum við t og fáum $t=\frac{D}{r}$. Deilið vegalengdinni með hraðanum í hvorri röð og skráið stæðuna í tímadálkinn.

| | Hraði $\cdot$ | Tími $=$ | Vegalengd |
|---|---|---|---|
| Niður í móti | $r$ | $\frac{12}{r}$ | 12 |
| Upp í móti | $r-8$ | $\frac{12}{r-8}$ | 12 |

Skrifið setningu með orðum um tímann.

Ferðin upp tók 2 klukkustundum lengri tíma en ferðin niður. Tíminn upp er 2 meiri en tíminn niður.

Færið setninguna yfir í jöfnu og leysið hana.

$$\begin{aligned}
\tfrac{12}{r-8} &= \tfrac{12}{r}+2 \\
r(r-8)\left(\tfrac{12}{r-8}\right) &= r(r-8)\left(\tfrac{12}{r}+2\right) \\
12r &= 12(r-8)+2r(r-8) \\
12r &= 12r-96+2r^2-16r \\
0 &= 2r^2-16r-96 \\
0 &= 2\left(r^2-8r-48\right) \\
0 &= 2(r-12)(r+4) \\
r-12 &= 0 \quad r+4=0 \\
r &= 12 \qquad \cancel{r=-4}
\end{aligned}$$

Sannreynið. Er hjólahraði upp á 12 mílur á klukkustund raunhæfur niður á við? Já.

Niður á við

$$12 \text{ mílur/klst.} \qquad \frac{12 \text{ mílur}}{12 \text{ mílur/klst.}}=1 \text{ klukkustund}$$

Upp á við

$$12-8=4 \text{ mílur/klst.} \qquad \frac{12 \text{ mílur}}{4 \text{ mílur/klst.}}$$
$$=3 \text{ klukkustundir}$$

Tíminn upp er 2 klukkustundum lengri en tíminn niður. Hraði Hamiltons niður á við er 12 mílur á klukkustund.

**REYNIÐ SJÁLF 8.165**

Kayla hjólaði 75 mílur heim úr háskólanum eina helgi og tók síðan strætisvagn til baka. Ferðin til baka með vagninum tók 2 klukkustundum skemmri tíma en hjólaferðin heim og meðalhraði vagnsins var 10 mílum á klukkustund meiri en hjólahraði Kayla. Finnið hjólahraða hennar.

**REYNIÐ SJÁLF 8.166**

Victoria skokkar 12 mílur að garðinum eftir sléttum stíg og fer síðan til baka eftir 20 mílna hæðóttum stíg. Hún skokkar 1 mílu á klukkustund hægar á hæðótta stígnum en þeim slétta og heimferðin tekur tveimur klukkustundum lengri tíma. Finnið skokkhraða hennar á slétta stígnum.

## Leysið vinnuverkefni

Gerum ráð fyrir að Pete geti málað herbergi á 10 klukkustundum. Ef hann vinnur jafnt málar hann $\frac{1}{10}$ af herberginu á 1 klukkustund. Ef Alicia þarf 8 klukkustundir til að mála sama herbergi málar hún $\frac{1}{8}$ af því á 1 klukkustund. Hve lengi væru Pete og Alicia að mála herbergið saman, að því gefnu að þau tefji ekki hvort annað?

Þetta er dæmigert vinnuverkefni. Þrjár stærðir koma við sögu: tíminn sem hvort þeirra þarf til að ljúka verkinu eitt og sér og tíminn sem þau þurfa til að ljúka því saman.

Snúum aftur að því þegar Pete og Alicia mála herbergið. Látum t tákna fjölda klukkustunda sem þau þurfa til að mála það saman. Á 1 klukkustund ljúka þau því $\frac{1}{t}$ af verkinu saman.

Á einni klukkustund lauk Pete $\frac{1}{10}$ af verkinu, Alicia $\frac{1}{8}$ af því og saman luku þau $\frac{1}{t}$ af því.

Við getum sett þetta fram með jöfnu í orðum og síðan sem ræða jöfnu. Til að finna hve lengi þau væru að vinna saman einangrum við t.

| | |
|---|---|
| | $\underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{Hlutur Petes}} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{Hlutur Aliciu}} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{hluti af heildinni}}$ <br> $\frac{1}{10} + \frac{1}{8} = \frac{1}{t}$ |
| | $\frac{1}{10}+\frac{1}{8}=\frac{1}{t}$ |
| Margfaldið með MSN, $40t$. | $40t\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)=40t\left(\frac{1}{t}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $40t\cdot\frac{1}{10}+40t\cdot\frac{1}{8}=40t\left(\frac{1}{t}\right)$ |
| Einfaldið og leysið. | $4t+5t=40$ |
| | $9t=40$ |
| | $t=\frac{40}{9}$ |
| Við skrifum svarið sem blandna tölu svo hægt sé að breyta því í klukkustundir og mínútur. | $t=4\frac{4}{9}$ klst. |
| Munið að 1 klukkustund = 60 mínútur. | $t=4$ klst. $+\frac{4}{9}$ (60 mínútur) |
| Margfaldið og námundið síðan að næstu mínútu. | $t=4$ klst. $+27$ mínútur |
| | Pete og Alicia væru um 4 klukkustundir og 27 mínútur að mála herbergið. |

Hafið í huga að tvær manneskjur sem vinna saman ættu að ljúka verki á skemmri tíma en hvor um sig þarf ein.

**SÝNIDÆMI 8.84**

Vikulegt slúðurblað er með stóra frétt um barn prinsessunnar og ritstjórinn vill prenta blaðið sem fyrst. Hún biður prentsmiðjuna að keyra aðra prentvél til að ljúka prentuninni fyrr. Prentvél nr. 1 þarf 6 klukkustundir til verksins og prentvél nr. 2 þarf 12 klukkustundir. Hve lengi tekur að prenta blaðið þegar báðar vélarnar ganga samtímis?

8

## Lausn

Þetta er vinnuverkefni. Tafla hjálpar okkur að skipuleggja upplýsingarnar.

| | |
|---|---|
| Látum $t =$ tákna fjölda klukkustunda sem þarf til að ljúka verkinu saman. | |
| Skráið klukkustundir á hvert verk fyrir prentvél nr. 1, prentvél nr. 2 og vélarnar saman. Ef verk í prentvél nr. 1 tekur 6 klukkustundir lýkur hún $\frac{1}{6}$ af verkinu á 1 klukkustund. Finnið á sama hátt þann hluta verksins sem prentvél nr. 2 lýkur og þann hluta sem vélarnar ljúka saman, lokið/klukkustundir. | |

| | Fjöldi klukkustunda til að ljúka verkinu | Hluti verks sem lokið er á klukkustund |
|---|---|---|
| Pressa nr. 1 | 6 | $\frac{1}{6}$ |
| Pressa nr. 2 | 12 | $\frac{1}{12}$ |
| Saman | $t$ | $\frac{1}{t}$ |

| | |
|---|---|
| Skrifið setningu með orðum. | |
| Hluti verksins sem prentvél nr. 1 lýkur plús hlutinn sem prentvél nr. 2 lýkur er jafnt því sem vélarnar ljúka saman. | |
| Setjið setninguna fram sem jöfnu. | Vinna sem er lokið af Prentvél nr. 1 + prentvél nr. 2 = saman<br>$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{t}$ |
| Leysið. | $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{t}$ |
| Margfaldið með MSN, $12t$. | $12t\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = 12t\left(\frac{1}{t}\right)$ |
| Einfaldið. | $2t + t = 12$ |
| | $3t = 12$ |
| | $t = 4$ |
| | Þegar báðar prentvélarnar ganga tekur 4 klukkustundir að ljúka verkinu. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.167**

Einn garðyrkjumaður getur slegið golfvöll á 4 klukkustundum en annar getur slegið sama völl á 6 klukkustundum. Hve lengi væru þeir að slá völlinn ef þeir ynnu saman?

**REYNIÐ SJÁLF 8.168**

Carrie getur reytað arfa úr garðinum á 7 klukkustundum en móðir hennar á 3 klukkustundum. Hve lengi eru þær að verkinu saman?

**SÝNIDÆMI 8.85**

Corey getur mokað allan snjó af gangstéttinni og innkeyrslunni á 4 klukkustundum. Ef hann og tvíburabróðir hans Casey vinna saman geta þeir lokið mokstrinum á 2 klukkustundum. Hve margar klukkustundir þyrfti Casey til að ljúka verkinu einn?

## Lausn

Þetta er vinnuverkefni. Tafla hjálpar okkur að skipuleggja upplýsingarnar.

Við leitum að þeim fjölda klukkustunda sem Casey þarf til að ljúka verkinu einn.

Látum $t =$ tákna fjölda klukkustunda sem Casey þarf til að ljúka verkinu.

Skráið klukkustundir á hvert verk fyrir Corey, Casey og þá saman. Ef Corey þarf 4 klukkustundir lýkur hann $\frac{1}{4}$ af verkinu á 1 klukkustund. Finnið á sama hátt þann hluta verksins sem Casey lýkur og þann hluta sem þeir ljúka saman, lokið/klukkustundir.

| | Fjöldi klukkustunda sem þarf til að ljúka verkinu | Hluti verks sem lokið er á klukkustund |
|---|---|---|
| Corey | 4 | $\frac{1}{4}$ |
| Casey | $t$ | $\frac{1}{t}$ |
| Saman | 2 | $\frac{1}{2}$ |

Skrifið setningu með orðum.

Samanlagður hluti verksins sem Corey og Casey ljúka hvor um sig er jafn þeim hluta sem þeir ljúka saman.

Setjið setninguna fram sem jöfnu:

$$\underbrace{\text{Corey + Casey = Saman}}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$$

Leysið.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$$

Margfaldið með MSN, $4t$.

$$4t\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{t}\right)=4t\left(\frac{1}{2}\right)$$

Einfaldið.

$$t+4=2t$$

$$4=t$$

Casey þyrfti 4 klukkustundir til að ljúka verkinu einn.

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.169**

Tvær slöngur geta fyllt sundlaug á 10 klukkustundum. Önnur slangan væri 26 klukkustundir að fylla laugina ein. Hve lengi væri hin slangan að fylla laugina ein?

**REYNIÐ SJÁLF 8.170**

Cara og Cindy geta rakað garðinn saman á 4 klukkustundum. Cindy er 6 klukkustundir að raka hann ein. Hve lengi væri Cara að raka garðinn ein?

## Verkefni úr hluta 8.8

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða**

Leysið eftirfarandi verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða.

**429.** Mary fer í útsýnisflug með þyrlu sem getur flogið 450 mílur í mótvindi sem er 35 mílur á klukkustund á sama tíma og hún flýgur 702 mílur með meðvindi sem er 35 mílur á klukkustund. Finnið hraða þyrlunnar.

**430.** Einkaþota getur flogið 1210 mílur í mótvindi sem er 25 mílur á klukkustund á sama tíma og hún flýgur 1694 mílur með meðvindi sem er 25 mílur á klukkustund. Finnið hraða þotunnar.

**431.** Bátur siglir 140 mílur með straumi á sama tíma og hann siglir 92 mílur á móti straumi. Straumhraðinn er 6 mílur/klst. Hver er hraði bátsins?

**432.** Darrin getur farið 2 mílur á hjólabretti á móti vindi sem er 4 mílur á klukkustund á sama tíma og hann fer 6 mílur með vindi sem er 4 mílur á klukkustund. Finnið hraða Darrins á hjólabrettinu í logni.

**433.** Jane eyddi 2 klukkustundum í að kanna fjall á torfæruhjóli. Hún fór 40 mílur upp á við og þar var hraðinn 5 mílum á klukkustund minni en þegar hún komst á tindinn og ók 12 mílur eftir fjallshryggnum. Hver var hraði hennar eftir hryggnum?

**434.** Jill vildi léttast og skipulagði æfingadag. Hún hjólaði og skokkaði í samtals 2 klukkustundir. Hún hjólaði 12 mílur og skokkaði 6 mílur. Skokkhraði hennar var 10 mílum á klukkustund minni en hjólahraðinn. Hver var skokkhraði hennar?

**435.** Bill vildi prófa mismunandi vatnafarartæki. Hann fór 62 mílur með straumi í vélbáti og 27 mílur með straumi á sæþotu. Hraði hans á sæþotunni var 10 mílum á klukkustund meiri en í vélbátnum. Bill var samtals 4 klukkustundir á vatninu. Hver var hraði hans í vélbátnum?

**436.** Nancy ók í 3 klukkustundir. Hún fór 50 mílur áður en hún lenti í óveðri. Síðan ók hún 68 mílur á hraða sem var 9 mílum á klukkustund minni en í góða veðrinu. Hver var hraði hennar í óveðrinu?

**437.** Chester hjólaði 24 mílur upp brekku og síðan niður aftur á hraða sem var 2 mílum á klukkustund meiri en upp. Ef ferðin upp tók 2 klukkustundum lengri tíma en ferðin niður, hver var hraði hans upp brekkuna?

**438.** Matthew skokkaði 12 mílur heim til vinar síns og fékk síðan far heim. Það tók hann 2 klukkustundum lengri tíma að skokka þangað en að aka til baka. Skokkhraðinn var 25 mílum á klukkustund minni en akstursshraðinn. Hver var skokkhraði hans?

**439.** Hudson ferðast 1080 mílur með þotu og síðan 240 mílur með bíl á viðskiptafund. Þotan fer 300 mílum á klukkustund hraðar en bíllinn og bílferðin tekur 1 klukkustund lengri tíma en flugið. Hver er hraði bílsins?

**440.** Nathan gekk 12 mílur eftir malbikuðum stíg. Hann gekk 12 mílur til baka að bílnum eftir malarvegi um skóginn. Á malbikinu gekk hann 2 mílum á klukkustund hraðar en á mölinni. Gangan á mölinni tók einni klukkustund lengri tíma en gangan á malbikinu. Hve hratt gekk hann á mölinni?

**441.** John getur flogið flugvél sinni 2800 mílur með vindi sem er 50 mílur á klukkustund á sama tíma og hann flýgur 2400 mílur á móti vindinum. Vindhraðinn er 50 mílur á klukkustund. Finnið hraða flugvélarinnar.

**442.** Hraðbátur Jims getur siglt 20 mílur á móti straumi sem er 3 mílur á klukkustund á sama tíma og hann siglir 22 mílur með straumi sem er 3 mílur á klukkustund. Finnið hraða báts Jims.

**443.** Hazel þarf að fara heim til barnabarns síns með flugvél og bílaleigubíl. Hún fer 900 mílur með flugvél og 250 mílur með bíl. Flugvélin fer 250 mílum á klukkustund hraðar en bíllinn. Hún ekur bílaleigubílnum 2 klukkustundum lengur en hún flýgur. Finnið hraða bílsins.

**444.** Stu æfði í 3 klukkustundir í gær. Hann hljóp 14 mílur og hjólaði síðan 40 mílur. Hjólahraði hans er 6 mílum á klukkustund meiri en hlaupahraðinn. Hver er hlaupahraði hans?

**445.** Á 9 klukkustunda heimleið ók Sharon 390 mílur á hraðbraut og 150 mílur á sveitavegum. Hraði hennar á hraðbrautinni var 15 mílum á klukkustund meiri en á sveitavegunum. Hver var hraði hennar á sveitavegunum?

**446.** Tvær systur keppa gjarnan í hjólaferðum. Tamara getur hjólað 4 mílum á klukkustund hraðar en systir hennar Samantha. Ef Samantha er 1 klukkustund lengur en Tamara að hjóla 80 mílur, hve hratt getur Samantha hjólað?

**Leysið vinnuverkefni**

Leysið eftirfarandi vinnuverkefni.

**447.** Mike er reyndur múrari og getur hlaðið vegg á 3 klukkustundum en sonur hans, sem er að læra, þarf 6 klukkustundir. Hve lengi eru þeir að hlaða vegg saman?

**448.** Sam er 4 klukkustundir að raka grasflötina fyrir framan húsið en Dave bróðir hans getur rakað hana á 2 klukkustundum. Hve lengi eru þeir að raka hana saman?

**449.** Mary getur þrifið íbúð sína á 6 klukkustundum en herbergisfélagi hennar á 5 klukkustundum. Hve lengi eru þær að þrífa íbúðina saman?

**450.** Brian getur steypt plötu á 6 klukkustundum en Greg á 4 klukkustundum. Hve lengi eru Brian og Greg að verkinu saman?

**451.** Leeson getur prófarkalesið eintak dagblaðs á 4 klukkustundum. Með hjálp Ryans geta þeir lokið verkinu á 3 klukkustundum. Hve lengi væri Ryan að verkinu einn?

**452.** Paul getur þrifið gólf í kennslustofu á 3 klukkustundum. Þegar aðstoðarmaður hans hjálpar tekur verkið 2 klukkustundir. Hve lengi væri aðstoðarmaðurinn að því einn?

**453.** Josephine getur farið yfir prófúrlausnir nemenda sinna á 5 klukkustundum en með hjálp kennsluaðstoðarmannsins tekur það þau 3 klukkustundir. Hve lengi væri aðstoðarmaðurinn að því einn?

**454.** Levi er átta ára og er 2,5 klukkustundir að þvo bíl föður síns einn. Ef faðir hans hjálpar tekur það 1 klukkustund. Hve lengi er faðir Levis að þvo bílinn einn?

**455.** Jackson getur rifið þakskífur af húsi á 7 klukkustundum en Martin á 5 klukkustundum. Hve lengi eru þeir að rífa þakskífurnar saman?

**456.** Í lok dags getur Dodie þrifið hárgreiðslustofuna sína á 15 mínútum. Ann, sem vinnur með henni, getur þrifið stofuna á 30 mínútum. Hve lengi eru þær að þrífa stofuna saman?

**457.** Ronald getur mokað innkeyrsluna á 4 klukkustundum en með hjálp Donalds bróður hans tekur það 2 klukkustundir. Hve lengi væri Donald að moka innkeyrsluna einn?

**458.** Tina er 3 klukkustundir að setja krem á hátíðarsmákökurnar sínar en með hjálp Candy tekur það 2 klukkustundir. Hve lengi væri Candy að setja krem á kökurnar ein?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**459.** Dönu finnst gaman að ganga með hundinn sinn en stundum sleppur hann og hún þarf að hlaupa á eftir honum. Dana gekk með hundinn 7 mílur en þurfti síðan að hlaupa 1 mílu. Hún var samtals 2,5 klukkustundir með hundinum. Hlaupahraði hennar var 3 mílum á klukkustund meiri en gönguhraðinn. Finnið gönguhraða hennar.

**460.** Ken og Joe fara að heiman á fótboltaleik sem er í 45 mílna fjarlægð. Ken ekur bílnum sínum 30 mílum á klukkustund hraðar en Joe getur hjólað. Ef Joe er 2 klukkustundum lengur en Ken á leikinn, hver er hraði Joes?

### *Ritunarverkefni*

**461.** Í sýnidæmi 8.83 er lausnin $h = -4$ strikuð út. Útskýrið hvers vegna.

**462.** Paula og Yuki eru herbergisfélagar. Paula er 3 klukkustundir að þrífa íbúðina þeirra og Yuki 4 klukkustundir. Nota má jöfnuna $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{t}$ til að finna t, fjölda klukkustunda sem þær væru að þrífa íbúðina saman. Útskýrið hvernig jafnan lýsir aðstæðunum.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið leyst verkefnin skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða. | | | |
| leyst verkefni um vinnu. | | | |

ⓑ Hve góð tök teljið þið ykkur hafa á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt ykkur?

# 8.9 Notið bein og öfug hlutföll

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið verkefni með beinum hlutföllum
- Leysið verkefni með öfugum hlutföllum

**UNDIRBÚNINGUR 8.27**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Ef þið leysið verkefni ekki rétt skuluð þið fara aftur í hlutann sem vísað er í og rifja efnið upp.

Finnið margföldunarandhverfu $-8$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.126.

**UNDIRBÚNINGUR 8.28**

Einangrið $n$: $45 = 20\,n$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 2.13.

**UNDIRBÚNINGUR 8.29**

Reiknið $5\,x^2$ þegar $x = 10$. Ef þið leystuð þetta verkefni ekki rétt skuluð þið rifja upp sýnidæmi 1.20.

Þegar tvær stærðir tengjast með hlutfallajöfnu segjum við að þær séu í hlutfalli hvor við aðra. Einnig má lýsa þessum tengslum með því hvernig stærðirnar breytast hvor með annarri. Í þessum hluta fjöllum við um bein og öfug hlutföll.

## Leysið verkefni með beinum hlutföllum

Lindsay fær $15 á klukkustund í vinnunni. Ef s táknar laun hennar og h fjölda vinnustunda má lýsa aðstæðunum með jöfnunni

$$s = 15\,h$$

Laun Lindsay eru margfeldi fastans 15 og fjölda vinnustunda hennar. Við segjum að laun hennar séu í beinu hlutfalli við fjölda vinnustunda. Tvær breytur eru í beinu hlutfalli ef önnur er margfeldi fasta og hinnar.

---

**BEINT HLUTFALL**

Fyrir hvaða tvær breytur x og y sem er, er y í beinu hlutfalli við x ef

$$y = k\,x\text{, þar sem } k \neq 0$$

Fastinn k kallast hlutfallsstuðull.

Í verkefnum með beinum hlutföllum þekkjum við yfirleitt eitt gildapar breytanna og eigum að finna jöfnuna sem tengir x og y. Síðan má nota jöfnuna til að finna gildi y fyrir önnur gildi x.

---

**SÝNIDÆMI 8.86**

### Hvernig leysa má verkefni með beinum hlutföllum

Ef y er í beinu hlutfalli við x og $y = 20$ þegar $x = 8$, finnið þá jöfnuna sem tengir x og y.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skrifið formúluna fyrir bein hlutföll. | Formúlan fyrir bein hlutföll er $y = kx$. | $y = kx$ |
| **Skref 2.** Setjið gefnu gildin inn fyrir breyturnar. | Gefið er að $y = 20$ og $x = 8$. | $20 = k \cdot 8$ |
| **Skref 3.** Finnið hlutfallsfastann. | Deilið báðum hliðum jöfnunnar með 8 og einfaldið síðan. | $\frac{20}{8} = k$<br>$k = 2{,}5$ |
| **Skref 4.** Skrifið jöfnuna sem lýsir sambandinu milli $x$ og $y$. | Endurritið almennu jöfnuna með gildinu sem við fundum fyrir $k$. | $y = 2{,}5x$ |

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.171**

Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$ og $y = 3$, þegar $x = 10$. finnið þá jöfnuna sem tengir x og y.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.172**

Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$ og $y = 12$ þegar $x = 4$ finnið þá jöfnuna sem tengir x og y.

Við skráum skrefin hér að neðan.

---

**AÐFERÐ**

### Leysið verkefni með beinum hlutföllum.

1. Skref 1. Skrifið formúluna fyrir beint hlutfall.

2. Skref 2. Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar.
3. Skref 3. Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins.
4. Skref 4. Skrifið jöfnuna sem tengir x og y.

Nú leysum við nokkur hagnýt verkefni um bein hlutföll.

---

**SÝNIDÆMI 8.87**

Þegar Raoul hleypur á hlaupabrettinu í líkamsræktarstöðinni er fjöldi hitaeininga c sem hann brennir í beinu hlutfalli við fjölda mínútna m sem hann notar brettið. Hann brenndi 315 hitaeiningum þegar hann notaði brettið í 18 mínútur.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir c og m.
2. ⓑ Hve mörgum hitaeiningum myndi hann brenna ef hann hlypi á brettinu í 25 mínútur?

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | Fjöldi hitaeininga, $c$, er í beinu hlutfalli við fjölda mínútna, $m$, á hlaupabrettinu og $c=315$ þegar $m=18$. |
| Skrifið formúluna fyrir beint hlutfall. | $y = kx$ |
| Við notum $c$ í stað $y$ og $m$ í stað $x$. | $c = km$ |
| Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar. | $315 = k \cdot 18$ |
| Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins. | $\frac{315}{18} = \frac{k \cdot 18}{18}$ |
| | $17{,}5 = k$ |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $c$ og $m$. | $c = km$ |
| Setjið gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna. | $c = 17{,}5m$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | Finnið $c$ þegar $m=25$. |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $c$ og $m$. | $c = 17{,}5m$ |
| Setjið gefið gildi inn fyrir $m$. | $c = 17{,}5(25)$ |
| Einfaldið. | $c = 437{,}5$ |
| | Raoul myndi brenna 437,5 hitaeiningum ef hann notaði hlaupabrettið í 25 mínútur. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.173**

Fjöldi brenndra hitaeininga c er í beinu hlutfalli við tímann t sem varið er í hreyfingu. Arnold brenndi 312 hitaeiningum á 65 mínútna æfingu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir c og t.
2. ⓑ Hve mörgum hitaeiningum myndi hann brenna ef hann æfði í 90 mínútur?

**REYNIÐ SJÁLF 8.174**

Vegalengdin d sem hlutur á hreyfingu fer er í beinu hlutfalli við tímann t sem hann hreyfist. Lest fer 100 mílur á 2 klukkustundum.

ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir d og t. ⓑ Hve margar mílur fer lestin á 5 klukkustundum?

Í fyrra sýnidæminu voru breyturnar c og m nefndar í verkefninu. Oftast er það þó ekki svo. Í næsta sýnidæmi þurfum við sjálf að nefna breyturnar í lausninni, eins og í flestum hagnýtum verkefnum.

**SÝNIDÆMI 8.88**

Fjöldi gallona af bensíni sem bíll Eunice notar er í beinu hlutfalli við fjölda mílna sem hún ekur. Í síðustu viku ók hún 469,8 mílur og notaði 14,5 gallon af bensíni.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir fjölda notaðra gallona af bensíni við fjölda ekinna mílna.
2. ⓑ Hve mörg gallon af bensíni myndi bíll Eunice nota ef hún æki 1000 mílur?

## Lausn

| | |
|---|---|
| | Fjöldi gallona af bensíni er í beinu hlutfalli við fjölda ekinna mílna. |
| Fyrst nefnum við breyturnar. | Látum $g=$ tákna fjölda gallona af bensíni og $m=$ fjölda ekinna mílna. |
| Skrifið formúluna fyrir beint hlutfall. | $y = kx$ |
| Við notum $g$ í stað $y$ og $m$ í stað $x$. | $g = km$ |
| Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar. | $g = 14{,}5$ þegar $m = 469{,}8$ |
| | $14{,}5 = k(469{,}8)$ |
| Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins. | $\frac{14{,}5}{469{,}8} = \frac{k(469{,}8)}{469{,}8}$ |
| Við námundum að næsta þúsundasta. | $0{,}031 = k$ |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $g$ og $m$. | $g = km$ |
| Setjið gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna. | $g = 0{,}031m$ |

ⓑ

Finnið $g$ þegar $m=1000$.
Skrifið jöfnuna sem tengir $g$ og $m$. $g=0{,}031\,m$
Setjið gefið gildi inn fyrir $m$. $g=0{,}031(1000)$
Einfaldið. $g=31$
Bíll Eunice myndi nota 31 gallon af bensíni ef hún æki honum 1.000 mílur.

Takið eftir því að í þessu sýnidæmi eru einingar hlutfallsstuðulsins gallon á mílu. Í daglegu máli tölum við yfirleitt um mílur/gallon.

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.175**

Vegalengdin sem Brad fer er í beinu hlutfalli við ferðatímann. Brad fór 660 mílur á 12 klukkustundum.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir fjölda ekinna mílna við tímann.
2. ⓑ Hve margar mílur gæti Brad farið á 4 klukkustundum?

---

**REYNIÐ SJÁLF 8.176**

Þyngd vökva er í beinu hlutfalli við rúmmál hans. Vökvi sem vegur 24 pund hefur rúmmálið 4 gallon.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir þyngdina og rúmmálið.
2. ⓑ Hver er þyngd vökva sem hefur rúmmálið 13 gallon?

Stundum er önnur breytan í beinu hlutfalli við annað veldi hinnar. Þá er jafnan fyrir beint hlutfall $y=k\,x^2$. Við leysum þessi verkefni eins og þau fyrri: setjum gefin gildi inn í jöfnuna og leysum með tilliti til k.

---

**SÝNIDÆMI 8.89**

Mesta byrði sem biti ber er í beinu hlutfalli við annað veldi hornalínu þversniðs bitans. Biti með 4 tommu hornalínu ber mest 75 punda byrði.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir mestu byrði og þversnið.
2. ⓑ Hver er mesta byrði sem biti með 8 tommu hornalínu getur borið?

## Lausn

| | |
|---|---|
| | Mesta byrðin er í beinu hlutfalli við annað veldi hornalínu þversniðsins. |
| Nefnið breyturnar. | Látum $L=$ tákna mestu byrði og $c=$ hornalínu þversniðsins. |
| Skrifið formúluna fyrir beint hlutfall þar sem $y$ er í beinu hlutfalli við annað veldi $x$. | $y = kx^2$ |
| Við notum $L$ í stað $y$ og $c$ í stað $x$. | $L = kc^2$ |
| Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar. | $L = 75$ þegar $c=4$ |
| | $75 = k \cdot 4^2$ |
| Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins. | $\frac{75}{16} = \frac{k \cdot 16}{16}$ |
| | $4{,}6875 = k$ |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $L$ og $c$. | $L = kc^2$ |
| Setjið gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna. | $L = 4{,}6875c^2$ |

ⓑ

Finnið $L$ þegar $c=8$.

Skrifið jöfnuna sem tengir $L$ og $c$. $L=4{,}6875\,c^2$

Setjið gefið gildi inn fyrir $c$. $L=4{,}6875\left(8\right)^2$

Einfaldið. $L=300$

Biti með 8 tommu hornalínu gæti borið mest 300 punda byrði.

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.177**

Fallvegalengd hlutar er í beinu hlutfalli við annað veldi falltímans. Bolti fellur 144 fet á 3 sekúndum.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir vegalengdina og tímann.
2. ⓑ Hve langt fellur hlutur á 4 sekúndum?

**REYNIÐ SJÁLF 8.178**

Flatarmál hrings er í beinu hlutfalli við annað veldi geislans. Hringlaga pítsa með 6 tommu geisla hefur flatarmálið 113,04 fertommur.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir flatarmálið og geislann.
2. ⓑ Hvert er flatarmál pítsu með 9 tommu geisla?

## Leysið verkefni með öfugum hlutföllum

Í mörgum verkefnum eru tvær breytur í öfugu hlutfalli. Þegar önnur breytan vex minnkar hin. Jafnan sem tengir þær er $y=\frac{k}{x}$.

**ÖFUGT HLUTFALL**

Fyrir hvaða tvær breytur x og y sem er, er y í öfugu hlutfalli við x ef

$$y=\frac{k}{x}, \text{ þar sem } k\neq 0$$

Fastinn k kallast hlutfallsstuðull.

Orðið „öfugt“ í öfugu hlutfalli vísar til margföldunarandhverfu. Margföldunarandhverfa x er $\frac{1}{x}$.

Við leysum verkefni með öfugum hlutföllum á sama hátt og verkefni með beinum hlutföllum. Aðeins almennt form jöfnunnar breytist. Við endurtökum aðferðina hér og skiptum aðeins „beint“ út fyrir „öfugt“.

**AÐFERÐ**

## Leysið verkefni með öfugum hlutföllum.

1. Skref 1. Skrifið formúluna fyrir öfugt hlutfall.
2. Skref 2. Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar.
3. Skref 3. Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins.
4. Skref 4. Skrifið jöfnuna sem tengir x og y.

**SÝNIDÆMI 8.90**

Ef y er í öfugu hlutfalli við $x$ og $y=20$ þegar $x=8$, finnið þá jöfnuna sem tengir x og y.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Skrifið formúluna fyrir öfugt hlutfall. | $y = \frac{k}{x}$ |
| Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar. | $y = 20$ þegar $x = 8$ |
| | $20 = \frac{k}{8}$ |
| Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins. | $8(20) = 8\left(\frac{k}{8}\right)$ |
| | $160 = k$ |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $x$ og $y$. | $y = \frac{k}{x}$ |
| Setjið gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna. | $y = \frac{160}{x}$ |

**REYNIÐ SJÁLF 8.179**

Ef $p$ er í öfugu hlutfalli við $q$ og $p = 30$ þegar $q = 12$, finnið þá jöfnuna sem tengir $p$ og $q$.

**REYNIÐ SJÁLF 8.180**

Ef $y$ er í öfugu hlutfalli við $x$ og $y = 8$ þegar $x = 2$, finnið þá jöfnuna sem tengir $x$ og $y$.

**SÝNIDÆMI 8.91**

Eldsneytisnýting bíls er í öfugu hlutfalli við þyngd hans. Bíll sem vegur 3100 pund kemst 26 mílur á galloni á hraðbraut.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna fyrir hlutfallið.
2. ⓑ Hver væri eldsneytisnýting bíls sem vegur 4030 pund?

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | Eldsneytisnýtingin er í öfugu hlutfalli við þyngdina. |
| Fyrst nefnum við breyturnar. | Látum $f=$ tákna eldsneytisnýtingu og $w=$ þyngd. |
| Skrifið formúluna fyrir öfugt hlutfall. | $y=\frac{k}{x}$ |
| Við notum $f$ í stað $y$ og $w$ í stað $x$. | $f=\frac{k}{w}$ |
| Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar. | $f=26$ þegar $w=3100$ |
| | $26=\frac{k}{3100}$ |
| Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins. | $3100(26)=3100\left(\frac{k}{3100}\right)$ |
| | $80.600=k$ |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $f$ og $w$. | $f=\frac{k}{w}$ |
| Setjið gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna. | $f=\frac{80.600}{w}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | Finnið $f$ þegar $w=4030$. |
| Skrifið jöfnuna sem tengir f og w. | $f=\frac{80.600}{w}$ |
| Setjið gefið gildi inn fyrir w. | $f=\frac{80.600}{4030}$ |
| Einfaldið. | $f=20$<br>Bíll sem vegur 4030 pund hefði eldsneytisnýtinguna 20 mílur á galloni. |

8

**REYNIÐ SJÁLF 8.181**

Verðmæti bíls er í öfugu hlutfalli við aldur hans. Elena keypti tveggja ára bíl á $20.000.

ⓐ Skrifið jöfnuna fyrir hlutfallið. ⓑ Hvert verður verðmæti bíls Elenu þegar hann er 5 ára?

**REYNIÐ SJÁLF 8.182**

Tíminn sem það tekur að tæma laug er í öfugu hlutfalli við dæluafköstin. Lucy var 2,5 klukkustundir að tæma laugina með dælu sem afkastaði 400 gallonum á mínútu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna fyrir hlutfallið.
2. ⓑ Hve lengi er hún að tæma laugina með dælu sem afkastar 500 gallonum á mínútu?

**SÝNIDÆMI 8.92**

Tíðni gítarstrengs er í öfugu hlutfalli við lengd hans. 26 tommu langur strengur hefur tíðnina 440 sveiflur á sekúndu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna fyrir hlutfallið.
2. ⓑ Hve margar sveiflur verða á sekúndu ef lengd strengsins er minnkuð í 20 tommur með því að setja fingur á þverband?

## Lausn

ⓐ

| | Tíðnin er í öfugu hlutfalli við lengdina. |
|---|---|
| Nefnið breyturnar. | Látum $f =$ tákna tíðni og $L =$ lengd. |
| Skrifið formúluna fyrir öfugt hlutfall. | $y = \frac{k}{x}$ |
| Við notum $f$ í stað $y$ og $L$ í stað $x$. | $f = \frac{k}{L}$ |
| Setjið gefin gildi inn fyrir breyturnar. | $f = 440$ þegar $L = 26$ |
| | $440 = \frac{k}{26}$ |
| Leysið með tilliti til hlutfallsstuðulsins. | $26(440) = 26\left(\frac{k}{26}\right)$ |
| | $11.440 = k$ |
| Skrifið jöfnuna sem tengir $f$ og $L$. | $f = \frac{k}{L}$ |
| Setjið gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna. | $f = \frac{11.440}{L}$ |

ⓑ

| | Finnið $f$ þegar $L=20$. |
|---|---|
| Skrifið jöfnuna sem tengir f og L. | $f=\frac{11.440}{L}$ |
| Setjið gefið gildi inn fyrir L. | $f=\frac{11.440}{20}$ |
| Einfaldið. | $f=572$<br>20 tommu gítarstrengur hefur tíðnina 572 sveiflur á sekúndu. |

**REYNIÐ SJÁLF 8.183**

Fjöldi klukkustunda sem það tekur ís að bráðna er í öfugu hlutfalli við lofthitann. Gerum ráð fyrir að ísklumpur bráðni á 2 klukkustundum þegar hitinn er 65 gráður.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna fyrir hlutfallið.
2. ⓑ Hve margar klukkustundir væri sami ísklumpur að bráðna ef hitinn væri 78 gráður?

**REYNIÐ SJÁLF 8.184**

Krafturinn sem þarf til að brjóta borð er í öfugu hlutfalli við lengd þess. Richard beitir 24 punda þrýstingi til að brjóta 2 feta langt borð.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna fyrir hlutfallið.
2. ⓑ Hve margra punda þrýstingi þarf að beita til að brjóta 5 feta langt borð?

## Verkefni úr hluta 8.9

8

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið verkefni með beinum hlutföllum**

Leysið verkefnin hér á eftir.

**463.** Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$ og $y=14$, þegar $x=3$, finnið þá jöfnuna sem tengir $x$ og $y$.

**464.** Ef $p$ er í beinu hlutfalli við $q$ og $p=5$, þegar $q=2$, finnið þá jöfnuna sem tengir $p$ og $q$.

**465.** Ef $v$ er í beinu hlutfalli við $w$ og $v=24$, þegar $w=8$, finnið þá jöfnuna sem tengir $v$ og $w$.

**466.** Ef $a$ er í beinu hlutfalli við $b$ og $a=16$, þegar $b=4$, finnið þá jöfnuna sem tengir $a$ og $b$.

**467.** Ef $p$ er í beinu hlutfalli við $q$ og $p=9{,}6$, þegar $q=3$, finnið þá jöfnuna sem tengir $p$ og $q$.

**468.** Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$ og $y=12{,}4$, þegar $x=4$, finnið þá jöfnuna sem tengir $x$ og $y$

**469.** Ef $a$ er í beinu hlutfalli við $b$ og $a=6$, þegar $b=\frac{1}{3}$, finnið þá jöfnuna sem tengir $a$ og $b$.

**470.** Ef $v$ er í beinu hlutfalli við $w$ og $v=8$, þegar $w=\frac{1}{2}$, finnið þá jöfnuna sem tengir $v$ og $w$.

**471.** Fjárhæðin P sem Sally vinnur sér inn er í beinu hlutfalli við fjölda hálsmena n sem hún selur. Þegar Sally selur 15 hálsmen fær hún $150.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir P og n.
2. ⓑ Hve mikið myndi hún vinna sér inn ef hún seldi 4 hálsmen?

**472.** Verðið P sem Eric greiðir fyrir bensín er í beinu hlutfalli við fjölda gallona g sem hann kaupir. Það kostar hann $50 að kaupa 20 gallon af bensíni.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir P og g.
2. ⓑ Hve mikið myndu 33 gallon kosta Eric?

**473.** Terri þarf að baka bökur fyrir fjáröflun. Fjöldi epla a er í beinu hlutfalli við fjölda baka p. Níu epli þarf í tvær bökur.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir a og p.
2. ⓑ Hve mörg epli þyrfti Terri í sex bökur?

**474.** Joseph er í bílferð. Vegalengdin d sem hann fer áður en hann stansar í hádegismat er í beinu hlutfalli við hraðann v. Hann getur farið 120 mílur á hraðanum 60 mílur á klukkustund.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir d og v.
2. ⓑ Hve langt færi hann áður en hann stansaði í hádegismat á hraðanum 65 mílur á klukkustund?

**475.** Verðið sem Jesse greiðir fyrir bensín er í beinu hlutfalli við fjölda gallona sem hann kaupir. Hann keypti 10 gallon fyrir $39,80.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir verðið og fjölda gallona.
2. ⓑ Hve mikið þarf Jesse að greiða fyrir 15 gallon af bensíni?

**476.** Vegalengdin sem Sarah fer er í beinu hlutfalli við aksturstímann. Hún fer 440 mílur á 8 klukkustundum.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir vegalengdina og fjölda klukkustunda.
2. ⓑ Hve langt getur Sally farið á 6 klukkustundum?

**477.** Massi vökva er í beinu hlutfalli við rúmmál hans. Vökvi sem hefur massann 16 kílógrömm hefur rúmmálið 2 lítra.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir massann og rúmmálið.
2. ⓑ Hvert er rúmmál vökvans ef massi hans er 128 kílógrömm?

**478.** Lengingin á gormi er í beinu hlutfalli við þyngdina sem hengd er neðan í hann. Þegar Sarah setti 10 punda vatnsmelónu á hengivog lengdist gormurinn um 5 tommur.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir lengingu gormsins og þyngdina.
2. ⓑ Hve þung vatnsmelóna myndi lengja gorminn um 6 tommur?

**479.** Fallvegalengd hlutar er í beinu hlutfalli við annað veldi falltímans. Bolti fellur 45 fet á 3 sekúndum.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir vegalengdina og tímann.
2. ⓑ Hve langt fellur boltinn á 7 sekúndum?

**480.** Mesta byrði sem biti ber er í beinu hlutfalli við annað veldi hornalínu þversniðs hans. Biti með 6 tommu hornalínu ber mest 108 punda byrði.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir byrðina og hornalínu þversniðsins.
2. ⓑ Hve mikla byrði ber biti með 10 tommu hornalínu?

**481.** Flatarmál hrings er í beinu hlutfalli við annað veldi geislans. Hringlaga pítsa með 6 tommu geisla hefur flatarmálið 113,04 fertommur.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir flatarmálið og geislann.
2. ⓑ Hvert er flatarmál einstaklingspítsu með 4 tommu geisla?

**482.** Fallvegalengd hlutar er í beinu hlutfalli við annað veldi falltímans. Bolti fellur 72 fet á 3 sekúndum.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir vegalengdina og tímann.
2. ⓑ Hve langt hefur boltinn fallið eftir 8 sekúndur?

### Leysið verkefni með öfugum hlutföllum

Leysið verkefnin hér á eftir.

**483.** Ef $y$ er í öfugu hlutfalli við $x$ og $y=5$ þegar $x=4$, finnið þá jöfnuna sem tengir $x$ og $y$.

**484.** Ef $p$ er í öfugu hlutfalli við $q$ og $p=2$ þegar $q=1$, finnið þá jöfnuna sem tengir $p$ og $q$.

**485.** Ef $v$ er í öfugu hlutfalli við $w$ og $v=6$ þegar $w=\frac{1}{2}$, finnið þá jöfnuna sem tengir $v$ og $w$.

**486.** Ef $a$ er í öfugu hlutfalli við $b$ og $a=12$ þegar $b=\frac{1}{3}$, finnið þá jöfnuna sem tengir $a$ og $b$.

Skrifið jöfnu fyrir öfugt hlutfall til að leysa verkefnin hér á eftir.

**487.** Eldsneytisnýting bíls er í öfugu hlutfalli við þyngd hans. Toyota Corolla vegur 2800 pund og kemst 33 mílur á galloni á hraðbraut.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir eldsneytisnýtinguna og þyngd bílsins.
2. ⓑ Hver væri eldsneytisnýting Toyota Sequoia sem vegur 5500 pund?

**488.** Verðmæti bíls er í öfugu hlutfalli við aldur hans. Jackie keypti 10 ára bíl á $2.400.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir verðmæti bílsins og aldur hans.
2. ⓑ Hvert verður verðmæti bíls Jackie þegar hann er 15 ára?

**489.** Tíminn sem það tekur að tæma geymi er í öfugu hlutfalli við dæluafköstin. Janet var 5 klukkustundir að dæla úr kjallaranum eftir flóð með dælu sem afkastaði 200 gallonum á mínútu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir klukkustundafjöldann og dæluafköstin.
2. ⓑ Hve lengi væri Janet að dæla úr kjallaranum með dælu sem afkastaði 400 gallonum á mínútu?

**490.** Rúmmál gass í íláti er í öfugu hlutfalli við þrýstinginn á gasið. Helíumílát hefur rúmmálið 370 rúmtommur við þrýstinginn 15 pund á fertommu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir rúmmálið og þrýstinginn.
2. ⓑ Hvert væri rúmmál gassins ef þrýstingurinn ykist í 20 pund á fertommu?

**491.** Í strengjahljóðfæri er lengd strengs í öfugu hlutfalli við tíðni sveiflna hans. 11 tommu strengur á fiðlu hefur tíðnina 400 sveiflur á sekúndu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir lengd strengsins og tíðni hans.
2. ⓑ Hver er tíðni 10 tommu strengs?

**492.** Paul tannlæknir komst að því að fjöldi tannskemmda sem sjúklingur fær á ári er í öfugu hlutfalli við fjölda mínútna sem hann burstar tennurnar á hverju kvöldi. Lori, sjúklingur hans, fékk 4 tannskemmdir þegar hún burstaði tennurnar í 30 sekúndur (0,5 mínútur) á hverju kvöldi.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir fjölda tannskemmda og burstunartímann.
2. ⓑ Hve mörgum tannskemmdum mætti Paul búast við hjá Lori ef hún hefði burstað tennurnar í 2 mínútur á hverju kvöldi?

**493.** Fjöldi miða í íþróttafjáröflun er í öfugu hlutfalli við verð hvers miða. Brianna getur keypt 25 miða á $5 stykkið.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir fjölda miða og verð hvers miða.
2. ⓑ Hve marga miða gæti Brianna keypt ef hver miði kostaði $2,50?

**494.** Lögmál Boyles segir að ef hitastig gass helst fast sé þrýstingurinn í öfugu hlutfalli við rúmmál gassins. Braydon kafari er með loftkút sem rúmar 6 lítra af lofti við þrýstinginn 220 pund á fertommu.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir þrýsting og rúmmál.
2. ⓑ Hve mikið loft rúmar loftkútur Braydons ef þrýstingurinn eykst í 330 pund á fertommu?

### *Blönduð verkefni*

**495.** Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$ og $y=5$, þegar $x=3$, finnið þá jöfnuna sem tengir $x$ og $y$.

**496.** Ef $v$ er í beinu hlutfalli við $w$ og $v=21$, þegar $w=8$. finnið þá jöfnuna sem tengir $v$ og $w$.

**497.** Ef $p$ er í öfugu hlutfalli við $q$ og $p=5$ þegar $q=6$, finnið þá jöfnuna sem tengir $p$ og $q$.

**498.** Ef $y$ er í öfugu hlutfalli við $x$ og $y=11$ þegar $x=3$, finnið þá jöfnuna sem tengir $x$ og $y$.

**499.** Ef $p$ er í beinu hlutfalli við $q$ og $p=10$, þegar $q=2$. finnið þá jöfnuna sem tengir $p$ og $q$.

**500.** Ef $v$ er í öfugu hlutfalli við $w$ og $v=18$ þegar $w=\frac{1}{3}$, finnið þá jöfnuna sem tengir $v$ og $w$.

**501.** Krafturinn sem þarf til að brjóta borð er í öfugu hlutfalli við lengd þess. Ef Tom beitir 20 punda þrýstingi til að brjóta 1,5 feta langt borð, hve margra punda þrýstingi þarf hann þá að beita til að brjóta 6 feta langt borð?

**502.** Fjöldi klukkustunda sem það tekur ís að bráðna er í öfugu hlutfalli við lofthitann. Ísklumpur bráðnar á 2,5 klukkustundum þegar hitinn er 54 gráður. Hve lengi væri sami ísklumpur að bráðna ef hitinn væri 45 gráður?

**503.** Lengingin á gormi er í beinu hlutfalli við þyngdina sem hengd er neðan í hann. Þegar Meredith setti 6 punda melónu á hengivog lengdist gormurinn um 2 tommur. Hve mikið myndi gormurinn lengjast ef melónan vægi 9 pund?

**504.** Laun June eru í beinu hlutfalli við fjölda vinnustunda hennar. Þegar hún vann 15 klukkustundir fékk hún $111. Hve mikið fær hún fyrir 18 vinnustundir?

**505.** Eldsneytisnýting bíls er í öfugu hlutfalli við þyngd hans. Ford Focus vegur 3000 pund og kemst 28,7 mílur á galloni á hraðbraut. Hver væri eldsneytisnýting Ford Expedition sem vegur 5.500 pund? Námundið að næsta tíunda.

**506.** Rúmmál gass í íláti er í öfugu hlutfalli við þrýstinginn á gasið. Ef argonílát hefur rúmmálið 336 rúmtommur við þrýstinginn 2.500 pund á fertommu, hvert verður rúmmálið ef þrýstingurinn lækkar í 2.000 pund á fertommu?

**507.** Fallvegalengd hlutar er í beinu hlutfalli við annað veldi falltímans. Ef hlutur fellur 52,8 fet á 4 sekúndum, hve langt fellur hann á 9 sekúndum?

**508.** Flatarmál hliðar parísarhjóls er í beinu hlutfalli við annað veldi geislans. Ef flatarmál hliðar hjóls með þvermálið 150 fet er 70.650 ferfet, hvert er þá flatarmál hliðar hjóls með þvermálið 16 fet?

### *Stærðfræði daglegs lífs*

**509.** **Akstursþjónusta:** Ferð frá miðbænum að flugvellinum, 14 mílur, kostar $35.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir kostnaðinn c og fjölda mílna m.
2. ⓑ Hvað kostar að ferðast 22 mílur með þjónustunni?

**510. Bílferð:** Fjöldi klukkustunda sem Jack þarf til að aka frá Boston til Bangor er í öfugu hlutfalli við meðalhraðann. Þegar hann ekur á meðalhraðanum 40 mílur á klukkustund tekur ferðin 6 klukkustundir.

1. ⓐ Skrifið jöfnuna sem tengir klukkustundafjöldann h og hraðann s.
2. ⓑ Hve lengi tæki ferðin ef meðalhraðinn væri 75 mílur á klukkustund?

### *Ritunarverkefni*

**511.** Útskýrið með eigin orðum muninn á beinu og öfugu hlutfalli.

**512.** Búið til dæmi úr eigin reynslu um öfugt hlutfall.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið leyst verkefnin skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst dæmi um bein hlutföll. | | | |
| leyst dæmi um öfug hlutföll. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið skoðað gátlistann, teljið þið ykkur vel undirbúin fyrir næsta kafla? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

# Lykilhugtök

**flókin ræð stæða**

Flókin ræð stæða er ræð stæða þar sem ræð stæða kemur fyrir í teljara eða nefnara.

**aukalausn ræðrar jöfnu**

Aukalausn ræðrar jöfnu er algebruleg lausn sem veldur því að ein eða fleiri stæður í upphaflegu jöfnunni verða óskilgreindar.

**hlutfallajafna**

Hlutfallajafna er jafna á forminu $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, þar sem $b\neq 0, d\neq 0$. Hlutfallajafnan er lesin: „$a$ stendur til $b$ eins og $c$ stendur til $d$.“

**ræð jafna**

Ræð jafna er mynduð úr tveimur ræðum stæðum sem tengdar eru með jafnaðarmerki.

**ræð stæða**

Ræð stæða er stæða á forminu $\frac{p}{q}$, þar sem p og q eru margliður og $q\neq 0$.

**líkar myndir**

Tvær myndir eru líkar ef samsvarandi horn þeirra eru jafnstór og samsvarandi hliðar þeirra eru í sama hlutfalli.

# Meginatriði

## 8.1 Einfaldið ræðar stæður

- **Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræð stæða er óskilgreind**
  1. Skref 1. Setjið nefnarann jafnan núlli.
  2. Skref 2. Leysið jöfnuna ef hægt er.
- **Einfölduð ræð stæða**
  - Ræð stæða telst einfölduð ef teljari og nefnari hafa enga sameiginlega þætti.
- **Einfaldið ræða stæðu**
  1. Skref 1. Þáttið teljara og nefnara að fullu.
  2. Skref 2. Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti.
- **Gagnstæðir þættir í ræðri stæðu**
  - Gagnstætt gildi við $a-b$ er $b-a$.
    $\frac{a-b}{b-a}=-1 \qquad a\neq 0, b\neq 0, \mathrm{a}\neq \mathrm{b}$

## 8.2 Margfaldið og deilið ræðum stæðum

- **Margföldun ræðra stæðna**
  - Ef $p, q, r, s$ eru margliður þar sem $q\neq 0, s\neq 0$, þá er $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$.
  - Til að margfalda ræðar stæður skal margfalda teljarana saman og nefnarana saman.
- **Margfaldið ræðar stæður**
  1. Skref 1. Þáttið hvern teljara og nefnara að fullu.
  2. Skref 2. Margfaldið teljarana saman og nefnarana saman.
  3. Skref 3. Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti.
- **Deiling ræðra stæðna**
  - Ef $p, q, r, s$ eru margliður þar sem $q\neq 0, r\neq 0, s\neq 0$, þá er $\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}$.
  - Til að deila ræðum stæðum skal margfalda fyrra brotið með margföldunarandhverfu þess síðara.
- **Deilið ræðum stæðum**
  1. Skref 1. Ritið deilinguna sem margfeldi fyrri ræðu stæðunnar og margföldunarandhverfu þeirrar síðari.
  2. Skref 2. Þáttið teljarana og nefnarana að fullu.

3. Skref 3. Margfaldið teljarana saman og nefnarana saman.

4. Skref 4. Einfaldið með því að fella út sameiginlega þætti.

## 8.3 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með sameiginlegum nefnara

- **Samlagning ræðra stæðna**
  - Ef $p$, $q$, og $r$ eru margliður þar sem $r \neq 0$, þá

    $$\frac{p}{r} + \frac{q}{r} = \frac{p+q}{r}$$

  - Til að leggja saman ræðar stæður með sameiginlegum nefnara skal leggja teljarana saman og setja summuna yfir sameiginlega nefnarann.
- **Frádráttur ræðra stæðna**
  - Ef $p$, $q$, og $r$ eru margliður þar sem $r \neq 0$, þá

    $$\frac{p}{r} - \frac{q}{r} = \frac{p-q}{r}$$

  - Til að draga ræðar stæður frá skal draga teljarana frá og setja mismuninn yfir sameiginlega nefnarann.

## 8.4 Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

- **Finnið minnsta samnefnara ræðra stæðna**
  1. Skref 1. Þáttið hverja stæðu að fullu.
  2. Skref 2. Skráið þætti hverrar stæðu. Raðið sams konar þáttum lóðrétt þegar unnt er.
  3. Skref 3. Færið þættina í hverjum dálki niður.
  4. Skref 4. Margfaldið þættina.
- **Leggið saman eða dragið frá ræðar stæður**
  1. Skref 1.
     Ákvarðið hvort stæðurnar hafi sameiginlegan nefnara. Já – farið í skref 2. Nei – ritið hverja ræða stæðu aftur með MSN.

     - Finnið MSN.
     - Ritið hverja ræða stæðu sem jafngilda ræða stæðu með MSN.
  2. Skref 2. Leggið ræðu stæðurnar saman eða dragið þær frá.
  3. Skref 3. Einfaldið ef hægt er.

## 8.5 Einfaldið flóknar ræðar stæður

- **Einfaldið ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu**
  1. Skref 1. Einfaldið teljarann og nefnarann.
  2. Skref 2. Ritið flóknu ræðu stæðuna sem deilingardæmi.
  3. Skref 3. Deilið stæðunum.
- **Einfaldið flókna ræða stæðu með MSN**
  1. Skref 1. Finnið MSN allra brota í flóknu ræðu stæðunni.
  2. Skref 2. Margfaldið teljarann og nefnarann með MSN.
  3. Skref 3. Einfaldið stæðuna.

## 8.6 Leysið ræðar jöfnur

- **Aðferð til að leysa jöfnur með ræðum stæðum**
  1. Skref 1. Skráið öll gildi breytunnar sem gera einhvern nefnara jafnan núlli.
  2. Skref 2. Finnið minnsta samnefnara allra nefnara jöfnunnar.
  3. Skref 3. Losið jöfnuna við brot með því að margfalda báðar hliðar hennar með MSN.
  4. Skref 4. Leysið jöfnuna sem fæst.
  5. Skref 5. Sannreynið.
  - Ef eitthvert gildanna úr skrefi 1 reynist algebruleg lausn skal hafna því.
  - Sannreynið allar lausnir sem eftir standa í upphaflegu jöfnunni.

## 8.7 Leysið verkefni um hlutfallajöfnur og líkar myndir

- **Eiginleiki líkra þríhyrninga**
  - Ef $\Delta\, A\, B\, C$ er líkur $\Delta\, X\, Y\, Z$, þá eru samsvarandi horn þeirra jafnstór og samsvarandi hliðar þeirra í sama hlutfalli.
- **Aðferð til að leysa rúmfræðiverkefni**
  1. Skref 1. Lesið verkefnið og gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana.
  2. Skref 2. Ákvarðið að hverju er leitað.
  3. Skref 3. Gefið heiti því sem leitað er að með því að velja breytu fyrir það.
  4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að rita viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn í jöfnuna.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

# Upprifjunarverkefni

## Einfaldið ræðar stæður

### Ákvarðið fyrir hvaða gildi ræð stæða er óskilgreind

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða fyrir hvaða gildi ræða stæðan er óskilgreind.

513.

$$\frac{2a+1}{3a-2}$$

514.

$$\frac{b-3}{b^2-16}$$

515.

$$\frac{3xy^2}{5y}$$

516.

$$\frac{u-3}{u^2-u-30}$$

### Reiknið gildi ræðra stæða

Reiknið gildi ræðu stæðnanna fyrir gefin gildi í eftirfarandi verkefnum.

517.

$$\frac{4p-1}{p^2+5} \text{ þegar } p=-1$$

518.

$$\frac{q^2-5}{q+3} \text{ þegar } q=7$$

519.

$$\frac{y^2-8}{y^2-y-2} \text{ þegar } y=1$$

520.

$$\frac{z^2+2}{4z-z^2} \text{ þegar } z=3$$

### Einfaldið ræðar stæður

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

521.

$$\frac{10}{24}$$

522.

$$\frac{8m^4}{16mn^3}$$

523.

$$\frac{14a-14}{a-1}$$

524.

$$\frac{b^2+7b+12}{b^2+8b+16}$$

**Einfaldið ræðar stæður með gagnstæðum þáttum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

525.

$$\frac{c^2-c-2}{4-c^2}$$

526.

$$\frac{d-16}{16-d}$$

527.

$$\frac{7v-35}{25-v^2}$$

528.

$$\frac{w^2-3w-28}{49-w^2}$$

Margfaldið ræðar stæður og deilið þeim

**Margfaldið ræðar stæður**

Margfaldið í eftirfarandi verkefnum.

529.

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{15}$$

530.

$$\frac{2xy^2}{8y^3} \cdot \frac{16y}{24x}$$

531.

$$\frac{3a^2+21a}{a^2+6a-7} \cdot \frac{a-1}{ab}$$

532.

$$\frac{5z^2}{5z^2+40z+35} \cdot \frac{z^2-1}{3z}$$

**Deilið ræðum stæðum**

Deilið í eftirfarandi verkefnum.

533.

$$\frac{t^2-4t-12}{t^2+8t+12} \div \frac{t^2-36}{6t}$$

534.

$$\frac{r^2-16}{4} \div \frac{r^3-64}{2r^2+8r+32}$$

535.

$$\frac{11+w}{w-9} \div \frac{121-w^2}{9-w}$$

536.

$$\frac{3y^2-12y-63}{4y+3} \div \left(6y^2-42y\right)$$

537.

$$\frac{\frac{c^2-64}{3c^2+26c+16}}{\frac{c^2-4c-32}{15c+10}}$$

538.

$$\frac{8m^2-8m}{m-4} \cdot \frac{m^2+2m-24}{m^2+7m+10} \div \frac{2m^2-6m}{m+5}$$

Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með sameiginlegum nefnara

**Leggið saman ræðar stæður með sameiginlegum nefnara**

Leggið saman í eftirfarandi verkefnum.

539.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$$

540.

$$\frac{4a^2}{2a-1}-\frac{1}{2a-1}$$

541.

$$\frac{p^2+10p}{p+5}+\frac{25}{p+5}$$

542.

$$\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$$

**Dragið frá ræðar stæður með sameiginlegum nefnara**

Dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

543.

$$\frac{d^2}{d+4}-\frac{3d+28}{d+4}$$

544.

$$\frac{z^2}{z+10}-\frac{100}{z+10}$$

545.

$$\frac{4q^2-q+3}{q^2+6q+5}-\frac{3q^2+q+6}{q^2+6q+5}$$

546.

$$\frac{5t^2+4t+3}{t^2-25}-\frac{4t^2-8t-32}{t^2-25}$$

**Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með nefnurum sem eru móttölur hvor annars**

Leggið saman og dragið frá í eftirfarandi verkefnum.

547.

$$\frac{18w}{6w-1}+\frac{3w-2}{1-6w}$$

548.

$$\frac{a^2+3a}{a^2-16}-\frac{3a+8}{16-a^2}$$

549.

$$\frac{2b^2+3b-15}{b^2-49}-\frac{b^2+16b-1}{49-b^2}$$

550.

$$\frac{8y^2-10y+7}{2y-5}+\frac{2y^2+7y+2}{5-2y}$$

Leggið saman og dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

**Finnið minnsta samnefnara ræðra stæðna**

Finnið MSN í eftirfarandi verkefnum.

551.

$$\frac{4}{m^2-3m-10},\frac{2m}{m^2-m-20}$$

552.

$$\frac{6}{n^2-4},\frac{2n}{n^2-4n+4}$$

553.

$$\frac{5}{3p^2+19p+6},\frac{2p}{3p^2+25p+8}$$

**Finnið jafngildar ræðar stæður**

Ritið stæðurnar sem jafngildar ræðar stæður með gefnum nefnara í eftirfarandi verkefnum.

**554.** Ritið stæðurnar sem jafngildar ræðar stæður með nefnarann $(m+2)(m-5)(m+4)$:

$$\frac{4}{m^2-3m-10},\frac{2m}{m^2-m-20}.$$

**555.** Ritið stæðurnar sem jafngildar ræðar stæður með nefnarann $(n-2)(n-2)(n+2)$:

$$\frac{6}{n^2-4n+4},\frac{2n}{n^2-4}.$$

**556.** Ritið stæðurnar sem jafngildar ræðar stæður með nefnarann $(3p+1)(p+6)(p+8)$:

$$\frac{5}{3p^2+19p+6},\frac{7p}{3p^2+25p+8}$$

### Leggið saman ræðar stæður með ólíkum nefnurum

Leggið saman í eftirfarandi verkefnum.

557.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$$

558.

$$\frac{7}{5a}+\frac{3}{2b}$$

559.

$$\frac{2}{c-2}+\frac{9}{c+3}$$

560.

$$\frac{3d}{d^2-9}+\frac{5}{d^2+6d+9}$$

561.

$$\frac{2x}{x^2+10x+24}+\frac{3x}{x^2+8x+16}$$

562.

$$\frac{5q}{p^2q-p^2}+\frac{4q}{q^2-1}$$

### Dragið frá ræðar stæður með ólíkum nefnurum

Dragið frá og leggið saman í eftirfarandi verkefnum.

563.

$$\frac{3v}{v+2}-\frac{v+2}{v+8}$$

564.

$$\frac{-3w-15}{w^2+w-20}-\frac{w+2}{4-w}$$

565.

$$\frac{7m+3}{m+2}-5$$

566.

$$\frac{n}{n+3}+\frac{2}{n-3}-\frac{n-9}{n^2-9}$$

567.

$$\frac{8d}{d^2-64}-\frac{4}{d+8}$$

568.

$$\frac{5}{12x^2y}+\frac{7}{20xy^3}$$

Einfaldið flóknar ræðar stæður

**Einfaldið flókna ræða stæðu með því að rita hana sem deilingu**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

569.

$$\frac{\frac{5a}{a+2}}{\frac{10a^2}{a^2-4}}$$

570.

$$\frac{\frac{2}{5}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

571.

$$\frac{x-\frac{3x}{x+5}}{\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-5}}$$

572.

$$\frac{\frac{2}{m}+\frac{m}{n}}{\frac{n}{m}-\frac{1}{n}}$$

**Einfaldið flókna ræða stæðu með MSN**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

573.

$$\frac{6+\frac{2}{q-4}}{\frac{5}{q+4}}$$

574.

$$\frac{\frac{3}{a^2}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}}$$

575.

$$\frac{\frac{2}{z^2-49}+\frac{1}{z+7}}{\frac{9}{z+7}+\frac{12}{z-7}}$$

576.

$$\frac{\frac{3}{y^2-4y-32}}{\frac{2}{y-8}+\frac{1}{y+4}}$$

Leysið ræðar jöfnur

**Leysið ræðar jöfnur**

Leysið eftirfarandi verkefni.

577.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{x}$$

578.

$$1-\frac{2}{m}=\frac{8}{m^2}$$

579.

$$\frac{1}{b-2}+\frac{1}{b+2}=\frac{3}{b^2-4}$$

580.

$$\frac{3}{q+8}-\frac{2}{q-2}=1$$

581.

$$\frac{v-15}{v^2-9v+18}=\frac{4}{v-3}+\frac{2}{v-6}$$

8

582.

$$\frac{z}{12}+\frac{z+3}{3z}=\frac{1}{z}$$

**Einangrið tiltekna breytu í ræðri jöfnu**

Einangrið tilgreindu breytuna í eftirfarandi verkefnum.

583.

$$\frac{V}{l}=h\,w \text{ fyrir } l$$

584.

$$\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=5 \text{ fyrir } y$$

585.

$$x=\frac{y+5}{z-7} \text{ fyrir } z$$

586.

$$P=\frac{k}{V} \text{ fyrir } V$$

Leysið verkefni um hlutfallajöfnur og líkar myndir — líkindi

**Leysið hlutfallajöfnur**

Leysið eftirfarandi verkefni.

587.

$$\frac{x}{4}=\frac{3}{5}$$

588.

$$\frac{3}{y}=\frac{9}{5}$$

589.

$$\frac{s}{s+20}=\frac{3}{7}$$

590.

$$\frac{t-3}{5}=\frac{t+2}{9}$$

Leysið eftirfarandi verkefni með hlutfallajöfnum.

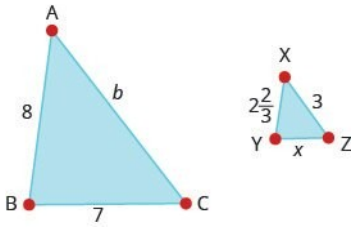
**591.** Rachael fékk sér 21 únsu jarðarberjamjólkurhristing sem inniheldur 739 hitaeiningar. Hve margar hitaeiningar eru í 32 únsu mjólkurhristing?

**592.** Leo fór til Mexíkó í jólafríinu og skipti $525 Bandaríkjadölum í mexíkóska pesóa. Þá jafngilti $1 Bandaríkjadalur 16,25 mexíkóskum pesóum. Hve marga mexíkóska pesóa fékk hann fyrir ferðina?

**Leysið verkefni með líkum myndum**

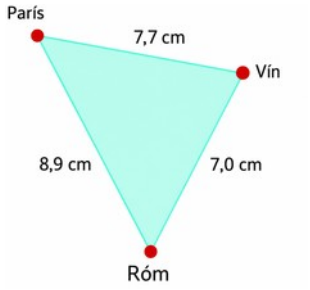
Leysið eftirfarandi verkefni.

**593.** Þríhyrningurinn ΔABC er líkur þríhyrningnum ΔXYZ. Lengdir tveggja hliða í hvorum þríhyrningi eru gefnar á myndinni. Finnið lengd þriðju hliðar hvors þríhyrnings.




**594.** Á korti af Evrópu mynda París, Róm og Vín þríhyrning með þeim hliðum sem sýndar eru á myndinni hér fyrir neðan. Ef raunveruleg vegalengd frá Róm til Vínar er 700 mílur, finnið vegalengdina frá

1. ⓐ París til Rómar
2. ⓑ París til Vínar




**595.** Tony er 5,75 fet á hæð. Síðla dags var skuggi hans 8 fet á lengd. Á sama tíma var skuggi trés í nágrenninu 32 fet á lengd. Finnið hæð trésins.

**596.** Viti í Pensacola á Flórída er 150 fet á hæð. Þegar Natalie, sem er 5,5 fet á hæð, stóð við vitann var skuggi hennar 1,1 fet á lengd. Hve langur væri skuggi vitans?

Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða og vinnuverkefni

**Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**597.** Lisa var 5 klukkustundir að aka heim eftir heimsókn til foreldra sinna og lenti í slæmu veðri á leiðinni. Hún ók 176 mílur meðan veðrið var gott. Í slæma veðrinu ók hún 10 mílum/klst. hægar og fór 81 mílu. Hver var hraði hennar í slæma veðrinu?

8

**598.** Mark ferðast með flugvél sem getur flogið 490 mílur gegn 20 mílna/klst. mótvindi á sama tíma og hún flýgur 350 mílur með 20 mílna/klst. meðvindi. Hver er hraði flugvélarinnar í logni?

**599.** John getur hjólað 8 mílum/klst. hraðar en Luke. Luke er 3 klukkustundum lengur en John að hjóla 48 mílur. Hve hratt getur John hjólað?

**600.** Mark var að æfa fyrir þríþraut. Hann hljóp 8 kílómetra og hjólaði 32 kílómetra á samtals 3 klukkustundum. Hlaupahraði hans var 8 kílómetrum á klukkustund minni en hjólahraðinn. Hver var hlaupahraði hans?

**Leysið vinnuverkefni**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**601.** Jerry getur sett upp grind í herbergi á 1 klukkustund en Jake þarf 4 klukkustundir. Hve lengi væru þeir að setja upp grindina ef þeir ynnu saman?

**602.** Lisa er 3 klukkustundir að slá grasið en Barb, frænka hennar, er 2 klukkustundir að því. Hve lengi eru þær að verkinu ef þær vinna saman?

**603.** Jeffrey getur málað hús á 6 dögum en með aðstoðarmanni getur hann lokið verkinu á 4 dögum. Hve lengi væri aðstoðarmaðurinn einn að mála húsið?

**604.** Sue og Deb skrifa saman bók á 90 dögum. Ef Sue ynni ein tæki það hana 120 daga. Hve lengi væri Deb ein að skrifa bókina?

Notið bein og öfug hlutföll

**Leysið verkefni með beinum hlutföllum**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**605.** Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$, og $y=9$ og $x=3$, finnið $x$ þegar $y=21$.

**606.** Ef $y$ er í öfugu hlutfalli við $x$, og $y=20$ og $x=2$, finnið $y$ þegar $x=4$.

**607.** Ef $m$ er í öfugu hlutfalli við $n$ í öðru veldi, og $m=4$ og $n=6$, finnið $m$ þegar $n=2$.

**608.** Vanessa er á leið til unnusta síns. Vegalengdin d er í beinu hlutfalli við hraðann v sem hún ekur á. Ef hún fer 258 mílur á 60 mílna/klst. hraða, hve langt færi hún á 70 mílna/klst. hraða?

**609.** Ef verð pítsu er í beinu hlutfalli við þvermál hennar og pítsa með 8 tommu þvermál kostar $12, hvað kostar þá pítsa með 6 tommu þvermál?

**610.** Stöðvunarvegalengd bíls er í beinu hlutfalli við annað veldi hraðans. Það þarf 200 fet til að stöðva bíl á 50 mílna/klst. hraða. Hve mörg fet þarf til að stöðva bíl á 60 mílna/klst. hraða?

**Leysið verkefni með öfugum hlutföllum**

Leysið eftirfarandi verkefni.

**611.** Fjöldi miða sem hægt er að kaupa í fjáröflun fyrir tónlistarstarf er í öfugu hlutfalli við miðaverðið. Ef Madelyn á nákvæmlega nóg til að kaupa 12 miða á $6 hvern, hve marga miða getur hún keypt ef verðið hækkar í $8?

**612.** Í strengjahljóðfæri er lengd strengs í öfugu hlutfalli við tíðni sveiflna hans. Ef 11 tommu strengur á fiðlu hefur tíðnina 360 sveiflur á sekúndu, hver er þá tíðni 12 tommu strengs?

## Æfingapróf

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir.

613.

$$\frac{3a^2b}{6ab^2}$$

614.

$$\frac{5b-25}{b^2-25}$$

Reiknið aðgerðina sem sýnd er og einfaldið svarið í verkefnunum hér á eftir.

615.

$$\frac{4x}{x+2}\cdot\frac{x^2+5x+6}{12x^2}$$

616.

$$\frac{5y}{4y-8}\cdot\frac{y^2-4}{10}$$

617.

$$\frac{4}{pq}+\frac{5}{p}$$

618.

$$\frac{1}{z-9}-\frac{3}{z+9}$$

619.

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}$$

620.

$$\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$$

Leysið jöfnurnar hér á eftir.

621.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=\frac{1}{x}$$

622.

$$\frac{5}{y-6}=\frac{3}{y+6}$$

623.

$$\frac{1}{z-5}+\frac{1}{z+5}=\frac{1}{z^2-25}$$

624.

$$\frac{t}{4}=\frac{3}{5}$$

625.

$$\frac{2}{r-2}=\frac{3}{r-1}$$

Leysið verkefnin hér á eftir.

**626.** Ef $y$ er í beinu hlutfalli við $x$, og $x=5$ þegar $y=30$, finnið $x$ þegar $y=42$.

**627.** Ef $y$ er í öfugu hlutfalli við $x$ og $x=6$ þegar $y=20$, finnið $y$ þegar $x=2$.

**628.** Ef $y$ er í öfugu hlutfalli við annað veldi $x$ og $x=3$ þegar $y=9$, finnið $y$ þegar $x=4$.

**629.** Ráðlagður skammtur af erýtrómýsíni fyrir hunda er 5 mg fyrir hvert pund líkamsþyngdar. Ef Daisy vegur 25 pund, hve mörgum milligrömmum af erýtrómýsíni ætti dýralæknirinn að ávísa henni?

**630.** Julia æfði í 4 klukkustundir í líkamsræktarstöð síðdegis á sunnudegi. Hún hljóp 10 mílur á hlaupabretti og hjólaði síðan 20 mílur. Hjólahraði hennar var 5 mílum/klst. meiri en hlaupahraðinn á hlaupabrettinu. Hver var hlaupahraði hennar?

**631.** Kurt getur hjólað 30 mílur undan vindi á sama tíma og hann hjólar 21 mílu á móti vindi. Ef vindhraðinn er 6 mílur/klst., hver er hjólahraði Kurts í logni?

**632.** Amanda skokkar 8 mílur í almenningsgarð eftir einni leið og fer síðan 14 mílna leið til baka. Heimferðin tekur hana 1 klukkustund lengur en ferðin í garðinn. Finnið skokkhraða hennar.

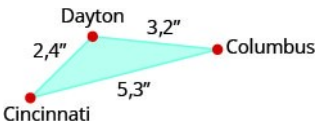
**633.** Reyndur gluggaþvottamaður getur þvegið alla glugga í húsi Mikes á 2 klukkustundum en nýr nemi þarf 7 klukkustundir. Hve lengi væru þeir að verkinu ef þeir ynnu saman?

**634.** Josh getur klofið vörubílsfarm af eldiviði á 8 klukkustundum en með föður sínum getur hann lokið verkinu á 3 klukkustundum. Hve lengi væri faðir hans einn að kljúfa viðinn?

**635.** Verðið sem Tyler greiðir fyrir bensín er í beinu hlutfalli við fjölda gallona sem hann kaupir. Ef 24 gallon kosta $59,76, hvað kosta þá 30 gallon?

**636.** Rúmmál gass í íláti er í öfugu hlutfalli við þrýsting gassins. Ef rúmmál köfnunarefnis í íláti er 29,5 lítrar við 2000 pund á fertommu, hvert er rúmmálið við 14,7 pund á fertommu? Námundið að næstu heiltölu.

**637.** Borgirnar Dayton, Columbus og Cincinnati mynda þríhyrning í sunnanverðu Ohio. Myndin hér fyrir neðan sýnir vegalengdirnar milli borganna á kortinu í tommum.




Raunveruleg vegalengd frá Dayton til Cincinnati er 48 mílur. Hver er raunveruleg vegalengd milli Dayton og Columbus?

9. KAFLI

# Rætur og rótarstæður



Mynd 9.1 Ferningsrætur eru notaðar til að reikna hve langan tíma það tekur stein sem fellur fram af klettabrúninni að lenda á jörðinni fyrir neðan.

## Yfirlit kaflans


- 9.1 Einfaldið og notið ferningsrætur
- 9.2 Einfaldið ferningsrætur
- 9.3 Leggið saman og dragið frá ferningsrótum
- 9.4 Margfaldið ferningsrætur
- 9.5 Deilið ferningsrótum
- 9.6 Leysið jöfnur með ferningsrótum
- 9.7 Hærri rætur
- 9.8 Ræðir veldisvísar

# Inngangur

Gerum ráð fyrir að steinn falli fram af klettabrún. Fjölda feta sem steinninn hefur fallið eftir $t$ sekúndur má finna með því að margfalda 16 með öðru veldi $t$. Til að reikna hve margar sekúndur líða þar til steinninn lendir á jörðinni fyrir neðan þurfum við hins vegar að nota ferningsrót. Í þessum kafla kynnumst við eiginleikum ferningsróta og notum þá. Síðan færum við hugmyndirnar yfir á hærri rætur og ræða veldisvísa.

## 9.1 Einfaldið og notið ferningsrætur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið stæður með ferningsrótum
- Áætlið ferningsrætur
- Finnið nálgunargildi ferningsróta
- Einfaldið breytustæður með ferningsrótum

**UNDIRBÚNINGUR 9.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: ⓐ $9^2$ ⓑ $(-9)^2$ ⓒ $-9^2$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 1.50.

**UNDIRBÚNINGUR 9.2**

Námundið 3,846 að næsta hundraðshluta. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 1.94.

**UNDIRBÚNINGUR 9.3**

Ákvarðið fyrir hvora tölu hvort hún sé rauntala eða ekki: ⓐ $-\sqrt{100}$ ⓑ $\sqrt{-100}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 1.113.

### Einfaldið stæður með ferningsrótum

Munið að þegar tala $n$ er margfölduð með sjálfri sér ritum við $n^2$ og lesum „n í öðru veldi“. Til dæmis er $15^2$ lesið „15 í öðru veldi“ og 225 kallast ferningur 15 þar sem $15^2 = 225$.

**FERNINGUR TÖLU**

Ef $n^2=m$, þá er $m$ ferningur $n$.

Stundum þurfum við að skoða samband talna og ferninga þeirra í öfuga átt. Fyrst 225 er ferningur 15 getum við líka sagt að 15 sé ferningsrót 225. Tala sem hefur ferninginn $m$ kallast ferningsrót $m$.

**FERNINGSRÓT TÖLU**

Ef $n^2=m$, þá er $n$ ferningsrót $m$.

Takið líka eftir að $(-15)^2=225$, svo $-15$ er einnig ferningsrót af 225. Því eru bæði 15 og $-15$ ferningsrætur af 225.

Hver jákvæð tala hefur því tvær ferningsrætur, aðra jákvæða og hina neikvæða. En hvað ef við viljum aðeins jákvæðu ferningsrót jákvæðrar tölu? Rótarmerkið, $\sqrt{m}$, táknar jákvæðu ferningsrótina. Jákvæða ferningsrótin er því sú ferningsrót sem rótarmerkið táknar.

Við notum rótarmerkið einnig fyrir ferningsrót núlls. Vegna þess að $0^2=0$ er $\sqrt{0}=0$. Takið eftir að núll hefur aðeins eina ferningsrót.

**TÁKNMÁL FERNINGSRÓTAR**

rótarmerki → $\sqrt{m}$ ← rótartala

$\sqrt{m}$ er lesið „ferningsrótin af $m$“.

Ef $m=n^2$, þá er $\sqrt{m}=n$ fyrir $n\geq 0$.

Ferningsrót $m$, $\sqrt{m}$, er óneikvæða talan sem hefur ferninginn $m$.

Fyrst 15 er jákvæða ferningsrótin af 225 ritum við $\sqrt{225}=15$. Fyllið inn í mynd 9.2 til að útbúa töflu yfir ferningsrætur sem þið getið stuðst við í þessum kafla.

| $\sqrt{1}$ | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{16}$ | $\sqrt{25}$ | $\sqrt{36}$ | $\sqrt{49}$ | $\sqrt{64}$ | $\sqrt{81}$ | $\sqrt{100}$ | $\sqrt{121}$ | $\sqrt{144}$ | $\sqrt{169}$ | $\sqrt{196}$ | $\sqrt{225}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | 15 |

Mynd 9.2

Við vitum að hver jákvæð tala hefur tvær ferningsrætur og að rótarmerkið táknar þá jákvæðu. Við ritum $\sqrt{225}=15$. Ef við viljum finna neikvæðu ferningsrót tölu setjum við mínusmerki fyrir framan rótarmerkið. Til dæmis $-\sqrt{225}=-15$.

**DÆMI 9.1**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{36}$ ⓑ $\sqrt{196}$ ⓒ $-\sqrt{81}$ ⓓ $-\sqrt{289}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt{36}$ |
|---|---|
| Þar sem $6^2=36$ | 6 |

ⓑ

| | $\sqrt{196}$ |
|---|---|
| Þar sem $14^2=196$ | 14 |

ⓒ

| | $-\sqrt{81}$ |
|---|---|
| Mínusmerkið er fyrir framan rótarmerkið. | −9 |

ⓓ

| | $-\sqrt{289}$ |
|---|---|
| Mínusmerkið er fyrir framan rótarmerkið. | −17 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.1**

Einfaldið: ⓐ $-\sqrt{49}$ ⓑ $\sqrt{225}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.2**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{64}$ ⓑ $-\sqrt{121}$.

**DÆMI 9.2**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{-169}$ ⓑ $-\sqrt{64}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt{-169}$ |
|---|---|
| Engin rauntala hefur ferninginn −169. | $\sqrt{-169}$ er ekki rauntala. |

ⓑ

| | $-\sqrt{64}$ |
|---|---|
| Mínusmerkið er fyrir framan rótarmerkið. | $-8$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.3**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{-196}$ ⓑ $-\sqrt{81}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.4**

Einfaldið: ⓐ $-\sqrt{49}$ ⓑ $\sqrt{-121}$.

Þegar við einföldum stæðu með ferningsrótum samkvæmt forgangsröð reikniaðgerða lítum við á rótarmerkið sem sviga.

**DÆMI 9.3**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{25}+\sqrt{144}$ ⓑ $\sqrt{25+144}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt{25}+\sqrt{144}$ |
|---|---|
| Notið forgangsröð reikniaðgerða. | $5+12$ |
| Einfaldið. | 17 |

ⓑ

| | $\sqrt{25+144}$ |
|---|---|
| Einfaldið undir rótarmerkinu. | $\sqrt{169}$ |
| Einfaldið. | 13 |
| Takið eftir að svörin í liðum ⓐ og ⓑ eru ólík! | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.5**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ ⓑ $\sqrt{9+16}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.6**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{64+225}$ ⓑ $\sqrt{64}+\sqrt{225}$.

## Áætlið ferningsrætur

Hingað til höfum við aðeins skoðað ferningsrætur ferningstalna. Ferningsrætur annarra talna eru ekki núll eða jákvæðar heiltölur. Skoðið töflu 9.1 hér fyrir neðan.

Tafla 9.1

| Tala | Ferningsrót |
|---|---|
| 4 | $\sqrt{4} = 2$ |
| 5 | $\sqrt{5}$ |
| 6 | $\sqrt{6}$ |
| 7 | $\sqrt{7}$ |
| 8 | $\sqrt{8}$ |
| 9 | $\sqrt{9} = 3$ |

Ferningsrætur talna milli 4 og 9 hljóta að liggja milli samliggjandi talnanna 2 og 3, sem eru núll eða jákvæðar heiltölur, en ræturnar sjálfar eru það ekki. Af mynstrinu í töflunni hér að ofan má álykta að $\sqrt{5}$ hljóti að liggja milli 2 og 3. Með ójöfnumerkjum ritum við:

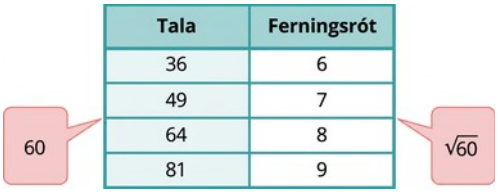
$$2<\sqrt{5}<3$$

**DÆMI 9.4**

Áætlið $\sqrt{60}$ milli tveggja samliggjandi talna sem eru núll eða jákvæðar heiltölur.

### Lausn

Finnið ferningstölurnar sem eru næst 60. Gerið litla töflu yfir þessar ferningstölur og ferningsrætur þeirra.




| | |
|---|---|
| Staðsetjið 60 milli tveggja samliggjandi ferningstalna. | $49 < 60 < 64$ |
| $\sqrt{60}$ liggur milli ferningsróta þeirra. | $7 < \sqrt{60} < 8$ |

9

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.7**

Áætlið ferningsrótina $\sqrt{38}$ milli tveggja samliggjandi talna sem eru núll eða jákvæðar heiltölur.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.8**

Áætlið ferningsrótina $\sqrt{84}$ milli tveggja samliggjandi talna sem eru núll eða jákvæðar heiltölur.

## Finnið nálgunargildi ferningsróta

Til eru stærðfræðilegar aðferðir til að finna nálgunargildi ferningsróta en nú á dögum nota flestir reiknivél. Finnið $\sqrt{x}$ -hnappinn á reiknivélinni. Þið notið hann til að finna nálgunargildi ferningsróta.

Þegar þið notið reiknivél til að finna ferningsrót tölu sem er ekki ferningstala er svarið sem birtist ekki nákvæmt gildi ferningsrótarinnar. Það er nálgunargildi með jafnmörgum réttum tölustöfum og skjár reiknivélarinnar sýnir. Táknið fyrir nálgun er ≈ og það er lesið „um það bil jafnt og“.

Gerum ráð fyrir að reiknivélin hafi skjá sem sýnir 10 tölustafi. Þá sjáum við að

$$\sqrt{5} \approx 2{,}236067978$$

Ef við vildum námunda $\sqrt{5}$ að tveimur aukastöfum myndum við segja

$$\sqrt{5} \approx 2{,}24$$

Hvernig vitum við að þessi gildi eru nálgunargildi en ekki nákvæm gildi? Skoðum hvað gerist þegar við setjum þau í annað veldi:

$$\begin{aligned} (2{,}236067978)^2 &= 5{,}000000002 \\ (2{,}24)^2 &= 5{,}0176 \end{aligned}$$

Ferningar þeirra eru nálægt 5 en ekki nákvæmlega jafnir 5.

Ef við notum ferningsrótarhnapp reiknivélar og námundum að tveimur aukastöfum fáum við:

$$\begin{aligned} \sqrt{4} &= 2 \\ \sqrt{5} &\approx 2{,}24 \\ \sqrt{6} &\approx 2{,}45 \\ \sqrt{7} &\approx 2{,}65 \\ \sqrt{8} &\approx 2{,}83 \\ \sqrt{9} &= 3 \end{aligned}$$

**DÆMI 9.5**

Námundið $\sqrt{17}$ að tveimur aukastöfum.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{17}$ |
| Notið ferningsrótarhnapp reiknivélarinnar. | 4,123105626... |
| Námundið að tveimur aukastöfum. | 4,12 |
| | $\sqrt{17} \approx 4{,}12$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.9**

Námundið $\sqrt{11}$ að tveimur aukastöfum.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.10**

Námundið $\sqrt{13}$ að tveimur aukastöfum.

## Einfaldið breytustæður með ferningsrótum

Hvað ef við þurfum að finna ferningsrót stæðu með breytu? Skoðum $\sqrt{9x^2}$. Getið þið fundið stæðu sem hefur ferninginn $9x^2$?

$$\begin{aligned} (?)^2 &= 9x^2 \\ (3x)^2 &= 9x^2, \qquad \text{því } \sqrt{9x^2} = 3x \end{aligned}$$

Þegar við notum rótarmerki til að finna ferningsrót breytustæðu þurfum við að gera ráð fyrir að $x \geq 0$ svo niðurstaðan sé jákvæða ferningsrótin.

Í þessum kafla gerum við þó ráð fyrir að allar breytur í ferningsrótarstæðum tákni óneikvæðar tölur og ritum því ekki $x \geq 0$ við hvert rótarmerki.

En hvað um ferningsrætur af breytum í hærri veldum? Hugsum um regluna um veldi af veldi sem við notuðum í 6. kafla.

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Þegar við setjum $a^m$ í annað veldi verður veldisvísirinn $2m$.

$$\left(a^m\right)^2 = a^{2m}$$

Hvernig hjálpar þetta okkur að finna ferningsrætur? Skoðum nokkur dæmi:

$$\begin{aligned} \sqrt{25u^8} &= 5u^4 \quad \text{þar sem } (5u^4)^2 = 25u^8 \\ \sqrt{16r^{20}} &= 4r^{10} \quad \text{þar sem } (4r^{10})^2 = 16r^{20} \\ \sqrt{196q^{36}} &= 14q^{18} \quad \text{þar sem } (14q^{18})^2 = 196q^{36} \end{aligned}$$

**DÆMI 9.6**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{x^6}$ ⓑ $\sqrt{y^{16}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{x^6}$ |
| Þar sem $\left(x^3\right)^2=x^6$. | $x^3$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{y^{16}}$ |
| Þar sem $\left(y^8\right)^2=y^{16}$. | $y^8$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.11**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{y^8}$ ⓑ $\sqrt{z^{12}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.12**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{m^4}$ ⓑ $\sqrt{b^{10}}$.

**DÆMI 9.7**

Einfaldið: $\sqrt{16n^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{16n^2}$ |
| Þar sem $\left(4n\right)^2=16n^2$. | $4n$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.13**

Einfaldið: $\sqrt{64x^2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.14**

Einfaldið: $\sqrt{169y^2}$.

**DÆMI 9.8**

Einfaldið: $-\sqrt{81\,c^2}$.

## Lausn

| | $-\sqrt{81\,c^2}$ |
|---|---|
| Þar sem $(9\,c)^2 = 81\,c^2$. | $-9\,c$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.15**

Einfaldið: $-\sqrt{121\,y^2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.16**

Einfaldið: $-\sqrt{100\,p^2}$.

**DÆMI 9.9**

Einfaldið: $\sqrt{36\,x^2\,y^2}$.

## Lausn

| | $\sqrt{36\,x^2\,y^2}$ |
|---|---|
| Þar sem $(6\,x\,y)^2 = 36\,x^2\,y^2$. | $6\,x\,y$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.17**

Einfaldið: $\sqrt{100\,a^2\,b^2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.18**

Einfaldið: $\sqrt{225\,m^2\,n^2}$.

9

**DÆMI 9.10**

Einfaldið: $\sqrt{64\,p^{64}}$.

## Lausn

| | $\sqrt{64\,p^{64}}$ |
|---|---|
| Þar sem $(8\,p^{32})^2 = 64\,p^{64}$. | $8\,p^{32}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.19**

Einfaldið: $\sqrt{49x^{30}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.20**

Einfaldið: $\sqrt{81w^{36}}$.

**DÆMI 9.11**

Einfaldið: $\sqrt{121a^6b^8}$

## Lausn

| | $\sqrt{121a^6b^8}$ |
|---|---|
| Þar sem $\left(11a^3b^4\right)^2=121a^6b^8$. | $11a^3b^4$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.21**

Einfaldið: $\sqrt{169x^{10}y^{14}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.22**

Einfaldið: $\sqrt{144p^{12}q^{20}}$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari kennslu og æfingu í ferningsrótum.

- Ferningsrætur

## Verkefni úr hluta 9.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Einfaldið stæður með ferningsrótum**

Einfaldið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir.

1.

$$\sqrt{36}$$

2.

$$\sqrt{4}$$

3.

$$\sqrt{64}$$

4.

$$\sqrt{169}$$

5.

$$\sqrt{9}$$

6.

$$\sqrt{16}$$

7.

$$\sqrt{100}$$

8.

$$\sqrt{144}$$

9.

$$-\sqrt{4}$$

10.

$$-\sqrt{100}$$

11.

$$-\sqrt{1}$$

12.

$$-\sqrt{121}$$

13.

$$\sqrt{-121}$$

14.

$$\sqrt{-36}$$

15.

$$\sqrt{-9}$$

16.

$$\sqrt{-49}$$

17.

$$\sqrt{9+16}$$

18.

$$\sqrt{25+144}$$

19.

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}$$

20.

$$\sqrt{25}+\sqrt{144}$$

**Áætlið ferningsrætur**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið áætla hverja ferningsrót milli tveggja samliggjandi talna sem eru núll eða jákvæðar heiltölur.

21.

$$\sqrt{70}$$

22.

$$\sqrt{55}$$

23.

$$\sqrt{200}$$

24.

$$\sqrt{172}$$

**Finnið nálgunargildi ferningsróta**

Í verkefnunum hér á eftir skuluð þið finna nálgunargildi hverrar ferningsrótar og námunda það að tveimur aukastöfum.

25.

$$\sqrt{19}$$

26.

$$\sqrt{21}$$

27.

$$\sqrt{53}$$

28.

$$\sqrt{47}$$

**Einfaldið breytustæður með ferningsrótum**

Einfaldið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir.

29.

$$\sqrt{y^2}$$

30.

$$\sqrt{b^2}$$

31.

$$\sqrt{a^{14}}$$

32.

$$\sqrt{w^{24}}$$

33.

$$\sqrt{49\,x^2}$$

34.

$$\sqrt{100\,y^2}$$

35.

$$\sqrt{121\,m^{20}}$$

36.

$$\sqrt{25\,h^{44}}$$

37.

$$\sqrt{81\,x^{36}}$$

38.

$$\sqrt{144\,z^{84}}$$

39.

$$-\sqrt{81\,x^{18}}$$

40.

$$-\sqrt{100\,m^{32}}$$

41.

$$-\sqrt{64\,a^2}$$

42.

$$-\sqrt{25x^2}$$

43.

$$\sqrt{144x^2y^2}$$

44.

$$\sqrt{196a^2b^2}$$

45.

$$\sqrt{169w^8y^{10}}$$

46.

$$\sqrt{81p^{24}q^6}$$

47.

$$\sqrt{9c^8d^{12}}$$

48.

$$\sqrt{36r^6s^{20}}$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**49.** **Flísalögn** Denise vill hafa ferningslaga skrautflöt úr skrautflísum í nýju sturtunni sinni. Hún hefur efni á að kaupa 625 fersentímetra af flísunum. Hve löng getur hlið skrautflatarins verið?

**50.** **Flísalögn** Morris vill leggja ferningslaga mósaík í nýju veröndina sína. Hann hefur efni á 2025 fertommum af flísum. Hve löng getur hlið mósaíksins verið?

### *Ritunarverkefni*

**51.** Hvers vegna er engin rauntala jöfn $\sqrt{-64}$?

**52.** Hver er munurinn á $9^2$ og $\sqrt{9}$?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| einfaldað stæður með ferningsrótum. | | | |
| áætlað gildi ferningsróta. | | | |
| nálgað gildi ferningsróta. | | | |
| einfaldað breytustæður með ferningsrótum. | | | |

ⓑ Hversu góðum tökum teljið þið ykkur hafa náð á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt ykkur?

## 9.2 Einfaldið ferningsrætur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Notið margfeldisreglu til að einfalda ferningsrætur
- Notið kvótareglu til að einfalda ferningsrætur

**UNDIRBÚNINGUR 9.4**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Einfaldið: $\frac{80}{176}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.65.

**UNDIRBÚNINGUR 9.5**

Einfaldið: $\frac{n^9}{n^3}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.59.

**UNDIRBÚNINGUR 9.6**

Einfaldið: $\frac{q^4}{q^{12}}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.60.

Í síðasta hluta áætluðum við ferningsrót tölu milli tveggja samliggjandi talna sem eru núll eða jákvæðar heiltölur. Við getum sagt að $\sqrt{50}$ liggi milli 7 og 8. Þetta er fremur auðvelt þegar tölurnar eru nógu litlar til að við getum notað mynd 9.2.

En hvað ef við viljum áætla $\sqrt{500}$? Ef við einföldum ferningsrótina fyrst verður auðvelt að áætla hana. Síðar í kaflanum sjáið þið einnig aðrar ástæður fyrir því að einfalda ferningsrætur.

Ferningsrót telst einfölduð ef rótarstofn hennar hefur enga ferningstölu aðra en 1 sem þátt.

---

**EINFÖLDUÐ FERNINGSRÓT**

$\sqrt{a}$ telst einfölduð ef $a$ hefur enga ferningstölu aðra en 1 sem þátt.

Því er $\sqrt{31}$ einfölduð. Hins vegar er $\sqrt{32}$ ekki einfölduð þar sem 16 er ferningstala sem er þáttur í 32.

## Notið margfeldisreglu til að einfalda ferningsrætur

Reglurnar sem við notum til að einfalda stæður með ferningsrótum líkjast veldareglunum. Við vitum að $(ab)^m = a^m b^m$. Samsvarandi regla fyrir ferningsrætur segir að $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

---

**MARGFELDISREGLA FYRIR FERNINGSRÆTUR**

Ef a og b eru óneikvæðar rauntölur, þá er $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Við notum margfeldisreglu fyrir ferningsrætur til að fjarlægja alla þætti rótarstofnsins sem eru ferningstölur. Í dæmi 9.12 sýnum við hvernig það er gert.

---

**DÆMI 9.12**

## Svona er margfeldisreglan notuð til að einfalda ferningsrót

Einfaldið: $\sqrt{50}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Finnið stærstu ferningstöluna sem er þáttur rótarstofnsins.<br><br>Ritið rótarstofninn sem margfeldi með ferningstölunni. | 25 er stærsta ferningstalan sem er þáttur í 50.<br><br>$50 = 25 \cdot 2$<br><br>Ritið ferningstöluna alltaf fyrst. | $\sqrt{50}$<br><br><br><br>$\sqrt{25 \cdot 2}$ |
| **Skref 2.** Notið margfeldisregluna til að umrita rótarsegðina sem margfeldi tveggja rótarsegða. | | $\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið ferningsrótina af ferningstölunni. | | $5\sqrt{2}$ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.23**

Einfaldið: $\sqrt{48}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.24**

Einfaldið: $\sqrt{45}$.

Takið eftir því að í síðasta dæmi er einfaldað form $\sqrt{50}$ jafnt $5\sqrt{2}$, sem er margfeldi heiltölu og ferningsrótar. Við ritum heiltöluna alltaf á undan ferningsrótinni.

**AÐFERÐ**

### Einfaldið ferningsrót með margfeldisreglunni.

1. Skref 1. Finnið stærstu ferningstöluna sem er þáttur rótarstofnsins. Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með ferningstölunni.
2. Skref 2. Notið margfeldisregluna til að endurrita rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna.
3. Skref 3. Einfaldið ferningsrót ferningstölunnar.

**DÆMI 9.13**

Einfaldið: $\sqrt{500}$.

### Lausn

| | $\sqrt{500}$ |
|---|---|
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $\sqrt{100 \cdot 5}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt{100} \cdot \sqrt{5}$ |
| Einfaldið. | $10\sqrt{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.25**

Einfaldið: $\sqrt{288}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.26**

Einfaldið: $\sqrt{432}$.

Við getum notað einfaldaða formið $10\sqrt{5}$ til að áætla $\sqrt{500}$. Við vitum að 5 liggur milli 2 og 3 og að $\sqrt{500}$ er $10\sqrt{5}$. Því liggur $\sqrt{500}$ milli 20 og 30.

Næsta dæmi er mjög líkt þeim fyrri, en í því eru breytur.

**DÆMI 9.14**

Einfaldið: $\sqrt{x^3}$.

## Lausn

| | $\sqrt{x^3}$ |
|---|---|
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $\sqrt{x^2 \cdot x}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}$ |
| Einfaldið. | $x\sqrt{x}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.27**

Einfaldið: $\sqrt{b^5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.28**

Einfaldið: $\sqrt{p^9}$.

Við fylgjum sömu aðferð þegar stuðull er einnig í rótarstofninum.

**DÆMI 9.15**

Einfaldið: $\sqrt{25\,y^5}$.

## Lausn

| | $\sqrt{25\,y^5}$ |
|---|---|
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $\sqrt{25\,y^4 \cdot y}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt{25\,y^4} \cdot \sqrt{y}$ |
| Einfaldið. | $5\,y^2\sqrt{y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.29**

Einfaldið: $\sqrt{16\,x^7}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.30**

Einfaldið: $\sqrt{49v^9}$.

Í næsta dæmi hafa bæði fastatalan og breytan þætti sem eru ferningstölur.

**DÆMI 9.16**

Einfaldið: $\sqrt{72n^7}$.

## Lausn

| | $\sqrt{72n^7}$ |
|---|---|
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $\sqrt{36n^6 \cdot 2n}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt{36n^6} \cdot \sqrt{2n}$ |
| Einfaldið. | $6n^3\sqrt{2n}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.31**

Einfaldið: $\sqrt{32y^5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.32**

Einfaldið: $\sqrt{75a^9}$.

**DÆMI 9.17**

Einfaldið: $\sqrt{63u^3v^5}$.

## Lausn

| | $\sqrt{63u^3v^5}$ |
|---|---|
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $\sqrt{9u^2v^4 \cdot 7uv}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt{9u^2v^4} \cdot \sqrt{7uv}$ |
| Einfaldið. | $3uv^2\sqrt{7uv}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.33**

Einfaldið: $\sqrt{98a^7b^5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.34**

Einfaldið: $\sqrt{180m^9n^{11}}$.

Við höfum séð hvernig nota má forgangsröð reikniaðgerða til að einfalda sumar stæður með rótarmerkjum. Til að einfalda $\sqrt{25}+\sqrt{144}$ verðum við fyrst að einfalda hvora ferningsrót fyrir sig og leggja síðan saman til að fá summuna 17.

Ekki er hægt að einfalda stæðuna $\sqrt{17}+\sqrt{7}$. Fyrst þyrftum við að einfalda hvora ferningsrót en hvorki 17 né 7 hefur ferningstölu aðra en 1 sem þátt.

Í næsta dæmi er summa heiltölu og ferningsrótar. Við einföldum ferningsrótina en getum ekki lagt stæðuna sem fæst saman við heiltöluna.

**DÆMI 9.18**

Einfaldið: $3+\sqrt{32}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $3+\sqrt{32}$ |
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $3+\sqrt{16\cdot 2}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $3+\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}$ |
| Einfaldið. | $3+4\sqrt{2}$ |

Liðirnir eru ekki líkir og því getum við ekki lagt þá saman. Að leggja saman heiltölu og rótarstæðu er eins og að leggja saman heiltölu og breytu – þetta eru ekki líkir liðir!

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.35**

Einfaldið: $5+\sqrt{75}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.36**

Einfaldið: $2+\sqrt{98}$.

Í næsta dæmi er brot með rótarstæðu í teljaranum. Munið að til að einfalda brot þarf teljari og nefnari að eiga sameiginlegan þátt.

**DÆMI 9.19**

Einfaldið: $\frac{4-\sqrt{48}}{2}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{4-\sqrt{48}}{2}$ |
| Endurritið rótarstofninn sem margfeldi með stærstu ferningstölunni sem er þáttur hans. | $\frac{4-\sqrt{16\cdot 3}}{2}$ |
| Endurritið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\frac{4-\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}{2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{4-4\sqrt{3}}{2}$ |
| Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í teljaranum. | $\frac{4\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}$ |
| Fellið sameiginlega þáttinn 2 út úr teljara og nefnara. | $\frac{2\cdot 2\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}$ |
| Einfaldið. | $2\left(1-\sqrt{3}\right)$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.37**

Einfaldið: $\frac{10-\sqrt{75}}{5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.38**

Einfaldið: $\frac{6-\sqrt{45}}{3}$.

9

## Notið kvótareglu til að einfalda ferningsrætur

Þegar einfalda á ferningsrót er fyrsta skrefið alltaf að athuga hvort rótarstofninn sé ferningstala. Fullkomið ferningsbrot er brot þar sem bæði teljarinn og nefnarinn eru ferningstölur.

**DÆMI 9.20**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{9}{64}}$.

## Lausn

$$\text{Þar sem } \left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64} \qquad \sqrt{\frac{9}{64}} \qquad \frac{3}{8}$$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.39**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{25}{16}}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.40**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{49}{81}}$.

Ef teljari og nefnari eiga sameiginlega þætti skuluð þið fella þá út. Þá gæti komið í ljós fullkomið ferningsbrot!

---

**DÆMI 9.21**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{45}{80}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{\frac{45}{80}}$ |
| Einfaldið fyrst innan rótarmerkisins. Endurritið þannig að sameiginlegir þættir teljara og nefnara sjáist. | $\sqrt{\frac{5\cdot 9}{5\cdot 16}}$ |
| Einfaldið brotið með því að fella út sameiginlega þætti. | $\sqrt{\frac{9}{16}}$ |
| Einfaldið. $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ | $\frac{3}{4}$ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.41**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{75}{48}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.42**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{98}{162}}$.

Í síðasta dæmi einfölduðum við fyrst brotið undir rótarmerkinu með því að fella út sameiginlega þætti. Í næsta dæmi notum við kvótaregluna til að einfalda undir rótarmerkinu. Við deilum veldum með sama stofn með því að draga veldisvísana frá hvor öðrum,

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0.$

**DÆMI 9.22**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{m^6}{m^4}}$.

## Lausn

| | $\sqrt{\frac{m^6}{m^4}}$ |
|---|---|
| Einfaldið fyrst brotið innan rótarmerkisins. | |
| Deilið veldum með sama stofn með því að draga veldisvísana frá hvor öðrum. | $\sqrt{m^2}$ |
| Einfaldið. | $m$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.43**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{a^8}{a^6}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.44**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{x^{14}}{x^{10}}}$.

**DÆMI 9.23**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{48\,p^7}{3\,p^3}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{\frac{48\,p^7}{3\,p^3}}$ |
| Einfaldið fyrst brotið innan rótarmerkisins. | $\sqrt{16\,p^4}$ |
| Einfaldið. | $4\,p^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.45**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{75\,x^5}{3\,x}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.46**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{72\,z^{12}}{2\,z^{10}}}$.

Munið þið eftir reglunni um kvóta í veldi? Hún segir að setja megi brot í veldi með því að setja teljarann og nefnarann hvorn fyrir sig í veldið.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$$

Við getum notað svipaða reglu til að einfalda ferningsrót brots. Fyrst fellum við út alla sameiginlega þætti teljara og nefnara. Ef brotið er þá ekki fullkomið ferningsbrot einföldum við teljarann og nefnarann hvorn fyrir sig.

**KVÓTAREGLA FYRIR FERNINGSRÆTUR**

Ef a og b eru óneikvæðar rauntölur og $b \neq 0$, þá er

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**DÆMI 9.24**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{21}{64}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{\frac{21}{64}}$ |
| Ekki er hægt að einfalda brotið innan rótarmerkisins. Endurritið með kvótareglunni. | $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{64}}$ |
| Einfaldið ferningsrótina af 64. Ekki er hægt að einfalda teljarann. | $\frac{\sqrt{21}}{8}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.47**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{19}{49}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.48**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{28}{81}}$.

**DÆMI 9.25**

## Svona er kvótareglan notuð til að einfalda ferningsrót

Einfaldið: $\sqrt{\frac{27\,m^3}{196}}$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Einfaldið brotið undir rótarmerkinu, ef hægt er. | $\frac{27m^3}{196}$ er ekki hægt að einfalda. | $\sqrt{\frac{27m^3}{196}}$ |
| **Skref 2.** Notið kvótaregluna til að umrita rótina sem kvóta tveggja róta. | Við umritum $\sqrt{\frac{27m^3}{196}}$ sem kvóta $\sqrt{27m^3}$ og $\sqrt{196}$. | $\frac{\sqrt{27m^3}}{\sqrt{196}}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið rótirnar í teljaranum og nefnaranum. | $9m^2$ og 196 eru ferningstölur. | $\frac{\sqrt{9m^2}\cdot\sqrt{3m}}{\sqrt{196}}$<br>$\frac{3m\sqrt{3m}}{14}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.49**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{24\,p^3}{49}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.50**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{48x^5}{100}}$.

**AÐFERÐ**

### Einfaldið ferningsrót með kvótareglunni.

1. Skref 1. Einfaldið brotið í rótarstofninum ef hægt er.
2. Skref 2. Notið kvótaregluna til að endurrita rótarstæðuna sem kvóta tveggja rótarstæðna.
3. Skref 3. Einfaldið rótarstæðurnar í teljara og nefnara.

**DÆMI 9.26**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{45x^5}{y^4}}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{\frac{45x^5}{y^4}}$ |
| Ekki er hægt að einfalda brotið í rótarstofninum. Endurritið með kvótareglunni. | $\frac{\sqrt{45x^5}}{\sqrt{y^4}}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar í teljara og nefnara. | $\frac{\sqrt{9x^4}\cdot\sqrt{5x}}{y^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3x^2\sqrt{5x}}{y^2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.51**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{80m^3}{n^6}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.52**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{54u^7}{v^8}}$.

Gætið þess að einfalda fyrst brotið í rótarstofninum ef hægt er.

**DÆMI 9.27**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{81d^9}{25d^4}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{\frac{81d^9}{25d^4}}$ |
| Einfaldið brotið í rótarstofninum. | $\sqrt{\frac{81d^5}{25}}$ |
| Endurritið með kvótareglunni. | $\frac{\sqrt{81d^5}}{\sqrt{25}}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar í teljara og nefnara. | $\frac{\sqrt{81d^4}\cdot\sqrt{d}}{5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{9d^2\sqrt{d}}{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.53**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{64x^7}{9x^3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.54**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{16a^9}{100a^5}}$.

**DÆMI 9.28**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{18p^5q^7}{32pq^2}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{\frac{18\,p^5 q^7}{32\,p\,q^2}}$ |
| Einfaldið brotið í rótarstofninum ef hægt er. | $\sqrt{\frac{9\,p^4 q^5}{16}}$ |
| Endurritið með kvótareglunni. | $\frac{\sqrt{9\,p^4 q^5}}{\sqrt{16}}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar í teljara og nefnara. | $\frac{\sqrt{9\,p^4 q^4}\cdot\sqrt{q}}{4}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3\,p^2 q^2\sqrt{q}}{4}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.55**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{50\,x^5 y^3}{72\,x^4 y}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.56**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{48\,m^7 n^2}{125\,m^5 n^9}}$.

## Verkefni úr hluta 9.2

### *Æfingin skapar meistarann*

**Notið margfeldisreglu til að einfalda ferningsrætur**

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir.

53.

$$\sqrt{27}$$

54.

$$\sqrt{80}$$

55.

$$\sqrt{125}$$

56.

$$\sqrt{96}$$

57.

$$\sqrt{200}$$

58.

$$\sqrt{147}$$

59.

$$\sqrt{450}$$

60.

$$\sqrt{252}$$

61.

$$\sqrt{800}$$

62.

$$\sqrt{288}$$

63.

$$\sqrt{675}$$

64.

$$\sqrt{1250}$$

65.

$$\sqrt{x^7}$$

66.

$$\sqrt{y^{11}}$$

67.

$$\sqrt{p^3}$$

68.

$$\sqrt{q^5}$$

69.

$$\sqrt{m^{13}}$$

70.

$$\sqrt{n^{21}}$$

71.

$$\sqrt{r^{25}}$$

72.

$$\sqrt{s^{33}}$$

73.

$$\sqrt{49n^{17}}$$

74.

$$\sqrt{25m^{9}}$$

75.

$$\sqrt{81r^{15}}$$

76.

$$\sqrt{100s^{19}}$$

77.

$$\sqrt{98m^{5}}$$

78.

$$\sqrt{32n^{11}}$$

79.

$$\sqrt{125r^{13}}$$

80.

$$\sqrt{80s^{15}}$$

81.

$$\sqrt{200p^{13}}$$

82.

$$\sqrt{128q^{3}}$$

83.

$$\sqrt{242m^{23}}$$

84.

$$\sqrt{175n^{13}}$$

85.

$$\sqrt{147m^7n^{11}}$$

86.

$$\sqrt{48m^7n^5}$$

87.

$$\sqrt{75r^{13}s^9}$$

88.

$$\sqrt{96r^3s^3}$$

89.

$$\sqrt{300p^9q^{11}}$$

90.

$$\sqrt{192q^3r^7}$$

91.

$$\sqrt{242m^{13}n^{21}}$$

92.

$$\sqrt{150m^9n^3}$$

93.

$$5+\sqrt{12}$$

94.

$$8+\sqrt{96}$$

95.

$$1+\sqrt{45}$$

96.

$$3+\sqrt{125}$$

97.

$$\frac{10-\sqrt{24}}{2}$$

98.

$$\frac{8-\sqrt{80}}{4}$$

99.

$$\frac{3+\sqrt{90}}{3}$$

100.

$$\frac{15+\sqrt{75}}{5}$$

**Notið kvótareglu til að einfalda ferningsrætur**

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir.

101.

$$\sqrt{\frac{49}{64}}$$

102.

$$\sqrt{\frac{100}{36}}$$

103.

$$\sqrt{\frac{121}{16}}$$

104.

$$\sqrt{\frac{144}{169}}$$

105.

$$\sqrt{\frac{72}{98}}$$

106.

$$\sqrt{\frac{75}{12}}$$

107.

$$\sqrt{\frac{45}{125}}$$

108.

$$\sqrt{\frac{300}{243}}$$

109.

$$\sqrt{\frac{x^{10}}{x^{6}}}$$

110.

$$\sqrt{\frac{p^{20}}{p^{10}}}$$

111.

$$\sqrt{\frac{y^{4}}{y^{8}}}$$

112.

$$\sqrt{\frac{q^{8}}{q^{14}}}$$

113.

$$\sqrt{\frac{200\,x^{7}}{2\,x^{3}}}$$

114.

$$\sqrt{\frac{98\,y^{11}}{2\,y^{5}}}$$

115.

$$\sqrt{\frac{96\,p^{9}}{6\,p}}$$

116.

$$\sqrt{\frac{108\,q^{10}}{3\,q^{2}}}$$

117.

$$\sqrt{\frac{36}{35}}$$

118.

$$\sqrt{\frac{144}{65}}$$

119.

$$\sqrt{\frac{20}{81}}$$

120.

$$\sqrt{\frac{21}{196}}$$

121.

$$\sqrt{\frac{96\,x^{7}}{121}}$$

122.

$$\sqrt{\frac{108\,y^{4}}{49}}$$

123.

$$\sqrt{\frac{300\,m^{5}}{64}}$$

124.

$$\sqrt{\frac{125\,n^{7}}{169}}$$

125.

$$\sqrt{\frac{98\,r^{5}}{100}}$$

126.

$$\sqrt{\frac{180\,s^{10}}{144}}$$

127.

$$\sqrt{\frac{28\,q^{6}}{225}}$$

128.

$$\sqrt{\frac{150r^3}{256}}$$

129.

$$\sqrt{\frac{75r^9}{s^8}}$$

130.

$$\sqrt{\frac{72x^5}{y^6}}$$

131.

$$\sqrt{\frac{28p^7}{q^2}}$$

132.

$$\sqrt{\frac{45r^3}{s^{10}}}$$

133.

$$\sqrt{\frac{100x^5}{36x^3}}$$

134.

$$\sqrt{\frac{49r^{12}}{16r^6}}$$

135.

$$\sqrt{\frac{121p^5}{81p^2}}$$

136.

$$\sqrt{\frac{25r^8}{64r}}$$

137.

$$\sqrt{\frac{32x^5y^3}{18x^3y}}$$

138.

$$\sqrt{\frac{75r^6s^8}{48rs^4}}$$

139.

$$\sqrt{\frac{27p^2q}{108p^5q^3}}$$

140.

$$\sqrt{\frac{50r^5s^2}{128r^2s^5}}$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

141.

1. ⓐ Elliott ákveður að útbúa ferningslaga garð sem tekur 288 ferfet af lóðinni. Einfaldið $\sqrt{288}$ til að ákvarða lengd og breidd garðsins. Námundið að næsta tíunda hluta úr feti.
2. ⓑ Gerum ráð fyrir að Elliott ákveði að minnka ferningslaga garðinn svo hann geti útbúið 5 feta breiðan göngustíg meðfram norður- og austurhliðum garðsins. Einfaldið $\sqrt{288}-5$ til að ákvarða lengd og breidd nýja garðsins. Námundið að næsta tíunda hluta úr feti.

142.

1. ⓐ Melissa missir óvart sólgleraugu úr rússíbana, 64 fetum yfir jörðu. Einfaldið $\sqrt{\frac{64}{16}}$ til að ákvarða hve margar sekúndur líða þar til sólgleraugun lenda á jörðinni.
2. ⓑ Gerum ráð fyrir að sólgleraugunum í síðasta verkefni hafi verið sleppt úr 144 feta hæð. Einfaldið $\sqrt{\frac{144}{16}}$ til að ákvarða hve margar sekúndur líða þar til sólgleraugun lenda á jörðinni.

### *Ritunarverkefni*

**143.** Útskýrið hvers vegna $\sqrt{x^4}=x^2$. Útskýrið síðan hvers vegna $\sqrt{x^{16}}=x^8$.

**144.** Útskýrið hvers vegna $7+\sqrt{9}$ er ekki jafnt $\sqrt{7+9}$.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað margfeldisregluna til að einfalda ferningsrætur. | | | |
| notað deilingarregluna til að einfalda ferningsrætur. | | | |

ⓑ Þegar þið hafið farið yfir gátlistann skuluð þið ákveða hvað þið gerið til að öðlast öryggi í öllum markmiðum.

## 9.3 Leggið saman og dragið frá ferningsrótum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leggið saman líkar ferningsrætur og dragið frá þeim
- Leggið saman og dragið frá ferningsrótum sem þarf að einfalda

**UNDIRBÚNINGUR 9.7**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leggið saman: ⓐ $3x+9x$ ⓑ $5m+5n$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 1.24.

**UNDIRBÚNINGUR 9.8**

Einfaldið: $\sqrt{50x^3}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 9.16.

Við vitum að fylgja þarf forgangsröð reikniaðgerða þegar stæður með ferningsrótum eru einfaldaðar. Rótarmerkið er flokkunartákn og því reiknum við fyrst innan þess. Við einföldum $\sqrt{2+7}$ þannig:

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{2+7}$ |
| Leggið saman undir rótarmerkinu. | $\sqrt{9}$ |
| Einfaldið. | $3$ |

Ef við eigum að leggja saman $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ megum við því ekki sameina þær undir einu rótarmerki.

$$\sqrt{2}+\sqrt{7}\neq\sqrt{2+7}$$

Að reyna að leggja saman ferningsrætur með ólíkum rótarstofnum er eins og að reyna að leggja saman ólíka liði.

En rétt eins og við getum lagt saman $x+x$, getum við lagt saman $\sqrt{3}+\sqrt{3}$.

$$x+x=2x \qquad \sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

Að leggja saman ferningsrætur með sama rótarstofn er alveg eins og að leggja saman líka liði. Við köllum ferningsrætur með sama rótarstofn líkar ferningsrætur til að minna okkur á að þær lúta sömu reglum og líkir liðir.

**LÍKAR FERNINGSRÆTUR**

Ferningsrætur með sama rótarstofn kallast líkar ferningsrætur.

Við leggjum saman líkar ferningsrætur og drögum frá þeim á sama hátt og líka liði. Við vitum að $3x+8x$ er $11x$. Á sama hátt leggjum við saman $3\sqrt{x}+8\sqrt{x}$ og fáum $11\sqrt{x}$.

## Leggið saman líkar ferningsrætur og dragið frá þeim

Hugsið um hvernig þið leggið saman líka liði með breytum þegar þið leysið næstu dæmi. Þegar rótarstofnarnir eru eins leggið þið stuðlana saman eða dragið þá frá. Þegar rótarstofnarnir eru ólíkir er ekki hægt að sameina liðina.

**DÆMI 9.29**

Einfaldið: $2\sqrt{2}-7\sqrt{2}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $2\sqrt{2}-7\sqrt{2}$ |
| Þar sem rótarstæðurnar eru líkar drögum við stuðlana frá. | $-5\sqrt{2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.57**

Einfaldið: $8\sqrt{2}-9\sqrt{2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.58**

Einfaldið: $5\sqrt{3}-9\sqrt{3}$.

**DÆMI 9.30**

Einfaldið: $3\sqrt{y}+4\sqrt{y}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $3\sqrt{y}+4\sqrt{y}$ |
| Þar sem rótarstæðurnar eru líkar leggjum við stuðlana saman. | $7\sqrt{y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.59**

Einfaldið: $2\sqrt{x}+7\sqrt{x}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.60**

Einfaldið: $5\sqrt{u}+3\sqrt{u}$.

**DÆMI 9.31**

Einfaldið: $4\sqrt{x}-2\sqrt{y}$.

## Lausn

| | $4\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ |
|---|---|
| Þar sem rótarstæðurnar eru ólíkar getum við ekki dregið þær hvor frá annarri. Við látum stæðuna standa óbreytta. | $4\sqrt{x}-2\sqrt{y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.61**

Einfaldið: $7\sqrt{p}-6\sqrt{q}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.62**

Einfaldið: $6\sqrt{a}-3\sqrt{b}$.

**DÆMI 9.32**

Einfaldið: $5\sqrt{13}+4\sqrt{13}+2\sqrt{13}$.

## Lausn

| | $5\sqrt{13}+4\sqrt{13}+2\sqrt{13}$ |
|---|---|
| Þar sem rótarstæðurnar eru líkar leggjum við stuðlana saman. | $11\sqrt{13}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.63**

Einfaldið: $4\sqrt{11}+2\sqrt{11}+3\sqrt{11}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.64**

Einfaldið: $6\sqrt{10}+2\sqrt{10}+3\sqrt{10}$.

**DÆMI 9.33**

Einfaldið: $2\sqrt{6}-6\sqrt{6}+3\sqrt{3}$.

## Lausn

| | $2\sqrt{6}-6\sqrt{6}+3\sqrt{3}$ |
|---|---|
| Þar sem fyrstu tvær rótarstæðurnar eru líkar drögum við stuðla þeirra frá. | $-4\sqrt{6}+3\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.65**

Einfaldið: $5\sqrt{5}-4\sqrt{5}+2\sqrt{6}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.66**

Einfaldið: $3\sqrt{7}-8\sqrt{7}+2\sqrt{5}$.

**DÆMI 9.34**

Einfaldið: $2\sqrt{5n}-6\sqrt{5n}+4\sqrt{5n}$.

## Lausn

| | $2\sqrt{5n}-6\sqrt{5n}+4\sqrt{5n}$ |
|---|---|
| Þar sem rótarstæðurnar eru líkar sameinum við þær. | $0\sqrt{5n}$ |
| Einfaldið. | 0 |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.67**

Einfaldið: $\sqrt{7x}-7\sqrt{7x}+4\sqrt{7x}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.68**

Einfaldið: $4\sqrt{3y}-7\sqrt{3y}+2\sqrt{3y}$.

Þegar rótarstæður innihalda fleiri en eina breytu eru þær líkar ef allar breyturnar og veldisvísar þeirra eru eins.

**DÆMI 9.35**

Einfaldið: $\sqrt{3xy}+5\sqrt{3xy}-4\sqrt{3xy}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{3xy}+5\sqrt{3xy}-4\sqrt{3xy}$ |
| Þar sem rótarstæðurnar eru líkar sameinum við þær. | $2\sqrt{3xy}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.69**

Einfaldið: $\sqrt{5xy}+4\sqrt{5xy}-7\sqrt{5xy}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.70**

Einfaldið: $3\sqrt{7mn}+\sqrt{7mn}-4\sqrt{7mn}$.

## Leggið saman og dragið frá ferningsrótum sem þarf að einfalda

Munið að við einföldum ferningsrætur alltaf með því að fjarlægja stærstu ferningstöluna sem er þáttur rótarstofnsins. Stundum eigum við að leggja saman eða draga frá ferningsrótum sem virðast ekki hafa líka rótarstofna en eftir einföldun koma líkir rótarstofnar í ljós.

**DÆMI 9.36**

Einfaldið: $\sqrt{20}+3\sqrt{5}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{20}+3\sqrt{5}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar þegar hægt er. | $\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ |
| | $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $5\sqrt{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.71**

Einfaldið: $\sqrt{18}+6\sqrt{2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.72**

Einfaldið: $\sqrt{27}+4\sqrt{3}$.

**DÆMI 9.37**

Einfaldið: $\sqrt{48}-\sqrt{75}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{48}-\sqrt{75}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}$ |
| | $4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $-\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.73**

Einfaldið: $\sqrt{32}-\sqrt{18}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.74**

Einfaldið: $\sqrt{20}-\sqrt{45}$.

Rétt eins og við notum tengireglu margföldunar til að einfalda $5(3x)$ og fá $15x$ getum við einfaldað $5(3\sqrt{x})$ og fengið $15\sqrt{x}$. Við notum tengiregluna til þess í næsta dæmi.

**DÆMI 9.38**

Einfaldið: $5\sqrt{18}-2\sqrt{8}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $5\sqrt{18}-2\sqrt{8}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $5\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}$ |
| | $5\cdot 3\cdot\sqrt{2}-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}$ |
| | $15\sqrt{2}-4\sqrt{2}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $11\sqrt{2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.75**

Einfaldið: $4\sqrt{27}-3\sqrt{12}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.76**

Einfaldið: $3\sqrt{20}-7\sqrt{45}$.

**DÆMI 9.39**

Einfaldið: $\frac{3}{4}\sqrt{192}-\frac{5}{6}\sqrt{108}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{3}{4}\sqrt{192}-\frac{5}{6}\sqrt{108}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $\frac{3}{4}\sqrt{64}\cdot\sqrt{3}-\frac{5}{6}\sqrt{36}\cdot\sqrt{3}$ |
| | $\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\sqrt{3}-\frac{5}{6}\cdot 6\cdot\sqrt{3}$ |
| | $6\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.77**

Einfaldið: $\frac{2}{3}\sqrt{108}-\frac{5}{7}\sqrt{147}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.78**

Einfaldið: $\frac{3}{5}\sqrt{200}-\frac{3}{4}\sqrt{128}$.

**DÆMI 9.40**

Einfaldið: $\frac{2}{3}\sqrt{48}-\frac{3}{4}\sqrt{12}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{2}{3}\sqrt{48}-\frac{3}{4}\sqrt{12}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $\frac{2}{3}\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}-\frac{3}{4}\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}$ |
| | $\frac{2}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{3}-\frac{3}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{3}$ |
| | $\frac{8}{3}\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}$ |
| Finnið samnefnara til að draga stuðla líku rótarstæðnanna frá. | $\frac{16}{6}\sqrt{3}-\frac{9}{6}\sqrt{3}$ |
| Einfaldið. | $\frac{7}{6}\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.79**

Einfaldið: $\frac{2}{5}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{8}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.80**

Einfaldið: $\frac{1}{3}\sqrt{80}-\frac{1}{4}\sqrt{125}$.

Í næsta dæmi tökum við fastatölu- og breytuþætti út úr ferningsrótunum.

**DÆMI 9.41**

Einfaldið: $\sqrt{18n^5}-\sqrt{32n^5}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{18n^5}-\sqrt{32n^5}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $\sqrt{9n^4}\cdot\sqrt{2n}-\sqrt{16n^4}\cdot\sqrt{2n}$ |
| | $3n^2\sqrt{2n}-4n^2\sqrt{2n}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $-n^2\sqrt{2n}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.81**

Einfaldið: $\sqrt{32m^7} - \sqrt{50m^7}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.82**

Einfaldið: $\sqrt{27p^3} - \sqrt{48p^3}$.

**DÆMI 9.42**

Einfaldið: $9\sqrt{50m^2} - 6\sqrt{48m^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $9\sqrt{50m^2} - 6\sqrt{48m^2}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $9\sqrt{25m^2} \cdot \sqrt{2} - 6\sqrt{16m^2} \cdot \sqrt{3}$ |
| | $9 \cdot 5m \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot 4m \cdot \sqrt{3}$ |
| | $45m\sqrt{2} - 24m\sqrt{3}$ |
| Rótarstæðurnar eru ólíkar og því er ekki hægt að sameina þær. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.83**

Einfaldið: $5\sqrt{32x^2} - 3\sqrt{48x^2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.84**

Einfaldið: $7\sqrt{48y^2} - 4\sqrt{72y^2}$.

**DÆMI 9.43**

Einfaldið: $2\sqrt{8x^2} - 5x\sqrt{32} + 5\sqrt{18x^2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $2\sqrt{8x^2} - 5x\sqrt{32} + 5\sqrt{18x^2}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar. | $2\sqrt{4x^2} \cdot \sqrt{2} - 5x\sqrt{16} \cdot \sqrt{2} + 5\sqrt{9x^2} \cdot \sqrt{2}$ |
| | $2 \cdot 2x \cdot \sqrt{2} - 5x \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 3x \cdot \sqrt{2}$ |
| | $4x\sqrt{2} - 20x\sqrt{2} + 15x\sqrt{2}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $-x\sqrt{2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.85**

Einfaldið: $3\sqrt{12x^2}-2x\sqrt{48}+4\sqrt{27x^2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.86**

Einfaldið: $3\sqrt{18x^2}-6x\sqrt{32}+2\sqrt{50x^2}$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari kennslu og æfingu í samlagningu og frádrætti ferningsróta.

- Samlagning og frádráttur ferningsróta

## Verkefni úr hluta 9.3

***Æfingin skapar meistarann***

**Leggið saman líkar ferningsrætur og dragið frá þeim**

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir.

145.

$$8\sqrt{2}-5\sqrt{2}$$

146.

$$7\sqrt{2}-3\sqrt{2}$$

147.

$$3\sqrt{5}+6\sqrt{5}$$

148.

$$4\sqrt{5}+8\sqrt{5}$$

149.

$$9\sqrt{7}-10\sqrt{7}$$

150.

$$11\sqrt{7}-12\sqrt{7}$$

151.

$$7\sqrt{y}+2\sqrt{y}$$

152.

$$9\sqrt{n}+3\sqrt{n}$$

153.

$$\sqrt{a}-4\sqrt{a}$$

154.

$$\sqrt{b}-6\sqrt{b}$$

155.

$$5\sqrt{c}+2\sqrt{c}$$

156.

$$7\sqrt{d}+2\sqrt{d}$$

157.

$$8\sqrt{a}-2\sqrt{b}$$

158.

$$5\sqrt{c}-3\sqrt{d}$$

159.

$$5\sqrt{m}+\sqrt{n}$$

160.

$$\sqrt{n}+3\sqrt{p}$$

161.

$$8\sqrt{7}+2\sqrt{7}+3\sqrt{7}$$

162.

$$6\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}$$

163.

$$3\sqrt{11}+2\sqrt{11}-8\sqrt{11}$$

164.

$$2\sqrt{15}+5\sqrt{15}-9\sqrt{15}$$

165.

$$3\sqrt{3}-8\sqrt{3}+7\sqrt{5}$$

166.

$$5\sqrt{7}-8\sqrt{7}+6\sqrt{3}$$

167.

$$6\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{5}$$

168.

$$7\sqrt{5}+\sqrt{5}-8\sqrt{10}$$

169.

$$3\sqrt{2a}-4\sqrt{2a}+5\sqrt{2a}$$

170.

$$\sqrt{11b}-5\sqrt{11b}+3\sqrt{11b}$$

171.

$$8\sqrt{3c}+2\sqrt{3c}-9\sqrt{3c}$$

172.

$$3\sqrt{5d}+8\sqrt{5d}-11\sqrt{5d}$$

173.

$$5\sqrt{3ab}+\sqrt{3ab}-2\sqrt{3ab}$$

174.

$$8\sqrt{11cd}+5\sqrt{11cd}-9\sqrt{11cd}$$

175.

$$2\sqrt{pq}-5\sqrt{pq}+4\sqrt{pq}$$

176.

$$11\sqrt{2rs}-9\sqrt{2rs}+3\sqrt{2rs}$$

**Leggið saman og dragið frá ferningsrótum sem þarf að einfalda**
Einfaldið í verkefnunum hér á eftir.

177.

$$\sqrt{50}+4\sqrt{2}$$

178.

$$\sqrt{48}+2\sqrt{3}$$

179.

$$\sqrt{80}-3\sqrt{5}$$

180.

$$\sqrt{28}-4\sqrt{7}$$

181.

$$\sqrt{27}-\sqrt{75}$$

182.

$$\sqrt{72}-\sqrt{98}$$

183.

$$\sqrt{48}+\sqrt{27}$$

184.

$$\sqrt{45}+\sqrt{80}$$

185.

$$2\sqrt{50}-3\sqrt{72}$$

186.

$$3\sqrt{98}-\sqrt{128}$$

187.

$$2\sqrt{12}+3\sqrt{48}$$

188.

$$4\sqrt{75}+2\sqrt{108}$$

189.

$$\frac{2}{3}\sqrt{72}+\frac{1}{5}\sqrt{50}$$

190.

$$\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{3}{4}\sqrt{48}$$

191.

$$\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{2}{3}\sqrt{45}$$

192.

$$\frac{2}{3}\sqrt{54}-\frac{3}{4}\sqrt{96}$$

193.

$$\frac{1}{6}\sqrt{27}-\frac{3}{8}\sqrt{48}$$

194.

$$\frac{1}{8}\sqrt{32}-\frac{1}{10}\sqrt{50}$$

195.

$$\frac{1}{4}\sqrt{98}-\frac{1}{3}\sqrt{128}$$

196.

$$\frac{1}{3}\sqrt{24}+\frac{1}{4}\sqrt{54}$$

197.

$$\sqrt{72\,a^5}-\sqrt{50\,a^5}$$

198.

$$\sqrt{48\,b^5}-\sqrt{75\,b^5}$$

199.

$$\sqrt{80\,c^7}-\sqrt{20\,c^7}$$

200.

$$\sqrt{96\,d^9}-\sqrt{24\,d^9}$$

201.

$$9\sqrt{80\,p^4}-6\sqrt{98\,p^4}$$

202.

$$8\sqrt{72\,q^6}-3\sqrt{75\,q^6}$$

203.

$$2\sqrt{50\,r^8}+4\sqrt{54\,r^8}$$

204.

$$5\sqrt{27\,s^6}+2\sqrt{20\,s^6}$$

205.

$$3\sqrt{20\,x^2}-4\sqrt{45\,x^2}+5\,x\sqrt{80}$$

206.

$$2\sqrt{28x^2}-\sqrt{63x^2}+6x\sqrt{7}$$

207.

$$3\sqrt{128y^2}+4y\sqrt{162}-8\sqrt{98y^2}$$

208.

$$3\sqrt{75y^2}+8y\sqrt{48}-\sqrt{300y^2}$$

**Blönduð verkefni**

209.

$$2\sqrt{8}+6\sqrt{8}-5\sqrt{8}$$

210.

$$\frac{2}{3}\sqrt{27}+\frac{3}{4}\sqrt{48}$$

211.

$$\sqrt{175k^4}-\sqrt{63k^4}$$

212.

$$\frac{5}{6}\sqrt{162}+\frac{3}{16}\sqrt{128}$$

213.

$$2\sqrt{363}-2\sqrt{300}$$

214.

$$\sqrt{150}+4\sqrt{6}$$

215.

$$9\sqrt{2}-8\sqrt{2}$$

216.

$$5\sqrt{x}-8\sqrt{y}$$

217.

$$8\sqrt{13}-4\sqrt{13}-3\sqrt{13}$$

218.

$$5\sqrt{12c^4}-3\sqrt{27c^6}$$

219.

$$\sqrt{80\,a^5}-\sqrt{45\,a^5}$$

220.

$$\frac{3}{5}\sqrt{75}-\frac{1}{4}\sqrt{48}$$

221.

$$21\sqrt{19}-2\sqrt{19}$$

222.

$$\sqrt{500}+\sqrt{405}$$

223.

$$\frac{5}{6}\sqrt{27}+\frac{5}{8}\sqrt{48}$$

224.

$$11\sqrt{11}-10\sqrt{11}$$

225.

$$\sqrt{75}-\sqrt{108}$$

226.

$$2\sqrt{98}-4\sqrt{72}$$

227.

$$4\sqrt{24\,x^2}-\sqrt{54\,x^2}+3\,x\sqrt{6}$$

228.

$$8\sqrt{80\,y^6}-6\sqrt{48\,y^6}$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**229.** Innanhússhönnuður ákveður að nota ferningslaga flísar sem skrautrönd í nýrri sturtu en snúa þeim þannig að þær líti út eins og tíglar. Hún notar 9 stórar flísar sem eru 8 tommur á hlið og 8 litlar flísar sem eru 2 tommur á hlið. Finnið breidd skrautrandarinnar með því að einfalda stæðuna $9\left(8\sqrt{2}\right)+8\left(2\sqrt{2}\right)$. Námundið að næsta tíunda hluta úr tommu.

**230.** Suzy vill nota ferningslaga flísar á brún heits potts sem hún er að setja upp í bakgarðinum. Hún notar stórar flísar með flatarmálið 12 fertommur, meðalstórar flísar með flatarmálið 8 fertommur og litlar flísar með flatarmálið 4 fertommur. Í einn hluta brúnarinnar þarf 4 stórar, 8 meðalstórar og 10 litlar flísar til að þekja breidd veggjarins. Einfaldið stæðuna $4\sqrt{12}+8\sqrt{8}+10\sqrt{4}$ til að ákvarða breidd veggjarins. Námundið að næsta tíunda hluta úr tommu.

### *Ritunarverkefni*

**231.** Útskýrið muninn á líkum og ólíkum rótarstæðum. Gætið þess að svarið eigi við um rótarstæður sem innihalda bæði tölur og breytur.

**232.** Útskýrið hvernig ákvarða má hvort tvær rótarstæður séu líkar eða ólíkar. Gætið þess að svarið eigi við um rótarstæður sem innihalda bæði tölur og breytur.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| lagt saman líkar ferningsrætur og dregið frá þeim. | | | |
| lagt saman og dregið frá ferningsrótum sem þarf að einfalda. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um færni ykkar í þessum hluta? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 9.4 Margfaldið ferningsrætur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Margfaldið ferningsrætur
- Notið margföldun margliða til að margfalda ferningsrætur

**UNDIRBÚNINGUR 9.9**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Einfaldið: $(3u)(8v)$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.26.

**UNDIRBÚNINGUR 9.10**

Einfaldið: $6(12-7n)$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.28.

**UNDIRBÚNINGUR 9.11**

Einfaldið: $(2+a)(4-a)$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.39.

## Margfaldið ferningsrætur

Við höfum notað margfeldisreglu fyrir ferningsrætur til að einfalda ferningsrætur með því að fjarlægja þætti sem eru ferningstölur. Margfeldisreglan fyrir ferningsrætur segir að

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

Við getum notað margfeldisreglu fyrir ferningsrætur „aftur á bak“ til að margfalda ferningsrætur.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

Munið að við gerum ráð fyrir að allar breytur séu stærri en eða jafnar núlli.

Við skrifum margfeldisregluna fyrir ferningsrætur upp á nýtt þannig að báðar áttirnar sjáist saman.

**MARGFELDISREGLA FYRIR FERNINGSRÆTUR**

Ef a og b eru óneikvæðar rauntölur, þá er

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \text{ og } \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

Við getum því margfaldað $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ á þennan hátt:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$$
$$\sqrt{3\cdot 5}$$
$$\sqrt{15}$$

Stundum er margfeldið ferningstala:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$
$$\sqrt{2\cdot 8}$$
$$\sqrt{16}$$
$$4$$

Jafnvel þegar margfeldið er ekki ferningstala verðum við að leita að þáttum sem eru ferningstölur og einfalda rótarstæðuna þegar þess er kostur.

Að margfalda rótarstæður með stuðlum er mjög svipað því að margfalda breytur með stuðlum. Til að margfalda $4x \cdot 3y$ margföldum við stuðlana saman og síðan breyturnar. Niðurstaðan er $12xy$. Hafið þetta í huga þegar þið leysið dæmin.

**DÆMI 9.44**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$ ⓑ $\left(4\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{12}\right)$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$ |
|---|---|
| Margfaldið með margfeldisreglunni. | $\sqrt{12}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}$ |
| Einfaldið. | $2\sqrt{3}$ |

ⓑ

| | $\left(4\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{12}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið með margfeldisreglunni. | $8\sqrt{36}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $8 \cdot 6$ |
| Einfaldið. | $48$ |

Takið eftir að í b-lið margfölduðum við stuðlana saman og rótarstæðurnar saman. Við einfölduðum heldur ekki $\sqrt{12}$. Við biðum þar til við höfðum fundið margfeldið og einfölduðum það síðan.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.87**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ ⓑ $\left(2\sqrt{6}\right)\left(3\sqrt{12}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.88**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ ⓑ $\left(6\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{6}\right)$.

**DÆMI 9.45**

Einfaldið: $\left(6\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{10}\right)$.

## Lausn

| | $\left(6\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{10}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið með margfeldisreglunni. | $18\sqrt{20}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $18\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}$ |
| Einfaldið. | $18\cdot 2\cdot\sqrt{5}$ |
| | $36\sqrt{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.89**

Einfaldið: $\left(3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{30}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.90**

Einfaldið: $\left(3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{6}\right)$.

Þegar við eigum að margfalda ferningsrætur finnum við fyrst margfeldið og fjarlægjum síðan þætti sem eru ferningstölur.

**DÆMI 9.46**

Einfaldið: ⓐ $\left(\sqrt{8x^3}\right)\left(\sqrt{3x}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{20y^2}\right)\left(\sqrt{5y^3}\right)$.

## Lausn

ⓐ

| | $\left(\sqrt{8x^3}\right)\left(\sqrt{3x}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið með margfeldisreglunni. | $\sqrt{24x^4}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $\sqrt{4x^4}\cdot\sqrt{6}$ |
| Einfaldið. | $2x^2\sqrt{6}$ |

ⓑ

| | $\left(\sqrt{20y^2}\right)\left(\sqrt{5y^3}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið með margfeldisreglunni. | $\sqrt{100y^5}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $10y^2\sqrt{y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.91**

Einfaldið: ⓐ $\left(\sqrt{6x^3}\right)\left(\sqrt{3x}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{2y^3}\right)\left(\sqrt{50y^2}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.92**

Einfaldið: ⓐ $\left(\sqrt{6x^5}\right)\left(\sqrt{2x}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{12y^2}\right)\left(\sqrt{3y^5}\right)$.

**DÆMI 9.47**

Einfaldið: $\left(10\sqrt{6p^3}\right)\left(3\sqrt{18p}\right)$.

## Lausn

| | $\left(10\sqrt{6p^3}\right)\left(3\sqrt{18p}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $30\sqrt{108p^4}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $30\sqrt{36p^4}\cdot\sqrt{3}$ |
| | $30\cdot 6p^2\cdot\sqrt{3}$ |
| | $180p^2\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.93**

Einfaldið: $\left(6\sqrt{2x^2}\right)\left(8\sqrt{45x^4}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.94**

Einfaldið: $\left(2\sqrt{6y^4}\right)\left(12\sqrt{30y}\right)$.

**DÆMI 9.48**

Einfaldið: ⓐ $\left(\sqrt{2}\right)^2$ ⓑ $\left(-\sqrt{11}\right)^2$.

9

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\left(\sqrt{2}\right)^2$ |
| Endurskrifið sem margfeldi. | $\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)$ |
| Margfaldið. | $\sqrt{4}$ |
| Einfaldið. | $2$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\left(-\sqrt{11}\right)^2$ |
| Endurskrifið sem margfeldi. | $\left(-\sqrt{11}\right)\left(-\sqrt{11}\right)$ |
| Margfaldið. | $\sqrt{121}$ |
| Einfaldið. | $11$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.95**

Einfaldið: ⓐ $\left(\sqrt{12}\right)^2$ ⓑ $\left(-\sqrt{15}\right)^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.96**

Einfaldið: ⓐ $\left(\sqrt{16}\right)^2$ ⓑ $\left(-\sqrt{20}\right)^2$.

Niðurstöður síðasta dæmis gefa okkur þessa reglu.

**AÐ HEFJA FERNINGSRÓT Í ANNAÐ VELDI**

Ef a er óneikvæð rauntala, þá er

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Að hefja í annað veldi og taka ferningsrót eru andhverfar reikniaðgerðir. Þess vegna getum við einfaldað $\left(\sqrt{2}\right)^2$ og fengið 2 strax. Þegar við margföldum saman tvær líkar ferningsrætur í a-lið næsta dæmis jafngildir það því að hefja í annað veldi.

**DÆMI 9.49**

Einfaldið: ⓐ $\left(2\sqrt{3}\right)\left(8\sqrt{3}\right)$ ⓑ $\left(3\sqrt{6}\right)^2$.

## Lausn

ⓐ

| | $\left(2\sqrt{3}\right)\left(8\sqrt{3}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið. Munið að $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$. | $16\cdot 3$ |
| Einfaldið. | $48$ |

ⓑ

| | $\left(3\sqrt{6}\right)^2$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $9\cdot 6$ |
| Einfaldið. | $54$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.97**

Einfaldið: ⓐ $\left(6\sqrt{11}\right)\left(5\sqrt{11}\right)$ ⓑ $\left(5\sqrt{8}\right)^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.98**

Einfaldið: ⓐ $\left(3\sqrt{7}\right)\left(10\sqrt{7}\right)$ ⓑ $\left(-4\sqrt{6}\right)^2$.

## Notið margföldun margliða til að margfalda ferningsrætur

Í næstu dæmum notum við dreifiregluna til að margfalda stæður með ferningsrótum.

Við dreifum fyrst og einföldum síðan ferningsræturnar þegar þess er kostur.

**DÆMI 9.50**

Einfaldið: ⓐ $3\left(5-\sqrt{2}\right)$ ⓑ $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{10}\right)$.

## Lausn

ⓐ

| | $3\left(5-\sqrt{2}\right)$ |
|---|---|
| Beitið dreifireglu. | $15-3\sqrt{2}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{10}\right)$ |
| Beitið dreifireglu. | $4\sqrt{2}-\sqrt{20}$ |
| | $4\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.99**

Einfaldið: ⓐ $2\left(3-\sqrt{5}\right)$ ⓑ $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{18}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.100**

Einfaldið: ⓐ $6\left(2+\sqrt{6}\right)$ ⓑ $\sqrt{7}\left(1+\sqrt{14}\right)$.

**DÆMI 9.51**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{5}\left(7+2\sqrt{5}\right)$ ⓑ $\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{5}\left(7+2\sqrt{5}\right)$ |
| Margfaldið. | $7\sqrt{5}+2\cdot 5$ |
| Einfaldið. | $7\sqrt{5}+10$ |
| | $10+7\sqrt{5}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{6}\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)$ |
| Margfaldið. | $\sqrt{12}+\sqrt{108}$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{36}\cdot\sqrt{3}$ |
| | $2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $8\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.101**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{6}\left(1+3\sqrt{6}\right)$ ⓑ $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}+\sqrt{24}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.102**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{8}\left(2-5\sqrt{8}\right)$ ⓑ $\sqrt{14}\left(\sqrt{2}+\sqrt{42}\right)$.

Þegar við unnum með margliður margfölduðum við tvíliði með tvíliðum. Munið að það gaf okkur fjögur margfeldi áður en við sameinuðum samkynja liði. Til að tryggja að öll fjögur margfeldin fengjust skipulögðum við vinnuna, yfirleitt með FOIL-aðferðinni, þar sem fremstu, ytri, innri og öftustu liðir eru margfaldaðir.

**DÆMI 9.52**

Einfaldið: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$.

## Lausn

| | $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $8-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-3$ |
| Sameinið samkynja liði. | $5+2\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.103**

Einfaldið: $\left(1+\sqrt{6}\right)\left(3-\sqrt{6}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.104**

Einfaldið: $\left(4-\sqrt{10}\right)\left(2+\sqrt{10}\right)$.

**DÆMI 9.53**

Einfaldið: $\left(3-2\sqrt{7}\right)\left(4-2\sqrt{7}\right)$.

## Lausn

| | $\left(3-2\sqrt{7}\right)\left(4-2\sqrt{7}\right)$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $12-6\sqrt{7}-8\sqrt{7}+4\cdot 7$ |
| Einfaldið. | $12-6\sqrt{7}-8\sqrt{7}+28$ |
| Sameinið samkynja liði. | $40-14\sqrt{7}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.105**

Einfaldið: $(6-3\sqrt{7})(3+4\sqrt{7})$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.106**

Einfaldið: $(2-3\sqrt{11})(4-\sqrt{11})$.

**DÆMI 9.54**

Einfaldið: $(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+4\sqrt{5})$.

## Lausn

| | $(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+4\sqrt{5})$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $3\cdot 2+12\sqrt{10}-\sqrt{10}-4\cdot 5$ |
| Einfaldið. | $6+12\sqrt{10}-\sqrt{10}-20$ |
| Sameinið samkynja liði. | $-14+11\sqrt{10}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.107**

Einfaldið: $(5\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+2\sqrt{7})$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.108**

Einfaldið: $(\sqrt{6}-3\sqrt{8})(2\sqrt{6}+\sqrt{8})$

**DÆMI 9.55**

Einfaldið: $(4-2\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})$.

## Lausn

| | $(4-2\sqrt{x})(1+3\sqrt{x})$ |
|---|---|
| Margfaldið. | $4+12\sqrt{x}-2\sqrt{x}-6x$ |
| Sameinið samkynja liði. | $4+10\sqrt{x}-6x$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.109**

Einfaldið: $(6-5\sqrt{m})(2+3\sqrt{m})$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.110**

Einfaldið: $\left(10+3\sqrt{n}\right)\left(1-5\sqrt{n}\right)$.

Takið eftir að formúlur fyrir sérstök margfeldi auðvelduðu okkur vinnuna þegar við margfölduðum tvíliði fyrr í bókinni. Þetta á einnig við þegar við margföldum ferningsrætur. Formúlurnar sem við notuðum eru sýndar hér á eftir.

**FORMÚLUR FYRIR SÉRSTÖK MARGFELDI**

Ferningar tvíliða

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$$

Margfeldi samoka

$$\left(a-b\right)\left(a+b\right)=a^2-b^2$$

Við notum formúlurnar fyrir sérstök margfeldi í næstu dæmum. Við byrjum á ferningsreglu tvíliða.

**DÆMI 9.56**

Einfaldið: ⓐ $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ ⓑ $\left(4-2\sqrt{5}\right)^2$.

## Lausn

Gætið þess að hafa $2ab$ -liðinn með þegar tvíliður er hafinn í annað veldi.

**1.** ⓐ

| | $\overset{(a+b)^2}{(2+\sqrt{3})^2}$ |
|---|---|
| Margfaldið með ferningsreglu tvíliða. | $\overset{a^2}{2^2}+\overset{2ab}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}+\overset{b^2}{(\sqrt{3})^2}$ |
| Einfaldið. | $4+4\sqrt{3}+3$ |
| Sameinið samkynja liði. | $7+4\sqrt{3}$ |

**2.** ⓑ

| | $\overset{(a-b)^2}{(4-2\sqrt{5})^2}$ |
|---|---|
| Margfaldið með ferningsreglu tvíliða. | $\overset{a^2}{4^2}-\overset{2ab}{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{5}}+\overset{b^2}{(2\sqrt{5})^2}$ |
| Einfaldið. | $16-16\sqrt{5}+4\cdot 5$<br>$16-16\sqrt{5}+20$ |
| Sameinið samkynja liði. | $36-16\sqrt{5}$ |

9

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.111**

Einfaldið: ⓐ $\left(10+\sqrt{2}\right)^2$ ⓑ $\left(1+3\sqrt{6}\right)^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.112**

Einfaldið: ⓐ $\left(6-\sqrt{5}\right)^2$ ⓑ $\left(9-2\sqrt{10}\right)^2$.

**DÆMI 9.57**

Einfaldið: $\left(1+3\sqrt{x}\right)^2$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\overset{(a+b)^2}{\left(1+3\sqrt{x}\right)^2}$ |
| Margfaldið með ferningsreglu tvíliða. | $\overset{a^2}{1^2}+\overset{2ab}{2\cdot 1\cdot 3\sqrt{x}}+\overset{b^2}{\left(3\sqrt{x}\right)^2}$ |
| Einfaldið. | $1+6\sqrt{x}+9x$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.113**

Einfaldið: $\left(2+5\sqrt{m}\right)^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.114**

Einfaldið: $\left(3-4\sqrt{n}\right)^2$.

Í næstu tveimur dæmum finnum við margfeldi samoka.

**DÆMI 9.58**

Einfaldið: $\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\overset{(a-b)\ (a+b)}{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}$ |
| Margfaldið með ferningsreglu tvíliða. | $\overset{a^2\ -\ b^2}{4^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$ |
| Einfaldið. | $16-2$<br>$14$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.115**

Einfaldið: $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.116**

Einfaldið: $(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$.

**DÆMI 9.59**

Einfaldið: $(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})$.

## Lausn

| | $\overset{(a\ -\ b)\ (a\ +\ b)}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}$ |
|---|---|
| Margfaldið með ferningsreglu tvíliða. | $\overset{a^2\ -\ b^2}{5^2-(2\sqrt{3})^2}$ |
| Einfaldið. | $25-4\cdot 3$<br>$13$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.117**

Einfaldið: $(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.118**

Einfaldið: $(4+5\sqrt{7})(4-5\sqrt{7})$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari kennslu og æfingu í margföldun ferningsróta.

- Margfeldisregla
- Margfalda tvíliði með ferningsrótum

## Verkefni úr hluta 9.4

***Æfingin skapar meistarann***

**Margfaldið ferningsrætur**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

9

**233.** ⓐ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ ⓑ $(3\sqrt{3})(2\sqrt{18})$

**234.** ⓐ $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$ ⓑ $(3\sqrt{2})(2\sqrt{32})$

**235.** ⓐ $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}$ ⓑ $(4\sqrt{8})(5\sqrt{8})$

**236.** ⓐ $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$ ⓑ $(2\sqrt{5})(2\sqrt{10})$

237.

$$\left(5\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{6}\right)$$

238.

$$\left(2\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{6}\right)$$

239.

$$\left(-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{18}\right)$$

240.

$$\left(-4\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{10}\right)$$

241.

$$\left(5\sqrt{6}\right)\left(-\sqrt{12}\right)$$

242.

$$\left(6\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{10}\right)$$

243.

$$\left(-2\sqrt{7}\right)\left(-2\sqrt{14}\right)$$

244.

$$\left(-2\sqrt{11}\right)\left(-4\sqrt{22}\right)$$

**245.** ⓐ $\left(\sqrt{15\,y}\right)\left(\sqrt{5\,y^3}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{2n^2}\right)\left(\sqrt{18n^3}\right)$

**246.** ⓐ $\left(\sqrt{14\,x^3}\right)\left(\sqrt{7\,x^3}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{3q^2}\right)\left(\sqrt{48q^3}\right)$

**247.** ⓐ $\left(\sqrt{16\,y^2}\right)\left(\sqrt{8\,y^4}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{11\,s^6}\right)\left(\sqrt{11\,s}\right)$

**248.** ⓐ $\left(\sqrt{8\,x^3}\right)\left(\sqrt{3\,x}\right)$ ⓑ $\left(\sqrt{7\,r}\right)\left(\sqrt{7\,r^8}\right)$

249.

$$\left(2\sqrt{5\,b^3}\right)\left(4\sqrt{15\,b}\right)$$

250.

$$\left(3\sqrt{8\,c^5}\right)\left(2\sqrt{6\,c^3}\right)$$

251.

$$\left(5\sqrt{2\,d^7}\right)\left(3\sqrt{50\,d^3}\right)$$

252.

$$\left(4\sqrt{6t^2}\right)\left(3\sqrt{3t^2}\right)$$

253.

$$\left(3\sqrt{4y^4}\right)\left(3\sqrt{9y^5}\right)$$

254.

$$\left(-2\sqrt{7z^3}\right)\left(3\sqrt{14z^8}\right)$$

255.

$$\left(4\sqrt{2k^5}\right)\left(-3\sqrt{32k^6}\right)$$

**256.** ⓐ $\left(\sqrt{7}\right)^2$ ⓑ $\left(-\sqrt{15}\right)^2$

**257.** ⓐ $\left(\sqrt{11}\right)^2$ ⓑ $\left(-\sqrt{21}\right)^2$

**258.** ⓐ $\left(\sqrt{19}\right)^2$ ⓑ $\left(-\sqrt{5}\right)^2$

**259.**

ⓐ $\left(\sqrt{23}\right)^2$

ⓑ $\left(-\sqrt{3}\right)^2$

**260.** ⓐ $\left(4\sqrt{11}\right)\left(-3\sqrt{11}\right)$ ⓑ $\left(5\sqrt{3}\right)^2$

**261.** ⓐ $\left(2\sqrt{13}\right)\left(-9\sqrt{13}\right)$ ⓑ $\left(6\sqrt{5}\right)^2$

**262.** ⓐ $\left(-3\sqrt{12}\right)\left(-2\sqrt{6}\right)$ ⓑ $\left(-4\sqrt{10}\right)^2$

**263.** ⓐ $\left(-7\sqrt{5}\right)\left(-3\sqrt{10}\right)$ ⓑ $\left(-2\sqrt{14}\right)^2$

**Notið margföldun margliða til að margfalda ferningsrætur**
Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**264.** ⓐ $3\left(4-\sqrt{3}\right)$ ⓑ $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{6}\right)$

**265.** ⓐ $4\left(6-\sqrt{11}\right)$ ⓑ $\sqrt{2}\left(5-\sqrt{12}\right)$

**266.** ⓐ $5\left(3-\sqrt{7}\right)$ ⓑ $\sqrt{3}\left(4-\sqrt{15}\right)$

**267.** ⓐ $7\left(-2-\sqrt{11}\right)$ ⓑ $\sqrt{7}\left(6-\sqrt{14}\right)$

**268.** ⓐ $\sqrt{7}\left(5+2\sqrt{7}\right)$ ⓑ $\sqrt{5}\left(\sqrt{10}+\sqrt{18}\right)$

**269.** ⓐ $\sqrt{11}\left(8+4\sqrt{11}\right)$ ⓑ $\sqrt{3}\left(\sqrt{12}+\sqrt{27}\right)$

**270.** ⓐ $\sqrt{11}\left(-3+4\sqrt{11}\right)$ ⓑ $\sqrt{3}\left(\sqrt{15}-\sqrt{18}\right)$

**271.** ⓐ $\sqrt{2}\left(-5+9\sqrt{2}\right)$ ⓑ $\sqrt{7}\left(\sqrt{3}-\sqrt{21}\right)$

272.

$$(8+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$$

273.

$$(7+\sqrt{3})(9-\sqrt{3})$$

274.

$$(8-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$$

275.

$$(9-\sqrt{2})(6+\sqrt{2})$$

276.

$$(3-\sqrt{7})(5-\sqrt{7})$$

277.

$$(5-\sqrt{7})(4-\sqrt{7})$$

278.

$$(1+3\sqrt{10})(5-2\sqrt{10})$$

279.

$$(7-2\sqrt{5})(4+9\sqrt{5})$$

280.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{10})(\sqrt{3}+2\sqrt{10})$$

281.

$$(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}+6\sqrt{5})$$

282.

$$(2\sqrt{7}-5\sqrt{11})(4\sqrt{7}+9\sqrt{11})$$

283.

$$(4\sqrt{6}+7\sqrt{13})(8\sqrt{6}-3\sqrt{13})$$

284.

$$(5-\sqrt{u})(3+\sqrt{u})$$

285.

$$(9-\sqrt{w})(2+\sqrt{w})$$

286.

$$(7+2\sqrt{m})(4+9\sqrt{m})$$

287.

$$(6+5\sqrt{n})(11+3\sqrt{n})$$

**288.**

ⓐ $(3+\sqrt{5})^2$

ⓑ $(2-5\sqrt{3})^2$

**289.** ⓐ $(4+\sqrt{11})^2$ ⓑ $(3-2\sqrt{5})^2$

**290.** ⓐ $(9-\sqrt{6})^2$ ⓑ $(10+3\sqrt{7})^2$

**291.** ⓐ $(5-\sqrt{10})^2$ ⓑ $(8+3\sqrt{2})^2$

292.

$$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$$

293.

$$(10-\sqrt{3})(10+\sqrt{3})$$

294.

$$(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})$$

295.

$$(7+\sqrt{10})(7-\sqrt{10})$$

296.

$$(4+9\sqrt{3})(4-9\sqrt{3})$$

297.

$$(1+8\sqrt{2})(1-8\sqrt{2})$$

298.

$$(12-5\sqrt{5})(12+5\sqrt{5})$$

299.

$$(9-4\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})$$

**Blönduð verkefni**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

300.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$$

301.

$$\left(4\sqrt{6}\right)\left(-\sqrt{18}\right)$$

302.

$$\left(-5+\sqrt{7}\right)\left(6+\sqrt{21}\right)$$

303.

$$\left(-5\sqrt{7}\right)\left(6\sqrt{21}\right)$$

304.

$$\left(-4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{18}\right)$$

305.

$$\left(\sqrt{35\,y^3}\right)\left(\sqrt{7\,y^3}\right)$$

306.

$$\left(4\sqrt{12\,x^5}\right)\left(2\sqrt{6\,x^3}\right)$$

307.

$$\left(\sqrt{29}\right)^2$$

308.

$$\left(-4\sqrt{17}\right)\left(-3\sqrt{17}\right)$$

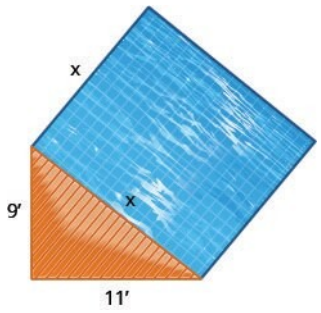
309.

$$\left(-4+\sqrt{17}\right)\left(-3+\sqrt{17}\right)$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

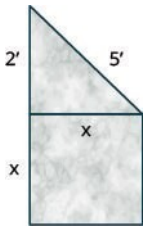
**310.** Garðyrkjumaður vill útbúa ferningslaga skrauttjörn við hlið þríhyrnds verandarpalls eins og sýnt er hér fyrir neðan. Pallurinn er rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðar sem eru 9 fet og 11 fet að lengd og tjörnin verður upp við langhliðina.

1. ⓐ Notið setningu Pýþagórasar til að finna hliðarlengd tjarnarinnar. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.
2. ⓑ Finnið nákvæmt flatarmál tjarnarinnar.




**311.** Listamaður vill gera lítið minnismerki með ferningslaga undirstöðu og rétthyrndan þríhyrning ofan á eins og sýnt er hér fyrir neðan. Ferningslaga undirstaðan liggur upp að annarri skammhlið þríhyrningsins. Hin skammhlið hans verður 2 fet og langhliðin 5 fet.

1. ⓐ Notið setningu Pýþagórasar til að finna hliðarlengd ferningslaga undirstöðunnar. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.




2. ⓑ Finnið nákvæmt flatarmál framhliðar ferningslaga undirstöðunnar.

**312.** Ferningslaga garður verður afmarkaður með steinkanti á einni hlið. Ef aðeins $3+\sqrt{10}$ fet af steini eru tiltæk skuluð þið einfalda $\left(3+\sqrt{10}\right)^2$ til að ákvarða flatarmál stærsta mögulega garðsins. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.

**313.** Garður verður gerður úr tveimur ferningslaga reitum, öðrum með hliðarlengdina $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ jarda og hinum með hliðarlengdina $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jarda. Einfaldið $\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ til að ákvarða heildarflatarmál garðsins. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

**314.** Gerið ráð fyrir að þriðja reitnum verði bætt við garðinn í verkefninu hér á undan. Þriðji reiturinn á að vera $\sqrt{432}$ jardar á breidd. Skrifið stæðu sem gefur heildarflatarmál garðsins.

### *Ritunarverkefni*

315.

1. ⓐ Útskýrið hvers vegna $\left(-\sqrt{n}\right)^2$ er alltaf jákvætt þegar $n \geq 0$.
2. ⓑ Útskýrið hvers vegna $-\left(\sqrt{n}\right)^2$ er alltaf neikvætt þegar $n \geq 0$.

**316.** Notið ferningsreglu tvíliða til að einfalda $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$. Útskýrið öll skrefin.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| margfaldað ferningsrætur. | | | |
| notað margliðun til að margfalda ferningsrætur. | | | |

ⓑ Hversu góð tök teljið þið ykkur hafa á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt ykkur?

# 9.5 Deilið ferningsrótum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Deilið ferningsrótum
- Eyðið ferningsrót úr nefnara með einum lið
- Eyðið ferningsrót úr nefnara með tveimur liðum

**UNDIRBÚNINGUR 9.12**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Finnið brot sem er jafngilt $\frac{5}{8}$ og hefur nefnarann 48. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja
upp dæmi 1.64.

**UNDIRBÚNINGUR 9.13**

Einfaldið: $\left(\sqrt{5}\right)^2$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið
rifja upp dæmi 9.48.

**UNDIRBÚNINGUR 9.14**

Margfaldið: $(7+3x)(7-3x)$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja
upp dæmi 6.54.

## Deilið ferningsrótum

Við vitum að við einföldum brot með því að fella út sameiginlega þætti teljara og nefnara. Þegar ferningsrót er í teljara brots einföldum við ferningsrótina fyrst. Síðan getum við leitað að sameiginlegum þáttum.

Sameiginlegir þættir Engir sameiginlegir þættir

$$\frac{3\sqrt{2}}{3 \cdot 5} \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 5}$$

**DÆMI 9.60**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{54}}{6}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt{54}}{6}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $\frac{\sqrt{9} \cdot \sqrt{6}}{6}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3\sqrt{6}}{6}$ |
| Fellið út sameiginlegu þættina. | $\frac{3\sqrt{6}}{3 \cdot 2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.119**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{32}}{8}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.120**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{75}}{15}$.

**DÆMI 9.61**

Einfaldið: $\frac{6-\sqrt{24}}{12}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{6-\sqrt{24}}{12}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $\frac{6-\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}}{12}$ |
| Einfaldið. | $\frac{6-2\sqrt{6}}{12}$ |
| Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í teljaranum. | $\frac{2\left(3-\sqrt{6}\right)}{2\cdot 6}$ |
| Fellið út sameiginlegu þættina. | $\frac{2\left(3-\sqrt{6}\right)}{2\cdot 6}$ |
| Einfaldið. | $\frac{3-\sqrt{6}}{6}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.121**

Einfaldið: $\frac{8-\sqrt{40}}{10}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.122**

Einfaldið: $\frac{10-\sqrt{75}}{20}$.

Við höfum notað kvótareglu fyrir ferningsrætur til að einfalda ferningsrætur af brotum. Kvótareglan fyrir ferningsrætur segir að

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b\neq 0$$

Stundum þurfum við að nota kvótareglu fyrir ferningsrætur „aftur á bak“ til að einfalda brot með ferningsrótum.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, b\neq 0$$

Við skrifum kvótaregluna fyrir ferningsrætur aftur þannig að við sjáum hana í báðar áttir í einu. Munið að við gerum ráð fyrir að allar breytur séu stærri en eða jafnar núlli svo ferningsrætur þeirra séu rauntölur.

**KVÓTAREGLA FYRIR FERNINGSRÆTUR**

Ef a og b eru óneikvæðar rauntölur og $b \neq 0$, þá er

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ og } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Við notum kvótareglu fyrir ferningsrætur „aftur á bak“ þegar upphaflega brotið er kvóti tveggja ferningsróta og hvorugur rótarstofninn er ferningstala. Þegar við skrifum brotið undir einu rótarmerki gætum við fundið sameiginlega þætti í teljara og nefnara.

**DÆMI 9.62**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{75}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{75}}$ |
| Hvorugur rótarstofninn er ferningstala og því endurskrifum við með kvótareglu fyrir ferningsrætur. | $\sqrt{\frac{27}{75}}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti teljara og nefnara. | $\sqrt{\frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 25}}$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{\frac{9}{25}}$ |
| | $\frac{3}{5}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.123**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{108}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.124**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{54}}$.

Við notum kvótareglu fyrir veldi, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, þegar breytur með veldisvísa eru í rótarstofnunum.

**DÆMI 9.63**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{6y^5}}{\sqrt{2y}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt{6y^5}}{\sqrt{2y}}$ |
| Hvorugur rótarstofninn er ferningstala og því endurskrifum við með kvótareglu fyrir ferningsrætur. | $\sqrt{\frac{6y^5}{2y}}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti teljara og nefnara. | $\sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot y^4 \cdot y}{2 \cdot y}}$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{3y^4}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $y^2\sqrt{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.125**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{12r^3}}{\sqrt{6r}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.126**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{14p^9}}{\sqrt{2p^5}}$.

**DÆMI 9.64**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{72x^3}}{\sqrt{162x}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt{72x^3}}{\sqrt{162x}}$ |
| Endurskrifið með kvótareglu fyrir ferningsrætur. | $\sqrt{\frac{72x^3}{162x}}$ |
| Fellið sameiginlega þætti burt. | $\sqrt{\frac{18 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x}{18 \cdot 9 \cdot x}}$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{\frac{4x^2}{9}}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $\frac{2x}{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.127**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{50s^3}}{\sqrt{128s}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.128**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{75q^5}}{\sqrt{108q}}$.

**DÆMI 9.65**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{147ab^8}}{\sqrt{3a^3b^4}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt{147ab^8}}{\sqrt{3a^3b^4}}$ |
| Endurskrifið með kvótareglu fyrir ferningsrætur. | $\sqrt{\frac{147ab^8}{3a^3b^4}}$ |
| Fellið sameiginlega þætti burt. | $\sqrt{\frac{49b^4}{a^2}}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $\frac{7b^2}{a}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.129**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{162x^{10}y^2}}{\sqrt{2x^6y^6}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.130**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{300m^3n^7}}{\sqrt{3m^5n}}$.

## Eyðið ferningsrót úr nefnara með einum lið

Áður en reiknivélar urðu hluti af daglegu lífi notaði fólk ferningsrótatöflur til að finna nálgunargildi ferningsróta. Mynd 9.3 sýnir hluta úr töflu yfir ferninga og ferningsrætur. Ferningsræturnar í töflunni eru nálgaðar með fimm aukastöfum.

| $n$ | $n^2$ | $\sqrt{n}$ |
|---|---|---|
| **200** | 40.000 | 14,14214 |
| 201 | 40.401 | 14,17745 |
| 202 | 40.804 | 14,21267 |
| 203 | 41.209 | 14,24781 |
| 204 | 41.616 | 14,28286 |
| 205 | 42.025 | 14,31782 |
| 206 | 42.436 | 14,35270 |
| 207 | 42.849 | 14,38749 |
| 208 | 43.264 | 14,42221 |
| 209 | 43.681 | 14,45683 |
| **210** | 44.100 | 14,49138 |

Mynd 9.3 Áður en reiknivélar komu til sögunnar voru ferningsrótatöflur notaðar til að finna nálgunargildi ferningsróta.

Ef finna þurfti nálgunargildi brots með ferningsrót í nefnara varð að reikna langa deilingu með deili sem hafði fimm aukastafi. Það var mikil fyrirhöfn.

Þess vegna var þróuð aðferð sem kallast að eyða ferningsrót úr nefnara. Broti með rótarstæðu í nefnara er breytt í jafngilt brot þar sem nefnarinn er heiltala. Aðferðin er enn notuð og nýtist einnig á öðrum sviðum stærðfræðinnar.

**AÐ EYÐA FERNINGSRÓT ÚR NEFNARA**

Að breyta broti með rótarstæðu í nefnara í jafngilt brot þar sem nefnarinn er heiltala kallast að eyða ferningsrót úr nefnara.

Ferningsrætur talna sem eru ekki ferningstölur eru óræðar tölur. Þegar við eyðum ferningsrót úr nefnara skrifum við jafngilt brot með ræðri tölu í nefnara.

Skoðum töludæmi.

Gerum ráð fyrir að við þurfum nálgunargildi brotsins. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Nálgun með fimm aukastöfum á $\sqrt{2}$ er $1{,}41421$. $\dfrac{1}{1{,}41421}$

Mynduð þið vilja framkvæma þessa deilingu án reiknivélar? $1{,}41421\,1{,}0$

Við getum fundið brot sem er jafngilt $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ með því að margfalda teljara og nefnara með $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ef við þurfum nú nálgunargildi deilum við $2\,1{,}41421$. Það er mun auðveldara.

Þótt reiknivélar séu nú aðgengilegar nánast alls staðar þarf samt að eyða rótarstæðu úr nefnara brots. Brotið telst ekki að fullu einfaldað ef ferningsrót er í nefnaranum.

Á sama hátt telst ferningsrót ekki að fullu einfölduð ef brot er í rótarstofninum.

---

**EINFALDAÐAR FERNINGSRÆTUR**

Ferningsrót telst að fullu einfölduð ef

- engir þættir sem eru ferningstölur eru í rótarstofninum
- engin brot eru í rótarstofninum
- engar ferningsrætur eru í nefnara brots

Til að eyða ferningsrót úr nefnara notum við regluna $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Ef við hefjum óræða ferningsrót í annað veldi fáum við ræða tölu.

Við notum þessa reglu til að eyða ferningsrót úr nefnara í næsta dæmi.

---

**DÆMI 9.66**

Einfaldið: $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

## Lausn

Til að eyða ferningsrót úr nefnara getum við margfaldað ferningsrót með sjálfri sér. Til að brotið haldist jafngilt margföldum við bæði teljara og nefnara með sama þætti.

| | |
|---|---|
| | $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ |
| Margfaldið bæði teljara og nefnara með $\sqrt{3}$. | $\dfrac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ |
| Einfaldið. | $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ |

9

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.131**

Einfaldið: $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.132**

Einfaldið: $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

**DÆMI 9.67**

Einfaldið: $-\frac{8}{3\sqrt{6}}$.

## Lausn

Til að fjarlægja ferningsrótina úr nefnaranum margföldum við hana með sjálfri sér. Til að brotin haldist jafngild margföldum við bæði teljara og nefnara með $\sqrt{6}$.

| | |
|---|---|
| | $-\frac{8}{3\sqrt{6}}$ |
| Margfaldið bæði teljara og nefnara með $\sqrt{6}$. | $-\frac{8 \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{8\sqrt{6}}{3 \cdot 6}$ |
| Fellið sameiginlega þætti burt. | $-\frac{4 \cdot \cancel{2}\sqrt{6}}{3 \cdot \cancel{2} \cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $-\frac{4\sqrt{6}}{9}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.133**

Einfaldið: $\frac{5}{2\sqrt{5}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.134**

Einfaldið: $-\frac{9}{4\sqrt{3}}$.

Einfaldið alltaf rótarstæðuna í nefnaranum fyrst og eyðið síðan ferningsrótinni úr honum. Þá haldast tölurnar minni og auðveldara er að vinna með þær.

**DÆMI 9.68**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{5}{12}}$.

## Lausn

| | $\sqrt{\frac{5}{12}}$ |
|---|---|
| Brotið er ekki fullkomið ferningsbrot og því endurskrifum við með kvótareglunni. | $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$ |
| Eyðið ferningsrót úr nefnaranum. | $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{\sqrt{15}}{2\cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $\frac{\sqrt{15}}{6}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.135**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{7}{18}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.136**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{3}{32}}$.

**DÆMI 9.69**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{11}{28}}$.

### Lausn

| | $\sqrt{\frac{11}{28}}$ |
|---|---|
| Endurskrifið með kvótareglunni. | $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{28}}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{7}}$ |
| Eyðið ferningsrót úr nefnaranum. | $\frac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{\sqrt{77}}{2\cdot 7}$ |
| Einfaldið. | $\frac{\sqrt{77}}{14}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.137**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{3}{27}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.138**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{10}{50}}$.

## Eyðið ferningsrót úr nefnara með tveimur liðum

Þegar nefnari brots er summa eða mismunur með ferningsrótum notum við regluna um margfeldi samoka til að eyða ferningsrótum úr nefnaranum.

$$(a-b)(a+b) \qquad (2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})$$
$$a^2-b^2 \qquad 2^2-(\sqrt{5})^2$$
$$4-5$$
$$-1$$

Þegar við margföldum tvílið sem inniheldur ferningsrót með samoka hans verða engar ferningsrætur í margfeldinu.

**DÆMI 9.70**

Einfaldið: $\frac{4}{4+\sqrt{2}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{4}{4+\sqrt{2}}$ |
| Margfaldið teljara og nefnara með samoka nefnarans. | $\frac{4(4-\sqrt{2})}{(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})}$ |
| Margfaldið samokana í nefnaranum. | $\frac{4(4-\sqrt{2})}{4^2-(\sqrt{2})^2}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{4(4-\sqrt{2})}{16-2}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{4(4-\sqrt{2})}{14}$ |
| Fellið út sameiginlega þætti teljara og nefnara. | $\frac{2(4-\sqrt{2})}{7}$ |
| Við látum teljarann standa á þáttaformi svo auðveldara sé að leita að sameiginlegum þáttum eftir að við höfum einfaldað nefnarann. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.139**

Einfaldið: $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.140**

Einfaldið: $\frac{5}{5+\sqrt{3}}$.

**DÆMI 9.71**

Einfaldið: $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{5}{2-\sqrt{3}}$ |
| Margfaldið teljara og nefnara með samoka nefnarans. | $\frac{5(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$ |
| Margfaldið samokana í nefnaranum. | $\frac{5(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{5(2+\sqrt{3})}{4-3}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{5(2+\sqrt{3})}{1}$ |
| Einfaldið. | $5(2+\sqrt{3})$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.141**

Einfaldið: $\frac{3}{1-\sqrt{5}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.142**

Einfaldið: $\frac{2}{4-\sqrt{6}}$.

**DÆMI 9.72**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{u}-\sqrt{6}}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{u}-\sqrt{6}}$ |
| Margfaldið teljara og nefnara með samoka nefnarans. | $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{u}+\sqrt{6})}{(\sqrt{u}-\sqrt{6})(\sqrt{u}+\sqrt{6})}$ |
| Margfaldið samokana í nefnaranum. | $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{u}+\sqrt{6})}{(\sqrt{u})^2-(\sqrt{6})^2}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{u}+\sqrt{6})}{u-6}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.143**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.144**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{y}-\sqrt{3}}$.

**DÆMI 9.73**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$.

## Lausn

| | $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ |
|---|---|
| Margfaldið teljara og nefnara með samoka nefnarans. | $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})}$ |
| Margfaldið samokana í nefnaranum. | $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{7})^2}$ |
| Einfaldið nefnarann. | $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{7})^2}{x-7}$ |
| Við hefjum teljarann ekki í annað veldi. Á þáttaformi sjáum við að engir sameiginlegir þættir teljara og nefnara falla út. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.145**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{p}+\sqrt{2}}{\sqrt{p}-\sqrt{2}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.146**

Einfaldið: $\frac{\sqrt{q}-\sqrt{10}}{\sqrt{q}+\sqrt{10}}$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að fá meiri kennslu og æfingu í að deila og eyða ferningsrót úr nefnara.

- Deiling og eyðing ferningsrótar úr nefnara

## Verkefni úr hluta 9.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Deilið ferningsrótum**

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir.

317.

$$\frac{\sqrt{27}}{6}$$

318.

$$\frac{\sqrt{50}}{10}$$

319.

$$\frac{\sqrt{72}}{9}$$

320.

$$\frac{\sqrt{243}}{6}$$

321.

$$\frac{2-\sqrt{32}}{8}$$

322.

$$\frac{3+\sqrt{27}}{9}$$

323.

$$\frac{6+\sqrt{45}}{6}$$

324.

$$\frac{10-\sqrt{200}}{20}$$

325.

$$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{125}}$$

326.

$$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{200}}$$

327.

$$\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{72}}$$

328.

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}$$

**329.** ⓐ $\frac{\sqrt{8x^6}}{\sqrt{2x^2}}$ ⓑ $\frac{\sqrt{200m^5}}{\sqrt{98m}}$

**330.** ⓐ $\frac{\sqrt{10y^3}}{\sqrt{5y}}$ ⓑ $\frac{\sqrt{108n^7}}{\sqrt{243n^3}}$

331.

$$\frac{\sqrt{75r^3}}{\sqrt{108r}}$$

332.

$$\frac{\sqrt{196q^5}}{\sqrt{484q}}$$

333.

$$\frac{\sqrt{108p^5q^2}}{\sqrt{3p^3q^6}}$$

334.

$$\frac{\sqrt{98rs^{10}}}{\sqrt{2r^3s^4}}$$

335.

$$\frac{\sqrt{320mn^5}}{\sqrt{45m^7n^3}}$$

336.

$$\frac{\sqrt{810c^3d^7}}{\sqrt{1000c^5d}}$$

337.

$$\frac{\sqrt{98}}{14}$$

338.

$$\frac{\sqrt{72}}{18}$$

339.

$$\frac{5+\sqrt{125}}{15}$$

340.

$$\frac{6-\sqrt{45}}{12}$$

341.

$$\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{150}}$$

342.

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$$

343.

$$\frac{\sqrt{26\,y^7}}{\sqrt{2\,y}}$$

344.

$$\frac{\sqrt{15\,x^3}}{\sqrt{3\,x}}$$

**Eyðið ferningsrót úr nefnara með einum lið**

Einfaldið og eyðið ferningsrót úr nefnaranum í verkefnunum hér á eftir.

345.

$$\frac{10}{\sqrt{6}}$$

346.

$$\frac{8}{\sqrt{3}}$$

347.

$$\frac{6}{\sqrt{7}}$$

348.

$$\frac{4}{\sqrt{5}}$$

349.

$$\frac{3}{\sqrt{13}}$$

350.

$$\frac{10}{\sqrt{11}}$$

351.

$$\frac{10}{3\sqrt{10}}$$

352.

$$\frac{2}{5\sqrt{2}}$$

353.

$$\frac{4}{9\sqrt{5}}$$

354.

$$\frac{9}{2\sqrt{7}}$$

355.

$$-\frac{9}{2\sqrt{3}}$$

356.

$$-\frac{8}{3\sqrt{6}}$$

357.

$$\sqrt{\frac{3}{20}}$$

358.

$$\sqrt{\frac{4}{27}}$$

359.

$$\sqrt{\frac{7}{40}}$$

360.

$$\sqrt{\frac{8}{45}}$$

361.

$$\sqrt{\frac{19}{175}}$$

362.

$$\sqrt{\frac{17}{192}}$$

### Eyðið ferningsrót úr nefnara með tveimur liðum

Einfaldið í verkefnunum hér á eftir með því að eyða ferningsrótum úr nefnaranum.

**363.** ⓐ $\frac{3}{3+\sqrt{11}}$ ⓑ $\frac{8}{1-\sqrt{5}}$

**364.** ⓐ $\frac{4}{4+\sqrt{7}}$ ⓑ $\frac{7}{2-\sqrt{6}}$

**365.** ⓐ $\frac{5}{5+\sqrt{6}}$ ⓑ $\frac{6}{3-\sqrt{7}}$

**366.** ⓐ $\frac{6}{6+\sqrt{5}}$ ⓑ $\frac{5}{4-\sqrt{11}}$

367.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}-\sqrt{5}}$$

368.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{n}-\sqrt{7}}$$

369.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{6}}$$

370.

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{y}+\sqrt{3}}$$

371.

$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{5}}{\sqrt{r}-\sqrt{5}}$$

372.

$$\frac{\sqrt{s}-\sqrt{6}}{\sqrt{s}+\sqrt{6}}$$

373.

$$\frac{\sqrt{150\,x^2\,y^6}}{\sqrt{6\,x^4\,y^2}}$$

374.

$$\frac{\sqrt{80\,p^3\,q}}{\sqrt{5\,p\,q^5}}$$

375.

$$\frac{15}{\sqrt{5}}$$

376.

$$\frac{3}{5\sqrt{8}}$$

377.

$$\sqrt{\frac{8}{54}}$$

378.

$$\sqrt{\frac{12}{20}}$$

379.

$$\frac{3}{5+\sqrt{5}}$$

380.

$$\frac{20}{4-\sqrt{3}}$$

381.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$$

382.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{y}-\sqrt{7}}$$

383.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$$

384.

$$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{3}}{\sqrt{m}+\sqrt{3}}$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**385.** Birgðapakka er varpað úr flugvél sem flýgur í 250 feta hæð. Einfaldið $\sqrt{\frac{250}{16}}$ til að ákvarða hve margar sekúndur líða þar til pakkinn nær jörðu.

**386.** Blysi er varpað í hafið úr flugvél sem flýgur í 1.200 feta hæð. Einfaldið $\sqrt{\frac{1200}{16}}$ til að ákvarða hve margar sekúndur líða þar til blysið nær haffletinum.

### *Ritunarverkefni*

387.

1. ⓐ Einfaldið $\sqrt{\frac{27}{3}}$ og útskýrið öll skrefin.
2. ⓑ Einfaldið $\sqrt{\frac{27}{5}}$ og útskýrið öll skrefin.
3. ⓒ Hvers vegna eru þessar tvær aðferðir við að einfalda ferningsrætur ólíkar?

388.

1. ⓐ Finnið nálgunargildi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ með því að deila $\frac{1}{1{,}414}$ með langri deilingu án reiknivélar.
2. ⓑ Þegar ferningsrótinni er eytt úr nefnara $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fæst $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finnið nálgunargildi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ með því að deila $\frac{1{,}414}{2}$ með langri deilingu án reiknivélar.
3. ⓒ Eruð þið sammála því að auðveldara sé að reikna þegar ferningsrót hefur verið eytt úr nefnaranum? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| deilt ferningsrótum. | | | |
| eytt rót úr eins liðar nefnara. | | | |
| eytt rót úr tveggja liða nefnara. | | | |

ⓑ Teljið þið ykkur vel undirbúin fyrir næsta hluta nú þegar þið hafið skoðað gátlistann? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

## 9.6 Leysið jöfnur með ferningsrótum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið rótarjöfnur
- Notið ferningsrætur í hagnýtum verkefnum

**UNDIRBÚNINGUR 9.15**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{9}$ ⓑ $9^2$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 9.1 og dæmi 1.19.

**UNDIRBÚNINGUR 9.16**

Leysið: $5(x+1)-4=3(2x-7)$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 2.42.

**UNDIRBÚNINGUR 9.17**

Leysið: $n^2 - 6n + 8 = 0$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 7.73.

## Leysið rótarjöfnur

Í þessum hluta leysum við jöfnur þar sem breytan er í rótarstofni ferningsrótar. Jöfnur af þessari gerð kallast rótarjöfnur.

**RÓTARJAFNA**

Jafna þar sem breytan er í rótarstofni ferningsrótar kallast rótarjafna.

Eins og venjulega þarf að gera það sama við báðar hliðar jöfnunnar þegar þessar jöfnur eru leystar. Að hefja stærð í annað veldi og að taka ferningsrót eru andhverfar reikniaðgerðir. Því hefjum við báðar hliðar í annað veldi til að fjarlægja rótarmerkið og einangra breytuna undir því.

Munið þó að þegar við skrifum $\sqrt{a}$ eigum við við jákvæðu ferningsrótina. Því er $\sqrt{a} \geq 0$ alltaf. Þegar rótarjafna er leyst með því að hefja báðar hliðar í annað veldi getur fengist algebruleg lausn sem gerir $\sqrt{a}$ neikvætt. Slík algebruleg lausn er ekki lausn upphaflegu rótarjöfnunnar heldur aukalausn. Við sáum einnig aukalausnir þegar við leystum ræðar jöfnur.

**DÆMI 9.74**

Fyrir jöfnuna $\sqrt{x+2} = x$:

ⓐ Er $x = 2$ lausn? ⓑ Er $x = -1$ lausn?

## Lausn

ⓐ Er $x = 2$ lausn?

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{x+2} = x$ |
| Látum x = 2. | $\sqrt{2+2} \stackrel{?}{=} 2$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$ |
| | $2 = 2$ ✓ |
| | 2 er lausn. |

ⓑ Er $x = -1$ lausn?

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{x+2}=x$ |
| Látum x = −1. | $\sqrt{-1+2}\stackrel{?}{=}-1$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{1}\stackrel{?}{=}-1$ |
| | $1\neq -1$ |
| | −1 er ekki lausn. |
| | −1 er aukalausn jöfnunnar. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.147**

Fyrir jöfnuna $\sqrt{x+6}=x$:

ⓐ Er $x=-2$ lausn? ⓑ Er $x=3$ lausn?

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.148**

Fyrir jöfnuna $\sqrt{-x+2}=x$:

ⓐ Er $x=-2$ lausn? ⓑ Er $x=1$ lausn?

Nú skoðum við hvernig rótarjafna er leyst. Aðferðin byggist á tengslunum milli þess að taka ferningsrót og hefja í annað veldi.

$$\text{Fyrir } a\geq 0, \left(\sqrt{a}\right)^2=a$$

**DÆMI 9.75**

## Hvernig leysa á rótarjöfnur

Leysið: $\sqrt{2x-1}=7$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Einangrið rótina öðrum megin í jöfnunni. | $\sqrt{2x-1}$ er þegar einangruð vinstra megin. | $\sqrt{2x-1}=7$ |
| **Skref 2.** Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað jöfnunnar. | Munið að $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ | $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=(7)^2$ |
| **Skref 3.** Leysið nýju jöfnuna. | | $2x-1=49$<br>$2x=50$<br>$x=25$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Prófið svarið. | | Prófun:<br>$\sqrt{2x-1}=7$<br>$\sqrt{2(25)-1}\stackrel{?}{=}7$<br>$\sqrt{50-1}\stackrel{?}{=}7$<br>$\sqrt{49}\stackrel{?}{=}7$<br>$7=7\checkmark$<br>Lausnin er $x=25$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.149**

Leysið: $\sqrt{3x-5}=5$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.150**

Leysið: $\sqrt{4x+8}=6$.

**AÐFERÐ**

## Leysið rótarjöfnu.

1. Skref 1. Einangrið rótarstæðuna öðrum megin í jöfnunni.
2. Skref 2. Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi.
3. Skref 3. Leysið nýju jöfnuna.
4. Skref 4. Sannreynið svarið.

**DÆMI 9.76**

Leysið: $\sqrt{5n-4}-9=0$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{5n-4}-9=0$ |
| Til að einangra rótarstæðuna leggjum við 9 við báðar hliðar. | $\sqrt{5n-4}-9+9=0+9$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{5n-4}=9$ |
| Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. | $(\sqrt{5n-4})^2=(9)^2$ |
| Leysið nýju jöfnuna. | $5n-4=81$ |
| | $5n=85$ |
| | $n=17$ |
| Sannreynið svarið. | |

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{5n-4}-9=0$ |
| | $\sqrt{5(17)-4}-9\stackrel{?}{=}0$ |
| | $\sqrt{85-4}-9\stackrel{?}{=}0$ |
| | $\sqrt{81}-9\stackrel{?}{=}0$ |
| | $9-9\stackrel{?}{=}0$ |
| | $0=0\checkmark$ |
| Lausnin er n = 17. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.151**

Leysið: $\sqrt{3m+2}-5=0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.152**

Leysið: $\sqrt{10z+1}-2=0$.

**DÆMI 9.77**

Leysið: $\sqrt{3y+5}+2=5$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{3y+5}+2=5$ |
| Til að einangra rótarstæðuna drögum við 2 frá báðum hliðum. | $\sqrt{3y+5}+2-2=5-2$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{3y+5}=3$ |
| Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. | $(\sqrt{3y+5})^2=(3)^2$ |
| Leysið nýju jöfnuna. | $3y+5=9$ |
| | $3y=4$ |
| | $y=\frac{4}{3}$ |
| Sannreynið svarið. | |
| | $\sqrt{3y+5}+2=5$ |
| | $\sqrt{3\left(\frac{4}{3}\right)+5}+2\stackrel{?}{=}5$ |
| | $\sqrt{4+5}+2\stackrel{?}{=}5$ |
| | $\sqrt{9}+2\stackrel{?}{=}5$ |
| | $3+2\stackrel{?}{=}5$ |
| | $5=5\checkmark$ |

Lausnin er $y=\frac{4}{3}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.153**

Leysið: $\sqrt{3p+3}+3=5$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.154**

Leysið: $\sqrt{5q+1}+4=6$.

Þegar rótarmerki er notað er átt við jákvæðu ferningsrótina. Ef ferningsrót er jöfn neikvæðri tölu hefur jafnan enga lausn.

**DÆMI 9.78**

Leysið: $\sqrt{9k-2}+1=0$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{9k-2}+1=0$ |
| Til að einangra rótarstæðuna drögum við 1 frá báðum hliðum. | $\sqrt{9k-2}+1-1=0-1$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{9k-2}=-1$ |
| Þar sem ferningsrótin er jöfn neikvæðri tölu hefur jafnan enga lausn. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.155**

Leysið: $\sqrt{2r-3}+5=0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.156**

Leysið: $\sqrt{7s-3}+2=0$.

Ef önnur hlið jöfnunnar er tvíliður notum við ferningsreglu tvíliða þegar við hefjum hana í annað veldi.

**FERNINGAR TVÍLIÐA**

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Ekki gleyma miðliðnum!

**DÆMI 9.79**

Leysið: $\sqrt{p-1}+1=p$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{p-1}+1=p$ |
| Til að einangra rótarstæðuna drögum við 1 frá báðum hliðum. | $\sqrt{p-1}+1-1=p-1$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{p-1}=p-1$ |
| Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. | $\left(\sqrt{p-1}\right)^2=(p-1)^2$ |
| Einfaldið og leysið síðan nýju jöfnuna. | $p-1=p^2-2p+1$ |
| Þetta er annars stigs jafna, svo fáið núll öðrum megin. | $0=p^2-3p+2$ |
| Þáttið hægri hliðina. | $0=(p-1)(p-2)$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $0=p-1 \quad 0=p-2$ |
| Leysið hvora jöfnu. | $p=1 \quad p=2$ |
| Athugið svörin. | |

$p=1$: $\sqrt{p-1}+1=p$; $\sqrt{1-1}+1\stackrel{?}{=}1$; $\sqrt{0}+1\stackrel{?}{=}1$; $1=1$ ✓

$p=2$: $\sqrt{p-1}+1=p$; $\sqrt{2-1}+1\stackrel{?}{=}2$; $\sqrt{1}+1\stackrel{?}{=}2$; $2=2$ ✓

Lausnirnar eru p = 1 og p = 2.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.157**

Leysið: $\sqrt{x-2}+2=x$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.158**

Leysið: $\sqrt{y-5}+5=y$.

**DÆMI 9.80**

Leysið: $\sqrt{r+4}-r+2=0$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{r+4}-r+2=0$ |
| Einangrið rótarstæðuna. | $\sqrt{r+4}=r-2$ |

| | |
|---|---|
| Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. | $\left(\sqrt{r+4}\right)^2=(r-2)^2$ |
| Leysið nýju jöfnuna. | $r+4=r^2-4r+4$ |
| Þetta er annars stigs jafna, svo fáið núll öðrum megin. | $0=r^2-5r$ |
| Þáttið hægri hliðina. | $0=r(r-5)$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $0=r\,0=r-5$ |
| Leysið jöfnuna. | $r=0\,r=5$ |
| Sannreynið svarið. | |
| $r=0$ $\sqrt{r+4}-r+2=0$ $\sqrt{0+4}-0+2\stackrel{?}{=}0$ $\sqrt{4}+2\stackrel{?}{=}0$ $4\neq 0$ <br> $r=5$ $\sqrt{r+4}-r+2=0$ $\sqrt{5+4}-5+2\stackrel{?}{=}0$ $\sqrt{9}-3\stackrel{?}{=}0$ $0=0\checkmark$ | Lausnin er $r=5$. |
| | $r=0$ er aukalausn. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.159**

Leysið: $\sqrt{m+9}-m+3=0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.160**

Leysið: $\sqrt{n+1}-n+1=0$.

Þegar stuðull er fyrir framan rótarstæðuna verðum við einnig að hefja hann í annað veldi.

**DÆMI 9.81**

Leysið: $3\sqrt{3x-5}-8=4$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $3\sqrt{3x-5}-8=4$ |
| Einangrið rótarstæðuna. | $3\sqrt{3x-5}=12$ |
| Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. | $\left(3\sqrt{3x-5}\right)^2=(12)^2$ |
| Einfaldið og leysið síðan nýju jöfnuna. | $9(3x-5)=144$ |
| Beitið dreifireglu. | $27x-45=144$ |
| Leysið jöfnuna. | $27x=189$ |

| | |
|---|---|
| | $x=7$ |
| Sannreynið svarið. | |
| $x=7$ $3\sqrt{3x-5}-8=4$<br>$3\sqrt{3(7)-5}-8\stackrel{?}{=}4$<br>$3\sqrt{21-5}-8\stackrel{?}{=}4$<br>$3\sqrt{16}-8\stackrel{?}{=}4$<br>$3(4)-8\stackrel{?}{=}4$<br>$4=4\checkmark$ | Lausnin er $x=7$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.161**

Leysið: $2\sqrt{4a+2}-16=16$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.162**

Leysið: $3\sqrt{6b+3}-25=50$.

**DÆMI 9.82**

Leysið: $\sqrt{4z-3}=\sqrt{3z+2}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{4z-3}=\sqrt{3z+2}$ |
| Rótarliðirnir eru einangraðir. | $\sqrt{4z-3}=\sqrt{3z+2}$ |
| Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi. | $\left(\sqrt{4z-3}\right)^2=\left(\sqrt{3z+2}\right)^2$ |
| Einfaldið og leysið síðan nýju jöfnuna. | $4z-3=3z+2$<br>$z-3=2$<br>$z=5$ |
| Sannreynið svarið. | |
| Við látum ykkur eftir að sýna að 5 stenst athugunina! | Lausnin er $z=5$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.163**

Leysið: $\sqrt{2x-5}=\sqrt{5x+3}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.164**

Leysið: $\sqrt{7y+1}=\sqrt{2y-5}$.

Stundum er breyta enn undir rótarmerki eftir að við höfum hafið báðar hliðar jöfnu í annað veldi. Þá endurtökum við skref 1 og skref 2 í aðferðinni. Við einangrum rótarstæðuna og hefjum báðar hliðar jöfnunnar aftur í annað veldi.

**DÆMI 9.83**

Leysið: $\sqrt{m}+1=\sqrt{m+9}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{m}+1=\sqrt{m+9}$ |
| Rótarstæðan hægra megin er einangruð. Hefjið báðar hliðar í annað veldi. | $\left(\sqrt{m}+1\right)^2=\left(\sqrt{m+9}\right)^2$ |
| Einfaldið og vandið ykkur sérstaklega við margföldunina! | $m+2\sqrt{m}+1=m+9$ |
| Enn er rótarstæða í jöfnunni og því verðum við að endurtaka síðustu skref. Einangrið rótarstæðuna. | $2\sqrt{m}=8$ |
| Hefjið báðar hliðar í annað veldi. | $\left(2\sqrt{m}\right)^2=\left(8\right)^2$ |
| Einfaldið og leysið síðan nýju jöfnuna. | $4m=64$ |
| | $m=16$ |
| | Sannreynið svarið. |
| Við látum ykkur eftir að sýna að $m=16$ stenst athugunina! | Lausnin er $m=16$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.165**

Leysið: $\sqrt{x}+3=\sqrt{x+5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.166**

Leysið: $\sqrt{m}+5=\sqrt{m+16}$.

**DÆMI 9.84**

Leysið: $\sqrt{q-2}+3=\sqrt{4q+1}$.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{q-2}+3=\sqrt{4q+1}$ |
| Rótarstæðan hægra megin er einangruð. Hefjið báðar hliðar í annað veldi. | $\left(\sqrt{q-2}+3\right)^2=\left(\sqrt{4q+1}\right)^2$ |
| Einfaldið. | $q-2+6\sqrt{q-2}+9=4q+1$ |
| Enn er rótarstæða í jöfnunni og því verðum við að endurtaka síðustu skref. Einangrið rótarstæðuna. | $6\sqrt{q-2}=3q-6$ |
| Hefjið báðar hliðar í annað veldi. | $\left(6\sqrt{q-2}\right)^2=\left(3q-6\right)^2$ |
| Einfaldið og leysið síðan nýju jöfnuna. | $36\left(q-2\right)=9q^2-36q+36$ |
| Beitið dreifireglu. | $36q-72=9q^2-36q+36$ |
| Þetta er annars stigs jafna, svo fáið núll öðrum megin. | $0=9q^2-72q+108$ |
| Þáttið hægri hliðina. | $0=9\left(q^2-8q+12\right)$ |
| | $0=9\left(q-6\right)\left(q-2\right)$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $q-6=0 \qquad q-2=0$<br>$q=6 \qquad q=2$ |
| Við látum ykkur eftir að athuga svörin. Báðar lausnirnar ættu að ganga upp. | Lausnirnar eru $q=6$ og $q=2$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.167**

Leysið: $\sqrt{y-3}+2=\sqrt{4y+2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.168**

Leysið: $\sqrt{n-4}+5=\sqrt{3n+3}$.

## Notið ferningsrætur í hagnýtum verkefnum

Eftir því sem þið haldið áfram í námi rekist þið á formúlur með ferningsrótum í mörgum greinum. Við höfum þegar notað formúlur til að leysa rúmfræðiverkefni.

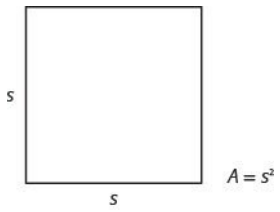
Við notum verkefnalausnaraðferðina fyrir rúmfræðiverkefni með smávægilegum breytingum. Hún gefur okkur áætlun til að leysa verkefni með formúlum úr hvaða fræðigrein sem er.

**AÐFERÐ**

### Leysið hagnýt verkefni með formúlum.

1. Skref 1. Lesið verkefnið og gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. Teiknið mynd þegar það á við og merkið gefnar upplýsingar inn á hana.
2. Skref 2. Finnið hverju er leitað að.
3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að með því að velja breytu sem táknar stærðina.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Við notuðum formúluna $A = L \cdot W$ til að finna flatarmál rétthyrnings með lengdina L og breiddina W. Ferningur er rétthyrningur þar sem lengd og breidd eru jafnar. Ef s táknar hliðarlengd fernings er flatarmál hans $s^2$.

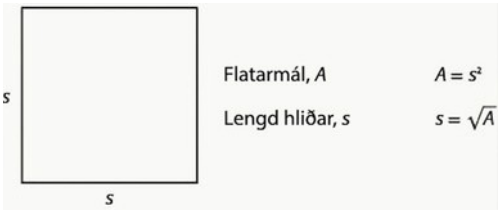



Formúlan $A = s^2$ gefur flatarmál fernings ef hliðarlengdin er þekkt. En hvað ef við viljum finna hliðarlengdina út frá gefnu flatarmáli? Þá þurfum við að einangra s í jöfnunni.

| | |
|---|---|
| | $A = s^2$ |
| Takið ferningsrót beggja hliða. | $\sqrt{A} = \sqrt{s^2}$ |
| Einfaldið. | $\sqrt{A} = s$ |

Við getum notað formúluna $s = \sqrt{A}$ til að finna hliðarlengd fernings út frá gefnu flatarmáli.

**FLATARMÁL FERNINGS**

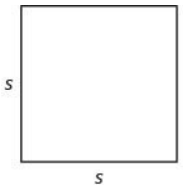



Við sýnum þetta í næsta dæmi.

**DÆMI 9.85**

Mike og Lychelle vilja leggja ferningslaga verönd. Þau eiga næga steypu til að þekja 200 ferfeta svæði. Notið formúluna $s=\sqrt{A}$ til að finna lengd hverrar hliðar verandarinnar. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Teiknið mynd og merkið gefnar upplýsingar inn á hana. |  |
| | *A = 200 ferfet* |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Hliðarlengd ferningslaga verandarinnar. |
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að og veljið breytu sem táknar hana. | Látum s = hliðarlengd. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn. | $s=\sqrt{A}$, og $A=200$<br>$s=\sqrt{200}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum. Námundið að einum aukastaf. | $s=14,14213...$<br>$s\approx 14,1$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. | |
| $14,1^2 \overset{?}{\approx} 200$<br>$14,1^2 \approx 198,81$ ✓ | |
| Þetta er nægilega nálægt þar sem við námunduðum ferningsrótina. Er verönd með hliðarlengdina 14,1 fet raunhæf? Já. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Hver hlið verandarinnar ætti að vera 14,1 fet. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.169**

Katie vill leggja ferningslaga grasflöt í framgarðinum. Hún á nægar grasþökur til að þekja 370 ferfeta svæði. Notið formúluna $s=\sqrt{A}$ til að finna lengd hverrar hliðar grasflatarinnar. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.170**

Sergio vill gera ferningslaga mósaíkinnlegg í borð sem hann er að smíða. Hann á nægar flísar til að þekja 2704 fersentímetra svæði. Notið formúluna $s=\sqrt{A}$ til að finna lengd hverrar hliðar mósaíksins. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr sentímetra.

Önnur hagnýting ferningsróta tengist þyngdarafli.

**FALLANDI HLUTIR**

Ef hlut er sleppt úr $h$ feta hæð á jörðinni má finna tímann í sekúndum sem það tekur hann að ná jörðu með formúlunni

$$t=\frac{\sqrt{h}}{4}$$

Ef hlut er til dæmis sleppt úr 64 feta hæð getum við fundið tímann sem það tekur hann að ná jörðu með því að setja $h=64$ inn í formúluna.

| | |
|---|---|
| | $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ |
| | $t=\frac{\sqrt{64}}{4}$ |
| Takið ferningsrótina af 64. | $t=\frac{8}{4}$ |
| Einfaldið brotið. | $t=2$ |

Það tæki hlut sem sleppt er úr 64 feta hæð 2 sekúndur að ná jörðu.

**DÆMI 9.86**

Christy missti sólgleraugun sín af brú sem er 400 fet yfir fljóti. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til gleraugun náðu fljótinu.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið dæmið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju leitað er að. | Tíminn sem það tekur sólgleraugun að ná ánni. |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið stærðina sem leitað er að og veljið breytu sem táknar hana. | Látum t = tími. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn. | $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$, og $h=400$<br>$t=\frac{\sqrt{400}}{4}$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum. | $t=\frac{20}{4}$<br>$t=5$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt. | |
| $5\stackrel{?}{=}\frac{\sqrt{400}}{4}$<br>$5\stackrel{?}{=}\frac{20}{4}$<br>$5=5\checkmark$ | |
| Virðast 5 sekúndur raunhæfur tími? Já. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni með heilli setningu. | Það tekur sólgleraugun 5 sekúndur að ná vatninu. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.171**

Þyrla sleppti björgunarpakka úr 1.296 feta hæð. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til pakkinn náði jörðu.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.172**

Gluggaþvottamaður missti sköfu af palli sem var 196 fet yfir gangstétt. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til skafan náði gangstéttinni.

Lögreglumenn sem rannsaka bílslys mæla lengd hemlafaranna á veginum. Síðan nota þeir ferningsrætur til að finna hraða bílsins í mílum á klukkustund áður en hemlað var.

**HEMLAFÖR OG HRAÐI BÍLS**

Ef lengd hemlafaranna er d fet má finna hraða bílsins, s, áður en hemlað var með formúlunni

$$s=\sqrt{24\,d}$$

**DÆMI 9.87**

Eftir bílslys mældust hemlaför eins bíls 190 fet. Notið formúluna $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða bílsins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Skref 1. Lesið dæmið. | |
| Skref 2. Finnið hverju er leitað að. | Hraði bíls. |
| Skref 3. Nefnið það sem leitað er að. | Látum s = hraði. |
| Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu. | $s=\sqrt{24d}$, og $d=190$ |
| Setjið gefnar upplýsingar inn. | $s=\sqrt{24(190)}$ |
| Skref 5. Leysið jöfnuna. | $s=\sqrt{4560}$ |
| | $s=67{,}52777\ldots$ |
| Námundið að 1 aukastaf. | $s\approx 67{,}5$ |
| Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið. $67{,}5\overset{?}{\approx}\sqrt{24(190)}$ $67{,}5\overset{?}{\approx}\sqrt{4560}$ $67{,}5\overset{?}{\approx}67{,}5277\ldots$ | |
| Er hraðinn 67,5 mílur á klukkustund raunhæfur? | Já. |
| Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu. | Hraði bílsins var um það bil 67,5 mílur á klukkustund. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.173**

Slysarannsakandi mældi hemlaför bíls. Hemlaförin voru 76 fet að lengd. Notið formúluna $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða bílsins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.174**

Hemlaför ökutækis sem lenti í slysi voru 122 fet að lengd. Notið formúluna $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða ökutækisins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

## Verkefni úr hluta 9.6

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið rótarjöfnur**

Athugið í eftirfarandi verkefnum hvort gefnu gildin séu lausnir.

**389.** Fyrir jöfnuna $\sqrt{x+12}=x$: ⓐ Er $x=4$ lausn? ⓑ Er $x=-3$ lausn?

**390.** Fyrir jöfnuna $\sqrt{-y+20}=y$: ⓐ Er $y=4$ lausn? ⓑ Er $y=-5$ lausn?

**391.** Fyrir jöfnuna $\sqrt{t+6}=t$: ⓐ Er $t=-2$ lausn? ⓑ Er $t=3$ lausn?

**392.** Fyrir jöfnuna $\sqrt{u+42}=u$: ⓐ Er $u=-6$ lausn? ⓑ Er $u=7$ lausn?

Leysið eftirfarandi verkefni.

393.

$$\sqrt{5y+1}=4$$

394.

$$\sqrt{7z+15}=6$$

395.

$$\sqrt{5x-6}=8$$

396.

$$\sqrt{4x-3}=7$$

397.

$$\sqrt{2m-3}-5=0$$

398.

$$\sqrt{2n-1}-3=0$$

399.

$$\sqrt{6v-2}-10=0$$

400.

$$\sqrt{4u+2}-6=0$$

401.

$$\sqrt{5q+3}-4=0$$

402.

$$\sqrt{4m+2}+2=6$$

403.

$$\sqrt{6n+1}+4=8$$

404.

$$\sqrt{2u-3}+2=0$$

405.

$$\sqrt{5v-2}+5=0$$

406.

$$\sqrt{3z-5}+2=0$$

407.

$$\sqrt{2m+1}+4=0$$

**408.**

ⓐ $\sqrt{u-3}+3=u$

ⓑ $\sqrt{x+1}-x+1=0$

**409.**

ⓐ $\sqrt{v-10}+10=v$

ⓑ $\sqrt{y+4}-y+2=0$

**410.**

ⓐ $\sqrt{r-1}-r=-1$

ⓑ $\sqrt{z+100}-z+10=0$

**411.**

ⓐ $\sqrt{s-8}-s=-8$

ⓑ $\sqrt{w+25}-w+5=0$

412.

$$3\sqrt{2x-3}-20=7$$

413.

$$2\sqrt{5x+1}-8=0$$

414.

$$2\sqrt{8r+1}-8=2$$

415.

$$3\sqrt{7y+1}-10=8$$

416.

$$\sqrt{3u-2}=\sqrt{5u+1}$$

417.

$$\sqrt{4v+3}=\sqrt{v-6}$$

418.

$$\sqrt{8+2r}=\sqrt{3r+10}$$

419.

$$\sqrt{12c+6}=\sqrt{10-4c}$$

**420.**

ⓐ $\sqrt{a}+2=\sqrt{a+4}$

ⓑ $\sqrt{b-2}+1=\sqrt{3b+2}$

**421.**

ⓐ $\sqrt{r}+6=\sqrt{r+8}$

ⓑ $\sqrt{s-3}+2=\sqrt{s+4}$

**422.**

ⓐ $\sqrt{u}+1=\sqrt{u+4}$

ⓑ $\sqrt{n-5}+4=\sqrt{3n+7}$

**423.**

ⓐ $\sqrt{x}+10=\sqrt{x+2}$

ⓑ $\sqrt{y-2}+2=\sqrt{2y+4}$

424.

$$\sqrt{2y+4}+6=0$$

425.

$$\sqrt{8u+1}+9=0$$

426.

$$\sqrt{a}+1=\sqrt{a+5}$$

427.

$$\sqrt{d}-2=\sqrt{d-20}$$

428.

$$\sqrt{6s+4}=\sqrt{8s-28}$$

429.

$$\sqrt{9p+9}=\sqrt{10p-6}$$

**Notið ferningsrætur í hagnýtum verkefnum**

Leysið eftirfarandi verkefni. Námundið nálgunargildi að einum aukastaf.

**430.** **Garðrækt Reed vill hafa ferningslaga garðreit í bakgarðinum. Hann á næga moltu til að þekja 75 ferfeta svæði. Notið formúluna** $s=\sqrt{A}$ til að finna lengd hverrar hliðar garðsins. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.

**431.** **Garðrækt Vince vill leggja ferningslaga verönd í garðinum. Hann á næga steypu til að þekja 130 ferfeta svæði. Notið formúluna** $s=\sqrt{A}$ til að finna lengd hverrar hliðar verandarinnar. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr feti.

**432.** **Þyngdarafl** Renee var að setja upp hátíðarskraut og missti ljósaperu frá toppi 64 feta hás trés. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til peran náði jörðu.

**433.** **Þyngdarafl** Flugvél sleppti blysi úr 1024 feta hæð yfir stöðuvatni. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til blysið náði vatninu.

**434.** **Þyngdarafl** Svifdrekaflugmaður missti farsímann sinn úr 350 feta hæð. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til síminn náði jörðu.

**435.** **Þyngdarafl** Byggingarverkamaður missti hamar meðan hann vann við útsýnispallinn yfir Miklagljúfur, 4000 fetum yfir Colorado-ánni. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til hamarinn náði ánni.

**436.** **Slysarannsókn Hemlaför bíls sem lenti í slysi mældust 54 fet. Notið formúluna** $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða bílsins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

**437.** **Slysarannsókn Hemlaför bíls sem lenti í slysi mældust 216 fet. Notið formúluna** $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða bílsins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

**438.** **Slysarannsókn Slysarannsakandi mældi hemlaför eins ökutækjanna sem lentu í slysi. Hemlaförin voru 175 fet að lengd. Notið formúluna** $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða ökutækisins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

**439.** **Slysarannsókn Slysarannsakandi mældi hemlaför eins ökutækjanna sem lentu í slysi. Hemlaförin voru 117 fet að lengd. Notið formúluna** $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða ökutækisins áður en hemlað var. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.

### *Ritunarverkefni*

**440.** Útskýrið hvers vegna jafna af gerðinni $\sqrt{x}+1=0$ hefur enga lausn.

441.

1. ⓐ Leysið jöfnuna $\sqrt{r+4}-r+2=0$.
2. ⓑ Útskýrið hvers vegna önnur „lausnin“ sem fékkst er í raun ekki lausn jöfnunnar.

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| notað ferningsrætur í hagnýtum verkefnum. | | | |

ⓑ Hvað ætlið þið að gera eftir yfirferð gátlistans til að öðlast örugga færni í öllum markmiðunum?

# 9.7 Hærri rætur

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið stæður með hærri rótum
- Notið margfeldisregluna til að einfalda stæður með hærri rótum
- Notið kvótaregluna til að einfalda stæður með hærri rótum
- Leggið saman og dragið frá hærri rætur

**UNDIRBÚNINGUR 9.18**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $y^5\,y^4$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.18.

**UNDIRBÚNINGUR 9.19**

Einfaldið: $\left(n^2\right)^6$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.22.

**UNDIRBÚNINGUR 9.20**

Einfaldið: $\frac{x^8}{x^3}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.59.

## Einfaldið stæður með hærri rótum

Hingað til höfum við unnið með ferninga og ferningsrætur í þessum kafla. Nú bætum við hærri veldum og hærri rótum við efnið.

Rifjum fyrst upp nokkur hugtök.

| Við ritum: | Við segjum: |
|---|---|
| $n^2$ | $n$ í öðru veldi |
| $n^3$ | $n$ í þriðja veldi |
| $n^4$ | $n$ í fjórða veldi |
| $n^5$ | $n$ í fimmta veldi |

Hugtökin „í öðru veldi“ og „í þriðja veldi“ eiga rætur að rekja til formúlanna fyrir flatarmál fernings og rúmmál tenings.

Gagnlegt er að hafa töflu yfir veldi heiltalnanna frá $-5$ til $5$. Sjá mynd 9.4.

| Tala | Annað veldi | Þriðja veldi | Fjórða veldi | Fimmta veldi |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^3$ | $n^5$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 |
| $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ |
| $x^2$ | $x^4$ | $x^6$ | $x^8$ | $x^{10}$ |

| Tala | Annað veldi | Þriðja veldi | Fjórða veldi | Fimmta veldi |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^4$ | $n^5$ |
| –1 | 1 | –1 | 1 | –1 |
| –2 | 4 | –8 | 16 | –32 |
| –3 | 9 | –27 | 81 | –243 |
| –4 | 16 | –64 | 256 | –1024 |
| –5 | 25 | –125 | 625 | –3125 |

Mynd 9.4 Fyrsta til fimmta veldi heiltalna frá $-5$ til $5$.

Takið eftir formerkjunum á mynd 9.4. Öll veldi jákvæðra talna eru að sjálfsögðu jákvæð. Fyrir neikvæðar tölur eru slétt veldi hins vegar jákvæð og oddatöluveldi neikvæð. Við afritum röðina með veldum $-2$ hér fyrir neðan til að sýna þetta betur.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^4$ | $n^5$ |
|---|---|---|---|---|
| –2 | 4 | –8 | 16 | –32 |

Fyrr í þessum kafla skilgreindum við ferningsrót tölu.

Ef $n^2 = m$, þá er $n$ ferningsrót af $m$.

Við höfum notað táknmálið $\sqrt{m}$ fyrir jákvæðu ferningsrótina. Því er $\sqrt{m} \geq 0$ alltaf.

Nú víkkum við skilgreininguna þannig að hún nái til hærri róta.

---

***N-TA RÓT TÖLU***

Ef $b^n = a$, þá er $b$ n-ta rót tölunnar $a$.

Sú n-ta rót tölunnar $a$ sem rótarmerkið táknar er skrifuð $\sqrt[n]{a}$.

n kallast rótarvísir rótarstæðunnar.

Rótarvísir er ekki skrifaður við ferningsrót. Rétt eins og við segjum „í þriðja veldi“ um $b^3$ notum við heitið „teningsrót“ um $\sqrt[3]{a}$.

Við styðjumst við mynd 9.4 þegar við finnum hærri rætur.

9

$$\begin{aligned} 4^3 &= 64 & \sqrt[3]{64} &= 4 \\ 3^4 &= 81 & \sqrt[4]{81} &= 3 \\ (-2)^5 &= -32 & \sqrt[5]{-32} &= -2 \end{aligned}$$

Getum við tekið rót með sléttum rótarvísi af neikvæðri tölu? Nei. Við vitum að ferningsrót neikvæðrar tölu er ekki rauntala. Hið sama gildir um allar rætur með sléttum rótarvísi. Slíkar rætur neikvæðra talna eru ekki rauntölur. Ef rótarvísirinn er oddatala eru rætur neikvæðra talna hins vegar rauntölur.

**EIGINLEIKAR $\sqrt[n]{a}$**

Þegar $n$ er slétt tala og

- $a \geq 0$, þá er $\sqrt[n]{a}$ rauntala
- $a < 0$, þá er $\sqrt[n]{a}$ ekki rauntala

Þegar $n$ er oddatala er $\sqrt[n]{a}$ rauntala fyrir öll gildi $a$.

**DÆMI 9.88**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{8}$ ⓑ $\sqrt[4]{81}$ ⓒ $\sqrt[5]{32}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt[3]{8}$ |
|---|---|
| Þar sem $(2)^3 = 8$. | $2$ |

ⓑ

| | $\sqrt[4]{81}$ |
|---|---|
| Þar sem $(3)^4 = 81$. | $3$ |

ⓒ

| | $\sqrt[5]{32}$ |
|---|---|
| Þar sem $(2)^5 = 32$. | $2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.175**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{27}$ ⓑ $\sqrt[4]{256}$ ⓒ $\sqrt[5]{243}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.176**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{1000}$ ⓑ $\sqrt[4]{16}$ ⓒ $\sqrt[5]{32}$.

**DÆMI 9.89**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{-64}$ ⓑ $\sqrt[4]{-16}$ ⓒ $\sqrt[5]{-243}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt[3]{-64}$ |
|---|---|
| Þar sem $(-4)^3=-64$. | $-4$ |

ⓑ

| | $\sqrt[4]{-16}$ |
|---|---|
| Hugsið: $(?)^4=-16$. Engin rauntala verður neikvæð þegar hún er hafin í fjórða veldi. | Ekki rauntala. |

ⓒ

| | $\sqrt[5]{-243}$ |
|---|---|
| Þar sem $(-3)^5=-243$. | $-3$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.177**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{-125}$ ⓑ $\sqrt[4]{-16}$ ⓒ $\sqrt[5]{-32}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.178**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{-216}$ ⓑ $\sqrt[4]{-81}$ ⓒ $\sqrt[5]{-1024}$.

Þegar við unnum með ferningsrætur sem höfðu breytur í rótarstofni takmörkuðum við breyturnar við gildi sem voru ekki neikvæð. Nú afléttum við þessari takmörkun.

Ef rótarvísirinn er oddatala getur rót tölu verið jákvæð eða neikvæð. Við höfum séð að $\sqrt[3]{-64}=-4$.

Ef rótarvísirinn er sléttur og talan er ekki neikvæð er rótin hins vegar alltaf óneikvæð. Það er vegna þess að við tökum þá n-tu rót sem rótarmerkið táknar.

Gerum ráð fyrir að við byrjum með $a=-5$.

$$(-5)^4 = 625 \qquad \sqrt[4]{625} = 5$$

Hvernig tryggjum við að fjórða rótin af mínus 5 í fjórða veldi, $(-5)^4$, sé 5? Það sést í reglunni hér á eftir.

---

**EINFÖLDUN RÓTA MEÐ ODDATÖLU- OG SLÉTTUM RÓTARVÍSUM**

Fyrir hverja heiltölu $n \geq 2$ gildir

| | |
|---|---|
| þegar $n$ er oddatala | $\sqrt[n]{a^n} = a$ |
| þegar $n$ er slétt | $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ |

Við verðum að nota algildismerki þegar við tökum rót með sléttum rótarvísi af stæðu sem hefur breytu undir rótarmerkinu.

---

**DÆMI 9.90**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{x^2}$ ⓑ $\sqrt[3]{n^3}$ ⓒ $\sqrt[4]{p^4}$ ⓓ $\sqrt[5]{y^5}$.

## Lausn

Við notum algildi til að tryggja að jákvæða rótin fáist.

ⓐ

| | $\sqrt{x^2}$ |
|---|---|
| Þar sem $(x)^2 = x^2$ og við viljum jákvæðu rótina. | $\lvert x \rvert$ |

ⓑ

| | $\sqrt[3]{n^3}$ |
|---|---|
| Þar sem $(n)^3 = n^3$. Rótarvísirinn er oddatala og því þarf ekki algildismerki. | $n$ |

ⓒ

| | $\sqrt[4]{p^4}$ |
|---|---|
| Þar sem $(p)^4 = p^4$ og við viljum jákvæðu rótina. | $\lvert p \rvert$ |

ⓓ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[5]{y^5}$ |
| Þar sem $\left(y\right)^5=y^5$. Rótarvísirinn er oddatala og því þarf ekki algildismerki. | $y$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.179**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{b^2}$ ⓑ $\sqrt[3]{w^3}$ ⓒ $\sqrt[4]{m^4}$ ⓓ $\sqrt[5]{q^5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.180**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt{y^2}$ ⓑ $\sqrt[3]{p^3}$ ⓒ $\sqrt[4]{z^4}$ ⓓ $\sqrt[5]{q^5}$.

**DÆMI 9.91**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{y^{18}}$ ⓑ $\sqrt[4]{z^8}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{y^{18}}$ |
| Þar sem $\left(y^6\right)^3=y^{18}$. | $\sqrt[3]{\left(y^6\right)^3}$ |
| | $y^6$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{z^8}$ |
| Þar sem $\left(z^2\right)^4=z^8$. | $\sqrt[4]{\left(z^2\right)^4}$ |
| Þar sem $z^2$ er jákvætt þurfum við ekki algildismerki. | $z^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.181**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[4]{u^{12}}$ ⓑ $\sqrt[3]{v^{15}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.182**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[5]{c^{20}}$ ⓑ $\sqrt[6]{d^{24}}$.

**DÆMI 9.92**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{64\,p^6}$ ⓑ $\sqrt[4]{16\,q^{12}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{64\,p^6}$ |
| Endurskrifið $64\,p^6$ sem $\left(4\,p^2\right)^3$. | $\sqrt[3]{\left(4\,p^2\right)^3}$ |
| Takið teningsrótina. | $4\,p^2$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{16\,q^{12}}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem fjórða veldi. | $\sqrt[4]{\left(2\,q^3\right)^4}$ |
| Takið fjórðu rótina. | $2\left\|q^3\right\|$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.183**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{27\,x^{27}}$ ⓑ $\sqrt[4]{81\,q^{28}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.184**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{125\,p^9}$ ⓑ $\sqrt[5]{243\,q^{25}}$.

9

## Notið margfeldisregluna til að einfalda stæður með hærri rótum

Við einföldum stæður með hærri rótum á svipaðan hátt og stæður með ferningsrótum. n-ta rót telst að fullu einfölduð ef hún hefur enga þætti af gerðinni $m^n$.

**EINFÖLDUÐ N-TA RÓT**

$\sqrt[n]{a}$ telst að fullu einfölduð ef $a$ hefur enga þætti af gerðinni $m^n$.

Við alhæfum margfeldisreglu fyrir ferningsrætur svo hún nái til hverrar heiltölurótar $n \geq 2$.

**MARGFELDISREGLA FYRIR N-TU RÆTUR**

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \quad \text{og} \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

þegar $\sqrt[n]{a}$ og $\sqrt[n]{b}$ eru rauntölur og fyrir hverja heiltölu $n\geq 2$

**DÆMI 9.93**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{x^4}$ ⓑ $\sqrt[4]{x^7}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt[3]{x^4}$ |
|---|---|
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með stærsta þættinum sem er fullkominn teningur. | $\sqrt[3]{x^3\cdot x}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x}$ |
| Einfaldið. | $x\sqrt[3]{x}$ |

ⓑ

| | $\sqrt[4]{x^7}$ |
|---|---|
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með stærsta þættinum sem er fjórða veldi. | $\sqrt[4]{x^4\cdot x^3}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{x^3}$ |
| Einfaldið. | $\lvert x\rvert\sqrt[4]{x^3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.185**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[4]{y^6}$ ⓑ $\sqrt[3]{z^5}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.186**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[5]{p^8}$ ⓑ $\sqrt[6]{q^{13}}$.

**DÆMI 9.94**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{16}$ ⓑ $\sqrt[4]{243}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{16}$ |
| | $\sqrt[3]{2^4}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með stærsta þættinum sem er fullkominn teningur. | $\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}$ |
| Einfaldið. | $2\sqrt[3]{2}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{243}$ |
| | $\sqrt[4]{3^5}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með stærsta þættinum sem er fjórða veldi. | $\sqrt[4]{3^4 \cdot 3}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3}$ |
| Einfaldið. | $3\sqrt[4]{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.187**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{81}$ ⓑ $\sqrt[4]{64}$.

9

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.188**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{625}$ ⓑ $\sqrt[4]{729}$.

Munið eftir algildismerkjunum þegar þið takið rót með sléttum rótarvísi af stæðu sem hefur breytu undir rótarmerkinu.

**DÆMI 9.95**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{24x^7}$ ⓑ $\sqrt[4]{80y^{14}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{24x^7}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með þáttum sem eru fullkomnir teningar. | $\sqrt[3]{2^3x^6 \cdot 3x}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[3]{2^3x^6} \cdot \sqrt[3]{3x}$ |
| Endurskrifið fyrri rótarstofninn sem $\left(2x^2\right)^3$. | $\sqrt[3]{\left(2x^2\right)^3} \cdot \sqrt[3]{3x}$ |
| Einfaldið. | $2x^2\sqrt[3]{3x}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{80y^{14}}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með þáttum sem eru fjórðu veldi. | $\sqrt[4]{2^4y^{12} \cdot 5y^2}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[4]{2^4y^{12}} \cdot \sqrt[4]{5y^2}$ |
| Endurskrifið fyrri rótarstofninn sem $\left(2y^3\right)^4$. | $\sqrt[4]{\left(2y^3\right)^4} \cdot \sqrt[4]{5y^2}$ |
| Einfaldið. | $2\left\|y^3\right\|\sqrt[4]{5y^2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.189**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{54p^{10}}$ ⓑ $\sqrt[4]{64q^{10}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.190**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{128m^{11}}$ ⓑ $\sqrt[4]{162n^7}$.

**DÆMI 9.96**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{-27}$ ⓑ $\sqrt[4]{-16}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{-27}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með þáttum sem eru fullkomnir teningar. | $\sqrt[3]{(-3)^3}$ |
| Takið teningsrótina. | $-3$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{-16}$ |
| Engin rauntala $n$ uppfyllir $n^4 = -16$. | Ekki rauntala. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.191**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{-108}$ ⓑ $\sqrt[4]{-48}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.192**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{-625}$ ⓑ $\sqrt[4]{-324}$.

## Notið kvótaregluna til að einfalda stæður með hærri rótum

Við getum einfaldað kvóta með hærri rótum á sama hátt og ferningsrætur. Fyrst einföldum við öll brot undir rótarmerkinu.

**DÆMI 9.97**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{\frac{a^8}{a^5}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{a^{10}}{a^2}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{\frac{a^8}{a^5}}$ |
| Einfaldið fyrst brotið undir rótarmerkinu. | $\sqrt[3]{a^3}$ |
| Einfaldið. | $a$ |

ⓑ

| | $\sqrt[4]{\frac{a^{10}}{a^2}}$ |
|---|---|
| Einfaldið fyrst brotið undir rótarmerkinu. | $\sqrt[4]{a^8}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn með þáttum sem eru fjórðu veldi. | $\sqrt[4]{\left(a^2\right)^4}$ |
| Einfaldið. | $a^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.193**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[4]{\frac{x^7}{x^3}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{y^{17}}{y^5}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.194**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{\frac{m^{13}}{m^7}}$ ⓑ $\sqrt[5]{\frac{n^{12}}{n^2}}$.

Fyrr notuðum við kvótaregluna „aftur á bak“ til að einfalda ferningsrætur. Nú alhæfum við regluna svo hún nái til hærri róta.

**KVÓTAREGLA FYRIR N-TU RÆTUR**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \text{og} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

þegar

$$\sqrt[n]{a} \text{ og } \sqrt[n]{b} \text{ eru rauntölur, } b\neq 0 \text{, og fyrir hverja heiltölu } n\geq 2$$

**DÆMI 9.98**

Einfaldið: ⓐ $\frac{\sqrt[3]{-108}}{\sqrt[3]{2}}$ ⓑ $\frac{\sqrt[4]{96x^7}}{\sqrt[4]{3x^2}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt[3]{-108}}{\sqrt[3]{2}}$ |
| Hvorugur rótarstofninn er fullkominn teningur og því notum við kvótaregluna til að skrifa stæðuna undir einu rótarmerki. | $\sqrt[3]{\frac{-108}{2}}$ |
| Einfaldið brotið undir rótarmerkinu. | $\sqrt[3]{-54}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með þáttum sem eru fullkomnir teningar. | $\sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 2}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[3]{(-3)^3} \cdot \sqrt[3]{2}$ |
| Einfaldið. | $-3\sqrt[3]{2}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\frac{\sqrt[4]{96x^7}}{\sqrt[4]{3x^2}}$ |
| Hvorugur rótarstofninn er fullkomið fjórða veldi og því notum við kvótaregluna til að skrifa stæðuna undir einu rótarmerki. | $\sqrt[4]{\frac{96x^7}{3x^2}}$ |
| Einfaldið brotið undir rótarmerkinu. | $\sqrt[4]{32x^5}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem margfeldi með þáttum sem eru fjórðu veldi. | $\sqrt[4]{2^4x^4 \cdot 2x}$ |
| Endurskrifið rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\sqrt[4]{(2x)^4} \cdot \sqrt[4]{2x}$ |
| Einfaldið. | $2\lvert x\rvert\sqrt[4]{2x}$ |

9

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.195**

Einfaldið: ⓐ $\frac{\sqrt[3]{-532}}{\sqrt[3]{2}}$ ⓑ $\frac{\sqrt[4]{486m^{11}}}{\sqrt[4]{3m^5}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.196**

Einfaldið: (a) $\frac{\sqrt[3]{-192}}{\sqrt[3]{3}}$ (b) $\frac{\sqrt[4]{324n^7}}{\sqrt[4]{2n^3}}$.

Ef ekki er hægt að einfalda brotið undir rótarmerkinu notum við fyrra form kvótareglunnar til að endurskrifa stæðuna sem kvóta tveggja rótarstæðna.

**DÆMI 9.99**

Einfaldið: (a) $\sqrt[3]{\frac{24x^7}{y^3}}$ (b) $\sqrt[4]{\frac{48x^{10}}{y^8}}$.

## Lausn

(a)

| | $\sqrt[3]{\frac{24x^7}{y^3}}$ |
|---|---|
| Ekki er hægt að einfalda brotið í rótarstofninum. Notið kvótaregluna til að skrifa það sem tvær rótarstæður. | $\frac{\sqrt[3]{24x^7}}{\sqrt[3]{y^3}}$ |
| Endurskrifið hvorn rótarstofn sem margfeldi með þáttum sem eru fullkomnir teningar. | $\frac{\sqrt[3]{8x^6 \cdot 3x}}{\sqrt[3]{y^3}}$ |
| Endurskrifið teljarann sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\frac{\sqrt[3]{(2x^2)^3}\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{y^3}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2x^2\sqrt[3]{3x}}{y}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{\frac{48x^{10}}{y^8}}$ |
| Ekki er hægt að einfalda brotið í rótarstofninum. Notið kvótaregluna til að skrifa það sem tvær rótarstæður. | $\frac{\sqrt[4]{48x^{10}}}{\sqrt[4]{y^8}}$ |
| Endurskrifið hvorn rótarstofn sem margfeldi með þáttum sem eru fjórðu veldi. | $\frac{\sqrt[4]{16x^8 \cdot 3x^2}}{\sqrt[4]{y^8}}$ |
| Endurskrifið teljarann sem margfeldi tveggja rótarstæðna. | $\frac{\sqrt[4]{\left(2x^2\right)^4}\sqrt[4]{3x^2}}{\sqrt[4]{\left(y^2\right)^4}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{2x^2\sqrt[4]{3x^2}}{y^2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.197**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{\frac{108c^{10}}{d^6}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{80x^{10}}{y^5}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.198**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{\frac{40r^3}{s}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{162m^{14}}{n^{12}}}$.

## Leggið saman og dragið frá hærri rætur

Við getum lagt saman og dregið frá hærri rætur á sama hátt og ferningsrætur. Fyrst gefum við formlega skilgreiningu á líkum rótarstæðum.

**LÍKAR RÓTARSTÆÐUR**

Rótarstæður með sama rótarvísi og sama rótarstofn kallast líkar rótarstæður.

Líkar rótarstæður hafa sama rótarvísi og sama rótarstofn.

- $9\sqrt[4]{42x}$ og $-2\sqrt[4]{42x}$ eru líkar rótarstæður.
- $5\sqrt[3]{125x}$ og $6\sqrt[3]{125y}$ eru ekki líkar rótarstæður. Rótarstofnarnir eru ólíkir.
- $2\sqrt[5]{1000q}$ og $-4\sqrt[4]{1000q}$ eru ekki líkar rótarstæður. Rótarvísarnir eru ólíkir.

Við leggjum saman líkar rótarstæður og drögum þær frá á sama hátt og samkynja liði. Við getum lagt saman $9\sqrt[4]{42x}+\left(-2\sqrt[4]{42x}\right)$ og niðurstaðan er $7\sqrt[4]{42x}$.

---

**DÆMI 9.100**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}$ ⓑ $4\sqrt[4]{8}-2\sqrt[4]{8}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{4x}$ |
|---|---|
| Rótarstæðurnar eru líkar og því leggjum við stuðlana saman. | $2\sqrt[3]{4x}$ |

ⓑ

| | $4\sqrt[4]{8}-2\sqrt[4]{8}$ |
|---|---|
| Rótarstæðurnar eru líkar og því drögum við stuðlana frá. | $2\sqrt[4]{8}$ |

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.199**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[5]{3x}+\sqrt[5]{3x}$ ⓑ $3\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{9}$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.200**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[4]{10y}+\sqrt[4]{10y}$ ⓑ $5\sqrt[6]{32}-3\sqrt[6]{32}$.

Þegar stæða virðist ekki innihalda líkar rótarstæður einföldum við fyrst hverja rótarstæðu. Stundum fást þá líkar rótarstæður.

---

**DÆMI 9.101**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$ ⓑ $\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{243}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$ |
| Endurskrifið hvorn rótarstofn með þáttum sem eru fullkomnir teningar. | $\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}$ |
| Endurskrifið fullkomnu teningana. | $\sqrt[3]{(3)^3}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{(2)^3}\sqrt[3]{2}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar þegar þess er kostur. | $3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $\sqrt[3]{2}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{243}$ |
| Endurskrifið með þáttum sem eru fjórðu veldi. | $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{3}$ |
| Endurskrifið fullkomnu fjórðu veldin. | $\sqrt[4]{(2)^4}\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{(3)^4}\sqrt[4]{3}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar þegar þess er kostur. | $2\sqrt[4]{3}+3\sqrt[4]{3}$ |
| Sameinið líku rótarstæðurnar. | $5\sqrt[4]{3}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.201**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{192}-\sqrt[3]{81}$ ⓑ $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{512}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.202**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{250}$ ⓑ $\sqrt[5]{64}+\sqrt[5]{486}$.

**DÆMI 9.102**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{24\,x^4}-\sqrt[3]{-81\,x^7}$ ⓑ $\sqrt[4]{162\,y^9}+\sqrt[4]{512\,y^5}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[3]{24x^4}-\sqrt[3]{-81x^7}$ |
| Endurskrifið hvorn rótarstofn með þáttum sem eru fullkomnir teningar. | $\sqrt[3]{8x^3}\cdot\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{-27x^6}\cdot\sqrt[3]{3x}$ |
| Endurskrifið fullkomnu teningana. | $\sqrt[3]{(2x)^3}\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{(-3x^2)^3}\sqrt[3]{3x}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar þegar þess er kostur. | $2x\sqrt[3]{3x}-(-3x^2\sqrt[3]{3x})$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt[4]{162y^9}+\sqrt[4]{512y^5}$ |
| Endurskrifið hvorn rótarstofn með þáttum sem eru fjórðu veldi. | $\sqrt[4]{81y^8}\cdot\sqrt[4]{2y}+\sqrt[4]{256y^4}\cdot\sqrt[4]{2y}$ |
| Endurskrifið fullkomnu fjórðu veldin. | $\sqrt[4]{(3y^2)^4}\cdot\sqrt[4]{2y}+\sqrt[4]{(4y)^4}\cdot\sqrt[4]{2y}$ |
| Einfaldið rótarstæðurnar þegar þess er kostur. | $3y^2\sqrt[4]{2y}+4\lvert y\rvert\sqrt[4]{2y}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.203**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{32y^5}-\sqrt[3]{-108y^8}$ ⓑ $\sqrt[4]{243r^{11}}+\sqrt[4]{768r^{10}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.204**

Einfaldið: ⓐ $\sqrt[3]{40z^7}-\sqrt[3]{-135z^4}$ ⓑ $\sqrt[4]{80s^{13}}+\sqrt[4]{1280s^6}$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að læra meira og æfa ykkur í að einfalda hærri rætur.

- Einföldun hærri róta
- Samlagning og frádráttur róta með hærri rótarvísum

9

## Verkefni úr hluta 9.7

### *Æfingin skapar meistarann*

### Einfaldið stæður með hærri rótum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**442.** ⓐ $\sqrt[3]{216}$ ⓑ $\sqrt[4]{256}$ ⓒ $\sqrt[5]{32}$

**443.** ⓐ $\sqrt[3]{27}$ ⓑ $\sqrt[4]{16}$ ⓒ $\sqrt[5]{243}$

**444.** ⓐ $\sqrt[3]{512}$ ⓑ $\sqrt[4]{81}$ ⓒ $\sqrt[5]{1}$

**445.** ⓐ $\sqrt[3]{125}$ ⓑ $\sqrt[4]{1296}$ ⓒ $\sqrt[5]{1024}$

**446.** ⓐ $\sqrt[3]{-8}$ ⓑ $\sqrt[4]{-81}$ ⓒ $\sqrt[5]{-32}$

**447.** ⓐ $\sqrt[3]{-64}$ ⓑ $\sqrt[4]{-16}$ ⓒ $\sqrt[5]{-243}$

**448.** ⓐ $\sqrt[3]{-125}$ ⓑ $\sqrt[4]{-1296}$ ⓒ $\sqrt[5]{-1024}$

**449.** ⓐ $\sqrt[3]{-512}$ ⓑ $\sqrt[4]{-81}$ ⓒ $\sqrt[5]{-1}$

**450.** ⓐ $\sqrt[5]{u^5}$ ⓑ $\sqrt[8]{v^8}$

451.

1. ⓐ $\sqrt[3]{a^3}$
2. ⓑ

$\sqrt[12]{b^{12}}$

**452.** ⓐ $\sqrt[4]{y^4}$ ⓑ $\sqrt[7]{m^7}$

**453.** ⓐ $\sqrt[8]{k^8}$ ⓑ $\sqrt[6]{p^6}$

**454.** ⓐ $\sqrt[3]{x^9}$ ⓑ $\sqrt[4]{y^{12}}$

**455.** ⓐ $\sqrt[5]{a^{10}}$ ⓑ $\sqrt[3]{b^{27}}$

**456.** ⓐ $\sqrt[4]{m^8}$ ⓑ $\sqrt[5]{n^{20}}$

**457.** ⓐ $\sqrt[6]{r^{12}}$ ⓑ $\sqrt[3]{s^{30}}$

**458.** ⓐ $\sqrt[4]{16x^8}$ ⓑ $\sqrt[6]{64y^{12}}$

**459.** ⓐ $\sqrt[3]{-8c^9}$ ⓑ $\sqrt[3]{125d^{15}}$

**460.** ⓐ $\sqrt[3]{216a^6}$ ⓑ $\sqrt[5]{32b^{20}}$

**461.** ⓐ $\sqrt[7]{128r^{14}}$ ⓑ $\sqrt[4]{81s^{24}}$

9

### Notið margfeldisregluna til að einfalda stæður með hærri rótum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**462.** ⓐ $\sqrt[3]{r^5}$ ⓑ $\sqrt[4]{s^{10}}$

**463.** ⓐ $\sqrt[5]{u^7}$ ⓑ $\sqrt[6]{v^{11}}$

**464.** ⓐ $\sqrt[4]{m^5}$ ⓑ $\sqrt[8]{n^{10}}$

**465.** ⓐ $\sqrt[5]{p^8}$ ⓑ $\sqrt[3]{q^8}$

**466.** ⓐ $\sqrt[4]{32}$ ⓑ $\sqrt[7]{64}$

**467.** ⓐ $\sqrt[3]{625}$ ⓑ $\sqrt[6]{128}$

**468.** ⓐ $\sqrt[5]{64}$ ⓑ $\sqrt[3]{256}$

**469.** ⓐ $\sqrt[4]{3125}$ ⓑ $\sqrt[3]{81}$

**470.** ⓐ $\sqrt[3]{108x^5}$ ⓑ $\sqrt[4]{48y^6}$

**471.** ⓐ $\sqrt[5]{96a^7}$ ⓑ $\sqrt[3]{375b^4}$

**472.** ⓐ $\sqrt[4]{405m^{10}}$ ⓑ $\sqrt[5]{160n^8}$

**473.** ⓐ $\sqrt[3]{512p^5}$ ⓑ $\sqrt[4]{324q^7}$

**474.** ⓐ $\sqrt[3]{-864}$ ⓑ $\sqrt[4]{-256}$

**475.** ⓐ $\sqrt[5]{-486}$ ⓑ $\sqrt[6]{-64}$

**476.** ⓐ $\sqrt[5]{-32}$ ⓑ $\sqrt[8]{-1}$

**477.** ⓐ $\sqrt[3]{-8}$ ⓑ $\sqrt[4]{-16}$

### Notið kvótaregluna til að einfalda stæður með hærri rótum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**478.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{p^{11}}{p^2}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{q^{17}}{q^{13}}}$

**479.** ⓐ $\sqrt[5]{\frac{d^{12}}{d^7}}$ ⓑ $\sqrt[8]{\frac{m^{12}}{m^4}}$

**480.** ⓐ $\sqrt[5]{\frac{u^{21}}{u^{11}}}$ ⓑ $\sqrt[6]{\frac{v^{30}}{v^{12}}}$

**481.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{r^{14}}{r^5}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{c^{21}}{c^9}}$

**482.** ⓐ $\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{2}}$ ⓑ $\frac{\sqrt[5]{128x^8}}{\sqrt[5]{2x^2}}$

**483.** ⓐ $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}$ ⓑ $\frac{\sqrt[4]{80m^7}}{\sqrt[4]{5m}}$

**484.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{1250}{2}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{486y^9}{2y^3}}$

**485.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{162}{6}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{160r^{10}}{5r^3}}$

**486.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{54a^8}{b^3}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{64c^5}{d^2}}$

**487.** ⓐ $\sqrt[5]{\frac{96r^{11}}{s^3}}$ ⓑ $\sqrt[6]{\frac{128u^7}{v^3}}$

**488.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{81s^8}{t^3}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{64p^{15}}{q^{12}}}$

**489.** ⓐ $\sqrt[3]{\frac{625u^{10}}{v^3}}$ ⓑ $\sqrt[4]{\frac{729c^{21}}{d^8}}$

### Leggið saman og dragið frá hærri rætur

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**490.** ⓐ $\sqrt[7]{8p}+\sqrt[7]{8p}$ ⓑ $3\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{25}$

**491.** ⓐ $\sqrt[3]{15q}+\sqrt[3]{15q}$ ⓑ $2\sqrt[4]{27}-6\sqrt[4]{27}$

**492.** ⓐ $3\sqrt[5]{9x}+7\sqrt[5]{9x}$ ⓑ $8\sqrt[7]{3q}-2\sqrt[7]{3q}$

**493.** ⓐ

$$23\sqrt[13]{4y}+19\sqrt[13]{4y}$$

ⓑ

$$31\sqrt[19]{5z}-17\sqrt[19]{5z}$$

**494.** ⓐ $\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{192}$ ⓑ $\sqrt[4]{512}-\sqrt[4]{32}$

**495.** ⓐ $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{54}$ ⓑ $\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{1875}$

**496.** ⓐ $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{250}$ ⓑ $\sqrt[5]{729}+\sqrt[5]{96}$

**497.** ⓐ $\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{1250}$ ⓑ $\sqrt[3]{2000}+\sqrt[3]{54}$

**498.** ⓐ $\sqrt[3]{64a^{10}}-\sqrt[3]{-216a^{12}}$ ⓑ $\sqrt[4]{486u^7}+\sqrt[4]{768u^3}$

**499.** ⓐ $\sqrt[3]{80b^5}-\sqrt[3]{-270b^3}$ ⓑ $\sqrt[4]{160v^{10}}-\sqrt[4]{1280v^3}$

9

### Blönduð verkefni

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

500.

$$\sqrt[4]{16}$$

501.

$$\sqrt[6]{64}$$

502.

$$\sqrt[3]{a^3}$$

503.

$$\sqrt[12]{b^{12}}$$

504.

$$\sqrt[3]{-8c^9}$$

505.

$$\sqrt[3]{125d^{15}}$$

506.

$$\sqrt[3]{r^5}$$

507.

$$\sqrt[4]{s^{10}}$$

508.

$$\sqrt[3]{108x^5}$$

509.

$$\sqrt[4]{48y^6}$$

510.

$$\sqrt[5]{-486}$$

511.

$$\sqrt[6]{-64}$$

512.

$$\frac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{2}}$$

513.

$$\frac{\sqrt[5]{128x^8}}{\sqrt[5]{2x^2}}$$

514.

$$\sqrt[5]{\frac{96r^{11}}{s^3}}$$

515.

$$\sqrt[6]{\frac{128u^7}{v^3}}$$

516.

$$\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$$

517.

$$\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}$$

518.

$$\sqrt[3]{64a^{10}} - \sqrt[3]{-216a^{12}}$$

519.

$$\sqrt[4]{486u^7} + \sqrt[4]{768u^3}$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**520.** **Fjölgun í** stofni Stæðan $10 \cdot x^n$ lýsir fjölgun myglugróa eftir $n$ kynslóðir. Í upphafi voru 10 gró og hvert þeirra myndaði $x$ afkvæmi. Því er $10 \cdot x^5$ fjöldi afkvæma í fimmtu kynslóð. Í fimmtu kynslóð voru 10.240 afkvæmi. Einfaldið stæðuna $\sqrt[5]{\frac{10.240}{10}}$ til að ákvarða fjölda afkvæma hvers grós.

**521.** **Útbreiðsla veiru** Stæðan $3 \cdot x^n$ lýsir útbreiðslu veiru eftir $n$ umferðir. Upphaflega voru þrír smitaðir og hver þeirra smitaði $x$ einstaklinga. Því er $3 \cdot x^4$ fjöldi smitaðra í fjórðu umferð. Í fjórðu umferð voru 1875 smitaðir. Einfaldið stæðuna $\sqrt[4]{\frac{1875}{3}}$ til að ákvarða hve marga hver einstaklingur smitaði.

9

### *Ritunarverkefni*

**522.** Útskýrið hvernig þið vitið að $\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$.

**523.** Útskýrið hvers vegna $\sqrt[4]{-64}$ er ekki rauntala en $\sqrt[3]{-64}$ er rauntala.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hve vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei — ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| einfalda segðir með hærri rótum. | | | |
| notað margfeldisregluna til að einfalda segðir með hærri rótum. | | | |
| notað deilingarregluna til að einfalda segðir með hærri rótum. | | | |
| lagt saman og dregið frá hærri rætur. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um færni ykkar í þessum hluta? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 9.8 Ræðir veldisvísar

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Einfaldið stæður með $a^{\frac{1}{n}}$
- Einfaldið stæður með $a^{\frac{m}{n}}$
- Notað veldareglurnar til að einfalda stæður með ræðum veldisvísum

**UNDIRBÚNINGUR 9.21**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Leggið saman: $\frac{7}{15}+\frac{5}{12}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 1.81.

**UNDIRBÚNINGUR 9.22**

Einfaldið: $\left(4x^2y^5\right)^3$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.24.

**UNDIRBÚNINGUR 9.23**

Einfaldið: $5^{-3}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með verkefnið skuluð þið rifja upp dæmi 6.89.

## Einfaldið stæður með $a^{\frac{1}{n}}$

Ræðir veldisvísar eru önnur leið til að skrifa stæður með rótarmerkjum. Þegar við notum ræða veldisvísa getum við notað veldareglurnar til að einfalda stæður.

Reglan um veldi af veldi segir að $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ þegar m og n eru núll eða jákvæðar heiltölur. Gerum nú ráð fyrir að við séum ekki lengur bundin við slíkar tölur.

Gerum ráð fyrir að við viljum finna tölu p þannig að $\left(8^p\right)^3 = 8$. Við notum regluna um veldi af veldi til að finna gildi p.

| | $(8^p)^3 = 8$ |
|---|---|
| Margfaldið veldisvísana vinstra megin. | $8^{3p} = 8$ |
| Skrifið veldisvísinn 1 hægra megin. | $8^{3p} = 8^1$ |
| Veldisvísarnir þurfa að vera jafnir. | $3p = 1$ |
| Einangrið $p$. | $p = \frac{1}{3}$ |

Því $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8$.

Við vitum einnig að $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$. Því hlýtur $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$.

Við vitum einnig að $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 8$. Því hlýtur $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$.

Sömu rök má nota fyrir hverja jákvæða heiltölu n til að sýna að $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

**RÆÐUR VELDISVÍSIR $a^{\frac{1}{n}}$**

Ef $\sqrt[n]{a}$ er rauntala og $n \geq 2$, þá er $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Stundum er auðveldara að vinna með stæður með ræðum veldisvísum og stundum með rótarmerkjum. Í fyrstu dæmunum æfið þið að færa stæður milli þessara tveggja ritháttа.

**DÆMI 9.103**

Skrifið sem rótarstæðu: ⓐ $x^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $y^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $z^{\frac{1}{4}}$.

## Lausn

Við viljum skrifa hverja stæðu á forminu $\sqrt[n]{a}$.

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $x^{\frac{1}{2}}$ |
| Nefnari veldisvísisins er 2 og því er rótarvísirinn 2. Rótarvísirinn er ekki sýndur þegar hann er 2. | $\sqrt{x}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $y^{\frac{1}{3}}$ |
| Nefnari veldisvísisins er 3 og því er rótarvísirinn 3. | $\sqrt[3]{y}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $z^{\frac{1}{4}}$ |
| Nefnari veldisvísisins er 4 og því er rótarvísirinn 4. | $\sqrt[4]{z}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.205**

Skrifið sem rótarstæðu: ⓐ $t^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $m^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $r^{\frac{1}{4}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.206**

Skrifið sem rótarstæðu: ⓐ $b^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $z^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $p^{\frac{1}{4}}$.

**DÆMI 9.104**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{x}$ ⓑ $\sqrt[3]{y}$ ⓒ $\sqrt[4]{z}$.

## Lausn

Við viljum skrifa hverja rótarstæðu á forminu $a^{\frac{1}{n}}$.

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\sqrt{x}$ |
| Enginn rótarvísir er sýndur og því er hann 2. Nefnari veldisvísisins verður 2. | $x^{\frac{1}{2}}$ |

ⓑ

| | $\sqrt[3]{y}$ |
|---|---|
| Rótarvísirinn er 3 og því er nefnari veldisvísisins 3. | $y^{\frac{1}{3}}$ |

ⓒ

| | $\sqrt[4]{z}$ |
|---|---|
| Rótarvísirinn er 4 og því er nefnari veldisvísisins 4. | $z^{\frac{1}{4}}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.207**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{s}$ ⓑ $\sqrt[3]{x}$ ⓒ $\sqrt[4]{b}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.208**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{v}$ ⓑ $\sqrt[3]{p}$ ⓒ $\sqrt[4]{p}$.

**DÆMI 9.105**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{5\,y}$ ⓑ $\sqrt[3]{4\,x}$ ⓒ $3\sqrt[4]{5\,z}$.

## Lausn

Við viljum skrifa hverja rótarstæðu á forminu $a^{\frac{1}{n}}$.

ⓐ

| | $\sqrt{5\,y}$ |
|---|---|
| Enginn rótarvísir er sýndur og því er hann 2.<br>Nefnari veldisvísisins verður 2. | $(5\,y)^{\frac{1}{2}}$ |

ⓑ

| | $\sqrt[3]{4\,x}$ |
|---|---|
| Rótarvísirinn er 3 og því er nefnari veldisvísisins 3. | $(4\,x)^{\frac{1}{3}}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $3\sqrt[4]{5z}$ |
| Rótarvísirinn er 4 og því er nefnari veldisvísisins 4. | $3(5z)^{\frac{1}{4}}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.209**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{10m}$ ⓑ $\sqrt[5]{3n}$ ⓒ $3\sqrt[4]{6y}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.210**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt[7]{3k}$ ⓑ $\sqrt[4]{5j}$ ⓒ $8\sqrt[3]{2a}$.

Í næsta dæmi gæti verið auðveldara að einfalda stæðurnar ef við endurskrifum þær fyrst sem rótarstæður.

**DÆMI 9.106**

Einfaldið: ⓐ $25^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $64^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $256^{\frac{1}{4}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $25^{\frac{1}{2}}$ |
| Endurskrifið sem ferningsrót. | $\sqrt{25}$ |
| Einfaldið. | $5$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $64^{\frac{1}{3}}$ |
| Endurskrifið sem teningsrót. | $\sqrt[3]{64}$ |
| Takið eftir að 64 er fullkominn teningur. | $\sqrt[3]{4^3}$ |
| Einfaldið. | $4$ |

ⓒ

| | $256^{\frac{1}{4}}$ |
|---|---|
| Endurskrifið sem fjórðu rót. | $\sqrt[4]{256}$ |
| Takið eftir að 256 er fullkomið fjórða veldi. | $\sqrt[4]{4^4}$ |
| Einfaldið. | $4$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.211**

Einfaldið: ⓐ $36^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $8^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $16^{\frac{1}{4}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.212**

Einfaldið: ⓐ $100^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $27^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $81^{\frac{1}{4}}$.

Gætið að því hvar mínusmerkin eru í næsta dæmi. Í einum lið notum við regluna $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

**DÆMI 9.107**

Einfaldið: ⓐ $(-64)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $-64^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $(64)^{-\frac{1}{3}}$.

## Lausn

ⓐ

| | $(-64)^{\frac{1}{3}}$ |
|---|---|
| Endurskrifið sem teningsrót. | $\sqrt[3]{-64}$ |
| Endurskrifið $-64$ sem fullkominn tening. | $\sqrt[3]{(-4)^3}$ |
| Einfaldið. | $-4$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $-64^{\frac{1}{3}}$ |
| Veldisvísirinn á aðeins við um 64. | $-\left(64^{\frac{1}{3}}\right)$ |
| Endurskrifið sem teningsrót. | $-\sqrt[3]{64}$ |
| Endurskrifið 64 sem $4^3$. | $-\sqrt[3]{4^3}$ |
| Einfaldið. | $-4$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $(64)^{-\frac{1}{3}}$ |
| Endurskrifið sem brot með jákvæðum veldisvísi með reglunni $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{\sqrt[3]{64}}$ |
| Skrifið sem teningsrót. | |
| Endurskrifið 64 sem $4^3$. | $\frac{1}{\sqrt[3]{4^3}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{4}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.213**

Einfaldið: ⓐ $(-125)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $-125^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $(125)^{-\frac{1}{3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.214**

Einfaldið: ⓐ $(-32)^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $-32^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $(32)^{-\frac{1}{5}}$.

**DÆMI 9.108**

Einfaldið: ⓐ $(-16)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $-16^{\frac{1}{4}}$ ⓒ $(16)^{-\frac{1}{4}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $(-16)^{\frac{1}{4}}$ |
| Endurskrifið sem fjórðu rót. | $\sqrt[4]{-16}$ |
| Engin rauntala hefur fjórða veldið $-16$. | |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $-16^{\frac{1}{4}}$ |
| Veldisvísirinn á aðeins við um 16. Endurskrifið sem fjórðu rót. | $-\sqrt[4]{16}$ |
| Endurskrifið $16$ sem $2^4$. | $-\sqrt[4]{2^4}$ |
| Einfaldið. | $-2$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $(16)^{-\frac{1}{4}}$ |
| Endurskrifið með reglunni $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. | $\frac{1}{(16)^{\frac{1}{4}}}$ |
| Endurskrifið sem fjórðu rót. | $\frac{1}{\sqrt[4]{16}}$ |
| Endurskrifið $16$ sem $2^4$. | $\frac{1}{\sqrt[4]{2^4}}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{2}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.215**

Einfaldið: ⓐ $(-64)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $-64^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $(64)^{-\frac{1}{2}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.216**

Einfaldið: ⓐ $(-256)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $-256^{\frac{1}{4}}$ ⓒ $(256)^{-\frac{1}{4}}$.

## Einfaldið stæður með $a^{\frac{m}{n}}$

Vinnum meira með regluna um veldi af veldi.

Gerum ráð fyrir að við hefjum $a^{\frac{1}{n}}$ í veldið m.

| | $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ |
|---|---|
| Margfaldið veldisvísana. | $a^{\frac{1}{n}\cdot m}$ |
| Einfaldið. | $a^{\frac{m}{n}}$ |

Því er $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Gerum nú ráð fyrir að við hefjum $a^m$ í veldið $\frac{1}{n}$.

| | $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ |
|---|---|
| Margfaldið veldisvísana. | $a^{m\cdot\frac{1}{n}}$ |
| Einfaldið. | $a^{\frac{m}{n}}$ |

Því er einnig $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Hvort formið notum við til að einfalda stæðu? Yfirleitt tökum við rótina fyrst svo tölurnar í rótarstofninum haldist minni.

**RÆÐUR VELDISVÍSIR $a^{\frac{m}{n}}$**

Fyrir allar jákvæðar heiltölur m og n gildir

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$
$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

**DÆMI 9.109**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{y^3}$ ⓑ $\sqrt[3]{x^2}$ ⓒ $\sqrt[4]{z^3}$.

## Lausn

Við viljum nota $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ til að skrifa hverja rótarstæðu á forminu $a^{\frac{m}{n}}$.

1. ⓐ

| | |
|---|---|
| Teljari veldisvísisins er veldisvísir $y$, 3. | $\sqrt{y^3}$ |
| Nefnari veldisvísisins er rótarvísirinn, 2. | $y^{\frac{3}{2}}$ |

2. ⓑ

| | |
|---|---|
| Teljari veldisvísisins er veldisvísirinn á $x$, 2. | $\sqrt{x^2}$ |
| Nefnari veldisvísisins er rótarvísirinn, 3. | $x^{\frac{2}{3}}$ |

3. ⓒ

| | |
|---|---|
| Teljari veldisvísisins er veldisvísir $z$, 3. | $\sqrt{z^3}$ |
| Nefnari veldisvísisins er rótarvísirinn, 4. | $z^{\frac{3}{4}}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.217**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt{x^5}$ ⓑ $\sqrt[4]{z^3}$ ⓒ $\sqrt[5]{y^2}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.218**

Skrifið með ræðum veldisvísi: ⓐ $\sqrt[5]{a^2}$ ⓑ $\sqrt[3]{b^7}$ ⓒ $\sqrt[4]{m^5}$.

**DÆMI 9.110**

Einfaldið: ⓐ $9^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $125^{\frac{2}{3}}$ ⓒ $81^{\frac{3}{4}}$.

## Lausn

Við endurskrifum fyrst hverja stæðu sem rótarstæðu með reglunni $a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. Með þessu formi getum við tekið rótina fyrst og þá haldast tölurnar í rótarstofninum minni en með hinu forminu.

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $9^{\frac{3}{2}}$ |
| Veldi rótarstæðunnar er teljari veldisvísisins, 3. Þar sem nefnari veldisvísisins er 2 er þetta ferningsrót. | $\left(\sqrt{9}\right)^3$ |
| Einfaldið. | $(3)^3$ |
| | $27$ |

9

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $125^{\frac{2}{3}}$ |
| Veldi rótarstæðunnar er teljari veldisvísisins, 2. Rótarvísirinn er nefnari veldisvísisins, 3. | $\left(\sqrt[3]{125}\right)^2$ |
| Einfaldið. | $\left(5\right)^2$ |
| | $25$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $81^{\frac{3}{4}}$ |
| Veldi rótarstæðunnar er teljari veldisvísisins, 3. Rótarvísirinn er nefnari veldisvísisins, 4. | $\left(\sqrt[4]{81}\right)^3$ |
| Einfaldið. | $\left(3\right)^3$ |
| | $27$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.219**

Einfaldið: ⓐ $4^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $27^{\frac{2}{3}}$ ⓒ $625^{\frac{3}{4}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.220**

Einfaldið: ⓐ $8^{\frac{5}{3}}$ ⓑ $81^{\frac{3}{2}}$ ⓒ $16^{\frac{3}{4}}$.

Munið að $b^{-p}=\frac{1}{b^p}$. Mínusmerkið í veldisvísinum breytir ekki formerki stæðunnar.

**DÆMI 9.111**

Einfaldið: ⓐ $16^{-\frac{3}{2}}$ ⓑ $32^{-\frac{2}{5}}$ ⓒ $4^{-\frac{5}{2}}$.

## Lausn

Við endurskrifum hverja stæðu fyrst með $b^{-p}=\frac{1}{b^p}$ og færum hana síðan á rótarform.

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $16^{-\frac{3}{2}}$ |
| Endurskrifið með $b^{-p}=\frac{1}{b^p}$. | $\frac{1}{16^{\frac{3}{2}}}$ |
| Færið á rótarform. Veldi rótarstæðunnar er teljari veldisvísisins, 3. Rótarvísirinn er nefnari veldisvísisins, 2. | $\frac{1}{\left(\sqrt{16}\right)^3}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{4^3}$ |
| | $\frac{1}{64}$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $32^{-\frac{2}{5}}$ |
| Endurskrifið með $b^{-p}=\frac{1}{b^p}$. | $\frac{1}{32^{\frac{2}{5}}}$ |
| Færið á rótarform. | $\frac{1}{\left(\sqrt[5]{32}\right)^2}$ |
| Endurskrifið rótarstofninn sem veldi. | $\frac{1}{\left(\sqrt[5]{2^5}\right)^2}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{2^2}$ |
| | $\frac{1}{4}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $4^{-\frac{5}{2}}$ |
| Endurskrifið með $b^{-p}=\frac{1}{b^p}$. | $\frac{1}{4^{\frac{5}{2}}}$ |
| Færið á rótarform. | $\frac{1}{\left(\sqrt{4}\right)^5}$ |
| Einfaldið. | $\frac{1}{2^5}$ |
| | $\frac{1}{32}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.221**

Einfaldið: ⓐ $8^{-\frac{5}{3}}$ ⓑ $81^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $16^{-\frac{3}{4}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.222**

Einfaldið: ⓐ $4^{-\frac{3}{2}}$ ⓑ $27^{-\frac{2}{3}}$ ⓒ $625^{-\frac{3}{4}}$.

**DÆMI 9.112**

Einfaldið: ⓐ $-25^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-25^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-25\right)^{\frac{3}{2}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $-25^{\frac{3}{2}}$ |
| Endurskrifið á rótarformi. | $-\left(\sqrt{25}\right)^3$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $-\left(5\right)^3$ |
| Einfaldið. | $-125$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $-25^{-\frac{3}{2}}$ |
| Endurskrifið með $b^{-p}=\frac{1}{b^p}$. | $-\left(\frac{1}{25^{\frac{3}{2}}}\right)$ |
| Endurskrifið á rótarformi. | $-\left(\frac{1}{\left(\sqrt{25}\right)^3}\right)$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $-\left(\frac{1}{(5)^3}\right)$ |
| Einfaldið. | $-\frac{1}{125}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\left(-25\right)^{\frac{3}{2}}$ |
| Endurskrifið á rótarformi. | $\left(\sqrt{-25}\right)^3$ |
| Engin rauntala hefur ferningsrót sem er $-25$. | Ekki rauntala. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.223**

Einfaldið: ⓐ $-16^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-16^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-16\right)^{-\frac{3}{2}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.224**

Einfaldið: ⓐ $-81^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-81^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-81\right)^{-\frac{3}{2}}$.

9

## Notið veldareglurnar til að einfalda stæður með ræðum veldisvísum

Sömu veldareglur og við höfum þegar notað gilda einnig um ræða veldisvísa. Hér teljum við veldareglurnar upp svo að þið getið haft þær til hliðsjónar þegar þið einfaldið stæður.

**SAMANTEKT Á VELDISREGLUM**

Ef $a, b$ eru rauntölur og $m, n$ eru ræðar tölur, þá gildir

| | |
|---|---|
| margfeldisregla | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ |
| reglan um veldi af veldi | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ |
| reglan um margfeldi í veldi | $(ab)^m = a^m b^m$ |
| kvótaregla | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0, \quad m > n$ |
| | $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad a \neq 0, \quad n > m$ |
| Skilgreining núllveldis | $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ |
| reglan um kvóta í veldi | $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ |

Þegar veldi með sömu grunntölu eru margfölduð leggjum við veldisvísana saman.

**DÆMI 9.113**

Einfaldið: ⓐ $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}}$ ⓑ $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ ⓒ $z^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{5}{4}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}}$ |
| Grunntölurnar eru þær sömu og því leggjum við veldisvísana saman. | $2^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}$ |
| Leggið brotin saman. | $2^{\frac{6}{2}}$ |
| Einfaldið veldisvísinn. | $2^3$ |
| Einfaldið. | $8$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ |
| Grunntölurnar eru þær sömu og því leggjum við veldisvísana saman. | $x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}$ |
| Leggið brotin saman. | $x^{\frac{6}{3}}$ |
| Einfaldið. | $x^2$ |

ⓒ

| | $z^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{5}{4}}$ |
|---|---|
| Grunntölurnar eru þær sömu og því leggjum við veldisvísana saman. | $z^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$ |
| Leggið brotin saman. | $z^{\frac{8}{4}}$ |
| Einfaldið. | $z^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.225**

Einfaldið: ⓐ $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}$ ⓑ $y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{8}{3}}$ ⓒ $m^{\frac{1}{4}} \cdot m^{\frac{3}{4}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.226**

Einfaldið: ⓐ $5^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{7}{5}}$ ⓑ $z^{\frac{1}{8}} \cdot z^{\frac{7}{8}}$ ⓒ $n^{\frac{2}{7}} \cdot n^{\frac{5}{7}}$.

Við notum regluna um veldi af veldi í næsta dæmi.

**DÆMI 9.114**

Einfaldið: ⓐ $\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $\left(y^6\right)^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $\left(z^9\right)^{\frac{2}{3}}$.

## Lausn

ⓐ

| | $\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}}$ |
|---|---|
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $x^{4 \cdot \frac{1}{2}}$ |
| Einfaldið. | $x^2$ |

ⓑ

| | $\left(y^6\right)^{\frac{1}{3}}$ |
|---|---|
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $y^{6\cdot\frac{1}{3}}$ |
| Einfaldið. | $y^2$ |

ⓒ

| | $\left(z^9\right)^{\frac{2}{3}}$ |
|---|---|
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $z^{9\cdot\frac{2}{3}}$ |
| Einfaldið. | $z^6$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.227**

Einfaldið: ⓐ $\left(p^{10}\right)^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $\left(q^8\right)^{\frac{3}{4}}$ ⓒ $\left(x^6\right)^{\frac{4}{3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.228**

Einfaldið: ⓐ $\left(r^6\right)^{\frac{5}{3}}$ ⓑ $\left(s^{12}\right)^{\frac{3}{4}}$ ⓒ $\left(m^9\right)^{\frac{2}{9}}$.

Kvótareglan segir að þegar einu veldi er deilt með öðru og grunntalan er sú sama drögum við veldisvísana frá.

**DÆMI 9.115**

Einfaldið: ⓐ $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ ⓑ $\frac{y^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}}$ ⓒ $\frac{z^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{5}{3}}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ |
| Þegar einu veldi er deilt með öðru og grunntalan er sú sama drögum við veldisvísana frá. | $x^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$ |
| Einfaldið. | $x$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\frac{y^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{1}{4}}}$ |
| Þegar einu veldi er deilt með öðru og grunntalan er sú sama drögum við veldisvísana frá. | $y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}$ |
| Einfaldið. | $y^{\frac{1}{2}}$ |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $\frac{z^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{5}{3}}}$ |
| Þegar einu veldi er deilt með öðru og grunntalan er sú sama drögum við veldisvísana frá. | $z^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}$ |
| Endurskrifið án neikvæðs veldisvísis. | $\frac{1}{z}$ |

9

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.229**

Einfaldið: ⓐ $\frac{u^{\frac{5}{4}}}{u^{\frac{1}{4}}}$ ⓑ $\frac{v^{\frac{3}{5}}}{v^{\frac{2}{5}}}$ ⓒ $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{3}}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.230**

Einfaldið: (a) $\frac{c^{\frac{12}{5}}}{c^{\frac{2}{5}}}$ (b) $\frac{m^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{9}{4}}}$ (c) $\frac{d^{\frac{1}{5}}}{d^{\frac{6}{5}}}$.

Stundum þurfum við að nota fleiri en eina reglu. Í næstu tveimur dæmum notum við fyrst regluna um margfeldi í veldi og síðan regluna um veldi af veldi.

**DÆMI 9.116**

Einfaldið: (a) $\left(27u^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ (b) $\left(8v^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

## Lausn

(a)

| | |
|---|---|
| | $\left(27u^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| Fyrst notum við regluna um margfeldi í veldi. | $(27)^{\frac{2}{3}}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| Endurskrifið 27 sem veldi af 3. | $\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(u^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $\left(3^2\right)\left(u^{\frac{1}{3}}\right)$ |
| Einfaldið. | $9u^{\frac{1}{3}}$ |

(b)

| | |
|---|---|
| | $\left(8v^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| Fyrst notum við regluna um margfeldi í veldi. | $(8)^{\frac{2}{3}}\left(v^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| Endurskrifið 8 sem veldi af 2. | $\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}\left(v^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ |
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $\left(2^2\right)\left(v^{\frac{1}{6}}\right)$ |
| Einfaldið. | $4v^{\frac{1}{6}}$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.231**

Einfaldið: ⓐ $\left(32x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$ ⓑ $\left(64y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.232**

Einfaldið: ⓐ $\left(16m^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $\left(81n^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

**DÆMI 9.117**

Einfaldið: ⓐ $\left(m^3n^9\right)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $\left(p^4q^8\right)^{\frac{1}{4}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\left(m^3n^9\right)^{\frac{1}{3}}$ |
| Fyrst notum við regluna um margfeldi í veldi. | $\left(m^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(n^9\right)^{\frac{1}{3}}$ |
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $mn^3$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\left(p^4q^8\right)^{\frac{1}{4}}$ |
| Fyrst notum við regluna um margfeldi í veldi. | $\left(p^4\right)^{\frac{1}{4}}\left(q^8\right)^{\frac{1}{4}}$ |
| Þegar veldi er hafið í veldi margföldum við veldisvísana. | $pq^2$ |

Við notum bæði margfeldis- og kvótaregluna í næsta dæmi.

**DÆMI 9.118**

Einfaldið: ⓐ $\frac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{6}{4}}}$ ⓑ $\frac{y^{\frac{4}{3}}\cdot y}{y^{-\frac{2}{3}}}$.

## Lausn

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $\frac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{6}{4}}}$ |
| Notið margfeldisregluna í teljaranum og leggið veldisvísana saman. | $\frac{x^{\frac{2}{4}}}{x^{-\frac{6}{4}}}$ |
| Notið kvótaregluna og dragið veldisvísana frá. | $x^{\frac{8}{4}}$ |
| Einfaldið. | $x^2$ |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $\frac{y^{\frac{4}{3}} \cdot y}{y^{-\frac{2}{3}}}$ |
| Notið margfeldisregluna í teljaranum og leggið veldisvísana saman. | $\frac{y^{\frac{7}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}}}$ |
| Notið kvótaregluna og dragið veldisvísana frá. | $y^{\frac{9}{3}}$ |
| Einfaldið. | $y^3$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.233**

Einfaldið: ⓐ $\frac{m^{\frac{2}{3}} \cdot m^{-\frac{1}{3}}}{m^{-\frac{5}{3}}}$ ⓑ $\frac{n^{\frac{1}{6}} \cdot n}{n^{-\frac{11}{6}}}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 9.234**

Einfaldið: ⓐ $\frac{u^{\frac{4}{5}} \cdot u^{-\frac{2}{5}}}{u^{-\frac{13}{5}}}$ ⓑ $\frac{v^{\frac{1}{2}} \cdot v}{v^{-\frac{7}{2}}}$.

## Verkefni úr hluta 9.8

### *Æfingin skapar meistarann*

**Einfaldið stæður með $a^{\frac{1}{n}}$**

Skrifið sem rótarstæðu í eftirfarandi verkefnum.

**524.** ⓐ $x^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $y^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $z^{\frac{1}{4}}$

**525.** ⓐ $r^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $s^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $t^{\frac{1}{4}}$

**526.** ⓐ $u^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $v^{\frac{1}{9}}$ ⓒ $w^{\frac{1}{20}}$

**527.** ⓐ $g^{\frac{1}{7}}$ ⓑ $h^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $j^{\frac{1}{25}}$

Skrifið með ræðum veldisvísi í eftirfarandi verkefnum.

**528.** ⓐ $-\sqrt[7]{x}$ ⓑ $\sqrt[9]{y}$ ⓒ $\sqrt[5]{f}$

**529.** ⓐ $\sqrt[8]{r}$ ⓑ

$\sqrt[10]{s}$

ⓒ $\sqrt[4]{t}$

**530.** ⓐ $\sqrt[3]{a}$ ⓑ

$\sqrt[12]{b}$

ⓒ $\sqrt{c}$

**531.** ⓐ $\sqrt[5]{u}$ ⓑ $\sqrt{v}$ ⓒ

$\sqrt[16]{w}$

**532.** ⓐ $\sqrt[3]{7c}$ ⓑ $\sqrt[7]{12d}$ ⓒ $3\sqrt[4]{5f}$

**533.** ⓐ $\sqrt[4]{5x}$ ⓑ $\sqrt[8]{9y}$ ⓒ $7\sqrt[5]{3z}$

**534.** ⓐ $\sqrt{21p}$ ⓑ $\sqrt[4]{8q}$ ⓒ $4\sqrt[6]{36r}$

**535.** ⓐ $\sqrt[3]{25a}$ ⓑ $\sqrt{3b}$ ⓒ

$\sqrt[10]{40c}$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**536.** ⓐ $81^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $125^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $64^{\frac{1}{2}}$

**537.** ⓐ $625^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $243^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $32^{\frac{1}{5}}$

**538.** ⓐ $16^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $16^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $3125^{\frac{1}{5}}$

**539.** ⓐ $216^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $32^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $81^{\frac{1}{4}}$

**540.** ⓐ $(-216)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $-216^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $(216)^{-\frac{1}{3}}$

**541.** ⓐ $(-243)^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $-243^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $(243)^{-\frac{1}{5}}$

**542.** ⓐ $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $-1^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $(1)^{-\frac{1}{3}}$

**543.** ⓐ $(-1000)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $-1000^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $(1000)^{-\frac{1}{3}}$

**544.** ⓐ $(-81)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $-81^{\frac{1}{4}}$ ⓒ $(81)^{-\frac{1}{4}}$

**545.** ⓐ $(-49)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $-49^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $(49)^{-\frac{1}{2}}$

**546.** ⓐ $(-36)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $-36^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $(36)^{-\frac{1}{2}}$

**547.** ⓐ $(-1)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $(1)^{-\frac{1}{4}}$ ⓒ $-1^{\frac{1}{4}}$

**548.** ⓐ $(-100)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $-100^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $(100)^{-\frac{1}{2}}$

**549.** ⓐ $(-32)^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $(243)^{-\frac{1}{5}}$ ⓒ $-125^{\frac{1}{3}}$

### Einfaldið stæður með $a^{\frac{m}{n}}$

Skrifið með ræðum veldisvísi í eftirfarandi verkefnum.

**550.** ⓐ $\sqrt{m^5}$ ⓑ $\sqrt[3]{n^2}$ ⓒ $\sqrt[4]{p^3}$

**551.** ⓐ $\sqrt[4]{r^7}$ ⓑ $\sqrt[5]{s^3}$ ⓒ $\sqrt[3]{t^7}$

**552.** ⓐ $\sqrt[5]{u^2}$ ⓑ $\sqrt[5]{v^8}$ ⓒ $\sqrt[9]{w^4}$

**553.** ⓐ $\sqrt[3]{a}$ ⓑ $\sqrt{b^5}$ ⓒ $\sqrt[3]{c^5}$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**554.** ⓐ $16^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $8^{\frac{2}{3}}$ ⓒ $10,000^{\frac{3}{4}}$

**555.** ⓐ $1000^{\frac{2}{3}}$ ⓑ $25^{\frac{3}{2}}$ ⓒ $32^{\frac{3}{5}}$

**556.** ⓐ $27^{\frac{5}{3}}$ ⓑ $16^{\frac{5}{4}}$ ⓒ $32^{\frac{2}{5}}$

**557.** ⓐ $16^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $125^{\frac{5}{3}}$ ⓒ $64^{\frac{4}{3}}$

**558.** ⓐ $32^{\frac{2}{5}}$ ⓑ $27^{-\frac{2}{3}}$ ⓒ $25^{-\frac{3}{2}}$

**559.** ⓐ $64^{\frac{5}{2}}$ ⓑ $81^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $27^{-\frac{4}{3}}$

**560.** ⓐ $25^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $9^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-64\right)^{\frac{2}{3}}$

**561.** ⓐ $100^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $49^{-\frac{5}{2}}$ ⓒ $\left(-100\right)^{\frac{3}{2}}$

**562.** ⓐ $-9^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-9^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-9\right)^{\frac{3}{2}}$

**563.** ⓐ $-64^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-64^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-64\right)^{\frac{3}{2}}$

**564.** ⓐ $-100^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-100^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-100\right)^{\frac{3}{2}}$

**565.** ⓐ $-49^{\frac{3}{2}}$ ⓑ $-49^{-\frac{3}{2}}$ ⓒ $\left(-49\right)^{\frac{3}{2}}$

### Notið veldareglurnar til að einfalda stæður með ræðum veldisvísum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**566.** ⓐ $4^{\frac{5}{8}} \cdot 4^{\frac{11}{8}}$ ⓑ $m^{\frac{7}{12}} \cdot m^{\frac{17}{12}}$ ⓒ $p^{\frac{3}{7}} \cdot p^{\frac{18}{7}}$

**567.** ⓐ $6^{\frac{5}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $n^{\frac{2}{10}} \cdot n^{\frac{8}{10}}$ ⓒ $q^{\frac{2}{5}} \cdot q^{\frac{13}{5}}$

**568.** ⓐ $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{7}{2}}$ ⓑ $c^{\frac{3}{4}} \cdot c^{\frac{9}{4}}$ ⓒ $d^{\frac{3}{5}} \cdot d^{\frac{2}{5}}$

**569.** ⓐ $10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{5}{3}}$ ⓑ $x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{7}{6}}$ ⓒ $y^{\frac{11}{8}} \cdot y^{\frac{21}{8}}$

**570.** ⓐ $\left(m^{6}\right)^{\frac{5}{2}}$ ⓑ $\left(n^{9}\right)^{\frac{4}{3}}$ ⓒ $\left(p^{12}\right)^{\frac{3}{4}}$

**571.** ⓐ $\left(a^{12}\right)^{\frac{1}{6}}$ ⓑ $\left(b^{15}\right)^{\frac{3}{5}}$ ⓒ $\left(c^{11}\right)^{\frac{1}{11}}$

**572.** ⓐ $\left(x^{12}\right)^{\frac{2}{3}}$ ⓑ $\left(y^{20}\right)^{\frac{2}{5}}$ ⓒ $\left(z^{16}\right)^{\frac{1}{16}}$

**573.** ⓐ $\left(h^{6}\right)^{\frac{4}{3}}$ ⓑ $\left(k^{12}\right)^{\frac{3}{4}}$ ⓒ $\left(j^{10}\right)^{\frac{7}{5}}$

**574.** ⓐ $\dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}}$ ⓑ $\dfrac{y^{\frac{5}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$ ⓒ $\dfrac{r^{\frac{4}{5}}}{r^{\frac{9}{5}}}$

**575.** ⓐ $\frac{s^{\frac{11}{5}}}{s^{\frac{6}{5}}}$ ⓑ $\frac{z^{\frac{7}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}$ ⓒ $\frac{w^{\frac{2}{7}}}{w^{\frac{9}{7}}}$

**576.** ⓐ $\frac{t^{\frac{12}{5}}}{t^{\frac{7}{5}}}$ ⓑ $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ ⓒ $\frac{m^{\frac{13}{8}}}{m^{\frac{5}{8}}}$

**577.** ⓐ $\frac{u^{\frac{13}{9}}}{u^{\frac{4}{9}}}$ ⓑ $\frac{r^{\frac{15}{7}}}{r^{\frac{8}{7}}}$ ⓒ $\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{8}{5}}}$

**578.** ⓐ $\left(9\,p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}$ ⓑ $\left(27\,q^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$

**579.** ⓐ $\left(81\,r^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $\left(64\,s^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{6}}$

**580.** ⓐ $\left(16\,u^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$ ⓑ $\left(100\,v^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}$

**581.** ⓐ $\left(27\,m^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ⓑ $\left(625\,n^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

**582.** ⓐ $\left(x^8\,y^{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $\left(a^9\,b^{12}\right)^{\frac{1}{3}}$

**583.** ⓐ $\left(r^8\,s^4\right)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $\left(u^{15}\,v^{20}\right)^{\frac{1}{5}}$

**584.** ⓐ $\left(a^6\,b^{16}\right)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $\left(j^9\,k^6\right)^{\frac{2}{3}}$

**585.** ⓐ $\left(r^{16}\,s^{10}\right)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $\left(u^{10}\,v^5\right)^{\frac{4}{5}}$

**586.** ⓐ $\frac{r^{\frac{5}{2}}\cdot r^{-\frac{1}{2}}}{r^{-\frac{3}{2}}}$ ⓑ $\frac{s^{\frac{1}{5}}\cdot s}{s^{-\frac{9}{5}}}$

**587.** ⓐ $\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}}{a^{-\frac{10}{4}}}$ ⓑ $\frac{b^{\frac{2}{3}}\cdot b}{b^{-\frac{7}{3}}}$

**588.** ⓐ $\frac{c^{\frac{5}{3}}\cdot c^{-\frac{1}{3}}}{c^{-\frac{2}{3}}}$ ⓑ $\frac{d^{\frac{3}{5}}\cdot d}{d^{-\frac{2}{5}}}$

**589.** ⓐ $\frac{m^{\frac{7}{4}}\cdot m^{-\frac{5}{4}}}{m^{-\frac{2}{4}}}$ ⓑ $\frac{n^{\frac{3}{7}}\cdot n}{n^{-\frac{4}{7}}}$

590.

$$4^{\frac{5}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$$

591.

$$n^{\frac{2}{6}} \cdot n^{\frac{4}{6}}$$

592.

$$\left(a^{24}\right)^{\frac{1}{6}}$$

593.

$$\left(b^{10}\right)^{\frac{3}{5}}$$

594.

$$\frac{w^{\frac{2}{5}}}{w^{\frac{7}{5}}}$$

595.

$$\frac{z^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{8}{3}}}$$

596.

$$\left(27\, r^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

597.

$$\left(64\, s^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

598.

$$\left(r^{9}\, s^{12}\right)^{\frac{1}{3}}$$

599.

$$\left(u^{12}\, v^{18}\right)^{\frac{1}{6}}$$

***Stærðfræði í daglegu lífi***

**600.** **Garðrækt Joe vill hafa ferningslaga garðreit í bakgarðinum. Hann á næga moltu til að þekja 144 ferfeta svæði. Einfaldið** $144^{\frac{1}{2}}$ til að finna lengd hverrar hliðar garðsins.

**601.** **Garðrækt Elliott vill leggja ferningslaga verönd í garðinum. Hann á næga steypu til að þekja 242 ferfeta svæði. Einfaldið** $242^{\frac{1}{2}}$ til að finna lengd hverrar hliðar verandarinnar. Námundið að næsta tíunda hluta úr feti.

**602.** **Þyngdarafl** Bob var að setja upp hátíðarskraut og missti skrautmun frá toppi trés sem er 12 fet á hæð. Einfaldið $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til skrautmunurinn náði jörðu. Námundið að næsta tíunda hluta úr sekúndu.

**603.** **Þyngdarafl** Flugvél sleppti blysi úr 1024 feta hæð yfir stöðuvatni. Einfaldið $\frac{1024^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til blysið náði vatninu.

***Ritunarverkefni***

**604.** Sýnið tvær ólíkar algebruaðferðir til að einfalda $4^{\frac{3}{2}}$. Útskýrið öll skrefin.

**605.** Útskýrið hvers vegna ekki er hægt að reikna gildi stæðunnar $(-16)^{\frac{3}{2}}$.

# Lykilhugtök

**rótarvísir**

$\sqrt[n]{a}$ n kallast rótarvísir rótarstæðunnar.

**líkar rótarstæður**

Rótarstæður með sama rótarvísi og sama rótarstofn kallast líkar rótarstæður.

**líkar ferningsrætur**

Ferningsrætur með sama rótarstofn kallast líkar ferningsrætur.

***n-ta rót tölu***

Ef $b^n = a$, þá er $b$ n-ta rót tölunnar $a$.

**n-ta rótin sem rótarmerkið táknar**

Sú n-ta rót tölunnar $a$ sem rótarmerkið táknar er skrifuð $\sqrt[n]{a}$.

**rótarjafna**

Jafna þar sem breytan er í rótarstofni ferningsrótar kallast rótarjafna.

**ræðir veldisvísar**

- Ef $\sqrt[n]{a}$ er rauntala og $n \geq 2$, þá er $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- Fyrir allar jákvæðar heiltölur m og n gildir $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ og $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

**að eyða ferningsrót úr nefnara**

Þegar broti með rótarstæðu í nefnara er breytt í jafngilt brot með heiltölu í nefnara kallast það að eyða ferningsrót úr nefnara.

**ferningur tölu**

- Ef $n^2 = m$, þá er $m$ ferningur tölunnar $n$.

**táknmál ferningsrótar**

- Ef $m = n^2$, þá er $\sqrt{m} = n$. Við lesum $\sqrt{m}$ sem „ferningsrótin af $m$“.

**ferningsrót tölu**

- Ef $n^2 = m$, þá er $n$ ferningsrót tölunnar $m$.

# Meginatriði

## 9.1 Einfaldið og notið ferningsrætur

- Athugið að ferningsrót neikvæðrar tölu er ekki rauntala.
- Hver jákvæð tala hefur tvær ferningsrætur, aðra jákvæða og hina neikvæða. Jákvæða ferningsrótin er sú ferningsrót jákvæðrar tölu sem rótarmerkið táknar.
- Við getum metið ferningsrætur með því að nota nálægar ferningstölur.
- Við getum nálgað ferningsrætur með reiknivél.
- Þegar við notum rótarmerkið til að taka ferningsrót af breytustæðu ættum við að tilgreina að $x \geq 0$ til að tryggja að við fáum jákvæðu ferningsrótina.

9

## 9.2 Einfaldið ferningsrætur

- **Ferningsrót á einfölduðu formi** $\sqrt{a}$ telst vera á einfölduðu formi ef $a$ hefur enga þætti sem eru ferningstölur.
- **Margfeldisregla fyrir ferningsrætur** Ef $a$ og $b$ eru óneikvæðar rauntölur, þá er

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

- **Einfaldið ferningsrót með margfeldisreglunni** Til að einfalda ferningsrót með margfeldisreglunni:
  1. Skref 1. Finnið stærsta þátt rótarstofnsins sem er ferningstala. Skrifið rótarstofninn sem margfeldi með þessum ferningstöluþætti.
  2. Skref 2. Notið margfeldisregluna til að endurskrifa rótarstæðuna sem margfeldi tveggja rótarstæðna.
  3. Skref 3. Einfaldið ferningsrót ferningstölunnar.
- **Kvótaregla fyrir ferningsrætur** Ef a og b eru óneikvæðar rauntölur og $b \neq 0$, þá er a/b = a/b

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- **Einfaldið ferningsrót með kvótareglunni** Til að einfalda ferningsrót með kvótareglunni:
  1. Skref 1. Einfaldið brotið í rótarstofninum ef hægt er.
  2. Skref 2. Notið kvótaregluna til að skrifa rótarstæðuna sem kvóta tveggja rótarstæðna.
  3. Skref 3. Einfaldið rótarstæðurnar í teljara og nefnara.

## 9.3 Leggið ferningsrætur saman og dragið þær hverja frá annarri

- Til að leggja saman líkar ferningsrætur eða draga þær hverja frá annarri leggjum við saman stuðlana eða drögum þá frá og höldum ferningsrótinni óbreyttri.
- Stundum virðast ferningsrætur sem leggja á saman eða draga frá ekki vera líkar, en eftir einföldun þeirra koma líkar rótarstæður í ljós.

## 9.4 Margfaldið ferningsrætur

- **Margfeldisregla fyrir ferningsrætur** Ef $a$ og $b$ eru óneikvæðar rauntölur, þá er

$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ og } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a\,b}$$

- **Formúlur fyrir sérstök margfeldi** tvíliða og samoka:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Nota má FOIL-aðferðina til að margfalda tvíliður sem innihalda rótarstæður.

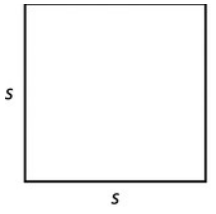
## 9.5 Deilið ferningsrótum

- **Kvótaregla fyrir ferningsrætur**

  - Ef a og b eru óneikvæðar rauntölur og $b \neq 0$, þá
    $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ og $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- **Ferningsrætur á einfölduðu formi**
  Ferningsrót telst vera á einfölduðu formi ef
  - enginn þáttur sem er ferningstala er í rótarstofninum
  - engin brot eru í rótarstofninum
  - engar ferningsrætur eru í nefnara brots

## 9.6 Leysið jöfnur með ferningsrótum

- **Til að leysa rótarjöfnu:**
  1. Skref 1. Einangrið rótarstæðuna öðrum megin í jöfnunni.
  2. Skref 2. Hefjið báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi.
  3. Skref 3. Leysið nýju jöfnuna.
  4. Skref 4. Sannreynið svarið. Sumar lausnir sem fást ganga ef til vill ekki upp í upphaflegu jöfnunni.
- **Lausn verkefna með formúlum**
  1. Skref 1. Lesið verkefnið og gangið úr skugga um að öll orð og hugmyndir séu skiljanleg. Teiknið mynd þegar það á við og merkið gefnar upplýsingar inn á hana.
  2. Skref 2. Finnið hvað leitað er að.
  3. Skref 3. Nefnið það sem leitað er að með því að velja breytu sem táknar stærðina.
  4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu með því að skrifa viðeigandi formúlu eða líkan fyrir aðstæðurnar. Setjið gefnu upplýsingarnar inn.
  5. Skref 5. Leysið jöfnuna með góðum algebruaðferðum.
  6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé skynsamlegt.
  7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.
- **Flatarmál fernings**




Flatarmál, $A$ $A = s^2$
Hliðarlengd, $s$ $s = \sqrt{A}$

- **Fallandi hlutir**
  - Á jörðinni má finna tímann í sekúndum sem það tekur hlut að falla til jarðar úr $h$ feta hæð með formúlunni $t = \frac{\sqrt{h}}{4}$.
- **Hemlaför og hraði bíls**
  - Ef hemlaförin eru d fet á lengd má finna hraða bílsins, s, áður en hemlað var með formúlunni $s = \sqrt{24\,d}$.

## 9.7 Hærri rætur

- **Eiginleikar**
- $\sqrt[n]{a}$ þegar $n$ er slétt tala og
  - $a \geq 0$, þá er $\sqrt[n]{a}$ rauntala
  - $a < 0$, þá er $\sqrt[n]{a}$ ekki rauntala
  - Þegar $n$ er oddatala er $\sqrt[n]{a}$ rauntala fyrir öll gildi a.
  - Fyrir sérhverja heiltölu $n \geq 2$, þegar n er oddatala $\sqrt[n]{a^n} = a$
  - Fyrir sérhverja heiltölu $n \geq 2$, þegar n er slétt tala $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
- $\sqrt[n]{a}$ telst vera á einfölduðu formi ef a hefur enga þætti af gerðinni $m^n$.
- **Margfeldisregla fyrir n-tu rætur**

  $\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ og $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$
- **Kvótaregla fyrir *n*-tu rætur**

  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ og $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- Til að sameina líkar rótarstæður leggjum við einfaldlega saman stuðlana eða drögum þá frá en höldum rótarstæðunni óbreyttri.

## 9.8 Ræðir veldisvísar

- **Samantekt á veldisreglum**
- Ef $a, b$ eru rauntölur og $m, n$ eru ræðar tölur, þá
  - **Margfeldisregla fyrir veldi** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  - **Reglan um veldi af veldi** $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
  - **Reglan um margfeldi í veldi** $(a\,b)^m = a^m b^m$
  - **Kvótaregla fyrir veldi:**

    $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0, m > n$

    $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, a \neq 0, n > m$
  - **Skilgreining núllveldis** $a^0 = 1,\ a \neq 0$
  - **Reglan um kvóta í veldi** $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$

# Upprifjunarverkefni

## Einfaldið og notið ferningsrætur

### Einfaldið stæður með ferningsrótum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

606.

$$\sqrt{64}$$

607.

$$\sqrt{144}$$

608.

$$-\sqrt{25}$$

609.

$$-\sqrt{81}$$

610.

$$\sqrt{-9}$$

611.

$$\sqrt{-36}$$

612.

$$\sqrt{64}+\sqrt{225}$$

613.

$$\sqrt{64+225}$$

### Áætlið ferningsrætur

Áætlið hverja ferningsrót milli tveggja samliggjandi heiltalna í eftirfarandi verkefnum.

614.

$$\sqrt{28}$$

615.

$$\sqrt{155}$$

### Finnið nálgunargildi ferningsróta

Finnið nálgunargildi hverrar ferningsrótar og námundið að tveimur aukastöfum í eftirfarandi verkefnum.

616.

$$\sqrt{15}$$

617.

$$\sqrt{57}$$

**Einfaldið breytustæður með ferningsrótum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

618.

$$\sqrt{q^2}$$

619.

$$\sqrt{64\,b^2}$$

620.

$$-\sqrt{121\,a^2}$$

621.

$$\sqrt{225\,m^2\,n^2}$$

622.

$$-\sqrt{100\,q^2}$$

623.

$$\sqrt{49\,y^2}$$

624.

$$\sqrt{4\,a^2\,b^2}$$

625.

$$\sqrt{121\,c^2\,d^2}$$

Einfaldið ferningsrætur

**Notið margfeldisregluna til að einfalda ferningsrætur**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

626.

$$\sqrt{300}$$

627.

$$\sqrt{98}$$

628.

$$\sqrt{x^{13}}$$

629.

$$\sqrt{y^{19}}$$

630.

$$\sqrt{16m^4}$$

631.

$$\sqrt{36n^{13}}$$

632.

$$\sqrt{288m^{21}}$$

633.

$$\sqrt{150n^7}$$

634.

$$\sqrt{48r^5s^4}$$

635.

$$\sqrt{108r^5s^3}$$

636.

$$\frac{10-\sqrt{50}}{5}$$

637.

$$\frac{6+\sqrt{72}}{6}$$

**Notið kvótaregluna til að einfalda ferningsrætur**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

638.

$$\sqrt{\frac{16}{25}}$$

639.

$$\sqrt{\frac{81}{36}}$$

640.

$$\sqrt{\frac{x^8}{x^4}}$$

641.

$$\sqrt{\frac{y^6}{y^2}}$$

642.

$$\sqrt{\frac{98\,p^6}{2\,p^2}}$$

643.

$$\sqrt{\frac{72\,q^8}{2\,q^4}}$$

644.

$$\sqrt{\frac{65}{121}}$$

645.

$$\sqrt{\frac{26}{169}}$$

646.

$$\sqrt{\frac{64\,x^4}{25\,x^2}}$$

647.

$$\sqrt{\frac{36\,r^{10}}{16\,r^5}}$$

648.

$$\sqrt{\frac{48\,p^3\,q^5}{27\,p\,q}}$$

649.

$$\sqrt{\frac{12\,r^5\,s^7}{75\,r^2\,s}}$$

Leggið ferningsrætur saman og dragið þær hverja frá annarri

**Leggið líkar ferningsrætur saman og dragið þær hverja frá annarri**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

650.

$$3\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

651.

$$5\sqrt{5}+7\sqrt{5}$$

652.

$$4\sqrt{y}+4\sqrt{y}$$

653.

$$6\sqrt{m}-2\sqrt{m}$$

654.

$$-3\sqrt{7}+2\sqrt{7}-\sqrt{7}$$

655.

$$8\sqrt{13}+2\sqrt{3}+3\sqrt{13}$$

656.

$$3\sqrt{5xy}-\sqrt{5xy}+3\sqrt{5xy}$$

657.

$$2\sqrt{3rs}+\sqrt{3rs}-5\sqrt{rs}$$

**Leggið saman ferningsrætur sem þarf að einfalda og dragið frá þeim**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

658.

$$\sqrt{32}+3\sqrt{2}$$

659.

$$\sqrt{8}+3\sqrt{2}$$

660.

$$\sqrt{72}+\sqrt{50}$$

661.

$$\sqrt{48}+\sqrt{75}$$

662.

$$3\sqrt{32}+\sqrt{98}$$

663.

$$\frac{1}{3}\sqrt{27}-\frac{1}{8}\sqrt{192}$$

664.

$$\sqrt{50\,y^5}-\sqrt{72\,y^5}$$

665.

$$6\sqrt{18\,n^4}-3\sqrt{8\,n^4}+n^2\sqrt{50}$$

Margfaldið ferningsrætur

**Margfaldið ferningsrætur**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

666.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}$$

667.

$$2\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{14}$$

668.

$$\sqrt{2\,m^2}\cdot\sqrt{20\,m^4}$$

669.

$$\left(6\sqrt{2\,y}\right)\left(3\sqrt{50\,y^3}\right)$$

670.

$$\left(6\sqrt{3\,v^4}\right)\left(5\sqrt{30\,v}\right)$$

671.

$$\left(\sqrt{8}\right)^2$$

672.

$$\left(-\sqrt{10}\right)^2$$

673.

$$\left(2\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{5}\right)$$

674.

$$\left(-3\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{18}\right)$$

**Notið margföldun margliða til að margfalda ferningsrætur**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

675.

$$10\left(2-\sqrt{7}\right)$$

676.

$$\sqrt{3}\left(4+\sqrt{12}\right)$$

677.

$$\left(5+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$$

678.

$$\left(5-3\sqrt{7}\right)\left(1-2\sqrt{7}\right)$$

679.

$$\left(1-3\sqrt{x}\right)\left(5+2\sqrt{x}\right)$$

680.

$$\left(3+4\sqrt{y}\right)\left(10-\sqrt{y}\right)$$

681.

$$\left(1+6\sqrt{p}\right)^2$$

682.

$$\left(2-6\sqrt{5}\right)^2$$

683.

$$\left(3+2\sqrt{7}\right)\left(3-2\sqrt{7}\right)$$

684.

$$\left(6-\sqrt{11}\right)\left(6+\sqrt{11}\right)$$

Deilið ferningsrótum

**Deilið ferningsrótum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

685.

$$\frac{\sqrt{75}}{10}$$

686.

$$\frac{2-\sqrt{12}}{6}$$

687.

$$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}}$$

688.

$$\frac{\sqrt{75x^7}}{\sqrt{3x^3}}$$

689.

$$\frac{\sqrt{20y^5}}{\sqrt{2y}}$$

690.

$$\frac{\sqrt{98p^6q^4}}{\sqrt{2p^4q^8}}$$

**Eyðið ferningsrót úr nefnara með einum lið**

Eyðið ferningsrót úr nefnara í eftirfarandi verkefnum.

691.

$$\frac{10}{\sqrt{15}}$$

692.

$$\frac{6}{\sqrt{6}}$$

693.

$$\frac{5}{3\sqrt{5}}$$

694.

$$\frac{10}{2\sqrt{6}}$$

695.

$$\sqrt{\frac{3}{28}}$$

696.

$$\sqrt{\frac{9}{75}}$$

**Eyðið ferningsrót úr nefnara með tveimur liðum**

Eyðið ferningsrót úr nefnara í eftirfarandi verkefnum.

697.

$$\frac{4}{4+\sqrt{27}}$$

698.

$$\frac{5}{2-\sqrt{10}}$$

699.

$$\frac{4}{2-\sqrt{5}}$$

700.

$$\frac{5}{4-\sqrt{8}}$$

701.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}+\sqrt{3}}$$

702.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

Leysið jöfnur með ferningsrótum

**Leysið rótarjöfnur**

Leysið jöfnuna í eftirfarandi verkefnum.

703.

$$\sqrt{7z+1}=6$$

704.

$$\sqrt{4u-2}-4=0$$

705.

$$\sqrt{6m+4}-5=0$$

706.

$$\sqrt{2u-3}+2=0$$

707.

$$\sqrt{u-4}+4=u$$

708.

$$\sqrt{v-9}+9=0$$

709.

$$\sqrt{r-4}-r=-10$$

710.

$$\sqrt{s-9}-s=-9$$

711.

$$2\sqrt{2x-7}-4=8$$

712.

$$\sqrt{2-x}=\sqrt{2x-7}$$

713.

$$\sqrt{a}+3=\sqrt{a+9}$$

714.

$$\sqrt{r}+3=\sqrt{r+4}$$

715.

$$\sqrt{u}+2=\sqrt{u+5}$$

716.

$$\sqrt{n+11}-1=\sqrt{n+4}$$

717.

$$\sqrt{y+5}+1=\sqrt{2y+3}$$

**Notið ferningsrætur í hagnýtum verkefnum**

Leysið eftirfarandi verkefni. Námundið nálgunargildi að einum aukastaf.

**718.** Eitt bretti af torfi þekur um 600 ferfet. Trinh vill panta bretti af torfi til að útbúa ferningslaga grasflöt í bakgarðinum sínum. Notið formúluna $s=\sqrt{A}$ til að finna lengd hverrar hliðar grasflatarinnar.

**719.** Þyrla lét pakka falla úr 900 feta hæð niður til göngumanns sem var í sjálfheldu. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til pakkinn náði til göngumannsins.

**720.** Lögreglumaðurinn Morales mældi hemlaför eftir einn bílanna sem lentu í árekstri. Hemlaförin voru 245 fet á lengd. Notið formúluna $s=\sqrt{24\,d}$ til að finna hraða bílsins áður en hemlað var.

Hærri rætur

**Einfaldið stæður með hærri rótum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**721.**

ⓐ $\sqrt[6]{64}$

ⓑ $\sqrt[3]{64}$

**722.**

ⓐ $\sqrt[3]{-27}$

ⓑ $\sqrt[4]{-64}$

**723.**

ⓐ $\sqrt[9]{d^9}$

ⓑ $\sqrt[8]{v^8}$

**724.**

ⓐ $\sqrt[5]{a^{10}}$

ⓑ $\sqrt[3]{b^{27}}$

**725.**

ⓐ $\sqrt[4]{16\,x^8}$

ⓑ $\sqrt[6]{64\,y^{12}}$

**726.**

ⓐ $\sqrt[7]{128\,r^{14}}$

ⓑ $\sqrt[4]{81\,s^{24}}$

9

**Notið margfeldisregluna til að einfalda stæður með hærri rótum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

**727.**

ⓐ $\sqrt[9]{d^9}$

ⓑ

$\sqrt[11]{m^{17}}$

**728.**

ⓐ $\sqrt[3]{54}$

ⓑ $\sqrt[4]{128}$

**729.**

ⓐ $\sqrt[5]{64c^8}$

ⓑ $\sqrt[4]{48d^7}$

**730.**

ⓐ $\sqrt[3]{343q^7}$

ⓑ $\sqrt[6]{192r^9}$

**731.**

ⓐ $\sqrt[3]{-500}$

ⓑ $\sqrt[4]{-16}$

### Notið kvótaregluna til að einfalda stæður með hærri rótum

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

732.

$$\sqrt[5]{\frac{r^{10}}{r^5}}$$

733.

$$\sqrt[3]{\frac{w^{12}}{w^2}}$$

734.

$$\sqrt[4]{\frac{64y^8}{4y^5}}$$

735.

$$\sqrt[3]{\frac{54z^9}{2z^3}}$$

736.

$$\sqrt[6]{\frac{64a^7}{b^2}}$$

### Leggið saman hærri rætur og dragið frá þeim

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

737.

$$4\sqrt[5]{20}-2\sqrt[5]{20}$$

738.

$$4\sqrt[3]{18}+3\sqrt[3]{18}$$

739.

$$\sqrt[4]{1250}-\sqrt[4]{162}$$

740.

$$\sqrt[3]{640\,c^5}-\sqrt[3]{-80\,c^3}$$

741.

$$\sqrt[5]{96\,t^8}+\sqrt[5]{486\,t^4}$$

Ræðir veldisvísar

**Einfaldið stæður með $a^{\frac{1}{n}}$**

Skrifið sem rótarstæðu í eftirfarandi verkefnum.

742.

$$r^{\frac{1}{8}}$$

743.

$$s^{\frac{1}{10}}$$

Skrifið með ræðum veldisvísi í eftirfarandi verkefnum.

744.

$$\sqrt[5]{u}$$

745.

$$\sqrt[6]{v}$$

746.

$$\sqrt[3]{9\,m}$$

747.

$$\sqrt[6]{10\,z}$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

748.

$$16^{\frac{1}{4}}$$

749.

$$32^{\frac{1}{5}}$$

750.

$$\left(-125\right)^{\frac{1}{3}}$$

751.

$$\left(125\right)^{-\frac{1}{3}}$$

752.

$$\left(-9\right)^{\frac{1}{2}}$$

753.

$$\left(36\right)^{-\frac{1}{2}}$$

**Einfaldið stæður með** $a^{\frac{m}{n}}$

Skrifið með ræðum veldisvísi í eftirfarandi verkefnum.

754.

$$\sqrt[3]{q^5}$$

755.

$$\sqrt[5]{n^8}$$

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

756.

$$27^{-\frac{2}{3}}$$

757.

$$64^{\frac{5}{2}}$$

758.

$$36^{\frac{3}{2}}$$

759.

$$81^{-\frac{5}{2}}$$

**Notið veldareglurnar til að einfalda stæður með ræðum veldisvísum**

Einfaldið í eftirfarandi verkefnum.

760.

$$3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{\frac{6}{5}}$$

761.

$$\left(x^{6}\right)^{\frac{4}{3}}$$

762.

$$\frac{z^{\frac{5}{2}}}{z^{\frac{7}{5}}}$$

763.

$$\left(16\, s^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

764.

$$\left(m^{8} n^{12}\right)^{\frac{1}{4}}$$

765.

$$\frac{z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{-\frac{1}{3}}}{z^{-\frac{5}{3}}}$$

# Æfingapróf

Einfaldið stæðurnar í verkefnunum hér á eftir.

766.

$$\sqrt{81+144}$$

767.

$$\sqrt{169\, m^{4} n^{2}}$$

768.

$$\sqrt{36\, n^{13}}$$

769.

$$3\sqrt{13}+5\sqrt{2}+\sqrt{13}$$

770.

$$5\sqrt{20}+2\sqrt{125}$$

771.

$$\left(3\sqrt{6\,y}\right)\left(2\sqrt{50\,y^3}\right)$$

772.

$$\left(2-5\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)$$

773.

$$\left(1-2\sqrt{q}\right)^2$$

**774.**

ⓐ $\sqrt[4]{a^{12}}$

ⓑ $\sqrt[3]{b^{21}}$

**775.**

ⓐ $\sqrt[4]{81\,x^{12}}$

ⓑ $\sqrt[6]{64\,y^{18}}$

776.

$$\sqrt{\frac{64\,r^{12}}{25\,r^6}}$$

777.

$$\sqrt{\frac{14\,y^3}{7\,y}}$$

778.

$$\frac{\sqrt[5]{256\,x^7}}{\sqrt[5]{4\,x^2}}$$

779.

$$\sqrt[4]{512}-2\sqrt[4]{32}$$

**780.**

ⓐ $256^{\frac{1}{4}}$

ⓑ $243^{\frac{1}{5}}$

781.

$$49^{\frac{3}{2}}$$

782.

$$25^{-\frac{5}{2}}$$

783.

$$\frac{w^{\frac{3}{4}}}{w^{\frac{7}{4}}}$$

784.

$$\left(27\,s^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Eyðið ferningsrót úr nefnara í verkefnunum hér á eftir.

785.

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}$$

786.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$$

Leysið verkefnin hér á eftir.

787.

$$3\sqrt{2x-3}-20=7$$

788.

$$\sqrt{3u-2}=\sqrt{5u+1}$$

Leysið verkefnið hér á eftir.

9

**789.** Þyrla sem flaug í 600 feta hæð lét pakka falla niður til björgunarbáts. Notið formúluna $t=\frac{\sqrt{h}}{4}$ til að finna hve margar sekúndur liðu þar til pakkinn náði til björgunarbátsins. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr sekúndu.

10. KAFLI

# Annars stigs jöfnur



Mynd 10.1 Flugeldar fylgja hátíðahöldum um allan heim. (Mynd: aðlagað verk frá tlc, Flickr)

## Yfirlit kaflans


- 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni
- 10.2 Leysið annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning
- 10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni
- 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum
- 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum


## Inngangur

Flugferlum flugelda er lýst með annars stigs jöfnum. Nota má jöfnurnar til að spá fyrir um hámarkshæð flugelds og hve margar sekúndur líða frá því að honum er skotið upp þar til hann springur. Í þessum kafla könnum við eiginleika annars stigs jafna, leysum þær, teiknum gröf þeirra og skoðum hvernig þær eru notaðar sem líkön fyrir ýmsar aðstæður.

# 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni $a\,x^2=k$ með ferningsrótarreglunni
- Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni $a\left(x-h\right)^2=k$ með ferningsrótarreglunni

**UNDIRBÚNINGUR 10.1**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Einfaldið: $\sqrt{75}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta verkefni skuluð þið rifja upp dæmi 9.12.

**UNDIRBÚNINGUR 10.2**

Einfaldið: $\sqrt{\frac{64}{3}}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta verkefni skuluð þið rifja upp dæmi 9.67.

**UNDIRBÚNINGUR 10.3**

Þáttið: $4\,x^2-12\,x+9$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta verkefni skuluð þið rifja upp dæmi 7.43.

Annars stigs jöfnur eru jöfnur af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c=0$, þar sem $a\neq 0$. Þær eru ólíkar línulegum jöfnum að því leyti að í þeim er liður þar sem breytan er í öðru veldi. Við notum aðrar aðferðir til að leysa annars stigs jöfnur en línulegar jöfnur, því við getum ekki einangrað breytuna með því einu að leggja saman, draga frá, margfalda og deila liðum.

Við höfum séð að leysa má sumar annars stigs jöfnur með þáttun. Í þessum kafla notum við þrjár aðrar aðferðir til að leysa annars stigs jöfnur.

## Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni ax 2 = k með ferningsrótarreglunni

Við höfum þegar leyst nokkrar annars stigs jöfnur með þáttun. Rifjum upp hvernig við notuðum þáttun til að leysa annars stigs jöfnuna $x^2=9$.

$$x^2=9$$

Setjið jöfnuna á staðalform. $x^2-9=0$

Þáttið vinstri hliðina. $\left(x-3\right)\left(x+3\right)=0$

Notið núllmargfeldisregluna. $(x-3)=0,\ \ (x+3)=0$

Leysið hvora jöfnu. $x=3,\quad x=-3$

Sameinið lausnirnar tvær í $\pm$ rithætti. $x=\pm\ 3$

(Lausnin er lesin „$x$ er jafnt og plús eða mínus 3.“)

Við getum auðveldlega notað þáttun til að finna lausnir á svipuðum jöfnum, svo sem $x^2=16$ og $x^2=25$, því 16 og 25 eru ferningstölur. En hvað gerist þegar við fáum jöfnu eins og $x^2=7$? Talan 7 er ekki ferningstala og því getum við ekki leyst jöfnuna með þáttun.

Þessar jöfnur eru allar af gerðinni $x^2=k$. Við skilgreindum ferningsrót tölu svona:

Ef $n^2=m$, þá er $n$ ferningsrót af $m$.

Af þessu leiðir ferningsrótarreglan.

---

**FERNINGSRÓTARREGLA**

Ef $x^2=k$ og $k\geq 0$, þá er $x=\sqrt{k}$ eða $x=-\sqrt{k}$.

Athugið að ferningsrótarreglan gefur tvær lausnir á jöfnu af gerðinni $x^2=k$: jákvæðu ferningsrótina af $k$ og samlagningarandhverfu hennar. Við gætum einnig ritað lausnina sem $x=\pm\sqrt{k}$.

Nú leysum við jöfnuna $x^2=9$ aftur, en að þessu sinni með ferningsrótarreglunni.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $x^2$ | $=$ | $9$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x$ | $=$ | $\pm\sqrt{9}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x$ | $=$ | $\pm\ 3$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=3, x$ | $=$ | $-3$ |

Hvað gerist þegar fastinn er ekki ferningstala? Notum ferningsrótarregluna til að leysa jöfnuna $x^2=7$.

| | | |
|---|---|---|
| $x^2$ | $=$ | $7$ |
| $x$ | $=$ | $\pm\sqrt{7}$ |

Notið ferningsrótarregluna.

Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. $x=\sqrt{7},\ x=\ -\sqrt{7}$

Við getum ekki einfaldað $\sqrt{7}$ og því látum við svarið standa sem rótarstæðu.

---

**DÆMI 10.1**

Leysið: $x^2=169$.

## Lausn

$$x^2 = 169$$
$$x = \pm\sqrt{169}$$

Notið ferningsrótarregluna.

$$x = \pm 13$$

Einfaldið rótarstæðuna.

Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. $x = 13, \quad x = -13$

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.1**

Leysið: $x^2 = 81$.

---

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.2**

Leysið: $y^2 = 121$.

---

**DÆMI 10.2**

### Hvernig leysa á annars stigs jöfnu af gerðinni $ax^2 = k$ með ferningsrótarreglunni

Leysið: $x^2 - 48 = 0$.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Einangrið annars stigs liðinn og gerið stuðul hans jafnan einum. | Leggið 48 við báðar hliðar til að einangra $x^2$. | $x^2 - 48 = 0$<br>$x^2 = 48$ |
| **Skref 2.** Notið ferningsrótarregluna. | Munið að bæta við ±-tákninu. | $x = \pm\sqrt{48}$ |
| **Skref 3.** Einfaldið rótarsegðina. | | $x = \pm\sqrt{16} \cdot \sqrt{3}$<br>$x = \pm 4\sqrt{3}$<br>$x = 4\sqrt{3}, x = -4\sqrt{3}$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Gangið úr skugga um að lausnirnar séu réttar. | Setjið inn $x = 4\sqrt{3}$ og $x = -4\sqrt{3}$. | $x^2 - 48 = 0$<br>$(4\sqrt{3})^2 - 48 \stackrel{?}{=} 0$<br>$16 \cdot 3 - 48 \stackrel{?}{=} 0$<br>$0 = 0$ ✓<br>$x^2 - 48 = 0$<br>$(-4\sqrt{3})^2 - 48 \stackrel{?}{=} 0$<br>$16 \cdot 3 - 48 \stackrel{?}{=} 0$<br>$0 = 0$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.3**

Leysið: $x^2 - 50 = 0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.4**

Leysið: $y^2 - 27 = 0$.

**AÐFERÐ**

### Leysið annars stigs jöfnu með ferningsrótarreglunni.

1. Skref 1. Einangrið annars stigs liðinn og gerið stuðul hans jafnan einum.
2. Skref 2. Notið ferningsrótarregluna.
3. Skref 3. Einfaldið rótarstæðuna.
4. Skref 4. Sannreynið lausnirnar.

Til að nota ferningsrótarregluna verður stuðull breytuliðarins að vera 1. Í næsta dæmi verðum við að deila báðum hliðum jöfnunnar með 5 áður en við notum ferningsrótarregluna.

**DÆMI 10.3**

Leysið: $5m^2 = 80$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Annars stigs liðurinn er einangraður. | $5m^2=80$ |
| Deilið með 5 til að gera stuðul hans jafnan 1. | $\frac{5m^2}{5}=\frac{80}{5}$ |
| Einfaldið. | $m^2=16$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $m=\pm\sqrt{16}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $m=\pm 4$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $m=4, m=-4$ |
| Sannreynið lausnirnar.<br>$5m^2=80$ $\quad$ $5m^2=80$<br>$5(4)^2 \stackrel{?}{=} 80$ $\quad$ $5(-4)^2 \stackrel{?}{=} 80$<br>$5\cdot 16 \stackrel{?}{=} 80$ $\quad$ $5\cdot 16 \stackrel{?}{=} 80$<br>$80=80$ ✓ $\quad$ $80=80$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.5**

Leysið: $2x^2=98$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.6**

Leysið: $3z^2=108$.

Ferningsrótarreglan hófst á orðunum: „Ef $x^2=k$ og $k\geq 0$.“ Hvað gerist ef $k<0$? Sú staða kemur upp í næsta dæmi.

**DÆMI 10.4**

Leysið: $q^2+24=0$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $q^2+24=0$ |
| Einangrið annars stigs liðinn. | $q^2=-24$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $q=\pm\sqrt{-24}$ |
| $\sqrt{-24}$ er ekki rauntala. | Engin rauntölulausn er til. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.7**

Leysið: $c^2+12=0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.8**

Leysið: $d^2+81=0$.

Munið að fyrst einangrum við annars stigs liðinn og gerum síðan stuðul hans jafnan einum.

**DÆMI 10.5**

Leysið: $\frac{2}{3}u^2+5=17$.

## Lausn

| | $\frac{2}{3}u^2+5=17$ |
|---|---|
| Einangrið annars stigs liðinn. | $\frac{2}{3}u^2=12$ |
| Margfaldið með $\frac{3}{2}$ til að gera stuðulinn jafnan 1. | $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}u^2=\frac{3}{2}\cdot 12$ |
| Einfaldið. | $u^2=18$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $u=\pm\sqrt{18}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $u=\pm\sqrt{9}\sqrt{2}$ |
| Einfaldið. | $u=\pm 3\sqrt{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $u=3\sqrt{2}, u=-3\sqrt{2}$ |
| Sannreynið. | |

$$\frac{2}{3}u^2+5=17 \qquad \frac{2}{3}u^2+5=17$$
$$\frac{2}{3}(3\sqrt{2})^2+5\stackrel{?}{=}17 \qquad \frac{2}{3}(-3\sqrt{2})^2+5\stackrel{?}{=}17$$
$$\frac{2}{3}\cdot 18+5\stackrel{?}{=}17 \qquad \frac{2}{3}\cdot 18+5\stackrel{?}{=}17$$
$$12+5\stackrel{?}{=}17 \qquad 12+5\stackrel{?}{=}17$$
$$17=17\checkmark \qquad 17=17\checkmark$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.9**

Leysið: $\frac{1}{2}x^2+4=24$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.10**

Leysið: $\frac{3}{4}y^2-3=18$.

Í lausnum sumra jafna geta verið brot í rótarstofninum. Þegar það gerist verðum við að eyða ferningsrót úr nefnaranum.

**DÆMI 10.6**

Leysið: $2c^2 - 4 = 45$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Einangrið annars stigs liðinn. Deilið með 2 til að gera stuðulinn jafnan 1. Einfaldið. Notið ferningsrótarregluna. Einfaldið rótarstæðuna. Eyðið ferningsrót úr nefnaranum. Einfaldið. | $\begin{aligned} 2c^2 - 4 &= 45 \\ 2c^2 &= 49 \\ \frac{2c^2}{2} &= \frac{49}{2} \\ c^2 &= \frac{49}{2} \\ c &= \pm\sqrt{\frac{49}{2}} \\ c &= \pm\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} \\ c &= \pm\frac{\sqrt{49}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} \\ c &= \pm\frac{7\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $c = \frac{7\sqrt{2}}{2}, c = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.11**

Leysið: $5r^2 - 2 = 34$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.12**

Leysið: $3t^2 + 6 = 70$.

10

## Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni a ( x – h ) 2 = k með ferningsrótarreglunni

Við getum einnig notað ferningsrótarregluna til að leysa jöfnu eins og $(x-3)^2 = 16$. Við förum með allan tvíliðinn, $(x-3)$, sem annars stigs liðinn.

**DÆMI 10.7**

Leysið: $(x-3)^2=16$.

## Lausn

| | $(x-3)^2=16$ |
|---|---|
| Notið ferningsrótarregluna. | $x-3=\pm\sqrt{16}$ |
| Einfaldið. | $x-3=\pm 4$ |
| Ritið sem tvær jöfnur. | $x-3=4, x-3=-4$ |
| Leysið. | $x=7, x=-1$ |
| Sannreynið.<br>$(7-3)^2=16$ $(-1-3)^2=16$<br>$(4)^2=16$ $(-4)^2=16$<br>$16=16$ ✓ $16=16$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.13**

Leysið: $(q+5)^2=1$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.14**

Leysið: $(r-3)^2=25$.

**DÆMI 10.8**

Leysið: $(y-7)^2=12$.

## Lausn

| | $(y-7)^2=12$ |
|---|---|
| Notið ferningsrótarregluna. | $y-7=\pm\sqrt{12}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $y-7=\pm 2\sqrt{3}$ |
| Leysið með tilliti til y. | $y=7\pm 2\sqrt{3}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $y=7+2\sqrt{3}, y=7-2\sqrt{3}$ |
| Sannreynið.<br>$(y-7)^2=12$ $(y-7)^2=12$<br>$(7+2\sqrt{3}-7)^2 \stackrel{?}{=} 12$ $(7-2\sqrt{3}-7)^2 \stackrel{?}{=} 12$<br>$(2\sqrt{3})^2 \stackrel{?}{=} 12$ $(-2\sqrt{3})^2 \stackrel{?}{=} 12$<br>$12=12$ ✓ $12=12$ ✓ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.15**

Leysið: $(a-3)^2=18$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.16**

Leysið: $(b+2)^2=40$.

Munið að þegar við tökum ferningsrót af broti getum við tekið ferningsrót teljarans og nefnarans hvors um sig.

**DÆMI 10.9**

Leysið: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ |
| | $x-\frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$ |
| Notið ferningsrótarregluna. Endurskrifið rótarstæðuna sem brot tveggja ferningsróta. | $x-\frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. Einangrið x. | $x-\frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ |
| | $x = \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.17**

Leysið: $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.18**

Leysið: $\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$.

Við byrjum lausn næsta dæmis á því að einangra tvíliðinn.

**DÆMI 10.10**

Leysið: $(x-2)^2+3=30$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(x-2)^2+3 = 30$ |
| Einangrið tvíliðinn. | $(x-2)^2 = 27$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x-2 = \pm\sqrt{27}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x-2 = \pm 3\sqrt{3}$ |
| Einangrið x. | $x = 2\pm 3\sqrt{3}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=2+3\sqrt{3}, x=2-3\sqrt{3}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.19**

Leysið: $(a-5)^2+4=24$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.20**

Leysið: $(b-3)^2-8=24$.

**DÆMI 10.11**

Leysið: $(3v-7)^2=-12$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $(3v-7)^2 = -12$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $3v-7 = \pm\sqrt{-12}$ |
| $\sqrt{-12}$ er ekki rauntala. | Engin rauntölulausn er til. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.21**

Leysið: $(3r+4)^2=-8$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.22**

Leysið: $(2t-8)^2=-10$.

Vinstri hliðar jafnanna í næstu tveimur dæmum virðast ekki vera af gerðinni $a(x-h)^2$. Þær eru hins vegar fullkomnir ferningsþríliðir, svo við þáttum þær til að koma þeim á formið sem við þurfum.

**DÆMI 10.12**

Leysið: $p^2-10p+25=18$.

## Lausn

Vinstri hlið jöfnunnar er fullkominn ferningsþríliður. Við þáttum hana fyrst.

| | |
|---|---|
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn. Notið ferningsrótarregluna. Einfaldið rótarstæðuna. Einangrið p. | $\begin{aligned} p^2-10p+25 &= 18 \\ (p-5)^2 &= 18 \\ p-5 &= \pm\sqrt{18} \\ p-5 &= \pm 3\sqrt{2} \\ p &= 5\pm 3\sqrt{2} \end{aligned}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $p=5+3\sqrt{2}, p=5-3\sqrt{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.23**

Leysið: $x^2-6x+9=12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.24**

Leysið: $y^2+12y+36=32$.

**DÆMI 10.13**

Leysið: $4n^2+4n+1=16$.

## Lausn

Aftur sjáum við að vinstri hlið jöfnunnar er fullkominn ferningsþríliður. Við þáttum hana fyrst.

| | |
|---|---|
| | $4n^2+4n+1=16$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn. | $(2n+1)^2=16$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $2n+1=\pm\sqrt{16}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $2n+1=\pm 4$ |
| Einangrið n. | $2n=-1\pm 4$ |
| Deilið báðum hliðum með 2. | $\frac{2n}{2} = \frac{-1\pm 4}{2}$<br>$n = \frac{-1\pm 4}{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $n=\frac{-1+4}{2}, n=\frac{-1-4}{2}$ |
| Einfaldið hvora jöfnu. | $n=\frac{3}{2}, n=-\frac{5}{2}$ |
| Sannreynið. | |

$$\begin{aligned} 4n^2+4n+1&=16 \\ 4\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+4\left(\tfrac{3}{2}\right)+1&\stackrel{?}{=}16 \\ 4\left(\tfrac{9}{4}\right)+4\left(\tfrac{3}{2}\right)+1&\stackrel{?}{=}16 \\ 9+6+1&\stackrel{?}{=}16 \\ 16&=16\checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4n^2+4n+1&=16 \\ 4\left(-\tfrac{5}{2}\right)^2+4\left(-\tfrac{5}{2}\right)+1&\stackrel{?}{=}16 \\ 4\left(\tfrac{25}{4}\right)+4\left(-\tfrac{5}{2}\right)+1&\stackrel{?}{=}16 \\ 25-10+1&\stackrel{?}{=}16 \\ 16&=16\checkmark \end{aligned}$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.25**

Leysið: $9m^2-12m+4=25$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.26**

Leysið: $16n^2+40n+25=4$.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að fá meiri kennslu og æfingu í að leysa annars stigs jöfnur:

- Lausn annars stigs jafna: leyst með því að taka ferningsrætur
- Notkun ferningsróta til að leysa annars stigs jöfnur
- Lausn annars stigs jafna: ferningsrótarreglan

## Verkefni úr hluta 10.1

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni** $ax^2=k$ **með** ferningsrótarreglunni

Leysið annars stigs jöfnurnar í verkefnunum hér á eftir.

1.

$$a^2 = 49$$

2.

$$b^2 = 144$$

3.

$$r^2 - 24 = 0$$

4.

$$t^2 - 75 = 0$$

5.

$$u^2 - 300 = 0$$

6.

$$v^2 - 80 = 0$$

7.

$$4m^2 = 36$$

8.

$$3n^2 = 48$$

9.

$$x^2 + 20 = 0$$

10.

$$y^2 + 64 = 0$$

11.

$$\frac{2}{5}a^2 + 3 = 11$$

12.

$$\frac{3}{2}b^2 - 7 = 41$$

13.

$$7p^2 + 10 = 26$$

14.

$$2q^2+5=30$$

**Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni** $a(x-h)^2=k$ með ferningsrótarreglunni
Leysið annars stigs jöfnurnar í verkefnunum hér á eftir.

15.

$$(x+2)^2=9$$

16.

$$(y-5)^2=36$$

17.

$$(u-6)^2=64$$

18.

$$(v+10)^2=121$$

19.

$$(m-6)^2=20$$

20.

$$(n+5)^2=32$$

21.

$$\left(r-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

22.

$$\left(t-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{25}$$

23.

$$(a-7)^2+5=55$$

24.

$$(b-1)^2-9=39$$

25.

$$(5c+1)^2=-27$$

26.

$$(8d-6)^2=-24$$

27.

$$m^2-4m+4=8$$

28.

$$n^2+8n+16=27$$

29.

$$25x^2-30x+9=36$$

30.

$$9y^2+12y+4=9$$

**Blönduð verkefni**

Leysið verkefnin hér á eftir með ferningsrótarreglunni.

31.

$$2r^2=32$$

32.

$$4t^2=16$$

33.

$$(a-4)^2=28$$

34.

$$(b+7)^2=8$$

35.

$$9w^2-24w+16=1$$

36.

$$4z^2+4z+1=49$$

37.

$$a^2-18=0$$

38.

$$b^2-108=0$$

39.

$$\left(p-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$$

40.

$$\left(q-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{4}$$

41.

$$m^2+12=0$$

42.

$$n^2+48=0$$

43.

$$u^2-14u+49=72$$

44.

$$v^2+18v+81=50$$

45.

$$(m-4)^2+3=15$$

46.

$$(n-7)^2-8=64$$

47.

$$(x+5)^2=4$$

48.

$$(y-4)^2=64$$

49.

$$6c^2+4=29$$

50.

$$2d^2-4=77$$

51.

$$(x-6)^2+7=3$$

52.

$$(y-4)^2+10=9$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**53.** Paola á nóg af þekjuefni til að þekja 48 ferfet. Hún vill nota það í þrjá jafnstóra, ferningslaga matjurtagarða. Leysið jöfnuna $3s^2=48$ til að finna $s$, lengd hverrar hliðar garðanna.

**54.** Kathy teiknar uppdrætti að húsi sem hún er að hanna. Hún vill hafa fjóra jafnstóra, ferningslaga glugga í stofunni með samanlagt flatarmál 64 ferfet. Leysið jöfnuna $4s^2=64$ til að finna $s$, lengd hliða glugganna.

### *Ritunarverkefni*

**55.** Útskýrið hvers vegna jafnan $x^2+12=8$ hefur enga lausn.

**56.** Útskýrið hvers vegna jafnan $y^2+8=12$ hefur tvær lausnir.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst annars stigs jöfnur af gerðinni $ax^2 = k$ með ferningsrótarreglunni. | | | |
| leyst annars stigs jöfnur af gerðinni $a(x - h)^2 = k$ með ferningsrótarreglunni. | | | |

ⓑ Ef flest gátmerkin ykkar voru við:

**...örugglega: Til** hamingju! Þið hafið náð markmiðum þessa hluta. Hugleiðið hvaða námsaðferðir þið notuðuð svo að þið getið haldið áfram að nota þær. Hvað gerðuð þið til að verða örugg í þessu? Verið nákvæm.

**...með nokkurri hjálp:** Bregðist fljótt við þessu, því efni sem þið náið ekki tökum á verður að hindrun á leið ykkar að árangri. Í stærðfræði byggir hvert viðfangsefni á fyrri vinnu. Mikilvægt er að hafa traustan grunn áður en haldið er áfram. Hvern getið þið beðið um hjálp? Samnemendur og kennari eru góðir ráðgjafar. Er aðstaða í skólanum þar sem stærðfræðileiðbeinendur eru til taks? Getið þið bætt námsaðferðir ykkar?

**...nei – ég** skil þetta ekki! Þetta er viðvörunarmerki sem þið megið ekki hunsa. Leitið strax aðstoðar, annars getur efnið fljótt orðið yfirþyrmandi. Ræðið við kennarann eins fljótt og unnt er. Saman getið þið gert áætlun um þá aðstoð sem þið þurfið.

# 10.2 Leysið annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Fyllið tvíliðustæðu í ferning
- Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni $x^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning
- Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni $ax^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning

**UNDIRBÚNINGUR 10.4**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið. Ef dæmi reynist erfitt skuluð þið fara aftur í tilgreindan hluta og rifja efnið upp.

Einfaldið $(x+12)^2$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja upp dæmi 6.47.

**UNDIRBÚNINGUR 10.5**

Þáttið $y^2-18y+81$. Ef þið leystuð dæmið ekki rétt skuluð þið rifja upp dæmi 7.42.

**UNDIRBÚNINGUR 10.6**

Þáttið $5n^2+40n+80$. Ef þetta dæmi reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 7.46.

Hingað til höfum við leyst annars stigs jöfnur með þáttun og ferningsrótarreglunni. Í þessum hluta leysum við annars stigs jöfnur með aðferð sem kallast að fylla í ferning.

## Fyllið tvíliðustæðu í ferning

Í síðasta hluta gátum við notað ferningsrótarregluna til að leysa jöfnuna $(y-7)^2=12$ vegna þess að vinstri hliðin var ferningur stæðu.

$$\begin{aligned}(y-7)^2 &= 12\\ y-7 &= \pm\sqrt{12}\\ y-7 &= \pm 2\sqrt{3}\\ y &= 7\pm 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Við leystum einnig jöfnu þar sem vinstri hliðin var fullkominn ferningsþríliður, en þurftum að endurrita hana á forminu $(x-k)^2$ til að geta notað ferningsrótarregluna.

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= 18 \\ (x-5)^2 &= 18 \end{aligned}$$

Hvað gerist ef breytan kemur ekki fyrir í stæðu sem er ferningur? Getum við notað algebru til að mynda slíka stæðu?

Skoðum ferningsreglu tvíliða, sem við höfum oft notað, í tveimur dæmum.

| | |
|---|---|
| $(x+9)^2$ | $(y-7)^2$ |
| $(x+9)\,(x+9)$ | $(y-7)\ \ (y-7)$ |
| $x^2+9x+9x+81$ | $y^2-7y-7y+49$ |
| $x^2+18x+81$ | $y^2-14y+49$ |

---

**FERNINGSREGLA TVÍLIÐA**

Ef $a$, $b$ eru rauntölur,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

| $(a+b)^2$ | = | $a^2$ | + | $2ab$ | + | $b^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (tvíliða)² | | (fyrri liður)² | | 2 × (margfeldi liðanna) | | (seinni liður)² |

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

| $(a-b)^2$ | = | $a^2$ | − | $2ab$ | + | $b^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (tvíliða)² | = | (fyrri liður)² | | 2 × (margfeldi liðanna) | + | (seinni liður)² |

Við getum notað þessa reglu til að „mynda“ stæðu sem er ferningur.

Við byrjum á stæðunni $x^2+6x$. Plúsmerki er á milli liðanna tveggja og því notum við regluna $(a+b)^2$.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

Athugið að fyrsti liður $x^2+6x$ er ferningurinn $x^2$.

Við vitum nú að $a=x$.

Hvaða tölu getum við lagt við $x^2+6x$ til að mynda fullkominn ferningsþrílið?

$a^2 + 2ab + b^2$
$x^2 + 6x + __$

Miðliður ferningsreglu tvíliða, $2ab$, er tvöfalt margfeldi liða tvíliðarins. Það merkir að tvöfalt margfeldi $x$ og einhverrar tölu er $6x$. Sú tala tvöfölduð verður því að vera sex. Talan sem við þurfum er $\frac{1}{2}\cdot 6=3$. Síðari liður tvíliðarins, $b$, verður að vera 3.

$a^2 + \quad 2ab \quad + b^2$
$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + __$

Við vitum nú að $b=3$.

Nú hefjum við síðari lið tvíliðarins í annað veldi til að fá síðasta lið fullkomna ferningsþríliðarins. Við hefjum því þrjá í annað veldi og fáum síðasta liðinn, níu.

$$\begin{matrix} a^2+2ab+b^2 \\ x^2+6x+9 \end{matrix}$$

Nú getum við þáttað í

$$\begin{matrix} (a+b)^2 \\ (x+3)^2 \end{matrix}$$

Við höfum því séð að með því að leggja níu við $x^2+6x$ myndast fullkominn ferningsþríliður, sem við ritum sem $(x+3)^2$.

---

**AÐFERÐ**

## Fyllið í ferning.

Til að fylla stæðuna $x^2+bx$ í ferning:

1. Skref 1. Finnið $b$, stuðul $x$.
2. Skref 2. Finnið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$, töluna sem þarf til að fylla í ferning.
3. Skref 3. Leggið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$ við $x^2+bx$.

---

**DÆMI 10.14**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið síðan niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$x^2+14x$$

## Lausn

| | |
|---|---|
| Stuðull x er 14. | $x^2+bx$<br>$x^2+14x$ |

Finnið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$.

$\left(\frac{1}{2}\cdot 14\right)^2$

$(7)^2$

$49$

| | |
|---|---|
| Leggið 49 við tvíliðinn til að fylla í ferninginn. | $x^2+14x+49$ |
| Endurskrifið sem ferning tvíliðar. | $(x+7)^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.27**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$y^2+12y$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.28**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$z^2+8z$$

**DÆMI 10.15**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið síðan niðurstöðuna sem ferning tvíliðar. $m^2-26m$

## Lausn

| | |
|---|---|
| Stuðull m er −26. | $x^2 - bx$<br>$m^2 - 26m$ |

Finnið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$.

$\left(\frac{1}{2}\cdot(-26)\right)^2$

$(-13)^2$

$169$

| | |
|---|---|
| Leggið 169 við tvíliðinn til að fylla í ferninginn. | $m^2 - 26m + 169$ |
| Endurskrifið sem ferning tvíliðar. | $(m-13)^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.29**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$a^2 - 20a$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.30**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$b^2 - 4b$$

**DÆMI 10.16**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið síðan niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$u^2 - 9u$$

## Lausn

| | |
|---|---|
| Stuðull u er −9. | $x^2+bx$<br>$u^2-9u$ |

Finnið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$.

$\left(\frac{1}{2}\cdot(-9)\right)^2$

$\left(-\frac{9}{2}\right)^2$

$\frac{81}{4}$

| | |
|---|---|
| Leggið $\frac{81}{4}$ við tvíliðinn til að fylla í ferninginn. | $u^2-9u+\frac{81}{4}$ |
| Endurskrifið sem ferning tvíliðar. | $\left(u-\frac{9}{2}\right)^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.31**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$m^2-5m$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.32**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$n^2+13n$$

**DÆMI 10.17**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið síðan niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$p^2+\frac{1}{2}p$$

## Lausn

| | |
|---|---|
| Stuðull p er $\frac{1}{2}$. | $x^2 + bx$<br>$p^2+\frac{1}{2}p$ |

Finnið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$.

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^2$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\frac{1}{16}$

| | |
|---|---|
| Leggið $\frac{1}{16}$ við tvíliðinn til að fylla í ferninginn. | $p^2+\frac{1}{2}p+\frac{1}{16}$ |
| Endurskrifið sem ferning tvíliðar. | $\left(p+\frac{1}{4}\right)^2$ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.33**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$p^2+\frac{1}{4}p$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.34**

Fyllið í ferning til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

$$q^2-\frac{2}{3}q$$

## Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni x 2 + bx + c = 0 með því að fylla í ferning

Þegar við leysum jöfnur verðum við alltaf að gera það sama við báðar hliðar jöfnunnar. Þetta gildir að sjálfsögðu einnig þegar annars stigs jafna er leyst með því að fylla í ferning. Þegar við leggjum lið við aðra hlið jöfnunnar til að mynda fullkominn ferningsþrílið verðum við einnig að leggja sama lið við hina hliðina.

Ef við byrjum til dæmis á jöfnunni $x^2+6x=40$ og viljum fylla í ferning vinstra megin leggjum við níu við báðar hliðar jöfnunnar.

$$x^2+6x=40$$
$$x^2+6x+_=40+_$$
$$x^2+6x+9=40+9$$

Síðan þáttum við vinstra megin og einföldum hægra megin.

$$(x+3)^2=49$$

Nú er jafnan á réttu formi til að leysa hana með ferningsrótarreglunni. Þegar við fyllum í ferning breytum við jöfnunni í það form sem við þurfum til að geta notað ferningsrótarregluna.

---

**DÆMI 10.18**

## Hvernig leysa á annars stigs jöfnu af gerðinni $x^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning

Leysið $x^2+8x=48$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Einangrið breytuliðina öðrum megin og fastaliðina hinum megin. | Í þessari jöfnu eru allir breytuliðirnir vinstra megin. | $x^2+8x=48$ |
| **Skref 2.** Finnið $\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^2$, töluna sem þarf til að fylla í ferninginn. Leggið hana við báðar hliðar jöfnunnar. | Helmingur af 8 í öðru veldi: $4^2=16$<br>Leggið 16 við BÁÐAR hliðar jöfnunnar. | $x^2+8x+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot 8\right)^2}{___}=48$<br>$x^2+8x+16=48+16$ |
| **Skref 3.** Þáttið fullkomnu ferningsþríliðuna sem tvíliðu í öðru veldi. | $x^2+8x+16=(x+4)^2$<br>Leggið saman liðina hægra megin. | $(x+4)^2=64$ |
| **Skref 4.** Notið ferningsrótarregluna. | | $x+4=\pm\sqrt{64}$ |
| **Skref 5.** Einfaldið rótina og leysið síðan jöfnurnar tvær sem fást. | | $x+4=\pm 8$<br>$x+4=8$ $x+4=-8$<br>$x=4$ $x=-12$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 6.** Sannreynið lausnirnar. | Setjið hvora lausn inn í upphaflegu jöfnuna til að sannreyna hana.<br><br>Setjið $x = 4$ inn.<br><br><br><br>Setjið $x = -12$ inn. | $x^2 + 8x = 48$<br>$(4)^2 + 8(4) \stackrel{?}{=} 48$<br>$16 + 32 \stackrel{?}{=} 48$<br>$48 = 48$ ✓<br><br>$x^2 + 8x = 48$<br>$(-12)^2 + 8(-12) \stackrel{?}{=} 48$<br>$144 - 96 \stackrel{?}{=} 48$<br>$48 = 48$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.35**

Leysið $c^2+4c=5$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.36**

Leysið $d^2+10d=-9$ með því að fylla í ferning.

**AÐFERÐ**

### Leysið annars stigs jöfnu af gerðinni $x^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning.

1. Skref 1. Einangrið breytuliðina öðrum megin og fastaliðina hinum megin.
2. Skref 2. Finnið $\left(\frac{1}{2}\cdot b\right)^2$, töluna sem þarf til að fylla í ferning. Leggið hana við báðar hliðar jöfnunnar.
3. Skref 3. Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar.
4. Skref 4. Notið ferningsrótarregluna.
5. Skref 5. Einfaldið rótarstæðuna og leysið síðan jöfnurnar tvær sem fást.
6. Skref 6. Prófið lausnirnar.

**DÆMI 10.19**

Leysið $y^2-6y=16$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Breytuliðirnir eru vinstra megin. | $\overset{x^2-bx}{y^2-6y}=\overset{c}{16}$ |
| Takið helming $-6$ og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(-6)\right)^2=9$ | $y^2-6y+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot(-6)\right)^2}{____}=16$ |
| Leggið 9 við báðar hliðar. | $y^2-6y+9=16+9$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $(y-3)^2=25$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $y-3=\pm\sqrt{25}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $y-3=\pm5$ |
| Einangrið y. | $y=3\pm5$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $y=3+5, y=3-5$ |
| Leysið jöfnurnar. | $y=8, y=-2$ |
| Sannreynið. | |

$$\begin{aligned} y^2-6y&=16 \\ 8^2-6\cdot8&\overset{?}{=}16 \\ 64-48&\overset{?}{=}16 \\ 16&=16\ \checkmark \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y^2-6y&=16 \\ (-2)^2-6(-2)&\overset{?}{=}16 \\ 4+12&\overset{?}{=}16 \\ 16&=16\ \checkmark \end{aligned}$$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.37**

Leysið $r^2-4r=12$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.38**

Leysið $t^2-10t=11$ með því að fylla í ferning.

**DÆMI 10.20**

Leysið $x^2+4x=-21$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Breytuliðirnir eru vinstra megin. | $\overset{x^2+bx}{x^2+4x}=\overset{c}{-21}$ |
| Takið helming $4$ og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(4)\right)^2=4$ | $x^2+4x+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right)^2}{____}=-21$ |
| Leggið 4 við báðar hliðar. | $x^2+4x+4=-21+4$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $(x+2)^2=-17$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x+2=\pm\sqrt{-17}$ |
| Við getum ekki tekið ferningsrót af neikvæðri tölu. | Engin rauntölulausn er til. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.39**

Leysið $y^2-10\,y=-35$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.40**

Leysið $z^2+8\,z=-19$ með því að fylla í ferning.

Í dæminu hér á undan var engin rauntölulausn vegna þess að $(x+k)^2$ var jafnt neikvæðri tölu.

**DÆMI 10.21**

Leysið $p^2-18\,p=-6$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Breytuliðirnir eru vinstra megin. | $\overset{x^2+bx}{P^2-18P}=\overset{c}{-6}$ |
| Takið helming $-18$ og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(-18)\right)^2=81$ | $P^2-18p+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot(-18)\right)^2}{____}=-6$ |
| Leggið 81 við báðar hliðar. | $p^2-18p+81=-6+81$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $(p-9)^2=75$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $p-9=\pm\sqrt{75}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $p-9=\pm5\sqrt{3}$ |
| Einangrið p. | $p=9\pm5\sqrt{3}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $p=9+5\sqrt{3}, p=9-5\sqrt{3}$ |
| Sannreynið. | |

$$p^2-18p=-6 \qquad p^2-18p=-6$$
$$(9+5\sqrt{3})^2-18(9+5\sqrt{3})\stackrel{?}{=}-6 \qquad (9-5\sqrt{3})^2-18(9-5\sqrt{3})\stackrel{?}{=}-6$$
$$81+90\sqrt{3}+75-162-90\sqrt{3}\stackrel{?}{=}-6 \qquad 81-90\sqrt{3}+75-162+90\sqrt{3}\stackrel{?}{=}-6$$
$$-6=-6\checkmark \qquad -6=-6\checkmark$$

Einnig má sannreyna þetta með reiknivél. Reiknið gildi $p^2-18p$ fyrir báðar lausnirnar. Svarið á að vera $-6$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.41**

Leysið $x^2-16x=-16$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.42**

Leysið $y^2+8y=11$ með því að fylla í ferning.

Við byrjum næsta dæmi á því að einangra breytuliðina vinstra megin í jöfnunni.

**DÆMI 10.22**

Leysið $x^2+10x+4=15$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Breytuliðirnir eru vinstra megin. | $x^2+10x+4=15$ |
| Dragið $4$ frá til að færa fastaliðina hægra megin. | $x^2+10x=11$ |
| Takið helming 10 og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(10)\right)^2=25$ | $x^2+10x+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot(10)\right)^2}{_____}=11$ |
| Leggið 25 við báðar hliðar. | $x^2+10x+25=11+25$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $(x+5)^2=36$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x+5=\pm\sqrt{36}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x+5=\pm6$ |
| Einangrið x. | $x=-5\pm6$ |
| Endurskrifið sem tvær jöfnur. | $x=-5+6, x=-5-6$ |
| Leysið jöfnurnar. | $x=1, x=-11$ |
| Sannreynið. $x^2+10x+4=15$ $(1)^2+10(1)+4\stackrel{?}{=}15$ $1+10+4\stackrel{?}{=}15$ $15=15\checkmark$ $x^2+10x+4=15$ $(-11)^2+10(-11)+4\stackrel{?}{=}15$ $121-110+4\stackrel{?}{=}15$ $15=15\checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.43**

Leysið $a^2+4a+9=30$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.44**

Leysið $b^2+8b-4=16$ með því að fylla í ferning.

Til að leysa næstu jöfnu verðum við fyrst að safna öllum breytuliðunum vinstra megin í jöfnunni. Síðan höldum við áfram eins og í fyrri dæmum.

**DÆMI 10.23**

Leysið $n^2=3n+11$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $n^2 = 3n + 11$ |
| Dragið 3 n frá til að færa breytuliðina vinstra megin. | $n^2 - 3n = 11$ |
| Takið helming $-3$ og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(-3)\right)^2 = \frac{9}{4}$ | $n^2 - 3n + \underset{\left(\frac{1}{2}\cdot(-3)\right)^2}{____} = 11$ |
| Leggið $\frac{9}{4}$ við báðar hliðar. | $n^2 - 3n + \frac{9}{4} = 11 + \frac{9}{4}$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{44}{4} + \frac{9}{4}$ |
| Leggið saman brotin hægra megin. | $\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $n - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{53}{4}}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $n - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{53}}{2}$ |
| Einangrið n. | $n = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{53}}{2}$ |
| Endurskrifið sem tvær jöfnur. | $n = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2}, n = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.45**

Leysið $p^2 = 5p + 9$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.46**

Leysið $q^2 = 7q - 3$ með því að fylla í ferning.

Athugið að vinstri hlið næstu jöfnu er á þáttuðu formi. Hægri hliðin er hins vegar ekki núll og því getum við ekki notað núllmargfeldisregluna. Þess í stað margföldum við þættina og setjum síðan jöfnuna á staðalform til að leysa hana með því að fylla í ferning.

**DÆMI 10.24**

Leysið $(x - 3)(x + 5) = 9$ með því að fylla í ferning.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $(x-3)(x+5)=9$ |
| Margfaldið tvíliðina vinstra megin. | $x^2+2x-15=9$ |
| Leggið 15 við til að færa breytuliðina vinstra megin. | $x^2+2x=24$ |
| Takið helming 2 og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(2)\right)^2=1$ | $x^2+2x+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot(2)\right)^2}{____}=24$ |
| Leggið 1 við báðar hliðar. | $x^2+2x+1=24+1$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $(x+1)^2=25$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x+1=\pm\sqrt{25}$ |
| Einangrið x. | $x=-1\pm5$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=-1+5, x=-1-5$ |
| Einfaldið. | $x=4, x=-6$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.47**

Leysið $(c-2)(c+8)=7$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.48**

Leysið $(d-7)(d+3)=56$ með því að fylla í ferning.

## Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni ax 2 + bx + c = 0 með því að fylla í ferning

Aðferðin við að fylla í ferning virkar best þegar forystustuðullinn er einn og vinstri hlið jöfnunnar er því af gerðinni $x^2+bx+c$. Ef $x^2$ -liðurinn hefur stuðul tökum við fyrst nokkur skref til að gera stuðulinn jafnan einum.

Stundum má taka stuðulinn út fyrir alla þrjá liði þríliðarins. Þannig förum við að í næsta dæmi.

**DÆMI 10.25**

Leysið $3x^2-12x-15=0$ með því að fylla í ferning.

### Lausn

Til að fylla í ferning þarf stuðull $x^2$ að vera einn. Ef við tökum stuðul $x^2$ út sem sameiginlegan þátt getum við haldið áfram að leysa jöfnuna með því að fylla í ferning.

| | |
|---|---|
| | $3x^2-12x-15=0$ |
| Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga. | $3(x^2-4x-5)=0$ |
| Deilið báðum hliðum með 3 til að einangra þríliðinn. | $\frac{3(x^2-4x-5)}{3}=\frac{0}{3}$ |
| Einfaldið. | $x^2-4x-5=0$ |
| Dragið 5 frá til að færa fastaliðina hægra megin. | $x^2-4x=5$ |
| Takið helming 4 og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}(4)\right)^2=4$ | $x^2-4x+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot(4)\right)^2}{____}=5$ |
| Leggið 4 við báðar hliðar. | $x^2-4x+4=5+4$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $(x-2)^2=9$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x-2=\pm\sqrt{9}$ |
| Einangrið x. | $x-2=\pm3$ |
| Endurskrifið þannig að 2 lausnir sjáist. | $x=2+3, x=2-3$ |
| Einfaldið. | $x=5, x=-1$ |
| Sannreynið. | |

| $x=5$ | $x=-1$ |
|---|---|
| $3x^2-12x-15=0$ | $3x^2-12x-15=0$ |
| $3(5)^2-12(5)-15\stackrel{?}{=}0$ | $3(-1)^2-12(-1)-15\stackrel{?}{=}0$ |
| $75-60-15\stackrel{?}{=}0$ | $3+12-15\stackrel{?}{=}0$ |
| $0=0$ ✓ | $0=0$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.49**

Leysið $2m^2+16m-8=0$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.50**

Leysið $4n^2-24n-56=8$ með því að fylla í ferning.

Til að fylla í ferning verður forystustuðullinn að vera einn. Þegar forystustuðullinn er ekki þáttur allra liðanna deilum við báðum hliðum jöfnunnar með honum. Þá verður annar stuðullinn brot. Við höfum þegar séð í þessum hluta hvernig fyllt er í ferning með brotum.

**DÆMI 10.26**

Leysið $2x^2-3x=20$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

Fyrsta skrefið er aftur að gera stuðul $x^2$ jafnan einum. Með því að deila báðum hliðum jöfnunnar með stuðli $x^2$ getum við síðan haldið áfram að leysa jöfnuna með því að fylla í ferning.

| | |
|---|---|
| | $2x^2-3x=20$ |
| Deilið báðum hliðum með 2 til að gera stuðul $x^2$ jafnan 1. | $\frac{2x^2-3x}{2}=\frac{20}{2}$ |
| Einfaldið. | $x^2-\frac{3}{2}x=10$ |
| Takið helming $-\frac{3}{2}$ og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2=\frac{9}{16}$ | $x^2-\frac{3}{2}x+\underline{\qquad}=10$ <br> $\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2$ |
| Leggið $\frac{9}{16}$ við báðar hliðar. | $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=10+\frac{9}{16}$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{160}{16}+\frac{9}{16}$ |
| Leggið saman brotin hægra megin. | $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{169}{16}$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x-\frac{3}{4}=\pm\sqrt{\frac{169}{16}}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x-\frac{3}{4}=\pm\frac{13}{4}$ |
| Einangrið x. | $x=\frac{3}{4}\pm\frac{13}{4}$ |
| Endurskrifið þannig að 2 lausnir sjáist. | $x=\frac{3}{4}+\frac{13}{4}, x=\frac{3}{4}-\frac{13}{4}$ |
| Einfaldið. | $x=4, x=-\frac{5}{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.51**

Leysið $3r^2-2r=21$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.52**

Leysið $4t^2+2t=20$ með því að fylla í ferning.

**DÆMI 10.27**

Leysið $3x^2+2x=4$ með því að fylla í ferning.

## Lausn

Fyrsta skrefið er aftur að gera stuðul $x^2$ jafnan einum. Með því að deila báðum hliðum jöfnunnar með stuðli $x^2$ getum við síðan haldið áfram að leysa jöfnuna með því að fylla í ferning.

| | |
|---|---|
| | $3x^2+2x=4$ |
| Deilið báðum hliðum með 3 til að gera stuðul $x^2$ jafnan 1. | $\frac{3x^2+2x}{3}=\frac{4}{3}$ |
| Einfaldið. | $x^2+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}$ |
| Takið helming $\frac{2}{3}$ og hefjið í annað veldi. $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ | $x^2+\frac{2}{3}x+\underset{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2}{___}=\frac{4}{3}$ |
| Leggið $\frac{1}{9}$ við báðar hliðar. | $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}$ |
| Þáttið fullkomna ferningsþríliðinn sem ferning tvíliðar. | $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{12}{9}+\frac{1}{9}$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x+\frac{1}{3}=\pm\sqrt{\frac{13}{9}}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x+\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{13}}{3}$ |
| Einangrið x. | $x=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{13}}{3}$ |
| Endurskrifið þannig að 2 lausnir sjáist. | $x=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}, x=-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.53**

Leysið $4x^2+3x=12$ með því að fylla í ferning.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.54**

Leysið $5y^2+3y=10$ með því að fylla í ferning.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessu vefefni fáið þið meiri kennslu og æfingu í að leysa annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning:

- Inngangur að því að fylla í ferning
- Hvernig leysa á jöfnu með því að fylla í ferning

## Verkefni úr hluta 10.2

***Æfingin skapar meistarann***

**Fyllið tvíliðustæðu í ferning**

Fyllið í ferning í verkefnunum hér á eftir til að mynda fullkominn ferningsþrílið. Ritið síðan niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

57.

$$a^2+10\,a$$

58.

$$b^2+12\,b$$

59.

$$m^2+18\,m$$

60.

$$n^2+16\,n$$

61.

$$m^2-24\,m$$

62.

$$n^2-16\,n$$

63.

$$p^2-22\,p$$

64.

$$q^2-6\,q$$

65.

$$x^2-9\,x$$

66.

$$y^2+11\,y$$

67.

$$p^2-\frac{1}{3}\,p$$

68.

$$q^2+\frac{3}{4}q$$

**Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni** $x^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning
Leysið jöfnurnar í verkefnunum hér á eftir með því að fylla í ferning.

69.

$$v^2+6v=40$$

70.

$$w^2+8w=65$$

71.

$$u^2+2u=3$$

72.

$$z^2+12z=-11$$

73.

$$c^2-12c=13$$

74.

$$d^2-8d=9$$

75.

$$x^2-20x=21$$

76.

$$y^2-2y=8$$

77.

$$m^2+4m=-44$$

78.

$$n^2-2n=-3$$

79.

$$r^2+6r=-11$$

80.

$$t^2-14t=-50$$

81.

$$a^2 - 10a = -5$$

82.

$$b^2 + 6b = 41$$

83.

$$u^2 - 14u + 12 = -1$$

84.

$$z^2 + 2z - 5 = 2$$

85.

$$v^2 = 9v + 2$$

86.

$$w^2 = 5w - 1$$

87.

$$(x+6)(x-2) = 9$$

88.

$$(y+9)(y+7) = 79$$

**Leysið annars stigs jöfnur af gerðinni** $ax^2 + bx + c = 0$ **með því að fylla í ferning**

Leysið jöfnurnar í verkefnunum hér á eftir með því að fylla í ferning.

89.

$$3m^2 + 30m - 27 = 6$$

90.

$$2n^2 + 4n - 26 = 0$$

91.

$$2c^2 + c = 6$$

92.

$$3d^2 - 4d = 15$$

93.

$$2p^2 + 7p = 14$$

94.

$$3q^2-5q=9$$

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**95.** Rafi hannar rétthyrndan leikvöll með flatarmálið 320 ferfet. Hann vill að önnur hlið leikvallarins sé fjórum fetum lengri en hin. Notið jöfnuna $p^2+4p=320$ og einangrið $p$, lengd annarrar hliðar leikvallarins. Hver er lengd hinnar hliðarinnar?

**96.** Yvette vill koma fyrir ferningslaga sundlaug í horni bakgarðsins. Hún ætlar að hafa 3 feta pall sunnan við laugina og 9 feta pall vestan við hana. Hún hefur samtals 1080 ferfet fyrir laugina og pallana tvo. Notið jöfnuna $(s+3)(s+9)=1080$ og einangrið $s$, lengd hliðar laugarinnar.

### *Ritunarverkefni*

**97.** Leysið jöfnuna $x^2+10x=-25$ ⓐ með ferningsrótarreglunni og ⓑ með því að fylla í ferning. ⓒ Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

**98.** Leysið jöfnuna $y^2+8y=48$ með því að fylla í ferning og útskýrið öll skrefin.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| fyllt í ferning tvíliðu. | | | |
| leyst annars stigs jöfnur af gerðinni $x^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning. | | | |
| leyst annars stigs jöfnur af gerðinni $ax^2+bx+c=0$ með því að fylla í ferning. | | | |

ⓑ Þið hafið nú farið yfir gátlistann. Hvað ætlið þið að gera til að ná öruggum tökum á öllum markmiðunum?

## 10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni
- Notið aðgreininn til að spá fyrir um fjölda lausna annars stigs jöfnu
- Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa annars stigs jöfnu

10

**UNDIRBÚNINGUR 10.7**

Takið þetta undirbúningspróf áður en þið byrjið.

Einfaldið: $\frac{-20-5}{10}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.74.

**UNDIRBÚNINGUR 10.8**

Einfaldið: $4+\sqrt{121}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja upp dæmi 9.29.

**UNDIRBÚNINGUR 10.9**

Einfaldið: $\sqrt{128}$. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja upp dæmi 9.12.

Þegar við leystum annars stigs jöfnur í síðasta hluta með því að fylla í ferning tókum við sömu skrefin í hvert sinn. Þegar þið lukuð verkefnunum hafið þið ef til vill velt því fyrir ykkur hvort ekki væri til einfaldari leið. Svarið er já. Í þessum hluta leiðum við út og notum formúlu til að finna lausnir annars stigs jöfnu.

Við höfum þegar séð hvernig einangra má tiltekna breytu í formúlu almennt. Þá þarf aðeins að taka algebruskrefin einu sinni og síðan má nota nýju formúluna til að finna gildi breytunnar. Nú förum við almennt í gegnum skrefin við að fylla í ferning og einangrum x í annars stigs jöfnu. Gagnlegt getur verið að skoða eitt dæmanna í lok síðasta hluta, þar sem við leystum jöfnu af gerðinni $ax^2+bx+c=0$, um leið og þið lesið algebruskrefin hér á eftir. Þá sjáið þið skrefin bæði með tölum og á almennu formi.

| | |
|---|---|
| Við byrjum á staðalformi annars stigs jöfnu og leysum hana fyrir x með því að fylla í ferning. | $a x^2+b x+c=0\, a\neq 0$ |
| Einangrið breytuliðina öðrum megin. | $ax^2+bx = -c$ |
| Gerið forystustuðulinn jafnan 1 með því að deila með a. | $\frac{ax^2}{a}+\frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ |
| Einfaldið. | $x^2+\frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ |
| Til að fylla í ferning finnið $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2$ og leggið við báðar hliðar jöfnunnar. $\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$ | $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ |
| Vinstri hliðin er ferningur stæðu; þáttið hana. | $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ |
| Finnið samnefnara hægri hliðar og ritið jafngild brot með þeim samnefnara. | $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c\cdot 4a}{a\cdot 4a}$ |
| Einfaldið. | $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$ |
| Sameinið í eitt brot. | $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ |
| Einfaldið. | $x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Leggið $-\frac{b}{2a}$ við báðar hliðar jöfnunnar. | $x = -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Sameinið liðina hægra megin. | $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |

Síðasta jafnan er lausnarformúla annars stigs jöfnu.

### LAUSNARFORMÚLA ANNARS STIGS JÖFNU

Lausnir annars stigs jöfnu af gerðinni $a x^2+b x+c=0$, $a\neq 0$, fást með formúlunni:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Til að nota lausnarformúluna setjum við gildi $a$, $b$, og $c$ inn í stæðuna hægra megin í formúlunni. Síðan reiknum við og einföldum stæðuna. Niðurstaðan er lausn eða lausnir annars stigs jöfnunnar.

**DÆMI 10.28**

## Hvernig leysa á annars stigs jöfnu með lausnarformúlunni

Leysið $2x^2+9x-5=0$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

**Skref 1.** Skrifið annars stigs jöfnuna á staðalformi. Finnið gildi *a*, *b* og *c*.

Þessi jafna er á staðalformi.

$ax^2 + bx + c = 0$

$2x^2 + 9x - 5 = 0$

$a = 2,\ b = 9,\ c = -5$

**Skref 2.** Skrifið lausnarformúluna. Setjið síðan inn gildin fyrir *a*, *b* og *c*.

Setjið inn $a = 2,\ b = 9,\ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

**Skref 3.** Einfaldið brotið og leysið með tilliti til *x*.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - (-40)}}{4}$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$x = \frac{-9 \pm 11}{4}$$

$$x = \frac{-9 + 11}{4} \qquad x = \frac{-9 - 11}{4}$$

$$x = \frac{2}{4} \qquad x = \frac{-20}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad x = -5$$

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 4.** Gangið úr skugga um að lausnirnar séu réttar. | Setjið hvort svarið fyrir sig inn í upphaflegu jöfnuna til að ganga úr skugga um að það sé rétt. | $2x^2+9x-5=0$ |
| | Setjið $x=\frac{1}{2}$ inn í jöfnuna. | $2\left(\frac{1}{2}\right)^2+9\cdot\frac{1}{2}-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $2\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{2}-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $2\cdot\frac{1}{4}+9\cdot\frac{1}{2}-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $\frac{1}{2}+\frac{9}{2}-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $\frac{10}{2}-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $5-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $0=0$ ✓ |
| | | $2x^2+9x-5=0$ |
| | Setjið $x=-5$ inn í jöfnuna. | $2(-5)^2+9(-5)-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $2\cdot25-45-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $50-45-5\stackrel{?}{=}0$ |
| | | $0=0$ ✓ |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.55**

Leysið $3y^2-5y+2=0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.56**

Leysið $4z^2+2z-6=0$ með lausnarformúlunni.

**AÐFERÐ**

### Leysið annars stigs jöfnu með lausnarformúlunni.

1. Skref 1. Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. Finnið gildi $a$, $b$ og $c$.
2. Skref 2. Ritið lausnarformúluna. Setjið síðan inn gildi $a$, $b$ og $c$.
3. Skref 3. Einfaldið.
4. Skref 4. Sannreynið lausnirnar.

Ef þið segið formúluna upphátt um leið og þið ritið hana í hverju verkefni kunnið þið hana fljótlega utan að. Munið einnig að lausnarformúlan er jafna. Gætið þess að byrja á „$x=$“.

**DÆMI 10.29**

Leysið $x^2-6x+5=0$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $x^2-6x+5=0$ |
| Jafnan er á staðalformi. | $ax^2+bx+c=0$<br>$x^2-6x+5=0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a=1,\ b=-6,\ c=5$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(5)}}{2\cdot1}$ |
| Einfaldið. | $x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}$<br>$x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}$<br>$x=\frac{6\pm4}{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=\frac{6+4}{2},\ x=\frac{6-4}{2}$ |
| Einfaldið. | $x=\frac{10}{2},\ x=\frac{2}{2}$<br>$x=5,\ x=1$ |
| Sannreynið.<br>$x^2-6x+5=0$ $\quad$ $x^2-6x+5=0$<br>$5^2-6\cdot5+5\stackrel{?}{=}0$ $\quad$ $1^2-6\cdot1+5\stackrel{?}{=}0$<br>$25-30+5\stackrel{?}{=}0$ $\quad$ $1-6+5\stackrel{?}{=}0$<br>$0=0\checkmark$ $\quad$ $0=0\checkmark$ | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.57**

Leysið $a^2-2a-15=0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.58**

Leysið $b^2+10b+24=0$ með lausnarformúlunni.

Þegar við leystum annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni fengum við stundum svör með rótarstæðum. Það getur einnig gerst þegar lausnarformúlan er notuð. Ef rótarstæða kemur fyrir í lausninni verður að einfalda hana í lokasvarinu.

**DÆMI 10.30**

Leysið $4y^2-5y-3=0$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

Við getum notað lausnarformúluna til að einangra breytuna í annars stigs jöfnu, hvort sem breytan heitir x eða eitthvað annað.

| | |
|---|---|
| | $4y^2-5y-3=0$ |
| Jafnan er á staðalformi. | $ax^2+bx+c=0$<br>$4y^2-5y-3=0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a=4,\ b=-5,\ c=-3$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot4\cdot(-3)}}{2\cdot4}$ |
| Einfaldið. | $y=\frac{5\pm\sqrt{25+48}}{8}$<br>$y=\frac{5\pm\sqrt{73}}{8}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $y=\frac{5+\sqrt{73}}{8},\ y=\frac{5-\sqrt{73}}{8}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.59**

Leysið $2p^2+8p+5=0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.60**

Leysið $5q^2-11q+3=0$ með lausnarformúlunni.

**DÆMI 10.31**

Leysið $2x^2+10x+11=0$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $2x^2 + 10x + 11 = 0$ |
| Jafnan er á staðalformi. | $ax^2 + bx + c = 0$<br>$2x^2 + 10x + 11 = 0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a = 2,\ b = 10,\ c = 11$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $x = \frac{-(10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (11)}}{2 \cdot 2}$ |
| Einfaldið. | $x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 88}}{4}$<br>$x = \frac{-10 \pm \sqrt{12}}{4}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x = \frac{-10 \pm 2\sqrt{3}}{4}$ |
| Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í teljaranum. | $x = \frac{2(-5 \pm \sqrt{3})}{4}$ |
| Fellið brott sameiginlegu þættina. | $x = \frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x = \frac{-5 + \sqrt{3}}{2}, x = \frac{-5 - \sqrt{3}}{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.61**

Leysið $3m^2+12m+7=0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.62**

Leysið $5n^2+4n-4=0$ með lausnarformúlunni.

Við getum ekki tekið ferningsrót af neikvæðri tölu. Þegar við setjum $a$, $b$ og $c$ inn í lausnarformúluna og stærðin í rótarstofninum er neikvæð hefur annars stigs jafnan því enga rauntölulausn. Við sjáum þetta í næsta dæmi.

**DÆMI 10.32**

Leysið $3p^2+2p+9=0$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

| | |
|---|---|
| Jafnan er á staðalformi. | $ax^2 + bx + c = 0$<br>$3p^2 + 2p + 9 = 0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a = 3, b = 2, c = 9$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $p = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (9)}}{2 \cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $p = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 108}}{6}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $p = \frac{-2 \pm \sqrt{-104}}{6}$ |
| Við getum ekki tekið ferningsrót af neikvæðri tölu. | Engin rauntölulausn er til. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.63**

Leysið $4a^2 - 3a + 8 = 0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.64**

Leysið $5b^2 + 2b + 4 = 0$ með lausnarformúlunni.

Annars stigs jöfnurnar sem við höfum leyst hingað til í þessum hluta voru allar ritaðar á staðalforminu $ax^2 + bx + c = 0$. Stundum þurfum við að nota algebru til að koma jöfnunni á staðalform áður en við getum notað lausnarformúluna.

**DÆMI 10.33**

Leysið $x(x + 6) + 4 = 0$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $x(x + 6) + 4 = 0$ |
| Margfaldið inn í svigana til að koma jöfnunni á staðalform. | $x^2 + 6x + 4 = 0$ |
| Jafnan er nú á staðalformi. | $ax^2 + bx + c = 0$<br>$x^2 + 6x + 4 = 0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a = 1, b = 6, c = 4$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4)}}{2 \cdot 1}$ |
| Einfaldið. | $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2}$ |
| Einfaldið í rótarstofninum. | $x = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2}$ |

| | |
|---|---|
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x=\frac{-6\pm 2\sqrt{5}}{2}$ |
| Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í teljaranum. | $x=\frac{2(-3\pm\sqrt{5})}{2}$ |
| Fellið brott sameiginlegu þættina. | $x=-3\pm\sqrt{5}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=-3+\sqrt{5},\ \ x=-3-\sqrt{5}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.65**

Leysið $x(x+2)-5=0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.66**

Leysið $y(3y-1)-2=0$ með lausnarformúlunni.

Þegar við leystum línulegar jöfnur með mörgum brotum losuðum við jöfnurnar við brotin með því að margfalda báðar hliðar með minnsta samnefnaranum. Þá fengum við jafngildar jöfnur án brota. Sömu aðferð má nota á annars stigs jöfnur.

**DÆMI 10.34**

Leysið $\frac{1}{2}u^2+\frac{2}{3}u=\frac{1}{3}$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $\frac{1}{2}u^2+\frac{2}{3}u=\frac{1}{3}$ |
| Margfaldið báðar hliðar með minnsta samnefnaranum, 6, til að eyða brotunum. | $6\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{2}{3}u\right)=6\left(\frac{1}{3}\right)$ |
| Margfaldið. | $3u^2+4u=2$ |
| Dragið 2 frá til að koma jöfnunni á staðalform. | $ax^2+bx+c=0$<br>$3u^2+4u-2=0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a=3,\ b=4,\ c=-2$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $u=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $u=\frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $u=\frac{-4\pm\sqrt{16+24}}{6}$<br>$u=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{6}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $u=\frac{-4\pm 2\sqrt{10}}{6}$ |

| | |
|---|---|
| Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga í teljaranum. | $u=\frac{2(-2\pm\sqrt{10})}{6}$ |
| Fellið brott sameiginlegu þættina. | $u=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $u=\frac{-2+\sqrt{10}}{3},\ u=\frac{-2-\sqrt{10}}{3}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.67**

Leysið $\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{3}c=\frac{1}{12}$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.68**

Leysið $\frac{1}{9}d^2-\frac{1}{2}d=-\frac{1}{2}$ með lausnarformúlunni.

Skoðum jöfnuna $(x-3)^2=0$. Af núllmargfeldisreglunni vitum við að hún hefur aðeins eina lausn: $x=3$.

Í næsta dæmi sjáum við að lausnarformúlan gefur líka aðeins eina lausn þegar vinstri hlið jöfnunnar er ferningur stæðu.

**DÆMI 10.35**

Leysið $4x^2-20x=-25$ með lausnarformúlunni.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $4x^2-20x=-25$ |
| Leggið 25 við til að koma jöfnunni á staðalform. | $ax^2+bx+c=0$<br>$4x^2-20x+25=0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a=4,\ b=-20,\ c=25$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot4\cdot(25)}}{2\cdot4}$ |
| Einfaldið. | $x=\frac{20\pm\sqrt{400-400}}{8}$<br>$x=\frac{20\pm\sqrt{0}}{8}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x=\frac{20}{8}$ |
| Einfaldið brotið. | $x=\frac{5}{2}$ |
| Sannreynið lausnirnar. | |

Tókuð þið eftir að $4x^2-20x+25$ er ferningur stæðu?

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.69**

Leysið $r^2+10r+25=0$ með lausnarformúlunni.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.70**

Leysið $25t^2-40t=-16$ með lausnarformúlunni.

## Notið aðgreininn til að spá fyrir um fjölda lausna annars stigs jöfnu

Þegar við leystum annars stigs jöfnurnar í fyrri dæmum fengum við stundum tvær lausnir, stundum eina og stundum enga rauntölulausn. Er hægt að spá fyrir um fjölda lausna annars stigs jöfnu án þess að leysa hana?

Já. Út frá stærðinni í rótarstofni lausnarformúlunnar er auðvelt að ákvarða fjölda lausna. Þessi stærð kallast aðgreinir.

**AÐGREINIR**

Í lausnarformúlunni $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ kallast stærðin $b^2-4ac$ aðgreinir.

Skoðum aðgreini jafnanna í dæmi 10.28, dæmi 10.32 og dæmi 10.35 og fjölda lausna þessara annars stigs jafna.

| | Annars stigs jafna (á staðalformi) | Aðgreinir $b^2-4ac$ | Formerki aðgreinis | Fjöldi rauntölulausna |
|---|---|---|---|---|
| Dæmi 10.28 | $2x^2+9x-5=0$ | $9^2-4\cdot 2(-5)=121$ | + | 2 |
| Dæmi 10.35 | $4x^2-20x+25=0$ | $(-20)^2-4\cdot 4\cdot 25=0$ | 0 | 1 |
| Dæmi 10.32 | $3p^2+2p+9=0$ | $2^2-4\cdot 3\cdot 9=-104$ | − | 0 |

Þegar aðgreinirinn er jákvæður, $\left(x=\frac{-b\pm\sqrt{+}}{2a}\right)$, hefur annars stigs jafnan tvær lausnir.

Þegar aðgreinirinn er núll, $\left(x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}\right)$, hefur annars stigs jafnan eina lausn.

Þegar aðgreinirinn er neikvæður, $\left(x=\frac{-b\pm\sqrt{-}}{2a}\right)$, hefur annars stigs jafnan enga rauntölulausn.

**AÐFERÐ**

### Notið aðgreininn, $b^2-4ac$, til að ákvarða fjölda lausna annars stigs jöfnu.

Fyrir annars stigs jöfnu af gerðinni $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, gildir:

- ef $b^2-4ac>0$ hefur jafnan tvær lausnir.

- ef $b^2-4ac=0$ hefur jafnan eina lausn.
- ef $b^2-4ac<0$ hefur jafnan enga rauntölulausn.

**DÆMI 10.36**

Ákvarðið fjölda lausna hverrar annars stigs jöfnu:

ⓐ $2v^2-3v+6=0$ ⓑ $3x^2+7x-9=0$ ⓒ $5n^2+n+4=0$ ⓓ $9y^2-6y+1=0$

## Lausn

Til að ákvarða fjölda lausna hverrar annars stigs jöfnu skoðum við aðgreini hennar.

ⓐ

| | |
|---|---|
| | $2v^2-3v+6 = 0$ |
| Jafnan er á staðalformi; finnið a, b og c. | $a=2, b=-3, c = 6$ |
| Ritið aðgreininn. | $b^2-4ac$ |
| Setjið inn gildi a, b og c. | $(3)^2-4\cdot 2\cdot 6$ |
| Einfaldið. | $9-48$<br>$-39$ |
| Þar sem aðgreinirinn er neikvæður hefur jafnan enga rauntölulausn. | |

ⓑ

| | |
|---|---|
| | $3x^2+7x-9=0$ |
| Jafnan er á staðalformi; finnið a, b og c. | $a=3, b=7, c=-9$ |
| Ritið aðgreininn. | $b^2-4ac$ |
| Setjið inn gildi a, b og c. | $(7)^2-4\cdot 3\cdot(-9)$ |
| Einfaldið. | $49+108$<br>$157$ |
| Þar sem aðgreinirinn er jákvæður hefur jafnan tvær lausnir. | |

ⓒ

| | |
|---|---|
| | $5n^2+n+4 = 0$ |
| Jafnan er á staðalformi; finnið a, b og c. | $a=5, b=1, c = 4$ |
| Ritið aðgreininn. | $b^2-4ac$ |
| Setjið inn gildi a, b og c. | $(1)^2-4\cdot 5\cdot 4$ |
| Einfaldið. | $1-80$<br>$-79$ |
| Þar sem aðgreinirinn er neikvæður hefur jafnan enga rauntölulausn. | |

ⓓ

| | |
|---|---|
| | $9y^2-6y+1 = 0$ |
| Jafnan er á staðalformi; finnið a, b og c. | $a=9, b=-6, c = 1$ |
| Ritið aðgreininn. | $b^2-4ac$ |
| Setjið inn gildi a, b og c. | $(-6)^2-4\cdot 9\cdot 1$ |
| Einfaldið. | $36-36$<br>$0$ |
| Þar sem aðgreinirinn er 0 hefur jafnan eina lausn. | |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.71**

Ákvarðið fjölda lausna hverrar annars stigs jöfnu:

ⓐ $8m^2-3m+6=0$ ⓑ $5z^2+6z-2=0$ ⓒ $9w^2+24w+16=0$ ⓓ $9u^2-2u+4=0$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.72**

Ákvarðið fjölda lausna hverrar annars stigs jöfnu:

ⓐ $b^2+7b-13=0$ ⓑ $5a^2-6a+10=0$ ⓒ $4r^2-20r+25=0$ ⓓ $7t^2-11t+3=0$

## Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa annars stigs jöfnu

Við höfum notað fjórar aðferðir til að leysa annars stigs jöfnur:

- Þáttun
- Ferningsrótarregla
- Að fylla í ferning
- Lausnarformúla annars stigs jöfnu

Hægt er að leysa allar annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni, en það er ekki alltaf einfaldasta aðferðin.

---

**AÐFERÐ**

### Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa annars stigs jöfnu.

1. Skref 1. Reynið þáttun fyrst. Ef auðvelt er að þátta annars stigs stæðuna er þessi aðferð mjög fljótleg.
2. Skref 2. Reynið næst ferningsrótarregluna. Ef jafnan er af gerðinni $a\,x^2=k$ eða $a\,(x-h)^2=k$ er auðvelt að leysa hana með ferningsrótarreglunni.
3. Skref 3. Notið lausnarformúluna. Allar annars stigs jöfnur má leysa með lausnarformúlunni.

Hvað með aðferðina að fylla í ferning? Flestir telja hana seinlega og vilja helst ekki nota hana. Við þurftum samt að hafa hana með í þessum kafla vegna þess að við leiddum lausnarformúluna út með því að fylla í ferning á almennu formi. Þið eigið líka eftir að fylla í ferning á öðrum sviðum algebru.

---

**DÆMI 10.37**

Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa hverja annars stigs jöfnu:

ⓐ $5\,z^2=17$ ⓑ $4\,x^2-12\,x+9=0$ ⓒ $8\,u^2+6\,u=11$

### Lausn

ⓐ $5\,z^2=17$

Þar sem jafnan er á forminu $a\,x^2=k$ er heppilegast að nota ferningsrótarregluna.

ⓑ $4\,x^2-12\,x+9=0$

Við sjáum að vinstri hlið jöfnunnar er fullkominn ferningsþríliður og því er þáttun heppilegasta aðferðin.

ⓒ $8\,u^2+6\,u=11$

Setjið jöfnuna á staðalform. $8\,u^2+6\,u-11=0$

Fyrst dettur okkur ef til vill í hug að reyna þáttun. Möguleikarnir sem þyrfti að prófa með ágiskun og prófun eru hins vegar margir og því er lausnarformúlan heppilegasta aðferðin.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.73**

Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa hverja annars stigs jöfnu:

ⓐ $x^2+6x+8=0$ ⓑ $(n-3)^2=16$ ⓒ $5p^2-6p=9$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.74**

Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa hverja annars stigs jöfnu:

ⓐ $8a^2+3a-9=0$ ⓑ $4b^2+4b+1=0$ ⓒ $5c^2=125$

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Í þessu vefefni fáið þið frekari kennslu og getið æft ykkur í að nota lausnarformúluna:

- Lausn annars stigs jafna: leyst með lausnarformúlunni
- Hvernig leysa á annars stigs jöfnu á staðalformi með lausnarformúlunni (dæmi)
- Lausn annars stigs jafna með lausnarformúlunni — dæmi 3
- Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni

## Verkefni úr hluta 10.3

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni**

Leysið jöfnurnar í verkefnunum hér á eftir með lausnarformúlunni.

99.

$$4m^2+m-3=0$$

100.

$$4n^2-9n+5=0$$

101.

$$2p^2-7p+3=0$$

102.

$$3q^2+8q-3=0$$

103.

$$p^2+7p+12=0$$

104.

$$q^2+3q-18=0$$

105.

$$r^2-8r-33=0$$

106.

$$t^2+13t+40=0$$

107.

$$3u^2+7u-2=0$$

108.

$$6z^2-9z+1=0$$

109.

$$2a^2-6a+3=0$$

110.

$$5b^2+2b-4=0$$

111.

$$2x^2+3x+9=0$$

112.

$$6y^2-5y+2=0$$

113.

$$v(v+5)-10=0$$

114.

$$3w(w-2)-8=0$$

115.

$$\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{12}m=\frac{1}{4}$$

116.

$$\frac{1}{3}n^2+n=-\frac{1}{2}$$

117.

$$16c^2+24c+9=0$$

118.

$$25d^2-60d+36=0$$

119.

$$5m^2+2m-7=0$$

120.

$$8n^2-3n+3=0$$

121.

$$p^2-6p-27=0$$

122.

$$25q^2+30q+9=0$$

123.

$$4r^2+3r-5=0$$

124.

$$3t(t-2)=2$$

125.

$$2a^2+12a+5=0$$

126.

$$4d^2-7d+2=0$$

127.

$$\frac{3}{4}b^2+\frac{1}{2}b=\frac{3}{8}$$

128.

$$\frac{1}{9}c^2+\frac{2}{3}c=3$$

129.

$$2x^2+12x-3=0$$

130.

$$16y^2+8y+1=0$$

**Notið aðgreininn til að spá fyrir um fjölda lausna annars stigs jöfnu**

Ákvarðið í verkefnunum hér á eftir hve margar lausnir hver annars stigs jafna hefur.

131.

1. ⓐ $4x^2-5x+16=0$
2. ⓑ $36y^2+36y+9=0$
3. ⓒ $6m^2+3m-5=0$
4. ⓓ $18n^2-7n+3=0$

132.

1. ⓐ $9v^2-15v+25=0$
2. ⓑ $100w^2+60w+9=0$
3. ⓒ $5c^2+7c-10=0$
4. ⓓ $15d^2-4d+8=0$

133.

1. ⓐ $r^2+12r+36=0$
2. ⓑ $8t^2-11t+5=0$
3. ⓒ $4u^2-12u+9=0$
4. ⓓ $3v^2-5v-1=0$

134.

1. ⓐ $25p^2+10p+1=0$
2. ⓑ $7q^2-3q-6=0$
3. ⓒ $7y^2+2y+8=0$
4. ⓓ $25z^2-60z+36=0$

**Veljið heppilegustu aðferðina til að leysa annars stigs jöfnu**

Veljið í verkefnunum hér á eftir heppilegustu aðferðina — þáttun, ferningsrótarreglu eða lausnarformúlu — til að leysa hverja annars stigs jöfnu. Leysið ekki jöfnurnar.

**135.** ⓐ $x^2-5x-24=0$ ⓑ $(y+5)^2=12$ ⓒ $14m^2+3m=11$

**136.** ⓐ $(8v+3)^2=81$ ⓑ $w^2-9w-22=0$ ⓒ $4n^2-10=6$

**137.** ⓐ $6a^2+14=20$ ⓑ $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$ ⓒ $y^2-2y=8$

**138.** ⓐ $8b^2+15b=4$ ⓑ $\frac{5}{9}v^2-\frac{2}{3}v=1$ ⓒ $\left(w+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

10

***Stærðfræði í daglegu lífi***

**139.** Neyðarblysi er skotið beint upp frá skipi á hafi. Notið jöfnuna $16(t^2-13t+40)=0$ og einangrið $t$, fjölda sekúndna þar til blysið er í 640 feta hæð.

**140.** Arkitekt hannar anddyri hótels. Hún vill hafa þríhyrndan glugga sem snýr út að innigarði og breidd gluggans á að vera 6 fetum meiri en hæðin. Vegna krafna um orkusparnað verður flatarmál gluggans að vera 140 ferfet. Notið jöfnuna $\frac{1}{2}h^2+3h=140$ og einangrið $h$, hæð gluggans.

***Ritunarverkefni***

**141.** Leysið jöfnuna $x^2+10x=200$

ⓐ með því að fylla í ferning og ⓑ með lausnarformúlunni. ⓒ Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

**142.** Leysið jöfnuna $12y^2+23y=24$

ⓐ með því að fylla í ferning og ⓑ með lausnarformúlunni. ⓒ Hvora aðferðina kjósið þið? Hvers vegna?

***Sjálfsmat***

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni. | | | |
| notað aðgreininn til að spá fyrir um fjölda lausna annars stigs jöfnu. | | | |
| valið heppilegustu aðferðina til að leysa annars stigs jöfnu. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um hversu vel þið hafið náð tökum á þessum hluta? Hvaða skref ætlið þið að taka til að bæta ykkur?

# 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum

**UNDIRBÚNINGUR 10.10**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Summa tveggja samliggjandi oddatalna er − 100. Finnið tölurnar. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja
upp dæmi 3.10.

**UNDIRBÚNINGUR 10.11**

Flatarmál þríhyrnds veggmálverks er 64 ferfet. Grunnlínan er 16 fet. Finnið hæðina. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja
upp dæmi 3.36.

**UNDIRBÚNINGUR 10.12**

Finnið lengd langhliðar rétthyrnds þríhyrnings þar sem skammhliðarnar eru 5 tommur og 12 tommur. Ef þið áttuð í erfiðleikum með þetta dæmi skuluð þið rifja
upp dæmi 3.39.

## Leysið verkefni með lausnarformúlunni

Áður leystum við nokkur verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum, þegar þáttun var eina aðferðin sem við höfðum til að leysa þær. Nú þegar við höfum fleiri aðferðir skoðum við verkefnin aftur. Fyrst setjum við hér inn venjulegu verkefnalausnaraðferðina okkar svo að við getum fylgt skrefunum.

**AÐFERÐ**

### Notið verkefnalausnaraðferðina.

1. Skref 1. Lesið verkefnið. Gangið úr skugga um að öll orð og allar hugmyndir séu skiljanleg.
2. Skref 2. Finnið hverju er leitað að.
3. Skref 3. Nefnið stærðina sem leitað er að. Veljið breytu til að tákna hana.
4. Skref 4. Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Gagnlegt getur verið að endursegja verkefnið í einni setningu með öllum mikilvægum upplýsingum. Setjið síðan setninguna fram sem algebrujöfnu.
5. Skref 5. Leysið jöfnuna með vönduðum algebruaðferðum.
6. Skref 6. Sannreynið svarið í samhengi við verkefnið og gangið úr skugga um að það sé rökrétt.
7. Skref 7. Svarið spurningunni með heilli setningu.

Við höfum áður lýst verkefnum um samliggjandi sléttar tölur og oddatölur með línulegum jöfnum. Hver slétt tala er 2 stærri en talan á undan. Ef sú fyrsta er n eru næstu tölur $n+2$ og $n+2+2$, eða $n+4$. Sama gildir um oddatölur. Hér á eftir eru sýndar runur af hvorri gerð.

Samliggjandi sléttar heiltölur

$64, 66, 68$

| | |
|---|---|
| $n$ | $1.$ slétt heiltala |
| $n+2$ | $2.$ samliggjandi slétt heiltala |
| $n+4$ | $3.$ samliggjandi slétt heiltala |

Samliggjandi oddatölur

$77, 79, 81$

| | |
|---|---|
| $n$ | $1.$ oddatala |
| $n+2$ | $2.$ samliggjandi oddatala |
| $n+4$ | $3.$ samliggjandi oddatala |

Sumum verkefnum með samliggjandi oddatölum eða sléttum tölum er lýst með annars stigs jöfnum. Ritháttur inn hér að framan hjálpar við að gefa breytunum heiti.

---

**DÆMI 10.38**

Margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna er 195. Finnið tölurnar.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að tveimur samliggjandi oddatölum. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $n=$ vera fyrri oddatöluna og $n+2=$ vera næstu oddatölu. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Lýsið því í einni setningu. | „Margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna er 195.“ Margfeldi fyrri oddatölunnar og þeirrar síðari er 195. |
| Setjið fram sem jöfnu | $n(n+2)=195$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Margfaldið inn í svigana. | $n^2+2n=195$ |
| Dragið 195 frá til að koma jöfnunni á staðalform. | $ax^2+bx+c=0$<br>$n^2+2n-195=0$ |
| Finnið gildi a, b og c. | $a=1,\ b=2,\ c=-195$ |
| Ritið annars stigs jöfnuna. | $n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $n=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-195)}}{2\cdot1}$ |
| Einfaldið. | $n=\frac{-2\pm\sqrt{4+780}}{2}$<br>$n=\frac{-2\pm\sqrt{784}}{2}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $n=\frac{-2\pm28}{2}$ |

| | |
|---|---|
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $n=\frac{-2+28}{2}, n=\frac{-2-28}{2}$ |
| Leysið hvora jöfnu. | $n=\frac{26}{2}, n=\frac{-30}{2}$<br>$n=13 \quad n=-15$ |
| Tvö gildi n eru lausnir. Þau gefa okkur tvö pör samliggjandi oddatalna. | Fyrri oddatala $n=13$<br>næsta oddatala $n+2$<br>$13+2$<br>$15$ |
| | Fyrri oddatala $n=-15$<br>næsta oddatala $n+2$<br>$-15+2$<br>$-13$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið. Ganga pörin upp? Eru þetta samliggjandi oddatölur? Er margfeldi þeirra 195? | $13, 15,$ já<br>$13\cdot 15=195,$ já<br>$-13, -15,$ já<br>$-13(-15)=195,$ já |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Samliggjandi oddatölurnar tvær með margfeldið 195 eru 13 og 15, eða −13 og −15. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.75**

Margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna er 99. Finnið tölurnar.

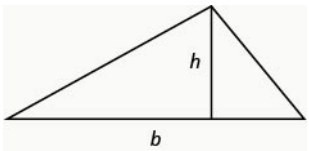
**PRÓFIÐ SJÁLF 10.76**

Margfeldi tveggja samliggjandi sléttra talna er 168. Finnið tölurnar.

Við notum formúluna fyrir flatarmál þríhyrnings til að leysa næsta dæmi.

**FLATARMÁL ÞRÍHYRNINGS**

Fyrir þríhyrning með grunnlínu $b$ og hæð $h$ reiknast flatarmálið $A$ samkvæmt formúlunni $A=\frac{1}{2}bh$.

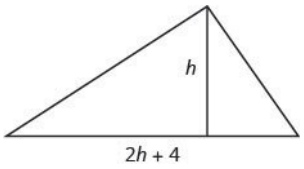



Munið að þegar rúmfræðiverkefni eru leyst er gagnlegt að teikna mynd.

**DÆMI 10.39**

Arkitekt er að hanna inngang á veitingastað. Hún vill setja þríhyrndan glugga fyrir ofan dyrnar. Vegna krafna um orkusparnað má glugginn vera 120 ferfet að flatarmáli. Arkitektinn vill að breiddin sé 4 fetum meiri en tvöföld hæðin. Finnið hæð og breidd gluggans.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Teiknið mynd. |  |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að hæð og breidd. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $h=$ vera hæð þríhyrningsins og $2h+4=$ vera breidd hans. |
| **Skref 4. Setjið fram sem jöfnu.** | Við þekkjum flatarmálið. Ritið formúluna fyrir flatarmál þríhyrnings. $A=\frac{1}{2}bh$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Setjið gildin inn. | $120=\frac{1}{2}(2h+4)h$ |
| Beitið dreifireglu. | $120=h^2+2h$ |
| Þetta er annars stigs jafna; endurritið hana á staðalformi. | $ax^2+bx+c=0$<br>$h^2+2h-120=0$ |
| Leysið jöfnuna með lausnarformúlunni. Finnið gildi a, b og c. | $a=1,\ b=2,\ c=-120$ |
| Ritið annars stigs jöfnuna. | $h=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $h=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-120)}}{2\cdot1}$ |
| Einfaldið. | $h=\frac{-2\pm\sqrt{4+480}}{2}$<br>$h=\frac{-2\pm\sqrt{484}}{2}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $h=\frac{-2\pm22}{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $h=\frac{-2+22}{2},\ h=\frac{-2-22}{2}$ |
| Einfaldið. | $h=\frac{20}{2},\ h=\frac{-24}{2}$ |
| Þar sem h er hæð glugga er gildið $h=-12$ ekki raunhæft. | $h=10$ ~~$h=-12$~~ |

| | |
|---|---|
| | Hæð þríhyrningsins: $h=10$<br><br>Breidd þríhyrningsins: $2h+4$<br>$2\cdot 10+4$<br>$24$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið. Hefur þríhyrningur með hæðina 10 og breiddina 24 flatarmálið 120? Já. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Hæð þríhyrnda gluggans er 10 fet og breiddin 24 fet. |

Athugið að lausnirnar voru heiltölur. Það segir okkur að við hefðum getað leyst jöfnuna með þáttun.

Þegar við rituðum jöfnuna á staðalforminu $h^2+2h-120=0$ hefðum við getað þáttað hana. Þá hefðum við leyst jöfnuna $(h+12)(h-10)=0$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.77**

Finnið mál þríhyrnings sem er fjórum tommum breiðari en sexföld hæð hans og hefur flatarmálið 208 fertommur.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.78**

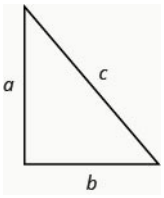
Þríhyrningur hefur flatarmálið 110 ferfet og hæð sem er tveimur fetum minni en tvöföld breidd hans. Hver eru mál hans?

Í dæmunum tveimur hér á undan var talan undir rótartákninu í lausnarformúlunni ferningstala og því voru lausnirnar ræðar tölur. Ef óræð tala fæst sem lausn á verkefni notum við reiknivél til að finna nálgunargildi.

Setning Pýþagórasar lýsir sambandi skammhliða og langhliðar í rétthyrndum þríhyrningi. Við notum setningu Pýþagórasar til að leysa næsta dæmi.

**SETNING PÝÞAGÓRASAR**

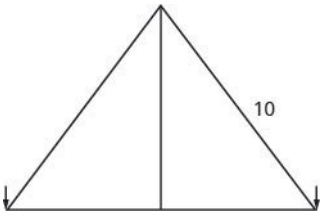
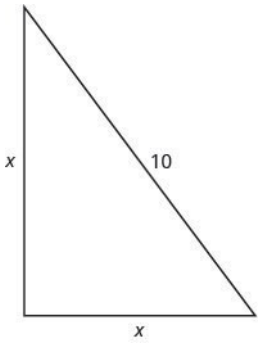
Í hverjum rétthyrndum þríhyrningi, þar sem $a$ og $b$ eru lengdir skammhliðanna og $c$ er lengd langhliðarinnar, gildir $a^2+b^2=c^2$




**DÆMI 10.40**

Rene er að setja upp hátíðarljós. Hann vill búa til „tré“ í lögun tveggja rétthyrndra þríhyrninga, eins og sýnt er hér á eftir, og hefur tvær 10 feta ljósaseríur fyrir hliðarnar. Hann festir ljósin efst á staur og við tvo hæla í jörðinni. Hann vill að hæð staursins sé sú sama og fjarlægðin frá undirstöðu hans að hvorum hæl. Hversu hár ætti staurinn að vera?

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Teiknið mynd. |  |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að hæð staursins. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Fjarlægðin frá undirstöðu staursins að hvorum hæl er sú sama og hæð staursins. Látum $x=$ vera hæð staursins og $x=$ vera fjarlægðina frá staurnum að hælnum. |
| Hvor hlið myndar rétthyrndan þríhyrning. Við teiknum mynd af öðrum þeirra. |  |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Við getum notað setningu Pýþagórasar til að einangra x. | |
| Ritið setningu Pýþagórasar. | $a^2+b^2=c^2$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Setjið inn. | $x^2+x^2=10^2$ |
| Einfaldið. | $2x^2=100$ |

| | |
|---|---|
| Deilið með 2 til að einangra breytuna. | $\frac{2x^2}{2}=\frac{100}{2}$ |
| Einfaldið. | $x^2=50$ |
| Notið ferningsrótarregluna. | $x=\pm\sqrt{50}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x=\pm 5\sqrt{2}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $x=5\sqrt{2}$<br>$x=-5\sqrt{2}$ |
| Notið reiknivél til að námunda þessa tölu að einum aukastaf. | $x\approx 7{,}1$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið sjálf með setningu Pýþagórasar. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Staurinn ætti að vera um 7,1 fet á hæð. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.79**

Sólin varpar skugga af fánastöng. Hæð fánastangarinnar er þreföld lengd skuggans. Fjarlægðin frá enda skuggans að toppi fánastangarinnar er 20 fet. Finnið lengd skuggans og hæð fánastangarinnar. Námundið að næsta tíunda hluta fets.

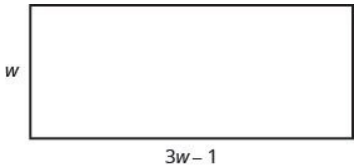
**PRÓFIÐ SJÁLF 10.80**

Fjarlægðin milli gagnstæðra horna rétthyrnds vallar er fjórum einingum meiri en breidd vallarins. Lengd vallarins er tvöföld breidd hans. Finnið fjarlægðina milli gagnstæðu hornanna. Námundið að næsta tíunda hluta.

**DÆMI 10.41**

Mike vill leggja 150 ferfet af gervigrasi í framgarðinn sinn. Húsfélagið hans leyfir ekki meira gervigras en þetta. Hann vill hafa rétthyrnt grassvæði þar sem lengdin er einum feti minni en þreföld breiddin. Finnið lengdina og breiddina. Námundið að næsta tíunda hluta fets.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. Teiknið mynd. |  |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að lengdinni og breiddinni. |

| | |
|---|---|
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $w=$ vera breidd rétthyrningsins og $3w-1=$ vera lengd hans. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. Við þekkjum flatarmálið. Ritið formúluna fyrir flatarmál rétthyrnings. | $A = L \cdot W$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Setjið gildin inn. | $150 = (3w-1)w$ |
| Beitið dreifireglu. | $150 = 3w^2 - w$ |
| Þetta er annars stigs jafna; endurritið hana á staðalformi. | $ax^2 + bx + c = 0$<br>$3w^2 - w - 150 = 0$ |
| Leysið jöfnuna með lausnarformúlunni. | |
| Finnið gildi a, b og c. | $a = 3,\ b = -1,\ c = -150$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $w = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-150)}}{2 \cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $w = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 1800}}{6}$<br>$w = \frac{1 \pm \sqrt{1801}}{6}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $w = \frac{1 + \sqrt{1801}}{6},\ w = \frac{1 - \sqrt{1801}}{6}$ |
| Notið reiknivél til að finna nálgunargildi svaranna. Við útilokum neikvæðu lausnina fyrir breiddina. | $w \approx 7{,}2, \quad w \approx -6{,}9$<br>Breidd $w \approx 7{,}2$<br>Lengd $\approx 3w - 1$<br>$\approx 3(7{,}2) - 1$<br>$\approx 20{,}6$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið. Gangið úr skugga um að svörin séu raunhæf. | |
| **Skref 7.** Svarið spurningunni. | Breidd rétthyrningsins er um það bil 7,2 fet og lengdin 20,6 fet. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.81**

Rétthyrndur matjurtagarður er 200 ferfet að flatarmáli. Lengd hans er fjórum fetum minni en tvöföld breiddin. Finnið lengd og breidd garðsins. Námundið að næsta tíunda hluta fets.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.82**

Rétthyrndur borðdúkur hefur flatarmálið 80 ferfet. Breiddin er 5 fetum minni en lengdin. Hver eru lengd og breidd borðdúksins? Námundið að næsta tíunda hluta fets.

Hæð hlutar sem skotið er upp er lýst með annars stigs jöfnu. Upphafshraðinn, $v_0$, knýr hlutinn upp þar til þyngdaraflið veldur því að hann fellur aftur niður.

**KASTHREYFING**

Hæð hlutar í fetum, $h$, sem skotið er upp í loftið með upphafshraðanum $v_0$, eftir $t$ sekúndur reiknast samkvæmt formúlunni:

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Við getum notað formúluna fyrir kasthreyfingu til að finna hversu margar sekúndur tekur flugeld að ná tiltekinni hæð.

**DÆMI 10.42**

Flugeldi er skotið upp með upphafshraðanum 130 fet á sekúndu. Hversu margar sekúndur líða þar til hann nær 260 feta hæð? Námundið að næsta tíunda hluta sekúndu.

## Lausn

| | |
|---|---|
| **Skref 1.** Lesið verkefnið. | |
| **Skref 2.** Finnið hverju er leitað að. | Við leitum að tímanum, mældum í sekúndum. |
| **Skref 3.** Nefnið það sem leitað er að. | Látum $t =$ vera fjölda sekúndna. |
| **Skref 4.** Setjið verkefnið fram sem jöfnu. | Notið formúluna. |
| | $h = -16t^2 + v_0 t$ |
| **Skref 5.** Leysið jöfnuna. Við vitum að hraðinn $v_0$ er 130 fet á sekúndu. | |
| Hæðin er 260 fet. Setjið gildin inn. | $260 = -16t^2 + 130t$ |
| Þetta er annars stigs jafna; endurritið hana á staðalformi. | $ax^2 + bx + c = 0$<br>$16t^2 - 130t + 260 = 0$ |
| Leysið jöfnuna með lausnarformúlunni. | |
| Finnið gildi a, b og c. | $a = 16,\ b = -130,\ c = 260$ |
| Ritið lausnarformúluna. | $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| Setjið síðan inn gildi a, b og c. | $t = \frac{-(-130) \pm \sqrt{(-130)^2 - 4 \cdot 16 \cdot (260)}}{2 \cdot 16}$ |
| Einfaldið. | $t = \frac{130 \pm \sqrt{16.900 - 16.640}}{32}$<br>$t = \frac{130 \pm \sqrt{260}}{32}$ |
| Endurskrifið þannig að báðar lausnirnar sjáist. | $t = \frac{130 + \sqrt{260}}{32},\ t = \frac{130 - \sqrt{260}}{32}$ |
| Notið reiknivél til að finna nálgunargildi svaranna. | $t \approx 4{,}6$ sekúndur, $t \approx 3{,}6$ |
| **Skref 6.** Sannreynið svarið sjálf. | |

**Skref 7.** Svarið spurningunni.

Flugeldurinn fer upp og fellur síðan aftur niður. Á uppleið nær hann 260 feta hæð eftir um það bil 3,6 sekúndur. Hann fer einnig um þessa hæð á niðurleið eftir 4,6 sekúndur.



**PRÓFIÐ SJÁLF 10.83**

Ör er skotin frá jörðu upp í loftið með upphafshraðanum 108 fet á sekúndu. Notið formúluna $h=-16t^2+v_0t$ til að ákvarða hvenær örin verður 180 fetum yfir jörðu. Námundið að næsta tíunda hluta sekúndu.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.84**

Maður kastar bolta upp í loftið með hraðanum 96 fet á sekúndu. Notið formúluna $h=-16t^2+v_0t$ til að ákvarða hvenær boltinn verður í 48 feta hæð. Námundið að næsta tíunda hluta sekúndu.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Skoðið þetta vefefni til að fá meiri kennslu og þjálfun í að leysa verkefni með annars stigs jöfnum:

- Almenn orðadæmi með annars stigs jöfnum
- Orðadæmi: Leysið verkefni um kasthreyfingu með annars stigs jöfnu

## Verkefni úr hluta 10.4

***Æfingin skapar meistarann***

**Leysið verkefni með lausnarformúlunni**

Leysið verkefnin hér á eftir með þáttun, ferningsrótarreglunni eða lausnarformúlunni. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.

**143.** Margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna er 255. Finnið tölurnar.

**144.** Margfeldi tveggja samliggjandi sléttra talna er 360. Finnið tölurnar.

**145.** Margfeldi tveggja samliggjandi sléttra talna er 624. Finnið tölurnar.

**146.** Margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna er 1023. Finnið tölurnar.

**147.** Margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna er 483. Finnið tölurnar.

**148.** Margfeldi tveggja samliggjandi sléttra talna er 528. Finnið tölurnar.

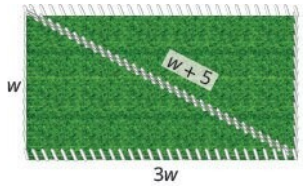
**149.** Þríhyrningur með flatarmálið 45 fertommur hefur hæð sem er tveimur einingum minni en fjórföld breiddin. Finnið hæð og breidd þríhyrningsins.

**150.** Breidd þríhyrnings er sex einingum meiri en tvöföld hæðin. Flatarmál þríhyrningsins er 88 ferjardar. Finnið hæð og breidd þríhyrningsins.

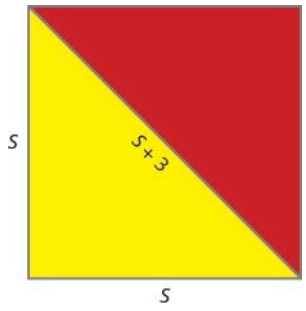
**151.** Langhlið rétthyrnds þríhyrnings er tvöfalt lengri en önnur skammhliðin. Hin skammhliðin er þrjú fet á lengd. Finnið lengdir hliðanna þriggja. Námundið að næsta tíunda hluta.

**152.** Langhlið rétthyrnds þríhyrnings er 10 cm á lengd. Önnur skammhlið þríhyrningsins er þrefalt lengri en hin. Finnið lengdir hliðanna þriggja. Námundið að næsta tíunda hluta.

**153.** Bóndi ætlar að girða af hluta rétthyrnds gerðis. Hornalínan frá einu horni gerðisins að gagnstæðu horni er fimm jördum lengri en breidd þess. Lengd gerðisins er þreföld breiddin. Finnið lengd hornalínunnar. Námundið að næsta tíunda hluta.




**154.** Merkjafánar á sjó eru notaðir til að tákna bókstafi stafrófsins. Fáninn fyrir bókstafinn O er gerður úr gulum rétthyrndum þríhyrningi og rauðum rétthyrndum þríhyrningi sem eru saumaðir saman meðfram langhliðum sínum og mynda ferning. Sameiginleg hlið þríhyrninganna er þremur tommum lengri en hlið fánans. Finnið lengd hliðar fánans.




**155.** Lengd rétthyrndrar innkeyrslu er fimm fetum meiri en þreföld breiddin. Flatarmálið er 350 ferfet. Finnið lengd og breidd innkeyrslunnar.

**156.** Rétthyrnd grasflöt hefur flatarmálið 140 ferjardar. Breidd hennar er sex jördum minni en tvöföld lengdin. Hver eru lengd og breidd grasflatarinnar?

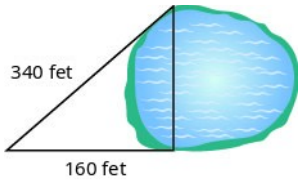
**157.** Flugeldflaug er skotin upp með hraðanum 640 fet á sekúndu. Notið formúluna fyrir kasthreyfingu, $h=-16t^2+v_0t$, til að ákvarða hvenær flaugin verður í 1200 feta hæð.

**158.** Ör er skotin lóðrétt upp með hraðanum 220 fet á sekúndu. Notið formúluna fyrir kasthreyfingu, $h=-16t^2+v_0t$, til að ákvarða hvenær örin verður í 400 feta hæð.

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**159.** Kúlu er skotið beint upp úr loftbyssu úr 8 feta hæð. Upphafshraðinn er 1120 fet á sekúndu. Notið formúluna $h=-16t^2+v_0t+8$ til að ákvarða hversu margar sekúndur líða þar til kúlan lendir á jörðinni. (Með öðrum orðum: Hvenær verður $h=0$?)

**160.** Borgarskipulagsfræðingur vill byggja brú yfir stöðuvatn í almenningsgarði. Til að finna lengd brúarinnar myndar hann rétthyrndan þríhyrning þar sem önnur skammhliðin og langhliðin liggja á landi en brúin er hin skammhliðin. Langhliðin er 340 fet og skammhliðin 160 fet. Finnið lengd brúarinnar.




### *Ritunarverkefni*

**161.** Búið til verkefni um margfeldi tveggja samliggjandi oddatalna. Byrjið á að velja tvær samliggjandi oddatölur. ⓐ Hvaða tölur völduð þið? ⓑ Hvert er margfeldi talnanna? ⓒ Leysið jöfnuna $n(n+2)=p$, þar sem $p$ er margfeldið sem þið funduð í b-lið. ⓓ Fenguð þið tölurnar sem þið byrjuðuð með?

**162.** Búið til verkefni um margfeldi tveggja samliggjandi sléttra talna. Byrjið á að velja tvær samliggjandi sléttar tölur. ⓐ Hvaða tölur völduð þið? ⓑ Hvert er margfeldi talnanna? ⓒ Leysið jöfnuna $n(n+2)=p$, þar sem $p$ er margfeldið sem þið funduð í b-lið. ⓓ Fenguð þið tölurnar sem þið byrjuðuð með?

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum kaflans.

| Ég get... | Af öryggi | Með smá aðstoð | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| leyst verkefni með annars stigs formúlunni. | | | |

ⓑ Hversu góð tök teljið þið ykkur hafa á efni hlutans á kvarðanum 1–10, miðað við svörin á gátlistanum? Hvernig getið þið bætt ykkur?

# 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum

**NÁMSMARKMIÐ**

Í lok þessa hluta eigið þið að geta:

- Þekkið graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum
- Finnið samhverfuás og hvirfilpunkt fleygboga
- Finnið skurðpunkta fleygboga við ása
- Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
- Leysið verkefni um hágildi og lággildi

**UNDIRBÚNINGUR 10.13**

Áður en þið hefjist handa skuluð þið taka þetta undirbúningspróf.

Teiknið graf jöfnunnar $y=3x-5$ með því að setja inn punkta. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja
upp dæmi 4.11.

**UNDIRBÚNINGUR 10.14**

Reiknið gildi $2x^2+4x-1$ þegar $x=-3$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.57.

**UNDIRBÚNINGUR 10.15**

Reiknið gildi $-\frac{b}{2a}$ þegar $a=\frac{1}{3}$ og $b=\frac{5}{6}$. Ef þetta verkefni reyndist erfitt skuluð þið rifja upp dæmi 1.89.

## Þekkið graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum

Við höfum teiknað gröf jafna af gerðinni $Ax+By=C$. Við kölluðum slíkar jöfnur línulegar jöfnur vegna þess að gröf þeirra eru beinar línur.

Nú teiknum við gröf jafna af gerðinni $y=ax^2+bx+c$. Slík jafna kallast annars stigs jafna með tveimur breytum.

10

**ANNARS STIGS JAFNA MEÐ TVEIMUR BREYTUM**

Annars stigs jafna með tveimur breytum, þar sem $a$, $b$, og $c$ eru rauntölur og $a\neq 0$, er jafna af gerðinni

$$y=ax^2+bx+c$$

Rétt eins og við byrjuðum að teikna gröf línulegra jafna með því að setja inn punkta gerum við það sama fyrir annars stigs jöfnur.
Skoðum fyrst graf annars stigs jöfnunnar $y=x^2$. Við veljum heiltölugildi á $x$ milli $-2$ og 2 og finnum samsvarandi gildi á $y$. Sjá töflu 10.1.

Tafla 10.1

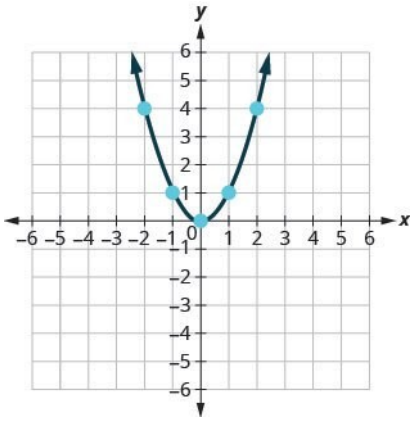
| $y=x^2$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| $-1$ | 1 |
| 2 | 4 |
| $-2$ | 4 |

Takið eftir að þegar við létum $x=1$ og $x=-1$ fékkst sama gildi á $y$.

$$\begin{aligned} y &= x^2 & y &= x^2 \\ y &= 1^2 & y &= (-1)^2 \\ y &= 1 & y &= 1 \end{aligned}$$

Það sama gerðist þegar við létum $x=2$ og $x=-2$.

Nú setjum við punktana inn til að sýna graf $y=x^2$. Sjá mynd 10.2.




Mynd 10.2

Grafið er ekki lína. Þessi ferill kallast fleygbogi. Graf hverrar annars stigs jöfnu lítur svona út.

Í dæmi 10.43 æfið þið að teikna fleygboga með því að setja inn nokkra punkta.

10

**DÆMI 10.43**

Teiknið graf $y=x^2-1$.

## Lausn

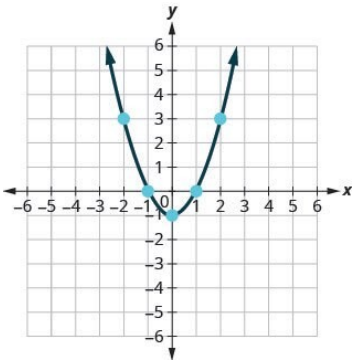
Við teiknum graf jöfnunnar með því að setja inn punkta.

Veljið heiltölugildi á x, setjið þau inn í jöfnuna og einangrið y.

Skráið gildi hnitaðra para í töfluna.

| $y = x^2 - 1$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 0 | −1 |
| 1 | 0 |
| −1 | 0 |
| 2 | 3 |
| −2 | 3 |

Setjið punktana inn og tengið þá síðan með sléttum ferli.
Niðurstaðan er graf jöfnunnar $y = x^2 - 1$.




**PRÓFIÐ SJÁLF 10.85**

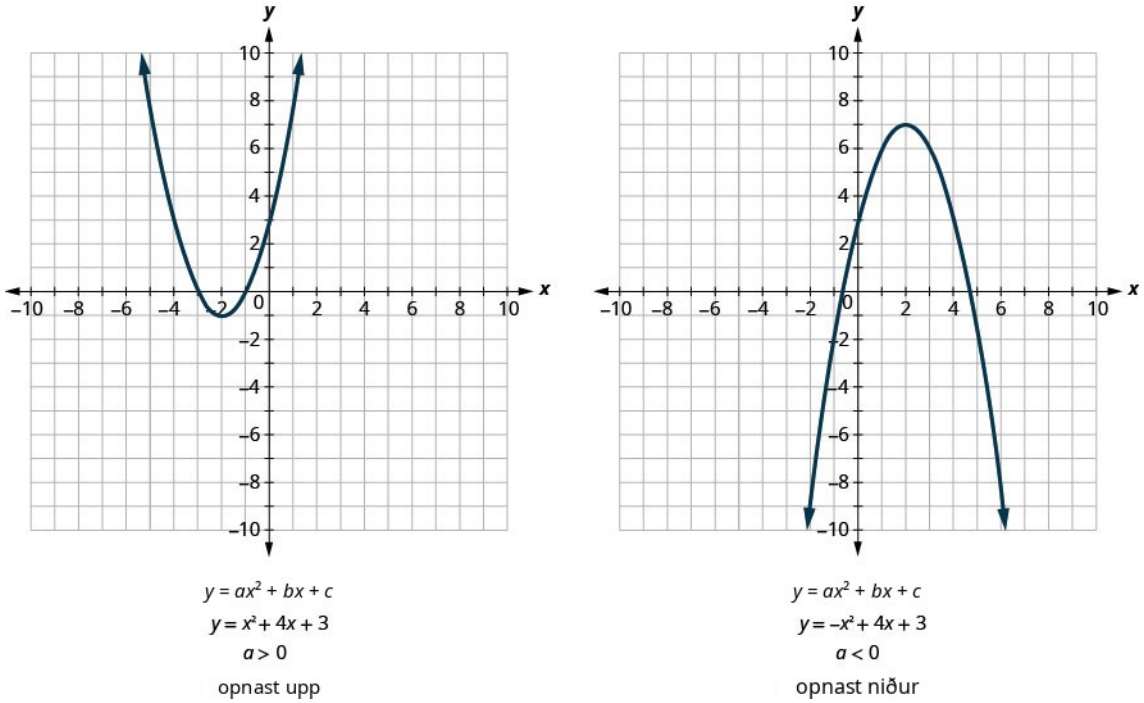
Teiknið graf $y = -x^2$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.86**

Teiknið graf $y = x^2 + 1$.

Hvernig eru jöfnurnar $y = x^2$ og $y = x^2 - 1$ ólíkar? Hver er munurinn á gröfum þeirra? Hvað eiga gröfin sameiginlegt?

Allir fleygbogar af gerðinni $y = ax^2 + bx + c$ opnast upp eða niður. Sjá mynd 10.3.




Mynd 10.3

Takið eftir að eini munurinn á jöfnunum tveimur er mínusmerkið á undan $x^2$ í jöfnu seinna grafsins á mynd 10.3. Þegar $x^2$ -liðurinn er jákvæður opnast fleygboginn upp en þegar $x^2$ -liðurinn er neikvæður opnast hann niður.

---

**OPNUN FLEYGBOGA**

Fyrir annars stigs jöfnuna $y = a\,x^2 + b\,x + c$ gildir:

- $a > 0$, fleygboginn opnast upp á við
- $a < 0$, fleygboginn opnast niður á við

---

**DÆMI 10.44**

Ákvarðið hvort hver fleygbogi opnist upp eða niður:

ⓐ $y = -3\,x^2 + 2\,x - 4$ ⓑ $y = 6\,x^2 + 7\,x - 9$

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ Finnið gildi a. | $y = ax^2 + bx + c$<br>$y = -3x^2 + 2x - 4$<br>$a = -3$<br>Þar sem a er neikvætt opnast fleygboginn niður. |
| ⓑ Finnið gildi a. | $y = ax^2 + bx + c$<br>$y = 6x^2 + 7x - 9$<br>$a = 6$<br>Þar sem a er jákvætt opnast fleygboginn upp. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.87**

Ákvarðið hvort hver fleygbogi opnist upp eða niður:

ⓐ $y = 2x^2 + 5x - 2$ ⓑ $y = -3x^2 - 4x + 7$

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.88**

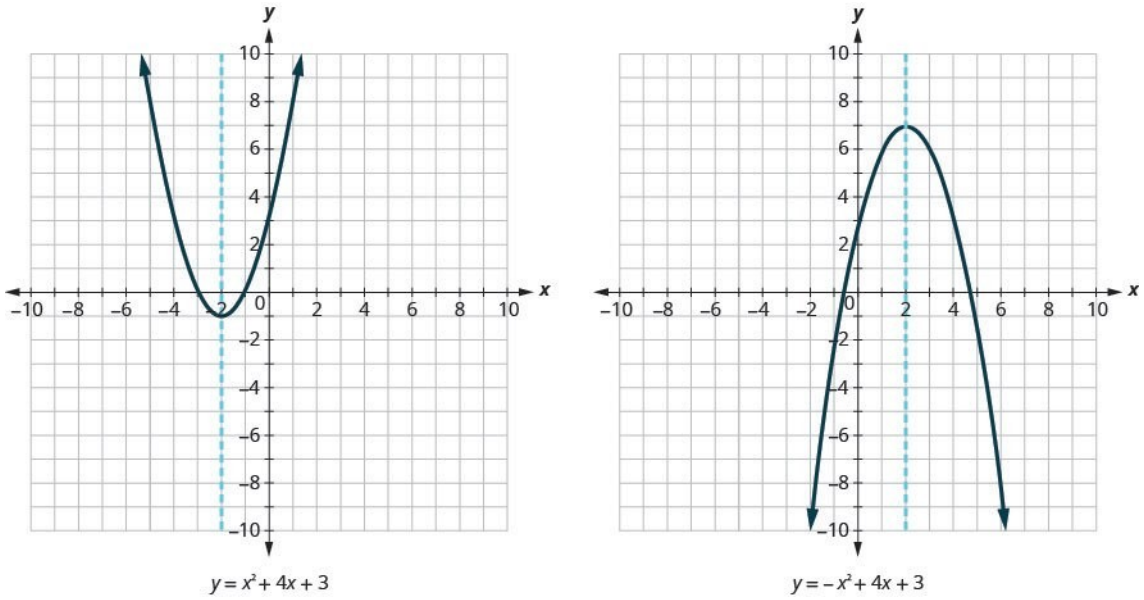
Ákvarðið hvort hver fleygbogi opnist upp eða niður:

ⓐ $y = -2x^2 - 2x - 3$ ⓑ $y = 5x^2 - 2x - 1$

## Finnið samhverfuás og hvirfilpunkt fleygboga

Skoðið aftur mynd 10.3. Sjáið þið að hægt væri að brjóta hvorn fleygboga saman í tvennt þannig að annar helmingurinn lægi nákvæmlega ofan á hinum? Brotalínan er samhverfulína. Við köllum hana samhverfuás fleygbogans.

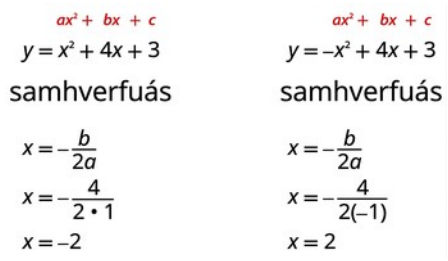
Við sýnum sömu tvö gröfin aftur með samhverfuásinn bláan. Sjá mynd 10.4.




Mynd 10.4

Jöfnu samhverfuássins má leiða út með lausnarformúlunni. Við sleppum útleiðslunni hér og notum niðurstöðuna beint. Jafna samhverfuáss grafsins á $y=ax^2+bx+c$ er $x=-\frac{b}{2a}$.

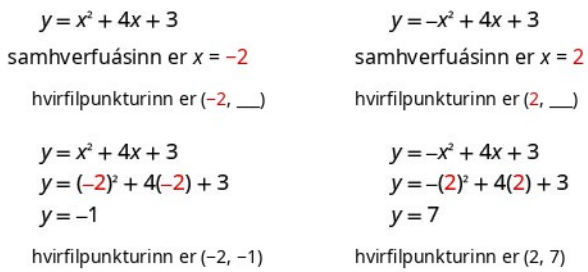
Til að finna jöfnu samhverfuáss hvors fleygboga sem við teiknuðum hér á undan setjum við því inn í formúluna $x=-\frac{b}{2a}$.




Skoðið aftur mynd 10.4. Eru þetta jöfnur slitnu rauðu línanna?

Punkturinn á fleygboganum sem liggur á samhverfuásnum er lægsti eða hæsti punktur hans eftir því hvort fleygboginn opnast upp eða niður. Þessi punktur kallast hvirfilpunktur fleygbogans.

Auðvelt er að finna hnit hvirfilpunktsins því hann liggur á samhverfuásnum. x-hnit hans er því $-\frac{b}{2a}$. Til að finna y-hnitið setjum við gildi x-hnitsins inn í annars stigs jöfnuna.




---

**SAMHVERFUÁS OG HVIRFILPUNKTUR FLEYGBOGA**

Fyrir fleygboga með jöfnuna $y=ax^2+bx+c$ gildir:

- Samhverfuás fleygbogans er línan $x=-\frac{b}{2a}$.
- Hvirfilpunkturinn liggur á samhverfuásnum og því er x-hnit hans $-\frac{b}{2a}$.

Til að finna y-hnit hvirfilpunktsins setjum við $x=-\frac{b}{2a}$ inn í annars stigs jöfnuna.

---

**DÆMI 10.45**

Fyrir fleygbogann $y=3x^2-6x+2$ skuluð þið finna: ⓐ samhverfuásinn og ⓑ hvirfilpunktinn.

## Lausn

| | |
|---|---|
| ⓐ | $y = ax^2 + bx + c$<br>$y = 3x^2 - 6x + 2$ |
| Samhverfuásinn er línan $x = -\frac{b}{2a}$. | $x = -\frac{b}{2a}$ |
| Setjið gildi a og b inn í jöfnuna. | $x = -\frac{-6}{2 \cdot 3}$ |
| Einfaldið. | $x = 1$ |
| | Samhverfuásinn er línan $x = 1$. |
| ⓑ | $y = 3x^2 - 6x + 2$ |
| Hvirfilpunkturinn liggur á samhverfuásnum og því er x-hnit hans $x = 1$. | |
| Setjið $x = 1$ inn í jöfnuna og einangrið y. | $y = 3(1)^2 - 6(1) + 2$ |
| Einfaldið. | $y = 3 \cdot 1 - 6 + 2$ |
| Þetta er y-hnitið. | $y = -1$<br>Hvirfilpunkturinn er $(1, -1)$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.89**

Fyrir fleygbogann $y = 2x^2 - 8x + 1$ skuluð þið finna: ⓐ samhverfuásinn og ⓑ hvirfilpunktinn.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.90**

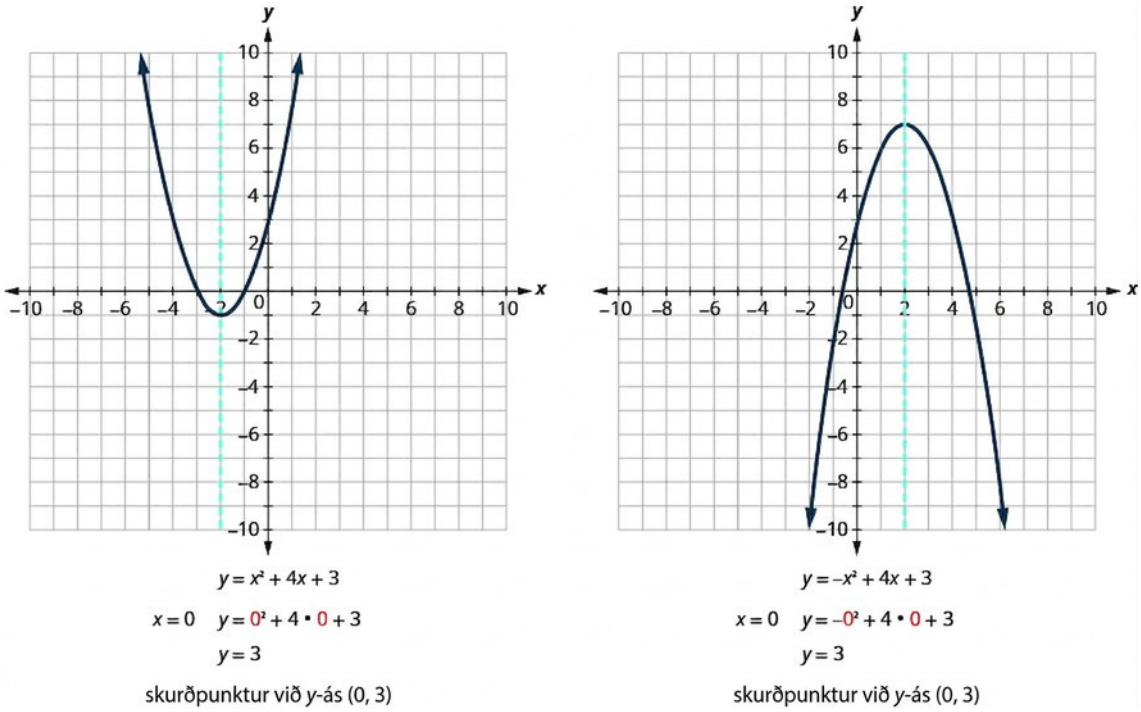
Fyrir fleygbogann $y = 2x^2 - 4x - 3$ skuluð þið finna: ⓐ samhverfuásinn og ⓑ hvirfilpunktinn.

## Finnið skurðpunkta fleygboga við ása

Þegar við teiknuðum gróf línulegra jafna notuðum við oft skurðpunkta við x- og y-ás til að auðvelda teikninguna. Hnit skurðpunktanna hjálpa okkur einnig að teikna fleygboga.

Munið að í skurðpunkti við y-ás er gildi $x$ núll. Til að finna skurðpunkt við y-ás setjum við því $x = 0$ inn í jöfnuna.

Finnum skurðpunkta við y-ás fyrir fleygbogana tvo á myndinni hér á eftir.




Mynd 10.5

Í skurðpunkti við x-ás er gildi $y$ núll. Til að finna skurðpunkt við x-ás setjum við $y=0$ inn í jöfnuna. Með öðrum orðum þurfum við að nota jöfnuna $0=a\,x^2+b\,x+c$ og einangra $x$.

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$0 = ax^2 + bx + c$$

En slíkar annars stigs jöfnur höfum við einmitt leyst fyrr í þessum kafla.

Nú getum við fundið skurðpunkta fleygboganna tveggja á mynd 10.5 við x-ás.

Fyrst finnum við skurðpunkta fleygbogans með jöfnuna $y=x^2+4\,x+3$ við x-ás.

| | $y = x^2 + 4x + 3$ |
|---|---|
| Látum $y=0$. | $0 = x^2 + 4x + 3$ |
| Þáttið. | $0 = (x + 1)(x + 3)$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $x + 1 = 0, x + 3 = 0$ |
| Leysið. | $x = -1, x = -3$ |
| | Skurðpunktarnir við x-ás eru $(-1,0)$ og $(-3,0)$. |

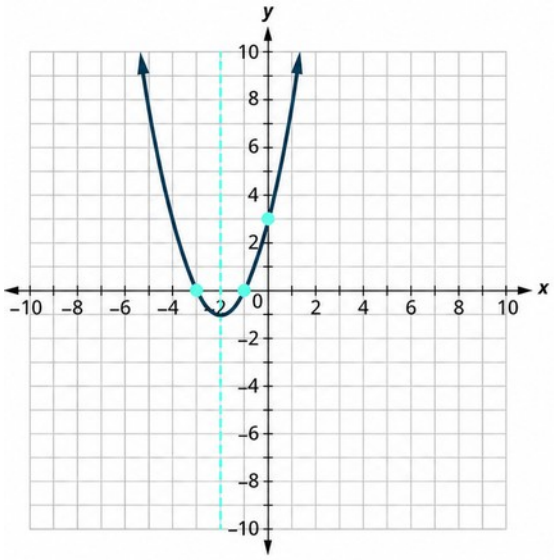
Nú finnum við skurðpunkta fleygbogans með jöfnuna $y=-x^2+4\,x+3$ við x-ás.

| | |
|---|---|
| | $y = -x^2 + 4x + 3$ |
| Látum $y = 0$. | $0 = -x^2 + 4x + 3$ |
| Ekki er hægt að þátta þessa annars stigs jöfnu og því notum við lausnarformúluna. | $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| $a = -1, b = 4, c = 3$ | $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)}$ |
| Einfaldið. | $x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{-2}$<br>$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{-2}$<br>$x = \frac{-2(2 \pm \sqrt{7})}{-2}$<br>$x = 2 \pm \sqrt{7}$ |
| | Skurðpunktarnir við x-ás eru $(2+\sqrt{7}, 0)$ og $(2-\sqrt{7}, 0)$. |

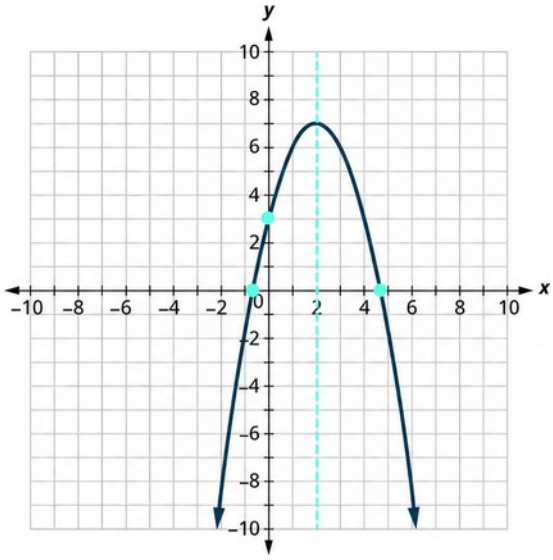
Við notum námunduð tugabrot fyrir skurðpunktana við x-ás svo að við getum merkt þá inn á grafið.

$$(2+\sqrt{7}, 0) \approx (4{,}6; 0) \qquad (2-\sqrt{7}, 0) \approx (-0{,}6; 0)$$

Samræmast þessar niðurstöður gröfunum okkar? Sjá mynd 10.6.




$y = x^2 + 4x + 3$
skurðpunktur við $y$-ás (0, 3)
skurðpunktar við $x$-ás (−1, 0) og (−3, 0)




$y = -x^2 + 4x + 3$
skurðpunktur við $y$-ás (0, 3)
skurðpunktar við $x$-ás $(2 + \sqrt{7}, 0) \approx (4{,}6; 0)$ og
$(2 - \sqrt{7}, 0) \approx (-0{,}6; 0)$

Mynd 10.6

**AÐFERÐ**

### Finnið skurðpunkta fleygboga við ása.

Til að finna skurðpunkta fleygboga með jöfnuna $y=ax^2+bx+c$ við ása:

| y -skurðpunktur | x -skurðpunktar |
|---|---|
| Látum $x=0$ og einangrið $y$. | Látum $y=0$ og einangrið $x$. |

**DÆMI 10.46**

Finnið skurðpunkta fleygbogans $y=x^2-2x-8$ við ása.

### Lausn

| | |
|---|---|
| | $y=x^2-2x-8$ |
| Til að finna skurðpunktinn við y-ás skuluð þið láta $x=0$ og einangra y. | $y=0^2-2\cdot 0-8$<br>$y=-8$ |
| | Þegar $x=0$ er $y=-8$.<br>Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,-8)$. |
| | $y=x^2-2x-8$ |
| Til að finna skurðpunktana við x-ás skuluð þið láta $y=0$ og einangra x. | $0=x^2-2x-8$ |
| Leysið með þáttun. | $0=(x-4)(x+2)$ |
| | $0=x-4 \quad 0=x+2$<br>$4=x \quad -2=x$ |

Þegar $y=0$ er $x=4$ eða $x=-2$. Skurðpunktarnir við x-ás eru $(4,0)$ og $(-2,0)$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.91**

Finnið skurðpunkta við ása á fleygboganum $y=x^2+2x-8$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.92**

Finnið skurðpunkta við ása á fleygboganum $y=x^2-4x-12$.

Í þessum kafla höfum við leyst annars stigs jöfnur af gerðinni $ax^2+bx+c=0$. Við einangruðum $x$ og fengum lausnir jöfnunnar.

Nú skoðum við annars stigs jöfnur með tveimur breytum af gerðinni $y=ax^2+bx+c$. Gröf þeirra eru fleygbogar. Skurðpunktar fleygboganna við x-ás eru þar sem $y=0$.

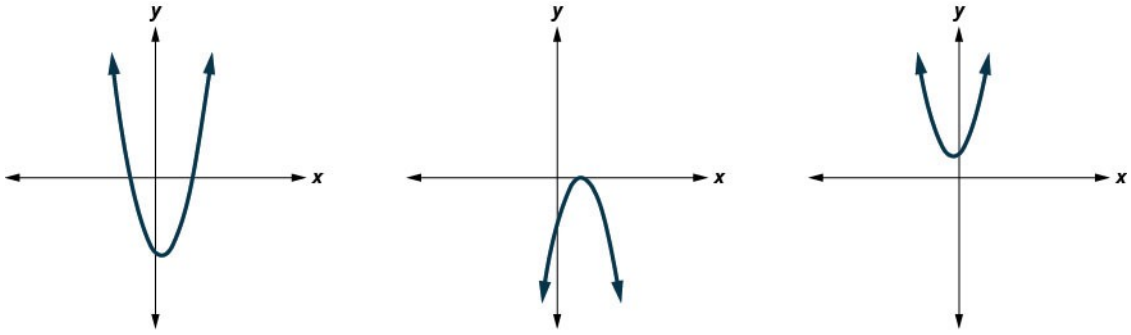
Til dæmis:

| Annars stigs jafna | Annars stigs jafna með tveimur breytum |
|---|---|
| | $y=x^2-2x-15$ |
| $x^2-2x-15 = 0$<br>$(x-5)(x+3) = 0$ | Látum $y=0$ $0=x^2-2x-15$<br>$0=(x-5)(x+3)$ |
| $x-5=0$ $x+3=0$<br>$x=5$ $x=-3$ | $x-5=0$ $x+3=0$<br>$x=5$ $x=-3$ |
| | $(5,0)$ og $(-3,0)$ |
| | $x$-skurðpunktar |

Lausnir annars stigs jöfnunnar eru $x$-gildi skurðpunktanna við x-ás.

Fyrr sáum við að annars stigs jöfnur hafa 2, 1 eða 0 lausnir. Gröfin hér á eftir sýna fleygboga fyrir tilvikin þrjú. Þar sem lausnir jafnanna gefa skurðpunkta grafanna við x-ás er fjöldi skurðpunkta sá sami og fjöldi lausna.

Áður notuðum við aðgreininn til að ákvarða fjölda lausna annars stigs jöfnu af gerðinni $ax^2+bx+c=0$. Nú getum við notað aðgreininn til að finna hversu marga skurðpunkta grafið hefur við x-ás.




$b^2-4ac>0$
Tvær lausnir
Tveir skurðpunktar við x-ás

$b^2-4ac=0$
Ein lausn
Einn skurðpunktur við x-ás

$b^2-4ac<0$
Engin rauntölulausn
Enginn skurðpunktur við x-ás

Áður en þið byrjið að leysa annars stigs jöfnuna til að finna x-gildi skurðpunktanna er gott að reikna fyrst aðgreininn. Þá vitið þið hversu mörgum lausnum má búast við.

**DÆMI 10.47**

Finnið skurðpunkta fleygbogans $y=5x^2+x+4$ við ása.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $y = 5x^2 + x + 4$ |
| Til að finna skurðpunktinn við y-ás skuluð þið láta $x = 0$ og einangra y. | $y = 5 \cdot 0^2 + 0 + 4$<br>$y = 4$<br>Þegar $x = 0$ er $y = 4$.<br>Skurðpunkturinn við y-ás er $(0, 4)$. |
| | $y = 5x^2 + x + 4$ |
| Til að finna skurðpunktana við x-ás skuluð þið láta $y = 0$ og einangra x. | $0 = 5x^2 + x + 4$ |
| Finnið gildi aðgreinisins til að sjá fyrir fjölda lausna og þar með skurðpunkta við x-ás. | $b^2 - 4ac$<br>$1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4$<br>$1 - 80$<br>$-79$ |
| Þar sem aðgreinirinn er neikvæður hefur jafnan enga rauntölulausn. | Engir skurðpunktar eru við x-ás. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.93**

Finnið skurðpunkta við ása á fleygboganum $y = 3x^2 + 4x + 4$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.94**

Finnið skurðpunkta við ása á fleygboganum $y = x^2 - 4x - 5$.

**DÆMI 10.48**

Finnið skurðpunkta fleygbogans $y = 4x^2 - 12x + 9$ við ása.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $y = 4x^2 - 12x + 9$ |
| Til að finna skurðpunktinn við y-ás skuluð þið láta $x = 0$ og einangra y. | $y = 4 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9$<br>$y = 9$ |
| | Þegar $x = 0$ er $y = 9$.<br>Skurðpunkturinn við y-ás er $(0, 9)$. |
| | $y = 4x^2 - 12x + 9$ |
| Til að finna skurðpunktana við x-ás skuluð þið láta $y = 0$ og einangra x. | $0 = 4x^2 - 12x + 9$ |

| | |
|---|---|
| Finnið gildi aðgreinisins til að sjá fyrir fjölda lausna og þar með skurðpunkta við x-ás. | $b^2 - 4ac$<br>$2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9$<br>$144 - 144$<br>$0$ |
| | Aðgreinirinn er 0 og því hefur jafnan aðeins eina rauntölulausn. Því er aðeins einn skurðpunktur við x-ás. |
| Leysið jöfnuna með því að þátta fullkomna ferningsþríliðinn. | $0 = (2x - 3)^2$ |
| Notið núllmargfeldisregluna. | $0 = 2x - 3$ |
| Einangrið x. | $3 = 2x$<br>$\frac{3}{2} = x$ |
| | Þegar $y = 0$ er $\frac{3}{2} = x$. |
| | Skurðpunkturinn við x-ás er $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.95**

Finnið skurðpunkta við ása á fleygboganum $y = -x^2 - 12x - 36$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.96**

Finnið skurðpunkta við ása á fleygboganum $y = 9x^2 + 12x + 4$.

## Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum

Nú höfum við öll atriðin sem þarf til að teikna graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum. Við þurfum aðeins að setja þau saman. Í næsta dæmi sjáum við hvernig það er gert.

**DÆMI 10.49**

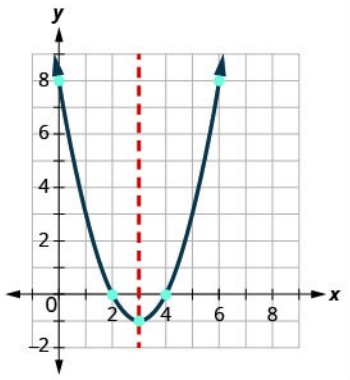
### Hvernig á að teikna graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum

Teiknið graf $y = x^2 - 6x + 8$.

### Lausn

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 1.** Skrifið annars stigs jöfnuna þannig að $y$ sé öðrum megin. | Í þessari jöfnu er $y$ öðrum megin. | $y = x^2 - 6x + 8$<br>$a = 1, b = -6, c = 8$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 2.** Ákvarðið hvort fleygboginn opnast upp eða niður. | Skoðið $a$ í jöfnunni.<br>$y = x^2 - 6x + 8$<br>Þar sem $a$ er jákvætt opnast fleygboginn upp. | <br>**Fleygboginn opnast upp.** |
| **Skref 3.** Finnið samhverfuásinn. | $y = x^2 - 6x + 8$<br>Samhverfuásinn er línan<br>$x = -\frac{b}{2a}$. | Samhverfuás<br>$x = -\frac{b}{2a}$<br>$x = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1}$<br>$x = 3$<br>**Samhverfuásinn er línan $x = 3$.** |
| **Skref 4.** Finnið hvirfilpunktinn. | Hvirfilpunkturinn er á samhverfuásnum. Setjið $x = 3$ inn í jöfnuna og leysið fyrir $y$. | Hvirfilpunktur<br>$y = x^2 - 6x + 8$<br>$y = (3)^2 - 6(3) + 8$<br>$y = -1$<br>**Hvirfilpunkturinn er (3, −1).** |
| **Skref 5.** Finnið skurðpunktinn við $y$-ás. Finnið punktinn sem er samhverfur skurðpunktinum við $y$-ás um samhverfuásinn. | Við setjum $x = 0$ inn í jöfnuna.<br><br>Við notum samhverfuásinn til að finna punkt sem er samhverfur skurðpunktinum við $y$-ás. Skurðpunkturinn við $y$-ás er 3 einingum vinstra megin við samhverfuásinn, $x = 3$. Punktur sem er 3 einingum hægra megin við samhverfuásinn hefur $x = 6$. | Skurðpunktur við $y$-ás<br>$y = x^2 - 6x + 8$<br>$y = (0)^2 - 6(0) + 8$<br>$y = 8$<br>**Skurðpunkturinn við $y$-ás er (0, 8).**<br><br>Punktur samhverfur skurðpunktinum við $y$-ás<br>**Punkturinn er (6, 8).** |
| **Skref 6.** Finnið skurðpunkta við $x$-ás. | Við setjum $y = 0$ inn í jöfnuna. Við getum leyst þessa annars stigs jöfnu með þáttun. | Skurðpunktur við $x$-ás<br>$y = x^2 - 6x + 8$<br>$0 = x^2 - 6x + 8$<br>$0 = (x - 2)(x - 4)$<br>$x = 2$ eða $x = 4$<br>**Skurðpunktarnir við $x$-ás eru (2, 0) og (4, 0).** |

| | | |
|---|---|---|
| **Skref 7.** Teiknið fleygbogann. | Við merkjum inn hvirfilpunktinn, skurðpunktana við ásana og punktinn sem er samhverfur skurðpunktinum við y-ás. Við tengjum þessa 5 punkta og teiknum fleygbogann. |  |



**PRÓFIÐ SJÁLF 10.97**

Teiknið fleygbogann $y=x^2+2x-8$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.98**

Teiknið fleygbogann $y=x^2-8x+12$.

**AÐFERÐ**

### Teiknið graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum.

1. Skref 1. Ritið annars stigs jöfnuna með $y$ öðru megin.
2. Skref 2. Ákvarðið hvort fleygboginn opnist upp eða niður.
3. Skref 3. Finnið samhverfuásinn.
4. Skref 4. Finnið hvirfilpunktinn.
5. Skref 5. Finnið skurðpunktinn við y-ás. Finnið spegilpunkt hans um samhverfuásinn.
6. Skref 6. Finnið skurðpunktana við $x$-ás.
7. Skref 7. Teiknið fleygbogann.

Í síðasta dæmi gátum við fundið skurðpunktana við x-ás með þáttun. Við finnum þá einnig með þáttun í næsta dæmi.

**DÆMI 10.50**

Teiknið graf $y=-x^2+6x-9$.

## Lausn

Jafnan hefur y öðru megin.

$y = ax^2 + bx + c$

$y = -x^2 + 6x - 9$

Þar sem a er $-1$ opnast fleygboginn niður. Finnið

$x = -\frac{b}{2a}$ til að finna samhverfuásinn.

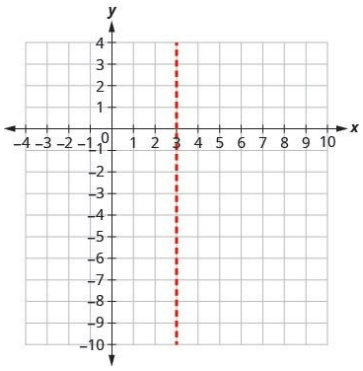
$x = -\frac{b}{2a}$

$x = -\frac{6}{2(-1)}$

$x = 3$

Samhverfuásinn er $x = 3$.

Hvirfilpunkturinn liggur á línunni $x = 3$.




Finnið y þegar $x = 3$.

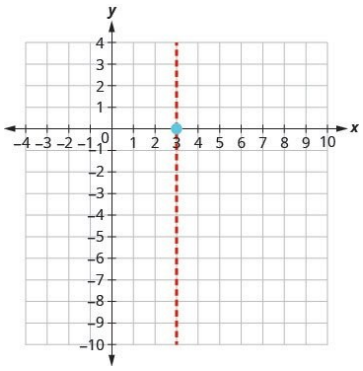
$y = -x^2 + 6x - 9$

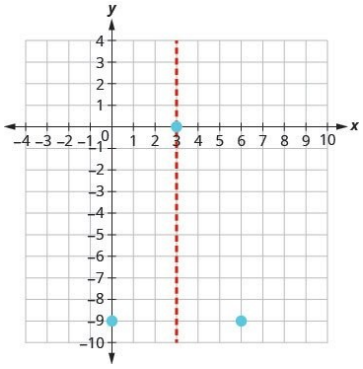
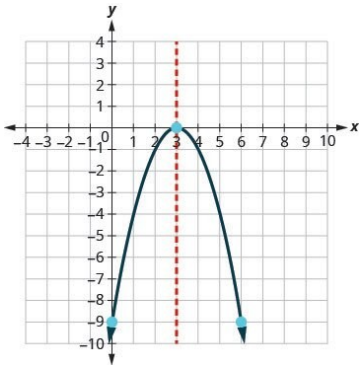
$y = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9$

$y = -9 + 18 - 9$

$y = 0$

Hvirfilpunkturinn er $(3, 0)$.



| | |
|---|---|
| Skurðpunkturinn við y-ás fæst þegar $x=0$.<br>Setjið $x=0$.<br>inn. Einfaldið. Punkturinn<br><br>$(0,-9)$ er þremur einingum vinstra megin við samhverfuásinn.<br>Punkturinn þremur einingum hægra megin við ásinn er $(6,-9)$.<br>Spegilpunktur skurðpunktsins við y-ás er $(6,-9)$ | $y=-x^2+6x-9$<br>$y=-0^2+6\cdot 0-9$<br>$y=-9$<br>Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,-9)$.<br> |
| Skurðpunktur við x-ás fæst þegar $y=0$. | $y=-x^2+6x-9$ |
| Setjið inn $y=0$. | $0=-x^2+6x-9$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $0=-(x^2-6x+9)$ |
| Þáttið þríliðinn. | $0=-(x-3)^2$ |
| Einangrið x. | $x=3$ |
| Tengið punktana til að teikna fleygbogann. |  |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.99**

Teiknið fleygbogann $y=-3x^2+12x-12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.100**

Teiknið fleygbogann $y=25x^2+10x+1$.

Á grafinu af $y=-x^2+6x-9$ voru hvirfilpunkturinn og skurðpunkturinn við x-ás sami punkturinn. Munið hvernig aðgreinirinn ákvarðar fjölda lausna annars stigs jöfnu. Aðgreinir jöfnunnar $0=-x^2+6x-9$ er 0 og því er aðeins ein lausn. Það merkir að aðeins einn skurðpunktur er við x-ás og hann er hvirfilpunktur fleygbogans.

Hversu marga skurðpunkta við x-ás búist þið við að sjá á grafinu af $y=x^2+4x+5$?

**DÆMI 10.51**

Teiknið graf $y=x^2+4x+5$.

## Lausn

Jafnan hefur y öðru megin.

$y = ax^2 + bx + c$
$y = x^2 + 4x + 5$

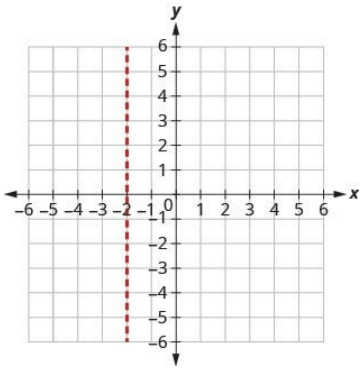
Þar sem a er 1 opnast fleygboginn upp.



Finnið samhverfuásinn $x=-\frac{b}{2a}$.

$x=-\frac{b}{2a}$
$x=-\frac{4}{2(1)}$
$x=-2$

Samhverfuásinn er $x=-2$.

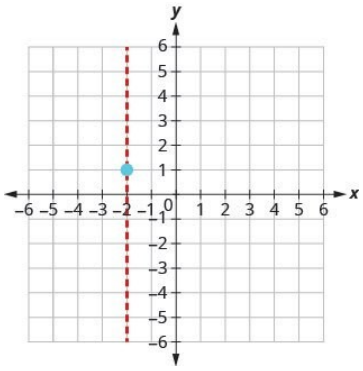



Hvirfilpunkturinn liggur á línunni $x=-2$.

Finnið y þegar $x=-2$.

$y = x^2 + 4x + 5$
$y = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5$
$y = 4 - 8 + 5$
$y = 1$

Hvirfilpunkturinn er $(-2,1)$.



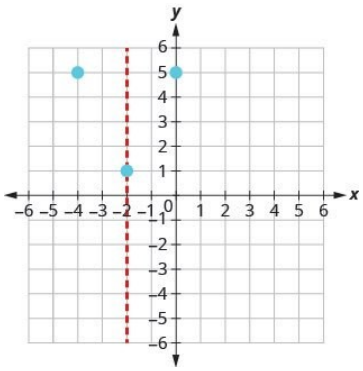
Skurðpunkturinn við y-ás fæst þegar $x=0$.

Setjið $x=0$.

inn. Einfaldið. Punkturinn $(0,5)$ er tveimur einingum hægra megin við samhverfuásinn. Punkturinn tveimur einingum vinstra megin við ásinn er $(-4,5)$.

$y=x^2+4x+5$
$y=(0)^2+4(0)+5$
$y=5$

Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,5)$.




Spegilpunktur hans er $(-4,5)$.

Skurðpunktur við x-ás fæst þegar $y=0$.

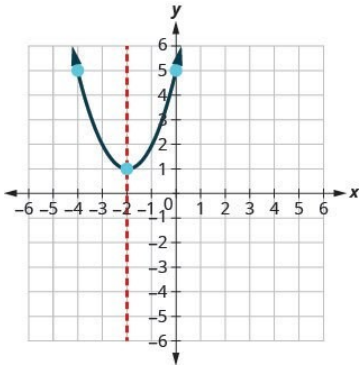
Setjið $y=0$.

inn. Reiknið aðgreininn.

$y=x^2+4x+5$
$0=x^2+4x+5$

$b^2-4ac$
$4^2-4\cdot 15$
$16-20$
$-4$

Þar sem aðgreinirinn er neikvæður er engin lausn og því enginn skurðpunktur við x-ás. til að teikna fleygbogann. Til að auka nákvæmnina gæti verið gagnlegt að velja tvo punkta til viðbótar.




**PRÓFIÐ SJÁLF 10.101**

Teiknið fleygbogann $y=2x^2-6x+5$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.102**

Teiknið fleygbogann $y=-2x^2-1$.

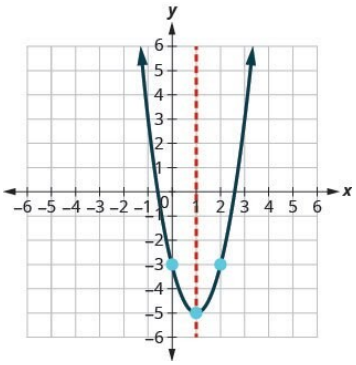
Auðvelt er að finna skurðpunktinn við y-ás með því að setja $x=0$ inn í jöfnuna, er það ekki? En í dæmi 10.51 þurftum við að nota lausnarformúluna til að finna skurðpunktana við x-ás. Við notum hana aftur í næsta dæmi.

**DÆMI 10.52**

Teiknið graf $y=2x^2-4x-3$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $y = ax^2 + bx + c$<br>$y = 2x^2 - 4x - 3$ |
| Jafnan hefur y öðru megin. Þar sem a er 2 opnast fleygboginn upp. |  |
| Finnið samhverfuásinn $x=-\frac{b}{2a}$. | $x=-\frac{b}{2a}$<br>$x=-\frac{-4}{2\cdot 2}$<br>$x=1$<br>Samhverfuásinn er $x=1$. |
| Hvirfilpunkturinn liggur á línunni $x=1$. | $y = 2x^2 - 4x - 3$ |
| Finnið y þegar $x=1$. | $y = 2(1)^2 - 4\cdot(1) - 3$<br>$y = 2 - 4 - 3$<br>$y = -5$<br>Hvirfilpunkturinn er $(1,-5)$. |
| Skurðpunkturinn við y-ás fæst þegar $x=0$. | $y = 2x^2 - 4x - 3$ |
| Setjið inn $x=0$. | $y = 2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 - 3$ |
| Einfaldið. | $y = -3$<br>Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,-3)$. |
| Punkturinn $(0,-3)$ er einni einingu vinstra megin við samhverfuásinn. Punkturinn einni einingu hægra megin við ásinn er $(2,-3)$ | Spegilpunktur skurðpunktsins við y-ás er $(2,-3)$. |
| Skurðpunktur við x-ás fæst þegar $y=0$. | $y = 2x^2 - 4x - 3$ |
| Setjið inn $y=0$. | $0 = 2x^2 - 4x - 3$ |
| Notið lausnarformúluna. | $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| Setjið inn gildi a, b og c. | $x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}$ |
| Einfaldið. | $x=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}$ |
| Einfaldið í rótarstofninum. | $x=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}$ |
| Einfaldið rótarstæðuna. | $x=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{4}$ |
| Takið SSÞ út fyrir sviga. | $x=\frac{2(2\pm\sqrt{10})}{4}$ |

| | |
|---|---|
| Fellið út sameiginlega þætti. | $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$ |
| Ritið sem tvær jöfnur. | $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}, x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$ |
| Nálgið gildin. | $x \approx 2{,}5;\ x \approx -0{,}6$ |
| | Nálgunargildi skurðpunktanna við x-ás eru $(2{,}5\,;0)$ og $(-0{,}6\,;0)$. |
| Teiknið fleygbogann með punktunum sem fundust. |  |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.103**

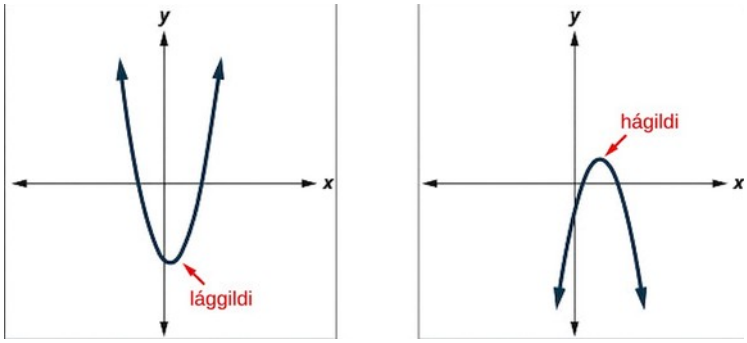
Teiknið fleygbogann $y = 5x^2 + 10x + 3$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.104**

Teiknið fleygbogann $y = -3x^2 - 6x + 5$.

## Leysið verkefni um hágildi og lággildi

Þar sem hvirfilpunktur fleygboga er lægsti eða hæsti punktur hans getum við auðveldlega ákvarðað lággildi eða hágildi annars stigs jöfnu. y-hnit hvirfilpunktsins er lægsta y-gildi fleygboga sem opnast upp en hæsta y-gildi fleygboga sem opnast niður. Sjá mynd 10.7.




Mynd 10.7

**LÁGGILDI EÐA HÁGILDI ANNARS STIGS JÖFNU**

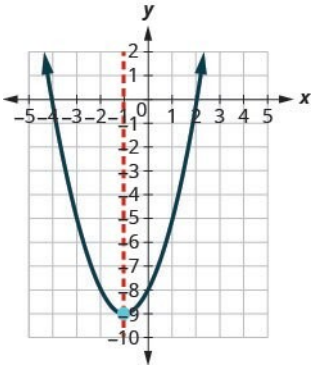
y-hnit hvirfilpunkts grafs annars stigs jöfnu er

- lággildi annars stigs jöfnunnar ef fleygboginn opnast upp.
- hágildi annars stigs jöfnunnar ef fleygboginn opnast niður.

**DÆMI 10.53**

Finnið lággildi annars stigs jöfnunnar $y=x^2+2x-8$.

## Lausn

| | |
|---|---|
| | $y=x^2+2x-8$ |
| Þar sem a er jákvætt opnast fleygboginn upp. | |
| Annars stigs jafnan hefur lággildi. | |
| Finnið samhverfuásinn. | $x=-\frac{b}{2a}$<br>$x=-\frac{2}{2\cdot 1}$<br>$x=-1$<br>Samhverfuásinn er $x=-1$. |
| Hvirfilpunkturinn liggur á línunni $x=-1$. | $y=x^2+2x-8$ |
| Finnið y þegar $x=-1$. | $y=(-1)^2+2\cdot(-1)-8$<br>$y=1-2-8$<br>$y=-9$<br>Hvirfilpunkturinn er $(-1,-9)$. |
| Þar sem fleygboginn hefur lággildi er y-hnit hvirfilpunktsins lægsta y-gildi annars stigs jöfnunnar. | |
| Lággildi annars stigs jöfnunnar er $-9$ og það fæst þegar $x=-1$. | |
| Teiknið grafið til að sannreyna niðurstöðuna. |  |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.105**

Finnið hágildi eða lággildi annars stigs jöfnunnar $y=x^2-8x+12$.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.106**

Finnið hágildi eða lággildi annars stigs jöfnunnar $y=-4x^2+16x-11$.

Við höfum notað formúluna

$$h=-16t^2+v_0t+h_0$$

til að reikna hæðina í fetum, $h$, sem hlutur nær þegar honum er skotið upp í loftið með upphafshraðanum $v_0$, eftir $t$ sekúndur.

Þessi formúla er annars stigs jafna með breytunni $t$ og graf hennar er því fleygbogi. Með því að finna hnit hvirfilpunktsins getum við ákvarðað hversu lengi hluturinn er að ná hámarkshæð sinni. Síðan getum við reiknað hámarkshæðina.

**DÆMI 10.54**

Annars stigs jafnan $h=-16t^2+v_0t+h_0$ lýsir hæð blakbolta sem sleginn er beint upp með hraðanum 176 fet á sekúndu úr 4 feta hæð.

1. ⓐ Hversu margar sekúndur líða þar til blakboltinn nær hámarkshæð?
2. ⓑ Finnið hámarkshæð blakboltans.

## Lausn

$$h=-16t^2+176t+4$$

Þar sem a er neikvætt opnast fleygboginn niður.

Annars stigs jafnan hefur hágildi.

1. ⓐ

Finnið samhverfuásinn.

$$t=-\frac{b}{2a}$$
$$t=-\frac{176}{2(-16)}$$
$$t=5{,}5$$

Samhverfuásinn er $t=5{,}5$.

Hvirfilpunkturinn liggur á línunni $t=5{,}5$. Hágildið fæst þegar $t=5{,}5$ sekúndur.

**2.** ⓑ

| | |
|---|---|
| Finnið h þegar $t=5{,}5$. | $h=-16t^2+176t+4$<br>$h=-16(5{,}5)^2+176\cdot(5{,}5)+4$ |
| Notið reiknivél til að einfalda. | $h=488$ |
| | Hvirfilpunkturinn er $(5{,}5\,;488)$. |
| Þar sem fleygboginn hefur hágildi er h-hnit hvirfilpunktsins hæsta y-gildi annars stigs jöfnunnar. | Hágildi annars stigs jöfnunnar er 488 fet og það fæst þegar $t=5{,}5$ sekúndur. |

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.107**

Annars stigs jafnan $h=-16t^2+128t+32$ er notuð til að finna hæð steins sem kastað er upp úr 32 feta hæð með hraðanum 128 fet á sekúndu. Hversu margar sekúndur líða þar til steinninn nær hámarkshæð? Hver er hámarkshæðin? Námundið að næsta tíunda hluta.

**PRÓFIÐ SJÁLF 10.108**

Leikfangaflaug er skotin upp frá jörðu með hraðanum 208 fet á sekúndu og hæð hennar er lýst með annars stigs jöfnunni $h=-16t^2+208t$. Hvenær nær flaugin hámarkshæð? Hver verður hámarkshæðin? Námundið að næsta tíunda hluta.

**MYND- OG HLJÓÐEFNI**

Notið þetta vefefni til frekari leiðsagnar og þjálfunar í að teikna gröf annars stigs jafna:

- Gröf annars stigs falla teiknuð
- Hvernig er graf annars stigs falls teiknað?
- Gröf annars stigs jafna teiknuð

## Verkefni úr hluta 10.5

***Æfingin skapar meistarann***

**Þekkið graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum**

Teiknið gröfin í eftirfarandi verkefnum:

163.

$$y=x^2+3$$

164.

$$y=-x^2+1$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort fleygboginn opnast upp eða niður.

165.

$$y = -2x^2 - 6x - 7$$

166.

$$y = 6x^2 + 2x + 3$$

167.

$$y = 4x^2 + x - 4$$

168.

$$y = -9x^2 - 24x - 16$$

**Finnið samhverfuás og hvirfilpunkt fleygboga**

Finnið í eftirfarandi verkefnum ⓐ samhverfuásinn og ⓑ hvirfilpunktinn.

169.

$$y = x^2 + 8x - 1$$

170.

$$y = x^2 + 10x + 25$$

171.

$$y = -x^2 + 2x + 5$$

172.

$$y = -2x^2 - 8x - 3$$

**Finnið skurðpunkta fleygboga við ása**

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna skurðpunktana við x- og y-ás.

173.

$$y = x^2 + 7x + 6$$

174.

$$y = x^2 + 10x - 11$$

175.

$$y = -x^2 + 8x - 19$$

176.

$$y = x^2 + 6x + 13$$

177.

$$y = 4x^2 - 20x + 25$$

178.

$$y=-x^2-14x-49$$

**Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum**

Teiknið gröfin í eftirfarandi verkefnum með því að nota skurðpunkta við ása, hvirfilpunkt og samhverfuás.

179.

$$y=x^2+6x+5$$

180.

$$y=x^2+4x-12$$

181.

$$y=x^2+4x+3$$

182.

$$y=x^2-6x+8$$

183.

$$y=9x^2+12x+4$$

184.

$$y=-x^2+8x-16$$

185.

$$y=-x^2+2x-7$$

186.

$$y=5x^2+2$$

187.

$$y=2x^2-4x+1$$

188.

$$y=3x^2-6x-1$$

189.

$$y=2x^2-4x+2$$

190.

$$y=-4x^2-6x-2$$

191.

$$y=-x^2-4x+2$$

192.

$$y=x^2+6x+8$$

193.

$$y=5x^2-10x+8$$

194.

$$y=-16x^2+24x-9$$

195.

$$y=3x^2+18x+20$$

196.

$$y=-2x^2+8x-10$$

**Leysið verkefni um hágildi og lággildi**

Finnið hágildi eða lággildi í eftirfarandi verkefnum.

197.

$$y=2x^2+x-1$$

198.

$$y=-4x^2+12x-5$$

199.

$$y=x^2-6x+15$$

200.

$$y=-x^2+4x-5$$

201.

$$y=-9x^2+16$$

202.

$$y=4x^2-49$$

10

Leysið eftirfarandi verkefni. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.

**203.** Ör er skotin lóðrétt upp af 45 feta háum palli með hraðanum 168 fet á sekúndu. Notið annars stigs jöfnuna $h=-16t^2+168t+45$ til að finna hversu lengi örin er að ná hámarkshæð og finnið síðan hámarkshæðina.

**204.** Steini er kastað lóðrétt upp af 20 feta háum palli með hraðanum 160 fet á sekúndu. Notið annars stigs jöfnuna $h = -16t^2 + 160t + 20$ til að finna hversu lengi steinninn er að ná hámarkshæð og finnið síðan hámarkshæðina.

**205.** Eigandi tölvuverslunar áætlar að ef hann selur tiltekna tölvu á $x$ dali geti hann selt $40 - x$ tölvur á viku. Annars stigs jafnan $R = -x^2 + 40x$ gefur tekjurnar, $R$, þegar söluverð tölvunnar er $x$. Finnið söluverðið sem gefur hæstar tekjur og finnið síðan fjárhæð þeirra.

**206.** Smásali sem selur bakpoka áætlar að ef hver poki kostar $x$ dali geti hann selt $100 - x$ bakpoka á mánuði. Annars stigs jafnan $R = -x^2 + 100x$ gefur tekjurnar, $R$, þegar söluverð bakpoka er $x$. Finnið söluverðið sem gefur hæstar tekjur og finnið síðan fjárhæð þeirra.

**207.** Búgarðseigandi ætlar að girða þrjár hliðar gerðis við á. Hann vill hámarka flatarmálið með 240 fetum af girðingu. Annars stigs jafnan $A = x(240 - 2x)$ gefur flatarmál gerðisins, $A$, fyrir lengd þess meðfram ánni, $x$. Finnið lengdina meðfram ánni sem gefur stærsta flatarmál og finnið síðan það flatarmál.

**208.** Dýralæknir ætlar að girða af rétthyrnt útihlaupasvæði fyrir hunda upp við byggingu sína. Hann vill hámarka flatarmálið með 100 fetum af girðingu. Annars stigs jafnan $A = x(100 - 2x)$ gefur flatarmál hundasvæðisins, $A$, fyrir lengd byggingarinnar sem liggur að svæðinu, $x$. Finnið lengd byggingarhliðarinnar sem gefur stærsta flatarmál og finnið síðan það flatarmál.

### *Stærðfræði í daglegu lífi*

**209.** Í fyrri æfingunum unnuð þið með annars stigs jöfnuna $R = -x^2 + 40x$, sem lýsir tekjum af sölu tölva á $x$ dali. Þið funduð söluverðið sem gaf hæstar tekjur og reiknuðuð hámarkstekjurnar. Nú skoðið þið fleiri eiginleika líkansins. ⓐ Teiknið graf jöfnunnar $R = -x^2 + 40x$. ⓑ Finnið x-gildi skurðpunktanna við x-ás.

**210.** Í fyrri æfingunum unnuð þið með annars stigs jöfnuna $R = -x^2 + 100x$, sem lýsir tekjum af sölu bakpoka á $x$ dali. Þið funduð söluverðið sem gaf hæstar tekjur og reiknuðuð hámarkstekjurnar. Nú skoðið þið fleiri eiginleika líkansins. ⓐ Teiknið graf jöfnunnar $R = -x^2 + 100x$. ⓑ Finnið x-gildi skurðpunktanna við x-ás.

### *Ritunarverkefni*

**211.** Útskýrið, með hliðsjón af tekjulíkaninu í verkefnum 205 og 209, hvað skurðpunktarnir við x-ás þýða fyrir eiganda tölvuverslunarinnar.

**212.** Útskýrið, með hliðsjón af tekjulíkaninu í verkefnum 206 og 210, hvað skurðpunktarnir við x-ás þýða fyrir bakpokasalann.

### *Sjálfsmat*

ⓐ Þegar þið hafið lokið verkefnunum skuluð þið nota þennan gátlista til að meta hversu vel þið hafið náð markmiðum hlutans.

| Ég get... | Örugglega | Með nokkurri hjálp | Nei – ég skil þetta ekki! |
|---|---|---|---|
| þekkt graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum. | | | |
| fundið samhverfuás og hvirfilpunkt fleygboga. | | | |
| fundið skurðpunkta fleygboga við ása. | | | |
| teiknað gróf annars stigs jafna með tveimur breytum. | | | |
| leyst verkefni um hágildi og lággildi. | | | |

ⓑ Hvað segir gátlistinn um það hversu vel þið hafið náð tökum á efni hlutans? Hvað ætlið þið að gera til að bæta ykkur?

# Lykilhugtök

**samhverfuás**

Samhverfuásinn er lóðrétta línan sem liggur um miðju fleygbogans $y=a\,x^2+b\,x+c$.

**fylla í ferning**

Að fylla í ferning er aðferð til að leysa annars stigs jöfnur.

**samliggjandi sléttar tölur**

Samliggjandi sléttar tölur eru sléttar heiltölur sem koma hver á eftir annarri. Ef slétt heiltala er táknuð með $n$ er næsta samliggjandi slétta tala $n+2$ og sú þar á eftir $n+4$.

**samliggjandi oddatölur**

Samliggjandi oddatölur eru oddatölur sem koma hver á eftir annarri. Ef oddatala er táknuð með $n$ er næsta samliggjandi oddatala $n+2$ og sú þar á eftir $n+4$.

**aðgreinir**

Í lausnarformúlunni $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$ kallast stæðan $b^2-4\,a\,c$ aðgreinir.

**fleygbogi**

Graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum er fleygbogi.

**annars stigs jafna**

Annars stigs jafna er jafna af gerðinni $a\,x^2+b\,x+c=0$, þar sem $a\neq 0$.

**annars stigs jafna með tveimur breytum**

Annars stigs jafna með tveimur breytum, þar sem $a$, $b$, og $c$ eru rauntölur og $a\neq 0$, er jafna af gerðinni $y=a\,x^2+b\,x+c$.

**ferningsrótarregla**

Ferningsrótarreglan segir að ef $x^2=k$ og $k\geq 0$, þá sé $x=\sqrt{k}$ eða $x=-\sqrt{k}$.

**hvirfilpunktur**
Punkturinn á fleygboganum sem liggur á samhverfuásnum kallast hvirfilpunktur fleygbogans. Hann er lægsti eða hæsti punktur fleygbogans eftir því hvort hann opnast upp eða niður.

***skurðpunktar fleygboga við x-ás***
Skurðpunktarnir við x-ás eru þeir punktar á fleygboganum þar sem $y=0$.

***skurðpunktur fleygboga við y-ás***
Skurðpunkturinn við y-ás er sá punktur á fleygboganum þar sem $x=0$.

# Meginatriði

## 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni

- Ferningsrótarregla Ef $x^2=k$ og $k\geq 0$, þá er $x=\sqrt{k}$ eða $x=-\sqrt{k}$.

## 10.2 Leysið annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning

- Ferningsregla tvíliða Ef $a$, $b$ eru rauntölur,

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{(tvíliða)}^2} = \underbrace{a^2}_{\text{(fyrri liður)}^2} + \underbrace{2ab}_{\text{2 × (margfeldi liðanna)}} + \underbrace{b^2}_{\text{(síðari liður)}^2}$$

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\text{(tvíliða)}^2} = \underbrace{a^2}_{\text{(fyrri liður)}^2} - \underbrace{2ab}_{\text{2 × (margfeldi liðanna)}} + \underbrace{b^2}_{\text{(síðari liður)}^2}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

- Fyllið í ferning Til að fylla í ferning í $x^2+bx$:
  1. Skref 1. Finnið $b$, stuðul $x$.
  2. Skref 2. Finnið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$, töluna sem fyllir í ferninginn.
  3. Skref 3. Leggið $\left(\frac{1}{2}b\right)^2$ við $x^2+bx$.

## 10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni

- **Lausnarformúla annars stigs jöfnu** Lausnir annars stigs jöfnu af gerðinni $a x^2+b x+c=0$, $a\neq 0$ fást með formúlunni:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- **Leysið annars stigs jöfnu með lausnarformúlunni**
  Til að leysa annars stigs jöfnu með lausnarformúlunni:
  1. Skref 1. Ritið annars stigs jöfnuna á staðalformi. Finnið gildin $a, b, c$.
  2. Skref 2. Ritið lausnarformúluna og setjið síðan inn gildin $a, b, c$.
  3. Skref 3. Einfaldið.
  4. Skref 4. Sannreynið lausnirnar.
- **Notkun aðgreinisins, $b^2-4ac$, til að ákvarða fjölda lausna annars stigs jöfnu**
  **Fyrir annars stigs jöfnu af gerðinni**

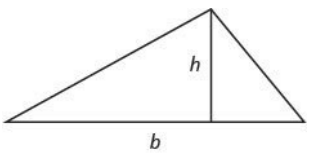
$$a x^2+b x+c=0,$$

$$a\neq 0,$$

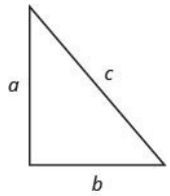
  - ef $b^2-4ac>0$ hefur jafnan 2 lausnir.
  - ef $b^2-4ac=0$ hefur jafnan 1 lausn.
  - ef $b^2-4ac<0$ hefur jafnan enga rauntölulausn.
- **Til að velja heppilegustu aðferðina til að leysa annars stigs jöfnu:**
  1. Skref 1. Reynið fyrst þáttun. Ef auðvelt er að þátta jöfnuna er þessi aðferð mjög fljótleg.
  2. Skref 2. Reynið næst ferningsrótarregluna. Ef jafnan er af gerðinni $a x^2=k$ eða $a(x-h)^2=k$ er auðvelt að leysa hana með ferningsrótarreglunni.
  3. Skref 3. Notið lausnarformúluna. Aðrar annars stigs jöfnur er best að leysa með lausnarformúlunni.

## 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum

- **Flatarmál þríhyrnings Fyrir þríhyrning með grunnlínu** $b$ og hæð $h$ reiknast flatarmálið $A$ samkvæmt formúlunni $A=\frac{1}{2}b h$



- **Setning Pýþagórasar Í hverjum rétthyrndum þríhyrningi, þar sem** $a$ og $b$ eru lengdir skammhliðanna og $c$ er lengd langhliðarinnar, gildir $a^2+b^2=c^2$




- **Kasthreyfing Hæðin í fetum,** $h$, sem hlutur nær þegar honum er skotið upp með upphafshraðanum $v_0$, eftir $t$ sekúndur reiknast samkvæmt formúlunni:

$$h=-16t^2+v_0t$$

## 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum

- **Graf hverrar annars stigs jöfnu er fleygbogi.**
- **Opnun fleygboga Fyrir annars stigs jöfnuna** $y=ax^2+bx+c$: ef
  - $a>0$, opnast fleygboginn upp.
  - $a<0$, opnast fleygboginn niður.
- **Samhverfuás og hvirfilpunktur fleygboga** Fyrir fleygboga með jöfnuna $y=ax^2+bx+c$:
  - Samhverfuás fleygbogans er línan $x=-\frac{b}{2a}$.
  - Hvirfilpunkturinn liggur á samhverfuásnum og því er x-hnit hans $-\frac{b}{2a}$.
  - Til að finna y-hnit hvirfilpunktsins setjum við $x=-\frac{b}{2a}$ inn í annars stigs jöfnuna.
- **Finnið skurðpunkta fleygboga við ása** Til að finna skurðpunkta fleygboga með jöfnuna $y=ax^2+bx+c$ við ása:

| y -skurðpunktur | x -skurðpunktar |
|---|---|
| Látið $x=0$ og einangrið $y$. | Látið $y=0$ og einangrið $x$. |

- **Teiknið graf annars stigs jöfnu með tveimur breytum**
  1. Skref 1. Ritið annars stigs jöfnuna með $y$ öðru megin.
  2. Skref 2. Ákvarðið hvort fleygboginn opnist upp eða niður.
  3. Skref 3. Finnið samhverfuásinn.
  4. Skref 4. Finnið hvirfilpunktinn.
  5. Skref 5. Finnið skurðpunktinn við y-ás. Finnið spegilpunkt hans um samhverfuásinn.
  6. Skref 6. Finnið skurðpunktana við $x$-ás.
  7. Skref 7. Teiknið fleygbogann.
- **Lággildi eða hágildi annars stigs jöfnu**

- y-hnit hvirfilpunkts grafs annars stigs jöfnu er
- **lággildi** annars stigs jöfnunnar ef fleygboginn opnast upp.
- **hágildi** annars stigs jöfnunnar ef fleygboginn opnast niður.

# Upprifjunarverkefni

## 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni

Leysið jöfnurnar hér á eftir með ferningsrótarreglunni.

213.

$$x^2 = 100$$

214.

$$y^2 = 144$$

215.

$$m^2 - 40 = 0$$

216.

$$n^2 - 80 = 0$$

217.

$$4a^2 = 100$$

218.

$$2b^2 = 72$$

219.

$$r^2 + 32 = 0$$

220.

$$t^2 + 18 = 0$$

221.

$$\frac{4}{3}v^2 + 4 = 28$$

222.

$$\frac{2}{3}w^2 - 20 = 30$$

223.

$$5c^2+3=19$$

224.

$$3d^2-6=43$$

Leysið jöfnurnar hér á eftir með ferningsrótarreglunni.

225.

$$(p-5)^2+3=19$$

226.

$$(q+4)^2=9$$

227.

$$(u+1)^2=45$$

228.

$$(z-5)^2=50$$

229.

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$$

230.

$$\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

231.

$$(m-7)^2+6=30$$

232.

$$(n-4)^2-50=150$$

233.

$$(5c+3)^2=-20$$

234.

$$(4c-1)^2=-18$$

235.

$$m^2-6m+9=48$$

236.

$$n^2+10n+25=12$$

237.

$$64a^2+48a+9=81$$

238.

$$4b^2-28b+49=25$$

## 10.2 Leysið annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning

Fyllið í ferning í verkefnunum hér á eftir svo að úr verði ferningsþríliður. Ritið síðan niðurstöðuna sem ferning tvíliðar.

239.

$$x^2+22x$$

240.

$$y^2+6y$$

241.

$$m^2-8m$$

242.

$$n^2-10n$$

243.

$$a^2-3a$$

244.

$$b^2+13b$$

245.

$$p^2+\frac{4}{5}p$$

246.

$$q^2-\frac{1}{3}q$$

Leysið jöfnurnar hér á eftir með því að fylla í ferning.

247.

$$c^2+20c=21$$

248.

$$d^2+14d=-13$$

249.

$$x^2-4x=32$$

250.

$$y^2-16y=36$$

251.

$$r^2+6r=-100$$

252.

$$t^2-12t=-40$$

253.

$$v^2-14v=-31$$

254.

$$w^2-20w=100$$

255.

$$m^2+10m-4=-13$$

256.

$$n^2-6n+11=34$$

257.

$$a^2=3a+8$$

258.

$$b^2=11b-5$$

259.

$$(u+8)(u+4)=14$$

260.

$$(z-10)(z+2)=28$$

261.

$$3p^2-18p+15=15$$

262.

$$5q^2+70q+20=0$$

263.

$$4y^2-6y=4$$

264.

$$2x^2+2x=4$$

265.

$$3c^2+2c=9$$

266.

$$4d^2-2d=8$$

## 10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni

Leysið jöfnurnar hér á eftir með lausnarformúlunni.

267.

$$4x^2-5x+1=0$$

268.

$$7y^2+4y-3=0$$

269.

$$r^2-r-42=0$$

270.

$$t^2+13t+22=0$$

271.

$$4v^2+v-5=0$$

272.

$$2w^2+9w+2=0$$

273.

$$3m^2+8m+2=0$$

274.

$$5n^2+2n-1=0$$

275.

$$6a^2-5a+2=0$$

276.

$$4b^2-b+8=0$$

277.

$$u(u-10)+3=0$$

278.

$$5z(z-2)=3$$

279.

$$\frac{1}{8}p^2-\frac{1}{5}p=-\frac{1}{20}$$

280.

$$\frac{2}{5}q^2+\frac{3}{10}q=\frac{1}{10}$$

281.

$$4c^2+4c+1=0$$

282.

$$9d^2-12d=-4$$

Finnið hve margar lausnir hver annars stigs jafna hér á eftir hefur.

283.

1. ⓐ $9x^2-6x+1=0$
2. ⓑ $3y^2-8y+1=0$
3. ⓒ $7m^2+12m+4=0$
4. ⓓ $5n^2-n+1=0$

284.

1. ⓐ $5x^2-7x-8=0$
2. ⓑ $7x^2-10x+5=0$
3. ⓒ $25x^2-90x+81=0$
4. ⓓ $15x^2-8x+4=0$

Veljið heppilegustu aðferðina (þáttun, ferningsrótarregluna eða lausnarformúluna) til að leysa hverja annars stigs jöfnu hér á eftir.

285.

1. ⓐ $16r^2-8r+1=0$
2. ⓑ $5t^2-8t+3=9$
3. ⓒ $3(c+2)^2=15$

286.

1. ⓐ $4d^2+10d-5=21$
2. ⓑ $25x^2-60x+36=0$
3. ⓒ $6(5v-7)^2=150$

10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum

Leysið verkefnin hér á eftir með þáttun, ferningsrótarreglunni eða lausnarformúlunni.

**287.** Finnið tvær samliggjandi oddatölur sem hafa margfeldið 323.

**288.** Finnið tvær samliggjandi sléttar tölur sem hafa margfeldið 624.

**289.** Þríhyrningslaga fáni hefur flatarmálið 351 fersentímetra. Grunnlínan er tveimur sentímetrum lengri en fjórföld hæðin. Finnið hæð fánans og lengd grunnlínunnar.

**290.** Júlíus smíðaði þríhyrningslaga sýningarkassa fyrir myntsafnið sitt. Hæð kassans er sex tommum minni en tvöföld breidd grunnlínunnar. Flatarmál bakhliðar kassans er 70 fertommur. Finnið hæð og breidd kassans.

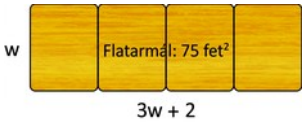
**291.** Flísamynd í laginu eins og rétthyrndur þríhyrningur er í horni rétthyrnds göngustígs. Langhlið flísamyndarinnar er 5 fet. Önnur skammhliðin er tvöfalt lengri en hin. Hverjar eru lengdir skammhliðanna? Námundið að næsta tíunda hluta.




**292.** Hornalína rétthyrndrar krossviðarplötu er tveimur fetum lengri en breidd plötunnar. Lengd plötunnar er tvöföld breidd hennar. Hver er lengd hornalínu plötunnar? Námundið að næsta tíunda hluta.

**293.** Gangstéttin frá götunni að húsi Pam hefur flatarmálið 250 ferfet. Lengd hennar er tveimur fetum minni en fjórföld breiddin. Finnið lengd og breidd gangstéttarinnar. Námundið að næsta tíunda hluta.

**294.** Í útskriftarveislu Sophiu verður nokkrum jafnbreiðum borðum raðað enda við enda svo að úr verði veisluborð með flatarmálið 75 ferfet. Heildarlengd borðanna verður tveimur fetum meiri en þreföld breiddin. Finnið lengd og breidd veisluborðsins svo að Sophia geti keypt dúk í réttri stærð. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.



**295.** Kúlu er kastað lóðrétt upp í loftið með hraðanum 160 fet á sekúndu. Notið formúluna $h=-16t^2+v_0t$ til að ákvarða hvenær kúlan verður 384 fetum frá jörðu. Námundið að næsta tíunda hluta.

**296.** Skotkúlu er skotið beint upp frá jörðu með hraðanum 320 fet á sekúndu. Notið formúluna $h=-16t^2+v_0t$ til að ákvarða hvenær skotkúlan nær 800 feta hæð. Námundið að næsta tíunda hluta.

10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum

Teiknið gröfin hér á eftir með því að merkja punkta inn á hnitakerfi.

**297.** Teiknið graf $y=x^2-2$

**298.** Teiknið graf $y=-x^2+3$

Ákvarðið hvort fleygbogarnir hér á eftir opnist upp eða niður.

299.

$$y=-3x^2+3x-1$$

300.

$$y=5x^2+6x+3$$

301.

$$y=x^2+8x-1$$

302.

$$y=-4x^2-7x+1$$

Finnið í verkefnunum hér á eftir ⓐ samhverfuásinn og ⓑ hvirfilpunktinn.

303.

$$y=-x^2+6x+8$$

304.

$$y=2x^2-8x+1$$

Finnið í verkefnunum hér á eftir skurðpunktana við x- og y-ás.

305.

$$y=x^2-4x-5$$

306.

$$y=x^2-8x+15$$

307.

$$y=x^2-4x+10$$

308.

$$y=-5x^2-30x-46$$

309.

$$y=16x^2-8x+1$$

310.

$$y=x^2+16x+64$$

Teiknið gröfin hér á eftir með því að nota skurðpunkta við ása, hvirfilpunkt og samhverfuás.

311.

$$y=x^2+8x+15$$

312.

$$y=x^2-2x-3$$

313.

$$y=-x^2+8x-16$$

314.

$$y=4x^2-4x+1$$

315.

$$y=x^2+6x+13$$

316.

$$y=-2x^2-8x-12$$

317.

$$y=-4x^2+16x-11$$

318.

$$y=x^2+8x+10$$

Finnið lággildið eða hágildið í verkefnunum hér á eftir.

319.

$$y=7x^2+14x+6$$

320.

$$y=-3x^2+12x-10$$

Leysið verkefnin hér á eftir. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.

**321.** Kúlu er kastað upp frá jörðu með upphafshraðanum 112 fet á sekúndu. Notið annars stigs jöfnuna $h=-16t^2+112t$ til að finna hve langan tíma það tekur kúluna að ná hámarkshæð. Finnið síðan hámarkshæðina.

**322.** Leikskóli ætlar að girða af rétthyrnt leiksvæði meðfram byggingunni svo að börnin geti leikið sér úti. Til eru 180 fet af girðingu fyrir þrjár hliðar svæðisins og flatarmálið á að vera sem mest. Annars stigs jafnan $A=-2x^2+180x$ lýsir flatarmáli leiksvæðisins, $A$, út frá lengd byggingarhliðarinnar, $x$, sem liggur að svæðinu. Finnið hve langur hluti byggingarinnar á að liggja að leiksvæðinu til að flatarmálið verði sem mest. Finnið síðan mesta mögulega flatarmálið.

## Æfingapróf

**323.** Notið ferningsrótarregluna til að leysa annars stigs jöfnuna: $3(w+5)^2=27$.

**324.** Fyllið í ferning til að leysa annars stigs jöfnuna: $a^2-8a+7=23$.

**325.** Notið lausnarformúluna til að leysa annars stigs jöfnuna: $2m^2-5m+3=0$.

Leysið annars stigs jöfnurnar hér á eftir. Notið hvaða aðferð sem er.

326.

$$8v^2+3=35$$

327.

$$3n^2+8n+3=0$$

328.

$$2b^2+6b-8=0$$

329.

$$x(x+3)+12=0$$

330.

$$\frac{4}{3}y^2-4y+3=0$$

Notið aðgreininn til að finna hve margar lausnir hver annars stigs jafna hefur.

331.

$$6p^2-13p+7=0$$

332.

$$3q^2-10q+12=0$$

Leysið með þáttun, ferningsrótarreglunni eða lausnarformúlunni.

**333.** Finnið tvær samliggjandi sléttar tölur sem hafa margfeldið 360.

**334.** Hornalína rétthyrnings er þremur einingum lengri en breidd hans. Lengd rétthyrningsins er þreföld breiddin. Finnið lengd hornalínunnar. (Námundið að næsta tíunda hluta.)

Finnið fyrir hvern fleygboga ⓐ hvort hann opnast upp eða niður, ⓑ samhverfuásinn, ⓒ hvirfilpunktinn, ⓓ skurðpunkta við x- og y-ása og ⓔ hágildið eða lággildið.

335.

$$y=3x^2+6x+8$$

336.

$$y=x^2-4$$

337.

$$y=x^2+10x+24$$

338.

$$y=-3x^2+12x-8$$

339.

$$y=-x^2-8x+16$$

Teiknið fleygbogana hér á eftir. Notið skurðpunkta við ása, hvirfilpunktinn og samhverfuásinn.

340.

$$y=2x^2+6x+2$$

341.

$$y=16x^2+24x+9$$

Leysið.

**342.** Vatnsblaðra er skotin upp með hraðanum 86 fet á sekúndu. Notið formúluna $h=-16t^2+86t$ til að finna hve langan tíma það tekur blaðruna að ná hámarkshæð. Finnið síðan hámarkshæðina. Námundið að næsta tíunda hluta.

# Svarlykill

## Kafli 1

### Prófið sjálf

1.1

ⓐ tugir milljóna ⓑ tugir ⓒ hundruð þúsunda ⓓ milljónir ⓔ einingar

1.2

ⓐ milljarðar ⓑ tugir þúsunda ⓒ tugir ⓓ hundruð þúsunda ⓔ hundruð milljóna

1.3

níu billjónir, tvö hundruð fimmtíu og átta milljarðar, hundrað þrjátíu og sjö milljónir, níu hundruð og fjögur þúsund, sextíu og einn

1.4

sautján billjónir, átta hundruð sextíu og fjórir milljarðar, þrjú hundruð tuttugu og fimm milljónir, sex hundruð og nítján þúsund, fjórir

1.5

$$2.466.714.051$$

1.6

$$11.921.830.106$$

1.7

$$17.900$$

1.8

$$468.800$$

1.9

ⓐ 207.000 ⓑ 207.000 ⓒ 210.000

1.10

ⓐ 785.000 ⓑ 785.000 ⓒ 780.000

1.11

með 2, 3 og 6

1.12

með 3 og 5

1.13

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

1.14

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

1.15

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

1.16

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

1.17

36

1.18

72

1.19

36

1.20

72

1.21

84

1.22

96

1.23

ⓐ 14 er minna en eða jafnt og 27 ⓑ 19 mínus 2 er ekki jafnt og 8 ⓒ 12 er stærra en 4 deilt með 2 ⓓ $x$ mínus 7 er minna en 1

1.24

ⓐ 19 er stærra en eða jafnt og 15 ⓑ 7 er jafnt og 12 mínus 5 ⓒ 15 deilt með 3 er minna en 8 ⓓ $y$ plús 3 er stærra en 6

1.25

ⓐ jafna ⓑ stæða

1.26

ⓐ stæða ⓑ jafna

1.27

ⓐ 125 ⓑ 1

1.28

ⓐ 49 ⓑ 0

1.29

ⓐ 2 ⓑ 14

1.30

ⓐ 35 ⓑ 99

1.31

16

1.32

23

1.33
86
1.34
1
1.35
ⓐ 13 ⓑ 5
1.36
ⓐ 8 ⓑ 16
1.37
ⓐ 9 ⓑ 64
1.38
ⓐ 216 ⓑ 64
1.39
40
1.40
9
1.41
ⓐ 17 ⓑ 41 ⓒ 1
1.42
ⓐ 9 ⓑ 13 ⓒ 1
1.43
9 og 15, $y^2$ og $11y^2$, $2x^3$ og $8x^3$
1.44
19 og 24, $8x^2$ og $3x^2$, $4x^3$ og $6x^3$
1.45

$$4x^2, 5x, 17$$

1.46
$5x$, $2y$
1.47

$$10x^2+16x+17$$

1.48

$$12y^2+9y+7$$

1.49
ⓐ $14x^2-13$ ⓑ $12x \div 2$
1.50
ⓐ $17y^2+19$ ⓑ $7y$
1.51
ⓐ $x+11$ ⓑ $11a-14$

1.52
ⓐ $z+13$ ⓑ $8x-18$
1.53
ⓐ $4(p+q)$ ⓑ $4p+q$
1.54
ⓐ $2x-8$ ⓑ $2(x-8)$
1.55

$$w-7$$

1.56

$$l-6$$

1.57

$$4q-8$$

1.58

$$7n+3$$

1.59
ⓐ $>$ ⓑ $<$ ⓒ $>$ ⓓ $>$
1.60
ⓐ $<$ ⓑ $>$ ⓒ $<$ ⓓ $>$
1.61
ⓐ $-4$ ⓑ $3$ ⓒ $1$
1.62
ⓐ $-8$ ⓑ $5$ ⓒ $5$
1.63
ⓐ $-4$ ⓑ $4$
1.64
ⓐ $-11$ ⓑ $11$
1.65
ⓐ $4$ ⓑ $28$ ⓒ $0$
1.66
ⓐ $13$ ⓑ $47$ ⓒ $0$
1.67
ⓐ $>$ ⓑ $>$ ⓒ $<$ ⓓ $>$
1.68
ⓐ $>$ ⓑ $>$ ⓒ $>$ ⓓ $<$
1.69
16
1.70
9

1.71
ⓐ 17 ⓑ 39 ⓒ − 22 ⓓ − 11
1.72
ⓐ 23 ⓑ 21 ⓒ − 37 ⓓ − 49
1.73
ⓐ 6 ⓑ − 6
1.74
ⓐ 7 ⓑ − 7
1.75
ⓐ 2 ⓑ − 2
1.76
ⓐ 3 ⓑ − 3
1.77
ⓐ − 50 ⓑ − 17
1.78
ⓐ − 70 ⓑ − 36
1.79
13
1.80
0
1.81
ⓐ 2 ⓑ − 2
1.82
ⓐ 3 ⓑ − 3
1.83
ⓐ − 10 ⓑ 10
1.84
ⓐ − 11 ⓑ 11
1.85
ⓐ 8 ⓑ −18
1.86
ⓐ 8 ⓑ − 22
1.87
ⓐ 19 ⓑ − 4
1.88
ⓐ 23 ⓑ 3
1.89
3
1.90
13
1.91
ⓐ − 48 ⓑ 28 ⓒ − 63 ⓓ 60

1.92
ⓐ $-56$ ⓑ $54$ ⓒ $-28$ ⓓ $39$
1.93
ⓐ $-9$ ⓑ $17$
1.94
ⓐ $-8$ ⓑ $16$
1.95
ⓐ $-7$ ⓑ $39$
1.96
ⓐ $-9$ ⓑ $23$
1.97

$$-63$$

1.98

$$-84$$

1.99
ⓐ $81$ ⓑ $-81$
1.100
ⓐ $49$ ⓑ $-49$
1.101
29
1.102
52
1.103
4
1.104
9
1.105
21
1.106
6
1.107
ⓐ $-6$ ⓑ $10$
1.108
ⓐ $-1$ ⓑ $17$
1.109
196
1.110
8
1.111
ⓐ $-2$ ⓑ $36$

1.112
ⓐ $-19$ ⓑ $9$
1.113
39
1.114
13
1.115

$$\left(9+\left(-16\right)\right)+4\,;-3$$

1.116

$$\left(-8+\left(-12\right)\right)+7\,;-13$$

1.117
ⓐ $14-\left(-23\right)\,;37$ ⓑ $-17-21\,;-38$
1.118
ⓐ $11-\left(-19\right)\,;30$ ⓑ $-11-18\,;-29$
1.119

$$-5\left(12\right)\,;-60$$

1.120

$$8\left(-13\right)\,;-104$$

1.121

$$-63\div\left(-9\right)\,;7$$

1.122

$$-72\div\left(-9\right)\,;8$$

1.123
Hitamunurinn var 45 gráður.
1.124
Hitamunurinn var 9 gráður.
1.125
Bears-liðið tapaði 105 jördum.
1.126
Gjald að upphæð $16 var dregið af tékkareikningi hans.
1.127
$\frac{6}{10},\frac{9}{15},\frac{12}{20}$; svör geta verið mismunandi
1.128
$\frac{8}{10},\frac{12}{15},\frac{16}{20}$; svör geta verið mismunandi

**1.129**

$$-\frac{7}{9}$$

**1.130**

$$-\frac{5}{9}$$

**1.131**

$$-\frac{23}{40}$$

**1.132**

$$-\frac{5}{8}$$

**1.133**

$$\frac{x}{y}$$

**1.134**

$$\frac{a}{b}$$

**1.135**

$$-\frac{4}{21}$$

**1.136**

$$-\frac{3}{16}$$

**1.137**

$$-33a$$

**1.138**

$$-26b$$

**1.139**

$$-\frac{21}{5p}$$

**1.140**

$$-\frac{15}{8q}$$

**1.141**

$$\frac{4}{15}$$

**1.142**

$$\frac{2}{3}$$

**1.143**

$$\frac{4}{5}$$

**1.144**

$$\frac{11}{14}$$

**1.145**

$$\frac{3}{4b}$$

**1.146**

$$\frac{4}{q}$$

**1.147**

$$-\frac{3}{4}$$

**1.148**

$$-\frac{5}{3}$$

**1.149**

4

**1.150**

2

**1.151**

$$\frac{a-b}{cd}$$

1.152

$$\frac{p+q}{r}$$

1.153

$$\frac{x+3}{4}$$

1.154

$$\frac{y+5}{8}$$

1.155

$$-\frac{13}{14}$$

1.156

$$-\frac{7}{8}$$

1.157

$$-\frac{16}{x}$$

1.158

$$-\frac{22}{a}$$

1.159

$$-1$$

1.160

$$-\frac{2}{3}$$

1.161

$$\frac{79}{60}$$

1.162

$$\frac{103}{60}$$

**1.163**

$$\frac{1}{96}$$

**1.164**

$$\frac{75}{224}$$

**1.165**

$$\frac{3y+14}{18}$$

**1.166**

$$\frac{5x+14}{30}$$

**1.167**

ⓐ $\frac{27a-32}{36}$ ⓑ $\frac{2a}{3}$

**1.168**

ⓐ $\frac{24k-5}{30}$ ⓑ $\frac{2k}{15}$

**1.169**

$$\frac{1}{90}$$

**1.170**

$$272$$

**1.171**

**2**

**1.172**

$$\frac{2}{7}$$

**1.173**

ⓐ $-1$ ⓑ $-\frac{1}{2}$

**1.174**

ⓐ $\frac{7}{6}$ ⓑ $-\frac{1}{4}$

1.175

$$-\frac{1}{4}$$

1.176

$$-\frac{17}{8}$$

1.177

$$-\frac{1}{2}$$

1.178

$$\frac{2}{3}$$

1.179

$$-\frac{5}{2}$$

1.180

$$\frac{3}{2}$$

1.181
sex og sjö tíunduhlutar
1.182
fimm og átta tíunduhlutar
1.183
mínus þrettán og fjögur hundruð sextíu og einn þúsundustu hlutar
1.184
mínus tveir og fimmtíu og þrír þúsundustu hlutar
1.185
13,068
1.186
5,094
1.187
1,05
1.188
9,17
1.189
ⓐ 6,58 ⓑ 6,6 ⓒ 7
1.190
ⓐ 15,218 ⓑ 15,22 ⓒ 15,2

1.191

16,49

1.192

23,593

1.193

0,42

1.194

12,58

1.195

$$-27{,}4815$$

1.196

$$-87{,}6148$$

1.197

ⓐ 25,8 ⓑ 258 ⓒ 2.580

1.198

ⓐ 142 ⓑ 1.420 ⓒ 14.200

1.199

587,3

1.200

34,25

1.201

$0,19

1.202

$0,42

1.203

$$\frac{117}{500}$$

1.204

$$\frac{3}{125}$$

1.205

$$-0{,}875$$

1.206

$$-0{,}375$$

1.207

$$2{,}\overline{45}$$

1.208

$$2{,}3\,\overline{18}$$

1.209

5,275

1.210

6,35

1.211

ⓐ 0,09 ⓑ 0,87 ⓒ 0,039

1.212

ⓐ 0,03 ⓑ 0,91 ⓒ 0,083

1.213

ⓐ 17% ⓑ 175% ⓒ 8,25%

1.214

ⓐ 41% ⓑ 225% ⓒ 9,25%

1.215

ⓐ 6 ⓑ 13

1.216

ⓐ 4 ⓑ 14

1.217

ⓐ $-2$ ⓑ $-15$

1.218

ⓐ $-9$ ⓑ $-10$

1.219

ⓐ $\frac{-24}{1}$ ⓑ $\frac{357}{100}$

1.220

ⓐ $\frac{-19}{1}$ ⓑ $\frac{841}{100}$

1.221

ⓐ $0{,}29\,,0{,}81\overline{6}$ ⓑ $2{,}515115111\ldots$

1.222

ⓐ $2{,}6\overline{3}\,,0{,}125$ ⓑ $0{,}418302\ldots$

1.223

ⓐ ræð tala ⓑ óræð tala

1.224

ⓐ óræð tala ⓑ ræð tala

1.225

ⓐ ekki rauntala ⓑ rauntala

1.226

ⓐ rauntala ⓑ ekki rauntala

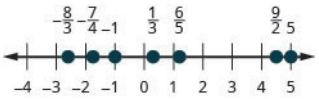
1.227

ⓐ $4, \sqrt{49}$ ⓑ $-3, 4, \sqrt{49}$ ⓒ $-3, 0, \bar{3}, \frac{9}{5}, 4, \sqrt{49}$ ⓓ $-\sqrt{2}$ ⓔ $-3, -\sqrt{2}, 0, \bar{3}, \frac{9}{5}, 4, \sqrt{49}$

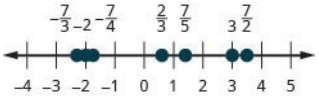
1.228

ⓐ $6, \sqrt{121}$ ⓑ $-\sqrt{25}, -1,6, \sqrt{121}$ ⓒ $-\sqrt{25}, -\frac{3}{8}, -1,6, \sqrt{121}$ ⓓ $2{,}041975\ldots$ ⓔ $-\sqrt{25}, -\frac{3}{8}, -1,6, \sqrt{121}, 2{,}041975\ldots$

1.229




1.230




1.231

ⓐ > ⓑ > ⓒ < ⓓ <

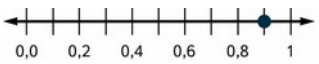
1.232

ⓐ < ⓑ < ⓒ > ⓓ <

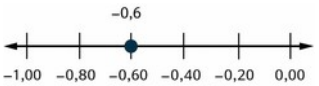
1.233



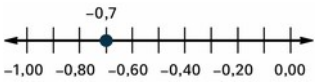

1.234




1.235




1.236




1.237

>

1.238

>

1.239

>

1.240

<

1.241

>

1.242

>

1.243

$$32r+29s$$

1.244

$$41m+6n$$

1.245

$$1\frac{7}{15}$$

1.246

$$1\frac{2}{9}$$

1.247

$32x$

1.248

$$-63y$$

1.249

ⓐ $-\frac{7}{9}$ ⓑ $-1{,}2$ ⓒ $14$ ⓓ $\frac{9}{4}$

1.250

ⓐ $-\frac{7}{13}$ ⓑ $-8{,}4$ ⓒ $46$ ⓓ $\frac{5}{2}$

1.251

ⓐ $\frac{1}{4}$ ⓑ $-7$ ⓒ $\frac{10}{3}$

1.252

ⓐ $\frac{1}{18}$ ⓑ $-\frac{5}{4}$ ⓒ $\frac{5}{3}$

1.253

ⓐ o ⓑ o ⓒ óskilgreint

1.254

ⓐ o ⓑ o ⓒ óskilgreint

1.255

$$-48a$$

1.256

$$-92x$$

1.257

$$\frac{5}{49}$$

1.258

$$\frac{11}{25}$$

1.259

ⓐ o ⓑ óskilgreint

1.260

ⓐ o ⓑ óskilgreint

1.261

$$20y+50$$

1.262

$$12z+16$$

1.263

$$4x+8$$

1.264

$$6x+42$$

1.265

$$5y+3$$

1.266

$$4n+9$$

1.267

$$70+15p$$

1.268

$$4+35d$$

1.269

$$-18m-15$$

1.270

$$-48n-66$$

1.271

$$-10+15a$$

1.272

$$-56+105y$$

1.273

$$-z+11$$

1.274

$$-x+4$$

1.275

$$3-3x$$

1.276

$$2x-20$$

1.277

$$5x-66$$

1.278

$$7x-13$$

1.279
2,5 fet
1.280
54 fet
1.281
8.600 pund
1.282
102.000.000 pund
1.283
440.000.000 jardar
1.284
151.200 mínútur
1.285
16 bollar
1.286
48 teskeiðar

1.287

8 pund. 15 únsur

1.288
21 fet 6 tommur
1.289
4 pund 8 únsur
1.290
11 gallon 2 kvart
1.291
5.000 metrar
1.292
250 sentimetrar
1.293
2,8 kílógrömm
1.294
4,5 kílógrömm
1.295
ⓐ 0,725 kílólítrar ⓑ 6.300 millilítrar
1.296
ⓐ 35.000 lítrar ⓑ 410 sentílítrar
1.297
83 sentimetrar
1.298
1,04 metrar
1.299
2 lítrar
1.300
2,4 kílógrömm
1.301
2,12 kvart
1.302
3,8 lítrar
1.303
19.336 fet
1.304
3469,57 mílur
1.305

15 °C

1.306

5 °C

1.307

$$59\,^\circ\mathrm{F}$$

1.308

$$50\,^\circ\mathrm{F}$$

## Verkefni úr hluta 1.1

**1.** ⓐ þúsundir ⓑ hundruð ⓒ tugir ⓓ tugir þúsunda ⓔ einingar

**3.** ⓐ einingar ⓑ tugir þúsunda ⓒ hundruð þúsunda ⓓ tugir ⓔ hundruð

**5.** ⓐ tugir milljóna ⓑ tugir þúsunda ⓒ tugir ⓓ þúsundir ⓔ milljónir

**7.** ⓐ billjónir ⓑ milljarðar ⓒ milljónir ⓓ tugir ⓔ þúsundir

**9.** eitt þúsund sjötíu og átta

**11.** þrjú hundruð sextíu og fjögur þúsund, fimm hundruð og tíu

**13.** fimm milljónir, átta hundruð fjörutíu og sex þúsund, hundrað og þrír

**15.** þrjátíu og sjö milljónir, átta hundruð áttatíu og níu þúsund, fimm

**17.** 412

**19.** 35.975

**21.** 11.044.167

**23.** 3.226.512.017

**25.** ⓐ 390 ⓑ 2.930

**27.** ⓐ 13.700 ⓑ 391.800

**29.** ⓐ 1.490 ⓑ 1.500

**31.** ⓐ 64.000 ⓑ 63.900

**33.** ⓐ 392.500 ⓑ 393.000 ⓒ 390.000

**35.** ⓐ 2.587.000 ⓑ 2.587.000 ⓒ 2.590.000

**37.** deilanleg með 2, 3 og 6

**39.** deilanleg með 3 og 5

**41.** deilanleg með 2, 3, 5, 6 og 10

**43.** deilanleg með 2

**45.** deilanleg með 2, 5 og 10

**47.** deilanleg með 3 og 5

49.

51.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$$

53.

$$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

55.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

57.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

**59.** 24

**61.** 48

**63.** 60

**65.** 24

**67.** 280

**69.** 440

**71.** tuttugu og fjögur þúsund fjögur hundruð níutíu og þrír dalir

**73.** ⓐ $24.490 ⓑ $24.500 ⓒ $24.000 ⓓ $20.000

**75.** ⓐ 1.000.000.000 ⓑ 1.300.000.000 ⓒ 1.340.000.000

**77.** 40

**79.** Svör geta verið mismunandi.

**81.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 1.2

**83.** 16 mínus 9, mismunur sextán og níu

**85.** 28 deilt með 4, kvóti talnanna tuttugu og átta og fjögurra

**87.** 2 sinnum 7, margfeldi tveggja og sjö

**89.** fjórtán er minna en tuttugu og einn

**91.** þrjátíu og sex er stærra en eða jafnt og nítján

**93.** *y mínus 1 er stærra en 6; mismunur y og eins er stærri en sex*

**95.** 2 er minna en eða jafnt og 18 deilt með 6; 2 er minna en eða jafnt og kvóti talnanna átján og sex

**97.** jafna

**99.** stæða

**101.** stæða

**103.** 125

**105.** 256

**107.** ⓐ 43 ⓑ 55

**109.** 5

**111.** 34

**113.** 58

**115.** 6

**117.** 4

**119.** 35

**121.** 58

**123.** 149

**125.** 50

**127.** 22

**129.** 144

**131.** 32

**133.** 21

**135.** 9

**137.** 73

**139.** 54

**141.** 8

**143.** 5

145.

$$x^3 \text{ og } 8x^3, 14 \text{ og } 5$$

147.

$$16 \text{ og } 4, 16b^2 \text{ og } 9b^2$$

149.

$$15x^2, 6x, 2$$

151.

$$10y^3, y, 2$$

**153.** $13x$

**155.** $7c$

157.

$$10u+3$$

159.

$$22a+1$$

161.

$$17x^2+20x+16$$

163.

$$14-9$$

165.

$$9\cdot 7$$

167.

$$36\div 9$$

169.

$$8x+3x$$

171.

$$\frac{y}{3}$$

173.

$$8(y-9)$$

175.

$$c+3$$

177.

$$2n-7$$

**179.** ⓐ \$750 ⓑ \$1.350

**181.** Svör geta verið mismunandi

**183.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.3

**185.** ⓐ $>$ ⓑ $<$ ⓒ $<$ ⓓ $>$

**187.** ⓐ $-2$ ⓑ $6$

**189.** $4$

**191.** $15$

**193.** ⓐ $-12$ ⓑ $12$

**195.** ⓐ $32$ ⓑ $0$ ⓒ $16$

**197.** ⓐ $<$ ⓑ $=$

199.

$$5, -5$$

**201.** $56$

**203.** $0$

**205.** $8$

**207.** ⓐ $-19$ ⓑ $-33$

209.

$$-80$$

**211.** $32$

213.

$$-22$$

**215.** $108$

**217.** $29$

**219.** $6$

221.

$$-9$$

**223.** $12$

**225.** ⓐ $16$ ⓑ $16$

**227.** ⓐ $45$ ⓑ $45$

**229.** $27$

231.

$$-39$$

233.

$$-59$$

235.

$$-51$$

**237.** 9

239.

$$-2$$

241.

$$-2$$

**243.** 22

**245.** 0

**247.** 4

**249.** 6

251.

$$-8$$

253.

$$-11$$

**255.** ⓐ 20.320 fet ⓑ −282 fet

**257.** ⓐ $540 milljónir ⓑ $-\$27$ milljarðar

**259.** 32, neikvæð tala

**261.** Svör geta verið mismunandi

**263.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.4

265.

$$-32$$

267.

$$-63$$

269.

$$-6$$

**271.** 14

273.

$-4$

**275.** 13

277.

$-12$

279.

$-47$

**281.** 64

283.

$-16$

**285.** 90

**287.** 9

**289.** 41

291.

$-9$

293.

$-29$

**295.** 5

**297.** ⓐ $-47$ ⓑ 16

**299.** ⓐ $-4$ ⓑ 10

301.

$-8$

303.

$-16$

**305.** 121

307.

1. ⓐ 1
2. ⓑ 33

**309.** ⓐ $-5$ ⓑ 25

**311.** 21

313.

$$-56$$

315.

$$(3+(-15))+7\,;-5$$

317.

$$10-(-18)\,;28$$

319.

$$-5-(-30)\,;25$$

321.

$$-3\cdot 15\,;-45$$

323.

$$-60\div(-20)\,;3$$

325.

$$\frac{-6}{a+b}$$

327.

$$-10(p-q)$$

329.

$$96°$$

**331.** 21

333.

$$-\$28$$

**335.** $187

337.

$$-\$3600$$

**339.** Svör geta verið mismunandi

**341.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.5

**343**. $\frac{6}{16}, \frac{9}{24}, \frac{12}{32}$ svör geta verið mismunandi

**345**. $\frac{10}{18}, \frac{15}{27}, \frac{20}{36}$ svör geta verið mismunandi

347.

$$-\frac{5}{11}$$

349.

$$-\frac{12}{7}$$

351.

$$\frac{10}{21}$$

353.

$$-\frac{x}{4y}$$

355.

$$\frac{2x^2}{3y}$$

357.

$$\frac{27}{40}$$

359.

$$\frac{1}{4}$$

361.

$$-\frac{1}{6}$$

363.

$$-\frac{21}{50}$$

365.

$$\frac{11}{30}$$

367.

$$\frac{20}{11}$$

**369.** $9n$

371.

$$-34$$

373.

$$\frac{9}{8}$$

375.

$$\frac{4}{9}$$

377.

$$\frac{33}{4x}$$

379.

$$-\frac{4}{9}$$

381.

$$\frac{10u}{9v}$$

383.

$$-10$$

385.

$$-\frac{1}{16}$$

387.

$$-\frac{10}{9}$$

389.

$$-\frac{2}{5}$$

391.

$$\frac{2m}{3n}$$

393.

$$\frac{5}{2}$$

395.

$$\frac{16}{3}$$

**397.** o

399.

$$\frac{1}{3}$$

401.

$$\frac{3}{5}$$

403.

$$2\frac{8}{17}$$

405.

$$\frac{9}{7}$$

407.

$$-8$$

409.

$$\frac{11}{6}$$

411.

$$\frac{5}{2}$$

413.

$$\frac{r}{s+10}$$

415.

$$\frac{x-y}{-3}$$

**417.** ⓐ $(2)\left(\frac{3}{4}\right)$; $\frac{3}{2}$ bollar ⓑ svör geta verið mismunandi

**419.** 20 pokar

**421.** Svör geta verið mismunandi

**423.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.6

425.

$$\frac{11}{13}$$

427.

$$\frac{x+3}{4}$$

429.

$$-\frac{5}{8}$$

431.

$$\frac{7}{17}$$

433.

$$-\frac{16}{13}$$

435.

$$\frac{4}{15}$$

437.

$$\frac{1}{2}$$

439.

$$\frac{5}{7}$$

441.

$$\frac{5y-7}{8}$$

443.

$$-\frac{38}{u}$$

445.

$$\frac{1}{5}$$

447.

$$-\frac{2}{9}$$

449.

$$-\frac{1}{4}$$

451.

$$\frac{n-4}{5}$$

453.

$$-\frac{5}{24}$$

455.

$$\frac{2}{9}$$

457.

$$\frac{9}{14}$$

459.

$$\frac{4}{9}$$

461.

$$\frac{29}{24}$$

463.

$$\frac{1}{48}$$

465.

$$\frac{7}{24}$$

467.

$$\frac{37}{120}$$

469.

$$\frac{17}{105}$$

471.

$$-\frac{53}{40}$$

473.

$$\frac{1}{12}$$

475.

$$\frac{15}{8}$$

477.

$$\frac{4x+3}{12}$$

479.

$$\frac{5y-12}{20}$$

**481.** ⓐ $\frac{5}{6}$ ⓑ $4$

**483.** ⓐ $\frac{25n}{16}$ ⓑ $\frac{25n-16}{30}$

485.

$$\frac{5}{4}$$

487.

$$\frac{1}{24}$$

489.

$$\frac{13}{18}$$

491.

$$\frac{-28-15y}{60}$$

493.

$$\frac{33}{64}$$

**495.** 54

497.

$$\frac{49}{25}$$

499.

$$\frac{15}{4}$$

501.

$$\frac{5}{21}$$

503.

$$\frac{7}{9}$$

505.

$$-5$$

507.

$$\frac{19}{12}$$

509.

$$\frac{23}{24}$$

511.

$$\frac{11}{5}$$

**513.** 1

515.

$$\frac{13}{3}$$

**517.** ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $-1$

**519.** ⓐ $\frac{1}{5}$ ⓑ $-1$

**521.** ⓐ $\frac{1}{5}$ ⓑ $\frac{6}{5}$

523.

$$-\frac{1}{9}$$

525.

$$-\frac{5}{11}$$

**527.** $\frac{7}{8}$ jardi

**529.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.7

**531.** 29,81

**533.** 0,7

**535.** 0,029

537.

$$-11{,}0009$$

**539.** fimm og fimm tíunduhlutar

**541.** átta og sjötíu og einn hundraðshluti

**543.** tveir þúsundustu hlutar

**545.** mínus sautján og níu tíunduhlutar

**547.** 0,7

**549.** 2,8

**551.** 0,85

**553.** 0,30

**555.** 4,10

**557.** ⓐ 5,78 ⓑ 5,8 ⓒ 6

**559.** ⓐ 63,48 ⓑ 63,5 ⓒ 63

**561.** 24,48

563.

$$-9{,}23$$

565.

$$-40{,}91$$

567.

$$-7{,}22$$

569.

$$-27{,}5$$

**571.** 15,73

**573.** 102,412

**575.** 51,31

577.

$$-4{,}89$$

**579.** 0,144

**581.** 42,008

583.

$$-11{,}653$$

**585.** 337,8914

**587.** 1,305

**589.** 92,4

**591.** 55.200

**593.** 0,19

**595.** $2,44

**597.** 3

599.

$$-4{,}8$$

**601.** 35

**603.** 2,08

**605.** 20

607.

$$\frac{1}{25}$$

609.

$$\frac{13}{25}$$

611.

$$\frac{5}{4}$$

613.

$$\frac{3}{8}$$

615.

$$\frac{19}{200}$$

**617.** 0,85

**619.** 2,75

621.

$$-12{,}4$$

623.

$$1{,}\overline{36}$$

625.

$$0,\overline{135}$$

**627.** 3,025

**629.** 0,01

**631.** 0,63

**633.** 1,5

**635.** 0,214

**637.** 0,078

**639.** 1%

**641.** 135%

**643.** 300%

**645.** 8,75%

**647.** 225,4%

**649.** ⓐ $58.966 ⓑ $59.000 ⓒ $60.000

**651.** ⓐ $142,19; ⓑ $142

**653.** ⓐ $243,57 ⓑ $79,35

**655.** Svör geta verið mismunandi

**657.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.8

**659.** 6

**661.** 8

**663.** 3

**665.** 10

667.

$$-2$$

669.

$$-1$$

**671.** ⓐ $\frac{5}{1}$ ⓑ $\frac{319}{100}$

**673.** ⓐ $\frac{-12}{1}$ ⓑ $\frac{9279}{1000}$

**675.** ⓐ $0{,}75, 0{,}22\overline{3}$ ⓑ $1{,}39174\ldots$

**677.** ⓐ $0{,}4\overline{5}, 3{,}59$ ⓑ $1{,}919293\ldots$

**679.** ⓐ ræð tala ⓑ óræð tala

**681.** ⓐ óræð tala ⓑ ræð tala

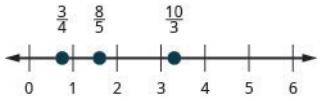
**683.** ⓐ rauntala ⓑ ekki rauntala

**685.** ⓐ ekki rauntala ⓑ rauntala

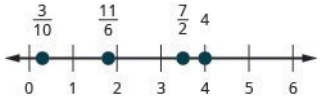
**687.** ⓐ $0, \sqrt{36}, 9$ ⓑ $-8, 0, \sqrt{36}, 9$ ⓒ $-8, 0, \frac{12}{5}, \sqrt{36}, 9$ ⓓ $1{,}95286\ldots$ ⓔ $-8, 0, 1{,}95286\ldots, \frac{12}{5}, \sqrt{36}, 9$

**689.** ⓐ engin ⓑ $-\sqrt{100}, -7, -1$ ⓒ $-\sqrt{100}, -7, -\frac{8}{3}, -1, 0{,}77, 3\frac{1}{4}$ ⓓ engin ⓔ $-\sqrt{100}, -7, -\frac{8}{3}, -1, 0{,}77, 3\frac{1}{4}$

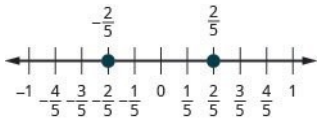
691.



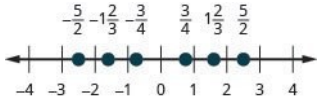

693.




695.




697.




**699.** <

**701.** >

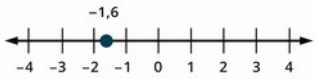
**703.** >

**705.** <

707.




709.




**711.** <

**713.** >

**715.** <

**717.** <

**719.** ⓐ 4 rútur ⓑ svör geta verið mismunandi ⓒ svör geta verið mismunandi

**721.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.9

**723.** $12x$

725.

$$y+40$$

727.

$$\frac{7}{8}$$

729.

$$\frac{49}{11}$$

731.

$$-63$$

733.

$$1\frac{5}{6}$$

**735.** 17

**737.** 14,88

**739.** $28a$

741.

$$-75m$$

**743.** $10p$

745.

$$27m+(-21n)$$

747.

$$\frac{5}{4}g+\frac{1}{2}h$$

749.

$$2{,}43p+8{,}26q$$

**751.** ⓐ $-\frac{2}{5}$ ⓑ $-4{,}3$ ⓒ $8$ ⓓ $\frac{10}{3}$

**753.** ⓐ $\frac{7}{6}$ ⓑ $0{,}075$ ⓒ $-23$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

**755.** ⓐ $\frac{1}{6}$ ⓑ $-\frac{4}{3}$ ⓒ $\frac{10}{7}$

**757.** ⓐ $\frac{12}{11}$ ⓑ $-\frac{10}{11}$ ⓒ $-\frac{1}{4}$

**759.** o

**761.** o

**763.** o

**765.** o

**767.** 44

**769.** d

**771.** o

**773.** o

**775.** óskilgreint

**777.** óskilgreint

779.

$$36d+90$$

781.

$$32y+72$$

783.

$$6c - 78$$

785.

$$\frac{3}{4}q + 3$$

787.

$$5y - 3$$

789.

$$3 + 8r$$

791.

$$rs - 18r$$

793.

$$yp + 4p$$

795.

$$-28p - 7$$

797.

$$-3x + 18$$

799.

$$-3x + 7$$

801.

$$-3y - 8$$

803.

$$-33c + 26$$

805.

$$-a + 19$$

807.

$$4m - 10$$

809.

$$22n + 9$$

811.

$$72x - 25$$

813.

$$6c + 34$$

815.

$$12y + 63$$

**817.** ⓐ $80 ⓑ $80 ⓒ svör geta verið mismunandi

**819.** ⓐ $23,88 ⓑ nei, verðið er hið sama

**821.** Svör geta verið mismunandi

**823.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 1.10

**825.** 72 tommur

**827.** 1,5 fet

**829.** $53\frac{1}{3}$ jardar

**831.** 7.920 fet

**833.** 9.200 pund

**835.** $17\frac{1}{2}$ tonn

**837.** 5.400 s

**839.** 96 teskeiðar

**841.** 224 únsur

**843.** $1\frac{1}{4}$ gallon

**845.** 76 tommur

**847.** 65 dagar

**849.** 115 únsur

**851.** 8 pund 13 únsur

**853.** 3,05 klukkustundir

**855.** 10 fet 2 tommur

**857.** 4 jardar

**859.** 5.000 metrar

**861.** 155 sentimetrar

**863.** 3,072 kílómetrar

**865.** 1,5 grömm

**867.** 91.600 milligrömm

**869.** 2.000 grömm

**871.** 0,75 lítrar

**873.** 91 sentimetrar

**875.** 855 grömm

**877.** 2,1 kílógrömm

**879.** 1,6 lítrar

**881.** 190,5 sentimetrar

**883.** 21,9 metrar

**885.** 750 kílógrömm

**887.** 3,1 mílur

**889.** 44 pund

**891.** 53,2 lítrar

893.

$$30\,^\circ\mathrm{C}$$

895.

$$40\,^\circ\mathrm{C}$$

897.

$$22{,}2\,^\circ\mathrm{C}$$

899.

$$-17{,}8\,^\circ\mathrm{C}$$

901.

$$41\,^\circ\mathrm{F}$$

903.

$$14\,^\circ\mathrm{F}$$

905.

$$71{,}6\,^\circ\mathrm{F}$$

907.

$$109{,}4\,^\circ\mathrm{F}$$

**909.** 14,6 kílógrömm

**911.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

**913.** ⓐ tugir ⓑ tugir þúsunda ⓒ hundruð ⓓ einingar ⓔ þúsundir

**915.** ⓐ tugir milljóna ⓑ tugir ⓒ hundruð þúsunda ⓓ milljónir ⓔ tugir þúsunda

**917.** sex þúsund, hundrað og fjórir

**919.** þrjár milljónir, níu hundruð sjötíu og fimm þúsund, tvö hundruð áttatíu og fjórir

921.

$$315$$

923.

$$90.425.016$$

**925.** ⓐ 410 ⓑ 8.560

**927.** ⓐ 865.000 ⓑ 865.000 ⓒ 860.000

929.

$$\text{með}\,2,3,6$$

931.

$$\text{með}\,3,5$$

933.

$$\text{með}\,2,5,10$$

935.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

937.

$$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

939.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$$

941.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

943.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

945.

$$30$$

**947.** 120

**949.** 25 mínus 7, mismunur tuttugu og fimm og sjö

**951.** 45 deilt með 5, kvóti talnanna fjörutíu og fimm og fimm

**953.** fjörutíu og tveir er stærra en eða jafnt og tuttugu og sjö

**955.** 3 er minna en eða jafnt og 20 deilt með 4; talan þrír er minna en eða jafnt og kvóti talnanna tuttugu og fjögurra

**957.** stæða

**959.** 243

**961.** 13

**963.** 10

**965.** 1681

**967.** 34

**969.** 81

**971.** 58

**973.** 12

975.

$$12 \text{ og } 3, n^2 \text{ og } 3n^2$$

977.

$$11x^2, 3x, 6$$

979.

$$26a$$

981.

$$12x + 8$$

983.

$$12\,p+2$$

985.

$$8+12$$

987.

$$x-4$$

989.

$$6\,y$$

991.

$$b+15$$

**993.** ⓐ > ⓑ < ⓒ < ⓓ >

**995.** ⓐ 8 ⓑ −1

**997.** 19

**999.** ⓐ −3 ⓑ 3

**1001.** ⓐ 7 ⓑ 25 ⓒ 0

**1003.** ⓐ < ⓑ =

**1005.** 4

**1007.** 80

**1009.** ⓐ 28 ⓑ 15

1011.

$$-135$$

**1013.** 0

**1015.** 132

**1017.** 6

**1019.** ⓐ 9 ⓑ 9

**1021.** ⓐ 17 ⓑ 17

**1023.** 29

1025.

$$-48$$

1027.

$$-42$$

**1029.** 18

1031.

$$-20$$

1033.

$$-35$$

1035.

$$36$$

1037.

$$-4$$

**1039.** 6

**1041.** 43

1043.

$$-125$$

1045.

$$-88$$

1047.

$$-5$$

**1049.** 55

**1051.** ⓐ $-18$ ⓑ $-87$

**1053.** ⓐ $-5$ ⓑ 17

**1055.** 8

**1057.** 38

1059.

$$\left(-4+\left(-17\right)\right)+32\,;11$$

1061.

$$\frac{-45}{-9}\,;5$$

**1063.** 84 gráður

**1065.** $\frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$ svör geta verið mismunandi

**1067.** $\frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}$ svör geta verið mismunandi

1069.

$$\frac{1}{3}$$

1071.

$$\frac{3}{4}$$

1073.

$$-\frac{7}{8}$$

1075.

$$\frac{x}{y}$$

1077.

$$\frac{2}{15}$$

1079.

$$-\frac{2}{9}$$

1081.

$$7\,p$$

1083.

$$-42$$

**1085.** 2

1087.

$$-\frac{7}{5}$$

1089.

$$\frac{25}{4\,a}$$

1091.

$$\frac{2}{9}$$

1093.

$$-\frac{1}{25}$$

1095.

$$\frac{3}{4}$$

1097.

$$-\frac{3}{10}$$

1099.

$$\frac{3r}{5s}$$

1101.

$$\frac{15}{8}$$

1103.

$$-6$$

1105.

$$\frac{4}{3}$$

1107.

$$-4$$

1109.

$$\frac{5}{2}$$

1111.

$$-2$$

**1113.**

$$\frac{c}{d+9}$$

**1115.**

$$\frac{5}{9}$$

**1117.**

$$\frac{y+2}{3}$$

**1119.**

$$-\frac{1}{2}$$

**1121.**

$$\frac{3}{5}$$

**1123.**

$$\frac{y-9}{17}$$

**1125.**

$$-\frac{11}{d}$$

**1127.**

$$\frac{8}{15}$$

**1129.**

$$\frac{3}{10}$$

**1131.**

$$\frac{17}{12}$$

**1133.**

$$\frac{13}{24}$$

1135.

$$\frac{19}{80}$$

1137.

$$\frac{11}{6}$$

1139.

$$\frac{1}{275}$$

**1141.** 14

**1143.** ⓐ $\frac{3}{8}$ ⓑ 0

1145.

$$\frac{5}{9}$$

1147.

$$-6$$

**1149.** 8,03

**1151.** 0,001

**1153.** sjö og átta tíunduhlutar

**1155.** fimm þúsundustu hlutar

**1157.** ⓐ 5,79 ⓑ 5,8 ⓒ 6

**1159.** ⓐ 12,48 ⓑ 12,5 ⓒ 12

**1161.** 27,73

**1163.** −5,53

**1165.** −13,5

**1167.** 35,8

**1169.** 42,51

**1171.** 0,12

**1173.** 26,7528

**1175.** 2,2302

**1177.** 0,03

**1179.** $0,71

**1181.** 150

1183.

$$\frac{2}{25}$$

1185.

$$\frac{17}{40}$$

1187.

$$\frac{7}{4}$$

**1189.** 0,4

1191.

$$-0{,}375$$

1193.

$$0{,}\bar{5}$$

**1195.** 7

**1197.** 0,05

**1199.** 0,4

**1201.** 1,15

**1203.** 18%

**1205.** 0,9%

**1207.** 150%

**1209.** 8

**1211.** $-5$

**1213.** ⓐ $\frac{9}{1}$ ⓑ $\frac{847}{100}$

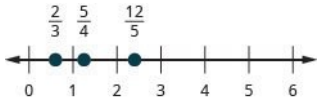
**1215.** ⓐ $0{,}84, 1, \bar{3}$ ⓑ $0{,}79132\ldots,$

**1217.** ⓐ ræð tala ⓑ óræð tala

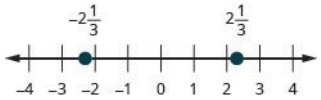
**1219.** ⓐ ekki rauntala ⓑ rauntala

**1221.** ⓐ $0, \sqrt{16}$ ⓑ $-4, 0, \sqrt{16}$ ⓒ $-4, 0, \frac{5}{6}, \sqrt{16}$ ⓓ $\sqrt{18}, 5{,}2537\ldots$ ⓔ $-4, 0, \frac{5}{6}, \sqrt{16}, \sqrt{18}, 5{,}2537\ldots$

1223.



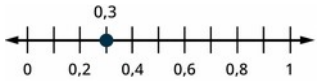

1225.




**1227.** <

**1229.** <

1231.




1233.




**1235.** >

**1237.** <

1239.

$$-48\,m$$

1241.

$$a+47$$

**1243.** 37

1245.

$$\frac{35}{9}$$

1247.

$$1\frac{7}{12}$$

1249.

$$27x+23y$$

**1251.** ⓐ $-\frac{1}{3}$ ⓑ $-5{,}1$ ⓒ $14$ ⓓ $\frac{8}{5}$

**1253.** ⓐ $\frac{1}{10}$ ⓑ $-\frac{9}{4}$ ⓒ $\frac{5}{3}$

**1255.** 0

**1257.** óskilgreint

**1259.** 39

**1261.** 57

**1263.** 8

1265.

$$7x+63$$

1267.

$$-18m+3$$

1269.

$$5n-2$$

1271.

$$-5a-13$$

**1273.** 84 tommur

**1275.** 64 tommur

**1277.** 2,7 mílur

**1279.** 105 mínútur

**1281.** 94 únsur

**1283.** 10 pund 6 únsur

**1285.** 15 fet

**1287.** 170 sentimetrar

**1289.** 0,488 grömm

**1291.** 2.900 grömm

**1293.** 1,12 metri

**1295.** 0,9 kílógrömm

**1297.** 175,3 sentimetrar

**1299.** 1,6 mílur

**1301.** 14,6 gallon

**1303.** 35° C

**1305.** −6,7° C

**1307.** 86° F

**1309.** 10,4° F

## Æfingapróf

**1311.** 205.617

**1313.** 72

1315.

$$-2$$

1317.

$$-7-20\,;-27$$

**1319.** 677,13

**1321.** 185%

**1323.** 99

1325.

$$-44$$

**1327.** 3

1329.

$$\frac{16}{9}$$

1331.

$$\frac{m+10}{7}$$

1333.

$$-10{,}5$$

**1335.** 2,2365

1337.

$$-10\,p$$

1339.

$$15\,x+4\,y$$

**1341.** óskilgreint

**1343.** 100 mínútur

**1345.** 4,508 kílómetrar

# Kafli 2

## Undirbúningur

2.1

$$1$$

2.2

$$20$$

2.3

$$n+4$$

2.4

$$x-5$$

2.5

$$1$$

2.6

$$-25$$

2.7

$$4\,y$$

2.8

$$-a+4$$

2.9

$$18\,x+30$$

2.10

$$3-2n$$

2.11

$$21y+27$$

2.12

$$16$$

2.13

$$3$$

2.14

$$12$$

2.15

$$478$$

2.16

$$8$$

2.17

$$12$$

2.18

15 er stærra en x.

2.19

$$n=-33$$

2.20

$$p=\frac{23}{5}$$

2.21

$$a=2$$

## Prófið sjálf

2.1

nei

2.2

já

**2.3**

$$x = -46$$

**2.4**

$$x = -50$$

**2.5**

$$n = -14$$

**2.6**

$$p = -32$$

**2.7**

$$p = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

**2.8**

$$q = \frac{4}{3}$$

**2.9**

$$b = -1{,}63$$

**2.10**

$$c = -3{,}67$$

**2.11**

$$y = 15$$

**2.12**

$$z = 2$$

**2.13**

$$p = 5$$

**2.14**

$$q = -16$$

**2.15**

$$h = 6$$

2.16

$$x=2$$

2.17

$$x+10=41\,;\,x=31$$

2.18

$$x-12=51\,;\,x=63$$

2.19

$$4x-3x=14\,;\,x=14$$

2.20

$$7a-6a=-8\,;\,a=-8$$

2.21

7 pund

2.22

42 bækur

2.23

$20.900

2.24

$11,00

2.25

$$y=\frac{-41}{3}$$

2.26

$$z=\frac{-55}{4}$$

2.27

$$a=294$$

2.28

$$b=144$$

2.29

$$k=-8$$

2.30

$$g=-3$$

2.31

$$n=35$$

2.32

$$y=18$$

2.33

$$z=-\frac{9}{20}$$

2.34

$$r=-\frac{5}{16}$$

2.35

$$c=-3$$

2.36

$$x=-\frac{4}{7}$$

2.37

$$q=-6$$

2.38

$$r=-5$$

2.39

$$132=-12\,y\,;\,y=-11$$

2.40

$$117=-13\,z\,;\,z=-9$$

2.41

$$\frac{n}{7}=-21\,;\,n=-147$$

2.42

$$\frac{n}{8}=-56\,;\,n=-448$$

2.43

$$\frac{q}{-8}=72\,;\,q=-576$$

2.44

$$\frac{p}{-9}=81\,;\,p=-729$$

2.45

$$\frac{2}{5}f=16\,;\,f=40$$

2.46

$$\frac{3}{4}f=21\,;\,f=28$$

2.47

$$\frac{5}{8}+x=\frac{1}{4}\,;\,x=-\frac{3}{8}$$

2.48

$$\frac{3}{4}+x=\frac{5}{6}\,;\,x=\frac{1}{12}$$

2.49
$0,39
2.50
$5,83
2.51
$120.000
2.52
21 íbúðir
2.53

$$x=-4$$

2.54

$$a=-8$$

2.55

$$y=5$$

2.56

$$m=9$$

2.57

$$n=-10$$

2.58

$$c=-1$$

2.59

$$p=-7$$

2.60

$$m=-3$$

2.61

$$j=2$$

2.62

$$h=1$$

2.63

$$x=-1$$

2.64

$$y=4$$

2.65

$$q=1$$

2.66

$$n=1$$

2.67

$$a=-5$$

2.68

$$k=-6$$

2.69

$$x=10$$

2.70

$$y=-3$$

2.71

$$x=-5$$

2.72

$$y=-5$$

2.73

$$x=4$$

2.74

$$y=1$$

2.75

$$y=-6$$

2.76

$$z=8$$

2.77

$$m=2$$

2.78

$$n=2$$

2.79

$$u=2$$

2.80

$$x=4$$

2.81

$$j=\frac{5}{3}$$

2.82

$$k=\frac{5}{2}$$

2.83

$$p=-2$$

2.84

$$q=-8$$

2.85

$$y=-\frac{17}{5}$$

2.86

$$z=0$$

2.87

$$n=1$$

2.88

$$m=-1$$

2.89
samsemd; allar rauntölur
2.90
samsemd; allar rauntölur
2.91
skilyrt jafna; $q=-\frac{9}{11}$
2.92
skilyrt jafna; $k=\frac{201}{14}$
2.93
mótsögn; engin lausn
2.94
mótsögn; engin lausn
2.95

$$x=\frac{1}{2}$$

2.96

$$x=-2$$

2.97

$$x=12$$

2.98

$$u=-12$$

2.99

$$x = -1$$

2.100

$$c = -2$$

2.101

$$p = -4$$

2.102

$$q = 2$$

2.103

$$n = 2$$

2.104

$$m = -1$$

2.105

$$y = 2$$

2.106

$$z = -2$$

2.107

$$b = -20$$

2.108

$$c = -6$$

2.109

$$r = 1$$

2.110

$$s = -8$$

2.111

$$h = 12$$

2.112

$$k = -1$$

2.113

$$n=9$$

2.114

$$d=16$$

2.115
330 mílur
2.116
7 mílur
2.117
11 klukkustundir
2.118
56 mílur á klukkustund
2.119

ⓐ $r=45$ ⓑ $r=\frac{d}{t}$

2.120

ⓐ $r=65$ ⓑ $r=\frac{d}{t}$

2.121

ⓐ $h=20$ ⓑ $h=\frac{2A}{b}$

2.122

ⓐ $b=4$ ⓑ $b=\frac{2A}{h}$

2.123

ⓐ \$12.000 ⓑ $P=\frac{I}{rt}$

2.124

ⓐ \$9.000 ⓑ $P=\frac{I}{rt}$

2.125

ⓐ $y=-1$ ⓑ $y=\frac{10-3x}{4}$

2.126

ⓐ $y=-1$ ⓑ $y=\frac{18-5x}{2}$

2.127

$$b=P-a-c$$

2.128

$$c = P - a - b$$

2.129

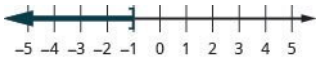
$$y = \frac{9 - 4x}{7}$$

2.130

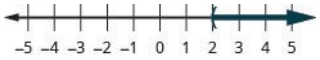
$$y = \frac{1 - 5x}{8}$$

2.131

1. ⓐ




2. ⓑ




3. ⓒ

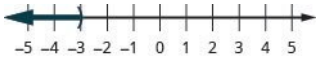



2.132

1. ⓐ




2. ⓑ

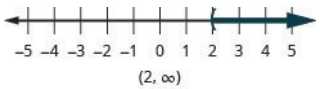



3. ⓒ

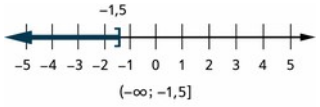



2.133

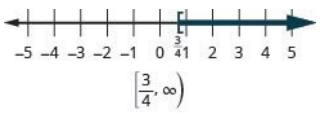
1. ⓐ




2. ⓑ

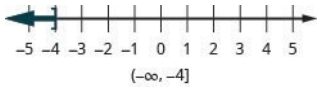



3. ⓒ



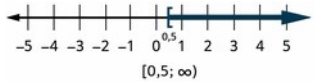
## 2.134

1. ⓐ



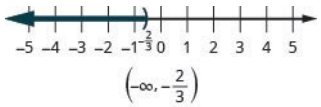

$(-\infty, -4]$

2. ⓑ



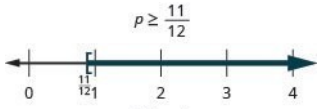

$[0{,}5; \infty)$

3. ⓒ



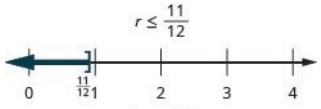

$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$

## 2.135




$\left[\frac{11}{12}, \infty\right)$

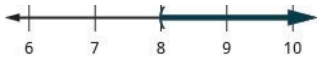
## 2.136




$\left(-\infty, \frac{11}{12}\right]$

## 2.137

$c > 8$



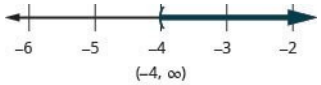

## 2.138

$(-\infty, 5]$




## 2.139

$q > -4$

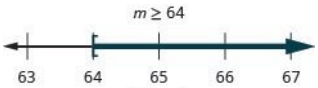


## 2.140



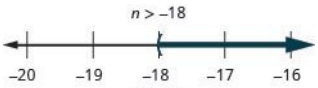

$[10, \infty)$

## 2.141



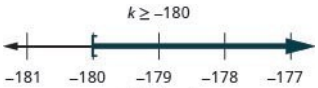

$[64, \infty)$

## 2.142



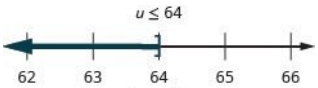

$(-18, \infty)$

## 2.143



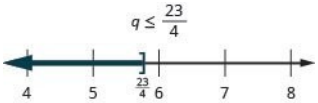

$[-180, \infty)$

## 2.144



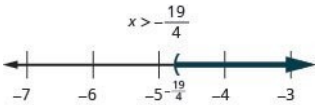

$(-\infty, 64]$

## 2.145



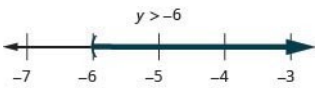

$\left(-\infty, \frac{23}{4}\right]$

## 2.146



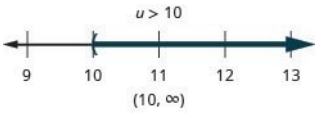

$\left(-\frac{19}{4}, \infty\right)$

## 2.147

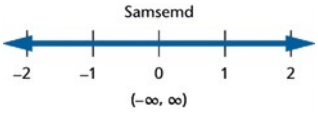



$(-6, \infty)$

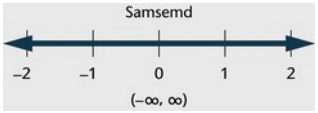
## 2.148



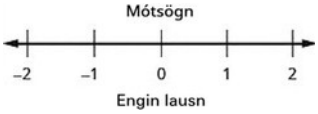

## 2.149



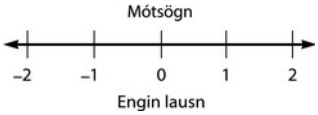

## 2.150



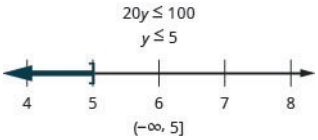

## 2.151



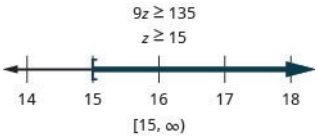

## 2.152



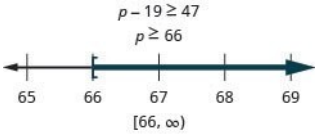

## 2.153



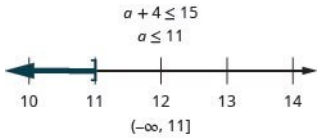

## 2.154




## 2.155



2.156




## Verkefni úr hluta 2.1

**1.** já

**3.** nei

5.

$$x = 11$$

7.

$$y = -111$$

9.

$$b = \frac{1}{2}$$

11.

$$p = -11{,}7$$

13.

$$a = 121$$

15.

$$m = -182$$

17.

$$x = \frac{7}{3}$$

19.

$$y = 13{,}8$$

21.

$$x = -255$$

23.

$$z = -9{,}02$$

25.

$$q=-\frac{1}{4}$$

27.

$$p=\frac{16}{15}$$

29.

$$c=25$$

31.

$$x=1$$

33.

$$x=0$$

35.

$$y=24$$

37.

$$u=-7{,}1$$

39.

$$a=-30$$

41.

$$y=28$$

43.

$$n=-50$$

45.

$$j=8$$

47.

$$a=-\frac{11}{4}$$

49.

$$x=13$$

51.

$$x+9=52\,;\,x=43$$

53.

$$m-10=-14\,;\,m=-4$$

55.

$$y+(-30)=40\,;\,y=70$$

57.

$$9x-8x=107\,;\,107$$

59.

$$n-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}$$

61.

$$-4n+5n=-82\,;\,-82$$

**63.** 11 mílur

**65.** 7 ára

**67.** 21 pund

**69.** 100,5 gráður

**71.** $121,19

73.

$$d=\frac{13}{24}\text{ tomma}$$

**75.** Nei. Rökstuðningur getur verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 2.2

77.

$$x=7$$

79.

$$c=-11$$

81.

$$y=-\frac{809}{15}$$

83.

$$p=\frac{541}{37}$$

85.

$$z=13$$

87.

$$x=0$$

89.

$$x=140$$

91.

$$q=100$$

93.

$$y=-144$$

95.

$$m=-540$$

97.

$$y=-6$$

99.

$$v=72$$

101.

$$y=72$$

103.

$$w=-64$$

105.

$$a=-4$$

107.

$$x=\frac{20}{3}$$

109.

$$p=-\frac{7}{9}$$

111.

$$u=\frac{1}{4}$$

113.

$$p=-12$$

115.

$$n=88$$

117.

$$d=15$$

119.

$$q=-11$$

121.

$$x=-\frac{72}{5}$$

123.

$$x=100$$

125.

$$y=9$$

127.

$$w=-198$$

129.

$$a=\frac{9}{2}$$

131.

$$x=-2$$

133.

$$m=27$$

135.

$$p=2130$$

137.

$$z=-7$$

139.

$$c=51$$

141.

$$x=8$$

143.

$$133=-19n;n=-7$$

145.

$$-152=8q;q=-19$$

147.

$$\frac{r}{12}=-48;r=-576$$

149.

$$\frac{j}{-20}=-80;j=1.600$$

151.

$$\frac{b}{-6}=18;b=-108$$

153.

$$\frac{k}{22}=-66;k=-1.452$$

155.

$$\frac{3}{10}x=15;x=50$$

157.

$$\frac{5}{2}v=50;v=20$$

159.

$$\frac{2}{5}+f=\frac{1}{2};f=\frac{1}{10}$$

161.

$$q-\frac{1}{8}=\frac{3}{4};q=\frac{7}{8}$$

**163.** 6 blöðrur

**165.** $1,08

**167.** 36 mílur á gallon

**169.** $195.000

**171.** 15 frímerki að verðgildi 49 sent hvert

**173.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 2.3

175.

$$x=6$$

177.

$$y=6$$

179.

$$m=-8$$

181.

$$b=-8$$

183.

$$x=-4$$

185.

$$q=-\frac{9}{7}$$

187.

$$k=-11$$

189.

$$x=9$$

191.

$$b=-3$$

193.

$$z=3$$

195.

$$x=-\frac{3}{4}$$

197.

$$r=-2$$

199.

$$x=19$$

201.

$$f=7$$

203.

$$q=-5$$

205.

$$c=-4$$

207.

$$x=2$$

209.

$$p=-\frac{8}{5}$$

211.

$$y=4$$

213.

$$m=-6$$

215.

$$a=7$$

217.

$$a = -40$$

219.

$$p = 15$$

221.

$$z = 3{,}46$$

223.

$$w = 60$$

225.

$$x = 23$$

**227.** 30 fet

**229.** $x = 2$ Rökstuðningur getur verið mismunandi.

**231.** Já. Rökstuðningur getur verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 2.4

233.

$$y = 3$$

235.

$$n = -2$$

237.

$$p = -\frac{4}{3}$$

239.

$$t = -9$$

241.

$$b = 2$$

243.

$$m = 6$$

245.

$$k=\frac{3}{2}$$

247.

$$t=1$$

249.

$$x=-2$$

251.

$$x=5$$

253.

$$d=1$$

255.

$$r=-7$$

257.

$$m=-15$$

259.

$$y=-4$$

261.

$$w=\frac{1}{2}$$

263.

$$a=4$$

265.

$$r=8$$

267.

$$m=3$$

269.

$$y=-3$$

271.

$$x=34$$

273.

$$x=-6$$

275.

$$n=-1$$

277.

$$a=-4$$

279.

$$m=-4$$

281.

$$d=-3$$

283.

$$k=\frac{3}{5}$$

285.

$$n=-5$$

287.

$$v=1$$

289.

$$p=-34$$

291.

$$m=-4$$

**293.** samsemd; allar rauntölur

**295.** samsemd; allar rauntölur

**297.** skilyrt jafna; $d=\frac{2}{3}$

**299.** skilyrt jafna; $n=7$

**301.** mótsögn; engin lausn

**303.** mótsögn; engin lausn

**305.** skilyrt jafna; $k=26$

**307.** mótsögn; engin lausn

**309.** samsemd; allar rauntölur

**311.** samsemd; allar rauntölur

**313.** 8 fimm senta mynt

**315.** Svör geta verið mismunandi.

**317.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 2.5

319.

$$x=1$$

321.

$$y=-1$$

323.

$$b=-2$$

325.

$$x=3$$

327.

$$n=-24$$

329.

$$x=-4$$

331.

$$z=-2$$

333.

$$a=1$$

335.

$$x=-6$$

337.

$$x=1$$

339.

$$q=7$$

341.

$$x=-\frac{5}{2}$$

343.

$$m=-1$$

345.

$$p=-4$$

347.

$$v=20$$

349.

$$d=-24$$

351.

$$y=-1$$

353.

$$v=4$$

355.

$$y=15$$

357.

$$k=2$$

359.

$$x=20$$

361.

$$x=22$$

363.

$$x=8$$

365.

$$n=19$$

367.

$$d=10$$

369.

$$q=15$$

371.

$$s=35$$

**373.** Svör geta verið mismunandi.

**375.** 100. Rökstuðningur getur verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 2.6

**377.** 290 mílur

**379.** 30 mílur

**381.** 5 klukkustundir

**383.** 11,25 klukkustundir

**385.** 75 mílur á klukkustund

**387.** 75 mílur á klukkustund

**389.** ⓐ $t=4$ ⓑ $t=\frac{d}{r}$

**391.** ⓐ $t=3{,}5$ ⓑ $t=\frac{d}{r}$

**393.** ⓐ $r=70$ ⓑ $r=\frac{d}{t}$

**395.** ⓐ $r=40$ ⓑ $r=\frac{d}{t}$

**397.** ⓐ $h=16$ ⓑ $h=\frac{2A}{b}$

**399.** ⓐ $b=10$ ⓑ $b=\frac{2A}{h}$

**401.** ⓐ $P=\$13,166{,}67$ ⓑ $P=\frac{I}{rt}$

**403.** ⓐ $t=2$ ár ⓑ $t=\frac{I}{Pr}$

**405.** ⓐ $y=-5$ ⓑ $y=\frac{10-5x}{2}$

**407.** ⓐ $y=17$ ⓑ $y=5-4x$

409.

$$a=90-b$$

411.

$$c=180-a-b$$

413.

$$y=13-9x$$

415.

$$y=-1+5x$$

417.

$$y=\frac{11-3x}{2}$$

419.

$$y=3+x$$

421.

$$W=\frac{P-2L}{2}$$

423.

$$\pi=\frac{C}{d}$$

425.

$$H=\frac{V}{LW}$$

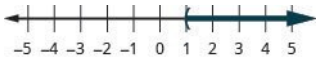
**427.** 10°C

**429.** Svör geta verið mismunandi.

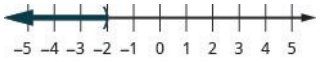
## Verkefni úr hluta 2.7

431.

**1.** ⓐ




**2.** ⓑ

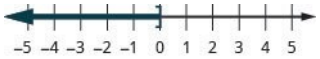


**3.** ⓒ




433.

**1.** ⓐ




**2.** ⓑ

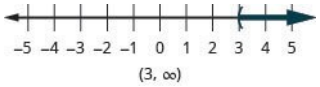



**3.** ⓒ

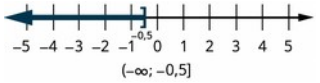



435.

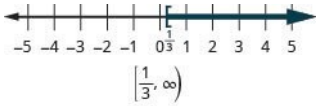
**1.** ⓐ




**2.** ⓑ

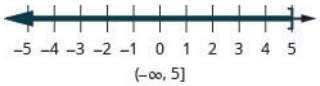



**3.** ⓒ

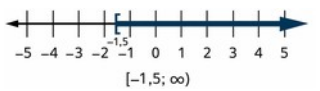



437.

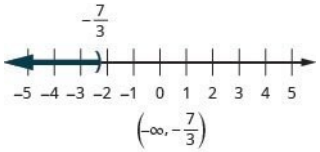
**1.** ⓐ



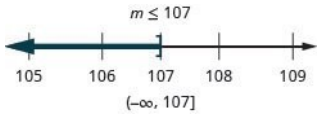

**2.** ⓑ



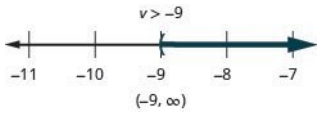

**3.** ⓒ




439.

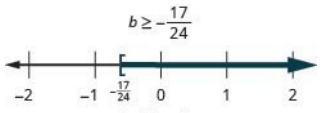


441.



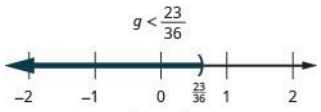

$(-9, \infty)$

443.



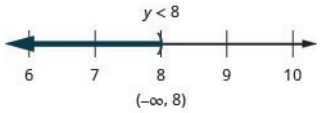

$\left[-\frac{17}{24}, \infty\right)$

445.



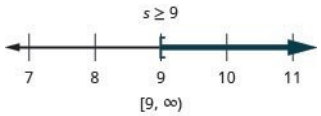

$\left(-\infty, \frac{23}{36}\right)$

447.



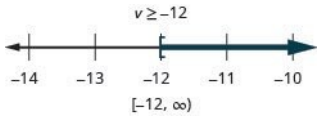

$(-\infty, 8)$

449.



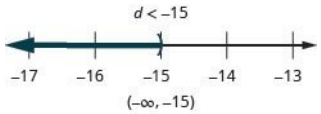

$[9, \infty)$

451.



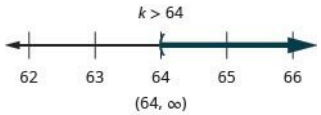

$[-12, \infty)$

453.



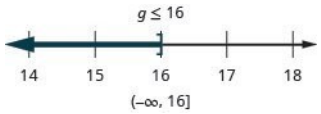

$(-\infty, -15)$

455.

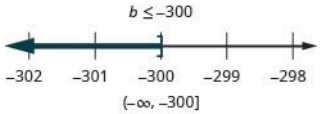



$(64, \infty)$

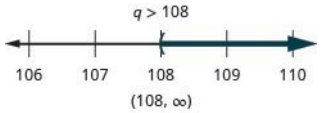
457.



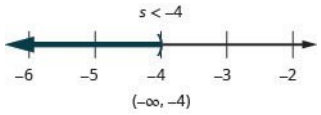

459.



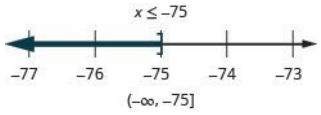

461.



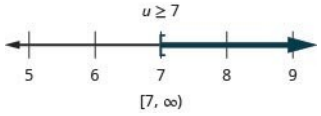

463.



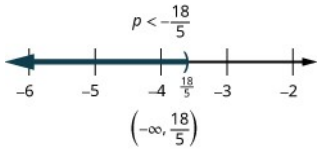

465.



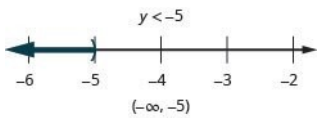

467.



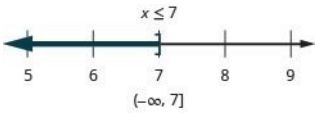

469.



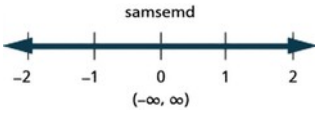

471.



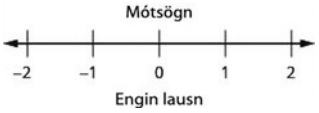
473.



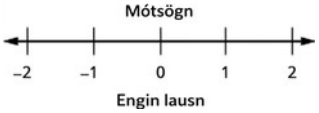

475.



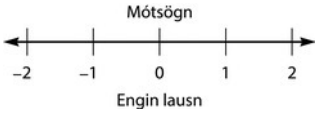

477.



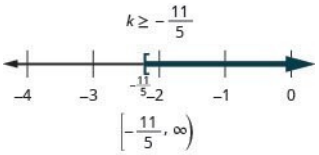

479.



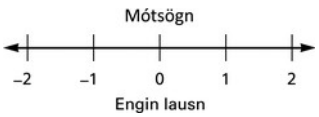

481.



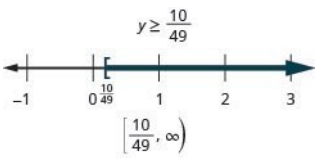

483.



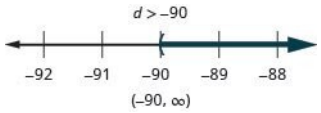

485.




487.

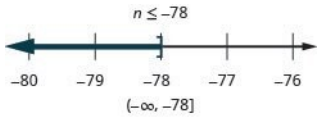


489.




$(-90, \infty)$

491.




$(-\infty, -78]$

493.

$90c < 450$

$c < 5$

$(-\infty, 5)$




495.

$10y \leq -110$

$y \leq -11$

$(-\infty, -11]$




497.

$k + 6 > 25$

$k > 19$

$(19, \infty)$




499.

$x - 12 \geq 21$

$x \geq 33$

$[33, \infty)$




501.

$-2s < 56$

$s > -28$

$(-28, \infty)$




503.

$a - 15 \geq -7$

$a \geq 8$

$[8, \infty)$



505.

$$h \leq 77$$

507.

$$n \leq 8$$

**509.** Svör geta verið mismunandi.

**511.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

**513.** nei

**515.** já

517.

$$y = -8$$

519.

$$n = 1{,}5$$

521.

$$x = 5$$

523.

$$p = 18{,}8$$

525.

$$y = -25$$

527.

$$d = 12{,}1$$

529.

$$x = -8$$

531.

$$p = -28$$

533.

$$n - 4 = 13\,;\, n = 17$$

**535.** 161 pund

**537.** $131,19

539.

$$a=-5$$

541.

$$y=-4$$

543.

$$y=-300$$

545.

$$u=\frac{3}{2}$$

547.

$$c=324$$

549.

$$y=\frac{11}{8}$$

551.

$$x=-1$$

553.

$$d=3$$

555.

$$\frac{b}{9}=-27\,;b=-243$$

557.

$$s-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\,;s=\frac{1}{3}$$

**559.** $32

561.

$$w=7$$

563.

$$n=-4$$

565.

$$a=-7$$

567.

$$x=\frac{3}{8}$$

569.

$$n=-5$$

571.

$$c=32$$

573.

$$p=\frac{13}{2}$$

575.

$$n=12$$

577.

$$m=-14$$

579.

$$q=18$$

581.

$$x=-1$$

583.

$$k=\frac{3}{4}$$

**585.** mótsögn; engin lausn

**587.** samsemd; allar rauntölur

589.

$$x=15$$

591.

$$k=41$$

593.

$$y = -1$$

595.

$$u = -85$$

597.

$$y = 47$$

**599.** 5 klukkustundir

**601.** 37,5 mílur

**603.** ⓐ $r = 82$ mílur/klst.; ⓑ $r = \frac{D}{t}$

**605.** ⓐ $h = 17$ ⓑ $h = \frac{2A}{b}$

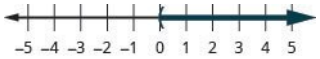
**607.** ⓐ $y = \frac{14}{3}$ ⓑ $y = \frac{6 - 4x}{3}$

609.

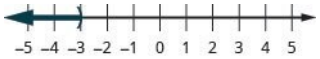
$$H = \frac{V}{LW}$$

611.

**1.** ⓐ




**2.** ⓑ

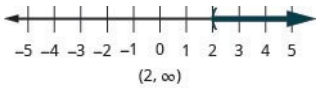



**3.** ⓒ

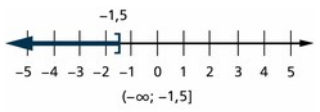



613.

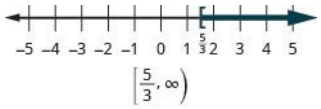
**1.** ⓐ



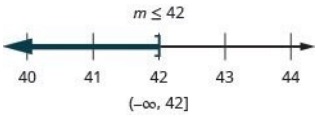

**2.** ⓑ



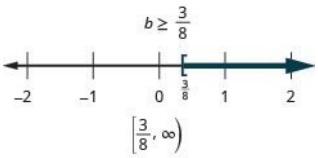
**3.** ⓒ



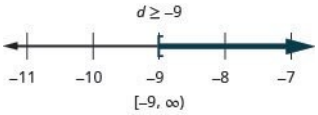

615.



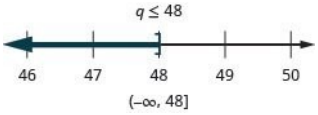

617.



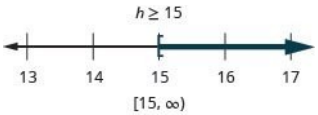

619.



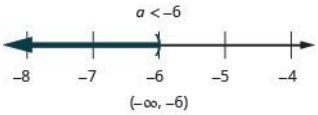

621.



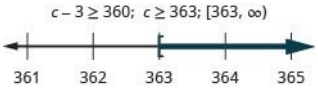

623.



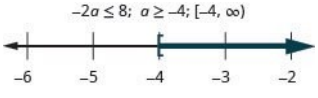

625.




627.




629.



## Æfingapróf

**631.** ⓐ nei ⓑ já

633.

$$c=32$$

635.

$$x=-5$$

637.

$$x=9$$

639.

$$y=-4$$

641.

$$m=9$$

643.

$$d=-14$$

645.

$$x=-\frac{1}{3}$$

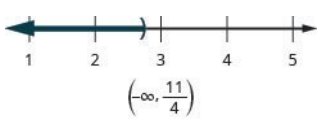
647.

$$p=\frac{10}{3}$$

**649.** mótsögn; engin lausn

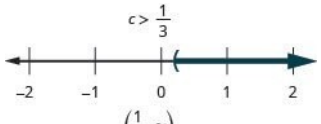
**651.** ⓐ $y=4$ ⓑ $y=\frac{5-x}{2}$

653.




$\left(-\infty, \frac{11}{4}\right)$

655.




$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

657.

$$n+15\geq 48\,;\, n\geq 33$$

**659**. $120=\frac{2}{3}\,p$; upphaflega verðið var \$180.

# Kafli 3

## Undirbúningur

3.1

$$2\,x-6$$

3.2

$$x=36$$

3.2

$$x=2$$

3.3

$$0{,}045$$

3.4

$$60\,\%$$

3.5

$$0{,}88$$

3.6

$$10{,}71$$

3.7

$$n=5$$

3.8

$$12{,}55$$

3.9

$$3{,}5$$

3.10

$$x=6$$

3.11

$$d = q + 3$$

3.12

$$3h$$

3.13

$$l = w - 3$$

3.14

$$b = 10$$

3.15

$$12$$

3.16

210 mílur

3.17

$$x = 50$$

3.18

1,5 klukkustundir

3.19

$$x \geq 30$$

3.20

$$y > -11$$

## Prófið sjálf

3.1

$180

3.2

40

3.3

2

3.4

7

3.5

25

3.6

4

3.7
3
3.8
6
3.9
9, 15
3.10
27, 31
3.11

$$-15, -8$$

3.12

$$-29, 11$$

3.13

$$-4, 0$$

3.14

$$-3, -2$$

3.15
47, 48
3.16

$$-16, -15$$

3.17

$$-33, -32, -31$$

3.18

$$-13, -12, -11$$

3.19
32, 34, 36
3.20

$$-10, -8, -6$$

3.21
$5.000
3.22
$19.300
3.23
36

3.24
33
3.25
$26
3.26
$36
3.27
125%
3.28
175%
3.29
$14,67
3.30
$2,16
3.31
25 grömm
3.32
2.375 milligrömm
3.33
26%
3.34
40%
3.35
8,8%
3.36
50%
3.37
6,3%
3.38
10%
3.39
$142,50
3.40
$7.020
3.41
6%
3.42
4%
3.43
$11.450
3.44
$9.600

3.45
ⓐ $11,60 ⓑ $17,40
3.46
ⓐ $256,75 ⓑ $138,25
3.47
ⓐ $184,80 ⓑ 33%
3.48
ⓐ $60 ⓑ 15%
3.49
ⓐ $600 ⓑ $1.800
3.50
ⓐ $2.975 ⓑ $11.475
3.51
9 fimm senta myntir, 16 tíu senta myntir
3.52
17 fimm senta myntir, 5 25 senta myntir
3.53
42 fimm senta myntir, 21 tíu senta myntir
3.54
51 tíu senta myntir, 17 25 senta myntir
3.55
41 fimm senta myntir, 18 25 senta myntir
3.56
22 fimm senta myntir, 59 tíu senta myntir
3.57
330 dagspassar, 367 mótspassar
3.58
112 fullorðinsmiðar, 199 eldri/börn miðar
3.59
84 fullorðinsmiðar, 31 nemendamiðar
3.60
26 miðar á fullu verði, 14 miðar á lækkuðu verði
3.61
32 á $0,41, 12 á $0,02
3.62
26 á $0,41, 10 á $0,20
3.63
5 pund af morgunkornspúðum, 25 pund af hnetum
3.64
21 gallon af ávaxtadrykk, 7 gallon af gosdrykk
3.65
$4.200 á 4%, $9.800 á 7%

3.66
$2.500 á 3,2%, $5.500 á 8%
3.67
21 gráður
3.68
56 gráður
3.69
8 fet
3.70
6 fet
3.71
14 tommur
3.72
6 fet
3.73

$$34°$$

3.74

$$45°$$

3.75

$$20°, 70°, 90°$$

3.76

$$30°, 60°, 90°$$

3.77

$$c = 10$$

3.78

$$c = 13$$

3.79
8
3.80
12
3.81
12 fet
3.82
8 fet
3.83
340 jardar

3.84
220 fet
3.85
26 fet
3.86
29 metrar
3.87
15
3.88
9
3.89
18 metrar, 11 metrar
3.90
19 fet, 11 fet
3.91
24, 8
3.92
5, 4
3.93
70 fet, 30 fet
3.94
90 jardar, 60 jardar
3.95
Wayne 21 mílur á klukkustund, Dennis 28 mílur á klukkustund
3.96
Jeromy 80 mílur á klukkustund, móðir 60 mílur á klukkustund
3.97
Carina 50 mílur á klukkustund, bróðir 65 mílur á klukkustund
3.98
foreldrar 55 mílur á klukkustund, Ashley 62 mílur á klukkustund
3.99
3 klukkustundir
3.100
2,2 klukkustundir
3.101
upp brekku 1,8 mílur á klukkustund, niður brekku þrjár mílur á klukkustund
3.102
á móti straumi 8 mílur á klukkustund, með straumi 12 mílur á klukkustund
3.103
hjólreiðar 16 mílur á klukkustund, hlaup 10 mílur á klukkustund
3.104
upp brekku 12 mílur á klukkustund, slétt gata 20 mílur á klukkustund

3.105
Kassarnir mega vera mest 20.
3.106
Að hámarki geta 14 manns verið í lyftunni með öruggum hætti.
3.107
sjö pakkar
3.108
11 manns
3.109
að minnsta kosti $4.000.000
3.110
að minnsta kosti $1.200.000
3.111
ekki fleiri en 106 textaskilaboð
3.112
ekki fleiri en 76 varmaeiningar
3.113
að minnsta kosti 96 klukkustundir
3.114
að minnsta kosti 1.380 boðskort
3.115
að minnsta kosti 23 klukkustundir
3.116
að minnsta kosti 20 innkeyrslur

## Verkefni úr hluta 3.1

**1.** Svör geta verið mismunandi

**3.** 30

**5.** 125

**7.** 6

**9.** 58

**11.** $750

**13.** $13.500

**15.** 4

**17.** 15

**19.** 5

**21.** 12

23.

$$-5$$

**25.** 18, 24

**27.** 8, 12

29.

$$-18, -27$$

31.

$$-111, -205$$

**33.** 32, 46

**35.** 23, 28

37.

$$-2, -3$$

**39.** 4, 10

**41.** 38, 39

43.

$$-11, -12$$

**45.** 25, 26, 27

47.

$$-11, -12, -13$$

**49.** 84, 86, 88

**51.** 55, 57, 59

53.

$$-10, -12, -14$$

55.

$$-69, -71, -73$$

**57.** $45

**59.** $1,25

**61.** $1080

**63.** Svör geta verið mismunandi

**65.** Samliggjandi oddatölur eru oddatölur sem koma hver á eftir annarri. Dæmi um þrjár samliggjandi oddatölur á milli 50 og 60 eru 51, 53 og 55.

## Verkefni úr hluta 3.2

**67.** 54

**69.** 26,88

**71.** 162,5

**73.** 18.000

**75.** 112

**77.** 108

**79.** $35

**81.** $940

**83.** 30%

**85.** 36%

**87.** 150%

**89.** 175%

**91.** $11,88

**93.** $259,80

**95.** 24,2 g

**97.** 2407 milligrömm

**99.** 175 pund

**101.** $120

**103.** 18%

**105.** 45%

**107.** 25%

**109.** 12%

**111.** 200%

**113.** 72,7%

**115.** 2,5%

**117.** 11%

**119.** 5,5%

**121.** $116

**123.** $4.836

**125.** 3%

**127.** 3,75%

**129.** $35.000

**131.** $3.345

**133.** $139

**135.** $125

**137.** ⓐ $26,97 ⓑ $17,98

**139.** ⓐ $128,37 ⓑ $260,63

**141.** ⓐ $332,48 ⓑ $617,47

**143.** ⓐ $576 ⓑ 30%

**145.** ⓐ $53,25 ⓑ 15%

**147.** ⓐ $370 ⓑ 43,5%

**149.** ⓐ $7,20 ⓑ $23,20

**151.** ⓐ $0,20 ⓑ $0,80

**153.** ⓐ $258,75 ⓑ $373,75

**155.** 21,2%

**157.** Talan þarf að vera stærri en 44. Þar sem 80% er 0,8 á tugabrotsformi, 0,8 er minna en einn og margfalda þarf töluna með 0,8 til að fá 44, verður talan að vera stærri en 44.

**159.** Hann átti við að hann hefði átt að pakka helmingi færri stuttbuxum og tvöfalt fleiri skyrtum.

## Verkefni úr hluta 3.3

**161.** 8 fimm senta myntir, 22 tíu senta myntir

**163.** 15 tíu senta myntir, 8 25 senta myntir

**165.** 10 á $1, 7 á $5

**167.** 18 25 senta myntir, 36 fimm senta myntir

**169.** 30 eins senta myntir, 90 tíu senta myntir

**171.** 10 á $10, 5 á $5

**173.** 12 tíu senta myntir og 27 fimm senta myntir

**175.** 63 tíu senta myntir, 20 25 senta myntir

**177.** 16 fimm senta myntir, 12 tíu senta myntir, 7 25 senta myntir

**179.** 30 barnamiðar, 50 fullorðinsmiðar

**181.** 110 barnamiðar, 50 fullorðinsmiðar

**183.** 34 almennir miðar, 61 ungmennamiðar

**185.** 114 almennir miðar, 246 nemendamiðar

**187.** 40 póstkort, 100 frímerki

**189.** 30 á $0,41, 10 á $0,02

**191.** 15 hlutabréf á $10, 5 hlutabréf á $12

**193.** 5 lítrar af kampavíni, 10 lítrar af appelsínusafa

**195.** 7,5 pund af Maui-baunum, 17,5 pund af Kona-baunum

**197.** 800 á $1,50, 200 á $9,00

**199.** $8000 á 4%, $17.000 á 9%

**201.** $10.000 á innstæðubréfi, $30.000 í verðbréfasjóði

**203.** 9,1%

**205.** 9 stúlkur, 3 fullorðnir

**207.** Svör geta verið mismunandi.

**209.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 3.4

**211.** 56 gráður

**213.** 44 gráður

**215.** 11 fet

**217.** 8 fet

**219.** 0,75 ferfet

**221.** 23 tommur

**223.** 57

**225.** 67,5

**227.** 13 fet, 12 fet, 14 fet

**229.** 3 fet, 6 fet, 8 fet

231.

$$45°, 45°, 90°$$

**233.**

$$30°, 60°, 90°$$

**235.** 15

**237.** 25

**239.** 8

**241.** 12

**243.** 10,2

**245.** 9,8

**247.** 5 fet

**249.** 14,1 fet

**251.** 260 fet

**253.** 58 fet

**255.** 23 metrar

**257.** 26 tommur

**259.** 24

**261.** 4,9

**263.** 16 tommur, 7 tommur

**265.** 17 m, 12 m

**267.** 13,5 m á lengd, 12,8 m á breidd

**269.** 50 fet, 25 fet

**271.** 7 m á breidd, 11 m á lengd

**273.** 160 jardar, 120 jardar

**275.** 85 fet, 40 fet

**277.** 240 fet

**279.** flatarmál; svör geta verið mismunandi

**281.** ⓐ Svör geta verið mismunandi. ⓑ Svör geta verið mismunandi. ⓒ Svör geta verið mismunandi. ⓓ Flatarmálin eru jöfn. ⓔ Ummál 2×8 rétthyrningsins er meira en ummál 4×4 ferningsins.

## Verkefni úr hluta 3.5

**283.** Mason 75 mílur á klukkustund, lest 60 mílur á klukkustund

**285.** hraðvagn 75 mílur á klukkustund, strætisvagn 50 mílur á klukkustund

**287.** Saul 82 mílur á klukkustund, Erwin 74 mílur á klukkustund

**289.** Helen 57,2 mílur á klukkustund, Anne 53,2 mílur á klukkustund

**291.** Aletheia 2,4 mílur á klukkustund, Elvira 3 mílur á klukkustund

**293.** 3 klukkustundir

**295.** 3,5 klukkustundir

**297.** ganga 3 mílur á klukkustund, skokk 4,5 mílur á klukkustund

**299.** á móti straumi 6 mílur á klukkustund, með straumi 9 mílur á klukkustund

**301.** hjólabretti 7,2 mílur á klukkustund, ganga 2,9 mílur á klukkustund

**303.** þung umferð 30 mílur á klukkustund, lítil umferð 70 mílur á klukkustund

**305.** ⓐ 36 mílur á klukkustund ⓑ 25 mílur á klukkustund ⓒ 3,05 klukkustundir ⓓ 29,5 mílur á klukkustund

**307.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 3.6

**309.** 15 börn

**311.** 12 manns

**313.** fimm drykkir

**315.** 31 svuntur

**317.** $15.000

**319.** $400.000

**321.** 16 hundruð rúmfeta (ccf)

**323.** níu kvikmyndir

**325.** 48 klippingar og greiðslur

**327.** 44 máltíðir

**329.** 49 bílar

**331.** 9 bílar

**333.** 91 nemendur

**335.** 169 gestir

**337.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

**339.** Svör geta verið mismunandi

**341.** 116

**343.** 38

345.

$$-18, -9$$

347.

$$-3, -10$$

349.

$$-48, -47, -46$$

**351.** 15, 17, 19

**353.** 167,5

**355.** 160

**357.** 120%

**359.** $3,89

**361.** $875

**363.** 2,5%

**365.** $428,22

**367.** $1.900

**369.** $63

**371.** ⓐ $55,20 ⓑ $82,80

**373.** ⓐ $70 ⓑ 15,6%

**375.** ⓐ $175 ⓑ $225

**377.** 16 tíu senta myntir, 11 25 senta myntir

**379.** sex $5 seðlar, 11 seðlar að verðgildi $10 hver

**381.** 35 fullorðnir, 82 börn

**383.** 57 nemendur, 68 fullorðnir

**385.** þrjú $0,26 frímerki, átta $0,41 frímerki

**387.** 2,2 pund af rúsínum, 7,8 pund af hnetum

**389.** $12.500 á 4,5%, $2.500 á 1,8%

391.

$$73°$$

**393.** 600 fertommur

395.

$$30°, 60°, 90°$$

397.

$$22{,}5°, 67{,}5°, 90°$$

**399.** 26

**401.** 8

**403.** 8,1

405.

$$6'$$

**407.** ⓐ 110 fet ⓑ 684 ferfet

**409.** 62 m

**411.** 24,5 sentímetrar, 12,5 sentímetrar

**413.** Gabe 70 mílur á klukkustund, Elsa 77 mílur á klukkustund

**415.** 2,5 klukkustundir

**417.** sléttur vegur 11 mílur á klukkustund, upp brekku 8 mílur á klukkustund

**419.** $33 á dag

**421.** að minnsta kosti $300.000

**423.** að minnsta kosti 112 verk

## Æfingapróf

**425.** 15

427.

$$-49, -47$$

**429.** 8%

**431.** ⓐ $208,50 ⓑ 30%

**433.** 140 fullorðnir, 85 börn

435.

$$41{,}5°, 55{,}5°, 83°$$

**437.** 10

**439.** 127,3 fet

**441.** 2,5 klukkustundir

**443.** að hámarki $44,44 á búning

# Kafli 4

## Undirbúningur

4.1

2

4.2

16

4.3

5

4.4

$-1$

4.5

$$y=\frac{12-3x}{2}$$

4.6

$$-\frac{1}{2}$$

4.7

$$-\frac{1}{2}$$

4.8

0, óskilgreint

4.9

$$-5,-5,5$$

4.10

$$\frac{x+1}{4}$$

4.11

$$\frac{7}{3}$$

4.12

$$y=\frac{12-2x}{-3}$$

4.13

$$x=\frac{10}{3}$$

4.14

$$-\frac{2}{5}x+6$$

4.15

$$x>5$$

4.16

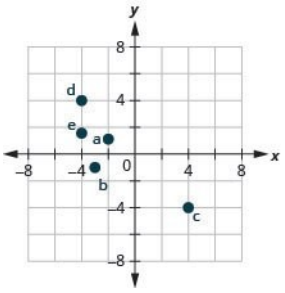
*x er minna en 5.*

4.17

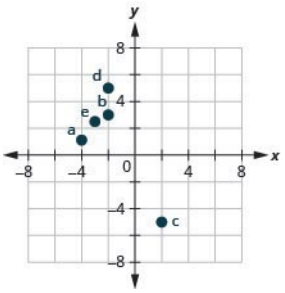
7

## Prófið sjálf

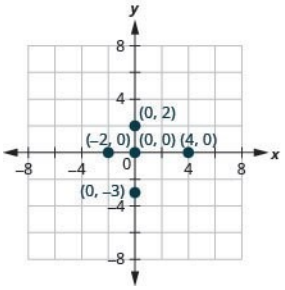
4.1



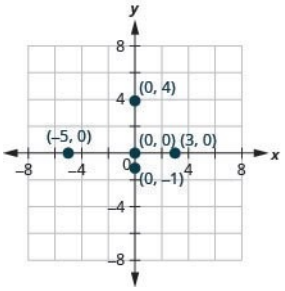

4.2



4.3




4.4




4.5

A: $(5,1)$ B: $(-2,4)$ C: $(-5,-1)$ D: $(3,-2)$ E: $(0,-5)$ F: $(4,0)$

4.6

A: $(4,2)$ B: $(-2,3)$ C: $(-4,-4)$ D: $(3,-5)$ E: $(-3,0)$ F: $(0,2)$

4.7

a, c

4.8

b, c

4.9

b

4.10

a, b

4.11

$y=3x-1$

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-1$ | $(0,-1)$ |
| $-1$ | $-4$ | $(-1,-4)$ |
| 2 | 5 | $(2,5)$ |

4.12

| $y=6x+1$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | 1 | $(0,1)$ |
| 1 | 7 | $(1,7)$ |
| $-2$ | $-11$ | $(-2,-11)$ |

4.13

| $2x-5y=20$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-4$ | $(0,-4)$ |
| 10 | 0 | $(10,0)$ |
| $-5$ | $-6$ | $(-5,-6)$ |

4.14

| $3x-4y=12$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
| 0 | $-3$ | $(0,-3)$ |
| 4 | 0 | $(4,0)$ |
| $-4$ | $-6$ | $(-4,-6)$ |

4.15
Svör geta verið mismunandi.

4.16
Svör geta verið mismunandi.

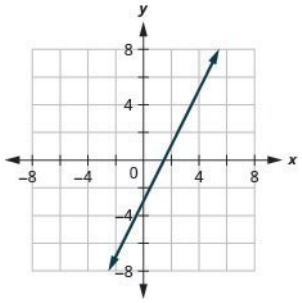
4.17
Svör geta verið mismunandi.

4.18
Svör geta verið mismunandi.

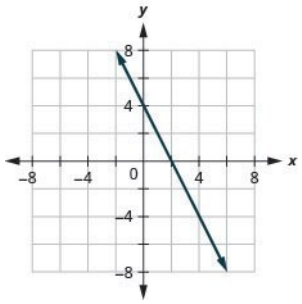
4.19
ⓐ já, já ⓑ já, já

4.20
ⓐ nei, nei ⓑ já, já

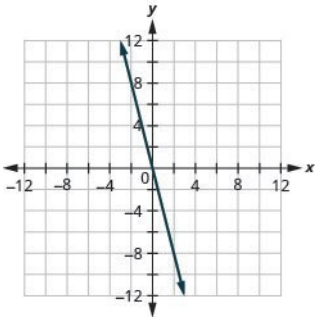
4.21



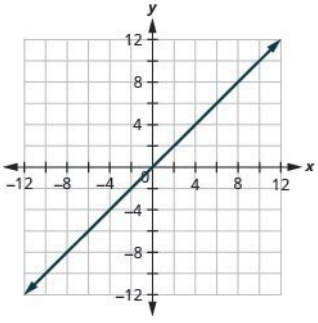

4.22



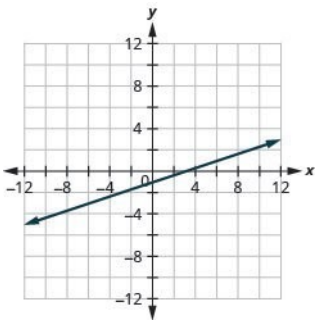

4.23



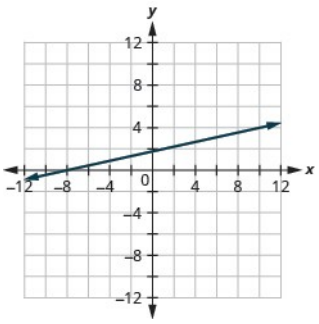

4.24



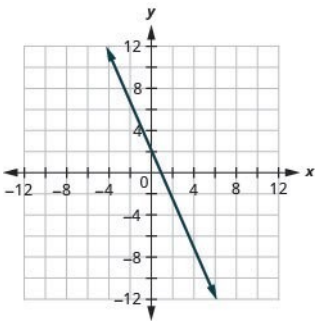
4.25



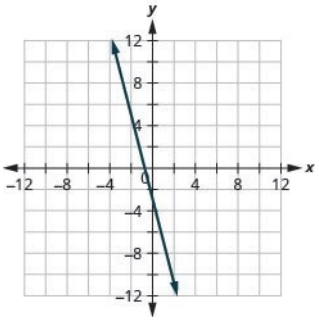

4.26



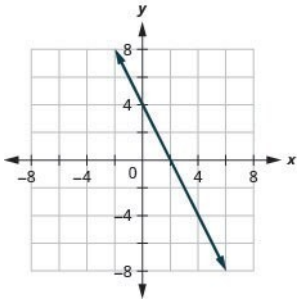

4.27



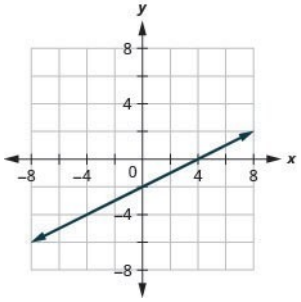

4.28



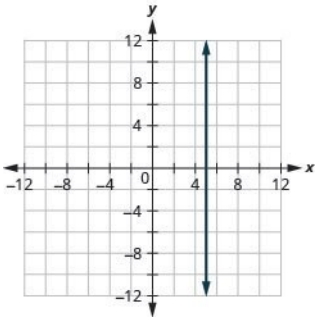
4.29



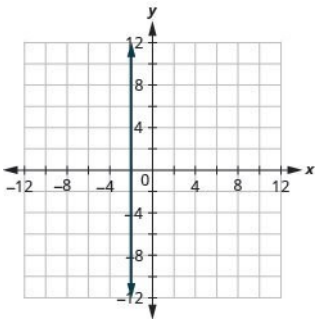

4.30



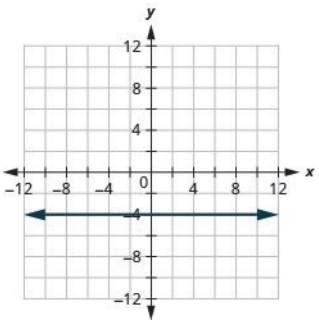

4.31



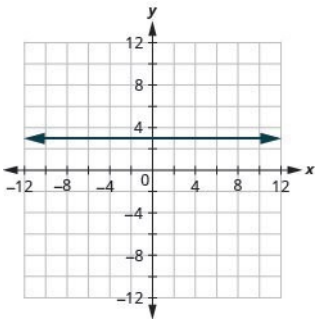

4.32



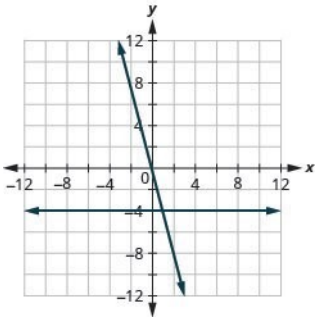
4.33



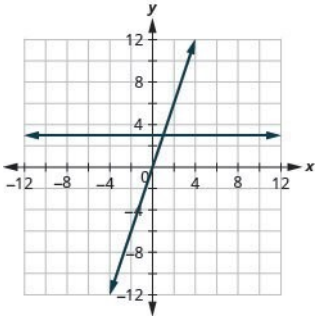

4.34




4.35




4.36



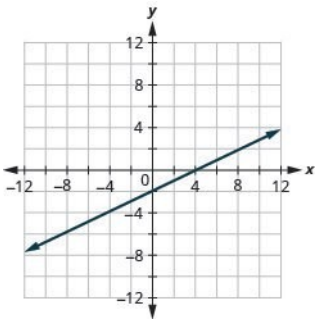

4.37

*skurðpunktur við x-ás:* $(2,0)$; skurðpunktur við y-ás: $(0,-2)$

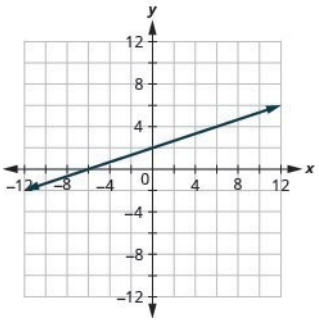
4.38

*skurðpunktur við x-ás:* $(3,0)$, skurðpunktur við y-ás: $(0,2)$

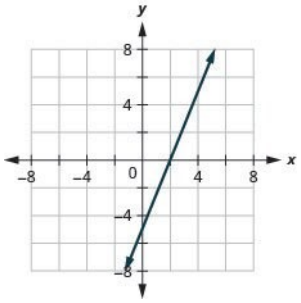
4.39
*skurðpunktur við x-ás:* $(4,0)$, skurðpunktur við y-ás: $(0,12)$
4.40
*skurðpunktur við x-ás:* $(8,0)$, skurðpunktur við y-ás: $(0,2)$
4.41
*skurðpunktur við x-ás:* $(4,0)$, skurðpunktur við y-ás: $(0,-3)$
4.42
*skurðpunktur við x-ás:* $(4,0)$, skurðpunktur við y-ás: $(0,-2)$
4.43



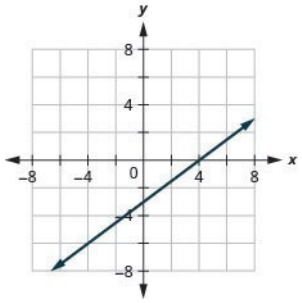

4.44



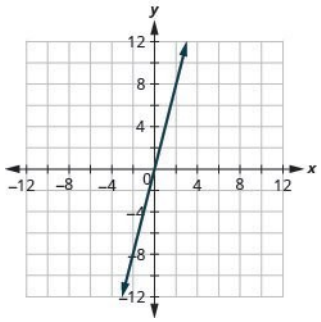

4.45



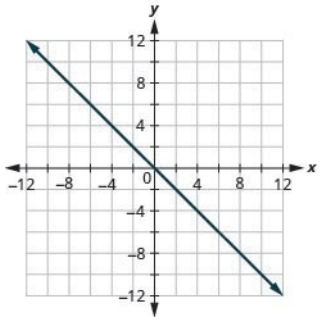
4.46




4.47




4.48




4.49

$$\frac{4}{3}$$

4.50

$$\frac{1}{4}$$

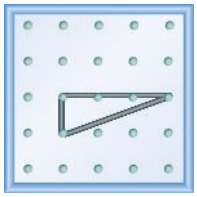
4.51

$$-\frac{2}{3}$$

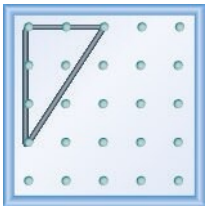
4.52

$$-\frac{4}{3}$$

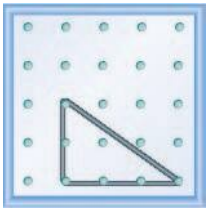
4.53



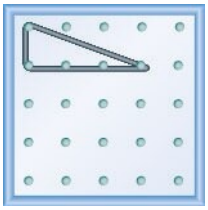
4.54



4.55



4.56



4.57

$$\frac{2}{5}$$

4.58

$$\frac{3}{4}$$

4.59

$$-\frac{4}{3}$$

4.60

$$-\frac{3}{5}$$

4.61

$$\frac{5}{4}$$

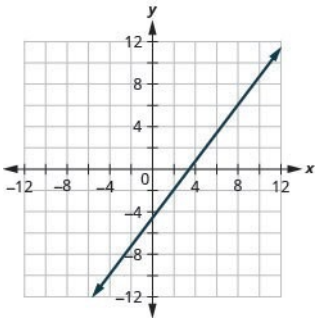
4.62

$$\frac{3}{2}$$

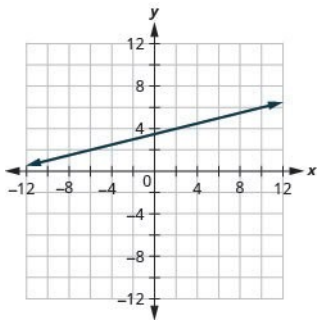
4.63
óskilgreint
4.64
0
4.65
1
4.66
1
4.67

$$-1$$

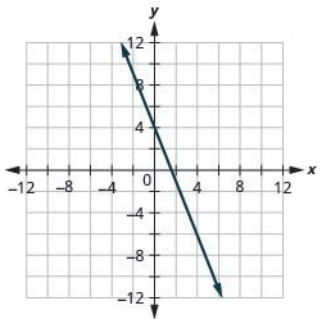
4.68
10
4.69



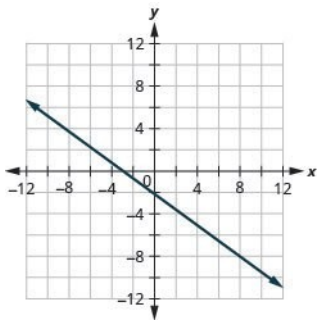
4.70



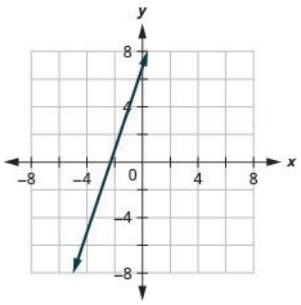

4.71



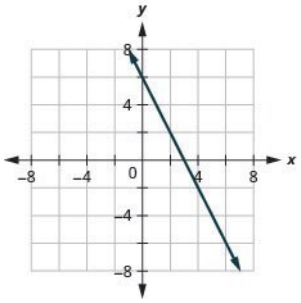

4.72




4.73



4.74




4.75

$$\frac{7}{12}$$

4.76

$$\frac{5}{12}$$

4.77

$$-\frac{1}{36}$$

4.78

$$-\frac{1}{48}$$

4.79

hallatala $m=\frac{2}{3}$ og y-skurðpunktur $(0,-1)$

4.80

hallatala $m=\frac{1}{2}$ og y-skurðpunktur $(0,3)$

4.81

$$\frac{2}{5};(0,-1)$$

4.82

$$-\frac{4}{3};(0,1)$$

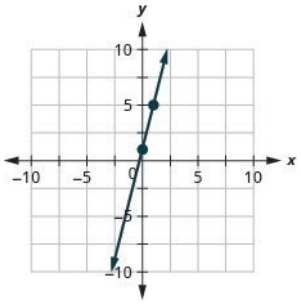
4.83

$$-\frac{1}{4};(0,2)$$

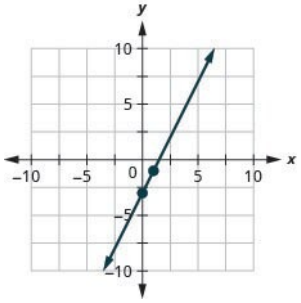
4.84

$$-\frac{3}{2};(0,6)$$

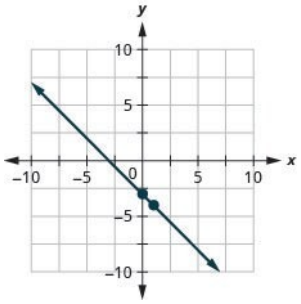
4.85



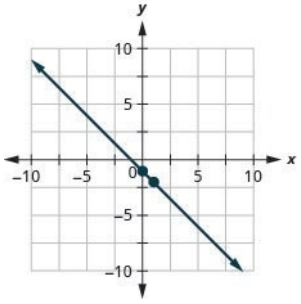

4.86



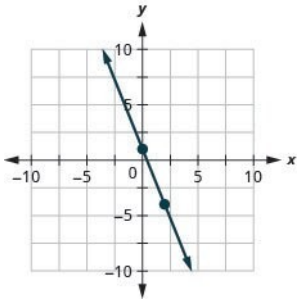

4.87



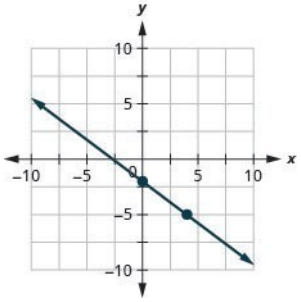

4.88



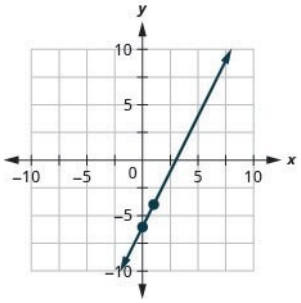
4.89



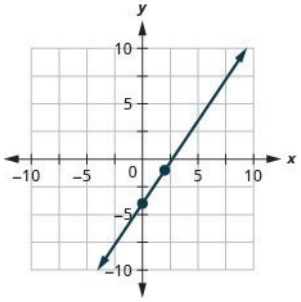

4.90



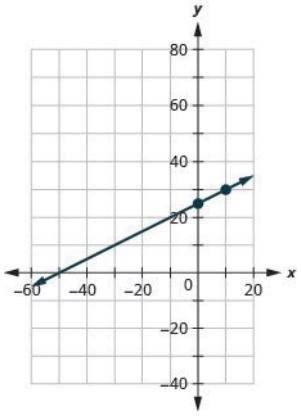

4.91



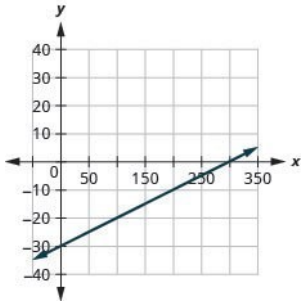

4.92



4.93




4.94




4.95

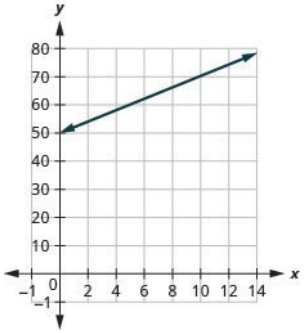
ⓐ skurðpunktar við ása ⓑ lárétt lína ⓒ hallatöluform ⓓ lóðrétt lína

4.96

ⓐ lóðrétt lína ⓑ hallatöluform ⓒ lárétt lína ⓓ skurðpunktar við ása

4.97

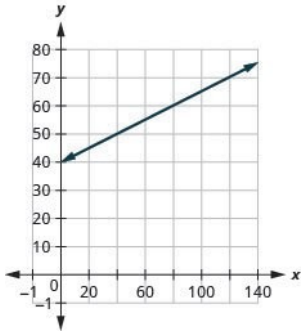
1. ⓐ 50 tommur
2. ⓑ 66 tommur
3. ⓒ Hallatalan 2, merkir að hæðin, h, hækkar um 2 tommur þegar skóstærðin, s, hækkar um 1. Skurðpunkturinn við h-ás merkir að þegar skóstærðin er 0, er hæðin 50 tommur.
4. ⓓ




4.98

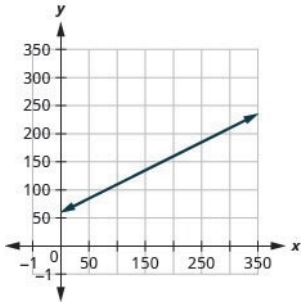
1. ⓐ 40 gráður
2. ⓑ 65 gráður

3. ⓒ Hallatalan $\frac{1}{4}$ merkir að hitastigið á Fahrenheit (F) hækkar um 1 gráðu þegar fjöldi tísta, n, eykst um 4. Skurðpunkturinn við T-ás merkir að þegar fjöldi tísta er 0 er hitastigið 40°.
4. ⓓ




4.99

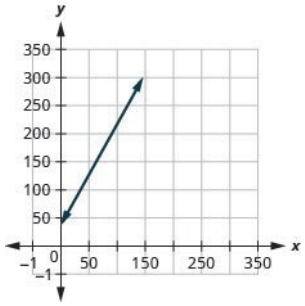
1. ⓐ $60
2. ⓑ $185
3. ⓒ Hallatalan 0,5 merkir að vikulegur kostnaður, C, hækkar um $0,50 þegar eknum mílum, n, fjölgar um 1. Skurðpunkturinn við C-ás merkir að þegar engin míla er ekin er vikulegur kostnaður $60.
4. ⓓ




4.100

1. ⓐ $35
2. ⓑ $170
3. ⓒ Hallatalan 1,8 merkir að vikulegur kostnaður, C, hækkar um $1,80 þegar boðskortum, n, fjölgar um 1. Skurðpunkturinn við C-ás merkir að þegar fjöldi boðskorta er 0 er vikulegur kostnaður $35.

**4.** ⓓ




4.101

samsíða

4.102

samsíða

4.103

samsíða

4.104

samsíða

4.105

samsíða

4.106

samsíða

4.107

samsíða

4.108

ekki samsíða; sama línan

4.109

hornrétt

4.110

hornrétt

4.111

ekki hornrétt

4.112

ekki hornrétt

4.113

$$y=\frac{2}{5}x+4$$

4.114

$$y=-x-3$$

4.115

$$y=\frac{3}{5}x+1$$

4.116

$$y=\frac{4}{3}x-5$$

4.117

$$y=\frac{5}{6}x-2$$

4.118

$$y=\frac{2}{3}x-4$$

4.119

$$y=-\frac{2}{5}x-1$$

4.120

$$y=-\frac{3}{4}x-4$$

4.121

$$y=8$$

4.122

$$y=4$$

4.123

$$y=\frac{5}{2}x-\frac{13}{2}$$

4.124

$$y=-\frac{2}{5}x+\frac{22}{5}$$

4.125

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$$

4.126

$$y=-\frac{2}{5}x-\frac{23}{5}$$

4.127

$$x=5$$

4.128

$$x=-4$$

4.129

$$y=3x-10$$

4.130

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

4.131

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

4.132

$$y=-2x+16$$

4.133

$$y=-5$$

4.134

$$y=-1$$

4.135

$$x=-5$$

4.136

$$x=-4$$

4.137
ⓐ já ⓑ já ⓒ já ⓓ já ⓔ nei

4.138
ⓐ já ⓑ já ⓒ nei ⓓ nei ⓔ já

4.139

$$y\geq -2x+3$$

4.140

$$y\leq \frac{1}{2}x-4$$

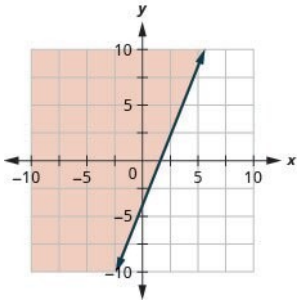
4.141

$$x - 4\,y \leq 8$$

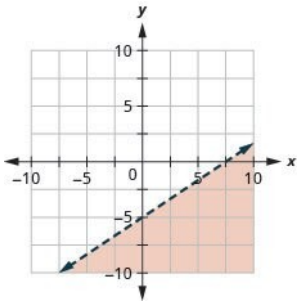
4.142

$$3\,x - y \geq 6$$

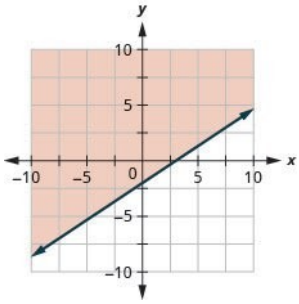
4.143



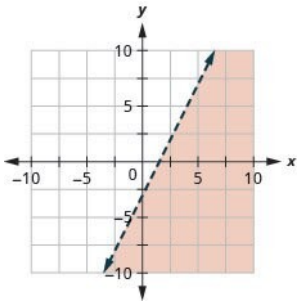

4.144



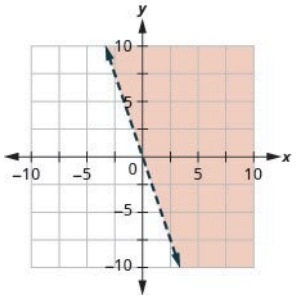

4.145



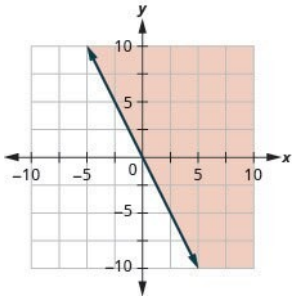

4.146



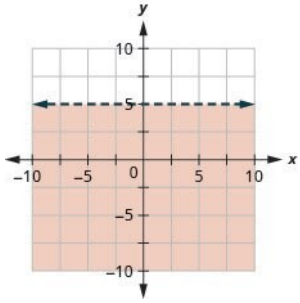
4.147



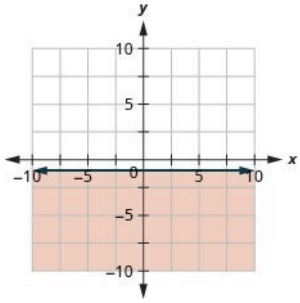

4.148




4.149

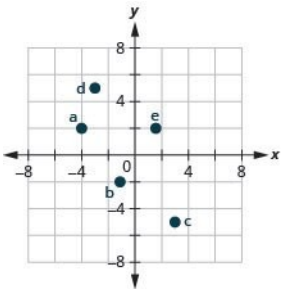



4.150

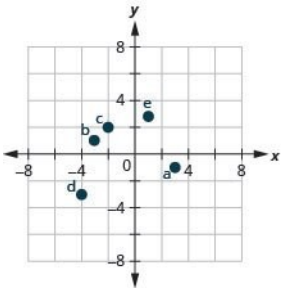


## Verkefni úr hluta 4.1

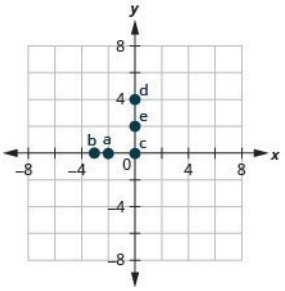
1.



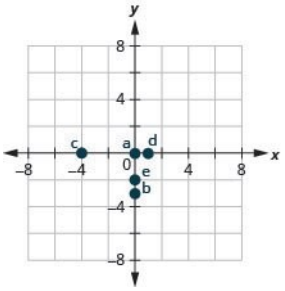

3.




5.




7.




**9.** A: $(-4,1)$ B: $(-3,-4)$ C: $(1,-3)$ D: $(4,3)$

**11.** A: $(0,-2)$ B: $(-2,0)$ C: $(0,5)$ D: $(5,0)$

**13.** a, b

**15.** a, c

**17.** b, c

**19.** a, b

**21.**

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-4$ | $(0, -4)$ |
| 2 | 0 | $(2, 0)$ |
| $-1$ | $-6$ | $(-1, -6)$ |

**23.**

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 | $(0, 5)$ |
| 3 | 2 | $(3, 2)$ |
| $-2$ | 7 | $(-2, 7)$ |

**25.**

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $(0, 1)$ |
| 3 | 2 | $(3, 2)$ |
| 6 | 3 | $(6, 3)$ |

**27.**

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-2$ | $(0, -2)$ |
| 2 | $-5$ | $(2, -5)$ |
| $-2$ | 1 | $(-2, 1)$ |

**29.**

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | $(0, 2)$ |
| 3 | 4 | $(3, 1)$ |
| 6 | 0 | $(6, 0)$ |

**31.**

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-2$ | $(0, -2)$ |
| 10 | 2 | $(10, 2)$ |
| 5 | 0 | $(5, 0)$ |

**33.** Svör geta verið mismunandi.

**35.** Svör geta verið mismunandi.

**37.** Svör geta verið mismunandi.

**39.** Svör geta verið mismunandi.

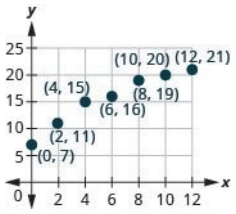
**41.** Svör geta verið mismunandi.

**43.** Svör geta verið mismunandi.

**45.** Svör geta verið mismunandi.

**47.** Svör geta verið mismunandi.

**49.** ⓐ




ⓑ Aldur og þyngd eru aðeins jákvæð.

**51.** Svör geta verið mismunandi.

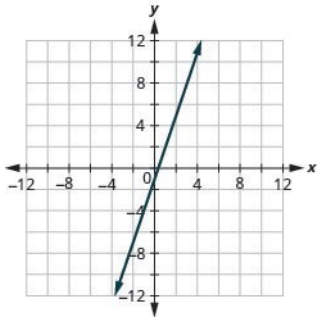
**53.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 4.2

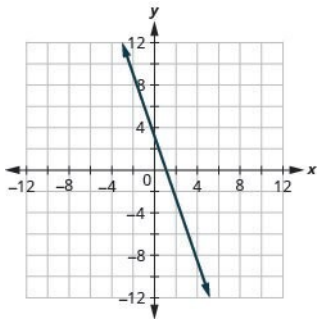
**55.** ⓐ já; já ⓑ nei; nei ⓒ já; já ⓓ já; já

**57.** ⓐ já; já ⓑ já; já ⓒ já; já ⓓ nei; nei

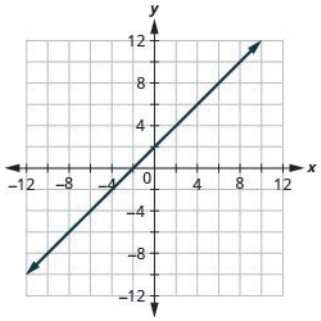
59.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

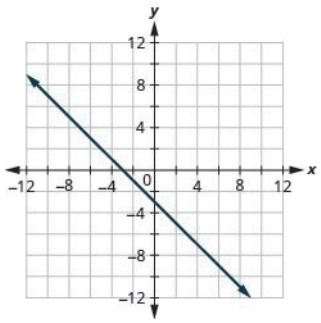
61.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

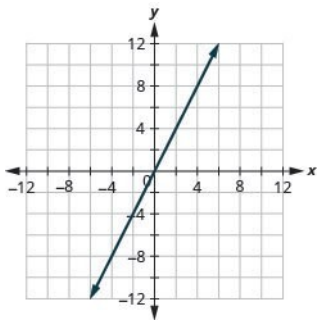
63.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

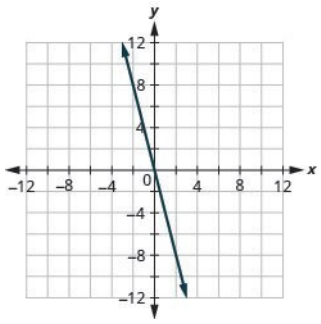
65.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

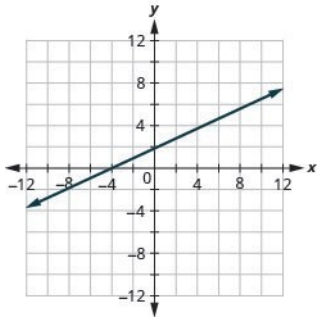
67.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

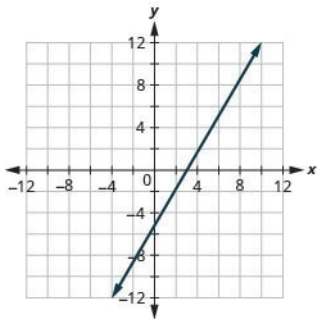
69.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

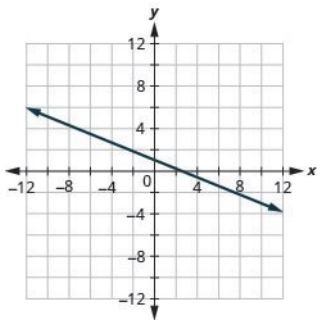
71.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

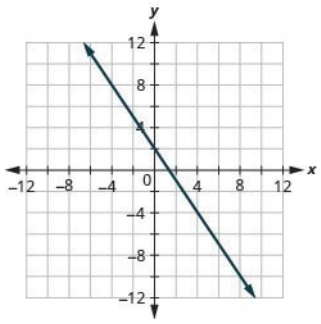
73.


y
x
12
8
4
0
−4
−8
−12
−12
−8
−4
4
8
12

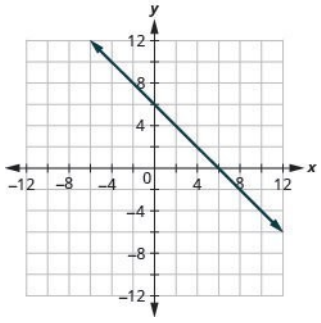
75.


y
x
12
8
4
0
−12
−8
−4
4
8
12
−4
−8
−12

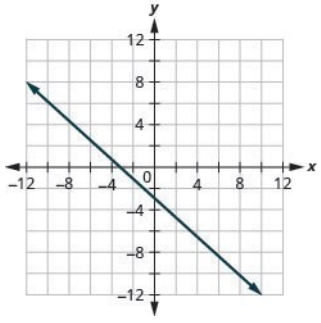
77.


y
x
12
8
4
0
−12
−8
−4
4
8
12
−4
−8
−12

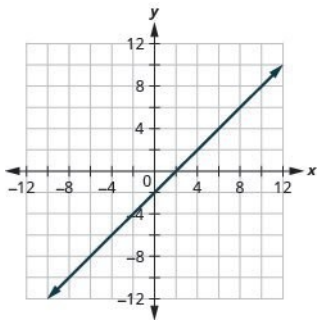
79.


y
x
12
8
4
0
−12
−8
−4
4
8
12
−4
−8
−12

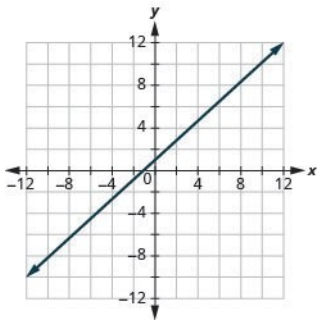
81.


y
x
12
8
4
0
−12
−8
−4
4
8
12
−4
−8
−12

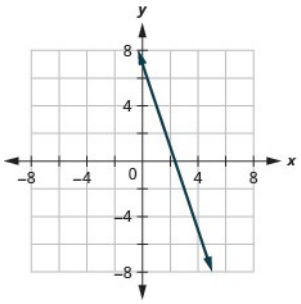
83.


y
x
12
8
4
0
−12
−8
−4
4
8
12
−4
−8
−12

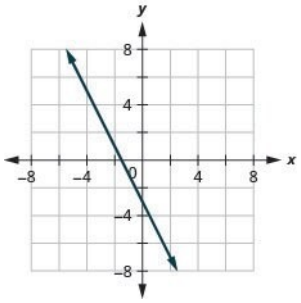
85.


y
x
12
8
4
0
−12
−8
−4
4
8
12
−4
−8
−12

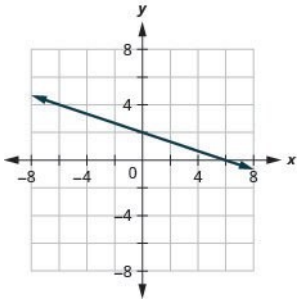
87.


y
x
8
4
0
−8
−4
4
8
−4
−8

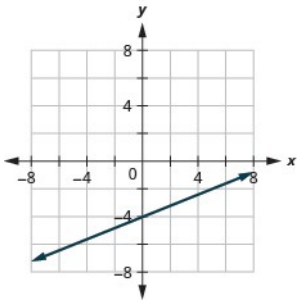
89.


y
x
8
4
0
−8
−4
4
8
−4
−8

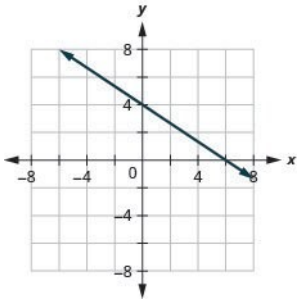
91.



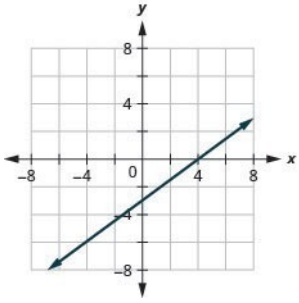

93.



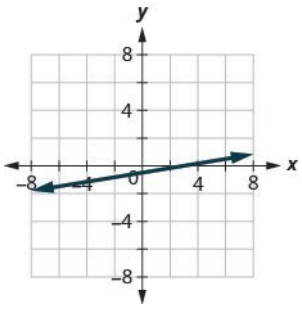

95.



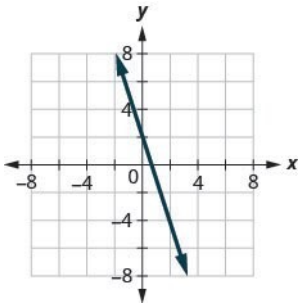

97.



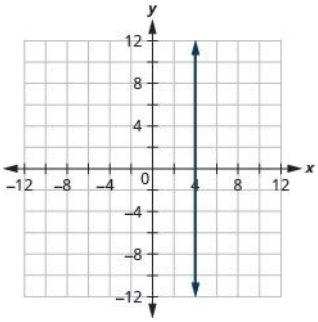
99.



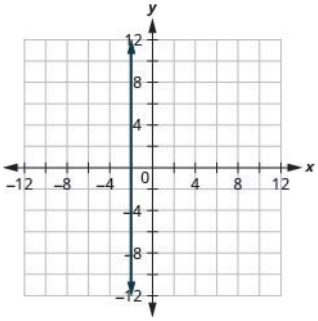

101.



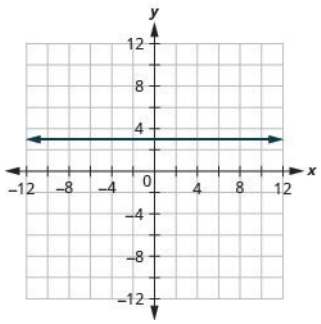

103.



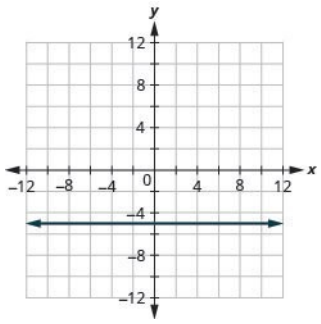

105.



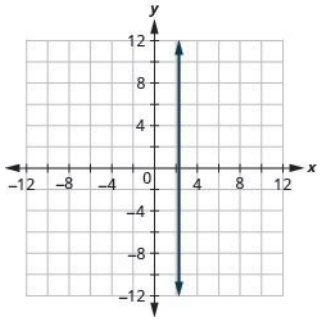
107.



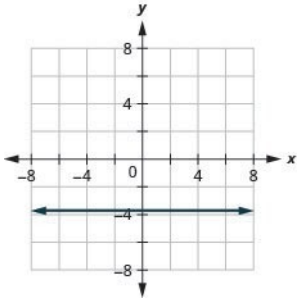

109.



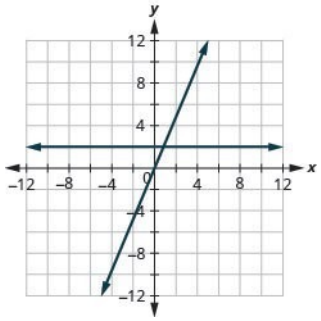

111.



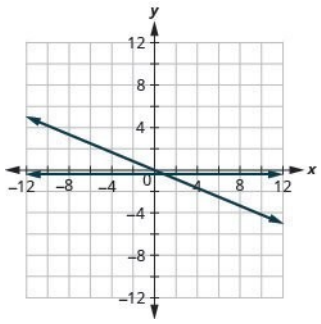

113.



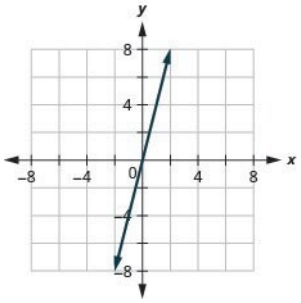
115.



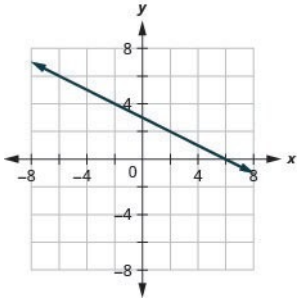

117.



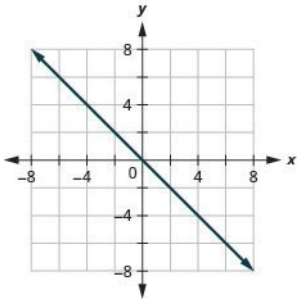

119.



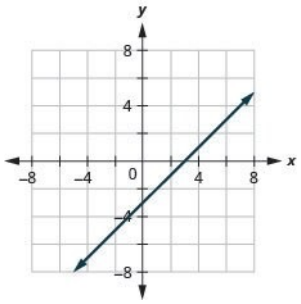

121.



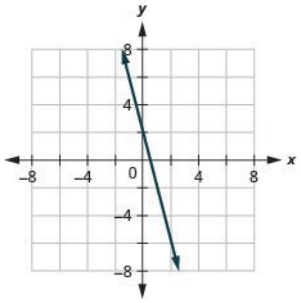
123.



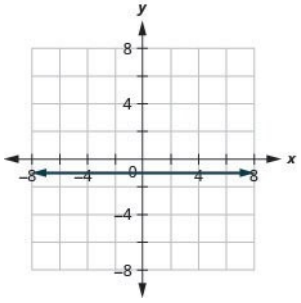

125.



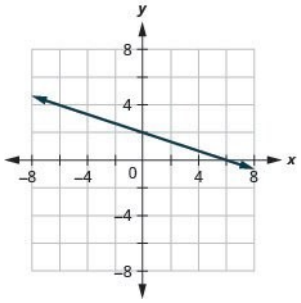

127.



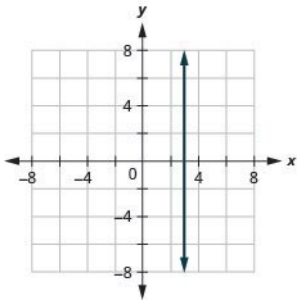

129.



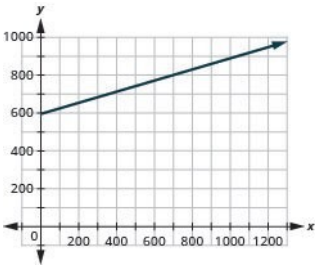
131.




133.




**135.** $722, $850, $978




**137.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 4.3

139.

$$(3,0),(0,3)$$

141.

$$(5,0),(0,-5)$$

143.

$$(-2,0),(0,-2)$$

145.

$$(-1,0),(0,1)$$

147.

$$(6,0),(0,3)$$

149.

$$(0,0)$$

151.

$$(4,0),(0,4)$$

153.

$$(-2,0),(0,-2)$$

155.

$$(5,0),(0,-5)$$

157.

$$(-3,0),(0,3)$$

159.

$$(8,0),(0,4)$$

161.

$$(2,0),(0,6)$$

163.

$$(12,0),(0,-4)$$

165.

$$(2,0),(0,-8)$$

167.

$$(5,0),(0,2)$$

169.

$$(4,0),(0,-6)$$

171.

$$(-3,0),(0,1)$$

173.

$$(-10,0),(0,2)$$

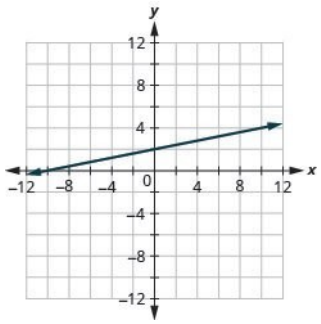
175.

$$(0,0)$$

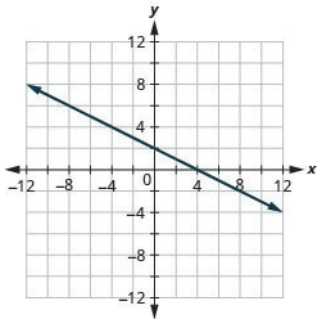
177.

$$(0,0)$$

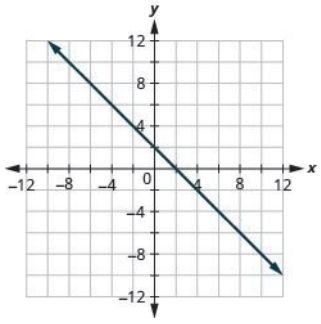
179.



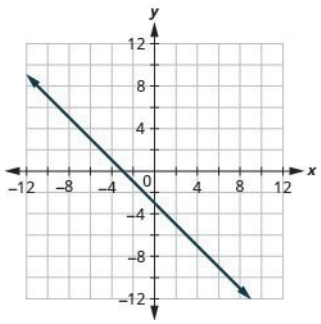

181.



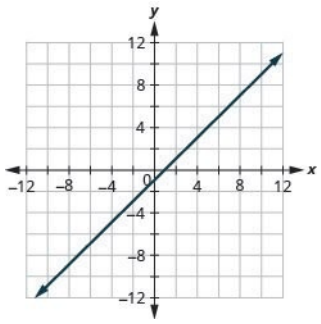

183.



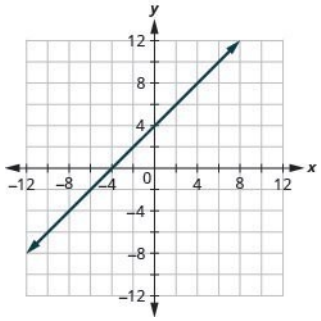
185.



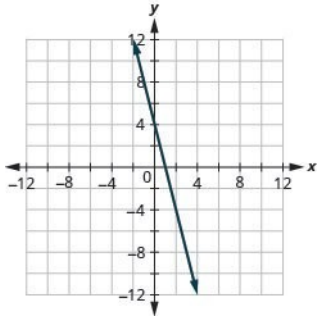

187.



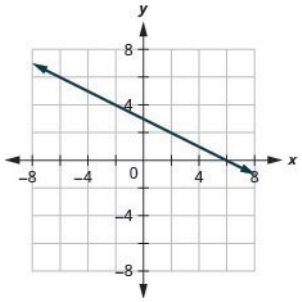

189.



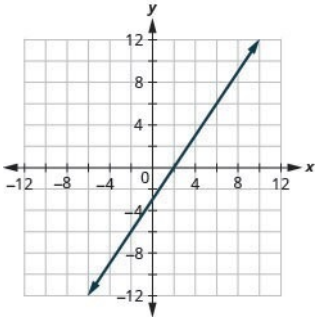

191.



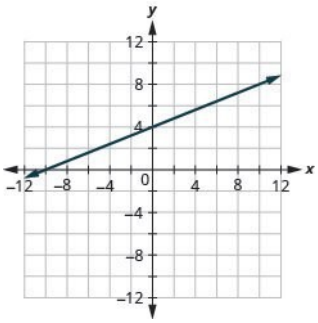
193.



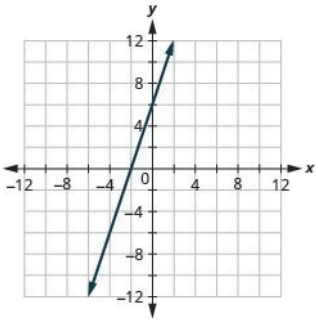

195.



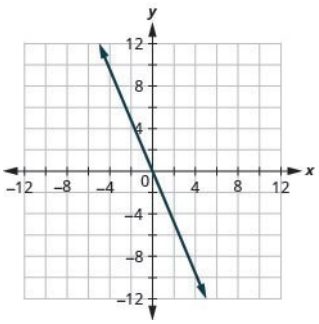

197.



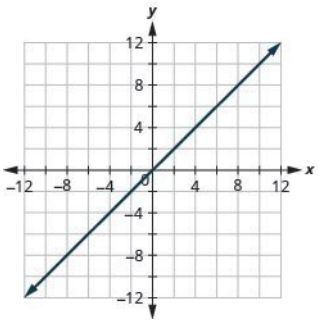

199.



201.




203.




**205.** ⓐ $(0,1000),(15,0)$

ⓑ Klukkan $(0,1000)$, hefur hann verið á ferð í 0 klukkustundir og á 1000 mílur eftir. Klukkan $(15,0)$, hefur hann verið á ferð í 15 klukkustundir og á 0 mílur eftir.

**207.** Svör geta verið mismunandi.

**209.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 4.4

211.

$$\frac{1}{4}$$

213.

$$\frac{2}{3}$$

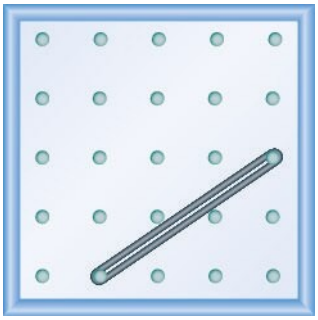
215.

$$\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

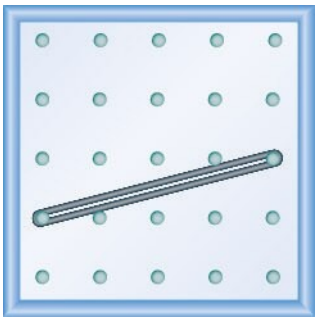
217.

$$-\frac{3}{4}$$

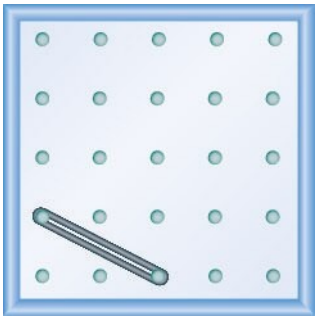
219.



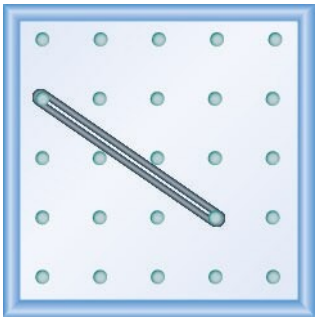
221.



223.



225.



227.

$$\frac{2}{5}$$

229.

$$\frac{5}{4}$$

231.

$$-\frac{1}{3}$$

233.

$$-\frac{3}{4}$$

235.

$$\frac{3}{4}$$

237.

$$-3$$

239.

$$-\frac{2}{3}$$

241.

$$\frac{1}{4}$$

**243.** o

**245.** óskilgreint

**247.** o

**249.** óskilgreint

251.

$$\frac{5}{2}$$

253.

$$\frac{3}{4}$$

255.

$$-\frac{5}{2}$$

257.

$$-\frac{8}{7}$$

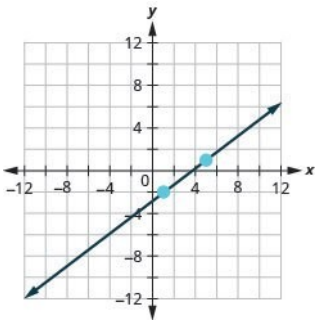
259.

$$\frac{7}{3}$$

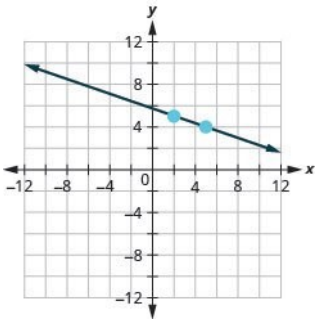
261.

$$-1$$

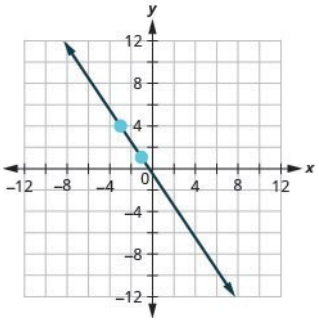
263.



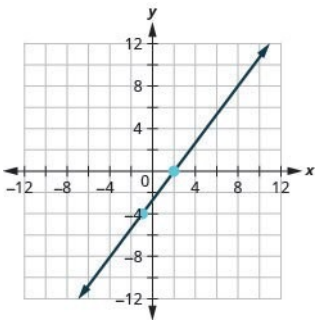

265.



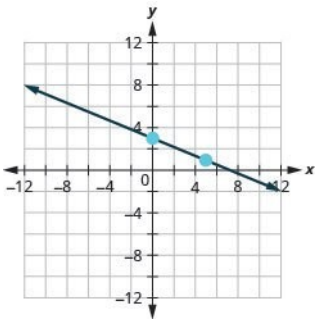

267.



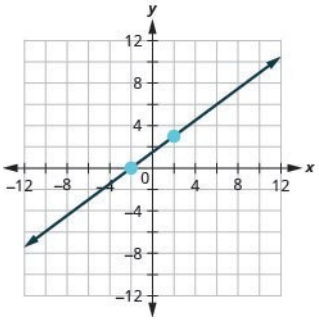
269.



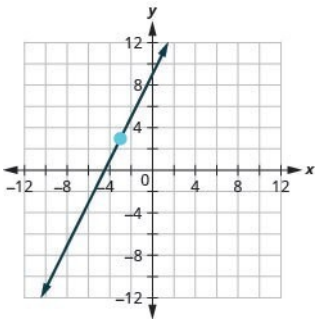

271.



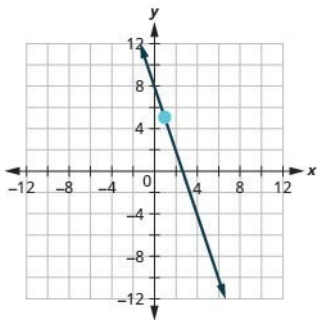

273.




275.



277.




**279.** ⓐ $\frac{1}{3}$ ⓑ 4 12 halli eða halli 4 á móti 12

**281.** $\frac{3}{50}$; lóðrétt breyting = 3, lárétt breyting = 50

**283.** ⓐ 288 tommur (24 fet) ⓑ Líkön geta verið mismunandi.

**285.** Þegar hallatalan er jákvæð hækkar línan frá vinstri til hægri. Þegar hallatalan er neikvæð lækkar línan frá vinstri til hægri.

**287.** Lóðrétt lína hefur láréttu breytinguna 0. Þar sem deiling með 0 er óskilgreind er hallatalan óskilgreind.

## Verkefni úr hluta 4.5

**289.** hallatala $m=4$ og y-skurðpunktur $(0,-2)$

**291.** hallatala $m=-3$ og y-skurðpunktur $(0,1)$

**293.** hallatala $m=-\frac{2}{5}$ og y-skurðpunktur $(0,3)$

295.

$$-9;(0,7)$$

297.

$$4;(0,-10)$$

299.

$$-4;(0,8)$$

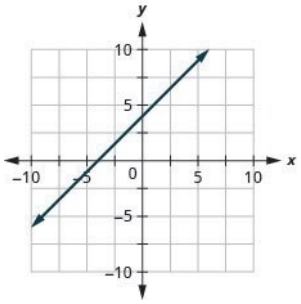
301.

$$-\frac{8}{3};(0,4)$$

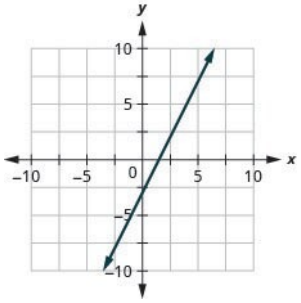
303.

$$\frac{7}{3};(0,-3)$$

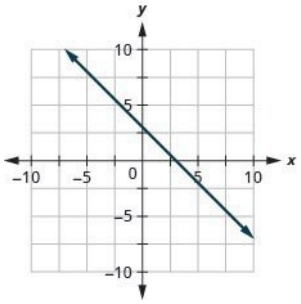
305.



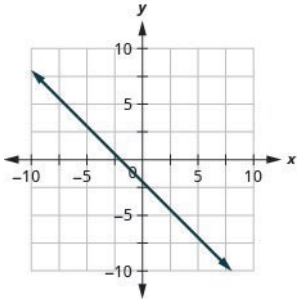

307.



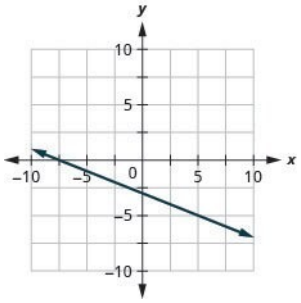

309.



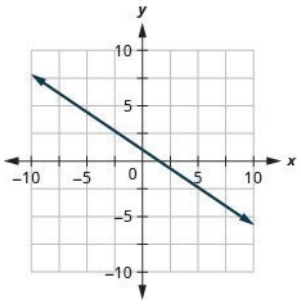

311.



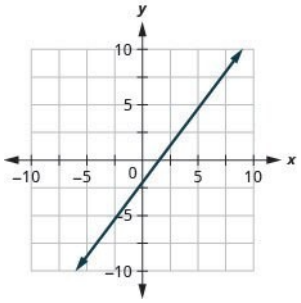
313.



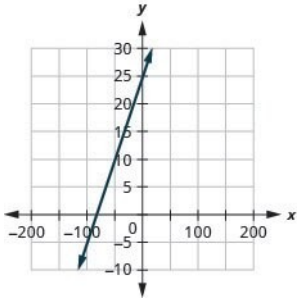

315.




317.




319.




**321.** lárétt lína

**323.** lóðrétt lína

**325.** hallatöluform

**327.** skurðpunktar við ása

**329.** hallatöluform

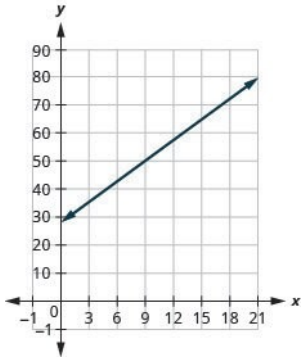
**331.** lárétt lína

**333.** skurðpunktar við ása

**335.** hallatöluform

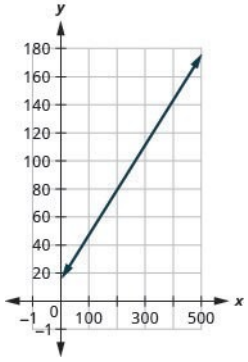
337.

1. ⓐ $28
2. ⓑ $66,10
3. ⓒ Hallatalan 2,54, merkir að greiðsla Randys, P, hækkar um $2,54 þegar fjöldi vatnseininga sem hann notaði, w, hækkar um 1. Skurðpunkturinn við P-ás merkir að ef fjöldi vatnseininga sem Randy notaði var 0, væri greiðslan $28.
4. ⓓ




339.

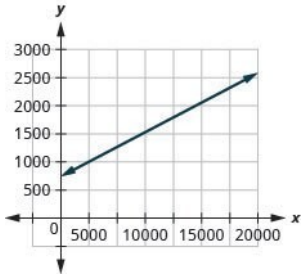
1. ⓐ $15
2. ⓑ $143
3. ⓒ Hallatalan 0,32, merkir að kostnaðurinn, C, hækkar um $0,32 þegar fjöldi ekinna mílna, m, hækkar um 1. Skurðpunkturinn við C-ás merkir að ef Janelle ekur 0 mílur á einum degi, væri kostnaðurinn $15.
4. ⓓ




341.

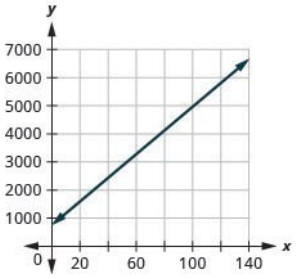
1. ⓐ $750
2. ⓑ $2418,60

3. ⓒ Hallatalan 0,09, merkir að laun Patels, S, hækkar um $0,09 fyrir hverja $1 hækkun í sölu hans. Skurðpunkturinn við S-ás merkir að þegar sala hans er $0, eru laun hans $750.
4. ⓓ




343.

1. ⓐ $2850
2. ⓑ $4950
3. ⓒ Hallatalan 42, merkir að kostnaðurinn, C, hækkar um $42 þegar fjöldi gesta hækkar um 1. Skurðpunkturinn við C-ás merkir að þegar fjöldi gesta er 0, væri kostnaðurinn $750.
4. ⓓ




**345.** samsíða

**347.** samsíða

**349.** ekki samsíða

**351.** samsíða

**353.** samsíða

**355.** samsíða

**357.** samsíða

**359.** samsíða

**361.** ekki samsíða

**363.** ekki samsíða

**365.** ekki samsíða

**367.** ekki samsíða

**369.** ekki samsíða

**371.** hornrétt

**373.** hornrétt

**375.** ekki hornrétt

**377.** ekki hornrétt

**379.** hornrétt

**381.** hornrétt

383.

1. ⓐ Fyrir hverja hækkun um eina gráðu á Fahrenheit fjölgar tístum um fjögur.
2. ⓑ Það yrðu $-160$ tíst þegar hitastigið á Fahrenheit væri $0\,°$. (Athugið að þetta er ekki raunhæft; líkanið gildir ekki fyrir öll möguleg hitastig.)

**385.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr kafla 4.6

387.

$$y=4x+1$$

389.

$$y=8x-6$$

391.

$$y=-x+7$$

393.

$$y=-3x-1$$

395.

$$y=\frac{1}{5}x-5$$

397.

$$y=-\frac{2}{3}x-3$$

399.

$$y=2$$

401.

$$y=-4x$$

403.

$$y=-2x+4$$

405.

$$y=\frac{3}{4}x+2$$

407.

$$y=-\frac{3}{2}x-1$$

409.

$$y=6$$

411.

$$y=\frac{3}{8}x-1$$

413.

$$y=\frac{5}{6}x+2$$

415.

$$y=-\frac{3}{5}x+1$$

417.

$$y=-\frac{1}{3}x-11$$

419.

$$y=4$$

421.

$$y=-7$$

423.

$$y=-\frac{5}{2}x-22$$

425.

$$y=-4x-11$$

427.

$$y=-8$$

429.

$$y=-4x+13$$

431.

$$y=x+5$$

433.

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}$$

435.

$$y=7x+22$$

437.

$$y=-\frac{6}{7}x+\frac{4}{7}$$

439.

$$y=\frac{1}{5}x-2$$

441.

$$x=4$$

443.

$$x=-2$$

445.

$$y=2$$

447.

$$y=-3$$

449.

$$y=4x$$

451.

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

453.

$$y=5$$

455.

$$y=3x-1$$

457.

$$y=-3x+3$$

459.

$$y=2x-6$$

461.

$$y=-\frac{2}{3}x+5$$

463.

$$x=-3$$

465.

$$x=4$$

467.

$$y=-4$$

469.

$$y=-1$$

471.

$$y=x$$

473.

$$y=-\frac{3}{2}x-1$$

475.

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$$

477.

$$y=\frac{5}{4}x$$

479.

$$x=-5$$

481.

$$y=1$$

483.

$$y=x+5$$

485.

$$y=\frac{5}{6}x+2$$

487.

$$y=-\frac{2}{3}x+5$$

489.

$$y=-\frac{3}{5}x+1$$

491.

$$y=2$$

493.

$$y=2x+4$$

495.

$$x=-3$$

497.

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}$$

499.

$$y=\frac{3}{4}x$$

501.

$$y=1{,}2x+5{,}2$$

**503.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr kafla 4.7

**505.** ⓐ já ⓑ já ⓒ nei ⓓ já ⓔ já

**507.** ⓐ já ⓑ nei ⓒ já ⓓ já ⓔ já

**509.** ⓐ nei ⓑ nei ⓒ nei ⓓ já ⓔ já

511.

$$y < 2x - 4$$

513.

$$y \leq -\frac{1}{3}x - 2$$

515.

$$x + y \geq 3$$

517.

$$x + 2y \leq -2$$

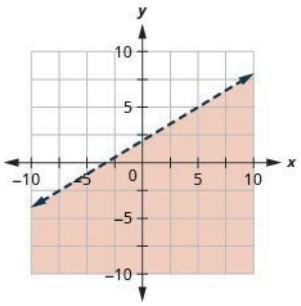
519.

$$2x - y < 4$$

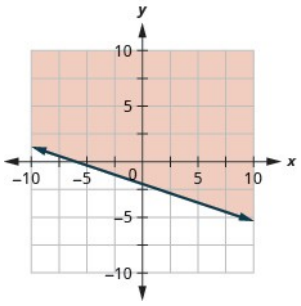
521.

$$4x - 3y > 12$$

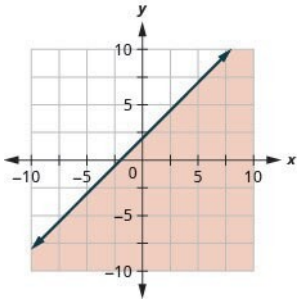
523.



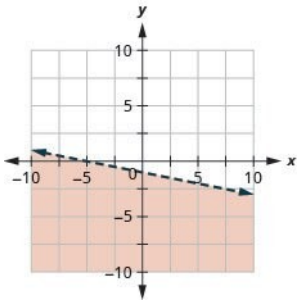

525.



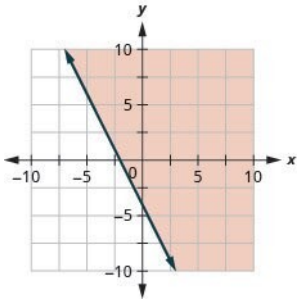
527.



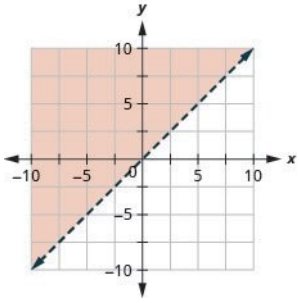

529.



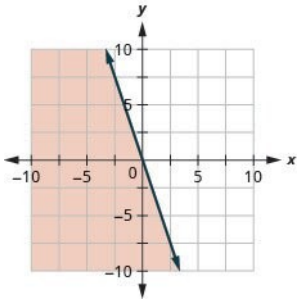

531.



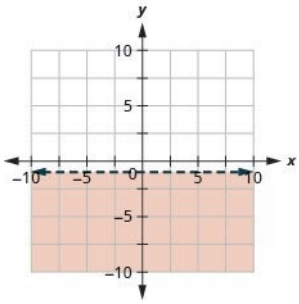

533.



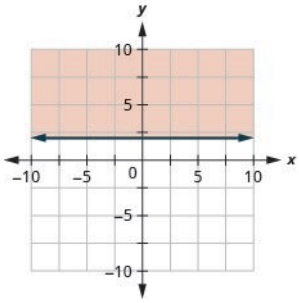
535.



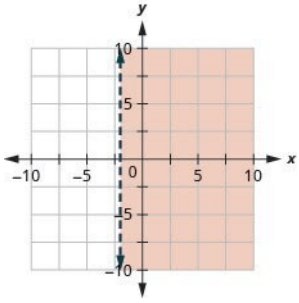

537.



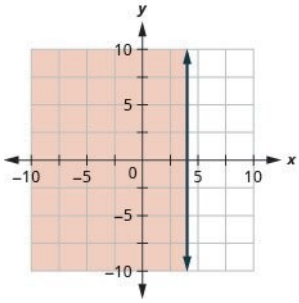

539.



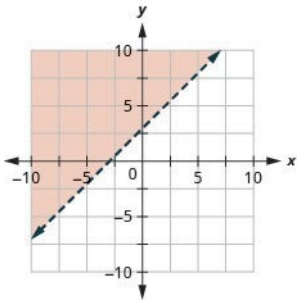

541.



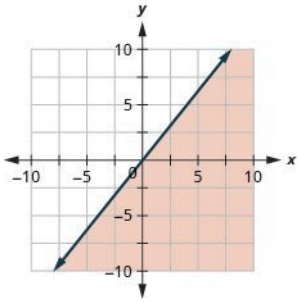
543.



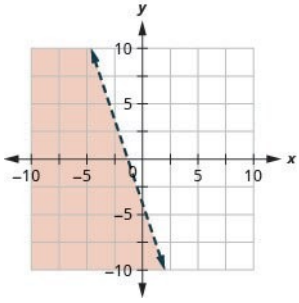

545.



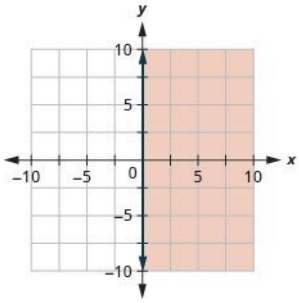

547.




549.

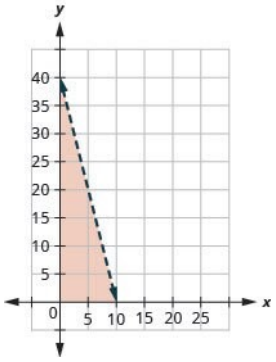


551.




553.

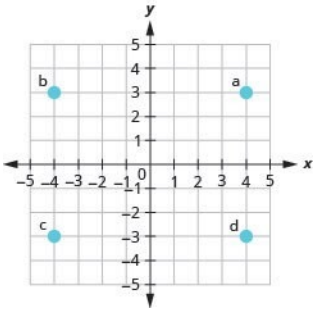
1. ⓐ



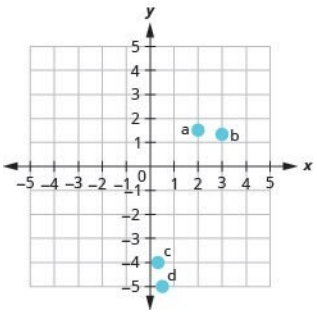

2. ⓑ Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

557.




559.



**561.** ⓐ $(2,0)$ ⓑ $(0,-5)$ ⓒ $(-4,0)$ ⓓ $(0,3)$

**563.** a, b

565.

| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3 | $(0,3)$ |
| 4 | 1 | (4, 1) |
| $-2$ | 4 | $(-2,4)$ |

567.

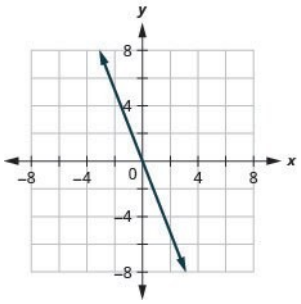
| $x$ | $y$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 3 | $(0,3)$ |
| 2 | 0 | $(2,0)$ |
| $-2$ | 6 | $(-2,6)$ |

**569.** Svör geta verið mismunandi.

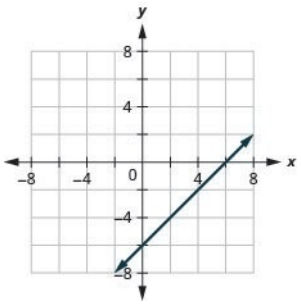
**571.** Svör geta verið mismunandi.

**573.** ⓐ já; já ⓑ já; já ⓒ já; já ⓓ nei; nei

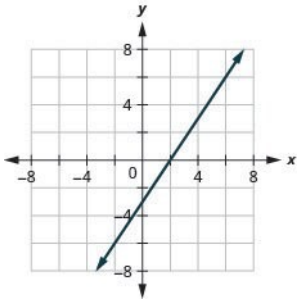
575.



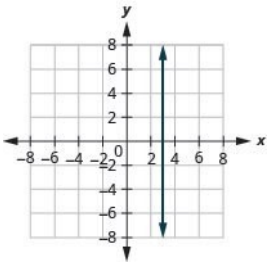

577.



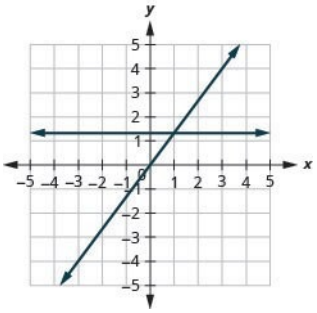
579.




581.




583.




585.

$$(3,0),(0,3)$$

587.

$$(-1,0),(0,1)$$

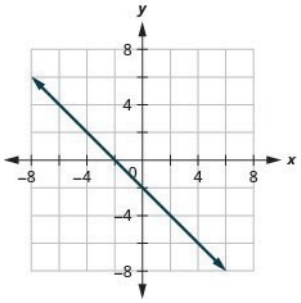
589.

$$(6,0),(0,4)$$

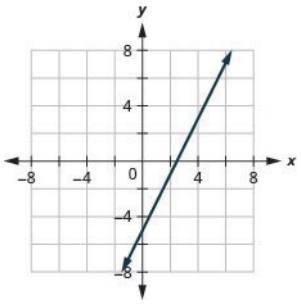
591.

$$(0,0)$$

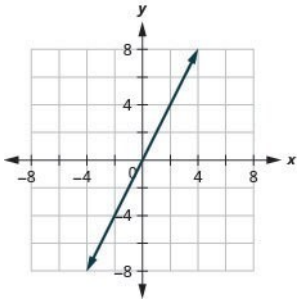
593.




595.




597.



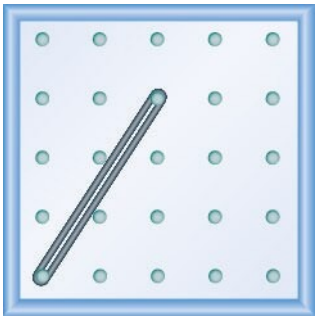

599.

$$\frac{4}{3}$$

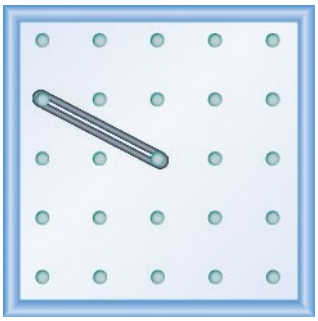
601.

$$-\frac{2}{3}$$

603.



605.



**607.** 1

609.

$$-\frac{1}{2}$$

**611.** óskilgreint

**613.** 0

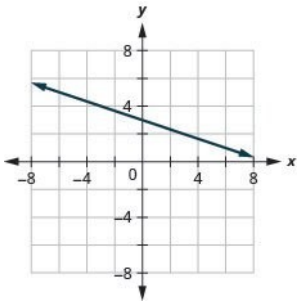
615.

$$-6$$

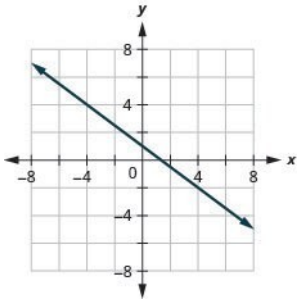
617.

$$\frac{5}{2}$$

619.



621.




623.

$$\frac{1}{10}$$

**625.** hallatala $m=-\frac{2}{3}$ og y-skurðpunktur $(0,4)$

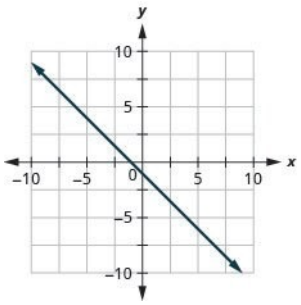
627.

$$\frac{5}{3};(0,-6)$$

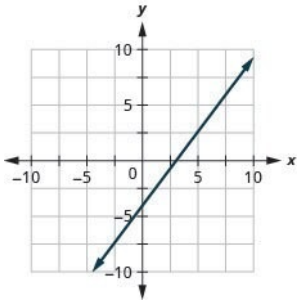
629.

$$\frac{4}{5};\left(0,-\frac{8}{5}\right)$$

631.




633.

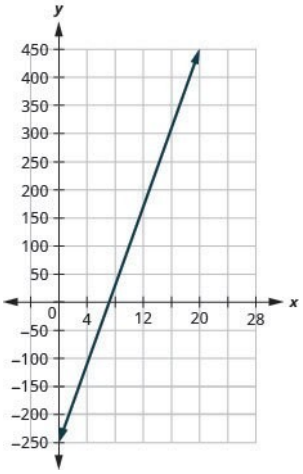



**635.** lárétt lína

**637.** skurðpunktar við ása

**639.** merkja punkta inn á hnitakerfi

**641.** ⓐ −$250 ⓑ $450 ⓒ Hallatalan 35, merkir að vikulegur hagnaður Marjorie, P, hækkar um $35 fyrir hverja viðbótarkennslustund sem hún kennir nemanda. Skurðpunkturinn við P-ás merkir að þegar fjöldi kennslustunda er 0, tap Marjorie er $250. ⓓ




**643.** ekki samsíða

**645.** hornrétt

647.

$$y = -5x - 3$$

649.

$$y = -2x$$

651.

$$y = -3x + 5$$

653.

$$y = -4$$

655.

$$y = \frac{3}{5}x$$

657.

$$y = -2x - 5$$

659.

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

661.

$$y=2$$

663.

$$y=-\frac{2}{5}x+8$$

665.

$$y=3$$

667.

$$y=-\frac{3}{2}x-6$$

669.

$$y=1$$

**671.** ⓐ já ⓑ nei ⓒ já ⓓ já ⓔ nei

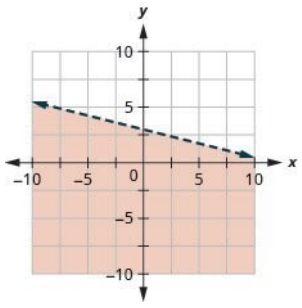
673.

$$y\geq\frac{2}{3}x-3$$

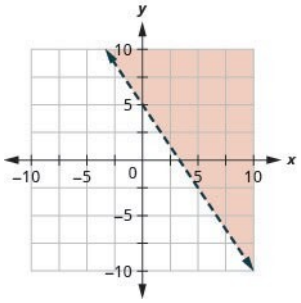
675.

$$x-2y\geq 6$$

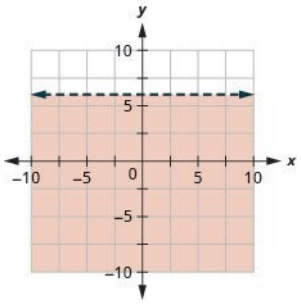
677.



679.




681.




## Æfingapróf

**683.** ⓐ já ⓑ já ⓒ nei

685.

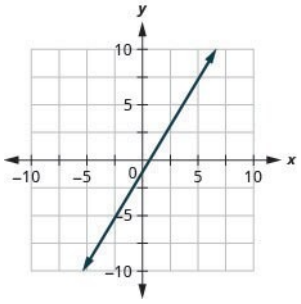
$$(3,0),(0,-4)$$

**687.** óskilgreint

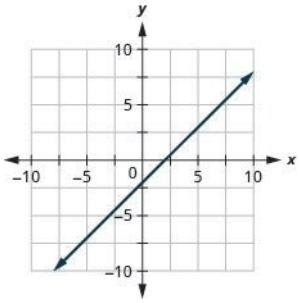
689.

$$1$$

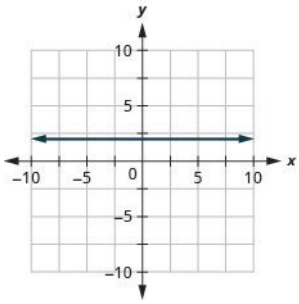
691.



693.




695.




697.

$$y = -\frac{3}{4}x - 2$$

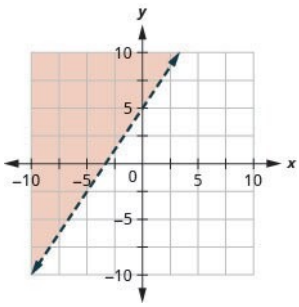
699.

$$y = \frac{1}{2}x - 4$$

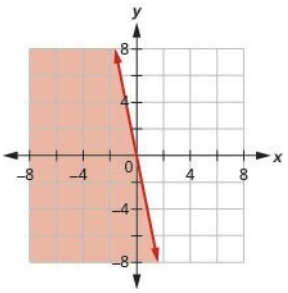
701.

$$y = -\frac{4}{5}x - 5$$

703.



705.




# Kafli 5

## Undirbúningur

5.1

(a) já (b) nei

5.2

$$m=3;\ b=-12$$

5.3

$$(6,0),(0,-4)$$

5.4

$$-15+5x$$

5.5

$$-2n-6$$

5.6

$$y=4$$

5.7

$$x=3y-1$$

5.8

$$-30+15a$$

5.9

$$x=2$$

5.10

11

5.11
Jon vann sér inn $22.000 og Ron vann sér inn $74.000.

5.12
35 mílur

5.13

$$6.287,05$$

5.14

$$0,082$$

5.15

$$\$5,85$$

5.16




5.17

$$a > -4$$

5.18
nei

## Prófið sjálf

5.1
ⓐ já ⓑ nei

5.2
ⓐ nei ⓑ já

5.3

$$(3,2)$$

5.4

$$(2,3)$$

5.5

$$(-2,-2)$$

5.6

$$(1,6)$$

5.7

$$(3,4)$$

5.8

$$(5, -4)$$

5.9

$$(4, 2)$$

5.10

$$(-3, 5)$$

5.11

$$(9, -1)$$

5.12

$$(4, -6)$$

5.13
engin lausn
5.14
engin lausn
5.15
óendanlega margar lausnir
5.16
óendanlega margar lausnir
5.17
engin lausn, insamkvæmt, óháð
5.18
engin lausn, insamkvæmt, óháð
5.19
ein lausn, samkvæmt, óháð
5.20
ein lausn, samkvæmt, óháð
5.21
óendanlega margar lausnir, samkvæmt, háð
5.22
óendanlega margar lausnir, samkvæmt, háð
5.23
Manny þarf 3 kvart af safaþykkni og 9 kvart af vatni.
5.24
Alisha þarf 15 únsur af kaffi og 3 únsur af mjólk.
5.25

$$(6, 1)$$

5.26

$$(4,2)$$

5.27

$$(2,4)$$

5.28

$$(-1,-3)$$

5.29

$$(1,-2)$$

5.30

$$(2,6)$$

5.31

$$(-2,-3)$$

5.32

$$(6,2)$$

5.33

$$(6,2)$$

5.34

$$(8,2)$$

5.35

$$\left(2,\frac{3}{2}\right)$$

5.36

$$\left(-\frac{1}{2},-2\right)$$

5.37
óendanlega margar lausnir
5.38
óendanlega margar lausnir
5.39
engin lausn
5.40
engin lausn

5.41
Tölurnar eru 3 og 7.
5.42
Tölurnar eru 2 og −8.
5.43
Lengdin er 12 og breiddin er 8.
5.44
Lengdin er 23 og breiddin er 6.
5.45
Hornin mælast 22 gráður og 68 gráður.
5.46
Hornin mælast 36 gráður og 54 gráður.
5.47
Selja þyrfti 160 tryggingar til þess að heildarlaunin yrðu þau sömu.
5.48
Kenneth þyrfti að selja 1.000 jakkaföt.
5.49

$$(2,-1)$$

5.50

$$(-2,3)$$

5.51

$$(3,-1)$$

5.52

$$(-2,5)$$

5.53

$$(1,1)$$

5.54

$$(-2,4)$$

5.55

$$(1,3)$$

5.56

$$(4,-3)$$

5.57

$$(6,2)$$

5.58

$$(1, -2)$$

5.59

óendanlega margar lausnir

5.60

óendanlega margar lausnir

5.61

engin lausn

5.62

engin lausn

5.63

Tölurnar eru 25 og 17.

5.64

Tölurnar eru −25 og 10.

5.65

Bleyjupokinn kostar $11 og dósin af ungbarnablöndu kostar $13.

5.66

Banani inniheldur 105 hitaeiningar og jarðarber 5 hitaeiningar.

5.67

ⓐ Þar sem báðar jöfnurnar eru á staðalformi er þægilegast að nota eyðingaraðferð. ⓑ Þar sem önnur jafnan er þegar leyst með tilliti til $x$ er þægilegast að nota innsetningaraðferð.

5.68

ⓐ Þar sem önnur jafnan er þegar leyst með tilliti til $y$ er þægilegast að nota innsetningaraðferð. ⓑ Þar sem báðar jöfnurnar eru á staðalformi er þægilegast að nota eyðingaraðferð.

5.69

$$\begin{cases} m + n = -23 \\ m = n - 7 \end{cases}$$

5.70

$$\begin{cases} m + n = -18 \\ m = n + 40 \end{cases}$$

5.71

$$\begin{cases} w + h = 84.000 \\ h = 2w - 18.000 \end{cases}$$

5.72

$$\begin{cases} s = 2n - 5 \\ s + n = 43 \end{cases}$$

5.73

Ali er 26 og Jameela er 14.

5.74

Jake er 9 ára og pabbi hans er 33 ára.

5.75

Mark brenndi 11 hitaeiningum á hverri mínútu í jóga og 7 hitaeiningum á hverri mínútu í sprellikarli.

5.76

Erin brenndi 11 hitaeiningum á mínútu á róðrarvélinni og 5 hitaeiningum á mínútu við lyftingar.

5.77

Hornin mælast 55 gráður og 35 gráður.

5.78

Hornin mælast 5 gráður og 85 gráður.

5.79

Hornin mælast 42 gráður og 138 gráður.

5.80

Hornin mælast 66 gráður og 114 gráður.

5.81

Lengdin er 60 fet og breiddin 35 fet.

5.82

Lengdin er 60 fet og breiddin 38 fet.

5.83

Það tekur Clark 4 klukkustundir að ná Mitchell.

5.84

Það tekur Sally $1\frac{1}{2}$ klukkustundir að ná Charlie.

5.85

Hraði bátsins er 11 mílur á klukkustund og hraði straumsins er 1 mílur á klukkustund.

5.86

Hraði kanósins er 7 mílur á klukkustund og hraði straumsins er 1 mílur á klukkustund.

5.87

Hraði þotunnar er 236 mílur á klukkustund og vindhraðinn er 29 mílur á klukkustund.

5.88

Hraði þotunnar er 408 mílur á klukkustund og vindhraðinn er 24 mílur á klukkustund.

5.89

Seldir voru 206 miðar fyrir fullorðna og 347 barnamiðar.

5.90

Seldir voru 521 miðar fyrir fullorðna og 842 barnamiðar.

5.91

Matilda á 13 tíu senta myntir og 29 25 senta myntir.

5.92

Juan á 36 fimm senta myntir og 63 tíu senta myntir.

5.93
Greta ætti að nota 3 pund af jarðhnetum og 2 pund af kasjúhnetum.

5.94
Sammy ætti að kaupa 10 pund af baunum og 10 pund af nautahakki.

5.95
LeBron þarf 120 ml af 25% lausn og 30 ml af 50% lausn.

5.96
Anatole ætti að blanda 125 ml af 10% lausn og 125 ml af 40% lausn.

5.97
Leon ætti að setja $42.000 í hlutabréfasjóðinn og $8000 á sparnaðarreikninginn.

5.98
Julius fjárfesti $1.750 á 11% og og $5.250 á 13%.

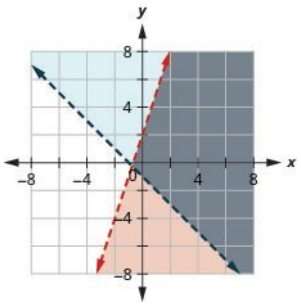
5.99
Höfuðstóll bankalánsins var $4.000. Höfuðstóll alríkislánsins var $14.000.

5.100
Annar höfuðstóllinn var $41.200 á 4,5%. Hinn höfuðstóllinn var $24.000 á 7,2%.

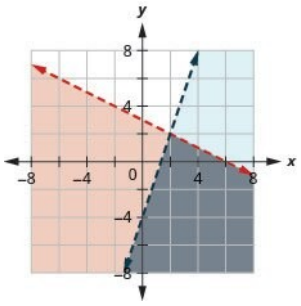
5.101
ⓐ nei ⓑ já

5.102
ⓐ nei ⓑ nei

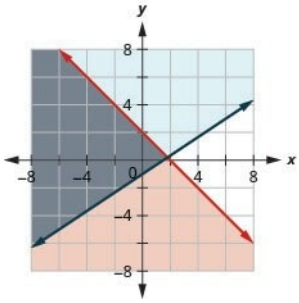
5.103



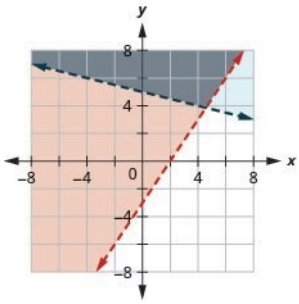

5.104



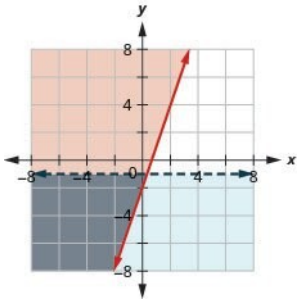
5.105



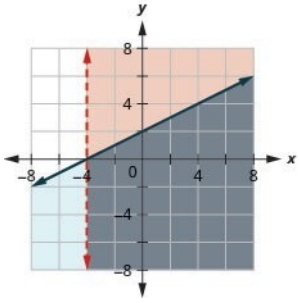

5.106




5.107

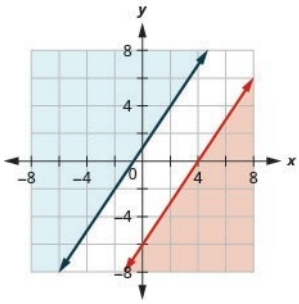



5.108



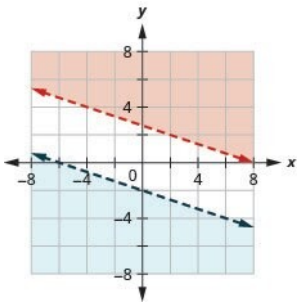

5.109

engin lausn



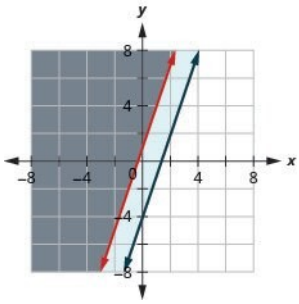

**5.110**

engin lausn



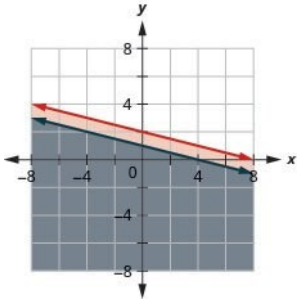

**5.111**

$$y \geq 3x + 1$$



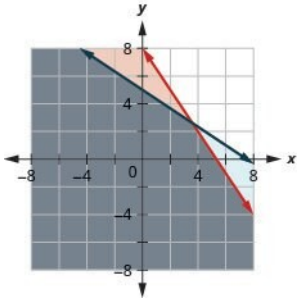

**5.112**

$$x + 4\,y \leq 4$$



5.113

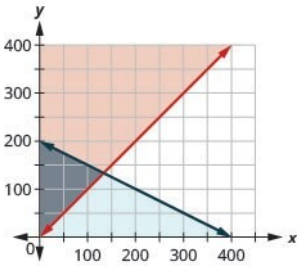
1. ⓐ $\begin{cases} 30m + 20p \leq 160 \\ 2m + 3p \leq 15 \end{cases}$
2. ⓑ




3. ⓒ já
4. ⓓ nei

5.114

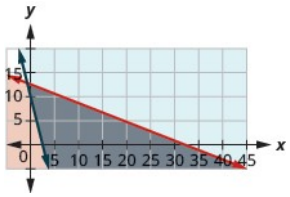
1. ⓐ $\begin{cases} a \geq p + 5 \\ a + 2p \leq 400 \end{cases}$
2. ⓑ




3. ⓒ nei
4. ⓓ nei

5.115

1. ⓐ $\begin{cases} 0{,}75\,d + 2\,e \leq 25 \\ 360\,d + 110\,e \geq 1000 \end{cases}$
2. ⓑ

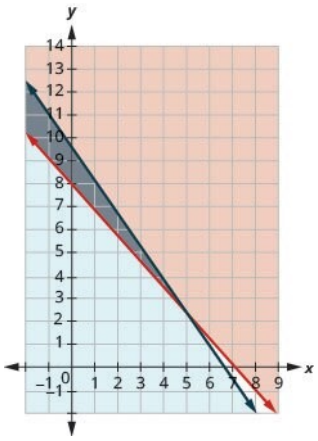



3. ⓒ já
4. ⓓ nei

5.116

1. ⓐ $\begin{cases} 140\,p + 125\,j \geq 1000 \\ 1{,}80\,p + 1{,}25\,j \leq 12 \end{cases}$

**2.** ⓑ




**3.** ⓒ já

**4.** ⓓ nei

## Verkefni úr hluta 5.1

**1.** ⓐ já ⓑ nei

**3.** ⓐ já ⓑ nei

**5.** ⓐ já ⓑ nei

**7.** ⓐ nei ⓑ já

9.

$$(-2,3)$$

11.

$$(1,2)$$

13.

$$(0,2)$$

15.

$$(2,4)$$

17.

$$(2,-1)$$

19.

$$(1,2)$$

21.

$$(3,2)$$

23.

$$(1,1)$$

25.

$$(-1,-4)$$

27.

$$(-2,-2)$$

29.

$$(3,3)$$

31.

$$(6,-2)$$

33.

$$(3,2)$$

35.

$$(1,3)$$

37.

$$(-3,1)$$

**39.** engin lausn

**41.** engin lausn

**43.** óendanlega margar lausnir

**45.** óendanlega margar lausnir

**47.** óendanlega margar lausnir

49.

$$(2,2)$$

**51.** 0 lausnir

**53.** 0 lausnir

**55.** engin lausns, insamkvæmt, óháð

**57.** samkvæmt, 1 lausn

**59.** óendanlega margar lausnir

**61.** óendanlega margar lausnir

**63.** Molly þarf 16 únsur af jarðarberjasafa og 48 únsur af vatni.

**65.** Enrique þarf 8 únsur af hnetum og 16 únsur af vatni.

**67.** Leo ætti að gróðursetja 50 túlípana og 300 páskaliljur.

**69.** Þar sem aðeins er vitað að hallatölur beggja línulegu jafnanna eru þær sömu, eru annaðhvort engar lausnir (gröf jafnanna eru samsíða) eða óendanlega margar.

## Verkefni úr hluta 5.2

71.

$$(-2,0)$$

73.

$$(7,6)$$

75.

$$(0,3)$$

77.

$$(6,-3)$$

79.

$$(3,-1)$$

81.

$$(6,6)$$

83.

$$(5,0)$$

85.

$$(-2,7)$$

87.

$$(-5,2)$$

89.

$$(-1,7)$$

91.

$$(-3,5)$$

**93.** (10, 12)

95.

$$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

97.

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

**99.** óendanlega margar lausnir

**101.** óendanlega margar lausnir

**103.** engin lausn

**105.** engin lausn

**107.** Tölurnar eru 6 og 9.

**109.** Tölurnar eru −7 og −19.

**111.** Lengdin er 20 og breiddin er 10.

**113.** Lengdin er 34 og breiddin er 8.

**115.** Stærðirnar eru 16° og 74°.

**117.** Stærðirnar eru 45° og 45°.

**119.** Selja þyrfti 80 kapalsjónvarpspakka.

**121.** Mitchell þyrfti að selja 120 eldavélar.

**123.** ⓐ $t = 2$ klukkustundir ⓑ $s = 2\frac{1}{2}$ klukkustundir

**125.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 5.3

**127.** (6, 9)

129.

$$(-2, 1)$$

131.

$$(-7, -1)$$

133.

$$(-2, -4)$$

135.

$$(-1,3)$$

137.

$$(-1,2)$$

139.

$$(-5,9)$$

**141.** (6, 1)

143.

$$(-2,10)$$

**145.** (2, 3)

147.

$$(-7,6)$$

149.

$$(-9,3)$$

**151.** (9, 5)

153.

$$(-3,2)$$

155.

$$(-2,3)$$

**157.** óendanlega margar lausnir

**159.** óendanlega margar lausnir

**161.** óendanlega margar lausnir

**163.** insamkvæmt, engin lausn

**165.** insamkvæmt, engin lausn

**167.** Tölurnar eru 20 og 45.

**169.** Tölurnar eru 16 og −43.

**171.** Skyrta kostar $16 og peysa $33.

**173.** Pylsa inniheldur 860 mg. Bolli af kotasælu inniheldur 1.000 mg.

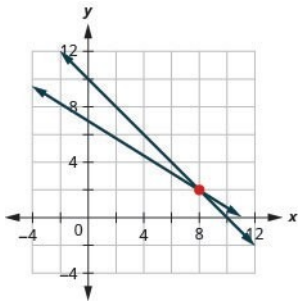
**175.** ⓐ eyðingaraðferð ⓑ innsetningaraðferð

**177.** ⓐ innsetningaraðferð ⓑ eyðingaraðferð

**179.** ⓐ $r=4$ ⓑ $c=1$

181.

1. ⓐ (8, 2)
2. ⓑ




3. ⓒ Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 5.4

**183.** Tölurnar eru 6 og 9.

**185.** Tölurnar eru −5 og −25.

**187.** Tölurnar eru 5 og 4.

**189.** Tölurnar eru 2 og 3.

**191.** $10.000

**193.** Hún setti $15.000 á bundinn innlánsreikning og $35.000 í skuldabréf.

**195.** Lánsupphæð fyrsta ársins var $30.000 og lánsupphæð annars ársins var $12.000.

**197.** Bethany er 16 ára og Alyssa er 28 ára.

**199.** Noelle er 20 ára og pabbi hennar er 54 ára.

**201.** Minna ílátið rúmar 20 gallon og stærra ílátið 30 gallon.

**203.** Við skokk brenndust 10 hitaeiningar og við hjólreiðar 10 hitaeiningar.

**205.** Minnisbækur kosta $4 og USB-minni $20.

**207.** Stærðirnar eru 60 gráður og 30 gráður.

**209.** Stærðirnar eru 125 gráður og 55 gráður.

**211.** 94 gráður og 86 gráður

**213.** 72,5 gráður og 17,5 gráður

**215.** Stærðirnar eru 44 gráður og 136 gráður.

**217.** Stærðirnar eru 34 gráður og 56 gráður.

**219.** Breiddin er 10 fet og lengdin er 25 fet.

**221.** Breiddin er 15 fet og lengdin er 15 fet.

**223.** Það tók systur Söruh 12 klukkustundir.

**225.** Það tók vin Lucy 2 klukkustundir.

**227.** Hraði kanósins er 5 mílur á klukkustund og hraði straumsins er 1 mílur á klukkustund.

**229.** Hraði bátsins er 6,60 mílur á klukkustund og hraði straumsins er 2,50 mílur á klukkustund.

**231.** Hraði þotunnar er 240 mílur á klukkustund og vindhraðinn er 28 mílur á klukkustund.

**233.** Hraði þotunnar er 415 mílur á klukkustund og vindhraðinn er 19 mílur á klukkustund.

235.

$$s = 183, a = 242$$

**237.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 5.5

**239.** Seldir voru 1120 miðar fyrir fullorðna og 530 barnamiðar.

**241.** Josie keypti 40 fullorðinsmiða og 32 barnamiða.

**243.** Seldir voru 125 miðar fyrir fullorðna og 128 barnamiðar.

**245.** Brandon á 12 25 senta myntir og 8 tíu senta myntir.

**247.** Peter átti 11 tíu senta myntir og 48 25 senta myntir.

**249.** Gjaldkerinn er með fjórtán $10 seðla og sextán $20 seðla.

**251.** Marissa ætti að nota 60 pund af sælgæti sem kostar $1,20 pundið og 30 pund af sælgæti sem kostar $1,80 pundið.

**253.** Hannah þarf 10 gallon af gosi og 15 gallon af ávaxtadrykk.

**255.** Julia og eiginmaður hennar ættu að kaupa 12 pund af ljósristuðu kólumbísku kaffi og 8 pund af dökkristuðu kólumbísku kaffi.

**257.** Jotham ætti að blanda 42 lítrum af 30% lausn og 28 lítrum af 80% lausn.

**259.** Vísindamaðurinn ætti að blanda 15 lítrum af 25% lausn og 50 lítrum af 12% lausn.

**261.** 160 lítrar af 40% lausn og 80 lítrar af 70% lausn verða notaðir.

**263.** Hattie ætti að fjárfesta $900 á 12% og og $2.100 á 10%.

**265.** Sam fjárfesti $28.000 á 10% og og $20.000 á 6%.

**267.** Alríkislánið er $62.500 og bankalánið er $3.300.

**269.** $12.000 ætti að fjárfesta með 5,25% og $13.000 ætti að fjárfesta með 4%.

**271.** 14 drengir greiddu árgjaldið að fullu. 4 drengir greiddu hluta árgjaldsins,

**273.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 5.6

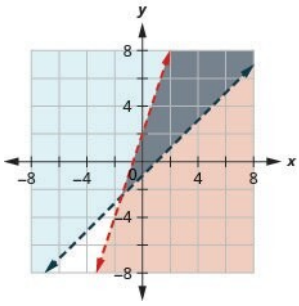
**275.** ⓐ satt ⓑ ósatt

**277.** ⓐ ósatt ⓑ satt

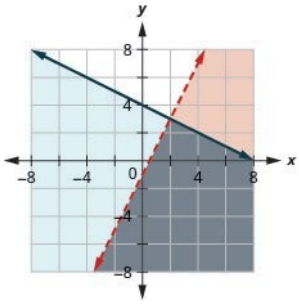
**279.** ⓐ satt ⓑ ósatt

**281.** ⓐ satt ⓑ satt

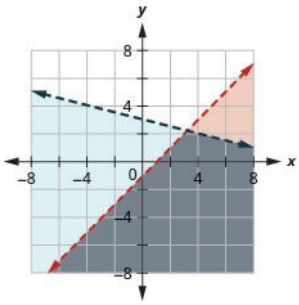
283.



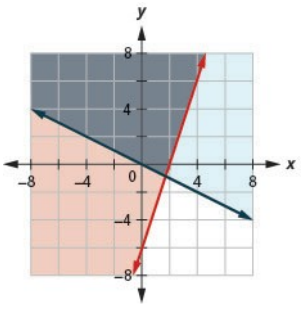

285.



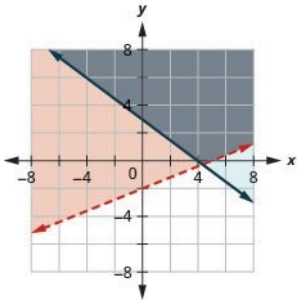

287.



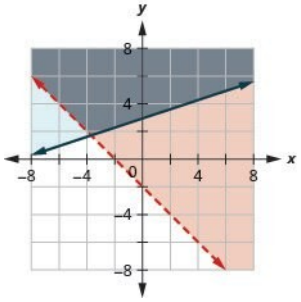
289.



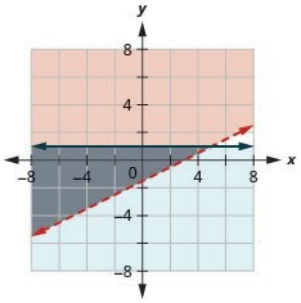

291.



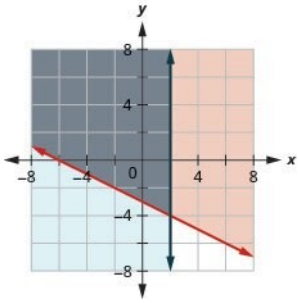

293.



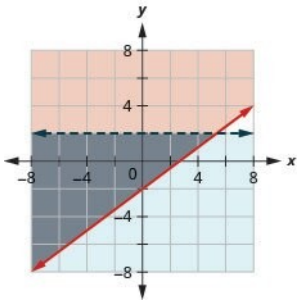

295.



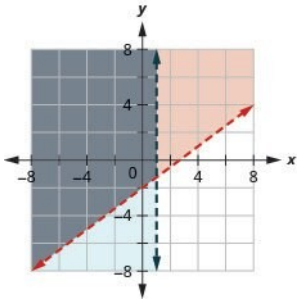
297.



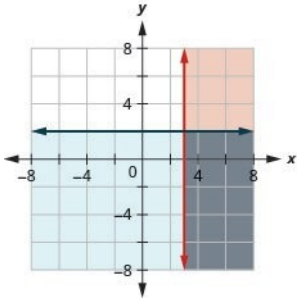

299.



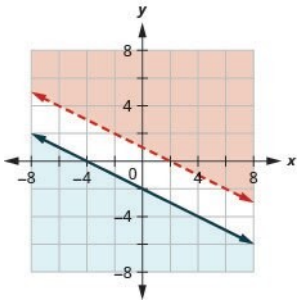

301.



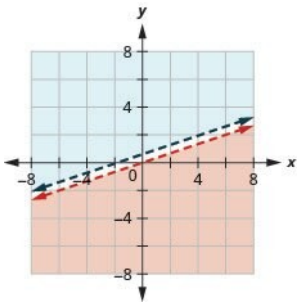

303.



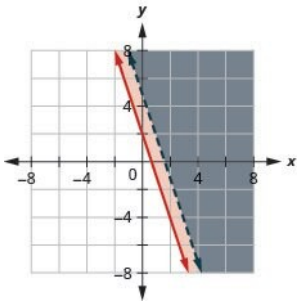

**305.** engin lausn




**307.** engin lausn

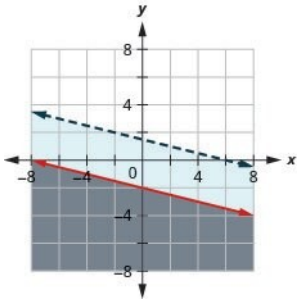



309.



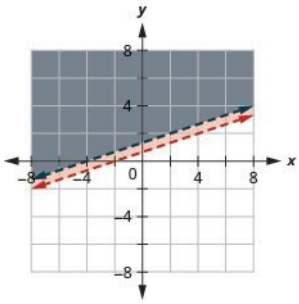

311.

$$x+4\,y<6$$



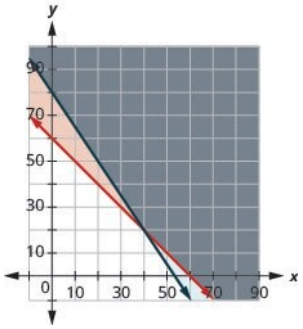

313.

$$-2\,x+6\,y>8$$




315.

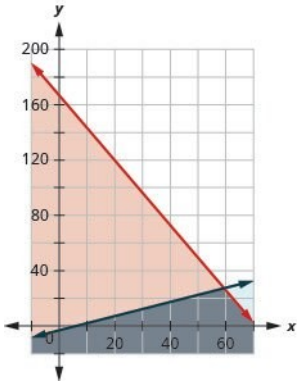
1. ⓐ $\begin{cases} p + l \geq 60 \\ 15p + 10l \geq 800 \end{cases}$
2. ⓑ




3. ⓒ Nei
4. ⓓ Já

317.

1. ⓐ $\begin{cases} 7p + 3c \leq 500 \\ p \geq 2c + 4 \end{cases}$
2. ⓑ

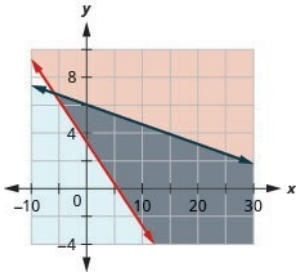



3. ⓒ Já
4. ⓓ Nei

319.

1. ⓐ $\begin{cases} 90\,b + 150\,g \geq 500 \\ 0{,}35\,b + 2{,}50\,g \leq 15 \end{cases}$

**2.** ⓑ



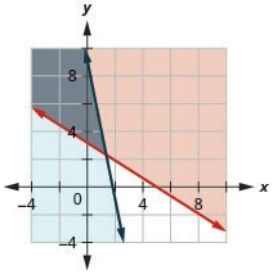

**3.** ⓒ Nei

**4.** ⓓ Já

321.

**1.** ⓐ $\begin{cases} 7c + 11p \geq 35 \\ 110\text{c} + 22p \leq 200 \end{cases}$

**2.** ⓑ



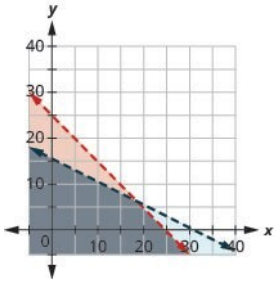

**3.** ⓒ Já

**4.** ⓓ Nei

323.

**1.** ⓐ $\begin{cases} 3a + 3c < 75 \\ 2\text{a} + 4c < 62 \end{cases}$

**2.** ⓑ




**3.** ⓒ Nei

**4.** ⓓ Já

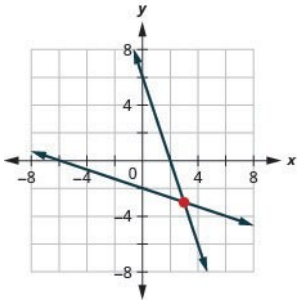
**325.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

**327.** ⓐ nei ⓑ já

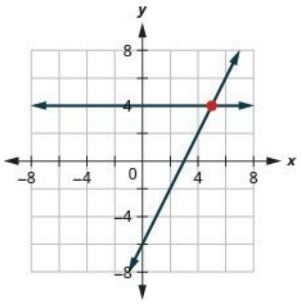
329.

$$(3,-3)$$

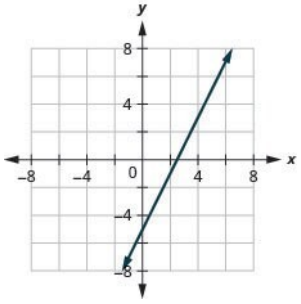



331.

$$(5,4)$$




**333.** samanfallandi línur




**335.** óendanlega margar lausnir, samkvæmt jöfnuhneppi, háðar jöfnur

**337.** engin lausns, insamkvæmt jöfnuhneppi, óháðar jöfnur

**339.** LaVelle þarf 8 únsur af súkkulaðisírópi og 40 únsur af kaffi.

341.

$$(-1,2)$$

343.

$$(-2,-2)$$

**345.** engin lausn

**347.** Tölurnar eru 22 og 33.

**349.** Stærðirnar eru 23 gráður og 67 gráður.

351.

$$(1,11)$$

353.

$$(4,-1)$$

355.

$$(-2,5)$$

**357.** Tölurnar eru $-37$ og $-53$.

**359.** eyðingaraðferð

361.

$\begin{cases} x+y=-32 \\ x=2y-2 \end{cases}$ Tölurnar eru –10 og –22

363.

$\begin{cases} j+d=7200 \\ d=j+1600 \end{cases}$ Debbie vann sér inn $4400 og Jim vann sér inn $2800.

**365.** Pam er 51 og Jan er 48.

**367.** Stærðirnar eru 119 gráður og 61 gráður.

**369.** Pergólan er 8 fet á hæð og 12 fet á breidd.

**371.** Það tekur Lenore 3 klukkustundir.

**373.** Hraði bátsins er 10,5 mílur á klukkustund. Hraði straumsins er 1,5 mílur á klukkustund.

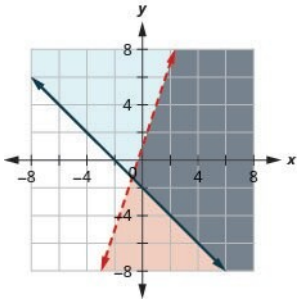
**375.** Lynn keypti 227 nemendamiða og 34 fullorðinsmiða.

**377.** Yumi ætti að nota 4 bolla af sælgæti og 8 bolla af hnetum.

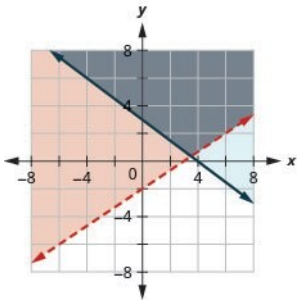
**379.** Jack ætti að setja $3600 í sparnað og $8400 í bundna innlánsreikninginn.

**381.** ⓐ já ⓑ já

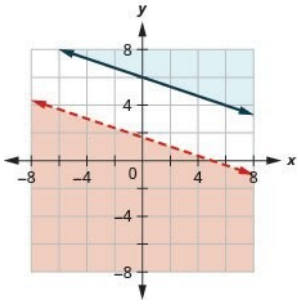
383.




385.

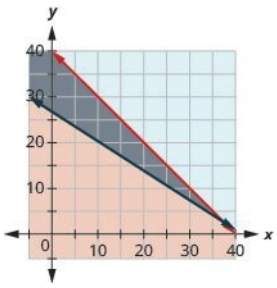



**387.** engin lausn




389.

ⓐ ⓑ $\begin{cases} b + n \leq 40 \\ 12b + 18n \geq 500 \end{cases}$

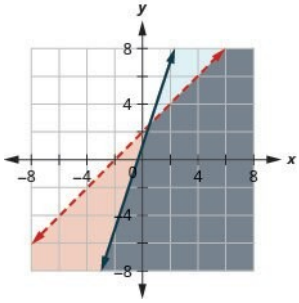



ⓒ já ⓓ nei

## Æfingapróf

**391.** ⓐ já ⓑ nei

393.




395.

$$(4, -7)$$

**397.** óendanlega margar lausnir

**399.** Tölurnar eru 40 og −64

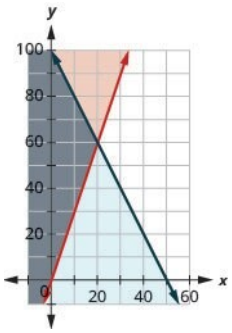
**401.** Hornin mælast 28 gráður og 62 gráður.

**403.** Það tekur Kathy $\frac{1}{6}$ úr klukkustund (eða 10 mínútur).

**405.** Liz keypti 23 barnamiða og 5 fullorðinsmiða.

**407.**

ⓐ ⓑ $\begin{cases} C + 0{,}5L \le 50 \\ L \ge 3C \end{cases}$




ⓒ Nei ⓓ Já

# Kafli 6

## Undirbúningur

6.1

$$11x$$

6.2

$$3n+9$$

6.3

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

6.4

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

6.5

$$-8$$

6.6

$$2x+6$$

6.7

$$x^2+16x+63$$

6.8

ⓐ 81 ⓑ 81 ⓒ $-81$

6.9

$$\frac{1}{3}$$

6.10

$$32\,m^{15}$$

6.11

$$\frac{x}{y}$$

6.12

$$\frac{3+x}{d}$$

6.13

$$6\,y^2$$

6.14

$$11\,a^2+7\,a+5$$

6.15
Tíu þúsundir
6.16
Tólf tíuþúsundustu hlutar
6.17

$$8$$

## Prófið sjálf

6.1
ⓐ einliða ⓑ margliða ⓒ þríliða ⓓ tvíliða ⓔ einliða
6.2
ⓐ tvíliða ⓑ þríliða ⓒ einliða ⓓ margliða ⓔ einliða
6.3
ⓐ 1 ⓑ 4 ⓒ 12 ⓓ 3 ⓔ 0
6.4
ⓐ 0 ⓑ 5 ⓒ 1 ⓓ 2 ⓔ 3
6.5

$$21\,q^2$$

6.6

$$-7\,c^2$$

6.7

$$13m$$

6.8

$$-10z^3$$

6.9

$$5y^2+3z^2$$

6.10

$$-4m^2+n^2$$

6.11

Engir samkynja liðir eru til að leggja saman.

6.12

Engir samkynja liðir eru til að leggja saman.

6.13

$$8x^2-11x+8$$

6.14

$$17y^2+14y+1$$

6.15

$$x^2+3x-5$$

6.16

$$6b^2+3$$

6.17

$$2z^2+12z-2$$

6.18

$$5x^2+14x+7$$

6.19

$$5x^2-5xy+5y^2$$

6.20

$$7x^2-6xy-2y^2$$

6.21

$$-5ab+7b^2$$

6.22

$$4n^2+7mn$$

6.23

$$x^3-y^3$$

6.24

$$p^3-2p^2q+q^3$$

6.25

ⓐ 18 ⓑ 50 ⓒ $-15$

6.26

ⓐ 18 ⓑ $-4$ ⓒ 14

6.27

250

6.28

106

6.29

\$576

6.30

\$750

6.31

ⓐ 216 ⓑ 15 ⓒ $\frac{9}{49}$ ⓓ 0,1849

6.32

ⓐ 32 ⓑ 21 ⓒ $\frac{8}{125}$ ⓓ 0,047524

6.33

ⓐ 81 ⓑ $-81$

6.34

ⓐ 169 ⓑ $-169$

6.35

$$b^{17}$$

6.36

$$x^{16}$$

6.37

ⓐ $5^6$ ⓑ $4^{18}$

6.38
ⓐ $7^{14}$ ⓑ $10^{11}$
6.39
ⓐ $p^6$ ⓑ $y^{43}$
6.40
ⓐ $z^8$ ⓑ $b^{49}$
6.41

$$x^{18}$$

6.42

$$b^{19}$$

6.43
ⓐ $b^{35}$ ⓑ $5^{12}$
6.44
ⓐ $z^{54}$ ⓑ $3^{49}$
6.45
ⓐ $144\,y^2$ ⓑ $32\,w^5x^5$
6.46
ⓐ $125\,w^3x^3$ ⓑ $-27\,y^3$
6.47
ⓐ $a^{48}$ ⓑ $-8\,c^{12}d^6$
6.48
ⓐ $81\,x^{24}y^{28}$ ⓑ $q^{29}$
6.49
ⓐ $75\,n^{12}$ ⓑ $81\,c^{24}d^{30}$
6.50
ⓐ $256\,a^{22}b^{24}$ ⓑ $40\,x^{10}$
6.51

$$-35\,y^{11}$$

6.52

$$54\,b^9$$

6.53

$$6\,a^5b^6$$

6.54

$$8\,r^{11}s^8$$

6.55

$$5x+35$$

6.56

$$3y+39$$

6.57

$$x^2-7x$$

6.58

$$d^2-11d$$

6.59

$$5x^2+20xy$$

6.60

$$12p^2+2pr$$

6.61

$$-15y^3-24y^2+21y$$

6.62

$$8x^4-12x^3+20x^2$$

6.63

$$12x^3-20x^2+12x$$

6.64

$$-18a^5+12a^4-36a^3$$

6.65

$$xp+8p$$

6.66

$$ap+4p$$

6.67

$$x^2+17x+72$$

6.68

$$20x^2+51x+27$$

6.69

$$12b^2+38b+30$$

6.70

$$a^2+17a+70$$

6.71

$$30y^2-3y-6$$

6.72

$$15c^2+14c-8$$

6.73

$$a^2-ab+7a-7b$$

6.74

$$x^2-xy+5x-5y$$

6.75

$$x^2+14x+48$$

6.76

$$y^2+20y+51$$

6.77

$$x^2-2x-35$$

6.78

$$b^2+3b-18$$

6.79

$$15x^2+29x-14$$

6.80

$$16y^2-20y-50$$

6.81

$$10c^2-60c-cd+6d$$

6.82

$$14x^2-35x-2xy+5y$$

6.83

$$x^3 - 8x^2 + 6x - 48$$

6.84

$$y^3 - 9y^2 + 7y - 63$$

6.85

$$8a^2b^2 + 12ab - 20$$

6.86

$$8x^2y^2 + 2xy - 15$$

6.87

$$15m^2 - 51m + 42$$

6.88

$$42b^2 - 53b + 15$$

6.89

$$y^3 - 8y^2 + 17y - 6$$

6.90

$$2x^3 + 5x^2 - 7x + 20$$

6.91

$$y^3 - 8y^2 + 17y - 6$$

6.92

$$2x^3 + 5x^2 - 7x + 20$$

6.93

$$x^2 + 18x + 81$$

6.94

$$y^2 + 22y + 121$$

6.95

$$x^2 - 18x + 81$$

6.96

$$p^2 - 26p + 169$$

6.97

$$36x^2+36x+9$$

6.98

$$16x^2+72x+81$$

6.99

$$4c^2-4cd+d^2$$

6.100

$$16x^2-40xy+25y^2$$

6.101

$$4x^4+4x^2+1$$

6.102

$$9y^6+12y^3+4$$

6.103

$$x^2-25$$

6.104

$$w^2-9$$

6.105

$$36x^2-25$$

6.106

$$4x^2-49$$

6.107

$$49-16x^2$$

6.108

$$81-4y^2$$

6.109

$$16p^2-49q^2$$

6.110

$$9x^2-y^2$$

6.111

$$x^2 y^2 - 36$$

6.112

$$a^2 b^2 - 81$$

6.113

$$9x^4 - 16y^6$$

6.114

$$4m^4 - 25n^6$$

6.115

ⓐ FOIL-aðferð; $18b^2 + 77b - 18$ ⓑ ferningsregla tvíliða; $81p^2 - 72p + 16$ ⓒ ferningsregla tvíliða; $49y^2 + 14y + 1$ ⓓ margfeldi samoka; $16r^2 - 9$

6.116

ⓐ ferningsregla tvíliða; $36x^2 + 84x + 49$ ⓑ margfeldi samoka; $9x^2 - 16$ ⓒ FOIL-aðferð; $10x^2 - 29x + 10$ ⓓ ferningsregla tvíliða; $36n^2 - 12n + 1$

6.117

ⓐ $x^5$ ⓑ $6^9$

6.118

ⓐ $y^6$ ⓑ $10^8$

6.119

ⓐ $\frac{1}{x^4}$ ⓑ $\frac{1}{12^{15}}$

6.120

ⓐ $\frac{1}{m^8}$ ⓑ $\frac{1}{9^{11}}$

6.121

ⓐ $b^8$ ⓑ $\frac{1}{z^6}$

6.122

ⓐ $\frac{1}{p^8}$ ⓑ $w^4$

6.123

ⓐ 1 ⓑ 1

6.124

ⓐ 1 ⓑ 1

6.125

ⓐ 1 ⓑ 1

6.126

ⓐ 1 ⓑ 1

6.127

ⓐ $\frac{25}{64}$ ⓑ $\frac{p^4}{10.000}$ ⓒ $\frac{m^7}{n^7}$

6.128

ⓐ $\frac{1}{27}$ ⓑ $\frac{-8}{q^3}$ ⓒ $\frac{w^4}{x^4}$

6.129

$$m^{13}$$

6.130

$$k^5$$

6.131

1

6.132

1

6.133

$$r^8$$

6.134

$$v^6$$

6.135

$$\frac{a^{12}}{b^8}$$

6.136

$$\frac{q^{21}}{r^{15}}$$

6.137

$$\frac{49\,x^6}{81\,y^2}$$

6.138

$$\frac{9\,x^8}{49\,y^2}$$

6.139

$$\frac{1}{a^6}$$

6.140

$$\frac{1}{p^{15}}$$

6.141

$$9r^{18}$$

6.142

$$\frac{2}{x}$$

6.143

$$7y^6$$

6.144

$$6z^6$$

6.145

$$-\frac{9}{a^5 b}$$

6.146

$$\frac{-9d}{c^4}$$

6.147

$$\frac{2a^6}{3b^2}$$

6.148

$$-\frac{3q^6}{5p^8}$$

6.149

$$\frac{4y^2}{7x^4}$$

6.150

$$\frac{5}{8m^5n^3}$$

6.151

$$2ab^2$$

6.152

$$-4xy^5$$

6.153

$$2z^2+6$$

6.154

$$2z^2-3$$

6.155

$$9b^2-11b$$

6.156

$$5y^2-11y$$

6.157

$$-5y^2+3y$$

6.158

$$-7b^2+3b$$

6.159

$$15d^4+6d^2$$

6.160

$$36p^4-8p^2$$

6.161

$$-4a+2b$$

6.162

$$8a^5b+6a^3b^2$$

6.163

$$5xy+3y-2y^2$$

6.164

$$5a^2+2a^2b-6b^2$$

6.165

$$3c+1-\frac{3}{2c}$$

6.166

$$2d-1-\frac{2}{5d}$$

6.167

$$y+7$$

6.168

$$m+5$$

6.169

$$2x+5$$

6.170

$$3x+2$$

6.171

$$x^2+3x+2+\frac{2}{x+2}$$

6.172

$$2x^2+6x-5-\frac{3}{x+1}$$

6.173

$$x^2-2x+7$$

6.174

$$x^3-8x^2+40x-200$$

6.175

$$x^2+4x+16$$

6.176

$$25x^2+10x+4$$

6.177

ⓐ $\frac{1}{8}$ ⓑ $\frac{1}{10^7}$

6.178

ⓐ $\frac{1}{9}$ ⓑ $\frac{1}{10.000}$

6.179

ⓐ $p^8$ ⓑ $64$

6.180

ⓐ $q^7$ ⓑ $16$

6.181

ⓐ $\frac{81}{16}$ ⓑ $\frac{n^2}{36m^2}$

6.182

ⓐ $\frac{125}{27}$ ⓑ $\frac{16b^4}{a^4}$

6.183

ⓐ $\frac{1}{25}$ ⓑ $-\frac{1}{25}$ ⓒ $25$ ⓓ $-25$

6.184

ⓐ $\frac{1}{49}$ ⓑ $-\frac{1}{49}$ ⓒ $49$ ⓓ $-49$

6.185

ⓐ $2$ ⓑ $\frac{1}{18}$

6.186

ⓐ $2$ ⓑ $\frac{1}{256}$

6.187

ⓐ $\frac{1}{y^7}$ ⓑ $\frac{1}{z^{15}}$

6.188

ⓐ $\frac{1}{p^9}$ ⓑ $\frac{1}{q^{24}}$

6.189

ⓐ $\frac{8}{p}$ ⓑ $\frac{1}{8p}$ ⓒ $-\frac{1}{8p}$

6.190

ⓐ $\frac{1}{11q}$ ⓑ $\frac{1}{11q}-\frac{1}{11q}$ ⓒ $-\frac{11}{q}$

6.191

ⓐ $x^4$ ⓑ $\frac{1}{y^5}$ ⓒ $\frac{1}{z^9}$

6.192

ⓐ $a^5$ ⓑ $\frac{1}{b^4}$ ⓒ $\frac{1}{c^{15}}$

6.193

$$\frac{1}{p^3 q^3}$$

6.194

$$\frac{1}{r^2 s^8}$$

6.195

$$\frac{30 d^3}{c^8}$$

6.196

$$\frac{1}{16 x^8}$$

6.197

$$\frac{1}{16 b^{12}}$$

6.198

$$\frac{64}{a^8}$$

6.199

$$\frac{8}{c^{12}}$$

6.200

$$x^{11}$$

6.201

$$y^{14}$$

6.202

$$9{,}6 \times 10^4$$

6.203

$$4{,}83 \times 10^{4}$$

6.204

$$7{,}8 \times 10^{-3}$$

6.205

$$1{,}29 \times 10^{-2}$$

6.206
1.300
6.207
92.500
6.208
0,00012
6.209
0,075
6.210
0,06
6.211
0,009
6.212
400.000
6.213
20.000

## Verkefni úr hluta 6.1

**1.** ⓐ þríliða ⓑ margliða ⓒ tvíliða ⓓ einliða ⓔ tvíliða

**3.** ⓐ tvíliða ⓑ þríliða ⓒ margliða ⓓ þríliða ⓔ einliða

**5.** ⓐ 2 ⓑ 4 ⓒ 1 ⓓ 3 ⓔ 0

**7.** ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ⓓ 3 ⓔ 0

9.

$$12x^{2}$$

11.

$$6w$$

13.

$$-5a$$

15.

$$40\,x$$

17.

$$-22\,b$$

19.

$$-10\mathrm{a}+5\,b$$

21.

$$-4\,a^2+b^2$$

23.

$$x\,y^2-5\,x-5\,y^2$$

25.

$$a^2\,b-4\,a-5\,a\,b^2$$

27.

$$12\mathrm{a}+8\,b$$

29.

$$-4\,a-3\,b$$

31.

$$-17\,x^6$$

33.

$$11\,y^2+4\,y+11$$

35.

$$-3\,x^2+17\,x-1$$

37.

$$11\,x^2-5\,x+5$$

39.

$$6\,a^2-4\,a-1$$

41.

$$2\,m^2-7\,m+4$$

43.

$$11a+3$$

45.

$$12s^2-16s+9$$

47.

$$3x^2-x+4$$

49.

$$w^2+3w+4$$

51.

$$2p^3+p^2+9p+10$$

53.

$$8a^3+a^2-2a+12$$

55.

$$11w-66$$

57.

$$12c-45$$

59.

$$10x^2-7xy+6y^2$$

61.

$$10m^2+3mn-8n^2$$

63.

$$-3ab+3b^2$$

65.

$$4uv+2v^2$$

67.

$$p^3-6p^2q+pq^2+4q^3$$

69.

$$x^3+2x^2y-5xy^2+y^3$$

**71.** ⓐ 187 ⓑ 40 ⓒ 2

**73.** ⓐ −104 ⓑ 4 ⓒ 40

**75.** 11

**77.** $10.800

**79.** 4

**81.** $58

**83.** 149

**85.** Svör geta verið mismunandi.

**87.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 6.2

**89.** ⓐ 10.000 ⓑ 17 ⓒ $\frac{4}{81}$ ⓓ 0,125

**91.** ⓐ 512 ⓑ 8 ⓒ $\frac{27}{64}$

ⓓ 0,064

**93.** ⓐ 64 ⓑ −64

**95.** ⓐ $-\frac{4}{9}$ ⓑ $\frac{4}{9}$

**97.** ⓐ −0,0001 ⓑ 0,0001

99.

$$x^6$$

101.

$$q^{42}$$

**103.** ⓐ $3^{16}$ ⓑ $5^5$

**105.** ⓐ $w^6$ ⓑ $u^{94}$

107.

$$y^9$$

109.

$$c^{18}$$

111.

$$n^{y+2}$$

113.

$$x^{p+q}$$

**115.** ⓐ $b^{14}$ ⓑ $3^{16}$

**117.** ⓐ $x^{2y}$ ⓑ $7^{ab}$

**119.** ⓐ $25x^2$ ⓑ $16a^2b^2$

**121.** ⓐ $-343n^3$ ⓑ $81x^4y^4z^4$

**123.** ⓐ $w^{22}$ ⓑ $32x^5y^{20}$

**125.** ⓐ $-1000q^6p^{12}$ ⓑ $n^{40}$

**127.** ⓐ $48y^4$ ⓑ $25.000k^{24}$

**129.** ⓐ $432b^5$ ⓑ $\frac{1}{200}j^{16}$

**131.** ⓐ $128r^8$ ⓑ $27x^{29}$

133.

$$-18y^{11}$$

135.

$$72u^7$$

137.

$$4f^{11}$$

139.

$$36a^5b^7$$

141.

$$8r^2s^5$$

143.

$$\frac{1}{2}x^3y^3$$

145.

$$x^{14}$$

147.

$$a^{36}$$

149.

$$8m^{18}$$

151.

$$1000x^6y^3$$

153.

$$16a^{12}b^8$$

155.

$$\frac{8}{27}x^6y^3$$

157.

$$1024a^{10}$$

159.

$$25000p^{24}$$

161.

$$x^{18}y^{18}$$

163.

$$144m^8n^{22}$$

165.

$$1.000.000$$

**167.** $168,07

**169.** Svör geta verið mismunandi.

**171.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 6.3

173.

$$4w+40$$

175.

$$-3a-21$$

177.

$$2x-14$$

179.

$$-3k+12$$

181.

$$q^2+5q$$

183.

$$-b^2-9b$$

185.

$$-x^2+10x$$

187.

$$24r^2+6rs$$

189.

$$12x^2-120x$$

191.

$$-27a^2-45a$$

193.

$$3p^2+30p+75$$

195.

$$-8x^3-16x^2+120x$$

197.

$$5q^6-10q^4+30q^3$$

199.

$$-8y^3-16y^2+120y$$

201.

$$5q^5-10q^4+30q^3$$

203.

$$-12z^4-48z^3+4z^2$$

205.

$$2m^2-9m$$

207.

$$8w - 48$$

209.

$$4x + 40$$

211.

$$15r - 360$$

213.

$$-3m - 33$$

215.

$$-8z + 40$$

217.

$$u^2 + 5u$$

219.

$$n^3 - 3n^2$$

221.

$$24x^2 + 6xy$$

223.

$$55p^2 - 25pq$$

225.

$$3v^2 + 30v + 75$$

227.

$$8n^3 - 8n^2 + 2n$$

229.

$$-8y^3 - 16y^2 + 120y$$

231.

$$5q^5 - 10q^4 + 30q^3$$

233.

$$-12z^4 - 48z^3 + 4z^2$$

235.

$$2y^2 - 9y$$

237.

$$w^2 + 12w + 35$$

239.

$$p^2 + 7p - 44$$

241.

$$x^2 + 11x + 24$$

243.

$$y^2 - 8y + 12$$

245.

$$w^2 + 3w - 28$$

247.

$$p^2 + 7p - 60$$

249.

$$6p^2 + 11p + 5$$

251.

$$20t^2 - 88t - 9$$

253.

$$15x^2 - 3xy - 30x + 6y$$

255.

$$2a^2 + 5ab + 3b^2$$

257.

$$4z^2 - 24z - zy + 6y$$

259.

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 6$$

261.

$$x^4 + 3x^2 - 40$$

263.

$$10a^2b^2+13ab-3$$

265.

$$24p^2q^2-42pq+15$$

267.

$$x^3+9x^2+23x+15$$

269.

$$4y^3+33y^2+y-56$$

271.

$$w^3-16w^2+73w-70$$

273.

$$3q^3-11q^2-19q-5$$

275.

$$14y-13$$

277.

$$-11x-28$$

279.

$$15q^3-30q^2+55q$$

281.

$$s^2+2s-63$$

283.

$$y^3-y^2-2y$$

285.

$$3n^3-n^2-25n+28$$

287.

$$49p^2-100$$

289.

$$4m^4-3m^3-7m^2$$

291.

$$25a^2+70ab+49b^2$$

293.

$$16y^2-144z^2$$

**295.** ⓐ 306 ⓑ 306 ⓒ Svör geta verið mismunandi.

**297.** Svör geta verið mismunandi.

**299.** Svör geta verið mismunandi.

**301.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 6.4

303.

$$q^2+24q+144$$

305.

$$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}$$

307.

$$y^2-12y+36$$

309.

$$p^2-26p+169$$

311.

$$16a^2+80a+100$$

313.

$$9z^2+\frac{6}{5}z+\frac{1}{25}$$

315.

$$4y^2-12yz+9z^2$$

317.

$$\frac{1}{64}x^2-\frac{1}{36}xy+\frac{1}{81}y^2$$

319.

$$25u^4+90u^2+81$$

321.

$$64\,p^6 - 48\,p^3 + 9$$

323.

$$c^2 - 25$$

325.

$$b^2 - \frac{36}{49}$$

327.

$$64\,j^2 - 16$$

329.

$$81\,c^2 - 25$$

331.

$$169 - q^2$$

333.

$$16 - 36\,y^2$$

335.

$$49\,w^2 - 100\,x^2$$

337.

$$p^2 - \frac{16}{25}q^2$$

339.

$$x^2\,y^2 - 81$$

341.

$$r^2 s^2 - \frac{4}{49}$$

343.

$$36\,m^6 - 16\,n^{10}$$

345.

$$225\,m^4 - 64\,n^8$$

**347.** ⓐ $4\,r^2 + 48\,r + 144$ ⓑ $9\,p^2 - 64$ ⓒ $7\,a^2 - 48\,a\,b - 7\,b^2$ ⓓ $k^2 - 12\,k + 36$

**349.** ⓐ $x^{10}-y^{10}$ ⓑ $m^6-16m^3n+64n^2$ ⓒ $81p^2+144pq+64q^2$ ⓓ $r^5+r^2s^2-r^3s^3-s^5$

**351.** ⓐ 4.225 ⓑ 4.225 ⓒ Svör geta verið mismunandi.

**353.** Svör geta verið mismunandi.

**355.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 6.5

**357.** ⓐ $y^{10}$ ⓑ $7^{14}$

**359.** ⓐ $u^{21}$ ⓑ $9^{10}$

**361.** ⓐ $\frac{1}{t^{30}}$ ⓑ $\frac{1}{64}$

**363.** ⓐ $\frac{1}{x^6}$ ⓑ $\frac{1}{100}$

**365.** ⓐ 1 ⓑ 1

**367.** ⓐ $-1$ ⓑ $-1$

**369.** ⓐ 1 ⓑ 6

**371.** ⓐ 7 ⓑ 1

**373.** ⓐ $-7$ ⓑ 0

**375.** ⓐ $\frac{4}{25}$ ⓑ $\frac{x^4}{81}$ ⓒ $\frac{a^5}{b^5}$

**377.** ⓐ $\frac{x^3}{8y^3}$ ⓑ $\frac{10.000}{81q^4}$

379.

$$p^7$$

381.

$$x^5$$

**383.** 1

385.

$$\frac{1}{n^{16}}$$

387.

$$q^{18}$$

389.

$$\frac{1}{m^{12}}$$

391.

$$\frac{a^3}{b^{18}}$$

393.

$$\frac{y^{20}}{z^{50}}$$

395.

$$\frac{27\,m^{15}}{125\,n^3}$$

397.

$$\frac{625\,u^{28}}{16\,v^{12}}$$

399.

$$j^9$$

401.

$$\frac{1}{q^8}$$

403.

$$64\,k^6$$

405.

$$-4.000$$

407.

$$7\,v^8$$

409.

$$-6\,u^8$$

411.

$$-\frac{3\,x^3}{y^{12}}$$

413.

$$\frac{2m^3}{3n^5}$$

415.

$$\frac{-3y^3}{4x^3}$$

417.

$$\frac{65a^3b^2}{42c^3}$$

419.

$$\frac{-3q^5}{p^5}$$

421.

$$\frac{5v^4}{u^2}$$

**423.** ⓐ $18n^{10}$ ⓑ $12n^{10}$ ⓒ $45n^{20}$ ⓓ $5$

**425.** ⓐ $q^8$ ⓑ $q^{15}$

**427.** ⓐ $z$ ⓑ $\frac{1}{z}$

429.

$$6y^6$$

431.

$$15c^6$$

433.

$$3x^2$$

435.

$$-yz^2$$

437.

$$10^3$$

**439.** Svör geta verið mismunandi.

**441.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 6.6

443.

$$6b+15$$

445.

$$6x^2-2x$$

447.

$$11w-2$$

449.

$$4x^2+3x$$

451.

$$-5b^2+3b$$

453.

$$-17m^4-24m^3$$

455.

$$103z^5-12z^2$$

457.

$$17y^2+14$$

459.

$$-5x^3+3$$

461.

$$-6y^2+3y$$

463.

$$9x^2y^3+12y$$

465.

$$7c-10c^2d-5cd^2$$

467.

$$6r^3+11r^2s-8rs^3$$

469.

$$4q+1-\frac{1}{3q}$$

471.

$$-5y-3+\frac{1}{4y}$$

473.

$$7a-12+\frac{11}{a}$$

475.

$$d+6$$

477.

$$a-7$$

479.

$$x-7$$

481.

$$4x+3$$

483.

$$p+3-\frac{8}{p+8}$$

485.

$$x+7+\frac{5}{x-5}$$

487.

$$2n^2-6n+8$$

489.

$$7q^2+7q+2$$

491.

$$m^2-10m+100$$

493.

$$x^2+6x+36$$

495.

$$25y^2+20x+16$$

**497.** 45

**499.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 6.7

**501.** ⓐ $\frac{1}{81}$ ⓑ $\frac{1}{100}$

**503.** ⓐ $\frac{1}{256}$ ⓑ $\frac{1}{100}$

**505.** ⓐ $c^5$ ⓑ 25

**507.** ⓐ $t^9$ ⓑ 10000

**509.** ⓐ $\frac{100}{9}$ ⓑ $-\frac{c^3d^3}{8}$

**511.** ⓐ $\frac{8}{343}$ ⓑ $-\frac{x^3y^6}{27}$

**513.** ⓐ $\frac{1}{49}$ ⓑ $-\frac{1}{49}$ ⓒ 49 ⓓ $-49$

**515.** ⓐ $-\frac{1}{125}$ ⓑ $-125$ ⓒ $-125$ ⓓ $-\frac{1}{125}$

**517.** ⓐ $\frac{2}{5}$ ⓑ $\frac{1}{10}$

**519.** ⓐ $\frac{3}{16}$ ⓑ $\frac{1}{144}$

**521.** ⓐ $\frac{1}{b^5}$ ⓑ $\frac{1}{k^{10}}$

**523.** ⓐ $\frac{1}{s^8}$ ⓑ $\frac{1}{a^{90}}$

**525.** ⓐ $\frac{6}{r}$ ⓑ $\frac{1}{6r}$ ⓒ $-\frac{1}{6r}$

**527.** ⓐ $\frac{1}{16q^4}$ ⓑ $\frac{2}{q^4}$ ⓒ $-\frac{2}{q^4}$

**529.** ⓐ $\frac{1}{s^4}$ ⓑ $\frac{1}{q^5}$ ⓒ $\frac{1}{y^7}$

**531.** ⓐ 1 ⓑ $y^6$ ⓒ $\frac{1}{y^4}$

533.

$$\frac{1}{x}$$

535.

$$\frac{1}{m^2 n^4}$$

537.

$$\frac{1}{p^5 q^7}$$

539.

$$-\frac{14k^5}{j^3}$$

541.

$$-\frac{40n^3}{m}$$

543.

$$\frac{1}{64y^9}$$

545.

$$\frac{4}{p^{10}}$$

547.

$$n^7$$

549.

$$y^5$$

551.

$$3{,}4 \times 10^5$$

553.

$$1{,}29 \times 10^6$$

555.

$$4{,}1 \times 10^{-2}$$

557.

$$1{,}03 \times 10^{-6}$$

**559.** 830

**561.** 16.000.000.000

**563.** 0,038

**565.** 0,0000193

**567.** 0,02

569.

$$0{,}0000056$$

**571.** 500.000.000

**573.** 20.000.000

**575.** $6{,}85 \times 10^{9}$.

577.

$$5{,}7 \times 10^{-9}$$

**579.** 15.000.000.000.000

**581.** 0,00001

583.

$$1{,}545 \times 10^{8}$$

**585.** ⓐ $1{,}86 \times 10^{13}$ ⓑ $3 \times 10^{8}$ ⓒ $6{,}2 \times 10^{4}$

**587.** svör geta verið mismunandi

## Upprifjunarverkefni

**589.** ⓐ tvíliða ⓑ einliða ⓒ þríliða ⓓ þríliða ⓔ önnur margliða

**591.** ⓐ 3 ⓑ 4 ⓒ 2 ⓓ 4 ⓔ 0

593.

$$5k$$

595.

$$-27c$$

597.

$$7n^2$$

599.

$$13a+b$$

601.

$$13p^2-5p-1$$

603.

$$7y^2-9y+4$$

605.

$$5a^3+a^2+6a+2$$

**607.** ⓐ $-26$ ⓑ 10 ⓒ 22

**609.** 12.000

**611.** 17

**613.** 0,125

615.

$$-64$$

617.

$$p^{31}$$

619.

$$8^6$$

621.

$$y^{c+3}$$

623.

$$5^6$$

625.

$$3^{rs}$$

627.

$$-125y^3$$

629.

$$1000\,x^3\,y^3\,z^3$$

631.

$$64\,a^9\,b^6$$

633.

$$144\,q^{14}$$

635.

$$\frac{8}{125}\,m^6\,n^3$$

637.

$$144\,n^8$$

639.

$$15\,a^2\,b^5$$

641.

$$-4\,y-52$$

643.

$$p^2+3\,p$$

645.

$$-12\,u^2-42\,u$$

647.

$$9\,q^4-63\,q^3+54\,q^2$$

649.

$$11\,b-44$$

**651.** ⓐ $12\,y^2-44\,y+35$ ⓑ $12\,y^2-44\,y+35$ ⓒ $12\,y^2-44\,y+35$

653.

$$y^2-12\,y+32$$

655.

$$q^2+13\,q-48$$

657.

$$u^4+u^2-30$$

659.

$$16m^2n^2-2mn-3$$

**661.** ⓐ $18x^3-21x^2-34x+40$ ⓑ $18x^3-21x^2-34x+40$

663.

$$7m^3-69m^2-31m-3$$

665.

$$q^2-30q+225$$

667.

$$64u^2+16u+1$$

669.

$$16a^2-24ab+9b^2$$

671.

$$y^2-\frac{4}{25}$$

673.

$$36-r^2$$

675.

$$25p^8-16q^6$$

677.

$$36a^2-121$$

679.

$$c^8+18c^4d+81d^2$$

681.

$$4a^3-a^2b^2+16ab-4b^3$$

683.

$$10^{20}$$

685.

$$\frac{1}{v^{36}}$$

687.

$$\frac{1}{5^{7}}$$

**689.** 1

**691.** −1

**693.** 1

**695.** 0

697.

$$\frac{m^{4}}{81}$$

699.

$$\frac{x^{6}}{64\,y^{6}}$$

**701.** 1

703.

$$r^{20}$$

705.

$$\frac{243\,x^{20}}{32\,y^{10}}$$

707.

$$-\frac{10.125\,n^{10}}{4}$$

709.

$$-\frac{4\,b^{6}}{a^{5}}$$

711.

$$\frac{9\,p}{2}$$

713.

$$7x - 15$$

715.

$$55p^3 - 30p$$

717.

$$12a^4 - 6a^3b - 7ab^2$$

719.

$$21y^2 + 10 - \frac{1}{y^2}$$

721.

$$v - 8$$

723.

$$n - 6 + \frac{4}{n+3}$$

725.

$$u^2 + 2u + 4$$

727.

$$-\frac{1}{125}$$

729.

$$\frac{1}{216u^3}$$

731.

$$\frac{16}{9}$$

733.

$$\frac{1}{q^{11}}$$

735.

$$\frac{1}{y^8}$$

737.

$$\frac{1}{a^4}$$

739.

$$r$$

741.

$$4{,}29 \times 10^{-3}$$

743.

$$7{,}2 \times 10^{9}$$

745.

$$15.000.000.000$$

747.

$$0{,}55$$

749.

$$0{,}0217$$

751.

$$0{,}0000003$$

## Æfingapróf

753.

$$15a^2+a-6$$

755.

$$-\frac{8}{125}$$

757.

$$16a^6b^{10}$$

759.

$$3k^3-21k^2+39k$$

761.

$$9v^2-86v+45$$

763.

$$n^3 - 11n^2 + 34n - 24$$

765.

$$49p^2 - 25$$

767.

$$\frac{1}{9}$$

769.

$$1$$

771.

$$6x + 21 - \frac{3}{x}$$

773.

$$16x^2 + 4x + 1$$

775.

$$\frac{1}{25}$$

777.

$$\frac{1}{q^9}$$

779.

$$8{,}3 \times 10^7$$

**781.** 74.800

**783.** 424 fet

# Kafli 7

## Undirbúningur

7.1

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

7.2

72

7.3

$$-18a-33$$

7.4

$$x^2+9x+20$$

7.5

ⓐ $-15$ ⓑ $-3$

7.6

ⓐ $-54$ ⓑ $54$

7.7

7.8

$$15p^2$$

7.9

$$6y^2+23y+20$$

7.10

$$12x^2+8x+9$$

7.11

$$144x^2$$

7.12

$$m^2+8m+16$$

7.13

$$p^2-18p+81$$

7.14

$$k^2-9$$

7.15

$$(y-6)(y+4)$$

7.16

$$(3t+2)(t+5)$$

7.17

$$(6p-5)^2$$

7.18

$$5(x-4)(x+4)$$

7.19

$$y=\frac{3}{5}$$

7.20

$$a=0$$

7.21

$$12x^2-2x$$

7.22

$$n(n-11)(n+2)$$

## Prófið sjálf

7.1

16

7.2

2

7.3

$$6x^2$$

7.4

$$8y^2$$

7.5

$$2ab$$

7.6

$$3m^3n$$

7.7

$$5m^2$$

7.8

$$7x$$

7.9

$$6(a+4)$$

**7.10**

$$2(b+7)$$

**7.11**

$$14(x+1)$$

**7.12**

$$12(p+1)$$

**7.13**

$$18(u-2)$$

**7.14**

$$30(y-2)$$

**7.15**

$$5(x^2-5x+3)$$

**7.16**

$$3(y^2-4y+9)$$

**7.17**

$$2x^2(x+6)$$

**7.18**

$$3y^2(2y-5)$$

**7.19**

$$2x(10x^2-5x+7)$$

**7.20**

$$4y(6y^2-3y-5)$$

**7.21**

$$3y^2(3x+2x^2+7y)$$

**7.22**

$$3p(p^2-2pq+3q^3)$$

**7.23**

$$-16(z+4)$$

7.24

$$-9(y+3)$$

7.25

$$-4b(b-4)$$

7.26

$$-7a(a-3)$$

7.27

$$(m+3)(4m-7)$$

7.28

$$(n-4)(8n+5)$$

7.29

$$(x+8)(y+3)$$

7.30

$$(a+7)(b+8)$$

7.31

$$(x-5)(x+2)$$

7.32

$$(y+4)(y-7)$$

7.33

$$(x+2)(x+4)$$

7.34

$$(y+3)(y+5)$$

7.35

$$(q+4)(q+6)$$

7.36

$$(t+2)(t+12)$$

7.37

$$(x+4)(x+15)$$

7.38

$$(v+3)(v+20)$$

7.39

$$(u-3)(u-6)$$

7.40

$$(y-7)(y-9)$$

7.41

$$(h-2)(h+6)$$

7.42

$$(k-4)(k+5)$$

7.43

$$(x+2)(x-6)$$

7.44

$$(y+4)(y-5)$$

7.45

$$(r+5)(r-8)$$

7.46

$$(s+2)(s-5)$$

7.47
óþáttanleg
7.48
óþáttanleg
7.49

$$(m+3)(m+6)$$

7.50

$$(n-3)(n-4)$$

7.51

$$(u+4v)(u+7v)$$

7.52

$$(x+6y)(x+7y)$$

7.53

$$(a-b)(a-10b)$$

7.54

$$(m-n)(m-12n)$$

7.55
óþáttanleg
7.56
óþáttanleg
7.57
ⓐ engin aðferð ⓑ snúið FOIL-aðferðinni við ⓒ þáttið með flokkun
7.58
ⓐ þáttið með flokkun ⓑ engin aðferð ⓒ snúið FOIL-aðferðinni við
7.59

$$4(m+1)(m-2)$$

7.60

$$5(k+2)(k-5)$$

7.61

$$3(r-1)(r-2)$$

7.62

$$2(t-2)(t-3)$$

7.63

$$5x(x-1)(x+4)$$

7.64

$$6y(y-2)(y+5)$$

7.65

$$(a+1)(2a+3)$$

7.66

$$(b+1)(4b+1)$$

7.67

$$(2x-3)(4x-1)$$

7.68

$$(2y-7)(5y-1)$$

7.69

$$(a-1)(8a+5)$$

7.70

$$(2b+3)(3b-5)$$

7.71

$$(3x+2)(6x-5)$$

7.72

$$(3y+1)(10y-21)$$

7.73

$$5n(n-4)(3n-5)$$

7.74

$$8q(q+6)(7q-2)$$

7.75

$$(x+2)(6x+1)$$

7.76

$$(2y+1)(2y+3)$$

7.77

$$(4h+5)(5h-3)$$

7.78

$$(g+4)(6g-5)$$

7.79

$$(2t+5)(5t-3)$$

7.80

$$(u+1)(3u+5)$$

7.81

$$4(2x-3)(2x-1)$$

7.82

$$3(3w-2)(2w-3)$$

7.83

$$(2x+3)^2$$

7.84

$$(3y+4)^2$$

7.85

$$(8y-5)^2$$

7.86

$$(4z-9)^2$$

7.87

$$(7x+6y)^2$$

7.88

$$(8m+7n)^2$$

7.89

$$(8r+3s)(2r+3s)$$

7.90

$$(3u+4)(3u+25)$$

7.91

$$2y(2x-3)^2$$

7.92

$$3q(3p+5)^2$$

7.93

$$(h-9)(h+9)$$

7.94

$$(k-11)(k+11)$$

7.95

$$(m-1)(m+1)$$

7.96

$$(9y-1)(9y+1)$$

7.97

$$(14m-5n)(14m+5n)$$

7.98

$$9(4p-q)(4p+q)$$

7.99

$$(12-x)(12+x)$$

7.100

$$(13-p)(13+p)$$

7.101

$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

7.102

$$(x^2+4)(x+2)(x-2)$$

7.103

$$7x(y-5)(y+5)$$

7.104

$$5b(3a-4)(3a+4)$$

7.105

$$8(a^2+25)$$

7.106

$$9(4y^2+9)$$

7.107

$$(x+3)(x^2-3x+9)$$

7.108

$$(y+2)(y^2-2y+4)$$

7.109

$$(u-5)(u^2+5u+25)$$

**7.110**

$$(v-7)(v^2+7v+49)$$

**7.111**

$$(4-3x)(16+12x+9x^2)$$

**7.112**

$$(3-2y)(9+6y+4y^2)$$

**7.113**

$$(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$$

**7.114**

$$125(4m^2+2mn+n^2)(2m-n)$$

**7.115**

$$4(5p+q)(25p^2-5pq+q^2)$$

**7.116**

$$2(6c+7d)(36c^2-42cd+49d^2)$$

**7.117**

$$3a^3(a+6)$$

**7.118**

$$9b^5(5b+3)$$

**7.119**

$$(5a-6)(2a-1)$$

**7.120**

$$(2x-3)(4x-3)$$

**7.121**

$$x(x^2+36)$$

**7.122**

$$3(9y^2+16)$$

**7.123**

$$4x(2x-3)(2x+3)$$

7.124

$$3(3y-4)(3y+4)$$

7.125

$$(2x+5y)^2$$

7.126

$$(3m+7n)^2$$

7.127

$$8(y-1)(y+3)$$

7.128

$$5(u-9)(u+6)$$

7.129

$$2(5m+6)(25m^2-30m+36)$$

7.130

$$3(3q+4)(9q^2-12q+16)$$

7.131

$$4(a^2+4)(a-2)(a+2)$$

7.132

$$7(y^2+1)(y-1)(y+1)$$

7.133

$$6(x+b)(x-2c)$$

7.134

$$2(4x-1)(2x+3y)$$

7.135

$$4(p-1)(p-3)$$

7.136

$$3(q-2)(2q+1)$$

7.137

$$x=3, x=-5$$

7.138

$$y=6, y=-9$$

7.139

$$m=\frac{2}{3}, m=-\frac{1}{2}$$

7.140

$$p=-\frac{3}{4}, p=\frac{3}{4}$$

7.141

$$u=0, u=\frac{1}{5}$$

7.142

$$w=0, w=-\frac{3}{2}$$

7.143

$$x=-1$$

7.144

$$v=2$$

7.145

$$x=4, x=-3$$

7.146

$$b=-2, b=-7$$

7.147

$$c=2, c=\frac{4}{3}$$

7.148

$$d=3, d=-\frac{1}{2}$$

7.149

$$a=0, a=-1$$

7.150

$$b=0, b=-\frac{1}{3}$$

7.151

$$p=\frac{7}{5}, \mathrm{p}=-\frac{7}{5}$$

7.152

$$x=\frac{11}{6}, x=-\frac{11}{6}$$

7.153

$$m=1, m=\frac{3}{2}$$

7.154

$$k=3, k=-3$$

7.155

$$x=0, x=\frac{3}{2}$$

7.156

$$y=0, y=\frac{1}{4}$$

7.157

$$a=-\frac{5}{2}, a=\frac{2}{3}$$

7.158

$$b=-2, b=-\frac{1}{20}$$

7.159

$$-15, -16 \text{ og } 15, 16$$

7.160

$$-21, -20 \text{ og } 20, 21$$

7.161

5 fet og 6 fet

7.162
12 fet og 15 fet
7.163
5 fet og 12 fet
7.164
24 fet og 25 fet

## Verkefni úr hluta 7.1

**1.** 2

**3.** 18

**5.** 10

7.

$$x$$

9.

$$8w^2$$

11.

$$2pq$$

13.

$$6m^2n^3$$

15.

$$2a$$

17.

$$5x^3$$

19.

$$4(x+5)$$

21.

$$3(2m+3)$$

23.

$$9(q+1)$$

25.

$$8(m-1)$$

27.

$$9(n-7)$$

29.

$$3(x^2+2x-3)$$

31.

$$2(4p^2+2p+1)$$

33.

$$8y^2(y+2)$$

35.

$$5x(x^2-3x+4)$$

37.

$$6y^2(2x+3x^2-5y)$$

39.

$$-2(x+2)$$

41.

$$(x+1)(5x+3)$$

43.

$$(b-2)(3b-13)$$

45.

$$(y+3)(x+2)$$

47.

$$(u+2)(v-9)$$

49.

$$(b-4)(b+5)$$

51.

$$(p-9)(p+4)$$

53.

$$-10(2x+1)$$

55.

$$(x^2+2)(3x-7)$$

57.

$$(x+y)(x+5)$$

59.

$$w(w-6)$$

**61.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 7.2

63.

$$(x+1)(x+3)$$

65.

$$(m+1)(m+11)$$

67.

$$(a+4)(a+5)$$

69.

$$(p+5)(p+6)$$

71.

$$(n+3)(n+16)$$

73.

$$(a+5)(a+20)$$

75.

$$(x-2)(x-6)$$

77.

$$(y-3)(y-15)$$

79.

$$(x-1)(x-7)$$

81.

$$(p-1)(p+6)$$

83.

$$(y+1)(y-7)$$

85.

$$(x-4)(x+3)$$

87.

$$(a-7)(a+4)$$

89.

$$(w-9)(w+4)$$

**91.** óþáttanleg

93.

$$(x-4)(x-2)$$

95.

$$(x-12)(x+1)$$

97.

$$(p+q)(p+2q)$$

99.

$$(r+3s)(r+12s)$$

101.

$$(m-2n)(m-10n)$$

103.

$$(x+8y)(x-10y)$$

105.

$$(m+n)(m-65n)$$

107.

$$(a+8b)(a-3b)$$

**109.** óþáttanleg

**111.** óþáttanleg

113.

$$(u-6)(u-6)$$

115.

$$(x+2)(x-16)$$

117.

$$(r-4s)(r-16s)$$

119.

$$(k+4)(k+30)$$

**121.** óþáttanleg

123.

$$(m+8n)(m-7n)$$

125.

$$(u-15v)(u-2v)$$

**127.** óþáttanleg

129.

$$(x+8)(x-7)$$

**131.** Svör geta verið mismunandi

**133.** Svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 7.3

**135.** ⓐ takið SSÞ út fyrir sviga, tvíliða ⓑ snúið FOIL-aðferðinni við ⓒ þáttið með flokkun

**137.** ⓐ snúið FOIL-aðferðinni við ⓑ þáttið með flokkun ⓒ takið SSÞ út fyrir sviga, tvíliða

139.

$$5(x+1)(x+6)$$

141.

$$2(z-4)(z+3)$$

143.

$$7(v-1)(v-8)$$

145.

$$p(p-10)(p+2)$$

147.

$$3m(m-5)(m-2)$$

149.

$$5x^2(x-3)(x+5)$$

151.

$$(2t+5)(t+1)$$

153.

$$(11x+1)(x+3)$$

155.

$$(4w-1)(w-1)$$

157.

$$(3p-2)(2p-5)$$

159.

$$(4q+1)(q-2)$$

161.

$$(4p-3)(p+5)$$

163.

$$16(x-1)(x-1)$$

165.

$$10q(3q+2)(q+4)$$

167.

$$(5n+1)(n+4)$$

169.

$$(3z+1)(3z+4)$$

171.

$$(2k-3)(2k-5)$$

173.

$$(5s-4)(s-1)$$

175.

$$(3y+5)(2y-3)$$

177.

$$(2n+3)(n-15)$$

**179.** óþáttanleg

181.

$$10(6y-1)(y+5)$$

183.

$$3z(8z+3)(2z-5)$$

185.

$$8(2s+3)(s+1)$$

187.

$$12(4y-3)(y+1)$$

189.

$$(4y-7)(3y-2)$$

191.

$$(a-5)(a+4)$$

193.

$$(2n-1)(3n+4)$$

**195.** óþáttanleg

197.

$$13(z^2+3z-2)$$

199.

$$(x+7)(x-4)$$

201.

$$3p(p+7)$$

203.

$$6(r+2)(r+3)$$

205.

$$4(2n+1)(3n+1)$$

207.

$$(x+6)(x-4)$$

209.

$$-16(t-6)(t+1)$$

**211.** Svör geta verið mismunandi.

**213.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 7.4

215.

$$(4y+3)^2$$

217.

$$(6s+7)^2$$

219.

$$(10x-1)^2$$

221.

$$(5n-12)^2$$

223.

$$(7x-2y)^2$$

225.

$$(5n+4)(5n+1)$$

227.

$$(8m-1)^2$$

229.

$$10(k+4)^2$$

231.

$$3u(5u-v)^2$$

233.

$$(x-4)(x+4)$$

235.

$$(5v-1)(5v+1)$$

237.

$$(11x-12y)(11x+12y)$$

239.

$$(13c-6d)(13c+6d)$$

241.

$$(2-7x)(2+7x)$$

243.

$$(2z-1)(2z+1)(4z^2+1)$$

245.

$$5(q-3)(q+3)$$

247.

$$6(4p^2+9)$$

249.

$$(x+5)(x^2-5x+25)$$

251.

$$(z-3)(z^2+3z+9)$$

253.

$$(2-7t)(4+14t+49t^2)$$

255.

$$(2y-5z)(4y^2+10yz+25z^2)$$

257.

$$7(k+2)(k^2-2k+4)$$

259.

$$2(1-2y)(1+2y+4y^2)$$

261.

$$(8a-5)(8a+5)$$

263.

$$3(3q-1)(3q+1)$$

265.

$$(4x-9)^2$$

267.

$$2(4p^2+1)$$

269.

$$(5-2y)(25+10y+4y^2)$$

271.

$$5(3n+2)^2$$

273.

$$(2w+15)^2$$

**275.** Svör geta verið mismunandi.

**277.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 7.5

279.

$$5x^3(2x+7)$$

281.

$$(y-3)(y+13)$$

283.

$$(2n-1)(n+7)$$

285.

$$a^3(a^2+9)$$

287.

$$(11r-s)(11r+s)$$

289.

$$8(m-2)(m+2)$$

291.

$$(5w-6)^2$$

293.

$$(m+7n)^2$$

295.

$$7(b+3)(b-2)$$

297.

$$3(x-3)(x^2+3x+9)$$

299.

$$(k-2)(k+2)(k^2+4)$$

301.

$$3(5p+4)(q-1)$$

303.

$$4(x+3)(x+7)$$

305.

$$u^2(u+1)(u^2-u+1)$$

**307.** óþáttanleg

309.

$$10(m-5)(m+5)(m^2+25)$$

**311.** ⓐ $-16(t^2-5)$ ⓑ $-8(2t+5)(t-2)$

**313.** Svar getur verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 7.6

315.

$$x=3, x=-7$$

317.

$$a=10/3, a=7/2$$

319.

$$m=0, m=5/12$$

321.

$$y=3$$

323.

$$x=1/2$$

325.

$$x=-3, x=-4$$

327.

$$a=-4/5, a=6$$

329.

$$m=5/4, m=3$$

331.

$$a=-1, a=0$$

333.

$$m=12/7, m=-12/7$$

335.

$$y=-1, y=6$$

337.

$$x=3/2, x=-1$$

339.

$$p=0, p=¾$$

341.

$$x=3/2$$

343.

$$7 \text{ og } 8; -8 \text{ og } -7$$

345.

$$4 \text{ fet og } 7 \text{ fet}$$

347.

$$6 \text{ fet og } 8 \text{ fet}$$

349.

$$x=-8, x=3$$

351.

$$p=-1, p=-11$$

353.

$$m=-2, m=8$$

355.

$$a=0, a=-6, a=7$$

357.

$$10 \text{ og } 11 ; -11 \text{ og } -10$$

**359.** 10 fet

**361.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

**363.** 6

365.

$$15$$

367.

$$6(4x-7)$$

369.

$$3m^2(5m^2+2n)$$

371.

$$(a+b)(x-y)$$

373.

$$(x-3)(x+7)$$

375.

$$(m^2+1)(m+1)$$

377.

$$(u+8)(u+9)$$

379.

$$(k-6)(k-10)$$

381.

$$(y+7)(y-1)$$

383.

$$(s-4)(s+2)$$

385.

$$(x+5y)(x+7y)$$

387.

$$(a+7b)(a-3b)$$

**389.** Snúið FOIL-aðferðinni við

**391.** Takið SSÞ út fyrir sviga

393.

$$6(x+2)(x+5)$$

395.

$$3n^2(n-8)(n+4)$$

397.

$$(x+4)(2x+1)$$

399.

$$(3a-1)(6a-1)$$

401.

$$(5p+4)(3p-2)$$

403.

$$(5s-2)(8s+3)$$

405.

$$3(x+4)(x-3)$$

407.

$$5(4y+1)(3y-5)$$

409.

$$(5x+3)^2$$

411.

$$(6a-7b)^2$$

413.

$$10(2x+9)^2$$

415.

$$2y(y-4)^2$$

417.

$$(9r-5)(9r+5)$$

419.

$$(13m+n)(13m-n)$$

421.

$$(5p-1)(5p+1)$$

423.

$$(3+11y)(3-11y)$$

425.

$$5(2x-5)(2x+5)$$

427.

$$u(7u+3)(7u-3)$$

429.

$$(a-5)(a^2+5a+25)$$

431.

$$2(m+3)(m^2-3m+9)$$

433.

$$4x^2(6x+11)$$

435.

$$(4n-7m)^2$$

437.

$$(r+6)(5r-8)$$

439.

$$(n^2+9)(n+3)(n-3)$$

441.

$$5(x-3)(x+4)$$

443.

$$(m+5)(m^2-5m+25)$$

445.

$$a=3, a=-7$$

447.

$$m=0\, m=-6\, m=\frac{5}{2}$$

449.

$$x=-4, x=-5$$

451.

$$p=-\frac{5}{2}, p=8$$

453.

$$m=\frac{5}{12}, m=-\frac{5}{12}$$

455.

$$-21 \text{ og } -22; 21 \text{ og } 22$$

## Æfingapróf

457.

$$14(y-3)$$

459.

$$40a^2(2+3a)$$

461.

$$(x+7)(x+6)$$

463.

$$3a(a-6)(a+4)$$

465.

$$5(n+3)^2$$

467.

$$(x-8)(y+7)$$

469.

$$(3s-2)^2$$

471.

$$(10-a)(10+a)$$

473.

$$3(x+5y)(x-5y)$$

475.

$$(a-3)(b-2)$$

477.

$$(4m+1)(2m+5)$$

479.

$$y=-11, y=12$$

481.

$$b=1, b=-1$$

483.

$$n=-\frac{7}{4}, n=-3$$

485.

$$12 \text{ og } 13; -13 \text{ og } -12$$

# Kafli 8

## Undirbúningur

8.1

$$\frac{6}{y}$$

8.2

$$(2x-1)(3x-2)$$

8.3

$$(n+2)(n^2-2n+4)$$

8.4

$$\frac{4}{25}$$

8.5

$$\frac{49}{9}$$

8.6

$$2(x-7)(x+7)$$

8.7

$$10(n+1)(n^2-n+1)$$

8.8

$$5(2p+q)(p-3q)$$

8.9

$$\frac{y+9}{3}$$

8.10

$$\frac{8}{x}$$

8.11

8.12

$$5a(3a-b)(3a+b)$$

8.13

$$\frac{37}{30}$$

8.14

$$8x+26$$

8.15

$$3xy^3$$

8.16

$$-12(4n+1)$$

8.17

$$\frac{2}{3}$$

8.18

$$\frac{1}{54}$$

8.19

$$x=-1$$

8.20

$$n=9, n=-4$$

8.21

$$y=\frac{10-5x}{2}$$

8.22

$$n=90$$

8.23

$$7 \text{ fet}$$

8.24

$$28 \text{ mílur/klst.}$$

8.25

$$x=\frac{10}{7}$$

8.26

$$t=-\frac{5}{2}, t=\frac{2}{3}$$

8.27

$$-\frac{1}{8}$$

8.28

$$n=2{,}25$$

8.29

$$500$$

## Prófið sjálf

8.1

ⓐ $x=0$ ⓑ $n=-\frac{1}{3}$ ⓒ $a=-1, a=-3$

8.2

ⓐ $q=0$ ⓑ $y=-\frac{2}{3}$ ⓒ $m=2, m=-3$

8.3

ⓐ $-2$ ⓑ $\frac{2}{9}$ ⓒ $-\frac{1}{3}$

8.4

ⓐ $\frac{4}{3}$ ⓑ $6$ ⓒ $-1$

8.5

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $\frac{1}{3}$ ⓒ $5$

8.6

ⓐ $\frac{2}{3}$ ⓑ $\frac{4}{5}$ ⓒ $\frac{1}{2}$

8.7

ⓐ $-4$ ⓑ $0$ ⓒ $\frac{4}{9}$

8.8

ⓐ $0$ ⓑ $\frac{3}{16}$ ⓒ $-\frac{3}{16}$

8.9

$$-\frac{5}{9}.$$

8.10

$$-\frac{7}{9}$$

8.11

$$\frac{x}{3y}$$

8.12

$$\frac{8x}{y}$$

8.13

$$\frac{3}{2}$$

8.14

$$\frac{7}{5}$$

8.15

$$\frac{x+1}{x-1}$$

8.16

$$\frac{x-5}{x-1}$$

8.17

$$\frac{x+3}{x+2}$$

8.18

$$\frac{x+1}{x-7}$$

8.19

$$\frac{y^2+1}{y+2}$$

8.20

$$\frac{p^2+2}{p+5}$$

8.21

$$\frac{n}{2(n+1)}$$

8.22

$$\frac{x}{2(x+2)}$$

8.23

$$\frac{2(x-3)}{3(x+3)}$$

8.24

$$\frac{5(y-1)}{2(y+5)}$$

8.25

$$\frac{p^2+4p+16}{p+4}$$

8.26

$$\frac{x^2-2x+4}{x-2}$$

8.27

$$-1$$

8.28

$$-1$$

8.29

$$-\frac{2}{y+5}.$$

8.30

$$-\frac{3}{9+y}$$

8.31

$$-\frac{x+1}{x+5}$$

8.32

$$-\frac{x+2}{x+1}$$

8.33

$$\frac{3}{4}$$

8.34

$$1$$

8.35

$$\frac{5p^2}{2q}$$

8.36

$$\frac{12y^3}{7}$$

8.37

$$\frac{x-2}{2(x+3)}$$

8.38

$$\frac{3(x-6)}{x+5}$$

8.39

$$\frac{x+5}{x}$$

8.40

$$\frac{x-4}{x+3}$$

8.41

$$-\frac{6(x+3)}{x+2}$$

8.42

$$-\frac{v}{3}$$

8.43

$$1$$

8.44

1

8.45

$$-\frac{1}{c-3}$$

8.46

$$-\frac{1}{2+d}$$

8.47

$$\frac{(m-2)}{4(m-8)}$$

8.48

$$\frac{n(n-2)}{n-1}$$

8.49

$$\frac{(a-3)(a+5)}{(a-5)(a-5)}$$

8.50

$$-\frac{(b+2)(b-1)}{(1+b)(b+4)}$$

8.51

$$\frac{2\left(x^2+2x+4\right)}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}$$

8.52

$$\frac{2z\left(z^2+z+1\right)}{(z+1)\left(z^2-z+1\right)}$$

8.53

$$\frac{x-8}{2(x+1)}$$

8.54

$$\frac{y-2}{3y^2(y-4)}$$

8.55

$$\frac{x+2}{4}$$

8.56

$$\frac{2}{y+5}$$

8.57

$$\frac{2(m+1)(m+2)}{3(m+4)(m-3)}$$

8.58

$$\frac{(n+5)(n+9)}{2(n+6)(2n+3)}$$

8.59

$$\frac{3}{4}$$

8.60

$$\frac{2}{5}$$

8.61

$$\frac{5x+2}{2x+3}.$$

8.62

$$\frac{x+1}{x-2}$$

8.63

$$x+2$$

8.64

$$x+3$$

8.65

$$x-3$$

8.66

$$2x+5$$

8.67

$$n+3$$

8.68

$$y-8$$

8.69

$$\frac{x-11}{x-2}$$

8.70

$$\frac{x-3}{x+9}$$

8.71

$$3$$

8.72

$$y+3$$

8.73

$$\frac{y+3}{y+2}$$

8.74

$$\frac{3n-2}{n-1}$$

8.75

$$(x-4)(x+4)(x+3)$$

8.76

$$(x+3)(x+6)(x+5)$$

8.77

$$\frac{2x+8}{(x-4)(x+3)(x+4)},\ \frac{x+3}{(x-4)(x+3)(x+4)}$$

8.78

$$\frac{x^2+6x}{(x+3)(x+5)(x+6)},\ \frac{5x+25}{(x+3)(x+5)(x+6)}$$

8.79

$$\frac{19}{20}$$

8.80

$$\frac{33}{40}$$

8.81

$$\frac{4b+25a}{30a^2b^2}$$

8.82

$$\frac{5d^2+6}{16cd^2}$$

8.83

$$\frac{7x-4}{(x+3)(x-2)}$$

8.84

$$\frac{7m+25}{(m+3)(m+4)}$$

8.85

$$\frac{x(5x+7y)}{y(x-y)(x+y)}$$

8.86

$$\frac{7m+15}{2(m+3)(m+1)}$$

8.87

$$\frac{5m^2-9m+2}{(m-2)(m+1)(m+2)}$$

8.88

$$\frac{2\left(n^2+6n-15\right)}{(n+2)(n-5)(n+3)}$$

8.89

$$\frac{-7y+8}{(y+4)(y-5)}$$

8.90

$$\frac{4z+9}{(z+2)(z+3)}$$

8.91

$$\frac{1}{x-2}$$

8.92

$$\frac{-3}{z-3}$$

8.93

$$\frac{5x+1}{(x-6)(x+1)}$$

8.94

$$\frac{y+3}{y+4}$$

8.95

$$\frac{-x+22}{x-7}$$

8.96

$$\frac{-2(3y-4)}{2y-1}$$

8.97

$$\frac{v+3}{v+1}$$

8.98

$$\frac{3w}{w+7}$$

8.99

$$\frac{2}{3(x-1)}$$

8.100

$$\frac{1}{2(x-3)}$$

8.101

$$\frac{14}{11}$$

8.102

$$\frac{10}{23}$$

8.103

$$\frac{y+x}{y-x}$$

8.104

$$\frac{ab}{b-a}$$

8.105

$$\frac{b(b+2)(b-5)}{3b-5}$$

8.106

$$\frac{3}{c+3}$$

8.107

$$\frac{7}{3}$$

8.108

$$\frac{10}{3}$$

8.109

$$\frac{b+a}{a^2+b^2}$$

8.110

$$\frac{y-x}{x\,y}$$

8.111

$$\frac{3\,x-6}{5\,x+7}$$

8.112

$$\frac{x+21}{6\,x-43}$$

8.113

$$\frac{3}{5\,x+22}$$

8.114

$$\frac{6\,y+34}{3\,y}$$

8.115

$$\frac{x}{x+4}$$

8.116

$$\frac{x(x+1)}{3(x-1)}$$

8.117

$$-\frac{15}{7}$$

8.118

$$\frac{15}{13}$$

8.119

$$5, -3$$

8.120

$$6, -2$$

8.121

$$-2$$

8.122

$$-2$$

8.123

$$\frac{2}{3}$$

8.124

$$2$$

8.125

$$-1, -2$$

8.126

$$-2, -3$$

8.127
engin lausn
8.128

$$y = -5$$

8.129

$$-2$$

8.130

$$-3$$

8.131

$$3$$

8.132

$$7$$

8.133
engin lausn
8.134
engin lausn

8.135

$$L=\frac{A}{W}$$

8.136

$$A=\frac{F}{M}$$

8.137

$$x=\frac{3y-8}{2}$$

8.138

$$y=\frac{x}{1+x}$$

8.139

$$a=\frac{b}{cb-1}$$

8.140

$$y=\frac{3x}{6+x}$$

8.141

77

8.142

104

8.143

65

8.144

24

8.145

33

8.146

14

8.147

42

8.148

6

8.149

12 ml

8.150

180 mg

8.151

464 hitaeiningar

8.152

5 stykki

8.153

590,4 evrur

8.154

56.460 jen

8.155
8
8.156
22,5
8.157
150 mílur
8.158
350 mílur
8.159
40 fet
8.160
60 fet
8.161
15 mílur á klukkustund
8.162

17 mílur/klst.

8.163
5 mílur á klukkustund upp brekku og 10 mílur á klukkustund niður brekku

8.164

50 mílur/klst.

8.165

15 mílur/klst.

8.166

6 mílur/klst.

8.167

2 klukkustundir og 24 mínútur

8.168

2 klukkustundir og 6 mínútur

8.169
16,25 klukkustundir
8.170
12 klukkustundir
8.171

$$y=\frac{3}{10}x$$

8.172

$$y=3x$$

8.173
ⓐ $c=4{,}8t$ ⓑ 432 hitaeiningar
8.174
ⓐ $d=50t$ ⓑ 250 mílur
8.175
ⓐ $m=55h$ ⓑ 220 mílur
8.176
ⓐ $w=6v$ ⓑ 78 pund
8.177
ⓐ $d=16t^2$ ⓑ 256 fet
8.178
ⓐ $A=3{,}14r^2$ ⓑ 254,34 fertommur
8.179

$$p=\frac{360}{q}$$

8.180

$$y=\frac{16}{x}$$

8.181

ⓐ $v=\frac{40.000}{a}$ ⓑ \$8.000

8.182

ⓐ $t=\frac{1000}{r}$ ⓑ 2 klukkustundir

8.183

ⓐ $h=\frac{130}{t}$ ⓑ $1\frac{2}{3}$ klukkustundir

8.184

ⓐ $F=\frac{48}{L}$ ⓑ 9,6 pund

## Verkefni úr hluta 8.1

**1.** ⓐ $z=0$ ⓑ $p=\frac{5}{6}$ ⓒ $n=-4, n=2$

**3.** ⓐ $y=0$ ⓑ $x=-\frac{1}{2}$ ⓒ $u=-4, u=7$

**5.** ⓐ 0 ⓑ 4 ⓒ 1

**7.** ⓐ 3 ⓑ $\frac{5}{2}$ ⓒ $-\frac{1}{5}$

**9.** ⓐ $-6$ ⓑ $\frac{20}{3}$ ⓒ 0

**11.** ⓐ $-1$ ⓑ $-\frac{3}{10}$ ⓒ 0

**13.** ⓐ 0 ⓑ $\frac{3}{4}$ ⓒ $\frac{15}{4}$

**15.** ⓐ 0 ⓑ $-\frac{3}{5}$ ⓒ $-\frac{7}{120}$

17.

$$-\frac{1}{13}$$

19.

$$\frac{8}{9}$$

21.

$$\frac{b}{2a}$$

23.

$$\frac{2m^2}{3n}$$

25.

$$\frac{3}{4}$$

27.

$$\frac{3}{5}$$

29.

$$\frac{7}{5}$$

31.

$$\frac{12}{5}$$

33.

$$\frac{a+3}{a-4}$$

35.

$$\frac{y+4}{y-5}$$

37.

$$\frac{x-5}{x-3}$$

39.

$$\frac{y+1}{y+3}$$

41.

$$\frac{y^2+1}{y+1}$$

43.

$$x-2$$

45.

$$\frac{a(a+5)}{2(a+3)(a-2)}$$

47.

$$\frac{c}{2(c-5)}$$

49.

$$\frac{3(m+5)}{4(m-5)}$$

51.

$$\frac{5(r-1)}{r-7}$$

53.

$$\frac{t^2+3t+9}{t+3}$$

55.

$$\frac{w^2-6w+36}{w-6}$$

57.

$$-1$$

59.

$$-1$$

61.

$$-\frac{2}{x+6}$$

63.

$$-\frac{4}{8+v}$$

65.

$$-\frac{(y-8)}{3+y}$$

67.

$$-\frac{a+4}{9+a}$$

**69.** 16,6%

**71.** Svör geta verið mismunandi, en í þeim öllum ætti að nefna að nefnarinn sé settur jafn núlli.

## Verkefni úr hluta 8.2

73.

$$\frac{3}{10}$$

75.

$$\frac{6}{25}$$

77.

$$\frac{x^3}{8y}$$

79.

$$\frac{8a^4}{3b^2}$$

81.

$$\frac{p(p-4)}{2(p-9)}$$

83.

$$\frac{r+5}{2r(r+2)}$$

85.

$$\frac{x-7}{4(x+3)}$$

87.

$$\frac{z+3}{z(z+1)}$$

89.

$$-\frac{4(b+9)}{3(b+7)}$$

91.

$$-7$$

93.

$$1$$

95.

$$1$$

97.

$$\frac{(6-t)(t+3)}{t-5}$$

99.

$$-\frac{1}{10-w}$$

101.

$$\frac{3y^2(y+6)(y+7)}{(y-7)(y^2+6)}$$

103.

$$\frac{a(a-5)}{a-6}$$

105.

$$\frac{(c+2)(c+2)}{(c-2)(c-3)}$$

**107.**

$$-\frac{(m-2)(m-3)}{(3+m)(m+4)}$$

**109.**

$$\frac{3s}{s+4}$$

**111.**

$$\frac{4\left(p^2-pq+q^2\right)}{(p-q)\left(p^2+pq+q^2\right)}$$

**113.**

$$\frac{t+3}{2t(t-3)}$$

**115.**

$$\frac{y+3z}{2y(2y-1)}$$

**117.**

$$\frac{2a-7}{5}$$

**119.**

$$3(3c-5)$$

**121.**

$$\frac{4(m+8)(m+7)}{3(m-4)(m+2)}$$

**123.**

$$\frac{(4p+1)(p-4)}{3p(p+9)(p-1)}$$

**125.** ⓐ $\dfrac{w(w-1)}{(w+m)(w+m-1)}$

ⓑ $\dfrac{2}{21}$

**127.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 8.3

129.

$$\frac{3}{5}$$

131.

$$\frac{3}{4}$$

133.

$$\frac{3a+1}{a-b}$$

135.

$$\frac{d+5}{d+8}$$

137.

$$p+8$$

139.

$$r+8$$

141.

$$8t$$

143.

$$\frac{2w}{w-4}$$

145.

$$y-8$$

147.

$$3a+7$$

149.

$$c+2$$

151.

$$\frac{m-2}{2}$$

153.

$$\frac{p+3}{p+5}$$

155.

$$\frac{r+9}{r+7}$$

157.

$$4$$

159.

$$x+2$$

161.

$$\frac{z+4}{z-5}$$

163.

$$\frac{4b-3}{b-7}$$

165.

$$\frac{32(r+1)}{r(r+4)}$$

## Verkefni úr hluta 8.4

169.

$$(x-4)(x+2)(x+3)$$

171.

$$(z-2)(z+4)(z+2)$$

173.

$$(b+3)(b+3)(b-5)$$

175.

$$(3d-1)(d+5)(d-6)$$

177.

$$\frac{5x+15}{(x-4)(x+2)(x+3)},\quad \frac{2x^2+4x}{(x-4)(x+2)(x+3)}$$

179.

$$\frac{9z+18}{(z-2)(z+4)(z+2)},\quad \frac{4z^2+16z}{(z-2)(z+4)(z+2)}$$

181.

$$\frac{4b-20}{(b+3)(b+3)(b-5)},\quad \frac{2b^2+6b}{(b+3)(b+3)(b-5)}$$

183.

$$\frac{2d-12}{(3d-1)(d+5)(d-6)},\quad \frac{5d^2+25d}{(3d-1)(d+5)(d-6)}$$

185.

$$\frac{37}{72}$$

187.

$$\frac{49}{60}$$

189.

$$\frac{21y+8x}{30x^2y^2}$$

191.

$$\frac{4mn+7}{8m^2n}$$

193.

$$\frac{5r-7}{(r+4)(r-5)}$$

195.

$$\frac{14t-10}{(t+5)(t-5)}$$

197.

$$\frac{11w+1}{(3w-2)(w+1)}$$

199.

$$\frac{2y^2+y+9}{(y+3)(y-1)}$$

201.

$$\frac{b(5b+10+2a^2)}{a^2(b-2)(b+2)}$$

203.

$$\frac{2m^2+23m}{3(m-1)(m+4)}$$

205.

$$\frac{4n^2-9n+6}{(n-3)(n+6)(n+2)}$$

207.

$$\frac{3(r^2+6r+18)}{(r+1)(r+6)(r+3)}$$

209.

$$\frac{2(7t-6)}{(t-6)(t+6)}$$

211.

$$\frac{-4(1+w)}{(w+4)(w-2)}$$

213.

$$\frac{y^2+2y-29}{(y+1)(y+7)}$$

215.

$$\frac{4a^2+25a-6}{(a+3)(a+6)}$$

217.

$$\frac{3}{c-5}$$

219.

$$\frac{-6}{m-6}$$

221.

$$\frac{p+2}{p+3}$$

223.

$$\frac{3}{r-2}$$

225.

$$\frac{v-14}{v+3}$$

227.

$$\frac{4(8x+1)}{10x-1}$$

229.

$$\frac{5a^2+7a-36}{a(a-2)}$$

231.

$$\frac{c-5}{c+2}$$

233.

$$\frac{3a(6a-b)}{b(3a+b)(3a-b)}$$

235.

$$\frac{3}{d+8}$$

237.

$$\frac{2\left(2m^2+7m-1\right)}{(m+7)(m-1)(m+3)}$$

239.

$$-\frac{(n+1)(n+8)}{(n+3)(n-2)}$$

241.

$$\frac{42q+25}{90pq}$$

243.

$$\frac{7(x+2)}{(x-2)(x+5)}$$

245.

$$\frac{-1}{q+4}$$

247.

$$\frac{2(4z+1)}{(z-5)(z+1)}$$

249.

$$\frac{3(d+1)}{d+2}$$

**251.** ⓐ $\frac{2t+3}{t(t+3)}$ ⓑ $\frac{13}{40}$

**253.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 8.5

255.

$$\frac{a-4}{2a}$$

257.

$$\frac{1}{2(c-2)}$$

259.

$$\frac{12}{13}$$

261.

$$\frac{20}{57}$$

263.

$$\frac{n^2+m}{m-n^2}$$

265.

$$\frac{r\,t}{t-r}$$

267.

$$\frac{(x+1)(x-3)}{2}$$

269.

$$\frac{4}{a+1}$$

271.

$$\frac{11}{8}$$

273.

$$19$$

275.

$$\frac{c^2+c}{c-d^2}$$

277.

$$\frac{p\,q}{q-p}$$

279.

$$\frac{2\,x-10}{3\,x+16}$$

281.

$$\frac{3z-19}{3z+8}$$

283.

$$\frac{4}{3a-7}$$

285.

$$\frac{2c+29}{5c}$$

287.

$$\frac{(2p-5)}{5}$$

289.

$$\frac{m(m-5)}{4m^2+m-95}$$

291.

$$\frac{13}{24}$$

293.

$$2(a-4)$$

295.

$$\frac{3mn}{n-m}$$

297.

$$\frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

**299.** ⓐ $\frac{R_1R_2}{R_2+R_1}$ ⓑ $\frac{24}{5}$

**301.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 8.6

303.

305.

$$\frac{4}{7}$$

307.

$$\frac{40}{21}$$

309.

$$-9$$

311.

$$-2,4$$

313.

$$-5,-4$$

315.

$$-6$$

317.

$$14$$

319.

$$\frac{-4}{5}$$

321.

$$-\frac{1}{3}$$

323.

$$-2,-1$$

325.

$$-5,-1$$

327.

engin lausn

329.

engin lausn

331.

$$-4$$

333.

$$-8$$

335.

$$2$$

337.

$$1$$

339.

engin lausn

341.

engin lausn

343.

$$r=\frac{C}{2\pi}$$

345.

$$h=\frac{v}{lw}$$

347.

$$w=2v+7$$

349.

$$c=\frac{b+3+2a}{a}$$

351.

$$p=\frac{q}{4q-2}$$

353.

$$w=\frac{15v}{10+v}$$

355.

$$n=\frac{5m+23}{4}$$

357.

$$y=\frac{20x}{12-x}$$

359.

$$t=\frac{3r-s}{r}$$

**361.** $2\frac{6}{11}$ dagar

**363.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 8.7

365.

$$49$$

367.

$$7$$

369.

$$9$$

371.

$$-11$$

373.

$$7$$

375.

$$0{,}6$$

377.

$$16$$

379.

$$40$$

381.

60

383.

30

385.

9 ml

387.

325 mg

389.

159 hitaeiningar

391.

5 únsur

393.

252,5 kanadískir dalir

395.

0,80 evrur

397.

0,63 sterlingspund

399.

3 bollar

401.

1,30 kanadískir dalir

403.

17 teskeiðar

**405.** $\frac{3}{4}$ bolli

407.

12

409.

$$\frac{77}{18}$$

**411.** 950 mílur

**413.** 680 mílur

**415.** $\frac{2}{3}$ fet $(8\,\text{tommur})$

417.

247,3 fet

**419.** 114 slög á mínútu; nei

**421.** 19 gallon $58,71

**423.** 4 pokar

**425.** 5 pund

**427.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 8.8

429.

160 mílur/klst.

431.

29 mílur/klst.

433.

30 mílur/klst.

435.

20 mílur/klst.

437.

4 mílur/klst.

439.

60 mílur/klst.

441.

650 mílur/klst.

443.

50 mílur/klst.

445.

50 mílur/klst.

447.

2 klukkustundir

449.

2 klukkustundir og 44 mínútur

451.

12 klukkustundir

453.

7 klukkustundir og 30 mínútur

455.

2 klukkustundir og 55 mínútur

457.

4 klukkustundir

**459.** 3 mílur á klukkustund

## Verkefni úr hluta 8.9

463.

$$y=\frac{14}{3}x$$

465.

$$v=3w$$

467.

$$p=3{,}2q$$

469.

$$a=18b$$

**471.** ⓐ $P=10n$ ⓑ $40

**473.** ⓐ $a=4{,}5p$ ⓑ 27 epli

**475.** ⓐ $p=3{,}98g$ ⓑ $59,70

**477.** ⓐ $m=8v$ ⓑ 16 lítrar

**479.** ⓐ $d=5t^2$ ⓑ 245 fet

**481.** ⓐ $A=3{,}14r^2$ ⓑ 50,24 fertommur

483.

$$y=\frac{20}{x}$$

485.

$$v=\frac{3}{w}$$

**487.** ⓐ $g=\frac{92.400}{w}$ ⓑ 16,8 mílur á gallon

**489.** ⓐ $t=\frac{1000}{r}$ ⓑ 2,5 klukkustundir

**491.** ⓐ $L=\frac{4.400}{f}$ ⓑ 440 sveiflur á sekúndu

**493.** ⓐ $t=\frac{125}{p}$ ⓑ 50 miðar

495.

$$y=\frac{5}{3}x$$

497.

$$p=\frac{30}{q}$$

499.

$$p=5q$$

501.

5 pund

503.

3 tommur

505.

15,6 mílur/gallon

507.

267,3 fet

**509.** ⓐ $c = 2{,}5\,m$ ⓑ \$55

**511.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

513.

$$a \neq \frac{2}{3}$$

515.

$$y \neq 0$$

517.

$$-\frac{5}{6}$$

519.

$$\frac{7}{2}$$

521.

$$\frac{5}{12}$$

523.

14

525.

$$-\frac{c+1}{c+2}$$

527.

$$-\frac{7}{5+v}$$

529.

$$\frac{1}{20}$$

531.

$$\frac{3}{b}$$

533.

$$\frac{6t}{(t+6)^2}$$

535.

$$\frac{-1}{11-w}$$

537.

$$\frac{5}{c+4}$$

539.

$$1$$

541.

$$p+5$$

543.

$$d-7$$

545.

$$\frac{q-3}{q+5}$$

547.

$$\frac{15w+2}{6w-1}$$

549.

$$\frac{3b^2+19b-16}{(b-7)(b+7)}$$

551.

$$(m+2)(m-5)(m+4)$$

553.

$$(3p+1)(p+6)(p+8)$$

555.

$$\frac{6n+12}{(n-2)(n-2)(n+2)},\quad \frac{2n^2-4n}{(n-2)(n-2)(n+2)}$$

557.

$$\frac{19}{15}$$

559.

$$\frac{11c-12}{(c-2)(c+3)}$$

561.

$$\frac{5x^2+26x}{(x+4)(x+4)(x+6)}$$

563.

$$\frac{2\left(v^2+10v-2\right)}{(v+2)(v+8)}$$

565.

$$\frac{2m-7}{m+2}$$

567.

$$\frac{4}{d-8}$$

569.

$$\frac{a-2}{2a}$$

571.

$$\frac{(x+2)(x-5)}{2}$$

573.

$$\frac{2(3q-11)(q+4)}{5(q-4)}$$

575.

$$\frac{z-5}{21z+21}$$

577.

$$\frac{6}{7}$$

579.

$$\frac{3}{2}$$

581.

engin lausn

583.

$$l=\frac{V}{hw}$$

585.

$$z=\frac{y+5+7x}{x}$$

587.

$$\frac{12}{5}$$

589.

15

591.

1126 hitaeiningar

593.

$$b=9\,;x=2\frac{1}{3}$$

**595.** 23 fet

597.

45 mílur/klst.

599.

16 mílur/klst.

601.

$\frac{4}{5}$ klukkustund

603.

12 dagar

605.

7

607.

36

609.

$9

611.

9 miðar

## Æfingapróf

613.

$$\frac{a}{2b}$$

615.

$$\frac{x+3}{3x}$$

617.

$$\frac{4+5q}{pq}$$

619.

$$\frac{19}{6}$$

621.

$$\frac{14}{11}$$

623.

$$\frac{1}{2}$$

**625.** 4

**627.** 60

629.

$$125\,\text{mg}$$

631.

34 mílur/klst.

633.

$$1\frac{5}{9}\,\text{klukkustundir}$$

635.

$$\$\,74{,}70$$

**637.** 64 mílur

# Kafli 9

## Undirbúningur

9.1

ⓐ 81 ⓑ 81 ⓒ $-81$

9.2

$$3{,}85$$

9.3

ⓐ $-\sqrt{100}$ ⓑ $\sqrt{-100}$.

9.4

$$\frac{5}{11}$$

9.5

$$n^6$$

9.6

$$\frac{1}{q^8}$$

9.7

ⓐ $12x$ ⓑ $5m+5n$

9.8

$$5x\sqrt{2x}$$

9.9

$$24uv$$

9.10

$$72-42n$$

9.11

$$8+2a+a^2$$

9.12

$$\frac{30}{48}$$

9.13

$$5$$

9.14

$$49-9x^2$$

9.15

ⓐ $3$ ⓑ $81$

9.16

$$22$$

9.17

$$n=2 \text{ eða } n=4$$

9.18

$$y^9$$

9.19

$$n^{12}$$

9.20

$$x^{5}$$

9.21

$$\frac{53}{60}$$

9.22

$$64\,x^{6}\,y^{15}$$

9.23

$$\frac{1}{125}$$

## Prófið sjálf

9.1

ⓐ $-7$ ⓑ $15$

9.2

ⓐ $8$ ⓑ $-11$

9.3

ⓐ ekki rauntala ⓑ $-9$

9.4

ⓐ $-7$ ⓑ ekki rauntala

9.5

ⓐ $7$ ⓑ $5$

9.6

ⓐ $17$ ⓑ $23$

9.7

$$6<\sqrt{38}<7$$

9.8

$$9<\sqrt{84}<10$$

9.9

$$\approx 3{,}32$$

9.10

$$\approx 3{,}61$$

**9.11**

ⓐ $y^4$ ⓑ $z^6$

**9.12**

ⓐ $m^2$ ⓑ $b^5$

**9.13**

$$8x$$

**9.14**

$$13y$$

**9.15**

$$-11y$$

**9.16**

$$-10p$$

**9.17**

$$10ab$$

**9.18**

$$15mn$$

**9.19**

$$7x^{15}$$

**9.20**

$$9w^{18}$$

**9.21**

$$13x^5y^7$$

**9.22**

$$12p^6q^{10}$$

**9.23**

$$4\sqrt{3}$$

**9.24**

$$3\sqrt{5}$$

**9.25**

$$12\sqrt{2}$$

9.26

$$12\sqrt{3}$$

9.27

$$b^2\sqrt{b}$$

9.28

$$p^4\sqrt{p}$$

9.29

$$4x^3\sqrt{x}$$

9.30

$$7v^4\sqrt{v}$$

9.31

$$4y^2\sqrt{2y}$$

9.32

$$5a^4\sqrt{3a}$$

9.33

$$7a^3b^2\sqrt{2ab}$$

9.34

$$6m^4n^5\sqrt{5mn}$$

9.35

$$5+5\sqrt{3}$$

9.36

$$2+7\sqrt{2}$$

9.37

$$2-\sqrt{3}$$

9.38

$$2-\sqrt{5}$$

9.39

$$\frac{5}{4}$$

9.40

$$\frac{7}{9}$$

9.41

$$\frac{5}{4}$$

9.42

$$\frac{7}{9}$$

9.43

$$a$$

9.44

$$x^2$$

9.45

$$5x^2$$

9.46

$$6z$$

9.47

$$\frac{\sqrt{19}}{7}$$

9.48

$$\frac{2\sqrt{7}}{9}$$

9.49

$$\frac{2p\sqrt{6p}}{7}$$

9.50

$$\frac{2x^2\sqrt{3x}}{5}$$

9.51

$$\frac{4m\sqrt{5m}}{n^3}$$

9.52

$$\frac{3u^3\sqrt{6u}}{v^4}$$

9.53

$$\frac{8x^2}{3}$$

9.54

$$\frac{2a^2}{5}$$

9.55

$$\frac{5y\sqrt{x}}{6}$$

9.56

$$\frac{4m\sqrt{3}}{5n^3\sqrt{5n}}$$

9.57

$$-\sqrt{2}$$

9.58

$$-4\sqrt{3}$$

9.59

$$9\sqrt{x}$$

9.60

$$8\sqrt{u}$$

9.61

$$7\sqrt{p}-6\sqrt{q}$$

9.62

$$6\sqrt{a}-3\sqrt{b}$$

9.63

$$9\sqrt{11}$$

9.64

$$11\sqrt{10}$$

9.65

$$\sqrt{5}+2\sqrt{6}$$

9.66

$$-5\sqrt{7}+2\sqrt{5}$$

9.67

$$-2\sqrt{7x}$$

9.68

$$-\sqrt{3y}$$

9.69

$$-2\sqrt{5xy}$$

9.70

$$0$$

9.71

$$9\sqrt{2}$$

9.72

$$7\sqrt{3}$$

9.73

$$\sqrt{2}$$

9.74

$$-\sqrt{5}$$

9.75

$$6\sqrt{3}$$

9.76

$$-15\sqrt{5}$$

9.77

$$-\sqrt{3}$$

9.78

$$0$$

9.79

$$\frac{14}{15}\sqrt{2}$$

9.80

$$\frac{1}{12}\sqrt{5}$$

9.81

$$-m^3\sqrt{2m}$$

9.82

$$-p\sqrt{3p}$$

9.83

$$20x\sqrt{2}-12x\sqrt{3}$$

9.84

$$28y\sqrt{3}-24y\sqrt{2}$$

9.85

$$10x\sqrt{3}$$

9.86

$$-5x\sqrt{2}$$

9.87

ⓐ $3\sqrt{2}$ ⓑ $36\sqrt{2}$

9.88

ⓐ $5\sqrt{2}$ ⓑ $90\sqrt{2}$

9.89

$$12\sqrt{15}$$

9.90

$$27\sqrt{2}$$

9.91

ⓐ $3x^2\sqrt{2}$ ⓑ $10y^2\sqrt{y}$

9.92
ⓐ $2x^3\sqrt{3}$ ⓑ $6y^3\sqrt{y}$
9.93

$$144x^3\sqrt{10}$$

9.94

$$144y^2\sqrt{5y}$$

9.95
ⓐ 12 ⓑ 15
9.96
ⓐ 16 ⓑ 20
9.97
ⓐ 330 ⓑ 200
9.98
ⓐ 210 ⓑ 96
9.99
ⓐ $6-2\sqrt{5}$ ⓑ $2\sqrt{3}-3\sqrt{6}$
9.100
ⓐ $12+6\sqrt{6}$ ⓑ $\sqrt{7}+7\sqrt{2}$
9.101
ⓐ $18+\sqrt{6}$ ⓑ $6+12\sqrt{2}$
9.102
ⓐ $-40+4\sqrt{2}$ ⓑ $2\sqrt{7}+14\sqrt{3}$
9.103

$$-3+2\sqrt{6}$$

9.104

$$-2+2\sqrt{10}$$

9.105

$$-66+15\sqrt{7}$$

9.106

$$41-14\sqrt{11}$$

9.107

$$1+9\sqrt{21}$$

9.108

$$-12-20\sqrt{3}$$

**9.109**

$$12+8\sqrt{m}-15m$$

**9.110**

$$10-47\sqrt{n}-15n$$

**9.111**

ⓐ $102+20\sqrt{2}$ ⓑ $55+6\sqrt{6}$

**9.112**

ⓐ $41-12\sqrt{5}$ ⓑ $121-36\sqrt{10}$

**9.113**

$$4+20\sqrt{m}+25m$$

**9.114**

$$9-24\sqrt{n}+16n$$

**9.115**

$$1$$

**9.116**

$$-4$$

**9.117**

$$-11$$

**9.118**

$$-159$$

**9.119**

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**9.120**

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**9.121**

$$\frac{4-\sqrt{10}}{5}$$

9.122

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

9.123

$$\frac{2}{3}$$

9.124

$$\frac{4}{3}$$

9.125

$$r\sqrt{2}$$

9.126

$$p^2\sqrt{7}$$

9.127

$$\frac{5s}{8}$$

9.128

$$\frac{5q^2}{6}$$

9.129

$$\frac{9x^2}{y^2}$$

9.130

$$\frac{10n^3}{m}$$

9.131

$$\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

9.132

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

9.133

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

9.134

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

9.135

$$\frac{\sqrt{14}}{6}$$

9.136

$$\frac{\sqrt{6}}{8}$$

9.137

$$\frac{1}{3}$$

9.138

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

9.139

$$\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}$$

9.140

$$\frac{5\left(5-\sqrt{3}\right)}{22}$$

9.141

$$-\frac{3\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$$

9.142

$$\frac{4+\sqrt{6}}{5}$$

9.143

$$\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}{x-2}$$

9.144

$$\frac{\sqrt{10}\left(\sqrt{y}+\sqrt{3}\right)}{y-3}$$

9.145

$$\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{2}\right)^2}{p-2}$$

9.146

$$\frac{\left(\sqrt{q}-\sqrt{10}\right)^2}{q-10}$$

9.147

ⓐ nei ⓑ já

9.148

ⓐ nei ⓑ já

9.149

$$10$$

9.150

$$7$$

9.151

$$\frac{23}{3}$$

9.152

$$\frac{3}{10}$$

9.153

$$\frac{1}{3}$$

9.154

$$\frac{3}{5}$$

9.155

engin lausn

9.156

engin lausn

9.157

$2,3$

9.158

$5,6$

9.159

$7$

9.160

$3$

9.161

$\frac{127}{2}$

9.162

$\frac{311}{3}$

9.163

engin lausn

9.164

engin lausn

9.165

engin lausn

9.166

engin lausn

9.167

engin lausn

9.168

engin lausn

9.169

19,2 fet

9.170

52,0 cm

9.171

9 sekúndur

9.172

3,5 sekúndur

9.173

42,7 mílur á klukkustund

9.174

54,1 mílur á klukkustund

9.175
ⓐ 3 ⓑ 4 ⓒ 3

9.176
ⓐ 10 ⓑ 2 ⓒ 2

9.177
ⓐ $-5$ ⓑ ekki rauntala ⓒ $-2$

9.178
ⓐ $-6$ ⓑ ekki rauntala ⓒ $-4$

9.179
ⓐ $|b|$ ⓑ $w$ ⓒ $|m|$ ⓓ $q$

9.180
ⓐ $|y|$ ⓑ $p$ ⓒ $|z|$ ⓓ $q$

9.181
ⓐ $\left|u^3\right|$ ⓑ $v^5$

9.182
ⓐ $c^4$ ⓑ $d^4$

9.183
ⓐ $3x^9$ ⓑ $3\left|q^7\right|$

9.184
ⓐ $5p^3$ ⓑ $3q^5$

9.185
ⓐ $|y|\sqrt[4]{y^2}$ ⓑ $z\sqrt[3]{z^2}$

9.186
ⓐ $p\sqrt[5]{p^3}$ ⓑ $q^2\sqrt[6]{q}$

9.187
ⓐ $3\sqrt[3]{3}$ ⓑ $2\sqrt[4]{4}$

9.188
ⓐ $5\sqrt[3]{5}$ ⓑ $3\sqrt[4]{9}$

9.189
ⓐ $3p^3\sqrt[3]{2p}$ ⓑ $2q^2\sqrt[4]{4q^2}$

9.190
ⓐ $4m^3\sqrt[3]{2m^2}$ ⓑ $3|n|\sqrt[4]{2n^3}$

9.191
ⓐ $-3\sqrt[3]{4}$ ⓑ ekki rauntala

9.192
ⓐ $-5\sqrt[3]{5}$ ⓑ ekki rauntala

9.193
ⓐ $|x|$ ⓑ $|y^3|$

9.194
ⓐ $m^2$ ⓑ $n^2$

9.195
ⓐ $-\sqrt[3]{266}$ ⓑ $3|m|\sqrt[4]{2m^2}$

9.196
ⓐ $-4$ ⓑ $3|n|\sqrt[4]{2}$

9.197
ⓐ $\frac{3c^3\sqrt[3]{4c}}{d^2}$ ⓑ $\frac{2x^2}{|y|}\sqrt[4]{\frac{5x^2}{y}}$

9.198
ⓐ $2r\sqrt[3]{\frac{5}{s}}$ ⓑ $\frac{3|m^3|\sqrt[4]{2m^2}}{|n^3|}$

9.199
ⓐ $2\sqrt[5]{3x}$ ⓑ $2\sqrt[3]{9}$

9.200
ⓐ $2\sqrt[4]{10y}$ ⓑ $2\sqrt[6]{32}$

9.201
ⓐ $\sqrt[3]{3}$ ⓑ $6\sqrt[4]{2}$

9.202
ⓐ $-\sqrt[3]{2}$ ⓑ $5\sqrt[5]{2}$

9.203
ⓐ $2y\sqrt[3]{4y^2}+3y^2\sqrt[3]{4y^2}$ ⓑ $3r^2\sqrt[4]{3r^3}+4r^2\sqrt[4]{3r^2}$

9.204
ⓐ $2z^2\sqrt[3]{5z}+3z\sqrt[3]{5z}$ ⓑ $2|s^3|\sqrt[4]{5s}+4|s|\sqrt[4]{5s^2}$

9.205
ⓐ $\sqrt{t}$ ⓑ $\sqrt[3]{m}$ ⓒ $\sqrt[4]{r}$

9.206
ⓐ $\sqrt{b}$ ⓑ $\sqrt[3]{z}$ ⓒ $\sqrt[4]{p}$

9.207
ⓐ $s^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $x^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $b^{\frac{1}{4}}$

9.208
ⓐ $v^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $p^{\frac{1}{3}}$ ⓒ $p^{\frac{1}{4}}$

9.209
ⓐ $(10m)^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $(3n)^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $(486y)^{\frac{1}{4}}$

9.210
ⓐ $(3k)^{\frac{1}{7}}$ ⓑ $(5j)^{\frac{1}{4}}$ ⓒ $(1024a)^{\frac{1}{3}}$

9.211
ⓐ 6 ⓑ 2 ⓒ 2

9.212
ⓐ 10 ⓑ 3 ⓒ 3

9.213
ⓐ $-5$ ⓑ $-5$ ⓒ $\frac{1}{5}$

9.214
ⓐ $-2$ ⓑ $-2$ ⓒ $\frac{1}{2}$

9.215
ⓐ ekki rauntala ⓑ $-8$ ⓒ $\frac{1}{8}$

9.216
ⓐ ekki rauntala ⓑ $-4$ ⓒ $\frac{1}{4}$

9.217
ⓐ $x^{\frac{5}{2}}$ ⓑ $z^{\frac{3}{4}}$ ⓒ $y^{\frac{2}{5}}$

9.218
ⓐ $a^{\frac{2}{5}}$ ⓑ $b^{\frac{7}{3}}$ ⓒ $m^{\frac{5}{4}}$

9.219
ⓐ 8 ⓑ 9 ⓒ 125

9.220
ⓐ 32 ⓑ 729 ⓒ 8

9.221
ⓐ $\frac{1}{32}$ ⓑ $\frac{1}{729}$ ⓒ $\frac{1}{8}$

9.222

ⓐ $\frac{1}{8}$ ⓑ $\frac{1}{9}$ ⓒ $\frac{1}{125}$

9.223

ⓐ $-64$ ⓑ $-\frac{1}{64}$ ⓒ ekki rauntala

9.224

ⓐ $-729$ ⓑ $-\frac{1}{729}$ ⓒ ekki rauntala

9.225

ⓐ $9$ ⓑ $y^3$ ⓒ $m$

9.226

ⓐ $25$ ⓑ $z$ ⓒ $n$

9.227

ⓐ $p^2$ ⓑ $q^6$ ⓒ $x^8$

9.228

ⓐ $r^{10}$ ⓑ $s^9$ ⓒ $m^2$

9.229

ⓐ u ⓑ $v^{\frac{1}{5}}$ ⓒ $\frac{1}{x}$

9.230

ⓐ $c^2$ ⓑ $\frac{1}{m}$ ⓒ $\frac{1}{d}$

9.231

ⓐ $8x^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $4y^{\frac{2}{9}}$

9.232

ⓐ $64m^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $729n^{\frac{3}{5}}$

9.233

ⓐ $m^2$ ⓑ $n^3$

9.234

ⓐ $u^3$ ⓑ $v^5$

## Verkefni úr hluta 9.1

**1.** 6

**3.** 8

**5.** 3

**7.** 10

9.

$$-2$$

11.

$$-1$$

**13.** ekki rauntala

**15.** ekki rauntala

**17.** 5

**19.** 7

21.

$$8<\sqrt{70}<9$$

23.

$$14<\sqrt{200}<15$$

**25.** 4,36

**27.** 7,28

29.

$$y$$

31.

$$a^7$$

33.

$$7x$$

35.

$$11m^{10}$$

37.

$$9x^{18}$$

39.

$$-9x^9$$

41.

$$-8a$$

43.

$$12xy$$

45.

$$13w^4y^5$$

47.

$$3c^4d^6$$

**49.** 25 sentimetrar

**51.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 9.2

53.

$$3\sqrt{3}$$

55.

$$5\sqrt{5}$$

57.

$$10\sqrt{2}$$

59.

$$15\sqrt{2}$$

61.

$$20\sqrt{2}$$

63.

$$15\sqrt{3}$$

65.

$$x^3\sqrt{x}$$

67.

$$p\sqrt{p}$$

69.

$$m^{6}\sqrt{m}$$

71.

$$r^{12}\sqrt{r}$$

73.

$$7n^{8}\sqrt{n}$$

75.

$$9r^{7}\sqrt{r}$$

77.

$$7m^{2}\sqrt{2m}$$

79.

$$5r^{6}\sqrt{5r}$$

81.

$$10p^{6}\sqrt{2p}$$

83.

$$11m^{11}\sqrt{2m}$$

85.

$$7m^{3}n^{5}\sqrt{3mn}$$

87.

$$5r^{6}s^{4}\sqrt{3rs}$$

89.

$$10p^{4}q^{5}\sqrt{3pq}$$

91.

$$11m^{6}n^{10}\sqrt{2mn}$$

93.

$$5+2\sqrt{3}$$

95.

$$1+3\sqrt{5}$$

97.

$$5-\sqrt{6}$$

99.

$$1+\sqrt{10}$$

101.

$$\frac{7}{8}$$

103.

$$\frac{11}{4}$$

105.

$$\frac{6}{7}$$

107.

$$\frac{3}{5}$$

109.

$$x^2$$

111.

$$\frac{1}{y^2}$$

113.

$$10x^2$$

115.

$$4p^4$$

117.

$$\frac{6}{\sqrt{35}}$$

119.

$$\frac{2\sqrt{5}}{9}$$

121.

$$\frac{4x^3\sqrt{6x}}{11}$$

123.

$$\frac{5m^2\sqrt{3m}}{4}$$

125.

$$\frac{7r^2\sqrt{2r}}{10}$$

127.

$$\frac{2q^3\sqrt{7}}{15}$$

129.

$$\frac{5r^4\sqrt{3r}}{s^4}$$

131.

$$\frac{2p^3\sqrt{7p}}{q}$$

133.

$$\frac{5x}{3}$$

135.

$$\frac{11p\sqrt{p}}{9}$$

137.

$$\frac{4xy}{3}$$

139.

$$\frac{1}{2pq\sqrt{p}}$$

**141.** ⓐ 17,0 fet ⓑ 12,0 fet

**143.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 9.3

145.

$$3\sqrt{2}$$

147.

$$9\sqrt{5}$$

149.

$$-\sqrt{7}$$

151.

$$9\sqrt{y}$$

153.

$$-3\sqrt{a}$$

155.

$$7\sqrt{c}$$

157.

$$8\sqrt{a}-2\sqrt{b}$$

159.

$$5\sqrt{m}+\sqrt{n}$$

161.

$$13\sqrt{7}$$

163.

$$-3\sqrt{11}$$

165.

$$-5\sqrt{3}+7\sqrt{5}$$

167.

$$8\sqrt{2}-3\sqrt{5}$$

169.

$$4\sqrt{2a}$$

171.

$$\sqrt{3c}$$

173.

$$4\sqrt{3ab}$$

175.

$$\sqrt{pq}$$

177.

$$9\sqrt{2}$$

179.

$$\sqrt{5}$$

181.

$$-2\sqrt{3}$$

183.

$$7\sqrt{3}$$

185.

$$-8\sqrt{2}$$

187.

$$16\sqrt{3}$$

189.

$$5\sqrt{2}$$

191.

$$-\sqrt{5}$$

193.

$$-\sqrt{3}$$

195.

$$-\frac{11}{12}\sqrt{2}$$

197.

$$a^2\sqrt{2a}$$

199.

$$2c^3\sqrt{5c}$$

201.

$$36p^2\sqrt{5}-42p^2\sqrt{2}$$

203.

$$10r^4\sqrt{2}+12r^4\sqrt{6}$$

205.

$$14x\sqrt{5}$$

207.

$$4y\sqrt{2}$$

209.

$$6\sqrt{2}$$

211.

$$2k^2\sqrt{7}$$

213.

$$2\sqrt{3}$$

215.

$$\sqrt{2}$$

217.

$$\sqrt{13}$$

219.

$$a^2\sqrt{5a}$$

221.

$$19\sqrt{19}$$

223.

$$5\sqrt{3}$$

225.

$$-\sqrt{3}$$

227.

$$8x\sqrt{6}$$

229.

124,5 tommur

**231.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 9.4

**233.** ⓐ $4$ ⓑ $18\sqrt{6}$

**235.** ⓐ $7\sqrt{2}$ ⓑ 160

237.

$$30\sqrt{3}$$

239.

$$-18\sqrt{6}$$

241.

$$-30\sqrt{2}$$

243.

$$28\sqrt{2}$$

**245.** ⓐ $5y^2\sqrt{3}$ ⓑ $6n^2\sqrt{n}$

**247.** ⓐ $8y^3\sqrt{2}$ ⓑ $11s^3\sqrt{s}$

249.

$$40b^2\sqrt{3}$$

251.

$$150d^5$$

253.

$$54y^4\sqrt{y}$$

255.

$$-96k^5\sqrt{k}$$

**257.** ⓐ 11 ⓑ 21

**259.** ⓐ 23 ⓑ 3

**261.** ⓐ $-234$ ⓑ 180

**263.** ⓐ $105\sqrt{2}$ ⓑ 56

**265.** ⓐ $24-4\sqrt{11}$ ⓑ $5\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

**267.** ⓐ $-14-7\sqrt{11}$ ⓑ $6\sqrt{7}-7\sqrt{2}$

**269.** ⓐ $44+8\sqrt{11}$ ⓑ 15

**271.** ⓐ $18-5\sqrt{2}$ ⓑ $\sqrt{21}-7\sqrt{3}$

273.

$$60+2\sqrt{3}$$

275.

$$52+3\sqrt{2}$$

277.

$$27-9\sqrt{7}$$

279.

$$-62+55\sqrt{5}$$

281.

$$41+7\sqrt{55}$$

283.

$$-81+44\sqrt{78}$$

285.

$$18+7\sqrt{w}-w$$

287.

$$66+73\sqrt{n}+15n$$

**289.** ⓐ $27+8\sqrt{11}$ ⓑ $29-12\sqrt{5}$

**291.** ⓐ $35-10\sqrt{10}$ ⓑ $82+48\sqrt{2}$

**293.** 97

**295.** 39

297.

$$-127$$

**299.** 33

301.

$$-24\sqrt{3}$$

303.

$$-210\sqrt{3}$$

305.

$$7y^3\sqrt{5}$$

307.

$$29$$

309.

$$29-7\sqrt{17}$$

**311.** ⓐ 4,6 fet ⓑ 21 ferfet

313.

$$31{,}9 \text{ ferjardar}$$

**315.** ⓐ Þegar neikvæð tala er hafin í annað veldi verður útkoman jákvæð. ⓑ Þar sem mínusmerkið er ekki innan svigans er það ekki hluti af veldinu og talan helst neikvæð.

## Verkefni úr hluta 9.5

317.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

319.

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

321.

$$\frac{1-2\sqrt{2}}{4}$$

323.

$$\frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

325.

$$\frac{4}{5}$$

327.

$$\frac{4}{3}$$

**329.** ⓐ $2x^2$ ⓑ $\frac{10m^2}{7}$

331.

$$\frac{5r}{6}$$

333.

$$\frac{6p\sqrt{102}}{q^2}$$

335.

$$\frac{8n}{3m^3}$$

337.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

339.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{3}$$

341.

$$\frac{4}{5}$$

343.

$$y^3\sqrt{13}$$

345.

$$\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

347.

$$\frac{6\sqrt{7}}{7}$$

349.

$$\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

351.

$$\frac{\sqrt{10}}{3}$$

353.

$$\frac{4\sqrt{5}}{45}$$

355.

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

357.

$$\frac{\sqrt{15}}{10}$$

359.

$$\frac{\sqrt{70}}{20}$$

361.

$$\frac{\sqrt{133}}{35}$$

**363.** ⓐ $\frac{3\left(3-\sqrt{11}\right)}{-2}$ ⓑ $-2\left(1+\sqrt{5}\right)$

**365.** ⓐ $\frac{5\left(5-\sqrt{6}\right)}{19}$ ⓑ $3\left(3+\sqrt{7}\right)$

367.

$$\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{m}+\sqrt{5}\right)}{m-5}$$

369.

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{6}\right)}{x-6}$$

371.

$$\frac{\left(\sqrt{r}+\sqrt{5}\right)^2}{r-5}$$

373.

$$\frac{5y^2}{x}$$

375.

$$3\sqrt{5}$$

377.

$$\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

379.

$$\frac{3\left(5-\sqrt{5}\right)}{20}$$

381.

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{x-3}$$

383.

$$\frac{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{2}\right)^2}{x-8}$$

385.

$$\frac{5\sqrt{10}}{4}\text{ sekúndur}$$

**387.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 9.6

**389.** ⓐ já ⓑ nei

**391.** ⓐ nei ⓑ já

**393.** 3

**395.** 14

**397.** 14

399.

$$17$$

401.

$$\frac{13}{5}$$

403.

$$\frac{5}{2}$$

405.

engin lausn

407.

engin lausn

**409.** ⓐ $10,11$ ⓑ 5

**411.** ⓐ $8,9$ ⓑ 11

413.

$$3$$

415.

$$5$$

**417.** ekki rauntala

419.

$$\frac{1}{4}$$

**421.** ⓐ engin lausn ⓑ $\frac{57}{16}$

**423.** ⓐ engin lausn ⓑ 6

**425.** engin lausn

**427.** 36

**429.** 15

431.

11,4 fet

433.

8 sekúndur

435.

15,8 sekúndur

437.

72 mílur á klukkustund

439.

53,0 mílur á klukkustund

**441.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 9.7

**443.** ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 3

**445.** ⓐ 5 ⓑ 6 ⓒ 4

**447.** ⓐ $-4$ ⓑ ekki rauntala ⓒ $-3$

**449.** ⓐ $-8$ ⓑ ekki rauntala ⓒ $-1$

**451.** ⓐ $a$ ⓑ $|b|$

**453.** ⓐ $|k|$ ⓑ $|p|$

**455.** ⓐ $a^2$ ⓑ $b^9$

**457.** ⓐ $r^2$ ⓑ $s^{10}$

**459.** ⓐ $-2c^3$ ⓑ $5d^5$

**461.** ⓐ $2r^2$ ⓑ $3s^6$

**463.** ⓐ $u\sqrt[5]{u^2}$ ⓑ $|v|\sqrt[6]{v^5}$

**465.** ⓐ $p\sqrt[5]{p^3}$ ⓑ $q^2\sqrt[3]{q^2}$

**467.** ⓐ $5\sqrt[3]{5}$ ⓑ $2\sqrt[6]{2}$

**469.** ⓐ $5\sqrt[4]{5}$ ⓑ $3\sqrt[3]{3}$

**471.** ⓐ $2a\sqrt[5]{3a^2}$ ⓑ $5b\sqrt[3]{3b}$

**473.** ⓐ $8p\sqrt[3]{p^2}$ ⓑ $3|q|\sqrt[4]{4q^3}$

**475.** ⓐ $-3\sqrt[5]{2}$ ⓑ ekki rauntala

**477.** ⓐ $-2$ ⓑ ekki rauntala

**479.** ⓐ $d$ ⓑ $|m|$

**481.** ⓐ $r^3$ ⓑ $|c^3|$

**483.** ⓐ $-5$ ⓑ $2|m|\sqrt[4]{m^2}$

**485.** ⓐ $3\sqrt[3]{6}$ ⓑ $2|r|\sqrt[4]{2r^3}$

**487.** ⓐ $2r^2\sqrt[5]{\frac{3r}{s^3}}$ ⓑ $2|u|\sqrt[6]{\frac{2u}{v^3}}$

**489.** ⓐ $\frac{5u^3\sqrt[3]{5u}}{v}$ ⓑ $\frac{3|c^5|\sqrt[4]{9c}}{d^2}$

**491.** ⓐ $2\sqrt[3]{15q}$ ⓑ $-4\sqrt[4]{27}$

**493.** ⓐ

$42\sqrt[17]{4y}$

ⓑ

$14\sqrt[19]{5z}$

**495.** ⓐ $2\sqrt[3]{2}$ ⓑ $-2\sqrt[4]{3}$

**497.** ⓐ $3\sqrt[4]{3}+5\sqrt[4]{2}$ ⓑ $13\sqrt[3]{2}$

**499.** ⓐ $2b\sqrt[3]{10b^2}+3b\sqrt[3]{10}$ ⓑ $2v^2\sqrt[4]{10v^2}-4\sqrt[4]{5v^3}$

501.

$2$

503.

$|b|$

505.

$5d^5$

507.

$$s^2\sqrt[4]{s^2}$$

509.

$$2|y|\sqrt[4]{3y^2}$$

511.

ekki rauntala

513.

$$2x\sqrt[5]{2x}$$

515.

$$2|u|\sqrt[6]{\frac{2u}{v^3}}$$

517.

$$2\sqrt[4]{2}$$

519.

$$3\left|u\right|\sqrt[4]{6u^3}+4\sqrt[4]{3u^3}$$

521.

5

**523.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 9.8

**525.** ⓐ $\sqrt{r}$ ⓑ $\sqrt[3]{s}$ ⓒ $\sqrt[4]{t}$

**527.** ⓐ $\sqrt[7]{g}$ ⓑ $\sqrt[5]{h}$ ⓒ $\sqrt[25]{j}$

**529.** ⓐ $r^{\frac{1}{8}}$ ⓑ $s^{\frac{1}{10}}$ ⓒ $t^{\frac{1}{4}}$

**531.** ⓐ $u^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $v^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $w^{\frac{1}{16}}$

**533.** ⓐ $(5x)^{\frac{1}{4}}$ ⓑ $(9y)^{\frac{1}{8}}$ ⓒ $7(3z)^{\frac{1}{5}}$

**535.** ⓐ $(25a)^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $(3b)^{\frac{1}{2}}$ ⓒ $(40c)^{\frac{1}{10}}$

**537.** ⓐ 5 ⓑ 3 ⓒ 2

**539.** ⓐ 6 ⓑ 2 ⓒ 3

**541.** ⓐ $-3$ ⓑ $-3$ ⓒ $\frac{1}{3}$

**543.** ⓐ $-10$ ⓑ $-10$ ⓒ $\frac{1}{10}$

**545.** ⓐ ekki rauntala ⓑ $-7$ ⓒ $\frac{1}{7}$

**547.** ⓐ ekki rauntala ⓑ $1$ ⓒ $-1$

**549.** ⓐ $-2$ ⓑ $\frac{1}{3}$
ⓒ $-5$

**551.** ⓐ $r^{\frac{7}{4}}$ ⓑ $s^{\frac{3}{5}}$ ⓒ $t^{\frac{7}{3}}$

**553.** ⓐ $a^{\frac{1}{3}}$ ⓑ $b^{\frac{5}{2}}$ ⓒ $c^{\frac{5}{3}}$

**555.** ⓐ $100$ ⓑ $125$ ⓒ $8$

**557.** ⓐ $64$ ⓑ $3125$ ⓒ $256$

**559.** ⓐ $32.768$ ⓑ $\frac{1}{729}$ ⓒ $\frac{1}{81}$

**561.** ⓐ $1000$ ⓑ $\frac{1}{16.807}$ ⓒ ekki rauntala

**563.** ⓐ $-512$
ⓑ $-\frac{1}{512}$ ⓒ ekki rauntala

**565.** ⓐ $-343$ ⓑ $-\frac{1}{343}$ ⓒ ekki rauntala

**567.** ⓐ $216$ ⓑ $n$ ⓒ $q^3$

**569.** ⓐ $100$ ⓑ $x^2$ ⓒ $y^4$

**571.** ⓐ $a^2$ ⓑ $b^9$
ⓒ $c$

**573.** ⓐ $h^8$ ⓑ $k^9$ ⓒ $j^{14}$

**575.** ⓐ $s$ ⓑ $z^2$ ⓒ $\frac{1}{w}$

**577.** ⓐ $u$ ⓑ $r$ ⓒ $\frac{1}{n}$

**579.** ⓐ $3r^{\frac{1}{5}}$ ⓑ $2s^{\frac{1}{14}}$

**581.** ⓐ $9m^{\frac{1}{2}}$ ⓑ $125n^2$

**583.** ⓐ $r^2s$ ⓑ $u^3v^4$

**585.** ⓐ $r^8s^5$ ⓑ $u^8v^4$

**587.** ⓐ $a^3$ ⓑ $b^4$

**589.** ⓐ $m$ ⓑ $n^2$

591.

$$n$$

593.

$$b^6$$

595.

$$\frac{1}{z^2}$$

597.

$$2s^{\frac{1}{10}}$$

599.

$$u^2v^3$$

**601.** 15,6 fet

**603.** 8 sekúndur

**605.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

**607.** 12

609.

$$-9$$

**611.** ekki rauntala

**613.** 17

615.

$$12<\sqrt{155}<13$$

**617.** 7,55

619.

$$8|b|$$

621.

$$15|m||n|$$

623.

$$7|y|$$

625.

$$11|c||d|$$

627.

$$7\sqrt{2}$$

629.

$$|y^9|\sqrt{y}$$

631.

$$6n^6\sqrt{n}$$

633.

$$5|n^3|\sqrt{6n}$$

635.

$$6r^2|s|\sqrt{3rs}$$

637.

$$1+\sqrt{2}$$

639.

$$\frac{3}{2}$$

641.

$$y^2$$

643.

$$6q^2$$

645.

$$\frac{\sqrt{26}}{13}$$

647.

$$\frac{3r^2\sqrt{r}}{2}$$

649.

$$\frac{2|r||s^3|\sqrt{r}}{5}$$

651.

$$12\sqrt{5}$$

653.

$$4\sqrt{m}$$

655.

$$11\sqrt{13}+2\sqrt{3}$$

657.

$$3\sqrt{3rs}-5\sqrt{rs}$$

659.

$$5\sqrt{2}$$

661.

$$9\sqrt{3}$$

663.

$$0$$

665.

$$17n^2\sqrt{2}$$

667.

$$24\sqrt{7}$$

669.

$$180y^2$$

**671.** 8

**673.** 50

675.

$$20 - 10\sqrt{7}$$

677.

$$13 - 2\sqrt{2}$$

679.

$$5 - 13\sqrt{x} - 6x$$

681.

$$1 + 12\sqrt{p} + 36p$$

683.

$$-19$$

685.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

687.

$$\frac{4}{3}$$

689.

$$y^2\sqrt{10}$$

691.

$$\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

693.

$$\frac{\sqrt{5}}{3}$$

695.

$$\frac{\sqrt{21}}{14}$$

697.

$$\frac{16 - 12\sqrt{3}}{-11}$$

699.

$$-8-4\sqrt{5}$$

701.

$$\frac{\sqrt{2\,p}-\sqrt{6}}{p-3}$$

**703.** 5

705.

$$\frac{7}{2}$$

**707.** 4 og 5

**709.** 13

711.

$$\frac{43}{2}$$

**713.** 0

715.

$$\frac{1}{16}$$

**717.** 11

**719.** 7,5 sekúndur

**721.** ⓐ 2 ⓑ 4

**723.** ⓐ $d$ ⓑ $|v|$

**725.** ⓐ $2\,x^2$ ⓑ $2\,y^2$

**727.** ⓐ $d$ ⓑ $m\sqrt[11]{m^6}$

**729.** ⓐ $2c\sqrt[5]{2\,c^3}$ ⓑ $2|d|\sqrt[4]{3\,d^3}$

**731.** ⓐ $-5\sqrt[3]{4}$ ⓑ ekki rauntala

733.

$$w^3\sqrt[3]{w}$$

735.

$$3\,z^2$$

737.

$$2\sqrt[5]{20}$$

739.

$$2\sqrt[4]{2}$$

741.

$$2t\sqrt[5]{3t^3}+3\sqrt[5]{2t^4}$$

743.

$$\sqrt[10]{s}$$

745.

$$v^{\frac{1}{6}}$$

747.

$$(10z)^{\frac{1}{6}}$$

**749.** 2

751.

$$\frac{1}{5}$$

753.

$$\frac{1}{6}$$

755.

$$n^{\frac{8}{5}}$$

**757.** 32.768

759.

$$\frac{1}{59.049}$$

761.

$$x^8$$

763.

$$2\,s^{\frac{9}{16}}$$

765.

$$z^2$$

## Æfingapróf

767.

$$13\,m^2|n|$$

769.

$$4\sqrt{13}+5\sqrt{2}$$

771.

$$60\,y^2\sqrt{3}$$

773.

$$1-4\sqrt{q}+4\,q$$

**775.** ⓐ $3|x^3|$ ⓑ $2|y^3|$

777.

$$|y|\sqrt{2}$$

779.

$$0$$

**781.** 343

783.

$$\frac{1}{w}$$

785.

$$\frac{\sqrt{6}}{4}$$

**787.** 42

**789.** 6,1 sekúndur

# Kafli 10

## Undirbúningur

10.1

$$5\sqrt{3}$$

10.2

$$\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

10.3

$$(2x-3)^2$$

10.4

$$x^2+24x+144$$

10.5

$$y-9^2$$

10.6

$$5(n+4)^2$$

10.7

$$-\frac{5}{2}$$

10.8

$$15$$

10.9

$$8\sqrt{2}$$

10.10

$$-51,-49$$

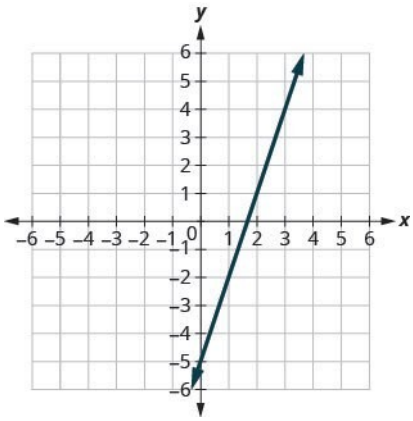
10.11

$$8$$

10.12

$$13\,\text{tommur}$$

10.13




10.14

$$5$$

10.15

$$-\frac{5}{4}$$

## Prófið sjálf

10.1

$$x=9, x=-9$$

10.2

$$y=11, y=-11$$

10.3

$$x=5\sqrt{2}, x=-5\sqrt{2}$$

10.4

$$y=3\sqrt{3}, y=-3\sqrt{3}$$

10.5

$$x=7, x=-7$$

10.6

$$z=6, z=-6$$

10.7

engin rauntölulausn

10.8

engin rauntölulausn

10.9

$$x=2\sqrt{10}, x=-2\sqrt{10}$$

10.10

$$y=2\sqrt{7}, y=-2\sqrt{7}$$

10.11

$$r=\frac{6\sqrt{5}}{5}, r=-\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

10.12

$$t=\frac{8\sqrt{3}}{3}, t=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

10.13

$$q=-6, q=-4$$

10.14

$$r=8, r=-2$$

10.15

$$a=3+3\sqrt{2}, a=3-3\sqrt{2}$$

10.16

$$b=-2+2\sqrt{10}, b=-2-2\sqrt{10}$$

10.17

$$x=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}, x=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

10.18

$$y=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}, y=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

10.19

$$a=5+2\sqrt{5}, a=5-2\sqrt{5}$$

10.20

$$b=3+4\sqrt{2}, b=3-4\sqrt{2}$$

10.21

engin rauntölulausn

10.22

engin rauntölulausn

10.23

$$x=3+2\sqrt{3}, x=3-2\sqrt{3}$$

10.24

$$y=-6+4\sqrt{2}, y=-6-4\sqrt{2}$$

10.25

$$m=-1, m=\frac{7}{3}$$

10.26

$$n=-\frac{3}{4}, n=-\frac{7}{4}$$

10.27

$$(y+6)^2$$

10.28

$$(z+4)^2$$

10.29

$$(a-10)^2$$

10.30

$$(b-2)^2$$

10.31

$$\left(m-\frac{5}{2}\right)^2$$

10.32

$$\left(n+\frac{13}{2}\right)^2$$

10.33

$$\left(p+\frac{1}{8}\right)^2$$

10.34

$$\left(q-\frac{1}{3}\right)^2$$

10.35

$$c=-5, c=1$$

10.36

$$d=-9, d=-1$$

10.37

$$r=-2, r=6$$

10.38

$$t=-1, t=11$$

10.39
engin rauntölulausn
10.40
engin rauntölulausn
10.41

$$x=8\pm 4\sqrt{3}$$

10.42

$$y=-4\pm 3\sqrt{3}$$

10.43

$$a=-7, a=3$$

10.44

$$b=-10, b=2$$

10.45

$$p=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{61}}{2}$$

10.46

$$q=\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$$

10.47

$$c=-3\pm 4\sqrt{2}$$

10.48

$$d=-7, d=11$$

10.49

$$m=-4\pm 2\sqrt{5}$$

10.50

$$n=-2, 8$$

10.51

$$r=-\frac{7}{3}, r=3$$

10.52

$$t=-\frac{5}{2}, t=2$$

10.53

$$x=-\frac{3}{8}\pm\frac{\sqrt{201}}{8}$$

10.54

$$y=-\frac{3}{10}\pm\frac{\sqrt{209}}{10}$$

10.55

$$y=\frac{2}{3}, y=1$$

10.56

$$z=-\frac{3}{2}, z=1$$

10.57

$$a=-3, a=5$$

10.58

$$b=-6, b=-4$$

10.59

$$p=\frac{-4\pm\sqrt{6}}{2}$$

10.60

$$q=\frac{11\pm\sqrt{61}}{10}$$

10.61

$$m=\frac{-6\pm\sqrt{15}}{3}$$

10.62

$$n=\frac{-2\pm2\sqrt{6}}{5}$$

10.63
engin rauntölulausn
10.64
engin rauntölulausn
10.65

$$x=-1\pm\sqrt{6}$$

10.66

$$y=-\frac{2}{3}, y=1$$

10.67

$$c=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$$

10.68

$$d=3, d=\frac{3}{2}$$

10.69

$$r=-5$$

10.70

$$t=\frac{4}{5}$$

10.71
ⓐ engin rauntölulausn ⓑ 2 ⓒ 1 ⓓ engin rauntölulausn
10.72
ⓐ 2 ⓑ engin rauntölulausn ⓒ 1 ⓓ 2

10.73

ⓐ þáttun ⓑ ferningsrótarregla ⓒ lausnarformúla annars stigs jöfnu

10.74

ⓐ lausnarformúla annars stigs jöfnu ⓑ þáttun ⓒ ferningsrótarregla

10.75

Tvær samliggjandi oddatölur sem hafa margfeldið 99 eru annars vegar 9 og 11 og hins vegar $-9$ og $-11$.

10.76

Tvær samliggjandi sléttar tölur sem hafa margfeldið 168 eru annars vegar 12 og 14 og hins vegar $-12$ og $-14$.

10.77

Hæð þríhyrningsins er 8 tommur og breiddin er 52 tommur.

10.78

Hæð þríhyrningsins er 20 fet og breiddin er 11 fet.

10.79

Lengd skuggans er 6,3 fet og lengd fánastangarinnar er 18,9 fet.

10.80

Fjarlægðin í gagnstætt horn er 3,2.

10.81

Breidd garðsins er 11 fet og lengdin er 18 fet.

10.82

Breidd borðdúksins er 6,8 fet og lengdin er 11,8 fet.

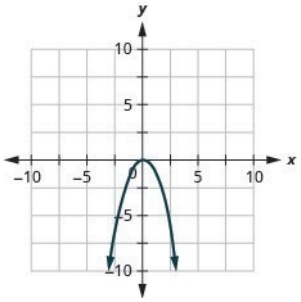
10.83

Örin nær 180 á uppleið eftir 3 sekúndur og á niðurleið eftir 3,8 sekúndur.

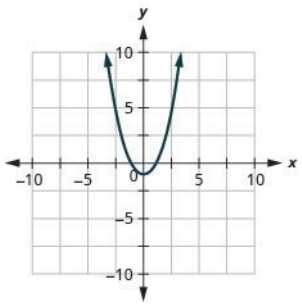
10.84

Boltinn nær 48 fet á uppleið eftir 6 sekúndur og á niðurleið eftir 5,5 sekúndur.

10.85



10.86




10.87

ⓐ upp ⓑ niður

10.88

ⓐ niður ⓑ upp

10.89

ⓐ $x=2$ ⓑ $(2,-7)$

10.90

ⓐ $x=1$ ⓑ $(1,-5)$

10.91

$$y:(0,-8); x:(-4,0),(2,0)$$

10.92

$$y:(0,-12); x:(6,0),(-2,0)$$

10.93

$$y:(0,4); x:\text{engin}$$

10.94

$$y:(0,-5); x:(5,0)(-1,0)$$

10.95

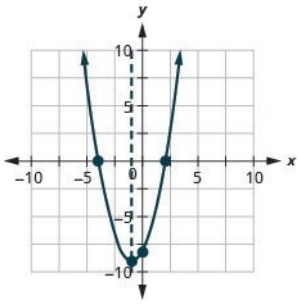
$$y:(0,-36); x:(-6,0)$$

10.96

$$y:(0,4); x:\left(-\frac{2}{3},0\right)$$

10.97

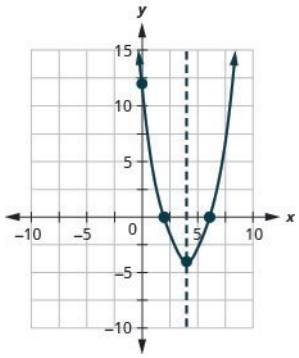
$y:(0,-8)$; $x:(2,0),(-4,0)$; ás:
$x=-1$; hvirfilpunktur: $(-1,-9)$;




10.98

$y:(0,12);\ x:(2,0),(6,0);$

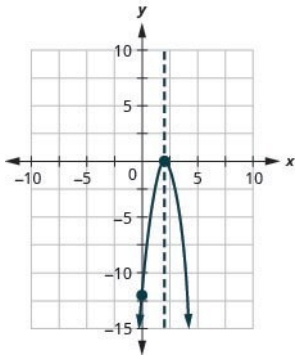
ás: $x=4$; hvirfilpunktur: $(4,-4)$;




10.99

$y:(0,-12);\ x:(2,0);$

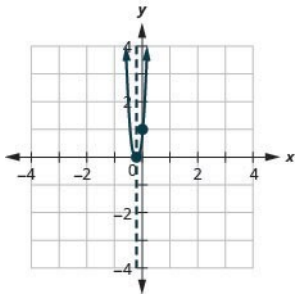
ás: $x=2$; hvirfilpunktur: $(2,0)$;




10.100

$y:(0,1);\ x:\left(-\frac{1}{5},0\right);$

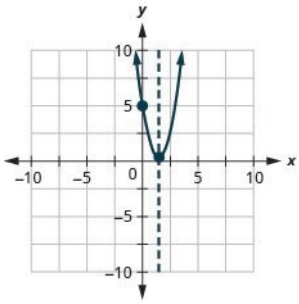
ás: $x=-\frac{1}{5}$; hvirfilpunktur: $\left(-\frac{1}{5},0\right)$;




10.101

$y: (0,5); x: \text{engin};$

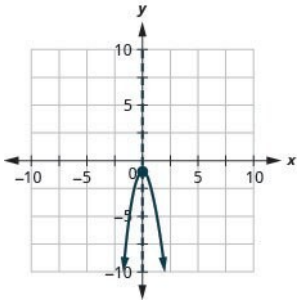
ás: $x=\frac{3}{2}$; hvirfilpunktur: $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$;




10.102

$y: (0,-1); x: \text{engin};$

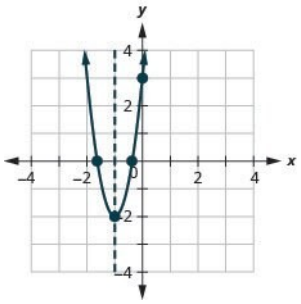
ás: $x=0$; hvirfilpunktur: $(0,-1)$;




10.103

$y: (0,3);\ x: (-1{,}6;0),(-0{,}4;0);$

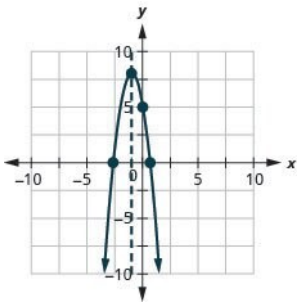
ás: $x=-1$; hvirfilpunktur: $(-1,-2)$;




10.104

$y$: $(0,5)$; $x$: $(0{,}6;0),(-2{,}6;0)$;

ás: $x=-1$; hvirfilpunktur: $(-1,8)$;




10.105

Lággildið er $-4$ þegar $x=4$.

10.106

Hágildið er 5 þegar $x=2$.

10.107

Það tekur 4 sekúndur að ná hágildishæðinni 288 fet.

10.108

Það tekur 6,5 sekúndur að ná hágildishæðinni 676 fet.

## Verkefni úr hluta 10.1

1.

$$a=\pm 7$$

3.

$$r=\pm 2\sqrt{6}$$

5.

$$u=\pm 10\sqrt{3}$$

7.

$$m=\pm 3$$

**9.** engin rauntölulausn

11.

$$a=\pm 2\sqrt{5}$$

13.

$$p=\pm\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

15.

$$x=1, x=-5$$

17.

$$u=14, u=-2$$

19.

$$m=6\pm 2\sqrt{5}$$

21.

$$r=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

23.

$$a=7\pm 5\sqrt{2}$$

**25.** engin rauntölulausn

27.

$$m=2\pm 2\sqrt{2}$$

29.

$$x=-\frac{3}{5}, x=\frac{9}{5}$$

31.

$$r=\pm 4$$

33.

$$a=4\pm 2\sqrt{7}$$

35.

$$w=1, w=\frac{5}{3}$$

37.

$$a=\pm 3\sqrt{2}$$

39.

$$p=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

**41.** engin rauntölulausn

43.

$$u=7\pm 6\sqrt{2}$$

45.

$$m=4\pm 2\sqrt{3}$$

47.

$$x=-3, x=-7$$

49.

$$c=\pm\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

**51.** engin rauntölulausn

**53.** 4 fet

**55.** Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 10.2

57.

$$(a+5)^2$$

59.

$$(m+9)^2$$

61.

$$(m-12)^2$$

63.

$$(p-11)^2$$

65.

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2$$

67.

$$\left(p-\frac{1}{6}\right)^2$$

69.

$$v=-10, v=4$$

71.

$$u=-3, u=1$$

73.

$$c=-1, c=13$$

75.

$$x=-1, x=21$$

**77.** engin rauntölulausn

**79.** engin rauntölulausn

81.

$$a=5\pm 2\sqrt{5}$$

83.

$$u=1, u=13$$

85.

$$v=\frac{9}{2}\pm\frac{\sqrt{89}}{2}$$

87.

$$x=-7, x=3$$

89.

$$m=-11, m=1$$

91.

$$c=-2, c=\frac{3}{2}$$

93.

$$p=-\frac{7}{4}\pm\frac{\sqrt{161}}{4}$$

**95.** 16 fet, 20 fet

**97.** ⓐ $-5$ ⓑ $-5$ ⓒ Svör geta verið mismunandi.

## Verkefni úr hluta 10.3

99.

$$m=-1, m=\frac{3}{4}$$

101.

$$p=\frac{1}{2}, p=3$$

103.

$$p=-4, p=-3$$

105.

$$r=-3, r=11$$

107.

$$u=\frac{-7\pm\sqrt{73}}{6}$$

109.

$$a=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$

**111.** engin rauntölulausn

113.

$$v=\frac{-5\pm\sqrt{65}}{2}$$

115.

$$m=-1, m=\frac{3}{4}$$

117.

$$c=-\frac{3}{4}$$

119.

$$m=-\frac{7}{5}, m=1$$

121.

$$p=-3, p=9$$

123.

$$r=\frac{-3\pm\sqrt{89}}{8}$$

125.

$$a=\frac{-6\pm\sqrt{26}}{2}$$

127.

$$b=\frac{-2\pm\sqrt{22}}{6}$$

129.

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{42}}{4}$$

**131.** ⓐ engin rauntölulausn ⓑ 1 ⓒ 2 ⓓ engin rauntölulausn

**133.** ⓐ 1 ⓑ engin rauntölulausn ⓒ 1 ⓓ 2

**135.** ⓐ þáttun ⓑ ferningsrótarregla ⓒ lausnarformúla annars stigs jöfnu

**137.** ⓐ ferningsrótarregla ⓑ ferningsrótarregla ⓒ þáttun

**139.** 5 sekúndur, 8 sekúndur

**141.** ⓐ $-20, 10$ ⓑ $-20, 10$
ⓒ svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 10.4

**143.** Tvær samliggjandi oddatölur sem hafa margfeldið 255 eru annars vegar 15 og 17 og hins vegar $-15$ og $-17$.

**145.** Tvær samliggjandi sléttar tölur sem hafa margfeldið 624 eru annars vegar 24 og 26 og hins vegar $-26$ og $-24$.

**147.** Tvær samliggjandi oddatölur sem hafa margfeldið 483 eru annars vegar 21 og 23 og hins vegar $-21$ og $-23$.

**149.** Breidd þríhyrningsins er 5 tommur og hæðin 18 tommur.

**151.** Skammhlið rétthyrnda þríhyrningsins er 1,7 fet og langhliðin er 3,4 fet.

**153.** Lengd hornalínu girðingarinnar er 7,3 jardar.

**155.** Breidd innkeyrslunnar er 10 fet og lengdin 35 fet.

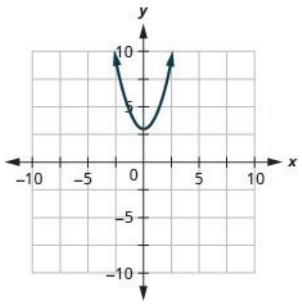
**157.** Eldflaugin nær 1.200 fet á uppleið eftir 2 sekúndur og á niðurleið eftir 38 sekúndur.

**159.** 70 sekúndur

**161.** ⓐ svör geta verið mismunandi ⓑ svör geta verið mismunandi ⓒ svör geta verið mismunandi ⓓ svör geta verið mismunandi

## Verkefni úr hluta 10.5

163.




**165.** niður

**167.** upp

**169.** ⓐ $x=-4$ ⓑ $(-4,-17)$

**171.** ⓐ $x=1$ ⓑ $(1,6)$

173.

$$y:(0,6);\ x:(-1,0),(-6,0)$$

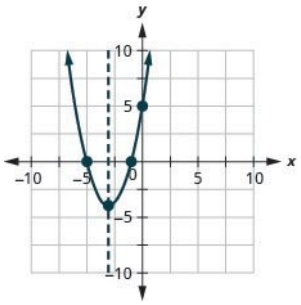
175.

$$y:(0,-19);\ x:\text{engin}$$

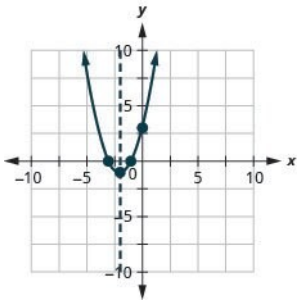
177.

$$y:(0,25);\ x:\left(\frac{5}{2},0\right)$$

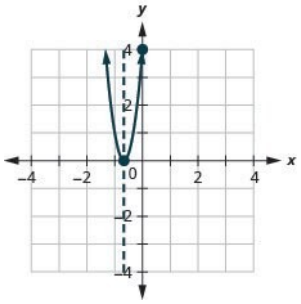
**179.** $y:(0,5); x:(-1,0),(-5,0);$
ás: $x=-3$; hvirfilpunktur: $(-3,-4)$



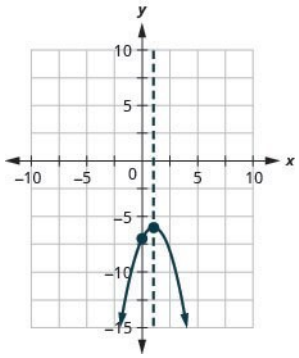

**181.** $y:(0,3); x:(-1,0),(-3,0);$
ás: $x=-2$; hvirfilpunktur: $(-2,-1)$



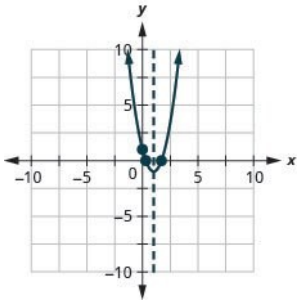

**183.** $y:(0,4)\, x:\left(-\frac{2}{3},0\right);$
ás: $x=-\frac{2}{3}$; hvirfilpunktur: $\left(-\frac{2}{3},0\right)$



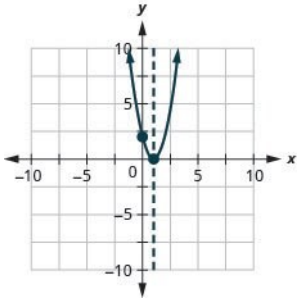

**185.** $y:(0,-7); x:$ engin;
ás: $x=1$; hvirfilpunktur: $(1,-6)$



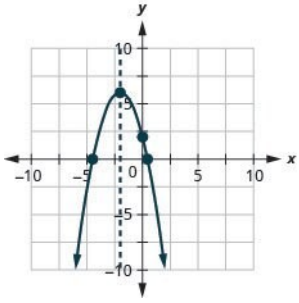

**187.** $y:(0,1); x:(1{,}7,0),(0{,}3,0);$
ás: $x=1;$ hvirfilpunktur: $(1,-1)$



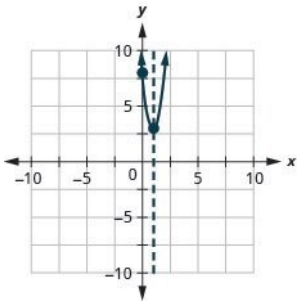

**189.** $y:(0,2)\,x:(1,0);$
ás: $x=1;$ hvirfilpunktur: $(1,0)$



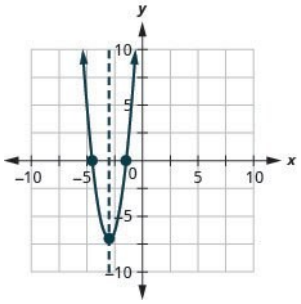

**191.** $y:(0,2)\ x:(-4{,}4,0),(0{,}4,0);$
ás: $x=-2;$ hvirfilpunktur: $(-2,6)$



**193.** $y:(0,8)$; $x:$ engin;
ás: $x=1$; hvirfilpunktur: $(1,3)$




**195.** $y:\ (0,20)$ $x:\ (-4{,}5,0),(-1{,}5,0)$;
ás: $x=-3$; hvirfilpunktur: $(-3,-7)$




**197.** Lággildið er $-\frac{9}{8}$ þegar $x=-\frac{1}{4}$.

**199.** Lággildið er 6 þegar $x=3$.

**201.** Hágildið er 16 þegar $x=0$.

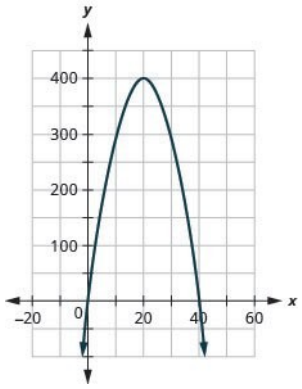
**203.** Eftir 5,3 sekúndur nær örin hágildishæðinni 486 fet.

**205.** Ef rukkað er \$20 fyrir hverja tölvu fást hámarkstekjur að upphæð \$400.

**207.** Lengd hliðar gerðisins meðfram ánni er 60 fet og hámarksflatarmálið er 7.200 ferfet.

209.

1. ⓐ




2. ⓑ $(0,0),(40,0)$

**211.** Svör geta verið mismunandi.

## Upprifjunarverkefni

213.

$$x=\pm 10$$

215.

$$m=\pm 2\sqrt{10}$$

217.

$$a=\pm 5$$

**219.** engin lausn

221.

$$v=\pm 3\sqrt{2}$$

223.

$$c=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

225.

$$p=1,9$$

227.

$$u=-1\pm 3\sqrt{5}$$

229.

$$x=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$$

231.

$$m=7\pm2\sqrt{6}$$

**233.** engin lausn

235.

$$m=3\pm4\sqrt{3}$$

237.

$$a=-\frac{3}{2},\frac{3}{4}$$

239.

$$(x+11)^2$$

241.

$$(m-4)^2$$

243.

$$\left(a-\frac{3}{2}\right)^2$$

245.

$$\left(p+\frac{2}{5}\right)^2$$

247.

$$c=1,-21$$

249.

$$x=-4,8$$

**251.** engin lausn

253.

$$v=7\pm3\sqrt{2}$$

255.

$$m=-9,-1$$

257.

$$a=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{41}}{2}$$

259.

$$u=-6\pm3\sqrt{2}$$

261.

$$p=0,6$$

263.

$$y=-\frac{1}{2},2$$

265.

$$c=-\frac{1}{3}\pm\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

267.

$$x=\frac{1}{4},1$$

269.

$$r=-6,7$$

271.

$$v=-\frac{5}{4},1$$

273.

$$m=\frac{-4\pm\sqrt{10}}{3}$$

**275.** engin rauntölulausn

277.

$$u=5\pm\sqrt{22}$$

279.

$$p=\frac{4\pm\sqrt{6}}{5}$$

281.

$$c=-\frac{1}{2}$$

**283.** ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 2 ⓓ engin

**285.** ⓐ þáttun ⓑ lausnarformúla annars stigs jöfnu ⓒ ferningsrótarregla

**287.** Tvær samliggjandi oddatölur sem hafa margfeldið 323 eru annars vegar 17 og 19 og hins vegar $-17$ og $-19$.

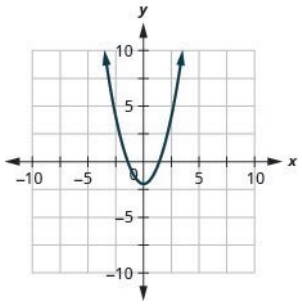
**289.** Hæð borðans er 13 cm og lengd hliðarinnar er 54 cm.

**291.** Hliðarlengdir mósaíkmyndarinnar eru 2,2 og 4,4 fet.

**293.** Breidd gangstéttarinnar að framan er 8,2 fet og lengdin 30,6 fet.

**295.** Boltinn nær 384 fet á uppleið eftir 4 sekúndur og á niðurleið eftir 6 sekúndur.

297.




**299.** niður

**301.** upp

**303.** ⓐ $x=3$ ⓑ $(3,17)$

305.

$$y:(0,5);\ x:(5,0),(-1,0)$$

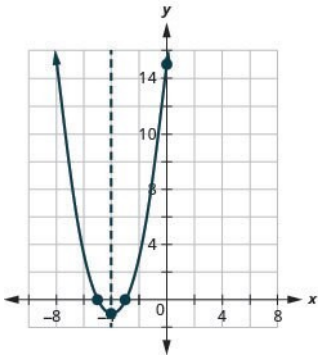
307.

$$y:(0,10);\ x:\text{engin}$$

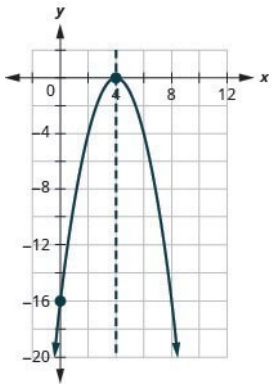
309.

$$y:(0,1);\ x:\left(\frac{1}{4},0\right)$$

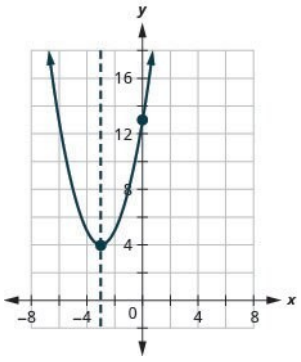
**311.** $y:(0,15);\ x:(-3,0),(-5,0);$
ás: $x=-4$; hvirfilpunktur: $(-4,-1)$



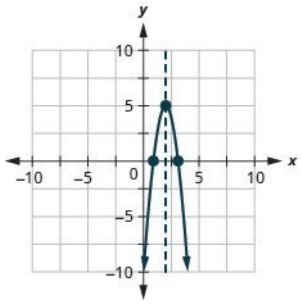

**313.** $y:(0,-16);\ x:(4,0);$
ás: $x=4;$ hvirfilpunktur: $(4,0)$




**315.** $y:(0,13);\ x:$ engin;
ás: $x=-3;$ hvirfilpunktur: $(-3,4)$




**317.** $y:\ (0,-11)\ \ x:\ (3{,}1,0),(0{,}9,0);$
ás: $x=2;$ hvirfilpunktur: $(2,5)$




**319.** Lággildið er $-1$ þegar $x=-1$.

**321.** Eftir 3,5 sekúndur er boltinn í hágildishæðinni 196 fet.

## Prófið sjálf

323.

$$w=-2,-8$$

325.

$$m=1,\frac{3}{2}$$

327.

$$n=\frac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$$

**329.** engin rauntölulausn

**331.** 2

**333.** Tvær samliggjandi sléttar tölur eru $-20$ og $-18$ og 18 og 20.

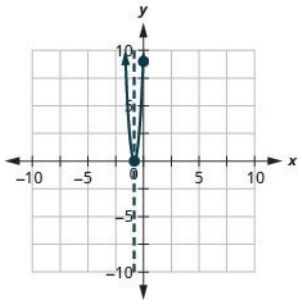
**335.** ⓐ upp ⓑ $x=-1$ ⓒ $(-1,5)$ ⓓ $y:(0,8);\ x:$ engin ⓔ lággildi 5 þegar $x=-1$

**337.** ⓐ upp ⓑ $x=-5$ ⓒ $(-5,-1)$ ⓓ $y;(0,24);\ x:(-6,0),(-4,0)$ ⓔ lággildi $-1$ þegar $x=-5$

**339.** ⓐ niður ⓑ $x=-4$
ⓒ $(-4,32)$ ⓓ $y;(0,16);\ x:\ (-9{,}7,0),(1{,}7,0)$
ⓔ hágildi 32 þegar $x=-4$

**341.** $y:(0,9);\ x:\left(-\frac{3}{4},0\right);$

ás: $x=-\frac{3}{4};$ hvirfilpunktur: $\left(-\frac{3}{4},0\right)$


y
10
x
−10
−5
5
10
−5
−10

# Atriðisorðaskrá


A

að eyða ferningsrót úr nefnara 9.5 Deilið ferningsrótum

aðgreinir 10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni, 10.3 Leysið annars stigs jöfnur með lausnarformúlunni

afsláttarfjárhæð 3.2 Leysið prósentuverkefni

afsláttarhlutfall 3.2 Leysið prósentuverkefni, 3.2 Leysið prósentuverkefni

annars stigs jafna 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni

annars stigs jafna með tveimur breytum 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum, 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum

annars stigs jöfnur 7.6 Annars stigs jöfnur

aukalausn ræðrar jöfnu 8.6 Leysið ræðar jöfnur

Á

álagning 3.2 Leysið prósentuverkefni

B

bandaríska einingakerfið 1.10 Mælikerfi

biltáknun 2.7 Leysið línulegar ójöfnur

blöndunarverkefni 3.3 Leysið blöndunarverkefni

breyta 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna

breytur 2.3 Leysið jöfnur með breytum og föstum á báðum hliðum

brot 1.7 Tugabrot, 1.8 Rauntölur

brotastrik 1.5 Myndræn framsetning brota

D

deilanleg 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur

deiling 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.4 Margföldun og deiling heiltalna, 1.4 Margföldun og deiling heiltalna, 1.5 Myndræn framsetning brota, 1.5 Myndræn framsetning brota, 1.6 Samlagning og frádráttur brota, 1.7 Tugabrot, 1.9 Reiknireglur rauntalna, 1.9 Reiknireglur rauntalna

dreifiregla 1.9 Reiknireglur rauntalna, 1.9 Reiknireglur rauntalna

E

eiginleg brot 1.7 Tugabrot, 1.8 Rauntölur
einfalda stæðu 1.2 Tungumál algebrunnar
einfaldir vextir 3.2 Leysið prósentuverkefni, 3.3 Leysið blöndunarverkefni
einföldun 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
einliður 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður, 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður, 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður, 6.2 Notið margföldunarreglur velda, 6.3 Margfaldið margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.6 Deilið margliðum, 6.6 Deilið margliðum
eyðingaraðferð 5.3 Leysið jöfnuhneppi með eyðingaraðferð
F
fasti 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.2 Tungumál algebrunnar
ferningsrótarregla 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni, 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni
ferningsrótarregla 1.8 Rauntölur
ferningur 1.8 Rauntölur
fjórðungur 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
flatarmál 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar, 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
fleygbogi 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum, 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
flókin ræð stæða 8.5 Einfaldið flóknar ræðar stæður, 8.5 Einfaldið flóknar ræðar stæður
forgangsröð reikniaðgerða 1.2 Tungumál algebrunnar
formúla fyrir hallatölu 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu, 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
frádráttarregla 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna
frádráttarregla jafnaðar 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar, 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
frádráttur 1.2 Tungumál algebrunnar

frumtala 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.5 Myndræn framsetning brota
frumþáttun 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur
frændhorn 5.4 Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum
fullstytt 1.5 Myndræn framsetning brota
fylla í ferning 10.2 Leysið annars stigs jöfnur með því að fylla í ferning
G
gera nefnara ræðan 10.1 Leysið annars stigs jöfnur með ferningsrótarreglunni
graf línulegrar jöfnu 4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum
H
hagnaður 3.6 Leysið hagnýt verkefni með línulegum ójöfnum
hallatala línu 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
hallatöluform 4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu
háðar jöfnur 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
háðar jöfnur 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
heiltölur 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna, 1.4 Margföldun og deiling heiltalna, 1.8 Rauntölur
hlutfall 1.5 Myndræn framsetning brota
hlutfallajafna 8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum, 8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum
hneppi línulegra jafna 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
hornpunktar 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
hornrétt 4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu
hornréttar línur 4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu
hvirfilpunktur 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum, 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
höfuðstóll 3.2 Leysið prósentuverkefni
höfuðstóll n -ta rót 9.7 Hærri rætur
J
jafna 1.2 Tungumál algebrunnar

jafnaðarmerki 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.2 Tungumál algebrunnar
jafnaðarmerki 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
jafngild brot 1.5 Myndræn framsetning brota
jafngild tugabrot 1.8 Rauntölur
jákvæð hallatala 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
jákvæða ferningsrótin 1.8 Rauntölur, 9.7 Hærri rætur
K
kostnaðarverð 3.2 Leysið prósentuverkefni
kvóti 1.4 Margföldun og deiling heiltalna, 1.5 Myndræn framsetning brota
L
lagshorn 5.4 Leysið hagnýt verkefni með jöfnuhneppum
lausn jöfnu 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
lausn línulegrar ójöfnu 4.7 Gröf línulegra ójafna
lausnir jöfnuhneppis 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
lárétt breyting 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu, 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
lárétt lína 4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum
liðinn tími 3.5 Leysið verkefni um hreyfingu með jöfnum hraða
liður 1.2 Tungumál algebrunnar
listaverð 3.2 Leysið prósentuverkefni
líkar ferningsrætur 9.3 Leggið saman og dragið frá ferningsrótum, 9.4 Margfaldið ferningsrætur
líkar myndir 8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum, 8.7 Leysið verkefni með hlutföllum og líkum myndum
líkar rótarstæður 9.3 Leggið saman og dragið frá ferningsrótum, 9.7 Hærri rætur, 9.7 Hærri rætur
línuleg jafna 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
línuleg ójafna 4.7 Gröf línulegra ójafna, 4.7 Gröf línulegra ójafna
línulegt ójöfnuhneppi 5.6 Teiknið gröf línulegra ójöfnuhneppa
lotubundið tugabrot 1.7 Tugabrot

lóðrétt breyting 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu, 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu

lóðrétt lína 4.2 Teiknið gröf línulegra jafna með tveimur breytum

M

margfeldi 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur

margfeldi 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.4 Margföldun og deiling heiltalna, 1.5 Myndræn framsetning brota, 1.5 Myndræn framsetning brota, 1.7 Tugabrot, 1.9 Reiknireglur rauntalna

margföldun 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.4 Margföldun og deiling heiltalna, 1.4 Margföldun og deiling heiltalna

margföldun brota 1.5 Myndræn framsetning brota

margföldunarandhverfa 1.5 Myndræn framsetning brota, 1.9 Reiknireglur rauntalna

margföldunarandhverfa 1.9 Reiknireglur rauntalna

margföldunarandhverfa 1.9 Reiknireglur rauntalna

margföldunarhlutleysa 1.9 Reiknireglur rauntalna

margföldunarhlutleysa 1.9 Reiknireglur rauntalna

margliða 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður, 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður

markalína 4.7 Gröf línulegra ójafna, 4.7 Gröf línulegra ójafna

metrakerfið 1.10 Mælikerfi

minnsta sameiginlega margfeldi 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur

minnsti samnefnari 1.6 Samlagning og frádráttur brota

mismunur ferninga 7.4 Þáttið sérstök margfeldi

mótsögn 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur, 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur

móttala 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna

N

*n -ta rót tölu 9.7* Hærri rætur

námundun 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur

nefnari 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.5 Myndræn framsetning brota, 1.6 Samlagning og frádráttur brota

neikvæð hallatala 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu

neikvæðar tölur 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna

neikvæður veldisvísir 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna, 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna
núll eða jákvæð heiltala 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur
*núll eða jákvæð heiltala s* 1.8 Rauntölur
núllmargfeldisregla 7.6 Annars stigs jöfnur, 7.6 Annars stigs jöfnur
núllpör 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna
Ó
óeiginleg brot 1.8 Rauntölur
óháðar jöfnur 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
óháðar jöfnur 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
óræð 1.8 Rauntölur
óræð tala 1.8 Rauntölur
ósamkvæmt jöfnuhneppi 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
ósamkvæmt jöfnuhneppi 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
P
pinnabretti 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu, 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
prósenta 1.7 Tugabrot, 3.2 Leysið prósentuverkefni
prósentuhækkun 3.2 Leysið prósentuverkefni
prósentulækkun 3.2 Leysið prósentuverkefni
punkthallaaðferð 4.4 Skiljið hugtakið hallatala línu
punkthallaform 4.6 Finnið jöfnu línu
R
rauntala 1.8 Rauntölur
regla um að margfalda báðar hliðar jöfnu með sömu tölu 2.2 Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu
regla um fullkomna ferningsþríliði 7.4 Þáttið sérstök margfeldi
regla um summu og mismun teninga 7.4 Þáttið sérstök margfeldi
Reglan um að deila báðum hliðum jöfnu með sömu tölu 2.2 Leysið jöfnur með því að deila báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu, 2.2 Leysið jöfnur með því að deila

báðum hliðum með sömu tölu eða margfalda þær með sömu tölu
reikna gildi stæðu 1.2 Tungumál algebrunnar
reikniaðgerðir 1.2 Tungumál algebrunnar
reikniaðgerðir með brotum 1.6 Samlagning og frádráttur brota
rétthyrndur þríhyrningur 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
rétthyrningur 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
rétthyrnt hnitakerfi 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
rótarjafna 9.6 Leysið jöfnur með ferningsrótum, 9.6 Leysið jöfnur með ferningsrótum
rótarmerki 1.8 Rauntölur
rótarvísir 9.7 Hærri rætur
ræð jafna 8.6 Leysið ræðar jöfnur, 8.6 Leysið ræðar jöfnur
ræð stæða 8.1 Einfaldið ræðar stæður, 8.1 Einfaldið ræðar stæður
ræð tala 1.8 Rauntölur
ræðir veldisvísar 9.8 Ræðir veldisvísar, 9.8 Ræðir veldisvísar
röðuð tvennd 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
S
samanfallandi línur 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
samhverfuás 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum, 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
samkvæmt jöfnuhneppi 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð, 5.1 Leysið jöfnuhneppi með grafískri aðferð
samkynja liðir 1.2 Tungumál algebrunnar
samlagning 1.2 Tungumál algebrunnar
samlagningarandhverfa 1.9 Reiknireglur rauntalna
samlagningarandhverfa 1.9 Reiknireglur rauntalna
samlagningarhlutleysa 1.9 Reiknireglur rauntalna
samlagningarhlutleysa 1.9 Reiknireglur rauntalna
samlagningarregla jafnaðar 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu

við báðar hliðar, 2.1 Leysið jöfnur með því að draga sömu tölu frá eða leggja sömu tölu við báðar hliðar
samliggjandi oddatölur 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum, 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum
samliggjandi sléttar tölur 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum, 10.4 Leysið verkefni sem lýst er með annars stigs jöfnum
samokar 6.4 Sérstök margfeldi
samsemd 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur, 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur
samsett brot 1.5 Myndræn framsetning brota
samsett tala 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur
samsíða línur 4.5 Notið hallatöluform jöfnu línu
Setning Pýþagórasar 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
skilyrt jafna 2.4 Beitið almennri aðferð til að leysa línulegar jöfnur
skurðpunktar línu við ása 4.3 Teiknið graf með skurðpunktum við ása
staðalform 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður
staðalform talna 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna, 6.7 Heiltöluveldisvísar og staðalform talna
stig fastatölu 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður
stig liðar 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður
stig margliðu 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður
stuðull 1.2 Tungumál algebrunnar
stæða 1.2 Tungumál algebrunnar, 1.9 Reiknireglur rauntalna
stærsti sameiginlegi þáttur 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun, 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun
svigar 1.2 Tungumál algebrunnar
sætisgildi 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.7 Tugabrot, 1.7 Tugabrot
T
talnakerfi 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur

talnalína 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna, 1.8 Rauntölur
talningartala 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur
*talningartala s* 1.8 Rauntölur
teljari 1.5 Myndræn framsetning brota
tengiregla 1.9 Reiknireglur rauntalna, 1.9 Reiknireglur rauntalna
tugabrot 1.7 Tugabrot, 1.7 Tugabrot, 1.7 Tugabrot, 1.7 Tugabrot
tvíliður 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.4 Sérstök margfeldi, 6.4 Sérstök margfeldi, 6.6 Deilið margliðum
tölugildi 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna, 1.3 Samlagning og frádráttur heiltalna
U
ummál 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar, 3.4 Leysið rúmfræðiverkefni: þríhyrningar, rétthyrningar og setning Pýþagórasar
upphafspunktur 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
V
vaxtaprósenta 3.2 Leysið prósentuverkefni
vextir 3.2 Leysið prósentuverkefni
víxlregla 1.9 Reiknireglur rauntalna
X
*x-hnit 4.1* Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
*x -skurðpunktar fleygboga 10.5* Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
*x -skurðpunktur* 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
*x -skurðpunktur 4.3* Teiknið graf með skurðpunktum við ása
*x -skurðpunktur línu 4.3* Teiknið graf með skurðpunktum við ása
Y
*y-hnit 4.1* Notið rétthyrnt hnitakerfi, 4.1 Notið rétthyrnt hnitakerfi
*y -skurðpunktur* 10.5 Teiknið gröf annars stigs jafna með tveimur breytum
*y -skurðpunktur 4.3* Teiknið graf með skurðpunktum við ása

*y* *-skurðpunktur línu 4.3* Teiknið graf með skurðpunktum við ása

Þ

þáttun 7.1 Stærsti sameiginlegi þáttur og þáttun með flokkun

þríliður 6.1 Leggið saman og dragið frá margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.3 Margfaldið margliður, 6.4 Sérstök margfeldi, 6.6 Deilið margliðum

þættir 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.1 Núll og jákvæðar heiltölur, 1.10 Mælikerfi