NÁMSGÖGN.IS

STÆRÐFRÆÐI

Undirbúningur fyrir stærðfræði-greiningu

2e

Undirbúningur fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfa

Námsgögn.is

NÁMSGÖGN

Undirbúningur fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfa

Bókin í heild

namsgogn.is

Efnisyfirlit

Formáli **9**

1 Föll **17**

Inngangur að föllum 17
1.1 Föll og fallatáknun 18
1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi 67
1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa 104
1.4 Samskeyting falla 130
1.5 Ummyndanir falla 156
1.6 Tölugildisföll 211
1.7 Andhverf föll 230
Lykilhugtök 252
Lykiljöfnur 255
Meginatriði 255
Yfirlitsverkefni 259
Æfingapróf 282

2 Línuleg föll **286**

Inngangur að línulegum föllum 286
2.1 Línuleg föll 287
2.2 Gröf línulegra falla 317
2.3 Líkanagerð með línulegum föllum 357
2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum 375
Lykilhugtök 393
Lykiljöfnur 394
Lykilatriði 394
Yfirlitsverkefni 397
Æfingapróf 404

3 Margliðu- og ræð föll **410**

Inngangur að margliðuföllum og ræðum föllum 410
3.1 Tvinntölur 411
3.2 Annars stigs föll 430
3.3 Veldisföll og margliðuföll 465
3.4 Gröf margliðufalla 498
3.5 Deiling margliða 538
3.6 Núllstöðvar margliðufalla 557
3.7 Ræð föll 579

3.8 Andhverf föll og rótaföll....618
3.9 Líkön gerð með hlutföllum....638
Lykilhugtök....649
Lykiljöfnur....653
Meginatriði....653
Yfirlitsverkefni....657
Kaflapróf....664

4 Vísis- og lograföll....669
Inngangur að vísis- og lograföllum....669
4.1 Vísisföll....670
4.2 Gröf vísisfalla....696
4.3 Lograföll....716
4.4 Gröf lografalla....732
4.5 Reiknireglur logra....764
4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur....783
4.7 Vísis- og logralíkön....805
4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum....830
Lykilhugtök....852
Lykiljöfnur....853
Meginatriði....854
Yfirlitsverkefni kafla....859
Æfingapróf....867

5 Hornaföll....873
Inngangur að hornaföllum....873
5.1 Horn....874
5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll....904
5.3 Önnur hornaföll....949
5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga....974
Lykilhugtök....996
Lykiljöfnur....999
Meginatriði....999
Yfirlitsverkefni....1002
Æfingapróf....1007

6 Lotubundin föll....1010
Inngangur að lotubundnum föllum....1010
6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla....1011
6.2 Gröf annarra hornafalla....1041
6.3 Andhverf hornaföll....1075
Lykilhugtök....1099

Lykiljöfnur....1100
Meginatriði....1100
Yfirlitsverkefni....1102
Kaflapróf....1107

7 Hornafallasamsemdir og -jöfnur....1115
Inngangur að hornafallasamsemdum og -jöfnum....1115
7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda....1116
7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun....1132
7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur....1154
7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu....1174
7.5 Lausnir hornafallajafna....1187
7.6 Líkangerð með hornaföllum....1212
Lykilhugtök....1243
Lykiljöfnur....1244
Meginatriði....1245
Upprifjunaræfingar....1248
Æfingapróf....1255

8 Frekari notkun hornafræði....1258
Inngangur að frekari notkun hornafræði....1258
8.1 Óréttþyrndir þríhyrningar: sínusreglan....1259
8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan....1305
8.3 Pólhnit....1347
8.4 Pólhnit: gröf....1373
8.5 Pólform tvinntalna....1401
8.6 Stikajöfnur....1418
8.7 Stikajöfnur: gröf....1437
8.8 Vigrar....1455
Lykilhugtök....1484
Lykiljöfnur....1487
Meginatriði....1487
Yfirlitsverkefni....1491
Æfingapróf....1501

9 Jöfnuhneppi og ójöfnuhneppi....1504
Inngangur að jöfnuhneppum og ójöfnuhneppum....1504
9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum....1505
9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum....1532
9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum....1551
9.4 Stofnbrot....1568
9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir....1585

9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu....1604
9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja....1625
9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers....1648
Lykilhugtök....1667
Lykiljöfnur....1670
Meginatriði....1670
Yfirlitsverkefni....1674
Kaflapróf....1683

10 Rúmfræði með hnitum....1688
Inngangur að hnitarúmfræði....1688
10.1 Sporbaugur....1689
10.2 Breiðbogi....1720
10.3 Fleygboginn....1749
10.4 Snúningur hnitása....1772
10.5 Keilusnið í pólhnitum....1794
Lykilhugtök....1811
Lykiljöfnur....1813
Lykilhugtök....1814
Yfirlitsverkefni....1816
Kaflapróf....1821

11 Runur, líkur og talningarfræði....1824
Inngangur að runum, líkum og talningarfræði....1824
11.1 Runur og ritháttur þeirra....1825
11.2 Jafnmunarunur....1854
11.3 Kvótarunur....1872
11.4 Raðir og ritháttur þeirra....1889
11.5 Talningarreglur....1909
11.6 Tvíliðusetningin....1923
11.7 Líkur....1934
Lykilhugtök....1948
Lykiljöfnur....1951
Lykilatriði....1952
Yfirlitsverkefni....1955
Æfingapróf....1958

12 Inngangur að stærðfræðigreiningu....1962
12 Inngangur að stærðfræðigreiningu....1962
12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum....1963
12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda....1981
12.3 Samfelldni....1999

12.4 Afleiður....2022
Lykilhugtök....2052
Lykiljöfnur....2054
Meginatriði....2055
Yfirlitsverkefni....2057
Æfingapróf....2062

A Grunnföll og samsemdir....2068

Svarlykill....2073
Kafli 1....2073
Kafli 2....2136
Kafli 3....2157
Kafli 4....2227
Kafli 5....2287
Kafli 6....2313
Kafli 7....2363
Kafli 8....2389
Kafli 9....2443
Kafli 10....2474
Kafli 11....2513
Kafli 12....2540

Atriðisorðaskrá....2553

Formáli

Um OpenStax

OpenStax er hluti af Rice University, sem er 501(c)(3)-sjálfseignarstofnun í almannaþágu. Sem menntaverkefni er markmið okkar að bæta aðgengi að menntun og námi fyrir alla. Með samstarfi við góðgerðarsamtök og önnur menntafyrirtæki vinnum við að því að ryðja úr vegi algengustu hindrunum fyrir námi, því við trúum því að allir eigi að hafa aðgang að þekkingu.

Um námsefni OpenStax

Aðlögun

Bókin Undirbúningur fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfa er gefin út samkvæmt Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0-leyfinu (CC BY-NC-SA). Það merkir að heimilt er að dreifa efninu, aðlaga það og byggja á því í óviðskiptalegum tilgangi, að því tilskildu að OpenStax og höfundar efnisins séu tilgreind og öll afleidd verk gefin út með sama leyfi.

Bækur okkar eru gefnar út með opnu leyfi og því er heimilt að nota bókina í heild eða velja þá hluta hennar sem henta best þörfum námskeiðsins. Kennarar geta aðlagað efnið með því að leggja tiltekna kafla og hluta fyrir nemendur í þeirri röð sem þeir kjósa. Einnig má setja tengla í kennsluáætlun sem vísa beint á einstaka hluta vefútgáfu bókarinnar.

Kennarar geta einnig búið til sérsniðna útgáfu af OpenStax-bókinni. Hægt er að bjóða nemendum slíka útgáfu á prenti eða stafrænu formi gegn vægu gjaldi í bóksölu skólans. Nánari upplýsingar er að finna á síðu bókarinnar á openstax.org.

Höfundar- og heimildaupplýsingar myndefnis

Í bókinni Undirbúningur fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfa fylgja flestum ljósmyndum og myndskreytingum þriðju aðila upplýsingar í myndatexta um höfund, rétthafa, hýsingarvettvang og/eða leyfi. Einstaklingum og samtökum sem starfa ekki í viðskiptalegum tilgangi er heimilt að endurnýta myndefni með opnu leyfi, enda tilgreini þau upprunann á sama hátt. Fyrirtæki skulu hafa samband við OpenStax til að ræða endurnýtingarrétt og leyfi. Til að textinn verði læsilegri og samfelldari eru heimildaupplýsingar ekki birtar með öllu myndefni. Ef myndefni úr bókinni er endurnýtt án tilgreindra heimildaupplýsinga skal nota eftirfarandi tilvísun: Höfundarréttur Rice University, OpenStax, samkvæmt CC BY-NC-SA 4.0-leyfi.

Leiðréttingar

Allar kennslubækur OpenStax eru ritrýndar ítarlega. Engu að síður geta villur komið fyrir, rétt eins og í öðrum faglega unnum kennslubókum. Þar sem bækurnar eru aðgengilegar á vefnum getum við uppfært þær þegar kennslufræðileg þörf krefur. Ábendingum um leiðréttingar má skila með tengli á síðu bókarinnar á openstax.org. Sérfræðingar á

viðkomandi fræðasviði fara yfir allar slíkar ábendingar. OpenStax leggur áherslu á gagnsæi um breytingar og birtir því einnig yfirlit yfir eldri villuleiðréttingar á síðu bókarinnar.

Útgáfuform

Kennslubókin er fáanleg ókeypis sem vefútgáfa og PDF-skjal á openstax.org og á prenti gegn vægu gjaldi.

Um Undirbúning fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfu

Bókin Undirbúningur fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfa er sveigjanleg og samin til að henta þörfum ólíkra undirbúningsáfanga. Hún er ítarleg og nær yfir meira efni en venjulegur eins eða tveggja missera háskólaáfangi til undirbúnings fyrir stærðfræðigreiningu. Efnið er skipulagt eftir skýrt skilgreindum námsmarkmiðum og í því eru leyst sýnidæmi sem sýna á skýran hátt hvernig leysa má verkefnin.

Efnisumfjöllun og umfang

Bókin skiptist í tólf kafla sem falla í grófum dráttum í þrjá flokka.

Í 1.–4. kafla er fjallað um ýmsar gerðir falla og lagður grunnur að því efni sem á eftir kemur.

- 1. kafli: Föll
- 2. kafli: Línuleg föll
- 3. kafli: Margliðuföll og ræð föll
- 4. kafli: Vísisföll og lograföll

Í 5.–8. kafla er fjallað um hornafræði. Í þessari bók eru horn og einingarhringurinn kynnt fyrst, í stað þess að byrja á rétthyrndum þríhyrningum eins og algengara er í háskólaáföngum í algebru og hornafræði.

- 5. kafli: Hornaföll
- 6. kafli: Lotubundin föll
- 7. kafli: Hornafallasamsemdir og hornafallajöfnur
- 8. kafli: Frekari notkun hornafræði

Í 9.–12. kafla eru kynnt ýmis ítarlegri viðfangsefni sem byggjast á efni 1.–8. kafla. Flestir undirbúningsáfangar fyrir stærðfræðigreiningu fjalla um einhver þessara viðfangsefna en fáir um þau öll. Kaflarnir byggjast ekki hver á öðrum og því geta kennarar valið úr þeim eftir þörfum.

- 9. kafli: Jöfnuhneppi og ójöfnuhneppi
- 10. kafli: Rúmfræði með hnitum
- 11. kafli: Runur, líkur og talningarfræði
- 12. kafli: Inngangur að stærðfræðigreiningu

Öllum köflum er skipt í marga hluta og heiti þeirra má sjá í efnisyfirlitinu.

Yfirlit yfir þróun bókarinnar

Bókin Undirbúningur fyrir stærðfræðigreiningu, 2. útgáfa er afrakstur samstarfs áhugasamra höfunda, ritstjóra og kennara. Sameiginlegur áhugi þeirra á verkefninu hefur skilað bók sem er einstaklega samræmd að markmiði og framsetningu. Sérstakar þakkir fær aðalhöfundurinn Jay Abramson við Arizona State University. Hann mótaði heildarsýn bókarinnar og hafði umsjón með gerð hvers kafla. Hann gerði fyrstu verkáætlunina, las fjölmörg drög og nýtti umsagnir kennara til að semja skýrar áætlanir um endurbætur fyrir höfunda og ritstjóra.

Fyrstu átta kaflarnir byggjast á bókinni Precalculus: An Investigation of Functions eftir David Lippman og Melonie Rasmussen. Kaflar 9–12 voru skrifaðir og þróaðir af sérfróðu og reynslumiklu höfundateymi okkar. Allir tólf kaflarnir fylgja nýstárlegri kennsluhönnun og mikil áhersla hefur verið lögð á samræmda framsetningu frá upphafi til enda. Nýjum efnisþáttum hefur verið bætt við til að styrkja kennsluna og allt myndefni hefur verið endurgert í nútímalegri stíl. Auk þess hefur stór hluti efnisins verið endurskoðaður, endurnýjaður eða aukinn svo bókin samræmist betur viðteknum kennsluaðferðum í undirbúningi fyrir stærðfræðigreiningu.

Nákvæmni efnisins

Við vitum að nákvæmni og réttmæti eru ófrávíkjanlegar kröfur í stærðfræði. Því fengum við reynda háskólakennara til að stýra sérstakri yfirferð sem átti að tryggja að efnið væri rétt. Sérstakir kennarahópar fóru yfir sýnidæmi, myndefni, verkefni og lausnir og annað teymi fór sérstaklega yfir svarlykilinn og lausnirnar.

Bókin nýtur einnig góðs af margra ára notkun þúsunda kennara og nemenda. Við endurskoðun annarrar útgáfu var mikilvægt að safna saman öllum villuleiðréttingum sem gerðar höfðu verið við víðtæka notkun bókarinnar og í heimaverkefnakerfum, og samræma þær.

Breytingar í annarri útgáfu

Við endurskoðun bókarinnar var lögð áhersla á skýrleika og nákvæmni stærðfræðinnar ásamt inngildingu. Fjölmargir kennarar með sérþekkingu fóru yfir sýnidæmi, verkefni og lausnir. Allar ábendingar um úrbætur og villuleiðréttingar frá kennurum og nemendum í nokkur þúsund háskólum voru teknar til skoðunar og samræmdar í ólíkum útgáfuformum bókarinnar.

OpenStax og höfundar okkar þekkja erfiðleikana sem geta fylgt því að númer verkefna breytist við endurskoðun kennslubóka. Til að umskiptin yfir í aðra útgáfu verði sem greiðust höfum við haldið breytingum á verkefnanúmerum í lágmarki.

Endurskoðunin miðaði einnig að því að gera námsumhverfið aðgengilegt og hvetjandi fyrir alla. Inngangsfrásagnir, aðstæður sem lýst er í sýnidæmum og verkefnum og jafnvel mörg nöfn skáldaðra persóna voru yfirfarin út frá fjölbreytileika, jafnrétti og inngildingu. Út úr þessari vinnu komu nokkur hundruð breytingar sem gera efnið fjölbreyttara og færa það nær nemendum. Jafnframt er áfram sýnt hvernig stærðfræði nýtist á ólíkum starfs- og fræðasviðum. Umfjöllun um vísindalega og sögulega þætti stærðfræðinnar var sérstaklega aukin svo að framlag fleiri einstaklinga kæmi fram. Höfundarnir bættu til dæmis við sögulegu

og fjölmenningarlegu samhengi um það sem almennt er nefnt þríhyrningur Pascals og um alþjóðlegt samstarf við að ráða dulmál Enigma-vélarinnar, þar á meðal hlut pólskra háskólanema. Nokkrar inngangsfrásagnir kafla og tilvísanir inni í köflunum eru alveg nýjar. Aðstæður og orðalag í öllum köflum voru líka yfirfarin sérstaklega til að tryggja að kynin fengju jafna og óhlutdræga umfjöllun.

Kennslufræðilegur grunnur og einkenni

NÁMSMARKMIÐ

Hverjum kafla er skipt í nokkra hluta (eða einingar) sem hver um sig byggist á tilteknum námsmarkmiðum. Námsmarkmiðin eru talin upp í upphafi hvers hluta og allt kennsluefnið snýst um þau.

Megintexti

Megintextinn kynnir lykilhugmyndir, hugtök og skilgreiningar, setur efnið í samhengi við raunveruleikann og tengir saman viðfangsefni og sýnidæmi. Í bókinni fylgjum við nokkrum einföldum reglum til að draga fram mikilvægustu hugmyndirnar:

- Lykilhugtök eru feitletruð, yfirleitt þegar þau koma fyrst fyrir og/eða þegar þau eru formlega skilgreind.
- Lykilatriði og skilgreiningar eru sett fram í bláum ramma svo auðvelt sé að finna þau.

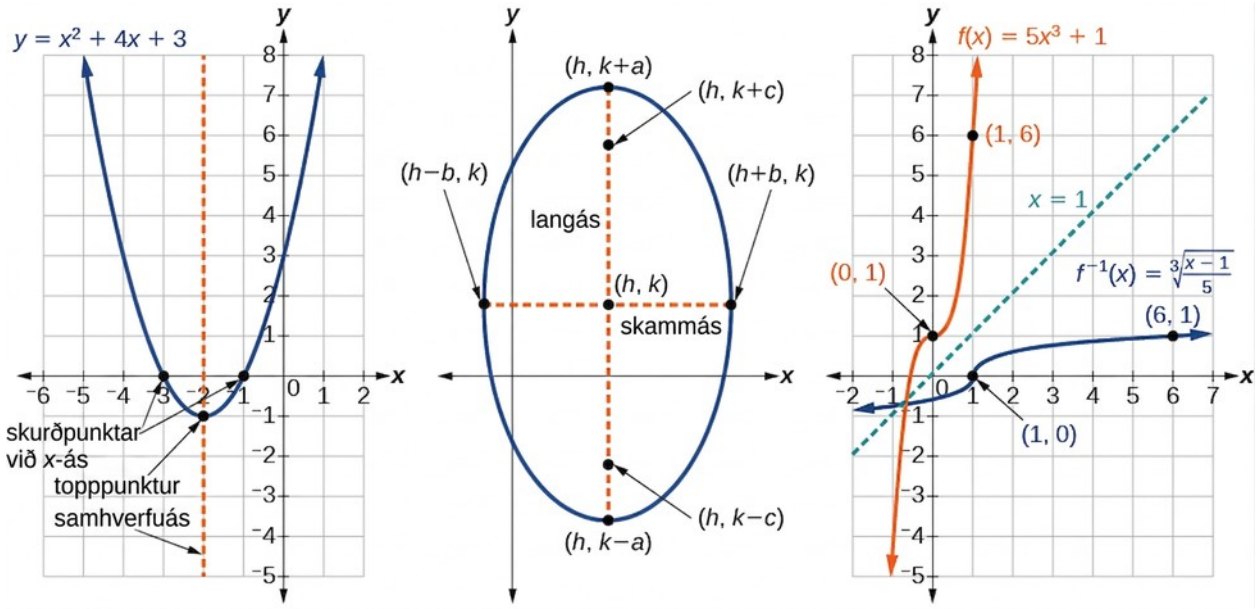
Sýnidæmi

Hverju námsmarkmiði fylgja eitt eða fleiri leyst sýnidæmi sem sýna þær lausnaleiðir sem nemendur þurfa að tileinka sér. Yfirleitt eru nokkur sýnidæmi við hvert námsmarkmið til að sýna ólíkar lausnaleiðir við sömu gerð verkefnis eða kynna skyld verkefni sem verða smám saman flóknari. Alls eru sýnidæmin rúmlega 650, eða að meðaltali um 55 í hverjum kafla.

Öll sýnidæmi fylgja einföldu sniði í tveimur eða þremur hlutum. Fyrst er verkefni eða spurning sett fram. Síðan er lausnin sýnd og hvert skref útskýrt. Að lokum fylgir sumum sýnidæmum greining þar sem lausnin er skoðuð í víðara samhengi.

Myndir

Bókin inniheldur rúmlega 2.000 myndir, langflestar gröf og skýringarmyndir. Myndefnið fylgir skýrum og látlausum stíl sem beinir athyglinni að mikilvægustu upplýsingum hverrar myndar og dregur úr sjónrænum truflunum. Litamunur er notaður af hófsemi til að greina á milli ólíkra falla eða eiginleika grafs.



Stuðningsefni

Nokkrir efnisþættir styðja við sýnidæmin og hver þeirra er merktur sérstöku tákni.

- Aðferð er listi yfir þau skref sem þarf að fylgja til að leysa ákveðna gerð verkefnis. Aðferðin kemur yfirleitt á undan sýnidæmi þar sem skrefin eru sýnd í framkvæmd.
- Verkefnið Reynið sjálf kemur strax á eftir sýnidæmi eða hópi skyldra sýnidæma og gefur nemendum tækifæri til að leysa sambærilegt verkefni þegar í stað. Svör við þessum verkefnum eru í svarlyklinum í PDF- og vefútgáfu bókarinnar.
- Efnisþátturinn Spurt og svarað getur birst hvar sem er í megintextanum en kemur oftast á eftir sýnidæmi. Hann vinnur gegn misskilningi með því að setja fram algenga já/nei-spurningu og svara henni síðan ítarlega og útskýra svarið.
- Táknið Miðlar birtist í lok hvers hluta, rétt á undan verkefnum hlutans. Það merkir lista með tenglum á kennslumyndbönd á netinu sem dýpka skilning á hugtökum hlutans og þjálfa færnina sem þar er kynnt.

Við höfum valið kennslumyndbönd sem falla vel að námsmarkmiðum okkar en framleiddum þau ekki sjálf og þau voru hvorki gerð né aðlöguð sérstaklega fyrir þessa bók.

Verkefni hluta

Hverjum hluta allra kafla lýkur með fjölbreyttum verkefnum sem má leggja fyrir sem heimaverkefni eða velja úr til æfinga undir leiðsögn kennara. Í köflunum tólf eru rúmlega 5.900 verkefni og því hafa kennarar úr nægu að velja.

Verkefni hvers hluta eru flokkuð eftir gerð spurningar og birtast yfirleitt í þessari röð:

- **Hugtakaspurningar** meta skilning á lykilhugtökum og meginatriðum.
- **Algebruverkefni** krefjast þess að nemendur beiti algebruaðgerðum sem sýndar voru í hlutanum.
- **Verkefni um gröf** meta hæfni nemenda til að túlka eða teikna graf.
- **Reikniverkefni** krefjast þess að nemendur reikni út niðurstöður.

- **Tækniverkefni** hvetja nemendur til að kanna efnið með grafteikniforriti, annaðhvort til að sjá eða sannreyna algebruniðurstöður eða til að leysa verkefni með annarri aðferð en sýnd var í hlutanum.
- **Viðbótarverkefni** eru erfiðari en sýnidæmin í hlutanum. Nemendur þurfa að nýta saman þekkingu og færni sem tengjast nokkrum námsmarkmiðum eða beita gagnrýninni hugsun til að leysa flókin verkefni.
- **Raunhæf viðfangsefni** setja fram verkefni úr greinum á borð við eðlisfræði, jarðfræði, líffræði, fjármál og félagsvísindi.

Yfirlitsefni kafla

Hverjum kafla lýkur með yfirliti yfir mikilvægustu atriðin og viðbótarverkefnum sem nemendur geta notað til að undirbúa sig fyrir próf.

- **Lykilhugtök** gefa formlega skilgreiningu á hverju feitletruðu hugtaki í kaflanum.
- **Lykiljöfnur** safna saman formúlum, setningum og jöfnum á stöðluðu formi.
- **Meginatriði** draga saman mikilvægustu hugmyndir hvers hluta og vísa í viðeigandi sýnidæmi ef nemendur þurfa að rifja efnið upp.
- **Yfirlitsverkefni kafla** innihalda 40–80 æfingaverkefni sem rifja upp mikilvægustu hugtök hvers hluta.
- **Æfingaprófið** inniheldur 25–50 verkefni sem meta mikilvægustu námsmarkmið kaflans. Prófið er ekki skipulagt eftir hlutum og kann að leggja meiri áherslu á samþætt námsmarkmið en undirstöðumarkmiðin í upphafshlutunum.

Svör við spurningum í bókinni

Öll svör við verkefnum merktum Reynið sjálf eru í svarlyklinum. Svör við sýnidæmum birtast beint undir spurningunni. Nemendur finna svör við oddatöluverkefnum úr yfirlitsverkefnum, æfingaprófum og verkefnum hluta í svarlyklinum. Svör við öllum verkefnum, bæði með oddatölum og sléttum tölum, eru aðeins aðgengileg kennurum í svarhandbók kennara á síðu kennaraefnis.

Viðbótarefni

Námsefni fyrir nemendur og kennara

Við höfum tekið saman viðbótarefni fyrir nemendur og kennara, þar á meðal byrjendaleiðbeiningar, lausnahandbók kennara og PowerPoint-glærur. Til að fá aðgang að kennaraefni þarf staðfestan kennarareikning. Um hann má sækja við innskráningu á openstax.org. Nýtið þetta efni til viðbótar við OpenStax-bókina.

Samstarfsvettvangar

OpenStax er í samstarfi við Institute for the Study of Knowledge Management in Education (ISKME) um að bjóða upp á samstarfsvettvanga á OER Commons. Þar geta kennarar deilt ókeypis stuðningsefni sem notendur hafa búið til fyrir OpenStax-bækur. Á samstarfsvettvöngunum geta kennarar hlaðið upp eigin efni eða sótt efni til notkunar á námskeiðum sínum, þar á meðal ýmiss konar viðbótarefni, kennsluefni, margmiðlunarefni og annað viðeigandi námsefni. Við hvetjum kennara til að ganga til liðs við þá

samstarfsvettvanga sem tengjast best kennslu þeirra og rannsóknum. Þannig gefst þeim bæði kostur á að auðga námskeið sín og eiga samskipti við aðra kennara. Samstarfsvettvangana er að finna á www.oercommons.org/hubs/openstax.

Tæknisamstarfsaðilar

Tæknisamstarfsaðilar okkar vilja líka gera vandað námsefni aðgengilegt. Þeir bjóða valfrjáls og ódýr verkfæri sem tengjast OpenStax-bókum. Upplýsingar um tæknilausnir fyrir bókina eru á síðu hennar á openstax.org.

Um höfunda

Aðalhöfundur

Jay Abramson, Arizona State University

Jay Abramson hefur kennt undirbúning fyrir stærðfræðigreiningu í meira en 35 ár, þar af síðustu 20 árin við Arizona State University, þar sem hann er aðalkennari við School of Mathematics and Statistics. Við ASU tók hann meðal annars þátt í að þróa fyrstu blönduðu námskeið og netnámskeið háskólans í stærðfræði, auk umfangsmikils safns myndbandsfyrirlestra og kennslumyndbanda. Hann hefur einnig verið meðhöfundur að tveimur námsefnisröðum Pearson Education í stærðfræði, NovaNet Precalculus og Trigonometry. Áður en Jay hóf störf við ASU kenndi hann við Texas State Technical College og Amarillo College. Í báðum skólunum var hann valinn kennari ársins.

Meðhöfundar

Valeree Falduto, Palm Beach State College
Rachael Gross, Towson University
David Lippman, Pierce College
Melonie Rasmussen, Pierce College
Rick Norwood, East Tennessee State University
Nicholas Belloit, Florida State College Jacksonville
Jean-Marie Magnier, Springfield Technical Community College
Harold Whipple
Christina Fernandez

Kennarar sem rýndu efnið og ráðgjafar

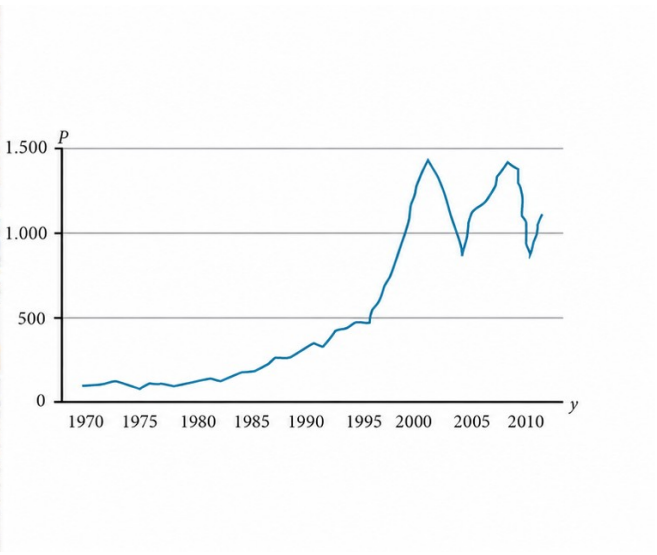
Nina Alketa, Cecil College
Kiran Bhutani, Catholic University of America
Brandie Biddy, Cecil College
Lisa Blank, Lyme Central School
Bryan Blount, Kentucky Wesleyan College
Jessica Bolz, The Bryn Mawr School
Sheri Boyd, Rollins College
Sarah Brewer, Alabama School of Math and Science
Charles Buckley, St. Gregory's University
Michael Cohen, Hofstra University

Kenneth Crane, Texarkana College
Rachel Cywinski, Alamo Colleges
Nathan Czuba
Srabasti Dutta, Ashford University
Kristyanna Erickson, Notre Dame of Maryland University
Nicole Fernandez, Georgetown University / Kent State University
David French, Tidewater Community College
Douglas Furman, SUNY Ulster
Lance Hemlow, Raritan Valley Community College
Erinn Izzo, Nicaragua Christian Academy
John Jaffe
Jerry Jared, Blue Ridge School
Stan Kopec, Mount Wachusett Community College
Kathy Kovacs
Cynthia Landrigan, Erie Community College
Sara Lenhart, Christopher Newport University
Wendy Lightheart, Lane Community College
Joanne Manville, Bunker Hill Community College
Karla McCavit, Albion College
Cynthia McGinnis, Northwest Florida State College
Lana Neal, University of Texas at Austin
Rhonda Porter, Albany State University
Steven Purtee, Valencia College
William Radulovich, Florida State College Jacksonville
Alice Ramos, Bethel College
Nick Reynolds, Montgomery Community College
Amanda Ross, A. A. Ross Consulting and Research, LLC
Erica Rutter, Arizona State University
Sutandra Sarkar, Georgia State University
Willy Schild, Wentworth Institute of Technology
Todd Stephen, Cleveland State University
Scott Sykes, University of West Georgia
Linda Tansil, Southeast Missouri State University
John Thomas, College of Lake County
Diane Valade, Piedmont Virginia Community College
Allen Wolmer, Atlanta Jewish Academy

1. KAFLI

Föll





Vísitala Standard & Poor's þegar arður er endurfjárfestur (heimild fyrir „naut“: aðlögun á verki Prayitno Hadinata; heimild fyrir „graf“: aðlögun á verki MeasuringWorth)

Yfirlit kaflans

- 1.1 Föll og fallatáknun
- 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi
- 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa
- 1.4 Samskeyting falla
- 1.5 Ummyndanir falla
- 1.6 Tölugildisföll
- 1.7 Andhverf föll

Inngangur að föllum

1

Undir lok tuttugustu aldar hækkuðu hlutabréf net- og tæknifyrirtækja verulega. Fyrir vikið hækkaði hlutabréfavísitala Standard & Poor's einnig. Grafið hér að ofan sýnir hvernig verðmæti upphaflegrar fjárfestingar upp á tæplega 100 dali breyttist á 40 árum. Fjárfestingin var minna virði en 500 dalir fram til um 1995 en rauk upp í um 1.100 dali í byrjun árs 2000. Þetta fimm ára tímabil varð þekkt sem netbólan vegna þess hve mörg ný internetfyrirtæki voru stofnuð. Líkt og aðrar bólur sprakk netbólan þó að lokum. Mörg fyrirtæki uxu of hratt og hættu síðan skyndilega starfsemi. Afleiðingin var hin snarpa lækkun sem sést á grafinu frá lokum árs 2000.

Takið eftir að í þessu dæmi eru skýr tengsl milli ársins og hlutabréfavísitölunnar. Fyrir hvert ár sem við veljum getum við fundið samsvarandi gildi vísitölunnar. Í þessum kafla könnum við tengsl af þessu tagi og eiginleika þeirra.

1.1 Föll og fallatáknun

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Ákvarða hvort vensl lýsi falli.
- Finna gildi falls.
- Ákvarða hvort fall sé eintækt.
- Nota lóðrétta línuprófið til að bera kennsl á föll.
- Teikna gröf fallanna í fallasafninu.

Farþegaþota breytir flughæð sinni eftir því sem fjarlægðin frá upphafsstað flugsins eykst. Þyngd barns eykst með aldrinum. Í báðum tilvikum er ein stærð háð annarri. Milli stærðanna eru vensl sem við getum lýst, greint og notað til að spá fyrir um gildi. Í þessum hluta greinum við slík vensl.

Að ákvarða hvort vensl lýsi falli

Vensl eru mengi raðtvennda. Mengi allra fyrri hnita raðtvenndanna kallast skilgreiningarmengi og mengi allra síðari hnitanna kallast myndmengi. Skoðum eftirfarandi mengi raðtvennda. Fyrri talan í hverri tvennd er ein af fyrstu fimm náttúrlegu tölunum. Síðari talan er tvöföld sú fyrri.

$$\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$$

Skilgreiningarmengið er $\{1,2,3,4,5\}$. Myndmengið er $\{2,4,6,8,10\}$.

Hvert gildi í skilgreiningarmenginu er einnig nefnt inntaksgildi eða óháð breyta og er oft táknað með lágstafnum x. Hvert gildi í myndmenginu er einnig nefnt úttaksgildi eða háð breyta og er oft táknað með lágstafnum y.

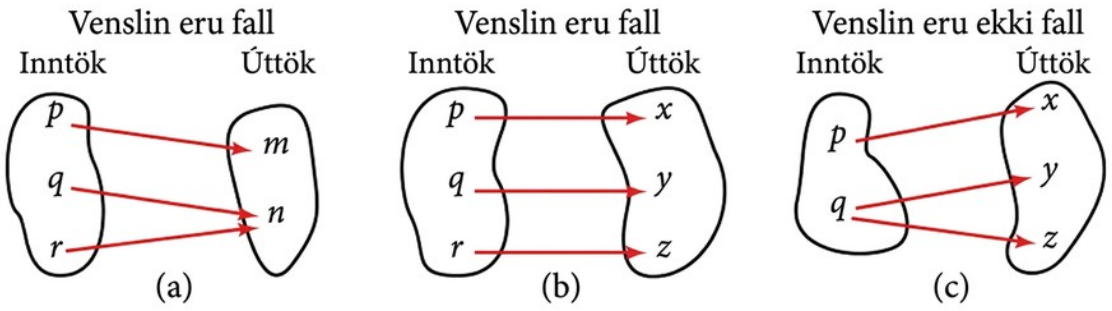
Fallið f er vensl sem úthluta hverju gildi í skilgreiningarmenginu nákvæmlega einu gildi í myndmenginu. Með öðrum orðum kemur ekkert x-gildi fyrir oftar en einu sinni. Í dæminu okkar eru fyrstu fimm náttúrlegu tölurnar tengdar tvöföldum gildum sínum. Venslin eru fall því sérhvert stak í skilgreiningarmenginu, $\{1,2,3,4,5\}$, tengist nákvæmlega einu staki í myndmenginu, $\{2,4,6,8,10\}$.

Skoðum nú mengi raðtvennda sem tengir hugtökin „slétt tala“ og „oddatala“ við fyrstu fimm náttúrlegu tölurnar. Mengið er

$$\{(\text{oddatala},1),(\text{slétt tala},2),(\text{oddatala},3),(\text{slétt tala},4),(\text{oddatala},5)\}$$

Athugið að hvert stak í skilgreiningarmenginu, $\{\text{slétt tala}, \text{oddatala}\}$ tengist ekki nákvæmlega einu staki í myndmenginu, $\{1,2,3,4,5\}$. Til dæmis samsvarar hugtakið „oddatala“ þremur gildum úr myndmenginu, $\{1,3,5\}$ en hugtakið „slétt tala“ tveimur gildum úr myndmenginu, $\{2,4\}$. Þetta brýtur gegn skilgreiningu falls og því eru venslin ekki fall.

Mynd 1 ber saman vensl sem eru föll og vensl sem eru ekki föll.



Mynd 1 (a) Þessi vensl eru fall því hvert inntak tengist einu úttaki. Athugið að bæði inntakið q og inntakið r gefa úttakið n. (b) Þessi vensl eru einnig fall. Hér tengist hvert inntak einu úttaki. (c) Þessi vensl eru ekki fall því inntakið q tengist tveimur ólíkum úttökum.

FALL

Fall er vensl þar sem hvert mögulegt inntaksgildi leiðir til nákvæmlega eins úttaksgildis. Við segjum að „úttakið sé fall af inntakinu“.

Öll inntaksgildi mynda skilgreiningarmengið og öll úttaksgildi mynda myndmengið.

AÐFERÐ

Gefin eru vensl milli tveggja stærða. Ákvarðið hvort venslin séu fall.

1. Finnið inntaksgildin.
2. Finnið úttaksgildin.
3. Ef hvert inntaksgildi leiðir aðeins til eins úttaksgildis eru venslin fall. Ef eitthvert inntaksgildi leiðir til tveggja eða fleiri úttaksgilda eru venslin ekki fall.

SÝNIDÆMI 1

1

Að ákvarða hvort verðlisti veitingastaðar sé fall

Á matseðli kaffihússins á mynd 2 eru vörur og verð þeirra.

a. ⓐ Er verðið fall af vörunni?
b. ⓑ Er varan fall af verðinu?



Mynd 2

Lausn

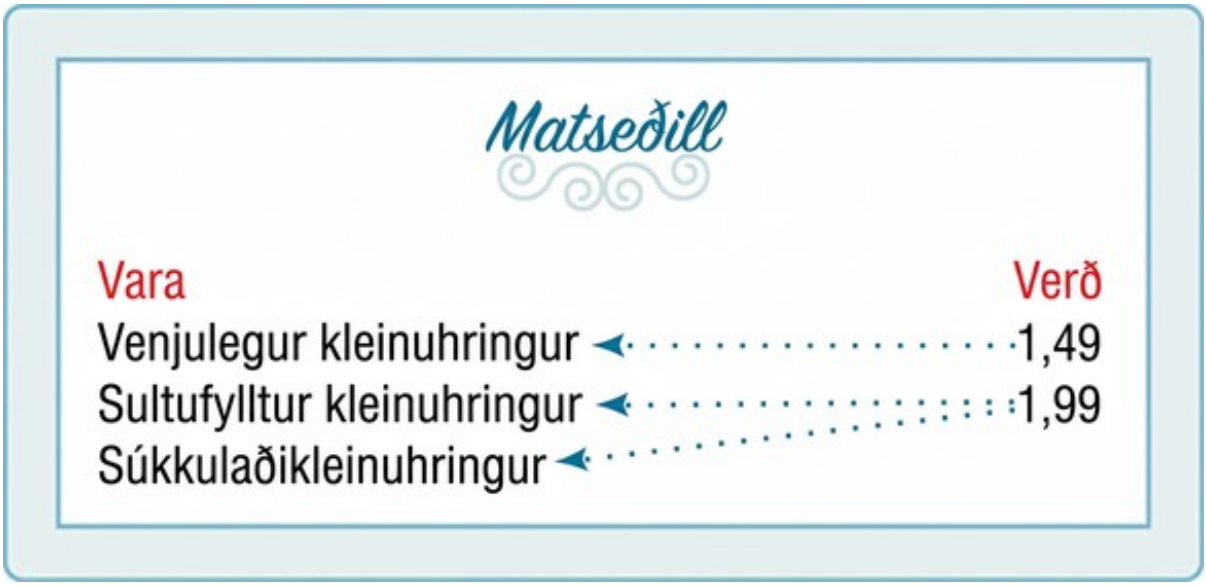
1. ⓐ Byrjum á að líta á vörurnar á matseðlinum sem inntak. Úttaksgildin eru þá verðin. Sjá mynd 3.



Mynd 3

Hver vara á matseðlinum hefur aðeins eitt verð og því er verðið fall af vörunni.

2. ⓑ Tvær vörur á matseðlinum hafa sama verð. Ef verðin eru inntaksgildi og vörurnar úttak getur sama inntaksgildi tengst fleiri en einu úttaki. Sjá mynd 4.



Mynd 4

Varan er því ekki fall af verðinu.

1

SÝNIDÆMI 2

Að ákvarða hvort einkunnareglur áfanga séu föll

Í tilteknum stærðfræðiáfanga samsvarar heildareinkunn í prósentum ákveðnu einkunnargildi. Er einkunnargildið fall af prósentueinkunninni? Er prósentueinkunnin fall af einkunnargildinu? Tafla 1 sýnir eina mögulega reglu um það hvernig einkunnargildum er úthlutað.

Tafla 1

Einkunn í prósentum	0–56	57–61	62–66	67–71	72–77	78–86	87–91	92–100
Einkunnargildi	0,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0

Lausn

Hverri prósentueinkunn samsvarar ákveðið einkunnargildi og því er einkunnargildið fall af prósentueinkunninni. Með öðrum orðum: ef prósentueinkunnin er inntak fæst eitt tiltekið einkunnargildi sem úttak.

Í þessu einkunnakerfi getur heilt bil prósentueinkunna samsvarað sama einkunnargildi. Nemendur með einkunnargildið 3,0 gætu til dæmis haft prósentueinkunn frá 78 allt upp í 86. Prósentueinkunnin er því ekki fall af einkunnargildinu.

REYNIÐ SJÁLF #1

Tafla 2 1 sýnir fimm bestu hafnaboltaleikmenn allra tíma í sætaröð.

1

1http://www.baseball-almanac.com/legendary/lisn100.shtml. Sótt 24.3.2014.

Tafla 2

Leikmaður	**Sæti**
Babe Ruth	1
Willie Mays	2
Ty Cobb	3
Walter Johnson	4
Hank Aaron	5

1. ⓐ Er sætið fall af nafni leikmannsins?
2. ⓑ Er nafn leikmannsins fall af sætinu?

Notkun fallatáknunar

Þegar við höfum ákvarðað að vensl séu fall þurfum við að skilgreina fallið og setja það fram á skýran hátt svo við getum skilið það og notað, og stundum einnig útfært það í tölvu. Föll má

tákna á ýmsa vegu. Hefðbundin fallatáknun er ein framsetning sem auðveldar okkur að vinna með föll.

Til að tákna að „hæð sé fall af aldri“ notum við breyturnar h fyrir hæð og a fyrir aldur. Bókstafirnir f, g, og h eru oft notaðir til að tákna föll, rétt eins og x, y, og z eru notaðir fyrir tölur og A, B, og C fyrir mengi.

h er f af a	Við nefnum fallið f; hæð er fall af aldri.
$h=f(a)$	Við notum sviga til að afmarka inntak fallsins.
$f(a)$	Við nefnum fallið f; stæðan er lesin sem „f af a.“

Munið að nota má hvaða bókstaf sem er til að nefna fallið. Táknunin $h(a)$ sýnir að h er háð a. Setja þarf gildið a inn í fallið h til að fá niðurstöðu. Svigarnir sýna að aldurinn er inntak fallsins; þeir tákna ekki margföldun.

Einnig má nota algebrustæðu sem inntak falls. Táknunin $f(a+b)$ merkir: „Leggið fyrst saman a og b og notið niðurstöðuna sem inntak fallsins f.“ Reikniaðgerðirnar verða að fara fram í þessari röð til að rétt niðurstaða fáist.

FALLATÁKNUN

Táknunin $y=f(x)$ skilgreinir fall sem nefnist f. Hún er lesin “ y er fall af x.” Bókstafurinn x táknar inntaksgildið, eða óháðu breytuna. Bókstafurinn y, eða $f(x)$, táknar úttaksgildið, eða háðu breytuna.

SÝNIDÆMI 3

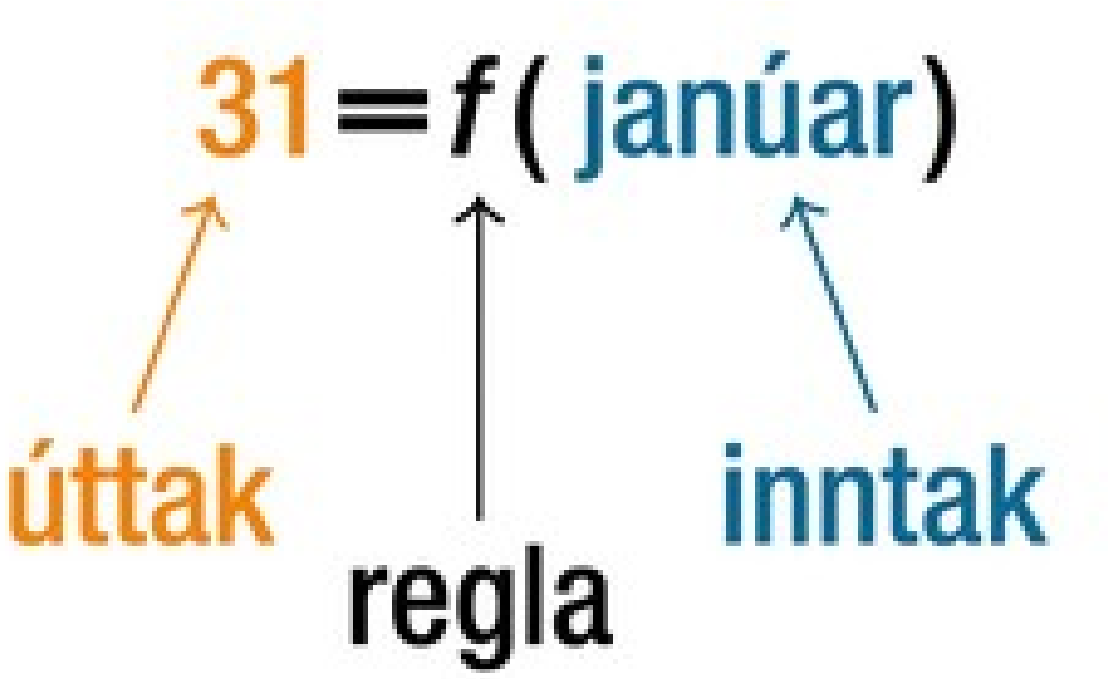
Fallatáknun fyrir fjölda daga í mánuði

Notið fallatáknun til að tákna fall þar sem inntakið er heiti mánaðar og úttakið fjöldi daga í mánuðinum. Gerið ráð fyrir að hlaupár séu ekki í skilgreiningarmenginu.

Lausn

Fjöldi daga í mánuði er fall af heiti mánaðarins. Ef fallið er nefnt f, skrifum við $\text{dagar}=f(\text{mánuður})$ eða $d=f(m)$. Heiti mánaðarins er inntak í „reglu“ sem tengir ákveðna tölu (úttakið) við hvert inntak.

1



Mynd 5

Til dæmis er $f(\text{mars})=31$, því mars hefur 31 dag. Táknunin $d=f(m)$ minnir okkur á að fjöldi daga, d (úttakið), er háður heiti mánaðarins, m (inntakinu).

Greining

Athugið að inntök falls þurfa ekki að vera tölur. Inntök geta verið nöfn fólks, heiti rúmfræðilegra hluta eða önnur stök sem ákvarða einhvers konar úttak. Flest föllin sem við vinnum með í þessari bók hafa þó tölur sem inntök og úttök.

SÝNIDÆMI 4

Túlkun fallatáknunar

Fallið $N=f(y)$ gefur fjölda lögreglumanna, N, í bæ tiltekið ár y. Hvað táknar $f(2005)=300$?

Lausn

Þegar við lesum $f(2005)=300$, sjáum við að inntaksárið er 2005. Úttaksgildið, fjöldi lögreglumanna (N), er 300. Munið að $N=f(y)$. Fullyrðingin $f(2005)=300$ segir að 300 lögreglumenn hafi verið í bænum árið 2005.

REYNIÐ SJÁLF #2

Notið fallatáknun til að setja þyngd svíns í pundum fram sem fall af aldri þess í dögum, d.

SPURT OG SVARAÐ

Í stað táknunar á borð við $y=f(x)$, mætti þá nota sama tákn fyrir úttakið og fallið, til dæmis $y=y(x)$, sem merkir að „y sé fall af x“?

Já, það er oft gert, einkum í hagnýtum greinum sem nota æðri stærðfræði, svo sem eðlisfræði og verkfræði. Þegar við rannsökum stærðfræðina sjálfa viljum við þó greina á milli fallsins f, sem er regla eða aðferð, og úttaksins y sem fæst þegar f er beitt á tiltekið inntak x. Þess vegna notum við yfirleitt táknun á borð við $y=f(x)$, $P=W(d)$, og svo framvegis.

Framsetning falla með töflum

Algengt er að setja föll fram í töflu. Raðir eða dálkar töflunnar sýna samsvarandi inntaks- og úttaksgildi. Stundum eru þessi gildi allt sem við vitum um venslin. Í öðrum tilvikum sýnir taflan aðeins nokkur valin dæmi úr venslum sem ná yfir fleiri gildi.

Í töflu 3 eru inntakstölur mánaðanna (janúar = 1, febrúar = 2 og svo framvegis) og úttaksgildið, fjöldi daga í hverjum mánuði. Þetta eru allar upplýsingar sem við höfum um mánuði og daga tiltekins árs sem er ekki hlaupár. Athugið að í töflunni skilgreinum við fallið f fyrir fjölda daga í mánuði, þar sem $D=f(m)$ auðkennir mánuði með heiltölu í stað heitis.

Tafla 3

Númer mánaðar, m (inntak)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dagar í mánuði, D (úttak)	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Tafla 4 skilgreinir fallið $Q=g(n)$. Munið að táknunin segir að g sé heiti fallsins sem tekur við inntakinu n og gefur úttakið Q.

Tafla 4

n	1	2	3	4	5
Q	8	6	7	6	8

Tafla 5 sýnir aldur barna í árum og samsvarandi hæð þeirra. Taflan sýnir aðeins hluta þeirra gagna sem til eru um hæð og aldur barna. Strax sést að taflan lýsir ekki falli því sama inntaksgildið, 5 ár, hefur tvö ólík úttaksgildi, 40 tommur og 42 tommur.

1

Tafla 5

Aldur í árum, a (inntak)	5	5	6	7	8	9	10
Hæð í tommum, h (úttak)	40	42	44	47	50	52	54

AÐFERÐ

Gefin er tafla með inntaks- og úttaksgildum. Ákvarðið hvort taflan lýsi falli.

1. Finnið inntaks- og úttaksgildin.
2. Athugið hvort hvert inntaksgildi tengist aðeins einu úttaksgildi. Ef svo er lýsir taflan falli.

SÝNIDÆMI 5

Að bera kennsl á töflur sem lýsa föllum

Hverjar eftirtalinna taflna lýsa falli: tafla 6, tafla 7 eða tafla 8?

Tafla 6

Inntak	Úttak
2	1
5	3
8	6

Tafla 7

Inntak	Úttak
−3	5
0	1
4	5

Tafla 8

Inntak	Úttak
1	0
5	2
5	4

Lausn

Tafla 6 og tafla 7 skilgreina föll. Í báðum töflum samsvarar hvert inntaksgildi nákvæmlega einu úttaksgildi. Tafla 8 skilgreinir ekki fall því inntaksgildið 5 samsvarar tveimur ólíkum úttaksgildum.

Þegar tafla lýsir falli má einnig tilgreina samsvarandi inntaks- og úttaksgildi með fallatáknun.

Fallið sem tafla 6 lýsir má tákna með því að skrifa

$$f(2)=1, f(5)=3, \text{og } f(8)=6$$

Á sama hátt lýsa fullyrðingarnar

$$g(-3)=5, g(0)=1, \text{og } g(4)=5$$

fallinu í töflu 7.

Töflu 8 er ekki hægt að tákna á samsvarandi hátt því hún lýsir ekki falli.

REYNIÐ SJÁLF #3

Lýsir tafla 9 falli?

Tafla 9

Inntak	Úttak
1	10
2	100
3	1.000

Að finna inntaks- og úttaksgildi falls

Þegar inntaksgildi er þekkt og við viljum finna samsvarandi úttaksgildi falls reiknum við gildi fallsins. Útreikningurinn gefur alltaf eina niðurstöðu því hvert inntaksgildi falls samsvarar nákvæmlega einu úttaksgildi.

Þegar úttaksgildi er þekkt og við viljum finna þau inntaksgildi sem gefa það setjum við úttakið jafnt formúlu fallsins og leysum með tilliti til inntaksins. Fleiri en ein lausn getur fengist því ólík inntaksgildi geta gefið sama úttaksgildi.

Útreikningur fallgilda út frá algebruframsetningu

Þegar fall er gefið með formúlu er yfirleitt einfalt að reikna gildi þess. Til dæmis má reikna gildi fallsins $f(x)=5-3x^2$ með því að setja inntaksgildið í annað veldi, margfalda með 3 og draga margfeldið síðan frá 5.

AÐFERÐ

Gefin er formúla falls. Reiknið gildi fallsins.

1. Setjið gefna gildið í stað inntaksbreytunnar í formúlunni.
2. Reiknið niðurstöðuna.

1

DÆMI 6

Gildi falla reiknuð fyrir tiltekin gildi

Reiknið gildi $f(x)=x^2+3x-4$ fyrir:

1. ⓐ 2
2. ⓑ a
3. ⓒ $a+h$
4. ⓓ Reiknið nú gildi $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Lausn

Setjið hvert tilgreint gildi í stað x í fallinu.

1. ⓐ Þar sem inntaksgildið er talan 2 getum við einfaldað með almennum algebrureikningi.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 + 3(2) - 4 \\ &= 4 + 6 - 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

2. ⓑ Hér er inntaksgildið bókstafur og því getum við ekki einfaldað svarið frekar.
   $f(a)=a^2+3a-4$
3. ⓒ Þegar inntaksgildið er $a+h$, þurfum við að nota dreifiregluna.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^2 + 3(a+h) - 4 \\ &= a^2 + 2ah + h^2 + 3a + 3h - 4 \end{aligned}$$

4. ⓓ Hér setjum við inntaksgildi oftar en einu sinni inn í fallið og framkvæmum síðan algebruaðgerðir á niðurstöðunni. Við höfum þegar fundið að
   $f(a+h)=a^2+2ah+h^2+3a+3h-4$
   og vitum að
   $f(a)=a^2+3a-4$
   Nú sameinum við niðurstöðurnar og einföldum.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a^2+2ah+h^2+3a+3h-4)-(a^2+3a-4)}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2+3h}{h} \\ &= \frac{h(2a+h+3)}{h} && \text{Takið } h \text{ út fyrir sviga.} \\ &= 2a+h+3 && \text{Einfaldið.} \end{aligned}$$

DÆMI 7

Gildi falla reiknuð

Gefið er fallið $h(p)=p^2+2p$, og finna á gildi $h(4)$.

Lausn

Til að reikna gildi $h(4)$, setjum við gildið 4 í stað inntaksbreytunnar p í fallinu.

$$\begin{aligned} h(p) &= p^2+2p \\ h(4) &= (4)^2+2(4) \\ &= 16+8 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Þegar inntakið er 4 er úttakið því 24.

REYNIÐ SJÁLF #4

Gefið er fallið $g(m)=\sqrt{m-4}$, og finna á gildi $g(5)$.

DÆMI 8

Jöfnur með föllum leystar

Gefið er fallið $h(p)=p^2+2p$, og leysa á jöfnuna $h(p)=3$.

Lausn

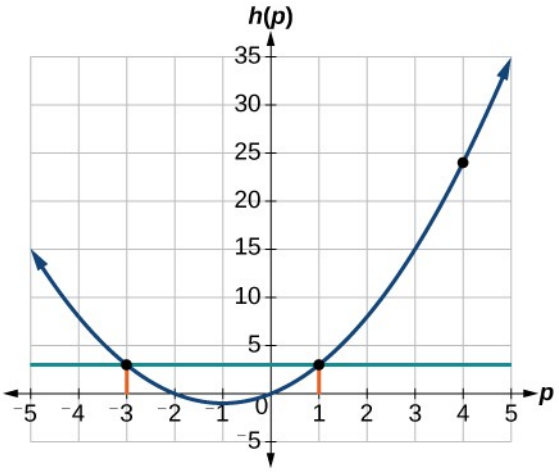
$h(p)=3$	
$p^2+2p=3$	Setjið inn upphaflegu formúluna $h(p)=p^2+2p$.
$p^2+2p-3=0$	Dragið 3 frá báðum hliðum.
$(p+3)(p-1)=0$	Þáttið.

Ef $(p+3)(p-1)=0$, þá er annaðhvort $(p+3)=0$ eða $(p-1)=0$ (eða báðir þættirnir jafnir 0). Við setjum hvorn þátt jafnan 0 og leysum með tilliti til p í hvoru tilviki.

$$\begin{aligned} (p+3)&=0, \quad p=-3 \\ (p-1)&=0, \quad p=1 \end{aligned}$$

Þannig fáum við tvær lausnir. Úttakið er $h(p)=3$ þegar inntakið er annaðhvort $p=1$ eða $p=-3$. Við getum einnig sannreynt þetta með grafi eins og á mynd 6. Grafið staðfestir að $h(1)=h(-3)=3$ og $h(4)=24$.

1



p	-3	-2	0	1	4
$h(p)$	3	0	0	3	24

Mynd 6

REYNIÐ SJÁLF #5

Gefið er fallið $g(m)=\sqrt{m-4}$, og leysa á jöfnuna $g(m)=2$.

Gildi falla reiknuð út frá formúlum

Sum föll eru skilgreind með stærðfræðilegum reglum eða aðferðum sem settar eru fram sem jöfnur. Ef hægt er að lýsa úttaki falls með formúlu sem inniheldur inntaksstærðina má skilgreina fallið á algebrulegu formi. Til dæmis lýsir jafnan $2n+6p=12$ fallavenslum milli n og p. Við getum umritað hana til að ákvarða hvort p sé fall af n.

AÐFERÐ

Gefið er fall á jöfnuformi. Skrifið algebrulega formúlu þess.

1. Leysið jöfnuna þannig að úttaksbreytan sé einangruð öðrum megin við jafnaðarmerkið og hinum megin sé stæða sem inniheldur aðeins inntaksbreytuna.
2. Notið hefðbundnar algebruaðferðir við lausn jafna, svo sem að leggja sömu stærð við báðar hliðar eða draga hana frá þeim, eða margfalda eða deila báðum hliðum jöfnunnar með sömu stærð.

DÆMI 9

Algebruframsetning falls fundin

Setjið venslin $2n+6p=12$ fram sem fallið $p=f(n)$, ef það er hægt.

Lausn

Til að setja venslin fram á þessu formi þurfum við að geta skrifað þau þannig að p sé fall af n, það er á forminu $p = [\text{ stæða með } n]$.

$$
\begin{aligned}
2n + 6p &= 12 \\
6p &= 12 - 2n && \text{Dragið } 2n \text{ frá báðum hliðum.} \\
p &= \frac{12 - 2n}{6} && \text{Deilið báðum hliðum með 6 og einfaldið.} \\
p &= \frac{12}{6} - \frac{2n}{6} \\
p &= 2 - \frac{1}{3}n
\end{aligned}
$$

Því er p sem fall af n skrifað sem

$$p = f(n) = 2 - \frac{1}{3}n$$

Greining

Athugið að ekki er hægt að setja öll vensl sem jafna lýsir fram sem fall með formúlu.

DÆMI 10

Jafna hrings sett fram sem fall

Lýsir jafnan $x^2 + y^2 = 1$ falli þar sem x er inntak og y er úttak? Ef svo er, setjið venslin fram sem fallið $y = f(x)$.

Lausn

Fyrst drögum við x^2 frá báðum hliðum.

$$y^2 = 1 - x^2$$

Nú reynum við að leysa þessa jöfnu með tilliti til y.

$$
\begin{aligned}
y &= \pm\sqrt{1 - x^2} \\
&= +\sqrt{1 - x^2} \text{ og } -\sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}
$$

Við fáum tvö úttaksgildi fyrir sama inntaksgildið og því er ekki hægt að setja þessi vensl fram sem eitt fall $y = f(x)$.

REYNIÐ SJÁLF #6

Ef $x - 8y^3 = 0$, setjið þá y fram sem fall af x.

SPURT OG SVARAÐ

1

Eru til vensl sem lýst er með jöfnu og skilgreina fall en er samt ekki hægt að setja fram með algebrulegri formúlu?

Já, það getur gerst. Skoðum til dæmis jöfnuna $x = y + 2^y$, og reynum að setja y fram sem fall af x, en til er engin einföld algebruleg formúla sem inniheldur aðeins x og er jöfn y. Hvert x ákvarðar þó ótvírætt gildi y, og til eru stærðfræðilegar aðferðir til að finna y með hvaða nákvæmni sem óskað er. Þá segjum við að jafnan gefi óbeina reglu fyrir y sem fall af x, þótt ekki sé hægt að skrifa formúluna beint.

Gildi falls á töfluformi reiknað

Eins og áður kom fram má setja föll fram í töflum. Við getum líka farið öfuga leið og notað upplýsingar í töflum til að skilgreina föll og reikna gildi þeirra. Hversu vel muna gæludýrin okkar til dæmis eftir góðum stundum sem við höfum átt með þeim? Sú flökkusaga gengur að gullfiskur muni aðeins í 3 sekúndur, en það er ranghugmynd. Gullfiskar geta munað í allt að 3 mánuði en bardagafiskar í allt að 5 mánuði. Hvolpur man ekki lengur en í 30 sekúndur en fullorðinn hundur getur munað í 5 mínútur. Það er lítið borið saman við kött, sem getur munað í 16 klukkustundir.

Fallið sem tengir tegund gæludýrs við það hversu lengi dýrið man er auðveldara að sjá í töflu. Sjá töflu 10. [2]

[2] http://www.kgbanswers.com/how-long-is-a-dogs-memory-span/4221590. Sótt 24.3.2014.

Tafla 10

Gæludýr	Minnistími í klukkustundum
Hvolpur	0,008
Fullorðinn hundur	0,083
Köttur	16
Gullfiskur	2160
Bardagafiskur	3600

Stundum er gagnlegra að reikna gildi falls af töflu en að nota jöfnur. Köllum fallið hér P. Tegundir gæludýranna mynda skilgreiningarmengið, en myndmengið er mengi rauntalna sem tákna fjölda klukkustunda sem minnið endist. Við getum reiknað gildi fallsins P fyrir inntaksgildið „gullfiskur“. Við skrifum $P(\text{gullfiskur}) = 2160$. Til að reikna gildi falls af töflu finnum við inntaksgildið og samsvarandi úttaksgildi í viðeigandi línu töflunnar. Töfluform fallsins P hentar sérlega vel, betur en lýsing í texta eða með fallatáknun.

AÐFERÐ

Gefið er fall á töfluformi. Finnið tiltekin inntaks- og úttaksgildi.

1. Finnið gefna inntaksgildið í línu (eða dálki) inntaksgilda.
2. Finnið samsvarandi úttaksgildi sem parað er við inntaksgildið.
3. Finnið gefnu úttaksgildin í línu (eða dálki) úttaksgilda og skráið hvert skipti sem úttaksgildið kemur fyrir.
4. Finnið inntaksgildið eða inntaksgildin sem samsvara gefna úttaksgildinu.

DÆMI 11

Gildi falls á töfluformi reiknað og jafna leyst

Notið töflu 11.

1. ⓐ Reiknið gildi $g(3)$.
2. ⓑ Leysið $g(n)=6$.

Tafla 11

n	1	2	3	4	5
$g(n)$	8	6	7	6	8

Lausn

1. ⓐ Að reikna gildi $g(3)$ merkir að finna úttaksgildi fallsins g þegar inntaksgildið er $n=3$. Úttaksgildið í töflunni sem samsvarar $n=3$ er 7 og því er $g(3)=7$.
2. ⓑ Að leysa $g(n)=6$ merkir að finna inntaksgildin n, sem gefa úttaksgildið 6. Taflan hér fyrir neðan sýnir tvær lausnir: 2 og 4.

n	1	2	3	4	5
$g(n)$	8	6	7	6	8

Þegar 2 er sett inn í fallið g, er úttakið 6. Þegar 4 er sett inn í fallið g, er úttakið einnig 6.

REYNIÐ SJÁLF #7

Notið töfluna í dæminu Gildi falls á töfluformi reiknað og jafna leyst hér fyrir ofan og reiknið gildi $g(1)$.

Fallgildi fundin af grafi

Til að reikna gildi falls af grafi þarf einnig að finna úttaksgildið sem samsvarar gefnu inntaksgildi. Munurinn er sá að við lesum úttaksgildið af grafinu. Til að leysa fallajöfnu með grafi þarf að finna alla staði á grafinu þar sem gefna úttaksgildið kemur fyrir og lesa samsvarandi inntaksgildi.

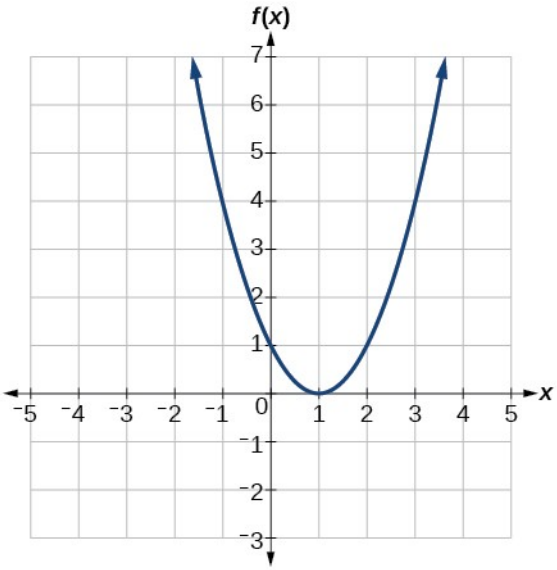
DÆMI 12

1

Fallgildi lesin af grafi

Gefið er grafið á mynd 7.

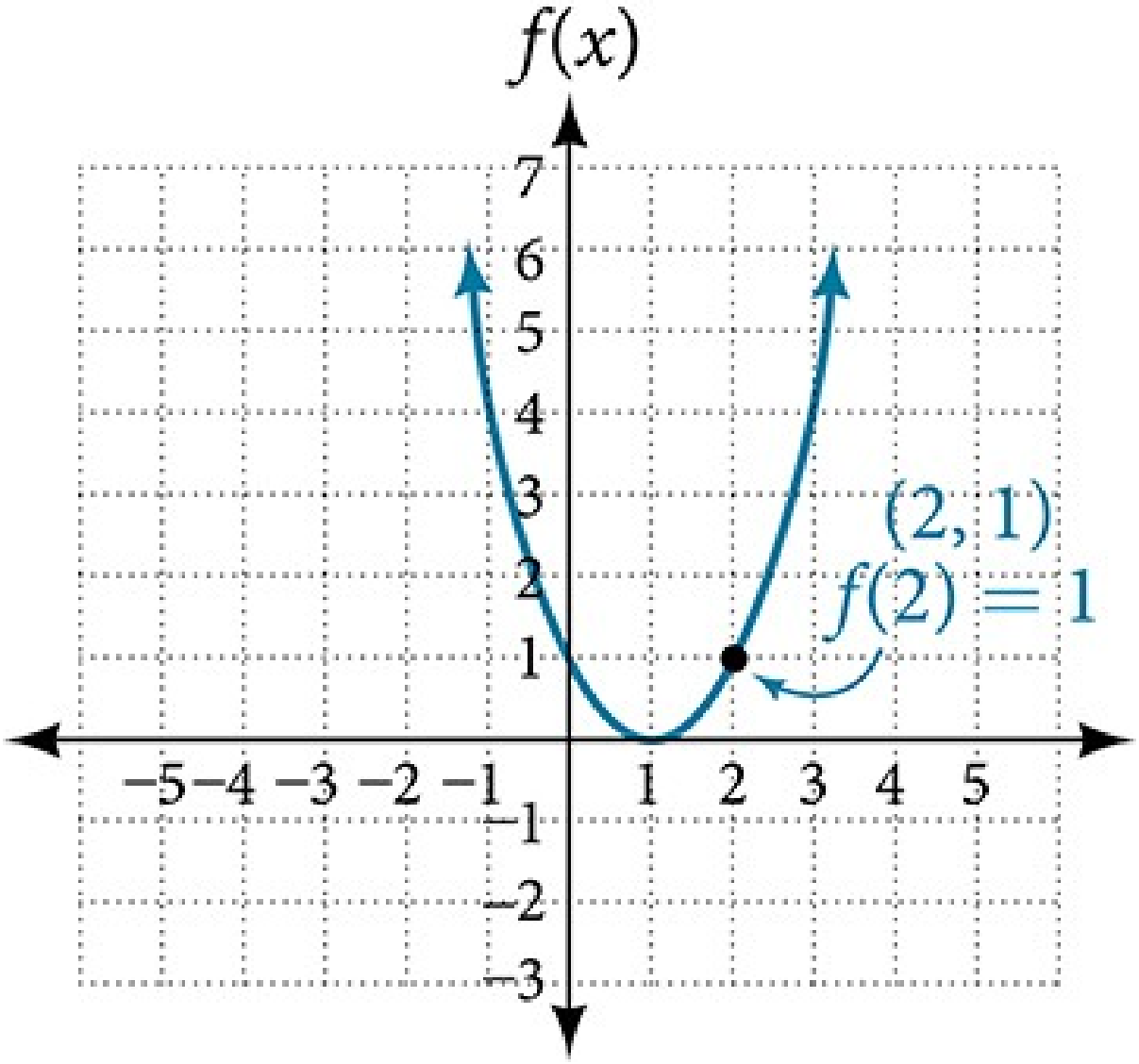
1. ⓐ Reiknið gildi $f(2)$.
2. ⓑ Leysið $f(x)=4$.



Mynd 7

Lausn

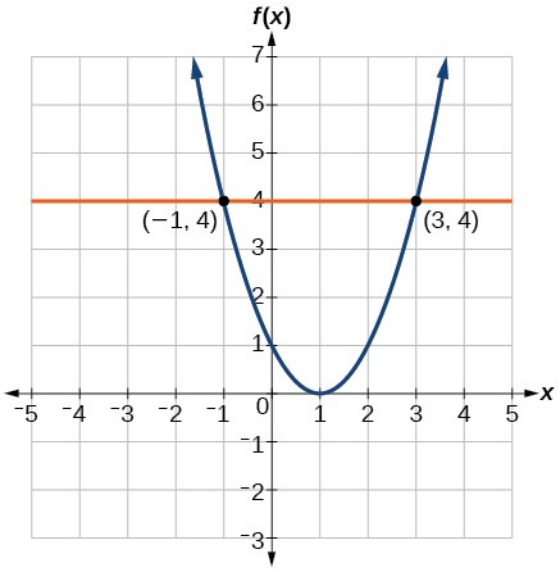
1. ⓐ Til að reikna gildi $f(2)$, finnum við punktinn á ferlinum þar sem $x=2$, og lesum síðan y-hnit hans. Hnit punktsins eru $(2,1)$, og því er $f(2)=1$. Sjá mynd 8.



Mynd 8

2. ⓑ Til að leysa $f(x)=4$, finnum við úttaksgildið 4 á lóðrétta ásnum. Við færum okkur lárétt eftir línunni $y=4$, og finnum tvo punkta á ferlinum með úttaksgildið 4: $(-1,4)$ og $(3,4)$. Punktarnir gefa lausnirnar tvær á $f(x)=4$: -1 eða 3. Það merkir að $f(-1)=4$ og $f(3)=4$, eða að þegar inntakið er -1 eða 3, er úttakið 4. Sjá mynd 9.

1



Mynd 9

REYNIÐ SJÁLF #8

Notið mynd 7 til að leysa $f(x)=1$.

Ákvarðað hvort fall sé eintækt

Hjá sumum föllum samsvarar tiltekið úttaksgildi tveimur eða fleiri inntaksgildum. Á hlutabréfagrafinu í upphafi kaflans var hlutabréfaverðið til dæmis 1.000 Bandaríkjadalir á fimm mismunandi dagsetningum. Fimm mismunandi inntaksgildi gáfu því öll sama úttaksgildið, 1.000 Bandaríkjadali.

Hjá sumum föllum samsvarar hins vegar aðeins eitt inntaksgildi hverju úttaksgildi, auk þess sem aðeins eitt úttak samsvarar hverju inntaki. Slík föll köllum við eintæk föll. Skoðum sem dæmi skóla sem notar aðeins bókstafseinkunnir og samsvarandi tugabrot, eins og sýnt er í töflu 12.

Tafla 12

Bókstafseinkunn	Einkunnargildi
A	4,0
B	3,0
C	2,0
D	1,0

Þetta einkunnakerfi lýsir eintæku falli því hver bókstafseinkunn gefur eitt tiltekið einkunnargildi og hvert einkunnargildi samsvarar einni bókstafseinkunn.

Til að sjá þetta hugtak skýrar skulum við skoða aftur einföldu föllin tvö á mynd 1**(a)** og mynd 1**(b)**. Fallið í (a) sýnir vensl sem eru ekki eintæk því inntökin q og r gefa bæði úttakið n. Fallið í (b) sýnir eintæk vensl því hvert úttak tengist aðeins einu inntaki.

EINTÆKT FALL

Eintækt fall er fall þar sem hvert úttaksgildi samsvarar nákvæmlega einu inntaksgildi.

DÆMI 13

Ákvarðað hvort vensl lýsi eintæku falli

Er flatarmál hrings fall af geisla hans? Ef svo er, er fallið eintækt?

Lausn

Hringur með geisla r hefur eitt ákveðið flatarmál sem gefið er með $A=\pi r^2$, og fyrir hvert inntak r, er því aðeins eitt úttak A. Flatarmálið er fall af geislanum r.

Ef fallið er eintækt verður úttaksgildið, flatarmálið, að samsvara einu inntaksgildi, geislanum. Hvert flatarmál A er gefið með formúlunni $A=\pi r^2$. Flatarmál og geislar eru jákvæðar tölur og því er nákvæmlega ein lausn: $\sqrt{\frac{A}{\pi}}$. Flatarmál hrings er því eintækt fall af geisla hringsins.

REYNIÐ SJÁLF #9

1. ⓐ Er innstæða fall af bankareikningsnúmeri?
2. ⓑ Er bankareikningsnúmer fall af innstæðu?
3. ⓒ Er innstæða eintækt fall af bankareikningsnúmeri?

REYNIÐ SJÁLF #10

Metið eftirfarandi: ⓐ Ef hver prósentueinkunn í áfanga samsvarar einni bókstafseinkunn, er bókstafseinkunnin þá fall af prósentueinkunninni? ⓑ Ef svo er, er fallið eintækt?

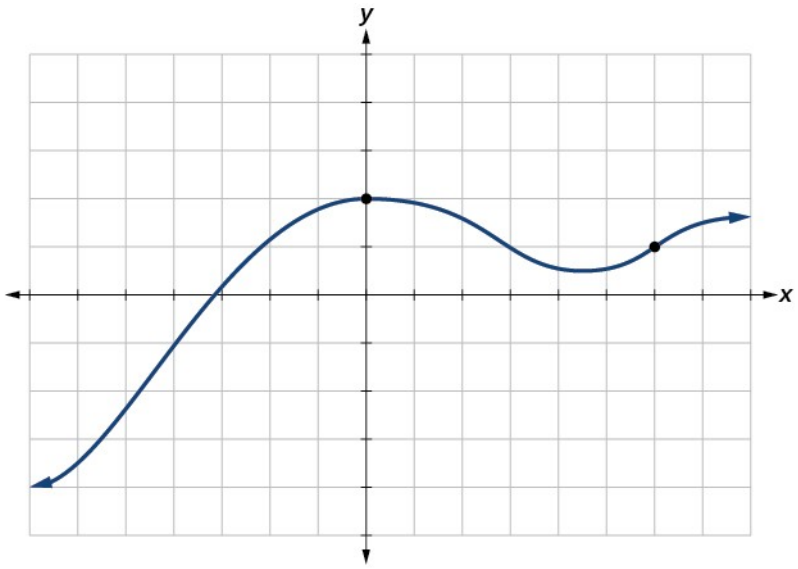
Lóðrétta línuprófið notað

Eins og fram hefur komið í nokkrum dæmum má setja fall fram með grafi. Gröf sýna mörg inntaks- og úttakspör á litlu svæði. Myndræn framsetning auðveldar okkur oft að skilja vensl. Samkvæmt venju eru gröf yfirleitt teiknuð með inntaksgildi á lárétta ásnum og úttaksgildi á lóðrétta ásnum.

Á algengustu gröfunum er inntaksgildið táknað með x og úttaksgildið með y, og við segjum að y sé fall af x, eða að $y=f(x)$ þegar fallið heitir f. Graf fallsins er mengi allra punkta (x, y) í sléttunni sem uppfylla jöfnuna $y=f(x)$. Ef fallið er aðeins skilgreint fyrir fá

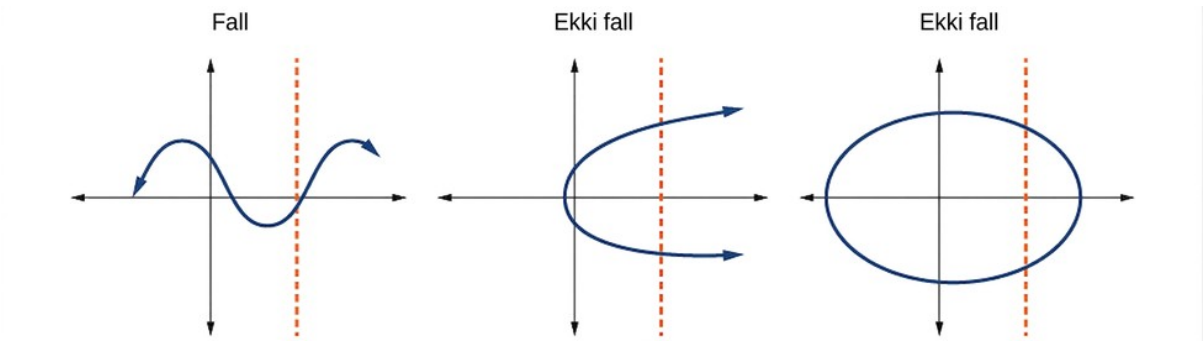
1

inntaksgildi samanstendur graf þess af fáeinum punktum. x-hnit hvers punkts er þá inntaksgildi og y-hnit hans samsvarandi úttaksgildi. Svörtu punktarnir á grafinu á mynd 10 sýna til dæmis að $f(0)=2$ og $f(6)=1$. Mengi allra punkta (x, y) sem uppfylla $y=f(x)$ myndar hins vegar feril. Ferillinn sem sýndur er inniheldur $(0, 2)$ og $(6, 1)$ því hann liggur gegnum þá punkta.



Mynd 10

Nota má lóðrétta línuprófið til að ákvarða hvort graf lýsi falli. Ef hægt er að draga einhverja lóðrétta línu sem sker graf oftar en einu sinni lýsir grafið ekki falli, því hvert inntaksgildi falls hefur aðeins eitt úttaksgildi. Sjá mynd 11.



Mynd 11

AÐFERÐ

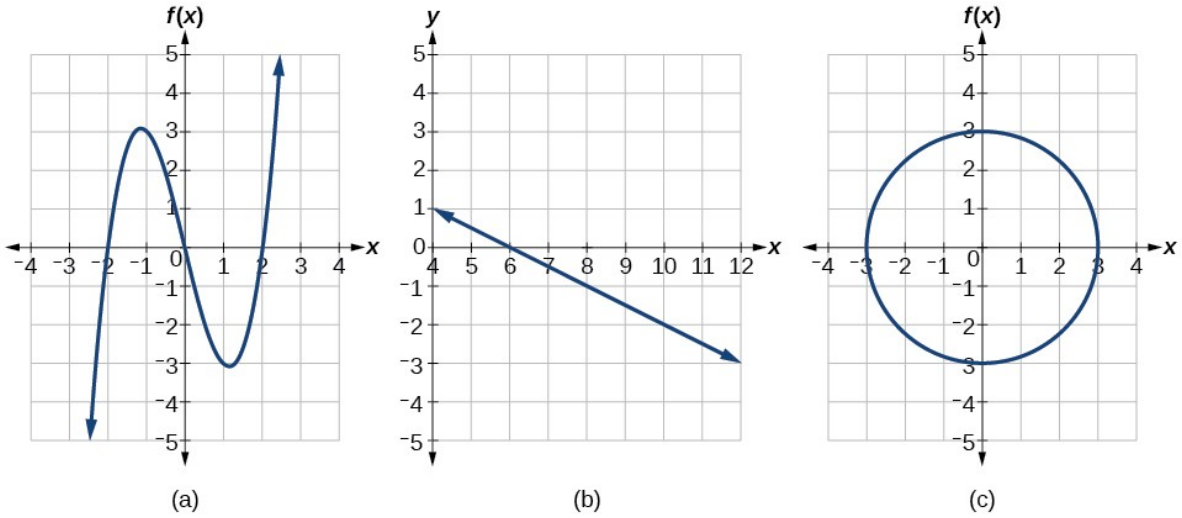
Gefið er graf. Notið lóðrétta línuprófið til að ákvarða hvort grafið lýsi falli.

1. Skoðið grafið og athugið hvort einhver lóðrétt lína myndi skera ferilinn oftar en einu sinni.
2. Ef slík lína er til lýsir grafið ekki falli.

DÆMI 14

Lóðrétta línuprófinu beitt

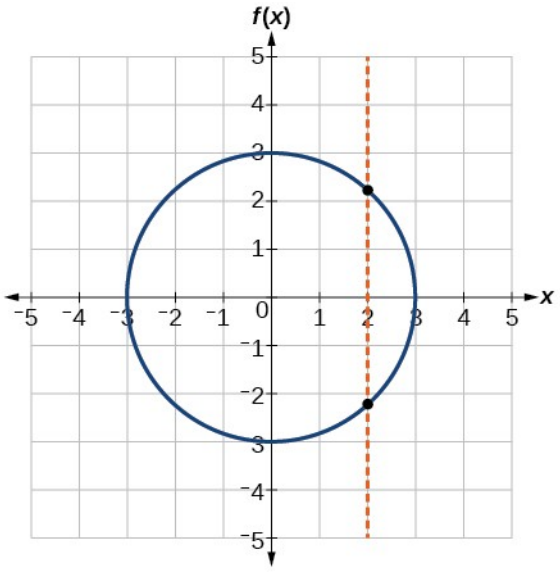
Hvaða gröf á mynd 12 lýsa falli $y = f(x)$?



Mynd 12

Lausn

Ef einhver lóðrétt lína sker graf oftar en einu sinni eru venslin sem grafið sýnir ekki fall. Hver lóðrétt lína liggur aðeins gegnum einn punkt á gröfunum tveimur í (a) og (b) á mynd 12. Því getum við ályktað að þessi tvö gröf lýsi föllum. Þriðja grafið lýsir ekki falli því fyrir flest x-gildi myndi lóðrétt lína skera grafið í fleiri en einum punkti, eins og sýnt er á mynd 13.

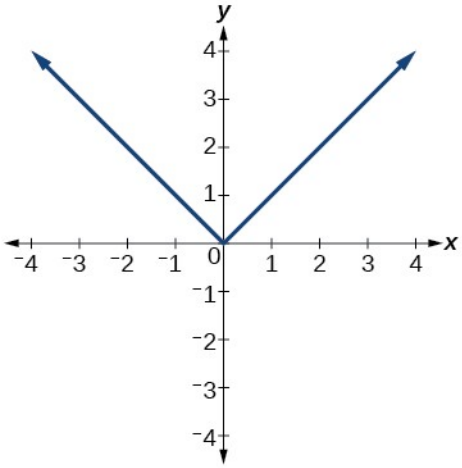


Mynd 13

REYNIÐ SJÁLF #11

1

Lýsir grafið á mynd 14 falli?



Mynd 14

Lárétta línuprófið notað

Þegar við höfum ákvarðað að graf lýsi falli má auðveldlega kanna hvort fallið sé eintækt með láréttа línuprófinu. Dragið láréttar línur gegnum grafið. Ef einhver lárétt lína sker grafið oftar en einu sinni lýsir grafið ekki eintæku falli.

AÐFERÐ

Gefið er graf falls. Notið lárétta línuprófið til að ákvarða hvort grafið lýsi eintæku falli.

1. Skoðið grafið og athugið hvort einhver lárétt lína myndi skera ferilinn oftar en einu sinni.
2. Ef slík lína er til er fallið ekki eintækt.

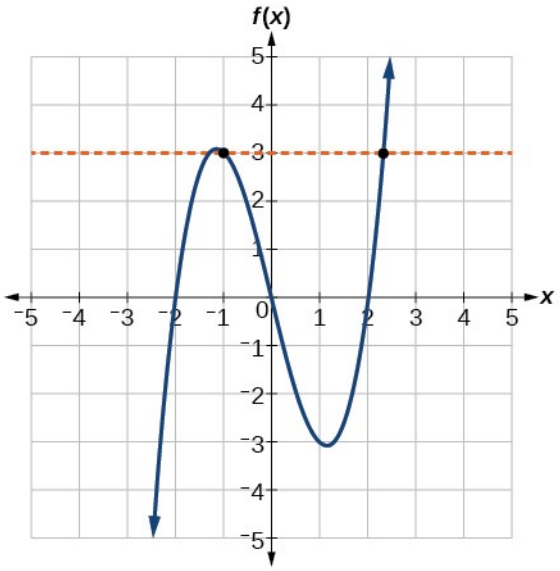
DÆMI 15

Lárétta línuprófinu beitt

Skoðið föllin á mynd 12**(a)** og mynd 12**(b)**. Er eitthvert fallanna eintækt?

Lausn

Fallið á mynd 12**(a)** er ekki eintækt. Lárétta línan á mynd 15 sker graf fallsins í tveimur punktum (og jafnvel má finna láréttar línur sem skera það í þremur punktum).



Mynd 15

Fallið á mynd 12**(b)** er eintækt. Hver lárétt lína sker skálínu í mesta lagi einu sinni.

REYNIÐ SJÁLF #12

Er grafið á mynd 12**(c) eintækt?**

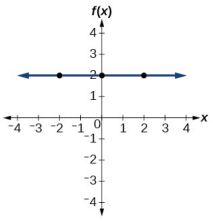
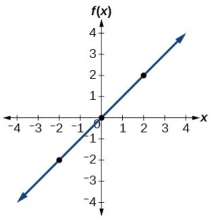
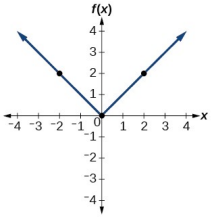
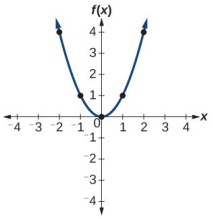
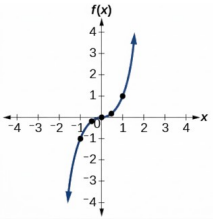
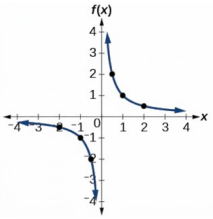
Að bera kennsl á grunnföll

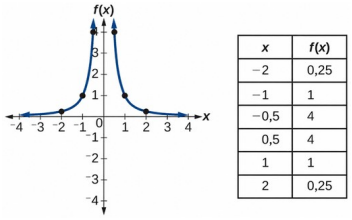
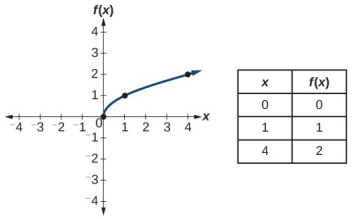
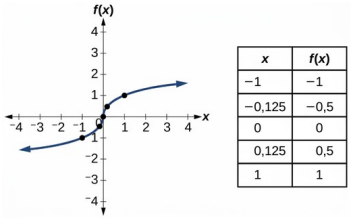
Í þessari bók könnum við föll: lögun grafa þeirra, sérkenni, algebrulegar formúlur og hvernig leysa má verkefni með þeim. Þegar við lærum að lesa byrjum við á stafrófinu. Þegar við lærum reikning byrjum við á tölum. Á sama hátt er gagnlegt að hafa safn grunneininga þegar við vinnum með föll. Þessar einingar köllum við grunnföll. Þetta eru einföld föll með ákveðin heiti og við þekkjum gröf þeirra, formúlur og sérstaka eiginleika. Á mörgum reiknivélum eru sérstakir hnappar fyrir sum þessara falla. Í skilgreiningunum notum við x sem inntaksbreytu og $y=f(x)$ sem úttaksbreytu.

Grunnföllin, samsetningar þeirra, gröf og ummyndanir koma oft fyrir í bókinni. Mjög gagnlegt er að geta fljótt borið kennsl á grunnföllin og einkenni þeirra út frá heiti, formúlu, grafi og gildatöflu. Graf og dæmigerð töflugildi fylgja hverju falli í töflu 13.

1

Tafla 13

Grunnföll		
Heiti	**Fall**	**Graf**
Fastafall	$f(x)=c$, þar sem c er fasti	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>
Samsemdarfall	$f(x)=x$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−2</td><td>−2</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>
Tölugildisfall	$f(x)=\lvert x\rvert$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>
Annars stigs fall	$f(x)=x^2$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−2</td><td>4</td></tr><tr><td>−1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>
Þriðja stigs fall	$f(x)=x^3$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−1</td><td>−1</td></tr><tr><td>−0,5</td><td>−0,125</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0,5</td><td>0,125</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>
Umhverfufall	$f(x)=\frac{1}{x}$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−2</td><td>−0,5</td></tr><tr><td>−1</td><td>−1</td></tr><tr><td>−0,5</td><td>−2</td></tr><tr><td>0,5</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0,5</td></tr></table>

Grunnföll		
Heiti	**Fall**	**Graf**
Annað veldi umhverfufalls	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−2</td><td>0,25</td></tr><tr><td>−1</td><td>1</td></tr><tr><td>−0,5</td><td>4</td></tr><tr><td>0,5</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0,25</td></tr></table>
Kvaðratrótarfall	$f(x)=\sqrt{x}$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr></table>
Teningsrótarfall	$f(x)=\sqrt[3]{x}$	 <table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>−1</td><td>−1</td></tr><tr><td>−0,125</td><td>−0,5</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0,125</td><td>0,5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>

MIÐLAR

Notið eftirfarandi nettilföng til að fræðast meira um föll og æfa ykkur.

- Ákvarðað hvort vensl lýsi falli
- Lóðrétta línuprófið
- Inngangur að föllum
- Lóðrétta línuprófið á grafi
- Eintæk föll
- Gröf sem eintæk föll

1.1 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Hver er munurinn á venslum og falli?
2. Hver er munurinn á inntaki og úttaki falls?
3. Hvers vegna segir lóðrétta línuprófið til um hvort graf vensla lýsi falli?
4. Hvernig má ákvarða hvort vensl lýsi eintæku falli?
5. Hvers vegna segir lárétta línuprófið til um hvort graf falls sé eintækt?

1

Algebra

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort venslin lýsi falli.

6.

$$\{(a,b),(c,d),(a,c)\}$$

7.

$$\{(a,b),(b,c),(c,c)\}$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort venslin lýsi y sem falli af x.

8.

$$5x+2y=10$$

9.

$$y=x^2$$

10.

$$x=y^2$$

11.

$$3x^2+y=14$$

12.

$$2x+y^2=6$$

13.

$$y=-2x^2+40x$$

14.

$$y=\frac{1}{x}$$

15.

$$x=\frac{3y+5}{7y-1}$$

16.

$$x=\sqrt{1-y^2}$$

17.

$$y=\frac{3x+5}{7x-1}$$

18.

$$x^2+y^2=9$$

19.

$$2xy=1$$

20.

$$x=y^3$$

21.

$$y=x^3$$

22.

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

23.

$$x=\pm\sqrt{1-y}$$

24.

$$y=\pm\sqrt{1-x}$$

25.

$$y^2=x^2$$

26.

$$y^3=x^2$$

Finnið eftirfarandi gildi fyrir fallið f: $f(-3), f(2), f(-a), -f(a), f(a+h)$.

27.

$$f(x)=2x-5$$

28.

$$f(x)=-5x^2+2x-1$$

29.

$$f(x)=\sqrt{2-x}+5$$

30.

$$f(x)=\frac{6x-1}{5x+2}$$

1

31.

$$f(x)=|x-1|-|x+1|$$

32. Gefið er fallið $g(x)=5-x^2$, og finna á gildi $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}, h\neq 0$.

33. Gefið er fallið $g(x)=x^2+2x$, og finna á gildi $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}, x\neq a$.

34. Gefið er fallið $k(t)=2t-1$:

1. ⓐ Reiknið gildi $k(2)$.
2. ⓑ Leysið $k(t)=7$.

35. Gefið er fallið $f(x)=8-3x$:

1. ⓐ Reiknið gildi $f(-2)$.
2. ⓑ Leysið jöfnuna $f(x)=-1$.

36. Gefið er fallið $p(c)=c^2+c$:

1. ⓐ Reiknið gildi $p(-3)$.
2. ⓑ Leysið $p(c)=2$.

37. Gefið er fallið $f(x)=x^2-3x$:

1. ⓐ Reiknið gildi $f(5)$.
2. ⓑ Leysið $f(x)=4$.

38. Gefið er fallið $f(x)=\sqrt{x+2}$:

1. ⓐ Reiknið gildi $f(7)$.
2. ⓑ Leysið $f(x)=4$.

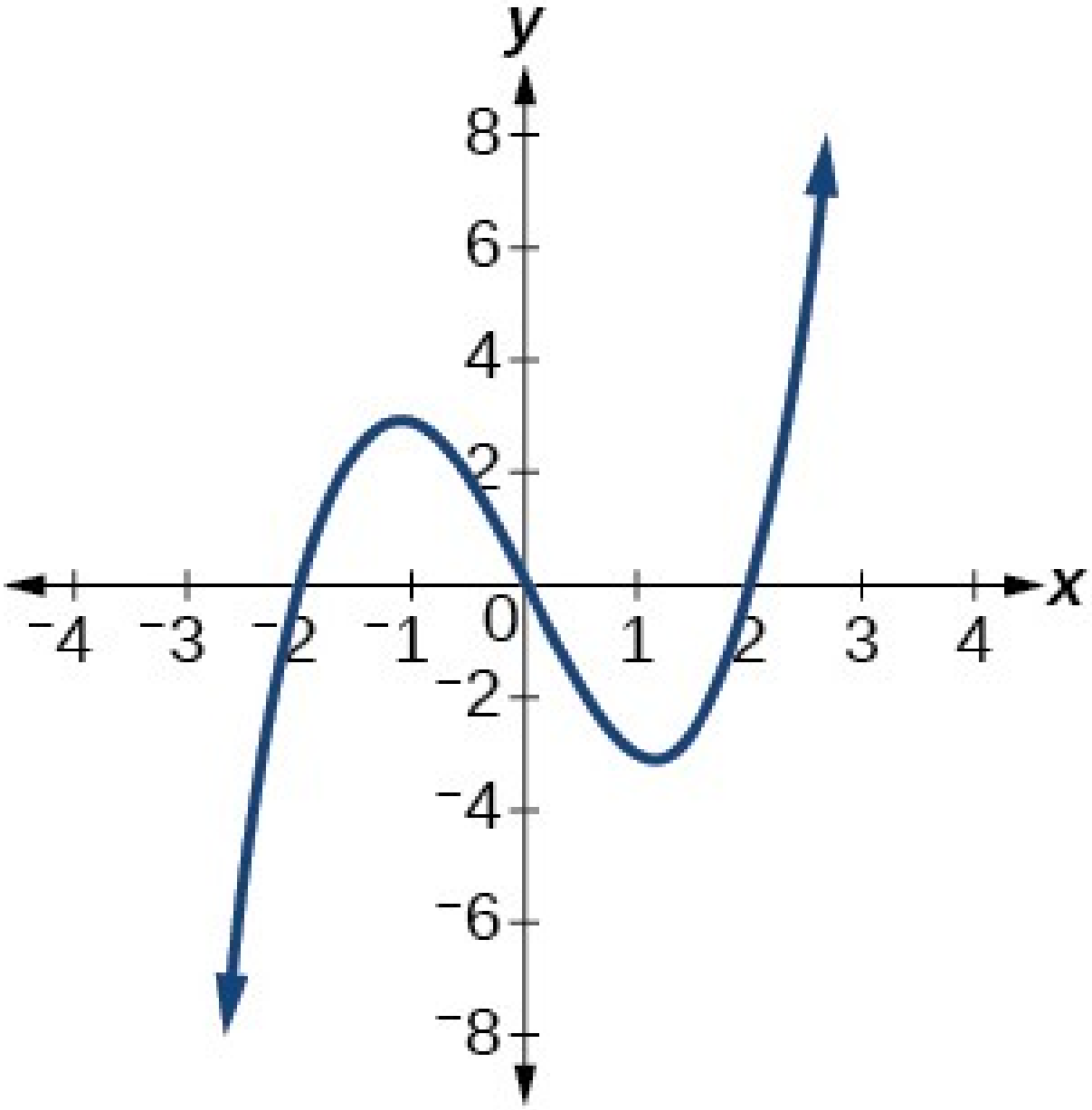
39. Skoðið venslin $3r+2t=18$.

1. ⓐ Skrifið venslin sem fallið $r=f(t)$.
2. ⓑ Reiknið gildi $f(-3)$.
3. ⓒ Leysið $f(t)=2$.

Gröf

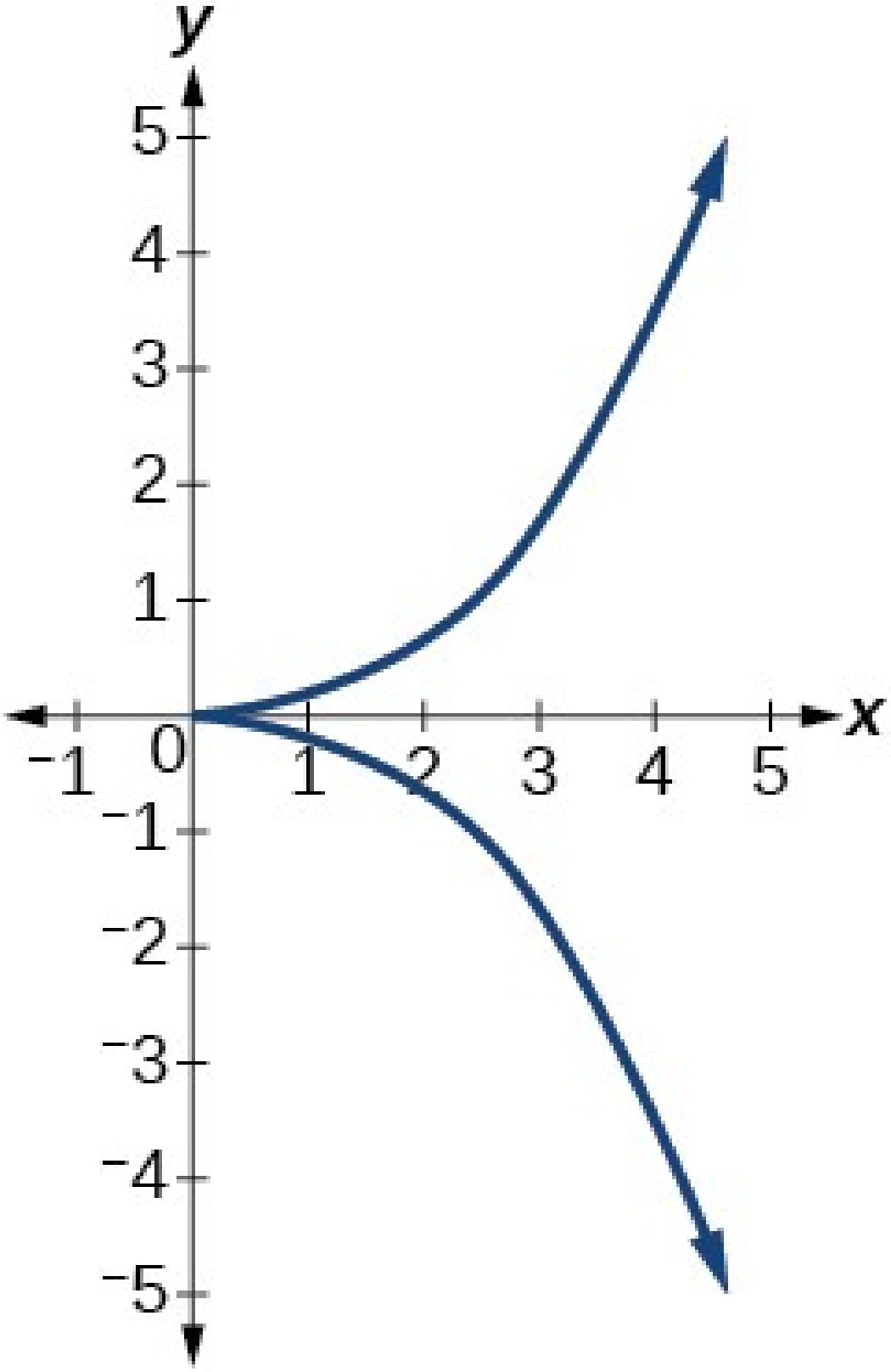
Notið lóðrétta línuprófið í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvaða gröf sýna vensl sem eru föll.

40.

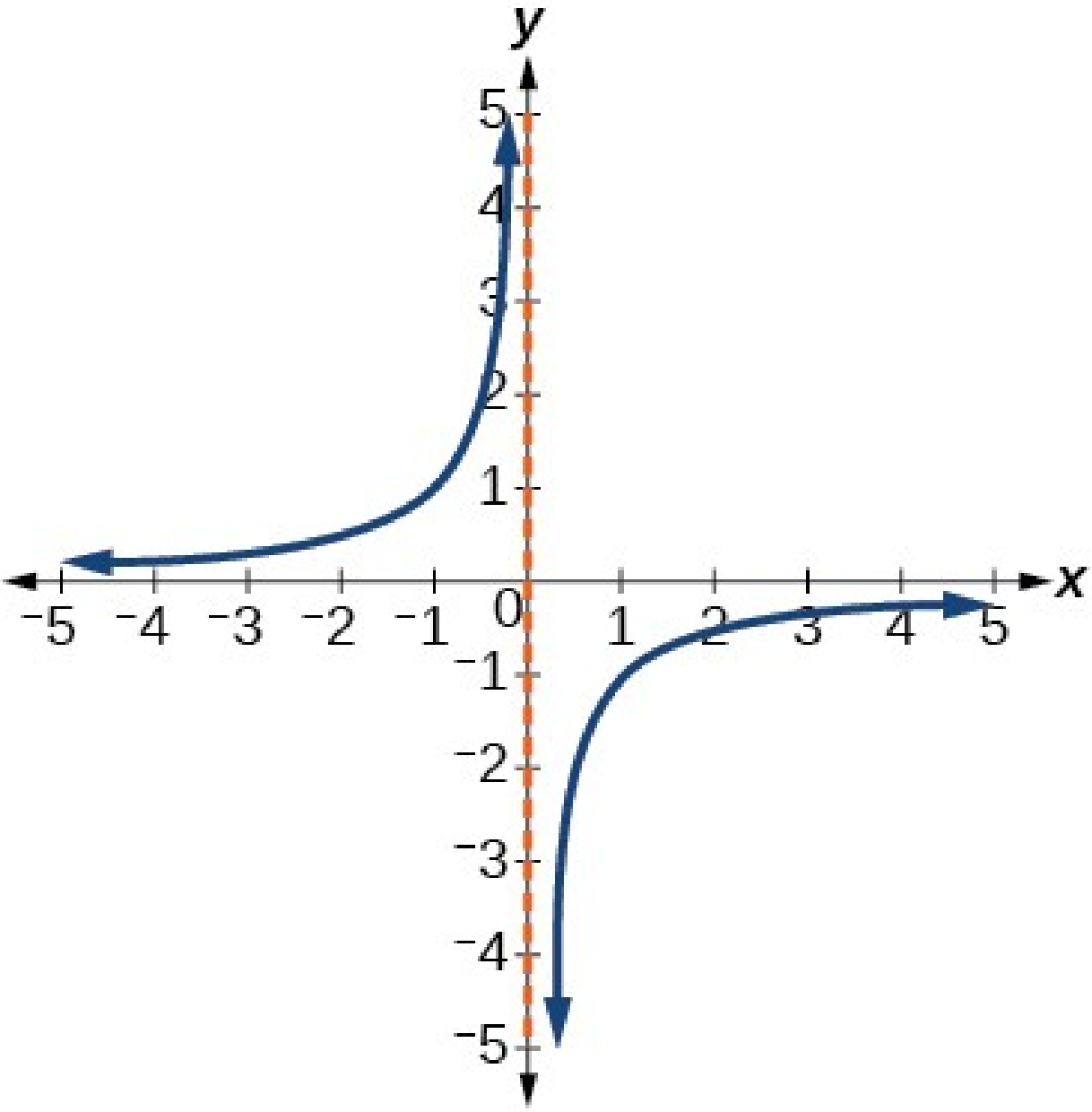


41.

1

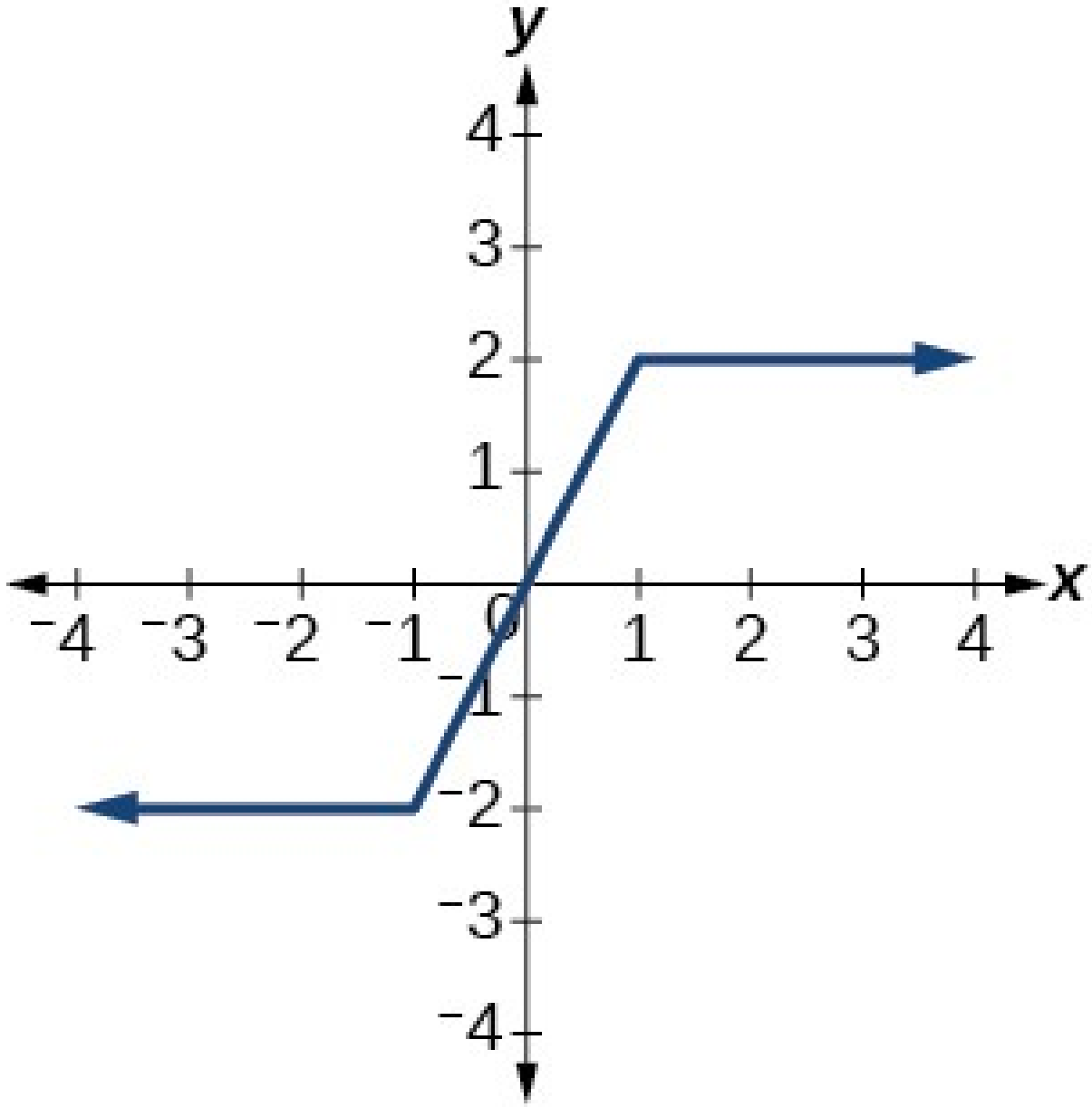


42.

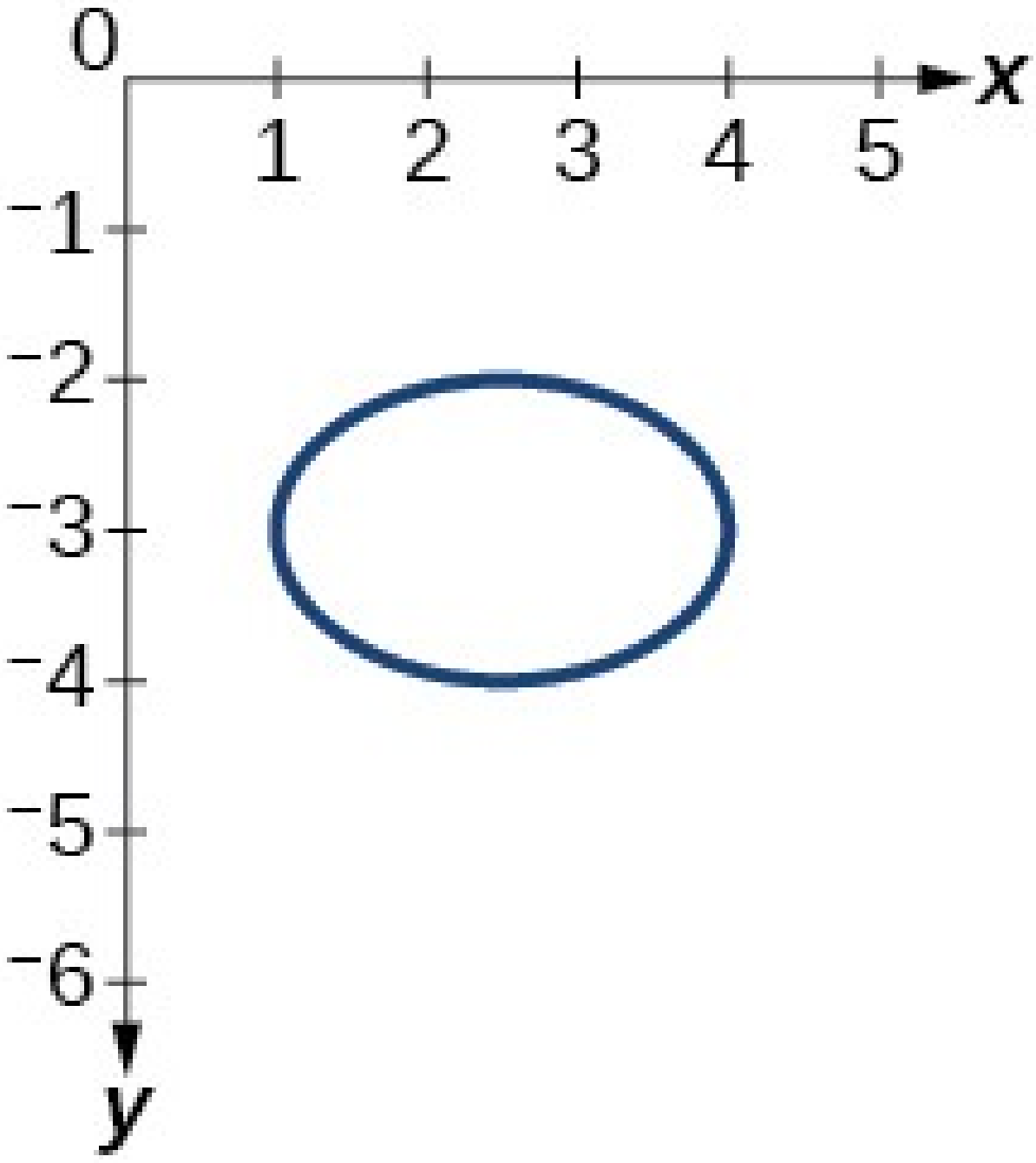


43.

1

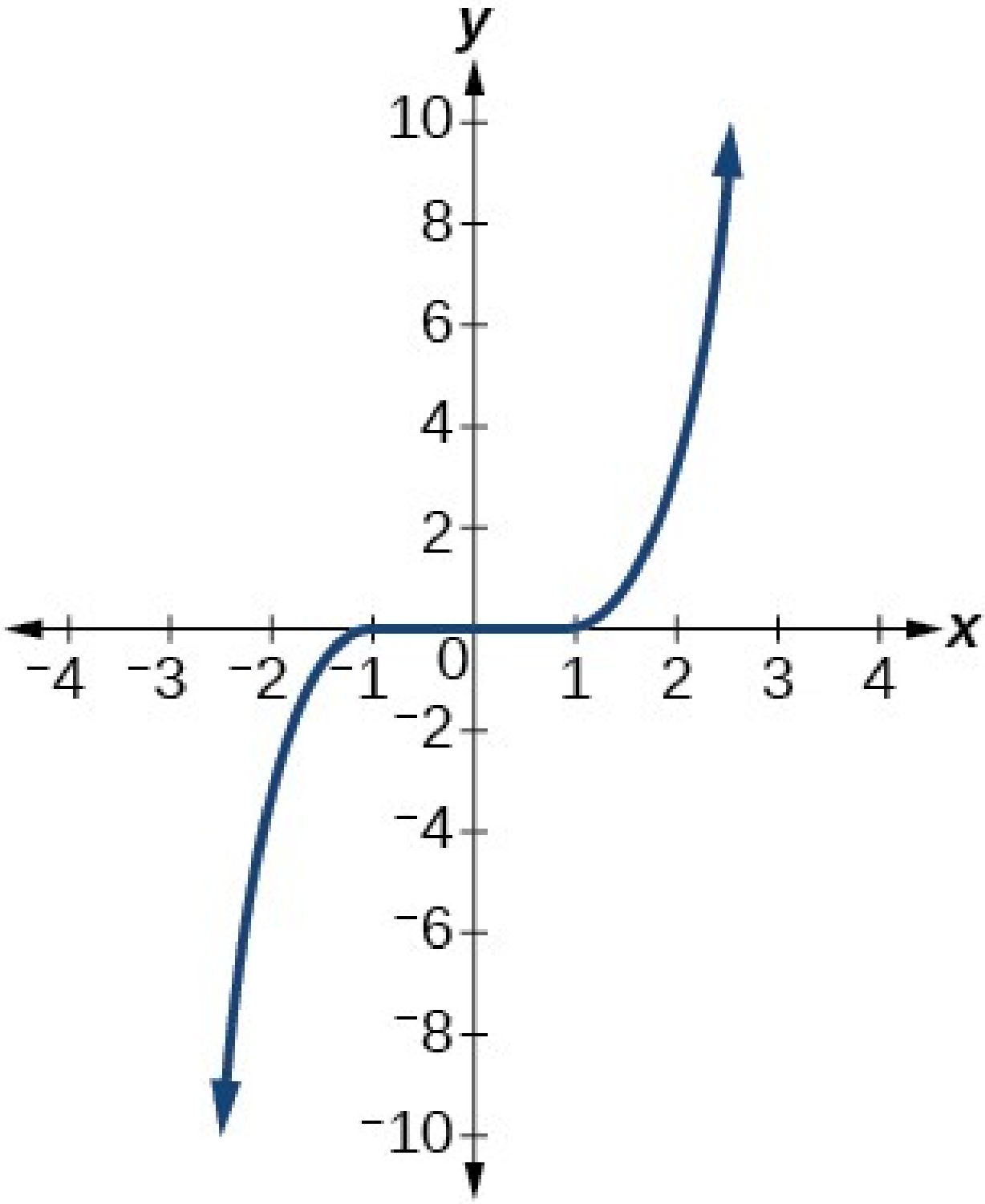


44.

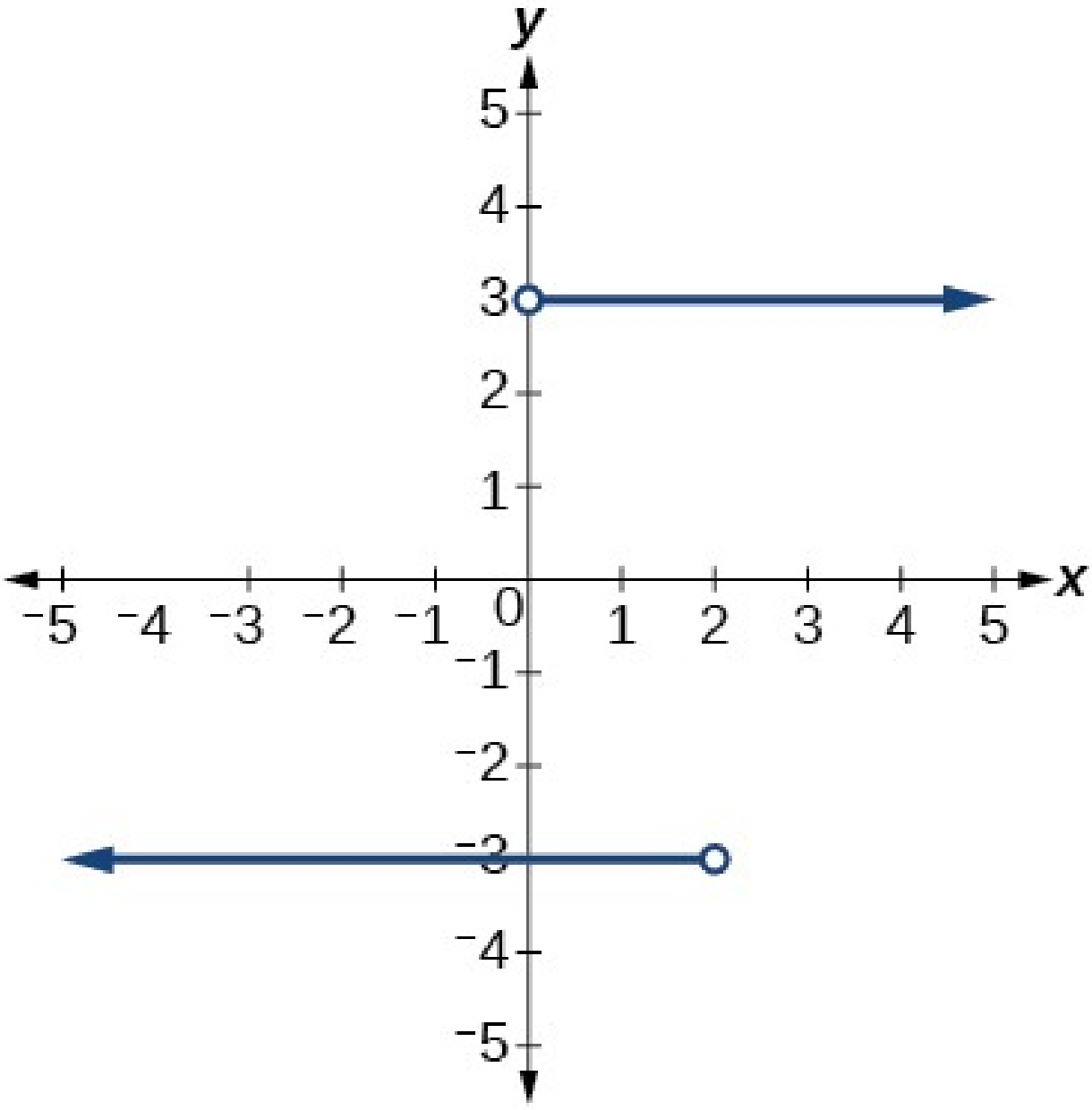


45.

1

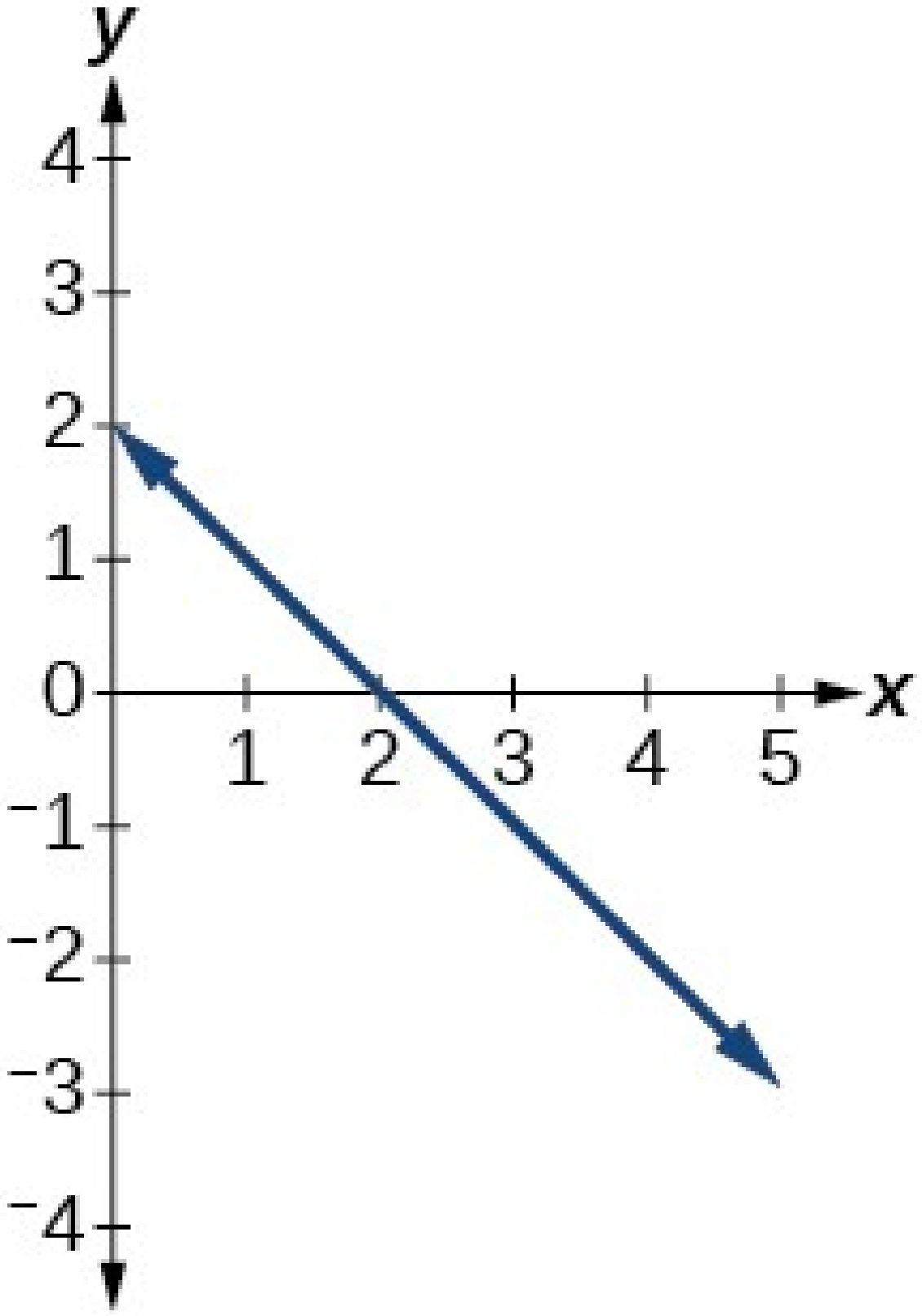


46.

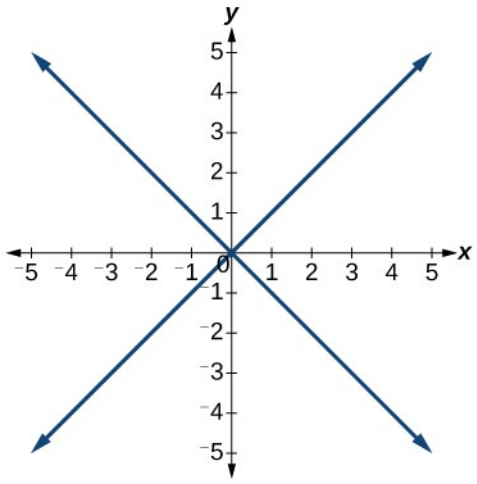


47.

1

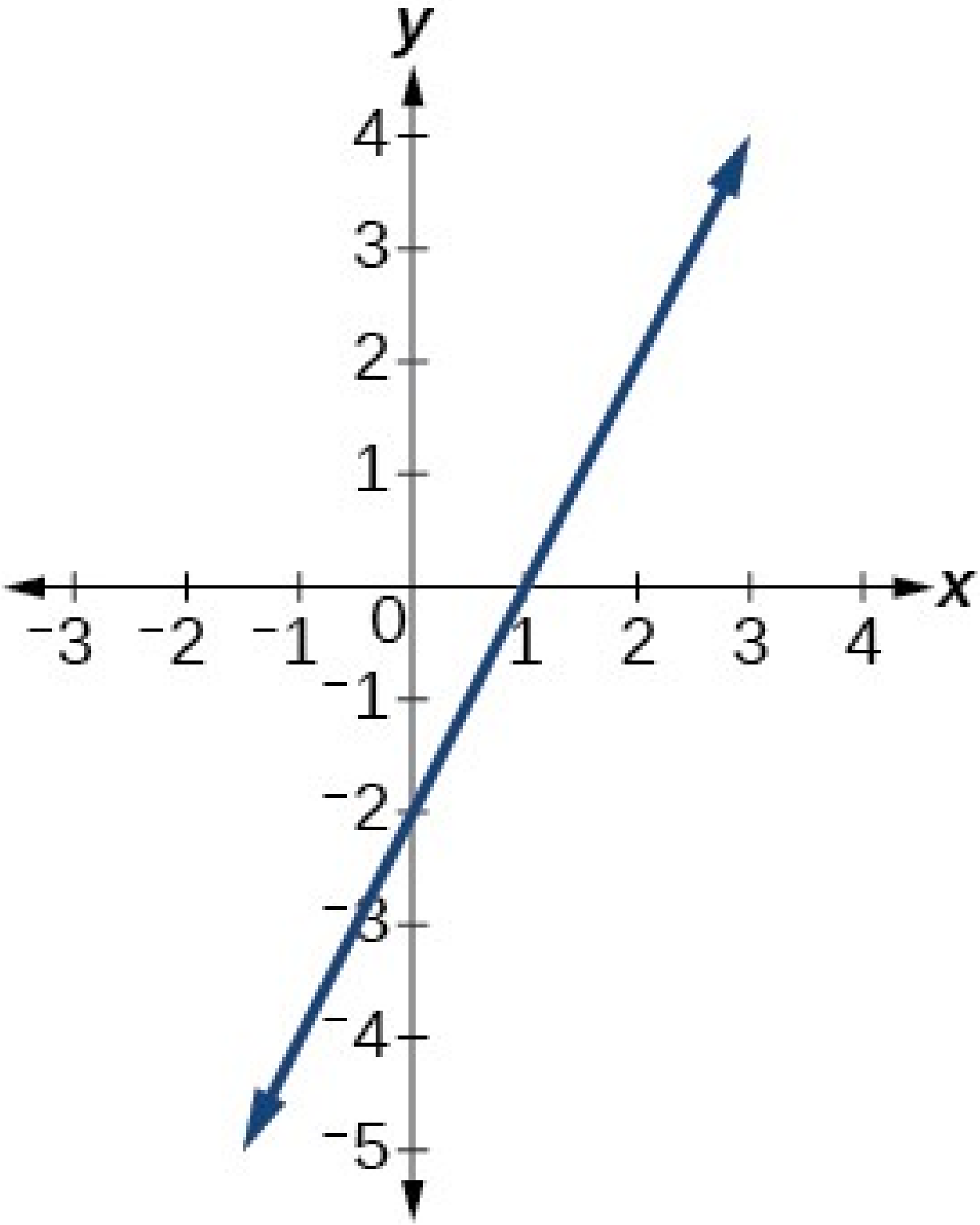


48.

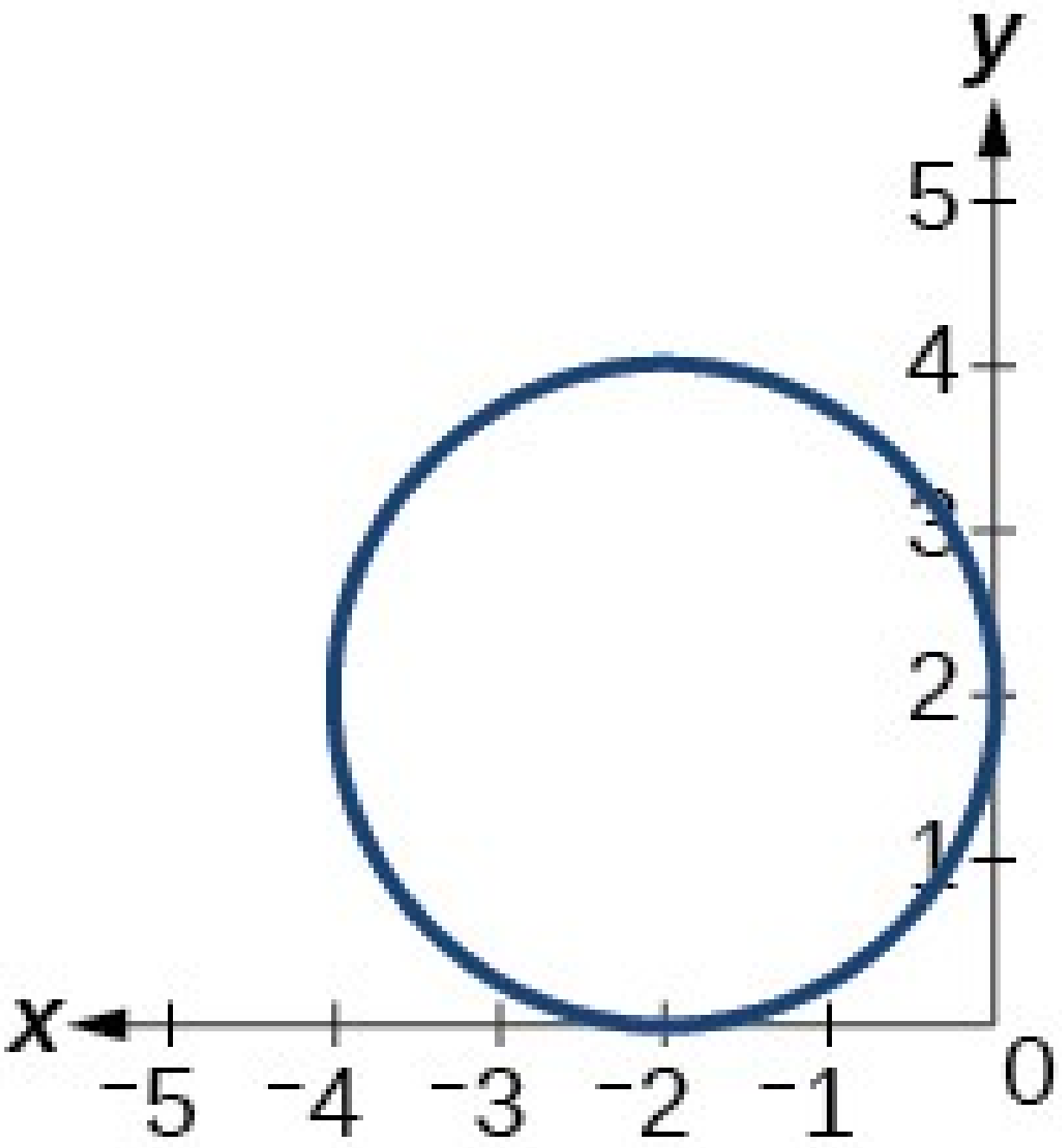


49.

1

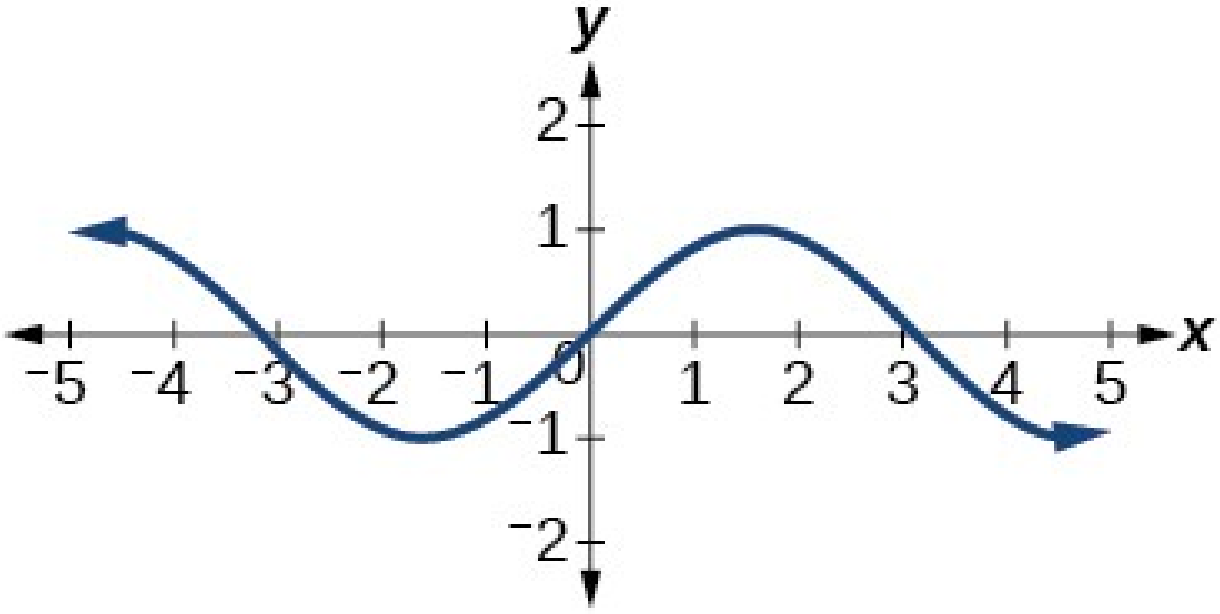


50.



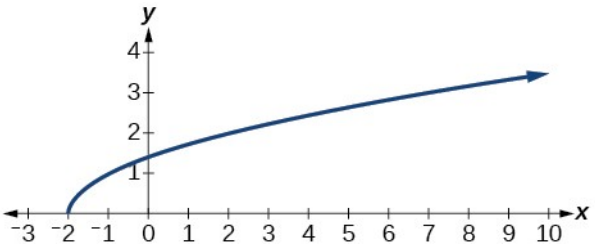
51.

1



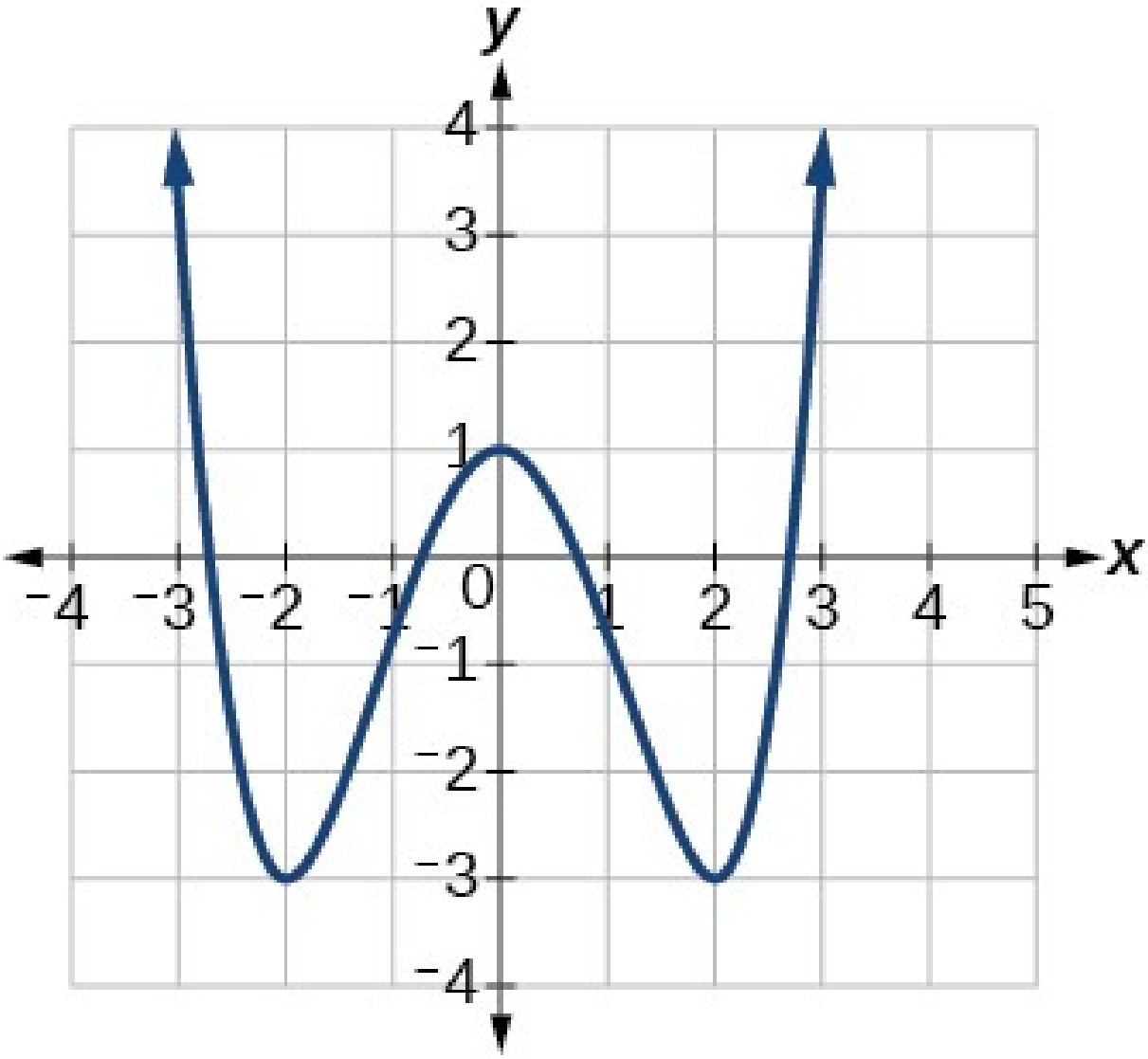
52. Gefið er eftirfarandi graf.

1. ⓐ Reiknið gildi $f(-1)$.
2. ⓑ Leysið jöfnuna $f(x)=3$.



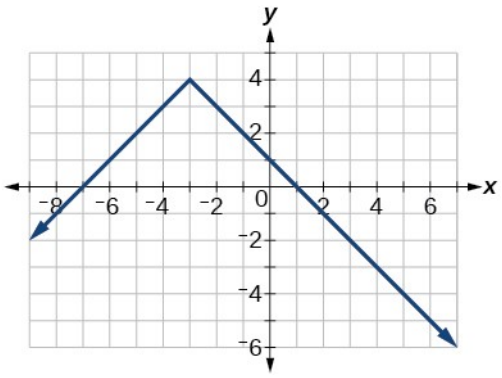
53. Gefið er eftirfarandi graf.

1. ⓐ Reiknið gildi $f(0)$.
2. ⓑ Leysið jöfnuna $f(x)=-3$.



54. Gefið er eftirfarandi graf.

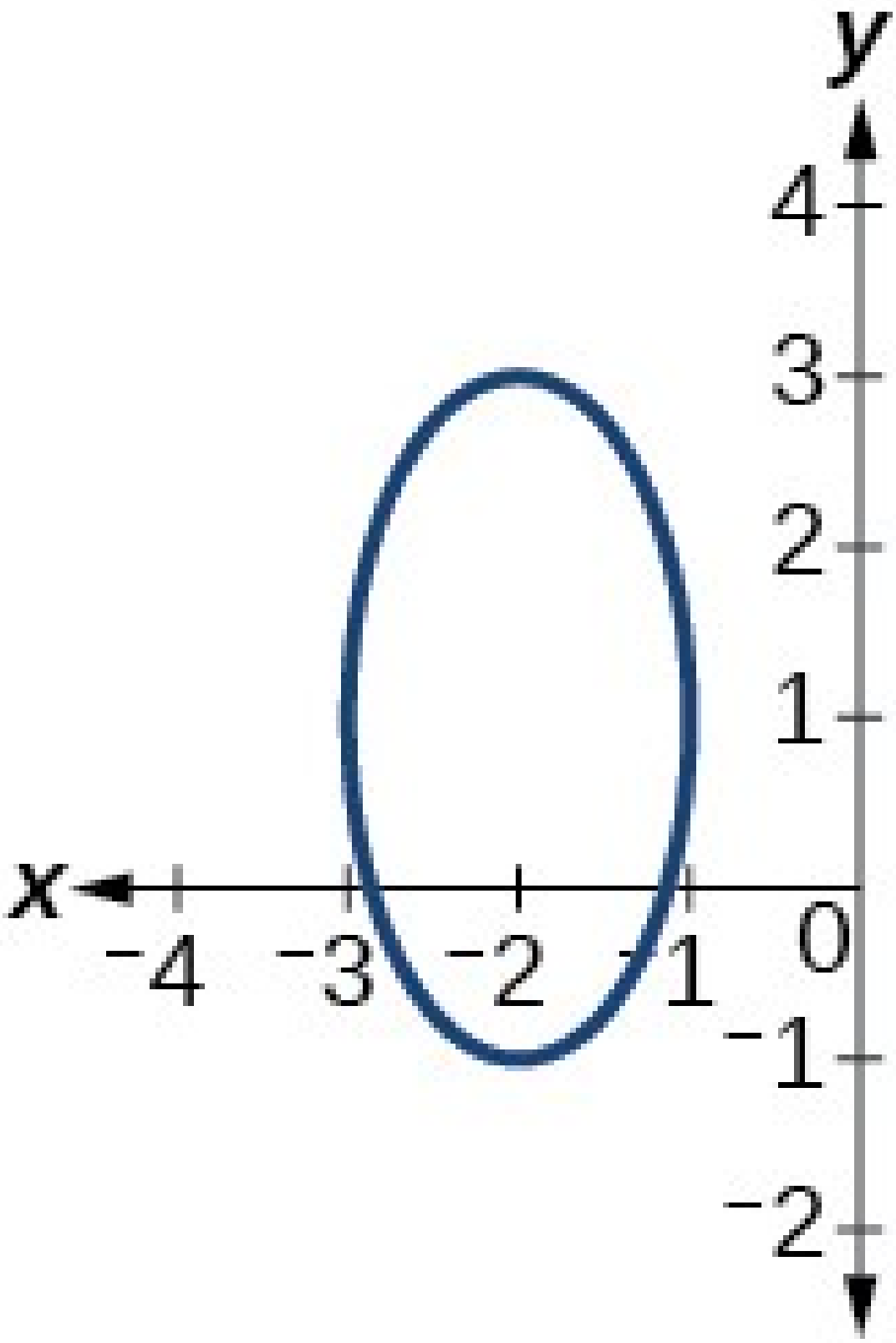
1. ⓐ Reiknið gildi $f(4)$.
2. ⓑ Leysið jöfnuna $f(x)=1$.



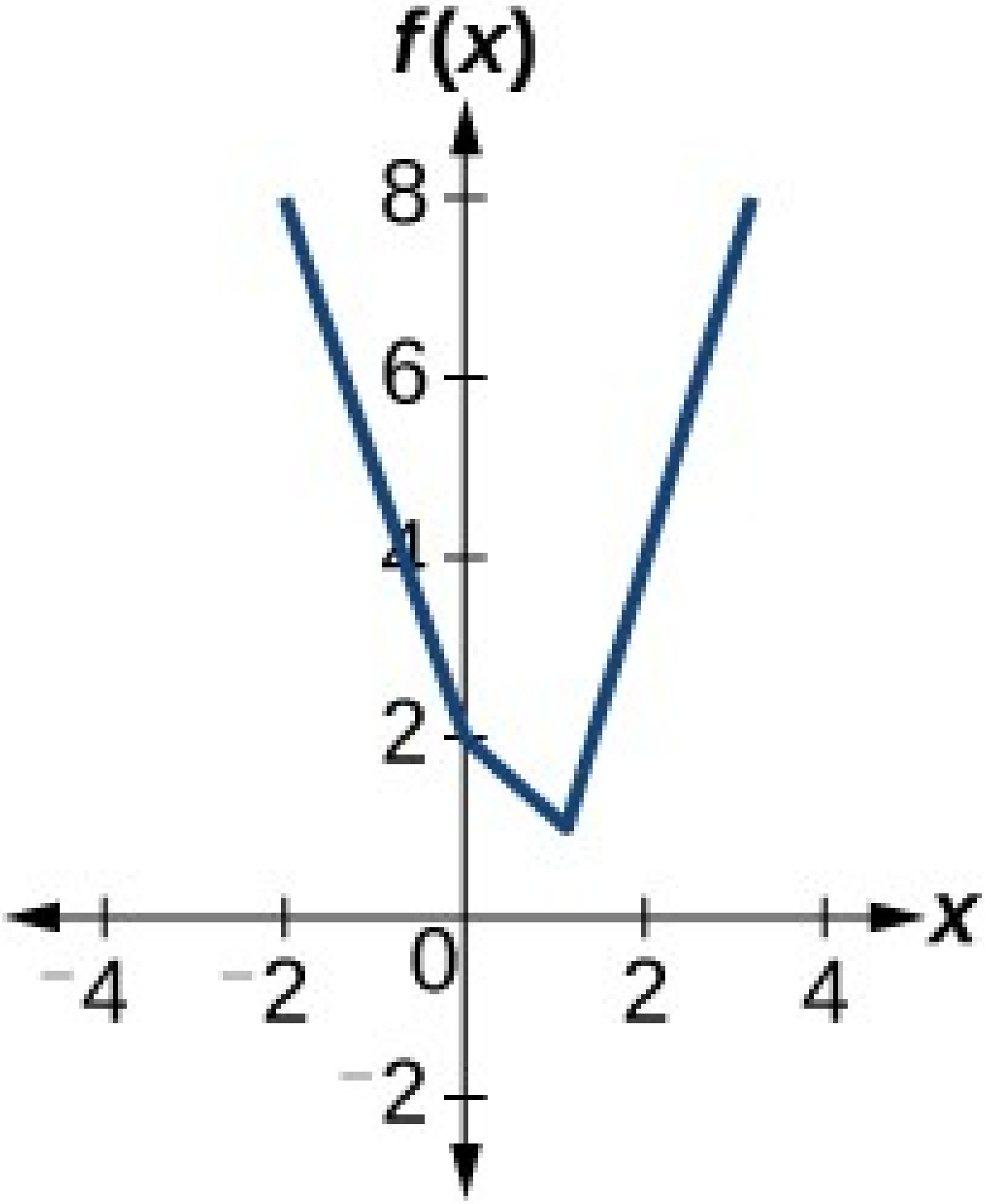
Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort gefna grafið lýsi eintæku falli.

55.

1

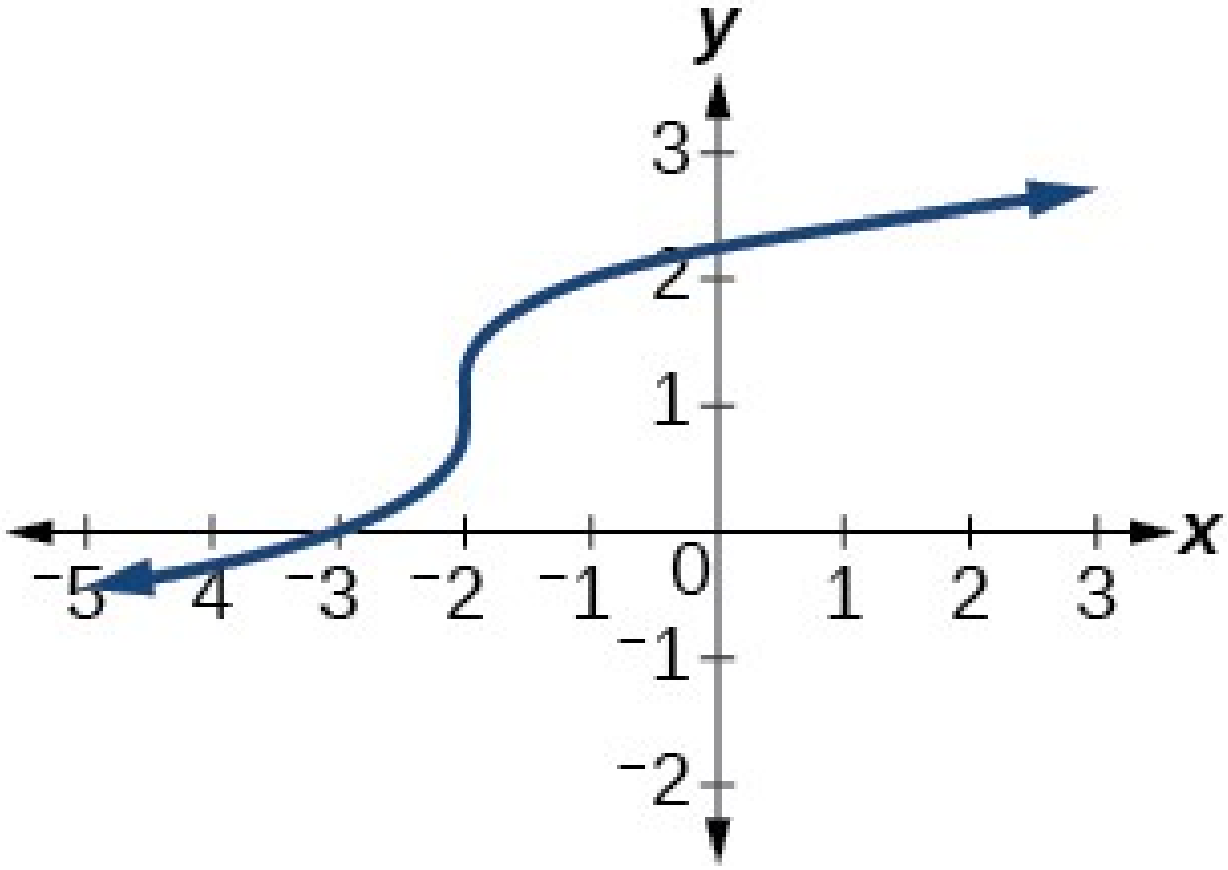


56.

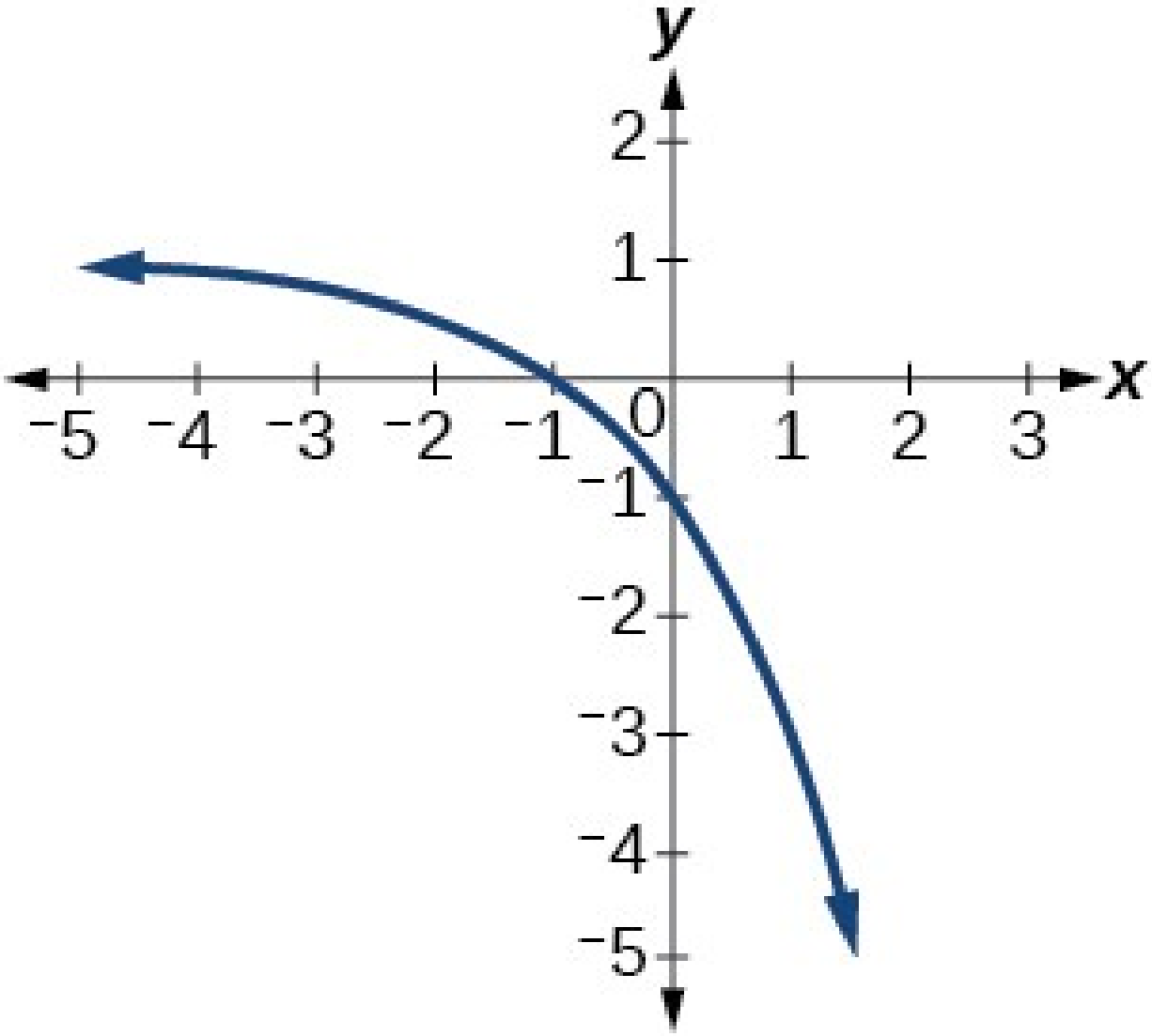


57.

1

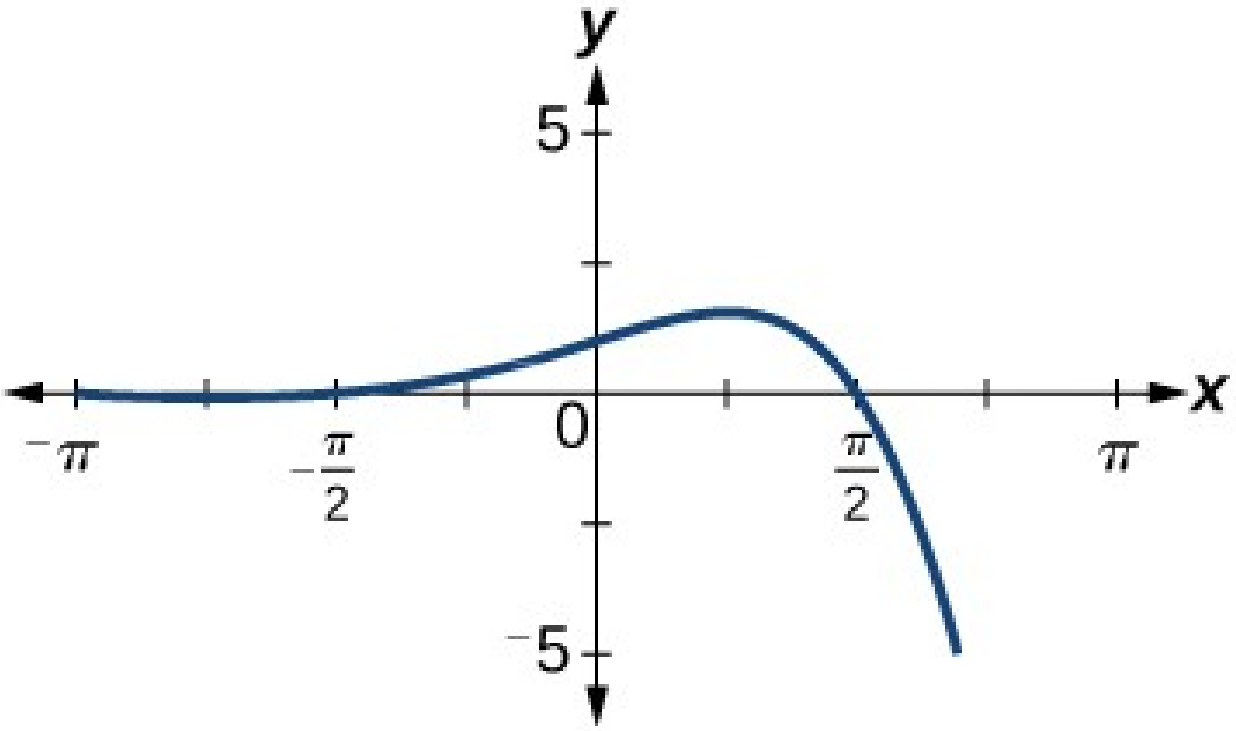


58.



1

59.



Töluleg verkefni

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort venslin lýsi falli.

60.

$$\{(-1,-1),(-2,-2),(-3,-3)\}$$

61.

$$\{(3,4),(4,5),(5,6)\}$$

62.

$$\{(2,5),(7,11),(15,8),(7,9)\}$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort venslin á töfluformi lýsi y sem falli af x.

63.

x	5	10	15
y	3	8	14

64.

x	5	10	15
y	3	8	8

65.

x	5	10	10
y	3	8	14

Notið fallið f í töflu 14 í eftirfarandi verkefnum.

Tafla 14

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	74	28	1	53	56	3	36	45	14	47

66. Reiknið $f(3)$.

67. Leysið $f(x)=1$.

Finnið eftirfarandi gildi fyrir fallið f: $f(-2), f(-1), f(0), f(1)$, og $f(2)$.

68.

$$f(x)=4-2x$$

69.

$$f(x)=8-3x$$

70.

$$f(x)=8x^2-7x+3$$

71.

$$f(x)=3+\sqrt{x+3}$$

72.

$$f(x)=\frac{x-2}{x+3}$$

73.

$$f(x)=3^x$$

Reiknið í eftirfarandi verkefnum gildi stæðanna fyrir gefnu föllin f, g, og h:

- $f(x)=3x-2$
- $g(x)=5-x^2$
- $h(x)=-2x^2+3x-1$

74.

$$3f(1)-4g(-2)$$

75.

$$f\left(\frac{7}{3}\right) - h(-2)$$

1

Tækni

Teiknið graf $y = x^2$ á gefna skilgreiningarmenginu í eftirfarandi verkefnum. Ákvarðið samsvarandi myndmengi. Sýnið hvert graf.

76.

$$[-0{,}1;\ \ 0{,}1]$$

77.

$$[-10,\ 10]$$

78.

$$[-100, 100]$$

Teiknið graf $y = x^3$ á gefna skilgreiningarmenginu í eftirfarandi verkefnum. Ákvarðið samsvarandi myndmengi. Sýnið hvert graf.

79.

$$[-0{,}1;\ \ 0{,}1]$$

80.

$$[-10,\ 10]$$

81.

$$[-100,\ 100]$$

Teiknið graf $y = \sqrt{x}$ á gefna skilgreiningarmenginu í eftirfarandi verkefnum. Ákvarðið samsvarandi myndmengi. Sýnið hvert graf.

82.

$$[0,\ 0{,}01]$$

83.

$$[0,\ 100]$$

84.

$$[0,\ 10.000]$$

Teiknið graf $y = \sqrt[3]{x}$ á gefna skilgreiningarmenginu í eftirfarandi verkefnum. Ákvarðið samsvarandi myndmengi. Sýnið hvert graf.

85.

$$[-0{,}001\,;0{,}001]$$

86.

$$[-1000\,,1000]$$

87.

$$[-1.000.000\,,1.000.000]$$

Raunhæf viðfangsefni

88. Magn sorps G, sem borg með íbúafjöldann p framleiðir, er gefið með $G=f(p)$. G er mælt í tonnum á viku og p í þúsundum íbúa.

1. ⓐ Í bænum Tola búa 40.000 manns og þar falla til 13 tonn af sorpi á viku. Setjið þessar upplýsingar fram með fallinu f.
2. ⓑ Útskýrið merkingu fullyrðingarinnar $f(5)=2$.

89. Fjöldi rúmyarda af mold D, sem þarf til að þekja garð með flatarmálið a ferfet, er gefinn með $D=g(a)$.

1. ⓐ Garður með flatarmálið 5000 ft² þarf 50 yd³ af mold. Setjið þessar upplýsingar fram með fallinu g.
2. ⓑ Útskýrið merkingu fullyrðingarinnar $g(100)=1$.

90. Látum $f(t)$ tákna fjölda anda á stöðuvatni t árum eftir 1990. Útskýrið merkingu hverrar fullyrðingar:

1. ⓐ $f(5)=30$
2. ⓑ $f(10)=40$

91. Látum $h(t)$ tákna hæð eldflaugar yfir jörðu í fetum t sekúndum eftir skot. Útskýrið merkingu hverrar fullyrðingar:

1. $h(1)=200$
2. $h(2)=350$

92. Sýnið að fallið $f(x)=3(x-5)^2+7$ sé ekki eintækt.

1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi

NÁMSMARKMIÐ

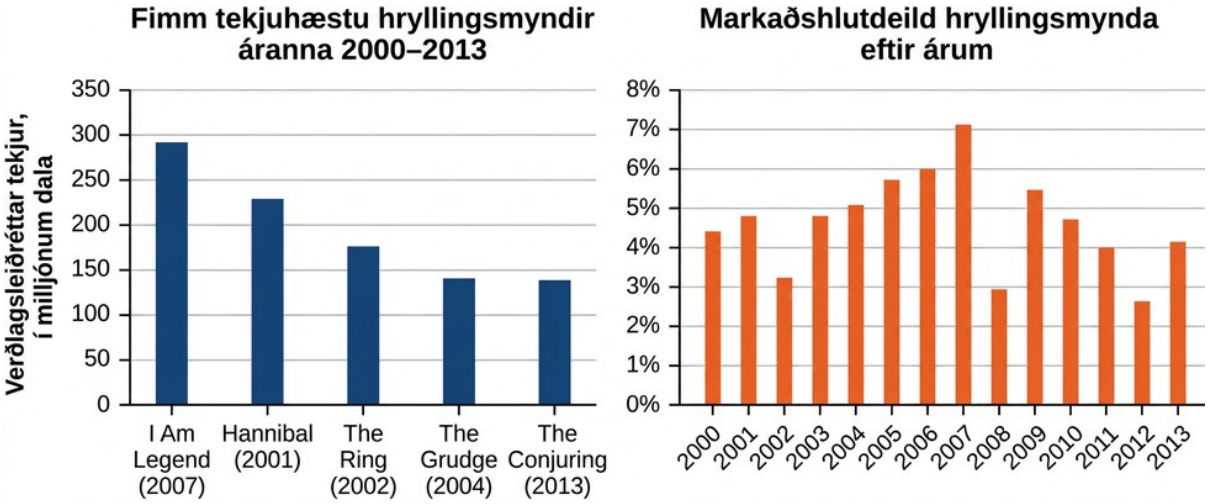
Í þessum hluta lærið þið að:

- Finna skilgreiningarmengi falls sem er gefið með jöfnu.

- Teikna gröf hlutskilgreindra falla.

1

Hryllings- og spennumyndir njóta mikilla vinsælda og skila oft mjög miklum hagnaði. Þegar dýrir leikarar, tökustaðir og tæknibrellur koma við sögu þurfa kvikmyndaverin þó að reiða sig á enn meiri aðsókn til að myndirnar skili árangri. Skoðum fimm stórar spennu- og hryllingsmyndir frá fyrstu árum 21. aldar — I Am Legend, Hannibal, The Ring, The Grudge og The Conjuring. Mynd 1 sýnir tekjur hverrar myndar í dölum þegar hún kom út, ásamt heildarmiðasölu hryllingsmynda eftir árum. Athugið að við getum notað gögnin til að skilgreina föll fyrir tekjur hverrar myndar eða heildarmiðasölu allra hryllingsmynda á hverju ári. Þegar við skilgreinum ólík föll út frá gögnunum getum við valið mismunandi óháðar og háðar breytur. Við getum líka greint gögnin og föllin til að ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi. Í þessum hluta kynnumst við aðferðum til að ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi slíkra falla.



Mynd 1 Byggt á gögnum frá www.the-numbers.com.3

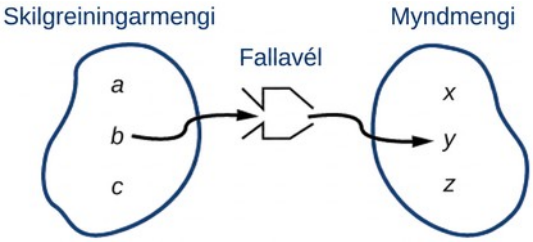
3

3The Numbers: Þar sem gögn og kvikmyndaviðskipti mætast. „Tekjusaga hryllingsmynda.“ http://www.the-numbers.com/market/genre/Horror. Sótt 24.3.2014.

Að finna skilgreiningarmengi falls sem er gefið með jöfnu

Í hlutanum „Föll og fallatáknun“ kynntumst við hugtökunum skilgreiningarmengi og myndmengi. Í þessum hluta æfum við okkur í að ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi tiltekinna falla. Þá þarf að hafa í huga hvað er raunhæft eða skynsamlegt í dæmum úr raunveruleikanum, svo sem miðasölu og ártöl í dæminu um hryllingsmyndir hér að framan. Einnig þarf að huga að því hvað er stærðfræðilega leyfilegt. Ef skilgreiningarmengi og myndmengi eru mengi rauntalna getum við til dæmis ekki tekið með inntaksgildi sem kallar á rót af jöfnu stigi úr neikvæðri tölu. Ef fall er gefið með formúlu getum við heldur ekki haft inntaksgildi í skilgreiningarmenginu sem leiðir til þess að deilt sé með 0.

Við getum hugsað okkur skilgreiningarmengið sem „geymslusvæði“ fyrir „hráefni“ sem fer í „fallavél“ og myndmengið sem annað „geymslusvæði“ fyrir afurðir vélarinnar. Sjá mynd 2.



Mynd 2

Við getum ritað skilgreiningarmengi og myndmengi með biltáknum, þar sem gildi innan sviga lýsa talnamengi. Hornklofi [táknar að endapunkturinn sé meðtalinn en svigi (táknar að endapunkturinn sé ekki meðtalinn eða að bilið sé ótakmarkað. Ef einhver hefur til dæmis 100 dali til að eyða þarf að lýsa bilinu sem inniheldur tölur stærri en 0 og minni en eða jafnar 100 og rita $(0, 100]$. Nánar verður fjallað um biltákn síðar.

Snúum okkur nú að því að finna skilgreiningarmengi falls þegar jafna þess er gefin. Oft þarf að hafa þrennt í huga. Í fyrsta lagi, ef formúla fallsins hefur engan nefnara eða inniheldur rót af oddnu stigi, skal kanna hvort skilgreiningarmengið geti verið mengi allra rauntalna. Í öðru lagi, ef jafna fallsins hefur nefnara, skal útiloka úr skilgreiningarmenginu þau gildi sem gera nefnarann jafnan núlli. Í þriðja lagi, ef rót af jöfnu stigi kemur fyrir, skal kanna hvort útiloka þurfi gildi sem gera rótarstofninn neikvæðan.

Áður en við byrjum skulum við rifja upp venjur um biltákn:

- Minna mark bilsins er ritað á undan.
- Stærra mark bilsins er ritað á eftir, aðgreint með kommu.
- Svigar, (eða), tákna að endapunktur sé ekki meðtalinn, það er að hann sé undanskilinn.
- Hornklofar, [eða], tákna að endapunktur sé meðtalinn.

Sjá mynd 3 þar sem notkun biltákna er tekin saman.

1

Ójafna	Biltáknun	Mynd á talnalínu	Lýsing
$x > a$	(a, ∞)		x er stærra en a
$x < a$	$(-\infty, a)$		x er minna en a
$x \geq a$	$[a, \infty)$		x er stærra en eða jafnt og a
$x \leq a$	$(-\infty, a]$		x er minna en eða jafnt og a
$a < x < b$	(a, b)		x er á milli a og b, en hvorugur endapunkturinn er meðtalinn
$a \leq x < b$	$[a, b)$		x er á milli a og b og a er meðtalið
$a < x \leq b$	$(a, b]$		x er á milli a og b og b er meðtalið
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$		x er á milli a og b og bæði a og b eru meðtalin

Mynd 3

DÆMI 1

Að finna skilgreiningarmengi falls sem mengi raðtvennda

Finnið skilgreiningarmengi eftirfarandi falls: $\{(2,10),(3,10),(4,20),(5,30),(6,40)\}$.

Lausn

Finnið fyrst inntaksgildin. Inntaksgildið er fyrra hnitið í raðtvennd. Engar takmarkanir eru fyrir hendi því raðtvenndirnar eru einfaldlega taldar upp. Skilgreiningarmengið er mengi fyrri hnita raðtvenndanna.

$$\{2,3,4,5,6\}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Finnið skilgreiningarmengi fallsins:

$$\{(-5,4),(0,0),(5,-4),(10,-8),(15,-12)\}$$

AÐFERÐ

Finna skilgreiningarmengi falls sem er gefið með jöfnu.

1. Finnið inntaksgildin.
2. Finnið allar takmarkanir á inntakinu og útilokið óleyfileg gildi úr skilgreiningarmenginu.
3. Ritið skilgreiningarmengið með biltáknum, ef unnt er.

DÆMI 2

Að finna skilgreiningarmengi falls

Finnið skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=x^2-1$.

Lausn

Inntaksgildið, sem breytan x táknar í jöfnunni, er hafið í annað veldi og síðan er einn dreginn frá niðurstöðunni. Hægt er að hefja hvaða rauntölu sem er í annað veldi og draga síðan einn frá, svo engar takmarkanir eru á skilgreiningarmengi fallsins. Skilgreiningarmengið er mengi rauntalna.

Með biltáknum er skilgreiningarmengi f ritað $(-\infty,\infty)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið skilgreiningarmengi fallsins: $f(x)=5-x+x^3$.

AÐFERÐ

Finna skilgreiningarmengi falls sem er gefið með jöfnu sem inniheldur brot.

1. Finnið inntaksgildin.
2. Finnið allar takmarkanir á inntakinu. Ef nefnari kemur fyrir í formúlu fallsins skal setja nefnarann jafnan núlli og leysa með tilliti til x. Ef formúlan inniheldur rót af jöfnu stigi skal setja skilyrðið að rótarstofninn sé stærri en eða jafn 0 og leysa síðan ójöfnuna.
3. Ritið skilgreiningarmengið með biltáknum og gætið þess að útiloka öll óleyfileg gildi.

DÆMI 3

Að finna skilgreiningarmengi falls með nefnara

Finnið skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\frac{x+1}{2-x}$.

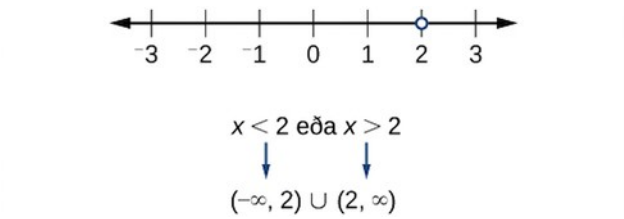
Lausn

1

Þegar nefnari kemur fyrir tökum við aðeins með þau inntaksgildi sem gera nefnarann ekki jafnan núlli. Við setjum því nefnarann jafnan 0 og leysum með tilliti til x.

$$\begin{aligned} 2-x&=0\\ -x&=-2\\ x&=2 \end{aligned}$$

Nú útilokum við 2 úr skilgreiningarmenginu. Lausnamengið inniheldur allar rauntölur sem uppfylla $x<2$ eða $x>2$. Við getum notað sammengistáknið U, til að sameina mengin tvö. Með biltáknum ritum við lausnina $(-\infty,2)U(2,\infty)$.



Mynd 4 Talnalína með opnum endapunkti við 2.

Með biltáknum er skilgreiningarmengi f ritað $(-\infty,2)U(2,\infty)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Finnið skilgreiningarmengi fallsins: $f(x)=\frac{1+4x}{2x-1}$.

AÐFERÐ

Finna skilgreiningarmengi falls sem er gefið með jöfnu sem inniheldur rót af jöfnu stigi.

1. Finnið inntaksgildin.
2. Þar sem rótin er af jöfnu stigi skal útiloka allar rauntölur sem gera rótarstofninn neikvæðan. Setjið skilyrðið að rótarstofninn sé stærri en eða jafn núlli og leysið með tilliti til x.
3. Lausnin eða lausnirnar mynda skilgreiningarmengi fallsins. Ritið svarið með biltáknum, ef unnt er.

DÆMI 4

Að finna skilgreiningarmengi falls með rót af jöfnu stigi

Finnið skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\sqrt{7-x}$.

Lausn

Þegar formúlan inniheldur rót af jöfnu stigi útilokum við allar rauntölur sem gera rótarstofninn neikvæðan.

Setjum skilyrðið að rótarstofninn sé stærri en eða jafn núlli og leysum með tilliti til x.

$$\begin{aligned} 7 - x &\geq 0 \\ -x &\geq -7 \\ x &\leq 7 \end{aligned}$$

Nú útilokum við allar tölur stærri en 7 úr skilgreiningarmenginu. Lausnamengið inniheldur allar rauntölur sem eru minni en eða jafnar 7, eða $(-\infty, 7]$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Finnið skilgreiningarmengi fallsins $f(x) = \sqrt{5+2x}$.

SPURT OG SVARAÐ

Geta skilgreiningarmengi og myndmengi falls verið alveg sundurlæg?

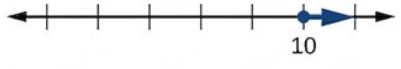
Já. Skilgreiningarmengi fallsins $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ er til dæmis mengi allra jákvæðra rauntalna en myndmengi þess er mengi allra neikvæðra rauntalna. Enn skýrara dæmi fæst þegar inntaks- og úttaksgildi falls tilheyra algerlega ólíkum flokkum, til dæmis þegar nöfn vikudaga eru inntaksgildi og tölur úttaksgildi eins og í mætingartöflu. Þá eiga skilgreiningarmengi og myndmengi engin stök sameiginleg.

Táknun skilgreiningarmengis og myndmengis

Í fyrri dæmum notuðum við ójöfnur og upptalningar til að lýsa skilgreiningarmengi falla. Við getum einnig notað ójöfnur eða aðrar fullyrðingar sem skilgreina mengi gilda eða gagna til að lýsa hegðun breytu með skilyrðisrithætti mengja. Til dæmis lýsir $\{x \mid 10 \leq x < 30\}$ hegðun x með skilyrðisrithætti. Slaufusvigarnir $\{\}$ eru lesnir „mengi allra“ og lóðrétta strikið $\mid$ er lesið „þannig að“. Við lesum því $\{x \mid 10 \leq x < 30\}$ sem „mengi allra x-gilda þannig að 10 er minna en eða jafnt x, og x er minna en 30“.

Mynd 5 ber saman ójöfnutáknun, skilyrðisrithátt mengja og biltákn.

1

	Ójöfnutáknun	Skilyrðisritháttur mengja	Biltákn
	$5 < h \leq 10$	$\{h \mid 5 < h \leq 10\}$	$(5, 10]$
	$5 \leq h < 10$	$\{h \mid 5 \leq h < 10\}$	$[5, 10)$
	$5 < h < 10$	$\{h \mid 5 < h < 10\}$	$(5, 10)$
	$h < 10$	$\{h \mid h < 10\}$	$(-\infty, 10)$
	$h \geq 10$	$\{h \mid h \geq 10\}$	$[10, \infty)$
	Allar rauntölur	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$

Mynd 5

Til að sameina tvö bil með ójöfnum eða skilyrðisrithætti mengja notum við orðið „eða“. Eins og í fyrri dæmum notum við sammengistáknið U, til að sameina tvö aðskilin bil. Sammengi mengjanna $\{2,3,5\}$ og $\{4,6\}$ er til dæmis mengið $\{2,3,4,5,6\}$. Það inniheldur öll stök sem tilheyra öðru upphafsmenginu eða hinu, eða báðum. Í endanlegum mengjum sem þessum þarf ekki að telja stökin upp í vaxandi töluröð. Ef upphafsmengin eiga einhver stök sameiginleg eru þau aðeins skráð einu sinni í sammenginu. Annað dæmi um sammengi rauntalnabila er

$$\{x \mid |x| \geq 3\} = (-\infty, -3] U [3, \infty)$$

SKILYRÐISRITHÁTTUR MENGJA OG BILTÁKN

Skilyrðisritháttur mengja er aðferð til að tilgreina mengi staka sem uppfylla ákveðið skilyrði. Hann er á forminu $\{x \mid \text{fullyrðing um } x\}$ sem er lesið „mengi allra x þannig að fullyrðingin um x sé sönn“. Til dæmis

$$\{x \mid 4 < x \leq 12\}$$

Biltákn lýsa mengjum sem innihalda allar rauntölur milli neðri marka, sem geta verið meðtalin eða ekki, og efri marka, sem einnig geta verið meðtalin eða ekki. Endapunktarnir

eru ritaðir innan hornklofa eða sviga. Hornklofi táknar að endapunkturinn sé meðtalinn en svigi að hann sé ekki meðtalinn. Til dæmis

$$\left(4, 12\right]$$

AÐFERÐ

Lýsa mengi gilda á talnalínu með biltáknum.

1. Finnið bilin sem eiga að vera með í menginu með því að athuga hvar breiða línan liggur yfir rauntalnalínunni.
2. Við vinstri enda hvers bils skal nota [ef endagildið er með í menginu (fylltur punktur) en (ef endagildið er ekki með (opinn punktur).
3. Við hægri enda hvers bils skal nota] ef endagildið er með í menginu (fylltur punktur) en) ef endagildið er ekki með (opinn punktur).
4. Notið sammengistáknið U til að sameina öll bilin í eitt mengi.

DÆMI 5

Lýsing mengja á rauntalnalínu

Lýsið bilunum sem sýnd eru á mynd 6 með ójöfnum, skilyrðisrithætti mengja og biltáknum.



Mynd 6 Tvö bil sýnd á talnalínu.

Lausn

Gildunum x, sem eru í bilunum á myndinni, má lýsa þannig: „ x er rauntala sem er stærri en eða jöfn 1 og minni en eða jöfn 3 eða rauntala sem er stærri en 5.“

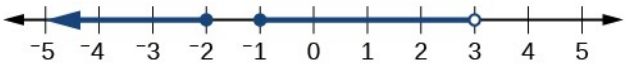
Ójafna	$1 \le x \le 3$ eða $x > 5$
Skilyrðisritháttur mengja	$\left\{x \middle\| 1 \le x \le 3 \text{ eða } x > 5\right\}$
Biltákn	$\left[1, 3\right] U \left(5, \infty\right)$

Munið að hornklofi í biltáknum merkir að endapunkturinn sé með í menginu en svigi að hann sé ekki með.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Lýsið menginu sem teiknað er á mynd 7 með

1. ⓐ orðum
2. ⓑ skilyrðisrithætti mengja
3. ⓒ biltáknum

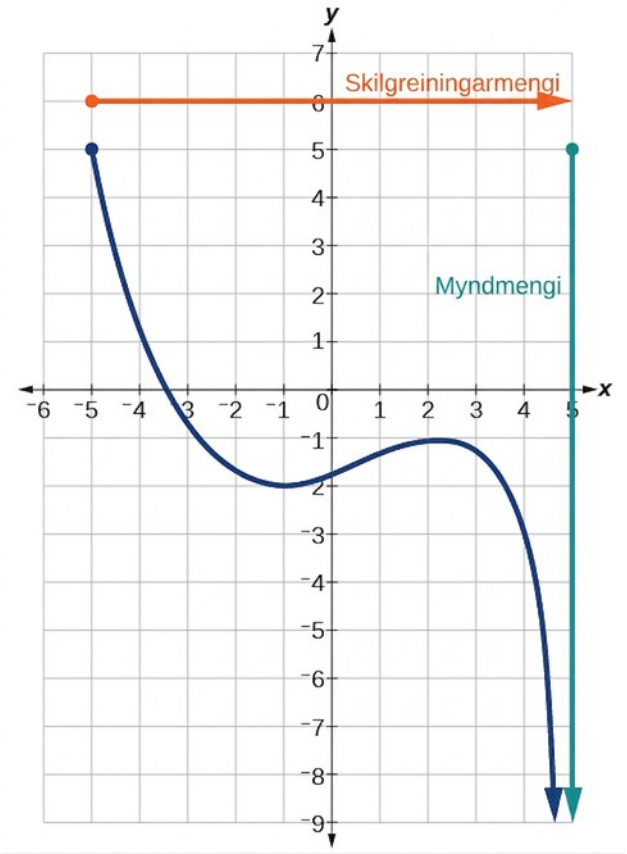


1

Mynd 7 Tvö bil með opnum og lokuðum endapunktum sýnd á talnalínu.

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi af grafi

Önnur leið til að ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi falla er að nota gröf. Skilgreiningarmengið er mengi mögulegra inntaksgilda og skilgreiningarmengi grafs er því mengi allra inntaksgildanna sem sýnd eru á x-ásnum. Myndmengið er mengi mögulegra úttaksgilda sem sýnd eru á y-ásnum. Hafið í huga að ef grafið heldur áfram út fyrir þann hluta sem sést geta skilgreiningarmengið og myndmengið náð út fyrir sýnilegu gildin. Sjá mynd 8.



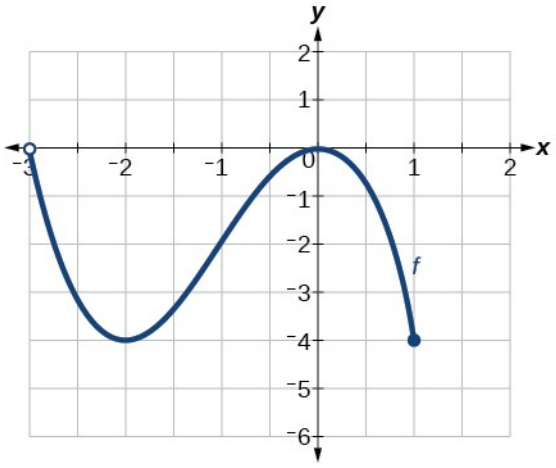
Mynd 8

Við sjáum að grafið nær lárétt frá -5 og ótakmarkað til hægri, svo skilgreiningarmengið er $[-5,\infty)$. Lóðrétt nær grafið yfir öll gildi myndmengisins sem eru 5 eða minni, svo myndmengið er $(-\infty,5]$. Athugið að skilgreiningarmengi og myndmengi eru alltaf rituð frá minni gildum til stærri: frá vinstri til hægri fyrir skilgreiningarmengi og neðan frá og upp fyrir myndmengi.

DÆMI 6

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi af grafi

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins f sem grafið á mynd 9 sýnir.

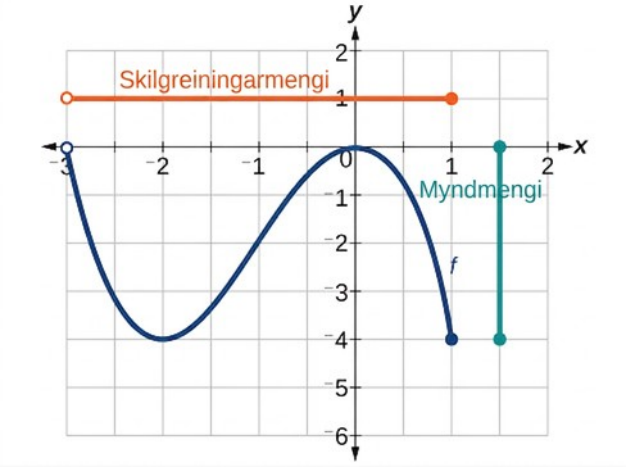


Mynd 9 Graf falls með opnum og lokuðum endapunkti.

Lausn

Við sjáum að grafið nær lárétt frá -3 til 1, svo skilgreiningarmengi f er $(-3, 1]$.

Grafið nær lóðrétt frá 0 niður í -4, svo myndmengið er $[-4, 0]$. Sjá mynd 10.



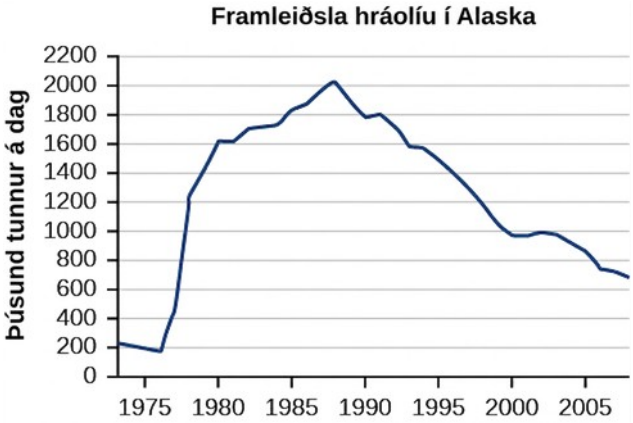
Mynd 10 Skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins auðkennd á ásunum.

DÆMI 7

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi af grafi olíuframleiðslu

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins f sem grafið á mynd 11 sýnir.

1



Mynd 11 (heimild: breytt verk frá Orkuupplýsingastofnun Bandaríkjanna)4

4

4http://www.eia.gov/dnav/pet/hist/LeafHandler.ashx?n=PET&s=MCRFPAK2&f=A.

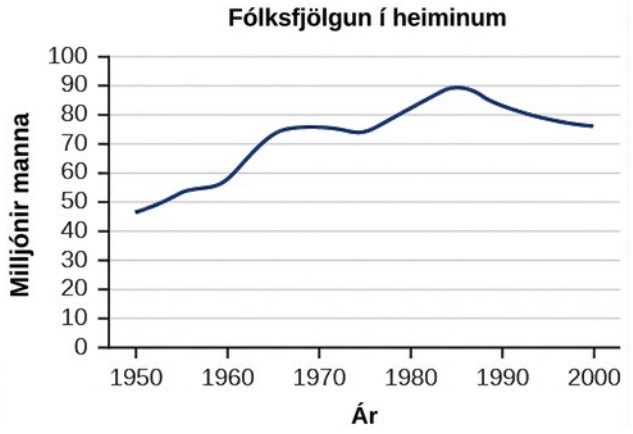
Lausn

Inntaksstærðin á lárétta ásnum er ártal, sem við táknum með breytunni t fyrir tíma. Úttaksstærðin er þúsundir olíutunna á dag, sem við táknum með breytunni b fyrir tunnur. Grafið kann að halda áfram til vinstri og hægri út fyrir sýnilega hlutann, en út frá honum getum við ákvarðað skilgreiningarmengið sem $1973 \le t \le 2008$ og myndmengið sem um það bil $180 \le b \le 2010$.

Með biltáknum er skilgreiningarmengið [1973, 2008] og myndmengið um það bil [180, 2010]. Við nálgum minnstu og stærstu gildi beggja mengja því þau lenda ekki nákvæmlega á línum hnitanetsins.

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Notið mynd 12 til að finna skilgreiningarmengið og myndmengið og ritið þau með biltáknum.



Mynd 12 Fjölgun mannkyns í milljónum manna eftir árum.

SPURT OG SVARAÐ

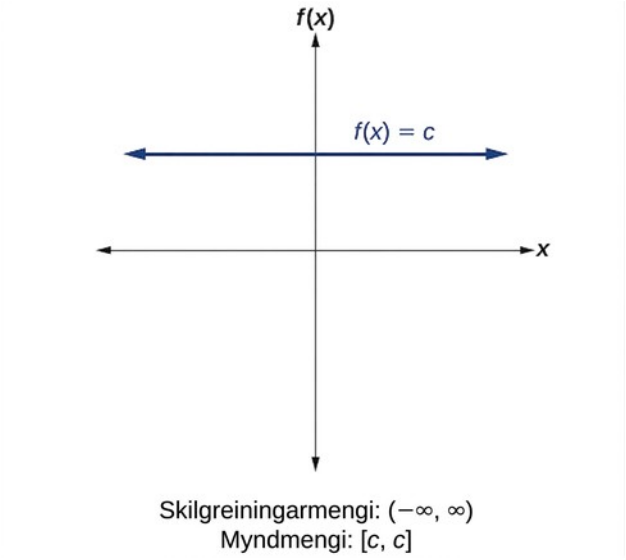
Geta skilgreiningarmengi og myndmengi falls verið sama mengið?

Já. Skilgreiningarmengi og myndmengi teningsrótarfallsins eru til dæmis bæði mengi allra rauntalna.

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi grunnfallanna

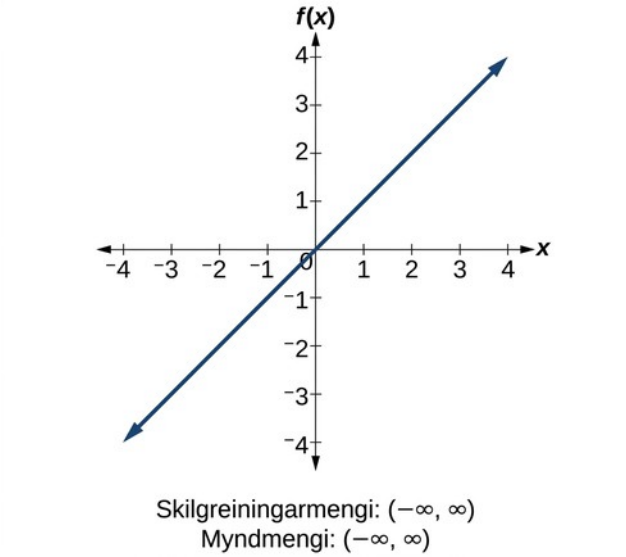
Nú snúum við aftur að grunnföllunum og ákvörðum skilgreiningarmengi og myndmengi hvers þeirra.

1



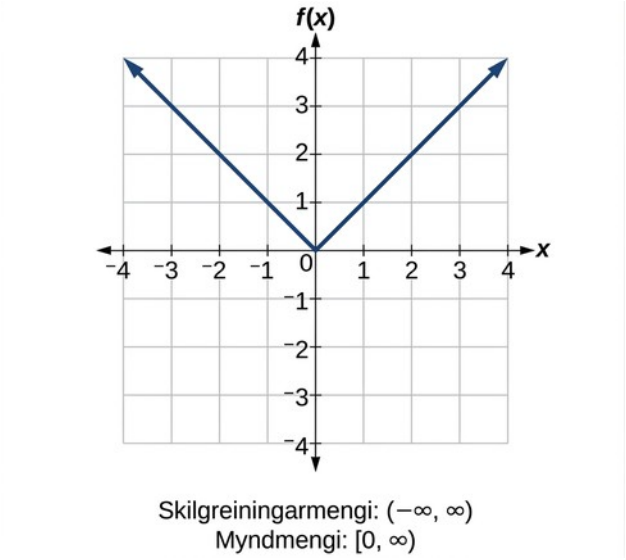
Skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$
Myndmengi: $[c, c]$

Mynd 13 Fyrir fastafallið $f\left(x\right)=c$, er skilgreiningarmengið mengi allra rauntalna og engar takmarkanir eru á inntakinu. Eina úttaksgildið er fastinn c, svo myndmengið er mengið $\left\{c\right\}$ sem inniheldur þetta eina stak. Með biltáknum er það ritað $\left[c,c\right]$, bil sem bæði hefst og endar í c.

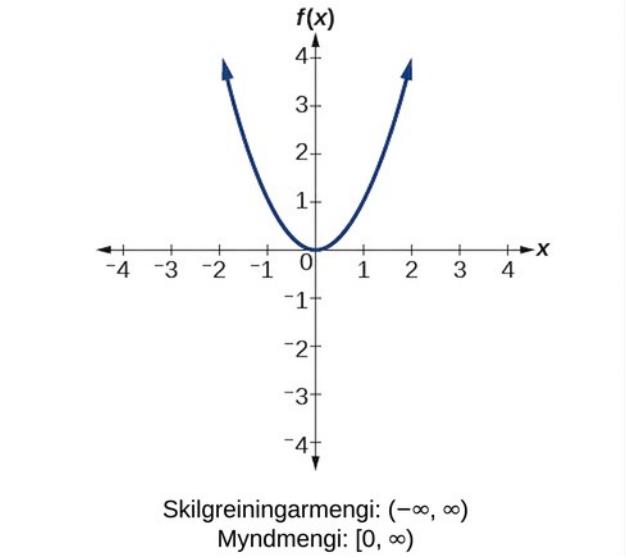


Skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$
Myndmengi: $(-\infty, \infty)$

Mynd 14 Í samsemdarfallinu $f\left(x\right)=x$, eru engar takmarkanir á x. Bæði skilgreiningarmengið og myndmengið eru mengi allra rauntalna.

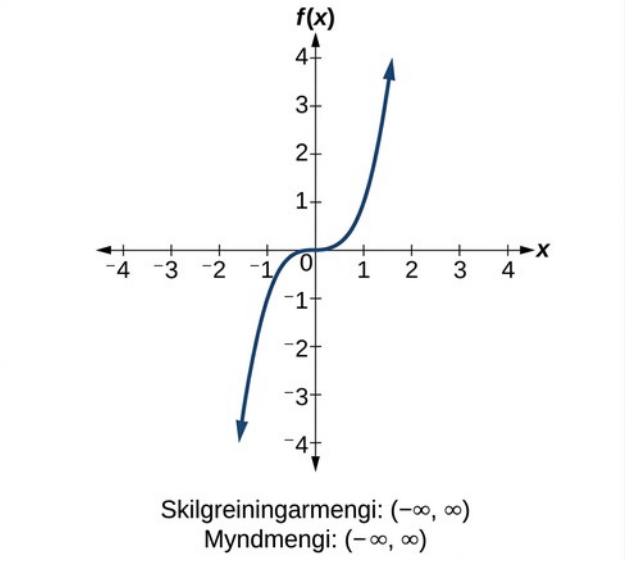


Mynd 15 Í tölugildisfallinu $f(x)=|x|$, eru engar takmarkanir á x. Tölugildi er hins vegar skilgreint sem fjarlægð frá 0, svo úttaksgildið getur aðeins verið stærra en eða jafnt 0.

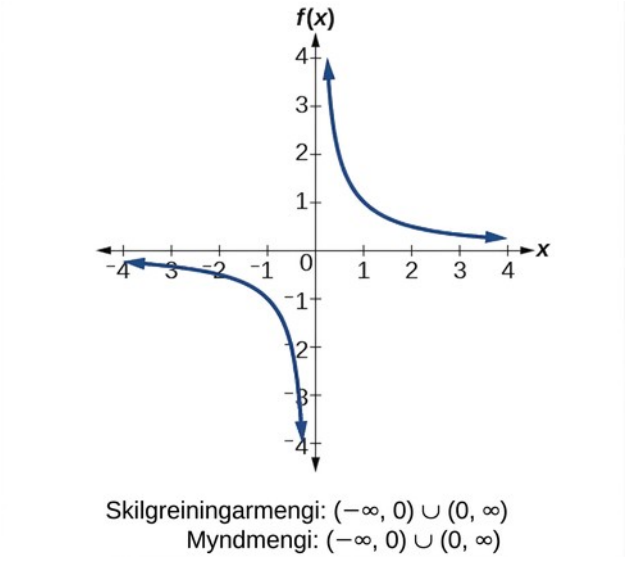


Mynd 16 Fyrir annars stigs fallið $f(x)=x^2$, er skilgreiningarmengið mengi allra rauntalna því grafið nær lárétt yfir alla rauntalnalínuna. Grafið hefur engin neikvæð gildi í myndmenginu, svo myndmengið er mengi óneikvæðra rauntalna.

1

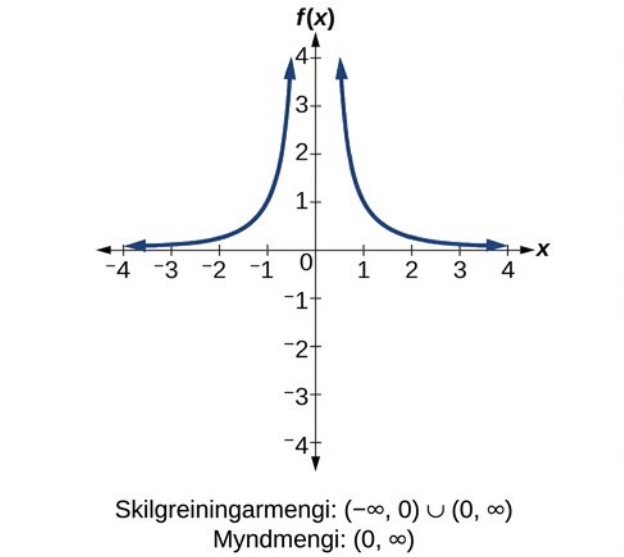


Mynd 17 Fyrir þriðja stigs fallið $f\left(x\right)=x^3$, er skilgreiningarmengið mengi allra rauntalna því grafið nær lárétt yfir alla rauntalnalínuna. Hið sama gildir lóðrétt um grafið, svo bæði skilgreiningarmengið og myndmengið innihalda allar rauntölur.



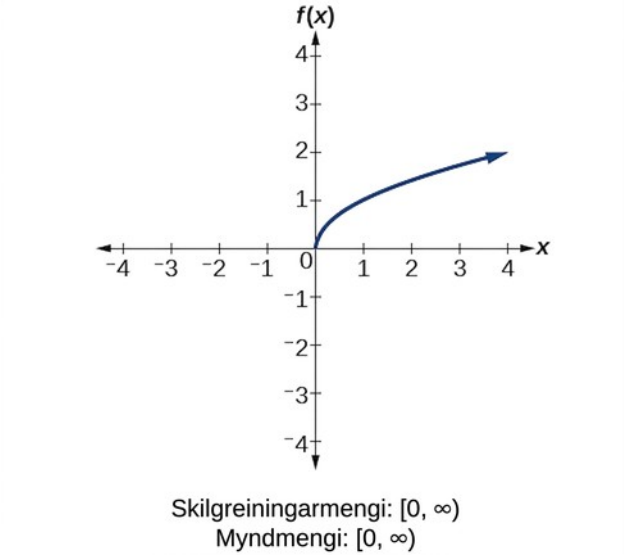
Mynd 18 Fyrir umhverfufallið $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$, getum við ekki deilt með 0 og verðum því að útiloka 0 úr skilgreiningarmenginu.

Ef 1 er deilt með einhverju gildi fæst heldur aldrei 0, svo myndmengið inniheldur ekki 0. Með skilyrðisrithætti má einnig rita $\left\{x\middle|x\neq0\right\}$, mengi allra rauntalna annarra en núlls.



Skilgreiningarmengi: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Myndmengi: $(0, \infty)$

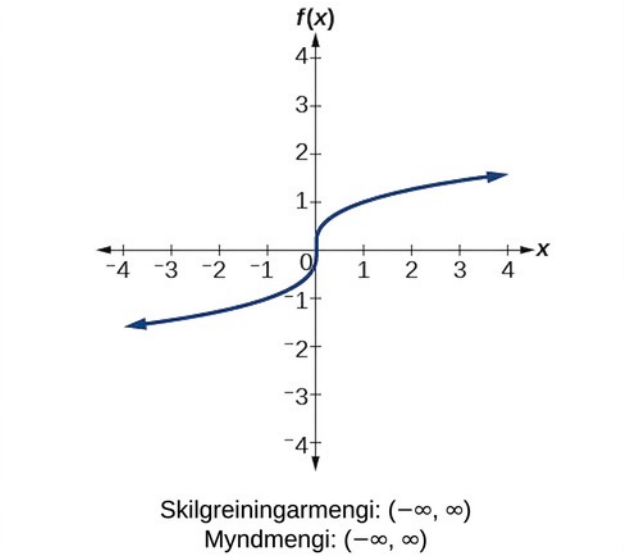
Mynd 19 Í öðru veldi umhverfufalls $f(x)=\frac{1}{x^2}$, getum við ekki deilt með 0, svo útiloka verður 0 úr skilgreiningarmenginu. Ekkert gildi x gefur heldur úttaksgildið 0, svo 0 er einnig útilokað úr myndmenginu. Athugið að úttaksgildi fallsins eru alltaf jákvæð vegna annars veldisins í nefnaranum og því inniheldur myndmengið aðeins jákvæðar tölur.



Skilgreiningarmengi: $[0, \infty)$
Myndmengi: $[0, \infty)$

Mynd 20 Í kvaðratrótarfallinu $f(x)=\sqrt{x}$, getum við ekki tekið kvaðratrót af neikvæðri rauntölu, svo skilgreiningarmengið er 0 og stærri tölur. Myndmengið útilokar einnig neikvæðar tölur því kvaðratrót jákvæðrar tölu x er samkvæmt skilgreiningu jákvæð, þótt neikvæða talan $-\sqrt{x}$ í öðru veldi gefi einnig x.

1



Mynd 21 Í teningsrótarfallinu $f(x)=\sqrt[3]{x}$, innihalda skilgreiningarmengið og myndmengið allar rauntölur. Athugið að vel má taka teningsrót, eða aðra rót af oddatölustigi, af neikvæðri tölu. Úttaksgildið verður þá neikvætt (fallið er oddstætt).

AÐFERÐ

Ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi falls út frá formúlu þess.

1. Útilokið úr skilgreiningarmenginu öll inntaksgildi sem leiða til deilingar með núlli.
2. Útilokið úr skilgreiningarmenginu öll inntaksgildi þar sem úttaksgildið er ekki rauntala eða er óskilgreint.
3. Notið leyfilegu inntaksgildin til að ákvarða myndmengi úttaksgildanna.
4. Skoðið graf fallsins og töflugildi til að staðfesta raunverulega hegðun þess.

DÆMI 8

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi með grunnföllum

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi $f(x)=2x^3-x$.

Lausn

Engar takmarkanir eru á skilgreiningarmenginu því hægt er að hefja hvaða rauntölu sem er í þriðja veldi og draga hana síðan frá niðurstöðunni.

Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$ og myndmengið er einnig $(-\infty,\infty)$.

DÆMI 9

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi $f(x)=\frac{2}{x+1}$.

Lausn

Við getum ekki reiknað gildi fallsins í -1 því deiling með núlli er óskilgreind. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,-1)U(-1,\infty)$. Þar sem fallið verður aldrei núll útilokum við o úr myndmenginu. Myndmengið er $(-\infty,0)U(0,\infty)$.

DÆMI 10

Að finna skilgreiningarmengi og myndmengi

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi $f(x)=2\sqrt{x+4}$.

Lausn

Við getum ekki tekið kvaðratrót af neikvæðri tölu og því verður stærðin undir rótarmerkinu að vera óneikvæð.

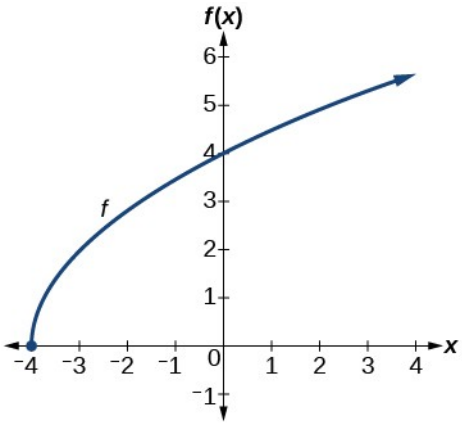
$$x+4\geq 0 \text{ þegar } x\geq -4$$

Skilgreiningarmengi $f(x)$ er $[-4,\infty)$.

Því næst finnum við myndmengið. Við vitum að $f(-4)=0$, og að fallgildið vex án efri marka þegar x vex. Við ályktum að myndmengi f sé $[0,\infty)$.

Greining

Mynd 22 sýnir fallið f.



Mynd 22 Graf rótarfalls með endapunkti á x-ásnum.

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi $f(x)=-\sqrt{2-x}$.

Að teikna gröf hlutskilgreindra falla

1

Stundum þarf fleiri en eina formúlu til að fá úttaksgildi falls. Meðal grunnfallanna kynntum við til dæmis tölugildisfallið $f(x)=|x|$. Skilgreiningarmengi þess er mengi allra rauntalna og myndmengið er mengi allra gilda sem eru stærri en eða jöfn 0. Tölugildi má skilgreina sem stærð rauntölu án tillits til formerkis, með öðrum orðum fjarlægð hennar frá 0 á talnalínunni. Allar þessar skilgreiningar krefjast þess að úttaksgildið sé stærra en eða jafnt 0.

Ef inntaksgildið er 0 eða jákvætt er úttaksgildið jafnt inntaksgildinu.

$$f(x)=x \text{ ef } x\geq 0$$

Ef inntaksgildið er neikvætt er úttaksgildið móttala inntaksgildisins.

$$f(x)=-x \text{ ef } x<0$$

Hér þarf tvö ólík ferli, eða tvo hluta, og því er tölugildisfallið dæmi um hlutskilgreint fall. Hlutskilgreint fall er fall þar sem fleiri en ein formúla er notuð til að skilgreina úttaksgildi á ólíkum hlutum skilgreiningarmengisins.

Við notum hlutskilgreind föll til að lýsa aðstæðum þar sem regla eða vensl breytast þegar inntaksgildið fer yfir tiltekin mörk. Í viðskiptum kemur til dæmis oft fyrir að stykkjaverð vöru lækki þegar pantað magn fer yfir ákveðið gildi. Skattþrep eru annað raunhæft dæmi um hlutskilgreind föll. Skoðum einfalt skattkerfi þar sem 10% skattur er lagður á tekjur upp að \$10,000 en 20% á allar tekjur umfram það. Skattur af heildartekjum S væri $0{,}1\ S$ ef $S\leq \$\ 10.000$ og $\$\ 1000+0{,}2\ (S-\$\ 10.000)$ ef $S>\$10,000$.

HLUTSKILGREINT FALL

Hlutskilgreint fall er fall þar sem fleiri en ein formúla er notuð til að skilgreina úttaksgildið. Hver formúla hefur sitt eigið skilgreiningarmengi og skilgreiningarmengi fallsins er sammengi allra þessara minni mengja. Þetta er táknað þannig:

$$f(x)=\begin{cases}\text{formúla 1 ef } x \text{ er í skilgreiningarmengi 1}\\ \text{formúla 2 ef } x \text{ er í skilgreiningarmengi 2}\\ \text{formúla 3 ef } x \text{ er í skilgreiningarmengi 3}\end{cases}$$

Með hlutskilgreindri táknun er tölugildisfallið

$$|x|=\begin{cases} x \text{ ef } x\geq 0\\ -x \text{ ef } x<0\end{cases}$$

AÐFERÐ

Rita formúlu hlutskilgreinds falls og tilgreina skilgreiningarmengið fyrir hvert bil.

1. Finnið bilin þar sem ólíkar reglur gilda.
2. Finnið formúlur sem lýsa því hvernig úttaksgildi er reiknað af inntaksgildi á hverju bili.
3. Notið slaufusviga og ef-skilyrði til að rita fallið.

DÆMI 11

Að rita hlutskilgreint fall

Safn tekur 5 dali á mann fyrir leiðsögn um safnið þegar hópurinn telur 1 til 9 manns, en fast 50 dala gjald fyrir hóp með 10 manns eða fleiri. Ritið fall sem tengir fjölda fólks, n, við kostnaðinn, C. Þar sem fjöldi fólks getur ekki verið brot er þetta í raun strjált fall. Í þessu verkefni lítum við þó á það sem samfellt fall.

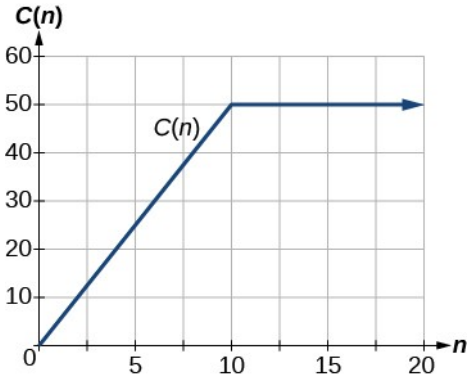
Lausn

Nota þarf tvær ólíkar formúlur. Fyrir gildi n sem eru minni en 10 er $C=5n$. Fyrir gildi n sem eru 10 eða stærri er $C=50$.

$$C(n)=\begin{cases}5n & \text{ef} \quad 0<n<10\\ 50 & \text{ef} \quad n\geq 10\end{cases}$$

Greining

Fallið er sýnt á mynd 23. Grafið er skálína frá $n=0$ að $n=10$ en lárétt eftir það. Í þessu dæmi gefa formúlurnar tvær sama gildi í punktinum þar sem hlutarnir mætast, $n=10$, en það á ekki við um öll hlutskilgreind föll.



Mynd 23 Graf hlutskilgreinda fallsins C(n).

DÆMI 12

Vinna með hlutskilgreint fall

Farsímafyrirtæki notar fallið hér á eftir til að ákvarða kostnaðinn, C, í dölum við flutning á g gígabætum gagna.

$$C(g)=\begin{cases}25 & \text{ef} \quad 0<g<2\\ 25+10(g-2) & \text{ef} \quad g\geq 2\end{cases}$$

Finnið kostnaðinn við að nota 1,5 gígabæti gagna og kostnaðinn við að nota 4 gígabæti.

Lausn

1

Til að finna kostnaðinn við að nota 1,5 gígabæti gagna, $C\left(1{,}5\right)$, athugum við fyrst í hvaða hluta skilgreiningarmengisins inntaksgildið liggur. Þar sem 1,5 er minna en 2 notum við fyrri formúluna.

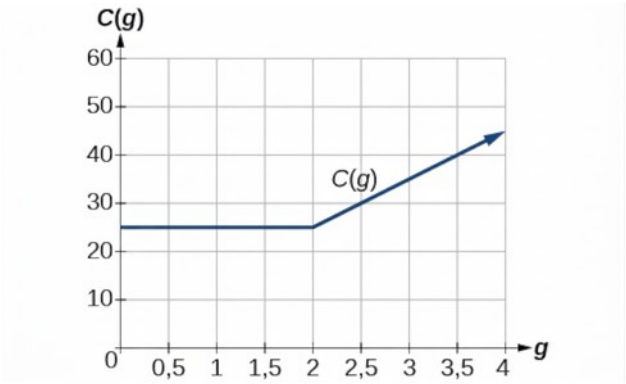
$$C\left(1{,}5\right)=\$\ 25$$

Til að finna kostnaðinn við að nota 4 gígabæti gagna, $C\left(4\right)$, sjáum við að inntaksgildið 4 er stærra en 2 og notum því síðari formúluna.

$$C\left(4\right)=25+10\left(4-2\right)=\$\,45$$

Greining

Fallið er sýnt á mynd 24. Við sjáum hvar fallið breytist úr fastafalli í hliðrað og teygt samsemdarfall við $g=2$. Við teiknum gröf ólíku formúlnanna í sama hnitakerfi og gætum þess að hver formúla gildi á réttu skilgreiningarmengi.



Mynd 24 Graf hlutskilgreinda fallsins C(g).

AÐFERÐ

Teikna graf hlutskilgreinds falls.

1. Merkið á x-ásinn mörk bilanna sem mynda hvern hluta skilgreiningarmengisins.
2. Teiknið graf samsvarandi jöfnu á hverjum hluta skilgreiningarmengisins. Teiknið ekki gröf tveggja falla á sama bili, því það bryti gegn skilgreiningu falls.

DÆMI 13

Að teikna graf hlutskilgreinds falls

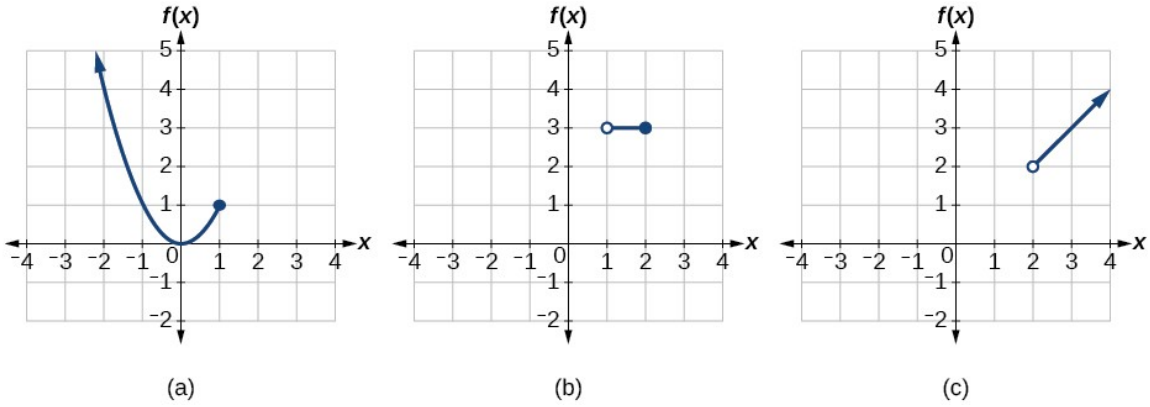
Teiknið skissu af grafi fallsins.

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 & \text{ef} \quad x\leq 1 \\ 3 & \text{ef} \quad 1<x\leq 2 \\ x & \text{ef} \quad x>2 \end{cases}$$

Lausn

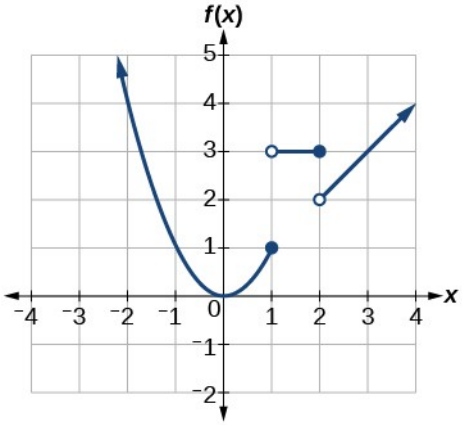
Hvert hlutafall er eitt grunnfallanna og því þekkjum við lögun þess. Við getum hugsað okkur að teikna hvert graf og takmarka það síðan við tilgreint skilgreiningarmengi. Við endapunkta bilsins teiknum við opna hringi þegar endapunkturinn er ekki með vegna ójöfnu með < eða >, en fylltan hring þegar endapunkturinn er með vegna ójöfnu með ≤ eða ≥.

Mynd 25 sýnir þrjú hlutaföll hlutskilgreinda fallsins, hvert í sínu hnitakerfi.



Mynd 25 (a) $f(x)=x^2$ ef $x\leq 1$; (b) $f(x)=3$ ef $1< x\leq 2$; (c) $f(x)=x$ ef $x>2$

Nú þegar við höfum teiknað hvern hluta fyrir sig sameinum við þá í sama hnitakerfi. Sjá mynd 26.



Mynd 26 Graf hlutskilgreinds falls með þremur hlutum.

Greining

Athugið að grafið stenst lóðrétta línuprófið, jafnvel við $x=1$ og $x=2$, því punktarnir $(1,3)$ og $(2,2)$ tilheyra ekki grafi fallsins en punktarnir $(1,1)$ og $(2,3)$ gera það.

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Teiknið graf eftirfarandi hlutskilgreinds falls.

1

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{ef} \quad x<-1 \\ -2 & \text{ef} \quad -1<x<4 \\ \sqrt{x} & \text{ef} \quad x>4 \end{cases}$$

SPURT OG SVARAÐ

Getur fleiri en ein formúla hlutskilgreinds falls gilt fyrir sama gildi í skilgreiningarmenginu?

Nei. Hvert gildi samsvarar einni jöfnu í hlutskilgreindri formúlu.

MIÐLAR

Á þessum vefsíðum getið þið lært meira um skilgreiningarmengi og myndmengi og æft ykkur.

- Skilgreiningarmengi og myndmengi kvaðratrótarfalla
- Að ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi
- Finna skilgreiningarmengi og myndmengi af grafi
- Finna skilgreiningarmengi og myndmengi úr töflu
- Finna skilgreiningarmengi og myndmengi af punktum í hnitakerfi

Verkefni hluta 1.2

Hugtakaspurningar

1. Hvers vegna er skilgreiningarmengið ólíkt eftir föllum?

2. Hvernig ákvarðum við skilgreiningarmengi falls sem er gefið með jöfnu?

3. Útskýrið hvers vegna skilgreiningarmengi $f(x)=\sqrt[3]{x}$ er annað en skilgreiningarmengi $f(x)=\sqrt{x}$.

4. Hvenær eru notaðir svigar og hvenær hornklofar þegar talnamengjum er lýst með biltáknum?

5. Hvernig er graf hlutskilgreinds falls teiknað?

Algebruverkefni

Finnið skilgreiningarmengi hvers falls í eftirfarandi verkefnum og ritið það með biltáknum.

6.

$$f(x)=-2x(x-1)(x-2)$$

7.

$$f(x)=5-2x^2$$

8.

$$f(x)=3\sqrt{x-2}$$

9.

$$f(x)=3-\sqrt{6-2x}$$

10.

$$f(x)=\sqrt{4-3x}$$

11.

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}$$

12.

$$f(x)=\sqrt[3]{1-2x}$$

13.

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

14.

$$f(x)=\frac{9}{x-6}$$

15.

$$f(x)=\frac{3x+1}{4x+2}$$

16.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{x-4}$$

17.

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2+9x-22}$$

18.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$$

19.

$$f(x)=\frac{2x^3-250}{x^2-2x-15}$$

1

20.

$$f(x)=\frac{5}{\sqrt{x-3}}$$

21.

$$f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{5-x}}$$

22.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-6}}$$

23.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-4}}$$

24.

$$f(x)=\frac{x}{x}$$

25.

$$f(x)=\frac{x^2-9x}{x^2-81}$$

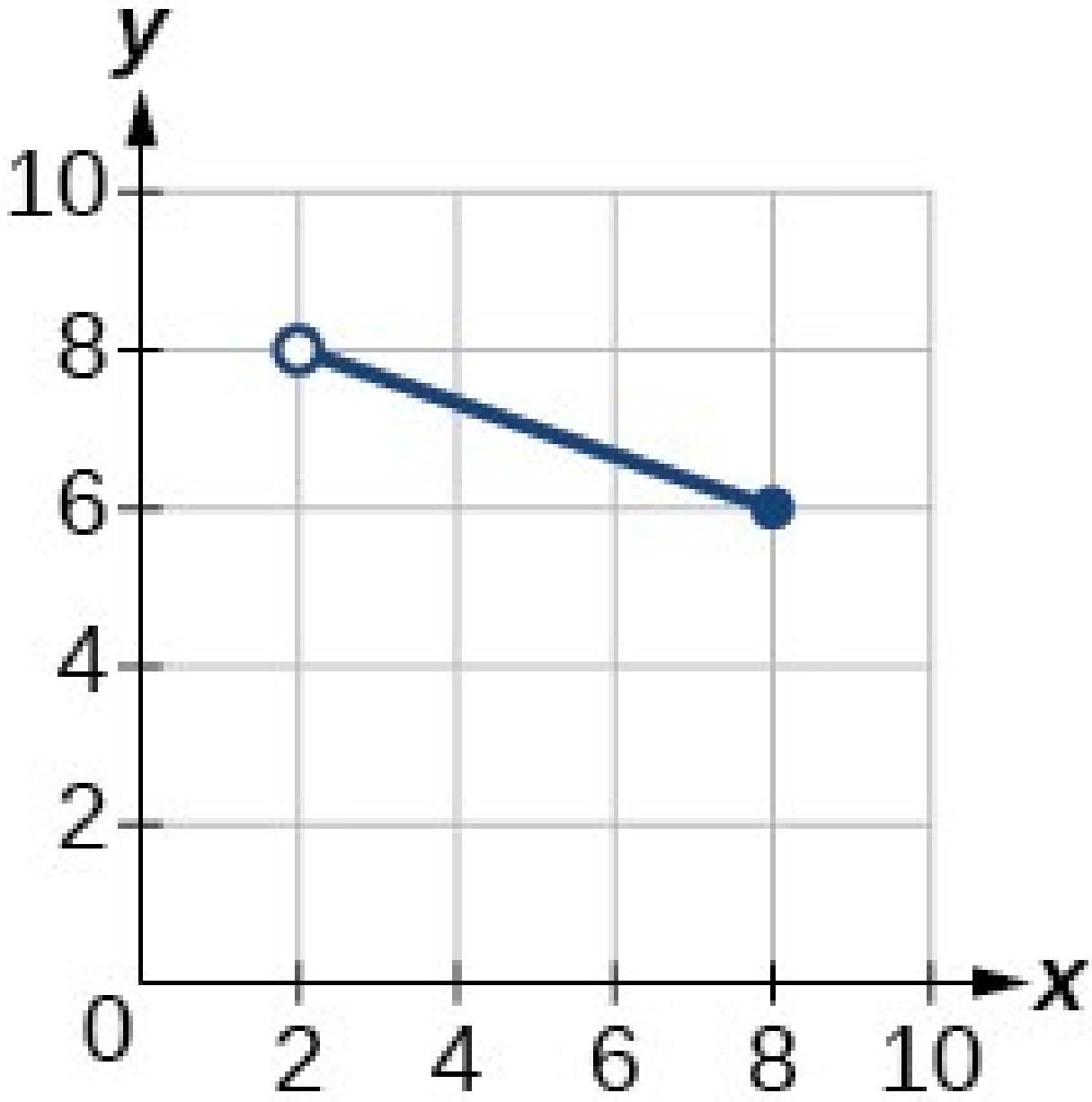
26. Finnið skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\sqrt{2x^3-50x}$ með því að:

1. ⓐ nota algebru.
2. ⓑ teikna graf fallsins í rótarstofninum og finna bilin á x-ásnum þar sem rótarstofninn er óneikvæður.

Grafverkefni

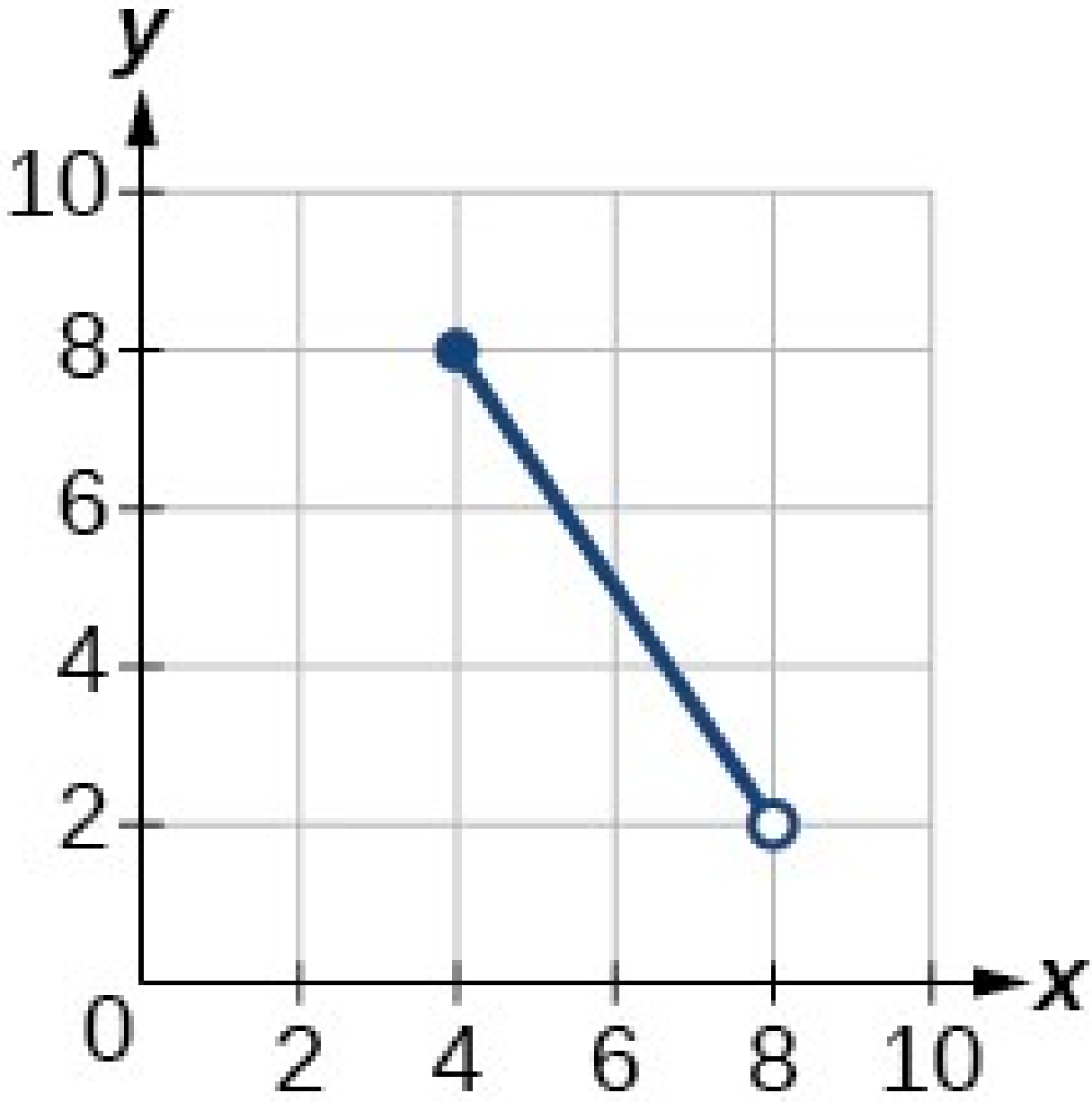
Ritið skilgreiningarmengi og myndmengi hvers falls í eftirfarandi verkefnum með biltáknum.

27.

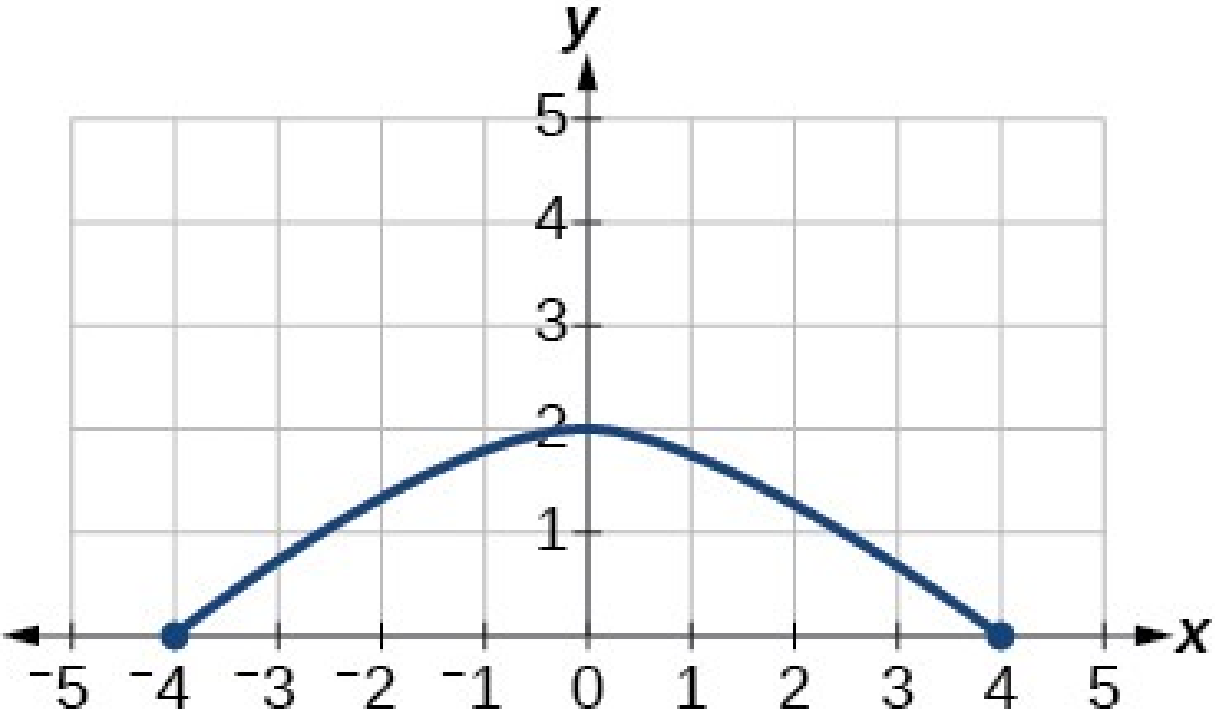


28.

1

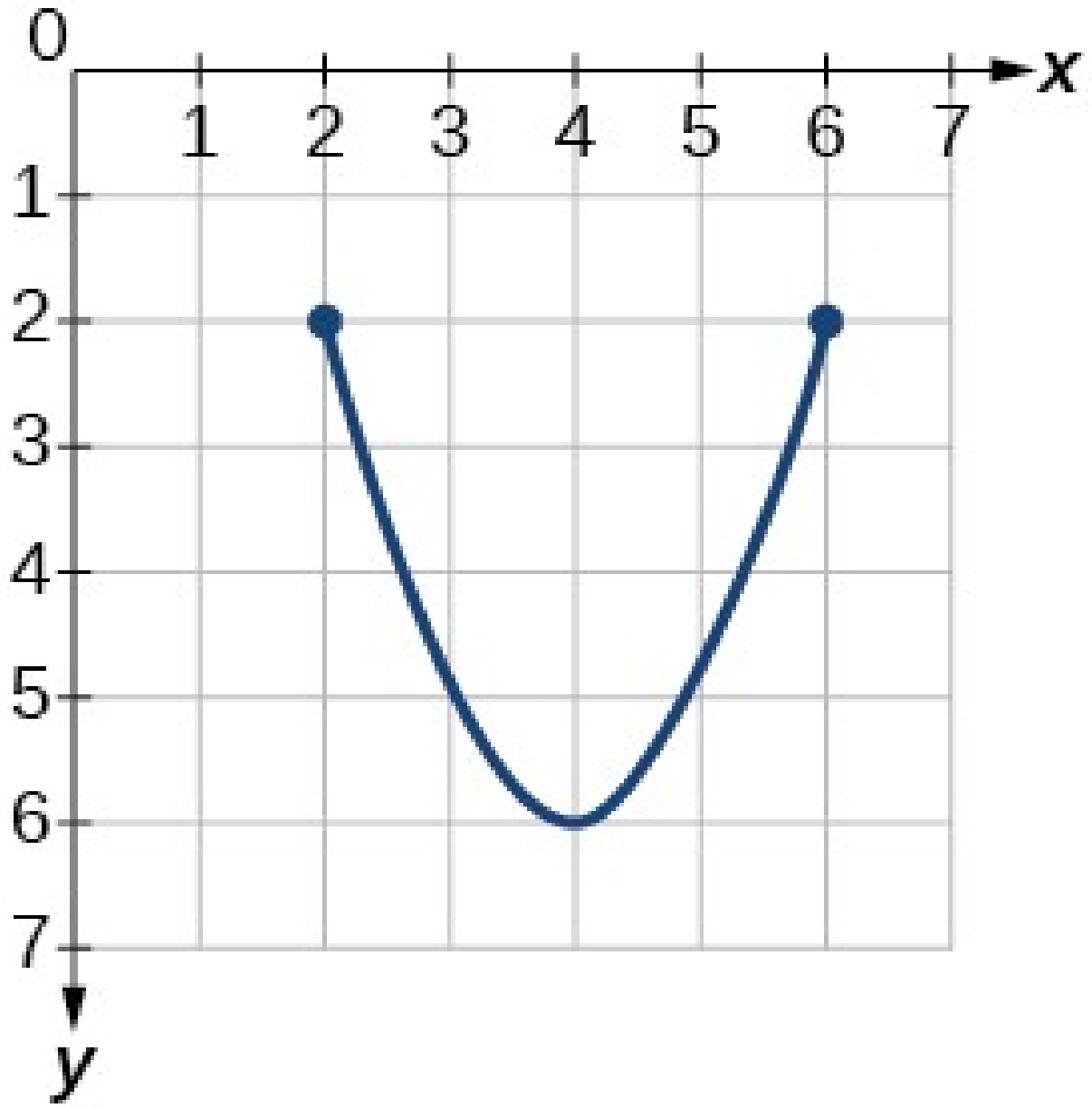


29.

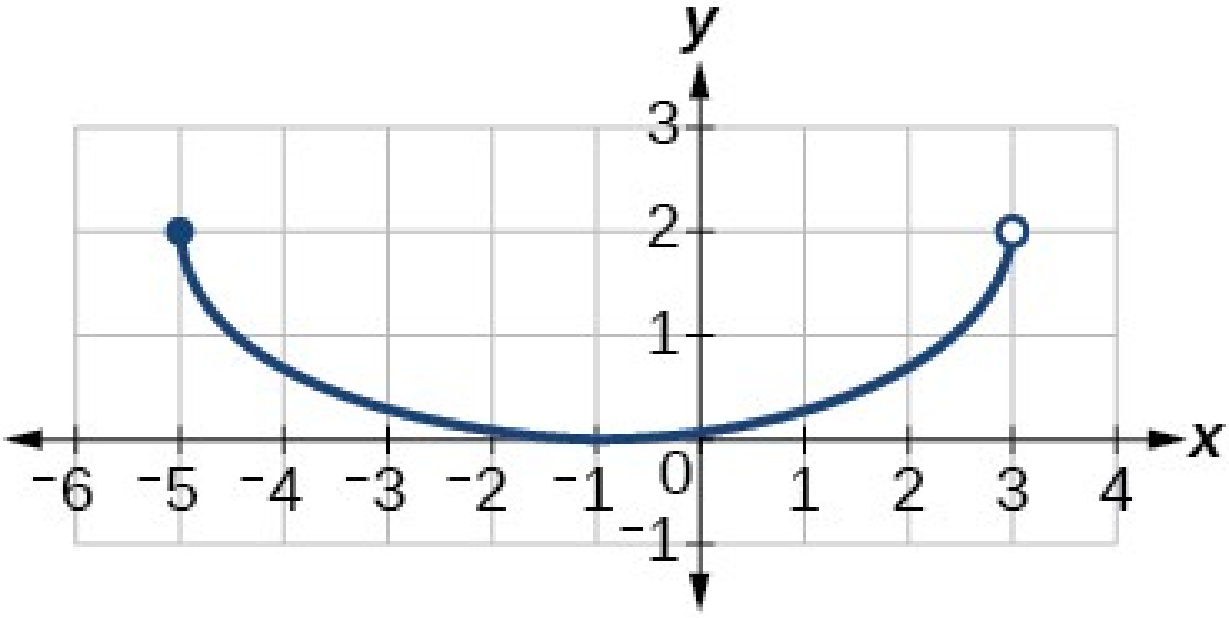


30.

1

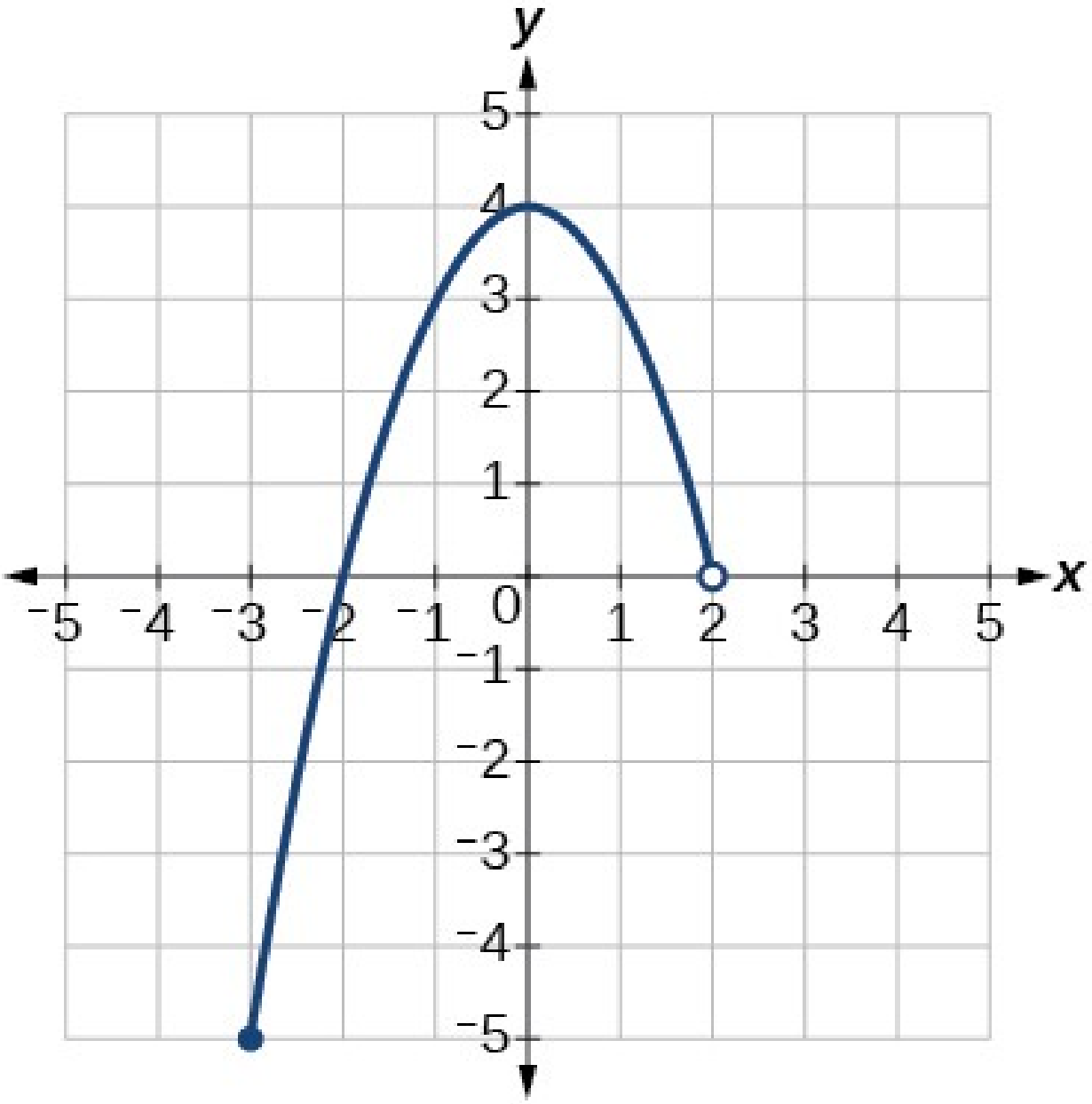


31.

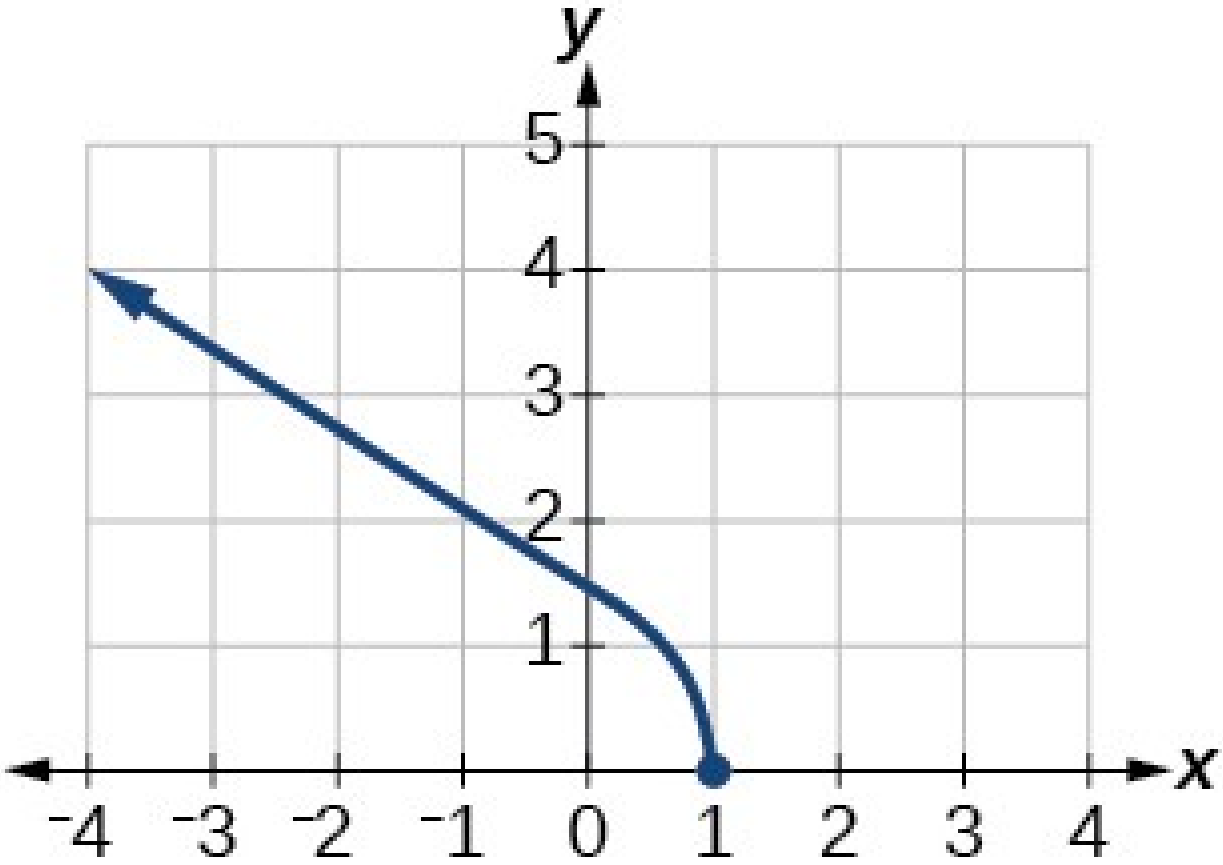


32.

1

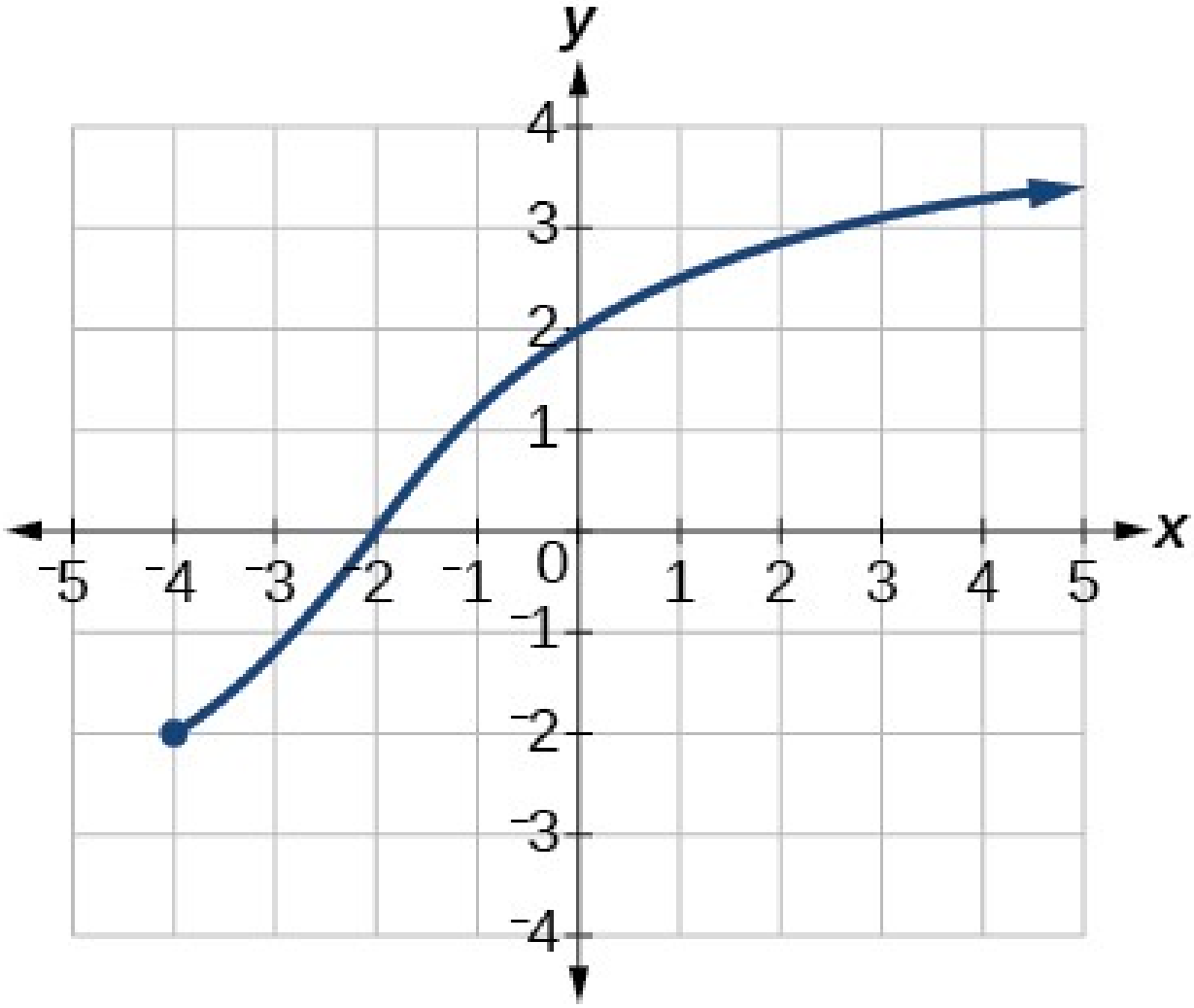


33.

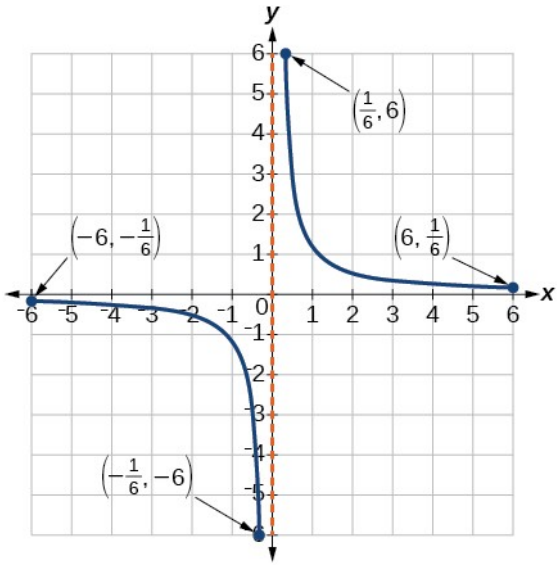


1

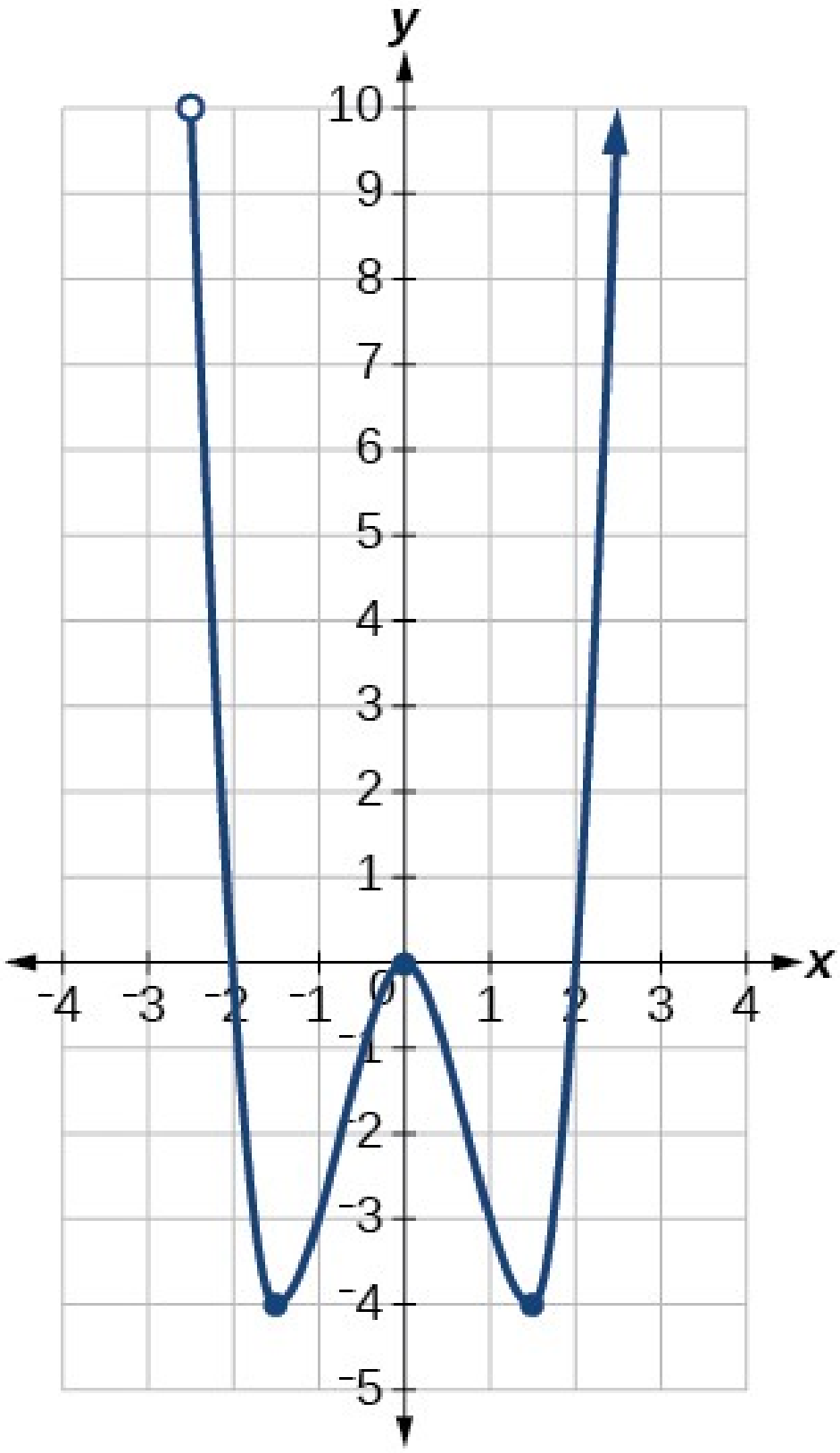
34.


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

35.

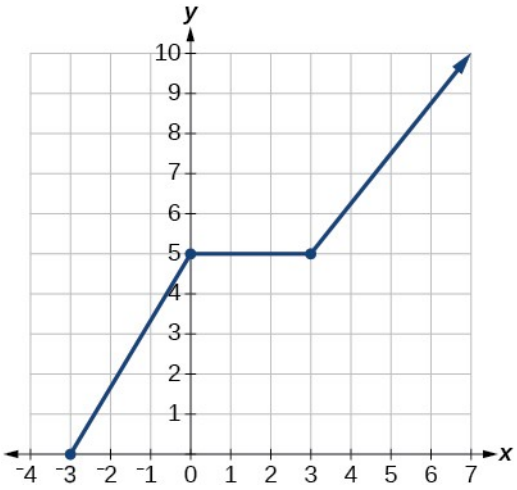

y
x
$\left(\frac{1}{6}, 6\right)$
$\left(-6, -\frac{1}{6}\right)$
$\left(6, \frac{1}{6}\right)$
$\left(-\frac{1}{6}, -6\right)$

36.



1

37.



Teiknið skissu af grafi hlutskilgreinda fallsins í eftirfarandi verkefnum. Ritið skilgreiningarmengið með biltáknum.

38.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef } x<-2 \\ -2x-3 & \text{ef } x\geq -2 \end{cases}$$

39.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{ef } x<1 \\ 1+x & \text{ef } x\geq 1 \end{cases}$$

40.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef } x<0 \\ x-1 & \text{ef } x>0 \end{cases}$$

41.

$$f(x)=\begin{cases} 3 & \text{ef } x<0 \\ \sqrt{x} & \text{ef } x\geq 0 \end{cases}$$

42.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{ef } x<0 \\ 1-x & \text{ef } x>0 \end{cases}$$

43.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{ef } x<0 \\ x+2 & \text{ef } x\geq 0 \end{cases}$$

44.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef} \quad x<1 \\ x^3 & \text{ef} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

45.

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{ef} \quad x<2 \\ 1 & \text{ef} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Tölverkefni

Reiknið fyrir hvert gefið fall f, gildin $f(-3), f(-2), f(-1)$, og $f(0)$.

46.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef} \quad x<-2 \\ -2x-3 & \text{ef} \quad x\geq -2 \end{cases}$$

47.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{ef } x\leq -3 \\ 0 & \text{ef } x>-3 \end{cases}$$

48.

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2+3 & \text{ef } x\leq -1 \\ 5x-7 & \text{ef } x>-1 \end{cases}$$

Reiknið fyrir hvert gefið fall f, gildin $f(-1), f(0), f(2)$, og $f(4)$.

49.

$$f(x)=\begin{cases} 7x+3 & \text{ef} \quad x<0 \\ 7x+6 & \text{ef} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

50.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{ef} \quad x<2 \\ 4+|x-5| & \text{ef} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

51.

$$f(x)=\begin{cases} 5x & \text{ef} \quad x<0 \\ 3 & \text{ef} \quad 0\leq x\leq 3 \\ x^2 & \text{ef} \quad x>3 \end{cases}$$

Ritið skilgreiningarmengi hlutskilgreinda fallsins í hverju eftirfarandi verkefna með biltáknum.

52.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{ef} \quad x<-2 \\ -2x-3 & \text{ef} \quad x\geq -2 \end{cases}$$

53.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & \text{ef} \quad x<1 \\ -x^2+2 & \text{ef} \quad x>1 \end{cases}$$

54.

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{ef} \quad x<0 \\ -3x^2 & \text{ef} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Tækniverkefni

55. Teiknið graf $y=\frac{1}{x^2}$ í skoðunarglugganum $[-0{,}5\,;-0{,}1]$ og $[0{,}1\,;0{,}5]$. Ákvarðið samsvarandi myndmengi í skoðunarglugganum. Sýnið gröfin.

56. Graph $y=\frac{1}{x}$ on the viewing window $[-0{,}5\,;-0{,}1]$ and $[0{,}1\,;0{,}5]$. Determine the corresponding range for the viewing window. Show the graphs.

Viðbótarverkefni

57. Gerum ráð fyrir að myndmengi falls f sé $[-5,8]$. Hvert er myndmengi $|f(x)|$?

58. Búið til fall sem hefur allar óneikvæðar rauntölur sem myndmengi.

59. Búið til fall með skilgreiningarmengið $x>2$.

Raunhæf viðfangsefni

60. Hæð skothlutar, h, er fall af tímanum t sem hann er á lofti. Hæðin í fetum eftir t sekúndur er gefin með fallinu $h(t)=-16t^2+96t$. Hvert er skilgreiningarmengi fallsins? Hvað táknar skilgreiningarmengið í samhengi verkefnisins?

61. Kostnaðurinn í dölum við að framleiða x stykki er gefinn með fallinu $C(x)=10x+500$.

1. ⓐ Fasti kostnaðurinn fæst þegar ekkert stykki er framleitt. Finnið fasta kostnaðinn við þessa vöru.
2. ⓑ Hver er kostnaðurinn við að framleiða 25 stykki?
3. ⓒ Gerum ráð fyrir að mesti leyfilegi kostnaður sé $1.500. Hver eru skilgreiningarmengi og myndmengi kostnaðarfallsins $C(x)$?

1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Finna meðalbreytingarhraða falls.

- Nota graf til að ákvarða hvar fall er vaxandi, minnkandi eða fast.
- Nota graf til að finna staðbundin hágildi og lággildi.
- Nota graf til að finna algilt hágildi og algilt lággildi.

Bensínverð hefur sveiflast mjög mikið á síðustu áratugum. Tafla 1 5 sýnir meðalverð í dölum á galloni af bensíni á árunum 2005–2012. Líta má á bensínverðið sem fall af ári.

5
5http://www.eia.gov/totalenergy/data/annual/showtext.cfm?t=ptb0524. Sótt 5.3.2014.

Tafla 1

y	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
$C(y)$	2,31	2,62	2,84	3,30	2,41	2,84	3,58	3,68

Ef við hefðum aðeins áhuga á því hvernig bensínverð breyttist frá 2005 til 2012 gætum við reiknað út að verðið á galloni hækkaði úr $2,31 í $3,68, sem er hækkun um $1,37. Þótt þetta sé áhugavert gæti verið gagnlegra að skoða hversu mikið verðið breyttist á ári. Í þessum hluta könnum við slíkar breytingar.

Að finna meðalbreytingarhraða falls

Verðbreyting á ári er breytingarhraði vegna þess að hún lýsir því hvernig úttaksstærð breytist miðað við breytingu á inntaksstærð. Í töflu 1 sést að bensínverðið breyttist ekki jafnmikið á hverju ári og því var breytingarhraðinn ekki fastur. Ef við notum aðeins upphafs- og lokagögnin finnum við meðalbreytingarhraðann á tiltekna tímabilinu. Til að finna meðalbreytingarhraðann deilum við breytingunni á úttaksgildinu með breytingunni á inntaksgildinu.

$$\begin{aligned}\text{Meðalbreytingarhraði} &= \frac{\text{Breyting úttaks}}{\text{Breyting inntaks}} \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\end{aligned}$$

Gríski stafurinn Δ (delta) táknar breytingu á stærð. Hlutfallið lesum við sem „delta-y deilt með delta-x“ eða „breytingin á y deilt með breytingunni á x.“ Stundum ritum við Δf í stað Δy, en það táknar samt breytinguna á úttaksgildi fallsins þegar inntaksgildi þess breytist. Það merkir ekki að við breytum fallinu í annað fall.

Í dæminu okkar hækkaði bensínverðið um $1,37 frá 2005 til 2012. Á 7 árum var meðalbreytingarhraðinn

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\$\ 1{,}37}{7\text{ ár}} \approx 0{,}196\ \text{ dalir á ári}$$

1

Að meðaltali hækkaði bensínverðið um það bil 19,6¢ á ári.
Önnur dæmi um breytingarhraða eru:

- Rottustofn sem stækkar um 40 rottur á viku
- Bíll sem ekur 68 mílur á klukkustund (ekin vegalengd eykst um 68 mílur á hverri klukkustund sem líður)
- Bíll sem ekur 27 mílur á galloni (ekin vegalengd eykst um 27 mílur fyrir hvert gallon)
- Rafstraumur um rafrás sem eykst um 0,125 amper fyrir hvert volt sem spennan hækkar um
- Fjárhæð á háskólareikningi sem lækkar um $4.000 á hverjum ársfjórðungi

---

BREYTINGARHRAÐI

Breytingarhraði lýsir því hvernig úttaksstærð breytist miðað við breytingu á inntaksstærð. Einingar breytingarhraða eru „úttakseiningar á hverja inntakseiningu“.

Meðalbreytingarhraði milli tveggja inntaksgilda er heildarbreyting fallgildanna (úttaksgildanna) deild með breytingunni á inntaksgildunum.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

AÐFERÐ

Gefin eru gildi falls í mismunandi punktum. Reiknið meðalbreytingarhraða þess á bilinu milli tveggja gilda x_1 og x_2.

1. Reiknið mismuninn $y_2 - y_1 = \Delta y$.
2. Reiknið mismuninn $x_2 - x_1 = \Delta x$.
3. Finnið hlutfallið $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

DÆMI 1

Að reikna meðalbreytingarhraða

Notið gögnin í töflu 1 til að finna meðalbreytingarhraða bensínverðs frá 2007 til 2009.

Lausn

Árið 2007 var bensínverðið $2,84. Árið 2009 var það $2,41. Meðalbreytingarhraðinn er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\$\ 2{,}41 - \$\ 2{,}84}{2009 - 2007}$$
$$= \frac{-\$\ 0{,}43}{2 \text{ ár}}$$
$$= -\$\ 0{,}22 \text{ á ári}$$

Greining

Athugið að lækkun er táknuð með neikvæðri breytingu eða „neikvæðri hækkun“. Breytingarhraði er neikvæður þegar úttakið minnkar um leið og inntakið eykst eða þegar úttakið eykst um leið og inntakið minnkar.

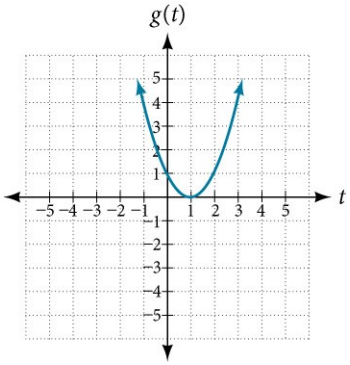
REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Notið gögnin í töflu 1 til að finna meðalbreytingarhraðann frá 2005 til 2010.

DÆMI 2

Að reikna meðalbreytingarhraða út frá grafi

Finnið meðalbreytingarhraða fallsins $g(t)$ sem sýnt er á mynd 1 á bilinu $[-1, 2]$.

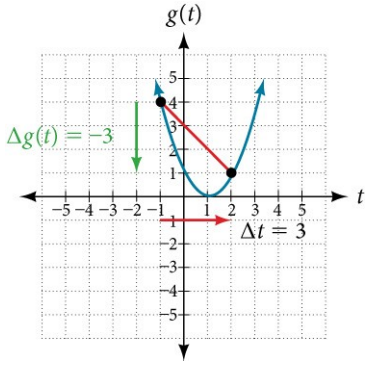


Mynd 1

Lausn

Þegar $t = -1$, sýnir mynd 2 að $g(-1) = 4$. Þegar $t = 2$, sýnir grafið að $g(2) = 1$.

1



Mynd 2

Lárétta breytingin $\Delta t = 3$ er sýnd með rauðu örinni og lóðrétta breytingin $\Delta g(t) = -3$ með grænbláu örinni. Úttakið breytist um –3 á meðan inntakið breytist um 3 og því er meðalbreytingarhraðinn

$$\frac{1-4}{2-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

Greining

Athugið að röðin sem við veljum skiptir miklu máli. Ef við notum til dæmis $\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, fáum við ekki rétt svar. Ákveðið hvor punkturinn á að vera punktur 1 og hvor punktur 2 og haldið hnitunum föstum sem (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

DÆMI 3

Að reikna meðalbreytingarhraða út frá töflu

Eftir að Anna hefur sótt vinkonu sem býr í 10 mílna fjarlægð skráir hún fjarlægð sína frá heimilinu eftir því sem tíminn líður. Gildin eru sýnd í töflu 2. Finnið meðalhraða hennar fyrstu 6 klukkustundirnar.

Tafla 2

t (klukkustundir)	0	1	2	3	4	5	6	7
D(t) (mílur)	10	55	90	153	214	240	292	300

Lausn

Hér er meðalhraðinn jafn meðalbreytingarhraðanum. Hún ók 282 mílur á 6 klukkustundum og meðalhraðinn var því

$$\frac{292-10}{6-0} = \frac{282}{6}$$
$$= 47$$

Meðalhraðinn er 47 mílur á klukkustund.

Greining

Þar sem hraðinn er ekki fastur fer meðalhraðinn eftir því hvaða bil er valið. Á bilinu [2,3] er meðalhraðinn 63 mílur á klukkustund.

DÆMI 4

Að reikna meðalbreytingarhraða falls sem er gefið með formúlu

Reiknið meðalbreytingarhraða fallsins $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ á bilinu $[2,4]$.

Lausn

Við getum byrjað á að reikna fallgildin í hvorum endapunkti bilsins.

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2-\tfrac{1}{2} \\ &= 4-\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{7}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(4) &= 4^2-\tfrac{1}{4} \\ &= 16-\tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{63}{4} \end{aligned}$$

Nú reiknum við meðalbreytingarhraðann.

$$\begin{aligned} \text{Meðalbreytingarhraði} &= \frac{f(4)-f(2)}{4-2} \\ &= \frac{\frac{63}{4}-\frac{7}{2}}{4-2} \\ &= \frac{\frac{49}{4}}{2} \\ &= \frac{49}{8} \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið meðalbreytingarhraða fallsins $f(x)=x-2\sqrt{x}$ á bilinu $[1,9]$.

1

DÆMI 5

Að finna meðalbreytingarhraða krafts

Tengja má rafstöðukraft F, mældan í njútonum, sem verkar milli tveggja hlaðinna agna, við fjarlægðina milli agnanna d, í sentímetrum, með formúlunni $F(d)=\frac{2}{d^2}$. Finnið meðalbreytingarhraða kraftsins þegar fjarlægðin milli agnanna eykst úr 2 cm í 6 cm.

Lausn

Við reiknum meðalbreytingarhraða fallsins $F(d)=\frac{2}{d^2}$ á bilinu $[2,6]$.

$$\begin{aligned}
\text{Meðalbreytingarhraði} &= \frac{F(6)-F(2)}{6-2} \\
&= \frac{\frac{2}{6^2}-\frac{2}{2^2}}{6-2} && \text{Einfaldið.} \\
&= \frac{\frac{2}{36}-\frac{2}{4}}{4} \\
&= \frac{-\frac{16}{36}}{4} && \text{Sameinið liði í teljara.} \\
&= -\frac{1}{9} && \text{Einfaldið}
\end{aligned}$$

Meðalbreytingarhraðinn er $-\frac{1}{9}$ njúton á sentímetra.

DÆMI 6

Að finna stæðu fyrir meðalbreytingarhraða

Finnið meðalbreytingarhraða fallsins $g(t)=t^2+3t+1$ á bilinu $[0,a]$. Svarið verður stæða sem inniheldur a.

Lausn

Við notum formúluna fyrir meðalbreytingarhraða.

$$\text{Meðalbreytingarhraði}=\frac{g(a)-g(0)}{a-0} \quad \text{Reiknið.}$$

$$=\frac{(a^2+3a+1)-(0^2+3(0)+1)}{a-0} \quad \text{Einfaldið.}$$

$= \frac{a^2+3\ a+1-1}{a}$ Einfaldið og þáttið.

$= \frac{a\ (a+3)}{a}$ Deilið með sameiginlega þættinum a.

$$= a+3$$

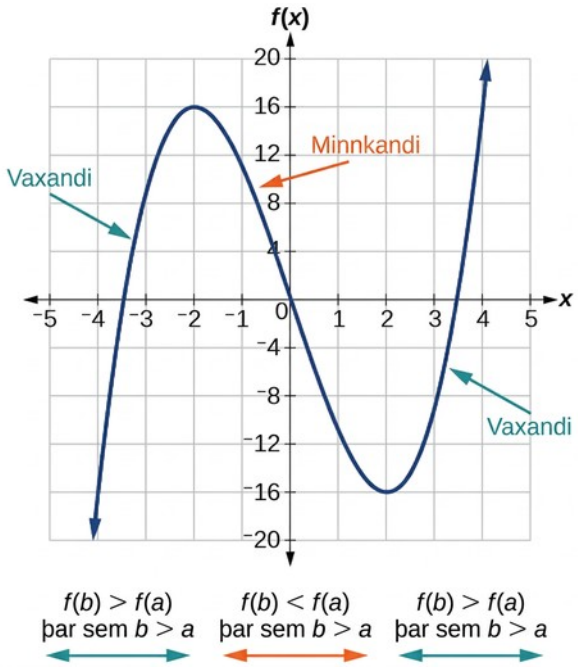
Niðurstaðan gefur okkur meðalbreytingarhraðann sem fall af a milli $t=0$ og einhvers annars punkts $t=a$. Á bilinu $[0,5]$, væri meðalbreytingarhraðinn til dæmis $5+3=8$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Finnið meðalbreytingarhraða fallsins $f(x)=x^2+2x-8$ á bilinu $[5,a]$.

Að nota graf til að ákvarða hvar fall er vaxandi, minnkandi eða fast

Þegar við könnum hvernig föll breytast getum við fundið bil þar sem fallið breytist á tiltekinn hátt. Við segjum að fall sé vaxandi á bili ef fallgildin vaxa þegar inntaksgildin vaxa innan bilsins. Á sama hátt er fall minnkandi á bili ef fallgildin minnka þegar inntaksgildin vaxa á bilinu. Meðalbreytingarhraði vaxandi falls er jákvæður en meðalbreytingarhraði minnkandi falls er neikvæður. Mynd 3 sýnir dæmi um bil þar sem fall er vaxandi eða minnkandi.



Mynd 3 Fallið $f(x)=x^3-12x$ er vaxandi á $(-\infty,-2)U(2,\infty)$ og minnkandi á $(-2,2)$.

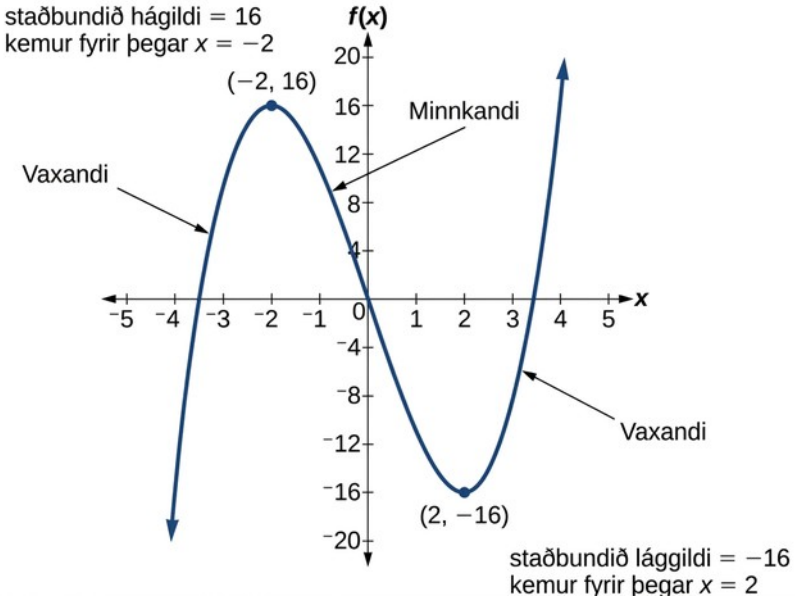
Sum föll eru vaxandi (eða minnkandi) á öllu skilgreiningarmengi sínu en mörg önnur eru það ekki. Inntaksgildi þar sem fall breytist úr því að vera vaxandi í að vera minnkandi (þegar farið er frá vinstri til hægri, það er þegar inntaksbreytan vex) er staðsetning staðbundins hágildis. Fallgildið í þeim punkti er staðbundna hágildið. Ef fall hefur fleiri en eitt slíkt segjum við að

1

það hafi staðbundin hágildi. Á sama hátt er inntaksgildi þar sem fall breytist úr því að vera minnkandi í að vera vaxandi staðsetning staðbundins lággildis. Fallgildið í þeim punkti er staðbundna lággildið. Staðbundin hágildi og lággildi kallast saman staðbundin útgildi fallsins. Í stað orðsins staðbundin er stundum notað orðið afstæð. Í þessari bók notum við orðið staðbundin.

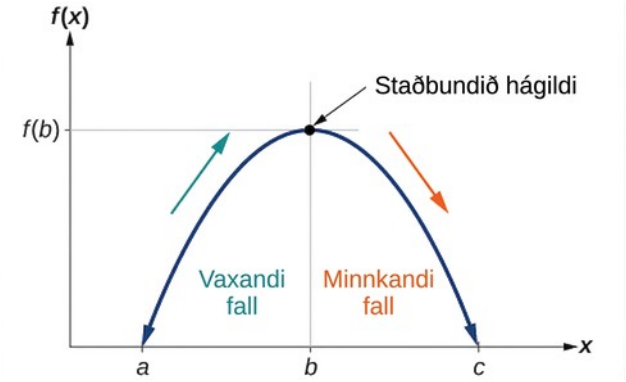
Fall er vitaskuld hvorki vaxandi né minnkandi á bili þar sem það er fast. Fall er heldur hvorki vaxandi né minnkandi í útgildispunkti. Við verðum að tala um staðbundin útgildi því að staðbundið útgildi samkvæmt þessari skilgreiningu er ekki endilega hæsta hágildi eða lægsta lággildi á öllu skilgreiningarmengi fallsins.

Fallið sem sýnt er á mynd 4 hefur staðbundið hágildi 16 þegar $x = -2$. Staðbundið lággildi þess er -16 þegar $x = 2$.



Mynd 4

Til að finna staðbundin hágildi og lággildi á grafi þurfum við að skoða hvar grafið nær hæstu og lægstu punktum sínum innan opins bils. Líkt og toppur rússíbana liggur graf falls hærra í staðbundnu hágildi en í nálægum punktum beggja vegna. Á sama hátt liggur grafið lægra í staðbundnu lággildi en í nálægum punktum. Mynd 5 skýrir þetta fyrir staðbundið hágildi.



Mynd 5 Skilgreining á staðbundnu hágildi

Þessar athuganir leiða til formlegrar skilgreiningar á staðbundnum útgildum.

STAÐBUNDIN LÁGGILDI OG HÁGILDI

Fall f er vaxandi fall á opnu bili ef $f(b)>f(a)$ fyrir sérhver tvö inntaksgildi a og b á bilinu þar sem $b>a$.

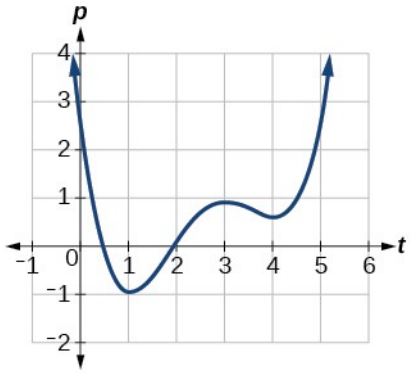
Fall f er minnkandi fall á opnu bili ef $f(b)<f(a)$ fyrir sérhver tvö inntaksgildi a og b á bilinu þar sem $b>a$.

Fall f hefur staðbundið hágildi í punkti b á opnu bili (a,c) ef $f(b)\geq f(x)$ fyrir sérhvern punkt x (x er ekki jafnt b) á bilinu. f hefur staðbundið lággildi í punkti b á (a,c) ef $f(b)\leq f(x)$ fyrir sérhvern punkt x (x er ekki jafnt b) á bilinu.

DÆMI 7

Að finna vaxandi og minnkandi bil á grafi

Tilgreinið bilin þar sem fallið $p(t)$ á mynd 6 virðist vera vaxandi.



Mynd 6

1

Lausn

Við sjáum að fallið er ekki fast á neinu bili. Fallið er vaxandi þar sem grafið hallar upp á við þegar við færum okkur til hægri og minnkandi þar sem grafið hallar niður á við þegar við færum okkur til hægri. Fallið virðist vera vaxandi frá $t=1$ til $t=3$ og frá $t=4$ og áfram.

Með biltáknum segjum við að fallið virðist vera vaxandi á bilinu (1,3) og bilinu $(4,\infty)$.

Greining

Athugið að í þessu dæmi notuðum við opin bil (bil sem innihalda ekki endapunktana) vegna þess að fallið er hvorki vaxandi né minnkandi þegar $t=1$, $t=3$, og $t=4$. Þessir punktar eru staðbundin útgildi (tvö lággildi og eitt hágildi).

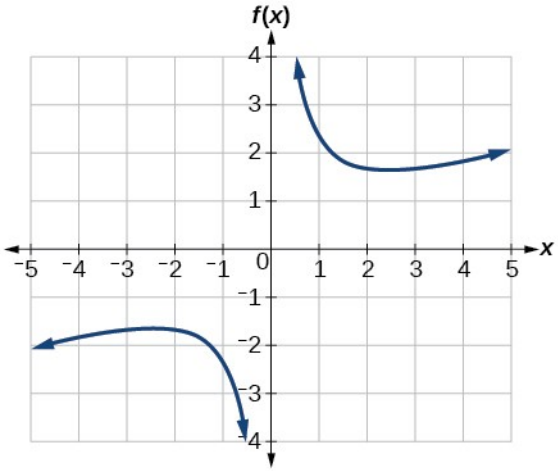
DÆMI 8

Að finna staðbundin útgildi út frá grafi

Teiknið graf fallsins $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{x}{3}$. Notið síðan grafið til að áætla staðbundin útgildi fallsins og ákvarða bilin þar sem fallið er vaxandi.

Lausn

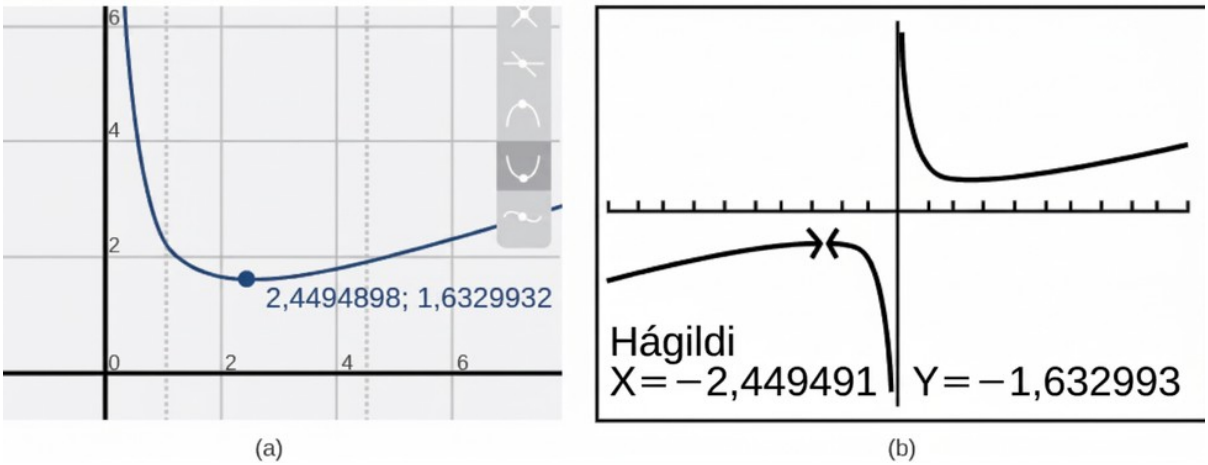
Með aðstoð tækni fáum við graf sem líkist því sem sýnt er á mynd 7. Þar virðist vera lægð, eða staðbundið lággildi, milli $x=2$ og $x=3$, og spegilmyndaður toppur, eða staðbundið hágildi, einhvers staðar milli $x=-3$ og $x=-2$.



Mynd 7

Greining

Flestar grafreiknivélar og grafteikniforrit geta áætlað staðsetningu hágilda og lággilda. Mynd 8 sýnir skjámyndir úr tveimur ólíkum reiknitækjum með mati á staðbundnu hágildi og lággildi.



Mynd 8

Samkvæmt þessu mati er fallið vaxandi á bilunum $(-\infty, -2{,}449)$ og $(2{,}449, \infty)$. Við búumst við að útgildin séu samhverf, en tækin tvö nota ólík nálgunarreiknirit og því ber niðurstöðum þeirra aðeins saman upp að fjórum aukastöfum. (Nákvæm staðsetning útgildanna er $\pm\sqrt{6}$, en til að finna hana þarf stærðfræðigreiningu.)

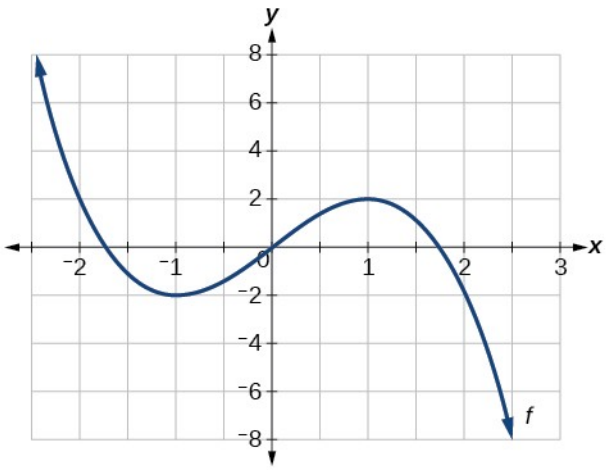
REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Teiknið graf fallsins $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$ og áætlið staðbundin útgildi þess. Notið þau til að ákvarða bilin þar sem fallið er vaxandi og minnkandi.

DÆMI 9

Að finna staðbundin hágildi og lággildi út frá grafi

Finnið öll staðbundin hágildi og lággildi fallsins f sem grafið sýnir á mynd 9.



Mynd 9

Lausn

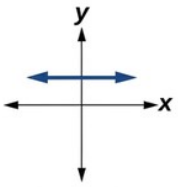
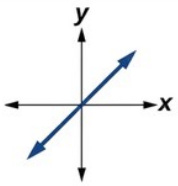
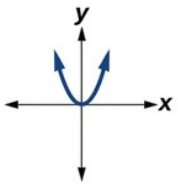
1

Skoðið graf fallsins f. Grafið nær staðbundnu hágildi þegar $x=1$ vegna þess að þar er það hæst innan opins bils umhverfis $x=1$. Staðbundna hágildið er y-hnitið þegar $x=1$, sem er 2.

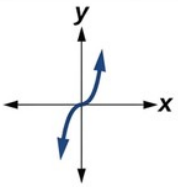
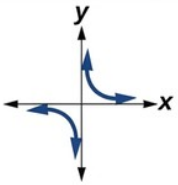
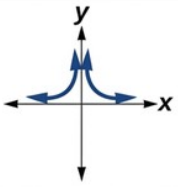
Grafið nær staðbundnu lággildi þegar $x=-1$ vegna þess að þar er það lægst innan opins bils umhverfis $x=-1$. Staðbundna lággildið er y-hnitið þegar $x=-1$, sem er -2.

Greining á vaxandi og minnkandi bilum grunnfalla

Nú snúum við aftur að grunnföllunum og ræðum hegðun grafa þeirra á mynd 10, mynd 11 og mynd 12.

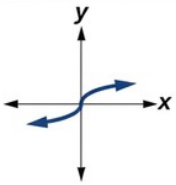
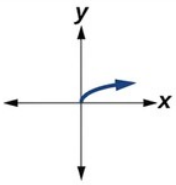
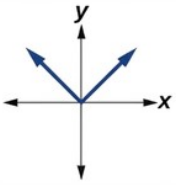
Fall	Vaxandi/minnkandi	Dæmi
Fastafall $f(x) = c$	Hvorki vaxandi né minnkandi	
Samsemdarfall $f(x) = x$	Vaxandi	
Annars stigs fall $f(x) = x^2$	Vaxandi á bilinu $(0, \infty)$ Minnkandi á bilinu $(-\infty, 0)$ Lágmark við $x = 0$	

Mynd 10

Fall	Vaxandi/minnkandi	Dæmi
Þriðja stigs fall $f(x) = x^3$	Vaxandi	
Andhverfufall $f(x) = \frac{1}{x}$	Minnkandi á $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	
Andhverfufall í öðru veldi $f(x) = \frac{1}{x^2}$	Vaxandi á $(-\infty, 0)$ Minnkandi á $(0, \infty)$	

Mynd 11

1

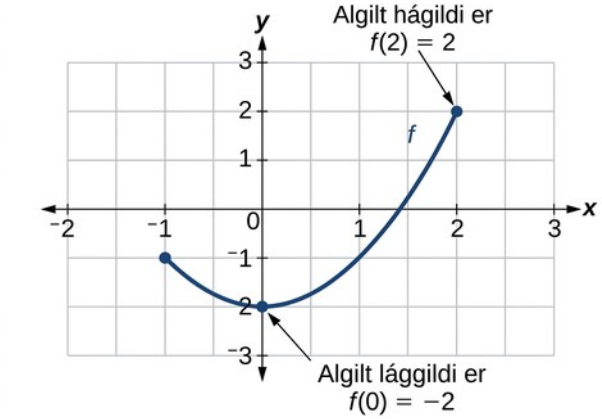
Fall	Vaxandi/minnkandi	Dæmi
Teningsrót $f(x) = \sqrt[3]{x}$	Vaxandi	
Kvaðratrót $f(x) = \sqrt{x}$	Vaxandi á $(0, \infty)$	
Tölugildi $f(x) = \|x\|$	Vaxandi á $(0, \infty)$ Minnkandi á $(-\infty, 0)$	

Mynd 12

Að nota graf til að finna algilt hágildi og algilt lággildi

Það er munur á því að finna hæsta og lægsta punkt grafs á svæði umhverfis opið bil (staðbundið) og að finna hæsta og lægsta punkt grafsins á öllu skilgreiningarmenginu. $y-$hnitin (úttaksgildin) í hæsta og lægsta punktinum kallast algilt hágildi og algilt lággildi, hvort um sig.

Til að finna algild hágildi og lággildi út frá grafi þurfum við að skoða hvar grafið nær hæsta og lægsta punkti sínum á skilgreiningarmengi fallsins. Sjá mynd 13.



Mynd 13

Ekki hafa öll föll algilt hágildi eða lággildi. Grunnfallið $f(x)=x^3$ er eitt slíkt fall.

ALGILD HÁGILDI OG LÁGGILDI

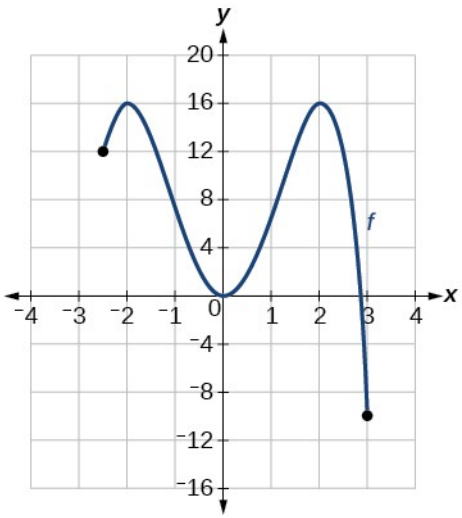
Algilt hágildi fallsins f þegar $x=c$ er $f(c)$ þar sem $f(c)\geq f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f.

Algilt lággildi fallsins f þegar $x=d$ er $f(d)$ þar sem $f(d)\leq f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f.

DÆMI 10

Að finna algild hágildi og lággildi út frá grafi

Finnið öll algild hágildi og lággildi fallsins f sem sýnt er á mynd 14.



Mynd 14

Lausn

Skoðið graf fallsins f. Grafið nær algildu hágildi á tveimur stöðum, þegar $x=-2$ og $x=2$, vegna þess að þar nær grafið hæsta punkti sínum á skilgreiningarmengi fallsins. Algilda hágildið er y-hnitið þegar $x=-2$ og $x=2$, sem er 16.

Grafið nær algildu lággildi þegar $x=3$, vegna þess að þar er það lægst á skilgreiningarmengi fallsins. Algilda lággildið er y-hnitið þegar $x=3$, sem er -10.

MIÐLAR

Skoðið þetta efni á netinu til að fræðast meira um breytingarhraða og æfa útreikninga á honum.

- Meðalbreytingarhraði

Æfingar úr hluta 1.3

1

Hugtakaspurningar

1. Getur meðalbreytingarhraði falls verið fastur?
2. Ef fall f er vaxandi á (a,b) og minnkandi á (b,c), hvað má þá segja um staðbundið útgildi f á (a,c)?
3. Að hvaða leyti eru algilt hágildi og lággildi lík staðbundnum útgildum og að hvaða leyti eru þau ólík?
4. Hvernig er graf tölugildisfallsins samanborið við graf annars stigs fallsins $y=x^2$, með tilliti til vaxandi og minnkandi bila?

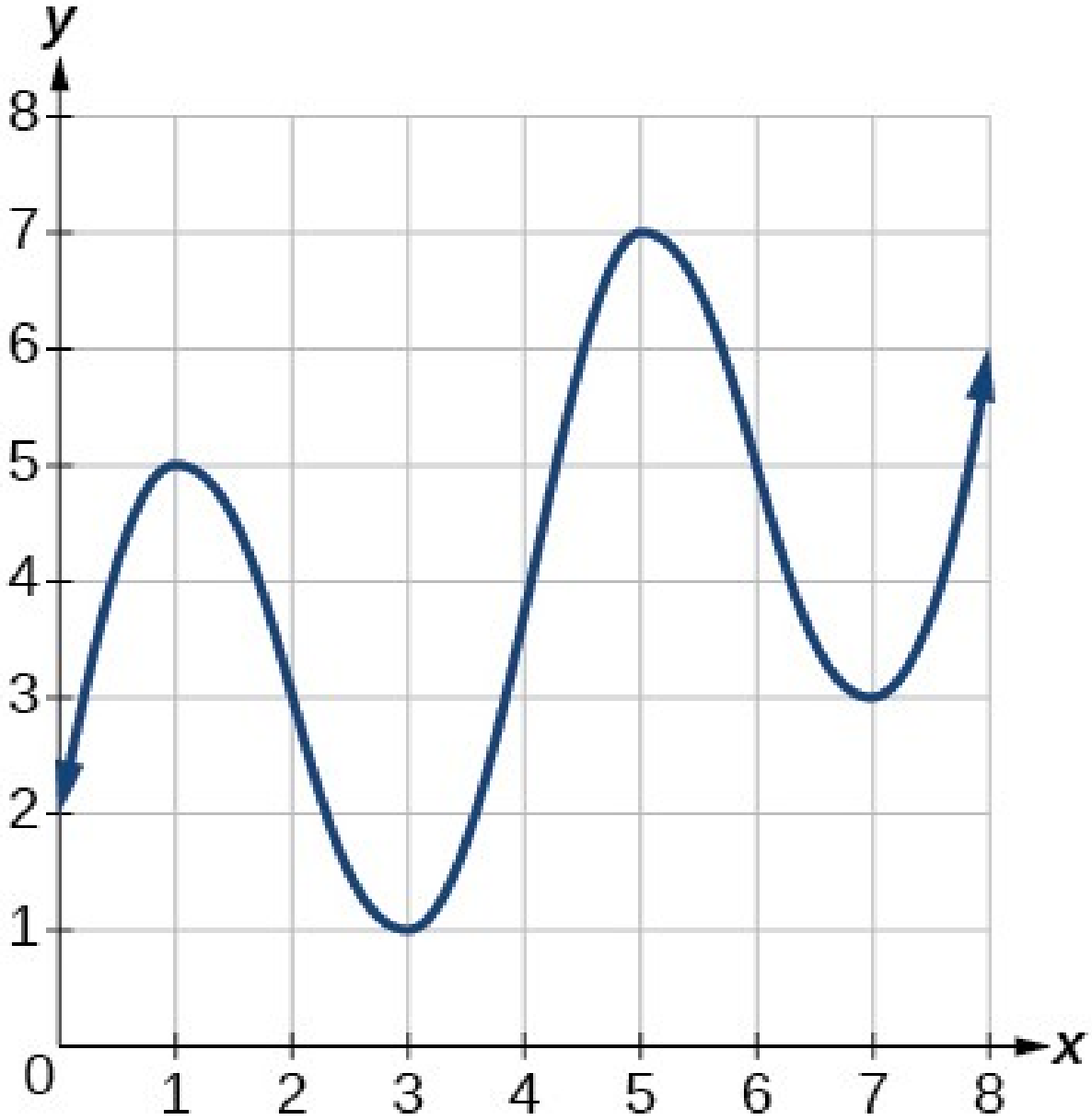
Algebra

Í eftirfarandi dæmum skal finna meðalbreytingarhraða hvers falls á tilgreinda bilinu fyrir rauntölurnar b eða h.

5. $f(x)=4x^2-7$ á $[1,b]$
6. $g(x)=2x^2-9$ á $[4,b]$
7. $p(x)=3x+4$ á $[2,2+h]$
8. $k(x)=4x-2$ á $[3,3+h]$
9. $f(x)=2x^2+1$ á $[x,x+h]$
10. $g(x)=3x^2-2$ á $[x,x+h]$
11. $a(t)=\frac{1}{t+4}$ á $[9,9+h]$
12. $b(x)=\frac{1}{x+3}$ á $[1,1+h]$
13. $j(x)=3x^3$ á $[1,1+h]$
14. $r(t)=4t^3$ á $[2,2+h]$
15. Finnið $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ þegar $f(x)=2x^2-3x$ á $[x,x+h]$

Gröf

Í eftirfarandi dæmum skal skoða graf fallsins f sem sýnt er á mynd 15.



Mynd 15

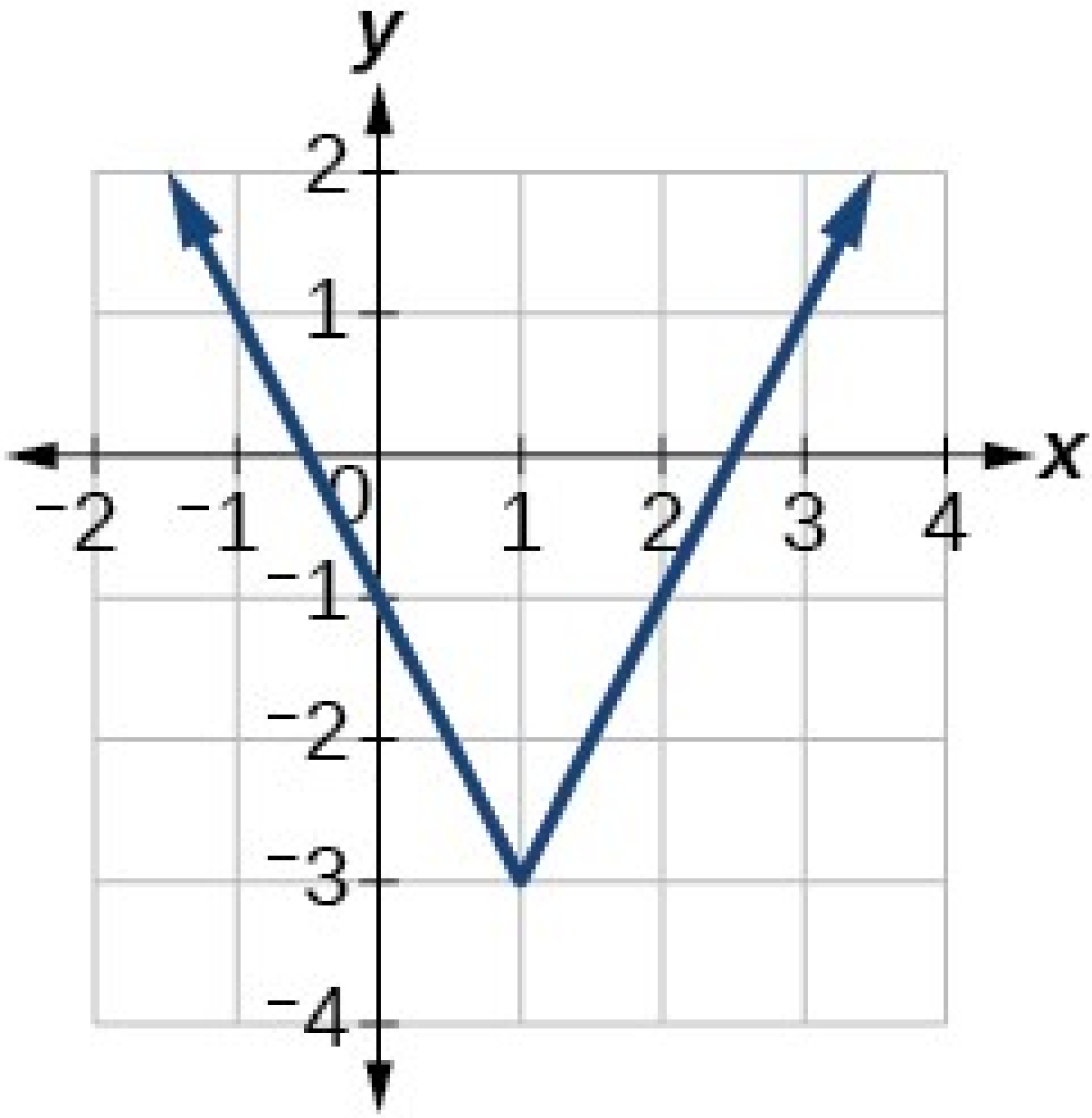
16. Áætlið meðalbreytingarhraðann frá $x=1$ til $x=4$.

17. Áætlið meðalbreytingarhraðann frá $x=2$ til $x=5$.

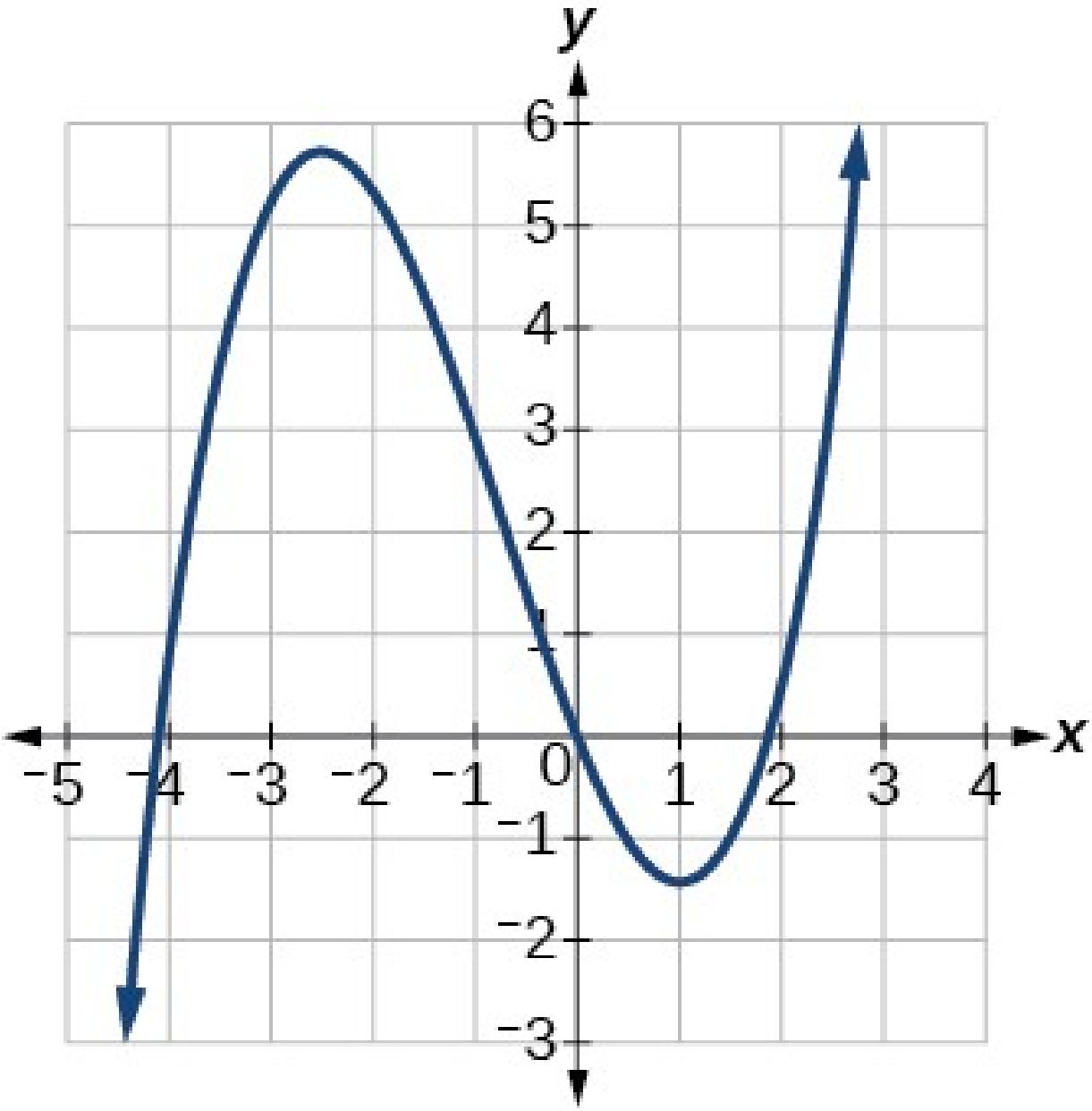
Í eftirfarandi dæmum skal nota graf hvers falls til að áætla bilin þar sem fallið er vaxandi eða minnkandi.

18.

1

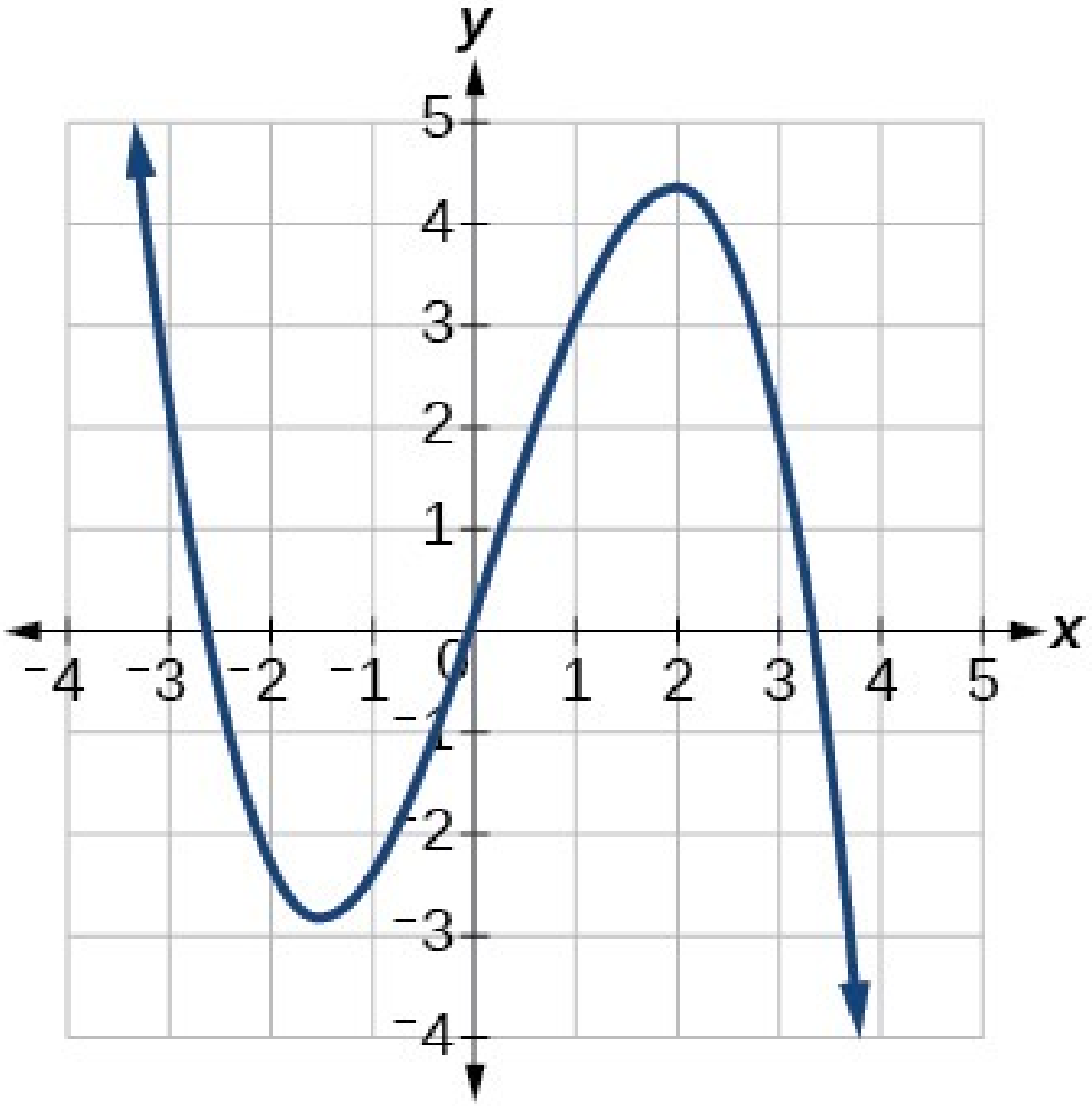


19.

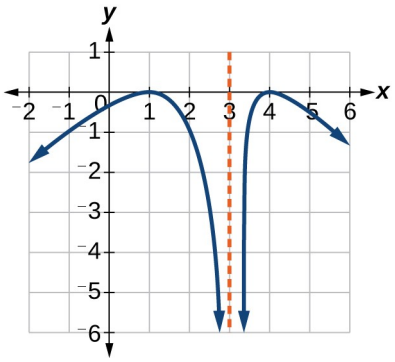


20.

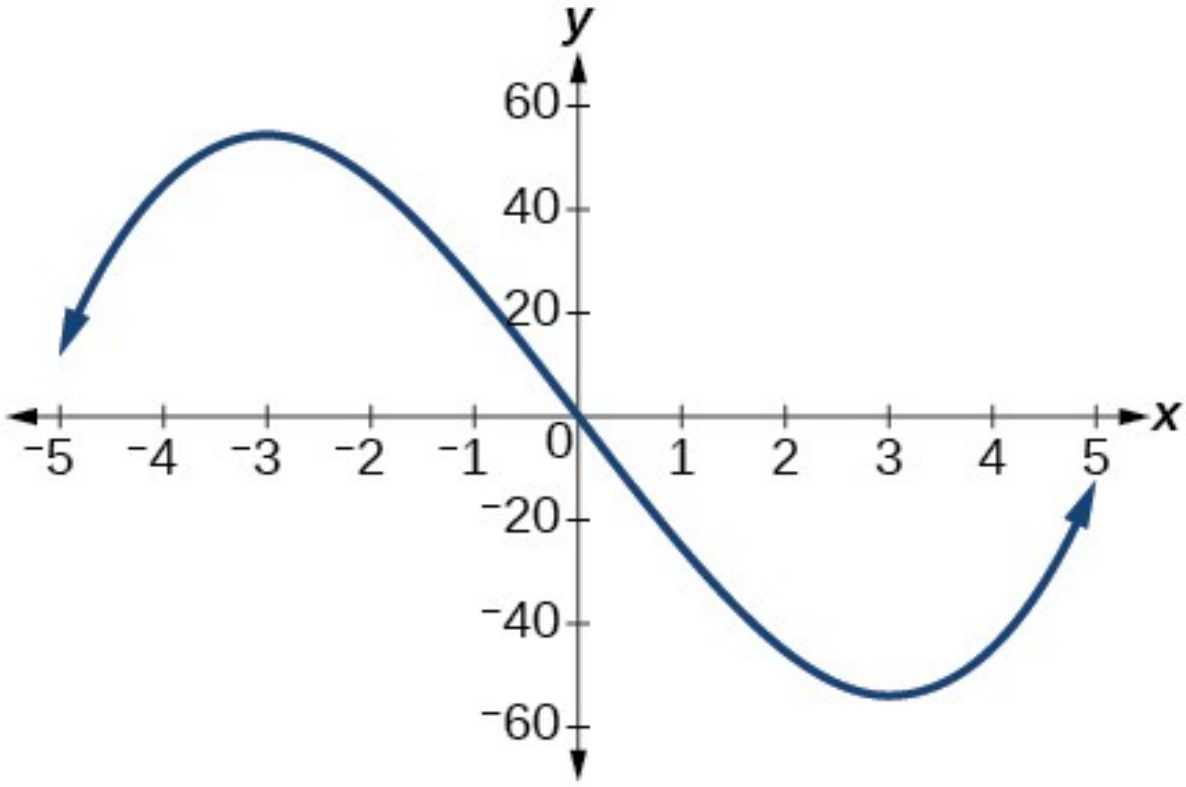
1



21.



Í eftirfarandi dæmum skal skoða grafið á mynd 16.



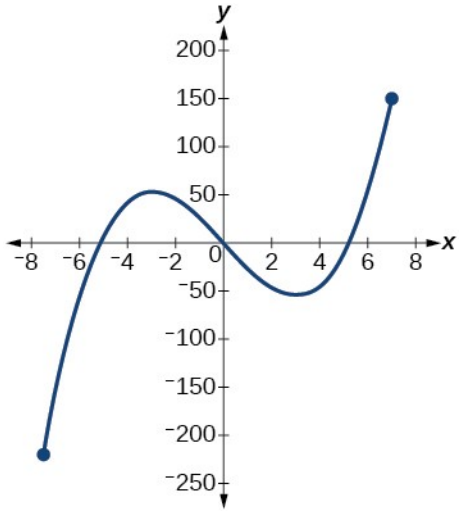
Mynd 16

22. Áætlið bilin þar sem fallið er vaxandi eða minnkandi.

23. Áætlið punktinn eða punktana þar sem graf fallsins f hefur staðbundið hágildi eða lággildi.

Í eftirfarandi dæmum skal skoða grafið á mynd 17.

1



Mynd 17

24. Ef allt graf fallsins er sýnt skal áætla bilin þar sem fallið er vaxandi eða minnkandi.

25. Ef allt graf fallsins er sýnt skal áætla algilt hágildi og algilt lággildi.

Töluleg dæmi

26. Tafla 3 sýnir árlega sölu vöru (í milljónum dala) frá 1998 til 2006. Hver var meðalbreytingarhraði árlegrar sölu (a) frá 2001 til 2002 og (b) frá 2001 til 2004?

Tafla 3

Ár	Sala (milljónir dala)
1998	201
1999	219
2000	233
2001	243
2002	249
2003	251
2004	249
2005	243
2006	233

27. Tafla 4 sýnir íbúafjölda bæjar (í þúsundum) frá 2000 til 2008. Hver var meðalbreytingarhraði íbúafjöldans (a) frá 2002 til 2004 og (b) frá 2002 til 2006?

Tafla 4

Ár	Íbúafjöldi (þúsundir)
2000	87
2001	84
2002	83
2003	80
2004	77
2005	76
2006	78
2007	81
2008	85

Í eftirfarandi dæmum skal finna meðalbreytingarhraða hvers falls á tilgreinda bilinu.

28. $f(x)=x^2$ á $[1,5]$

29. $h(x)=5-2x^2$ á $[-2,4]$

30. $q(x)=x^3$ á $[-4,2]$

31. $g(x)=3x^3-1$ á $[-3,3]$

32. $y=\frac{1}{x}$ á $[1,\ 3]$

33. $p(t)=\frac{(t^2-4)(t+1)}{t^2+3}$ á $[-3,1]$

34. $k(t)=6t^2+\frac{4}{t^3}$ á $[-1,3]$

Tækni

Í eftirfarandi dæmum skal nota grafteikniforrit til að áætla staðbundin útgildi hvers falls og bilin þar sem fallið er vaxandi og minnkandi.

35.

$$f(x)=x^4-4x^3+5$$

36.

$$h(x)=x^5+5x^4+10x^3+10x^2-1$$

1

37.

$$g(t)=t\sqrt{t+3}$$

38.

$$k(t)=3t^{\frac{2}{3}}-t$$

39.

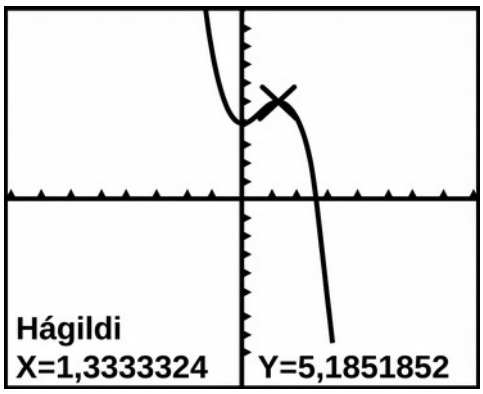
$$m(x)=x^4+2x^3-12x^2-10x+4$$

40.

$$n(x)=x^4-8x^3+18x^2-6x+2$$

Viðbótardæmi

41. Graf fallsins f er sýnt á mynd 18.



Mynd 18

Hvert af eftirfarandi lýsir punktinum $(1{,}333;\ \ 5{,}185)$ samkvæmt skjámynd reiknivélarinnar?

1. ⓐ afstætt (staðbundið) hágildi fallsins
2. ⓑ hvirfilpunktur fallsins
3. ⓒ algilt hágildi fallsins
4. ⓓ núllstöð fallsins

42. Látum $f(x)=\frac{1}{x}$. Finnið tölu c þannig að meðalbreytingarhraði fallsins f á bilinu $(1,c)$ sé $-\frac{1}{4}$.

43. Látum $f(x)=\frac{1}{x}$. Finnið töluna b þannig að meðalbreytingarhraði fallsins f á bilinu $(2,b)$ sé $-\frac{1}{10}$.

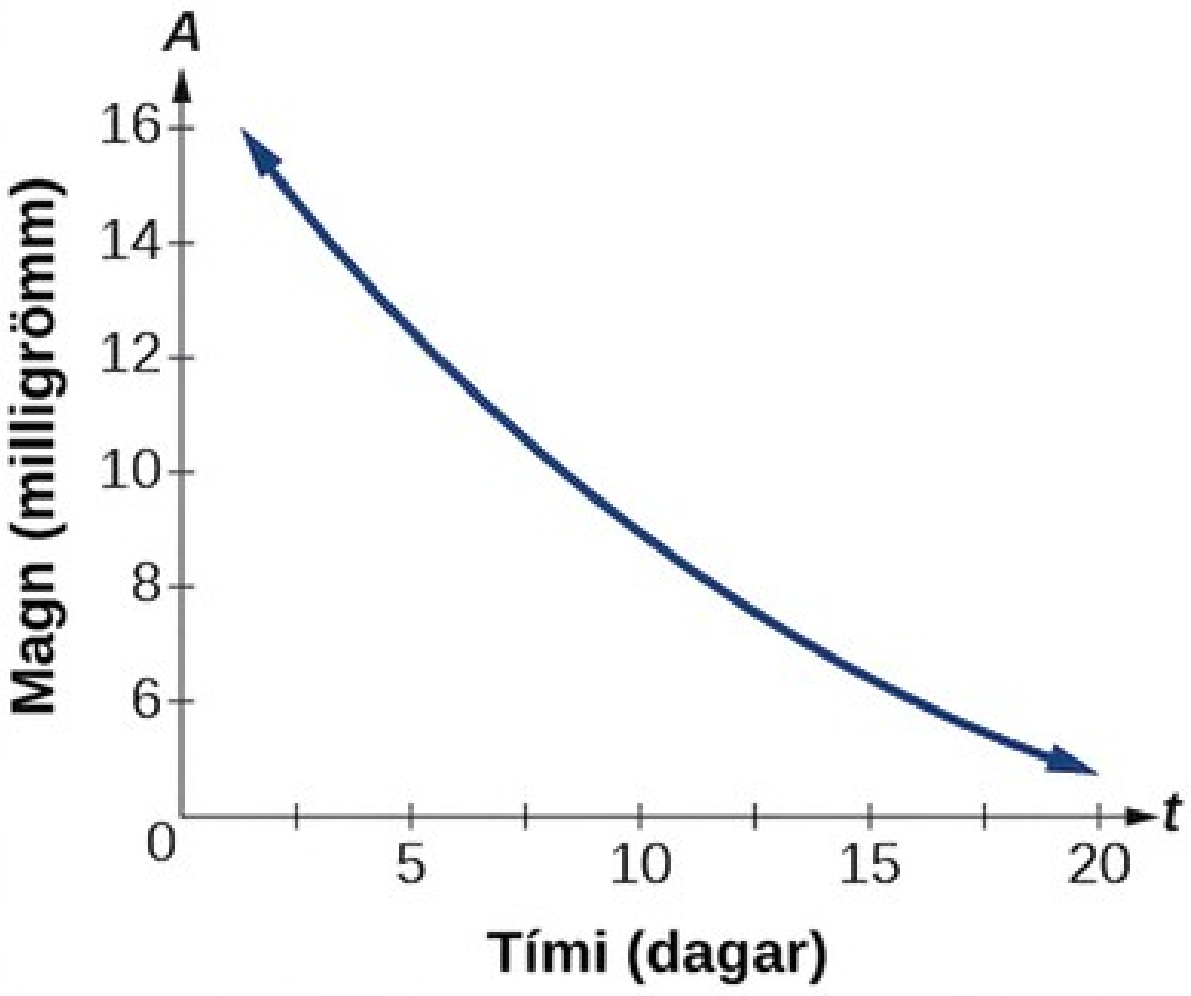
Notkun í raunverulegum aðstæðum

44. Í upphafi ferðar sýndi vegalengdarmælir bíls 21.395. Í lok ferðarinnar, 13,5 klukkustundum síðar, sýndi hann 22.125. Gerið ráð fyrir að kvarði mælisins sé í mílum. Hver var meðalhraði bílsins í ferðinni?

45. Ökumaður stöðvaði á bensínstöð til að fylla eldsneytisgeyminn. Hann leit á úrið sitt og klukkan var nákvæmlega 3:40 síðdegis. Þá byrjaði hann að dæla bensíni í geyminn. Nákvæmlega klukkan 3:44 var geymirinn fullur og ökumaðurinn sá að hann hafði dælt 10,7 gallonum. Hver var meðalrennslishraði bensínsins inn í geyminn?

46. Nálægt yfirborði tunglsins er fallvegalengd hlutar fall af tíma. Hún er gefin með $d\,(t)=2{,}6667\ t^2$, þar sem t er mælt í sekúndum og $d(t)$ í fetum. Hlutur er látinn falla úr tiltekinni hæð. Finnið meðalhraða hans frá $t=1$ til $t=2$.

47. Grafið á mynd 19 sýnir hrörnun geislavirks efnis yfir t daga.



Mynd 19

Notið grafið til að áætla meðalhrörnunarhraðann frá $t=5$ til $t=15$.

1.4 Samskeyting falla

1

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Tengja föll saman með algebruaðgerðum.
- Búa til nýtt fall með samskeytingu falla.
- Reikna gildi samskeyttra falla.
- Finna skilgreiningarmengi samskeytts falls.
- Þátta samskeytt fall í þáttaföll þess.

Gerum ráð fyrir að við viljum reikna hvað kostar að hita hús á tilteknum degi ársins. Kostnaðurinn við að hita húsið fer eftir meðalhita dagsins og meðalhitinn fer aftur eftir því hvaða dagur ársins er. Athugið að hér höfum við skilgreint tvenn vensl: Kostnaðurinn fer eftir hitastiginu og hitastigið fer eftir deginum.

Með lýsandi breytum getum við táknað þessi tvö föll. Fallið $C(T)$ gefur kostnaðinn C við að hita hús þegar meðalhiti dagsins er T gráður á Celsíus. Fallið $T(d)$ gefur meðalhita á degi d ársins. Fyrir tiltekinn dag merkir $\text{Kostnaður} = C(T(d))$ að kostnaðurinn fari eftir hitastiginu sem aftur fer eftir degi ársins. Við getum því reiknað gildi kostnaðarfallsins við hitastigið $T(d)$. Til dæmis gætum við reiknað $T(5)$ til að finna meðalhita á 5. degi ársins. Síðan gætum við reiknað gildi kostnaðarfallsins við það hitastig. Við ritum það $C(T(5))$.



Með því að tengja þessi tvenn vensl saman í eitt fall höfum við samskeytt föll, en það er viðfangsefni þessa hluta.

Að tengja föll saman með algebruaðgerðum

Samskeyting falla er aðeins ein leið til að tengja saman föll sem þegar eru til. Önnur leið er að beita venjulegum algebruaðgerðum á föllin, svo sem samlagningu, frádrætti, margföldun og deilingu. Þá beitum við aðgerðunum á úttaksgildi fallanna og skilgreinum niðurstöðuna sem úttaksgildi nýja fallsins.

Gerum ráð fyrir að við þurfum að leggja saman tvo talnadálka sem sýna aðskildar árstekjur hjóna yfir nokkur ár, þannig að niðurstaðan verði heildartekjur heimilisins. Við viljum gera þetta fyrir hvert ár, leggja aðeins saman tekjur þess árs og safna síðan öllum gögnunum í nýjan dálk. Ef $w(y)$ eru tekjur konunnar og $h(y)$ tekjur mannsins á ári y, og við látum T tákna heildartekjurnar, getum við skilgreint nýtt fall.

$$T(y) = h(y) + w(y)$$

Ef þetta gildir fyrir hvert ár getum við einbeitt okkur að venslunum milli fallanna án þess að vísa til tiltekins árs og ritað

$$T = h + w$$

Á sama hátt og fyrir summu tveggja falla getum við skilgreint mismuna-, margfeldis- og kvótafall fyrir hvaða tvö föll sem er, ef þau hafa sams konar inntak (ekki endilega tölur) og sams konar úttak. Úttakið verður þó að vera tölur svo að hægt sé að nota venjulegar algebruaðgerðir. Við samlagningu og frádrátt þarf það líka að hafa sömu einingar eða vera einingarlaust. Þannig getum við lagt saman föll, dregið þau hvert frá öðru, margfaldað þau og deilt þeim.

Fyrir tvö föll $f(x)$ og $g(x)$ með rauntöluúttak skilgreinum við nýju föllin $f+g$, $f-g$, fg, og $\frac{f}{g}$ með venslunum

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\\ \left(\tfrac{f}{g}\right)(x) &= \tfrac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

DÆMI 1

Að beita algebruaðgerðum á föll

Finnið og einfaldið föllin $(g-f)(x)$ og $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, þegar $f(x)=x-1$ og $g(x)=x^2-1$. Eru þau sama fallið?

Lausn

Byrjið á að rita almenna formið og setjið síðan gefnu föllin inn.

$$\begin{aligned}(g-f)(x) &= g(x)-f(x)\\ (g-f)(x) &= x^2-1-(x-1)\\ (g-f)(x) &= x^2-x\\ (g-f)(x) &= x(x-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{g(x)}{f(x)}\\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{x^2-1}{x-1}\\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \quad \text{þar sem } x\neq 1\\ \left(\frac{g}{f}\right)(x) &= x+1\end{aligned}$$

Nei, föllin eru ekki eins.

1

Athugið: Fyrir $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, er skilyrðið $x \neq 1$ nauðsynlegt vegna þess að þegar $x = 1$, er nefnarinn jafn 0 og fallið því óskilgreint.

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Finnið og einfaldið föllin $(f\,g)(x)$ og $(f - g)(x)$.

$$f(x) = x - 1 \quad \text{og} \quad g(x) = x^2 - 1$$

Eru þau sama fallið?

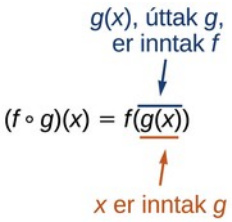
Að búa til fall með samskeytingu falla

Þegar við beitum algebruaðgerðum á föll verða þau að nýju falli, en einnig má búa til föll með því að samskeyta önnur föll. Þegar við vildum reikna hitunarkostnað út frá degi ársins bjuggum við til nýtt fall sem tekur við degi sem inntaki og skilar kostnaði sem úttaki. Ferlið þar sem föll eru tengd þannig að úttak eins falls verður inntak annars kallast samskeyting falla. Fallið sem myndast kallast samskeytt fall. Við táknum þessa tengingu svona:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Við lesum vinstri hliðina sem "f samskeytt g í x," og hægri hliðina sem "f af g af x." Báðar hliðar jöfnunnar hafa sömu stærðfræðilegu merkingu og eru jafnar. Opna hringtáknið $\circ$ kallast samskeytingarvirki. Við notum þetta virki einkum þegar við viljum leggja áherslu á venslin milli fallanna sjálfra án þess að vísa til tiltekins inntaksgildis. Samskeyting er tvíundaraðgerð sem tekur tvö föll og myndar nýtt fall, líkt og samlagning eða margföldun tekur tvær tölur og gefur nýja tölu. Mikilvægt er þó að rugla samskeytingu falla ekki saman við margföldun því eins og við sáum hér að framan gildir í flestum tilvikum $f(g(x)) \neq f(x)g(x)$.

Einnig er mikilvægt að skilja röð aðgerða þegar gildi samskeytts falls er reiknað. Við fylgjum venjulegri svigareglu, byrjum á innstu svigunum og vinnum okkur síðan út á við. Í jöfnunni hér að framan tekur fallið g fyrst við inntakinu x og skilar úttakinu $g(x)$. Síðan tekur fallið f við $g(x)$ sem inntaki og skilar úttakinu $f(g(x))$.



Almennt eru $f \circ g$ og $g \circ f$ ólík föll. Með öðrum orðum gildir í mörgum tilvikum að $f(g(x)) \neq g(f(x))$ fyrir öll x. Við munum einnig sjá að stundum er aðeins hægt að samskeyta tvö föll í annarri röðinni.

Ef til dæmis $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 2$, þá er

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x+2) \\ &= (x+2)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(x^2) \\ &= x^2 + 2 \end{aligned}$$

Þessar stæður eru ekki jafnar fyrir öll gildi x, svo föllin tvö eru ekki eins. Það skiptir ekki máli þótt stæðurnar séu jafnar fyrir eitt stakt inntaksgildi, $x = -\frac{1}{2}$.

Athugið að myndmengi innra fallsins (fallsins sem fyrst er reiknað) þarf að vera innan skilgreiningarmengis ytra fallsins. Óformlega sagt þurfa inntak og úttak að passa saman svo að samskeytingin sé merkingarbær.

SAMSKEYTING FALLA

Þegar úttak eins falls er notað sem inntak annars köllum við aðgerðina í heild samskeytingu falla. Fyrir hvert inntak x og föllin f og g, skilgreinir aðgerðin samskeytt fall, sem við ritum $f \circ g$ þannig að

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Skilgreiningarmengi samskeytta fallsins $f \circ g$ er mengi allra x þannig að x sé í skilgreiningarmengi g og $g(x)$ sé í skilgreiningarmengi f.

Mikilvægt er að átta sig á að margfeldi fallanna $f\,g$ er ekki það sama og samskeyting falla $f(g(x))$, því almennt gildir $f(x)g(x) \neq f(g(x))$.

1

DÆMI 2

Að ákvarða hvort samskeyting falla uppfylli víxlreglu

Notið gefnu föllin til að finna $f(g(x))$ og $g(f(x))$. Ákvarðið hvort samskeyting fallanna uppfylli víxlreglu.

$$f(x)=2x+1 \quad g(x)=3-x$$

Lausn

Byrjum á að setja $g(x)$ inn í $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 2(3-x)+1 \\ &= 6-2x+1 \\ &= 7-2x \end{aligned}$$

Nú getum við sett $f(x)$ inn í $g(x)$.

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 3-(2x+1) \\ &= 3-2x-1 \\ &= -2x+2 \end{aligned}$$

Við fáum $g(f(x)) \neq f(g(x))$, svo samskeyting falla uppfyllir ekki víxlreglu.

DÆMI 3

Að túlka samskeytt föll

Fallið $c(s)$ gefur fjölda hitaeininga sem brenna við að gera s kviðæfingar og $s(t)$ gefur fjölda kviðæfinga sem einstaklingur getur gert á t mínútum. Túlkið $c(s(3))$.

Lausn

Innri stæðan í samskeytingunni er $s(3)$. Inntak s-fallsins er tími, svo $t=3$ táknar 3 mínútur og $s(3)$ er fjöldi kviðæfinga sem gerðar eru á 3 mínútum.

Þegar $s(3)$ er notað sem inntak í fallið $c(s)$ fæst fjöldi hitaeininga sem brenna við þann fjölda kviðæfinga sem hægt er að gera á 3 mínútum, eða einfaldlega fjöldi hitaeininga sem brenna á 3 mínútum (við kviðæfingar).

DÆMI 4

Að kanna röð samskeytingar falla

Gerum ráð fyrir að $f(x)$ gefi fjölda mílna sem aka má á x klukkustundum og $g(y)$ gefi fjölda gallona af bensíni sem þarf til að aka y mílur. Hvor þessara stæða er merkingarbær: $f(g(y))$ eða $g(f(x))$?

Lausn

Fallið $y=f(x)$ gefur sem úttak fjölda mílna sem eknar eru á tilteknum fjölda klukkustunda.

$$\text{fjöldi mílna} = f(\text{fjöldi klukkustunda})$$

Fallið $g(y)$ gefur sem úttak fjölda gallona sem fara í að aka tiltekinn fjölda mílna. Það merkir:

$$\text{fjöldi gallona} = g(\text{fjöldi mílna})$$

Stæðan $g(y)$ tekur við mílum sem inntaki og skilar fjölda gallona sem úttaki. Fallið $f(x)$ krefst fjölda klukkustunda sem inntaks. Það er ekki merkingarbært að setja fjölda gallona inn í fallið. Stæðan $f(g(y))$ er merkingarlaus.

Stæðan $f(x)$ tekur við klukkustundum sem inntaki og skilar fjölda ekinna mílna sem úttaki. Fallið $g(y)$ krefst fjölda mílna sem inntaks. Það er merkingarbært að nota $f(x)$ (eknar mílur) sem inntaksgildi í $g(y)$, þar sem fjöldi bensíngallona fer eftir eknum mílum. Stæðan $g(f(x))$ er merkingarbær og gefur fjölda bensíngallona g, sem þarf til að aka tiltekinn fjölda mílna $f(x)$, á x klukkustundum.

SPURT OG SVARAÐ

Eru einhverjar aðstæður þar sem bæði $f(g(y))$ og $g(f(x))$ væru merkingarbærar eða gagnlegar stæður?

Já. Fyrir mörg föll í hreinni stærðfræði eru báðar samskeytingarnar merkingarbærar þótt þær myndi yfirleitt ólík ný föll. Í raunhæfum dæmum geta föll með sömu einingar á inntaki og úttaki einnig gefið samskeytingar sem eru merkingarbærar í hvorri röðinni sem er.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Þyngdarkrafturinn á reikistjörnu í fjarlægðinni r frá sólu er gefinn með fallinu $G(r)$. Hröðun reikistjörnu sem kraftur F verkar á er gefin með fallinu $a(F)$. Myndið merkingarbæra samskeytingu þessara tveggja falla og skýrið hvað hún merkir.

Að reikna gildi samskeyttra falla

Þegar við höfum samskeytt tvö föll í nýtt fall þurfum við að geta reiknað gildi þess fyrir hvert inntak í skilgreiningarmengi þess. Við notum tilteknar tölur sem inntak þegar föllin eru gefin með töflum, gröfum eða formúlum. Þegar föllin eru gefin með formúlum notum við einnig breytur sem inntak. Í hverju tilviki reiknum við fyrst gildi innra fallsins fyrir upphaflega inntakið og notum síðan úttak innra fallsins sem inntak ytra fallsins.

1

Að reikna gildi samskeyttra falla með töflum

Þegar föll eru gefin með töflum lesum við inntaks- og úttaksgildi úr töflureitunum og vinnum alltaf innan frá og út. Fyrst reiknum við gildi innra fallsins og notum síðan úttak þess sem inntak ytra fallsins.

DÆMI 5

Að nota töflu til að reikna gildi samskeytts falls

Notið töflu 1 til að reikna $f(g(3))$ og $g(f(3))$.

Tafla 1

x	$f(x)$	$g(x)$
1	6	3
2	8	5
3	3	2
4	1	7

Lausn

Til að reikna $f(g(3))$, byrjum við innst með inntaksgildið 3. Síðan reiknum við innri stæðuna $g(3)$ með töflunni sem skilgreinir fallið g: $g(3)=2$. Þá getum við notað niðurstöðuna sem inntak í fallið f, þannig að $g(3)$ er skipt út fyrir 2 og við fáum $f(2)$. Með töflunni sem skilgreinir fallið f, sjáum við síðan að $f(2)=8$.

$$g(3) = 2$$
$$f(g(3)) = f(2) = 8$$

Til að reikna $g(f(3))$, reiknum við fyrst innri stæðuna $f(3)$ með fyrri töflunni: $f(3)=3$. Síðan getum við notað töfluna fyrir g, til að reikna

$$g(f(3))=g(3)=2$$

Tafla 2 sýnir samskeyttu föllin $f \circ g$ og $g \circ f$ á töfluformi.

Tafla 2

x	$g(x)$	$f(g(x))$	$f(x)$	$g(f(x))$
3	2	8	3	2

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Notið töflu 1 til að reikna $f(g(1))$ og $g(f(4))$.

Að reikna gildi samskeyttra falla með gröfum

Þegar einstök föll eru gefin með gröfum reiknum við gildi samskeyttra falla á svipaðan hátt og þegar töflur eru notaðar. Við lesum inntaks- og úttaksgildin, en nú af $x-$ og $y-$ ásum grafanna.

AÐFERÐ

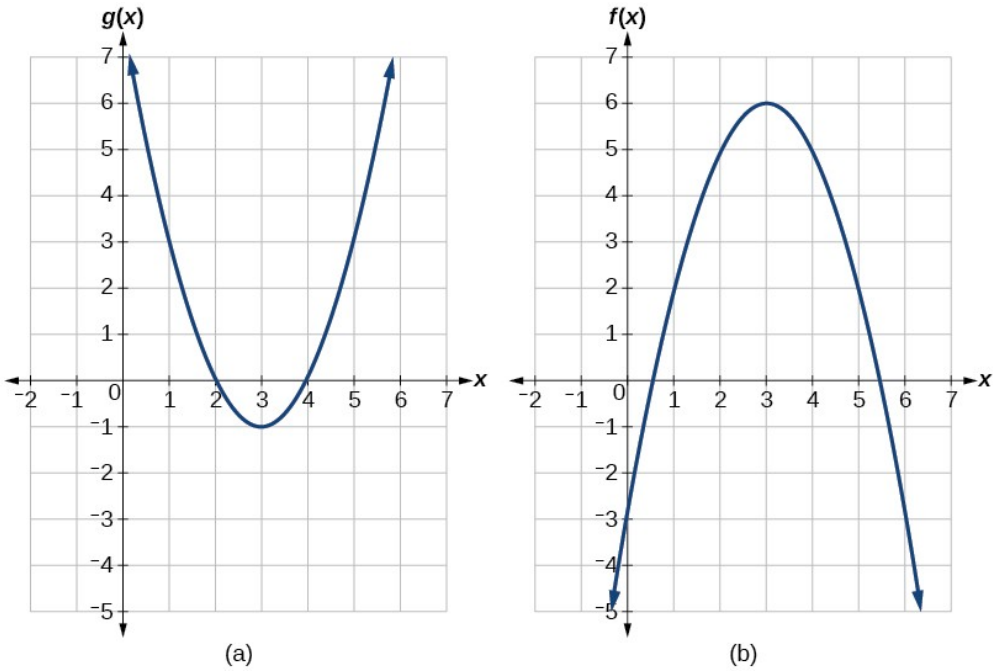
Reikna gildi samskeytts falls út frá gröfum einstakra falla þess og upplýsingunum sem gröfin gefa.

1. Finnið gefið inntak innra fallsins á $x-$ ás grafs þess.
2. Lesið úttak innra fallsins af $y-$ ás grafs þess.
3. Finnið úttak innra fallsins á $x-$ ás grafs ytra fallsins.
4. Lesið úttak ytra fallsins af $y-$ ás grafs þess. Þetta er úttak samskeytta fallsins.

DÆMI 6

Að nota graf til að reikna gildi samskeytts falls

Notið mynd 1 til að reikna $f\left(g\left(1\right)\right)$.

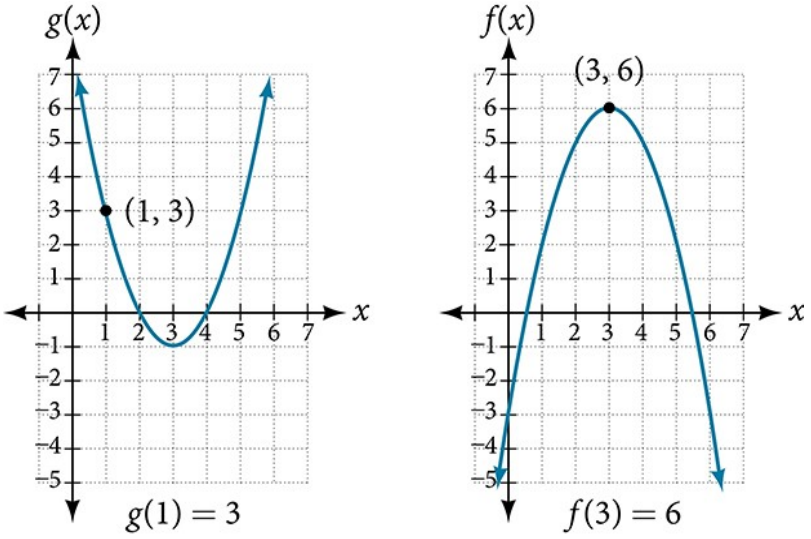


Mynd 1. Gröf fallanna g og f sem notuð eru til að finna gildi samskeytts falls.

Lausn

Til að reikna $f\left(g\left(1\right)\right)$, byrjum við á innri stæðunni. Sjá mynd 2.

1



Mynd 2. Punktarnir (1, 3) á grafi g og (3, 6) á grafi f sýna hvernig úttak fyrra fallsins verður inntak þess síðara.

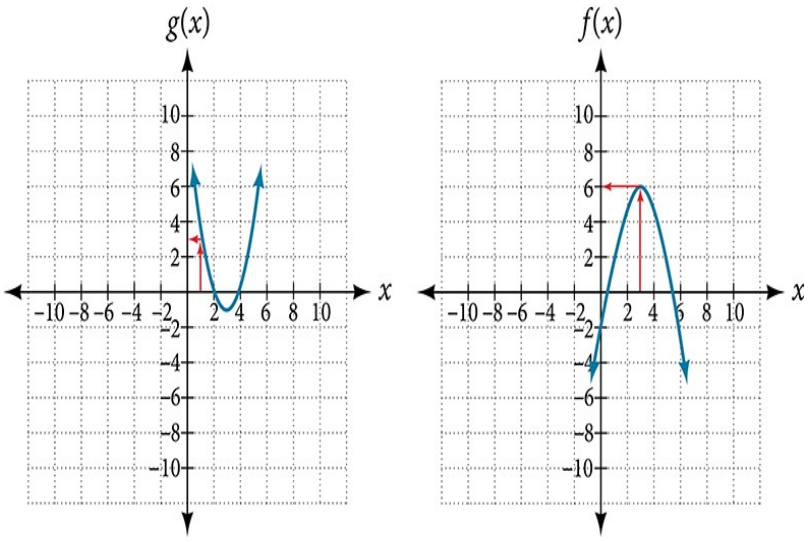
Við reiknum $g(1)$ með grafi $g(x)$, finnum inntakið 1 á $x-$ ásnum og lesum úttaksgildi grafsins við það inntak. Hér er $g(1)=3$. Við notum þetta gildi sem inntak í fallið f.

$$f(g(1))=f(3)$$

Síðan getum við reiknað gildi samskeytta fallsins með því að skoða graf $f(x)$, finna inntakið 3 á $x-$ ásnum og lesa úttaksgildi grafsins við þetta inntak. Hér er $f(3)=6$, svo $f(g(1))=6$.

Greining

Mynd 3 sýnir hvernig merkja má örvar á gröfin til að rekja leiðina frá inntaksgildi að úttaksgildi.



Mynd 3. Örvar sýna hvernig gildi samskeytts falls er lesið af gröfum g og f.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Notið mynd 1 til að reikna $g(f(2))$.

Að reikna gildi samskeyttra falla með formúlum

Sama regla gildir þegar við reiknum gildi samskeytts falls út frá formúlum, hvort sem við höfum búið þær til sjálf eða fengið þær gefnar: Við vinnum innan frá og út. Inntaksgildi ytra fallsins verður úttaksgildi innra fallsins, en það getur verið tala, heiti breytu eða flóknari stæða.

Þótt við getum samskeytt föllin fyrir hvert einstakt inntaksgildi er stundum gagnlegt að finna eina formúlu sem reiknar niðurstöðu samskeytingarinnar $f(g(x))$. Til þess útvíkkum við hugmyndina um að reikna gildi falls. Rifjum upp að þegar við reiknum gildi falls á borð við $f(t)=t^2-t$, setjum við gildið innan sviganna inn í formúluna alls staðar þar sem inntaksbreytan kemur fyrir.

AÐFERÐ

Reikna gildi samskeytts falls þegar formúla þess er gefin.

1. Reiknið gildi innra fallsins með gefna inntaksgildinu eða breytunni.
2. Notið úttakið sem fæst sem inntak í ytra fallið.

DÆMI 7

Að reikna samskeytingu falla sem gefin eru með formúlum fyrir tölulegt inntak

Gefin eru föllin $f(t)=t^2-t$ og $h(x)=3x+2$, og reikna á $f(h(1))$.

Lausn

Innri stæðan er $h(1)$, svo að við byrjum á að reikna gildi $h(x)$ þegar inntakið er 1.

$$h(1) = 3(1) + 2$$
$$h(1) = 5$$

Þá er $f(h(1))=f(5)$, svo við reiknum gildi $f(t)$ fyrir inntakið 5.

$$f(h(1)) = f(5)$$
$$f(h(1)) = 5^2 - 5$$
$$f(h(1)) = 20$$

Greining

Það skiptir engu máli hvað inntaksbreyturnar t og x heita í þessu dæmi því að við reiknuðum gildin fyrir tilteknar tölur.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

1

Gefin eru föllin $f(t)=t^2-t$ og $h(x)=3x+2$, og reikna á

1. ⓐ $h(f(2))$
2. ⓑ $h(f(-2))$

Að finna skilgreiningarmengi samskeytts falls

Eins og áður hefur komið fram ræðst skilgreiningarmengi samskeytts falls á borð við $f \circ g$ af skilgreiningarmengi g og skilgreiningarmengi f. Mikilvægt er að vita hvenær hægt er að nota samskeytt fall og hvenær ekki, það er að þekkja skilgreiningarmengi falls á borð við $f \circ g$. Gerum ráð fyrir að við þekkjum skilgreiningarmengi fallanna f og g hvort í sínu lagi. Ef við ritum samskeytta fallið fyrir inntak x sem $f(g(x))$, sjáum við strax að x þarf að vera í skilgreiningarmengi g svo stæðan sé merkingarbær, því annars getum við ekki reiknað gildi innra fallsins. Við sjáum einnig að $g(x)$ þarf að vera í skilgreiningarmengi f, því annars er ekki hægt að reikna gildi síðara fallsins í $f(g(x))$ og stæðan er enn óskilgreind. Skilgreiningarmengi $f \circ g$ inniheldur því aðeins þau inntök úr skilgreiningarmengi g sem gefa úttak úr g sem tilheyrir skilgreiningarmengi f. Athugið að skilgreiningarmengi f samskeytts g er mengi allra x þannig að x sé í skilgreiningarmengi g og $g(x)$ sé í skilgreiningarmengi f.

SKILGREININGARMENGI SAMSKEYTTS FALLS

Skilgreiningarmengi samskeytta fallsins $f(g(x))$ er mengi þeirra inntaka x í skilgreiningarmengi g sem gera $g(x)$ að staki í skilgreiningarmengi f.

AÐFERÐ

Þegar samskeytingin $f(g(x))$, er gefin skal ákvarða skilgreiningarmengi hennar.

1. Finnið skilgreiningarmengi g.
2. Finnið skilgreiningarmengi f.
3. Finnið þau inntök x í skilgreiningarmengi g sem gera $g(x)$ að staki í skilgreiningarmengi f. Útilokið með öðrum orðum þau inntök x úr skilgreiningarmengi g sem gera $g(x)$ ekki að staki í skilgreiningarmengi f. Mengið sem eftir stendur er skilgreiningarmengi $f \circ g$.

DÆMI 8

Að finna skilgreiningarmengi samskeytts falls

Finnið skilgreiningarmengi

$$(f \circ g)(x) \quad \text{þar sem } f(x)=\frac{5}{x-1} \text{ og } g(x)=\frac{4}{3x-2}$$

Lausn

Skilgreiningarmengi $g(x)$ inniheldur allar rauntölur nema $x=\frac{2}{3}$, því að með því inntaksgildi myndum við deila með 0. Á sama hátt inniheldur skilgreiningarmengi f allar rauntölur nema 1. Við þurfum því að útiloka úr skilgreiningarmengi $g(x)$ það gildi x sem gerir $g(x)=1$.

$$\begin{aligned}\tfrac{4}{3x-2} &= 1\\ 4 &= 3x-2\\ 6 &= 3x\\ x &= 2\end{aligned}$$

Skilgreiningarmengi $f \circ g$ er því mengi allra rauntalna nema $\frac{2}{3}$ og 2. Það merkir að

$$x \neq \frac{2}{3} \text{ eða } x \neq 2$$

Við getum ritað þetta með biltáknum sem

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) U \left(\frac{2}{3}, 2\right) U (2, \infty)$$

DÆMI 9

Að finna skilgreiningarmengi samskeytts falls sem inniheldur rætur

Finnið skilgreiningarmengi

$$(f \circ g)(x) \quad \text{þar sem } f(x)=\sqrt{x+2} \text{ og } g(x)=\sqrt{3-x}$$

Lausn

Þar sem við getum ekki tekið kvaðratrót af neikvæðri tölu er skilgreiningarmengi g jafnt $(-\infty, 3]$. Nú könnum við skilgreiningarmengi samskeytta fallsins

$$(f \circ g)(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}+2}$$

Samskeytta fallið og skilyrðið á rótarstofn þess eru $(f \circ g)(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}+2}, \sqrt{3-x}+2 \geq 0$, því að rótarstofn kvaðratrótar má ekki vera neikvæður. Þar sem kvaðratrætur eru ekki neikvæðar er $\sqrt{3-x} \geq 0$, eða $3-x \geq 0$, og skilgreiningarmengið er því $(-\infty, 3]$.

Greining

Dæmið sýnir að það getur líka hjálpað að þekkja myndmengi fallanna, einkum innra fallsins, þegar finna á skilgreiningarmengi samskeytts falls. Það sýnir jafnframt að skilgreiningarmengi $f \circ g$ getur innihaldið gildi sem eru ekki í skilgreiningarmengi f, þótt þau verði að vera í skilgreiningarmengi g.

1

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Finnið skilgreiningarmengi

$$(f \circ g)(x) \quad \text{þar sem } f(x)=\frac{1}{x-2} \quad \text{og } g(x)=\sqrt{x+4}$$

Að þátta samskeytt fall í þáttaföll þess

Í sumum tilvikum þarf að þátta flókið fall, það er að rita það sem samskeytingu tveggja einfaldari falla. Samskeytt fall má stundum þátta á fleiri en einn hátt og þá getum við valið þá þáttun sem virðist hentugust.

DÆMI 10

Að þátta fall

Ritið $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ sem samskeytingu tveggja falla.

Lausn

Við leitum að tveimur föllum, g og h, þannig að $f(x)=g(h(x))$. Til þess leitum við að falli inni í falli í formúlunni fyrir $f(x)$. Einn möguleiki er að taka eftir að stæðan $5-x^2$ er undir kvaðratrótinni. Þá getum við þáttað fallið sem

$$h(x)=5-x^2 \text{ og } g(x)=\sqrt{x}$$

Við getum sannreynt svarið með því að samskeyta föllin aftur.

$$g(h(x))=g(5-x^2)=\sqrt{5-x^2}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Ritið $f(x)=\frac{4}{3-\sqrt{4+x^2}}$ sem samskeytingu tveggja falla.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fræðast meira um samskeytt föll og æfa útreikninga á þeim.

- Samskeytt föll
- Notkun táknunar samskeyttra falla
- Samskeytt föll út frá gröfum
- Að þátta föll
- Gildi samskeyttra falla

Æfingar úr hluta 1.4

Hugtakaspurningar

1. Hvernig finnið þið skilgreiningarmengi kvóta tveggja falla $\frac{f}{g}$?

2. Hvað er samskeyting tveggja falla $f \circ g$?

3. Getur niðurstaðan orðið sú sama og í upphaflegri röð ef röð tveggja falla í samskeytingu er snúið við? Ef svo er, gefið dæmi. Ef ekki, skýrið hvers vegna.

4. Hvernig finnið þið skilgreiningarmengi samskeytingar tveggja falla $f \circ g$?

Algebra

5. Gefin eru föllin $f(x)=x^2+2x$ og $g(x)=6-x^2$, og finna á $f+g, f-g, fg$, og $\frac{f}{g}$. Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers falls með biltáknum.

6. Gefin eru föllin $f(x)=-3x^2+x$ og $g(x)=5$, og finna á $f+g, f-g, fg$, og $\frac{f}{g}$. Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers falls með biltáknum.

7. Gefin eru föllin $f(x)=2x^2+4x$ og $g(x)=\frac{1}{2x}$, og finna á $f+g, f-g, fg$, og $\frac{f}{g}$. Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers falls með biltáknum.

8. Gefin eru föllin $f(x)=\frac{1}{x-4}$ og $g(x)=\frac{1}{6-x}$, og finna á $f+g, f-g, fg$, og $\frac{f}{g}$. Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers falls með biltáknum.

9. Gefin eru föllin $f(x)=3x^2$ og $g(x)=\sqrt{x-5}$, og finna á $f+g, f-g, fg$, og $\frac{f}{g}$. Ákvarðið skilgreiningarmengi hvers falls með biltáknum.

10. Gefin eru föllin $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=|x-3|$, og finna á $\frac{g}{f}$. Ákvarðið skilgreiningarmengi fallsins með biltáknum.

11. Gefin eru föllin $f(x)=2x^2+1$ og $g(x)=3x-5$, og finna á eftirfarandi:

1. ⓐ $f(g(2))$
2. ⓑ $f(g(x))$
3. ⓒ $g(f(x))$
4. ⓓ $(g \circ g)(x)$
5. ⓔ $(f \circ f)(-2)$

Í eftirfarandi dæmum skal nota hvert fallapar til að finna $f(g(x))$ og $g(f(x))$. Einfaldið svörin.

12.

$$f(x)=x^2+1, g(x)=\sqrt{x+2}$$

13.

$$f(x)=\sqrt{x}+2, g(x)=x^2+3$$

14.

$$f(x)=|x|, g(x)=5x+1$$

15.

$$f(x)=\sqrt[3]{x}, g(x)=\frac{x+1}{x^3}$$

16.

$$f(x)=\frac{1}{x-6}, g(x)=\frac{7}{x}+6$$

17.

$$f(x)=\frac{1}{x-4}, g(x)=\frac{2}{x}+4$$

Í eftirfarandi dæmum skal nota hvert fallasafn til að finna $f\left(g\left(h(x)\right)\right)$. Einfaldið svörin.

18. $f(x)=x^4+6$, $g(x)=x-6$, og $h(x)=\sqrt{x}$

19. $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\frac{1}{x}$, og $h(x)=x+3$

20. Gefin eru föllin $f(x)=\frac{1}{x}$ og $g(x)=x-3$, og finna á eftirfarandi:

1. ⓐ $(f\circ g)(x)$
2. ⓑ skilgreiningarmengi $(f\circ g)(x)$ með biltáknum
3. ⓒ $(g\circ f)(x)$
4. ⓓ skilgreiningarmengi $(g\circ f)(x)$
5. ⓔ $\left(\frac{f}{g}\right)x$

21. Gefin eru föllin $f(x)=\sqrt{2-4x}$ og $g(x)=-\frac{3}{x}$, og finna á eftirfarandi:

1. ⓐ $(g\circ f)(x)$
2. ⓑ skilgreiningarmengi $(g\circ f)(x)$ með biltáknum

22. Gefin eru föllin $f(x)=\frac{1-x}{x}$ og $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$, Finnið eftirfarandi:

1. ⓐ $(g\circ f)(x)$
2. ⓑ $(g\circ f)(2)$

23. Gefin eru föllin $p(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ og $m(x)=x^2-4$, og tilgreina á skilgreiningarmengi hvers eftirfarandi falls með biltáknum:

1. ⓐ $\frac{p(x)}{m(x)}$
2. ⓑ $p(m(x))$
3. ⓒ $m(p(x))$

24. Gefin eru föllin $q(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ og $h(x)=x^2-9$, og tilgreina á skilgreiningarmengi hvers eftirfarandi falls með biltáknum.

1. ⓐ $\frac{q(x)}{h(x)}$
2. ⓑ $q(h(x))$
3. ⓒ $h(q(x))$

25. Fyrir $f(x)=\frac{1}{x}$ og $g(x)=\sqrt{x-1}$, skal rita skilgreiningarmengi $(f\circ g)(x)$ með biltáknum.

Í eftirfarandi dæmum skal finna föllin $f(x)$ og $g(x)$ þannig að hægt sé að rita gefna fallið sem $h(x)=f(g(x))$.

26.

$$h(x)=(x+2)^2$$

27.

$$h(x)=(x-5)^3$$

28.

$$h(x)=\frac{3}{x-5}$$

29.

$$h(x)=\frac{4}{(x+2)^2}$$

30.

$$h(x)=4+\sqrt[3]{x}$$

31.

$$h(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{2x-3}}$$

32.

$$h(x)=\frac{1}{(3x^2-4)^{-3}}$$

33.

$$h(x)=\sqrt[4]{\frac{3x-2}{x+5}}$$

34.

$$h(x)=\left(\frac{8+x^3}{8-x^3}\right)^4$$

35.

$$h(x)=\sqrt{2x+6}$$

36.

$$h(x)=(5x-1)^3$$

37.

$$h(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

38.

$$h(x)=\left|x^2+7\right|$$

39.

$$h(x)=\frac{1}{(x-2)^3}$$

40.

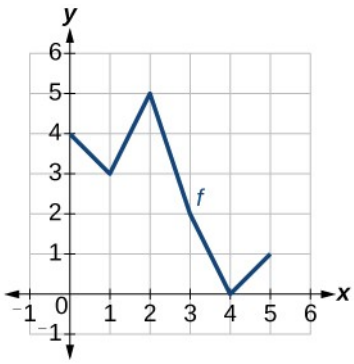
$$h(x)=\left(\frac{1}{2x-3}\right)^2$$

41.

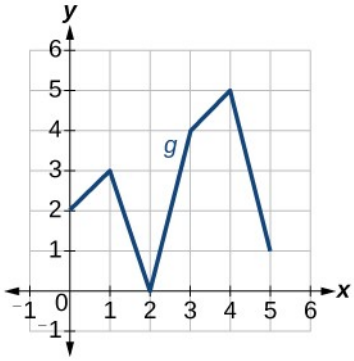
$$h(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{3x+4}}$$

Gröf

Í eftirfarandi dæmum skal nota graf f, á mynd 4 og graf g, á mynd 5 til að reikna stæðurnar.



Mynd 4. Graf fallsins f, samsett úr línustrikum.



Mynd 5. Graf fallsins g, samsett úr línustrikum.

42.

$$f(g(3))$$

43.

$$f(g(1))$$

44.

$$g(f(1))$$

45.

$$g(f(0))$$

1

46.

$$f(f(5))$$

47.

$$f(f(4))$$

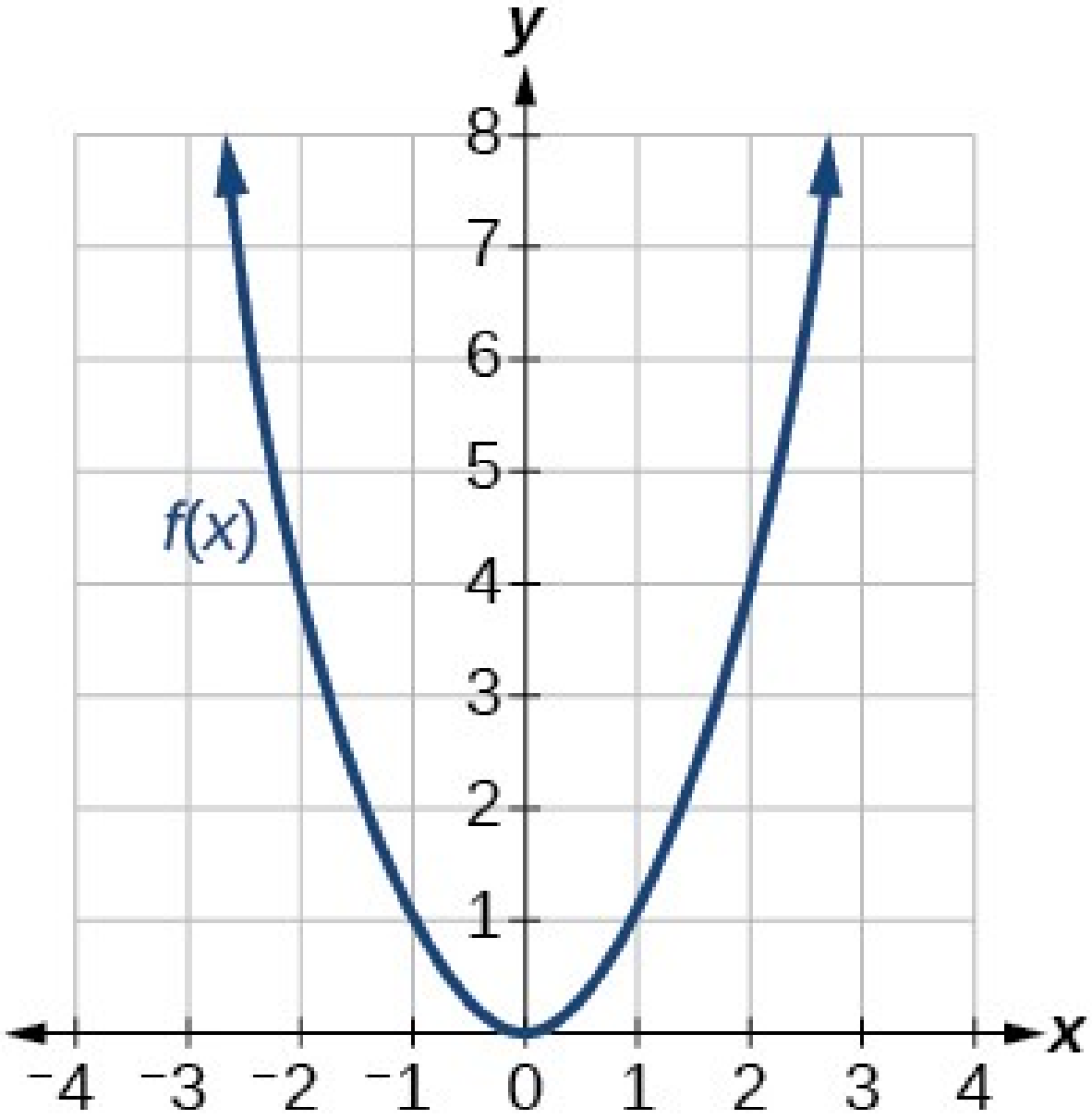
48.

$$g(g(2))$$

49.

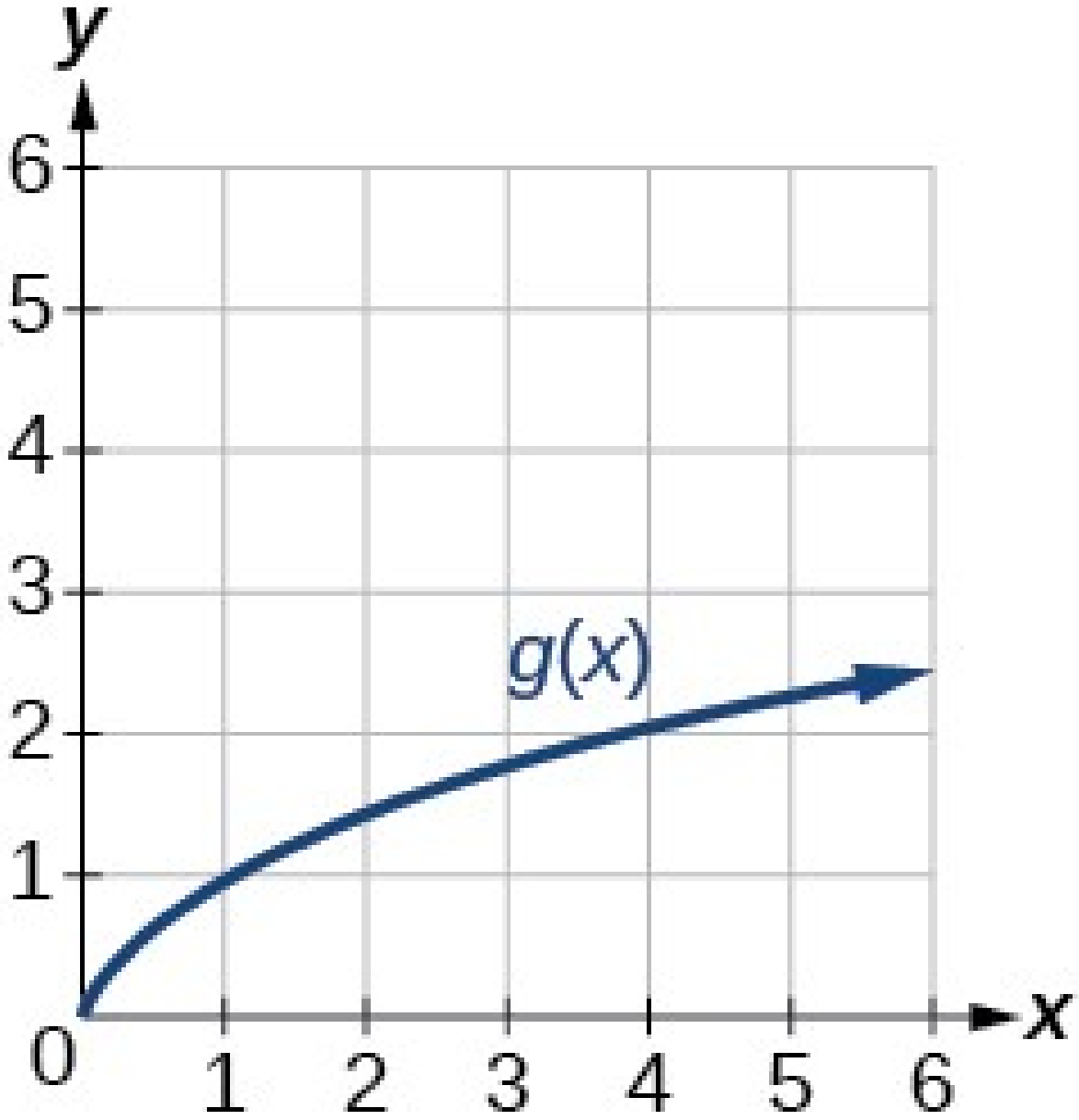
$$g(g(0))$$

Í eftirfarandi dæmum skal nota graf $f(x)$, á mynd 6, graf $g(x)$, á mynd 7 og graf $h(x)$, á mynd 8 til að reikna stæðurnar.

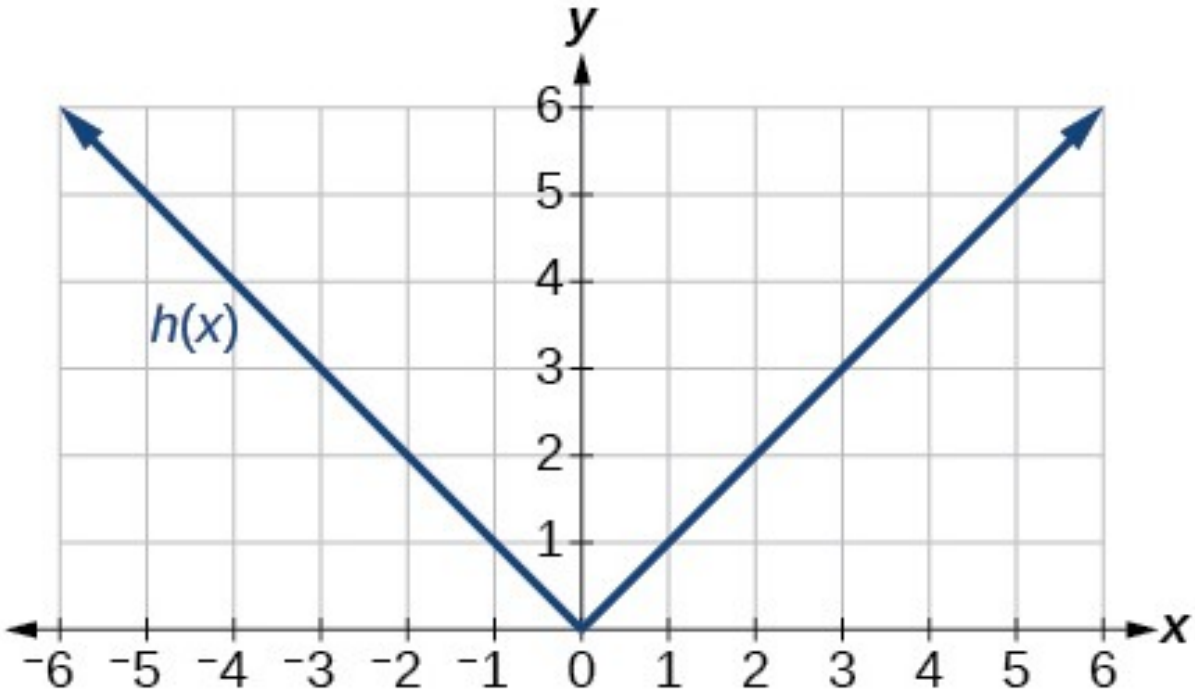


Mynd 6. Graf fallsins f er fleygbogi sem opnast upp.

1



Mynd 7. Vaxandi graf fallsins g hefst í upphafspunktinum.



Mynd 8. V-laga graf fallsins h með lægsta punkt í upphafspunktinum.

50.

$$g(f(1))$$

51.

$$g(f(2))$$

52.

$$f(g(4))$$

53.

$$f(g(1))$$

54.

$$f(h(2))$$

55.

$$h(f(2))$$

56.

$$f(g(h(4)))$$

57.

$$f\left(g\left(f\left(-2\right)\right)\right)$$

1

Töluleg dæmi

Notið í eftirfarandi dæmum fallgildi f og g sem sýnd eru í töflu 3 til að reikna hverja stæðu.

Tafla 3

x	$f\left(x\right)$	$g\left(x\right)$
0	7	9
1	6	5
2	5	6
3	8	2
4	4	1
5	0	8
6	2	7
7	1	3
8	9	4
9	3	0

58.

$$f\left(g\left(8\right)\right)$$

59.

$$f\left(g\left(5\right)\right)$$

60.

$$g\left(f\left(5\right)\right)$$

61.

$$g\left(f\left(3\right)\right)$$

62.

$$f\left(f\left(4\right)\right)$$

63.

$$f\left(f\left(1\right)\right)$$

64.

$$g(g(2))$$

65.

$$g(g(6))$$

Notið í eftirfarandi dæmum fallgildi f og g sem sýnd eru í töflu 4 til að reikna stæðurnar.

Tafla 4

x	$f(x)$	$g(x)$
-3	11	-8
-2	9	-3
-1	7	0
0	5	1
1	3	0
2	1	-3
3	-1	-8

66.

$$(f \circ g)(1)$$

67.

$$(f \circ g)(2)$$

68.

$$(g \circ f)(2)$$

69.

$$(g \circ f)(3)$$

70.

$$(g \circ g)(1)$$

71.

$$(f \circ f)(3)$$

Í eftirfarandi dæmum skal nota hvert fallapar til að finna $f(g(0))$ og $g(f(0))$.

72.

$$f(x)=4x+8, g(x)=7-x^2$$

73.

$$f(x)=5x+7, g(x)=4-2x^2$$

74.

$$f(x)=\sqrt{x+4}, g(x)=12-x^3$$

75.

$$f(x)=\frac{1}{x+2}, g(x)=4x+3$$

Í eftirfarandi dæmum skal nota föllin $f(x)=2x^2+1$ og $g(x)=3x+5$ til að reikna gildi samskeytta fallsins eða finna það eins og tilgreint er.

76.

$$f(g(2))$$

77.

$$f(g(x))$$

78.

$$g(f(-3))$$

79.

$$(g\circ g)(x)$$

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi dæmum skal nota $f(x)=x^3+1$ og $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

80. Finnið $(f\circ g)(x)$ og $(g\circ f)(x)$. Berið svörin saman.

81. Finnið $(f\circ g)(2)$ og $(g\circ f)(2)$.

82. Hvert er skilgreiningarmengi $(g\circ f)(x)$?

83. Hvert er skilgreiningarmengi $(f\circ g)(x)$?

84. Látum $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. ⓐ Finnið $(f\circ f)(x)$.
2. ⓑ Er $(f\circ f)(x)$ fyrir sérhvert fall f sama niðurstaða og svarið við a-lið fyrir sérhvert fall? Skýrið.

Í eftirfarandi dæmum látum við $F(x)=(x+1)^5$, $f(x)=x^5$, og $g(x)=x+1$.

85. Satt eða ósatt: $(g\circ f)(x)=F(x)$.

86. Satt eða ósatt: $(f \circ g)(x) = F(x)$.

Í eftirfarandi dæmum skal finna samskeytinguna þegar $f(x) = x^2 + 2$ fyrir öll $x \geq 0$ og $g(x) = \sqrt{x-2}$.

87.

$$(f \circ g)(6); (g \circ f)(6)$$

88.

$$(g \circ f)(a); (f \circ g)(a)$$

89.

$$(f \circ g)(11); (g \circ f)(11)$$

Raunhæf viðfangsefni

90. Fallið $D(p)$ gefur eftirspurt magn þegar verðið er p. Framleiðslukostnaðurinn $C(x)$ er kostnaðurinn við að framleiða x vörur. Hvað af eftirfarandi mynduð þið gera til að finna framleiðslukostnaðinn þegar verðið er \$6?

1. ⓐ Reikna $D(C(6))$.
2. ⓑ Reikna $C(D(6))$.
3. ⓒ Leysa $D(C(x)) = 6$.
4. ⓓ Leysa $C(D(p)) = 6$.

91. Fallið $A(d)$ gefur sársaukastig sjúklings á kvarðanum 0 til 10 þegar d milligrömm af verkjalyfi eru í líkama hans. Magn lyfsins (í milligrömmum) í líkama sjúklingsins eftir t mínútur er gefið með fallinu $m(t)$. Hvað af eftirfarandi mynduð þið gera til að finna hvenær sársaukastig sjúklingsins verður 4?

1. ⓐ Reikna $A(m(4))$.
2. ⓑ Reikna $m(A(4))$.
3. ⓒ Leysa $A(m(t)) = 4$.
4. ⓓ Leysa $m(A(d)) = 4$.

92. Verslun veitir viðskiptavinum 30% afslátt af verðinu x á völdum vörum. Síðan er 15% til viðbótar dregið frá við kassann. Ritið verðfall $P(x)$ sem reiknar lokaverð vörunnar út frá upphaflega verðinu x. (Vísbending: Notið samskeytingu falla til að finna svarið.)

93. Regndropi sem fellur á stöðuvatn myndar hringlaga gáru. Ef geisli hennar í tommum vex sem fall af tíma í mínútum samkvæmt $r(t) = 25\sqrt{t+2}$, finnið þá flatarmál gárunnar sem fall af tíma. Finnið flatarmál hennar þegar $t = 2$.

94. Skógareldur skilur eftir sig brunnið grassvæði sem stækkar í hring. Ef geisli brunna svæðisins vex með tíma samkvæmt formúlunni $r(t)=2t+1$, ritið þá flatarmál brunna svæðisins sem fall af tímanum t í mínútum.

95. Notið fallið úr fyrra dæmi til að finna heildarflatarmálið sem hefur brunnið eftir 5 mínútur.

96. Í kúlulaga blöðru tengist geislinn r, mældur í tommum, rúmmálinu V, með $r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Lofti er dælt í blöðruna og rúmmálið eftir t sekúndur er því gefið með $V(t)=10+20t$.

1. ⓐ Finnið samskeytta fallið $r(V(t))$.
2. ⓑ Finnið nákvæman tíma þegar geislinn nær 10 tommum.

97. Fjöldi baktería í kældri matvöru er gefinn með $N(T)=23T^2-56T+1$, $3<T<33$, þar sem T er hitastig matvörunnar. Þegar matvaran er tekin úr kæli er hitastigið gefið með $T(t)=5t+1{,}5$, þar sem t er tími í klukkustundum.

1. ⓐ Finnið samskeytta fallið $N(T(t))$.
2. ⓑ Finnið tímann þegar bakteríufjöldinn nær 6752 og námundið að tveimur aukastöfum.

1.5 Ummyndanir falla

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna gröf falla með lóðréttum og láréttum hliðrunum.
- Teikna gröf falla með speglun um x-ásinn og y-ásinn.
- Ákvarða út frá grafi hvort fall er jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.
- Teikna gröf falla með samþjöppun og teygju.
- Sameina ummyndanir.



Mynd 1 (heimild: „Misko“/Flickr)

Við vitum öll að flatur spegill sýnir okkur rétta mynd af sjálfum okkur og því sem er fyrir aftan okkur. Þegar speglinum er hallað geta myndirnar sem við sjáum hliðrast lárétt eða lóðrétt. En hvað gerist þegar sveigjanlegur spegill er beygður? Líkt og skemmtigarðsspegill sýnir hann bjagaða mynd af okkur sem er teygð eða þjöppuð lárétt eða lóðrétt. Á svipaðan hátt getum við bjagað eða ummyndað stærðfræðileg föll svo þau henti betur til að lýsa hlutum eða ferlum í raunheimum. Í þessum hluta skoðum við nokkrar gerðir ummyndana.

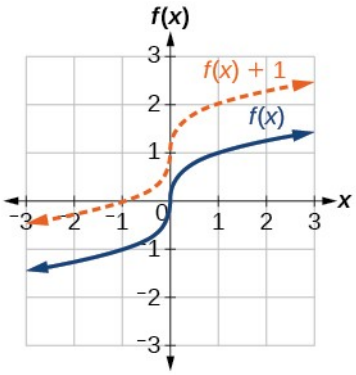
Að teikna gröf falla með lóðréttum og láréttum hliðrunum

Þegar við leysum verkefni reynum við oft að lýsa aðstæðunum með stærðfræðilegu líkani í orðum, töflum, gröfum og jöfnum. Ein leið er að laga gröf grunnfallanna að aðstæðunum og byggja þannig ný líkön. Hægt er að breyta föllum á kerfisbundinn hátt til að smíða heppileg líkön fyrir verkefnin sem við leysum.

Að bera kennsl á lóðréttar hliðranir

Einföld gerð ummyndunar felst í að hliðra öllu grafi falls upp, niður, til hægri eða til vinstri. Einfaldasta hliðrunin er lóðrétt hliðrun. Hún færir grafið upp eða niður og er einföldust af því að þá er jákvæðum eða neikvæðum fasta bætt við fallið. Með öðrum orðum bætum við sama fastanum við úttaksgildi fallsins óháð inntakinu. Fyrir fallið $g(x)=f(x)+k$, hliðrast fallið $f(x)$ lóðrétt um k einingar. Dæmi er sýnt á mynd 2.

1



Mynd 2 Lóðrétt hliðrun um $k=1$ á teningsrótarfallinu $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Til að sjá lóðrétta hliðrun betur skulum við hafa í huga að $y=f(x)$. Því jafngildir $f(x)+k$ stæðunni $y+k$. Í stað hvers gildis y kemur $y+k$, þannig að $y-$ gildið hækkar eða lækkar eftir gildi k. Niðurstaðan er hliðrun upp eða niður.

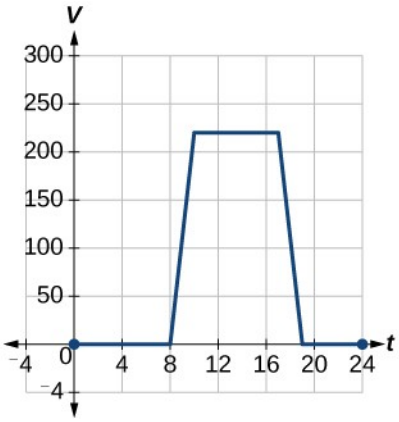
LÓÐRÉTT HLIÐRUN

Gefið er fall $f(x)$, og nýtt fall $g(x)=f(x)+k$, þar sem k er fasti, er lóðrétt hliðrun fallsins $f(x)$. Öll úttaksgildi breytast um k einingar. Ef k er jákvætt hliðrast grafið upp. Ef k er neikvætt hliðrast grafið niður.

DÆMI 1

Að bæta fasta við fall

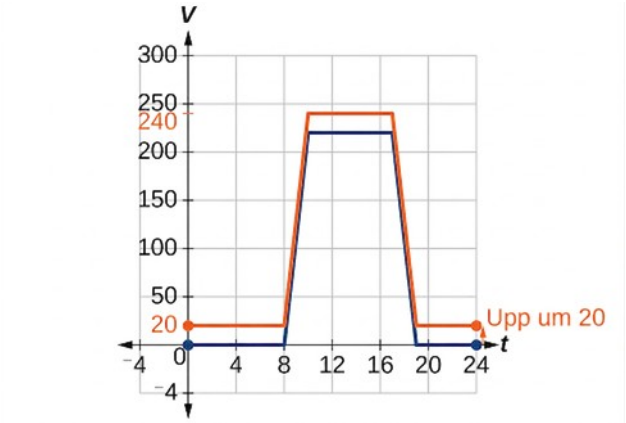
Til að stýra hitastigi í vistvænni byggingu opnast og lokast loftrásir við þakið yfir daginn. Mynd 3 sýnir flatarmál opinna loftrása V í ferfetum sem fall af tímanum t. Tíminn er mældur í klukkustundum frá miðnætti. Yfir sumarið ákveður umsjónarmaður byggingarinnar að reyna að stýra hitastiginu betur með því að auka flatarmál opinna loftrása um 20 ferfet allan sólarhringinn. Teiknið skissu af grafi nýja fallsins.



Mynd 3 Graf fallsins V eftir tímanum t.

Lausn

Við getum teiknað skissu af grafi nýja fallsins með því að bæta 20 við hvert úttaksgildi upphaflega fallsins. Við það hliðrast grafið lóðrétt upp eins og sýnt er á mynd 4.



Mynd 4 Grafið er hliðrað upp um 20 einingar.

Takið eftir að á mynd 4 hefur úttaksgildið hækkað um 20 fyrir hvert inntaksgildi. Ef við köllum nýja fallið $S(t)$, getum við ritað

$$S(t)=V(t)+20$$

Táknunin lýsir tengslum inntaks og úttaks, t , $S(t)$. Úttakið fæst með því að reikna gildi fallsins V fyrir sama inntak og bæta síðan 20 við niðurstöðuna. Fallið S er þannig skilgreint sem ummyndun fallsins V , í þessu tilviki lóðrétt hliðrun upp um 20 einingar. Takið eftir að við lóðrétta hliðrun haldast inntaksgildin óbreytt en aðeins úttaksgildin breytast. Sjá töflu 1.

1

Tafla 1

t	0	8	10	17	19	24
$V(t)$	0	0	220	220	0	0
$S(t)$	20	20	240	240	20	20

AÐFERÐ

Búa til nýja röð sem sýnir lóðrétta hliðrun þegar fall er gefið í töflu.

1. Finnið röðina eða dálkinn með úttaksgildunum.
2. Ákvarðið stærð hliðrunarinnar.
3. Leggið hliðrunina við gildið í hverjum úttaksreit. Leggið jákvætt gildi við til að hliðra upp en neikvætt gildi til að hliðra niður.

DÆMI 2

Að hliðra falli í töflu lóðrétt

Fallið $f(x)$ er gefið í töflu 2. Búið til töflu fyrir fallið $g(x)=f(x)-3$.

Tafla 2

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	3	7	11

Lausn

Formúlan $g(x)=f(x)-3$ segir okkur að finna megi úttaksgildi g með því að draga 3 frá úttaksgildum f. Til dæmis:

$$\begin{aligned} f(2)&=1 && \text{Gefið}\\ g(x)&=f(x)-3 && \text{Gefin ummyndun}\\ g(2)&=f(2)-3\\ &=1-3\\ &=-2 \end{aligned}$$

Með því að draga 3 frá hverju $f(x)$-gildi getum við fyllt út gildatöflu fyrir $g(x)$ eins og sýnt er í töflu 3.

Tafla 3

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	3	7	11
$g(x)$	−2	0	4	8

Greining

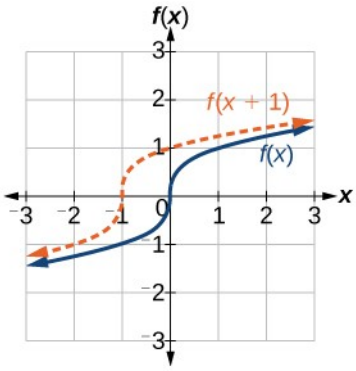
Líkt og við fyrri lóðréttu hliðrunina haldast inntaksgildin óbreytt og aðeins úttaksgildin breytast.

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Fallið $h(t) = -4{,}9\,t^2 + 30\,t$ gefur hæðina h í metrum sem bolti nær t sekúndum eftir að honum er kastað upp frá jörðu. Gerum þess í stað ráð fyrir að boltanum sé kastað af þaki 10 metra hárrar byggingar. Tengið nýja hæðarfallið $b(t)$ við $h(t)$, og finnið síðan formúlu fyrir $b(t)$.

Að bera kennsl á láréttar hliðranir

Við sáum að lóðrétt hliðrun er breyting á úttaki fallsins, það er utan við fallið. Nú skoðum við hvernig breytingar á inntakinu, inni í fallinu, breyta grafi þess og merkingu. Breyting á inntakinu færir graf fallsins til vinstri eða hægri. Það kallast lárétt hliðrun og er sýnt á mynd 5.



Mynd 5 Lárétt hliðrun fallsins $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Takið eftir að $(x+1)$ merkir að $h = -1$ sem hliðrar grafinu til vinstri, það er í átt að neikvæðum gildum x.

Ef til dæmis $f(x) = x^2$, er $g(x) = (x-2)^2$ nýtt fall. Hvert inntak er minnkað um 2 áður en það er sett í annað veldi. Grafið hliðrast þá um 2 einingar til hægri, því auka þarf fyrra inntaksgildið um 2 einingar til að fá sama úttaksgildi og fallið f.

LÁRÉTT HLIÐRUN

Gefið er fall f, og nýtt fall $g(x) = f(x-h)$, þar sem h er fasti, er lárétt hliðrun fallsins f. Ef h er jákvætt hliðrast grafið til hægri. Ef h er neikvætt hliðrast grafið til vinstri.

DÆMI 3

1

Að bæta fasta við inntak

Snúum aftur að dæminu um loftrásir byggingarinnar á mynd 3. Gerum ráð fyrir að um haustið telji umsjónarmaðurinn að upphaflega loftræstiáætlunin hefjist of seint. Hann vill því hefja hana alla tveimur klukkustundum fyrr. Teiknið skissu af grafi nýja fallsins.

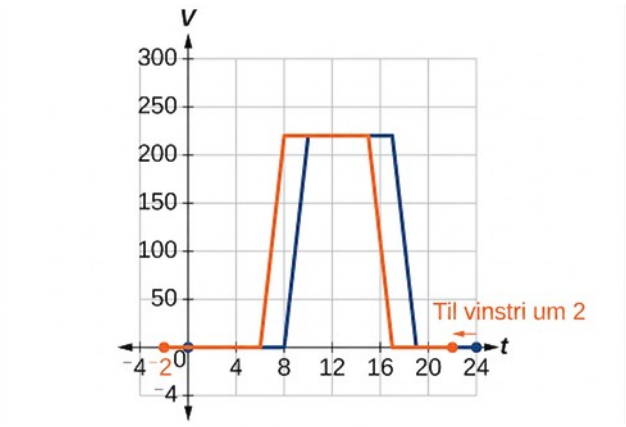
Lausn

Látum $V(t)$ tákna upphaflegu áætlunina og $F(t)$ þá endurskoðuðu.

$$V(t) = \text{ upphaflega loftræstiáætlunin}$$
$$\mathrm{F}(t) = \text{hefst 2 klst. fyrr}$$

Á nýja grafinu er loftflæðið á hverjum tíma hið sama og það var 2 klukkustundum síðar samkvæmt upphaflega fallinu V Í upphaflega fallinu V, byrjar loftflæðið til dæmis að breytast klukkan 8 að morgni en í fallinu F, byrjar það að breytast klukkan 6 að morgni. Samsvarandi fallgildi eru $V(8) = F(6)$. Sjá mynd 6. Takið einnig eftir að samkvæmt upphaflegu áætluninni opnuðust loftrásirnar fyrst upp í $220\ \mathrm{ft}^2$ klukkan 10 að morgni en samkvæmt nýju áætluninni ná þær $220\ \mathrm{ft}^2$ klukkan 8 að morgni, svo $V(10) = F(8)$.

Í báðum tilvikum sjáum við að þar sem $F(t)$ hefst 2 klukkustundum fyrr er $h = -2$. Það merkir að sömu úttaksgildi nást þegar $F(t) = V(t-(-2)) = V(t+2)$.



Mynd 6 Grafið er hliðrað tvær einingar til vinstri.

Greining

Takið eftir að $V(t+2)$ hliðrar grafinu til vinstri.

Láréttar breytingar, eða „innri breytingar“, hafa áhrif á skilgreiningarmengi fallsins (inntakið) en ekki myndmengið og virðast oft ganga gegn innsæi. Nýja fallið $F(t)$ hefur sömu úttaksgildi og $V(t)$, en tengir þau við inntaksgildi sem eru 2 klukkustundum fyrr en hjá $V(t)$. Með öðrum orðum þarf að bæta 2 klukkustundum við inntak V til að finna samsvarandi úttak F: $F(t) = V(t+2)$.

AÐFERÐ

Búa til nýja röð sem sýnir lárétta hliðrun þegar fall er gefið í töflu.

1. Finnið röðina eða dálkinn með inntaksgildunum.
2. Ákvarðið stærð hliðrunarinnar.
3. Leggið hliðrunina við gildið í hverjum inntaksreit.

DÆMI 4

Að hliðra falli í töflu lárétt

Fallið $f(x)$ er gefið í töflu 4. Búið til töflu fyrir fallið $g(x)=f(x-3)$.

Tafla 4

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	3	7	11

Lausn

Formúlan $g(x)=f(x-3)$ segir okkur að úttaksgildi g séu þau sömu og úttaksgildi f þegar inntaksgildið er 3 minna en upphaflega gildið. Við vitum til dæmis að $f(2)=1$. Til að fá sama úttak úr fallinu g, þurfum við inntaksgildi sem er 3 einingum stærra. Við setjum gildi sem er 3 einingum stærra inn í $g(x)$ vegna þess að fallið dregur 3 frá áður en reiknað er gildi fallsins f.

$$\begin{aligned} g(5) &= f(5-3) \\ &= f(2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Við höldum áfram með hin gildin og búum til töflu 5.

Tafla 5

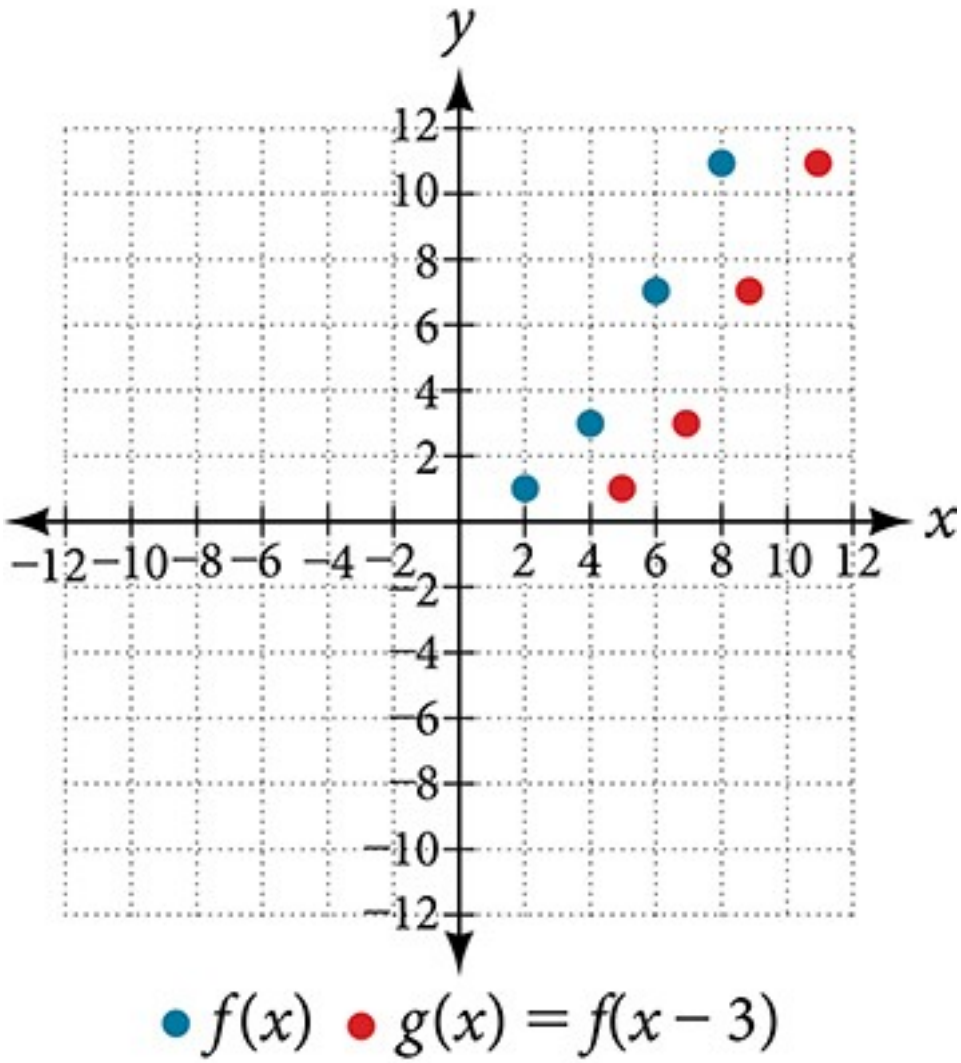
x	5	7	9	11
$x-3$	2	4	6	8
$f(x-3)$	1	3	7	11
$g(x)$	1	3	7	11

Niðurstaðan er að fallinu $g(x)$ hefur verið hliðrað um 3 einingar til hægri. Takið eftir að úttaksgildi $g(x)$ eru áfram þau sömu og úttaksgildi $f(x)$, en samsvarandi inntaksgildum x, hefur verið hliðrað um 3 einingar til hægri. Nánar tiltekið hliðrast 2 í 5, 4 í 7, 6 í 9 og 8 í 11.

Greining

Mynd 7 sýnir bæði föllin. Þar sést hvernig hver punktur hliðrast lárétt.

1

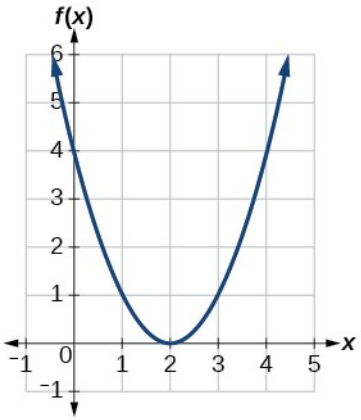


Mynd 7 Punktar grafsins eru hliðraðir þrjár einingar til hægri.

DÆMI 5

Að bera kennsl á lárétta hliðrun grunnfalls

Mynd 8 sýnir ummyndun grunnfallsins $f(x)=x^2$. Tengið nýja fallið $g(x)$ við $f(x)$, og finnið síðan formúlu fyrir $g(x)$.



Mynd 8 Fleygbogi með lægsta punkt í (2, 0).

Lausn

Takið eftir að grafið hefur sömu lögun og fallið $f(x)=x^2$ en x-gildunum hefur verið hliðrað um 2 einingar til hægri. Hvirfilpunkturinn var áður í (0,0) en er nú í (2,0). Grafið er graf annars stigs grunnfallsins hliðrað um 2 einingar til hægri, svo

$$g(x)=f(x-2)$$

Takið eftir að við þurfum að setja inn gildið $x=2$ til að fá úttaksgildið $y=0$; þá þurfa x-gildin að vera 2 einingum stærri vegna hliðrunarinnar um 2 einingar til hægri. Við getum síðan notað skilgreiningu fallsins $f(x)$ til að rita formúlu fyrir $g(x)$ með því að reikna $f(x-2)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= f(x-2) \\ g(x) &= f(x-2) = (x-2)^2 \end{aligned}$$

Greining

Til að ákvarða hvort hliðrunin sé $+2$ eða -2 skulum við skoða einn viðmiðunarpunkt á grafinu. Fyrir annars stigs fall er hentugt að skoða hvirfilpunktinn. Í upphaflega fallinu er $f(0)=0$. Í hliðraða fallinu okkar er $g(2)=0$. Til að fá úttaksgildið 0 úr fallinu f, þurfum við að ákveða hvort plús- eða mínusmerki þurfi til að uppfylla jöfnuna $g(2)=f(x-2)=f(0)=0$. Til þess að þetta gangi þarf að draga 2 einingar frá inntaksgildunum.

DÆMI 6

Að túlka láréttar og lóðréttar hliðranir

Fallið $G(m)$ gefur fjölda bensíngallona sem þarf til að aka m mílur. Túlkið $G(m)+10$ og $G(m+10)$.

Lausn

1

$G(m)+10$ má túlka sem að 10 sé bætt við úttakið, það er fjölda gallona. Þetta er bensínið sem þarf til að aka m mílur að viðbættum 10 bensíngallonum. Grafið myndi sýna lóðrétta hliðrun.

$G(m+10)$ má túlka sem að 10 sé bætt við inntakið, það er fjölda mílna. Þetta er því fjöldi bensíngallona sem þarf til að aka 10 mílum lengra en m mílur. Grafið myndi sýna lárétta hliðrun.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Gefið er fallið $f(x)=\sqrt{x}$, og teikna skal upphaflega fallið $f(x)$ og ummyndunina $g(x)=f(x+2)$ í sama hnitakerfi. Er þetta lárétt eða lóðrétt hliðrun? Í hvaða átt hliðrast grafið og um hve margar einingar?

Að sameina lóðréttar og láréttar hliðranir

Nú þegar við höfum tvær ummyndanir getum við sameinað þær. Lóðréttar hliðranir eru ytri breytingar sem hafa áhrif á úttaksgildin á $y-$ ásnum og hliðra fallinu upp eða niður. Láréttar hliðranir eru innri breytingar sem hafa áhrif á inntaksgildin á $x-$ ásnum og hliðra fallinu til vinstri eða hægri. Þegar báðar gerðir hliðrana eru sameinaðar hliðrast graf falls annaðhvort upp eða niður og annaðhvort til hægri eða vinstri.

AÐFERÐ

Teikna skissu af grafi falls þegar bæði lóðrétt og lárétt hliðrun eru gefin.

1. Finnið lóðréttu og láréttu hliðrunina út frá formúlunni.
2. Lóðrétt hliðrun stafar af fasta sem er bætt við úttakið. Hliðrið grafinu upp ef fastinn er jákvæður en niður ef hann er neikvæður.
3. Lárétt hliðrun stafar af fasta sem er bætt við inntakið. Hliðrið grafinu til vinstri ef fastinn er jákvæður en til hægri ef hann er neikvæður.
4. Beitið hliðrununum á grafið í hvorri röðinni sem er.

DÆMI 7

Að teikna graf með sameinaðri lóðréttri og láréttri hliðrun

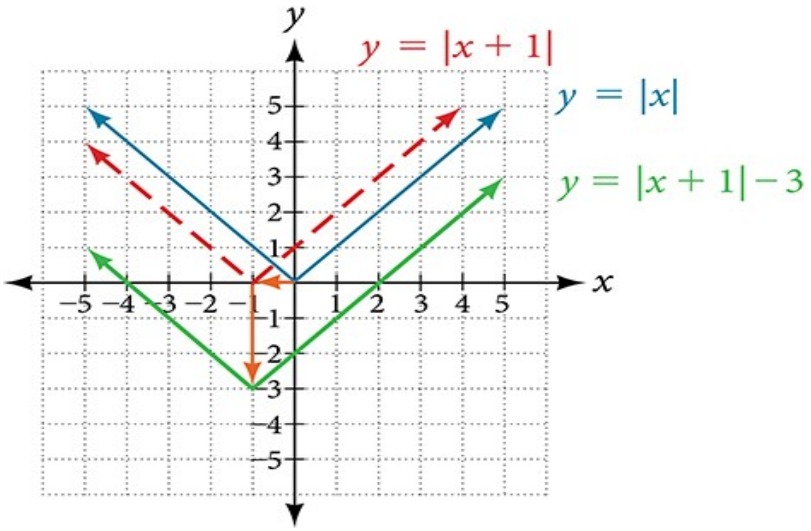
Gefið er $f(x)=|x|$, og teikna skal skissu af grafi $h(x)=f(x+1)-3$.

Lausn

Fallið f er tölugildisfall úr safni grunnfalla. Við vitum að graf þess er V-laga með hornpunkt í upphafspunkti. Fallið h fæst með því að ummynda f á tvo vegu: $f(x+1)$ er breyting inni í fallinu sem veldur láréttri hliðrun um 1 til vinstri. Að draga 3 frá í $f(x+1)-3$ er breyting utan við fallið sem veldur lóðréttri hliðrun um 3 niður. Ummyndun grafsins er sýnd á mynd 9.

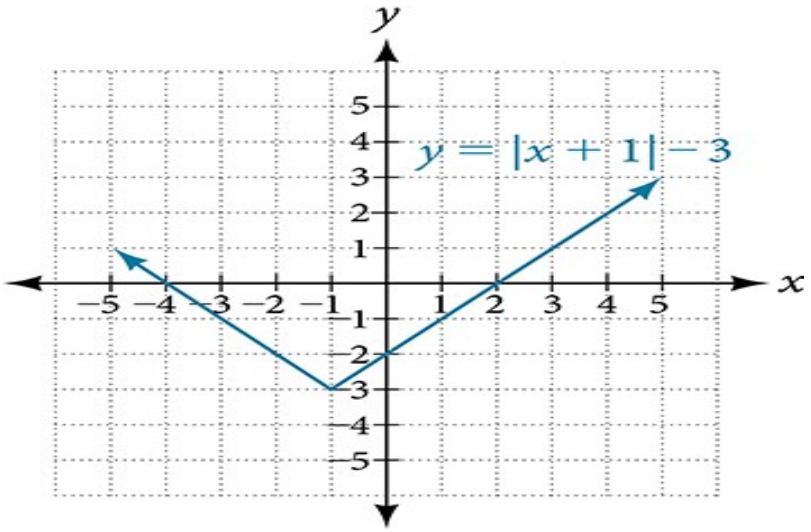
Fylgjum einum punkti á grafi $f(x)=|x|$.

- Punktinum $(0,0)$ er fyrst hliðrað um 1 einingu til vinstri: $(0,0) \rightarrow (-1,0)$
- Punktinum $(-1,0)$ er síðan hliðrað um 3 einingar niður: $(-1,0) \rightarrow (-1,-3)$



Mynd 9 Graf tölugildisfalls er hliðrað eina einingu til vinstri og þrjár niður.

Mynd 10 sýnir graf h.



Mynd 10 Graf fallsins y = |x + 1| − 3.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

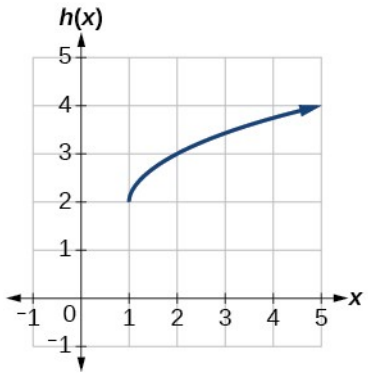
Gefið er $f(x)=|x|$, og teikna skal skissu af grafi $h(x)=f(x-2)+4$.

DÆMI 8

1

Að bera kennsl á sameinaðar lóðréttar og láréttar hliðranir

Ritið formúlu fyrir grafið á mynd 11, sem er ummyndun kvaðratrótarfallsins úr safni grunnfalla.



Mynd 11 Kvaðratrótargraf með upphafspunkt í (1, 2).

Lausn

Graf grunnfallsins hefst í upphafspunktinum og því hefur þessu grafi verið hliðrað um 1 til hægri og 2 upp. Með fallatáknun getum við ritað það sem

$$h(x)=f(x-1)+2$$

Með formúlu kvaðratrótarfallsins getum við ritað

$$h(x)=\sqrt{x-1}+2$$

Greining

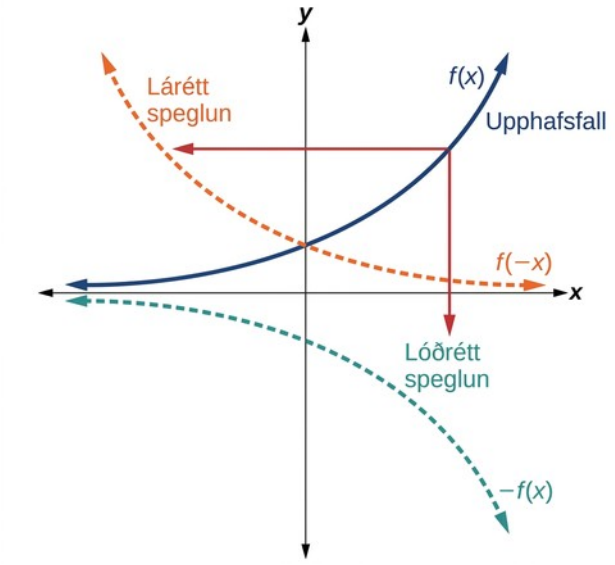
Takið eftir að ummyndunin hefur breytt skilgreiningar- og myndmengi fallsins. Nýja grafið hefur skilgreiningarmengið $[1,\infty)$ og myndmengið $[2,\infty)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Ritið formúlu fyrir ummyndun umhverfufallsins $f(x)=\frac{1}{x}$ úr safni grunnfalla sem hliðrar grafi fallsins um eina einingu til hægri og eina einingu upp.

Að teikna gröf falla með speglun um ása

Önnur ummyndun sem beita má á fall er speglun um x- eða y-ás. Lóðrétt speglun speglar graf lóðrétt um x-ásinn en lárétt speglun speglar graf lárétt um y-ásinn. Speglanirnar eru sýndar á mynd 12.



Mynd 12 Lóðrétt og lárétt speglun falls.

Takið eftir að lóðrétta speglunin myndar nýtt graf sem er spegilmynd grunn- eða upphafsgrafsins um x-ásinn. Lárétta speglunin myndar nýtt graf sem er spegilmynd grunn- eða upphafsgrafsins um y-ásinn.

SPEGLANIR

Gefið er fall $f(x)$, og nýja fallið $g(x)=-f(x)$ er lóðrétt speglun fallsins $f(x)$, stundum kölluð speglun um x-ásinn.

Gefið er fall $f(x)$, og nýja fallið $g(x)=f(-x)$ er lárétt speglun fallsins $f(x)$, stundum kölluð speglun um y-ásinn.

AÐFERÐ

Spegla graf falls bæði lóðrétt og lárétt.

1. Margfaldið öll úttaksgildi með −1 til að fá lóðrétta speglun. Nýja grafið er speglun upphaflega grafsins um x-ásinn.
2. Margfaldið öll inntaksgildi með −1 til að fá lárétta speglun. Nýja grafið er speglun upphaflega grafsins um y-ásinn.

DÆMI 9

Að spegla graf lárétt og lóðrétt

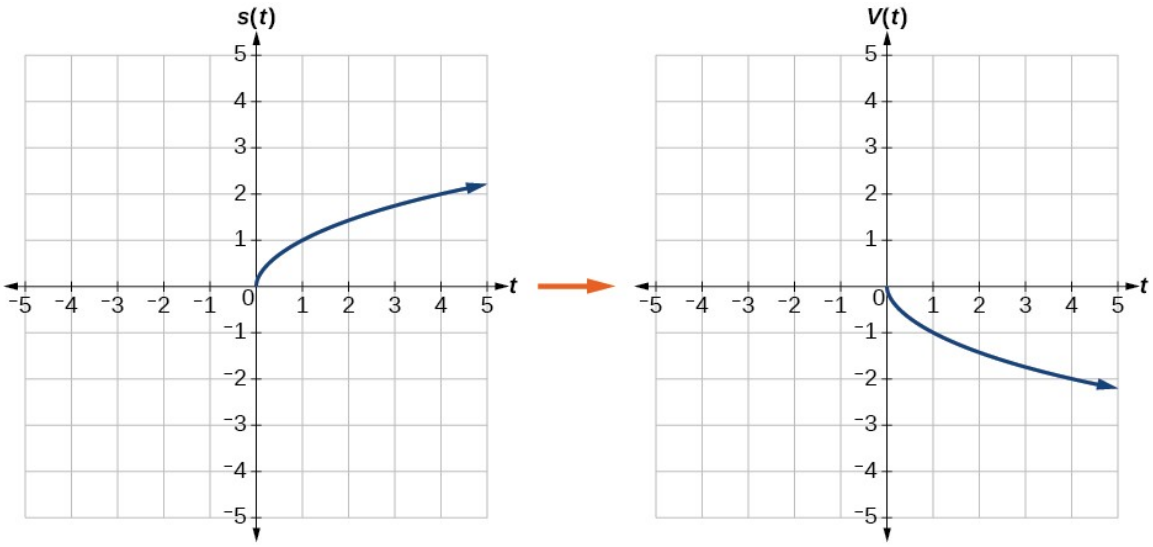
Speglið grafið $s(t)=\sqrt{t}$ (a) lóðrétt og (b) lárétt.

Lausn

1

1. ⓐ

Lóðrétt speglun grafsins merkir að hvert úttaksgildi speglast um lárétta t-ásinn eins og sýnt er á mynd 13.



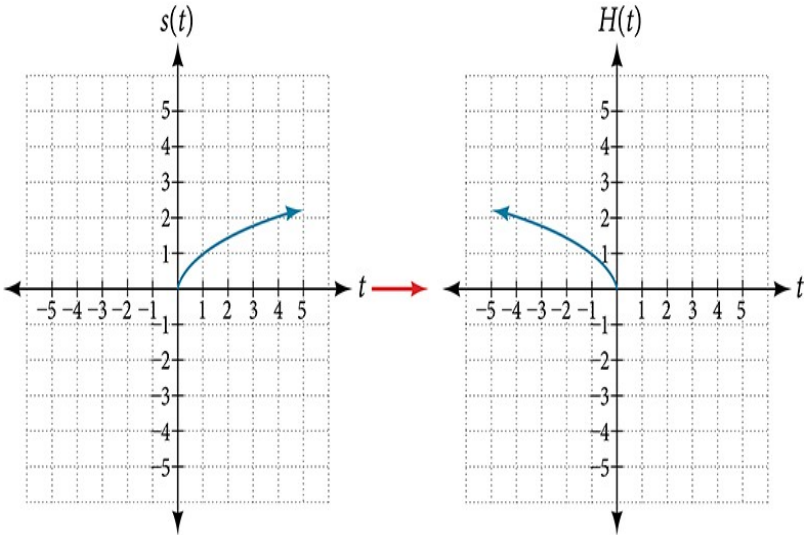
Mynd 13 Lóðrétt speglun kvaðratrótarfallsins

Þar sem hvert úttaksgildi er andstæða upphaflega úttaksgildisins getum við ritað $V(t) = -s(t)$ eða $V(t) = -\sqrt{t}$

Takið eftir að þetta er ytri eða lóðrétt breyting sem hefur áhrif á úttaksgildin $s(t)$ og því stendur mínusmerkið utan við fallið.

2. ⓑ

Lárétt speglun merkir að hvert inntaksgildi speglast um lóðrétta ásinn eins og sýnt er á mynd 14.



Mynd 14 Lárétt speglun kvaðratrótarfallsins

Þar sem hvert inntaksgildi er andstæða upphaflega inntaksgildisins getum við ritað $H(t)=s(-t)$ eða $H(t)=\sqrt{-t}$

Takið eftir að þetta er innri eða lárétt breyting sem hefur áhrif á inntaksgildin og því stendur mínusmerkið inni í fallinu.

Þessar ummyndanir geta haft áhrif á skilgreiningar- og myndmengi fallanna. Upphaflega kvaðratrótarfallið hefur skilgreiningarmengið $[0,\infty)$ og myndmengið $[0,\infty)$, en lóðrétta speglunin gefur fallinu $V(t)$ myndmengið $(-\infty,0]$ og lárétta speglunin gefur fallinu $H(t)$ skilgreiningarmengið $(-\infty,0]$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Speglið graf $f(x)=|x-1|$ (a) lóðrétt og (b) lárétt.

DÆMI 10

Að spegla fall í töflu lárétt og lóðrétt

Fallið $f(x)$ er gefið í töflu 6. Búið til töflur fyrir föllin hér fyrir neðan.

1. ⓐ $g(x)=-f(x)$
2. ⓑ $h(x)=f(-x)$

Tafla 6

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	3	7	11

Lausn

1

1. ⓐ

Fyrir $g(x)$, sýnir mínusmerkið utan við fallið lóðrétta speglun. Því haldast x-gildin óbreytt en hvert úttaksgildi verður andstætt upphaflega úttaksgildinu. Sjá töflu 7.

Tafla 7

x	2	4	6	8
$g(x)$	−1	−3	−7	−11

2. ⓑ

Fyrir $h(x)$, sýnir mínusmerkið inni í fallinu lárétta speglun. Því verður hvert inntaksgildi andstætt upphaflega inntaksgildinu en gildi $h(x)$ haldast þau sömu og gildi $f(x)$. Sjá töflu 8.

Tafla 8

x	−2	−4	−6	−8
$h(x)$	1	3	7	11

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Fallið $f(x)$ er gefið í töflu 9. Búið til töflur fyrir föllin hér fyrir neðan.

1. ⓐ $g(x)=-f(x)$

2. ⓑ $h(x)=f(-x)$

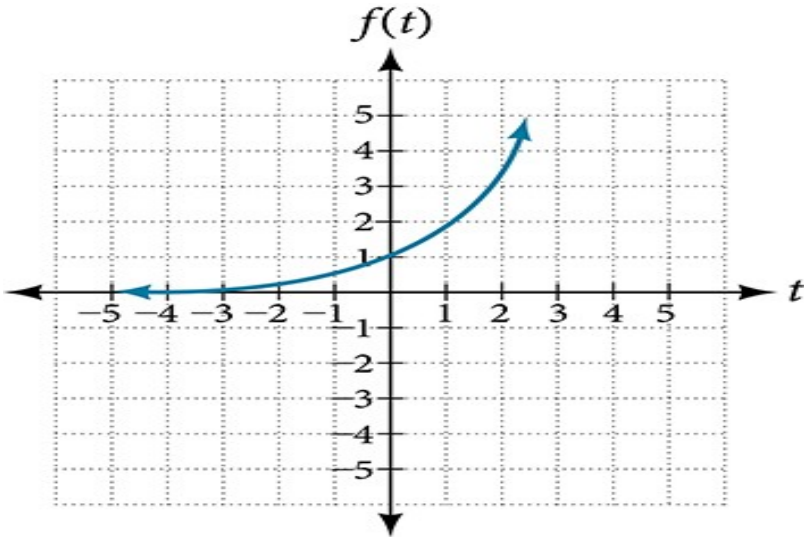
Tafla 9

x	−2	0	2	4
$f(x)$	5	10	15	20

DÆMI 11

Að beita jöfnu fyrir námslíkan

Algengt líkan af námi er sett fram með jöfnu á borð við $k(t)=-2^{-t}+1$, þar sem k er það hlutfall námsefnisins sem nemandi getur náð tökum á eftir t æfingalotur. Þetta er ummyndun fallsins $f(t)=2^t$ sem sýnt er á mynd 15. Teiknið skissu af grafi $k(t)$.



Mynd 15 Vaxandi vísisfall sem liggur um punktinn (0, 1).

Lausn

Þessi jafna sameinar þrjár ummyndanir í einni jöfnu.

- Lárétt speglun: $f(-t)=2^{-t}$
- Lóðrétt speglun: $-f(-t)=-2^{-t}$
- Lóðrétt hliðrun: $-f(-t)+1=-2^{-t}+1$

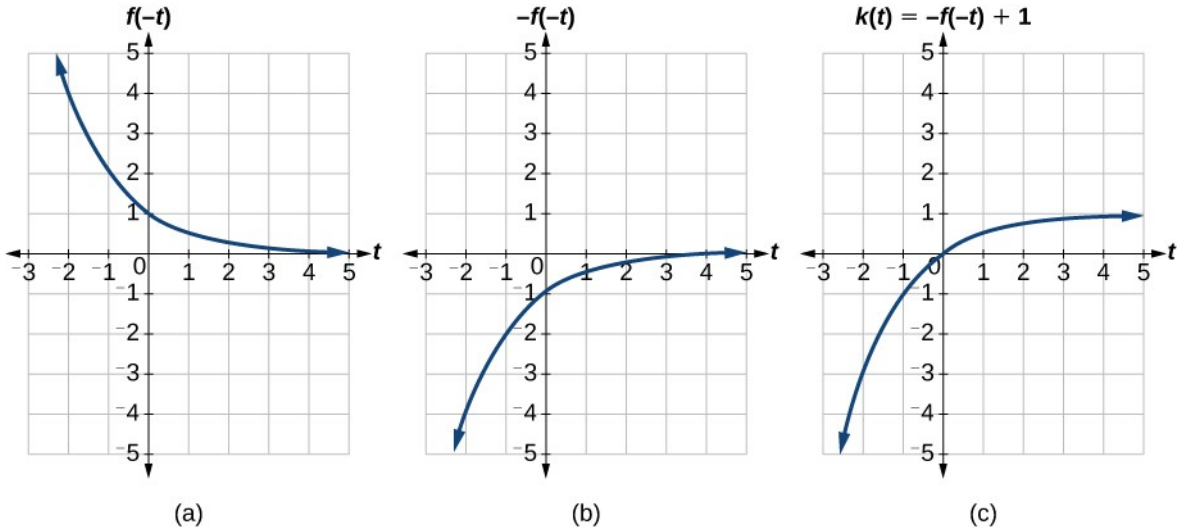
Við getum teiknað skissu af grafi með því að beita ummyndununum einni í einu á upphaflega fallið. Fylgjum tveimur punktum í gegnum hverja ummyndunanna þriggja. Við veljum punktana (0, 1) og (1, 2).

1. Fyrst beitum við láréttri speglun: (0, 1) (−1, 2).
2. Síðan beitum við lóðréttri speglun: (0, −1) (−1, −2).
3. Að lokum beitum við lóðréttri hliðrun: (0, 0) (−1, −1).

Þetta merkir að upphaflegu punktarnir (0, 1) og (1, 2) verða að (0, 0) og (−1, −1) þegar ummyndununum hefur verið beitt.

Á mynd 16 fæst fyrsta grafið með láréttri speglun. Annað grafið fæst með lóðréttri speglun. Þriðja grafið fæst með lóðréttri hliðrun upp um 1 einingu.

1



Mynd 16 Speglanir vísisfalls og hliðrun þess upp um eina einingu.

Greining

Sem námslíkan takmarkast fallið við skilgreiningarmengið $t \geq 0$, með samsvarandi myndmengi $[0, 1)$.

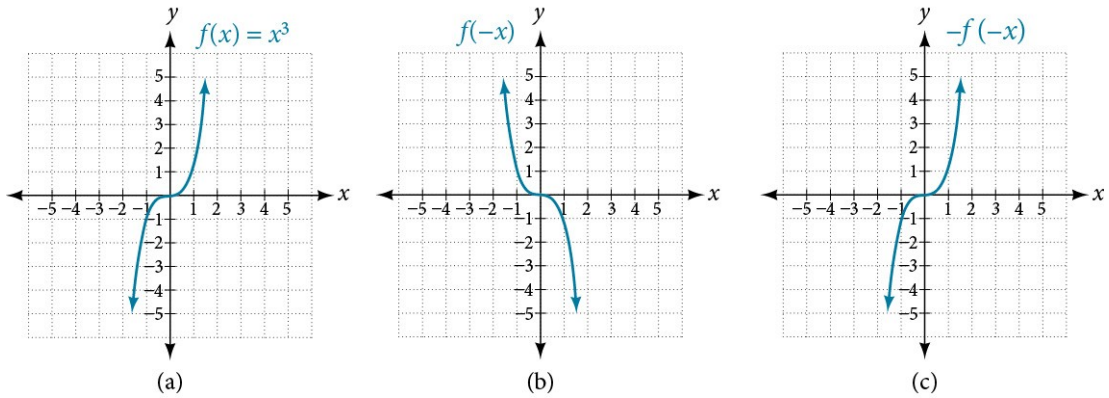
REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Gefið er grunnfallið $f(x) = x^2$, og teikna skal gröfin $g(x) = -f(x)$ og $h(x) = f(-x)$. Athugið hvort föllin hegða sér á einhvern óvæntan hátt.

Að ákvarða hvort föll eru jafnstæð eða oddstæð

Sum föll hafa slíka samhverfu að speglun skilar upphaflega grafinu. Ef grunnföllin $f(x) = x^2$ eða $f(x) = |x|$ eru til dæmis spegluð lárétt, fæst upphaflega grafið aftur. Við segjum að slík gröf séu samhverf um y-ásinn. Föll með gröf sem eru samhverf um y-ásinn kallast jafnstæð föll.

Ef gröf fallanna $f(x) = x^3$ eða $f(x) = \frac{1}{x}$ eru spegluð um báða ása, fæst upphaflega grafið aftur eins og sýnt er á mynd 17.



Mynd 17 (a) Þriðja stigs grunnfallið. (b) Lárétt speglun þriðja stigs grunnfallsins. (c) Lárétt og lóðrétt speglun endurskapa upphaflega þriðja stigs fallið.

Við segjum að þessi gröf séu samhverf um upphafspunktinn. Fall með graf sem er samhverft um upphafspunktinn kallast oddstætt fall.

Athugið: Fall getur verið hvorki jafnstætt né oddstætt ef það hefur hvoruga samhverfuna. Fallið $f(x)=2^x$ er til dæmis hvorki jafnstætt né oddstætt. Eina fallið sem er bæði jafnstætt og oddstætt er fastafallið $f(x)=0$.

JAFNSTÆÐ OG ODDSTÆÐ FÖLL

Fall kallast jafnstætt ef fyrir hvert inntak x

$$f(x)=f(-x)$$

Graf jafnstæðs falls er samhverft um $y-$ ásinn.

Fall kallast oddstætt ef fyrir hvert inntak x

$$f(x)=-f(-x)$$

Graf oddstæðs falls er samhverft um upphafspunktinn.

AÐFERÐ

Ákvarða út frá formúlu falls hvort fallið er jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

1. Athugið hvort fallið uppfyllir $f(x)=f(-x)$. Ef svo er er fallið jafnstætt.
2. Athugið hvort fallið uppfyllir $f(x)=-f(-x)$. Ef svo er er fallið oddstætt.
3. Ef fallið uppfyllir hvoruga regluna er það hvorki jafnstætt né oddstætt.

DÆMI 12

Að ákvarða hvort fall er jafnstætt, oddstætt eða hvorugt

Er fallið $f(x)=x^3+2x$ jafnstætt, oddstætt eða hvorugt?

1

Lausn

Án þess að skoða graf getum við ákvarðað hvort fallið er jafnstætt eða oddstætt með því að finna formúlur fyrir speglanirnar og athuga hvort þær skila upphaflega fallinu. Byrjum á reglunni fyrir jafnstæð föll.

$$f(-x)=(-x)^3+2(-x)=-x^3-2x$$

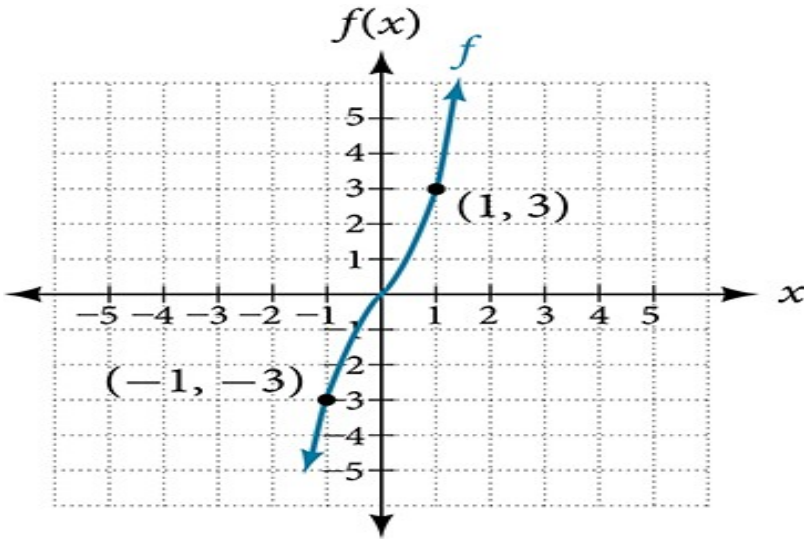
Þetta skilar ekki upphaflega fallinu og því er fallið ekki jafnstætt. Nú getum við prófað regluna fyrir oddstæð föll.

$$-f(-x)=-\left(-x^3-2x\right)=x^3+2x$$

Þar sem $-f(-x)=f(x)$, er fallið oddstætt.

Greining

Skoðum graf f á mynd 18. Takið eftir að grafið er samhverft um upphafspunktinn. Fyrir sérhvern punkt (x, y) á grafinu er samsvarandi punktur $(-x, -y)$ einnig á grafinu. Punkturinn (1, 3) er til dæmis á grafi f, og samsvarandi punktur $(-1, -3)$ er einnig á grafinu.



Mynd 18 Graf oddstæðs falls með punktana (1, 3) og (−1, −3).

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Er fallið $f(s)=s^4+3s^2+7$ jafnstætt, oddstætt eða hvorugt?

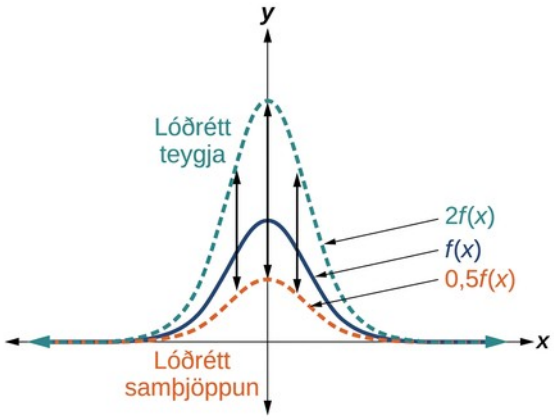
Að teikna gröf falla með teygjum og samþjöppun

Þegar fasta er bætt við inntak eða úttak falls breytist staða grafsins miðað við ásana en lögun þess ekki. Nú skoðum við áhrif þess að margfalda inntak eða úttak með tiltekinni stærð.

Við getum ummyndað innri hluta fallsins, það er inntaksgildin, eða ytri hluta þess, það er úttaksgildin. Hver breyting hefur tiltekin áhrif sem sjá má á grafi.

Lóðréttar teygjur og samþjöppun

Þegar fall er margfaldað með jákvæðum fasta fæst fall með graf sem er teygt eða samþjappað lóðrétt miðað við graf upphaflega fallsins. Ef fastinn er stærri en 1 fæst lóðrétt teygja en ef hann er á milli 0 og 1 fæst lóðrétt samþjöppun. Mynd 19 sýnir lóðréttu teygjuna og samþjöppunina sem fást þegar fall er margfaldað með föstu stuðlunum 2 og 0,5.



Mynd 19 Lóðrétt teygja og samþjöppun

LÓÐRÉTTAR TEYGJUR OG SAMÞJÖPPUN

Gefið er fall $f(x)$, og nýja fallið $g(x)=af(x)$, þar sem a er fasti, er lóðrétt teygja eða lóðrétt samþjöppun fallsins $f(x)$.

- Ef $a>1$, teygist grafið.
- Ef $0<a<1$, þjappast grafið saman.
- Ef $a<0$, sameinast lóðrétt teygja eða samþjöppun og lóðrétt speglun.

AÐFERÐ

Teikna lóðrétta teygju grafs falls.

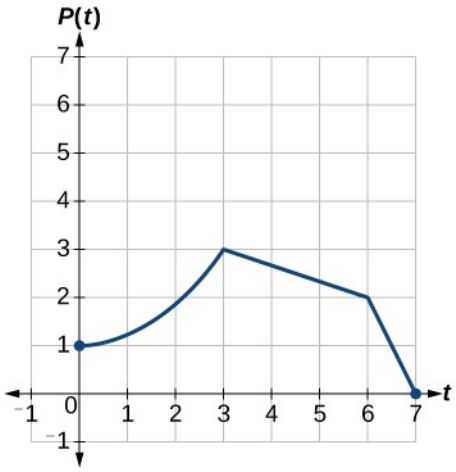
1. Finnið gildið á a.
2. Margfaldið öll úttaksgildi með a.
3. Ef $a>1$, teygist grafið með stuðlinum a.
   Ef $0<a<1$, þjappast grafið saman með stuðlinum a.
   Ef $a<0$, teygist grafið eða þjappast saman og speglast jafnframt um x-ásinn.

DÆMI 13

Að teikna lóðrétta teygju

Fallið $P(t)$ lýsir stofnstærð ávaxtaflugna. Grafið er sýnt á mynd 20.

1



Mynd 20 Stærð stofns ávaxtaflugna eftir tíma.

Vísindamaður ber þennan stofn saman við annan stofn, Q, sem vex með sama mynstri en er tvöfalt stærri. Teiknið skissu af grafi þessa stofns.

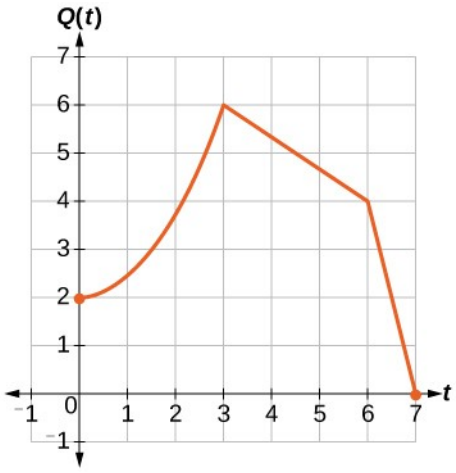
Lausn

Þar sem stofninn er alltaf tvöfalt stærri eru úttaksgildi nýja stofnsins alltaf tvöföld úttaksgildi upphaflega stofnsins. Þetta er sýnt á mynd 21.

Ef við veljum viðmiðunarpunktana fjóra $(0, 1)$, $(3, 3)$, $(6, 2)$ og $(7, 0)$ margföldum við öll úttaksgildin með 2.

Hér á eftir sést hvar nýju punktarnir á nýja grafinu liggja.

$$\begin{aligned}(0,\ 1) &\to (0,\ 2)\\ (3,\ 3) &\to (3,\ 6)\\ (6,\ 2) &\to (6,\ 4)\\ (7,\ 0) &\to (7,\ 0)\end{aligned}$$



Mynd 21 Tvöföldun gilda stofnfallsins.

Með táknum eru tengslin rituð sem

$$Q(t)=2P(t)$$

Þetta merkir að fyrir hvert inntak t, er gildi fallsins Q tvöfalt gildi fallsins P. Takið eftir að grafið teygist lóðrétt þannig að fjarlægð hvers punkts frá lárétta ásnum tvöfaldast. Inntaksgildin t, haldast óbreytt en úttaksgildin verða tvöfalt stærri en áður.

AÐFERÐ

Búa til töflu fyrir lóðrétta samþjöppun þegar fall er gefið í töflu og vitað er að ummyndunin er lóðrétt teygja eða samþjöppun.

1. Ákvarðið gildið á a.
2. Margfaldið öll úttaksgildin með a.

DÆMI 14

Að finna lóðrétta samþjöppun falls í töflu

Fallið f er gefið í töflu 10. Búið til töflu fyrir fallið $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$.

Tafla 10

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	3	7	11

Lausn

Formúlan $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$ segir okkur að úttaksgildi g séu helmingur úttaksgilda f við sömu inntök. Við vitum til dæmis að $f(4)=3$. Þá er

$$g(4)=\frac{1}{2}f(4)=\frac{1}{2}(3)=\frac{3}{2}$$

Við gerum það sama fyrir hin gildin og búum til töflu 11.

Tafla 11

x	2	4	6	8
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$

Greining

1

Niðurstaðan er að fallinu $g(x)$ hefur verið þjappað lóðrétt saman með stuðlinum $\frac{1}{2}$. Hvert úttaksgildi helmingast og því verður grafið helmingi lægra en upphaflega grafið.

REYNIÐ SJÁLF NR. 9

Fallið f er gefið í töflu 12. Búið til töflu fyrir fallið $g(x)=\frac{3}{4}f(x)$.

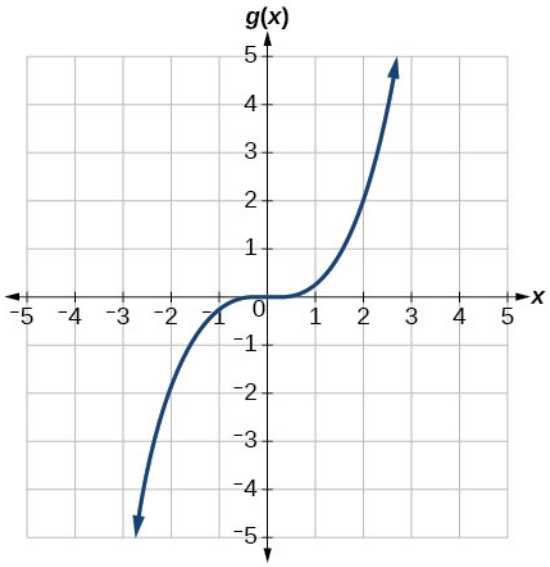
Tafla 12

x	2	4	6	8
$f(x)$	12	16	20	0

DÆMI 15

Að bera kennsl á lóðrétta teygju

Grafið á mynd 22 er ummyndun grunnfallsins $f(x)=x^3$. Tengið nýja fallið $g(x)$ við $f(x)$, og finnið síðan formúlu fyrir $g(x)$.



Mynd 22 Graf þriðja stigs falls eftir lóðrétta samþjöppun.

Lausn

Þegar ákvarða á lóðrétta teygju eða hliðrun er gagnlegt að leita að greinilegum punkti á grafinu. Á þessu grafi virðist $g(2)=2$. Fyrir þriðja stigs grunnfallið við sama inntak er

$f(2)=2^3=8$. Af því má ráða að úttaksgildi g séu $\frac{1}{4}$ af úttaksgildum fallsins f því $g(2)=\frac{1}{4}f(2)$.

Við getum því ályktað með nokkurri vissu að $g(x)=\frac{1}{4}f(x)$.

Við getum ritað formúlu fyrir g með skilgreiningu fallsins f.

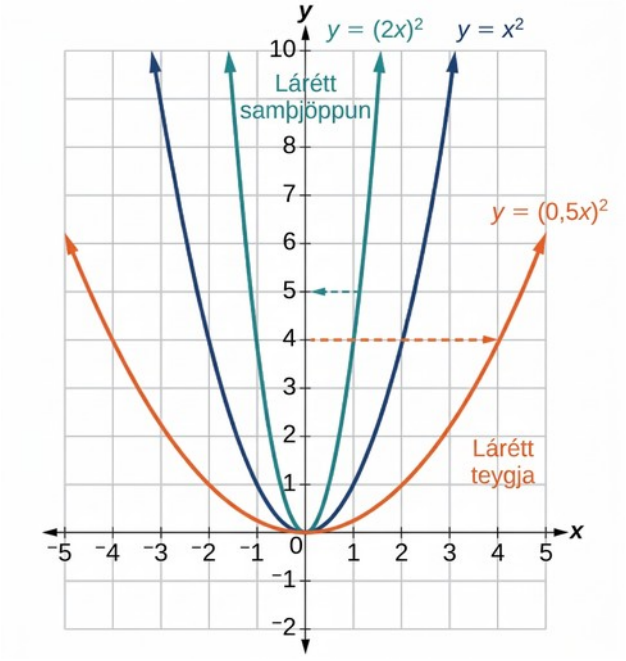
$$g(x)=\frac{1}{4}f(x)=\frac{1}{4}x^3$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 10

Ritið formúlu fyrir fallið sem fæst þegar samsemdarfallið úr safni grunnfalla er teygt með stuðlinum 3 og síðan hliðrað um 2 einingar niður.

Láréttar teygjur og samþjöppun

Nú skoðum við breytingar inni í falli. Þegar inntak falls er margfaldað með jákvæðum fasta fæst fall með graf sem er teygt eða samþjappað lárétt miðað við graf upphaflega fallsins. Ef fastinn er á milli 0 og 1 fæst lárétt teygja en ef hann er stærri en 1 fæst lárétt samþjöppun.



Mynd 23 Lárétt teygja og samþjöppun grafsins y = x².

Ef fallið $y=f(x)$, er gefið veldur formið $y=f(bx)$ láréttri teygju eða samþjöppun. Skoðum fallið $y=x^2$. Skoðið mynd 23. Grafið $y=(0{,}5\ x)^2$ er lárétt teygja grafs fallsins $y=x^2$ með stuðlinum 2. Grafið $y=(2x)^2$ er lárétt samþjöppun grafs fallsins $y=x^2$ með stuðlinum 2.

LÁRÉTTAR TEYGJUR OG SAMÞJÖPPUN

1

Gefið er fall $f(x)$, og nýja fallið $g(x)=f(bx)$, þar sem b er fasti, er lárétt teygja eða lárétt samþjöppun fallsins $f(x)$.

- Ef $b>1$, þjappast grafið saman með stuðlinum $\frac{1}{b}$.
- Ef $0<b<1$, teygist grafið með stuðlinum $\frac{1}{b}$.
- Ef $b<0$, sameinast lárétt teygja eða samþjöppun og lárétt speglun.

AÐFERÐ

Teikna skissu af láréttri teygju eða samþjöppun út frá lýsingu á falli.

1. Ritið formúlu sem lýsir fallinu.
2. Setjið $g(x)=f(bx)$ þar sem $b>1$ fyrir samþjöppun eða $0<b<1$ fyrir teygju.

DÆMI 16

Að teikna lárétta samþjöppun

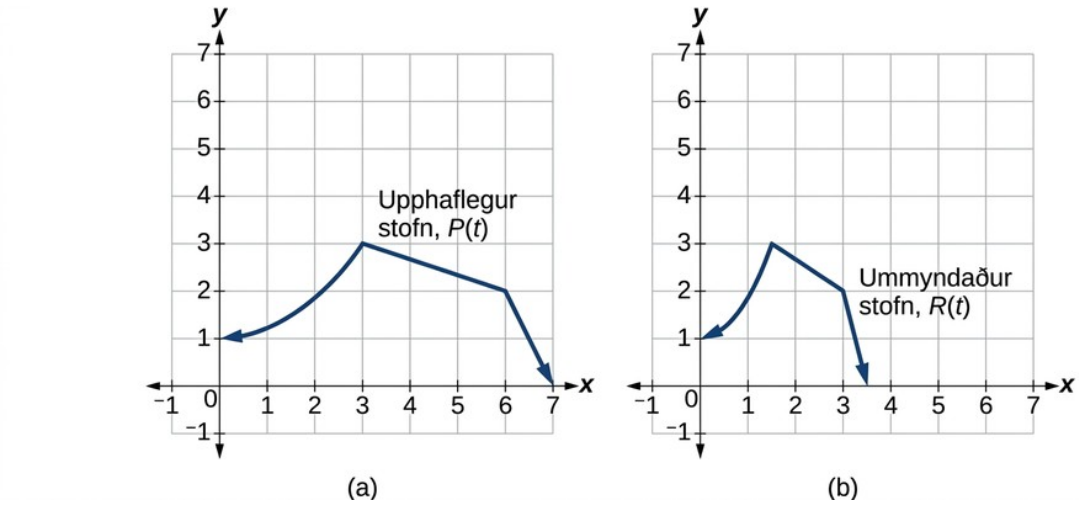
Gerum ráð fyrir að vísindamaður beri stofn ávaxtaflugna saman við stofn sem fer tvöfalt hraðar í gegnum æviskeið sitt en upphaflegi stofninn. Nýi stofninn R, þróast með öðrum orðum jafn mikið á 1 klukkustund og upphaflegi stofninn á 2 klukkustundum. Á 2 klukkustundum þróast hann jafn mikið og upphaflegi stofninn á 4 klukkustundum. Teiknið skissu af grafi þessa stofns.

Lausn

Með táknum getum við ritað

$$\begin{aligned} R(1)&=P(2),\\ R(2)&=P(4),\ \text{og almennt,}\\ R(t)&=P(2t). \end{aligned}$$

Á mynd 24 eru upphaflegi stofninn og samþjappaði stofninn bornir saman á grafi.



Mynd 24 (a) Graf upphaflega stofnsins. (b) Graf samþjappaða stofnsins.

Greining

Takið eftir að grafið þjappast lárétt saman þannig að fjarlægð allra inntaksgilda frá lóðrétta ásnum helmingast.

DÆMI 17

Að finna lárétta teygju falls í töflu

Fallið $f(x)$ er gefið í töflu 13. Búið til töflu fyrir fallið $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Tafla 13

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	3	7	11

Lausn

Formúlan $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ segir okkur að úttaksgildi g séu þau sömu og úttaksgildi fallsins f við helmingi minna inntak. Takið eftir að við höfum ekki nægar upplýsingar til að finna $g(2)$ því $g(2)=f\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)=f(1)$, og gildið $f(1)$ er ekki í töflunni. Inntaksgildi g þurfa að vera tvöfalt stærri til að gefa inntök í f sem við getum reiknað. Við getum til dæmis fundið $g(4)$.

$$g(4)=f\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right)=f(2)=1$$

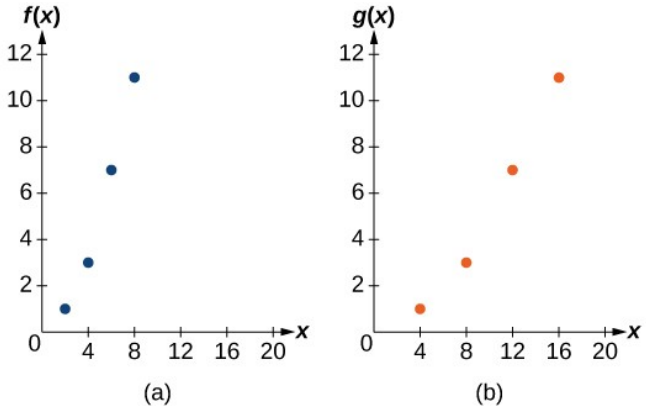
Við gerum það sama fyrir hin gildin og búum til töflu 14.

1

Tafla 14

x	4	8	12	16
$g(x)$	1	3	7	11

Mynd 25 sýnir gröf beggja punktasafnanna.



Mynd 25 Lárétt teygja tvöfaldar x-hnit punktanna.

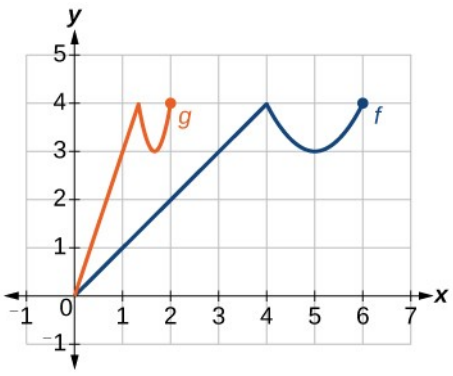
Greining

Þar sem hvert inntaksgildi hefur tvöfaldast hefur fallið $g(x)$ verið teygt lárétt með stuðlinum 2.

DÆMI 18

Að bera kennsl á lárétta samþjöppun á grafi

Tengið fallið $g(x)$ við $f(x)$ á mynd 26.



Mynd 26 Lárétt samþjöppun grafsins f gefur grafið g.

Lausn

Graf $g(x)$ lítur út eins og graf $f(x)$ sem hefur verið þjappað lárétt saman. Þar sem $f(x)$ endar í $(6,4)$ en $g(x)$ endar í $(2,4)$, sjáum við að $x-$ gildunum hefur verið þjappað saman með

stuðlinum $\frac{1}{3}$, því $6\left(\frac{1}{3}\right)=2$. Við gætum einnig tekið eftir að $g(2)=f(6)$ og $g(1)=f(3)$. Í báðum tilvikum getum við lýst tengslunum sem $g(x)=f(3x)$. Þetta er lárétt samþjöppun með stuðlinum $\frac{1}{3}$.

Greining

Takið eftir að stuðullinn sem þarf fyrir lárétta teygju eða samþjöppun er umhverfa teygju- eða samþjöppunarstuðulsins. Til að teygja graf lárétt með kvarðastuðlinum 4 þurfum við því stuðulinn $\frac{1}{4}$ í fallinu: $f\left(\frac{1}{4}x\right)$. Inntaksgildin þurfa þá að vera fjórfalt stærri til að gefa sömu niðurstöðu. Það veldur láréttu teygjunni.

REYNIÐ SJÁLF NR. 11

Ritið formúlu fyrir kvaðratrótarfallið úr safni grunnfalla þegar það er teygt lárétt með stuðlinum 3.

Að framkvæma röð ummyndana

Þegar ummyndanir eru sameinaðar er mjög mikilvægt að huga að röð þeirra. Lóðrétt hliðrun um 3 og síðan lóðrétt teygja með stuðlinum 2 gefur til dæmis ekki sama graf og lóðrétt teygja með stuðlinum 2 og síðan lóðrétt hliðrun um 3. Þegar hliðrað er fyrst teygjast bæði upphaflega fallið og hliðrunin en þegar teygt er fyrst teygist aðeins upphaflega fallið.

Þegar við sjáum stæðu á borð við $2f(x)+3$, hvaða ummyndun eigum við þá að framkvæma fyrst? Svarið fylgir forgangsröð reikniaðgerða. Þegar úttaksgildi $f(x)$, er gefið margföldum við fyrst með 2 sem veldur lóðréttri teygju og leggjum síðan 3 við sem veldur lóðréttri hliðrun. Með öðrum orðum kemur margföldun á undan samlagningu.

Láréttar ummyndanir eru aðeins flóknari í túlkun. Þegar við ritum til dæmis $g(x)=f(2x+3)$, þurfum við að skoða hvernig inntök fallsins g tengjast inntökum fallsins f. Gerum ráð fyrir að við vitum að $f(7)=12$. Hvaða inntak í g gefur það úttak? Með öðrum orðum, hvaða gildi x uppfyllir $g(x)=f(2x+3)=12$? Við þurfum að hafa $2x+3=7$. Til að leysa fyrir x, drögum við fyrst 3 frá, sem samsvarar láréttri hliðrun, og deilum síðan með 2, sem samsvarar láréttri samþjöppun.

Þetta form er mjög óþjált því yfirleitt er miklu auðveldara að teygja graf lárétt áður en því er hliðrað. Við getum leyst vandann með því að taka sameiginlegan þátt út fyrir sviga í stæðunni inni í fallinu.

$$f(bx+p)=f\left(b\left(x+\frac{p}{b}\right)\right)$$

Skoðum dæmi.

$$f(x)=(2x+4)^2$$

1

Við getum tekið 2 út fyrir sviga.

$$f(x)=(2(x+2))^2$$

Nú sjáum við skýrt lárétta hliðrun um 2 einingar til vinstri og lárétta samþjöppun. Með þessari þáttun getum við fyrst þjappað grafinu lárétt saman og síðan hliðrað því lárétt.

AÐ SAMEINA UMMYNDANIR

Þegar lóðréttar ummyndanir eru sameinaðar á forminu $af(x)+k$, skal fyrst teygja lóðrétt með stuðlinum a og síðan hliðra lóðrétt um k.

Þegar láréttar ummyndanir eru sameinaðar á forminu $f(bx-h)$, skal fyrst hliðra lárétt um h og síðan kvarða grafið lárétt með stuðlinum $1b$.

Þegar láréttar ummyndanir eru sameinaðar á forminu $f(b(x-h))$, skal fyrst teygja lárétt með stuðlinum $\frac{1}{b}$ og síðan hliðra lárétt um h.

Láréttar og lóðréttar ummyndanir eru óháðar. Ekki skiptir máli hvort láréttu eða lóðréttu ummyndanirnar eru framkvæmdar fyrst.

DÆMI 19

Að finna þrefalda ummyndun falls í töflu

Í töflu 15 er fallið $f(x)$, gefið. Búið til gildatöflu fyrir fallið $g(x)=2f(3x)+1$.

Tafla 15

x	6	12	18	24
$f(x)$	10	14	15	17

Lausn

Ummyndunin hefur þrjú skref og við vinnum innan frá og út. Við byrjum á láréttu ummyndununum. Fallið $f(3x)$ er lárétt samþjöppun með stuðlinum $\frac{1}{3}$, sem merkir að hvert $x-$ gildi er margfaldað með $\frac{1}{3}$. Sjá töflu 16.

Tafla 16

x	2	4	6	8
$f(3x)$	10	14	15	17

Þá snúum við okkur að lóðréttu ummyndununum og byrjum á lóðréttu teygjunni sem margfaldar úttaksgildin með 2. Við beitum henni á ummyndunina á undan. Sjá töflu 17.

Tafla 17

x	2	4	6	8
$2f(3x)$	20	28	30	34

Að lokum beitum við lóðréttu hliðruninni sem bætir 1 við öll úttaksgildin. Sjá töflu 18.

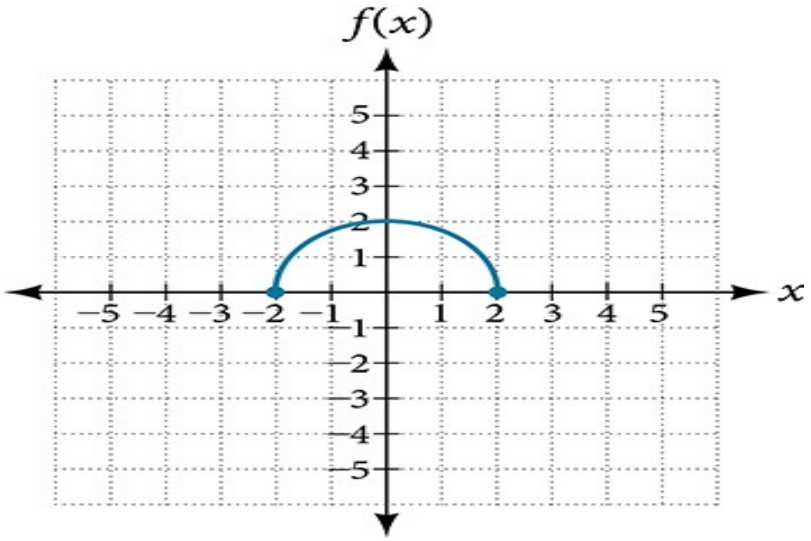
Tafla 18

x	2	4	6	8
$g(x)=2f(3x)+1$	21	29	31	35

DÆMI 20

Að finna þrefalda ummyndun grafs

Notið graf $f(x)$ á mynd 27 til að teikna skissu af grafi $k(x)=f\left(\frac{1}{2}x+1\right)-3$.



Mynd 27 Efri hálfhringur með geislann 2 og miðju í upphafspunkti.

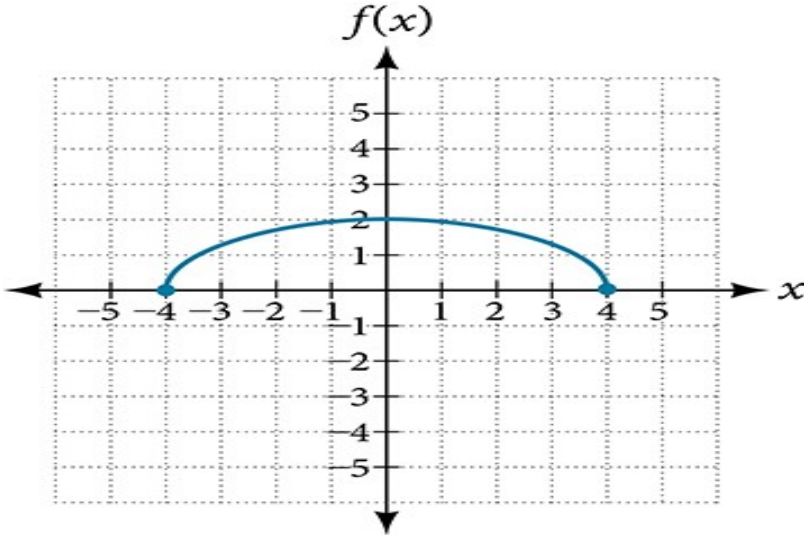
Lausn

Til einföldunar skulum við byrja á að taka sameiginlegan þátt út fyrir sviga í stæðunni inni í fallinu.

$$f\left(\frac{1}{2}x+1\right)-3=f\left(\frac{1}{2}(x+2)\right)-3$$

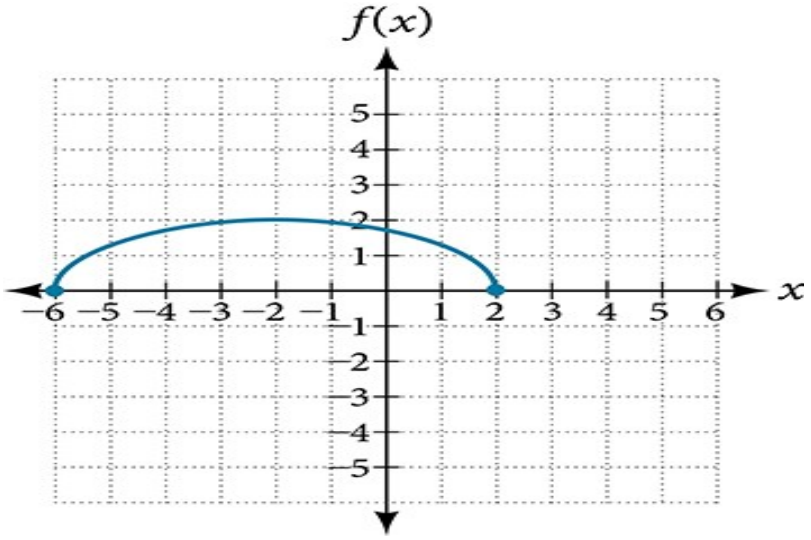
Þegar tekið hefur verið út fyrir sviga getum við fyrst teygt lárétt með stuðlinum 2 eins og $\frac{1}{2}$ inni í fallinu gefur til kynna. Munið að tvöfalt núll er enn núll og því helst punkturinn (0, 2) í (0, 2) en punkturinn (2, 0) teygist í (4, 0). Sjá mynd 28.

1



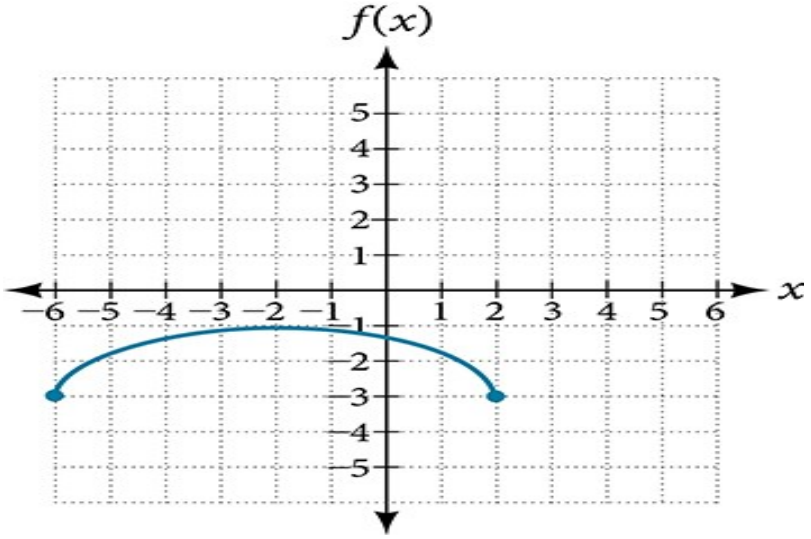
Mynd 28 Hálfhringurinn eftir lárétta teygju með stuðlinum 2.

Næst hliðrum við lárétt um 2 einingar til vinstri; það sést af $x+2$. Sjá mynd 29.



Mynd 29 Teygða grafið eftir hliðrun tvær einingar til vinstri.

Að lokum hliðrum við lóðrétt um 3 niður til að ljúka skissunni eins og -3 utan við fallið gefur til kynna. Sjá mynd 30.



Mynd 30 Grafið eftir viðbótarhliðrun þrjár einingar niður.

VEFEFNI

Opnið þetta vefefni til að fá frekari kennslu og æfingu í ummyndunum falla.

- Ummyndanir falla

1.5 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Hvernig má greina lárétta hliðrun frá lóðréttri hliðrun í formúlu falls sem er niðurstaða margra ummyndana?

2. Hvernig má greina lárétta teygju frá lóðréttri teygju í formúlu falls sem er niðurstaða margra ummyndana?

3. Hvernig má greina lárétta samþjöppun frá lóðréttri samþjöppun í formúlu falls sem er niðurstaða margra ummyndana?

4. Hvernig má greina speglun um x-ásinn frá speglun um y-ásinn í formúlu falls sem er niðurstaða margra ummyndana?

5. Hvernig má ákvarða út frá formúlu falls hvort fallið er oddstætt eða jafnstætt?

Algebruverkefni

6. Ritið formúlu fyrir fallið sem fæst þegar grafi $f(x)=\sqrt{x}$ er hliðrað um 1 einingu upp og 2 einingar til vinstri.

7. Ritið formúlu fyrir fallið sem fæst þegar grafi $f(x)=|x|$ er hliðrað um 3 einingar niður og 1 einingu til hægri.

1

8. Ritið formúlu fyrir fallið sem fæst þegar grafi $f(x)=\frac{1}{x}$ er hliðrað um 4 einingar niður og 3 einingar til hægri.

9. Ritið formúlu fyrir fallið sem fæst þegar grafi $f(x)=\frac{1}{x^2}$ er hliðrað um 2 einingar upp og 4 einingar til vinstri.

Í eftirfarandi dæmum skal lýsa því hvernig graf fallsins er ummyndun á grafi upphaflega fallsins f.

10.

$$y=f(x-49)$$

11.

$$y=f(x+43)$$

12.

$$y=f(x+3)$$

13.

$$y=f(x-4)$$

14.

$$y=f(x)+5$$

15.

$$y=f(x)+8$$

16.

$$y=f(x)-2$$

17.

$$y=f(x)-7$$

18.

$$y=f(x-2)+3$$

19.

$$y=f(x+4)-1$$

Í eftirfarandi dæmum skal ákvarða á hvaða bili eða bilum fallið er vaxandi og minnkandi.

20.

$$f(x)=4(x+1)^2-5$$

21.

$$g(x)=5(x+3)^2-2$$

22.

$$a(x)=\sqrt{-x+4}$$

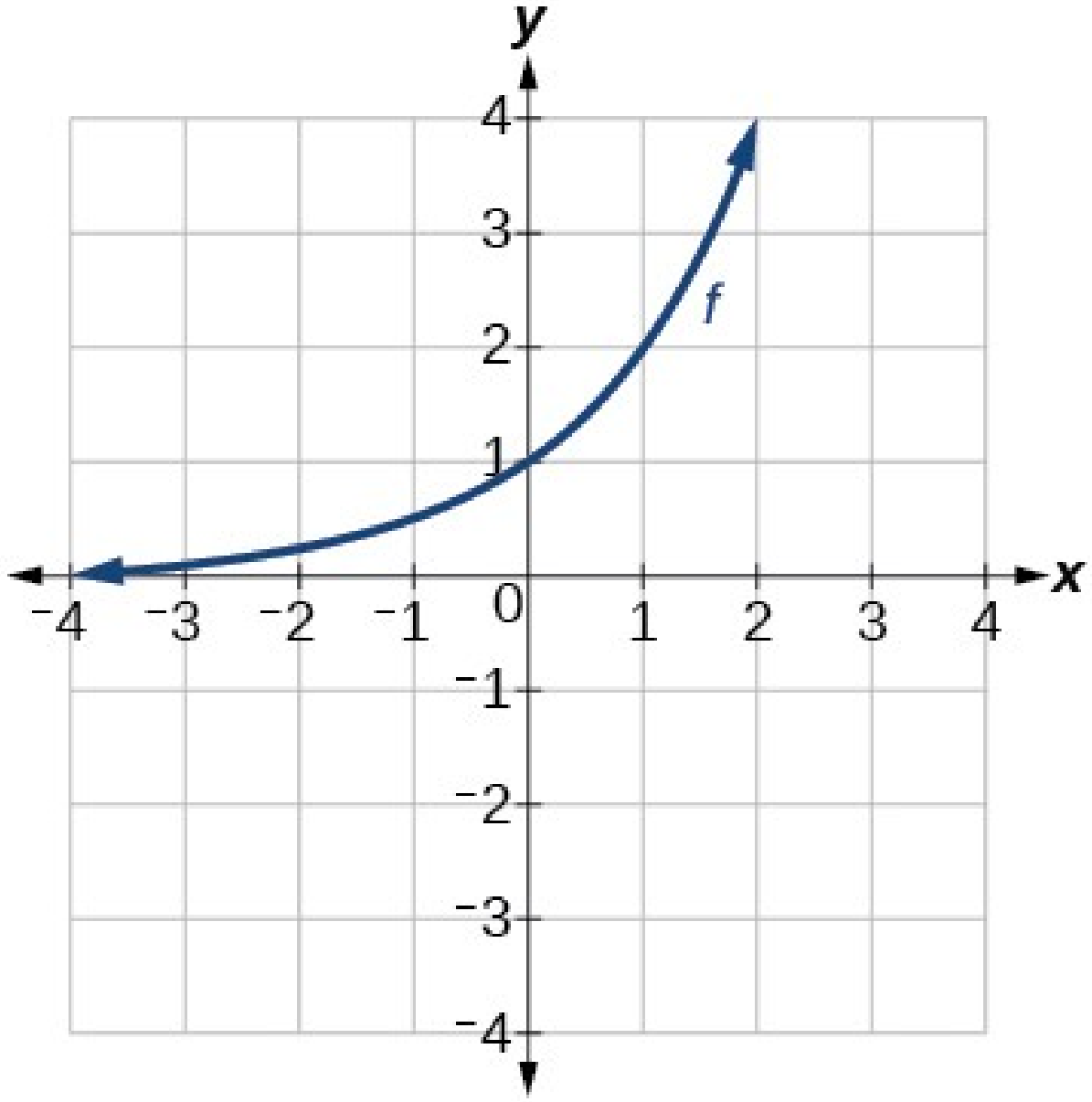
23.

$$k(x)=-3\sqrt{x}-1$$

Grafísk verkefni

Í eftirfarandi dæmum skal nota graf $f(x)=2^x$ á mynd 31 til að teikna skissu af grafi hverrar ummyndunar á $f(x)$.

1



Mynd 31 Graf vaxandi vísisfalls sem liggur um punktinn (0, 1).

24.

$$g(x)=2^x+1$$

25.

$$h(x)=2^x-3$$

26.

$$w(x)=2^{x-1}$$

Í eftirfarandi dæmum skal teikna skissu af grafi fallsins sem ummyndun á grafi eins af grunnföllunum.

27.

$$f(t)=(t+1)^2-3$$

28.

$$h(x)=|x-1|+4$$

29.

$$k(x)=(x-2)^3-1$$

30.

$$m(t)=3+\sqrt{t+2}$$

Töluleg verkefni

31. Töflur fyrir föllin f, g, og h eru gefnar hér fyrir neðan. Ritið $g(x)$ og $h(x)$ sem ummyndanir á $f(x)$.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−2	−1	−3	1	2
x	−1	0	1	2	3
$g(x)$	−2	−1	−3	1	2
x	−2	−1	0	1	2
$h(x)$	−1	0	−2	2	3

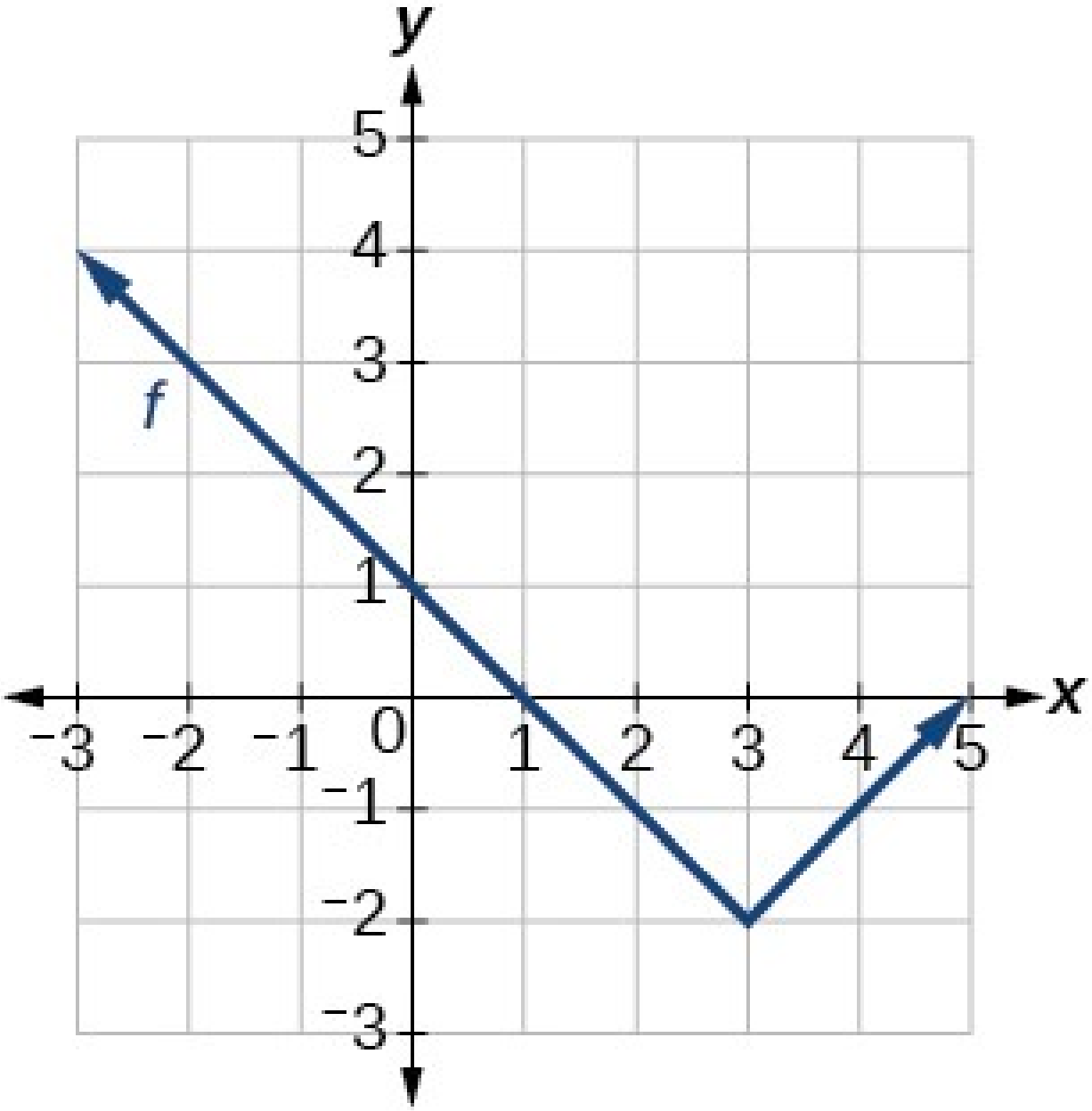
32. Töflur fyrir föllin f, g, og h eru gefnar hér fyrir neðan. Ritið $g(x)$ og $h(x)$ sem ummyndanir á $f(x)$.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−1	−3	4	2	1
x	−3	−2	−1	0	1
$g(x)$	−1	−3	4	2	1
x	−2	−1	0	1	2
$h(x)$	−2	−4	3	1	0

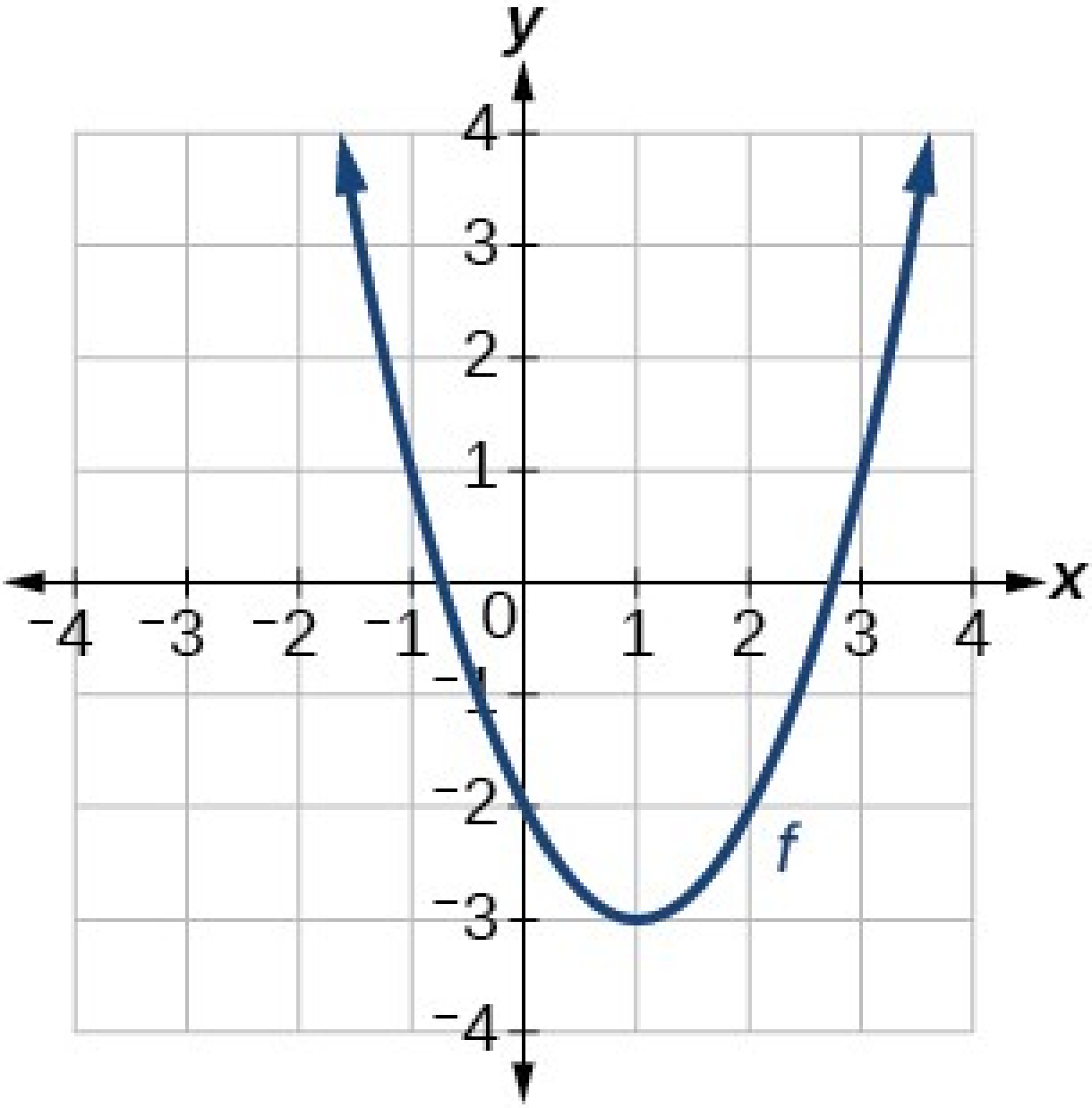
Í eftirfarandi dæmum skal nota ummyndanir á gröfum grunnfallanna til að rita jöfnu fyrir hvert graf.

33.

1

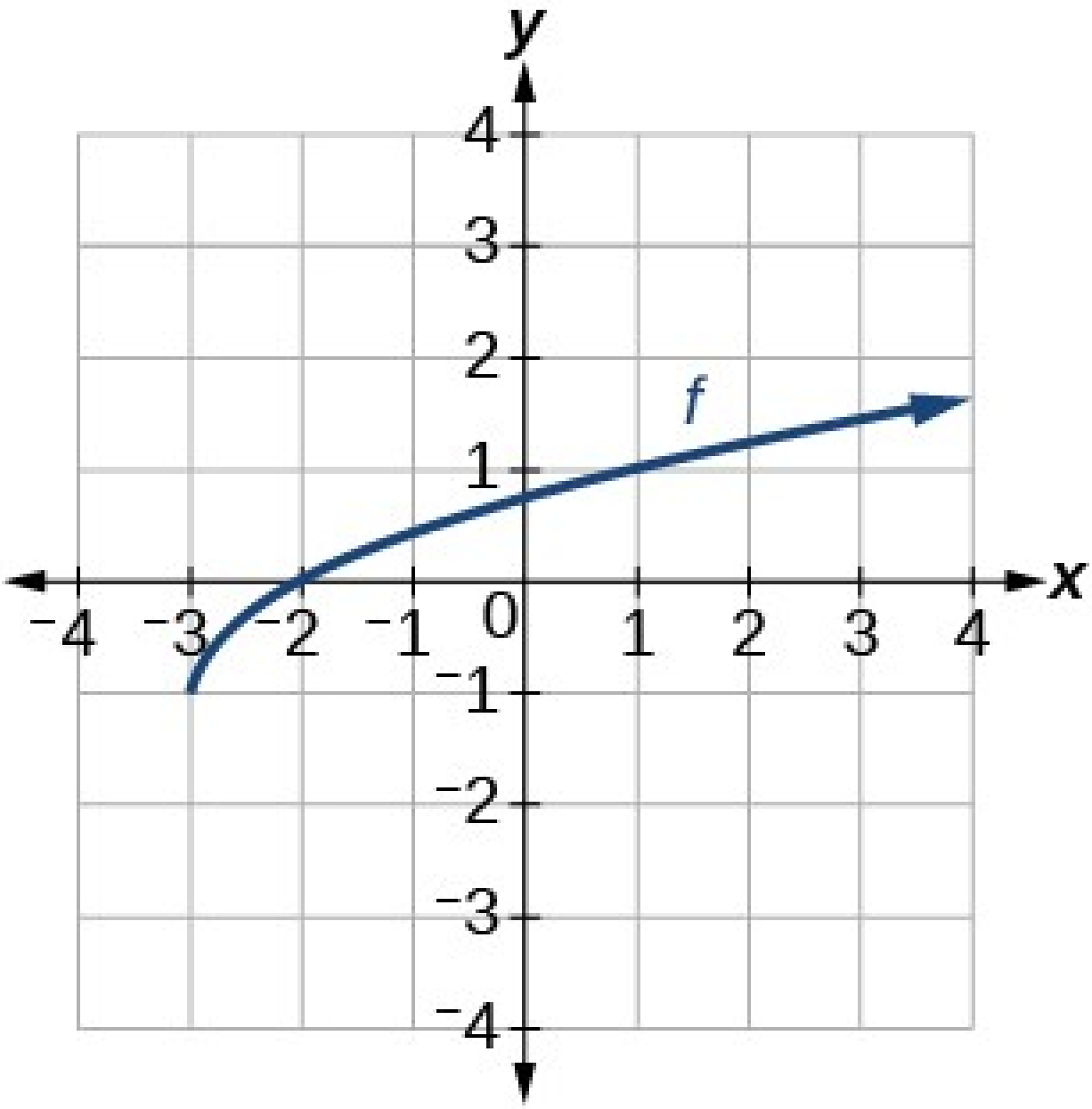


34.

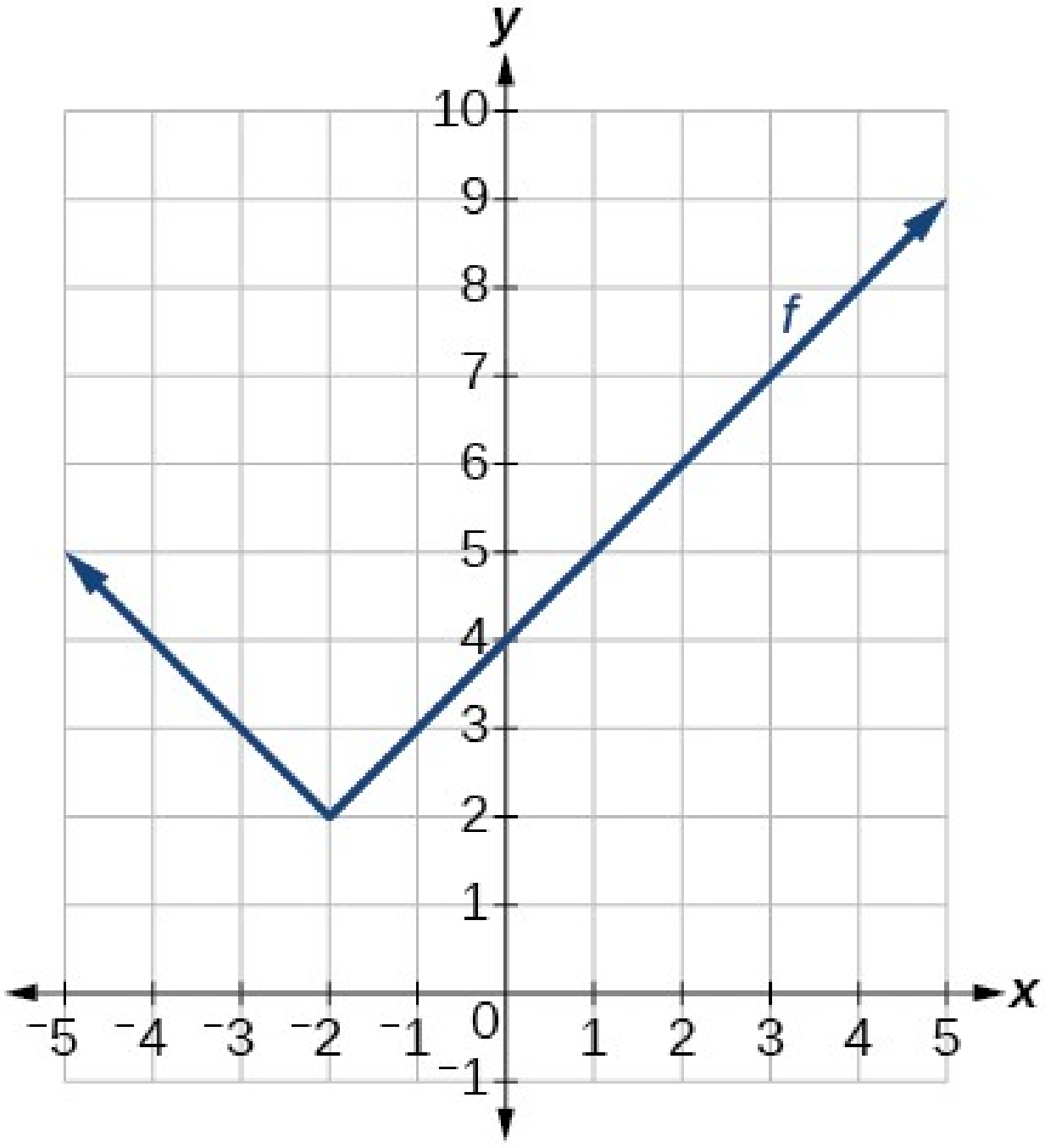


35.

1

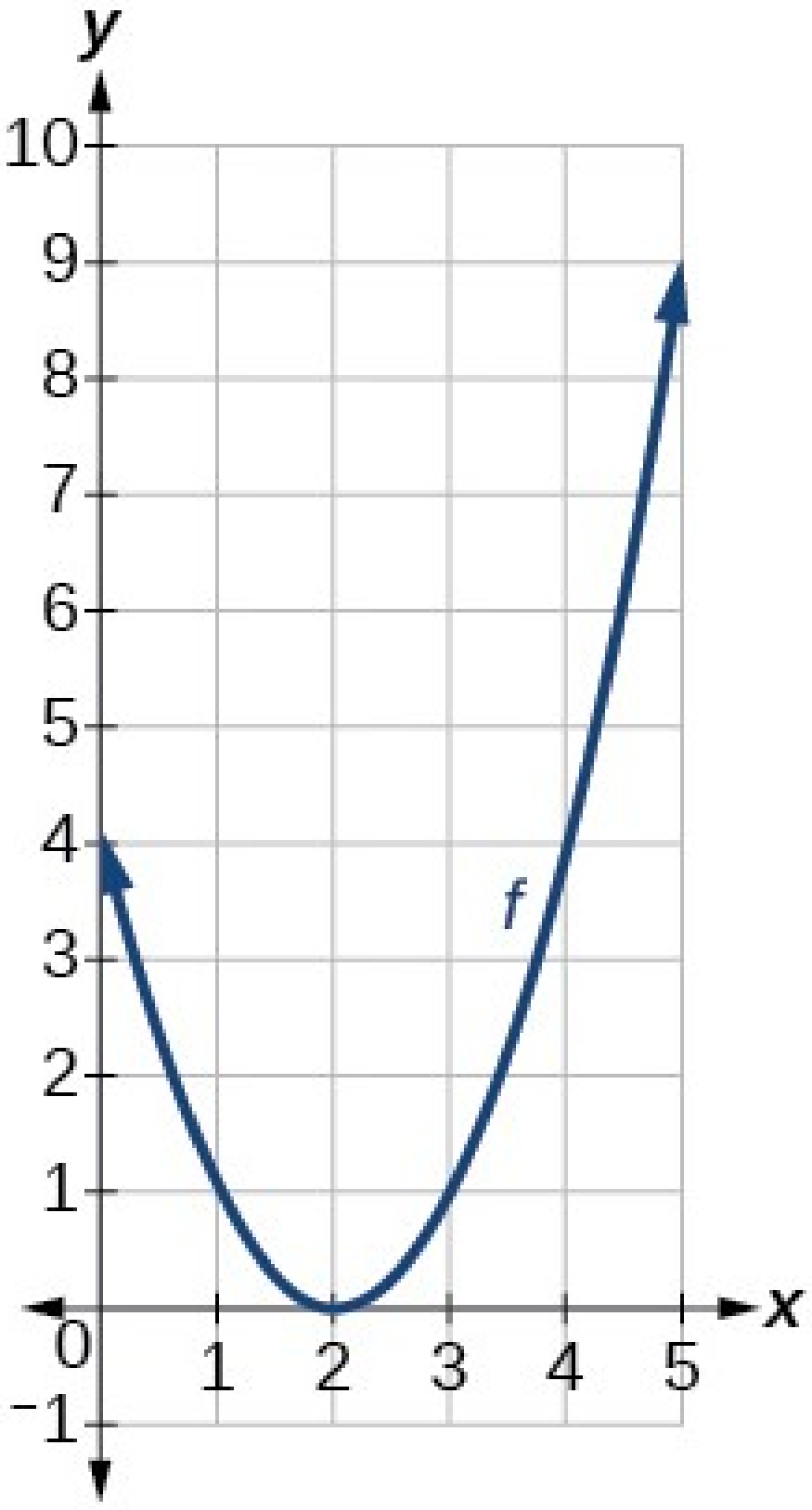


36.

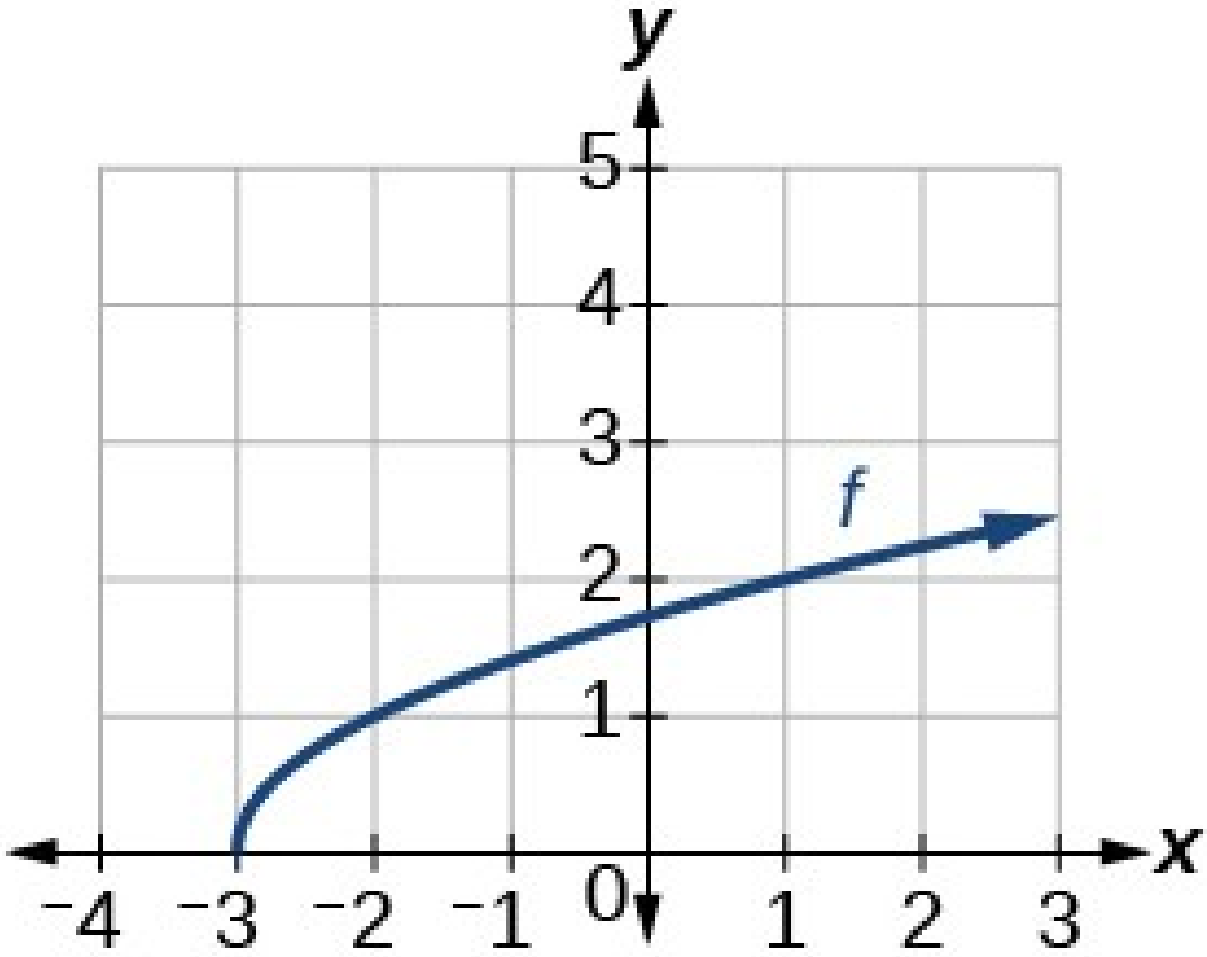


1

37.

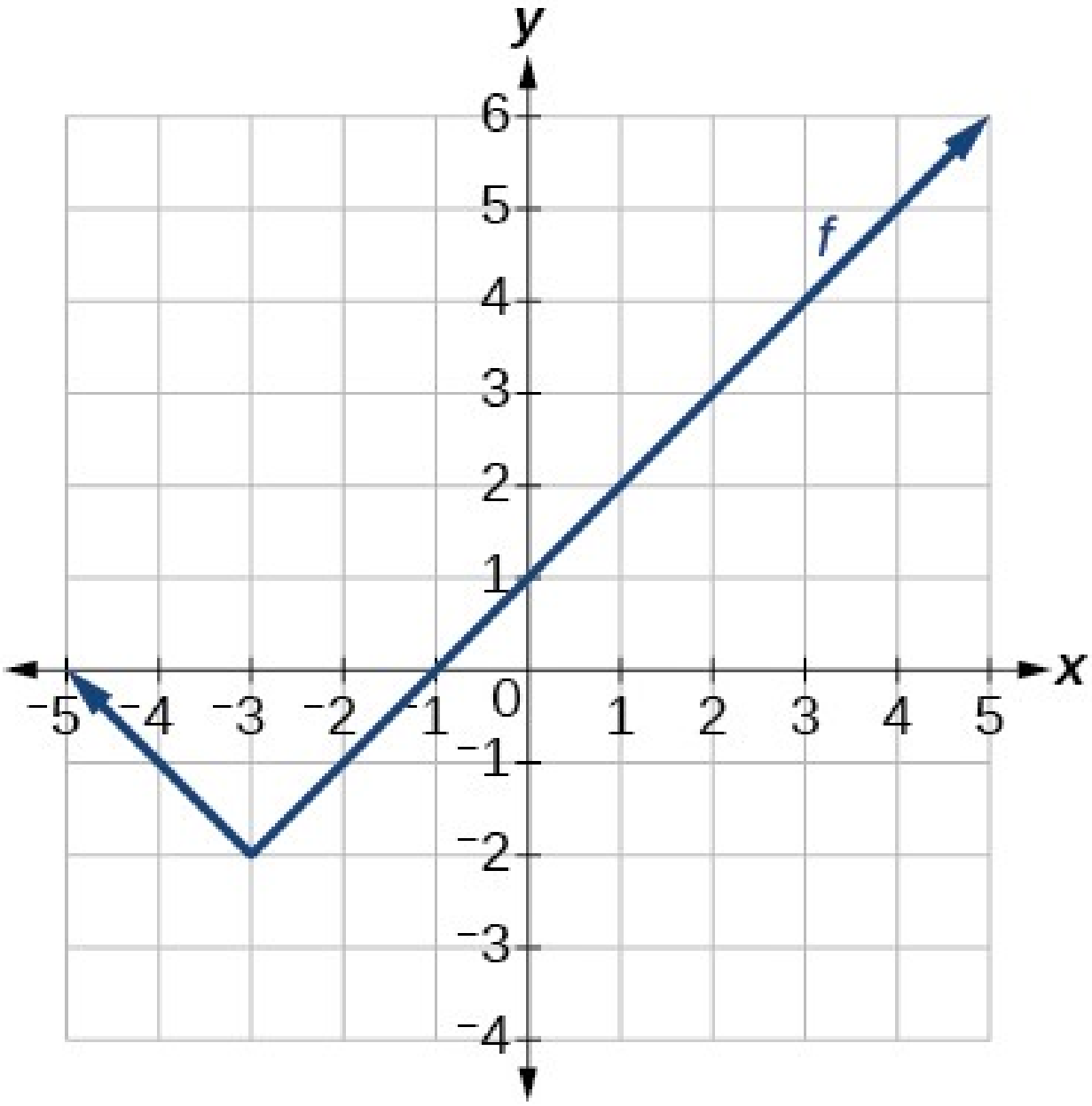


38.

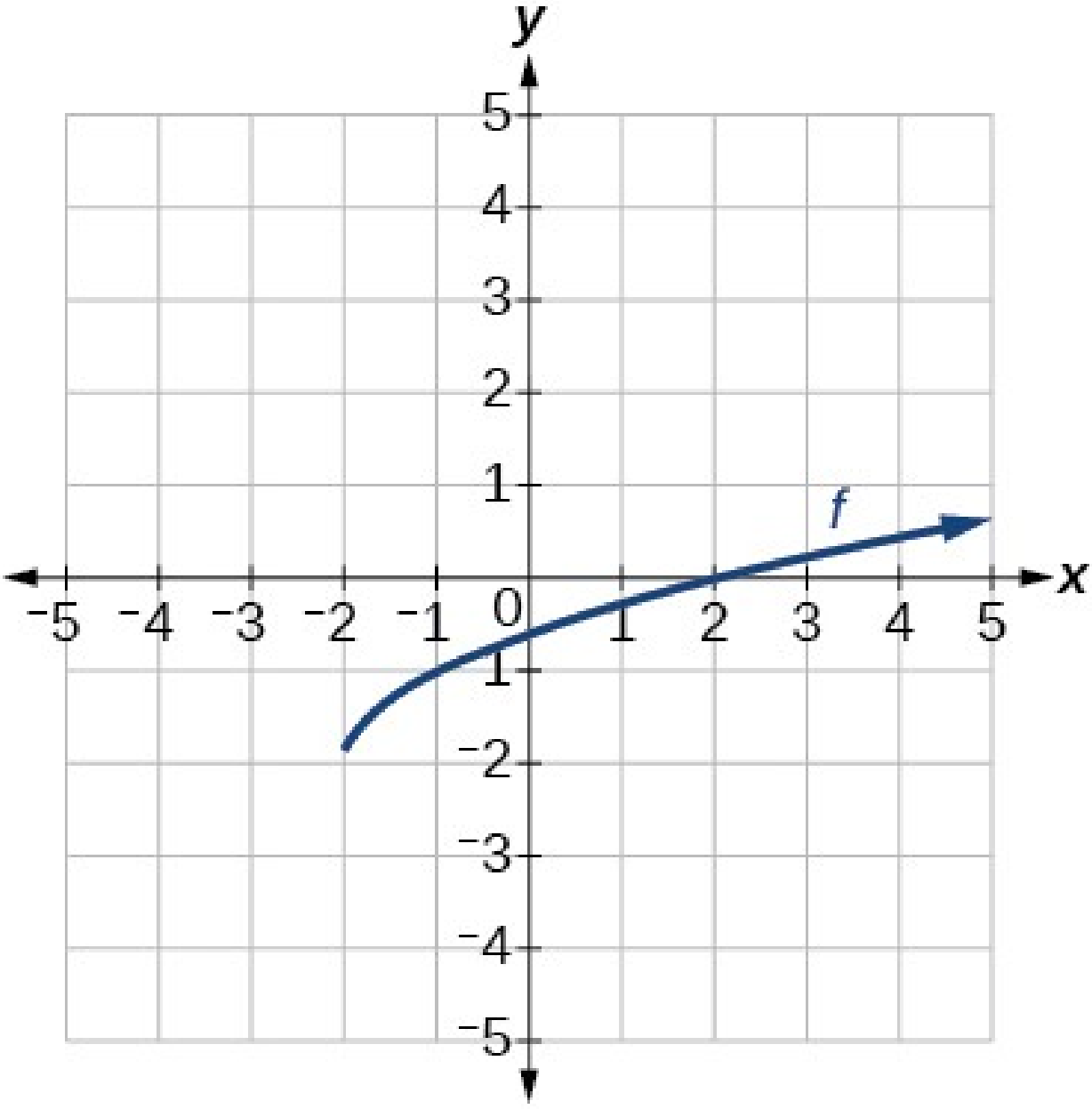


39.

1



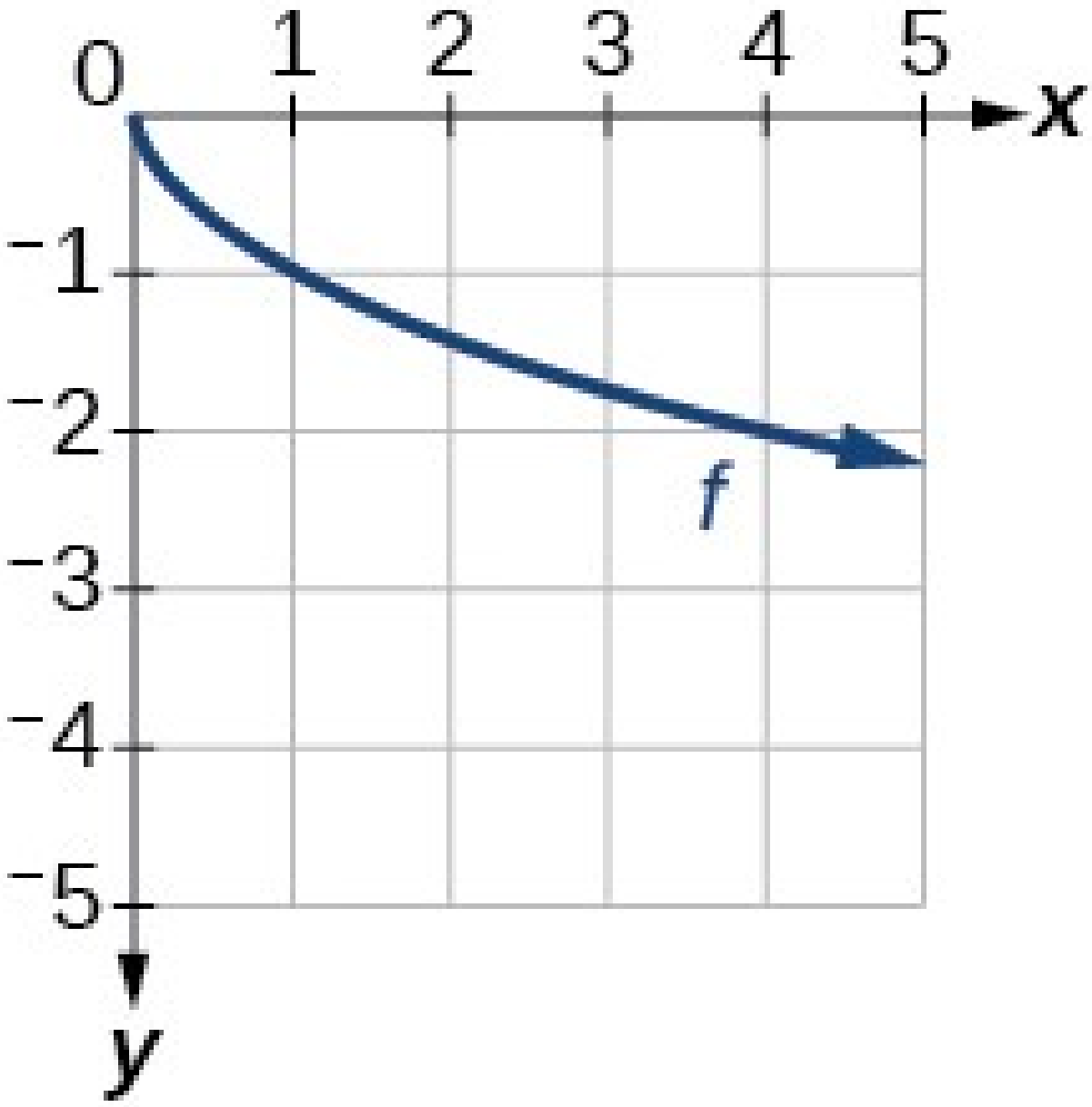
40.



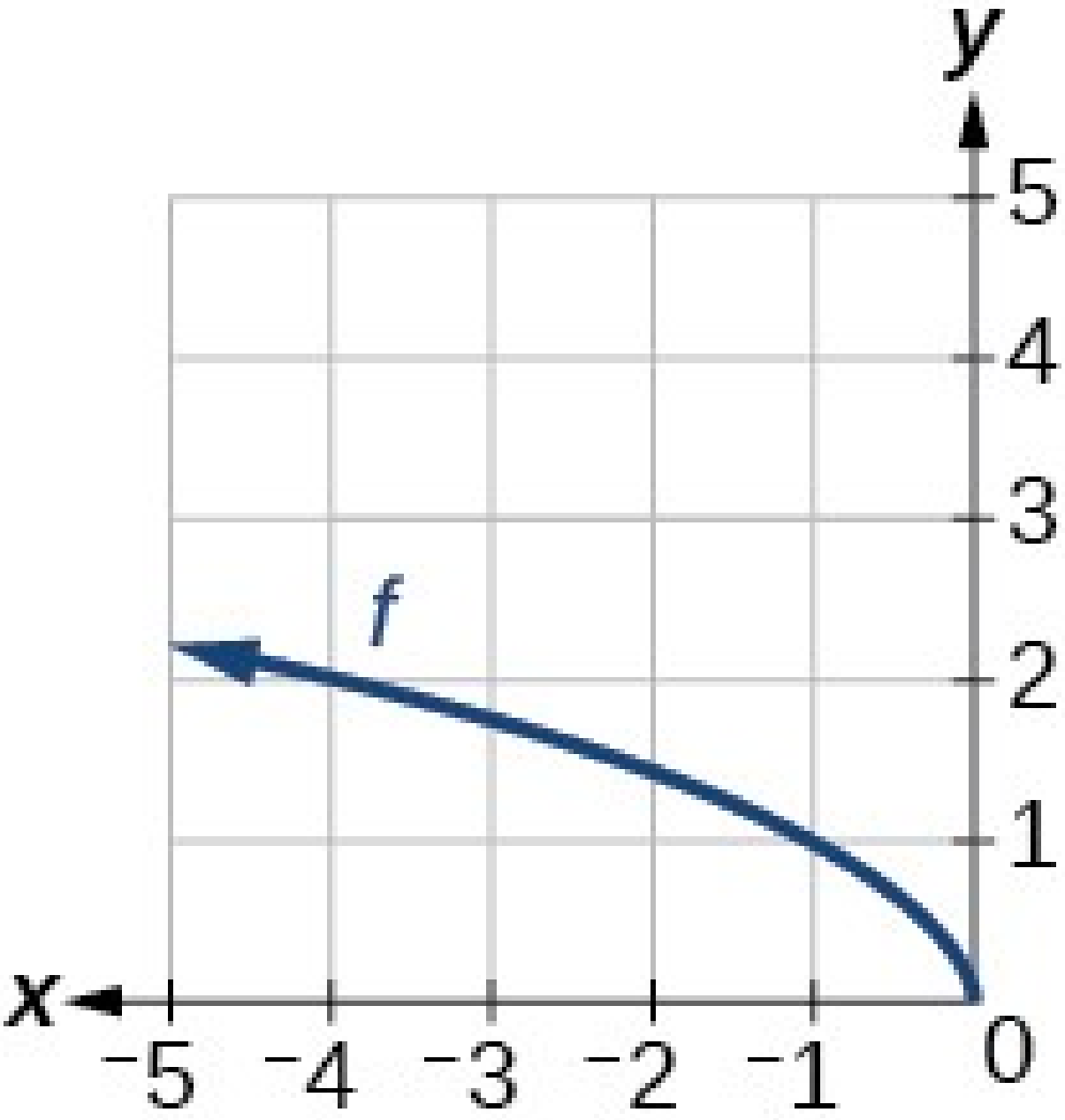
Í eftirfarandi dæmum skal nota gröf ummyndana kvaðratrótarfallsins til að finna formúlu fyrir hvert fall.

1

41.



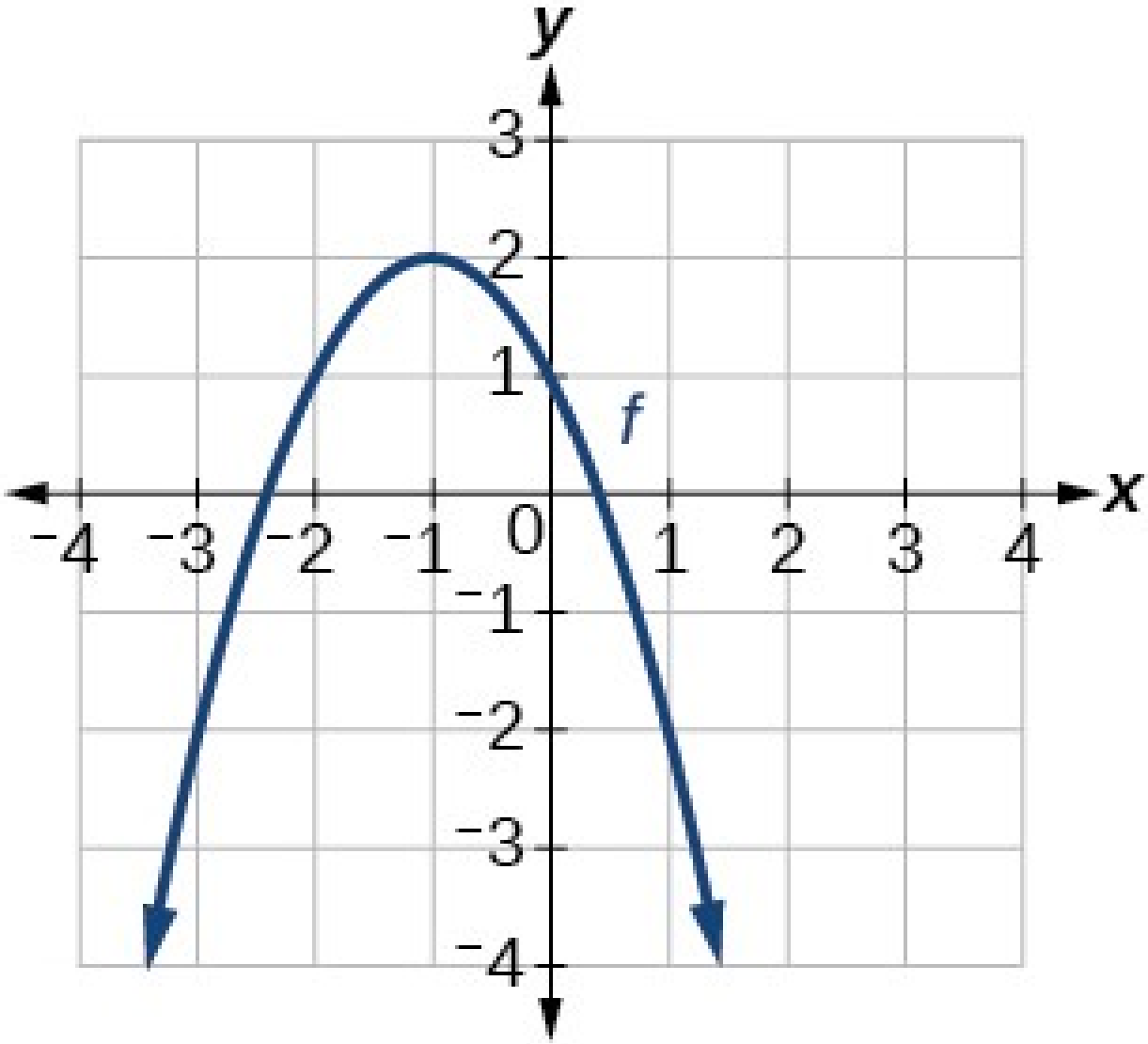
42.



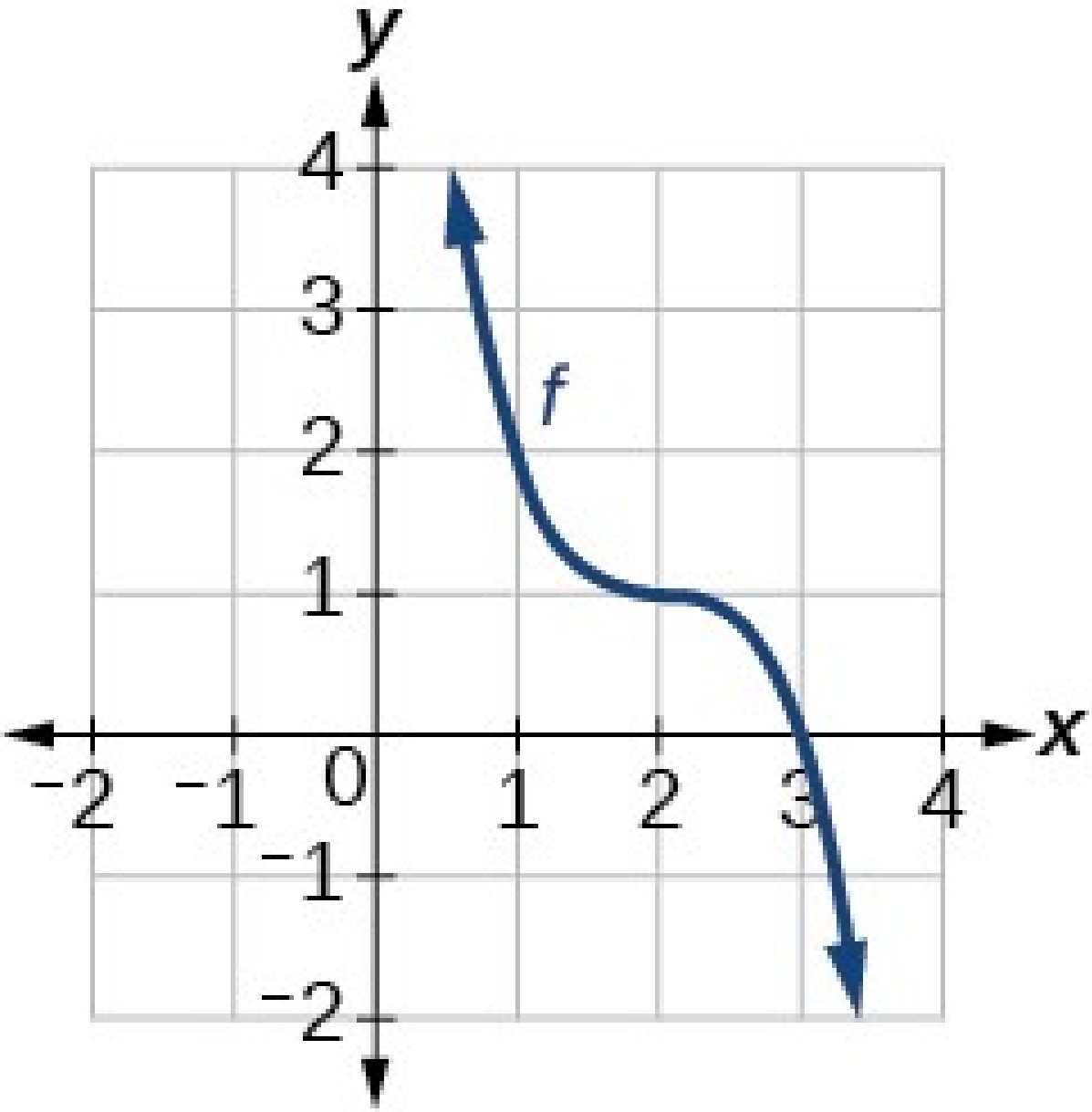
Í eftirfarandi dæmum skal nota gröf ummyndaðra grunnfalla til að rita formúlu fyrir hvert fall sem fæst.

43.

1

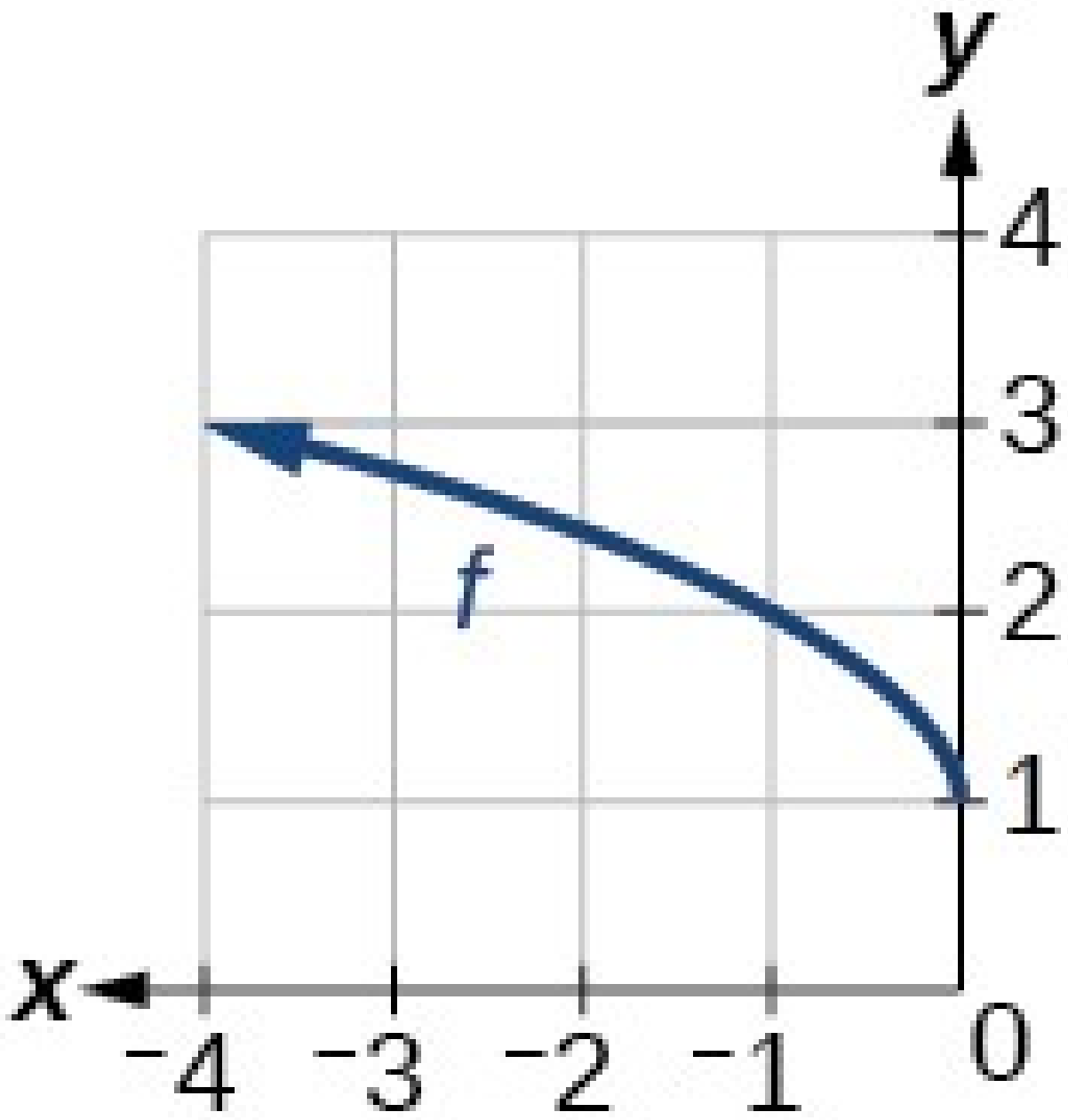


44.

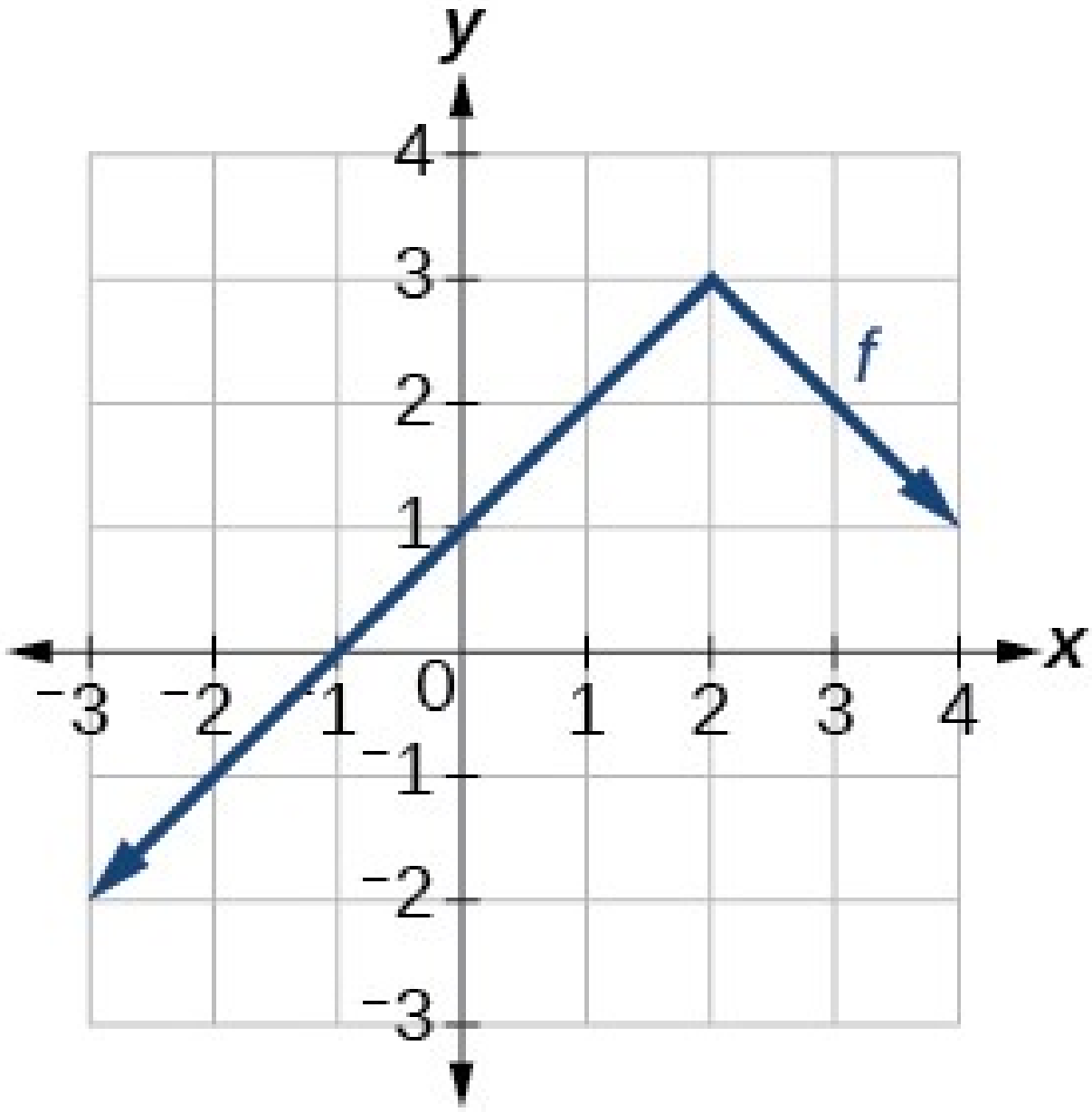


45.

1



46.



Í eftirfarandi dæmum skal ákvarða hvort fallið er oddstætt, jafnstætt eða hvorugt.

47.

$$f(x)=3x^4$$

48.

$$g(x)=\sqrt{x}$$

49.

$$h(x)=\frac{1}{x}+3x$$

50.

$$f(x)=(x-2)^2$$

51.

$$g(x)=2x^4$$

52.

$$h(x)=2x-x^3$$

Í eftirfarandi dæmum skal lýsa því hvernig graf hvers falls er ummyndun á grafi upphaflega fallsins f.

53.

$$g(x)=-f(x)$$

54.

$$g(x)=f(-x)$$

55.

$$g(x)=4f(x)$$

56.

$$g(x)=6f(x)$$

57.

$$g(x)=f(5x)$$

58.

$$g(x)=f(2x)$$

59.

$$g(x)=f\left(\frac{1}{3}x\right)$$

60.

$$g(x)=f\left(\frac{1}{5}x\right)$$

61.

$$g(x)=3f(-x)$$

62.

$$g(x)=-f(3x)$$

Í eftirfarandi dæmum skal rita formúlu fyrir fallið g sem fæst þegar grafi gefins grunnfalls er ummyndað eins og lýst er.

63. Graf fallsins $f(x)=|x|$ er speglað um y-ásinn og þjappað lárétt saman með stuðlinum $\frac{1}{4}$.

64. Graf fallsins $f(x)=\sqrt{x}$ er speglað um x-ásinn og teygt lárétt með stuðlinum 2.

65. Graf fallsins $f(x)=\frac{1}{x^2}$ er þjappað lóðrétt saman með stuðlinum $\frac{1}{3}$, og síðan hliðrað um 2 einingar til vinstri og 3 einingar niður.

66. Graf fallsins $f(x)=\frac{1}{x}$ er teygt lóðrétt með stuðlinum 8 og síðan hliðrað um 4 einingar til hægri og 2 einingar upp.

67. Graf fallsins $f(x)=x^2$ er þjappað lóðrétt saman með stuðlinum $\frac{1}{2}$, og síðan hliðrað um 5 einingar til hægri og 1 einingu upp.

68. Graf fallsins $f(x)=x^2$ er teygt lárétt með stuðlinum 3 og síðan hliðrað um 4 einingar til vinstri og 3 einingar niður.

Í eftirfarandi dæmum skal lýsa því hvernig formúlan er ummyndun á grunnfalli og teikna síðan skissu af grafi ummyndunarinnar.

69.

$$g(x)=4(x+1)^2-5$$

70.

$$g(x)=5(x+3)^2-2$$

71.

$$h(x)=-2|x-4|+3$$

72.

$$k(x)=-3\sqrt{x}-1$$

73.

$$m(x)=\frac{1}{2}x^3$$

74.

$$n(x)=\frac{1}{3}|x-2|$$

1

75.

$$p(x)=\left(\frac{1}{3}x\right)^3-3$$

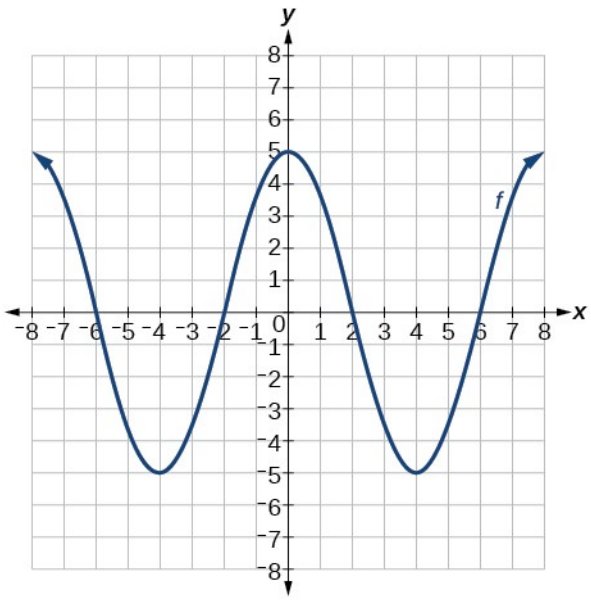
76.

$$q(x)=\left(\frac{1}{4}x\right)^3+1$$

77.

$$a(x)=\sqrt{-x+4}$$

Í eftirfarandi dæmum skal nota grafið á mynd 32 til að teikna skissu af gefnum ummyndunum.



Mynd 32 Graf falls með hágildi í (0, 5) og lággildi í (−4, −5) og (4, −5).

78.

$$g(x)=f(x)-2$$

79.

$$g(x)=-f(x)$$

80.

$$g(x)=f(x+1)$$

81.

$$g(x)=f(x-2)$$

1.6 Tölugildisföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna graf tölugildisfalls.
- Leysa tölugildisjöfnu.
- Leysa tölugildisójöfnu.



Mynd 1 Fjarlægðir í geimnum má mæla í allar áttir. Því er gagnlegt að skoða fjarlægðir með tölugildum. (mynd: „s58y“/Flickr)

Fram á þriðja áratug 20. aldar var talið að svonefndar þyrilþokur væru ryk- og gasský í okkar eigin vetrarbraut, í nokkurra tugþúsunda ljósára fjarlægð. Þá sannaði stjörnufræðingurinn Edwin Hubble að þessi fyrirbæri væru sjálfstæðar vetrarbrautir í milljóna ljósára fjarlægð. Nú geta stjörnufræðingar greint vetrarbrautir í milljarða ljósára fjarlægð. Fjarlægðir í alheiminum má mæla í allar áttir. Því er gagnlegt að lýsa fjarlægð með tölugildisfalli. Í þessum hluta skoðum við tölugildisföll.

1

Skilningur á tölugildi

Munið að grunnform tölugildisfallsins er $f(x)=|x|$, og að það er eitt af grunnföllunum okkar. Algengt er að líta svo á að tölugildisfallið gefi fjarlægð tölu frá núlli á talnalínu. Algebrulega er úttakið gildi inntaksins án tillits til formerkis.

TÖLUGILDISFALL

Tölugildisfallið má skilgreina sem hlutskilgreint fall

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{ef } x\geq 0 \\ -x & \text{ef } x<0 \end{cases}$$

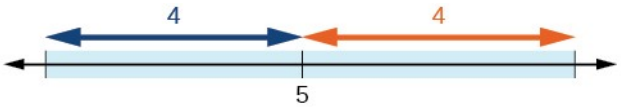
DÆMI 1

Ákvörðun tölu innan tiltekinnar fjarlægðar

Lýsið öllum gildum x sem eru í mesta lagi 4 einingar frá tölunni 5.

Lausn

Við viljum að fjarlægðin milli x og 5 sé minni en eða jöfn 4. Við getum teiknað talnalínu, eins og á mynd 2, til að sýna skilyrðið sem þarf að uppfylla.



Mynd 2 Tölur í mesta lagi fjórar einingar frá 5 sýndar á talnalínu.

Fjarlægðina frá x til 5 má tákna með tölugildinu $|x-5|$. Við leitum að þeim gildum x sem uppfylla skilyrðið $|x-5|\leq 4$.

Greining

Takið eftir að

$$\begin{aligned} -4 &\leq x-5 & \qquad x-5 &\leq 4 \\ 1 &\leq x & \qquad x &\leq 9 \end{aligned}$$

Því jafngildir $|x-5|\leq 4$ því að $1\leq x\leq 9$.

Stærðfræðingar kjósa þó yfirleitt tölugildisrithátt.

REYNIÐ SJÁLF #1

Lýsið öllum gildum x sem eru innan við 3 einingar frá tölunni 2.

DÆMI 2

Viðnám viðnámsþáttar

Rafíhlutir, svo sem viðnám og þéttar, hafa tilgreind gildi fyrir rekstrarstærðir sínar, meðal annars viðnám og rýmd. Vegna ónákvæmni í framleiðslu eru raunveruleg gildi þessara stærða þó lítillega breytileg milli eintaka, jafnvel þótt þau eigi að vera eins. Það besta sem framleiðendur geta gert er að reyna að tryggja að frávikið haldist innan tiltekinna marka, oft $\pm 1\%, \pm 5\%$, eða $\pm 10\%$.

Gerum ráð fyrir viðnámi sem er merkt 680 óm, $\pm 5\,\%$. Notið tölugildisfall til að lýsa mögulegum gildum raunverulegs viðnáms.

Lausn

5% af 680 ómum eru 34 óm. Tölugildi mismunarins á raunverulegu og uppgefnu viðnámi má ekki vera meira en tilgreint frávik. Ef viðnámið R er mælt í ómum fæst því

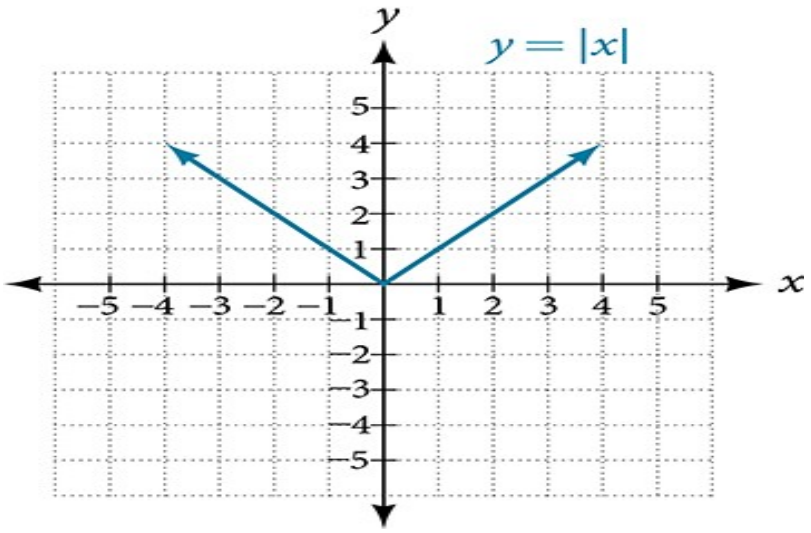
$$|R - 680| \leq 34$$

REYNIÐ SJÁLF #2

Nemendur sem fá einkunn innan 20 stiga frá 80 standast próf. Ritið þetta sem fjarlægð frá 80 með tölugildisrithætti.

Teikning grafs tölugildisfalls

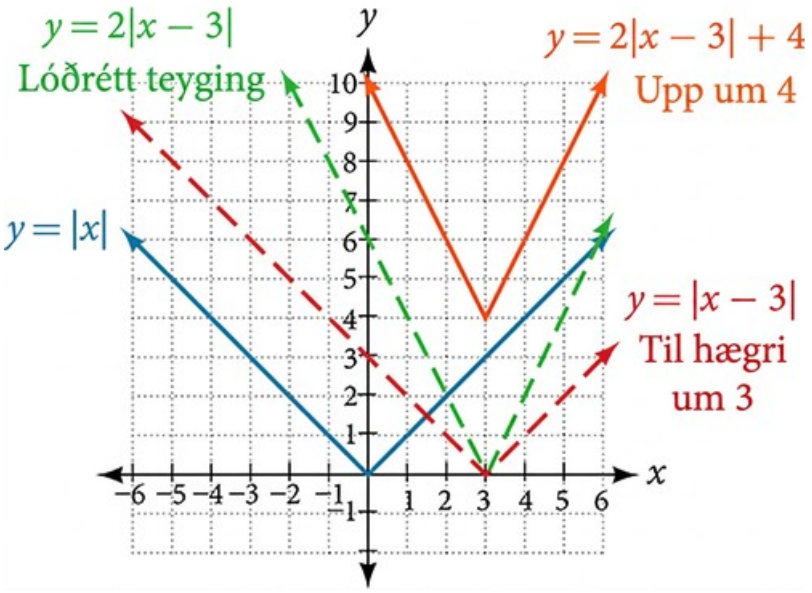
Mest áberandi einkenni grafs tölugildisfalls er hornpunkturinn þar sem grafið skiptir um stefnu. Þessi punktur er í upphafspunktinum á mynd 3.



Mynd 3 Graf tölugildisfallsins y = |x|.

Mynd 4 sýnir grafið $y = 2|x - 3| + 4$. Grafinu $y = |x|$ hefur verið hliðrað um 3 einingar til hægri. Það hefur einnig verið teygt lóðrétt með stuðlinum 2 og því hliðrað um 4 einingar upp. Hornpunkturinn er því í $(3, 4)$ hjá þessu ummyndaða falli.

1

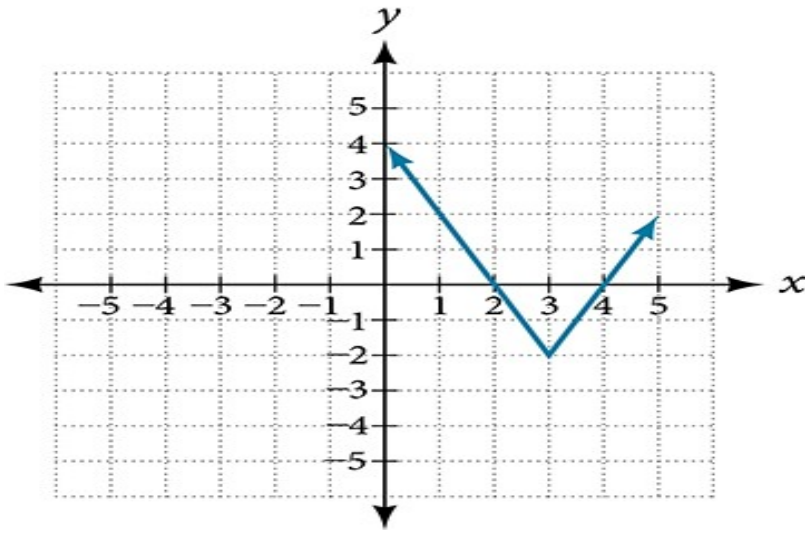


Mynd 4 Hliðranir og lóðrétt teygja á grafi tölugildisfallsins.

DÆMI 3

Jafna tölugildisfalls fundin

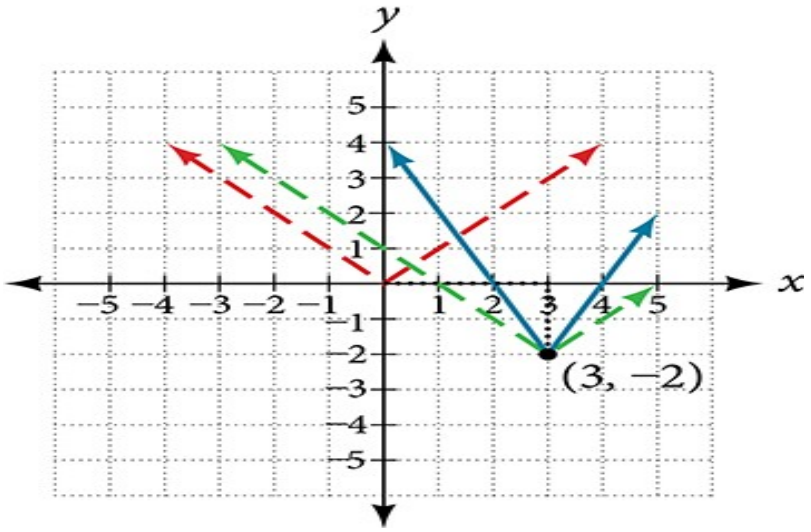
Ritið jöfnu fallsins sem sýnt er á mynd 5.



Mynd 5 Graf tölugildisfalls með hornpunkt í (3, −2).

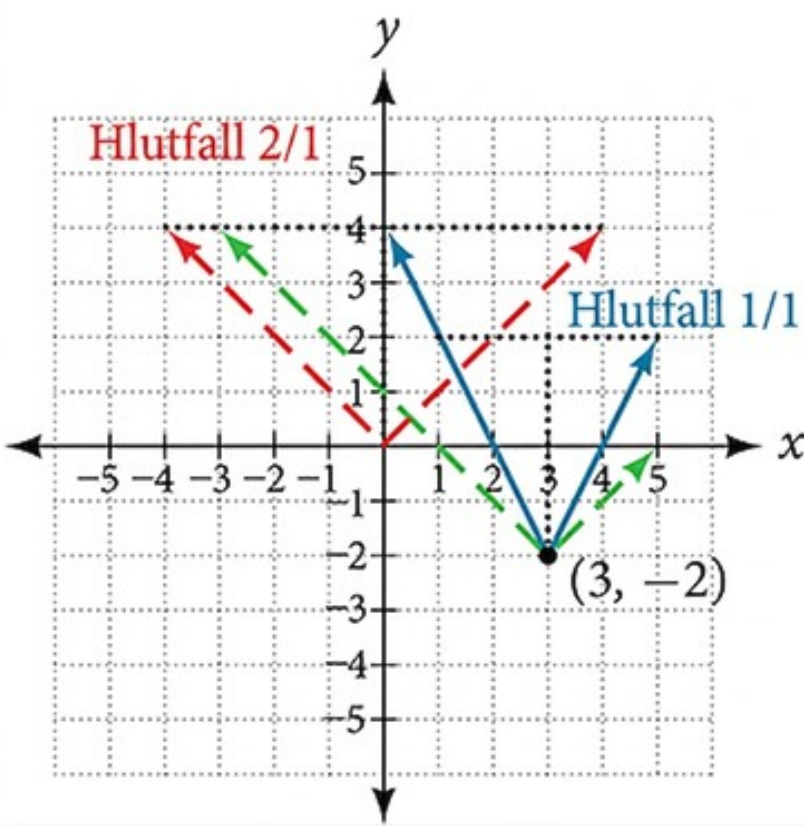
Lausn

Grunntölugildisfallið skiptir um stefnu í upphafspunktinum. Þessu grafi hefur því verið hliðrað um 3 einingar til hægri og 2 einingar niður miðað við grunnfallið. Sjá mynd 6.



Mynd 6 Tölugildisfallið og tvær ummyndanir þess.

Við sjáum einnig að grafið virðist hafa verið teygt lóðrétt. Ástæðan er sú að breidd lokagrafsins á láréttri línu er ekki tvöföld lóðrétta fjarlægðin frá hornpunktinum að línunni, eins og hún væri hjá óteygðu tölugildisfalli. Breiddin er þess í stað jöfn lóðréttu fjarlægðinni eins og sýnt er á mynd 7.



Mynd 7 Breytingar á halla greina tölugildisgrafs sýndar með hlutföllum.

Af þessum upplýsingum getum við ritað jöfnuna

$f(x)=2|x-3|-2$, þegar teygjan er túlkuð sem lóðrétt teygja, eða
$f(x)=|2(x-3)|-2$, þegar teygjan er túlkuð sem lárétt samþjöppun.

1

Greining

Takið eftir að þessar jöfnur eru algebrulega jafngildar. Teygju tölugildisfalls má rita sem lóðrétta eða lárétta teygju eða samþjöppun. Takið einnig eftir að ef lóðrétti teygjustuðullinn er neikvæður speglast grafið jafnframt um x-ásinn.

SPURT OG SVARAÐ

Gætum við ákvarðað teygju fallsins með algebru ef hún sæist ekki á grafinu?

Já. Ef ekki er hægt að ákvarða teygjuna út frá breidd grafsins má finna teygjustuðulinn með því að setja inn þekkt gildapar fyrir x og $f(x)$.

$$f(x)=a|x-3|-2$$

Setjum nú inn punktinn (1, 2)

$$2 = a|1-3|-2$$
$$4 = 2a$$
$$a = 2$$

REYNIÐ SJÁLF #3

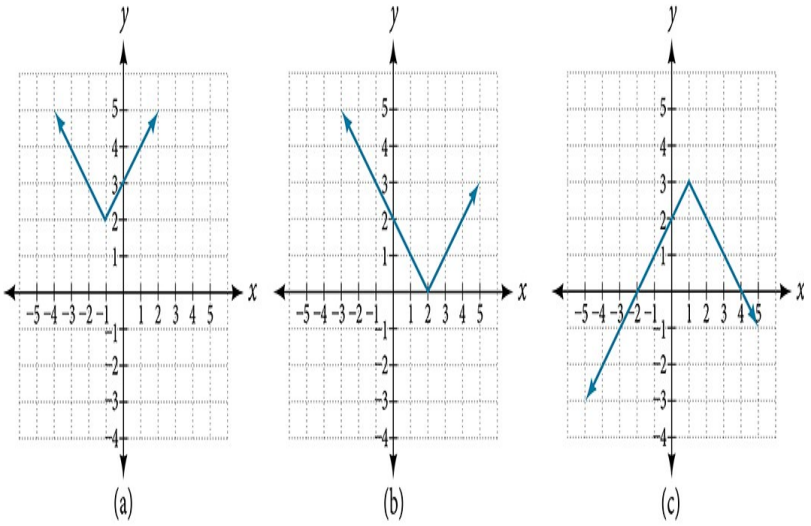
Ritið jöfnu tölugildisfallsins sem hefur verið hliðrað lárétt um 2 einingar til vinstri, speglað lóðrétt og hliðrað lóðrétt um 3 einingar upp.

SPURT OG SVARAÐ

Skera gröf tölugildisfalla alltaf lóðrétta ásinn? En lárétta ásinn?

Já, þau skera alltaf lóðrétta ásinn. Graf tölugildisfalls sker lóðrétta ásinn þegar inntakið er núll.

Nei, þau skera ekki alltaf lárétta ásinn. Hvort grafið sker hann fer eftir því hvernig því hefur verið hliðrað og hvernig það hefur verið speglað. Tölugildisfall getur skorið lárétta ásinn í núll, einum eða tveimur punktum (sjá mynd 8).



Mynd 8 (a) Tölugildisfallið sker ekki lárétta ásinn. (b) Tölugildisfallið sker lárétta ásinn í einum punkti. (c) Tölugildisfallið sker lárétta ásinn í tveimur punktum.

Lausn tölugildisjöfnu

Nú þegar við getum teiknað graf tölugildisfalls lærum við að leysa tölugildisjöfnu. Til að leysa jöfnu eins og $8=|2x-6|$, tökum við eftir að tölugildið verður 8 ef stæðan innan tölugildismerkisins er 8 eða -8. Því fást tvær ólíkar jöfnur sem við getum leyst hvora í sínu lagi.

$$\begin{array}{ccc} 2x-6=8 & \text{eða} & 2x-6=-8 \\ 2x=14 & & 2x=-2 \\ x=7 & & x=-1 \end{array}$$

Gagnlegt er að kunna að leysa dæmi með tölugildisföllum. Við gætum til dæmis þurft að finna tölur eða punkta á línu sem eru í tiltekinni fjarlægð frá gefnum viðmiðunarpunkti.

Hugtakið tölugildisjafna merkir jöfnu þar sem óþekkta breytan kemur fyrir innan tölugildismerkja. Til dæmis

$$\begin{aligned} |x| &= 4, \\ |2x-1| &= 3 \\ |5x+2|-4 &= 9 \end{aligned}$$

LAUSNIR TÖLUGILDISJAFNA

Fyrir rauntölurnar A og B, hefur jafna af gerðinni $|A|=B$, þar sem $B\geq 0$, lausnir þegar $A=B$ eða $A=-B$. Ef $B<0$, hefur jafnan $|A|=B$ enga lausn.

AÐFERÐ

1

Finna skurðpunkta grafs tölugildisfalls við lárétta ásinn þegar formúla fallsins er gefin.

1. Einangrið tölugildisliðinn.
2. Notið $|A|=B$ til að rita $A=B$ eða $-A=B$, að því gefnu að $B>0$.
3. Leysið fyrir x.

DÆMI 4

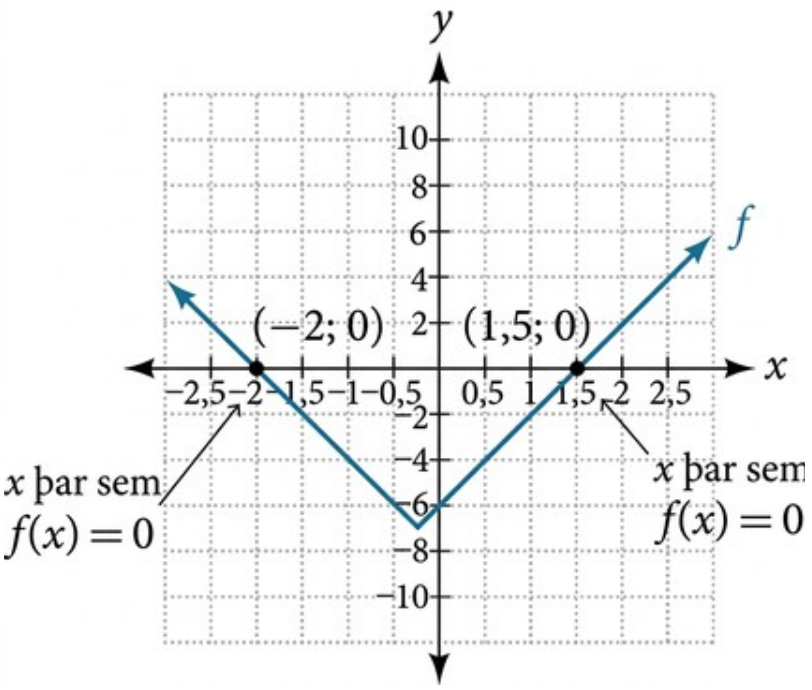
Núllstöðvar tölugildisfalls fundnar

Gefið er fallið $f(x)=|4x+1|-7$. Finnið þau gildi x sem uppfylla $f(x)=0$.

Lausn

$0=\|4x+1\|-7$	Setjið 0 í stað f(x).
$7=\|4x+1\|$	Einangrið tölugildið öðrum megin jafnaðarmerkisins.
$7=4x+1$ eða $-7=4x+1$ $6=4x$ $-8=4x$ $x=\frac{6}{4}=1{,}5$ $x=\frac{-8}{4}=-2$	Skiptið í tvær aðskildar jöfnur og leysið þær.

Úttak fallsins er 0 þegar $x=1{,}5$ eða $x=-2$. Sjá mynd 9.



Mynd 9 Núllstöðvar tölugildisfallsins merktar á x-ásinn.

REYNIÐ SJÁLF #4

Gefið er fallið $f(x)=|2x-1|-3$, og finna á þau gildi x sem uppfylla $f(x)=0$.

SPURT OG SVARAÐ

Eigum við alltaf að búast við tveimur svörum þegar við leysum $|A|=B$?

Nei. Fjöldi lausna getur verið núll, einn eða tveir. Til dæmis er engin lausn á jöfnunni $2+|3x-5|=1$.

AÐFERÐ

Leysa tölugildisjöfnu þegar hún er gefin.

1. Einangrið tölugildisliðinn.
2. Notið $|A|=B$ til að rita $A=B$ eða $A=-B$.
3. Leysið fyrir x.

DÆMI 5

Lausn tölugildisjöfnu

Leysið $1=4|x-2|+2$.

1

Lausn

Fyrst einangrum við tölugildið öðrum megin jafnaðarmerkisins.

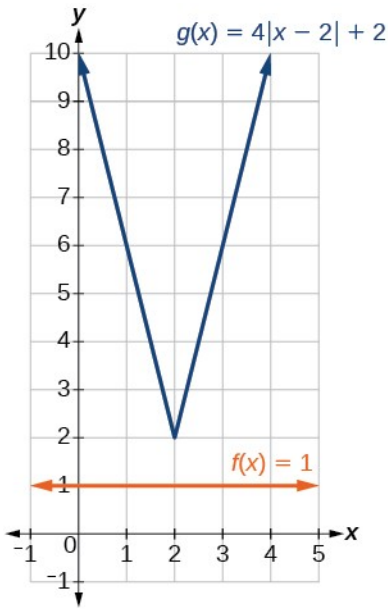
$$\begin{aligned} 1 &= 4\,|x-2|+2 \\ -1 &= 4\,|x-2| \\ -\tfrac{1}{4} &= |x-2| \end{aligned}$$

Tölugildi er alltaf óneikvætt og getur því ekki verið jafnt neikvæðri tölu. Hér sjáum við því að jafnan hefur enga lausn.

SPURT OG SVARAÐ

Í dæmi 5 eru gefin föllin $f(x)=1$ og $g(x)=4|x-2|+2$. Myndu gröfin skerast ef þau væru teiknuð í sama hnitakerfi?

Nei. Gröf f og g myndu ekki skerast eins og sýnt er á mynd 10. Þetta staðfestir myndrænt að jafnan $1=4|x-2|+2$ hefur enga lausn.



Mynd 10 Gröf tölugildisfalls og láréttrar línu sem skerast ekki.

REYNIÐ SJÁLF #5

Finnið hvar graf fallsins $f(x)=-|x+2|+3$ sker lárétta og lóðrétta ásinn.

Lausn tölugildisójöfnu

Tölugildisverkefni fela ekki alltaf í sér jöfnu. Stundum þurfum við að finna lausnir innan tiltekins gildisbils og notum þá tölugildisójöfnu. Slík ójafna er af gerðinni

$$|A|<B, |A|\leq B, |A|>B, \text{eða} |A|\geq B,$$

þar sem stæða A (og hugsanlega, en sjaldnast, B) er háð breytu x. Að leysa ójöfnuna felst í að finna mengi allra gilda x sem uppfylla hana. Mengi lausnanna er yfirleitt bil eða sammengi tveggja bila.

Tölugildisójöfnur má einkum leysa á tvo vegu: myndrænt og algebrulega. Kostur myndrænu aðferðarinnar er að lausnina má lesa af gröfum tveggja falla. Kostur algebrulegu aðferðarinnar er að hún gefur lausnir sem erfitt getur verið að lesa af grafi.

Við vitum til dæmis að allar tölur sem eru innan 200 eininga frá 0 má tákna sem

$$|x|<200 \text{ eða } -200<x<200$$

Gerum ráð fyrir að við viljum finna alla mögulega ávöxtun fjárfestingar ef hagnaðurinn gæti vikið um minna en 200 Bandaríkjadali frá 600 Bandaríkjadölum. Með algebru getum við fundið mengi þeirra gilda x þar sem fjarlægðin milli x og 600 er minni en 200. Fjarlægðina milli x og 600 táknum við með $|x-600|$.

$$\begin{gathered}|x-600|<200 \quad \text{eða} \quad -200<x-600<200 \\ -200+600<x-600+600<200+600 \\ 400<x<800\end{gathered}$$

Ávöxtunin væri því milli 400 og 800 Bandaríkjadala.

Stundum er verkefni um tölugildisójöfnu sett fram með hliðruðu, teygðu eða samþjöppuðu tölugildisfalli. Þá þarf að ákvarða fyrir hvaða inntaksgildi úttak fallsins er neikvætt eða jákvætt.

AÐFERÐ

Leysa algebrulega tölugildisójöfnu af gerðinni $|x-A|\leq B$ fyrir rauntölurnar a og b þar sem b er jákvætt.

1. Finnið markpunkta með því að leysa $|x-A|=B$.
2. Prófið bilin sem markpunktarnir mynda til að ákvarða hvar $|x-A|\leq B$.
3. Ritið bilið eða sammengi bila sem uppfyllir ójöfnuna með biltáknum, ójöfnu eða skilyrðisrithætti mengja.

DÆMI 6

Lausn tölugildisójöfnu

Leysið $|x-5|<4$.

1

Lausn

Í báðum aðferðum þurfum við fyrst að vita hvar samsvarandi jafna gildir. Hér finnum við því fyrst hvar $|x-5|=4$. Ástæðan er sú að tölugildisfallið er samfellt. Fallgildin geta því aðeins farið úr því að vera minni en 4 í að vera stærri en 4 með því að fara í gegnum gildið 4. Leysið $|x-5|=4$.

$$\begin{matrix} x-5=4 \\ x=9 \end{matrix} \quad \text{eða} \quad \begin{matrix} x-5=-4 \\ x=1 \end{matrix}$$

Fyrst tölugildið er jafnt 4 við $x=1$ og $x=9$, vitum við að grafið getur aðeins farið úr því að vera minna en 4 í að vera stærra en 4 við þessi gildi. Talnalínan skiptist því í þrjú bil:

$$x<1, 1<x<9, \text{ og } x>9.$$

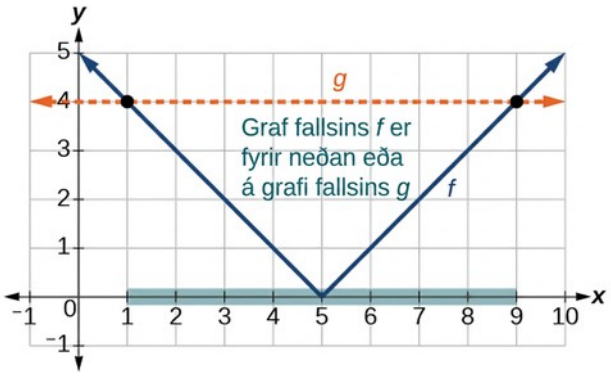
Til að ákvarða hvenær fallið er minna en 4 getum við valið gildi á hverju bili og athugað hvort úttakið sé minna eða stærra en 4 eins og sýnt er í töflu 1.

Tafla 1

Bil fyrir prófunargildið x	x	**<4 eða >4?**	
$x<1$	0	$\|0-5\|=5$	Stærra en
$1<x<9$	6	$\|6-5\|=1$	Minna en
$x>9$	11	$\|11-5\|=6$	Stærra en

Fyrst $1<x<9$ er eina bilið þar sem úttakið við prófunargildið er minna en 4 getum við ályktað að lausnin á $|x-5|<4$ sé $1<x<9$, eða $(1,9)$.

Til að leysa ójöfnuna myndrænt getum við teiknað skissu af fallinu $f(x)=|x-5|$. Til að sjá betur hvar úttaksgildin eru 4 má einnig teikna línuna $g(x)=4$ eins og á mynd 11.



Mynd 11 Graf til að finna punkta sem uppfylla tölugildisójöfnu.

Við sjáum eftirfarandi:

- Úttaksgildi tölugildisins eru jöfn 4 við $x=1$ og $x=9$.

- Graf f liggur neðan við graf g á $1<x<9$. Það merkir að úttaksgildi $f(x)$ eru minni en úttaksgildi $g(x)$.
- Tölugildið er minna en 4 milli punktanna tveggja, þegar $1<x<9$. Með biltáknum er þetta bilið $(1,9)$.

Greining

Fyrir tölugildisójöfnur gildir:

$$\begin{array}{ll} |x-A|<C, & |x-A|>C, \\ -C<x-A<C, & x-A<-C \text{ eða } x-A>C. \end{array}$$

Í stað táknsins $<$ eða $>$ má nota $\leq$ eða $\geq$.

Í þessu dæmi mætti því einnig fara svona að.

$$\begin{array}{ll} |x-5|<4 & \\ -4<x-5<4 & \text{Endurritið án tölugildismerkjanna.} \\ -4+5<x-5+5<4+5 & \text{Einangrið } x. \\ 1<x<9 & \end{array}$$

REYNIÐ SJÁLF #6

Leysið $|x+2|\leq 6$.

AÐFERÐ

Finna mengi þeirra inntaksgilda sem gefa jákvætt (eða neikvætt) úttak þegar tölugildisfall er gefið.

1. Setjið fallið jafnt núlli og leysið til að finna markpunkta lausnamengisins.
2. Notið prófunarpunkta eða graf til að ákvarða hvar úttak fallsins er jákvætt eða neikvætt.

DÆMI 7

Myndræn aðferð við lausn tölugildisójafna

Gefið er fallið $f(x)=-\frac{1}{2}|4x-5|+3$, og ákvarða á þau $x-$ gildi sem gefa neikvæð fallgildi.

Lausn

Við viljum ákvarða hvar $f(x)<0$, það er hvar $-\frac{1}{2}\left|4x-5\right|+3<0$. Við byrjum á að einangra tölugildið.

$-\frac{1}{2}|4x-5|<-3$ Margfaldið báðar hliðar með -2 og snúið ójöfnumerkinu við.

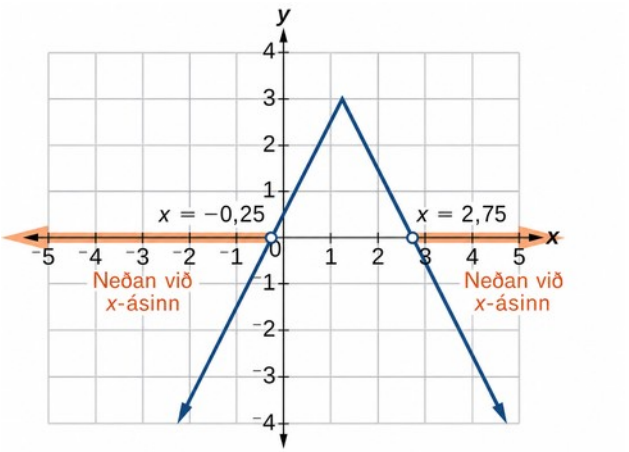
$$|4x-5|>6$$

1

Því næst leysum við jöfnuna $|4x-5|=6$.

$$\begin{array}{ll} 4x-5=6 \text{ eða} & 4x-5=-6 \\ 4x-5=6 & 4x=-1 \\ x=\frac{11}{4} & x=-\frac{1}{4} \end{array}$$

Nú getum við skoðað graf f til að sjá hvar úttakið er neikvætt. Við athugum hvar armar grafsins liggja neðan við x-ásinn. Nákvæm lögun grafsins skiptir í raun ekki máli svo framarlega sem við vitum að það sker lárétta ásinn við $x=-\frac{1}{4}$ og $x=\frac{11}{4}$ og að grafið hefur verið speglað lóðrétt. Sjá mynd 12.



Mynd 12 Graf tölugildisfalls og svæðin þar sem það liggur neðan x-ássins.

Við sjáum að graf fallsins liggur neðan við x-ásinn vinstra megin við $x=-\frac{1}{4}$ og hægra megin við $x=\frac{11}{4}$. Fallgildin eru því neikvæð vinstra megin við fyrri skurðpunktinn við lárétta ásinn, $x=-\frac{1}{4}$, og hægra megin við seinni skurðpunktinn, $x=\frac{11}{4}$. Þannig fæst lausn ójöfnunnar.

$$x<-\frac{1}{4} \text{ eða } x>\frac{11}{4}$$

Með biltáknum er lausnin $(-\infty;-0{,}25)\,U\,(2{,}75;\infty)$.

REYNIÐ SJÁLF #7

Leysið $-2|k-4|\leq -6$.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í verkefnum um tölugildi.

- Gröf tölugildisfalla teiknuð
- Gröf tölugildisfalla teiknuð 2
- Jöfnur tölugildisfalla
- Jöfnur tölugildisfalla 2
- Tölugildisjöfnur leystar

1.6 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Hvernig er tölugildisjafna leyst?

2. Hvernig má sjá án þess að teikna grafið hvort tölugildisfall hefur tvo skurðpunkta við x-ásinn?

3. Þegar tölugildisjafna er leyst reynist einangraði tölugildisliðurinn jafn neikvæðri tölu. Hvað segir það um graf tölugildisfallsins?

4. Hvernig má nota graf tölugildisfalls til að ákvarða þau x-gildi sem gefa neikvæð fallgildi?

5. Hvernig er tölugildisójafna leyst algebrulega?

Algebra

6. Lýsið öllum tölum x sem eru í 4 eininga fjarlægð frá tölunni 8. Setjið þetta fram með tölugildisrithætti.

7. Lýsið öllum tölum x sem eru í $\frac{1}{2}$ einingar fjarlægð frá tölunni -4. Setjið þetta fram með tölugildisrithætti.

8. Lýsið því þegar fjarlægð punktsins x frá 10 er að minnsta kosti 15 einingar. Setjið þetta fram með tölugildisrithætti.

9. Finnið öll fallgildi $f(x)$ þar sem fjarlægðin frá $f(x)$ til gildisins 8 er minni en 0,03 einingar. Setjið þetta fram með tölugildisrithætti.

Leysið eftirfarandi jöfnur og setjið svörin fram með mengjarithætti.

10.

$$|x+3|=9$$

11.

$$|6-x|=5$$

12.

$$|5x-2|=11$$

13.

$$|4x-2|=11$$

1

14.

$$2|4-x|=7$$

15.

$$3|5-x|=5$$

16.

$$3|x+1|-4=5$$

17.

$$5|x-4|-7=2$$

18.

$$0=-|x-3|+2$$

19.

$$2|x-3|+1=2$$

20.

$$|3x-2|=7$$

21.

$$|3x-2|=-7$$

22.

$$\left|\frac{1}{2}x-5\right|=11$$

23.

$$\left|\frac{1}{3}x+5\right|=14$$

24.

$$-\left|\frac{1}{3}x+5\right|+14=0$$

Finnið skurðpunkta grafs hvers falls við x- og y-ásana í eftirfarandi verkefnum.

25.

$$f(x)=2|x+1|-10$$

26.

$$f(x)=4|x-3|+4$$

27.

$$f(x)=-3|x-2|-1$$

28.

$$f(x)=-2|x+1|+6$$

Leysið hverja ójöfnu og ritið lausnina með biltáknum.

29.

$$|x-2|>10$$

30.

$$2|v-7|-4\geq 42$$

31.

$$|3x-4|\leq 8$$

32.

$$|x-4|\geq 8$$

33.

$$|3x-5|\geq 13$$

34.

$$|3x-5|\geq -13$$

35.

$$\left|\frac{3}{4}x-5\right|\geq 7$$

36.

$$\left|\frac{3}{4}x-5\right|+1\leq 16$$

Myndræn verkefni

Teiknið graf tölugildisfallsins í eftirfarandi verkefnum. Merkið að minnsta kosti fimm punkta inn á hvert graf án hjálpartækja.

37.

$$y=|x-1|$$

38.

$$y=|x+1|$$

1

39.

$$y=|x|+1$$

Teiknið gröf gefnu fallanna án hjálpartækja.

40.

$$y=|x|-2$$

41.

$$y=-|x|$$

42.

$$y=-|x|-2$$

43.

$$y=-|x-3|-2$$

44.

$$f(x)=-|x-1|-2$$

45.

$$f(x)=-|x+3|+4$$

46.

$$f(x)=2|x+3|+1$$

47.

$$f(x)=3|x-2|+3$$

48.

$$f(x)=|2x-4|-3$$

49.

$$f(x)=|3x+9|+2$$

50.

$$f(x)=-|x-1|-3$$

51.

$$f(x)=-|x+4|-3$$

52.

$$f(x)=\frac{1}{2}|x+4|-3$$

Tækni

53. Notið grafteikniforrit til að teikna $f(x)=10|x-2|$ í skoðunarglugganum $[0,4]$. Finnið samsvarandi myndmengi og sýnið grafið.

54. Notið grafteikniforrit til að teikna $f(x)=-100|x|+100$ í skoðunarglugganum $[-5,5]$. Finnið samsvarandi myndmengi og sýnið grafið.

Teiknið graf hvers falls með grafteikniforriti og tilgreinið skoðunargluggann.

55.

$$f\ (x)=-0{,}1\ |0{,}1\ (0{,}2-x)|+0{,}3$$

56.

$$f(x)=4\times 10^{9}\left|x-\left(5\times 10^{9}\right)\right|+2\times 10^{9}$$

Viðbótarverkefni

Leysið ójöfnuna í eftirfarandi verkefnum.

57.

$$\left|-2x-\frac{2}{3}(x+1)\right|+3>-1$$

58. Finnið, ef unnt er, öll gildi a þannig að engir $x-$skurðpunktar séu á grafi $f(x)=2|x+1|+a$.

59. Finnið, ef unnt er, öll gildi a þannig að engir y-skurðpunktar séu á grafi $f(x)=2|x+1|+a$.

Raunhæf viðfangsefni

60. Borgir A og B liggja á sömu austur–vesturlínu. Gerið ráð fyrir að borg A sé í upphafspunktinum. Fjarlægðin frá borg A til borgar B er að minnsta kosti 100 mílur og x táknar fjarlægðina frá borg B til borgar A. Setjið þetta fram með tölugildisrithætti.

61. Raunverulegt hlutfall p fólks sem metur Bandaríkjaþing jákvætt er 8% með 1,5% skekkjumörkum. Lýsið fullyrðingunni með tölugildisjöfnu.

62. Nemendur sem fá einkunn innan 18 stiga frá 82 standast tiltekið próf. Ritið fullyrðinguna með tölugildisrithætti og notið breytuna x fyrir einkunnina.

63. Rennismiður þarf að framleiða legu sem víkur ekki meira en 0,01 tommu frá réttu þvermáli sem er 5,0 tommur. Notið x fyrir þvermál legunnar og setjið fullyrðinguna fram með tölugildisrithætti.

64. Vikmörk kúlulegu eru 0,01. Rétt þvermál legunnar á að vera 2,0 tommur og mælt þvermál hennar er x tommur. Setjið vikmörkin fram með tölugildisrithætti.

1

1.7 Andhverf föll

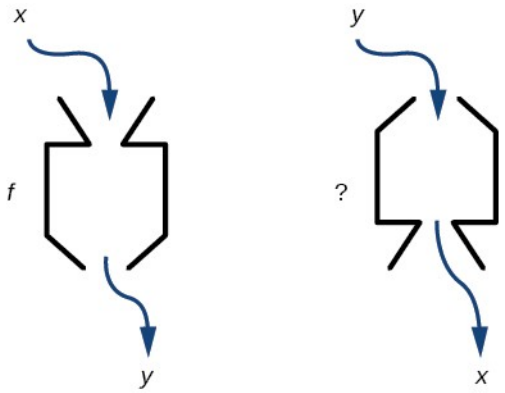
NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Staðfesta að föll séu andhverf.
- Ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfs falls og takmarka skilgreiningarmengi falls svo að það verði eintækt.
- Finna andhverfu falls eða reikna gildi hennar.
- Nota graf eintæks falls til að teikna graf andhverfu þess í sama hnitakerfi.

Viðsnúanleg varmadæla er hita- og kælikerfi sem sameinar loftkælingu og upphitun í einu tæki. Þegar hún gengur í aðra áttina dælir hún varma úr húsi og kælir það. Þegar hringrásinni er snúið við dælir hún varma utan frá inn í bygginguna, jafnvel í svölu veðri, og hitar hana. Sem hitunartæki er varmadæla margfalt skilvirkari en hefðbundin rafhitun með viðnámi.

Ef sumar efnislegar vélar geta gengið í báðar áttir má spyrja hvort sumar fallavélarnar sem við höfum skoðað geti einnig gengið aftur á bak. Mynd 1 sýnir spurninguna myndrænt. Í þessum hluta skoðum við hvernig snúa má föllum við.



Mynd 1 Getur fallavél gengið aftur á bak?

Staðfest að tvö föll séu andhverf

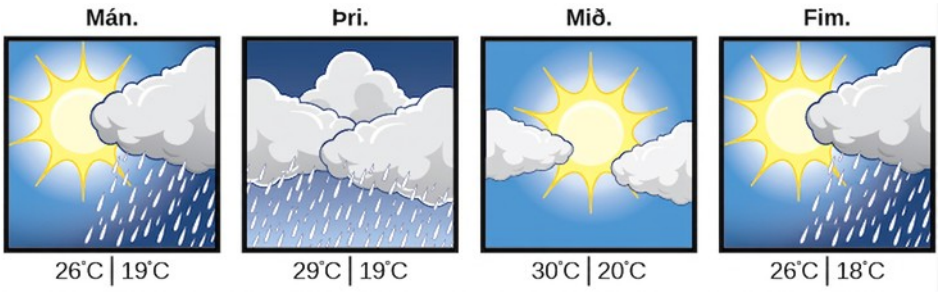
Betty er á leið til Mílanó á tískusýningu og vill vita hvert hitastigið verður. Hún þekkir ekki Celsíuskvarðann. Til að átta sig á tengslum hitamælinganna vill hún umreikna 75 gráður á Fahrenheit í gráður á Celsíus með formúlunni

$$C=\frac{5}{9}(F-32)$$

og setur 75 inn fyrir F til að reikna

$$\frac{5}{9}(75-32)\approx 24\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Betty veit nú að þægilegur hiti, 75 gráður á Fahrenheit, er um 24 gráður á Celsíus. Hún skoðar vikulega veðurspá fyrir Mílanó á mynd 2 og vill umreikna öll hitastigin í gráður á Fahrenheit.



Mynd 2 Veðurspá fyrir fjóra daga, frá mánudegi til fimmtudags.

Fyrst hugsar Betty sér að nota formúluna sem hún hefur þegar fundið til að umreikna hitastigin. Hún kann algebru og getur auðveldlega leyst jöfnuna fyrir F eftir að hún hefur sett inn gildi fyrir C. Til að umreikna 26 gráður á Celsíus gæti hún til dæmis skrifað

$$\begin{aligned} 26 &= \tfrac{5}{9}(F-32) \\ 26\cdot\tfrac{9}{5} &= F-32 \\ F &= 26\cdot\tfrac{9}{5}+32\approx 79 \end{aligned}$$

Eftir stutta umhugsun áttar hún sig þó á því að afar seinlegt yrði að leysa jöfnuna fyrir hvert hitastig. Auðveldara er að reikna gildi formúlu en að leysa jöfnu. Því væri mun hentugra að hafa aðra formúlu sem tekur inn hitastig á Celsíus og skilar hitastigi á Fahrenheit.

Formúlan sem Betty leitar að samsvarar hugmyndinni um andhverft fall, það er fall þar sem inntak upphaflega fallsins verður úttak andhverfa fallsins og úttak upphaflega fallsins verður inntak andhverfa fallsins.

Ef fall $f(x)$, er gefið táknum við andhverfu þess með $f^{-1}(x)$, sem lesið er "f andhverfa af x." Upphækkaða táknið -1 er hluti af táknuninni. Það er ekki veldisvísir og táknar ekki veldið -1. Með öðrum orðum merkir $f^{-1}(x)$ alls ekki brotið $\frac{1}{f(x)}$ því $\frac{1}{f(x)}$ er umhverfa f en ekki andhverfa þess.

Táknunin sem líkist veldisvísi byggist á hliðstæðu milli samskeytingar falla og margföldunar: Rétt eins og $a^{-1}a=1$ (1 er samsemdarstak margföldunar) fyrir hverja tölu a, aðra en núll, er $f^{-1}\circ f$ jafnt samsemdarfallinu, það er

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$$

1

Þetta gildir um öll x í skilgreiningarmengi f. Í einfaldara máli merkir það að andhverf föll „afturkalla“ áhrif hvort annars. Rétt eins og núll hefur ekki umhverfu hafa sum föll þó ekki andhverfu.

Ef fall $f(x)$, er gefið getum við staðfest hvort annað fall $g(x)$ sé andhverfa $f(x)$ með því að athuga hvort bæði $g(f(x))=x$ og $f(g(x))=x$ gildi.

Til dæmis eru $y=4x$ og $y=\frac{1}{4}x$ andhverf föll.

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(4x)=\frac{1}{4}(4x)=x$$

og

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left(\frac{1}{4}x\right)=4\left(\frac{1}{4}x\right)=x$$

Nokkur hnitapör af grafi fallsins $y=4x$ eru $(-2, -8)$, $(0, 0)$ og $(2, 8)$. Nokkur hnitapör af grafi fallsins $y=\frac{1}{4}x$ eru $(-8, -2)$, $(0, 0)$ og $(8, 2)$. Ef við víxlum á inntaki og úttaki í hverju hnitapari falls liggja nýju hnitapörin á grafi andhverfa fallsins.

ANDHVERFT FALL

Fyrir hvert eintækt fall $f(x)=y$, er fallið $f^{-1}(x)$ kallað andhverft fall við f ef $f^{-1}(y)=x$. Þetta má einnig rita sem $f^{-1}(f(x))=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f. Einnig gildir að $f(f^{-1}(x))=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f^{-1} ef f^{-1} er andhverfa f.

Táknunin f^{-1} er lesin “f andhverfa.“ Eins og hjá öðrum föllum má nota hvaða breytuheiti sem er fyrir inntak f^{-1}, og því ritum við oft $f^{-1}(x)$, sem lesið er “f andhverfa af x.” Hafið í huga að

$$f^{-1}(x)\neq\frac{1}{f(x)}$$

og að ekki hafa öll föll andhverfu.

DÆMI 1

Andhverft fall fundið út frá gefnu inntaks- og úttakspari

Ef tiltekið eintækt fall uppfyllir $f(2)=4$ og $f(5)=12$, hver eru þá samsvarandi inntaks- og úttaksgildi andhverfa fallsins?

Lausn

Andhverfa fallsins víxlar inntaks- og úttaksstærðunum. Því gildir að ef

$$f(2)=4, \text{ þá } f^{-1}(4)=2;$$
$$f(5)=12, \text{ þá } f^{-1}(12)=5.$$

Ef við viljum þess í stað nefna andhverfa fallið g, þá er $g(4)=2$ og $g(12)=5$.

Greining

Takið eftir að þegar hnitapörin eru sýnd í töflu sést greinilega að víxlað hefur verið á inntaki og úttaki. Sjá töflu 1.

Tafla 1

$(x, f(x))$	$(x, g(x))$
$(2,4)$	$(4,2)$
$(5,12)$	$(12,5)$

REYNIÐ SJÁLF #1

Ef $h^{-1}(6)=2$, hver eru þá samsvarandi inntaks- og úttaksgildi upphaflega fallsins h?

AÐFERÐ

Prófa hvort tvö gefin föll $f(x)$ og $g(x)$, séu andhverf hvort annars.

1. Ákvarðið hvort $f(g(x))=x$ eða $g(f(x))=x$.
2. Ef báðar fullyrðingarnar eru sannar þá gildir $g=f^{-1}$ og $f=g^{-1}$. Ef önnur hvor er ósönn eru báðar ósannar og þá gildir $g\neq f^{-1}$ og $f\neq g^{-1}$.

DÆMI 2

Andhverf tengsl prófuð með algebru

Ef $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ og $g(x)=\dfrac{1}{x}-2$, er þá $g=f^{-1}$?

Lausn

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \tfrac{1}{(\frac{1}{x+2})} - 2 \\ &= x + 2 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Við verðum einnig að staðfesta hina formúluna.

1

$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}-2+2}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{x}}$$
$$= x$$

svo

$$g=f^{-1} \text{ og } f=g^{-1}$$

Greining

Takið eftir að andhverfu aðgerðirnar koma í öfugri röð miðað við aðgerðir upphaflega fallsins.

REYNIÐ SJÁLF #2

Ef $f(x)=x^3-4$ og $g(x)=\sqrt[3]{x+4}$, er þá $g=f^{-1}$?

DÆMI 3

Andhverf tengsl veldisfalla ákvörðuð

Ef $f(x)=x^3$ (þriðja veldisfallið) og $g(x)=\frac{1}{3}x$, er þá $g=f^{-1}$?

Lausn

$$f(g(x))=\frac{x^3}{27}\neq x$$

Nei, föllin eru ekki andhverf.

Greining

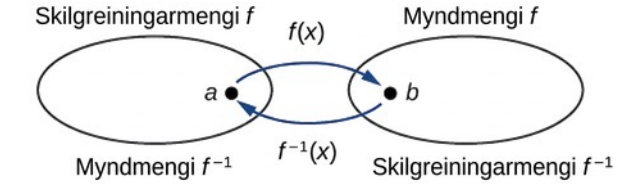
Rétt andhverfa þriðja veldis er að sjálfsögðu teningsrótin $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, og þar er einn þriðji veldisvísir en ekki margfaldari.

REYNIÐ SJÁLF #3

Ef $f(x)=(x-1)^3$ og $g(x)=\sqrt[3]{x}+1$, er þá $g=f^{-1}$?

Skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfra falla fundin

Úttaksgildi fallsins f eru inntaksgildi f^{-1}, og því er myndmengi f jafnframt skilgreiningarmengi f^{-1}. Á sama hátt eru inntaksgildi f úttaksgildi f^{-1}, og því er skilgreiningarmengi f myndmengi f^{-1}. Þetta má sýna myndrænt eins og á mynd 3.



Mynd 3 Skilgreiningarmengi og myndmengi falls og andhverfu þess

Þótt fall hafi enga andhverfu er stundum hægt að búa til nýtt fall með takmörkuðu skilgreiningarmengi sem hefur andhverfu. Andhverfa $f(x)=\sqrt{x}$ er til dæmis $f^{-1}(x)=x^2$, því annað veldi „afturkallar“ kvaðratrót. Annað veldi er þó aðeins andhverfa kvaðratrótar á skilgreiningarmenginu $[0,\infty)$, því að það er myndmengi $f(x)=\sqrt{x}$.

Við getum einnig skoðað þetta frá hinni hliðinni og byrjað á annars veldisfallinu (annars stigs grunnfallinu) $f(x)=x^2$. Ef við reynum að finna andhverfu þess lendum við í vanda: Hvert úttaksgildi annars stigs fallsins samsvarar tveimur inntaksgildum, nema þegar inntakið er 0. Úttaksgildið 9 samsvarar til dæmis inntaksgildunum 3 og −3. Úttak falls verður hins vegar inntak andhverfu þess. Ef þetta inntak andhverfunnar samsvarar fleiri en einu úttaksgildi hennar (inntaksgildi upphaflega fallsins) er „andhverfan“ alls ekki fall. Með öðrum orðum er annars stigs fallið ekki eintækt. Það stenst ekki lárétta línuprófið og hefur því enga andhverfu. Fall verður að vera eintækt til að hafa andhverfu.

Ef fall er ekki eintækt getum við í mörgum tilvikum takmarkað það við þann hluta skilgreiningarmengisins þar sem það er eintækt. Við getum til dæmis búið til takmarkaða útgáfu af annars veldisfallinu $f(x)=x^2$ með skilgreiningarmengið $[0,\infty)$, og þá er fallið eintækt (það stenst lárétta línuprófið) og hefur andhverfu, kvaðratrótarfallið.

Ef $f(x)=(x-1)^2$ á $[1,\infty)$, er andhverfa fallið $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$.

- Skilgreiningarmengi f = myndmengi $f^{-1}=[1,\infty)$.
- Skilgreiningarmengi f^{-1} = myndmengi $f=[0,\infty)$.

SPURT OG SVARAÐ

Getur fall haft fleiri en eina andhverfu?

Nei. Ef tvö föll sem eiga að vera ólík, til dæmis g og h, uppfylla bæði skilgreiningu andhverfu annars falls f, má sanna að $g=h$. Við höfum séð að sum föll hafa aðeins andhverfu ef skilgreiningarmengi upphaflega fallsins er takmarkað. Í slíkum tilvikum getur verið hægt að takmarka skilgreiningarmengið á fleiri en einn veg og fá þannig mismunandi andhverfur. Á hverju tilteknu skilgreiningarmengi hefur upphaflega fallið þó aðeins eina andhverfu.

SKILGREININGARMENGI OG MYNDMENGI ANDHVERFRA FALLA

Myndmengi falls $f(x)$ er skilgreiningarmengi andhverfa fallsins $f^{-1}(x)$.

Skilgreiningarmengi $f(x)$ er myndmengi $f^{-1}(x)$.

1

AÐFERÐ

Finna skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfu falls þegar fallið er gefið.

1. Ef fallið er eintækt skal rita myndmengi upphaflega fallsins sem skilgreiningarmengi andhverfunnar og skilgreiningarmengi upphaflega fallsins sem myndmengi andhverfunnar.
2. Ef takmarka þarf skilgreiningarmengi upphaflega fallsins til að gera það eintækt verður þetta takmarkaða skilgreiningarmengi myndmengi andhverfa fallsins.

DÆMI 4

Andhverfur grunnfalla fundnar

Finnið hvaða grunnföll, önnur en annars stigs fallið, eru ekki eintæk. Finnið síðan, ef hægt er, takmarkað skilgreiningarmengi þar sem hvert þeirra er eintækt. Grunnföllin eru rifjuð upp í töflu 2. Við takmörkum skilgreiningarmengið þannig að fallið taki hvert y-gildi nákvæmlega einu sinni.

Tafla 2

Fastafall	Samsemdarfall	Annars stigs fall	Þriðja stigs fall	Umhverfufall
$f(x)=c$	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^3$	$f(x)=\frac{1}{x}$
Annað veldi umhverfufalls	**Teningsrótarfall**	**Kvaðratrótarfall**	**Tölugildi**	
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\sqrt[3]{x}$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f(x)=\lvert x\rvert$	

Lausn

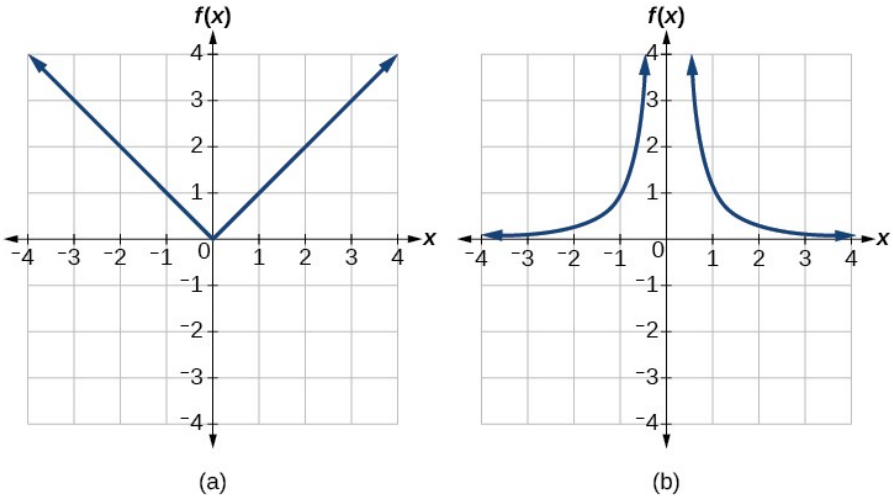
Fastafallið er ekki eintækt og ekkert skilgreiningarmengi, nema stakur punktur, gerir það eintækt. Fastafallið hefur því enga merkingarbæra andhverfu.

Takmarka má tölugildisfallið við skilgreiningarmengið $[0,\infty)$, þar sem það er jafnt samsemdarfallinu.

Takmarka má annað veldi umhverfufallsins við skilgreiningarmengið $(0,\infty)$.

Greining

Af gröfunum á mynd 4 sést að þessi föll eru ekki eintæk ef skilgreiningarmengi þeirra eru ekki takmörkuð. Bæði falla á lárétta línuprófinu. Ef fall er hins vegar takmarkað við tiltekið skilgreiningarmengi þannig að það standist lárétta línuprófið getur það haft andhverfu á því skilgreiningarmengi.



Mynd 4 (a) Graf tölugildisfallsins f(x) = |x|. (b) Graf fallsins f(x) = 1/x².

REYNIÐ SJÁLF #4

Skilgreiningarmengi fallsins f er $(1, \infty)$ og myndmengi fallsins f er $(-\infty, -2)$. Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi andhverfa fallsins.

Andhverf föll fundin og gildi þeirra reiknuð

Þegar eintækt fall er gefið getum við reiknað gildi andhverfu þess fyrir tiltekin inntaksgildi eða í mörgum tilvikum sett andhverfa fallið fram í heild.

Andhverfur töflufalla fundnar

Gerum ráð fyrir að við viljum finna andhverfu falls sem er gefið í töflu. Munið að skilgreiningarmengi falls er myndmengi andhverfunnar og myndmengi fallsins er skilgreiningarmengi andhverfunnar. Því þarf að víxla á skilgreiningarmengi og myndmengi.

Hver lína (eða dálkur) inntaksgilda verður lína (eða dálkur) úttaksgilda andhverfa fallsins. Á sama hátt verður hver lína (eða dálkur) úttaksgilda lína (eða dálkur) inntaksgilda andhverfa fallsins.

DÆMI 5

Andhverfa töflufalls túlkuð

Fallið $f(t)$ er gefið í töflu 3, sem sýnir hve margar mílur bíll hefur ekið á t mínútum. Finnið og túlkið $f^{-1}(70)$.

1

Tafla 3

t (mínútur)	30	50	70	90
$f(t)$ (mílur)	20	40	60	70

Lausn

Andhverfa fallið tekur við úttaksgildi f og skilar inntaksgildi f. Í stæðunni $f^{-1}(70)$, er 70 því úttaksgildi upphaflega fallsins og táknar 70 mílur. Andhverfan skilar samsvarandi inntaksgildi upphaflega fallsins f, 90 mínútum, og því er $f^{-1}(70)=90$. Þetta merkir að það tók 90 mínútur að aka 70 mílur.

Einnig má rifja upp að samkvæmt skilgreiningu andhverfu gildir: Ef $f(a)=b$, þá er $f^{-1}(b)=a$. Ef gefið er $f^{-1}(70)=a$, leitum við því að gildi a þannig að $f(a)=70$. Hér leitum við að t þannig að $f(t)=70$, en það gerist þegar $t=90$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Notið töflu 4 til að finna og túlka (a) $f(60)$, og (b) $f^{-1}(60)$.

Tafla 4

t (mínútur)	30	50	60	70	90
$f(t)$ (mílur)	20	40	50	60	70

Gildi andhverfu falls reiknað út frá grafi upphaflega fallsins

Í kaflanum Föll og fallatáknun sáum við að lesa má skilgreiningarmengi falls af láréttri útbreiðslu grafsins. Við finnum skilgreiningarmengi andhverfs falls með því að skoða lóðrétta útbreiðslu grafs upphaflega fallsins, því hún samsvarar láréttri útbreiðslu grafs andhverfunnar. Á sama hátt finnum við myndmengi andhverfs falls með því að skoða lárétta útbreiðslu grafs upphaflega fallsins, því hún er lóðrétt útbreiðsla grafs andhverfunnar. Til að reikna gildi andhverfs falls finnum við inntak þess innan skilgreiningarmengisins, sem er allur eða hluti lóðrétta ássins á grafi upphaflega fallsins.

AÐFERÐ

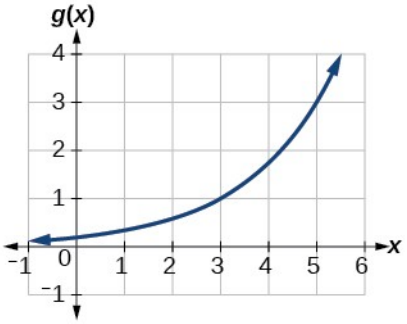
Reikna gildi andhverfu falls í tilteknum punktum þegar graf fallsins er gefið.

1. Finnið tiltekið inntak á y-ás gefna grafsins.
2. Lesið úttak andhverfa fallsins af x-ás gefna grafsins.

DÆMI 6

Gildi falls og andhverfu þess reiknuð úr grafi í tilteknum punktum

Fallið $g(x)$ er gefið á mynd 5. Finnið $g(3)$ og $g^{-1}(3)$.

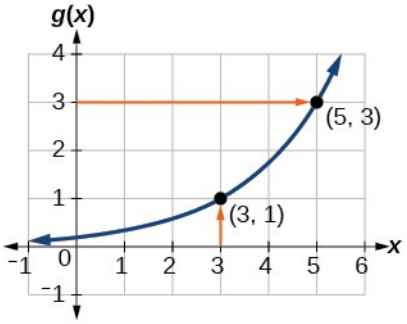


Mynd 5 Graf vaxandi fallsins g.

Lausn

Til að reikna $g(3)$, finnum við 3 á x-ásnum og samsvarandi úttaksgildi á y-ásnum. Punkturinn $(3,1)$ sýnir að $g(3)=1$.

Til að reikna $g^{-1}(3)$, rifjum við upp að samkvæmt skilgreiningu merkir $g^{-1}(3)$ það gildi x sem uppfyllir $g(x)=3$. Þegar úttaksgildið 3 er fundið á lóðrétta ásnum finnum við punktinn $(5,3)$ á grafinu. Það merkir að $g(5)=3$, og samkvæmt skilgreiningu er því $g^{-1}(3)=5$. Sjá mynd 6.



Mynd 6 Gildi fallsins g lesin af grafinu.

REYNIÐ SJÁLF #6

Notið grafið á mynd 5 til að (a) finna $g^{-1}(1)$, og (b) áætla $g^{-1}(4)$.

Andhverfur falla sem gefin eru með formúlum fundnar

Stundum þurfum við að þekkja andhverft fall fyrir öll stök skilgreiningarmengis þess en ekki aðeins nokkur. Ef upphaflega fallið er gefið með formúlu — til dæmis y sem fall af x — getum við oft fundið andhverfa fallið með því að leysa fyrir x sem fall af y.

1

AÐFERÐ

Finna andhverfu falls sem er gefið með formúlu.

1. Gangið úr skugga um að f sé eintækt fall.
2. Leysið jöfnuna með tilliti til x.
3. Víxlið á x og y.
4. Skiptið y út fyrir $f^{-1}(x)$. (Breytur geta verið aðrar í einstökum tilvikum en meginreglan er sú sama.)

DÆMI 7

Andhverfa fallsins sem umreiknar Fahrenheit í Celsíus fundin

Finnið formúlu andhverfa fallsins sem gefur hitastig á Fahrenheit sem fall af hitastigi á Celsíus.

$$C=\frac{5}{9}(F-32)$$

Lausn

$$\begin{aligned} C &= \tfrac{5}{9}(F-32) \\ C\cdot\tfrac{9}{5} &= F-32 \\ F &= \tfrac{9}{5}C+32 \end{aligned}$$

Með því að leysa jöfnuna almennt höfum við fundið andhverfa fallið. Ef

$$C=h(F)=\frac{5}{9}(F-32),$$

þá

$$F=h^{-1}(C)=\frac{9}{5}C+32.$$

Hér skilgreindum við fallið h til að tákna umreikninginn því inntaks- og úttaksbreyturnar hafa lýsandi heiti og táknunin C^{-1} gæti valdið ruglingi.

REYNIÐ SJÁLF #7

Finnið x sem fall af y þegar gefið er $y=\frac{1}{3}(x-5)$

DÆMI 8

Andhverft fall fundið með því að leysa jöfnu

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=\frac{2}{x-3}+4$.

Lausn

$$y=\frac{2}{x-3}+4 \quad \text{Setjið upp jöfnu.}$$
$$y-4=\frac{2}{x-3} \quad \text{Dragið 4 frá báðum hliðum.}$$
$$x-3=\frac{2}{y-4} \quad \text{Margfaldið báðar hliðar með } x-3 \text{ og deilið með } y-4.$$
$$x=\frac{2}{y-4}+3 \quad \text{Bætið 3 við báðar hliðar.}$$

Því er $f^{-1}(y)=\frac{2}{y-4}+3$ eða $f^{-1}(x)=\frac{2}{x-4}+3$.

Greining

Skilgreiningarmengi f inniheldur ekki gildið 3 og myndmengi þess ekki gildið 4. f og f^{-1} eru jöfn í tveimur punktum en eru ekki sama fallið, eins og sjá má með því að setja upp töflu 5.

Tafla 5

x	1	2	5	$f^{-1}(y)$
$f(x)$	3	2	5	y

DÆMI 9

Andhverfa með rótum fundin með því að leysa jöfnu

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=2+\sqrt{x-4}$.

Lausn

$$y=2+\sqrt{x-4}$$
$$(y-2)^2=x-4$$
$$x=(y-2)^2+4$$

Því er $f^{-1}(x)=(x-2)^2+4$.

Skilgreiningarmengi f er $[4,\infty)$. Takið eftir að myndmengi f er $[2,\infty)$, og því er skilgreiningarmengi andhverfa fallsins f^{-1} einnig $[2,\infty)$.

Greining

1

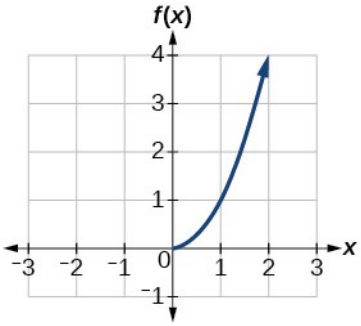
Formúlan sem við fundum fyrir $f^{-1}(x)$ virðist gilda fyrir öll raungildi x. Fallið f^{-1} verður þó sjálft að hafa andhverfu, nefnilega f, og því verðum við að takmarka skilgreiningarmengi f^{-1} við $[2,\infty)$ svo að f^{-1} verði eintækt. Þetta skilgreiningarmengi f^{-1} er einmitt myndmengi f.

REYNIÐ SJÁLF #8

Hver er andhverfa fallsins $f(x)=2-\sqrt{x}$? Tilgreinið skilgreiningarmengi bæði fallsins og andhverfu þess.

Andhverf föll og gröf þeirra fundin

Nú þegar við getum fundið andhverfu falls skoðum við gröf falla og andhverfa þeirra. Snúum aftur að annars stigs fallinu $f(x)=x^2$ sem er takmarkað við skilgreiningarmengið $[0,\infty)$, þar sem fallið er eintækt. Grafið er sýnt á mynd 7.

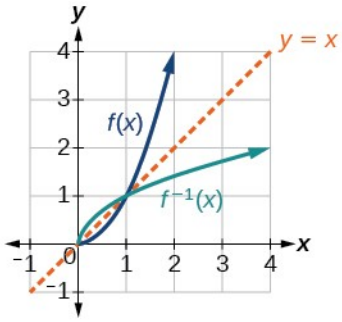


Mynd 7 Annars stigs fall með skilgreiningarmengi takmarkað við [0, ∞).

Takmörkun skilgreiningarmengisins við $[0,\infty)$ gerir fallið eintækt (það stenst augljóslega lárétta línuprófið) og því hefur það andhverfu á þessu takmarkaða mengi.

Við vitum þegar að andhverfa annars stigs grunnfallsins er kvaðratrótarfallið, það er $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$. Hvað gerist ef við teiknum bæði f og f^{-1} í sama hnitakerfi og notum $x-$ ásinn fyrir inntak beggja, f og f^{-1}?

Við sjáum skýr tengsl: Graf $f^{-1}(x)$ er speglun grafs $f(x)$ um hornalínuna $y=x$, sem við köllum samsemdarlínuna og er sýnd á mynd 8.



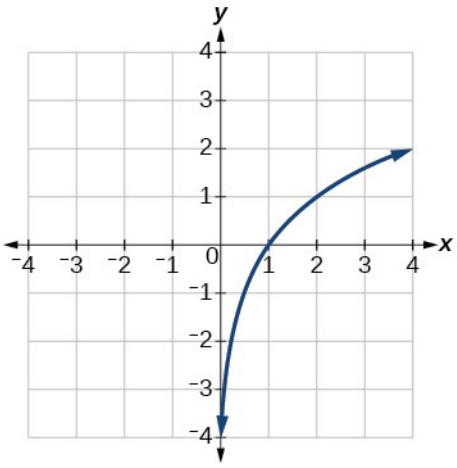
Mynd 8 Annars stigs fall og kvaðratrótarfall á óneikvæðu skilgreiningarmengi

Þessi tengsl gilda um öll eintæk föll, því þau stafa af því að fall og andhverfa þess víxla á inntaks- og úttaksgildum. Það jafngildir því að víxla hlutverkum lóðrétta og lárétta ássins.

DÆMI 10

Andhverfa falls fundin með speglun um samsemdarlínuna

Notið graf $f(x)$ á mynd 9 til að teikna skissu af grafi $f^{-1}(x)$.



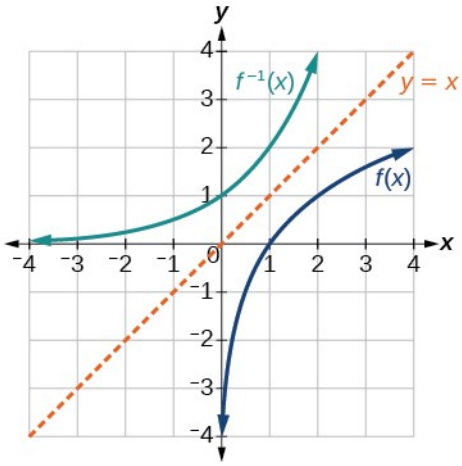
Mynd 9 Graf vaxandi lografalls.

Lausn

Þetta er eintækt fall og því getum við teiknað skissu af andhverfu þess. Grafið virðist hafa skilgreiningarmengið $(0,\infty)$ og myndmengið $(-\infty,\infty)$, svo andhverfan hefur skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$ og myndmengið $(0,\infty)$.

Ef grafið er speglað um línuna $y=x$, speglast punkturinn $(1,0)$ í $(0,1)$ og punkturinn $(4,2)$ í $(2,4)$. Þegar andhverfan er teiknuð í sama hnitakerfi og upphaflega grafið fæst mynd 10.

1



Mynd 10 Fallið og andhverfa þess sýna speglun um samsemdarlínuna

---

REYNIÐ SJÁLF #9

Teiknið gröf fallanna f og f^{-1} úr dæmi 8.

SPURT OG SVARAÐ

Er til fall sem er jafnt eigin andhverfu?

Já. Ef $f = f^{-1}$, þá er $f(f(x)) = x$, og auðvelt er að finna nokkur föll með þennan eiginleika. Samsemdarfallið hefur hann og umhverfufallið einnig því

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Hvert fall $f(x) = c - x$, þar sem c er fasti, er einnig jafnt eigin andhverfu.

TILFÖNG

Skoðið þessi veftilföng til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í andhverfum föllum.

- Andhverf föll
- Gildi andhverfs falls fundin með grafi
- Skilgreiningarmengi takmarkað og andhverfan fundin

1.7 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Hvers vegna er lárétta línuprófið gagnleg aðferð til að ákvarða hvort fall sé eintækt?

2. Hvers vegna takmörkum við skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=x^2$ til að finna andhverfu þess?

3. Getur fall verið eigin andhverfa? Útskýrið.

4. Eru eintæk föll alltaf annaðhvort vaxandi eða minnkandi? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?

5. Hvernig er andhverfa falls fundin með algebru?

Algebra

6. Sýnið að fallið $f(x)=a-x$ sé eigin andhverfa fyrir allar rauntölur a.

Finnið $f^{-1}(x)$ fyrir hvert fall í eftirfarandi verkefnum.

7.

$$f(x)=x+3$$

8.

$$f(x)=x+5$$

9.

$$f(x)=2-x$$

10.

$$f(x)=3-x$$

11.

$$f(x)=\frac{x}{x+2}$$

12.

$$f(x)=\frac{2x+3}{5x+4}$$

Finnið skilgreiningarmengi þar sem hvert fall f er eintækt og ekki minnkandi. Ritið skilgreiningarmengið með biltáknum. Finnið síðan andhverfu f þegar það er takmarkað við þetta mengi.

13.

$$f(x)=(x+7)^2$$

14.

$$f(x)=(x-6)^2$$

1

15.

$$f(x)=x^2-5$$

16. Gefin eru föllin $f(x)=\frac{x}{2+x}$ og $g(x)=\frac{2x}{1-x}$:

1. ⓐ Finnið $f(g(x))$ og $g(f(x))$.
2. ⓑ Hvað segir svarið um tengsl $f(x)$ og $g(x)$?

Notið samskeytingu falla til að staðfesta að $f(x)$ og $g(x)$ séu andhverf föll.

17. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ og $g(x)=x^3+1$,

18. $f(x)=-3x+5$ og $g(x)=\frac{x-5}{-3}$

Myndræn verkefni

Notið grafteikniforrit til að ákvarða hvort hvert fall sé eintækt.

19.

$$f(x)=\sqrt{x}$$

20.

$$f(x)=\sqrt[3]{3x+1}$$

21.

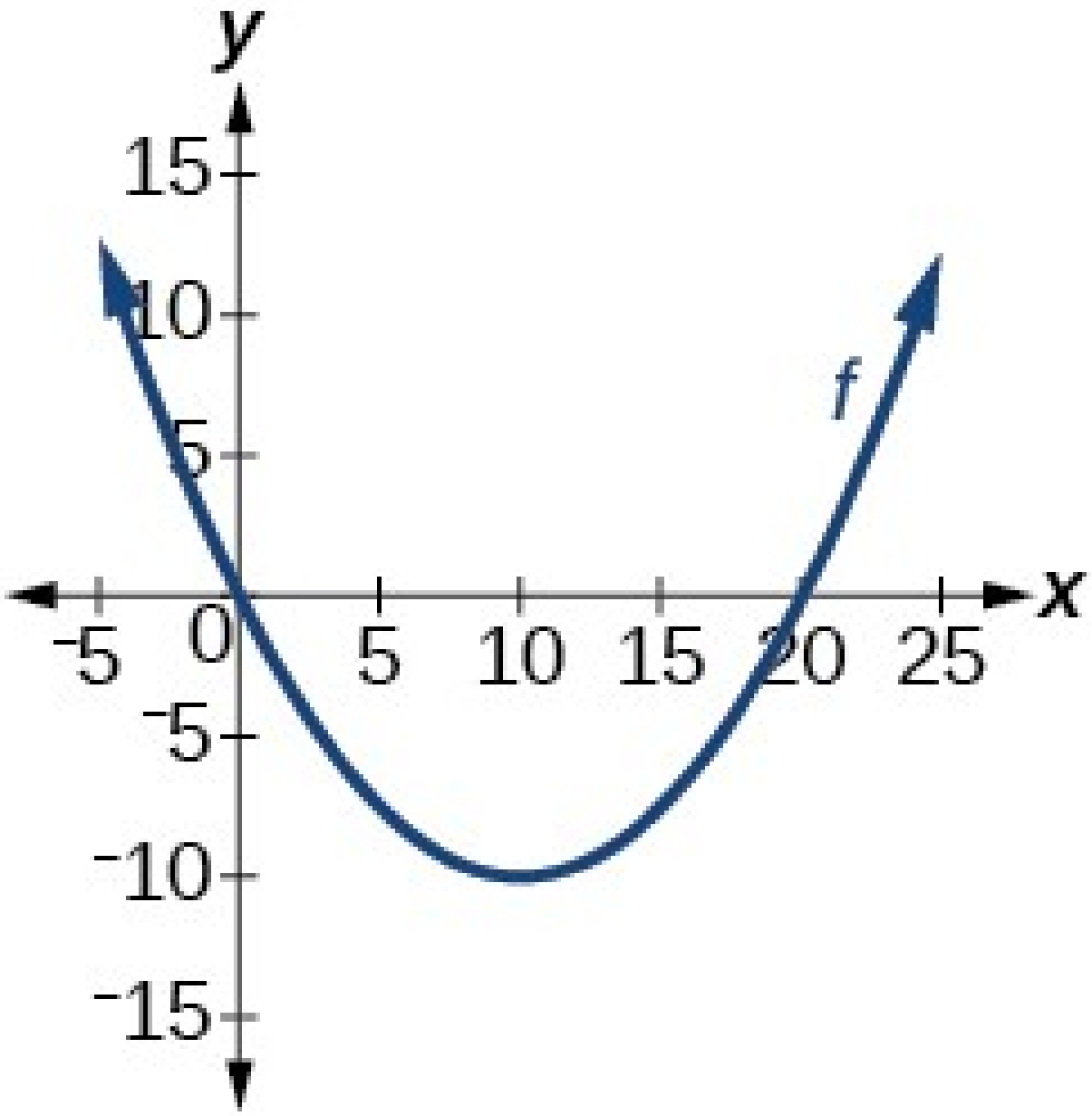
$$f(x)=-5x+1$$

22.

$$f(x)=x^3-27$$

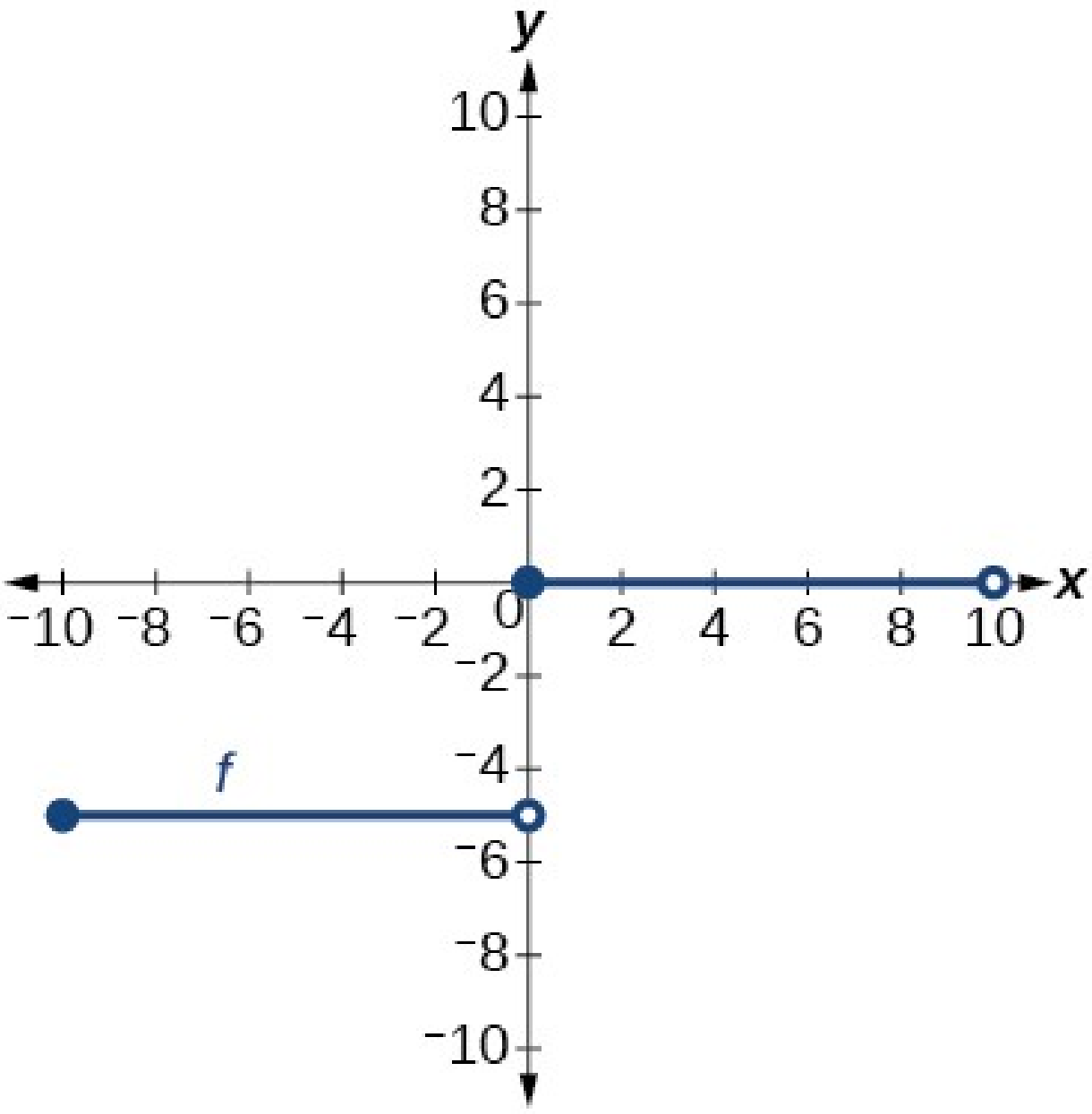
Ákvarðið hvort hvert graf sýni eintækt fall.

23.

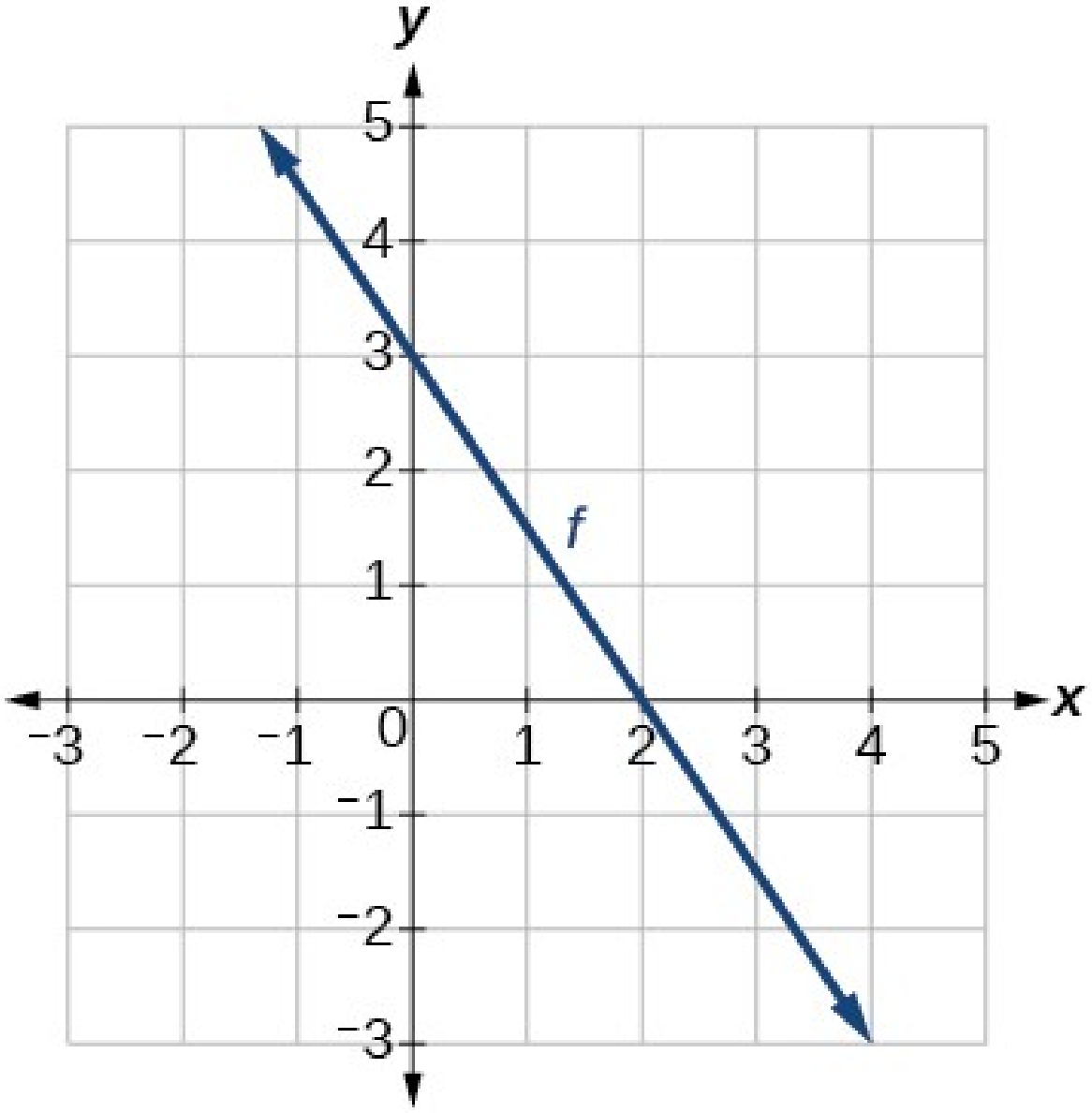


24.

1



Notið graf f á mynd 11 í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 11 Graf minnkandi línulegs falls.

25. Finnið $f(0)$.

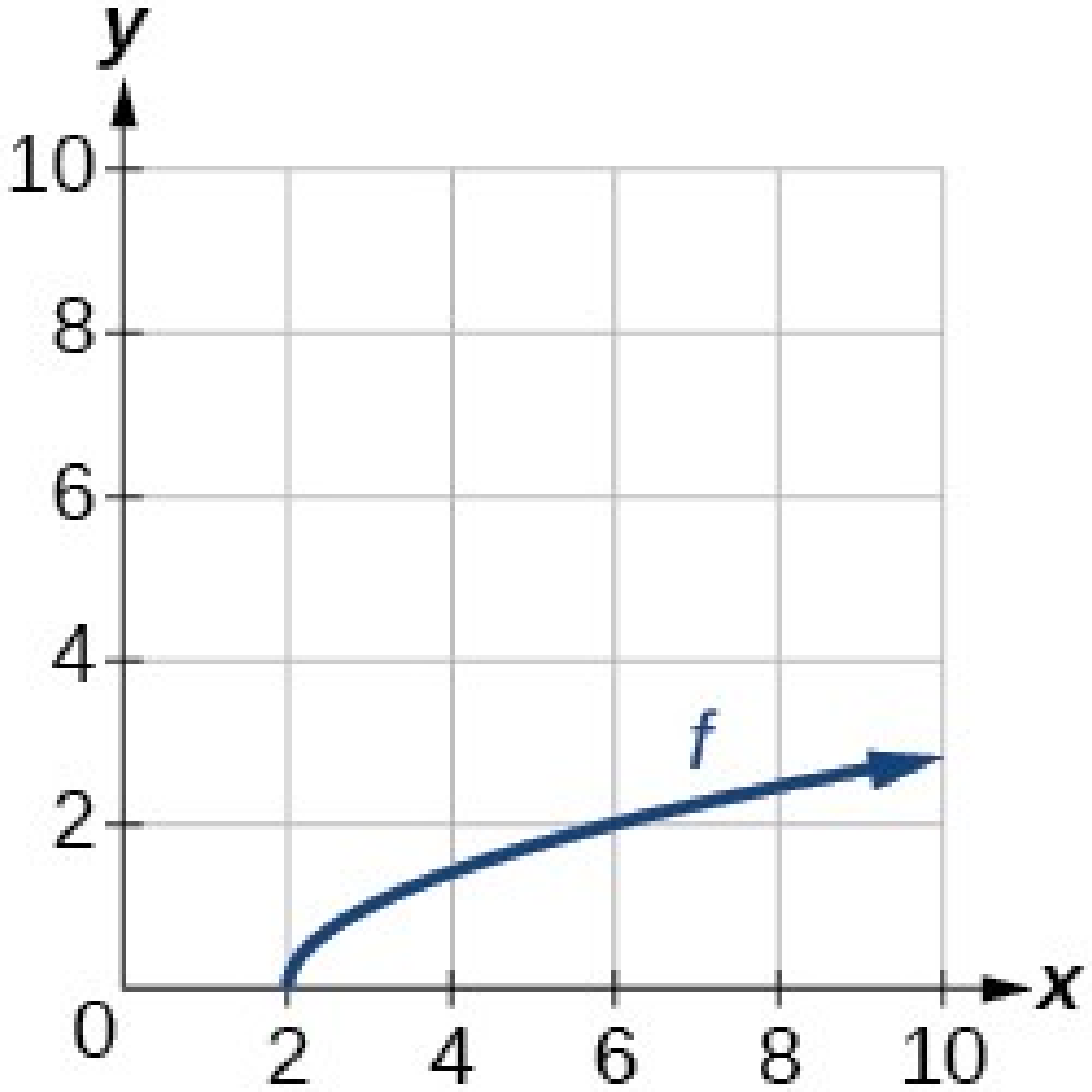
26. Leysið $f(x)=0$.

27. Finnið $f^{-1}(0)$.

28. Leysið $f^{-1}(x)=0$.

Notið graf eintæka fallsins á mynd 12 í eftirfarandi verkefnum.

1



Mynd 12 Graf kvaðratrótarfalls.

29. Teiknið skissu af grafi f^{-1}.

30. Finnið $f(6)$ og $f^{-1}(2)$.

31. Ef graf f er sýnt í heild, finnið þá skilgreiningarmengi f.

32. Ef graf f er sýnt í heild, finnið þá myndmengi f.

Töluleg verkefni

Reiknið eða leysið í eftirfarandi verkefnum og gerið ráð fyrir að fallið f sé eintækt.

33. Ef $f(6)=7$, finnið $f^{-1}(7)$.

34. Ef $f(3)=2$, finnið $f^{-1}(2)$.

35. Ef $f^{-1}(-4)=-8$, finnið $f(-8)$.

36. Ef $f^{-1}(-2)=-1$, finnið $f(-1)$.

Notið gildin í töflu 6 til að reikna eða leysa í eftirfarandi verkefnum.

Tafla 6

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	8	0	7	4	2	6	5	3	9	1

37. Finnið $f(1)$.

38. Leysið $f(x)=3$.

39. Finnið $f^{-1}(0)$.

40. Leysið $f^{-1}(x)=7$.

41. Notið töfluframsetningu f í töflu 7 til að búa til töflu fyrir $f^{-1}(x)$.

Tafla 7

x	3	6	9	13	14
$f(x)$	1	4	7	12	16

Tækni

Finnið andhverfa fallið í eftirfarandi verkefnum. Teiknið síðan graf fallsins og andhverfu þess.

42.

$$f(x)=\frac{3}{x-2}$$

43.

$$f(x)=x^3-1$$

44. Finnið andhverfu fallsins $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Notið grafteikniforrit til að finna skilgreiningarmengi og myndmengi þess. Ritið mengin með biltáknum.

Raunhæf viðfangsefni

45. Til að umreikna x gráður á Celsíus í y gráður á Fahrenheit notum við formúluna $f(x)=\frac{9}{5}x+32$. Finnið andhverfa fallið, ef það er til, og útskýrið merkingu þess.

1

46. Ummál hrings, C, er fall af geisla hans og er gefið með $C(r)=2\pi r$. Setjið geisla hrings fram sem fall af ummáli hans og nefnið fallið $r(C)$. Finnið $r(36\pi)$ og túlkið merkingu þess.

47. Bifreið ekur með jöfnum hraða, 50 mílur á klukkustund. Vegalengdin sem hún ekur í mílum er fall af tímanum t, í klukkustundum og er gefin með $d(t)=50t$. Finnið andhverfa fallið með því að setja ferðatímann fram sem fall af ekinni vegalengd. Nefnið fallið $t(d)$. Finnið $t(180)$ og túlkið merkingu þess.

Lykilhugtök

algilt hágildi
hæsta gildi falls á bili

algilt lággildi
lægsta gildi falls á bili

tölugildisjafna
jafna á forminu $|A|=B$, þar sem $B\geq 0$; hún hefur lausnir þegar $A=B$ eða $A=-B$

tölugildisójafna
vensl á forminu $|A|<B$, $|A|\leq B$, $|A|>B$, eða $|A|\geq B$

meðalbreytingarhraði
mismunur úttaksgilda falls fyrir tvö inntaksgildi deildur með mismun inntaksgildanna

samskeytt fall
nýtt fall sem myndast við samskeytingu falla þegar úttak eins falls er notað sem inntak annars

minnkandi fall
fall er minnkandi á opnu bili ef $f(b)<f(a)$ fyrir sérhver tvö inntaksgildi a og b á bilinu þar sem $b>a$

háð breyta
úttaksbreyta

skilgreiningarmengi
mengi allra mögulegra inntaksgilda vensla

jafnstætt fall
fall með graf sem breytist ekki við lárétta speglun, $f(x)=f(-x)$, og er samhverft um $y-$ ásinn

fall
vensl þar sem hvert inntaksgildi gefur nákvæmlega eitt úttaksgildi

lárétt samþjöppun
ummyndun sem þjappar grafi falls saman lárétt með því að margfalda inntakið með fasta $b>1$

lárétta línuprófið
aðferð til að prófa hvort fall sé eintækt með því að kanna hvort einhver lárétt lína skeri grafið oftar en einu sinni

lárétt speglun
ummyndun sem speglar graf falls um y-ásinn með því að margfalda inntakið með -1

lárétt hliðrun
ummyndun sem hliðrar grafi falls til vinstri eða hægri með því að leggja jákvæðan eða neikvæðan fasta við inntakið

lárétt teygja
ummyndun sem teygir graf falls lárétt með því að margfalda inntakið með fasta $0<b<1$

vaxandi fall
fall er vaxandi á opnu bili ef $f(b)>f(a)$ fyrir sérhver tvö inntaksgildi a og b á bilinu þar sem $b>a$

óháð breyta
inntaksbreyta

inntak
hvert stak eða gildi í skilgreiningarmengi sem tengist öðru staki eða gildi með venslum sem kallast fall

biltákn
aðferð til að lýsa mengi sem inniheldur allar tölur milli neðra og efra marks; mörkin eru rituð innan hornklofa eða sviga; hornklofi táknar að markið tilheyri menginu en svigi að það tilheyri því ekki

andhverft fall
fyrir sérhvert eintækt fall $f(x)$, er andhverfan fall $f^{-1}(x)$ þannig að $f^{-1}(f(x))=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f; af þessu leiðir einnig að $f(f^{-1}(x))=x$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f^{-1}

staðbundin útgildi
sameiginlegt heiti allra staðbundinna hágilda og lággilda falls

staðbundið hágildi
inntaksgildi þar sem fall breytist úr því að vera vaxandi í að vera minnkandi þegar inntaksgildið hækkar

1

staðbundið lággildi
inntaksgildi þar sem fall breytist úr því að vera minnkandi í að vera vaxandi þegar inntaksgildið hækkar

oddstætt fall
fall með graf sem breytist ekki við samsetta lárétta og lóðrétta speglun, $f(x) = -f(-x)$, og er samhverft um upphafspunkt hnitakerfisins

eintækt fall
fall þar sem hvert úttaksgildi tengist nákvæmlega einu inntaksgildi

úttak
hvert stak eða gildi í myndmengi sem fæst þegar inntaksgildi er sett inn í fall

hlutskilgreint fall
fall þar sem fleiri en ein formúla er notuð til að skilgreina úttakið

myndmengi
mengi úttaksgilda sem fást úr inntaksgildum vensla

breytingarhraði
breyting úttaksstærðar miðað við breytingu inntaksstærðar

vensl
mengi raðaðra para

skilyrðisritháttur mengja
aðferð til að lýsa mengi með reglu sem öll stök þess uppfylla; hún er á forminu $\{x \mid \text{fullyrðing um } x\}$

lóðrétt samþjöppun
ummyndun falls sem þjappar grafi þess saman lóðrétt með því að margfalda úttakið með fasta $0 < a < 1$

lóðrétta línuprófið
aðferð til að prófa hvort graf sýni fall með því að kanna hvort lóðrétt lína skeri grafið í mesta lagi einu sinni

lóðrétt speglun
ummyndun sem speglar graf falls um x-ásinn með því að margfalda úttakið með -1

lóðrétt hliðrun
ummyndun sem hliðrar grafi falls upp eða niður með því að leggja jákvæðan eða neikvæðan fasta við úttakið

lóðrétt teygja
ummyndun sem teygir graf falls lóðrétt með því að margfalda úttakið með fasta $a > 1$

Lykiljöfnur

Fastafall	$f(x)=c$, þar sem c er fasti
Samsemdarfall	$f(x)=x$
Tölugildisfall	$f(x)=\|x\|$
Annars stigs fall	$f(x)=x^2$
Þriðja stigs fall	$f(x)=x^3$
Umhverfufall	$f(x)=\frac{1}{x}$
Annað veldi umhverfufalls	$f(x)=\frac{1}{x^2}$
Kvaðratrótarfall	$f(x)=\sqrt{x}$
Teningsrótarfall	$f(x)=\sqrt[3]{x}$
Meðalbreytingarhraði	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
Samskeytt fall	$(f\circ g)(x)=f(g(x))$
Lóðrétt hliðrun	$g(x)=f(x)+k$ (upp á við þegar $k>0$)
Lárétt hliðrun	$g(x)=f(x-h)$ (til hægri þegar $h>0$)
Lóðrétt speglun	$g(x)=-f(x)$
Lárétt speglun	$g(x)=f(-x)$
Lóðrétt teygja	$g(x)=af(x)$ ($a>1$)
Lóðrétt samþjöppun	$g(x)=af(x)$ $(0<a<1)$
Lárétt teygja	$g(x)=f(bx)$ $(0<b<1)$
Lárétt samþjöppun	$g(x)=f(bx)$ ($b>1$)

Meginatriði

1

1.1 Föll og fallatáknun

- Vensl eru mengi raðaðra para. Fall er sérstök gerð vensla þar sem hvert gildi í skilgreiningarmenginu, eða inntak, leiðir til nákvæmlega eins gildis í myndmenginu, eða úttaks. Sjá dæmi 1 og dæmi 2.
- Fallatáknun er stytt aðferð til að tengja inntak við úttak á forminu $y=f(x)$. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Í töfluformi má sýna fall með röðum eða dálkum sem tengja inntaks- og úttaksgildi. Sjá dæmi 5.
- Til að reikna gildi falls finnum við úttaksgildi sem samsvarar tilteknu inntaksgildi. Reikna má gildi algebruframsetningar falls með því að setja tiltekið gildi í stað inntaksbreytunnar. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Til að finna hvenær fall tekur tiltekið gildi leitum við að þeim inntaksgildum sem gefa þetta úttaksgildi. Sjá dæmi 8.
- Rita má algebruframsetningu falls út frá jöfnu. Sjá dæmi 9 og dæmi 10.
- Greina má inntaks- og úttaksgildi falls úr töflu. Sjá dæmi 11.
- Önnur leið til að reikna gildi falls er að tengja inntaksgildi við úttaksgildi á grafi. Sjá dæmi 12.
- Fall er eintækt ef hvert úttaksgildi samsvarar aðeins einu inntaksgildi. Sjá dæmi 13.
- Graf sýnir fall ef sérhver lóðrétt lína sem dregin er á grafið sker það í mesta lagi einu sinni. Sjá dæmi 14.
- Graf eintæks falls stenst lárétta línuprófið. Sjá dæmi 15.

1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi

- Skilgreiningarmengi falls inniheldur öll inntaksgildi sem eru rauntölur og leiða ekki til óskilgreindrar reikniaðgerðar, svo sem að deila með núlli eða taka kvaðratrót af neikvæðri tölu.
- Finna má skilgreiningarmengi falls með því að telja upp inntaksgildi mengis raðaðra para. Sjá dæmi 1.
- Einnig má finna skilgreiningarmengi falls með því að greina inntaksgildi falls sem er ritað sem jafna. Sjá dæmi 2, dæmi 3 og dæmi 4.
- Lýsa má bilum sem sýnd eru á talnalínu með ójöfnurithætti, skilyrðisrithætti mengja og biltáknum. Sjá dæmi 5.
- Fyrir mörg föll má finna skilgreiningarmengi og myndmengi út frá grafi. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Nota má þekkingu á grunnföllum til að finna skilgreiningarmengi og myndmengi tengdra falla. Sjá dæmi 8, dæmi 9 og dæmi 10.
- Hlutskilgreindu falli er lýst með fleiri en einni formúlu. Sjá dæmi 11 og dæmi 12.
- Teikna má graf hlutskilgreinds falls með því að nota hverja algebruformúlu á sínum hluta skilgreiningarmengisins. Sjá dæmi 13.

1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa

- Breytingarhraði tengir breytingu úttaksstærðar við breytingu inntaksstærðar. Til að finna meðalbreytingarhraða notum við aðeins upphafs- og lokagögnin. Sjá dæmi 1.
- Finna má meðalbreytingarhraða með því að lesa af grafi punktana sem marka bilið. Sjá dæmi 2.
- Einnig má finna meðalbreytingarhraða með því að bera saman pör inntaks- og úttaksgilda í töflu. Sjá dæmi 3.
- Einnig má reikna meðalbreytingarhraða með því að finna fallgildin í endapunktum bils sem lýst er með formúlu. Sjá dæmi 4 og dæmi 5.
- Stundum má setja meðalbreytingarhraða fram sem stæðu. Sjá dæmi 6.
- Fall er vaxandi þar sem breytingarhraði þess er jákvæður en minnkandi þar sem breytingarhraðinn er neikvæður. Sjá dæmi 7.
- Staðbundið hágildi er þar sem fall breytist úr því að vera vaxandi í að vera minnkandi og hefur hærra úttaksgildi (jákvæðara eða minna neikvætt) en við nálæg inntaksgildi.
- Staðbundið lággildi er þar sem fall breytist úr því að vera minnkandi í að vera vaxandi (þegar inntakið vex) og hefur lægra úttaksgildi (neikvæðara eða minna jákvætt) en við nálæg inntaksgildi.
- Lággildi og hágildi kallast einnig útgildi.
- Finna má staðbundin útgildi út frá grafi. Sjá dæmi 8 og dæmi 9.
- Hæstu og lægstu punktar grafs sýna hágildi og lággildi. Sjá dæmi 10.

1.4 Samskeyting falla

- Framkvæma má algebruaðgerðir á föllum. Sjá dæmi 1.
- Þegar föll eru samskeytt verður úttak fyrra (innra) fallsins að inntaki síðara (ytra) fallsins.
- Fallið sem myndast við samskeytingu tveggja falla er samskeytt fall. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Þegar við túlkum merkingu samskeytts falls skiptir máli í hvaða röð föllin eru samskeytt. Sjá dæmi 4.
- Til að reikna gildi samskeytts falls reiknum við fyrst gildi innra fallsins fyrir gefið inntaksgildi. Úttak innra fallsins verður síðan inntak ytra fallsins og við reiknum gildi þess.
- Reikna má gildi samskeytts falls út frá töflu. Sjá dæmi 5.
- Reikna má gildi samskeytts falls út frá grafi. Sjá dæmi 6.
- Reikna má gildi samskeytts falls út frá formúlu. Sjá dæmi 7.

- Skilgreiningarmengi samskeytts falls er mengi þeirra inntaksgilda í skilgreiningarmengi innra fallsins þar sem úttaksgildi innra fallsins er í skilgreiningarmengi ytra fallsins. Sjá dæmi 8 og dæmi 9.
- Rétt eins og sameina má föll í samskeytt fall má þátta samskeytt föll í einfaldari föll.
- Oft má þátta föll á fleiri en einn veg. Sjá dæmi 10.

1.5 Ummyndanir falla

- Hliðra má falli lóðrétt með því að leggja fasta við úttakið. Sjá dæmi 1 og dæmi 2.
- Hliðra má falli lárétt með því að leggja fasta við inntakið. Sjá dæmi 3, dæmi 4 og dæmi 5.
- Með því að tengja hliðrun við samhengi verkefnis má bera saman og túlka lóðréttar og láréttar hliðranir. Sjá dæmi 6.
- Lóðréttar og láréttar hliðranir eru oft sameinaðar. Sjá dæmi 7 og dæmi 8.
- Lóðrétt speglun speglar graf um $x-$ ásinn. Spegla má graf lóðrétt með því að margfalda úttakið með -1.
- Lárétt speglun speglar graf um $y-$ ásinn. Spegla má graf lárétt með því að margfalda inntakið með -1.
- Spegla má graf bæði lóðrétt og lárétt. Það skiptir ekki máli fyrir lokagrafið í hvaða röð speglað er. Sjá dæmi 9.
- Einnig má spegla fall á töfluformi með því að margfalda gildin í viðeigandi inntaks- og úttaksröðum eða -dálkum. Sjá dæmi 10.
- Spegla má fall sem sett er fram með jöfnu með því að beita einni ummyndun í einu. Sjá dæmi 11.
- Jafnstæð föll eru samhverf um $y-$ ásinn en oddstæð föll eru samhverf um upphafspunkt hnitakerfisins.
- Jafnstæð föll uppfylla skilyrðið $f(x)=f(-x)$.
- Oddstæð föll uppfylla skilyrðið $f(x)=-f(-x)$.
- Fall getur verið oddstætt, jafnstætt eða hvorugt. Sjá dæmi 12.
- Þjappa má falli saman eða teygja það lóðrétt með því að margfalda úttakið með fasta. Sjá dæmi 13, dæmi 14 og dæmi 15.
- Þjappa má falli saman eða teygja það lárétt með því að margfalda inntakið með fasta. Sjá dæmi 16, dæmi 17 og dæmi 18.
- Það hefur áhrif á lokafallið í hvaða röð ólíkum ummyndunum er beitt. Beita verður bæði lóðréttum og láréttum ummyndunum í gefinni röð. Hins vegar má sameina lóðrétta og lárétta ummyndun í hvorri röðinni sem er. Sjá dæmi 19 og dæmi 20.

1.6 Tölugildisföll

- Tölugildisfallið er oft notað til að mæla fjarlægð milli punkta. Sjá dæmi 1.

- Einnig má leysa hagnýt verkefni, svo sem verkefni um bil mögulegra gilda, með tölugildisfallinu. Sjá dæmi 2.
- Graf tölugildisfallsins líkist bókstafnum V. Það hefur hornpunkt þar sem grafið skiptir um stefnu. Sjá dæmi 3.
- Í tölugildisjöfnu er óþekkt breyta inntak tölugildisfalls.
- Ef tölugildi stæðu er sett jafnt jákvæðri tölu má búast við tveimur lausnum fyrir óþekktu breytuna. Sjá dæmi 4.
- Tölugildisjafna getur haft eina lausn, tvær lausnir eða enga lausn. Sjá dæmi 5.
- Tölugildisójafna líkist tölugildisjöfnu en er á forminu $|A|<B$, $|A|\leq B$, $|A|>B$, eða $|A|\geq B$. Leysa má hana með því að finna mörk lausnamengisins og prófa síðan hvaða bil tilheyra menginu. Sjá dæmi 6.
- Einnig má leysa tölugildisójöfnur myndrænt. Sjá dæmi 7.

1.7 Andhverf föll

- Ef $g(x)$ er andhverfa $f(x)$, þá er $g(f(x))=f(g(x))=x$. Sjá dæmi 1, dæmi 2 og dæmi 3.
- Hvert grunnfall hefur andhverfu. Sjá dæmi 4.
- Til að fall hafi andhverfu verður það að vera eintækt (standast lárétta línuprófið).
- Fall sem er ekki eintækt á öllu skilgreiningarmengi sínu getur verið eintækt á hluta þess.
- Ef fall er gefið á töfluformi fæst andhverfan með því að víxla á inntaks- og úttaksröðunum. Sjá dæmi 5.
- Finna má andhverfu falls í tilteknum punktum á grafi þess. Sjá dæmi 6.
- Til að finna andhverfu falls sem gefið er með formúlu skal leysa jöfnuna $y=f(x)$ með tilliti til x sem falls af y. Víxlið síðan á heitunum x og y. Sjá dæmi 7, dæmi 8 og dæmi 9.
- Graf andhverfs falls er speglun grafs upphaflega fallsins um línuna $y=x$. Sjá dæmi 10.

Yfirlitsverkefni

Föll og fallatáknun

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort venslin séu fall.

1.

$$\{(a,b),(c,d),(e,d)\}$$

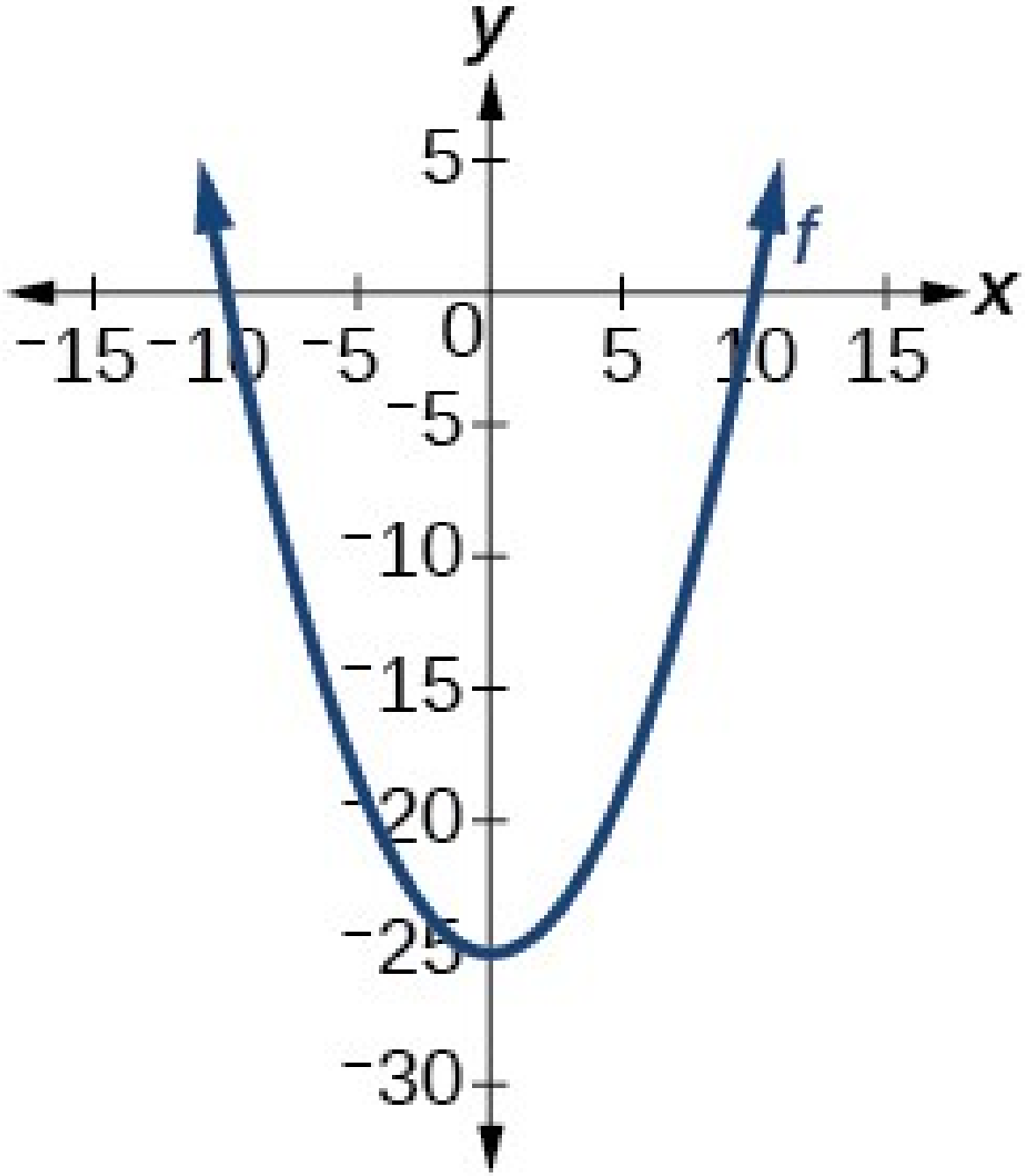
2.

$$\{(5,2),(6,1),(6,2),(4,8)\}$$

3. $y^2+4=x$, þar sem x er óháða breytan og y háða breytan

4. Sýnir grafið á mynd 1 fall?

1



Mynd 1

Reiknið í eftirfarandi verkefnum gildi fallsins fyrir tilgreind gildi:
$f(-3); f(2); f(-a); -f(a); f(a+h)$.

5.

$$f(x) = -2x^2 + 3x$$

6.

$$f(x) = 2|3x - 1|$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort föllin séu eintæk.

7.

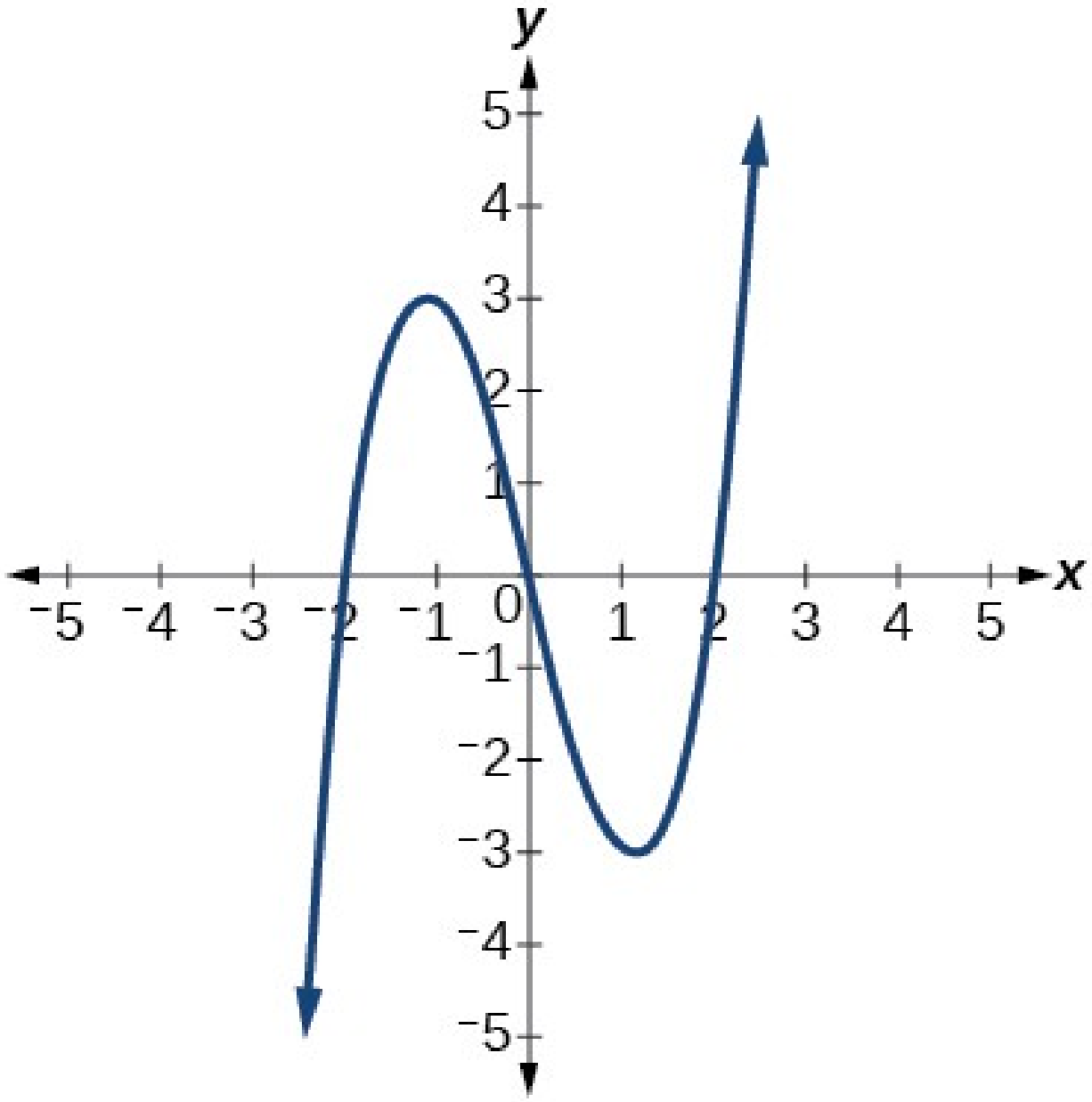
$$f(x)=-3x+5$$

8.

$$f(x)=|x-3|$$

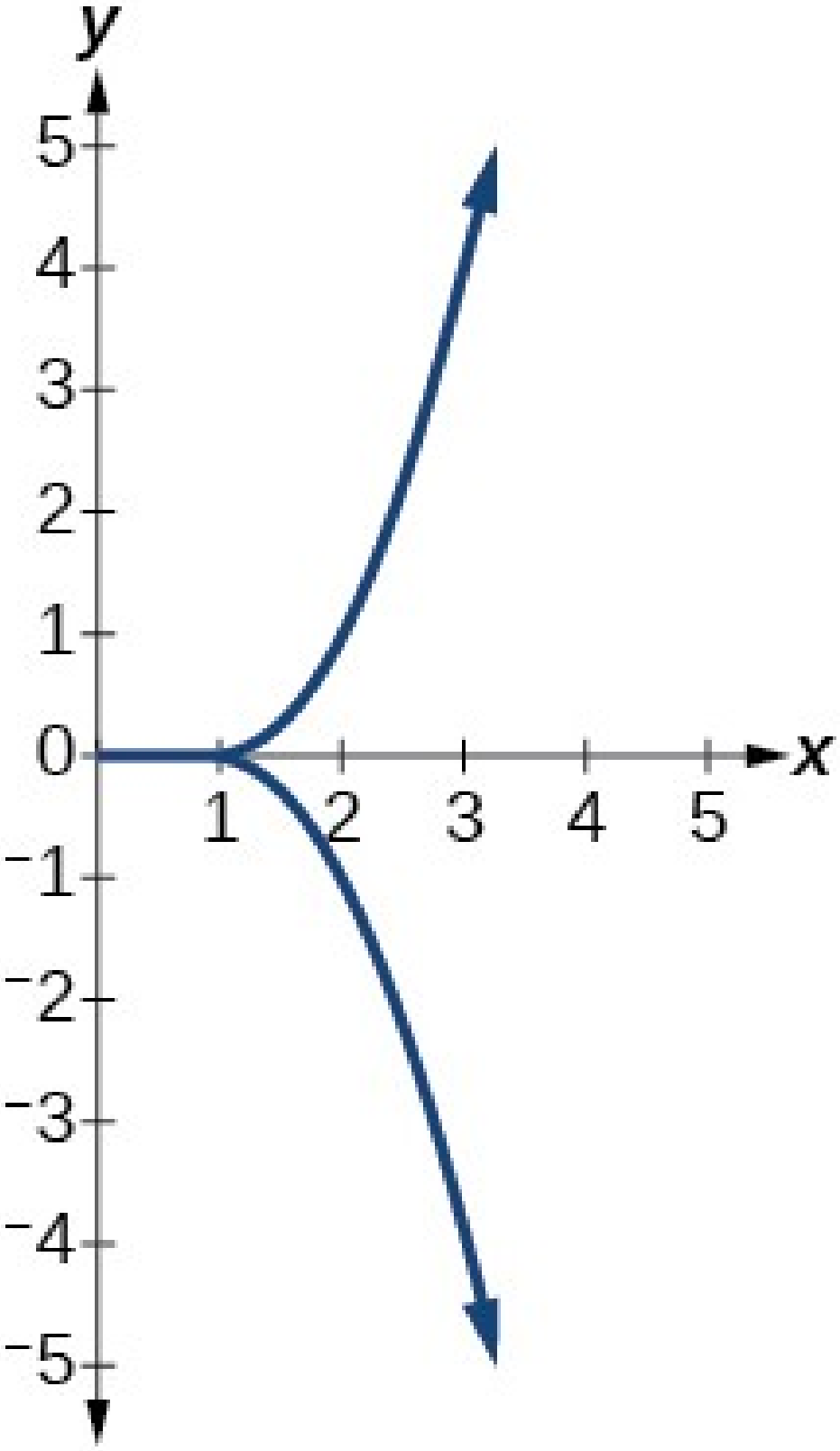
Notið lóðrétta línuprófið í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort venslin sem grafið sýnir séu fall.

9.

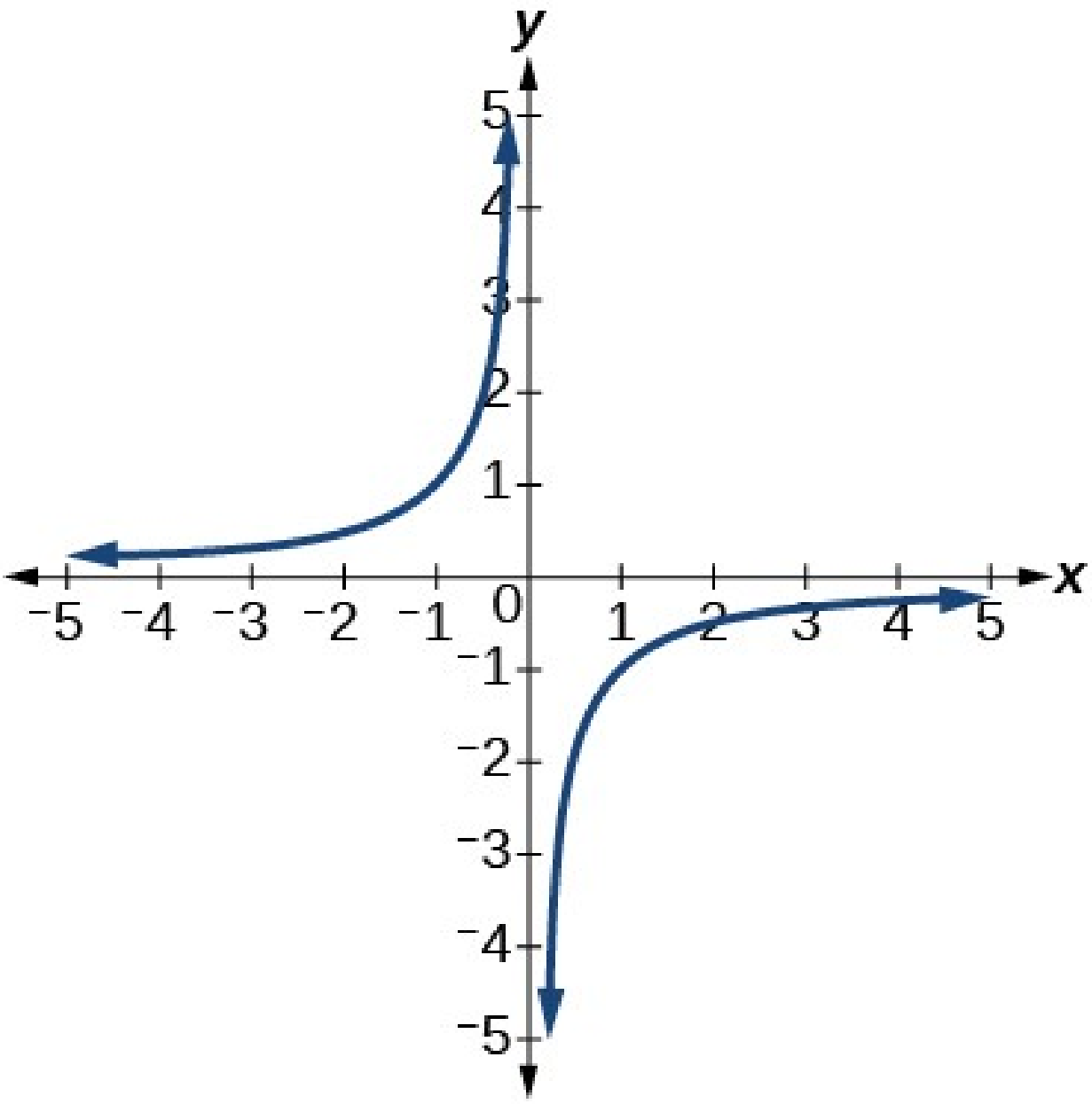


10.

1



11.



Teiknið gröf fallanna í eftirfarandi verkefnum.

12.

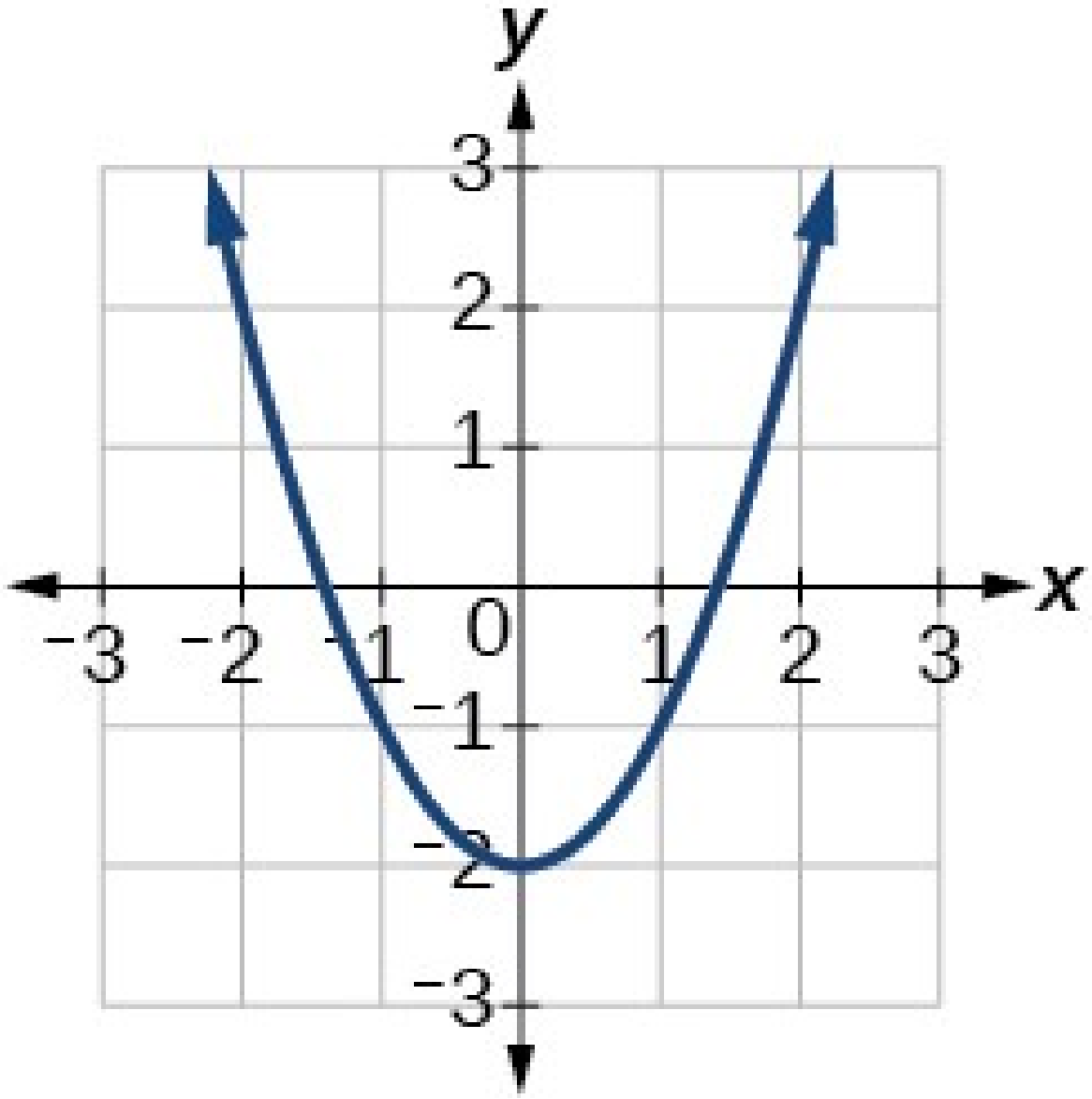
$$f(x)=|x+1|$$

13.

$$f(x)=x^2-2$$

Notið mynd 2 í eftirfarandi verkefnum til að áætla gildin.

1



Mynd 2

14.

$$f(2)$$

15.

$$f(-2)$$

16. Ef $f(x)=-2$, leysið þá með tilliti til x.

17. Ef $f(x)=1$, leysið þá með tilliti til x.

Notið fallið $h(t)=-16t^2+80t$ í eftirfarandi verkefnum til að finna gildin.

18.

$$\frac{h(2)-h(1)}{2-1}$$

19.

$$\frac{h(a)-h(1)}{a-1}$$

Skilgreiningarmengi og myndmengi

Finnið skilgreiningarmengi hvers falls í eftirfarandi verkefnum og ritið svörin með biltáknum.

20.

$$f(x)=\frac{2}{3x+2}$$

21.

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2-4x-12}$$

22.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-4}}$$

23.

Teiknið graf þessa hlutskilgreinda falls: $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-2\\ -2x-3 & x\geq -2\end{cases}$

Breytingarhraði og hegðun grafa

Finnið í eftirfarandi verkefnum meðalbreytingarhraða fallanna frá $x=1$ til $x=2$.

24.

$$f(x)=4x-3$$

25.

$$f(x)=10x^2+x$$

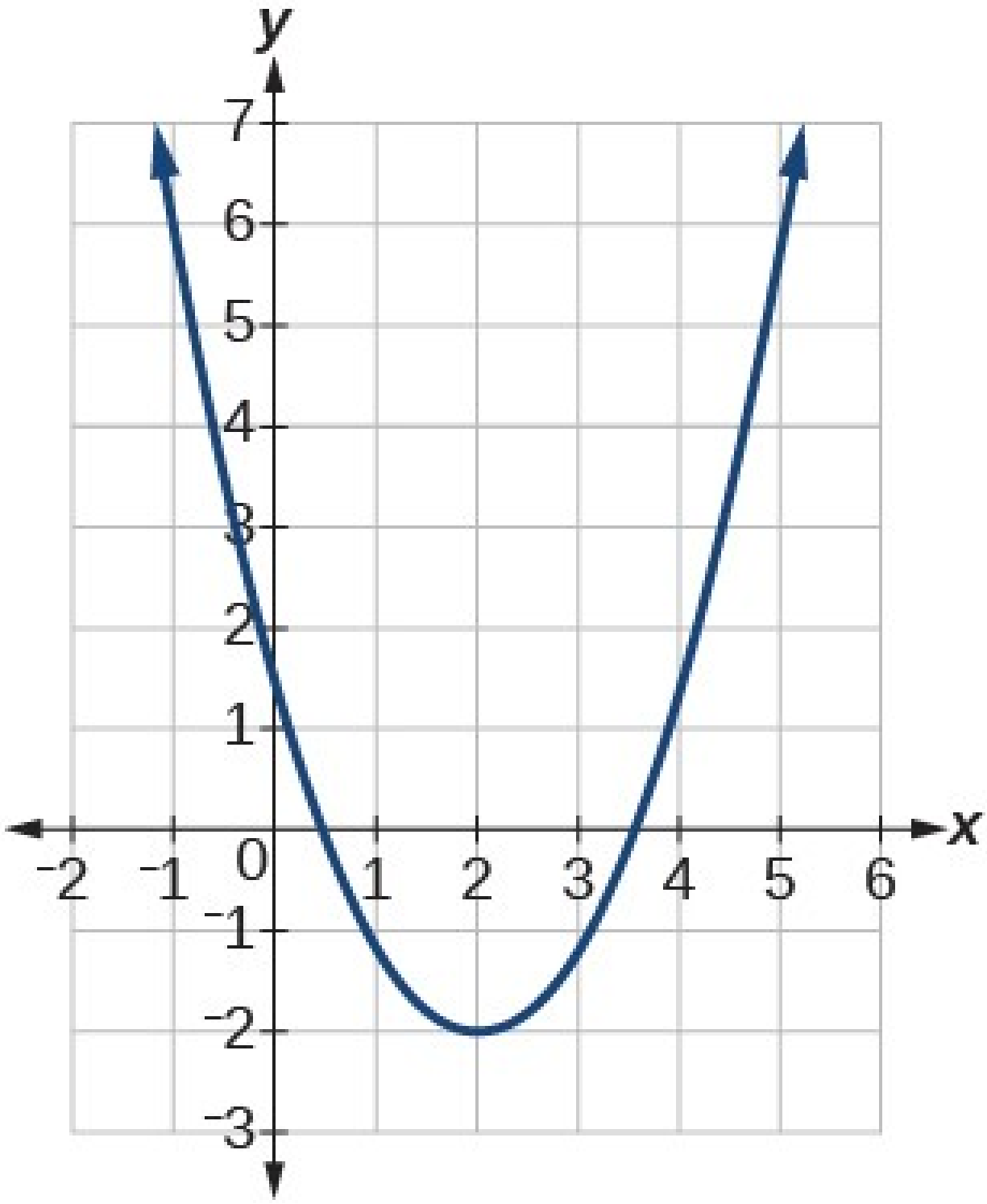
26.

$$f(x)=-\frac{2}{x^2}$$

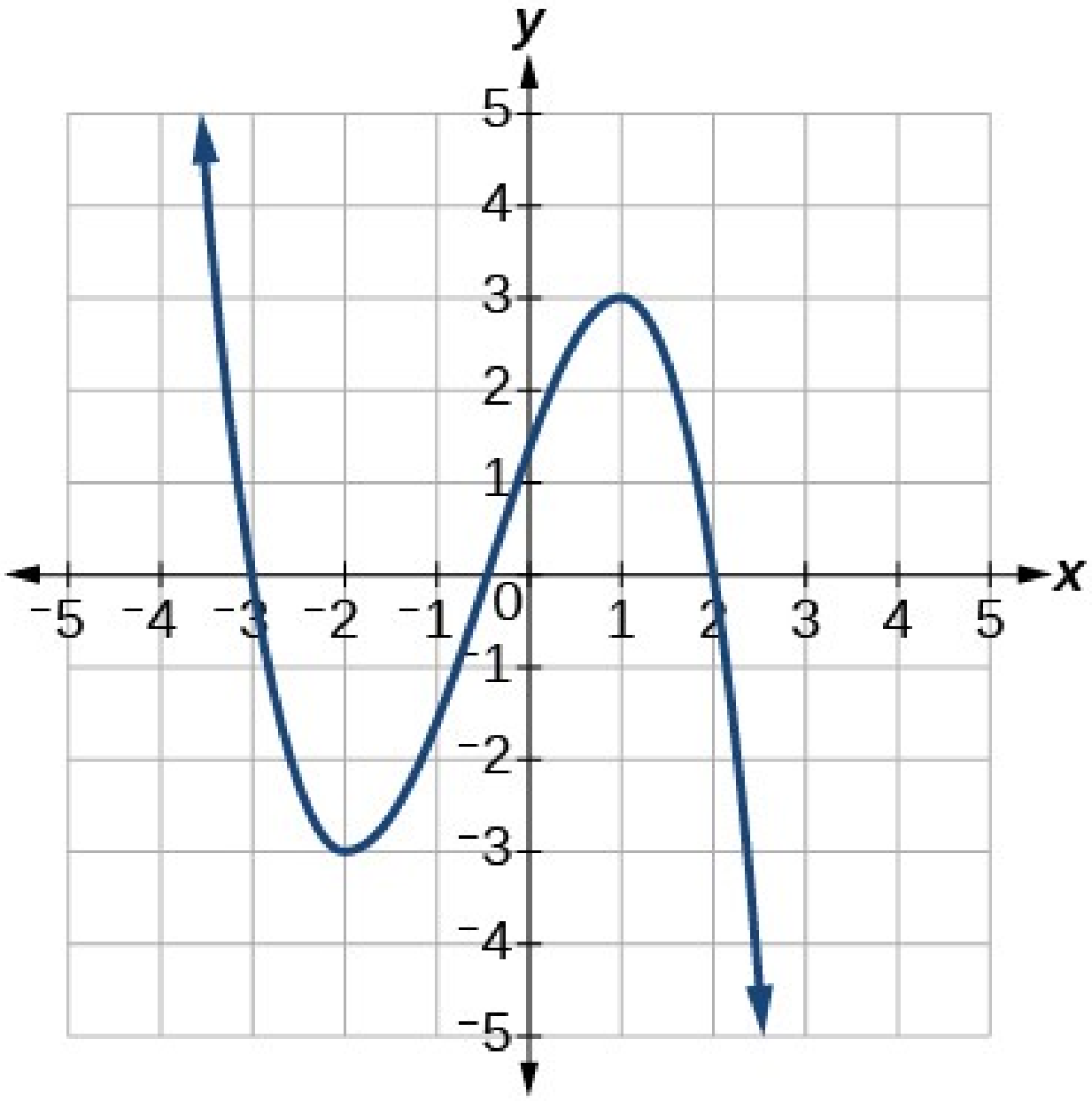
Notið gröfin í eftirfarandi verkefnum til að finna bilin þar sem föllin eru vaxandi, minnkandi eða föst.

1

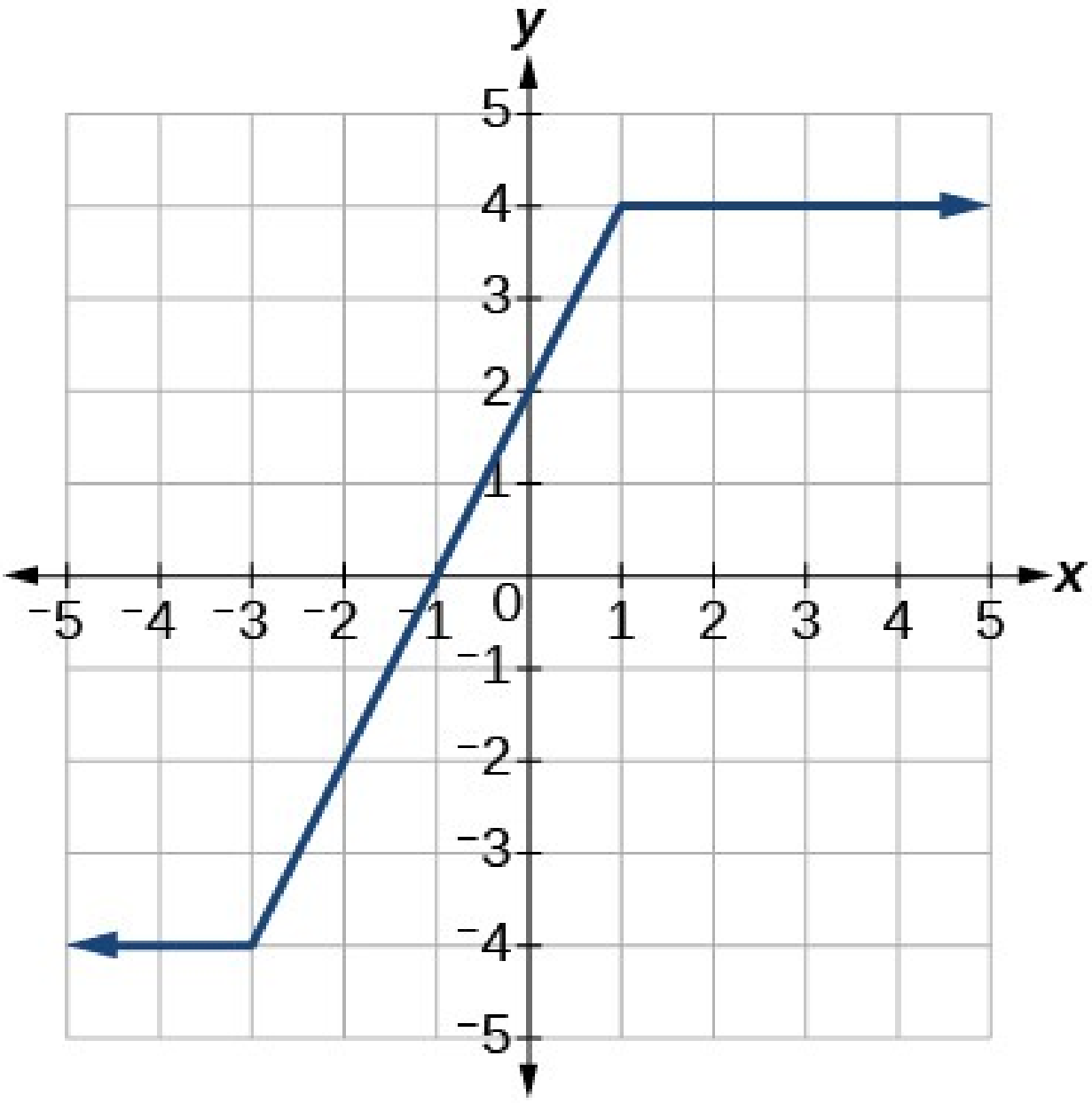
27.



28.



29.

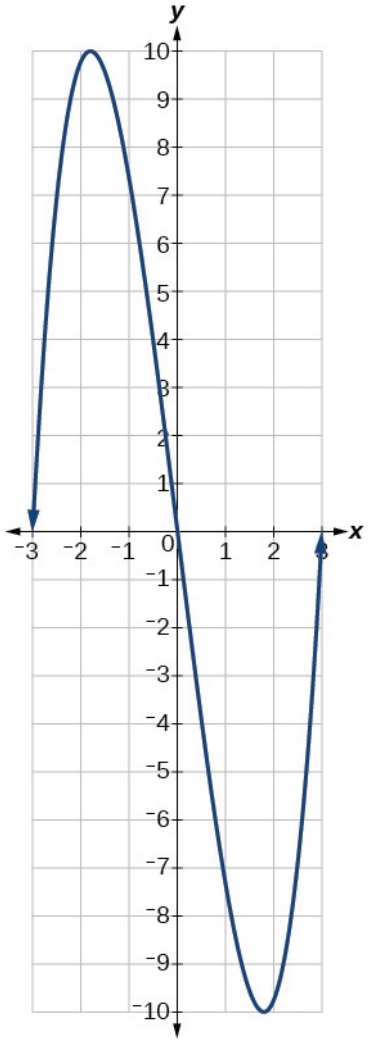


30. Finnið staðbundið lággildi fallsins sem sýnt er í verkefni 1,27.

31. Finnið staðbundin útgildi fallsins sem sýnt er í verkefni 1,28.

32. Á grafinu á mynd 3 er skilgreiningarmengi fallsins $[-3, 3]$. Myndmengið er $[-10, 10]$. Finnið algilt lággildi fallsins á þessu bili.

33. Finnið algilt hágildi fallsins sem sýnt er á mynd 3.



Mynd 3

Samskeyting falla

Finnið í eftirfarandi verkefnum $(f \circ g)(x)$ og $(g \circ f)(x)$ fyrir hvert fallapar.

34.

$$f(x)=4-x, g(x)=-4x$$

35.

$$f(x)=3x+2, g(x)=5-6x$$

36.

$$f(x)=x^2+2x, g(x)=5x+1$$

37.

$$f(x)=\sqrt{x+2}, g(x)=\frac{1}{x}$$

1

38.

$$f(x)=\frac{x+3}{2}, g(x)=\sqrt{1-x}$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum $(f \circ g)$ og skilgreiningarmengi $(f \circ g)(x)$ fyrir hvert fallapar.

39.

$$f(x)=\frac{x+1}{x+4}, g(x)=\frac{1}{x}$$

40.

$$f(x)=\frac{1}{x+3}, g(x)=\frac{1}{x-9}$$

41.

$$f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\sqrt{x}$$

42.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}, g(x)=\sqrt{x+1}$$

Setjið í eftirfarandi verkefnum hvert fall H fram sem samskeytingu tveggja falla f og g þar sem $H(x)=(f \circ g)(x)$.

43.

$$H(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{3x+4}}$$

44.

$$H(x)=\frac{1}{\left(3x^2-4\right)^{-3}}$$

Ummyndanir falla

Teiknið í eftirfarandi verkefnum skissu af grafi fallsins.

45.

$$f(x)=(x-3)^2$$

46.

$$f(x)=(x+4)^3$$

47.

$$f(x)=\sqrt{x}+5$$

48.

$$f(x)=-x^3$$

49.

$$f(x)=\sqrt[3]{-x}$$

50.

$$f(x)=5\sqrt{-x}-4$$

51.

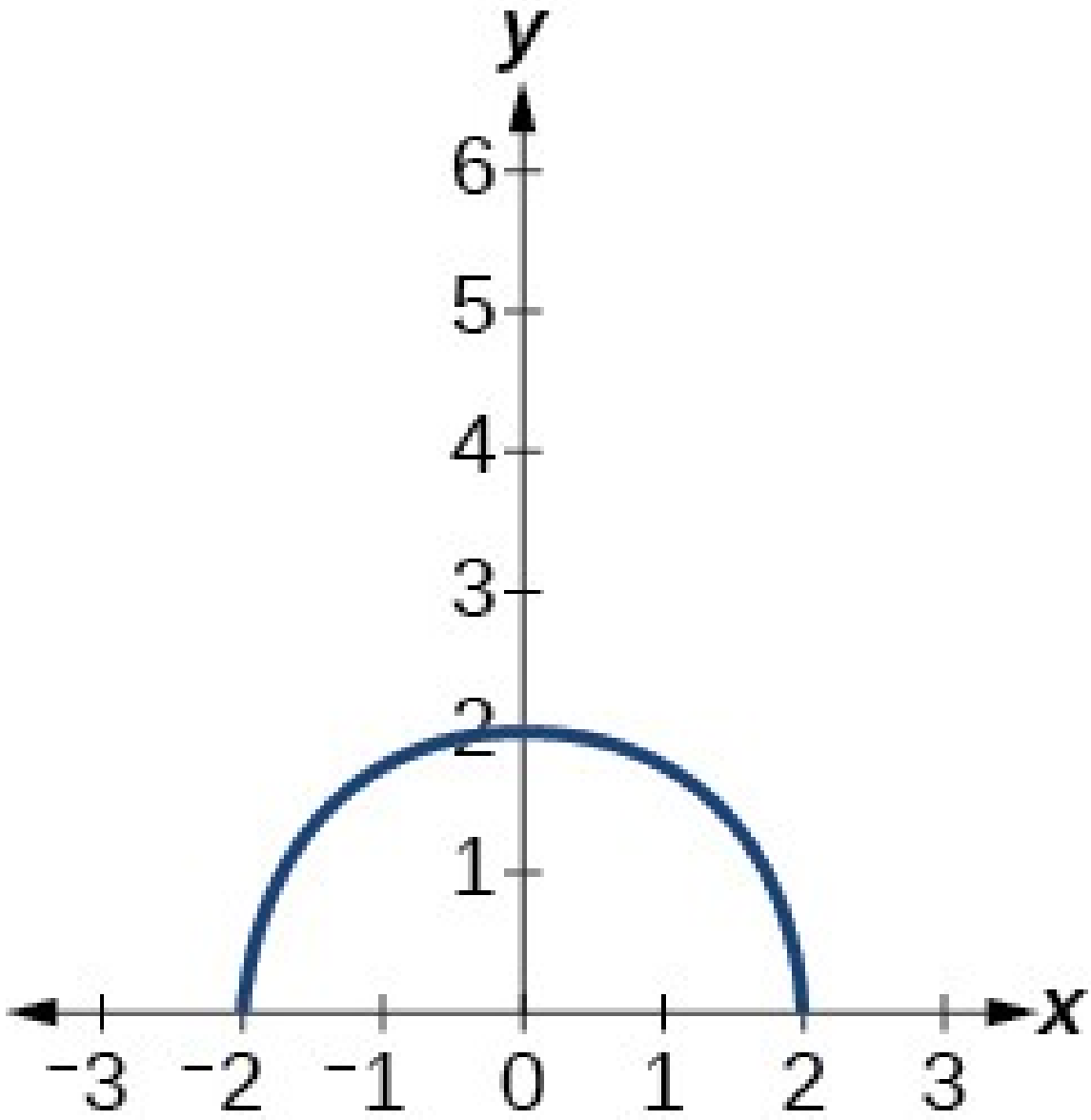
$$f(x)=4\left[|x-2|-6\right]$$

52.

$$f(x)=-(x+2)^2-1$$

Teiknið í eftirfarandi verkefnum skissu af grafi fallsins g þegar graf fallsins f er sýnt á mynd 4.

1



Mynd 4

53.

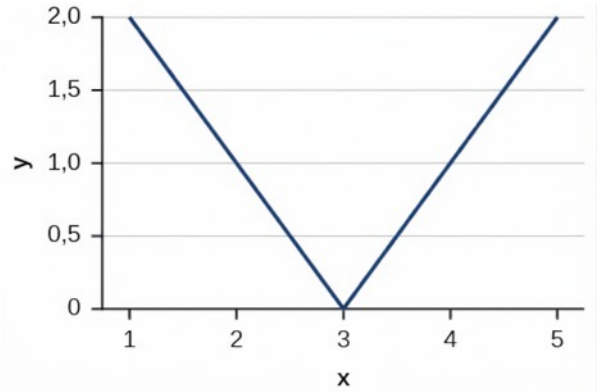
$$g(x)=f(x-1)$$

54.

$$g(x)=3f(x)$$

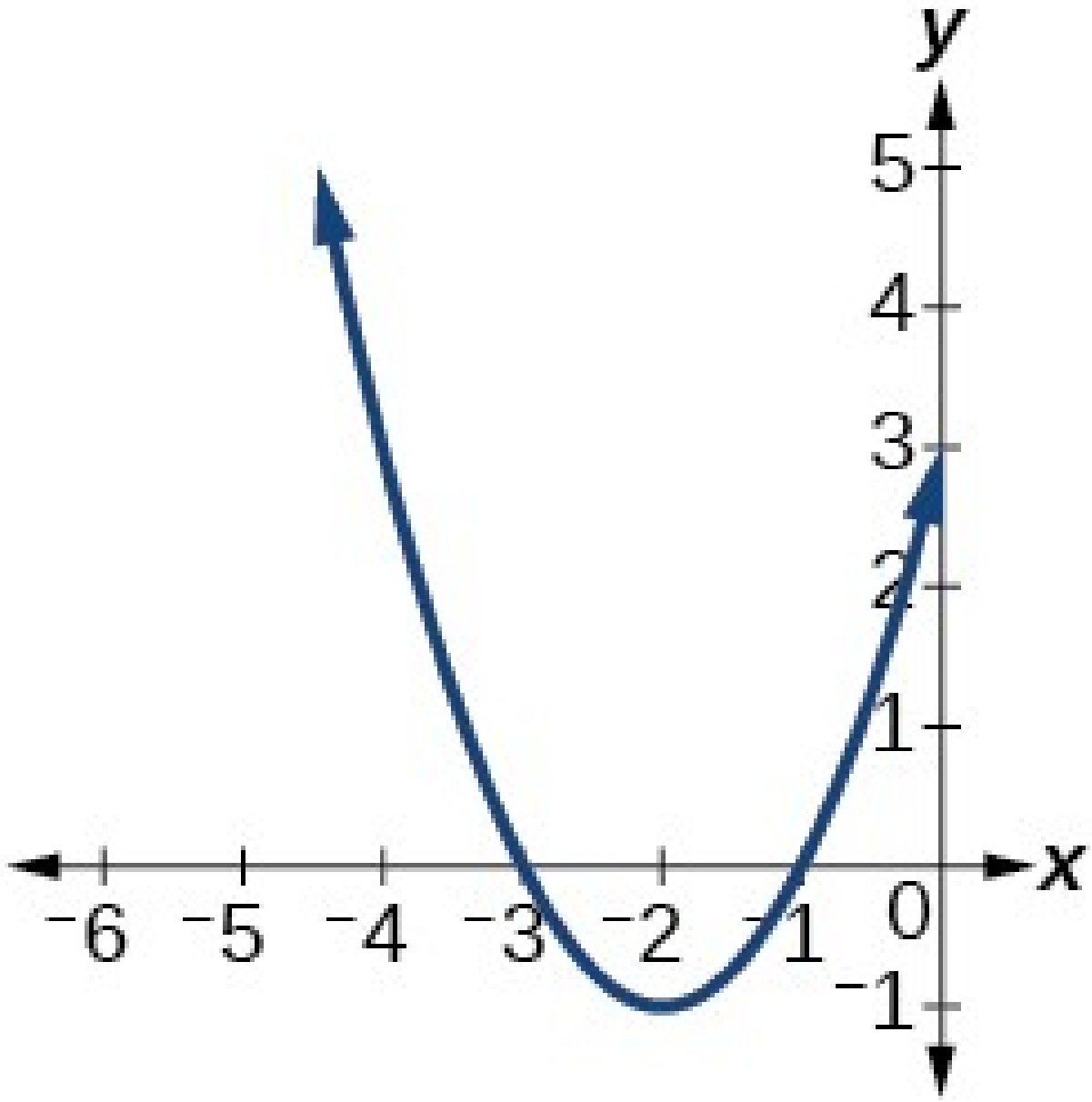
Ritið í eftirfarandi verkefnum jöfnu grunnfallsins sem hvert graf hér fyrir neðan sýnir.

55.



56.

1



Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort hvert fall sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

57.

$$f(x)=3x^4$$

58.

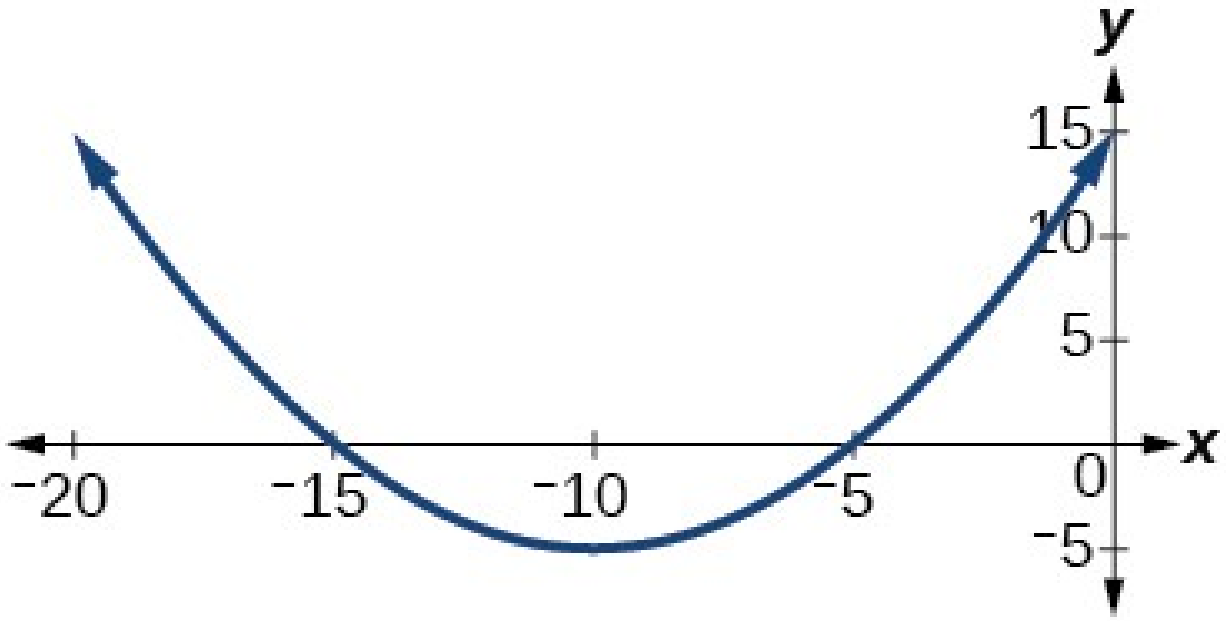
$$g(x)=\sqrt{x}$$

59.

$$h(x)=\frac{1}{x}+3x$$

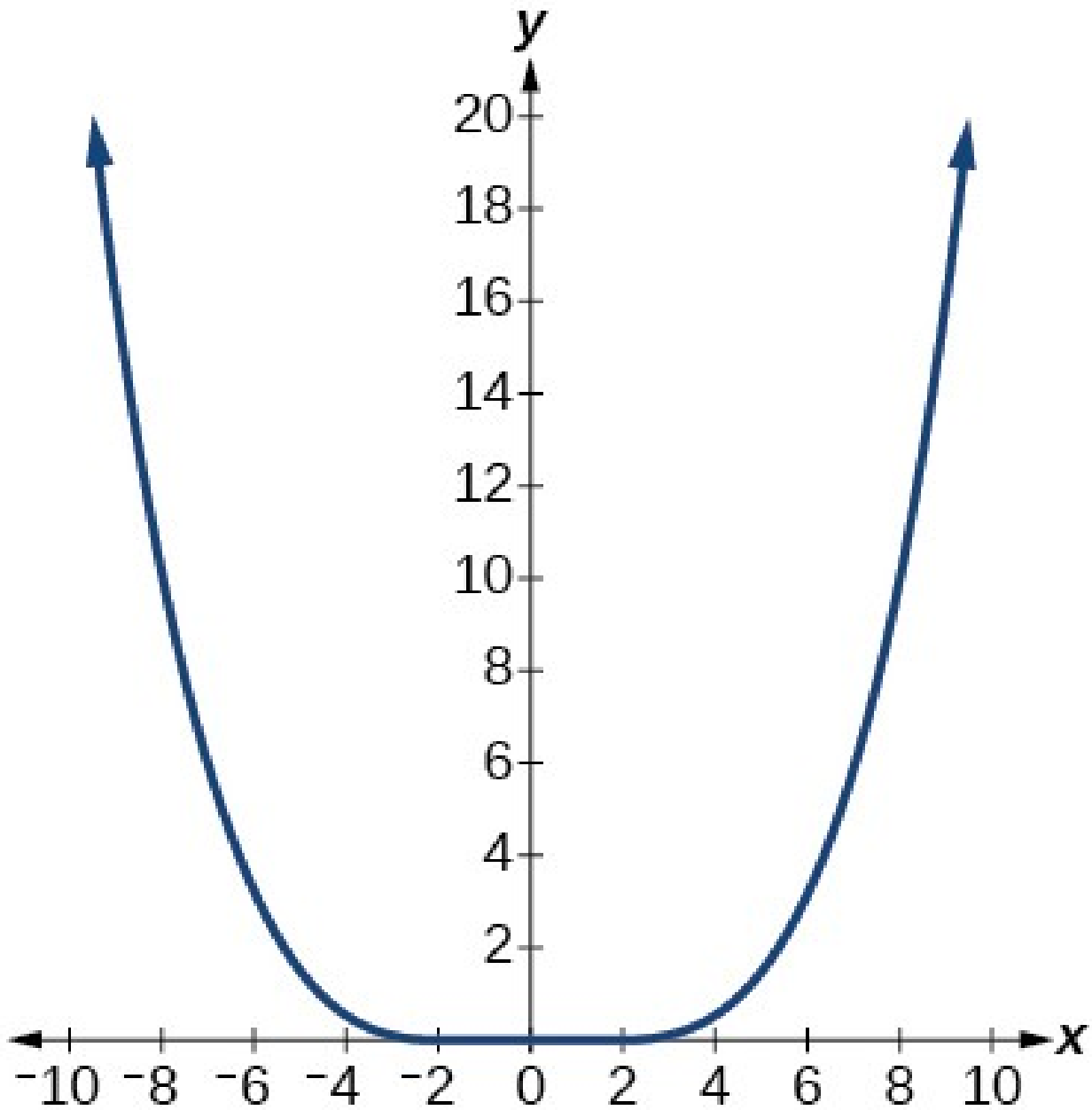
Greinið grafið í eftirfarandi verkefnum og ákvarðið hvort fallið sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

60.

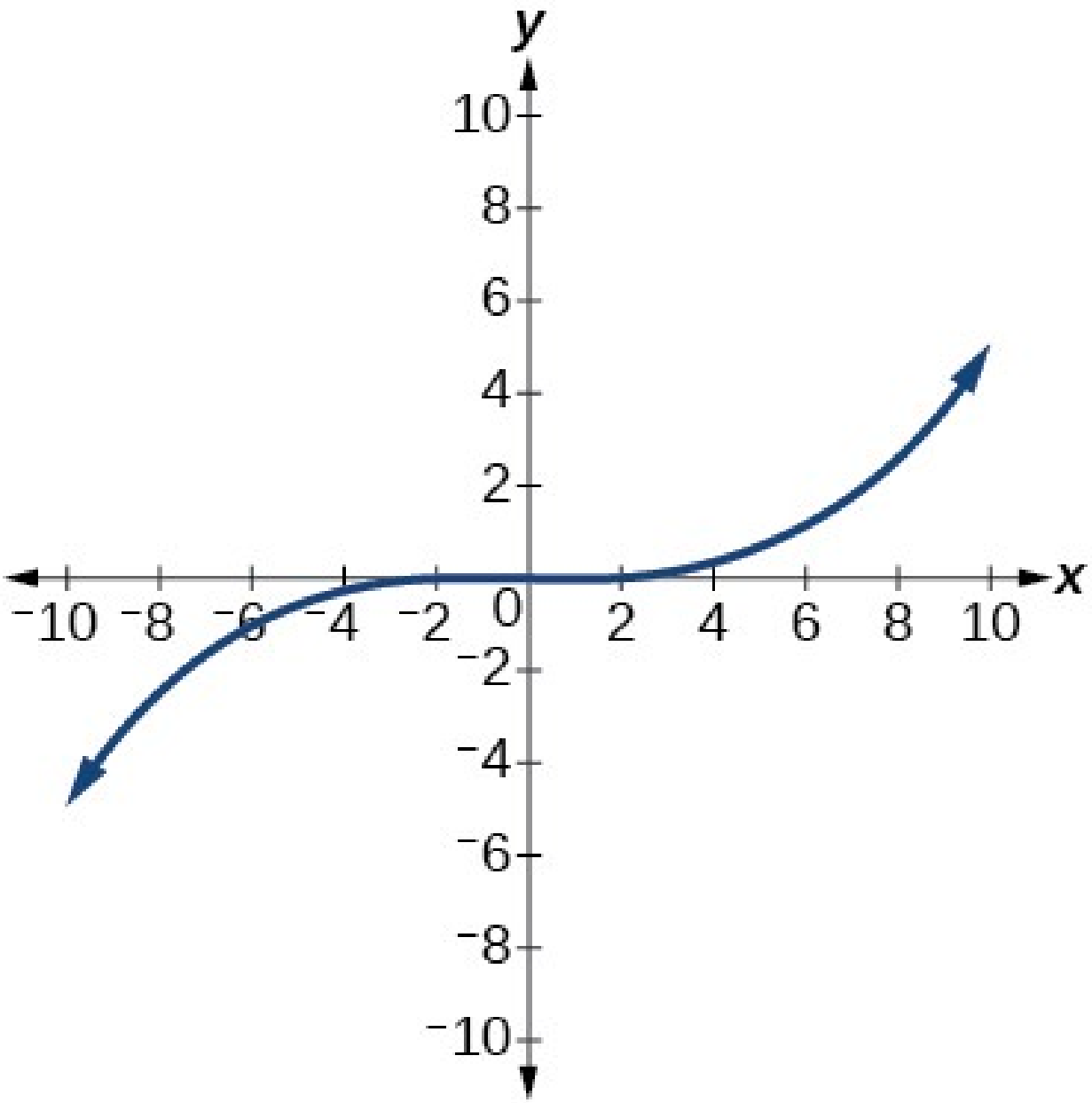


61.

1



62.

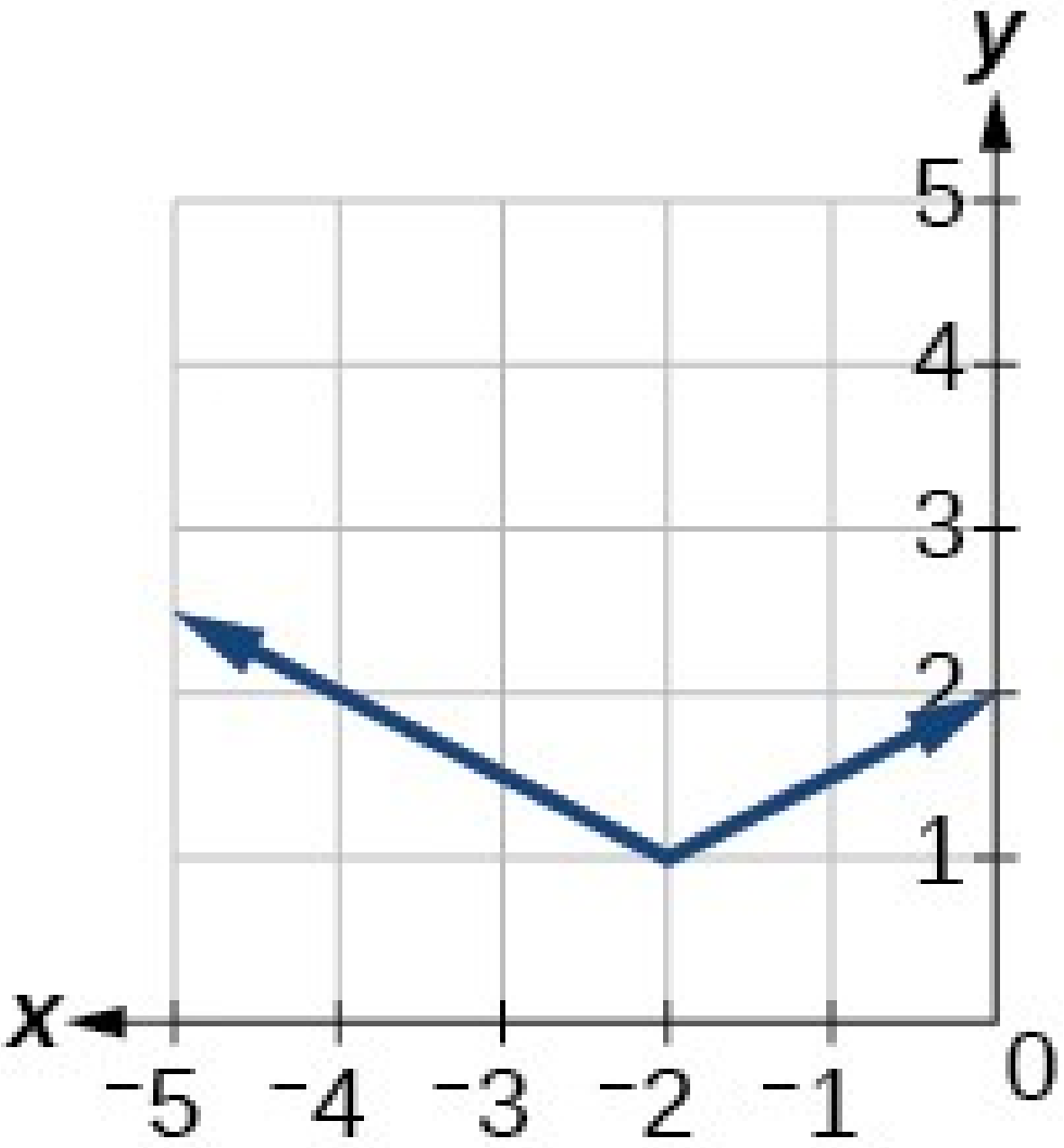


Tölugildisföll

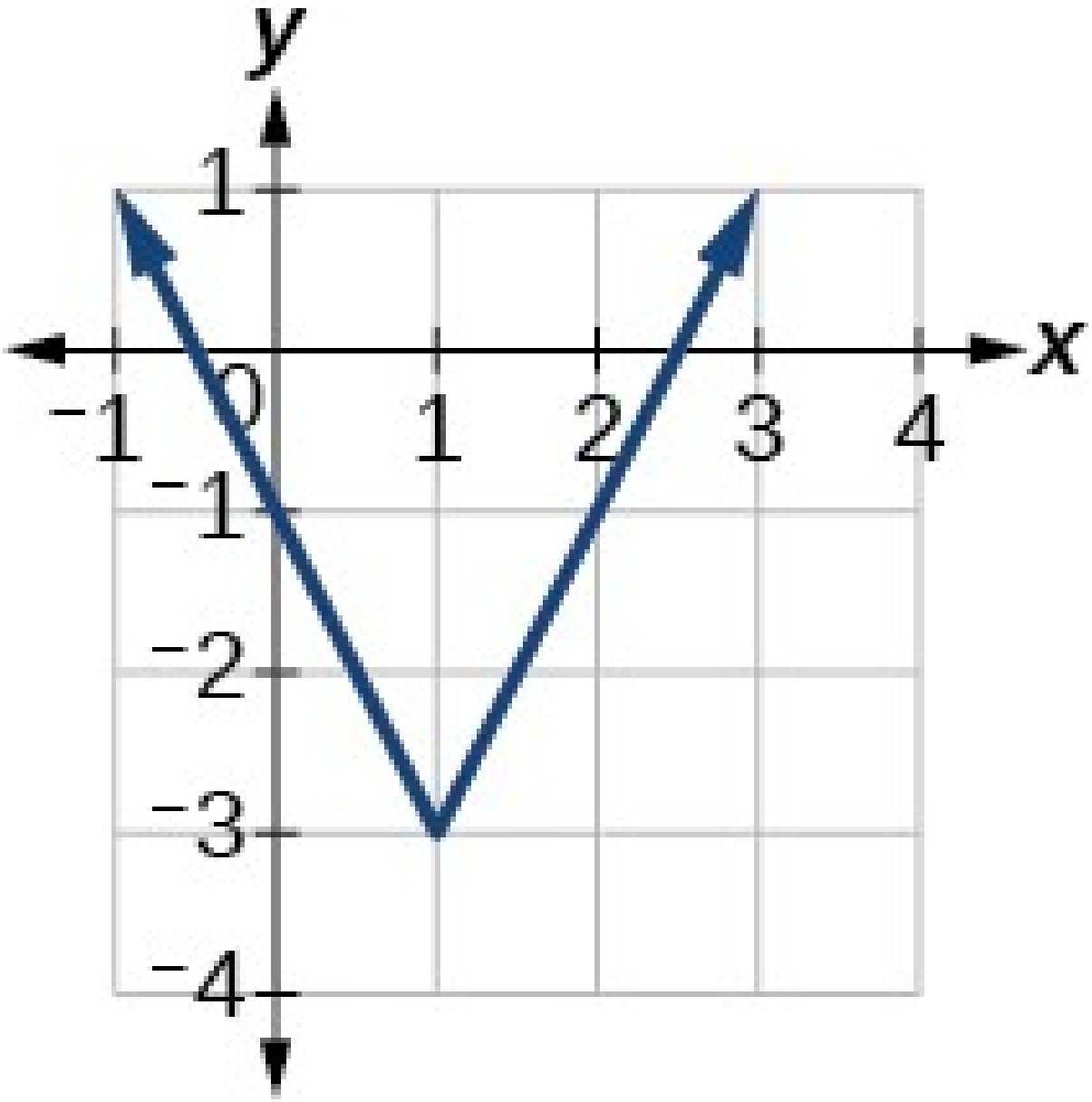
Ritið í eftirfarandi verkefnum jöfnu fyrir ummyndun $f(x)=|x|$.

1

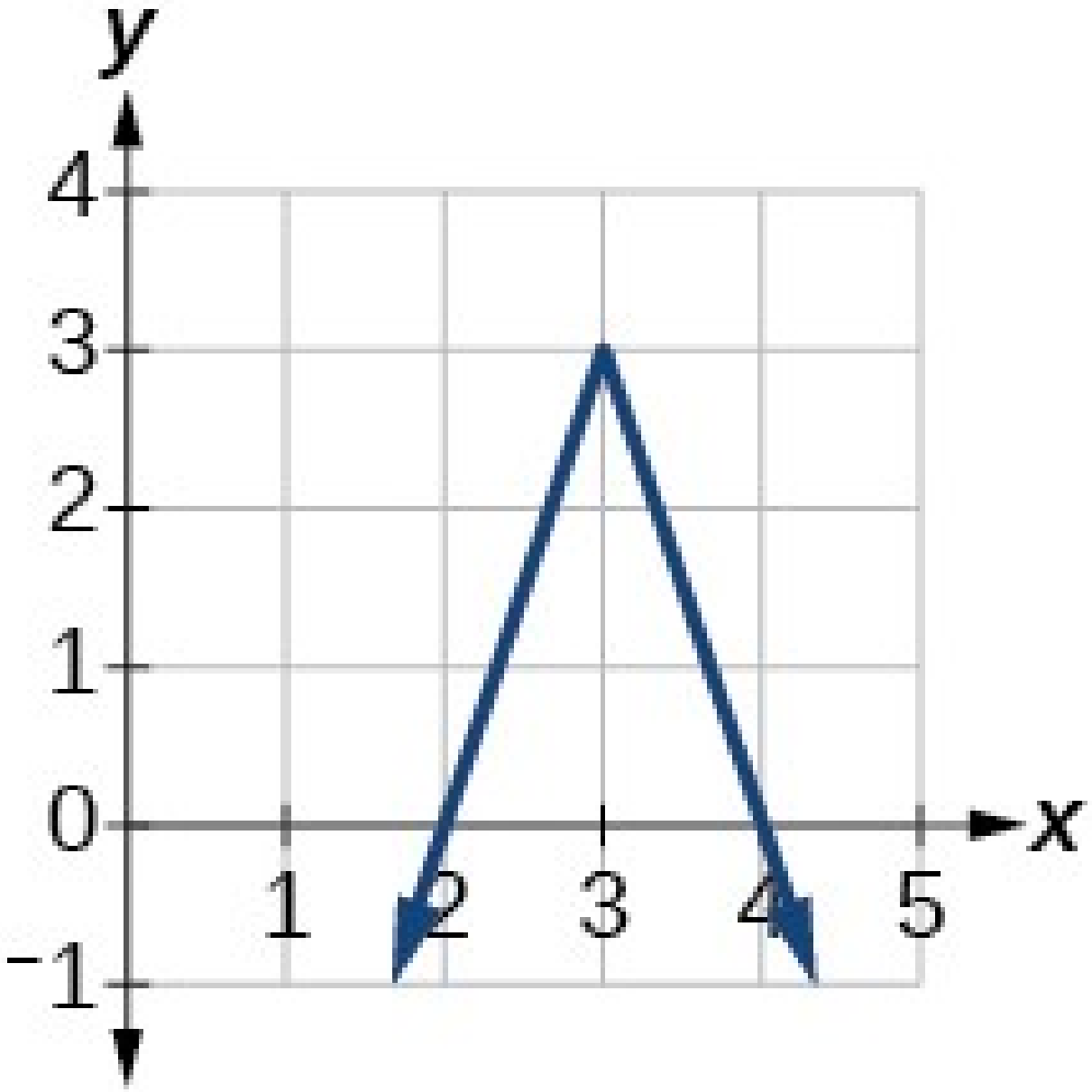
63.



64.



65.



Teiknið graf tölugildisfallsins í eftirfarandi verkefnum.

66.

$$f(x)=|x-5|$$

67.

$$f(x)=-|x-3|$$

68.

$$f(x)=|2x-4|$$

Leysið tölugildisjöfnuna í eftirfarandi verkefnum.

69.

$$|x+4|=18$$

70.

$$\left|\frac{1}{3}x+5\right|=\left|\frac{3}{4}x-2\right|$$

Leysið ójöfnuna í eftirfarandi verkefnum og ritið lausnina með biltáknum.

71.

$$|3x-2|<7$$

72.

$$\left|\frac{1}{3}x-2\right|\leq 7$$

Andhverf föll

Finnið $f^{-1}(x)$ fyrir hvert fall í eftirfarandi verkefnum.

73.

$$f(x)=9+10x$$

74.

$$f(x)=\frac{x}{x+2}$$

Finnið í eftirfarandi verkefni skilgreiningarmengi þar sem fallið f er eintækt og ekki minnkandi. Ritið skilgreiningarmengið með biltáknum. Finnið síðan andhverfu f þegar það er takmarkað við þetta mengi.

75.

$$f(x)=x^2+1$$

76. Gefin eru $f(x)=x^3-5$ og $g(x)=\sqrt[3]{x+5}$:

a. Finnið $f(g(x))$ og $g(f(x))$.

b. Hvað segir svarið okkur um tengsl $f(x)$ og $g(x)$?

Notið grafteikniforrit í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort hvert fall sé eintækt.

77.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

78.

$$f(x)=-3x^2+x$$

79. Ef $f(5)=2$, finnið $f^{-1}(2)$.

80. Ef $f(1)=4$, finnið $f^{-1}(4)$.

1

Æfingapróf

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort venslin séu föll.

1.

$$y=2x+8$$

2.

$$\{(2,1),(3,2),(-1,1),(0,-2)\}$$

Reiknið í eftirfarandi verkefnum gildi fallsins $f(x)=-3x^2+2x$ fyrir gefið inntak.

3.

$$f(-2)$$

4.

$$f(a)$$

5. Sýnið að fallið $f(x)=-2(x-1)^2+3$ sé ekki eintækt.

6. Ritið skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\sqrt{3-x}$ með biltáknum.

7. Ef $f(x)=2x^2-5x$, finnið $f(a+1)-f(1)$.

8. Teiknið graf fallsins $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ ef} & -2<x<3 \\ -x \text{ ef} & x\geq 3 \end{cases}$

9. Finnið meðalbreytingarhraða fallsins $f(x)=3-2x^2+x$ með því að finna $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Notið föllin $f(x)=3-2x^2+x$ og $g(x)=\sqrt{x}$ í eftirfarandi verkefnum til að finna samskeyttu föllin.

10.

$$(g\circ f)(x)$$

11.

$$(g\circ f)(1)$$

12. Setjið $H(x)=\sqrt[3]{5x^2-3x}$ fram sem samskeytingu tveggja falla, f og g, þar sem $(f\circ g)(x)=H(x)$.

Teiknið gröf fallanna í eftirfarandi verkefnum með því að hliðra, teygja og/eða þjappa saman grunnfalli.

13.

$$f(x)=\sqrt{x+6}-1$$

14.

$$f(x)=\frac{1}{x+2}-1$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort hvert fall sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

15.

$$f(x)=-\frac{5}{x^2}+9x^6$$

16.

$$f(x)=-\frac{5}{x^3}+9x^5$$

17.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

18. Teiknið graf tölugildisfallsins $f(x)=-2|x-1|+3$.

19. Leysið $|2x-3|=17$.

20. Leysið $-\left|\frac{1}{3}x-3\right|\geq 17$. Ritið lausnina með biltáknum.

Finnið andhverfu fallsins í eftirfarandi verkefnum.

21.

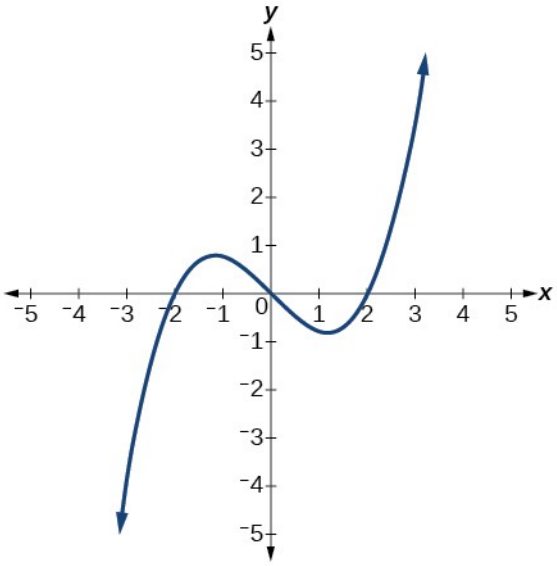
$$f(x)=3x-5$$

22.

$$f(x)=\frac{4}{x+7}$$

Notið graf g sem sýnt er á mynd 1 í eftirfarandi verkefnum.

1



Mynd 1

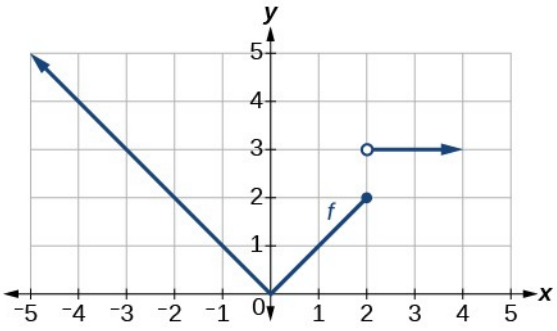
23. Á hvaða bilum er fallið vaxandi?

24. Á hvaða bilum er fallið minnkandi?

25. Áætlið staðbundið lággildi fallsins. Setjið svarið fram sem raðað par. Í raðaða parinu eiga að vera bæði x-gildið og $g(x)$-gildið.

26. Áætlið staðbundið hágildi fallsins. Setjið svarið fram sem raðað par. Í raðaða parinu eiga að vera bæði x-gildið og $g(x)$-gildið.

Notið graf hlutskilgreinda fallsins á mynd 2 í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 2

27. Finnið $f(2)$.

28. Finnið $f(-2)$.

29. Ritið jöfnu hlutskilgreinda fallsins.

Notið gildin í töflu 1 í eftirfarandi verkefnum.

Tafla 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17

30. Finnið $f(6)$.

31. Leysið jöfnuna $f(x)=5$.

32. Er grafið vaxandi eða minnkandi á skilgreiningarmengi sínu?

33. Er fallið sem grafið sýnir eintækt?

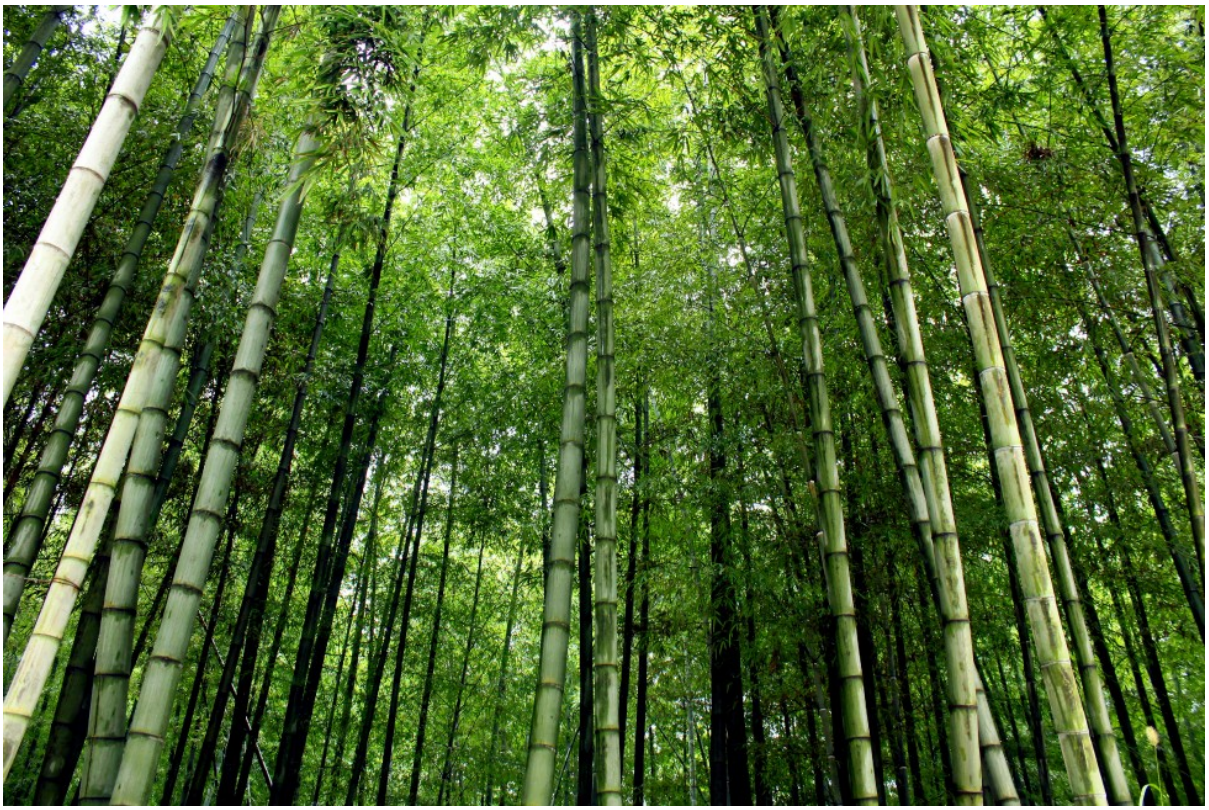
34. Finnið $f^{-1}(15)$.

35. Gefið er $f(x)=-2x+11$, Finnið $f^{-1}(x)$.

2

2. KAFLI

Línuleg föll



Bambusskógur í Kína (heimild: „JFXie“/Flickr)

Yfirlit kaflans

- 2.1 Línuleg föll
- 2.2 Gröf línulegra falla
- 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum
- 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

Inngangur að línulegum föllum

Hugsið ykkur að þið gróðursetjið plöntu einn daginn og að aðeins fáeinum dögum síðar hafi hún tvöfaldað hæð sína. Þótt það kunni að virðast ótrúlegt getur þetta gerst hjá sumum bambustegundum. Þessar tegundir tilheyra grasaætt og eru hraðvöxnustu plöntur heims. Ein bambustegund hefur mælst vaxa tæplega 1,5 tommur á klukkustund.1 Á einum sólarhring vex þessi bambusplanta um 36 tommur, eða hvorki meira né minna en 3 fet! Þegar breytingarhraðinn er jafn, eins og í vexti þessarar bambusplöntu, er um línulegt fall að ræða.

1 http://www.guinnessworldrecords.com/records-3000/fastest-growing-plant/

Rifjið upp úr Föllum og fallatáknun að fall er vensl sem tengja hvert stak í skilgreiningarmenginu við nákvæmlega eitt stak í myndmenginu. Línuleg föll eru sérstök gerð falla. Með þeim má gera líkön af mörgu í raunveruleikanum, svo sem vexti plantna með tímanum. Í þessum kafla könnum við línuleg föll, gröf þeirra og hvernig tengja má þau við gögn.

2.1 Línuleg föll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Setja línulegt fall fram.
- Ákvarða hvort línulegt fall sé vaxandi, minnkandi eða fast.
- Reikna og túlka hallatölu.
- Rita punkthallaform jöfnu.
- Rita og túlka línulegt fall.



Mynd 1 Shanghai-segullestin (heimild: „kanegen“/Flickr)

Rétt eins og þegar bambusplanta vex eru margar aðstæður þar sem breytingin er jöfn yfir tíma. Skoðum til dæmis fyrstu segullest heims í farþegaflutningum, Shanghai-segullestina

(mynd 1). Hún flytur farþega á þægilegan hátt 30 kílómetra leið frá flugvellinum að neðanjarðarlestarstöðinni á aðeins átta mínútum.2

2 http://www.chinahighlights.com/shanghai/transportation/maglev-train.htm

Gerum ráð fyrir að segullest fari langa vegalengd og haldi jöfnum hraða, 83 metrum á sekúndu, um tíma eftir að hún er komin 250 metra frá stöðinni. Hvernig getum við greint fjarlægð lestarinnar frá stöðinni sem fall af tíma? Í þessum hluta skoðum við tegund falla sem hentar til þess. Við notum hana til að rannsaka aðstæður úr raunveruleikanum, svo sem fjarlægð lestarinnar frá stöðinni á tilteknum tíma.

Framsetning línulegra falla

Fallið sem lýsir hreyfingu lestarinnar er línulegt fall. Það er skilgreint sem fall með jöfnum breytingarhraða, það er margliða af stigi 1. Línulegt fall má setja fram á ýmsa vegu, meðal annars með orðum, fallatáknun, töflu og grafi. Við lýsum hreyfingu lestarinnar sem falli með hverri þessara aðferða.

Línulegt fall sett fram með orðum

Byrjum á að lýsa línulega fallinu með orðum. Fallavenslunum í lestardæminu hér að framan má lýsa með þessari setningu:

- *Fjarlægð lestarinnar frá stöðinni er fall af þeim tíma sem lestin ekur á jöfnum hraða, að viðbættri upphaflegri fjarlægð hennar frá stöðinni þegar hún tók að aka á þessum hraða.*

Hraðinn er breytingarhraðinn. Munið að breytingarhraði mælir hversu hratt háða breytan breytist miðað við óháðu breytuna. Breytingarhraðinn í þessu dæmi er jafn, sem merkir að hann er sá sami fyrir hvert inntaksgildi. Þegar tíminn (inntakið) eykst um 1 sekúndu eykst samsvarandi fjarlægð (úttakið) um 83 metra. Lestin tók að aka á þessum jafna hraða þegar hún var 250 metra frá stöðinni.

Línulegt fall sett fram með fallatáknun

Önnur leið til að setja línuleg föll fram er að nota fallatáknun. Dæmi um fallatáknun er jafna rituð á svonefndu hallatöluformi línu, þar sem x er inntaksgildið, m er breytingarhraðinn og b er upphafsgildi háðu breytunnar.

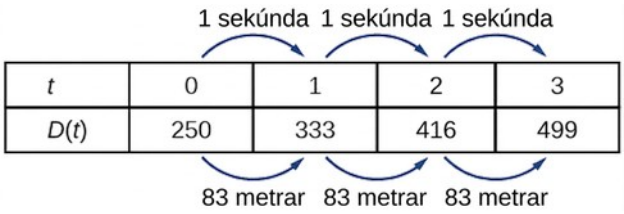
Jöfnuform	$y = m\ x + b$
Fallatáknun	$f\ (x) = m\ x + b$

Í dæminu um lestina gætum við notað táknunina $D(t)$ þar sem heildarfjarlægðin D er fall af tímanum t. Breytingarhraðinn, m, er 83 metrar á sekúndu. Upphafsgildi háðu breytunnar, b, er upphafleg fjarlægð frá stöðinni, 250 metrar. Við getum ritað almenna jöfnu sem lýsir hreyfingu lestarinnar.

$$D(t) = 83t + 250$$

Línulegt fall sett fram með töflu

Þriðja leiðin til að setja línulegt fall fram er að nota töflu. Venslin milli fjarlægðarinnar frá stöðinni og tímans eru sýnd á mynd 2. Af töflunni sjáum við að fjarlægðin breytist um 83 metra í hvert sinn sem tíminn eykst um 1 sekúndu.



Mynd 2 Töfluframsetning fallsins D með völdum inntaks- og úttaksgildum

---

SPURT OG SVARAÐ

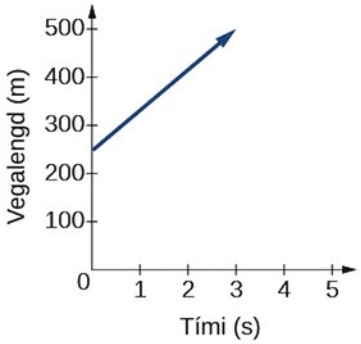
Getur inntakið í dæminu hér að framan verið hvaða rauntala sem er?

Nei. Inntakið táknar tíma. Þótt óneikvæðar ræðar og óræðar tölur komi til greina eiga neikvæðar rauntölur ekki við í þessu dæmi. Skilgreiningarmengið er því mengi óneikvæðra rauntalna.

Línulegt fall sett fram með grafi

Enn ein leið til að setja línuleg föll fram er sjónræn, með grafi. Við getum notað fallavenslin hér að framan, $D(t)=83t+250$, til að teikna grafið sem sýnt er á mynd 3. Takið eftir að grafið er lína. Graf línulegs falls er alltaf lína.

Hinn jafni breytingarhraði ákvarðar halla línunnar, það er hallatölu hennar. Punkturinn þar sem inntaksgildið er núll er skurðpunktur línunnar við lóðrétta ásinn, það er y-ásinn. Af grafinu á mynd 3 sjáum við að skurðpunkturinn við y-ás í lestardæminu er $(0,250)$ og táknar fjarlægð lestarinnar frá stöðinni þegar hún tók að aka á jöfnum hraða.



Mynd 3 Graf fallsins $D(t)=83t+250$. Gröf línulegra falla eru línur vegna þess að breytingarhraðinn er fastur.

Takið eftir að graf lestardæmisins er takmarkað, en svo er ekki alltaf. Skoðum graf línunnar $f(x)=2x+1$. Hvaða tölur má setja inn í fallið, það er hvert er skilgreiningarmengi þess? Skilgreiningarmengið er mengi allra rauntalna, því margfalda má hvaða tölu sem er með tveimur og bæta síðan einum við margfeldið.

2

LÍNULEGT FALL

Hugtakið línulegt fall vísar til falls sem hefur línu að grafi. Rita má línuleg föll á hallatöluformi línu

$$f(x)=mx+b$$

þar sem b er upphafsgildi fallsins (þegar inntakið er $x=0$) og m er jafn breytingarhraði fallsins, það er hallatala þess. Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,b)$.

DÆMI 1

Línulegt fall notað til að finna þrýsting á kafara

Þrýstingurinn, P, mældur í pundum á fertommu (PSI), sem verkar á kafarann á mynd 4 er háður dýpi hennar undir vatnsyfirborðinu, d, mældu í fetum. Líkana má þessi vensl með jöfnunni $P(d)=0{,}434\ d+14{,}696$. Lýsið fallinu með orðum.



Mynd 4 (heimild: Ilse Reijs og Jan-Noud Hutten)

Lausn

Til að lýsa fallinu með orðum þurfum við að lýsa hverjum hluta jöfnunnar. Þrýstingurinn sem fall af dýpi fæst með því að margfalda dýpið með 434 þúsundustu hlutum og bæta 14 og 696 þúsundustu hlutum við.

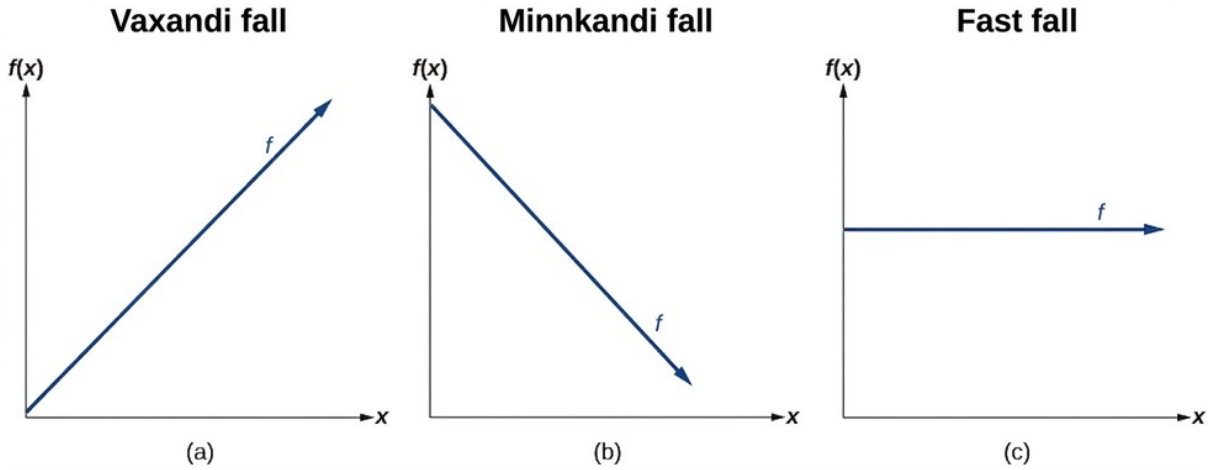
Greining

Upphafsgildið 14,696 er þrýstingurinn í PSI sem verkar á kafarann á 0 feta dýpi, það er við vatnsyfirborðið. Breytingarhraðinn, eða hallatalan, er 0,434 PSI á hvert fet. Það segir okkur

að þrýstingurinn á kafarann eykst um 0,434 PSI í hvert sinn sem dýpi hennar eykst um eitt fet.

Ákvörðun um hvort línulegt fall sé vaxandi, minnkandi eða fast

Línulegu föllin í dæmunum tveimur hér að framan jukust yfir tíma, en það á ekki við um öll línuleg föll. Línulegt fall getur verið vaxandi, minnkandi eða fast. Ef um er að ræða vaxandi fall, eins og í lestardæminu, hækka úttaksgildin þegar inntaksgildin hækka. Graf vaxandi falls hefur jákvæða hallatölu. Lína með jákvæða hallatölu hallar upp á við frá vinstri til hægri eins og á mynd 5**(a)**. Ef um er að ræða minnkandi fall er hallatalan neikvæð. Úttaksgildin lækka þegar inntaksgildin hækka. Lína með neikvæða hallatölu hallar niður á við frá vinstri til hægri eins og á mynd 5**(b)**. Ef fallið er fast eru úttaksgildin þau sömu fyrir öll inntaksgildi og hallatalan því núll. Lína með hallatöluna núll er lárétt eins og á mynd 5**(c)**.



Mynd 5. Gröf vaxandi falls, minnkandi falls og fastafalls.

VAXANDI OG MINNKANDI FÖLL

Hallatalan ákvarðar hvort fallið sé vaxandi línulegt fall, minnkandi línulegt fall eða fastafall.

- $f(x)=mx+b$ er vaxandi fall ef $m>0$.
- $f(x)=mx+b$ er minnkandi fall ef $m<0$.
- $f(x)=mx+b$ er fastafall ef $m=0$.

DÆMI 2

Ákvörðun um hvort fall sé vaxandi, minnkandi eða fast

Rannsóknir frá upphafi annars áratugar 21. aldar bentu til þess að unglingar sendu um 60 textaskilaboð á dag. Nýlegri gögn sýna að notendur senda almennt mun fleiri skilaboð, einkum ef tekin eru með öll þau forrit sem fólk notar til samskipta. Finnið í hverju tilviki hér á eftir línulega fallið sem lýsir venslum inntaksgildis og úttaksgildis. Ákvarðið síðan hvort graf fallsins sé vaxandi, minnkandi eða fast.

2

1. ⓐ Heildarfjöldi textaskilaboða sem unglingur sendir er talinn fall af tíma í dögum. Inntakið er fjöldi daga og úttakið er heildarfjöldi sendra textaskilaboða.
2. ⓑ Einstaklingur má senda að hámarki 500 textaskilaboð á mánuði samkvæmt farsímaáskrift sinni. Inntakið er fjöldi daga og úttakið er fjöldi textaskilaboða sem eftir má senda þann mánuð.
3. ⓒ Einstaklingur getur sent ótakmarkaðan fjölda textaskilaboða samkvæmt farsímaáskrift sem kostar 50 dali á mánuði. Inntakið er fjöldi daga og úttakið er heildarkostnaður við sendingu textaskilaboða á mánuði.

Lausn

Greinum hvert fall.

1. ⓐ Fallið má setja fram sem $f(x)=60x$ þar sem x er fjöldi daga. Hallatalan, 60, er jákvæð og fallið því vaxandi. Það er rökrétt vegna þess að heildarfjöldi textaskilaboða eykst með hverjum degi.
2. ⓑ Fallið má setja fram sem $f(x)=500-60x$ þar sem x er fjöldi daga. Í þessu tilviki er hallatalan neikvæð og fallið því minnkandi. Það er rökrétt vegna þess að textaskilaboðunum sem eftir má senda fækkar með hverjum degi. Fallið sýnir fjölda textaskilaboða sem eftir má senda samkvæmt farsímaáskriftinni eftir x daga.
3. ⓒ Kostnaðarfallið má setja fram sem $f(x)=50$ vegna þess að fjöldi daga hefur ekki áhrif á heildarkostnaðinn. Hallatalan er 0 og fallið því fast.

Hallatala reiknuð og túlkuð

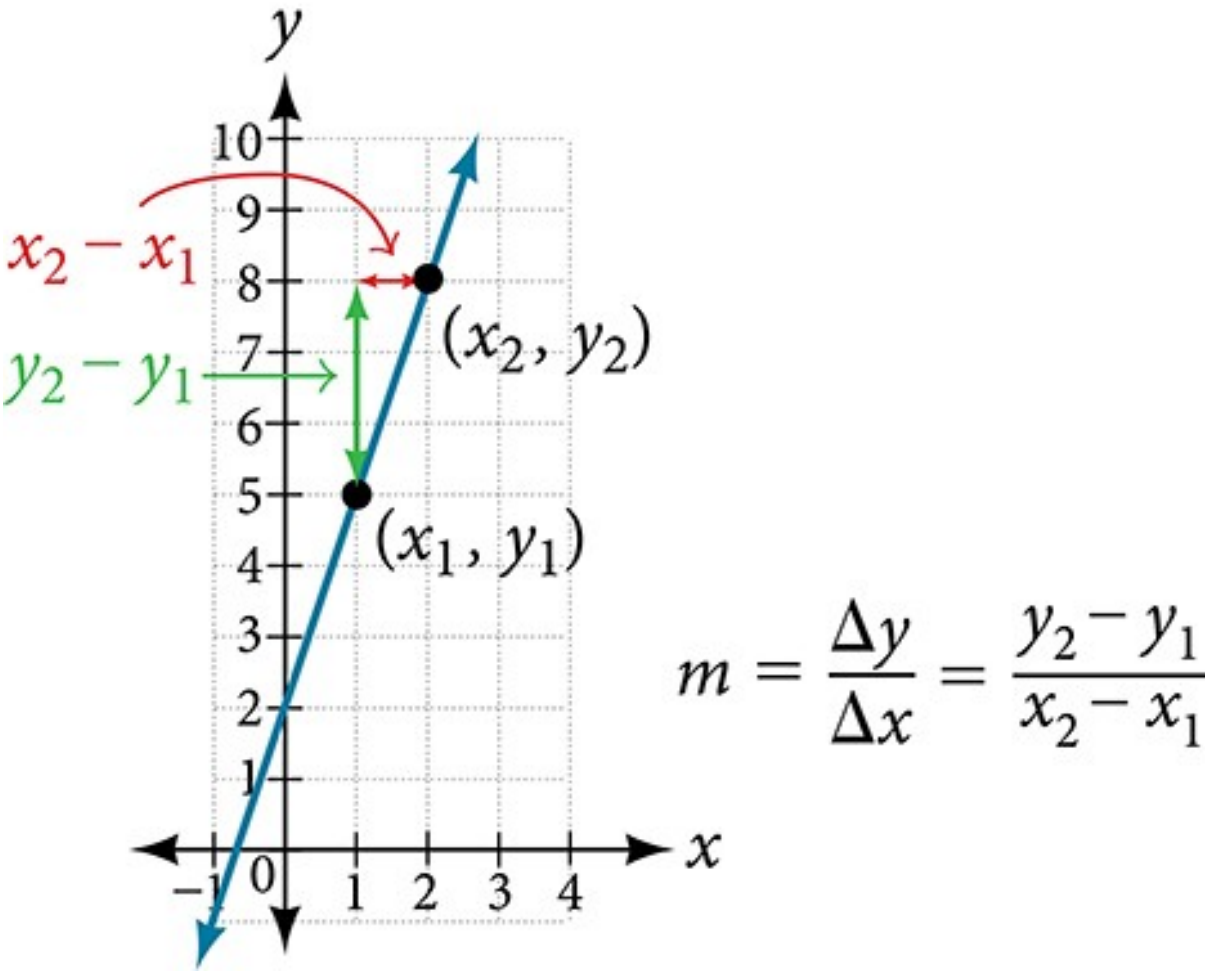
Í dæmunum hingað til hefur hallatalan verið gefin. Oft þurfum við þó að reikna hallatölu út frá inntaks- og úttaksgildum. Ef við höfum tvö inntaksgildi, x_1 og x_2, og tvö samsvarandi úttaksgildi, y_1 og y_2—sem setja má fram sem punktana $(x_1,\ y_1)$ og $(x_2,\ y_2)$—þá má reikna hallatöluna m, á eftirfarandi hátt

$$m=\frac{\text{breyting á úttaki (lóðrétt breyting)}}{\text{breyting á inntaki (lárétt breyting)}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

þar sem Δy er lóðrétta færslan og Δx er lárétta færslan. Takið eftir að í fallatáknun eru samsvarandi úttaksgildi y_1 og y_2 fyrir fallið f, $y_1=f(x_1)$ og $y_2=f(x_2)$, og því mætti með jafngildum hætti rita

$$m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Mynd 6 sýnir hvernig hallatala línunnar milli punktanna (x_1, y_1) og (x_2, y_2), er reiknuð. Munið að hallatalan mælir bratta. Því stærra sem tölugildi hallatölunnar er, þeim mun brattari er línan.



Mynd 6 Hallatala falls er reiknuð með því að deila breytingunni á y með breytingunni á x. Ekki skiptir máli hvort hnitapar ið er notað sem $\left(x_{2,} y_2\right)$ og hvort sem $\left(x_1, y_1\right)$, svo framarlega sem báðir útreikningar byrja á hnitum sama hnitapars.

SPURT OG SVARAÐ

Eru einingar hallatölu alltaf $\frac{\text{einingar úttaksins}}{\text{einingar inntaksins}}$?

Já. Lítið á einingarnar sem breytingu úttaksgildis þegar inntaksgildið breytist um eina einingu. Hallatala gæti til dæmis verið mæld í mílum á klukkustund eða dölum á dag. Takið eftir að einingarnar birtast sem kvóti eininga úttaks og inntaks.

HALLATALA REIKNUÐ

Hallatöluna, eða breytingarhraðann, *m* má reikna á eftirfarandi hátt:

$$m = \frac{\text{breyting á úttaki (lóðrétt breyting)}}{\text{breyting á inntaki (lárétt breyting)}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

þar sem x_1 og x_2 eru inntaksgildi en y_1 og y_2 eru úttaksgildi.

AÐFERÐ

Reiknið og túlkið hallatölu þegar tveir punktar línulegs falls eru gefnir.

2

1. Ákvarðið einingar úttaks- og inntaksgildanna.
2. Reiknið breytingu úttaksgildanna og breytingu inntaksgildanna.
3. Túlkið hallatöluna sem breytingu úttaksgildis þegar inntaksgildið breytist um eina einingu.

DÆMI 3

Hallatala línulegs falls fundin

Ef $f(x)$ er línulegt fall og $(3,-2)$ og $(8,1)$ eru punktar á línunni, finnið þá hallatöluna. Er fallið vaxandi eða minnkandi?

Lausn

Hnitapörin eru $(3,-2)$ og $(8,1)$. Til að finna breytingarhraðann deilum við breytingu úttaks með breytingu inntaks.

$$m=\frac{\text{breyting á úttaki}}{\text{breyting á inntaki}}=\frac{1-(-2)}{8-3}=\frac{3}{5}$$

We could also write the slope as $m=0{,}6$. The function is increasing because $m>0$.

Greining

Eins og áður kom fram skiptir röð punktanna ekki máli þegar við reiknum hallatölu línunnar, svo framarlega sem fyrra úttaksgildið, það er y-hnitið, samsvarar fyrra inntaksgildinu, það er x-hnitinu.

REYNIÐ SJÁLF #1

Ef $f(x)$ er línulegt fall og $(2,3)$ og $(0,4)$ eru punktar á línunni, finnið þá hallatöluna. Er fallið vaxandi eða minnkandi?

DÆMI 4

Mannfjöldabreyting fundin út frá línulegu falli

Íbúum borgar fjölgaði úr 23.400 í 27.800 milli áranna 2008 og 2012. Finnið árlega mannfjöldabreytingu að því gefnu að hún hafi verið jöfn frá 2008 til 2012.

Lausn

The rate of change relates the change in population to the change in time. The population increased by $27.800 - 23.400 = 4.400$ people over the four-year time interval. To find the rate of change, divide the change in the number of people by the number of years.

$$\frac{4.400 \text{ manns}}{4 \text{ ár}} = 1.100 \frac{\text{manns}}{\text{ár}}$$

Íbúunum fjölgaði því um 1.100 manns á ári.

Greining

Okkur er sagt að íbúunum hafi fjölgað og því má búast við jákvæðri hallatölu. Jákvæða hallatalan sem við reiknuðum er því eðlileg.

REYNIÐ SJÁLF #2

Íbúum í litlum bæ fjölgaði úr 1.442 í 1.868 milli áranna 2009 og 2012. Finnið árlega mannfjöldabreytingu að því gefnu að hún hafi verið jöfn frá 2009 til 2012.

Punkthallaform línulegrar jöfnu ritað

Hingað til höfum við notað hallatöluform línulegrar jöfnu til að lýsa línulegum föllum. Nú lærum við aðra leið til að rita línulegt fall, svonefnt punkthallaform.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Punkthallaformið er leitt af hallatöluformúlunni.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y - y_1}{x - x_1} && \text{að því gefnu að } x \neq x_1 \\
m(x - x_1) &= \frac{y - y_1}{x - x_1}(x - x_1) && \text{Margfaldið báðar hliðar með } (x - x_1). \\
m(x - x_1) &= y - y_1 && \text{Einfaldið.} \\
y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Umritið.}
\end{aligned}$$

Hafið í huga að nota má hallatöluform og punkthallaform til að lýsa sama fallinu. Við getum breytt úr öðru forminu í hitt með grunnaðferðum algebru. Gerum til dæmis ráð fyrir að gefin sé jafna á punkthallaformi, $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 6)$. Við getum breytt henni í hallatöluform eins og sýnt er.

$$\begin{aligned}
y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - 6) \\
y - 4 &= -\frac{1}{2}x + 3 && \text{Beitið dreifireglu með } -\frac{1}{2}. \\
y &= -\frac{1}{2}x + 7 && \text{Bætið 4 við báðar hliðar.}
\end{aligned}$$

Sömu línu má því lýsa á hallatöluformi sem $y=-\frac{1}{2}x+7$.

PUNKTHALLAFORM LÍNULEGRAR JÖFNU

2

Svonefnt punkthallaform línulegrar jöfnu er

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

þar sem m er hallatalan og x_1 og y_1 eru $x-$ og $y-$ hnit tiltekins punkts sem línan liggur um.

Jafna línu rituð út frá punkti og hallatölu

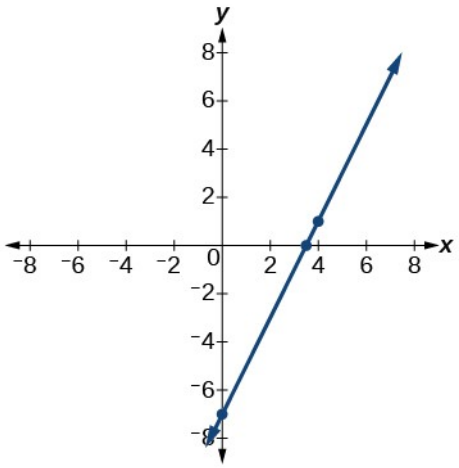
Punkthallaformið er sérlega gagnlegt þegar við þekkjum einn punkt og hallatölu línu. Gerum til dæmis ráð fyrir að okkur sé sagt að hallatala línu sé 2 og að hún liggi um punktinn $(4,1)$. Við vitum að $m=2$ og að $x_1=4$ og $y_1=1$. Við getum sett þessi gildi inn í almennu punkthallajöfnuna.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=2(x-4)$$

Ef við viljum síðan umrita jöfnuna á hallatöluform notum við algebruaðferðir.

$$\begin{aligned} y-1&=2(x-4) && \\ y-1&=2x-8 && \text{Beitið dreifireglu með } 2. \\ y&=2x-7 && \text{Bætið 1 við báðar hliðar.} \end{aligned}$$

Báðar jöfnurnar, $y-1=2(x-4)$ og $y=2x-7$, lýsa sömu línunni. Sjá mynd 7.



Mynd 7. Graf línu með þremur merktum punktum.

DÆMI 5

Línuleg jafna rituð út frá punkti og hallatölu

Ritið punkthallaform jöfnu línu sem hefur hallatöluna 3 og liggur um punktinn $(6,-1)$. Umritið hana síðan á hallatöluform.

Lausn

Byrjum á að skoða hvað upplýsingarnar segja okkur. Hallatalan er 3 og því er $m=3$. Við þekkjum einnig einn punkt og vitum því að $x_1=6$ og $y_1=-1$. Nú getum við sett þessi gildi inn í almennu punkthallajöfnuna.

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$y-(-1)=3\left(x-6\right)$ Setjið þekkt gildi inn.

$y+1=3\left(x-6\right)$ Beitið dreifireglu með -1 til að fá punkthallaform.

Síðan beitum við algebru til að finna hallatöluformið.

$$\begin{aligned} y+1&=3\left(x-6\right)\\ y+1&=3\ x-18 \quad \text{Beitið dreifireglu með } 3.\\ y&=3\ x-19 \quad \text{Einfaldið í hallatöluform.} \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Ritið punkthallaform jöfnu línu sem hefur hallatöluna -2 og liggur um punktinn $(-2,2)$. Umritið hana síðan á hallatöluform.

Jafna línu rituð út frá tveimur punktum

Punkthallaform jöfnu er einnig gagnlegt þegar við þekkjum tvo punkta sem lína liggur um. Gerum til dæmis ráð fyrir að við vitum að lína liggur um punktana $(0,1)$ og $(3,2)$. Við getum notað hnit punktanna tveggja til að finna hallatöluna.

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\ &= \tfrac{2-1}{3-0}\\ &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Nú getum við notað hallatöluna sem við fundum og hnit annars punktsins til að finna jöfnu línunnar. Notum punktinn (0, 1).

$$\begin{aligned} y-y_1 &= m\left(x-x_1\right)\\ y-1 &= \tfrac{1}{3}(x-0) \end{aligned}$$

Eins og áður getum við beitt algebru til að umrita jöfnuna á hallatöluform.

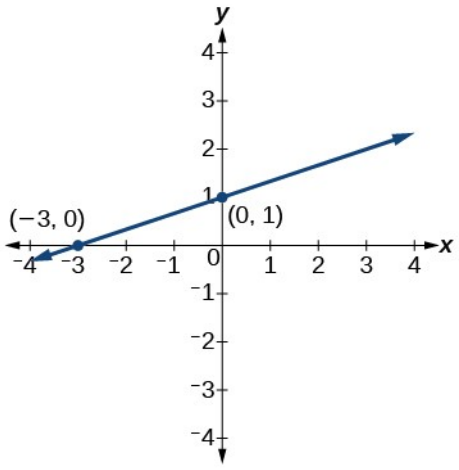
$$y-1=\frac{1}{3}(x-0)$$

$$y-1=\frac{1}{3}x \qquad \text{Beitið dreifireglu með } \frac{1}{3}.$$

$$y=\frac{1}{3}x+1 \qquad \text{Bætið 1 við báðar hliðar.}$$

2

Báðar jöfnurnar lýsa línunni sem sýnd er á mynd 8.



Mynd 8. Graf línu með merktum skurðpunktum við hnitása.

DÆMI 6

Línuleg jafna rituð út frá tveimur punktum

Ritið punkthallaform jöfnu línu sem liggur um punktana (5, 1) og (8, 7). Umritið hana síðan á hallatöluform.

Lausn

Byrjum á að finna hallatöluna.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{7-1}{8-5} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Því er $m=2$. Næst setjum við hallatöluna og hnit annars punktsins inn í almennu punkthallajöfnuna. Við getum valið hvorn punktinn sem er, en notum $(5,1)$.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$y - 1 = 2\,(x - 5)$$

Punkthallajafna línunnar er $y_2 - 1 = 2\left(x_2 - 5\right)$. Til að umrita jöfnuna á hallatöluform beitum við algebru.

$$y - 1 = 2(x - 5)$$
$$y - 1 = 2x - 10$$
$$y = 2x - 9$$

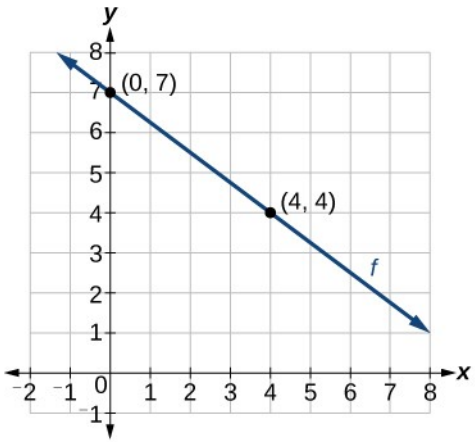
Hallatöluform jöfnu línunnar er $y = 2x - 9$.

REYNIÐ SJÁLF #4

Ritið punkthallaform jöfnu línu sem liggur um punktana $(-1, 3)$ og $(0, 0)$. Umritið hana síðan á hallatöluform.

Jafna línulegs falls rituð og túlkuð

Nú þegar við höfum ritað jöfnur línulegra falla bæði á hallatöluformi og punkthallaformi getum við valið aðferð eftir þeim upplýsingum sem gefnar eru. Upplýsingarnar gætu verið gefnar með grafi, punkti og hallatölu, tveimur punktum og svo framvegis. Skoðið graf fallsins f á mynd 9.



Mynd 9. Graf línu með tveimur merktum punktum til að reikna hallatöluna.

Hallatala línunnar er ekki gefin en við getum valið hvaða tvo punkta sem er á línunni til að finna hana. Veljum $(0, 7)$ og $(4, 4)$. Við getum notað þessa punkta til að reikna hallatöluna.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{4 - 7}{4 - 0}$$
$$= -\frac{3}{4}$$

Nú getum við sett hallatöluna og hnit annars punktsins inn í punkthallaformið.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 4)$$

Ef við viljum umrita jöfnuna á hallatöluform fáum við

2

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 4)$$
$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}x + 3$$
$$y = -\tfrac{3}{4}x + 7$$

Ef við vildum finna hallatöluformið án þess að rita punkthallaformið fyrst hefðum við getað séð að línan sker y-ásinn þegar úttaksgildið er 7. Því er $b = 7$. Nú þekkjum við upphafsgildið b og hallatöluna m og getum því sett m og b inn í hallatöluform línu.

$$f(x) = mx + b$$

$-\frac{3}{4}$ 7

$$f(x) = -\tfrac{3}{4}x + 7$$

Fallið er því $f(x) = -\frac{3}{4}x + 7$, og línulega jafnan væri $y = -\frac{3}{4}x + 7$.

AÐFERÐ

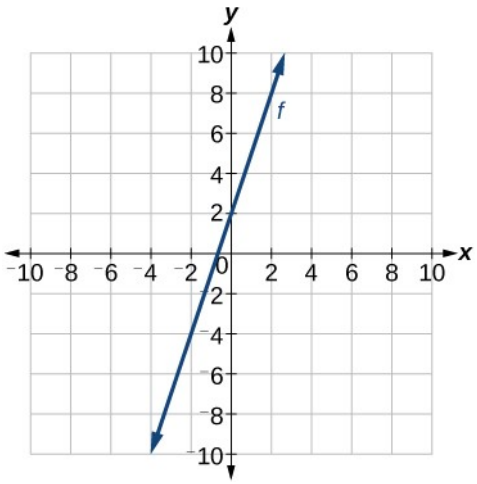
Ritið jöfnu sem lýsir línulegu falli þegar graf þess er gefið.

1. Veljið tvo punkta á línunni.
2. Notið punktana tvo til að reikna hallatöluna.
3. Ákvarðið hvar línan sker y-ásinn til að finna skurðpunktinn við y-ás með sjónrænu mati.
4. Setjið hallatöluna og skurðpunktinn við y-ás inn í hallatöluform jöfnu línu.

DÆMI 7

Jafna línulegs falls rituð

Ritið jöfnu línulegs falls út frá grafi f sem sýnt er á mynd 10.



Mynd 10. Graf línulegs falls í dæmi 7.

Lausn

Veljið tvo punkta á línunni, til dæmis $(0,2)$ og $(-2,-4)$. Notið punktana til að reikna hallatöluna.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{-4-2}{-2-0} \\ &= \frac{-6}{-2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Setjið hallatöluna og hnit annars punktsins inn í punkthallaformið.

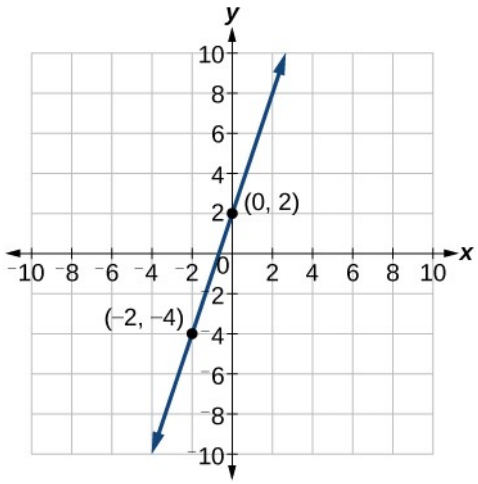
$$\begin{aligned} y-y_1 &= m\,(x-x_1) \\ y-(-4) &= 3\,(x-(-2)) \\ y+4 &= 3\,(x+2) \end{aligned}$$

Við getum beitt algebru til að umrita jöfnuna á hallatöluform.

$$\begin{aligned} y+4 &= 3(x+2) \\ y+4 &= 3x+6 \\ y &= 3x+2 \end{aligned}$$

Greining

Þetta er rökrétt vegna þess að af mynd 11 sjáum við að línan sker y-ásinn í punktinum $(0,2)$ sem er skurðpunkturinn við y-ás, og því er $b=2$.



Mynd 11. Graf línulegs falls í dæmi 7 með merktum skurðpunkti við y-ás.

DÆMI 8

Jafna línulegs kostnaðarfalls rituð

Gerum ráð fyrir að Ben stofni fyrirtæki og beri fastan rekstrarkostnað upp á 1.250 dali á mánuði, meðal annars vegna leigu á skrifstofu. Framleiðslukostnaður hans er 37,50 dalir á hverja einingu. Ritið línulegt fall C þar sem $C(x)$ er kostnaðurinn við að framleiða x einingar í tilteknum mánuði.

Lausn

Fasti kostnaðurinn, 1.250 dalir, fellur til í hverjum mánuði. Breytilegi kostnaðurinn felur meðal annars í sér framleiðslukostnað hverrar einingar, sem er 37,50 dalir hjá Ben. Breytilegi kostnaðurinn, sem nefnist jaðarkostnaður, er táknaður með 37,5. Heildarkostnaður Bens er summa þessara tveggja kostnaðarliða og er táknaður með $C(x)=1250+37{,}5\ x$.

Greining

Ef Ben framleiðir 100 einingar á mánuði er mánaðarkostnaður hans táknaður með

$$\begin{aligned} C(100) &= 1250+37{,}5(100) \\ &= 5000 \end{aligned}$$

Mánaðarkostnaður hans væri því 5.000 dalir.

DÆMI 9

Jafna línulegs falls rituð út frá tveimur punktum

Ef f er línulegt fall, $f(3)=-2$ og $f(8)=1$, finnið þá jöfnu fallsins á hallatöluformi.

Lausn

Við getum ritað gefnu punktana með hnitum.

$$f(3) = -2 \to (3, -2)$$
$$f(8) = 1 \to (8, 1)$$

Síðan getum við notað punktana til að reikna hallatöluna.

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \tfrac{1-(-2)}{8-3} \\ &= \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

Setjið hallatöluna og hnit annars punktsins inn í punkthallaformið.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-2) = \tfrac{3}{5}(x - 3)$$

Við getum beitt algebru til að umrita jöfnuna á hallatöluform.

$$y + 2 = \tfrac{3}{5}(x - 3)$$
$$y + 2 = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{9}{5}$$
$$y = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{19}{5}$$

REYNIÐ SJÁLF #5

Ef $f(x)$ er línulegt fall, $f(2) = -11$, og $f(4) = -25$, finnið þá jöfnu fallsins á hallatöluformi.

Verkefni úr raunveruleikanum líkönuð með línulegum föllum

Í raunveruleikanum eru verkefni ekki alltaf sett skýrt fram sem fall eða graf. Sem betur fer getum við greint verkefnið með því að setja það fyrst fram sem línulegt fall og túlka síðan þætti fallsins. Svo framarlega sem við þekkjum, eða getum fundið, upphafsgildi og breytingarhraða línulegs falls getum við leyst margs konar verkefni úr raunveruleikanum.

AÐFERÐ

Þegar línulega fallið f, upphafsgildi þess og breytingarhraði eru gefin skal reikna $f(c)$.

1. Ákvarðið upphafsgildið og breytingarhraðann (hallatöluna).
2. Setjið gildin inn í $f(x) = mx + b$.
3. Reiknið gildi fallsins þegar $x = c$.

2

DÆMI 10

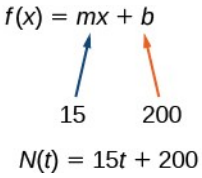
Línulegt fall notað til að ákvarða fjölda laga í tónlistarsafni

Marcus á nú 200 lög í tónlistarsafni sínu. Í hverjum mánuði bætir hann 15 nýjum lögum við. Ritið formúlu fyrir fjölda laga, N, í safninu sem fall af tímanum, t, í mánuðum. Hve mörg lög verður hann með eftir eitt ár?

Lausn

Upphafsgildi fallsins er 200 vegna þess að hann á nú 200 lög. Því er $N(0)=200$, sem merkir að $b=200$.

Lögunum fjölgar um 15 á mánuði og breytingarhraðinn er því 15 lög á mánuði. Við vitum því að $m=15$. Við getum sett upphafsgildið og breytingarhraðann inn í hallatöluform línu.



Við getum ritað formúluna $N(t)=15t+200$.

Með þessari formúlu getum við síðan spáð fyrir um hve mörg lög Marcus verður með eftir 1 ár (12 mánuði). Með öðrum orðum reiknum við gildi fallsins þegar $t=12$.

$$\begin{aligned} N(12) &= 15(12) + 200 \\ &= 180 + 200 \\ &= 380 \end{aligned}$$

Marcus verður með 380 lög eftir 12 mánuði.

Greining

Takið eftir að N er vaxandi línulegt fall. Þegar inntakið (fjöldi mánaða) eykst eykst úttakið (fjöldi laga) einnig.

DÆMI 11

Línulegt fall notað til að reikna grunnlaun og söluþóknun

Ilya starfar sem tryggingasölumaður og fær grunnlaun ásamt þóknun fyrir hverja nýja tryggingu. Vikulegar tekjur hans, I, eru því háðar fjölda nýrra trygginga, n, sem hann selur í vikunni. Í síðustu viku seldi hann 3 nýjar tryggingar og fékk 760 dali í laun þá viku. Vikuna þar á undan seldi hann 5 nýjar tryggingar og fékk 920 dali. Finnið jöfnu fyrir $I(n)$, og túlkið hvað hver þáttur jöfnunnar merkir.

Lausn

Upplýsingarnar gefa okkur tvö inntaks- og úttakspör: $(3,760)$ og $(5,920)$. Við byrjum á að finna breytingarhraðann.

$$m=\frac{920-760}{5-3}$$
$$=\frac{\$160}{2 \text{ tryggingar}}$$
$$=\$80 \text{ á hverja tryggingu}$$

Ef við höldum utan um einingarnar er auðveldara að túlka þessa stærð. Tekjurnar jukust um 160 dali þegar tryggingunum fjölgaði um 2 og breytingarhraðinn er því 80 dalir á hverja tryggingu. Ilya fær þar af leiðandi 80 dala þóknun fyrir hverja tryggingu sem hann selur í vikunni.

Síðan getum við fundið upphafsgildið.

$$\begin{aligned} I(n)&=80n+b \\ 760&=80(3)+b \quad \text{þegar } n=3,\ I(3)=760 \\ 760-80(3)&=b \\ 520&=b \end{aligned}$$

Gildið b er upphafsgildi fallsins og táknar tekjur Ilya þegar $n=0$, það er þegar engin ný trygging er seld. Við getum túlkað það sem grunnlaun Ilya fyrir vikuna, sem eru óháð fjölda seldra trygginga.

Nú getum við ritað lokajöfnuna.

$$I(n)=80n+520$$

Niðurstaðan er sú að grunnlaun Ilya eru 520 dalir á viku og að auki fær hann 80 dala þóknun fyrir hverja selda tryggingu.

DÆMI 12

Töfluform notað til að rita jöfnu línulegs falls

Tafla 1 tengir fjölda rotta í stofni við tíma í vikum. Notið töfluna til að rita línulega jöfnu.

Tafla 1

***w*, fjöldi vikna**	0	2	4	6
***P*(*w*), fjöldi rotta**	1000	1080	1160	1240

Lausn

Af töflunni sjáum við að upphafsgildi rottufjöldans er 1000 og því er $b=1000$.

Í stað þess að reikna út m, sjáum við af töflunni að stofninn stækkar um 80 á hverju 2 vikna tímabili. Breytingarhraðinn er því 80 rottur á 2 vikum, sem einfalda má í 40 rottur á viku.

$$P(w)=40w+1000$$

Ef við hefðum ekki séð breytingarhraðann af töflunni hefðum við samt getað reiknað hallatöluna með hvaða tveimur punktum sem er úr töflunni. Til dæmis með $(2,1080)$ og $(6,1240)$

$$\begin{aligned} m &= \frac{1240-1080}{6-2} \\ &= \frac{160}{4} \\ &= 40 \end{aligned}$$

2

SPURT OG SVARAÐ

Er upphafsgildið alltaf gefið í gildistöflu eins og töflu 1?

Nei. Stundum er upphafsgildið gefið í gildistöflu en stundum ekki. Ef inntaksgildið 0 kemur fyrir er samsvarandi úttaksgildi upphafsgildið. Ef upphafsgildið er ekki gefið vegna þess að ekkert inntaksgildi í töflunni er 0, finnið þá hallatöluna, setjið eitt hnitapar og hallatöluna inn í $f(x)=mx+b$, og leysið með tilliti til b.

REYNIÐ SJÁLF #6

Ungt tré fékk nýja tegund plöntunæringar til að kanna áhrif hennar á hæð trésins. Tafla 2 sýnir hæð trésins í fetum x mánuðum eftir að mælingar hófust. Ritið línulegt fall, $H(x)$, þar sem x er fjöldi mánaða frá upphafi tilraunarinnar.

Tafla 2

x	0	2	4	8	12
$H(x)$	12,5	13,5	14,5	16,5	18,5

MIÐLAR

Skoðið þetta netefni til að fá frekari kennslu og æfingu í línulegum föllum.

- Línuleg föll

Verkefni hluta 2.1

Hugtakaspurningar

1. Terry skíðar niður bratta brekku. Hæð Terrys yfir sjávarmáli, $E(t)$, í fetum eftir t sekúndur er gefin með $E(t)=3000-70t$. Ritið heila setningu sem lýsir upphafshæð Terrys og hvernig hún breytist yfir tíma.

2. Maria klífur fjall. Hæð Mariu yfir sjávarmáli, $E(t)$, í fetum eftir t mínútur er gefin með $E(t)=1200+40t$. Ritið heila setningu sem lýsir upphafshæð Mariu og hvernig hún breytist yfir tíma.

3. Jessica gengur heim frá vinkonu sinni. Eftir 2 mínútur er hún 1,4 mílur að heiman. Tólf mínútum eftir að hún lagði af stað er hún 0,9 mílur að heiman. Hver er hraði hennar í mílum á klukkustund?

4. Sonya er nú 10 mílur að heiman og gengur fjær heimilinu á 2 mílna hraða á klukkustund. Ritið jöfnu fyrir fjarlægð hennar frá heimilinu eftir t klukkustundir.

5. Bátur er 100 mílur frá smábátahöfn og siglir beint að henni á 10 mílna hraða á klukkustund. Ritið jöfnu fyrir fjarlægð bátsins frá höfninni eftir t klukkustundir.

6. Timmy fer í tívolí með 40 dali. Hver ferð í tæki kostar 2 dali. Hve mikla peninga á hann eftir þegar hann hefur farið *n* sinnum í tæki?

Algebruverkefni

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort rita megi jöfnu ferilsins sem línulegt fall.

7.

$$y=\frac{1}{4}x+6$$

8.

$$y=3x-5$$

9.

$$y=3x^2-2$$

10.

$$3x+5y=15$$

11.

$$3x^2+5y=15$$

12.

$$3x+5y^2=15$$

13.

$$-2x^2+3y^2=6$$

14.

$$-\frac{x-3}{5}=2y$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort hvert fall sé vaxandi eða minnkandi.

15.

$$f(x)=4x+3$$

16.

$$g(x)=5x+6$$

17.

$$a(x)=5-2x$$

18.

$$b(x)=8-3x$$

19.

$$h(x)=-2x+4$$

20.

$$k(x)=-4x+1$$

21.

$$j(x)=\frac{1}{2}x-3$$

22.

$$p(x)=\frac{1}{4}x-5$$

23.

$$n(x)=-\frac{1}{3}x-2$$

24.

$$m(x)=-\frac{3}{8}x+3$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum hallatölu línunnar sem liggur um gefnu punktana tvo.

25. $(2,4)$ og $(4,\ 10)$

26. $(1,\ 5)$ og $(4,\ 11)$

27. $(-1,4)$ og $(5,2)$

28. $(8,-2)$ og $(4,6)$

29. $(6,11)$ og $(-4,3)$

Finnið í eftirfarandi verkefnum, ef unnt er, línulega jöfnu sem uppfyllir skilyrðin í hverju tilviki.

30. $f(-5)=-4$, og $f(5)=2$

31. $f(-1)=4$ og $f(5)=1$

32. $(2,4)$ og $(4,10)$

33. Liggur um $(1,5)$ og $(4,11)$

34. Liggur um $(-1,\ 4)$ og $(5,\ 2)$

35. Liggur um $(-2,\ 8)$ og $(4,\ 6)$

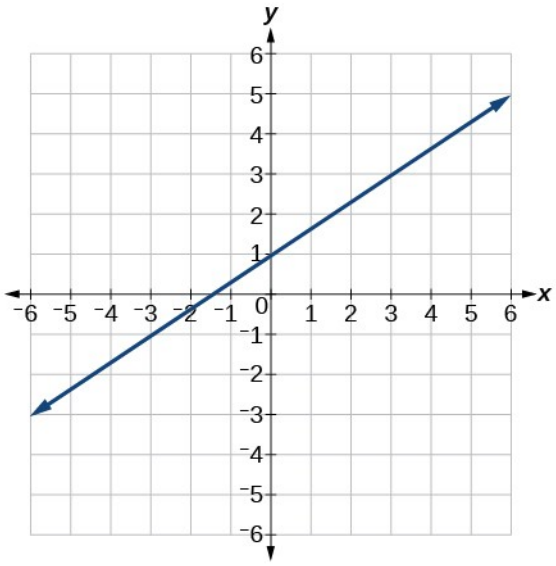
36. *x-ásinn er skorinn í* $(-2,\ 0)$ og y-ásinn í $(0,-3)$

37. *x-ásinn er skorinn í* $(-5,\ 0)$ og y-ásinn í $(0,\ 4)$

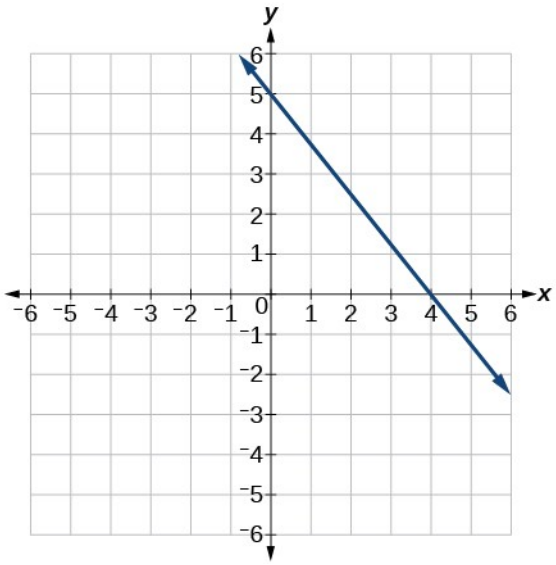
Grafísk verkefni

Finnið í eftirfarandi verkefnum hallatölu línanna sem sýndar eru á gröfunum.

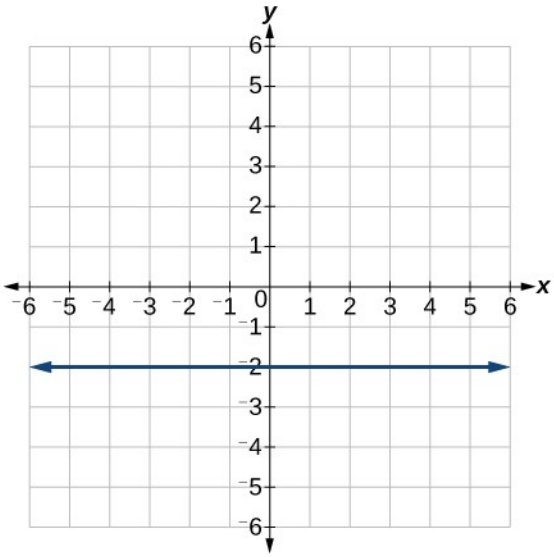
38.



39.

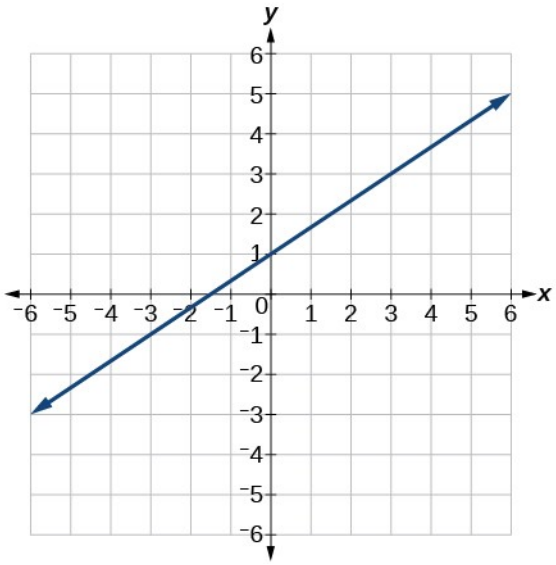


40.

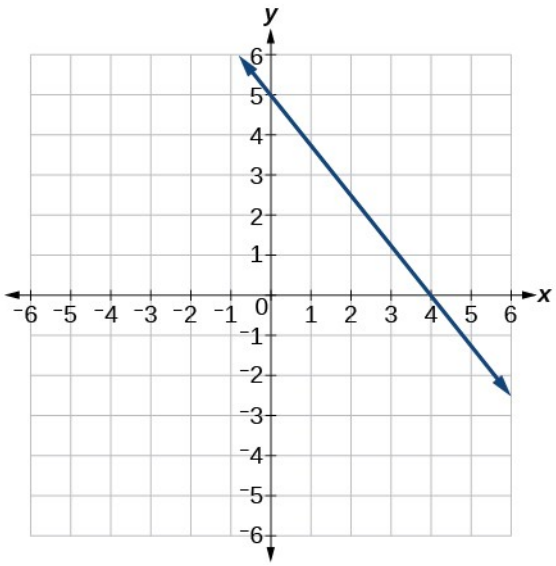


Ritið í eftirfarandi verkefnum jöfnu fyrir línurnar sem sýndar eru á gröfunum.

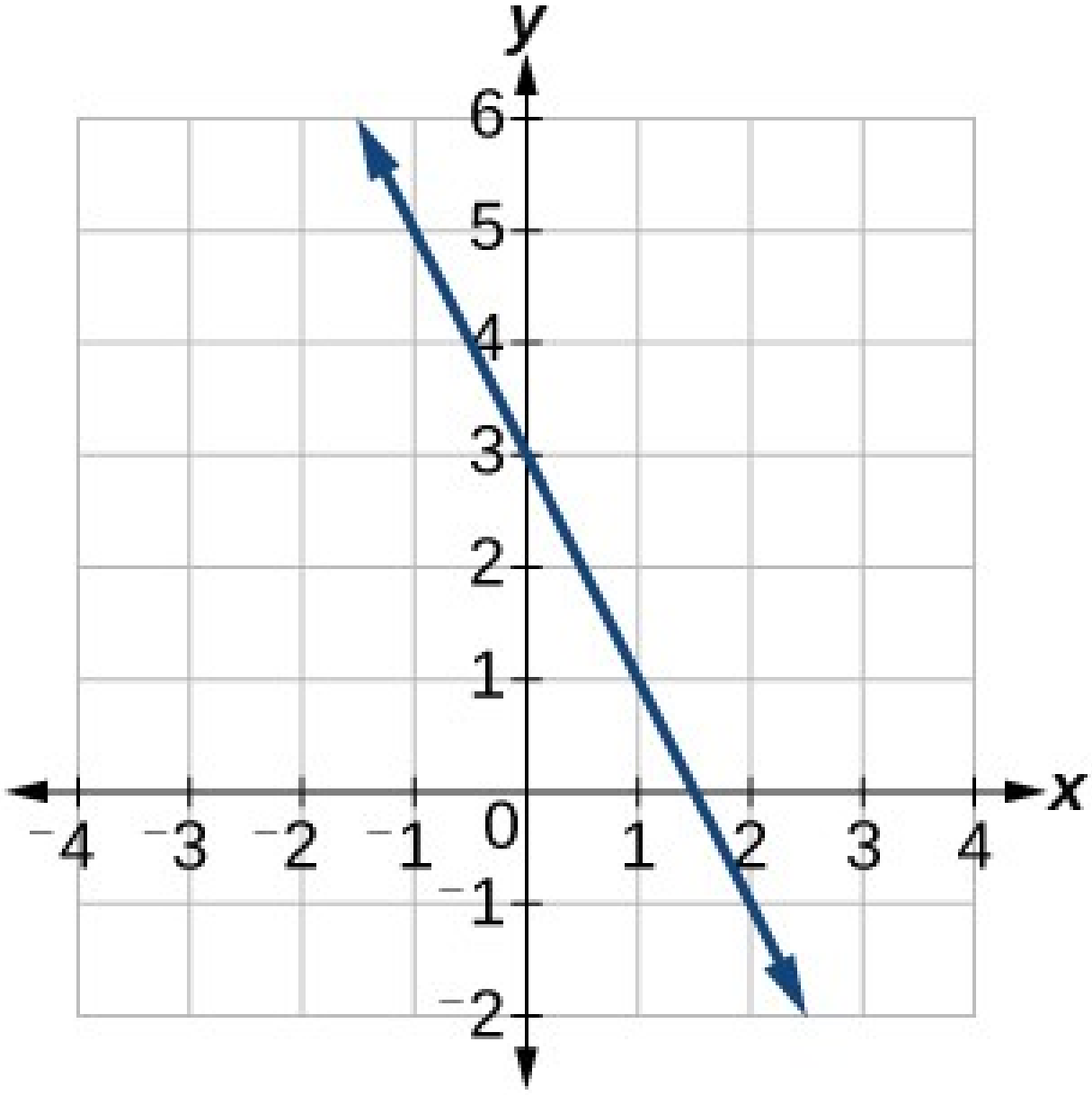
41.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

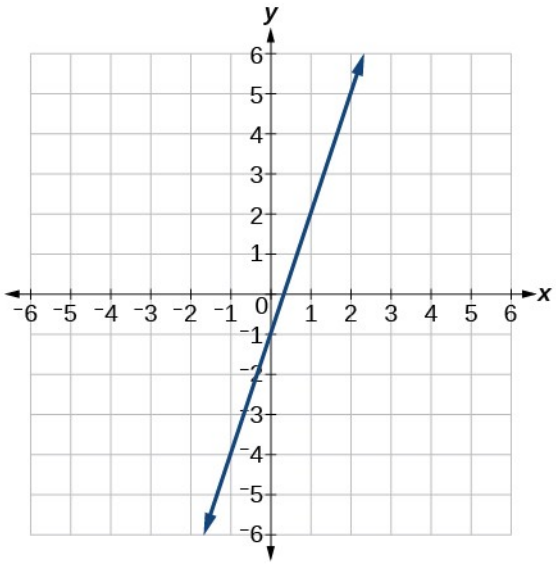
42.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

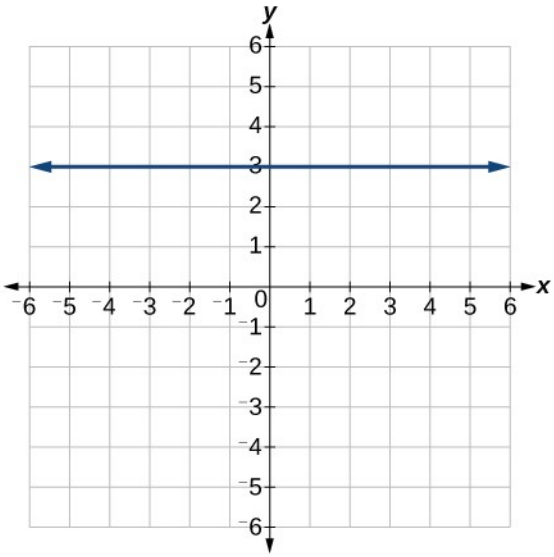
43.



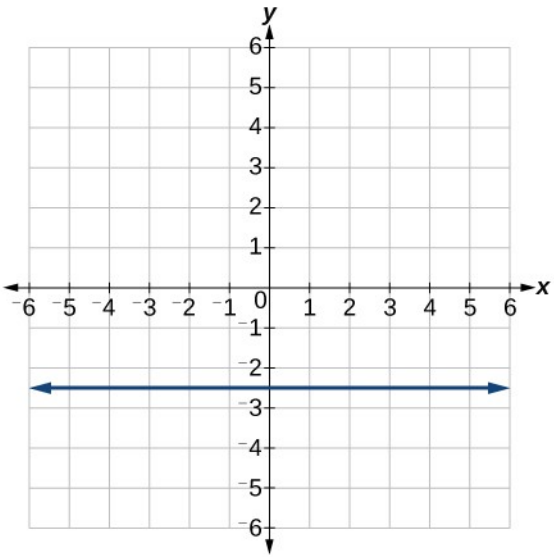
44.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

45.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

46.



Töluleg verkefni

Hverjar af töflunum í eftirfarandi verkefnum gætu lýst línulegu falli? Finnið línulega jöfnu sem lýsir gögnunum í hverri töflu sem gæti verið línuleg.

47.

x	0
$g(x)$	5

48.

x	0
$h(x)$	5

49.

x	0
$f(x)$	−5

50.

x	5
$k(x)$	13

51.

x	0	2	4	6
$g(x)$	6	−19	−44	−69

52.

x	2	4	6	8
$f(x)$	−4	16	36	56

53.

x	2	4	6	8
$f(x)$	−4	16	36	56

54.

x	0
$k(x)$	6

Tækniverkefni

55. Ef f er línulegt fall og $f\,(0{,}1)=11{,}5$, og $f\,(0{,}4)=-5{,}9$, finnið þá jöfnu fallsins.

56. Teiknið graf fallsins f á skilgreiningarmenginu $[-10,\ 10]$: $f\,(x)=0{,}02\,x-0{,}01$. Sláið fallið inn í grafteikniforrit. Stillið minnsta gildi x í skoðunarglugganum á -10 og stærsta gildi x á 10.

57. Teiknið graf fallsins f á skilgreiningarmenginu $[-10,10]$: $f(x)=2.500\,x+4.000$.

58. Tafla 3 sýnir inntakið, w, og úttakið, k, fyrir línulegt fall k. a. Fyllið inn í eyðurnar í töflunni. b. Ritið línulega fallið k, og námundið að 3 aukastöfum.

Tafla 3

w	−10	5,5	67,5	b
k	30	−26	a	−44

59. Tafla 4 sýnir inntakið, p, og úttakið, q, fyrir línulegt fall q. a. Fyllið inn í eyðurnar í töflunni. b. Ritið línulega fallið k.

Tafla 4

p	0,5	0,8	12	b
q	400	700	a	1.000.000

60. Teiknið graf línulega fallsins f á skilgreiningarmenginu $[-10,10]$ þegar hallatalan er $(\frac{1}{8})$ og skurðpunkturinn við y-ás er $(\frac{31}{16})$. Merkið punktana fyrir inntaksgildin -10 og 10.

61. Teiknið graf línulega fallsins f á skilgreiningarmenginu $[-0{,}1\,;0{,}1]$ þegar hallatalan er 75 og skurðpunkturinn við y-ás er $-22{,}5$. Merkið punktana fyrir inntaksgildin $-0{,}1$ og $0{,}1$.

62. Teiknið graf línulega fallsins f þar sem $f(x)=a\,x+b$ í sama hnitakerfi á skilgreiningarmenginu $[-4\,,4]$ fyrir eftirfarandi gildi a og b.

a. $a=2\,;b=3$
b. $a=2\,;b=4$
c. $a=2\,;b=-4$
d. $a=2\,;b=-5$

Viðbótarverkefni

63. Finnið gildi x ef línulegt fall liggur um eftirfarandi punkta og hefur eftirfarandi hallatölu: $(x\,,2),(-4\,,6),m=3$

64. Finnið gildi y ef línulegt fall liggur um eftirfarandi punkta og hefur eftirfarandi hallatölu: $(10\,,y),(25\,,100),m=-5$

65. Finnið jöfnu línunnar sem liggur um eftirfarandi punkta: $(a\,,b)$ og $(a\,,b+1)$

66. Finnið jöfnu línunnar sem liggur um eftirfarandi punkta: $(2\,a\,,b)$ og $(a\,,b+1)$

67. Finnið jöfnu línunnar sem liggur um eftirfarandi punkta: $(a\,,0)$ og $(c\,,d)$

Viðfangsefni úr raunveruleikanum

68. Um hádegi tekur kaffibarþjónn eftir að 20 dalir eru í þjórféskrukkunni. Ef hann fær að meðaltali 0,50 dali frá hverjum viðskiptavini, hve mikið verður í krukkunni ef hann þjónustar n viðskiptavini til viðbótar á vaktinni?

69. Líkamsræktaráskrift með tveimur einkaþjálfunartímum kostar 125 dali en áskrift með fimm einkaþjálfunartímum kostar 260 dali. Hver er kostnaðurinn á hvern tíma?

70. Fatafyrirtæki kemst að því að línuleg vensl eru milli fjölda skyrta, n, sem það getur selt og verðsins, p, sem það getur sett upp fyrir hverja skyrtu. Fyrri sölutölur sýna að selja má 1.000 skyrtur á verðinu $\$30$, en 3.000 skyrtur á 22 dali. Finnið línulega jöfnu á forminu $p(n)=m\,n+b$ sem gefur verðið p sem fyrirtækið getur sett upp fyrir n skyrtur.

71. Símafyrirtæki reiknar þjónustugjald samkvæmt formúlunni $C\,(n)=24+0{,}1\;n$, þar sem n er fjöldi mínútna sem talað er í síma og $C(n)$ er mánaðargjaldið í dölum. Finnið og túlkið breytingarhraðann og upphafsgildið.

72. Bóndi kemst að því að línuleg vensl eru milli fjölda baunaplantna, n, sem hún plantar og uppskerunnar, y, af hverri plöntu. Þegar hún plantar 30 plöntum gefur hver planta 30 únsur af baunum. Þegar hún plantar 34 plöntum gefur hver planta 28 únsur. Finnið línuleg vensl á forminu $y=m\,n+b$ sem gefa uppskeruna þegar n plöntum er plantað.

73. Árið 1960 var íbúafjöldi borgar 287.500. Árið 1989 var hann 275.900. Reiknið breytingarhraða mannfjöldans og lýsið honum í fjölda fólks á ári.

74. Íbúum bæjar hefur fjölgað línulega. Árið 2003 voru íbúarnir 45.000 og þeim hefur fjölgað um 1.700 á ári. Ritið jöfnu, $P(t)$, fyrir íbúafjöldann t árum eftir 2003.

75. Gerum ráð fyrir að meðalárstekjur (í dölum) á árunum 1990 til 1999 séu gefnar með línulega fallinu $I(x) = 1054\ x + 23.286$, þar sem x er fjöldi ára eftir 1990. Hver af fullyrðingunum hér á eftir túlkar hallatöluna í samhengi verkefnisins?

a. Árið 1990 voru meðalárstekjur 23.286 dalir.
b. Á tíu ára tímabilinu 1990–1999 jukust meðalárstekjur samtals um 1.054 dali.
c. Á hverju ári tíunda áratugarins jukust meðalárstekjur um 1.054 dali.
d. Í lok árs 1999 höfðu meðalárstekjur hækkað í 23.286 dali.

76. Þegar hitinn er 0 gráður á Celsíus er Fahrenheit-hitinn 32 gráður. Þegar Celsíus-hitinn er 100 gráður er samsvarandi Fahrenheit-hiti 212 gráður. Setjið Fahrenheit-hitann fram sem línulegt fall af C, Celsíus-hitanum, $F(C)$.

a. Finnið breytingarhraða Fahrenheit-hitans fyrir hverja einingu sem Celsíus-hitinn breytist um.
b. Finnið og túlkið $F(28)$.
c. Finnið og túlkið $F(-40)$.

2.2 Gröf línulegra falla

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna gröf línulegra falla.
- Rita jöfnu línulegs falls út frá grafi línu.
- Ákvarða út frá jöfnum tveggja lína hvort gröf þeirra séu samsíða eða hornrétt.
- Rita jöfnu línu sem er samsíða eða hornrétt á gefna línu.
- Leysa kerfi línulegra jafna.

Tvö símafyrirtæki í samkeppni bjóða ólíkar greiðsluáætlanir. Sama mínútuverð gildir í báðum áætlunum fyrir langlínusímtöl en fasta mánaðargjaldið er ólíkt. Neytandi vill vita hvort áætlanirnar tvær kosti einhvern tíma jafnmikið fyrir tiltekinn fjölda mínútna í langlínusímtölum. Heildarkostnað hvorrar greiðsluáætlunar má setja fram með línulegu falli. Til að leysa verkefnið þurfum við að bera föllin saman. Í þessum hluta skoðum við aðferðir til að bera saman föll með gröfum.

Gröf línulegra falla teiknuð

Í Línulegum föllum sáum við að graf línulegs falls er bein lína. Af grafi gátum við einnig séð punkta fallsins og upphafsgildi þess. Ef við teiknum gröf tveggja falla er því auðveldara að bera eiginleika þeirra saman.

Til eru þrjár grunnaðferðir til að teikna gröf línulegra falla. Í þeirri fyrstu merkjum við punkta og drögum síðan línu um þá. Önnur aðferðin notar skurðpunktinn við y-ás og hallatöluna. Sú þriðja notar ummyndanir samsemdarfallsins $f(x)=x$.

Graf falls teiknað með því að merkja punkta

Til að finna punkta falls getum við valið inntaksgildi, reiknað gildi fallsins við þessi inntaksgildi og þannig fundið úttaksgildin. Inntaksgildin og samsvarandi úttaksgildi mynda hnitapör. Síðan merkjum við hnitapörin inn í hnitanet. Almennt ættum við að reikna fallgildið fyrir að minnsta kosti tvö inntaksgildi til að finna að minnsta kosti tvo punkta á grafinu. Ef okkur er til dæmis gefið fallið $f(x)=2x$, gætum við notað inntaksgildin 1 og 2. Þegar fallgildið er reiknað fyrir inntaksgildið 1 fæst úttaksgildið 2, sem er táknað með punktinum $(1,2)$. Fyrir inntaksgildið 2 fæst úttaksgildið 4, sem er táknað með punktinum $(2,4)$. Oft er ráðlegt að velja þrjá punkta því ef þeir liggja ekki allir á sömu línu vitum við að villa hefur orðið.

AÐFERÐ

Teiknið graf línulegs falls með því að merkja punkta.

1. Veljið að minnsta kosti tvö inntaksgildi.
2. Reiknið gildi fallsins við hvert inntaksgildi.
3. Notið úttaksgildin sem fást til að ákvarða hnitapör.
4. Merkið hnitapörin inn í hnitanet.
5. Dragið línu um punktana.

DÆMI 1

Graf teiknað með því að merkja punkta

Teiknið graf $f(x)=-\frac{2}{3}x+5$ með því að merkja punkta.

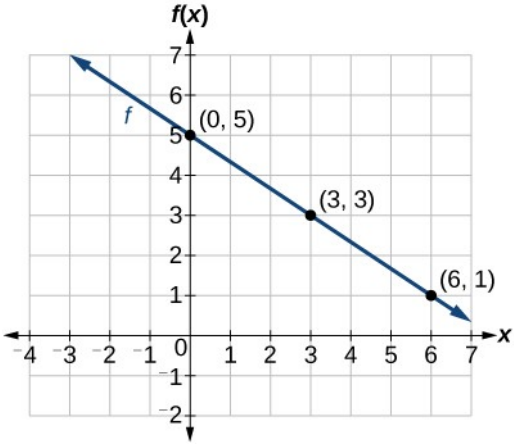
Lausn

Byrjið á að velja inntaksgildi. Í fallinu er brot með nefnarann 3 og því er hentugt að velja margfeldi af 3 sem inntaksgildi. Við veljum 0, 3 og 6.

Reiknið gildi fallsins við hvert inntaksgildi og notið úttaksgildið til að ákvarða hnitapör.

$$x = 0 \qquad f(0) = -\tfrac{2}{3}(0) + 5 = 5 \Rightarrow (0, 5)$$
$$x = 3 \qquad f(3) = -\tfrac{2}{3}(3) + 5 = 3 \Rightarrow (3, 3)$$
$$x = 6 \qquad f(6) = -\tfrac{2}{3}(6) + 5 = 1 \Rightarrow (6, 1)$$

Merkið hnitapörin og dragið línu um punktana. Mynd 1 sýnir graf fallsins $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.



Mynd 1 Graf línulega fallsins $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$.

Greining

Graf fallsins er lína eins og búast má við fyrir línulegt fall. Auk þess hallar grafið niður á við, sem sýnir neikvæða hallatölu. Það kemur einnig heim og saman við neikvæðan jafnan breytingarhraða í jöfnu fallsins.

REYNIÐ SJÁLF #1

Teiknið graf $f(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ með því að merkja punkta.

Graf falls teiknað með skurðpunkti við y-ás og hallatölu

Önnur leið til að teikna gröf línulegra falla er að nota tiltekna eiginleika fallsins í stað þess að merkja punkta. Fyrri eiginleikinn er skurðpunkturinn við y-ás, það er punkturinn þar sem inntaksgildið er núll. Til að finna skurðpunktinn við y-ás getum við sett $x = 0$ inn í jöfnuna.

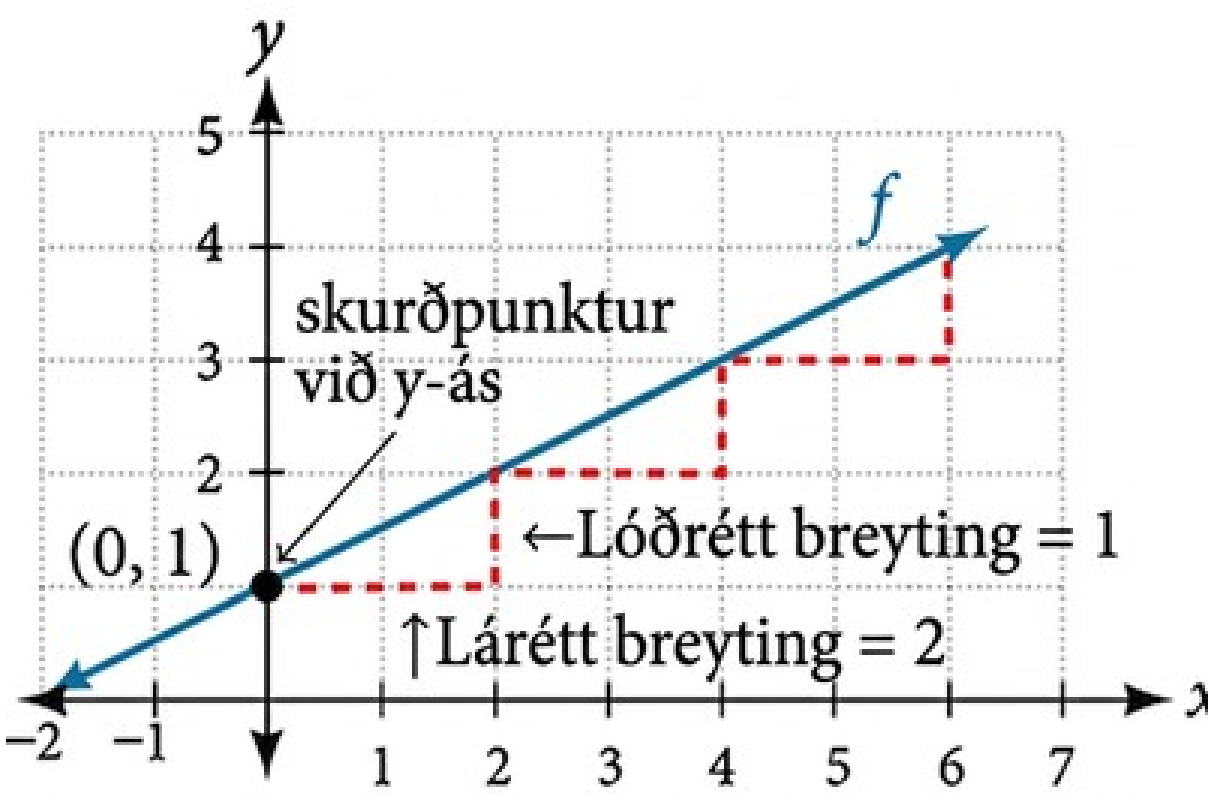
Hinn eiginleiki línulega fallsins er hallatalan m, sem mælir bratta þess. Munið að hallatalan er breytingarhraði fallsins. Hallatala falls er hlutfallið milli breytingar á úttaki og breytingar á inntaki. Einnig má líta á hallatöluna sem lóðréttu breytinguna deilda með láréttu breytingunni. Við kynntumst bæði skurðpunktinum við y-ás og hallatölunni í Línulegum föllum.

Skoðum fallið hér fyrir neðan.

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

2

Hallatalan er $\frac{1}{2}$. Hallatalan er jákvæð og því vitum við að grafið hallar upp á við frá vinstri til hægri. Skurðpunkturinn við y-ás er punkturinn á grafinu þar sem $x=0$. Grafið sker y-ásinn í $(0,1)$. Nú þekkjum við hallatöluna og skurðpunktinn við y-ás. Við getum byrjað að teikna grafið með því að merkja punktinn $(0,1)$ Við vitum að hallatalan er lóðrétt breyting deilt með láréttri breytingu, $m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$. Í dæminu okkar er $m=\frac{1}{2}$, sem merkir að lóðrétta breytingin er 1 og lárétta breytingin 2. Frá skurðpunktinum við y-ás, $(0,1)$, getum við því farið 1 upp og síðan 2 til hægri, eða 2 til hægri og síðan 1 upp. Við endurtökum þetta þar til við höfum nokkra punkta og drögum síðan línu um þá eins og sýnt er á mynd 2.



Mynd 2. Láréttar og lóðréttar breytingar milli punkta á vaxandi línu.

GRAFÍSK TÚLKUN LÍNULEGS FALLS

Í jöfnunni $f(x)=mx+b$

- b er skurðpunktur grafsins við y-ás og gefur punktinn $(0,b)$ þar sem grafið sker y-ásinn.
- m er hallatala línunnar og sýnir lóðréttu breytinguna og láréttu breytinguna milli hverra tveggja punkta í röð. Munið formúluna fyrir hallatölu:

$$m=\frac{\text{breyting á úttaki (lóðrétt breyting)}}{\text{breyting á inntaki (lárétt breyting)}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

SPURT OG SVARAÐ

Hafa öll línuleg föll skurðpunkt við y-ás?

Já. Öll línuleg föll skera y-ásinn og hafa því skurðpunkt við y-ás. (Athugið: Lóðrétt lína sem er samsíða y-ásnum hefur engan skurðpunkt við y-ás en hún er ekki graf falls.)

AÐFERÐ

Teiknið graf línulegs falls út frá jöfnu þess með skurðpunktinum við y-ás og hallatölunni.

1. Reiknið gildi fallsins þegar inntaksgildið er núll til að finna skurðpunktinn við y-ás.
2. Finnið hallatöluna sem breytingarhraða fallsins.
3. Merkið punktinn sem skurðpunkturinn við y-ás táknar.
4. Notið $\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}$ til að ákvarða að minnsta kosti tvo punkta til viðbótar á línunni.
5. Dragið lauslega línu um punktana.

DÆMI 2

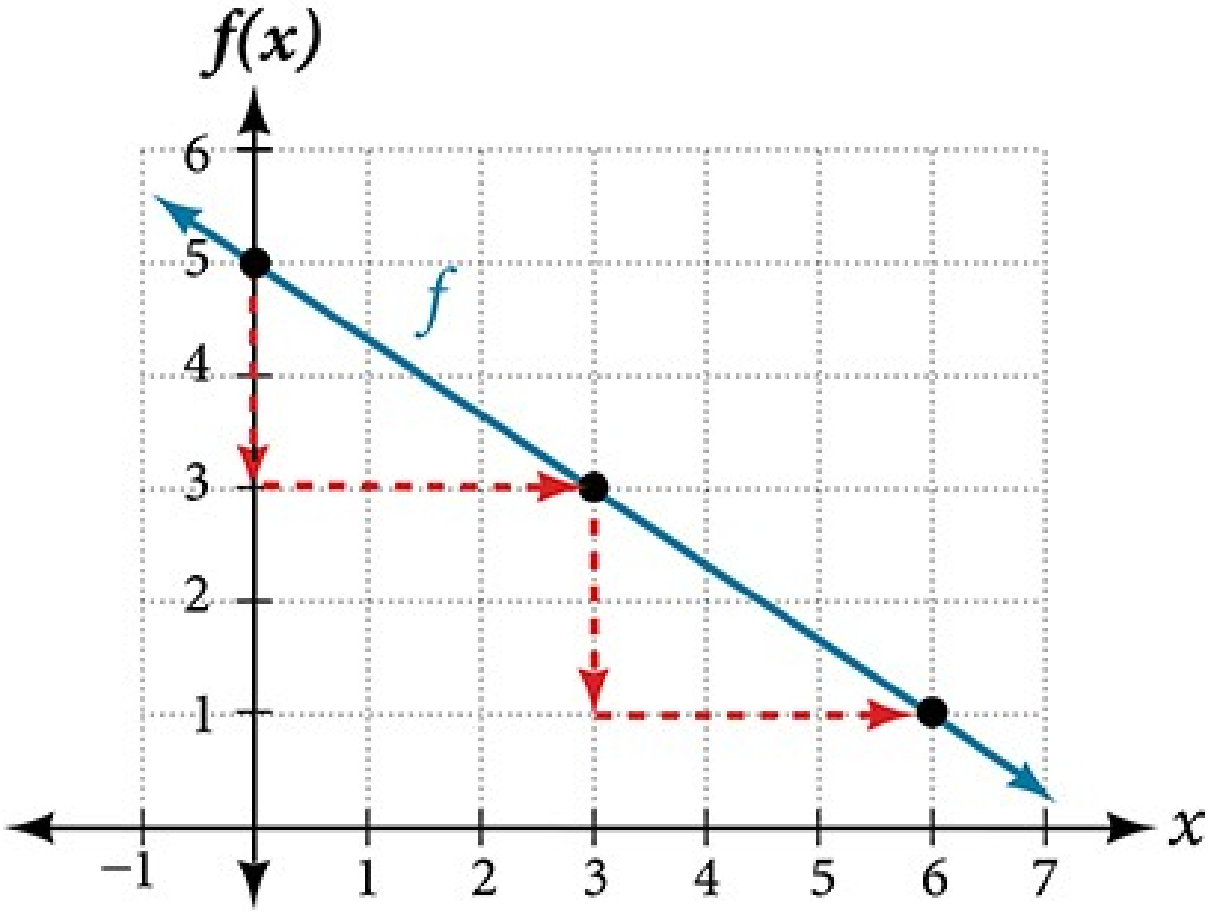
Graf teiknað með skurðpunkti við y-ás og hallatölu

Teiknið graf $f(x)=-\frac{2}{3}x+5$ með skurðpunktinum við y-ás og hallatölunni.

Lausn

Reiknið gildi fallsins þegar $x=0$ til að finna skurðpunktinn við y-ás. Úttaksgildið þegar $x=0$ er 5 og grafið sker því y-ásinn í $(0,5)$.

Samkvæmt jöfnu fallsins er hallatala línunnar $-\frac{2}{3}$. Það segir okkur að fyrir hverja lóðrétta breytingu um -2 einingar eykst lárétta breytingin um 3 einingar til hægri. Nú getum við teiknað graf fallsins með því að merkja fyrst skurðpunktinn við y-ás á grafinu á mynd 3. Frá upphafsgildinu $(0,5)$ færum við okkur 2 einingar niður og 3 einingar til hægri. Við getum framlengt línuna til vinstri og hægri með því að endurtaka þetta og síðan dregið línu um punktana.



Mynd 3. Láréttar og lóðréttar breytingar milli punkta á minnkandi línu.

Greining

Grafið hallar niður á við frá vinstri til hægri og hefur því neikvæða hallatölu eins og búist var við.

REYNIÐ SJÁLF #2

Finnið punkt á grafinu sem við teiknuðum í dæmi 2 og hefur neikvætt x-gildi.

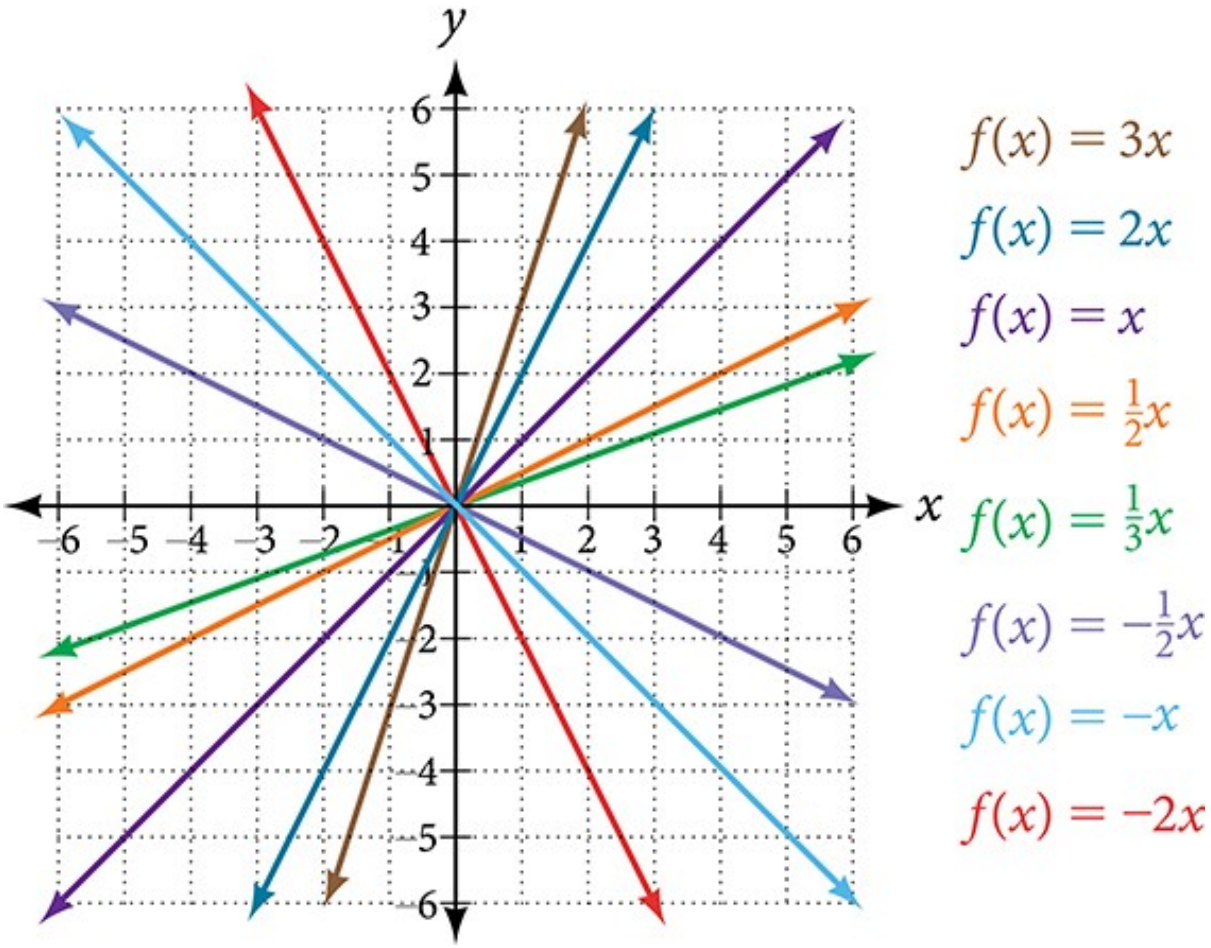
Graf falls teiknað með ummyndunum

Önnur leið til að teikna graf er að nota ummyndanir samsemdarfallsins $f(x)=x$. Ummynda má fall með hliðrun upp, niður, til vinstri eða til hægri. Einnig má ummynda fall með speglun, teygju eða samþjöppun.

Lóðrétt teygja eða samþjöppun

Í jöfnunni $f(x)=mx$, ákvarðar m lóðrétta teygju eða samþjöppun samsemdarfallsins. Þegar m er neikvætt speglast grafið einnig lóðrétt. Takið eftir á mynd 4 að þegar jafnan $f(x)=x$ er margfölduð með m teygist graf f lóðrétt um stuðulinn m ef $m>1$ en graf f þjappast lóðrétt

saman um stuðulinn m ef $0<m<1$. Þetta merkir að því stærra sem tölugildi m, er þeim mun brattari er línan.

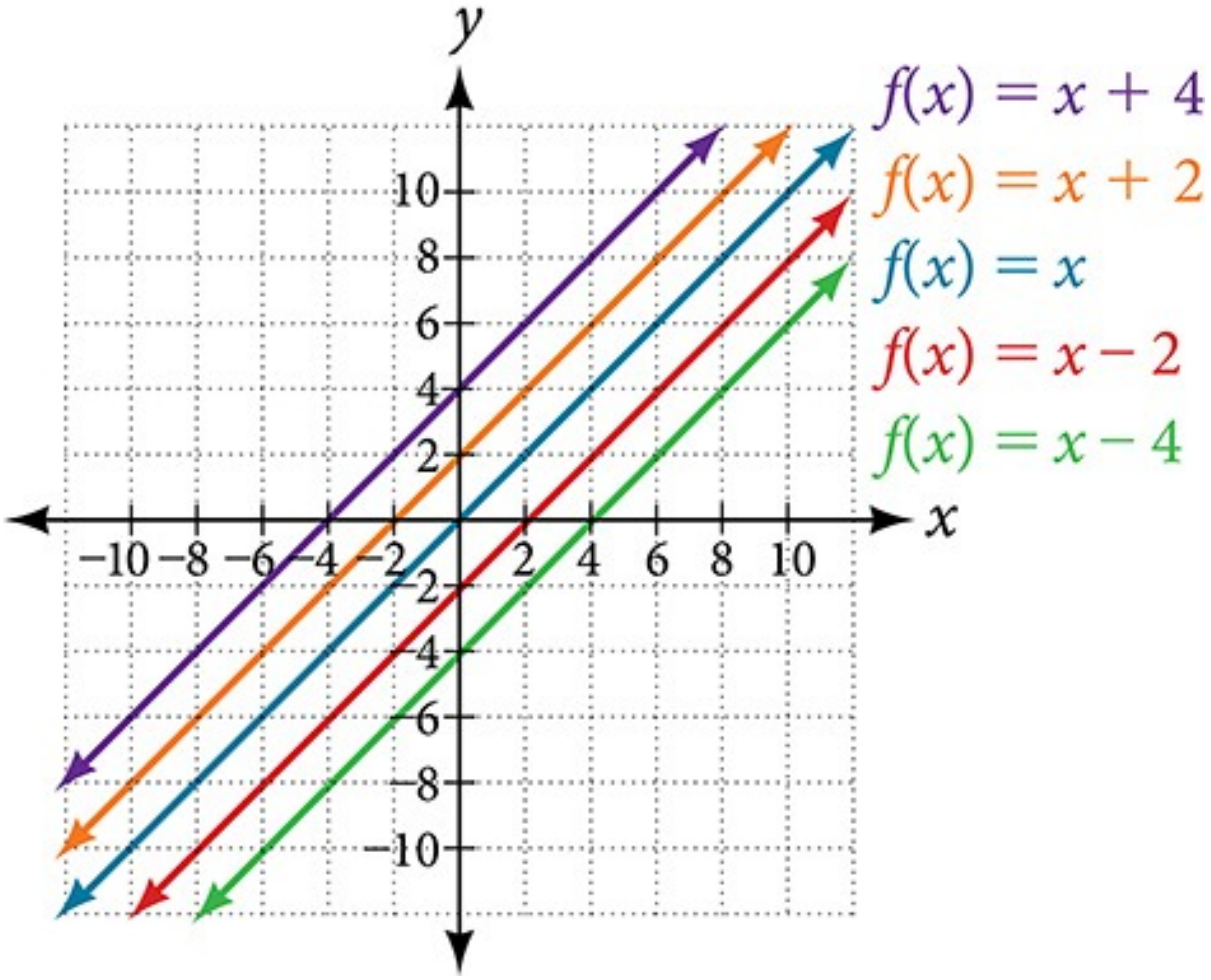


Mynd 4 Lóðréttar teygjur, samþjappanir og speglanir fallsins $f(x)=x$.

Lóðrétt hliðrun

Í $f(x)=mx+b$, ákvarðar b lóðrétta hliðrun og færir grafið upp eða niður án þess að breyta hallatölu línunnar. Takið eftir á mynd 5 að þegar gildinu b er bætt við jöfnu $f(x)=x$ hliðrast graf f um samtals b einingar upp ef b er jákvætt og $|b|$ einingar niður ef b er neikvætt.

2



Mynd 5 Grafið sýnir lóðréttar hliðranir fallsins $f(x)=x$.

Með lóðréttum teygjum eða samþjöppunum ásamt lóðréttum hliðrunum má líka greina mismunandi gerðir línulegra falla. Þótt það sé ef til vill ekki auðveldasta leiðin til að teikna graf falls af þessu tagi er samt mikilvægt að æfa hverja aðferð.

AÐFERÐ

Notið ummyndanir til að teikna graf línulegs falls út frá jöfnu þess á forminu $f(x)=mx+b$.

1. Teiknið graf $f(x)=x$.
2. Teygið grafið eða þjappið því saman lóðrétt um stuðulinn m.
3. Hliðrið grafinu b einingar upp eða niður.

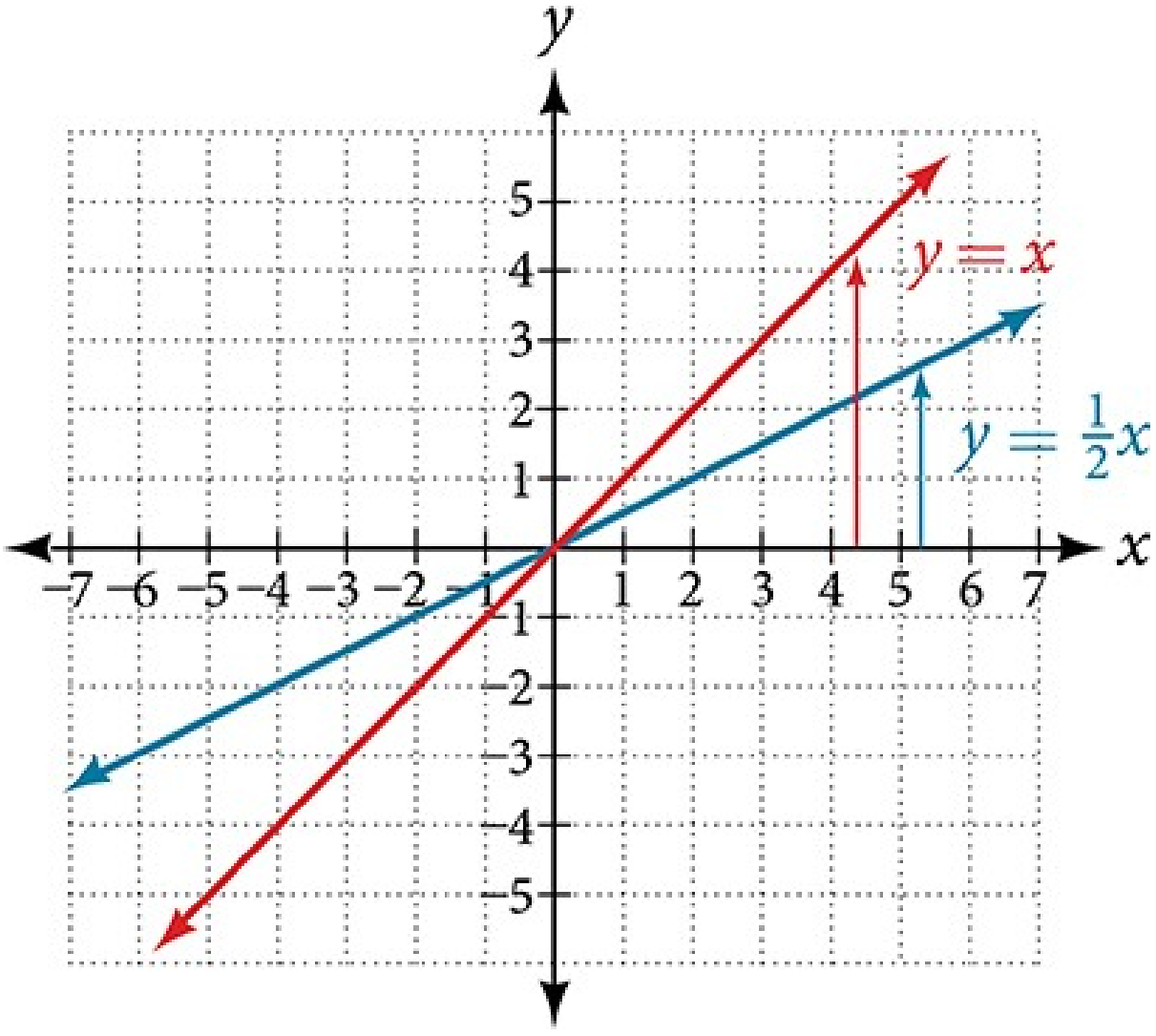
DÆMI 3

Graf teiknað með ummyndunum

Teiknið graf $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ með ummyndunum.

Lausn

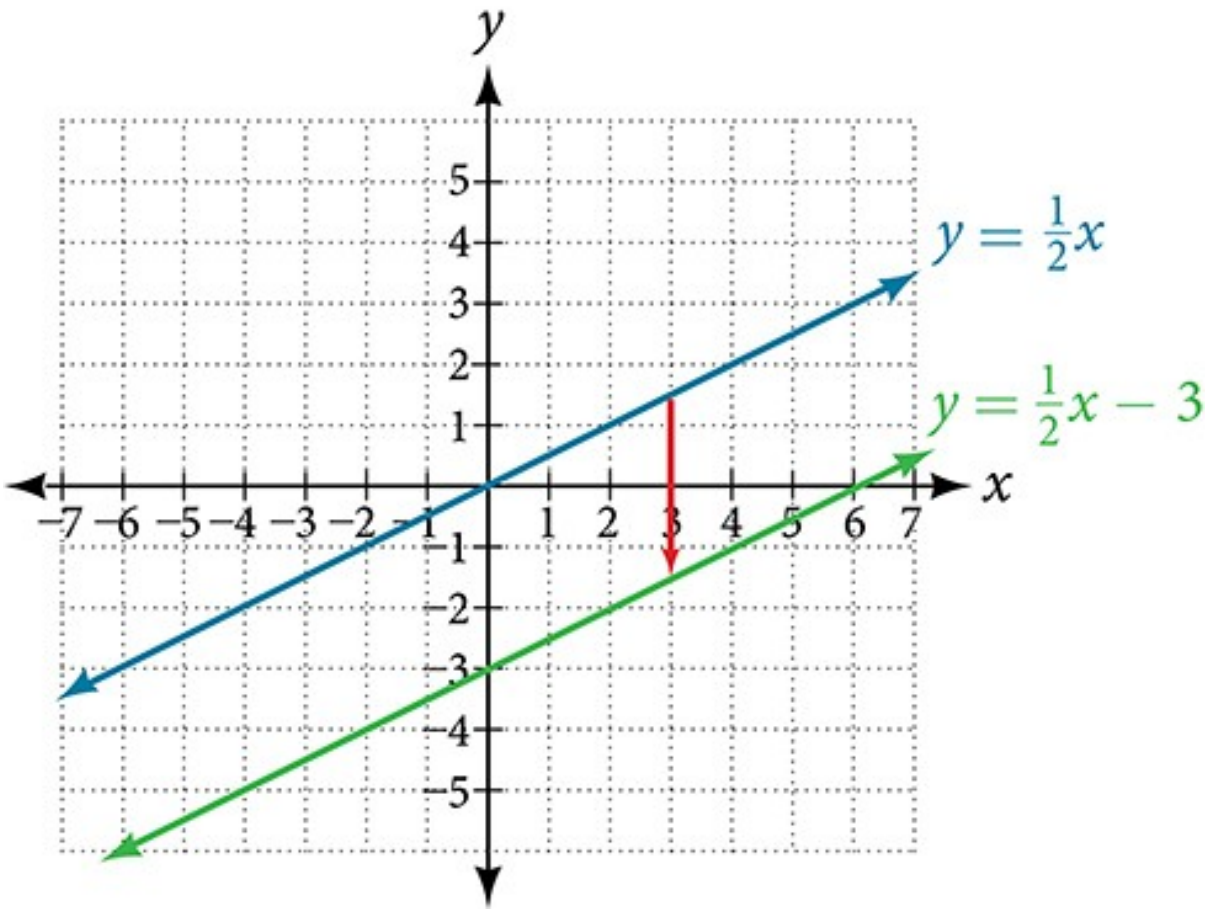
Jafna fallsins sýnir að $m=\frac{1}{2}$ og samsemdarfallinu er því þjappað saman lóðrétt um $\frac{1}{2}$. Jafnan sýnir einnig að $b=-3$ og samsemdarfallinu er því hliðrað lóðrétt niður um 3 einingar. Teiknið fyrst graf samsemdarfallsins og sýnið lóðréttu samþjöppunina eins og á mynd 6.



Mynd 6 Fallið $y=x$, þjappað saman um stuðulinn $\frac{1}{2}$.

Sýnið síðan lóðréttu hliðrunina eins og á mynd 7.

2



Mynd 7 Fallinu $y = \frac{1}{2}x$, hliðrað niður um 3 einingar.

REYNIÐ SJÁLF #3

Teiknið graf $f(x) = 4 + 2x$, með ummyndunum.

SPURT OG SVARAÐ

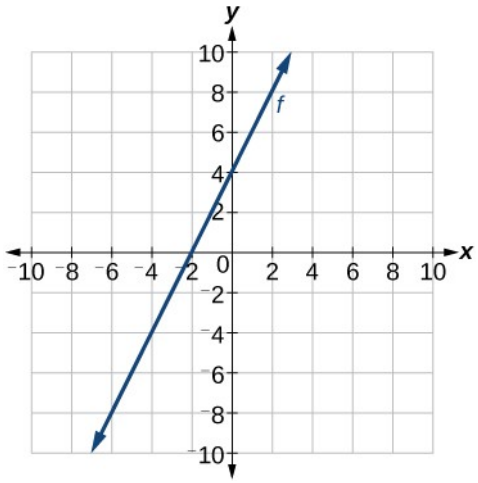
Hefðum við í dæmi 3 getað teiknað grafið með því að snúa röð ummyndana við?

Nei. Röð ummyndana fylgir forgangsröð reikniaðgerða. Þegar gildi fallsins er reiknað við tiltekið inntak er samsvarandi úttak reiknað samkvæmt forgangsröðinni. Þess vegna beittum við samþjöppuninni fyrst. Fylgjum forgangsröðinni í dæmi þar sem inntakið er 2.

$$f(2) = \tfrac{1}{2}(2) - 3$$
$$= 1 - 3$$
$$= -2$$

Jafna falls rituð út frá grafi línu

Munið að í Línulegum föllum rituðum við jöfnu línulegs falls út frá grafi. Nú getum við byggt á því sem við vitum um gröf línulegra falla og greint gröfin nánar. Byrjum á að skoða mynd 8. Við sjáum strax að grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,\ 4)$ og því er þetta skurðpunkturinn við y-ás.



Mynd 8. Graf línulegs falls í hnitakerfi.

Síðan getum við reiknað hallatöluna með því að finna lóðréttu og láréttu breytinguna. Við getum valið hvaða tvo punkta sem er en skoðum punktinn $(-2,0)$. Til að komast frá honum að skurðpunktinum við y-ás þurfum við að fara 4 einingar upp (lóðrétt breyting) og 2 einingar til hægri (lárétt breyting). Hallatalan hlýtur því að vera

$$m=\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}=\frac{4}{2}=2$$

Þegar hallatalan og skurðpunkturinn við y-ás eru sett inn í hallatöluform línu fæst

$$y=2x+4$$

AÐFERÐ

Finnið jöfnu sem lýsir línulegu falli út frá grafi þess.

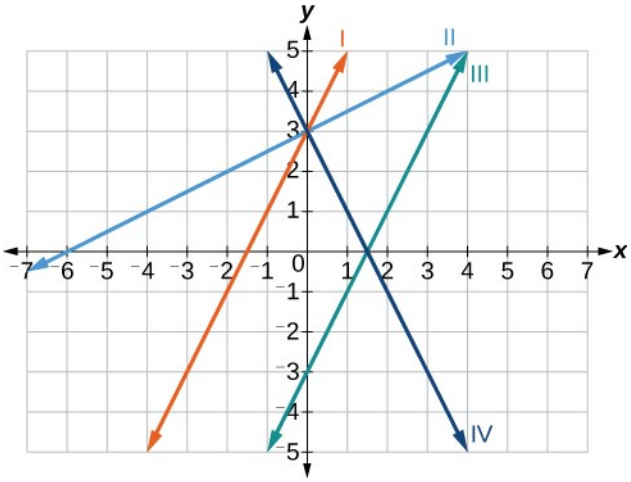
1. Finnið skurðpunkt grafsins við y-ás.
2. Veljið tvo punkta til að ákvarða hallatöluna.
3. Setjið skurðpunktinn við y-ás og hallatöluna inn í hallatöluform línu.

DÆMI 4

Línuleg föll pöruð við gröf sín

Parið hverja jöfnu línulegu fallanna við eina línu á mynd 9.

1. ⓐ $f(x)=2x+3$
2. ⓑ $g(x)=2x-3$
3. ⓒ $h(x)=-2x+3$
4. ⓓ $j(x)=\frac{1}{2}x+3$



Mynd 9. Fjórar línur merktar I, II, III og IV.

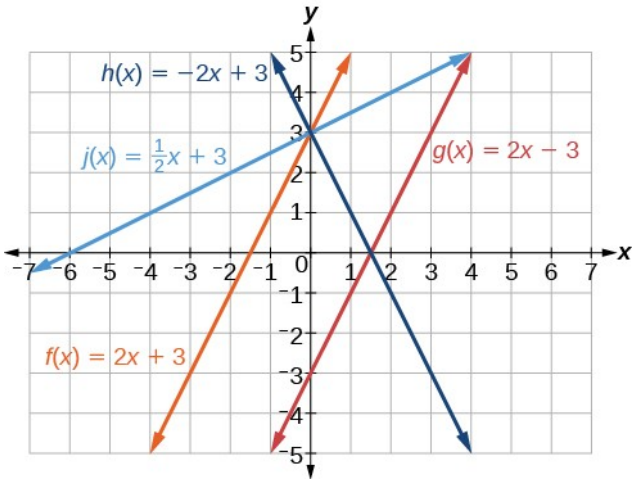
Lausn

Greinum upplýsingarnar um hvert fall.

1. ⓐ Þetta fall hefur hallatöluna 2 og skurðpunktinn 3 við y-ás. Graf þess hlýtur að liggja um punktinn (0, 3) og halla upp frá vinstri til hægri. Við getum fundið hallatöluna út frá tveimur punktum eða borið grafið saman við gröf hinna fallanna. Fallið g hefur sömu hallatölu en annan skurðpunkt við y-ás. Línur I og III halla eins vegna þess að þær hafa sömu hallatölu. Lína III liggur ekki um $(0,\ 3)$ og því hlýtur lína I að vera graf f.
2. ⓑ Þetta fall hefur einnig hallatöluna 2 en skurðpunkturinn við y-ás er -3. Graf þess hlýtur að liggja um punktinn $(0,-3)$ og halla upp frá vinstri til hægri. Lína III hlýtur því að vera graf fallsins.
3. ⓒ Þetta fall hefur hallatöluna –2 og skurðpunktinn 3 við y-ás. Þetta er eina fallið á listanum sem hefur neikvæða hallatölu. Því hlýtur lína IV að vera graf þess, enda hallar hún niður frá vinstri til hægri.
4. ⓓ Þetta fall hefur hallatöluna $\frac{1}{2}$ og skurðpunktinn 3 við y-ás. Graf þess hlýtur að liggja um punktinn (0, 3) og halla upp frá vinstri til hægri. Línur I og II liggja um $(0,\ 3)$, en

hallatala j er minni en hallatala f og því hlýtur lína j að vera flatari. Lína II er graf þessa falls.

Nú getum við merkt línurnar upp á nýtt eins og sýnt er á mynd 10.



Mynd 10. Gröf fjögurra línulegra falla með jöfnum þeirra.

Skurðpunktur línu við x-ás fundinn

Hingað til höfum við fundið skurðpunkta falls við y-ás, það er punktana þar sem graf fallsins sker y-ásinn. Fall getur einnig haft x-skurðpunkt, sem er x-hnit punktsins þar sem graf fallsins sker x-ásinn. Með öðrum orðum er það inntaksgildið þegar úttaksgildið er núll.

Til að finna skurðpunktinn við x-ás setjum við fallið $f(x)$ jafnt og núll og leysum fyrir x. Skoðum til dæmis fallið sem hér er sýnt.

$$f(x)=3x-6$$

Setjið fallið jafnt og 0 og leysið fyrir x.

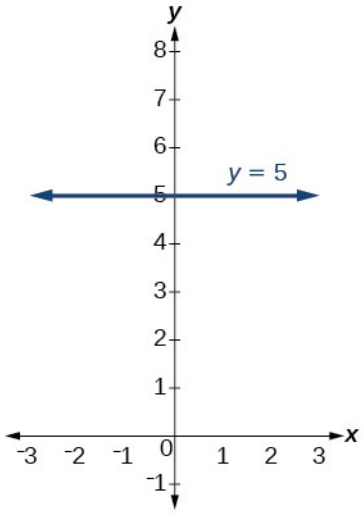
$$\begin{aligned} 0 &= 3x - 6 \\ 6 &= 3x \\ 2 &= x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Graf fallsins sker x-ásinn í punktinum $(2,\ 0)$.

SPURT OG SVARAÐ

Hafa öll línuleg föll skurðpunkt við x-ás?

Nei. Einu dæmin um línuleg föll án skurðpunkts við x-ás eru þó föll af gerðinni $y=c$, þar sem c er rauntala önnur en núll. Til dæmis er $y=5$ lárétt lína 5 einingum ofan við x-ásinn. Fallið hefur engan skurðpunkt við x-ás, eins og sýnt er á mynd 11.



Mynd 11. Lárétt lína með jöfnuna y = 5.

Ⓑ X-SKURÐPUNKT(A)

Skurðpunktur fallsins við x-ás er gildi x þegar $f(x)=0$. Það má finna með því að leysa jöfnuna $0=mx+b$.

DÆMI 5

Finna x-skurðpunkt

Finnið x-skurðpunkt fallsins $f(x)=\frac{1}{2}x-3$.

Lausn

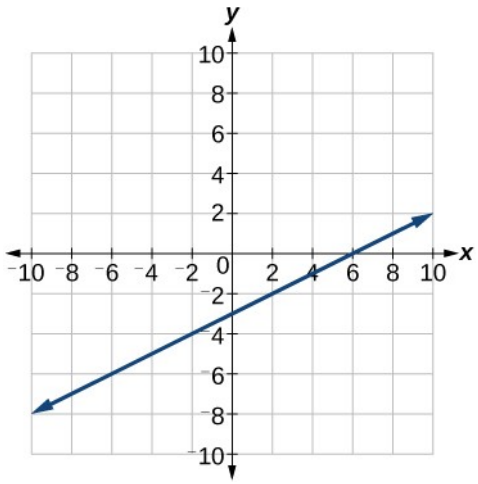
Setjið fallið jafnt og núll og leysið fyrir x.

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2}x - 3 \\ 3 &= \tfrac{1}{2}x \\ 6 &= x \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Grafið sker x-ásinn í punktinum $(6,\ 0)$.

Greining

Graf fallsins er sýnt á mynd 12. Við sjáum að skurðpunkturinn við x-ás er $(6,\ 0)$ eins og við áttum von á.



Mynd 12 Graf línulega fallsins $f(x)=\frac{1}{2}x-3$.

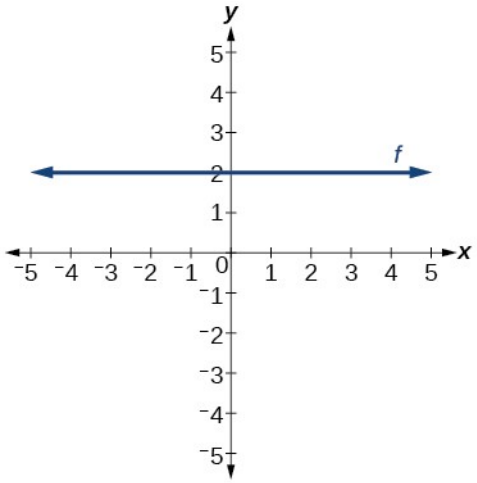
REYNIÐ SJÁLF #4

Finnið x-skurðpunkt fallsins $f(x)=\frac{1}{4}x-4$.

Láréttum og lóðréttum línum lýst

Tvö sértilvik lína koma fyrir í gröfum: láréttar og lóðréttar línur. Lárétt lína táknar fast úttak, eða y-gildi. Á mynd 13 sjáum við að úttaksgildið er 2 fyrir hvert inntaksgildi. Breyting úttaksgilda milli hvaða tveggja punkta sem er nemur því 0. Teljarinn í hallatöluformúlunni er 0 og hallatalan því einnig 0. Ef við setjum $m=0$ í jöfnuna $f(x)=mx+b$, einfaldast hún í $f(x)=b$. Gildi fallsins er með öðrum orðum fasti. Grafið táknar fallið $f(x)=2$.

2



x	-4	-2	0	2	4
y	2	2	2	2	2

Mynd 13 Lárétt lína sem táknar fallið $f(x)=2$.

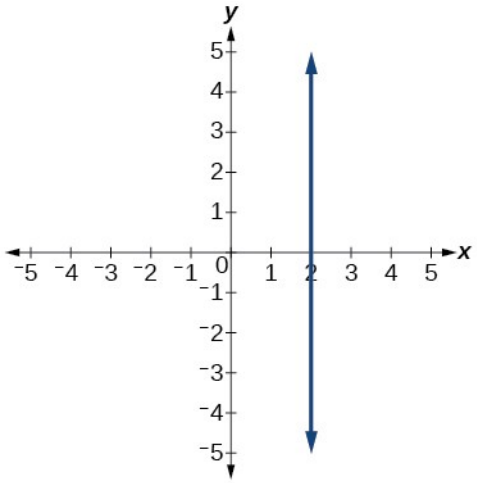
Lóðrétt lína táknar fast inntak, eða x-gildi. Við sjáum að inntaksgildi allra punkta á línunni er 2 en úttaksgildið breytist. Þessu inntaksgildi er varpað á fleiri en eitt úttaksgildi og því táknar lóðrétt lína ekki fall. Takið eftir að breyting inntaksgilda milli hvaða tveggja punkta sem er nemur núlli. Nefnarinn í hallatöluformúlunni verður því núll og hallatala lóðréttrar línu er óskilgreind.

$$m=\frac{\text{breyting úttaks}}{\text{breyting inntaks}}$$

Rauntala önnur en núll

0

Takið eftir að lóðrétt lína, eins og sú sem sýnd er á mynd 14, hefur skurðpunkt við x-ás en engan skurðpunkt við y-ás nema hún sé línan $x=0$. Grafið táknar línuna $x=2$.



x	2	2	2	2	2
y	−4	−2	0	2	4

Mynd 14 Lóðrétta línan $x=2$, sem táknar ekki fall.

LÁRÉTTAR OG LÓÐRÉTTAR LÍNUR

Línur geta verið láréttar eða lóðréttar.

Lárétt lína er skilgreind með jöfnu af gerðinni $f(x)=b$.

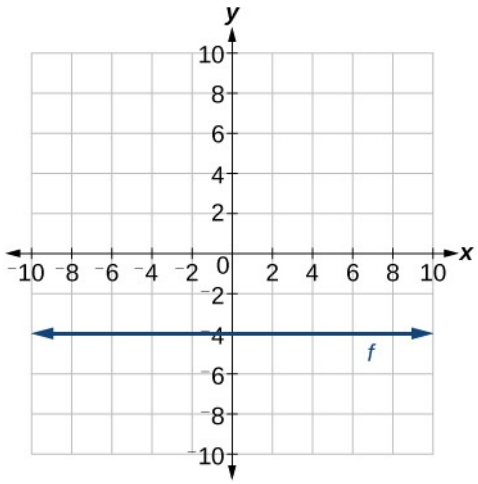
Lóðrétt lína er skilgreind með jöfnu af gerðinni $x=a$.

DÆMI 6

Jafna láréttrar línu rituð

Ritið jöfnu línunnar sem sýnd er á mynd 15.

2



Mynd 15. Graf línu í verkefninu.

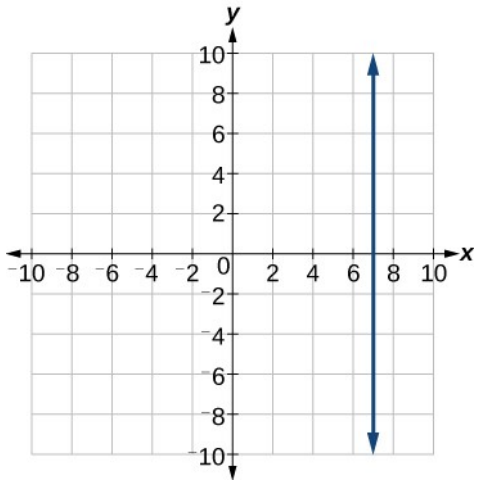
Lausn

Fyrir sérhvert x-gildi er y-gildið -4, og jafnan er því $y=-4$.

DÆMI 7

Jafna lóðréttrar línu rituð

Ritið jöfnu línunnar sem sýnd er á mynd 16.



Mynd 16. Lóðrétt lína í verkefninu.

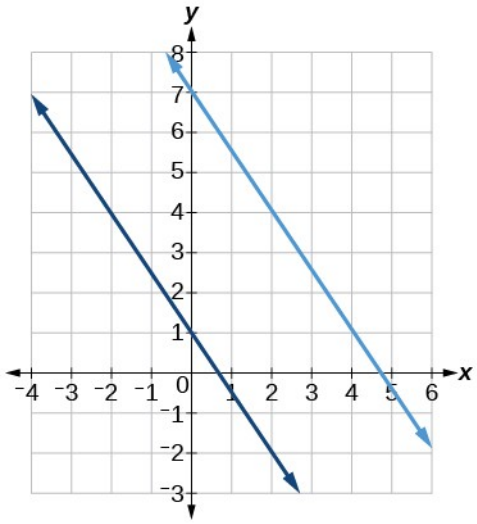
Lausn

Fasta x-gildið er 7, og jafnan er því $x=7$.

Ákvarðað hvort línur séu samsíða eða hornréttar

Línurnar tvær á mynd 17 eru samsíða línur; þær skerast aldrei. Takið eftir að þær eru nákvæmlega jafn brattar, sem merkir að hallatölur þeirra eru eins. Eini munurinn á línunum

er skurðpunkturinn við y-ás. Ef við hliðruðum annarri línunni lóðrétt í átt að skurðpunkti hinnar við y-ás féllu þær saman.

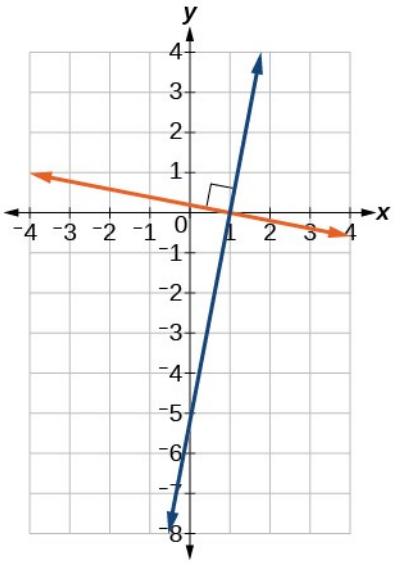


Mynd 17 Samsíða línur.

Við getum séð af jöfnum tveggja lína hvort þær séu samsíða með því að bera saman hallatölurnar. Ef hallatölurnar eru eins en skurðpunktarnir við y-ás ólíkir eru línurnar samsíða. Ef hallatölurnar eru ólíkar eru línurnar ekki samsíða.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x\right)=-2\,x+6 \\ f\left(x\right)=-2\,x-4 \end{array}\right\} \text{ samsíða} \qquad \left.\begin{array}{l} f\left(x\right)=3\,x+2 \\ f\left(x\right)=2\,x+2 \end{array}\right\} \text{ ekki samsíða}$$

Ólíkt samsíða línum skerast hornréttar línur. Við skurðpunktinn myndast rétt horn, eða 90 gráðu horn. Línurnar tvær á mynd 18 eru hornréttar.



Mynd 18 Hornréttar línur.

Hornréttar línur hafa ekki sömu hallatölu. Hallatölur þeirra tengjast með sérstökum hætti: hallatala annarrar línunnar er neikvætt gagnhverft gildi hallatölu hinnar. Margfeldi tölu og gagnhverfs gildis hennar er 1. Ef m_1 og m_2 eru neikvætt gagnhverf gildi hvors annars er margfeldi þeirra því –1.

$$m_1 m_2 = -1$$

2

Til að finna gagnhverft gildi tölu deilum við 1 með tölunni. Gagnhverft gildi 8 er því $(\frac{1}{8},)$ og gagnhverft gildi $(\frac{1}{8})$ er 8. Til að finna neikvætt gagnhverft gildi finnum við fyrst gagnhverfa gildið og skiptum síðan um formerki.

Eins og með samsíða línur getum við ákvarðað hvort tvær línur séu hornréttar með því að bera saman hallatölur þeirra, að því gefnu að hvorug línan sé lárétt eða lóðrétt. Hallatala hvorrar línu hér fyrir neðan er neikvætt gagnhverft gildi hallatölu hinnar og því eru línurnar hornréttar.

$f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ neikvætt gagnhverft gildi $\frac{1}{4}$ er -4

$f(x) = -4x + 3$ neikvætt gagnhverft gildi -4 er $\frac{1}{4}$

Margfeldi hallatalnanna er –1.

$$-4\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

SAMSÍÐA OG HORNRÉTTAR LÍNUR

Tvær línur eru samsíða ef þær skerast ekki. Hallatölur línanna eru eins.

$f(x) = m_1 x + b_1$ og $g(x) = m_2 x + b_2$ eru samsíða ef $m_1 = m_2$.

Þá og því aðeins að $b_1 = b_2$ og $m_1 = m_2$, segjum við að línurnar falli saman. Línur sem falla saman eru ein og sama línan.

Tvær línur eru hornréttar ef þær skerast í réttu horni.

$f(x) = m_1 x + b_1$ og $g(x) = m_2 x + b_2$ eru hornréttar ef $m_1 m_2 = -1$, og því $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

DÆMI 8

Borið kennsl á samsíða og hornréttar línur

Finnið meðal fallanna hér fyrir neðan þau tvö sem hafa samsíða gröf og þau tvö sem hafa hornrétt gröf.

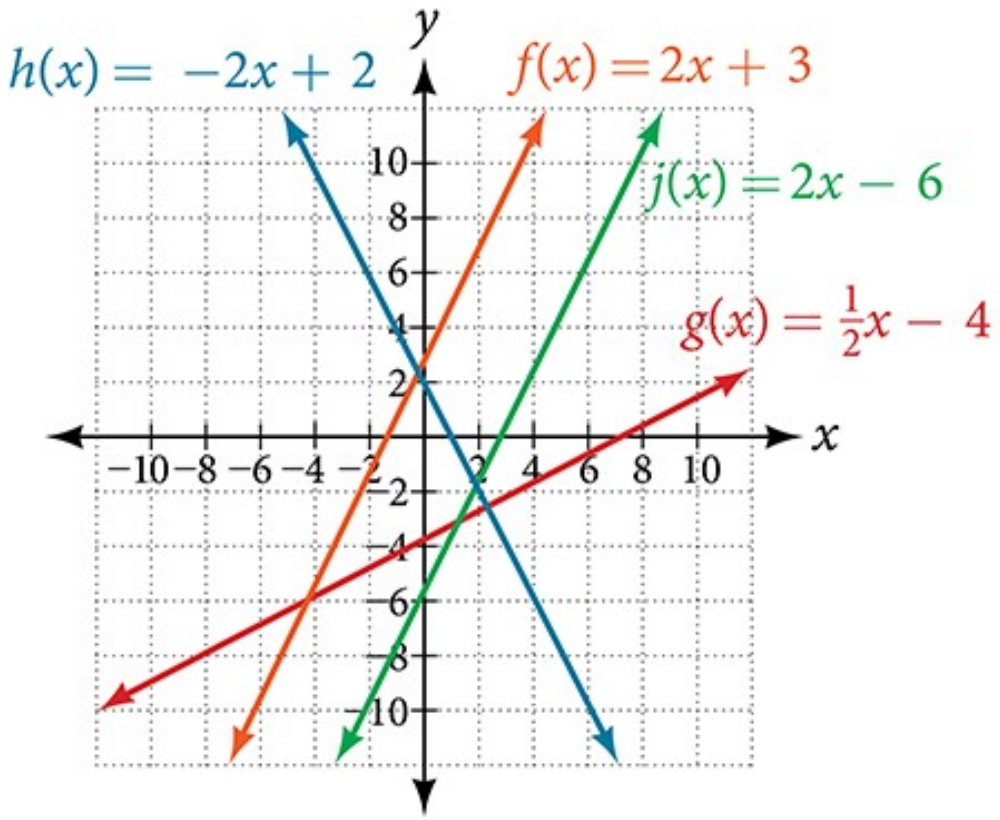
$$f(x) = 2x + 3 \qquad h(x) = -2x + 2$$
$$g(x) = \tfrac{1}{2}x - 4 \qquad j(x) = 2x - 6$$

Lausn

Samsíða línur hafa sömu hallatölu. Þar sem föllin $f(x)=2x+3$ og $j(x)=2x-6$ hafa bæði hallatöluna 2 tákna þau samsíða línur. Hallatölur hornréttra lína eru neikvætt gagnhverf gildi. Þar sem -2 og $(\frac{1}{2})$ eru neikvætt gagnhverf gildi tákna jöfnurnar $g(x)=\frac{1}{2}x-4$ og $h(x)=-2x+2$ hornréttar línur.

Greining

Gröf línanna eru sýnd á mynd 19.



Mynd 19. Gröf fjögurra falla til samanburðar á hallatölum.

Grafið sýnir að línurnar $f(x)=2x+3$ og $j(x)=2x-6$ eru samsíða og að línurnar $g(x)=\frac{1}{2}x-4$ og $h(x)=-2x+2$ eru hornréttar.

Jafna línu sem er samsíða eða hornrétt á gefna línu rituð

Ef við þekkjum jöfnu línu getum við notað það sem við vitum um hallatölur til að rita jöfnu línu sem er annaðhvort samsíða eða hornrétt á gefna línuna.

Jöfnur samsíða lína ritaðar

Tökum sem dæmi jöfnuna hér fyrir neðan.

$$f(x)=3x+1$$

Við vitum að hallatala línunnar sem fallið myndar er 3. Við vitum einnig að skurðpunkturinn við y-ás er $(0,1)$. Allar aðrar línur með hallatöluna 3 eru samsíða $f(x)$. Línur allra fallanna hér fyrir neðan eru því samsíða $f(x)$.

$$g(x) = 3x + 6$$
$$h(x) = 3x + 1$$
$$p(x) = 3x + \tfrac{2}{3}$$

Gerum nú ráð fyrir að við viljum rita jöfnu línu sem er samsíða f og liggur um punktinn $(1,\ 7)$. Við vitum þegar að hallatalan er 3. Við þurfum aðeins að ákvarða hvaða gildi b gefur réttu línuna. Við getum byrjað á punkthallaformi jöfnu línu og umritað hana síðan á hallatöluform.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 7 = 3(x - 1)$$
$$y - 7 = 3x - 3$$
$$y = 3x + 4$$

Því er $g(x)=3x+4$ samsíða $f(x)=3x+1$ og liggur um punktinn $(1,\ 7)$.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu línu sem er samsíða gefinni línu og liggur um gefinn punkt, þegar jafna falls og punktur á grafi þess eru gefin.

1. Finnið hallatölu fallsins.
2. Setjið gefnu gildin annaðhvort inn í almenna punkthallajöfnu eða hallatöluform línu.
3. Einfaldið.

DÆMI 9

Lína sem er samsíða gefinni línu fundin

Finnið línu sem er samsíða grafi $f(x)=3x+6$ og liggur um punktinn $(3,\ 0)$.

Lausn

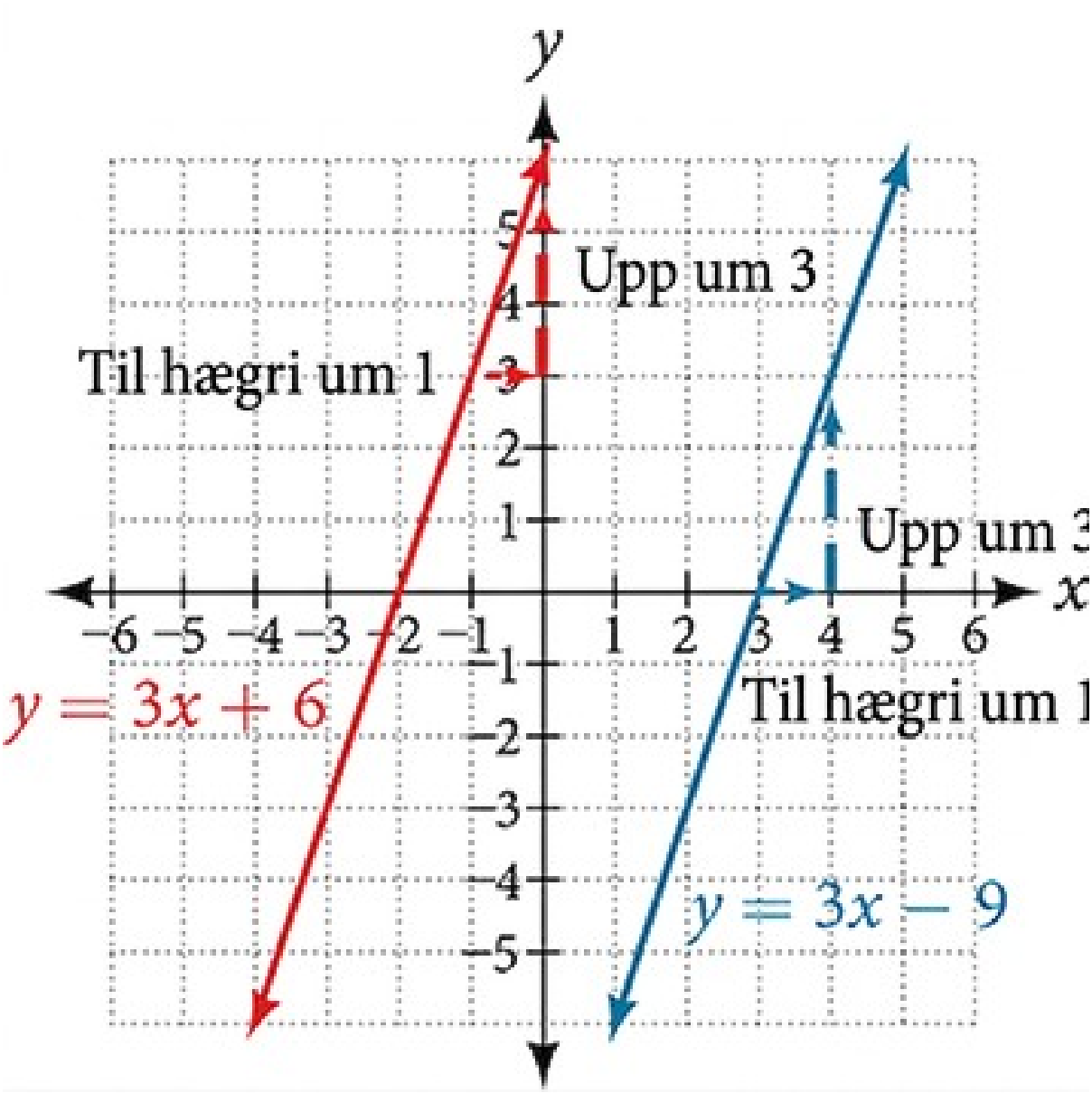
Hallatala gefnu línunnar er 3. Ef við veljum hallatöluform getum við sett $m=3$, $x=3$, og $f(x)=0$ inn í formið til að finna skurðpunktinn við y-ás.

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x + b \\ 0 &= 3(3) + b \\ b &= -9 \end{aligned}$$

Línan sem er samsíða $f(x)$ og liggur um $(3,\ 0)$ er $g(x)=3x-9$.

Greining

Við getum staðfest að línurnar tvær séu samsíða með því að teikna gröf þeirra. Mynd 20 sýnir að línurnar skerast aldrei.



Mynd 20. Tvær samsíða línur með merktum láréttum og lóðréttum breytingum.

2

Jöfnur hornréttra lína ritaðar

Við getum ritað jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu með mjög svipaðri aðferð. Í stað sömu hallatölu notum við þó neikvætt gagnhverft gildi gefnu hallatölunnar. Gerum ráð fyrir að eftirfarandi fall sé gefið:

$$f(x)=2x+4$$

Hallatala línunnar er 2 og neikvætt gagnhverft gildi hennar er $-\frac{1}{2}$. Öll föll með hallatöluna $-\frac{1}{2}$ eru hornrétt á $f(x)$. Línur allra fallanna hér fyrir neðan eru því hornréttar á $f(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= -\tfrac{1}{2}x + 4 \\ h(x) &= -\tfrac{1}{2}x + 2 \\ p(x) &= -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Líkt og áður getum við þrengt valið að tiltekinni hornréttri línu ef við vitum að hún liggur um gefinn punkt. Gerum ráð fyrir að við viljum rita jöfnu línu sem er hornrétt á $f(x)$ og liggur um punktinn $(4,\ 0)$. Við vitum þegar að hallatalan er $-\frac{1}{2}$. Nú getum við fundið skurðpunktinn við y-ás með því að setja gefnu gildin inn í hallatöluform línu og leysa fyrir b.

$$\begin{aligned} g(x) &= mx + b \\ 0 &= -\tfrac{1}{2}(4) + b \\ 0 &= -2 + b \\ 2 &= b \\ b &= 2 \end{aligned}$$

Jafna fallsins sem hefur hallatöluna $-\frac{1}{2}$ og skurðpunktinn 2 við y-ás er

$$g(x)=-\frac{1}{2}x+2.$$

Því er $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ hornrétt á $f(x)=2x+4$ og liggur um punktinn $(4,\ 0)$. Hafið í huga að hornréttar línur virðast ekki endilega hornréttar á grafreikni nema kvarðarnir á ásunum séu jafnir.

SPURT OG SVARAÐ

Lárétt lína hefur hallatöluna núll og lóðrétt lína hefur óskilgreinda hallatölu. Línurnar eru hornréttar en margfeldi hallatalna þeirra er ekki −1. Stangast þetta ekki á við skilgreiningu hornréttra lína?

Nei. Margfeldi hallatalna tveggja hornréttra línulegra falla er –1. Lóðrétt lína er hins vegar ekki graf falls og því er engin mótsögn við skilgreininguna.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu línu sem er hornrétt á gefna línu þegar jafna falls og punktur á grafi þess eru gefin.

1. Finnið hallatölu fallsins.
2. Finnið neikvætt gagnhverft gildi hallatölunnar.
3. Setjið nýju hallatöluna og gildin á x og y úr gefna hnitaparinu inn í $g(x)=mx+b$.
4. Leysið fyrir b.
5. Ritið jöfnu línunnar.

DÆMI 10

Jafna hornréttrar línu fundin

Finnið jöfnu línu sem er hornrétt á $f(x)=3x+3$ og liggur um punktinn $(3,\ 0)$.

Lausn

Upprunalega línan hefur hallatöluna $m=3$, svo hallatala hornréttu línunnar verður neikvætt gagnhverft gildi hennar, eða $-\frac{1}{3}$. Með þessari hallatölu og gefna punktinum getum við fundið jöfnu línunnar.

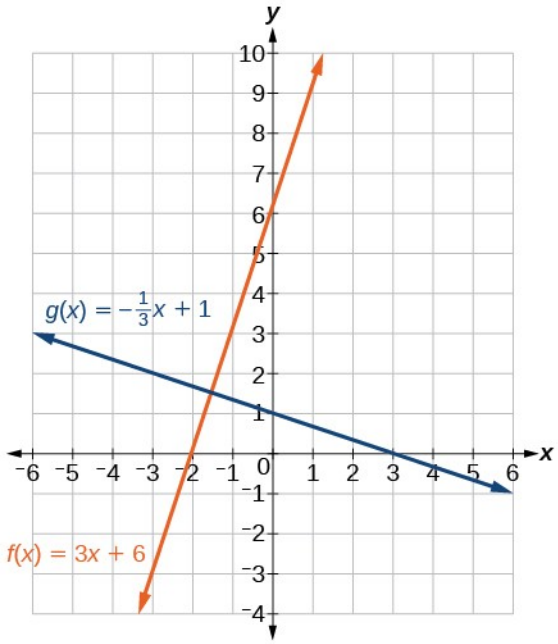
$$\begin{aligned} g(x) &= -\tfrac{1}{3}x + b \\ 0 &= -\tfrac{1}{3}(3) + b \\ 1 &= b \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Línan sem er hornrétt á $f(x)$ og liggur um $(3,\ 0)$ er $g(x)=-\frac{1}{3}x+1$.

Greining

Gröf línanna tveggja eru sýnd á mynd 21 hér fyrir neðan.

2



Mynd 21. Gröf tveggja hornréttra lína. Frummyndin sýnir f(x) = 3x + 6 í stað f(x) = 3x + 3 úr dæminu. Hallatalan er sú sama og niðurstaðan um hornréttu línuna breytist því ekki.

REYNIÐ SJÁLF #5

Þegar gefið er fallið $h(x)=2x-4$, ritið jöfnu línu sem liggur um $(0,0)$ og er

1. ⓐ samsíða $h(x)$
2. ⓑ hornrétt á $h(x)$

AÐFERÐ

Ritið jöfnu línu sem er hornrétt á línuna um gefnu punktana tvo og liggur um þriðja punktinn, þegar punktarnir þrír eru gefnir.

1. Ákvarðið hallatölu línunnar sem liggur um punktana.
2. Finnið neikvætt gagnhverft gildi hallatölunnar.
3. Setjið þekktu gildin inn í hallatöluformið eða punkthallaformið og ritið jöfnuna.
4. Einfaldið.

DÆMI 11

Jafna línu sem er hornrétt á gefna línu og liggur um punkt fundin

Lína liggur um punktana $(-2,\ 6)$ og $(4,5)$. Finnið jöfnu hornréttrar línu sem liggur um punktinn $(4,5)$.

Lausn

Við getum reiknað hallatölu gefnu línunnar út frá punktunum tveimur á henni.

$$\begin{aligned} m_1 &= \tfrac{5-6}{4-(-2)} \\ &= \tfrac{-1}{6} \\ &= -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Finnið neikvætt gagnhverft gildi hallatölunnar.

$$\begin{aligned} m_2 &= \tfrac{-1}{-\frac{1}{6}} \\ &= -1\left(-\tfrac{6}{1}\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Síðan getum við leyst fyrir skurðpunkt línunnar við y-ás, en hún liggur um punktinn $(4,5)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 6x + b \\ 5 &= 6(4) + b \\ 5 &= 24 + b \\ -19 &= b \\ b &= -19 \end{aligned}$$

Jafna línunnar sem er hornrétt á línuna um gefnu punktana tvo og liggur jafnframt um punktinn $(4,5)$ er

$$y = 6x - 19$$

REYNIÐ SJÁLF #6

Lína liggur um punktana $(-2,-15)$ og $(2,-3)$. Finnið jöfnu hornréttrar línu sem liggur um punktinn $(6,4)$.

Kerfi línulegra jafna leyst með grafi

Kerfi línulegra jafna inniheldur tvær eða fleiri línulegar jöfnur. Gröf tveggja lína skerast í einum punkti ef línurnar eru ekki samsíða. Tvær samsíða línur geta þó einnig skorist ef þær falla saman, það er ef þær eru ein og sama línan og skerast því í sérhverjum punkti. Ef línurnar tvær eru ekki samsíða uppfyllir eini skurðpunktur þeirra báðar jöfnurnar og táknar því lausn kerfisins.

Til að finna þennan punkt þegar jöfnurnar eru gefnar sem föll getum við leyst fyrir inntaksgildi þannig að $f(x) = g(x)$. Með öðrum orðum getum við sett formúlur línanna jafnar og leyst fyrir inntakið sem uppfyllir jöfnuna.

DÆMI 12

Skurðpunktur fundinn með algebru

Finnið skurðpunkt línanna $h(t)=3t-4$ og $j(t)=5-t$.

2

Lausn

Setjið $h(t)=j(t)$.

$$\begin{aligned} 3t-4 &= 5-t \\ 4t &= 9 \\ t &= \tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

Þetta segir okkur að línurnar skerast þegar inntakið er $\frac{9}{4}$.

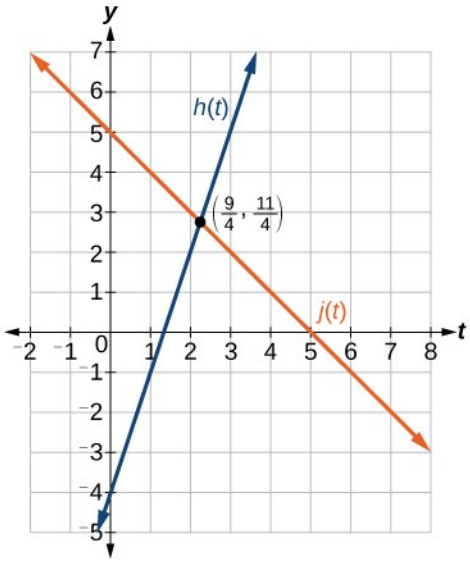
Síðan getum við fundið úttaksgildi skurðpunktsins með því að reikna gildi annars hvors fallsins fyrir þetta inntak.

$$\begin{aligned} j\left(\tfrac{9}{4}\right) &= 5-\tfrac{9}{4} \\ &= \tfrac{11}{4} \end{aligned}$$

Línurnar skerast í punktinum $\left(\frac{9}{4},\frac{11}{4}\right)$.

Greining

Niðurstaðan virðist eðlileg þegar mynd 22 er skoðuð.



Mynd 22. Gröf tveggja línulegra falla og skurðpunktur þeirra.

SPURT OG SVARAÐ

Ef við værum beðin um að finna skurðpunkt tveggja ólíkra samsíða lína, ætti eitthvað í lausnarferlinu að gefa til kynna að engin lausn væri til?

Já. Þegar jöfnurnar tvær hafa verið settar jafnar fæst mótsögnin „0 = rauntala önnur en núll“.

REYNIÐ SJÁLF #7

Skoðið grafið á mynd 22 og finnið eftirfarandi fyrir fallið $j(t)$:

1. ⓐ y-skurðpunkt
2. ⓑ x-skurðpunkt(a)
3. ⓒ hallatölu
4. ⓓ Er $j(t)$ samsíða eða hornrétt á $h(t)$ (eða hvorugt)?
5. ⓔ Er $j(t)$ vaxandi eða minnkandi fall (eða hvorugt)?
6. ⓕ Lýsið hvernig $j(t)$ fæst með ummyndun samsemdargrunnfallsins $f(x)=x$.

DÆMI 13

Núllpunktur rekstrar fundinn

Fyrirtæki selur íþróttahjálma. Það greiðir einu sinni fastan kostnað upp á 250.000 Bandaríkjadali. Það kostar 120 Bandaríkjadali að framleiða hvern hjálm og hann selst á 140 Bandaríkjadali.

1. ⓐ Finnið kostnaðarfallið C, fyrir framleiðslu x hjálma, í Bandaríkjadölum.
2. ⓑ Finnið tekjufallið R, fyrir sölu x hjálma, í Bandaríkjadölum.
3. ⓒ Finnið núllpunkt rekstrarins, það er skurðpunkt grafanna tveggja C og R.

Lausn

1. ⓐ Kostnaðarfallið er summa fasta kostnaðarins, 250.000 Bandaríkjadala, og breytilega kostnaðarins, 120 Bandaríkjadala á hvern hjálm.
   $C(x)=120x+250.000$
2. ⓑ Tekjufallið gefur heildartekjur af sölu x hjálma, $R(x)=140x$.
3. ⓒ Núllpunktur rekstrar er skurðpunktur grafa kostnaðarfallsins og tekjufallsins. Til að finna x-hnit skurðpunktsins setjum við jöfnurnar tvær jafnar og leysum fyrir x.

$$\begin{aligned} C(x)&=R(x)\\ 250.000+120x&=140x\\ 250.000&=20x\\ 12.500&=x\\ x&=12.500 \end{aligned}$$

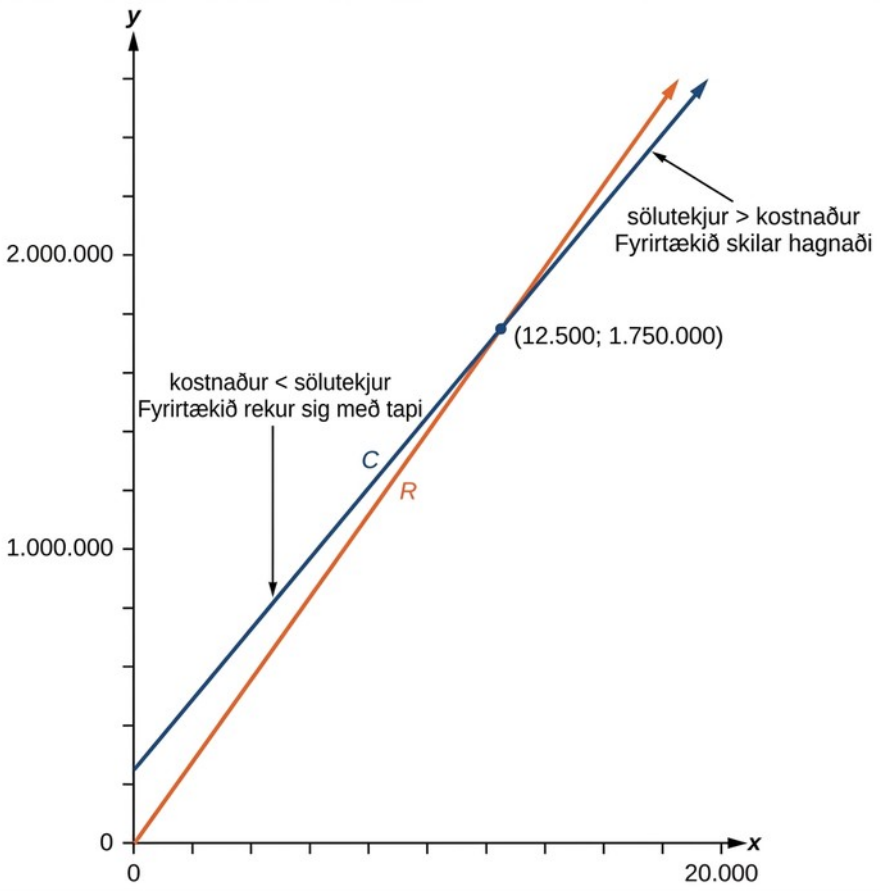
Til að finna y, reiknum við gildi tekjufallsins eða kostnaðarfallsins við 12.500.

$$\begin{aligned} R(12.500)&=140(12.500)\\ &=\$\ 1.750.000 \end{aligned}$$

Núllpunktur rekstrarins er $(12.500\,;\ 1.750.000)$.

Greining

Þetta merkir að reksturinn stendur á núlli ef fyrirtækið selur 12.500 hjálma; bæði sölutekjur og kostnaður nema þá 1,75 milljónum Bandaríkjadala. Sjá mynd 23.



Mynd 23. Kostnaður og tekjur eftir magni. Við núllpunkt rekstrarins eru tekjur jafnar kostnaði. Vinstra megin við punktinn er kostnaður meiri en tekjur og fyrirtækið tapar fé; ójafnan í enska myndtextanum þar er því röng.

VEFGÖGN

Í þessum vefgögnum má finna frekari kennslu og æfingar um gröf línulegra falla.

- Inntak falls fundið út frá úttaki og grafi
- Gröf falla teiknuð með töflum

Verkefni hluta 2.2

Hugtakaspurningar

1. Lýsið tengslum hallatalna og skurðpunkta við y-ás ef gröf tveggja línulegra falla eru samsíða.

2. Lýsið tengslum hallatalna og skurðpunkta við y-ás ef gröf tveggja línulegra falla eru hornrétt.

3. Ef jafna láréttrar línu er $f(x)=a$ og jafna lóðréttrar línu er $x=a$, hver er þá skurðpunktur þeirra? Útskýrið hvers vegna niðurstaðan er skurðpunkturinn.

4. Útskýrið hvernig finna má línu sem er samsíða grafi línulegs falls og liggur um gefinn punkt.

5. Útskýrið hvernig finna má línu sem er hornrétt á graf línulegs falls og liggur um gefinn punkt.

Algebra

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort línurnar sem jöfnurnar lýsa séu samsíða, hornréttar eða hvorugt:

6.

$$4x - 7y = 10$$
$$7x + 4y = 1$$

7.

$$3y + x = 12$$
$$-y = 8x + 1$$

8.

$$3y + 4x = 12$$
$$-6y = 8x + 1$$

9.

$$6x - 9y = 10$$
$$3x + 2y = 1$$

10.

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$
$$3x + 2y = 1$$

11.

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$
$$-3x + 4y = 1$$

Finnið skurðpunkta grafs hverrar jöfnu við x- og y-ás í eftirfarandi verkefnum.

12.

$$f(x)=-x+2$$

13.

$$g(x)=2x+4$$

14.

$$h(x)=3x-5$$

15.

$$k(x)=-5x+1$$

16.

$$-2x+5y=20$$

17.

$$7x+2y=56$$

Í hverju verkefni hér fyrir neðan er tveimur línum lýst. Finnið hallatölur línu 1 og línu 2 út frá lýsingunni. Eru línurnar í hverju pari samsíða, hornréttar eða hvorugt?

18.

- Lína 1: Liggur um $(0,6)$ og $(3,-24)$
- Lína 2: Liggur um $(-1,19)$ og $(8,-71)$

19.

- Lína 1: Liggur um $(-8,-55)$ og $(10,89)$
- Lína 2: Liggur um $(9,-44)$ og $(4,-14)$

20.

- Lína 1: Liggur um $(2,3)$ og $(4,-1)$
- Lína 2: Liggur um $(6,3)$ og $(8,5)$

21.

- Lína 1: Liggur um $(1,7)$ og $(5,5)$
- Lína 2: Liggur um $(-1,-3)$ og $(1,1)$

22.

- Lína 1: Liggur um $(0,5)$ og $(3,3)$
- Lína 2: Liggur um $(1,-5)$ og $(3,-2)$

23.

- Lína 1: Liggur um $(2,5)$ og $(5,-1)$
- Lína 2: Liggur um $(-3,7)$ og $(3,-5)$

24. Ritið jöfnu línu sem er samsíða $f(x)=-5x-3$ og liggur um punktinn $(2,\ -12)$.

25. Ritið jöfnu línu sem er samsíða $g(x)=3x-1$ og liggur um punktinn $(4,9)$.

26. Ritið jöfnu línu sem er hornrétt á $h(t)=-2t+4$ og liggur um punktinn $(-4,-1)$.

27. Ritið jöfnu línu sem er hornrétt á $p(t)=3t+4$ og liggur um punktinn $(3,1)$.

28. Finnið punktinn þar sem línan $f(x)=-2x-1$ sker línuna $g(x)=-x$.

29. Finnið punktinn þar sem línan $f(x)=2x+5$ sker línuna $g(x)=-3x-5$.

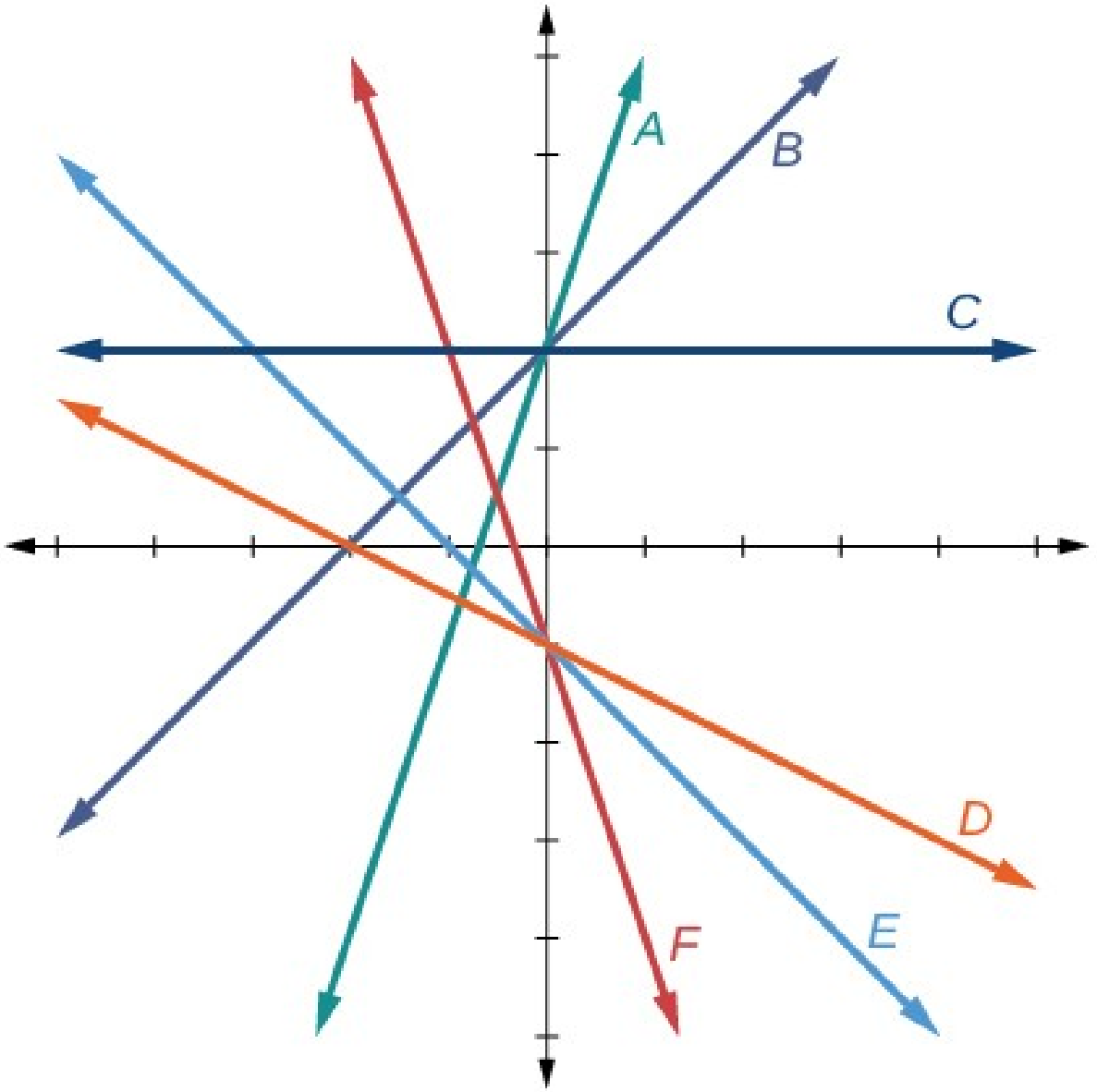
30. Notið algebru til að finna punktinn þar sem línan $f(x)=-\frac{4}{5}x+\frac{274}{25}$ sker línuna $h(x)=\frac{9}{4}x+\frac{73}{10}$.

31. Notið algebru til að finna punktinn þar sem línan $f(x)=\frac{7}{4}x+\frac{457}{60}$ sker línuna $g(x)=\frac{4}{3}x+\frac{31}{5}$.

Gröf

Parið hverja gefna línulega jöfnu í eftirfarandi verkefnum við graf hennar á mynd 24.

2



Mynd 24. Sex línur merktar A, B, C, D, E og F.

32.

$$f(x) = -x - 1$$

33.

$$f(x) = -3x - 1$$

34.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

35.

$$f(x) = 2$$

36.

$$f(x)=2+x$$

37.

$$f(x)=3x+2$$

Teiknið skissu af línu með gefna eiginleika í eftirfarandi verkefnum.

38. Skurðpunktur við x-ás er $(-4,\ 0)$ og skurðpunktur við y-ás er $(0,\ -2)$

39. Skurðpunktur við x-ás er $(-2,\ 0)$ og skurðpunktur við y-ás er $(0,\ 4)$

40. Skurðpunktur við y-ás er $(0,\ 7)$ og hallatalan er $-\frac{3}{2}$

41. Skurðpunktur við y-ás er $(0,\ 3)$ og hallatalan er $(\frac{2}{5})$

42. Liggur um punktana $(-6,\ -2)$ og $(6,\ -6)$

43. Liggur um punktana $(-3,\ -4)$ og $(3,\ 0)$

Teiknið graf hverrar jöfnu í eftirfarandi verkefnum.

44.

$$f(x)=-2x-1$$

45.

$$g(x)=-3x+2$$

46.

$$h(x)=\frac{1}{3}x+2$$

47.

$$k(x)=\frac{2}{3}x-3$$

48.

$$f(t)=3+2t$$

49.

$$p(t)=-2+3t$$

50.

$$x=3$$

51.

$$x=-2$$

52.

$$r(x)=4$$

53.

$$q(x)=3$$

54.

$$4x=-9y+36$$

55.

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$$

56.

$$3x-5y=15$$

57.

$$3x=15$$

58.

$$3y=12$$

59. Gerum ráð fyrir að $g(x)$ fáist með því að ummynda $f(x)=x$ með lóðréttri samþjöppun með stuðlinum $\frac{3}{4}$, hliðrun um 2 til hægri og hliðrun um 4 niður.

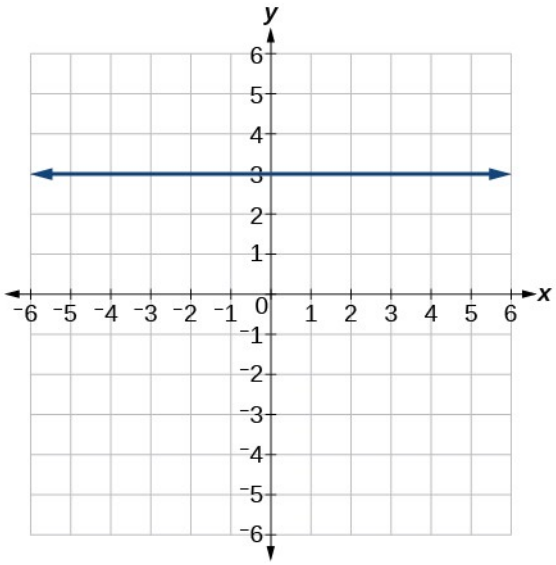
1. ⓐ Ritið jöfnu fyrir $g(x)$.
2. ⓑ Hver er hallatala línunnar?
3. ⓒ Finnið skurðpunkt línunnar við y-ás.

60. Gerum ráð fyrir að $g(x)$ fáist með því að ummynda $f(x)=x$ með lóðréttri samþjöppun með stuðlinum $\frac{1}{3}$, hliðrun um 1 til vinstri og hliðrun um 3 upp.

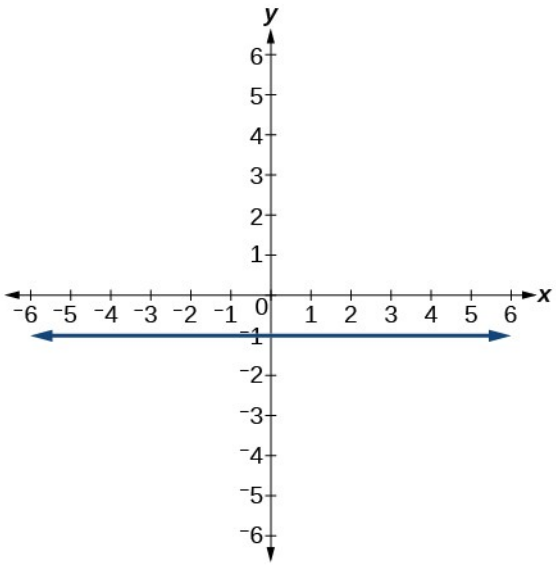
1. ⓐ Ritið jöfnu fyrir $g(x)$.
2. ⓑ Hver er hallatala línunnar?
3. ⓒ Finnið skurðpunkt línunnar við y-ás.

Ritið jöfnu línunnar sem sýnd er á grafinu í eftirfarandi verkefnum.

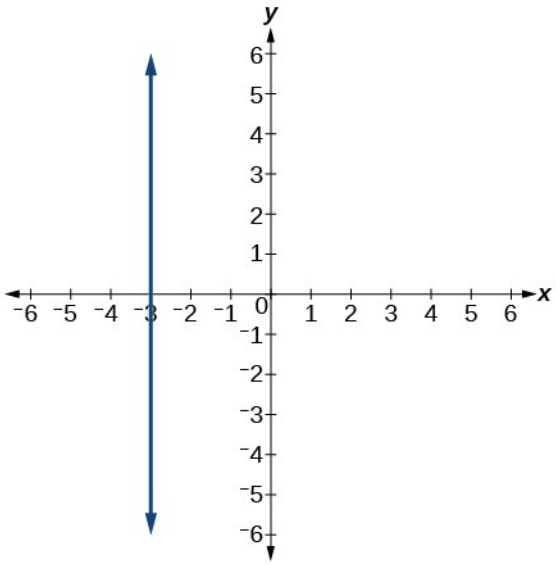
61.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

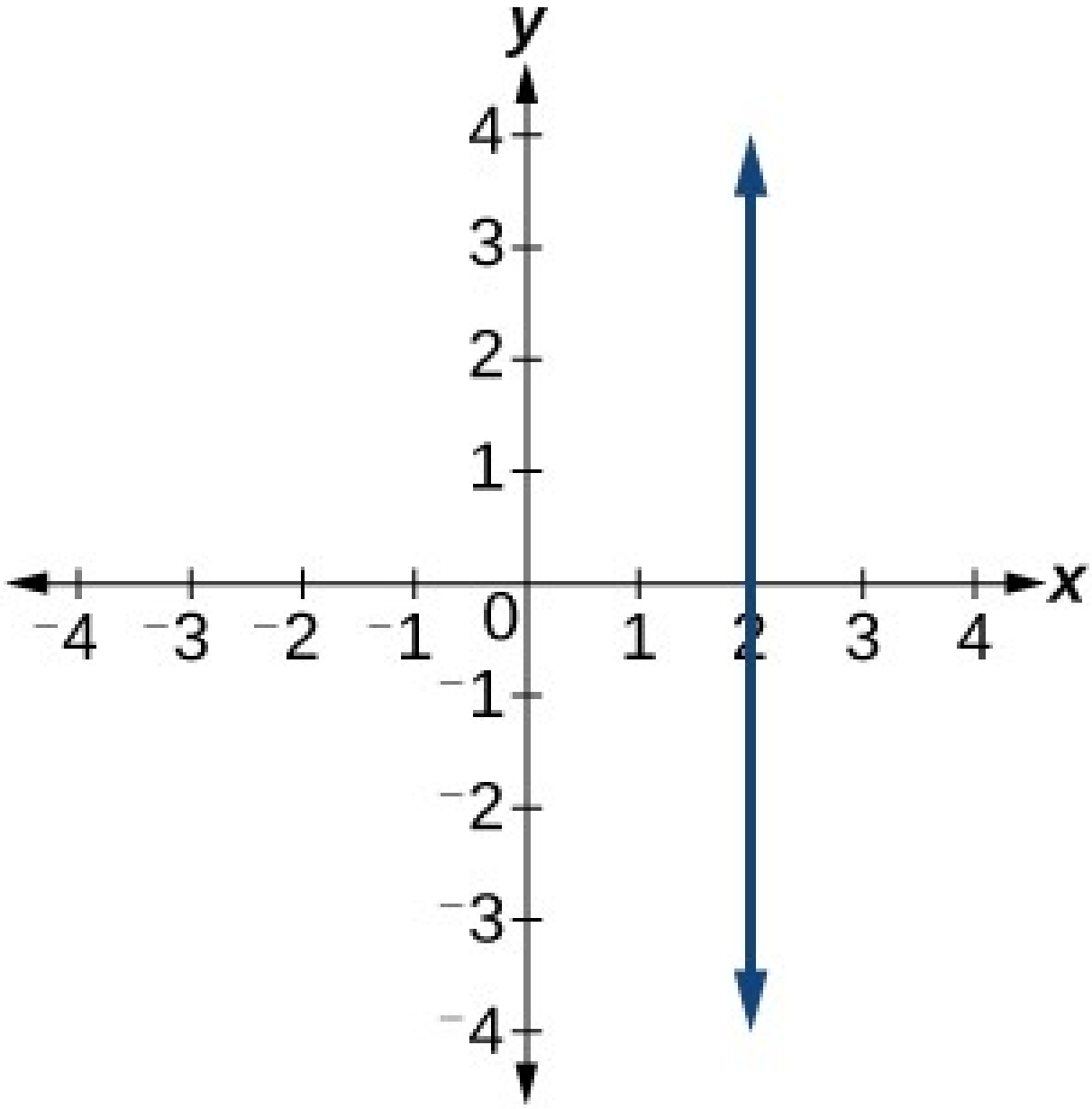
62.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

63.



64.



Finnið skurðpunkt hvers línupars í eftirfarandi verkefnum, sé hann til. Ef enginn skurðpunktur er til skuluð þið taka það fram.

65.

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$
$$-3x + 4y = 12$$

66.

$$2x - 3y = 12$$
$$5y + x = 30$$

67.

$$2x = y - 3$$
$$y + 4x = 15$$

68.

$$x - 2y + 2 = 3$$
$$x - y = 3$$

69.

$$5x + 3y = -65$$
$$x - y = -5$$

Viðbótarverkefni

70. Finnið jöfnu línunnar sem er samsíða línunni $g(x) = -0.01x + 2{,}01$ og liggur um punktinn $(1,\ 2)$.

71. Finnið jöfnu línunnar sem er hornrétt á línuna $g(x) = -0.01x + 2{,}01$ og liggur um punktinn $(1,\ 2)$.

Notið föllin $f(x) = -0.1x + 200$ og $g(x) = 20x + 0{,}1$. í eftirfarandi verkefnum.

72. Finnið skurðpunkt línanna f og g.

73. Hvar er $f(x)$ stærra en $g(x)$? Hvar er $g(x)$ stærra en $f(x)$?

Raunhæf viðfangsefni

74. Bílaleiga býður tvær leiguleiðir.

- Leið A: 30 Bandaríkjadalir á dag og 0,18 Bandaríkjadalir á mílu
- Leið B: 50 Bandaríkjadalir á dag og ótakmarkaður akstur innifalinn

Hve margar mílur þyrfti að aka til að leið B væri ódýrari?

75. Farsímafyrirtæki býður tvær leiðir fyrir textaskilaboð.

- Leið A: 20 Bandaríkjadalir á mánuði og 1 Bandaríkjadalur fyrir hver 100 textaskilaboð
- Leið B: 50 Bandaríkjadalir á mánuði og ótakmörkuð textaskilaboð innifalin

Hve mörg textaskilaboð þyrfti að senda á mánuði til að leið B væri ódýrari?

76. Farsímafyrirtæki býður tvær leiðir fyrir textaskilaboð.

- Leið A: 15 Bandaríkjadalir á mánuði og 2 Bandaríkjadalir fyrir hver 300 textaskilaboð
- Leið B: 25 Bandaríkjadalir á mánuði og 0,50 Bandaríkjadalir fyrir hver 100 textaskilaboð

Hve mörg textaskilaboð þyrfti að senda á mánuði til að leið B væri ódýrari?

2.3 Líkanagerð með línulegum föllum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Greina skref líkanagerðar og lausnar.
- Smíða línuleg líkön út frá textalýsingum.
- Smíða kerfi línulegra líkana.



Mynd 1 (heimild: EEK Photography/Flickr)

Elan er háskólanemi sem ætlar að eyða sumrinu í Seattle. Elan hefur safnað 3.500 Bandaríkjadölum fyrir ferðina og gerir ráð fyrir að verja 400 Bandaríkjadölum á viku í húsaleigu, mat og afþreyingu. Hvernig getum við ritað línulegt líkan sem lýsir aðstæðunum? Hver væri skurðpunkturinn við x-ás og hvað getur Elan lært af honum? Til að svara þessum og skyldum spurningum getum við smíðað líkan með línulegu falli. Slík líkön geta komið að miklu gagni við að greina vensl og spá út frá þeim. Í þessum hluta skoðum við dæmi um líkön með línulegum föllum.

Skref líkanagerðar og lausnar greind

Þegar við setjum aðstæður fram með línulegum föllum og leysum verkefni um stærðir með jöfnum breytingarhraða fylgjum við yfirleitt sömu lausnaraðferðum og fyrir önnur föll. Rifjum þær stuttlega upp:

1. Greinið stærðirnar sem breytast og skilgreinið síðan lýsandi breytur fyrir þær. Teiknið mynd eða skilgreinið hnitakerfi þegar það á við.
2. Lesið verkefnið vandlega og greinið mikilvægar upplýsingar. Leitið að upplýsingum sem gefa gildi breytanna eða hluta falllíkansins, til dæmis hallatölu og upphafsgildi.
3. Lesið verkefnið vandlega til að ákvarða hvað á að finna, greina, leysa eða túlka.
4. Finnið lausnarleið frá gefnu upplýsingunum að því sem leitað er að. Oft þarf að athuga og halda utan um einingar, smíða töflu eða jafnvel finna formúlu fyrir fallið sem líkan verkefnisins byggist á.
5. Ritið formúlu fyrir fallið þegar þess er þörf.
6. Leysið falljöfnuna eða reiknið gildi fallsins með formúlunni.
7. Metið hvort svarið sé eðlilegt við gefnar aðstæður og hvort það standist stærðfræðilega.
8. Setjið niðurstöðuna skýrt fram með viðeigandi einingum og svarið í heilum setningum þegar þess er þörf.

Línuleg líkön smíðuð

Skoðum nú nemann í Seattle. Í aðstæðum Elans breytast tvær stærðir: tími og fjárhæð. Fjárhæðin sem er eftir í fríinu fer eftir lengd dvalarinnar. Við getum notað þessar upplýsingar til að skilgreina breyturnar ásamt einingum þeirra.

- Úttak: M, eftirstandandi fjárhæð í Bandaríkjadölum
- Inntak: t, tími í vikum

Eftirstandandi fjárhæð fer því eftir vikufjöldanum: $M(t)$

Við getum einnig greint upphafsgildið og breytingarhraðann.

- Upphafsgildi: Þau söfnuðu $3.500, svo $3.500 er upphafsgildi M.
- Breytingarhraði: Elan gerir ráð fyrir að verja 400 Bandaríkjadölum á viku og því er breytingarhraðinn, eða hallatalan, −400 Bandaríkjadalir á viku.

Takið eftir að einingin Bandaríkjadalir á viku er eining úttaksbreytunnar deild með einingu inntaksbreytunnar. Þar sem hallatalan er neikvæð er línulega fallið jafnframt minnkandi. Það er rökrétt því að Elan eyðir fé í hverri viku.

Breytingarhraðinn er jafn og því getum við byrjað með línulega líkanið $M(t)=mt+b$. Síðan getum við sett gefinn skurðpunkt og hallatölu inn í líkanið.

$$M(t) = mt + b$$

$$M(t) = -400t + 3500$$

Til að finna $x-$ skurðpunktinn setjum við úttakið jafnt og núll og leysum fyrir inntakið.

$$\begin{aligned} 0 &= -400\,t + 3500 \\ t &= \frac{3500}{400} \\ &= 8{,}75 \end{aligned}$$

$x-$ skurðpunkturinn er 8,75 vikur. Þar sem hann táknar inntaksgildið þegar úttakið verður núll getum við sagt að Elan verði peningalaus eftir 8,75 vikur.

When modeling any real-life scenario with functions, there is typically a limited domain over which that model will be valid—almost no trend continues indefinitely. Here the domain refers to the number of weeks. In this case, it doesn't make sense to talk about input values less than zero. A negative input value could refer to a number of weeks before Elan saved $3.500, but the scenario discussed poses the question once they saved $3.500 because this is when the trip and subsequent spending starts. It is also likely that this model is not valid after the $x-$ intercept, unless Elan will use a credit card and go into debt. The domain represents the set of input values, so the reasonable domain for this function is $0 \le t \le 8{,}75$.

Í dæminu hér að framan fengum við skriflega lýsingu á aðstæðunum. Við fylgdum skrefum líkanagerðar til að greina upplýsingarnar. Gefnu upplýsingarnar eru þó ekki alltaf af sama toga. Stundum er skurðpunktur gefinn en stundum úttaksgildi. Við verðum að greina gefnu upplýsingarnar vandlega og nota þær rétt til að smíða línulegt líkan.

Líkan smíðað út frá gefnum skurðpunkti

Í sumum raunhæfum verkefnum er $y-$ skurðpunkturinn gefinn, það er fastinn eða upphafsgildið. Þegar $y-$ skurðpunkturinn er þekktur má reikna $x-$ skurðpunktinn. Gerum til dæmis ráð fyrir að Hannah ætli að greiða upp vaxtalaust lán frá foreldrum sínum. Eftirstöðvar lánsins eru 1.000 Bandaríkjadalir. Hún ætlar að greiða 250 Bandaríkjadali á mánuði þar til eftirstöðvarnar eru 0 Bandaríkjadalir. $y-$ skurðpunkturinn er upphafleg skuld, eða 1.000 Bandaríkjadalir. Breytingarhraðinn, eða hallatalan, er -250 Bandaríkjadalir á mánuði. Síðan getum við notað hallatöluformið og gefnu upplýsingarnar til að smíða línulegt líkan.

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + b \\ &= -250x + 1000 \end{aligned}$$

Nú getum við sett fallið jafnt og 0 og leyst fyrir x til að finna $x-$ skurðpunktinn.

$$\begin{aligned} 0 &= -250x + 1000 \\ 1000 &= 250x \\ 4 &= x \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$x-$ skurðpunkturinn sýnir hve margir mánuðir líða þar til eftirstöðvarnar verða 0 Bandaríkjadalir. x-skurðpunkturinn er 4 mánuðir og því tekur Hannah fjóra mánuði að greiða lánið upp.

Líkan smíðað út frá gefnu inntaki og úttaki

Mörg raunhæf viðfangsefni eru ekki jafn einföld og þau sem við vorum að skoða. Í þeim þurfum við í staðinn að greina einhvern eiginleika línulegs falls. Stundum þurfum við að reikna gildi línulega líkansins við gefið inntak eða setja jöfnu þess jafna tilteknu úttaki.

2

AÐFERÐ

Notið línulegt fall til að leysa verkefni þegar textadæmi gefur tvö pör inntaks- og úttaksgilda.

1. Greinið inntaks- og úttaksgildin.
2. Breytið gögnunum í tvö hnitapör.
3. Finnið hallatöluna.
4. Ritið línulega líkanið.
5. Notið líkanið til að spá með því að reikna gildi fallsins við gefið $x-$ gildi.
6. Notið líkanið til að finna $x-$ gildi sem gefur tiltekið $y-$ gildi.
7. Svarið spurningunni sem lögð er fyrir.

DÆMI 1

Línulegt líkan notað til að rannsaka íbúafjölda bæjar

Íbúum bæjar hefur fjölgað línulega. Árið 2004 voru íbúarnir 6.200 en árið 2009 hafði þeim fjölgað í 8.100. Gerið ráð fyrir að þróunin haldi áfram.

1. ⓐ Spáið fyrir um íbúafjöldann árið 2013.
2. ⓑ Finnið árið þegar íbúafjöldinn nær 15.000.

Lausn

Stærðirnar tvær sem breytast eru íbúafjöldi og tími. Við gætum notað ártalið sjálft sem inntaksstærð en það leiðir gjarnan til mjög óþjálla jafna, því skurðpunkturinn við $y-$ ás myndi þá samsvara árinu 0, fyrir meira en 2.000 árum!

Til að einfalda reikningana skilgreinum við inntakið sem fjölda ára frá 2004:

- Inntak: t, fjöldi ára frá 2004
- Úttak: $P(t)$, íbúafjöldi bæjarins

Til að spá fyrir um íbúafjöldann árið 2013 $(t=9)$, þurfum við fyrst jöfnu fyrir íbúafjöldann. Til að finna hvenær íbúafjöldinn nær 15.000 þurfum við á sama hátt að leysa fyrir inntakið sem gefur úttakið 15.000. Til að rita jöfnu þurfum við upphafsgildið og breytingarhraðann, eða hallatöluna.

Til að ákvarða breytingarhraðann notum við breytingu úttaks á hverja breytingu inntaks.

$$m=\frac{\text{breyting á úttaki}}{\text{breyting á inntaki}}$$

Verkefnið gefur okkur tvö pör inntaks- og úttaksgilda. Ef við lögum þau að breytunum sem við skilgreindum samsvarar árið 2004 $t=0$, og gefur punktinn $(0,6200)$. Takið eftir að með því að velja breytuna á snjallan hátt höfum við „gefið“ okkur skurðpunkt fallsins við y-ás. Árið 2009 samsvarar $t=5$, og gefur punktinn $(5,8100)$.

Hnitapörin tvö eru $(0,6200)$ og $(5,8100)$. Munið að fyrr í kaflanum skoðuðum við dæmi þar sem tveir punktar voru gefnir. Við getum notað þessi gildi til að reikna hallatöluna.

$$\begin{aligned} m &= \frac{8100-6200}{5-0} \\ &= \frac{1900}{5} \\ &= 380 \text{ manns á ári} \end{aligned}$$

Við þekkjum þegar skurðpunkt línunnar við y-ás og getum því ritað jöfnuna strax:

$$P(t) = 380t + 6200$$

Til að spá fyrir um íbúafjöldann árið 2013 reiknum við gildi fallsins þegar $t = 9$.

$$\begin{aligned} P(9) &= 380(9) + 6.200 \\ &= 9.620 \end{aligned}$$

Ef þróunin heldur áfram spáir líkanið því að íbúarnir verði 9.620 árið 2013.

Til að finna hvenær íbúafjöldinn nær 15.000 getum við sett $P(t) = 15000$ og leyst fyrir t.

$$\begin{aligned} 15000 &= 380t + 6200 \\ 8800 &= 380t \\ t &\approx 23{,}158 \end{aligned}$$

Líkanið okkar spáir því að íbúafjöldinn nái 15.000 rúmum 23 árum eftir 2004, eða um árið 2027.

REYNIÐ SJÁLF #1

Fyrirtæki selur kleinuhringi. Það ber 25.000 Bandaríkjadala fastan kostnað vegna húsaleigu, trygginga og annarra útgjalda. Framleiðsla hvers kleinuhrings kostar 0,25 Bandaríkjadali.

ⓐ Ritið línulegt líkan sem lýsir kostnaði fyrirtækisins C sem falli af x, fjölda framleiddra kleinuhringa. ⓑ Finnið og túlkið skurðpunktinn við y-ás.

REYNIÐ SJÁLF #2

Íbúum borgar hefur fjölgað línulega. Árið 2008 voru íbúarnir 28.200 en árið 2012 hafði þeim fjölgað í 36.800. Gerið ráð fyrir að þróunin haldi áfram.

1. ⓐ Spáið fyrir um íbúafjöldann árið 2014.
2. ⓑ Finnið árið þegar íbúafjöldinn nær 54.000.

Skýringarmynd notuð við líkanagerð

Í mörgum raunhæfum viðfangsefnum er gagnlegt að teikna mynd til að átta sig á hvernig nota megi breyturnar sem tákna inntak og úttak til að svara spurningu. Til að teikna myndina

skoðum við fyrst hvað spurt er um í verkefninu. Síðan ákvarðum við inntak og úttak. Skýringarmyndin á að sýna vensl breytanna. Oft eru teiknuð rúmfræðileg form eða myndir og vegalengdir merktar. Ef rétthyrndur þríhyrningur er teiknaður tengir regla Pýþagórasar hliðarnar. Ef rétthyrningur er teiknaður er gagnlegt að merkja breidd hans og hæð.

2

DÆMI 2

Skýringarmynd notuð til að setja gengna vegalengd fram með líkani

Anna og Emanuel leggja af stað frá sömu gatnamótum. Anna gengur í austur á 4 mílna hraða á klukkustund en Emanuel í suður á 3 mílna hraða á klukkustund. Þau nota talstöðvar með 2 mílna drægni. Hve löngu eftir að þau leggja af stað rofnar talstöðvarsambandið?

Lausn

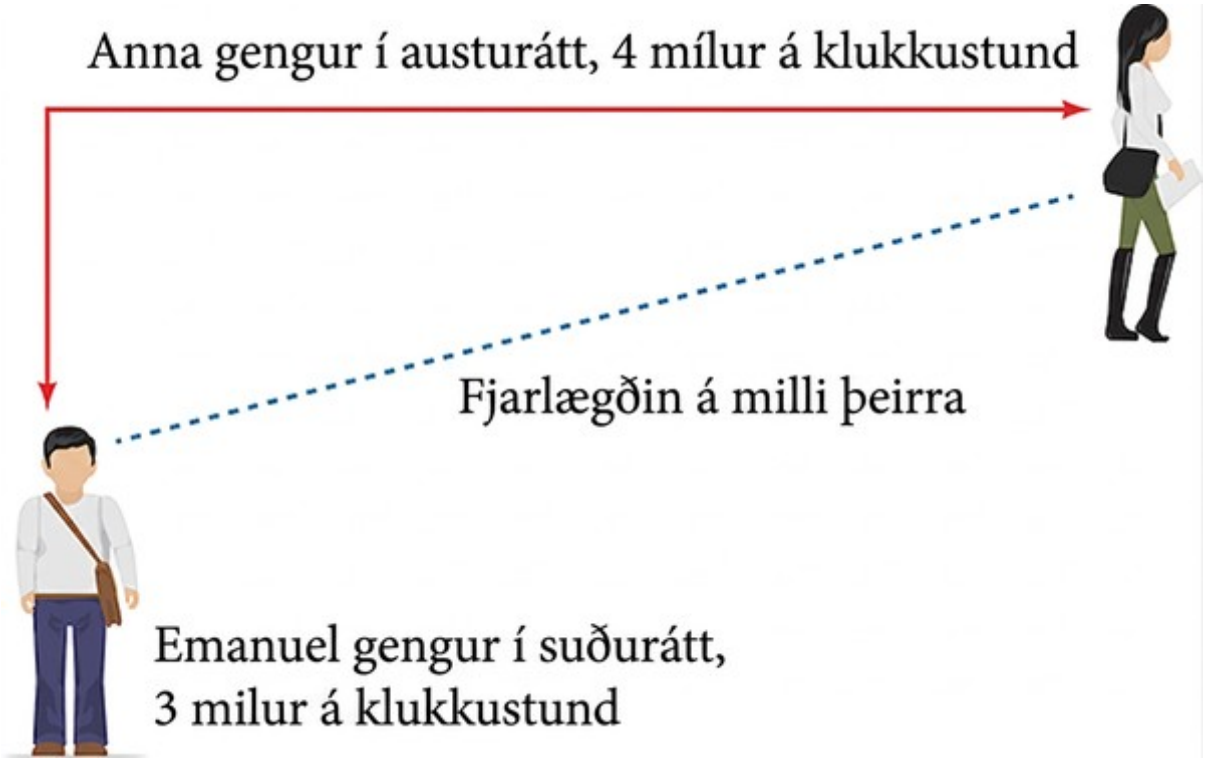
Í meginatriðum getum við svarað spurningunni að hluta með því að segja að talstöðvarsambandið rofni þegar 2 mílur eru á milli þeirra. Það leiðir til nýrrar spurningar:

„Hve langur tími líður þar til 2 mílur eru á milli þeirra?“

Í þessu verkefni breytast tími og staðsetning, en á endanum þurfum við að vita hve langur tími líður þar til 2 mílur eru á milli þeirra. Við sjáum að tími verður inntaksbreytan og skilgreinum því inntaks- og úttaksbreyturnar.

- Inntak: t, tími í klukkustundum.
- Úttak: $A(t)$, vegalengd í mílum, og $E(t)$, vegalengd í mílum

Þar sem ekki liggur í augum uppi hvernig skilgreina á úttaksbreytuna byrjum við á að teikna mynd á borð við mynd 2.



Mynd 2. Leiðir Önnu og Emanuels og beina vegalengdin á milli þeirra.

Upphafsgildi: Þau leggja bæði af stað frá sömu gatnamótum og þegar $t=0$, hlýtur gengin vegalengd hvors þeirra einnig að vera 0. Upphafsgildi hvors falls er því 0.

Breytingarhraði: Anna gengur 4 mílur á klukkustund og Emanuel 3 mílur á klukkustund. Hvort gildið um sig er breytingarhraði. Hallatalan er 4 fyrir A og 3 fyrir E.

Með þessum gildum getum við ritað formúlur fyrir vegalengdina sem hvort þeirra hefur gengið.

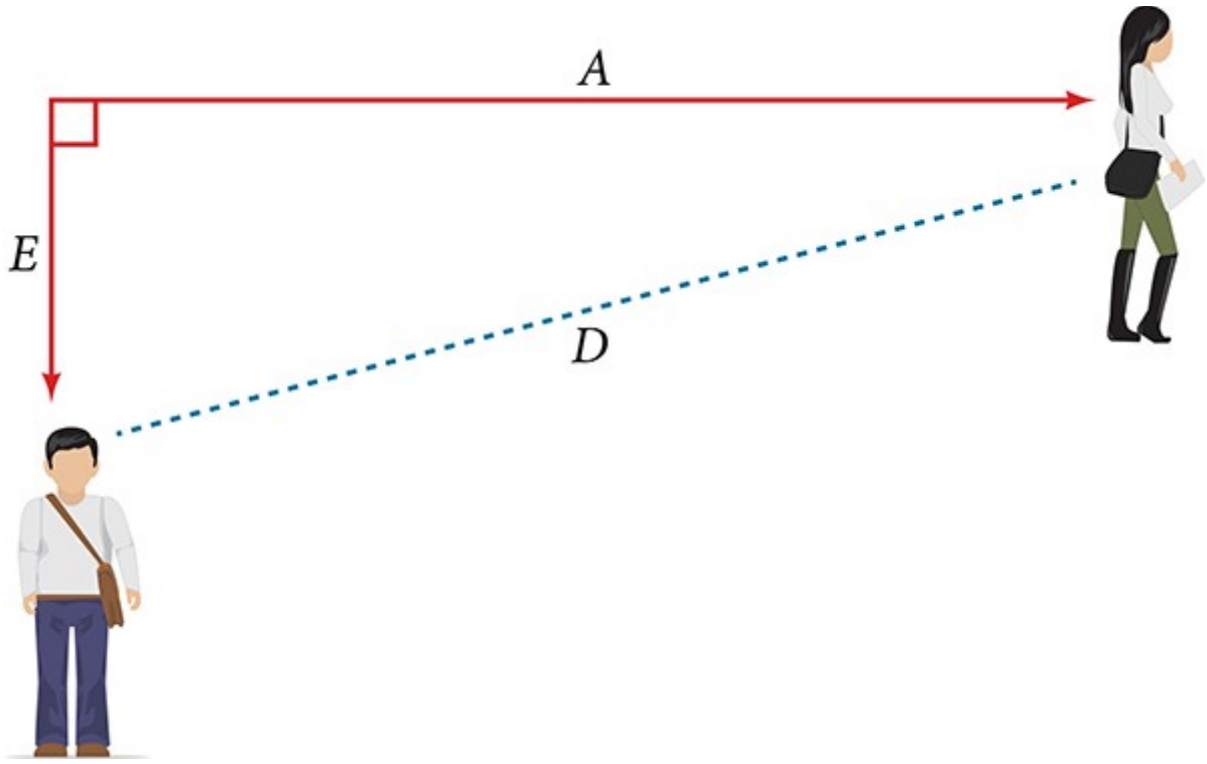
$$A(t) = 4t$$
$$E(t) = 3t$$

Í þessu verkefni skipta vegalengdirnar frá upphafspunktinum máli. Til að tákna þær getum við skilgreint hnitakerfi og valið gatnamótin þar sem þau lögðu af stað sem „upphafspunkt“. Síðan getum við notað breytuna A, sem við skilgreindum hér að framan, til að tákna staðsetningu Önnu og látið hana mæla vegalengd frá upphafspunktinum til austurs. Á sama hátt getum við notað breytuna E, til að tákna staðsetningu Emanuels, mælda frá upphafspunktinum til suðurs. Takið eftir að þegar við skilgreindum hnitakerfið tilgreindum við bæði hvar mælingin hefst og í hvaða stefnu er mælt.

Síðan getum við skilgreint þriðju breytuna, D, sem vegalengdina milli Önnu og Emanuels. Oft er gagnlegt að sýna breyturnar á skýringarmyndinni, eins og sjá má á mynd 3.

Munið að við þurfum að vita hve langur tími líður þar til D, vegalengdin milli þeirra, verður 2 mílur. Takið eftir að fyrir sérhvert gefið inntak t, lýsa úttökin $A(t), E(t)$, og $D(t)$ vegalengdum.

2



Mynd 3. Vegalengdirnar í göngudæminu mynda rétthyrndan þríhyrning.

Mynd 2 sýnir að við getum notað reglu Pýþagórasar vegna þess að við höfum teiknað rétt horn.

Með reglu Pýþagórasar fæst:

$$D(t)^2 = A(t)^2 + E(t)^2$$
$$= (4t)^2 + (3t)^2$$
$$= 16t^2 + 9t^2$$
$$= 25t^2$$

$D(t) = \pm\sqrt{25t^2}$ Leysum fyrir $D(t)$ með því að taka kvaðratrót

$$= \pm 5|t|$$

Í þessum aðstæðum skoðum við aðeins jákvæð gildi t, og því verður vegalengdin $D(t)$ alltaf jákvæð. Við getum einfaldað svarið í $D(t) = 5t$. Þetta merkir að vegalengdin milli Önnu og Emanuels er einnig línulegt fall. Þar sem D er línulegt fall getum við nú svarað hvenær vegalengdin milli þeirra nær 2 mílum. Við setjum úttakið $D(t) = 2$ og leysum fyrir t.

$$D(t)=2$$
$$5t=2$$
$$t=\frac{2}{5}=0{,}4$$

Talstöðvarsambandið rofnar eftir 0,4 klukkustund, eða 24 mínútur.

SPURT OG SVARAÐ

Ætti ég að teikna skýringarmyndir þegar upplýsingar byggjast á rúmfræðilegu formi?

Já. Teiknið formið og merkið stærðirnar og óþekktu stærðirnar inn á myndina.

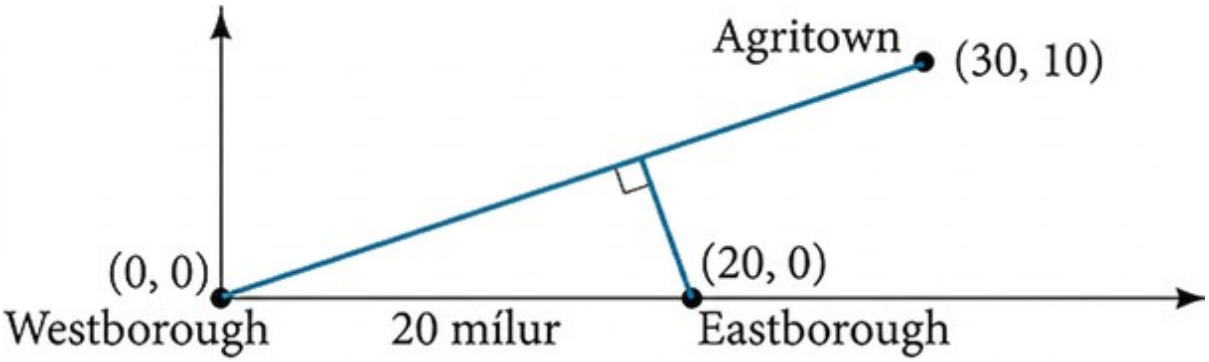
DÆMI 3

Skýringarmynd notuð til að setja fram vegalengd milli bæja

Beinn vegur liggur frá bænum Westborough að Agritown, 30 mílur í austur og 10 mílur í norður. Á leiðinni tengist honum annar vegur, hornréttur á þann fyrri, sem liggur til bæjarins Eastborough. Eastborough er 20 mílur beint í austur frá Westborough. Hve langt frá Westborough eru vegamótin?

Lausn

Hér gæti verið gagnlegt að teikna mynd af aðstæðunum. Sjá mynd 4. Síðan væri gagnlegt að setja upp hnitakerfi. Þótt upphafspunkturinn mætti vera hvar sem er virðist hentugt að setja hann við Westborough. Þá er Agritown í hnitunum $(30,\ 10)$, og Eastborough í $(20,0)$.



Mynd 4. Staðsetning bæjanna þriggja og hornrétt tenging frá Eastborough við veginn milli hinna bæjanna.

Með þessum punkti og upphafspunktinum getum við fundið hallatölu línunnar frá Westborough til Agritown:

$$m=\frac{10-0}{30-0}=\frac{1}{3}$$

Jafna vegarins frá Westborough til Agritown verður

$$W(x)=\frac{1}{3}x$$

Af þessu getum við ráðið að hornrétti vegurinn til Eastborough hefur hallatöluna $m=-3$. Þar sem Eastborough er í punktinum (20,0) getum við fundið jöfnuna:

2

$$\begin{aligned} E(x)&=-3\,x+b \\ 0&=-3\,(20)+b \quad \text{Setjum (20, 0) inn} \\ b&=60 \\ E(x)&=-3\,x+60 \end{aligned}$$

Nú getum við fundið hnit vegamótanna með því að finna skurðpunkt þessara lína. Við setjum jöfnurnar jafnar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\,x&=-3\,x+60 \\ \frac{10}{3}\,x&=60 \\ 10\,x&=180 \\ x&=18 \quad \text{Setjum þetta aftur inn í } W(x) \\ y&=W(18) \\ &=\frac{1}{3}(18) \\ &=6 \end{aligned}$$

Vegirnir skerast í punktinum (18, 6). Með fjarlægðarformúlunni getum við nú fundið vegalengdina frá Westborough að vegamótunum.

$$\begin{aligned} \text{vegalengd}&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &=\sqrt{(18-0)^2+(6-0)^2} \\ &\approx 18{,}974 \text{ mílur} \end{aligned}$$

Greining

Einn kostur línulegra líkana er að gröf fallanna eru línur. Í raunverulegum verkefnum sem fjalla um kort þarf því línuleg föll til að gera líkan af vegalengdum milli viðmiðunarpunkta.

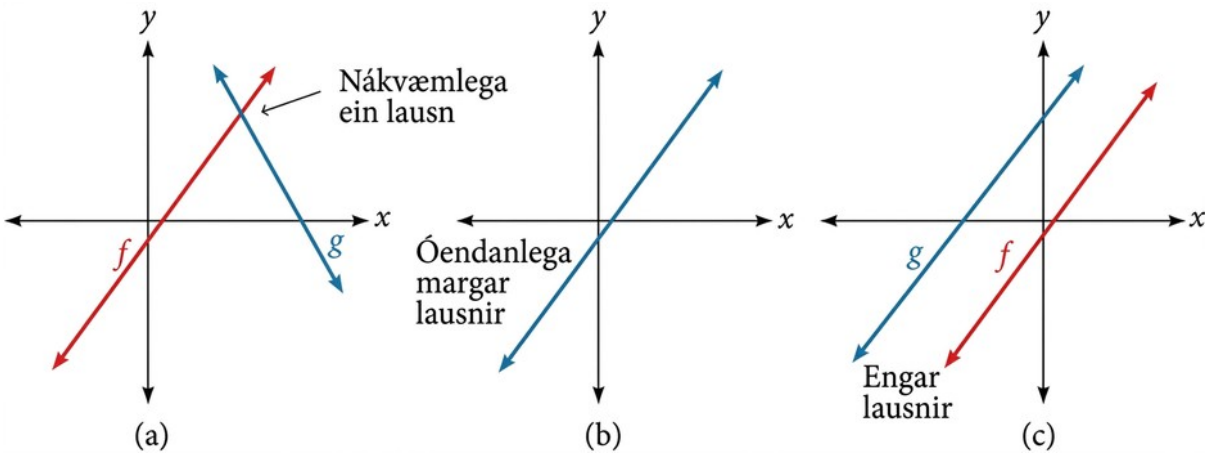
REYNIÐ SJÁLF #3

Beinn vegur liggur frá bænum Timpson að Ashburn, 60 mílur í austur og 12 mílur í norður. Á leiðinni tengist honum annar vegur, hornréttur á þann fyrri, sem liggur til bæjarins Garrison. Ef Garrison er 22 mílur beint í austur frá Timpson, hve langt frá Timpson eru vegamótin?

Smíði kerfa línulegra líkana

Hægt er að setja raunverulegar aðstæður sem fela í sér tvö eða fleiri línuleg föll fram með kerfi línulegra jafna. Munið að þegar kerfi línulegra jafna er leyst leitum við að punktum sem

línurnar tvær eiga sameiginlega. Yfirleitt koma þrjár gerðir svara til greina, eins og sýnt er á mynd 5.



Mynd 5. Tvær línulegar jöfnur geta haft eina lausn, óendanlega margar lausnir eða enga lausn.

AÐFERÐ

Ritið jöfnukerfið og ákvarðið lausnina þegar gefnar eru aðstæður sem lýsa kerfi línulegra jafna.

1. Ákvarðið inntak og úttak hvers línulegs líkans.
2. Ákvarðið hallatölu og skurðpunkt við y-ás fyrir hvert línulegt líkan.
3. Finnið lausnina með því að setja línulegu föllin tvö jöfn og leysa fyrir x, eða finnið skurðpunkt grafanna.

DÆMI 4

Kerfi línulegra líkana smíðað til að velja vörubílaleigu

Jamal velur á milli tveggja vörubílaleiga. Sú fyrri, Keep on Trucking, Inc., tekur 20 Bandaríkjadala fast upphafsgjald og síðan 59 sent á mílu. Sú síðari, Move It Your Way, tekur 16 Bandaríkjadala fast upphafsgjald og síðan 63 sent á míl[3]u. Hvenær er Keep on Trucking, Inc. hagstæðari kosturinn fyrir Jamal?

3

Gjaldskrár sóttar 2. ágúst 2010 af http://www.budgettruck.com og http://www.uhaul.com/

Lausn

Stærðirnar tvær sem skipta máli í þessu verkefni eru kostnaður og ekin vegalengd í mílum. Þar sem bera þarf saman tvö fyrirtæki skilgreinum við tvö föll.

2

Tafla 1

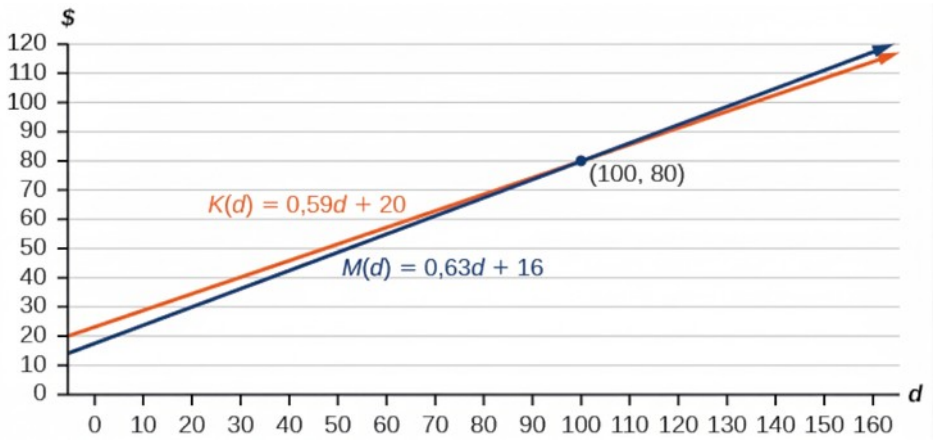
Inntak	d, ekin vegalengd í mílum
Úttök	$K(d)$: kostnaður í Bandaríkjadölum við að leigja hjá Keep on Trucking $M(d)$ kostnaður í Bandaríkjadölum við að leigja hjá Move It Your Way
Upphafsgildi	Fast upphafsgjald: $K(0)=20$ og $M(0)=16$
Breytingarhraði	$K(d)=\$0.59$ /mílu og $P(d)=\$0.63$ /mílu

Línulegt fall er á forminu $f(x)=mx+b$. Með breytingarhröðunum og upphafsgjöldunum getum við ritað jöfnurnar

$$K(d)=0{,}59\,d+20$$
$$M(d)=0{,}63\,d+16$$

Með þessum jöfnum getum við ákvarðað hvenær Keep on Trucking, Inc. er hagstæðari kosturinn. Þar sem ákvörðunin byggist eingöngu á kostnaðinum leitum við að því hvenær Move It Your Way kostar meira, það er hvenær $K(d)<M(d)$. Lausnarleiðin felst í því að finna jöfnur fallanna tveggja, finna skurðpunkt þeirra og kanna síðan hvar fallið $K(d)$ hefur lægra gildi.

Gröfin eru skissuð á mynd 6, þar sem $K(d)$ er sýnt með appelsínugulum lit.



Mynd 6. Leigukostnaður fyrirtækjanna tveggja eftir ekinni vegalengd. Jöfnurnar gefa sama kostnað, 79 Bandaríkjadali, við 100 mílur. Merkingin (100, 80) á frummyndinni er því ónákvæm.

Til að finna skurðpunktinn setjum við jöfnurnar jafnar og leysum:

$$\begin{aligned} K(d)&=M(d)\\ 0{,}59\,d+20&=0{,}63\,d+16\\ 4&=0{,}04\,d\\ 100&=d\\ d&=100 \end{aligned}$$

Þetta sýnir að kostnaðurinn hjá fyrirtækjunum tveimur er sá sami ef eknar eru 100 mílur. Með því að skoða grafið eða taka eftir að $K(d)$ vex hægar getum við ályktað að Keep on Trucking, Inc. sé ódýrari kosturinn þegar ekið er lengra en 100 mílur, það er þegar $d>100$.

MARGMIÐLUN

Skoðið þetta netefni til að fá frekari kennslu og æfingu í líkönum með línulegum föllum.

- Túlkun línulegs falls

Verkefni hluta 2.3

Hugtakaspurningar

1. Útskýrið hvernig finna má inntaksbreytuna í orðadæmi þar sem línulegt fall er notað.

2. Útskýrið hvernig finna má úttaksbreytuna í orðadæmi þar sem línulegt fall er notað.

3. Útskýrið hvernig túlka má upphafsgildið í orðadæmi þar sem línulegt fall er notað.

4. Útskýrið hvernig ákvarða má hallatöluna í orðadæmi þar sem línulegt fall er notað.

Algebruverkefni

5. Finnið flatarmál samsíðungs sem afmarkast af y-ásnum, línunni $x=3$, línunni $f(x)=1+2x$, og línu sem er samsíða $f(x)$ og liggur í gegnum $(2,\ 7)$.

6. Finnið flatarmál þríhyrnings sem afmarkast af x-ásnum, línunni $f(x)=12-\frac{1}{3}x$, og línu sem er hornrétt á $f(x)$ og liggur í gegnum upphafspunktinn.

7. Finnið flatarmál þríhyrnings sem afmarkast af y-ásnum, línunni $f(x)=9-\frac{6}{7}x$, og línu sem er hornrétt á $f(x)$ og liggur í gegnum upphafspunktinn.

8. Finnið flatarmál samsíðungs sem afmarkast af x-ásnum, línunni $g(x)=2$, línunni $f(x)=3x$, og línu sem er samsíða $f(x)$ og liggur í gegnum $(6,1)$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Íbúum bæjarins hefur fækkað með jöfnum hraða. Árið 2010 voru íbúarnir 5.900. Árið 2012 hafði þeim fækkað í 4.700. Gerið ráð fyrir að þessi þróun haldi áfram.

9. Spáið fyrir um íbúafjöldann árið 2016.

10. Ákvarðið hvaða ár íbúafjöldinn nær 0.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Íbúum bæjarins hefur fjölgað með jöfnum hraða. Árið 2010 voru íbúarnir 46.020. Árið 2012 hafði þeim fjölgað í 52.070. Gerið ráð fyrir að þessi þróun haldi áfram.

11. Spáið fyrir um íbúafjöldann árið 2016.

12. Ákvarðið hvaða ár íbúafjöldinn nær 75.000.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Upphaflegur íbúafjöldi bæjarins er 75.000. Íbúum fjölgar með jöfnum hraða um 2.500 á ári í 5 ár.

13. Finnið línulega fallið sem setur íbúafjölda bæjarins P fram sem fall af árinu, t, þar sem t er fjöldi ára frá upphafi líkansins.

2

14. Finnið eðlilegt skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins P.

15. Ef graf fallsins P er teiknað, finnið þá skurðpunkta þess við x- og y-ás og túlkið þá.

16. Ef graf fallsins P er teiknað, finnið þá hallatölu fallsins og túlkið hana.

17. Hvenær nær úttakið 100.000?

18. Hvert er úttakið 12 árum eftir upphaf líkansins?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Nýfætt barn vegur 7,5 pund. Barnið þyngist um hálft pund á mánuði fyrsta árið.

19. Finnið línulega fallið sem setur þyngd barnsins W fram sem fall af aldri þess í mánuðum, t.

20. Finnið eðlilegt skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins W.

21. Ef graf fallsins W er teiknað, finnið þá skurðpunkta þess við x- og y-ás og túlkið þá.

22. Ef graf fallsins W er teiknað, finnið þá hallatölu fallsins og túlkið hana.

23. Hvenær vó barnið 10,4 pund?

24. Hvert er úttakið þegar inntakið er 6,2? Túlkið svarið.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Frá 2005 til 2010 fækkaði þeim sem veiktust af kvefi yfir vetrarmánuðina jafnt og þétt um 205 á ári. Árið 2005 veiktust 12.025 manns.

25. Finnið línulega fallið sem setur fjölda þeirra sem veiktust af kvefi C fram sem fall af árinu, t.

26. Finnið eðlilegt skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins C.

27. Ef graf fallsins C er teiknað, finnið þá skurðpunkta þess við x- og y-ás og túlkið þá.

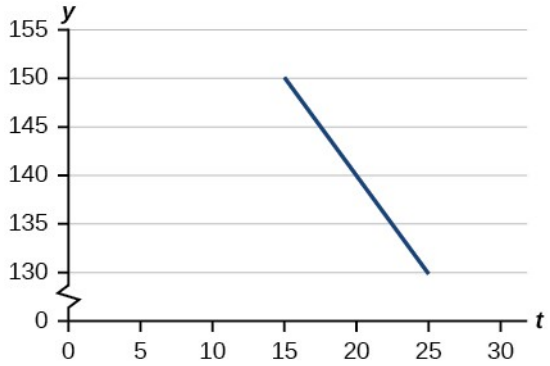
28. Ef graf fallsins C er teiknað, finnið þá hallatölu fallsins og túlkið hana.

29. Hvenær verður fjöldi þeirra sem veikjast af kvefi núll?

30. Hvaða ár verður fjöldi þeirra sem veikjast af kvefi 9.700?

Myndræn verkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafið á mynd 7, sem sýnir hagnað fyrirtækis, y, í þúsundum Bandaríkjadala á tilteknu ári, t, þar sem t táknar fjölda ára frá 1980.



Mynd 7. Graf línulegs líkans í verkefninu.

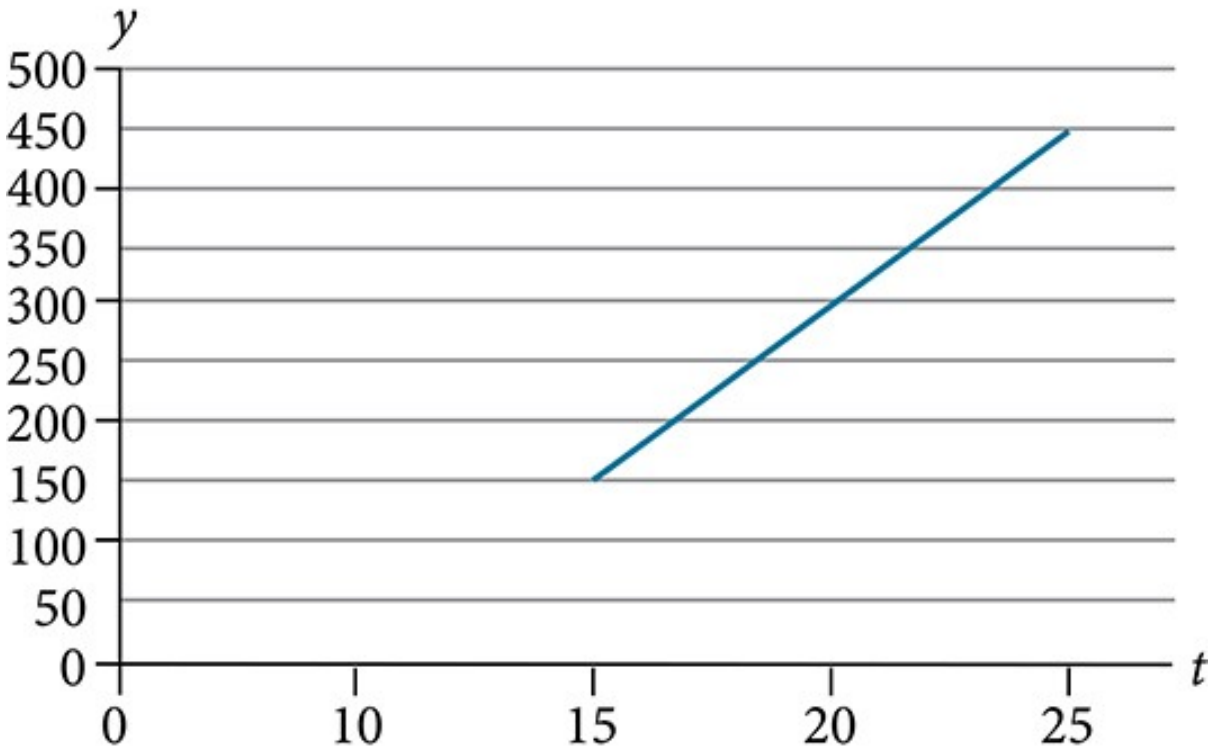
31. Finnið línulega fallið y, þar sem y er háð t, fjölda ára frá 1980.

32. Finnið skurðpunktinn við y-ás og túlkið hann.

33. Finnið skurðpunktinn við x-ás og túlkið hann.

34. Finnið hallatöluna og túlkið hana.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafið á mynd 8, sem sýnir hagnað fyrirtækis, y, í þúsundum Bandaríkjadala á tilteknu ári, t, þar sem t táknar fjölda ára frá 1980.



Mynd 8. Graf línulegs líkans í verkefninu.

35. Finnið línulega fallið y, þar sem y er háð t, fjölda ára frá 1980.

36. Finnið skurðpunktinn við y-ás og túlkið hann.

37. Finnið skurðpunktinn við x-ás og túlkið hann.

38. Finnið hallatöluna og túlkið hana.

Töluleg verkefni

2

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota miðgildi húsnæðisverðs í Mississippi og Hawaii, leiðrétt fyrir verðbólgu, sem sýnd eru í töflu 2. Gerið ráð fyrir að húsnæðisverðið breytist línulega.

Tafla 2

Ár	Mississippi	Hawaii
1950	$25.200	$74.400
2.000	$71.400	$272.700

39. Í hvoru ríkinu hefur húsnæðisverð hækkað hraðar?

40. Hvert hefði miðgildi húsnæðisverðs í Mississippi verið árið 2010 ef þessi þróun hefði haldið áfram?

41. Ef við gerum ráð fyrir að línulega þróunin hafi verið til staðar fyrir 1950 og haldið áfram eftir 2000, hvaða ár verða, eða urðu, miðgildi húsnæðisverðs í ríkjunum tveimur jöfn? (Svarið gæti verið fráleitt.)

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota miðgildi húsnæðisverðs í Indiana og Alabama, leiðrétt fyrir verðbólgu, sem sýnd eru í töflu 3. Gerið ráð fyrir að húsnæðisverðið breytist línulega.

Tafla 3

Ár	Indiana	Alabama
1950	$37.700	$27.100
2.000	$94.300	$85.100

42. Í hvoru ríkinu hefur húsnæðisverð hækkað hraðar?

43. Hvert hefði miðgildi húsnæðisverðs í Indiana verið árið 2010 ef þessi þróun hefði haldið áfram?

44. Ef við gerum ráð fyrir að línulega þróunin hafi verið til staðar fyrir 1950 og haldið áfram eftir 2000, hvaða ár verða, eða urðu, miðgildi húsnæðisverðs í ríkjunum tveimur jöfn? (Svarið gæti verið fráleitt.)

Raunhæf viðfangsefni

45. Árið 2004 var fjöldi nemenda í skóla 1.001. Árið 2008 hafði nemendum fjölgað í 1.697. Gerið ráð fyrir að fjöldinn breytist línulega.

1. ⓐ Hve mikið fjölgaði nemendum frá 2004 til 2008?
2. ⓑ Hve langan tíma tók að fjölga nemendum úr 1.001 í 1.697?
3. ⓒ Hver var meðalfjölgun nemenda á ári?
4. ⓓ Hver var nemendafjöldinn árið 2000?
5. ⓔ Finnið jöfnu fyrir nemendafjölda skólans, P, t árum eftir 2000.
6. ⓕ Notið jöfnuna til að spá fyrir um nemendafjölda skólans árið 2011.

46. Árið 2003 var fjöldi íbúa í bæ 1.431. Árið 2007 hafði íbúum fjölgað í 2.134. Gerið ráð fyrir að fjöldinn breytist línulega.

1. ⓐ Hve mikið fjölgaði íbúum frá 2003 til 2007?
2. ⓑ Hve langan tíma tók að fjölga íbúum úr 1.431 í 2.134?
3. ⓒ Hver var meðalfjölgun nemenda á ári?
4. ⓓ Hver var nemendafjöldinn árið 2000?
5. ⓔ Finnið jöfnu fyrir íbúafjölda bæjarins, P, t árum eftir 2000.
6. ⓕ Notið jöfnuna til að spá fyrir um íbúafjölda bæjarins árið 2014.

47. Símafyrirtæki býður mánaðarlega farsímaáskrift þar sem viðskiptavinur greiðir fast mánaðargjald og síðan tiltekna upphæð fyrir hverja mínútu í tal- og myndsímtölum. Ef viðskiptavinur notar 410 mínútur verður mánaðarkostnaðurinn 71,50 Bandaríkjadalir. Ef hann notar 720 mínútur verður mánaðarkostnaðurinn 118 Bandaríkjadalir.

1. ⓐ Finnið línulega jöfnu fyrir mánaðarkostnað farsímaáskriftarinnar sem fall af x, fjölda notaðra mínútna í mánuði.
2. ⓑ Túlkið hallatölu og skurðpunkt grafs jöfnunnar við y-ás.
3. ⓒ Notið jöfnuna til að finna heildarmánaðarkostnaðinn ef 687 mínútur eru notaðar.

48. Símafyrirtæki býður mánaðarlega farsímagagnaáskrift þar sem viðskiptavinur greiðir 10 Bandaríkjadala fast mánaðargjald og síðan tiltekna upphæð fyrir hvert megabæti (MB) af gögnum sem notað er í símanum. Ef viðskiptavinur notar 20 MB verður mánaðarkostnaðurinn 11,20 Bandaríkjadalir. Ef hann notar 130 MB verður mánaðarkostnaðurinn 17,80 Bandaríkjadalir.

1. ⓐ Finnið línulega jöfnu fyrir mánaðarkostnað gagnaáskriftarinnar sem fall af x, fjölda notaðra MB.
2. ⓑ Túlkið hallatölu og skurðpunkt grafs jöfnunnar við y-ás.
3. ⓒ Notið jöfnuna til að finna heildarmánaðarkostnaðinn ef 250 MB eru notuð.

49. Árið 1990 mældist elgstofn í garði 4.360 dýr. Árið 1999 var stofninn mældur aftur og reyndist 5.880 dýr. Gerið ráð fyrir að stofninn haldi áfram að breytast línulega.

1. ⓐ Finnið formúlu fyrir elgstofninn, P frá 1991.
2. ⓑ Hversu stórum elgstofni spáir líkanið árið 2003?

50. Árið 2003 mældist uglustofn í garði 340 fuglar. Árið 2007 var stofninn mældur aftur og reyndist 285 fuglar. Stofninn breytist línulega. Látið inntakið vera fjölda ára frá 2003.

1. ⓐ Finnið formúlu fyrir uglustofninn, P. Látið inntakið vera fjölda ára frá 2003.
2. ⓑ Hversu stórum uglustofni spáir líkanið árið 2012?

51. Hélíumforði Bandaríkjanna nam um 16 milljörðum rúmfeta árið 2010 og minnkar um 2,1 milljarð rúmfeta á ári.

1. ⓐ Gefið línulega jöfnu fyrir eftirstandandi hélíumforða Bandaríkjanna, R, sem fall af t, fjölda ára frá 2010.
2. ⓑ Hver verður hélíumforðinn árið 2015?
3. ⓒ Hvaða ár verður hélíumforði Bandaríkjanna uppurinn ef eyðingarhraðinn breytist ekki?

52. Gerið ráð fyrir að olíuforði heimsins árið 2014 sé 1.820 milljarðar tunna. Ef heildarforðinn minnkar að meðaltali um 25 milljarða tunna á ári:

1. ⓐ Gefið línulega jöfnu fyrir eftirstandandi olíuforða, R, sem fall af t, fjölda ára frá þessu ári.
2. ⓑ Hver verður olíuforðinn eftir sjö ár?
3. ⓒ Hvenær verður olíuforði heimsins uppurinn ef hann heldur áfram að minnka með jöfnum hraða?

53. Þið veljið á milli tveggja fyrirframgreiddra farsímaáskrifta. Fyrri áskriftin kostar 26 sent á mínútu. Fyrir síðari áskriftina greiðið þið 19,95 Bandaríkjadala mánaðargjald auk 11 senta á mínútu. Hve margar mínútur þyrftuð þið að nota á mánuði til að síðari áskriftin væri hagstæðari?

54. Þið veljið á milli tveggja gluggaþvottafyrirtækja. Það fyrra tekur 5 Bandaríkjadali fyrir hvern glugga. Það síðara tekur 40 Bandaríkjadala grunngjald auk 3 Bandaríkjadala fyrir hvern glugga. Hve marga glugga þyrftuð þið að láta þvo til að síðara fyrirtækið væri hagstæðara?

55. Þegar þið eruð ráðin til nýs starfs við skartgripasölu getið þið valið á milli tveggja launakosta:

- Kostur A: 17.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 12% söluþóknun
- Kostur B: 20.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 5% söluþóknun

Hversu mikið af skartgripum þyrftuð þið að selja til að kostur A gæfi hærri tekjur?

56. Þegar þið eruð ráðin til nýs starfs við raftækjasölu getið þið valið á milli tveggja launakosta:

- Kostur A: 14.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 10% söluþóknun
- Kostur B: 19.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 4% söluþóknun

Hversu mikið af raftækjum þyrftuð þið að selja til að kostur A gæfi hærri tekjur?

57. Þegar þið eruð ráðin til nýs starfs við raftækjasölu getið þið valið á milli tveggja launakosta:

- Kostur A: 20.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 12% söluþóknun
- Kostur B: 26.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 3% söluþóknun

Hversu mikið af raftækjum þyrftuð þið að selja til að kostur A gæfi hærri tekjur?

58. Þegar þið eruð ráðin til nýs starfs við raftækjasölu getið þið valið á milli tveggja launakosta:

- Kostur A: 10.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 9% söluþóknun
- Kostur B: 20.000 Bandaríkjadala grunnlaun á ári og 4% söluþóknun

Hversu mikið af raftækjum þyrftuð þið að selja til að kostur A gæfi hærri tekjur?

2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

NÁMSMARKMIÐ

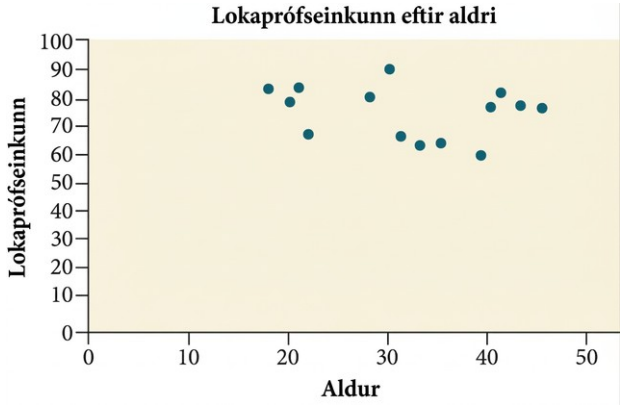
Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna og túlka dreifirit.
- Finna línu sem fellur best að gögnunum.
- Greina á milli línulegra og ólínulegra vensla.
- Nota línulegt líkan til að spá fyrir.

Prófessor reynir að greina leitni í lokaprófseinkunnum. Nemendahópurinn er fjölbreyttur og því veltir prófessorinn fyrir sér hvort samband sé milli aldurs nemenda og einkunna þeirra á lokaprófinu. Ein leið til að greina einkunnirnar er að teikna mynd sem tengir aldur hvers nemanda við lokaprófseinkunnina. Í þessum hluta skoðum við slíka mynd, sem nefnist dreifirit.

Teikning og túlkun dreifirita

Dreifirit er graf punkta sem getur sýnt samband milli tveggja gagnasafna. Ef sambandið kemur frá línulegu líkani, eða líkani sem er nærri því línulegt, getur prófessorinn dregið ályktanir með þekkingu sinni á línulegum föllum. Mynd 1 sýnir dæmi um dreifirit.



Mynd 1 Dreifirit aldurs og lokaprófseinkunna

Takið eftir að dreifiritið sýnir ekki línulegt samband. Punktarnir virðast ekki fylgja neinni leitni. Með öðrum orðum virðist ekkert samband vera milli aldurs nemanda og lokaprófseinkunnar hans.

DÆMI 1

Dreifirit notað til að rannsaka tíst krybba

Taflan hér fyrir neðan sýnir fjölda tísta krybba á 15 sekúndum við nokkur mismunandi lofthitastig í gráðum á Fahrenheit-kvarða 4. Teiknið dreifirit af gögnunum og ákvarðið hvort þau virðast tengjast línulega.

4

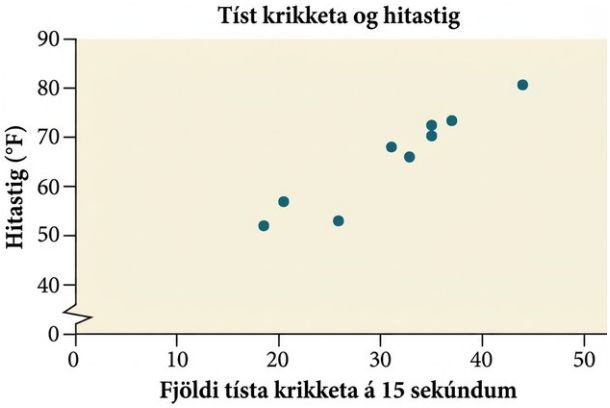
Valin gögn frá http://classic.globe.gov/fsl/scientistsblog/2007/10/. Sótt 3. ágúst 2010

Tafla 1

Tíst	44	35	20,4	33	31	35	18,5	37	26
Hitastig	80,5	70,5	57	66	68	72	52	73,5	53

Lausn

Þegar gögnin eru teiknuð eins og á mynd 2 virðist vera leitni í þeim. Við sjáum að tístum fjölgar þegar hitastigið hækkar. Leitnin virðist nokkurn veginn línuleg en þó alls ekki fullkomlega.



Mynd 2. Dreifirit fjölda tísta krybba og lofthita.

Að finna línu sem fellur best að gögnunum

Þegar við sjáum að nota þarf línulegt fall sem líkan fyrir gögnin vaknar eðlilega spurningin: „Hvert er þetta línulega fall?“ Ein leið til að nálga línulega fallið er að skissa línuna sem virðist falla best að gögnunum. Síðan getum við framlengt línuna þar til við getum staðfest skurðpunkt hennar við y-ás. Við getum nálgað hallatölu línunnar með því að framlengja hana þar til við getum áætlað

$$\frac{\text{lóðrétt breyting}}{\text{lárétt breyting}}.$$

DÆMI 2

Að finna línu sem fellur best að gögnunum

Finnið línulegt fall sem fellur að gögnunum í töflu 1 með því að meta sjónrænt hvaða lína virðist falla best að þeim.

Lausn

Við gætum byrjað á að skissa línu á grafið.

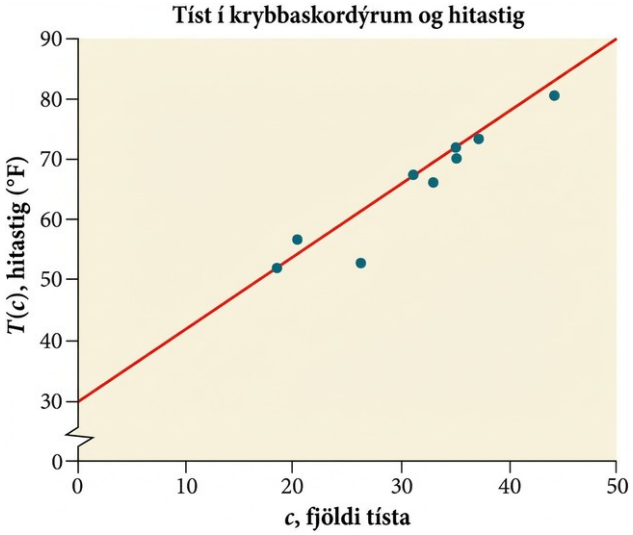
Ef við notum upphafspunkt og endapunkt handteiknuðu línunnar, punktana (0, 30) og (50, 90), er hallatala grafsins

$$m=\frac{60}{50}=1{,}2$$

og línan sker y-ás við 30. Þá fæst jafnan

$$T\left(c\right)=1{,}2\ c+30$$

þar sem c er fjöldi tísta á 15 sekúndum og $T\left(c\right)$ er hitastigið í gráðum á Fahrenheit-kvarða. Jafnan sem fæst er sýnd á mynd 3.



Mynd 3. Handteiknuð línuleg nálgun að gögnunum um tíst krybba.

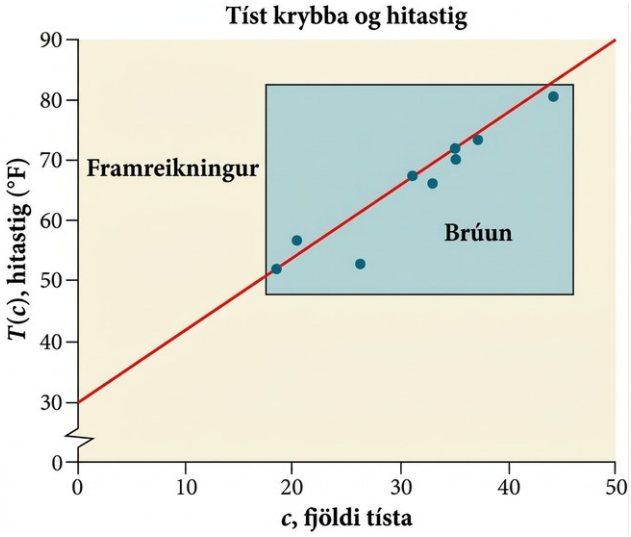
Greining

Síðan má nota þessa línulegu jöfnu til að nálga svör við ýmsum spurningum um leitnina.

Að greina á milli brúunar og framreiknings

Í flestum dæmum liggja gögnin ekki fullkomlega á línunni en jafnan er besta mat okkar á því hvernig sambandið hegðar sér utan þeirra gilda sem gögn eru til um. Við notum aðferð sem nefnist brúun þegar við spáum gildi innan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna. Framreikningur er notaður þegar við spáum gildi utan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna.

Á mynd 4 eru aðferðirnar tvær bornar saman fyrir gögnin um tíst krybba úr dæmi 2. Brúun ætti sér stað ef líkanið væri notað til að spá fyrir um hitastig þegar fjöldi tísta væri á bilinu 18,5 til 44. Framreikningur ætti sér stað ef líkanið væri notað til að spá fyrir um hitastig þegar fjöldi tísta væri minni en 18,5 eða meiri en 44.



Mynd 4 Brúun á sér stað innan skilgreiningarmengis og myndmengis gefnu gagnanna en framreikningur utan þeirra.

Það er munur á því hvort við spáum gildi innan eða utan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna. Spár utan þessara mengja eru takmörkunum háðar. Þegar líkanið á ekki lengur við eftir tiltekinn punkt er stundum sagt að líkanið hætti að gilda. Til dæmis mætti spá fyrir um kostnaðarfall yfir tveggja ára tímabil með því að skoða gögn þar sem inntakið er tími í árum og úttakið kostnaður. Ef við reynum hins vegar að framreikna kostnað þegar $x = 50$, það er eftir 50 ár, á líkanið ekki við, því að við getum ekki séð fyrir alla þá þætti sem hafa áhrif svo langt fram í tímann.

BRÚUN OG FRAMREIKNINGUR

Mismunandi aðferðir við spár eru notaðar til að greina gögn.

- Brúun felst í því að spá gildi innan skilgreiningarmengis og/eða myndmengis gagnanna.
- Framreikningur felst í því að spá gildi utan skilgreiningarmengis og/eða myndmengis gagnanna.
- **Líkan hættir að eiga við** á þeim punkti þar sem það lýsir aðstæðunum ekki lengur nægilega vel.

DÆMI 3

Skilningur á brúun og framreikningi

Notið gögnin um krybbur í töflu 1 til að svara eftirfarandi spurningum:

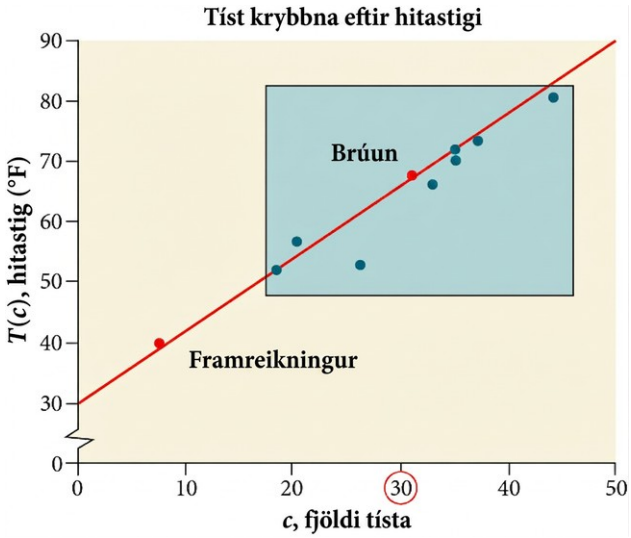
1. ⓐ Er það brúun eða framreikningur að spá fyrir um hitastig þegar krybbur tísta 30 sinnum á 15 sekúndum? Gerið spána og ræðið hvort hún sé raunhæf.
2. ⓑ Er það brúun eða framreikningur að spá fyrir um fjölda tísta krybba við 40 gráður? Gerið spána og ræðið hvort hún sé raunhæf.

Lausn

1. ⓐ Fjöldi tísta í gögnunum var frá 18,5 til 44. Spá við 30 tíst á 15 sekúndum er innan skilgreiningarmengis gagnanna og er því brúun. Með líkaninu fæst:
$$T(30) = 30 + 1{,}2(30)$$
$$= 66 \quad \text{gráður}$$

   Miðað við gögnin sem við höfum virðist þetta gildi raunhæft.
2. ⓑ Hitastigsgildin voru frá 52 til 80,5. Að spá fyrir um fjölda tísta við 40 gráður er framreikningur því 40 er utan myndmengis gagnanna. Með líkaninu fæst:
$$40 = 30 + 1{,}2\,c$$
$$10 = 1{,}2\,c$$
$$c \approx 8{,}33$$

Við getum borið saman svæði brúunar og framreiknings með mynd 5.



Mynd 5. Brúun og framreikningur með handteiknaða líkaninu.

Greining

Líkanið spáir því að krybburnar tísti 8,33 sinnum á 15 sekúndum. Það er hugsanlegt en ekkert bendir til þess að líkanið gildi utan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna. Reyndar hætta krybbur yfirleitt alveg að tísta þegar hitastigið fer niður fyrir um 50 gráður á Fahrenheit-kvarða.

REYNIÐ SJÁLF #1

Hvaða hitastigi má spá samkvæmt gögnunum í töflu 1 ef talin eru 20 tíst á 15 sekúndum?

Að finna línu sem fellur best að gögnunum með grafteikniforriti

Sjónmat á línu virkar sæmilega vel, en einnig eru til tölfræðilegar aðferðir sem laga línu að gögnum þannig að munurinn á línunni og gagnagildunum verði sem minnstur 5. Ein slík aðferð nefnist aðhvarfsgreining með minnstu kvaðrötum og hana má reikna með mörgum

grafreiknivélum, töflureiknum, tölfræðiforritum og reiknivélum á vefnum 6.
Aðhvarfsgreining með minnstu kvaðrötum er ein leið til að ákvarða línuna sem fellur best að gögnunum. Hér köllum við aðferðina línulega aðhvarfsgreiningu.

5
Nánar tiltekið lágmarkar aðferðin summu kvaðraðra lóðréttra frávika milli línunnar og gagnagildanna.

6
Til dæmis http://www.shodor.org/unchem/math/lls/leastsq.html

AÐFERÐ

Gefin eru inntaksgögn og samsvarandi úttaksgögn úr línulegu falli. Finnið línuna sem fellur best að gögnunum með línulegri aðhvarfsgreiningu.

1. Sláið inntaksgögnin inn í lista 1 (L1).
2. Sláið úttaksgögnin inn í lista 2 (L2).
3. Veljið Linear Regression (LinReg) í grafteikniforritinu.

DÆMI 4

Að finna aðhvarfslínu minnstu kvaðrata

Finnið aðhvarfslínu minnstu kvaðrata fyrir gögnin um tíst krybba í töflu 1.

Lausn

1. Sláið inntaksgögnin (tíst) inn í lista 1 (L1).
2. Sláið úttaksgögnin (hitastig) inn í lista 2 (L2). Sjá töflu 2.

Tafla 2

L1	44	35	20,4	33	31	35	18,5	37	26
L2	80,5	70,5	57	66	68	72	52	73,5	53

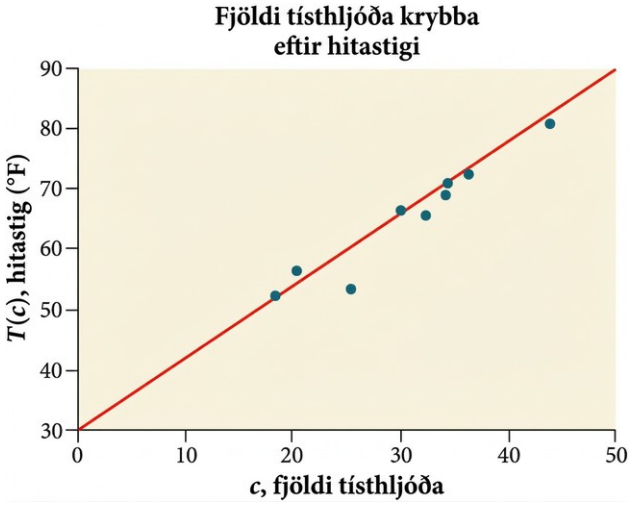
3. Veljið Linear Regression (LinReg) í grafteikniforritinu. Með gögnunum um tíst krybba reiknar forritið eftirfarandi jöfnu:
   $T\left(c\right)=30{,}281+1{,}143\ c$

Greining

Takið eftir að þessi lína er mjög lík jöfnunni sem við fundum með sjónmati en ætti að falla betur að gögnunum. Takið einnig eftir að jafnan breytir spá okkar um hitastig við 30 tíst á 15 sekúndum úr 66 gráðum í:

$$\begin{aligned} T\left(30\right) &= 30{,}281+1{,}143\left(30\right) \\ &= 64{,}571 \\ &\approx 64{,}6 \text{ gráður} \end{aligned}$$

Dreifiritið ásamt aðhvarfslínu minnstu kvaðrata er sýnt á mynd 6.



Mynd 6. Dreifirit og aðhvarfslína minnstu kvaðrata fyrir gögnin um tíst krybba.

SPURT OG SVARAÐ

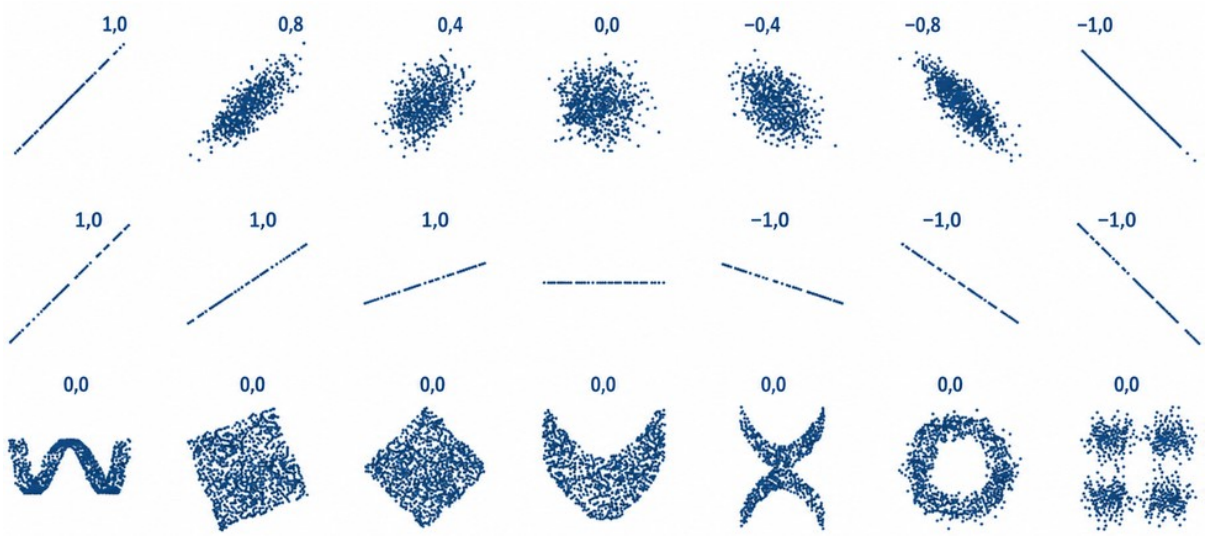
Geta tvær ólíkar línur einhvern tíma báðar fallið best að gögnunum?

Nei. Ef inntaksgildin eru ekki öll eins er aðeins ein aðhvarfslína minnstu kvaðrata.

Að greina á milli línulegra og ólínulegra líkana

Eins og við sáum í líkaninu fyrir tíst krybba sýna sum gögn sterka línulega leitni en önnur gögn, svo sem lokaprófseinkunnir eftir aldri, sýna ekki skýra línulega leitni. Flestar reiknivélar og flest tölvuforrit geta einnig gefið fylgnistuðul, sem mælir styrk og stefnu línulegs sambands breytanna. Í mörgum grafreiknivélum þarf notandinn að kveikja á greiningarstillingu til að finna fylgnistuðulinn, sem stærðfræðingar tákna með r. Fylgnistuðullinn gefur einfalda vísbendingu um hve nálægt línu gögnin liggja.

Fylgnistuðullinn mælir styrk og stefnu línulegs sambands. Hann lýsir ekki styrk ólínulegs sambands og getur verið nálægt núlli þótt breyturnar tengist með skýru ólínulegu mynstri. Því þarf einnig að skoða dreifirit gagnanna. Sambandið milli gildisins r og grafs gagnanna sést á mynd 7, þar sem sýnd eru nokkur stór gagnasöfn ásamt fylgnistuðlum þeirra. Munið að á öllum ritunum sýnir lárétti ásinn inntakið og lóðrétti ásinn úttakið.



Mynd 7 Teiknuð gögn og samsvarandi fylgnistuðlar. (heimild: „DenisBoigelot“, Wikimedia Commons)

FYLGNISTUÐULL

Hugtakið fylgnistuðull táknar gildið r, sem er á bilinu -1 til 1.

- *$r > 0$ bendir til jákvæðra (vaxandi) vensla*
- *$r < 0$ bendir til neikvæðra (minnkandi) vensla*
- Því nær 0 sem gildið er, þeim mun veikara er línulega sambandið.
- Því nær 1 eða -1 sem gildið er, þeim mun sterkara er línulega sambandið.

DÆMI 5

Að finna fylgnistuðul

Reiknið fylgnistuðulinn fyrir gögnin um tíst krybba í töflu 1.

Lausn

Gögnin virðast fylgja línulegu mynstri og því getum við notað reiknitæki til að reikna r. Sláið inntaksgögnin og samsvarandi úttaksgögn inn og veljið Linear Regression. Reiknivélin gefur einnig fylgnistuðulinn, $r = 0{,}9509$. Gildið er mjög nálægt 1 og bendir því til sterkra jákvæðra línulegra vensla.

Athugið: Í sumum reiknivélum þarf að kveikja á Diagnostics til að fá fylgnistuðulinn þegar línuleg aðhvarfsgreining er gerð: [2nd]>[0]>[alpha][x −1]; skrunið síðan að DIAGNOSTICSON.

Spár með aðhvarfslínu

Þegar fylgnistuðullinn hefur sýnt að gagnasafn er línulegt getum við notað aðhvarfslínuna til að spá fyrir. Eins og við lærðum hér að framan er aðhvarfslína sú lína sem liggur næst gögnunum í dreifiritinu. Því er aðeins ein slík lína sem fellur best að gögnunum.

2

DÆMI 6

Notkun aðhvarfslínu við spár

Bensínnotkun í Bandaríkjunum hefur aukist jafnt og þétt. Notkunargögn frá 1994 til 2004 eru sýnd í töflu 3 7. Ákvarðið hvort leitnin sé línuleg og finnið þá líkan fyrir gögnin. Notið líkanið til að spá fyrir um notkunina árið 2008.

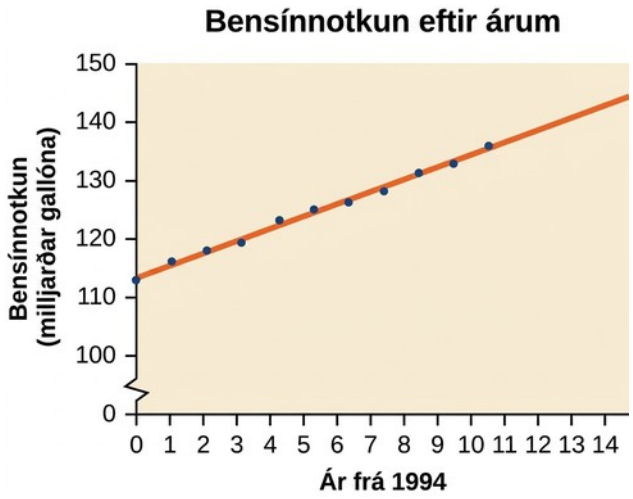
7

http://www.bts.gov/publications/national_transportation_statistics/2005/html/table_04_10.html

Tafla 3

Ár	'94	'95	'96	'97	'98	'99	'00	'01	'02	'03	'04
Notkun (milljarðar gallona)	113	116	118	119	123	125	126	128	131	133	136

Dreifirit gagnanna ásamt aðhvarfslínu minnstu kvaðrata er sýnt á mynd 8.



Mynd 8. Bensínnotkun eftir árum og aðhvarfslína minnstu kvaðrata.

Lausn

Við getum skilgreint nýja inntaksbreytu, t, sem táknar fjölda ára frá 1994.

Jafna aðhvarfslínu minnstu kvaðrata er:

$$C(t) = 113{,}318 + 2{,}209\ t$$

Með reiknitæki fékkst fylgnistuðullinn 0,9965, sem bendir til mjög sterkrar vaxandi línulegrar leitni.

Fyrir árið 2008, þegar $(t = 14)$, fæst:

$$\begin{aligned} C(14) &= 113{,}318 + 2{,}209\ (14) \\ &= 144{,}244 \end{aligned}$$

Líkanið spáir því að bensínnotkunin árið 2008 verði 144,244 milljarðar gallona.

REYNIÐ SJÁLF #2

Notið líkanið sem við bjuggum til með reiknitæki í dæmi 6 til að spá fyrir um bensínnotkunina árið 2011. Er það brúun eða framreikningur?

Skoðið þetta netefni til að læra meira um aðlögun línulegra líkana að gögnum og æfa ykkur í henni.

- Inngangur að aðhvarfsgreiningu
- Línuleg aðhvarfsgreining

Verkefni hluta 2.4

Hugtakaspurningar

1. Lýsið því hvað felst í því að línulegt líkan hætti að eiga við.

2. Hvað er brúun þegar línulegt líkan er notað?

3. Hvað er framreikningur þegar línulegt líkan er notað?

4. Útskýrið muninn á jákvæðum og neikvæðum fylgnistuðli.

5. Útskýrið hvernig túlka á tölugildi fylgnistuðuls.

Algebruverkefni

6. Aðhvarfsgreining var gerð til að kanna hvort samband væri milli fjölda klukkustunda sem einstaklingur horfir á sjónvarp á dag (x) og fjölda magaæfinga sem hann getur gert (y). Niðurstöðurnar eru sýndar hér fyrir neðan. Notið þær til að spá fyrir um hve margar magaæfingar einstaklingur getur gert ef hann horfir á sjónvarp í 11 klukkustundir.

$$y = a\ x + b$$
$$a = -1{,}341$$
$$b = 32{,}234$$
$$r = -0{,}896$$

7. Aðhvarfsgreining var gerð til að kanna hvort samband væri milli þvermáls trés (x, í tommum) og aldurs þess (y, í árum). Niðurstöðurnar eru sýndar hér fyrir neðan. Notið þær til að spá fyrir um aldur trés með 10 tommu þvermál.

$$y = a\ x + b$$
$$a = 6{,}301$$
$$b = -1{,}044$$
$$r = 0{,}970$$

Teiknið dreifirit af gögnunum í æfingunum hér á eftir. Virðast gögnin tengjast línulega?

8.

0	2	4	6	8	10
−22	−19	−15	−11	−6	−2

9.

1	2	3	4	5	6
46	50	59	75	100	136

10.

100	250	300	450	600	750
12	12,6	13,1	14	14,5	15,2

11.

1	3	5	7	9	11
1	9	28	65	125	216

12. Teiknið dreifirit af eftirfarandi gögnum. Ef við vildum vita hvenær íbúafjöldinn næði 15.000, fæli svarið þá í sér brúun eða framreikning? Metið línuna með sjónmati og áætlið svarið.

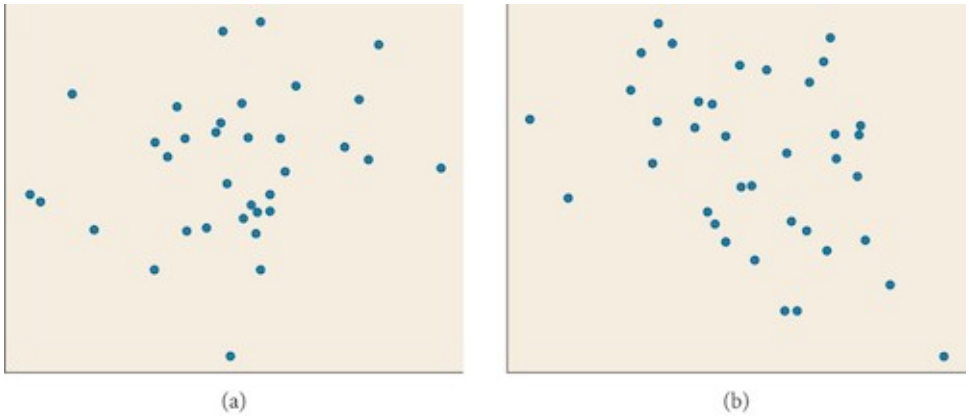
Ár	**Íbúafjöldi**
1990	11.500
1995	12.100
2000	12.700
2005	13.000
2010	13.750

13. Teiknið dreifirit af eftirfarandi gögnum. Ef við vildum vita hvenær hitastigið næði 28 °F, fæli svarið þá í sér brúun eða framreikning? Metið línuna með sjónmati og áætlið svarið.

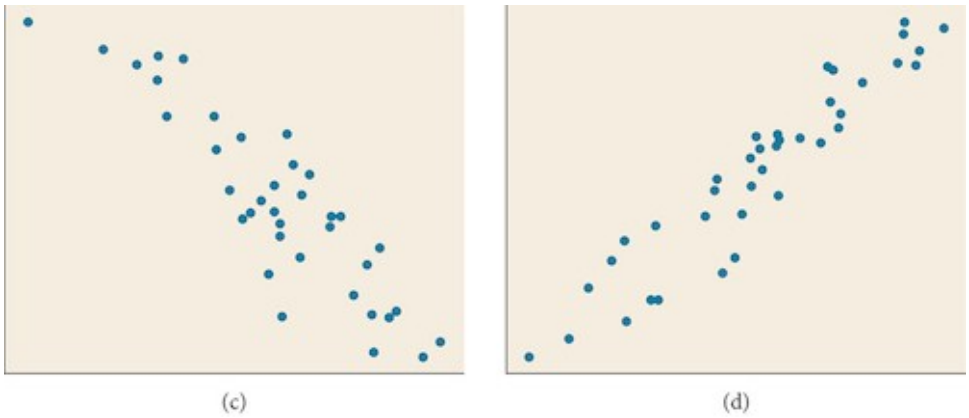
Hitastig, °F	16	18	20	25	30
Tími, sekúndur	46	50	54	55	62

Myndræn verkefni

Parið hvert dreifirit í eftirfarandi æfingum við eina af fjórum tilgreindum fylgnum á mynd 9 og mynd 10.



Mynd 9. Dreifirit (a) og (b) í verkefnunum.



Mynd 10. Dreifirit (c) og (d) í verkefnunum.

14.

$$r = 0{,}95$$

15.

$$r = -0{,}89$$

16.

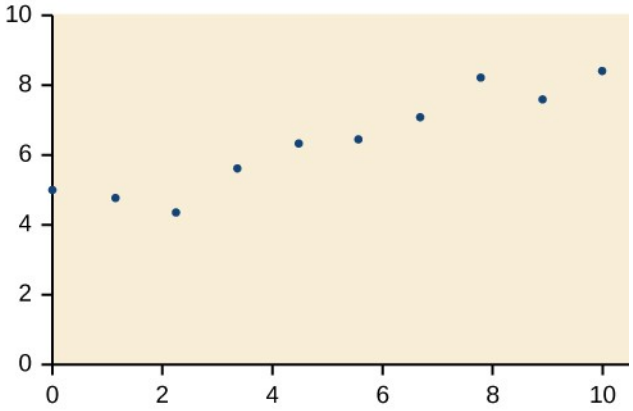
$$r = 0{,}26$$

17.

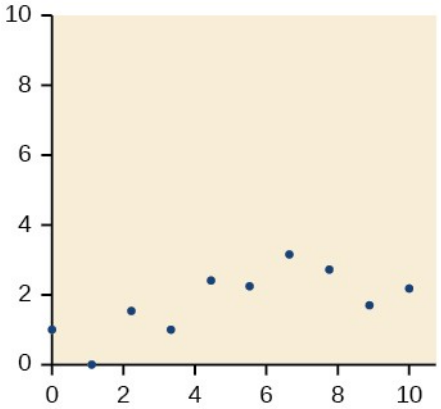
$$r = -0{,}39$$

Teiknið línu sem fellur best að gögnunum á ritinu í eftirfarandi æfingum.

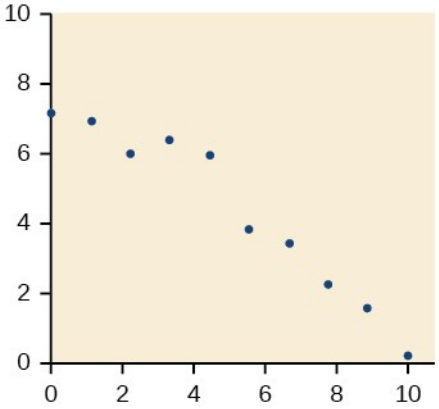
18.



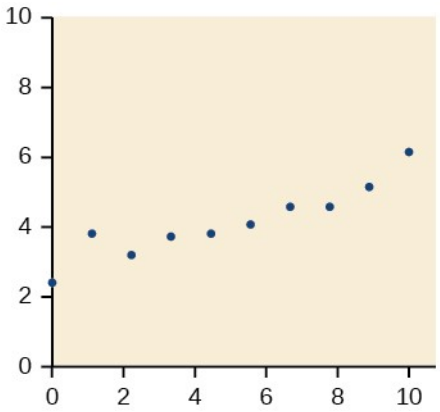
19.



20.



21.



Töluleg verkefni

22. Manntalsskrifstofa Bandaríkjanna skráir hlutfall fólks 25 ára og eldra sem hefur lokið háskólanámi. Gögnin fyrir nokkur ár eru sýnd í töflu 4 8. Ákvarðið hvort leitnin virðist línuleg. Ef svo er og gert er ráð fyrir að leitnin haldi áfram, hvaða ár fer hlutfallið yfir 35%?

8

http://www.census.gov/hhes/socdemo/education/data/cps/historical/index.html. Skoðað 1. maí 2014.

Tafla 4

Ár	Hlutfall háskólamenntaðra
1990	21,3
1992	21,4
1994	22,2
1996	23,6
1998	24,4
2000	25,6
2002	26,7
2004	27,7
2006	28
2008	29,4

23. Innflutningur Bandaríkjanna á víni, í hektólítrum, fyrir nokkur ár er sýndur í töflu 5. Ákvarðið hvort leitnin virðist línuleg. Ef svo er og gert er ráð fyrir að leitnin haldi áfram, hvaða ár fer innflutningurinn yfir 12.000 hektólítra?

Tafla 5

Ár	Innflutningur
1992	2665
1994	2688
1996	3565
1998	4129
2000	4584
2002	5655
2004	6549
2006	7950
2008	8487
2009	9462

24. Tafla 6 sýnir ár og fjölda atvinnulausra í tiltekinni borg á nokkrum árum. Ákvarðið hvort leitnin virðist línuleg. Ef svo er og gert er ráð fyrir að leitnin haldi áfram, hvaða ár nær fjöldi atvinnulausra 5?

Tafla 6

Ár	Fjöldi atvinnulausra
1990	750
1992	670
1994	650
1996	605
1998	550
2000	510
2002	460
2004	420
2006	380
2008	320

Tækniverkefni

Í æfingunum hér á eftir skuluð þið reikna aðhvarfslínu hvers gagnasafns með reiknivél eða öðru tæki. Ákvarðið einnig fylgnistuðulinn með þriggja aukastafa nákvæmni.

25.

x	8	15	26	31	56
y	23	41	53	72	103

26.

x	5	7	10	12	15
y	4	12	17	22	24

27.

x	y	x	y
3	21,9	11	15,76
4	22,22	12	13,68
5	22,74	13	14,1
6	22,26	14	14,02
7	20,78	15	11,94
8	17,6	16	12,76
9	16,52	17	11,28
10	18,54	18	9,1

28.

x	y
4	44,8
5	43,1
6	38,8
7	39
8	38
9	32,7
10	30,1
11	29,3
12	27
13	25,8

29.

x	21	25	30	31	40	50
y	17	11	2	-1	-18	-40

30.

x	100	80	60	55	40	20
y	2000	1798	1589	1580	1390	1202

31.

x	900	988	1000	1010	1200	1205
y	70	80	82	84	105	108

Viðbótarverkefni

32. Teiknið graf $f(x)=0{,}5\ x+10$. Veljið fimm röðuð pör með inntaksgildunum $x=-2,\ 1,\ 5,\ 6,\ 9$ og notið línulega aðhvarfsgreiningu til að staðfesta að fallið lýsi gögnunum vel.

33. Teiknið graf $f(x)=-2x-10$. Veljið fimm röðuð pör með inntaksgildunum $x=-2,\ 1,\ 5,\ 6,\ 9$ og notið línulega aðhvarfsgreiningu til að sannreyna fallið.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Hagnaður fyrirtækis minnkaði jafnt og þétt á tíu ára tímabili. Eftirfarandi röðuð pör sýna fjölda seldra eininga í hundruðum og hagnað í þúsundum Bandaríkjadala á tímabilinu, (fjöldi seldra eininga, hagnaður), fyrir tiltekin skráð ár:

$(46;1.600),\ (48;1.550),\ (50;1.505),\ (52;1.540),\ (54;1.495)$.

34. Notið línulega aðhvarfsgreiningu til að ákvarða fall P þar sem hagnaður í þúsundum Bandaríkjadala er háður fjölda seldra eininga í hundruðum.

35. Finnið skurðpunktinn við x-ás með eins aukastafs nákvæmni og túlkið hann.

36. Finnið skurðpunktinn við y-ás með eins aukastafs nákvæmni og túlkið hann.

Raunhæf viðfangsefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Íbúum borgar fjölgaði jafnt og þétt á tíu ára tímabili. Eftirfarandi röðuð pör sýna íbúafjölda og ár á tímabilinu, (íbúafjöldi, ár), fyrir tiltekin skráð ár:

(2500, 2000), (2650, 2001), (3000, 2003), (3500, 2006), (4200, 2010)

37. Notið línulega aðhvarfsgreiningu til að ákvarða fall y, þar sem árið er háð íbúafjöldanum. Námundið að þremur aukastöfum.

38. Spáið fyrir um hvenær íbúafjöldinn nær 8.000.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Hagnaður fyrirtækis jókst jafnt og þétt á tíu ára tímabili. Eftirfarandi röðuð pör sýna fjölda seldra eininga í hundruðum og hagnað í þúsundum Bandaríkjadala á tímabilinu, (fjöldi seldra eininga, hagnaður), fyrir tiltekin skráð ár:

$(46,\ 250),(48,\ 305),(50,\ 350),(52,\ 390),(54,\ 410)$.

39. Notið línulega aðhvarfsgreiningu til að ákvarða fall y, þar sem hagnaður í þúsundum Bandaríkjadala er háður fjölda seldra eininga í hundruðum.

40. Spáið fyrir um hvenær hagnaðurinn fer yfir eina milljón Bandaríkjadala.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið miða við þessar aðstæður: Hagnaður fyrirtækis minnkaði jafnt og þétt á tíu ára tímabili. Eftirfarandi röðuð pör sýna fjölda seldra eininga í hundruðum og hagnað í þúsundum Bandaríkjadala á tímabilinu, (fjöldi seldra eininga, hagnaður), fyrir tiltekin skráð ár:

$$(46, 250), (48, 225), (50, 205), (52, 180), (54, 165).$$

41. Notið línulega aðhvarfsgreiningu til að ákvarða fall y, þar sem hagnaður í þúsundum Bandaríkjadala er háður fjölda seldra eininga í hundruðum.

42. Spáið fyrir um hvenær hagnaðurinn fer niður fyrir 25.000 Bandaríkjadali.

Lykilhugtök

fylgnistuðull
gildi, r, á bilinu -1 til 1 sem gefur til kynna hve mikil línuleg fylgni er milli breyta eða hve vel aðhvarfslína fellur að gagnasafni

minnkandi línulegt fall
fall með neikvæða hallatölu: Ef $f(x)=mx+b$, þá $m<0$.

framreikningur
að spá gildi utan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna

lárétt lína
lína skilgreind með $f(x)=b$, þar sem b er rauntala. Hallatala láréttrar línu er 0.

vaxandi línulegt fall
fall með jákvæða hallatölu: Ef $f(x)=mx+b$, þá $m>0$.

brúun
að spá gildi innan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna

aðhvarfsgreining með minnstu kvaðrötum
tölfræðileg aðferð til að laga línu að gögnum þannig að summa kvaðrata lóðréttra frávika gagnapunktanna frá línunni verði sem minnst

línulegt fall
fall sem hefur jafnan breytingarhraða og beina línu sem graf; það getur verið vaxandi, minnkandi eða fast

líkan hættir að eiga við
þegar líkan á ekki lengur við eftir tiltekinn punkt

samsíða línur
tvær eða fleiri ólíkar línur í sama plani sem skerast ekki; séu þær ekki lóðréttar hafa þær sömu hallatölu

hornréttar línur
tvær línur sem skerast undir réttu horni. Ef hvorug er lóðrétt eða lárétt eru hallatölurnar gagnstæðar margföldunarandhverfur. Lóðrétt og lárétt lína eru einnig hornréttar.

punkthallaform
jafna línu sem lýsir línulegu falli á forminu $y - y_1 = m(x - x_1)$

hallatala
hlutfall breytingar á úttaksgildum og breytingar á inntaksgildum; mælikvarði á bratta línu

hallatöluform
jafna línu sem lýsir línulegu falli á forminu $f(x) = mx + b$

lóðrétt lína
lína skilgreind með $x = a$, þar sem a er rauntala. Hallatala lóðréttrar línu er óskilgreind.

***x*-skurðpunktur**
punkturinn á grafi línulegs falls þar sem úttaksgildið er 0; punkturinn þar sem grafið sker lárétta ásinn

***y*-skurðpunktur**
punkturinn þar sem graf falls sker y-ásinn; y-hnit hans er gildi fallsins þegar inntakið er 0 og nefnist upphafsgildi

Lykiljöfnur

hallatöluform línu	$f(x) = mx + b$
hallatala	$m = \frac{\text{breyting á úttaki (lóðrétt breyting)}}{\text{breyting á inntaki (lárétt breyting)}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
punkthallaform línu	$y - y_1 = m(x - x_1)$

Lykilatriði

2.1 Línuleg föll

- Röðuðu pörin sem línulegt fall gefur samsvara punktum á línu.

- Línuleg föll má setja fram með orðum, fallarithætti, töflu og grafi. Sjá dæmi 1.
- Breytingarhraði línulegs falls nefnist einnig hallatala.
- Jafna á hallatöluformi línu inniheldur hallatölu og upphafsgildi fallsins.
- Upphafsgildið, það er y-hnit skurðpunktsins við lóðrétta ásinn, er úttaksgildið þegar inntak línulegs falls er núll. Það er y-gildi punktsins þar sem línan sker y-ásinn.
- Vaxandi línulegt fall gefur graf sem hallar upp frá vinstri til hægri og hefur jákvæða hallatölu.
- Minnkandi línulegt fall gefur graf sem hallar niður frá vinstri til hægri og hefur neikvæða hallatölu.
- Fastafall gefur graf sem er lárétt lína.
- Með því að greina hallatöluna í samhengi við verkefnið má sjá hvort línulegt fall er vaxandi, minnkandi eða fast. Sjá dæmi 2.
- Hallatölu línulegs falls má reikna með því að deila mismuni y-gilda með mismuni samsvarandi x-gilda einhverra tveggja punkta á línunni. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Ákvarða má hallatölu og upphafsgildi út frá grafi eða einhverjum tveimur punktum á línunni.
- Ein gerð fallarithátta er hallatöluform jöfnu.
- Punkthallaformið nýtist til að finna línulega jöfnu þegar hallatala línu og einn punktur eru gefin. Sjá dæmi 5.
- Punkthallaformið hentar einnig til að finna línulega jöfnu þegar gefnir eru tveir punktar sem lína fer í gegnum. Sjá dæmi 6.
- Skrifa má jöfnu línulegs falls ef hallatalan m og upphafsgildið b eru þekkt. Sjá dæmi 7, dæmi 8 og dæmi 9.
- Nota má línulegt fall til að leysa raunhæf viðfangsefni. Sjá dæmi 10 og dæmi 11.
- Skrifa má línulegt fall út frá töflu. Sjá dæmi 12.

2.2 Gröf línulegra falla

- Teikna má gröf línulegra falla með því að merkja inn punkta eða nota y-skurðpunktinn og hallatöluna. Sjá dæmi 1 og dæmi 2.
- Ummynda má gröf línulegra falla með hliðrun upp, niður, til vinstri eða hægri og einnig með teygju, þjöppun og speglun. Sjá dæmi 3.
- Nota má y-skurðpunkt og hallatölu línu til að skrifa jöfnu hennar.
- Skurðpunkturinn við x-ás er punkturinn þar sem graf línulegs falls sker x-ásinn. Sjá dæmi 4 og dæmi 5.
- Láréttar línur eru skrifaðar á forminu $f(x)=b$. Sjá dæmi 6.
- Lóðréttar línur eru skrifaðar á forminu $x=b$. Sjá dæmi 7.
- Samsíða línur sem eru ekki lóðréttar hafa sömu hallatölu.
- Hallatölur hornréttra lína hafa gagnstætt formerki og andhverft tölugildi, að því gefnu að hvorug línan sé lóðrétt. Sjá dæmi 8.

- Finna má línu sem er samsíða annarri línu og fer um tiltekinn punkt með því að setja hallatölu línunnar og x- og y-hnit gefna punktsins inn í jöfnuna $f(x)=mx+b$, og nota gildið b sem fæst. Einnig má nota punkthallaform jöfnu. Sjá dæmi 9.
- Finna má línu sem er hornrétt á aðra línu og fer um tiltekinn punkt með sömu aðferð, nema nota þarf hallatölu með gagnstæðu formerki og andhverfu tölugildi. Sjá dæmi 10 og dæmi 11.
- Þegar báðar jöfnur hneppis hafa verið leystar fyrir y má setja stæðurnar fyrir y jafnar hvor annarri og leysa fyrir x. Finna má y-gildið með því að reikna gildi annarrar hvorrar upprunalegu jöfnunnar fyrir þetta x-gildi.
- Einnig má leysa hneppi línulegra jafna með því að finna skurðpunkt línanna á grafi. Sjá dæmi 12 og dæmi 13.

2.3 Líkanagerð með línulegum föllum

- Við getum notað sömu lausnaraðferðir og fyrir hvaða fall sem er.
- Þegar þið setjið verkefni fram með líkani og leysið það skuluð þið greina breyturnar og leita að lykilgildum, þar á meðal hallatölu og y-skurðpunkti. Sjá dæmi 1.
- Teiknið skýringarmynd þegar það á við. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Athugið hvort svarið sé raunhæft.
- Byggja má línuleg líkön með því að finna eða reikna hallatöluna og nota y-skurðpunktinn.
- Finna má x-skurðpunktinn með því að setja $y=0$, sem jafngildir því að setja stæðuna $mx+b$ jafna 0.
- Skurðpunktur hneppis línulegra jafna er punkturinn þar sem x- og y-hnitin eru þau sömu fyrir báðar línurnar. Sjá dæmi 4.
- Nota má graf hneppisins til að finna hvar önnur línan liggur neðan við eða ofan við hina.

2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

- Dreifirit sýna samband milli tveggja gagnasafna. Sjá dæmi 1.
- Dreifirit geta sýnt línuleg eða ólínuleg líkön.
- Áætla eða reikna má línuna sem fellur best að gögnunum með reiknivél eða tölfræðiforriti. Sjá dæmi 2.
- Nota má brúun til að spá fyrir um gildi innan skilgreiningarmengis og myndmengis gagnanna en framreikning til að spá fyrir um gildi utan þeirra. Sjá dæmi 3.
- Fylgnistuðullinn, r, gefur til kynna hve sterk línuleg vensl eru milli gagnanna. Sjá dæmi 5.
- Aðhvarfslína fellur best að gögnunum. Sjá dæmi 6.

- Aðhvarfslína minnstu kvaðrata fæst með því að velja línuna gegnum gögnin þannig að summa kvaðratanna af lóðréttum fjarlægðum punktanna frá henni verði sem minnst. Nota má línuna til að spá fyrir um hvora breytu sem er. Sjá dæmi 4.

Yfirlitsverkefni

Línuleg föll

1. Ákvarðið hvort algebrujafnan sé línuleg. $2x+3y=7$

2. Ákvarðið hvort algebrujafnan sé línuleg. $6x^2-y=5$

3. Ákvarðið hvort fallið sé vaxandi eða minnkandi.

$$f(x)=7x-2$$

4. Ákvarðið hvort fallið sé vaxandi eða minnkandi.

$$g(x)=-x+2$$

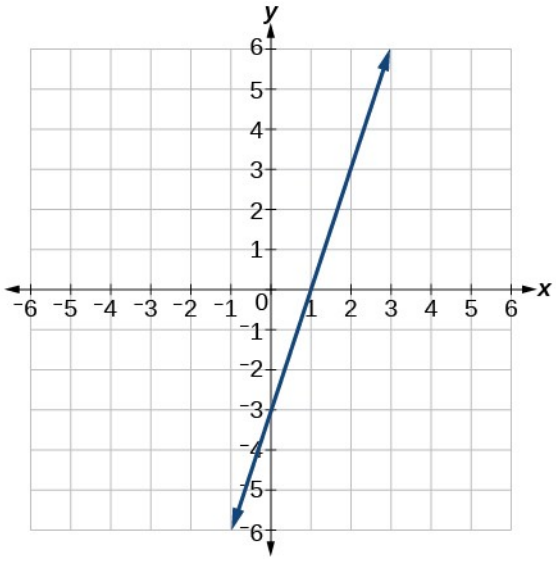
5. Finnið línulega jöfnu sem uppfyllir gefnu skilyrðin í hverju tilviki, ef það er hægt.

Fer í gegnum $(7,5)$ og $(3,17)$

6. Finnið línulega jöfnu sem uppfyllir gefnu skilyrðin í hverju tilviki, ef það er hægt.

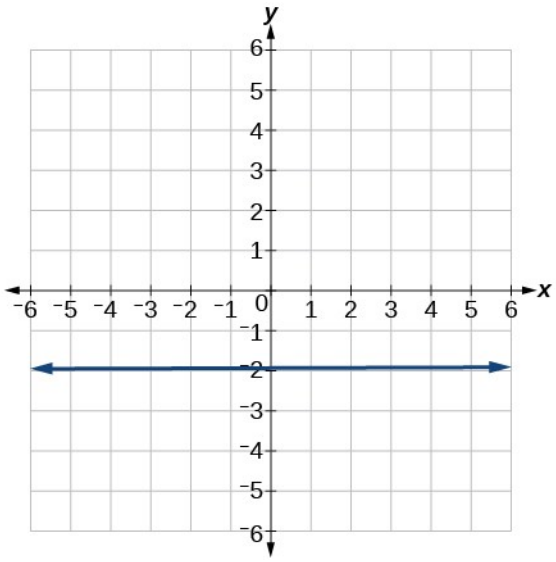
x-skurðpunktur í $(6,0)$ og y-skurðpunktur í $(0,10)$

7. Finnið hallatölu línunnar sem sýnd er á línuritinu.

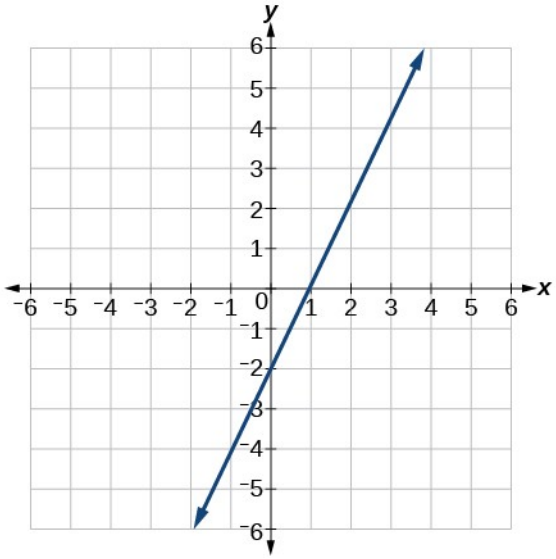


8. Finnið hallatölu línunnar á grafinu.

2



9. Skrifið jöfnu á hallatöluformi fyrir línuna sem sýnd er.



10. Sýnir taflan línulegt fall? Ef svo er, finnið þá línulegu jöfnuna sem lýsir gögnunum.

x	−4	0	2	10
$g(x)$	18	−2	−12	−52

11. Sýnir taflan línulegt fall? Ef svo er, finnið þá línulegu jöfnuna sem lýsir gögnunum.

x	6	8	12	26
$g(x)$	−8	−12	−18	−46

12. Þann 1. júní er hagnaður fyrirtækis 4.000.000 Bandaríkjadalir. Ef fyrirtækið tapar síðan 150.000 Bandaríkjadölum á dag það sem eftir er júnímánaðar, hver er hagnaður þess n-ta daginn eftir 1. júní?

Gröf línulegra falla

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort línurnar sem jöfnurnar lýsa séu samsíða, hornréttar eða hvorki samsíða né hornréttar:

13.

$$2x - 6y = 12$$
$$-x + 3y = 1$$

14.

$$y = \frac{1}{3}x - 2$$
$$3x + y = -9$$

Finnið skurðpunktana við x- og y-ás fyrir gefnu jöfnuna í eftirfarandi verkefnum.

15.

$$7x + 9y = -63$$

16.

$$f(x) = 2x - 1$$

Notið lýsingarnar á línupörunum í eftirfarandi verkefnum til að finna hallatölur línu 1 og línu 2. Eru línurnar í hverju pari samsíða eða hornréttar, eða á hvorugt við?

17.

- Lína 1: Fer um $(5, 11)$ og $(10, 1)$
- Lína 2: Fer um $(-1, 3)$ og $(-5, 11)$

18.

- Lína 1: Fer um $(8, -10)$ og $(0, -26)$
- Lína 2: Fer um $(2, 5)$ og $(4, 4)$

19. Skrifið jöfnu línu sem er hornrétt á $f(x) = 5x - 1$ og fer í gegnum punktinn (5, 20).

20. Finnið jöfnu línu sem hefur y-skurðpunktinn $(0, 2)$ og hallatöluna $-\frac{1}{2}$.

21. Skissið graf línulega fallsins $f(t) = 2t - 5$.

22.

Finnið skurðpunkt línulegu fallanna tveggja:

$$x = y + 6$$
$$2x - y = 13$$

23. Bílaleiga býður upp á tvær leiðir þegar bíll er leigður.

- Leið A: 25 Bandaríkjadalir á dag og 10 sent á mílu
- Leið B: 50 Bandaríkjadalir á dag og ótakmarkaður akstur innifalinn

Hve margar mílur þyrftuð þið að aka til að spara með leið B?

2

Líkanagerð með línulegum föllum

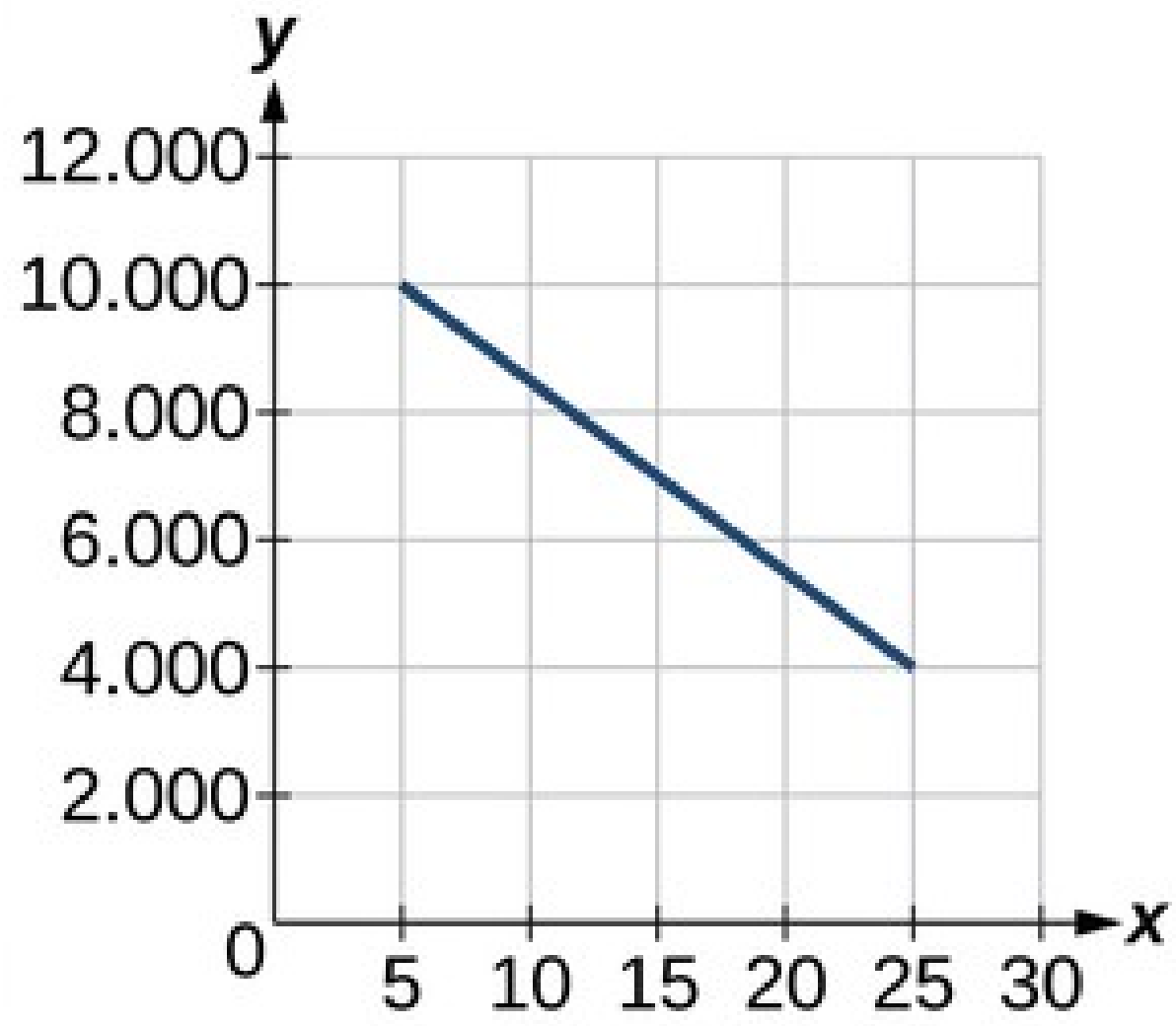
24. Finnið flatarmál þríhyrnings sem afmarkast af y-ásnum, línunni $f(x)=10-2x$ og línunni sem er hornrétt á f og fer í gegnum upphafspunktinn.

25. Íbúum bæjar fjölgar með jöfnum hraða. Árið 2010 voru íbúarnir 55.000 og árið 2012 hafði þeim fjölgað í 76.000. Spáið fyrir um íbúafjöldann árið 2016 ef leitnin heldur áfram.

26. Frá 2004 til 2010 fækkaði þeim sem fengu kvef yfir vetrarmánuðina jafnt og þétt, um 50 á ári. Árið 2004 voru 875 manns kvefaðir.

Finnið línulega fallið sem lýsir fjölda kvefaðra, C, sem fall af árinu t. Hvenær verður enginn kvefaður?

Notið í eftirfarandi verkefnum grafið á mynd 1 sem sýnir hagnað fyrirtækis, y, í þúsundum Bandaríkjadala á tilteknu ári, x, þar sem x táknar fjölda ára frá 1980.



Mynd 1 Línurit sem sýnir línulega minnkun.

27. Finnið línulega fallið y, þar sem y er háð x, sem táknar fjölda ára frá 1980.

28. Finnið y-skurðpunktinn og túlkið hann.

Miðið við eftirfarandi aðstæður í næsta verkefni: Árið 2004 voru nemendur skóla 1.700 talsins. Árið 2012 hafði þeim fjölgað í 2.500.

29. Gerið ráð fyrir að nemendafjöldinn breytist línulega.

1. ⓐ Hve mikið fjölgaði nemendum milli áranna 2004 og 2012?
2. ⓑ Hver var meðalfjölgun nemenda á ári?
3. ⓒ Finnið jöfnu fyrir nemendafjölda skólans P eftir t ár frá 2004.

Miðið við eftirfarandi aðstæður í næstu verkefnum: Árið 2000 mældist stofn elgja í þjóðgarði 6.500 dýr. Árið 2010 mældist stofninn 12.500 dýr. Gerið ráð fyrir að stofninn haldi áfram að breytast línulega.

30. Finnið formúlu fyrir stofnstærð elgjanna, P.

31. Hver verður stofnstærð elgjanna árið 2020 samkvæmt líkaninu?

Miðið við eftirfarandi aðstæður í næstu verkefnum: Miðgildi íbúðaverðs í hverfunum Pima Central og East Valley, leiðrétt fyrir verðbólgu, eru sýnd í töflu 1. Gerið ráð fyrir að íbúðaverðið breytist línulega.

Tafla 1

Ár	Pima Central	East Valley
1970	32.000	120.250
2010	85.000	150.000

32. Í hvoru hverfinu hefur íbúðaverð hækkað hraðar?

33. Hvert yrði miðgildi íbúðaverðs í Pima Central árið 2015 ef leitnin héldi áfram?

Aðlögun línulegra líkana að gögnum

34. Teiknið dreifirit af gögnunum í töflu 2. Ákvarðið síðan hvort gögnin virðast tengjast línulega.

Tafla 2

0	2	4	6	8	10
−105	−50	1	55	105	160

35. Teiknið dreifirit af gögnunum í töflu 3. Ef við vildum vita hvenær íbúafjöldinn næði 15.000, fæli svarið þá í sér brúun eða framreikning?

Tafla 3

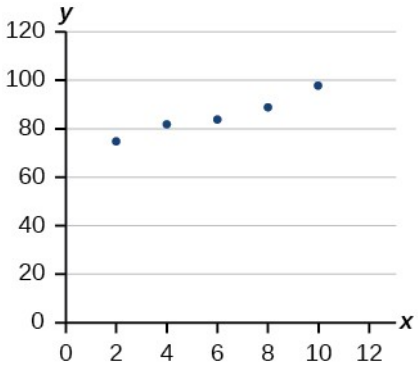
Ár	Íbúafjöldi
1990	5.600
1995	5.950
2000	6.300
2005	6.600
2010	6.900

36. Átta nemendur voru beðnir að áætla einkunn sína á 10 stiga prófi. Áætlaðar og raunverulegar einkunnir þeirra eru sýndar í töflu 4. Teiknið punktana og skissið síðan línu sem fellur að gögnunum.

Tafla 4

Áætlað	Raunverulegt
6	6
7	7
7	8
8	8
7	9
9	10
10	10
10	9

37. Teiknið línu sem fellur best að gögnunum á ritinu.



Notið í eftirfarandi verkefnum gögnin í töflu 5. Þau sýna hlutfall atvinnulausra eftir árum meðal háskólamenntaðra íbúa borgar sem eru 25 ára eða eldri.

Tafla 5

Ár	2000	2002	2005	2007	2010
Atvinnuleysi (%)	6,5	7,0	7,4	8,2	9,0

38. Ákvarðið hvort leitnin virðist línuleg. Ef svo er, gerið þá ráð fyrir að hún haldi áfram og finnið líkan með línulegri aðhvarfsgreiningu sem spáir hlutfalli atvinnulausra á tilteknu ári með þriggja aukastafa nákvæmni.

39. Hvaða ár fer hlutfallið yfir 12%?

40. Reiknið aðhvarfslínuna fyrir gögnin í töflu 6 með reiknivél eða öðru tækniverkfæri og ákvarðið fylgnistuðulinn með þriggja aukastafa nákvæmni.

Tafla 6

x	17	20	23	26	29
y	15	25	31	37	40

41. Reiknið aðhvarfslínuna fyrir gögnin í töflu 7 með reiknivél eða öðru tækniverkfæri og ákvarðið fylgnistuðulinn með þriggja aukastafa nákvæmni.

Tafla 7

x	10	12	15	18	20
y	36	34	30	28	22

Miðið við eftirfarandi aðstæður í næstu verkefnum: Íbúum borgar fjölgaði jafnt og þétt á tíu ára tímabili. Röðuðu pörin hér á eftir sýna íbúafjölda á tilteknum skráðum árum tímabilsins, á forminu (íbúafjöldi, ár):

(3.600, 2000); (4.000, 2001); (4.700, 2003); (6.000, 2006)

42. Notið línulega aðhvarfsgreiningu til að ákvarða fall y, þar sem árið er háð íbúafjöldanum, með þriggja aukastafa nákvæmni.

43. Spáið fyrir um hvenær íbúafjöldinn nær 12.000.

44. Hver er fylgnistuðull þessa líkans með þriggja aukastafa nákvæmni?

45. Hver er íbúafjöldinn árið 2014 samkvæmt líkaninu?

2

Æfingapróf

1. Ákvarðið hvort skrifa megi eftirfarandi algebrujöfnu sem línulegt fall. $2x+3y=7$

2. Ákvarðið hvort eftirfarandi fall sé vaxandi eða minnkandi. $f(x)=-2x+5$

3. Ákvarðið hvort eftirfarandi fall sé vaxandi eða minnkandi. $f(x)=7x+9$

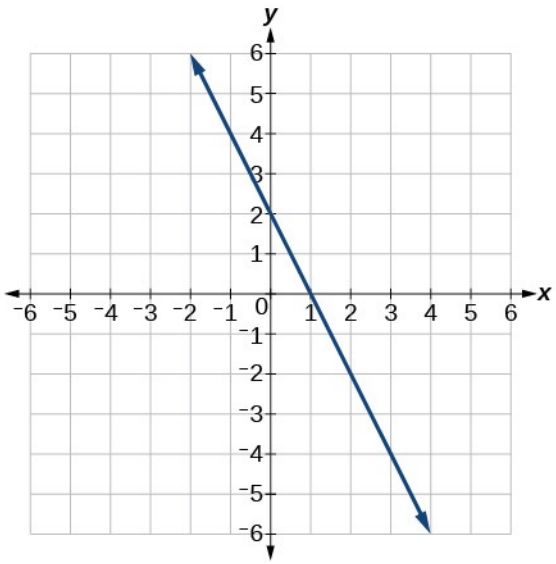
4. Finnið línulega jöfnu sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði, ef það er mögulegt.

Fer í gegnum (5, 1) og (3, −9)

5. Finnið línulega jöfnu sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði, ef það er mögulegt.

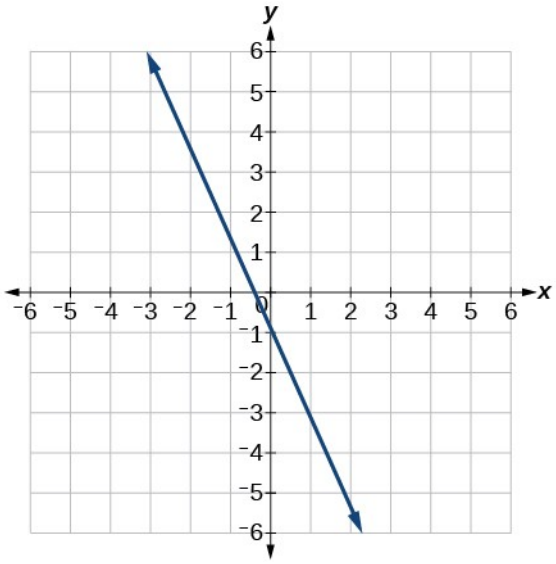
x-skurðpunktur í (−4, 0) og y-skurðpunktur í (0, −6)

6. Finnið hallatölu línunnar á mynd 1.



Mynd 1

7. Skrifið jöfnu línunnar á mynd 2.



Mynd 2

8. Sýnir tafla 1 línulegt fall? Finnið þá línulega jöfnu sem lýsir gögnunum.

Tafla 1

x	−6	0	2	4
$g(x)$	14	32	38	44

9. Sýnir tafla 2 línulegt fall? Finnið þá línulega jöfnu sem lýsir gögnunum.

Tafla 2

x	1	3	7	11
$g(x)$	4	9	19	12

10. Klukkan 6 að morgni hefur netverslun selt 120 vörur þann dag. Gerið ráð fyrir að fyrirtækið selji að meðaltali 30 vörur á klukkustund það sem eftir er dags. Skrifið stæðu sem táknar fjölda seldra vara n klukkustundum eftir klukkan 6 að morgni.

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort línurnar sem jöfnurnar lýsa séu samsíða, hornréttar eða hvorki samsíða né hornréttar:

11.

$$y = \frac{3}{4}x - 9$$
$$-4x - 3y = 8$$

12.

$$-2x + y = 3$$
$$3x + \tfrac{3}{2}y = 5$$

2

13. Finnið skurðpunktana við x- og y-ás fyrir jöfnuna $2x+7y=-14$.

14. Hér fyrir neðan er tveimur línum lýst. Finnið hallatölur línu 1 og línu 2. Eru línurnar samsíða eða hornréttar, eða á hvorugt við?

Lína 1: Fer um $(-2,-6)$ og $(3,14)$
Lína 2: Fer um $(2,6)$ og $(4,14)$

15. Skrifið jöfnu línu sem er hornrétt á $f(x)=4x+3$ og fer í gegnum punktinn $(8,10)$.

16. Skissið línu sem hefur y-skurðpunktinn $(0,5)$ og hallatöluna $-\frac{5}{2}$.

17. Teiknið graf línulega fallsins $f(x)=-x+6$.

18.

Finnið skurðpunkt línulegu fallanna tveggja:
$$x = y + 2$$
$$2x - 3y = -1$$

19. Bílaleiga býður upp á tvær leiðir til að leigja bíl.

- Leið A: 25 Bandaríkjadalir á dag og 10 sent á mílu
- Leið B: 40 Bandaríkjadalir á dag og ótakmarkaður akstur innifalinn

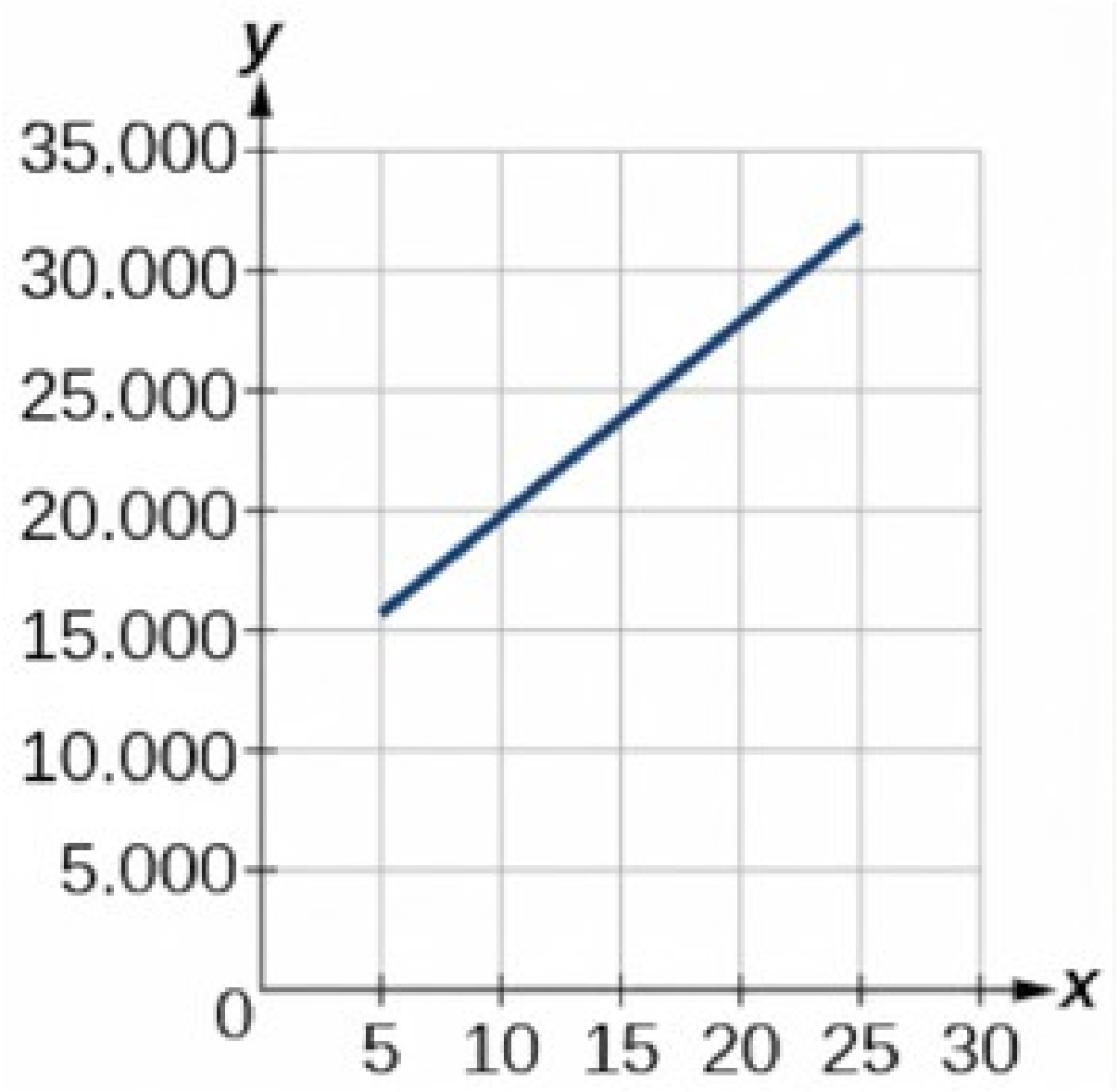
Hve margar mílur þyrftuð þið að aka til að spara með leið B?

20. Finnið flatarmál þríhyrnings sem afmarkast af y-ásnum, línunni $f(x)=12-4x$ og línunni sem er hornrétt á f og fer í gegnum upphafspunktinn.

21. Íbúum bæjar fjölgar með jöfnum hraða. Árið 2010 voru íbúarnir 65.000 og árið 2012 hafði þeim fjölgað í 90.000. Spáið fyrir um íbúafjöldann árið 2018 ef leitnin heldur áfram.

22. Kvefuðum yfir vetrarmánuðina fækkaði jafnt og þétt um 25 á ári frá 2002 til 2012. Árið 2002 voru 8.040 manns kvefaðir. Finnið línulega fallið sem lýsir fjölda kvefaðra, C sem fall af árinu t. Hvenær verða færri en 6.000 manns kvefaðir?

Notið í eftirfarandi verkefnum grafið á mynd 3, sem sýnir hagnað fyrirtækis, y, í þúsundum Bandaríkjadala á tilteknu ári, x, þar sem x táknar fjölda ára frá 1980.



Mynd 3 Línurit í hnitakerfi sýnir eitt blátt línustrik með jákvæða hallatölu.

23. Finnið línulega fallið y, þar sem y er háð x, sem táknar fjölda ára frá 1980.

24. Finnið y-skurðpunktinn og túlkið hann.

25. Árið 2004 voru nemendur skóla 1.250 talsins. Árið 2012 hafði þeim fækkað í 875. Gerið ráð fyrir að nemendafjöldinn breytist línulega.

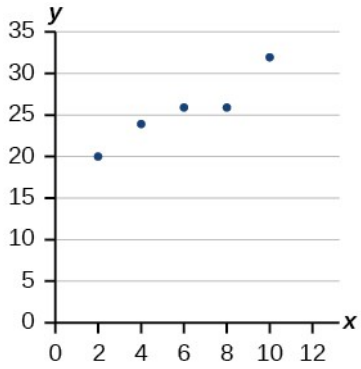
1. ⓐ Hve mikið fækkaði nemendum milli áranna 2004 og 2012?
2. ⓑ Hver var meðalfækkun nemenda á ári?
3. ⓒ Finnið jöfnu fyrir nemendafjölda skólans P eftir t ár frá 2004.

26. Teiknið dreifirit af gögnunum í töflu 3. Ákvarðið síðan hvort gögnin virðast tengjast línulega.

Tafla 3

0	2	4	6	8	10
−450	−200	10	265	500	755

27. Teiknið línu sem fellur best að gögnunum á ritinu.



Notið í eftirfarandi verkefnum töflu 4. Hún sýnir hlutfall atvinnulausra á hverju ári meðal háskólamenntaðra íbúa tiltekinnar borgar sem eru 25 ára eða eldri.

Tafla 4

Ár	2000	2002	2005	2007	2010
Atvinnuleysi (%)	8,5	8,0	7,2	6,7	6,4

28. Ákvarðið hvort leitnin virðist línuleg. Ef svo er skuluð þið gera ráð fyrir að hún haldi áfram og finna líkan með línulegri aðhvarfsgreiningu sem spáir fyrir um hlutfall atvinnulausra á tilteknu ári. Námundið að þremur aukastöfum.

29. Hvaða ár fer hlutfallið niður fyrir 4%?

30. Reiknið aðhvarfslínuna fyrir gögnin í töflu 5 með reiknivél eða öðru tækniverkfæri og ákvarðið fylgnistuðulinn. Námundið að þremur aukastöfum.

Tafla 5

x	16	18	20	24	26
y	106	110	115	120	125

Miðið við eftirfarandi aðstæður í næstu verkefnum: Íbúum borgar fjölgaði jafnt og þétt á tíu ára tímabili. Röðuðu pörin hér fyrir neðan sýna íbúafjölda og ár fyrir nokkur skráð ár á tímabilinu, á forminu (íbúafjöldi, ár):

(4.500, 2000); (4.700, 2001); (5.200, 2003); (5.800, 2006)

31. Notið línulega aðhvarfsgreiningu til að ákvarða fall y, þar sem árið er háð íbúafjöldanum. Námundið að þremur aukastöfum.

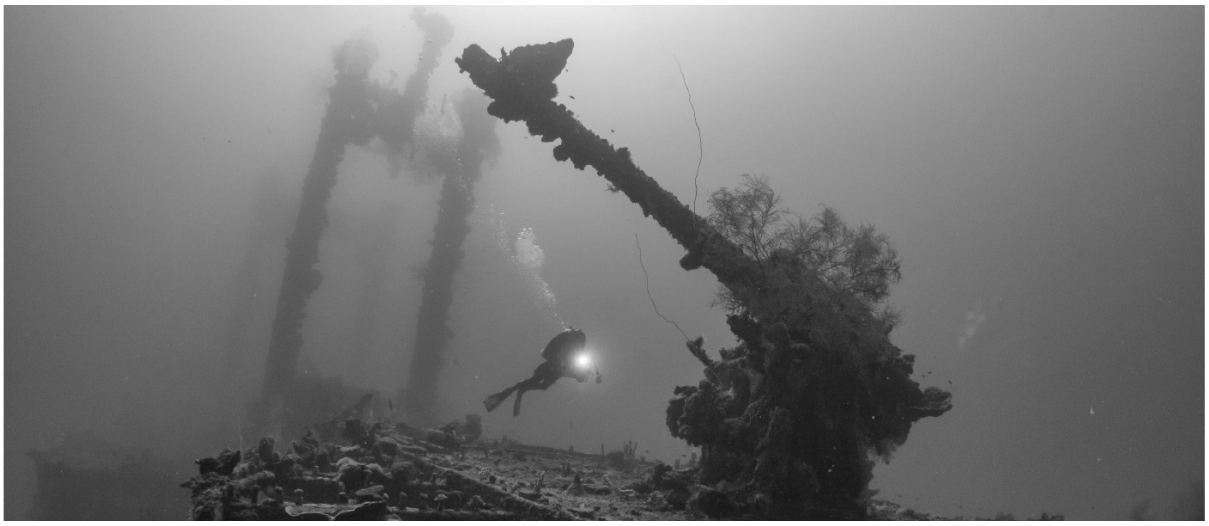
32. Spáið fyrir um hvenær íbúafjöldinn nær 20.000.

33. Hver er fylgnistuðull þessa líkans?

3. KAFLI

3

Margliðu- og ræð föll



Hvort sem kafarar hugsa um það með stærðfræðilegum hætti eða ekki verða þeir að taka tillit til áhrifa vensla milli stærða til að tryggja öryggi sitt. Gaslögmálin, sem eru safn vensla og jafna sem lýsa hegðun flestra lofttegunda, gegna lykilhlutverki við köfun. Kafarinn hér, nærri flaki japansks farþegaskips frá síðari heimsstyrjöld sem var breytt í herflutningaskip, verður að taka tillit til gaslögmálanna bæði við köfunina og þegar hann syndir upp að yfirborðinu. (mynd: „Aikoku - Aft Gun“; breytt verk eftir montereydiver/flickr)

Kaflayfirlit

- 3.1 Tvinntölur
- 3.2 Annars stigs föll
- 3.3 Veldisföll og margliðuföll
- 3.4 Gröf margliðufalla
- 3.5 Deiling margliða
- 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
- 3.7 Ræð föll
- 3.8 Andhverf föll og rótaföll
- 3.9 Líkön gerð með hlutföllum

Inngangur að margliðuföllum og ræðum föllum

Ekki þarf að kafa mjög djúpt til að finna fyrir áhrifum þrýstings. Þegar einstaklingur kafar niður um átta, tíu eða tólf fet í sundlaug finnur hann oft fyrir eyrnaverk vegna mismunar á vatns- og loftþrýstingi. Á því dýpi sem kafað er í sjó hefur þrýstingur mun meiri áhrif.

Kafarar, hvort sem þeir nota öndunarbúnað eða kafa án hans, þurfa sífellt að bregðast við áhrifum þrýstings til að köfunin verði ánægjuleg, örugg og árangursrík. Lofttegundir í öndunarfærum og köfunarbúnaði fylgja tilteknum eðlisfræðilegum lögmálum sem saman nefnast gaslögmálin. Sum þeirra er auðvelt að skilja, svo sem öfug vensl þrýstings og rúmmáls, en önnur eru flóknari. Þótt formúlur þeirra virðist einfaldari en margar sem þið eigið eftir að sjá í þessum kafla eru gaslögmálin almennt sett fram með margliðustæðum.

3.1 Tvinntölur

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Skrifa kvaðratrætur neikvæðra talna sem margfeldi af i.
- Merkja tvinntölur inn á tvinntalnaplanið.
- Leggja saman og draga frá tvinntölur.
- Margfalda og deila tvinntölum.

Stærðfræðin byggist sífellt ofan á sjálfa sig. Neikvæðar heiltölur fylla til dæmis upp í eyðu sem mengi jákvæðra heiltalna skilur eftir. Mengi ræðra talna fyllir á sama hátt upp í eyðu sem mengi heiltalna skilur eftir. Mengi rauntalna fyllir síðan upp í eyðu sem mengi ræðra talna skilur eftir. Það kemur því ekki á óvart að einnig séu eyður í mengi rauntalna. Við höfum til dæmis enn enga lausn á jöfnum á borð við

$$x^2+4=0$$

Fyrstu ágiskanir okkar gætu verið $+2$ eða -2. En ef við prófum $+2$ í jöfnunni gengur það ekki, og -2 gengur ekki heldur. Ef við viljum finna lausn á jöfnunni verðum við að ganga lengra en hingað til. Fram að þessu höfum við enda sagt kvaðratrót neikvæðrar tölu óskilgreinda. Sem betur fer er til annað talnakerfi sem gefur lausnir á verkefnum af þessu tagi. Í þessum hluta skoðum við þetta talnakerfi og hvernig reiknað er í því.

Kvaðratrætur neikvæðra talna skrifaðar sem margfeldi af i

Við kunnum að finna kvaðratrót sérhverrar jákvæðrar rauntölu. Á svipaðan hátt getum við fundið kvaðratrót neikvæðrar tölu. Munurinn er sá að rótin er ekki rauntala. Ef rótarstofninn er neikvæður nefnist rótin þvertala. Þvertalan i er skilgreind sem kvaðratrótin af -1.

$$\sqrt{-1}=i$$

Með reglum um rætur fæst því

$$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$$

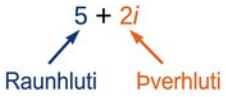
Við getum skrifað kvaðratrót sérhverrar neikvæðrar tölu sem margfeldi af i. Skoðum kvaðratrótina af -25.

$$\begin{aligned}\sqrt{-25} &= \sqrt{25\cdot(-1)}\\ &= \sqrt{25}\sqrt{-1}\\ &= 5i\end{aligned}$$

3

Við notum $5i$ en ekki $-5i$ vegna þess að aðalkvaðratrótin af 25 er jákvæða rótin.

Tvinntala er summa rauntölu og þvertölu. Tvinntala er á stöðluðu formi þegar hún er skrifuð $a+bi$, þar sem a er raunhlutinn og bi er liðurinn sem inniheldur i. Stuðullinn b er þverhluti tölunnar. Til dæmis er $5+2i$ tvinntala. Einnig er $3+4\sqrt{3}i$.



Þvertölur eru frábrugðnar rauntölum vegna þess að þegar þvertala er sett í annað veldi fæst neikvæð rauntala. Rifjið upp að þegar jákvæð rauntala er sett í annað veldi fæst jákvæð rauntala. Þegar neikvæð rauntala er sett í annað veldi fæst líka jákvæð rauntala. Tvinntölur sameina rauntölur og þvertölur.

ÞVERTÖLUR OG TVINNTÖLUR

Tvinntala er tala á forminu $a+bi$, þar sem

- a er raunhluti tvinntölunnar.
- bi er liðurinn sem inniheldur i; stuðullinn b er þverhluti tvinntölunnar.

Ef $b=0$, þá er $a+bi$ rauntala. Ef $a=0$ og b er ekki jafnt o nefnist tvinntalan þvertala. Þvertala er tvinntala með raunhlutann núll og þverhluta sem er ekki núll.

AÐFERÐ

Skrifið gefna þvertölu á stöðluðu formi.

1. Skrifið $\sqrt{-a}$ sem $\sqrt{a}\sqrt{-1}$.
2. Skrifið $\sqrt{-1}$ sem i.
3. Skrifið $\sqrt{a}\cdot i$ á einfaldasta formi.

DÆMI 1

Þvertala skrifuð á stöðluðu formi

Skrifið $\sqrt{-9}$ á staðalformi.

Lausn

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$$

Á stöðluðu formi er þetta $0+3i$.

REYNIÐ SJÁLF #1

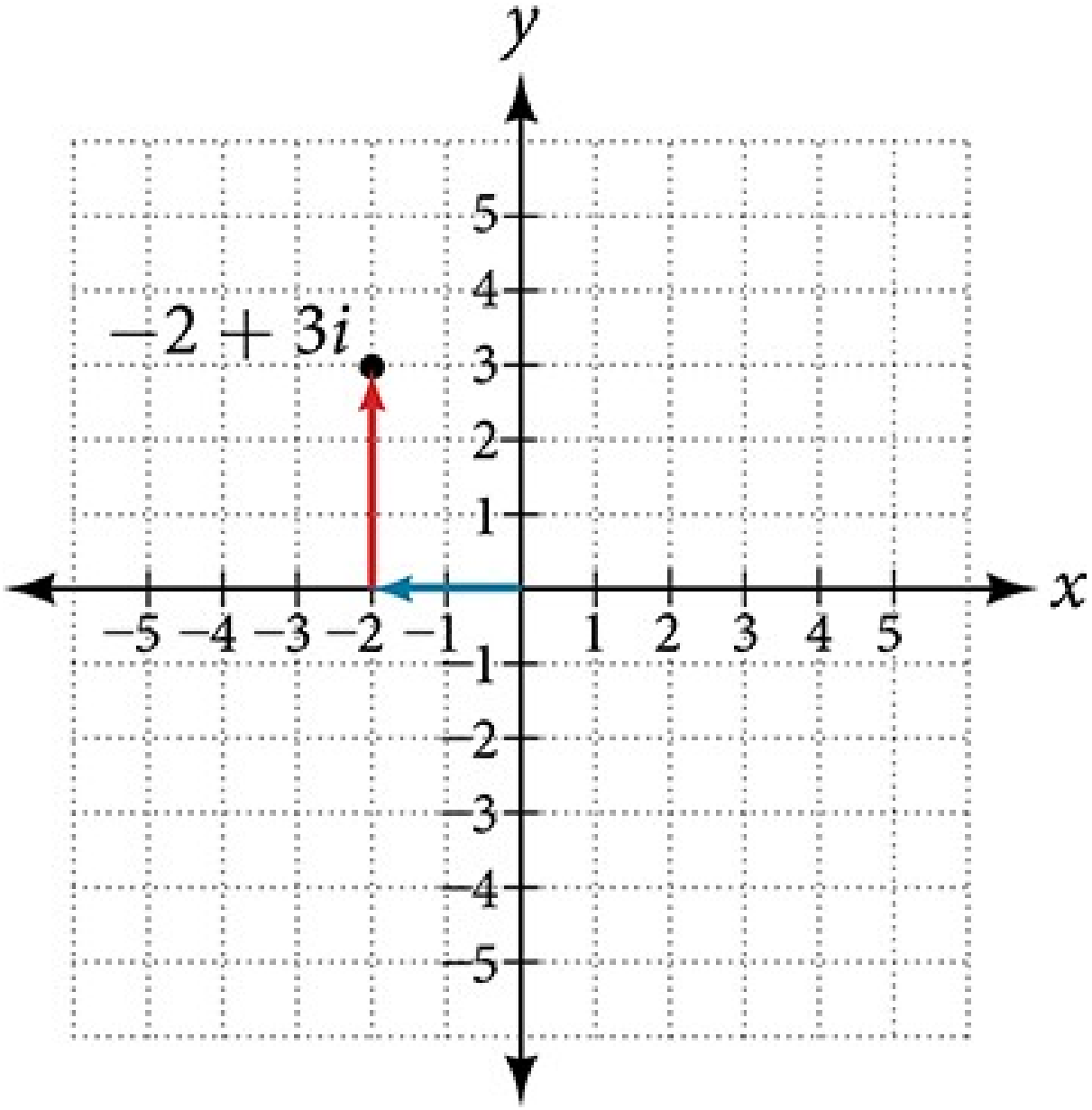
Skrifið $\sqrt{-24}$ á staðalformi.

Tvinntala merkt inn á tvinntalnaplanið

Við getum ekki merkt tvinntölur inn á talnalínu eins og rauntölur. Við getum þó táknað þær myndrænt. Til að tákna tvinntölu þurfum við að taka tillit til beggja hluta hennar. Við notum tvinntalnaplanið, sem er hnitakerfi þar sem lárétti ásinn táknar raunhlutann og lóðrétti ásinn þverhlutann. Tvinntölur eru punktar á planinu og eru skrifaðar sem röðuð pör (a,b), þar sem a er hnit á lárétta ásnum og b hnit á lóðrétta ásnum.

Skoðum töluna $-2+3i$. Raunhluti tvinntölunnar er -2 og liðurinn sem inniheldur i er $3i$. Við merkjum raðaða parið $(-2,3)$ inn til að tákna tvinntöluna $-2+3i$, eins og sýnt er á mynd **1.**

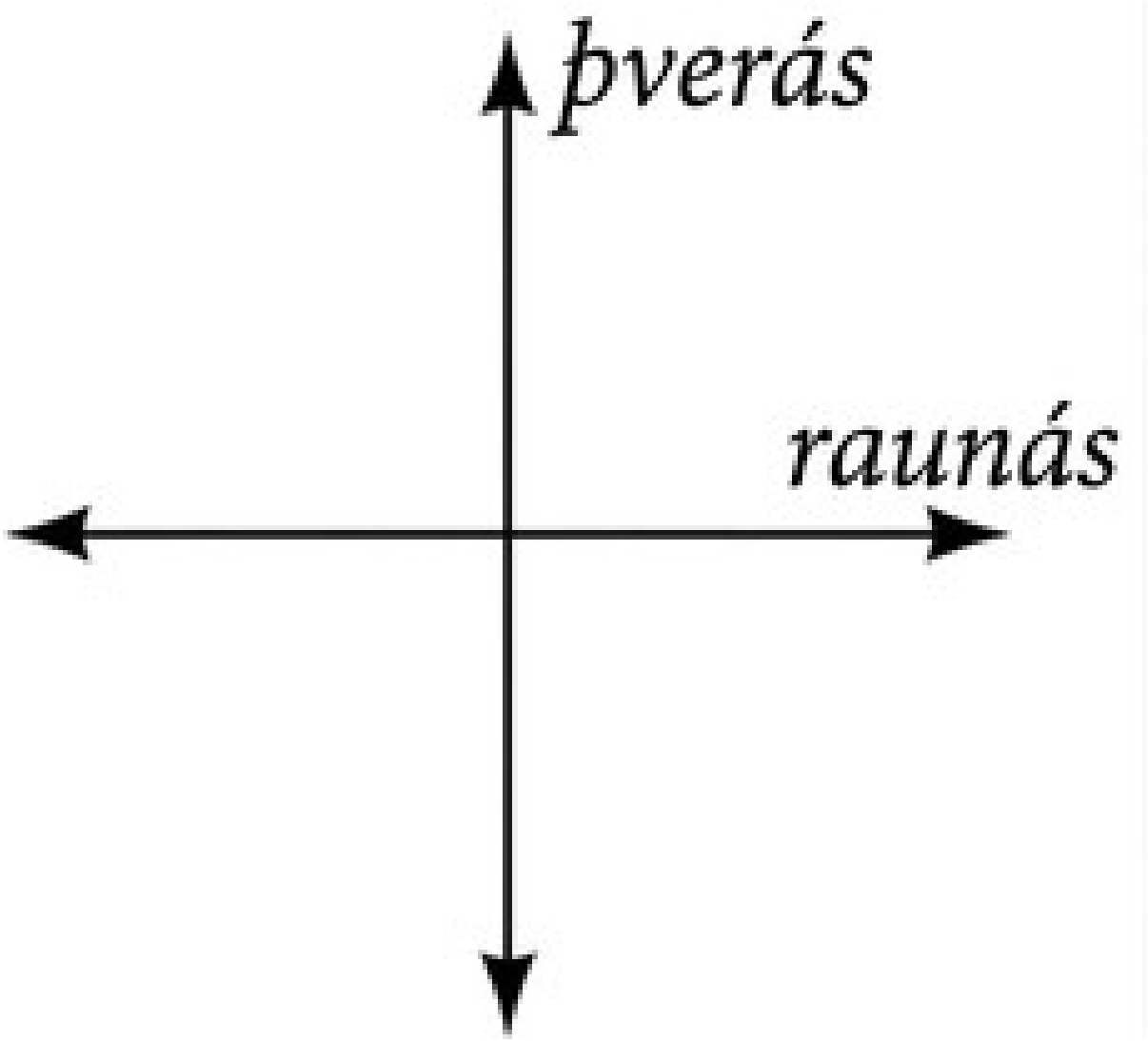
3



Mynd 1. Tvinntalan −2 + 3i í tvinntalnaplaninu.

TVINNTALNAPLAN

Á tvinntalnaplaninu nefnist lárétti ásinn raunás og lóðrétti ásinn þverás, eins og sýnt er á mynd 2.



Mynd 2

AÐFERÐ

Sýnið hluta gefinnar tvinntölu á tvinntalnaplaninu.

1. Ákvarðið raunhluta og þverhluta tvinntölunnar.
2. Farið eftir lárétta ásnum til að sýna raunhluta tölunnar.
3. Færið ykkur samsíða lóðrétta ásnum til að sýna þverhluta tölunnar.
4. Merkið punktinn inn.

DÆMI 2

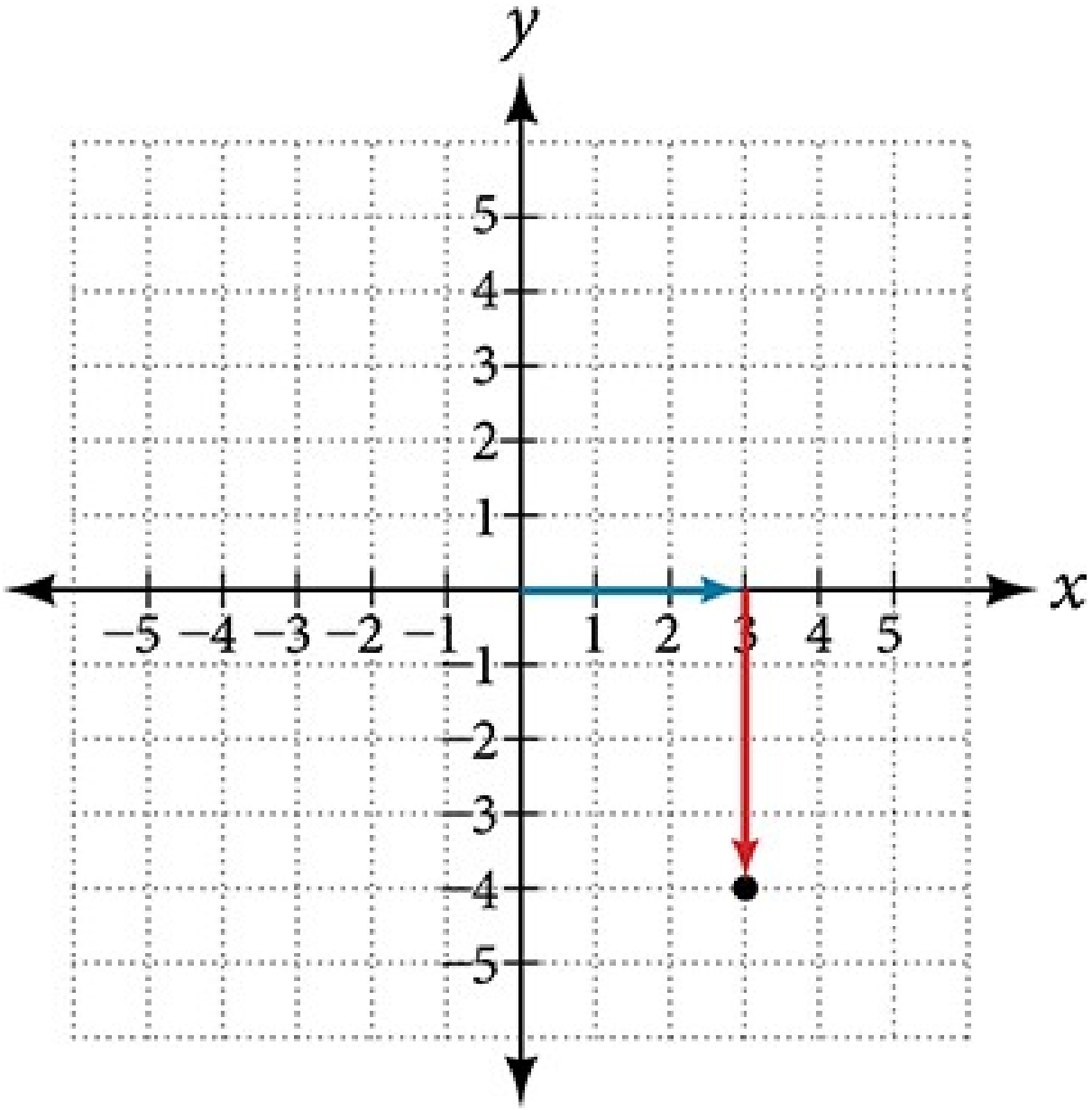
Tvinntala merkt inn á tvinntalnaplanið

Merkið tvinntöluna $3 - 4i$ inn á tvinntalnaplanið.

3

Lausn

Raunhluti tvinntölunnar er 3, og liðurinn sem inniheldur i er $-4i$. Við merkjum raðaða parið $(3, -4)$ inn eins og sýnt er á mynd 3.



Mynd 3

REYNIÐ SJÁLF #2

Merkið tvinntöluna $-4-i$ inn á tvinntalnaplanið.

Samlagning og frádráttur tvinntalna

Eins og með rauntölur getum við beitt reikniaðgerðum á tvinntölur. Til að leggja saman eða draga frá tvinntölur sameinum við raunhlutana annars vegar og þverhlutana hins vegar.

TVINNTÖLUR: SAMLAGNING OG FRÁDRÁTTUR

Samlagning tvinntalna:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Frádráttur tvinntalna:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

AÐFERÐ

Finnið summu eða mismun tveggja gefinna tvinntalna.

1. Finnið raunhluta og þverhluta hvorrar tölu.
2. Leggið raunhlutana saman eða dragið þá hvorn frá öðrum.
3. Leggið þverhlutana saman eða dragið þá hvorn frá öðrum.

DÆMI 3

Samlagning tvinntalna

Leggið saman $3-4i$ og $2+5i$.

Lausn

Við leggjum raunhlutana saman og þverhlutana saman.

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\ (3-4i)+(2+5i) &= (3+2)+(-4+5)i \\ &= 5+i\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Dragið $2+5i$ frá $3-4i$.

Margföldun tvinntalna

Margföldun tvinntalna er mjög lík margföldun tvíliða. Helsti munurinn er sá að við reiknum með raunhlutunum og þverhlutunum sitt í hvoru lagi.

Tvinntala margfölduð með rauntölu

Byrjum á að margfalda tvinntölu með rauntölu. Við dreifum rauntölunni á sama hátt og með tvíliðu. Til dæmis fæst



$$\begin{aligned} 3(6+2i) &= (3\cdot 6+(3\cdot 2i) && \text{Dreifið.}\\ &= 18+6i && \text{Einfaldið.}\end{aligned}$$

AÐFERÐ

Margfaldið saman gefna tvinntölu og rauntölu til að finna margfeldið.

1. Beitið dreifireglunni.
2. Einfaldið.

DÆMI 4

Tvinntala margfölduð með rauntölu

Finnið margfeldið $4(2+5i)$.

Lausn

Dreifið 4 yfir svigann.

$$\begin{aligned} 4(2+5i) &= (4\cdot 2)+(4\cdot 5i)\\ &= 8+20i\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #4

Finnið margfeldið $-4(2+6i)$.

Tvinntölur margfaldaðar saman

Margföldum nú saman tvær tvinntölur. Við getum annaðhvort beitt dreifireglunni eða FOIL-aðferðinni. Rifjið upp að FOIL er ensk skammstöfun fyrir margföldun fremstu, ytri, innri og öftustu liðanna. Með annarri hvorri aðferðinni fæst

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$

Þar sem $i^2=-1$, fæst

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci-bd$$

Til að einfalda sameinum við raunhlutana annars vegar og þverhlutana hins vegar.

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

AÐFERÐ

Margfaldið saman tvær gefnar tvinntölur til að finna margfeldið.

1. Beitið dreifireglunni eða FOIL-aðferðinni.
2. Einfaldið.

DÆMI 5

Tvinntala margfölduð með tvinntölu

Margfaldið $(4+3i)(2-5i)$.

Lausn

Notið $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\begin{aligned}(4+3i)(2-5i) &= (4\cdot 2-3\cdot(-5))+(4\cdot(-5)+3\cdot 2)i\\ &= (8+15)+(-20+6)i\\ &= 23-14i\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #5

Margfaldið $(3-4i)(2+3i)$.

Deiling tvinntalna

Við deilingu tvinntalna viljum við skrifa kvótann á stöðluðu formi. Til þess gerum við nefnarann að rauntölu. Við þurfum að finna lið sem við getum margfaldað bæði teljara og nefnara með, þannig að þverhluti nefnarans hverfi og rauntala verði eftir í nefnaranum. Þessi liður nefnist samoka tvinntala nefnarans og fæst með því að skipta um formerki á þverhluta tvinntölunnar. Samoka tvinntala tölunnar $a+bi$ er með öðrum orðum $a-bi$.

Athugið að þetta samband er gagnkvæmt: Samoka tvinntala tölunnar $a+bi$ er $a-bi$, og samoka tvinntala tölunnar $a-bi$ er $a+bi$. Auk þess gildir að ef annars stigs jafna með rauntölustuðlum hefur lausnir sem eru ekki rauntölur, þá eru lausnirnar alltaf samoka tvinntölur.

Gerum ráð fyrir að við viljum deila $c+di$ með $a+bi$, þar sem hvorki a né b er núll. Fyrst skrifum við deilinguna sem brot, finnum síðan samoka tvinntölu nefnarans og margföldum.

$$\frac{c+di}{a+bi} \text{ þar sem } a\neq 0 \text{ og } b\neq 0$$

Margfaldið teljara og nefnara með samoka tvinntölu nefnarans.

$$\frac{(c+di)}{(a+bi)}\cdot\frac{(a-bi)}{(a-bi)}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$$

Beitið dreifireglunni.

$$=\frac{ca-cbi+adi-bdi^2}{a^2-abi+abi-b^2i^2}$$

Einfaldið og munið að $i^2=-1$.

$$= \frac{ca-cbi+adi-bd(-1)}{a^2-abi+abi-b^2(-1)}$$
$$= \frac{(ca+bd)+(ad-cb)i}{a^2+b^2}$$

SAMOKA TVINNTALA

Samoka tvinntala tvinntölunnar $a+bi$ er $a-bi$. Hún fæst með því að skipta um formerki á þverhluta tvinntölunnar. Raunhluti tölunnar helst óbreyttur.

- Þegar tvinntala er margfölduð með samoka tvinntölu sinni er útkoman rauntala.
- Þegar tvinntölu er bætt við samoka tvinntölu hennar er útkoman rauntala.

DÆMI 6

Samoka tvinntölur fundnar

Finnið samoka tvinntölu hverrar tölu.

1. ⓐ $2+i\sqrt{5}$
2. ⓑ $-\frac{1}{2}i$

Lausn

1. ⓐ Talan er þegar á forminu $a+bi$. Samoka tvinntalan er $a-bi$, eða $2-i\sqrt{5}$.
2. ⓑ Við getum skrifað töluna á forminu $a+bi$ sem $0-\frac{1}{2}i$. Samoka tvinntalan er $a-bi$, eða $0+\frac{1}{2}i$. Þetta má einfaldlega skrifa sem $\frac{1}{2}i$.

Greining

Við höfum séð að finna má samoka tvinntölu þvertölu. Í reynd finnum við þó yfirleitt aðeins samoka tvinntölur talna sem hafa bæði raunhluta og þverhluta. Til að fá rauntölu út frá þvertölu getum við einfaldlega margfaldað með i.

AÐFERÐ

Gefnar eru tvær tvinntölur. Deilið annarri með hinni.

1. Skrifið deilingardæmið sem brot.
2. Finnið samoka tvinntölu nefnarans.
3. Margfaldið teljara og nefnara brotsins með samoka tvinntölu nefnarans.
4. Einfaldið.

DÆMI 7

Deiling tvinntalna

Deilið $(2+5i)$ með $(4-i)$.

Lausn

Við byrjum á að skrifa dæmið sem brot.

$$\frac{(2+5i)}{(4-i)}$$

Síðan margföldum við teljara og nefnara með samoka tvinntölu nefnarans.

$$\frac{(2+5i)}{(4-i)} \cdot \frac{(4+i)}{(4+i)}$$

Til að margfalda tvær tvinntölur margföldum við upp úr svigunum eins og við margföldum margliður (aðferðin er oft kölluð FOIL).

$$\frac{(2+5\ i)}{(4-i)} \cdot \frac{(4+i)}{(4+i)} = \frac{8+2\ i+20\ i+5\ i^2}{16+4\ i-4\ i-i^2}$$

$$= \frac{8+2\ i+20\ i+5\ (-1)}{16+4\ i-4\ i-(-1)} \quad \text{Þar sem } i^2 = -1$$

$$= \frac{3+22\ i}{17}$$

$$= \frac{3}{17} + \frac{22}{17}\ i \quad \text{Aðgreinið raunhlutann og þverhlutann.}$$

Athugið að þannig fæst kvótinn á stöðluðu formi.

DÆMI 8

Tvinntala sett inn í margliðufall

Látum $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Reiknið $f(3+i)$.

Lausn

Setjið $x = 3+i$ inn í fallið $f(x) = x^2 - 5x + 2$ og einfaldið.

$$\begin{aligned} f(3+i) &= (3+i)^2 - 5(3+i) + 2 && \text{Setjið } 3+i \text{ í stað } x. \\ &= (3 + 6i + i^2) - (15 + 5i) + 2 && \text{Margfaldið.} \\ &= 9 + 6i + (-1) - 15 - 5i + 2 && \text{Setjið } -1 \text{ í stað } i^2. \\ &= -5 + i && \text{Dragið saman líka liði.} \end{aligned}$$

Greining

Við skrifum $f(3+i) = -5+i$. Athugið að inntakið er $3+i$ og úttakið er $-5+i$.

REYNIÐ SJÁLF #6

Látum $f(x) = 2x^2 - 3x$. Reiknið $f(8-i)$.

DÆMI 9

Þvertala sett inn í rætt fall

Látum $f(x)=\frac{2+x}{x+3}$. Reiknið $f(10i)$.

Lausn

Setjið $x=10i$ inn og einfaldið.

$\frac{2+10i}{10i+3}$ Setjið $10i$ inn fyrir x.

$\frac{2+10i}{3+10i}$ Skrifið nefnarann á stöðluðu formi.

$\frac{2+10i}{3+10i}\cdot\frac{3-10i}{3-10i}$ Undirbúið að margfalda teljara og

nefnara með samoka tvinntölu

nefnarans.

$\frac{6-20i+30i-100i^2}{9-30i+30i-100i^2}$ Margfaldið með dreifireglunni eða FOIL-aðferðinni.

$\frac{6-20i+30i-100(-1)}{9-30i+30i-100(-1)}$ Setjið -1 inn fyrir i^2.

$\frac{106+10i}{109}$ Einfaldið.

$\frac{106}{109}+\frac{10}{109}i$ Aðgreinið raunhlutann og þverhlutann.

REYNIÐ SJÁLF #7

Látum $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$. Reiknið $f(-i)$.

Veldi af i einfölduð

Veldin af i mynda lotu. Skoðum hvað gerist þegar i er hafið upp í sífellt hærri veldi.

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\
i^4 &= i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i
\end{aligned}
$$

Við sjáum að fimmta veldi i, er jafnt fyrsta veldinu. Þegar við höldum áfram að margfalda i með sjálfu sér til að fá hærri veldi kemur fram lota með lengdina 4. Skoðum næstu 4 veldi i.

$$
\begin{aligned}
i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\
i^7 &= i^6 \cdot i = i^2 \cdot i = i^3 = -i \\
i^8 &= i^7 \cdot i = i^3 \cdot i = i^4 = 1 \\
i^9 &= i^8 \cdot i = i^4 \cdot i = i^5 = i
\end{aligned}
$$

DÆMI 10

Veldi af i einfölduð

Reiknið i^{35}.

Lausn

Þar sem $i^4 = 1$, getum við einfaldað dæmið með því að þátta út eins marga þætti af (i^4) og unnt er. Fyrst deilum við 35 með 4 og finnum heiltölukvótann og afganginn: $35 = 4 \cdot 8 + 3$.

$$i^{35} = i^{4 \cdot 8 + 3} = i^{4 \cdot 8} \cdot i^3 = \left(i^4\right)^8 \cdot i^3 = 1^8 \cdot i^3 = i^3 = -i$$

SPURT OG SVARAÐ

Getum við skrifað (i^{35}) á aðra gagnlega vegu?

Eins og við sáum í dæmi 10, rituðum við (i^{35}) á forminu (i^3) með því að deila veldisvísinum með 4 og nota afganginn til að finna einfaldaða formið. Önnur þáttun á (i^{35}) gæti þó reynst gagnlegri. Tafla 1 sýnir nokkrar aðrar mögulegar þættanir.

Tafla 1

Þáttun i^{35}	$i^{34} \cdot i$	$i^{33} \cdot i^2$	$i^{31} \cdot i^4$	$i^{19} \cdot i^{16}$
Stytt form	$\left(i^2\right)^{17} \cdot i$	$i^{33} \cdot (-1)$	$i^{31} \cdot 1$	$i^{19} \cdot \left(i^4\right)^4$
Einfaldað form	$(-1)^{17} \cdot i$	$-i^{33}$	i^{31}	i^{19}

Allar þessar leiðir skila að lokum svarinu sem við fengum hér að framan en geta þurft mun fleiri skref en fyrri aðferðin.

MIÐLAR

Skoðið þessi gögn á netinu til að fá frekari kennslu og æfingu í tvinntölum.

- Samlagning og frádráttur tvinntalna
- Margföldun tvinntalna
- Margföldun samoka tvinntalna
- Talan i hafin upp í veldi

3.1 Æfingar

Munnleg verkefni

1. Útskýrið hvernig tvinntölur eru lagðar saman.

2. Hver er grundvallarreglan við margföldun tvinntalna?

3. Gefið dæmi sem sýnir að margfeldi tveggja þvertalna er ekki alltaf þvertala.

4. Hvað einkennir staðsetningu rauntölu á tvinntalnaplaninu?

Algebruverkefni

Reiknið algebrustæðurnar í eftirfarandi verkefnum.

5. Ef $f(x)=x^2+x-4$, reiknið $f(2i)$.

6. Ef $f(x)=x^3-2$, reiknið $f(i)$.

7. Ef $f(x)=x^2+3x+5$, reiknið $f(2+i)$.

8. Ef $f(x)=2x^2+x-3$, reiknið $f(2-3i)$.

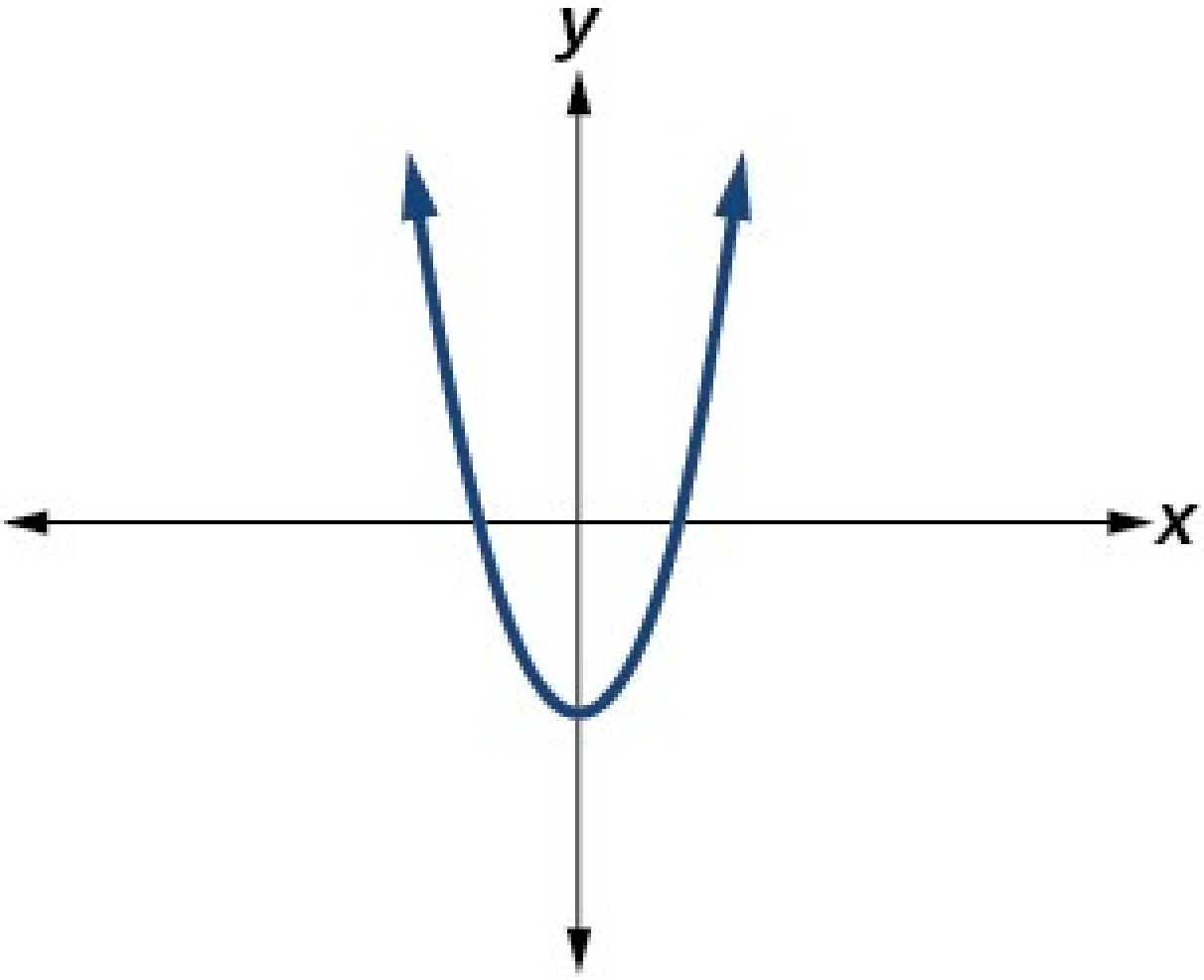
9. Ef $f(x)=\frac{x+1}{2-x}$, reiknið $f(5i)$.

10. Ef $f(x)=\frac{1+2x}{x+3}$, reiknið $f(4i)$.

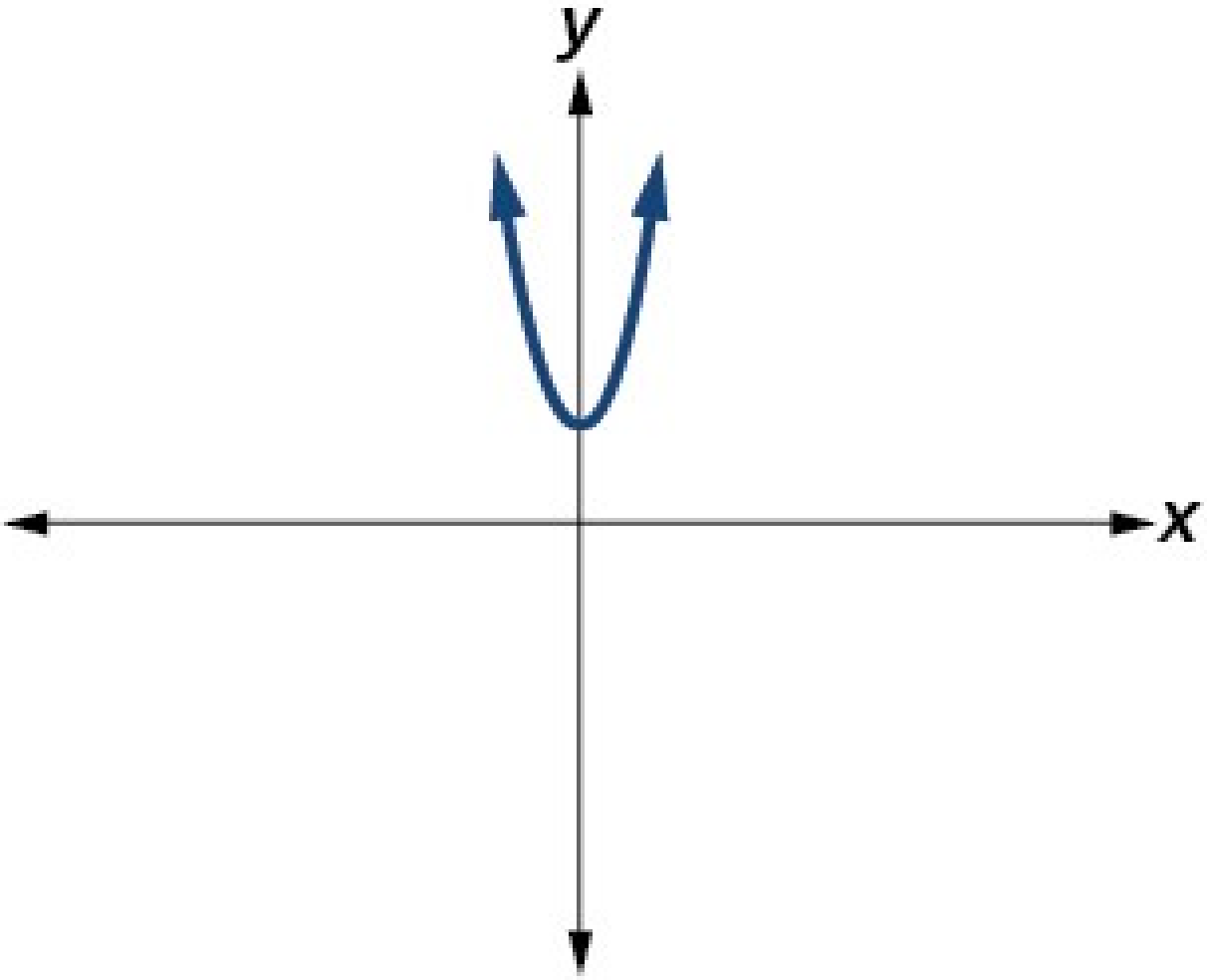
Myndræn verkefni

Í eftirfarandi verkefnum eru gefin annars stigs föll. Ákvarðið fyrir hvert fall hve margar lausnir eru rauntölur og hve margar eru ekki rauntölur.

11.



12.



3

Merkið tvinntölurnar inn á tvinntalnaplanið í eftirfarandi verkefnum.

13.

$$1-2i$$

14.

$$-2+3i$$

15.

$$i$$

16.

$$-3-4i$$

Töluleg verkefni

Framkvæmið reikniaðgerðina sem sýnd er í eftirfarandi verkefnum og skrifið útkomuna sem einfaldaða tvinntölu.

17.

$$(3+2i)+(5-3i)$$

18.

$$(-2-4i)+(1+6i)$$

19.

$$(-5+3i)-(6-i)$$

20.

$$(2-3i)-(3+2i)$$

21.

$$(-4+4i)-(-6+9i)$$

22.

$$(2+3i)(4i)$$

23.

$$(5-2i)(3i)$$

24.

$$(6-2i)(5)$$

25.

$$(-2+4i)(8)$$

26.

$$(2+3i)(4-i)$$

27.

$$(-1+2i)(-2+3i)$$

28.

$$(4-2i)(4+2i)$$

29.

$$(3+4i)(3-4i)$$

30.

$$\frac{3+4i}{2}$$

31.

$$\frac{6-2i}{3}$$

32.

$$\frac{-5+3i}{2i}$$

33.

$$\frac{6+4i}{i}$$

34.

$$\frac{2-3i}{4+3i}$$

35.

$$\frac{3+4i}{2-i}$$

36.

$$\frac{2+3i}{2-3i}$$

37.

$$\sqrt{-9}+3\sqrt{-16}$$

38.

$$-\sqrt{-4}-4\sqrt{-25}$$

39.

$$\frac{2+\sqrt{-12}}{2}$$

40.

$$\frac{4+\sqrt{-20}}{2}$$

41.

$$i^8$$

42.

$$i^{15}$$

43.

$$i^{22}$$

Tækniverkefni

Notið reiknivél til að leysa eftirfarandi verkefni.

44. Reiknið $(1+i)^k$ fyrir $k=4$, 8, og 12. Spáið fyrir um gildið þegar $k=16$.

45. Reiknið $(1-i)^k$ fyrir $k=2$, 6, og 10. Spáið fyrir um gildið þegar $k=14$.

46. Reiknið $(1+i)^k-(1-i)^k$ fyrir $k=4$, 8, og 12. Spáið fyrir um gildið þegar $k=16$.

47. Sýnið að ein lausn jöfnunnar $x^6+1=0$ er $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

48. Sýnið að ein lausn jöfnunnar $x^8-1=0$ er $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Viðbótarverkefni

Reiknið stæðurnar í eftirfarandi verkefnum og skrifið útkomuna sem einfaldaða tvinntölu.

49.

$$\frac{1}{i}+\frac{4}{i^3}$$

50.

$$\frac{1}{i^{11}}-\frac{1}{i^{21}}$$

51.

$$i^7\left(1+i^2\right)$$

52.

$$i^{-3}+5i^7$$

53.

$$\frac{(2+i)(4-2i)}{(1+i)}$$

54.

$$\frac{(1+3i)(2-4i)}{(1+2i)}$$

55.

$$\frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2}$$

56.

$$\frac{3+2i}{2+i}+(4+3i)$$

57.

$$\frac{4+i}{i}+\frac{3-4i}{1-i}$$

58.

$$\frac{3+2i}{1+2i}-\frac{2-3i}{3+i}$$

3.2 Annars stigs föll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Þekkja einkenni fleygboga.
- Skilja hvernig graf fleygboga tengist annars stigs fallinu sem lýsir honum.
- Ákvarða minnsta eða stærsta gildi annars stigs falls.
- Leysa verkefni sem varða minnsta eða stærsta gildi annars stigs falls.



Mynd 1 Röð gervihnattadiska. (mynd: Matthew Colvin de Valle, Flickr)

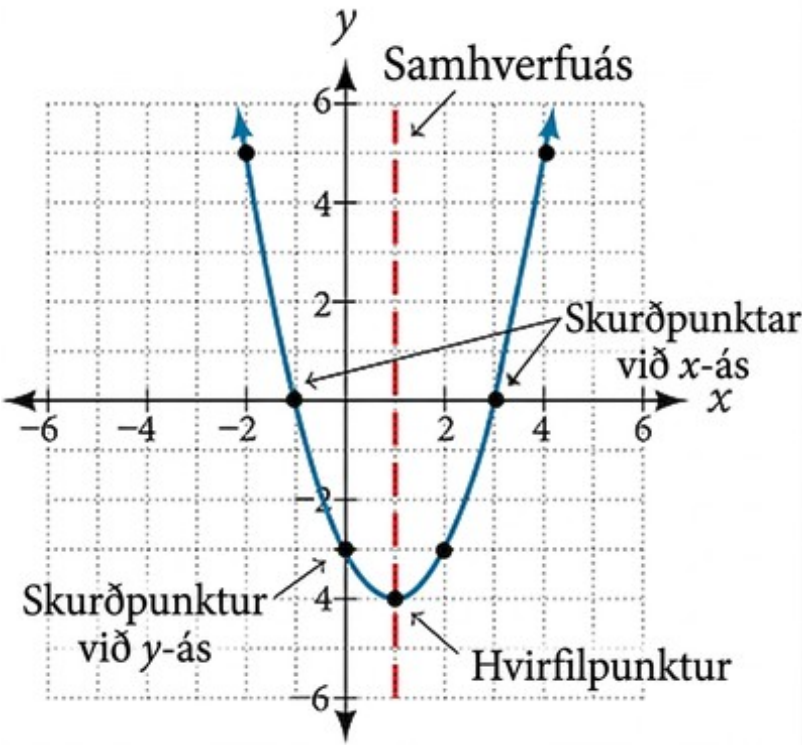
Fleygbogalaga loftnetsskálar, eins og þær sem sýndar eru á mynd 1, eru oft notaðar til að safna örbylgjum og útvarpsbylgjum í brennipunkt. Þannig má senda sjónvarps- og símamerki

og hafa samband við gervihnetti og geimför. Þversnið loftnetsskálarinnar hefur lögun fleygboga sem lýsa má með annars stigs falli.

Í þessum hluta könnum við annars stigs föll, sem eru oft notuð sem líkön í verkefnum um flatarmál og kasthreyfingu. Annars stigs föll geta verið einfaldari viðfangs en föll af hærra stigi. Þau gefa því gott tækifæri til að skoða ítarlega hvernig föll hegða sér.

Einkenni fleygboga

Graf annars stigs falls er U-laga ferill sem nefnist fleygbogi. Mikilvægt einkenni grafsins er útgildispunktur þess, sem nefnist hvirfilpunktur. Ef fleygboginn opnast upp táknar hvirfilpunkturinn lægsta punkt grafsins, þar sem annars stigs fallið tekur minnsta gildi sitt. Ef fleygboginn opnast niður táknar hvirfilpunkturinn hæsta punkt grafsins, þar sem fallið tekur stærsta gildi sitt. Í báðum tilvikum er hvirfilpunkturinn snúningspunktur á grafinu. Grafið er einnig samhverft um lóðrétta línu sem liggur í gegnum hvirfilpunktinn og nefnist samhverfuás. Þessi einkenni eru sýnd á mynd 2.



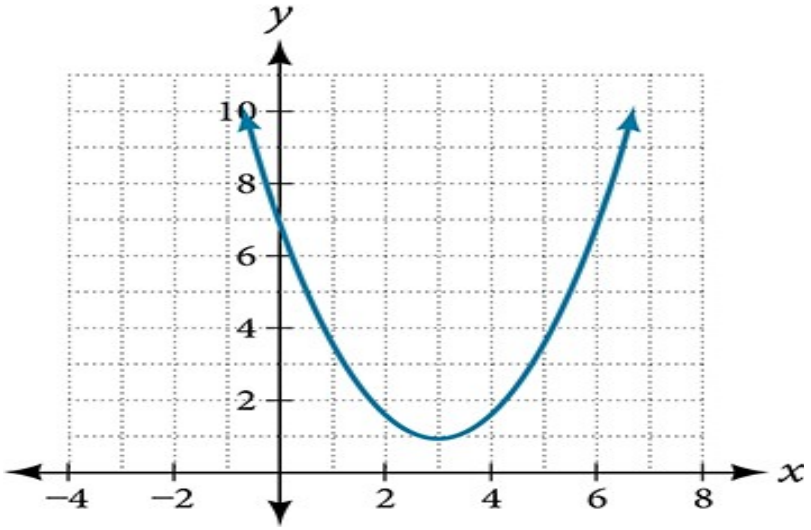
Mynd 2. Hvirfilpunktur, samhverfuás og skurðpunktar fleygboga við hnitaása.

Skurðpunkturinn við y-ás er punkturinn þar sem fleygboginn sker y-ásinn. Skurðpunktarnir við x-ás eru punktarnir þar sem fleygboginn sker x-ásinn. Ef slíkir punktar eru til tákna skurðpunktarnir við x-ás núllstöðvar, eða rætur, annars stigs fallsins, það er þau gildi x þar sem $y=0$.

DÆMI 1

Einkenni fleygboga fundin

Ákvarðið hvirfilpunkt, samhverfuás, núllstöðvar og skurðpunkt við $y-$ ás fyrir fleygbogann á mynd 3.



Mynd 3

Lausn

Hvirfilpunkturinn er snúningspunktur grafsins. Við sjáum að hann er í $(3,1)$. Þar sem fleygboginn opnast upp er samhverfuásinn lóðrétta línan sem sker fleygbogann í hvirfilpunktinum. Samhverfuásinn er því $x=3$. Fleygboginn sker ekki $x-$ ásinn og hefur því engar núllstöðvar. Hann sker $y-$ ásinn í $(0,7)$ og það er því skurðpunkturinn við y-ás.

Tengsl grafa fleygboga við annars stigs föll þeirra

Almennt form annars stigs falls setur fallið fram á forminu

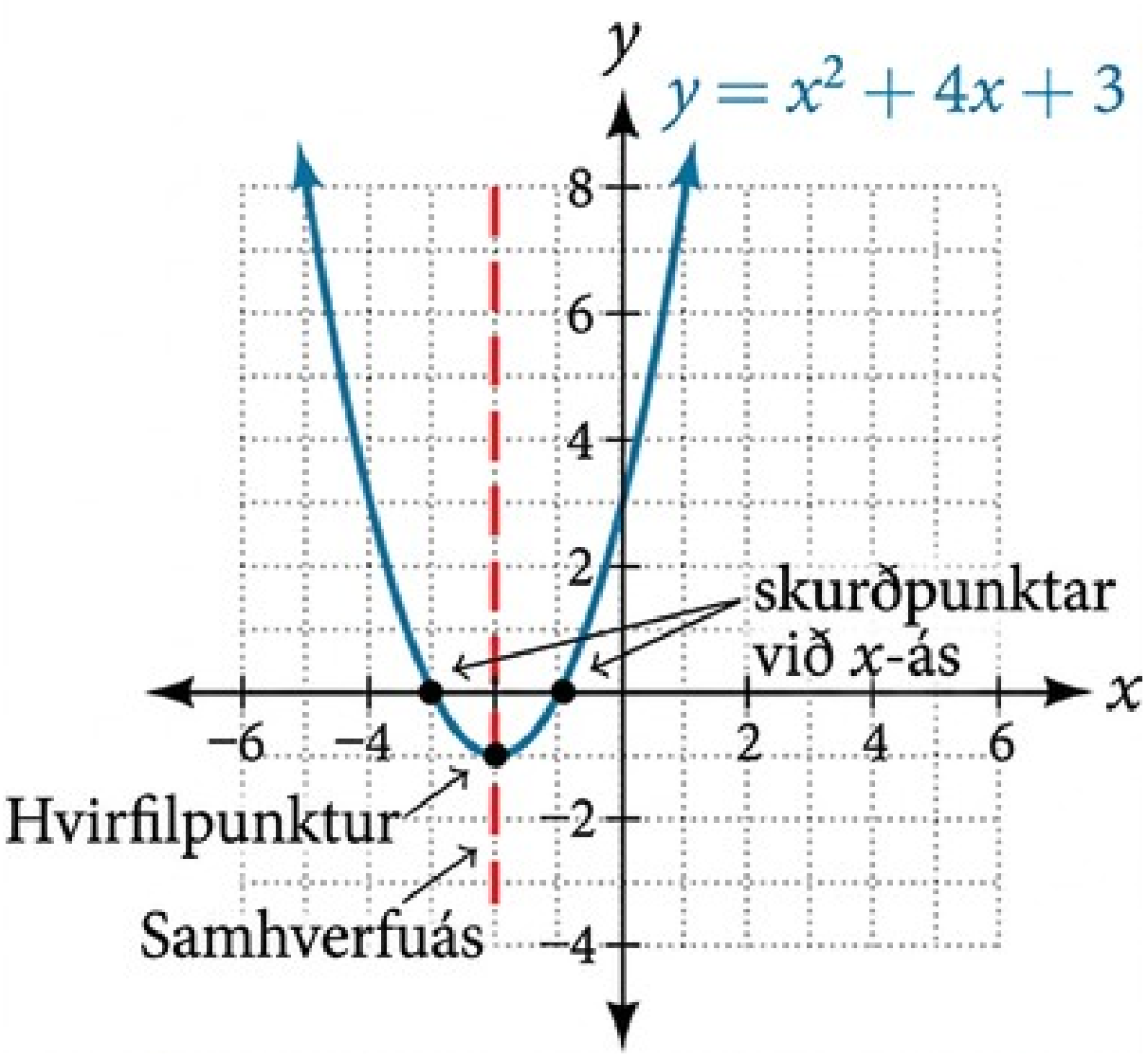
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

þar sem a, b, og c eru rauntölur og $a\neq 0$. Ef $a>0$, opnast fleygboginn upp. Ef $a<0$, opnast hann niður. Við getum notað almennt form fleygboga til að finna jöfnu samhverfuássins.

Samhverfuásinn er skilgreindur með $x=-\frac{b}{2a}$. Ef við notum lausnarformúlu annars stigs jöfnu, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, til að leysa $ax^2+bx+c=0$ og finna skurðpunktana við $x-$ ás, eða núllstöðvarnar, kemur í ljós að gildi x mitt á milli þeirra er alltaf $x=-\frac{b}{2a}$, sem er jafna samhverfuássins.

Mynd 4 sýnir graf annars stigs fallsins sem er skrifað á almennu formi sem $y=x^2+4x+3$. Á þessu formi eru $a=1, b=4$, og $c=3$. Þar sem $a>0$, opnast fleygboginn upp.

Samhverfuásinn er $x=-\frac{4}{2(1)}=-2$. Þetta er einnig rökrétt því á grafinu sést að lóðrétta línan $x=-2$ skiptir grafinu í tvennt. Hvirfilpunkturinn er alltaf á samhverfuásnum. Hvirfilpunktur fleygboga sem opnast upp er í lægsta punkti grafsins, í þessu tilviki í $(-2,-1)$.
Skurðpunktarnir við $x-$ ás, þar sem fleygboginn sker $x-$ ásinn, eru í $(-3,0)$ og $(-1,0)$.



Mynd 4

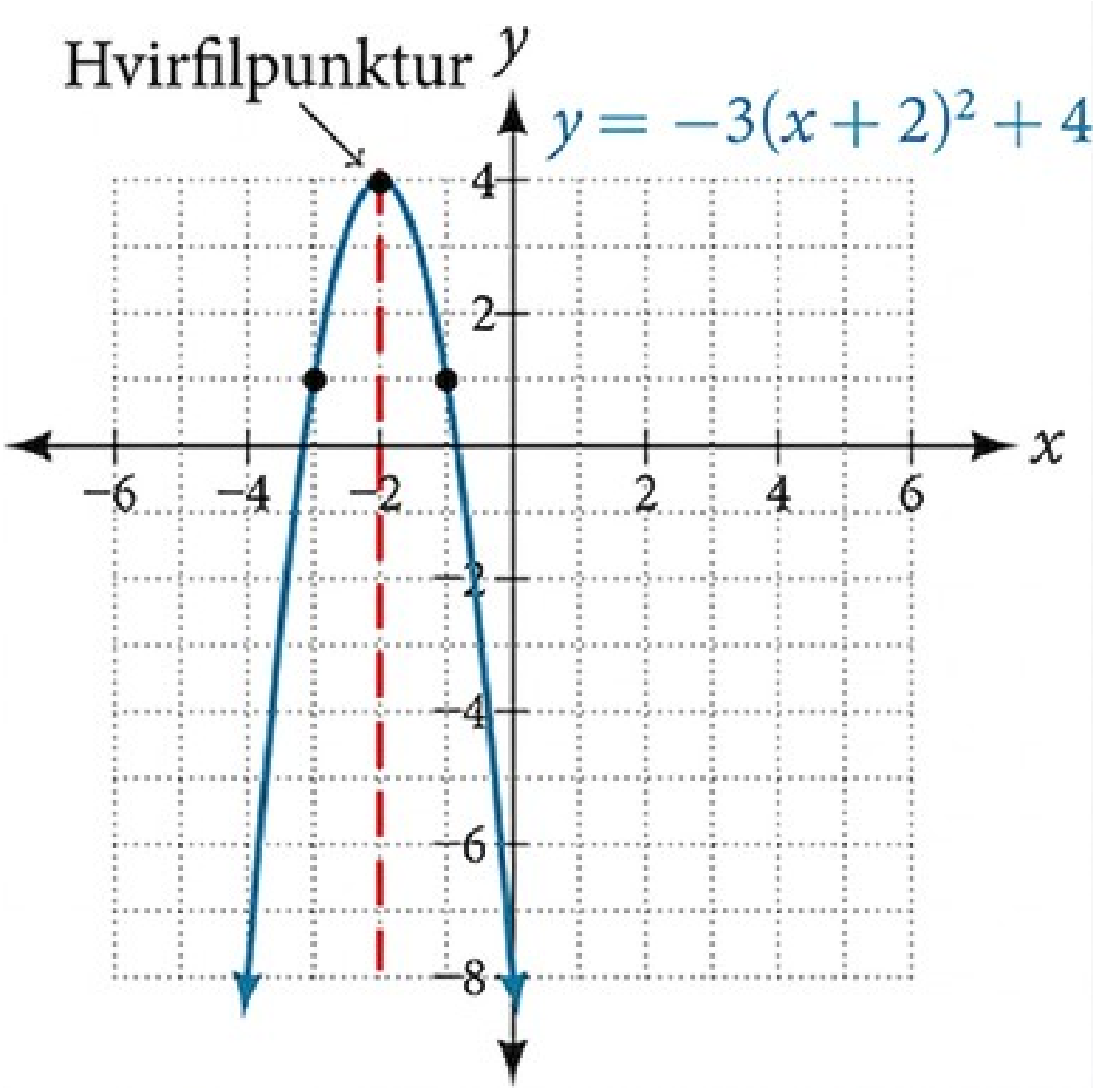
Staðlað form annars stigs falls setur fallið fram á forminu

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

þar sem (h,k) er hvirfilpunkturinn. Þar sem hvirfilpunkturinn kemur fram í stöðluðu formi annars stigs fallsins nefnist þetta form einnig hvirfilpunktsform annars stigs falls.

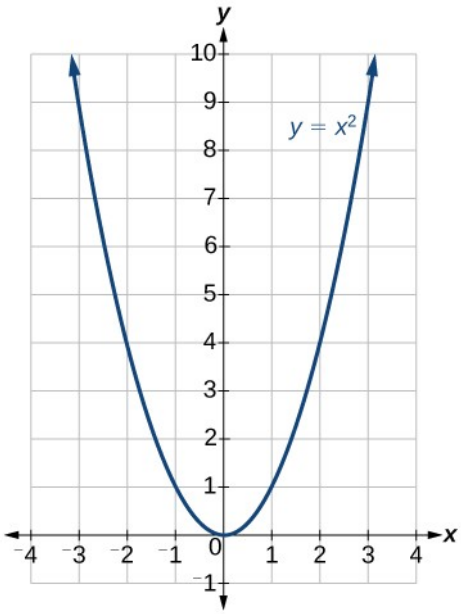
Eins og í almenna forminu gildir að ef $a>0$, opnast fleygboginn upp og fallið tekur lágmarksgildi sitt í hvirfilpunktinum. Ef $a<0$, opnast fleygboginn niður og fallið tekur hámarksgildi sitt í hvirfilpunktinum. Mynd 5 sýnir graf annars stigs fallsins á stöðluðu formi

sem $y=-3(x+2)^2+4$. Þar sem $x-h=x+2$ í þessu dæmi er $h=-2$. Á þessu formi eru $a=-3, h=-2$, og $k=4$. Þar sem $a<0$, opnast fleygboginn niður. Hvirfilpunkturinn er í $(-2,\ 4)$.



Mynd 5

Staðlaða formið er gagnlegt til að ákvarða hvernig grafið er ummyndað út frá grafi $y=x^2$. Mynd 6 sýnir graf þessa grunnfalls.



Mynd 6

Ef $k>0$, hliðrast grafið upp en ef $k<0$, hliðrast það niður. Á mynd 5 er $k>0$, svo grafið hliðrast um 4 einingar upp. Ef $h>0$, hliðrast grafið til hægri en ef $h<0$, hliðrast það til vinstri. Á mynd 5 er $h<0$, svo grafið hliðrast um 2 einingar til vinstri. Tölugildi a gefur til kynna teygju grafsins. Ef $|a|>1$, færist punkturinn sem samsvarar tilteknu $x-$ -gildi fjær x-ásnum, svo grafið virðist mjórra og um lóðrétta teygju er að ræða. Ef $|a|<1$, færist punkturinn sem samsvarar tilteknu $x-$ -gildi nær x-ásnum, svo grafið virðist breiðara en í raun er um lóðrétta samþjöppun að ræða. Á mynd 5 er $|a|>1$, svo grafið verður mjórra.

Staðlaða formið og almenna formið eru jafngildar leiðir til að lýsa sama falli. Við sjáum það með því að margfalda upp úr staðlaða forminu og setja það jafnt almenna forminu.

$$a(x-h)^2+k=ax^2+bx+c$$
$$ax^2-2ahx+(ah^2+k)=ax^2+bx+c$$

Til að línulegu liðirnir séu jafnir verða stuðlarnir að vera jafnir.

$$-2ah=b,\ \text{svo}\ h=-\frac{b}{2a}.$$

Þetta er samhverfuásinn sem við skilgreindum áður. Setjum fastaliðina jafna:

$$\begin{aligned} ah^2+k&=c\\ k&=c-ah^2\\ &=c-a\left(-\tfrac{b}{2a}\right)^2\\ &=c-\tfrac{b^2}{4a}\end{aligned}$$

Í reynd er þó yfirleitt auðveldara að muna að k er úttaksgildi fallsins þegar inntakið er h, þannig að $f(h)=k$.

FORM ANNARS STIGS FALLA

Annars stigs fall er fall af stigi tvö. Graf annars stigs falls er fleygbogi. Almennt form annars stigs falls er $f(x)=ax^2+bx+c$ þar sem a, b, og c eru rauntölur og $a\neq 0$.

Staðlað form annars stigs falls er $f(x)=a(x-h)^2+k$.

Hvirfilpunkturinn (h,k) er í

$$h=-\frac{b}{2a}, k=f(h)=f\left(\frac{-b}{2a}\right).$$

AÐFERÐ

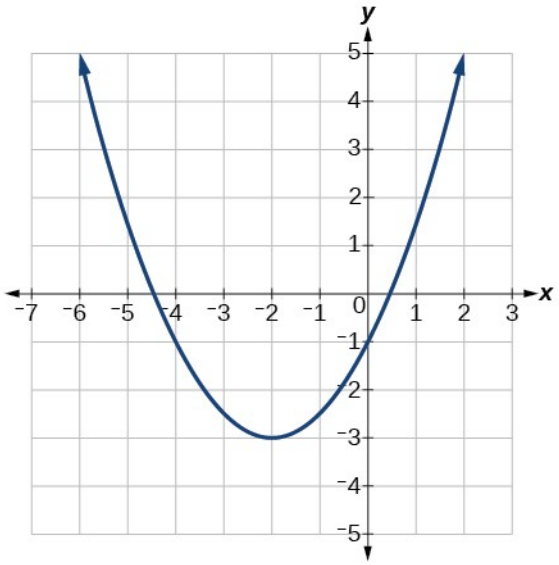
Skrifið jöfnu annars stigs falls á almennu formi út frá grafi þess.

1. Ákvarðið lárétta hliðrun fleygbogans; gildi hennar er h. Ákvarðið lóðrétta hliðrun fleygbogans; gildi hennar er k.
2. Setjið gildi láréttu og lóðréttu hliðrunarinnar inn fyrir h og k. í fallinu $f(x)=a(x-h)^2+k$.
3. Setjið hnit einhvers punkts á grafi fleygbogans, annars en hvirfilpunktsins, inn fyrir x og $f(x)$.
4. Finnið teygjustuðulinn $|a|$.
5. Ef fleygboginn opnast upp er $a>0$. Ef hann opnast niður er $a<0$ því að þá hefur grafinu verið speglað um $x-$ ásinn.
6. Margfaldið upp úr svigum og einfaldið til að skrifa fallið á almennu formi.

DÆMI 2

Jafna annars stigs falls skrifuð út frá grafi

Skrifið jöfnu annars stigs fallsins g á mynd 7 sem ummyndun fallsins $f(x)=x^2$, margfaldið síðan upp úr formúlunni og einfaldið liðina til að skrifa jöfnuna á almennu formi.



Mynd 7

Lausn

Við sjáum að graf g er graf fallsins $f(x)=x^2$ hliðrað um 2 til vinstri og 3 niður. Það gefur formúlu á forminu $g(x)=a(x+2)^2-3$.

Með því að setja inn hnit punkts á ferlinum, til dæmis $(0,-1)$, getum við fundið teygjustuðulinn.

$$\begin{aligned} -1 &= a(0+2)^2 - 3 \\ 2 &= 4a \\ a &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Á stöðluðu formi er algebrulíkanið fyrir grafið $g(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

Til að skrifa þetta á almennu margliðuformi getum við margfaldað upp úr formúlunni og einfaldað liðina.

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}(x+2)^2 - 3 \\ &= \tfrac{1}{2}(x+2)(x+2) - 3 \\ &= \tfrac{1}{2}(x^2+4x+4) - 3 \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - 3 \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Athugið að lárétt og lóðrétt hliðrun grunngrafs annars stigs fallsins ákvarðar staðsetningu hvirfilpunkts fleygbogans. Teygja og samþjöppun hafa ekki áhrif á hvirfilpunktinn.

Greining

Við getum athugað lausnina með töfluaðgerð grafteikniforrits. Sláið fyrst inn $Y1=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$. Veljið síðan TBLSET, notið $\text{TblStart}=-6$ og $\Delta\text{Tbl}=2$, og veljið TABLE. Sjá töflu 1.

Tafla 1

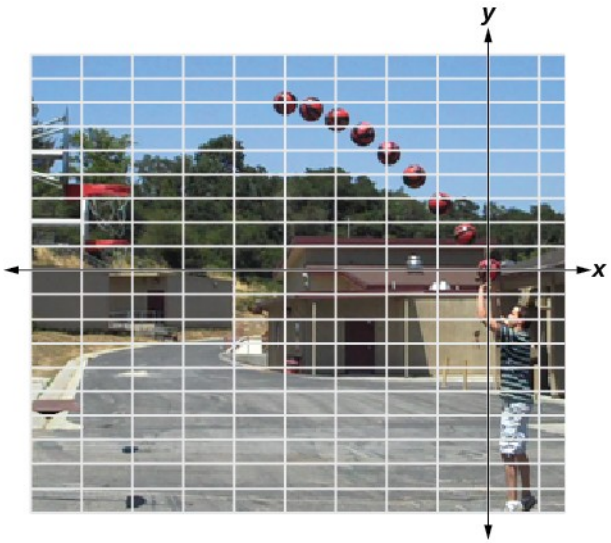
x	−6	−4	−2	0	2
y	5	−1	−3	−1	5

Röðuðu pörin í töflunni samsvara punktum á grafinu.

3

REYNIÐ SJÁLF #1

Hnitakerfi hefur verið lagt yfir annars stigs feril körfubolta á mynd 8. Gerið ráð fyrir að punkturinn (−4, 7) sé hæsti punktur ferils boltans. Finnið jöfnu ferilsins. Fer boltinn ofan í körfuna?



Mynd 8 (mynd: breytt verk eftir Dan Meyer)

AÐFERÐ

Finnið hvirfilpunkt fleygboga út frá annars stigs falli á almennu formi.

1. Finnið a, b, og c.
2. Finnið h, x-hnit hvirfilpunktsins, með því að setja a og b inn í $h=-\frac{b}{2a}$.
3. Finnið k, y-hnit hvirfilpunktsins, með því að reikna $k=f(h)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

DÆMI 3

Hvirfilpunktur annars stigs falls fundinn

Finnið hvirfilpunkt annars stigs fallsins $f(x)=2x^2-6x+7$. Skrifið fallið á stöðluðu formi (hvirfilpunktsformi).

Lausn

Lárétt hnit hvirfilpunktsins er

$$\begin{aligned} h &= -\tfrac{b}{2a} \\ &= -\tfrac{-6}{2(2)} \\ &= \tfrac{6}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Lóðrétt hnit hvirfilpunktsins er

$$\begin{aligned} k &= f(h) \\ &= f\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ &= 2\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 6\left(\tfrac{3}{2}\right) + 7 \\ &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Þegar fallið er skrifað á stöðluðu formi er teygjustuðullinn sá sami og a í upphaflega annars stigs fallinu.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f(x) &= 2x^2 - 6x + 7 \end{aligned}$$

Þegar hvirfilpunkturinn er notaður til að ákvarða hliðranirnar fæst

$$f(x)=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

Greining

Ein ástæða þess að við viljum finna hvirfilpunkt fleygbogans er að hann segir okkur hvert stærsta eða minnsta úttaksgildið er, (k), og við hvaða inntaksgildi það fæst, (x).

REYNIÐ SJÁLF #2

Skrifið jöfnuna $g(x)=13+x^2-6x$, fyrst á almennu formi og síðan á stöðluðu formi.

Skilgreiningarmengi og myndmengi annars stigs falls fundin

Hvaða rauntala sem er getur verið inntaksgildi annars stigs falls. Skilgreiningarmengi allra annars stigs falla er því mengi allra rauntalna. Þar sem fleygbogar hafa hámarks- eða lágmarkspunkt er myndmengið takmarkað. Hvirfilpunktur fleygboga er annaðhvort hámark

eða lágmark. Myndmengið samanstendur því annaðhvort af öllum y-gildum sem eru stærri en eða jöfn y-hniti hvirfilpunktsins eða af öllum y-gildum sem eru minni en eða jöfn y-hniti hans, eftir því hvort fleygboginn opnast upp eða niður.

SKILGREININGARMENGI OG MYNDMENGI ANNARS STIGS FALLS

Skilgreiningarmengi sérhvers annars stigs falls er mengi allra rauntalna.

Myndmengi annars stigs falls á almennu formi $f(x)=ax^2+bx+c$ með jákvætt gildi a er $f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, eða $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),\infty\right)$.

Myndmengi annars stigs falls á almennu formi með neikvætt gildi a er $f(x)\leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, eða $\left(-\infty,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

Myndmengi annars stigs falls á stöðluðu formi $f(x)=a(x-h)^2+k$ með jákvætt gildi a er $f(x)\geq k$; myndmengi annars stigs falls á stöðluðu formi með neikvætt gildi a er $f(x)\leq k$.

AÐFERÐ

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi gefins annars stigs falls.

1. Skilgreiningarmengi annars stigs falls er alltaf mengi allra rauntalna.
2. Ákvarðið hvort a er jákvætt eða neikvætt. Ef a er jákvætt hefur fleygboginn lágmark. Ef a er neikvætt hefur fleygboginn hámark.
3. Ákvarðið stærsta eða minnsta gildi fleygbogans, k.
4. Ef fleygboginn hefur lágmark er myndmengið gefið með $f(x)\geq k$, eða $[k,\infty)$. Ef fleygboginn hefur hámark er myndmengið gefið með $f(x)\leq k$, eða $(-\infty,k]$.

DÆMI 4

Skilgreiningarmengi og myndmengi annars stigs falls fundin

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi $f(x)=-5x^2+9x-1$.

Lausn

Eins og á við um öll annars stigs föll er skilgreiningarmengið allar rauntölur.

Þar sem a er neikvætt opnast fleygboginn niður og hefur hámark. Við þurfum að ákvarða stærsta gildið. Við getum byrjað á að finna $x-$ gildi hvirfilpunktsins.

$$\begin{aligned} h &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{9}{2(-5)} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Stærsta gildið er gefið með $f(h)$.

$$\begin{aligned} f(\tfrac{9}{10}) &= -5(\tfrac{9}{10})^2 + 9(\tfrac{9}{10}) - 1 \\ &= \tfrac{61}{20} \end{aligned}$$

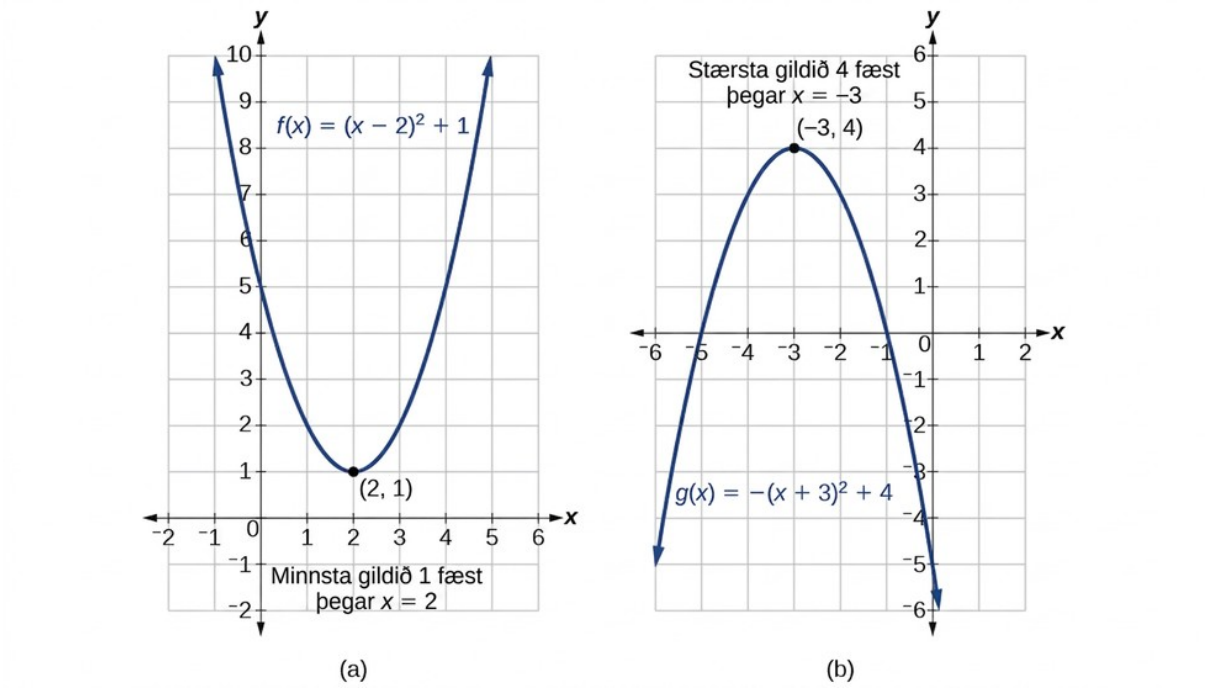
Myndmengið er $f(x) \leq \frac{61}{20}$, eða $\left(-\infty, \frac{61}{20}\right]$.

REYNIÐ SJÁLF #3

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi $f(x) = 2\left(x - \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{8}{11}$.

Stærstu og minnstu gildi annars stigs falla ákvörðuð

Úttaksgildi annars stigs falls í hvirfilpunktinum er stærsta eða minnsta gildi fallsins eftir því hvernig fleygboginn snýr. Stærstu og minnstu gildin eru sýnd á mynd 9.



Mynd 9. Lággildi fleygboga sem opnast upp og hágildi fleygboga sem opnast niður.

Í mörgum raunverulegum aðstæðum þarf að finna stærsta eða minnsta gildi annars stigs falls, til dæmis í verkefnum um flatarmál og tekjur.

DÆMI 5

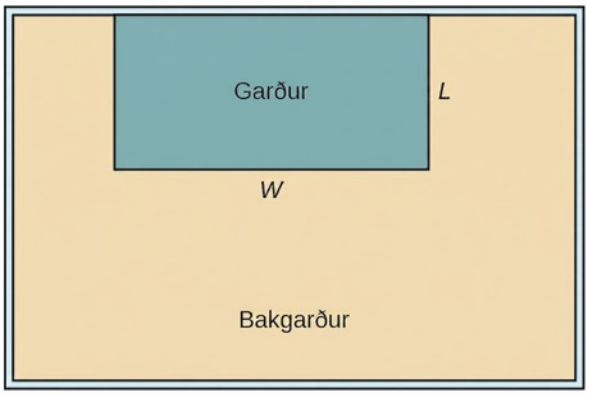
Stærsta gildi annars stigs falls fundið

Kona sem ræktar matjurtir vill girða af rétthyrnt svæði fyrir nýjan garð í afgirtum bakgarði sínum. Hún hefur keypt 80 fet af vírgirðingu fyrir þrjár hliðar og ætlar að nota hluta bakgarðsgirðingarinnar sem fjórðu hliðina.

1. ⓐ Finnið formúlu fyrir flatarmálið sem girðingin afmarkar ef hliðar girðingarinnar sem eru hornréttar á núverandi girðingu hafa lengdina L.
2. ⓑ Hvaða mál ætti garðurinn að hafa til að flatarmálið innan girðingarinnar verði sem stærst?

Lausn

Notum teikningu eins og mynd 10 til að skrá gefnu upplýsingarnar. Einnig er gott að taka upp bráðabirgðabreytuna W, fyrir breidd garðsins og lengd girðingarhlutans sem er samsíða bakgarðsgirðingunni.



Mynd 10

1. ⓐ Við vitum að aðeins eru til 80 fet af girðingu og $L+W+L=80$, eða einfaldar $2L+W=80$. Þannig getum við táknað breiddina, W, með L.
   $W=80-2L$
   Nú getum við skrifað jöfnu fyrir flatarmálið sem girðingin afmarkar. Flatarmál rétthyrnings er lengd margfölduð með breidd og því er

$$A = LW = L(80 - 2L)$$
$$A(L) = 80L - 2L^2$$

   Þessi formúla gefur flatarmálið innan girðingarinnar sem fall af lengdinni L. Fallið á almennu formi er
   $A(L)=-2L^2+80L$.
2. Annars stigs fallið hefur neikvæðan forystustuðul. Grafið opnast því niður og hvirfilpunkturinn gefur stærsta gildi flatarmálsins. Við þurfum að gæta okkar þegar við finnum hvirfilpunktinn því jafnan er ekki skrifuð á stöðluðu margliðuformi með

lækkandi veldum. Þess vegna skrifuðum við fallið á almennu formi hér að framan. Þar sem a er stuðull ferningsliðarins eru $a=-2$, $b=80$, og $c=0$.

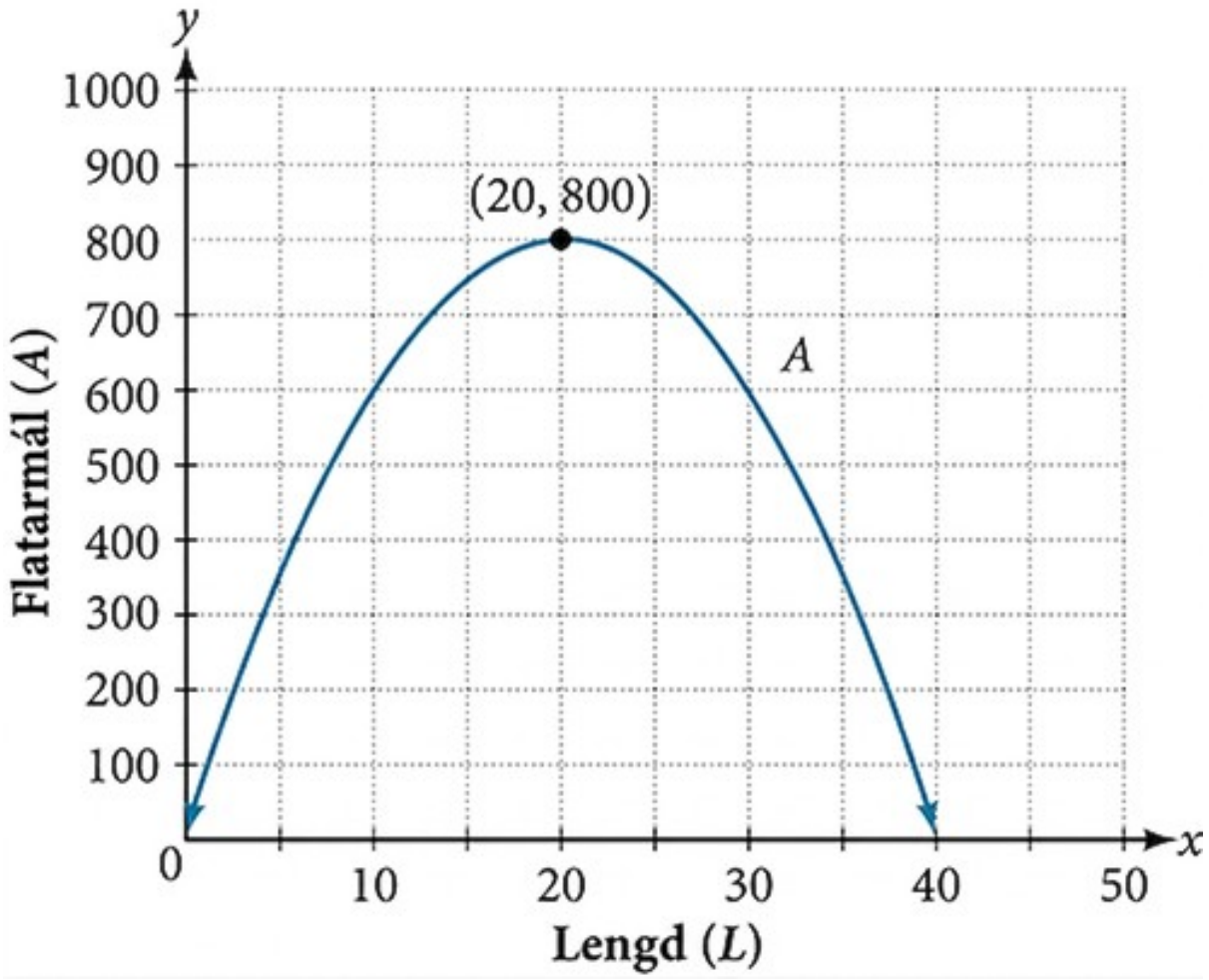
Til að finna hvirfilpunktinn:

$$h=-\frac{80}{2(-2)} \qquad k=A(20)$$
$$=20 \qquad \text{og} \qquad =80(20)-2(20)^2$$
$$=800$$

Stærsta gildi fallsins er flatarmálið 800 ferfet og fæst þegar $L=20$ fet. Þegar styttri hliðarnar eru 20 fet eru 40 fet af girðingu eftir fyrir lengri hliðina. Til að hámarka flatarmálið ætti hún að girða garðinn þannig að styttri hliðarnar tvær séu 20 fet að lengd og lengri hliðin, samsíða núverandi girðingu, sé 40 fet að lengd.

Greining

Einnig mætti leysa verkefnið með því að teikna graf annars stigs fallsins. Á grafi fallsins á mynd 11 sjáum við hvar flatarmálið verður mest.



Mynd 11

AÐFERÐ

Notið annars stigs jöfnu til að finna hámark í hagnýtu verkefni um tekjur.

1. Skrifið annars stigs jöfnu fyrir tekjurnar.
2. Finnið hvirfilpunkt grafs annars stigs fallsins.
3. Ákvarðið y-gildi hvirfilpunktsins.

DÆMI 6

Mestu tekjur fundnar

Einingarverð vöru hefur áhrif á framboð á henni og eftirspurn eftir henni. Ef einingarverðið hækkar minnkar eftirspurnin yfirleitt. Staðarblað hefur til dæmis nú 84.000 áskrifendur sem greiða 30 Bandaríkjadali á ársfjórðungi. Markaðsrannsókn bendir til þess að ef eigendurnir hækkuðu verðið í 32 Bandaríkjadali myndi blaðið missa 5.000 áskrifendur. Gerið ráð fyrir að línulegt samband sé milli áskriftarverðs og fjölda áskrifenda. Hvaða verð ætti blaðið að taka fyrir ársfjórðungsáskrift til að hámarka tekjurnar?

Lausn

Tekjur eru sú fjárhæð sem fyrirtæki aflar. Hér finnum við tekjurnar með því að margfalda verð hverrar áskriftar með fjölda áskrifenda. Við skilgreinum breyturnar p fyrir verð áskriftar og Q fyrir fjölda áskrifenda og fáum jöfnuna $\text{Tekjur} = pQ$.

Þar sem fjöldi áskrifenda breytist með verðinu þurfum við að finna samband breytanna. Við vitum að nú eru $p = 30$ og $Q = 84.000$. Við vitum einnig að ef verðið hækkar í 32 dali missir blaðið 5.000 áskrifendur. Það gefur annað gildapar, $p = 32$ og $Q = 79.000$. Út frá þessu getum við fundið línulega jöfnu sem tengir stærðirnar tvær. Hallatalan er

$$\begin{aligned} m &= \frac{79.000 - 84.000}{32 - 30} \\ &= \frac{-5.000}{2} \\ &= -2.500 \end{aligned}$$

Þetta segir okkur að blaðið missi 2.500 áskrifendur fyrir hvern Bandaríkjadal sem verðið hækkar um. Þá getum við fundið skurðpunktinn við y-ás.

$$\begin{aligned} Q &= -2500\ p + b && \text{Setjið inn hnit punktsins } Q = 84.000 \text{ og } p = 30 \\ 84.000 &= -2500\ (30) + b && \text{Leyst fyrir } b \\ b &= 159.000 \end{aligned}$$

Þannig fæst línulega jafnan $Q = -2.500\ p + 159.000$ sem tengir verð og fjölda áskrifenda. Snúum okkur aftur að tekjujöfnunni.

$$\begin{aligned} \text{Tekjur} &= p\ Q \\ \text{Tekjur} &= p\ (-2.500\ p + 159.000) \\ \text{Tekjur} &= -2.500\ p^2 + 159.000\ p \end{aligned}$$

Nú höfum við annars stigs fall sem gefur tekjurnar sem fall af áskriftarverðinu. Til að finna verðið sem hámarkar tekjur blaðsins getum við fundið hvirfilpunktinn.

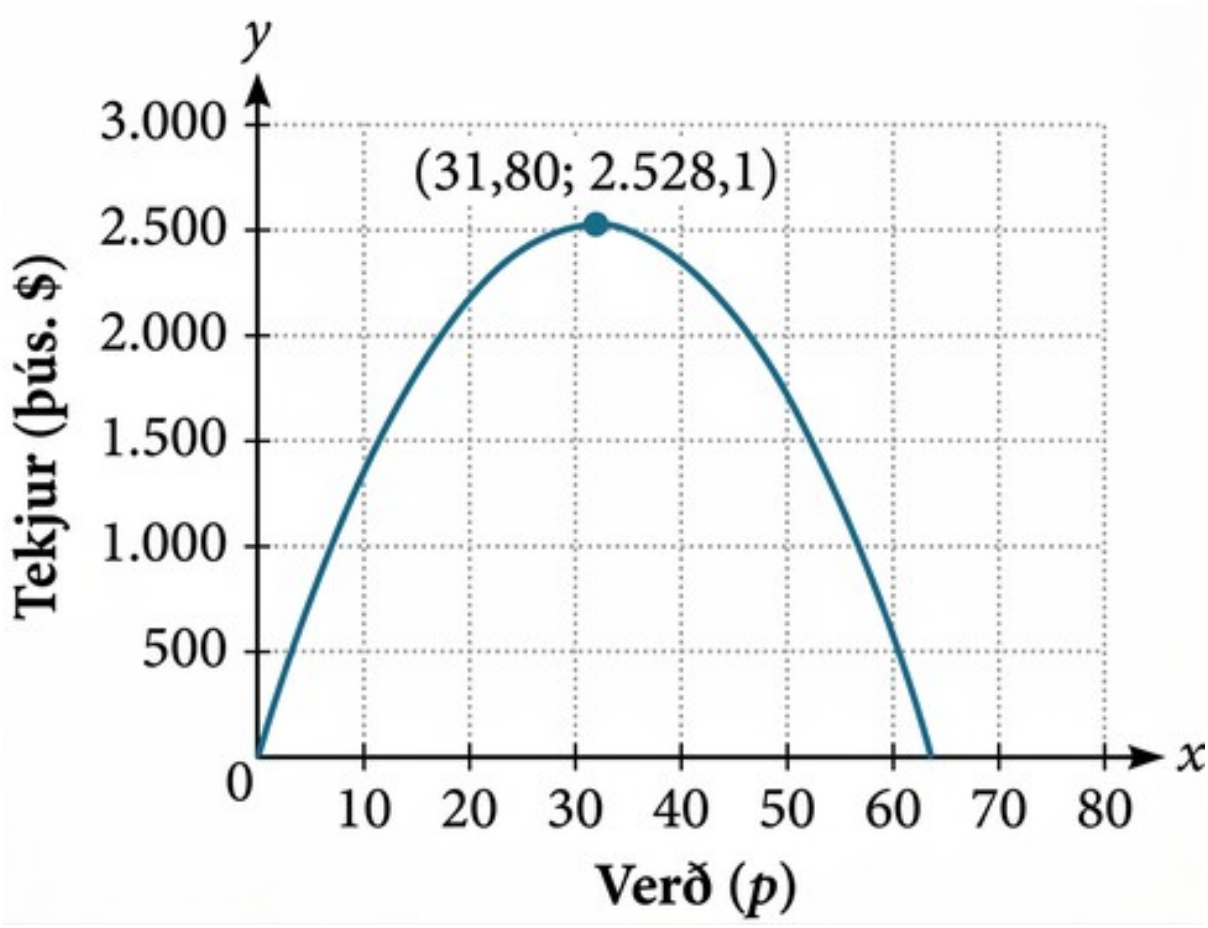
$$h = -\frac{159.000}{2(-2.500)}$$
$$= 31{,}8$$

Líkanið segir okkur að tekjurnar verði mestar ef blaðið tekur 31,80 Bandaríkjadali fyrir áskrift. Til að finna mestu tekjurnar reiknum við gildi tekjufallsins.

$$\text{hámarkstekjur} = -2.500\,(31{,}8)^2 + 159.000\,(31{,}8)$$
$$= 2.528.100$$

Greining

Einnig mætti leysa verkefnið með því að teikna graf annars stigs fallsins eins og á mynd 12. Á grafinu sjáum við hvar tekjurnar verða mestar.

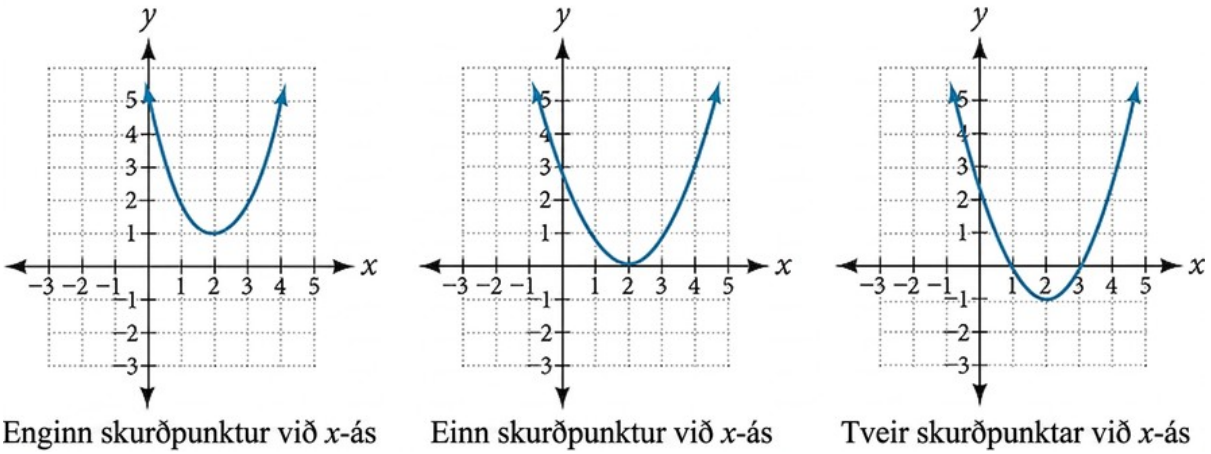


Mynd 12

Skurðpunktar annars stigs falls við x- og y-ás fundnir

Líkt og í hagnýtu verkefnunum hér að framan þurfum við einnig að finna skurðpunkta annars stigs jafna til að teikna fleygboga. Rifjið upp að skurðpunktur annars stigs falls við y – ás fæst

með því að reikna gildi fallsins þegar inntakið er núll. Skurðpunktar við $x-$ ás eru þar sem úttakið er núll. Á mynd 13 sést að fjöldi skurðpunkta við $x-$ ás getur verið mismunandi eftir staðsetningu grafsins.



Mynd 13 Fjöldi skurðpunkta fleygboga við x-ás

AÐFERÐ

Finnið skurðpunkta gefins annars stigs falls $f(x)$, við $y-$ og x-ás.

1. Reiknið $f(0)$ til að finna skurðpunktinn við $y-$ ás.
2. Leysið annars stigs jöfnuna $f(x)=0$ til að finna skurðpunktana við x-ás.

DÆMI 7

Skurðpunktar fleygboga við y- og x-ás fundnir

Finnið skurðpunktana við y- og x-ás fyrir annars stigs fallið $f(x)=3x^2+5x-2$.

Lausn

Við finnum skurðpunktinn við y-ás með því að reikna $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= 3(0)^2 + 5(0) - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Skurðpunkturinn við y-ás er því í $(0,-2)$.

Til að finna skurðpunktana við x-ás finnum við allar lausnir $f(x)=0$.

$$0=3x^2+5x-2$$

Hér er auðvelt að þátta annars stigs stæðuna og það er einfaldasta leiðin til að leysa jöfnuna.

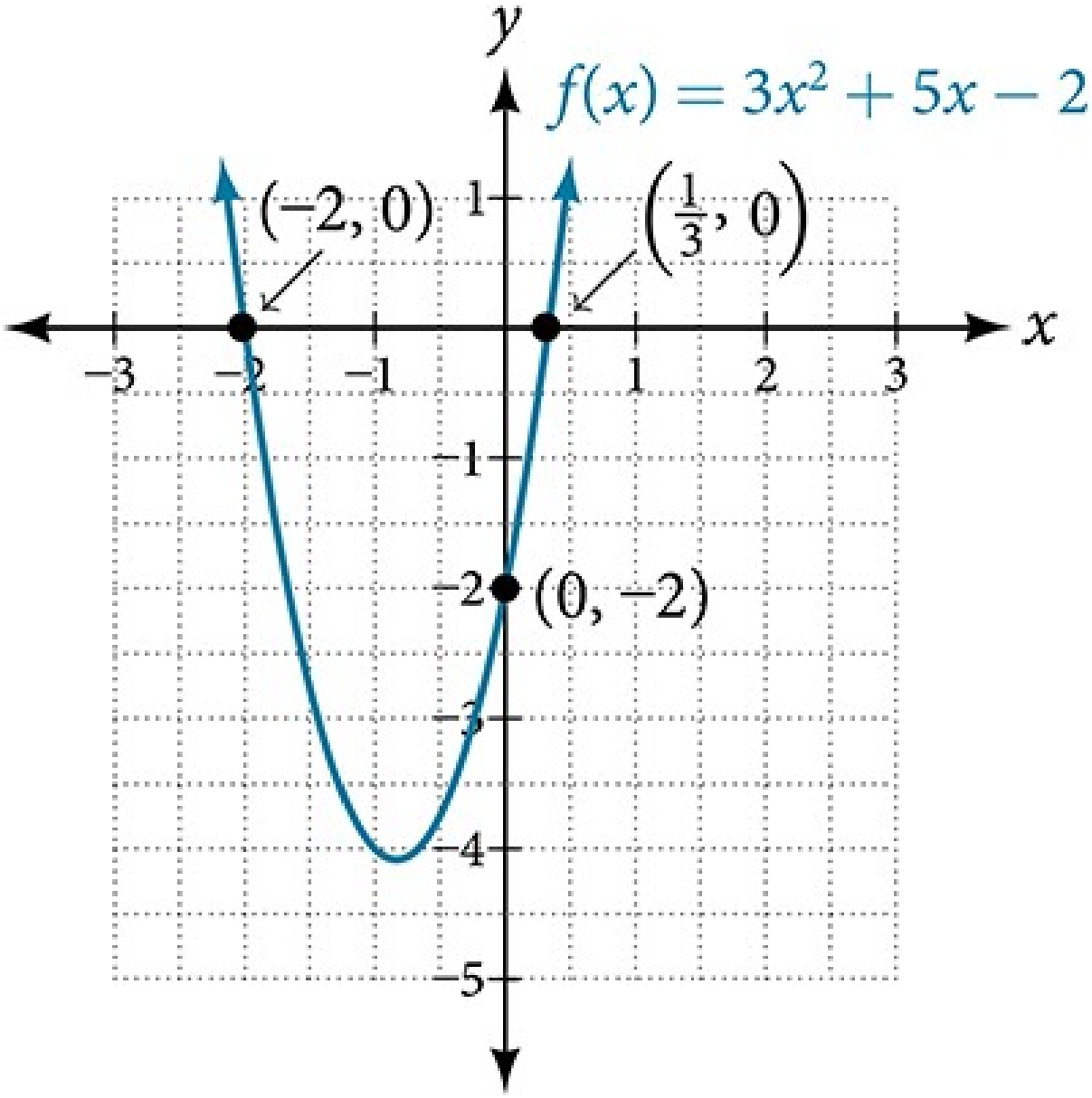
$$0=(3x-1)(x+2)$$

$$0 = 3\,x - 1 \qquad\qquad 0 = x + 2$$
$$x = \frac{1}{3} \qquad \text{eða} \qquad x = -2$$

Skurðpunktarnir við x-ás eru því í $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ og $(-2, 0)$.

Greining

Með því að teikna graf fallsins getum við staðfest að grafið sker y-ásinn í $(0, -2)$. Við getum einnig staðfest að grafið sker x-ásinn í $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ og $(-2, 0)$. Sjá mynd 14



Mynd 14

Annars stigs föll skrifuð á stöðluðu formi

Í dæmi 7 var auðvelt að leysa annars stigs jöfnuna með þáttun. Margar annars stigs jöfnur er þó ekki auðvelt að leysa með þáttun. Við getum leyst þær með því að skrifa samsvarandi fall fyrst á stöðluðu formi.

AÐFERÐ

Finnið skurðpunkta gefins annars stigs falls við $x-$ ás með því að skrifa það á stöðluðu formi.

1. Setjið a og b inn í $h=-\frac{b}{2a}$.
2. Setjið $x=h$ inn í almennt form annars stigs fallsins til að finna k.
3. Skrifið annars stigs fallið á stöðluðu formi með h og k.
4. Ákvarðið hvar úttak fallsins er núll til að finna skurðpunktana við $x-$ ás.

DÆMI 8

Skurðpunktar fleygboga við $x-$ ás fundnir

Finnið skurðpunkta við $x-$ ás fyrir annars stigs fallið $f(x)=2x^2+4x-4$.

Lausn

Við byrjum á að finna hvar úttakið er núll.

$$0=2x^2+4x-4$$

Hér er ekki auðvelt að þátta annars stigs stæðuna. Við finnum því skurðpunktana með því að skrifa fallið fyrst á stöðluðu formi.

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

Við vitum að $a=2$. Síðan finnum við h og k.

$$\begin{aligned} h &= -\tfrac{b}{2a} & k &= f(-1) \\ &= -\tfrac{4}{2(2)} & &= 2(-1)^2+4(-1)-4 \\ &= -1 & &= -6 \end{aligned}$$

Nú getum við skrifað fallið á stöðluðu formi.

$$f(x)=2(x+1)^2-6$$

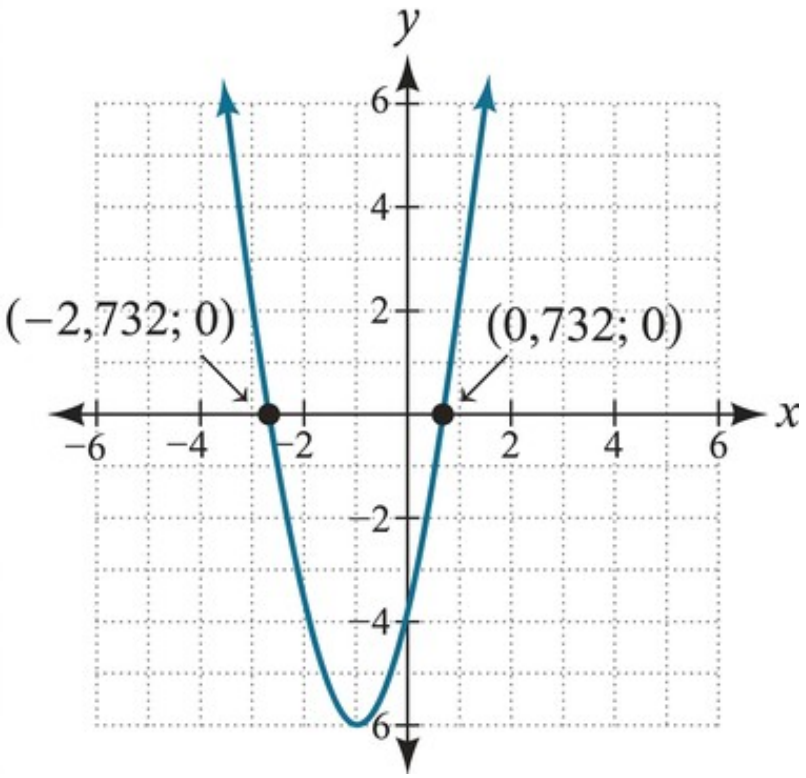
Nú getum við fundið hvar úttakið er núll.

$$0 = 2(x+1)^2 - 6$$
$$6 = 2(x+1)^2$$
$$3 = (x+1)^2$$
$$x+1 = \pm\sqrt{3}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{3}$$

Grafið hefur skurðpunkta við $x-$ ás í $\left(-1-\sqrt{3},0\right)$ og $\left(-1+\sqrt{3},0\right)$.

Greining

Við getum kannað lausnina með því að teikna gefna fallið í grafteikniforriti og skoða skurðpunktana við $x-$ ás. Sjá mynd 15.



Mynd 15

REYNIÐ SJÁLF #4

Í öðru verkefni af gerðinni Reynið sjálf fundum við staðlað og almennt form fallsins $g(x)=13+x^2-6x$. Finnið nú skurðpunkta þess við y- og $x-$ ás, ef þeir eru til.

DÆMI 9

Annars stigs jafna leyst með lausnarformúlunni

Leysið $x^2+x+2=0$.

Lausn

Byrjum á að skrifa lausnarformúlu annars stigs jöfnu: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Þegar lausnarformúlu annars stigs jöfnu er beitt finnum við stuðlana a, b og c. Í jöfnunni $x^2+x+2=0$, eru $a=1, b=1,$ og $c=2$. Þegar þessi gildi eru sett inn í formúluna fæst:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \tfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(2)}}{2\cdot1} \\ &= \tfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \\ &= \tfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2} \\ &= \tfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Lausnir jöfnunnar eru $(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2})$ og $(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2})$ eða $(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{7}}{2})$ og $\frac{-1}{2}-\frac{i\sqrt{7}}{2}$.

DÆMI 10

Notkun hvirfilpunkts og x-skurðpunkta fleygboga

Bolta er kastað upp af þaki 40 feta hárrar byggingar með upphafshraðanum 80 fet á sekúndu. Hæð boltans yfir jörðu má lýsa með jöfnunni $H(t)=-16t^2+80t+40$.

1. ⓐ Hvenær nær boltinn mestri hæð?
2. ⓑ Hver er mesta hæð boltans?
3. ⓒ Hvenær lendir boltinn á jörðinni?

Lausn

1. ⓐ Boltinn nær mestri hæð í hvirfilpunkti fleygbogans.

$$\begin{aligned} h &= -\frac{80}{2(-16)} \\ &= \frac{80}{32} \\ &= \frac{5}{2} \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Boltinn nær mestri hæð eftir 2,5 sekúndur.

2. ⓑ Til að finna mestu hæð finnum við $y-$ hnit hvirfilpunkts fleygbogans.

$$k = H\left(-\frac{b}{2\,a}\right)$$
$$= H\,(2{,}5)$$
$$= -16\,(2{,}5)^2 + 80\,(2{,}5) + 40$$
$$= 140$$

Mesta hæð boltans er 140 fet.

3. ⓒ Til að finna hvenær boltinn lendir á jörðinni þurfum við að ákvarða hvenær hæðin er núll, $H(t) = 0$.

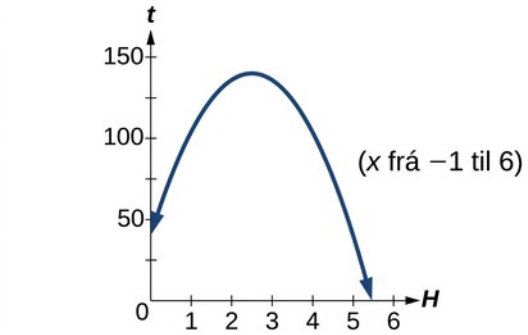
Við notum lausnarformúlu annars stigs jöfnu.

$$t = \frac{-80 \pm \sqrt{80^2 - 4(-16)(40)}}{2(-16)}$$
$$= \frac{-80 \pm \sqrt{8960}}{-32}$$

Kvaðratrótin einfaldast ekki vel og því notum við reiknivél til að finna nálgunargildi lausnanna.

$$t = \frac{-80 - \sqrt{8960}}{-32} \approx 5{,}458 \qquad \text{eða} \qquad t = \frac{-80 + \sqrt{8960}}{-32} \approx -0{,}458$$

Síðara svarið er utan raunhæfs skilgreiningarmengis líkansins. Boltinn lendir því á jörðinni eftir um 5,458 sekúndur. Sjá mynd 16



Mynd 16. Hæð boltans sem fall af tíma. Lárétti ásinn á að sýna tímann t í sekúndum og lóðrétti ásinn hæðina H í fetum; ásmerkingunum er víxlað á frummyndinni.

REYNIÐ SJÁLF #5

Steini er kastað upp af 112 feta háum sjávarhamri með hraðanum 96 fet á sekúndu. Hæð steinsins yfir sjávarmáli má lýsa með jöfnunni $H(t) = -16t^2 + 96t + 112$.

1. ⓐ Hvenær nær steinninn mestri hæð?
2. ⓑ Hver er mesta hæð steinsins?
3. ⓒ Hvenær lendir steinninn í sjónum?

MIÐLAR

Skoðið þessi gögn á netinu til að fá frekari kennslu og æfingu í annars stigs jöfnum.

- Gröf annars stigs falla á almennu formi teiknuð
- Gröf annars stigs falla á stöðluðu formi teiknuð
- Yfirlit yfir annars stigs föll
- Einkenni annars stigs falls

3

3.2 Æfingar

Munnleg verkefni

1. Útskýrið kostinn við að skrifa annars stigs fall á stöðluðu formi.

2. Hvernig má nota hvirfilpunkt fleygboga til að leysa raunhæf verkefni?

3. Útskýrið hvers vegna skilyrðið $a \neq 0$ er sett í skilgreiningu annars stigs falls.

4. Hvað nefnist staðlað form annars stigs falls einnig?

5. Hvaða tvær algebruaðferðir má nota til að finna skurðpunkta annars stigs falls við lárétta ásinn?

Algebruverkefni

Skrifið annars stigs föllin í eftirfarandi verkefnum á hvirfilpunktsformi og gefið upp hvirfilpunktinn.

6.

$$f(x) = x^2 - 12x + 32$$

7.

$$g(x) = x^2 + 2x - 3$$

8.

$$f(x) = x^2 - x$$

9.

$$f(x) = x^2 + 5x - 2$$

10.

$$h(x) = 2x^2 + 8x - 10$$

11.

$$k(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

12.

$$f(x)=2x^2-6x$$

13.

$$f(x)=3x^2-5x-1$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort hvert annars stigs fall hafi minnsta eða stærsta gildi. Finnið gildið og samhverfuásinn.

14.

$$y(x)=2x^2+10x+12$$

15.

$$f(x)=2x^2-10x+4$$

16.

$$f(x)=-x^2+4x+3$$

17.

$$f(x)=4x^2+x-1$$

18.

$$h(t)=-4t^2+6t-1$$

19.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+1$$

20.

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^2-2x+3$$

Finnið skilgreiningarmengi og myndmengi annars stigs fallsins í eftirfarandi verkefnum.

21.

$$f(x)=(x-3)^2+2$$

22.

$$f(x)=-2(x+3)^2-6$$

23.

$$f(x)=x^2+6x+4$$

24.

$$f(x)=2x^2-4x+2$$

25.

$$k(x)=3x^2-6x-9$$

Leysið jöfnurnar í eftirfarandi verkefnum yfir tvinntölunum.

26.

$$x^2=-25$$

27.

$$x^2=-8$$

28.

$$x^2+36=0$$

29.

$$x^2+27=0$$

30.

$$x^2+2x+5=0$$

31.

$$x^2-4x+5=0$$

32.

$$x^2+8x+25=0$$

33.

$$x^2-4x+13=0$$

34.

$$x^2+6x+25=0$$

35.

$$x^2-10x+26=0$$

36.

$$x^2-6x+10=0$$

37.

$$x(x-4)=20$$

38.

$$x(x-2)=10$$

39.

$$2x^2+2x+5=0$$

40.

$$5x^2-8x+5=0$$

41.

$$5x^2+6x+2=0$$

42.

$$2x^2-6x+5=0$$

43.

$$x^2+x+2=0$$

44.

$$x^2-2x+4=0$$

Notið í eftirfarandi verkefnum hvirfilpunktinn (h,k) og punkt á grafinu (x,y) til að finna almennt form jöfnu annars stigs fallsins.

45.

$$(h,k)=(2,0),(x,y)=(4,4)$$

46.

$$(h,k)=(-2,-1),(x,y)=(-4,3)$$

47.

$$(h,k)=(0,1),(x,y)=(2,5)$$

48.

$$(h,k)=(2,3),(x,y)=(5,12)$$

49.

$$(h,k)=(-5,3),(x,y)=(2,9)$$

50.

$$(h,k)=(3,2),(x,y)=(10,1)$$

51.

$$(h,k)=(0,1),(x,y)=(1,0)$$

52.

$$(h,k)=(1,0),(x,y)=(0,1)$$

Myndræn verkefni

3

Skissið graf annars stigs fallsins í eftirfarandi verkefnum og gefið upp hvirfilpunkt, samhverfuás og skurðpunkta.

53.

$$f(x)=x^2-2x$$

54.

$$f(x)=x^2-6x-1$$

55.

$$f(x)=x^2-5x-6$$

56.

$$f(x)=x^2-7x+3$$

57.

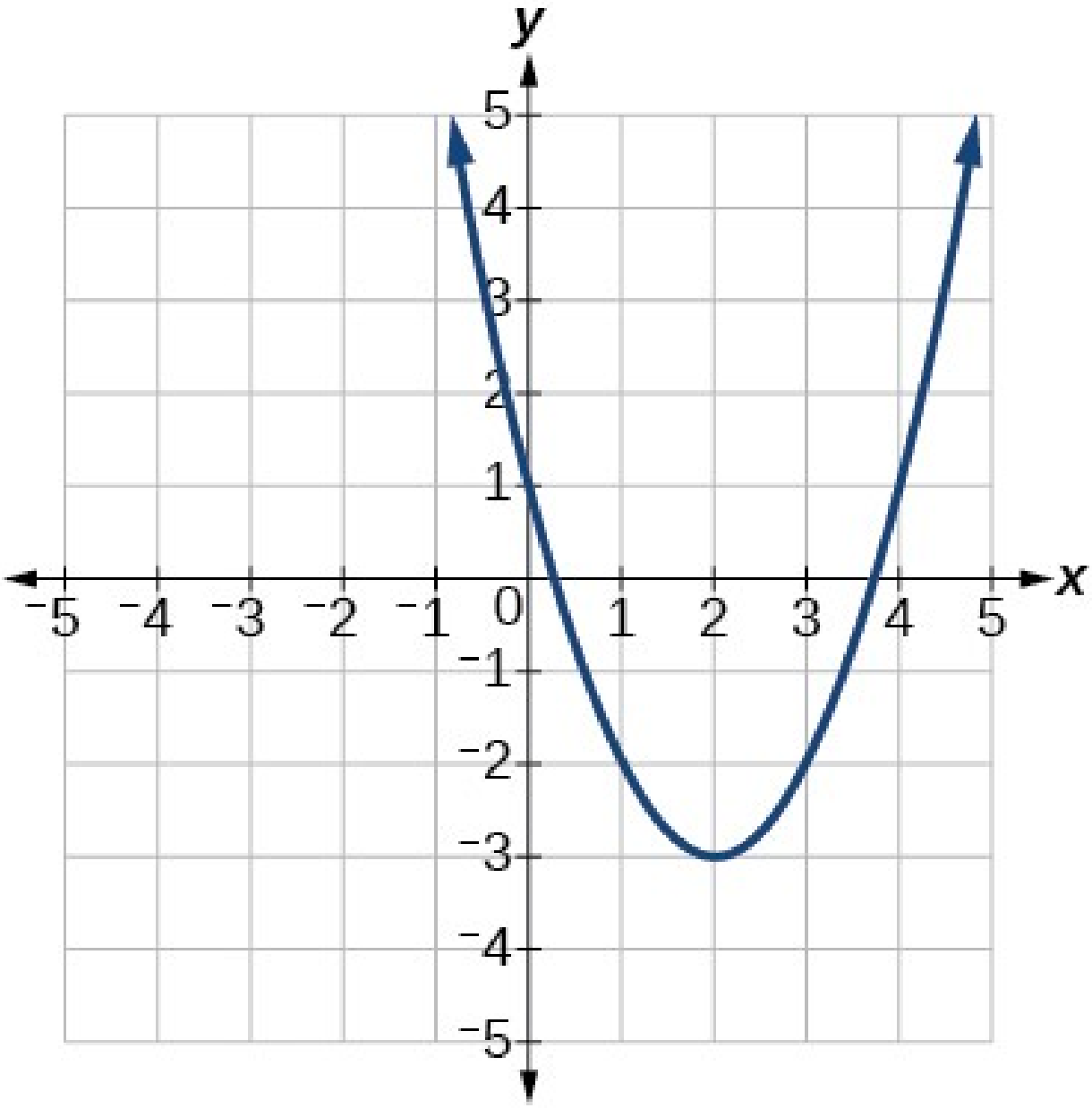
$$f(x)=-2x^2+5x-8$$

58.

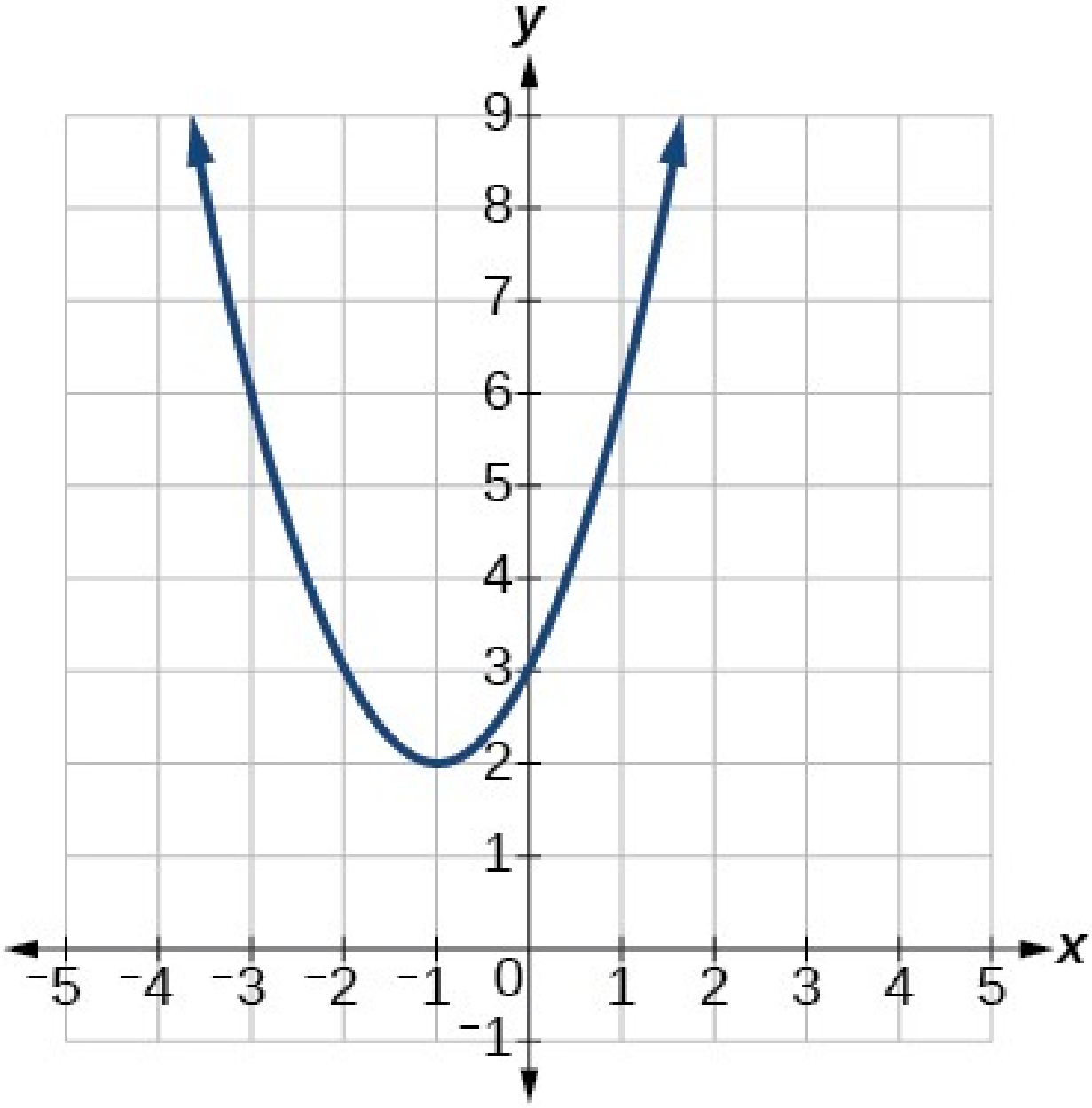
$$f(x)=4x^2-12x-3$$

Skrifið jöfnu fallsins sem sýnt er á hverju grafi í eftirfarandi verkefnum.

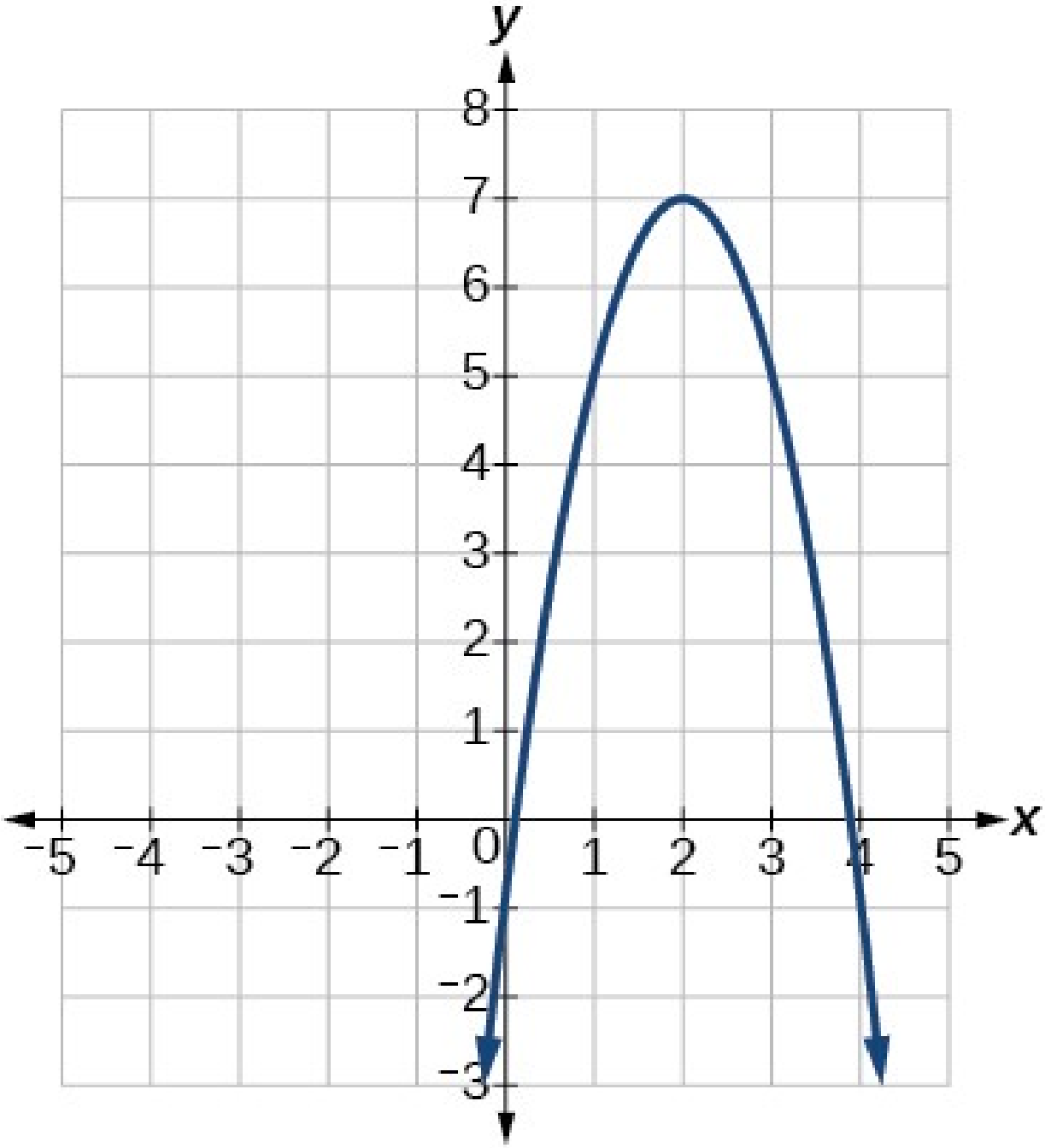
59.



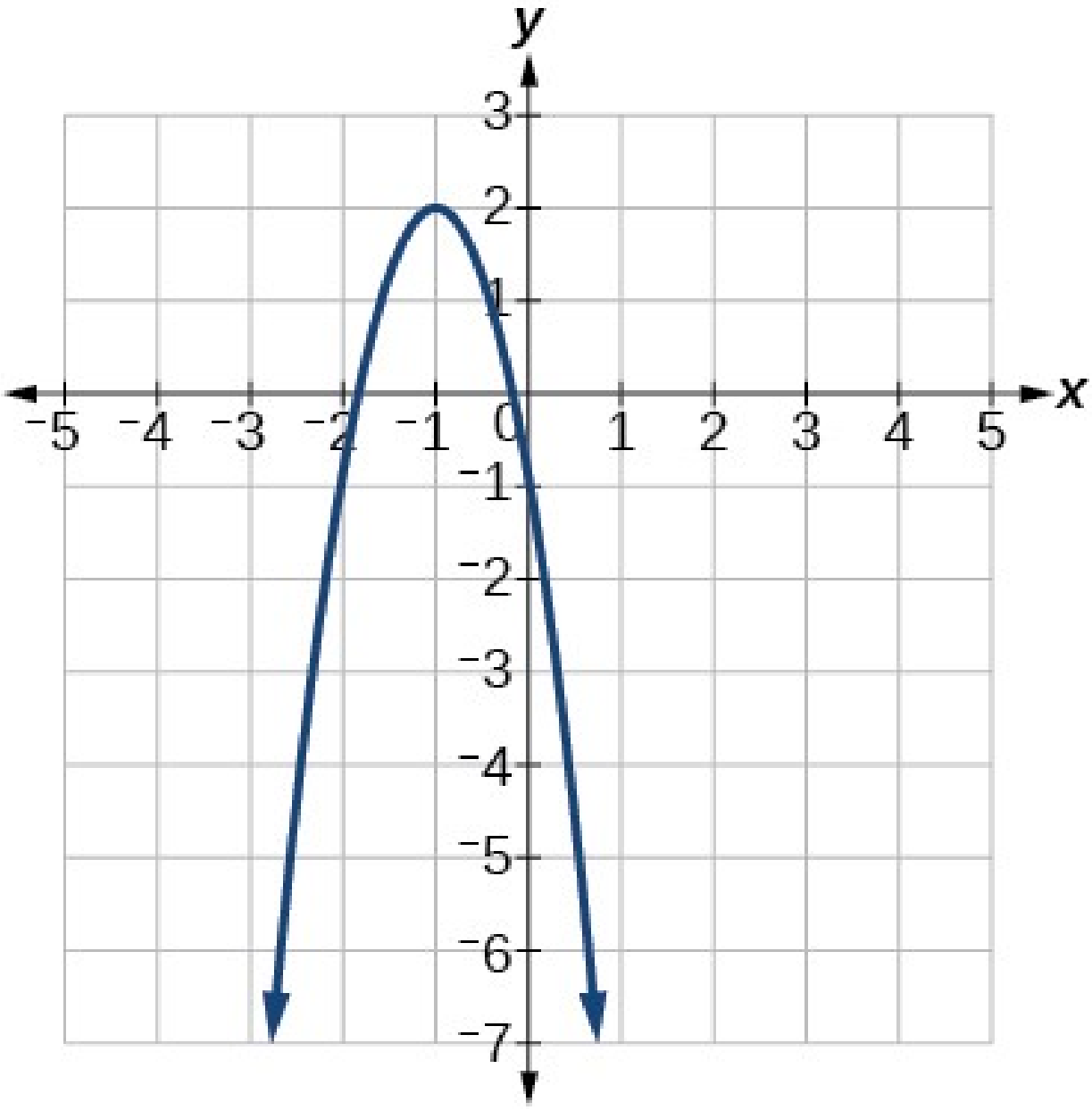
60.



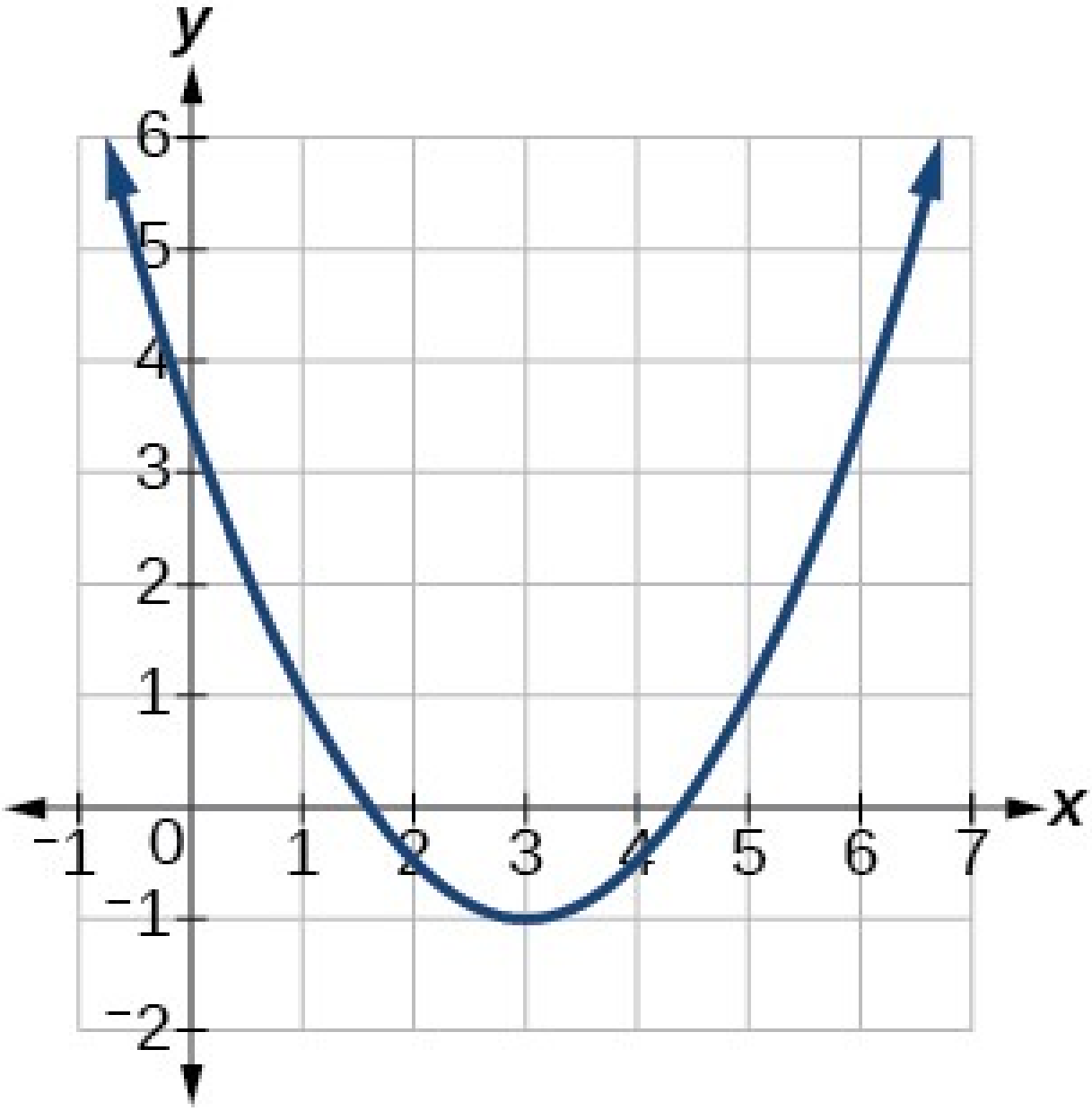
61.



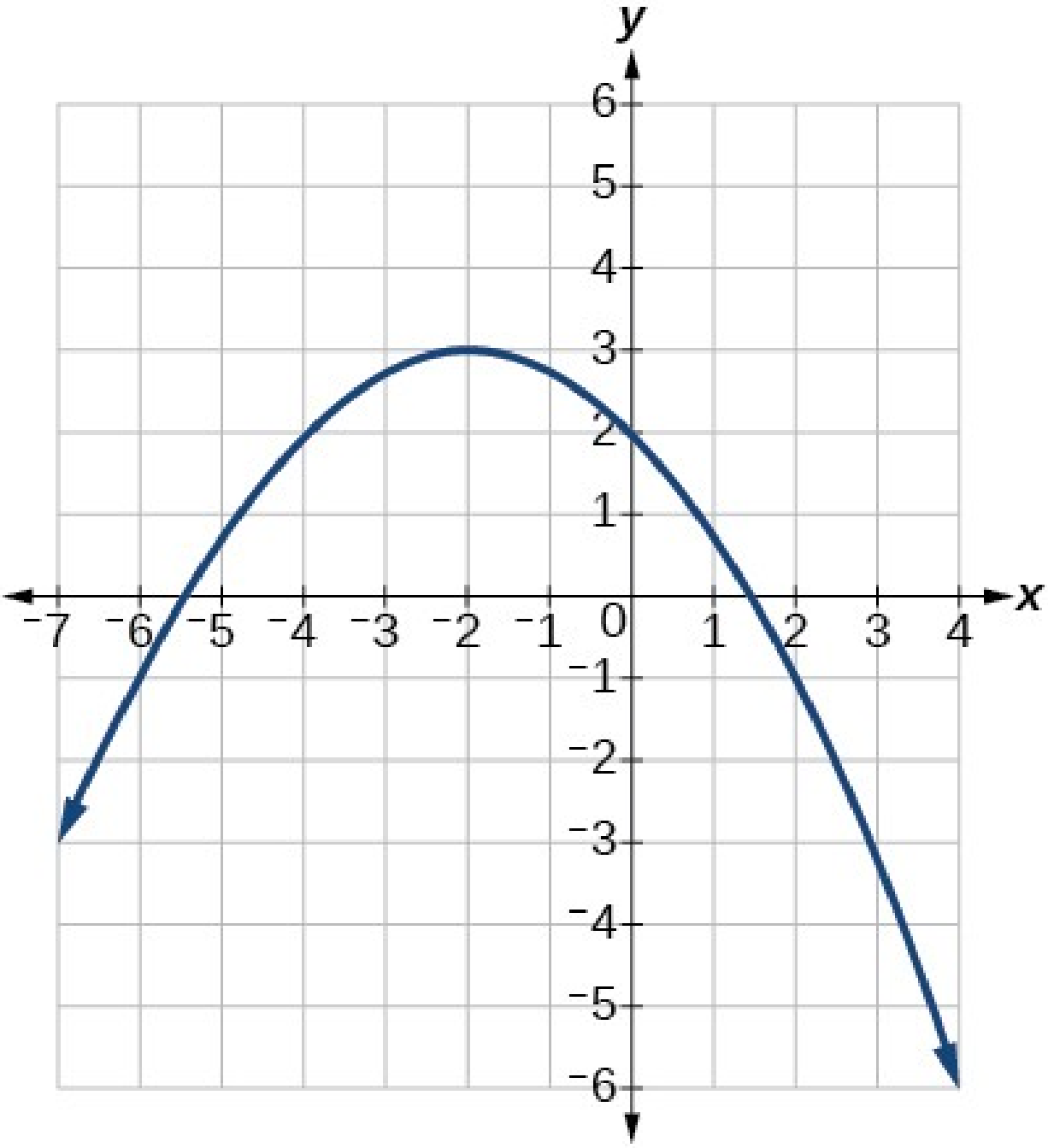
62.



63.



64.



Töluleg verkefni

Notið gildatöflurnar í eftirfarandi verkefnum, sem sýna punkta á grafi annars stigs falls. Finnið almennt form jöfnu fallsins með því að ákvarða hvirfilpunktinn og samhverfuásinn.

65.

x	−2	−1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

66.

x	−2	−1	0	1	2
y	1	0	1	4	9

67.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	1	2	1	−2

68.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−3	0	1	0

69.

x	−2	−1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Tækniverkefni

Notið reiknivél til að leysa eftirfarandi verkefni.

70. Teiknið föllin $f(x)=x^2, f(x)=2x^2,$ og $f(x)=\frac{1}{3}x^2$. í sama hnitakerfi.

Hvaða áhrif virðist breyting stuðulsins hafa?

71. Teiknið í sama hnitakerfi $f(x)=x^2, f(x)=x^2+2$ og $f(x)=x^2, f(x)=x^2+5$ og $f(x)=x^2-3$. Hvaða áhrif virðist það hafa að bæta fasta við?

72. Teiknið í sama hnitakerfi $f(x)=x^2, f(x)=(x-2)^2, f(x-3)^2,$ og $f(x)=(x+4)^2$.

Hvaða áhrif virðist það hafa að leggja þessar tölur við eða draga þær frá?

73. Ferill hlutar sem skotið er undir 45 gráðu horni með upphafshraðanum 80 fet á sekúndu er gefinn með fallinu $h(x)=\frac{-32}{(80)^2}x^2+x$ þar sem x er lárétt vegalengd og $h(x)$ er hæðin í fetum. Notið TRACE-eiginleika reiknivélarinnar til að ákvarða hæð hlutarins þegar hann hefur færst 100 fet lárétt.

74. Lýsa má hengibrú með annars stigs fallinu $h(x)=,0001x^2$ með $-2000 \le x \le 2000$ þar sem $|x|$ er fjarlægðin frá miðju í fetum og $h(x)$ er hæðin í fetum. Notið TRACE-aðgerð reiknivélarinnar til að áætla hve langt frá miðju brúin er 100 fet á hæð.

Viðbótarverkefni

Notið í eftirfarandi verkefnum hvirfilpunkt grafs annars stigs fallsins og hvort grafið opnast upp eða niður til að finna skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins.

75. Hvirfilpunktur $(1,-2)$, opnast upp.

76. Hvirfilpunktur $(-1,2)$, opnast niður.

77. Hvirfilpunktur $(-5,11)$, opnast niður.

78. Hvirfilpunktur $(-100,100)$, opnast upp.

Skrifið í eftirfarandi verkefnum jöfnu annars stigs falls sem inniheldur gefna punktinn og hefur sömu lögun og gefna fallið.

3

79. Inniheldur $(1,1)$ og hefur lögun fallsins $f(x)=2x^2$. Hvirfilpunkturinn er á $y-$ ásnum.

80. Inniheldur $(-1,4)$ og hefur lögun fallsins $f(x)=2x^2$. Hvirfilpunkturinn er á $y-$ ásnum.

81. Inniheldur $(2,3)$ og hefur lögun fallsins $f(x)=3x^2$. Hvirfilpunkturinn er á $y-$ ásnum.

82. Inniheldur $(1,-3)$ og hefur lögun fallsins $f(x)=-x^2$. Hvirfilpunkturinn er á $y-$ ásnum.

83. Inniheldur $(4,3)$ og hefur lögun fallsins $f(x)=5x^2$. Hvirfilpunkturinn er á $y-$ ásnum.

84. Inniheldur $(1,-6)$ og hefur lögun fallsins $f(x)=3x^2$. x-hnit hvirfilpunktsins er -1.

Raunhæf viðfangsefni

85. Finnið mál rétthyrndrar girðingar sem afmarkar sem mest flatarmál þegar til eru 200 fet af girðingarefni.

86. Finnið mál rétthyrndrar girðingar sem er skipt í tvö jafnstór hólf og afmarkar sem mest flatarmál þegar til eru 300 fet af girðingarefni.

87. Finnið mál rétthyrndrar girðingar sem er skipt í þrjú jafnstór hólf og afmarkar sem mest flatarmál þegar til eru 500 fet af girðingarefni.

88. Finnið það talnapar með summuna 6 sem hefur stærsta margfeldið. Hvert er margfeldið?

89. Finnið það talnapar með mismuninn 12 sem hefur minnsta margfeldið. Hvert er margfeldið?

90. Gerum ráð fyrir að verð hvers farsíma í Bandaríkjadölum sé gefið með líkaninu $p=\$\ 45-0{,}0125\ x$, þar sem x er fjöldi framleiddra síma í þúsundum og tekjurnar, í þúsundum Bandaríkjadala, eru $R=x\cdot p$. Finnið framleiðslumagnið sem hámarkar tekjurnar.

91. Eldflaug er skotið á loft. Hæð hennar yfir sjávarmáli í metrum sem fall af tíma í sekúndum er gefin með $h(t)=-4{,}9\ t^2+229\ t+234$. Finnið mestu hæð sem eldflaugin nær.

92. Bolta er kastað upp af þaki byggingar. Hæð hans yfir jörðu í metrum sem fall af tíma í sekúndum er gefin með $h(t)=-4{,}9\ t^2+24\ t+8$. Hve lengi er boltinn að ná mestri hæð?

93. Knattspyrnuvöllur rúmar 62.000 áhorfendur. Þegar miðinn kostar 11 Bandaríkjadali hefur meðalaðsókn verið 26.000 manns. Þegar verðið lækkaði í 9 Bandaríkjadali jókst meðalaðsóknin í 31.000 manns. Gerið ráð fyrir að línulegt samband sé milli aðsóknar og miðaverðs. Hvaða miðaverð myndi hámarka tekjurnar?

94. Bóndi kemst að því að ef hún gróðursetur 75 tré á ekru gefur hvert tré af sér 20 skeppur af ávöxtum. Hún áætlar að fyrir hvert tré sem bætist við á hverri ekru minnki uppskera hvers trés um 3 skeppur. Hve mörg tré ætti hún að gróðursetja á hverri ekru til að hámarka uppskeruna?

3.3 Veldisföll og margliðuföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Þekkja veldisföll.
- Þekkja endahegðun veldisfalla.
- Þekkja margliðuföll.
- Ákvarða stig og forystustuðul margliðufalls.

3



Mynd 1 (heimild: Jason Bay, Flickr)

Gerum ráð fyrir að tiltekin fuglategund dafni á lítilli eyju. Stofnstærð hennar undanfarin ár er sýnd í töflu 1.

Tafla 1

Ár	2009	2010	2011	2012	2013
Fuglastofn	800	897	992	1.083	1.169

Áætla má stofnstærðina með fallinu $P(t) = -0{,}3\,t^3 + 97\,t + 800$, þar sem $P(t)$ táknar fuglastofninn á eyjunni t árum eftir 2009. Með líkaninu getum við áætlað mestu stofnstærðina og hvenær henni verður náð. Við getum einnig spáð fyrir um hvenær fuglastofninn hverfur af eyjunni. Í þessum hluta skoðum við föll sem nota má til að áætla og spá fyrir um breytingar af þessu tagi.

Veldisföll þekkt

Til að skilja fugladæmið betur þurfum við að kynnast tiltekinni gerð falla. Veldisfall er fall með einum lið sem er margfeldi rauntölu, stuðuls, og breytu í föstu raunveldi. (Tala sem margfaldar breytu í veldi nefnist stuðull.)

Skoðum til dæmis föll fyrir flatarmál og rúmmál. Flatarmál hrings með geisla r er gefið með fallinu

$$A(r)=\pi r^2$$

og rúmmál kúlu með geisla r er gefið með fallinu

$$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Bæði eru dæmi um veldisföll því þau eru mynduð úr stuðli, π eða $\frac{4}{3}\pi$, sem margfaldaður er með breytu r í veldi.

VELDISFALL

Hugtakið veldisfall vísar til falls sem rita má á forminu

$$f(x)=k\,x^p$$

þar sem k og p eru rauntölur og k nefnist stuðull.

SPURT OG SVARAÐ

Er $f(x)=2^x$ veldisfall?

Nei. Í veldisfalli er breytileg tala í grunni hafin í fast veldi. Í þessu falli er föst tala í grunni hafin í breytilegt veldi. Þetta nefnist vísisfall, ekki veldisfall.

DÆMI 1

Veldisföll þekkt

Hver eftirfarandi falla eru veldisföll?

$f(x)=1$	Fastafall
$f(x)=x$	Samsemdarfall
$f(x)=x^2$	Annars stigs fall
$f(x)=x^3$	Þriðja stigs fall
$f(x)=\frac{1}{x}$	Umhverfufall
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	Annað veldi umhverfufalls
$f(x)=\sqrt{x}$	Kvaðratrótarfall
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	Teningsrótarfall

Lausn

Öll föllin sem talin eru upp eru veldisföll.

Fastafallið og samsemdarfallið eru veldisföll því rita má þau sem $f(x)=x^0$ og $f(x)=x^1$ í sömu röð.

Annars stigs fallið og þriðja stigs fallið eru veldisföll með heilum jákvæðum veldisvísum, $f(x)=x^2$ og $f(x)=x^3$.

Bæði umhverfufallið og annað veldi þess eru veldisföll með neikvæðum heiltöluveldisvísum því rita má þau sem $f(x)=x^{-1}$ og $f(x)=x^{-2}$.

Kvaðratrótarfallið og teningsrótarfallið eru veldisföll með brotna veldisvísa því rita má þau sem $f(x)=x^{1/2}$ eða $f(x)=x^{1/3}$.

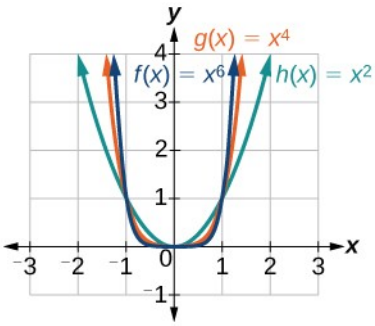
REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Hver fallanna eru veldisföll?

$$f(x) = 2x^2 \cdot 4x^3$$
$$g(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$$
$$h(x) = \frac{2x^5-1}{3x^2+4}$$

Endahegðun veldisfalla þekkt

Mynd 2 sýnir gröf fallanna $f(x)=x^2$, $g(x)=x^4$ og og $h(x)=x^6$, sem eru öll veldisföll með jákvæða, slétta heiltöluveldisvísa. Takið eftir að gröfin hafa svipaða lögun og annars stigs grunnfallið. Eftir því sem veldisvísirinn hækkar fletjast gröfin þó nokkuð út nærri upphafspunktinum og verða brattari fjær honum.



Mynd 2 Föll með sléttum veldisvísi

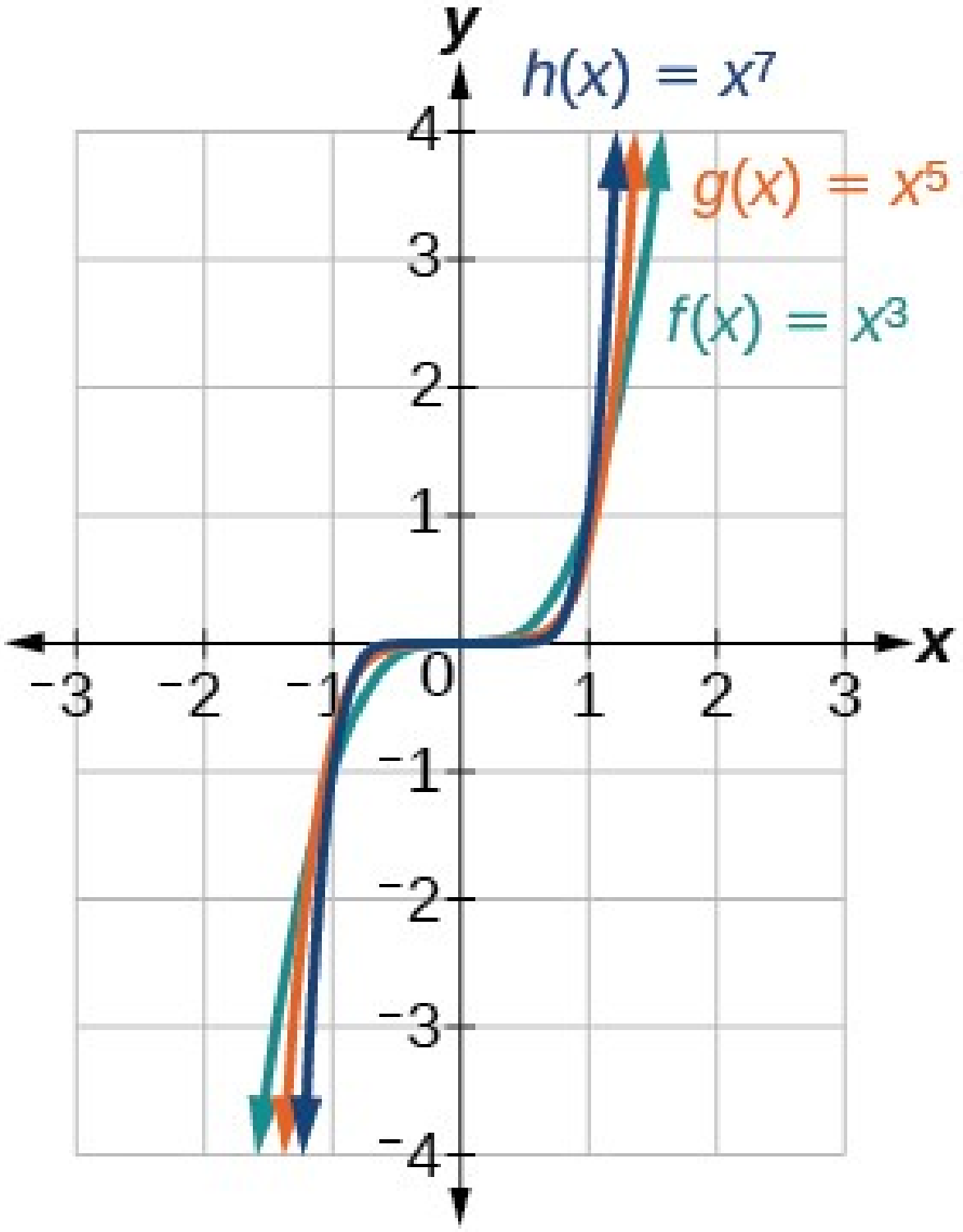
Til að lýsa hegðun þegar tölur verða sífellt stærri notum við hugtakið óendanleiki. Táknið ∞ stendur fyrir jákvætt óendanlegt gildi og $-\infty$ fyrir neikvætt óendanlegt gildi. Þegar sagt er að „ x stefni á óendanlegt gildi“, sem rita má $x \to \infty$, er verið að lýsa hegðun: x vex án efri marka.

Fyrir fall með sléttum veldisvísi verða úttaksgildin stórar jákvæðar tölur þegar inntakið vex eða minnkar án takmarka. Með öðrum orðum: Þegar x stefnir á jákvætt eða neikvætt óendanlegt gildi vaxa gildi $f(x)$ án efri marka. Með táknum má rita

$$\text{þegar } x \to \pm\infty, f(x) \to \infty$$

Mynd 3 sýnir gröf fallanna $f(x)=x^3, g(x)=x^5$, og $h(x)=x^7$, sem eru öll veldisföll með jákvæða oddatöluveldisvísa. Takið eftir að gröfin líkjast þriðja stigs grunnfallinu. Eftir því sem veldisvísirinn hækkar fletjast þau aftur út nærri upphafspunktinum og verða brattari fjær honum.

3



Mynd 3 Fall með oddatöluveldisvísi

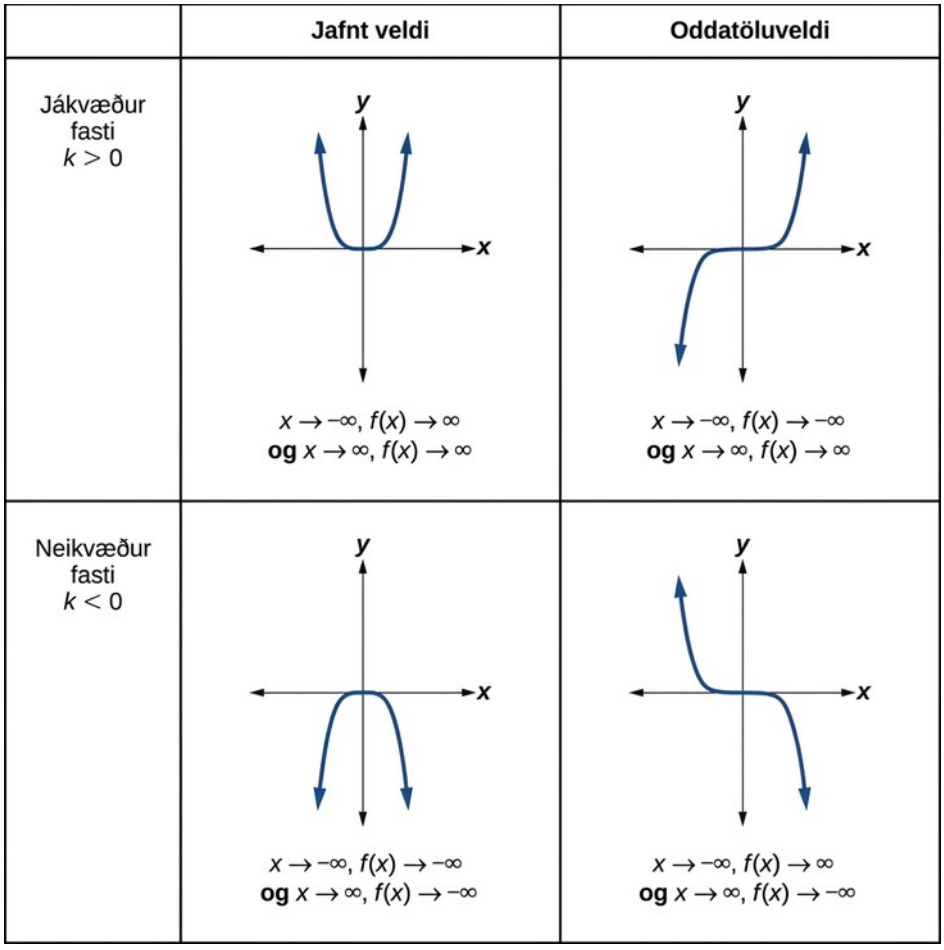
Dæmin sýna að föll á forminu $f(x)=x^n$ hafa samhverfu af einhverju tagi. Á mynd 2 sést fyrst að jafnstæð föll á forminu $f(x)=x^n$, n slétt tala, eru samhverf um $y-$ás. Á mynd 3 sést að oddstæð föll á forminu $f(x)=x^n$, n oddatala, eru samhverf um upphafspunktinn.

Fyrir þessi oddstæðu veldisföll gildir að þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt gildi minnkar $f(x)$ án neðri marka. Þegar x stefnir á jákvætt óendanlegt gildi vex $f(x)$ án efri marka. Með táknum ritum við

$$\begin{aligned} &\text{þegar} \quad x \to -\infty, \quad f(x) \to -\infty \\ &\text{þegar} \quad x \to \infty, \quad f(x) \to \infty \end{aligned}$$

Hegðun grafs falls þegar inntaksgildin verða mjög neikvæð ($x \to -\infty$) eða mjög stór ($x \to \infty$) nefnist endahegðun fallsins. Endahegðun má lýsa með orðum eða táknum.

Mynd 4 sýnir endahegðun veldisfalla á forminu $f(x) = k\,x^n$ þar sem n er jákvæð heiltala og stuðullinn er ekki núll. Hegðunin ræðst af veldisvísinum og formerki stuðulsins.



Mynd 4 Endahegðun veldisfalla eftir formerki stuðuls og því hvort veldisvísir er slétt tala eða oddatala.

AÐFERÐ

Finnið endahegðun veldisfallsins $f(x) = k\,x^n$ þar sem n er jákvæð heiltala.

1. Ákvarðið hvort veldisvísirinn sé slétt tala eða oddatala.
2. Ákvarðið hvort fastinn sé jákvæður eða neikvæður.
3. Notið mynd 4 til að finna endahegðunina.

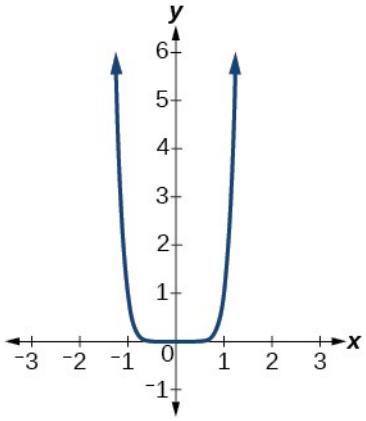
DÆMI 2

Endahegðun veldisfalls fundin

Lýsið endahegðun grafs fallsins $f(x)=x^8$.

Lausn

Stuðullinn er 1 (jákvæður) og veldisvísir veldisfallsins er 8 (slétt tala). Þegar x stefnir á óendanlegt gildi vex úttakið, það er gildi $f(x)$, án efri marka. Við ritum: þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$. Þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt gildi vex úttakið einnig án efri marka. Með táknum: þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$. Graf fallsins er sýnt á mynd 5.



Mynd 5 Graf veldisfalls með sléttum veldisvísi og jákvæðum stuðli.

DÆMI 3

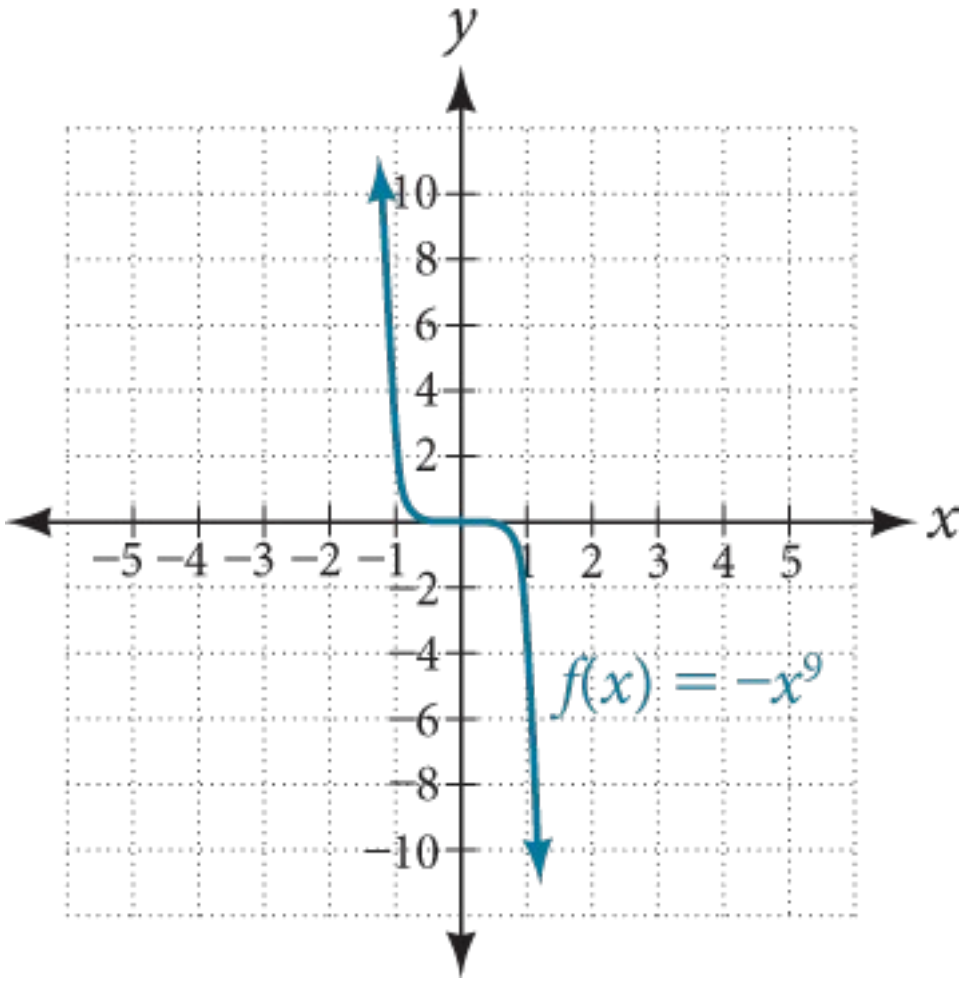
Endahegðun veldisfalls fundin

Lýsið endahegðun grafs fallsins $f(x)=-x^9$.

Lausn

Veldisvísir veldisfallsins er 9 (oddatala). Þar sem stuðullinn er -1 (neikvæður) er grafið spegilmynd um $x-$ ás af grafi fallsins $f(x)=x^9$. Mynd 6 sýnir að þegar x stefnir á óendanlegt gildi minnkar úttakið án neðri marka. Þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt gildi vex úttakið án efri marka. Með táknum ritum við

$$\begin{array}{ll} \text{þegar} & x \to -\infty, \quad f(x) \to \infty \\ \text{þegar} & x \to \infty, \quad f(x) \to -\infty \end{array}$$



Mynd 6 Graf fallsins f(x) = −x⁹.

Greining

Við getum kannað lausnina með því að nota töflu í grafteikniforriti.

Tafla 2

x	$f(x)$
−10	1.000.000.000
−5	1.953.125
0	0
5	−1.953.125
10	−1.000.000.000

Í töflu 2 sést að þegar mjög neikvæð gildi eru sett inn fyrir x, verður úttakið mjög stórt. Þegar mjög stór gildi eru sett inn fyrir x, verður úttakið mjög lítið, það er mjög stór neikvæð tala.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Lýsið með orðum og táknum endahegðun fallsins $f(x) = -5x^4$.

Margliðuföll þekkt

Olíuleiðsla rofnar í Mexíkóflóa og myndar nær hringlaga olíuflekk. Geisli flekksins er nú 24 mílur en stækkar um 8 mílur á viku. Við viljum finna formúlu fyrir flatarmál flekksins með því að setja saman tvö föll. Geisli r flekksins ræðst af fjölda vikna w sem liðnar eru. Sambandið er línulegt.

$$r(w) = 24 + 8w$$

Við getum sett þetta saman við formúluna fyrir flatarmál A hrings.

$$A(r) = \pi r^2$$

Ef við setjum föllin saman fáum við formúlu fyrir flatarmálið sem fall af fjölda vikna.

$$\begin{aligned} A(w) &= A(r(w)) \\ &= A(24 + 8w) \\ &= \pi(24 + 8w)^2 \end{aligned}$$

Við margföldum og fáum formúluna.

$$A(w) = 576\pi + 384\pi w + 64\pi w^2$$

Þessi formúla er dæmi um margliðufall. Margliðufall er annaðhvort núll eða summa endanlegs fjölda liða sem eru ekki núll. Hver liður er margfeldi tölu, sem nefnist stuðull liðarins, og breytu í heiltöluveldi sem er ekki neikvætt.

MARGLIÐUFÖLL

Látum n vera heiltölu sem er ekki neikvæð. Margliðufall er fall sem rita má á forminu

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Þetta nefnist almennt form margliðufalls. Hvert (a_i) er stuðull og í þessum hluta má það aðeins vera rauntala, en $a_n \neq 0$. Hvert margfeldi ($a_i x^i$) er liður margliðufalls.

DÆMI 4

Margliðuföll þekkt

Hver eftirfarandi falla eru margliðuföll?

$$f(x) = 2x^3 \cdot 3x + 4$$
$$g(x) = -x(x^2 - 4)$$
$$h(x) = 5\sqrt{x} + 2$$

Lausn

Fyrstu tvö föllin eru dæmi um margliðuföll því rita má þau á forminu $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_1$ þar sem veldisvísarnir eru heiltölur sem eru ekki neikvæðar og stuðlarnir eru rauntölur.

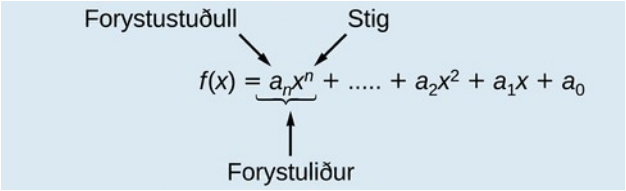
- $f(x)$ má rita sem $f(x)=6x^4+4$.
- $g(x)$ má rita sem $g(x)=-x^3+4x$.
- $h(x)$ má ekki rita á þessu formi og er því ekki margliðufall.

Stig og forystustuðull margliðufalls fundin

Margliðufall getur haft hvaða fjölda liða sem er og veldi breytunnar getur verið hversu hátt sem er. Röð liða í margliðufalli skiptir ekki máli við reikniaðgerðir en yfirleitt röðum við liðunum eftir lækkandi veldi, það er á almenna formið. Stig margliðu er hæsti veldisvísir breytunnar sem kemur fyrir í henni; sé fallið á almennu formi er það veldi breytunnar í fyrsta liðnum. Forystuliður er liðurinn sem inniheldur hæsta veldi breytunnar, það er liðurinn af hæsta stigi. Forystustuðull er stuðull forystuliðarins.

HUGTÖK MARGLIÐUFALLA

Við röðum margliðum oft þannig að veldin fari lækkandi.



Þegar margliða er rituð þannig segjum við að hún sé á almennu formi.

AÐFERÐ

Finnið stig og forystustuðul gefins margliðufalls.

1. Finnið hæsta veldisvísi x til að ákvarða stig fallsins.
2. Finnið liðinn sem inniheldur hæsta veldi x til að finna forystuliðinn.
3. Finnið stuðul forystuliðarins.

DÆMI 5

Stig og forystustuðull margliðufalls fundin

Finnið stig, forystulið og forystustuðul eftirfarandi margliðufalla.

$$f(x) = 3 + 2x^2 - 4x^3$$
$$g(t) = 5t^5 - 2t^3 + 7t$$
$$h(p) = 6p - p^3 - 2$$

Lausn

Í fallinu $f(x)$, er hæsti veldisvísir x 3 og því er stigið 3. Forystuliðurinn er liðurinn með það stig, $-4x^3$. Forystustuðullinn er stuðull þess liðar, -4.

Í fallinu $g(t)$, er hæsti veldisvísir t 5, og því er stigið 5. Forystuliðurinn er liðurinn með það stig, $5t^5$. Forystustuðullinn er stuðull þess liðar, 5.

Í fallinu $h(p)$, er hæsti veldisvísir p 3, og því er stigið 3. Forystuliðurinn er liðurinn með það stig, $-p^3$; forystustuðullinn er stuðull þess liðar, -1.

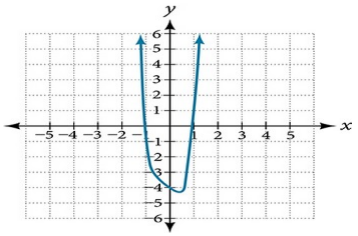
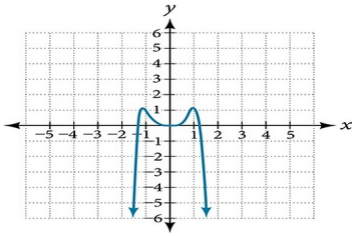
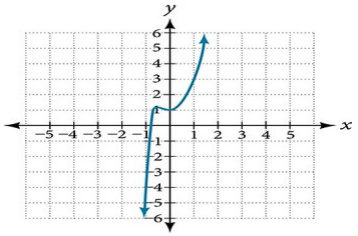
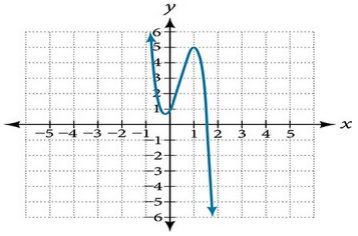
REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Finnið stig, forystulið og forystustuðul margliðunnar $f(x)=4x^2-x^6+2x-6$.

Endahegðun margliðufalla þekkt

Stig margliðufalls hjálpar okkur að spá fyrir um endahegðun þess. Til að ákvarða endahegðunina skoðum við forystulið margliðufallsins. Veldi forystuliðarins er hæst. Því vex hann mun hraðar en hinir liðirnir þegar x verður mjög stórt eða mjög neikvætt og hegðun hans verður því ráðandi á grafinu. Endahegðun hverrar margliðu er sú sama og endahegðun liðarins af hæsta stigi. Sjá töflu 3.

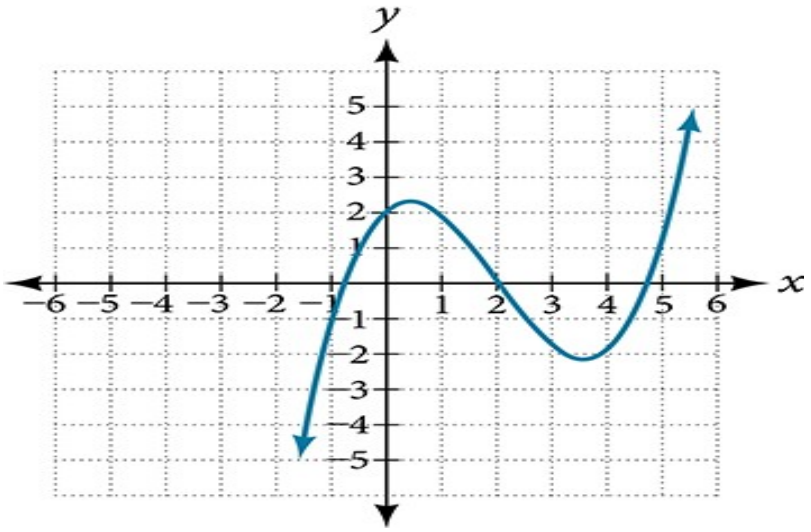
Tafla 3

margliðufall	Forystuliður	Graf margliðufalls
$f(x)=5x^4+2x^3-x-4$	$5x^4$	
$f(x)=-2x^6-x^5+3x^4+x^3$	$-2x^6$	
$f(x)=3x^5-4x^4+2x^2+1$	$3x^5$	
$f(x)=-6x^3+7x^2+3x+1$	$-6x^3$	

DÆMI 6

Endahegðun og stig margliðufalls fundin

Lýsið endahegðun margliðufallsins á mynd 7 og finnið mögulegt stig þess.



Mynd 7 Graf margliðufalls með tveimur snúningspunktum og jákvæðri endahegðun til hægri.

Lausn

Þegar inntaksgildin x verða mjög stór vaxa úttaksgildin $f(x)$ án efri marka. Þegar inntaksgildin x verða mjög neikvæð minnka úttaksgildin $f(x)$ án neðri marka. Með táknum lýsum við endahegðuninni þannig:

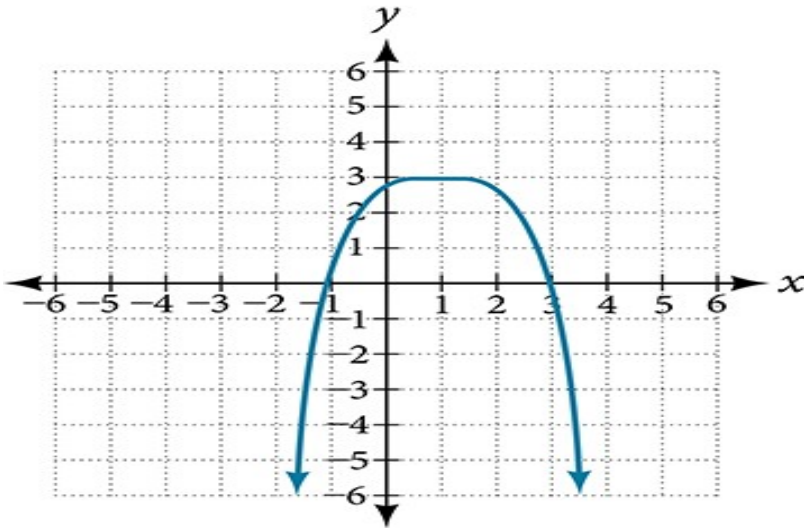
$$\begin{aligned} &\text{þegar} \quad x \to -\infty, \quad f(x) \to -\infty \\ &\text{þegar} \quad x \to \infty, \quad f(x) \to \infty \end{aligned}$$

Með orðum má segja að þegar x stefnir á óendanlegt gildi stefni fallgildin á óendanlegt gildi og að þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt gildi stefni fallgildin á neikvætt óendanlegt gildi.

Grafið hefur lögun veldisfalls með oddatöluveldisvísi sem hefur ekki verið speglað. Stig margliðunnar sem myndar grafið hlýtur því að vera oddatala og forystustuðullinn jákvæður.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Lýsið endahegðun margliðufallsins á mynd 8 og finnið mögulegt stig þess.



Mynd 8 Graf margliðufalls sem stefnir niður til beggja hliða.

DÆMI 7

Endahegðun og stig margliðufalls fundin

Gefið er fallið $f(x) = -3x^2(x-1)(x+4)$,. Ritið það sem margliðu á almennu formi og finnið forystulið, stig og endahegðun þess.

Lausn

Finnið almenna formið með því að margfalda upp úr gefnu stæðunni fyrir $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2(x-1)(x+4) \\ &= -3x^2(x^2+3x-4) \\ &= -3x^4 - 9x^3 + 12x^2 \end{aligned}$$

Almenna formið er $f(x) = -3x^4 - 9x^3 + 12x^2$. Forystuliðurinn er $-3x^4$; stig margliðunnar er því 4. Stigið er slétt tala (4) og forystustuðullinn neikvæður (−3), þannig að endahegðunin er

$$\begin{aligned} &\text{þegar} \quad x \to -\infty, \quad f(x) \to -\infty \\ &\text{þegar} \quad x \to \infty, \quad f(x) \to -\infty \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

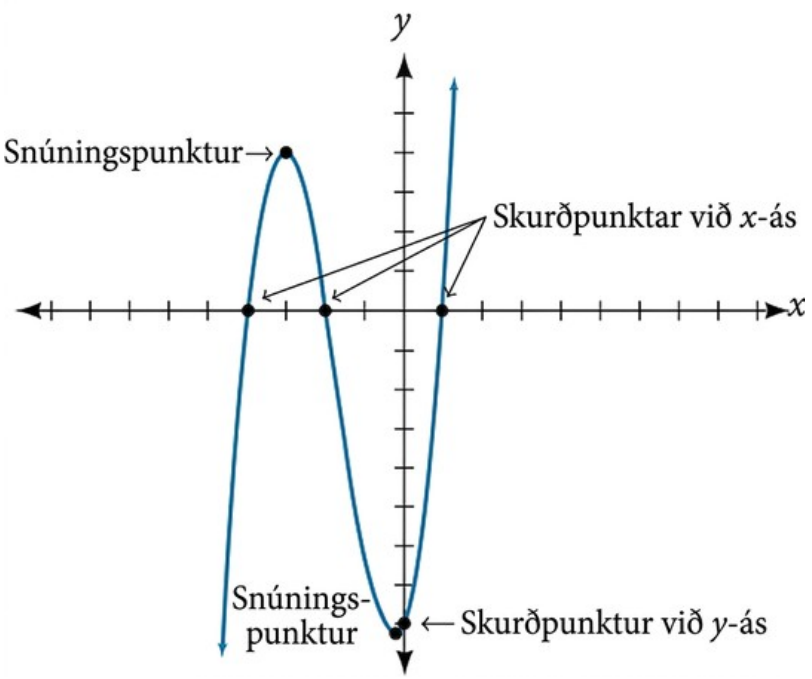
Ritið fallið $f(x) = 0{,}2(x-2)(x+1)(x-5)$, sem margliðu á almennu formi og finnið forystulið, stig og endahegðun fallsins.

Staðbundin hegðun margliðufalla þekkt

Auk endahegðunar margliðufalls höfum við áhuga á því sem gerist á „miðju“ grafsins. Sérstaklega skoðum við staðina þar sem hegðun grafsins breytist. Snúningspunktur er

punktur þar sem fallgildin hætta að vaxa og taka að minnka eða hætta að minnka og taka að vaxa.

Við skoðum einnig skurðpunkta. Eins og hjá öllum föllum er skurðpunkturinn við y-ás sá punktur þar sem grafið sker lóðrétta ásinn. Hann samsvarar hnitaparinu þar sem inntaksgildið er núll. Þar sem margliðufall er fall samsvarar aðeins eitt úttaksgildi hverju inntaksgildi og því getur aðeins verið einn skurðpunktur við y-ás, $(0, a_0)$. Skurðpunktar við x-ás koma fyrir við þau inntaksgildi sem gefa úttaksgildið núll. Skurðpunktarnir við x-ás geta verið fleiri en einn. Sjá mynd 9**.**



Mynd 9 Snúningspunktar og skurðpunktar margliðugrafs við hnitása.

SKURÐPUNKTAR OG SNÚNINGSPUNKTAR MARGLIÐUFALLA

Hugtakið snúningspunktur merkir punkt þar sem grafið breytir um stefnu, úr vexti í minnkun eða úr minnkun í vöxt. Skurðpunkturinn við y-ás er punkturinn þar sem inntaksgildi fallsins er núll. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru punktarnir þar sem úttaksgildið er núll.

AÐFERÐ

Finnið skurðpunkta gefins margliðufalls.

1. Finnið skurðpunktinn við y-ás með því að setja $x=0$ og reikna samsvarandi úttaksgildi.
2. Finnið skurðpunktana við $x-$ ás með því að finna þau inntaksgildi sem gefa úttaksgildið núll.

DÆMI 8

Skurðpunktar margliðufalls fundnir

Gefið er margliðufallið $f(x)=(x-2)(x+1)(x-4)$, sem hér er ritað á þáttuðu formi til að auðvelda reikningana. Finnið skurðpunkta þess við $y-$ og $x-$ ás.

Lausn

Skurðpunkturinn við y-ás er þar sem inntakið er núll. Setjið því 0 inn fyrir x.

$$\begin{aligned} f(0) &= (0-2)(0+1)(0-4) \\ &= (-2)(1)(-4) \\ &= 8 \end{aligned}$$

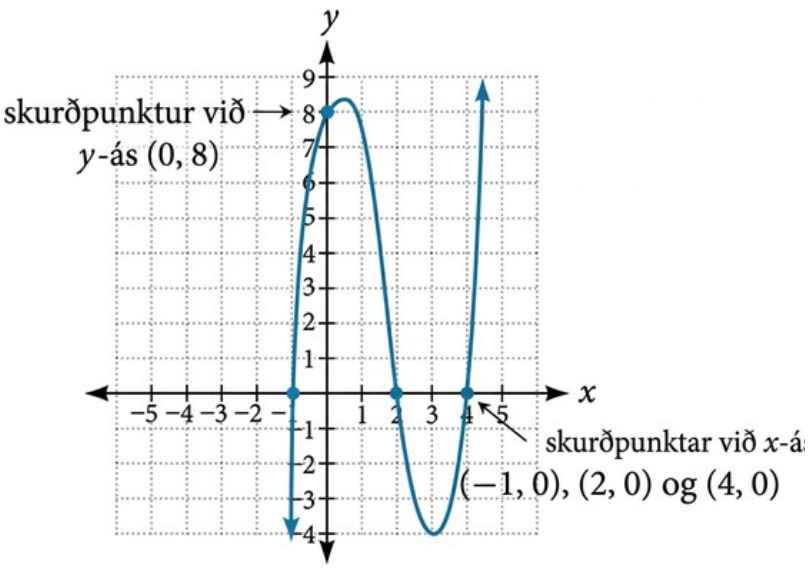
Skurðpunkturinn við y-ás er (0, 8).

Skurðpunktarnir við x-ás eru þar sem úttakið er núll.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0=(x-2)(x+1)(x-4) & & & & \\ x-2=0 & \text{eða} & x+1=0 & \text{eða} & x-4=0 \\ x=2 & \text{eða} & x=-1 & \text{eða} & x=4 \end{array}$$

Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(2,0),(-1,0)$, og $(4,0)$.

Þessa skurðpunkta má sjá á grafi fallsins á mynd 10.



Mynd 10 Skurðpunktar við x-ás eru (−1, 0), (2, 0) og (4, 0), og við y-ás (0, 8).

DÆMI 9

Skurðpunktar margliðufalls fundnir með þáttun

Finnið skurðpunkta margliðufallsins $f(x)=x^4-4x^2-45$, við $y-$ og $x-$ ás.

Lausn

Skurðpunkturinn við y-ás er þar sem inntakið er núll.

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^4 - 4(0)^2 - 45 \\ &= -45 \end{aligned}$$

Skurðpunkturinn við y-ás er $(0, -45)$.

3

Skurðpunktarnir við x-ás eru þar sem úttakið er núll. Til að ákvarða hvenær úttakið er núll þurfum við að þátta margliðuna.

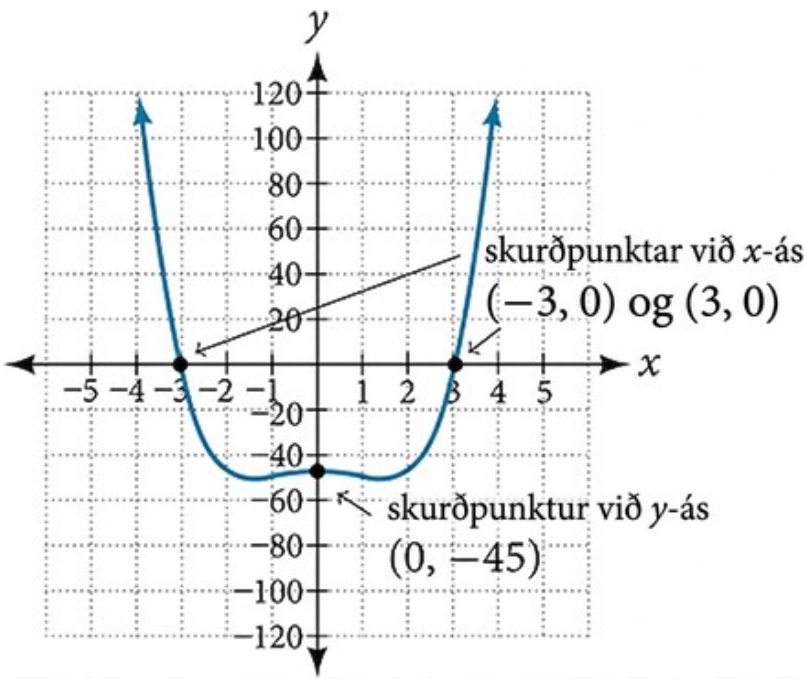
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 4x^2 - 45 \\ &= (x^2 - 9)(x^2 + 5) \\ &= (x - 3)(x + 3)(x^2 + 5) \end{aligned}$$

$$0 = (x-3)(x+3)(x^2+5)$$

$$\begin{array}{ccccc} x-3=0 & \text{eða} & x+3=0 & \text{eða} & x^2+5=0 \\ x=3 & \text{eða} & x=-3 & \text{eða} & \text{(engin raunlausn)} \end{array}$$

Skurðpunktarnir við x-ás eru $(3, 0)$ og $(-3, 0)$.

Þessa skurðpunkta má sjá á grafi fallsins á mynd 11. Einnig sést að fallið er jafnstætt því $f(x) = f(-x)$.



Mynd 11 Skurðpunktar við x-ás eru (−3, 0) og (3, 0), og við y-ás (0, −45).

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Finnið skurðpunkta margliðufallsins $f(x)=2x^3-6x^2-20x$, við $y-$ og $x-$ ás.

Slétt og samfelld gröf borin saman

Stig margliðufalls hjálpar okkur að ákvarða fjölda skurðpunkta við $x-$ ás og fjölda snúningspunkta. Margliðufall af stigi n er margfeldi n þátta og hefur því í mesta lagi n rætur eða núllstöðvar, það er $x-$ skurðpunkta við x-ás. Graf margliðufalls af stigi n hefur í mesta lagi $n-1$ snúningspunkta. Grafið hefur því í mesta lagi einum færri snúningspunkta en stig margliðunnar, eða einum færri en fjöldi þáttanna.

Graf samfellds falls hefur engin rof og unnt er að teikna það án þess að lyfta pennanum af blaðinu. Sléttur ferill er graf án hvassra horna. Snúningspunktar slétts grafs verða alltaf á rúnnuðum ferlum. Gröf margliðufalla eru bæði samfelld og slétt.

SKURÐPUNKTAR OG SNÚNINGSPUNKTAR MARGLIÐA

Margliða af stigi n hefur í mesta lagi n x-skurðpunkta og $n-1$ snúningspunkta.

DÆMI 10

Fjöldi skurðpunkta og snúningspunkta margliðu fundinn

Án þess að teikna grafið skuluð þið lýsa staðbundinni hegðun fallsins með því að finna mesta mögulega fjölda skurðpunkta við $x-$ ás og snúningspunkta fyrir $f(x)=-3x^{10}+4x^7-x^4+2x^3$.

Lausn

Stig margliðunnar er 10, þannig að hún hefur í mesta lagi 10 x-skurðpunkta og í mesta lagi $10-1=9$ snúningspunkta.

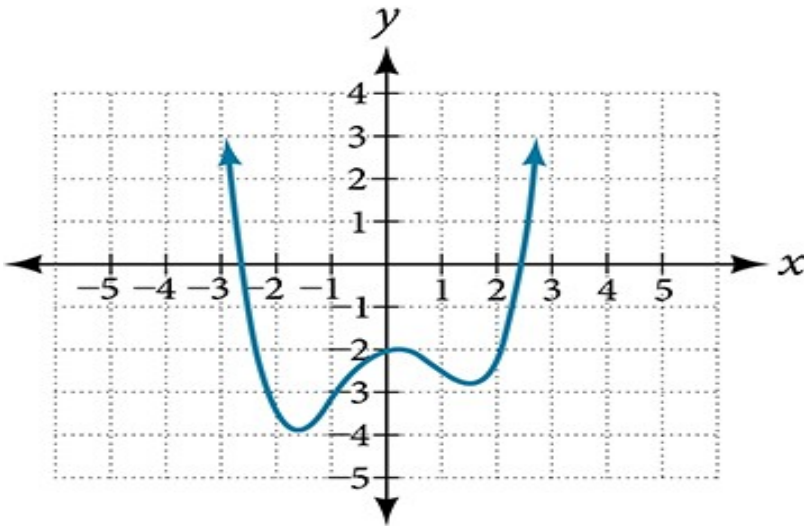
REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Án þess að teikna grafið skuluð þið finna mesta mögulega fjölda skurðpunkta við $x-$ ás og snúningspunkta fyrir $f(x)=108-13x^9-8x^4+14x^{12}+2x^3$

DÆMI 11

Ályktanir um margliðufall dregnar af grafi þess

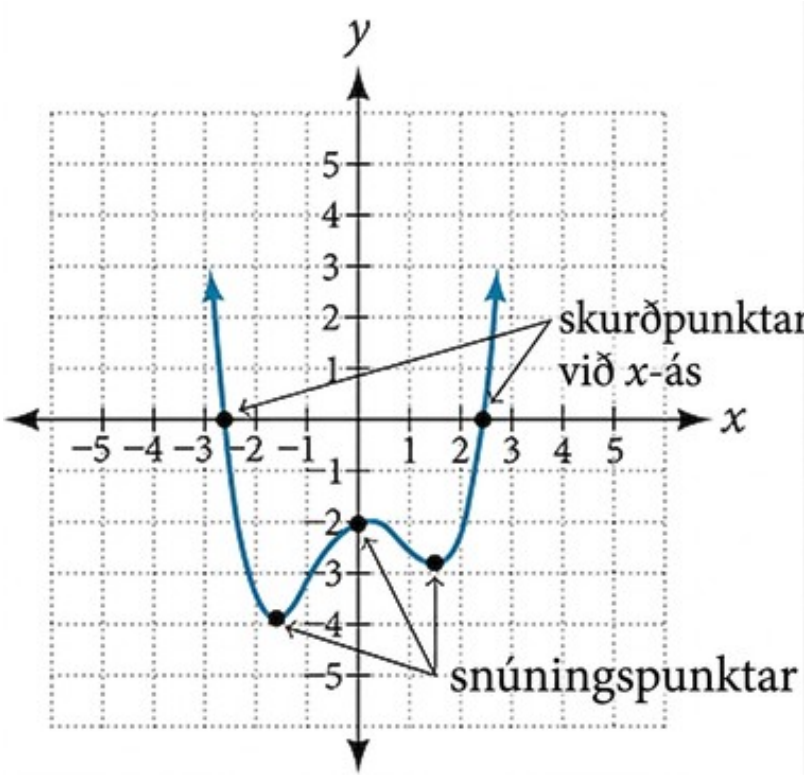
Hvaða ályktanir má draga um margliðuna sem grafið á mynd 12 sýnir út frá skurðpunktum þess og snúningspunktum?



Mynd 12 Graf með þremur snúningspunktum og endahegðun upp til beggja hliða.

Lausn

Endahegðun grafsins sýnir að þetta er graf margliðu af sléttu stigi. Sjá mynd 13.

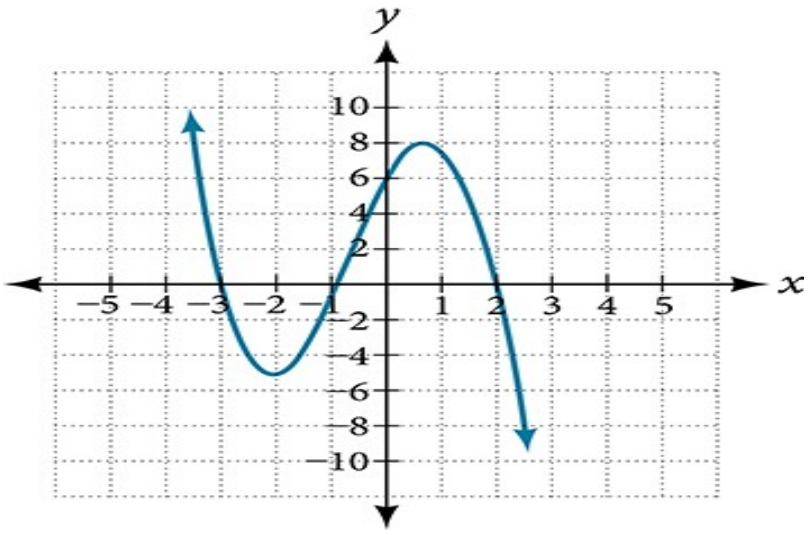


Mynd 13 Tveir skurðpunktar við x-ás og þrír snúningspunktar eru merktir.

Grafið hefur 2 skurðpunkta við $x-$ ás, sem bendir til stigs 2 eða hærra, og 3 snúningspunkta, sem bendir til stigs 4 eða hærra. Því er eðlilegt að álykta að stigið sé slétt tala og að minnsta kosti 4.

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Hvaða ályktanir má draga um margliðuna sem grafið á mynd 14 sýnir út frá skurðpunktum þess og snúningspunktum?



Mynd 14 Graf með tveimur snúningspunktum sem stefnir upp til vinstri og niður til hægri.

DÆMI 12

Ályktanir um margliðufall dregnar af þáttum þess

Gefið er fallið $f(x) = -4x(x+3)(x-4)$,. Ákvarðið staðbundna hegðun þess.

Lausn

Skurðpunkturinn við $y-$ ás fæst með því að reikna $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= -4(0)(0+3)(0-4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,0)$.

Skurðpunktarnir við $x-$ ás fást með því að finna núllstöðvar fallsins.

$$0 = -4\ x\ (x+3)\ (x-4)$$

$x=0$	eða	$x+3=0$	eða	$x-4=0$
$x=0$	eða	$x=-3$	eða	$x=4$

Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(0,0), (-3,0)$, og $(4,0)$.

Stigið er 3 og því hefur grafið í mesta lagi 2 snúningspunkta.

REYNIÐ SJÁLF NR. 9

Ákvarðið staðbundna hegðun fallsins $f(x) = 0{,}2(x-2)(x+1)(x-5)$,.

MIÐLAR

Í þessum nettilföngum finnið þið frekari útskýringar og æfingar um veldisföll og margliðuföll.

- Lykilupplýsingar um gefið margliðufall fundnar
- Endahegðun margliðufalls
- Snúningspunktar og $x-$ skurðpunktar margliðufalla
- Minnsta mögulega stig margliðufalls

3

Verkefni hluta 3.3

Hugtakaspurningar

1. Útskýrið muninn á stuðli veldisfalls og stigi þess.
2. Ef margliðufall er á þáttuðu formi, hvert væri heppilegt fyrsta skref til að ákvarða stig fallsins?
3. Lýsið almennt endahegðun margliðu af oddatölustigi þegar forystustuðullinn er jákvæður.
4. Hvert er sambandið milli stigs margliðufalls og mesta mögulega fjölda snúningspunkta á grafi þess?
5. Hvað má almennt álykta ef graf margliðufalls hefur eftirfarandi endahegðun? Þegar $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$ og þegar $x \to \infty, f(x) \to -\infty$.

Algebruverkefni

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort fallið sé veldisfall, margliðufall eða hvorugt.

6.

$$f(x)=x^5$$

7.

$$f(x)=\left(x^2\right)^3$$

8.

$$f(x)=x-x^4$$

9.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$$

10.

$$f(x)=2x(x+2)(x-1)^2$$

11.

$$f(x)=3^{x+1}$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum stig og forystustuðul gefinnar margliðu.

12.

$$-3x$$

13.

$$7-2x^2$$

14.

$$-2x^2-3x^5+x-6$$

15.

$$x(4-x^2)(2x+1)$$

16.

$$x^2(2x-3)^2$$

Ákvarðið endahegðun fallanna í eftirfarandi verkefnum.

17.

$$f(x)=x^4$$

18.

$$f(x)=x^3$$

19.

$$f(x)=-x^4$$

20.

$$f(x)=-x^9$$

21.

$$f(x)=-2x^4-3x^2+x-1$$

22.

$$f(x)=3x^2+x-2$$

23.

$$f(x)=x^2(2x^3-x+1)$$

24.

$$f(x)=(2-x)^7$$

Finnið skurðpunkta fallanna í eftirfarandi verkefnum.

25.

$$f(t)=2(t-1)(t+2)(t-3)$$

26.

$$g(n)=-2(3n-1)(2n+1)$$

27.

$$f(x)=x^4-16$$

28.

$$f(x)=x^3+27$$

29.

$$f(x)=x(x^2-2x-8)$$

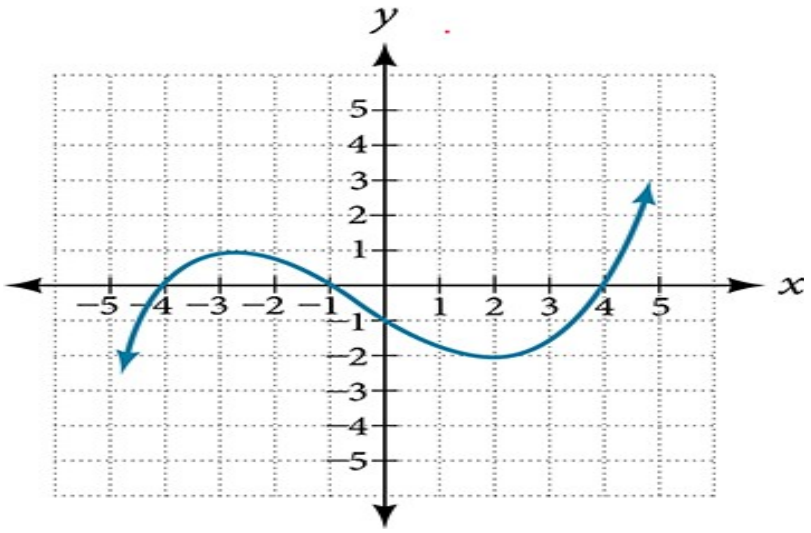
30.

$$f(x)=(x+3)(4x^2-1)$$

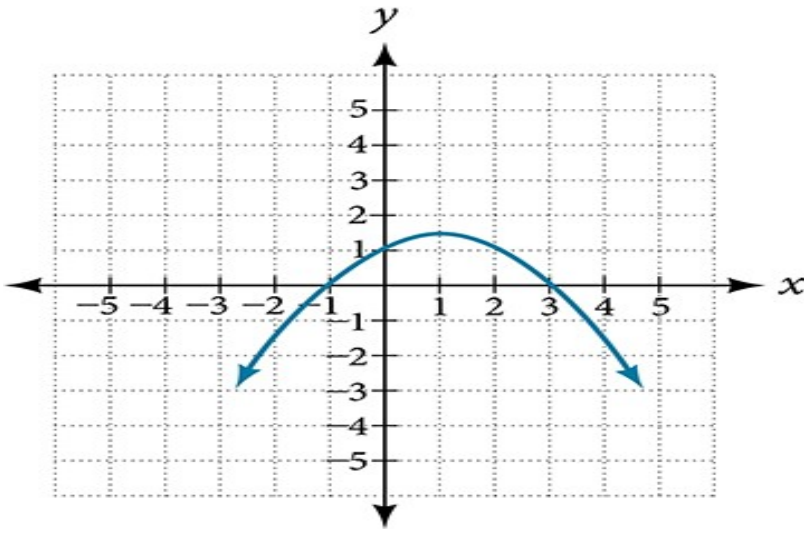
Myndræn verkefni

Finnið í eftirfarandi verkefnum minnsta mögulega stig margliðufallsins sem sýnt er.

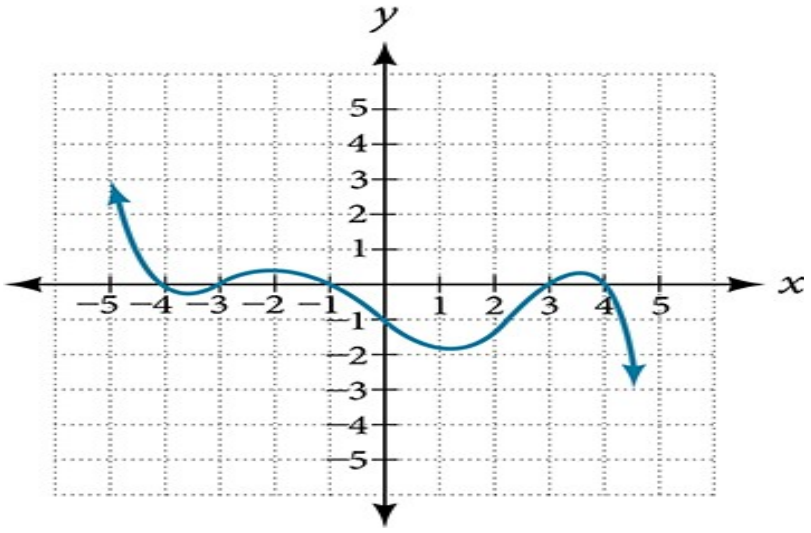
31.



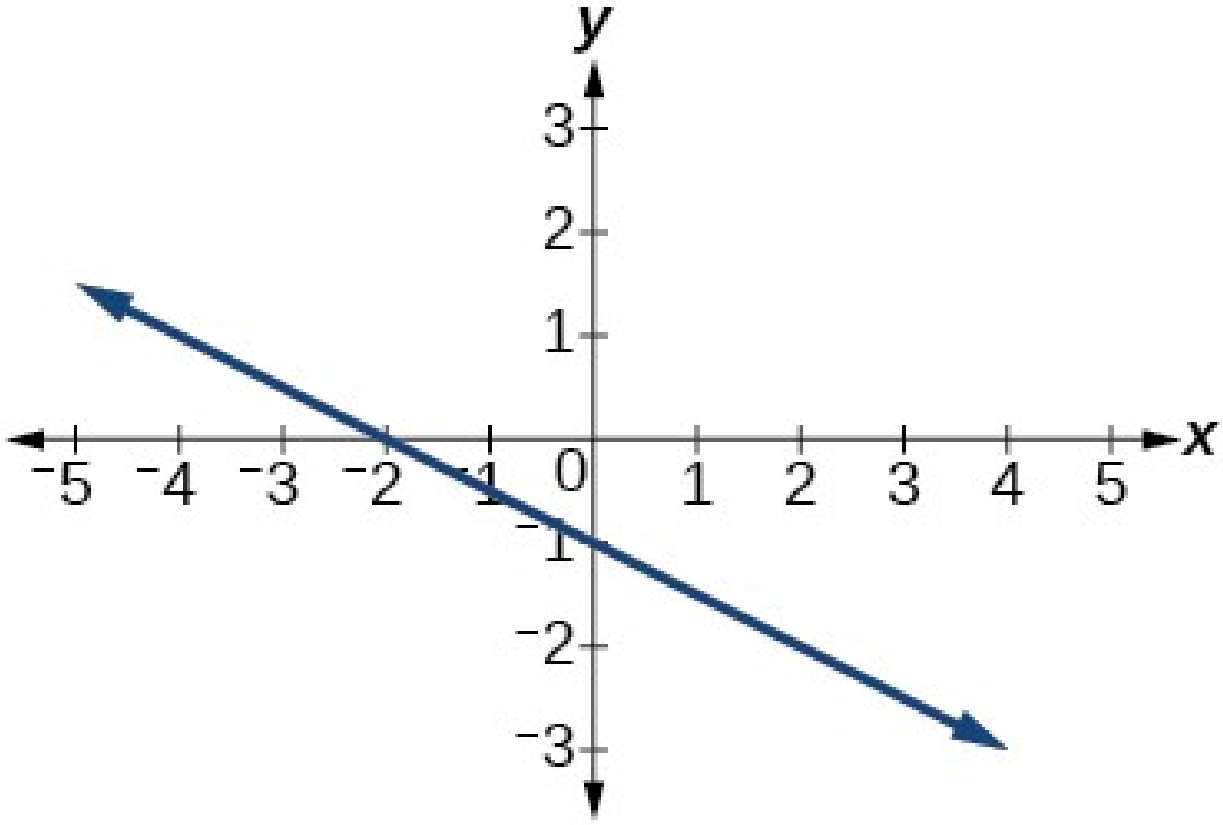
32.



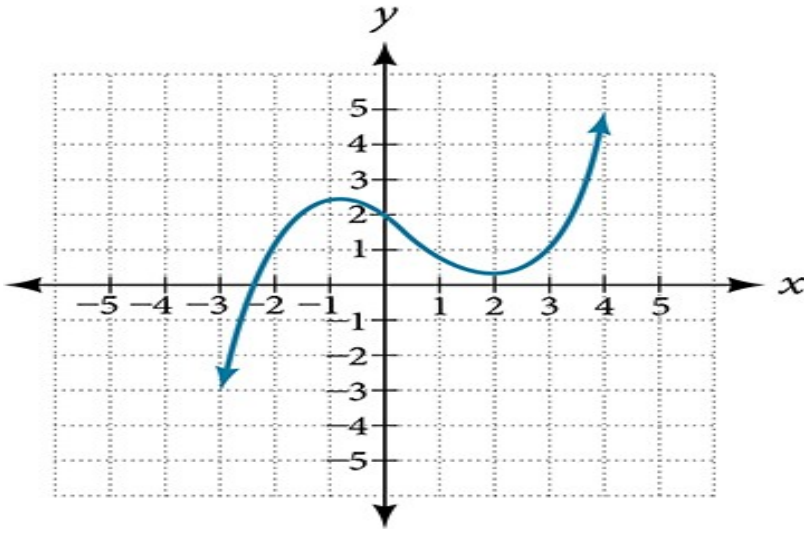
33.



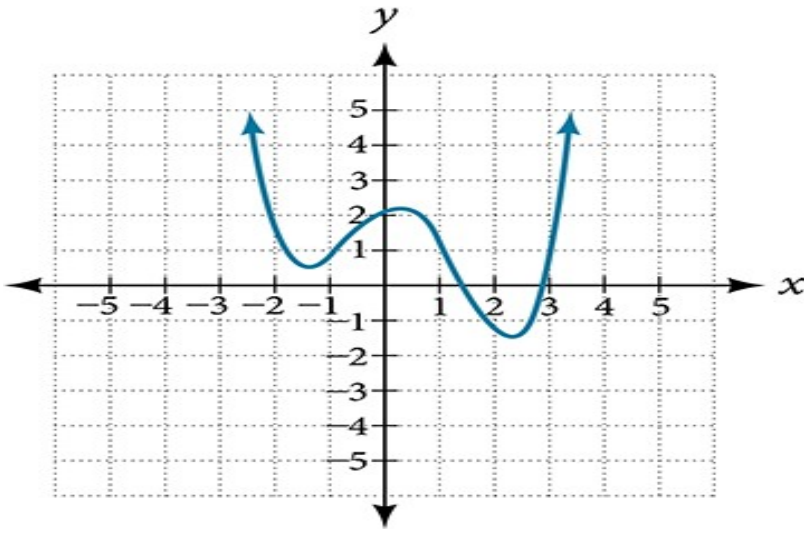
34.



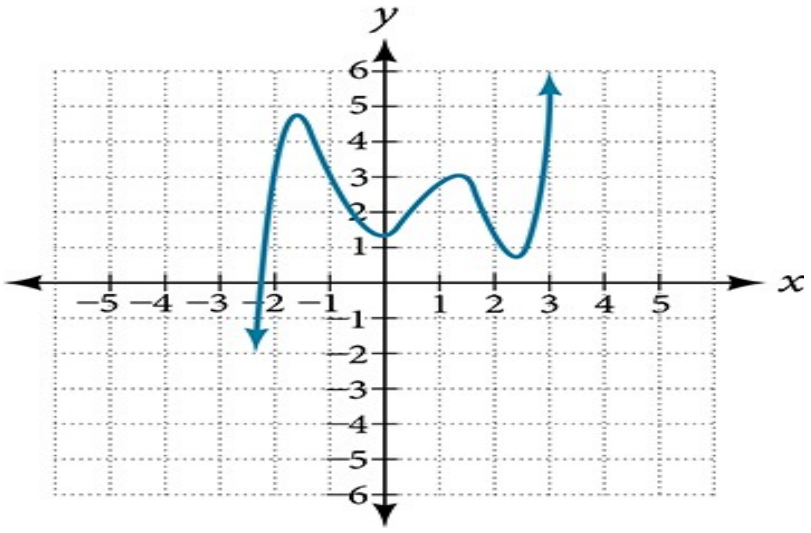
35.



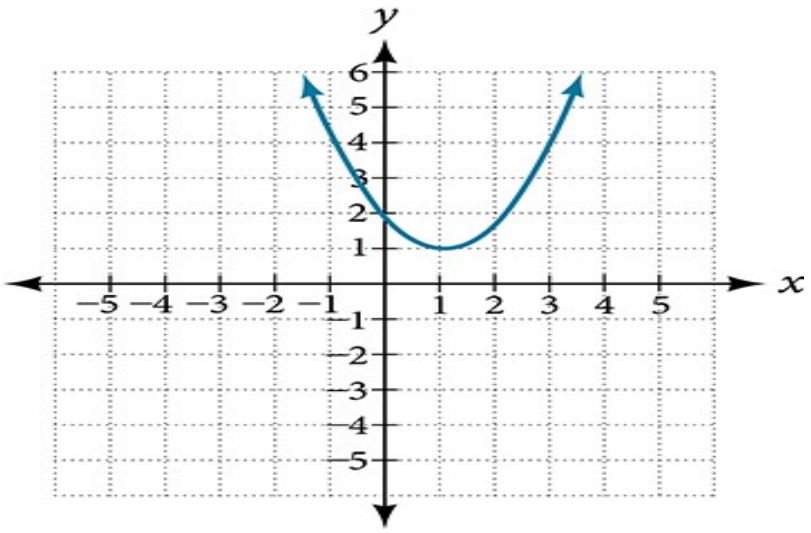
36.



37.

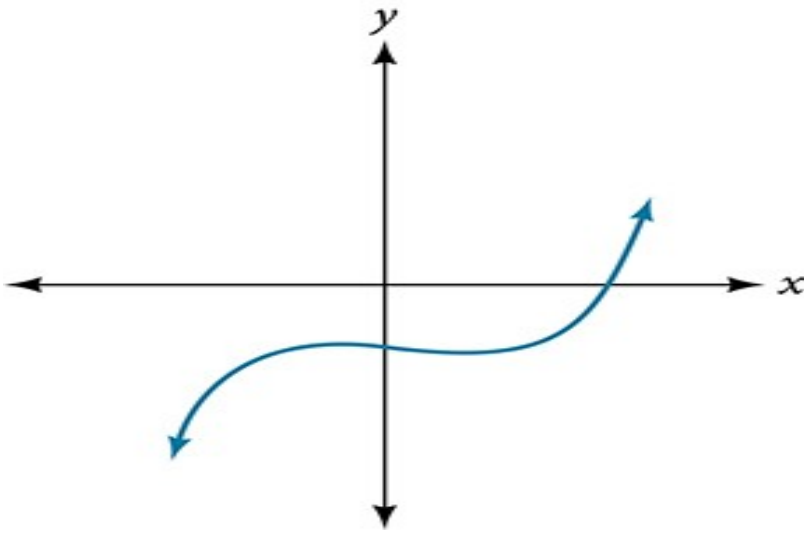


38.

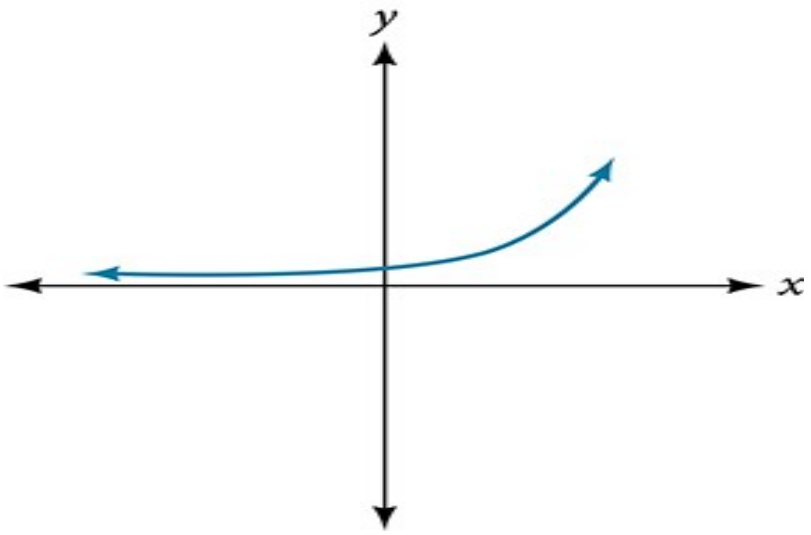


Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort gefna grafið sé graf margliðufalls. Ef svo er skuluð þið finna fjölda snúningspunkta og minnsta mögulega stig fallsins.

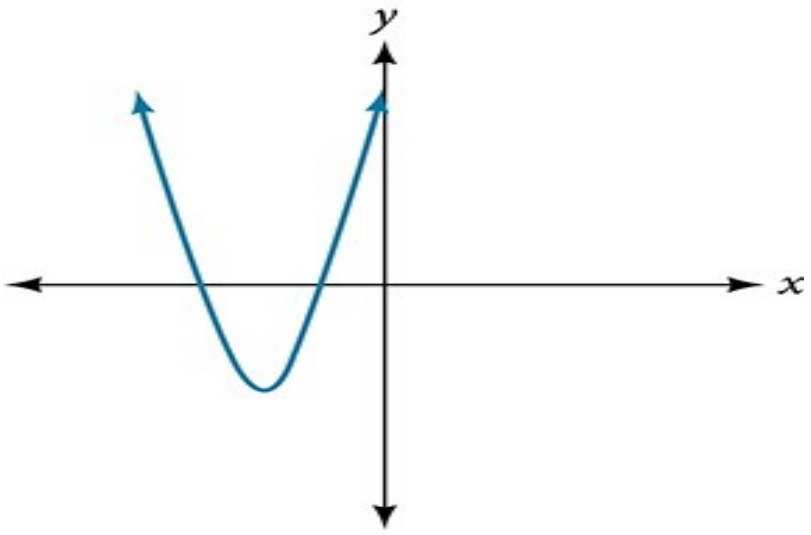
39.



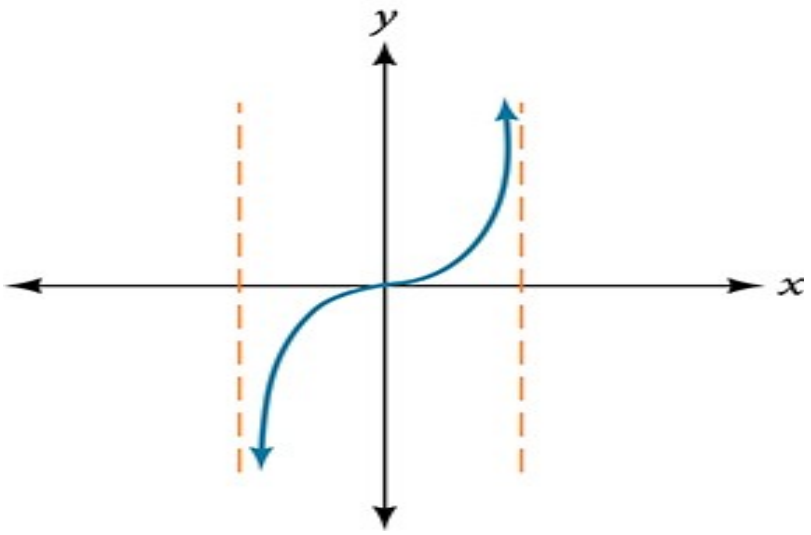
40.



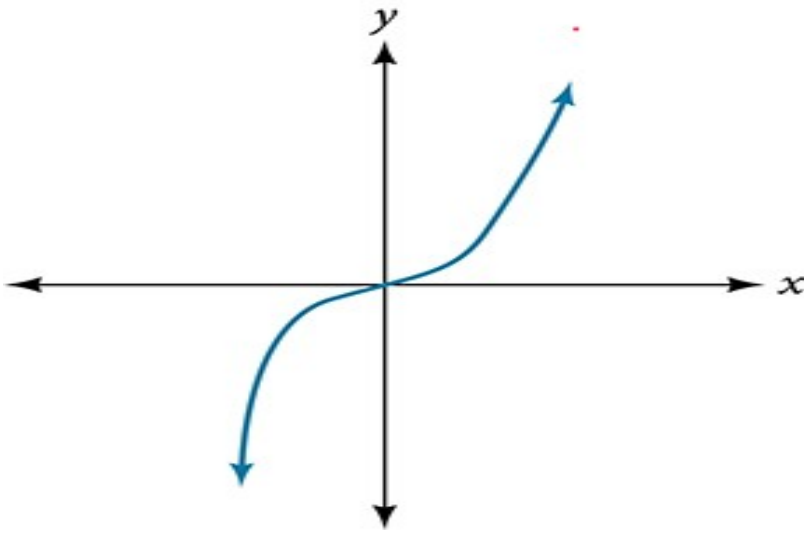
41.



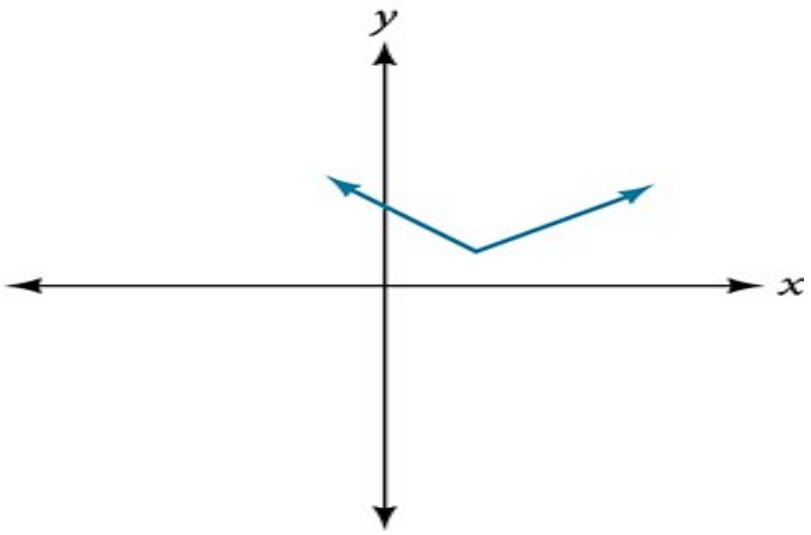
42.



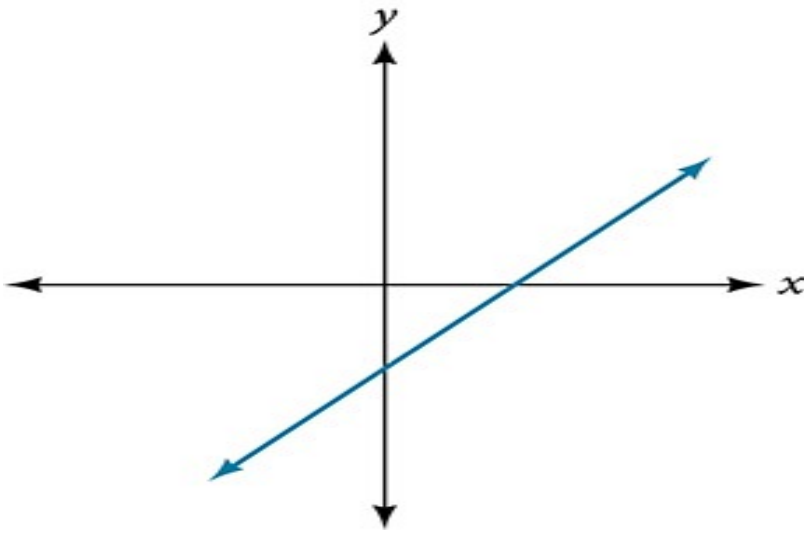
43.



44.



45.



Töluverkefni

Gerið töflu í eftirfarandi verkefnum til að staðfesta endahegðun fallsins.

46.

$$f(x)=-x^3$$

47.

$$f(x)=x^4-5x^2$$

48.

$$f(x)=x^2(1-x)^2$$

49.

$$f(x)=(x-1)(x-2)(3-x)$$

50.

$$f(x)=\frac{x^5}{10}-x^4$$

3

Tækniverkefni

Teiknið gröf margliðufallanna í eftirfarandi verkefnum með reiknivél. Finnið skurðpunkta og endahegðun út frá grafinu.

51.

$$f(x)=x^3(x-2)$$

52.

$$f(x)=x(x-3)(x+3)$$

53.

$$f(x)=x(14-2x)(10-2x)$$

54.

$$f(x)=x(14-2x)(10-2x)^2$$

55.

$$f(x)=x^3-16x$$

56.

$$f(x)=x^3-27$$

57.

$$f(x)=x^4-81$$

58.

$$f(x)=-x^3+x^2+2x$$

59.

$$f(x)=x^3-2x^2-15x$$

60.

$$f\ (x)=x^3-0{,}01\ x$$

Viðbótarverkefni

Notið upplýsingarnar um graf margliðufalls í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða fallið. Gerið ráð fyrir að forystustuðullinn sé 1 eða –1. Fleiri en eitt svar geta verið rétt.

61. Skurðpunkturinn við y –ás er $(0,-4)$. Skurðpunktarnir við x –ás eru $(-2,0),(2,0)$. Stigið er 2.

Endahegðun: þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$, þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$.

62. Skurðpunkturinn við y –ás er $(0,9)$. Skurðpunktarnir við x – ás eru $(-3,0),(3,0)$. Stigið er 2.

Endahegðun: þegar $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$, þegar $x \to \infty, f(x) \to -\infty$.

63. Skurðpunkturinn við y –ás er $(0,0)$. Skurðpunktarnir við x –ás eru $(0,0),(2,0)$. Stigið er 3.

Endahegðun: þegar $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$, þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$.

64. Skurðpunkturinn við y –ás er $(0,1)$. Skurðpunkturinn við x –ás er $(1,0)$. Stigið er 3.

Endahegðun: þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$, þegar $x \to \infty, f(x) \to -\infty$.

65. Skurðpunkturinn við y –ás er $(0,1)$. Enginn skurðpunktur er við x –ás. Stigið er 4.

Endahegðun: þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$, þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$.

Raunhæf viðfangsefni

Notið lýsingarnar í eftirfarandi verkefnum til að setja fram margliðufall sem lýsir umbeðnum upplýsingum.

66. Olíuflekkur þenst út í hring. Geisli hringsins stækkar um 20 metra á dag. Setjið flatarmál hringsins fram sem fall af d, fjölda liðinna daga.

67. Teningur hefur 3 feta langa brún. Brúnin lengist um 2 fet á mínútu. Setjið rúmmál teningsins fram sem fall af m, fjölda liðinna mínútna.

68. Rétthyrningur er 10 tommur á lengd og 6 tommur á breidd. Lengdin er aukin um x tommur og breiddin um tvöfalt þá lengd. Setjið flatarmál rétthyrningsins fram sem fall af x.

69. Búa á til opinn kassa með því að skera ferninga með hliðarlengdina x – tommur úr hornum pappaspjalds sem er 8 tommur sinnum 8 tommur og brjóta síðan hliðarnar upp. Setjið rúmmál kassans fram sem fall af x.

70. Lengd rétthyrnings er tvöföld breidd hans. Ferningar með 2 feta langar hliðar eru skornir úr hverju horni. Hliðarnar eru síðan brotnar upp til að mynda opinn kassa. Setjið rúmmál kassans fram sem fall af breiddinni (x).

3.4 Gröf margliðufalla

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Þekkja einkenni grafa margliðufalla.
- Nota þáttun til að finna núllstöðvar margliðufalla.
- Finna núllstöðvar og margfeldni þeirra.
- Ákvarða endahegðun.
- Skilja samband stigs og snúningspunkta.
- Teikna gröf margliðufalla.
- Nota milligildissetninguna.

Tekjur ímyndaðs kapalsjónvarpsfyrirtækis árin 2006–2013, í milljónum Bandaríkjadala, eru sýndar í töflu 1.

Tafla 1

Ár	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Tekjur	52,4	52,8	51,2	49,5	48,6	48,6	48,7	47,1

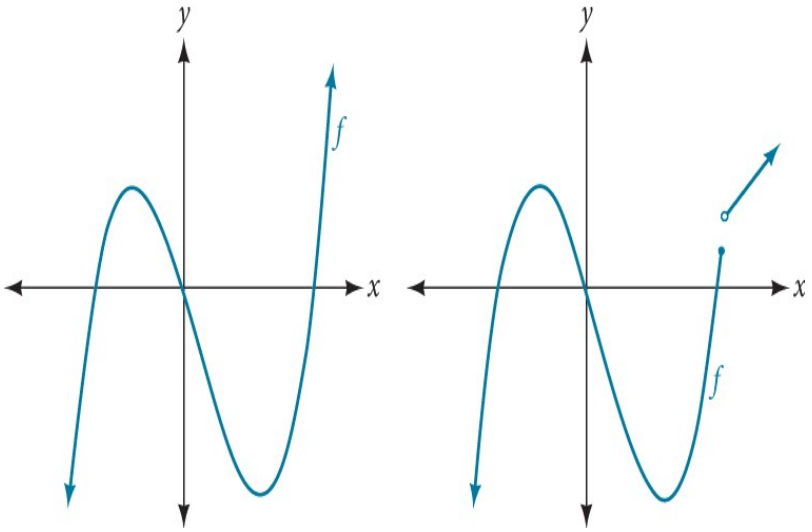
Lýsa má tekjunum með margliðufallinu

$$R(t) = -0{,}037\,t^4 + 1{,}414\,t^3 - 19{,}777\,t^2 + 118{,}696\,t - 205{,}332$$

þar sem R táknar tekjur í milljónum Bandaríkjadala og t táknar árið, þannig að $t = 6$ samsvarar árinu 2006. Á hvaða bilum vaxa tekjur fyrirtækisins? Á hvaða bilum minnka þær? Þessum spurningum og mörgum öðrum má svara með því að skoða graf margliðufallsins. Við höfum þegar kannað staðbundna hegðun annars stigs falla, sem eru sérstakt tilvik margliða. Í þessum hluta könnum við staðbundna hegðun margliða almennt.

Einkenni grafa margliðufalla þekkt

Gröf margliðufalla af stigi 2 eða hærra hafa engin hvöss horn; slík gröf nefnast sléttir ferlar. Gröf margliðufalla hafa heldur engin rof. Ferlar án rofa nefnast samfelldir. Mynd 1 sýnir annars vegar graf margliðufalls og hins vegar graf falls sem er ekki margliðufall.

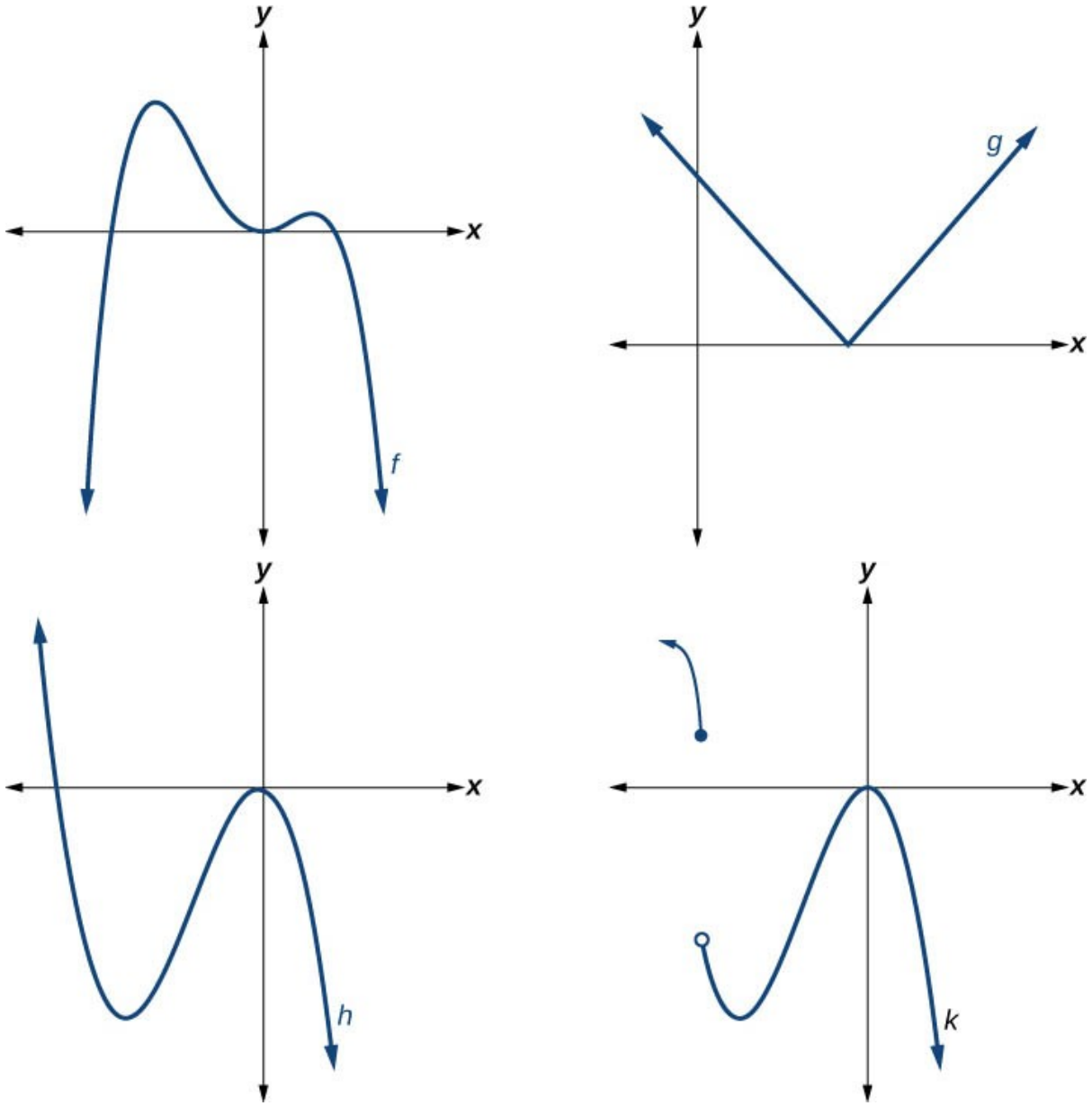


Mynd 1 Slétt og samfellt graf margliðufalls borið saman við graf með ósamfellu.

DÆMI 1

Margliðuföll þekkt

Hvert grafanna á mynd 2 sýnir margliðufall?



Mynd 2 Gröf f og h eru slétt og samfelld; graf g hefur hornpunkt og graf k ósamfellur.

Lausn

Gröf f og h eru gröf margliðufalla. Þau eru slétt og samfelld.

Gröf g og k eru gröf falla sem eru ekki margliðuföll. Graf fallsins g hefur hvasst horn. Graf fallsins k er ekki samfellt.

SPURT OG SVARAÐ

Er skilgreiningarmengi allra margliðufalla mengi allra rauntalna?

Já. Sérhver rauntala er gilt inntaksgildi margliðufalls.

Þáttun notuð til að finna núllstöðvar margliðufalla

Munið að ef f er margliðufall nefnast þau gildi x sem uppfylla $f(x)=0$ núllstöðvar fallsins f. Ef unnt er að þátta stæðu margliðufallsins getum við sett hvern þátt jafnan núlli og fundið núllstöðvarnar.

Við getum notað þessa aðferð til að finna skurðpunkta við $x-$ ás, því við skurðpunktana við $x-$ ás leitum við að inntaksgildunum sem gefa úttaksgildið núll. Fyrir almennar margliður getur þetta verið erfitt. Annars stigs jöfnur má leysa með tiltölulega einfaldri lausnarformúlu, en samsvarandi formúlur fyrir þriðja og fjórða stigs margliður eru of flóknar til að leggja á minnið og engar almennar lausnarformúlur með rótum eru til fyrir margliður af hærra stigi. Því einskorðum við okkur við þrjú tilvik í þessum hluta:

1. Þátta má margliðuna með þekktum aðferðum: taka út stærsta sameiginlega þátt og þátta þríliðu.
2. Margliðan er gefin á þáttuðu formi.
3. Grafteikniforrit er notað til að finna skurðpunktana.

AÐFERÐ

Finnið skurðpunkta gefins margliðufalls f, við x-ás með þáttun.

1. Setjið $f(x)=0$.
2. Ef margliðufallið er ekki gefið á þáttuðu formi:
   a. Takið út alla sameiginlega einliðuþætti.
   b. Þáttið allar tvíliður og þríliður sem unnt er að þátta.
3. Setjið hvern þátt jafnan núlli og leysið jöfnurnar til að finna skurðpunktana við $x-$ ás.

DÆMI 2

Skurðpunktar margliðufalls við x-ás fundnir með þáttun

Finnið skurðpunkta við x-ás fyrir fallið $f(x)=x^6-3x^4+2x^2$.

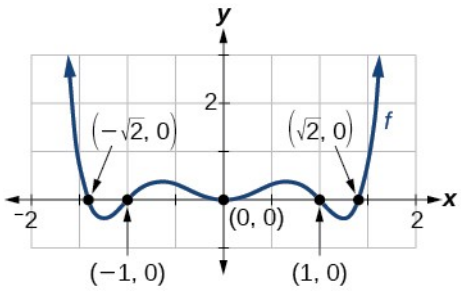
Lausn

Við getum reynt að þátta margliðuna til að finna lausnir jöfnunnar $f(x)=0$.

$x^6-3\,x^4+2\,x^2=0$	Takið stærsta sameiginlega þáttinn út fyrir sviga.
$x^2\left(x^4-3\,x^2+2\right)=0$	Þáttið þríliðuna.
$x^2\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)=0$	Setjið hvern þátt jafnan núlli.

$$\begin{array}{ccccc} & & (x^2-1)=0 & & (x^2-2)=0 \\ x^2=0 & \text{eða} & x^2=1 & \text{eða} & x^2=2 \\ x=0 & & x=\pm 1 & & x=\pm\sqrt{2} \end{array}$$

Þá fást fimm skurðpunktar við $x-$ ás: $(0,0),(1,0),(-1,0),(\sqrt{2},0)$, og $(-\sqrt{2},0)$. Sjá mynd 3. Einnig sést að fallið er jafnstætt.



Mynd 3 Fimm núllstöðvar fallsins f(x) = x⁶ − 3x⁴ + 2x².

DÆMI 3

Skurðpunktar margliðufalls við x-ás fundnir með þáttun

Finnið skurðpunkta við $x-$ ás fyrir fallið $f(x)=x^3-5x^2-x+5$.

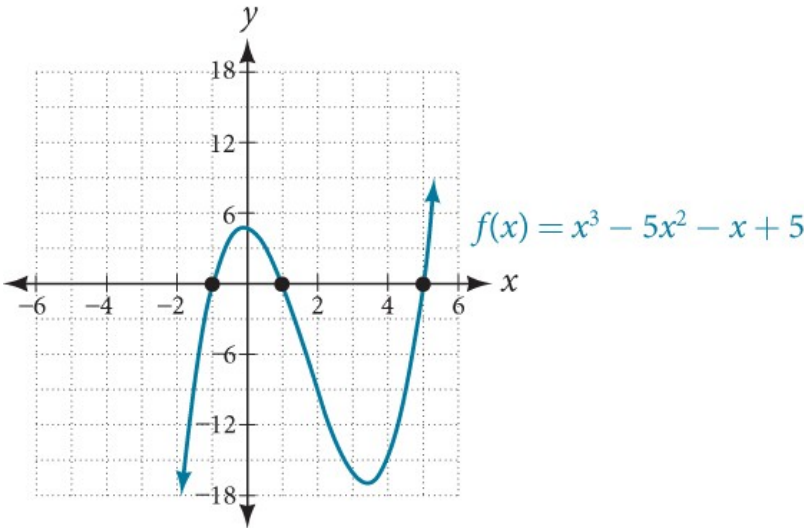
Lausn

Finnið lausnir jöfnunnar $f(x)=0$ með þáttun.

$$\begin{array}{rl} x^3-5x^2-x+5=0 & \text{Þáttið með hópun.} \\ x^2(x-5)-(x-5)=0 & \text{Takið sameiginlega þáttinn út fyrir sviga.} \\ (x^2-1)(x-5)=0 & \text{Þáttið mismun tveggja ferninga.} \\ (x+1)(x-1)(x-5)=0 & \text{Setjið hvern þátt jafnan núlli.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x+1=0 & \text{eða} & x-1=0 & \text{eða} & x-5=0 \\ x=-1 & & x=1 & & x=5 \end{array}$$

Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru þrír: $(-1,0),(1,0)$, og $(5,0)$. Sjá mynd 4.



Mynd 4 Graf f(x) = x³ − 5x² − x + 5 með núllstöðvarnar −1, 1 og 5.

DÆMI 4

Skurðpunktar margliðu á þáttuðu formi við y- og x-ás fundnir

Finnið skurðpunktana við $y-$ og x-ás fyrir fallið $g(x)=(x-2)^2(2x+3)$.

Lausn

Skurðpunktinn við y-ás má finna með því að reikna $g(0)$.

$$g(0) = (0-2)^2(2(0)+3)$$
$$= 12$$

Skurðpunkturinn við y-ás er því $(0,12)$.

Skurðpunktana við x-ás má finna með því að leysa jöfnuna $g(x)=0$.

$$(x-2)^2(2x+3)=0$$

$$(x-2)^2=0 \qquad (2x+3)=0$$

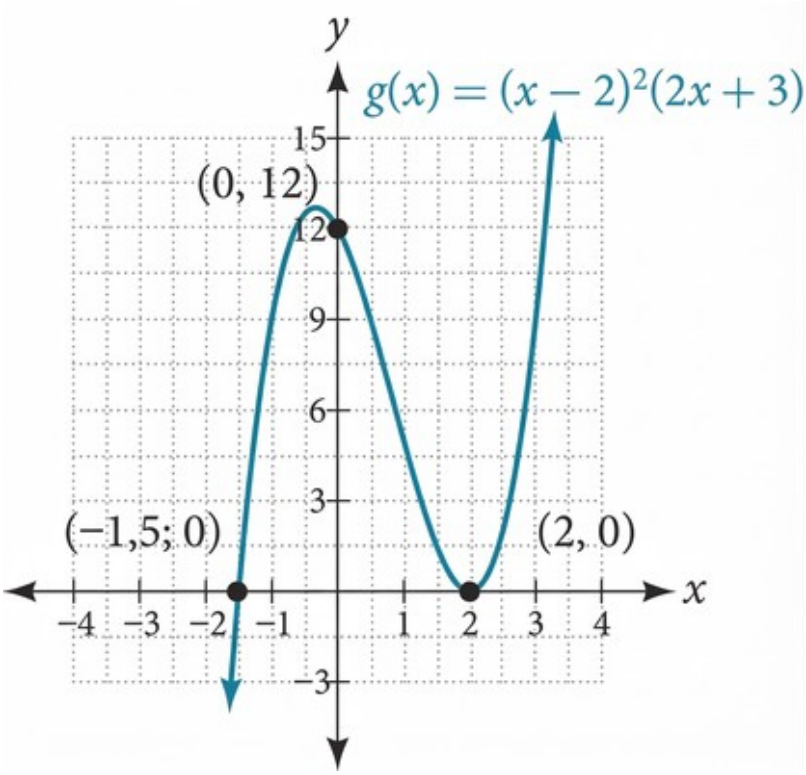
$$x-2=0 \quad \text{eða} \quad x=-\frac{3}{2}$$

$$x=2$$

Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru því $(2,0)$ og $\left(-\frac{3}{2},0\right)$.

Greining

Við getum alltaf kannað hvort svörin séu raunhæf með því að teikna graf margliðunnar í grafreikni, eins og sýnt er á mynd 5.



Mynd 5 Graf g(x) = (x − 2)²(2x + 3) og skurðpunktar þess við hnitásana.

DÆMI 5

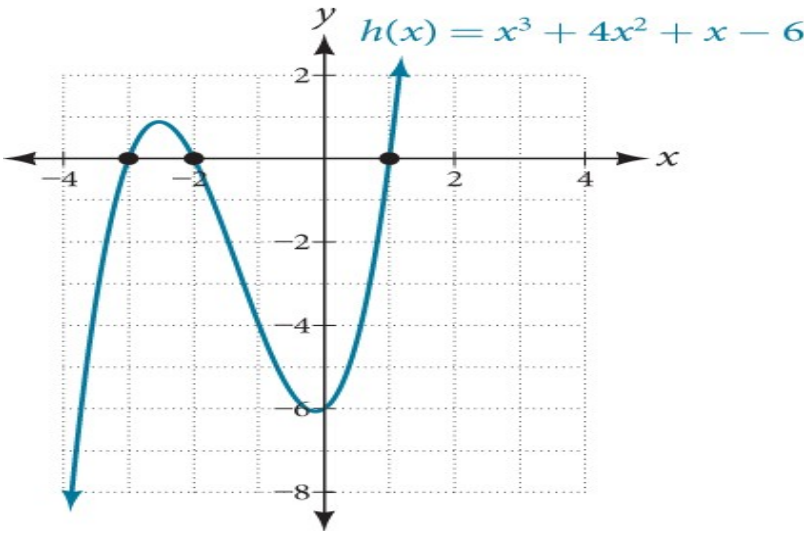
Skurðpunktar margliðufalls við x-ás fundnir af grafi

Finnið skurðpunkta við $x-$ ás fyrir fallið $h(x)=x^3+4x^2+x-6$.

Lausn

Margliðan er ekki á þáttuðu formi og hefur enga sameiginlega þætti. Ekki virðist heldur unnt að þátta hana með þeim aðferðum sem við höfum þegar fjallað um. Sem betur fer getum við notað tækni til að finna skurðpunktana. Hafið í huga að sum gildi gera það erfitt að teikna grafið í höndunum. Þá getum við nýtt okkur grafteikniforrit.

Á grafi fallsins á mynd 6 virðast vera skurðpunktar við x-ás þegar $x=-3, -2,$ og 1.



Mynd 6 Graf h(x) = x³ + 4x² + x − 6 með núllstöðvarnar −3, −2 og 1.

Við getum sannreynt gildin með því að setja þau inn fyrir x og staðfesta að

$$h(-3)=h(-2)=h(1)=0.$$

Þar sem $h(x)=x^3+4x^2+x-6$, fæst:

$$\begin{aligned} h(-3) &= (-3)^3+4(-3)^2+(-3)-6=-27+36-3-6=0 \\ h(-2) &= (-2)^3+4(-2)^2+(-2)-6=-8+16-2-6=0 \\ h(1) &= (1)^3+4(1)^2+(1)-6=1+4+1-6=0 \end{aligned}$$

Hver skurðpunktur við $x-$ ás samsvarar núllstöð margliðufallsins og hver núllstöð gefur þátt. Því getum við nú ritað margliðuna á þáttuðu formi.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3+4x^2+x-6 \\ &= (x+3)(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Finnið skurðpunkta við $y-$ og x-ás fyrir fallið $f(x)=x^4-19x^2+30x$.

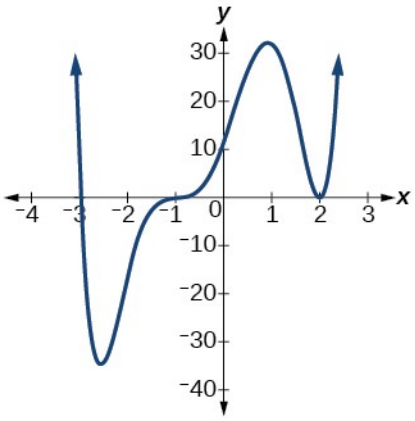
Núllstöðvar og margfeldni þeirra fundnar

Gröf haga sér á ólíkan hátt við mismunandi skurðpunkta við $x-$ ás. Stundum sker grafið lárétta ásinn í skurðpunktinum. Í öðrum tilvikum snertir grafið lárétta ásinn og snýr við.

Teiknum til dæmis graf fallsins

$$f(x)=(x+3)(x-2)^2(x+1)^3.$$

Takið eftir á mynd 7 að hegðun fallsins er ólík við hvern skurðpunkt við $x-$ ás.



Mynd 7 Hegðun grafs við skurðpunkt við x-ás fundin með því að skoða margfeldni núllstöðvarinnar.

Við skurðpunktinn við $x-$ ás er núllstöðin -3 lausn jöfnunnar $(x+3)=0$. Grafið fer beint í gegnum skurðpunktinn við $x-$ ás þegar $x=-3$. Þátturinn er línulegur, það er af stigi 1, og því líkist hegðunin nærri skurðpunktinum hegðun línu: grafið fer beint í gegnum punktinn. Þetta nefnist einföld núllstöð því núllstöðin samsvarar einum þætti fallsins.

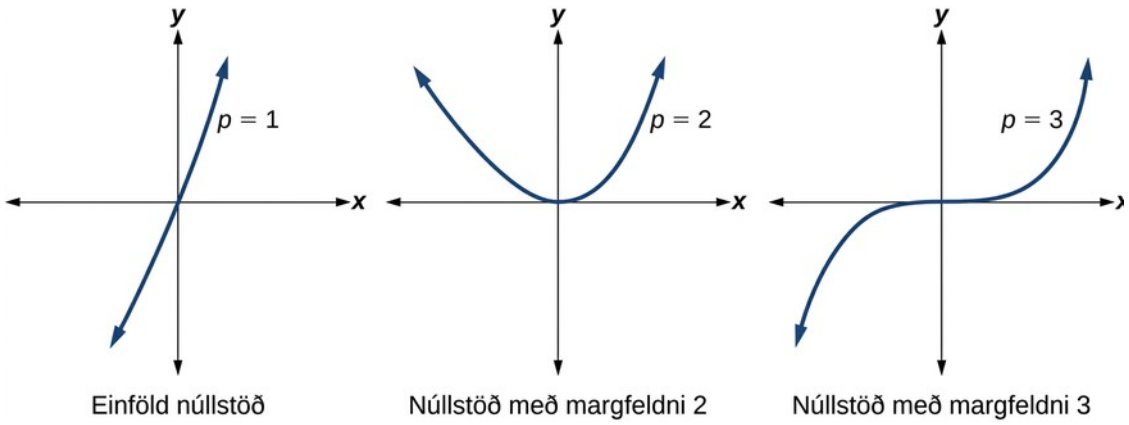
Við skurðpunktinn við $x-$ ás er núllstöðin 2 endurtekin lausn jöfnunnar $(x-2)^2=0$. Grafið snertir ásinn í skurðpunktinum og snýr við. Þátturinn er annars stigs, það er af stigi 2, og því líkist hegðunin nærri skurðpunktinum hegðun annars stigs falls: grafið snertir lárétta ásinn og snýr við.

$$(x-2)^2=(x-2)(x-2)$$

Þátturinn er endurtekinn, það er þátturinn $(x-2)$ kemur tvisvar fyrir. Það hve oft tiltekinn þáttur kemur fyrir þegar margliða er rituð á þáttuðu formi nefnist margfeldni. Núllstöðin $x=2$, sem tengist þessum þætti, hefur margfeldni 2 vegna þess að þátturinn $(x-2)$ kemur tvisvar fyrir.

Við skurðpunktinn við $x-$ ás er núllstöðin -1 endurtekin lausn jöfnunnar $(x+1)^3=0$. Grafið fer í gegnum ásinn í skurðpunktinum en fletst fyrst nokkuð út. Þátturinn er þriðja stigs, það er af stigi 3, og því líkist hegðunin nærri skurðpunktinum hegðun þriðja stigs falls, með sömu S-lögun og grunnfallið $f(x)=x^3$. Þetta nefnist þreföld núllstöð, eða núllstöð með margfeldni 3.

Við núllstöðvar þar sem margfeldnin er slétt tala snerta gröfin $x-$ ásinn án þess að skera hann. Við núllstöðvar þar sem margfeldnin er oddatala skera gröfin $x-$ ás. Sjá mynd 8 þar sem sýnd eru dæmi um gröf margliðufalla með margfeldni 1, 2 og 3.



Mynd 8 Hegðun grafs nærri núllstöð með margfeldni 1, 2 og 3.

Fyrir hærri slétta veldisvísa, svo sem 4, 6 og 8, snertir grafið enn lárétta ásinn og snýr við. Eftir því sem sléttí veldisvísirinn hækkar verður grafið flatara þegar það nálgast og fjarlægist $x-$ ásinn.

Fyrir hærri oddatöluveldisvísa, svo sem 5, 7 og 9, sker grafið enn lárétta ásinn. Eftir því sem oddatöluveldisvísirinn hækkar verður grafið flatara þegar það nálgast og fjarlægist $x-$ ásinn.

HEGÐUN GRAFA MARGLIÐA VIÐ SKURÐPUNKTA VIÐ $x-$ ÁS

Ef margliða inniheldur þátt á forminu $(x-h)^p$, ræðst hegðunin við $x-$ ás nærri núllstöðinni h af veldisvísinum p. Ef aðrir þættir margliðunnar eru ekki núll þar segjum við að $x=h$ sé núllstöð með margfeldni p.

Graf margliðufalls snertir $x-$ ásinn við núllstöðvar þar sem margfeldnin er slétt tala. Grafið sker x-ásinn við núllstöðvar þar sem margfeldnin er oddatala.

Summa margfeldna allra núllstöðva í tvinntölum er jöfn stigi margliðufallsins.

AÐFERÐ

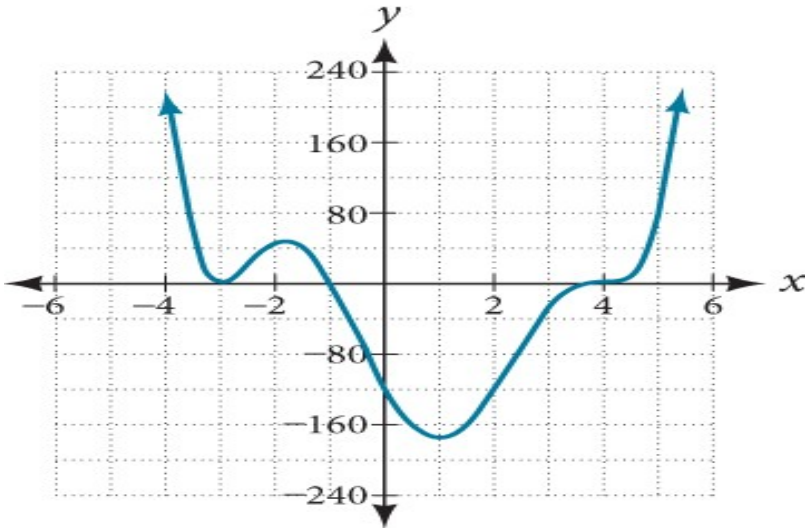
Finnið núllstöðvar og margfeldni þeirra af grafi margliðufalls af stigi n,.

1. Ef grafið sker x-ás og er nærri því línulegt við skurðpunktinn er núllstöðin einföld.
2. Ef grafið snertir x-ás og snýr við er margfeldni núllstöðvarinnar slétt tala.
3. Ef grafið sker x-ás við núllstöð er margfeldni hennar oddatala.
4. Summa margfeldnitalnanna er $\leq n$.

DÆMI 6

Núllstöðvar og margfeldni þeirra fundnar

Notið graf fallsins af stigi 6 á mynd 9 til að finna núllstöðvar fallsins og mögulega margfeldni þeirra.



Mynd 9 Grafið snertir x-ás við −3 og sker hann við −1 og 4; það fletst út við 4.

Lausn

Margliðufallið er af stigi n. Summa margfeldna allra núllstöðva í tvinntölum verður að vera n.

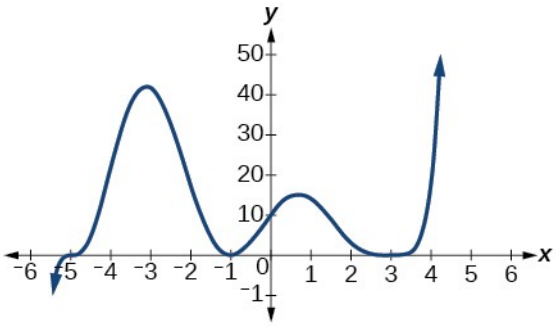
Frá vinstri kemur fyrsta núllstöðin fyrir þegar $x = -3$. Grafið snertir x-ás og því verður margfeldni núllstöðvarinnar að vera slétt tala. Núllstöðin -3 hefur margfeldni 2.

Næsta núllstöð kemur fyrir þegar $x = -1$. Grafið er nærri því línulegt í þessum punkti. Þetta er einföld núllstöð með margfeldni 1.

Síðasta núllstöðin kemur fyrir þegar $x = 4$. Grafið sker x-ás og því verður margfeldni núllstöðvarinnar að vera oddatala. Grafið fletst út við núllstöðina, svo margfeldnin er að minnsta kosti 3. Þar sem stigið er 6 og summa lágmarksmargfeldnanna er 2 + 1 + 3 = 6 eru margfeldnirnar nákvæmlega 2, 1 og 3.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Notið graf fallsins af stigi 9 á mynd 10 til að finna núllstöðvar fallsins og margfeldni þeirra.



Mynd 10 Graf með núllstöðvarnar −5, −1 og 3, vinstri endann niður og hægri endann upp.

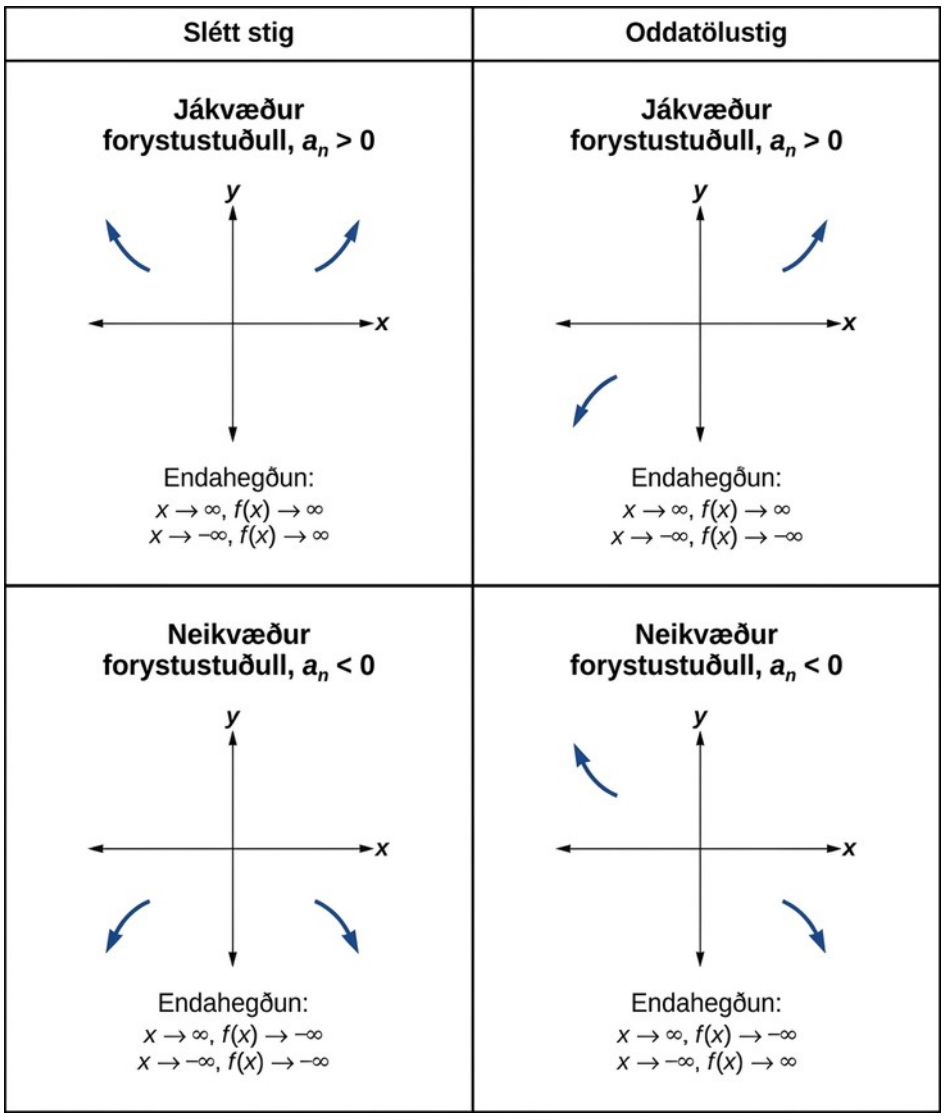
Endahegðun ákvörðuð

Eins og við höfum þegar lært mun graf margliðufalls á forminu

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

að lokum annaðhvort hækka eða lækka þegar x vex án efri marka og sömuleiðis annaðhvort hækka eða lækka þegar x minnkar án neðri marka. Ástæðan er sú að fyrir mjög stór inntaksgildi, til dæmis 100 eða 1.000, ræður forystuliðurinn stærð úttaksins. Hið sama gildir um mjög neikvæð inntaksgildi, til dæmis –100 eða –1.000.

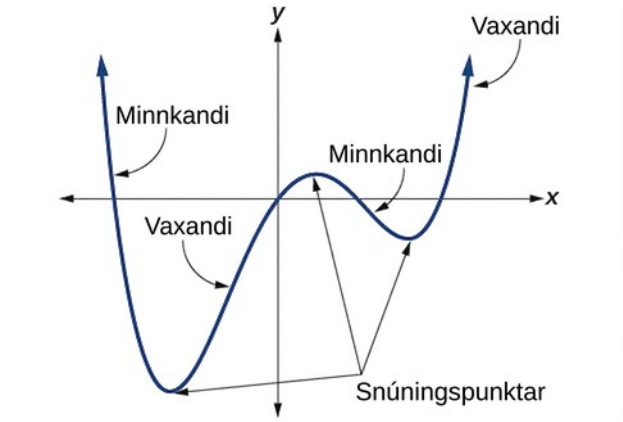
Munið að þessi hegðun nefnist endahegðun falls. Við sáum þegar fjallað var um annars stigs jöfnur að þegar forystuliður margliðufalls, $a_n x^n$, hefur jákvæðan stuðul og sléttan veldisvísi og x vex eða minnkar án takmarka, þá vex $f(x)$ án efri marka. Þegar forystuliðurinn er veldisfall með jákvæðum stuðli og oddatöluveldisvísi og x minnkar án neðri marka, þá minnkar $f(x)$ einnig án neðri marka; þegar x vex án efri marka, þá vex $f(x)$ einnig án efri marka. Ef forystustuðullinn er neikvæður snýst stefna endahegðunarinnar við. Mynd 11 tekur saman öll fjögur tilvikin.



Mynd 11 Fjögur tilvik endahegðunar eftir stigi margliðunnar og formerki forystustuðulsins.

Samband stigs og snúningspunkta skilið

Auk endahegðunar getum við kannað staðbundna hegðun margliðufalls. Það getur haft snúningspunkt þar sem grafið breytist úr vexti í minnkun, eða úr minnkun í vöxt. Skoðið graf margliðufallsins $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ á mynd 12. Grafið hefur þrjá snúningspunkta.



Mynd 12 Vaxandi og minnkandi hlutar grafs og þrír snúningspunktar þess.

Fallið f er margliðufall af 4. stigi og hefur 3 snúningspunkta. Mesti mögulegi fjöldi snúningspunkta margliðufalls er alltaf einum minni en stig fallsins.

SNÚNINGSPUNKTAR TÚLKAÐIR

Hugtakið snúningspunktur vísar til punkts á grafi þar sem grafið breytist úr vexti í minnkun eða úr minnkun í vöxt.

Margliða af jákvæðu stigi n hefur í mesta lagi $n-1$ snúningspunkta.

DÆMI 7

Mesti mögulegi fjöldi snúningspunkta fundinn út frá stigi margliðufalls

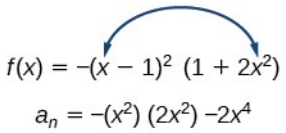
Finnið mesta mögulega fjölda snúningspunkta hvers margliðufalls.

1. ⓐ $f(x)=-x^3+4x^5-3x^2+1$
2. ⓑ $f(x)=-(x-1)^2(1+2x^2)$

Lausn

1. ⓐ $f(x)=-x^3+4x^5-3x^2+1$
   Ritið margliðufallið fyrst eftir lækkandi veldum: $f(x)=4x^5-x^3-3x^2+1$
   Finnið stig margliðufallsins. Margliðufallið er af stigi 5.
   Mesti mögulegi fjöldi snúningspunkta er $5-1=4$.
2. ⓑ $f(x)=-(x-1)^2(1+2x^2)$

Finnið fyrst forystulið margliðufallsins eins og það væri eftir margföldun.



Leiðrétting á frumheimild: Á myndinni hér að ofan táknar a_n ranglega forystuliðinn og jafnaðarmerki vantar fyrir framan $-2x^4$. Réttur forystuliður er $-x^2 \cdot 2x^2 = -2x^4$ og forystustuðullinn er -2. Finnið síðan stig margliðufallsins. Margliðufallið er af stigi 4.

Mesti mögulegi fjöldi snúningspunkta er $4-1=3$.

3

Gröf margliðufalla teiknuð

Við getum notað þekkingu okkar á margfeldni, endahegðun og snúningspunktum til að skissa gröf margliðufalla. Tökum þetta saman og skoðum skrefin sem þarf til að teikna gröf margliðufalla.

AÐFERÐ

Skissið graf gefins margliðufalls.

1. Finnið skurðpunktana.
2. Kannið samhverfu. Ef fallið er jafnstætt er graf þess samhverft um $y-$ ás, það er $f(-x)=f(x)$. Ef fallið er oddstætt er graf þess samhverft um upphafspunktinn, það er $f(-x)=-f(x)$.
3. Notið margfeldni núllstöðvanna til að ákvarða hegðun margliðunnar við skurðpunktana við $x-$ ás.
4. Ákvarðið endahegðunina með því að skoða forystuliðinn.
5. Notið endahegðunina og hegðunina við skurðpunktana til að skissa graf.
6. Gangið úr skugga um að fjöldi snúningspunkta sé ekki meiri en stig margliðunnar að frádregnum einum.
7. Ef vill má kanna grafið með grafteikniforriti.

DÆMI 8

Graf margliðufalls skissað

Skissið graf fallsins $f(x)=-2(x+3)^2(x-5)$.

Lausn

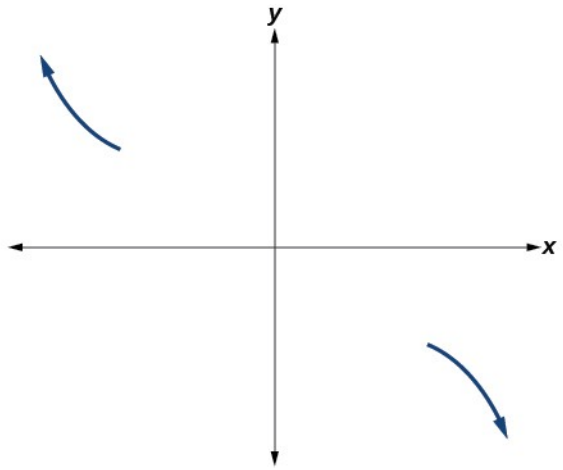
Grafið hefur tvo skurðpunkta við $x-$ ás. Við $x=-3$, er þátturinn í öðru veldi og margfeldnin því 2. Grafið snertir ásinn og snýr við í þessum skurðpunkti við $x-$ ás. Við $x=5$, er margfeldnin 1 og grafið sker því ásinn í þessum skurðpunkti.

Skurðpunkturinn við y-ás fæst með því að reikna $f(0)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= -2(0+3)^2(0-5) \\ &= -2 \cdot 9 \cdot (-5) \\ &= 90 \end{aligned}$$

Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0, 90)$.

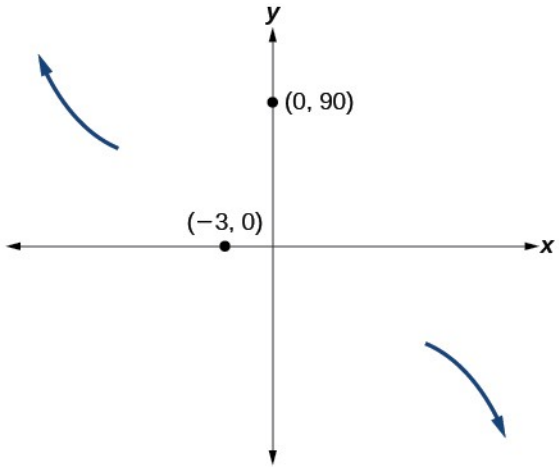
Ef margliðan væri margfölduð upp sæist einnig að forystuliðurinn væri $-2x^3$, og því samsvarar endahegðunin lóðrétt spegluðu þriðja stigs falli: Úttakið minnkar þegar inntakið stefnir á óendanlegt gildi en vex þegar inntakið stefnir á neikvætt óendanlegt gildi. Sjá mynd 13.



Mynd 13 Endahegðun f(x) = −2(x + 3)²(x − 5): vinstri endinn stefnir upp og sá hægri niður.

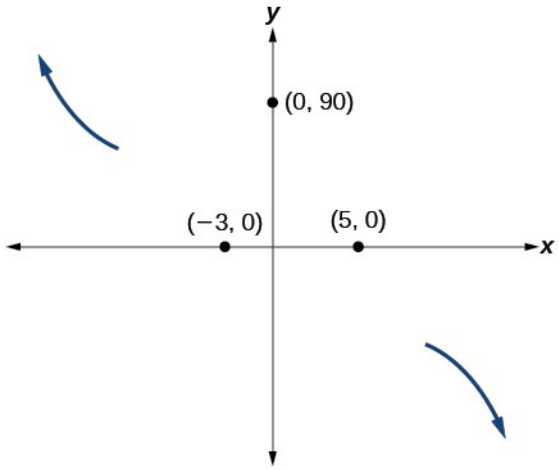
Við skissuna höfum við eftirfarandi í huga:

- Þegar $x \to -\infty$ gildir að $f(x) \to \infty$, þannig að grafið byrjar í öðrum fjórðungi og lækkar í átt að $x-$ ásnum.
- Þar sem $f(-x) = -2(-x+3)^2(-x-5)$ er ekki jafnt $f(x)$, er grafið ekki samhverft um lóðrétta ásinn.
- Í $(-3, 0)$, snertir grafið $x-$ ásinn og snýr við, svo fallið hlýtur að byrja að vaxa.
  Í $(0, 90)$, sker grafið $y-$ ásinn í $y-$ skurðpunktinum. Sjá mynd 14.



Mynd 14 Endahegðun grafsins og punkturinn (0, 90) á y-ás.

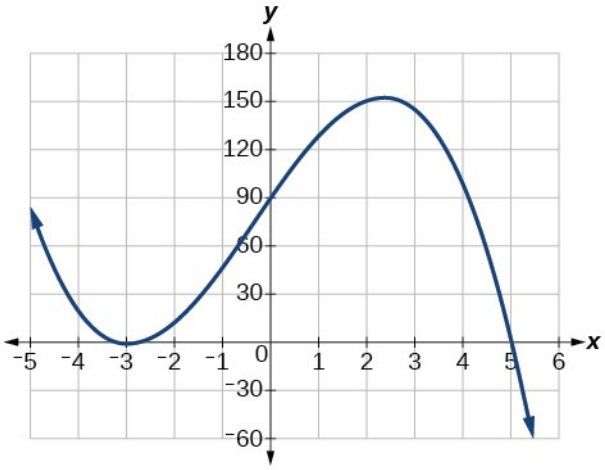
Einhvers staðar eftir þennan punkt verður grafið að snúa aftur niður, eða taka að lækka í átt að lárétta ásnum, því það fer í gegnum næsta skurðpunkt í $(5, 0)$. Sjá mynd 15.



Mynd 15 Endahegðun grafsins og skurðpunkturinn (5, 0) við x-ás.

Þegar $x \to \infty$ gildir að $f(x) \to -\infty$, þannig að grafið heldur áfram að lækka og við getum lokið teikningunni í fjórða fjórðungi.

Með grafteikniforriti getum við teiknað graf margliðufallsins, sem sýnt er á mynd 16, og staðfest að það líkist skissunni okkar á mynd 15.



Mynd 16 Heildargraf margliðufallsins $f(x)=-2(x+3)^2(x-5)$

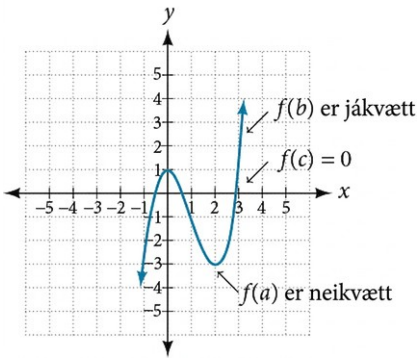
REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Skissið graf fallsins $f(x)=\frac{1}{4}x(x-1)^4(x+3)^3$.

Milligildissetningin notuð

Í sumum tilvikum þekkjum við tvo punkta á grafi en ekki núllstöðvarnar. Ef punktarnir liggja hvor sínum megin við x-ás getum við staðfest að núllstöð liggi á milli þeirra. Skoðum margliðufall f með slétt og samfellt graf. Milligildissetningin segir að fyrir tvær tölur a og b í skilgreiningarmengi f, ef $a<b$ og $f(a)\neq f(b)$, þá taki fallið f hvert einasta gildi milli $f(a)$ og $f(b)$. Sértilvik setningarinnar kemur að góðu gagni þegar við teiknum gröf margliðufalla. Ef punktur á grafi samfellds falls f þegar $x=a$ liggur ofan við $x-$ ás og annar punktur þegar $x=b$ liggur neðan við $x-$ ás, þá verður að vera þriðji punktur milli $x=a$ og $x=b$ þar sem grafið sker $x-$ ás. Köllum punktinn $(c,f(c))$. Þá er tryggt að til sé lausn c þar sem $f(c)=0$.

Með öðrum orðum segir milligildissetningin að þegar gildi margliðufalls breytist úr neikvæðu í jákvætt verði fallið að skera $x-$ ás. Mynd 17 sýnir að núllstöð er milli a og b.



Mynd 17 Milligildissetningin notuð til að sýna að núllstöð sé til.

NOTKUN MILLIGILDISSETNINGARINNAR

Látum f vera margliðufall á bilinu [a, b]. Setning Bolzanos, sem er afleiðing milligildissetningarinnar, segir að ef $f(a)$ og $f(b)$ hafa gagnstæð formerki, þá sé til að minnsta kosti eitt gildi c milli a og b sem uppfyllir $f(c)=0$.

DÆMI 9

Milligildissetningin notuð

Sýnið að fallið $f(x)=x^3-5x^2+3x+6$ hafi að minnsta kosti tvær núllstöðvar í rauntölum milli $x=1$ og $x=4$.

Lausn

Reiknið fyrst $f(x)$ fyrir heiltölugildin $x=1,2,3,\text{og}\,4$. Sjá töflu 2.

Tafla 2

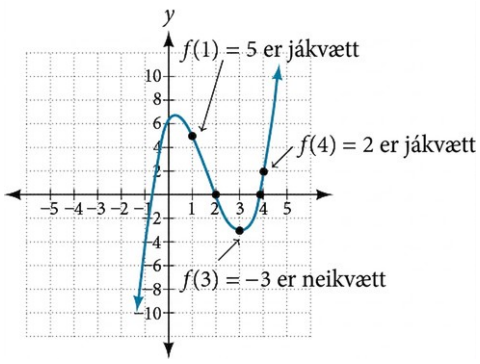
x	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	−3	2

Við sjáum að ein núllstöð er þegar $x=2$. Þar sem $f(3)$ er neikvætt og $f(4)$ jákvætt segir milligildissetningin einnig að að minnsta kosti ein núllstöð í rauntölum sé milli 3 og 4.

Við höfum sýnt að að minnsta kosti tvær núllstöðvar í rauntölum eru milli $x=1$ og $x=4$.

Greining

Á grafi fallsins á mynd 18 má einnig sjá tvær núllstöðvar í rauntölum milli $x=1$ og $x=4$.



Mynd 18 Gildin f(1) = 5, f(3) = −3 og f(4) = 2 sýna að núllstöð er á hvoru bilanna (1, 3) og (3, 4).

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Sýnið að fallið $f(x)=7x^5-9x^4-x^2$ hafi að minnsta kosti eina núllstöð í rauntölum milli $x=1$ og $x=2$.

Formúlur fyrir margliðuföll settar fram

Nú þegar við kunnum að finna núllstöðvar margliðufalla getum við notað þær til að setja fram formúlur út frá gröfum. Margliðufall á þáttuðu formi hefur skurðpunkt við $x-$ ás þar sem hver þáttur er núll. Því getum við myndað fall sem fer í gegnum tiltekið safn skurðpunkta við $x-$ ás með því að setja inn samsvarandi þætti.

ÞÁTTAÐ FORM MARGLIÐA

Ef margliða af stigi p sem þátta má eingöngu í línulega þætti með rauntölustuðlum hefur skurðpunkta við lárétta ásinn þegar $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, má rita hana á þáttuðu formi: $f(x)=a(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_n)^{p_n}$ þar sem veldisvísarnir (p_i) á þáttunum ráðast af hegðun grafsins við samsvarandi skurðpunkta. Teygjustuðulinn a má ákvarða ef gildi fallsins er þekkt í einhverjum öðrum punkti en skurðpunktunum við x-ás.

AÐFERÐ

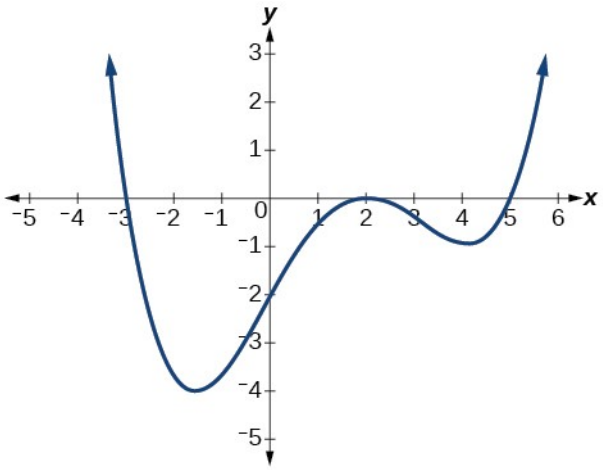
Setjið fram formúlu fyrir gefið graf margliðufalls.

1. Finnið skurðpunkta grafsins við x-ás til að finna þætti margliðunnar.
2. Skoðið hegðun grafsins við skurðpunktana við x-ás til að ákvarða margfeldni hvers þáttar.
3. Finnið margliðuna af lægsta stigi sem inniheldur alla þættina úr fyrra skrefi.
4. Notið einhvern annan punkt á grafinu, oft er skurðpunkturinn við y-ás einfaldastur, til að ákvarða teygjustuðulinn.

SÝNIDÆMI 10

Formúla fyrir margliðufall sett fram út frá grafi

Setjið fram formúlu fyrir margliðufallið sem sýnt er á mynd 19.



Mynd 19 Graf með núllstöðvarnar −3, 2 og 5 og skurðpunktinn (0, −2) við y-ás.

Lausn

Grafið hefur þrjá skurðpunkta við $x-$ ás: $x=-3, 2$, og 5. Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,-2)$. Þegar $x=-3$ og $x=5$, fer grafið línulega í gegnum ásinn. Það bendir til þess að samsvarandi þættir margliðunnar séu línulegir. Þegar $x=2$, snertir grafið ásinn og snýr við. Það bendir til þess að samsvarandi þáttur margliðunnar sé annars stigs þáttur. Samanlagt fæst

$$f(x)=a(x+3)(x-2)^2(x-5)$$

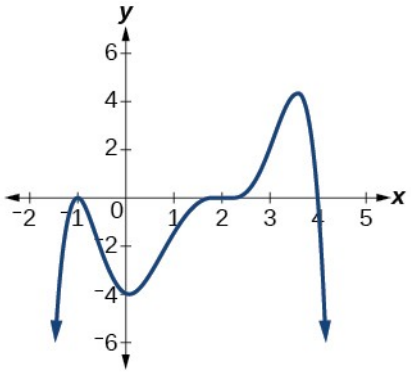
Til að ákvarða teygjustuðulinn notum við annan punkt á grafinu. Við notum skurðpunktinn við $y-$ ás, $(0,-2)$, til að leysa fyrir a.

$$\begin{aligned} f(0) &= a(0+3)(0-2)^2(0-5) \\ -2 &= a(0+3)(0-2)^2(0-5) \\ -2 &= -60a \\ a &= \tfrac{1}{30} \end{aligned}$$

Margliðan á grafinu virðist tákna fallið $f(x)=\dfrac{1}{30}(x+3)(x-2)^2(x-5)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Notið grafið á mynd 20 til að setja fram formúlu fyrir fallið.



Mynd 20 Graf með núllstöðvarnar −1, 2 og 4 og skurðpunktinn (0, −4) við y-ás.

Staðbundin og algild útgildi notuð

Fyrir annars stigs föll gátum við fundið hágildi eða lággildi fallsins með algebrureikningi með því að finna hvirfilpunktinn. Fyrir almenn margliðuföll er ekki unnt að finna þessa snúningspunkta án þróaðri aðferða úr stærðfræðigreiningu. Jafnvel þá getur verið erfitt að finna með algebrureikningi hvar útgildin eru. Fyrst um sinn áætlum við hvar snúningspunktarnir eru með því að teikna graf með tæknibúnaði.

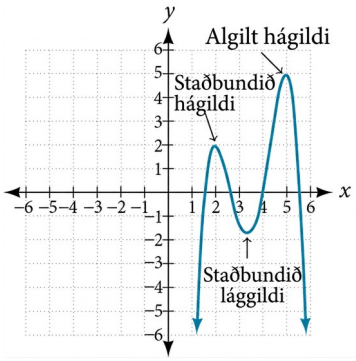
Hver snúningspunktur táknar staðbundið lággildi eða hágildi. Stundum er snúningspunktur hæsti eða lægsti punkturinn á öllu grafinu. Þá segjum við að fallið taki þar algilt hágildi eða algilt lággildi. Þetta eru hæsta og lægsta gildi fallsins á öllu skilgreiningarmenginu.

STAÐBUNDIN OG ALGILD ÚTGILDI

Hugtakið staðbundið hágildi eða staðbundið lággildi þegar $x=a$ vísar til úttaksgildisins í hæsta eða lægsta punkti grafsins á opnu bili umhverfis $x=a$. Ef fall hefur staðbundið hágildi í punktinum a, þá er $f(a)\geq f(x)$ fyrir öll x á opnu bili umhverfis $x=a$. Ef fall hefur staðbundið lággildi í punktinum a, þá er $f(a)\leq f(x)$ fyrir öll x á opnu bili umhverfis $x=a$.

Hugtakið algilt hágildi eða algilt lággildi vísar til úttaksgildisins í hæsta eða lægsta punkti fallsins. Ef fall hefur algilt hágildi í punktinum a, þá er $f(a)\geq f(x)$ fyrir öll x. Ef fall hefur algilt lággildi í punktinum a, þá er $f(a)\leq f(x)$ fyrir öll x.

Munurinn á staðbundnum og algildum útgildum sést á mynd 21.



Mynd 21 Staðbundið hágildi, staðbundið lággildi og algilt hágildi eru merkt á grafinu.

SPURT OG SVARAÐ

Hafa öll margliðuföll algilt lággildi eða hágildi?

Nei. Aðeins margliðuföll af sléttutölustigi hafa algilt lággildi eða hágildi. Fallið $f(x)=x$ *hefur til dæmis hvorki algilt hágildi né algilt lággildi.*

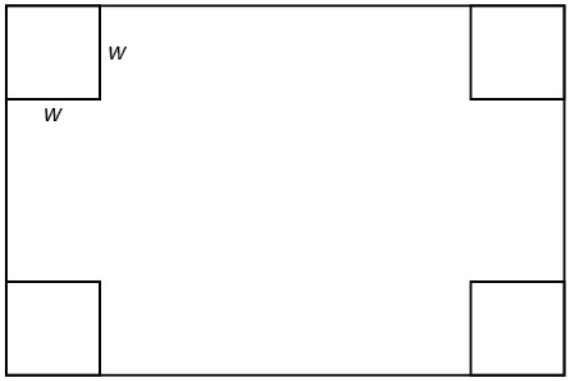
SÝNIDÆMI 11

Staðbundin útgildi notuð í hagnýtu verkefni

Búa á til opinn kassa úr plastplötu sem er 14 cm sinnum 20 cm. Ferningur er klipptur úr hverju horni plötunnar og hliðarnar síðan brotnar upp. Finnið hliðarlengd ferninganna sem klippa á burt svo rúmmál kassans verði sem mest.

Lausn

Við byrjum á að teikna mynd eins og mynd 22 og táknum hliðarlengd ferninganna sem klipptir eru burt með breytunni w.

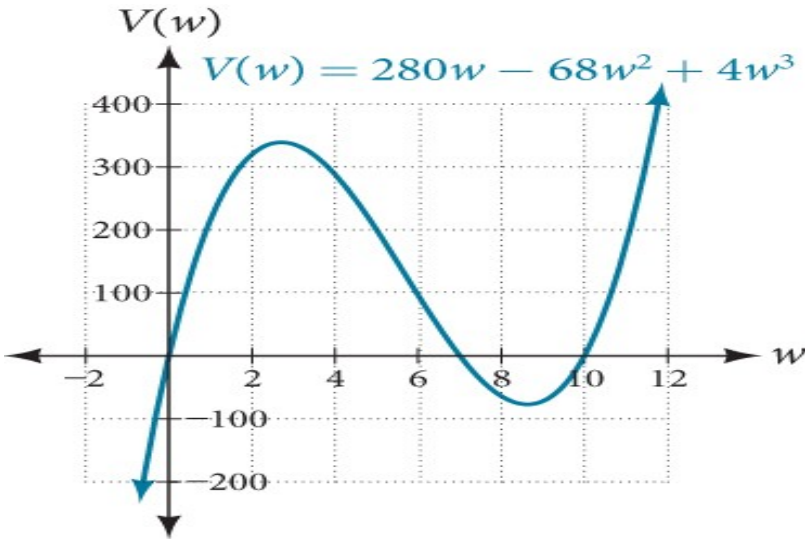


Mynd 22 Ferningar með hliðarlengd w eru skornir úr hornum rétthyrnings til að mynda kassa.

Þegar ferningur hefur verið klipptur úr hverju horni verður eftir $(14-2w)$ cm sinnum $(20-2w)$ cm rétthyrningur sem myndar botn kassans, og hæð kassans verður w cm. Rúmmálið er því

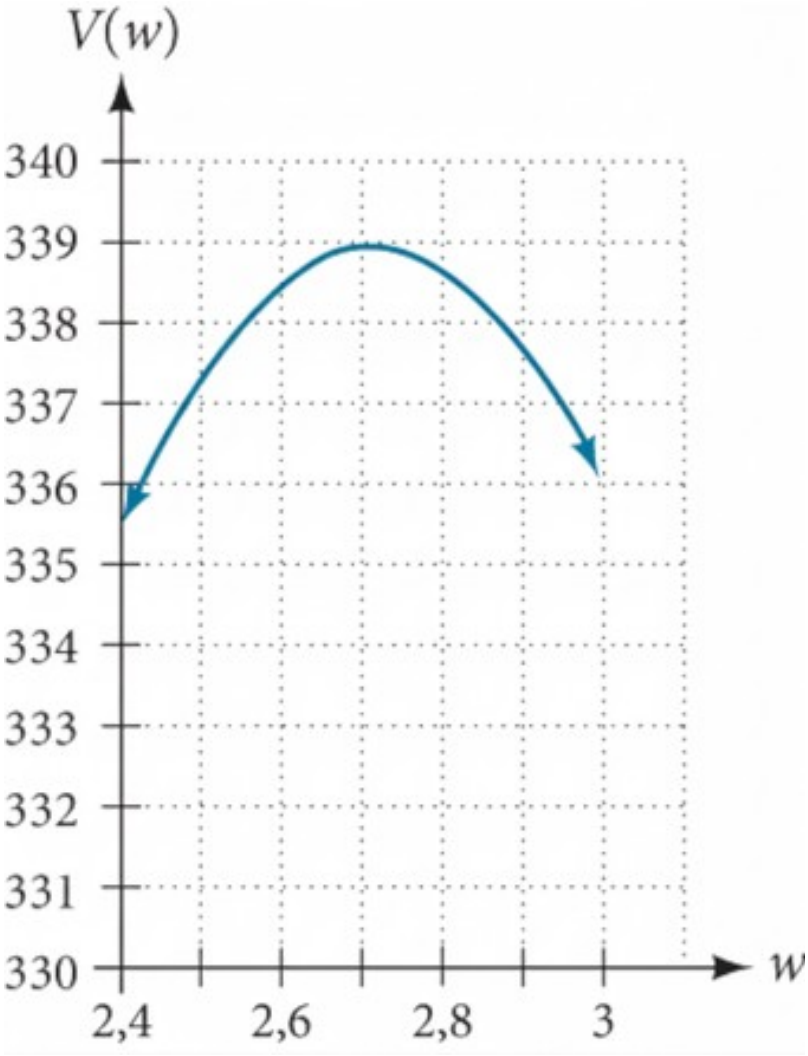
$$\begin{aligned} V(w) &= (20-2w)(14-2w)w \\ &= 280w - 68w^2 + 4w^3 \end{aligned}$$

Takið eftir að þar sem þættirnir eru w, $20-2w$ og $14-2w$, eru núllstöðvarnar þrjár 10, 7 og 0, í þessari röð. Hæðin 0 cm er ekki raunhæf og því skoðum við aðeins núllstöðvarnar 10 og 7. Styttri hliðin er 14 og við klippum tvo ferninga af henni, svo gildi w verða að vera stærri en núll og minni en 7. Við takmörkum því skilgreiningarmengi fallsins við $0<w<7$. Ef tæknibúnaður er notaður til að teikna graf $V(w)$ á þessu raunhæfa skilgreiningarmengi fæst graf eins og á mynd 23. Með grafinu getum við áætlað mesta rúmmál fyrir þau gildi w sem eru raunhæf í verkefninu, það er gildi frá 0 til 7.



Mynd 23 Graf rúmmálsfallsins V(w) = (20 − 2w)(14 − 2w)w.

Á grafinu skoðum við aðeins þann hluta sem er á bilinu $[0,7]$. Endapunktar bilsins gefa rúmmálið núll; raunhæfar hliðarlengdir liggja inni í bilinu. Áætla má að mesta rúmmálið sé um 340 rúmsentímetrar og það fæst þegar hliðarlengd ferninganna er um 2,75 cm. Til að bæta matið mætti nota ítarlegri eiginleika tæknibúnaðarins, ef þeir eru tiltækir, eða einfaldlega breyta glugganum og stækka viðeigandi hluta grafsins eins og á mynd 24.



Mynd 24 Stækkaður hluti rúmmálsgrafsins sýnir hágildi nálægt w = 2,75.

Á þessari stækkuðu mynd getum við bætt matið og fengið mesta rúmmálið um 339 rúmsentímetra þegar hliðarlengd ferninganna er um 2,7 cm.

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Notið tæknibúnað til að finna hæsta og lægsta gildi á bilinu $[-1, 4]$ fyrir fallið

$$f(x) = -0{,}2(x-2)^3(x+1)^2(x-4).$$

MIÐLAR

Skoðið eftirfarandi efni á netinu til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í að teikna gröf margliðufalla.

- Milligildissetningin

Æfingar úr kafla 3.4

Orðleg verkefni

1. Hver er munurinn á skurðpunkti við $x-$ ás og núllstöð margliðufalls f ?

2. Ef margliðufall af stigi n hefur n ólíkar núllstöðvar, hvað vitum við þá um graf fallsins?

3. Útskýrið hvernig milligildissetningin getur hjálpað okkur að finna núllstöð falls.

4. Útskýrið hvernig þáttað form margliðu hjálpar okkur að teikna graf hennar.

5. Ef graf margliðu snertir $x-$ ásinn og breytir síðan um stefnu, hvað má þá ályktа um þáttað form margliðunnar?

Algebruverkefni

Finnið skurðpunkta margliðufallanna við $x-$ eða t-ás í eftirfarandi verkefnum.

6.

$$C(t)=2(t-4)(t+1)(t-6)$$

7.

$$C(t)=3(t+2)(t-3)(t+5)$$

8.

$$C(t)=4t(t-2)^2(t+1)$$

9.

$$C(t)=2t(t-3)(t+1)^2$$

10.

$$C(t)=2t^4-8t^3+6t^2$$

11.

$$C(t)=4t^4+12t^3-40t^2$$

12.

$$f(x)=x^4-x^2$$

13.

$$f(x)=x^3+x^2-20x$$

14.

$$f(x)=x^3+6x^2-7x$$

15.

$$f(x)=x^3+x^2-4x-4$$

16.

$$f(x)=x^3+2x^2-9x-18$$

17.

$$f(x)=2x^3-x^2-8x+4$$

18.

$$f(x)=x^6-7x^3-8$$

19.

$$f(x)=2x^4+6x^2-8$$

20.

$$f(x)=x^3-3x^2-x+3$$

21.

$$f(x)=x^6-2x^4-3x^2$$

22.

$$f(x)=x^6-3x^4-4x^2$$

23.

$$f(x)=x^5-5x^3+4x$$

Notið milligildissetninguna í eftirfarandi verkefnum til að staðfesta að gefna margliðan hafi að minnsta kosti eina núllstöð á gefna bilinu.

24. $f(x)=x^3-9x$, milli $x=-4$ og $x=-2$.

25. $f(x)=x^3-9x$, milli $x=2$ og $x=4$.

26. $f(x)=x^5-2x$, milli $x=1$ og $x=2$.

27. $f(x)=-x^4+4$, milli $x=1$ og $x=3$.

28. $f(x)=-2x^3-x$, milli $x=-1$ og $x=1$.

29. $f(x)=x^3-100x+2$, milli $x=0{,}01$ og $x=0{,}1$

Finnið núllstöðvarnar og tilgreinið margfeldni hverrar þeirra í eftirfarandi verkefnum.

30.

$$f(x)=(x+2)^3(x-3)^2$$

31.

$$f(x)=x^2(2x+3)^5(x-4)^2$$

32.

$$f(x)=x^3(x-1)^3(x+2)$$

33.

$$f(x)=x^2(x^2+4x+4)$$

34.

$$f(x)=(2x+1)^3(9x^2-6x+1)$$

35.

$$f(x)=(3x+2)^5(x^2-10x+25)$$

36.

$$f(x)=x(4x^2-12x+9)(x^2+8x+16)$$

37.

$$f(x)=x^6-x^5-2x^4$$

38.

$$f(x)=3x^4+6x^3+3x^2$$

39.

$$f(x)=4x^5-12x^4+9x^3$$

40.

$$f(x)=2x^4(x^3-4x^2+4x)$$

41.

$$f(x)=4x^4(9x^4-12x^3+4x^2)$$

Grafísk verkefni

Teiknið gröf margliðufallanna í eftirfarandi verkefnum. Tilgreinið skurðpunkta við $x-$ og $y-$ ás, margfeldni og endahegðun.

42.

$$f(x)=(x+3)^2(x-2)$$

43.

$$g(x)=(x+4)(x-1)^2$$

44.

$$h(x)=(x-1)^3(x+3)^2$$

45.

$$k(x)=(x-3)^3(x-2)^2$$

46.

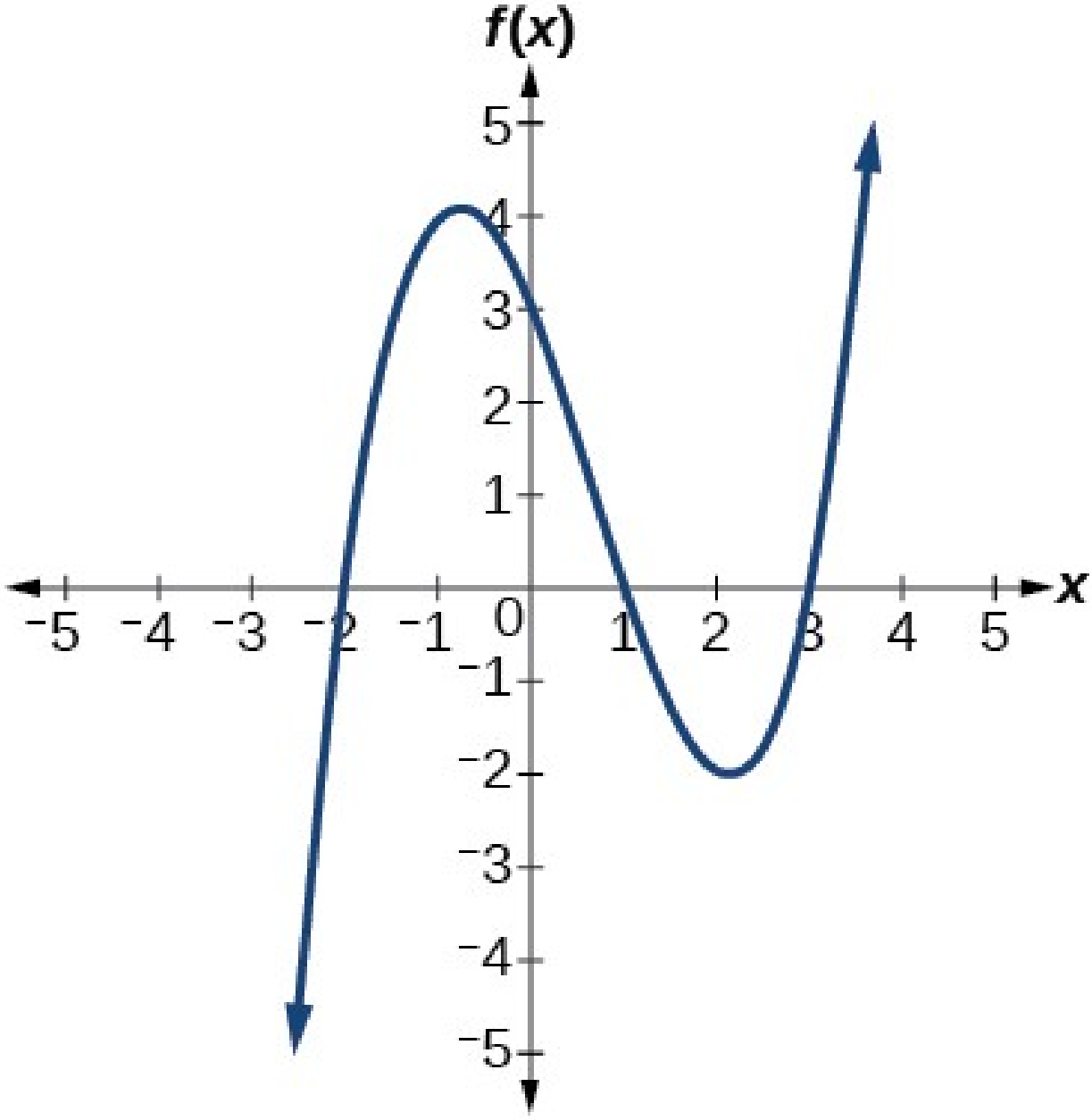
$$m(x)=-2x(x-1)(x+3)$$

47.

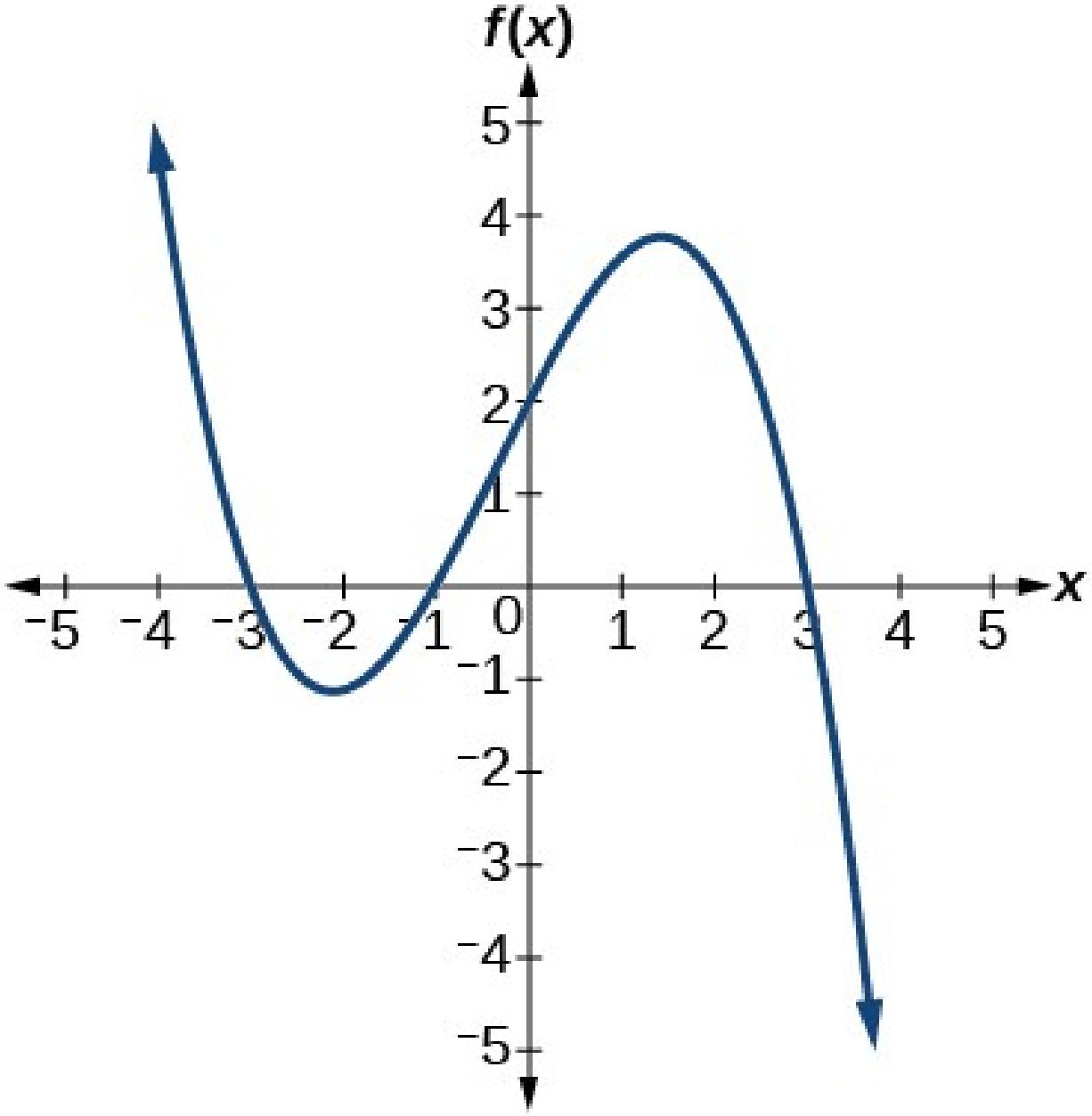
$$n(x)=-3x(x+2)(x-4)$$

Notið gröfin í eftirfarandi verkefnum til að setja fram formúlu fyrir margliðufall af lægsta mögulega stigi.

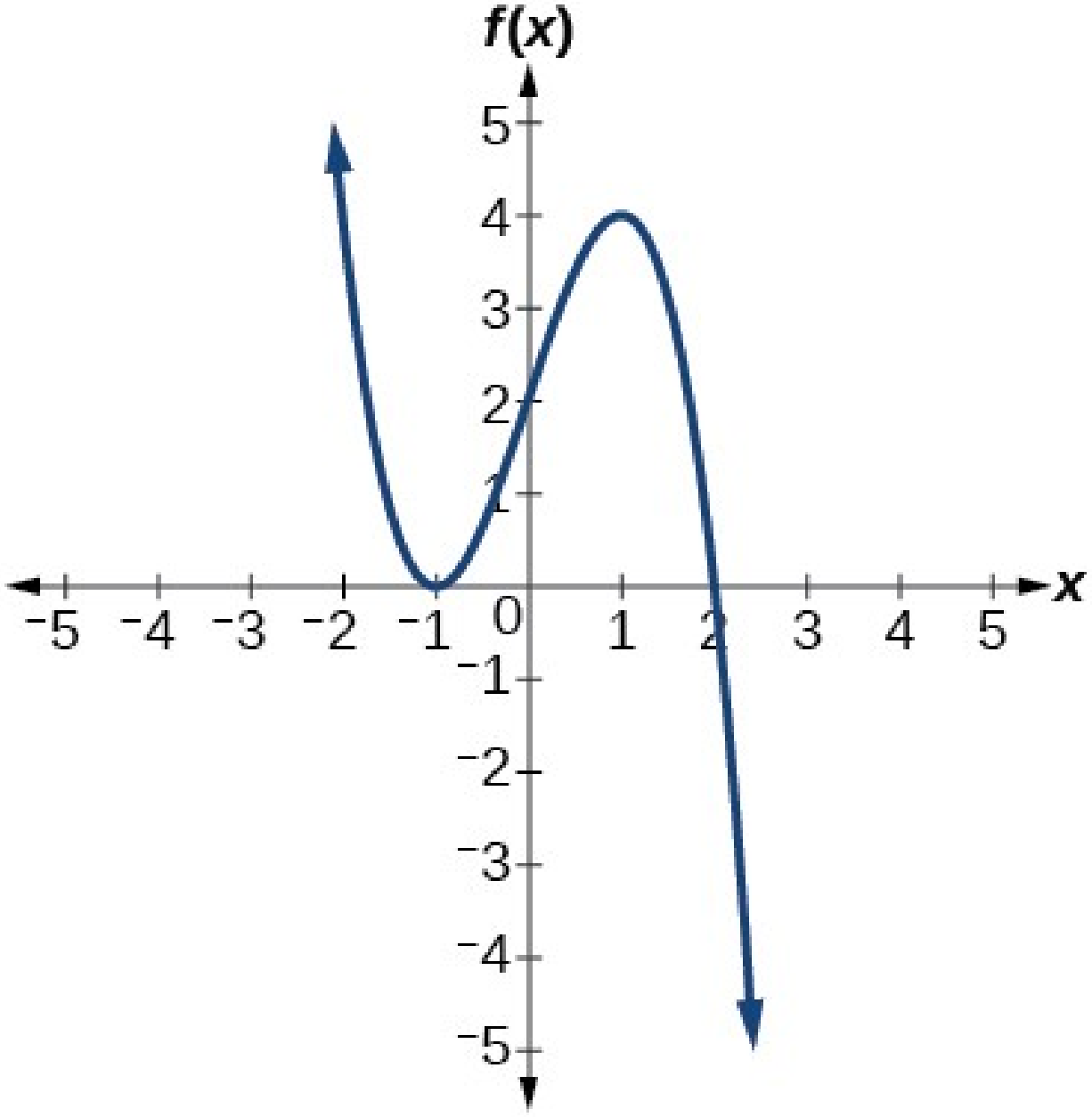
48.



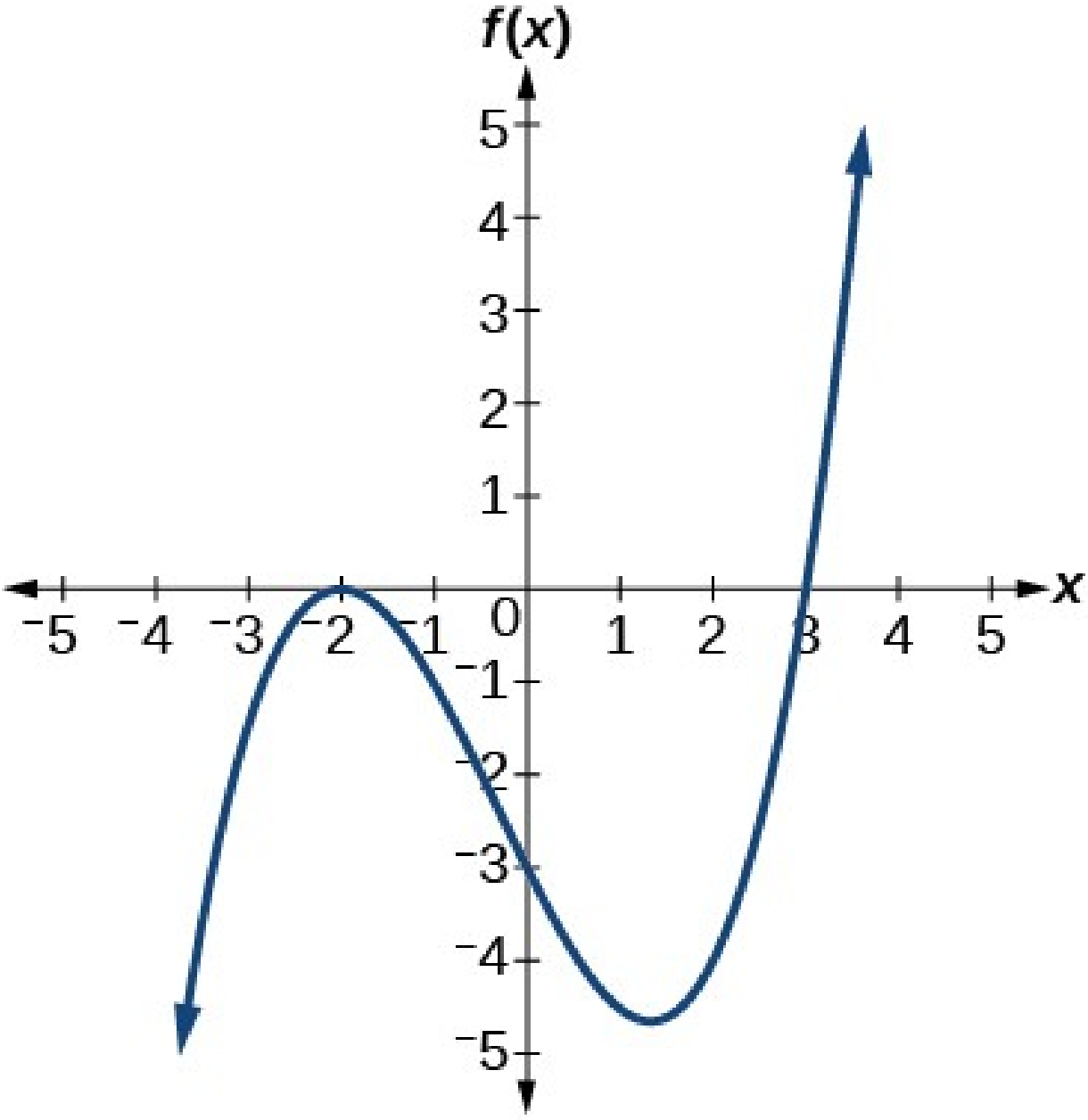
49.



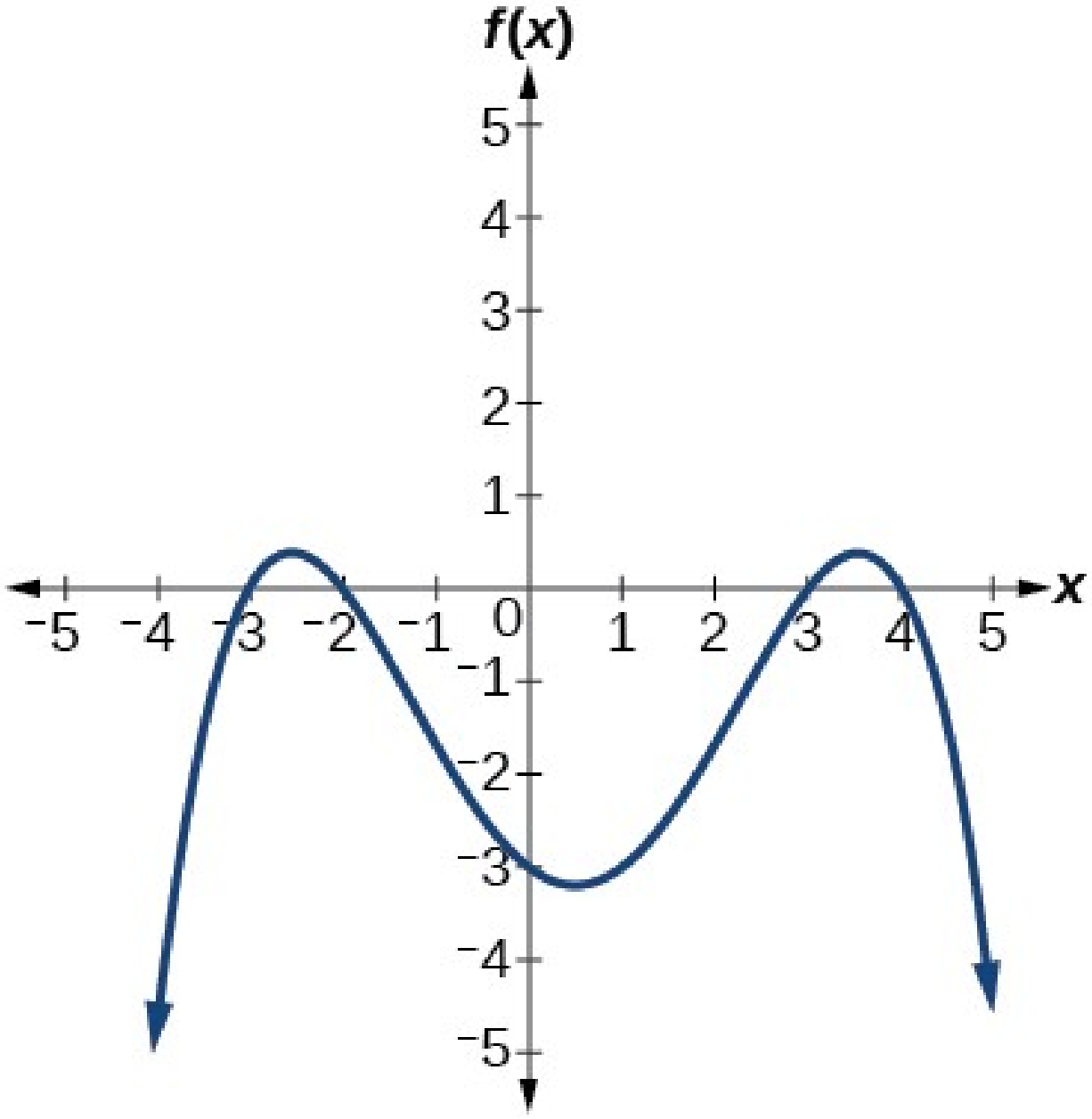
50.



51.

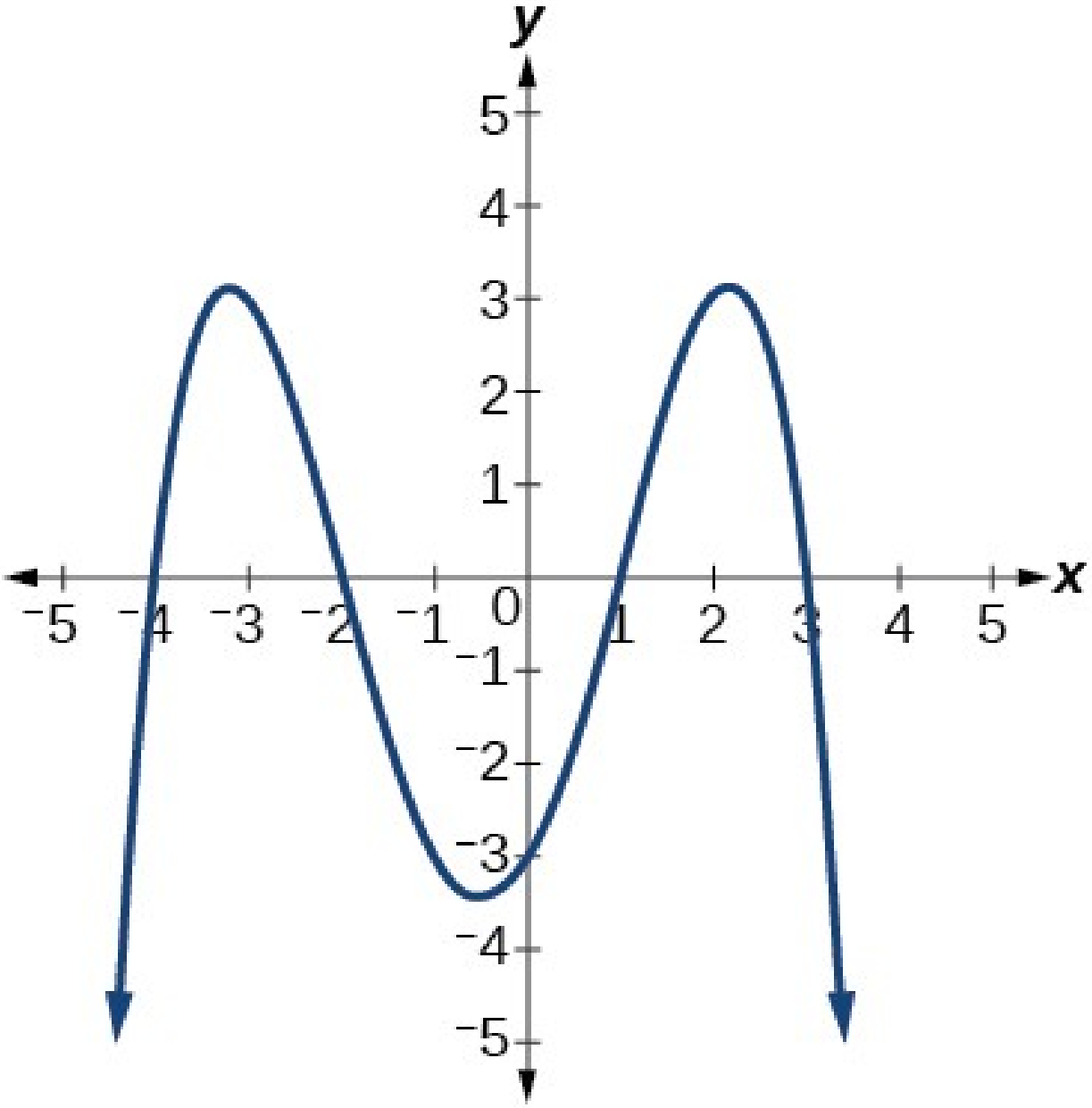


52.

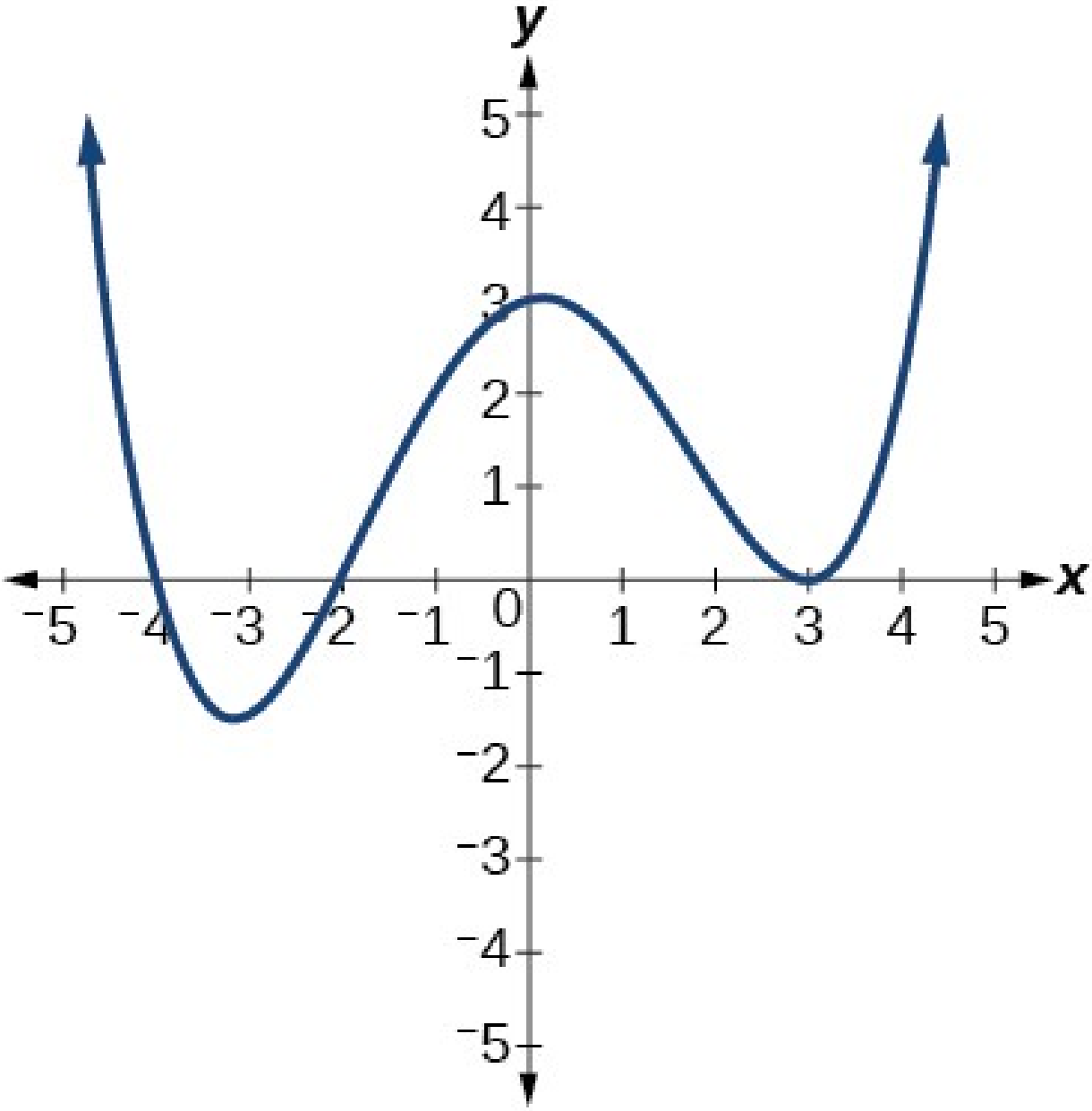


Notið grafið í eftirfarandi verkefnum til að finna núllstöðvar og margfeldni þeirra.

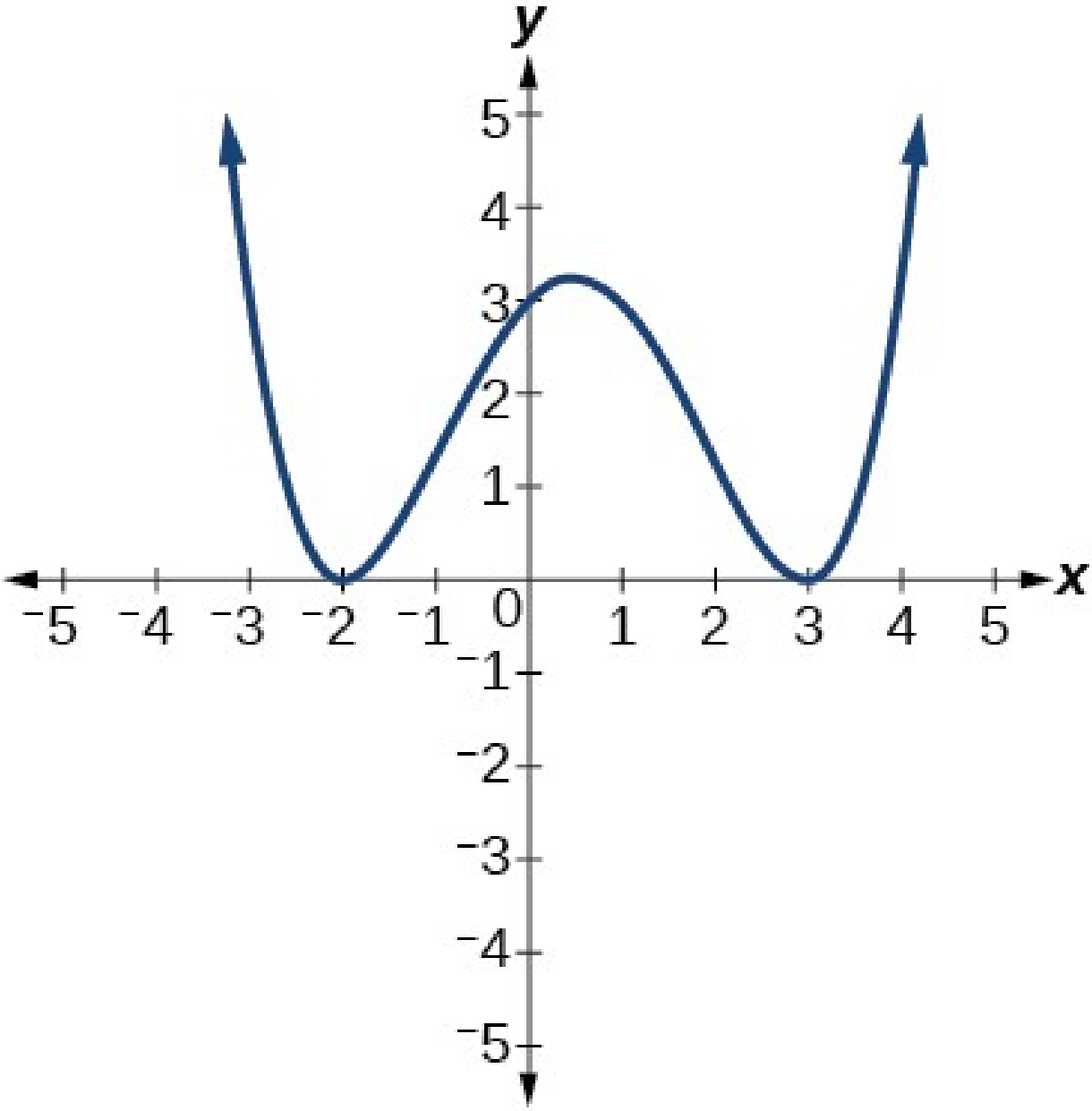
53.



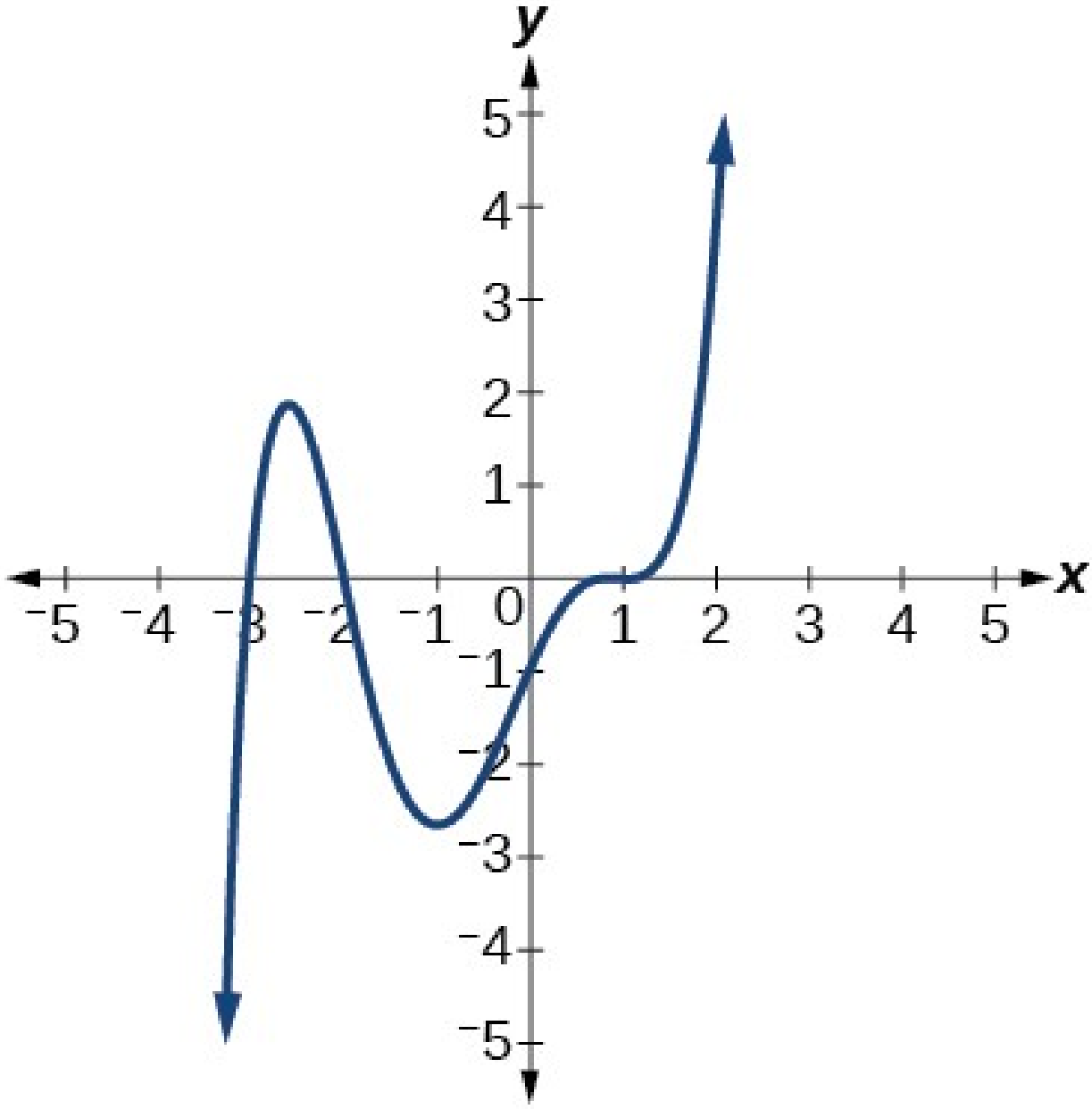
54.



55.



56.



Notið gefnar upplýsingar um graf margliðunnar í eftirfarandi verkefnum til að setja fram jöfnuna.

57. Stig 3. Núllstöðvar þegar $x=-2$, $x=1$, og $x=3$. y-skurðpunktur í $(0,-4)$.

58. Stig 3. Núllstöðvar þegar $x=-5$, $x=-2$, og $x=1$. y-skurðpunktur í $(0,6)$

59. Stig 5. Núllstöðvar með margfeldni 2 þegar $x=3$ og $x=1$ og núllstöð með margfeldni 1 þegar $x=-3$. y-skurðpunktur í $(0,9)$

60. Stig 4. Núllstöð með margfeldni 2 þegar $x=4$, og núllstöðvar með margfeldni 1 þegar $x=1$ og $x=-2$. y-skurðpunktur í $(0,-3)$.

61. Stig 5. Tvöföld núllstöð þegar $x=1$, og þreföld núllstöð þegar $x=3$. Grafið fer í gegnum punktinn $(2,15)$.

62. Stig 3. Núllstöðvar þegar $x=4$, $x=3$, og $x=2$. y-skurðpunktur í $(0,-24)$.

63. Stig 3. Núllstöðvar þegar $x=-3$, $x=-2$ og $x=1$. y-skurðpunktur í $(0,12)$.

64. Stig 5. Núllstöðvar með margfeldni 2 þegar $x=-3$ og $x=2$ og núllstöð með margfeldni 1 þegar $x=-2$.

y-skurðpunktur í $(0,4)$.

65. Stig 4. Núllstöð með margfeldni 2 þegar $x=\frac{1}{2}$ og núllstöðvar með margfeldni 1 þegar $x=6$ og $x=-2$.

y-skurðpunktur í $(0,18)$.

66. Tvöföld núllstöð þegar $x=-3$ og þreföld núllstöð þegar $x=0$. Grafið fer í gegnum punktinn $(1,32)$.

Tæknibúnaður

Notið reiknivél í eftirfarandi verkefnum til að nálga staðbundin hágildi og lággildi eða algilt hágildi og lággildi.

67.

$$f(x)=x^3-x-1$$

68.

$$f(x)=2x^3-3x-1$$

69.

$$f(x)=x^4+x$$

70.

$$f(x)=-x^4+3x-2$$

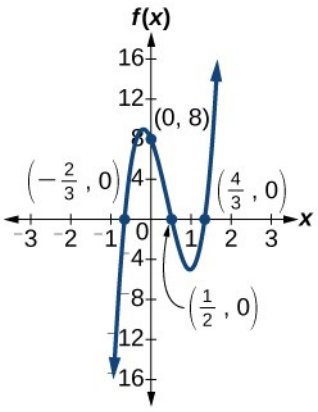
71.

$$f(x)=x^4-x^3+1$$

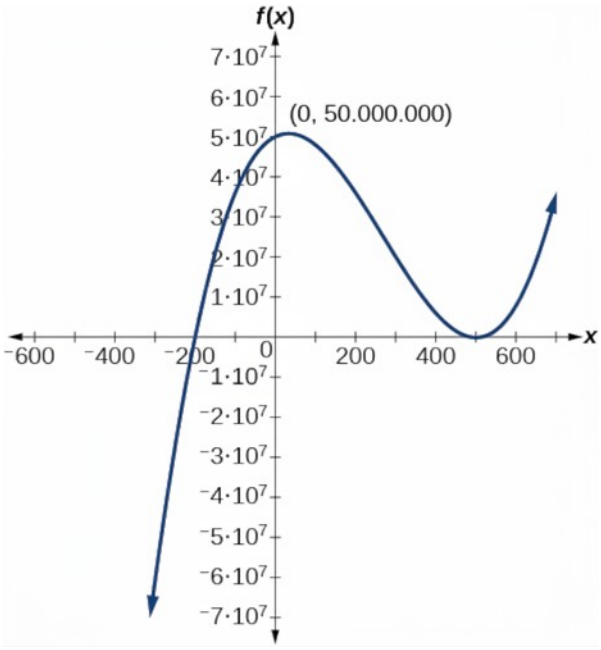
Viðbótarverkefni

Notið gröfin í eftirfarandi verkefnum til að setja fram margliðufall af lægsta mögulega stigi.

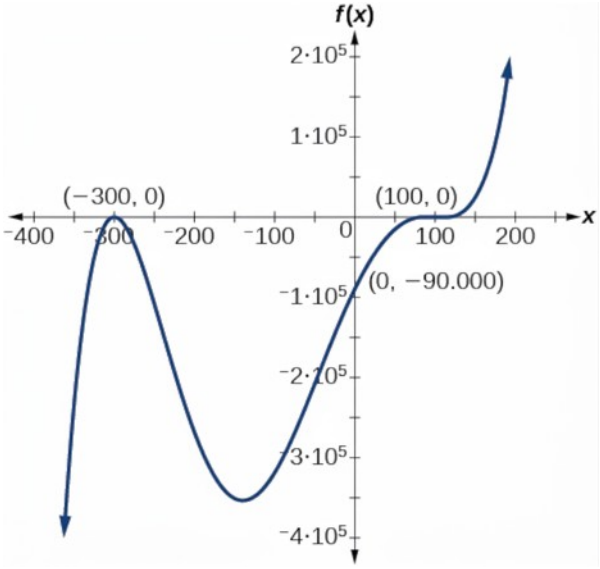
72.


f(x)
16
12
8
4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x
−4
−8
−12
−16
(0, 8)
$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
$\left(\frac{4}{3}, 0\right)$
$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

73.


f(x)
$7 \cdot 10^7$
$6 \cdot 10^7$
$5 \cdot 10^7$
$4 \cdot 10^7$
$3 \cdot 10^7$
$2 \cdot 10^7$
$1 \cdot 10^7$
−600
−400
−200
0
200
400
600
x
$-1 \cdot 10^7$
$-2 \cdot 10^7$
$-3 \cdot 10^7$
$-4 \cdot 10^7$
$-5 \cdot 10^7$
$-6 \cdot 10^7$
$-7 \cdot 10^7$
(0, 50.000.000)

74.



Hagnýt verkefni

Setjið fram margliðufall sem lýsir gefnum aðstæðum í eftirfarandi verkefnum.

75. Rétthyrningur er 10 einingar á lengd og 8 einingar á breidd. Ferningar sem eru x sinnum x einingar eru klipptir úr hverju horni og hliðarnar síðan brotnar upp til að mynda opinn kassa. Setjið rúmmál kassans fram sem margliðufall af x.

76. Skoðið sama rétthyrning og í verkefninu á undan. Ferningar sem eru $2x$ sinnum $2x$ einingar eru klipptir úr hverju horni. Setjið rúmmál kassans fram sem margliðu í x.

77. Ferningur hefur 12 eininga langar hliðar. Ferningar sem eru $x+1$ sinnum $x+1$ einingar eru klipptir úr hverju horni og hliðarnar síðan brotnar upp til að mynda opinn kassa. Setjið rúmmál kassans fram sem fall af x.

78. Sívalningur hefur radíusinn $x+2$ einingar og hæð sem er 3 einingum meiri en radíusinn. Setjið rúmmál sívalningsins fram sem margliðufall.

79. Hringkeila með topp beint yfir miðju grunnflatarins hefur radíusinn $3x+6$ og hæð sem er 3 einingum minni en radíusinn. Setjið rúmmál keilunnar fram sem margliðufall.

Rúmmál keilu er $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ þar sem r er radíus og hæðin er h.

3.5 Deiling margliða

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota langdeilingu til að deila margliðum.
- Nota deilingu með reikniriti Horners til að deila margliðum.



Mynd 1 Lincoln-minnisvarðinn í Washington, D.C. (ljósmynd: Ron Cogswell, Flickr)

Ytra byrði Lincoln-minnisvarðans í Washington, D.C., er stór réttstrendingur sem er 61,5 metrar (m) á lengd, 40 m á breidd og 30 m á hæð.1 Rúmmálið má auðveldlega finna með einfaldri rúmfræði.

1

National Park Service. „Byggingartölur Lincoln-minnisvarðans.“ http://www.nps.gov/linc/historyculture/lincoln-memorial-building-statistics.htm. Skoðað 3. apríl 2014.

$$\begin{aligned} V &= l \cdot w \cdot h \\ &= 61{,}5 \cdot 40 \cdot 30 \\ &= 73.800 \end{aligned}$$

Rúmmálið er því 73.800 rúmmetrar $\left(\text{m}^3\right)$. Gerum ráð fyrir að rúmmál, lengd og breidd séu þekkt. Þá má finna hæðina með deilingu.

$$\begin{aligned} h &= \frac{V}{l \cdot w} \\ &= \frac{73.800}{61{,}5 \cdot 40} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Eins og staðfesta má með málunum hér að ofan er hæðin 30 m. Með sambærilegum aðferðum má finna hvert það mál sem vantar. Sömu aðferð má einnig nota þegar sum eða öll málin innihalda stæður með breytum. Gerum til dæmis ráð fyrir að rúmmál réttstrendings sé gefið með margliðunni $3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x$. Lengd hans er $3x$; og breiddin $x - 2$. Til að finna hæð réttstrendingsins má nota deilingu margliða, sem er viðfangsefni þessa hluta.

3

Langdeiling notuð til að deila margliðum

Við þekkjum reiknirit langdeilingar úr venjulegum talnareikningi. Fyrst deilum við í þá tölustafi deilistofnsins sem hafa hæsta sætisgildið. Við deilum, margföldum, drögum frá, færum niður tölustafinn í næsta sæti og endurtökum ferlið. Deilum til dæmis 178 með 3 með langdeilingu.

Langdeiling

$$
\begin{array}{r}
59 \\
3\overline{)178} \\
-15 \\
\hline
28 \\
-27 \\
\hline
1
\end{array}
$$

Skref 1: $5 \times 3 = 15$ og $17 - 15 = 2$
Skref 2: Færið 8 niður
Skref 3: $9 \times 3 = 27$ og $28 - 27 = 1$

Svar: 59, afgangur 1, eða $59\frac{1}{3}$

Einnig má líta á lausnina sem summu hluta. Þetta ætti að vera kunnuglegt því sama aðferð er notuð til að sannreyna deilingu í einföldum talnareikningi.

$$
\begin{aligned}
\text{deilistofn} &= (\text{deilir} \cdot \text{kvóti}) + \text{afgangur} \\
178 &= (3 \cdot 59) + 1 \\
&= 177 + 1 \\
&= 178
\end{aligned}
$$

Þetta nefnist deilingarreikniritið og við lýsum því formlegar þegar við höfum skoðað dæmi.

Deiling margliða með fleiri en einum lið líkist langdeilingu heiltalna. Rita má deilistofninn sem margfeldi deilis og kvóta að viðbættum afgangi. Liðirnir í deilingu margliða samsvara tölustöfum og sætisgildum í deilingu heiltalna. Með þessari aðferð má deila einni margliðu með annarri. Ef $2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ er til dæmis deilt með $x + 2$ með langdeilingu lítur uppsetningin svona út:

$$
\begin{array}{rl}
x + 2 \overline{)\, 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5} & \text{Setjið deilingardæmið upp.} \\
\\
\phantom{x + 2 \overline{)\,} 2x^2 & \\
x + 2 \overline{)\, 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5} & 2x^3 \text{ deilt með } x \text{ er } 2x^2. \\
\\
\phantom{x + 2 \overline{)\,} 2x^2 & \\
x + 2 \overline{)\, 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5} & \text{Margfaldið } x + 2 \text{ með } 2x^2. \\
\quad -(2x^3 + 4x^2) & \text{Dragið frá.} \\
\quad\quad -7x^2 + 4x & \text{Færið næsta lið niður.} \\
\\
\phantom{x + 2 \overline{)\,} 2x^2 - 7x & \\
x + 2 \overline{)\, 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5} & \\
\quad -(2x^3 + 4x^2) & \\
\quad\quad -7x^2 + 4x & -7x^2 \text{ deilt með } x \text{ er } -7x. \\
\quad\quad -(-7x^2 - 14x) & \text{Margfaldið } x + 2 \text{ með } -7x. \\
\quad\quad\quad 18x + 5 & \text{Dragið frá. Færið næsta lið niður.} \\
\\
\phantom{x + 2 \overline{)\,} 2x^2 - 7x + 18 & \\
x + 2 \overline{)\, 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5} & \\
\quad -(2x^3 + 4x^2) & \\
\quad\quad -7x^2 + 4x & \\
\quad\quad -(-7x^2 - 14x) & \\
\quad\quad\quad 18x + 5 & 18x \text{ deilt með } x \text{ er } 18. \\
\quad\quad\quad -(18x + 36) & \text{Margfaldið } x + 2 \text{ með } 18. \\
\quad\quad\quad\quad -31 & \text{Dragið frá.}
\end{array}
$$

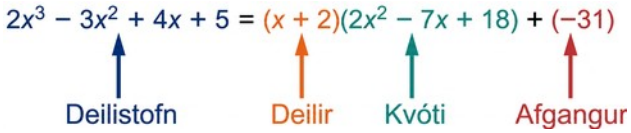
Við höfum fundið

$$\frac{2x^3-3x^2+4x+5}{x+2}=2x^2-7x+18-\frac{31}{x+2}$$

eða

$$2x^3-3x^2+4x+5=(x+2)(2x^2-7x+18)-31$$

Við getum greint deilistofninn, deilinn, kvótann og afganginn.



Þegar niðurstaðan er rituð á þennan hátt sést deilingarreikniritið skýrt.

DEILINGARREIKNIRITIÐ

Samkvæmt deilingarreikniritinu gildir: Ef deilistofninn er margliðan $f(x)$ og deilirinn er margliðan $d(x)$ sem er ekki núllmargliða og stig $d(x)$ er minna en eða jafnt stigi $f(x)$, þá eru til tvær ótvírætt ákvarðaðar margliður $q(x)$ og $r(x)$ þannig að

$$f(x)=d(x)q(x)+r(x)$$

$q(x)$ er kvótinn og $r(x)$ afgangurinn. Afgangurinn er annaðhvort núll eða af stigi sem er lægra en stig $d(x)$.

Ef $r(x)=0$, þá gengur $d(x)$ upp í $f(x)$. án afgangs. Þá eru bæði $d(x)$ og $q(x)$ þættir í $f(x)$.

AÐFERÐ

Notið langdeilingu til að deila gefinni margliðu með gefinni tvíliðu.

1. Setjið deilingardæmið upp.
2. Finnið fyrsta lið kvótans með því að deila forystulið deilistofnsins með forystulið deilisins.
3. Margfaldið svarið með deilinum og skrifið það undir samstæðu liði deilistofnsins.
4. Dragið neðri tvíliðuna frá þeirri efri.
5. Færið næsta lið deilistofnsins niður.
6. Endurtakið skref 2–5 þar til síðasta lið deilistofnsins er náð.
7. Ef afgangurinn er ekki núll skal rita hann sem brot með deilinn í nefnara.

DÆMI 1

Langdeiling notuð til að deila annars stigs margliðu

Deilið $5x^2+3x-2$ með $x+1$.

Lausn

$x+1\ \overline{)\,5x^2+3x-2}$	Setjið upp deilingardæmið.
$5x$	$5x^2$ deilt með x er $5x$.
$x+1\ \overline{)\,5x^2+3x-2}$	
$5x$	Margfaldið $x+1$ með $5x$.
$x+1\ \overline{)\,5x^2+3x-2}$	
$-(5x^2+5x)$	Dragið frá.
$-2x-2$	
$5x-2$	Færið næsta lið niður.
$x+1\ \overline{)\,5x^2+3x-2}$	$-2x$ deilt með x er -2.
$-(5x^2+5x)$	
$-2x-2$	
$-(-2x-2)$	Margfaldið $x+1$ með -2.
0	Dragið frá.

Kvótinn er $5x-2$. Afgangurinn er 0. Niðurstaðan er rituð sem

$$\frac{5x^2+3x-2}{x+1}=5x-2$$

eða

$$5x^2+3x-2=(x+1)(5x-2)$$

Greining

Afgangurinn í þessu deilingardæmi var 0. Það sýnir að deilistofninn deilist með deilinum án afgangs og að deilirinn er þáttur í deilistofninum.

DÆMI 2

Langdeiling notuð til að deila þriðja stigs margliðu

Deilið $6x^3+11x^2-31x+15$ með $3x-2$.

Lausn

$3x-2\ \overline{)\,6x^3+11x^2-31x+15}$	
$2x^2+5x-7$	
$-(6x^3-4x^2)$	$6x^3$ deilt með $3x$ er $2x^2$.
$15x^2-31x$	Margfaldið $3x-2$ með $2x^2$.
$-(15x^2-10x)$	Dragið frá. Færið næsta lið niður. $15x^2$ deilt með $3x$ er $5x$.
$-21x+15$	Margfaldið $3x-2$ með $5x$.
$-(-21x+14)$	Dragið frá. Færið næsta lið niður. $-21x$ deilt með $3x$ er -7.
1	Margfaldið $3x-2$ með -7.
	Dragið frá. Afgangurinn er 1.

Afgangurinn er 1. Niðurstöðuna má rita sem:

$$\frac{6x^3+11x^2-31x+15}{3x-2}=2x^2+5x-7+\frac{1}{3x-2}$$

Greining

Við getum sannreynt útreikningana með því að umrita lausnina samkvæmt deilingarreikniritinu og margfalda síðan.

$$(3x-2)(2x^2+5x-7)+1=6x^3+11x^2-31x+15$$

Takið eftir því hvernig niðurstaðan er rituð:

- deilistofninn er $6x^3+11x^2-31x+15$
- deilirinn er $3x-2$
- kvótinn er $2x^2+5x-7$
- afgangurinn er 1

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Deilið $16x^3-12x^2+20x-3$ með $4x+5$.

Deiling með reikniriti Horners

Eins og við höfum séð getur langdeiling margliða tekið mörg skref og verið seinleg. Reiknirit Horners er stytt aðferð til að deila margliðum í því sértilviki þegar deilt er með línulegum þætti sem hefur forystustuðulinn 1.

Til að sýna ferlið skulum við rifja upp dæmið í upphafi hlutans.

Deilið $2x^3-3x^2+4x+5$ með $x+2$ með langdeilingu.

Lokaform ferlisins leit svona út:

$$\begin{array}{r} 2x^2-7x+18 \\ x+2\,\overline{)\,2x^3-3x^2+4x+5} \\ \underline{-(2x^3+4x^2)} \\ -7x^2+4x \\ \underline{-(-7x^2-14x)} \\ 18x+5 \\ \underline{-(18x+36)} \\ -31 \end{array}$$

Margt er endurtekið í töflunni. Við getum sleppt breytunum og raðað stuðlum þeirra í dálka undir deilingarmerkinu. Ef við sleppum líka hlutmargfeldunum fæst strax einfaldari útgáfa af öllu dæminu.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ & -2 & -4 & & \\ \hline & & -7 & 14 & \\ & & & 18 & -36 \\ \hline & & & & -31 \end{array}$$

Reiknirit Horners einfaldar ferlið enn frekar. Þjappið töflunni saman með því að færa hverja röð upp svo eyðurnar fyllist. Við notum gagnstæða tölu við fastalið deilisins, það er -2 í stað

2. Með því getum við margfaldað og lagt saman í stað þess að draga margfeldin frá eins og í langdeilingunni. Ferlið hefst á því að færa forystustuðulinn niður.

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ & & -4 & 14 & -36 \\ \hline & 2 & -7 & 18 & -31 \end{array}$$

Síðan margföldum við hana með „deilinum“ og leggjum saman og endurtökum þetta dálk fyrir dálk þar til engar tölur eru eftir. Neðsta röðin sýnir stuðla kvótans og síðasta talan í henni er afgangurinn. Hér er kvótinn $2x^2 - 7x + 18$ og afgangurinn -31. Ferlið skýrist nánar í dæmi 3.

3

DEILING MEÐ REIKNIRITI HORNERS

Reiknirit Horners er stytt aðferð sem nota má þegar deilirinn er tvíliða á forminu $x - k$. Við deilingu með reikniriti Horners eru aðeins stuðlarnir notaðir.

AÐFERÐ

Notið reiknirit Horners til að deila gefinni margliðu með línulegri tvíliðu sem hefur forystustuðulinn 1.

1. Ritið k vinstra megin; það er núllstöð línulega deilisins.
2. Ritið stuðla deilistofnsins.
3. Færið forystustuðulinn niður.
4. Margfaldið forystustuðulinn með k. Ritið margfeldið í næsta dálk.
5. Leggið saman liðina í öðrum dálki.
6. Margfaldið niðurstöðuna með k. Ritið margfeldið í næsta dálk.
7. Endurtakið skref 5 og 6 fyrir dálkana sem eftir eru.
8. Notið tölurnar í neðstu röðinni til að rita kvótann. Talan í síðasta dálkinum er afgangurinn. Næsta tala frá hægri er stuðull liðar af stigi 0, næsta tala stuðull liðar af stigi 1 og svo framvegis.

DÆMI 3

Reiknirit Horners notað til að deila annars stigs margliðu

Notið reiknirit Horners til að deila $5x^2 - 3x - 36$ með $x - 3$.

Lausn

Byrjið á að setja upp deilinguna með reikniriti Horners. Ritið k og stuðlana.

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 5 & -3 & -36 \\ \hline & & & \end{array}$$

Færið forystustuðulinn niður. Margfaldið forystustuðulinn með k.

3	5	−3	−36
		15	
	5		

Haldið áfram með því að leggja saman tölurnar í öðrum dálki. Margfaldið niðurstöðuna með k. Ritið margfeldið í næsta dálk. Leggið síðan saman tölurnar í þriðja dálki.

3	5	−3	−36
		15	36
	5	12	0

Niðurstaðan er $5x+12$. Afgangurinn er 0. Tvíliðan $x-3$ er því þáttur í upphaflegu margliðunni.

Greining

Eins og við langdeilingu getum við sannreynt útreikningana með því að margfalda kvótann með deilinum og leggja afganginn við.

$$(x-3)(5x+12)+0=5x^2-3x-36$$

DÆMI 4

Reiknirit Horners notað til að deila þriðja stigs margliðu

Notið reiknirit Horners til að deila $4x^3+10x^2-6x-20$ með $x+2$.

Lausn

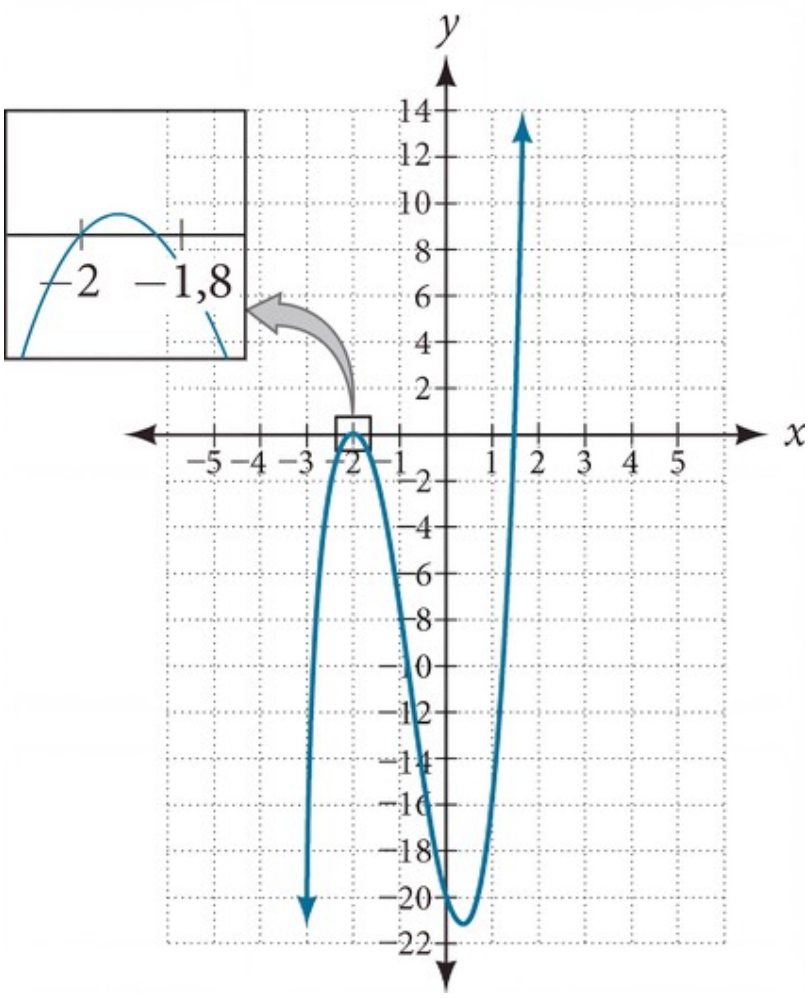
Deilirinn er tvíliðan $x+2$ og því er $k=-2$. Leggið saman í hverjum dálki, margfaldið niðurstöðuna með -2 og endurtakið þar til komið er að síðasta dálkinum.

−2	4	10	−6	−20
		−8	−4	20
	4	2	−10	0

Niðurstaðan er $4x^2+2x-10$. Afgangurinn er 0. Tvíliðan $x+2$ er því þáttur í $4x^3+10x^2-6x-20$.

Greining

Graf margliðufallsins $f(x)=4x^3+10x^2-6x-20$ á mynd 2 sýnir núllstöð þegar $x=k=-2$.
Það staðfestir að $x+2$ er þáttur í $4x^3+10x^2-6x-20$.



Mynd 2

DÆMI 5

Reiknirit Horners notað til að deila fjórða stigs margliðu

Notið reiknirit Horners til að deila $-9x^4+10x^3+7x^2-6$ með $x-1$.

Lausn

Takið eftir að enginn x-liður er í margliðunni. Við notum núll sem stuðul þess liðar.

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & -9 & 10 & 7 & 0 & -6 \\ & & -9 & 1 & 8 & 8 \\ \hline & -9 & 1 & 8 & 8 & 2 \end{array}$$

Niðurstaðan er $-9x^3+x^2+8x+8+\frac{2}{x-1}$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Notið reiknirit Horners til að deila $3x^4+18x^3-3x+40$ með $x+7$.

Deiling margliða notuð í hagnýtum verkefnum

Með deilingu margliða má leysa margvísleg hagnýt verkefni þar sem koma fyrir stæður fyrir flatarmál og rúmmál. Við skoðuðum slíkt verkefni í upphafi hlutans og leysum það nú í næsta dæmi.

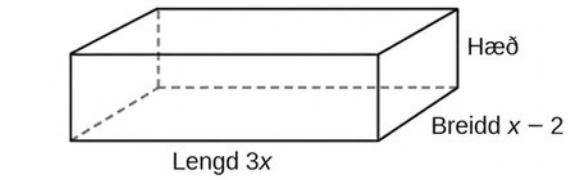
DÆMI 6

Deiling margliða notuð í hagnýtu verkefni

Rúmmál réttstrendings er gefið með margliðunni $3x^4-3x^3-33x^2+54x$. Lengd hans er $3x$ og breiddin $x-2$. Finnið hæð réttstrendingsins.

Lausn

Nálgast má verkefnið á nokkra vegu. Deila þarf stæðunni fyrir rúmmál réttstrendingsins með stæðunum fyrir lengd hans og breidd. Teiknum skissu eins og á mynd 3.



Mynd 3

Nú getum við skrifað jöfnu með því að setja þekktu gildin inn í formúluna fyrir rúmmál réttstrendings.

$$V = l \cdot w \cdot h$$
$$3x^4 - 3x^3 - 33x^2 + 54x = 3x \cdot (x-2) \cdot h$$

Til að einangra h, deilum við fyrst báðum hliðum með $3x$.

$$\frac{3x\cdot(x-2)\cdot h}{3x} = \frac{3x^4-3x^3-33x^2+54x}{3x}$$
$$(x-2)h = x^3 - x^2 - 11x + 18$$

Finnið nú h með reikniriti Horners.

$$h=\frac{x^3-x^2-11x+18}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -11 & 18 \\ & & 2 & 2 & -18 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & 0 \end{array}$$

Kvótinn er x^2+x-9 og afgangurinn 0. Hæð réttstrendingsins er x^2+x-9.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Flatarmál rétthyrnings er gefið með $3x^3+14x^2-23x+6$. Breidd rétthyrningsins er $x+6$. Finnið stæðu fyrir lengd hans.

MIÐLAR

Skoðið þetta efni á netinu til að fá meiri leiðbeiningar og æfingu í deilingu margliða.

- Tvíliðu deilt í þríliðu með langdeilingu
- Tvíliðu deilt í margliðu með langdeilingu
- Dæmi 2: Tvíliðu deilt í margliðu með reikniriti Horners
- Dæmi 4: Tvíliðu deilt í margliðu með reikniriti Horners

Æfingar úr kafla 3.5

Orðleg verkefni

1. Hvað má ályktа ef afgangurinn er núll þegar margliðu er deilt með tvíliðu?

2. Hvert er stig kvótans ef margliðu af jákvæðu stigi n er deilt með tvíliðu af stigi 1?

Algebruverkefni

Notið langdeilingu í eftirfarandi verkefnum. Tilgreinið kvótann og afganginn.

3.

$$\left(x^2+5x-1\right)\div\left(x-1\right)$$

4.

$$\left(2x^2-9x-5\right)\div\left(x-5\right)$$

5.

$$\left(3x^2+23x+14\right)\div\left(x+7\right)$$

6.

$$\left(4x^2-10x+6\right)\div\left(4x+2\right)$$

7.

$$\left(6x^2-25x-25\right)\div\left(6x+5\right)$$

8.

$$\left(-x^2-1\right)\div\left(x+1\right)$$

9.

$$\left(2x^2-3x+2\right)\div\left(x+2\right)$$

10.

$$\left(x^3-126\right)\div\left(x-5\right)$$

11.

$$\left(3x^2-5x+4\right)\div\left(3x+1\right)$$

12.

$$\left(x^3-3x^2+5x-6\right)\div\left(x-2\right)$$

13.

$$\left(2x^3+3x^2-4x+15\right)\div\left(x+3\right)$$

Notið reiknirit Horners í eftirfarandi verkefnum til að finna kvótann. Ef forystustuðull deilisins er ekki 1 skal fyrst taka hann út fyrir sviga. Deilið með tvíliðunni sem þá stendur eftir og deilið síðan kvótanum með forystustuðlinum.

14.

$$\left(3x^3-2x^2+x-4\right)\div\left(x+3\right)$$

15.

$$\left(2x^3-6x^2-7x+6\right)\div\left(x-4\right)$$

16.

$$\left(6x^3-10x^2-7x-15\right)\div\left(x+1\right)$$

17.

$$\left(4x^3-12x^2-5x-1\right)\div\left(2x+1\right)$$

18.

$$\left(9x^3-9x^2+18x+5\right)\div\left(3x-1\right)$$

19.

$$\left(3x^3-2x^2+x-4\right)\div\left(x+3\right)$$

20.

$$\left(-6x^3+x^2-4\right)\div\left(2x-3\right)$$

21.

$$\left(2x^3+7x^2-13x-3\right)\div\left(2x-3\right)$$

22.

$$\left(3x^3-5x^2+2x+3\right)\div\left(x+2\right)$$

23.

$$\left(4x^3-5x^2+13\right)\div\left(x+4\right)$$

24.

$$\left(x^3-3x+2\right)\div\left(x+2\right)$$

25.

$$\left(x^3-21x^2+147x-343\right)\div\left(x-7\right)$$

26.

$$\left(x^3-15x^2+75x-125\right)\div\left(x-5\right)$$

27.

$$\left(9x^3-x+2\right)\div\left(3x-1\right)$$

28.

$$\left(6x^3-x^2+5x+2\right)\div\left(3x+1\right)$$

29.

$$\left(x^4+x^3-3x^2-2x+1\right)\div\left(x+1\right)$$

30.

$$\left(x^4-3x^2+1\right)\div\left(x-1\right)$$

31.

$$\left(x^4+2x^3-3x^2+2x+6\right)\div\left(x+3\right)$$

32.

$$\left(x^4-10x^3+37x^2-60x+36\right)\div\left(x-2\right)$$

33.

$$\left(x^4-8x^3+24x^2-32x+16\right)\div\left(x-2\right)$$

34.

$$\left(x^4+5x^3-3x^2-13x+10\right)\div\left(x+5\right)$$

35.

$$\left(x^4-12x^3+54x^2-108x+81\right)\div\left(x-3\right)$$

36.

$$\left(4x^4-2x^3-4x+2\right)\div\left(2x-1\right)$$

37.

$$\left(4x^4+2x^3-4x^2+2x+2\right)\div\left(2x+1\right)$$

Notið reiknirit Horners í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort fyrri stæðan sé þáttur í þeirri síðari. Ef svo er, tilgreinið þá þáttunina.

38.

$$x-2,4x^3-3x^2-8x+4$$

39.

$$x-2,3x^4-6x^3-5x+10$$

40.

$$x+3,-4x^3+5x^2+8$$

41.

$$x-2,4x^4-15x^2-4$$

42.

$$x-\frac{1}{2},2x^4-x^3+2x-1$$

43.

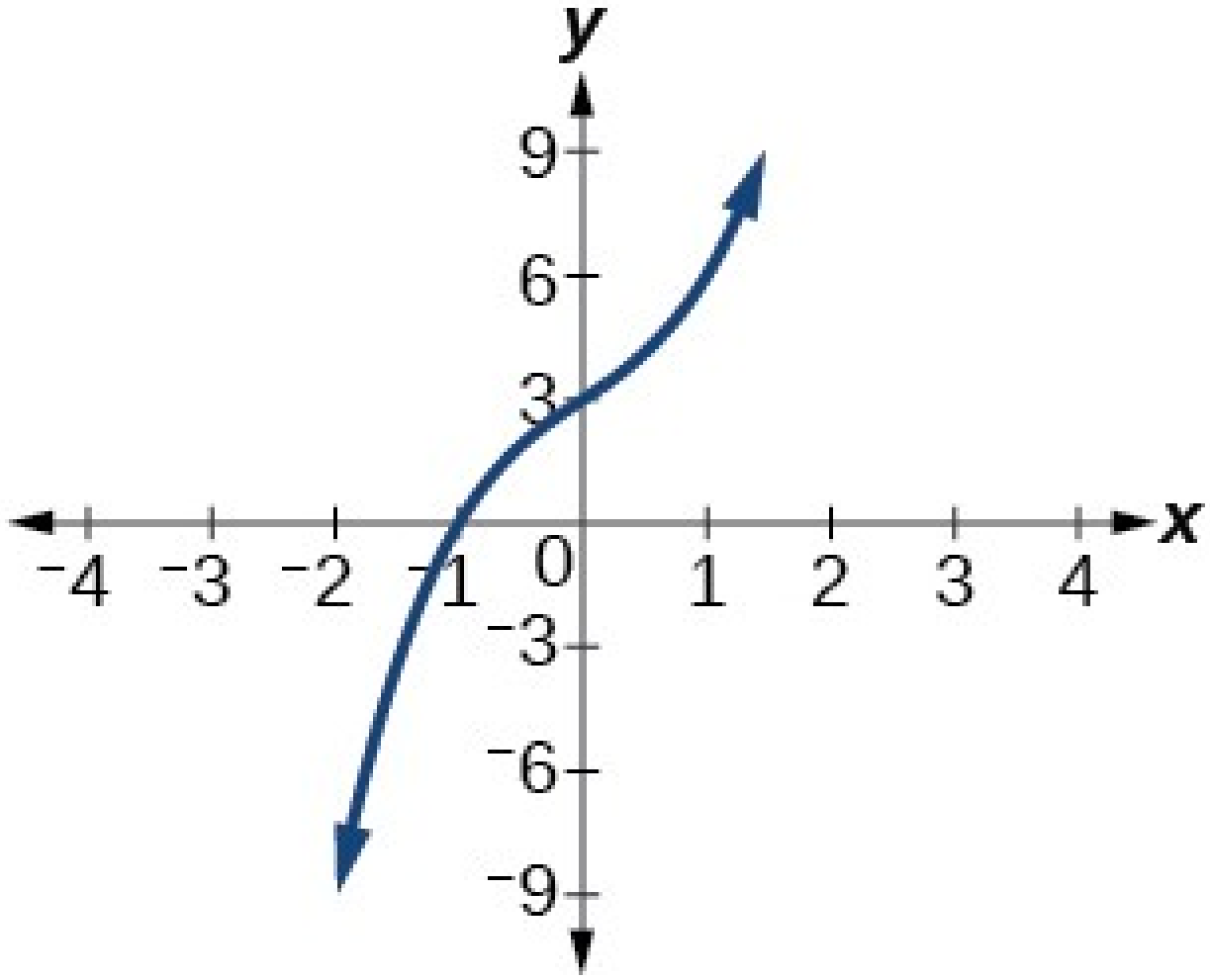
$$x+\frac{1}{3},3x^4+x^3-3x+1$$

Grafísk verkefni

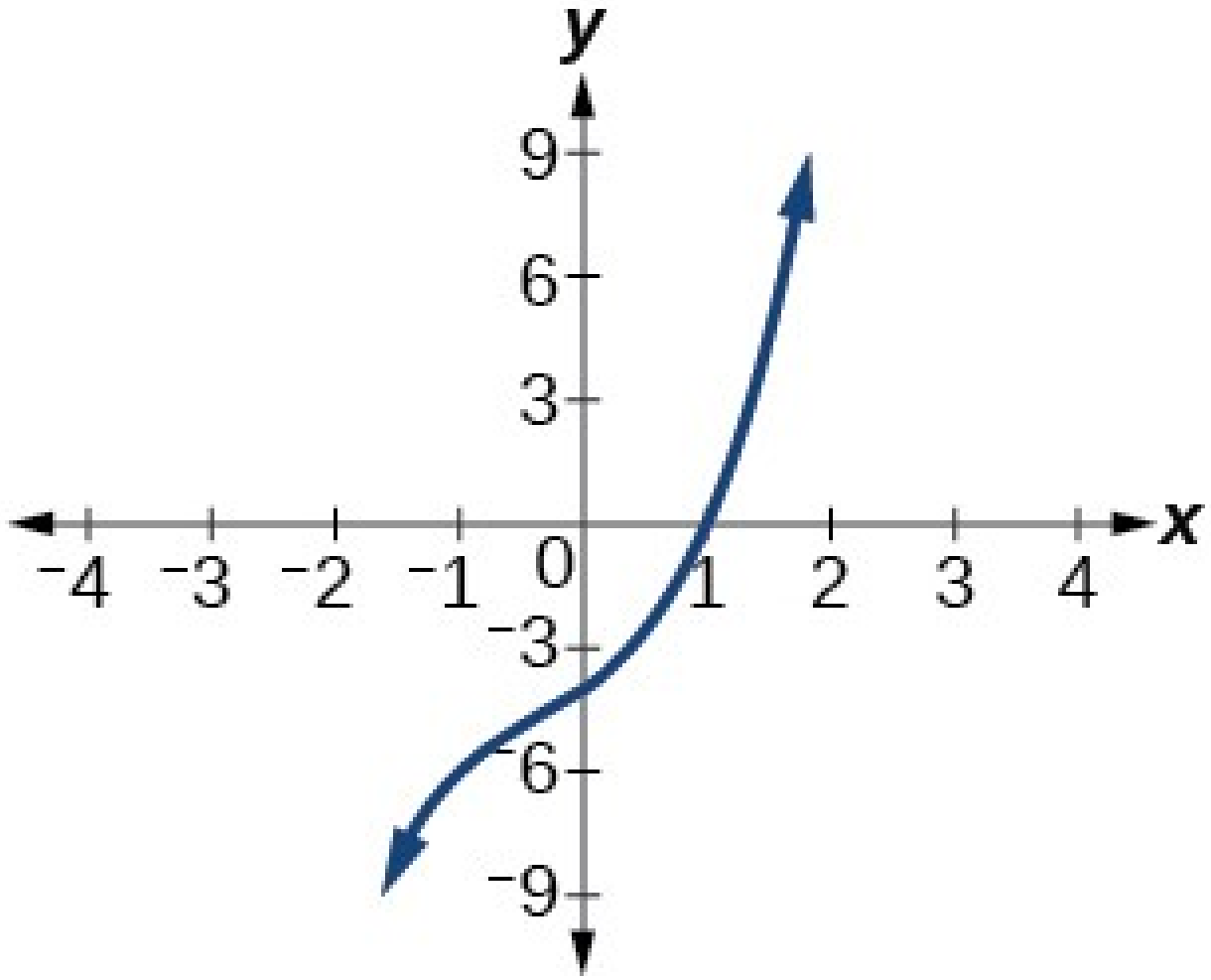
Í eftirfarandi verkefnum eru gefin graf þriðja stigs margliðu og einn þáttur hennar. Notið þau til að rita margliðuna á þáttuðu formi eins og grafið gefur til kynna. Forystustuðullinn er 1.

3

44. Þátturinn er x^2-x+3

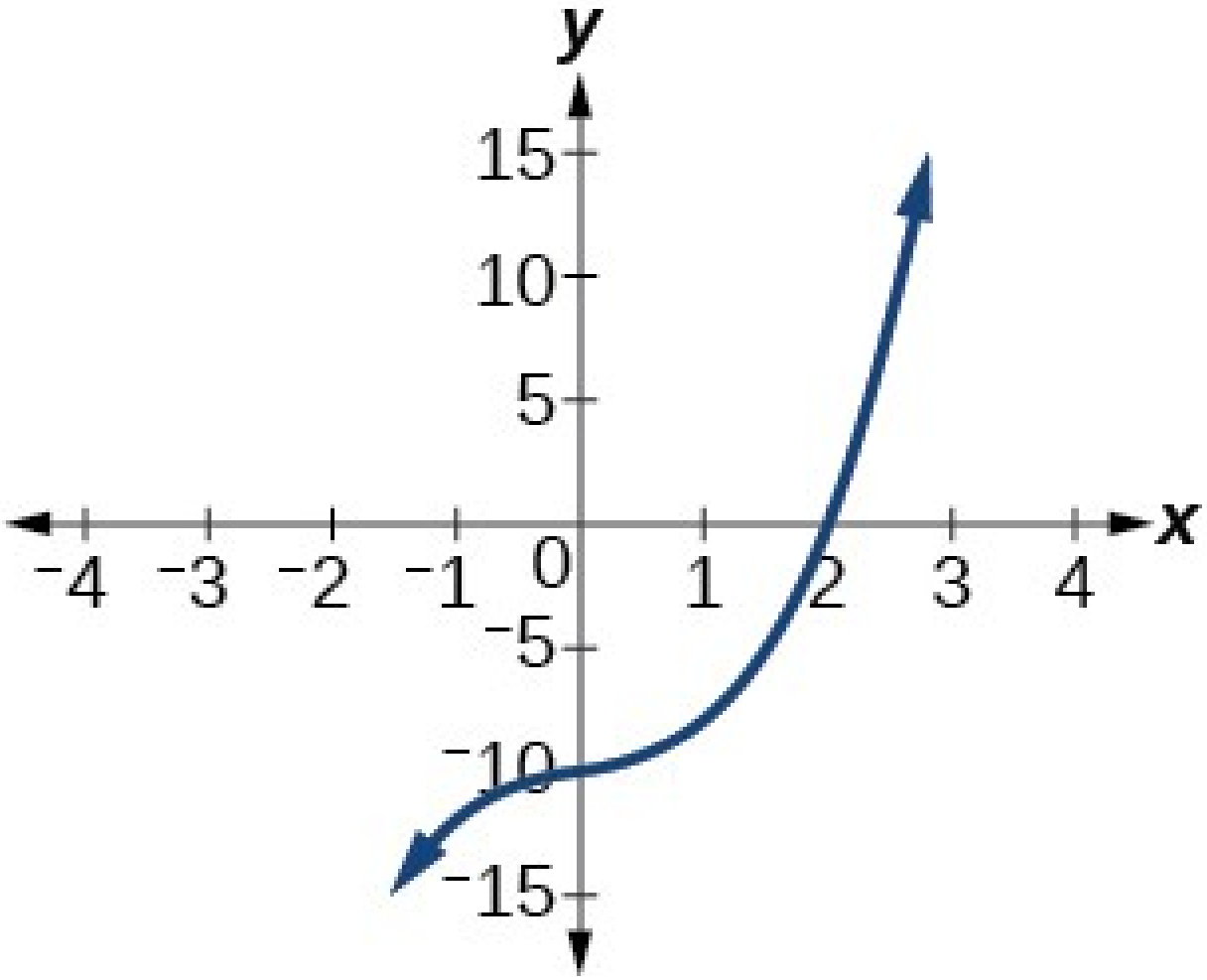


45. Þátturinn er x^2+2x+4

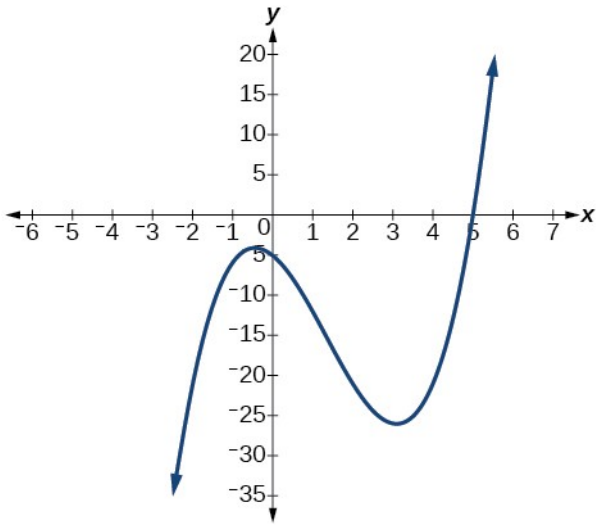


46. Þátturinn er x^2+2x+5

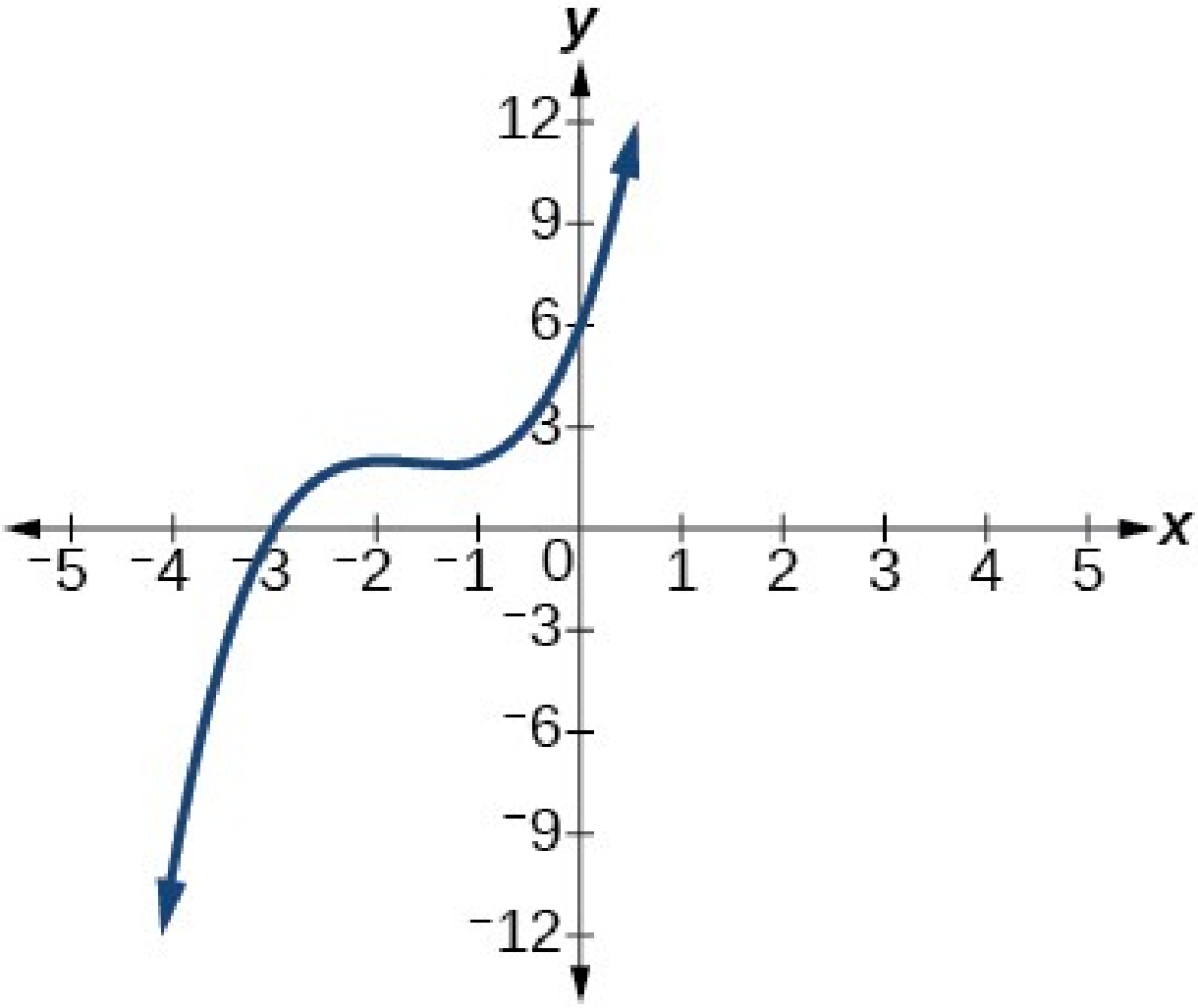
3



47. Þátturinn er x^2+x+1



48. Þátturinn er x^2+2x+2



Notið reiknirit Horners í eftirfarandi verkefnum til að finna kvótann og afganginn.

49.

$$\frac{4x^3-33}{x-2}$$

50.

$$\frac{2x^3+25}{x+3}$$

51.

$$\frac{3x^3+2x-5}{x-1}$$

52.

$$\frac{-4x^3-x^2-12}{x+4}$$

53.

$$\frac{x^4-22}{x+2}$$

Tæknibúnaður

Notið reiknivél með tölvualgebrukerfi (CAS) til að svara spurningunum í eftirfarandi verkefnum.

54. Skoðið $(\frac{x^k-1}{x-1})$ fyrir $k=1,2,3$. Hver haldið þið að niðurstaðan verði þegar $k=4$?

55. Skoðið $(\frac{x^k+1}{x+1})$ fyrir $k=1,3,5$. Hver haldið þið að niðurstaðan verði þegar $k=7$?

56. Skoðið $(\frac{x^4-k^4}{x-k})$ fyrir $k=1,2,3$. Hver haldið þið að niðurstaðan verði þegar $k=4$?

57. Skoðið $(\frac{x^k}{x+1})$ fyrir $k=1,2,3$. Hver haldið þið að niðurstaðan verði þegar $k=4$?

58. Skoðið $(\frac{x^k}{x-1})$ fyrir $k=1,2,3$. Hver haldið þið að niðurstaðan verði þegar $k=4$?

Viðbótarverkefni

Notið reiknirit Horners í eftirfarandi verkefnum til að finna kvóta sem inniheldur tvinntölu.

59.

$$\frac{x+1}{x-i}$$

60.

$$\frac{x^2+1}{x-i}$$

61.

$$\frac{x+1}{x+i}$$

62.

$$\frac{x^2+1}{x+i}$$

63.

$$\frac{x^3+1}{x-i}$$

Hagnýt verkefni

Í eftirfarandi verkefnum eru gefin lengd og flatarmál rétthyrnings. Ritið breidd hans sem algebrustæðu.

64. Lengdin er $x+5$, og flatarmálið $2x^2+9x-5$.

65. Lengdin er $2x+5$, og flatarmálið $4x^3+10x^2+6x+15$

66. Lengdin er $3x-4$, og flatarmálið $6x^4-8x^3+9x^2-9x-4$

Í eftirfarandi verkefnum eru gefin rúmmál kassa, lengd hans og breidd. Ritið hæð kassans sem algebrustæðu.

67. Rúmmálið er $12x^3+20x^2-21x-36$, lengdin $2x+3$, og breiddin $3x-4$.

68. Rúmmálið er $18x^3-21x^2-40x+48$, lengdin $3x-4$, og breiddin $3x-4$.

69. Rúmmálið er $10x^3+27x^2+2x-24$, lengdin $5x-4$, og breiddin $2x+3$.

70. Rúmmálið er $10x^3+30x^2-8x-24$, lengdin 2, og breiddin $x+3$.

Í eftirfarandi verkefnum eru gefin rúmmál og radíus sívalnings. Ritið hæð hans sem algebrustæðu.

71. Rúmmálið er $\pi\left(25x^3-65x^2-29x-3\right)$, og radíusinn $5x+1$.

72. Rúmmálið er $\pi\left(4x^3+12x^2-15x-50\right)$, og radíusinn $2x+5$.

73. Rúmmálið er $\pi\left(3x^4+24x^3+46x^2-16x-32\right)$, og radíusinn $x+4$.

3.6 Núllstöðvar margliðufalla

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Reikna gildi margliðu með afgangssetningunni.
- Nota þáttasetninguna til að leysa margliðujöfnu.
- Nota setninguna um ræðar núllstöðvar til að finna ræðar núllstöðvar.
- Finna núllstöðvar margliðufalls.
- Nota setninguna um þáttun í línulega þætti til að finna margliður með gefnar núllstöðvar.
- Nota formerkjareglu Descartes.
- Leysa raunhæf verkefni með margliðujöfnum.

Nýtt bakarí býður upp á skreyttar kökur á mörgum hæðum sem eru hafðar til sýnis og skornar í brúðkaupum og fimmtán ára afmælisveislum stúlkna (quinceañera). Það býður einnig upp á skúffukökur handa flestum gestunum. Bakaríið vill að rúmmál lítillar skúffuköku sé 351 rúmtomma. Kakan er í laginu eins og réttstrendingur. Lengd hennar á að

vera fjórum tommum meiri en breiddin og hæðin á að vera þriðjungur af breiddinni. Hver eiga mál kökuformsins að vera?

Leysa má verkefnið með því að setja fram þriðja stigs fall og leysa þriðja stigs jöfnu fyrir rúmmál kökunnar. Í þessum hluta kynnumst við ýmsum verkfærum til að setja fram margliðuföll og leysa margliðujöfnur.

Gildi margliðu reiknað með afgangssetningunni

Í síðasta hluta lærðum við að deila margliðum. Nú getum við notað margliðudeilingu til að reikna gildi margliða með afgangssetningunni. Ef margliðunni er deilt með $x-k$, má finna afganginn fljótt með því að reikna gildi margliðufallsins fyrir k, það er $f(k)$. Skoðum sönnun setningarinnar skref fyrir skref.

Munið að samkvæmt deilingarreikniritinu gildir þetta: Ef margliðan $f(x)$ er deilistofn og margliðan $d(x)$ er deilir, sem er ekki núllmargliða, og stig $d(x)$ er minna en eða jafnt stigi $f(x)$, þá eru til tvær ótvírætt ákvarðaðar margliður $q(x)$ og $r(x)$ þannig að

$$f(x)=d(x)q(x)+r(x)$$

Ef deilirinn, $d(x)$, er $x-k$, fæst formið

$$f(x)=(x-k)q(x)+r$$

Þar sem deilirinn $x-k$ er línulegur er afgangurinn fasti, r. Ef við reiknum þetta fyrir $x=k$, fæst

$$\begin{aligned} f(k) &= (k-k)q(k)+r \\ &= 0\cdot q(k)+r \\ &= r \end{aligned}$$

Með öðrum orðum er $f(k)$ afgangurinn sem fæst þegar $f(x)$ er deilt með $x-k$.

AFGANGSSETNINGIN

Ef margliðunni $f(x)$ er deilt með $x-k$, þá er afgangurinn gildið $f(k)$.

AÐFERÐ

Fyrir gefið margliðufall f, reiknið $f(x)$ fyrir $x=k$ með afgangssetningunni.

1. Notið deilingu með reikniriti Horners til að deila margliðunni með $x-k$.
2. Afgangurinn er gildið $f(k)$.

DÆMI 1

Afgangssetningin notuð til að reikna gildi margliðu

Notið afgangssetninguna til að reikna gildi $f(x)=6x^4-x^3-15x^2+2x-7$ fyrir $x=2$.

Lausn

Til að finna afganginn með afgangssetningunni skal nota deilingu með reikniriti Horners og deila margliðunni með $x-2$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 6 & -1 & -15 & 2 & -7 \\ & & 12 & 22 & 14 & 32 \\ \hline & 6 & 11 & 7 & 16 & 25 \end{array}$$

Afgangurinn er 25. Því er $f(2)=25$.

Greining

Við getum sannreynt svarið með því að reikna $f(2)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^4 - x^3 - 15x^2 + 2x - 7 \\ f(2) &= 6(2)^4 - (2)^3 - 15(2)^2 + 2(2) - 7 \\ &= 25 \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Notið afgangssetninguna til að reikna gildi $f(x)=2x^5-3x^4-9x^3+8x^2+2$ fyrir $x=-3$.

Þáttasetningin notuð til að leysa margliðujöfnu

Þáttasetningin er önnur setning sem hjálpar okkur að greina margliðujöfnur. Hún segir til um tengsl núllstöðva margliðu við þætti hennar. Munið að deilingarreikniritið segir okkur að

$$f(x)=(x-k)q(x)+r.$$

Ef k er núllstöð þá er afgangurinn r jafn $f(k)=0$ og $f(x)=(x-k)q(x)+0$ eða $f(x)=(x-k)q(x)$.

Takið eftir að þegar þetta er ritað á þessu formi er $x-k$ þáttur í $f(x)$. Við getum því ályktað að ef k er núllstöð $f(x)$, þá sé $x-k$ þáttur í $f(x)$.

Á sama hátt gildir að ef $x-k$ er þáttur í $f(x)$, þá er afgangurinn í deilingarreikniritinu $f(x)=(x-k)q(x)+r$ jafn 0. Það segir okkur að k sé núllstöð.

Þessar tvær ályktanir mynda þáttasetninguna. Eins og við munum brátt sjá hefur margliða af jákvæðu stigi n í tvinntalnakerfinu n núllstöðvar þegar margfeldni er talin með. Með þáttasetningunni má þátta margliðu að fullu, þannig að hún verði margfeldi forystustuðulsins og n þátta. Þegar margliðan hefur verið fullþáttuð má auðveldlega ákvarða núllstöðvar hennar.

ÞÁTTASETNINGIN

Samkvæmt þáttasetningunni er k núllstöð $f(x)$ þá og því aðeins að $(x-k)$ sé þáttur í $f(x)$.

AÐFERÐ

Notið gefinn þátt og þriðja stigs margliðu til að þátta margliðuna með þáttasetningunni.

1. Notið deilingu með reikniriti Horners til að deila margliðunni með $(x-k)$.
2. Staðfestið að afgangurinn sé 0.
3. Ritið margliðuna sem margfeldi $(x-k)$ og annars stigs kvótans.
4. Þáttið annars stigs margliðuna ef unnt er.
5. Ritið margliðuna sem margfeldi þátta.

DÆMI 2

Þáttasetningin notuð til að leysa margliðujöfnu

Sýnið að $(x+2)$ sé þáttur í x^3-6x^2-x+30. Finnið hina þættina. Notið þættina til að ákvarða núllstöðvar margliðunnar.

Lausn

Við getum notað deilingu með reikniriti Horners til að sýna að $(x+2)$ sé þáttur í margliðunni.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -6 & -1 & 30 \\ & & -2 & 16 & -30 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \end{array}$$

Afgangurinn er núll og því er $(x+2)$ þáttur í margliðunni. Með deilingarreikniritinu má rita margliðuna sem margfeldi deilisins og kvótans:

$$(x+2)(x^2-8x+15)$$

Við getum þáttað annars stigs þáttinn og ritað margliðuna sem

$$(x+2)(x-3)(x-5)$$

Samkvæmt þáttasetningunni eru núllstöðvar x^3-6x^2-x+30 jafnar -2, 3 og 5.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Notið þáttasetninguna til að finna núllstöðvar $f(x)=x^3+4x^2-4x-16$ þegar gefið er að $(x-2)$ sé þáttur í margliðunni.

Setningin um ræðar núllstöðvar notuð til að finna ræðar núllstöðvar

Einnig má nota afgangssetninguna til að kanna hvort ræð tala sé núllstöð gefinnar margliðu. Fyrst þurfum við þó mengi ræðra talna til að prófa. Setningin um ræðar núllstöðvar hjálpar okkur að fækka mögulegum ræðum núllstöðvum með því að nota hlutfall þátta fastaliðarins og þátta forystustuðuls margliðunnar.

Skoðum annars stigs fall með núllstöðvarnar tvær $x=\frac{2}{5}$ og $x=\frac{3}{4}$. Samkvæmt þáttasetningunni samsvara þessar núllstöðvar ákveðnum þáttum. Setjum hvern þátt jafnan 0 og myndum síðan annars stigs fall með þessum núllstöðvum.

$x-\frac{2}{5}=0$ or $x-\frac{3}{4}=0$	Setjið hvern þátt jafnan 0.
$5x-2=0$ or $4x-3=0$	Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar til að losna við brotin.
$f(x)=(5x-2)(4x-3)$	Myndið annars stigs fallið með því að margfalda þættina saman.
$f(x)=20x^2-23x+6$	Margfaldið upp úr svigunum í margliðunni.
$f(x)=(5\cdot 4)x^2-23x+(2\cdot 3)$	

Takið eftir að tveir þættir fastaliðarins 6 eru teljararnir tveir í upphaflegu ræðu rótunum: 2 og 3. Á sama hátt eru tveir þættir forystustuðulsins 20 nefnararnir tveir í upphaflegu ræðu rótunum: 5 og 4.

Af þessu má ályktа: Þegar margliða hefur heiltölustuðla og ræðar rætur hennar eru ritaðar sem fullstytt brot, eru teljararnir alltaf þættir fastaliðarins og nefnararnir þættir forystustuðulsins. Þetta er kjarni setningarinnar um ræðar núllstöðvar; hún gefur okkur mengi mögulegra ræðra núllstöðva.

SETNINGIN UM RÆÐAR NÚLLSTÖÐVAR

Setningin um ræðar núllstöðvar segir að ef margliðan $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ hefur heiltölustuðla og $a_n\neq 0$, þá sé hver ræð núllstöð $f(x)$ á forminu $(\frac{p}{q})$ í fullstyttu formi, þar sem p er þáttur fastaliðarins (a_0) og q þáttur forystustuðulsins a_n.

Þegar forystustuðullinn er 1 eru mögulegar ræðar núllstöðvar þættir fastaliðarins.

AÐFERÐ

Notið setninguna um ræðar núllstöðvar til að finna ræðar núllstöðvar gefins margliðufalls $f(x)$,.

1. Ákvarðið alla þætti fastaliðarins og alla þætti forystustuðulsins.
2. Ákvarðið öll möguleg gildi $\frac{p}{q}$, þar sem p er þáttur fastaliðarins og q þáttur forystustuðulsins. Gætið þess að taka bæði jákvæð og neikvæð gildi með.

3. Ákvarðið hvaða mögulegu núllstöðvar eru raunverulegar núllstöðvar með því að reikna hvert gildi $f\left(\frac{p}{q}\right)$.

DÆMI 3

Allar mögulegar ræðar núllstöðvar taldar upp

Teljið upp allar mögulegar ræðar núllstöðvar $f(x)=2x^4-5x^3+x^2-4$.

Lausn

Einu mögulegu ræðu núllstöðvar $f(x)$ eru kvótar þátta síðasta liðarins, -4, og þátta forystustuðulsins, 2.

Fastaliðurinn er -4; þættir -4 eru $p=\pm1,\pm2,\pm4$.

Forystustuðullinn er 2; þættir 2 eru $q=\pm1,\pm2$.

Ef einhverjar núllstöðvar margliðunnar eru ræðar þá fást þær með því að deila einhverjum þætti -4 með einhverjum þætti 2.

$$\frac{p}{q}=\pm\ \frac{1}{1},\ \pm\ \frac{1}{2}\qquad \frac{p}{q}=\pm\ \frac{2}{1},\pm\ \frac{2}{2}\qquad \frac{p}{q}=\ \pm\ \frac{4}{1},\pm\ \frac{4}{2}$$

Takið eftir að $\frac{2}{2}=1$ og $\frac{4}{2}=2$, sem þegar hafa verið talin upp. Við getum því stytt listann.

$$\frac{p}{q}=\frac{\text{Þættir síðasta}}{\text{Þættir fyrsta}}=\pm1,\pm2,\pm4,\pm\frac{1}{2}$$

DÆMI 4

Setningin um ræðar núllstöðvar notuð til að finna ræðar núllstöðvar

Notið setninguna um ræðar núllstöðvar til að finna ræðar núllstöðvar $f(x)=2x^3+x^2-4x+1$.

Lausn

Setningin um ræðar núllstöðvar segir okkur að ef $(\frac{p}{q})$ er núllstöð $f(x)$, þá sé p þáttur í 1 og q þáttur í 2.

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=\frac{\text{þáttur fastaliðarins}}{\text{þáttur forystustuðulsins}}\\&=\frac{\text{þáttur 1}}{\text{þáttur 2}}\end{aligned}$$

Þættir 1 eru ±1 og þættir 2 eru ±1 og ±2. Möguleg gildi $(\frac{p}{q})$ eru ±1 og $\pm\frac{1}{2}$. Þetta eru mögulegar ræðar núllstöðvar fallsins. Við getum ákvarðað hverjar þeirra eru raunverulegar núllstöðvar með því að setja þessi gildi fyrir x í $f(x)$.

$$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) + 1 = 4$$
$$f(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 4(1) + 1 = 0$$
$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 1 = 3$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\tfrac{1}{2}\right) + 1 = -\tfrac{1}{2}$$

Af þessum gildum eru $-1, -\frac{1}{2},$ og $\frac{1}{2}$ ekki núllstöðvar $f(x)$. Talan 1 er eina ræða núllstöð $f(x)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Notið setninguna um ræðar núllstöðvar til að sýna að $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$. hafi engar ræðar núllstöðvar.

Núllstöðvar margliðufalla fundnar

Setningin um ræðar núllstöðvar hjálpar okkur að fækka mögulegum ræðum núllstöðvum margliðufalls. Þegar ræð núllstöð hefur fundist getum við notað deilingu með reikniriti Horners til að lækka stig margliðunnar og leita að núllstöðvum kvótans.

AÐFERÐ

Notið deilingu með reikniriti Horners til að finna núllstöðvar gefins margliðufalls f,.

1. Notið setninguna um ræðar núllstöðvar til að telja upp allar mögulegar ræðar núllstöðvar fallsins.
2. Prófið mögulega núllstöð með deilingu Horners: Deilið margliðunni með samsvarandi línulegum þætti. Ef afgangurinn er 0 er talan núllstöð. Annars skal hafna henni.
3. Endurtakið skref tvö með kvótanum sem fékkst við deilingu Horners. Haldið áfram ef unnt er þar til kvótinn er annars stigs margliða.
4. Finnið núllstöðvar annars stigs fallsins. Tvær mögulegar aðferðir við lausn annars stigs jafna eru þáttun og lausnarformúla annars stigs jöfnu.

DÆMI 5

Núllstöðvar margliðufalls með endurteknum núllstöðvum í rauntölum fundnar

Finnið núllstöðvar $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$.

Lausn

Setningin um ræðar núllstöðvar segir okkur að ef $(\frac{p}{q})$ er núllstöð $f(x)$, þá sé p þáttur í –1 og q þáttur í 4.

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{þáttur fastaliðarins}}{\text{þáttur forystustuðulsins}}$$
$$= \frac{\text{þáttur } -1}{\text{þáttur } 4}$$

Þættir -1 eru ± 1 og þættir 4 eru $\pm 1, \pm 2$, og ± 4. Möguleg gildi ($\frac{p}{q}$) eru $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$, og $\pm \frac{1}{4}$. Þetta eru mögulegar ræðar núllstöðvar fallsins. Við notum deilingu Horners til að prófa hverja mögulega núllstöð þar til við finnum eina sem gefur afganginn 0. Byrjum á 1.

3

1	4	0	−3	−1
		4	4	1
	4	4	1	0

Deiling með $(x-1)$ gefur afganginn 0 og því er 1 núllstöð fallsins. Margliðuna má rita sem

$$(x-1)(4x^2+4x+1).$$

Annars stigs margliðan er ferningur. Rita má $f(x)$ sem

$$(x-1)(2x+1)^2.$$

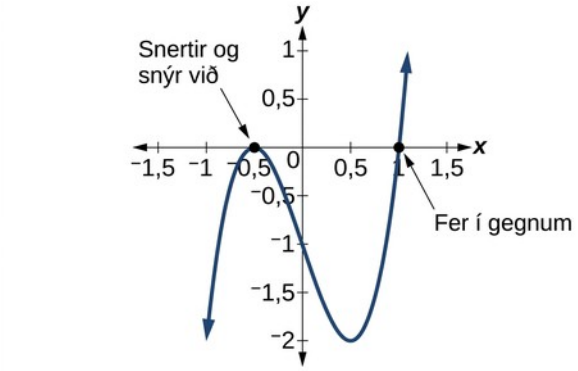
Við vitum nú þegar að 1 er núllstöð. Hin núllstöðin hefur margfeldnina 2 vegna þess að þátturinn er í öðru veldi. Til að finna hana getum við sett þáttinn jafnan 0.

$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\tfrac{1}{2}$$

Núllstöðvar fallsins eru 1 og $-\frac{1}{2}$; sú síðarnefnda hefur margfeldnina 2.

Greining

Skoðið graf fallsins f á mynd 1. Takið eftir að við $x = -0{,}5$ snertir grafið x-ásinn og snýr við, sem sýnir slétta margfeldni (2,4,6...) núllstöðvarinnar $-0{,}5$. Við $x = 1$, sker grafið x-ásinn, sem sýnir odda margfeldni (1,3,5...) núllstöðvarinnar $x = 1$.



Mynd 1

Undirstöðusetning algebrunnar notuð

Nú þegar við getum fundið ræðar núllstöðvar margliðufalls skoðum við setningu um fjölda núllstöðva þess í tvinntölum. Undirstöðusetning algebrunnar segir að sérhvert margliðufall af jákvæðu stigi hafi að minnsta kosti eina núllstöð í tvinntölum. Setningin er undirstaða lausna margliðujafna.

Gerum ráð fyrir að f sé margliðufall af fjórða stigi og $f(x)=0$. Undirstöðusetning algebrunnar segir að til sé að minnsta kosti ein tvinntölulausn, sem við köllum c_1. Samkvæmt þáttasetningunni má rita $f(x)$ sem margfeldi $x-c_1$ og margliðukvóta. Þar sem $x-c_1$ er línulegur er margliðukvótinn af þriðja stigi. Notum nú undirstöðusetningu algebrunnar á þriðja stigs margliðukvótann. Hann hefur að minnsta kosti eina núllstöð í tvinntölum, sem við köllum c_2. Því má rita margliðukvótann sem margfeldi $x-c_2$ og nýs annars stigs margliðukvóta. Haldið áfram að nota undirstöðusetningu algebrunnar þar til allar núllstöðvarnar hafa fundist. Þær verða fjórar þegar margfeldni er talin með og hver þeirra gefur þátt í $f(x)$.

UNDIRSTÖÐUSETNING ALGEBRUNNAR SEGIR AÐ EF F(X) ER MARGLIÐA AF STIGI N > 0, ÞÁ HAFI F(X) AÐ MINNSTA KOSTI EINA NÚLLSTÖÐ Í TVINNTÖLUM.

Með setningunni má rökstyðja að ef $f(x)$ er margliða af stigi $n>0$, og a er forystustuðull hennar, sem er rauntala önnur en núll, þá hafi $f(x)$ nákvæmlega n línulega þætti að meðtalinni margfeldni, auk forystustuðulsins, þannig að

$$f(x)=a(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

þar sem $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ eru tvinntölur. Því hefur $f(x)$ n rætur þegar margfeldni er talin með.

SPURT OG SVARAÐ

Hefur sérhver margliða að minnsta kosti eina núllstöð sem er eiginleg tvinntala?

Nei. Tvinntala er ekki endilega eiginleg tvinntala. Rauntölur eru einnig tvinntölur.

DÆMI 6

Núllstöðvar margliðufalls með núllstöðvum í tvinntölum fundnar

Finnið núllstöðvar $f(x)=3x^3+9x^2+x+3$.

Lausn

Setningin um ræðar núllstöðvar segir okkur að ef $(\frac{p}{q})$ er núllstöð $f(x)$, þá sé p þáttur í 3 og q þáttur í 3.

$$\frac{p}{q}=\frac{\text{þáttur fastaliðarins}}{\text{þáttur forystustuðulsins}}$$
$$=\frac{\text{þáttur 3}}{\text{þáttur 3}}$$

Þættir 3 eru ± 1 og ± 3. Möguleg gildi $\frac{p}{q}$, og þar með mögulegar ræðar núllstöðvar fallsins, eru $\pm 3, \pm 1$, og $\pm\frac{1}{3}$. Við notum deilingu með reikniriti Horners til að prófa hverja mögulega núllstöð þar til við finnum eina sem gefur afganginn 0. Byrjum á -3.

-3	3	9	1	3
		-9	0	-3
	3	0	1	0

Deiling með $(x+3)$ gefur afganginn 0 og því er -3 núllstöð fallsins. Margliðuna má rita sem

$$(x+3)(3x^2+1)$$

Síðan getum við sett annars stigs margliðuna jafna 0 og leyst jöfnuna til að finna aðrar núllstöðvar fallsins.

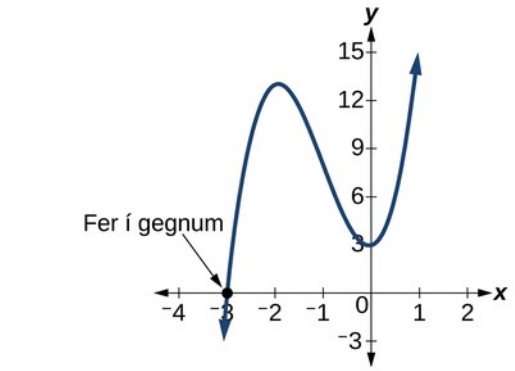
$$3x^2+1=0$$
$$x^2=-\tfrac{1}{3}$$
$$x=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{3}}=\pm\tfrac{i\sqrt{3}}{3}$$

Núllstöðvar $f(x)$ eru -3 og $\pm\frac{i\sqrt{3}}{3}$.

Greining

Skoðið graf fallsins f á mynd 2. Takið eftir að við $x=-3$, sker grafið x-ásinn, sem sýnir odda margfeldni (1) núllstöðvarinnar $x=-3$. Takið einnig eftir snúningspunktunum tveimur. Þar sem þetta er margliða af 3. stigi er fjöldi snúningspunkta sá mesti sem mögulegur er.

Endahegðunin, að vaxa án takmarka til hægri og minnka án takmarka til vinstri, heldur því áfram. Þar með sjást allir skurðpunktar fallsins við x-ás. Annaðhvort er margfeldni $x=-3$ því 1 og tvær lausnir eru tvinntölur, eins og við fundum, eða margfeldnin við $x=-3$ er þrír. Í báðum tilvikum er niðurstaða okkar rétt.



Mynd 2

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Finnið núllstöðvar $f(x)=2x^3+5x^2-11x+4$.

Setningin um línulega þáttun notuð til að finna margliður með gefnar núllstöðvar

Mikilvæg afleiðing undirstöðusetningar algebrunnar, eins og áður kom fram, er að margliðufall af jákvæðu stigi n hefur n núllstöðvar í mengi tvinntalna þegar margfeldni er talin með. Það þýðir að rita má margliðufallið sem forystustuðulinn margfaldaðan með n þáttum. Setningin um línulega þáttun segir að fjöldi línulegra þátta margliðufalls, þegar margfeldni er talin með, sé jafn stigi þess og að sérhver þáttur sé á forminu $(x-c)$, þar sem c er tvinntala.

Látum f vera margliðufall með rauntölustuðla og gerum ráð fyrir að $a+bi$, $b\neq 0$, sé núllstöð $f(x)$. Samkvæmt þáttasetningunni er $x-(a+bi)$ þáttur í $f(x)$. Til þess að f hafi rauntölustuðla verður $x-(a-bi)$ einnig að vera þáttur í $f(x)$. Ástæðan er sú að ef $x-(a-bi)$, er margfaldaður með $x-(a+bi)$, verða engir þverhlutar eftir í margfeldinu. Margfeldi þessara tveggja samoka þátta hefur því rauntölustuðla. Með öðrum orðum: Ef margliðufallið f með rauntölustuðla hefur núllstöðina $a+bi$, þá verður samoka tvinntalan $a-bi$ einnig að vera núllstöð $f(x)$. Þetta nefnist setningin um samoka tvinntölur.

SETNINGIN UM SAMOKA TVINNTÖLUR

Samkvæmt setningunni um línulega þáttun er fjöldi línulegra þátta margliðufalls af jákvæðu stigi, þegar margfeldni er talin með, jafn stigi þess og sérhver þáttur er á forminu $(x-c)$, þar sem c er tvinntala. Forystustuðullinn er margfaldaður með þessum þáttum.

Ef margliðufallið f hefur rauntölustuðla og núllstöð á forminu $a+bi$, þá er samoka tvinntalan $a-bi$, einnig núllstöð.

AÐFERÐ

Gefnar eru núllstöðvar margliðufalls f og punktur (c, f(c)) á grafi f, Notið setninguna um línulega þáttun til að finna margliðufallið.

1. Notið núllstöðvarnar til að mynda línulega þætti margliðunnar.
2. Margfaldið línulegu þættina saman og dragið saman líka liði.
3. Setjið $(c, f(c))$ inn í fallið til að ákvarða forystustuðulinn.
4. Einfaldið.

DÆMI 7

Setningin um línulega þáttun notuð til að finna margliðu með gefnar núllstöðvar

Finnið fjórða stigs margliðu með rauntölustuðla og núllstöðvarnar -3, 2 og i, þannig að $f(-2)=100$.

Lausn

Þar sem $x=i$ er núllstöð er $x=-i$ einnig núllstöð samkvæmt setningunni um samoka tvinntölur. Margliðan verður að hafa þættina $(x+3),(x-2),(x-i)$, og $(x+i)$. Þar sem við leitum að margliðu af 4. stigi og höfum nú fjórar núllstöðvar höfum við alla fjóra þættina. Byrjum á að margfalda þessa þætti saman.

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x+3)(x-2)(x-i)(x+i) \\ f(x) &= a(x^2+x-6)(x^2+1) \\ f(x) &= a(x^4+x^3-5x^2+x-6) \end{aligned}$$

Við þurfum að finna a þannig að $f(-2)=100$. Setjið $x=-2$ og $f(2)=100$ inn í $f(x)$.

$$\begin{aligned} 100 &= a((-2)^4+(-2)^3-5(-2)^2+(-2)-6) \\ 100 &= a(-20) \\ -5 &= a \end{aligned}$$

Margliðufallið er því

$$f(x)=-5(x^4+x^3-5x^2+x-6)$$

eða

$$f(x)=-5x^4-5x^3+25x^2-5x+30$$

Greining

Við fundum að bæði i og $-i$ voru núllstöðvar, en aðeins þurfti að gefa aðra þeirra. Ef i er núllstöð margliðu með rauntölustuðla verður $-i$ einnig að vera núllstöð hennar því $-i$ er samoka tvinntalan við i.

SPURT OG SVARAÐ

Ef $2+3i$ væri gefin sem núllstöð margliðu með rauntölustuðla, þyrfti $2-3i$ þá einnig að vera núllstöð?

Já. Ef eiginleg tvinntala er gefin sem núllstöð margliðu með rauntölustuðla verður samoka tvinntalan einnig að vera núllstöð margliðunnar.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Finnið þriðja stigs margliðu með rauntölustuðla og núllstöðvarnar 5 og $-2i$ þannig að $f(1)=10$.

Formerkjaregla Descartes notuð

Til er einföld leið til að ákvarða mögulegan fjölda jákvæðra og neikvæðra núllstöðva í rauntölum hvaða margliðufalls sem er. Ef margliðan er rituð eftir fallandi veldum sýnir formerkjaregla Descartes sambandið milli fjölda formerkjaskipta í $f(x)$ og fjölda jákvæðra núllstöðva í rauntölum. Margliðufallið hér að neðan hefur til dæmis eitt formerkjaskipti.

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$$

Það segir okkur að fallið verði að hafa eina jákvæða núllstöð í rauntölum.

Sambærilegt samband er milli fjölda formerkjaskipta í $f(-x)$ og fjölda neikvæðra núllstöðva í rauntölum.

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^3 + (-x)^2 + (-x) - 1$$
$$f(-x) = +x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$$

Í þessu tilviki eru 3 formerkjaskipti í $f(-x)$. Það segir okkur að $f(x)$ geti haft 3 eða 1 neikvæða núllstöð í rauntölum.

FORMERKJAREGLA DESCARTES

Samkvæmt formerkjareglu Descartes gildir eftirfarandi ef $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ er margliðufall með rauntölustuðla og er ekki núllmargliðan. Ritið liðina eftir fallandi veldum, sleppið núllstuðlum og teljið núllstöðvar með margfeldni:

- Fjöldi jákvæðra núllstöðva í rauntölum er annaðhvort jafn fjölda formerkjaskipta í $f(x)$ eða minni en fjöldi formerkjaskipta um slétta heiltölu.

- Fjöldi neikvæðra núllstöðva í rauntölum er annaðhvort jafn fjölda formerkjaskipta í $f(-x)$ eða minni en fjöldi formerkjaskipta um slétta heiltölu.

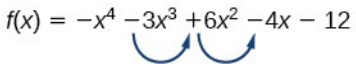
DÆMI 8

Formerkjaregla Descartes notuð

Notið formerkjareglu Descartes til að ákvarða mögulegan fjölda jákvæðra og neikvæðra núllstöðva í rauntölum $f(x) = -x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x - 12$.

Lausn

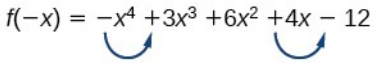
Byrjið á að ákvarða fjölda formerkjaskipta.



Mynd 3

Formerkjaskiptin eru tvö og því er fjöldi jákvæðra raunróta annaðhvort 2 eða 0. Næst skoðum við $f(-x)$ til að ákvarða fjölda neikvæðra raunróta.

$$f(-x) = -(-x)^4 - 3(-x)^3 + 6(-x)^2 - 4(-x) - 12$$
$$f(-x) = -x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x - 12$$



Mynd 4

Aftur eru formerkjaskiptin tvö og því er fjöldi neikvæðra raunróta annaðhvort 2 eða 0.

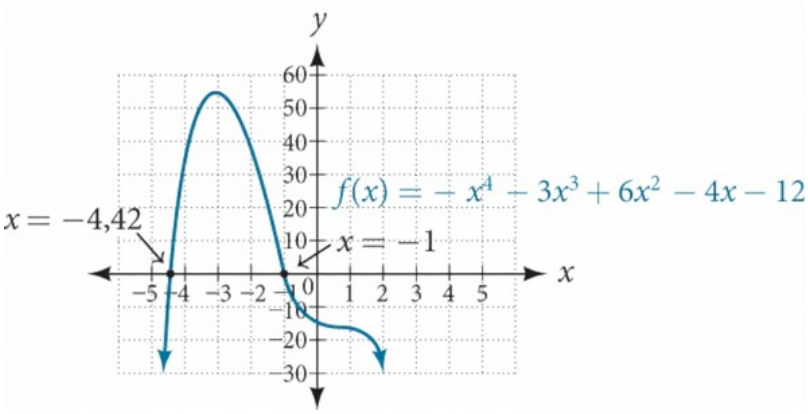
Möguleikarnir eru fjórir, eins og sést í töflu 1.

Tafla 1

Jákvæðar núllstöðvar í rauntölum	Neikvæðar núllstöðvar í rauntölum	Núllstöðvar í eiginlegum tvinntölum	Heildarfjöldi núllstöðva
2	2	0	4
2	0	2	4
0	2	2	4
0	0	4	4

Greining

Við getum staðfest fjölda jákvæðra og neikvæðra raunróta með því að skoða graf fallsins. Sjá mynd 5. Af grafinu sést að fallið hefur 0 jákvæðar raunrætur og 2 neikvæðar raunrætur.



Mynd 5

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Notið formerkjareglu Descartes til að ákvarða mesta mögulega fjölda jákvæðra og neikvæðra núllstöðva í rauntölum $f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 15x + 12$. Notið graf til að staðfesta fjölda jákvæðra og neikvæðra núllstöðva í rauntölum fallsins.

Raunhæf verkefni leyst

Nú höfum við kynnt ýmis verkfæri til að leysa margliðujöfnur. Notum þau til að leysa verkefnið um bakaríið frá upphafi hlutans.

DÆMI 9

Margliðujöfnur leystar

Nýtt bakarí býður upp á skreyttar kökur á mörgum hæðum sem eru hafðar til sýnis og skornar í brúðkaupum og fimmtán ára afmælisveislum stúlkna (quinceañera). Það býður einnig upp á skúffukökur handa flestum gestunum. Bakaríið vill að rúmmál lítillar skúffuköku sé 351 rúmtomma. Kakan er í laginu eins og réttstrendingur. Lengd hennar á að vera fjórum tommum meiri en breiddin og hæðin á að vera þriðjungur af breiddinni. Hver eiga mál kökuformsins að vera?

Lausn

Byrjið á að setja fram jöfnu fyrir rúmmál kökunnar. Rúmmál réttstrendings er gefið með $V = lwh$. Gefið er að lengdin eigi að vera fjórum tommum meiri en breiddin og því má rita lengd kökunnar sem $l = w + 4$. Einnig er gefið að hæð kökunnar sé þriðjungur af breiddinni og því má rita hæðina sem $h = \frac{1}{3}w$. Ritum rúmmál kökunnar sem fall af breidd hennar.

$$V = (w+4)(w)(\tfrac{1}{3}w)$$
$$V = \tfrac{1}{3}w^3 + \tfrac{4}{3}w^2$$

Setjið gefið rúmmál inn í þessa jöfnu.

$$\begin{aligned} 351 &= \frac{1}{3}\,w^3 + \frac{4}{3}\,w^2 && \text{Setjið 351 fyrir } V. \\ 1053 &= w^3 + 4\,w^2 && \text{Margfaldið báðar hliðar með 3.} \\ 0 &= w^3 + 4\,w^2 - 1053 && \text{Dragið 1053 frá báðum hliðum.} \end{aligned}$$

3

Formerkjaregla Descartes segir okkur að til sé ein jákvæð lausn. Setningin um ræðar núllstöðvar segir að mögulegu ræðu núllstöðvarnar séu $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 13, \pm 27, \pm 39, \pm 81, \pm 117, \pm 351$, og ± 1053. Við getum notað deilingu Horners til að prófa þessar mögulegu núllstöðvar. Aðeins jákvæðar tölur koma til greina sem mál köku og því þurfum við ekki að prófa neikvæð gildi. Byrjum á gildum sem eru líklegust sem mál lítillar skúffuköku. Notið deilingu Horners til að prófa $x = 1$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 4 & 0 & -1053 \\ & & 1 & 5 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & -1048 \end{array}$$

Þar sem 1 er ekki lausn prófum við $x = 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 4 & 0 & -1053 \\ & & 3 & 21 & 63 \\ \hline & 1 & 7 & 21 & -990 \end{array}$$

Þar sem 3 er heldur ekki lausn prófum við $x = 9$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 9 & 1 & 4 & 0 & -1053 \\ & & 9 & 117 & 1053 \\ \hline & 1 & 13 & 117 & 0 \end{array}$$

Deiling Horners gefur afganginn 0 og því er 9 lausn jöfnunnar. Við getum notað tengsl breiddarinnar við hin málin til að ákvarða lengd og hæð kökuformsins.

$$l = w + 4 = 9 + 4 = 13 \text{ og } h = \frac{1}{3}w = \frac{1}{3}(9) = 3$$

Skúffukökuformið á að vera 13 tommur á lengd, 9 tommur á breidd og 3 tommur á hæð.

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Flutningsgámur í laginu eins og réttstrendingur á að hafa rúmmálið 84 rúmmetra. Vegna innihaldsins segir viðskiptavinurinn framleiðandanum að lengd gámsins verði að vera einum metra meiri en breiddin og hæðin einum metra meiri en tvöföld breiddin. Hver eiga mál gámsins að vera?

MIÐLAR

Notið þessi vefgögn til frekari kennslu og æfinga í núllstöðvum margliðufalla.

- Núllstöðvar í rauntölum, þættir og gröf margliðufalla
- Setningin um þáttun yfir tvinntölur
- Finnið núllstöðvar margliðufalls
- Finnið núllstöðvar margliðufalls 2
- Finnið núllstöðvar margliðufalls 3

Æfingar úr kafla 3.6

Orðleg verkefni

1. Lýsið einni notkun afgangssetningarinnar.

2. Útskýrið hvers vegna setningin um ræðar núllstöðvar tryggir ekki að núllstöðvar margliðufalls finnist.

3. Hver er munurinn á ræðum núllstöðvum og núllstöðvum í rauntölum?

4. Hvaða ákveðnu ályktun má draga ef formerkjaregla Descartes sýnir ekkert formerkjaskipti eða eitt formerkjaskipti?

5. Hvers vegna ætti að prófa sama gildi aftur sem mögulega lausn ef deiling Horners sýnir að það er núllstöð?

Algebruverkefni

Notið afgangssetninguna í eftirfarandi verkefnum til að finna afganginn.

6.

$$\left(x^4-9x^2+14\right)\div\left(x-2\right)$$

7.

$$\left(3x^3-2x^2+x-4\right)\div\left(x+3\right)$$

8.

$$\left(x^4+5x^3-4x-17\right)\div\left(x+1\right)$$

9.

$$\left(-3x^2+6x+24\right)\div\left(x-4\right)$$

10.

$$\left(5x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x-1\right)\div\left(x+6\right)$$

11.

$$\left(x^4-1\right)\div\left(x-4\right)$$

12.

$$\left(3x^3+4x^2-8x+2\right)\div\left(x-3\right)$$

13.

$$\left(4x^3+5x^2-2x+7\right)\div\left(x+2\right)$$

Notið gefinn þátt og þáttasetninguna í eftirfarandi verkefnum til að finna allar núllstöðvar í rauntölum gefins margliðufalls.

3

14.

$$f\left(x\right)=2x^3-9x^2+13x-6\,;x-1$$

15.

$$f\left(x\right)=2x^3+x^2-5x+2\,;x+2$$

16.

$$f\left(x\right)=3x^3+x^2-20x+12\,;x+3$$

17.

$$f\left(x\right)=2x^3+3x^2+x+6\,;x+2$$

18.

$$f\left(x\right)=-5x^3+16x^2-9\,;x-3$$

19.

$$x^3+3x^2+4x+12\,;x+3$$

20.

$$4x^3-7x+3\,;x-1$$

21.

$$2x^3+5x^2-12x-30\,,2x+5$$

Notið setninguna um ræðar núllstöðvar í eftirfarandi verkefnum til að finna allar núllstöðvar í rauntölum.

22.

$$x^3-3x^2-10x+24=0$$

23.

$$2x^3+7x^2-10x-24=0$$

24.

$$x^3+2x^2-9x-18=0$$

25.

$$x^3+5x^2-16x-80=0$$

26.

$$x^3-3x^2-25x+75=0$$

27.

$$2x^3-3x^2-32x-15=0$$

28.

$$2x^3+x^2-7x-6=0$$

29.

$$2x^3-3x^2-x+1=0$$

30.

$$3x^3-x^2-11x-6=0$$

31.

$$2x^3-5x^2+9x-9=0$$

32.

$$2x^3-3x^2+4x+3=0$$

33.

$$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$$

34.

$$x^4+2x^3-9x^2-2x+8=0$$

35.

$$4x^4+4x^3-25x^2-x+6=0$$

36.

$$2x^4-3x^3-15x^2+32x-12=0$$

37.

$$x^4+2x^3-4x^2-10x-5=0$$

38.

$$4x^3-3x+1=0$$

39.

$$8x^4+26x^3+39x^2+26x+6$$

Finnið allar tvinntölulausnir, bæði rauntölulausnir og eiginlegar tvinntölulausnir, í eftirfarandi verkefnum.

40.

$$x^3+x^2+x+1=0$$

41.

$$x^3-8x^2+25x-26=0$$

42.

$$x^3+13x^2+57x+85=0$$

43.

$$3x^3-4x^2+11x+10=0$$

44.

$$x^4+2x^3+22x^2+50x-75=0$$

45.

$$2x^3-3x^2+32x+17=0$$

Grafísk verkefni

Notið formerkjareglu Descartes í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða mögulegan fjölda jákvæðra og neikvæðra lausna. Teiknið síðan graf til að staðfesta hvaða samsetning er rétt.

46.

$$f(x)=x^3-1$$

47.

$$f(x)=x^4-x^2-1$$

48.

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$$

49.

$$f(x)=x^3-2x^2+x-1$$

50.

$$f(x)=x^4+2x^3-12x^2+14x-5$$

51.

$$f(x)=2x^3+37x^2+200x+300$$

52.

$$f(x)=x^3-2x^2-16x+32$$

53.

$$f(x)=2x^4-5x^3-5x^2+5x+3$$

54.

$$f(x)=2x^4-5x^3-14x^2+20x+8$$

55.

$$f(x)=10x^4-21x^2+11$$

Töluleg verkefni

Teljið upp allar mögulegar ræðar núllstöðvar fallanna í eftirfarandi verkefnum.

56.

$$f(x)=x^4+3x^3-4x+4$$

57.

$$f(x)=2x^3+3x^2-8x+5$$

58.

$$f(x)=3x^3+5x^2-5x+4$$

59.

$$f(x)=6x^4-10x^2+13x+1$$

60.

$$f(x)=4x^5-10x^4+8x^3+x^2-8$$

Tæknibúnaður

Notið reiknivél til að teikna graf margliðufallsins í eftirfarandi verkefnum. Finnið ræðu núllstöðvarnar út frá grafinu. Allar rauntölulausnirnar eru ræðar.

61.

$$f(x)=6x^3-7x^2+1$$

62.

$$f(x)=4x^3-4x^2-13x-5$$

63.

$$f(x)=8x^3-6x^2-23x+6$$

64.

$$f(x)=12x^4+55x^3+12x^2-117x+54$$

65.

$$f(x)=16x^4-24x^3+x^2-15x+25$$

Viðbótarverkefni

Myndið margliðufall af lægsta mögulega stigi út frá gefnum upplýsingum í eftirfarandi verkefnum.

66. Raunrætur: -1, 1 og 3 og $(2,f(2))=(2,4)$

67. Raunrætur: -1 og 1 (með margfeldnina 2 og 1) og $(2,f(2))=(2,4)$

68. Raunrætur: -2 og $(\frac{1}{2})$ (með margfeldnina 2) og $(-3,f(-3))=(-3,5)$

69. Raunrætur: $-\frac{1}{2}$, 0 og $(\frac{1}{2})$ og $(-2,f(-2))=(-2,6)$

70. Raunrætur: -4, -1, 1 og 4 og $(-2,f(-2))=(-2,10)$

Hagnýt verkefni

Finnið mál kassans sem lýst er í eftirfarandi verkefnum.

71. Lengdin er tvöföld breiddin. Hæðin er 2 tommum meiri en breiddin. Rúmmálið er 192 rúmtommur.

72. Lengd, breidd og hæð eru þrjár samliggjandi heilar tölur. Rúmmálið er 120 rúmtommur.

73. Lengdin er einni tommu meiri en breiddin, sem er einni tommu meiri en hæðin. Rúmmálið er 86,625 rúmtommur.

74. Lengdin er þreföld hæðin og hæðin er einni tommu minni en breiddin. Rúmmálið er 108 rúmtommur.

75. Lengdin er 3 tommum meiri en breiddin. Breiddin er 2 tommum meiri en hæðin. Rúmmálið er 120 rúmtommur.

Finnið mál sívalningsins sem lýst er í eftirfarandi verkefnum. Grunnflöturinn er hringlaga og ásinn hornréttur á hann.

76. Geislinn er 3 tommum lengri en hæðin. Rúmmálið er 16π rúmtommur.

77. Hæðin er einum metra minni en helmingur geislans. Rúmmálið er 72π rúmmetrar.

78. Munurinn á geislanum og hæðinni er einn metri. Geislinn er lengri og rúmmálið er 48π rúmmetrar.

79. Munurinn á geislanum og hæðinni er tveir metrar. Hæðin er meiri og rúmmálið er $28{,}125\ \pi$ rúmmetrar.

80. 80. Geislinn er $(\frac{1}{3})$ metra lengri en hæðin. Rúmmálið er $\frac{98}{9}\pi$ rúmmetrar.

3.7 Ræð föll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota örvarithátt.
- Leysa hagnýt verkefni með ræðum föllum.
- Finna skilgreiningarmengi ræðra falla.
- Finna lóðfellur.
- Finna láfellur.
- Teikna gröf ræðra falla.

Gerum ráð fyrir að kostnaður við framleiðslu vöru fari eftir fjölda framleiddra eininga, x,. Hann er gefinn með jöfnunni $C\left(x\right)=15.000\ x-0{,}1\ x^2+1000$. Til að finna meðalkostnað við framleiðslu x eininga deilum við kostnaðarfallinu með fjölda eininga, x.

Meðalkostnaðarfallið, sem gefur meðalkostnað á hverja einingu þegar x einingar eru framleiddar, er

$$f\left(x\right)=\frac{15.000\ x-0{,}1\ x^2+1000}{x}$$

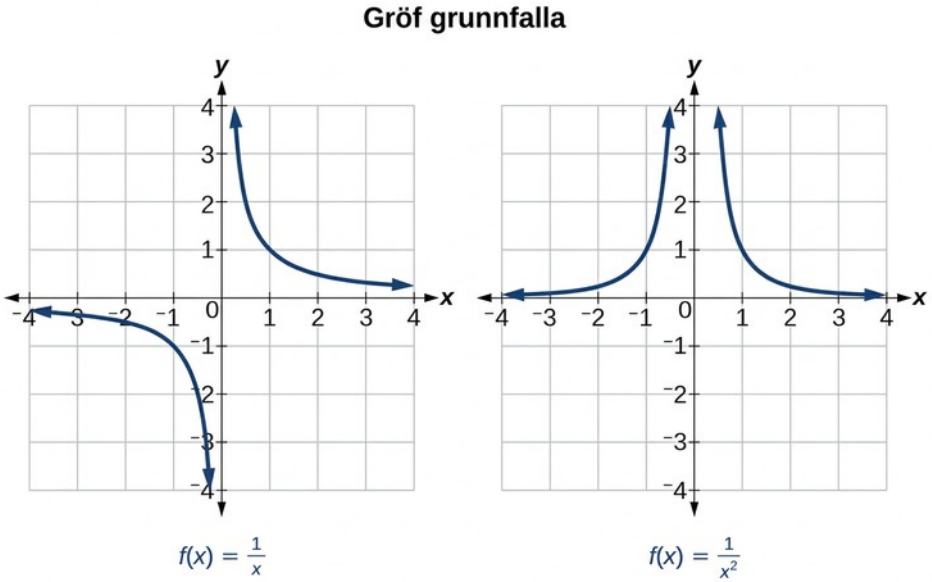
Í mörgum öðrum hagnýtum verkefnum þarf að finna meðalgildi á sambærilegan hátt og þá birtast breytur í nefnara. Ef fallið er ritað án breytu í nefnara inniheldur það neikvætt heiltöluveldi.

Í síðustu hlutum höfum við unnið með margliðuföll, þar sem veldisvísarnir eru óneikvæðar heiltölur. Í þessum hluta skoðum við ræð föll, þar sem breytur geta komið fyrir í nefnara.

Örvarithátturnotaður

Við höfum þegar séð gröf grunnfallanna umhverfufalls og annars veldis umhverfufalls. Skoðið gröfin á mynd 1 og takið eftir nokkrum eiginleikum þeirra.

3



Mynd 1

Ýmislegt kemur í ljós þegar graf fallsins $f(x)=\frac{1}{x}$. er skoðað.

1. Á vinstri grein grafsins nálgast ferillinn x-ásinn $(y=0)$ þegar $x \to -\infty$.
2. Þegar grafið nálgast $x=0$ frá vinstri fellur ferillinn, en þegar við nálgumst núll frá hægri rís hann.
3. Að lokum nálgast ferillinn á hægri grein grafsins x-ásinn $(y=0)$ þegar $x \to \infty$.

Í stuttu máli notum við örvarithátt til að sýna að x eða $f(x)$ stefni á tiltekið gildi. Sjá töflu 1.

Tafla 1 Örvaritháttur

Tákn	Merking
$x \to a^-$	x stefnir á a frá vinstri ($x<a$ en nálægt a)
$x \to a^+$	x stefnir á a frá hægri ($x>a$ en nálægt a)
$x \to \infty$	x stefnir á óendanlegt (x vex án takmarka)
$x \to -\infty$	x stefnir á mínus óendanlegt (x minnkar án takmarka)
$f(x) \to \infty$	fallgildið stefnir á óendanlegt gildi (fallgildið vex án takmarka)
$f(x) \to -\infty$	fallgildið stefnir á mínus óendanlegt (fallgildið minnkar án takmarka)
$f(x) \to a$	úttakið stefnir á a

Staðbundin hegðun $f(x)=\frac{1}{x}$

Byrjum á að skoða umhverfufallið, $f(x)=\frac{1}{x}$. Ekki má deila með núlli og því er fallið óskilgreint þegar $x=0$; núll er því ekki í skilgreiningarmenginu. Þegar inntaksgildin stefna á núll frá vinstri og eru neikvæð með sífellt minna tölugildi minnka fallgildin án takmarka, það er stefna á mínus óendanlegt. Þessi hegðun sést í töflu 2.

Tafla 2

x	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001
$f(x)=\frac{1}{x}$	−10	−100	−1000	−10.000

Með örvarithætti ritum við

$$\text{þegar } x \to 0^{-}, f(x) \to -\infty$$

Þegar inntaksgildin stefna á núll frá hægri og verða mjög litlar jákvæðar tölur vaxa fallgildin án takmarka, það er stefna á óendanlegt gildi. Þessi hegðun sést í töflu 3.

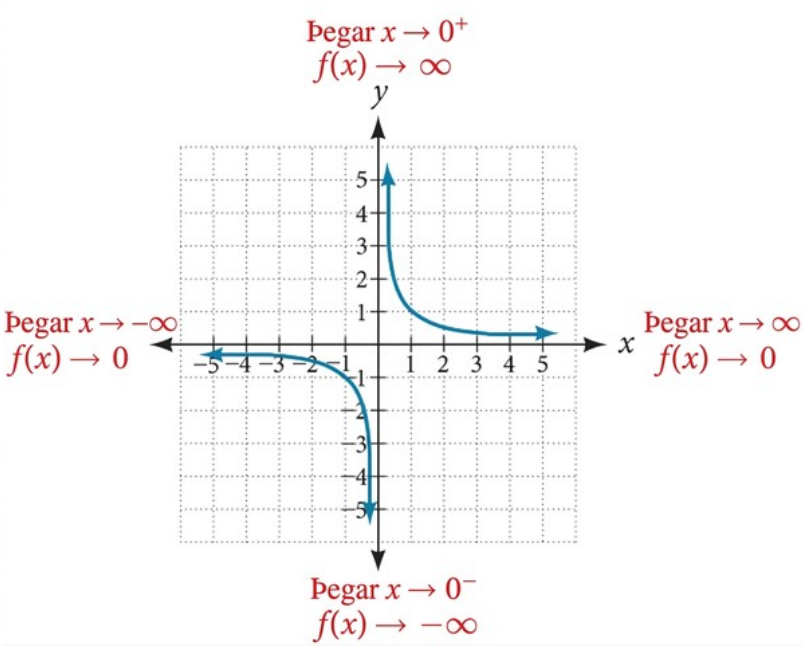
Tafla 3

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)=\frac{1}{x}$	10	100	1000	10.000

Með örvarithætti ritum við

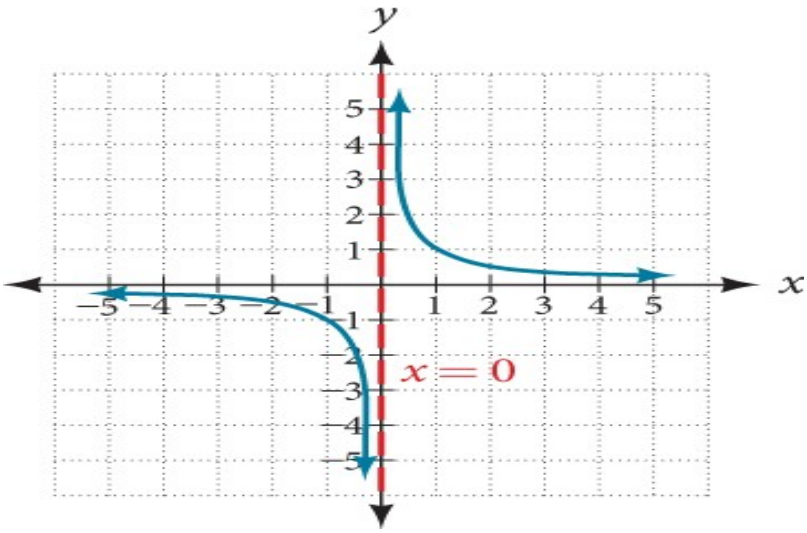
$$\text{Þegar } x \to 0^{+}, f(x) \to \infty.$$

Sjá mynd 2.



Mynd 2

Þessi hegðun myndar lóðrétta aðfellu, eða lóðfellu, sem er lóðrétt lína sem grafið nálgast en fer aldrei yfir. Hér nálgast grafið lóðréttu línuna $x=0$ þegar inntakið nálgast núll. Sjá mynd 3.



Mynd 3

LÓÐFELLA

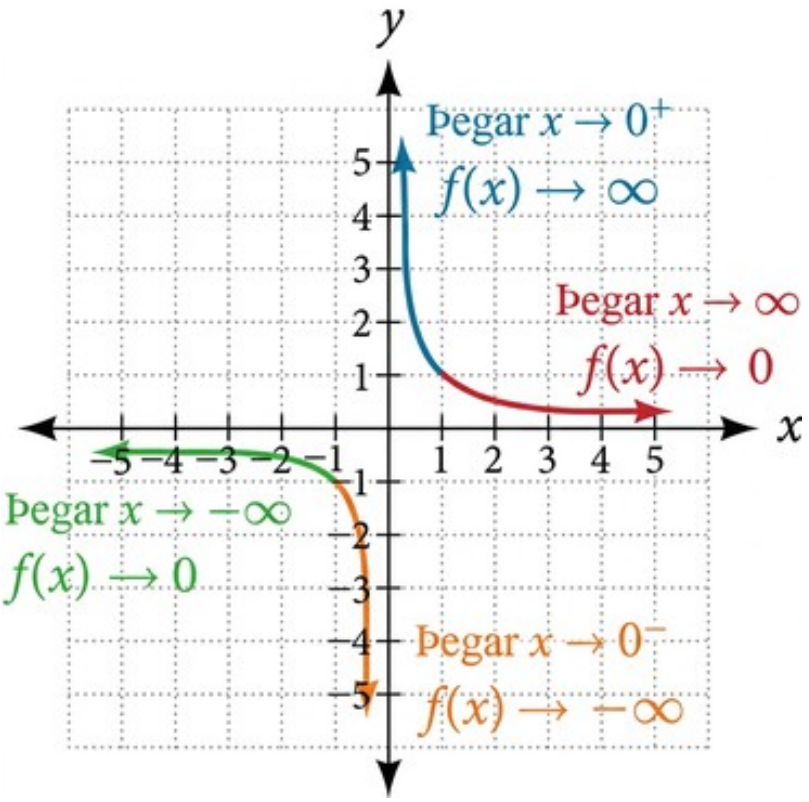
Lóðfella grafs er lóðrétt lína $x=a$ þar sem grafið stefnir á jákvætt eða neikvætt óendanlegt gildi þegar inntakið stefnir á a annaðhvort frá vinstri eða hægri. Við ritum

$$\text{Þegar } x \to a^-, f(x) \to \pm\infty \text{ eða } x \to a^+, f(x) \to \pm\infty.$$

Endahegðun $f(x)=\frac{1}{x}$

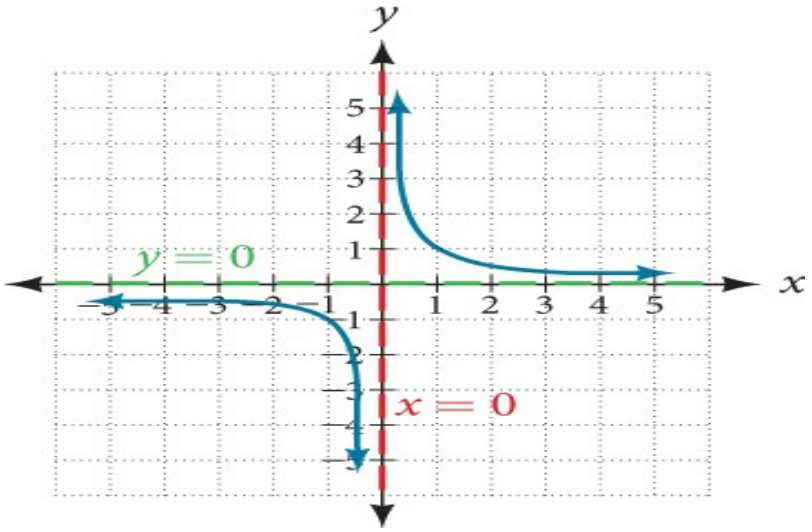
Þegar gildi x stefna á óendanlegt gildi stefna fallgildin á 0. Þegar gildi x stefna á mínus óendanlegt stefna fallgildin á 0. Sjá mynd 4. Með örvarithætti er þetta ritað

$$\text{Þegar } x \to \infty, f(x) \to 0, \text{og þegar } x \to -\infty, f(x) \to 0.$$



Mynd 4

Af heildarhegðuninni og grafinu sést að fallið nálgast 0 en nær gildinu aldrei; grafið virðist fletjast út þegar inntaksgildin verða stór. Þessi hegðun myndar láréttа aðfellu, eða láfellu, sem er lárétt lína sem grafið nálgast þegar inntakið vex eða minnkar án takmarka. Hér nálgast grafið láréttu línuna $y=0$. Sjá mynd 5.



Mynd 5

LÁFELLA

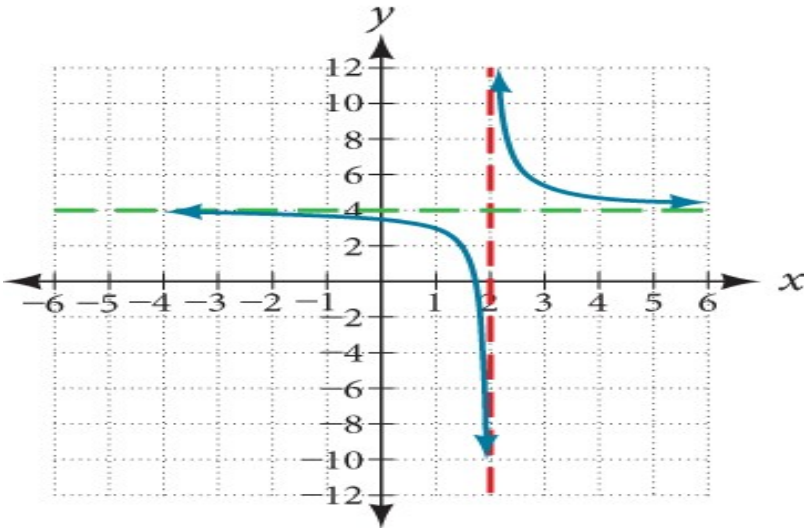
Láfella grafs er lárétt lína $y=b$ sem grafið nálgast þegar inntaksgildin vaxa eða minnka án takmarka. Við ritum

$$\text{Þegar } x \to \infty \text{ eða } x \to -\infty, f(x) \to b.$$

DÆMI 1

Örvaritháttur notaður

Notið örvarithátt til að lýsa endahegðun og staðbundinni hegðun fallsins sem sýnt er á mynd 6.



Mynd 6

Lausn

Takið eftir að grafið sýnir lóðfellu við $x=2$, sem segir okkur að fallið sé óskilgreint þegar $x=2$.

$$\text{Þegar } x \to 2^{-}, f(x) \to -\infty, \text{ og þegar } x \to 2^{+}, f(x) \to \infty.$$

Þegar inntaksgildin minnka án takmarka virðist grafið fletjast út við fallgildið 4, sem sýnir láfellu við $y=4$. Þegar inntaksgildin vaxa án takmarka fletst grafið einnig út við 4.

$$\text{Þegar } x \to \infty, f(x) \to 4 \text{ og þegar } x \to -\infty, f(x) \to 4.$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Notið örvarithátt til að lýsa endahegðun og staðbundinni hegðun annars veldis umhverfufallsins.

DÆMI 2

Rætt fall teiknað með ummyndunum

Teiknið skissu af grafi umhverfufallsins sem hefur verið hliðrað um tvær einingar til vinstri og þrjár einingar upp. Finnið láfellu og lóðfellu grafsins, ef þær eru til.

Lausn

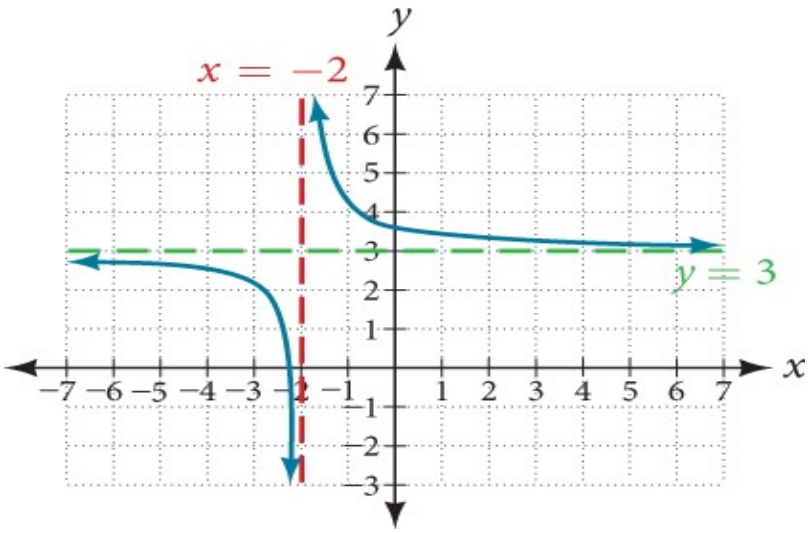
Ef grafinu er hliðrað um 2 til vinstri og 3 upp fæst fallið

$$f(x)=\frac{1}{x+2}+3$$

eða, með því að setja liðina á samnefnara,

$$f(x)=\frac{3x+7}{x+2}$$

Graf hliðraða fallsins er sýnt á mynd 7.



Mynd 7

Takið eftir að fallið er óskilgreint þegar $x=-2$, og grafið sýnir einnig lóðfellu við $x=-2$.

$$\text{Þegar } x \to -2^{-}, f(x) \to -\infty, \text{og þegar } x \to -2^{+}, f(x) \to \infty.$$

Þegar inntaksgildin vaxa eða minnka án takmarka virðist grafið fletjast út við fallgildið 3, sem sýnir láfellu við $y=3$.

$$\text{Þegar } x \to \pm\infty, f(x) \to 3.$$

Greining

Takið eftir að láfellunni og lóðfellunni er hliðrað um 2 til vinstri og 3 upp ásamt fallinu.

REYNIÐ SJÁLF #2

Hliðrið öðru veldi umhverfufallsins um 3 einingar til hægri og 4 einingar niður. Teiknið graf fallsins og finnið láfellu þess og lóðfellu.

Hagnýt verkefni með ræðum föllum leyst

Í dæmi 2 hliðruðum við grunnfalli þannig að fallið $f(x)=\frac{3x+7}{x+2}$. fékkst. Þetta er dæmi um rætt fall. Rætt fall er fall sem má rita sem kvóta tveggja margliðufalla. Í mörgum raunhæfum verkefnum þarf að finna hlutfall tveggja margliðufalla. Verkefni um hraða og styrk fela oft í sér ræð föll.

RÆTT FALL

Rætt fall er fall sem má rita sem kvóta tveggja margliðufalla $P(x)$ og $Q(x)$.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_p x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_q x^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_1 x+b_0}, Q(x)\neq 0$$

DÆMI 3

Hagnýtt verkefni með ræðu falli leyst

Þegar birgðir af tilbúnum lausnum þrýtur þarf hjúkrunarfræðingur í flóttamannabúðum að útbúa sykurlausn í æð fyrir sjúklinga á sjúkrahúsi búðanna. Í stórum blöndunartanki eru nú 100 gallon af vatni og 5 pundum af sykri hefur verið blandað út í það. Skrúfað verður frá krana sem hleypir 10 gallonum af eimuðu vatni á mínútu í tankinn og samtímis er sykri hellt í hann með hraðanum 1 pund á mínútu. Finnið styrk sykurs í tankinum, í pundum á gallon, eftir 12 mínútur. Er styrkurinn þá meiri en í upphafi?

Lausn

Látum t tákna fjölda mínútna frá því að skrúfað var frá krananum. Vatnsmagnið vex um 10 gallon á mínútu og sykurmagnið um 1 pund á mínútu; þetta eru fastir breytingarhraðar. Því breytist vatnsmagnið í tankinum línulega og það sama gildir um sykurmagnið. Við getum sett fram sérstaka jöfnu fyrir hvort magn:

$$\begin{aligned}&\text{vatn: } W(t)=100+10\ t \text{ í gallonum}\\&\text{sykur: } S(t)=5+1\ t \text{ í pundum}\end{aligned}$$

Styrkurinn, C, er hlutfall punda af sykri og gallona af vatni

$$C(t)=\frac{5+t}{100+10t}$$

Styrkurinn eftir 12 mínútur fæst með því að reikna gildi $C(t)$ fyrir $t=12$.

$$\begin{aligned}C(12) &= \tfrac{5+12}{100+10(12)}\\ &= \tfrac{17}{220}\end{aligned}$$

Þetta merkir að styrkurinn er 17 pund af sykri á 220 gallon af vatni.

Í upphafi er styrkurinn

$$\begin{aligned}C(0) &= \tfrac{5+0}{100+10(0)}\\ &= \tfrac{1}{20}\end{aligned}$$

Þar sem $\frac{17}{220}\approx 0{,}08 > \frac{1}{20}=0{,}05$ er styrkurinn meiri eftir 12 mínútur en í upphafi.

Greining

Til að finna láfelluna deilum við forystustuðli teljarans með forystustuðli nefnarans:

$$\frac{1}{10}=0{,}1$$

Takið eftir að láfellan er $y=\ 0{,}1$. Það þýðir að þegar til lengri tíma er litið stefnir styrkurinn, C, það er hlutfall punda af sykri og gallona af vatni, á 0,1.

3

REYNIÐ SJÁLF #3

Á samkomu í hádeginu eru 1.200 nemendur á fyrsta ári og 1.500 nemendur á öðru ári. Eftir hádegi koma 20 fyrsta árs nemendur á samkomuna á fimm mínútna fresti en 15 annars árs nemendur fara á sama fimm mínútna bili. Finnið hlutfall fyrsta árs nemenda og annars árs nemenda klukkan 13.

Skilgreiningarmengi ræðra falla fundin

Lóðfella samsvarar gildi þar sem rætt fall er óskilgreint og því er gildið ekki í skilgreiningarmengi fallsins. Skilgreiningarmengi umhverfufalls getur ekki innihaldið gildi sem gera nefnarann jafnan núlli. Til að finna skilgreiningarmengi ræðs falls þurfum við almennt að finna þau inntaksgildi sem leiða til deilingar með núlli.

SKILGREININGARMENGI RÆÐS FALLS

Skilgreiningarmengi ræðs falls inniheldur allar rauntölur nema þær sem gera nefnarann jafnan núlli.

AÐFERÐ

Finnið skilgreiningarmengi gefins ræðs falls.

1. Setjið nefnarann jafnan núlli.
2. Leysið jöfnuna til að finna þau x-gildi sem gera nefnarann jafnan núlli.
3. Skilgreiningarmengið er mengi allra rauntalna nema þeirra sem fundust í skrefi 2.

DÆMI 4

Skilgreiningarmengi ræðs falls fundið

Finnið skilgreiningarmengi $f(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$.

Lausn

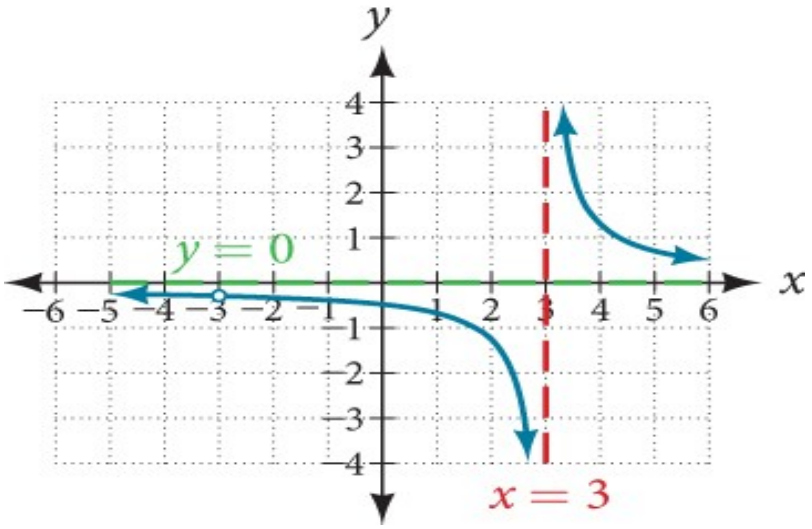
Byrjið á að setja nefnarann jafnan núlli og leysa jöfnuna.

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

Nefnarinn er jafn núlli þegar $x = \pm 3$. Skilgreiningarmengi fallsins er mengi allra rauntalna nema $x = \pm 3$.

Greining

Graf fallsins á mynd 8 staðfestir að fallið er ekki skilgreint þegar $x = \pm 3$.



Mynd 8

Lóðfella er við $x = 3$ og gat í grafinu við $x = -3$. Fjallað verður nánar um slík göt síðar í þessum hluta.

REYNIÐ SJÁLF #4

Finnið skilgreiningarmengi $f(x) = \dfrac{4x}{5(x-1)(x-5)}$.

Lóðfellur ræðra falla fundnar

Með því að skoða graf ræðs falls getum við rannsakað staðbundna hegðun þess og auðveldlega séð hvort aðfellur séu til. Stundum getum við jafnvel áætlað hvar þær liggja. Án grafs getum við þó líka ákvarðað hvort gefið rætt fall hafi aðfellur og reiknað hvar þær liggja.

Lóðfellur

Til að finna lóðfellur ræðs falls styttum við alla sameiginlega þætti teljara og nefnara út. Lóðfellurnar eru við rauntölunúllstöðvar nefnarans sem eftir stendur.

AÐFERÐ

Finnið allar lóðfellur grafs gefins ræðs falls.

1. Þáttið teljarann og nefnarann.
2. Skráið allar takmarkanir á skilgreiningarmengi fallsins.
3. Einfaldið stæðuna með því að stytta út sameiginlega þætti teljara og nefnara.
4. Skráið öll gildi sem gera nefnara einfaldaða formsins jafnan núlli. Þar eru lóðfellurnar.
5. Skráið þær takmarkanir á skilgreiningarmenginu þar sem engar aðfellur eru. Þar eru afmáanlegir sérstöðupunktar.

DÆMI 5

Lóðfellur fundnar

Finnið lóðfellur grafsins fyrir $k(x)=\dfrac{5+2x^2}{2-x-x^2}$.

Lausn

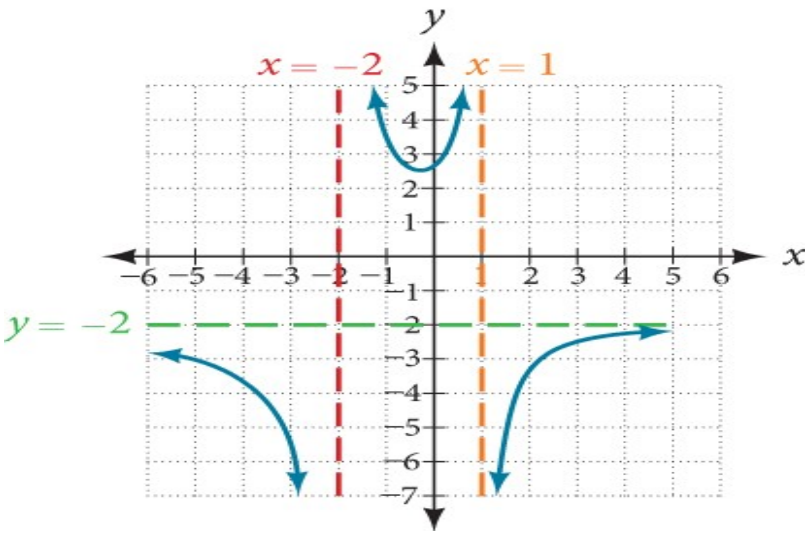
Þáttið fyrst teljarann og nefnarann.

$$\begin{aligned} k(x) &= \tfrac{5+2x^2}{2-x-x^2} \\ &= \tfrac{5+2x^2}{(2+x)(1-x)} \end{aligned}$$

Til að finna lóðfellurnar ákvarðum við hvar fallið er óskilgreint með því að setja nefnarann jafnan núlli:

$$\begin{aligned} (2+x)(1-x) &= 0 \\ x &= -2, 1 \end{aligned}$$

Hvorki $x=-2$ né $x=1$ eru núllstöðvar teljarans og því sýna gildin tvær lóðfellur. Grafið á mynd 9 staðfestir staðsetningu lóðfellanna tveggja.



Mynd 9

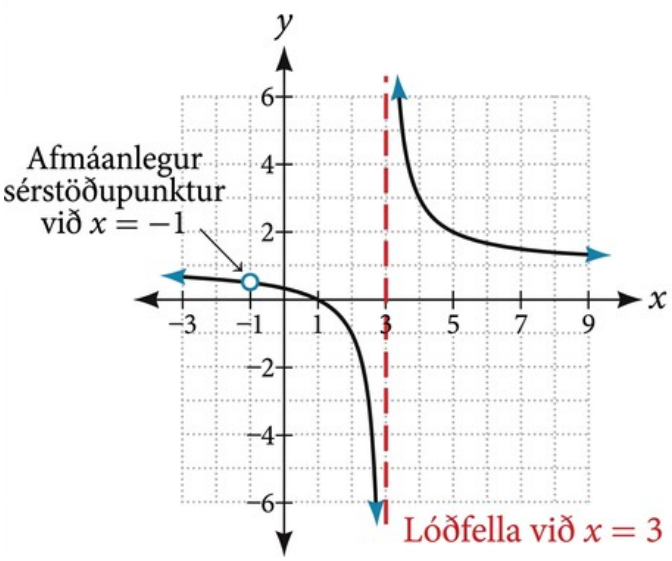
Afmáanlegir sérstöðupunktar

Stundum er gat í grafi: einn punktur þar sem grafið er ekki skilgreint. Hann er sýndur með opnum hring. Slíkt gat nefnist afmáanlegur sérstöðupunktur.

Fallið $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2x-3}$ má til dæmis umrita með því að þátta teljarann og nefnarann.

$$f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)}$$

Takið eftir að $x+1$ er sameiginlegur þáttur teljarans og nefnarans. Núllstöð þáttarins, $x=-1$, segir hvar afmáanlegi sérstöðupunkturinn er. Takið einnig eftir að $x-3$ er þáttur í nefnaranum en ekki teljaranum. Núllstöð þess þáttar, $x=3$, gefur staðsetningu lóðfellunnar. Sjá mynd 10.



Mynd 10

AFMÁANLEGIR SÉRSTÖÐUPUNKTAR RÆÐRA FALLA

Afmáanlegur sérstöðupunktur kemur fram í grafi ræðs falls við $x = a$ ef a er núllstöð nefnarans sem hverfur alveg úr honum þegar sameiginlegir þættir eru styttir út. Við þáttum teljara og nefnara og leitum að sameiginlegum þáttum. Ef þeir finnast setjum við hvern sameiginlegan þátt jafnan 0 og leysum jöfnuna. Lausnin gefur staðsetningu afmáanlegs sérstöðupunkts ef margfeldni þáttarins í teljaranum er meiri en eða jöfn margfeldni hans í nefnaranum. Ef margfeldni þáttarins er meiri í nefnaranum er aðfella samt við gildið.

DÆMI 6

Lóðfellur og afmáanlegir sérstöðupunktar grafs fundin

Finnið lóðfellur og afmáanlega sérstöðupunkta grafsins fyrir $k(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$.

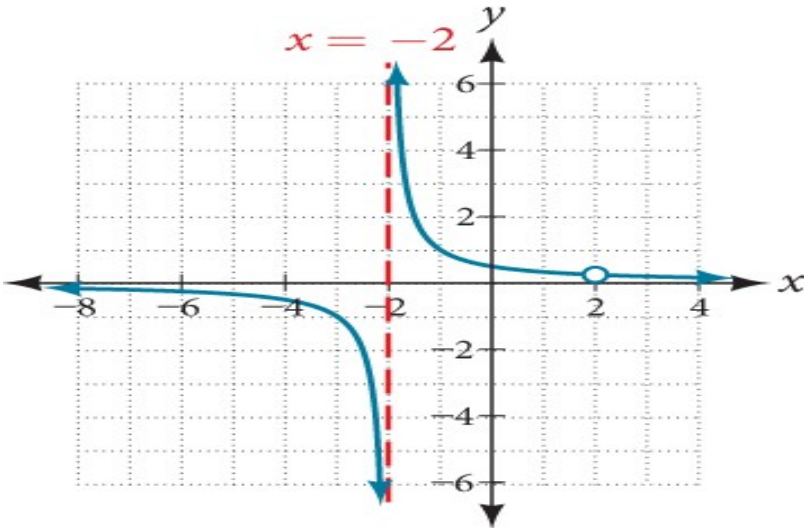
Lausn

Þáttið teljarann og nefnarann.

$$k(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)}$$

Takið eftir sameiginlega þættinum $x-2$. í teljaranum og nefnaranum. Núllstöð þáttarins er $x = 2$. Þar er afmáanlegi sérstöðupunkturinn.

Takið eftir að þátturinn $x+2$. er í nefnaranum en ekki teljaranum. Núllstöð þáttarins er $x = -2$. Lóðfellan er $x = -2$. Sjá mynd 11.



Mynd 11

Graf fallsins hefur lóðfellu við $x=-2$, en gat við $x=2$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Finnið lóðfellur og afmáanlega sérstöðupunkta grafsins fyrir $f(x)=\frac{x^2-25}{x^3-6x^2+5x}$.

Láfellur ræðra falla fundnar

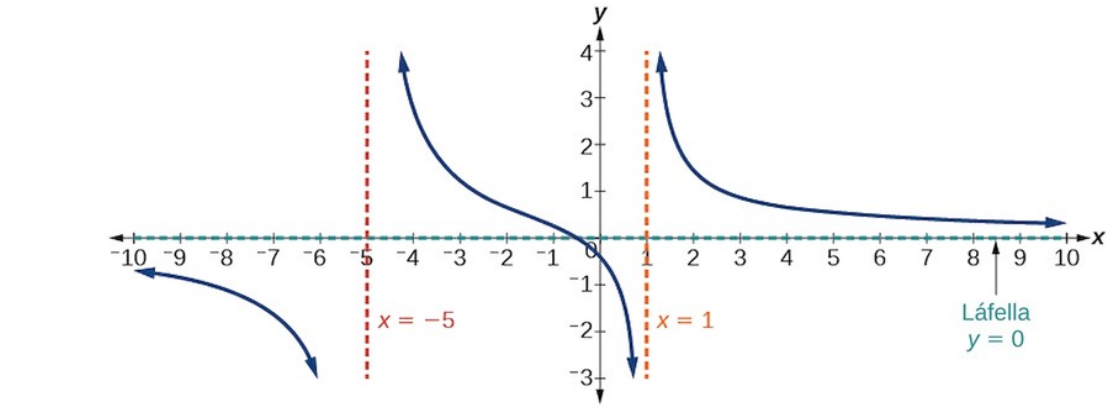
Lóðfellur lýsa hegðun grafs þegar fallgildin vaxa eða minnka án takmarka, en láfellur hjálpa okkur að lýsa hegðun þess þegar inntaksgildin vaxa eða minnka án takmarka. Munið að endahegðun margliðu endurspeglar endahegðun forystuliðarins. Á sama hátt endurspeglar endahegðun ræðs falls hlutfall forystuliða teljarans og nefnarans.

Þrjár ólíkar niðurstöður geta fengist þegar leitað er að láfellum:

Tilvik 1: Ef stig nefnarans > stig teljarans er láfella við $y=0$.

$$\text{Dæmi: } f(x)=\frac{4x+2}{x^2+4x-5}$$

Í þessu tilviki er endahegðunin $f(x)\approx\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$. Það segir okkur að þegar inntaksgildin vaxa eða minnka án takmarka hagar fallið sér svipað og fallið $g(x)=\frac{4}{x}$, og fallgildin stefna á núll. Því er láfella við $y=0$. Sjá mynd 12. Takið eftir að grafið fer yfir láfelluna.



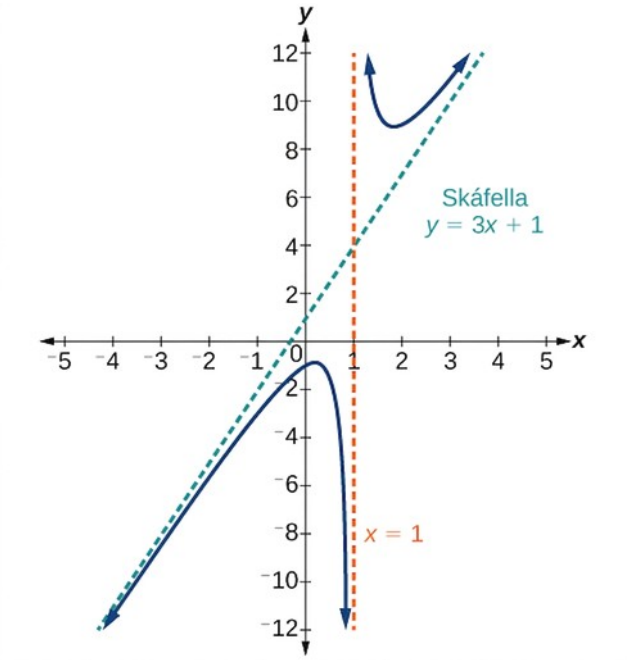
Mynd 12 Láfella $y=0$ þegar $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$ þar sem stig $p<stig\, q$.

Tilvik 2: Ef stig nefnarans er einu lægra en stig teljarans fæst skáfella.

$$\text{Dæmi: } f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x-1}$$

Í þessu tilviki er endahegðunin $f(x)\approx\frac{3x^2}{x}=3x$. Það segir okkur að þegar inntaksgildin vaxa eða minnka án takmarka hagar fallið sér svipað og fallið $g(x)=3x$. Þegar inntaksgildin verða stór vaxa fallgildin og fletjast ekki út og því hefur grafið enga láfellu. Graf $g(x)=3x$ er hins vegar skálína og þar sem f hagar sér svipað og g, nálgast það línu nálægt $y=3x$. Þetta bendir til þess að grafið hafi skáfellu; jöfnu hennar finnum við með deilingu.

Til að finna jöfnu skáfellunnar deilum við $\frac{3x^2-2x+1}{x-1}$. Kvótinn er $3x+1$, og afgangurinn er 2. Skáfellan er graf línunnar $g(x)=3x+1$. Sjá mynd 13.

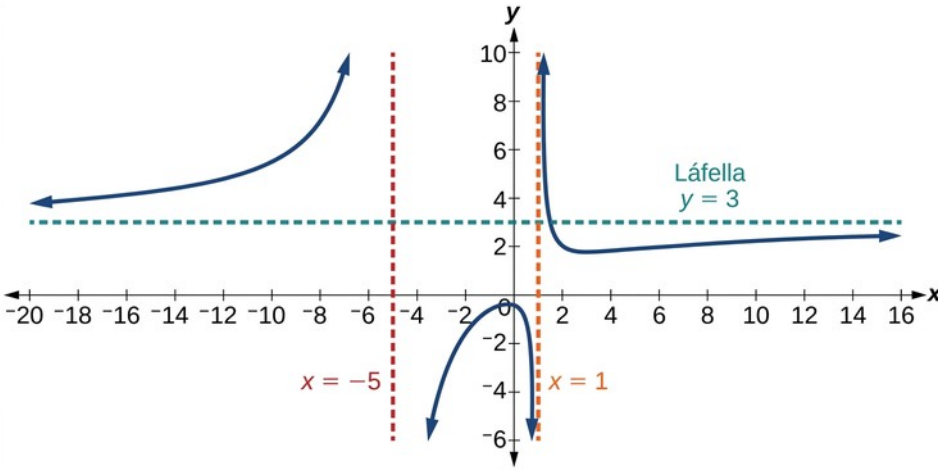


Mynd 13 Skáfella þegar $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$ þar sem stig $p >$ stig q um 1.

Tilvik 3: Ef stig nefnarans = stig teljarans er láfella við $y=\frac{a_n}{b_n}$, þar sem a_n og b_n eru forystustuðlar $p(x)$ og $q(x)$ fyrir $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$.

Dæmi: $f(x)=\frac{3x^2+2}{x^2+4x-5}$

Í þessu tilviki er endahegðunin $f(x)\approx\frac{3x^2}{x^2}=3$. Það segir okkur að þegar inntaksgildin verða stór hagar fallið sér eins og fallið $g(x)=3$, sem er lárétt lína. Þegar $x\to\pm\infty, f(x)\to 3$, er því láfella við $y=3$. Sjá mynd 14. Takið eftir að grafið fer yfir láfelluna.



Mynd 14 Láfella þegar $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$ þar sem stig $p=$ stig q.

Takið eftir að graf ræðs falls fer aldrei yfir lóðfellu en getur farið yfir láfellu eða skáfellu. Grafið getur haft margar lóðfellur en í mesta lagi eina láfellu eða skáfellu.

Ef stig teljarans er meira en einu hærra en stig nefnarans líkir endahegðun grafsins eftir hegðun hlutfalls forystuliða teljarans og nefnarans. Gerum til dæmis ráð fyrir fallinu

$$f(x)=\frac{3x^5-x^2}{x+3}$$

með endahegðunina

$$f(x)\approx\frac{3x^5}{x}=3x^4,$$

Endahegðun grafsins svipar þá til endahegðunar margliðu af sléttu stigi með jákvæðan forystustuðul.

$$x\to\pm\infty, f(x)\to\infty$$

LÁFELLUR RÆÐRA FALLA

Láfellu ræðs falls má ákvarða með því að bera saman stig teljarans og nefnarans.

- Stig teljarans er lægra en stig nefnarans: láfella við $y=0$.
- Stig teljarans er einu hærra en stig nefnarans: engin láfella; skáfella er til.
- Stig teljarans er jafnt stigi nefnarans: láfella við hlutfall forystustuðlanna.

DÆMI 7

Láfellur og skáfellur fundnar

Finnið láfellu eða skáfellu fallanna hér að neðan.

1. ⓐ $g(x)=\frac{6x^3-10x}{2x^3+5x^2}$
2. ⓑ $h(x)=\frac{x^2-4x+1}{x+2}$
3. ⓒ $k(x)=\frac{x^2+4x}{x^3-8}$

Lausn

Í lausnunum notum við $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}, q(x)\neq 0$.

1. ⓐ $g(x)=\frac{6x^3-10x}{2x^3+5x^2}$: Stig $p=$stig $q=3$, og því má finna láfelluna með því að reikna hlutfall forystuliðanna. Láfella er við $y=\frac{6}{2}$ eða $y=3$.
2. ⓑ $h(x)=\frac{x^2-4x+1}{x+2}$: Stig $p=2$ og stig $q=1$. Þar sem $p>q$ um 1 er skáfella sem fæst af $\frac{x^2-4x+1}{x+2}$.

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & -4 & 1 \\ & & -2 & 12 \\ \hline & 1 & -6 & 13 \end{array}$$

   Kvótinn er $x-6$ og afgangurinn er 13. Skáfella er við $y=x-6$.
3. ⓒ $k(x)=\frac{x^2+4x}{x^3-8}$: Stig $p=2<$ stig $q=3$, og því er láfella við $y=0$.

DÆMI 8

Láfellur fundnar

Í fyrra verkefninu um sykurstyrk settum við fram jöfnuna $C(t)=\frac{5+t}{100+10t}$.

Finnið láfelluna og túlkið hana í samhengi við verkefnið.

Lausn

Bæði teljarinn og nefnarinn eru línulegir, það er af stigi 1. Þar sem stigin eru jöfn er láfellan við hlutfall forystustuðlanna. Forystuliður teljarans er t, með stuðulinn 1. Forystuliður nefnarans er $10t$, með stuðulinn 10. Láfellan er við hlutfall þessara gilda:

$$t\to\infty, C(t)\to\frac{1}{10}$$

Fallið hefur láfellu við $y=\frac{1}{10}$.

Það segir okkur að þegar gildi t vaxa stefna gildi C á $\frac{1}{10}$. Í samhengi verkefnisins merkir það að eftir því sem tíminn líður stefnir sykurstyrkurinn í tankinum á einn tíunda hluta punds af sykri á hvert gallon af vatni, það er ($\frac{1}{10}$) pund á gallon.

3

DÆMI 9

Láfellur og lóðfellur fundnar

Finnið láfellur og lóðfellur fallsins

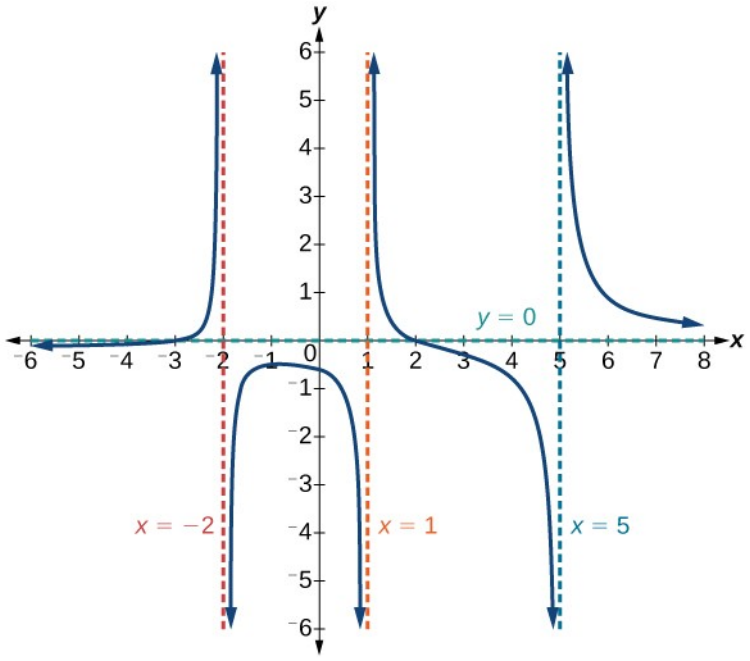
$$f(x)=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x-5)}$$

Lausn

Takið fyrst eftir að teljarinn og nefnarinn hafa enga sameiginlega þætti og því eru engir mögulegir afmáanlegir sérstöðupunktar.

Fallið hefur lóðfellur þar sem nefnarinn er núll og fallið því óskilgreint. Nefnarinn er núll við $x=1,-2,\text{og } 5$, og því eru lóðfellur við þessi gildi.

Teljarinn er af stigi 2 en nefnarinn af stigi 3. Þar sem stig nefnarans er hærra en stig teljarans vex nefnarinn hraðar en teljarinn og fallgildin stefna á núll þegar inntaksgildin verða stór. Því gildir: $x\to\pm\infty, f(x)\to 0$. Fallið hefur láfellu við $y=0$. Sjá mynd 15.



Mynd 15

REYNIÐ SJÁLF #6

Finnið lóðfellur og láfellur fallsins:

$$f(x)=\frac{(2x-1)(2x+1)}{(x-2)(x+3)}$$

SKURÐPUNKTAR RÆÐRA FALLA VIÐ ÁSA

Rætt fall hefur skurðpunkt við y-ás þegar inntakið er núll, ef fallið er skilgreint þar. Ef fallið er ekki skilgreint þegar inntakið er núll hefur það engan skurðpunkt við y-ás.

Á sama hátt hefur rætt fall skurðpunkta við x-ás við þau inntaksgildi sem gera fallgildið jafnt núlli. Brot er aðeins jafnt núlli þegar teljarinn er núll og því geta skurðpunktar við x-ás aðeins komið fram þegar teljari ræðs falls er núll.

DÆMI 10

Skurðpunktar ræðs falls við ása fundnir

Finnið skurðpunkta fallsins $f(x)=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x-5)}$. við ásana.

Lausn

Skurðpunktinn við y-ás má finna með því að reikna gildi fallsins fyrir núll

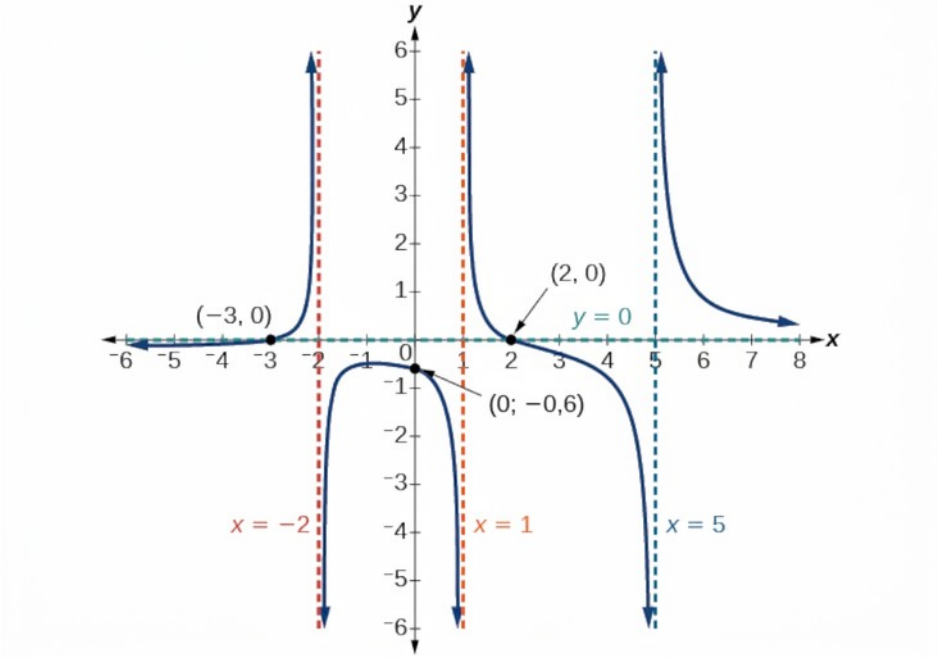
$$f(0)=\frac{(0-2)(0+3)}{(0-1)(0+2)(0-5)}$$
$$=\frac{-6}{10}$$
$$=-\frac{3}{5}$$
$$=-0{,}6$$

Skurðpunktar við x-ás koma fram þegar fallið er jafnt núlli:

3

$$0=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x-5)}$$ Þetta er núll þegar teljarinn er núll.
$$0=(x-2)(x+3)$$
$$x=2,\ -3$$

Skurðpunkturinn við y-ás er $(0;-0{,}6)$ og skurðpunktarnir við x-ás eru $(2,0)$ og $(-3,0)$. Sjá mynd 16.



Mynd 16

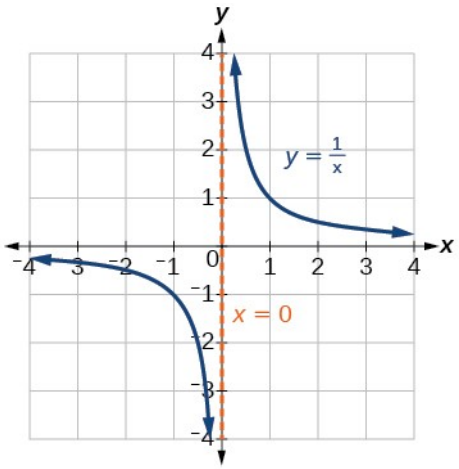
REYNIÐ SJÁLF #7

Hliðrið öðru veldi umhverfufallsins um 3 einingar til hægri og 4 einingar niður. Ritið nýja fallið sem rætt fall. Finnið síðan skurðpunkta þess við x- og y-ás og láfellu og lóðfellu.

Gröf ræðra falla teiknuð

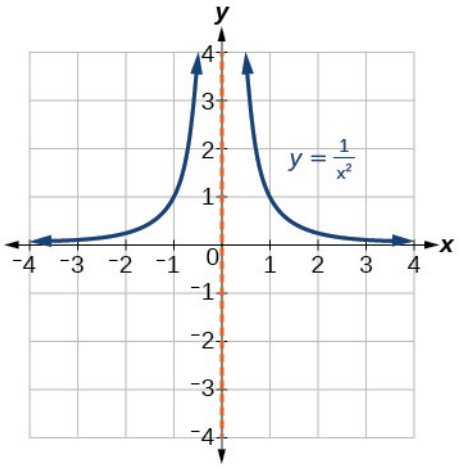
Í dæmi 9 sáum við hvernig þátta má teljara og nefnara ræðs falls. Núllstöðvar teljarans innan skilgreiningarmengisins gefa skurðpunkta grafsins við x-ás en núllstöðvar nefnarans eftir fulla styttingu gefa lóðfellur þess. Eins og í margliðum geta þættir teljarans verið í öðru eða hærra heiltöluveldi. Sem betur fer eru áhrifin á lögun grafsins við skurðpunktana þau sömu og við sáum hjá margliðum.

Hegðun við lóðfellur sem samsvara þáttum nefnarans líkist öðru hvoru grunnfallanna umhverfufalli og öðru veldi þess. Þegar margfeldni viðkomandi núllstöðvar nefnarans eftir fulla styttingu er oddatala stefnir grafið á jákvætt óendanlegt gildi öðrum megin við lóðfelluna en á neikvætt óendanlegt gildi hinum megin. Sjá mynd 17.



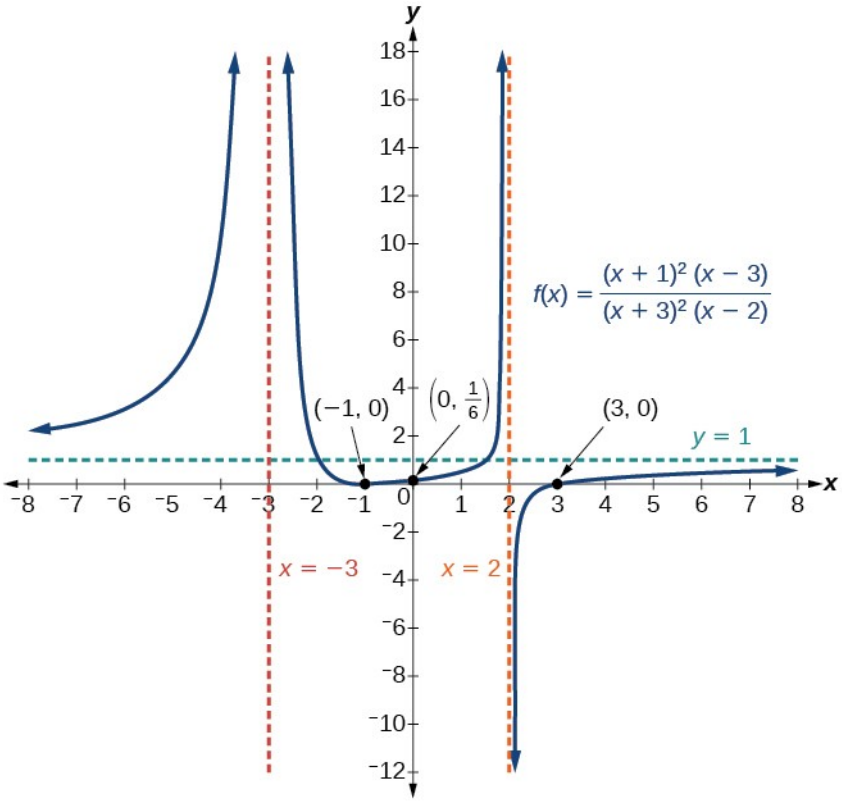
Mynd 17

Þegar margfeldni viðkomandi núllstöðvar nefnarans eftir fulla styttingu er slétt tala stefnir grafið annaðhvort á jákvætt óendanlegt gildi báðum megin við lóðfelluna eða á neikvætt óendanlegt gildi báðum megin. Sjá mynd 18.



Mynd 18

Graf fallsins $f(x)=\frac{(x+1)^2(x-3)}{(x+3)^2(x-2)}$ er til dæmis sýnt á mynd 19.



Mynd 19

- Við skurðpunktinn við x-ás, $x=-1$, sem samsvarar þættinum $(x+1)^2$) í teljaranum, snertir grafið ásinn og snýr við, í samræmi við að þátturinn er annars stigs.
- Við skurðpunktinn við x-ás, $x=3$, sem samsvarar þættinum $(x-3)$ í teljaranum, fer grafið í gegnum ásinn eins og búast má við af línulegum þætti.
- Við lóðfelluna $x=-3$, sem samsvarar þættinum $(x+3)^2$) í nefnaranum, stefnir grafið á jákvætt óendanlegt gildi báðum megin við aðfelluna, í samræmi við hegðun fallsins $f(x)=\frac{1}{x^2}$.
- Við lóðfelluna $x=2$, sem samsvarar þættinum $(x-2)$ í nefnaranum, stefnir grafið á jákvætt óendanlegt gildi vinstra megin við aðfelluna og neikvætt óendanlegt gildi hægra megin.

AÐFERÐ

Teiknið skissu af grafi gefins ræðs falls.

1. Ef fallið er skilgreint fyrir 0 reiknið þið gildi þess þar til að finna skurðpunktinn við y-ás.
2. Þáttið teljarann og nefnarann.
3. Finnið núllstöðvar teljarans sem tilheyra upphaflega skilgreiningarmenginu til að ákvarða skurðpunkta við x-ás.
4. Finnið margfeldni skurðpunktanna við x-ás til að ákvarða hegðun grafsins við punktana.

5. Styttið alla sameiginlega þætti út. Finnið rauntölunúllstöðvar nefnarans sem eftir stendur til að ákvarða lóðfellur. Margfeldni þessara núllstöðva segir til um staðbundna hegðun.
6. Finnið þær rauntölunúllstöðvar upphaflega nefnarans sem eru ekki lengur núllstöðvar hans eftir fulla styttingu. Þar eru afmáanlegir sérstöðupunktar.
7. Berið saman stig teljarans og nefnarans til að finna láfellu eða skáfellu.
8. Teiknið skissu af grafinu.

DÆMI 11

Graf ræðs falls teiknað

Teiknið skissu af grafi $f(x)=\frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)^2(x-2)}$.

Lausn

Fallið er þegar þáttað og því getum við sleppt einu skrefi.

Næst finnum við skurðpunktana. Með því að reikna gildi fallsins fyrir núll fæst skurðpunkturinn við y-ás:

$$\begin{aligned} f(0) &= \tfrac{(0+2)(0-3)}{(0+1)^2(0-2)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Til að finna skurðpunktana við x-ás ákvarðum við hvenær teljari fallsins er núll. Með því að setja hvern þátt jafnan núlli finnum við skurðpunkta við x-ás við $x=-2$ og $x=3$. Við báða punktana er hegðunin línuleg, með margfeldnina 1, og grafið fer í gegnum ásinn.

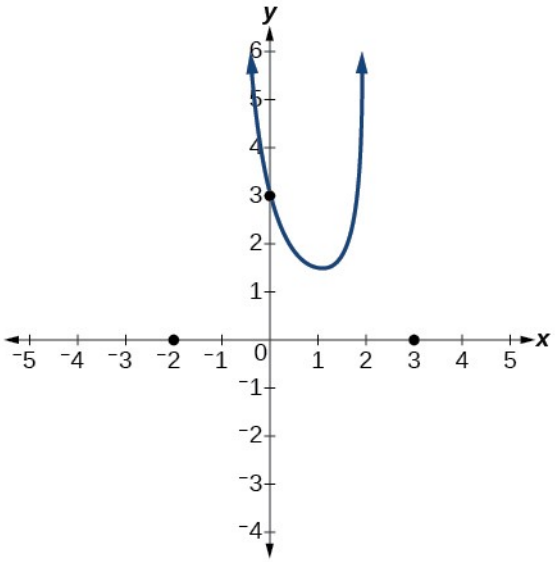
Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,3)$ og skurðpunktarnir við x-ás eru $(-2,0)$ og $(3,0)$.

Til að finna lóðfellurnar ákvarðum við hvenær nefnarinn er núll. Það gerist þegar $x+1=0$ og þegar $x-2=0$, sem gefur lóðfellur við $x=-1$ og $x=2$.

Teljarinn og nefnarinn hafa enga sameiginlega þætti og því eru engir afmáanlegir sérstöðupunktar.

Að lokum er stig nefnarans hærra en stig teljarans og því hefur grafið láfellu við $y=0$.

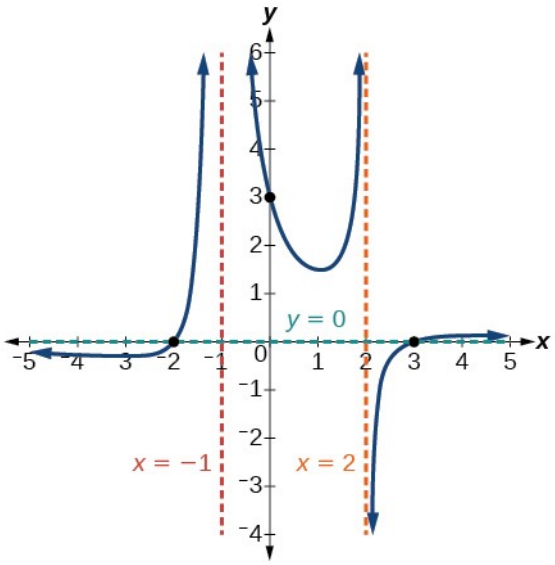
Til að teikna skissu af grafinu má byrja á að merkja skurðpunktana þrjá. Þar sem grafið hefur enga skurðpunkta við x-ás milli lóðfellanna og skurðpunkturinn við y-ás er ofan við x-ás vitum við að fallið er jákvætt milli aðfellanna. Þá getum við fyllt inn miðhluta grafsins eins og sýnt er á mynd 20.



Mynd 20

Þátturinn sem samsvarar lóðfellunni við $x = -1$ er í öðru veldi og því er hegðunin sú sama báðum megin við aðfelluna. Grafið stefnir á jákvætt óendanlegt gildi þegar inntaksgildin nálgast aðfelluna frá hægri og það stefnir því einnig á jákvætt óendanlegt gildi frá vinstri.

Þátturinn sem samsvarar lóðfellunni við $x = 2$, er í fyrsta veldi og því er hegðunin gagnstæð sitt hvorum megin við aðfelluna. Sjá mynd 21. Eftir að grafið fer í gegnum skurðpunktana við x-ás fletst það út og stefnir á fallgildið núll, eins og láfellan sýnir.



Mynd 21

REYNIÐ SJÁLF #8

Notið eiginleika margliða og ræðra falla til að lýsa hegðun fallsins $f(x)=\frac{(x+2)^2(x-2)}{2(x-1)^2(x-3)}$, og teiknið skissu af grafinu.

Ræð föll sett fram

Nú höfum við greint jöfnur ræðra falla og tengsl þeirra við gröfin og getum því notað upplýsingar á grafi til að setja fallið fram. Rætt fall á þáttuðu formi hefur skurðpunkt við x-ás þar sem hver þáttur teljarans er núll, að því gefnu að gildið tilheyri upphaflega skilgreiningarmenginu. Því getum við myndað teljara falls sem fer í gegnum tiltekna skurðpunkta við x-ás með samsvarandi þáttum. Á sama hátt hefur fallið lóðfellu við núllstöðvar nefnarans eftir fulla styttingu og því getum við myndað nefnara sem gefur tilteknar lóðfellur með samsvarandi þáttum.

RÆÐ FÖLL SETT FRAM ÚT FRÁ SKURÐPUNKTUM OG AÐFELLUM

Ef rætt fall hefur skurðpunkta við x-ás í $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, lóðfellur við $x=v_1, v_2, \ldots, v_m$, og ekkert $x_i=$ neinu v_j, þá má rita fallið á forminu:

$$f(x)=a\frac{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_n)^{p_n}}{(x-v_1)^{q_1}(x-v_2)^{q_2}\cdots(x-v_m)^{q_m}}$$

þar sem veldin (p_i) eða (q_i) eru jákvæðar heiltölur. Hegðun grafsins við samsvarandi skurðpunkt eða aðfellu gefur vísbendingar um hvort þau eru oddatölur eða sléttar tölur, en ákvarðar þau ekki alltaf nákvæmlega. Teygjustuðulinn a má ákvarða út frá þekktu fallgildi sem er ekki núll, eða út frá láfellunni ef hún er ekki núll. Þetta form lýsir einföldum möguleika; þættir án rauntölunúllstöðva geta einnig komið fyrir í ræðum föllum.

AÐFERÐ

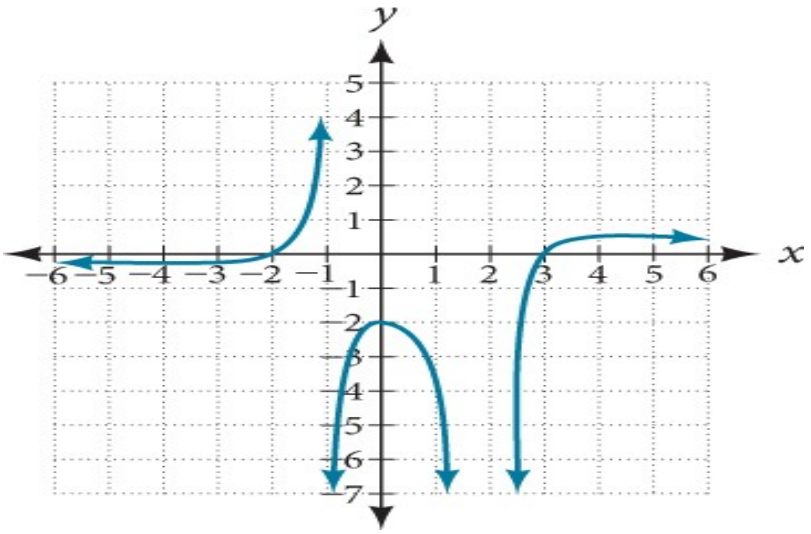
Setjið rætt fall fram út frá gefnu grafi þess.

1. Ákvarðið þætti teljarans. Skoðið hegðun grafsins við skurðpunktana við x-ás til að finna núllstöðvarnar og margfeldni þeirra. Þetta er auðvelt þegar leitað er að „einfaldasta“ fallinu með litlar margfeldnir, til dæmis 1 eða 3, en getur verið erfitt fyrir stærri margfeldnir, svo sem 5 eða 7.
2. Ákvarðið þætti nefnarans. Skoðið hegðunina báðum megin við hverja lóðfellu til að ákvarða þættina og veldi þeirra.
3. Notið skýran punkt á grafinu þar sem fallgildið er ekki núll til að finna teygjustuðulinn.

DÆMI 12

Rætt fall sett fram út frá skurðpunktum og aðfellum

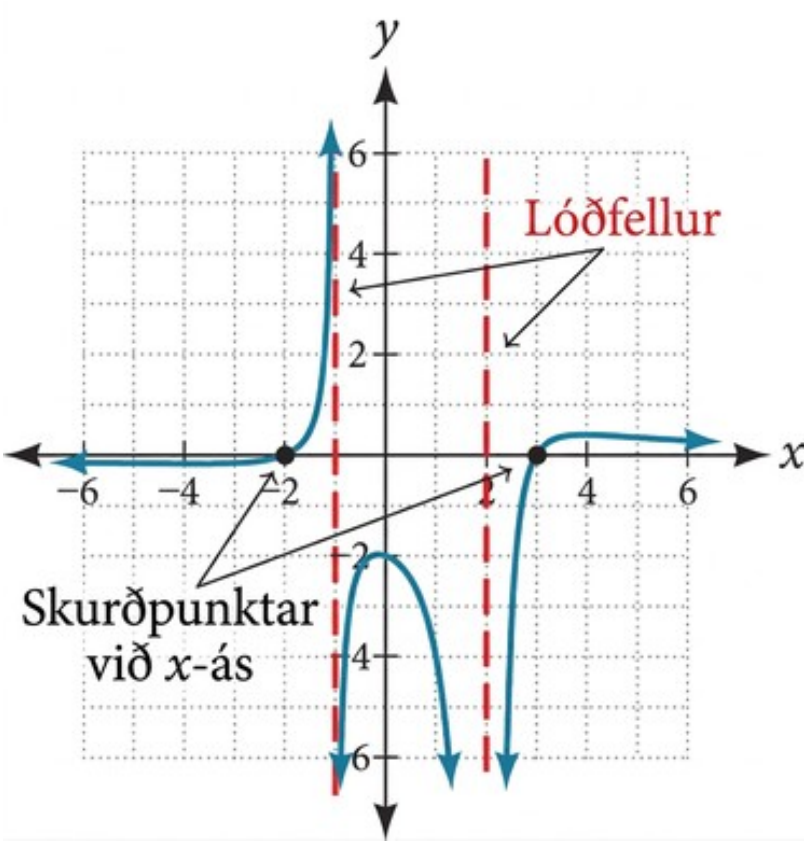
Setjið fram jöfnu ræða fallsins sem sýnt er á mynd 22.



Mynd 22

Lausn

Grafið virðist hafa skurðpunkta við x-ás þegar $x=-2$ og $x=3$. Við báða punktana fer grafið í gegnum ásinn, sem bendir til línulegra þátta. Grafið hefur tvær lóðfellur. Við $x=-1$ er hegðunin svipuð og hjá grunnfallinu $\frac{1}{x}$, þar sem grafið stefnir á jákvætt óendanlegt gildi öðrum megin og neikvætt óendanlegt gildi hinum megin. Við aðfelluna $x=2$ er hegðunin svipuð og hjá speglun um x-ás á grafi fallsins $\frac{1}{x^2}$, þar sem grafið stefnir á neikvætt óendanlegt gildi báðum megin við aðfelluna. Sjá mynd 23.



Mynd 23

Með þessum upplýsingum getum við ritað fall á forminu

$$f(x)=a\frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Til að finna teygjustuðulinn má nota annan skýran punkt á grafinu, svo sem skurðpunktinn við y-ás, $(0,-2)$.

$$\begin{aligned}-2 &= a\tfrac{(0+2)(0-3)}{(0+1)(0-2)^2}\\ -2 &= a\tfrac{-6}{4}\\ a &= \tfrac{-8}{-6}=\tfrac{4}{3}\end{aligned}$$

Lokafallið er því $f(x)=\dfrac{4(x+2)(x-3)}{3(x+1)(x-2)^2}$.

MIÐLAR

Á netinu er efni þar sem þið getið lært meira um ræð föll og æft ykkur.

- Gröf ræðra falla teiknuð
- Jafna ræðs falls fundin
- Lóðfellur og láfellur ákvarðaðar

- Skurðpunktar, aðfellur og gat ræðs falls fundin

3.7 Æfingar kaflans

Orðleg verkefni

1. Hver er grundvallarmunurinn á algebruframsetningu margliðufalls og ræðs falls?
2. Hver er grundvallarmunurinn á gröfum margliðufalla og ræðra falla?
3. Hvað hlýtur að gilda um fallregluna ef graf ræðs falls hefur afmáanlegan sérstöðupunkt?
4. Getur graf ræðs falls verið án lóðfellu? Ef svo er, hvernig?
5. Getur graf ræðs falls verið án skurðpunkta við x-ás? Ef svo er, hvernig?

Algebruverkefni

Finnið skilgreiningarmengi ræðu fallanna í eftirfarandi æfingum.

6.

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

7.

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$$

8.

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-2x-8}$$

9.

$$f(x)=\frac{x^2+4x-3}{x^4-5x^2+4}$$

Finnið skilgreiningarmengi, lóðfellur og láfellur fallanna í eftirfarandi æfingum.

10.

$$f(x)=\frac{4}{x-1}$$

11.

$$f(x)=\frac{2}{5x+2}$$

12.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-9}$$

13.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+5x-36}$$

14.

$$f(x)=\frac{3+x}{x^3-27}$$

15.

$$f(x)=\frac{3x-4}{x^3-16x}$$

16.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+9x^2+14x}$$

17.

$$f(x)=\frac{x+5}{x^2-25}$$

18.

$$f(x)=\frac{x-4}{x-6}$$

19.

$$f(x)=\frac{4-2x}{3x-1}$$

Finnið skurðpunkta fallanna við x- og y-ás í eftirfarandi æfingum.

20.

$$f(x)=\frac{x+5}{x^2+4}$$

21.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-x}$$

22.

$$f(x)=\frac{x^2+8x+7}{x^2+11x+30}$$

23.

$$f(x)=\frac{x^2+x+6}{x^2-10x+24}$$

24.

$$f(x)=\frac{94-2x^2}{3x^2-12}$$

3

Lýsið staðbundinni hegðun og endahegðun fallanna í eftirfarandi æfingum.

25.

$$f(x)=\frac{x}{2x+1}$$

26.

$$f(x)=\frac{2x}{x-6}$$

27.

$$f(x)=\frac{-2x}{x-6}$$

28.

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}$$

29.

$$f(x)=\frac{2x^2-32}{6x^2+13x-5}$$

Finnið skáfellu fallanna í eftirfarandi æfingum.

30.

$$f(x)=\frac{24x^2+6x}{2x+1}$$

31.

$$f(x)=\frac{4x^2-10}{2x-4}$$

32.

$$f(x)=\frac{81x^2-18}{3x-2}$$

33.

$$f(x)=\frac{6x^3-5x}{3x^2+4}$$

34.

$$f(x)=\frac{x^2+5x+4}{x-1}$$

Myndræn verkefni

Notið gefna færslu í eftirfarandi æfingum til að teikna graf fallsins. Merkið lóðfelluna og láfelluna.

35. Umhverfufallið fært upp um tvær einingar.

36. Umhverfufallið fært niður um eina einingu og til vinstri um þrjár einingar.

37. Annað veldi umhverfufallsins fært til hægri um 2 einingar.

38. Annað veldi umhverfufallsins fært niður um 2 einingar og til hægri um 1 einingu.

Finnið skurðpunkta við x- og y-ás, lóðfellur og láfellu eða skáfellu fallanna í eftirfarandi æfingum. Notið upplýsingarnar til að skissa graf.

39.

$$p(x)=\frac{2x-3}{x+4}$$

40.

$$q(x)=\frac{x-5}{3x-1}$$

41.

$$s(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$$

42.

$$r(x)=\frac{5}{(x+1)^2}$$

43.

$$f(x)=\frac{3x^2-14x-5}{3x^2+8x-16}$$

44.

$$g(x)=\frac{2x^2+7x-15}{3x^2-14x+15}$$

45.

$$a(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$$

46.

$$b(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$$

47.

$$h(x)=\frac{2x^2+x-1}{x-4}$$

48.

$$k(x)=\frac{2x^2-3x-20}{x-5}$$

49.

$$w(x)=\frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{(x+2)^2(x-4)}$$

50.

$$z(x)=\frac{(x+2)^2(x-5)}{(x-3)(x+1)(x+4)}$$

Ritið jöfnu ræðs falls með tilgreinda eiginleika í eftirfarandi æfingum.

51. Lóðfellur við $x=5$ og $x=-5$, skurðpunktar við x-ás í $(2,0)$ og $(-1,0)$, skurðpunktur við y-ás í $(0,4)$

52. Lóðfellur við $x=-4$ og $x=-1$, skurðpunktar við x-ás í $(1,0)$ og $(5,0)$, skurðpunktur við y-ás í $(0,7)$

53. Lóðfellur við $x=-4$ og $x=-5$, skurðpunktar við x-ás í $(4,0)$ og $(-6,0)$, láfella við $y=7$

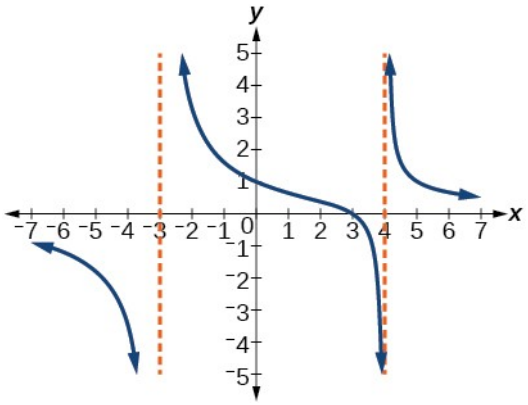
54. Lóðfellur við $x=-3$ og $x=6$, skurðpunktar við x-ás í $(-2,0)$ og $(1,0)$, láfella við $y=-2$

55. Lóðfella við $x=-1$, tvöföld núllstöð þegar $x=2$, skurðpunktur við y-ás í $(0,2)$

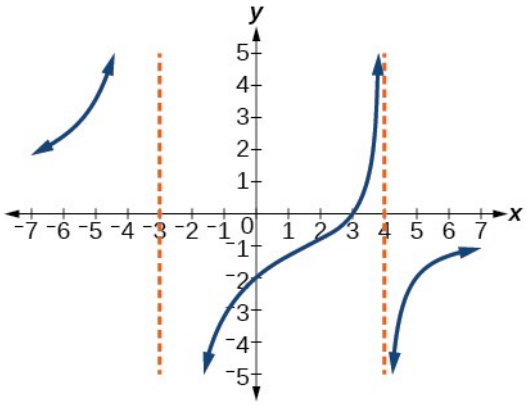
56. Lóðfella við $x=3$, tvöföld núllstöð þegar $x=1$, skurðpunktur við y-ás í $(0,4)$

Notið gröfin í eftirfarandi æfingum til að rita jöfnu fallsins.

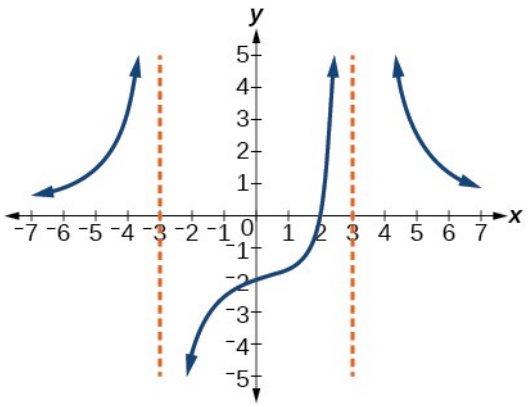
57.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

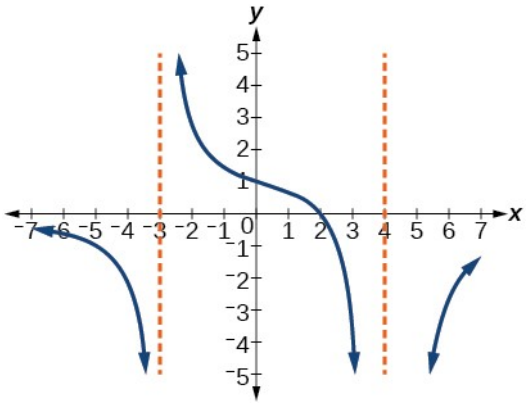
58.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

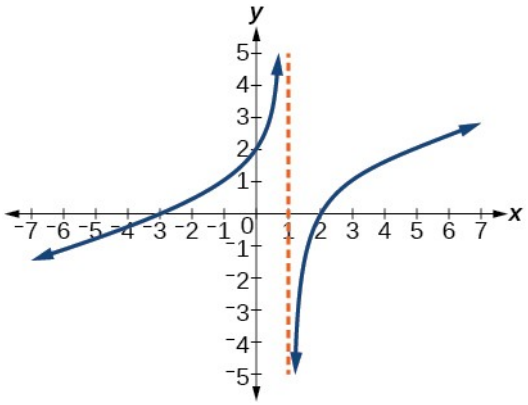
59.


y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

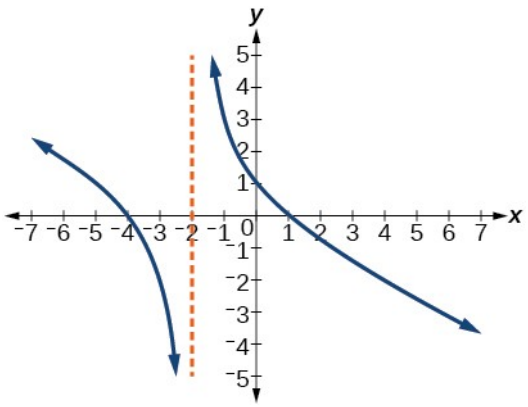
60.


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

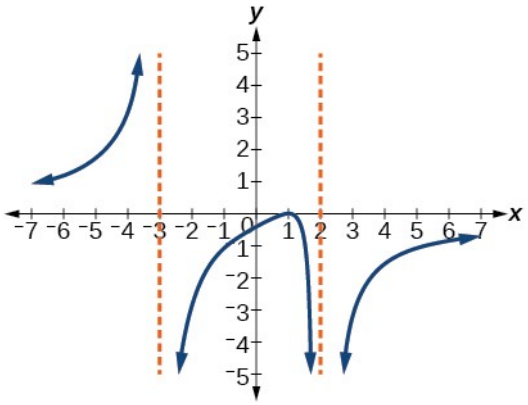
61.


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

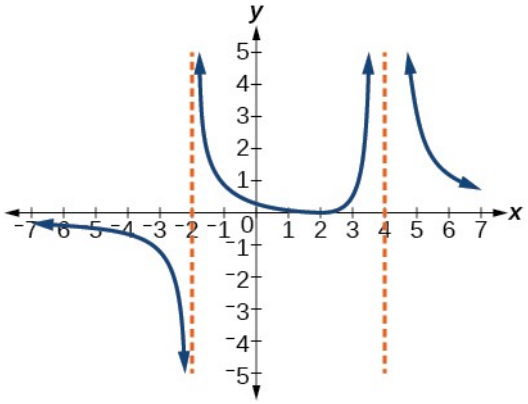
62.


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

63.



64. Notið $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ sem viðbótarpunkt.



Töluleg verkefni

Gerið töflur í eftirfarandi æfingum sem sýna hegðun fallsins nálægt lóðfellunni og endahegðun þess þegar það nálgast láfelluna.

65.

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

66.

$$f(x)=\frac{x}{x-3}$$

67.

$$f(x)=\frac{2x}{x+4}$$

68.

$$f(x)=\frac{2x}{(x-3)^2}$$

69.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2x+1}$$

Tækniverkefni

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna graf $f(x)$. Notið grafið til að leysa $f(x)>0$.

70.

$$f(x)=\frac{2}{x+1}$$

71.

$$f(x)=\frac{4}{2x-3}$$

72.

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)(x+2)}$$

73.

$$f(x)=\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}$$

74.

$$f(x)=\frac{(x+3)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

Viðbótarverkefni

Finnið afmáanlega sérstöðupunktinn í eftirfarandi æfingum.

75.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

76.

$$f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$$

77.

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x-2}$$

78.

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-3}{x+3}$$

79.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2}{x+1}$$

Hagnýtingar

Setjið fram rætt fall sem lýsir aðstæðunum í eftirfarandi æfingum.

80. Á sjúkrahúsi í flóttamannabúðum eru nú 200 gallon af vatni í stórum blöndunartanki og 10 pundum af sykri hefur verið blandað út í. Skrúfað verður frá krana sem hleypir 10 gallonum af vatni á mínútu í tankinn, um leið og sykri er hellt í hann með hraðanum 3 pund á mínútu. Finnið styrk sykursins í tankinum (í pundum á gallon) eftir t mínútur.

81. Á sjúkrahúsi í flóttamannabúðum eru nú 300 gallon af vatni í stórum blöndunartanki og 8 pundum af sykri hefur verið blandað út í. Skrúfað verður frá krana sem hleypir 20 gallonum af vatni á mínútu í tankinn, um leið og sykri er hellt í hann með hraðanum 2 pund á mínútu. Finnið styrk sykursins í tankinum (í pundum á gallon) eftir t mínútur.

Notið gefna ræða fallið í eftirfarandi æfingum til að svara spurningunni.

82. Styrkur lyfs C í blóðrás sjúklings t klukkustundum eftir inndælingu er gefinn með $C(t)=\frac{2t}{3+t^2}$. Hvað verður um styrk lyfsins þegar t vex?

83. Styrkur lyfs C í blóðrás sjúklings t klukkustundum eftir inndælingu er gefinn með $C(t)=\frac{100t}{2t^2+75}$. Notið reiknivél til að áætla hvenær styrkurinn er mestur.

Setjið fram rætt fall í eftirfarandi æfingum sem auðveldar lausn verkefnisins. Notið síðan reiknivél til að svara spurningunni.

84. Opinn kassi með ferningslaga botn á að hafa rúmmálið 108 rúmtommur. Finnið stærðir kassans sem lágmarka yfirborðsflatarmál hans. Látum x = lengd hliðar botnsins.

85. Rétthyrndur kassi með ferningslaga botn á að hafa rúmmálið 20 rúmfet. Efnið í botninn kostar 30 sent á ferfet, efnið í hliðarnar 10 sent á ferfet og efnið í lokið 20 sent á ferfet. Ákvarðið þær stærðir sem lágmarka kostnaðinn. Látum x = lengd hliðar botnsins.

86. Réttur hringstrendingur hefur rúmmálið 100 rúmtommur. Finnið geisla og hæð sem lágmarka yfirborðsflatarmálið. Látum x tákna geislann.

87. Loklaus réttur hringstrendingur hefur rúmmálið 50 rúmmetra. Finnið geislann sem lágmarkar yfirborðsflatarmálið. Látum x tákna geislann.

88. Réttur hringstrendingur á að hafa rúmmálið 40 rúmtommur. Það kostar 4 sent á fertommu að smíða toppinn og botninn og 1 sent á fertommu að smíða hliðarflöt hringstrendingsins. Finnið geislann sem lágmarkar kostnaðinn. Látum x tákna geislann.

3.8 Andhverf föll og rótaföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Finna andhverfu margliðufalls.
- Takmarka skilgreiningarmengið til að finna andhverfu margliðufalls.

Landverðir og aðrir umsjónarmenn gönguleiða hlaða stundum grjóthrúgur, vörður eða önnur merki til að auðkenna leiðir og kennileiti. (Landverðir og umhverfisfræðingar ráða göngufólki frá því að gera slíkt hið sama, til að koma í veg fyrir rugling og vernda búsvæði plantna og dýra.) Varða úr möl hefur lögun keilu þar sem hæðin er tvöfaldur geislinn.



Mynd 1

Rúmmálið finnum við með formúlu úr grunnrúmfræði.

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \tfrac{1}{3}\pi r^2 (2r) \\ &= \tfrac{2}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Við höfum ritað rúmmálið V sem fall af geislanum r. Í sumum tilvikum þekkjum við hins vegar rúmmálið í upphafi og viljum finna geislann. Til dæmis kaupir viðskiptavinur 100 rúmfet af möl til að mynda keilulaga hrúgu þar sem hæðin er tvöfaldur geislinn. Hver er geisli nýju keilunnar og hæð hennar? Til að svara spurningunni notum við formúluna

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$

Þetta fall er andhverfa formúlunnar fyrir V sem fall af r.

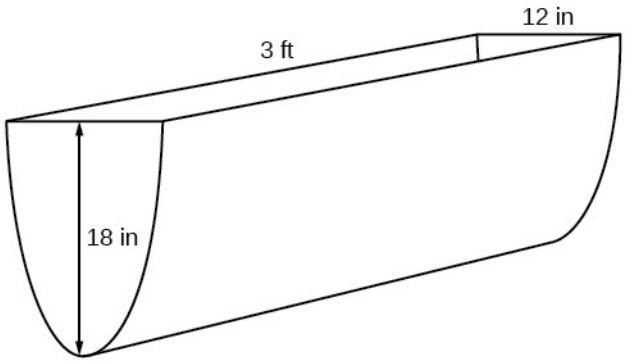
Í þessum hluta skoðum við andhverfur margliðufalla og ræðra falla og sérstaklega rótaföllin sem koma þar við sögu.

Andhverfa margliðufalls fundin

Tvö föll f og g eru andhverf föll ef fyrir hvert hnitapar í f, (a, b), er samsvarandi hnitapar í andhverfa fallinu, g, (b, a). Með öðrum orðum víxlast inntak og úttak í hnitapörum andhverfra falla.

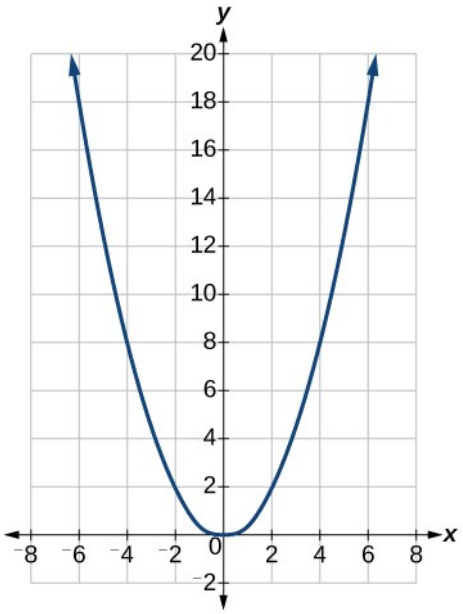
Til að fall eigi sér andhverfu verður það að vera eintækt.

Gerum til dæmis ráð fyrir að sjálfbærniklúbburinn smíði vatnssafnara sem er fleygbogalaga renna, eins og sýnt er á mynd 2. Við getum notað upplýsingarnar á myndinni til að finna flatarmál vatnsyfirborðsins í rennunni sem fall af vatnsdýptinni.



Mynd 2

Gott er að hafa jöfnu fyrir fleygbogalaga þversniðið og því leggjum við hnitakerfi yfir það. Þar er x mælt lárétt og y lóðrétt og upphafspunkturinn er í hvirfilpunkti fleygbogans. Sjá mynd 3.



Mynd 3

Út frá þessu finnum við jöfnu fleygbogans. Við settum upphafspunktinn í hvirfilpunkt hans og vitum því að jafnan er á forminu $y(x)=ax^2$. Graf jöfnunnar þarf að fara í gegnum punktinn (6, 18), og út frá honum getum við fundið teygjustuðulinn a.

$$\begin{aligned} 18 &= a6^2 \\ a &= \tfrac{18}{36} \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Jafna fleygbogalaga þversniðsins er

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2$$

Við viljum finna flatarmál vatnsyfirborðsins og þurfum því að ákvarða breiddina efst sem fall af vatnsdýptinni. Fyrir hverja dýpt y er breiddin $2x$, svo við þurfum að leysa jöfnuna hér að framan fyrir x og finna andhverfa fallið. Takið þó eftir að upphaflega fallið er ekki eintækt. Fyrir hvert jákvætt úttak eru tvö inntök sem gefa sama úttak, annað jákvætt en hitt neikvætt. Úttakið núll fæst aðeins þegar inntakið er núll.

Til að finna andhverfu getum við takmarkað upphaflega fallið við skilgreiningarmengi þar sem það er eintækt. Hér er eðlilegt að takmarka okkur við óneikvæð gildi x. Á því skilgreiningarmengi getum við fundið andhverfu með því að leysa fyrir inntaksbreytuna:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{2}x^2 \\ 2y &= x^2 \\ x &= \pm\sqrt{2y} \\ \therefore y &= \pm\sqrt{2x} \end{aligned}$$

Eins og þetta er ritað er það ekki fall. Við takmörkum okkur við óneikvæð gildi x í upphaflega fallinu og getum því sleppt neikvæðu lausninni. Þá fáum við andhverfa fallið sem við leitum að.

$$y=\sqrt{2x}$$

Þar sem x er fjarlægðin frá miðju fleygbogans að hvorri hlið er heildarbreidd vatnsyfirborðsins $2x$. Rennan er 3 fet (36 tommur) á lengd og flatarmálið er því:

$$\begin{aligned} \text{Flatarmál} &= l \cdot w \\ &= 36 \cdot 2\ x \\ &= 72\ x \\ &= 72\ \sqrt{2\ y} \end{aligned}$$

Dæmið sýnir tvö mikilvæg atriði:

1. Til að finna andhverfu annars stigs falls verður að takmarka skilgreiningarmengið við bil þar sem fallið er eintækt.
2. Þegar skilgreiningarmengi annars stigs falls er takmarkað við bil þar sem það er eintækt er andhverfan kvaðratrótarfall. Grunnföllin að baki þessum föllum eru annars veldis fallið og kvaðratrótarfallið, sem eru ólíkar gerðir veldisfalla.

Föll sem innihalda rætur eru oft nefnd rótaföll. Margliðufall á sér andhverfu á myndmengi sínu ef það er eintækt á skilgreiningarmengi sínu. Þó er ekki alltaf hægt að setja andhverfuna fram með einfaldri formúlu. Eintæk föll kallast andhverfanleg föll og við notum táknunina $f^{-1}(x)$.

Viðvörun: $(f^{-1}(x))$ er ekki það sama og umhverfa fallsins $f(x)$. Veldisvísirinn „−1“ er hér frátekinn til að tákna andhverf föll. Til að tákna umhverfu falls $f(x)$, þyrftum við að rita $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$.

Mikilvæg tengsl andhverfra falla eru að þau „afturkalla“ hvort annað. Ef (f^{-1}) er andhverfa falls f, þá er f andhverfa fallsins f^{-1}. Með öðrum orðum breytir fallið f gildinu x, (f^{-1}) afturkallar breytinguna, og öfugt. Formlega ritum við

$$f^{-1}(f(x))=x, \text{fyrir öll } x \text{ í skilgreiningarmengi } f$$

og

$$f(f^{-1}(x))=x, \text{fyrir öll } x \text{ í skilgreiningarmengi } f^{-1}$$

STAÐFEST AÐ TVÖ FÖLL SÉU ANDHVERF HVORT ANNARS

Tvö föll, f og g, eru andhverf hvort annars ef fyrir öll x í skilgreiningarmengi f og g.

$$g(f(x))=f(g(x))=x$$

AÐFERÐ

Finnið andhverfu gefins margliðufalls með því að takmarka skilgreiningarmengið þannig að nýja fallið verði eintækt.

1. Skiptið $f(x)$ út fyrir y.
2. Víxlið x og y.
3. Leysið fyrir y, og nefnið fallið $f^{-1}(x)$.

DÆMI 1

Andhverf föll staðfest

Sýnið að $f(x)=\frac{1}{x+1}$ og $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-1$ séu andhverf föll þegar $x\neq 0,-1$.

Lausn

Við þurfum að sýna að $f^{-1}(f(x))=x$ og $f(f^{-1}(x))=x$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\tfrac{1}{x+1}\right) \\ &= \tfrac{1}{\frac{1}{x+1}}-1 \\ &= (x+1)-1 \\ &= x \\ f(f^{-1}(x)) &= f\left(\tfrac{1}{x}-1\right) \\ &= \tfrac{1}{(\frac{1}{x}-1)+1} \\ &= \tfrac{1}{\frac{1}{x}} \\ &= x \end{aligned}$$

Því eru $f(x)=\frac{1}{x+1}$ og $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}-1$ andhverf föll.

REYNIÐ SJÁLF #1

Sýnið að $f(x)=\frac{x+5}{3}$ og $f^{-1}(x)=3x-5$ séu andhverf föll.

DÆMI 2

Andhverfa þriðja stigs falls fundin

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=5x^3+1$.

Lausn

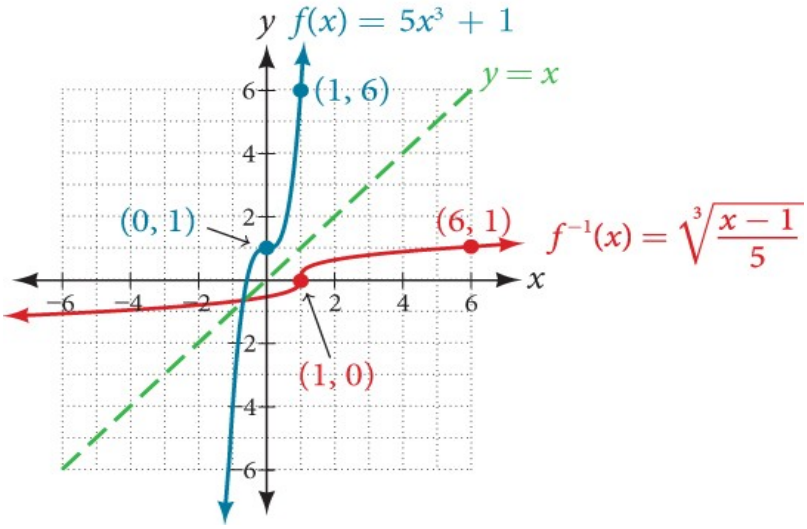
Þetta fall er ummyndun á þriðja stigs grunnfallinu. Við þekkjum grunnfallið og vitum því að fallið er eintækt. Við finnum andhverfuna með því að leysa fyrir x.

$$\begin{aligned} y &= 5x^3 + 1 \\ x &= 5y^3 + 1 \\ x - 1 &= 5y^3 \\ \tfrac{x-1}{5} &= y^3 \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{\tfrac{x-1}{5}} \end{aligned}$$

Greining

Skoðið gröf f og f^{-1}. Takið eftir að þau eru samhverf um línuna $y=x$. Þetta gildir alltaf um graf falls og graf andhverfu þess.

Aðferðin gekk út á að víxla x og y, og því skuluð þið líka skoða samsvarandi punkta. Ef (a,b) er á grafi f, þá er (b,a) á grafi f^{-1}. Þar sem $(0,1)$ er á grafi f, er $(1,0)$ á grafi f^{-1}. Á sama hátt, þar sem $(1,6)$ er á grafi f, er $(6,1)$ á grafi f^{-1}. Sjá mynd 4.



Mynd 4

REYNIÐ SJÁLF #2

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=\sqrt[3]{x+4}$.

Skilgreiningarmengið takmarkað til að finna andhverfu margliðufalls

Hingað til höfum við getað fundið andhverfur þriðja stigs falla án þess að takmarka skilgreiningarmengi þeirra. Við vitum þó að ekki eru öll þriðja stigs margliðuföll eintæk. Takmarka má skilgreiningarmengi sumra falla sem eru ekki eintæk þannig að þau verði eintæk, en aðeins á hinu takmarkaða mengi. Fallið á því skilgreiningarmengi á sér þá andhverfu. Þar sem annars stigs föll eru ekki eintæk verðum við að takmarka skilgreiningarmengi þeirra til að finna andhverfurnar.

3

SKILGREININGARMENGIÐ TAKMARKAÐ

Fall sem er ekki eintækt á sér ekki andhverfu. Ef við takmörkum skilgreiningarmengi fallsins þannig að það verði eintækt, fáum við nýtt fall og það fall á sér andhverfu.

AÐFERÐ

Takmarkið skilgreiningarmengi gefins margliðufalls sem er ekki eintækt og finnið síðan andhverfuna.

1. Takmarkið skilgreiningarmengið við mengi þar sem upphaflega fallið er eintækt.
2. Skiptið $f(x)$ út fyrir y.
3. Víxlið x og y.
4. Leysið fyrir y, og nefnið fallið eða föllin $f^{-1}(x)$.
5. Veljið formúluna fyrir $(f^{-1}(x))$ þannig að myndmengi andhverfunnar sé takmarkaða skilgreiningarmengi upphaflega fallsins.

DÆMI 3

Skilgreiningarmengið takmarkað til að finna andhverfu margliðufalls

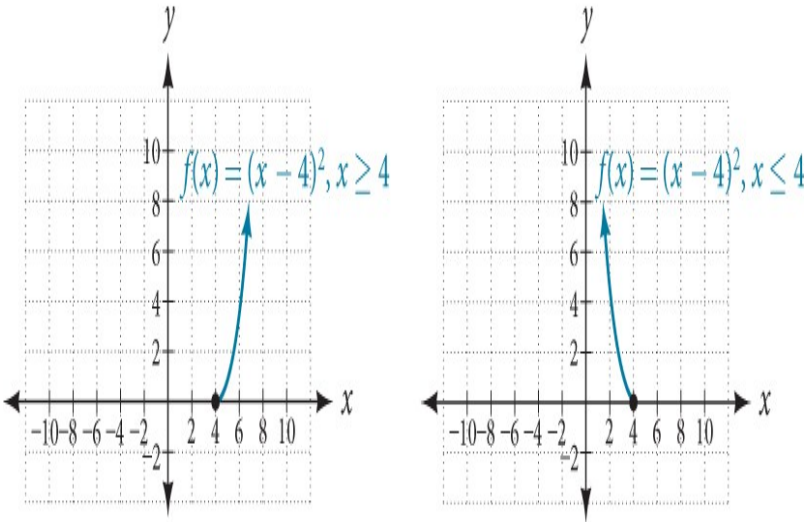
Finnið andhverfu fallsins f:

a. $f(x)=(x-4)^2, x\geq 4$

b. $f(x)=(x-4)^2, x\leq 4$

Lausn

Upphaflega fallið $f(x)=(x-4)^2$ er ekki eintækt, en það er takmarkað við skilgreiningarmengið $x\geq 4$ eða $x\leq 4$ þar sem það er eintækt. Sjá mynd 5.



Mynd 5

Til að finna andhverfuna byrjum við á að skipta $f(x)$ út fyrir einföldu breytuna y.

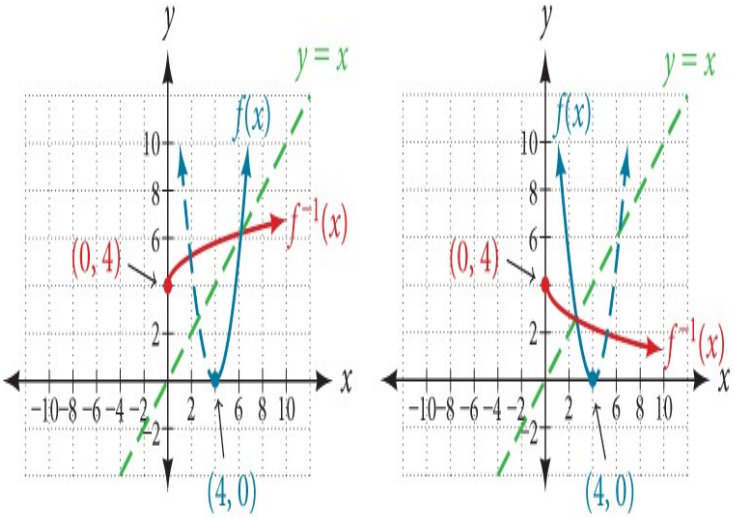
$$\begin{aligned} y &= (x-4)^2 && \text{Víxlið } x \text{ og } y. \\ x &= (y-4)^2 && \text{Takið kvaðratrót.} \\ \pm\sqrt{x} &= y-4 && \text{Leggið } 4 \text{ við báðar hliðar.} \\ 4 \pm \sqrt{x} &= y \end{aligned}$$

Eins og þetta er ritað er það ekki fall. Við þurfum að skoða takmarkanir á skilgreiningarmengi upphaflega fallsins til að ákvarða andhverfuna. Þegar við víxluðum hlutverkum x og y í upphaflega fallinu $f(x)$, skoðuðum við skilgreiningarmengið, það er gildin sem x gat tekið. Eftir að við víxluðum x og y, urðu þau að gildunum sem y gat tekið. Fyrir þetta fall er $x \geq 4$, svo fyrir andhverfuna þarf $y \geq 4$, eins og andhverfa fallið gefur.

1. ⓐ Skilgreiningarmengi upphaflega fallsins var takmarkað við $x \geq 4$, svo úttök andhverfunnar verða að vera þau sömu, $f(x) \geq 4$, og við verðum að nota plústilvikið: $f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{x}$
2. ⓑ Skilgreiningarmengi upphaflega fallsins var takmarkað við $x \leq 4$, svo úttök andhverfunnar verða að vera þau sömu, $f(x) \leq 4$, og við verðum að nota mínustilvikið: $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{x}$

Greining

Á gröfunum á mynd 6 sjáum við upphaflega fallið teiknað í sama hnitakerfi og andhverfu þess. Takið eftir að gröfin saman eru samhverf um línuna $y = x$. Hnitaparið $(4, 0)$ er á grafi f og hnitaparið $(0, 4)$ er á grafi f^{-1}. Fyrir sérhvert hnitapar gildir að ef (a, b) er á grafi f, þá er (b, a) á grafi f^{-1}. Að lokum sést að graf f sker graf f^{-1} á línunni $y = x$. Skurðpunktar grafa f og f^{-1} liggja alltaf á línunni $y = x$.



Mynd 6

DÆMI 4

Andhverfa annars stigs falls fundin þegar takmörkun er ekki tilgreind

Takmarkið skilgreiningarmengið og finnið síðan andhverfu fallsins

$$f(x)=(x-2)^2-3.$$

Lausn

Við sjáum að þetta er fleygbogi með hvirfilpunkt í $(2,-3)$ sem opnast upp. Þar sem grafið er minnkandi öðrum megin við hvirfilpunktinn en vaxandi hinum megin getum við gert fallið eintækt með því að takmarka skilgreiningarmengið við $x\geq 2$.

Til að finna andhverfuna notum við hvirfilpunktsform annars stigs fallsins. Við byrjum á að skipta $f(x)$ út fyrir einfalda breytu, y, og leysum síðan fyrir x.

$$\begin{aligned}
y&=(x-2)^2-3 && \text{Víxlið } x \text{ og } y.\\
x&=(y-2)^2-3 && \text{Leggið 3 við báðar hliðar.}\\
x+3&=(y-2)^2 && \text{Takið kvaðratrót.}\\
\pm\sqrt{x+3}&=y-2 && \text{Leggið 2 við báðar hliðar.}\\
2\pm\sqrt{x+3}&=y && \text{Nefnið fallið.}\\
f^{-1}(x)&=2\pm\sqrt{x+3}
\end{aligned}$$

Nú þurfum við að ákveða hvort tilvikið eigi við. Þar sem við takmörkuðum upphaflega fallið við skilgreiningarmengið $x\geq 2$, eiga úttök andhverfunnar að uppfylla sama skilyrði og því notum við jákvæða tilvikið

$$f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+3}$$

Ef annars stigs fallið hefði ekki verið gefið á hvirfilpunktsformi væri fyrsta skrefið að umrita það á það form. Þá er auðvelt að sjá hnit hvirfilpunktsins og nota þau til að takmarka skilgreiningarmengið.

Greining

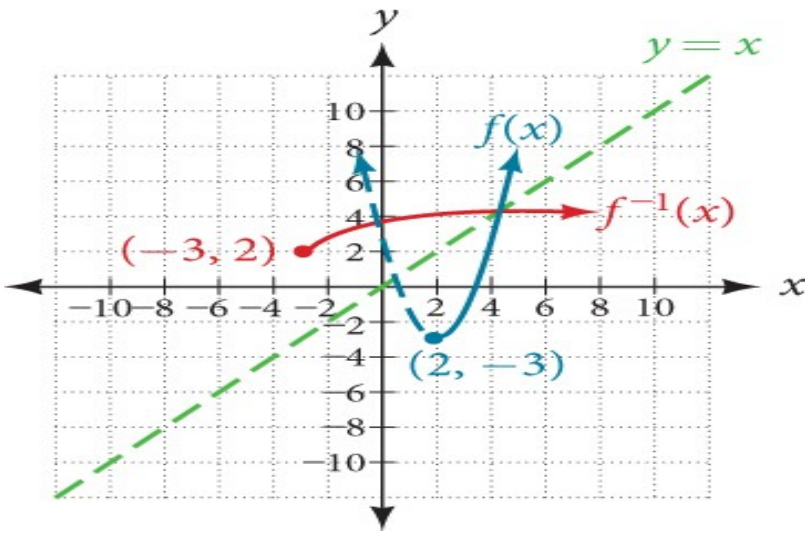
Takið eftir að við völdum að takmarka skilgreiningarmengið við $x \geq 2$. Við hefðum eins getað takmarkað það við $x \leq 2$, en þá væri $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+3}$. Skoðið upphaflega fallið og andhverfu þess í sama hnitakerfi á mynd 7. Takið eftir að gröfin eru spegilmyndir hvort annars um línuna $y = x$. Hnitaparið $(2, -3)$ er á grafi f og hnitaparið $(-3, 2)$ er á grafi f^{-1}. Af gröfum beggja falla í sama hnitakerfi sést að

$$\text{skilgreiningarmengi } f = \text{myndmengi } f^{-1} = [2, \infty)$$

og

$$\text{skilgreiningarmengi } f^{-1} = \text{myndmengi } f = [-3, \infty)$$

Takið að lokum eftir að graf f sker graf (f^{-1}) á línunni $y = x$.



Mynd 7

REYNIÐ SJÁLF #3

Finnið andhverfu fallsins $f(x) = x^2 + 1$, á skilgreiningarmenginu $x \geq 0$.

Hagnýt verkefni með rótaföllum leyst

Takið eftir að föllin í fyrri dæmum voru öll margliðuföll en andhverfur þeirra rótaföll. Skilgreiningarmengi andhverfu rótarfalls verður að vera myndmengi upphaflega fallsins. Ef myndmengið er takmarkað þarf að taka tillit til þess.

AÐFERÐ

Finnið andhverfu gefins rótarfalls.

1. Ákvarðið myndmengi upphaflega fallsins.
2. Skiptið $f(x)$ út fyrir y, og leysið síðan fyrir x.
3. Takmarkið skilgreiningarmengi andhverfa fallsins við myndmengi upphaflega fallsins ef þörf krefur.

DÆMI 5

Andhverfa rótarfalls fundin

Takmarkið skilgreiningarmengið og finnið síðan andhverfu fallsins $f(x)=\sqrt{x-4}$.

Lausn

Takið eftir að upphaflega fallið hefur myndmengið $f(x)\geq 0$. Skiptið $f(x)$ út fyrir y, og leysið síðan fyrir x.

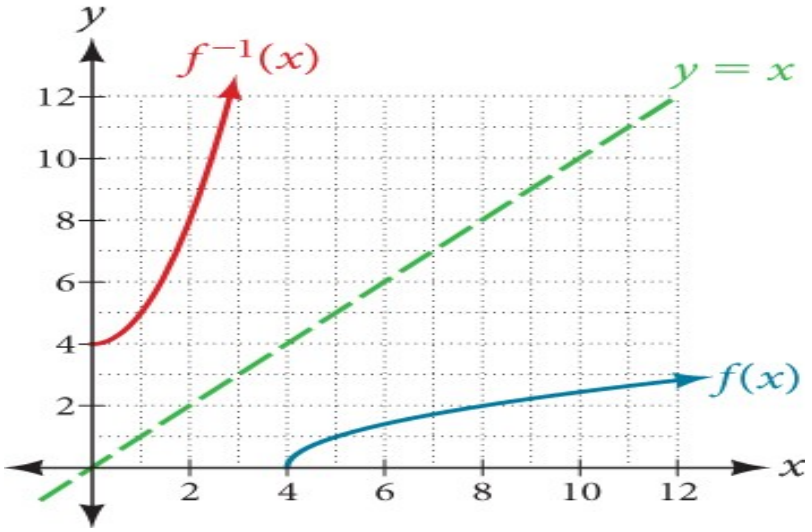
y	$=\sqrt{x-4}$	Skiptið $f(x)$ út fyrir y.
x	$=\sqrt{y-4}$	Víxlið x og y.
x	$=\sqrt{y-4}$	Hefjið báðar hliðar í annað veldi.
x^2	$=y-4$	Leggið 4 við.
x^2+4	$=y$	Nefnið fallið $f^{-1}(x)$.
$f^{-1}(x)$	$=x^2+4$	

Munið að skilgreiningarmengi þessa falls verður að takmarkast við myndmengi upphaflega fallsins.

$$f^{-1}(x)=x^2+4, x\geq 0$$

Greining

Takið eftir á mynd 8 að andhverfan er spegilmynd upphaflega fallsins um línuna $y=x$. Þar sem upphaflega fallið hefur aðeins óneikvæð úttök hefur andhverfa fallið aðeins óneikvæð inntök.



Mynd 8

REYNIÐ SJÁLF #4

Takmarkið skilgreiningarmengið og finnið síðan andhverfu fallsins $f(x)=\sqrt{2x+3}$.

Rótaföll eru algeng í líkönum raunvísinda, eins og við sáum í inngangi hlutans. Nú höfum við næg verkfæri til að leysa verkefnið sem sett var fram í upphafi hans.

DÆMI 6

Hagnýtt verkefni leyst með þriðja stigs falli

Landverðir hlaða malarhrúgu í lögun keilu þar sem hæðin er tvöfaldur geislinn. Rúmmál keilunnar sem fall af geislanum er gefið með

$$V=\frac{2}{3}\pi r^3$$

Finnið andhverfu fallsins $V=\frac{2}{3}\pi r^3$ sem ákvarðar rúmmál keilu V sem fall af geislanum r.

Notið síðan andhverfa fallið til að reikna geisla slíkrar malarhrúgu með rúmmálið 100 rúmfet. Notið $\pi=3{,}14$.

Lausn

Byrjið á gefna fallinu fyrir V. Takið eftir að merkingarbært skilgreiningarmengi þess er $r\geq 0$ því neikvæður geisli væri merkingarlaus í þessu samhengi. Myndmengi fallsins, og þar með skilgreiningarmengi andhverfunnar, er einnig $V\geq 0$. Leysið fyrir r sem fall af V, með aðferðinni sem lýst var hér að framan.

$$V=\frac{2}{3}\,\pi\,r^3$$
$$r^3=\frac{3\,V}{2\,\pi} \qquad \text{Leysið fyrir } r^3.$$
$$r=\sqrt[3]{\frac{3\,V}{2\,\pi}} \qquad \text{Leysið fyrir } r.$$

This is the result stated in the section opener. Now evaluate this for $V=100$ and $\pi=3{,}14$.

$$\begin{aligned} r&=\sqrt[3]{\frac{3\,V}{2\,\pi}}\\ &=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 100}{2\cdot 3{,}14}}\\ &\approx\sqrt[3]{47{,}7707}\\ &\approx 3{,}63 \end{aligned}$$

Geislinn er því um 3,63 fet.

Skilgreiningarmengi samsetts rótarfalls ákvarðað

Þegar rótaföll eru samsett með öðrum föllum getur orðið flóknara að ákvarða skilgreiningarmengið.

DÆMI 7

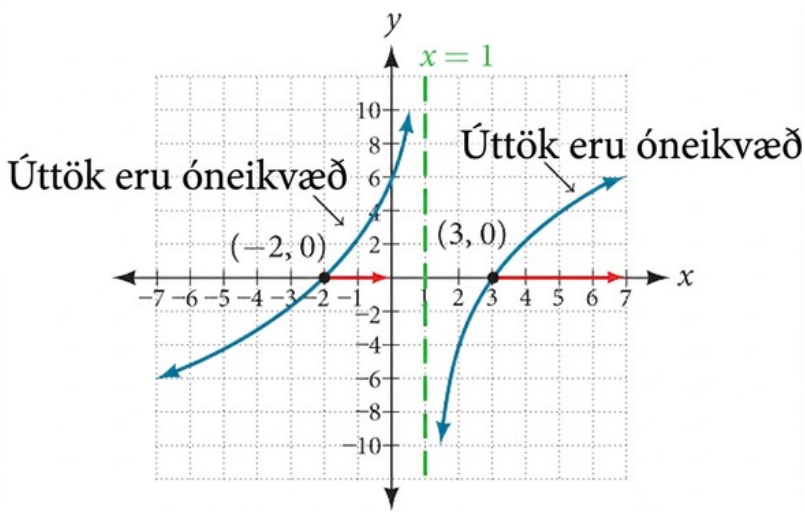
Skilgreiningarmengi rótarfalls sem er samsett með ræðu falli fundið

Finnið skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)}}$.

Lausn

Þar sem kvaðratrót er aðeins skilgreind þegar stærðin undir rótarmerkinu er óneikvæð þurfum við að ákvarða hvar $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)}\geq 0$. Úttak ræðs falls getur skipt um formerki (farið úr jákvæðu í neikvætt eða öfugt) við skurðpunkta við x-ás og við lóðfellur. Fyrir þessa jöfnu gæti grafið skipt um formerki við $x = -2$, 1 og 3.

Til að ákvarða bilin þar sem ræða stæðan er jákvæð getum við prófað nokkur gildi í stæðunni eða skissað graf. Báðar aðferðir virka jafn vel, en í þessu dæmi notum við graf eins og sýnt er á mynd 9.



Mynd 9

Fallið hefur tvo skurðpunkta við x-ás og við báða er hegðunin línuleg nálægt skurðpunktunum við x-ás. Það hefur eina lóðfellu sem samsvarar línulegum þætti; hegðunin líkist umhverfugrunnfallinu. Engin láfella er til vegna þess að stig teljarans er hærra en stig nefnarans. Skurðpunkturinn við y-ás er $(0, \sqrt{6})$.

Út frá skurðpunktinum við y-ás og skurðpunktinum við x-ás þegar $x = -2$, getum við skissað vinstri hluta grafsins. Út frá hegðuninni við aðfelluna getum við skissað hægri hlutann.

Af grafinu getum við nú séð á hvaða bilum úttökin eru óneikvæð og þar með verið viss um að upphaflega fallið $f(x)$ sé skilgreint. $f(x)$ hefur skilgreiningarmengið $-2 \le x < 1$ eða $x \ge 3$, eða með biltáknum $[-2, 1) U [3, \infty)$.

Andhverfur ræðra falla fundnar

Rétt eins og með annars stigs föll er stundum gagnlegt að finna andhverfu ræðs falls, einkum ræðra falla sem eru hlutföll línulegra falla, til dæmis í verkefnum um styrk.

DÆMI 8

Andhverfa ræðs falls fundin

Fallið $C = \frac{20 + 0{,}4\ n}{100 + n}$ gefur styrk sýrulausnarinnar C eftir að n mL af 40% lausn hefur verið bætt við 100 mL af 20% lausn. Finnið fyrst andhverfu fallsins, það er stæðu fyrir n sem fall af C. Notið síðan niðurstöðuna til að ákvarða hve miklu af 40% lausninni þarf að bæta við svo lokablandan verði 35% lausn.

Lausn

Við viljum fyrst finna andhverfu fallsins. Leysum fyrir n sem fall af C.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{20+0{,}4\ n}{100+n} \\
C\ (100+n) &= 20+0{,}4\ n \\
100\ C+C\ n &= 20+0{,}4\ n \\
100\ C-20 &= 0{,}4\ n-C\ n \\
100\ C-20 &= (0{,}4-C)\ n \\
n &= \frac{100\ C-20}{0{,}4-C}
\end{aligned}
$$

3

Reiknið nú gildi fallsins þegar $C=0{,}35\ \ (35\,\%)$.

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{100\ (0{,}35)-20}{0{,}4-0{,}35} \\
&= \frac{15}{0{,}05} \\
&= 300
\end{aligned}
$$

Því þarf að bæta við 300 mL af 40% lausninni.

REYNIÐ SJÁLF #5

Finnið andhverfu fallsins $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$.

MIÐLAR

Skoðið þetta efni á netinu til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í andhverfum föllum og rótaföllum.

- Graf kvaðratrótargrunnfallsins teiknað
- Andhverfa kvaðratrótarfalls fundin
- Andhverfa ræðs falls fundin
- Andhverfa ræðs falls og gildi andhverfu fundin
- Andhverf föll

3.8 Æfingar kaflans

Orðleg verkefni

1. Útskýrið hvers vegna ekki er hægt að finna andhverfu fyrir öll margliðuföll.

2. Hvers vegna verður að takmarka skilgreiningarmengi annars stigs falls til að finna andhverfu þess?

3. Hvaða takmörkun þarf að gera til að finna andhverfu rótarfalls?

4. Á hvaða formi er andhverfa annars stigs falls alltaf?

Algebruverkefni

Finnið andhverfu fallsins á gefnu skilgreiningarmengi í eftirfarandi æfingum.

5.

$$f(x)=(x-4)^2,[4,\infty)$$

6.

$$f(x)=(x+2)^2,[-2,\infty)$$

7.

$$f(x)=(x+1)^2-3,[-1,\infty)$$

8.

$$f(x)=2-\sqrt{3+x}$$

9.

$$f(x)=3x^2+5,(-\infty,0]$$

10.

$$f(x)=12-x^2,[0,\infty)$$

11.

$$f(x)=9-x^2,[0,\infty)$$

12.

$$f(x)=2x^2+4,[0,\infty)$$

Finnið andhverfur fallanna í eftirfarandi æfingum.

13.

$$f(x)=x^3+5$$

14.

$$f(x)=3x^3+1$$

15.

$$f(x)=4-x^3$$

16.

$$f(x)=4-2x^3$$

Finnið andhverfur fallanna í eftirfarandi æfingum.

17.

$$f(x)=\sqrt{2x+1}$$

18.

$$f(x)=\sqrt{3-4x}$$

19.

$$f(x)=9+\sqrt{4x-4}$$

20.

$$f(x)=\sqrt{6x-8}+5$$

21.

$$f(x)=9+2\sqrt[3]{x}$$

22.

$$f(x)=3-\sqrt[3]{x}$$

23.

$$f(x)=\frac{2}{x+8}$$

24.

$$f(x)=\frac{3}{x-4}$$

25.

$$f(x)=\frac{x+3}{x+7}$$

26.

$$f(x)=\frac{x-2}{x+7}$$

27.

$$f(x)=\frac{3x+4}{5-4x}$$

28.

$$f(x)=\frac{5x+1}{2-5x}$$

29.

$$f(x)=x^2+2x,[-1,\infty)$$

30.

$$f(x)=x^2+4x+1,[-2,\infty)$$

31.

$$f(x)=x^2-6x+3,[3,\infty)$$

Myndræn verkefni

Finnið andhverfu fallsins í eftirfarandi æfingum og teiknið gröf bæði fallsins og andhverfu þess.

32.

$$f(x)=x^2+2,x\geq 0$$

33.

$$f(x)=4-x^2,x\geq 0$$

34.

$$f(x)=(x+3)^2,x\geq -3$$

35.

$$f(x)=(x-4)^2,x\geq 4$$

36.

$$f(x)=x^3+3$$

37.

$$f(x)=1-x^3$$

38.

$$f(x)=x^2+4x,x\geq -2$$

39.

$$f(x)=x^2-6x+1,x\geq 3$$

40.

$$f(x)=\frac{2}{x}$$

41.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}, x\geq 0$$

Notið graf í eftirfarandi æfingum til að ákvarða skilgreiningarmengi fallanna.

42.

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{x}}$$

43.

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{x-1}}$$

44.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x(x+3)}{x-4}}$$

45.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-x-20}{x-2}}$$

46.

$$f(x)=\sqrt{\frac{9-x^2}{x+4}}$$

Tækniverkefni

Notið reiknivél í eftirfarandi æfingum til að teikna graf fallsins. Notið síðan grafið til að gefa þrjá punkta á grafi andhverfunnar með tilgreind y-hnit. Ef fallið er ekki eintækt á öllu skilgreiningarmengi sínu, veljið bil þar sem það er eintækt og sem inniheldur öll tilgreindu y-hnitin sem inntaksgildi upphaflega fallsins. Tilgreinið bilið og notið andhverfu fallsins á því bili.

47.

$$f(x)=x^3-x-2, y=1,2,3$$

48.

$$f(x)=x^3+x-2, y=0,1,2$$

49.

$$f(x)=x^3+3x-4, y=0,1,2$$

50.

$$f(x)=x^3+8x-4,\ y=-1,0,1$$

51.

$$f(x)=x^4+5x+1,\ y=-1,0,1$$

Viðbótarverkefni

Finnið andhverfur fallanna í eftirfarandi æfingum þar sem a,b,c eru jákvæðar rauntölur. Athugið fyrst hvort andhverfa sé til. Takmarkið skilgreiningarmengið við bil þar sem fallið er eintækt ef þess þarf og tilgreinið valið bil. Ef það fer eftir gildum stuðlanna hvort andhverfa sé til, skuluð þið tilgreina skilyrðin sem þurfa að gilda.

52.

$$f(x)=ax^3+b$$

53.

$$f(x)=x^2+bx$$

54.

$$f(x)=\sqrt{ax^2+b}$$

55.

$$f(x)=\sqrt[3]{ax+b}$$

56.

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$$

Hagnýtingar

Ákvarðið fallið sem lýst er í eftirfarandi æfingum og notið það síðan til að svara spurningunni.

57. Hlutur sem látinn er falla úr 200 metra hæð er í hæðinni $h(t)$, í metrum eftir að t sekúndur eru liðnar, þar sem $h(t)=200-4{,}9t^2$. Setjið t fram sem fall af hæðinni, h, og finnið tímann sem það tekur að ná 50 metra hæð.

58. Hlutur sem látinn er falla úr 600 feta hæð er í hæðinni $h(t)$, í fetum eftir að t sekúndur eru liðnar, þar sem $h(t)=600-16t^2$. Setjið t fram sem fall af hæðinni h, og finnið tímann sem það tekur að ná 400 feta hæð.

59. Rúmmál kúlu, V, sem fall af geislanum, r, er gefið með $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. Setjið r fram sem fall af V, og finnið geisla kúlu með rúmmálið 200 rúmfet.

60. Yfirborðsflatarmál kúlu, A, sem fall af geislanum, r, er gefið með $A(r)=4\pi r^2$. Setjið r fram sem fall af A, og finnið geisla kúlu með yfirborðsflatarmálið 1000 fertommur.

61. Í íláti eru 100 ml af lausn sem inniheldur 25 ml af sýru. Ef n ml af lausn sem er 60% sýra er bætt við gefur fallið $C(n)=\frac{25+,6n}{100+n}$ styrkinn, C, sem fall af fjölda viðbættra ml, n. Setjið n fram sem fall af C og ákvarðið hve mörgum mL þarf að bæta við til að lausnin verði 50% sýra.

62. Sveiflutími T, einfalds pendúls í sekúndum sem fall af lengd hans l, í fetum er gefinn með $T(l)=2\pi\sqrt{\frac{l}{32,2}}$. Setjið l fram sem fall af T og ákvarðið lengd pendúls með sveiflutímann 2 sekúndur.

63. Rúmmál sívalnings, V, sem fall af geislanum, r, og hæðinni, h, er gefið með $V=\pi r^2 h$. Ef sívalningur er 6 metrar á hæð, setjið þá geislann fram sem fall af V og finnið geisla sívalnings með rúmmálið 300 rúmmetrar.

64. Yfirborðsflatarmál sívalnings, A, sem fall af geislanum, r, og hæðinni, h, er gefið með $A=2\pi r^2+2\pi r h$. Ef sívalningurinn er 4 fet á hæð, setjið þá geislann fram sem fall af A og finnið geislann þegar yfirborðsflatarmálið er 200 ferfet.

65. Rúmmál réttrar hringkeilu V, sem fall af geislanum r, og hæðinni h, er gefið með $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Setjið r fram sem fall af V þegar keilan er 12 tommur á hæð og finnið geisla keilu með rúmmálið 50 rúmtommur.

66. Skoðið keilu sem er 30 fet á hæð. Setjið geislann r, fram sem fall af rúmmálinu V, og finnið geisla keilu með rúmmálið 1000 rúmfet.

3.9 Líkön gerð með hlutföllum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Leysa verkefni um beint hlutfall.
- Leysa verkefni um öfugt hlutfall.
- Leysa verkefni um sameiginlegt hlutfall.

Bílasali sem selur notaða bíla hefur boðið Nicole, hæfasta umsækjandanum, starf við sölu. Starfinu fylgir 16% söluþóknun. Tekjur hennar ráðast af söluupphæðinni. Ef hún selur til dæmis ökutæki á 4.600 Bandaríkjadali fær hún 736 Bandaríkjadali í þóknun. Þegar hún íhugar tilboðið tekur hún mið af dæmigerðu verði bíla hjá söluaðilanum, markaðnum í heild og því hve marga bíla hún getur með góðu móti búist við að selja. Í þessum hluta skoðum við tengsl á borð við þessi milli tekna, sölu og þóknunarhlutfalls.

Verkefni um beint hlutfall leyst

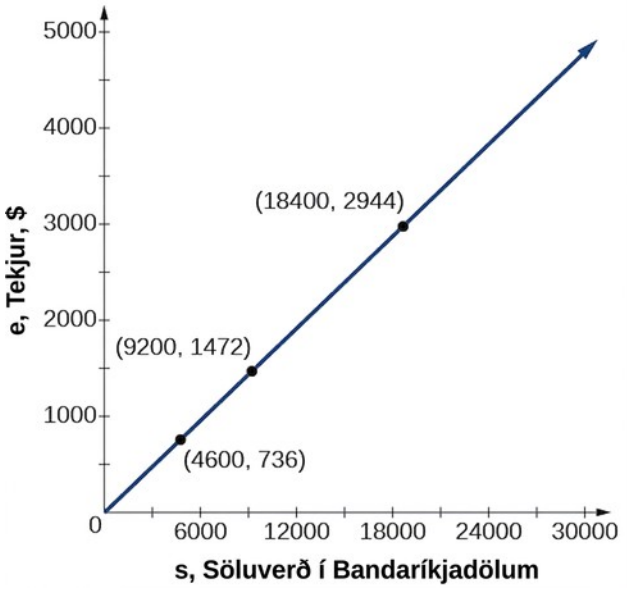
Í dæminu hér að framan má finna tekjur Nicole með því að margfalda söluupphæðina með þóknunarhlutfallinu. Formúlan $e=0{,}16\ s$ segir að tekjur hennar, e, séu margfeldi þóknunarhlutfallsins 0,16 og söluverðs ökutækisins. Ef við búum til töflu sjáum við að tekjurnar hækka þegar söluverðið hækkar, eins og vænta má. Sjá töflu 1.

Tafla 1

s, söluverð	$e=0{,}16\ s$	Túlkun
$4.600	$e=0{,}16\ (4.600)=736$	Sala ökutækis á 4.600 Bandaríkjadali skilar 736 Bandaríkjadölum í tekjur.
$9.200	$e=0{,}16\ (9.200)=1.472$	Sala ökutækis á 9.200 Bandaríkjadali skilar 1.472 Bandaríkjadölum í tekjur.
$18.400	$e=0{,}16\ (18.400)=2.944$	Sala ökutækis á 18.400 Bandaríkjadali skilar 2.944 Bandaríkjadölum í tekjur.

Takið eftir að tekjurnar eru margfeldi sölunnar. Þegar salan eykst aukast tekjurnar með fyrirsjáanlegum hætti. Ef söluverð ökutækisins tvöfaldast úr 4.600 í 9.200 Bandaríkjadali tvöfaldast tekjurnar úr 736 í 1.472 Bandaríkjadali. Úttakið er margfeldi af inntakinu og eykst því þegar inntakið eykst. Tengsl þar sem ein stærð fæst með því að margfalda aðra stærð með föstum stuðli kallast beint hlutfall. Hvor breyta í slíkum tengslum er í beinu hlutfalli við hina.

Mynd 1 sýnir gögnin um mögulegar tekjur Nicole. Við segjum að tekjurnar séu í beinu hlutfalli við söluverð bílsins. Formúlan $y=k\,x^n$ lýsir beinu hlutfalli við veldi inntaksins. Gildið k er fasti, ekki núll, og kallast hlutfallsstuðull. Hér er $k=0{,}16$ og $n=1$.



Mynd 1

BEINT HLUTFALL

Ef x og y tengjast með jöfnu á forminu

$$y = k\,x^n$$

segjum við að tengslin séu beint hlutfall og að y sé í beinu hlutfalli við n-ta veldi x. Í tengslum með beinu hlutfalli er fast hlutfall $k = \frac{y}{x^n}$, sem er ekki núll, þar sem k nefnist hlutfallsstuðull og hjálpar til við að skilgreina tengsl breytanna.

AÐFERÐ

Leysið fyrir óþekktri stærð út frá lýsingu á verkefni um beint hlutfall.

1. Ákvarðið inntakið, x, og úttakið, y.
2. Ákvarðið hlutfallsstuðulinn. Til þess gæti þurft að deila y með tilteknu veldi x.
3. Notið hlutfallsstuðulinn til að rita jöfnu fyrir tengslin.
4. Setjið þekkt gildi inn í jöfnuna til að finna óþekktu stærðina.

DÆMI 1

Verkefni um beint hlutfall leyst

Stærðin y er í beinu hlutfalli við þriðja veldi x. Ef $y = 25$ þegar $x = 2$, finnið þá y þegar x er 6.

Lausn

Almenna formúlan fyrir beint hlutfall við þriðja veldi er $y = k\,x^3$. Hlutfallsstuðullinn fæst með því að deila y með þriðja veldi x.

$$\begin{aligned} k &= \tfrac{y}{x^3} \\ &= \tfrac{25}{2^3} \\ &= \tfrac{25}{8} \end{aligned}$$

Notið nú hlutfallsstuðulinn til að rita jöfnu sem lýsir þessum tengslum.

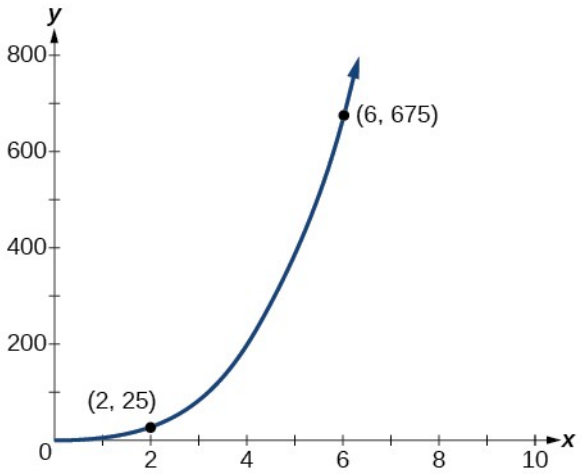
$$y = \frac{25}{8}x^3$$

Setjið $x = 6$ inn í jöfnuna og leysið fyrir y.

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{25}{8}(6)^3 \\ &= 675 \end{aligned}$$

Greining

Graf þessarar jöfnu er einfalt þriðja stigs graf, eins og sýnt er á mynd 2.



Mynd 2

SPURT OG SVARAÐ

Líta gröf allra jafna fyrir beint hlutfall út eins og grafið í dæmi 1?

Nei. Jöfnur fyrir beint hlutfall lýsa veldisföllum; þau geta meðal annars verið línuleg, annars stigs, þriðja stigs, fjórða stigs eða rótaföll. Þegar veldisvísirinn er jákvæður fara gröfin í gegnum $(0,0)$.

REYNIÐ SJÁLF #1

Stærðin y er í beinu hlutfalli við annað veldi x. Ef $y=24$ þegar $x=3$, finnið þá y þegar x er 4.

Verkefni um öfugt hlutfall leyst

Í þessu dæmi gerum við ráð fyrir að hitastig sjávar í Fahrenheit-gráðum sé í öfugu hlutfalli við dýpið á tilteknu dýptarbili. Á 250 til 500 feta dýpi gefur formúlan $T=\frac{14.000}{d}$ hitastigið í Fahrenheit-gráðum á tilteknu dýpi í fetum undir yfirborði jarðar. Lítum á Atlantshafið, sem þekur 22% af yfirborði jarðar. Á tilteknum stað getur hitastigið á 500 feta dýpi verið 28°F.

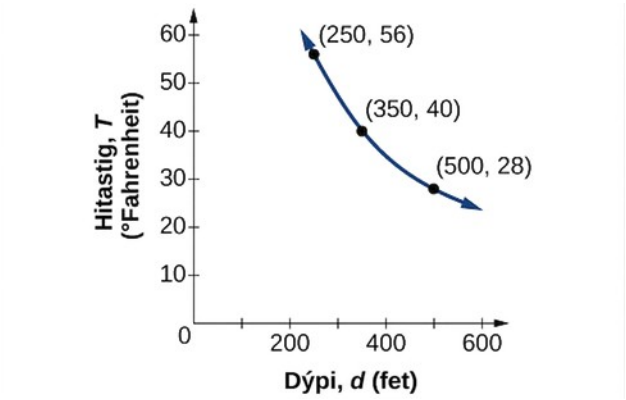
Ef við búum til töflu 2 sjáum við að hitastig vatnsins lækkar þegar dýpið eykst.

Tafla 2

d, **dýpi**	$T=\frac{14.000}{d}$	**Túlkun**
500 ft	$\frac{14.000}{500}=28$	Á 500 feta dýpi er hitastig vatnsins 28°F.
350 ft	$\frac{14.000}{350}=40$	Á 350 feta dýpi er hitastig vatnsins 40°F.
250 ft	$\frac{14.000}{250}=56$	Á 250 feta dýpi er hitastig vatnsins 56°F.

Í þessu líkani minnkar önnur stærðin þegar hin eykst og margfeldi stærðanna helst fast. Við segjum að stærðirnar séu í öfugu hlutfalli og hvor þeirra er í öfugu hlutfalli við hina. Slík tengsl kallast einnig öfugt hlutfall.

Í dæminu okkar sýnir mynd 3 öfuga hlutfallið. Hitastig vatnsins í Fahrenheit-gráðum er í öfugu hlutfalli við dýpið í þessu líkani vegna þess að margfeldi hitastigs og dýpis er fast. Formúlan $y=\frac{k}{x}$ fyrir öfugt hlutfall notar hér $k=14.000$.



Mynd 3 Graf líkansins um öfugt hlutfall hitastigs og dýpis. Dýpið er mælt í fetum og hitastigið í Fahrenheit-gráðum.

ÖFUGT HLUTFALL

Ef x og y tengjast með jöfnu á forminu

$$y=\frac{k}{x^n}$$

þar sem k er fasti sem er ekki núll, segjum við að y sé í öfugu hlutfalli við n-ta veldi x. Í öfugum hlutfallstengslum, eða öfugu hlutfalli, er margfeldið $k=x^n y$. fast.

DÆMI 2

Formúla fyrir öfugt hlutfall rituð

Ferðamaður hyggst aka 100 mílur. Finnið formúlu fyrir ferðatímann sem fall af akstursraðanum.

Lausn

Munið að margfeldi hraða og tíma gefur vegalengd. Látum t tákna aksturstímann í klukkustundum og v hraðann sem ferðamaðurinn ekur á. Þá er $v\,t = \text{vegalengd}$. Vegalengdin er föst, 100 mílur, og því er $v\,t = 100$. Þegar þessi jafna er leyst fyrir tímann fæst fallið.

$$\begin{aligned} t(v) &= \tfrac{100}{v} \\ &= 100v^{-1} \end{aligned}$$

Við sjáum að hlutfallsstuðullinn er 100. Þótt rita megi tengslin með neikvæðum veldisvísi er algengara að rita þau með broti.

AÐFERÐ

Leysið fyrir óþekktri stærð út frá lýsingu á verkefni um öfugt hlutfall.

1. Ákvarðið inntakið, x, og úttakið, y.
2. Ákvarðið hlutfallsstuðulinn. Til þess gæti þurft að margfalda y með tilteknu veldi x.
3. Notið hlutfallsstuðulinn til að rita jöfnu fyrir tengslin.
4. Setjið þekkt gildi inn í jöfnuna til að finna óþekktu stærðina.

DÆMI 3

Verkefni um öfugt hlutfall leyst

Stærðin y er í öfugu hlutfalli við þriðja veldi x. Ef $y = 25$ þegar $x = 2$, finnið þá y þegar x er 6.

Lausn

Almenna formúlan fyrir öfugt hlutfall við þriðja veldi er $y = \dfrac{k}{x^3}$. Hlutfallsstuðullinn fæst með því að margfalda y með þriðja veldi x.

$$\begin{aligned} k &= x^3 y \\ &= 2^3 \cdot 25 \\ &= 200 \end{aligned}$$

Nú notum við hlutfallsstuðulinn til að rita jöfnu sem lýsir þessum tengslum.

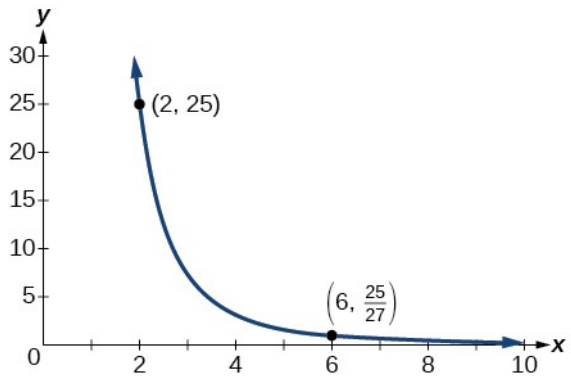
$$\begin{aligned} y &= \tfrac{k}{x^3}, \quad k = 200 \\ y &= \tfrac{200}{x^3} \end{aligned}$$

Setjið $x = 6$ inn í jöfnuna og leysið fyrir y.

$$y = \frac{200}{6^3}$$
$$= \frac{25}{27}$$

Greining

Graf þessarar jöfnu er graf ræðs falls, eins og sýnt er á mynd 4.



Mynd 4

REYNIÐ SJÁLF #2

Stærðin y er í öfugu hlutfalli við annað veldi x. Ef $y=8$ þegar $x=3$, finnið þá y þegar x er 4.

Verkefni um sameiginlegt hlutfall leyst

Margar aðstæður eru flóknari en einfalt líkan með beinu eða öfugu hlutfalli. Ein breyta er oft háð fleiri en einni annarri breytu. Þegar breyta er háð margfeldi eða kvóta tveggja eða fleiri breyta kallast það sameiginlegt hlutfall. Til dæmis er kostnaður við akstur nemenda í hverri skólaferð háður bæði fjölda nemenda sem fara og fjarlægðinni frá skólanum. Breytan c, sem táknar kostnað, er í sameiginlegu hlutfalli við fjölda nemenda, n, og fjarlægðina, d.

SAMEIGINLEGT HLUTFALL

Sameiginlegt hlutfall á við þegar breyta er í beinu eða öfugu hlutfalli við fleiri en eina breytu. Ef x er til dæmis í beinu hlutfalli við bæði y og z, er $x=k\,y\,z$. Ef x er í beinu hlutfalli við y og öfugu hlutfalli við z, er $x=\frac{k\,y}{z}$. Takið eftir að aðeins einn hlutfallsstuðull er notaður í jöfnu fyrir sameiginlegt hlutfall.

DÆMI 4

Verkefni um sameiginlegt hlutfall leyst

Stærðin x er í beinu hlutfalli við annað veldi y og öfugu hlutfalli við teningsrót z. Ef $x=6$ þegar $y=2$ og $z=8$, finnið þá x þegar $y=1$ og $z=27$.

Lausn

Byrjið á að rita jöfnu sem sýnir tengsl breytanna.

$$x=\frac{k\,y^2}{\sqrt[3]{z}}$$

Setjið $x=6$, $y=2$, og $z=8$ inn í jöfnuna til að finna gildi hlutfallsstuðulsins k.

$$\begin{aligned}6 &= \frac{k2^2}{\sqrt[3]{8}}\\ 6 &= \frac{4k}{2}\\ 3 &= k\end{aligned}$$

Nú getum við sett gildi hlutfallsstuðulsins inn í jöfnuna fyrir tengslin.

$$x=\frac{3\,y^2}{\sqrt[3]{z}}$$

Til að finna x þegar $y=1$ og $z=27$, setjum við gildi y og z inn í jöfnuna.

$$\begin{aligned}x &= \frac{3(1)^2}{\sqrt[3]{27}}\\ &= 1\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #3

x er í beinu hlutfalli við annað veldi y og öfugu hlutfalli við z. Ef $x=40$ þegar $y=4$ og $z=2$, finnið þá x þegar $y=10$ og $z=25$.

MIÐLAR

Notið þessi nettilföng til að læra meira um beint og öfugt hlutfall og æfa ykkur.

- Beint hlutfall
- Öfugt hlutfall
- Beint og öfugt hlutfall

3.9 Æfingar

Hugtakaspurningar

1. Hvað einkennir útlit grafa sem sýna beint hlutfall milli tveggja breyta?
2. Hvernig lítur jafna út sem lýsir tengslum tveggja breyta sem eru í öfugu hlutfalli?
3. Eru takmörk fyrir því hve margar breytur geta verið í sameiginlegu hlutfalli? Útskýrið.

Algebruverkefni

Ritið jöfnu sem lýsir tengslum gefnu breytanna í eftirfarandi verkefnum.

4. y er í beinu hlutfalli við x. Gefin eru gildin $x=6$, $y=12$.

5. y er í beinu hlutfalli við annað veldi x. Gefin eru gildin $x=4$, $y=80$.

6. y er í beinu hlutfalli við kvaðratrót x. Gefin eru gildin $x=36$, $y=24$.

7. y er í beinu hlutfalli við þriðja veldi x. Gefin eru gildin $x=36$, $y=24$.

8. y er í beinu hlutfalli við teningsrót x. Gefin eru gildin $x=27$, $y=15$.

9. y er í beinu hlutfalli við fjórða veldi x. Gefin eru gildin $x=1$, $y=6$.

10. y er í öfugu hlutfalli við x. Gefin eru gildin $x=4$, $y=2$.

11. y er í öfugu hlutfalli við annað veldi x. Gefin eru gildin $x=3$, $y=2$.

12. y er í öfugu hlutfalli við þriðja veldi x. Gefin eru gildin $x=2$, $y=5$.

13. y er í öfugu hlutfalli við fjórða veldi x. Gefin eru gildin $x=3$, $y=1$.

14. y er í öfugu hlutfalli við kvaðratrót x. Gefin eru gildin $x=25$, $y=3$.

15. y er í öfugu hlutfalli við teningsrót x. Gefin eru gildin $x=64$, $y=5$.

16. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og z. Þegar $x=2$ og $z=3$ er $y=36$.

17. y er í sameiginlegu hlutfalli við x, z og w. Þegar $x=1$, $z=2$ og $w=5$ er $y=100$.

18. y er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi x og annað veldi z. Þegar $x=3$ og $z=4$ er $y=72$.

19. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og kvaðratrót z. Þegar $x=2$ og $z=25$ er $y=100$.

20. y er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi x þriðja veldi z og kvaðratrót w. Þegar $x=1$, $z=2$, og $w=36$, þá $y=48$.

21. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og z og öfugu hlutfalli við w. Þegar $x=3$, $z=5$ og $w=6$ er $y=10$.

22. y er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi x og kvaðratrót z og í öfugu hlutfalli við þriðja veldi w. Þegar $x=3$, $z=4$, og $w=3$, þá $y=6$.

23. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og z og öfugu hlutfalli við kvaðratrót w og annað veldi t. Þegar $x=3$, $z=1$, $w=25$ og $t=2$ er $y=6$.

Töluleg verkefni

Notið gefnar upplýsingar til að finna óþekkta gildið í eftirfarandi verkefnum.

24. y er í beinu hlutfalli við x. Þegar $x=3$ þá er $y=12$. Finnið y þegar $x=20$.

25. y er í beinu hlutfalli við annað veldi x. Þegar $x=2$ þá er $y=16$. Finnið y þegar $x=8$.

26. y er í beinu hlutfalli við þriðja veldi x. Þegar $x=3$ þá er $y=5$. Finnið y þegar $x=4$.

27. y er í beinu hlutfalli við kvaðratrót x. Þegar $x=16$, þá er $y=4$. Finnið y þegar $x=36$.

28. y er í beinu hlutfalli við teningsrót x. Þegar $x=125$, þá er $y=15$. Finnið y þegar $x=1,000$.

29. y er í öfugu hlutfalli við x. Þegar $x=3$ þá er $y=2$. Finnið y þegar $x=1$.

30. y er í öfugu hlutfalli við annað veldi x. Þegar $x=4$ þá er $y=3$. Finnið y þegar $x=2$.

31. y er í öfugu hlutfalli við þriðja veldi x. Þegar $x=3$ þá er $y=1$. Finnið y þegar $x=1$.

32. y er í öfugu hlutfalli við kvaðratrót x. Þegar $x=64$, þá er $y=12$. Finnið y þegar $x=36$.

33. y er í öfugu hlutfalli við teningsrót x. Þegar $x=27$, þá er $y=5$. Finnið y þegar $x=125$.

34. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og z. Þegar $x=4$ og $z=2$, þá er $y=16$. Finnið y þegar $x=3$ og $z=3$.

35. y er í sameiginlegu hlutfalli við x, z, og w. Þegar $x=2$, $z=1$, og $w=12$, þá er $y=72$. Finnið y þegar $x=1$, $z=2$, og $w=3$.

36. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og annað veldi z. Þegar $x=2$ og $z=4$, þá er $y=144$. Finnið y þegar $x=4$ og $z=5$.

37. y er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi x og kvaðratrót z. Þegar $x=2$ og $z=9$, þá er $y=24$. Finnið y þegar $x=3$ og $z=25$.

38. y er í sameiginlegu hlutfalli við x og z og öfugu hlutfalli við w. Þegar $x=5$, $z=2$, og $w=20$, þá er $y=4$. Finnið y þegar $x=3$, $z=8$, og $w=48$.

39. y er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi x og þriðja veldi z og öfugu hlutfalli við kvaðratrót w. Þegar $x=2$, $z=2$, og $w=64$, þá er $y=12$. Finnið y þegar $x=1$, $z=3$, og $w=4$.

40. y er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi x og annað veldi z og öfugu hlutfalli við kvaðratrót w og kvaðratrót t. Þegar $x=2$, $z=3$, $w=16$, og $t=3$, þá er $y=1$. Finnið y þegar $x=3$, $z=2$, $w=36$, og $t=5$.

Tækni

Notið reiknivél í eftirfarandi verkefnum til að teikna graf jöfnunnar sem lýsir gefnu hlutfallstengslunum.

41. y er í beinu hlutfalli við annað veldi x. Gefin eru gildin $x=2$, $y=3$.

42. y er í beinu hlutfalli við þriðja veldi x. Gefin eru gildin $x=2$, $y=4$.

43. y er í beinu hlutfalli við kvaðratrót x. Gefin eru gildin $x=36$, $y=2$.

44. y er í öfugu hlutfalli við x. Gefin eru gildin $x=6$, $y=2$.

45. y er í öfugu hlutfalli við annað veldi x. Gefin eru gildin $x=1$, $y=4$.

Viðbótarverkefni

Notið lögmál Keplers í eftirfarandi verkefnum. Samkvæmt því er annað veldi tímans, T , sem reikistjarna þarf til að ganga umhverfis sólina, í beinu hlutfalli við þriðja veldi meðalfjarlægðarinnar, a , frá reikistjörnunni til sólarinnar.

46. Notið umferðartíma jarðar, 1 ár, og meðalfjarlægðina 93 milljónir mílna til að finna jöfnu sem tengir T og a.

47. Notið niðurstöðu fyrra verkefnis til að finna hve langan tíma Mars þarf til að ganga umhverfis sólina ef meðalfjarlægð hans er 142 milljónir mílna.

48. Notið fjarlægð jarðar, 150 milljónir kílómetra, til að finna jöfnu sem tengir T og a.

49. Notið niðurstöðu fyrra verkefnis til að finna hve langan tíma Venus þarf til að ganga umhverfis sólina ef meðalfjarlægð hennar er 108 milljónir kílómetra.

50. Notið fjarlægð jarðar, 1 stjarnfræðieiningu (SE), til að finna hve langan tíma Satúrnus þarf til að ganga umhverfis sólina ef meðalfjarlægð hans er 9,54 SE.

Raunhæf viðfangsefni

Notið gefnar upplýsingar til að svara spurningunum í eftirfarandi verkefnum.

51. Vegalengdin s sem hlutur fellur er í beinu hlutfalli við annað veldi falltímans t ,. Ef hlutur fellur 16 fet á einni sekúndu, hve lengi er hann að falla 144 fet?

52. Hraði v fallandi hlutar er í beinu hlutfalli við falltímann t , og eftir 2 sekúndur er hraði hlutarins 64 fet á sekúndu. Hver er hraðinn eftir 5 sekúndur?

53. Titringstíðni strengs við fasta spennu er í öfugu hlutfalli við lengd strengsins. Ef strengur er 24 tommur á lengd og titrar 128 sinnum á sekúndu, hve langur er strengur sem titrar 64 sinnum á sekúndu?

54. Rúmmál gass við fast hitastig er í öfugu hlutfalli við þrýsting gassins. Ef rúmmálið er 1.200 rúmsentímetrar þegar þrýstingurinn er 200 millímetrar kvikasilfurs, hvert er rúmmálið þegar þrýstingurinn er 300 millímetrar kvikasilfurs?

55. Þyngd hlutar yfir yfirborði jarðar er í öfugu hlutfalli við annað veldi fjarlægðarinnar frá miðju jarðar. Ef hlutur vegur 50 pund í 3.960 mílna fjarlægð frá miðju jarðar, hvað vegur hann í 3.970 mílna fjarlægð?

56. Birta á fleti, mæld í fetkertum (e. foot-candles), er í öfugu hlutfalli við annað veldi fjarlægðarinnar frá ljósgjafanum í þessu líkani. Gerum ráð fyrir að birtan sé 0,08 fetkerti í 3 metra fjarlægð frá peru. Finnið birtuna í 8 metra fjarlægð.

57. Rafstraumur í rafrás er í öfugu hlutfalli við viðnám hennar, mælt í ómum. Þegar straumurinn er 40 amper er viðnámið 10 óm. Finnið strauminn þegar viðnámið er 12 óm.

58. Kraftur vinds á sléttan flöt er í sameiginlegu hlutfalli við annað veldi vindhraðans og flatarmál flatarins. Ef flatarmálið er 40 ferfet og vindhraðinn 20 mílur á klukkustund er krafturinn 15 pund. Finnið kraftinn á 65 ferfeta flöt við 30 mílna vindhraða á klukkustund.

59. Afl í hestöflum (hp) sem öxull getur flutt á öruggan hátt er í sameiginlegu hlutfalli við snúningshraða hans (í snúningum á mínútu, rpm) og þriðja veldi þvermálsins. Ef öxull úr tilteknu efni, 3 tommur í þvermál, getur flutt 45 hp við 100 rpm, hvert þarf þvermálið að vera til að flytja 60 hp við 150 rpm?

60. Hreyfiorka K hlutar á hreyfingu er í sameiginlegu hlutfalli við massa hans m og annað veldi hraðans v. Ef hlutur með massann 40 kílógrömm og hraðann 15 metra á sekúndu hefur hreyfiorkuna 1.000 júl, finnið hreyfiorkuna ef hraðinn eykst í 20 metra á sekúndu. Athugasemd: Tölugildi frumtextans samræmast ekki eðlisfræðiformúlunni K = ½mv²; samkvæmt henni væri upphaflega hreyfiorkan 4.500 júl. Leysið verkefnið sem hlutfallsdæmi með gefnu upphafsgildi, 1.000 júl, og óbreyttum massa.

Lykilhugtök

örvaritháttur
aðferð til að tákna staðbundna hegðun og endahegðun falls með örvum sem sýna að inntak eða úttak nálgast tiltekið gildi

samhverfuás
lóðrétt lína gegnum hvirfilpunkt fleygboga sem fleygboginn er samhverfur um; hún er skilgreind með $x = -\frac{b}{2a}$.

stuðull
rauntala sem breyta í tilteknu veldi er margfölduð með

samoka tvinntala
tvinntala þar sem formerki þverhlutans er breytt en raunhlutinn er óbreyttur; summa hennar og upphaflegu tvinntölunnar er rauntala og margfeldi þeirra líka

tvinntala
summa rauntölu og þverrar tölu, rituð á staðalforminu

$$a + bi,$$

þar sem a er raunhlutinn og bi er þverhlutinn

tvinntalnaplan
hnitakerfi þar sem lárétti ásinn táknar raunhluta tvinntölu og lóðrétti ásinn þverhluta hennar

hlutfallsstuðull
fastinn k, sem er ekki núll og skilgreinir tengsl breyta í beinu eða öfugu hlutfalli

samfellt fall

fall sem hægt er að teikna graf af án þess að lyfta pennanum frá blaðinu, því engin rof eru í grafinu

stig

hæsti veldisvísir breytunnar sem kemur fyrir í margliðu

formerkjaregla Descartes

regla sem ákvarðar mesta mögulega fjölda jákvæðra og neikvæðra raunnúllstöðva út frá fjölda formerkjaskipta í $f(x)$ og $f(-x)$

beint hlutfall

tengsl tveggja breyta þar sem önnur er fast margfeldi hinnar; þegar hlutfallsstuðullinn er jákvæður eykst önnur stærðin þegar hin eykst

deilingarreikniritið

fyrir margliðudeilistofn $f(x)$ og margliðudeili $d(x)$, sem er ekki núll og þar sem stig $d(x)$ er minna en eða jafnt stigi $f(x)$, eru til ótvírætt ákvarðaðar margliður $q(x)$ og $r(x)$ þannig að $f(x)=d(x)q(x)+r(x)$, þar sem $q(x)$ er kvótinn og $r(x)$ er afgangurinn. Afgangurinn er annaðhvort núll eða hefur stig sem er minna en stig $d(x)$.

endahegðun

hegðun grafs falls þegar inntakið minnkar eða eykst án takmarka

þáttasetningin

k er núllstöð margliðufallsins $f(x)$ þá og því aðeins að $(x-k)$ sé þáttur í $f(x)$

undirstöðusetning algebrunnar

margliðufall af stigi stærra en 0 hefur að minnsta kosti eina tvinntölunúllstöð

almennt form annars stigs falls

fall sem lýsir fleygboga, ritað á forminu $f(x)=ax^2+bx+c$, þar sem a, b, og c eru rauntölur og $a\neq 0$.

algilt hágildi

stærsta fallgildi falls; $f(a)$ þar sem $f(a)\geq f(x)$ fyrir öll x.

algilt lággildi

minnsta fallgildi falls; $f(a)$ þar sem $f(a)\leq f(x)$ fyrir öll x.

láfella

lárétt lína $y=b$ sem grafið nálgast þegar inntakið eykst eða minnkar án takmarka

þvertala

tala á forminu bi þar sem $i=\sqrt{-1}$

milligildissetningin
fyrir tvær tölur a og b í skilgreiningarmengi f, ef $a<b$ og $f(a)\neq f(b)$, þá tekur fallið f öll gildi milli $f(a)$ og $f(b)$; sérstaklega gildir að þegar margliðufall breytist úr neikvæðu gildi í jákvætt gildi verður fallið að skera $x-$ ásinn

öfugt hlutfall
tengsl tveggja breyta þar sem margfeldi þeirra er fasti

í öfugu hlutfalli
tengsl þar sem önnur stærðin er kvóti fasta og hinnar stærðarinnar; þegar stærðirnar og fastinn eru jákvæð minnkar önnur stærðin þegar hin eykst

andhverfanlegt fall
fall sem á sér andhverft fall

sameiginlegt hlutfall
tengsl þar sem breyta er í beinu eða öfugu hlutfalli við fleiri en eina breytu

forystustuðull
stuðull forystuliðarins

forystuliður
liðurinn sem inniheldur hæsta veldisvísi breytunnar

setningin um línulega þáttun
margliðu af jákvæðu stigi má rita sem margfeldi forystustuðuls hennar og jafn margra línulegra þátta og stigið segir til um, að teknu tilliti til margfeldni; hver línulegur þáttur er á forminu $(x-c)$, þar sem c er tvinntala

margfeldni
fjöldi skipta sem tiltekinn þáttur kemur fyrir í þáttaformi margliðu; ef margliða inniheldur þátt á forminu $(x-h)^p$, er $x=h$ núllstöð með margfeldnina p.

margliðufall
fall sem er annaðhvort núll eða summa endanlegs fjölda liða sem eru ekki núll; hver liður er margfeldi tölu, sem kallast stuðull liðarins, og breytu í veldi með veldisvísi sem er óneikvæð heiltala

veldisfall
fall sem rita má á forminu $f(x)=k\,x^p$, þar sem k er fasti, grunnurinn er breyta og veldisvísirinn p, er fasti

rætt fall
fall sem rita má sem hlutfall tveggja margliða

setningin um ræðar núllstöðvar

mögulegar ræðar núllstöðvar margliðufalls með heiltölustuðlum eru á forminu $(\frac{p}{q})$, þar sem p er þáttur fastaliðarins og q þáttur forystustuðulsins

afgangssetningin

ef margliðu $f(x)$ er deilt með $x-k$, er afgangurinn jafn $f(k)$

afmáanlegur sérstöðupunktur

punktur þar sem fall er óskilgreint en hægt er að skilgreina gildi þess þannig að það verði samfellt í punktinum; hann birtist sem gat á grafi fallsins

sléttur ferill

graf án hvassra horna

staðlað form annars stigs falls

fall sem lýsir fleygboga, ritað á forminu $f(x)=a(x-h)^2+k$, þar sem (h,k) er hvirfilpunkturinn

deiling með reikniriti Horners

stytt aðferð til að deila margliðu með tvíliðu á forminu $x-k$

liður margliðufalls

sérhver $(a_i x^i)$ í margliðufalli á forminu

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_0$$

snúningspunktur

punktur þar sem graf falls breytir um stefnu

í beinu hlutfalli

tengsl þar sem önnur stærðin er fasti margfaldaður með hinni

í öfugu hlutfalli

tengsl þar sem önnur stærðin er kvóti fasta og hinnar stærðarinnar

hvirfilpunktur

punktur þar sem fleygbogi breytir um stefnu og sem samsvarar lággildi eða hágildi annars stigs fallsins

hvirfilpunktsform annars stigs falls

annað heiti staðlaðs forms annars stigs falls

lóðfella

lóðrétt lína $x=a$ þar sem fallgildin stefna á jákvætt eða neikvætt óendanlegt gildi þegar inntakið nálgast a

núllstöðvar

gildi x í gefnu falli þar sem $y=0$,; einnig kölluð rætur

Lykiljöfnur

almennt form annars stigs falls	$f(x)=a\,x^2+b\,x+c$
lausnarformúla annars stigs jöfnu	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$
staðlað form annars stigs falls	$f(x)=a(x-h)^2+k$
almennt form margliðufalls	$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_1$
deilingarreikniritið	$f(x)=d(x)q(x)+r(x)$ þar sem $q(x)\neq 0$
rætt fall	$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_p x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_q x^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_1 x+b_0}, Q(x)\neq 0$
beint hlutfall	$y=k\,x^n, k$ er fasti sem er ekki núll.
öfugt hlutfall	$y=\frac{k}{x^n}, k$ er fasti sem er ekki núll.

Meginatriði

3.1 Tvinntölur

- Rita má kvaðratrót hverrar neikvæðrar tölu sem margfeldi af i. Sjá dæmi 1.
- Til að merkja tvinntölu í hnitakerfi notum við tvo talnaása sem skerast og mynda tvinntalnaplanið. Lárétti ásinn er raunásinn og lóðrétti ásinn þverásinn. Sjá dæmi 2.
- Tvinntölur eru lagðar saman eða dregnar hvor frá annarri með því að taka saman raunhlutana sér og þverhlutana sér. Sjá dæmi 3.
- Einnig má margfalda tvinntölur og deila þeim.
- Til að margfalda tvinntölur er margfaldað inn í sviga eins og með margliður. Sjá dæmi 4, dæmi 5 og dæmi 8.
- Þegar tvinntölum er deilt eru bæði teljari og nefnari margfaldaðir með samoku nefnarans til að fá rauntölu í nefnarann. Sjá dæmi 6, dæmi 7 og dæmi 9.
- Veldi i endurtaka sig í lotu sem er fjögur veldi að lengd. Sjá dæmi 10.

3.2 Annars stigs föll

- Margliðufall af öðru stigi kallast annars stigs fall.

- Graf annars stigs falls er fleygbogi. Fleygbogi er U-laga ferill sem getur opnast upp eða niður.
- Samhverfuásinn er lóðrétta línan sem liggur í gegnum hvirfilpunktinn. Núllstöðvar fallsins eru $x-$ hnit punktanna þar sem fleygboginn mætir $x-$ ásnum. Skurðpunkturinn við $y-$ ásinn er punkturinn þar sem fleygboginn sker $y-$ ásinn. Sjá dæmi 1, dæmi 7 og dæmi 8.
- Annars stigs föll eru oft rituð á almennu formi. Á stöðluðu formi, eða hvirfilpunktsformi, er auðvelt að finna hvirfilpunkt fleygbogans. Rita má hvort formið sem er út frá grafi. Sjá dæmi 2.
- Finna má hvirfilpunkt út frá jöfnu annars stigs falls. Sjá dæmi 3.
- Skilgreiningarmengi annars stigs falls er mengi allra rauntalna. Myndmengið ræðst af fallinu. Sjá dæmi 4.
- Lággildi eða hágildi annars stigs falls er $y-$ hnit hvirfilpunktsins.
- Nota má lággildi eða hágildi annars stigs falls til að ákvarða myndmengi fallsins og leysa margs konar raunhæf verkefni, meðal annars um flatarmál og tekjur. Sjá dæmi 5 og dæmi 6.
- Nota má lausnarformúluna til að leysa annars stigs jöfnur, einnig þegar ekki er auðvelt að þátta þær. Sjá dæmi 9.
- Greina má hvirfilpunkt og skurðpunkta og túlka þá til að leysa raunhæf verkefni. Sjá dæmi 10.

3.3 Veldisföll og margliðuföll

- Veldisfall er fall á forminu f(x) = kx^p, þar sem k er fasti sem er ekki núll og p er fastur veldisvísir. Sjá dæmi 1.
- Hegðun grafs þegar inntakið minnkar eða eykst án takmarka kallast endahegðun.
- Endahegðun veldisfalls með jákvæðum heiltöluveldisvísi ræðst bæði af því hvort veldisvísirinn er slétt tala eða oddatala og af formerki stuðulsins. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Margliðufall er summa endanlega margra liða. Hver liður er margfeldi rauntölustuðuls og breytu í heiltöluveldi sem er núll eða stærra. Sjá dæmi 4.
- Stig margliðufalls (annars en núllfallsins) er hæsti veldisvísir breytunnar sem hefur stuðul annan en núll. Liðurinn með þennan veldisvísi kallast forystuliður og stuðull hans kallast forystustuðull. Sjá dæmi 5.
- Endahegðun margliðufalls er sú sama og endahegðun veldisfallsins sem forystuliður fallsins lýsir. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Margliða af stigi n hefur í mesta lagi n skurðpunkta við x-ás og í mesta lagi $n-1$ snúningspunkta. Sjá dæmi 8, dæmi 9, dæmi 10, dæmi 11 og dæmi 12.

3.4 Gröf margliðufalla

- Margliðuföll af stigi 2 eða hærra eru slétt og samfelld. Sjá dæmi 1.
- Ef hægt er að þátta margliðufall, finnast núllstöðvar þess með því að þátta fallið og setja hvern þátt jafnan núlli. Sjá dæmi 2, dæmi 3 **og** dæmi 4.
- Önnur leið til að finna skurðpunkta margliðufalls við $x-$ ás er að teikna graf fallsins og finna punktana þar sem grafið sker $x-$ ásinn. Sjá dæmi 5**.**
- Margfeldni núllstöðvar ákvarðar hegðun grafsins við samsvarandi punkt á $x-$ ásnum. Sjá dæmi 6**.**
- Graf margliðu sker lárétta ásinn í núllstöð þar sem margfeldnin er oddatala.
- Graf margliðu snertir lárétta ásinn í núllstöð þar sem margfeldnin er slétt tala.
- Endahegðun margliðufalls ræðst af forystuliðnum.
- Graf margliðufalls breytir um stefnu í snúningspunktum sínum.
- Margliðufall af stigi n hefur í mesta lagi $n-1$ snúningspunkta. Sjá dæmi 7**.**
- Til að teikna graf margliðufalls finnið þið núllstöðvarnar og margfeldni þeirra, ákvarðið endahegðunina og gætið þess að grafið hafi í mesta lagi $n-1$ snúningspunkta. Sjá dæmi 8 og dæmi 10**.**
- Graf margliðufalls hjálpar til við að meta staðbundin og algild útgildi. Sjá dæmi 11**.**
- Milligildissetningin segir að ef $f(a)$ og $f(b)$ hafa gagnstæð formerki, þá er til að minnsta kosti eitt gildi c milli a og b þannig að $f(c)=0$. Sjá dæmi 9**.**

3.5 Deiling margliða

- Nota má langdeilingu til að deila margliðu með margliðu af sama eða lægra stigi, að því gefnu að deilirinn sé ekki núllmargliðan. Sjá dæmi 1 og dæmi 2**.**
- Samkvæmt deilingarreikniritinu má rita margliðuna sem deilt er í sem margfeldi deilis og deilingarútkomu að viðbættum afgangi.
- Deiling með reikniriti Horners er stytt aðferð til að deila margliðu með tvíliðu á forminu $x-k$. Sjá dæmi 3, dæmi 4 **og** dæmi 5**.**
- Nota má deilingu margliða til að leysa hagnýt verkefni, meðal annars um flatarmál og rúmmál. Sjá dæmi 6**.**

3.6 Núllstöðvar margliðufalla

- Til að finna $f(k)$, finnið afganginn þegar margliðunni $f(x)$ er deilt með $x-k$. Sjá dæmi 1.
- k er núllstöð $f(x)$ þá og því aðeins að $(x-k)$ sé þáttur í $f(x)$. Sjá dæmi 2.
- Hverja ræða núllstöð margliðufalls með heiltölustuðlum má rita sem brot þar sem teljarinn er heiltöluþáttur fastaliðarins og nefnarinn er heiltöluþáttur forystustuðulsins. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.

- Ef stuðlar margliðunnar eru heiltölur og forystustuðullinn er 1, eru allar ræðar núllstöðvar hennar heiltölur sem ganga upp í fastaliðinn.
- Nota má deilingu með reikniriti Horners til að finna núllstöðvar margliðufalls. Sjá dæmi 5.
- Samkvæmt undirstöðusetningu algebrunnar hefur sérhvert margliðufall af jákvæðu stigi að minnsta kosti eina núllstöð sem er tvinntala. Sjá dæmi 6.
- Sérhvert margliðufall af stigi stærra en 0 hefur að minnsta kosti eina núllstöð sem er tvinntala.
- Sérhvert margliðufall af jákvæðu stigi má rita sem margfeldi forystustuðulsins og jafnmargra línulegra þátta og stig þess segir til um, að teknu tilliti til margfeldni. Hver línulegur þáttur er á forminu $(x-c)$, þar sem c er tvinntala. Sjá dæmi 7.
- Fjöldi jákvæðra núllstöðva margliðufalls sem eru rauntölur, talinn með margfeldni, er jafn fjölda formerkjaskipta í stuðlaröðinni eða lægri um slétta heiltölu. Stuðlarnir eru skoðaðir í lækkandi veldaröð og núllstuðlum sleppt.
- Fjöldi neikvæðra núllstöðva margliðufalls sem eru rauntölur, talinn með margfeldni, er jafn fjölda formerkjaskipta í stuðlaröð margliðunnar $f(-x)$ eða lægri um slétta heiltölu. Stuðlarnir eru skoðaðir í lækkandi veldaröð og núllstuðlum sleppt. Sjá dæmi 8.
- Margliðujöfnur lýsa mörgum raunhæfum aðstæðum. Reiknirit Horners getur auðveldað lausn þeirra. Sjá dæmi 9.

3.7 Ræð föll

- Nota má örvarithátt til að lýsa staðbundinni hegðun og endahegðun grunnfallanna $f(x)=\frac{1}{x}$ og $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Sjá dæmi 1.
- Ef gildi falls nálgast fasta tölu þegar inntakið stefnir á jákvætt eða neikvætt óendanlegt, hefur graf þess láfellu. Fall getur haft fleiri en eina lóðfellu. Sjá dæmi 2.
- Hagnýt verkefni um hraða og styrk fela oft í sér ræð föll. Sjá dæmi 3.
- Skilgreiningarmengi ræðs falls inniheldur allar rauntölur nema þær sem gera nefnarann jafnan núlli. Sjá dæmi 4.
- Til að finna lóðfellur ræðs falls eru sameiginlegir þættir teljara og nefnara fyrst styttir út. Lóðfellurnar eru við núllstöðvar nefnarans í fullstyttu brotinu. Sjá dæmi 5.
- Afmáanlegur sérstöðupunktur getur komið fram á grafi ræðs falls ef inntak gerir bæði teljara og nefnara jafna núlli. Sjá dæmi 6.
- Endahegðun ræðs falls fylgir endahegðun hlutfalls forystuliða teljara- og nefnarafallanna. Sjá dæmi 7, dæmi 8, dæmi 9 og dæmi 10.
- Til að teikna graf ræðs falls finnið þið fyrst skurðpunkta við hnitása og fellur. Skoðið síðan hegðun grafsins við skurðpunktana og fellurnar og endahegðun þess. Sjá dæmi 11.
- Ef rætt fall hefur skurðpunkta við x-ás í $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, lóðfellur við $x=v_1, v_2, \ldots, v_m$, og ekkert $x_i=$ neinu v_j, þá má rita fallið á forminu

$$f(x) = a\frac{(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2}\cdots(x-x_n)^{p_n}}{(x-v_1)^{q_1}(x-v_2)^{q_2}\cdots(x-v_m)^{q_n}}$$

Sjá dæmi 12.

3.8 Andhverf föll og rótaföll

- Þegar skilgreiningarmengi annars stigs falls er takmarkað við aðra hlið hvirfilpunktsins, að honum meðtöldum, er andhverfa þess kvaðratrótarfall.
- Ef f^{-1} er andhverfa falls f, þá er f andhverfa fallsins f^{-1}. Sjá dæmi 1.
- Margliðufall hefur andhverft fall á skilgreiningarmengi sínu ef það er eintækt þar. Fyrir sum einföld margliðuföll má finna skýra formúlu fyrir andhverfuna. Sjá dæmi 2.
- Til að finna andhverfu tiltekinna falla verður að takmarka fallið við skilgreiningarmengi þar sem það er eintækt. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Skilgreiningarmengi andhverfs falls er myndmengi upprunalega fallsins. Þegar þið finnið formúlu fyrir andhverfu rótarfalls þarf að gæta þessarar takmörkunar. Sjá dæmi 5 og dæmi 7.
- Nota má andhverf föll og rótaföll til að leysa hagnýt verkefni. Sjá dæmi 6 og dæmi 8.

3.9 Líkön gerð með hlutföllum

- Tengsl þar sem ein stærð fæst með því að margfalda fasta með annarri stærð kallast beint hlutfall. Sjá dæmi 1.
- Tvær breytur sem eru í beinu hlutfalli hvor við aðra hafa fast hlutfall.
- Tengsl þar sem ein stærð fæst með því að deila fasta með annarri stærð kallast öfugt hlutfall. Sjá dæmi 2.
- Tvær breytur sem eru í öfugu hlutfalli hvor við aðra hafa fast margfeldi. Sjá dæmi 3.
- Í mörgum verkefnum er breyta í beinu eða öfugu hlutfalli við fleiri en eina breytu. Slík tengsl kallast sameiginlegt hlutfall. Sjá dæmi 4.

Yfirlitsverkefni

Nú er 3. kafla lokið: Margliðuföll og ræð föll. Rifjum upp nokkur lykilhugtök, meginatriði og jöfnur sem þið hafið lært.

Tvinntölur

Framkvæmið tilgreinda aðgerð með tvinntölum.

3

1.

$$(4+3i)+(-2-5i)$$

2.

$$(6-5i)-(10+3i)$$

3.

$$(2-3i)(3+6i)$$

4.

$$\frac{2-i}{2+i}$$

Leysið eftirfarandi jöfnur yfir tvinntölum.

5.

$$x^2-4x+5=0$$

6.

$$x^2+2x+10=0$$

Annars stigs föll

Skrifið annars stigs fallið í hverju eftirfarandi verkefna á stöðluðu formi. Tilgreinið síðan hvirfilpunktinn og skurðpunkta við hnitása. Teiknið loks graf fallsins.

7.

$$f(x)=x^2-4x-5$$

8.

$$f(x)=-2x^2-4x$$

Finnið jöfnu annars stigs fallsins í eftirfarandi verkefnum út frá gefnum upplýsingum.

9. Hvirfilpunkturinn er $(-2,3)$ og punktur á grafinu er $(3,6)$.

10. Hvirfilpunkturinn er $(-3;6{,}5)$ og punktur á grafinu er $(2,6)$.

Svarið eftirfarandi spurningum.

11. Girða á rétthyrnda lóð. Ein hlið lóðarinnar liggur að á og því þarf ekki að girða hana. Alls eru til 600 metrar af girðingu. Finnið þær hliðarlengdir lóðarinnar sem gefa mesta flatarmálið.

12. Hlutur er skotinn frá jörðu undir 45 gráðu horni með upphafshraðann 120 fet á sekúndu. Hæð hans, h, sem fall af láréttri vegalengd, x, er gefin með $h(x)=\frac{-32}{(120)^2}x^2+x$. Finnið mestu hæðina sem hluturinn nær.

Veldisföll og margliðuföll

Ákvarðið í hverju eftirfarandi verkefna hvort fallið sé margliðufall. Ef svo er, tilgreinið þá stig þess og forystustuðul.

13.

$$f(x)=4x^5-3x^3+2x-1$$

14.

$$f(x)=5^{x+1}-x^2$$

15.

$$f(x)=x^2(3-6x+x^2)$$

Ákvarðið endahegðun margliðufallsins í hverju eftirfarandi verkefna.

16.

$$f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+7$$

17.

$$f(x)=4x^3-6x^2+2$$

18.

$$f(x)=2x^2(1+3x-x^2)$$

Gröf margliðufalla

Finnið allar núllstöðvar margliðufallsins í hverju eftirfarandi verkefna og tilgreinið margfeldni þeirra.

19.

$$f(x)=(x+3)^2(2x-1)(x+1)^3$$

20.

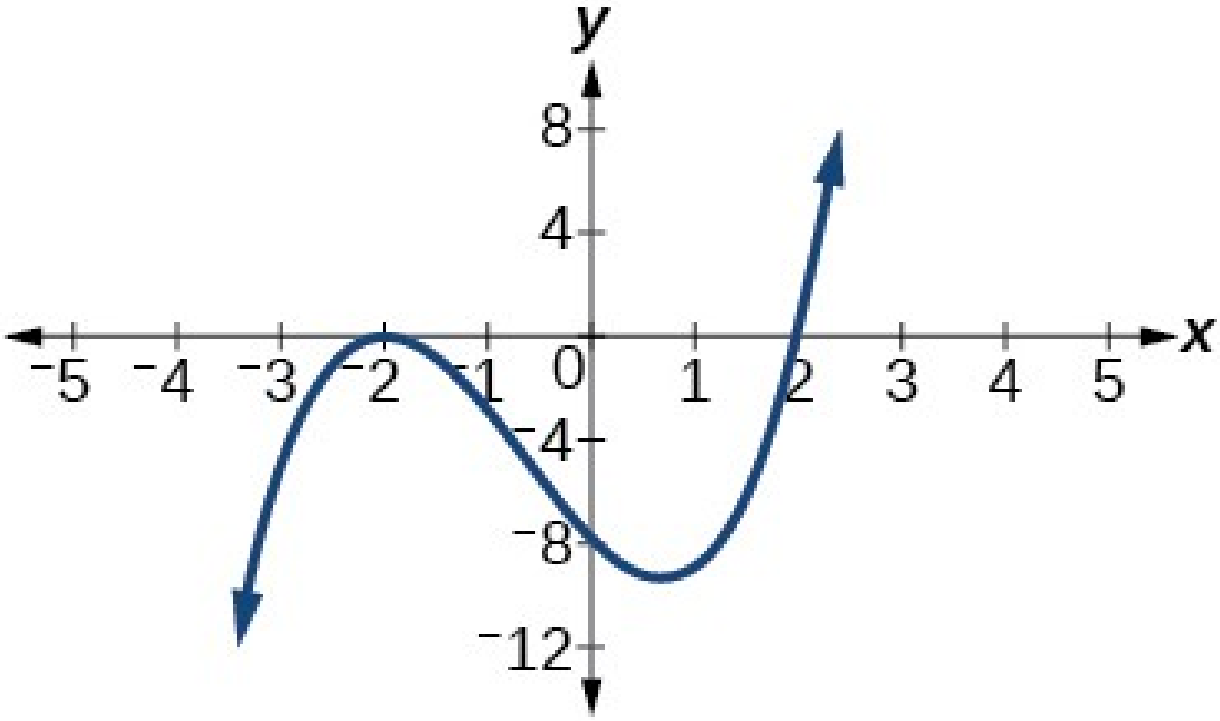
$$f(x)=x^5+4x^4+4x^3$$

21.

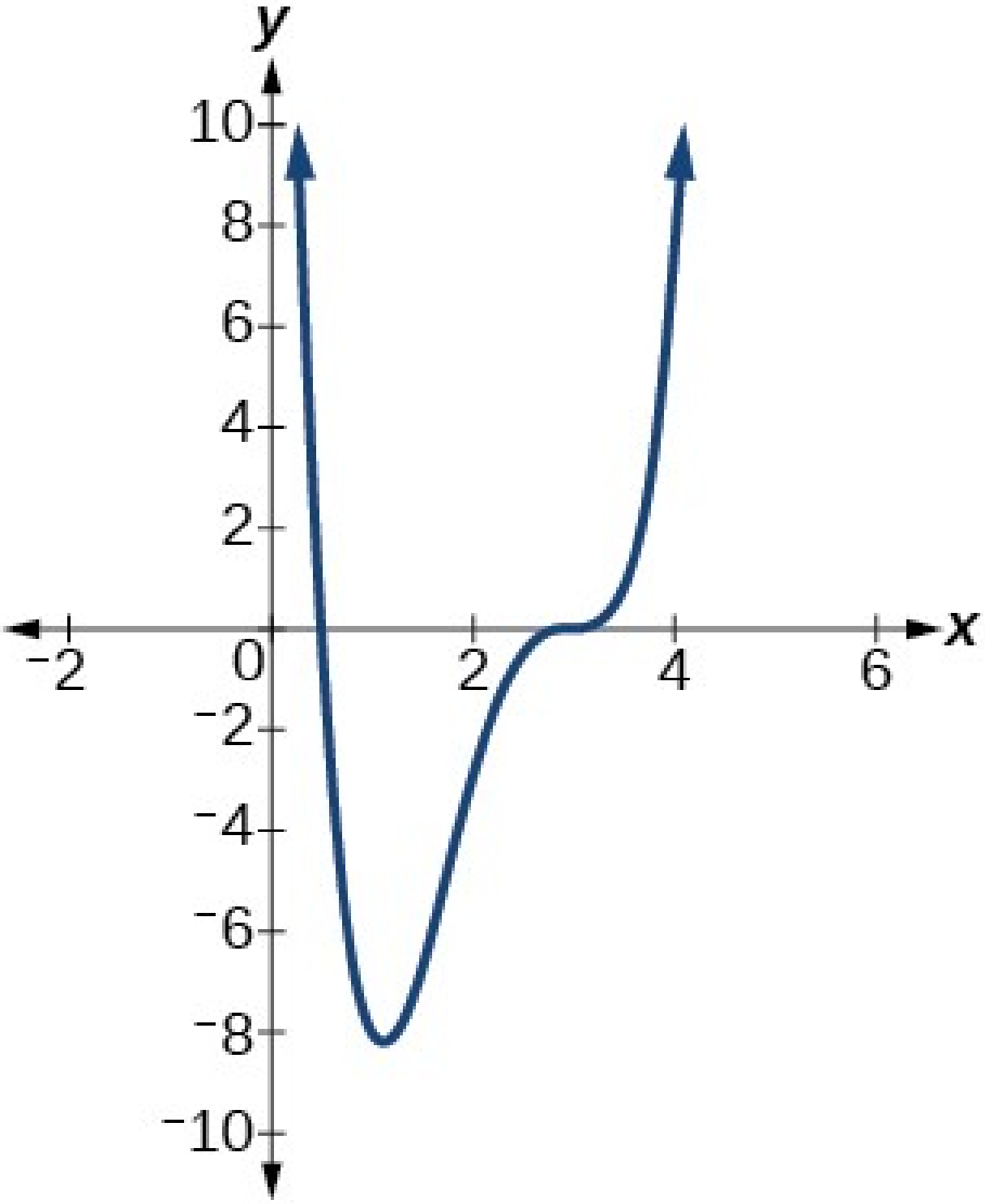
$$f(x)=x^3-4x^2+x-4$$

Ákvarðið núllstöðvar fallsins út frá gefnu grafi í hverju eftirfarandi verkefna og tilgreinið margfeldni þeirra.

22.



23.



24. Notið milligildissetninguna til að sýna fram á að fallið $f(x)=x^3-5x+1$ hafi að minnsta kosti eina núllstöð milli 2 og 3.

Deiling margliða

Notið langdeilingu til að finna deilingarútkomu og afgang í hverju eftirfarandi verkefna.

25.

$$\frac{x^3-2x^2+4x+4}{x-2}$$

26.

$$\frac{3x^4-4x^2+4x+8}{x+1}$$

3

Notið deilingu með reikniriti Horners til að finna deilingarútkomuna í hverju eftirfarandi verkefna. Ef deilirinn er þáttur í margliðunni sem deilt er í, skrifið þá margliðuna á þáttuðu formi.

27.

$$\frac{x^3-2x^2+5x-1}{x+3}$$

28.

$$\frac{x^3+4x+10}{x-3}$$

29.

$$\frac{2x^3+6x^2-11x-12}{x+4}$$

30.

$$\frac{3x^4+3x^3+2x+2}{x+1}$$

Núllstöðvar margliðufalla

Notið setninguna um ræðar núllstöðvar til að leysa margliðujöfnuna í hverju eftirfarandi verkefna.

31.

$$2x^3-3x^2-18x-8=0$$

32.

$$3x^3+11x^2+8x-4=0$$

33.

$$2x^4-17x^3+46x^2-43x+12=0$$

34.

$$4x^4+8x^3+19x^2+32x+12=0$$

Notið formerkjareglu Descartes til að finna mögulegan fjölda jákvæðra og neikvæðra lausna í hverju eftirfarandi verkefna.

35.

$$x^3-3x^2-2x+4=0$$

36.

$$2x^4-x^3+4x^2-5x+1=0$$

Ræð föll

Finnið skurðpunkta, lóðfellur og láfellur eftirfarandi ræðra falla og notið þessar upplýsingar síðan til að skissa gröf þeirra.

37.

$$f(x)=\frac{x+2}{x-5}$$

38.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$$

39.

$$f(x)=\frac{3x^2-27}{x^2+x-2}$$

40.

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-9}$$

Finnið skáfelluna í hverju eftirfarandi verkefna.

41.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$$

42.

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2+4}{x^2+1}$$

Andhverf föll og rótaföll

Finnið andhverfu fallsins á gefnu skilgreiningarmengi í hverju eftirfarandi verkefna.

43.

$$f(x)=(x-2)^2, x\geq 2$$

44.

$$f(x)=(x+4)^2-3, x\geq -4$$

45.

$$f(x)=x^2+6x-2, x\geq -3$$

46.

$$f(x)=2x^3-3$$

47.

$$f(x)=\sqrt{4x+5}-3$$

48.

$$f(x)=\frac{x-3}{2x+1}$$

Líkön gerð með hlutföllum

Finnið óþekkta gildið í hverju eftirfarandi verkefna.

49. y er í beinu hlutfalli við annað veldi x. Ef $x=3$, $y=36$, finnið þá y þegar $x=4$.

50. y er í öfugu hlutfalli við kvaðratrót x Ef $x=25$, $y=2$, finnið þá y þegar $x=4$.

51. y er í beinu hlutfalli við margfeldi þriðja veldis x og z. Þegar $x=1$ og $z=2$, er $y=6$,. Finnið y þegar $x=2$ og $z=3$.

52. y er í beinu hlutfalli við margfeldi x og annars veldis z og í öfugu hlutfalli við þriðja veldi w. Þegar $x=3$, $z=4$, og $w=2$, er $y=48$,. Finnið y þegar $x=4$, $z=5$, og $w=3$.

Leysið eftirfarandi hagnýtu verkefni.

53. Þyngd hlutar ofan við yfirborð jarðar er í öfugu hlutfalli við annað veldi fjarlægðarinnar frá miðju jarðar. Einstaklingur vegur 150 pund á yfirborði jarðar (3.960 mílur frá miðju hennar). Finnið þyngd einstaklingsins í 20 mílna hæð yfir yfirborðinu.

54. Rúmmál V kjörgass er í beinu hlutfalli við hitastigið T og í öfugu hlutfalli við þrýstinginn P. Í hylki eru 120 lítrar af súrefni við 310 K hita og 18 loftþyngda þrýsting. Finnið þrýstinginn ef rúmmálið er minnkað í 100 lítra og hitastigið hækkað í 320 K.

Kaflapróf

Reiknið út eða leysið jöfnuna.

1.

$$(3-4i)(4+2i)$$

2.

$$\frac{1-4i}{3+4i}$$

3.

$$x^2-4x+13=0$$

Tilgreinið stig og forystustuðul eftirfarandi margliðufalls.

4.

$$f(x)=x^3(3-6x-2x^2)$$

Ákvarðið endahegðun margliðufallsins.

5.

$$f(x)=8x^3-3x^2+2x-4$$

6.

$$f(x)=-2x^2(4-3x-5x^2)$$

Skrifið annars stigs fallið á stöðluðu formi. Ákvarðið hvirfilpunktinn og skurðpunkta við hnitása og teiknið graf fallsins.

7.

$$f(x)=x^2+2x-8$$

Finnið jöfnu annars stigs fallsins út frá gefnum upplýsingum um graf þess.

8. Hvirfilpunktur $(2,0)$ og punktur á grafinu $(4,12)$.

Leysið þetta hagnýta verkefni.

9. Girða á rétthyrnt landsvæði. Auk ytri girðingarinnar á önnur girðing að skipta svæðinu í tvennt og liggja samsíða tveimur hliðum þess. Alls eru 1.200 fet af girðingu tiltæk. Finnið mesta flatarmálið sem hægt er að girða af.

Finnið allar núllstöðvar eftirfarandi margliðufalla og tilgreinið margfeldni þeirra.

10.

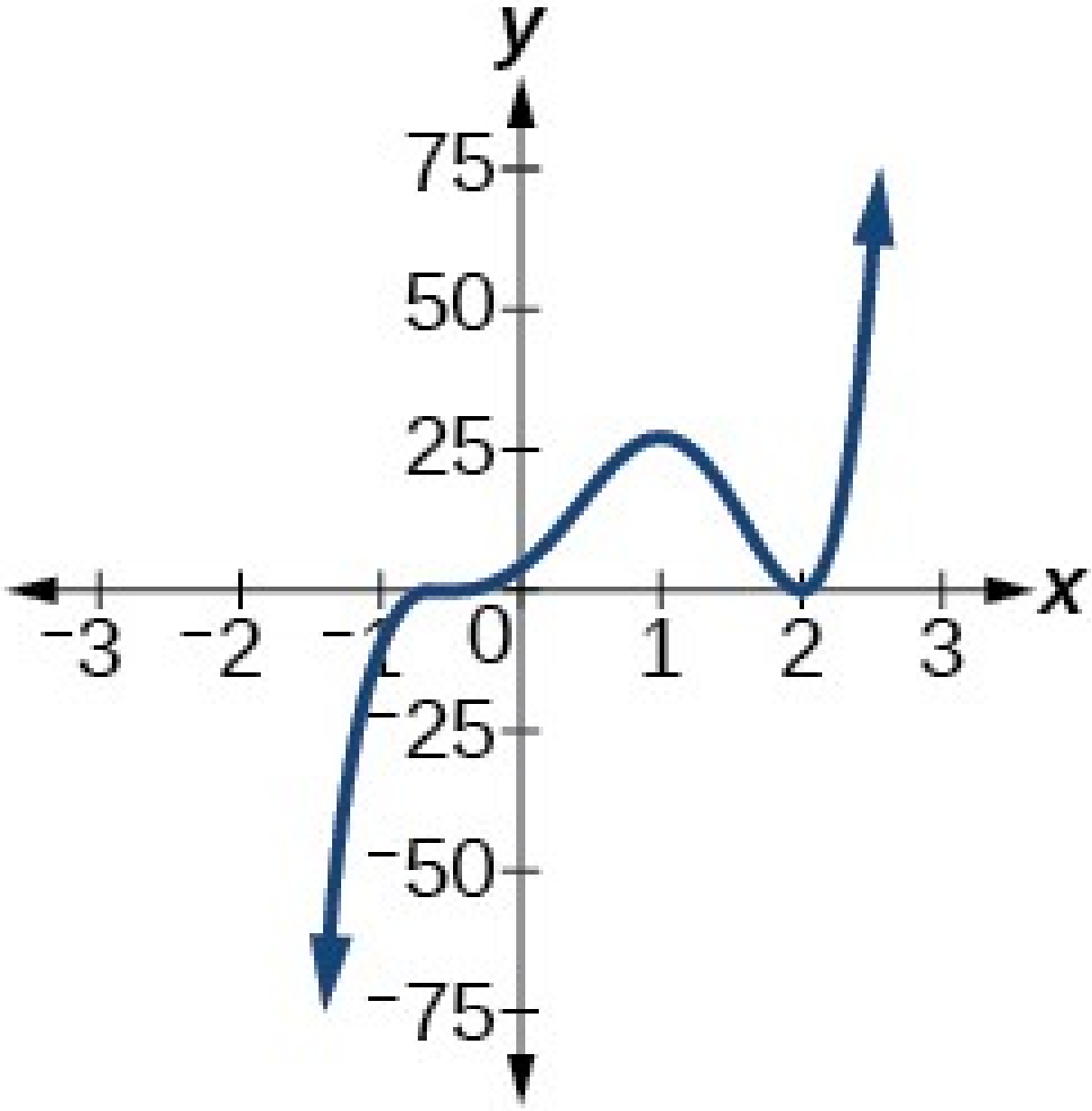
$$f(x)=(x-3)^3(3x-1)(x-1)^2$$

11.

$$f(x)=2x^6-12x^5+18x^4$$

Ákvarðið núllstöðvar fallsins og margfeldni þeirra út frá grafinu.

12.



Notið langdeilingu til að finna deilingarútkomuna.

13.

$$\frac{2x^3+3x-4}{x+2}$$

Notið deilingu með reikniriti Horners til að finna deilingarútkomuna. Ef deilirinn er þáttur í margliðunni, skrifið hana þá á þáttuðu formi.

14.

$$\frac{x^4+3x^2-4}{x-2}$$

15.

$$\frac{2x^3+5x^2-7x-12}{x+3}$$

Notið setninguna um ræðar núllstöðvar til að finna núllstöðvar margliðufallanna.

16.

$$f(x)=2x^3+5x^2-6x-9$$

17.

$$f(x)=4x^4+8x^3+21x^2+17x+4$$

18.

$$f(x)=4x^4+16x^3+13x^2-15x-18$$

19.

$$f(x)=x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8$$

Finnið eitt margliðufall sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði.

20. Fallið hefur tvöfalda núllstöð þegar $x=3$ og núllstöðvar þegar $x=1$ og $x=-2$. Skurðpunktur þess við y-ás er $(0,12)$.

21. Fallið hefur núllstöð með margfeldnina 3 þegar $x=\frac{1}{2}$ og aðra núllstöð þegar $x=-3$. Graf þess liggur um punktinn $(1,8)$.

Notið formerkjareglu Descartes til að ákvarða mögulegan fjölda jákvæðra og neikvæðra lausna.

22.

$$8x^3-21x^2+6=0$$

Finnið skurðpunkta, láfellur og lóðfellur eftirfarandi ræðra falla og skissið gröf þeirra.

23.

$$f(x)=\frac{x+4}{x^2-2x-3}$$

24.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}$$

Finnið skáfellu ræða fallsins.

25.

$$f(x)=\frac{x^2+3x-3}{x-1}$$

Finnið andhverfu fallsins.

26.

$$f(x)=\sqrt{x-2}+4$$

27.

$$f(x)=3x^3-4$$

28.

$$f(x)=\frac{2x+3}{3x-1}$$

Finnið óþekkta gildið.

29. y er í öfugu hlutfalli við annað veldi x. Þegar $x=3$, er $y=2$. Finnið y þegar $x=1$.

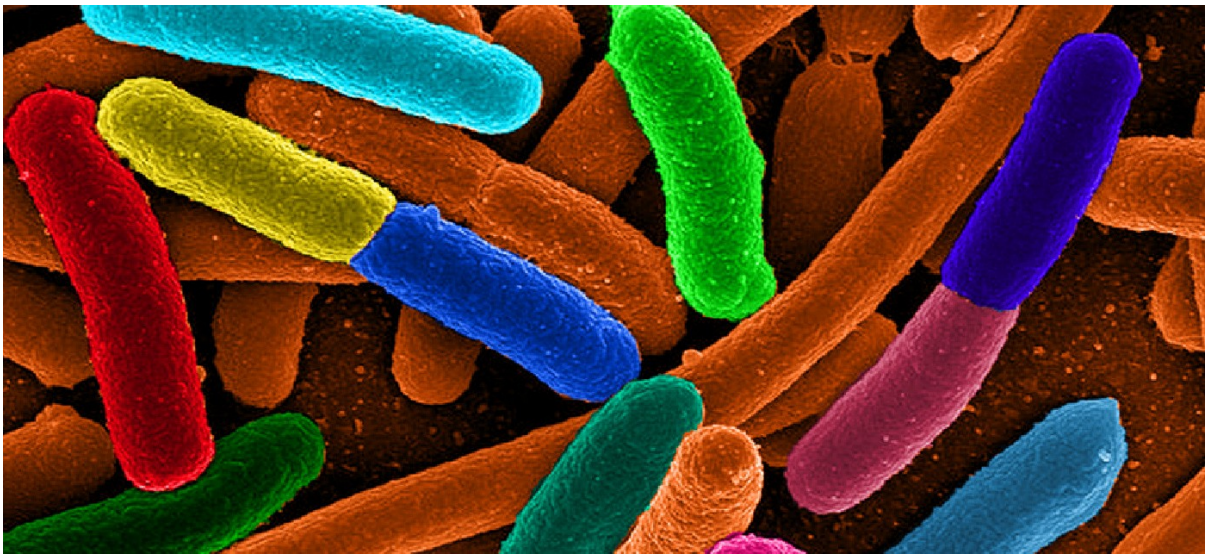
30. y er í beinu hlutfalli við margfeldi x og þriðju rótar af z. Þegar $x=2$ og $z=27$, er $y=12$,. Finnið y þegar $x=5$ og $z=8$.

Leysið þetta hagnýta verkefni.

31. Vegalengdin sem hlutur fellur er í beinu hlutfalli við annað veldi falltímans. Hlutur fellur 64 fet á 2 sekúndum. Hve lengi er hann að falla 256 fet?

4. KAFLI

Vísis- og lograföll



Rafeindasmásjármynd af E. coli bakteríum (mynd: „Mattosaurus“, Wikimedia Commons)

Kaflayfirlit

- 4.1 Vísisföll
- 4.2 Gröf vísisfalla
- 4.3 Lograföll
- 4.4 Gröf lografalla
- 4.5 Reiknireglur logra
- 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur
- 4.7 Vísis- og logralíkön
- 4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum

Inngangur að vísis- og lograföllum

Skoðið einn fersentímetra húðarinnar. Skoðið hann nánar og síðan enn nánar. Ef unnt væri að skoða hann nógu vel sæjust hundruð þúsunda örvera. Þetta eru bakteríur sem finnast ekki aðeins á húðinni heldur einnig í munni, nefi og jafnvel þörmum. Í líkamanum geta verið álíka margar bakteríufrumur og frumur líkamans sjálfs. Það er þó engin ástæða til að hafa áhyggjur. Sumar bakteríur geta valdið sjúkdómum en margar eru gagnlegar og jafnvel líkamanum nauðsynlegar.

Bakteríur fjölga sér oft með ferli sem nefnist tvískipting og felst í því að ein bakteríufruma skiptist í tvær. Við hagstæðar aðstæður geta þær fjölgað sér mjög hratt. Ný kynslóð baktería myndast oft á aðeins nokkrum mínútum eða klukkustundum en ekki á dögum eða árum eins og hjá mönnum og öðrum flóknum lífverum.1

1

Todar, PhD, Kenneth. Todar's Online Textbook of Bacteriology. http://textbookofbacteriology.net/growth_3.html.

Til einföldunar skulum við gera ráð fyrir að ræktunin hefjist með einni bakteríufrumu sem getur skipt sér á klukkustundar fresti. Tafla 1 sýnir hve margar frumurnar eru í lok hverrar klukkustundar. Ein bakteríufruma hefur myndað rúmlega eitt þúsund bakteríufrumur eftir aðeins tíu klukkustundir. Ef taflan væri framlengd til tuttugu og fjögurra klukkustunda væru frumurnar orðnar fleiri en 16 milljónir.

Tafla 1

Klukkustund	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fjöldi baktería	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Í þessum kafla skoðum við vísisföll. Þau má meðal annars nota til að lýsa vaxtarmynstrum eins og fjölgun baktería. Við skoðum einnig lograföll en þau eru nátengd vísisföllum. Báðar fallagerðirnar nýtast víða í raunveruleikanum við líkanagerð og túlkun gagna.

4.1 Vísisföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Reikna gildi vísisfalla.
- Finna jöfnu vísisfalls.
- Nota formúlur fyrir vaxtavexti.
- Reikna gildi vísisfalla með grunntölu e.

Indland er næstfjölmennasta land heims og íbúafjöldinn var um 1,39 milljarðar árið 2021. Íbúum fjölgar um 1,2 % á ári2. Haldist þessi fjölgun verður íbúafjöldi Indlands meiri en íbúafjöldi Kína árið 2027. Þegar íbúum fjölgar hratt er oft sagt að vöxturinn sé „veldisvöxtur“

og átt við að eitthvað vaxi mjög hratt. Í stærðfræði hefur hugtakið vísisvöxtur hins vegar mjög nákvæma merkingu. Í þessum hluta skoðum við vísisföll, sem lýsa slíkum hröðum vexti.

2 http://www.worldometers.info/world-population/. Skoðað 24. febrúar 2014.

Að bera kennsl á vísisföll

Þegar við skoðuðum línulegan vöxt sáum við fastan breytingarhraða, það er fasta tölu sem úttakið hækkaði um fyrir hverja einingu sem inntakið hækkaði um. Í jöfnunni $f(x)=3x+4$, segir hallatalan okkur til dæmis að úttakið hækki um 3 í hvert sinn sem inntakið hækkar um 1. Dæmið um mannfjölda Indlands er öðruvísi því þar er um prósentubreytingu á tímaeiningu að ræða (í stað fastrar breytingar) á fjölda fólks.

4

Skilgreining vísisfalls

Samkvæmt rannsókn sem vísað er til í frumtextanum tvöfaldaðist hlutfall grænkera meðal íbúa Bandaríkjanna frá 2009 til 2011. Þar er miðað við að hlutfallið hafi verið 2,5% árið 2011. Grænkerar neyta engra dýraafurða, svo sem kjöts, fisks, mjólkurafurða eða eggja. Ef hlutfallið héldi áfram að tvöfaldast á tveggja ára fresti yrði það samkvæmt líkaninu 10% árið 2015, 40% árið 2019 og 80% árið 2021. Þetta eru niðurstöður líkansins, ekki mælingar á hlutfallinu þessi ár. Líkanið getur aðeins átt við í takmarkaðan tíma, því hlutfall íbúanna getur ekki farið yfir 100%.

Hvað merkir að vaxa samkvæmt vísisfalli? Hvernig tengist tvöföldun prósentuaukningu? Þessi hugtök koma oft fyrir í fjölmiðlum, en eru ekki alltaf notuð af nákvæmni. Skoðum merkingu þeirra nánar.

- **Prósentubreyting** er *breyting* á gildi stærðar, gefin upp sem *prósentuhlutfall* af upphaflegu gildi hennar.
- **Vísisvöxtur** felst í því að jákvæð stærð margfaldast með sama stuðli, sem er stærri en 1, á hverju tímabili af sömu lengd. Hún eykst því um sama prósentuhlutfall af gildinu í upphafi hvers tímabils.
- Vísishnignun merkir að jákvæð stærð minnkar um sama hlutfall af gildi sínu á hverju jafnlöngu tímabili. Gildið er því margfaldað með föstum stuðli sem er stærri en 0 og minni en 1 í hverju skrefi.

Til að skilja vísisvöxt betur skulum við bera hann saman við línulegan vöxt. Í töflu 1 eru gildin á tveimur föllum sýnd fyrir inntök sem byrja á 0 og hækka um 1 í hverju skrefi. Fyrra fallið er vísisfallið f(x) = 2^x; fallgildið tvöfaldast í hverju skrefi. Síðara fallið er línulega fallið g(x) = 2x; fallgildið hækkar um 2 í hverju skrefi.

Tafla 1

x	$f(x)=2^x$	$g(x)=2x$
0	1	0
1	2	2
2	4	4
3	8	6
4	16	8
5	32	10
6	64	12

Í töflu 1 eru fallgildin jöfn þegar x = 1 og x = 2. Frá x = 2 vex f(x) = 2^x hraðar en g(x) = 2x í hverju skrefi töflunnar og munurinn á fallgildunum eykst.

- **Vísisvöxtur** merkir að fallgildið hækkar um sama prósentuhlutfall í hvert sinn sem inntakið hækkar um jafnstórt skref.
- **Línulegur vöxtur** merkir að fallgildið hækkar um *sömu tölu* í hvert sinn sem inntakið hækkar um jafnstórt skref.

Hér sést munurinn á því að aukast um sama hlutfall og að aukast um sömu tölu. Fallgildi vísisfallsins tvöfaldast í hvert sinn sem inntakið hækkar um 1. Fallgildi línulega fallsins hækkar hins vegar um 2 í hvert sinn sem inntakið hækkar um 1.

Almennt form vísisfallsins er $f(x)=a\,b^x$, þar sem a er einhver tala önnur en núll og b er jákvæð rauntala sem er ekki jöfn 1.

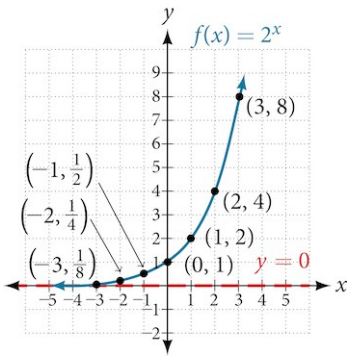
- Ef $b>1$, vex fallið með hraða sem er í hlutfalli við stærð þess.
- Ef $0<b<1$, minnkar fallið með hraða sem er í hlutfalli við stærð þess.

Skoðum fallið $f(x)=2^x$. Í töflu 2 eru fallgildi þess sýnd fyrir heiltölugildi x frá -3 til 3.

Tafla 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^0=1$	$2^1=2$	$2^2=4$	$2^3=8$

Skoðum graf f með því að merkja röðuðu pörin úr töflunni á mynd 1 og drögum síðan nokkrar ályktanir.



Mynd 1 Graf vísisfallsins f(x) = 2ˣ og lárétta láfellan y = 0.

Lýsum helstu eiginleikum grafs vísisfallsins $f(x)=2^x$.

- skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$,
- myndmengið er $(0,\infty)$,
- þegar $x\to\infty, f(x)\to\infty$,
- þegar $x\to-\infty, f(x)\to 0$,
- $f(x)$ er alltaf vaxandi,
- graf $f(x)$ snertir aldrei x-ásinn því tveir í hvaða veldi sem er gefur aldrei núll.
- $y=0$ er láfella grafsins.
- Grafið sker y-ásinn í punktinum (0, 1).

VÍSISFALL

Vísisfall er fall sem er skilgreint fyrir öll raungildi x, og má rita á forminu

$$f(x)=a\,b^x$$

þar sem

- a er rauntala ólík núlli og kallast upphafsgildi.
- b er jákvæð rauntala þannig að $b\neq 1$.
- Skilgreiningarmengi fallsins f er mengi allra rauntalna.
- Myndmengi f er mengi allra jákvæðra rauntalna ef $a>0$.
- Myndmengi f er mengi allra neikvæðra rauntalna ef $a<0$.
- Grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,a)$, og hefur láfelluna $y=0$.

DÆMI 1

Að bera kennsl á vísisföll

Hverjar af eftirfarandi jöfnum lýsa ekki vísisföllum?

- $f(x)=4^{3(x-2)}$
- $g(x)=x^3$
- $h(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
- $j(x)=(-2)^x$

Lausn

4

Samkvæmt skilgreiningu hefur vísisfall fasta sem grunntölu og óháða breytu sem veldisvísi. Því er $g(x)=x^3$ ekki vísisfall, því grunntalan er óháða breytan. Í raun er $g(x)=x^3$ veldisfall.

Munið að grunntalan b í vísisfalli er alltaf jákvæður fasti og $b\neq 1$. Því er $j(x)=(-2)^x$ ekki vísisfall, því grunntalan, -2, er minni en 0.

REYNIÐ SJÁLF #1

Hverjar eftirfarandi jöfnur lýsa vísisföllum?

- $f(x)=2x^2-3x+1$
- $g(x)=0{,}875^x$
- $h(x)=1{,}75\ x+2$
- $j(x)=1095{,}6^{-2x}$

Gildi vísisfalla reiknuð

Munið að grunntala vísisfalls verður að vera jákvæð rauntala ólík 1. Hvers vegna þarf grunntalan b að vera jákvæð? Til að fallgildin séu skilgreind og rauntölur fyrir öll raungildi x. Skoðum hvað gerist ef grunntalan er neikvæð:

- Látum $b=-9$ og $x=\frac{1}{2}$. Þá er $f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=(-9)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-9}$, sem er ekki rauntala.

Hvers vegna takmörkum við grunntöluna við jákvæð gildi önnur en 1? Af því að grunntalan 1 gefur fastafall. Skoðum hvað gerist ef grunntalan er 1:

- Látum $b=1$. Þá er $f(x)=1^x=1$ fyrir öll raungildi x.

Til að reikna gildi vísisfalls á forminu $f(x)=b^x$, setjum við gefna gildið inn fyrir x og reiknum veldið sem fæst. Til dæmis:

Látum $f(x)=2^x$. Hvert er gildi $f(3)$?

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x \\ f(3) &= 2^3 && \text{Setjið inn } x=3. \\ &= 8 && \text{Reiknið veldið.} \end{aligned}$$

Þegar reikna á gildi vísisfalls sem er á öðru formi en grunnforminu er mikilvægt að fylgja forgangsröð reikniaðgerða. Til dæmis:

Látum $f(x)=30(2)^x$. Hvert er gildi $f(3)$?

$$\begin{aligned} f(x) &= 30\,(2)^x \\ f(3) &= 30\,(2)^3 && \text{Setjið inn } x=3. \\ &= 30\,(8) && \text{Einfaldið veldið fyrst.} \\ &= 240 && \text{Margfaldið.} \end{aligned}$$

Takið eftir að niðurstaðan yrði röng ef forgangsröð reikniaðgerða væri ekki fylgt:

$$f(3)=30\,(2)^3 \neq 60^3 = 216.000$$

4

DÆMI 2

Gildi vísisfalla reiknuð

Látum $f(x)=5(3)^{x+1}$. Reiknið $f(2)$ án reiknivélar.

Lausn

Fylgið forgangsröð reikniaðgerða og gætið sérstaklega að svigunum.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5\,(3)^{x+1} \\ f(2) &= 5\,(3)^{2+1} && \text{Setjið inn } x=2. \\ &= 5\,(3)^3 && \text{Reiknið veldisvísinn.} \\ &= 5\,(27) && \text{Einfaldið veldið.} \\ &= 135 && \text{Margfaldið.} \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #2

Látum $f(x)=8(1{,}2)^{x-5}$. Reiknið $f(3)$ með reiknivél. Námundið að fjórum aukastöfum.

Skilgreining vísisvaxtar

Hugtakið „vísisvöxtur“ er oft notað í daglegu máli um allt sem vex eða eykst hratt. Í stærðfræði hefur það þó nákvæma merkingu: Ef vaxtarhraði stærðar er í beinu hlutfalli við gildi hennar sýnir hún vísisvöxt.

VÍSISVÖXTUR

Fall sem lýsir vísisvexti vex með hraða sem er í hlutfalli við magnið sem fyrir er. Fyrir sérhverja rauntölu x og sérhverjar jákvæðar rauntölur a og b þannig að $b \neq 1$, er vísisvaxtarfall á forminu

$$f(x)=a\,b^{x}$$

þar sem

- a er upphafsgildi fallsins.
- b er vaxtarstuðullinn eða vaxtarmargfaldarinn á hverja einingu x.

Almennt séð höfum við vísisfall, þar sem föst grunntala er hafin í breytilegan veldisvísi. Til að greina á milli línulegra falla og vísisfalla skulum við skoða tvö fyrirtæki, A og B. Fyrirtæki A er með 100 verslanir og opnar 50 nýjar verslanir á ári, svo vexti þess má lýsa með fallinu $A(x)=100+50\,x$. Fyrirtæki B er með 100 verslanir og fjölgar þeim um 50% á ári, svo vexti þess má lýsa með fallinu $B\,(x)=100\,(1+0{,}5)^{x}$.

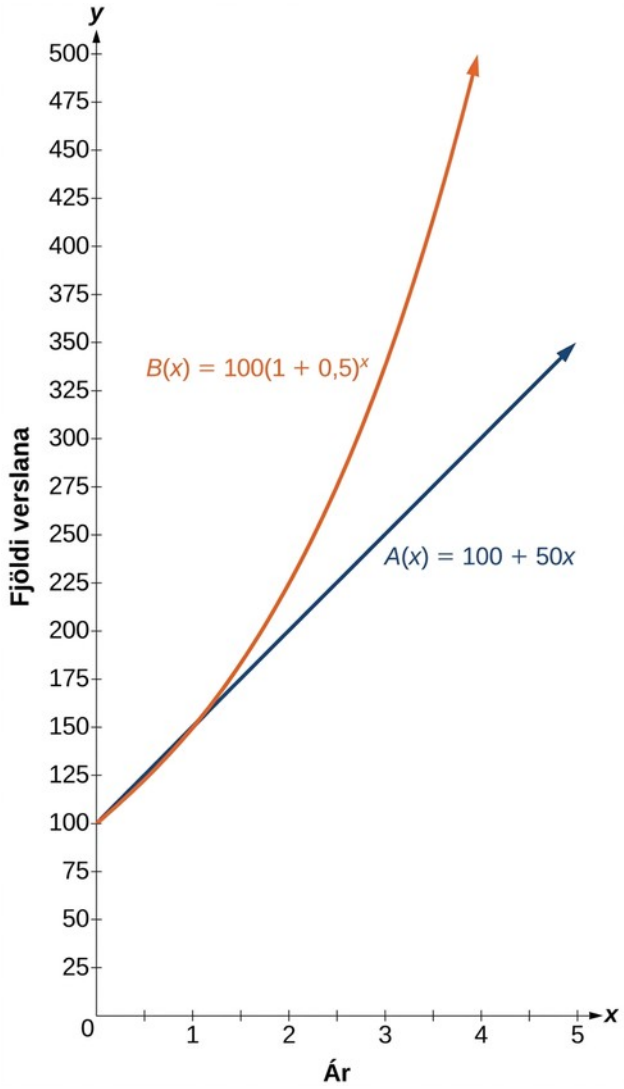
Vöxtur fyrirtækjanna á nokkrum árum er sýndur í töflu 3.

4

Tafla 3

Ár, x	**Verslanir, fyrirtæki A**	**Verslanir, fyrirtæki B**
0	$100+50(0)=100$	$100\,(1+0{,}5)^{0}=100$
1	$100+50(1)=150$	$100\,(1+0{,}5)^{1}=150$
2	$100+50(2)=200$	$100\,(1+0{,}5)^{2}=225$
3	$100+50(3)=250$	$100\,(1+0{,}5)^{3}=337{,}5$
x	$A(x)=100+50\,x$	$B\,(x)=100\,(1+0{,}5)^{x}$

Gröfin á mynd 2 bera saman fjölda verslana fyrirtækjanna á fimm ára tímabili. Þar sést að við vísisvöxt fjölgar verslunum mun hraðar en við línulegan vöxt.



Mynd 2 Gröfin sýna hvernig heildarfjöldi verslana fyrirtækja A og B breytist með tíma samkvæmt líkönunum.

Takið eftir að skilgreiningarmengi beggja fallanna er $[0,\infty)$, og myndmengi beggja fallanna er $[100,\infty)$. Eftir fyrsta árið eru verslanir fyrirtækis B alltaf fleiri en verslanir fyrirtækis A.

Skoðum nú fallið sem lýsir fjölda verslana fyrirtækis B, $B(x)=100(1+0{,}5)^x$. Í þessu vísisfalli táknar 100 upphaflegan fjölda verslana, 0,50 táknar vaxtarhraðann og $1+0{,}5=1{,}5$ táknar vaxtarstuðulinn. Almennar má rita fallið sem $B(x)=100(1{,}5)^x$, þar sem 100 er upphafsgildið, 1,5 nefnist grunntala og x nefnist veldisvísir.

DÆMI 3

Gildi raunverulegs vísislíkans reiknað

Í upphafi kaflans sáum við að íbúafjöldi Indlands var um 1,25 milljarðar árið 2013 og árleg fjölgun um 1,2%. Þessu er lýst með vaxtarfallinu $P(t)=1{,}25(1{,}012)^t$, þar sem t er fjöldi ára

frá 2013. Hver verður íbúafjöldi Indlands, námundaður að næsta þúsundasta hluta, árið 2031?

Lausn

Til að áætla íbúafjöldann árið 2031 reiknum við gildi líkansins fyrir $t=18$, því þá eru liðin 18 ár frá 2013. Ef námundað er að þremur aukastöfum fæst

$$P\left(18\right)=1{,}25\left(1{,}012\right)^{18}\approx 1{,}549$$

Samkvæmt líkaninu verður íbúafjöldi Indlands um 1,549 milljarðar árið 2031.

REYNIÐ SJÁLF #3

4

Íbúafjöldi Kína var um 1,39 milljarðar árið 2013 og árleg fjölgun um 0,6 %. Þessu er lýst með vaxtarfallinu $P\left(t\right)=1{,}39\left(1{,}006\right)^{t}$, þar sem t er fjöldi ára frá 2013. Hver verður íbúafjöldi Kína árið 2031, námundaður að næsta þúsundasta hluta? Hvernig ber þetta saman við spána sem við gerðum fyrir Indland í dæmi 3?

Jöfnur vísisfalla fundnar

Í fyrri dæmum var vísisfallið gefið og gildi þess síðan reiknað fyrir tiltekið inntak. Stundum fáum við upplýsingar um vísisfall án þess að jafna þess sé gefin. Þá ritum við fyrst almennt form fallsins, finnum fastana a og b, og reiknum síðan fallgildið.

AÐFERÐ

Ritið vísislíkan út frá tveimur gagnapunktum.

1. Ef annar punkturinn er á forminu $\left(0,a\right)$, þá er a upphafsgildið. Notið a, setjið síðari punktinn inn í jöfnuna $f\left(x\right)=a\left(b\right)^{x}$, og leysið fyrir b.
2. Ef hvorugur punkturinn er á forminu $\left(0,a\right)$, setjið þá báða punktana inn í tvær jöfnur á forminu $f\left(x\right)=a\left(b\right)^{x}$. Leysið jöfnuhneppið með tveimur jöfnum og tveimur óþekktum stærðum sem fæst til að finna a og b.
3. Notið a og b sem fundust í skrefunum hér að framan til að rita vísisfallið á forminu $f\left(x\right)=a\left(b\right)^{x}$.

DÆMI 4

Vísislíkan ritað þegar upphafsgildið er þekkt

Árið 2006 voru 80 dádýr flutt í friðland. Árið 2012 var stofninn orðinn 180 dádýr. Stofninn óx samkvæmt vísisfalli. Ritið vísisfall $N\left(t\right)$ sem lýsir fjölda dádýra $\left(N\right)$ sem falli af tíma t.

Lausn

Látum óháðu breytuna t tákna fjölda ára frá 2006. Upplýsingarnar í verkefninu má þá rita sem inntaks- og úttakspör: (0, 80) og (6, 180). Takið eftir að með því að mæla inntaksbreytuna í árum frá 2006 fáum við upphafsgildi fallsins, $a=80$. Nú getum við sett síðari punktinn inn í jöfnuna $N(t)=80\,b^t$ til að finna b:

$$N(t) = 80\,b^t$$

$180 = 80\,b^6$ Setjið inn hnit punktsins $(6,180)$.

$\frac{9}{4} = b^6$ Deilið báðum megin með 80 og fullstyttið.

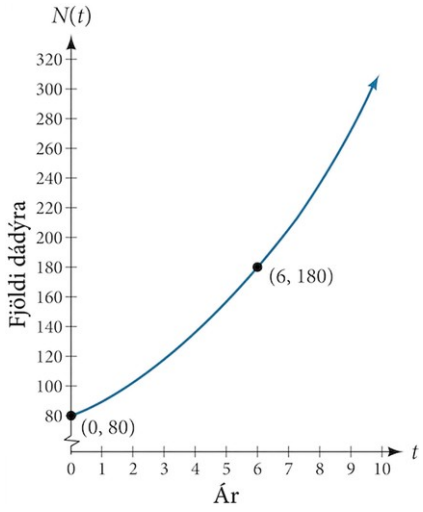
$b = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{6}}$ Einangrið b með því að taka sjöttu rót beggja hliða.

$b \approx 1{,}1447$ Námundið að fjórum aukastöfum.

ATHUGIÐ: *Námundið ekki milliniðurstöður nema annað sé tekið fram. Í því sem eftir er af þessum hluta skuluð þið námunda lokasvarið að fjórum aukastöfum.*

Vísislíkanið fyrir dádýrastofninn er $N(t)=80(1{,}1447)^t$. (Athugið að þetta vísisfall lýsir vexti til skamms tíma. Þegar inntakið verður stórt verður úttakið sífellt stærra, svo mjög að líkanið gagnast ef til vill ekki til langs tíma.)

Graf líkansins sýnir hvernig dádýrastofninn í friðlandinu vex með tímanum. Grafið á mynd 3 liggur um punktana $(0,80)$ og $(6,180)$. samkvæmt líkaninu með ónámunduðum vaxtarstuðli. Skilgreiningarmengi líkansins er $[0,\infty)$, og myndmengi þess $[80,\infty)$.



Mynd 3 Graf sem sýnir fjölda dádýra sem fall af tíma, $N(t)=80(1{,}1447)^t$, t árum eftir 2006

REYNIÐ SJÁLF #4

Úlfastofn vex samkvæmt vísisfalli. Árið 2011 voru taldir 129 úlfar. Árið 2013, var stofninn orðinn 236 úlfar. Hvaða tvo punkta má nota til að leiða út vísisjöfnu sem lýsir þessum aðstæðum? Ritið jöfnuna sem lýsir fjölda úlfa N sem falli af tíma t.

DÆMI 5

Vísislíkan ritað þegar upphafsgildið er óþekkt

Finnið vísisfall sem hefur graf sem liggur um punktana $(-2,6)$ og $(2,1)$.

Lausn

Þar sem upphafsgildið er ekki þekkt setjum við báða punktana inn í jöfnu á forminu $f(x)=ab^x$, og leysum síðan jöfnuhneppið fyrir a og b.

- Þegar $(-2,6)$ er sett inn fæst $6=ab^{-2}$
- Þegar $(2,1)$ er sett inn fæst $1=ab^2$

Einangrið a í fyrri jöfnunni og ritið það sem stæðu með b:

$$
\begin{aligned}
6 &= ab^{-2} \\
\frac{6}{b^{-2}} &= a \quad \text{Deilið.} \\
a &= 6b^2 \quad \text{Notið veldareglur til að umrita nefnarann.}
\end{aligned}
$$

Setjið stæðuna fyrir a inn í síðari jöfnuna og leysið hana fyrir b:

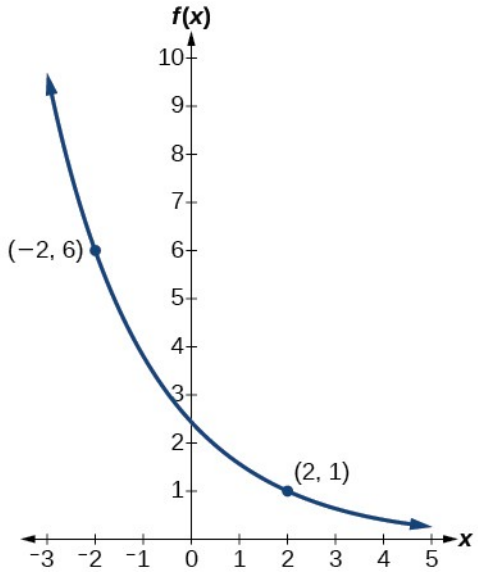
$$
\begin{aligned}
1 &= ab^2 \\
1 &= 6b^2b^2 = 6b^4 \quad \text{Setjið } a \text{ inn.} \\
b &= \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{Notið veldareglur til að einangra } b. \\
b &\approx 0{,}6389 \quad \text{Námundið að 4 aukastöfum.}
\end{aligned}
$$

Notið gildið á b í fyrri jöfnunni til að finna gildið á a:

$$a = 6b^2 \approx 6(0{,}6389)^2 \approx 2{,}4492$$

Jafnan er því $f(x)=2{,}4492(0{,}6389)^x$.

Við getum teiknað graf líkansins til að kanna niðurstöðuna. Takið eftir að grafið á mynd 4 liggur um punktana sem gefnir voru í verkefninu, $(-2,6)$ og $(2,1)$. Grafið er dæmi um vísishnignunarfall.



Mynd 4 Graf $f(x)=2{,}4492(0{,}6389)^x$ lýsir vísishnignun.

REYNIÐ SJÁLF #5

Gefnir eru punktarnir tveir $(1,3)$ og $(2;4{,}5)$, Finnið jöfnu vísisfallsins sem liggur um þessa tvo punkta.

SPURT OG SVARAÐ

Ákvarða tveir punktar alltaf eitt ótvírætt vísisfall?

Já, að því tilskildu að punktarnir séu annaðhvort báðir ofan x-ássins eða báðir neðan hans og hafi ólík x-hnit. Hafa ber þó í huga að við þurfum líka að vita að grafið sé í raun graf vísisfalls. Ekki er hvert graf sem lítur út eins og vísisfall í raun vísisfall. Við þurfum að vita að grafið byggist á líkani sem sýnir sömu prósentuaukningu fyrir hverja einingu sem x, hækkar um, en í mörgum raunverulegum dæmum er það tími.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu vísisfalls út frá grafi þess.

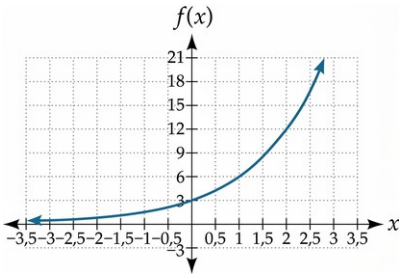
1. Finnið fyrst tvo punkta á grafinu. Veljið skurðpunktinn við y-ás sem annan punktinn ef það er hægt. Veljið helst punkta sem liggja langt hvor frá öðrum til að draga úr áhrifum námundunarskekkju.
2. Ef annar punkturinn er skurðpunkturinn við y-ás $(0,a)$, þá er a upphafsgildið. Notið a, setjið síðari punktinn inn í jöfnuna $f(x)=a(b)^x$, og leysið fyrir b.

3. Ef hvorugur punkturinn er á forminu $(0,a)$, setjið þá báða punktana inn í tvær jöfnur á forminu $f(x)=a(b)^x$. Leysið jöfnuhneppið með tveimur jöfnum og tveimur óþekktum stærðum sem fæst til að finna a og b.
4. Ritið vísisfallið, $f(x)=a(b)^x$.

DÆMI 6

Vísisfall ritað út frá grafi þess

Finnið jöfnu vísisfallsins sem teiknað er á mynd 5.



Mynd 5

Lausn

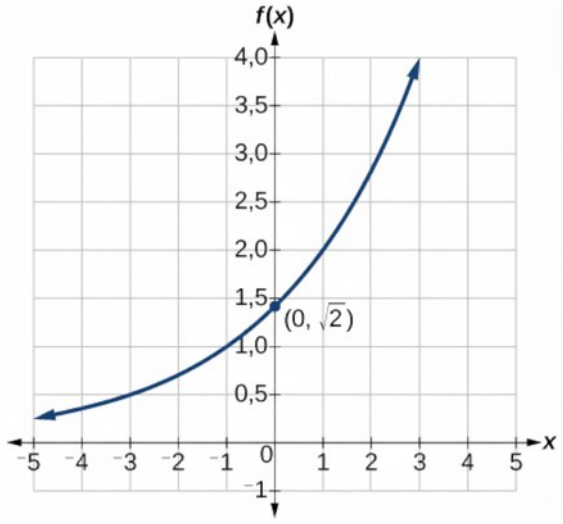
Veljum skurðpunkt grafsins við y-ás, $(0,3)$, sem fyrri punktinn. Þá er upphafsgildið $a=3$. Veljum síðan punkt með heiltöluhnit á ferlinum sem liggur nokkuð frá $(0,3)$. Punkturinn $(2,12)$. hentar vel.

$y=a\ b^x$	Ritið almennt form vísisjöfnu.
$y=3\ b^x$	Setjið upphafsgildið 3 inn fyrir a.
$12=3\ b^2$	Setjið 12 inn fyrir y og 2 inn fyrir x.
$4=b^2$	Deilið báðum megin með 3.
$b=\pm 2$	Takið kvaðratrót.

Þar sem við takmörkum okkur við jákvæð gildi b, notum við $b=2$. Setjið a og b inn í staðalformið til að fá jöfnuna $f(x)=3(2)^x$.

REYNIÐ SJÁLF #6

Finnið jöfnu vísisfallsins sem teiknað er á mynd 6.



Mynd 6

AÐFERÐ

Notið grafíska reiknivél til að finna jöfnu vísisfalls út frá tveimur punktum á ferli þess.

1. Ýtið á [STAT].
2. Hreinsið allar eldri færslur úr dálkunum L1 og L2.
3. Sláið gefnu x-hnitin inn í L1.
4. Sláið samsvarandi y-hnit inn í L2.
5. Ýtið aftur á [STAT]. Færið bendilinn til hægri á CALC, flettið niður að ExpReg (vísisaðhvarf) og ýtið á [ENTER].
6. Á skjánum birtast gildin á a og b í vísisjöfnunni $y = a \cdot b^x$.

DÆMI 7

Grafísk reiknivél notuð til að finna vísisfall

Notið grafíska reiknivél til að finna vísisjöfnuna sem inniheldur punktana $(2\,;24{,}8)$ og $(5\,;198{,}4)$.

Lausn

Fylgið leiðbeiningunum hér að framan. Ýtið fyrst á [STAT], [EDIT] og [1: Edit…] og hreinsið listana L1 og L2. Sláið x-hnitin 2 og 5 inn í L1 og samsvarandi y-hnit, 24,8 og 198,4, inn í L2. Notið punkt sem tugabrotstákn þegar þið sláið tölurnar inn á reiknivélina.

Ýtið nú á [STAT], [CALC] og [0: ExpReg] og síðan á [ENTER]. Þá birtast gildin $a = 6{,}2$ og $b = 2$. Vísisjafnan er $y = 6{,}2 \cdot 2^x$.

REYNIÐ SJÁLF #7

Notið grafíska reiknivél til að finna jöfnu vísisfalls sem hefur graf sem liggur um punktana (3; 75,98) og (6; 481,07).

Formúlan fyrir vaxtavexti notuð

Þegar ávöxtun er endurfjárfest, til dæmis í verðbréfasjóðum eða lífeyrissparnaði, getur hún sjálf skilað frekari ávöxtun. Vaxtavextir myndast þegar vextir reiknast bæði af upphaflegum höfuðstól og af vöxtum sem hafa bæst við hann.

Í þessum kafla táknar árleg vaxtaprósenta (APR) nafnvexti reiknings: uppgefna ársvexti án áhrifa vaxtavaxta innan ársins. Nafnvextir geta átt við hvort sem vextir eru færðir einu sinni eða oftar á ári. Þegar nafnvextir eru jákvæðir og vextir eru færðir oftar en einu sinni á ári verður árleg hlutfallsávöxtun hærri en nafnvextirnir vegna vaxtavaxta.

Við getum reiknað vaxtavexti með vaxtavaxtaformúlunni, sem er vísisfall af breytunum tíma t, höfuðstól P, árlegum nafnvöxtum (APR) r, og fjölda vaxtatímabila á ári n:

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Skoðið til dæmis töflu 4. Hún sýnir hvernig 1.000 dala innistæða vex á einu ári við 10% árlega nafnvexti. Lokainneignin hækkar eftir því sem vextir bætast oftar við höfuðstólinn.

Tafla 4

Tíðni vaxtafærslu	Inneign eftir eitt ár
Árlega	1.100,00 dalir
Tvisvar á ári	1.102,50 dalir
Ársfjórðungslega	1.103,81 dalir
Mánaðarlega	1.104,71 dalir
Daglega	1.105,16 dalir

FORMÚLAN FYRIR VAXTAVEXTI

Reikna má inneign að meðtöldum vaxtavöxtum með formúlunni

$$A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

þar sem

- $A(t)$ er inneignin eftir t ár,
- t er tíminn í árum,
- P er upphaflega inneignin, kölluð höfuðstóll eða núvirði,
- r táknar árlega nafnvexti á tugabrotsformi og

- n er fjöldi vaxtatímabila á ári.

DÆMI 8

Vaxtavextir reiknaðir

Lagðir eru 3.000 dalir inn á reikning sem ber 3% árlega nafnvexti. Vextir bætast við höfuðstólinn ársfjórðungslega. Hver verður inneignin eftir 10 ár?

Lausn

Þar sem við byrjum með $3.000 er $P=3000$. Vextirnir eru 3%, svo $r=0{,}03$. Vextir eru færðir ársfjórðungslega, það er 4 sinnum á ári, svo $n=4$. Við viljum vita inneignina eftir 10 ár, svo við leitum að $A(10)$, gildinu þegar $t=10$.

$$\begin{aligned} A(t) &= P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} && \text{Notið formúluna fyrir vaxtavexti.} \\ A(10) &= 3000\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^{4\cdot 10} && \text{Setjið gefnu gildin inn.} \\ &\approx \$\ 4045{,}05 && \text{Námundið að tveimur aukastöfum.} \end{aligned}$$

Inneignin verður um 4.045,05 dalir eftir 10 ár.

REYNIÐ SJÁLF #8

Upphafsfjárfesting er 100.000 dalir og árlegir nafnvextir eru 12%. Vextir bætast við höfuðstólinn vikulega. Miðið við 52 vikur á ári. Hvert verður verðmæti fjárfestingarinnar eftir 30 ár?

DÆMI 9

Formúlan fyrir vaxtavexti notuð til að finna höfuðstólinn

529-áætlun er bandarískt sparnaðarúrræði. Með því geta ættingjar lagt fyrir til að greiða síðar námskostnað barns. Ávöxtunin er undanþegin alríkistekjuskatti ef féð er notað í námskostnað sem uppfyllir skilyrði úrræðisins. Lily vill stofna 529-reikning fyrir nýfætt barnabarn sitt og vill að hann vaxi í 40.000 dali á 18 árum. Hún gerir ráð fyrir að reikningurinn beri 6% árlega nafnvexti og að vextir bætist við höfuðstólinn tvisvar á ári. Hve mikið þarf Lily að leggja inn á reikninginn nú? Námundið að næsta heila dal.

Lausn

Árlegir nafnvextir eru 6%, svo $r=0{,}06$. Vextir bætast við höfuðstólinn tvisvar á ári, svo $n=2$.

Við viljum finna upphafsfjárhæðina, P, sem þarf til að inneignin verði $40.000 eftir 18 ár. Setjið gefnu gildin inn í vaxtavaxtaformúluna og leysið fyrir P.

$$A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{Notið formúluna fyrir vaxtavexti.}$$

$$40.000 = P\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{2(18)} \quad \text{Setjið inn gefin gildi á } A, r, n \text{ og } t.$$

$$40.000 = P\left(1{,}03\right)^{36} \quad \text{Einfaldið.}$$

$$\frac{40.000}{\left(1{,}03\right)^{36}} = P \quad \text{Einangrið } P.$$

$$P \approx \$\ 13.801 \quad \text{Deilið og námundið að næsta heila dal.}$$

Samkvæmt þessum forsendum þarf Lily að leggja inn um 13.801 dal til að eiga 40.000 dali eftir 18 ár.

4

REYNIÐ SJÁLF #9

Skoðið dæmi 9. Hve mikið þyrfti Lily að leggja inn ef vextir bættust við höfuðstólinn ársfjórðungslega? Námundið svarið að næsta heila dal.

Gildi falla með grunntölu e reiknuð

Eins og kom fram hér að framan eykst ávöxtun reiknings eftir því sem vextir eru færðir oftar. Tafla 5 sýnir að aukningin frá árlegri yfir í hálfsárslega vaxtafærslu er meiri en aukningin frá mánaðarlegri yfir í daglega vaxtafærslu. Þá má spyrja hvort þetta mynstur haldi áfram.

Skoðið töflu 5. Hún sýnir inneign eftir eitt ár þegar einn dalur er lagður inn á reikning með 100% árlegum nafnvöxtum og vextir bætast við höfuðstólinn með mismunandi tíðni.

Tafla 5

Tíðni vaxtafærslu	$A(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	**Inneign í dölum**
Árlega	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	$2
Tvisvar á ári	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	$2,25
Ársfjórðungslega	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	$2,441406
Mánaðarlega	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	$2,613035
Daglega	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	$2,714567
Á klukkustundar fresti	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	$2,718127
Á mínútu fresti	$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}$	$2,718279
Á sekúndu fresti	$\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000}$	$2,718282

Gildin virðast nálgast markgildi þegar n vex án takmarka. Þegar n verður sífellt stærra stefnir stæðan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ í raun á tölu sem kemur svo oft fyrir í stærðfræði að hún hefur sitt eigið heiti: bókstafinn e. Þetta gildi er óræð tala, sem merkir að tugabrotsframsetning hennar heldur endalaust áfram án þess að endurtaka sig. Hér fyrir neðan er hún námunduð að sex aukastöfum.

TALAN e

Táknið e stendur fyrir óræða tölu sem fæst sem markgildi eftirfarandi stæðu:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{ þegar } n \text{ vex án takmarka}$$

Talan e er grunntala í mörgum vísislíkönum sem lýsa raunverulegum fyrirbærum. Við útreikninga má nota nálgunina $e \approx 2{,}718282$., ef hún er nægilega nákvæm fyrir verkefnið. Svissneski stærðfræðingurinn Leonhard Euler (1707–1783) tók upp táknið e fyrir þennan fasta og rannsakaði marga eiginleika hans.

DÆMI 10

Reiknivél notuð til að finna veldi e

Reiknið $e^{3{,}14}$. og námundið að fimm aukastöfum.

Lausn

4

Ýtið á hnappinn merktan $\left[e^{x}\right]$. á reiknivélinni. Á skjánum birtist $\left[e^{\ }(\right]$. Sláið inn 3,14 og lokið síðan sviganum, $\left[\right)\left]\right.$. Ýtið á [ENTER]. Námundað að 5 aukastöfum fæst $e^{3{,}14} \approx 23{,}10387$.
Athugið: Á mörgum vísindareiknivélum er hnappur merktur „Exp“, sem er notaður til að slá inn tölur á staðalformi. Hann er ekki notaður til að reikna veldi af e.

REYNIÐ SJÁLF #10

Notið reiknivél til að reikna $e^{-0{,}5}$. Námundið að fimm aukastöfum.

Samfelldur vöxtur rannsakaður

Hingað til höfum við notað ræðar grunntölur í vísisföllum. Í flestum raunverulegum dæmum er þó notuð grunntalan e. Hún hentar vel þegar lýsa á samfelldum vexti eða samfelldri hnignun. Vísislíkön á forminu A(t) = a·e^(r·t) kallast líkön fyrir samfelldan vöxt eða samfellda hnignun. Þau eru notuð í fjármálum, tölvunarfræði og ýmsum raunvísindum, svo sem eðlisfræði, eiturefnafræði og straumfræði. Stuðullinn r lýsir breytingarhraða miðað við gildi stærðarinnar hverju sinni.

FORMÚLAN FYRIR SAMFELLDAN VÖXT EÐA SAMFELLDA HNIGNUN

Fyrir allar rauntölur t, og allar jákvæðar tölur a og r, er samfelldum vexti eða samfelldri hnignun lýst með formúlunni

$$A(t) = a\,e^{r\,t}$$

þar sem

- a er upphafsgildið,
- r er samfelldur hlutfallslegur vaxtarhraði á tímaeiningu og
- t er liðinn tími.

Ef $r > 0$ lýsir formúlan samfelldum vexti. Ef $r < 0$ lýsir hún samfelldri hnignun. Þegar r = 0 er gildið fast.

Í viðskiptum kallast formúlan fyrir samfelldan vöxt formúla fyrir samfellda vaxtavöxtun. Hún er á forminu

$$A(t)=Pe^{rt}$$

þar sem

- P er höfuðstóllinn, það er upphaflega fjárfestingin,
- r er vaxtahlutfall við samfellda vaxtafærslu, ritað sem tugabrot og miðað við sömu tímaeiningu og t, og
- t er tíminn frá upphafi fjárfestingarinnar, mældur í sömu tímaeiningu.

AÐFERÐ

Reiknið gildi líkans með samfelldum vexti eða samfelldri hnignun þegar upphafsgildið a, hlutfallslegi vaxtarhraðinn r og tíminn t, eru gefin.

1. Finnið upphafsgildið a út frá upplýsingunum í dæminu.
2. Finnið samfellda hlutfallslega vaxtarhraðann r. út frá upplýsingunum í dæminu.
   a. Ef dæmið fjallar um samfelldan vöxt er $r>0$.
   b. Ef dæmið fjallar um samfellda hnignun er $r<0$.
3. Finnið tímann t. og gætið þess að nota sömu tímaeiningu og vaxtarhraðinn miðast við.
4. Setjið gefnu upplýsingarnar inn í formúluna fyrir samfelldan vöxt og leysið fyrir $A(t)$.

DÆMI 11

Samfelldur vöxtur reiknaður

Einstaklingur lagði 1.000 dali inn á reikning sem bar 10% árlega nafnvexti með samfelldri vaxtafærslu. Hver var inneignin eftir eitt ár?

Lausn

Þar sem inneignin vex er þetta dæmi um samfellda vaxtafærslu með vaxtarhraðann $r=0{,}10$. Upphaflega fjárfestingin var \$1.000, svo $P=1000$. Við notum formúluna fyrir samfellda vaxtafærslu til að finna inneignina eftir $t=1$ ár:

$$\begin{aligned} A(t) &= Pe^{rt} && \text{Notið formúluna fyrir samfellda vaxtafærslu.} \\ &= 1000(e)^{0{,}1} && \text{Setjið inn gefin gildi á } P, r, \text{ og } t. \\ &\approx 1105{,}17 && \text{Notið reiknivél til að finna nálgunargildi.} \end{aligned}$$

Inneignin er um 1.105,17 dalir eftir eitt ár.

REYNIÐ SJÁLF #11

Einstaklingur fjárfestir 100.000 dali við 12% árlega nafnvexti með samfelldri vaxtafærslu. Hvert verður verðmæti fjárfestingarinnar eftir 30 ár?

DÆMI 12

Samfelld hnignun reiknuð

Gerum ráð fyrir að radon-222 hrörni með samfelldum hlutfallslegum hraða sem nemur 17,3% á dag. Upphaflega eru 100 mg af radon-222. Hve mikið verður eftir að þremur dögum liðnum?

Lausn

Þar sem efnið hrörnar er hraðinn, 17,3 %, neikvæður. Því er $r = -0{,}173$. Upphaflegt magn radons-222 var 100 mg, svo $a = 100$. Við notum formúluna fyrir samfellda hnignun til að finna magnið eftir $t = 3$ daga:

$A(t) = a\,e^{rt}$ Notið formúluna fyrir samfellda vísishnignun.

$= 100\,e^{-0{,}173(3)}$ Setjið inn gefin gildi á a, r, og t.

$\approx 59{,}5115$ Notið reiknivél til að finna nálgunargildi.

Samkvæmt líkaninu verða um 59,5115 mg af radon-222 eftir að þremur dögum liðnum. Hér er reiknað með hrörnunarhraðanum sem gefinn er í frumtextanum. Sá hraði samsvarar um 4,01 dags helmingunartíma og er því ekki nákvæmt gildi fyrir radon-222, sem hefur um 3,8 daga helmingunartíma.

REYNIÐ SJÁLF #12

Notið líkanið í dæmi 12 til að finna hve mikið verður eftir af radon-222 að einu ári liðnu. Miðið við 365 daga í ári.

VIÐBÓTAREFNI

Hér er að finna ítarefni og fleiri æfingar um vísisföll.

- Vísisvaxtarfall
- Vaxtavextir

4.1 Verkefni

Hugtakaspurningar

1. Látum f(x) = a·b^x, þar sem a > 0 og b > 1. Útskýrið hvers vegna gildi f(x) verða að lokum stærri en gildi hvaða vaxandi línulegs falls sem er þegar x stefnir á óendanlegt.
2. Má sjá á formúlu vísisfalls einni saman hvort hún lýsir vísisvexti eða vísishnignun? Útskýrið.

3. Í frumtextanum er vísað til skilgreiningar Oxford-orðabókarinnar á enska orðinu „nominal“ um gildi sem er „tilgreint eða gefið upp en samsvarar ekki endilega nákvæmlega raunverulegu gildi“. 3 Setjið fram rök fyrir því að heitið nafnvextir sé notað um uppgefna árlega vaxtaprósentu á reikningi þar sem vextir bætast við höfuðstólinn og bera síðan sjálfir vexti.

3
Oxford Dictionary.
http://oxforddictionaries.com/us/definition/american_english/nomina.

Algebra

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort staðhæfingin lýsi vísisfalli. Útskýrið.

4. Úlfum í hópi fjölgar að meðaltali um 25 á ári.

5. Bakteríustofn minnkar um stuðulinn $\frac{1}{8}$ á hverjum 24 klukkustundum.

6. Verðmæti myntsafns hefur aukist um 3,25 % á ári síðustu 20 ár.

7. Einkaþjálfari tekur $\$5$ minna fyrir hverja æfingu en fyrir æfinguna á undan.

8. Hæð hlutar í kastferli á tíma t er gefin með fallinu $h\left(t\right)=-4{,}9\ t^2+18\ t+40$.

Í eftirfarandi verkefnum er fjöldi trjáa í skógi eftir t, ár gefinn með fallinu $A\left(t\right)=115\left(1{,}025\right)^t$. Í nærliggjandi skógi er fjöldi trjáa af sömu tegund gefinn með fallinu $B\left(t\right)=82\left(1{,}029\right)^t$. Námundið svör að næstu heilu tölu.

9. Í hvorum skóginum er árleg hlutfallsleg fjölgun trjáa meiri, mæld í prósentum?

10. Í hvorum skóginum voru fleiri tré í upphafi? Hve miklu fleiri?

11. Gerið ráð fyrir að vaxtarlíkönin lýsi áfram þróun skóganna. Í hvorum skóginum verða fleiri tré eftir 20 ár? Hve miklu fleiri?

12. Gerið ráð fyrir að vaxtarlíkönin lýsi áfram þróun skóganna. Í hvorum skóginum verða fleiri tré eftir 100 ár? Hve miklu fleiri?

13. Ræðið niðurstöður síðustu fjögurra verkefna. Gerið ráð fyrir að vaxtarlíkönin lýsi áfram þróun skóganna. Í hvorum skóginum verða fleiri tré þegar til langs tíma er litið? Hvers vegna? Hvaða þættir gætu haft áhrif á gildi vísisvaxtarlíkansins til langs tíma?

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort jafnan lýsi vísisvexti, vísishnignun eða hvorugu. Útskýrið.

14.

$$y=300\left(1-t\right)^5$$

15.

$$y=220\left(1{,}06\right)^x$$

16.

$$y = 16{,}5\left(1{,}025\right)^{\frac{1}{x}}$$

17.

$$y = 11.701\left(0{,}97\right)^{t}$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum formúlu vísisfalls sem hefur graf sem liggur um gefnu punktana tvo.

18. $(0,6)$ og $(3,750)$

19. $(0,2000)$ og $(2,20)$

20. $\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ og $(3,24)$

21. $(-2,6)$ og $(3,1)$

22. $(3,1)$ og $(5,4)$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort taflan geti lýst línulegu falli, vísisfalli eða hvorugu. Ef hún virðist lýsa vísisfalli skuluð þið finna vísisfall sem hefur graf sem liggur um punktana.

23.

x	1	2	3	4
$f(x)$	70	40	10	-20

24.

x	1	2	3	4
$h(x)$	70	49	34,3	24,01

25.

x	1	2	3	4
$m(x)$	80	61	42,9	25,61

26.

x	1	2	3	4
$f(x)$	10	20	40	80

27.

x	1	2	3	4
$g(x)$	-3,25	2	7,25	12,5

Notið í eftirfarandi verkefnum formúluna fyrir vaxtavexti, $A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$.

28. Eftir tiltekinn árafjölda er inneign á fjárfestingarreikningi gefin með jöfnunni $A=10.250\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{120}$. Hver er inneignin?

29. Hver var upphaflega innborgunin á reikninginn í verkefninu á undan?

30. Hve mörg ár hafði reikningurinn í verkefninu á undan safnað vöxtum?

31. Reikningur er stofnaður með $6.500 upphafsinnleggi og ber 3,6 % vexti sem eru færðir tvisvar á ári. Hver verður inneignin eftir 20 ár?

32. Hve miklu meiri hefði innistæðan í verkefninu á undan orðið ef vextir hefðu verið færðir vikulega?

33. Leysið formúluna fyrir vaxtavexti með tilliti til höfuðstólsins P.

34. Notið formúluna úr verkefninu á undan til að reikna upphafsinnlegg á reikning sem er 14.472,74 dalir virði eftir 5,5 % vexti með mánaðarlegri vaxtafærslu í 5 ár. (Námundið að næsta dal.)

35. Hve miklu meiri yrði inneignin á reikningnum í síðustu tveimur verkefnum ef hann bæri vexti í 5 ár til viðbótar?

36. Notið reiknireglur um ræð veldi til að leysa formúluna fyrir vaxtavexti með tilliti til vaxtahlutfallsins r.

37. Notið formúluna sem þið leystuð með tilliti til r til að reikna árlega nafnvexti reiknings. Upphafsinnborgunin var 9.000 dalir, vextir voru færðir tvisvar á ári og inneignin var 13.373,53 dalir eftir 10 ár.

38. Notið formúluna sem þið leystuð með tilliti til r til að reikna árlega nafnvexti reiknings. Upphafsinnborgunin var 5.500 dalir, vextir voru færðir mánaðarlega og inneignin var 38.455 dalir eftir 30 ár.

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort jafnan lýsi samfelldum vísisvexti, samfelldri vísishnignun eða hvorugu. Hér er miðað við líkön með föstum hlutfallslegum vaxtarhraða, y = a·e^(rt), þar sem a > 0 og r er fasti. Útskýrið.

39.

$$y=3742\,(e)^{0{,}75\,t}$$

40.

$$y=150\,(e)^{\frac{3{,}25}{t}}$$

41.

$$y=2{,}25\,(e)^{-2\,t}$$

42. Gerum ráð fyrir að fjárfestingarreikningur sé stofnaður með upphafsinnleggi $\$12,000$ og beri 7,2% vexti með samfelldri vaxtafærslu. Hver verður inneignin eftir 30 ár?

43. Hve miklu minni yrði inneignin á reikningnum í verkefni 42 eftir 30 ár ef vextir væru þess í stað færðir mánaðarlega?

Töluleg verkefni

Reiknið gildi hvers falls í eftirfarandi verkefnum. Námundið svör að fjórum aukastöfum ef þörf krefur.

44. $f(x)=2(5)^x$, fyrir $f(-3)$

45. $f(x)=-4^{2x+3}$, fyrir $f(-1)$

46. $f(x)=e^x$, fyrir $f(3)$

47. $f(x)=-2e^{x-1}$, fyrir $f(-1)$

48. $f(x)=2{,}7(4)^{-x+1}+1{,}5$ fyrir $f(-2)$

49. $f(x)=1{,}2\,e^{2x}-0{,}3$ fyrir $f(3)$

50. $f(x)=-\frac{3}{2}(3)^{-x}+\frac{3}{2}$, fyrir $f(2)$

Tækni

Notið grafreikni í eftirfarandi verkefnum til að finna jöfnu vísisfalls sem hefur graf sem liggur um gefnu punktana.

51. $(0,3)$ og $(3,375)$

52. $(3;222{,}62)$ og $(10;77{,}456)$

53. $(20;29{,}495)$ og $(150;730{,}89)$

54. $(5;2{,}909)$ og $(13;0{,}005)$

55. $(11;310{,}035)$ og $(25;356365{,}2)$

Viðbótarverkefni

56. Árleg hlutfallsávöxtun (APY) fjárfestingarreiknings sýnir raunverulega vexti sem reikningur með vaxtavöxtum ber. Hún miðast við vaxtatímabil sem er eitt ár. Sýnið að finna megi APY reiknings með mánaðarlegri vaxtafærslu með formúlunni

$$\text{APY}=\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}-1.$$

57. Leiðið á sama hátt og í verkefninu á undan út formúlu fyrir árlega hlutfallsávöxtun reiknings með daglegri vaxtafærslu. Notið niðurstöður þessara tveggja verkefna til að finna fallið $I(n)$, sem gefur árlega hlutfallsávöxtun reiknings þar sem vextir eru færðir n sinnum á ári.

58. Munið að vísisfall er sérhver jafna á forminu $f(x)=a\cdot b^x$ þannig að a og b eru jákvæðar tölur og $b\neq 1$. Sérhverja jákvæða tölu b má rita sem $b=e^n$ fyrir eitthvert gildi n. Notið þetta til að umrita formúlu vísisfalls þannig að talan e sé grunntalan.

59. Í vísishnignunarfalli er grunntalan gildi milli 0 og 1. Fyrir einhverja tölu $b>1$, má því rita vísishnignunarfallið sem $f(x)=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^x$. Notið þessa formúlu og þá staðreynd að $b=e^n$, til að sýna að vísishnignunarfall er á forminu $f(x)=a(e)^{-nx}$ fyrir einhverja jákvæða tölu n.

60. Formúlan fyrir inneignina A á fjárfestingarreikningi með nafnvöxtum r á hverjum tíma t er gefin með $A(t)=a(e)^{rt}$, þar sem a er höfuðstóllinn sem upphaflega var lagður inn á reikning með samfelldri vaxtafærslu. Sannið að reikna megi hlutfall áfallinna vaxta af höfuðstól á hverjum tíma t með formúlunni $I(t)=e^{rt}-1$.

4

Raunhæf viðfangsefni

61. Refum á tilteknu svæði fjölgar um 9% á ári. Árið 2012 voru 23.900 refir taldir á svæðinu. Hve margir refir verða þar árið 2020 samkvæmt þessu líkani?

62. Vísindamaður hefur í upphafi 100 milligrömm af geislavirku efni. Magn efnisins minnkar samkvæmt vísisfalli og eftir 35 klukkustundir eru 50 milligrömm eftir. Hve mörg milligrömm verða eftir þegar 54 klukkustundir eru liðnar frá upphafi?

63. Árið 1985 var hús metið á 110.000 dali. Árið 2005 hafði verðmæti þess hækkað í 145.000 dali. Gerið ráð fyrir að verðmætið hafi hækkað um sama hlutfall á hverju ári. Hve mörg prósent var árleg hækkun? Hvert var verðmæti hússins árið 2010 samkvæmt líkaninu, ef hækkunin hélt áfram með sama hætti?

64. Bifreið var metin á 38.000 dali árið 2007. Árið 2013 hafði verðmæti hennar lækkað í 11.000 dali. Gerið ráð fyrir að verðmætið lækki um sama hlutfall á hverju ári. Hvers virði verður bifreiðin árið 2017 samkvæmt þessu líkani?

65. Jaylen vill safna 54.000 dölum fyrir útborgun vegna íbúðarkaupa. Hve mikið þarf hann að leggja inn á reikning sem ber 8,2% nafnvexti á ári með daglegri vaxtafærslu til að ná markmiðinu á 5 árum?

66. Kyoko á 10.000 dali sem hún vill ávaxta. Bankinn hennar býður nokkra fjárfestingarreikninga og á þeim öllum eru vextir færðir daglega. Markmið hennar er að eiga 15.000 dali þegar hún lýkur framhaldsnámi eftir 6 ár. Hve háir þurfa árlegir nafnvextir að vera að lágmarki svo hún nái markmiðinu? Gefið svarið í prósentum og námundið að tveimur aukastöfum. (Vísbending: Leysið formúluna fyrir vaxtavexti með tilliti til vaxtahlutfallsins r.)

67. Alyssa stofnaði lífeyrissparnaðarreikning með 7,25% nafnvöxtum á ári árið 2000. Upphafsinnborgun hennar var 13.500 dalir. Hver verður inneignin árið 2025 ef vextir eru færðir mánaðarlega? Hve miklu meiri yrði hún með samfelldri vaxtafærslu?

68. Lagðir voru 4.000 dalir inn á fjárfestingarreikning sem ber 7% nafnvexti á ári. Berið saman inneignina eftir 9 ár með árlegri, ársfjórðungslegri, mánaðarlegri og samfelldri vaxtafærslu.

4.2 Gröf vísisfalla

NÁMSMARKMIÐ

- Teikna gröf vísisfalla.
- Teikna gröf vísisfalla með ummyndunum.

Eins og kom fram í síðasta hluta eru vísisföll notuð til að lýsa ýmsum raunverulegum fyrirbærum, meðal annars í fjármálum, réttarrannsóknum, tölvunarfræði og lífvísindum. Með jöfnu sem lýsir slíkum aðstæðum má spá fyrir um þróun samkvæmt forsendum líkansins. Jafnan ein og sér gefur þó ekki alltaf skýra mynd af þróuninni. Graf fallsins gerir hana sýnilega og auðveldar okkur að skilja líkanið og túlka spár þess.

Gröf vísisfalla teiknuð

Áður en við byrjum að teikna gröf er gagnlegt að rifja upp hegðun vísisvaxtar. Munið gildatöfluna fyrir fall á forminu $f(x)=b^x$ þar sem grunntalan er stærri en einn. Við notum fallið $f(x)=2^x$. Skoðið hvernig úttaksgildin í töflu 1 breytast þegar inntakið hækkar um 1.

Tafla 1

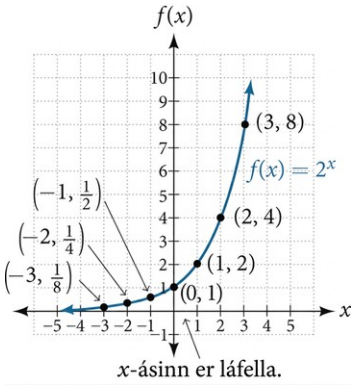
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Hvert úttaksgildi er margfeldi úttaksins á undan og grunntölunnar, 2. Við köllum grunntöluna 2 fasta hlutfallið. Fyrir sérhvert vísisfall á forminu $f(x)=a\,b^x$, er b í raun fasta hlutfall fallsins. Það merkir að þegar inntakið hækkar um 1 verður úttaksgildið margfeldi grunntölunnar og úttaksins á undan, óháð gildinu á a.

Taflan sýnir eftirfarandi um hegðun fallsins:

- Fallgildin eru jákvæð fyrir öll raungildi x;.
- Þegar x stefnir á jákvætt óendanlegt vex fallgildið ótakmarkað.
- Þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt nálgast fallgildið núll en verður aldrei núll.

Mynd 1 sýnir graf vísisvaxtarfallsins $f(x)=2^x$.



Mynd 1 Takið eftir að grafið nálgast x-ásinn en snertir hann aldrei.

Skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=2^x$ er mengi allra rauntalna og myndmengið er $(0,\infty)$,. Grafið hefur láfelluna $y=0$.

Til að skoða hegðun vísishnignunarfalls búum við til gildatöflu fyrir fall á forminu $f(x)=b^x$, þar sem grunntalan b er stærri en núll en minni en einn. Við notum $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. sem dæmi. Skoðið í töflu 2 hvernig fallgildin breytast þegar x hækkar um 1.

Tafla 2

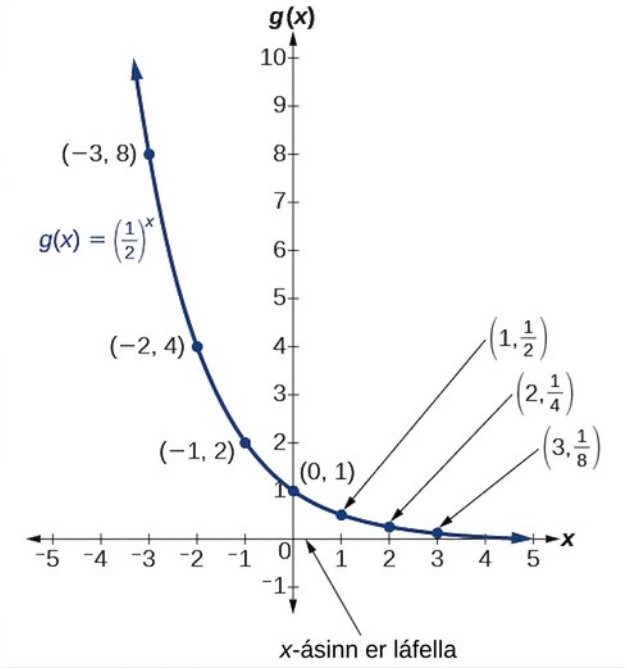
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Þegar x hækkar um 1 margfaldast fallgildið með grunntölunni $\frac{1}{2}$. Hvert fallgildi í töflunni er því helmingur næsta gildis á undan.

Taflan sýnir eftirfarandi um hegðun fallsins:

- Fallgildin eru jákvæð fyrir öll raungildi x;.
- Þegar x stefnir á jákvætt óendanlegt nálgast fallgildið núll en verður aldrei núll.
- Þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt vex fallgildið ótakmarkað.

Mynd 2 sýnir graf vísishnignunarfallsins $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Mynd 2

Skilgreiningarmengi fallsins $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ er mengi allra rauntalna og myndmengið er $(0,\infty)$,.

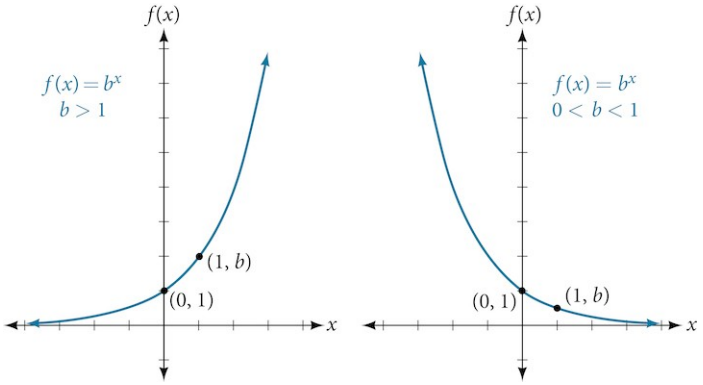
Grafið hefur láfelluna $y=0$.

EINKENNI GRAFS GRUNNFALLSINS $f(x)=b^x$

Vísisfallið $f(x)=b^x$, þar sem $b>0$, og $b\neq 1$, hefur þessa eiginleika:

- Fallið er eintækt.
- Grafið hefur láfelluna $y=0$.
- Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$.
- myndmengi: $(0,\infty)$
- *Grafið sker ekki x-ásinn.*
- *Grafið sker y-ásinn í punktinum* $(0,1)$.
- Fallið er vaxandi ef $b>1$.
- Fallið er minnkandi ef $0<b<1$.

Mynd 3 ber saman gröf vísisvaxtar- og vísishnignunarfalla.



Mynd 3

AÐFERÐ

Gefið er vísisfall á forminu $f(x)=b^x$, Teiknið graf fallsins.

1. Gerið gildatöflu fyrir fallið.
2. Merkið að minnsta kosti 3 punkta úr töflunni, þar á meðal skurðpunktinn við y-ás $(0,1)$.
3. Teiknið sléttan feril í gegnum punktana.
4. Tilgreinið skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$, myndmengið $(0,\infty)$, og láfelluna $y=0$.

SÝNIDÆMI 1

Að skissa graf vísisfalls á forminu $f(x) = b^x$

Skissið graf fallsins $f(x)=0{,}25^x$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins og láfellu grafsins.

Lausn

Áður en við teiknum grafið skulum við skoða hegðun fallsins og gera gildatöflu.

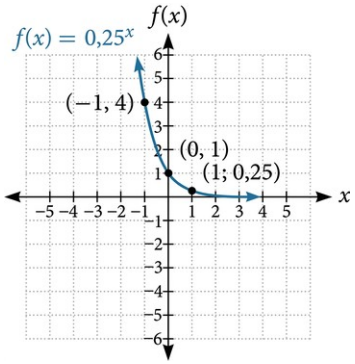
- Grunntalan $b=0{,}25$ er stærri en núll en minni en einn, svo fallið er minnkandi. Þegar x stefnir á neikvætt óendanlegt vex fallgildið ótakmarkað. Þegar x stefnir á jákvætt óendanlegt nálgast grafið láfelluna $y=0$.
- Gerið gildatöflu eins og sýnt er í töflu 3.

Tafla 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=0{,}25^x$	64	16	4	1	0,25	0,0625	0,015625

- Merkið skurðpunktinn við y-ásinn, $(0,1)$, og tvo aðra punkta. Til dæmis má nota punktana $(-1,4)$ og $(1;0{,}25)$.

Teiknið sléttan feril í gegnum punktana eins og sýnt er á mynd 4.



Mynd 4

4

Skilgreiningarmengið er $(-\infty, \infty)$; og myndmengið er $(0, \infty)$;. Grafið hefur láfelluna $y=0$.

REYNIÐ SJÁLF #1

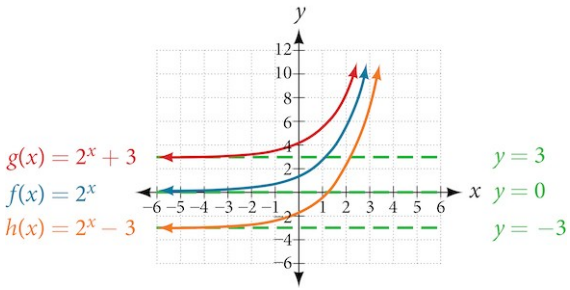
Skissið graf fallsins $f(x)=4^x$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins og láfellu grafsins.

Gröf vísisfalla ummynduð

Gröf vísisfalla má ummynda á sama hátt og gröf annarra falla. Við getum hliðrað, speglað, teygt eða þjappað saman grafi grunnfallsins $f(x)=b^x$. Grafið heldur samt í meginatriðum sömu lögun. Á sama hátt er graf annars stigs falls alltaf fleygbogi, þótt því sé hliðrað, speglað, teygt eða þjappað saman.

Lóðrétt hliðrun teiknuð

Fyrsta ummyndunin verður þegar við bætum fasta d við grunnfallið $f(x)=b^x$, sem gefur lóðrétta hliðrun um d einingar í sömu átt og formerkið. Ef við teiknum til dæmis fyrst graf grunnfallsins $f(x)=2^x$, getum við teiknað tvær lóðréttar hliðranir við hlið þess með $d=3$: hliðrunina upp, $g(x)=2^x+3$ og hliðrunina niður, $h(x)=2^x-3$. Mynd 5 sýnir báðar lóðréttu hliðranirnar.



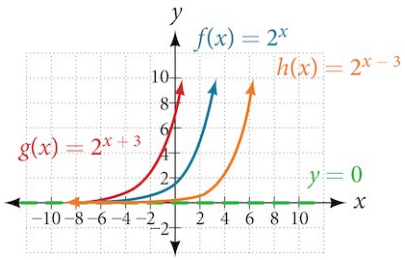
Mynd 5

Skoðið áhrif þess að hliðra grafi fallsins $f(x)=2^x$ lóðrétt:

- Skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$ breytist ekki.
- Þegar grafi f er hliðrað upp um 3 einingar fæst graf fallsins $g(x)=2^x+3$:
  - Skurðpunkturinn við y-ás færist upp um 3 einingar í $(0, 4)$.
  - Láfellan færist upp um 3 einingar, úr y = 0 í $y=3$.
  - Myndmengið verður $(3, \infty)$.
- Þegar grafi f er hliðrað niður um 3 einingar fæst graf fallsins $h(x)=2^x-3$:
  - Skurðpunkturinn við y-ás færist niður um 3 einingar í $(0, -2)$.
  - Láfellan færist niður um 3 einingar, úr y = 0 í $y=-3$.
  - Myndmengið verður $(-3, \infty)$.

Lárétt hliðrun teiknuð

Næsta ummyndun verður þegar við bætum fasta c við inntak grunnfallsins $f(x)=b^x$, sem gefur lárétta hliðrun um c einingar í gagnstæða átt við formerkið. Ef við teiknum til dæmis fyrst graf grunnfallsins $f(x)=2^x$, getum við teiknað tvær láréttar hliðranir við hlið þess með $c=3$: hliðrunina til vinstri, $g(x)=2^{x+3}$, og hliðrunina til hægri, $h(x)=2^{x-3}$. Mynd 6 sýnir báðar láréttu hliðranirnar.



Mynd 6

Skoðið áhrif þess að hliðra grafi fallsins $f(x)=2^x$ lárétt:

- Skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$, breytist ekki.
- Láfellan $y=0$, breytist ekki.
- Skurðpunkturinn við y-ásinn breytist sem hér segir:
  - Þegar fallinu er hliðrað um 3 einingar til vinstri í $g(x)=2^{x+3}$, verður skurðpunkturinn við y-ás $(0, 8)$. Það er vegna þess að $2^{x+3}=(8)2^x$, svo upphafsgildi fallsins er 8.
  - Þegar fallinu er hliðrað um 3 einingar til hægri í $h(x)=2^{x-3}$, verður skurðpunkturinn við y-ás $\left(0, \frac{1}{8}\right)$. Sjáið aftur að $2^{x-3}=\left(\frac{1}{8}\right)2^x$, svo upphafsgildi fallsins er $\frac{1}{8}$.

HLIÐRANIR GRUNNFALLSINS F(ˣ) = Bˣ

Fyrir alla fasta c og d, hliðrar fallið $f(x)=b^{x+c}+d$ grunnfallinu $f(x)=b^x$

- lóðrétt um d einingar, í sömu átt og formerki d.

- lárétt um c einingar, í gagnstæða átt við formerki c.
- Skurðpunkturinn við y-ásinn verður $(0, b^c + d)$.
- Láfellan verður $y = d$.
- Myndmengið verður (d, ∞).
- Skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$, breytist ekki.

AÐFERÐ

Gefið er vísisfall á forminu $f(x) = b^{x+c} + d$, Teiknið graf hliðrunarinnar.

4

1. Teiknið láfelluna $y = d$.
2. Greinið hliðrunina sem $(-c, d)$. Hliðrið grafi $f(x) = b^x$ til vinstri um c einingar ef c er jákvætt og til hægri um c einingar ef c er neikvætt.
3. Hliðrið grafi $f(x) = b^x$ upp um d einingar ef d er jákvætt og niður um d einingar ef d er neikvætt.
4. Tilgreinið skilgreiningarmengið $(-\infty, \infty)$, myndmengið (d, ∞), og láfelluna $y = d$.

SÝNIDÆMI 2

Hliðrun grafs vísisfalls teiknuð

Teiknið graf fallsins $f(x) = 2^{x+1} - 3$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins og láfellu grafsins.

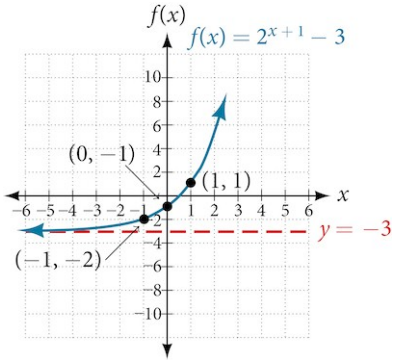
Lausn

Fallið er á forminu $f(x) = b^{x+c} + d$, þar sem $b = 2$, $c = 1$, og $d = -3$.

Teiknið láfelluna $y = d$, það er $y = -3$.

Greinið hliðrunina sem $(-c, d)$, svo hliðrunin er $(-1, -3)$.

Hliðrið grafi $f(x) = b^x$ um 1 einingu til vinstri og 3 einingar niður.



Mynd 7

Skilgreiningarmengið er $(-\infty, \infty)$; og myndmengið er $(-3, \infty)$;. Láfellan er $y = -3$.

REYNIÐ SJÁLF #2

Teiknið graf fallsins $f(x)=2^{x-1}+3$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins og láfellu grafsins.

AÐFERÐ

Þegar fallið $f(x)=b^{x+c}+d$ og tiltekið fallgildi eru gefin má nota grafreikni til að finna nálgun á því gildi x, sem gefur þetta fallgildi.

- Ýtið á [Y=]. Sláið stæðuna fyrir vísisfallið inn í línuna „Y_1=“.
- Sláið gefna gildið á $f(x)$ inn í línuna „Y_2=“.
- Ýtið á [WINDOW]. Stillið sýnilegt bil á y-ásnum þannig að gildið í „Y_2=“ sé innan þess.
- Ýtið á [GRAPH] til að sjá graf vísisfallsins ásamt línunni fyrir tilgreint gildi $f(x)$.
- Finnið skurðpunkt grafsins og línunnar: ýtið á [2ND] og síðan [CALC], veljið „intersect“ og ýtið þrisvar á [ENTER]. x,-hnit skurðpunktsins er nálgun á lausninni.

SÝNIDÆMI 3

Lausn vísisjöfnu nálguð

Leysið jöfnuna $42=1{,}2(5)^x+2{,}8$ með því að teikna gröf. Námundið lausnina að þremur aukastöfum.

Lausn

Ýtið á [Y=] og sláið $1{,}2(5)^x+2{,}8$ inn við Y_1=. Sláið síðan 42 inn við Y2=. Notið gluggann -3 til 3 fyrir x og -5 til 55 fyrir y. Ýtið á [GRAPH]. Gröfin ættu að skerast einhvers staðar nálægt $x=2$.

Til að fá nákvæmari nálgun skuluð þið ýta á [2ND] og síðan [CALC]. Veljið [5: intersect] og ýtið þrisvar á [ENTER]. x-hnit skurðpunktsins birtist sem 2,1661943 á grafreikninum. Síðustu aukastafir geta verið örlítið mismunandi eftir gluggastillingum og upphafságiskuninni „Guess?“. Námundað að þremur aukastöfum er $x\approx 2{,}166$.

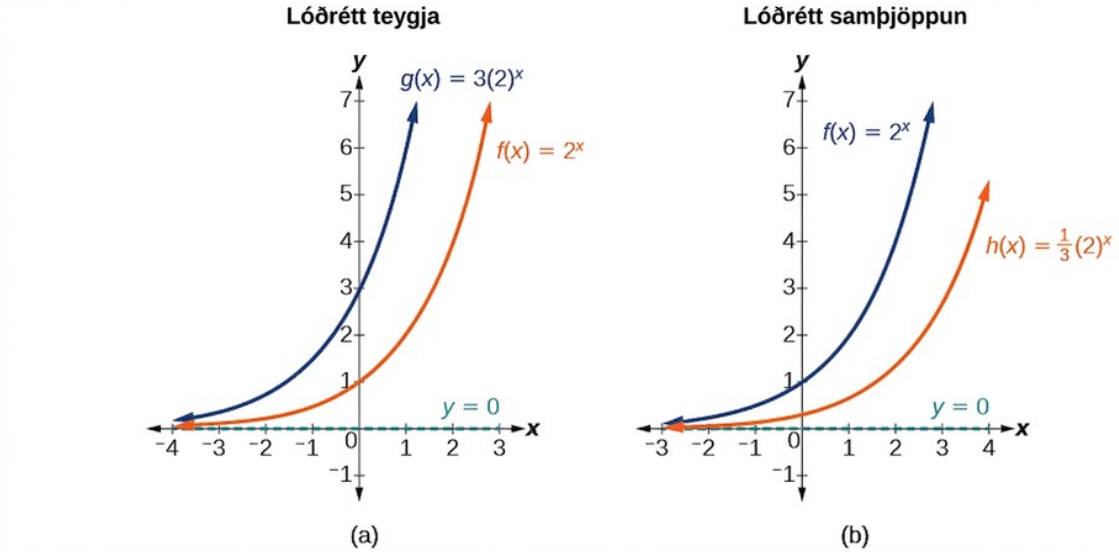
REYNIÐ SJÁLF #3

Leysið jöfnuna $4=7{,}85(1{,}15)^x-2{,}27$ með því að teikna gröf. Námundið lausnina að þremur aukastöfum.

Teygja eða samþjöppun teiknuð

Láréttar og lóðréttar hliðranir fela í sér að fasta er bætt við inntakið eða við fallið sjálft, en teygja eða samþjöppun verður þegar við margföldum grunnfallið $f(x)=b^x$ með fasta $|a|>0$. Ef við teiknum til dæmis fyrst graf grunnfallsins $f(x)=2^x$, getum við teiknað teygjuna með

$a=3$, til að fá $g(x)=3(2)^x$ eins og sýnt er vinstra megin á mynd 8, og samþjöppunina með $a=\frac{1}{3}$, til að fá $h(x)=\frac{1}{3}(2)^x$ eins og sýnt er hægra megin á mynd 8.



Mynd 8 (a) $g(x)=3(2)^x$ teygir graf $f(x)=2^x$ lóðrétt með stuðlinum 3. (b) $h(x)=\frac{1}{3}(2)^x$ þjappar grafi $f(x)=2^x$ saman lóðrétt með stuðlinum $\frac{1}{3}$.

TEYGJA OG SAMÞJÖPPUN GRAFS GRUNNFALLSINS $f(x)=b^x$

Fyrir sérhvern stuðul $a>0$, er fallið $f(x)=a(b)^x$

- teygt lóðrétt með stuðlinum a ef $|a|>1$.
- þjappað saman lóðrétt með stuðlinum a ef $|a|<1$.
- Grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,a)$.
- Láfellan $y=0$, myndmengið $(0,\infty)$, og skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$, eru óbreytt frá grunnfallinu.

SÝNIDÆMI 4

Teygja grafs vísisfalls teiknuð

Skissið graf $f(x)=4\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

Lausn

Áður en við teiknum grafið skulum við skoða hegðun fallsins og velja nokkra punkta á grafinu.

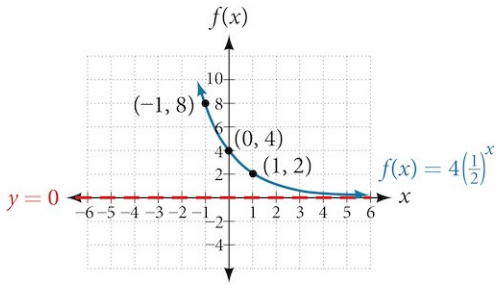
- Þar sem $b=\frac{1}{2}$ er á milli núlls og eins vex vinstri hali grafsins án takmarka þegar x minnkar og hægri halinn nálgast x-ásinn þegar x vex.
- Þar sem $a=4$, verður graf $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ teygt með stuðlinum 4.
- Gerið gildatöflu eins og sýnt er í töflu 4.

Tafla 4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=4\left(\frac{1}{2}\right)^x$	32	16	8	4	2	1	0,5

- Merkið skurðpunktinn við y-ásinn, $(0,4)$, og tvo aðra punkta. Til dæmis má nota punktana $(-1,8)$ og $(1,2)$.

Teiknið sléttan feril í gegnum punktana eins og sýnt er á mynd 9.



Mynd 9

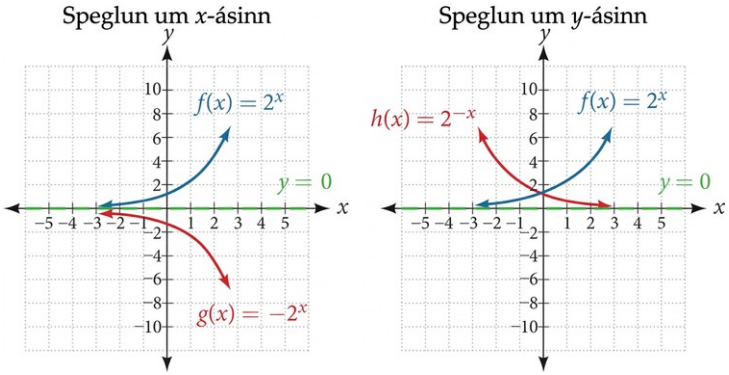
Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$; og myndmengið er $(0,\infty)$;. Grafið hefur láfelluna $y=0$.

REYNIÐ SJÁLF #4

Skissið graf fallsins $f(x)=\frac{1}{2}(4)^x$. Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins og láfellu grafsins.

Speglanir grafa

Auk þess að hliðra grafi, þjappa því saman og teygja það getum við einnig speglað það um x-ásinn eða y-ásinn. Þegar við margföldum grunnfallið $f(x)=b^x$ með -1, fæst speglun um x-ásinn. Þegar við margföldum inntakið með -1, fæst speglun um y-ásinn. Ef við teiknum til dæmis fyrst graf grunnfallsins $f(x)=2^x$, getum við teiknað speglanirnar tvær við hlið þess. Speglunin um x-ásinn, $g(x)=-2^x$, er sýnd vinstra megin á mynd 10 og speglunin um y-ásinn $h(x)=2^{-x}$, er sýnd hægra megin á mynd 10.



Mynd 10 (a) $g(x)=-2^x$ speglar graf $f(x)=2^x$ um x-ásinn. (b) $g(x)=2^{-x}$ speglar graf $f(x)=2^x$ um y-ásinn.

4

SPEGLANIR GRAFS GRUNNFALLSINS $f(x)=b^x$

Fallið $f(x)=-b^x$ hefur eftirfarandi eiginleika:

- Graf g er speglun grafs grunnfallsins $f(x)=b^x$ um x-ásinn.
- Grafið sker y-ásinn í punktinum $(0,-1)$.
- Myndmengið er $(-\infty,0)$.
- Láfellan $y=0$ og skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$, eru óbreytt frá grunnfallinu.

Fallið $f(x)=b^{-x}$ hefur eftirfarandi eiginleika:

- Graf g er speglun grafs grunnfallsins $f(x)=b^x$ um x-ásinn.
- Skurðpunkturinn við y-ásinn, $(0,1)$, láfellan $y=0$, myndmengið $(0,\infty)$, og skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$, eru óbreytt frá grunnfallinu.

SÝNIDÆMI 5

Jafna fyrir speglun vísisfalls fundin og grafið teiknað

Finnið jöfnu falls, $g(x)$, sem speglar $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ um x-ásinn, og teiknið graf þess. Tilgreinið skilgreiningarmengi þess, myndmengi og aðfellu.

Lausn

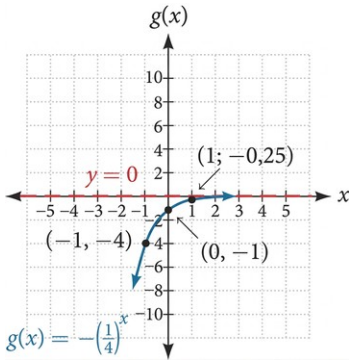
Þar sem við viljum spegla grunnfallið $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ um x-ásinn margföldum við $f(x)$ með -1 og fáum $g(x)=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$. Næst gerum við töflu yfir punkta eins og í töflu 5.

Tafla 5

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)=-\left(\frac{1}{4}\right)^x$	-64	-16	-4	-1	$-0,25$	$-0,0625$	$-0,0156$

Merkið skurðpunktinn við y-ásinn, $(0,-1)$, og tvo aðra punkta. Til dæmis má nota punktana $(-1,-4)$ og $(1;-0,25)$.

Teiknið sléttan feril í gegnum punktana:



Mynd 11

Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$; og myndmengið er $(-\infty,0)$;. Láfellan er $y=0$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Finnið jöfnu falls, $g(x)$, sem speglar $f(x)=1,25^x$ um y-ásinn, og teiknið graf þess. Tilgreinið skilgreiningarmengi þess, myndmengi og aðfellu.

Samantekt á ummyndunum vísisfallsins

Tafla 6 tekur saman þær ummyndanir grafa vísisfalla sem við höfum skoðað. Út frá þeim fæst almenn jafna sem lýsir öllum ummyndununum í einu.

Tafla 6

Ummyndanir grafs grunnfallsins $f(x)=b^x$	
Ummyndun	**Formúla**
Hliðrun • Lárétt um c einingar til vinstri • Lóðrétt um d einingar upp	$f(x)=b^{x+c}+d$
Teygja og samþjöppun • Teygja ef $\|a\|>1$ • Samþjöppun ef $0<\|a\|<1$	$f(x)=a\,b^x$
Speglun um x-ásinnx-ásinn	$f(x)=-b^x$
Speglun um y-ásinny-ásinn	$f(x)=b^{-x}=\left(\frac{1}{b}\right)^x$
Hliðranir, lóðrétt teygja eða samþjöppun og möguleg speglun um x-ásinn	$f(x)=a\,b^{x+c}+d$

4

UMMYNDANIR VÍSISFALLA

Með hliðrunum, lóðréttri teygju eða samþjöppun og mögulegri speglun um x-ásinn fæst fall á forminu

$$f(x)=a\,b^{x+c}+d \qquad 4.1$$

Hér er grafi grunnfallsins $y=b^x$, þar sem $b>1$, ummyndað á þennan hátt:

- hliðrað lárétt um c einingar til vinstri.
- teygt lóðrétt með stuðlinum $|a|$ ef $|a|>0$.
- þjappað saman lóðrétt með stuðlinum $|a|$ ef $0<|a|<1$.
- hliðrað lóðrétt um d einingar.
- speglað um x-ásinn ef $a<0$., áður en lóðrétta hliðrunin er framkvæmd.

Röð ummyndana skiptir máli. Fyrst má hliðra grafinu lárétt, síðan margfalda y-hnitin með a (sem felur einnig í sér speglun ef a < 0) og loks hliðra því lóðrétt um d. Hér er gert ráð fyrir að a ≠ 0.

SÝNIDÆMI 6

Fall skrifað út frá lýsingu

Skrifið jöfnu fallsins sem lýst er hér á eftir. Tilgreinið láfelluna, skilgreiningarmengið og myndmengið.

- Graf fallsins $f(x)=e^x$ er teygt lóðrétt með stuðlinum 2, speglað um y-ásinn og síðan hliðrað 4 einingar upp.

Lausn

Við viljum finna jöfnu á almenna forminu $f(x)=a\,b^{x+c}+d$. Við notum lýsinguna til að finna a, b, c, og d.

- Grunnfallið er gefið, $f(x)=e^x$, svo $b=e$.
- Fallið er teygt með stuðlinum 2, svo $a=2$.
- Fallið er speglað um y-ásinn. Við skiptum x út fyrir $-x$ og fáum: e^{-x}.
- Grafinu er hliðrað lóðrétt um 4 einingar, svo $d=4$.

Þegar ummyndanirnar eru teknar saman fæst þessi jafna:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2e^{-x+0}+4 \\ &= 2e^{-x}+4 \end{aligned}$$

Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$; og myndmengið er $(4,\infty)$;. Láfellan er $y=4$.

REYNIÐ SJÁLF #6

Skrifið jöfnu fallsins sem lýst er hér á eftir. Tilgreinið láfelluna, skilgreiningarmengið og myndmengið.

- Graf fallsins $f(x)=e^x$ er þjappað lóðrétt með stuðlinum $\frac{1}{3}$, speglað um x-ásinn og síðan hliðrað 2 einingar niður.

MIÐLAR

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í að teikna gröf vísisfalla.

- Gröf vísisfalla teiknuð

4.2 Dæmi úr kaflanum

Orðleg dæmi

1. Hvernig má nota láfellu vísisfalls til að lýsa endhegðun grafsins?

2. Hvers vegna er gagnlegt að geta greint ummyndanir á grafi grunnfalls með algebru?

Algebrudæmi

3. Graf fallsins $f(x)=3^x$ er speglað um y-ásinn og teygt lóðrétt með stuðlinum 4. Finnið jöfnu nýja fallsins $g(x)$? og tilgreinið skurðpunkt grafs þess við y-ásinn, skilgreiningarmengi og myndmengi.

4. Graf fallsins $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ er speglað um y-ásinn og þjappað lóðrétt með stuðlinum $\frac{1}{5}$. Finnið jöfnu nýja fallsins $g(x)$? og tilgreinið skurðpunkt grafs þess við y-ásinn, skilgreiningarmengi og myndmengi.

5. Graf fallsins $f(x)=10^x$ er speglað um x-ásinn og síðan hliðrað 7 einingar upp. Finnið jöfnu nýja fallsins $g(x)$? og tilgreinið skurðpunkt grafs þess við y-ásinn, skilgreiningarmengi og myndmengi.

6. Graf fallsins $f(x)=(1{,}68)^x$ er hliðrað 3 einingar til hægri, teygt lóðrétt með stuðlinum 2, speglað um x-ásinn og síðan hliðrað 3 einingar niður. Finnið jöfnu nýja fallsins $g(x)$? og tilgreinið skurðpunkt grafs þess við y-ásinn, skilgreiningarmengi og myndmengi. Námundið y-hnit skurðpunktsins að þremur aukastöfum.

7. Grafi $f(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}+4$ er hliðrað niður um 4 einingar og síðan til vinstri um 2 einingar, það teygt lóðrétt með stuðlinum 4, og speglað um x-ásinn. Hver er jafna nýja fallsins, $g(x)$? Tilgreinið skurðpunkt þess við y-ás, skilgreiningarmengi og myndmengi.

Myndræn dæmi

Í eftirfarandi dæmum skal teikna graf fallsins og spegilmynd þess um y-ásinn í sama hnitakerfi og tilgreina skurðpunkt grafanna við y-ásinn.

8.

$$f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

9.

$$g(x)=-2\,(0{,}25)^x$$

10.

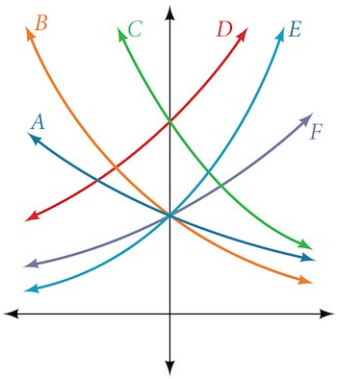
$$h(x)=6\,(1{,}75)^{-x}$$

Í eftirfarandi dæmum skal teikna gröf gefnu fallanna í sama hnitakerfi.

11. $f(x)=3\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x)=3(2)^x$, og $h(x)=3(4)^x$

12. $f(x)=\frac{1}{4}(3)^x$, $g(x)=2(3)^x$, og $h(x)=4(3)^x$

Í eftirfarandi dæmum skal para hvert fall við eitt grafanna á mynd 12.



Mynd 12 Sex gröf merkt A–F fyrir pörunardæmin.

13.

$$f(x)=2\,(0{,}69)^x$$

14.

$$f(x)=2\,(1{,}28)^x$$

15.

$$f(x)=2\,(0{,}81)^x$$

16.

$$f(x)=4\,(1{,}28)^x$$

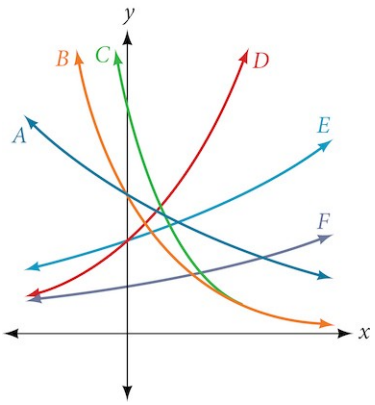
17.

$$f(x)=2\,(1{,}59)^x$$

18.

$$f(x)=4\,(0{,}69)^x$$

Notið gröfin á mynd 13 í eftirfarandi verkefnum. Föllin eru öll á forminu $f(x)=a\,b^x$.



Mynd 13 Gröf merkt A–F fyrir eftirfarandi dæmi um vísisföll.

4

19. Á hvaða grafi hefur grunntalan b ? stærsta gildið?

20. Á hvaða grafi hefur grunntalan b ? minnsta gildið?

21. Á hvaða grafi hefur stuðullinn a ? stærsta gildið?

22. Á hvaða grafi hefur stuðullinn a ? minnsta gildið?

Í eftirfarandi dæmum skal teikna graf fallsins og spegilmynd þess um x-ásinn í sama hnitakerfi.

23.

$$f(x)=\frac{1}{2}(4)^x$$

24.

$$f\ (x)=3\ (0{,}75)^x-1$$

25.

$$f(x)=-4(2)^x+2$$

Í eftirfarandi dæmum skal teikna grafið sem fæst með tilgreindri ummyndun á grafi fallsins $f(x)=2^x$. Tilgreinið láfelluna, skilgreiningarmengið og myndmengið.

26.

$$f(x)=2^{-x}$$

27.

$$h(x)=2^x+3$$

28.

$$f(x)=2^{x-2}$$

Í eftirfarandi dæmum skal lýsa endhegðun grafa fallanna.

29.

$$f(x)=-5(4)^x-1$$

30.

$$f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$$

31.

$$f(x)=3(4)^{-x}+2$$

Í eftirfarandi dæmum skal byrja á grafi fallsins $f(x)=4^x$. og finna jöfnu fallsins sem fæst með tilgreindri ummyndun.

32. Hliðrið grafi fallsins $f(x)$ um 4 einingar upp.

33. Hliðrið grafi fallsins $f(x)$ um 3 einingar niður.

34. Hliðrið grafi fallsins $f(x)$ um 2 einingar til vinstri.

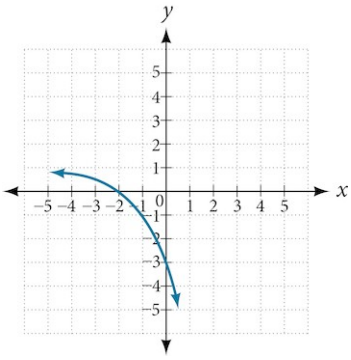
35. Hliðrið grafi fallsins $f(x)$ um 5 einingar til hægri.

36. Speglið $f(x)$ um x-ásinn

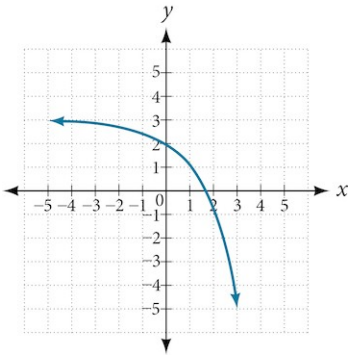
37. Speglið $f(x)$ um y-ásinn

Í eftirfarandi dæmum hefur graf fallsins $y=2^x$. verið ummyndað. Finnið jöfnu fallsins sem hvert graf sýnir.

38.

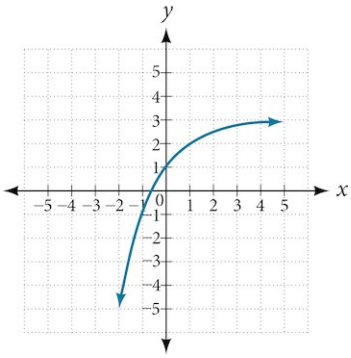


39.



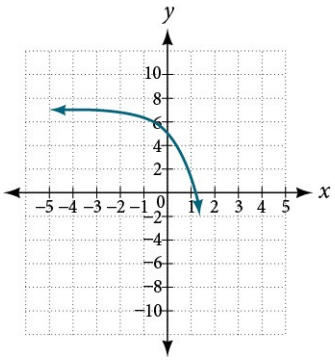
4

40.

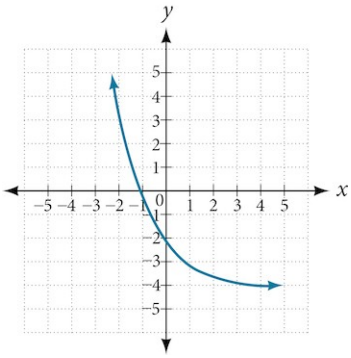


Í eftirfarandi dæmum skal finna jöfnu vísisfallsins sem grafið sýnir.

41.



42.



Töluleg dæmi

Í eftirfarandi dæmum skal reikna fallgildið fyrir tilgreint gildi á x.

43. $g(x)=\frac{1}{3}(7)^{x-2}$ fyrir $g(6)$.

44. $f(x)=4(2)^{x-1}-2$ fyrir $f(5)$.

45. $h(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+6$ fyrir $h(-7)$.

Tækninotkun

Í eftirfarandi dæmum skal nota grafreikni til að finna nálgun á lausn hverrar jöfnu. Námundið að þremur aukastöfum.

46.

$$-50=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

47.

$$116=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$$

48.

$$12=2(3)^{x}+1$$

49.

$$5=3\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-2$$

50.

$$-30=-4(2)^{x+2}+2$$

Viðbótardæmi

51. Rannsakið og ræðið gröf $F(x)=(b)^x$ og $G(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^x$. Setjið síðan fram tilgátu um samband grafa fallanna b^x og $\left(\frac{1}{b}\right)^x$ fyrir sérhverja rauntölu $b>0$.

52. Sannið tilgátuna úr dæminu á undan.

53. Rannsakið og ræðið gröf $f(x)=4^x$, $g(x)=4^{x-2}$, og $h(x)=\left(\frac{1}{16}\right)4^x$. Setjið síðan fram tilgátu um samband grafa fallanna b^x og $\left(\frac{1}{b^n}\right)b^x$ fyrir sérhverja rauntölu n og rauntölu $b>0$.

54. Sannið tilgátuna úr dæminu á undan.

4

4.3 Lograföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum kafla lærið þið að:

- Breyta lograformi í vísisform.
- Breyta vísisformi í lograform.
- Reikna logra.
- Nota tugalogra.
- Nota náttúrulega logra.



Mynd 1 Eyðilegging eftir jarðskjálftann við Honshu í Japan 11. mars 2011. (Ljósmynd: Daniel Pierce)

Árið 2010 reið öflugur jarðskjálfti yfir Haítí. Samkvæmt heimildum frumútgáfunnar eyðilögðust eða skemmdust meira en 285.000 íbúðarhús 4. Ári síðar ollu jarðskjálfti og flóðbylgja mikilli eyðileggingu á Honshu í Japan. Í sömu heimildum er greint frá skemmdum á meira en 332.000 byggingum 5, meðal annars þeim sem sjást á mynd 1. Í frumtextanum er

miðað við stærðina 7,0 fyrir skjálftann á Haítí 6 og eldra stærðarmatið 9,0 fyrir skjálftann í Japan 7. Þetta eru stærðargildi á lograkvarða. Munurinn er tvær einingar og 10^2 = 100. Sú tala lýsir hlutfalli sveifluvídda í logralíkani við sambærilegar mæliaðstæður. Hún segir ekki að orkan eða tjónið hafi verið hundraðfalt. Til að meta stærð stórra jarðskjálfta er notaður kvarði sem byggist á vægi skjálftans, ekki upprunalegi Richterkvarðinn. Til að skilja slíka kvarða þurfum við að kynnast logrum.

4 http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqinthenews/2010/us2010rja6/#summary. Skoðað 3/4/2013.

5 http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqinthenews/2011/usc0001xgp/#summary. Skoðað 3/4/2013.

6 http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqinthenews/2010/us2010rja6/. Skoðað 3/4/2013.

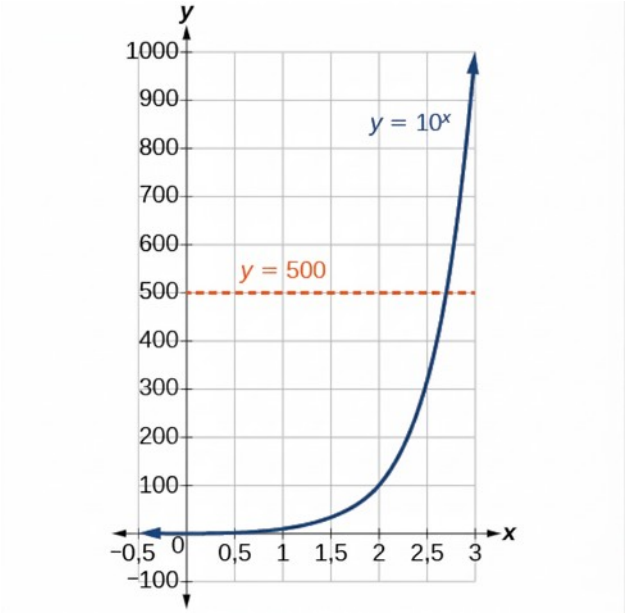
7 http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eqinthenews/2011/usc0001xgp/#details. Skoðað 3/4/2013.

Richterkvarðinn er lograkvarði með grunntöluna tíu. Jarðskjálfti af stærðinni 8 er með öðrum orðum ekki tvöfalt stærri en jarðskjálfti af stærðinni 4. Hann er $10^{8-4}=10^4=10,000$ sinnum stærri! Í þessum hluta skoðum við eðli Richterkvarðans og fallið með grunntöluna tíu sem hann byggist á.

Lograformi breytt í vísisform

Til að greina stærð jarðskjálfta eða bera saman stærð tveggja ólíkra jarðskjálfta þurfum við að geta breytt á milli lograforms og vísisforms. Gerum til dæmis ráð fyrir að orkan sem losnaði í einum jarðskjálfta hafi verið 500 sinnum meiri en orkan sem losnaði í öðrum. Við viljum reikna muninn á stærðunum. Jafnan sem lýsir þessu verkefni er $10^x=500$, þar sem x táknar muninn á stærðargildunum á Richterkvarða. Hvernig leysum við fyrir x?

Við höfum ekki enn kynnst aðferð til að leysa vísisjöfnur. Ekkert af þeim algebruverkfærum sem rædd hafa verið hingað til dugar til að leysa $10^x=500$. Við vitum að $10^2=100$ og $10^3=1.000$, svo ljóst er að x hlýtur að vera eitthvert gildi á milli 2 og 3, þar sem $y=10^x$ er vaxandi. Við getum skoðað graf, eins og á mynd 2, til að meta lausnina betur.



Mynd 2 Graf vísisfallsins y = 10ˣ og lárétta línan y = 500.

Mat út frá grafi er þó ónákvæmt. Til að finna algebrulega lausn þurfum við að kynna nýtt fall. Takið eftir að grafið á mynd 2 stenst lárétta línuprófið. Vísisfallið $y=b^x$ er eintækt, svo andhverfa þess, $x=b^y$ er líka fall. Eins og fyrir öll andhverf föll víxlum við einfaldlega x og y og leysum fyrir y til að finna andhverfuna. Til að tákna y sem fall af x, notum við lografall á forminu $y=\log_b(x)$. Logri tölu með grunntöluna b er veldisvísirinn sem hefja þarf b í til að fá töluna.

Lograstæðu lesum við sem „logrinn með grunntöluna b af x er jafn y," eða styttra „log b af x er y." Við getum líka sagt „b í veldinu y er x," því lograr eru veldisvísar. Til dæmis er logri 32 með grunntöluna 2 jafn 5, því 5 er veldisvísirinn sem hefja þarf 2 í til að fá 32. Þar sem $2^5=32$, getum við ritað $\log_2 32=5$. Þetta lesum við „log 2 af 32 er 5".

Tengslin milli lograforms og samsvarandi vísisforms eru þessi:

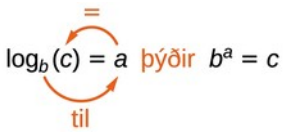
$$\log_b(x)=y \Leftrightarrow b^y=x, b>0, b\neq 1$$

Athugið að grunntalan b er alltaf jákvæð.



Þar sem logri er fall er réttast að rita hann sem $\log_b(x)$, með svigum utan um inntakið, rétt eins og við myndum gera með $f(x)$. Þegar inntakið er ein breyta eða tala er þó algengt að svigunum sé sleppt og stæðan rituð án sviga, sem $\log_b x$. Athugið að á mörgum reiknivélum þarf sviga utan um x.

Riháttt logra má sýna svona:



Þegar við berum saman lografallið $y=\log_b(x)$ og vísisfallið $y=b^x$ sjáum við að hlutverk inntaks og úttaks hafa víxlast. Föllin eru andhverfur hvort annars.

SKILGREINING LOGRAFALLS

Logri með grunntöluna b af jákvæðri tölu x uppfyllir eftirfarandi skilgreiningu.

Ef $x>0, b>0, b\neq 1$, þá gildir:

$$y=\log_b(x) \text{ jafngildir } b^y=x$$

þar sem

- við lesum $\log_b(x)$ sem „logri með grunntöluna b af x“ eða „log b af x.
- Logrinn y er veldisvísirinn sem hefja þarf b í til að fá x.

Þar sem lografallið og vísisfallið víxla x- og y-gildunum víxlast einnig skilgreiningarmengi og myndmengi vísisfallsins hjá lografallinu. Því er

- skilgreiningarmengi lografallsins með grunntöluna b er $(0,\infty)$.
- myndmengi lografallsins með grunntöluna b er $(-\infty,\infty)$.

SPURT OG SVARAÐ

Er hægt að taka logra af neikvæðri tölu?

Ekki ef við reiknum með rauntölum. Grunntalan b er jákvæð og b í hvaða raunveldi sem er er því alltaf jákvætt. Logri neikvæðrar tölu er þess vegna ekki skilgreindur sem rauntala. Logri núlls er heldur ekki skilgreindur. Sumir reiknar geta þó gefið tvinntölugildi fyrir logra neikvæðra talna þegar þeir eru stilltir á tvinntölureikning.

AÐFERÐ

Breytið jöfnu á lograformi í vísisform. Gefin er jafnan $\log_b(x)=y$,.

1. Skoðið jöfnuna $y=\log_b(x)$ og finnið b, y, og x.
2. Skrifið jöfnuna $\log_b(x)=y$ á forminu $b^y=x$.

SÝNIDÆMI 1

Lograformi breytt í vísisform

Skrifið eftirfarandi lograjöfnur á vísisformi.

1. ⓐ $\log_6(\sqrt{6})=\frac{1}{2}$
2. ⓑ $\log_3(9)=2$

Lausn

Finnið fyrst gildin á b, y, og x. Ritið síðan jöfnuna á forminu $b^y=x$.

- ⓐ $\log_6(\sqrt{6})=\frac{1}{2}$

  Hér er $b=6$, $y=\frac{1}{2}$, og $x=\sqrt{6}$. Jafnan $\log_6(\sqrt{6})=\frac{1}{2}$ jafngildir því $6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$.
- ⓑ $\log_3(9)=2$

  Hér er $b=3$, $y=2$, og $x=9$. Jafnan $\log_3(9)=2$ jafngildir því $3^2=9$.

4

REYNIÐ SJÁLF #1

Skrifið eftirfarandi lograjöfnur á vísisformi.

1. ⓐ$\log_{10}(1,000,000)=6$
2. ⓑ$\log_5(25)=2$

Vísisformi breytt í lograform

Til að breyta úr veldum í logra förum við sömu skref í öfugri röð. Við finnum grunntöluna b, veldisvísinn x, og úttakið y. Síðan ritum við $x=\log_b(y)$.

SÝNIDÆMI 2

Vísisformi breytt í lograform

Skrifið eftirfarandi vísisjöfnur á logaformi.

a. $2^3=8$

b. $5^2=25$

c. $10^{-4}=\frac{1}{10,000}$

Lausn

Finnið fyrst gildin á b, y, og x. Ritið síðan jöfnuna á forminu $x=\log_b(y)$.

a. $2^3=8$

Hér er $b=2$, $x=3$, og $y=8$. Jafnan $2^3=8$ jafngildir því $\log_2(8)=3$.

b. $5^2=25$

Hér er $b=5$, $x=2$, og $y=25$. Jafnan $5^2=25$ jafngildir því $\log_5(25)=2$.

c. $10^{-4}=\frac{1}{10,000}$

Hér er $b=10$, $x=-4$, og $y=\frac{1}{10,000}$. Jafnan $10^{-4}=\frac{1}{10,000}$ jafngildir því $\log_{10}\left(\frac{1}{10,000}\right)=-4$.

REYNIÐ SJÁLF #2

Skrifið eftirfarandi vísisjöfnur á lograformi.

a. ⓐ $3^2=9$

b. ⓑ $5^3=125$

c. ⓒ $2^{-1}=\frac{1}{2}$

Gildi logra reiknuð

Ef við þekkjum annað og þriðja veldi talna og rætur þeirra getum við reiknað marga logra í huganum. Skoðum til dæmis $\log_2 8$. Við spyrjum: „Í hvaða veldi þarf að hefja 2 til að fá 8?“ Þar sem $2^3=8$, er $\log_2 8=3$.

Reiknum nú $\log_7 49$ og $\log_3 27$ í huganum.

- Við spyrjum: „Í hvaða veldi þarf að hefja 7 til að fá 49?“ Þar sem $7^2=49$. er $\log_7 49=2$.
- Við spyrjum: „Í hvaða veldi þarf að hefja 3 til að fá 27?“ Þar sem $3^3=27$. er $\log_3 27=3$.

Jafnvel suma logra sem virðast flóknari má reikna án reiknis. Reiknum til dæmis $\log_{\frac{2}{3}}\frac{4}{9}$ í huganum.

- Við spyrjum: „Í hvaða veldi þarf að hefja $\frac{2}{3}$ til að fá $\frac{4}{9}$?“ Við vitum að $2^2=4$ og $3^2=9$,. Því er $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. og þar með $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right)=2$.

AÐFERÐ

Reiknið $y=\log_b(x)$, í huganum.

1. Skrifið x sem veldi með grunntöluna b:, þannig að $b^y=x$.
2. Notið þekkingu ykkar á veldum með grunntöluna b til að finna y. Spyrjið: „Í hvaða veldi þarf að hefja b til að fá x?“

SÝNIDÆMI 3

Lograr reiknaðir í huganum

Finnið $y=\log_4(64)$ án þess að nota reikni.

Lausn

Fyrst skrifum við jöfnuna á vísisformi: $4^y=64$. Síðan spyrjum við: „Í hvaða veldi þarf að hefja 4 til að fá 64?“

Við vitum að

$$4^3=64$$

Því er

$$\log(64)=3$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Finnið $y=\log_{121}(11)$ án þess að nota reikni.

SÝNIDÆMI 4

Logri margföldunarandhverfu reiknaður

Finnið $y=\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ án þess að nota reikni.

Lausn

Fyrst skrifum við jöfnuna á vísisformi: $3^y=\frac{1}{27}$. Síðan spyrjum við: „Í hvaða veldi þarf að hefja 3 til að fá $\frac{1}{27}$?“

Við vitum að $3^3=27$, en hvað þurfum við að gera til að fá margföldunarandhverfuna, $\frac{1}{27}$?

Munið úr umfjöllun um veldisvísa að $b^{-a}=\frac{1}{b^a}$. Þessar upplýsingar notum við til að rita

$$\begin{aligned}3^{-3} &= \tfrac{1}{3^3}\\ &= \tfrac{1}{27}\end{aligned}$$

Því er $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)=-3$.

REYNIÐ SJÁLF #4

Finnið $y=\log_2\left(\frac{1}{32}\right)$ án þess að nota reikni.

Tugalograr notaðir

Stundum er logri ritaður án grunntölu. Þegar logri er ritaður þannig þarf að skoða stæðuna áður en reiknað er. Ef til vill skiptir grunntalan ekki máli. Í tölvunarfræði merkir slíkur ritháttur oft $\log_2(x)$. Í stærðfræði merkir hann hins vegar nær alltaf tugalogra, með grunntöluna 10. Með öðrum orðum merkir stæðan $\log(x)$ oft $\log_{10}(x)$.

SKILGREINING TUGALOGRA

Tugalogri er logri með grunntöluna 10. Í stað $\log_{10}(x)$ skrifum við einnig $\log(x)$. Tugalogri jákvæðrar tölu x er skilgreindur á eftirfarandi hátt.

Ef $x>0$, þá gildir:

$$y=\log(x) \text{ jafngildir } 10^y=x$$

Við lesum $\log(x)$ sem „logri með grunntöluna 10 af x“ eða „tugalogri x.“

Tugalogrinn y er veldisvísirinn sem hefja þarf 10 í til að fá x.

Nú notum við $\log_b(x)$, $lg(x)$ um tugalogra, $lb(x)$ um tvíundarlogra og $\ln(x)$ um náttúrulegan logra. Að rita $lg(x)$ án þess að tilgreina grunntölu þykir nú slæmur ritháttur, þótt hann komi oft fyrir í eldra efni.

AÐFERÐ

Reiknið $y=\log(x)$, í huganum.

1. Skrifið x sem veldi með grunntöluna 10:, þannig að $10^y=x$.
2. Notið þekkingu ykkar á veldum með grunntöluna 10 til að finna y. Spyrjið: „Í hvaða veldi þarf að hefja 10 til að fá x?“

SÝNIDÆMI 5

Gildi tugalogra fundið í huganum

Reiknið $y=\log(1000)$ án reiknivélar.

Lausn

Fyrst ritum við logrann á vísisformi: $10^y=1000$. Síðan spyrjum við: „Í hvaða veldi þarf að hefja 10 til að fá 1.000?“ Við vitum að

$$10^3 = 1.000$$

Því er $\log(1000) = 3$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Finnið $y = \log(1,000,000)$.

AÐFERÐ

Reiknið $y = \log(x)$, með reikni. Skrefin miðast við reikni með tökkunum [LOG] og [ENTER].

1. Ýtið á [LOG].
2. Sláið inn gildið á x, og lokið sviganum með [)].
3. Ýtið á [ENTER].

SÝNIDÆMI 6

Gildi tugalogra fundið með reikni

Reiknið $y = \log(321)$ með reikni og námundið svarið að fjórum aukastöfum.

Lausn

- Ýtið á [LOG].
- Sláið inn 321 og lokið sviganum með [)].
- Ýtið á [ENTER].

Námundað að fjórum aukastöfum er $\log(321) \approx 2,5065$.

Greining

Athugið að $10^2 = 100$ og að $10^3 = 1.000$. Þar sem 321 er á milli 100 og 1.000 vitum við að $\log(321)$ hlýtur að vera á milli $\log(100)$ og $\log(1000)$. Það gefur eftirfarandi:

$$\begin{array}{ccccc} 100 & < & 321 & < & 1.000 \\ 2 & < & 2,5065 & < & 3 \end{array}$$

REYNIÐ SJÁLF #6

Reiknið $y = \log(123)$ með reikni og námundið svarið að fjórum aukastöfum.

SÝNIDÆMI 7

Raunhæft vísislíkan umritað og leyst

Mæld sveifluvídd bylgna frá einum jarðskjálfta var 500 sinnum sveifluvídd bylgna frá öðrum, eftir leiðréttingu fyrir fjarlægð frá upptökum. Í logralíkani Richterkvarðans lýsir jafnan

$10^x = 500$ þessum samanburði, þar sem x er munurinn á stærðargildunum. Hér er borið saman útslag bylgna, ekki orka sem losnar. Finnið muninn á stærðargildunum og námundið að þremur aukastöfum.

Lausn

Við byrjum á að skrifa vísisjöfnuna á lograformi.

$$\begin{aligned} 10^x &= 500 \\ \log(500) &= x \quad \text{Notið skilgreiningu tugalogra.} \end{aligned}$$

Næst reiknum við logrann með reikni:

- Ýtið á [LOG].
- Sláið inn 500, og lokið sviganum með [)].
- Ýtið á [ENTER].
- Námundað að þremur aukastöfum er $\log(500) \approx 2{,}699$.

Munurinn á stærðargildunum var því um $2{,}699$.

REYNIÐ SJÁLF #7

Orkan sem losnaði í einum jarðskjálfta var 8.500 sinnum meiri en orkan sem losnaði í öðrum. Jafnan $10^x = 8500$ lýsir þessum aðstæðum, þar sem x er munurinn á stærðargildunum á Richterkvarða. Hver var munurinn á stærðargildunum, námundaður að næsta þúsundasta hluta?

Náttúrulegir lograr notaðir

Algengasta grunntala logra er e, en gildi hennar er um það bil 2,71828. Lograr með grunntöluna e eru mikilvægir í stærðfræðigreiningu og sumum vísindalegum viðfangsefnum; þeir kallast náttúrulegir lograr. Logrinn með grunntöluna e, $\log_e(x)$, hefur sinn eigin rithátt, $\ln(x)$.

Flest gildi $\ln(x)$ er aðeins hægt að finna með reiknivél. Helsta undantekningin er sú að þar sem logri af 1 er alltaf 0, sama hver grunntalan er, er $\ln 1 = 0$. Fyrir aðra náttúrulega logra má nota ln-hnappinn sem er á flestum vísindareiknivélum. Einnig má finna náttúrulegan logra hvaða veldis sem er af e með andhverfueiginleika logra.

SKILGREINING NÁTTÚRULEGS LOGRA

Náttúrulegur logri er logri með grunntöluna e. Í stað $\log_e(x)$ skrifum við $\ln(x)$. Náttúrulegur logri jákvæðrar tölu x er skilgreindur á eftirfarandi hátt.

Ef $x > 0$, þá gildir:

$$y = \ln(x) \text{ jafngildir } e^y = x$$

Við lesum $\ln(x)$ sem „logri með grunntöluna e af x“ eða „náttúrulegur logri x.“

Logrinn y er veldisvísirinn sem hefja þarf e í til að fá x.

Þar sem föllin $y=e^x$ og $y=\ln(x)$ eru andhverf föll gildir $\ln(e^x)=x$ fyrir öll x og $e^{\ln(x)}=x$ fyrir $x>0$.

AÐFERÐ

Reiknið $y=\ln(x)$, með reikni. Skrefin miðast við reikni með tökkunum [LN] og [ENTER].

4

1. Ýtið á [LN].
2. Sláið inn gildið á x, og lokið sviganum með [)].
3. Ýtið á [ENTER].

SÝNIDÆMI 8

Náttúrulegur logri reiknaður með reikni

Reiknið $y=\ln(500)$ með reikni og námundið svarið að fjórum aukastöfum.

Lausn

- Ýtið á [LN].
- Sláið inn 500, og lokið sviganum með [)].
- Ýtið á [ENTER].

Námundað að fjórum aukastöfum er $\ln(500)\approx 6{,}2146$.

REYNIÐ SJÁLF #8

Reiknið $\ln(-500)$.

MIÐLAR

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í lograreikningi.

- Inngangur að logrum

4.3 Dæmi úr kaflanum

Orðleg dæmi

1. Hvað er logri með grunntöluna b Útskýrið merkinguna með því að túlka hvern hluta jafngildu jafnanna $b^y=x$ og $\log_b x=y$ fyrir $b>0, b\neq 1$.
2. Hvernig tengist lografallið $f(x)=\log_b x$ vísisfallinu $g(x)=b^x$? Hvað fæst þegar föllin eru samsett?

3. Hvernig má nota veldareglur til að leysa lograjöfnuna $\log_b x = y$ fyrir x?

4. Útskýrið hvað tugalogri er. Hvernig tengist hann logra með grunntöluna b, og hvernig er ritháttur inn frábrugðinn?

5. Útskýrið hvað náttúrulegur logri er. Hvernig tengist hann logra með grunntöluna b, og hvernig er ritháttur inn frábrugðinn?

Algebrudæmi

Skrifið hverja jöfnu í eftirfarandi dæmum á vísisformi.

6.

$$\log_4(q) = m$$

7.

$$\log_a(b) = c$$

8.

$$\log_{16}(y) = x$$

9.

$$\log_x(64) = y$$

10.

$$\log_y(x) = -11$$

11.

$$\log_{15}(a) = b$$

12.

$$\log_y(137) = x$$

13.

$$\log_{13}(142) = a$$

14.

$$\log(v) = t$$

15.

$$\ln(w) = n$$

Skrifið hverja jöfnu í eftirfarandi dæmum á lograformi.

16.

$$4^x = y$$

17.

$$c^d = k$$

18.

$$m^{-7} = n$$

19.

$$19^x = y$$

20.

$$x^{-\frac{10}{13}} = y$$

21.

$$n^4 = 103$$

22.

$$\left(\frac{7}{5}\right)^m = n$$

23.

$$y^x = \frac{39}{100}$$

24.

$$10^a = b$$

25.

$$e^k = h$$

Leysið fyrir x í eftirfarandi dæmum með því að breyta lograjöfnunni í vísisform.

26.

$$\log_3(x) = 2$$

27.

$$\log_2(x) = -3$$

28.

$$\log_5(x) = 2$$

29.

$$\log_3(x) = 3$$

30.

$$\log_2(x)=6$$

31.

$$\log_9(x)=\frac{1}{2}$$

32.

$$\log_{18}(x)=2$$

33.

$$\log_6(x)=-3$$

34.

$$\log(x)=3$$

35.

$$\ln(x)=2$$

Notið skilgreiningar tugalogra og náttúrulegra logra til að einfalda stæðurnar í eftirfarandi dæmum.

36.

$$\log\left(100^8\right)$$

37.

$$10^{\log(32)}$$

38.

$$2\log(,0001)$$

39.

$$e^{\ln(1,06)}$$

40.

$$\ln\left(e^{-5,03}\right)$$

41.

$$e^{\ln(10,125)}+4$$

Töluleg dæmi

Reiknið í eftirfarandi verkefnum lograstæðuna með grunntöluna b án reiknivélar.

42.

$$\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$$

43.

$$\log_6\left(\sqrt{6}\right)$$

44.

$$\log_2\left(\frac{1}{8}\right)+4$$

4

45.

$$6\log_8(4)$$

Reiknið gildi eftirfarandi stæðna með tugalogrum án þess að nota reikni.

46.

$$\log(10,000)$$

47.

$$\log(0{,}001)$$

48.

$$\log(1)+7$$

49.

$$2\log\left(100^{-3}\right)$$

Reiknið gildi eftirfarandi stæðna með náttúrulegum logrum án þess að nota reikni.

50.

$$\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)$$

51.

$$\ln(1)$$

52.

$$\ln\left(e^{-0{,}225}\right)-3$$

53.

$$25\ln\left(e^{\frac{2}{5}}\right)$$

Tækninotkun

Reiknið gildi hverrar stæðu í eftirfarandi dæmum með reikni. Námundið að þremur aukastöfum.

54.

$$\log(0{,}04)$$

55.

$$\ln(15)$$

56.

$$\ln\left(\frac{4}{5}\right)$$

57.

$$\log(\sqrt{2})$$

58.

$$\ln(\sqrt{2})$$

Viðbótardæmi

59. Er $x=0$ í skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log(x)$? Ef svo er, hvert er gildi fallsins þegar $x=0$? Staðfestið niðurstöðuna.

60. Er $f(x)=0$ í myndmengi fallsins $f(x)=\log(x)$? Ef svo er, fyrir hvaða gildi x? Staðfestið niðurstöðuna.

61. Er til tala x þannig að $\ln x=2$? Ef svo er, hver er talan? Staðfestið niðurstöðuna.

62. Er jafnan $\dfrac{\log_3(27)}{\log_4\left(\frac{1}{64}\right)}=-1$? rétt? Staðfestið niðurstöðuna.

63. Er jafnan $\dfrac{\ln\left(e^{1{,}725}\right)}{\ln(1)}=1{,}725$? rétt? Staðfestið niðurstöðuna.

Raunhæf verkefni

64. Lýsingarstuðull EI myndavélar er mælikvarði á það ljósmagn sem fellur á myndflöguna. Hann er ákvarðaður með jöfnunni $EI=\log_2\left(\dfrac{f^2}{t}\right)$, þar sem f er ljósopsstilling („f-stop“) myndavélarinnar og t er lýsingartíminn í sekúndum. Gerum ráð fyrir að ljósopsstillingin sé 8 og æskilegur lýsingartími 2 sekúndur. Hver verður lýsingarstuðullinn?

65. Notið verkefnið á undan. Gerum ráð fyrir að ljósmælir myndavélar sýni EI upp á -2, og að æskilegur lýsingartími sé 16 sekúndur. Hver á ljósopsstillingin að vera?

66. Bera má saman styrk I tveggja jarðskjálfta sem mældir eru á jarðskjálftamæli með formúlunni $\log \frac{I_1}{I_2} = M_1 - M_2$ þar sem M er stærðin á Richterkvarða. Í ágúst 2009 reið jarðskjálfti af stærðinni 6,1 yfir Honshu í Japan. Í mars 2011 varð annar og enn skæðari jarðskjálfti á sama svæði, nú af stærðinni 9,0.[8] Hve mörgum sinnum meiri var styrkur jarðskjálftans árið 2011? Námundið að næstu heilu tölu.

8 http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/world/historical.php. Skoðað 3/4/2014.

4

4.4 Gröf lografalla

NÁMSMARKMIÐ

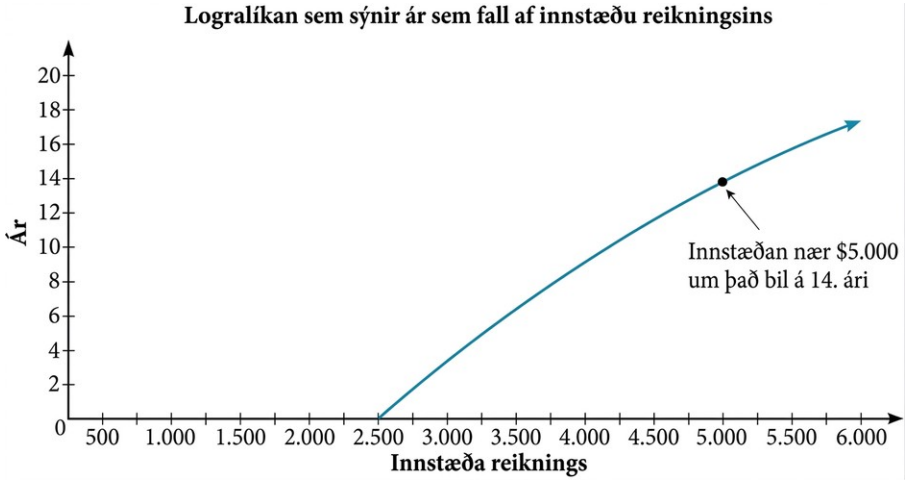
Í þessum kafla lærið þið að:

- Ákvarða skilgreiningarmengi lografalls.
- Teikna gröf lografalla.

Í kaflanum Gröf vísisfalla sáum við hvernig graf vísislíkans getur hjálpað okkur að skilja líkanið og spá fyrir um framvinduna. En hvernig nýtast gröf lografalla? Lografall er andhverfa vísisfalls. Úttak lografallsins er því inntak samsvarandi vísisfalls. Með logrum má þannig vinna til baka frá niðurstöðu líkansins að gildinu sem leiddi til hennar.

Til skýringar skulum við gera ráð fyrir að við leggjum $\$2500$ inn á reikning sem ber $5\,\%$, ársvexti með samfelldri vaxtafærslu. Við vitum þegar að inneignina á reikningnum eftir hvaða fjölda ára t sem er má finna með jöfnunni $A = 2500\,e^{0{,}05t}$.

En hvað ef við viljum vita hve langan tíma tekur að ná tiltekinni innstæðu? Þá víxlum við inntaki og úttaki vísisfallsins og fáum lografall. Inntakið er nú innstæðan og úttakið tíminn í árum. Af grafi lografallsins getum við til dæmis lesið hve mörg ár tekur að tvöfalda upphaflegu innstæðuna. Mynd 1 sýnir punktinn sem svarar til þess.



Mynd 1

Í þessum kafla skoðum við fyrst fyrir hvaða gildi lograföll eru skilgreind. Síðan lærum við að teikna gröf þeirra.

Skilgreiningarmengi lografalls ákvarðað

Áður en við vinnum með gröf skoðum við skilgreiningarmengi lografallsins, það er mengi þeirra inntaksgilda sem fallið er skilgreint fyrir.

Munið að vísisfallið er skilgreint sem $y=b^x$ fyrir sérhverja rauntölu x og fasta $b>0$, $b\neq 1$, þar sem

- Skilgreiningarmengi y er $(-\infty,\infty)$.
- Myndmengi y er $(0,\infty)$.

Í síðasta kafla lærðum við að lografallið $y=\log_b(x)$ er andhverfa vísisfallsins $y=b^x$. Skilgreiningarmengi og myndmengi fallanna víxlast því:

- Skilgreiningarmengi lografallsins $y=\log_b(x)$ er myndmengi vísisfallsins $y=b^x$:, það er $(0,\infty)$.
- Myndmengi lografallsins $y=\log_b(x)$ er skilgreiningarmengi vísisfallsins $y=b^x$:, það er $(-\infty,\infty)$.

Við getum ummyndað grunnfallið $y=\log_b(x)$ á sama hátt og önnur grunnföll: með hliðrun, teygju, samþjöppun og speglun.

Í kaflanum Gröf vísisfalla sáum við að ummyndanir geta breytt myndmengi vísisfallsins $y=b^x$. Á sama hátt geta ummyndanir breytt skilgreiningarmengi lografallsins $y=\log_b(x)$. Skilyrðið er alltaf að viðfang lograns sé jákvætt. Þegar viðfangið er stæða með x finnum við því þau gildi x sem gera stæðuna stærri en núll.

Skoðum til dæmis fallið $f(x)=\log_4(2x-3)$. Það er skilgreint fyrir þau gildi x sem gera viðfangið $2x-3$, jákvætt. Við finnum skilgreiningarmengið með því að leysa eftirfarandi ójöfnu fyrir x:

$$\begin{aligned} 2x-3&>0 && \text{Setjum viðfangið stærra en núll.}\\ 2x&>3 && \text{Leggjum 3 við báðar hliðar.}\\ x&>1{,}5 && \text{Deilum báðum hliðum með 2.}\end{aligned}$$

Skilgreiningarmengi $f(x)=\log_4(2x-3)$ er með biltáknum $(1{,}5\,;\infty)$.

AÐFERÐ

Finnið skilgreiningarmengi gefins lografalls.

1. Setjið upp ójöfnu sem lýsir því að viðfang lograns sé stærra en núll.
2. Leysið ójöfnuna fyrir x.
3. Skrifið skilgreiningarmengið sem bil.

4

SÝNIDÆMI 1

Skilgreiningarmengi hliðraðs lografalls ákvarðað

Hvert er skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log_2(x+3)$?

Lausn

Viðfang lograns verður að vera jákvætt. Fallið er því skilgreint þegar $x+3>0$. Við leysum ójöfnuna:

$$\begin{aligned} x+3&>0 && \text{Viðfangið verður að vera jákvætt.}\\ x&>-3 && \text{Drögum 3 frá báðum hliðum.}\end{aligned}$$

Skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log_2(x+3)$ er því $(-3\,,\infty)$.

REYNIÐ SJÁLF #1

Hvert er skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log_5(x-2)+1$?

SÝNIDÆMI 2

Skilgreiningarmengi hliðraðs og speglaðs lografalls ákvarðað

Hvert er skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log(5-2x)$?

Lausn

Viðfang lograns verður að vera jákvætt. Fallið er því skilgreint þegar $5-2x>0$. Við leysum ójöfnuna:

$$\begin{aligned} 5-2x&>0 && \text{Viðfangið verður að vera jákvætt.}\\ -2x&>-5 && \text{Drögum frá } 5.\\ x&<\frac{5}{2} && \text{Deilum með } -2 \text{ og snúum ójöfnumerkinu við.}\end{aligned}$$

Skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log(5-2x)$ er því $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$.

REYNIÐ SJÁLF #2

Hvert er skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log(x-5)+2$?

Gröf lografalla teiknuð

Nú höfum við skoðað skilgreiningarmengi lografalla og snúum okkur að gröfum þeirra. Við byrjum á grunnfallinu $y=\log_b(x)$ og skoðum síðan ummyndanir þess: hliðranir, teygjur, samþjappanir og speglanir.

Lografallið $y=\log_b(x)$. og vísisfallið $y=b^x$, eru andhverf föll. Gröf þeirra eru því spegilmyndir hvort annars um línuna $y=x$. Í töflu 1 sjáum við samband inntaks og úttaks í jöfnunni $y=2^x$ og jafngildri jöfnu $x=\log_2(y)$.

Tafla 1

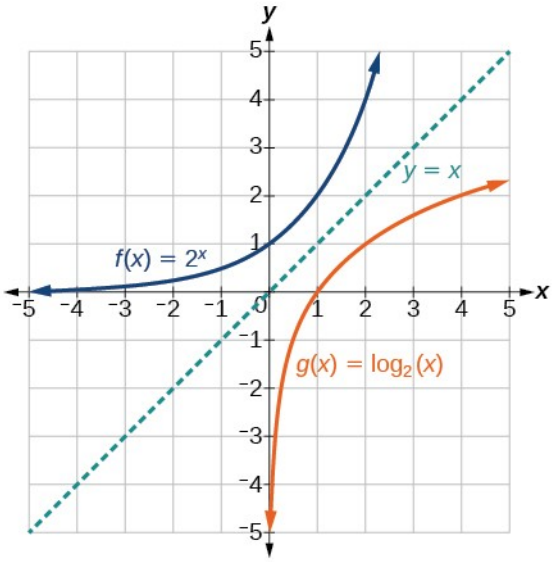
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^x=y$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2(y)=x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Við notum gildin úr töflu 1 til að bera saman punkta á gröfum andhverfu fallanna $f(x)=2^x$ og $g(x)=\log_2(x)$. Samanburðurinn sést í töflu 2.

Tafla 2

$f(x)=2^x$	$\left(-3,\frac{1}{8}\right)$	$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$	$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(3,8)$
$g(x)=\log_2(x)$	$\left(\frac{1}{8},-3\right)$	$\left(\frac{1}{4},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$(1,0)$	$(2,1)$	$(4,2)$	$(8,3)$

Eins og við má búast víxlast x- og y-hnitin þegar farið er frá grafi falls að grafi andhverfu þess. Mynd 2 sýnir gröf fallanna f og g.



Mynd 2 Takið eftir að gröf $f(x)=2^x$ og $g(x)=\log_2(x)$ eru speglanir hvort annars um línuna $y=x$.

Af grafinu má sjá eftirfarandi:

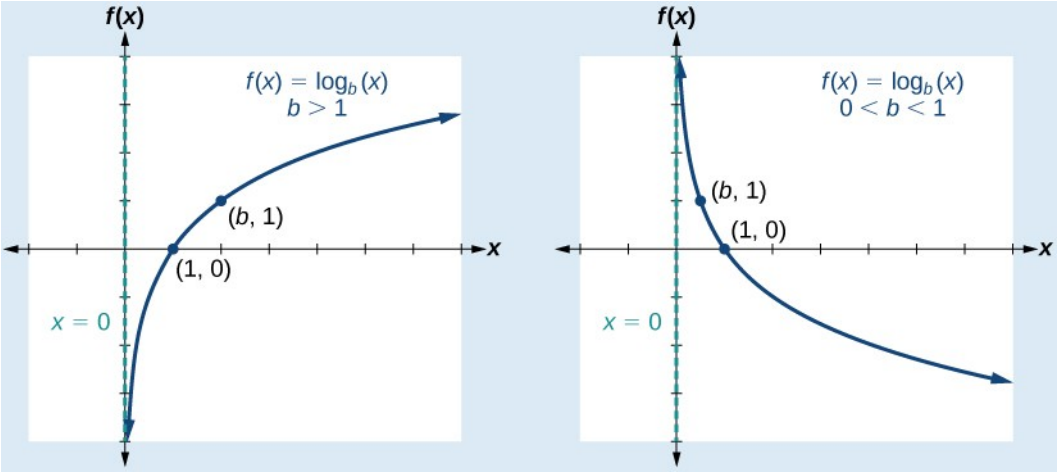
- Graf fallsins $f(x)=2^x$ sker y-ásinn í punktinum $(0,1)$. Graf andhverfu þess, $g(x)=\log_2(x)$, sker x-ásinn í punktinum $(1,0)$.
- Skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=2^x$, er $(-\infty,\infty)$, sem er jafnframt myndmengi fallsins $g(x)=\log_2(x)$.
- Myndmengi fallsins $f(x)=2^x$, er $(0,\infty)$, sem er jafnframt skilgreiningarmengi fallsins $g(x)=\log_2(x)$.

EINKENNI GRAFS GRUNNFALLSINS $f(x)=\log_b(x)$:

Fyrir sérhverja rauntölu x og fasta $b>0$, $b\neq 1$, sjáum við eftirfarandi einkenni á grafi $f(x)=\log_b(x)$:

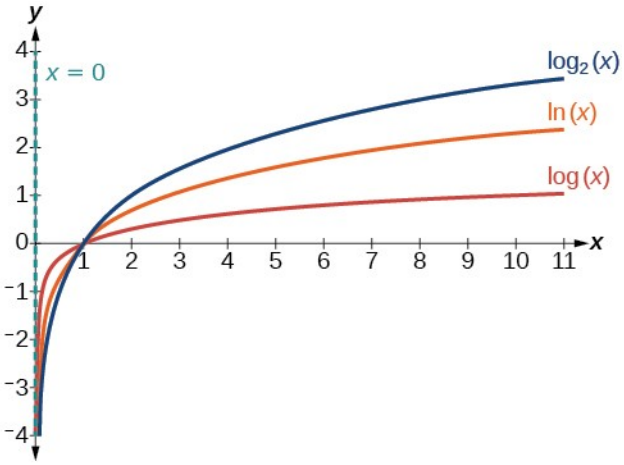
- Fallið er eintækt.
- Grafið hefur lóðfellu $x=0$.
- skilgreiningarmengi: $(0,\infty)$
- Myndmengið er $(-\infty,\infty)$.
- *Grafið sker x-ásinn í punktinum* $(1,0)$ og liggur einnig um punktinn $(b,1)$.
- *Grafið sker ekki y-ásinn.*
- Fallið er vaxandi ef $b>1$.
- Fallið er minnkandi ef $0<b<1$.

Sjá mynd 3.



Mynd 3

Mynd 4 sýnir hvernig breyting á grunntölunni b í $f(x)=\log_b(x)$ getur haft áhrif á gröfin. Takið eftir að gröfin þjappast saman lóðrétt eftir því sem grunntalan hækkar. (Athugið: munið að fallið $\ln(x)$ hefur grunntöluna $e\approx 2.718$.)



Mynd 4 Gröf þriggja lografalla með mismunandi grunntölur sem allar eru stærri en 1.

AÐFERÐ

Teiknið graf lografallsins $f(x)=\log_b(x)$,.

1. Teiknið og merkið lóðfelluna $x=0$.
2. Merkið skurðpunkt grafsins við x-ásinn, $(1,0)$.
3. Merkið punktinn $(b,1)$.
4. Teiknið mjúkan feril í gegnum punktana.
5. Tilgreinið skilgreiningarmengið, $(0,\infty)$, myndmengið, $(-\infty,\infty)$, og lóðfelluna, $x=0$.

SÝNIDÆMI 3

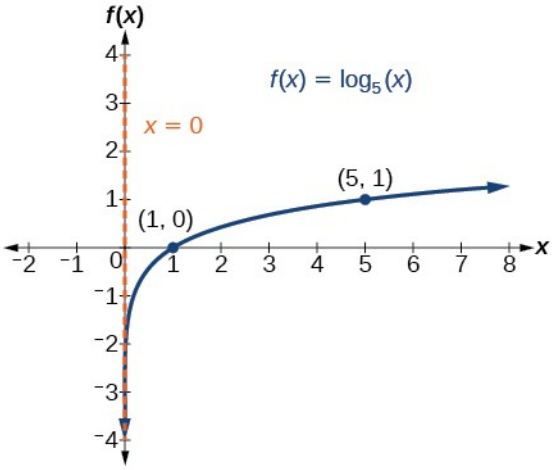
Að teikna graf lografalls á forminu $f(x) = \log_b(x)$.

Teiknið graf fallsins $f(x)=\log_5(x)$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

Lausn

Skoðum fyrst helstu punkta á grafinu og hvernig fallið hagar sér.

- Þar sem $b=5$ er stærra en einn vitum við að fallið er vaxandi. Vinstri hali grafsins nálgast lóðfelluna $x=0$, og hægri halinn vex hægt án takmarka.
- Grafið sker x-ásinn í punktinum $(1,0)$.
- Punkturinn $(5,1)$ liggur á grafinu.
- Við teiknum og merkjum lóðfelluna, merkjum punktana og drögum mjúkan feril í gegnum þá (sjá mynd 5).



Mynd 5

Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

REYNIÐ SJÁLF #3

Teiknið graf fallsins $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x)$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

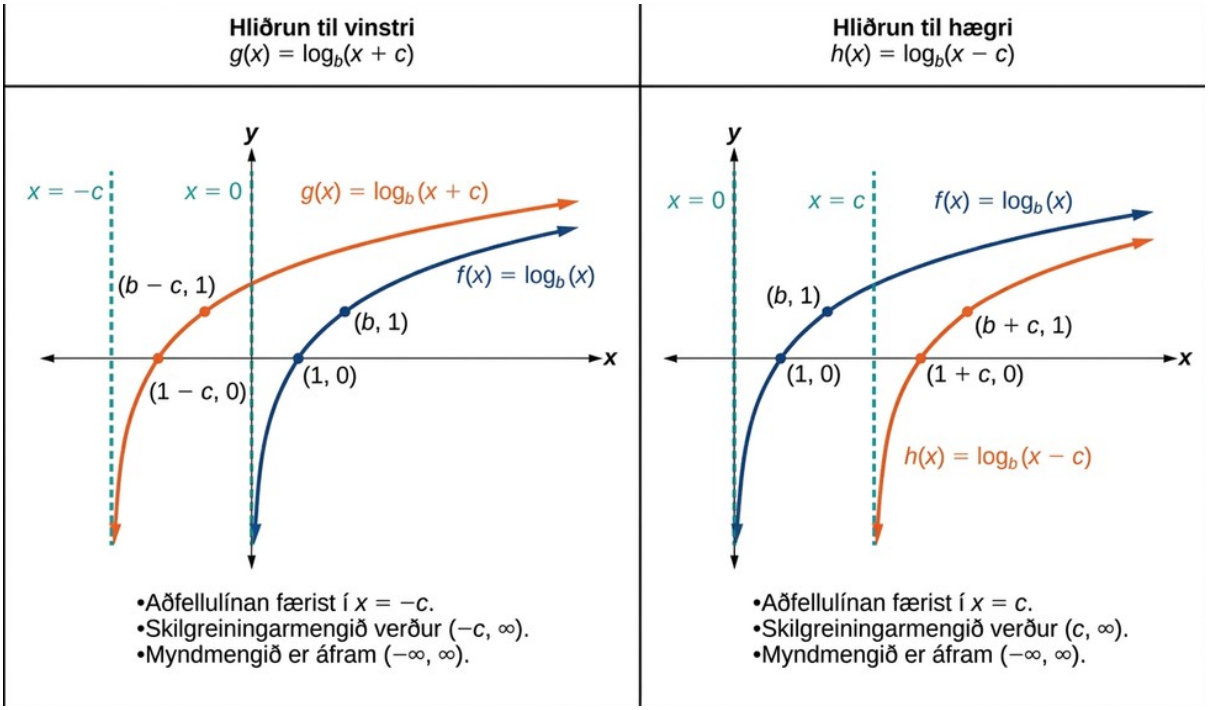
Gröf ummyndaðra lografalla teiknuð

Við getum beitt sömu ummyndunum á gröf lografalla og á gröf annarra grunnfalla. Út frá grafi grunnfallsins $y=\log_b(x)$ getum við myndað ný gröf með hliðrun, teygju, samþjöppun og speglun.

Að teikna lárétta hliðrun $f(x) = \log_b(x)$

Þegar fasta c er bætt við inntak grunnfallsins $f(x)=log_b(x)$, fæst lárétt hliðrun um c einingar í gagnstæða átt við formerki c. Til að sjá láréttar hliðranir getum við skoðað almennt graf

grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ og, fyrir $c>0$ hliðrunina til vinstri, $g(x)=\log_b(x+c)$, og hliðrunina til hægri, $h(x)=\log_b(x-c)$. Sjá mynd 6.



Mynd 6. Láréttar hliðranir grafs lografalls til vinstri og hægri.

LÁRÉTTAR HLIÐRANIR GRUNNFALLSINS $f(x)=\log_b(x)$

Fyrir fastann c, hefur fallið $f(x)=\log_b(x+c)$ eftirfarandi eiginleika:

- hliðrar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ um c einingar til vinstri ef $c>0$.
- hliðrar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ um c einingar til hægri ef $c<0$.
- Lóðfellan er $x=-c$.
- Skilgreiningarmengið er $(-c,\infty)$.
- Myndmengið er $(-\infty,\infty)$.

AÐFERÐ

Teiknið graf fallsins $f(x)=\log_b(x+c)$, með hliðrun.

1. Ákvarðið láréttu hliðrunina:
   a. Ef $c>0$, hliðrið þá grafi $f(x)=\log_b(x)$ um c einingar til vinstri.
   b. Ef $c<0$, hliðrið þá grafi $f(x)=\log_b(x)$ um c einingar til hægri.
2. Teiknið lóðfelluna $x=-c$.
3. Veljið þrjá punkta á grafi grunnfallsins. Finnið hnit hliðruðu punktanna með því að draga c frá hverju x-hniti.

4. Merkið punktana þrjá.
5. Skilgreiningarmengið er $(-c, \infty)$, myndmengið er $(-\infty, \infty)$, og lóðfellan er $x = -c$.

SÝNIDÆMI 4

Að teikna lárétta hliðrun grunnfallsins $y = \log_b(x)$

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x) = \log_3(x-2)$ og grafi grunnfallsins í sama hnitakerfi. Merkið helstu punkta og aðfellur. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu hliðraða fallsins.

Lausn

4

Þar sem fallið er $f(x) = \log_3(x-2)$, sjáum við að $x + (-2) = x - 2$.

Því er $c = -2$, svo $c < 0$. Það merkir að við hliðrum fallinu $f(x) = \log_3(x)$ um 2 einingar til hægri.

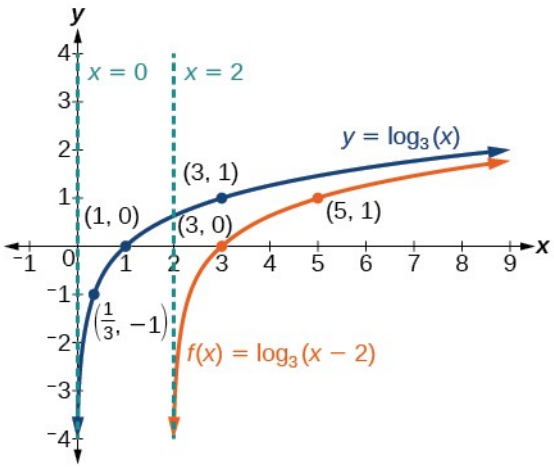
Lóðfellan er $x = -(-2)$ eða $x = 2$.

Á grafi grunnfallsins eru punktarnir $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$, $(1, 0)$, og $(3, 1)$.

Við finnum hnit hliðruðu punktanna með því að bæta 2 við hvert x-hnit.

Merkið punktana $\left(\frac{7}{3}, -1\right)$, $(3, 0)$, og $(5, 1)$.

Skilgreiningarmengið er $(2, \infty)$, myndmengið er $(-\infty, \infty)$, og lóðfellan er $x = 2$.



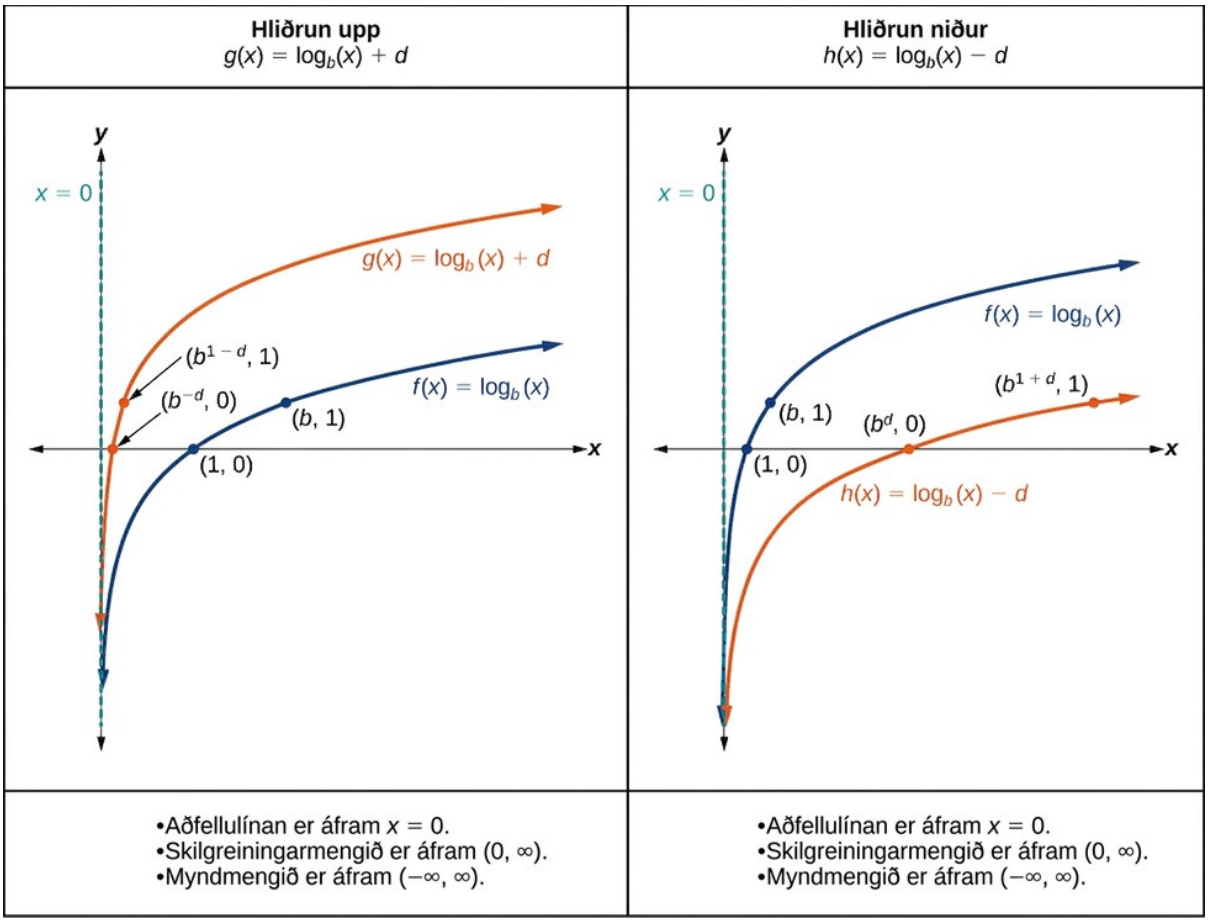
Mynd 7

REYNIÐ SJÁLF #4

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x)=\log_3(x+4)$ og grafi grunnfallsins í sama hnitakerfi. Merkið helstu punkta og aðfellur. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu hliðraða fallsins.

Að teikna lóðrétta hliðrun $y = \log_b(x)$

Þegar fasta d er bætt við grunnfallið $f(x)=\log_b(x)$, fæst lóðrétt hliðrun um d einingar í sömu átt og formerki d. Til að sjá lóðréttar hliðranir getum við skoðað almennt graf grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ ásamt hliðruninni upp, $g(x)=\log_b(x)+d$ og hliðruninni niður, $h(x)=\log_b(x)-d$. Sjá mynd 8.



Mynd 8. Lóðréttar hliðranir grafs lografalls upp og niður.

LÓÐRÉTTAR HLIÐRANIR GRUNNFALLSINS $y=\log_b(x)$

Fyrir fastann d, hefur fallið $f(x)=\log_b(x)+d$ eftirfarandi eiginleika:

- hliðrar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ um d einingar upp ef $d>0$.
- hliðrar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ um d einingar niður ef $d<0$.
- Lóðfellan er $x=0$.

- Skilgreiningarmengið er $(0, \infty)$.
- Myndmengið er $(-\infty, \infty)$.

AÐFERÐ

Teiknið graf fallsins $f(x) = \log_b(x) + d$, með hliðrun.

1. Ákvarðið lóðréttu hliðrunina:
   - Ef $d > 0$, hliðrið þá grafi $f(x) = \log_b(x)$ um d einingar upp.
   - Ef $d < 0$, hliðrið þá grafi $f(x) = \log_b(x)$ um d einingar niður.
2. Teiknið lóðfelluna $x = 0$.
3. Veljið þrjá punkta á grafi grunnfallsins. Finnið hnit hliðruðu punktanna með því að bæta d við hvert y-hnit.
4. Merkið punktana þrjá.
5. Skilgreiningarmengið er $(0, \infty)$, myndmengið er $(-\infty, \infty)$, og lóðfellan er $x = 0$.

SÝNIDÆMI 5

Að teikna lóðrétta hliðrun grunnfallsins $y = \log_b(x)$

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x) = \log_3(x) - 2$ og grafi grunnfallsins í sama hnitakerfi. Merkið helstu punkta og aðfelluna. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu hliðraða fallsins.

Lausn

Í fallinu $f(x) = \log_3(x) - 2$, er $d = -2.$, svo $d < 0$.

Það merkir að við hliðrum fallinu $f(x) = \log_3(x)$ um 2 einingar niður.

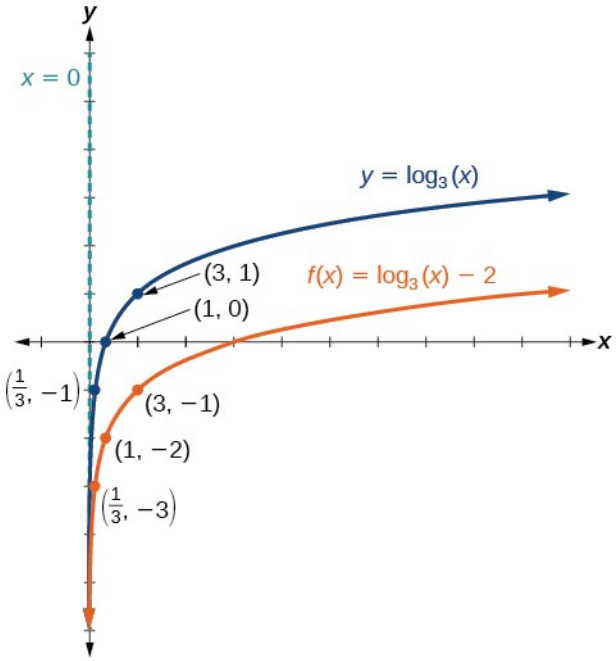
Lóðfellan er áfram $x = 0$.

Á grafi grunnfallsins eru punktarnir $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$, $(1, 0)$, og $(3, 1)$.

Við finnum hnit hliðruðu punktanna með því að draga 2 frá hverju y-hniti.

Merkið punktana $\left(\frac{1}{3}, -3\right)$, $(1, -2)$, og $(3, -1)$.

Skilgreiningarmengið er $(0, \infty)$, myndmengið er $(-\infty, \infty)$, og lóðfellan er $x = 0$.



Mynd 9

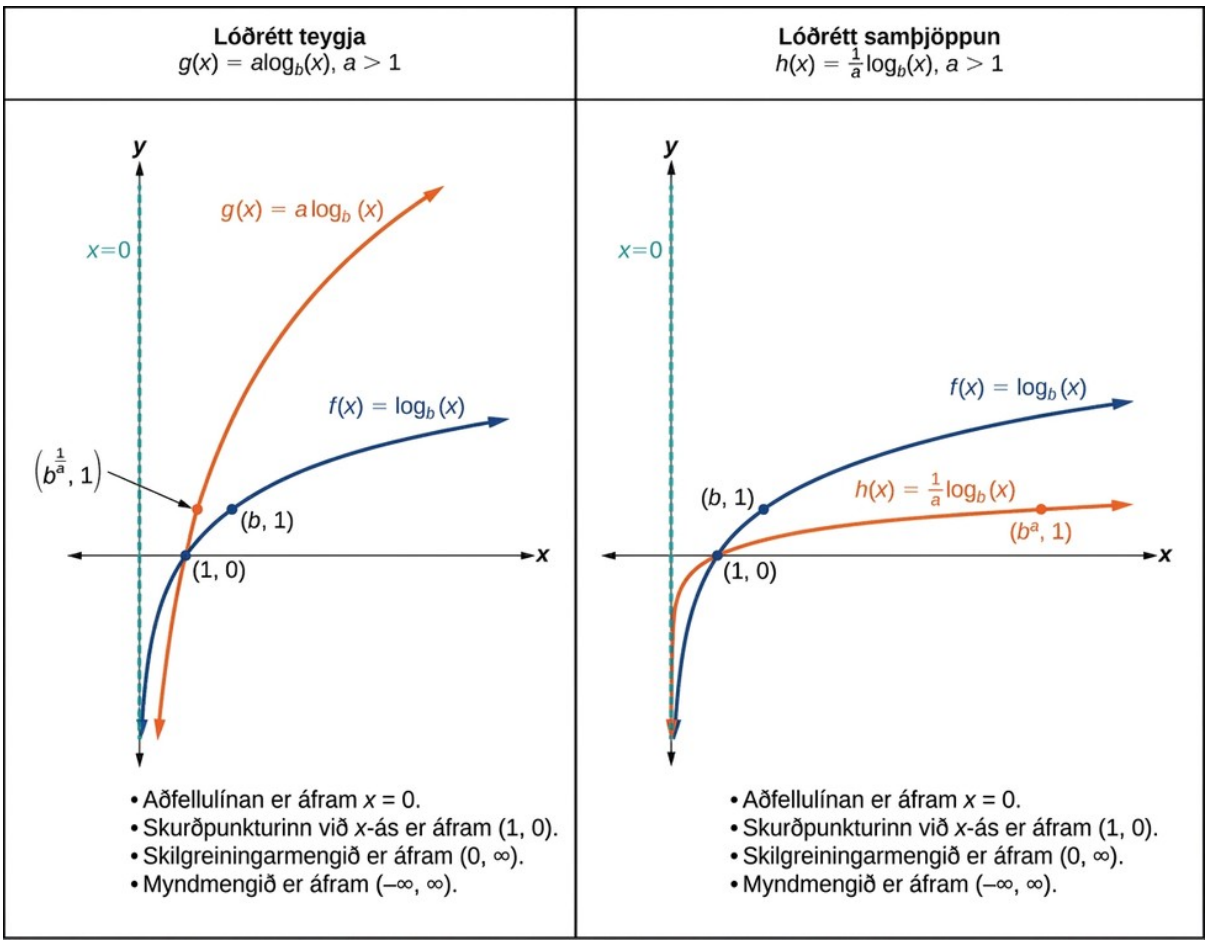
Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x)=\log_2(x)+2$ og grafi grunnfallsins í sama hnitakerfi. Merkið helstu punkta og aðfelluna. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu hliðraða fallsins.

Að teikna teygjur og samþjappanir y = $\log_b(x)$

Þegar grunnfallið $f(x)=\log_b(x)$ er margfaldað með fasta $a>0$, fæst lóðrétt teygja eða samþjöppun upphaflega grafsins. Til að sjá teygjur og samþjappanir setjum við $a>1$ og skoðum almennt graf grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ ásamt lóðréttu teygjunni, $g(x)=a\log_b(x)$ og lóðréttu samþjöppuninni, $h(x)=\frac{1}{a}\log_b(x)$. Sjá mynd 10.



Mynd 10. Lóðrétt teygja og samþjöppun grafs lografalls.

LÓÐRÉTTAR TEYGJUR OG SAMÞJAPPANIR GRUNNFALLSINS $y=\log_b(x)$

Fyrir fastann $a>1$, hefur fallið $f(x)=a\log_b(x)$ eftirfarandi eiginleika:

- teygir grunnfallið $y=\log_b(x)$ lóðrétt með stuðlinum a ef $a>1$.
- þjappar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ saman lóðrétt með stuðlinum a ef $0<a<1$.
- Lóðfellan er $x=0$.
- Grafið sker x-ásinn í punktinum $(1,0)$.
- Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$.
- Myndmengið er $(-\infty,\infty)$.

AÐFERÐ

Teiknið graf fallsins $f(x)=a\log_b(x)$, þar sem $a>0$,.

1. Ákvarðið hvort um lóðrétta teygju eða samþjöppun sé að ræða:
   - Ef $|a|>1$, teygist graf $f(x)=\log_b(x)$ með stuðlinum a

- Ef $|a|<1$, þjappast graf $f(x)=\log_b(x)$ saman með stuðlinum a

2. Teiknið lóðfelluna $x=0$.
3. Veljið þrjá punkta á grafi grunnfallsins. Margfaldið hvert y-hnit með a. til að finna hnit punktanna á nýja grafinu. x-hnitin haldast óbreytt.
4. Merkið punktana þrjá.
5. Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

SÝNIDÆMI 6

Að teikna teygju eða samþjöppun grunnfallsins $y = \log_b(x)$

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x)=2\log_4(x)$ og grafi grunnfallsins í sama hnitakerfi. Merkið helstu punkta og aðfelluna. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

Lausn

Í fallinu $f(x)=2\log_4(x)$, er stuðullinn $a=2$.

Það merkir að við teygjum fallið $f(x)=\log_4(x)$ með stuðlinum 2.

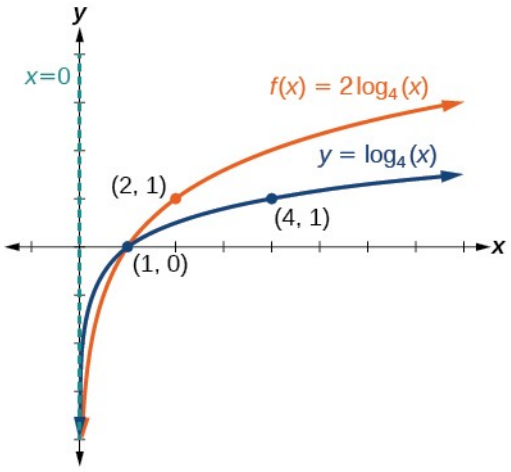
Lóðfellan er áfram $x=0$.

Á grafi grunnfallsins eru punktarnir $\left(\frac{1}{4},-1\right)$, $(1,0)$, og $(4,1)$.

Við finnum hnit punktanna á teygða grafinu með því að margfalda hvert y-hnit með 2.

Merkið punktana $\left(\frac{1}{4},-2\right)$, $(1,0)$, og $(4,2)$.

Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$. Sjá mynd 11.



Mynd 11

Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

REYNIÐ SJÁLF #6

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x)=\frac{1}{2}\log_4(x)$ og grafi grunnfallsins í sama hnitakerfi. Merkið helstu punkta og aðfelluna. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

SÝNIDÆMI 7

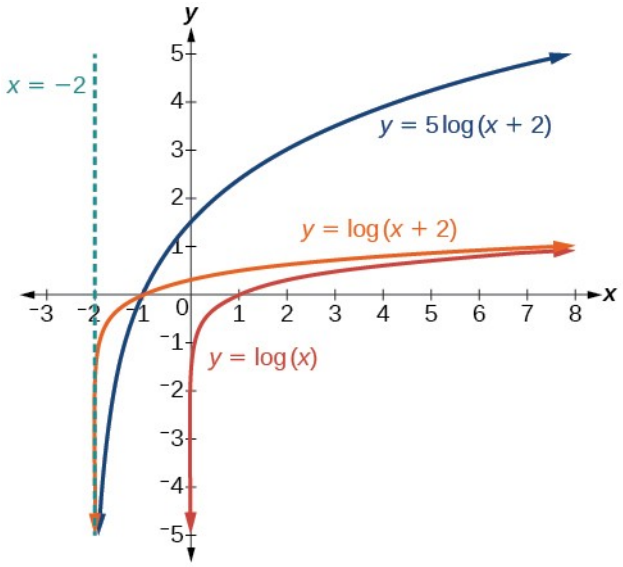
Hliðrun og teygja sameinaðar

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x)=5\log(x+2)$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

4

Lausn

Munið: það sem er innan sviga gerist fyrst. Fyrst færum við grafið 2 einingar til vinstri og teygjum síðan fallið lóðrétt með stuðlinum 5, eins og á mynd 12. Lóðfellan hliðrast í $x=-2$. Skurðpunkturinn við x-ás verður $(-1,0)$. Skilgreiningarmengið verður $(-2,\infty)$. Tveir punktar hjálpa til við að sýna lögun grafsins: $(-1,0)$ og $(8,5)$. Við völdum $x=8$ sem x-hnit annars punktsins vegna þess að þegar $x=8$, er $x+2=10$, grunntala tugalograns.



Mynd 12

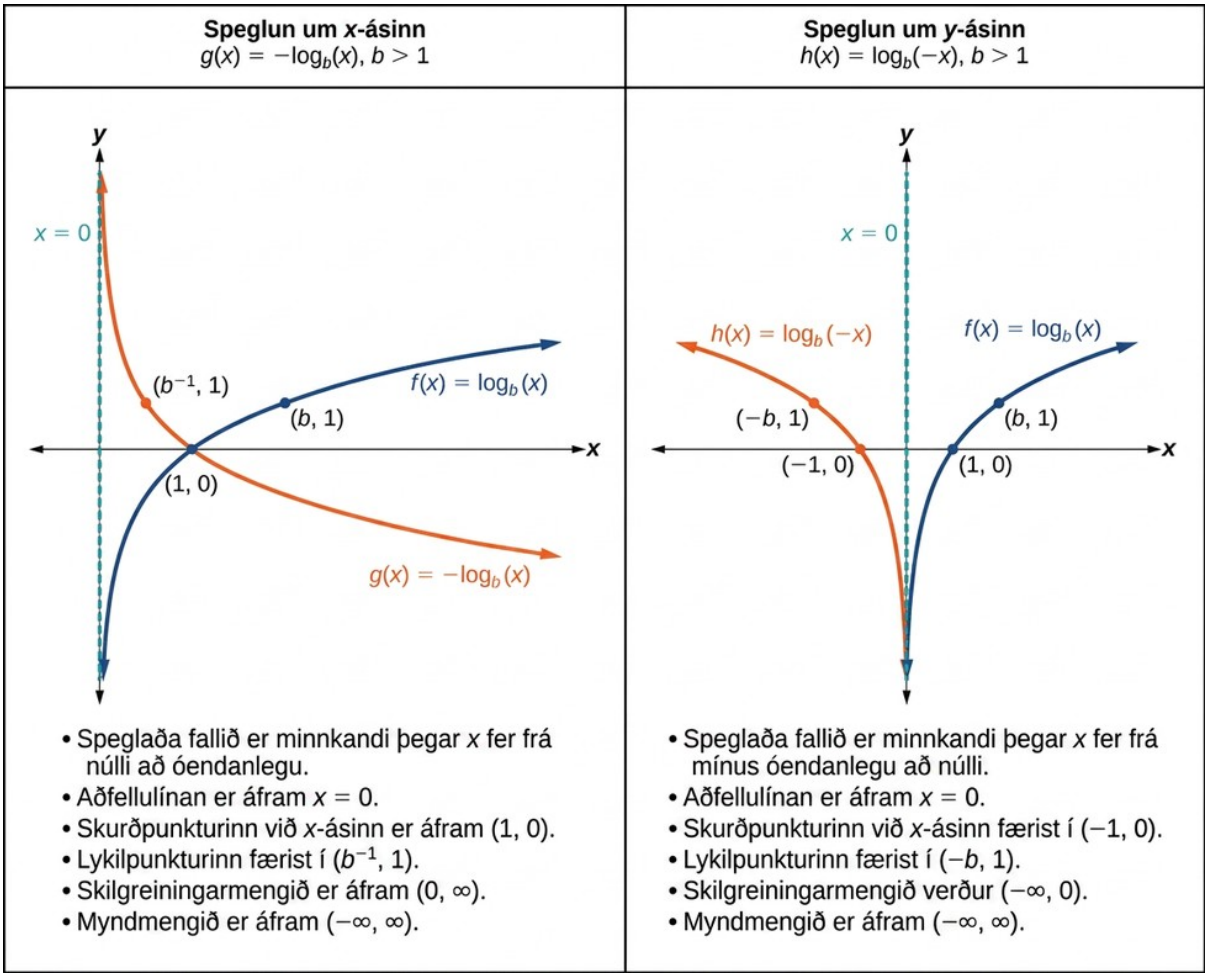
Skilgreiningarmengið er $(-2,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=-2$.

REYNIÐ SJÁLF #7

Teiknið skissu af grafi fallsins $f(x)=3\log(x-2)+1$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

Að teikna speglanir f(x) = $\log_b(x)$

Þegar grunnfallið $f(x)=\log_b(x)$ er margfaldað með -1, fæst speglun um x-ásinn. Þegar inntakið er margfaldað með -1, fæst speglun um y-ásinn. Til að sjá speglanir takmörkum við okkur við $b>1$, og skoðum almennt graf grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ ásamt speglun þess um x-ásinn, $g(x)=-log_b(x)$ og speglun þess um y-ásinn, $h(x)=\log_b(-x)$.



Mynd 13. Speglun grafs lografalls um x-ásinn og y-ásinn.

SPEGLANIR GRAFS GRUNNFALLSINS $y=\log_b(x)$

Fallið $f(x)=-log_b(x)$ hefur eftirfarandi eiginleika:

- Grafið er spegilmynd grafs grunnfallsins $y=\log_b(x)$ um x-ásinn.
- Skilgreiningarmengið $(0,\infty)$, myndmengið $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan $x=0$, eru óbreytt frá grunnfallinu.

Fallið $f(x)=\log_b(-x)$ hefur eftirfarandi eiginleika:

- Grafið er spegilmynd grafs grunnfallsins $y=\log_b(x)$ um y-ásinn.

- Skilgreiningarmengið er $(-\infty, 0)$.
- Myndmengið $(-\infty, \infty)$, og lóðfellan $x=0$, eru óbreytt frá grunnfallinu.

AÐFERÐ

Teiknið speglun á grafi grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$, samkvæmt eftirfarandi leiðbeiningum.

Tafla 3

Ef $f(x)=-\log_b(x)$	Ef $f(x)=\log_b(-x)$
1. Teiknið lóðfelluna $x=0$.	1. Teiknið lóðfelluna $x=0$.
2. Merkið skurðpunkt grafs grunnfallsins við x-ásinn, $(1,0)$.	2. Merkið skurðpunkt grafs grunnfallsins við x-ásinn, $(1,0)$.
3. Speglið graf grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ um x-ásinn.	3. Speglið graf grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ um y-ásinn.
4. Teiknið mjúkan feril gegnum punktana.	4. Teiknið mjúkan feril gegnum punktana.
Skilgreiningarmengið er (0, ∞), myndmengið er (−∞, ∞) og lóðfellan er $x=0$.	Skilgreiningarmengið er (0, ∞), myndmengið er (−∞, ∞) og lóðfellan er $x=0$.

SÝNIDÆMI 8

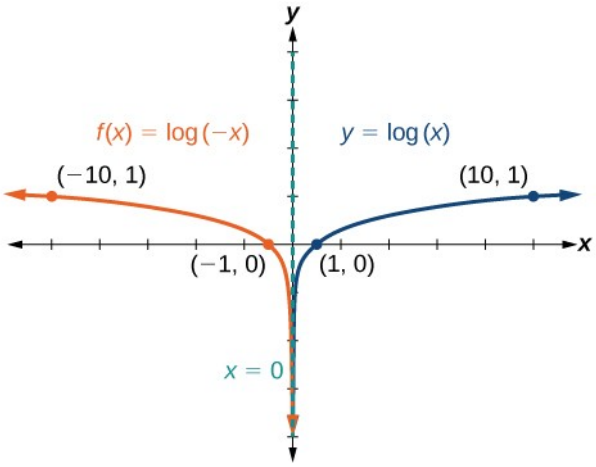
Speglun lografalls teiknuð

Teiknið skissu af grafi $f(x)=\log(-x)$ og grafi grunnfallsins. Merkið lykilpunkta og aðfellu inn á myndina. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu fallsins f.

Lausn

Áður en við teiknum graf $f(x)=\log(-x)$, skoðum við hegðun fallsins og finnum lykilpunkta á grafinu.

- Þar sem $b=10$ er stærra en einn vitum við að grunnfallið er vaxandi. Þar sem inntaksgildið er margfaldað með -1, er f speglun grunngrafsins um y-ásinn. Því verður $f(x)=\log(-x)$ minnkandi þegar x fer frá mínus óendanlegu að núlli og hægri hali grafsins nálgast lóðfelluna $x=0$.
- Skurðpunkturinn við x-ás er $(-1,0)$.
- Við teiknum og merkjum aðfelluna, merkjum punktana inn á myndina og drögum mjúkan feril í gegnum þá.



Mynd 14

Skilgreiningarmengið er $(-\infty, 0)$, myndmengið er $(-\infty, \infty)$, og lóðfellan er $x = 0$.

REYNIÐ SJÁLF #8

Teiknið graf $f(x) = -\log(-x)$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og aðfellu.

AÐFERÐ

Finnið nálgunarlausnir lograjöfnu með grafreikni.

1. Ýtið á [Y=]. Sláið vinstri hlið jöfnunnar inn sem Y_1 og hægri hliðina sem Y_2.
2. Ýtið á [GRAPH] til að skoða gröfin. Notið [WINDOW] til að velja glugga sem sýnir skurðpunkta þeirra.
3. Til að finna gildið á x, reiknum við skurðpunktinn. Ýtið á [2ND] og síðan [CALC]. Veljið „intersect“ og ýtið þrisvar á [ENTER]. Skurðpunkturinn gefur gildið á x, fyrir skurðpunktinn eða skurðpunktana.

SÝNIDÆMI 9

Nálgunarlausn lograjöfnu fundin

Leysið jöfnuna $4\ln(x) + 1 = -2\ln(x - 1)$ með því að teikna gröf. Námundið lausnina að þremur aukastöfum.

Lausn

Ýtið á [Y=] og sláið $4\ln(x) + 1$ inn við Y_1=. Sláið síðan $-2\ln(x - 1)$ inn við Y_2=. Notið gluggann 0 til 5 fyrir x og −10 til 10 fyrir y. Ýtið á [GRAPH]. Gröfin ættu að skerast örlítið hægra megin við $x = 1$.

Til að fá betri nálgun ýtið þið á [2ND] og síðan [CALC]. Veljið [5: intersect] og ýtið þrisvar á [ENTER]. X-hnit skurðpunktsins birtist sem 1.3385297. (Svarið getur orðið annað ef þið notið annan glugga eða annað gildi við „Guess?“) Námundað að næsta þúsundasta hluta er því $x \approx 1{,}339$.

REYNIÐ SJÁLF #9

Leysið jöfnuna $5\log(x+2) = 4 - \log(x)$ með því að teikna gröf. Námundið lausnina að þremur aukastöfum.

Yfirlit yfir ummyndanir lografallsins

4

Í töflu 4 eru teknar saman helstu ummyndanir á grafi lografalls.

Tafla 4

Ummyndanir grunnfallsins $y = \log_b(x)$	
Ummyndun	**Jafna**
Hliðrun • Lárétt um c einingar til vinstri • Lóðrétt um d einingar upp	$y = \log_b(x+c)+d$
Teygja og samþjöppun • Teygja ef $\lvert a\rvert > 1$ • Samþjöppun ef $\lvert a\rvert < 1$	$y = a\log_b(x)$
Speglun um x-ásinn	$y = -\log_b(x)$
Speglun um y-ásinn	$y = \log_b(-x)$
Hliðrun, lóðrétt teygja eða samþjöppun og möguleg speglun um x-ásinn (a ≠ 0)	$y = a\log_b(x+c)+d$

UMMYNDANIR LOGRAFALLA

Hliðrunum, lóðréttum teygjum, samþjöppunum og speglun um x-ás á grafi grunnfallsins $y = \log_b(x)$, má lýsa með formúlunni

$$f(x) = a\log_b(x+c)+d$$

þar sem grunnfallið, $y = \log_b(x), b > 1$, er

- hliðrað lóðrétt upp um d einingar.
- hliðrað lárétt til vinstri um c einingar.
- teygt lóðrétt með stuðlinum $\lvert a\rvert$ ef $\lvert a\rvert > 0$.
- þjappað saman lóðrétt með stuðlinum $\lvert a\rvert$ ef $0 < \lvert a\rvert < 1$.
- Grafið er speglað um x-ásinn ef $a < 0$.

Fyrir $f(x)=\log(-x)$, er graf grunnfallsins speglað um y-ásinn.

SÝNIDÆMI 10

Lóðfella grafs lografalls fundin

Hver er lóðfella grafs fallsins $f(x)=-2\log_3(x+4)+5$?

Lausn

Lóðfellan er línan $x=-4$.

Greining

Stuðullinn −2, grunntalan 3 og hliðrunin upp um 5 einingar hafa ekki áhrif á lóðfelluna. Þegar grafinu er hliðrað um 4 einingar til vinstri færist lóðfellan úr x = 0 í $x=-4$.

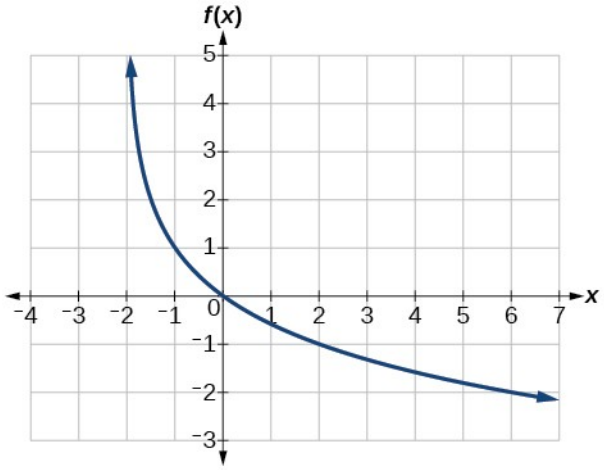
REYNIÐ SJÁLF #10

Hver er lóðfella grafs fallsins $f(x)=3+\ln(x-1)$?

SÝNIDÆMI 11

Jafna fundin út frá grafi

Finnið jöfnu sem gæti lýst tugalografallinu á mynd 15.



Mynd 15

Lausn

Grafið hefur lóðfellu við $x=-2$ og hefur verið speglað lóðrétt. Við þekkjum enn ekki lóðréttu hliðrunina eða lóðréttu teygjuna. Hingað til vitum við að jafnan verður á forminu:

$$f(x)=-a\log(x+2)+k$$

Grafið virðist liggja um punktana $(-1,1)$ og $(2,-1)$. Þegar $(-1,1)$, er sett inn

$$\begin{aligned} 1 &= -a\log(-1+2)+k && \text{Setjum inn } (-1,1). \\ 1 &= -a\log(1)+k && \text{Reiknað.} \\ 1 &= k && \log(1)=0. \end{aligned}$$

Næst setjum við inn $(2,-1)$,

$$\begin{aligned} -1 &= -a\log(2+2)+1 && \text{Setjum inn } (2,-1). \\ -2 &= -a\log(4) && \text{Reiknað.} \\ a &= \frac{2}{\log(4)} && \text{Leyst fyrir } a. \end{aligned}$$

Þá fæst jafnan $f(x)=-\frac{2}{\log(4)}\log(x+2)+1$.

4

Greining

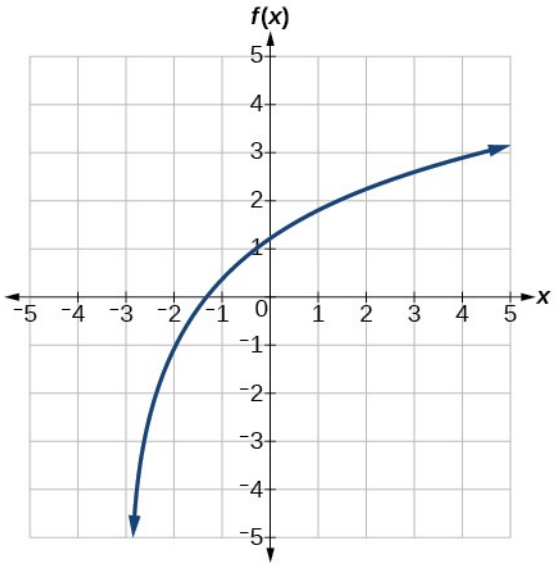
Við getum sannreynt niðurstöðuna með því að bera fallgildin í töflu 5 saman við punktana á grafinu á mynd 15.

Tafla 5

x	−1
$f(x)$	1
x	4
$f(x)$	−1,5850

REYNIÐ SJÁLF #11

Finnið jöfnu náttúrulega lografallsins á mynd 16.



Mynd 16

SPURT OG SVARAÐ

Er hægt að ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi falls og lýsa endahegðun þess með því einu að skoða grafið?

Já, ef við vitum að fallið er almennt lografall. Skoðið til dæmis grafið á mynd 16. Grafið nálgast $x = -3$ *(eða þar um bil) sífellt meira, svo* $x = -3$ *er lóðfellan eða mjög nálægt henni. Það nálgast frá hægri, svo skilgreiningarmengið eru allir punktar hægra megin,* $\{x | x > -3\}$*. Myndmengið er, eins og hjá öllum almennum lografallum, allar rauntölur. Endahegðunina sjáum við líka, því grafið fer niður til vinstri og upp til hægri. Endahegðunin er sú að þegar* $x \to -3^{+}, f(x) \to -\infty$ *og þegar* $x \to \infty, f(x) \to \infty$*.*

MIÐLAR

Hér má finna frekari leiðbeiningar og æfingar í að teikna gröf lografalla.

- Graf vísisfalls og lografalls teiknað
- Gröf pöruð við vísisföll og lograföll
- Skilgreiningarmengi lografalla fundið

4.4 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Andhverfa hvers lografalls er vísisfall og öfugt. Hvað segir það okkur um sambandið milli hnita samsvarandi punkta á gröfum falls og andhverfu þess?

2. Hvaða ummyndanir hafa áhrif á myndmengi lografalls, ef einhverjar?

3. Hvaða ummyndanir hafa áhrif á skilgreiningarmengi lografalls, ef einhverjar?

4. Skoðið lografallið $f(x)=\log_b(x)$. Hvers vegna getur x ekki verið núll?

5. Hefur graf almenns lografalls láfellu? Rökstyðjið svarið.

Algebruverkefni

Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins í eftirfarandi verkefnum.

6.

$$f(x)=\log_3(x+4)$$

7.

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

8.

$$g(x)=\log_5(2x+9)-2$$

9.

$$h(x)=\ln(4x+17)-5$$

10.

$$f(x)=\log_2(12-3x)-3$$

Tilgreinið skilgreiningarmengi og lóðfellu fallsins í eftirfarandi verkefnum.

11.

$$f(x)=\log_b(x-5)$$

12.

$$g(x)=\ln(3-x)$$

13.

$$f(x)=\log(3x+1)$$

14.

$$f(x)=3\log(-x)+2$$

15.

$$g(x)=-\ln(3x+9)-7$$

Tilgreinið skilgreiningarmengi og lóðfellu fallsins í hverju verkefni og lýsið endahegðun þess.

16.

$$f(x)=\ln(2-x)$$

17.

$$f(x)=\log\left(x-\frac{3}{7}\right)$$

18.

$$h(x)=-\log(3x-4)+3$$

19.

$$g(x)=\ln(2x+6)-5$$

20.

$$f(x)=\log_3(15-5x)+6$$

Tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins í hverju verkefni. Finnið einnig skurðpunkta grafsins við x-ás og y-ás, ef þeir eru til. Ef skurðpunktur er ekki til, ritið þá DNE („er ekki til“).

21.

$$h(x)=\log_4(x-1)+1$$

22.

$$f(x)=\log(5x+10)+3$$

23.

$$g(x)=\ln(-x)-2$$

24.

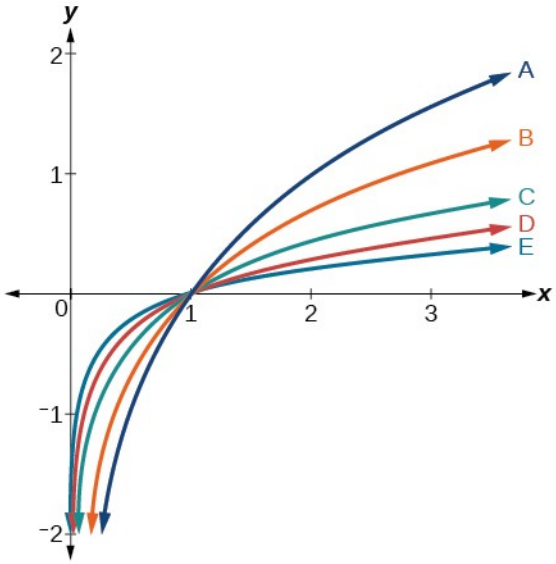
$$f(x)=\log_2(x+2)-5$$

25.

$$h(x)=3\ln(x)-9$$

Myndræn verkefni

Parið hvert fall í eftirfarandi verkefnum við bókstafinn sem merkir graf þess á mynd 17.



Mynd 17. Gröf fimm lografalla, merkt A, B, C, D og E.

26. $d(x)=\log(x)$

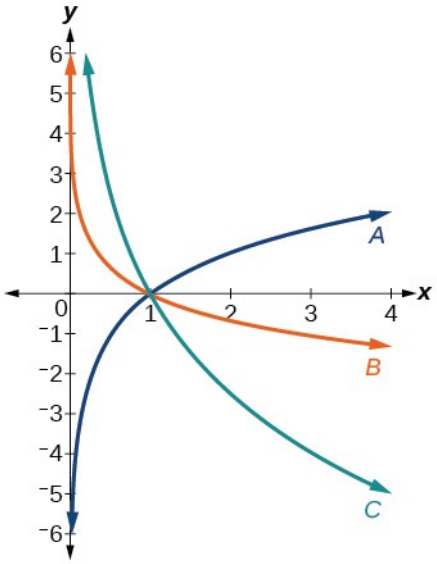
27. $f(x)=\ln(x)$

28. $g(x)=\log_2(x)$

29. $h(x)=\log_5(x)$

30. $j(x)=\log_{25}(x)$

Parið hvert fall í eftirfarandi verkefnum við bókstafinn sem merkir graf þess á mynd 18.



Mynd 18. Gröf þriggja lografalla, merkt A, B og C.

31. $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x)$

32. $g(x)=\log_{2}(x)$

33. $h(x)=\log_{\frac{3}{4}}(x)$

Teiknið gröf beggja fallanna í hverju pari í sama hnitakerfi.

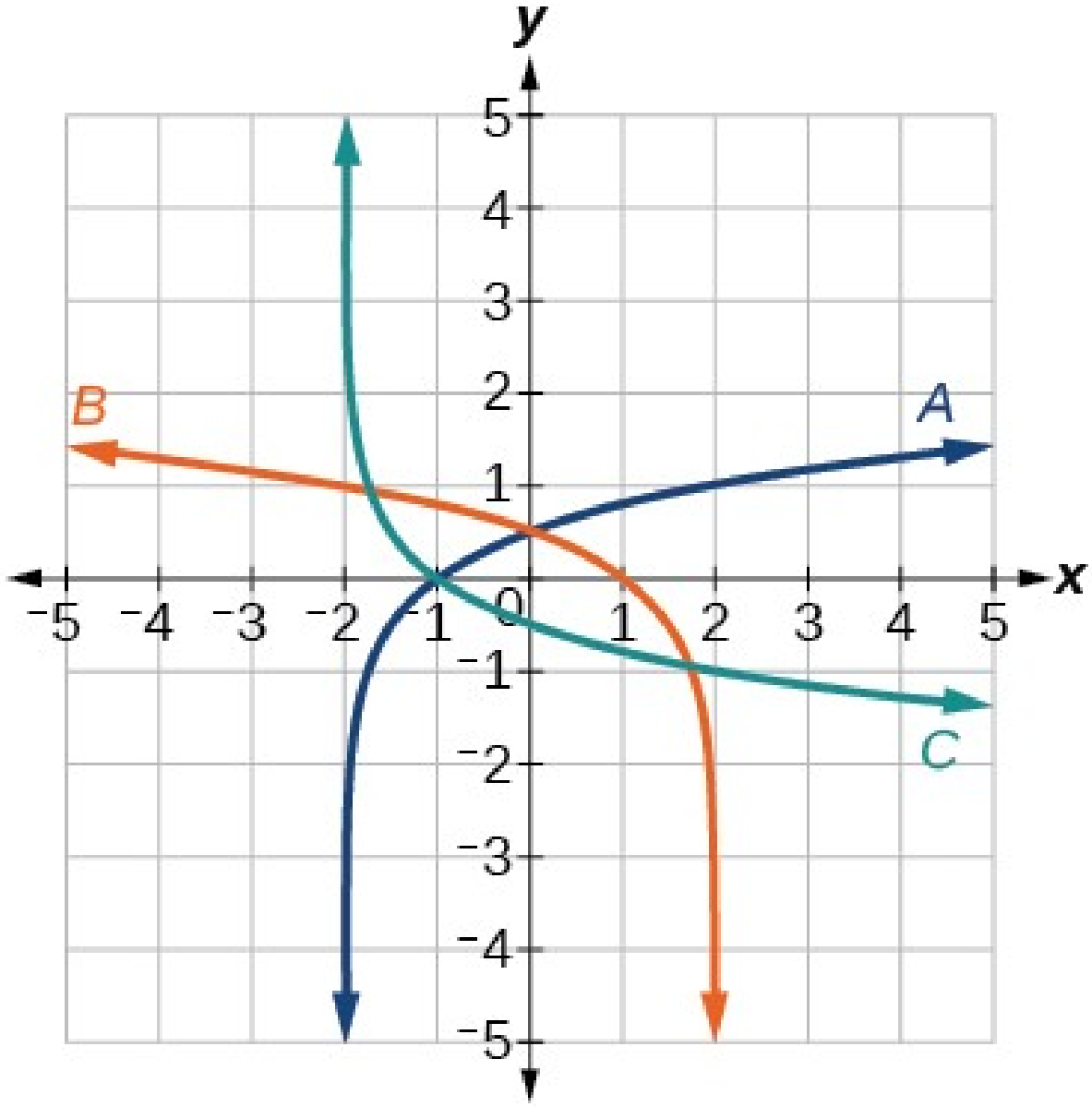
34. $f(x)=\log(x)$ og $g(x)=10^{x}$

35. $f(x)=\log(x)$ og $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x)$

36. $f(x)=\log_{4}(x)$ og $g(x)=\ln(x)$

37. $f(x)=e^{x}$ og $g(x)=\ln(x)$

Parið hvert fall í eftirfarandi verkefnum við bókstafinn sem merkir graf þess á mynd 19.



Mynd 19. Gröf þriggja ummyndaðra lografalla, merkt A, B og C.

38.

$$f(x)=\log_4(-x+2)$$

39.

$$g(x)=-\log_4(x+2)$$

40.

$$h(x)=\log_4(x+2)$$

Teiknið skissu af grafi fallsins í hverju verkefni.

41.

$$f(x)=\log_2(x+2)$$

42.

$$f(x)=2\log(x)$$

43.

$$f(x)=\ln(-x)$$

44.

$$g(x)=\log(4x+16)+4$$

45.

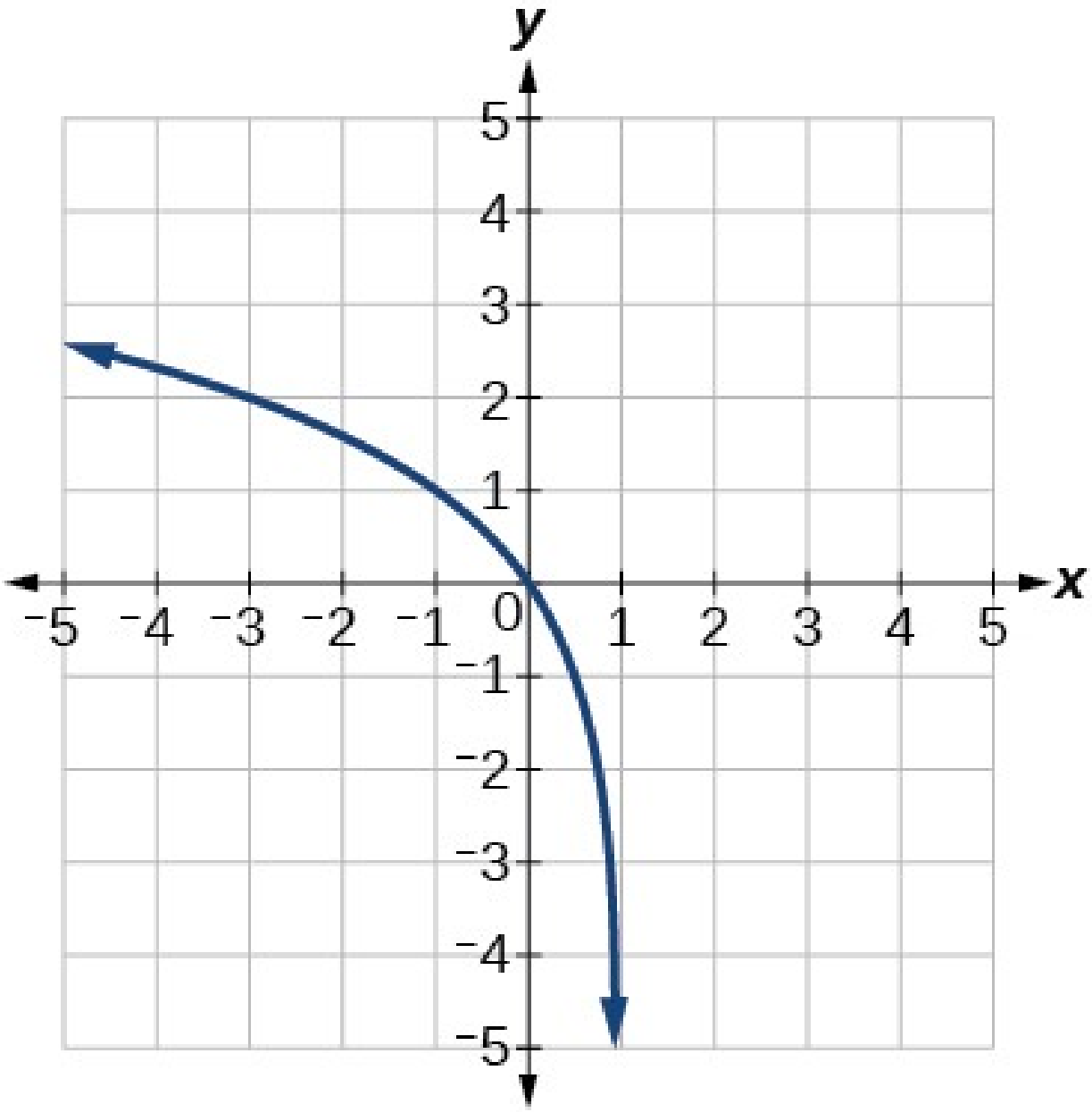
$$g(x)=\log(6-3x)+1$$

46.

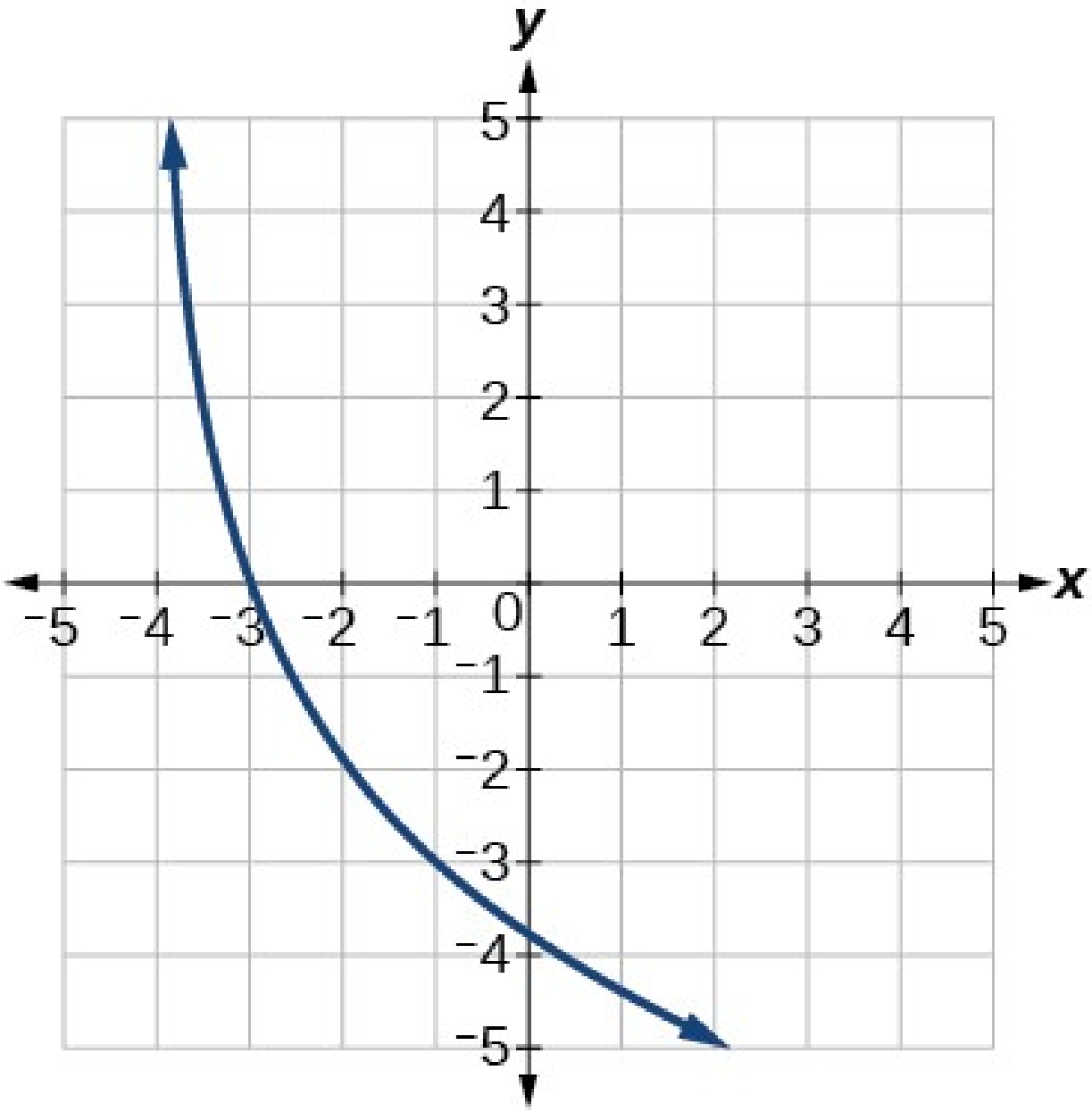
$$h(x)=-\frac{1}{2}\ln(x+1)-3$$

Ritið lograjöfnu sem samsvarar grafinu í hverju verkefni.

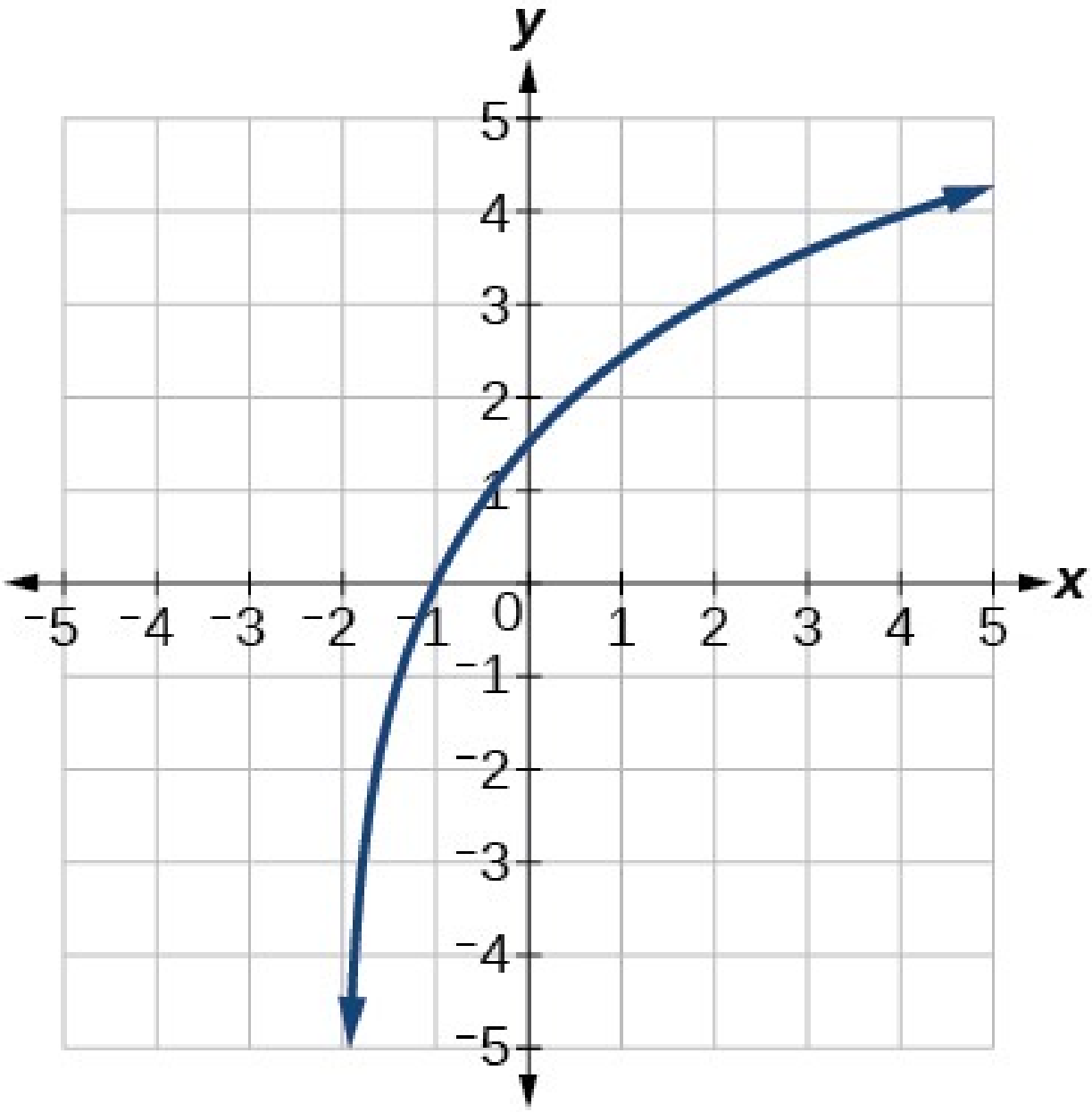
47. Notið $y=\log_2(x)$ sem grunnfall.



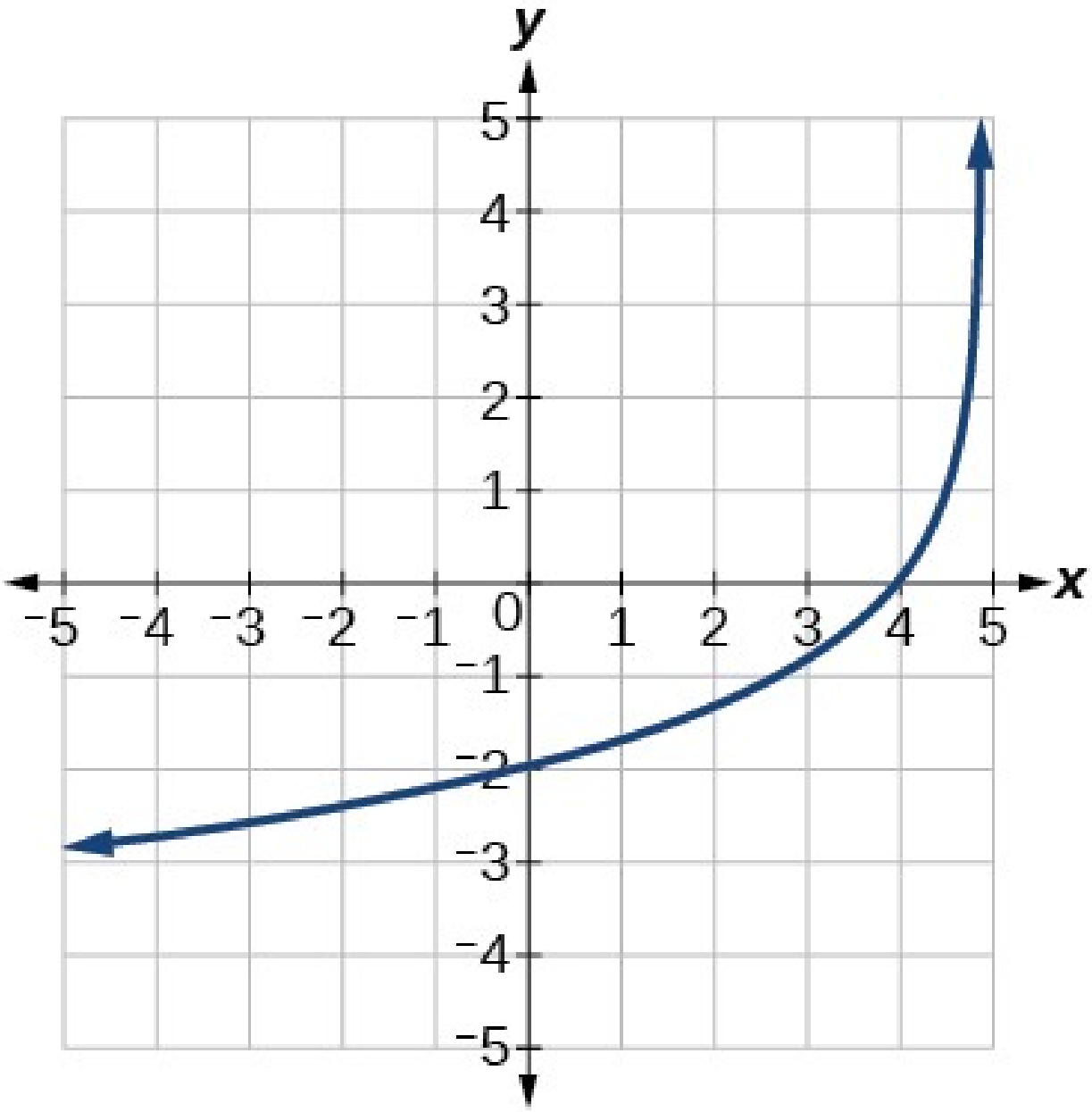
48. Notið $f(x)=\log_3(x)$ sem grunnfall.



49. Notið $f(x)=\log_4(x)$ sem grunnfall.



50. Notið $f(x)=\log_5(x)$ sem grunnfall.



Tækni

Notið grafreikni til að finna nálgunarlausn hverrar jöfnu í eftirfarandi verkefnum.

51.

$$\log(x-1)+2=\ln(x-1)+2$$

52.

$$\log(2x-3)+2=-\log(2x-3)+5$$

53.

$$\ln(x-2)=-\ln(x+1)$$

54.

$$2\ln(5x+1)=\frac{1}{2}\ln(-5x)+1$$

55.

$$\frac{1}{3}\log(1-x)=\log(x+1)+\frac{1}{3}$$

Frekari verkefni

56. Látum b vera jákvæða rauntölu og $b\neq 1$. Hvert er gildi $\log_b 1$? Sannreynið niðurstöðuna.

57. Skoðið og ræðið gröf $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x)$ og $g(x)=-\log_2(x)$. Setjið fram tilgátu út frá niðurstöðunni.

58. Sannið tilgátuna úr síðasta verkefni.

59. Hvert er skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-4}\right)$? Ræðið niðurstöðuna.

60. Finnið með algebru og veldareglum skurðpunkta grafs fallsins $f(x)=\log(x^2+4x+4)$ við x-ás. Sýnið lausnarskrefin og sannreynið síðan niðurstöðuna með því að teikna graf fallsins.

4.5 Reiknireglur logra

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum kafla lærið þið að:

- Nota margfeldisreglu logra.
- Nota deilingarreglu logra.
- Nota veldisreglu logra.
- Liða lograstæður niður.
- Draga lograstæður saman.
- Nota grunnskiptiformúluna fyrir logra.



Mynd 1 Sýrustig saltsýru er prófað með lakkmúspappír. (mynd: David Berardan)

Í efnafræði er sýrustig, táknað með pH, mælikvarði á hversu súr eða basísk vatnslausn er. Oft er pH-kvarðinn sýndur frá 0 til 14, en pH-gildi geta einnig legið utan þess bils. Við 25 °C eru

lausnir með pH-gildi undir 7 súrar en lausnir með pH-gildi yfir 7 basískar. Líkaminn heldur sýrustigi blóðsins innan þröngra marka; eðlilegt pH-gildi blóðs er um 7,35–7,45. Hér eru pH-gildi nokkurra algengra efna, bæði súrra og basískra:

- Rafgeymasýra: 0,8
- Magasýra: 2,7
- Appelsínusafi: 3,3
- Hreint vatn: 7 (við 25 °C)
- Mannsblóð: 7,35
- Kókosvatn: 4,5–5,2 í rannsókn á mismunandi þroskastigum
- Natríumhýdroxíð (vítissódi): 14

4

Til að vita hvort vatnslausn sé súr eða basísk skoðum við pH-gildi hennar. Fyrir þynntar lausnir má nálga pH með styrk vetnisjóna samkvæmt eftirfarandi formúlu. Hér táknar $[H^+]$ tölugildi styrks vetnisjóna í mólum á lítra (mól/L), en ekki fjölda jónanna. Við notum þessa nálgun í dæmunum:

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log([H^+]) \\ &= \log\left(\tfrac{1}{[H^+]}\right) \end{aligned}$$

Stæðurnar $-\log\left(\left[H^+\right]\right)$ og $\log\left(\frac{1}{\left[H^+\right]}\right)$ eru jafngildar samkvæmt einni af reiknireglum logra sem við skoðum í þessum kafla.

Notkun margfeldisreglu logra

Lografall og samsvarandi vísisfall eru andhverf föll. Reiknireglur logra tengjast því veldareglunum. Við byrjum á tveimur einföldum reglum. Hér og í framhaldinu gerum við ráð fyrir að grunntalan b sé jákvæð og b ≠ 1:

$$\begin{aligned} \log_b 1 &= 0 \\ \log_b b &= 1 \end{aligned}$$

Til dæmis er $\log_5 1 = 0$ því $5^0 = 1$. Einnig er $\log_5 5 = 1$ því $5^1 = 5$.

Af því að föllin eru andhverf gilda einnig þessar reglur:

$$\begin{aligned} \log_b(b^x) &= x \\ b^{\log_b x} &= x, x > 0 \end{aligned}$$

Til að reikna til dæmis $\log\left(100\right)$, getum við ritað lograns sem $\log_{10}\left(10^2\right)$, og beitt síðan andhverfueiginleikanum $\log_b\left(b^x\right) = x$ til að fá $\log_{10}\left(10^2\right) = 2$.

Til að reikna $e^{\ln(7)}$, getum við ritað lograns sem $e^{\log_e 7}$, og beitt síðan andhverfueiginleikanum $b^{\log_b x} = x$ til að fá $e^{\log_e 7} = 7$.

Lograföll eru eintæk. Því gildir þetta jafngildi fyrir jákvæðar tölur M og N:

$$\log_b M = \log_b N \text{ ef og aðeins ef } M = N$$

Við getum notað eintæknieiginleikann til að leysa jöfnuna $\log_3(3x) = \log_3(2x+5)$ fyrir x. Þar sem grunntölurnar eru þær sömu getum við beitt eintæknieiginleikanum með því að setja viðföngin jöfn og leysa fyrir x:

$$\begin{aligned} 3x &= 2x+5 && \text{Setjum viðföngin jöfn.} \\ x &= 5 && \text{Drögum frá } 2x. \end{aligned}$$

En hvað um jöfnuna $\log_3(3x)+\log_3(2x+5)=2$? Eintæknieiginleikinn hjálpar okkur ekki í þessu tilviki. Áður en við getum leyst jöfnu af þessu tagi þurfum við aðferð til að sameina liðina vinstra megin í jöfnunni.

Munið að við notum margfeldisreglu velda til að sameina margfeldi velda með því að leggja saman veldisvísana: $x^a x^b = x^{a+b}$. Samsvarandi eiginleiki logra kallast margfeldisregla logra. Hún segir að logri margfeldis sé jafn summu logra. Þar sem lograr eru veldisvísar og við margföldum veldi með sömu grunntölu getum við lagt veldisvísana saman. Við notum andhverfueiginleikann til að leiða út margfeldisregluna hér á eftir.

Gefin er rauntala x og jákvæðar rauntölur M, N, og b, þar sem $b \neq 1$, Við sýnum að

$$\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N).$$

Látum $m = \log_b M$ og $n = \log_b N$. Á veldisformi eru þessar jöfnur $b^m = M$ og $b^n = N$. Af því leiðir að

$$\begin{aligned} \log_b(MN) &= \log_b(b^m b^n) && \text{Setjum inn fyrir } M \text{ og } N. \\ &= \log_b(b^{m+n}) && \text{Beitum margfeldisreglu velda.} \\ &= m+n && \text{Beitum andhverfueiginleika logra.} \\ &= \log_b(M)+\log_b(N) && \text{Setjum inn fyrir } m \text{ og } n. \end{aligned}$$

Með því að beita margfeldisreglu logra aftur og aftur má rita logra margfeldis jákvæðra þátta sem summu logra þáttanna, sama hve margir þættirnir eru. Skoðum til dæmis $\log_b(wxyz)$., þar sem w, x, y og z eru jákvæðar tölur. Þá fæst:

$$\log_b(wxyz) = \log_b w + \log_b x + \log_b y + \log_b z$$

MARGFELDISREGLA LOGRA

Samkvæmt margfeldisreglu logra er logri margfeldis jákvæðra þátta jafn summu logra þáttanna. Hér eru M og N jákvæðar tölur og grunntalan b er jákvæð og frábrugðin 1.

$$\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N) \text{ fyrir } b > 0$$

AÐFERÐ

Þegar gefinn er logri margfeldis skal nota margfeldisreglu logra til að rita jafngilda summu logra.

1. Þáttið viðfangið að fullu og ritið hvern heiltöluþátt sem margfeldi frumtalna.

2. Ritið jafngildu stæðuna með því að leggja saman logra þáttanna.

SÝNIDÆMI 1

Notkun margfeldisreglu logra

Liðið niður $\log_3(30x(3x+4))$.

Lausn

Við byrjum á að þátta viðfangið að fullu og ritum 30 sem margfeldi frumtalna.

$$\log_3(30x(3x+4))=\log_3(2\cdot 3\cdot 5\cdot x\cdot(3x+4))$$

4

Næst ritum við lograrnn sem summu logra þáttanna.

$$\log_3(30x(3x+4))=\log_3(2)+\log_3(3)+\log_3(5)+\log_3(x)+\log_3(3x+4)$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Liðið niður $\log_b(8k)$.

Notkun deilingarreglu logra

Samsvarandi regla gildir um logra kvóta. Samkvæmt deilingarreglu velda má deila veldum með sömu grunntölu með því að draga veldisvísi nefnarans frá veldisvísi teljarans: $\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$.

Deilingarregla logra segir að logri kvóta tveggja jákvæðra talna sé jafn logra teljarans að frádregnum logra nefnarans. Við leiðum regluna út með deilingarreglu velda og andhverfueiginleika logra.

Gefin er rauntala x og jákvæðar rauntölur M, N, og b, þar sem $b\neq 1$, Við sýnum að

$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right)=\log_b(M)-\log_b(N).$$

Látum $m=\log_b M$ og $n=\log_b N$. Á veldisformi eru þessar jöfnur $b^m=M$ og $b^n=N$. Af því leiðir að

$$\begin{aligned}
\log_b\left(\frac{M}{N}\right) &= \log_b\left(\frac{b^m}{b^n}\right) && \text{Setjum inn fyrir } M \text{ og } N.\\
&= \log_b\left(b^{m-n}\right) && \text{Beitum deilingarreglu velda.}\\
&= m-n && \text{Beitum andhverfueiginleika logra.}\\
&= \log_b(M)-\log_b(N) && \text{Setjum inn fyrir } m \text{ og } n.
\end{aligned}$$

Til að liða til dæmis niður $\log\left(\frac{2x^2+6x}{3x+9}\right)$, þurfum við fyrst að rita kvótann á fullstyttu formi. Með þáttun og styttingu fæst

$$\log\left(\frac{2\,x^2+6\,x}{3\,x+9}\right)=\log\left(\frac{2\,x\,(x+3)}{3\,(x+3)}\right)$$ Þáttum teljara og nefnara.

$$=\log\left(\frac{2\,x}{3}\right)$$ Styttum út sameiginlega þætti.

Næst beitum við deilingarreglunni með því að draga logra nefnarans frá logra teljarans. Síðan beitum við margfeldisreglunni.

$$\begin{aligned}\log\left(\tfrac{2x}{3}\right) &= \log(2x)-\log(3)\\ &= \log(2)+\log(x)-\log(3)\end{aligned}$$

DEILINGARREGLA LOGRA

Samkvæmt deilingarreglu logra er logri kvóta tveggja jákvæðra talna jafn logra teljarans að frádregnum logra nefnarans. Hér eru M og N jákvæðar tölur og grunntalan b er jákvæð og frábrugðin 1.

$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right)=\log_b M-\log_b N$$

AÐFERÐ

Þegar gefinn er logri kvóta skal nota deilingarreglu logra til að rita jafngildan mismun logra.

1. Fullstyttið viðfangið með því að þátta teljara og nefnara og stytta út sameiginlega þætti.
2. Ritið jafngildu stæðuna með því að draga logra nefnarans frá logra teljarans.
3. Athugið hvort allir liðir hafi verið liðaðir að fullu. Ef ekki, notið þá margfeldisreglu logra til að ljúka liðuninni.

SÝNIDÆMI 2

Notkun deilingarreglu logra

Liðið niður $\log_2\left(\frac{15\,x(x-1)}{(3\,x+4)(2-x)}\right)$.

Lausn

Kvótinn er þegar þáttaður og fullstyttur. Við byrjum því á að beita deilingarreglunni.

$$\log_2\left(\frac{15\,x(x-1)}{(3\,x+4)(2-x)}\right)=\log_2\left(15\,x(x-1)\right)-\log_2\left((3\,x+4)(2-x)\right)$$

Liðirnir sem fást eru lograr margfelda. Til að liða stæðuna að fullu beitum við margfeldisreglunni og frumþáttum 15 sem $3\cdot 5$.

$$\log_2(15x(x-1)) - \log_2((3x+4)(2-x)) = [\log_2(3) + \log_2(5) + \log_2(x) + \log_2(x-1)] - [\log_2(3x+4) + \log_2(2-x)]$$
$$= \log_2(3) + \log_2(5) + \log_2(x) + \log_2(x-1) - \log_2(3x+4) - \log_2(2-x)$$

Greining

Í þessu dæmi og síðari dæmum þarf að huga að undantekningum. Í fyrsta lagi er stæðan ekki skilgreind fyrir $x = -\frac{4}{3}$ og $x = 2$. því nefnarar mega aldrei vera núll. Í öðru lagi verður viðfang logra að vera jákvætt, svo við sjáum á niðurliðaða logranum að $x > 0$, $x > 1$, $x > -\frac{4}{3}$, og $x < 2$.

Að sameina þessi skilyrði er utan efnis þessa hluta og við skoðum þau hvorki hér né í síðari verkefnum.

4

REYNIÐ SJÁLF #2

Liðið niður $\log_3\left(\frac{7x^2+21x}{7x(x-1)(x-2)}\right)$.

Notkun veldisreglu logra

Við höfum skoðað margfeldisregluna og deilingarregluna, en hvernig tökum við logra af veldi á borð við x^2? Ein aðferð er eftirfarandi:

$$\begin{aligned}\log_b\left(x^2\right) &= \log_b\left(x \cdot x\right) \\ &= \log_b x + \log_b x \\ &= 2\log_b x\end{aligned}$$

Hér notuðum við margfeldisreglu logra til að leiða út regluna fyrir veldisvísinn 2. Þetta er sértilvik veldisreglu logra: logri veldis er jafn veldisvísinum margfölduðum með logra grunntölu veldisins. Almenna reglan kemur hér á eftir. Þótt viðfang logra sé ekki ritað sem veldi má stundum endurrita það á veldisformi. Til dæmis

$$100 = 10^2 \qquad \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \qquad \tfrac{1}{e} = e^{-1}$$

VELDISREGLA LOGRA

Samkvæmt veldisreglu logra er logri veldis jafn veldisvísinum margfölduðum með logra grunntölu veldisins. Hér er M > 0, veldisvísirinn n er rauntala og grunntala lograns uppfyllir b > 0 og b ≠ 1.

$$\log_b\left(M^n\right) = n\log_b M$$

AÐFERÐ

Þegar gefinn er logri veldis skal nota veldisreglu logra til að rita jafngilt margfeldi stuðuls og logra.

1. Ritið viðfangið sem veldi ef þess þarf.
2. Ritið jafngildu stæðuna með því að margfalda veldisvísinn með logra grunntölunnar.

SÝNIDÆMI 3

Liðun logra með veldum

Liðið niður $\log_2 x^5$.

Lausn

Viðfangið er þegar ritað sem veldi, svo við finnum veldisvísinn, 5, og grunntöluna, x, og umritum stæðuna með því að margfalda veldisvísinn með logra grunntölunnar.

$$\log_2\left(x^5\right)=5\log_2 x$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Liðið niður $\ln x^2$.

SÝNIDÆMI 4

Stæða endurrituð sem veldi áður en veldisreglan er notuð

Liðið niður $\log_3(25)$ með veldisreglu logra.

Lausn

Við ritum viðfangið sem veldi: $\log_3(25)=\log_3\left(5^2\right)$.

Veldisvísirinn er 2 og grunntala veldisins er 5. Við margföldum því logra 5 með 2:

$$\log_3\left(5^2\right)=2\log_3(5)$$

REYNIÐ SJÁLF #4

Liðið niður $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

SÝNIDÆMI 5

Veldisreglan notuð í öfuga átt

Notið veldisreglu logra til að rita $4\ln(x)$ sem einn logra með stuðlinum 1.

Lausn

Þar sem logri veldis er margfeldi veldisvísisins og logra grunntölunnar leiðir af því að rita má margfeldi tölu og logra sem veldi. Í stæðunni $4\ln(x)$, lítum við á stuðulinn 4 sem veldisvísi og viðfangið x, sem grunntölu og ritum margfeldið sem logra veldis: $4\ln(x)=\ln(x^4)$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Notið veldisreglu logra til að rita $2\log_3 4$ sem einn logra með stuðlinum 1.

Liðun lograstæðna

Margfeldisreglan, deilingarreglan og veldisreglan kallast saman reiknireglur logra. Stundum þarf að beita fleiri en einni reglu til að einfalda stæðu. Í dæminu hér á eftir gerum við ráð fyrir að x og y séu jákvæðar tölur og að b > 0 og b ≠ 1:

$$\begin{aligned}\log_b\left(\tfrac{6x}{y}\right) &= \log_b(6x)-\log_b y\\ &= \log_b 6+\log_b x-\log_b y\end{aligned}$$

Veldisregluna má nota til að liða lograstæður þar sem veldisvísar eru neikvæðir eða brot. Hér er önnur sönnun á deilingarreglu logra. Hún byggist á því að margföldunarandhverfu tölunnar C má rita sem C^{-1}. Við gerum ráð fyrir að A og C séu jákvæðar tölur:

$$\begin{aligned}\log_b\left(\tfrac{A}{C}\right) &= \log_b\left(AC^{-1}\right)\\ &= \log_b(A)+\log_b\left(C^{-1}\right)\\ &= \log_b A+(-1)\log_b C\\ &= \log_b A-\log_b C\end{aligned}$$

Reglurnar má einnig nota í hina áttina: með margfeldisreglunni má draga summu logra saman í logra margfeldis og með deilingarreglunni má draga mismun logra saman í logra kvóta.

Með æfingu verður hægt að liða einfaldar lograstæður niður í huganum og rita lokasvarið beint. Reiknireglurnar gilda um margfeldi, kvóta, veldi og rætur. Hins vegar má ekki skipta logra summu eða mismunar beint í summu eða mismun logra. Stundum má þó þátta viðfangið fyrst og beita síðan reglunum.

SÝNIDÆMI 6

Liðun logra með margfeldis-, deilingar- og veldisreglum

Endurritið $\ln\left(\dfrac{x^4y}{7}\right)$ sem summu eða mismun logra. Gerið ráð fyrir að x og y séu jákvæðar tölur.

Lausn

Viðfangið er kvóti tveggja stæðna, svo að fyrst notum við deilingarregluna:

$$\ln\left(\frac{x^4 y}{7}\right)=\ln\left(x^4 y\right)-\ln(7)$$

Viðfang lograns í fyrri liðnum er margfeldi. Við beitum því margfeldisreglunni:

$$\ln\left(x^4 y\right)-\ln(7)=\ln\left(x^4\right)+\ln(y)-\ln(7)$$

Að lokum notum við veldisregluna á fyrsta liðinn:

$$\ln\left(x^4\right)+\ln(y)-\ln(7)=4\ln(x)+\ln(y)-\ln(7)$$

REYNIÐ SJÁLF #6

Liðið niður $\log\left(\frac{x^2 y^3}{z^4}\right)$. Gerið ráð fyrir að x, y og z séu jákvæðar tölur.

SÝNIDÆMI 7

Veldisregla logra notuð til að einfalda logra rótarstæðu

Liðið niður $\log\left(\sqrt{x}\right)$.

Lausn

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\right) &= \log x^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \tfrac{1}{2}\log x\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #7

Liðið niður $\ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$.

SPURT OG SVARAÐ

Má liða niður $\ln\left(x^2+y^2\right)$?

Nei, reiknireglur logra leyfa ekki að skipta logra summu beint í summu logra. Til dæmis er ln(x² + y²) ekki almennt jafnt ln(x²) + ln(y²).

SÝNIDÆMI 8

Liðun flókinna lograstæðna

Liðið niður $\log_6\left(\frac{64x^3(4x+1)}{(2x-1)}\right)$.

Lausn

Við liðum stæðuna niður með margfeldis- og deilingarreglunum.

$$\log_6\left(\frac{64\,x^3\,(4\,x+1)}{(2\,x-1)}\right)$$

$=\log_6 64+\log_6 x^3+\log_6(4\,x+1)-\log_6(2\,x-1)$ Beitum deilingarreglunni og margfeldisreglunni.

$=\log_6 2^6+\log_6 x^3+\log_6(4\,x+1)-\log_6(2\,x-1)$ Ritum 64 sem 2^6.

$=6\,\log_6 2+3\,\log_6 x+\log_6(4\,x+1)-\log_6(2\,x-1)$ Beitum veldisreglunni.

REYNIÐ SJÁLF #8

4

Liðið niður $\ln\left(\frac{\sqrt{(x-1)(2x+1)^2}}{(x^2-9)}\right)$.

Samandráttur lograstæðna

Með reiknireglum logra má draga summur og mismun logra saman í einn logra. Fyrst má nota veldisregluna til að færa stuðla logranna inn í viðföngin sem veldisvísa. Lograrnir verða að hafa sömu grunntölu þegar margfeldisreglunni eða deilingarreglunni er beitt. Síðar í þessum kafla lærum við að skipta um grunntölu logra. Skilgreiningarskilyrði upphaflegu stæðunnar gilda áfram eftir samdráttinn.

AÐFERÐ

Dragið stæðu sem er summa eða mismunur logra með sömu grunntölu saman í einn logra. Lograrnir mega hafa tölulega stuðla.

1. Beitið veldisreglunni fyrst. Finnið liði sem eru margfeldi stuðuls og logra og endurritið hvern þeirra sem logra veldis.
2. Beitið næst margfeldisreglunni. Endurritið summur logra sem logra margfeldis.
3. Beitið deilingarreglunni síðast. Endurritið mismun logra sem logra kvóta.

SÝNIDÆMI 9

Lograr dregnir saman með margfeldis- og deilingarreglum

Ritið $\log_3(5)+\log_3(8)-\log_3(2)$ sem einn logra.

Lausn

Fyrst beitum við margfeldisreglunni á fyrstu tvo lograna:

$$\log_3(5)+\log_3(8)=\log_3(5\cdot 8)=\log_3(40)$$

Upprunalega stæðan einfaldast þá í

$$\log_3(40)-\log_3(2)$$

Síðan fæst með deilingarreglunni

$$\log_3(40)-\log_3(2)=\log_3\left(\frac{40}{2}\right)=\log_3(20)$$

REYNIÐ SJÁLF #9

Dragið saman $\log 3-\log 4+\log 5-\log 6$.

SÝNIDÆMI 10

Samandráttur flókinna lograstæðna

Dragið saman $\log_2\left(x^2\right)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-3\log_2\left((x+3)^2\right)$.

Lausn

Fyrst beitum við veldisreglunni:

$$\log_2\left(x^2\right)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-3\log_2\left((x+3)^2\right)=\log_2\left(x^2\right)+\log_2\left(\sqrt{x-1}\right)-\log_2\left((x+3)^6\right)$$

Næst beitum við margfeldisreglunni á summuna:

$$\log_2\left(x^2\right)+\log_2\left(\sqrt{x-1}\right)-\log_2\left((x+3)^6\right)=\log_2\left(x^2\sqrt{x-1}\right)-\log_2\left((x+3)^6\right)$$

Að lokum beitum við deilingarreglunni á mismuninn:

$$\log_2\left(x^2\sqrt{x-1}\right)-\log_2\left((x+3)^6\right)=\log_2\frac{x^2\sqrt{x-1}}{(x+3)^6}$$

REYNIÐ SJÁLF #10

Endurritið $\log(5)+0{,}5\log(x)-\log(7x-1)+3\log(x-1)$ sem einn logra.

SÝNIDÆMI 11

Endurritað sem einn logri

Endurritið $2\log x-4\log(x+5)+\frac{1}{x}\log(3x+5)$ sem einn logra.

Lausn

Fyrst beitum við veldisreglunni:

$$2\log x-4\log(x+5)+\frac{1}{x}\log(3x+5)=\log\left(x^2\right)-\log(x+5)^4+\log\left((3x+5)^{x^{-1}}\right)$$

Næst endurröðum við liðunum og beitum margfeldisreglunni á summuna:

$$\log\left(x^2\right)-\log\left(x+5\right)^4+\log\left(\left(3x+5\right)^{x^{-1}}\right)$$

$$=\log\left(x^2\right)+\log\left(\left(3x+5\right)^{x^{-1}}\right)-\log\left(x+5\right)^4$$

$$=\log\left(x^2\left(3x+5\right)^{x^{-1}}\right)-\log\left(x+5\right)^4$$

Að lokum beitum við deilingarreglunni á mismuninn:

$$=\log\left(x^2\left(3x+5\right)^{x^{-1}}\right)-\log\left(x+5\right)^4=\log\frac{x^2\left(3x+5\right)^{x^{-1}}}{\left(x+5\right)^4}$$

4

REYNIÐ SJÁLF #11

Dragið saman $4\left(3\log\left(x\right)+\log\left(x+5\right)-\log\left(2x+3\right)\right)$.

SÝNIDÆMI 12

Beiting reiknireglna logra

Notum nálgunina $\text{pH}=-\log\left[H^+\right]$. fyrir þynntar vatnslausnir, eins og í upphafi kaflans. Hvaða áhrif hefur það á pH-gildi lausnar ef styrkur vetnisjóna í henni tvöfaldast?

Lausn

Látum C tákna tölugildi upphaflegs styrks vetnisjóna í mól/L og P tákna upphaflegt pH-gildi lausnarinnar. Í líkaninu er $P=-\log\left(C\right)$. Ef styrkurinn tvöfaldast verður tölugildi hans $2C$. Nýja pH-gildið er þá

$$\text{pH}=-\log\left(2C\right)$$

Með margfeldisreglu logra fæst

$$\text{pH}=-\log\left(2C\right)=-\left(\log\left(2\right)+\log\left(C\right)\right)=-\log\left(2\right)-\log\left(C\right)$$

Þar sem $P=-\log\left(C\right)$, er nýja pH-gildið

$$\text{pH}=P-\log\left(2\right)\approx P-0{,}301$$

Samkvæmt líkaninu lækkar pH-gildið um það bil 0,301 þegar styrkur vetnisjóna tvöfaldast.

REYNIÐ SJÁLF #12

Hvernig breytist pH-gildið samkvæmt sama líkani þegar styrkur vetnisjóna minnkar um helming?

Notkun grunnskiptiformúlunnar fyrir logra

Ef reiknivél hefur aðeins takka fyrir tugalogra og náttúrulega logra má samt reikna logra með öðrum grunntölum. Með grunnskiptiformúlunni endurritum við lograna sem kvóta tveggja logra með sömu nýju grunntölu. Við getum valið grunntöluna 10 eða e, til að nota þessa takka.

Við leiðum grunnskiptiformúluna út með því að nota skilgreiningu logra og veldisreglu logra. Eintæknieiginleiki lografallsins tryggir að jafngildið varðveitist þegar við tökum logra af báðum hliðum jöfnunnar.

Gefnar eru jákvæðar rauntölur M, b, og n, þar sem $n \neq 1$ og $b \neq 1$, Við sýnum að

$$\log_b M = \frac{\log_n M}{\log_n b}$$

Látum $y = \log_b M$. Með því að hefja grunntöluna b í veldi beggja hliða fáum við vísisform, nefnilega $b^y = M$. Af því leiðir að

$\log_n (b^y) = \log_n M$ Tökum logra með grunntölunni n af báðum hliðum.

$y \log_n b = \log_n M$ Beitum veldisreglu logra.

$y = \frac{\log_n M}{\log_n b}$ Einangrum y.

$\log_b M = \frac{\log_n M}{\log_n b}$ Setjum inn fyrir y.

Til að reikna $\log_5 36$ með tugalogratakka reiknivélar endurritum við stæðuna sem kvóta tugalogra:

$\log_5 36 = \frac{\log(36)}{\log(5)}$ Beitum grunnskiptiformúlunni með nýju grunntölunni 10.

$\approx 2{,}2266$ Reiknum með reiknivél og námundum að fjórum aukastöfum.

GRUNNSKIPTIFORMÚLAN

Með grunnskiptiformúlunni má reikna logra með hvaða jákvæðri grunntölu sem er, annarri en 1.

Fyrir allar jákvæðar rauntölur M, b, og n, þar sem $n \neq 1$ og $b \neq 1$,

$$\log_b M = \frac{\log_n M}{\log_n b}.$$

Sérstaklega má velja grunntöluna e eða 10 og rita lograna sem kvóta náttúrulegra logra eða tugalogra:

$$\log_b M = \frac{\ln M}{\ln b}$$

og

$$\log_b M = \frac{\log M}{\log b}$$

AÐFERÐ

Gefinn er logri á forminu $\log_b M$, Notið grunnskiptiformúluna til að rita hann sem kvóta logra með einhverri jákvæðri grunntölu n, þar sem $n \neq 1$.

1. Veljið nýju grunntöluna n,. Tugalogrinn $\log(x)$, hefur grunntöluna 10 en náttúrulegi logrinn $\ln(x)$, hefur grunntöluna e.
2. Endurritið logrann sem kvóta með grunnskiptiformúlunni.
   a. Teljari kvótans verður logri með grunntöluna n og viðfangið M.
   b. Nefnari kvótans verður logri með grunntöluna n og viðfangið b.

4

SÝNIDÆMI 13

Lograstæðum breytt í stæður sem innihalda aðeins náttúrulega logra

Breytið $\log_5 3$ í kvóta náttúrulegra logra.

Lausn

Þar sem við ritum $\log_5 3$ sem kvóta náttúrulegra logra verður nýja grunntalan $n = e$.

Samkvæmt grunnskiptiformúlunni er náttúrulegi logrinn af 3 í teljara og náttúrulegi logrinn af 5 í nefnara:

$$\begin{aligned} \log_b M &= \tfrac{\ln M}{\ln b} \\ \log_5 3 &= \tfrac{\ln 3}{\ln 5} \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #13

Breytið $\log_{0,5} 8$ í kvóta náttúrulegra logra.

SPURT OG SVARAÐ

Má rita tugalogra sem kvóta náttúrulegra logra?

Já. Munið að $\log 9$ *merkir* $\log_{10} 9$. *Því er* $\log 9 = \dfrac{\ln 9}{\ln 10}$.

SÝNIDÆMI 14

Grunnskiptiformúlan notuð með reiknivél

Reiknið $\log_2(10)$ með grunnskiptiformúlunni og reiknivél.

Lausn

Samkvæmt grunnskiptiformúlunni getum við ritað lograrn með grunntöluna 2 sem logra með hvaða annarri grunntölu sem er. Þar sem reiknivélar geta reiknað náttúrulega logra gætum við valið náttúrulegan logra, sem er logri með grunntöluna e.

$\log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2}$ Beitum grunnskiptiformúlunni með nýju grunntölunni e.

$\approx 3{,}3219$ Reiknum með reiknivél og námundum að fjórum aukastöfum.

REYNIÐ SJÁLF #14

Reiknið $\log_5(100)$ með grunnskiptiformúlunni.

MIÐLAR

Á þessum vefsíðum fáið þið meiri kennslu og æfingu í reiknireglum logra.

- Reiknireglur logra
- Liðun lograstæðna
- Gildi náttúrulegrar lograstæðu reiknað

4.5 Verkefni

Hugtakaspurningar

1. Hvernig nýtist veldisregla logra þegar unnið er með logra af n-tu rót af x, það er $\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right)$?
2. Hvað gerir grunnskiptiformúlan? Hvers vegna er hún gagnleg þegar reiknivél er notuð?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal liða hvern logra niður eins langt og hægt er. Ritið stæðuna sem summu eða mismun logra, eftir því sem við á, og færið veldisvísa fram fyrir lograna sem stuðla. Gerið ráð fyrir að breytur í viðföngum séu jákvæðar og að grunntölur logra séu jákvæðar og frábrugðnar 1.

3. $$\log_b(7x \cdot 2y)$$
4. $$\ln(3ab \cdot 5c)$$
5. $$\log_b\left(\frac{13}{17}\right)$$

6.

$$\log_4\left(\frac{\frac{x}{z}}{w}\right)$$

7.

$$\ln\left(\frac{1}{4^k}\right)$$

8.

$$\log_2\left(y^x\right)$$

4

Í eftirfarandi verkefnum skal draga stæðuna saman í einn logra ef þess er kostur.

9.

$$\ln(7)+\ln(x)+\ln(y)$$

10.

$$\log_3(2)+\log_3(a)+\log_3(11)+\log_3(b)$$

11.

$$\log_b(28)-\log_b(7)$$

12.

$$\ln(a)-\ln(d)-\ln(c)$$

13.

$$-\log_b\left(\frac{1}{7}\right)$$

14.

$$\frac{1}{3}\ln(8)$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota reiknireglur logra til að liða hvern logra niður eins langt og hægt er. Ritið stæðuna sem summu eða mismun logra og færið veldisvísa fram fyrir lograna sem stuðla. Gerið ráð fyrir að breyturnar séu jákvæðar og að upphaflega lograstæðan sé skilgreind.

15.

$$\log\left(\frac{x^{15}y^{13}}{z^{19}}\right)$$

16.

$$\ln\left(\frac{a^{-2}}{b^{-4}c^{5}}\right)$$

17.

$$\log\left(\sqrt{x^{3}y^{-4}}\right)$$

18.

$$\ln\left(y\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)$$

19.

$$\log\left(x^{2}y^{3}\sqrt[3]{x^{2}y^{5}}\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota reiknireglur logra til að draga hverja stæðu saman í einn logra.

20.

$$\log\left(2x^{4}\right)+\log\left(3x^{5}\right)$$

21.

$$\ln\left(6x^{9}\right)-\ln\left(3x^{2}\right)$$

22.

$$2\log\left(x\right)+3\log\left(x+1\right)$$

23.

$$\log\left(x\right)-\frac{1}{2}\log\left(y\right)+3\log\left(z\right)$$

24.

$$4\log_{7}\left(c\right)+\frac{\log_{7}\left(a\right)}{3}+\frac{\log_{7}\left(b\right)}{3}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal endurrita hverja stæðu sem jafngildan kvóta logra með tilgreindri grunntölu.

25. $\log_{7}\left(15\right)$ með grunntöluna e

26. $\log_{14}\left(55{,}875\right)$ með grunntöluna 10

Í eftirfarandi verkefnum er $\log_{5}\left(6\right)=a$ og $\log_{5}\left(11\right)=b$. Notið grunnskiptiformúluna og reiknireglur logra til að rita hverja stæðu með a og b. Sýnið lausnarskrefin.

27.

$$\log_{11}(5)$$

28.

$$\log_{6}(55)$$

29.

$$\log_{11}\left(\frac{6}{11}\right)$$

4

Töluleg verkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal nota reiknireglur logra til að reikna gildið án reiknivélar.

30.

$$\log_{3}\left(\frac{1}{9}\right)-3\log_{3}(3)$$

31.

$$6\log_{8}(2)+\frac{\log_{8}(64)}{3\log_{8}(4)}$$

32.

$$2\log_{9}(3)-4\log_{9}(3)+\log_{9}\left(\frac{1}{729}\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota grunnskiptiformúluna til að rita hverja stæðu sem kvóta náttúrulegra logra. Reiknið síðan gildið með reiknivél og námundið að fimm aukastöfum.

33.

$$\log_{3}(22)$$

34.

$$\log_{8}(65)$$

35.

$$\log_{6}(5{,}38)$$

36.

$$\log_{4}\left(\frac{15}{2}\right)$$

37. $\log_{\frac{1}{2}}(4{,}7)$

Viðbótarverkefni

38. Notið margfeldisreglu logra til að finna öll gildi x þannig að $\log_{12}(2x+6)+\log_{12}(x+2)=2$. Sýnið lausnarskrefin.

39. Notið deilingarreglu logra til að finna öll gildi x þannig að $\log_6(x+2)-\log_6(x-3)=1$. Sýnið lausnarskrefin.

40. Má leiða veldisreglu logra út frá reglunni um veldi af veldi með því að ganga út frá $b^x=m$? Ef ekki, útskýrið hvers vegna. Ef svo er, sýnið útleiðsluna.

41. Sannið að $\log_b(n)=\dfrac{1}{\log_n(b)}$ fyrir allar jákvæðar heiltölur $b>1$ og $n>1$.

42. Gildir $\log_{81}(2401)=\log_3(7)$? Staðfestið fullyrðinguna með algebru.

4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum kafla lærið þið að:

- Leysa vísisjöfnur með því að rita báðar hliðar sem veldi með sömu grunntölu.
- Nota logra til að leysa vísisjöfnur.
- Nota skilgreiningu logra til að leysa lograjöfnur.
- Nota eintæknieiginleika logra til að leysa lograjöfnur.
- Leysa hagnýt verkefni með vísisjöfnum og lograjöfnum.

4



Mynd 1 Villtar kanínur í Ástralíu. Kanínustofninn óx svo hratt að ástandið varð þekkt sem „kanínuplágan“. (mynd: Richard Taylor, Flickr)

Árið 1859 lét landeigandinn Thomas Austin flytja 24 kanínur frá Englandi til Ástralíu og sleppti hluta þeirra á landareign sinni til veiða. Kanínurnar aðlöguðust aðstæðum vel og fjölgaði ört. Á næstu áratugum breiddust þær út um stóran hluta Ástralíu.

Lýsa má stjórnlausri fjölgun dýra, eins og fjölgun villtu kanínanna í Ástralíu, með vísisföllum. Með því að leysa jöfnur sem byggjast á þessum föllum má greina vísisvöxt og spá fyrir um hann. Í þessum kafla lærum við aðferðir til að leysa vísisjöfnur.

Vísisjöfnur leystar með sömu grunntölu

Fyrsta aðferðin snýst um tvö föll með sömu grunntölu. Munið að eintæknieiginleiki vísisfalla segir okkur að fyrir allar rauntölur b, S, og T, þar sem $b>0, b\neq 1$, gildir $b^S=b^T$ ef og aðeins ef $S=T$.

Með öðrum orðum verða veldisvísarnir að vera jafnir þegar vísisjafna hefur sömu grunntölu beggja vegna jafnaðarmerkisins. Þetta gildir einnig þegar veldisvísarnir eru algebrustæður. Því má leysa margar vísisjöfnur með því að nota reiknireglur velda til að endurrita hvora hlið sem veldi með sömu grunntölu. Síðan notum við eintækni vísisfalla til að setja veldisvísana jafna og leysa fyrir óþekktu stærðina.

Skoðum til dæmis jöfnuna $3^{4x-7}=\frac{3^{2x}}{3}$. Til að leysa fyrir x, notum við deilingarreglu velda til að rita hægri hliðina þannig að báðar hliðar hafi sameiginlegu grunntöluna 3. Síðan beitum við eintæknieiginleika velda með því að setja veldisvísana jafna og leysa fyrir x:

$$
\begin{aligned}
3^{4x-7} &= \frac{3^{2x}}{3} \\
3^{4x-7} &= \frac{3^{2x}}{3^1} && \text{Ritum 3 sem } 3^1. \\
3^{4x-7} &= 3^{2x-1} && \text{Notum deilingarreglu velda.} \\
4x-7 &= 2x-1 && \text{Notum að vísisfallið er eintækt.} \\
2x &= 6 && \text{Drögum frá } 2x \text{ og bætum 7 við báðar hliðar.} \\
x &= 3 && \text{Deilum með } 2.
\end{aligned}
$$

VÍSISJÖFNUR LEYSTAR MEÐ EINTÆKNIEIGINLEIKA VÍSISFALLA

Fyrir allar algebrustæður S og T, og sérhverja jákvæða rauntölu $b \neq 1$,

$$b^S = b^T \text{ ef og aðeins ef } S = T$$

4

AÐFERÐ

Leysið vísisjöfnu á forminu $b^S = b^T$, þar sem S og T eru algebrustæður með óþekktri stærð.

1. Notið reiknireglur velda til að einfalda jöfnuna eftir þörfum þannig að hún verði á forminu $b^S = b^T$.
2. Notið eintæknieiginleikann til að setja veldisvísana jafna.
3. Leysið jöfnuna $S = T$, sem fæst fyrir óþekktu stærðina.

SÝNIDÆMI 1

Vísisjafna með sameiginlegri grunntölu leyst

Leysið $2^{x-1} = 2^{2x-4}$.

Lausn

$$
\begin{aligned}
2^{x-1} &= 2^{2x-4} && \text{Sameiginlega grunntalan er } 2. \\
x-1 &= 2x-4 && \text{Veldisvísarnir eru jafnir því að vísisfallið er eintækt.} \\
x &= 3 && \text{Leysum fyrir } x.
\end{aligned}
$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Leysið $5^{2x} = 5^{3x+2}$.

Jöfnur endurritaðar þannig að öll veldi hafi sömu grunntölu

Stundum er sameiginleg grunntala vísisjöfnu ekki sýnileg í upphafi. Þá endurritum við liðina í jöfnunni sem veldi með sameiginlegri grunntölu og leysum með eintæknieiginleikanum.

Skoðum til dæmis jöfnuna $256 = 4^{x-5}$. Endurrita má báðar hliðar hennar sem veldi af 2. Síðan notum við reiknireglur velda og eintæknieiginleikann til að leysa fyrir x:

$256=4^{x-5}$

$2^8=(2^2)^{x-5}$ Ritum hvora hlið sem veldi með grunntölunni 2.

$2^8=2^{2x-10}$ Notum regluna um veldi af veldi.

$8=2x-10$ Notum að vísisfallið er eintækt.

$18=2x$ Bætum 10 við báðar hliðar.

$x=9$ Deilum með 2.

AÐFERÐ

Þegar grunntölur vísisjöfnu eru ólíkar skal leysa hana með eintæknieiginleikanum.

4

1. Endurritið hvora hlið jöfnunnar sem veldi með sameiginlegri grunntölu.
2. Notið reiknireglur velda til að einfalda jöfnuna eftir þörfum þannig að hún verði á forminu $b^S=b^T$.
3. Notið eintæknieiginleikann til að setja veldisvísana jafna.
4. Leysið jöfnuna $S=T$, sem fæst fyrir óþekktu stærðina.

SÝNIDÆMI 2

Jöfnur leystar með endurritun á sameiginlega grunntölu

Leysið $8^{x+2}=16^{x+1}$.

Lausn

$$8^{x+2}=16^{x+1}$$

$(2^3)^{x+2}=(2^4)^{x+1}$ Ritum 8 og 16 sem veldi af 2.

$2^{3x+6}=2^{4x+4}$ Þegar veldi er hafið í veldi eru veldisvísarnir margfaldaðir.

$3x+6=4x+4$ Notum að vísisfallið er eintækt og setjum veldisvísana jafna.

$x=2$ Leysum fyrir x.

REYNIÐ SJÁLF #2

Leysið $5^{2x}=25^{3x+2}$.

SÝNIDÆMI 3

Jöfnur leystar með því að endurrita rætur sem brotveldi með sameiginlegri grunntölu

Leysið $2^{5x}=\sqrt{2}$.

Lausn

$$2^{5x} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{Ritum kvaðratrótina af 2 sem veldi af } 2.$$
$$5x = \frac{1}{2} \quad \text{Notum að vísisfallið er eintækt.}$$
$$x = \frac{1}{10} \quad \text{Leysum fyrir } x.$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Leysið $5^x = \sqrt{5}$.

SPURT OG SVARAÐ

Hafa allar vísisjöfnur rauntölulausn? Ef ekki, hvernig má sjá í lausnarferlinu hvort lausn sé til?

Nei. Gildið b^x er alltaf jákvætt þegar b > 0 og x er rauntala. Ef útreikningar sýna að slíkt veldi þyrfti að vera núll eða neikvætt hefur jafnan enga rauntölulausn.

SÝNIDÆMI 4

Vísisjafna án rauntölulausnar

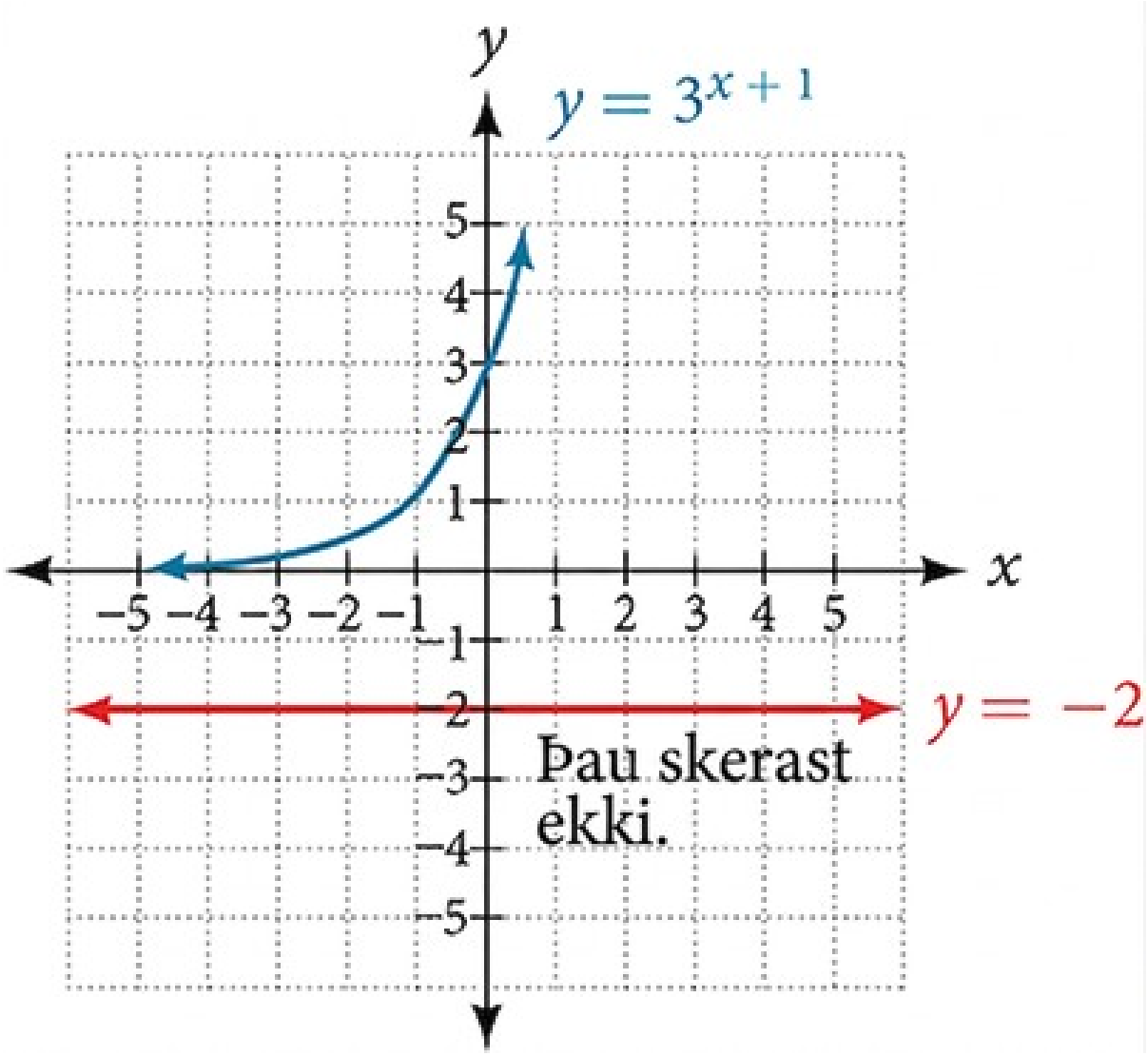
Leysið $3^{x+1} = -2$.

Lausn

Jafnan hefur enga lausn. Ekkert raungildi x gerir jöfnuna sanna því hvaða veldi sem er af jákvæðri tölu er jákvætt.

Greining

Mynd 2 sýnir að gröfin tvö skerast ekki og því verður vinstri hliðin aldrei jöfn þeirri hægri. Jafnan hefur því enga lausn.



Mynd 2. Gröf fallanna y = 3^{x+1} og y = −2 skerast ekki.

REYNIÐ SJÁLF #4

Leysið $2^x = -100$.

Vísisjöfnur leystar með logrum

Stundum er ekki auðvelt að rita báðar hliðar vísisjöfnu sem veldi með sömu grunntölu. Þá getum við leyst jöfnuna með því að taka logra af báðum hliðum, að því gefnu að þær séu jákvæðar. Fyrir jákvæðar tölur a og b gildir $\log(a) = \log(b)$ þá og því aðeins að $a = b$,. Því má taka logra með sömu grunntölu af báðum hliðum án þess að breyta lausnamenginu.

AÐFERÐ

Leysið vísisjöfnu með logrum þegar ekki er auðvelt að rita báðar hliðar með sömu grunntölu.

1. Gangið úr skugga um að báðar hliðar jöfnunnar séu jákvæðar. Takið síðan logra með sömu grunntölu af báðum hliðum.
   a. Ef veldi með grunntölunni 10 kemur fyrir í jöfnunni er hentugt að nota tugalogra.
   b. Annars má til dæmis nota náttúrulega logra.
2. Notið reiknireglur logra til að leysa fyrir óþekktu stærðina.

SÝNIDÆMI 5

Jafna með veldum ólíkra grunntalna leyst

Leysið $5^{x+2}=4^{x}$.

Lausn

$5^{x+2}=4^{x}$ Ekki er auðvelt að rita veldin með sömu grunntölu.

$\ln 5^{x+2}=\ln 4^{x}$ Tökum náttúrulega logra af báðum hliðum.

$(x+2)\ln 5=x\ln 4$ Notum veldisreglu logra.

$x\ln 5+2\ln 5=x\ln 4$ Notum dreifiregluna.

$x\ln 5-x\ln 4=-2\ln 5$ Færum liði með x öðrum megin og liði án x hinum megin.

$x\left(\ln 5-\ln 4\right)=-2\ln 5$ Vinstra megin tökum við út fyrir sviga x.

$x\ln\left(\frac{5}{4}\right)=\ln\left(\frac{1}{25}\right)$ Notum reiknireglur logra.

$x=\frac{\ln\left(\frac{1}{25}\right)}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}$ Deilum með stuðlinum við x.

REYNIÐ SJÁLF #5

Leysið $2^{x}=3^{x+1}$.

SPURT OG SVARAÐ

Er hægt að leysa $2^{x}=3^{x}$?

Já. Lausnin er 0.

Jöfnur sem innihalda e

Algeng gerð vísisjafna hefur grunntöluna e. Þessi fasti kemur sífellt fyrir í náttúrunni, stærðfræði, vísindum, verkfræði og fjármálum. Þegar jafna hefur grunntöluna e öðrum hvorum megin má leysa hana með náttúrulega logranum.

AÐFERÐ

Gefin er jafna á forminu $y = A\,e^{kt}$, Leysið fyrir t.

1. Deilið báðum hliðum jöfnunnar með A.
2. Takið náttúrulega logrann af báðum hliðum jöfnunnar.
3. Deilið báðum hliðum jöfnunnar með k.

4

SÝNIDÆMI 6

Að leysa jöfnu á forminu $y = Ae^{kt}$

Leysið $100 = 20\,e^{2t}$.

Lausn

$$100 = 20\ e^{2\,t}$$

$5 = e^{2\,t}$ Deilum með stuðli veldisins.

$\ln 5 = 2\,t$ Tökum náttúrulega logra af báðum hliðum. Notum að $\ln(x)$ og e^x eru andhverf föll.

$t = \frac{\ln 5}{2}$ Deilum með stuðlinum við t.

Greining

Með reiknireglum logra má einnig rita svarið á forminu $t = \ln\sqrt{5}$. Ef við viljum fá svarið sem nálgað tugabrot notum við reiknivél.

REYNIÐ SJÁLF #6

Leysið $3\ e^{0{,}5\,t} = 11$.

SPURT OG SVARAÐ

Hefur sérhver jafna á forminu $y = A\,e^{kt}$ rauntölulausn fyrir t?

Nei. Lausn er til þegar $k \neq 0$, og þegar y og A eru annaðhvort bæði 0 eða hvorugt 0 og hafa sama formerki. Dæmi um jöfnu á þessu formi sem hefur enga lausn er $2 = -3\,e^{t}$.

SÝNIDÆMI 7

Að leysa jöfnu sem einfalda má á formið $y = Ae^{kt}$

Leysið $4e^{2x}+5=12$.

Lausn

$$
\begin{aligned}
4\,e^{2x}+5&=12 \\
4\,e^{2x}&=7 && \text{Drögum 5 frá báðum hliðum.} \\
e^{2x}&=\frac{7}{4} && \text{Deilum með stuðli veldisins.} \\
2\,x&=\ln\left(\frac{7}{4}\right) && \text{Tökum náttúrulega logra af báðum hliðum.} \\
x&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right) && \text{Leysum fyrir } x.
\end{aligned}
$$

REYNIÐ SJÁLF #7

Leysið $3+e^{2t}=7e^{2t}$.

Aukalausnir

Þegar jafna er leyst getur komið fram aukalausn: gildi sem leysir umbreytta jöfnu en ekki upphaflegu jöfnuna. Því þarf að prófa mögulegar lausnir í upphaflegu jöfnunni og gæta að skilgreiningarskilyrðum. Þegar lograr koma fyrir verður viðfang hvers logra að vera jákvætt. Logri af núlli eða neikvæðri tölu er ekki skilgreindur í rauntölum.

SÝNIDÆMI 8

Vísisjöfnur leystar á annars stigs formi

Leysið $e^{2x}-e^{x}=56$.

Lausn

$$e^{2x}-e^{x}=56$$

$e^{2x}-e^{x}-56=0$ Færum alla liði á aðra hliðina svo hin verði núll.

$(e^{x}+7)(e^{x}-8)=0$ Þáttum annars stigs stæðuna.

$e^{x}+7=0$ eða $e^{x}-8=0$ Ef margfeldi er núll er að minnsta kosti annar þátturinn núll.

$e^{x}=-7$ eða $e^{x}=8$ Einangrum veldin.

$e^{x}=8$ Höfnum jöfnunni þar sem veldið er jafnt neikvæðri tölu.

$x=\ln 8$ Leysum jöfnuna þar sem veldið er jafnt jákvæðri tölu.

Greining

Þegar við ætlum að leysa verkefni með þáttun fáum við alltaf núll öðrum megin í jöfnunni, því núll hefur þann einstaka eiginleika að þegar margfeldi er núll hlýtur annar þátturinn eða báðir að vera núll. Við höfnum jöfnunni $e^x = -7$ því jákvæð tala er aldrei jöfn neikvæðri tölu. Lausnin $\ln(-7)$ er ekki rauntala og í rauntalnakerfinu er henni hafnað sem falskri lausn.

REYNIÐ SJÁLF #8

Leysið $e^{2x} = e^x + 2$.

4

SPURT OG SVARAÐ

Hefur sérhver lograjafna lausn?

Nei. Í rauntölum er aðeins hægt að taka logra af jákvæðum tölum. Prófið alltaf mögulegar lausnir í upphaflegu jöfnunni og hafnið aukalausnum.

Skilgreining lograns notuð til að leysa lograjöfnur

Við höfum þegar séð að sérhver lograjafna $\log_b(x) = y$ er jafngild vísisjöfnunni $b^y = x$. Þessa staðreynd má nota ásamt reiknireglum logra til að leysa lograjöfnur þar sem viðfangið er algebrustæða.

Skoðum til dæmis jöfnuna $\log_2(2) + \log_2(3x - 5) = 3$. Til að leysa hana getum við notað reiknireglur logra til að rita vinstri hliðina á þéttu formi og beitt síðan skilgreiningu logra til að leysa fyrir x:

$$\begin{aligned}
&\log_2(2) + \log_2(3x - 5) = 3 && \\
&\log_2(2(3x - 5)) = 3 && \text{Notum margfeldisreglu logra.} \\
&\log_2(6x - 10) = 3 && \text{Margföldum inn í svigann.} \\
&2^3 = 6x - 10 && \text{Notum skilgreiningu lograns.} \\
&8 = 6x - 10 && \text{Reiknum } 2^3. \\
&18 = 6x && \text{Bætum 10 við báðar hliðar.} \\
&x = 3 && \text{Deilum með 6.}
\end{aligned}$$

SKILGREINING LOGRANS NOTUÐ TIL AÐ LEYSA LOGRAJÖFNUR

Fyrir sérhverja algebrustæðu S og rauntölur b og c, þar sem $b > 0, b \neq 1$,

$$\log_b(S) = c \text{ ef og aðeins ef } b^c = S$$

SÝNIDÆMI 9

Lograjafna leyst með algebru

Leysið $2\ln x + 3 = 7$.

Lausn

$$
\begin{aligned}
2\ln x+3&=7\\
2\ln x&=4 && \text{Drögum 3 frá báðum hliðum.}\\
\ln x&=2 && \text{Deilum með 2.}\\
x&=e^{2} && \text{Ritum á veldisformi.}
\end{aligned}
$$

REYNIÐ SJÁLF #9

Leysið $6+\ln x=10$.

SÝNIDÆMI 10

Algebra notuð fyrir og eftir að skilgreiningu náttúrulega lograns er beitt

Leysið $2\ln(6x)=7$.

Lausn

$$
\begin{aligned}
2\ln(6x)&=7\\
\ln(6x)&=\frac{7}{2} && \text{Deilum með 2.}\\
6x&=e^{\left(\frac{7}{2}\right)} && \text{Notum skilgreiningu } \ln.\\
x&=\frac{1}{6}e^{\left(\frac{7}{2}\right)} && \text{Deilum með 6.}
\end{aligned}
$$

REYNIÐ SJÁLF #10

Leysið $2\ln(x+1)=10$.

SÝNIDÆMI 11

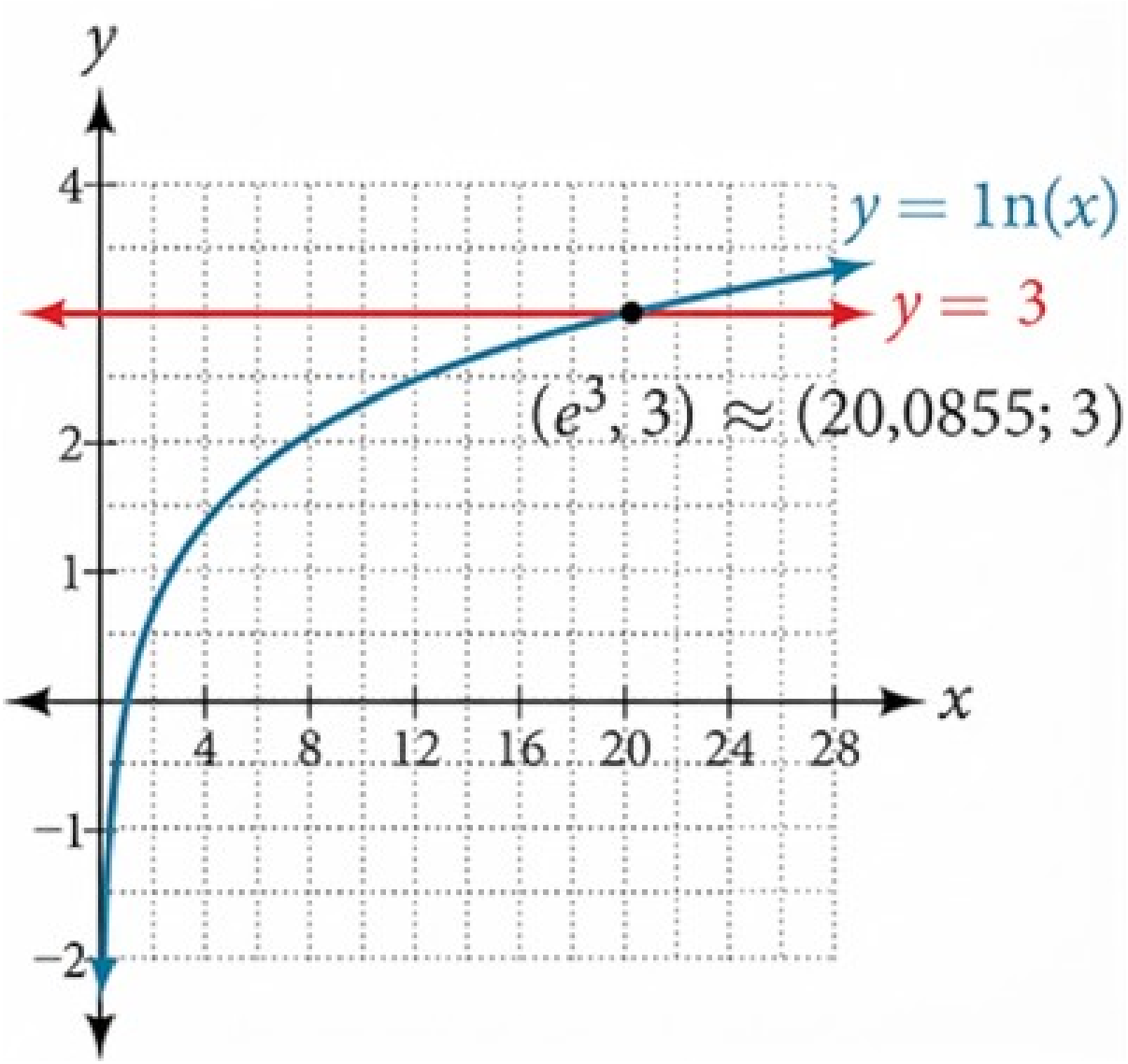
Graf notað til að skilja lausn lograjöfnu

Leysið $\ln x=3$.

Lausn

$$
\begin{aligned}
\ln x&=3\\
x&=e^{3} && \text{Notum skilgreiningu náttúrulega lograns.}
\end{aligned}
$$

Mynd 3 sýnir graf jöfnunnar. Á grafinu er x-hnit skurðpunkts grafanna tveggja nálægt 20. Með öðrum orðum er $e^{3}\approx 20$. Reiknivél gefur betri nálgun: $e^{3}\approx 20{,}0855$.



Mynd 3 Gröf $y=\ln x$ og $y=3$ skerast í punktinum $(\mathrm{e}^3,3)$, sem er um það bil (20,0855, 3).

REYNIÐ SJÁLF #11

Notið grafíska reiknivél til að áætla nálgaða lausn jöfnunnar $2^x=1000$ með 2 aukastöfum.

Eintæknieiginleiki logra notaður til að leysa lograjöfnur

Eins og með vísisjöfnur getum við notað eintæknieiginleikann til að leysa lograjöfnur. Eintæknieiginleiki lografalla segir okkur að fyrir allar rauntölur $x>0$, $S>0$, $T>0$ og sérhverja jákvæða rauntölu b, þar sem $b\neq 1$,

$$\log_b S=\log_b T \text{ ef og aðeins ef } S=T.$$

Til dæmis:

$$\text{Ef } \log_2(x-1)=\log_2(8), \text{ þá } x-1=8.$$

Ef $x-1=8$, getum við því leyst fyrir x, og fáum $x=9$. Til að prófa getum við sett $x=9$ inn í upphaflegu jöfnuna: $\log_2(9-1)=\log_2(8)=3$. Með öðrum orðum: þegar lograjafna hefur sömu grunntölu báðum megin hljóta viðföngin að vera jöfn. Þetta gildir einnig þegar viðföngin eru algebrustæður. Þegar gefin er jafna með logrum með sömu grunntölu báðum megin getum við því notað reiknireglur logra til að rita hvora hlið sem einn logra. Síðan notum við að lograföll eru eintæk til að setja viðföngin jöfn og leysa fyrir óþekktu stærðina.

Skoðum til dæmis jöfnuna $\log(3x-2)-\log(2)=\log(x+4)$. Til að leysa hana getum við notað reiknireglur logra til að rita vinstri hliðina sem einn logra og beitt síðan eintæknieiginleikanum til að leysa fyrir x:

$$\log(3x-2)-\log(2)=\log(x+4)$$

$\log\left(\frac{3x-2}{2}\right)=\log(x+4)$ Notum deilingarreglu logra.

$\frac{3x-2}{2}=x+4$ Notum eintækni lografalla.

$3x-2=2x+8$ Margföldum báðar hliðar jöfnunnar með 2.

$x=10$ Drögum frá $2x$ og bætum 2 við.

Til að prófa niðurstöðuna setjum við $x=10$ inn í $\log(3x-2)-\log(2)=\log(x+4)$.

$$\log(3(10)-2)-\log(2)=\log((10)+4)$$
$$\log(28)-\log(2)=\log(14)$$
$$\log\left(\frac{28}{2}\right)=\log(14)$$

Lausnin stenst prófunina.

EINTÆKNIEIGINLEIKI LOGRA NOTAÐUR TIL AÐ LEYSA LOGRAJÖFNUR

Fyrir allar algebrustæður S og T og sérhverja jákvæða rauntölu b, þar sem $b\neq 1$,

$$\log_b S=\log_b T \text{ ef og aðeins ef } S=T$$

Þegar jafna með logrum er leyst þarf alltaf að kanna hvort svarið sé rétt eða hvort það sé aukalausn.

AÐFERÐ

Notið eintæknieiginleikann til að leysa jöfnu með logrum.

1. Notið reiknireglur logra eftir þörfum til að rita hvora hlið sem einn logra, þannig að jafnan verði á forminu $\log_b S=\log_b T$. Gætið að því að viðföng allra logra í upphaflegu jöfnunni séu jákvæð.
2. Notið eintæknieiginleikann til að jafna viðföngin.
3. Leysið jöfnuna $S=T$, sem fæst fyrir óþekktu stærðina.

SÝNIDÆMI 12

Jafna leyst með eintæknieiginleika logra

Leysið $\ln\left(x^2\right)=\ln\left(2x+3\right)$.

Lausn

$$\ln\left(x^2\right)=\ln\left(2\,x+3\right)$$

$x^2=2\,x+3$ Notum eintækni lografalla.

$x^2-2\,x-3=0$ Færum alla liði á aðra hliðina áður en við þáttum.

$\left(x-3\right)\left(x+1\right)=0$ Þáttum annars stigs stæðuna.

$x-3=0$ eða $x+1=0$ Ef margfeldi er núll er að minnsta kosti annar þátturinn núll.

$x=3$ eða $x=-1$ Leysum fyrir x.

Greining

Lausnirnar eru tvær: 3 eða -1. Lausnin -1 er neikvæð en stenst þegar hún er sett inn í upphaflegu jöfnuna, því viðfang lografallanna er samt jákvætt.

REYNIÐ SJÁLF #12

Leysið $\ln\left(x^2\right)=\ln 1$.

Hagnýt verkefni leyst með vísis- og lograjöfnum

Í fyrri köflum lærðum við um eiginleika og reiknireglur vísisfalla og lografalla. Við höfum séð að log_b(x) = y er jafngilt b^y = x þegar b > 0, b ≠ 1 og x > 0. Við höfum notað þetta samband til að leysa bæði lograjöfnur og vísisjöfnur. Nú getum við notað þessar aðferðir saman til að leysa jöfnur sem lýsa raunverulegum aðstæðum, hvort sem óþekkta stærðin er í veldisvísi eða viðfangi logra.

Aðferðirnar eru meðal annars notaðar til að rannsaka geislavirka sundrun. Helmingunartími geislavirkrar samsætu er sá tími sem tekur helming atómkjarna hennar í sýni að sundrast. Tafla 1 sýnir helmingunartíma nokkurra geislavirkra samsæta.

Tafla 1

Efni	Notkun	Helmingunartími (um það bil)
gallín-67	kjarnlæknisfræði	80 klukkustundir
kóbalt-60	framleiðsla	5,3 ár
teknetín-99m	kjarnlæknisfræði	6 klukkustundir
ameríkín-241	reykskynjarar	432 ár
kolefni-14	aldursgreining fornleifa	5.730 ár
úran-235	kjarnorka	703.800.000 ár

Helmingunartími þessara efna er greinilega mjög mismunandi. Ef við þekkjum helmingunartíma efnis getum við reiknað hve mikið er eftir af því þegar tiltekinn tími er liðinn. Nota má formúluna fyrir geislavirka sundrun:

$$A\left(t\right)=A_0\,e^{\frac{\ln\left(0{,}5\right)}{T}t}$$

$$A\left(t\right)=A_0\,e^{\ln\left(0{,}5\right)\frac{t}{T}}$$

$$A\left(t\right)=A_0\left(e^{\ln\left(0{,}5\right)}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$A\left(t\right)=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

þar sem

- A_0 er upphaflegt magn
- T er helmingunartími efnisins
- t er tíminn sem liðinn er frá upphafi
- $A\left(t\right)$ er magn efnisins sem er til staðar eftir tímann t

SÝNIDÆMI 13

Tími fundinn með formúlunni fyrir geislavirka sundrun

Hve langan tíma tekur tíu prósent af 1000 gramma sýni af úrani-235 að sundrast?

Lausn

$$y=1000\cdot e^{\frac{\ln(0{,}5)}{703800000}\cdot t}$$

$900=1000\,e^{\frac{\ln\left(0{,}5\right)}{703.800.000}t}$ Þegar 10% hafa sundrast eru 900 grömm eftir.

$0{,}9=e^{\frac{\ln\left(0{,}5\right)}{703.800.000}t}$ Deilum með 1000.

$\ln\left(0{,}9\right)=\ln\left(e^{\frac{\ln\left(0{,}5\right)}{703.800.000}t}\right)$ Tökum náttúrulega logrann af báðum hliðum.

$$\ln\left(0{,}9\right)=\frac{\ln\left(0{,}5\right)}{703.800.000}\,t \qquad \ln\left(e^{M}\right)=M$$

$t=703.800.000\times\frac{\ln\left(0{,}9\right)}{\ln\left(0{,}5\right)}$ ár Einangrum t.

$$t\approx 106.979.777 \text{ ár}$$

Greining

Tíu prósent af 1000 grömmum eru 100 grömm. Ef 100 grömm sundrast eru 900 grömm af úrani-235 eftir.

4

REYNIÐ SJÁLF #13

Hve langur tími líður þar til tuttugu prósent af 1000 gramma sýninu okkar af úrani-235 hafa sundrast?

ÍTAREFNI

Í eftirfarandi efni á netinu má finna frekari útskýringar og æfingar um vísis- og lograjöfnur.

- Lograjöfnur leystar
- Vísisjöfnur leystar með logrum

4.6 Kaflaæfingar

Munnleg verkefni

1. Hvernig má leysa vísisjöfnu?
2. Hvenær kemur aukalausn fram? Hvernig má þekkja aukalausn?
3. Hvenær má nota eintæknieiginleika logra til að leysa jöfnu? Hvenær er það ekki hægt?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal leysa vísisjöfnuna með því að umrita báðar hliðar hennar sem veldi með sömu grunntölu.

4.

$$4^{-3v-2}=4^{-v}$$

5.

$$64\cdot 4^{3x}=16$$

6.

$$3^{2x+1}\cdot 3^{x}=243$$

7.

$$2^{-3n} \cdot \frac{1}{4} = 2^{n+2}$$

8.

$$625 \cdot 5^{3x+3} = 125$$

9.

$$\frac{36^{3b}}{36^{2b}} = 216^{2-b}$$

10.

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{3n} \cdot 8 = 2^6$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa með því að nota logra.

11.

$$9^{x-10} = 1$$

12.

$$2e^{6x} = 13$$

13.

$$e^{r+10} - 10 = -42$$

14.

$$2 \cdot 10^{9a} = 29$$

15.

$$-8 \cdot 10^{p+7} - 7 = -24$$

16.

$$7e^{3n-5} + 5 = -89$$

17.

$$e^{-3k} + 6 = 44$$

18.

$$-5e^{9x-8} - 8 = -62$$

19.

$$-6e^{9x+8} + 2 = -74$$

20.

$$2^{x+1}=5^{2x-1}$$

21.

$$e^{2x}-e^{x}-132=0$$

22.

$$7e^{8x+8}-5=-95$$

23.

$$10e^{8x+3}+2=8$$

4

24.

$$4e^{3x+3}-7=53$$

25.

$$8e^{-5x-2}-4=-90$$

26.

$$3^{2x+1}=7^{x-2}$$

27.

$$e^{2x}-e^{x}-6=0$$

28.

$$3e^{3-3x}+6=-31$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota skilgreiningu lograns til að umrita jöfnuna sem vísisjöfnu.

29.

$$\log\left(\frac{1}{100}\right)=-2$$

30.

$$\log_{324}(18)=\frac{1}{2}$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa jöfnuna með skilgreiningu lograns.

31.

$$5\log_{7}n=10$$

32.

$$-8\log_{9}x=16$$

33.

$$4+\log_2(9k)=2$$

34.

$$2\log(8n+4)+6=10$$

35.

$$10-4\ln(9-8x)=6$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa með eintæknieiginleika logra.

36.

$$\ln(10-3x)=\ln(-4x)$$

37.

$$\log_{13}(5n-2)=\log_{13}(8-5n)$$

38.

$$\log(x+3)-\log(x)=\log(74)$$

39.

$$\ln(-3x)=\ln(x^2-6x)$$

40.

$$\log_4(6-m)=\log_4 3m$$

41.

$$\ln(x-2)-\ln(x)=\ln(54)$$

42.

$$\log_9(2n^2-14n)=\log_9(-45+n^2)$$

43.

$$\ln(x^2-10)+\ln(9)=\ln(10)$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa hverja jöfnu fyrir x.

44.

$$\log(x+12)=\log(x)+\log(12)$$

45.

$$\ln(x)+\ln(x-3)=\ln(7x)$$

46.

$$\log_2(7x+6)=3$$

47.

$$\ln(7)+\ln(2-4x^2)=\ln(14)$$

48.

$$\log_8(x+6)-\log_8(x)=\log_8(58)$$

49.

$$\ln(3)-\ln(3-3x)=\ln(4)$$

50.

$$\log_3(3x)-\log_3(6)=\log_3(77)$$

Grafisk verkefni

Í eftirfarandi æfingum skal leysa jöfnuna fyrir x, ef lausn er til. Teiknið síðan gröf fallanna sem standa hvort sínum megin við jafnaðarmerkið og notið skurðpunkta þeirra, ef einhverjir eru, til að sannreyna lausnirnar.

51.

$$\log_9(x)-5=-4$$

52.

$$\log_3(x)+3=2$$

53.

$$\ln(3x)=2$$

54.

$$\ln(x-5)=1$$

55.

$$\log(4)+\log(-5x)=2$$

56.

$$-7+\log_3(4-x)=-6$$

57.

$$\ln(4x-10)-6=-5$$

58.

$$\log(4-2x)=\log(-4x)$$

59.

$$\log_{11}(-2x^2-7x)=\log_{11}(x-2)$$

60.

$$\ln(2x+9)=\ln(-5x)$$

61.

$$\log_9(3-x)=\log_9(4x-8)$$

62.

$$\log(x^2+13)=\log(7x+3)$$

63.

$$\frac{3}{\log_2(10)}-\log(x-9)=\log(44)$$

64.

$$\ln(x)-\ln(x+3)=\ln(6)$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna gildið sem spurt er um, teikna graf sem lýsir aðstæðunum og merkja punktinn sem samsvarar lausninni.

65. Reikningur með upphafsinnlegg \$6.500 ber 7,25 % ársvexti með samfelldri vaxtafærslu. Hver verður inneignin eftir 20 ár?

66. Hljóðstyrk í desíbelum D er lýst með jöfnunni $D=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, þar sem I er styrkur hljóðsins í vöttum á fermetra og $I_0=10^{-12}$ er lægsti hljóðstyrkur sem meðalmanneskja heyrir. Hve mörg desíbel berast frá þotu með hljóðstyrkinn $8{,}3\cdot 10^2$ vött á fermetra?

67. Íbúafjölda í litlum bæ er lýst með jöfnunni $P=1650\ e^{0{,}5\,t}$ þar sem t er mælt í árum. Eftir um það bil hve mörg ár nær íbúafjöldi bæjarins 20.000?

Tækni

Í eftirfarandi æfingum skal leysa hverja jöfnu með því að taka tilgreindan logra. Notið síðan reiknivél til að finna lausnina og námundið hana að þremur aukastöfum.

68. $1000\ (1{,}03)^t=5000$ með tugalogra.

69. $e^{5x}=17$ með náttúrulegum logra

70. $3\ (1{,}04)^{3\,t}=8$ með tugalogra

71. $3^{4x-5}=38$ með tugalogra

72. $50\ e^{-0,12\,t}=10$ með náttúrulegum logra

Í eftirfarandi æfingum skal leysa jöfnuna með reiknivél. Nema annað sé tekið fram skal námunda öll svör að fjórum aukastöfum.

73.

$$7\ e^{3\,x-5}+7,9=47$$

74.

$$\ln\left(3\right)+\ln\left(4,4\ x+6,8\right)=2$$

75.

$$\log\left(-0,7\ x-9\right)=1+5\ \log\left(5\right)$$

76. Loftþrýstingi P í pundum á fertommu er lýst með formúlunni $P=14,7\ e^{-0,21\,x}$, þar sem x er fjöldi mílna yfir sjávarmáli. Hve hár er fjallstindur þar sem loftþrýstingurinn er 8,369 pund á fertommu, námundað að næsta feti? (Ábending: 5280 fet eru í einni mílu.)

77. Stærð M jarðskjálfta er lýst með jöfnunni $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ þar sem E er orkan sem jarðskjálftinn losar í júlum og $E_0=10^{4,4}$ er skilgreind lágmarksorka sem jarðskjálfti losar. Hver væri stærð jarðskjálfta sem losar $1,4\cdot10^{13}$ júl af orku, námunduð að næsta hundraðasta hluta?

Viðbótarverkefni

78. Notið skilgreiningu logra ásamt eintæknieiginleika logra til að sanna að $b^{\log_b x}=x$.

79. Rifjið upp formúluna fyrir samfellda vaxtafærslu, $y=A\,e^{kt}$. Notið skilgreiningu logra ásamt reiknireglum logra til að leysa formúluna fyrir tímann t þannig að t sé jafnt einum logra.

80. Rifjið upp vaxtavaxtaformúluna $A=a\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$. Notið skilgreiningu logra ásamt reiknireglum logra til að leysa formúluna fyrir tímann t.

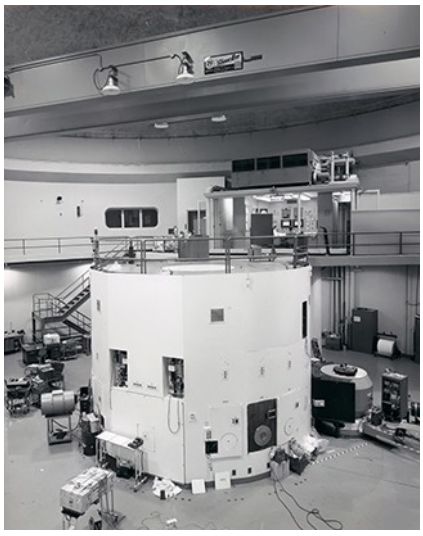
81. Kælingarlögmál Newtons segir að hitastigi T hlutar á hverjum tíma t megi lýsa með jöfnunni $T=T_s+\left(T_0-T_s\right)e^{-kt}$, þar sem T_s er hitastig umhverfisins, T_0 er upphafshiti hlutarins og k er kælingarhraðinn. Notið skilgreiningu logra ásamt reiknireglum logra til að leysa formúluna fyrir tímann t þannig að t sé jafnt einum logra.

4.7 Vísis- og logralíkön

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- gera líkön af vísisvexti og vísishnignun.
- nota kælingarlögmál Newtons.
- nota líkön af lógistískum vexti.
- velja líkan sem hæfir gögnum.
- rita vísislíkan með grunntöluna e.



Mynd 1 Kjarnrannsóknakljúfur í Neely-kjarnrannsóknamiðstöðinni á háskólasvæði Tæknihaskólans í Georgíu (mynd: Georgia Tech Research Institute)

Við höfum þegar skoðað nokkur einföld notkunardæmi vísisfalla og lografalla. Í þessum hluta skoðum við nokkur mikilvæg notkunarsvið nánar, meðal annars geislavirkar samsætur og kælingarlögmál Newtons.

Líkön af vísisvexti og vísishnignun

Í raunverulegum verkefnum þarf að gera líkan af hegðun falls. Við stærðfræðilega líkanagerð veljum við kunnuglegt almennt fall með eiginleika sem benda til þess að það lýsi fyrirbærinu sem á að greina. Þegar um hraðan vöxt er að ræða má velja vísisvaxtarfallið:

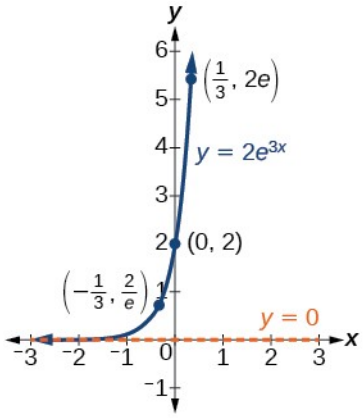
$$y = A_0 e^{kt}$$

þar sem A_0 er jákvætt upphafsgildi við tímann núll, e er fasti Eulers og k er jákvæður fasti sem ákvarðar samfellda hlutfallslega vaxtarhraðann. Nota má vísisvaxtarfallið í verkefnum sem snúast um tvöföldunartíma, þann tíma sem tekur stærð að tvöfaldast. Stofnar villtra dýra, fjárfestingar, lífsýni og náttúruauðlindir eru dæmi um fyrirbæri sem geta vaxið

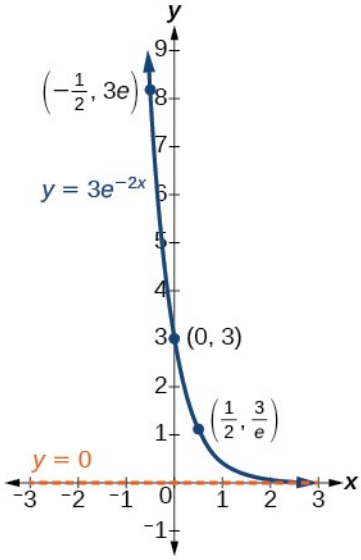
samkvæmt tvöföldunartíma. Í sumum verkefnum hæfir lógistískt líkan þó gögnunum betur en vísislíkan, eins og sést síðar þegar lógistíska jafnan er tekin fyrir.

Ef stærð minnkar hins vegar hratt í átt að núlli án þess að ná því er líklega rétt að velja líkan vísishnignunar. Aftur er formið $y = A_0 e^{kt}$ þar sem A_0 er upphafsgildið og e er fasti Eulers. Nú er k neikvæður fasti sem ákvarðar hnignunarhraðann. Nota má líkan vísishnignunar þegar helmingunartími er reiknaður, það er tíminn sem tekur magn efnis að minnka með vísishnignun niður í helming upphaflegs magns. Helmingunartími er notaður í verkefnum um geislavirkar samsætur.

Þegar fall er valið sem stærðfræðilíkan notum við oft gagnapunkta úr nákvæmum athugunum og mælingum. Við setjum punktana á graf og vonum að við þekkjum lögun þess. Gröf vísisvaxtar og vísishnignunar hafa einkennandi lögun, eins og sést á mynd 2 og mynd 3. Mikilvægt er að muna að þótt hlutar beggja grafanna virðist liggja á x-ásnum eru þeir í raun örlítið ofan við hann.



Mynd 2 Graf sem sýnir vísisvöxt. Jafnan er $y=2e^{3x}$.



Mynd 3 Graf sem sýnir vísishnignun. Jafnan er $y=3e^{-2x}$.

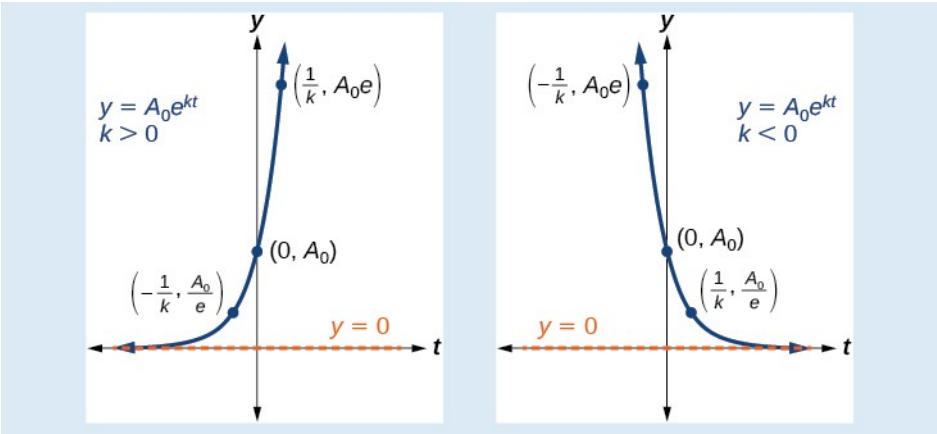
Vísisvöxtur og vísishnignun fela oft í sér mjög stórar eða mjög litlar tölur. Til að lýsa slíkum tölum notum við oft stærðargráður. Stærðargráðan er veldið af tíu þegar talan er rituð á staðalformi með einn tölustaf vinstra megin við tugabrotskommuna. Fjarlægðin til næstu stjörnu, Proxima Centauri, mæld í kílómetrum, er til dæmis 40.113.497.200.000 kílómetrar. Á staðalformi er hún $4{,}01134972 \times 10^{13}$. Því mætti segja að þessi tala hafi stærðargráðuna 10^{13}.

EINKENNI VÍSISFALLSINS $y=A_0e^{kt}$

Vísisfall á forminu $y=A_0e^{kt}$ hefur eftirfarandi einkenni:

- eintækt fall
- lárétt aðfella: $y=0$
- skilgreiningarmengi: $(-\infty,\infty)$

- myndmengi: $(0, \infty)$
- skurðpunktur við x-ás: enginn
- skurðpunktur við y-ás: $(0, A_0)$
- vaxandi ef $k > 0$ (sjá mynd 4)
- minnkandi ef $k < 0$ (sjá mynd 4)



Mynd 4 Vísisfall lýsir vísisvexti þegar $k > 0$ og vísishnignun þegar $k < 0$.

SÝNIDÆMI 1

Graf vísisvaxtar teiknað

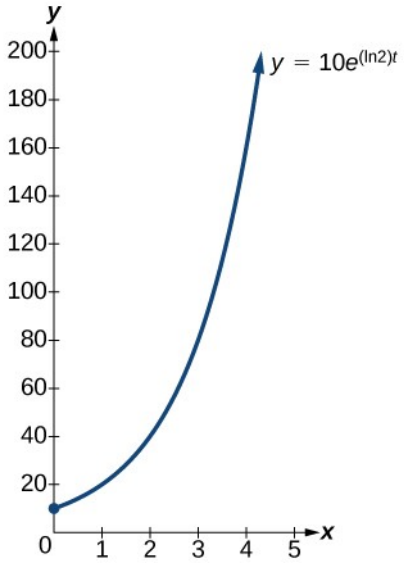
Bakteríustofn tvöfaldast á hverri klukkustund. Teiknið graf stofnstærðarinnar sem fall af tíma ef ræktunin hófst með 10 bakteríum.

Lausn

Þegar magn vex um fast prósentuhlutfall á hverri tímaeiningu er vöxturinn vísisvöxtur. Til að finna A_0 notum við að A_0 er magnið við tímann núll, þannig að $A_0 = 10$. Til að finna k, notum við að eftir eina klukkustund $(t = 1)$ hefur stofninn tvöfaldast úr 10 í 20. Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt

$$\begin{aligned} 20 &= 10\, e^{k \cdot 1} \\ 2 &= e^{k} && \text{Deilið með 10} \\ \ln 2 &= k && \text{Takið náttúrulega logrann} \end{aligned}$$

þannig að $k = \ln(2)$. Jafnan sem á að teikna er því $y = 10\, e^{(\ln 2)t} = 10\left(e^{\ln 2}\right)^t = 10 \cdot 2^t$. Grafið er sýnt á mynd 5.



Mynd 5 Graf $y=10\,e^{(\ln 2)t}$

Greining

Fjöldi baktería eftir tíu klukkustundir er 10.240. Segja má að þetta magn sé af stærðargráðunni 10^4. Fjöldi baktería eftir tuttugu klukkustundir er 10.485.760, sem er af stærðargráðunni 10^7, svo segja má að stofninn hafi vaxið um þrjár stærðargráður á tíu klukkustundum.

Helmingunartími

Nú snúum við okkur að vísishnignun. Eins og áður kom fram er helmingunartími eitt algengasta hugtakið sem tengist vísishnignun. Hann er sá tími sem tekur stærð sem hnignar samkvæmt vísisfalli að minnka niður í helming upphaflegs gildis. Allar geislavirkar samsætur hafa helmingunartíma og ferlið sem lýsir vísishnignun samsætu nefnist geislavirk sundrun.

Leysið þessa jöfnu til að finna helmingunartíma falls sem lýsir vísishnignun:

$$\frac{1}{2}A_0 = A_o e^{kt}$$

Við sjáum að helmingunartíminn ræðst aðeins af fastanum k en ekki upphafsmagninu A_0.

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,A_0 &= A_0\,e^{k\,t} \\
\frac{1}{2} &= e^{k\,t} && \text{Deilið með } A_0. \\
\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= k\,t && \text{Takið náttúrulega logrann.} \\
-\ln(2) &= k\,t && \text{Beitið reiknireglum logra.} \\
-\frac{\ln(2)}{k} &= t && \text{Deilið með } k.
\end{aligned}$$

Þar sem tíminn t, er jákvæður verður k að vera neikvæður, eins og búast mátti við. Þannig fæst formúlan fyrir helmingunartíma:

$$t = -\frac{\ln(2)}{k}$$

AÐFERÐ

Finnið hnignunarhraðann þegar helmingunartíminn er gefinn.

1. Skrifið $A = A_o e^{kt}$.
2. Skiptið A út fyrir $\frac{1}{2}A_0$ og t út fyrir gefna helmingunartímann.
3. Leysið til að finna k. Ritið k sem nákvæmt gildi (námundið ekki).

Athugið: Einnig má finna hnignunarhraðann með $k = -\frac{\ln(2)}{t}$.

SÝNIDÆMI 2

Fallið sem lýsir geislavirkri sundrun fundið

Helmingunartími kolefnis-14 er 5.730 ár. Ritið magn kolefnis-14 sem eftir er sem fall af tímanum t.

Lausn

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt.

$A = A_0\ e^{k\,t}$ Formúlan fyrir samfellda vísisbreytingu.

$0{,}5\ A_0 = A_0\ e^{k \cdot 5730}$ Setjið helmingunartímann í stað t og $0{,}5\ A_0$ í stað $f\ (t)$.

$0{,}5 = e^{5730\ k}$ Deilið með A_0.

$\ln\ (0{,}5) = 5730\ k$ Takið náttúrulega logrann af báðum hliðum.

$k = \frac{\ln\ (0{,}5)}{5730}$ Deilið með stuðlinum við k.

$A = A_0\ e^{\left(\frac{\ln\ (0{,}5)}{5730}\right) t}$ Setjið inn fyrir k í formúluna fyrir samfellda vísisbreytingu.

Fallið sem lýsir þessari samfelldu hnignun er $f\ (t) = A_0\ e^{\left(\frac{\ln\ (0{,}5)}{5730}\right) t}$. Athugum að stuðullinn við t, ($\frac{\ln\ (0{,}5)}{5730} \approx -1{,}2097 \times 10^{-4}$) er neikvæður, eins og búast má við þegar um vísishnignun er að ræða.

REYNIÐ SJÁLF #1

Helmingunartími plútons-244 er 80.000.000 ár. Finnið fall af tímanum, mældum í árum, sem gefur magn plútons-244 sem eftir er.

Geislakolsgreining

Formúlan fyrir geislavirka sundrun er mikilvæg við geislakolsgreiningu, sem notuð er til að áætla hvenær planta eða dýr dó. Willard Libby þróaði aðferðina árið 1949 og hlaut Nóbelsverðlaun í efnafræði árið 1960 fyrir hana. Við aldursgreininguna er hlutfall kolefnissamsætanna í sýninu borið saman við viðmiðunargildi og niðurstaðan kvörðuð. Óvissan fer eftir sýninu, aldri þess og mæliaðferðinni. Ekki er hægt að gera almennt ráð fyrir 1% skekkju allt að 60.000 ára aldri, eins og frumtextinn gefur til kynna.

Kolefni-14 er geislavirk kolefnissamsæta með um 5.730 ára helmingunartíma. Hún er í litlu magni í koltvísýringnum í loftinu sem við öndum að okkur. Mest af kolefni jarðar er kolefni-12, sem hefur atómmassann 12 u og er ekki geislavirkt. Hlutfall kolefnissamsæta í andrúmsloftinu hefur breyst með tíma. Vísindamenn nota meðal annars trjáhringi og önnur sýni af þekktum aldri til að kvarða aldursgreininguna. IntCal20-kvörðunarferillinn nær um 55.000 ár aftur frá viðmiðunarárinu 1950. Fullyrðing frumtextans um 60.000 ára tímabil er því ekki notuð hér.

Meðan planta eða dýr lifir er hlutfall kolefnissamsætanna tveggja í líkamanum svipað hlutfallinu í andrúmsloftinu. Þegar lífveran deyr sundrast kolefni-14 í líkamanum og endurnýjast ekki. Við berum hlutfall kolefnis-14 og kolefnis-12 í leifum lífverunnar saman við þekkta hlutfallið í andrúmsloftinu. Þannig má áætla hvenær plantan eða dýrið dó.

Þar sem helmingunartími kolefnis-14 er 5.730 ár er formúlan fyrir magn kolefnis-14 sem eftir er að t árum liðnum

$$A \approx A_0 \, e^{\left(\frac{\ln(0{,}5)}{5730}\right) t}$$

þar sem

- A er magn kolefnis-14 sem eftir er
- A_0 er magn kolefnis-14 þegar plantan eða dýrið tók að sundrast.

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt:

$A = A_0 \, e^{k\,t}$ Formúlan fyrir samfellda vísisbreytingu.

$0{,}5 \; A_0 = A_0 \, e^{k \cdot 5730}$ Setjið helmingunartímann í stað t og $0{,}5 \; A_0$ í stað $f\left(t\right)$.

$0{,}5 = e^{5730\,k}$ Deilið með A_0.

$\ln\left(0{,}5\right) = 5730 \; k$ Takið náttúrulega logrann af báðum hliðum.

$k = \dfrac{\ln\left(0{,}5\right)}{5730}$ Deilið með stuðlinum við k.

$A = A_0 \, e^{\left(\frac{\ln(0{,}5)}{5730}\right) t}$ Setjið inn fyrir k í formúluna fyrir samfellda vísisbreytingu.

Til að finna aldur hlutar leysum við þessa jöfnu fyrir t:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{-0{,}000121}$$

Af nauðsyn sleppum við hér mörgum atriðum sem vísindamenn taka tillit til við kolefnis-14-aldursgreiningu og skoðum aðeins grunnformúluna. Hlutfall kolefnis-14 og kolefnis-12 í andrúmsloftinu er um 0,0000000001%. Látum r vera hlutfall kolefnis-14 og kolefnis-12 í lífræna gripnum eða steingervingnum sem á að aldursgreina, ákvarðað með aðferð sem kallast vökvaskintillun. Af jöfnunni $A \approx A_0\, e^{-0{,}000121\, t}$ vitum við að hlutfall kolefnis-14 í hlutnum sem við aldursgreinum af upphaflegu magni kolefnis-14 í hlutnum þegar hann myndaðist er $r = \frac{A}{A_0} \approx e^{-0{,}000121\, t}$. Við leysum þessa jöfnu fyrir t, og fáum

$$t = \frac{\ln(r)}{-0{,}000121}$$

AÐFERÐ

Ákvarðið aldur hlutar þegar hlutfall kolefnis-14 í honum er gefið.

1. Ritið gefna prósentu kolefnis-14 sem jafngilda tugabrotstölu, k.
2. Setjið r inn í jöfnuna $t = \frac{\ln(r)}{-0{,}000121}$ og leysið fyrir aldurinn t.

SÝNIDÆMI 3

Aldur beins fundinn

Það finnst beinbútur sem inniheldur 20% af upphaflegu kolefni-14 sínu. Hve gamalt er beinið, námundað að næsta ári?

Lausn

Við setjum $20\,\% = 0{,}20$ í stað r í jöfnunni og leysum fyrir t:

$$t = \frac{\ln(r)}{-0{,}000121}$$ Notið almennt form jöfnunnar.

$$= \frac{\ln(0{,}20)}{-0{,}000121}$$ Setjið inn fyrir r.

$$\approx 13301$$ Námundið að næsta ári.

Beinbúturinn er um 13.301 árs gamall.

Greining

Tækin sem mæla hlutfall kolefnis-14 eru afar næm og, eins og fram kom hér að framan, þyrfti vísindamaður að vinna mun meiri vinnu en við gerðum til að vera sáttur. Jafnvel þá er nákvæmni geislakolsgreiningar aðeins um 1%, svo þennan aldur ætti að gefa upp sem

$$13.301 \text{ ár} \pm 1\% \text{ eða } 13.301 \text{ ár} \pm 133 \text{ ár}.$$

REYNIÐ SJÁLF #2

Sesín-137 hefur um 30 ára helmingunartíma. Ef byrjað er með 200 mg af sesíni-137, tekur það þá meira eða minna en 230 ár þar til aðeins 1 milligramm er eftir?

Tvöföldunartími reiknaður

Þegar stærðir hnigna fundum við hve langan tíma það tók helming efnis að sundrast. Þegar stærðir vaxa getur verið gagnlegt að finna hve langan tíma það tekur stærðina að tvöfaldast. Eins og áður kom fram nefnist sá tími tvöföldunartími.

Út frá grunnjöfnu vísisvaxtar $A = A_0 e^{kt}$, má finna tvöföldunartímann, þann tíma þegar upphaflega magnið hefur tvöfaldast. Það er gert með því að leysa $2A_0 = A_0 e^{kt}$.

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned} 2A_0 &= A_0 e^{kt} \\ 2 &= e^{kt} && \text{Deilið með } A_0. \\ \ln 2 &= kt && \text{Takið náttúrulega logrann}. \\ t &= \frac{\ln 2}{k} && \text{Deilið með stuðlinum við } t. \end{aligned}$$

Tvöföldunartíminn er því

$$t = \frac{\ln 2}{k}$$

SÝNIDÆMI 4

Fall sem lýsir vísisvexti fundið

Samkvæmt lögmáli Moores er tvöföldunartími fjölda smára sem hægt er að koma fyrir á tölvukubbi um tvö ár. Gefið fall sem lýsir þessari hegðun.

Lausn

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt:

$t = \frac{\ln 2}{k}$ Formúlan fyrir tvöföldunartíma.

$2 = \frac{\ln 2}{k}$ Notið tveggja ára tvöföldunartíma.

$k = \frac{\ln 2}{2}$ Margfaldið með k og deilið með 2.

$A = A_0 e^{\frac{\ln 2}{2} t}$ Setjið inn k í formúluna fyrir samfellda vísisbreytingu.

Fallið er $A_0 e^{\frac{\ln 2}{2} t}$.

REYNIÐ SJÁLF #3

Í þessu dæmi er miðað við gögn frá 2013 sem bentu til hægari vaxtar en lögmál Moores spáði, með um þriggja ára tvöföldunartíma. Finnið nýja fallið sem tekur mið af lengri tvöföldunartíma.

4

Kælingarlögmál Newtons notað

Vísishnignun á einnig við um hitastig. Þegar heitur hlutur er skilinn eftir í kaldara umhverfi lækkar hitastig hans samkvæmt vísisfalli og breytingin hægir á sér þegar hitastigið nálgast umhverfishitann. Á grafi hitafallsins samsvarar þessi hæging láréttri aðfellu við umhverfishitann. Sé stofuhitinn ekki núll samsvarar þetta lóðréttri hliðrun almenna vísishnignunarfallsins. Hliðrunin leiðir til kælingarlögmáls Newtons, vísindaformúlunnar sem lýsir hitastigi sem falli af tíma þegar hitastig hlutar jafnast við umhverfishitann

$$T(t) = A e^{kt} + T_s$$

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt:

$$\begin{aligned} T(t) &= A\, b^{c\,t} + T_s \\ T(t) &= A\, e^{\ln(b^{c\,t})} + T_s && \text{Reiknireglur logra.} \\ T(t) &= A\, e^{c\,t \ln b} + T_s && \text{Reiknireglur logra.} \\ T(t) &= A\, e^{k\,t} + T_s && \text{Endurnefnið fastann } c \ln b, \text{ og kallið hann } k. \end{aligned}$$

KÆLINGARLÖGMÁL NEWTONS

Hitastig hlutar, T, í lofti með hitastigið T_s hagar sér samkvæmt formúlunni

$$T(t) = A e^{kt} + T_s$$

þar sem

- t er tími
- A er mismunurinn á upphafshita hlutarins og umhverfishitanum
- k er neikvæður fasti sem ákvarðar hve hratt hitamunur hlutarins og umhverfisins minnkar

AÐFERÐ

Beitið kælingarlögmáli Newtons við gefin skilyrði.

1. Látið T_s vera jafnt y-hniti láréttu aðfellunnar (yfirleitt umhverfishitanum).
2. Setjið gefnu gildin inn í kælingarlíkanið $T(t)=A\,e^{k\,t}+T_s$ til að finna stikana A og k.
3. Setjið inn æskilegan tíma til að finna hitastigið eða æskilegt hitastig til að finna tímann.

SÝNIDÆMI 5

Kælingarlögmál Newtons notað

Ostakaka er tekin úr ofninum við kjörhita að innan, 165°F, og sett í $35\ ^{\circ}F$ kaldan ísskáp. Eftir 10 mínútur hefur kakan kólnað niður í 150°F. Ef við verðum að bíða þar til hún hefur kólnað niður í 70°F áður en við borðum hana, hve lengi þurfum við þá að bíða?

Lausn

Þar sem umhverfishitinn í ísskápnum er 35 gráður lækkar hitastig ostakökunnar samkvæmt vísisfalli í átt að 35 eftir jöfnunni

$$T(t)=A\,e^{kt}+35$$

Við vitum að upphafshitinn var 165, þannig að $T(0)=165$.

$$\begin{aligned} 165&=A\ e^{k\,0}+35 && \text{Setjið inn } (0,165).\\ A&=130 && \text{Leysið fyrir } A. \end{aligned}$$

Okkur var gefinn annar gagnapunktur, $T(10)=150$, sem má nota til að leysa fyrir k.

$$\begin{aligned} 150&=130\ e^{k\,10}+35 && \text{Setjið inn (10, 150).}\\ 115&=130\ e^{k\,10} && \text{Dragið 35 frá.}\\ \frac{115}{130}&=e^{10\,k} && \text{Deilið með 130.}\\ \ln\left(\frac{115}{130}\right)&=10\ k && \text{Takið náttúrulega logrann af báðum hliðum.}\\ k&=\frac{\ln\left(\frac{115}{130}\right)}{10}\approx -0{,}0123 && \text{Deilið með stuðlinum við } k. \end{aligned}$$

Þannig fæst jafnan fyrir kólnun ostakökunnar: $T(t)=130\,e^{-0{,}0123t}+35$.

Nú má leysa fyrir tímann sem tekur hitastigið að lækka niður í 70 gráður.

$$
\begin{aligned}
70 &= 130\, e^{-0{,}0123\, t} + 35 && \text{Setjið 70 í stað } T\,(t). \\
35 &= 130\, e^{-0{,}0123\, t} && \text{Dragið 35 frá.} \\
\frac{35}{130} &= e^{-0{,}0123\, t} && \text{Deilið með 130.} \\
\ln\left(\frac{35}{130}\right) &= -0{,}0123\, t && \text{Takið náttúrulega logrann af báðum hliðum} \\
t &= \frac{\ln\left(\frac{35}{130}\right)}{-0{,}0123} \approx 106{,}68 && \text{Deilið með stuðlinum við } t.
\end{aligned}
$$

Það tekur ostakökuna um 107 mínútur, eða eina klukkustund og 47 mínútur, að kólna niður í $70°\mathrm{F}$.

4

REYNIÐ SJÁLF #4

Vatnskanna við 40 gráður Fahrenheit er sett í 70 gráðu heitt herbergi. Klukkustund síðar hefur hitastigið hækkað í 45 gráður. Hve langan tíma tekur hitastigið að hækka í 60 gráður?

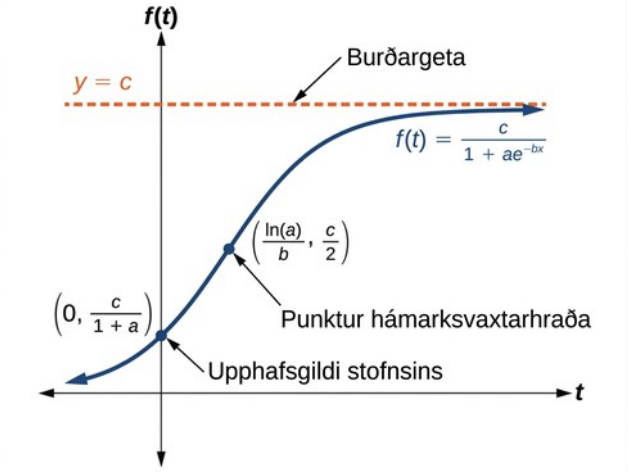
Líkön af lógístískum vexti notuð

Vísisvöxtur raunverulegra stærða getur ekki haldið áfram að eilífu. Vísislíkön geta gagnast til skamms tíma en verða yfirleitt sífellt óraunhæfari eftir því sem lengra líður. Hugsum okkur upprennandi rithöfund sem skrifar eina línu fyrsta daginn og tvöfaldar línufjöldann á hverjum degi. Á þrítugasta degi þyrfti hún að skrifa 536.870.912 línur. Talan 17 milljarðar lína í frumtextanum fæst ekki fyrir 30 daga. Það er óraunhæft að nokkur geti skrifað svo mikið á einum degi. Vísisvaxtarlíkan sjálft er ótakmarkað, en raunverulegar aðstæður setja vextinum skorður. Því er oft betra að nota líkan með efri mörkum, þótt vísisvaxtarlíkan geti gagnast áður en þeirra fer að gæta.

Lógístíska vaxtarlíkanið getur í upphafi líkst vísisvexti, en vaxtarhraðinn minnkar þegar fallgildið nálgast efra mark líkansins, sem nefnist burðargeta. Fyrir jákvæðu fastana a, b, og c, er lógístískum vexti stofns eftir tímanum t lýst með líkaninu:

$$f(t) = \frac{c}{1 + a\, e^{-bt}}$$

Grafið á mynd 6 sýnir hvernig vaxtarhraðinn breytist með tíma. Grafið hækkar frá vinstri til hægri en vaxtarhraðinn eykst aðeins þar til hámarksvaxtarhraða er náð; eftir það tekur vaxtarhraðinn að minnka.



Mynd 6. Lógístískur vöxtur með burðargetuna c og mestan vaxtarhraða við beygjuskilin. Í formúlumerkingu frummyndarinnar stendur x þar sem á að standa t.

LÓGISTÍSKUR VÖXTUR

Líkanið fyrir lógistískan vöxt er

$$f(t)=\frac{c}{1+a\,e^{-bt}}$$

þar sem

- $(\frac{c}{1+a})$ er upphafsgildið
- c er burðargetan, eða markgildið
- b er fasti sem ræðst af vaxtarhraðanum.

SÝNIDÆMI 6

Lógistíska vaxtarlíkanið notað

Inflúensufaraldur breiðist hratt út um mannfjölda og hraðinn ræðst af tvennu: Því fleiri sem eru með inflúensu, þeim mun hraðar breiðist hún út, og því fleiri sem enn eru ósýktir, þeim mun hraðar breiðist hún einnig út. Vegna þessara tveggja þátta hentar lógistískt líkan vel til að rannsaka útbreiðslu smitsjúkdóma. Auk þess getur fjöldi smitaðra augljóslega ekki orðið meiri en allur mannfjöldinn.

Við tímann $t=0$ er til dæmis einn einstaklingur með inflúensu í samfélagi 1.000 manna. Í því samfélagi geta því í mesta lagi 1.000 manns fengið inflúensu. Rannsakendur komast að því að fyrir þennan tiltekna inflúensustofn er fasti lógistíska vaxtarins $b=0{,}6030$. Áætlið hve margir í samfélaginu hafa fengið inflúensuna eftir tíu daga. Spáið hve margir í samfélaginu hafa fengið hana eftir langan tíma.

Lausn

Við setjum gefnu gögnin inn í lógistíska vaxtarlíkanið

$$f(t)=\frac{c}{1+a\,e^{-bt}}$$

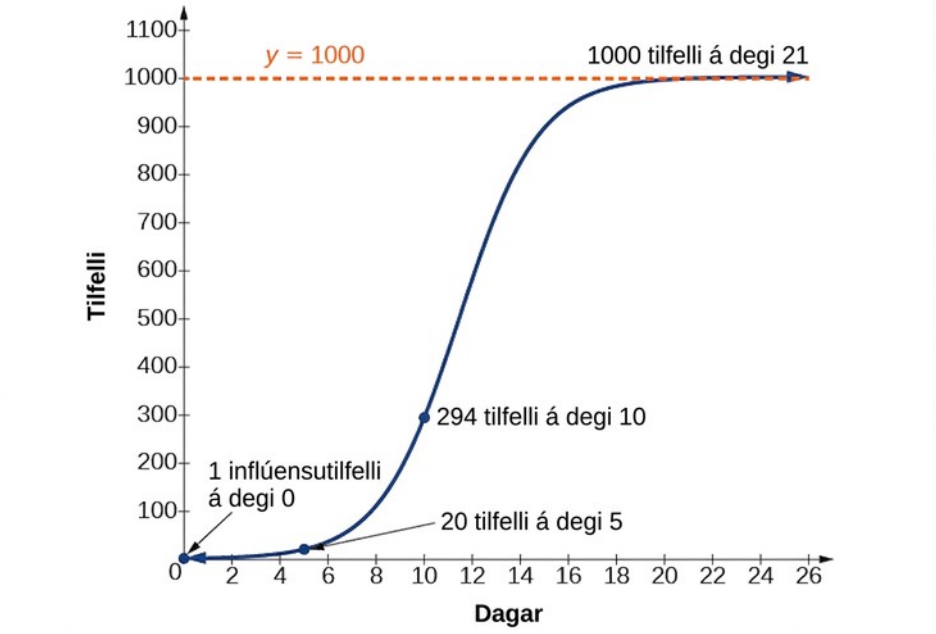
Þar sem í mesta lagi 1.000 manns, allir íbúar samfélagsins, geta fengið inflúensu vitum við að markgildið er $c=1000$. Til að finna a, notum við að fjöldi tilfella við tímann $t=0$ er $\frac{c}{1+a}=1$, og af því leiðir að $a=999$. Líkanið spáir að eftir tíu daga sé fjöldi þeirra sem hafa fengið inflúensu $f(t)=\frac{1000}{1+999\,e^{-0{,}6030\,x}}\approx 293{,}8$. Raunverulegi fjöldinn hlýtur að vera heil tala (annaðhvort hefur einstaklingur fengið inflúensu eða ekki) og því námundum við í 294. Til lengri tíma er fjöldi þeirra sem fá inflúensuna markgildið $c=1000$.

4

Greining

Munið að þar sem hér er um veiru að ræða er ekki hægt að spá fyrir um fjölda smitaðra með vissu. Líkanið nálgar aðeins fjöldann og gefur hvorki nákvæm né raunveruleg gildi.

Grafið á mynd 7 sýnir vel hvernig líkanið hæfir gögnunum.



Mynd 7 Graf $f(t)=\frac{1000}{1+999\,e^{-0{,}6030\,x}}$

REYNIÐ SJÁLF #5

Notið líkanið í dæmi 6 til að áætla fjölda inflúensutilfella á degi 15.

Hentugt líkan valið fyrir gögn

Nú þegar fjallað hefur verið um ýmis stærðfræðilíkön þurfum við að læra að velja hentugt líkan fyrir þau hráu gögn sem liggja fyrir. Margir þættir hafa áhrif á val stærðfræðilíkans, meðal annars reynsla, náttúrulögmál og mynstur í gögnunum sjálfum. Ekki er hægt að lýsa öllum gögnum með einföldum föllum. Stundum er valið fall sem nálgar gögnin á tilteknu bili. Hugsum okkur til dæmis að safnað hafi verið gögnum um fjölda keyptra íbúðarhúsa í Bandaríkjunum á árunum 1960 til 2013. Þegar gögnin eru sett í dreifirit sést að lögun þeirra á árunum 2000 til 2013 fylgir lograferli. Þá mætti takmarka bilið við árin 2000 til 2010, gera aðhvarfsgreiningu með logralíkani og nota það til að spá fyrir um fjölda íbúðarkaupenda árið 2015.

Þrjár gerðir falla sem nýtast oft í stærðfræðilíkönum eru línuleg föll, vísisföll og lograföll. Ef gögnin liggja á beinni línu, eða virðast liggja um það bil eftir beinni línu, getur línulegt líkan hentað best. Ef gögnin eru ólínuleg eru vísis- eða logralíkön oft skoðuð, þótt önnur líkön, svo sem annars stigs líkön, geti einnig komið til greina.

Þegar valið er milli vísislíkans og logralíkans er skoðað hvernig gögnin sveigjast. Þetta nefnist kúptni. Ef línustrik er dregið milli tveggja gagnapunkta og öll eða flest gögnin þar á milli liggja ofan við línustrikið segjum við ferilinn kúptan niður. Líta má á hann sem skál á hvolfi sem getur ekki haldið vatni. Ef gögnin liggja neðan við línustrikið segjum við ferilinn kúptan upp, líkt og skál sem getur haldið vatni. Vísislíkön af forminu $y = A_0e^{kx}$ með $A_0 > 0$ eru kúpt upp, bæði við vöxt og hnignun. Logralíkön af forminu $y = a\ln(bx)$ með $a > 0$ og $b > 0$ eru kúpt niður á skilgreiningarmengi sínu. Þetta gildir ekki um allar ummyndanir þessara falla; jákvæð gagnagildi ein og sér nægja ekki til að ákvarða kúptnina.

Lógistískur ferill skiptir um kúptni. Hann er fyrst kúptur upp en verður kúptur niður handan ákveðins punkts sem nefnist beygjuskil.

Eftir að grafið hefur hjálpað okkur að velja fallgerð fyrir líkanið setjum við punkta inn og leysum til að finna stikana. Við drögum úr námundunarskekkju með því að velja punkta sem eru eins langt hvor frá öðrum og unnt er.

SÝNIDÆMI 7

Stærðfræðilíkan valið

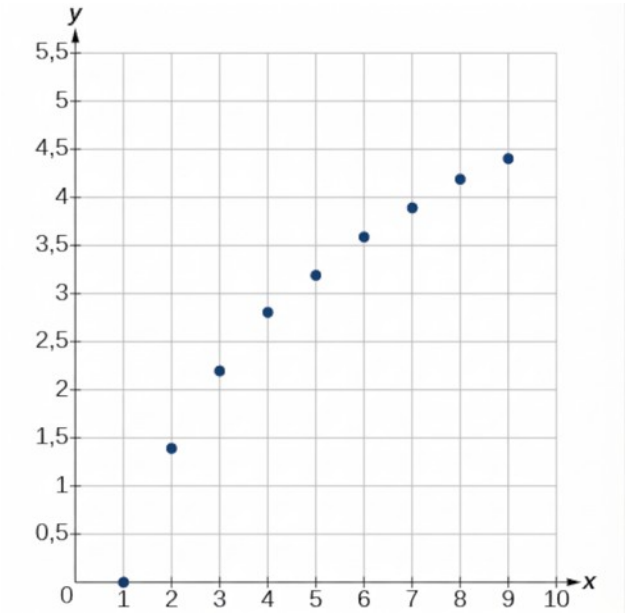
Hæfir línulegt líkan, vísislíkan, logralíkan eða lógistískt líkan best gildunum í töflu 1? Finnið líkanið og notið graf til að sannreyna valið.

Tafla 1

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1,386	2,197	2,773	3,219	3,584	3,892	4,159	4,394

Lausn

Setjið gögnin fyrst á graf eins og á mynd 8. Námundið gögnin að tveimur aukastöfum fyrir grafteikninguna.



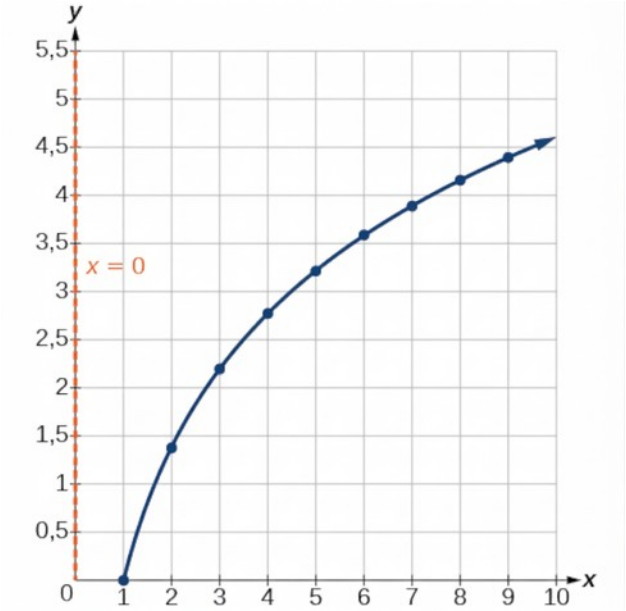
Mynd 8. Gagnapunktarnir úr töflu 1 í dreifiriti.

Punktarnir liggja greinilega ekki á beinni línu og því höfnum við línulegu líkani. Ef dregin er lína milli hvaða tveggja punkta sem er liggja flestir eða allir punktarnir þar á milli ofan við línuna, svo grafið er kúpt niður, sem bendir til logralíkans. Við getum prófað $y=a\ln(b\,x)$. Þegar fyrsti punkturinn, $(1{,}0)$, er settur inn fæst $0=a\ln b$. Við höfnum tilvikinu $a=0$ (væri svo yrðu öll úttök 0), svo við vitum að $\ln(b)=0$. Því er $b=1$ og $y=a\ln(x)$. Næst getum við notað punktinn $(9\,;4{,}394)$ til að leysa fyrir a:

$$y=a\ \ln\left(x\right)$$
$$4{,}394=a\ \ln\left(9\right)$$
$$a=\frac{4{,}394}{\ln\left(9\right)}$$

Þar sem $a=\frac{4{,}394}{\ln\left(9\right)}\approx 2$, er hentugt líkan fyrir gögnin: $y=2\ln(x)$.

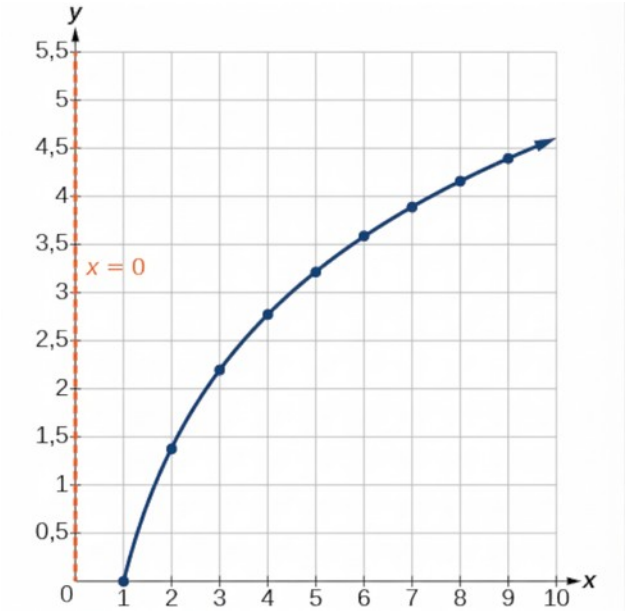
Til að kanna nákvæmni líkansins teiknum við graf fallsins ásamt gefnu punktunum eins og á mynd 9.



Mynd 9 Graf $y=2\ln x$.

Við getum ályktað að líkanið hæfi gögnunum vel.

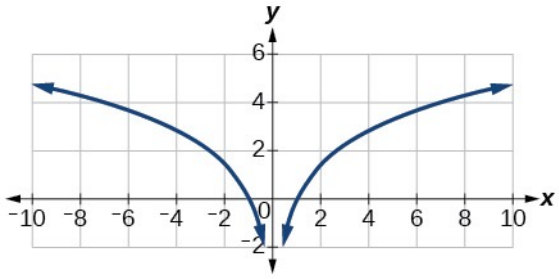
Berið mynd 9 saman við grafið af $y=\ln\left(x^2\right)$ á mynd 10.



Mynd 10 Graf $y=\ln\left(x^2\right)$

Gröfin virðast eins þegar $x>0$. Stutt athugun staðfestir þetta: $y=\ln\left(x^2\right)=2\ln\left(x\right)$ fyrir $x>0$.

Þegar $x<0$, hefur grafið af $y=\ln\left(x^2\right)$ aðra grein, eins og sést á mynd 11. Fallið $y=2\ln\left(x\right)$ er ekki skilgreint fyrir neikvæð gildi x, því þá yrði viðfang lograns neikvætt. Fallið $y=\ln\left(x^2\right)$ er hins vegar einnig skilgreint fyrir neikvæð gildi x.



Mynd 11. Tvær greinar grafsins y = ln(x²), samhverfar um y-ásinn, með lóðrétta aðfellu x = 0.

4

REYNIÐ SJÁLF #6

Hæfir línulegt líkan, vísislíkan eða logralíkan best gögnunum í töflu 2? Finnið líkanið.

Tafla 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	3,297	5,437	8,963	14,778	24,365	40,172	66,231	109,196	180,034

Vísislíkan ritað með grunntöluna e

Þótt nota megi veldi og logra með hvaða leyfilegri grunntölu sem er við líkanagerð eru algengustu grunntölurnar 10 og e. Í vísindum og stærðfræði er grunntalan e oft valin. Nota má veldareglur og reiknireglur logra til að skipta hvaða grunntölu sem er út fyrir e.

AÐFERÐ

Breytið gefnu líkani af forminu $y = a\,b^x$, í formið $y = A_0 e^{kx}$.

1. Umritið $y = a\,b^x$ sem $y = a\,e^{\ln(b^x)}$.
2. Notið veldisreglu logra til að umrita y sem $y = a\,e^{x\ln(b)} = a\,e^{\ln(b)x}$.
3. Athugið að $a = A_0$ og $k = \ln(b)$ í jöfnunni $y = A_0 e^{kx}$.

SÝNIDÆMI 8

Skipt yfir í grunntöluna e

Breytið fallinu $y = 2{,}5\,(3{,}1)^x$ þannig að sama fall sé ritað á forminu $y = A_0 e^{kx}$.

Lausn

Formúlan er leidd út á eftirfarandi hátt

$$
\begin{aligned}
y &= 2{,}5\,(3{,}1)^x \\
&= 2{,}5\,e^{\ln(3{,}1^x)} && \text{Setjið inn vísisfall og andhverfu þess.} \\
&= 2{,}5\,e^{x\ln 3{,}1} && \text{Reiknireglur logra.} \\
&= 2{,}5\,e^{(\ln 3{,}1)x} && \text{Víxlregla margföldunar}
\end{aligned}
$$

REYNIÐ SJÁLF #7

Ritið fallið $y = 3\,(0{,}5)^x$ með grunntöluna e.

MIÐLAR

Notið þessi netgögn til að fá frekari kennslu og æfingu í vísis- og logralíkönum.

- Notkun logra – sýrustig
- Vísislíkan – aldur fundinn með helmingunartíma
- Kælingarlögmál Newtons
- Vísisvöxtur þegar tvöföldunartími er gefinn
- Vísisvöxtur – upphafsmagn fundið þegar tvöföldunartími er gefinn

4.7 Kaflaæfingar

Munnleg verkefni

1. Hvaða gerð vísislíkans tengist helmingunartíma? Hvaða hlutverki gegnir helmingunartími í slíkum líkönum?

2. Hvað er geislakolsgreining? Hvers vegna virkar hún? Nefnið dæmi þar sem geislakolsgreining nýtist.

3. Hvaða gerð vísislíkans tengist tvöföldunartíma? Hvaða hlutverki gegnir tvöföldunartími í slíkum líkönum?

4. Skilgreinið kælingarlögmál Newtons. Nefnið síðan að minnsta kosti þrjár raunverulegar aðstæður þar sem því væri beitt.

5. Hvað er stærðargráða? Hvers vegna eru stærðargráður gagnlegar? Útskýrið með dæmi.

Töluleg verkefni

6. Hitastigi hlutar í gráðum Fahrenheit eftir t mínútur er lýst með jöfnunni $T(t) = 68\,e^{-0{,}0174\,t} + 72$. Hvert er hitastig hlutarins eftir eina og hálfa klukkustund, námundað að næstu gráðu?

Í eftirfarandi æfingum skal nota lógístíska vaxtarlíkanið $f(x) = \dfrac{150}{1+8e^{-2x}}$.

7. Finnið og túlkið $f(0)$. Námundið að næsta tíunda hluta.

8. Finnið og túlkið $f(4)$. Námundið að næsta tíunda hluta.

9. Finnið burðargetuna.

10. Teiknið graf líkansins.

11. Ákvarðið hvort gögnunum í töflunni sé best lýst með línulegu falli, vísisfalli eða lografalli. Ritið síðan formúlu líkans sem lýsir gögnunum.

x	$f(x)$
−2	0,694
−1	0,833
0	1
1	1,2
2	1,44
3	1,728
4	2,074
5	2,488

12. Umritið $f\left(x\right)=1{,}68\left(0{,}65\right)^{x}$ sem vísisjöfnu með grunntöluna e og fimm aukastöfum.

Tækni

Í eftirfarandi æfingum skal færa gögn hverrar töflu inn í grafíska reiknivél og teikna dreifiritin sem fást. Ákvarðið hvort gögn töflunnar geti lýst línulegu falli, vísisfalli eða lografalli.

13.

x	$f(x)$
1	2
2	4,079
3	5,296
4	6,159
5	6,828
6	7,375
7	7,838
8	8,238
9	8,592
10	8,908

14.

x	$f(x)$
1	2,4
2	2,88
3	3,456
4	4,147
5	4,977
6	5,972
7	7,166
8	8,6
9	10,32
10	12,383

15.

x	$f(x)$
4	9,429
5	9,972
6	10,415
7	10,79
8	11,115
9	11,401
10	11,657
11	11,889
12	12,101
13	12,295

16.

x	$f(x)$
1,25	5,75
2,25	8,75
3,56	12,68
4,2	14,6
5,65	18,95
6,75	22,25
7,25	23,75
8,6	27,8
9,25	29,75
10,5	33,5

Í eftirfarandi æfingum skal nota grafíska reiknivél og þessar aðstæður: Fjölda fiska í fiskeldi eftir t ár er lýst með jöfnunni $P(t)=\frac{1000}{1+9\,e^{-0{,}6\,t}}$.

17. Teiknið graf fallsins.

18. Hver er upphaflegur fjöldi fiska?

19. Hver er tvöföldunartími fiskistofnsins, námundaður að næsta tíunda hluta?

20. Hver verður fiskifjöldinn eftir 2 ár, námundaður að næstu heiltölu?

21. Hve langan tíma tekur stofninn að ná 900 ? Námundið tímann að næsta tíunda hluta.

22. Hver er burðargeta fiskistofnsins? Rökstyðjið svarið með grafi P.

Viðbótarverkefni

23. Efni hefur helmingunartímann 2,045 mínútur. Ef upphaflegt magn efnisins var 132,8 grömm, hve margir helmingunartímar hafa liðið þegar magnið hefur minnkað niður í 8,3 grömm? Hver er heildartími hnignunarinnar?

24. Formúlan fyrir vaxandi stofn er $P(t)=P_0 e^{r\,t}$ þar sem P_0 er upphafleg stofnstærð og $r>0$. Leiðið út almenna formúlu fyrir tímann t sem tekur stofninn að stækka um margföldunarstuðulinn M.

25. Rifjið upp formúluna til að reikna stærð jarðskjálfta, $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{S}{S_0}\right)$. Sýnið hvert skref þegar jafnan er leyst algebrulega fyrir jarðskjálftavægið S.

26. Hver er skurðpunktur við y-ásinn fyrir lógistíska vaxtarlíkanið $y=\frac{c}{1+ae^{-rx}}$? Sýnið útreikninginn skref fyrir skref. Hvað segir punkturinn um stofninn?

27. Sannið að ($b^x=e^{x\ln(b)}$) fyrir jákvætt $b\neq 1$.

Hagnýt verkefni

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Læknir ávísar 125 milligrömmum af lyfi sem rýrnar um u.þ.b. 30% á klukkustund.

28. Hver er helmingunartími lyfsins, námundaður að næstu klukkustund?

29. Ritið vísislíkan sem lýsir magni lyfsins sem eftir er í líkama sjúklingsins eftir t klukkustundir. Notið síðan formúluna til að finna magn lyfsins sem væri eftir í líkama sjúklingsins að 3 klukkustundum liðnum. Námundið að næsta milligrammi.

30. Notið líkanið úr æfingunni á undan til að finna $f(10)$ og túlkið niðurstöðuna. Námundið að næsta hundraðasta hluta.

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Í æxli er sprautað 0,5 grömmum af joði-125 sem hefur hnignunarhraðann 1,15 % á dag.

31. Hve langan tíma tekur helming joðs-125 að sundrast, námundað að næsta degi?

32. Ritið vísislíkan sem lýsir magni joðs-125 sem eftir er í æxlinu eftir t daga. Notið síðan formúluna til að finna magn joðs-125 sem væri eftir í æxlinu eftir 60 daga. Námundið að næsta tíunda hluta gramms.

33. Vísindamaður byrjar með 250 grömm af geislavirku efni. Eftir 250 mínútur hefur sýnið minnkað niður í 32 grömm. Ritið vísisjöfnu sem lýsir aðstæðunum og námundið að fimm aukastöfum. Hver er helmingunartími efnisins, námundaður að næstu mínútu?

34. Helmingunartími radíums-226 er 1590 ár. Hver er árlegur hnignunarhraði? Gefið tugabrotið með fjórum aukastöfum og prósentuhlutfallið með tveimur aukastöfum.

35. Helmingunartími erbíns-165 er 10,4 klukkustundir. Hver er hnignunarhraðinn á klukkustund? Gefið tugabrotið með fjórum aukastöfum og prósentuhlutfallið með tveimur aukastöfum.

36. Trégripur úr fornleifauppgreftri inniheldur 60 prósent af því kolefni-14 sem er í lifandi trjám. Hve gamall er gripurinn um það bil, námundað að næsta ári? (Helmingunartími kolefnis-14 er 5730 ár.)

37. Rannsóknarnemi vinnur með bakteríurækt sem tvöfaldast að stærð á tuttugu mínútna fresti. Upphaflegur fjöldi var 1350 bakteríur. Ritið vísisjöfnu sem lýsir aðstæðunum og námundið að fimm aukastöfum. Hver er stofnstærðin eftir 3 klukkustundir, námunduð að næstu heiltölu?

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Líffræðingur taldi 360 bakteríur í rækt eftir 5 mínútur og 1000 bakteríur eftir 20 mínútur.

38. Hver var upphaflegur fjöldi í ræktinni, námundaður að næstu heiltölu?

39. Ritið vísisjöfnu sem lýsir aðstæðunum og námundið að sex aukastöfum. Hve langan tíma tók stofninn að tvöfaldast, námundað að næstu mínútu?

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Pottur af heitri súpu með innra hitastigið 100° Fahrenheit var tekinn af eldavélinni og látinn kólna í 69° F heitu herbergi. Eftir fimmtán mínútur var innra hitastig súpunnar 95° F.

40. Notið kælingarlögmál Newtons til að rita formúlu sem lýsir aðstæðunum.

41. Hve langan tíma tekur súpuna að kólna niður í 80° F? Námundið tímann að næstu mínútu.

4

42. Hvert verður hitastigið eftir 2 og hálfa klukkustund, námundað að næstu gráðu?

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Kalkúnn er tekinn úr ofni við innra hitastigið 165°F og látinn kólna í 75°F heitu herbergi. Eftir hálfa klukkustund er innra hitastig kalkúnsins 145°F.

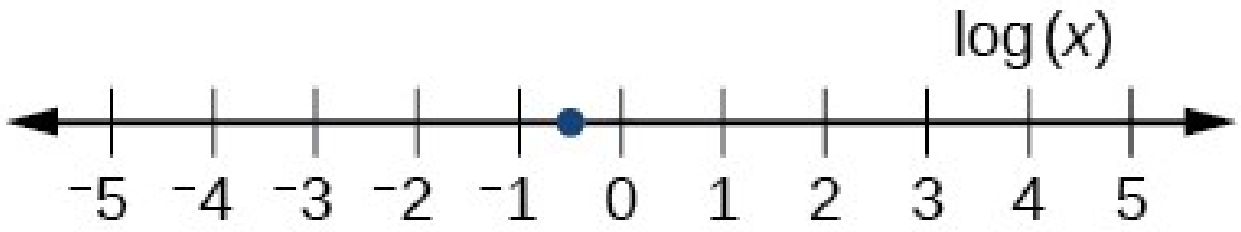
43. Ritið formúlu sem lýsir aðstæðunum.

44. Hvert verður hitastigið eftir 50 mínútur, námundað að næstu gráðu?

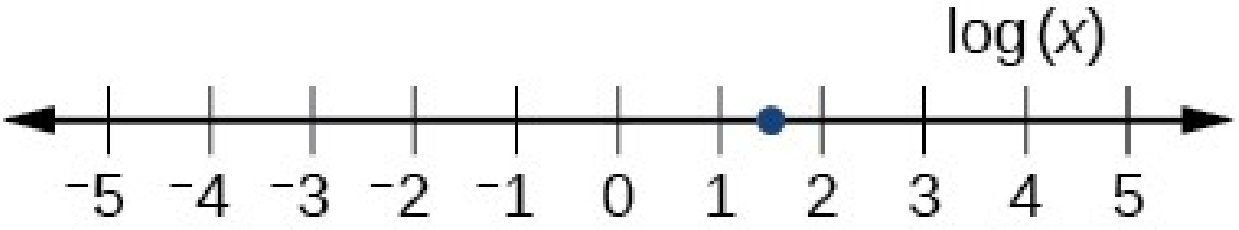
45. Hve langan tíma tekur kalkúninn að kólna niður í 110° F? Námundið tímann að næstu mínútu.

Í eftirfarandi æfingum skal finna gildi tölunnar sem sýnd er á hverjum lograskala. Námundið öll svör að næsta þúsundasta hluta.

46.



47.



48. Setjið eftirfarandi nálgunargildi hljóðstyrks á lograskala: Hvísl: $10^{-10}\frac{W}{m^2}$, ryksuga: $10^{-4}\frac{W}{m^2}$, þota: $(10^{2}\frac{W}{m^2})$

49. Rifjið upp formúluna til að reikna stærð jarðskjálfta, $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{S}{S_0}\right)$. Einn jarðskjálfti mælist 3,9 á stærðarkvarða jarðskjálftavægis (MMS). Ef annar jarðskjálfti hefur 750 sinnum meiri orku en sá fyrri, finnið þá stærð síðari skjálftans. Námundið að næsta hundraðasta hluta.

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Jafnan $N\left(t\right)=\frac{500}{1+49\ e^{-0,7\ t}}$ lýsir fjölda bæjarbúa sem hafa heyrt orðróm eftir t daga.

50. Hve margir hófu orðróminn?

51. Hve margir hafa heyrt orðróminn eftir 3 daga, námundað að næstu heiltölu?

52. Þegar t vex án takmarka, hvaða gildi nálgast $N\left(t\right)$ Túlkið svarið.

Veljið rétta svarmöguleikann í eftirfarandi æfingu.

53. Læknir sprautar sjúkling með 13 milligrömmum af geislavirku litarefni sem hnignar samkvæmt vísisfalli. Eftir 12 mínútur eru 4,75 milligrömm af litarefninu eftir í líkama sjúklingsins. Hvaða líkan hæfir aðstæðunum?

1. ⓐ $f\left(t\right)=13\left(0,0805\right)^{t}$
2. ⓑ $f\left(t\right)=13\ e^{0,9195\ t}$
3. ⓒ $f\left(t\right)=13\ e^{\left(-0,0839\ t\right)}$
4. ⓓ $f\left(t\right)=\frac{4,75}{1+13\ e^{-0,83925\ t}}$

4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- gera vísislíkan út frá gögnum.
- gera logralíkan út frá gögnum.
- gera lógistískt líkan út frá gögnum.

Í fyrri hlutum þessa kafla var annaðhvort gefið fall til að teikna eða reikna gildi eða gefið punktasafn sem lá örugglega á ferlinum. Þá notuðum við algebru til að finna jöfnuna sem féll nákvæmlega að punktunum. Í þessum hluta notum við líkanagerðaraðferð sem nefnist aðhvarfsgreining til að finna feril sem lýsir gögnum úr raunverulegum athugunum. Í aðhvarfsgreiningu gerum við ekki ráð fyrir að allir punktarnir liggi nákvæmlega á ferlinum. Markmiðið er að finna líkan sem fellur sem best að gögnunum. Síðan notum við líkanið til að spá fyrir um atburði í framtíðinni.

Látið orðið líkan ekki valda ruglingi. Í stærðfræði notum við oft orðin fall, jafna og líkan sem samheiti þótt hvert þeirra hafi sína formlegu skilgreiningu. Orðið líkan er yfirleitt notað til að gefa til kynna að jafnan eða fallið nálgi raunverulegar aðstæður.

Í þessum hluta einbeitum við okkur að þremur gerðum aðhvarfslíkana: vísislíkani, logralíkani og lógistísku líkani. Við höfum þegar unnið með öll þessi föll og það kemur okkur til góða. Við þekkjum formlegar skilgreiningar þeirra, hegðun grafa þeirra og nokkur raunveruleg notkunarsvið, og það hjálpar okkur að dýpka skilninginn. Þegar við kynnum hvert aðhvarfslíkan rifjum við upp helstu eiginleika og skilgreiningar fallsins sem því tilheyrir. Gefið ykkur stund til að hugsa aftur um hvert þessara falla og það sem við höfum þegar unnið, og kannið síðan hvernig aðhvarfsgreining er notuð til að gera líkön af raunverulegum fyrirbærum.

Vísislíkan gert út frá gögnum

Eins og við höfum lært má gera líkan af margs konar aðstæðum með vísisföllum, svo sem vexti fjárfestingar, geislavirkri sundrun, breytingum á loftþrýstingi og hitastigi hlutar sem kólnar. Hvað eiga þessi fyrirbæri sameiginlegt? Í fyrsta lagi vaxa eða minnka öll líkönin þegar tíminn líður. En það segir ekki alla söguna. Það er hvernig gögnin vaxa eða minnka sem hjálpar okkur að ákvarða hvort vísisjafna lýsi þeim best. Ef við þekkjum almenna hegðun vísisfalla sjáum við hvenær nota á vísisaðhvarf. Rifjum því upp vísisvöxt og vísishnignun.

Munið að vísisföll eru af forminu $y = a\,b^x$ eða $y = A_0 e^{kx}$. Við aðhvarfsgreiningu notum við formið sem er algengast í grafteikniforritum, $y = a\,b^x$. Rifjið upp eiginleikana sem við höfum þegar lært um vísisfallið $y = a\,b^x$ (gerið ráð fyrir að $a > 0$):

- b verður að vera stærra en núll og ekki jafnt einum.
- upphafsgildi líkansins er $y = a$.
  - Ef $b > 1$, lýsir fallið vísisvexti. Þegar x vex aukast úttaksgildi líkansins hægt í fyrstu en síðan sífellt hraðar og án takmarkana.

– Ef $0<b<1$, lýsir fallið vísishnignun. Þegar x vex minnka úttaksgildi líkansins hratt í fyrstu en jafnast síðan út og nálgast x-ásinn sem aðfellu. Með öðrum orðum verða úttaksgildin aldrei jöfn núlli eða minni en núll.

Í niðurstöðunum birtir reiknivélin meðal annars tölu sem kallast fylgnistuðull og er táknuð með breytunni r, eða r^2. (Hugsanlega þarf að breyta stillingum reiknivélarinnar til að þær birtist.) Gildin gefa til kynna hve vel aðhvarfsjafnan fellur að gögnunum. Algengara er að nota gildið r^2 en r, en því nær sem annað hvort gildið er 1, þeim mun betur nálgar aðhvarfsjafnan gögnin.

VÍSISAÐHVARF

Vísisaðhvarf er notað til að lýsa aðstæðum þar sem vöxtur byrjar hægt en hraðar síðan ört og án takmarkana, eða þar sem hnignun byrjar hratt en hægir síðan á sér og nálgast núll sífellt meira. Við notum skipunina „**ExpReg**“ í grafteikniforriti til að aðlaga vísisfall að gagnapunktasafni. Þá fæst jafna af forminu

$$y = a\,b^x$$

Athugið:

- b verður að vera óneikvætt.
- þegar $b>1$, höfum við vísisvaxtarlíkan.
- þegar $0<b<1$, höfum við líkan af vísishnignun.

AÐFERÐ

Framkvæmið vísisaðhvarf með grafteikniforriti fyrir gefið gagnasafn.

1. Notið STAT og síðan EDIT-valmyndina til að færa inn gefin gögn.
   a. Eyðið öllum fyrirliggjandi gögnum úr listunum.
   b. Skráið inntaksgildin í dálk L1.
   c. Skráið úttaksgildin í dálk L2.
2. Teiknið dreifirit gagnanna með STATPLOT-aðgerðinni og skoðið það.
   a. Notið ZOOM [9] til að stilla ásana að gögnunum.
   b. Staðfestið að gögnin fylgi vísismynstri.
3. Finnið jöfnuna sem lýsir gögnunum.
   a. Veljið „ExpReg“ úr STAT- og síðan CALC-valmyndinni.
   b. Notið gildin sem fást fyrir a og b til að skrá líkanið, $y = a\,b^x$.
4. Teiknið graf líkansins í sama glugga og dreifiritið til að staðfesta að það falli vel að gögnunum.

SÝNIDÆMI 1

Vísisaðhvarf notað til að aðlaga líkan að gögnum

Árið 2007 var birt háskólarannsókn á slysahættu við akstur undir áhrifum áfengis. Gögn úr 2.871 slysum voru notuð til að mæla tengsl áfengismagns í blóði (BAC) við hættuna á að lenda í slysi. Tafla 1 sýnir niðurstöður rannsóknarinnar 9. Hlutfallsleg áhætta mælir hve miklu líklegra er að einstaklingur lendi í slysi. Einstaklingur með BAC-gildið 0,09 er til dæmis 3,54 sinnum líklegri til að lenda í slysi en einstaklingur sem hefur ekki drukkið áfengi. Hér er BAC gefið í grömmum áfengis í hverjum desilítra blóðs (g/dL). Gildin og rannsóknarlýsingin eru tekin úr frumtexta þessa sögulega reiknidæmis.

9

Heimild: Indiana University Center for Studies of Law in Action, 2007

4

Tafla 1

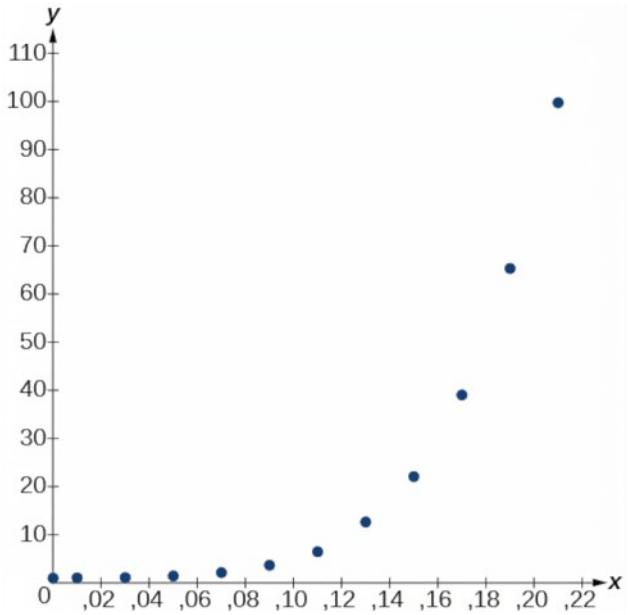
Áfengismagn í blóði (BAC)	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
Hlutfallsleg slysahætta	1	1,03	1,06	1,38	2,09	3,54
Áfengismagn í blóði (BAC)	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21
Hlutfallsleg slysahætta	6,41	12,6	22,1	39,05	65,32	99,78

a. Látum x tákna BAC-gildið og y tákna samsvarandi hlutfallslega áhættu. Notið vísisaðhvarf til að aðlaga líkan að gögnunum.

b. Eftir 6 drykki hefur 160 punda einstaklingur áfengismagn í blóði (BAC) upp á um það bil 0,16. Hve mörgum sinnum líklegra er að einstaklingur af þessari þyngd lendi í árekstri ef hann ekur eftir að hafa drukkið 6 bjóra? Námundið að næsta hundraðasta hluta.

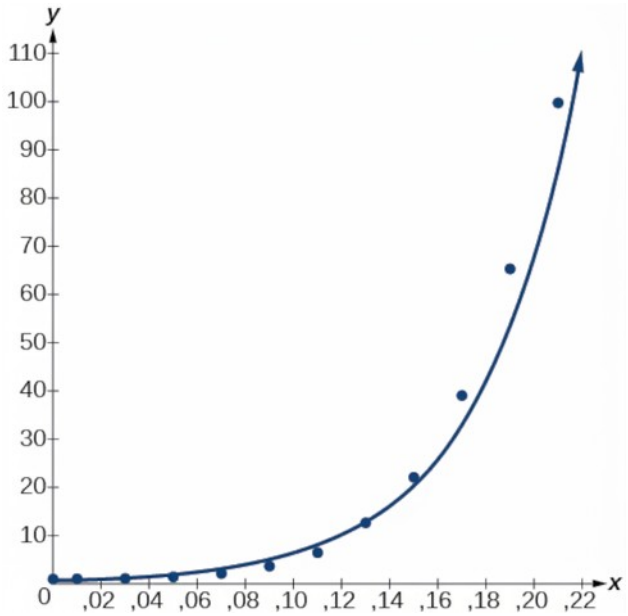
Lausn

a. Notið **STAT** og síðan **EDIT** valmyndina í grafteikniforriti og skráið **BAC** -gildin í L1 og gildi hlutfallslegrar áhættu í L2. Notið síðan **STATPLOT** -aðgerðina til að staðfesta að punktaritið fylgi vísismynstrinu sem sýnt er á mynd 1:



Mynd 1. Dreifirit BAC-gilda og hlutfallslegrar slysahættu í töflu 1.

Notið skipunina „ExpReg“ úr STAT- og síðan CALC-valmyndinni til að fá vísislíkanið
$y = 0{,}58304829\left(2{,}20720213\,\mathrm{E}\,10\right)^{x}$
Þegar staðalformi er breytt í venjulegan ritháttt fæst:
$y = 0{,}58304829\left(22.072.021.300\right)^{x}$
Athugið að $r^2 \approx 0{,}97$ sem sýnir að líkanið fellur vel að gögnunum. Til að sjá þetta skulið þið teikna graf líkansins í sama glugga og dreifiritið og staðfesta að það falli vel að gögnunum, eins og sýnt er á mynd 2:



Mynd 2. Vísisferill aðlagaður BAC-gildum og hlutfallslegri slysahættu.

b. Notið líkanið til að áætla áhættuna sem tengist BAC-gildinu 0,16. Setjið 0,16 fyrir x í líkanið og leysið fyrir y.

$y = 0{,}58304829\left(22.072.021.300\right)^{x}$ Notið aðhvarfslíkanið úr a-lið.

$= 0{,}58304829\left(22.072.021.300\right)^{0{,}16}$ Setjið 0,16 fyrir x.

$\approx 26{,}35$ Námundið að næsta hundraðasta hluta.

Við BAC-gildið 0,16 g/dL metur líkanið hlutfallslega slysahættu sem um 26,35 miðað við viðmið rannsóknarinnar fyrir óölvaðan ökumann. Þetta er spáð gildi hlutfallslegrar áhættu, ekki hlutfall tveggja spágilda líkansins. Niðurstaðan er mat líkansins fyrir gefið BAC-gildi, ekki almenn regla um áhrif 6 drykkja á 160 punda einstakling.

4

REYNIÐ SJÁLF #1

Tafla 2 sýnir skuld nýútskrifaðs einstaklings á greiðslukorti í hverjum mánuði eftir útskrift.

Tafla 2

Mánuður	1	2	3	4	5	6	7	8
Skuld ($)	620,00	761,88	899,80	1039,93	1270,63	1589,04	1851,31	2154,92

ⓐ Notið vísisaðhvarf til að aðlaga líkan að gögnunum. ⓑ Ef skuldin heldur áfram að þróast samkvæmt líkaninu, hver verður greiðslukortaskuld einstaklingsins einu ári eftir útskrift?

SPURT OG SVARAÐ

Er raunhæft að gera ráð fyrir að vísisaðhvarfslíkan lýsi aðstæðum um ókomna tíð?

Nei. Munið að líkön eru gerð út frá raunverulegum gögnum sem safnað er fyrir aðhvarfsgreiningu. Yfirleitt er raunhæft að áætla gildi innan upphaflega athugunarbilsins (brúun). Þegar við notum líkan til að spá fyrir um gildi er hins vegar mikilvægt að nota rökhugsun og meta hvort líkanið sé skynsamlegt fyrir inntaksgildi langt utan upphaflega athugunarbilsins (framreikningur).

Logralíkan gert út frá gögnum

Rétt eins og vísisföll hafa logaföll mörg raunveruleg notkunarsvið, meðal annars hljóðstyrk, sýrustig lausna, afrakstur efnahvarfa, vöruframleiðslu og vöxt ungbarna. Logralíkön með vaxtarstuðul frábrugðinn núlli eru annaðhvort sívaxandi eða síminnkandi, þótt mæld gögn geti sveiflast um ferilinn. Það hvernig fallgildin vaxa eða minnka hjálpar okkur að meta hvort logralíkan henti gögnunum.

Munið að logaföll vaxa eða minnka hratt í fyrstu en síðan hægir jafnt og þétt á breytingunni eftir því sem tíminn líður. Með því að rifja upp eiginleikana sem við höfum þegar lært um þetta fall getum við greint betur raunverulegar aðstæður sem lýsa slíkum vexti

eða slíkri hnignun. Við lograaðhvarf notum við það form lografalls sem er algengast í grafteikniforritum, $y=a+b\ln(x)$. Um þetta fall gildir:

- Öll inntaksgildi, x, verða að vera stærri en núll.
- Punkturinn $(1,a)$ liggur á grafi líkansins.
- Ef $b>0$, er líkanið vaxandi. Vöxturinn er hraður í fyrstu en hægir síðan jafnt og þétt á sér með tímanum.
- Ef $b<0$, er líkanið minnkandi. Hnignunin er hröð í fyrstu en hægir síðan jafnt og þétt á sér með tímanum.

LOGRAAÐHVARF

Lograaðhvarf er notað til að lýsa aðstæðum þar sem vöxtur eða hnignun er hröð í fyrstu en hægir síðan á sér með tímanum. Við notum skipunina „LnReg“ í grafteikniforriti til að aðlaga lografall að gagnapunktasafni. Þá fæst jafna af forminu

$$y=a+b\ln(x)$$

Athugið að

- Öll inntaksgildi x, verða að vera stærri en núll.
- þegar $b>0$, er líkanið vaxandi.
- þegar $b<0$, er líkanið minnkandi.

AÐFERÐ

Framkvæmið lograaðhvarf með grafteikniforriti fyrir gefið gagnasafn.

1. Notið STAT og síðan EDIT-valmyndina til að færa inn gefin gögn.
   a. Eyðið öllum fyrirliggjandi gögnum úr listunum.
   b. Skráið inntaksgildin í dálk L1.
   c. Skráið úttaksgildin í dálk L2.
2. Teiknið dreifirit gagnanna með STATPLOT-aðgerðinni og skoðið það.
   a. Notið ZOOM [9] til að stilla ásana að gögnunum.
   b. Staðfestið að gögnin fylgi logramynstri.
3. Finnið jöfnuna sem lýsir gögnunum.
   a. Veljið „LnReg“ úr STAT- og síðan CALC-valmyndinni.
   b. Notið gildin sem fást fyrir a og b til að skrá líkanið, $y=a+b\ln(x)$.
4. Teiknið graf líkansins í sama glugga og dreifiritið til að staðfesta að það falli vel að gögnunum.

SÝNIDÆMI 2

Lograaðhvarf notað til að aðlaga líkan að gögnum

Vegna framfara í læknisfræði og bættra lífskjara hefur meðalævilengd aukist í flestum þróuðum ríkjum frá upphafi 20. aldar.

Tafla 3 sýnir meðalævilengd Bandaríkjamanna í árum frá 1900 til 2010 10.

10

Heimild: Centers for Disease Control and Prevention, 2013

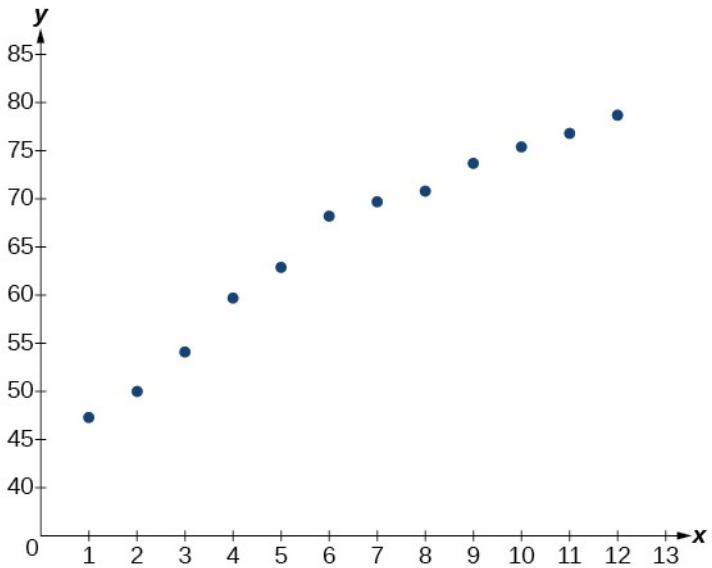
Tafla 3

Ár	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Meðalævilengd (ár)	47,3	50,0	54,1	59,7	62,9	68,2
Ár	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Meðalævilengd (ár)	69,7	70,8	73,7	75,4	76,8	78,7

1. ⓐ Látum x tákna tíma í áratugum, þar sem $x=1$ samsvarar árinu 1900, $x=2$ samsvarar árinu 1910 og svo framvegis. Látum y tákna samsvarandi meðalævilengd. Notið lograaðhvarf til að aðlaga líkan að gögnunum.
2. ⓑ Notið líkanið til að spá fyrir um meðalævilengd Bandaríkjamanna árið 2030.

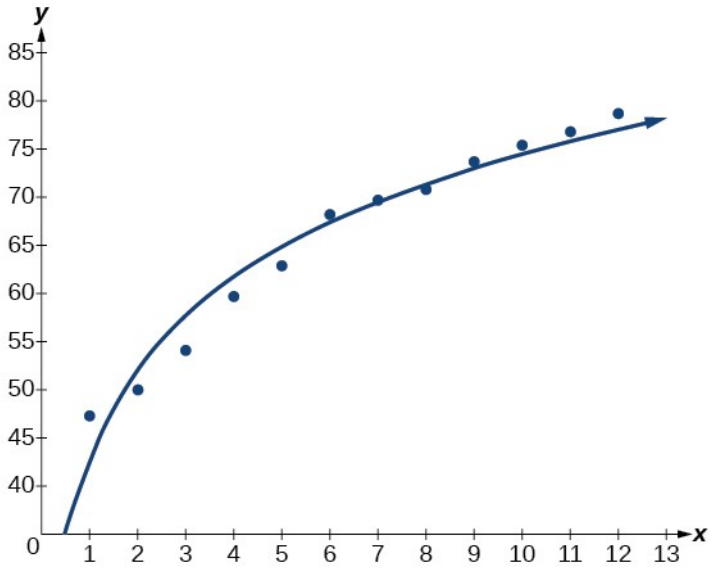
Lausn

1. ⓐ Notið **STAT** og síðan **EDIT** valmyndina í grafteikniforriti, skráið árin með gildunum 1 –12 í L1 og samsvarandi meðalævilengd í L2. Notið síðan **STATPLOT** -aðgerðina til að staðfesta að punktaritið fylgi logramynstri eins og sýnt er á mynd 3:



Mynd 3. Dreifirit meðalævilengdar eftir áratugum í töflu 3.

Notið skipunina „LnReg“ úr STAT- og síðan CALC-valmyndinni til að fá logralíkanið $y = 42{,}52722583 + 13{,}85752327 \ln(x)$
Teiknið því næst graf líkansins í sama glugga og dreifiritið til að staðfesta að það falli vel að gögnunum, eins og sýnt er á mynd 4:



Mynd 4. Lograferill aðlagaður gögnum um meðalævilengd.

2. ⓑ Til að spá fyrir um meðalævilengd Bandaríkjamanns árið 2030 setjið $x = 14$ inn í líkanið og leysið fyrir y:

$y = 42{,}52722583 + 13{,}85752327 \ln(x)$ Notið aðhvarfslíkanið úr a-lið.

$= 42{,}52722583 + 13{,}85752327 \ln(14)$ Setjið 14 fyrir x.

$\approx 79{,}1$ Námundið að næsta tíunda hluta.

Ef meðalævilengd heldur áfram að aukast með þessum hraða verður meðalævilengd Bandaríkjamanna 79,1 ár árið 2030.

REYNIÐ SJÁLF #2

Sala tölvuleiks sem kom út árið 2000 jókst hratt í fyrstu en síðan hægði jafnt og þétt á aukningunni. Tafla 4 sýnir fjölda seldra eintaka í þúsundum á árunum 2000–2010.

Tafla 4

Ár	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Fjöldi seldra eintaka (þúsundir)	142	149	154	155	159	161
Ár	2006	2007	2008	2009	2010	-
Fjöldi seldra eintaka (þúsundir)	163	164	164	166	167	-

- ⓐ Látum x tákna tíma í árum, þar sem $x = 1$ samsvarar árinu 2000. Látum y tákna fjölda seldra eintaka í þúsundum. Notið lograaðhvarf til að aðlaga líkan að gögnunum.

- ⓑ Ef salan heldur áfram með þessum hraða, hve mörg eintök seljast árið 2015? Námundið að næsta þúsundi.

Lógístískt líkan gert út frá gögnum

Líkt og við vísisvöxt og vöxt samkvæmt lografalli eykst stærðin með tímanum í lógístísku vaxtarlíkani. Munurinn er sá að eftir ákveðinn tímapunkt hægir jafnt og þétt á vextinum og fallið nálgast efra mark, eða markgildi. Lógístískt aðhvarf getur því hentað fyrirbærum þar sem vextinum eru takmörk sett, svo sem vegna takmarkaðs búsvæðis eða næringarefna.

Rétt er að benda á að lógístísk föll lýsa í raun vísisvexti sem takmarkast af auðlindum. Mörg dæmi um slíkan vöxt finnast í raunveruleikanum, meðal annars fólksfjölgun og útbreiðsla sjúkdóma, orðróms og jafnvel bletta í efni. Við lógístískt aðhvarf notum við formið sem er algengast í grafteikniforritum:

$$y=\frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$$

Munið að:

- $(\frac{c}{1+a})$ er upphafsgildi líkansins.
- þegar $b>0$, vex líkanið hratt í fyrstu þar til það nær punktinum þar sem vaxtarhraðinn er mestur, $\left(\frac{\ln(a)}{b},\frac{c}{2}\right)$. Eftir það hægir jafnt og þétt á vextinum og fallið nálgast efra markið $y=c$. sem aðfellu.
- c er markgildi líkansins, stundum nefnt burðargeta þess.

LÓGISTÍSKT AÐHVARF

Lógístískt aðhvarf er notað til að lýsa vexti þar sem vaxtarhraðinn eykst fram að ákveðnum punkti en minnkar síðan og fallgildin nálgast efra mark. Hér er miðað við jákvæða fastana a, b og c. Við notum skipunina „Logistic“ í grafteikniforriti til að aðlaga lógístískt fall að gagnapunktasafni. Þá fæst jafna af forminu

$$y=\frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$$

Athugið að

- upphafsgildi líkansins er $\frac{c}{1+a}$.
- Úttaksgildi líkansins nálgast $y=c$ sífellt meira eftir því sem tíminn líður.

AÐFERÐ

Framkvæmið lógístískt aðhvarf með grafteikniforriti fyrir gefið gagnasafn.

1. Notið STAT og síðan EDIT-valmyndina til að færa inn gefin gögn.

   a. Eyðið öllum fyrirliggjandi gögnum úr listunum.
   b. Skráið inntaksgildin í dálk L1.
   c. Skráið úttaksgildin í dálk L2.
2. Teiknið dreifirit gagnanna með STATPLOT-aðgerðinni og skoðið það.
   a. Notið ZOOM [9] til að stilla ásana að gögnunum.
   b. Staðfestið að gögnin fylgi lógístísku mynstri.
3. Finnið jöfnuna sem lýsir gögnunum.
   a. Veljið „Logistic“ úr STAT- og síðan CALC-valmyndinni.
   b. Notið gildin sem fást fyrir a, b, og c til að skrá líkanið $y = \frac{c}{1 + a e^{-bx}}$.
4. Teiknið graf líkansins í sama glugga og dreifiritið til að staðfesta að það falli vel að gögnunum.

SÝNIDÆMI 3

Lógístískt aðhvarf notað til að aðlaga líkan að gögnum

Farsímaþjónusta jókst hratt í Bandaríkjunum frá miðjum tíunda áratug 20. aldar. Tafla 5 sýnir söguleg gildi fyrir árin 1995–2012 sem frumtextinn eignar Alþjóðabankanum 11. Þar eru þau kölluð hlutfall íbúa með farsímaþjónustu og sú túlkun er notuð í reiknidæminu hér á eftir. Sambærilegur mælikvarði Alþjóðabankans telur hins vegar farsímaáskriftir á hverja 100 íbúa, ekki hlutfall einstakra notenda. Sami einstaklingur getur haft fleiri en eina áskrift. Þessi munur skiptir máli við túlkun markgildisins í c-lið.

11

Heimild: Alþjóðabankinn, 2013

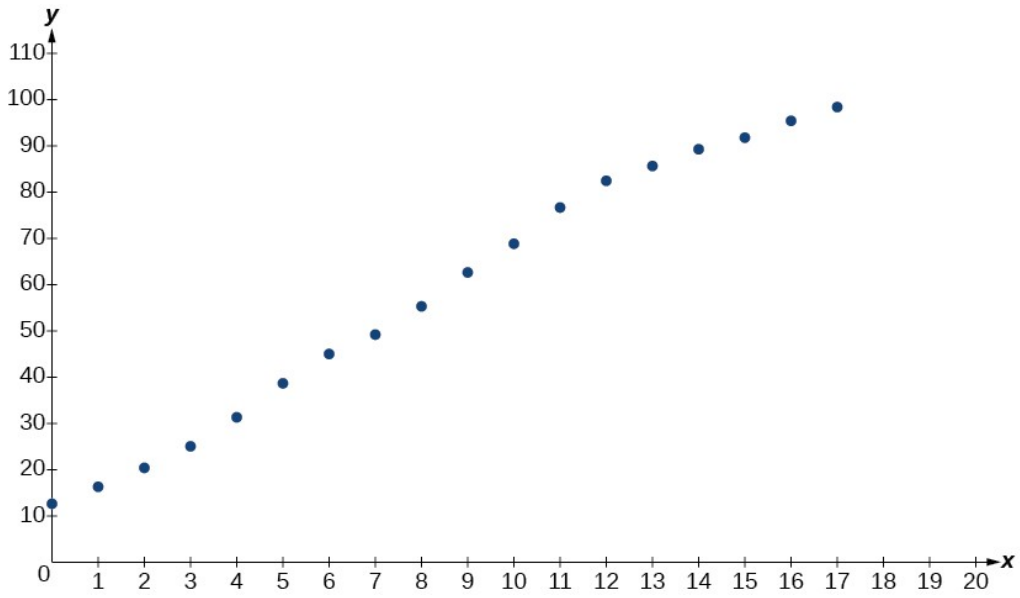
Tafla 5

Ár	Bandaríkjamenn með farsímaþjónustu (%)	Ár	Bandaríkjamenn með farsímaþjónustu (%)
1995	12,69	2004	62,852
1996	16,35	2005	68,63
1997	20,29	2006	76,64
1998	25,08	2007	82,47
1999	30,81	2008	85,68
2000	38,75	2009	89,14
2001	45,00	2010	91,86
2002	49,16	2011	95,28
2003	55,15	2012	98,17

- ⓐ Látum x tákna tíma í árum, þar sem $x=0$ samsvarar árinu 1995. Látum y tákna samsvarandi hlutfall íbúa með farsímaþjónustu. Notið lógístískt aðhvarf til að aðlaga líkan að gögnunum.
- ⓑ Notið líkanið til að reikna hlutfall Bandaríkjamanna með farsímaþjónustu árið 2013. Námundið að næsta tíunda hluta prósents.
- ⓒ Ræðið gildið sem fékkst fyrir efra markið, c. Hvað segir það um líkanið? Hvert væri markgildið ef líkanið væri nákvæmt?

Lausn

- ⓐ Notið **STAT** og síðan **EDIT** valmyndina í grafteikniforriti, skráið árin með gildunum 0–15 í L1 og samsvarandi hlutfall í L2. Notið síðan **STATPLOT** -aðgerðina til að staðfesta að punktaritið fylgi lógístísku mynstri eins og sýnt er á mynd 5:

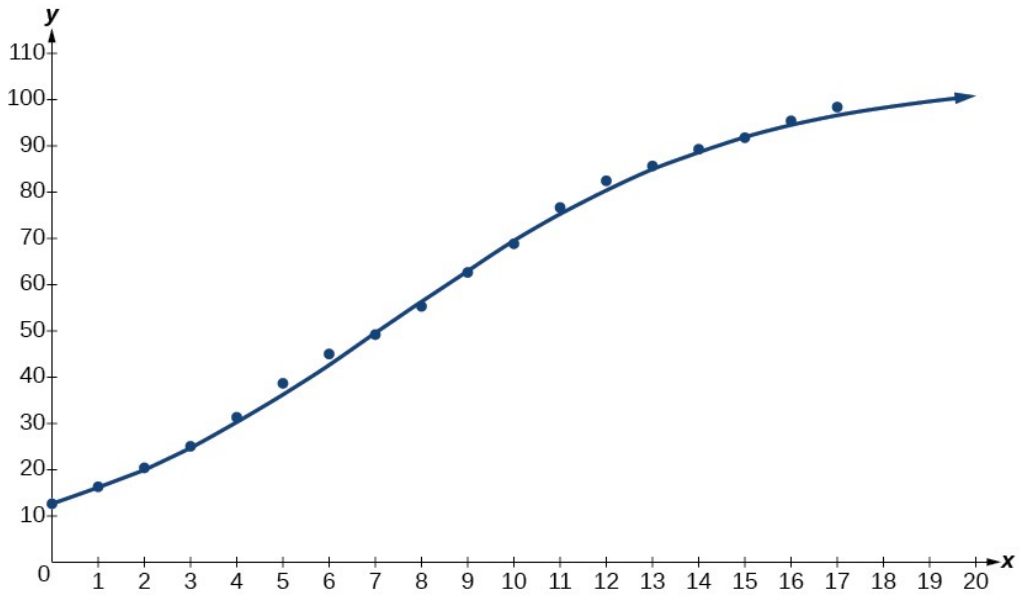


Mynd 5. Dreifirit sögulegu farsímagagnanna í töflu 5.

Notið skipunina „Logistic“ úr STAT- og síðan CALC-valmyndinni til að fá lógístíska líkanið

$$y=\frac{105{,}7379526}{1+6{,}88328979\,e^{-0{,}2595440013\,x}}$$

Teiknið því næst graf líkansins í sama glugga og dreifiritið, eins og sýnt er á mynd 6, til að staðfesta að það falli vel að gögnunum:



Mynd 6. Lógístískur ferill aðlagaður sögulegu farsímagögnunum.

- ⓑ

  Til að áætla hlutfall Bandaríkjamanna með farsímaþjónustu árið 2013 setjið $x=18$ inn í líkanið og leysið fyrir y:

  $$y = \frac{105{,}7379526}{1+6{,}88328979\ e^{-0{,}2595440013\ x}}$$ Notið aðhvarfslíkanið úr a-lið.

  $$= \frac{105{,}7379526}{1+6{,}88328979\ e^{-0{,}2595440013\ (18)}}$$ Setjið 18 fyrir x.

  $\approx 99{,}3$ Námundið að næsta tíunda hluta

  Líkanið gefur gildið 99,3 fyrir árið 2013. Samkvæmt prósentutúlkun reiknidæmisins samsvarar það um 99,3% íbúa, en fyrir áskriftagögn væri einingin áskriftir á hverja 100 íbúa.

- ⓒ

  Líkanið gefur markgildið um 105,7. Ef gögnin væru hlutfall einstakra íbúa með farsímaþjónustu væri þetta ómögulegt prósentugildi, því slíkt hlutfall getur ekki farið yfir 100%. Í því tilviki væri 100 efsta mögulega markið. Lógístískt líkan með $c=100$ myndi nálgast 100% án þess að ná því við endanlegt tímagildi. Nákvæmt líkan þarf þó ekki endilega að hafa þetta markgildi, því að ekki er sjálfgefið að allir verði notendur. Fyrir raunverulegan mælikvarða Alþjóðabankans, áskriftir á hverja 100 íbúa, getur gildið hins vegar farið yfir 100. Markgildi yfir 100 sannar því ekki eitt og sér að líkanið sé óhæft fyrir áskriftagögn.

REYNIÐ SJÁLF #3

Tafla 6 sýnir stofnstærð landsela í Vaðhafinu, í þúsundum, á árunum 1997 til 2012.

Tafla 6

Ár	Stofnstærð sela (þúsundir)	Ár	Stofnstærð sela (þúsundir)
1997	3,493	2005	19,590
1998	5,282	2006	21,955
1999	6,357	2007	22,862
2000	9,201	2008	23,869
2001	11,224	2009	24,243
2002	12,964	2010	24,344
2003	16,226	2011	24,919
2004	18,137	2012	25,108

- ⓐ Látum x tákna tíma í árum, þar sem $x=0$ samsvarar árinu 1997. Látum y tákna fjölda sela í þúsundum. Notið lógistískt aðhvarf til að aðlaga líkan að gögnunum.
- ⓑ Notið líkanið til að spá fyrir um stofnstærð sela árið 2020.
- ⓒ Hvert er markgildi líkansins, námundað að næstu heiltölu?

MIÐLAR

Opnið þetta efni á netinu til að fá frekari kennslu og æfingu í líkönum vísisfalla.

- Vísisaðhvarf á reiknivél

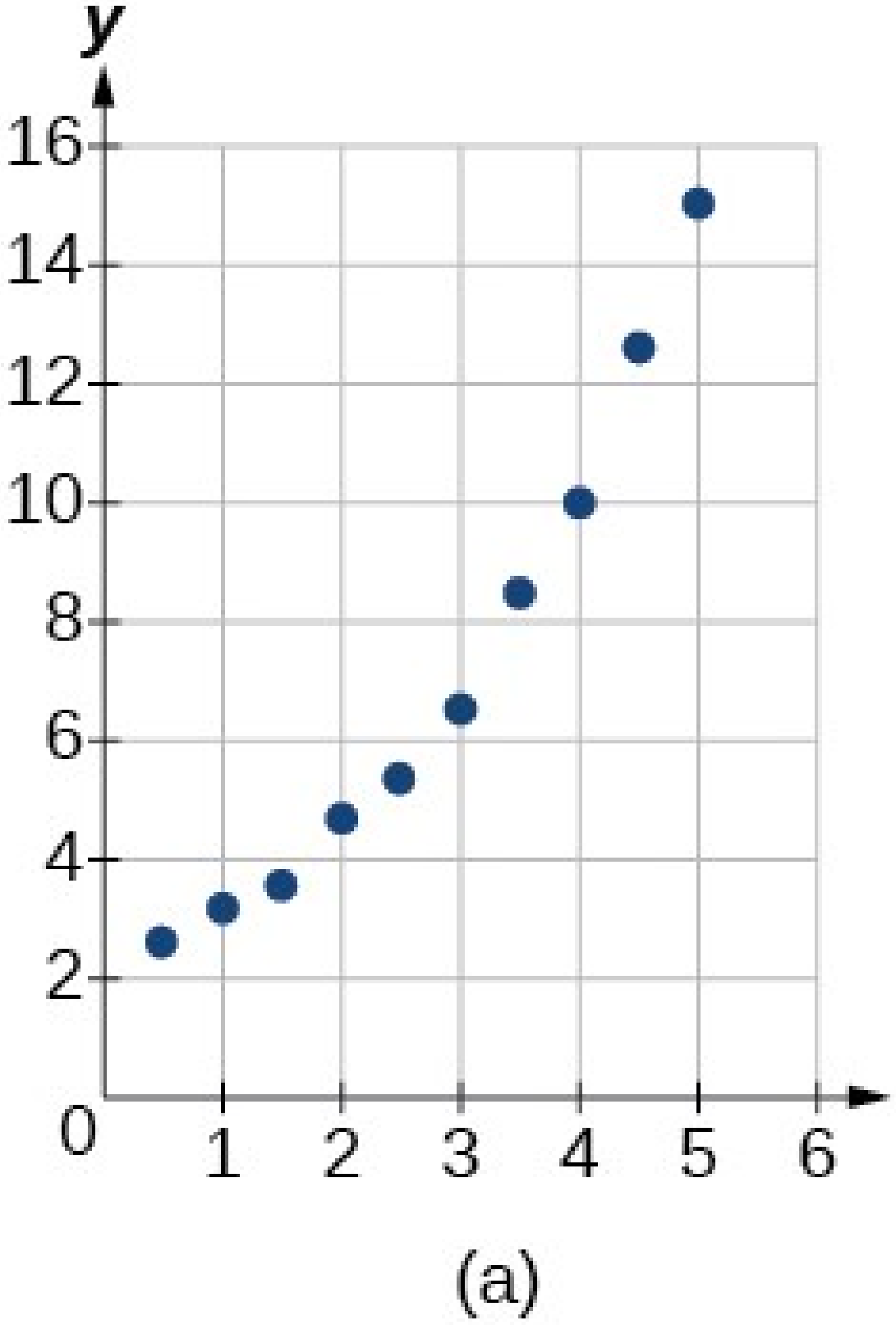
4.8 Verkefni

Hugtakaspurningar

1. Hvaða aðstæðum er best lýst með lógistískri jöfnu? Nefnið dæmi og rökstyðjið hvers vegna jafnan hæfir dæminu vel.
2. Hvað er burðargeta? Hvers konar líkan hefur burðargetu innbyggða í formúluna? Hvers vegna er það rökrétt?
3. Hvað er aðhvarfsgreining? Lýsið hvernig aðhvarfsgreining er framkvæmd með grafteikniforriti.
4. Hvernig gæti dreifirit gagnapunkta litið út ef logralíkan lýsti þeim best?
5. Hvað táknar skurðpunktur við y-ás á grafi lógistískrar jöfnu fyrir stofn sem jafnan lýsir?

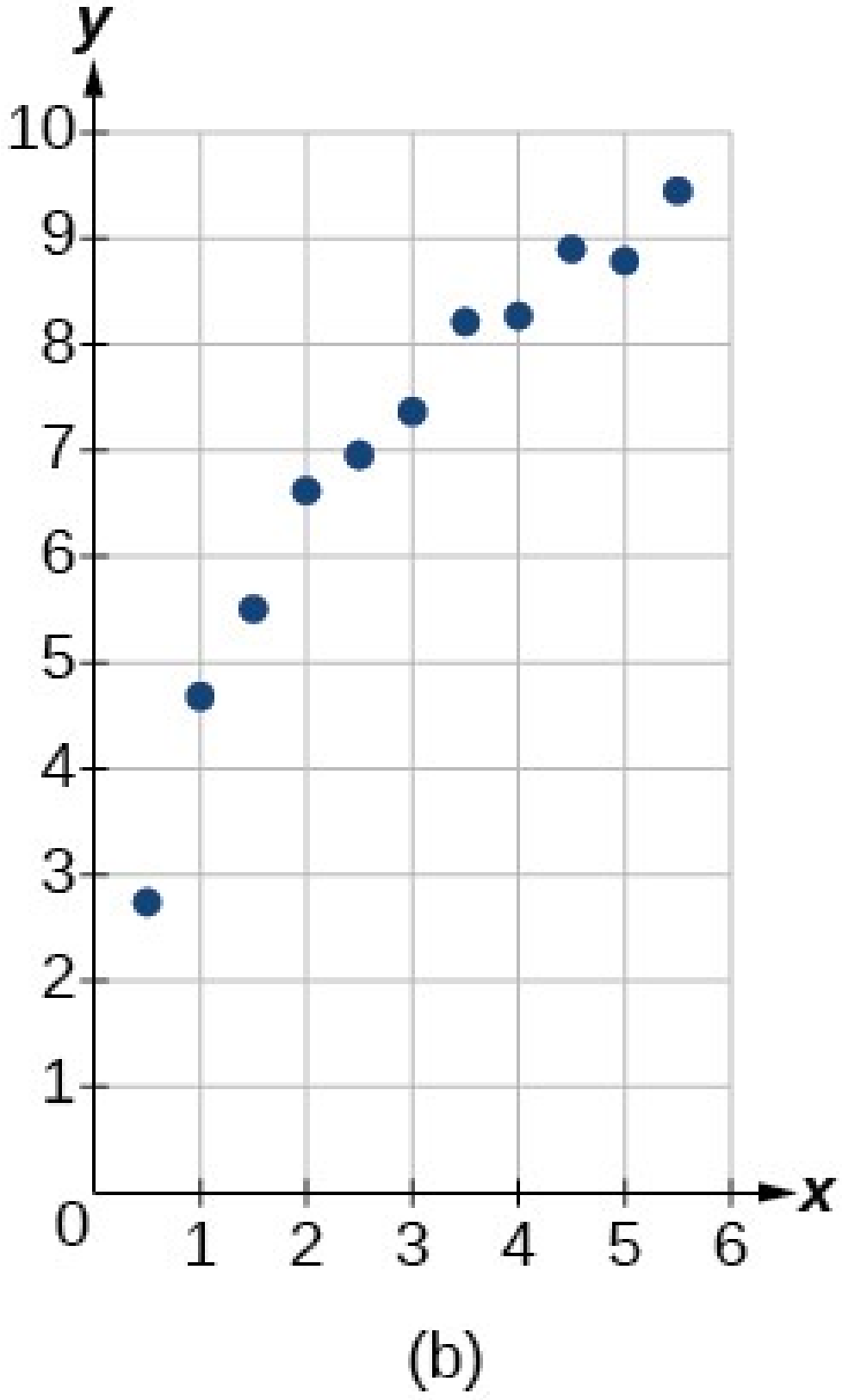
Grafísk verkefni

Í hverri æfingu hér á eftir er gefið fallið sem fellur best að gögnunum. Parið það við rétt dreifirit á mynd 7 til myndar 11. Svarið með bókstafnum undir viðeigandi grafi.

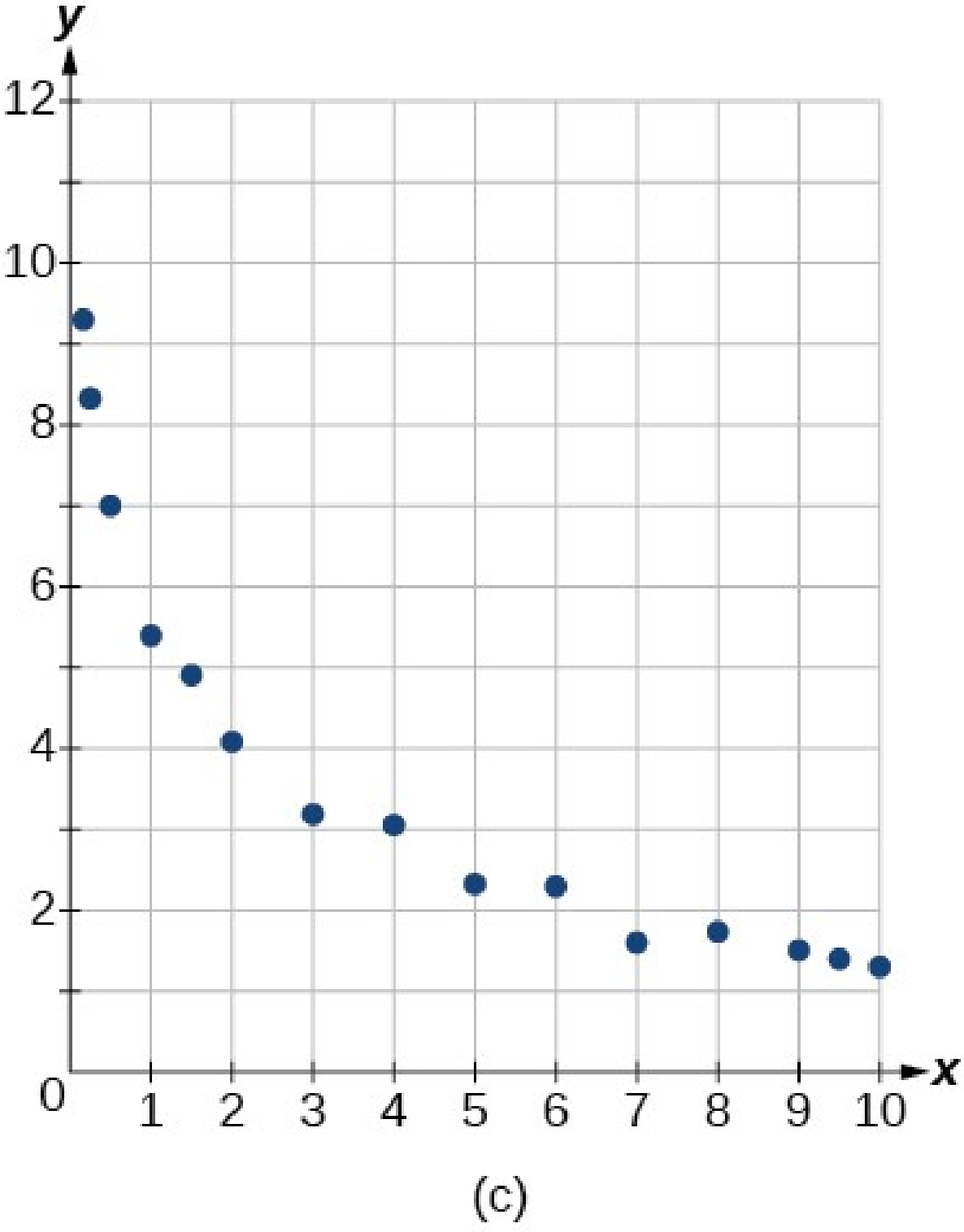


Mynd 7. Dreifirit merkt (a).

4

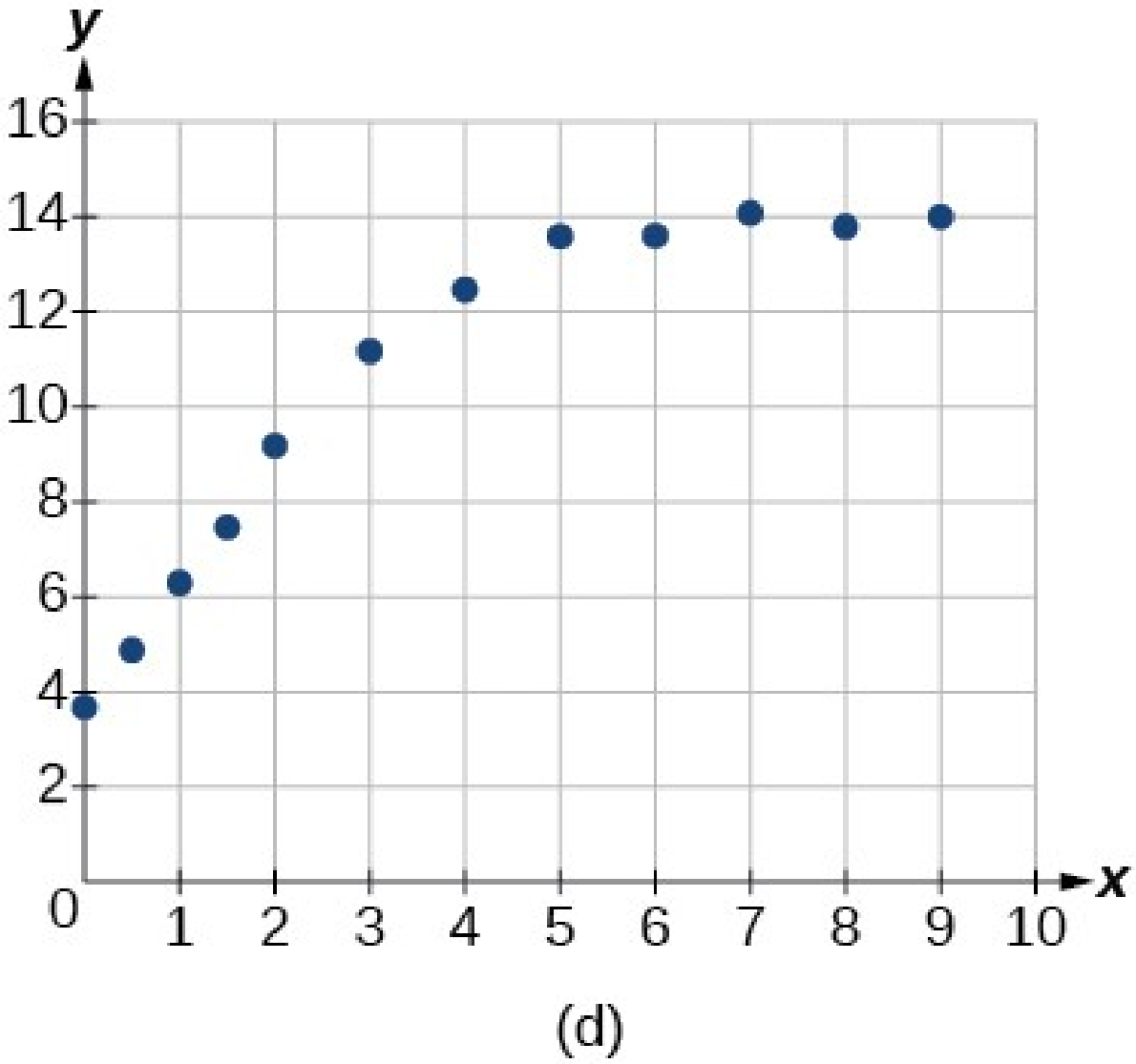


Mynd 8. Dreifirit merkt (b).

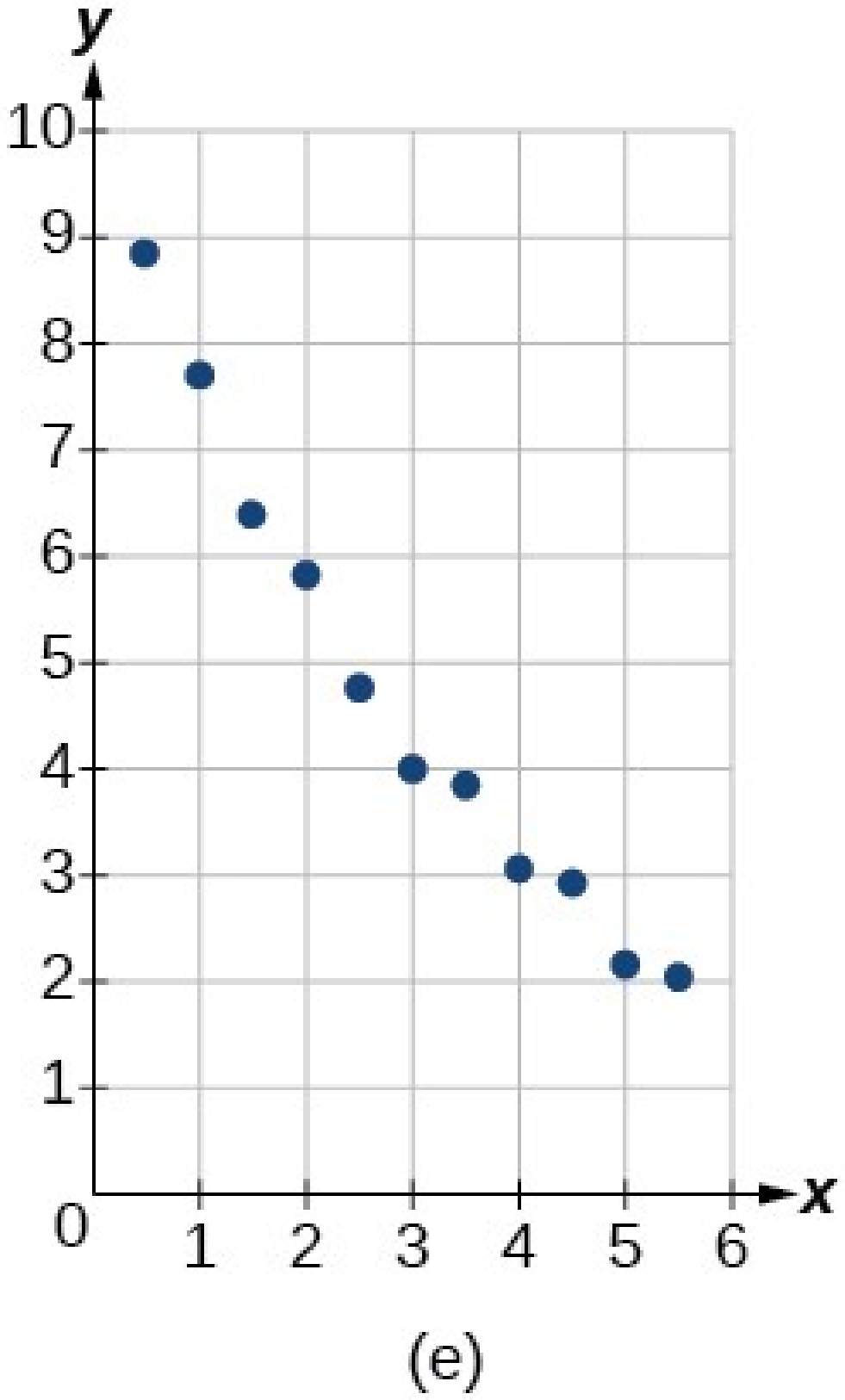


Mynd 9. Dreifirit merkt (c).

4



Mynd 10. Dreifirit merkt (d).



Mynd 11. Dreifirit merkt (e).

6.

$$y = 10{,}209\ e^{-0{,}294\ x}$$

7.

$$y = 5{,}598 - 1{,}912\ \ln\left(x\right)$$

8.

$$y = 2{,}104\ \left(1{,}479\right)^{x}$$

9.

$$y = 4{,}607 + 2{,}733\ \ln\left(x\right)$$

10.

$$y = \frac{14{,}005}{1 + 2{,}79\ e^{-0{,}812\ x}}$$

Reikningsverkefni

11. Stofni er lýst með lógistísku jöfnunni $P(t) = \frac{175}{1 + 6{,}995\, e^{-0{,}68t}}$?. Hvert er upphafsgildi stofnsins, námundað að næstu heiltölu? Hver er burðargetan?

12. Umritið vísislíkanið $A(t) = 1550(1{,}085)^{x}$ sem jafngilt líkan með grunntöluna e. Gefið veldisvísinn með fjórum markverðum stöfum.

13. Logralíkan er gefið með jöfnunni $h\left(p\right) = 67{,}682 - 5{,}792\ \ln\left(p\right)$. Fyrir hvaða gildi á p gildir $h(p) = 62$? Námundið að næsta hundraðasta hluta.

14. Lógistískt líkan er gefið með jöfnunni $P\left(t\right) = \frac{90}{1 + 5\ e^{-0{,}42\ t}}$. Fyrir hvaða gildi á t gildir $P(t) = 45$? Námundið að næsta hundraðasta hluta.

15. Hver er skurðpunktur við y-ás á grafi lógistíska líkansins í æfingunni á undan?

Tækni

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Stofnstærð P koi-karpa í tjörn eftir x mánuði er lýst með fallinu $P\left(x\right) = \frac{68}{1 + 16\ e^{-0{,}28\ x}}$.

16. Teiknið graf stofnlíkansins sem sýnir stofnstærðina yfir 3 ára tímabil.

17. Hver var upphaflegur fjöldi koi-karpa?

18. Hve margir koi-karpar verða í tjörninni eftir eitt og hálft ár?

19. Hve margir mánuðir líða þar til 20 koi-karpar eru í tjörninni?

20. Notið skurðpunktsaðgerðina til að áætla hve margir mánuðir líða þar til stofnstærðin í tjörninni nær helmingi burðargetunnar.

Í eftirfarandi æfingum skal nota þessar aðstæður: Stofnstærð úlfa P í friðlandi fyrir tegund í útrýmingarhættu er lýst með fallinu $P(x)=\frac{558}{1+54{,}8\ e^{-0{,}462\,x}}$, þar sem x er gefið í árum.

21. Teiknið graf stofnlíkansins sem sýnir stofnstærðina yfir 10 ára tímabil.

22. Hver var upphaflegur fjöldi úlfa sem fluttir voru í friðlandið?

23. Hve margir úlfar verða í friðlandinu eftir 3 ár?

24. Hve mörg ár líða þar til 100 úlfar eru í friðlandinu?

25. Notið skurðpunktsaðgerðina til að áætla hve mörg ár líða þar til stofnstærðin í friðlandinu nær helmingi burðargetunnar.

Í eftirfarandi æfingum skal styðjast við töflu 7.

Tafla 7

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1125	1495	2310	3294	4650	6361

26. Notið grafíska reiknivél til að búa til dreifirit gagnanna.

27. Notið aðhvarfsaðgerðina til að finna vísisfall sem fellur best að gögnunum í töflunni.

28. Ritið vísisfallið sem vísisjöfnu með grunntöluna e.

29. Teiknið graf vísisjöfnunnar á dreifiritið.

30. Notið skurðpunktsaðgerðina til að finna gildið á x sem uppfyllir $f(x)=4000$.

Í eftirfarandi æfingum skal styðjast við töflu 8.

Tafla 8

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	555	383	307	210	158	122

31. Notið grafíska reiknivél til að búa til dreifirit gagnanna.

32. Notið aðhvarfsaðgerðina til að finna vísisfall sem fellur best að gögnunum í töflunni.

33. Ritið vísisfallið sem vísisjöfnu með grunntöluna e.

34. Teiknið graf vísisjöfnunnar á dreifiritið.

35. Notið skurðpunktsaðgerðina til að finna gildið á x sem uppfyllir $f(x)=250$.

Í eftirfarandi æfingum skal styðjast við töflu 9.

Tafla 9

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	5,1	6,3	7,3	7,7	8,1	8,6

36. Notið grafíska reiknivél til að búa til dreifirit gagnanna.

37. Notið LOGarithm-valkost REGression-aðgerðarinnar til að finna lografall af forminu $y=a+b\ln(x)$ sem fellur best að gögnunum í töflunni.

38. Notið lografallið til að finna fallgildið þegar $x=10$.

39. Teiknið graf lograjöfnunnar á dreifiritið.

40. Notið skurðpunktsaðgerðina til að finna gildið á x sem uppfyllir $f(x)=7$.

Í eftirfarandi æfingum skal styðjast við töflu 10.

Tafla 10

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	7,5	6	5,2	4,3	3,9	3,4	3,1	2,9

41. Notið grafíska reiknivél til að búa til dreifirit gagnanna.

42. Notið LOGarithm-valkost REGression-aðgerðarinnar til að finna lografall af forminu $y=a+b\ln(x)$ sem fellur best að gögnunum í töflunni.

43. Notið lografallið til að finna fallgildið þegar $x=10$.

44. Teiknið graf lograjöfnunnar á dreifiritið.

45. Notið skurðpunktsaðgerðina til að finna gildið á x sem uppfyllir $f(x)=8$.

Í eftirfarandi æfingum skal styðjast við töflu 11.

Tafla 11

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(x)	8,7	12,3	15,4	18,5	20,7	22,5	23,3	24	24,6	24,8

46. Notið grafíska reiknivél til að búa til dreifirit gagnanna.

47. Notið LOGISTIC-aðhvarfsvalkostinn til að finna lógístískt vaxtarlíkan af forminu $y=\frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$ sem fellur best að gögnunum í töflunni.

48. Teiknið graf lógístísku jöfnunnar á dreifiritið.

49. Hver er áætluð burðargeta líkansins, námunduð að næstu heiltölu?

50. Notið skurðpunktsaðgerðina til að finna gildið á x þar sem líkanið nær helmingi burðargetunnar.

Í eftirfarandi æfingum skal styðjast við töflu 12.

Tafla 12

x	0	2	4	5	7	8	10	11	15	17
$f(x)$	12	28,6	52,8	70,3	99,9	112,5	125,8	127,9	135,1	135,9

51. Notið grafíska reiknivél til að búa til dreifirit gagnanna.

52. Notið LOGISTIC-aðhvarfsvalkostinn til að finna lógístískt vaxtarlíkan af forminu $y=\frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$ sem fellur best að gögnunum í töflunni.

53. Teiknið graf lógístísku jöfnunnar á dreifiritið.

54. Hver er áætluð burðargeta líkansins, námunduð að næstu heiltölu?

55. Notið skurðpunktsaðgerðina til að finna gildið á x þar sem líkanið nær helmingi burðargetunnar.

Viðbótarverkefni

56. Munið að almennt form lógístískrar jöfnu fyrir stofn er $P(t)=\frac{c}{1+a\,e^{-bt}}$, þannig að upphafleg stofnstærð við tímann $t=0$ er $P(0)=P_0$. Sýnið með algebrureikningi að $\frac{c-P(t)}{P(t)}=\frac{c-P_0}{P_0}e^{-bt}$.

57. Notið grafteikniforrit til að finna vísisaðhvarfsformúlu $f(x)$ og lograaðhvarfsformúlu $g(x)$ fyrir punktana $(1{,}5\,;1{,}5)$ og $(8{,}5\,;\ \ 8{,}5)$. Námundið allar tölur að 6 aukastöfum. Teiknið punktana og báðar formúlurnar ásamt línunni $y=x$ í sama hnitakerfi. Setjið fram tilgátu um tengsl aðhvarfsformúlnanna.

58. Sannreynið tilgátuna úr æfingunni á undan. Námundið allar tölur að sex aukastöfum þegar þess þarf.

59. Finnið andhverfa fallið ($f^{-1}(x)$) fyrir lógístíska fallið $f(x)=\frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$. Sýnið öll skref.

60. Notið niðurstöðuna úr æfingunni á undan til að teikna lógístíska líkanið $P(t)=\frac{20}{1+4\,e^{-0{,}5\,t}}$ og andhverfu þess í sama hnitakerfi. Hverjir eru skurðpunktar og aðfellur hvors falls?

Lykilhugtök

ársvextir (APR)
árlegt vaxtahlutfall fjárfestingarreiknings; einnig er talað um nafnvexti

burðargeta
í lógístísku líkani er burðargetan markgildi úttaksins

grunnskiptiformúla
formúla til að umrita logra með einni grunntölu sem kvóta tveggja logra með sömu nýju grunntölunni

tugalogri
veldisvísirinn sem þarf að hefja 10 í til að fá x; $\log_{10}(x)$ er einfaldlega ritað $\log(x)$.

vaxtavextir
vextir sem fást af heildarinnistæðunni en ekki aðeins af höfuðstólnum

tvöföldunartími
sá tími sem tekur stærð að tvöfaldast

vísisvöxtur
vöxtur þar sem vaxtarhraðinn er í réttu hlutfalli við stærðina sem fyrir er

aukalausn
lausn sem kemur fram þegar jafna er leyst en uppfyllir ekki upphaflegu jöfnuna

helmingunartími
sá tími sem tekur magn efnis að minnka um helming við vísishnignun

logri
veldisvísirinn sem þarf að hefja b í til að fá x; ritað $y=\log_b(x)$

lógístískt vaxtarlíkan
fall á forminu $f(x)=\frac{c}{1+a\,e^{-bx}}$ þar sem $\frac{c}{1+a}$ er upphafsgildið, c er burðargetan, eða markgildið, og b er fasti sem ræðst af vaxtarhraðanum

náttúrulegur logri
veldisvísirinn sem þarf að hefja töluna e í til að fá x; $\log_e(x)$ er ritað $\ln(x)$.

kólnunarlögmál Newtons
formúla sem lýsir hitastigi hlutar sem falli af tíma þegar hitastig hans nálgast umhverfishitann

nafnvextir
árlegt vaxtahlutfall fjárfestingarreiknings; einnig er talað um ársvexti

stærðargráða
veldi af tíu þegar tala er rituð á staðalformi með einum tölustaf öðrum en núlli vinstra megin við tugabrotsmerkið

veldisregla logra
regla logra sem segir að logri veldis sé margfeldi veldisvísisins og logra veldisstofnsins

margfeldisregla logra
regla sem segir að logri margfeldis sé jafn summu logra þáttanna

deilingarregla logra
regla sem segir að logri kvóta sé jafn logra teljarans að frádregnum logra nefnarans

Lykiljöfnur

Skilgreining vísisfalls	$f(x)=b^x$, þar sem $b>0, b\neq 1$
Vísisvöxtur og vísishnignun	$f(x)=a\,b^x$, þar sem $a>0, b>0, b\neq 1$
Formúla fyrir vaxtavexti	$A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\,t}$, þar sem $A(t)$ er innistæðan á reikningnum við tímann t t er fjöldi ára P er upphaflega fjárfestingin, oft nefnd höfuðstóll r eru ársvextir (APR), eða nafnvextir n er fjöldi vaxtatímabila á ári
Formúla fyrir samfelldan vöxt	$A(t)=a\,e^{r\,t}$, þar sem t er fjöldi tímaeininga vaxtarins a er upphafsmagnið (í formúlunni fyrir samfellda vaxtafærslu kemur höfuðstóllinn P í stað a) e er stærðfræðifastinn $e\approx 2{,}718282$
Almennt form umbreytingar grunnfallsins $f(x)=b^x$	$f(x)=a\,b^{x+c}+d$
Skilgreining lografalls	Þegar $x>0, b>0, b\neq 1$, gildir $y=\log_b(x)$ þá og því aðeins að $b^y=x$.
Skilgreining tugalogra	Þegar $x>0$, gildir $y=\log(x)$ þá og því aðeins að $10^y=x$.
Skilgreining náttúrulegs logra	Þegar $x>0$, gildir $y=\ln(x)$ þá og því aðeins að $e^y=x$.
Almennt form umbreytingar grunnlografallsins $f(x)=\log_b(x)$	$f(x)=a\log_b(x+c)+d$

Margfeldisregla logra	$\log_b(MN)=\log_b(M)+\log_b(N)$
Deilingarregla logra	$\log_b\left(\frac{M}{N}\right)=\log_b M-\log_b N$
Veldisregla logra	$\log_b(M^n)=n\log_b M$
Grunnskiptiformúlan	$\log_b M=\frac{\log_n M}{\log_n b}\qquad n>0, n\neq 1, b\neq 1$
Eintæknieiginleiki vísisfalla	Fyrir allar algebrustæður S og T og sérhverja jákvæða rauntölu b, þar sem $b^S=b^T$ ef og aðeins ef $S=T$.
Skilgreining logra	Fyrir jákvæða stæðu S, jákvæða grunntölu b og rauntöluna c, þar sem $b\neq 1$, gildir $\log_b(S)=c$ þá og því aðeins að $b^c=S$.
Eintæknieiginleiki lografalla	Fyrir jákvæðar stæður S og T og jákvæða grunntölu b, þar sem $b\neq 1$, gildir $\log_b S=\log_b T$ þá og því aðeins að $S=T$.
Formúla fyrir helmingunartíma	Ef $A=A_0e^{kt}$, þar sem $k<0$, er helmingunartíminn $t=-\frac{\ln(2)}{k}$.
Aldursgreining með kolefni-14	$t=\frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{-0{,}000121}$. A_0 er magn kolefnis-14 þegar plantan eða dýrið dó; A er magn kolefnis-14 sem eftir er við mælingu; t er aldur sýnisins í árum.
Formúla fyrir tvöföldunartíma	Ef $A=A_0e^{kt}$, þar sem $k>0$, er tvöföldunartíminn $t=\frac{\ln 2}{k}$
Kólnunarlögmál Newtons	$T(t)=Ae^{kt}+T_s$, þar sem T_s er umhverfishitinn, $A=T(0)-T_s$, og k er neikvæður fasti sem ákvarðar hraða kólnunarinnar.

Meginatriði

4.1 Vísisföll

- Vísisfall er skilgreint sem fall þar sem jákvæður fasti, annar en 1 er hafinn í breytilegan veldisvísi. Sjá dæmi 1.
- Gildi falls er reiknað fyrir tiltekið inntaksgildi. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Finna má vísislíkan þegar hlutfallslegur vaxtarhraði og upphafsgildi eru þekkt. Sjá dæmi 4.
- Finna má vísislíkan þegar tveir gagnapunktar líkansins með ólík inntök eru þekktir. Sjá dæmi 5.
- Finna má vísislíkan með tveimur gagnapunktum af grafi líkansins. Sjá dæmi 6.
- Finna má vísislíkan með tveimur gagnapunktum af grafi og reiknivél. Sjá dæmi 7.
- Reikna má innistæðu á reikningi við tímann t með formúlunni fyrir vaxtavexti þegar höfuðstóll, ársvextir og fjöldi vaxtatímabila á ári eru þekkt. Sjá dæmi 8.
- Finna má upphaflega fjárfestingu með formúlunni fyrir vaxtavexti þegar innistæðan, ársvextir, fjöldi vaxtatímabila á ári og tíminn frá upphafi fjárfestingar eru þekkt. Sjá dæmi 9.
- Talan e er stærðfræðifasti sem er oft notaður sem grunntala vísislíkana af raunverulegum vexti og hnignun. Nálgun á gildi hennar er $e \approx 2{,}718282$.
- Á vísinda- og grafreiknivélum er hnappurinn $\left[e^x\right]$ eða $\left[\exp(x)\right]$ notaður til að reikna veldi af e. Sjá dæmi 10.
- Líkön af samfelldum vexti eða hnignun eru vísislíkön með e sem grunntölu. Finna má slík líkön þegar upphafsgildið og samfelldur hlutfallslegur vaxtar- eða hnignunarhraði eru þekkt. Sjá dæmi 11 og dæmi 12.

4.2 Gröf vísisfalla

- Graf fallsins $f(x)=b^x$ hefur skurðpunkt við y-ás í $(0,1)$, skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$, myndmengið $(0,\infty)$, og láfelluna $y=0$. Sjá dæmi 1.
- Ef $b>1$, er fallið vaxandi. Þegar farið er til vinstri eftir grafinu nálgast það láfelluna $y=0$, en til hægri vex það án takmarkana.
- Ef $0<b<1$, er fallið minnkandi. Þegar farið er til vinstri eftir grafinu vex það án takmarkana en til hægri nálgast það láfelluna $y=0$.
- Jafnan $f(x)=b^x+d$ lýsir lóðréttri hliðrun grunnfallsins $f(x)=b^x$.
- Jafnan $f(x)=b^{x+c}$ lýsir láréttri hliðrun grunnfallsins $f(x)=b^x$. Sjá dæmi 2.
- Finna má nálgunarlausnir jöfnunnar $f(x)=b^{x+c}+d$ með grafreiknivél. Sjá dæmi 3.
- Jafnan $f(x)=a\,b^x$, þar sem $a>0$, lýsir lóðréttri teygju ef $|a|>1$ eða lóðréttri samþjöppun ef $0<|a|<1$ á grunnfallinu $f(x)=b^x$. Sjá dæmi 4.

- Þegar grunnfallið $f(x)=b^x$ er margfaldað með -1, fæst $f(x)=-b^x$, sem lýsir speglun um x-ás. Þegar inntakið er margfaldað með -1, fæst $f(x)=b^{-x}$, sem lýsir speglun um y-ás. Sjá dæmi 5.
- Taka má þessar umbreytingar vísisfalls saman í almennu jöfnunni $f(x)=ab^{x+c}+d$. Sjá töflu 3.
- Með almennu jöfnunni $f(x)=ab^{x+c}+d$, má rita jöfnu falls út frá lýsingu þess. Sjá dæmi 6.

4

4.3 Lograföll

- Andhverfa vísisfalls er lografall og andhverfa lografalls er vísisfall.
- Með skilgreiningu logra má rita lograjöfnu sem jafngilda vísisjöfnu. Sjá dæmi 1.
- Með skilgreiningu logra má rita vísisjöfnu sem jafngilda lograjöfnu. Sjá dæmi 2.
- Reikna má logra með grunntöluna b í huganum með þekkingu á veldum af b. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Reikna má tugalogra í huganum með þekkingu á veldum af 10. Sjá dæmi 5.
- Þegar ekki er hægt að reikna tugalogra í huganum má nota reiknivél. Sjá dæmi 6.
- Vísisjöfnur með grunntöluna 10 sem lýsa raunverulegum aðstæðum má leysa með tugalogra og reikna svo gildin með reiknivél. Sjá dæmi 7.
- Reikna má náttúrulega logra með reiknivél. Sjá dæmi 8.

4.4 Gröf lografalla

- Til að finna skilgreiningarmengi lografalls er sett upp ójafna sem segir að viðfang lograns sé stærra en núll. Síðan er hún leyst fyrir x. Sjá dæmi 1 og dæmi 2.
- Graf grunnfallsins $f(x)=\log_b(x)$ hefur skurðpunkt við x-ás í $(1,0)$, skilgreiningarmengið $(0,\infty)$, myndmengið $(-\infty,\infty)$, lóðfelluna $x=0$, og
  - ef $b>1$, er fallið vaxandi.
  - ef $0<b<1$, er fallið minnkandi.

  Sjá dæmi 3.
- Jafnan $f(x)=\log_b(x+c)$ hliðrar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ lárétt
  - um c einingar til vinstri ef $c>0$.
  - um c einingar til hægri ef $c<0$.

  Sjá dæmi 4.
- Jafnan $f(x)=\log_b(x)+d$ hliðrar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ lóðrétt
  - um d einingar upp ef $d>0$.
  - um d einingar niður ef $d<0$.

Sjá dæmi 5.

- Fyrir sérhvern fasta $a>0$, gildir að jafnan $f(x)=a\log_b(x)$
  - teygir grunnfallið $y=\log_b(x)$ lóðrétt með stuðlinum a ef $|a|>1$.
  - þjappar grunnfallinu $y=\log_b(x)$ saman lóðrétt með stuðlinum a ef $|a|<1$.

  Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Þegar grunnfallið $y=\log_b(x)$ er margfaldað með -1, fæst speglun um x-ásinn. Þegar inntakið er margfaldað með -1, fæst speglun um y-ásinn.
  - Jafnan $f(x)=-\log_b(x)$ lýsir speglun grunnfallsins um x-ásinn.
  - Jafnan $f(x)=\log_b(-x)$ lýsir speglun grunnfallsins um y-ásinn.

  Sjá dæmi 8.
  - Nota má grafíska reiknivél til að nálga lausnir sumra lograjafna. Sjá dæmi 9.
- Taka má þessar umbreytingar lografalls saman í almennu jöfnunni $f(x)=a\log_b(x+c)+d$. Sjá töflu 4.
- Út frá jöfnu á almenna forminu $f(x)=a\log_b(x+c)+d$, má finna lóðfellu grafsins, $x=-c$. Sjá dæmi 10.
- Með almennu jöfnunni $f(x)=a\log_b(x+c)+d$, má rita jöfnu lografalls út frá grafi þess. Sjá dæmi 11.

4.5 Reiknireglur logra

- Með margfeldisreglu logra má rita logra margfeldis sem summu logra þáttanna. Sjá dæmi 1.
- Með deilingarreglu logra má rita logra kvóta sem logra teljarans að frádregnum logra nefnarans. Sjá dæmi 2.
- Með veldisreglu logra má rita logra veldis sem margfeldi veldisvísisins og logra veldisstofnsins. Sjá dæmi 3, dæmi 4 og dæmi 5.
- Nota má margfeldis-, deilingar- og veldisreglu saman til að draga saman eða liða niður logra með flóknu viðfangi. Sjá dæmi 6, dæmi 7 **og** dæmi 8.
- Einnig má nota reiknireglur logra til að draga summur og mismun logra með sömu grunntölu, ásamt margfeldum þeirra og fasta, saman í einn logra. Sjá dæmi 9, dæmi 10, dæmi 11 og dæmi 12.
- Með grunnskiptiformúlunni má umrita logra sem kvóta tveggja logra með sömu nýju grunntölunni. Sjá dæmi 13.
- Grunnskiptiformúlan er oft notuð til að umrita logra með aðra grunntölu en 10 eða e sem kvóta náttúrulegra logra eða tugalogra. Þá má reikna gildið með reiknivél. Sjá dæmi 14.

4.6 Vísis- og lograjöfnur

- Leysa má margar vísisjöfnur með því að nota veldareglur til að rita hvora hlið sem veldi með sömu jákvæðu grunntölu, annarri en 1. Vísisföll eru eintæk og því má síðan setja veldisvísana jafna og leysa fyrir óþekktu stærðina.
- Þegar báðar hliðar vísisjöfnu eru veldi með sömu grunntölu eru veldisvísarnir settir jafnir og leyst fyrir óþekktu stærðina. Sjá dæmi 1.
- Þegar grunntölur vísisjöfnu eru ekki augljóslega jafnar má reyna að rita hvora hlið sem veldi með sömu grunntölu. Síðan eru veldisvísarnir settir jafnir og leyst fyrir óþekktu stærðina. Sjá dæmi 2, dæmi 3 og dæmi 4.
- Þegar ekki er hægt að rita vísisjöfnu með sameiginlegri grunntölu má leysa hana með því að taka logra af hvorri hlið, að því gefnu að báðar hliðar séu jákvæðar. Sjá dæmi 5.
- Leysa má vísisjöfnur með grunntöluna e, með því að taka náttúrulegan logra af báðum hliðum, því náttúrulega lografallið og þetta vísisfall eru andhverfur hvort annars. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Eftir að vísisjafna hefur verið leyst er hver lausn prófuð í upphaflegu jöfnunni til að finna og útiloka aukalausnir. Sjá dæmi 8.
- Fyrir jöfnu af forminu $\log_b(S)=c$, þar sem S er algebrustæða, má nota skilgreiningu logra til að rita jafngildu vísisjöfnuna $b^c=S$, og leysa fyrir óþekktu stærðina. Viðfang lograns verður að vera jákvætt. Sjá dæmi 9 og dæmi 10.
- Einnig má leysa jöfnur af forminu $\log_b(S)=c$. með grafi. Gröf jafnanna $y=\log_b(S)$ og $y=c$ eru teiknuð í sama hnitakerfi og lausnin lesin sem x-hnit skurðpunktsins. Sjá dæmi 11.
- Fyrir jöfnu af forminu $\log_b S=\log_b T$, þar sem S og T eru jákvæðar algebrustæður, má nota eintæknieiginleika logra til að leysa jöfnuna $S=T$ fyrir óþekktu stærðina. Sjá dæmi 12.
- Með aðferðum úr þessum og fyrri hlutum má leysa jöfnur sem lýsa raunverulegum aðstæðum, hvort sem óþekkta stærðin er í veldisvísi eða viðfangi logra. Sjá dæmi 13.

4.7 Vísis- og loglíkön

- Grunnform vísisfalls er $f(x)=a\,b^x$. Fyrir jákvætt upphafsgildi a fæst vísisvöxtur ef $b>1$, en vísishnignun ef $0<b<1$,.
- Einnig má rita líkanið á forminu $A=A_0e^{k\,x}$, þar sem A_0 er upphafsgildið. Ef A_0 er jákvætt fæst vísisvöxtur þegar $k>0$ og vísishnignun þegar $k<0$. Sjá dæmi 1.
- Almennt eru verkefni um vísisvöxt eða vísishnignun leyst í tveimur skrefum. Fyrst er líkan sett upp og stikar þess fundnir. Síðan er formúlan með þessum stikum notuð til að spá fyrir um vöxt eða hnignun. Sjá dæmi 2.

- Finna má aldur t, lífræns sýnis með því að ákvarða hlutfallið k, af upphaflegu magni kolefnis-14 sem eftir er í sýninu og nota formúluna $t=\frac{\ln\left(k\right)}{-0{,}000121}$ til að reikna t. Sjá dæmi 3.
- Þegar tvöföldunartími eða helmingunartími efnis er þekktur má finna fall sem lýsir vísisvexti þess eða vísishnignun, ef upphafsmagnið er einnig þekkt. Sjá dæmi 4.
- Með kólnunarlögmáli Newtons má finna hve langan tíma tekur kólnandi hlut að ná tilteknu hitastigi eða hvert hitastig hlutarins verður eftir tiltekinn tíma. Sjá dæmi 5.
- Nota má lógistísk vaxtarföll til að lýsa raunverulegum aðstæðum þar sem vaxtarhraðinn breytist með tíma og vöxturinn stefnir að efra marki, svo sem vexti stofns, útbreiðslu sjúkdóma og útbreiðslu orðróms. Sjá dæmi 6.
- Með því að safna raunverulegum gögnum í nokkurn tíma má greina leitni. Þekking á gröfum línulegra falla, vísisfalla, lografalla og lógistískra falla hjálpar okkur að finna líkön sem falla vel að gögnunum. Sjá dæmi 7.
- Rita má hvert vísisfall af forminu $y=a\,b^x$ sem jafngilt vísisfall af forminu $y=A_0e^{k\,x}$ þar sem $k=\ln b$. Upphafsgildið A_0 er þá jafnt a. Sjá dæmi 8.

4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum

- Vísisaðhvarf er notað til að lýsa aðstæðum þar sem vaxtarhraðinn eykst sífellt eða þar sem hraði hnignunar minnkar þegar gildið nálgast núll.
- Skipunin „ExpReg“ er notuð í grafreiknivél til að aðlaga fall af forminu $y=a\,b^x$ að safni gagnapunkta. Sjá dæmi 1.
- Lograaðhvarf er notað til að lýsa aðstæðum þar sem gildið breytist hratt í upphafi en hægar eftir því sem tíminn líður.
- Skipunin „LnReg“ er notuð í grafreiknivél til að aðlaga fall af forminu $y=a+b\ln\left(x\right)$ að safni gagnapunkta. Sjá dæmi 2.
- Lógistískt aðhvarf er notað til að lýsa aðstæðum þar sem vaxtarhraðinn eykst í fyrstu en minnkar síðan þegar fallið nálgast efra mark.
- Skipunin „Logistic“ er notuð í grafreiknivél til að aðlaga fall af forminu $y=\frac{c}{1+a\,e^{-b\,x}}$ að safni gagnapunkta. Sjá dæmi 3.

Yfirlitsverkefni kafla

Vísisföll

1. Ákvarðið hvort fallið $y=156\left(0{,}825\right)^t$ lýsi vísisvexti, vísishnignun eða hvorugu. Útskýrið.

2. Stærð dádýrahjarðar er lýst með fallinu $A\left(t\right)=205\left(1{,}13\right)^{t}$, þar sem t er mælt í árum. Hve mörg dýr verða í hjörðinni eftir 6 ár, námundað að næstu heiltölu?

3. Finnið vísisjöfnu sem liggur um punktana $(2,\ 2{,}25)$ og $\left(5\,;60{,}75\right)$.

4. Ákvarðið hvort tafla 1 geti lýst línulegu falli, vísisfalli eða hvorugu. Ef fallið virðist vera vísisfall skuluð þið finna fall sem fer gegnum punktana.

Tafla 1

x	1	2	3	4
f(x)	3	0,9	0,27	0,081

5. Eftirlaunareikningur er stofnaður með $8,500 upphafsinnleggi og ber 8,12 % vexti með mánaðarlegri vaxtafærslu. Hver verður inneignin eftir 20 ár?

6. Hsu-Mei vill safna $5,000 fyrir útborgun í bíl. Hve mikið þarf hún að leggja núna inn á reikning með 7,5 % ársvöxtum (APR) og daglegri vaxtafærslu til að ná markmiðinu eftir 3 ár? Námundið að næsta dal.

7. Lýsir jafnan $y=2{,}294\ e^{-0{,}654\ t}$ samfelldum vexti, samfelldri hnignun eða hvorugu? Útskýrið.

8. Gerum ráð fyrir að fjárfestingarreikningur sé opnaður með innborgun upp á $10.500 og beri 6,25 % vexti með samfelldri vaxtavöxtun. Hver verður innistæðan á reikningnum eftir 25 ár?

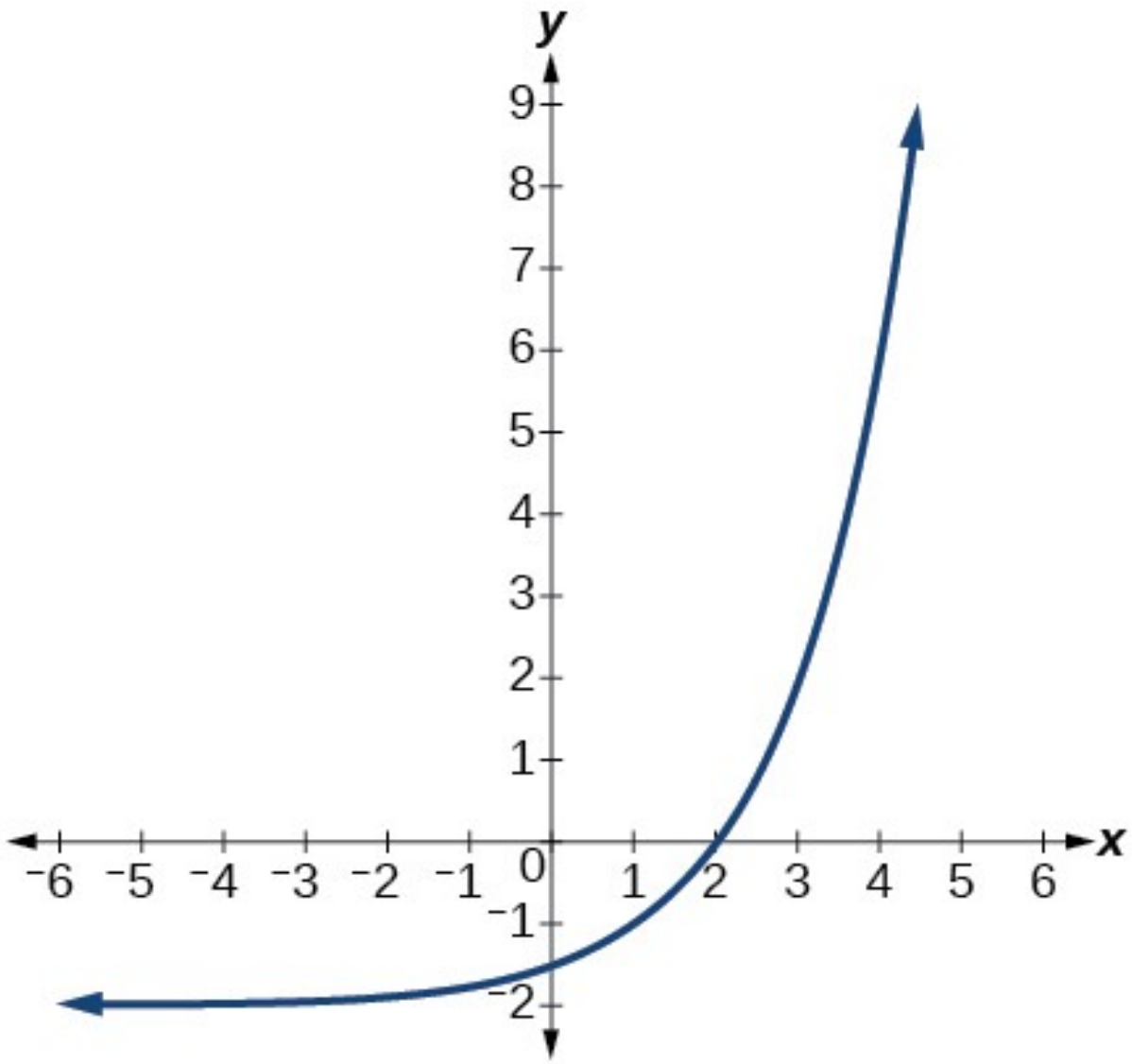
Gröf vísisfalla

9. Teiknið graf fallsins $f\left(x\right)=3{,}5\left(2\right)^{x}$. Tilgreinið skilgreiningarmengi, myndmengi og skurðpunkt við y-ás.

10. Teiknið graf fallsins $f\left(x\right)=4\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$ og speglun þess um y-ás í sama hnitakerfi. Tilgreinið skurðpunkt við y-ás.

11. Graf fallsins $f\left(x\right)=6{,}5^{x}$ er speglað um y-ás og teygt lóðrétt með stuðlinum 7. Hver er jafna nýja fallsins $g\left(x\right)$? Tilgreinið skurðpunkt þess við y-ás, skilgreiningarmengi og myndmengi.

12. Grafið hér fyrir neðan sýnir ummyndun grafs fallsins $f\left(x\right)=2^{x}$. Hver er jafna ummyndunarinnar?



Mynd 1. Graf ummyndaðs vísisfalls.

Lograföll

13. Endurritið $\log_{17}(4913)=x$ sem jafngilda vísisjöfnu.

14. Endurritið $\ln(s)=t$ sem jafngilda vísisjöfnu.

15. Endurritið $a^{-\frac{2}{5}}=b$ sem jafngilda lograjöfnu.

16. Endurritið $e^{-3,5}=h$ sem jafngilda lograjöfnu.

17. Leysið fyrir x ef $\log_{64}(x)=\frac{1}{3}$ með því að umrita lograjöfnuna $\log_{64}(x)=\frac{1}{3}$ á vísisform.

18. Reiknið $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$ án reiknivélar.

19. Reiknið $\log\left(0{,}000001\right)$ án reiknivélar.

20. Reiknið $\log\left(4{,}005\right)$ með reiknivél. Námundið að þremur aukastöfum.

21. Reiknið $\ln\left(e^{-0{,}8648}\right)$ án reiknivélar.

22. Reiknið $\ln\left(\sqrt[3]{18}\right)$ með reiknivél. Námundið að þremur aukastöfum.

Gröf lografalla

23. Teiknið graf fallsins $g(x)=\log(7x+21)-4$.

24. Teiknið graf fallsins $h(x)=2\ln(9-3x)+1$.

25. Tilgreinið skilgreiningarmengi, lóðfellu og endahegðun fallsins $g(x)=\ln(4x+20)-17$.

Reiknireglur logra

26. Endurritið $\ln(7r\cdot 11st)$ á liðuðu formi.

27. Endurritið $\log_8(x)+\log_8(5)+\log_8(y)+\log_8(13)$ á samandregnu formi.

28. Endurritið $\log_m\left(\frac{67}{83}\right)$ á liðuðu formi.

29. Endurritið $\ln(z)-\ln(x)-\ln(y)$ á samandregnu formi.

30. Endurritið $\ln\left(\frac{1}{x^5}\right)$ sem margfeldi.

31. Endurritið $-\log_y\left(\frac{1}{12}\right)$ sem einn logra.

32. Notið reiknireglur logra til að liða niður $\log\left(\frac{r^2s^{11}}{t^{14}}\right)$.

33. Notið reiknireglur logra til að liða niður $\ln\left(2b\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}\right)$.

34. Dragið stæðuna $5\ln(b)+\ln(c)+\frac{\ln(4-a)}{2}$ saman í einn logra.

35. Dragið stæðuna $3\log_7 v+6\log_7 w-\frac{\log_7 u}{3}$ saman í einn logra.

36. Endurritið $\log_3\left(12{,}75\right)$ með grunntöluna e.

37. Ritið jöfnuna $5^{12x-17}=125$ sem jafngilda lograjöfnu. Notið síðan grunnskiptiformúluna og leysið fyrir x með tugalogra. Námundið að þremur aukastöfum.

Vísis- og lograjöfnur

38. Leysið $216^{3x} \cdot 216^{x} = 36^{3x+2}$ með því að endurrita hvora hlið með sameiginlegri grunntölu.

39. Leysið $\left(\frac{125}{\left(\frac{1}{625}\right)^{-x-3}} = 5^{3}\right)$ með því að endurrita hvora hlið með sameiginlegri grunntölu.

40. Notið logra til að finna nákvæma lausn á $7 \cdot 17^{-9x} - 7 = 49$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

41. Notið logra til að finna nákvæma lausn á $3e^{6n-2} + 1 = -60$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

42. Finnið nákvæma lausn á $5e^{3x} - 4 = 6$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

43. Finnið nákvæma lausn á $2e^{5x-2} - 9 = -56$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

44. Finnið nákvæma lausn á $5^{2x-3} = 7^{x+1}$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

45. Finnið nákvæma lausn á $e^{2x} - e^{x} - 110 = 0$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

46. Notið skilgreiningu logra til að leysa $-5\log_{7}(10n) = 5$.

47. Notið skilgreiningu logra til að finna nákvæma lausn á $9 + 6\ln(a+3) = 33$.

48. Notið eintæknieiginleika logra til að finna nákvæma lausn á $\log_{8}(7) + \log_{8}(-4x) = \log_{8}(5)$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

49. Notið eintæknieiginleika logra til að finna nákvæma lausn á $\ln(5) + \ln(5x^{2} - 5) = \ln(56)$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

50. Hljóðstigið D í desíbelum er gefið með formúlunni $D = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, þar sem I er hljóðstyrkurinn í vöttum á fermetra og $I_0 = 10^{-12}$ vött á fermetra er lægsti hljóðstyrkur sem venjuleg manneskja getur heyrt. Hvert er hljóðstig stórrar hljómsveitar ef hljóðstyrkurinn er $6{,}3 \cdot 10^{-3}$ vött á fermetra?

51. Íbúafjölda borgar er lýst með jöfnunni $P(t) = 256.114\ e^{0{,}25\,t}$ þar sem t er mælt í árum. Ef borgin heldur áfram að vaxa með þessum hraða, hve mörg ár líða þar til íbúafjöldinn nær einni milljón?

52. Finnið andhverfuna f^{-1} fyrir vísisfallið $f(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 5$.

53. Finnið andhverfuna f^{-1} fyrir lografallið $f(x) = 0{,}25 \cdot \log_{2}(x^{3} + 1)$.

Vísis- og logralíkön

Notið þessar aðstæður í næstu verkefnum: Læknir ávísar 300 milligrömmum af lyfi. Magn þess í líkamanum minnkar um það bil 17 % á klukkustund.

54. Hver er helmingunartími lyfsins, námundað að næstu mínútu?

55. Ritið vísislíkan sem lýsir magni lyfsins sem er eftir í líkama sjúklingsins eftir t klukkustundir. Notið síðan formúluna til að finna magn lyfsins sem væri eftir í líkamanum eftir 24 klukkustundir. Námundið að næsta hundraðasta hluta gramms.

Notið þessar aðstæður í næstu verkefnum: Súpa við 350° á Fahrenheit-kvarða var tekin af hellunni og látin kólna í herbergi við 71°F. Eftir fimmtán mínútur var hitastig súpunnar 175°F.

4

56. Notið kólnunarlögmál Newtons til að rita formúlu sem lýsir aðstæðunum.

57. Hve margar mínútur líða þar til súpan hefur kólnað niður í 85°F?

Notið þessar aðstæður í næstu verkefnum: Jafnan $N(t)=\frac{1200}{1+199\ e^{-0{,}625\,t}}$ lýsir fjölda fólks í skóla sem hefur heyrt orðróm eftir t daga.

58. Hve margir komu orðróminum af stað?

59. Hve margir dagar líða þar til orðrómurinn nær til helmings burðargetunnar? Námundið að næsta tíunda hluta dags.

60. Hver er burðargetan?

Í næstu verkefnum skuluð þið slá gögnin úr hverri töflu inn í grafreiknivél og teikna dreifirit. Ákvarðið hvort gögnin í töflunni lýsi líklega línulegu falli, vísisfalli eða lografalli.

61.

x	$f(x)$
1	3,05
2	4,42
3	6,4
4	9,28
5	13,46
6	19,52
7	28,3
8	41,04
9	59,5
10	86,28

62.

x	*f(x)*
0,5	18,05
1	17
3	15,33
5	14,55
7	14,04
10	13,5
12	13,22
13	13,1
15	12,88
17	12,69
20	12,45

63. Finnið jöfnu vísisfalls sem fer gegnum punktana $(-2,100)$ og $(0,4)$. Ritið hana síðan sem jafngilda jöfnu með grunntöluna e.

Aðlögun vísislíkana að gögnum

64. Hver er burðargeta stofns sem lýst er með lógistísku jöfnunni $P(t)=\frac{250.000}{1+499\ e^{-0,45\,t}}$?

Hver er upphafsstærð stofnsins samkvæmt líkaninu?

65. Stærð bakteríuræktar er lýst með lógistísku jöfnunni $P(t)=\frac{14.250}{1+29\ e^{-0,62\,t}}$, þar sem t er mælt í dögum. Hve margir dagar líða þar til ræktin nær 75 % af burðargetu sinni? Námundið að næsta tíunda hluta dags.

Í næstu verkefnum skuluð þið gera dreifirit úr gögnunum í töflunni með grafteikniforriti. Skoðið lögun dreifiritsins og ákvarðið hvort vísislíkan, logralíkan eða lógistískt líkan lýsi gögnunum best. Notið síðan viðeigandi aðhvarfsaðgerð til að finna jöfnu sem lýsir gögnunum. Námundið gildi að fimm aukastöfum þegar þess er þörf.

66.

x	*f(x)*
1	409,4
2	260,7
3	170,4
4	110,6
5	74
6	44,7
7	32,4
8	19,5
9	12,7
10	8,1

67.

x	*f(x)*
0,15	36,21
0,25	28,88
0,5	24,39
0,75	18,28
1	16,5
1,5	12,99
2	9,91
2,25	8,57
2,75	7,23
3	5,99
3,5	4,81

68.

x	*f(x)*
0	9
2	22,6
4	44,2
5	62,1
7	96,9
8	113,4
10	133,4
11	137,6
15	148,4
17	149,3

Æfingapróf

1. Stærð stökkulshóps er lýst með fallinu $A\left(t\right)=8\left(1{,}17\right)^{t}$, þar sem t er mælt í árum. Hve margir stökklar verða í hópnum eftir 3 ár? Námundið að næstu heiltölu.

2. Finnið jöfnu vísisfalls sem fer gegnum punktana (0, 4) og (2, 9).

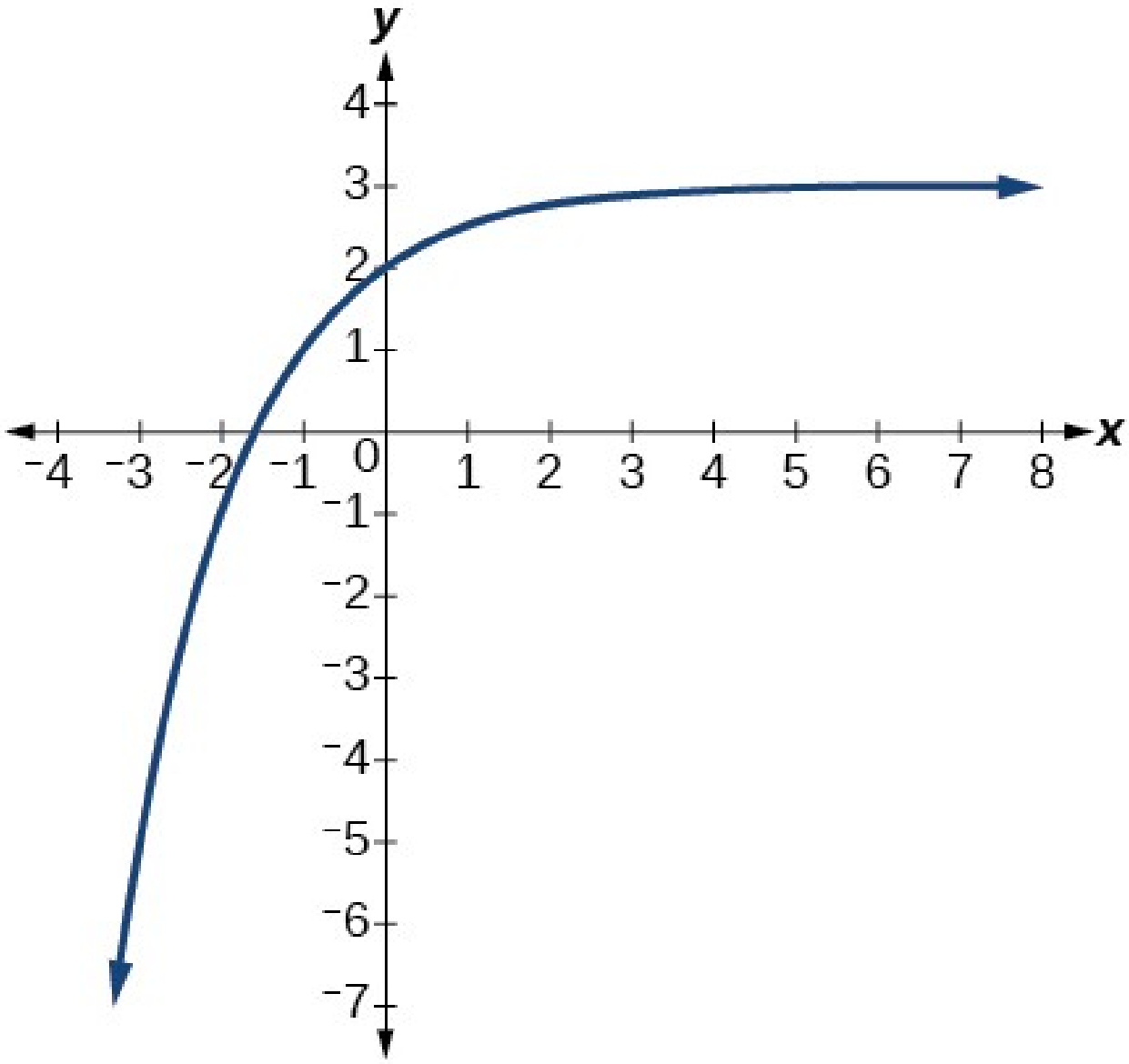
3. Drew vill safna \$2,500 til að fara á næsta heimsmeistaramót. Hve mikið þarf hann að leggja núna inn á reikning með 6,25 % ársvöxtum (APR) og daglegri vaxtafærslu til að ná markmiðinu eftir 4 ár? Námundið að næsta dal.

4. Fjárfestingarreikningur var stofnaður með \$9,600 upphafsinnleggi og ber 7,4 % vexti með samfelldri vaxtafærslu. Hver verður inneignin eftir 15 ár?

5. Teiknið graf fallsins $f\left(x\right)=5\left(0{,}5\right)^{-x}$ og speglun þess um y-ás í sama hnitakerfi. Tilgreinið skurðpunkt grafanna við y-ás.

6. Grafið sýnir umbreytingu á grafi fallsins $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$. Hver er jafna fallsins sem sýnt er?

4



7. Endurritið $\log_{8,5}(614{,}125)=a$ sem jafngilda vísisjöfnu.

8. Endurritið $e^{\frac{1}{2}}=m$ sem jafngilda lograjöfnu.

9. Leysið fyrir x með því að umrita lograjöfnuna $log_{\frac{1}{7}}(x)=2$ á vísisform.

10. Reiknið $\log(10.000.000)$ án reiknivélar.

11. Reiknið $\ln(0{,}716)$ með reiknivél. Námundið að þremur aukastöfum.

12. Teiknið graf fallsins $g(x)=\log(12-6x)+3$.

13. Tilgreinið skilgreiningarmengi, lóðfellu og endahegðun fallsins $f(x)=\log_5(39-13x)+7$.

14. Endurritið $\log(17a\cdot 2b)$ sem summu.

15. Endurritið $\log_t(96)-\log_t(8)$ á samandregnu formi.

16. Endurritið $\log_8\left(a^{\frac{1}{b}}\right)$ sem margfeldi.

17. Notið reiknireglur logra til að liða niður $\ln\left(y^3 z^2 \cdot \sqrt[3]{x-4}\right)$.

18. Dragið stæðuna $4\ln(c)+\ln(d)+\frac{\ln(a)}{3}+\frac{\ln(b+3)}{3}$ saman í einn logra.

19. Ritið jöfnuna $16^{3x-5}=1000$ sem jafngilda lograjöfnu. Notið síðan grunnskiptiformúluna og leysið fyrir x með náttúrulegum logra. Námundið að þremur aukastöfum.

20. Leysið ($\left(\frac{1}{81}\right)^x \cdot \frac{1}{243}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x-1}$) með því að endurrita hvora hlið með sameiginlegri grunntölu.

21. Notið logra til að finna nákvæma lausn á $-9e^{10a-8}-5=-41$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

22. Finnið nákvæma lausn á $10e^{4x+2}+5=56$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

23. Finnið nákvæma lausn á $-5e^{-4x-1}-4=64$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

24. Finnið nákvæma lausn á $2^{x-3}=6^{2x-1}$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

25. Finnið nákvæma lausn á $e^{2x}-e^x-72=0$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

26. Notið skilgreiningu logra til að finna nákvæma lausn á $4\log(2n)-7=-11$.

27. Notið eintæknieiginleika logra til að finna nákvæma lausn á $\log\left(4x^2-10\right)+\log(3)=\log(51)$. Ef engin lausn er til skuluð þið skrifa „engin lausn“.

28. Hljóðstigið D í desíbelum er gefið með formúlunni $D=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, þar sem I er hljóðstyrkurinn í vöttum á fermetra og $I_0=10^{-12}$ vött á fermetra er viðmiðunarhljóðstyrkur sem samsvarar um það bil heyrnarmörkum. Hvert er hljóðstig rokktónleika ef hljóðstyrkurinn er $4{,}7\cdot 10^{-1}$ vött á fermetra?

29. Geislavarnafulltrúi vinnur með 112 grömm af geislavirku efni. Eftir 17 daga hefur sýnið rýrnað niður í 80 grömm. Ritið vísisjöfnu sem lýsir aðstæðunum og námundið stuðla hennar að fimm markverðum tölustöfum. Hver er helmingunartími efnisins? Námundið að næsta degi.

30. Ritið formúluna úr fyrra verkefni sem jafngilda jöfnu með grunntöluna e. Setjið veldisvísinn fram með fimm markverðum tölustöfum.

31. Gos í flösku við 71° á Fahrenheit-kvarða var tekið úr hillu og sett í ísskáp við 35° F. Eftir tíu mínútur var hitastig gossins 63° F. Notið kólnunarlögmál Newtons til að rita formúlu sem lýsir aðstæðunum. Hvert verður hitastig gossins eftir eina klukkustund? Námundið að næstu gráðu.

32. Stærð dýrastofns á búsvæði villtra dýra er lýst með jöfnunni $P(t)=\frac{360}{1+6{,}2\,e^{-0{,}35\,t}}$, þar sem t er mælt í árum. Hve mörg dýr voru flutt á svæðið í upphafi? Hve mörg ár líða þar til stofninn nær helmingi burðargetunnar?

33. Færið gögn úr töflu 1 inn í grafreiknivél og teiknið dreifiritið sem fæst. Ákvarðið hvort gögn töflunnar lýsi líklega línulegu falli, vísisfalli eða lografalli.

4

Tafla 1

x	*f(x)*
1	3
2	8,55
3	11,79
4	14,09
5	15,88
6	17,33
7	18,57
8	19,64
9	20,58
10	21,42

34. Stærð fiskistofns í stöðuvatni er lýst með lógistísku jöfnunni $P(t)=\frac{16.120}{1+25\,e^{-0{,}75\,t}}$, þar sem t er mælt í árum. Hve mörg ár líða þar til stofninn nær 80 % af burðargetu sinni? Námundið að næsta hundraðasta hluta árs.

Í næstu verkefnum skuluð þið nota grafteikniforrit til að gera dreifirit úr gögnunum í töflunni. Skoðið lögun dreifiritsins og ákvarðið hvort vísislíkan, logralíkan eða lógistískt líkan lýsi gögnunum best. Notið síðan viðeigandi aðhvarfsaðgerð til að finna jöfnu sem lýsir gögnunum. Námundið gildi að fimm aukastöfum þegar þess er þörf.

35.

x	*f(x)*
1	20
2	21,6
3	29,2
4	36,4
5	46,6
6	55,7
7	72,6
8	87,1
9	107,2
10	138,1

36.

x	*f(x)*
3	13,98
4	17,84
5	20,01
6	22,7
7	24,1
8	26,15
9	27,37
10	28,38
11	29,97
12	31,07
13	31,43

37.

x	$f(x)$
0	2,2
0,5	2,9
1	3,9
1,5	4,8
2	6,4
3	9,3
4	12,3
5	15
6	16,2
7	17,3
8	17,9

5. KAFLI

Hornaföll



Sjávarstaða hækkar og lækkar með reglulegu, fyrirsjáanlegu millibili. (ljósmynd: Andrea Schaffer, Flickr)

Efnisyfirlit kafla

- 5.1 Horn
- 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll
- 5.3 Önnur hornaföll
- 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga

Inngangur að hornaföllum

Mörg fyrirbæri endurtaka sig með reglulegu millibili. Sjávarstaða hækkar og lækkar til dæmis á hverjum degi vegna þyngdarkrafts tunglsins. [1] Hreyfing tunglsins veldur því einnig að munur á flóði og fjöru er breytilegur. Í aldanna rás hafa margar frumbyggjaþjóðir nýtt þessa reglufestu við að móta menningarlegar frásagnir og skipuleggja mikilvæg störf, svo sem landbúnað, dýraveiðar og fiskveiðar. Frumbyggjar við Torres-sund, við norðurodda Ástralíu, notuðu háflóð til að finna hentugustu tímana til fiskveiða. Öldungar þeirra útskýra að sterkari straumar við stórstreymi róti upp seti og skerði sjón fiska. Þá séu fiskarnir líklegri til að bíta á beituna og aflinn verði meiri.

1

Hamacher, D.W., Tapim, A., Passi, S. og Barsa, J. (2018). Dancing with the stars – astronomy and music in the Torres Strait. Í Imagining Other Worlds: Explorations in Astronomy and Culture.

Í stærðfræði kallast fall sem endurtekur gildi sín með reglulegu millibili lotubundið fall. Á grafi slíks falls endurtekur sama mynstrið sig aftur og aftur. Fallið tekur því sama gildi á samsvarandi stað í hverri lotu og loturnar eru allar jafnlangar. Ef við þekkjum öll gildi fallsins í einni heilli lotu getum við því ákvarðað gildi þess á öllum tímum, bæði í fortíð og framtíð. Í þessum kafla skoðum við ýmis dæmi um lotubundin föll.

5

5.1 Horn

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

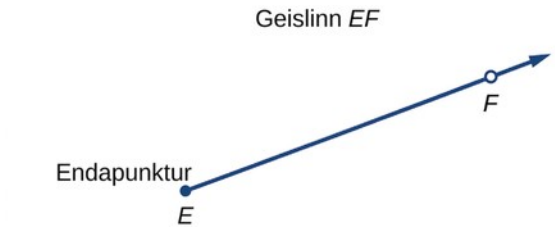
- Teikna horn í staðalstöðu.
- Breyta milli gráða og radíana.
- Finna horn með sama lokaarm.
- Finna lengd hringboga.
- Nota línulegan hraða og hornhraða til að lýsa hreyfingu eftir hringferli.

Golfari sveiflar kylfu til að slá bolta yfir sandgryfju og inn á flötina. Flugmaður stýrir flugvél að mjórri flugbraut. Fatahönnuður skapar nýjustu tískuna. Hvað eiga þau öll sameiginlegt? Þau vinna öll með horn, rétt eins og við gerum öll öðru hverju. Stundum þurfum við að mæla horn nákvæmlega með mælitækjum. Í öðrum tilvikum áætlum við þau eða metum þau með berum augum. Í báðum tilvikum getur rétt horn ráðið því hvort verk tekst eða mistekst. Í þessum hluta skoðum við eiginleika horna.

Horn teiknuð í staðalstöðu

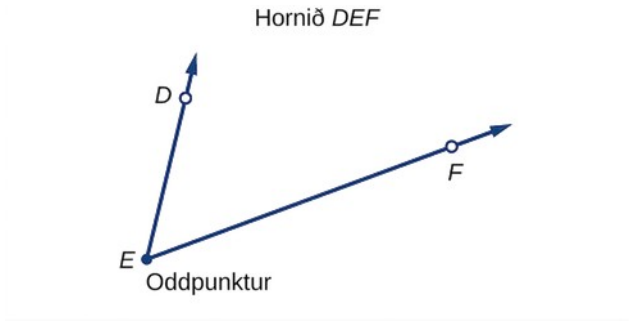
Til að skilgreina horn þurfum við fyrst að skilgreina geisla. Geisli samanstendur af einum punkti á línu og öllum punktum sem liggja frá honum í aðra áttina eftir línunni. Fyrsti

punkturinn nefnist endapunktur geislans. Vísa má til geisla með því að nefna endapunkt hans og annan punkt á honum. Geislann á mynd 1 má nefna geislann EF eða tákna sem $\vec{EF}$.



Mynd 1. Geisli með endapunktinn E sem liggur gegnum punktinn F.

Horn er sammengi tveggja geisla sem hafa sameiginlegan endapunkt. Endapunkturinn nefnist oddpunktur hornsins og geislarnir tveir eru armar þess. Hornið á mynd 2 myndast af $\vec{ED}$ og $\vec{EF}$. Nefna má horn með punkti á hvorum geisla og oddpunktinum, til dæmis hornið DEF, eða tákna það sem $\angle DEF$.

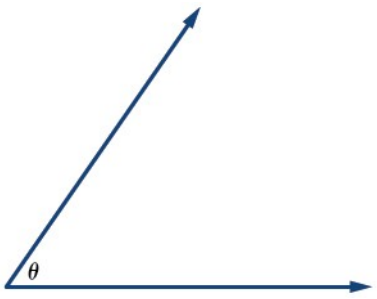


Mynd 2. Horn DEF með oddpunktinn E og armana ED og EF.

Gríska bókstafir eru oft notaðir sem breytur fyrir hornamál. Tafla 1 sýnir gríska bókstafi sem algengt er að nota til að tákna horn. Dæmi um horn er á mynd 3.

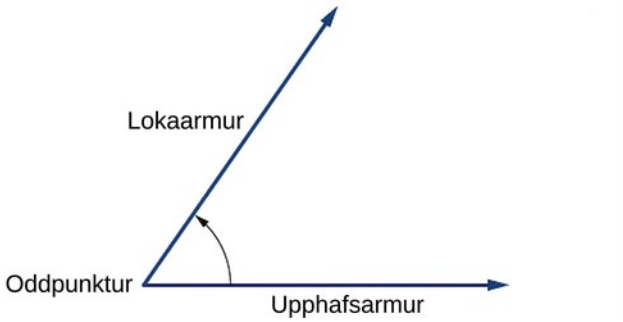
Tafla 1

θ	φ eða ϕ	α	β	γ
þeta	fí	alfa	beta	gamma



Mynd 3 Hornið þeta, sýnt sem $\angle\theta$

Líta má á myndun horns sem snúning. Við byrjum með tvo geisla sem liggja hvor ofan á öðrum. Annar þeirra helst kyrr en hinum er snúið. Fasti geislinn er upphafsarmurinn og geislinn sem snúið er nefnist lokaarmurinn. Til að greina armana að táknum við snúninginn með litlum boga og ör nærri oddpunktinum, eins og á mynd 4.

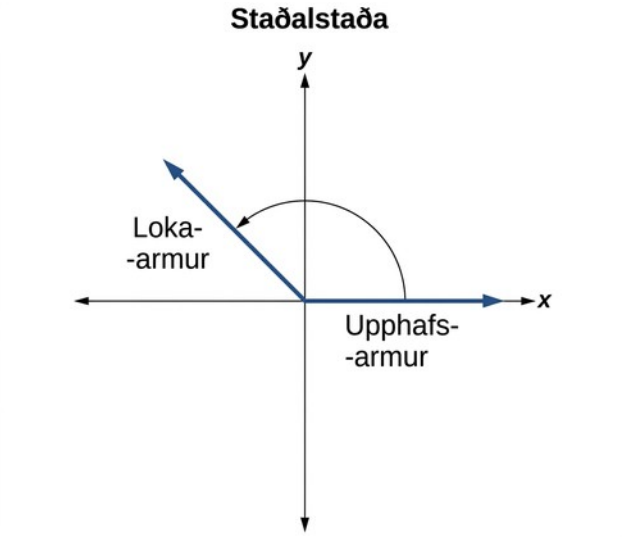


Mynd 4. Upphafsarmur, lokaarmur og oddpunktur horns.

5

Eins og rætt var í upphafi hlutans eru horn notuð á mörgum sviðum, en til að nota þau rétt verðum við að geta mælt þau. Hornamál er stærð snúningsins frá upphafsarminum að lokaarminum. Kunnuglegasta mælieining horna er líklega gráðan. Ein gráða er $\frac{1}{360}$ úr heilum hringsnúningi, svo heill hringsnúningur er 360 gráður. Þegar horn er mælt í gráðum á alltaf að setja eininguna „gráður“ á eftir tölunni eða nota gráðumerkið °. Til dæmis 90 gráður = 90°.

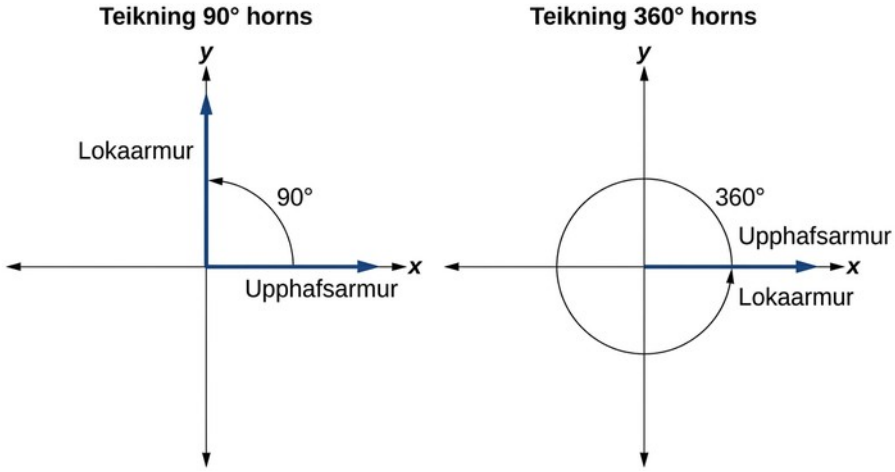
Til að gera umfjöllunina nákvæmari byrjum við á að teikna horn í xy-hnitakerfi. Horn geta verið hvar sem er í hnitakerfinu, en til samanburðar er venja að sýna þau í sömu stöðu þegar hægt er. Horn er í staðalstöðu ef oddpunktur þess er í upphafspunkti hnitakerfisins og upphafsarmurinn liggur eftir jákvæða hluta x-ássins. Sjá mynd 5.



Mynd 5. Horn í staðalstöðu í hnitakerfi.

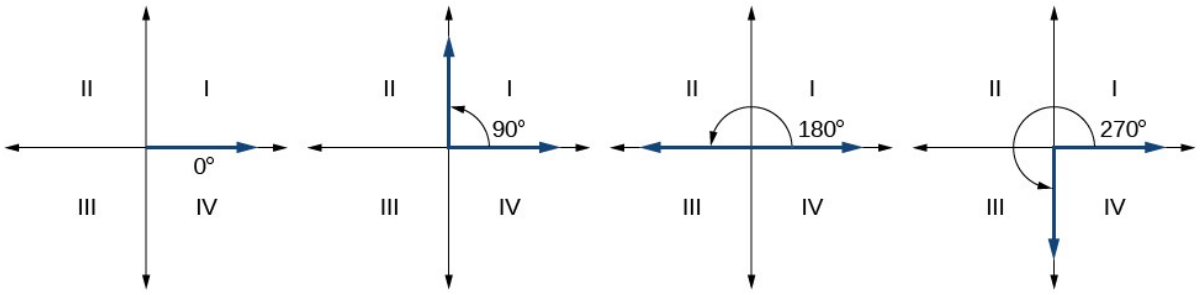
Ef hornið er mælt rangsælis frá upphafsarmi að lokaarmi kallast það jákvætt horn. Ef það er mælt réttsælis kallast það neikvætt horn.

Þegar horn er teiknað í staðalstöðu er alltaf byrjað á sama hátt: Teiknið upphafsarminn eftir jákvæða hluta x-ássins. Til að staðsetja lokaarm hornsins þurfum við að reikna hve stórt brot af heilum snúningi hornið táknar. Það gerum við með því að deila hornamálinu í gráðum með 360°. Til að teikna 90° horn reiknum við til dæmis $\frac{90^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{4}$. Lokaarmurinn fæst því með fjórðungssnúningi rangsælis frá jákvæða hluta x-ássins. Til að teikna 360° horn reiknum við $\frac{360^\circ}{360^\circ}=1$. Lokaarmurinn fer því 1 heilan snúning um hringinn rangsælis frá jákvæða hluta x-ássins. Í þessu tilviki falla upphafsarmur og lokaarmur saman. Sjá mynd 6.



Mynd 6. 90° horn og heill 360° snúningur í staðalstöðu.

Þar sem staðalstaða horns er skilgreind út frá upphafsarminum fáum við sérstaka gerð horns þegar lokaarmurinn liggur á hnitás. Slíkt horn nefnist áshorn. Hornamál þess getur verið 0°, 90°, 180°, 270° eða 360°. Sjá mynd 7.



Mynd 7 Áshorn eru horn í staðalstöðu með lokaarm á hnitás. Dæmi eru sýnd.

ÁSHORN

Áshorn eru horn í staðalstöðu með lokaarm á hnitás, þar á meðal 0°, 90°, 180°, 270° og 360°.

AÐFERÐ

Teikna horn í staðalstöðu þegar hornamál í gráðum er gefið.

1. Setjið hornamálið fram sem brot af 360°.
2. Fullstyttið brotið.
3. Teiknið horn sem nær yfir sama hluta hringsins. Byrjið á jákvæða hluta x-ássins og farið rangsælis fyrir jákvæð horn en réttsælis fyrir neikvæð horn.

DÆMI 1

Horn í gráðum teiknað í staðalstöðu

1. ⓐ Teiknið 30° horn í staðalstöðu.
2. ⓑ Teiknið −135° horn í staðalstöðu.

Lausn

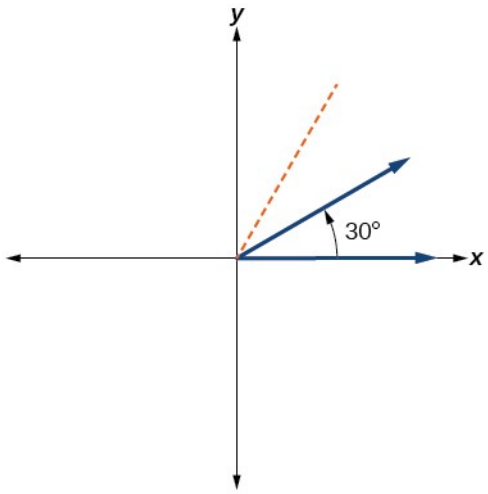
1. Til að rita brotið á kunnuglegra formi sjáum við að

   $$\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{12}$$

   Til að rita brotið á kunnuglegra formi sjáum við að

   $$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$$

   Einn tólfti er þriðjungur úr fjórðungi. Með því að skipta fjórðungssnúningi í þrennt getum við því teiknað línu við 30°, eins og á mynd 8.



Mynd 8. 30° horn fæst með því að skipta fjórðungssnúningi í þrennt.

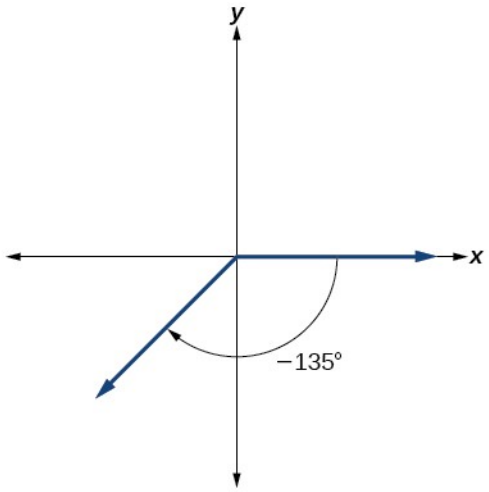
2. Til að rita brotið á kunnuglegra formi sjáum við að

   $$\frac{-135^\circ}{360^\circ}=-\frac{3}{8}$$

   Hér sjáum við að

$$-\frac{3}{8}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Þrír áttundu hlutar úr heilum snúningi eru einn og hálfur fjórðungssnúningur. Mínusmerkið segir að snúa skuli réttsælis. Við teiknum því línu með því að fara einn heilan fjórðung réttsælis og síðan hálfan fjórðung til viðbótar, eins og á mynd 9.



Mynd 9. −135° horn er mælt réttsælis frá jákvæða hluta x-ássins.

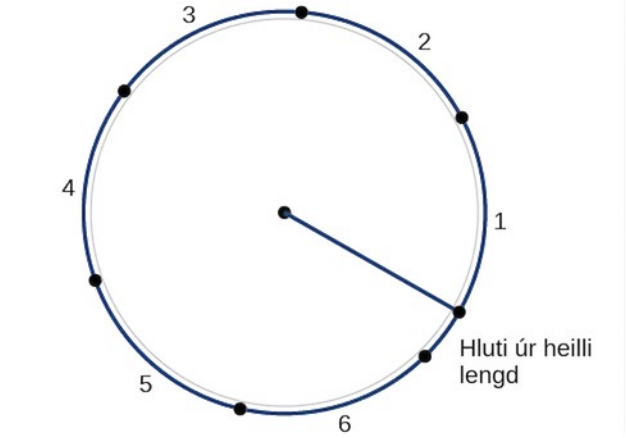
REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Sýnið 240° horn á hring í staðalstöðu.

Breytt milli gráða og radíana

Að skipta hring í 360 hluta er handahófskennt val, þótt þannig fáist hin kunnuglega gráðumæling. Við getum skipt hring á annan hátt. Til að finna aðra einingu skulum við hugsa um það hvernig hringur er teiknaður. Ímyndum okkur að við hættum áður en hringnum er lokað. Hlutinn sem hefur verið teiknaður nefnist bogi. Bogi getur verið hluti úr hring, heill hringur eða meira en heill hringur ef farið er oftar en einu sinni í kringum hringinn. Lengd bogans um einn heilan hring nefnist ummál hringsins.

Ummál hrings er $C=2\pi r$. Ef við deilum báðum hliðum jöfnunnar með r, fæst hlutfall ummáls og geisla, sem er alltaf 2π óháð lengd geislans. Ummál sérhvers hrings er því $2\pi \approx 6{,}28$ sinnum lengd geislans. Ef við tækjum band jafnlangt geislanum og legðum það aftur og aftur eftir ummálinu kæmust fyrir sex heilar bandlengdir og rúmlega fjórðungur af þeirri sjöundu, eins og sýnt er á mynd 10.



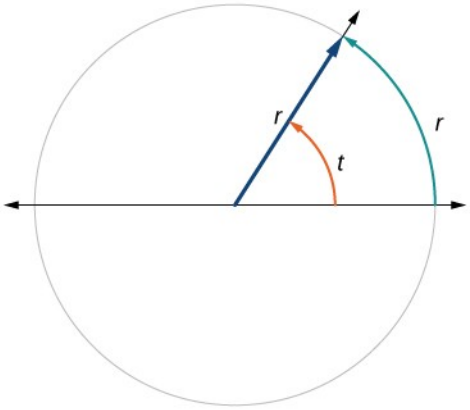
Mynd 10. Geisli hrings lagður í samfelldum lengdum eftir ummálinu.

5

Þetta leiðir okkur að nýju hornamáli. Einn radíani er hornamál miðhorns í hring sem spannar boga með sömu lengd og geisli hringsins. Miðhorn er horn sem tveir geislar mynda í miðju hrings. Þar sem allt ummálið er 2π sinnum geislinn er heill hringsnúningur 2π radíanar. Því gildir

$$2\ \pi\ \text{ radíanar} = 360^\circ$$
$$\pi\ \text{ radíanar} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$
$$1\ \text{ radíani} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$$

Sjá mynd 11. Athugið að þegar horn er gefið án tiltekinnar einingar er átt við stærð þess í radíönum. Hornamálið 3 merkir til dæmis 3 radíana. Hornamál í radíönum er raunar einingarlaust þar sem það er hlutfall bogalengdar og geisla, svo lengdareiningarnar styttast út.



Mynd 11 Hornið t spannar einn radíana. Athugið að lengd bogans sem hornið spannar er jöfn lengd geisla hringsins.

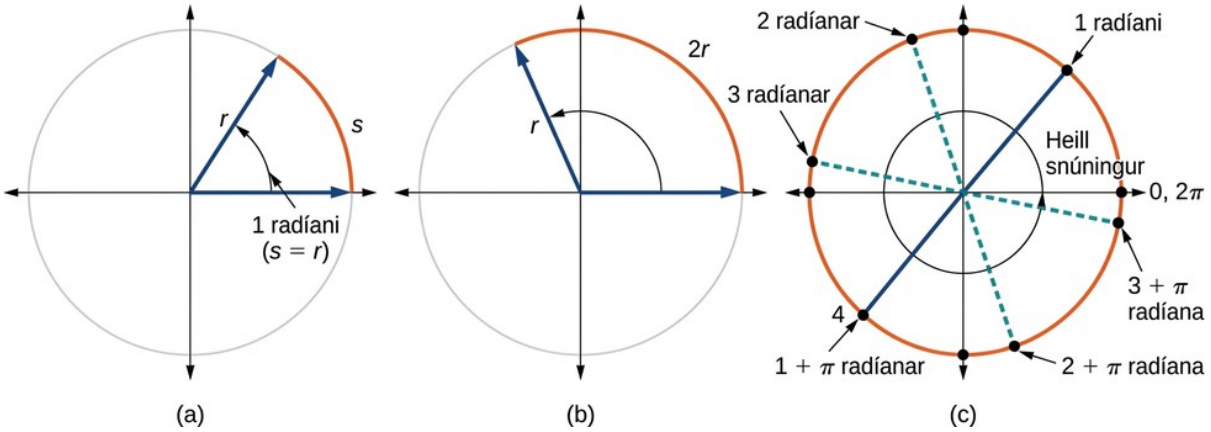
Tengsl bogalengdar og geisla

Bogalengdin s er lengd ferilsins eftir boganum. Hlutfall ummáls hrings og geisla hans er alltaf hið sama. Á sama hátt er bogalengdin sem tiltekið horn spannar alltaf í sama hlutfalli við geislann, óháð lengd hans.

Þetta hlutfall nefnist hornamál í radíönum. Það er hið sama óháð geisla hringsins og ræðst aðeins af horninu. Þessi eiginleiki gerir okkur kleift að skilgreina hornamál hvers horns sem hlutfall bogalengdarinnar s og geislans r. Sjá mynd 12.

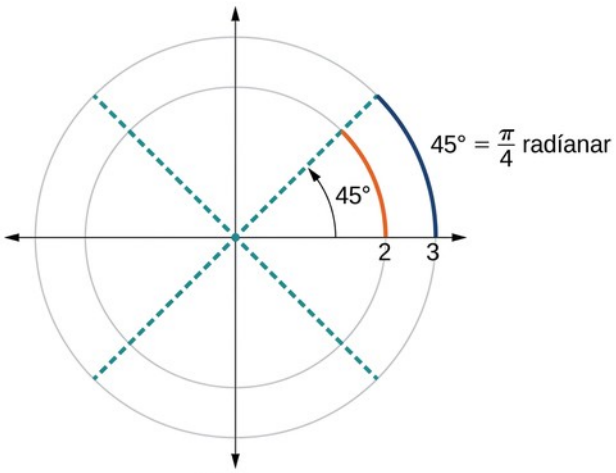
$$s = r\theta$$
$$\theta = \frac{s}{r}$$

Ef $s = r$, þá er $\theta = \frac{r}{r} =$ 1 radíani.



Mynd 12 (a) Í 1 radíana horni er bogalengdin s jöfn geislanum r. (b) 2 radíana horn hefur bogalengdina $s = 2r$. (c) Heill snúningur er 2π eða um 6,28 radíanar.

Til að útskýra þetta nánar skulum við skoða tvo hringi, annan með geisla 2 og hinn með geisla 3. Munum að ummál hrings er $C = 2\pi r$, þar sem r er geislinn. Minni hringurinn hefur því ummálið $2\pi(2) = 4\pi$ og sá stærri ummálið $2\pi(3) = 6\pi$. Teiknum nú 45° horn í báða hringina, eins og á mynd 13.



Mynd 13 45° horn spannar einn áttunda hluta af ummáli hrings, óháð geislanum.

5

Athugið hvað gerist þegar við finnum hlutfall bogalengdarinnar og geisla hringsins.

$$\text{Minni hringur: } \frac{\frac{1}{2}\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi$$

$$\text{Stærri hringur: } \frac{\frac{3}{4}\pi}{3}=\frac{1}{4}\pi$$

Þar sem bæði hlutföllin eru $\frac{1}{4}\pi$, eru hornin í hringjunum jafn stór þótt bogalengd og geisli séu mismunandi.

RADÍANAR

Einn radíani er hornamál miðhorns í hring þar sem lengd bogans milli upphafsarms og lokaarms er jöfn geisla hringsins. Heill snúningur (360°) jafngildir 2π radíönum. Hálfur snúningur (180°) jafngildir π radíönum.

Hornamál í radíönum er hlutfall lengdar bogans sem hornið spannar og geisla hringsins. Með öðrum orðum: Ef s er bogalengd hrings og r er geisli hringsins þá er miðhornið sem spannar bogann $(\frac{s}{r})$ radíanar. Í hring með geisla 1 samsvarar hornamálið í radíönum bogalengdinni.

SPURT OG SVARAÐ

Horn sem er 1 radíani virðist vera um 60°. Er það rétt?

Já. Það er um það bil 57,3°. Þar sem 2π *radíanar jafngilda 360° jafngildir* 1 *radíani* $\frac{360^\circ}{2\pi}\approx 57{,}3^\circ$.

Radíanar notaðir

Þar sem hornamál í radíönum er hlutfall tveggja lengda er það einingarlaust. Gerum til dæmis ráð fyrir á mynd 12 að geislinn sé 2 tommur og vegalengdin eftir boganum einnig 2 tommur. Þegar hornamálið í radíönum er reiknað styttast „tommur“ út og niðurstaðan verður einingarlaus. Því þarf ekki að rita heitið „radíanar“ á eftir slíku hornamáli. Ef horn er hvorki merkt með „gráðum“ né gráðumerki megum við gera ráð fyrir að það sé gefið í radíönum.

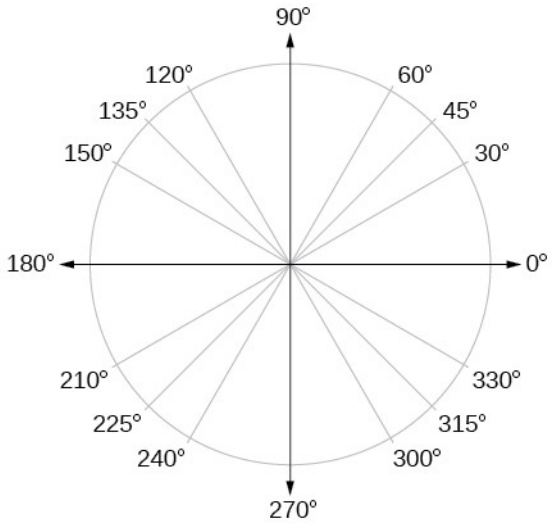
Skoðum einfaldasta tilvikið, einingarhringinn (hring með geisla 1). Við vitum að 1 snúningur jafngildir 360 gráðum, 360°. Við getum einnig fylgt einum snúningi um hring með því að finna ummálið, $C=2\pi r$, og fyrir einingarhringinn er $C=2\pi$. Þessar tvær lýsingar á snúningi um hring gera okkur kleift að breyta gráðum í radíana.

$$1 \text{ sn.} = 360° = 2\pi \text{ radíanar}$$
$$\frac{1}{2} \text{ sn.} = 180° = \pi \text{ radíanar}$$
$$\frac{1}{4} \text{ sn.} = 90° = \frac{\pi}{2} \text{ radíanar}$$

5

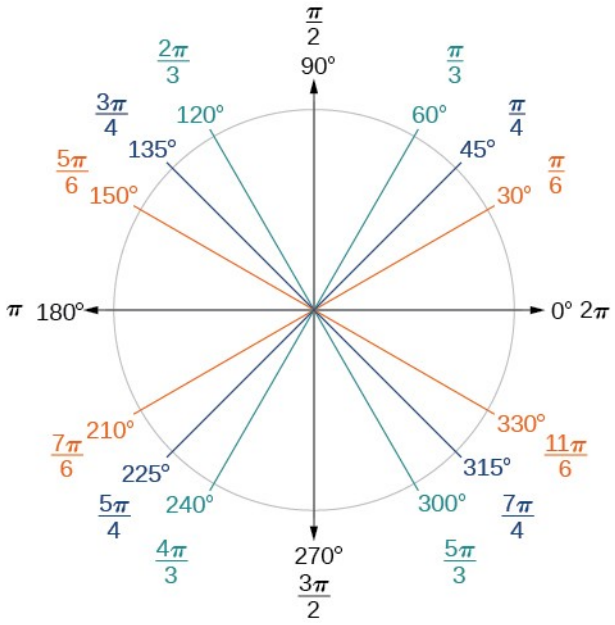
Algeng horn í radíönum

Auk þess að þekkja gráðu- og radíanamál fjórðungssnúnings, hálfs snúnings og heils snúnings þurfum við að þekkja fleiri algeng horn innan eins hringsnúnings. Algengt er að sjá margfeldi af 30, 45, 60 og 90 gráðum. Þessi gildi eru sýnd á mynd 14. Það kemur að góðum notum að leggja þessi horn á minnið þegar við skoðum eiginleika horna.



Mynd 14 Algeng horn mæld í gráðum

Nú getum við skráð samsvarandi radíanagildi fyrir algengu hornamálin á mynd 14. Þau eru sýnd á mynd 15. Sannreynið hvert þessara gilda.



Mynd 15 Algeng horn mæld í radíönum

5

DÆMI 2

Hornamál í radíönum fundið

Finnið hornamál í radíönum fyrir þriðjung úr heilum snúningi.

Lausn

Í hvaða hring sem er væri bogalengdin eftir slíkum snúningi þriðjungur af ummálinu. Við vitum að

$$1 \text{ snúningur} = 2\pi r$$

Því

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{3}(2\pi r) \\ &= \tfrac{2\pi r}{3} \end{aligned}$$

Hornamálið í radíönum er hlutfall bogalengdar og geisla.

$$\begin{aligned}\text{hornamál í radíönum} &= \frac{\frac{2\,\pi\,r}{3}}{r} \\ &= \frac{2\,\pi\,r}{3\,r} \\ &= \frac{2\,\pi}{3}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið hornamál í radíönum fyrir þrjá fjórðu hluta úr heilum snúningi.

Breytt milli radíana og gráða

Þar sem bæði gráður og radíanar mæla horn þurfum við að geta breytt milli þeirra. Það má auðveldlega gera með hlutfallajöfnu.

$$\frac{\theta}{180} = \frac{\theta^R}{\pi}$$

Hlutfallajafnan sýnir að hornamálið θ í gráðum deilt með 180 er jafnt hornamálinu θ í radíönum deilt með π. Í jöfnunni er hornamálið í radíönum auðkennt með yfirskriftinni R. Með öðrum orðum standa gráður í sama hlutfalli við 180 og radíanar við π.

$$\frac{\text{Gráður}}{180} = \frac{\text{Radíanar}}{\pi}$$

BREYTT MILLI RADÍANA OG GRÁÐA

Notið þessa hlutfallajöfnu til að breyta milli gráða og radíana:

$$\frac{\theta}{180} = \frac{\theta^R}{\pi}$$

DÆMI 3

Radíönum breytt í gráður

Breytið hverju hornamáli úr radíönum í gráður.

1. ⓐ $\frac{\pi}{6}$
2. ⓑ 3

Lausn

Þar sem radíanar eru gefnir en við viljum fá gráður setjum við upp hlutfallajöfnu og leysum hana.

1. ⓐ Við notum hlutfallajöfnuna og setjum inn gefnar upplýsingar.

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{180} &= \frac{\theta^R}{\pi} \\ \frac{\theta}{180} &= \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \\ \theta &= \frac{180}{6} \\ \theta &= 30^\circ\end{aligned}$$

2. ⓑ Við notum hlutfallajöfnuna og setjum inn gefnar upplýsingar.

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{180} &= \frac{\theta^R}{\pi} \\ \frac{\theta}{180} &= \frac{3}{\pi} \\ \theta &= \frac{3(180)}{\pi} \\ \theta &\approx 172^\circ\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Breytið $-\frac{3\pi}{4}$ radíönum í gráður.

DÆMI 4

Gráðum breytt í radíana

Breytið 15 gráðum í radíana.

Lausn

Í þessu dæmi byrjum við með gráður og viljum fá radíana. Við setjum því aftur upp hlutfallajöfnu og leysum hana, en nú setjum við gefnu upplýsingarnar inn á öðrum stað í jöfnunni.

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{180} &= \frac{\theta^R}{\pi} \\ \frac{15}{180} &= \frac{\theta^R}{\pi} \\ \frac{15\pi}{180} &= \theta^R \\ \frac{\pi}{12} &= \theta^R\end{aligned}$$

Greining

Önnur leið til að hugsa um dæmið er að muna að $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Þar sem $15^\circ = \frac{1}{2}\left(30^\circ\right)$, fæst að ($\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)$) er $\frac{\pi}{12}$.

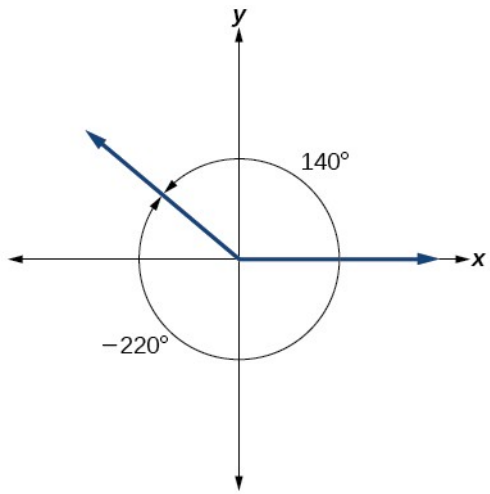
REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Breytið 126° í radíana.

Horn með sama lokaarm fundin

Í sumum verkefnum getur verið gagnlegt að breyta milli gráða og radíana. Í öðrum verkefnum getur þurft annars konar breytingu. Erfiðara er að vinna með neikvæð horn og horn sem spanna meira en heilan snúning en horn á bilinu 0° til 360°, eða 0 til 2π. Hentugt væri að skipta horni utan þessa bils út fyrir samsvarandi horn innan eins heils snúnings.

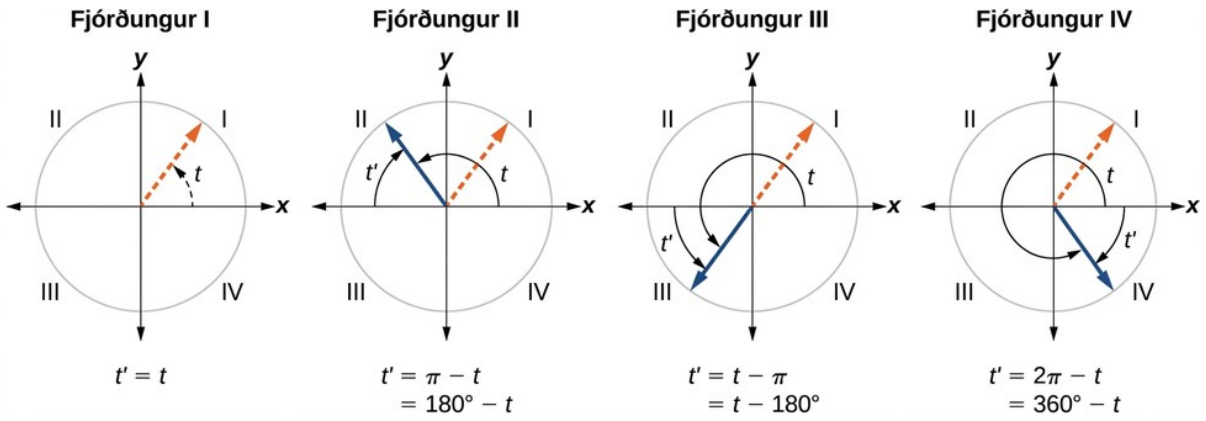
Fleiri en eitt horn geta haft sama lokaarm. Skoðið mynd 16. Hornið 140° er jákvætt horn, mælt rangsælis. Hornið −220° er neikvætt horn, mælt réttsælis. Bæði hornin hafa þó sama lokaarm. Slík horn í staðalstöðu nefnast horn með sama lokaarm. Hvert horn sem er stærra en 360° eða minna en 0° hefur sama lokaarm og horn milli 0° og 360°. Oft er þægilegra að finna slíkt horn innan eins heils snúnings en að vinna með horn utan hans.



Mynd 16 140° horn og −220° horn hafa sama lokaarm.

Hvert horn hefur óendanlega mörg horn með sama lokaarm. Í hvert sinn sem 360° er bætt við hornið eða 360° dregið frá því fæst horn með lokaarm á sama stað. Þess vegna hafa til dæmis 100° og 460° sama lokaarm, og einnig −260°. Sú staðreynd að hvert horn hefur óendanlega mörg horn með sama lokaarm skýrir hvers vegna gröf hornafalla endurtaka sig.

Viðmiðunarhorn horns er stærð minnsta hvassa hornsins t' sem lokaarmur hornsins t myndar við lárétta ásinn. Þegar viðmiðunarhorn er teiknað í staðalstöðu liggur lokaarmur þess í fyrsta fjórðungi. Því má nota það sem fyrirmynd við útreikninga fyrir horn í öðrum fjórðungum. Á mynd 17 eru dæmi um viðmiðunarhorn horna í mismunandi fjórðungum.



Mynd 17. Viðmiðunarhorn fyrir horn í fjórum fjórðungum hnitakerfisins.

5

HORN MEÐ SAMA LOKAARM OG VIÐMIÐUNARHORN

Horn með sama lokaarm eru tvö horn í staðalstöðu sem hafa sameiginlegan lokaarm.

Viðmiðunarhorn horns er stærð minnsta hvassa hornsins t', sem lokaarmur hornsins t myndar við lárétta ásinn.

AÐFERÐ

Finna horn milli 0° og 360° með sama lokaarm og gefið horn sem er stærra en 360°.

1. Dragið 360° frá gefna horninu.
2. Ef niðurstaðan er 360° eða stærri skal draga 360° aftur frá þar til niðurstaðan er að minnsta kosti 0° og minni en 360°.
3. Hornið sem fæst hefur sama lokaarm og upphaflega hornið.

DÆMI 5

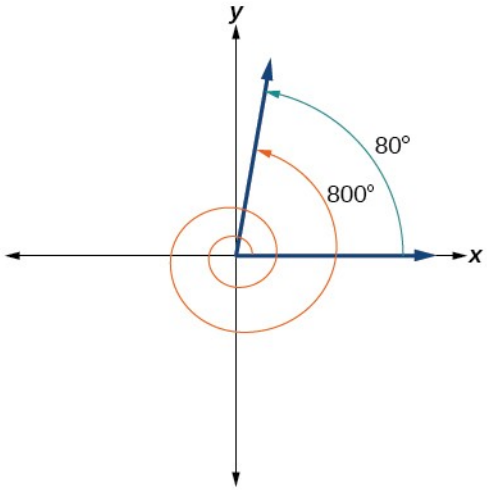
Horn með sama lokaarm og horn stærra en 360° fundið

Finnið minnsta jákvæða hornið θ sem hefur sama lokaarm og horn með hornamálið 800°, þar sem $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

Lausn

Horn með hornamálið 800° hefur sama lokaarm og horn með hornamálið 800 − 360 = 440°. En 440° er enn stærra en 360°, svo við drögum 360° aftur frá til að finna annað horn með sama lokaarm: 440 − 360 = 80°.

Hornið $\theta = 80^\circ$ hefur sama lokaarm og 800°. Með öðrum orðum jafngildir 800° horninu 80° að viðbættum tveimur heilum snúningum, eins og sýnt er á mynd 18.



Mynd 18. 80° og 800° horn hafa sama lokaarm.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Finnið horn α sem hefur sama lokaarm og horn með hornamálið 870°, þar sem $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

AÐFERÐ

Finna horn með hornamál milli 0° og 360° sem hefur sama lokaarm og gefið horn með hornamál minna en 0°.

1. Leggið 360° við gefna hornið.
2. Ef niðurstaðan er enn minni en 0° skal leggja 360° aftur við þar til niðurstaðan er milli 0° og 360°.
3. Hornið sem fæst hefur sama lokaarm og upphaflega hornið.

DÆMI 6

Horn með sama lokaarm og horn minna en 0° fundið

Sýnið hornið með hornamálið −45° á hring og finnið jákvætt horn α með sama lokaarm þannig að $0° \leq \alpha < 360°$.

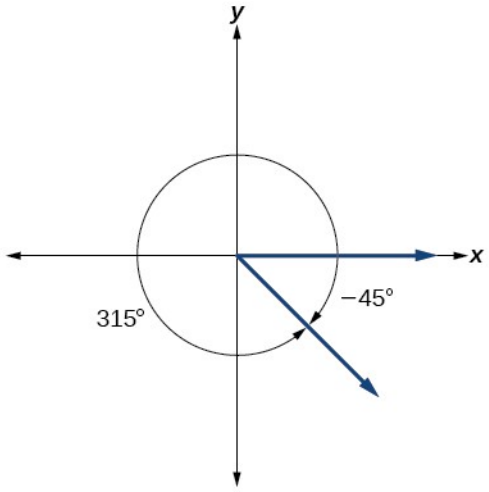
Lausn

Þar sem 45° er helmingurinn af 90° getum við byrjað á jákvæða hluta x-ássins og mælt réttsælis helming af 90° horni.

Horn með sama lokaarm fást með því að leggja heilan 360° snúning við hornið eða draga hann frá. Hér fáum við jákvætt horn með sama lokaarm með því að leggja 360° við:

$$-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$$

Síðan getum við sýnt hornið á hring, eins og á mynd 19.



Mynd 19. 315° og −45° horn hafa sama lokaarm.

5

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Finnið horn β sem hefur sama lokaarm og horn með hornamálið -300°, þannig að $0^\circ \leq \beta < 360^\circ$.

Horn með sama lokaarm mæld í radíönum

Við getum fundið horn í radíönum með sama lokaarm á mjög svipaðan hátt og þegar gráður eru notaðar. Í báðum tilvikum leggjum við einn eða fleiri heila snúninga við eða drögum þá frá.

AÐFERÐ

Gefið er horn stærra en 2π,. Finna skal horn með sama lokaarm á bilinu frá 0 til 2π.

1. Dragið 2π frá gefna horninu.
2. Ef niðurstaðan er 2π, eða stærri skal draga 2π aftur frá þar til niðurstaðan er að minnsta kosti 0 og minni en 2π.
3. Hornið sem fæst hefur sama lokaarm og upphaflega hornið.

DÆMI 7

Horn með sama lokaarm fundin með radíönum

Finnið horn β sem hefur sama lokaarm og $\frac{19\pi}{4}$, þar sem $0 \leq \beta < 2\pi$.

Lausn

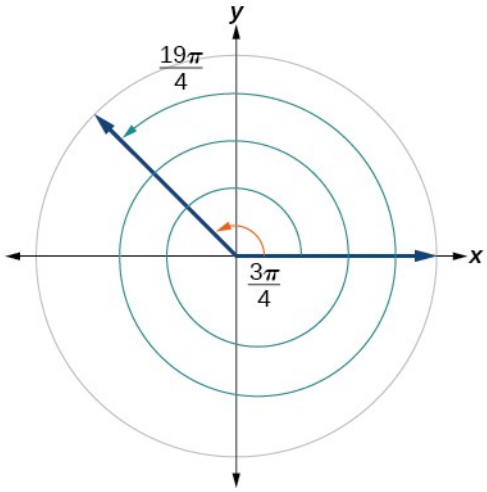
Þegar unnið var með gráður fundum við horn með sama lokaarm með því að leggja 360 gráður, einn heilan snúning, við eða draga þær frá. Á sama hátt finnum við slík horn í radíönum með því að leggja heila snúninga, eða 2π radíana, við eða draga þá frá:

$$\begin{aligned}\frac{19\pi}{4} - 2\pi &= \frac{19\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} \\ &= \frac{11\pi}{4}\end{aligned}$$

Hornið ($\frac{11\pi}{4}$) hefur sama lokaarm en er ekki minna en 2π, svo við drögum annan snúning frá:

$$\begin{aligned}\frac{11\pi}{4} - 2\pi &= \frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} \\ &= \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Hornið ($\frac{3\pi}{4}$) hefur sama lokaarm og $\frac{19\pi}{4}$, eins og sýnt er á mynd 20.



Mynd 20. Hornin 3π/4 og 19π/4 hafa sama lokaarm.

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Finnið horn θ sem hefur sama lokaarm og horn með hornamálið $-\frac{17\pi}{6}$, þar sem $0 \le \theta < 2\pi$.

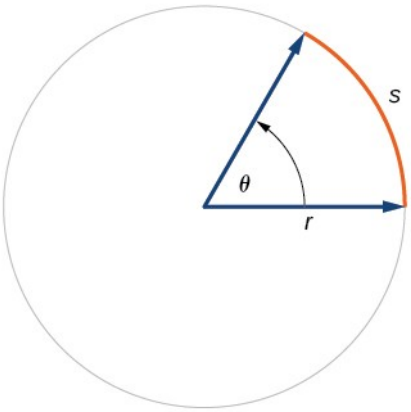
Bogalengd ákvörðuð

Munum að hornamálið θ í radíönum var skilgreint sem hlutfall bogalengdarinnar s og geisla hringsins r, það er $\theta = \frac{s}{r}$. Út frá þessum tengslum getum við fundið bogalengd í hring þegar horn er gefið.

BOGALENGD Í HRING

Í hring með geisla r er lengd bogans s sem horn með stærðina θ radíanar spannar, eins og sýnt er á mynd 21,

$$s = r\,\theta$$



Mynd 21. Bogalengd s sem miðhornið θ spannar í hring með geisla r.

AÐFERÐ

Gefinn er hringur með geisla r **,**. Reiknið lengd bogans s sem horn með hornamálið θ. spannar.

1. Breytið θ í radíana ef þörf krefur.
2. Margfaldið geislann r með hornamálinu í radíönum, $\theta : s = r\,\theta$.

DÆMI 8

Bogalengd fundin

Gerum ráð fyrir að braut Merkúríusar um sólina sé fullkominn hringur. Merkúríus er um 36 milljónir mílna frá sólinni.

1. ⓐ Á einum jarðardegi fer Merkúríus 0,0114 úr heilli umferð sinni. Hve margar mílur ferðast hann á einum degi?
2. ⓑ Notið svarið úr a-lið til að finna hornamál hreyfingar Merkúríusar á einum jarðardegi í radíönum.

Lausn

1. Þar sem Merkúríus fer 0,0114 úr heilli umferð á einum jarðardegi getum við nú fundið vegalengdina:

$$\begin{aligned} C &= 2\,\pi\,r \\ &= 2\,\pi\,(36 \text{ milljónir mílna}) \\ &\approx 226 \text{ milljónir mílna} \end{aligned}$$

Þar sem Merkúríus fer 0,0114 úr heilli umferð á einum jarðardegi getum við nú fundið vegalengdina:

$(0{,}0114)226$ milljónir mílna = 2,58 milljónir mílna

2. ⓑ Nú breytum við í radíana:

$$\begin{aligned}&\text{hornamál í radíönum}\\&=\frac{\text{bogalengd}}{\text{geisli}}\\&=\frac{2{,}58 \text{ milljónir mílna}}{36 \text{ milljónir mílna}}\\&=0{,}0717\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Finnið lengd bogans sem 215° horn spannar í hring með geisla 10 einingar.

Flatarmál hringgeira fundið

Auk bogalengdar getum við notað horn til að finna flatarmál hringgeira. Hringgeiri er svæði í hring sem afmarkast af tveimur geislum og boganum milli þeirra, líkt og sneið af pítsu eða böku. Munum að flatarmál hrings með geisla r má finna með formúlunni $A=\pi r^2$. Ef geislarnir mynda hornið θ, mælt í radíönum, þá er $(\frac{\theta}{2\pi})$ hlutfall hornamálsins af heilum snúningi og þar með einnig hlutfall flatarmáls geirans af flatarmáli hringsins. Flatarmál hringgeirans er því brotið $(\frac{\theta}{2\pi})$ margfaldað með öllu flatarmálinu. (Munið að formúlan gildir aðeins þegar θ er gefið í radíönum.)

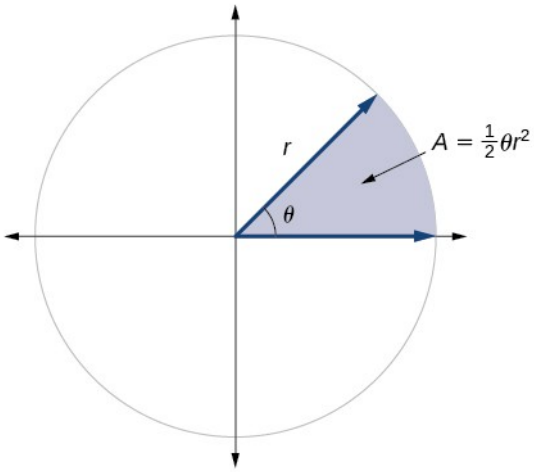
$$\begin{aligned}&\text{Flatarmál hringgeira}\\&=\left(\frac{\theta}{2\ \pi}\right)\pi\ r^2\\&=\frac{\theta\ \pi\ r^2}{2\ \pi}\\&=\frac{1}{2}\ \theta\ r^2\end{aligned}$$

FLATARMÁL HRINGGEIRA

Flatarmál hringgeira í hring með geisla r sem horn θ, mælt í radíönum, spannar er

$$A=\frac{1}{2}\theta r^2$$

Sjá mynd 22.



Mynd 22 Flatarmál hringgeirans er helmingur af margfeldi geislans í öðru veldi og miðhornsins í radíönum.

AÐFERÐ

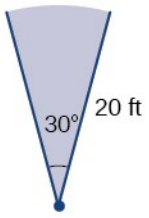
Finnið flatarmál hringgeira í hring með geisla r, þegar miðhornið er θ.

1. Breytið θ í radíana ef þörf krefur.
2. Margfaldið helming hornamáls θ í radíönum með geislanum í öðru veldi, r: $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

DÆMI 9

Flatarmál hringgeira fundið

Sjálfvirkur garðúðari úðar í 20 feta fjarlægð og snýst um 30 gráður, eins og sýnt er á mynd 23. Hvert er flatarmál grassvæðisins sem úðarinn vökvar?



Mynd 23 Úðarinn nær 20 fet og vökvar 30° hringgeira.

Lausn

Fyrst þurfum við að breyta hornamálinu í radíana. Þar sem 30° er eitt af algengu hornamálunum þekkjum við samsvarandi radíanamál, en getum einnig reiknað það:

$$30 \text{ gráður} = 30 \cdot \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{\pi}{6} \text{ radíanar}$$

Flatarmál hringgeirans er þá

$$\text{Flatarmál} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)(20)^2$$
$$\approx 104{,}72$$

Flatarmálið er því um $104{,}72 \text{ ft}^2$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 9

Í miðjusnúinni áveitu snýst stórt áveiturör á hjólum um miðpunkt. Bóndi er með slíkt kerfi með 400 metra geisla. Ef takmarkanir á vatnsnotkun leyfa henni aðeins að vökva 150 þúsund fermetra á dag, á hvaða horn ætti hún að stilla kerfið? Gefið svarið í radíönum með tveimur aukastöfum.

Línulegur hraði og hornhraði notaðir til að lýsa hreyfingu eftir hringferli

Auk þess að finna flatarmál hringgeira getum við notað horn til að lýsa hraða hlutar á hreyfingu. Hlutur sem fer eftir hringferli hefur bæði línulegan hraða og hornhraða. Línulegur hraði lýsir farinni vegalengd eftir ferlinum á tímaeiningu. Ef hjól með 5 tomma geisla snýst til dæmis einn hring á sekúndu fer punktur á jaðri þess vegalengd sem jafngildir ummálinu, eða 10π tommur, á hverri sekúndu. Línulegur hraði punktsins er því 10π tommur á sekúndu.

Jafnan fyrir línulegan hraða er hér á eftir, þar sem v er línulegur hraði, s er farin vegalengd og t er tími.

$$v = \frac{s}{t}$$

Hornhraði verður til við hringhreyfingu og má ákvarða hann út frá horninu sem punktur snýst um á tilteknu tímabili. Með öðrum orðum er hornhraði snúningshorn á tímaeiningu. Ef tannhjól lýkur til dæmis heilum snúningi á 4 sekúndna fresti getum við reiknað hornhraða þess sem $\frac{360 \text{ gráður}}{4 \text{ sekúndur}} = 90$ gráður á sekúndu. Hornhraða má til dæmis gefa í radíönum á sekúndu, snúningum á mínútu eða gráðum á klukkustund. Jafnan fyrir hornhraða er eftirfarandi, þar sem ω (lesið ómega) er hornhraði, θ er hornið sem farið er um og t er tími.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

Með því að tengja skilgreiningu hornhraða við jöfnuna fyrir bogalengd, $s = r\,\theta$, getum við fundið tengsl hornhraða og línulegs hraða. Leysa má jöfnuna fyrir hornhraða með tilliti til θ, sem gefur $\theta = \omega\, t$. Þegar því er stungið inn í jöfnuna fyrir bogalengd fæst:

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ &= r\omega t \end{aligned}$$

Þegar þessu er stungið inn í jöfnuna fyrir línulegan hraða fæst:

$$\begin{aligned} v &= \tfrac{s}{t} \\ &= \tfrac{r\omega t}{t} \\ &= r\omega \end{aligned}$$

5

HORNHRAÐI OG LÍNULEGUR HRAÐI

Þegar punktur hreyfist eftir hring með geisla r, er hornhraði hans, ω, snúningshornið θ deilt með tímanum t.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

Línulegan hraða punktsins, v, má finna með því að deila farinni vegalengd, bogalengdinni s, með tímanum t.

$$v = \frac{s}{t}$$

Þegar hornhraði er mældur í radíönum á tímaeiningu tengjast línulegur hraði og hornhraði með jöfnunni

$$v = r\,\omega$$

Jafnan segir að margfalda megi hornhraðann, ω, sem lýsir snúningshorni í radíönum á tímaeiningu, með geislanum r til að reikna heildarbogalengdina sem farin er á tímaeiningu. Það er einmitt skilgreining línulegs hraða.

AÐFERÐ

Reikna hornhraða þegar snúningshorn og liðinn tími eru gefin.

1. Breytið hornamálinu í radíana ef þörf krefur.
2. Deilið horninu í radíönum með fjölda liðinna tímaeininga: $\omega = \frac{\theta}{t}$.
3. Hraðinn sem fæst er í radíönum á tímaeiningu.

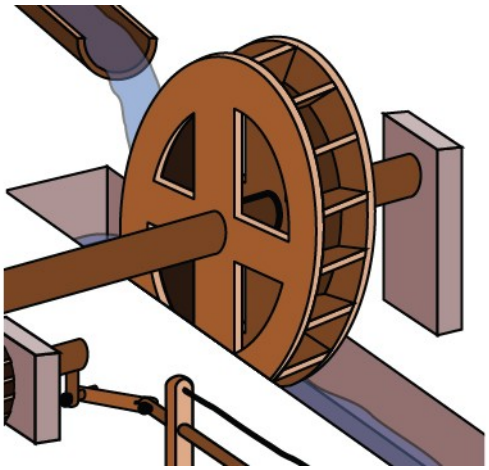
Vatnshjól hafa verið notuð í þúsundir ára til að flytja orku rennandi vatns til annarra tækja. Myndin hér fyrir neðan sýnir hönnun rómverska vatnshjólsins frá 3. öld í Hierapolis, borg í

núverandi Tyrklandi. Vatnið sneri hjólinu og hjólið sneri sveif sem var tengd tveimur sögum. Sagirnar voru notaðar til að skera steinblokkir. Sömu lausnir voru notaðar í vatnshjólum víða um heim og urðu jafnvel undirstaða gufuvélarinnar, sem var fundin upp um 1500 árum síðar.

DÆMI 10

Hornhraði fundinn

Vatnshjólið á mynd 24 lýkur 1 snúningi á 5 sekúndna fresti. Finnið hornhraðann í radíönum á sekúndu.



Mynd 24. Vatnshjól tengt sögum með sveifbúnaði.

Lausn

Hjólið lýkur 1 snúningi, eða fer um 2π radíana horn, á 5 sekúndum. Hornhraðinn er því $\omega = \frac{2\pi}{5} \approx 1{,}257$ radíanar á sekúndu.

REYNIÐ SJÁLF NR. 10

Gömul vínylplata er spiluð á plötuspilara sem snýst réttsælis 45 snúninga á mínútu. Finnið hornhraðann í radíönum á sekúndu.

AÐFERÐ

Ákvarða línulegan hraða þegar geisli hrings, snúningshorn og liðinn tími eru gefin.

1. Breytið heildarsnúningnum í radíana ef þörf krefur.
2. Deilið heildarsnúningnum í radíönum með liðnum tíma til að finna hornhraðann; notið $\omega = \frac{\theta}{t}$.

3. Margfaldið hornhraðann með geislanum til að finna línulega hraðann. Hraðinn er þá í lengdareiningu geislans á tímaeiningu liðna tímans; notið $v = r\,\omega$.

DÆMI 11

Línulegur hraði fundinn

Hjól reiðhjóls eru 28 tommur í þvermál. Snúningshraðamælir sýnir að þau snúast 180 snúninga á mínútu. Finnið hraða reiðhjólsins eftir veginum.

Lausn

Hér er hornhraði gefinn og finna þarf samsvarandi línulegan hraða. Við gerum ráð fyrir að hjólin renni ekki á veginum. Þá er línulegur hraði punkts á jaðri hjólsins miðað við öxulinn jafn hraða reiðhjólsins eftir veginum.

Við byrjum á að breyta snúningum á mínútu í radíana á mínútu. Gagnlegt getur verið að fylgja einingunum við breytinguna:

$$180\,\frac{\text{snúningar}}{\text{mínúta}} \cdot \frac{2\,\pi\ \text{radíanar}}{\text{snúningur}} = 360\,\pi\,\frac{\text{radíanar}}{\text{mínúta}}$$

Með formúlunni hér að framan og geisla hjólanna getum við fundið línulega hraðann:

$$\begin{aligned} v &= (14\ \ \text{tommur})\left(360\ \pi\ \frac{\text{radíanar}}{\text{mínúta}}\right) \\ &= 5040\ \pi\ \frac{\text{tommur}}{\text{mínúta}} \end{aligned}$$

Munið að radíanar eru einingarlaust hornamál og því þarf ekki að taka þá fram.

Að lokum gætum við viljað breyta línulega hraðanum í kunnuglegri mælieiningu, til dæmis mílur á klukkustund.

$$\begin{aligned} &5040\ \pi\ \frac{\text{tommur}}{\text{mínúta}} \cdot \frac{1\ \text{fet}}{12\ \text{tommur}} \cdot \frac{1\ \text{míla}}{5280\ \text{fet}} \cdot \frac{60\ \text{mínútur}}{1\ \text{klukkustund}} \\ &\quad \approx 14{,}99\ \ \text{mílur á klukkustund (mph)} \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 11

Gervitungl fer um jörðina með hornhraðann 0,25 radíana á klukkustund í 242 km hæð yfir jörðu. Geisli jarðar er 6378 kílómetrar. Finnið línulegan hraða gervitunglsins í kílómetrum á klukkustund.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í hornum, bogalengd og flatarmáli hringgeira.

- Horn í staðalstöðu

- Snúningshorn
- Horn með sama lokaarm
- Horn með sama lokaarm ákvörðuð
- Jákvæð og neikvæð horn með sama lokaarm
- Hornamál í radíönum
- Horn í radíönum með sama lokaarm
- Bogalengd og flatarmál hringgeira

5.1 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Teiknið horn í staðalstöðu. Merkið oddpunkt, upphafsarm og lokaarm.

2. Útskýrið hvers vegna óendanlega mörg horn hafa sama lokaarm og tiltekið horn.

3. Segið hvað jákvætt og neikvætt horn tákna og útskýrið hvernig hvort þeirra er teiknað.

4. Hvernig tengist hornamál í radíönum hornamáli í gráðum? Látið skýringu á 1 radíana fylgja svarinu.

5. Útskýrið muninn á línulegum hraða og hornhraða þegar hreyfingu eftir hringferli er lýst.

Myndræn verkefni

Teiknið horn með gefnu hornamáli í staðalstöðu í eftirfarandi verkefnum.

6. 30°

7. 300°

8. -80°

9. 135°

10. -150°

11. $\frac{2\pi}{3}$

12. $\frac{7\pi}{4}$

13. $\frac{5\pi}{6}$

14.

$$\frac{\pi}{2}$$

15.

$$-\frac{\pi}{10}$$

16. 415°

Teiknið horn með gefnu hornamáli í staðalstöðu og annað horn með sama lokaarm í eftirfarandi verkefnum.

17. -120°

18. -315°

19.

$$\frac{22\pi}{3}$$

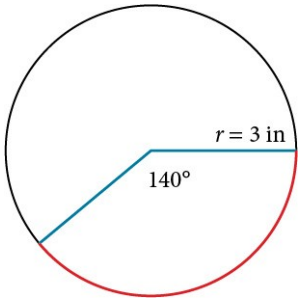
20.

$$-\frac{\pi}{6}$$

21.

$$-\frac{4\pi}{3}$$

Notið mynd 25 í eftirfarandi verkefnum. Námundið að tveimur aukastöfum.

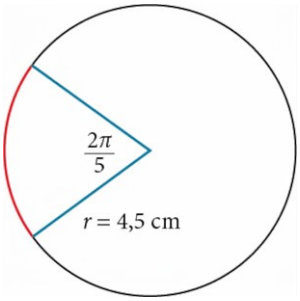


Mynd 25. Bogi í hring með gefinn geisla og miðhorn.

22. Finnið bogalengdina.

23. Finnið flatarmál hringgeirans.

Notið mynd 26 í eftirfarandi verkefnum. Námundið að tveimur aukastöfum.



Mynd 26. Bogi með gefinn geisla og miðhorn í radíönum.

24. Finnið bogalengdina.

25. Finnið flatarmál hringgeirans.

Algebruverkefni

Breytið hornum úr radíönum í gráður í eftirfarandi verkefnum.

26. $\frac{3\pi}{4}$ radíanar

27. $(\frac{\pi}{9})$ radíanar

28. $-\frac{5\pi}{4}$ radíanar

29. $(\frac{\pi}{3})$ radíanar

30. $-\frac{7\pi}{3}$ radíanar

31. $-\frac{5\pi}{12}$ radíanar

32. $(\frac{11\pi}{6})$ radíanar

Breytið hornum úr gráðum í radíana í eftirfarandi verkefnum.

33. 90°

34. 100°

35. -540°

36. -120°

37. 180°

38. -315°

39. 150°

Notið gefnar upplýsingar til að finna lengd hringboga í eftirfarandi verkefnum. Námundið að tveimur aukastöfum.

40. Finnið lengd bogans sem miðhorn með hornamálið $(\frac{\pi}{4})$ radíanar spannar í hring með 12 tomma geisla.

41. Finnið lengd boga í hring með 5,02 mílna geisla ef miðhornið sem spannar bogann er $\frac{\pi}{3}$.

42. Finnið lengd boga í hring með 14 metra þvermál ef miðhornið sem spannar bogann er $\frac{5\pi}{6}$.

43. Finnið lengd bogans sem miðhorn með hornamálið 50° spannar í hring með 10 sentímetra geisla.

44. Finnið lengd bogans sem miðhorn með hornamálið 220° spannar í hring með 5 tomma geisla.

45. Finnið lengd bogans sem miðhorn með hornamálið 63° spannar í hring með 12 metra þvermál.

Notið gefnar upplýsingar til að finna flatarmál hringgeirans í eftirfarandi verkefnum. Námundið að fjórum aukastöfum.

46. Hringgeiri hefur miðhornið 45° og geislann 6 cm.

47. Hringgeiri hefur miðhornið 30° og geislann 20 cm.

48. Hringgeiri í hring með 10 feta þvermál og miðhorn sem er $(\frac{\pi}{2})$ radíanar.

49. Hringgeiri í hring með 0,7 tomma geisla og hornið π radíanar.

Finnið horn milli 0° og 360° sem hefur sama lokaarm og gefna hornið í eftirfarandi verkefnum.

50. -40°

51. -110°

52. 700°

53. 1400°

Finnið horn í radíönum milli 0 og 2π sem hefur sama lokaarm og gefna hornið í eftirfarandi verkefnum.

54.

$$-\frac{\pi}{9}$$

55.

$$\frac{10\pi}{3}$$

56.

$$\frac{13\pi}{6}$$

57.

$$\frac{44\pi}{9}$$

Verkefni úr daglegu lífi

58. Vörubíll með hjól sem eru 32 tommur í þvermál ekur á 60 mi/h. Finnið hornhraða hjólanna í rad/min. Hve marga snúninga á mínútu fara hjólin?

59. Reiðhjól með hjól sem eru 24 tommur í þvermál fer á 15 mi/h. Finnið hornhraða hjólanna í rad/min. Hve marga snúninga á mínútu fara hjólin?

60. Hjól með 8 tomma geisla snýst 15°/s. Hver er línulegi hraðinn v, hornhraðinn í snúningum á mínútu og hornhraðinn í rad/s?

61. Hjól með 14 tomma geisla snýst 0,5 rad/s. Hver er línulegi hraðinn v, hornhraðinn í snúningum á mínútu og hornhraðinn í deg/s?

62. Geisladiskur hefur 120 millimetra þvermál. Þegar hljóð er spilað breytist hornhraðinn til að halda línulegum hraða föstum þar sem diskurinn er lesinn. Þegar lesið er við ytri brún disksins er hornhraðinn um 200 snúningar á mínútu. Finnið línulega hraðann.

63. Þegar skrifað er á geisladisk í skrifanlegu CD-R-drifi breytist hornhraði disksins til að halda línulegum hraða föstum þar sem skrifað er. Þegar skrifað er við ytri brún disksins er hornhraði eins drifs um 4.800 snúningar á mínútu. Finnið línulega hraðann ef geisladiskurinn er 120 millimetrar í þvermál.

64. Einstaklingur stendur á miðbaug jarðar. Geisli jarðar er 3960 mílur. Finnið línulegan hraða hans og hornhraða.

65. Finnið vegalengdina eftir boga á yfirborði jarðar sem spannar miðhornið 5 bogamínútur $\left(1 \text{ mínúta} = \frac{1}{60} \text{ stig}\right)$. Geisli jarðar er 3960 mílur.

66. Finnið vegalengdina eftir boga á yfirborði jarðar sem spannar miðhornið 7 bogamínútur $\left(1 \text{ mínúta} = \frac{1}{60} \text{ stig}\right)$. Geisli jarðar er 3960 mílur.

67. Skoðið klukku með klukkustundavísi og mínútuvísi. Hve stórt horn fer mínútuvísirinn um á 20 mínútum?

Ítarefni

68. Tvær borgir liggja á sömu lengdargráðu. Borg A er á 9 gráðum norðlægrar breiddar og borg B á 30 gráðum norðlægrar breiddar. Gerið ráð fyrir að geisli jarðar sé 3960 mílur. Finnið fjarlægðina milli borganna.

69. Borg er á 40 gráðum norðlægrar breiddar. Gerið ráð fyrir að geisli jarðar sé 3960 mílur og að jörðin snúist einn hring á 24 klukkustundum. Finnið línulegan hraða einstaklings sem býr í borginni. Upplýsingar um hornaföll eru í hlutanum „Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll“.

70. Borg er á 75 gráðum norðlægrar breiddar. Gerið ráð fyrir að geisli jarðar sé 3960 mílur og að jörðin snúist einn hring á 24 klukkustundum. Finnið línulegan hraða einstaklings sem býr í borginni. Upplýsingar um hornaföll eru í hlutanum „Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll“.

71. Meðalfjarlægð jarðar og tungls er 239.000 mílur. Gerið ráð fyrir að braut tunglsins sé hringlaga og að ein umferð taki um 28 daga. Finnið línulegan hraða tunglsins. Gefið svarið í mílum á klukkustund.

72. Hjól reiðhjóls eru 28 tommur í þvermál. Snúningshraðamælir sýnir að þau snúast 180 snúninga á mínútu. Finnið hraða reiðhjólsins eftir veginum.

73. Bíll ekur 3 mílur. Hjólbarðarnir fara 2640 snúninga. Hver er geisli hjólbarðanna í tommum?

74. Hjól á dráttarvél er 24 tommur í þvermál. Hve marga snúninga fer hjólið ef dráttarvélin ekur 4 mílur?

5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Finnið fallgildi sínuss og kósínuss 30° eða $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 45° eða $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ og 60° eða $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- Ákvarða skilgreiningarmengi og myndmengi sínus- og kósínusfalla.
- Nota viðmiðunarhorn til að reikna gildi hornafalla.



Mynd 1 Singapore Flyer var hæsta parísarhjól heims þar til High Roller í Las Vegas og Ain Dubai í Dúbaí tóku metið af því. (mynd: „Vibin JK"/Flickr)

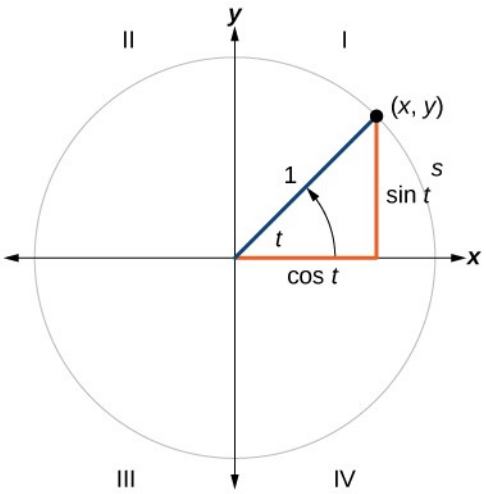
Langar ykkur í spennu? Þá ættuð þið að prófa ferð með Ain Dubai, hæsta parísarhjóli heims. Hjólið er í Dúbaí, fjölmennustu borg Sameinuðu arabísku furstadæmanna og miðstöð fjármála og ferðaþjónustu þar. Það rís 820 fet, eða um einn og hálfan tíunda hluta úr mílu, í loft upp. Hjólið er kynnt sem útsýnishjól og farþegar njóta stórbrotins útsýnis yfir Burj Khalifa (hæstu byggingu heims) og Palm Jumeirah (manngerðan eyjaklasa þar sem búa yfir 10.000 manns og eru 20 hótel) á meðan þeir fara frá jörðu upp á hæsta punkt og aftur niður, hring eftir hring. Í þessum hluta skoðum við slíka snúningshreyfingu eftir hring. Til þess þurfum við fyrst að skilgreina gerð hringsins og setja hann síðan í hnitakerfi. Þá getum við fjallað um hringhreyfingu með hnitapörum.

Fallgildi sínuss og kósínuss fundin

Til að skilgreina hornaföllin byrjum við á að teikna einingarhring, hring með miðju í upphafspunkti og geislann 1, eins og á mynd 2. Hornið t, mælt í radíönum, spannar boga af lengd s. Af formúlunni $s = r\,t$, og því að $r = 1$, sést að fyrir einingarhring gildir $s = t$.

Munum að x- og y-ásarnir skipta hnitafletinum í fjóra hluta sem kallast fjórðungar. Fjórðungarnir fjórir eru merktir I, II, III og IV, í þeirri röð sem jákvætt horn fer yfir þá.

Fyrir hvert horn t, getum við táknað skurðpunkt lokaarmsins og einingarhringsins með hnitunum (x, y). Hnitin x og y eru fallgildi hornafallanna $f(t) = \cos t$ og $f(t) = \sin t$, í sömu röð. Það merkir að $x = \cos t$ og $y = \sin t$.



Mynd 2 Einingarhringur þar sem miðhornið er t radíanar

5

EININGARHRINGUR

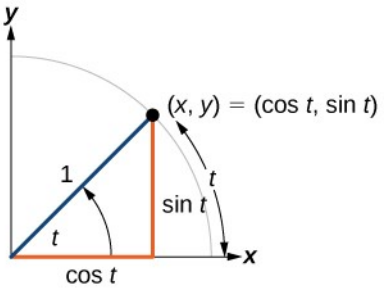
Einingarhringur hefur miðju í $(0,0)$ og geislann 1. Lengd bogans sem miðhornið t. spannar á einingarhringnum er jöfn hornamáli þess í radíönum.

Látum (x,y) vera endapunkt boga af lengd s. á einingarhringnum. Hnitum punktsins, (x,y), má lýsa sem föllum af horninu.

Skilgreining sínus- og kósínusfalla

Nú þegar við höfum merkt einingarhringinn getum við skoðað hvernig (x,y) hnitin tengjast bogalengdinni og horninu. Sínusfallið tengir rauntöluna t við y-hnit punktsins þar sem samsvarandi horn sker einingarhringinn. Nánar tiltekið er sínus hornsins t jafn y-gildi endapunkts boga með lengdina t. á einingarhringnum. Á mynd 2 er sínusinn jafn y. Eins og öll föll hefur sínusfallið inntak og úttak. Inntakið er hornamálið og úttakið er y-hnit samsvarandi punkts á einingarhringnum.

Kósínusfallið varpar hornamálinu t á x-hnit endapunkts bogans sem hornið t. spannar á einingarhringnum. Á mynd 3 er kósínusinn jafn x.



Mynd 3. Hnit punkts á einingarhringnum eru kósínus og sínus samsvarandi horns.

Sínus og kósínus eru föll og því þurfum við ekki alltaf að nota sviga: $\sin t$ merkir það sama og $\sin(t)$ og $\cos t$ merkir það sama og $\cos(t)$. Á sama hátt er $\cos^2 t$ algeng stytting á $(\cos(t))^2$. Athugið að margar reiknivélar og tölvuforrit þekkja ekki stytta ritháttinn. Ef þið eruð í vafa skuluð þið nota svigana þegar þið sláið útreikninga inn í reiknivél eða tölvu.

SÍNUS- OG KÓSÍNUSFÖLL

Ef t er rauntala og punkturinn (x, y) á einingarhringnum samsvarar horninu t, þá gildir:

$$\cos t = x$$

$$\sin t = y$$

AÐFERÐ

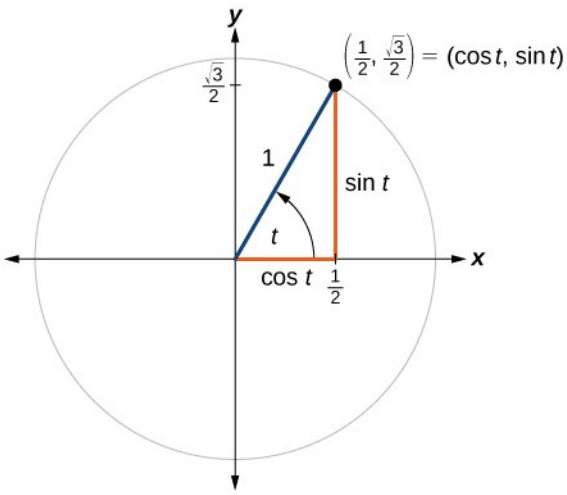
Gefinn er punkturinn P (x, y) á einingarhringnum sem samsvarar horninu t,. Finnið sínus og kósínus hornsins.

1. Sínus t er jafn y-hniti punktsins P: $\sin t = y$.
2. Kósínus t er jafn x-hniti punktsins P: $\cos t = x$.

DÆMI 1

Fallgildi sínuss og kósínuss fundin

Punkturinn P er á einingarhringnum og samsvarar horninu t, eins og sýnt er á mynd 4. Finnið $\cos(t)$ og $\sin(t)$.



Mynd 4. Punktur í fyrsta fjórðungi á einingarhringnum.

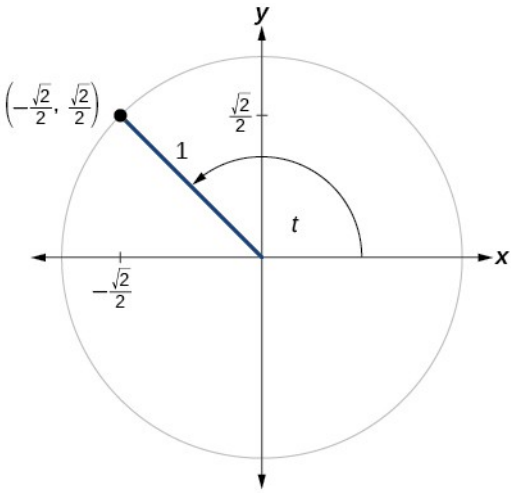
Lausn

Við vitum að $\cos t$ er x-hnit samsvarandi punkts á einingarhringnum og $\sin t$ er y-hnit hans. Því gildir:

$$x = \cos\ t = \frac{1}{2}$$
$$y = \sin\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Tiltekið horn t samsvarar punktinum $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ á einingarhringnum, eins og sýnt er á mynd 5. Finnið $\cos t$ og $\sin t$.



Mynd 5. Punktur í öðrum fjórðungi á einingarhringnum.

Gildi sínuss og kósínuss áshorna fundin

Fyrir áshorn liggur samsvarandi punktur á einingarhringnum á x- eða y-ásnum. Þá getum við auðveldlega reiknað kósínus og sínus út frá gildum x og y.

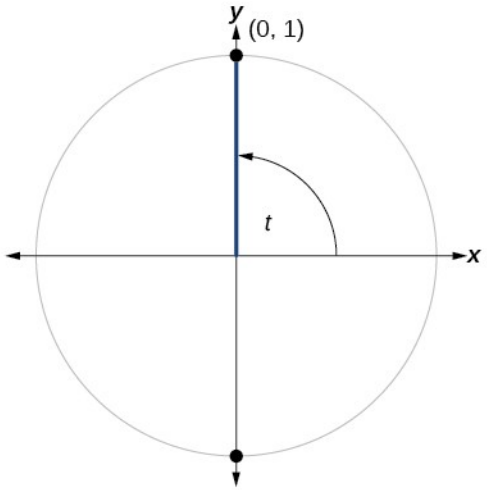
DÆMI 2

Gildi sínuss og kósínuss áshorna reiknuð

Finnið $\cos(90^\circ)$ og $\sin(90^\circ)$.

Lausn

Ef farið er 90° rangsælis eftir einingarhringnum frá jákvæða hluta x-ássins er komið efst á hringinn, þar sem hnitin (x, y) eru (0, 1), eins og sýnt er á mynd 6.



Mynd 6. Lokaarmur 90° horns sker einingarhringinn í punktinum (0, 1).

Samkvæmt skilgreiningum okkar á kósínus og sínus gildir

$$x = \cos\ t = \cos(90^\circ) = 0$$
$$y = \sin\ t = \sin(90^\circ) = 1$$

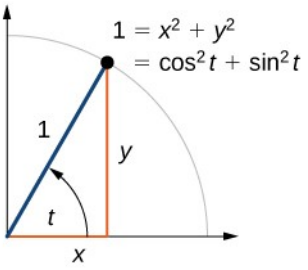
Kósínus 90° er 0; sínus 90° er 1.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið kósínus og sínus hornsins π.

Pýþagórasarsamsemdin

Nú þegar við höfum skilgreint sínus og kósínus skoðum við tengsl þeirra við hvort annað og einingarhringinn. Munið að jafna einingarhringsins er $x^2+y^2=1$. Þar sem $x=\cos t$ og $y=\sin t$, getum við sett þau gildi í stað x og y og fengið $\cos^2 t+\sin^2 t=1$. Jafnan $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, nefnist Pýþagórasarsamsemdin. Sjá mynd 7.



Mynd 7. Regla Pýþagórasar tengir hnit punkts á einingarhringnum við sínus og kósínus.

Við getum notað Pýþagórasarsamsemdina til að finna kósínus horns ef sínus þess er þekktur, eða öfugt. Jafnan getur þó gefið tvær lausnir og því þurfum við frekari upplýsingar um hornið til að velja lausnina með réttu formerki. Ef við vitum í hvaða fjórðungi hornið liggur er auðvelt að velja rétta lausn.

PÝÞAGÓRASARSAMSEMDIN

Pýþagórasarsamsemdin segir að eftirfarandi gildi fyrir hverja rauntölu t ,:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

AÐFERÐ

Gefinn er sínus hornsins t og vitað í hvaða fjórðungi það liggur. Finnið kósínus t.

1. Setjið þekkta gildið á $\sin(t)$ inn í Pýþagórasarsamsemdina.
2. Einangrið $\cos(t)$.
3. Veljið lausnina með réttu formerki fyrir x-gildi í fjórðungnum þar sem t liggur.

5

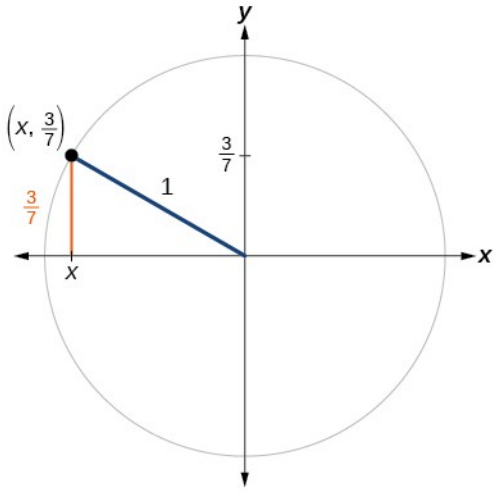
DÆMI 3

Kósínus fundinn út frá sínus eða sínus út frá kósínus

Gefið er að $\sin(t) = \frac{3}{7}$ og hornið t liggur í öðrum fjórðungi. Finnið $\cos(t)$.

Lausn

Ef við drögum lóðrétt strik frá punktinum á einingarhringnum sem samsvarar t , niður að x-ásnum fæst rétthyrndur þríhyrningur. Þannig sést að Pýþagórasarsamsemdin er sérstakt tilvik af reglu Pýþagórasar. Sjá mynd 8.



Mynd 8. Rétthyrndur þríhyrningur við punkt í öðrum fjórðungi einingarhringsins.

Setjum þekkta sínusgildið inn í Pýþagórasarsamsemdina:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$
$$\cos^2(t) + \tfrac{9}{49} = 1$$
$$\cos^2(t) = \tfrac{40}{49}$$
$$\cos(t) = \pm\sqrt{\tfrac{40}{49}} = \pm\tfrac{\sqrt{40}}{7} = \pm\tfrac{2\sqrt{10}}{7}$$

Þar sem hornið er í öðrum fjórðungi vitum við að x-gildið er neikvæð rauntala og því er kósínusinn einnig neikvæður. Því er

$$\cos(t) = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

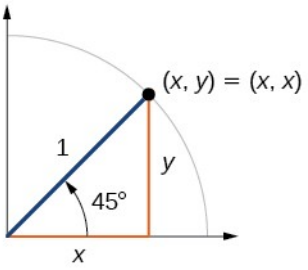
Ef $\cos(t) = \frac{24}{25}$ og t liggur í fjórða fjórðungi, finnið $\sin(t)$.

Gildi sínuss og kósínuss algengra horna fundin

Við höfum þegar kynnst nokkrum eiginleikum algengra horna, til dæmis umbreytingu úr radíönum í gráður. Við getum einnig reiknað sínus og kósínus þessara horna með Pýþagórasarsamsemdinni og þekkingu okkar á þríhyrningum.

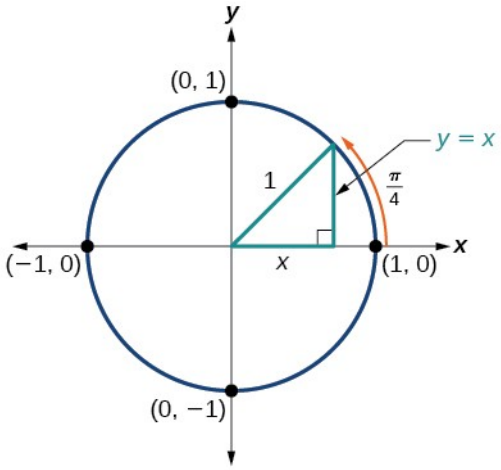
Sínus og kósínus 45° horna fundin

Fyrst skoðum við hornin 45° eða $\frac{\pi}{4}$, eins og sýnt er á mynd 9. Þríhyrningur með hornin $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ er jafnarma og því eru x- og y-hnit samsvarandi punkts á hringnum jöfn. Þar sem x- og y-gildin eru jöfn eru sínus- og kósínusgildin einnig jöfn.



Mynd 9. 45° horn myndar jafnarma rétthyrndan þríhyrning í einingarhringnum.

Við hornið $t = \frac{\pi}{4}$, eða 45°, helmingar geisli einingarhringsins fyrsta áshornið. Geislinn liggur því eftir línunni $y = x$. Geisli einingarhringsins er 1. Rétthyrndi þríhyrningurinn neðan við línuna $y = x$ hefur því skammhliðarnar x og $y\,(y = x)$, og langhliðina 1. Sjá **mynd 10**.



Mynd 10. Geisli við hornið π/4 liggur eftir línunni y = x.

5

Af reglu Pýþagórasar fæst

$$x^2+y^2=1$$

Setjum $y=x$, inn í jöfnuna og fáum:

$$x^2+x^2=1$$

Ef samstofna liðir eru teknir saman fæst

$$2x^2=1$$

Leyst fyrir x, fæst:

$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Í fyrsta fjórðungi er $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Þegar $t=\frac{\pi}{4}$ eða 45 gráður gildir

$$(x,y) = (x,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\ t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\ t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

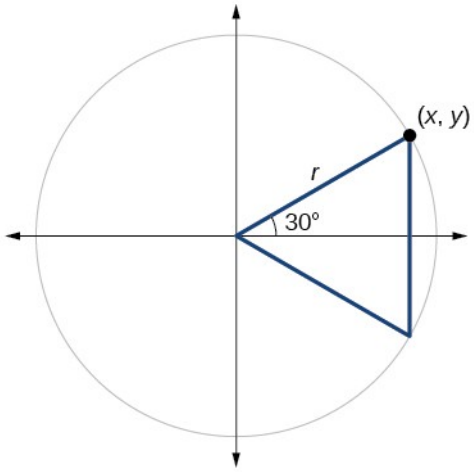
Ef við eyðum síðan rótum úr nefnurunum fæst

$$\cos\ t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\ t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

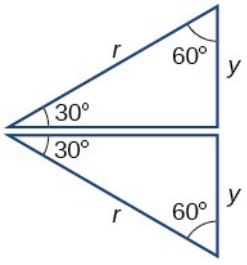
Hnitin (x, y) fyrir punkt á hring með geislann 1 við hornið 45° eru því $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Sínus og kósínus 30° og 60° horna fundin

Næst finnum við kósínus og sínus hornsins 30°, eða ($\frac{\pi}{6}$). Byrjum á að teikna þríhyrning í hringnum með aðra hliðina við hornið 30°, og hina við hornið -30°, eins og á mynd 11. Ef rétthyrndu þríhyrningarnir tveir eru sameinaðir í einn stóran þríhyrning verða öll þrjú horn hans 60°, eins og á mynd 12.



Mynd 11. Tveir rétthyrndir þríhyrningar við hornin 30° og −30°.



Mynd 12. Rétthyrndu þríhyrningarnir mynda saman jafnhliða þríhyrning.

Þar sem öll hornin eru jafn stór eru hliðarnar líka jafn langar. Lóðrétta hliðin hefur lengdina $2y$, og því gildir $r = 2y$, eða $y = \frac{1}{2}r$. Þar sem $\sin t = y$ fæst:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}r$$

Og þar sem $r=1$ á einingarhringnum okkar gildir

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \tfrac{1}{2}(1)\\ &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Með Pýþagórasarsamsemdinni getum við fundið kósínusgildið.

$$\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$$

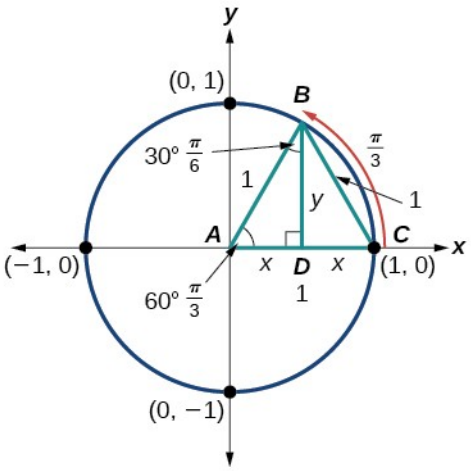
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

5

$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$ Takið kvaðratrót beggja vegna.

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Þar sem x er jákvætt veljum við jákvæðu kvaðratrótina.

Hnitin (x, y) fyrir punktinn á hring með geislann 1 við hornið 30° eru $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Við $t=\frac{\pi}{3}$ (60°) er geisli einingarhringsins, 1, langhlið rétthyrnda þríhyrningsins BAD, með hornin 30°, 60° og 90°, eins og sýnt er á mynd 13. Hornið A er 60°. Við punktinn B, teiknum við hornið ABC með stærðina 60°. Við vitum að hornasumma þríhyrnings er 180°, svo hornið C er líka 60°. Nú höfum við jafnhliða þríhyrning. Þar sem allar hliðar jafnhliða þríhyrningsins ABC eru jafn langar og við vitum að ein hliðin er geisli einingarhringsins hljóta allar hliðarnar að vera 1 að lengd.



Mynd 13. Jafnhliða þríhyrningurinn ABC og hæðin BD í einingarhringnum.

Hornið $A\,B\,D$ er 30° og tvöfalt það horn, $A\,B\,C$, er 60°. Strikið $B\,D$ er miðþverill striksins $A\,C$, og skiptir því $A\,C$ í tvennt. Því er $A\,D$ jafnt ($\frac{1}{2}$) af geislanum, eða $\frac{1}{2}$. Athugið að $A\,D$ er x-hnit punktsins B, þar sem lokaarmur 60° hornsins sker einingarhringinn. Við fáum því þríhyrninginn $B\,A\,D$ með langhliðina 1 og skammhliðina x af lengd $\frac{1}{2}$.

Af reglu Pýþagórasar fæst

$$x^2+y^2=1$$

Setjum $x=\frac{1}{2}$, inn í jöfnuna og fáum:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$$

Leyst fyrir y, fæst:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}+y^2&=1\\ y^2&=1-\tfrac{1}{4}\\ y^2&=\tfrac{3}{4}\\ y&=\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Lokaarmur hornsins $t=\frac{\pi}{3}$ liggur í fyrsta fjórðungi, þar sem y-hnitið er jákvætt. Því veljum við jákvæða gildið $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,.

Við hornið $t=\frac{\pi}{3}$ (60°) eru hnitin $(x\,,y)$ á hring með geislann 1 við hornið $60\,^\circ$ jöfn ($\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,). Við getum því fundið sínus og kósínus hornsins.

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\ t = \frac{1}{2}, \sin\ t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

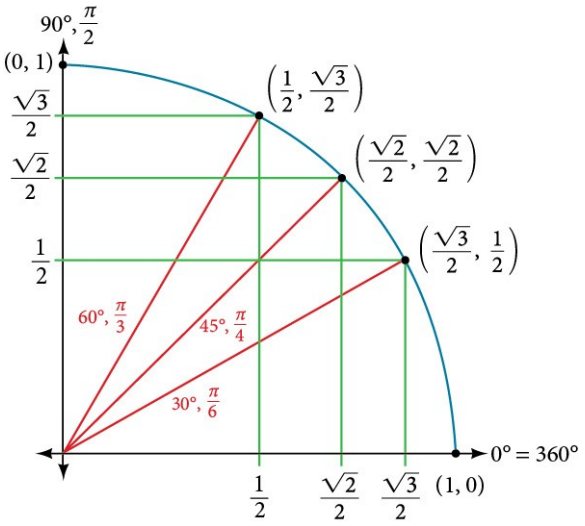
Við höfum nú fundið kósínus- og sínusgildi allra algengustu hornanna í fyrsta fjórðungi einingarhringsins. Tafla 1 tekur gildin saman.

Tafla 1

Horn	0	$\frac{\pi}{6}$, eða 30	$\frac{\pi}{4}$, eða 45°	$\frac{\pi}{3}$, eða 60°	$\frac{\pi}{2}$, eða 90°
Kósínus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sínus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

5

Mynd 14 sýnir algeng horn í fyrsta fjórðungi einingarhringsins.



Mynd 14. Algeng horn í fyrsta fjórðungi og hnit samsvarandi punkta á einingarhringnum.

Reiknivél notuð til að finna sínus og kósínus

Til að finna kósínus og sínus annarra horna en algengra horna notum við tölvu eða reiknivél. Athugið: Á flestum reiknivélum má velja „gráðuham“ eða „radíanaham“, sem segir reiknivélinni í hvaða einingu inntaksgildið er. Þegar við reiknum $\cos(30)$ á reiknivél túlkar hún það sem kósínus 30 gráða ef hún er í gráðuham, en sem kósínus 30 radíana ef hún er í radíanaham.

AÐFERÐ

Gefið er horn í radíönum. Notið grafíska reiknivél til að finna kósínus þess.

1. Ef reiknivélin hefur bæði gráðuham og radíanaham, stillið hana þá á radíanaham.
2. Ýtið á COS-hnappinn.
3. Sláið inn hornamálið í radíönum og ýtið á hnappinn fyrir hægri sviga, „)“.
4. Ýtið á ENTER.

DÆMI 4

Grafísk reiknivél notuð til að finna sínus og kósínus

Reiknið $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ með grafískri reiknivél eða tölvu.

Lausn

Sláið inn eftirfarandi hnapparöð:

COS $(5 \times \pi \div 3)$ **ENTER**

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0{,}5$$

Greining

Reikna má kósínus eða sínus horns í gráðum beint á reiknivél í gráðuham. Ef reiknivél eða forrit notar aðeins radíanaham má til dæmis finna sínus hornsins 20°, með því að hafa umreikningsstuðulinn í radíana með í inntakinu:

SIN $(20 \times \pi \div 180)$ **ENTER**

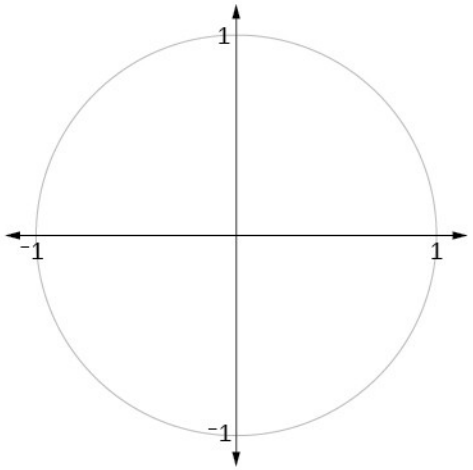
REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Reiknið $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Skilgreiningarmengi og myndmengi sínus- og kósínusfalla ákvörðuð

Nú þurfum við að skoða skilgreiningarmengi og myndmengi sínus- og kósínusfallanna. Hver eru skilgreiningarmengi þeirra? Eru einhver minnstu eða stærstu hornamál sem má setja inn í föllin? Horn minni en 0 eða stærri en 2π má einnig teikna á einingarhringnum og þau gefa raungildi fyrir x, y, og r,. Því eru engin neðri eða efri mörk á hornamálunum sem má setja inn í sínus- og kósínusföllin. Inntakið lýsir snúningi frá jákvæða hluta x-ássins og getur verið hvaða rauntala sem er.

Hver eru myndmengi sínus- og kósínusfallanna? Hver eru minnstu og stærstu mögulegu fallgildi þeirra? Svörin sjást með því að skoða einingarhringinn á mynd 15. x-hnitið er á bilinu $[-1, 1]$. y-hnitið er einnig á bilinu $[-1, 1]$. Myndmengi beggja fallanna er því $[-1, 1]$.



Mynd 15. Hnit punkta á einingarhringnum liggja bæði á bilinu frá −1 til 1.

5

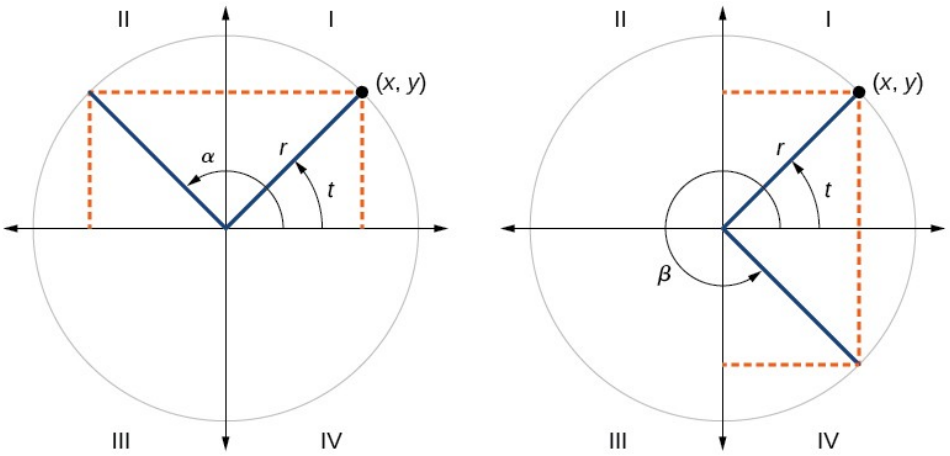
Viðmiðunarhorn fundin

Við höfum fjallað um hvernig finna má sínus og kósínus horna í fyrsta fjórðungi, en hvað ef hornið liggur í öðrum fjórðungi? Fyrir hvert horn í fyrsta fjórðungi er til horn í öðrum fjórðungi með sama sínusgildi. Þar sem sínusgildið er y-hnitið á einingarhringnum hefur hitt hornið sama y-gildi en gagnstætt x-gildi. Kósínusgildi þess er því gagnstæð tala kósínusgildis fyrra hornsins.

Á sama hátt er til horn í fjórða fjórðungi með sama kósínus og upphaflega hornið. Hornið með sama kósínus hefur sama x-gildi en gagnstætt y-gildi. Sínusgildi þess er því gagnstæð tala sínusgildis upphaflega hornsins.

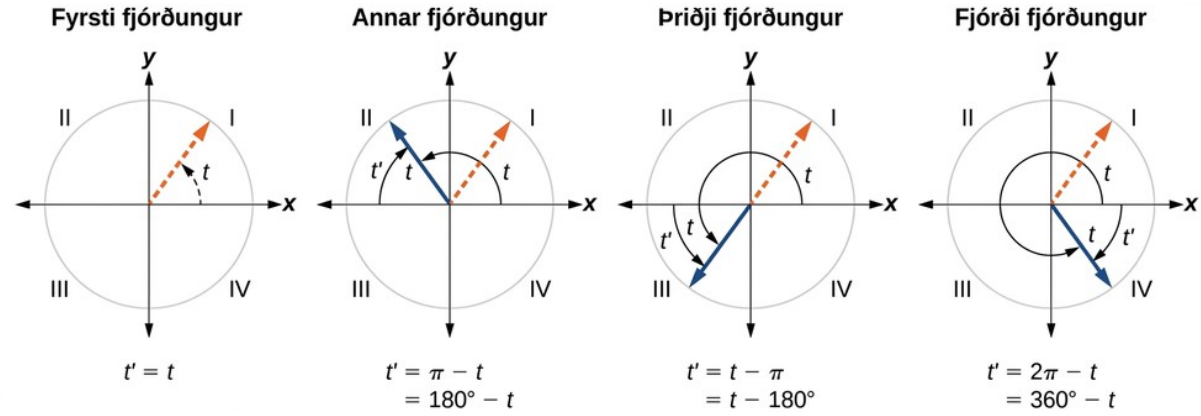
Eins og sést á mynd 16 hefur hornið α sama sínusgildi og hornið t ; kósínusgildin eru hins vegar gagnstæðar tölur. Hornið β hefur sama kósínusgildi og hornið t ; sínusgildin eru hins vegar gagnstæðar tölur.

$$\begin{aligned} \sin(t) &= \sin(\alpha) \quad \text{og} \quad \cos(t) = -\cos(\alpha) \\ \sin(t) &= -\sin(\beta) \quad \text{og} \quad \cos(t) = \cos(\beta) \end{aligned}$$



Mynd 16. Samhverfa tengir sínus- og kósínusgildi horna í ólíkum fjórðungum.

Munið að viðmiðunarhorn horns er stærð minnsta hvassa hornsins t ,′ sem lokaarmur hornsins t myndar við lárétta ásinn. Viðmiðunarhorn er milli 0 og 90°, eða milli 0 og $(\frac{\pi}{2})$ radíana. Þegar það er teiknað í staðalstöðu liggur lokaarmur þess í fyrsta fjórðungi. Því má nota það við útreikninga fyrir horn í öðrum, þriðja og fjórða fjórðungi, eins og á mynd 17.



Mynd 17. Viðmiðunarhorn fyrir horn í hverjum fjórðungi hnitakerfisins.

AÐFERÐ

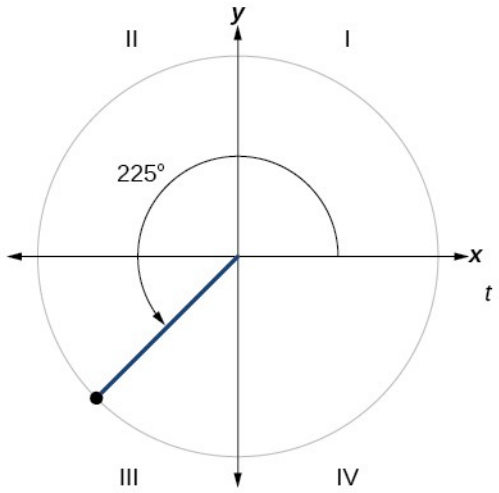
Gefið er horn milli 0 og 2π ,. Finnið viðmiðunarhorn þess.

1. Horn í fyrsta fjórðungi er eigið viðmiðunarhorn.
2. Fyrir horn í öðrum eða þriðja fjórðungi er viðmiðunarhornið $|\pi - t|$ eða $|180^\circ - t|$.
3. Fyrir horn í fjórða fjórðungi er viðmiðunarhornið $2\pi - t$ eða $360^\circ - t$.
4. Ef horn er minna en 0 eða stærra en eða jafnt 2π, skal bæta við eða draga frá 2π þar til fæst horn með sama lokaarm sem er að minnsta kosti 0 og minna en 2π.

DÆMI 5

Viðmiðunarhorn fundið

Finnið viðmiðunarhorn 225° eins og sýnt er á mynd 18.



Mynd 18. Viðmiðunarhorn 225° horns í þriðja fjórðungi.

Lausn

Þar sem 225° er í þriðja fjórðungi er viðmiðunarhornið

$$\left|\left(180^\circ - 225^\circ\right)\right| = \left|-45^\circ\right| = 45^\circ$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Finnið viðmiðunarhorn $\frac{5\pi}{3}$.

Viðmiðunarhorn notuð

Lítum aftur á parísarhjólið sem kynnt var í upphafi hlutans. Gerum ráð fyrir að farþegi taki ljósmynd þegar hann er kyrr tuttugu fetum yfir jörðu. Síðan færist hann þrjá fjórðu hluta úr hring. Hver er ný hæð hans yfir jörðu? Til að svara slíkum spurningum þurfum við að reikna sínus- eða kósínusgildi horna sem eru stærri en 90 gráður eða neikvæðra horna. Viðmiðunarhorn gera okkur kleift að reikna hornaföll fyrir horn utan fyrsta fjórðungs. Þau má einnig nota til að finna hnitin (x, y) fyrir slík horn. Við notum viðmiðunarhorn snúningshornsins ásamt fjórðungnum þar sem lokaarmur hornsins liggur.

Viðmiðunarhorn notuð til að reikna hornaföll

Við getum fundið kósínus og sínus hvaða horns sem er, óháð fjórðungi, ef við þekkjum kósínus eða sínus viðmiðunarhornsins. Algildi kósínuss og sínuss hornsins eru þau sömu og fyrir viðmiðunarhornið. Formerkið ræðst af fjórðungi upphaflega hornsins. Kósínusinn er

jákvæður eða neikvæður eftir formerki x-gildanna í þeim fjórðungi. Sínusinn er jákvæður eða neikvæður eftir formerki y-gildanna þar.

VIÐMIÐUNARHORN NOTUÐ TIL AÐ FINNA KÓSÍNUS OG SÍNUS

Kósínus og sínus horna hafa sömu algildi og kósínus og sínus viðmiðunarhorna þeirra. Formerkið, jákvætt eða neikvætt, má ákvarða út frá fjórðungi hornsins.

AÐFERÐ

Gefið er horn í staðalstöðu. Finnið viðmiðunarhornið og kósínus og sínus upphaflega hornsins.

1. Mælið minnsta hornið milli lokaarms gefna hornsins og lárétta ássins. Það er viðmiðunarhornið.
2. Ákvarðið kósínus- og sínusgildi viðmiðunarhornsins.
3. Gefið kósínus sama formerki og x-gildin hafa í fjórðungi upphaflega hornsins.
4. Gefið sínus sama formerki og y-gildin hafa í fjórðungi upphaflega hornsins.

DÆMI 6

Viðmiðunarhorn notuð til að finna sínus og kósínus

1. ⓐ Notið viðmiðunarhorn til að finna nákvæmt gildi $\cos(150^\circ)$ og $\sin(150^\circ)$.
2. ⓑ Notið viðmiðunarhornið til að finna $\cos\frac{5\pi}{4}$ og $\sin\frac{5\pi}{4}$.

Lausn

1. Það segir okkur að 150° hafi sömu sínus- og kósínusgildi og 30°, að formerkjunum undanskildum. Við vitum að
   Það segir okkur að 150° hafi sömu sínus- og kósínusgildi og 30°, að formerkjunum undanskildum. Við vitum að
   $\cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin(30^\circ)=\frac{1}{2}$.

   Þar sem 150° er í öðrum fjórðungi er x-hnit punktsins á hringnum neikvætt og kósínusgildið því neikvætt. y-hnitið er jákvætt og sínusgildið því jákvætt.

   $\cos(150^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin(150^\circ)=\frac{1}{2}$
2. ⓑ $\frac{5\pi}{4}$ er í þriðja fjórðungi. Viðmiðunarhorn þess er $\frac{5\pi}{4}-\pi=\frac{\pi}{4}$. Kósínus og sínus $\frac{\pi}{4}$ eru báðir $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Í þriðja fjórðungi eru bæði x og y neikvæð og því gildir:

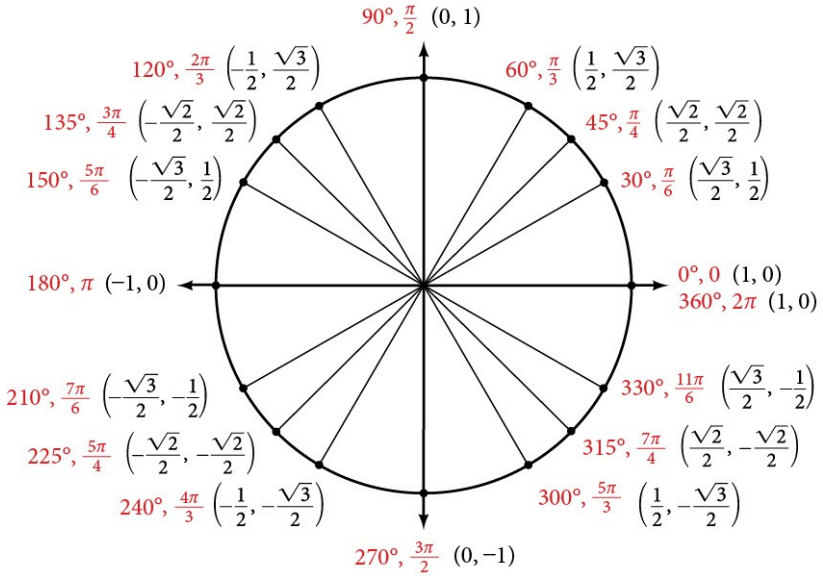
   $\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

1. ⓐ Notið viðmiðunarhorn hornsins 315° til að finna $\cos(315^\circ)$ og $\sin(315^\circ)$.
2. ⓑ Notið viðmiðunarhorn hornsins $-\frac{\pi}{6}$ til að finna $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ og $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Viðmiðunarhorn notuð til að finna hnit

Nú þegar við höfum lært að finna kósínus- og sínusgildi algengra horna í fyrsta fjórðungi getum við notað samhverfu og viðmiðunarhorn til að finna kósínus- og sínusgildi annarra algengra horna á einingarhringnum. Þau eru sýnd á mynd 19. Gefið ykkur tíma til að læra hnitin (x, y) fyrir öll helstu hornin í fyrsta fjórðungi.



Mynd 19 Algeng horn og hnit samsvarandi punkta á einingarhringnum.

Auk þess að læra gildi algengra hornanna getum við notað viðmiðunarhorn til að finna hnitin (x, y) fyrir hvaða punkt sem er á einingarhringnum. Til þess notum við viðmiðunarhornin ásamt samsemdunum

$$x = \cos\ t \quad y = \sin\ t$$

Fyrst finnum við viðmiðunarhornið sem samsvarar gefna horninu. Síðan finnum við sínus- og kósínusgildi viðmiðunarhornsins og gefum þeim formerki sem samsvara y- og x-gildunum í fjórðungnum.

AÐFERÐ

Gefin eru horn punkts á hring með miðju í upphafspunkti og geisli hringsins. Finnið hnit punktsins (x, y).

1. Finnið viðmiðunarhornið með því að mæla minnsta hornið að x-ásnum.
2. Finnið kósínus og sínus viðmiðunarhornsins.

3. Ákvarðið rétt formerki x og y í gefna fjórðungnum.

DÆMI 7

Einingarhringurinn notaður til að finna hnit

Finnið hnit punktsins á einingarhringnum við hornið $\frac{7\pi}{6}$.

Lausn

Við vitum að hornið ($\frac{7\pi}{6}$) er í þriðja fjórðungi.

Fyrst finnum við viðmiðunarhornið með því að mæla hornið að x-ásnum. Til að finna viðmiðunarhorn horns með lokaarm í þriðja fjórðungi finnum við mismun hornsins og π.

$$\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$

Næst finnum við kósínus og sínus viðmiðunarhornsins:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Við verðum að ákvarða rétt formerki x og y í gefna fjórðungnum. Upphaflega hornið er í þriðja fjórðungi, þar sem bæði x og y eru neikvæð, svo bæði kósínus og sínus eru neikvæð.

$$\cos\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

Nú getum við reiknað hnitin (x, y) með samsemdunum $x = \cos\theta$ og $y = \sin\theta$.

Punkturinn á einingarhringnum hefur hnitin $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Finnið hnit punktsins á einingarhringnum við hornið $\frac{5\pi}{3}$.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í sínus- og kósínusföllum.

- Hornaföll með einingarhringnum
- Sínus og kósínus út frá einingarhringnum
- Sínus og kósínus út frá einingarhringnum og margfeldi af π/6
- Sínus og kósínus út frá einingarhringnum og margfeldi af π/4

- Hornaföll með viðmiðunarhornum

5.2 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Lýsið einingarhringnum.
2. Hvað tákna x- og y-hnit punktanna á einingarhringnum?
3. Ræðið muninn á horni með sama lokaarm og viðmiðunarhorni.
4. Útskýrið hvernig kósínus horns í öðrum fjórðungi er frábrugðinn kósínus viðmiðunarhorns þess á einingarhringnum.
5. Útskýrið hvernig sínus horns í öðrum fjórðungi er frábrugðinn sínus viðmiðunarhorns þess á einingarhringnum.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi verkefnum eru gefin formerki sínus- og kósínusfallanna. Notið þau til að finna í hvaða fjórðungi endapunkturinn sem t ákvarðar liggur.

6. $\sin(t)<0$ og $\cos(t)<0$
7. $\sin(t)>0$ og $\cos(t)>0$
8. $\sin(t)>0$ og $\cos(t)<0$
9. $\sin(t)<0$ og $\cos(t)>0$

Finnið nákvæmt gildi hvers hornafalls í eftirfarandi verkefnum.

10.

$$\sin\frac{\pi}{2}$$

11.

$$\sin\frac{\pi}{3}$$

12.

$$\cos\frac{\pi}{2}$$

13.

$$\cos\frac{\pi}{3}$$

14.

$$\sin\frac{\pi}{4}$$

15.

$$\cos\frac{\pi}{4}$$

16.

$$\sin\frac{\pi}{6}$$

17.

$$\sin\pi$$

18.

$$\sin\frac{3\pi}{2}$$

19.

$$\cos\pi$$

20.

$$\cos 0$$

21.

$$\cos\frac{\pi}{6}$$

22.

$$\sin 0$$

Töluleg verkefni

Tilgreinið viðmiðunarhorn gefna hornsins í eftirfarandi verkefnum.

23.

$$240^\circ$$

24.

$$-170^\circ$$

25.

$$100^\circ$$

26.

$$-315^\circ$$

27.

$$135^\circ$$

28.

$$\frac{5\pi}{4}$$

29.

$$\frac{2\pi}{3}$$

30.

$$\frac{5\pi}{6}$$

31.

$$\frac{-11\pi}{3}$$

32.

$$\frac{-7\pi}{4}$$

33.

$$\frac{-\pi}{8}$$

Finnið viðmiðunarhornið, fjórðung lokaarmsins og sínus og kósínus hvers horns í eftirfarandi verkefnum. Ef hornið er ekki eitt algengra hornanna á einingarhringnum skuluð þið nota reiknivél og námunda að þremur aukastöfum.

34.

$$225^\circ$$

35.

$$300^\circ$$

36.

$$320^\circ$$

37.

135°

38.

210°

39.

120°

40.

250°

41.

150°

42.

$\frac{5\pi}{4}$

43.

$\frac{7\pi}{6}$

44.

$\frac{5\pi}{3}$

45.

$\frac{3\pi}{4}$

46.

$\frac{4\pi}{3}$

47.

$\frac{2\pi}{3}$

48.

$\frac{5\pi}{6}$

49.

$$\frac{7\pi}{4}$$

Finnið umbeðið gildi í eftirfarandi verkefnum.

50. Ef $\cos(t)=\frac{1}{7}$ og t er í 4. fjórðungi, finnið þá $\sin(t)$.

51. Ef $\cos(t)=\frac{2}{9}$ og t er í 1. fjórðungi, finnið þá $\sin(t)$.

52. Ef $\sin(t)=\frac{3}{8}$ og t er í 2. fjórðungi, finnið þá $\cos(t)$.

53. Ef $\sin(t)=-\frac{1}{4}$ og t er í 3. fjórðungi, finnið þá $\cos(t)$.

5

54. Finnið hnit punktsins á hring með miðju í upphafspunkti og geislann 15 sem samsvarar horninu 220°.

55. Finnið hnit punktsins á hring með miðju í upphafspunkti og geislann 20 sem samsvarar horninu 120°.

56. Finnið hnit punktsins á hring með miðju í upphafspunkti og geislann 8 sem samsvarar horninu $\frac{7\pi}{4}$.

57. Finnið hnit punktsins á hring með miðju í upphafspunkti og geislann 16 sem samsvarar horninu $\frac{5\pi}{9}$.

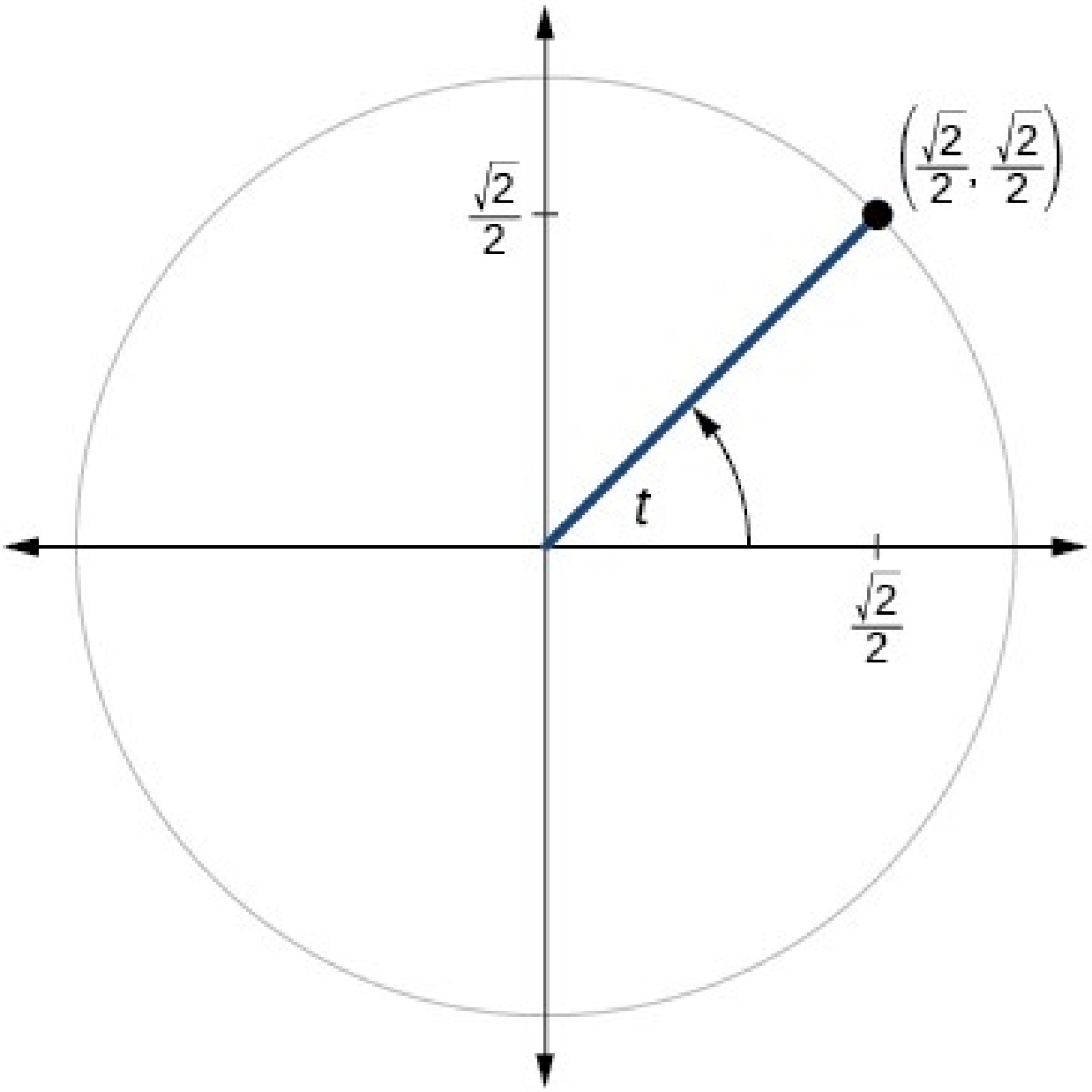
58. Tilgreinið skilgreiningarmengi sínus- og kósínusfallanna.

59. Tilgreinið myndmengi sínus- og kósínusfallanna.

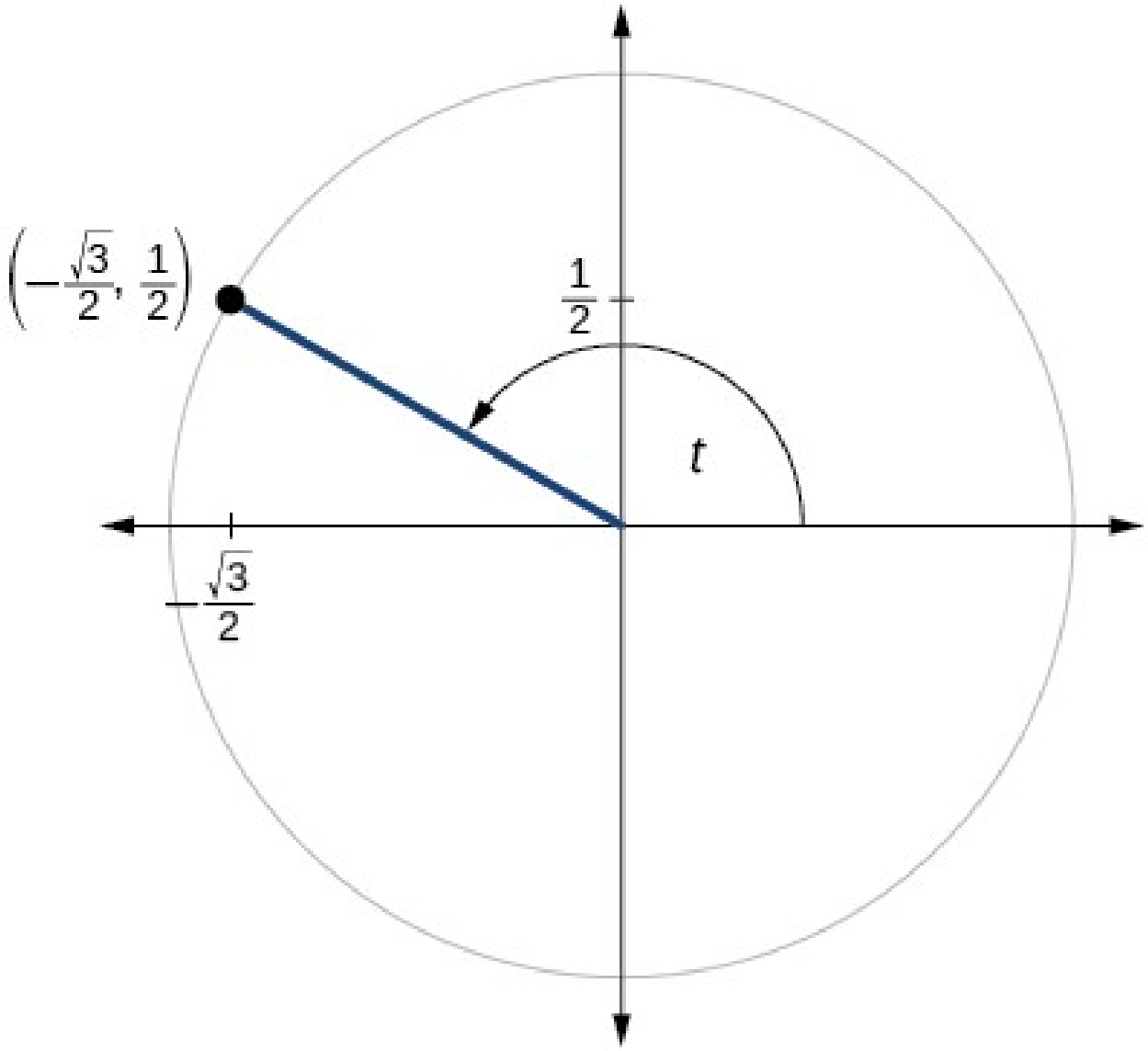
Myndræn verkefni

Notið gefna punktinn á einingarhringnum í eftirfarandi verkefnum til að finna sínus og kósínus t.

60.

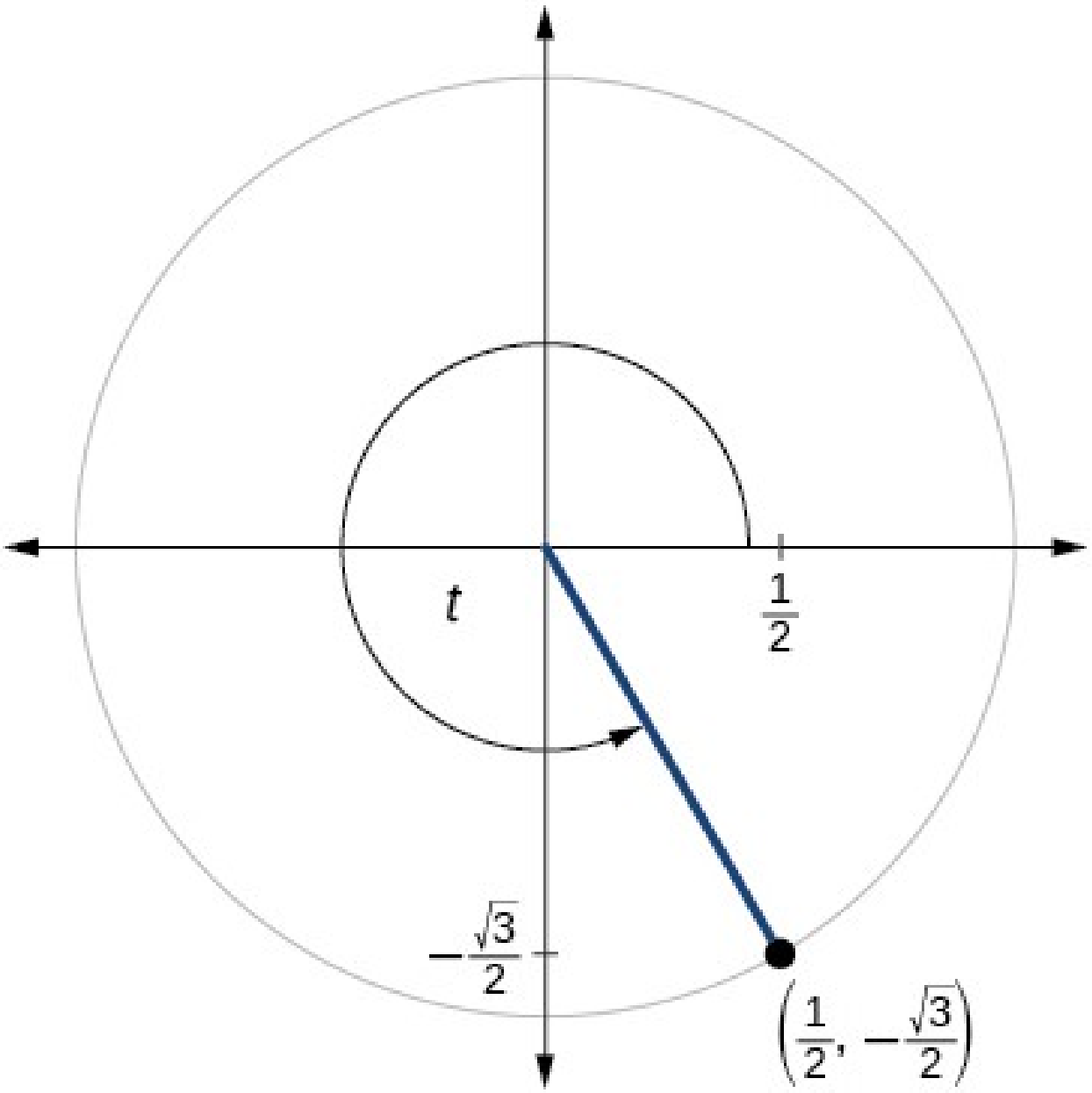

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
t
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

61.

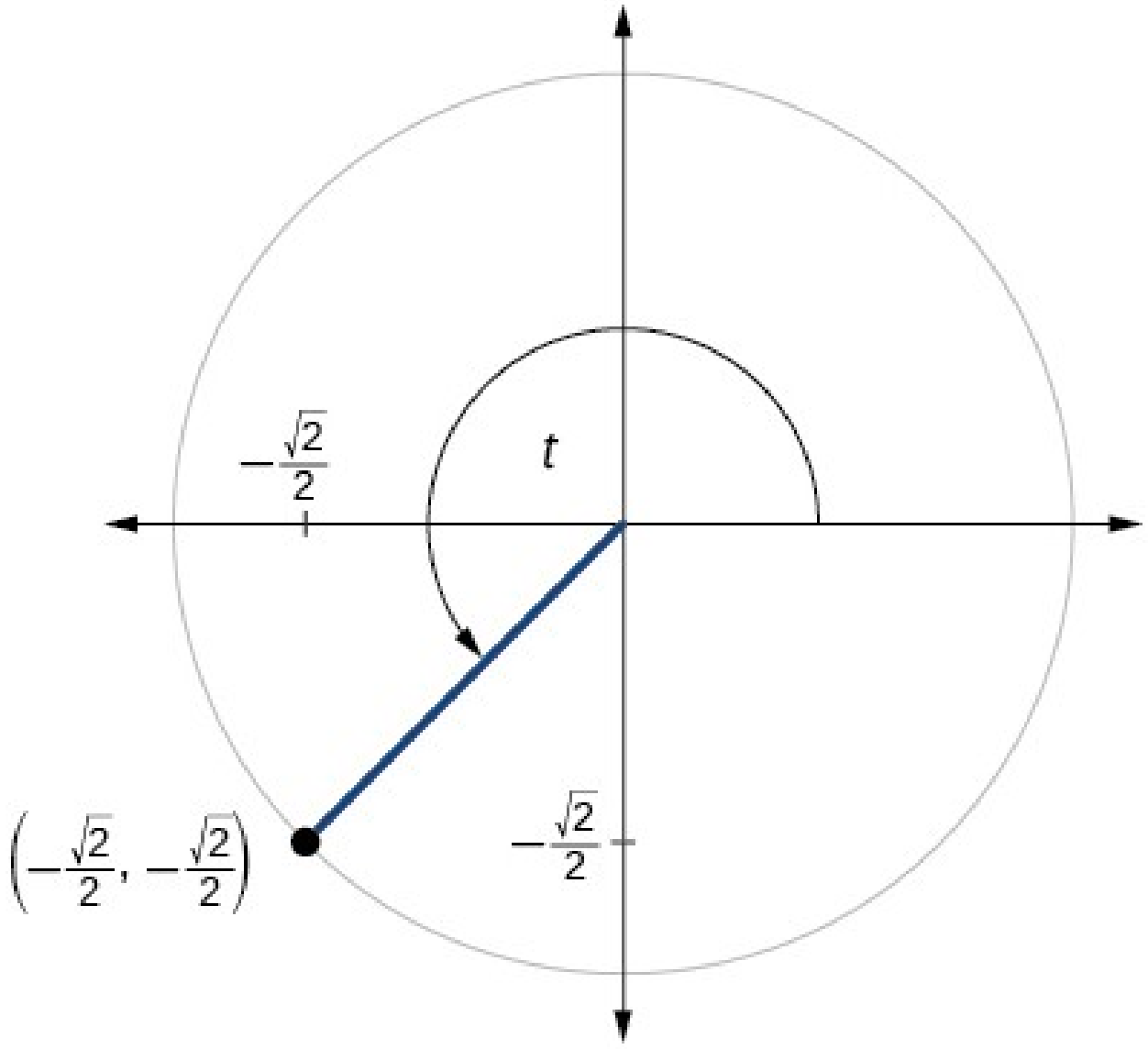


5

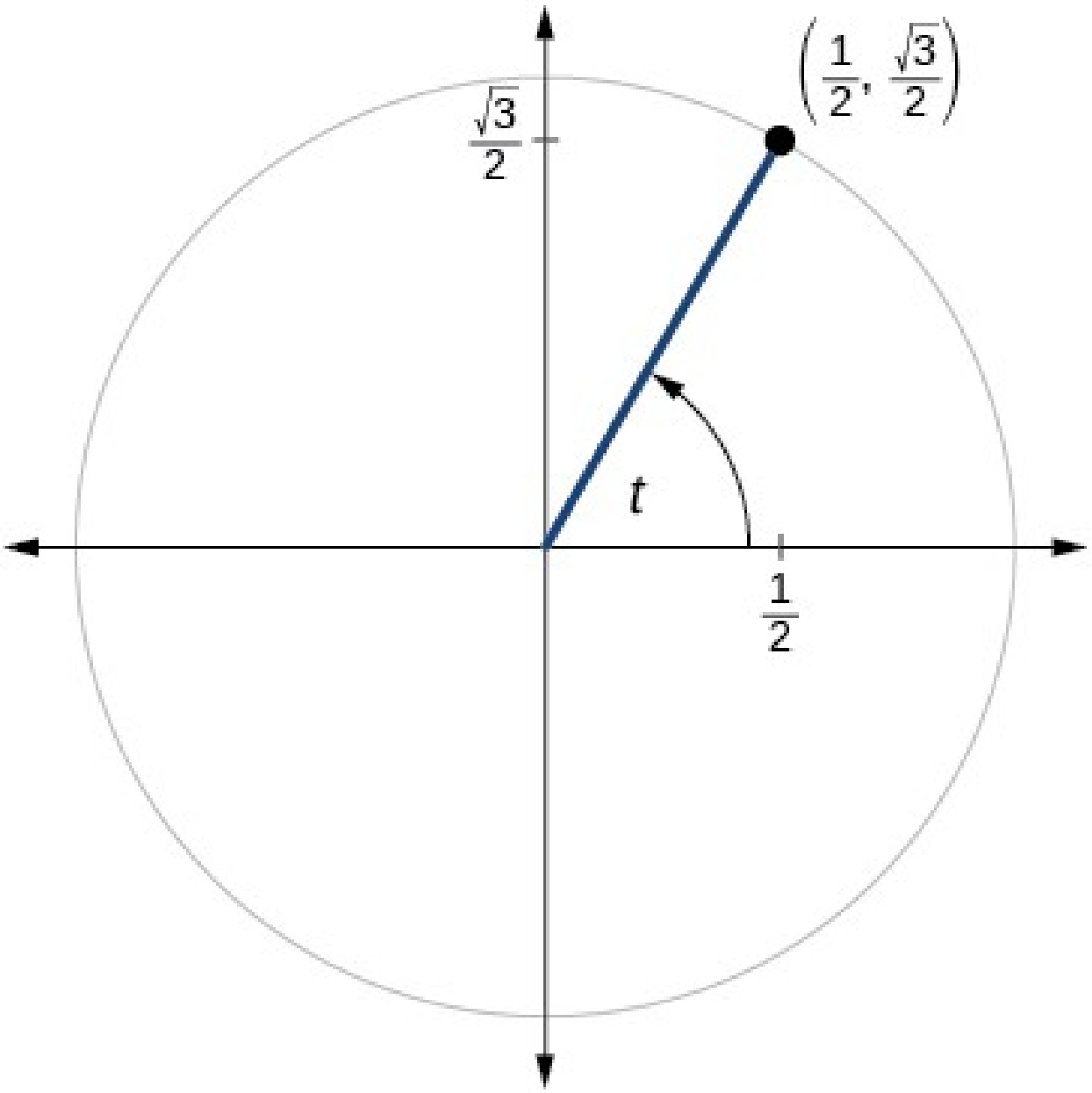
62.



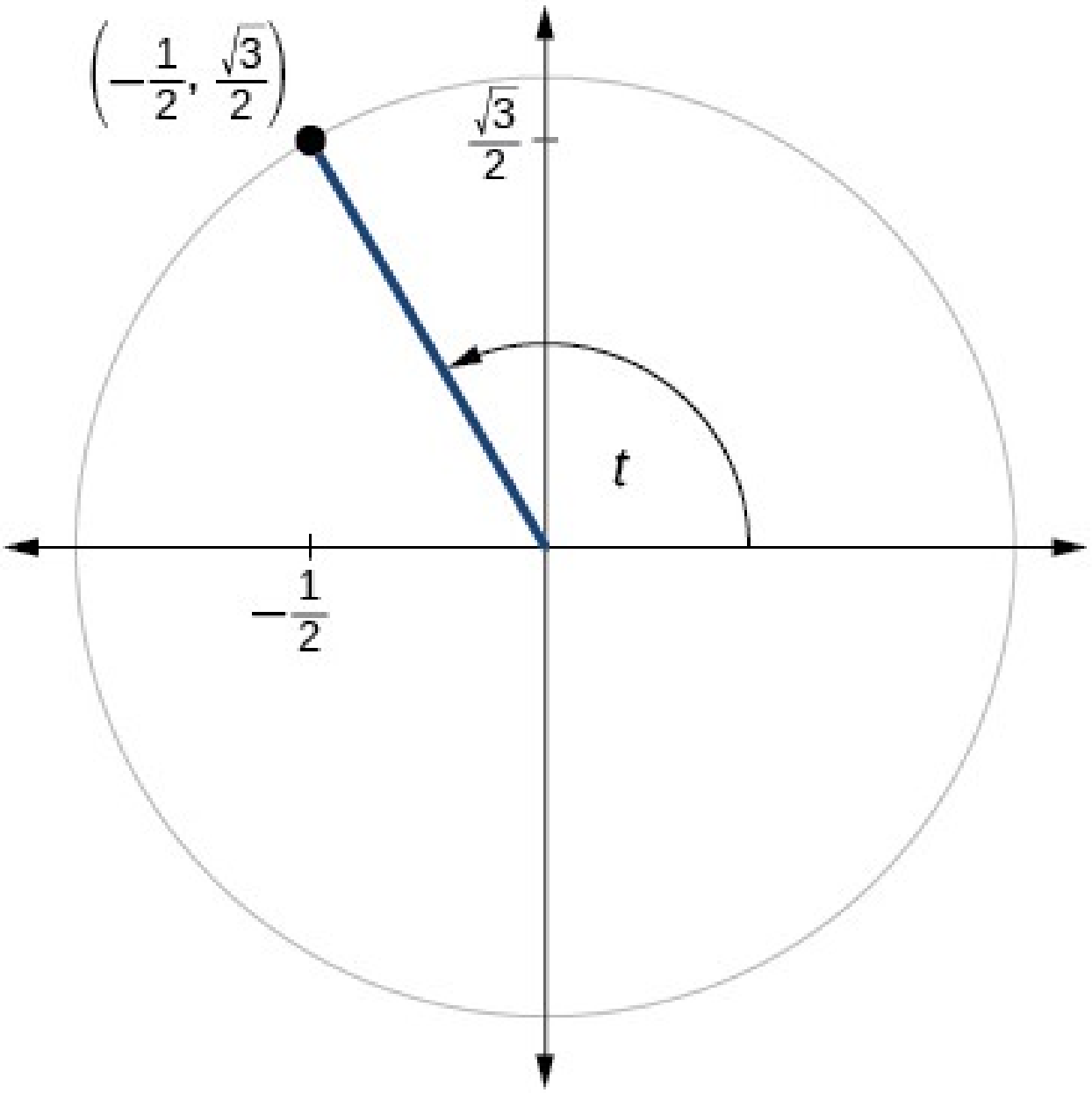
63.


$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
t
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

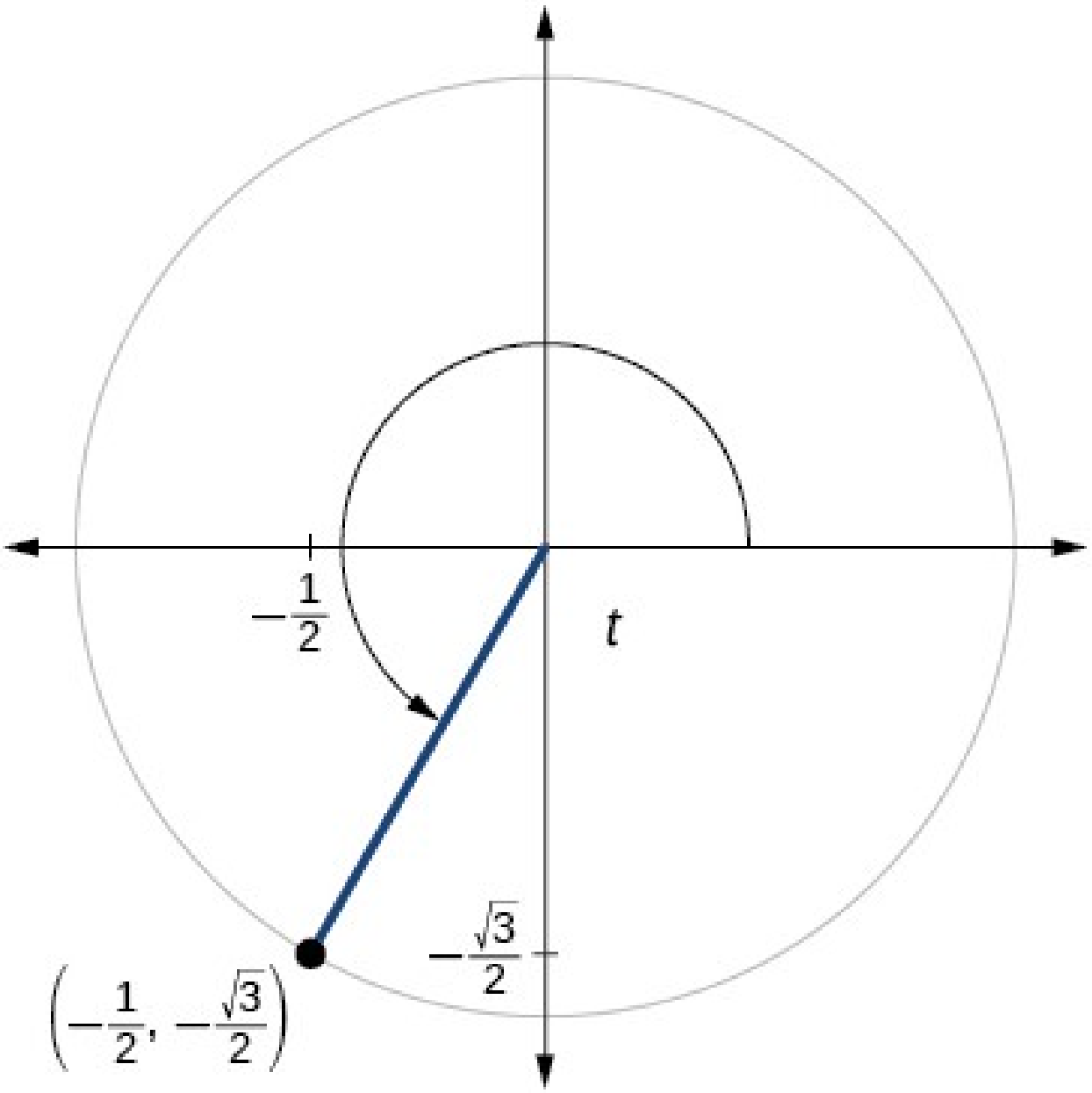
64.



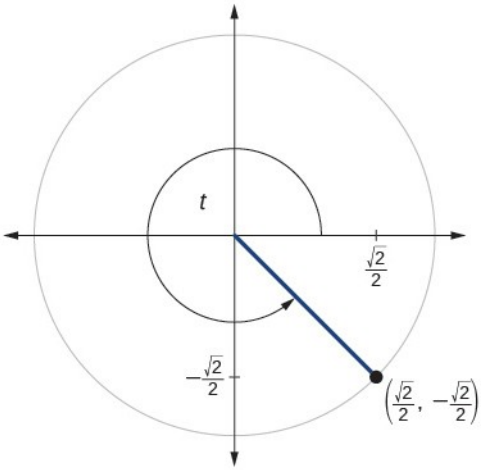
65.



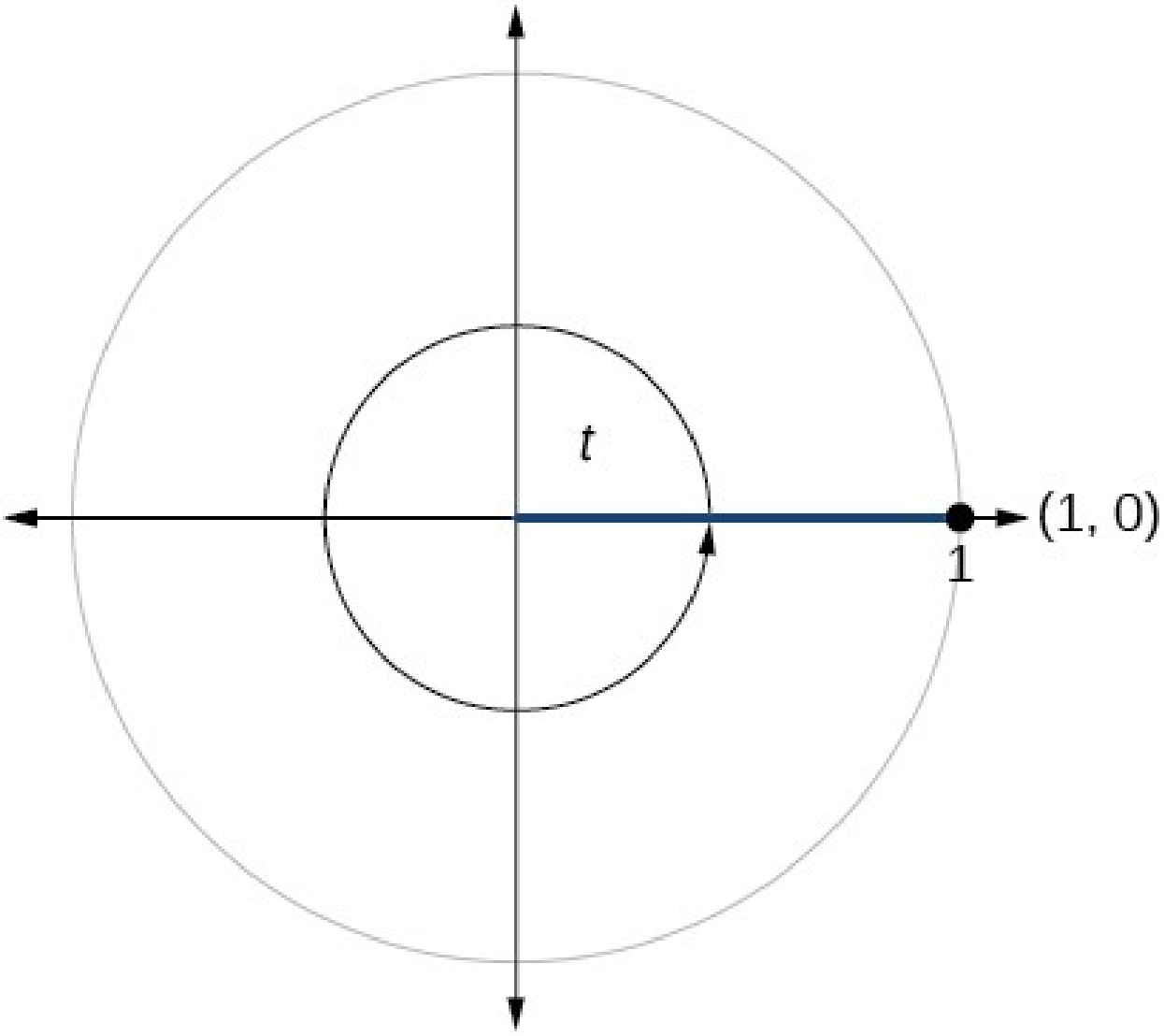
66.



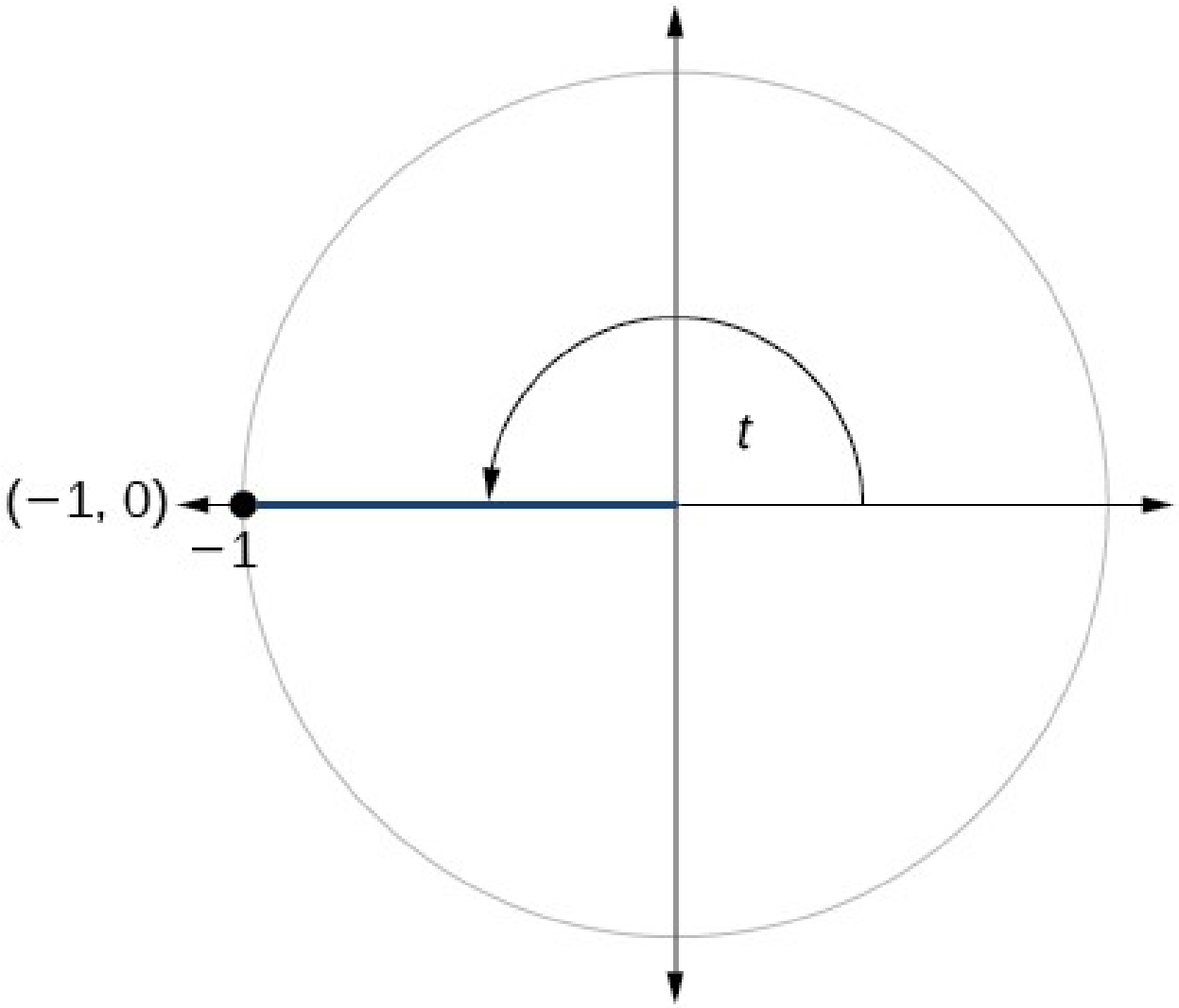
67.


t
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

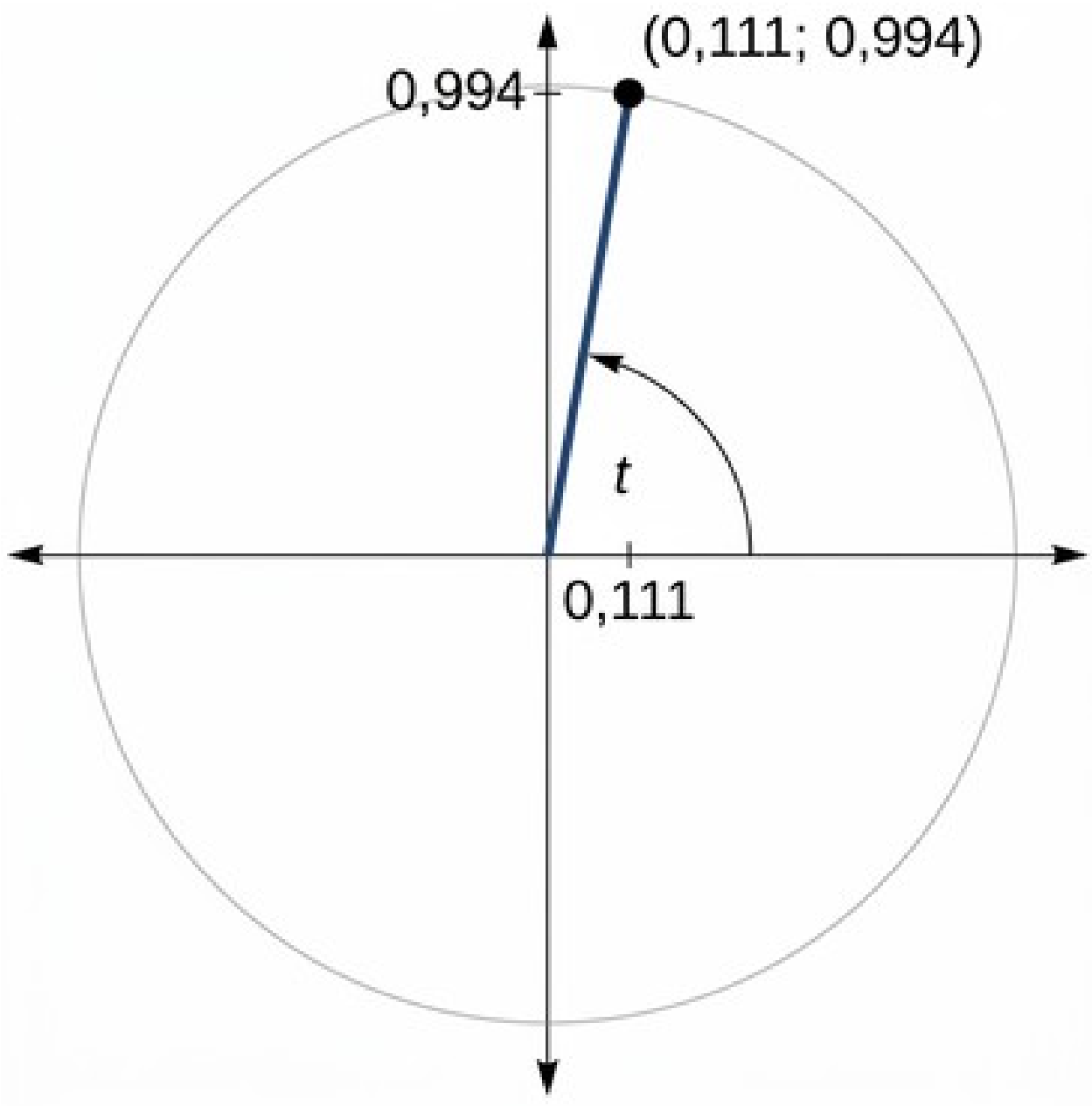
68.


t
(1, 0)
1

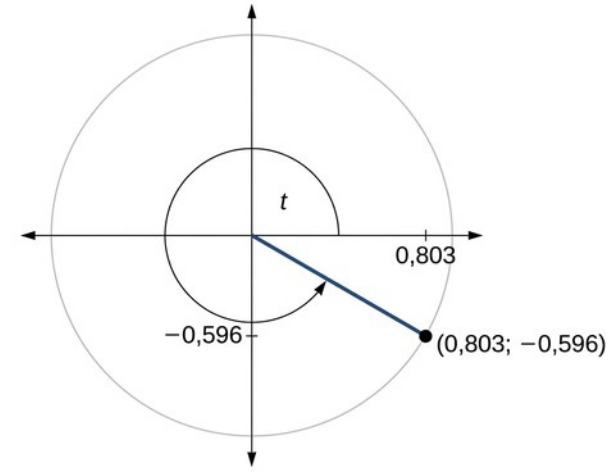
69.



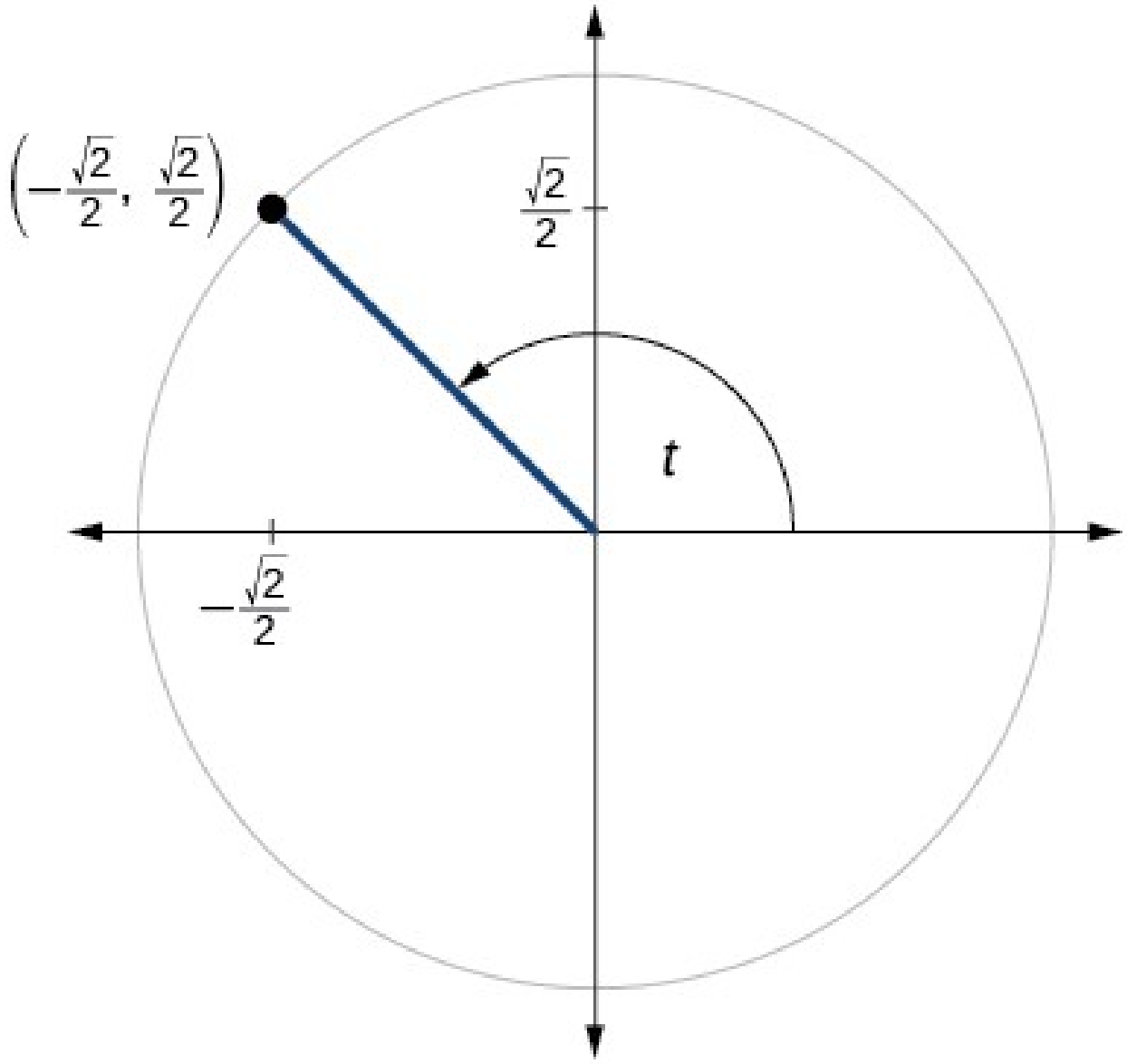
70.



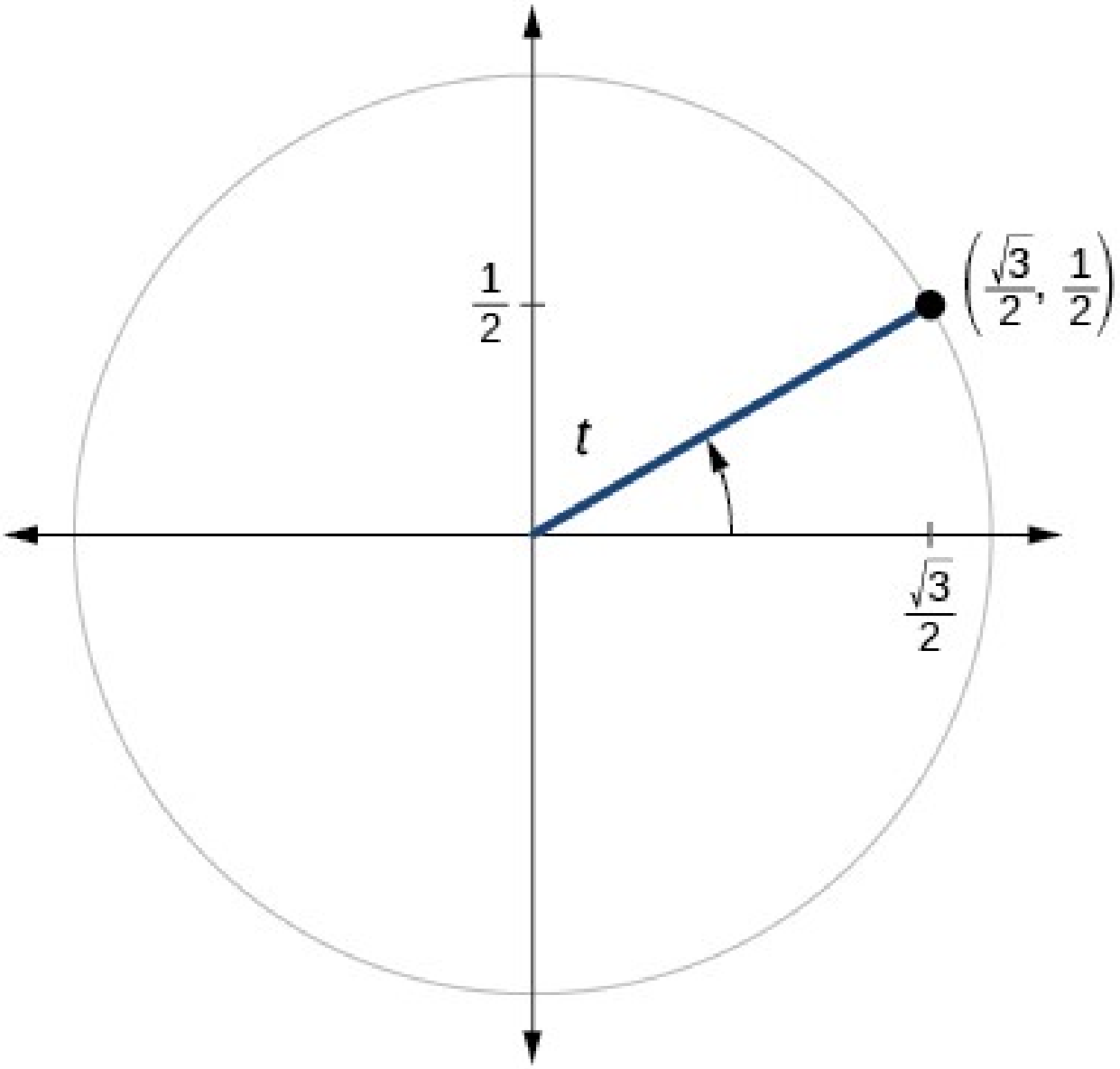
71.



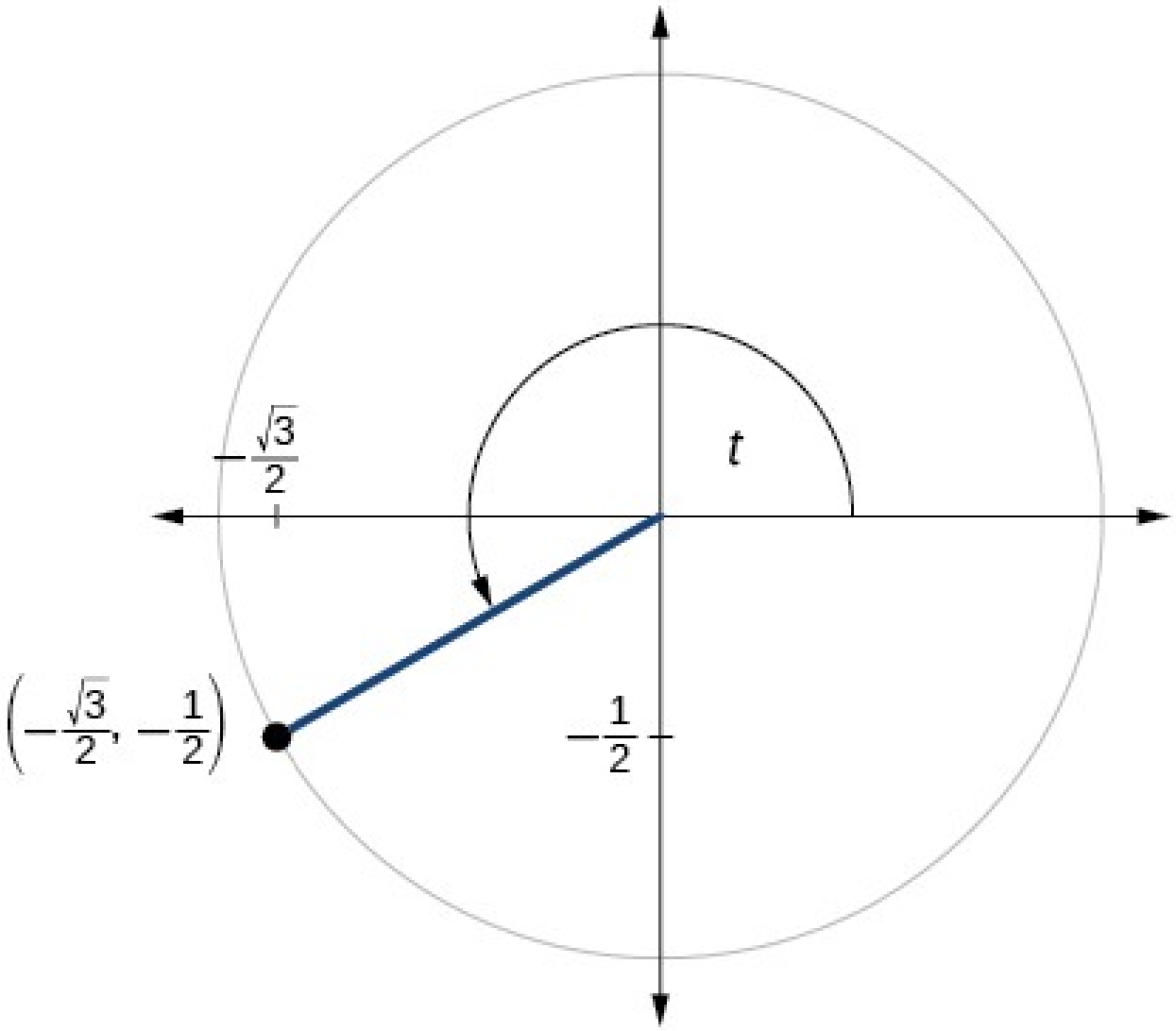
72.


$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
t
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

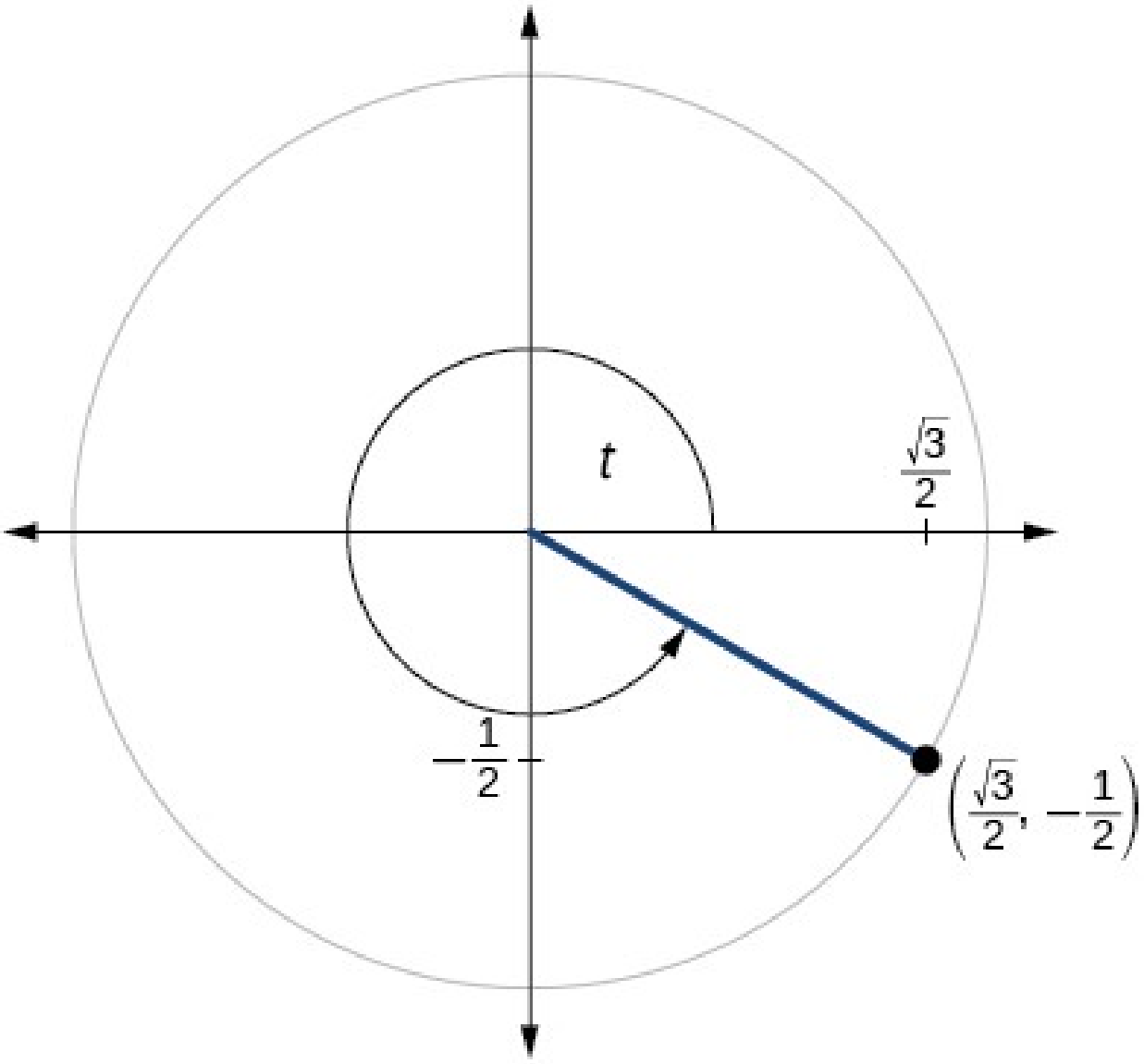
73.



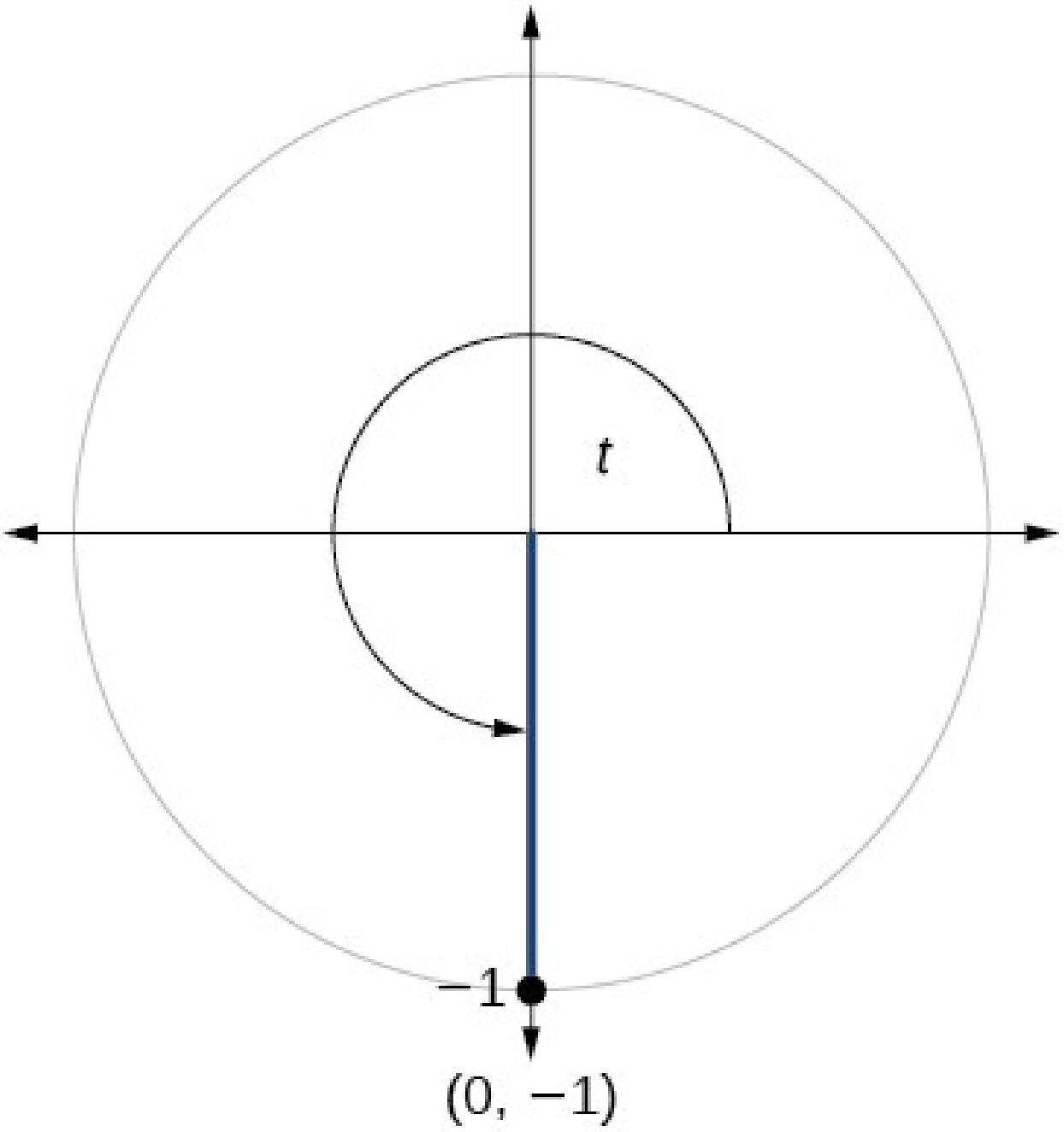
74.



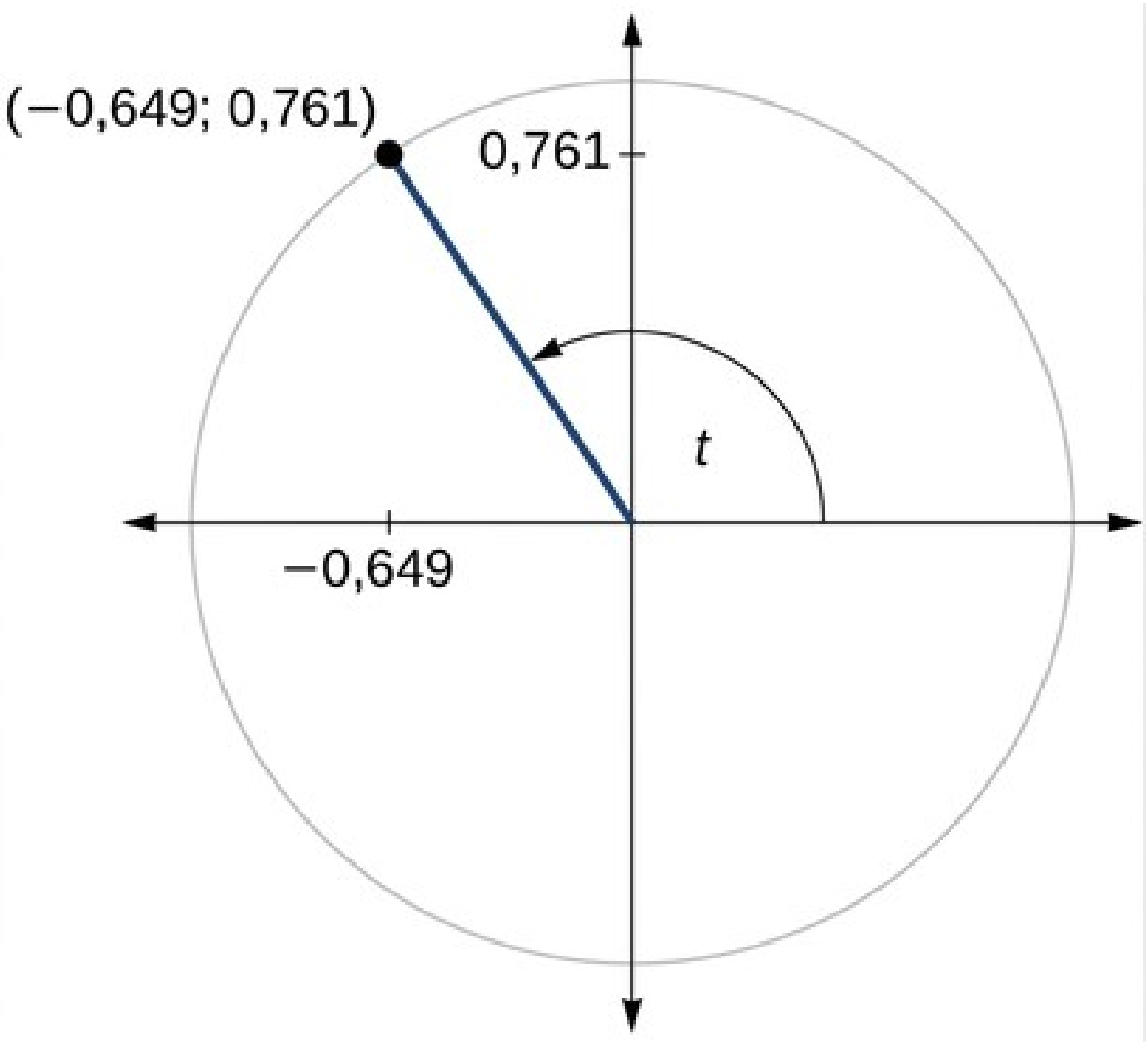
75.



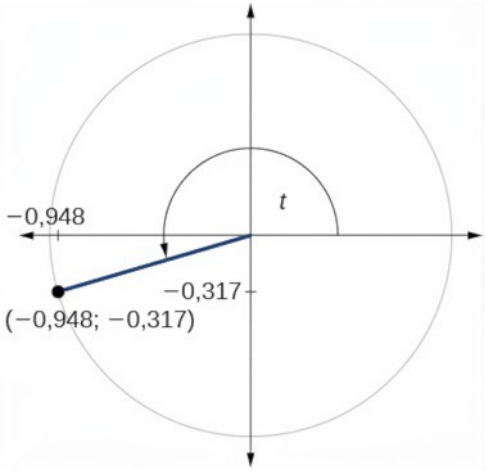
76.



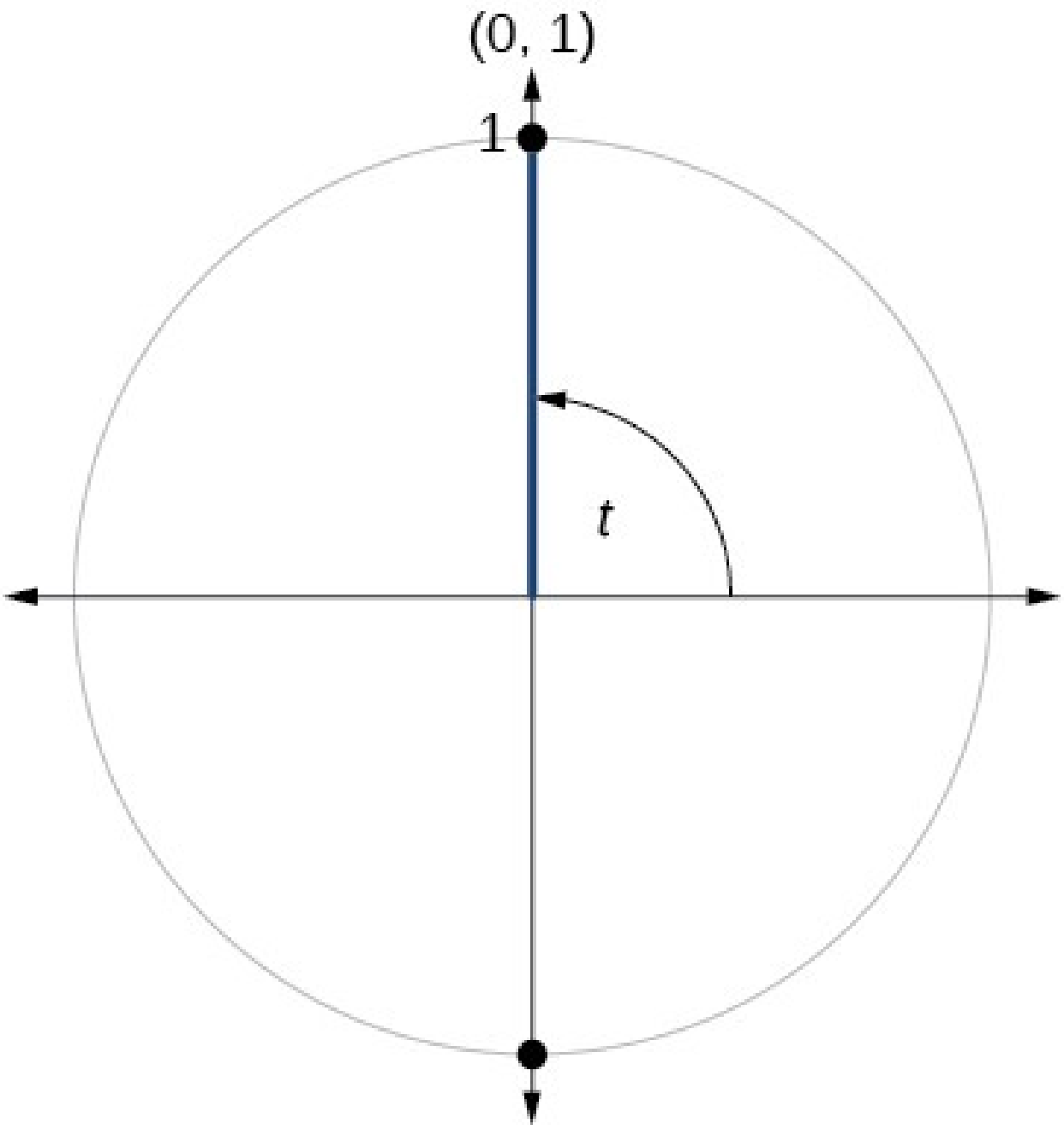
77.



78.



79.



Tækni

Notið grafíska reiknivél til að reikna gildin í eftirfarandi verkefnum.

80.

$$\sin\frac{5\pi}{9}$$

81.

$$\cos\frac{5\pi}{9}$$

82.

$$\sin\frac{\pi}{10}$$

83.

$$\cos\frac{\pi}{10}$$

84.

$$\sin\frac{3\pi}{4}$$

85.

$$\cos\frac{3\pi}{4}$$

86.

$$\sin 98^\circ$$

87.

$$\cos 98^\circ$$

88.

$$\cos 310^\circ$$

89.

$$\sin 310^\circ$$

Viðbótarverkefni

Reiknið í eftirfarandi verkefnum.

90.

$$\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$$

91.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

92.

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

93.

$$\sin\left(\frac{-9\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

94.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

95.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$$

96.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

97.

$$\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

98.

$$\sin\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

99.

$$\sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Hagnýt verkefni

Notið eftirfarandi aðstæður í verkefnunum: Barn stígur upp í hringekju sem fer einn heilan hring á einni mínútu. Við lýsum hringekjunni með einingarhring. Barnið stígur upp í hana í punktinum $(0,1)$, það er nyrst á hringnum. Gerið ráð fyrir að hringekjan snúist rangsælis.

100. Hver eru hnit barnsins eftir 45 sekúndur?

101. Hver eru hnit barnsins eftir 90 sekúndur?

102. Hver eru hnit barnsins eftir 125 sekúndur?

103. Hvenær hefur barnið hnitin $(0{,}707\,;-0{,}707)$ ef ferðin stendur í 6 mínútur? (Svörin eru fleiri en eitt.)

104. Hvenær hefur barnið hnitin $(-0{,}866\,;-0{,}5)$ ef ferðin stendur í 6 mínútur?

5.3 Önnur hornaföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

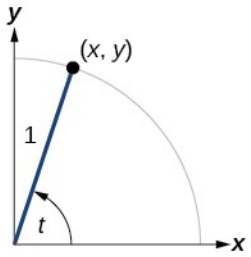
- Finna nákvæm gildi hornafallanna sekans, kósekans, tangens og kótangens fyrir hornin $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, og $\frac{\pi}{6}$.
- Nota viðmiðunarhorn til að reikna gildi hornafallanna sekans, kósekans, tangens og kótangens.
- Nota eiginleika jafnstæðra og oddstæðra hornafalla.
- Þekkja og nota grundvallarsamsemdir.
- Reikna gildi hornafalla með reiknivél.

Hjólastólarampur sem uppfyllir hallaviðmið bandarísku laganna um réttindi fatlaðs fólks myndar horn við jörðu sem hefur tangensgildið ($\frac{1}{12}$) eða minna, óháð lengd rampsins.

Tangens táknar hlutfall. Fyrir hverja 1 tommu sem rampurinn hækkar verður hann því að ná að minnsta kosti 12 tommur lárétt. Með hornaföllum getum við tilgreint lögun og hlutföll hluta án tillits til nákvæmra stærða þeirra. Við höfum þegar skilgreint sínus- og kósínusfall horns. Þótt sínus og kósínus séu mest notuðu hornaföllin eru fjögur önnur hornaföll til. Saman mynda þau hornaföllin sex. Í þessum hluta könnum við föllin sem eftir eru.

Nákvæm gildi hornafallanna sekans, kósekans, tangens og kótangens fundin

Til að skilgreina föllin sem eftir eru teiknum við aftur einingarhring með punktinum $(x\,,y)$ sem samsvarar horninu t, eins og á mynd 1. Eins og fyrir sínus og kósínus getum við notað hnitin $(x\,,y)$ til að finna gildi hinna fallanna.



Mynd 1. Horn í staðalstöðu og samsvarandi punktur á einingarhringnum.

Fyrsta fallið sem við skilgreinum er tangens. Tangens horns er hlutfall y-hnits og x-hnits samsvarandi punkts á einingarhringnum. Á mynd 1 er tangens hornsins t jafn $\frac{y}{x}, x \neq 0$. Þar sem y-hnitið er sínus hornsins t, og x-hnitið kósínus hornsins t, má einnig skilgreina tangens hornsins t með $\frac{\sin t}{\cos t}, \cos t \neq 0$. Tangensfallið er skammstafað $\tan$. Hin föllin þrjú má öll skrifa sem margföldunarandhverfur falla sem við höfum þegar skilgreint, þar sem gildi þeirra eru skilgreind og ekki jöfn núlli.

- Sekans horns er margföldunarandhverfa kósínuss þess. Á mynd 1 er sekans hornsins t jafn $\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Sekansfallið er skammstafað $\sec$.
- Kótangens horns er hlutfall kósínuss þess og sínuss. Hann er einnig margföldunarandhverfa tangens hornsins þegar tangensinn er skilgreindur og frábrugðinn núlli. Á mynd 1 er kótangens hornsins t jafn $\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{x}{y}, y \neq 0$. Kótangensfallið er skammstafað $\cot$.
- Kósekans horns er margföldunarandhverfa sínuss þess. Á mynd 1 er kósekans hornsins t jafn $\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{y}, y \neq 0$. Kósekansfallið er skammstafað $\csc$.

5

TANGENS-, SEKANS-, KÓSEKANS- OG KÓTANGENSFÖLL

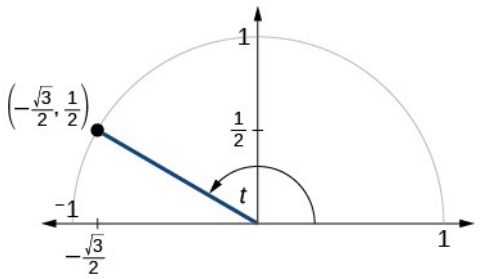
Ef t er rauntala og (x, y) er punkturinn þar sem lokaarmur horns með hornamálið t í radíönum sker einingarhringinn gildir:

$$\tan\ t = \frac{y}{x}, x \neq 0$$
$$\sec\ t = \frac{1}{x}, x \neq 0$$
$$\csc\ t = \frac{1}{y}, y \neq 0$$
$$\cot\ t = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

DÆMI 1

Gildi hornafalla fundin út frá punkti á einingarhringnum

Punkturinn $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ er á einingarhringnum, eins og á mynd 2. Finnið $\sin t, \cos t, \tan t, sec\, t, csc\, t$, og $\cot t$.



Mynd 2. Punktur í öðrum fjórðungi á einingarhringnum.

Lausn

Þar sem við þekkjum hnitin (x, y) á einingarhringnum sem hornið t, ákvarðar getum við notað þau til að finna gildi hornafallanna sex:

$$\sin\ t = y = \frac{1}{2}$$

$$\cos\ t = x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\ t = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

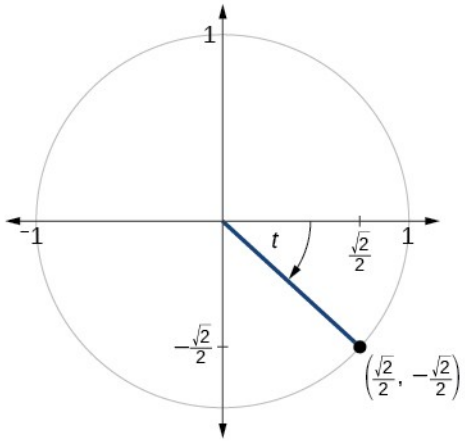
$$sec\ t = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$csc\ t = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot\ t = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{1}\right) = -\sqrt{3}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Punkturinn $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ er á einingarhringnum, eins og sýnt er á mynd 3. Finnið $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$, $sec\, t$, $csc\, t$, og $\cot t$.



Mynd 3. Punktur í fjórða fjórðungi á einingarhringnum.

5

DÆMI 2

Gildi hornafalla horns fundin

Finnið $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$, $sec\, t$, $csc\, t$, og $\cot t$ þegar $t = \frac{\pi}{6}$.

Lausn

Við höfum áður notað eiginleika jafnhliða þríhyrninga til að sýna að $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ og $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Við getum notað þessi gildi og skilgreiningar tangens, sekans, kósekans og kótangens með sínus og kósínus til að finna hin fallgildin.

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$csc\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$, $\sec t$, $\csc t$, og $\cot t$ þegar $t = \frac{\pi}{3}$.

Við þekkjum sínus- og kósínusgildi algengra horna í fyrsta fjórðungi. Því getum við líka fundið hin fallgildin fyrir þessi horn. Við látum x vera jafnt kósínus og y jafnt sínus og notum síðan skilgreiningar tangens, sekans, kósekans og kótangens. Niðurstöðurnar eru sýndar í töflu 1.

Tafla 1

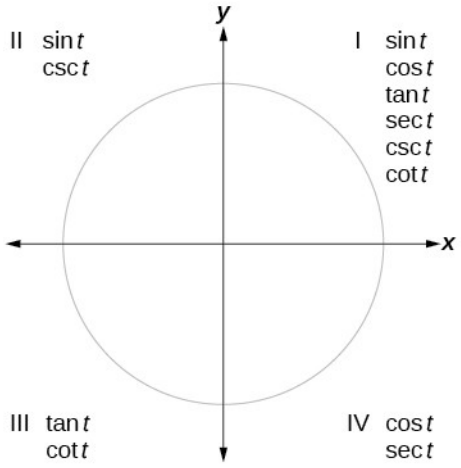
Horn	0	$\frac{\pi}{6}$, eða 30°	$\frac{\pi}{4}$, eða 45°	$\frac{\pi}{3}$, eða 60°	$\frac{\pi}{2}$, eða 90°
Kósínus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sínus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Tangens	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Óskilgreint
Sekans	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	Óskilgreint
Kósekans	Óskilgreint	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
Kótangens	Óskilgreint	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Viðmiðunarhorn notuð til að reikna tangens, sekans, kósekans og kótangens

Við getum reiknað gildi hornafalla fyrir horn utan fyrsta fjórðungs með viðmiðunarhornum, rétt eins og við höfum þegar gert fyrir sínus- og kósínusföllin. Aðferðin er sú sama: Finnið viðmiðunarhornið sem lokaarmur gefna hornsins myndar við lárétta ásinn. Hornafallsgildi upphaflega hornsins hafa sömu algildi og gildi viðmiðunarhornsins, en formerkið, jákvætt eða neikvætt, ræðst af x- og y-gildunum í upphaflega fjórðungnum. Mynd 4 sýnir hvaða föll eru jákvæð í hverjum fjórðungi.

Til að muna hvaða hornafallsgildi eru jákvæð í hverjum fjórðungi má nota röðina „allt – sínus – tangens – kósínus“. Orðin fjögur samsvara fjórðungunum í röð rangsælis frá fyrsta

fjórðungi. Í fyrsta fjórðungi eru gildi allra hornafallanna sex jákvæð. Í öðrum fjórðungi eru aðeins sínus- og kósekansgildi jákvæð. Í þriðja fjórðungi eru aðeins tangens- og kótangensgildi jákvæð. Í fjórða fjórðungi eru aðeins kósínus- og sekansgildi jákvæð.



Mynd 4. Jákvæð hornafallsgildi í hverjum fjórðungi.

AÐFERÐ

Gefið er horn sem er ekki í fyrsta fjórðungi. Notið viðmiðunarhorn til að finna gildi hornafallanna sex.

1. Mælið minnsta hornið sem lokaarmur gefna hornsins myndar við lárétta ásinn. Það er viðmiðunarhornið.
2. Reiknið fallgildið við viðmiðunarhornið.
3. Athugið í hvaða fjórðungi lokaarmur upphaflega hornsins liggur. Ákvarðið út frá fjórðungnum hvort fallgildið er jákvætt eða neikvætt.

DÆMI 3

Viðmiðunarhorn notuð til að finna gildi hornafalla

Notið viðmiðunarhorn til að finna gildi hornafallanna sex fyrir $-\frac{5\pi}{6}$.

Lausn

Hornið milli lokaarms þessa horns og x-ássins er ($\frac{\pi}{6}$,) og það er því viðmiðunarhornið.

Hornið $-\frac{5\pi}{6}$ liggur í þriðja fjórðungi, þar sem bæði x og y eru neikvæð. Gildi kósínuss, sínuss, sekans og kósekans eru því neikvæð en gildi tangens og kótangens jákvæð.

$$\cos\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\sin\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=-\tfrac{1}{2},\tan\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=\tfrac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sec\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=-\tfrac{2\sqrt{3}}{3},\csc\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=-2,\cot\left(-\tfrac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

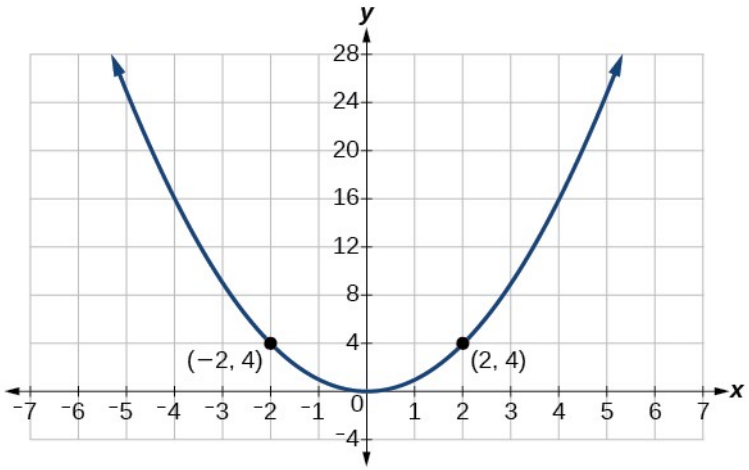
REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Notið viðmiðunarhorn til að finna gildi hornafallanna sex fyrir $-\frac{7\pi}{4}$.

Jafnstæð og oddstæð hornaföll notuð

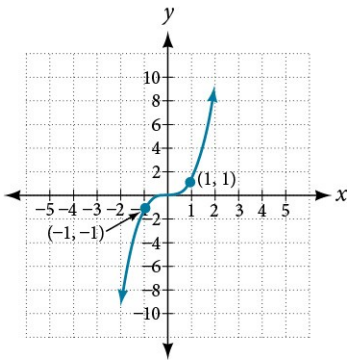
Til að geta notað hornaföllin sex óhindrað fyrir bæði jákvæð og neikvæð horn þurfum við að kanna hvernig hvert fall fer með neikvætt inntak. Í ljós kemur að föllin eru mjög ólík að þessu leyti.

Skoðum fallið $f(x)=x^2$, á mynd 5. Graf fallsins er samhverft um y-ásinn. Tveir punktar á grafinu með gagnstæð x-hnit hafa alltaf sama fallgildi. Þetta samræmist útreikningunum: $(4)^2=(-4)^2$, $((-5)^2=(5)^2$,) og svo framvegis. Fallið $f(x)=x^2$ er því jafnstætt fall, það er fall þar sem gagnstæð inntök gefa sama úttak. Það merkir að $f(-x)=f(x)$.



Mynd 5 Fallið $f(x)=x^2$ er jafnstætt fall.

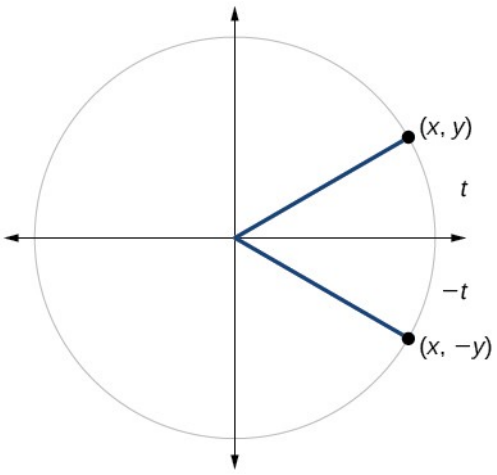
Skoðum nú fallið $f(x)=x^3$, á mynd 6. Grafið er ekki samhverft um y-ásinn. Tveir punktar á grafinu með gagnstæð x-hnit hafa alltaf gagnstæð y-hnit. Fallið $f(x)=x^3$ er því oddstætt fall, það er fall þar sem gagnstæð inntök gefa gagnstæð úttök. Það merkir að $f(-x)=-f(x)$.



Mynd 6 Fallið $f(x)=x^3$ er oddstætt fall.

Við getum kannað hvort hornafall er jafnstætt eða oddstætt með því að teikna einingarhring með jákvæðu og neikvæðu horni, eins og á mynd 7. Sínus jákvæða hornsins er y. Sínus neikvæða hornsins er –y. Sínusfallið er því oddstætt fall. Á sama hátt getum við kannað hvert hornafallanna sex. Niðurstöðurnar eru sýndar í töflu 2.

5



Mynd 7. Gagnstæð horn og speglun punkta á einingarhringnum um x-ásinn.

Tafla 2

$\sin\ t=y$ $\sin(-t)=-y$ $\sin\ t=-\sin(-t)$	$\cos\ t=x$ $\cos(-t)=x$ $\cos\ t=\cos(-t)$	$\tan(t)=\frac{y}{x}$ $\tan(-t)=-\frac{y}{x}$ $\tan\ t=-\tan(-t)$
$sec\ t=\frac{1}{x}$ $sec(-t)=\frac{1}{x}$ $sec\ t=sec(-t)$	$csc\ t=\frac{1}{y}$ $csc(-t)=\frac{1}{-y}$ $csc\ t=-csc(-t)$	$\cot\ t=\frac{x}{y}$ $\cot(-t)=\frac{x}{-y}$ $\cot\ t=-\cot(-t)$

JAFNSTÆÐ OG ODDSTÆÐ HORNAFÖLL

Fall er jafnstætt ef $f(-x)=f(x)$.

Fall er oddstætt ef $f(-x)=-f(x)$.

Kósínus og sekans eru jafnstæð föll:

$$\cos(-t) = \cos\ t$$
$$\sec(-t) = \sec\ t$$

Sínus, tangens, kósekans og kótangens eru oddstæð föll:

$$\sin(-t) = -\sin\ t$$
$$\tan(-t) = -\tan\ t$$
$$\csc(-t) = -\csc\ t$$
$$\cot(-t) = -\cot\ t$$

DÆMI 4

Eiginleikar jafnstæðra og oddstæðra hornafalla notaðir

Sekans hornsins t er 2. Hver er þá sekans hornsins $-t$?

Lausn

Sekans er jafnstætt fall. Sekans horns er því jafn sekans gagnstæðs horns. Ef sekans hornsins t er 2 er sekans hornsins $-t$ einnig 2.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Ef kótangens hornsins t er $\sqrt{3}$, hver er þá kótangens $-t$?

Grundvallarsamsemdir þekktar og notaðar

Við höfum kannað ýmsa eiginleika hornafalla. Nú skoðum við tengsl þeirra nánar og leiðum út nokkrar grundvallarsamsemdir. Samsemdir eru jöfnur sem gilda fyrir öll inntaksgildi þar sem báðar hliðar eru skilgreindar. Yfirleitt má leiða þær út frá skilgreiningum og tengslum sem við þekkjum. Pýþagórasarsamsemdin sem við lærðum fyrr var til dæmis leidd út frá reglu Pýþagórasar og skilgreiningum sínuss og kósínuss.

GRUNDVALLARSAMSEMDIR

Af hornaföllunum sex getum við leitt út nokkrar gagnlegar samsemdir. Hin hornaföllin fjögur tengjast sínus og kósínus með jöfnunum hér fyrir neðan. Þær gilda þar sem báðar hliðar eru skilgreindar. Í jöfnunum fyrir kótangens má hvorki sínus né kósínus vera núll:

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} = \frac{\cos t}{\sin t}$$

DÆMI 5

Samsemdir notaðar til að reikna gildi hornafalla

1. ⓐ Gefið er að $\sin\left(45^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(45^\circ\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$. Reiknið $\tan\left(45^\circ\right)$.
2. ⓑ Gefið er

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{reiknið } \sec\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

5

Lausn

Þar sem við þekkjum sínus- og kósínusgildi þessara horna getum við notað samsemdir til að reikna hin föllin.

ⓐ

$$\begin{aligned}\tan(45^\circ) &= \frac{\sin(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

ⓑ

$$\begin{aligned}\sec\left(\tfrac{5\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Reiknið $\csc\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

DÆMI 6

Samsemdir notaðar til að einfalda hornafallastæður

Einfaldið $\frac{\sec t}{\tan t}$.

Lausn

Við getum einfaldað stæðuna með því að umrita bæði föllin með sínus og kósínus.

$$\frac{\sec t}{\tan t} = \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin t}{\cos t}}$$ Við deilingu margföldum við með margföldunarandhverfu deilisins.

$$= \frac{1}{\cos t}\,\frac{\cos t}{\sin t}$$ Styttum með kósínusgildinu.

$$= \frac{1}{\sin t}$$ Einföldum og notum samsemdina.

$$= \csc t$$

Með því að sýna að einfalda má $(\frac{\sec t}{\tan t})$ í $\csc t$, höfum við leitt út nýja samsemd. Hún gildir þar sem upphaflega stæðan er skilgreind, það er þegar bæði sínus og kósínus hornsins eru frábrugðnir núlli.

$$\frac{\sec t}{\tan t} = \csc t$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Einfaldið $(\tan t)(\cos t)$.

Önnur form Pýþagórasarsamsemdarinnar

Við getum notað grundvallarsamsemdirnar til að leiða út önnur form Pýþagórasarsamsemdarinnar, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Eitt form fæst með því að deila báðum hliðum með $\cos^2 t$:, að því gefnu að kósínus hornsins sé frábrugðinn núlli:

$$\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$
$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

Hitt formið fæst með því að deila báðum hliðum með $\sin^2 t$:, að því gefnu að sínus hornsins sé frábrugðinn núlli:

$$\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$
$$\cot^2 t + 1 = \csc^2 t$$

ÖNNUR FORM PÝÞAGÓRASARSAMSEMDARINNAR

$$1+\tan^2 t = sec^2 t$$

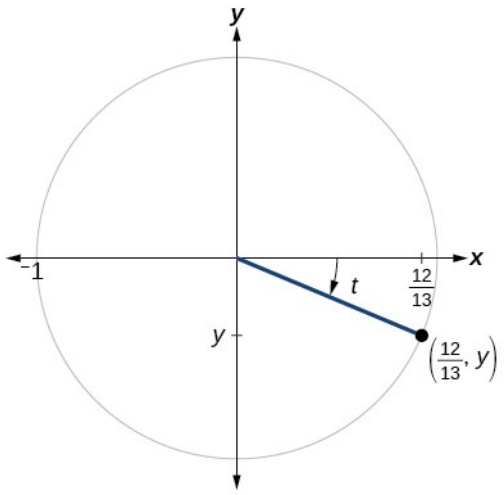
$$\cot^2 t+1 = csc^2 t$$

DÆMI 7

Samsemdir notaðar til að tengja hornaföll

Gefið er að $\cos(t)=\frac{12}{13}$ og hornið t liggur í fjórða fjórðungi, eins og á mynd 8. Finnið gildi hinna hornafallanna fimm.

5



Mynd 8. Punktur í fjórða fjórðungi með x-hnitið 12/13.

Lausn

Við getum fundið sínusinn með Pýþagórasarsamsemdinni, $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, og hin föllin með því að tengja þau við sínus og kósínus.

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{12}{13}\right)^2+\sin^2 t&=1\\ \sin^2 t&=1-\left(\tfrac{12}{13}\right)^2\\ \sin^2 t&=1-\tfrac{144}{169}\\ \sin^2 t&=\tfrac{25}{169}\\ \sin\ t&=\pm\sqrt{\tfrac{25}{169}}\\ \sin\ t&=\pm\tfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}\\ \sin\ t&=\pm\tfrac{5}{13}\end{aligned}$$

Formerki sínussins ræðst af y-gildunum í fjórðungnum þar sem hornið liggur. Hornið er í fjórða fjórðungi, þar sem y-gildin eru neikvæð. Sínus þess er því neikvæður, $-\frac{5}{13}$.

Hin föllin má reikna með samsemdum sem tengja þau við sínus og kósínus.

$$\tan\ t=\frac{\sin\ t}{\cos\ t}=\frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned}\sec\ t&=\frac{1}{\cos\ t}=\frac{1}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{12}\\ \csc\ t&=\frac{1}{\sin\ t}=\frac{1}{-\frac{5}{13}}=-\frac{13}{5}\\ \cot\ t&=\frac{1}{\tan\ t}=\frac{1}{-\frac{5}{12}}=-\frac{12}{5}\end{aligned}$$

5

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Gefið er að $sec(t)=-\frac{17}{8}$ og $0<t<\pi$,. Finnið gildi hinna hornafallanna fimm.

Eins og rætt var í upphafi kaflans kallast fall sem endurtekur gildi sín með reglulegu millibili lotubundið fall. Hornaföllin eru lotubundin. Fyrir hornaföllin fjögur sínus, kósínus, kósekans og sekans gefur einn heill snúningur, eða 2π, sömu fallgildi. Fyrir tangens og kótangens nægir hálfur snúningur til að fá sömu fallgildi.

Önnur föll geta einnig verið lotubundin. Lengd mánaðanna endurtekur sig til dæmis á fjögurra ára fresti. Ef x táknar tíma mældan í árum og $f(x)$ fjölda daga í febrúar, þá er $f(x+4)=f(x)$. Þetta mynstur endurtekur sig aftur og aftur. Með öðrum orðum hefur febrúar yfirleitt jafn marga daga og 4 árum fyrr (nema á margfeldum af 100). Jákvæða talan 4 er minnsta jákvæða talan sem uppfyllir þetta skilyrði og nefnist lota. Lota er stysta bil sem fall þarf til að ljúka einni heilli umferð. Í þessu dæmi er lotan 4 og táknar tímann sem líður þar til við getum verið viss um að febrúar hafi jafn marga daga.

LOTA FALLS

Lota P lotubundins falls f er minnsta jákvæða talan sem uppfyllir $f(x+P)=f(x)$ fyrir sérhvert x. í skilgreiningarmenginu.

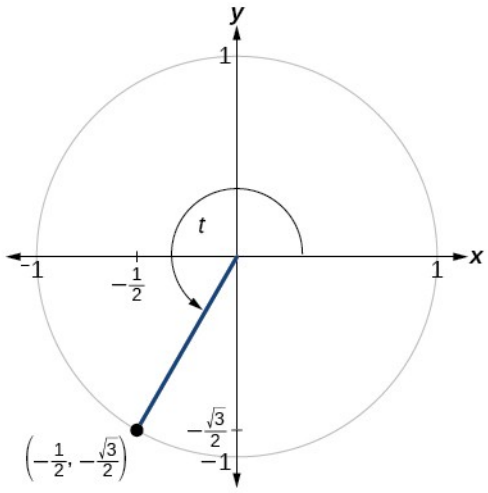
Lota kósínus-, sínus-, sekans- og kósekansfallanna er 2π.

Lota tangens- og kótangensfallanna er π.

DÆMI 8

Gildi hornafalla fundin

Finnið gildi hornafallanna sex fyrir hornið t út frá mynd 9.



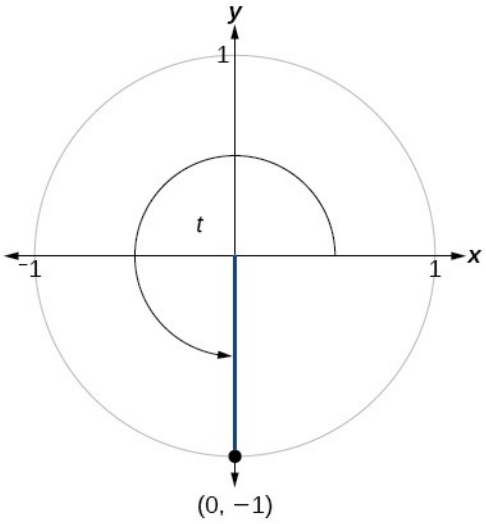
Mynd 9. Horn og punktur í þriðja fjórðungi einingarhringsins.

Lausn

$$\sin\ t = y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\ t = x = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\ t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$
$$\sec\ t = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$
$$\csc\ t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot\ t = \frac{1}{\tan t} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Finnið gildi hornafallanna sex fyrir hornið t út frá mynd 10.



Mynd 10. Lokaarmur hornsins liggur á neikvæða hluta y-ássins.

DÆMI 9

Gildi hornafalla fundin

Ef $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\cos(t) = \frac{1}{2}$, finnið þá $\sec(t), \csc(t), \tan(t), \cot(t)$.

Lausn

$$sec\ \ t = \frac{1}{\cos\ t} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$csc\ \ t = \frac{1}{\sin\ t} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\ \ t = \frac{\sin\ t}{\cos\ t} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\cot\ \ t = \frac{1}{\tan\ t} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 9

Ef $\sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, finnið þá $\sec(t), \csc(t), \tan(t),$ og $\cot(t)$.

Gildi hornafalla reiknuð með reiknivél

Við höfum lært að reikna gildi hornafallanna sex fyrir algeng horn í fyrsta fjórðungi og nota þau sem viðmiðunarhorn fyrir horn í öðrum fjórðungum. Til að reikna gildi hornafalla fyrir önnur horn notum við vísindareiknivél, grafíska reiknivél eða tölvuhugbúnað. Ef reiknivélin hefur bæði gráðuham og radíanaham skuluð þið ganga úr skugga um að réttur hamur sé valinn áður en reiknað er.

Á sumum vísindareiknivélum er tangens reiknaður á sama hátt og sínus og kósínus: Sláið inn hornamálið og ýtið á TAN-hnappinn. Á grafískum reiknivélum og í tölvuforritum er fallið oft valið á undan hornamálinu. Ekki eru alltaf sérstakir hnappar merktir CSC, SEC eða COT. Þá er viðkomandi gildi reiknað með því að deila 1 með sínus-, kósínus- eða tangensgildinu, eftir því sem við á.

Ef við vinnum með gráður en reiknivélin eða hugbúnaðurinn hefur ekki gráðuham margföldum við hornamálið með umreikningsstuðlinum ($\frac{\pi}{180}$) til að fá hornamálið í radíönum. Til að finna sekans hornsins 30°, má nota eftirfarandi takkröð eða inntak, eftir gerð reiknivélar:

5

$$\text{(fyrir vísindareiknivél):}\ \frac{1}{\cos 30 \times \frac{\pi}{180}}$$

eða

$$\text{(fyrir grafíska reiknivél):}\ \frac{1}{\cos\left(\frac{30\pi}{180}\right)}$$

AÐFERÐ

Gefið er hornamál í radíönum. Notið vísindareiknivél til að finna kósekans.

1. Ef reiknivélin hefur bæði gráðuham og radíanaham, stillið hana þá á radíanaham.
2. Sláið inn: 1 /
3. Sláið hornamálið inn innan sviga.
4. Ýtið á SIN-hnappinn.
5. Ýtið á jafnaðarmerkið (=).

AÐFERÐ

Gefið er hornamál í radíönum. Notið grafíska reiknivél eða tölvuforrit til að finna kósekans.

1. Ef reiknivélin eða forritið hefur bæði gráðuham og radíanaham, veljið þá radíanaham.
2. Sláið inn: 1 /
3. Ýtið á SIN-hnappinn.
4. Sláið hornamálið inn innan sviga.

5. Ýtið á ENTER-hnappinn.

DÆMI 10

Kósekans reiknaður með tæknibúnaði

Reiknið kósekans $\frac{5\pi}{7}$.

Lausn

Á vísindareiknivél af þessari gerð má nota þessa takkröð:

$$1 / (5 \times \pi / 7) \text{ SIN} =$$

$$csc\left(\frac{5\pi}{7}\right) \approx 1{,}279$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 10

Reiknið kótangens $-\frac{\pi}{8}$.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í öðrum hornaföllum.

- Gildi hornafalla ákvörðuð
- Fleiri dæmi um ákvörðun hornafallsgilda
- Pýþagórasarsamsemdir
- Hornaföll á reiknivél

5.3 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Geta sínus og kósínus sama horns verið jafnir þegar hornamálið í radíönum er á bilinu $[0, 2\pi)$,? Ef svo er, fyrir hvaða hornamál?
2. Hvert áætlið þið að kósínus π gráða sé? Rökstyðjið svarið.
3. Ef sínus horns í öðrum fjórðungi er þekktur, hvernig má þá ákvarða kósínus hornsins?
4. Lýsið sekansfallinu.
5. Tangens og kótangens hafa lotuna π. Hvað segir það okkur um fallgildi fallanna?

Algebruverkefni

Finnið nákvæmt gildi hverrar stæðu í eftirfarandi verkefnum.

6.

$$\tan\frac{\pi}{6}$$

7.

$$sec\frac{\pi}{6}$$

8.

$$csc\frac{\pi}{6}$$

9.

$$\cot\frac{\pi}{6}$$

10.

$$\tan\frac{\pi}{4}$$

11.

$$sec\frac{\pi}{4}$$

12.

$$csc\frac{\pi}{4}$$

13.

$$\cot\frac{\pi}{4}$$

14.

$$\tan\frac{\pi}{3}$$

15.

$$sec\frac{\pi}{3}$$

16.

$$csc\frac{\pi}{3}$$

17.

$$\cot\frac{\pi}{3}$$

Notið viðmiðunarhorn til að reikna stæðuna í eftirfarandi verkefnum.

18.

$$\tan\frac{5\pi}{6}$$

19.

$$sec\frac{7\pi}{6}$$

20.

$$csc\frac{11\pi}{6}$$

21.

$$\cot\frac{13\pi}{6}$$

22.

$$\tan\frac{7\pi}{4}$$

23.

$$sec\frac{3\pi}{4}$$

24.

$$csc\frac{5\pi}{4}$$

25.

$$\cot\frac{11\pi}{4}$$

26.

$$\tan\frac{8\pi}{3}$$

27.

$$sec\frac{4\pi}{3}$$

28.

$$csc\,\frac{2\pi}{3}$$

29.

$$\cot\frac{5\pi}{3}$$

30.

$$\tan 225^\circ$$

31.

$$sec\,300^\circ$$

32.

$$csc\,150^\circ$$

33.

$$\cot 240^\circ$$

34.

$$\tan 330^\circ$$

35.

$$sec\,120^\circ$$

36.

$$csc\,210^\circ$$

37.

$$\cot 315^\circ$$

38. Gefið er að $\sin t = \frac{3}{4}$, og hornið t liggur í öðrum fjórðungi. Finnið $\cos t$, $sec\,t$, $csc\,t$, $\tan t$ og $\cot t$.

39. Gefið er að $\cos t = -\frac{1}{3}$, og hornið t liggur í þriðja fjórðungi. Finnið $\sin t$, $sec\,t$, $csc\,t$, $\tan t$, $\cot t$.

40. Ef $\tan t = \frac{12}{5}$, og $0 \le t < \frac{\pi}{2}$, finnið þá $\sin t$, $\cos t$, $sec\,t$, $csc\,t$, og $\cot t$.

41. Ef $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\cos t = \frac{1}{2}$, finnið þá $sec\,t$, $csc\,t$, $\tan t$, og $\cot t$.

42. Ef $\sin 40^\circ \approx 0{,}643$ og $\cos 40^\circ \approx 0{,}766$ finnið þá $\sec 40^\circ$, $\csc 40^\circ$, $\tan 40^\circ$, og $\cot$ og 40°.

43. Gefið er að $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$,. Hvert er þá gildið á $\sin(-t)$?

44. Gefið er að $\cos t = \frac{1}{2}$,. Hvert er þá gildið á $\cos(-t)$?

45. Gefið er að $\sec \quad t = 3{,}1$. Hvert er þá gildið á $\sec(-t)$?

46. Skoðið forsenduna $\csc \quad t = 0{,}34$. Hvaða gildi á $\csc(-t)$? fengist formlega með oddstæðni kósekans? Kannið einnig hvort til sé raungilt horn sem uppfyllir forsenduna.

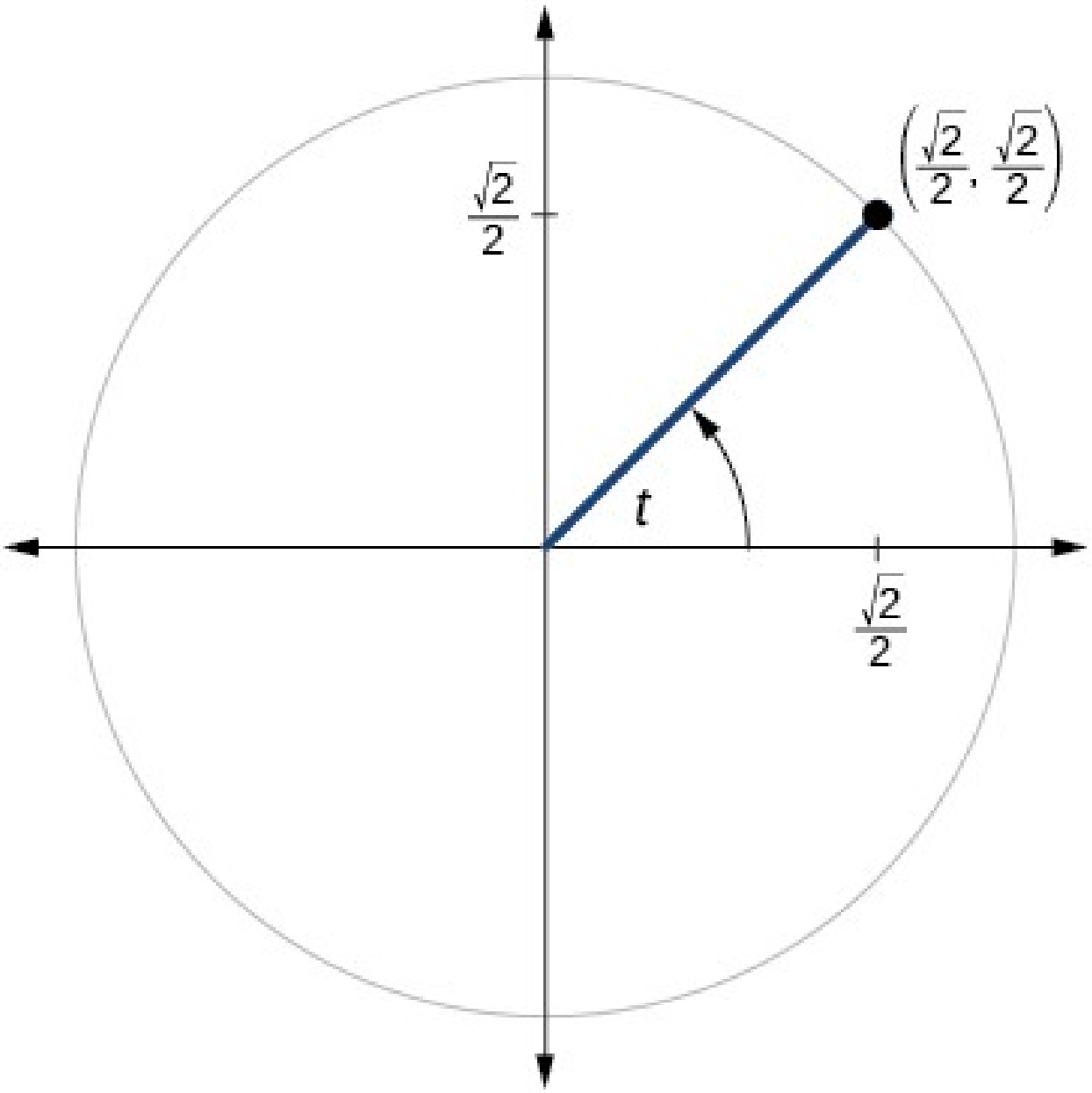
47. Gefið er að $\tan \quad t = -1{,}4$. Hvert er þá gildið á $\tan(-t)$?

48. Gefið er að $\cot \quad t = 9{,}23$. Hvert er þá gildið á $\cot(-t)$?

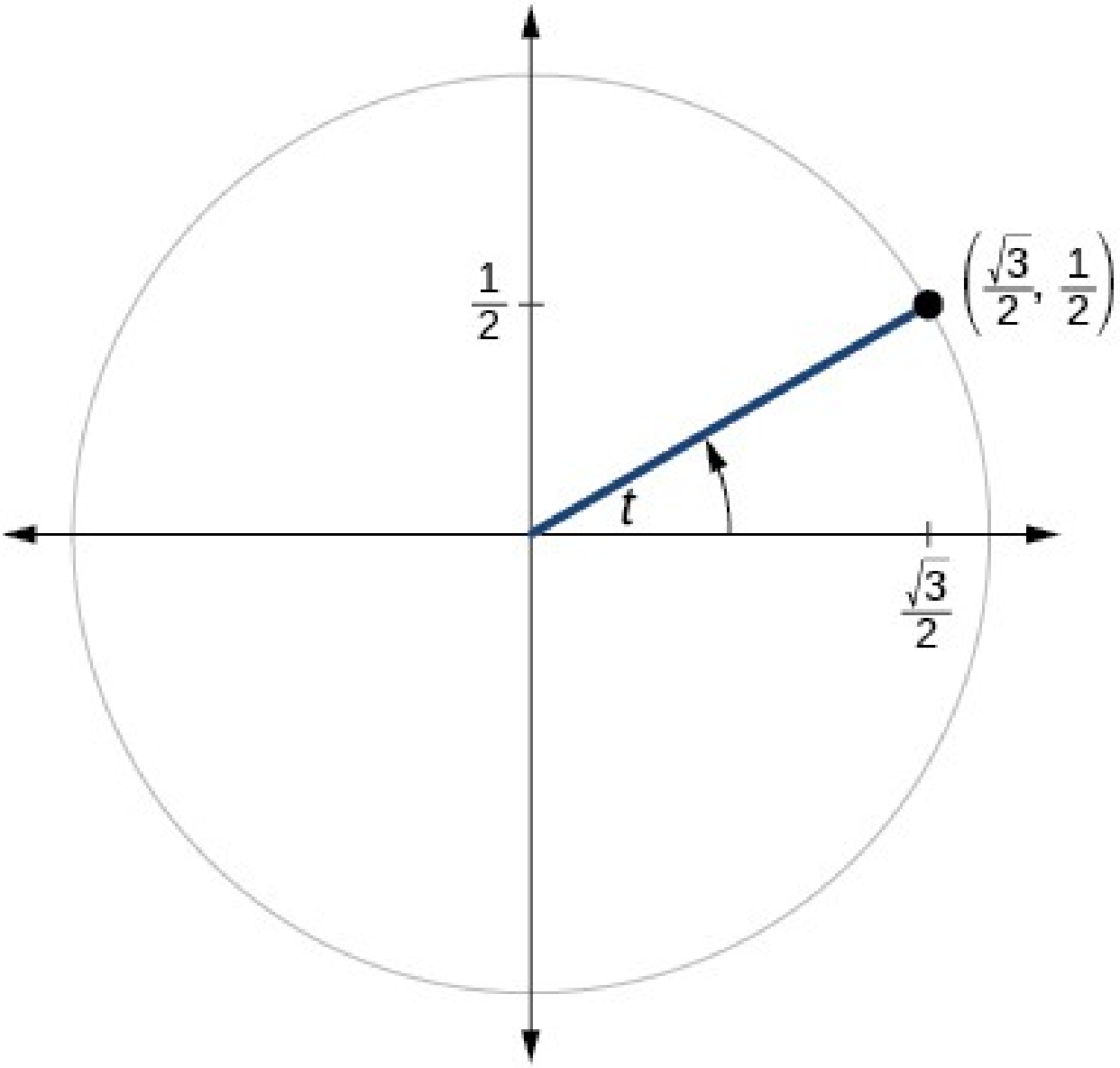
Myndræn verkefni

Notið hornið á einingarhringnum í eftirfarandi verkefnum til að finna gildi hvers hornafallanna sex.

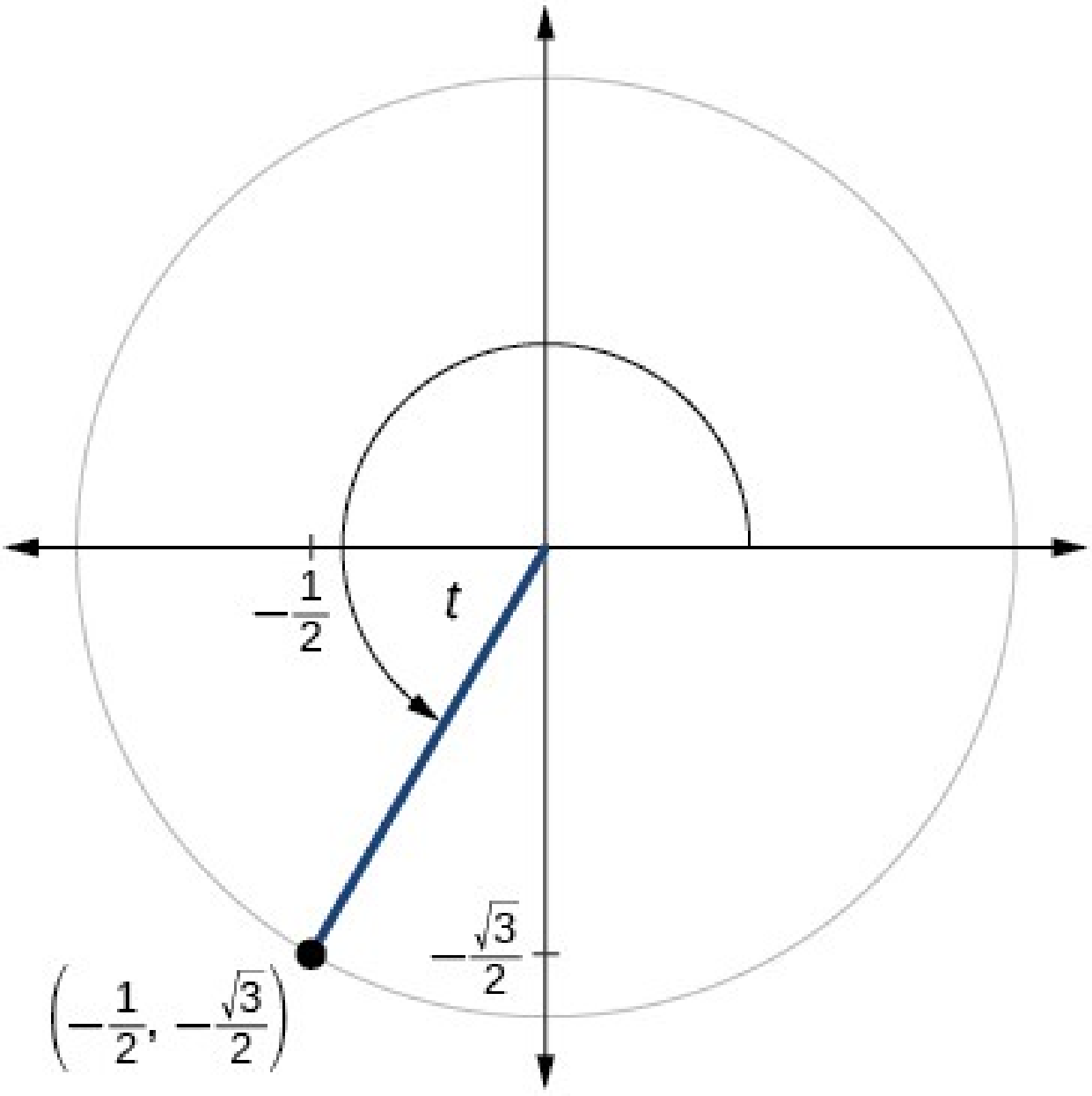
49.


$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
t
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

50.



51.



Tækni

Notið grafíska reiknivél til að reikna gildin í eftirfarandi verkefnum.

52.

$$csc\,\frac{5\pi}{9}$$

53.

$$\cot\frac{4\pi}{7}$$

54.

$$sec\frac{\pi}{10}$$

55.

$$\tan\frac{5\pi}{8}$$

56.

$$sec\frac{3\pi}{4}$$

57.

$$csc\frac{\pi}{4}$$

58.

$$\tan 98^{\circ}$$

59.

$$\cot 33^{\circ}$$

60.

$$\cot 140^{\circ}$$

61.

$$sec\,310^{\circ}$$

Viðbótarverkefni

Notið samsemdir til að reikna stæðuna í eftirfarandi verkefnum.

62. Ef $\tan(t)\approx 2{,}7$ og $\sin(t)\approx 0{,}94$ finnið þá $\cos(t)$.

63. Ef $\tan(t)\approx 1{,}3$ og $\cos(t)\approx 0{,}61$ finnið þá $\sin(t)$.

64. Ef $csc(t)\approx 3{,}2$ og $\cos(t)\approx 0{,}95$ finnið þá $\tan(t)$.

65. Ef $\cot(t)\approx 0{,}58$ og $\cos(t)\approx 0{,}5$ finnið þá $csc(t)$.

66. Ákvarðið hvort fallið $f(x)=2\sin x\cos x$ sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

67. Ákvarðið hvort fallið $f(x)=3\sin^2 x\cos x+sec\,x$ sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

68. Ákvarðið hvort fallið $f(x)=\sin x-2\cos^2 x$ sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

69. Ákvarðið hvort fallið $f(x)=csc^2 x+sec\,x$ sé jafnstætt, oddstætt eða hvorugt.

Notið samsemdir til að einfalda stæðuna í eftirfarandi verkefnum.

70.

$$\csc t \tan t$$

71.

$$\frac{\sec t}{\csc t}$$

Hagnýt verkefni

72. Skoðið reiknilíkanið $h = 15\cos\left(\frac{1}{600}d\right)$, þar sem h táknar fjölda sólskinsstunda og d númer dags í árinu. Notið jöfnuna til að finna hve margar sólskinsstundir líkanið gefur 11. febrúar, á 42. degi ársins. Tilgreinið lotu fallsins. Athugið að þetta er æfingalíkan; lota þess samsvarar ekki ársveiflu sólskinsstunda.

5

73. Skoðið reiknilíkanið $h = 16\cos\left(\frac{1}{500}d\right)$, þar sem h táknar fjölda sólskinsstunda og d númer dags í árinu. Notið jöfnuna til að finna hve margar sólskinsstundir líkanið gefur 24. september, á 267. degi ársins. Tilgreinið lotu fallsins. Athugið að þetta er æfingalíkan; lota þess samsvarar ekki ársveiflu sólskinsstunda.

74. Jafnan $P = 20\sin(2\pi t) + 100$ lýsir blóðþrýstingnum P, þar sem t táknar tíma í sekúndum. (a) Finnið blóðþrýstinginn eftir 15 sekúndur. (b) Hver eru hæsta og lægsta gildi blóðþrýstingsins?

75. Hæð stimpils, h, í tommum, er lýst með jöfnunni $y = 2\cos x + 6$, þar sem x táknar horn sveifarinnar. Finnið hæð stimpilsins þegar horn sveifarinnar er $30°$.

76. Hæð stimpils, h, í tommum, er lýst með jöfnunni $y = 2\cos x + 5$, þar sem x táknar horn sveifarinnar. Finnið hæð stimpilsins þegar horn sveifarinnar er 55°.

5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota rétthyrnda þríhyrninga til að reikna gildi hornafalla.
- Finna gildi hornafallanna fyrir hornin $30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$, og $60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- Nota samsvarandi hornaföll fyllihorna.
- Nota skilgreiningar hornafalla fyrir sérhvert horn.
- Nota hornareikning rétthyrndra þríhyrninga til að leysa hagnýt verkefni.

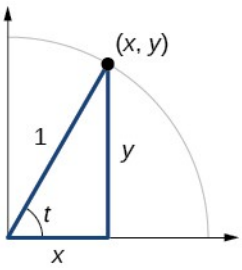
Við höfum áður skilgreint sínus og kósínus horns með hnitum punktsins á einingarhringnum þar sem lokaarmur hornsins sker hringinn:

$$\cos\ t = x$$
$$\sin\ t = y$$

Í þessum hluta kynnumst við annarri leið til að skilgreina hornaföll með eiginleikum rétthyrndra þríhyrninga.

Rétthyrndir þríhyrningar notaðir til að reikna gildi hornafalla

Í fyrri hlutum notuðum við einingarhring til að skilgreina hornaföllin. Nú víkkum við skilgreiningarnar svo að nota megi þær á rétthyrnda þríhyrninga. Gildi sínus- eða kósínusfallsins við t er gildi þess fyrir horn sem er t radíanar. Fyrst myndum við rétthyrndan þríhyrning. Mynd 1 sýnir punkt á einingarhring með geislann 1. Ef við drögum lóðrétt línustrik frá punktinum (x, y) að x-ásnum myndast rétthyrndur þríhyrningur með lóðrétta skammhlið af lengd y og lárétta skammhlið af lengd x. Hér er hornið hvasst og punkturinn í fyrsta fjórðungi. Við getum notað þríhyrninginn til að skilgreina sínus, kósínus og hin hornaföllin sem hlutföll hliðarlengda rétthyrnds þríhyrnings.



Mynd 1. Rétthyrndur þríhyrningur í fyrsta fjórðungi einingarhringsins.

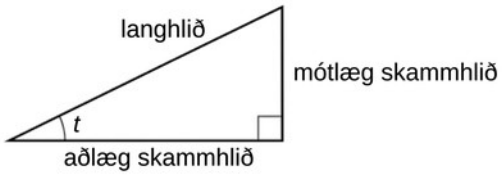
Við vitum að

$$\cos t = \frac{x}{1} = x$$

Á sama hátt vitum við að

$$\sin t = \frac{y}{1} = y$$

Þessi hlutföll gilda einnig um hliðar rétthyrnds þríhyrnings þótt enginn einingarhringur komi við sögu. Þau gilda líka þótt þríhyrningurinn sé ekki í staðalstöðu og ekki teiknaður í hnitakerfi með hnitunum (x, y). Til að geta notað hlutföllin almennt gefum við hliðunum almennari heiti. Í stað x, köllum við hliðina milli gefna hornsins og rétta hornsins aðlæga skammhlið við hornið t. Aðlæg merkir hér að hliðin liggi að horninu. Í stað y, köllum við hliðina á móti gefna horninu mótlæga skammhlið við hornið t. Í stað tölunnar 1, notum við heitið langhlið um hliðina á móti rétta horninu. Hliðarnar eru merktar á mynd 2.



Mynd 2. Hliðar rétthyrnds þríhyrnings miðað við hornið t.

Tengsl í rétthyrndum þríhyrningi

Fyrir rétthyrndan þríhyrning með hvassa hornið t, gildir:

$$\sin(t) = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$
$$\cos(t) = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}}$$
$$\tan(t) = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}}$$

Algeng minnisregla fyrir þessi tengsl er SOH–CAH–TOA, mynduð af upphafsstöfum ensku orðanna. Á íslensku segir hún: sínus er mótlæg skammhlið deilt með langhlið, kósínus er aðlæg skammhlið deilt með langhlið og tangens er mótlæg skammhlið deilt með aðlægri skammhlið.

AÐFERÐ

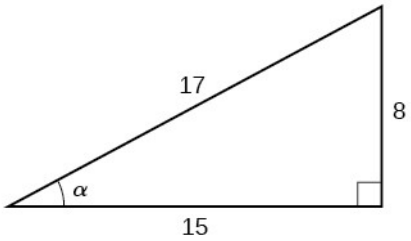
Gefnar eru hliðarlengdir rétthyrnds þríhyrnings og annað hvassa hornið. Finnið sínus, kósínus og tangens hornsins.

1. Finnið sínus sem hlutfall mótlægu skammhliðarinnar og langhliðarinnar.
2. Finnið kósínus sem hlutfall aðlægu skammhliðarinnar og langhliðarinnar.
3. Finnið tangens sem hlutfall mótlægu og aðlægu skammhliðarinnar.

DÆMI 1

Hornafall rétthyrnds þríhyrnings reiknað

Gefinn er þríhyrningurinn á mynd 3. Finnið gildið $\cos\alpha$.



Mynd 3. Rétthyrndur þríhyrningur með hliðarlengdirnar 8, 15 og 17.

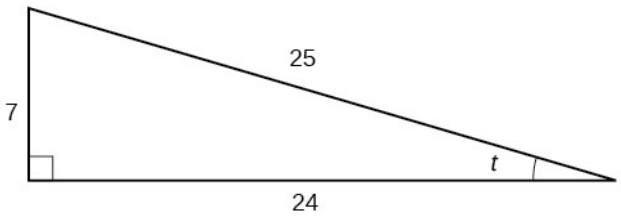
Lausn

Aðlæga skammhliðin við hornið er 15 og langhlið þríhyrningsins er 17. Því gildir:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{aðlæg skammhlið}}{\text{langhlið}} = \frac{15}{17}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

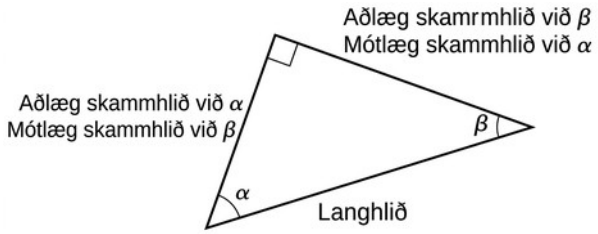
Gefinn er þríhyrningurinn á mynd 4. Finnið gildið $\sin t$.



Mynd 4. Rétthyrndur þríhyrningur með hliðarlengdirnar 7, 24 og 25.

Tengsl horna og hornafalla þeirra

Sömu reglur gilda um rétthyrnda þríhyrninga óháð stefnu þeirra. Við getum í raun reiknað hornaföllin sex fyrir hvort hvassa hornið sem er í þríhyrningnum á mynd 5. Mótlæg skammhlið við annað hvassa hornið er aðlæg skammhlið við hitt og öfugt.



Mynd 5 Aðlæg skammhlið við annað hornið er mótlæg skammhlið við hitt.

Við munum þurfa að finna hornaföllin sex fyrir gefið horn í þríhyrningi. Fyrst finnum við sínus, kósínus og tangens hornsins. Síðan er auðvelt að finna hin hornaföllin því að við vitum að margföldunarandhverfa sínuss er kósekans, margföldunarandhverfa kósínuss er sekans og margföldunarandhverfa tangens er kótangens.

AÐFERÐ

Gefnar eru hliðarlengdir rétthyrnds þríhyrnings. Reiknið hornaföllin sex fyrir annað hvassa hornið.

1. Teiknið rétthyrnda þríhyrninginn ef þörf krefur og merkið gefna hornið.

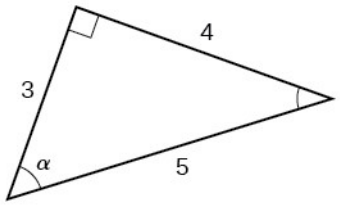
2. Finnið hornið, aðlægu skammhliðina, mótlægu skammhliðina og langhlið rétthyrnda þríhyrningsins.
3. Finnið umbeðið fall:
   - sínus sem hlutfall mótlægu skammhliðarinnar og langhliðarinnar
   - kósínus sem hlutfall aðlægu skammhliðarinnar og langhliðarinnar
   - tangens sem hlutfall mótlægu og aðlægu skammhliðarinnar
   - sekans sem hlutfall langhliðarinnar og aðlægu skammhliðarinnar
   - kósekans sem hlutfall langhliðarinnar og mótlægu skammhliðarinnar
   - kótangens sem hlutfall aðlægu og mótlægu skammhliðarinnar

---

DÆMI 2

Hornaföll horna sem eru ekki í staðalstöðu reiknuð

Notið þríhyrninginn á mynd 6 til að reikna $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$, og $\cot\alpha$.



Mynd 6. Rétthyrndur þríhyrningur með hliðarlengdirnar 3, 4 og 5.

Lausn

$$\sin\ \alpha = \frac{\text{mótlæg skammhlið við } \alpha}{\text{langhlið}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{aðlæg skammhlið við } \alpha}{\text{langhlið}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\ \alpha = \frac{\text{mótlæg skammhlið við } \alpha}{\text{aðlæg skammhlið við } \alpha} = \frac{4}{3}$$

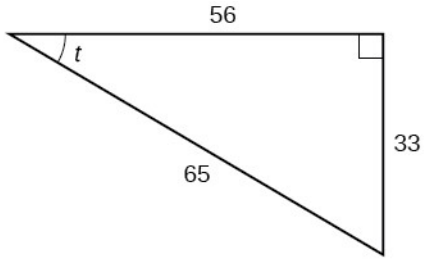
$$\sec\ \alpha = \frac{\text{langhlið}}{\text{aðlæg skammhlið við } \alpha} = \frac{5}{3}$$

$$\csc\ \alpha = \frac{\text{langhlið}}{\text{mótlæg skammhlið við } \alpha} = \frac{5}{4}$$

$$\cot\ \alpha = \frac{\text{aðlæg skammhlið við } \alpha}{\text{mótlæg skammhlið við } \alpha} = \frac{3}{4}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Notið þríhyrninginn á mynd 7 til að reikna $\sin t$, $\cos t$, $\tan t$, $\sec t$, $\csc t$, og $\cot t$.

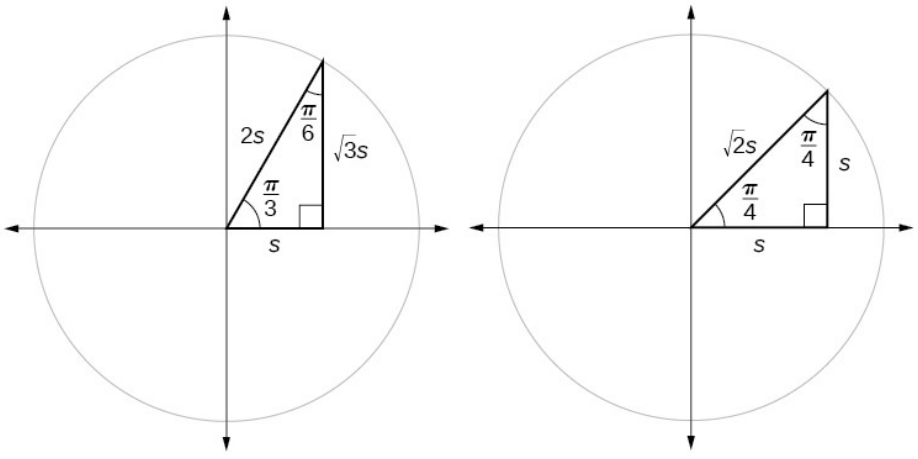


Mynd 7. Rétthyrndur þríhyrningur með hliðarlengdirnar 33, 56 og 65.

Hornaföll sérhorna fundin með hliðarlengdum

Við höfum þegar fjallað um hornaföll í tengslum við sérhornin á einingarhringnum. Nú getum við notað þessi tengsl til að reikna þríhyrninga sem hafa þessi sérhorn. Það gerum við vegna þess að hornaföll sérhornanna hafa tiltölulega þægileg gildi, það er hlutföll sem innihalda enga eða aðeins eina kvaðratrót. Þessi horn eru því oft notuð í verkefnum í stærðfræði og raunvísindum. Við notum margfeldi af 30°, 60°, og 45°, en munið að í rétthyrndum þríhyrningum takmarkast hornin við 0° og $90°$.

Gerum ráð fyrir þríhyrningi með hornin $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, sem eru $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ í radíönum. Hliðarlengdirnar má þá rita $s, \sqrt{3}s, 2s$. Í þríhyrningi með hornin $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$, eða $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ í radíönum, má rita hliðarlengdirnar $s, s, \sqrt{2}s$. Þessi tengsl eru sýnd á mynd 8.



Mynd 8 Hliðarlengdir sérþríhyrninga

Síðan getum við notað hlutföll hliðarlengdanna til að reikna gildi hornafalla sérhornanna.

AÐFERÐ

Gefið er hornafall sérhorns. Reiknið það með hliðarlengdum.

1. Notið hliðarlengdirnar á mynd 8 fyrir sérhornið sem reikna á.
2. Notið það hlutfall hliðarlengda sem samsvarar fallinu sem reikna á.

DÆMI 3

Hornaföll sérhorna reiknuð með hliðarlengdum

Notið hliðarlengdir til að finna nákvæm gildi hornafallanna fyrir hornið $(\frac{\pi}{3},)$.

Lausn

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{mótlæg}}{\text{langhlið}}=\frac{\sqrt{3}\ s}{2\ s}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{aðlæg}}{\text{langhlið}}=\frac{s}{2\ s}=\frac{1}{2}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{mótlæg}}{\text{aðlæg}}=\frac{\sqrt{3}\ s}{s}=\sqrt{3}$$
$$sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{langhlið}}{\text{aðlæg}}=\frac{2\ s}{s}=2$$
$$csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{langhlið}}{\text{mótlæg}}=\frac{2\ s}{\sqrt{3}\ s}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\ \sqrt{3}}{3}$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\text{aðlæg}}{\text{mótlæg}}=\frac{s}{\sqrt{3}\ s}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

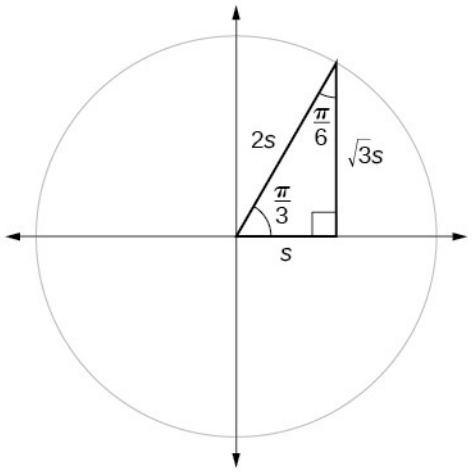
Notið hliðarlengdir til að finna nákvæm gildi hornafallanna fyrir hornið $(\frac{\pi}{4},)$.

Jöfn hornaföll fyllihorna notuð

Ef við skoðum nánar tengsl sínuss og kósínuss sérhornanna á einingarhringnum kemur mynstur í ljós. Í rétthyrndum þríhyrningi með hornin $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{\pi}{3}$, sjáum við að sínus $\frac{\pi}{3}$, það er $\frac{\sqrt{3}}{2}$, er jafnframt kósínus $\frac{\pi}{6}$, og sínus $\frac{\pi}{6}$, það er $\frac{1}{2}$, er jafnframt kósínus $\frac{\pi}{3}$.

$$\sin\ \tfrac{\pi}{3}=\cos\ \tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}s}{2s}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\ \tfrac{\pi}{6}=\cos\ \tfrac{\pi}{3}=\tfrac{s}{2s}=\tfrac{1}{2}$$

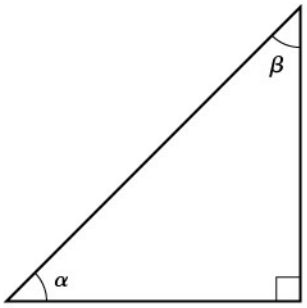
Sjá mynd 9



Mynd 9. Sínus ($\frac{\pi}{3}$) er jafn kósínus ($\frac{\pi}{6}$) og öfugt.

Þessi niðurstaða ætti ekki að koma á óvart því, eins og sést á mynd 9, er mótlæga hliðin við hornið $\frac{\pi}{3}$ jafnframt aðlæga hliðin við $\frac{\pi}{6}$, svo $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ og $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ eru nákvæmlega sama hlutfall sömu tveggja hliða, $\sqrt{3}s$ og $2s$. Á sama hátt eru $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ og $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ einnig sama hlutfall sömu tveggja hliða, s og $2s$.

Tengsl sínuss og kósínuss ($\frac{\pi}{6}$) og ($\frac{\pi}{3}$) gilda einnig um hvössu hornin tvö í öllum rétthyrndum þríhyrningum. Í öllum tilvikum er hlutfall sömu tveggja hliðarlengda sínus annars hornsins og kósínus hins. Hornasumma þríhyrnings er π, og rétta hornið er ($\frac{\pi}{2}$,) og því er summa hinna hornanna tveggja líka $\frac{\pi}{2}$. Rétthyrndan þríhyrning má því mynda með hvaða tveimur jákvæðum hornum sem er ef summa þeirra er ($\frac{\pi}{2}$), það er með tveimur hvössum fyllihornum. Við getum sett fram samsemd hornafalla fyllihorna: Ef tvö horn eru fyllihorn er sínus annars þeirra jafn kósínus hins og öfugt. Samsemdin er sýnd á mynd 10.



Mynd 10 Samsemd sínuss og kósínuss fyllihorna

5

Með þessari samsemd getum við til dæmis sagt án útreikninga að sínus ($\frac{\pi}{12}$) sé jafn kósínus ($\frac{5\pi}{12}$,) og að sínus ($\frac{5\pi}{12}$) sé jafn kósínus $\frac{\pi}{12}$. Ef fyrir tiltekið horn t, gildir $\cos t = \frac{5}{13}$, þá gildir einnig $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{5}{13}$.

SAMSEMDIR HORNAFALLA FYLLIHORNA

Samsemdir hornafalla fyllihorna í radíönum eru taldar upp í töflu 1.

Tafla 1

$\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$	$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
$\tan t = \cot\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$	$\cot t = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
$sec\, t = csc\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$	$csc\, t = sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

AÐFERÐ

Gefin eru sínus og kósínus horns. Finnið sínus eða kósínus fyllihorns þess.

1. Finnið kósínus upphaflega hornsins til að finna sínus fyllihornsins.
2. Finnið sínus upphaflega hornsins til að finna kósínus fyllihornsins.

DÆMI 4

Samsemdir hornafalla fyllihorna notaðar

Ef $\sin t = \frac{5}{12}$, finnið $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Lausn

Samkvæmt samsemdum sínuss og kósínuss fyllihorna gildir

$$\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

Því

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{5}{12}.$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Ef $csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, finnið $sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Hornaföll notuð

Í fyrri dæmum reiknuðum við sínus og kósínus í þríhyrningum þar sem allar þrjár hliðarnar voru þekktar. Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga nýtist þó best þegar við skoðum þríhyrninga þar sem eitt horn er þekkt en ekki allar hliðarnar.

AÐFERÐ

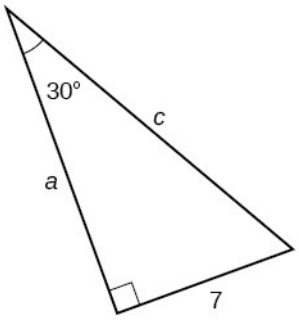
Gefinn er rétthyrndur þríhyrningur, lengd einnar hliðar og hornamál annars hvassa hornsins. Finnið hliðarnar sem eftir eru.

1. Veljið fyrir hverja hlið hornafall þar sem óþekkta hliðin er annaðhvort teljari eða nefnari. Þekkta hliðin verður þá nefnari eða teljari.
2. Ritið jöfnu þar sem fallgildi þekkta hornsins er jafnt hlutfalli samsvarandi hliða.
3. Notið gildi hornafallsins og þekktu hliðarlengdina til að finna hliðarlengdina sem vantar.

DÆMI 5

Hliðarlengdir sem vantar fundnar með hlutföllum hornafalla

Finnið óþekktar hliðar þríhyrningsins á mynd 11.



Mynd 11. Rétthyrndur þríhyrningur með 30° horn og mótlæga skammhlið af lengd 7.

Lausn

Við þekkjum hornið og mótlægu hliðina og getum því notað tangens til að finna aðlægu hliðina.

$$\tan\left(30^\circ\right)=\frac{7}{a}$$

Við umritum jöfnuna til að einangra a.

$$\begin{aligned} a&=\frac{7}{\tan\left(30°\right)}\\ &\approx 12{,}1 \end{aligned}$$

Við getum notað sínus til að finna langhliðina.

$$\sin\left(30^\circ\right)=\frac{7}{c}$$

Aftur umritum við jöfnuna, nú til að einangra c.

$$\begin{aligned} c &= \frac{7}{\sin(30^\circ)}\\ &\approx 14 \end{aligned}$$

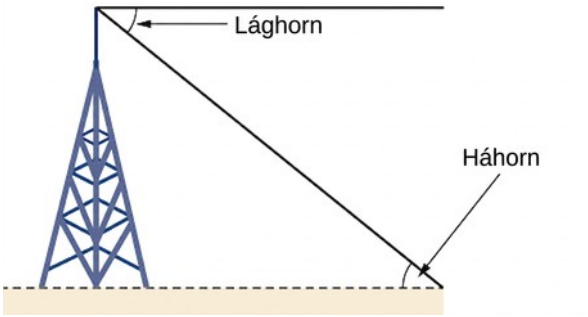
REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Rétthyrndur þríhyrningur hefur eitt horn sem er $(\frac{\pi}{3})$ og langhlið af lengd 20. Finnið óþekktu hliðarlengdirnar og óþekkta hornið.

Hagnýt verkefni leyst með hornareikningi rétthyrndra þríhyrninga

Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga nýtist á margan hagnýtan hátt. Með því að reikna hliðarlengdir þríhyrnings má til dæmis finna hæð á háum hlut án þess að klifra upp á hann eða leggja málband eftir allri hæðinni. Þá mælum við láréttа fjarlægð frá undirstöðu hlutarins að stað á jörðinni þaðan sem sést upp á topp hans undir ákveðnu horni. Háhorn hlutar sem er ofan við áhorfanda er hornið milli láréttu línunnar og sjónlínunnar frá auga áhorfandans að hlutnum. Við þessar aðstæður myndast rétthyrndur þríhyrningur þar sem hliðarnar tákna

óþekktu hæðina, mældu fjarlægðina frá undirstöðunni og hallandi sjónlínuna frá jörðu að toppi hlutarins. Þegar fjarlægðin að undirstöðunni og horn sjónlínunnar eru þekkt má nota hornaföll til að reikna óþekktu hæðina. Á svipaðan hátt má mynda þríhyrning með því að horfa niður frá toppi hás hlutar. Lághorn hlutar sem er neðan við áhorfanda er hornið milli láréttu línunnar og sjónlínunnar frá auga áhorfandans að hlutnum. Sjá mynd 12.



Mynd 12. Háhorn og lághorn eru mæld frá láréttri línu að sjónlínunni.

AÐFERÐ

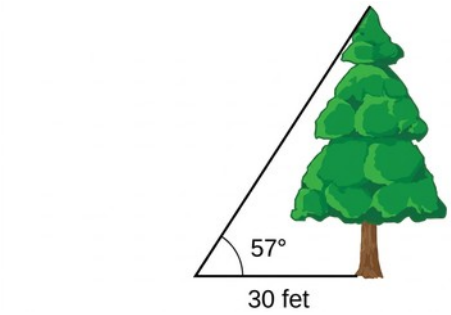
Gefinn er hár hlutur. Mælið hæð hans óbeint.

1. Gerið skissu af aðstæðunum til að halda utan um þekktar og óþekktar upplýsingar.
2. Mælið fjarlægð frá undirstöðu hlutarins að stað þar sem toppur hans sést greinilega.
3. Horfið upp á topp hlutarins frá hinum enda mældu fjarlægðarinnar. Mælið hornið milli sjónlínunnar og láréttu línunnar.
4. Ritið jöfnu sem tengir óþekktu hæðina, mældu fjarlægðina og tangens horns sjónlínunnar.
5. Leysið jöfnuna fyrir óþekktu hæðina.

DÆMI 6

Fjarlægð mæld óbeint

Til að finna hæð trés gengur manneskja að stað sem er 30 fet frá stofni trésins. Hún mælir hornið 57 ˚ milli sjónlínunnar að trjátoppinum og jarðarinnar, eins og sýnt er á mynd 13. Finnið hæð trésins. Hér gerum við ráð fyrir láréttri jörð og mælingu frá jarðhæð, eins og á myndinni.



Mynd 13. Hæð trés fundin með 30 feta láréttri fjarlægð og 57° háhorni.

Lausn

Við vitum að háhornið er 57° og að aðlæga skammhliðin er 30 fet að lengd. Mótlæga skammhliðin táknar óþekktu hæðina.

5

Tangens horns er hlutfall mótlægu og aðlægu skammhliðarinnar. Við setjum því upplýsingarnar fram með tangens af 57°, og látum h tákna óþekktu hæðina.

$$\tan\ \theta = \frac{\text{mótlæg skammhlið}}{\text{aðlæg skammhlið}}$$

$$\tan\left(57^\circ\right) = \frac{h}{30} \qquad \text{Einangrum } h.$$

$$h = 30\ \tan\left(57^\circ\right) \qquad \text{Margföldum .}$$

$$h \approx 46{,}2 \qquad \text{Notum reiknivél .}$$

Tréð er um það bil 46 fet á hæð.

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Hversu langan stiga þarf til að ná upp að gluggakistu sem er 50 fet yfir jörðu ef stiginn hallar að byggingunni og myndar hornið ($\frac{5\pi}{12}$) við jörðina? Námundið að næsta feti.

MIÐLAR

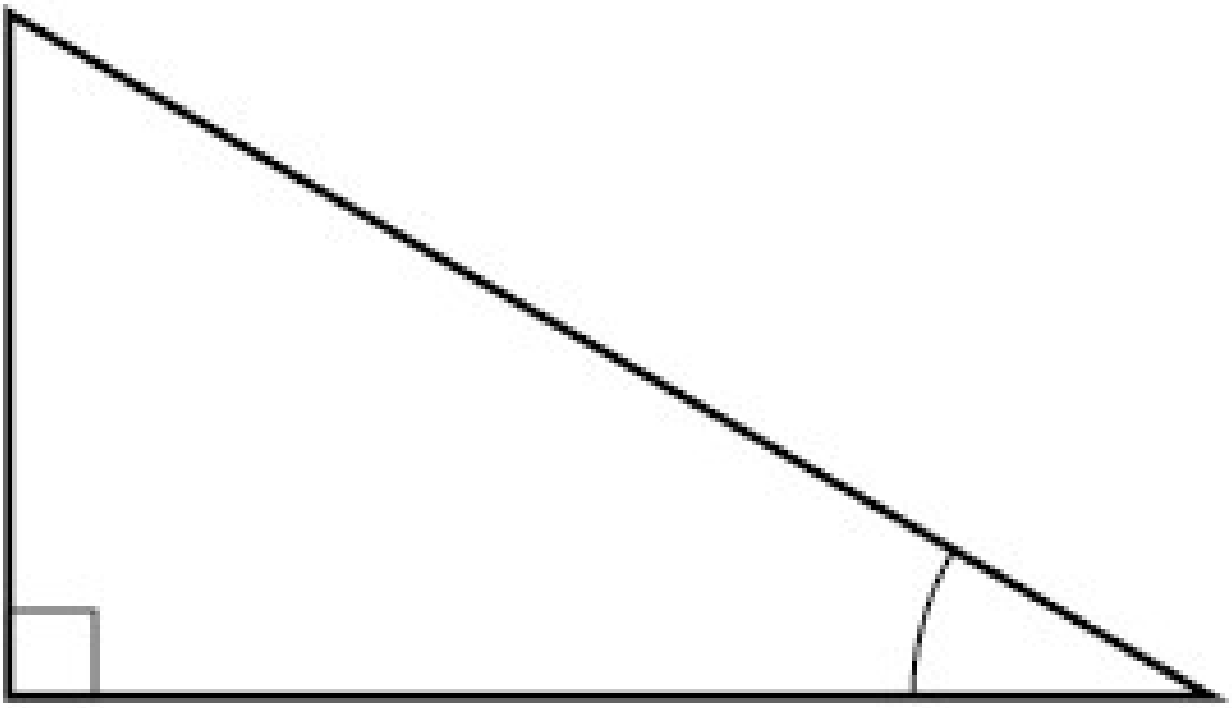
Á þessum vefsíðum eru fleiri skýringar og æfingar í hornareikningi rétthyrndra þríhyrninga.

- Hornaföll reiknuð með reiknivél
- Hornaföll fundin með rétthyrndum þríhyrningi
- Hornaföll tengd hliðum rétthyrnds þríhyrnings
- Hornaföllin sex fundin út frá þríhyrningi
- Lengd hliðar í rétthyrndum þríhyrningi fundin

5.4 Verkefni kaflahlutans

Munnleg verkefni

1. Merkið aðlægu hliðina, mótlægu hliðina og langhliðina í rétthyrnda þríhyrningnum miðað við merkta hornið.



2. Þegar rétthyrndum þríhyrningi með langhliðina 1 er komið fyrir í einingarhringnum, hvaða hliðar þríhyrningsins samsvara x- og y-hnitunum?

3. Hvaða hliðar rétthyrnds þríhyrnings ber tangens horns saman?

4. Hvert er samband hvössu hornanna tveggja í rétthyrndum þríhyrningi?

5. Útskýrið samsemd hornafalla fyllihorna.

Algebruverkefni

Notið hornaföll fyllihorna í eftirfarandi verkefnum.

6.

$$\cos(34°) = \sin(__°)$$

7.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin(___)$$

8.

$$csc(21°)=sec(___°)$$

9.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cot(__)$$

Finnið hliðarlengdirnar sem vantar í eftirfarandi verkefnum. Hliðin a er á móti horninu A, hliðin b er á móti horninu B, og hliðin c er langhliðin.

10.

$$\cos B=\frac{4}{5}, a=10$$

11.

$$\sin B=\frac{1}{2}, a=20$$

12.

$$\tan A=\frac{5}{12}, b=6$$

13.

$$\tan A=100, b=100$$

14.

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{3}}, a=2$$

15.

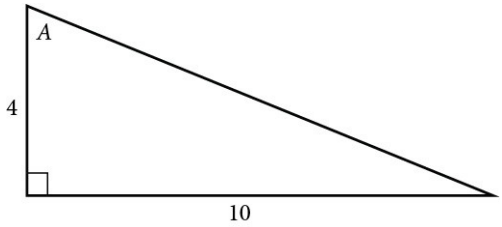
$$a=5, \measuredangle A=60^{\circ}$$

16.

$$c=12, \measuredangle A=45^{\circ}$$

Myndræn verkefni

Notið mynd 14 í eftirfarandi verkefnum til að finna gildi hvers hornafalls fyrir hornið A.



Mynd 14. Rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðar af lengd 4 og 10.

17.

$$\sin A$$

18.

$$\cos A$$

19.

$$\tan A$$

20.

$$csc\ A$$

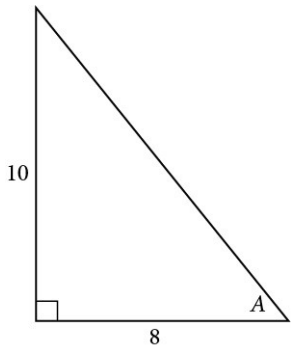
21.

$$sec\ A$$

22.

$$\cot A$$

Notið mynd 15 í eftirfarandi æfingum til að finna gildi hvers hornafalls fyrir hornið A.



Mynd 15. Rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðar af lengd 10 og 8.

23.

$$\sin A$$

24.

$\cos A$

25.

$\tan A$

26.

$\csc A$

27.

$\sec A$

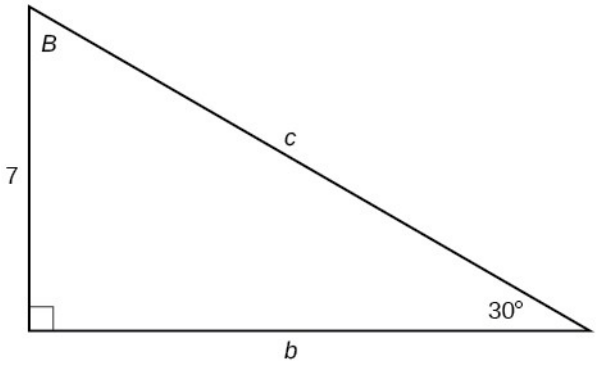
28.

$\cot A$

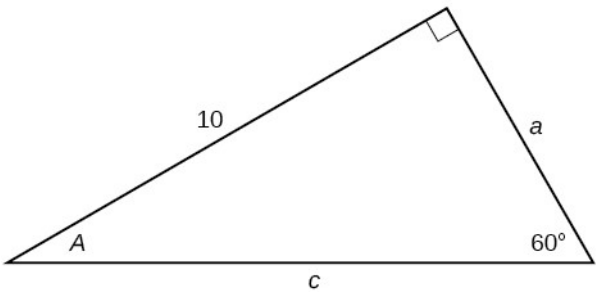
5

Finnið óþekktu hliðarnar í gefna þríhyrningnum í eftirfarandi verkefnum.

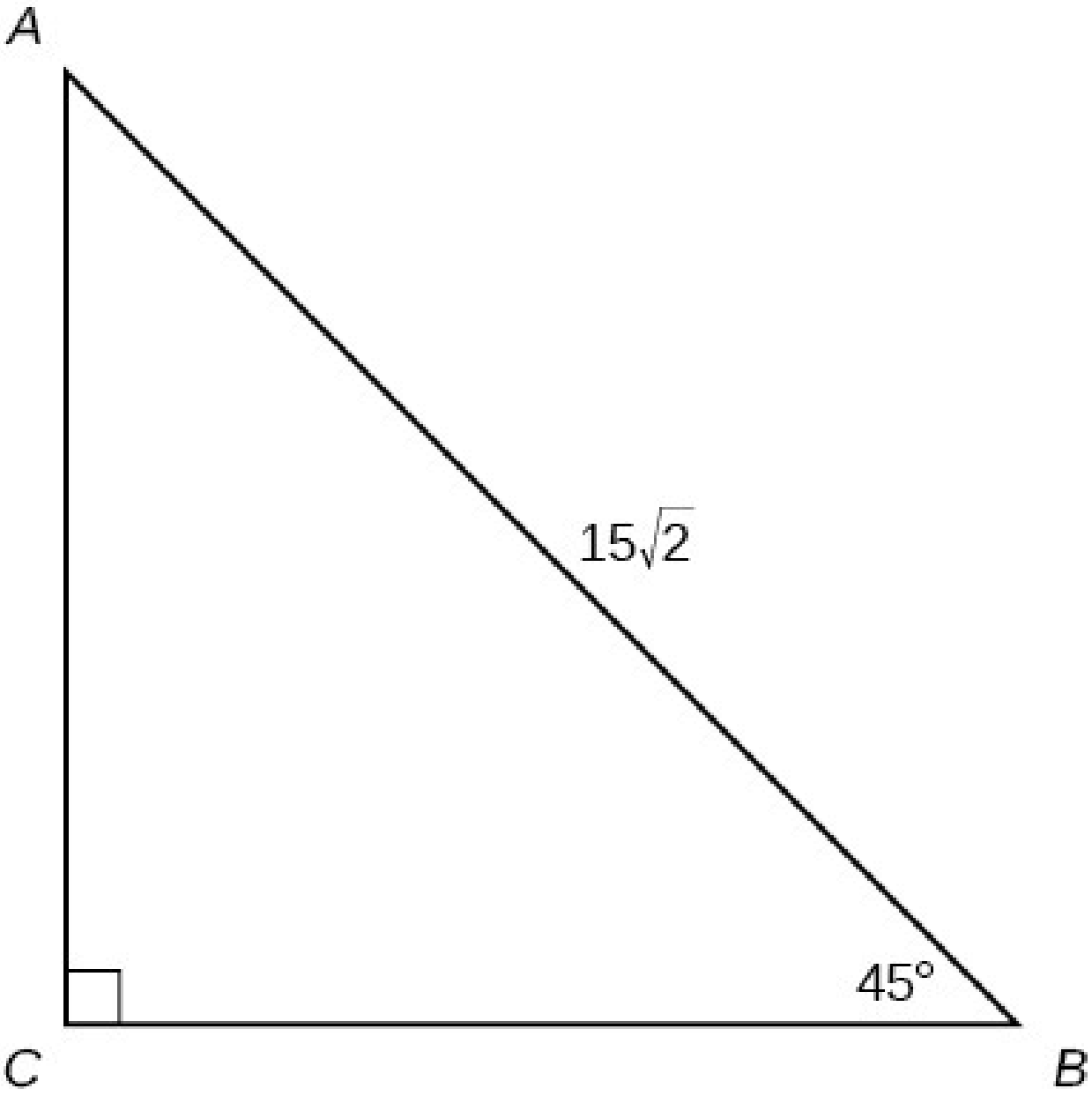
29.



30.



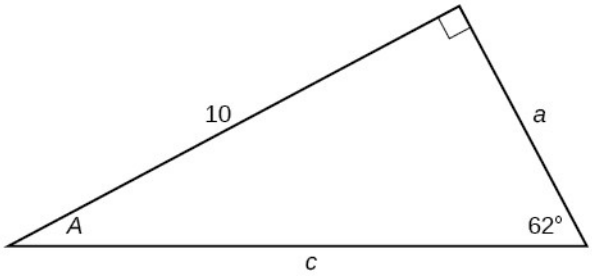
31.



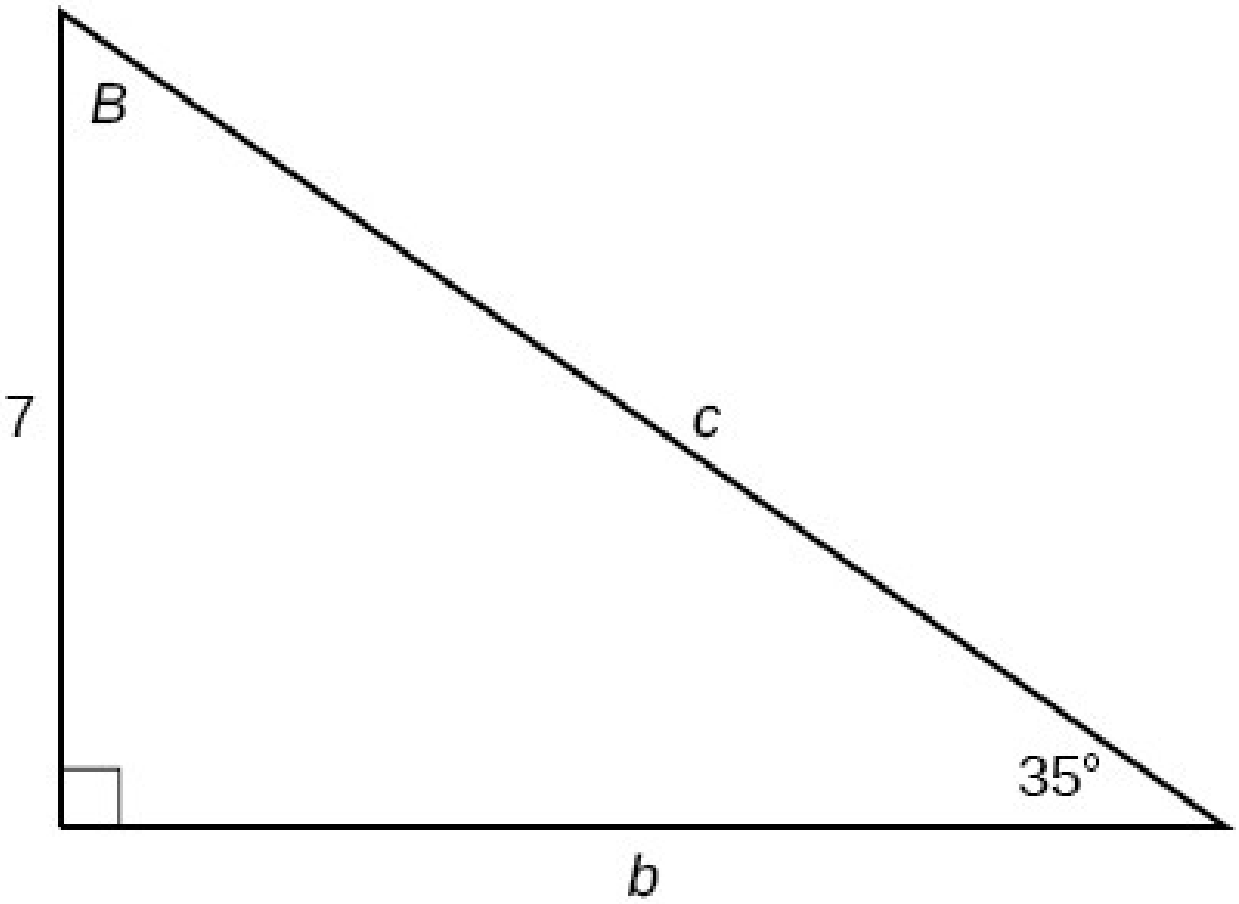
Tækni

Notið reiknivél í eftirfarandi verkefnum til að finna lengd hverrar hliðar með fjórum aukastöfum.

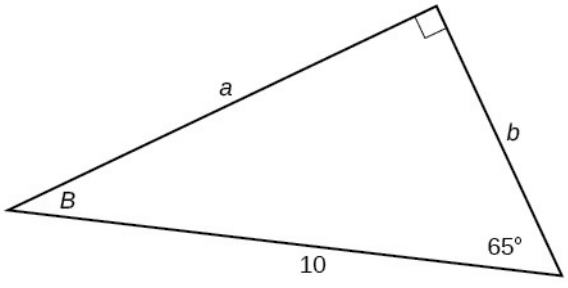
32.



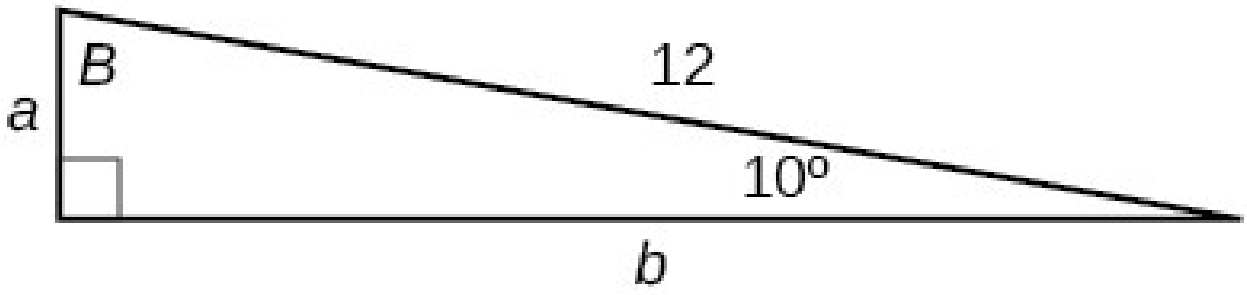
33.



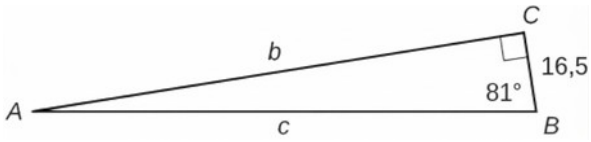
34.



35.



36.



37.

$$b=15\,,\measuredangle B=15^\circ$$

38.

$$c=200\,,\measuredangle B=5^\circ$$

39.

$$c=50\,,\measuredangle B=21^\circ$$

40.

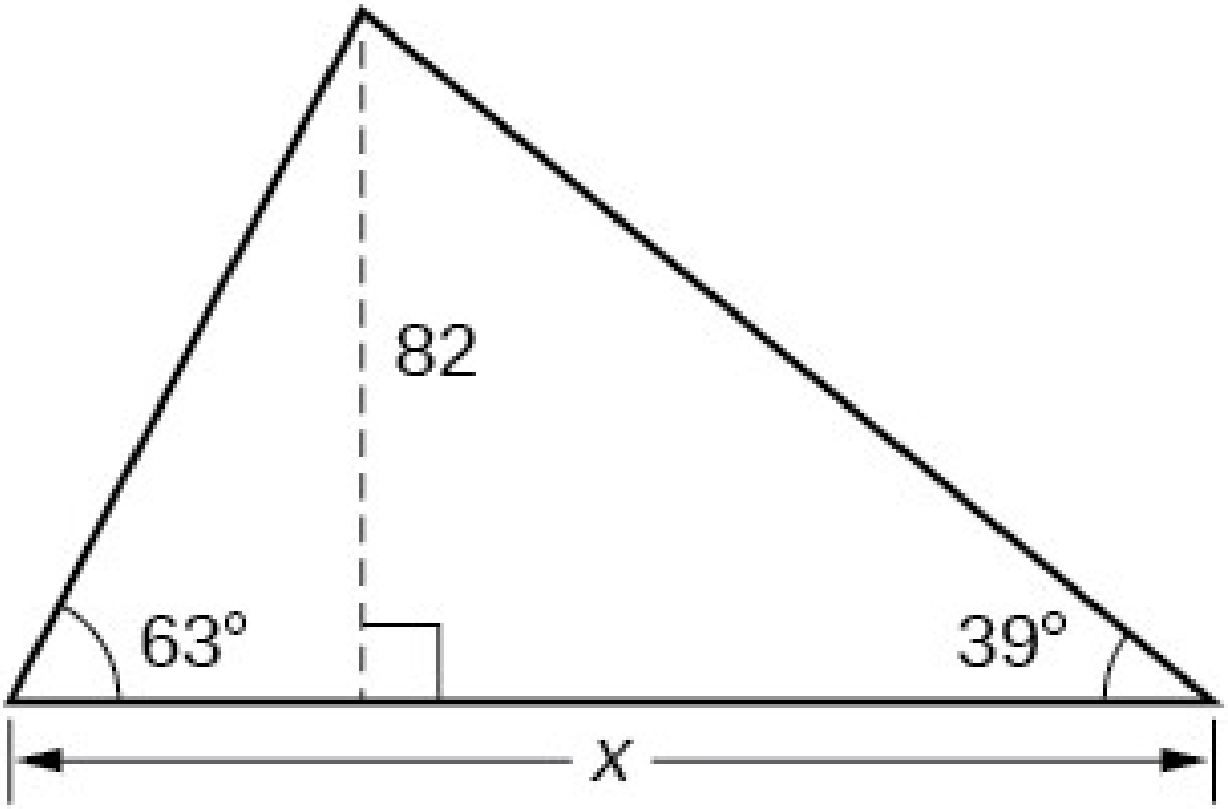
$$a=30\,,\measuredangle A=27^\circ$$

41.

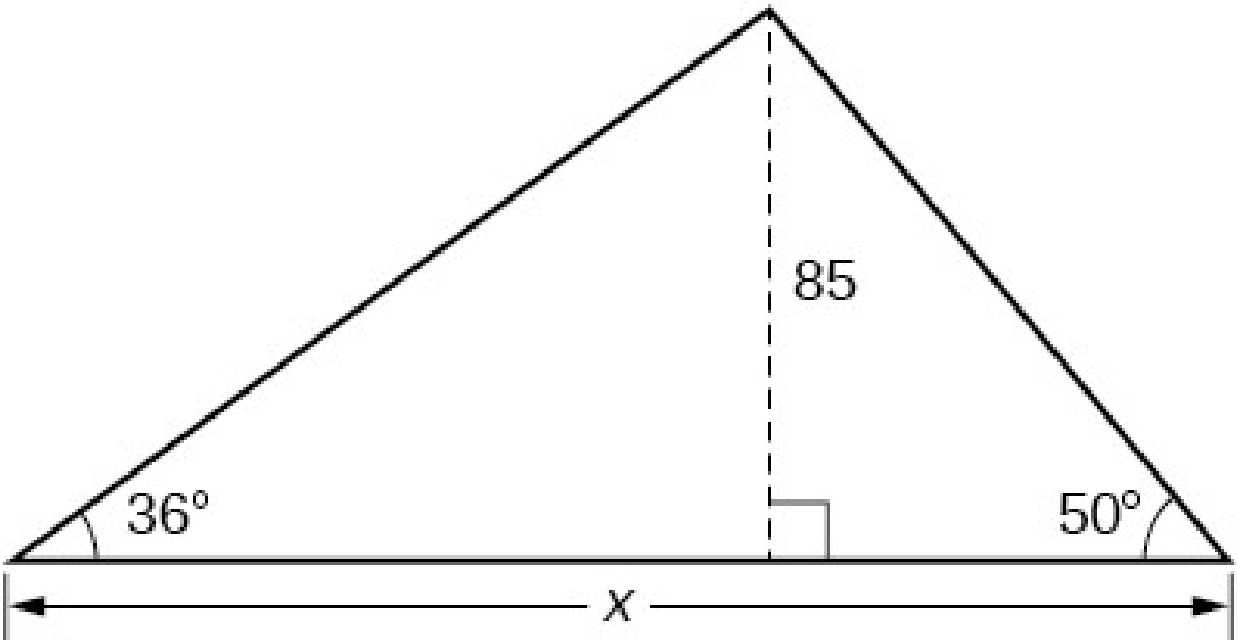
$$b=3{,}5\,,\quad \measuredangle A=78^\circ$$

Viðbótarverkefni

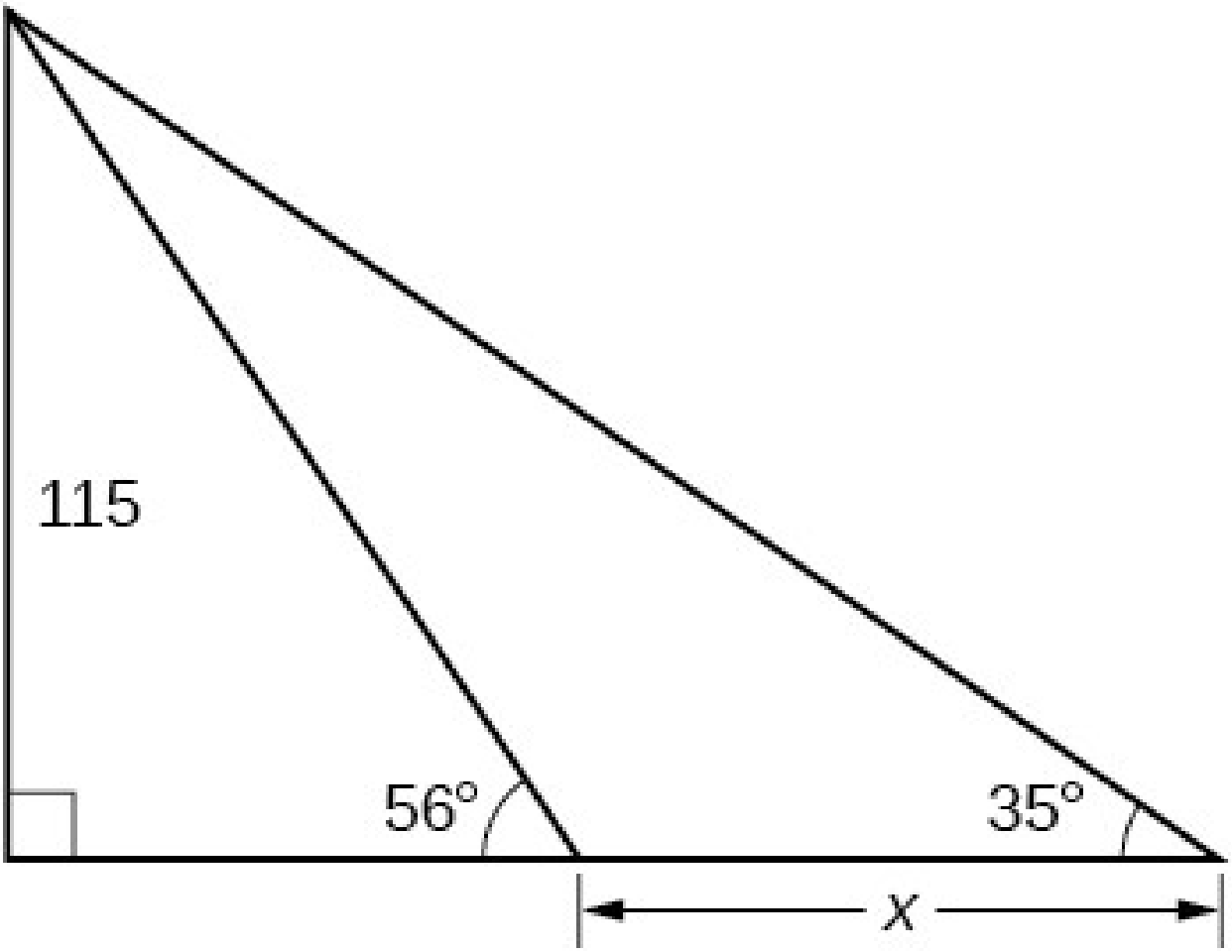
42. Finnið x.



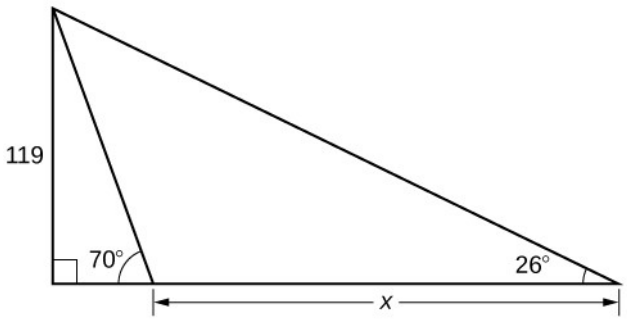
43. Finnið x.



44. Finnið x.



45. Finnið x.



46. Fjarskiptamastur er 400 fet frá byggingu. Frá glugga í byggingunni mælist háhornið að toppi mastursins 36°, og lághornið að undirstöðu þess 23°. Hversu hátt er mastrið?

47. Fjarskiptamastur er 325 fet frá byggingu. Frá glugga í byggingunni mælist háhornið að toppi mastursins 43°, og lághornið að undirstöðu þess 31°. Hversu hátt er mastrið?

48. Minnisvarði er 200 fet á hæð. Frá glugga í byggingu mælist háhornið að toppi hans 15°, og lághornið að undirstöðu hans 2°. Hver er lárétta fjarlægðin frá manneskjunni við gluggann að minnisvarðanum?

49. Minnisvarði er 400 fet á hæð. Frá glugga í byggingu mælist háhornið að toppi hans 18°, og lághornið að undirstöðu hans 3°. Hver er lárétta fjarlægðin frá manneskjunni við gluggann að minnisvarðanum?

50. Loftnet er á þaki byggingar. Frá stað sem er 300 fet frá undirstöðu byggingarinnar mælist háhornið að þaki hennar 40°. Frá sama stað mælist háhornið að toppi loftnetsins 43°. Finnið hæð loftnetsins.

51. Eldingavari er á þaki byggingar. Frá stað sem er 500 fet frá undirstöðu byggingarinnar mælist háhornið að þaki hennar 36°. Frá sama stað mælist háhornið að toppi eldingavarans 38°. Finnið hæð eldingavarans.

Hagnýt verkefni

52. 33 feta langur stigi hallar að byggingu þannig að hornið milli jarðarinnar og stigans er 80°. Hversu hátt upp eftir byggingunni nær stiginn?

53. 23 feta langur stigi hallar að byggingu þannig að hornið milli jarðarinnar og stigans er 80°. Hversu hátt upp eftir byggingunni nær stiginn?

54. Frá stað sem er 1 mílu frá undirstöðu byggingar í New York mælist háhornið frá jörðu að toppi hennar 9 gráður. Notið upplýsingarnar til að finna hæð byggingarinnar.

55. Frá stað sem er 2 mílur frá undirstöðu byggingar í Seattle mælist háhornið frá jörðu að toppi hennar 2 gráður. Notið upplýsingarnar til að finna hæð byggingarinnar.

56. Gerum ráð fyrir að risarauðviður sem er 370 fet á hæð vaxi lóðrétt. Ef ég geng ákveðna vegalengd frá trénu og mæli háhornið að trjátoppinum 60°, hversu langt er ég þá frá stofni trésins?

Lykilhugtök

aðlæg skammhlið
hliðin milli tiltekins hvass horns og rétta hornsins í rétthyrndum þríhyrningi

horn
sammengi tveggja geisla með sameiginlegan endapunkt

lághorn
hornið milli láréttrar línu um auga áhorfandans og sjónlínunnar að hlut sem er neðar en augað

háhorn
hornið milli láréttrar línu um auga áhorfandans og sjónlínunnar að hlut sem er ofar en augað

hornhraði
hornið sem hlutur á snúningi fer um á tímaeiningu

bogalengd
lengd ferilsins sem bogi myndar

flatarmál hringgeira
flatarmál þess hluta hrings sem afmarkast af tveimur geislum og boganum milli þeirra; það fæst með því að margfalda flatarmál alls hringsins með $\frac{\theta}{2\pi}$, þar sem θ er miðhornið í radíönum

kósekans
margföldunarandhverfa sínusgildisins; á einingarhringnum gildir $csc\, t = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$

kósínusfall
x-hnit punktsins á einingarhring sem samsvarar tilteknu horni

kótangens
hlutfall kósínuss og sínuss; á einingarhringnum gildir $\cot t = \frac{x}{y}$, $y \neq 0$. Kótangens er einnig margföldunarandhverfa tangensgildisins þegar tangens er skilgreindur og ekki núll

horn með sama lokaarm
horn í staðalstöðu sem hafa sama lokaarm; þau geta verið jákvæð eða neikvæð

gráða
mælieining horns; þegar heilum snúningi er skipt í 360 jafna hluta er hver hluti ein gráða

langhlið
hlið rétthyrnds þríhyrnings sem liggur á móti rétta horninu

samsemdir
fullyrðingar sem eru sannar fyrir öll gildi viðfangsins þar sem þær eru skilgreindar

upphafsarmur
armur hornsins sem snúningurinn hefst frá

línulegur hraði
vegalengdin sem hlutur á snúningi fer eftir hringbraut á tímaeiningu; hún er mæld með bogalengd

hornamál
mælikvarði á snúninginn frá upphafsarminum að lokaarminum

neikvætt horn
horn í staðalstöðu sem er mælt réttsælis frá jákvæða hluta x-ássins

mótlæg skammhlið
hliðin á móti tilteknu hvössu horni í rétthyrndum þríhyrningi

lota

minnsta jákvæða talan P þannig að fyrir lotubundið fall f gildir $f(x+P)=f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi þess

jákvætt horn

horn í staðalstöðu sem er mælt rangsælis frá jákvæða hluta x-ássins

Pýþagórasarsamsemd

afleiðing Pýþagórasarreglunnar sem segir að annað veldi kósínuss tiltekins horns að viðbættu öðru veldi sínuss sama horns sé jafnt 1

áshorn

horn í staðalstöðu þar sem lokaarmurinn liggur á hnitás

radíani

hornamál miðhorns sem spannar boga með sömu lengd og geisli hringsins

5

radíanamál

hlutfall bogalengdarinnar sem horn spannar og geisla hringsins

geisli

sá hluti línu sem hefst í tilteknum punkti og nær óendanlega langt í aðra áttina; annar armur horns

viðmiðunarhorn

hvassa hornið milli lokaarms horns í staðalstöðu og x-ássins, þegar lokaarmurinn liggur ekki á hnitás

sekans

margföldunarandhverfa kósínusgildisins; á einingarhringnum gildir $sec\, t=\frac{1}{x}, x\neq 0$

sínusfall

y-hnit punktsins á einingarhring sem samsvarar tilteknu horni

staðalstaða

staða horns þar sem oddpunkturinn er í upphafspunkti hnitakerfisins og upphafsarmurinn liggur eftir jákvæða hluta x-ássins

tangens

hlutfall sínuss og kósínuss; á einingarhringnum gildir $\tan t=\frac{y}{x}, x\neq 0$

lokaarmur

armur hornsins þar sem snúningnum lýkur

einingarhringur

hringur með miðju í $(0,0)$ og geislann 1

oddpunktur
sameiginlegur endapunktur geislanna tveggja sem mynda horn

Lykiljöfnur

bogalengd	$s = r\,\theta$
flatarmál hringgeira	$A = \frac{1}{2}\theta\, r^2$
hornhraði	$\omega = \frac{\theta}{t}$
línulegur hraði	$v = \frac{s}{t}$
tengsl línulegs hraða og hornhraða	$v = r\,\omega$
Kósínus	$\cos t = x$
Sínus	$\sin t = y$
Pýþagórasarsamsemd	$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
Tangensfall	$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$
Sekansfall	$sec\, t = \frac{1}{\cos t}$
Kósekansfall	$csc\, t = \frac{1}{\sin t}$
Kótangensfall	$\cot t = \frac{1}{\tan t} = \frac{\cos t}{\sin t}$
Samsemdir hornafalla fyllihorna	$\cos\ t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ $\sin\ t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ $\tan\ t = \cot\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ $\cot\ t = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ $\sec\ t = \csc\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ $\csc\ t = \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

Meginatriði

5.1 Horn

- Horn myndast úr sammengi tveggja geisla með því að halda upphafsarminum föstum og snúa lokaarminum. Stærð snúningsins ákvarðar hornamálið.
- Horn er í staðalstöðu ef oddpunktur þess er í upphafspunkti og upphafsarmurinn liggur eftir jákvæða hluta x-ássins. Jákvætt horn er mælt rangsælis frá upphafsarminum en neikvætt horn réttsælis.
- Til að teikna horn í staðalstöðu skal teikna upphafsarminn eftir jákvæða hluta x-ássins og staðsetja síðan lokaarminn samkvæmt þeim hluta úr heilum snúningi sem hornið táknar. Sjá dæmi 1.
- Auk gráða má lýsa hornamáli í radíönum. Sjá dæmi 2.
- Til að breyta milli gráða og radíana má nota hlutfallið $\frac{\theta}{180} = \frac{\theta^R}{\pi}$. Hér er θ hornamálið í gráðum og θ R sama hornamál í radíönum; yfirskriftin R táknar radíana. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Horn í staðalstöðu sem hafa sama lokaarm kallast horn með sama lokaarm.
- Finna má horn með sama lokaarm með því að leggja 360° eða 2π. við hornið eða draga frá því. Sjá dæmi 5 og dæmi 6.
- Horn með sama lokaarm má finna með radíönum á sama hátt og með gráðum. Sjá dæmi 7.
- Lengd hringboga er hluti af ummáli hringsins alls. Sjá dæmi 8.
- Flatarmál hringgeira er hluti af flatarmáli hringsins alls. Sjá dæmi 9.
- Hlutur sem hreyfist eftir hringferli hefur bæði línulegan hraða og hornhraða.
- Hornhraði hlutar sem hreyfist eftir hringferli er hornbreyting hans á tímaeiningu. Sjá dæmi 10.
- Línulegur hraði hlutar sem hreyfist eftir hringferli er vegalengdin sem hann fer á tímaeiningu. Sjá dæmi 11.

5.2 Einingarhringur: sínus- og kósínusföll

- Til að finna fallgildi sínuss og kósínuss er byrjað á að teikna einingarhring með miðju í upphafspunkti og geisla 1 einingu.
- Á einingarhring er sínus hornsins t jafn y-hniti endapunkts boga með stefnda lengd t, með formerki eftir snúningsstefnu. Kósínus hornsins t er jafn x-hniti sama punkts. Hornin eru mæld í radíönum. Sjá dæmi 1.
- Auðveldast er að ákvarða sínus- og kósínusgildi þegar samsvarandi punktur á einingarhringnum liggur á hnitás. Sjá dæmi 2.
- Þegar sínus eða kósínus er þekktur má nota Pýþagórasarsamsemdina til að finna algildi hins. Formerkið ræðst af því í hvaða fjórðungi hornið liggur. Samsemdin nýtist einnig til að finna sínus og kósínus sérhorna. Sjá dæmi 3.

- Reiknivélar og grafhugbúnaður hjálpa til við að finna sínus- og kósínusgildi ef þið kunnið að slá gildin rétt inn. Sjá dæmi 4.
- Skilgreiningarmengi sínus- og kósínusfallanna er mengi allra rauntalna.
- Sínus- og kósínusfallið hafa bæði myndmengið $[-1,1]$.
- Sínus og kósínus horns hafa sömu algildi og samsvarandi gildi viðmiðunarhorns þess.
- Formerki sínuss og kósínuss ráðast af x- og y-hnitunum í fjórðungi upphaflega hornsins.
- Fyrir horn t, í staðalstöðu er viðmiðunarhornið hvassa hornið milli lokaarms hornsins t og x-ássins, þegar lokaarmurinn liggur ekki á hnitás. Sjá dæmi 5.
- Nota má viðmiðunarhorn til að finna sínus og kósínus upphaflega hornsins. Sjá dæmi 6.
- Einnig má nota viðmiðunarhorn til að finna hnit punkts á hring. Sjá dæmi 7.

5.3 Önnur hornaföll

- Tangens horns er hlutfall y-hnits og x-hnits samsvarandi punkts á einingarhringnum, þegar x-hnitið er ekki núll.
- Sekans, kótangens og kósekans tengjast öðrum hornaföllum með margföldunarandhverfum. Sekans er margföldunarandhverfa kósínuss og kósekans margföldunarandhverfa sínuss, þegar nefnarinn er ekki núll. Kótangens er hlutfall kósínuss og sínuss þegar sínus er ekki núll. Hann er einnig margföldunarandhverfa tangens þegar tangens er skilgreindur og ekki núll.
- Finna má gildi hornafallanna sex út frá punkti á einingarhringnum. Sjá dæmi 1.
- Einnig má finna gildi hornafalla út frá horni. Sjá dæmi 2.
- Nota má viðmiðunarhorn til að ákvarða gildi hornafalla fyrir horn utan fyrsta fjórðungs. Sjá dæmi 3.
- Fall kallast jafnstætt ef $f(-x)=f(x)$ og oddstætt ef $f(-x)=-f(x)$. fyrir öll x í skilgreiningarmengi þess. Í báðum tilvikum þarf skilgreiningarmengið að vera samhverft um núll.
- Kósínus og sekans eru jafnstæð föll; sínus, tangens, kósekans og kótangens eru oddstæð föll.
- Nota má eiginleika jafnstæðra og oddstæðra falla til að reikna gildi hornafalla. Sjá dæmi 4.
- Með Pýþagórasarsamsemdinni má finna algildi kósínuss út frá sínus eða algildi sínuss út frá kósínus. Formerkið ræðst af því í hvaða fjórðungi hornið liggur.
- Nota má samsemdir til að reikna gildi hornafalla. Sjá dæmi 5 og dæmi 6.
- Umrita má grundvallarsamsemdir, svo sem Pýþagórasarsamsemdina, með algebruaðgerðum til að mynda nýjar samsemdir. Sjá dæmi 7.
- Hornaföllin endurtaka sig með reglulegu millibili.
- Lota P lotubundins falls f er minnsta jákvæða talan þannig að $f(x+P)=f(x)$ fyrir sérhvert x. í skilgreiningarmengi fallsins.
- Finna má gildi hornafalla sérhorna með stærðfræðilegri greiningu.

- Nota má reiknivél eða tölvuhugbúnað til að reikna gildi hornafalla annarra horna. Sjá dæmi 10.

5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga

- Skilgreina má hornaföll hvass horns sem hlutföll hliðarlengda rétthyrnds þríhyrnings. Sjá dæmi 1.
- Nota má sömu hliðarlengdir til að reikna gildi hornafalla hvors hvassa horns rétthyrnds þríhyrnings. Sjá dæmi 2.
- Reikna má gildi hornafalla sérhorna ef við þekkjum hliðarlengdir þríhyrninganna sem þau koma fyrir í. Sjá dæmi 3.
- Hvaða tvö hvöss fyllihorn sem er geta verið hvössu hornin tvö í rétthyrndum þríhyrningi.
- Ef tvö horn eru fyllihorn segja samsemdir samsvarandi hornafalla að sínus annars sé jafn kósínus hins og öfugt. Sjá dæmi 4.
- Nota má hornaföll horns til að finna óþekktar hliðarlengdir.
- Veljið hornafall sem tengir óþekktu hliðarlengdina við þá þekktu, hvort sem óþekkta lengdin er í teljara eða nefnara hlutfallsins. Sjá dæmi 5.
- Með hornareikningi rétthyrndra þríhyrninga má mæla hæðir og fjarlægðir sem ekki er hægt að mæla beint.
- Finna má óþekkta hæð eða fjarlægð með því að mynda rétthyrndan þríhyrning þar sem hún er ein hliðarlengdin en önnur hliðarlengd og eitt hvasst horn eru þekkt. Sjá dæmi 6.

5

Yfirlitsverkefni

Horn

Breytið hornamálunum í gráður í eftirfarandi verkefnum.

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $-\frac{5\pi}{3}$

Breytið hornamálunum í radíana í eftirfarandi verkefnum.

3. -210°
4. 180°
5. Finnið lengd boga í hring með geislann 7 metra sem miðhornið 85° spannar.

6. Finnið flatarmál hringgeira í hring með þvermálið 32 fet og miðhornið ($\frac{3\pi}{5}$) radíana.

Finnið í eftirfarandi verkefnum horn milli 0° og 360° sem hefur sama lokaarm og gefna hornið.

7.

$$420^\circ$$

8.

$$-80^\circ$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum horn í radíönum milli 0 og 2π sem hefur sama lokaarm og gefna hornið.

9.

$$-\frac{20\pi}{11}$$

10.

$$\frac{14\pi}{5}$$

Teiknið gefna hornið í staðalstöðu í kartesísku hnitakerfi í eftirfarandi verkefnum.

11. -210°

12. 75°

13.

$$\frac{5\pi}{4}$$

14.

$$-\frac{\pi}{3}$$

15. Finnið línulegan hraða punkts á miðbaug jarðar ef geisli jarðar er 3.960 mílur og hún snýst um möndul sinn á 24 klukkustundum. Gefið svarið í mílum á klukkustund.

16. Bílhjól með þvermálið 18 tommur snýst 10 snúninga á sekúndu. Hver er hraði bílsins í mílum á klukkustund? Gerið ráð fyrir að hjólið velti án þess að renna.

Einingarhringur: sínus- og kósínusföll

17. Finnið nákvæmt gildi $\sin\frac{\pi}{3}$.

18. Finnið nákvæmt gildi $\cos\frac{\pi}{4}$.

19. Finnið nákvæmt gildi $\cos \pi$.

20. Tilgreinið viðmiðunarhornið fyrir 300°.

21. Tilgreinið viðmiðunarhornið fyrir $\frac{3\pi}{4}$.

22. Reiknið kósínus hornsins 330°.

23. Reiknið sínus hornsins $\frac{5\pi}{4}$.

24. Tilgreinið skilgreiningarmengi sínus- og kósínusfallanna.

25. Tilgreinið myndmengi sínus- og kósínusfallanna.

Önnur hornaföll

Finnið nákvæmt gildi gefinnar stæðu í eftirfarandi verkefnum.

5

26.

$$\cos \frac{\pi}{6}$$

27.

$$\tan \frac{\pi}{4}$$

28.

$$csc \frac{\pi}{3}$$

29.

$$sec \frac{\pi}{4}$$

Notið viðmiðunarhorn til að reikna gildi gefinnar stæðu í eftirfarandi verkefnum.

30.

$$sec \frac{11\pi}{3}$$

31.

$$sec\, 315^\circ$$

32. Ef $sec\,(t) = -2{,}5$, hvert er þá gildi $\sec(-t)$?

33. Ef $\tan\,(t) = -0{,}6$ hvert er þá gildi $\tan(-t)$?

34. Ef $\tan(t) = \frac{1}{3}$, finnið $\tan(t - \pi)$.

35. Ef $\cos(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, finnið gildi $\sin(t+2\pi)$. Tvær lausnir koma til greina.

36. Hvaða hornaföll eru jafnstæð?

37. Hvaða hornaföll eru oddstæð?

Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga

Notið hliðarlengdir rétthyrndra þríhyrninga til að reikna gildi hornafalla í eftirfarandi verkefnum. Í verkefnum með eyðu eigið þið að finna horn sem fullnægir samsemdinni.

38.

$$\cos\frac{\pi}{4}$$

39.

$$\cot\frac{\pi}{3}$$

40.

$$\tan\frac{\pi}{6}$$

41.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin(__^\circ)$$

42.

$$csc(18^\circ)=sec(__^\circ)$$

Notið gefnar upplýsingar til að finna lengdir hinna hliðanna tveggja í rétthyrnda þríhyrningnum í eftirfarandi verkefnum. Notið hefðbundnar merkingar: C er rétta hornið og hliðarnar a, b og c liggja á móti hornunum A, B og C.

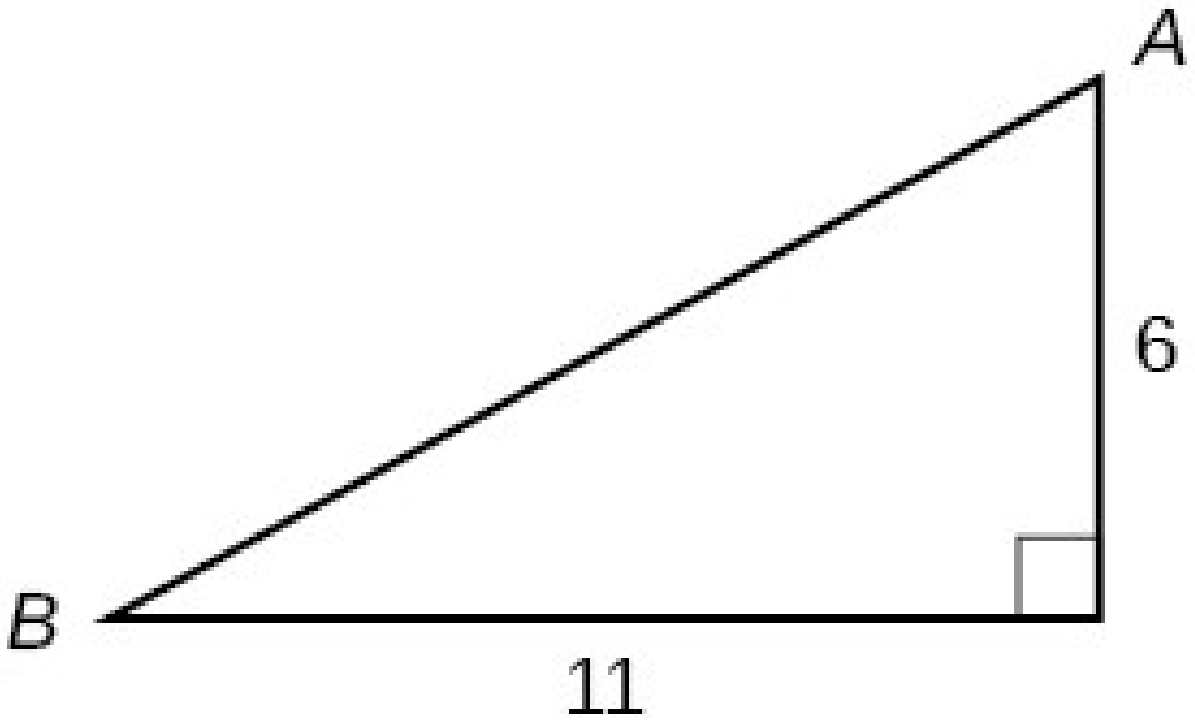
43.

$$\cos B=\frac{3}{5}, a=6$$

44.

$$\tan A=\frac{5}{9}, b=6$$

Notið mynd 1 til að reikna gildi hvers hornafalls í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 1 Rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðar 11 og 6 og hornpunkta A og B.

45.

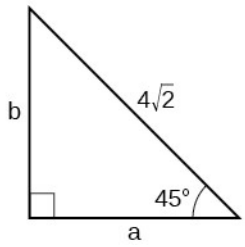
$$\sin A$$

46.

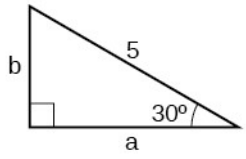
$$\tan B$$

Finnið óþekktu hliðarnar í gefna þríhyrningnum í eftirfarandi verkefnum.

47.



48.



49. 15 feta langur stigi hallar að byggingu þannig að hornið milli jarðarinnar og stigans er 70°. Hversu hátt upp eftir byggingunni nær stiginn?

50. Frá stað á jörðu, 1 mílu frá undirstöðu byggingar í Baltimore, mælist háhornið upp á topp byggingarinnar 4 gráður. Notið upplýsingarnar til að finna hæð byggingarinnar.

Æfingapróf

1. Breytið $(\frac{5\pi}{6})$ radíönum í gráður.

2. Breytið -620° í radíana.

3. Finnið lengd boga í hring með geislann 12 sentímetra sem miðhornið 30°. spannar.

4. Finnið flatarmál hringgeira með geislann 8 fet og miðhornið $(\frac{5\pi}{4})$ radíana.

5. Finnið hornið milli 0° og 360° sem hefur sama lokaarm og 375°.

6. Finnið hornið í radíönum milli 0 og 2π sem hefur sama lokaarm og $-\frac{4\pi}{7}$.

7. Teiknið hornið 315° í staðalstöðu í kartesísku hnitakerfi.

8. Teiknið hornið $-\frac{\pi}{6}$ í staðalstöðu í kartesísku hnitakerfi.

9. Á skemmtisvæði er parísarhjól með þvermálið 80 fet. Það tekur hjólið 75 sekúndur að fara einn hring. Hver er línulegur hraði punkts á jaðri hjólsins í fetum á sekúndu? Hver er hornhraðinn í radíönum á sekúndu? Gerið ráð fyrir jöfnum snúningshraða.

10. Finnið nákvæmt gildi $\sin\frac{\pi}{6}$.

11. Reiknið sínus hornsins 240°.

12. Tilgreinið skilgreiningarmengi sínus- og kósínusfallanna.

13. Tilgreinið myndmengi sínus- og kósínusfallanna.

14. Finnið nákvæmt gildi $\cot\frac{\pi}{4}$.

15. Finnið nákvæmt gildi $\tan\frac{\pi}{3}$.

16. Notið viðmiðunarhorn til að reikna gildi $csc\frac{7\pi}{4}$.

17. Notið viðmiðunarhorn til að reikna gildi $\tan 210^\circ$.

18. Ef $\csc\ t = 1{,}68$ hvert er þá gildi $\csc(-t)$?

19. Ef $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, finnið $\cos(t - 2\pi)$.

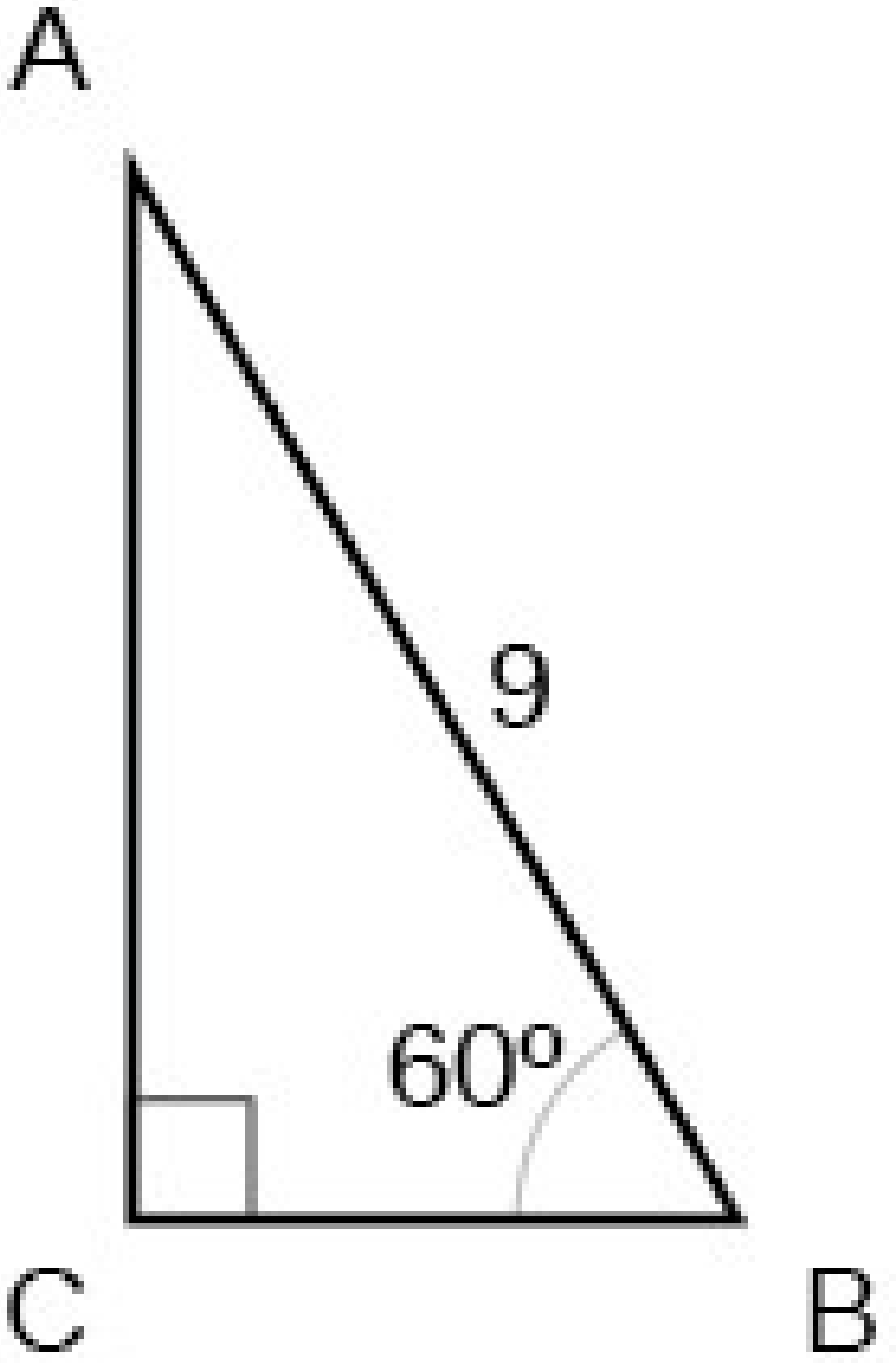
20. Hvaða hornaföll eru jafnstæð?

21. Finnið hornið sem vantar: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin(___)$

22. Finnið hliðarlengdirnar sem vantar í rétthyrnda þríhyrningnum ABC: $\sin B = \frac{3}{4}$, $c = 12$.

Notið hefðbundnar merkingar: C er rétta hornið og hliðarnar a, b og c liggja á móti hornunum A, B og C.

23. Finnið óþekktu hliðarlengdirnar í þríhyrningnum.



24. Frá stað á jörðu, 2.000 fet frá undirstöðu byggingar í Chicago, mælist háhornið að toppi byggingarinnar 9 gráður. Notið upplýsingarnar til að finna hæð byggingarinnar. Gerið ráð fyrir að fjarlægðin að byggingunni sé lárétt.

6. KAFLI

Lotubundin föll



Dögunin litar himininn yfir Olare Motorgi-friðlandinu við Masai Mara-friðlandið í Kenía. (Mynd: Aðlöguð útgáfa af „KenyaLive_Day_#02“ eftir Make it Kenya/flickr.)

Efnisyfirlit kaflans

- 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
- 6.2 Gröf annarra hornafalla
- 6.3 Andhverf hornaföll

Inngangur að lotubundnum föllum

Sólin hefur gegnt lykilhlutverki í mörgum trúarbrögðum. Í fornegypskri menningu var sólarguðinn Ra, stundum nefndur Re, sagður fara daglega í tvískipta ferð: um himininn að degi til og um undirheima að næturlagi. Surya, sólarguð hindúa, fer svipaða leið um himininn á vagni sem sjö hestar draga. Þótt þeir eigi ólíkan uppruna og frásagnirnar af þeim séu ólíkar eru bæði Ra og Surya meðal helstu guða sinna trúarbragða og taldir skapa og viðhalda lífi. Í mörgum menningarheimum frumbyggja Norður-Ameríku er sólin mikilvæg í andlegu lífi og

trúariðkun án þess að vera alltaf talin guð. Sólardansinn, sem margir ættbálkar frumbyggja iðka með ólíkum hætti, var yfirleitt athöfn þar sem sólinni var sýnd virðing. Oft reyndi athöfnin jafnframt á styrk þátttakenda eða var leið til að sýna hann.

Sólin er eitt mest áberandi náttúrufyrirbæri sem við sjáum og er forsenda lífs á jörðinni. Því er skiljanlegt að fólk hafi tilbeðið hana. Reglubundin sýndarhreyfing hennar varð einnig snemma helsta viðmið manna við tímamælingar. Víðast hvar rís sólin daglega í austlægri átt, nær hæstu stöðu sinni yfir sjóndeildarhring og sest í vestlægri átt. Miðbaugur himins er ímyndaður hringur á himinkúlunni, beint yfir miðbaugi jarðar. Hann skiptir himinkúlunni í norður- og suðurhvel, líkt og miðbaugur jarðar skiptir jörðinni í tvo helminga. Sýndarbraut sólarinnar fer eftir því hvar athugandinn er staddur á jörðinni, en frá hverjum stað sést reglubundið mynstur sem má segja fyrir um.

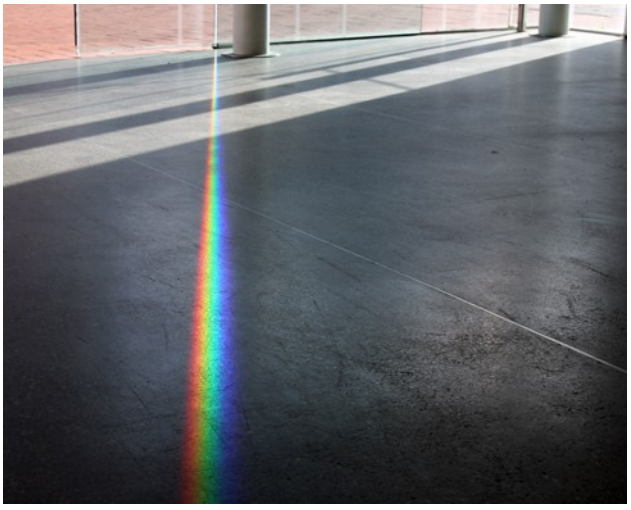
Sýndarhreyfingu sólarinnar yfir árið má lýsa með lotubundnu falli. Með því að teikna graf slíks falls getum við betur áttað okkur á eiginleikum þess. Í þessum kafla skoðum við gröf sínus-, kósínus- og annarra hornafalla.

6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla

NÁMSMARKMIÐ

Að loknum þessum hluta átt þú að geta:

- Gröf afbrigða $y=\sin(x)$ og $y=\cos(x)$ teiknuð
- Nota fasahliðranir sínus- og kósínusferla.



Mynd 1 Greina má ljós í liti vegna bylgjueiginleika þess. (Mynd: „wonderferret"/Flickr)

Hvítt ljós, til dæmis sólarljós, er samsett úr mörgum bylgjulengdum sýnilegs ljóss. Þegar það fer í gegnum ljósfræðilegt prisma brotna bylgjurnar mismikið eftir bylgjulengd. Þannig má greina ljósið í liti litrófsins.

Tákna má ljósbylgjur myndrænt með sínusfallinu. Í kaflanum um hornaföll kynntumst við meðal annars sínusfallinu. Í þessum hluta túlkum við og teiknum gröf sínus- og kósínusfalla.

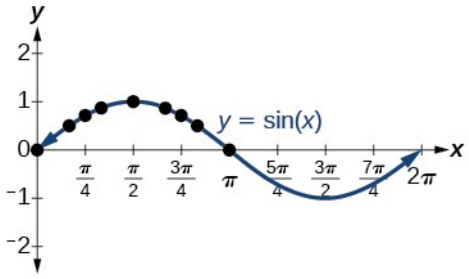
Gröf sínus- og kósínusfalla teiknuð

Munið að sínus- og kósínusföllin tengja rauntölugildi við x- og y-hnit punkts á einingarhringnum. Hvernig líta þau þá út á grafi í hnitakerfi? Byrjum á sínusfallinu. Við getum gert gildatöflu og notað hana til að skissa graf. Tafla 1 sýnir nokkur gildi sínusfallsins á einingarhring.

Tafla 1

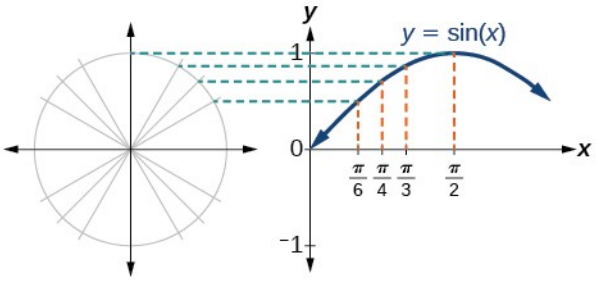
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ef við teiknum punktana úr töflunni og höldum áfram eftir x-ásnum kemur lögun sínusfallsins í ljós. Sjá mynd 2.



Mynd 2 Sínusfallið

Takið eftir að sínusgildin eru jákvæð milli 0 og π, sem samsvarar gildum sínusfallsins í I. og II. fjórðungi einingarhringsins, en neikvæð milli π og 2π, sem samsvarar gildum þess í III. og IV. fjórðungi. Sjá mynd 3.



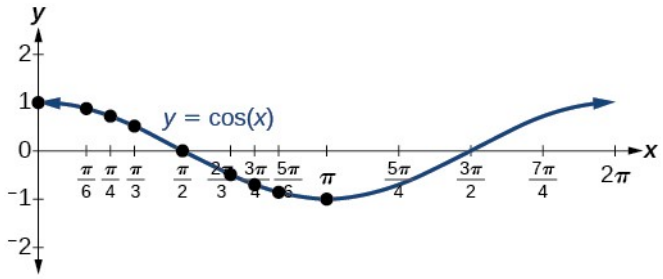
Mynd 3 Gildi sínusfallsins teiknuð

Skoðum nú kósínusfallið á svipaðan hátt. Aftur getum við gert gildatöflu og notað hana til að skissa graf. Tafla 2 sýnir nokkur gildi kósínusfallsins á einingarhring.

Tafla 2

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

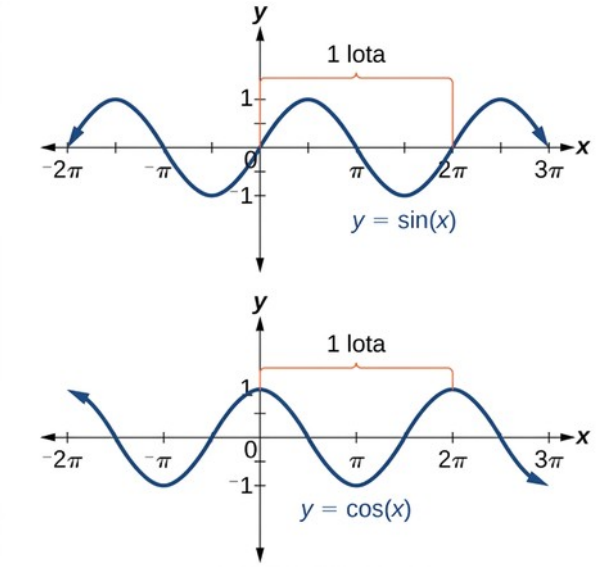
Líkt og fyrir sínusfallið getum við teiknað punkta og myndað graf kósínusfallsins, eins og sýnt er á mynd 4.



Mynd 4 Kósínusfallið

Reikna má sínus og kósínus hvaða rauntölu sem er og því eru bæði föllin skilgreind fyrir allar rauntölur. Þegar litið er á sínus- og kósínusgildin sem hnit punkta á einingarhring sést að myndmengi beggja falla verður að vera bilið $[-1,1]$.

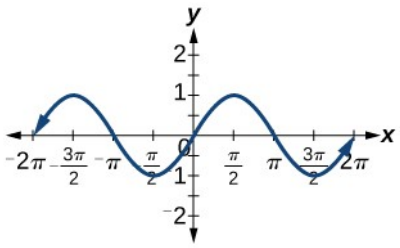
Í báðum gröfum endurtekur lögunin sig eftir 2π, sem þýðir að föllin eru lotubundin með lotuna 2π. Lotubundið fall er fall þar sem tiltekin lárétt hliðrun, P, gefur fall sem er jafnt upphaflega fallinu: $f(x+P)=f(x)$ fyrir öll gildi x í skilgreiningarmengi f. Þegar þetta gildir köllum við minnstu slíku láréttu hliðrunina með $P>0$ lotu fallsins. Mynd 5 sýnir nokkrar lotur sínus- og kósínusfallanna.



Mynd 5. Lotan 2π á gröfum sínus- og kósínusfallsins.

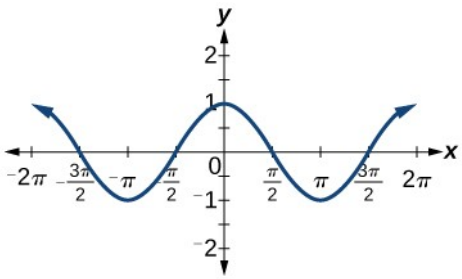
6

Þegar sínus- og kósínusföllin eru aftur skoðuð á skilgreiningarmengi með miðju á y-ásnum koma samhverfur þeirra í ljós. Eins og sést á mynd 6 er sínusfallið punktsamhverft um upphafspunktinn. Í kaflanum Önnur hornaföll sáum við á einingarhringnum að sínusfallið er oddstætt, því $\sin(-x) = -\sin x$. Nú sést þessi eiginleiki skýrt á grafinu.



Mynd 6 Oddstæð samhverfa sínusfallsins

Mynd 7 sýnir að kósínusfallið er samhverft um y-ásinn. Áður kom fram að kósínusfallið er jafnstætt. Nú sést á grafinu að $\cos(-x) = \cos x$.



Mynd 7 Jafnstæð samhverfa kósínusfallsins

EINKENNI SÍNUS- OG KÓSÍNUSFALLA

Sínus- og kósínusföllin hafa nokkur greinileg einkenni:

- Þau eru lotubundin föll með lotuna 2π.
- Skilgreiningarmengi hvors falls er $(-\infty, \infty)$ og myndmengið $[-1, 1]$.
- Grafið af $y = \sin x$ er punktsamhverft um upphafspunktinn því fallið er oddstætt.
- Grafið af $y = \cos x$ er samhverft um y-ásinn því fallið er jafnstætt.

Sínuslaga föll rannsökuð

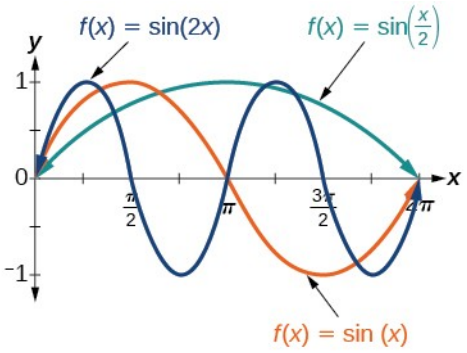
Sínus- og kósínusföllin eru lotubundin og hafa ákveðið myndmengi. Bylgjur á hafi eða gárur á tjörn geta líkst gröfum þessara falla en eru þó ekki allar eins. Sumar eru hærri eða lengri en aðrar. Fall með sömu almennu lögun og sínus- eða kósínusfall kallast sínuslaga fall. Almenn form slíkra falla eru:

$$y = A \sin(B\,x - C) + D$$
og
$$y = A \cos(B\,x - C) + D$$

Lota sínuslaga falla ákvörðuð

Af formum sínuslaga falla sést að þau eru ummyndanir sínus- og kósínusfallanna. Við getum notað það sem við vitum um ummyndanir til að ákvarða lotuna.

Stuðullinn B tengist lotunni samkvæmt formúlunni $P = \frac{2\pi}{|B|}$. Hér gerum við ráð fyrir að A og B séu ekki núll. Ef $|B| > 1$, er lotan styttri en 2π og grafið þjappast saman lárétt. Ef $|B| < 1$, þar sem B er ekki núll, er lotan lengri en 2π og grafið teygist lárétt. Fyrir $f(x) = \sin(x)$, er $B = 1$, og lotan því 2π,. Ef $f(x) = \sin(2x)$, er $B = 2$, lotan π og grafið samþjappað. Ef $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, er $B = \frac{1}{2}$, lotan 4π og grafið teygt. Mynd 8 sýnir að lotan er í öfugu hlutfalli við $|B|$.



Mynd 8. Samanburður á lotum fallanna sin(x), sin(2x) og sin(x/2).

LOTA SÍNUSLAGA FALLA

Ef við setjum $C=0$ og $D=0$ í almenn form sínus- og kósínusfallanna fáum við

$$y=A\sin(Bx)$$

$$y=A\cos(Bx)$$

Lotan er $\frac{2\pi}{|B|}$.

DÆMI 1

Lota sínus- eða kósínusfalls fundin

Ákvarðið lotu fallsins $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

Lausn

Byrjum á að bera jöfnuna saman við almenna formið $y=A\sin(Bx)$.

Í gefinni jöfnu er $B=\frac{\pi}{6}$, og því er lotan:

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{2\pi}{|B|} \\ &= \tfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2\pi\cdot\tfrac{6}{\pi} \\ &= 12 \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

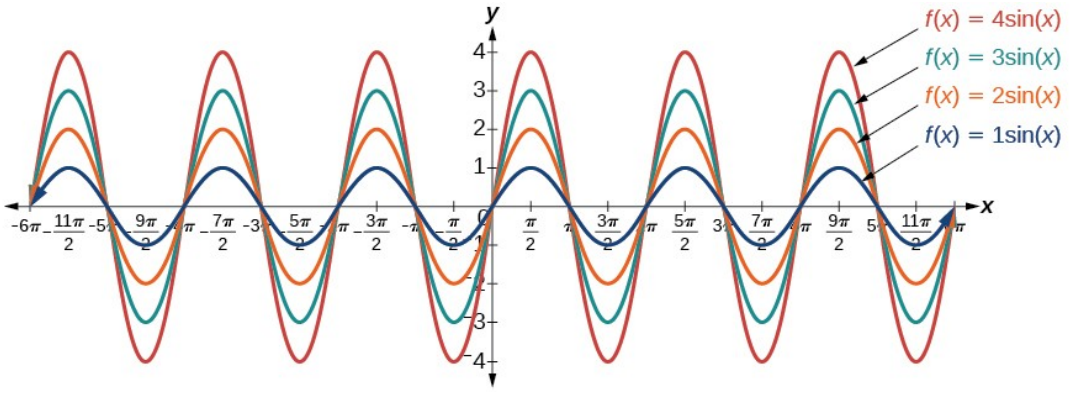
Ákvarðið lotu fallsins $g(x)=\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

Útslag ákvarðað

Við höfum nú skoðað, út frá almennu formúlunni fyrir sínuslaga fall, hvernig breytan B tengist lotunni. Skoðum nú breytuna A til að greina tengsl hennar við útslagið, það er mestu fjarlægð frá jafnvægisstöðu. A táknar lóðrétta teygjustuðulinn og algildi hans $|A|$ er útslagið. Staðbundnu hágildin eru í fjarlægðinni $|A|$ ofan við láréttu miðlínu grafsins, sem er línan $y=D$; því $D=0$ í þessu tilviki er miðlínan x-ásinn. Staðbundnu lággildin eru jafn langt neðan við miðlínuna. Ef $|A|>1$, er fallið teygt. Útslag $f(x)=4\sin x$ er til dæmis tvöfalt útslag

$$f(x)=2\sin x.$$

Ef $|A|<1$, er fallinu þjappað saman. Mynd 9 ber saman nokkur sínusföll með mismunandi útslag.



Mynd 9. Sínusferlar með útslögin 1, 2, 3 og 4.

ÚTSLAG SÍNUSLAGA FALLA

Ef við setjum $C=0$ og $D=0$ í almenn form sínus- og kósínusfallanna fáum við

$$y=A\sin(Bx) \text{ og } y=A\cos(Bx)$$

Útslagið er $|A|$, það er mesta lóðrétta fjarlægðin frá miðlínunni. Takið einnig eftir þessu sambandi:

$$|A| = \text{útslag} = \frac{1}{2}|\text{hágildi} - \text{lággildi}|$$

DÆMI 2

Útslag sínus- eða kósínusfalls fundið

Hvert er útslag sínuslaga fallsins $f(x)=-4\sin(x)$? Er fallið teygt eða samþjappað lóðrétt?

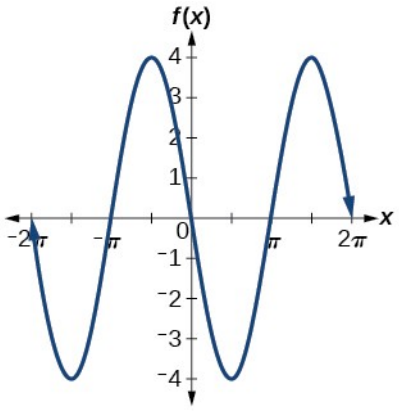
Lausn

Byrjum á að bera fallið saman við einfaldaða formið $y=A\sin(Bx)$.

Í gefna fallinu er $A=-4$, svo útslagið er $|A|=|-4|=4$. Fallið er teygt.

Greining

Neikvætt gildi A speglar sínusfallið um x-ásinn, eins og sýnt er á mynd 10.



Mynd 10. Graf fallsins −4sin(x).

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Hvert er útslag sínuslaga fallsins $f(x)=\frac{1}{2}\sin(x)$? Er fallið teygt eða samþjappað lóðrétt?

6

Gröf afbrigða y = sin x og y = cos x greind

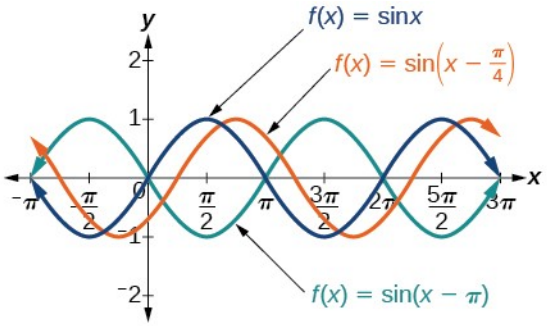
Nú þegar við skiljum hvernig A og B tengjast almennum jöfnum sínus- og kósínusfallanna skoðum við breyturnar C og D. Rifjum upp almenna formið:

$$y=A\ \sin\left(B\ x-C\right)+D\ \text{ og }\ y=A\ \cos\left(B\ x-C\right)+D$$

eða

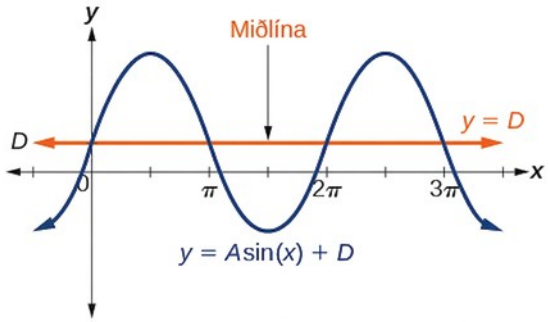
$$y=A\ \sin\left(B\left(x-\frac{C}{B}\right)\right)+D\ \text{ og }\ y=A\ \cos\left(B\left(x-\frac{C}{B}\right)\right)+D$$

Gildið $\frac{C}{B}$ kallast fasahliðrun sínuslaga falls, það er lárétt tilfærsla grunnfalls sínuss eða kósínuss. Ef $C>0$, hliðrast grafið til hægri. Ef $C<0$, hliðrast grafið til vinstri. Því stærra sem gildið á $|C|$, er, þeim mun meira hliðrast grafið. Mynd 11 sýnir að graf $f(x)=\sin(x-\pi)$ hliðrast til hægri um π einingar, sem er meira en á grafi $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, sem hliðrast til hægri um $\frac{\pi}{4}$ einingar.



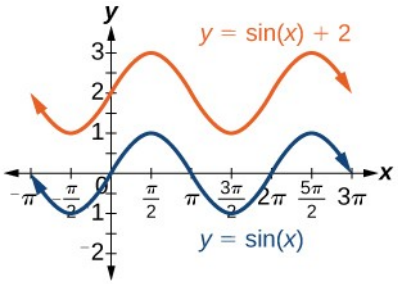
Mynd 11. Samanburður á sínusfalli og tveimur fasahliðrunum þess.

Stærðin C tengist láréttri hliðrun en D táknar lóðrétta hliðrun grafsins frá grunnfallinu. Sjá mynd 12. Miðlína fallsins $y=\cos(x)+D$ er $y=D$.



Mynd 12. Miðlína sínuslaga falls er línan y=D.

Hvert gildi D annað en núll hliðrar grafinu upp eða niður. Mynd 13 ber saman $f(x)=\sin(x)$ og $f(x)=\sin(x)+2$, sem er hliðrað upp um 2 einingar.



Mynd 13. Graf sínusfalls hliðrað upp um 2 einingar.

AFBRIGÐI SÍNUS- OG KÓSÍNUSFALLA

Fyrir fall á forminu $f(x)=A\sin(Bx-C)+D$ eða $f(x)=A\cos(Bx-C)+D$, er $(\frac{C}{B})$ fasahliðrunin og D lóðrétta hliðrunin.

DÆMI 3

Fasahliðrun falls fundin

Ákvarðið stefnu og stærð fasahliðrunar fallsins $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2$.

Lausn

Byrjum á að bera jöfnuna saman við almenna formið $y=A\sin(Bx-C)+D$.

Í gefinni jöfnu sést að $B=1$ og $C=-\frac{\pi}{6}$. Fasahliðrunin er því

$$\begin{aligned}\frac{C}{B} &= -\frac{\frac{\pi}{6}}{1}\\ &= -\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

eða ($\frac{\pi}{6}$) einingar til vinstri.

6

Greining

Við verðum að gæta að formerkinu í jöfnunni fyrir almennt form sínuslaga falls. Í jöfnunni stendur mínusmerki á undan C. Því má umrita $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2$ sem $f(x)=\sin\left(x-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)-2$. Ef gildið á C er neikvætt er hliðrunin til vinstri.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Ákvarðið stefnu og stærð fasahliðrunar fallsins $f(x)=3\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

DÆMI 4

Lóðrétt hliðrun falls fundin

Ákvarðið stefnu og stærð lóðréttrar hliðrunar fallsins $f(x)=\cos(x)-3$.

Lausn

Byrjum á að bera jöfnuna saman við almenna formið $y=A\cos(Bx-C)+D$.

Í gefinni jöfnu er $D=-3$ svo hliðrunin er 3 einingar niður.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Ákvarðið stefnu og stærð lóðréttrar hliðrunar fallsins $f(x)=3\sin(x)+2$.

AÐFERÐ

Gefið er sínuslaga fall á forminu $f(x)=A\sin(Bx-C)+D$,. Finnið miðlínu, útslag, lotu og fasahliðrun.

1. Ákvarðið útslagið sem $|A|$.
2. Ákvarðið lotuna sem $P=\frac{2\pi}{|B|}$.
3. Ákvarðið fasahliðrunina sem $\frac{C}{B}$.
4. Ákvarðið miðlínuna sem $y=D$.

DÆMI 5

Afbrigði sínuslaga falls fundin út frá jöfnu

Ákvarðið miðlínu, útslag, lotu og fasahliðrun fallsins $y=3\sin(2x)+1$.

Lausn

Byrjum á að bera jöfnuna saman við almenna formið $y=A\sin(Bx-C)+D$.

$A=3$, svo útslagið er $|A|=3$.

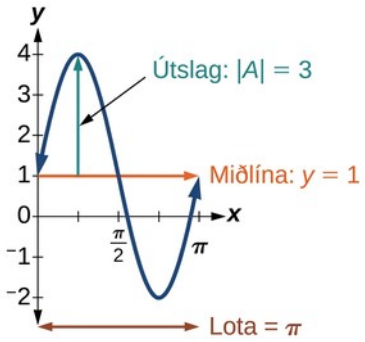
Næst er $B=2$, svo lotan er $P=\frac{2\pi}{|B|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Enginn fasti er lagður við inni í sviganum, svo $C=0$ og fasahliðrunin er $\frac{C}{B}=\frac{0}{2}=0$.

Að lokum er $D=1$, svo miðlínan er $y=1$.

Greining

Af grafinu sést að lotan er π, miðlínan er $y=1$, og útslagið er 3. Sjá mynd 14.



Mynd 14. Útslag, miðlína og lota fallsins 3sin(2x)+1.

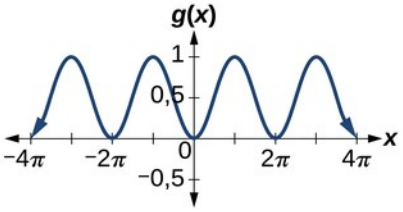
REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Ákvarðið miðlínu, útslag, lotu og fasahliðrun fallsins $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$.

DÆMI 6

Jafna sínuslaga falls fundin út frá grafi

Ákvarðið formúlu kósínusfallsins á mynd 15.



Mynd 15. Kósínuslaga graf með merktum ásum.

6

Lausn

Til að ákvarða jöfnuna þurfum við að finna hvert gildi í almennu formi sínuslaga falls.

$$y = A\sin(Bx - C) + D$$
$$y = A\cos(Bx - C) + D$$

Grafið gæti táknað hliðrað eða speglað sínus- eða kósínusfall. Við $x=0$, er lággildispunkturinn $(0,0)$. Kósínusfallið hefur útgildi við $x=0$, og því ritum við jöfnuna með kósínusfalli.

Byrjum á miðlínunni. Grafið nær jafn langt ofan og neðan við línuna $y=0{,}5$ Stærðin D táknar hæð miðlínunnar og því er $D=0{,}5$

Mesta fjarlægð yfir og undir miðlínunni er útslagið. Hágildin eru 0,5 einingar yfir miðlínunni og lággildin 0,5 einingar undir henni. Því er $|A|=0{,}5$. Einnig hefði mátt ákvarða útslagið með því að sjá að hæðarmunur staðbundinna hágilda og lággilda er 1, svo $|A|=\frac{1}{2}=0{,}5$. Grafið er jafnframt speglað um x-ásinn, svo $A=-0{,}5$.

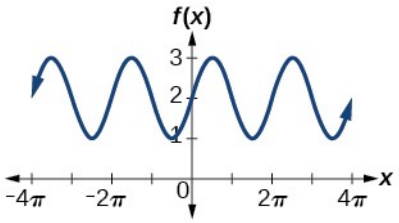
Grafið er hvorki teygt né samþjappað lárétt og því veljum við $B=1;$. Það er heldur ekki hliðrað lárétt og því er $C=0$.

Þegar þetta er tekið saman fæst

$$g\left(x\right)=-0{,}5\cos\left(x\right)+0{,}5$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Ákvarðið formúlu sínusfallsins á mynd 16.

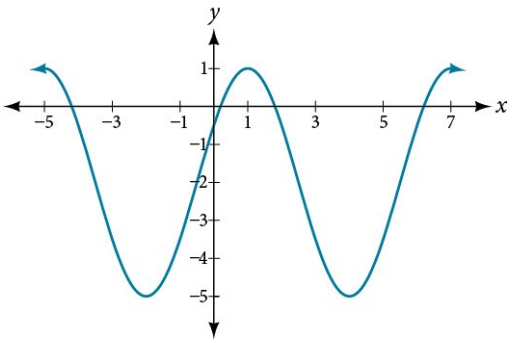


Mynd 16. Sínuslaga graf til að ákvarða formúlu falls.

DÆMI 7

Jafna sínuslaga falls fundin út frá grafi

Ákvarðið jöfnu sínuslaga fallsins á mynd 17.



Mynd 17. Sínuslaga graf til að ákvarða jöfnu falls.

Lausn

Hæsta gildið er 1 og lægsta gildið -5, svo miðlínan liggur mitt á milli þeirra við -2. Því er $D=-2$.

Fjarlægðin frá miðlínunni að hæsta eða lægsta gildinu gefur útslagið $|A|=3$.

Lotan er 6, sem sést af fjarlægðinni frá hágildispunktinum við $x=1$ að þeim næsta við $x=7$,.

Sama fjarlægð er milli samliggjandi lággildispunkta. Því er $P=\frac{2\pi}{|B|}=6$. Við veljum jákvætt gildi fyrir B, og fáum:

$$B=\frac{2\pi}{P}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

Hingað til er jafnan annaðhvort $y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}x-C\right)-2$ eða $y=3\cos\left(\frac{\pi}{3}x-C\right)-2$. Fyrir lögunina og hliðrunina höfum við fleiri en einn kost. Rita mætti fallið á hvern af þessum háttum:

- kósínusfall hliðrað til hægri

- neikvætt kósínusfall hliðrað til vinstri
- sínusfall hliðrað til vinstri
- neikvætt sínusfall hliðrað til hægri

Við veljum kósínusfallið og sjáum að hágildið, sem venjulega væri við $x=0$, er við $x=1$, og með lárétta samþjöppunarstuðlinum $\frac{\pi}{3}$ fæst $C=1\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

Þótt allar þessar framsetningar séu réttar er auðveldara að vinna með kósínushliðranirnar í þessu tilviki, því þar koma fyrir heiltölugildi. Fallið verður því

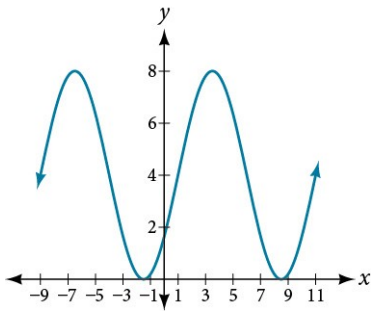
$$y=3\cos\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)-2 \text{ eða } y=-3\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)-2$$

Föllin eru jafngild og gefa því sama graf.

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Ritið formúlu fyrir fallið sem sýnt er á mynd 18.

6



Mynd 18. Sínuslaga graf með merktum hnitum.

Gröf afbrigða y = sin x og y = cos x teiknuð

Í þessum hluta höfum við kynnst afbrigðum sínus- og kósínusfalla og notað þá þekkingu til að rita jöfnur út frá gröfum. Nú getum við notað sömu upplýsingar til að teikna gröf út frá jöfnum.

Í stað þess að einblína á almennu jöfnurnar

$$y=A\sin(Bx-C)+D \text{ og } y=A\cos(Bx-C)+D,$$

setjum við $C=0$ og $D=0$ og vinnum með einfölduð form jafnanna í dæmunum hér á eftir.

AÐFERÐ

Gefið er fallið $y=A\sin(Bx)$, þar sem B er jákvætt og A er ekki núll. Skissið graf þess. Ef B er neikvætt má fyrst nota oddstæðni sínusfallsins til að færa mínusmerkið yfir í A.

1. Finnið útslagið $|A|$.
2. Finnið lotuna $P=\frac{2\pi}{|B|}$.
3. Byrjið í upphafspunkti. Fallið vex til hægri ef A er jákvætt en minnkar ef A er neikvætt.
4. Við $x=\frac{\pi}{2|B|}$ er staðbundið hágildi ef $A>0$ en lággildi ef $A<0$, og $y=A$.
5. Ferillinn snýr aftur að x-ásnum við $x=\frac{\pi}{|B|}$.
6. Staðbundið lággildi fyrir $A>0$ (hágildi fyrir $A<0$) er við $x=\frac{3\pi}{2|B|}$ þar sem $y=-A$.
7. Ferillinn snýr aftur að x-ásnum við $x=\frac{2\pi}{|B|}$.

DÆMI 8

Graf falls teiknað og útslag og lota fundin

Skissið graf af $f(x)=-2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Lausn

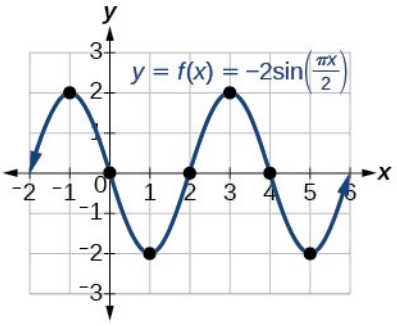
Byrjum á að bera jöfnuna saman við formið $y=A\sin(Bx)$.

- *Skref 1. Af jöfnunni sést að* $A=-2$, svo útslagið er 2.
  $|A|=2$
- *Skref 2. Jafnan sýnir að* $B=\frac{\pi}{2}$, svo lotan er

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \cdot \tfrac{2}{\pi} \\ &= 4 \end{aligned}$$

- *Skref 3. Þar sem* A er neikvætt lækkar grafið þegar farið er til hægri frá upphafspunktinum.
- *Skref 4–7. Grafið sker x-ásinn við upphaf lotunnar,* $x=0$, við miðja lotuna, $x=2$, og við lok hennar, $x=4$.

Meðal fjórðungspunktanna eru lággildið við $x=1$ og hágildið við $x=3$. Staðbundið lággildi er 2 einingar undir miðlínunni við $x=1$, og staðbundið hágildi 2 einingar yfir miðlínunni við $x=3$. Mynd 19 sýnir graf fallsins.



Mynd 19. Graf fallsins −2sin((π/2)x) með fimm lykilpunktum einnar lotu.

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Skissið graf af $g\left(x\right)=-0{,}8\cos\left(2\ x\right)$. Ákvarðið miðlínu, útslag, lotu og fasahliðrun.

AÐFERÐ

6

Gefið er sínuslaga fall með fasahliðrun og lóðrétta hliðrun. Skissið graf þess.

1. Ritið fallið á almenna forminu $y=A\sin\left(Bx-C\right)+D$ eða $y=A\cos\left(Bx-C\right)+D$.
2. Finnið útslagið $\left|A\right|$.
3. Finnið lotuna $P=\frac{2\pi}{\left|B\right|}$.
4. Finnið fasahliðrunina $\frac{C}{B}$.
5. Teiknið fyrst graf fallsins $f\left(x\right)=A\sin\left(Bx\right)$, eða samsvarandi kósínusfalls ef það á við. Hliðrið því síðan lárétt samkvæmt $(\frac{C}{B})$ og lóðrétt samkvæmt D. Jákvæð gildi færa grafið til hægri og upp en neikvæð til vinstri og niður.

DÆMI 9

Graf ummyndaðs sínuslaga falls teiknað

Skissið graf af $f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Lausn

- *Skref 1. Fallið er þegar ritað á almennu formi:* $f\left(x\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$. Grafið hefur lögun sínusfalls, byrjar á miðlínunni og vex til hægri.
- *Skref 2.* $\left|A\right|=\left|3\right|=3$. Útslagið er 3.

- *Skref 3. Þar sem* $|B|=\left|\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\pi}{4}$, ákvörðum við lotuna á eftirfarandi hátt.

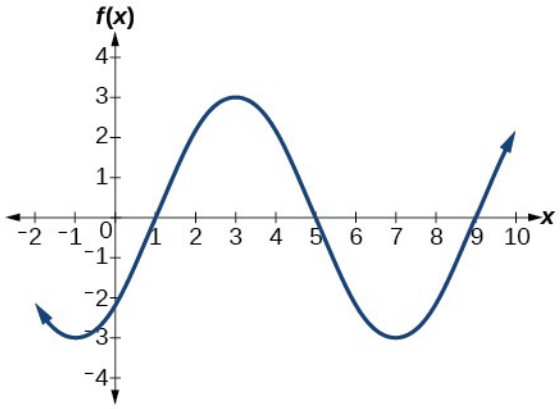
  $$P=\frac{2\pi}{|B|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=2\pi\cdot\frac{4}{\pi}=8$$

  Lotan er 8.

- *Skref 4. Þar sem* $C=\frac{\pi}{4}$, er fasahliðrunin

  $$\frac{C}{B}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=1.$$

  Fasahliðrunin er 1 eining.
- *Skref 5.* Mynd 20 sýnir graf fallsins.



Mynd 20 Sínuslaga fall sem hefur verið teygt bæði lárétt og lóðrétt og hliðrað til hægri.

REYNIÐ SJÁLF NR. 9

Teiknið graf af $g(x)=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$. Ákvarðið miðlínu, útslag, lotu og fasahliðrun.

DÆMI 10

Eiginleikar sínuslaga falls fundnir

Gefið er fallið $y=-2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)+3$,. Ákvarðið útslag, lotu, fasahliðrun og lóðrétta hliðrun.

Teiknið síðan graf fallsins.

Lausn

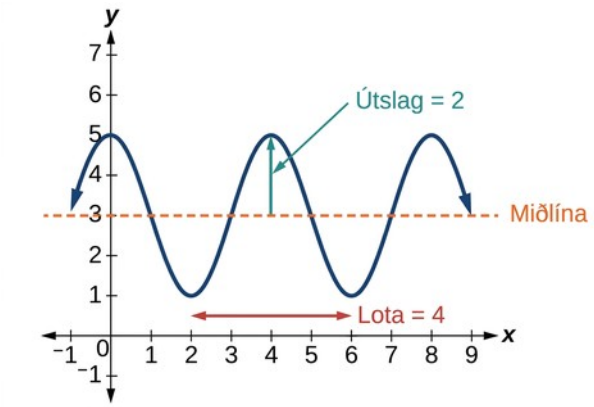
Byrjið á að bera jöfnuna saman við almenna formið og fylgið skrefunum í dæmi 9.

$$y = A\cos(Bx - C) + D$$

- *Skref 1. Fallið er þegar ritað á almennu formi.*
- *Skref 2. Þar sem* $A = -2$, er útslagið $|A| = 2$.
- *Skref 3.* $|B| = \frac{\pi}{2}$, svo lotan er $P = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4$. Lotan er 4.
- *Skref 4.* $C = -\pi$, svo fasahliðrunin er $\frac{C}{B} = \frac{-\pi,}{\frac{\pi}{2}} = -\pi \cdot \frac{2}{\pi} = -2$. Fasahliðrunin er -2.
- *Skref 5. Þar sem* $D = 3$, er miðlínan $y = 3$, og grafið hefur hliðrast upp um 3 einingar.

Þar sem A er neikvætt hefur graf kósínusfallsins verið speglað um x-ásinn.

Mynd 21 sýnir graf fallsins og lengd einnar lotu.



Mynd 21. Útslag, miðlína og lota ummyndaðs kósínusfalls.

Ummyndanir sínus- og kósínusfalla notaðar

Nota má ummyndanir sínus- og kósínusfalla í fjölmörgum hagnýtum verkefnum. Eins og nefnt var í upphafi kaflans má lýsa hringhreyfingu með annaðhvort sínus- eða kósínusfalli.

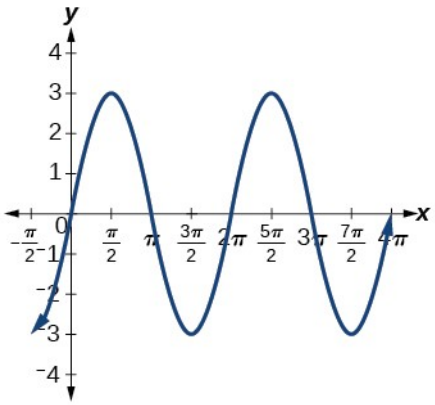
DÆMI 11

Lóðréttur þáttur hringhreyfingar fundinn

Punktur hreyfist eftir hring með geislann 3 og miðju í upphafspunkti. Snúningshornið er mælt frá jákvæða x-ásnum, jákvætt rangsælis. Skissið graf af y-hniti punktsins sem falli af snúningshorninu.

Lausn

Munið að fyrir punkt á hring með geislann r er y-hnit punktsins $y = r\sin(x)$, svo hér fæst jafnan $y(x) = 3\sin(x)$. Fastinn 3 teygir y-gildi fallsins lóðrétt með stuðlinum 3, eins og sést á grafinu á mynd 22.



Mynd 22. Graf y-hnits punkts á hring með geislann 3.

Greining

Lota fallsins er enn 2π;. Við komum aftur að punktinum $(3,0)$ þegar $x=2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ Fallgildin sveiflast milli -3 og 3, og útslagið er því 3.

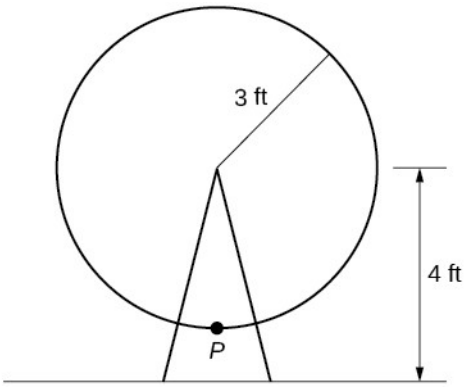
REYNIÐ SJÁLF NR. 10

Hvert er útslag fallsins $f(x)=7\cos(x)$? Skissið graf fallsins.

DÆMI 12

Lóðréttur þáttur hringhreyfingar fundinn

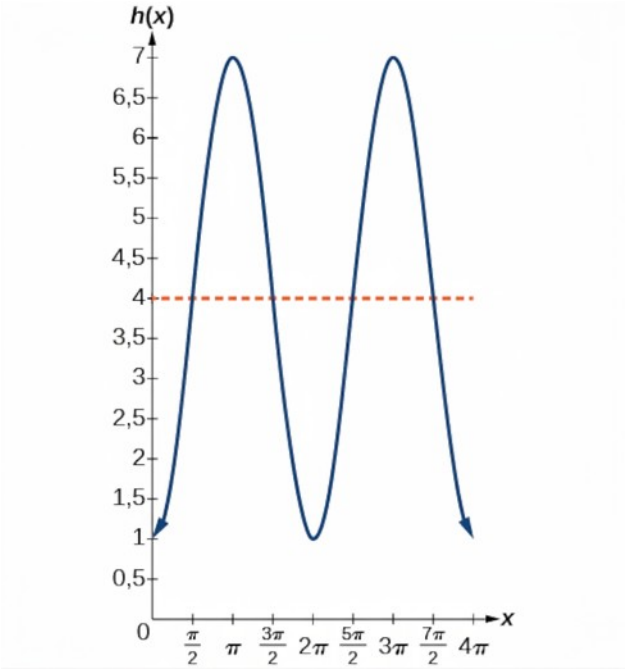
Hringur með geislann 3 fet er festur þannig að miðja hans er 4 fet yfir jörðu. Punkturinn næst jörðu er merktur P, eins og sýnt er á mynd 23. Skissið graf af hæð punktsins P yfir jörðu þegar hringnum er snúið og finnið síðan fall sem gefur hæðina sem fall af snúningshorninu.



Mynd 23. Hringur með geislann 3 fet og miðju 4 fet yfir jörðu.

Lausn

Hæð punktsins er fyrst 1 fet yfir jörðu og hækkar síðan í 7 fet. Hún sveiflast 3 fet upp og niður frá miðlínunni í 4 feta hæð, eins og sýnt er á mynd 24.



6

Mynd 24. Hæð punktsins P sem fall af snúningshorni.

Þótt nota mætti ummyndun annaðhvort sínus- eða kósínusfalls leitum við fyrst að einkennum sem gera annað fallið auðveldara í notkun. Við veljum kósínusfall því það byrjar í hæsta eða lægsta gildinu, en sínusfall byrjar á miðlínunni. Hefðbundið kósínusfall byrjar í hæsta gildinu en þetta graf í því lægsta, svo spegla þarf grafið lóðrétt.

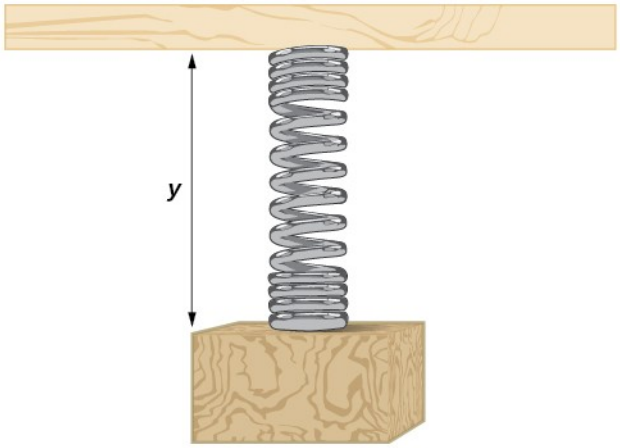
Næst sjáum við að grafið sveiflast 3 ofan og neðan við miðjuna, en grunnkósínusfall hefur útslagið 1. Grafið hefur því verið teygt lóðrétt með stuðlinum 3, eins og í síðasta dæmi.

Að lokum þarf að færa miðju hringsins upp í hæðina 4 og því hefur grafinu verið hliðrað upp um 4. Þegar þessar ummyndanir eru teknar saman fæst

$$y = -3\cos(x) + 4$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 11

Lóð hangir í gormi sem er festur neðan á plötu, eins og mynd 25 sýnir. Staðan y er mæld í tommum frá plötunni, með jákvæða stefnu upp. Hæsta staðan er -1 við tímann $x = 0)$ og lægsta staðan er -7 við tímann $x = \pi)$. Gerið ráð fyrir að y sé sínuslaga fall af x. Skissið graf fallsins og finnið kósínusfall sem gefur y sem fall af x.



Mynd 25. Lóð í gormi neðan við fasta plötu.

DÆMI 13

Hæð farþega í parísarhjóli ákvörðuð

Í þessu líkani af parísarhjólinu London Eye er þvermálið 135 metrar (um 443 fet). Hjólið snýst með jöfnum hraða og fer einn hring á 30 mínútum. Farþegi stígur um borð í lægsta punkti af palli 2 metra yfir jörðu. Setjið hæð hans yfir jörðu fram sem fall af tíma í mínútum frá því ferðin hefst.

Lausn

Þar sem þvermál hjólsins er 135 m er geisli þess 67,5 m. Hæðin sveiflast með útslagið 67,5 m ofan og neðan við miðjuna.

Farþegar stíga um borð 2 m yfir jörðu, svo miðja hjólsins hlýtur að vera $67{,}5+2=69{,}5$ m yfir jörðu. Miðlína sveiflunnar er því í 69,5 m hæð.

Hjólið er 30 mínútur að fara 1 hring, svo hæðin sveiflast með lotuna 30 mínútur.

Þar sem farþeginn stígur um borð í lægsta punktinum byrjar hæðin í minnsta gildinu og vex síðan eins og lóðrétt speglaður kósínusferill.

- Útslagið er 67,5. Stærð stuðulsins er því $A=67{,}5$; speglunin er tekin með í neikvæða kósínusnum hér að neðan.
- Miðlína: $69{,}5$, svo $D=69{,}5$
- Lota: 30, svo $B=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$
- Lögun: $-cos(t)$

Jafna fyrir hæð farþegans er

$$y=-67{,}5\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)+69{,}5$$

þar sem t er mælt í mínútum og y í metrum.

MIÐLAR

Notið þessi nettilföng til að fá frekari útskýringar á gröfum sínus- og kósínusfalla og æfa ykkur á þeim.

- Útslag og lota sínuss og kósínuss
- Hliðranir sínuss og kósínuss
- Gröf ummyndana sínuss og kósínuss teiknuð
- Graf sínusfallsins teiknað

6.1 Verkefni kaflahlutans

Munnleg verkefni

1. Hvers vegna kallast sínus- og kósínusföllin lotubundin föll?

2. Hvernig er grafið af $y=\sin x$ samanborið við grafið af $y=\cos x$? Útskýrið hvernig hliðra mætti grafinu af $y=\sin x$ lárétt til að fá $y=\cos x$.

3. Hvaða fastar hafa áhrif á myndmengi fallsins $A\cos(Bx+C)+D$, og hvernig breyta þeir því?

4. Hvernig tengist myndmengi hliðraðs sínusfalls jöfnunni $y=A\sin(Bx+C)+D$?

5. Hvernig má nota einingarhringinn til að teikna graf af $f(t)=\sin t$?

Myndræn verkefni

Teiknið tvær heilar lotur hvers falls í eftirfarandi verkefnum og tilgreinið útslag, lotu og miðlínu. Tilgreinið hæsta og lægsta y-gildi og samsvarandi x-gildi þeirra á einni lotu fyrir $x>0$. Námundið svör að tveimur aukastöfum ef þörf krefur.

6.

$$f(x)=2\sin x$$

7.

$$f(x)=\frac{2}{3}\cos x$$

8.

$$f(x)=-3\sin x$$

9.

$$f(x)=4\sin x$$

10.

$$f(x)=2\cos x$$

11.

$$f(x)=\cos(2x)$$

12.

$$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

13.

$$f(x)=4\cos(\pi x)$$

14.

$$f(x)=3\cos\left(\frac{6}{5}x\right)$$

15.

$$y=3\sin(8(x+4))+5$$

16.

$$y=2\sin(3x-21)+4$$

17.

$$y=5\sin(5x+20)-2$$

Teiknið eina heila lotu hvers falls í eftirfarandi verkefnum og byrjið við $x=0$. Tilgreinið útslag, lotu og miðlínu hvers falls. Tilgreinið hæsta og lægsta y-gildi og samsvarandi x-gildi þeirra á einni lotu fyrir $x>0$. Tilgreinið fasahliðrun og lóðrétta hliðrun ef við á. Námundið svör að tveimur aukastöfum ef þörf krefur.

18.

$$f(t)=2\sin\left(t-\frac{5\pi}{6}\right)$$

19.

$$f(t)=-\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+1$$

20.

$$f(t)=4\cos\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)-3$$

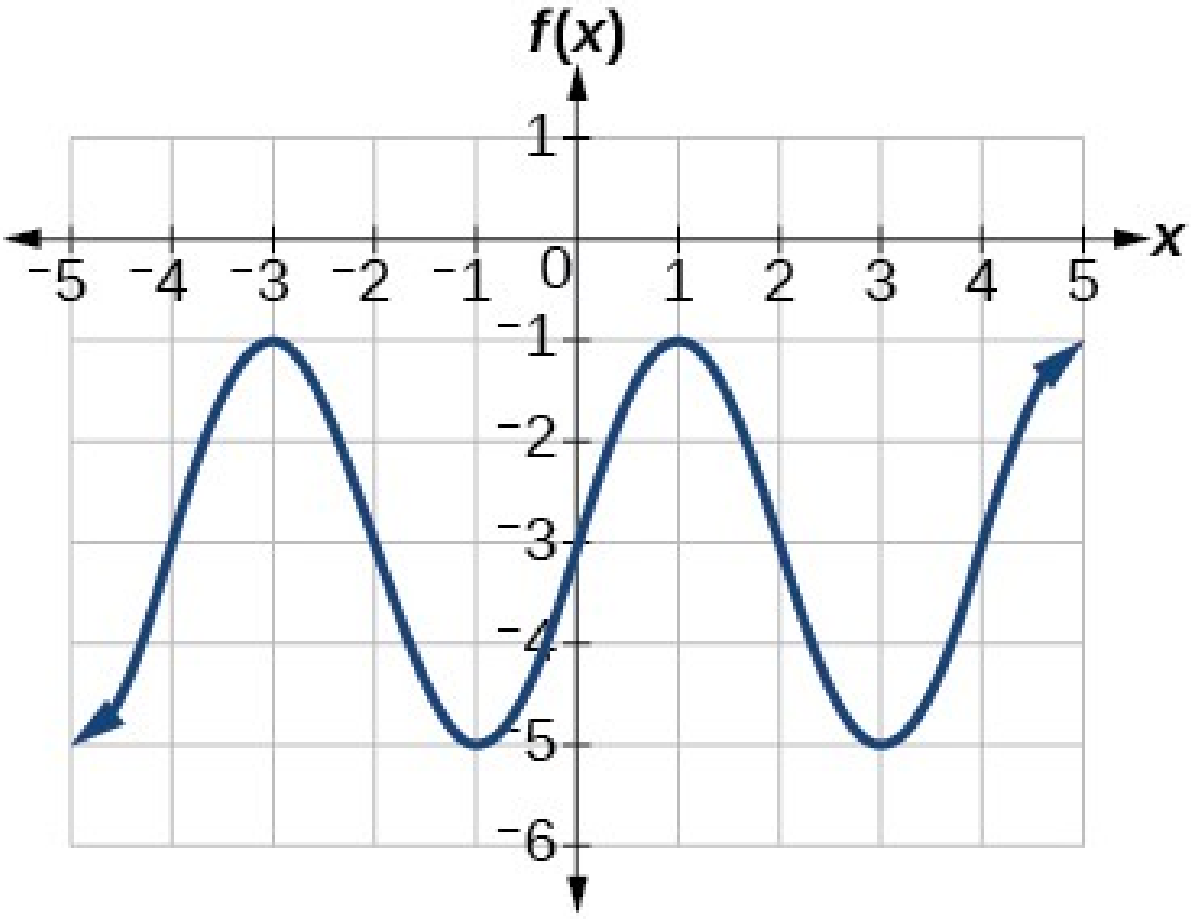
21.

$$f(t) = -\sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

22.

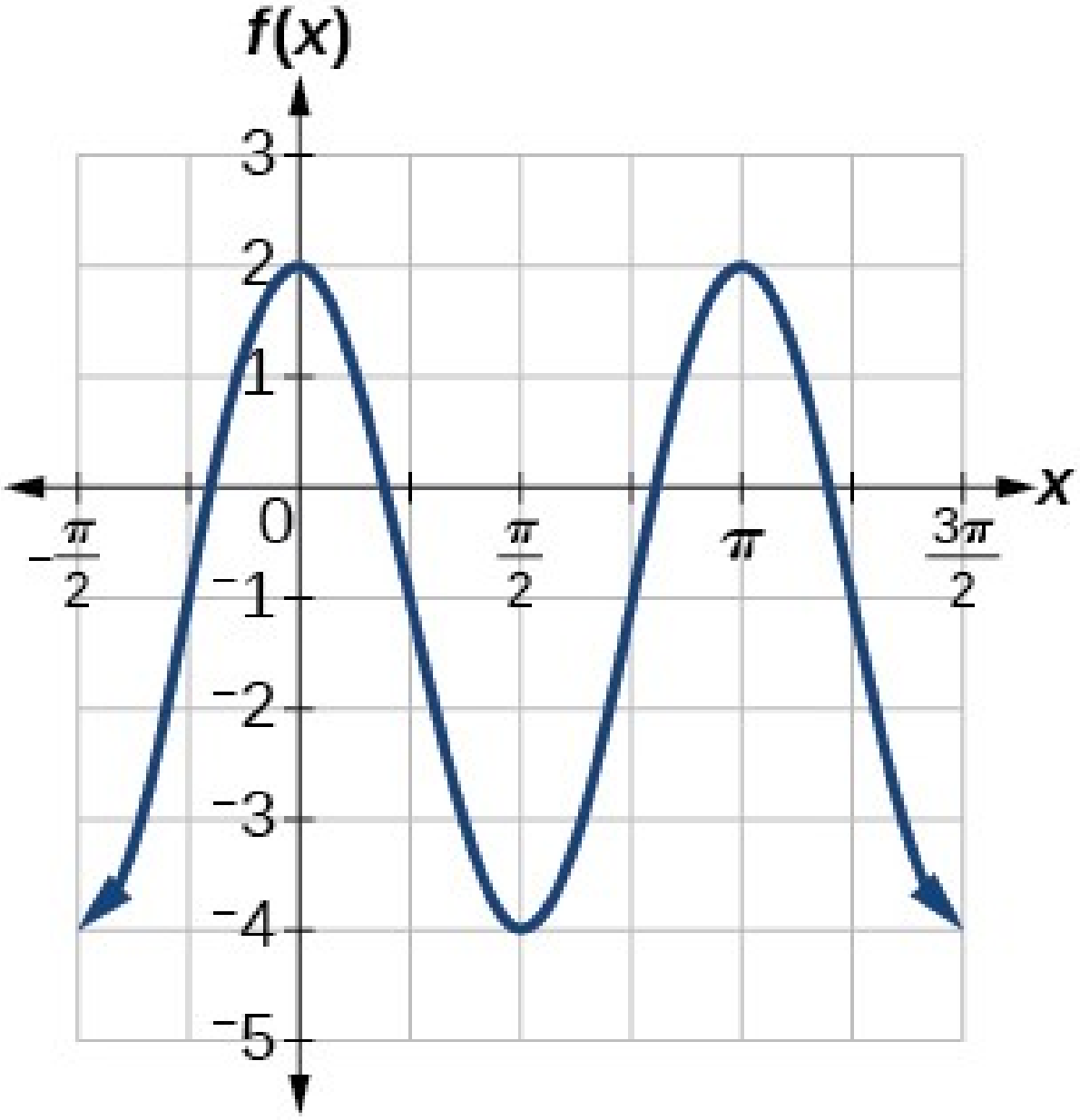
$$f(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-3)\right) + 7$$

23. Ákvarðið útslag, miðlínu, lotu og jöfnu með sínusfalli fyrir grafið á mynd 26.



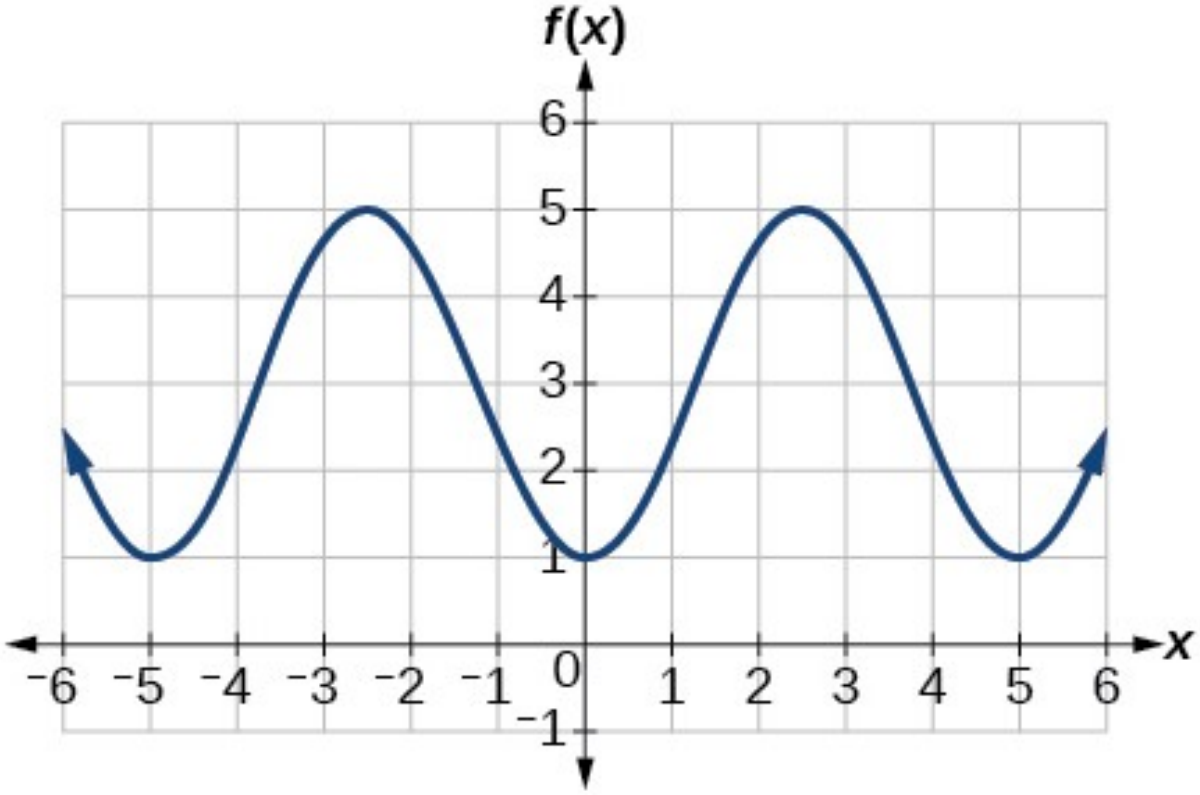
Mynd 26. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

24. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með kósínusfalli fyrir grafið á mynd 27.



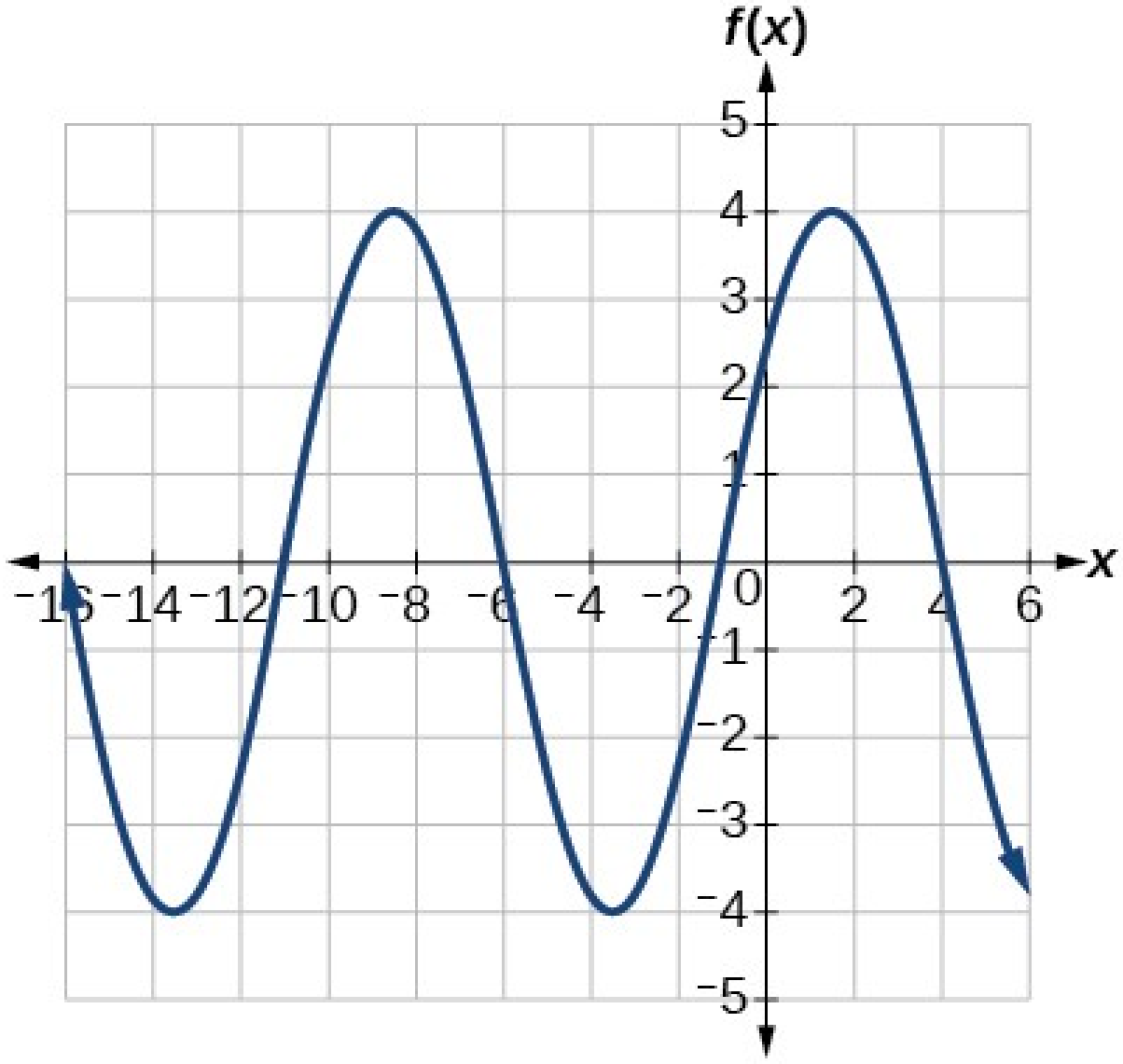
Mynd 27. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

25. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með kósínusfalli fyrir grafið á mynd 28.



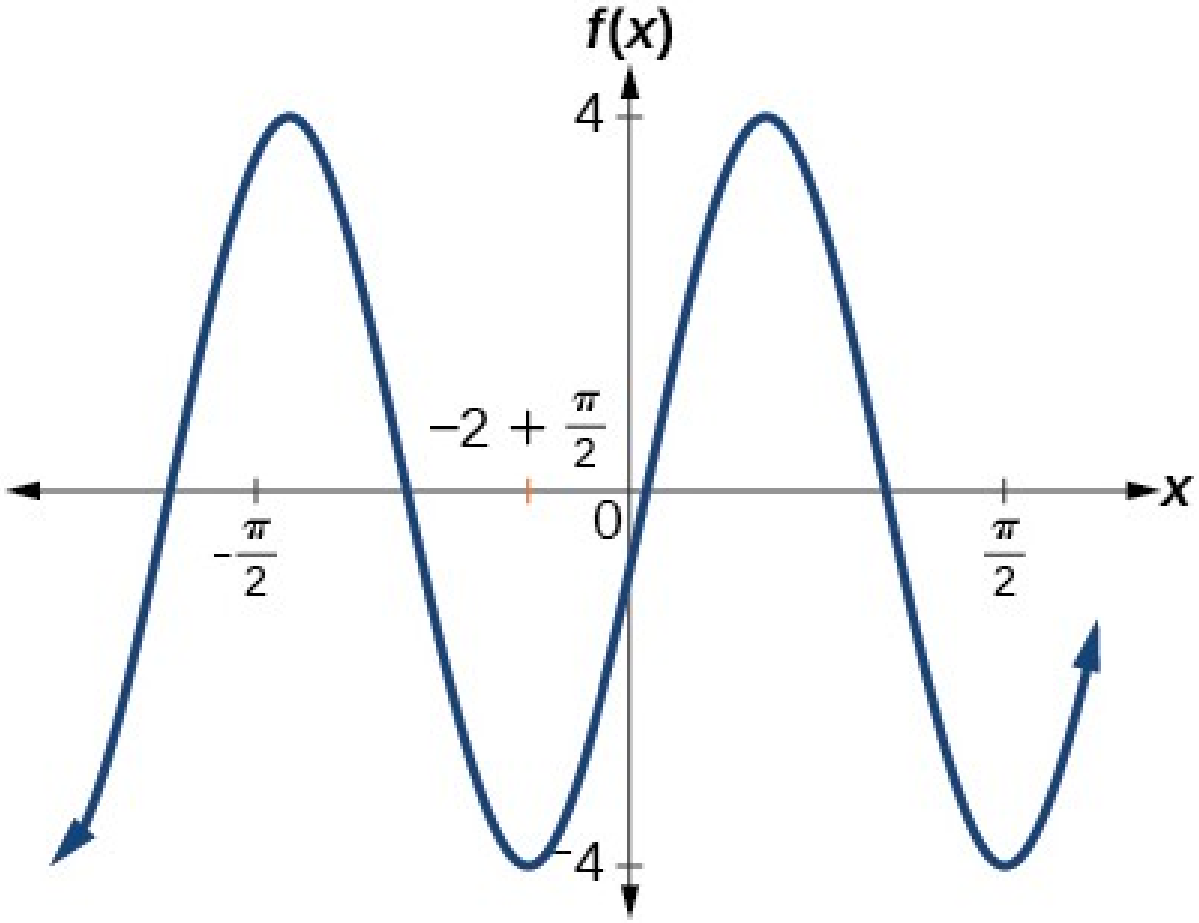
Mynd 28. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

26. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með sínusfalli fyrir grafið á mynd 29.



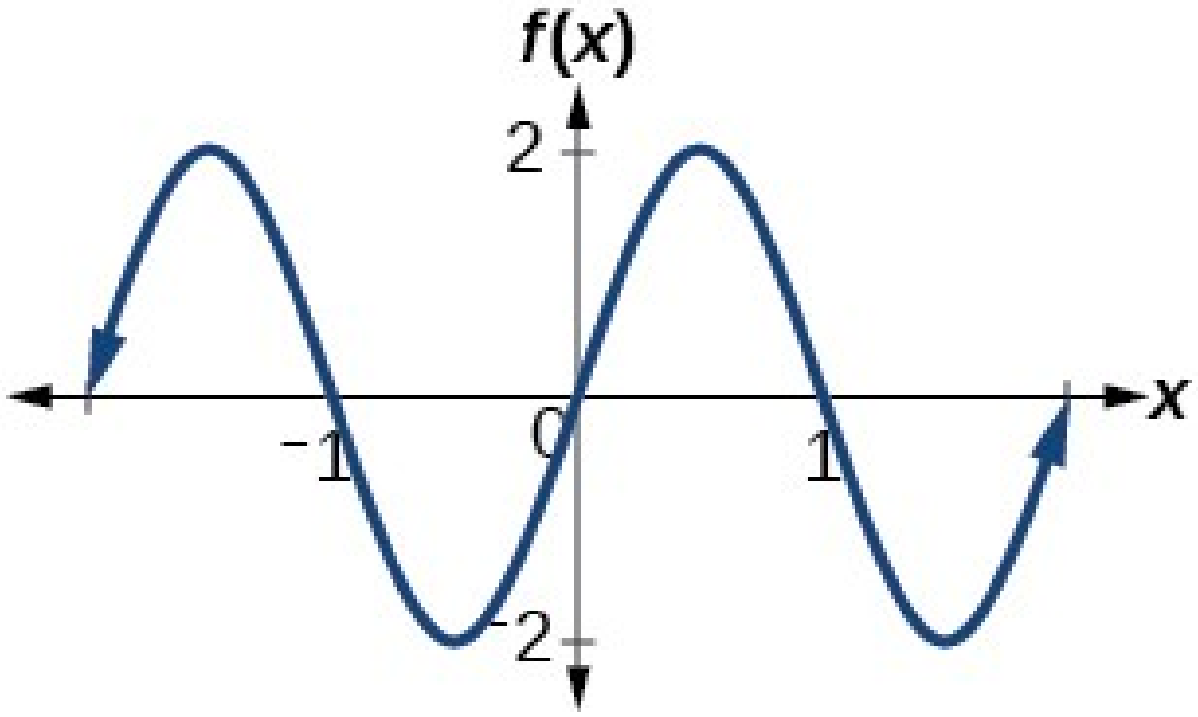
Mynd 29. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

27. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með kósínusfalli fyrir grafið á mynd 30.



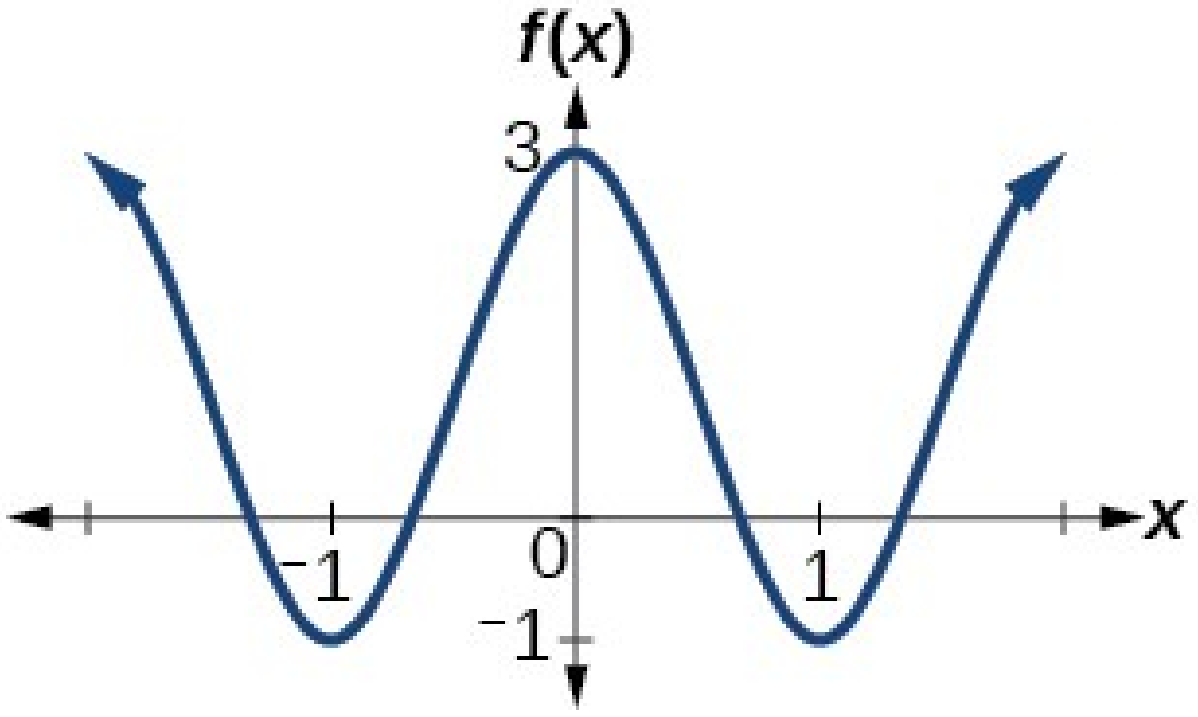
Mynd 30. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

28. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með sínusfalli fyrir grafið á mynd 31.



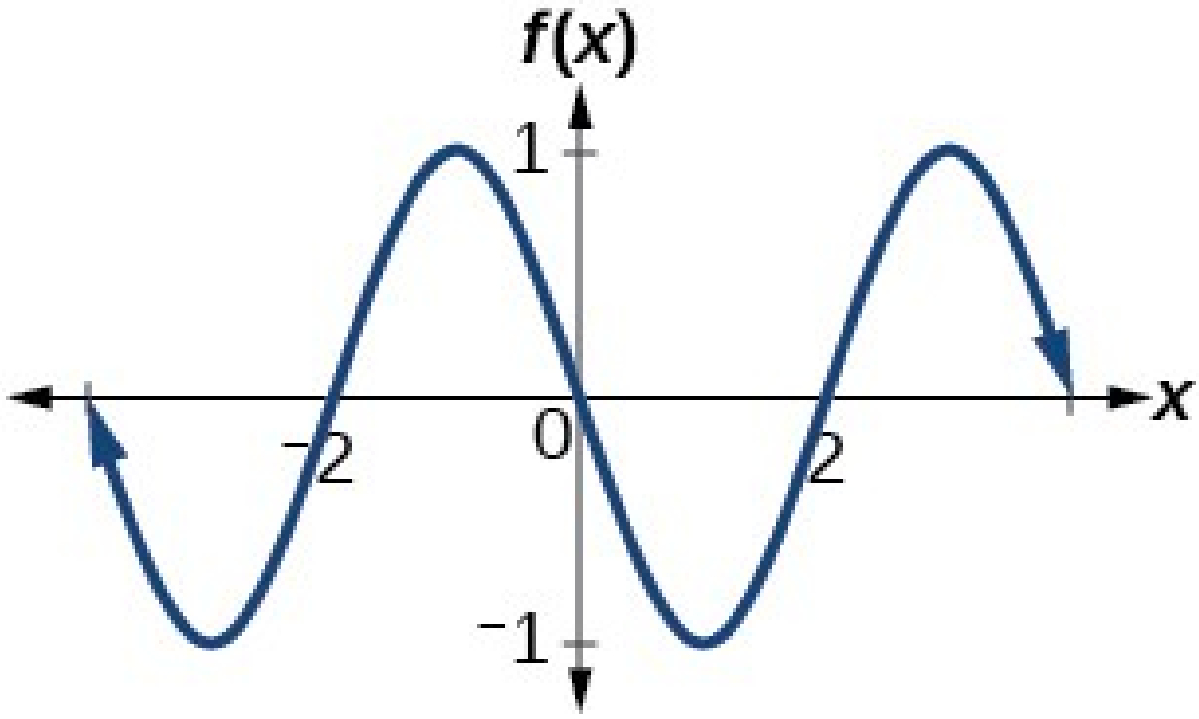
Mynd 31. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

29. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með kósínusfalli fyrir grafið á mynd 32.



Mynd 32. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

30. Ákvarðið útslag, lotu, miðlínu og jöfnu með sínusfalli fyrir grafið á mynd 33.



Mynd 33. Sínuslaga graf til greiningar í verkefni.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi verkefnum er $f(x)=\sin x$.

31. Á $[0,2\pi)$, skuluð þið leysa $f(x)=0$.

32. Á $[0,2\pi)$, skuluð þið leysa $f(x)=\frac{1}{2}$.

33. Reiknið $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

34. Á $[0,2\pi)$, $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Finnið öll gildi x.

35. Við hvaða x-gildi tekur fallið hæsta gildi sitt á bilinu $[0,2\pi)$,?

36. Við hvaða x-gildi tekur fallið lægsta gildi sitt á bilinu $[0,2\pi)$,?

37. Sýnið að $f(-x)=-f(x)$. Þetta merkir að $f(x)=\sin x$ er oddstætt fall og er samhverft um _____.

Í eftirfarandi verkefnum er $f(x)=\cos x$.

38. Á $[0,2\pi)$, skuluð þið leysa jöfnuna $f(x)=\cos x=0$.

39. Á $[0,2\pi)$, skuluð þið leysa $f(x)=\frac{1}{2}$.

40. Á $[0, 2\pi)$, skuluð þið finna skurðpunkta $f(x) = \cos x$. við x-ás

41. Finnið x-gildin þar sem fallið tekur hæsta eða lægsta gildi sitt á bilinu $[0, 2\pi)$,.

42. Á $[0, 2\pi)$, skuluð þið leysa jöfnuna $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tækni

43. Teiknið graf $h(x) = x + \sin x$ á $[0, 2\pi]$. Útskýrið lögun grafsins.

44. Teiknið graf $h(x) = x + \sin x$ á $[-100, 100]$. Var grafið eins og spáð var í fyrra verkefni?

45. Teiknið graf $f(x) = x \sin x$ á $[0, 2\pi]$ og lýsið með orðum hvernig það er frábrugðið grafi $f(x) = \sin x$.

46. Teiknið graf $f(x) = x \sin x$ í glugganum $[-10, 10]$ og útskýrið hvað grafið sýnir.

47. Teiknið graf $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ í glugganum $[-5\pi, 5\pi]$ og útskýrið hvað grafið sýnir.

Hagnýt verkefni

48. Parísarhjól er 25 metrar í þvermál og farþegar stíga um borð af palli sem er 1 metra yfir jörðu. Klukkan-sex-staða hjólsins er í sömu hæð og pallurinn. Hjólið fer einn heilan hring á 10 mínútum. Fallið $h(t)$ gefur hæð farþega í metrum yfir jörðu t mínútum eftir að hjólið byrjar að snúast.

1. ⓐ Finnið útslag, miðlínu og lotu $h(t)$.
2. ⓑ Finnið formúlu fyrir hæðarfallið $h(t)$.
3. ⓒ Hversu hátt yfir jörðu er farþeginn eftir 5 mínútur?

6.2 Gröf annarra hornafalla

NÁMSMARKMIÐ

Að loknum þessum hluta átt þú að geta:

- greint graf fallsins y=tan x.
- teiknað gröf afbrigða fallsins y=tan x.
- greint gröf fallanna y=sec x og y=csc x.
- teiknað gröf afbrigða fallanna y=sec x og y=csc x.
- greint graf fallsins y=cot x.
- teiknað gröf afbrigða fallsins y=cot x.

Tangensfallið má nota til að finna fjarlægðir, til dæmis hæð byggingar, fjalls eða fánastangar. Það getur einnig lýst staðsetningu sem breytist lotubundið. Ímyndið ykkur slökkviliðsbíl sem stendur við vöruhús. Snúningsljós á bílnum varpar ljósbletti á vegginn. Í einföldu líkani

látum við tímann vera inntak og formerkta staðsetningu ljósblettsins eftir veggnum vera úttak, mælt frá punktinum beint á móti ljósinu. Tangensfall getur lýst þessari stöðu þegar ljósið snýst með jöfnum hornhraða. Í líkaninu er veggurinn óendanlega langur og stefna geislans framlengd sem bein lína. Lóðfellur samsvara því að línan verði samsíða veggnum. Raunverulegur veggur er endanlegur og einátta geisli lýsir aðeins á hann hluta úr snúningi. Hér skoðum við gröf tangensfallsins og annarra hornafalla.

Greining á grafi fallsins y = tan x

Við byrjum á grafi tangensfallsins og merkjum inn punkta eins og við gerðum fyrir sínus- og kósínusföllin. Rifjum upp að

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Lota tangensfallsins er π. Grafið endurtekur sig við hliðrun um $k\pi$, þar sem k er heiltala. Ein heil lota sést á opna bilinu frá $-\frac{\pi}{2}$ til $(\frac{\pi}{2},)$. Endapunktarnir tilheyra ekki skilgreiningarmenginu. Með því að endurtaka þessa grein má teikna grafið á stærra bili.

6

Við getum ákvarðað hvort tangens sé oddstætt eða jafnstætt fall með því að nota skilgreiningu tangens.

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$ Skilgreining tangens.

$= \frac{-\sin x}{\cos x}$ Sínus er oddstætt fall og kósínus jafnstætt.

$= -\frac{\sin x}{\cos x}$ Kvóti oddstæðs falls og jafnstæðs falls er oddstæður.

$= -\tan x$ Skilgreining tangens.

Tangens er því oddstætt fall. Við getum greint hegðun grafs tangensfallsins nánar með því að skoða gildi nokkurra sérhorna, eins og sýnt er í töflu 1.

Tafla 1

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	óskilgreint	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	óskilgreint

Þessir punktar hjálpa okkur að teikna grafið. Við þurfum einnig að skoða hegðun þess nærri gildum þar sem fallið er óskilgreint. Tafla getur sýnt hvernig fallgildin breytast þegar ($\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$,). Þar sem $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$ og $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ veljum við gildi á x sem uppfylla $1{,}05 < x < 1{,}57$. Hornin eru mæld í radíönum. Sjá töflu 2.

Tafla 2

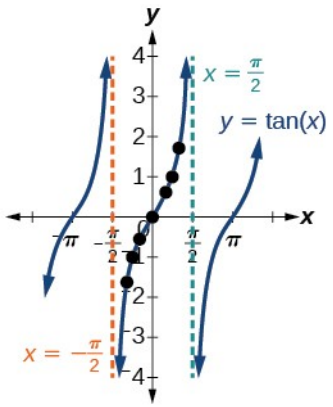
x	1,3	1,5	1,55	1,56
$\tan x$	3,6	14,1	48,1	92,6

Þegar x nálgast $(\frac{\pi}{2},)$ frá vinstri verða fallgildin sífellt stærri. Þar sem $y=\tan x$ er oddstætt fall fást samsvarandi neikvæð gildi í töflu 3.

Tafla 3

x	−1,3	−1,5	−1,55	−1,56
$\tan x$	−3,6	−14,1	−48,1	−92,6

Við sjáum að þegar x nálgast $-\frac{\pi}{2}$, verða úttaksgildin sífellt minni. Munið að til eru gildi x þannig að $\cos x=0$. Til dæmis $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ og $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$. Við þessi gildi er tangensfallið óskilgreint, svo graf $y=\tan x$ er ósamfellt við $x=\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$. Við þessi gildi hefur graf tangens lóðfellur. Mynd 1 sýnir graf $y=\tan x$. Tangens er jákvæður frá 0 til $\frac{\pi}{2}$ og frá π til $\frac{3\pi}{2}$, sem samsvarar fyrsta og þriðja fjórðungi einingarhringsins.



Mynd 1 Graf tangensfallsins.

Teikning afbrigða fallsins y = tan x

Lýsa má tangensfallinu með almennri jöfnu, líkt og sínus- og kósínusföllunum.

$$y=A\tan(Bx)$$

Við getum greint láréttar og lóðréttar teygjur og samþjöppun út frá gildum A og B. Yfirleitt má ákvarða láréttu teygjuna út frá lotu grafsins. Fyrir gröf tangensfalla þarf oft að ákvarða lóðrétta teygju með punkti á grafinu.

Þar sem tangensfall hefur hvorki hágildi né lággildi er ekki hægt að túlka hugtakið útslag eins og fyrir sínus- og kósínusföll. Í staðinn notum við orðið teygju- eða samþjöppunarstuðull um fastann A.

EINKENNI GRAFS $Y = A\tan(BX)$

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $P=\frac{\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er mengi allra rauntalna x, sem uppfylla $x \neq \frac{\pi}{2|B|}+\frac{\pi}{|B|}k$ fyrir sérhverja heiltölu k.
- Myndmengið er $(-\infty, \infty)$.
- Aðfellurnar eru við $x=\frac{\pi}{2|B|}+\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- $y = A\tan(Bx)$ er oddstætt fall.

6

Teikning einnar lotu teygðs eða samþjappaðs tangensfalls

Við getum nýtt eiginleika tangensfallsins til að skissa graf falls af gerðinni $f(x)=A\tan(Bx)$. Hér gerum við fyrst ráð fyrir að B sé jákvætt og A sé ekki núll. Við skoðum greinina sem fer um upphafspunktinn. Fallið er lotubundið og því má síðan framlengja grafið yfir allt skilgreiningarmengið. Ein lota liggur á bilinu $\left(-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}\right)$ og lóðfellurnar eru við $\pm\frac{P}{2}$, þar sem $P=\frac{\pi}{B}$. Grunnfallið tan(x) er vaxandi á $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,: grafið rís frá vinstri lóðfellunni við $x=-\frac{\pi}{2}$, fer um upphafspunktinn og nálgast hægri lóðfelluna við $x=\frac{\pi}{2}$. Stuðlarnir A og B breyta kvarðanum og neikvætt A snýr stefnunni við. Til að ákvarða lóðrétta kvarðann reiknum við fallgildi í viðmiðunarpunkti. Til dæmis fæst:

$$f\left(\frac{P}{4}\right)=A\tan\left(B\frac{P}{4}\right)=A\tan\left(B\frac{\pi}{4B}\right)=A$$

því $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

AÐFERÐ

Gefið er fallið $f(x)=A\tan(Bx)$, þar sem A og B eru ekki núll. Teiknið eina lotu þess.

1. Finnið teygjustuðulinn $|A|$.

2. Finnið B og ákvarðið lotuna $P=\frac{\pi}{|B|}$.
3. Teiknið lóðfellur við $x=-\frac{P}{2}$ og $x=\frac{P}{2}$.
4. Ef $AB>0$, stefnir grafið niður við vinstri lóðfelluna og upp við þá hægri. Ef $AB<0$ er þessu öfugt farið.
5. Ef B er jákvætt merkið þið punktana $\left(\frac{P}{4}, A\right)$, $(0,0)$, og $\left(-\frac{P}{4}, -A\right)$, og teiknið grafið í gegnum þá. Ef B er neikvætt snúast formerki y-hnita fyrsta og þriðja punktsins við.

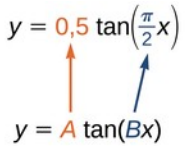
SÝNIDÆMI 1

Skissað graf samþjappaðs tangensfalls

Skissið graf einnar lotu fallsins $y=0{,}5\ \tan\left(\frac{\pi}{2}\ x\right)$.

Lausn

Fyrst finnum við A og B.

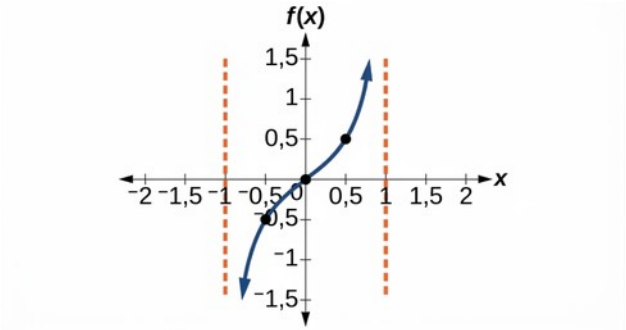


Hér er $A=0{,}5$ og $B=\frac{\pi}{2}$,. Því getum við fundið teygju- eða samþjöppunarstuðulinn og lotuna.

Lotan er $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$, og lóðfellurnar eru því við $x=\pm 1$. Þegar x er fjórðungi lotu hægra megin við upphafspunktinn fæst:

$$\begin{aligned} f\ (0{,}5) &= 0{,}5\ \tan\left(\frac{0{,}5\ \pi}{2}\right) \\ &= 0{,}5\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Það merkir að ferillinn hlýtur að liggja um punktana $(0{,}5\,;0{,}5)$ $(0,0)$, og $(-0{,}5\,;-0{,}5)$ Eini beygjuskilapunkturinn er í upphafspunktinum. Mynd 2 sýnir graf einnar lotu fallsins.



Mynd 2. Ein lota samþjappaðs tangensfalls.

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Skissið graf fallsins $f(x)=3\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$.

Teikning einnar lotu hliðraðs tangensfalls

Nú getum við teiknað graf tangensfalls sem hefur verið teygt eða þjappað saman. Næst bætum við lóðréttri eða láréttri hliðrun (fasahliðrun) við. Þá bætum við C og D við almenna form tangensfallsins.

$$f(x)=A\tan(Bx-C)+D$$

Graf ummyndaðs tangensfalls er frábrugðið grafi grunnfallsins $\tan x$ á nokkra vegu:

EINKENNI GRAFS $Y = A\tan(BX-C)+D$

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $\frac{\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er mengi allra rauntalna sem uppfylla $x\neq\frac{C}{B}+\frac{\pi}{2|B|}k$, fyrir sérhverja oddatölu k.
- Myndmengið er $(-\infty,\infty)$.
- Lóðfellurnar eru við $x=\frac{C}{B}+\frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.
- Fallið hefur ekkert útslag.

AÐFERÐ

Gefið er fallið $y=A\tan(Bx-C)+D$,. Skissið graf einnar lotu þess.

1. Skrifið gefna fallið á forminu $y=A\tan(Bx-C)+D$.

2. Finnið teygju- eða samþjöppunarstuðulinn $|A|$.
3. Finnið B og ákvarðið lotuna $P=\frac{\pi}{|B|}$.
4. Finnið C og ákvarðið fasahliðrunina $\frac{C}{B}$.
5. Teiknið graf $y=A\tan(Bx)$. Hliðrið því lárétt um $(\frac{C}{B})$ og lóðrétt um D. Jákvæð gildi færa grafið til hægri og upp, en neikvæð gildi til vinstri og niður.
6. Skissið lóðfellurnar, sem eru við $x=\frac{C}{B}+\frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.
7. Merkið inn þrjá viðmiðunarpunkta að eigin vali og teiknið grafið í gegnum þá.

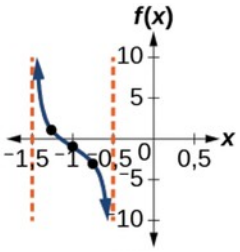
SÝNIDÆMI 2

Teikning einnar lotu hliðraðs tangensfalls

Teiknið eina lotu fallsins $y=-2\tan(\pi x+\pi)-1$.

Lausn

- *Skref 1. Fallið er þegar skrifað á forminu* $y=A\tan(Bx-C)+D$.
- *Skref 2.* $A=-2$, svo teygjustuðullinn er $|A|=2$.
- *Skref 3.* $B=\pi$, svo lotan er $P=\frac{\pi}{|B|}=\frac{\pi}{\pi}=1$.
- *Skref 4.* $C=-\pi$, svo fasahliðrunin er $\frac{C}{B}=\frac{-\pi}{\pi}=-1$.
- *Skref 5–7. Lóðfellurnar eru við* $x=-\frac{3}{2}$ og $x=-\frac{1}{2}$ og viðmiðunarpunktarnir þrír sem mælt er með eru $(-1{,}25\,;1)$ $(-1\,,-1)$, og $(-0{,}75\,;\,-3)$ Grafið er sýnt á mynd 3.



Mynd 3. Ein lota hliðraðs tangensfalls.

Greining

Fallið er minnkandi á hverju samfelldu bili skilgreiningarmengisins, því hér er $A<0$. og B er jákvætt.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Hvernig væri grafið í sýnidæmi 2 öðruvísi ef við settum $A=2$ í stað -2?

AÐFERÐ

Gefið er graf tangensfalls sem hefur verið teygt eða þjappað saman en ekki hliðrað. Finnið stuðlana sem lýsa láréttri og lóðréttri breytingu.

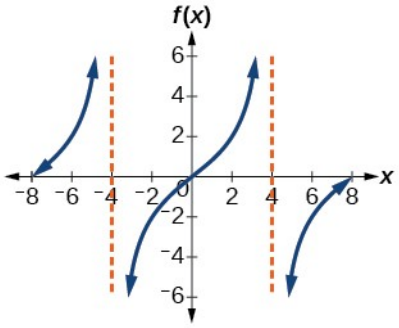
1. Finnið lotuna P út frá bilinu milli samliggjandi lóðfella eða skurðpunkta við x-ás.
2. Skrifið $f(x)=A\tan\left(\frac{\pi}{P}x\right)$.
3. Veljið hentugan punkt $(x, f(x))$ á grafinu þar sem tangensgildið er ekki núll og notið hann til að ákvarða A.

SÝNIDÆMI 3

Borið kennsl á graf teygðs tangensfalls

6

Finnið formúlu fyrir fallið sem sýnt er á mynd 4.



Mynd 4 Tangensferill til að ákvarða formúlu falls.

Lausn

Grafið hefur lögun tangensfalls.

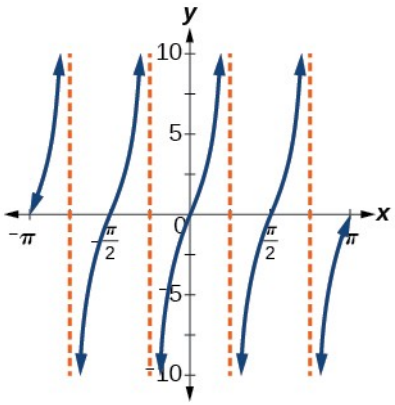
- *Skref 1. Ein lota nær yfir opna bilið frá −4 til 4, svo* $P=8$. Þar sem $P=\frac{\pi}{|B|}$, getum við valið jákvætt B og fengið $B=\frac{\pi}{P}=\frac{\pi}{8}$.
- *Skref 2. Jafnan verður að vera á forminu* $f(x)=A\tan\left(\frac{\pi}{8}x\right)$.
- *Skref 3. Til að finna lóðréttu teygjuna* A, getum við notað punktinn $(2,2)$.
  $2=A\tan\left(\frac{\pi}{8}\cdot 2\right)=A\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Þar sem $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, fæst $A=2$.

Formúla fyrir þetta fall er $f(x)=2\tan\left(\frac{\pi}{8}x\right)$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Finnið formúlu fyrir fallið á mynd 5.



Mynd 5. Tangensferlar til greiningar.

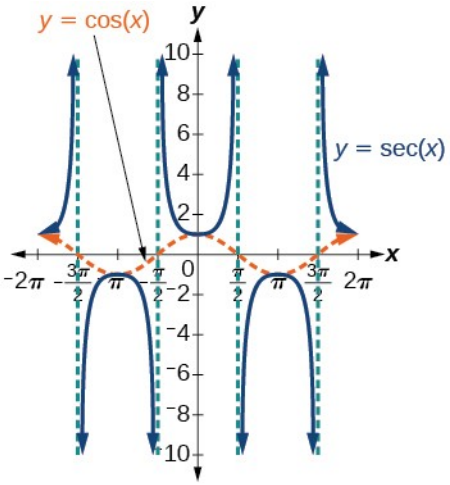
Greining grafa $y = \sec x$ og $y = \csc x$

Sekans er margföldunarandhverfa kósínus. Samband margföldunarandhverfa gefur: $\sec x=\frac{1}{\cos x}$. Sekansfallið er óskilgreint þar sem kósínus er 0 og hefur því lóðfellur við $(\frac{\pi}{2},)$, $(\frac{3\pi}{2},)$ og samsvarandi gildi í öðrum lotum. Algildi kósínus er aldrei meira en 1. Þar sem sekans er skilgreindur er algildi hans því aldrei minna en 1.

Við getum teiknað graf $y=\sec x$ með hjálp grafs kósínusfallsins, því fallgildin eru margföldunarandhverfur hvort annars. Sjá mynd 6. Appelsínuguli strikaferillinn sýnir kósínusfallið. Á bili þar sem kósínus er ekki núll lækkar sekans þegar kósínus hækkar og hækkar þegar kósínus lækkar. Þar sem kósínus er núll er sekans óskilgreindur.

Graf sekans hefur lóðfellu við hvert gildi á x þar sem graf kósínuss sker x-ásinn. Á grafinu hér fyrir neðan eru þær sýndar með lóðréttum strikalínum, en á síðari gröfum sekans og kósekans sýnum við ekki alltaf allar aðfellurnar.

Kósínus er jafnstætt fall og því er sekans einnig jafnstætt fall, það er $\sec(-x)=\sec x$.



Mynd 6 Graf sekansfallsins, $f(x)=sec\,x=\frac{1}{\cos x}$

Eins og fyrir tangensfallið köllum við fastann $|A|$ aftur teygjustuðul en ekki útslag.

6

EINKENNI GRAFS $Y = A\text{SEC}(BX)$

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $\frac{2\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er $x\neq\frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.
- Myndmengið er $(-\infty,-|A|]U[|A|,\infty)$.
- Lóðfellurnar eru við $x=\frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.
- Fallið hefur ekkert útslag.
- $y=A\,sec(B\,x)$ er jafnstætt fall vegna þess að kósínus er jafnstætt fall.

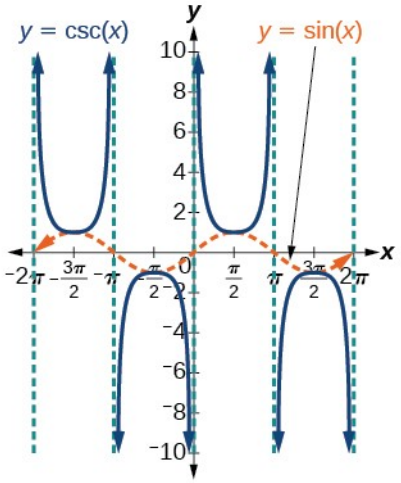
Líkt og sekans er kósekans skilgreindur með umhverfusamsemdinni $csc\,x=\frac{1}{\sin x}$. Takið eftir að fallið er óskilgreint þar sem sínus er 0, sem veldur lóðfellu á grafinu við 0, π, o.s.frv. Þar sem algildi sínuss er aldrei meira en 1 er algildi kósekans, sem er umhverfa hans, aldrei minna en 1.

Við getum teiknað graf $y=csc\,x$ með hjálp grafs sínusfallsins, því fallgildin eru margföldunarandhverfur hvort annars. Sjá mynd 7. Appelsínuguli strikaferillinn sýnir sínusfallið. Á bili þar sem sínus er ekki núll lækkar kósekans þegar sínus hækkar og hækkar þegar sínus lækkar.

Graf kósekans hefur lóðfellu við hvert gildi á x þar sem graf sínuss sker x-ásinn. Við sýnum þær á grafinu hér fyrir neðan með lóðréttum strikalínum.

Sínus er oddstætt fall og því er kósekansfallið einnig oddstætt fall, það er $csc(-x)=-csc\,x$.

Graf kósekans, sem sýnt er á mynd 7, er svipað grafi sekans.



Mynd 7 Graf kósekansfallsins, $f(x)=csc\,x=\frac{1}{\sin x}$

6

EINKENNI GRAFS *Y* = *A*CSC(*BX*)

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $\frac{2\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er $x\neq\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- Myndmengið er $(-\infty,-|A|]U[|A|,\infty)$.
- Aðfellurnar eru við $x=\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- $y=A\,csc(B\,x)$ er oddstætt fall vegna þess að sínus er oddstætt fall.

Teikning afbrigða fallanna y = sec x og y = csc x

Við teiknum hliðruð, samþjöppuð eða teygð gröf sekans- og kósekansfalla með svipuðum aðferðum og gröf tangensfallsins. Fyrst finnum við lóðfellurnar og síðan nokkra viðmiðunarpunkta, einkum staðbundna hágildis- og lággildispunkta. Velja má bil sem nær yfir eina lotu á fleiri en einn hátt. Aðferðirnar fyrir sekans og kósekans eru svipaðar: graf sekans fæst með því að hliðra grafi kósekans um fjórðung lotu til vinstri, því sec(x) = csc(x + π/2). Lóðrétt hliðrun og fasahliðrun virka eins og hjá öðrum hornaföllum. Almenna formið er:

$$y=A\,sec(B\,x-C)+D$$

$$y=A\,csc(B\,x-C)+D$$

EINKENNI GRAFS $y = A\sec(Bx-C)+D$

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $\frac{2\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er $x \neq \frac{C}{B}+\frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.
- Myndmengið er $(-\infty, -|A|+D\,]\,U\,[\,|A|+D, \infty)$.
- Lóðfellurnar eru við $x=\frac{C}{B}+\frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.
- Fallið hefur ekkert útslag.
- $y = A\,sec(B\,x-C)+D$ er jafnstætt fall vegna þess að kósínus er jafnstætt fall.

EINKENNI GRAFS $y = A\csc(Bx-C)+D$

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $\frac{2\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er $x \neq \frac{C}{B}+\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- Myndmengið er $(-\infty, -|A|+D\,]\,U\,[\,|A|+D, \infty)$.
- Lóðfellurnar eru við $x=\frac{C}{B}+\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- Fallið hefur ekkert útslag.
- $y = A\,csc(B\,x-C)+D$ er oddstætt fall vegna þess að sínus er oddstætt fall.

AÐFERÐ

Gefið er fall af gerðinni $y = A\,sec(B\,x)$,. Teiknið eina lotu þess.

1. Skrifið gefna fallið á forminu $y = A\,sec(B\,x)$.
2. Finnið teygju- eða samþjöppunarstuðulinn $|A|$.
3. Finnið B og ákvarðið lotuna $P=\frac{2\pi}{|B|}$.
4. Skissið graf $y = A\cos(B\,x)$.
5. Notið sambandið milli $y=\cos x$ og $y=sec\,x$ til að teikna graf $y = A\,sec(B\,x)$. Takið fyrst margföldunarandhverfu kósínusgildisins og margfaldið síðan með A.
6. Skissið aðfellurnar.
7. Merkið inn tvo viðmiðunarpunkta að eigin vali og teiknið grafið í gegnum þá.

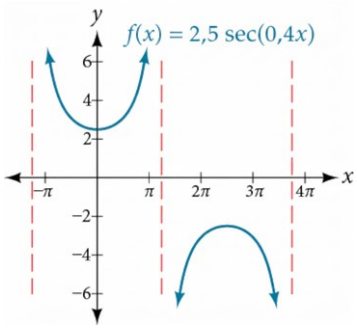
SÝNIDÆMI 4

Teikning afbrigðis sekansfallsins

Teiknið eina lotu fallsins $f\left(x\right)=2{,}5\ sec\left(0{,}4\ x\right)$.

Lausn

- *Skref 1. Gefna fallið er þegar skrifað á almenna forminu* $y=A\,sec\left(B\,x\right)$.
- *Skref 2.* $A=2{,}5$ svo teygjustuðullinn er 2,5
- *Skref 3.* $B=0{,}4$ svo $P=\frac{2\ \pi}{0{,}4}=5\ \pi$. Lotan er $5\,\pi$ einingar.
- *Skref 4. Skissið graf fallsins* $g\left(x\right)=2{,}5\ \cos\left(0{,}4\ x\right)$.
- *Skref 5. Notið samband kósínus og sekans til að teikna sekansfallið. Deilið 2,5 með kósínusgildinu. Takið ekki margföldunarandhverfu alls hjálparfallsins g.*
- *Skref 6–7. Skissið tvær lóðfellur við* $x=1{,}25\ \pi$ og $x=3{,}75\ \pi$ Við getum notað tvo viðmiðunarpunkta, staðbundna lággildið við $\left(0\,;2{,}5\right)$ og staðbundna hágildið við $\left(2{,}5\ \pi\,;-2{,}5\right)$ Mynd 8 sýnir grafið.



Mynd 8. Teygt sekansfall með lotuna 5π.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Teiknið eina lotu fallsins $f\left(x\right)=-2{,}5\ sec\left(0{,}4\ x\right)$.

SPURT OG SVARAÐ

Hafa lóðrétt hliðrun, teygja og samþjöppun áhrif á myndmengi sekansfallsins?

Já. Myndmengi fallsins $f\left(x\right)=A\,sec\left(B\,x-C\right)+D$ er $\left(-\infty\,,-\left|A\right|+D\right]U\left[\left|A\right|+D\,,\infty\right)$.

AÐFERÐ

Gefið er fall af gerðinni $f\left(x\right)=A\,sec\left(B\,x-C\right)+D$**,. Teiknið eina lotu þess.**

1. Skrifið gefna fallið á forminu $y=A\,sec\left(B\,x-C\right)+D$.
2. Finnið teygju- eða samþjöppunarstuðulinn $\left|A\right|$.

3. Finnið B og ákvarðið lotuna $\frac{2\pi}{|B|}$.
4. Finnið C og ákvarðið fasahliðrunina $\frac{C}{B}$.
5. Teiknið graf $y = A\,sec(Bx)$. Hliðrið því lárétt um $(\frac{C}{B})$ og lóðrétt um D. Jákvæð gildi færa grafið til hægri og upp, en neikvæð til vinstri og niður.
6. Skissið lóðfellurnar, sem eru við $x = \frac{C}{B} + \frac{\pi}{2|B|}k$, þar sem k er oddatala.

SÝNIDÆMI 5

Teikning afbrigðis sekansfallsins

Teiknið eina lotu fallsins $y = 4\,sec\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Lausn

6

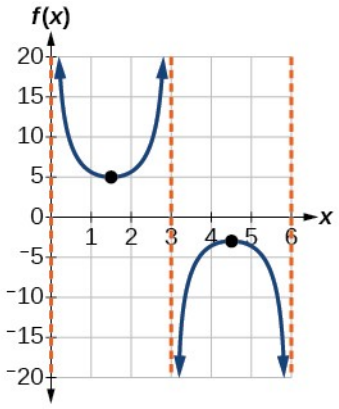
- *Skref 1. Skrifið gefna fallið á forminu* $y = 4\,sec\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.
- *Skref 2. Teygju- eða samþjöppunarstuðullinn er* $|A| = 4$.
- *Skref 3. Lotan er*

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{|B|} &= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{3}{\pi} \\ &= 6\end{aligned}$$

- *Skref 4. Fasahliðrunin er*

$$\begin{aligned}\frac{C}{B} &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{\pi} \\ &= 1{,}5\end{aligned}$$

- *Skref 5. Teiknið graf* $y = A\,sec(Bx)$, en hliðrið því til hægri um $\frac{C}{B} = 1{,}5$ og upp um $D = 1$.
- *Skref 6. Skissið lóðfellurnar, sem eru við* $x = 0$, $x = 3$, og $x = 6$. Staðbundið lággildi er við $(1{,}5\,;5)$ og staðbundið hágildi við $(4{,}5\,;-3)$ Mynd 9 sýnir grafið.



Mynd 9. Hliðrað sekansfall með lotuna 6.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Teiknið eina lotu fallsins $f(x)=-6\,sec(4x+2)-8$.

SPURT OG SVARAÐ

Skilgreiningarmengi $csc\,x$ **var sagt vera öll** x **þannig að** $x\neq k\pi$ **fyrir sérhverja heiltölu** k. **Væri skilgreiningarmengi** $y=A\,csc(Bx-C)+D$ vera $x\neq\frac{C+k\pi}{B}$?

Já. Þau gildi á x sem eru ekki í skilgreiningarmenginu eru við lóðfellurnar. Þau sýna hvernig lárétt hliðrun og teygja eða samþjöppun breyta staðsetningu lóðfellna grunnfallsins.

AÐFERÐ

Gefið er fall af gerðinni $y=A\,csc(Bx)$,**. Teiknið eina lotu þess.**

1. Skrifið gefna fallið á forminu $y=A\,csc(Bx)$.
2. $|A|$.
3. Finnið B og ákvarðið lotuna $P=\frac{2\pi}{|B|}$.
4. Teiknið graf $y=A\sin(Bx)$.
5. Notið sambandið milli $y=\sin x$ og $y=csc\,x$ til að teikna graf $y=A\,csc(Bx)$. Takið fyrst margföldunarandhverfu sínusgildisins og margfaldið síðan með A.
6. Skissið aðfellurnar.
7. Merkið inn tvo viðmiðunarpunkta að eigin vali og teiknið grafið í gegnum þá.

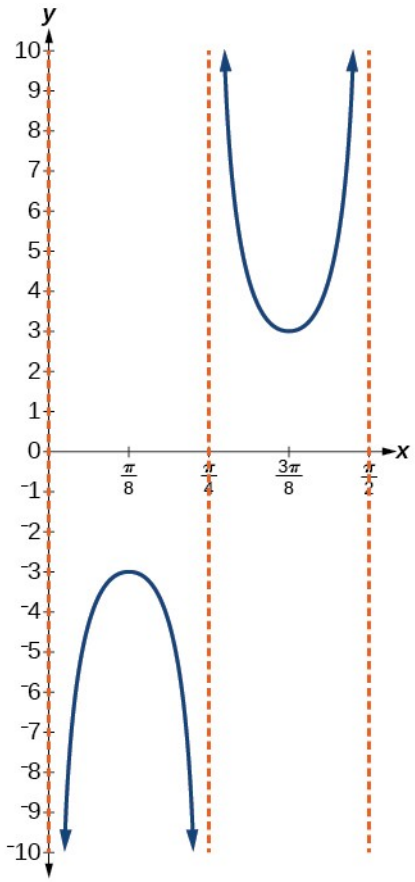
SÝNIDÆMI 6

Teikning afbrigðis kósekansfallsins

Teiknið eina lotu fallsins $f(x)=-3\,csc(4x)$.

Lausn

- *Skref 1. Gefna fallið er þegar skrifað á almenna forminu* $y=A\,csc(Bx)$.
- *Skref 2.* $|A|=|-3|=3$, svo teygjustuðullinn er 3.
- *Skref 3.* $B=4$, svo $P=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. Lotan er ($\frac{\pi}{2}$) einingar.
- *Skref 4. Skissið graf fallsins* $g(x)=-3\sin(4x)$.
- *Skref 5. Notið samband sínus og kósekans til að teikna kósekansfallið. Deilið –3 með sínusgildinu.*
- *Skref 6–7. Skissið lóðfellurnar við* $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, og $x=\frac{\pi}{2}$. Notið viðmiðunarpunktana $\left(\frac{\pi}{8},-3\right)$, sem er staðbundinn hágildispunktur, og $\left(\frac{3\pi}{8},3\right)$., sem er staðbundinn lággildispunktur. Mynd 10 sýnir grafið.



Mynd 10. Kósekansfall með lotuna π/2.

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Teiknið eina lotu fallsins $f\left(x\right)=0{,}5\ csc\left(2\ x\right)$.

AÐFERÐ

Gefið er fall af gerðinni $f\left(x\right)=A\,csc\left(B\,x-C\right)+D$,. Teiknið eina lotu þess.

1. Skrifið gefna fallið á forminu $y=A\,csc\left(B\,x-C\right)+D$.
2. Finnið teygju- eða samþjöppunarstuðulinn $\left|A\right|$.
3. Finnið B og ákvarðið lotuna $\frac{2\,\pi}{\left|B\right|}$.
4. Finnið C og ákvarðið fasahliðrunina $\frac{C}{B}$.
5. Teiknið graf $y=A\,csc\left(B\,x\right)$. Hliðrið því lárétt um $(\frac{C}{B})$ og lóðrétt um D. Jákvæð gildi færa grafið til hægri og upp, en neikvæð til vinstri og niður.
6. Skissið lóðfellurnar, sem eru við $x=\frac{C}{B}+\frac{\pi}{\left|B\right|}k$, þar sem k er heiltala.

SÝNIDÆMI 7

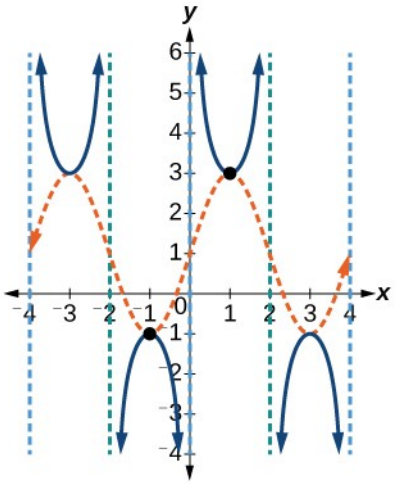
Teikning lóðrétt teygðs, lárétt samþjappaðs og lóðrétt hliðraðs kósekansfalls

Skissið graf $y=2\,csc\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$. Hver eru skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins?

Lausn

- *Skref 1. Skrifið gefna fallið á forminu* $y=2\,csc\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$.
- *Skref 2. Finnið teygju- eða samþjöppunarstuðulinn* $\left|A\right|=2$.
- *Skref 3. Lotan er* $\frac{2\,\pi}{\left|B\right|}=\frac{2\,\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\,\pi}{1}\cdot\frac{2}{\pi}=4$.
- *Skref 4. Fasahliðrunin er* $\frac{0}{\frac{\pi}{2}}=0$.
- *Skref 5. Teiknið graf* $y=A\,csc\left(B\,x\right)$ en hliðrið því upp um $D=1$.
- *Skref 6. Skissið lóðfellurnar við* $x=0,x=2,x=4$.

Graf þessa falls er sýnt á mynd 11.



Mynd 11 Hliðrað kósekansfall og samsvarandi sínusfall.

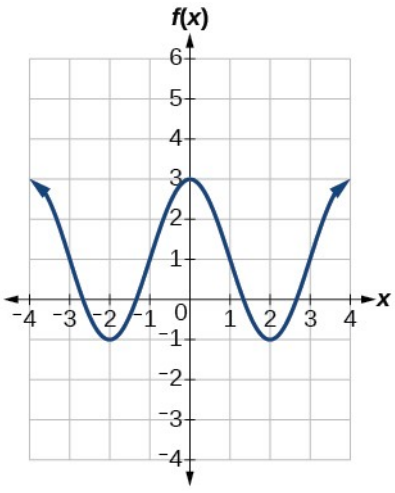
Greining

Lóðfellurnar á grafinu afmarka eina lotu fallsins og staðbundin útgildi á þessu bili eru merkt með punktum. Takið eftir hvernig graf ummyndaða kósekansfallsins tengist grafi $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$, sem sýnt er sem appelsínugul strikabylgja.

6

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Gefið er graf $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$ á mynd 12. Skissið graf $g(x)=2\,sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1$ í sama hnitakerfi.



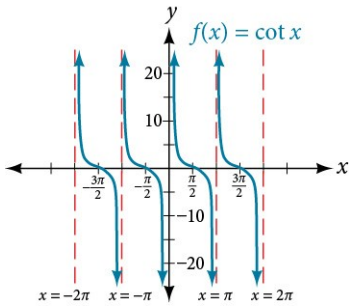
Mynd 12. Kósínusgraf til að teikna samsvarandi sekansgraf.

Greining á grafi fallsins y = cot x

Síðasta hornafallið sem við skoðum er kótangens. Það er skilgreint sem cos(x)/sin(x), þar sem sin(x) er ekki núll. Samband margföldunarandhverfa, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$., gildir þegar tangens er skilgreindur og ekki núll. Kótangens er óskilgreindur við $0, \pi$, og önnur heiltölumargfeldi af π; þar eru lóðfellur. Myndmengið er allar rauntölur, þar á meðal 0, sem fæst þegar kósínus er núll.

Graf tangensfallsins hjálpar okkur að teikna graf $y = \cot x$. Þar sem bæði föllin eru skilgreind og ekki núll eru gildi þeirra margföldunarandhverfur. Tangens er vaxandi og kótangens minnkandi á hverju sameiginlegu samfelldu bili. Sjá mynd 13.

Graf kótangens hefur lóðfellu við hvert gildi á x þar sem $\tan x = 0$; þær eru sýndar á grafinu hér fyrir neðan með strikalínum. Samkvæmt sambandinu milli tangens og kótangens hefur $\cot x$ lóðfellur við öll gildi á x þar sem $\tan x = 0$, og $\cot x = 0$ við öll gildi á x þar sem $\tan x$ hefur lóðfellur.



Mynd 13 Graf kótangensfallsins.

EINKENNI GRAFS *Y* = *A*COT(*BX*)

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $P = \frac{\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er $x \neq \frac{\pi}{|B|} k$, þar sem k er heiltala.
- Myndmengið er $(-\infty, \infty)$.
- Aðfellurnar eru við $x = \frac{\pi}{|B|} k$, þar sem k er heiltala.
- $y = A \cot(Bx)$ er oddstætt fall.

Teikning afbrigða fallsins y = cot x

Við getum ummyndað graf kótangens á mjög svipaðan hátt og graf tangens. Jafnan verður þá:

$$y = A \cot(Bx - C) + D$$

EINKENNI GRAFS $y = A\cot(Bx-C)+D$

- Teygjustuðullinn er $|A|$.
- Lotan er $\frac{\pi}{|B|}$.
- Skilgreiningarmengið er $x \neq \frac{C}{B}+\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- Myndmengið er $(-\infty, \infty)$.
- Lóðfellurnar eru við $x=\frac{C}{B}+\frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
- Fallið hefur ekkert útslag.
- Óhliðraða fallið $y=A\cot(Bx)$ er oddstætt, því það er kvóti jafnstæðs kósínusfalls og oddstæðs sínusfalls, margfaldaður með A. Eftir hliðrun er grafið almennt punktsamhverft um (C/B, D), en fallið þarf ekki að vera oddstætt.

AÐFERÐ

6

Gefið er fall af gerðinni $f(x)=A\cot(Bx)$,. Teiknið eina lotu þess.

1. Skrifið fallið á forminu $f(x)=A\cot(Bx)$.
2. Finnið teygjustuðulinn $|A|$.
3. Finnið lotuna $P=\frac{\pi}{|B|}$.
4. Teiknið graf $y=A\tan(Bx)$.
5. Merkið inn tvo viðmiðunarpunkta að eigin vali.
6. Notið umhverfutengsl tangens og kótangens til að teikna graf $y=A\cot(Bx)$.
7. Skissið aðfellurnar.

SÝNIDÆMI 8

Teikning afbrigða kótangensfallsins

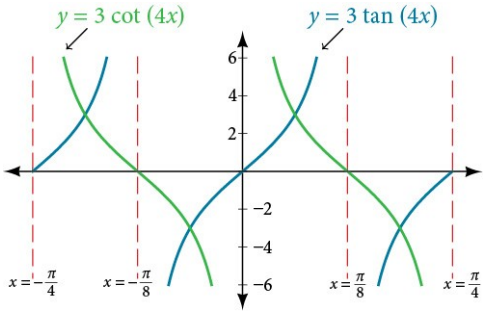
Ákvarðið teygjustuðul, lotu og fasahliðrun fallsins $y=3\cot(4x)$, og skissið síðan graf þess.

Lausn

- *Skref 1. Þegar fallið er skrifað á forminu* $f(x)=A\cot(Bx)$ fæst $f(x)=3\cot(4x)$.
- *Skref 2. Teygjustuðullinn er* $|A|=3$.
- *Skref 3. Lotan er* $P=\frac{\pi}{4}$.
- *Skref 4. Skissið graf* $y=3\tan(4x)$.

- *Skref 5. Merkið inn tvo viðmiðunarpunkta. Tveir slíkir punktar eru* $\left(\frac{\pi}{16}, 3\right)$ og $\left(\frac{3\pi}{16}, -3\right)$.
- *Skref 6. Notið sambandið milli margföldunarandhverfa til að teikna* $y = 3\cot(4x)$.
- *Skref 7. Skissið lóðfellurnar við* $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Bláa grafið á mynd 14 sýnir $y = 3\tan(4x)$ og græna grafið sýnir $y = 3\cot(4x)$.



Mynd 14. Samanburður tangens- og kótangensferla.

AÐFERÐ

Gefið er fall af gerðinni $f(x) = A\cot(Bx - C) + D$,. Teiknið eina lotu þess.

1. Skrifið fallið á forminu $f(x) = A\cot(Bx - C) + D$.
2. Finnið teygjustuðulinn $|A|$.
3. Finnið lotuna $P = \frac{\pi}{|B|}$.
4. Finnið fasahliðrunina $\frac{C}{B}$.
5. Teiknið graf $y = A\tan(Bx)$. Hliðrið því lárétt um $(\frac{C}{B})$ og lóðrétt um D. Jákvæð gildi færa grafið til hægri og upp, en neikvæð gildi til vinstri og niður.
6. Skissið aðfellurnar $x = \frac{C}{B} + \frac{\pi}{|B|}k$, þar sem k er heiltala.
7. Merkið inn þrjá viðmiðunarpunkta að eigin vali og teiknið grafið í gegnum þá.

SÝNIDÆMI 9

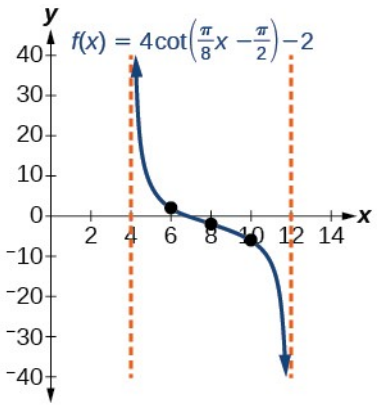
Teikning breytts kótangensfalls

Skissið graf einnar lotu fallsins $f(x) = 4\cot\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

Lausn

- *Skref 1. Fallið er þegar skrifað á almenna forminu* $f(x)=A\cot(Bx-C)+D$.
- *Skref 2.* $A=4$, svo teygjustuðullinn er 4.
- *Skref 3.* $B=\frac{\pi}{8}$, svo lotan er $P=\frac{\pi}{|B|}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{8}}=8$.
- *Skref 4.* $C=\frac{\pi}{2}$, svo fasahliðrunin er $\frac{C}{B}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{8}}=4$.
- *Skref 5. Við teiknum hjálpargraf tangensfallsins* $f(x)=4\tan\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{2}\right)-2$. Hér táknar f hjálparfallið, ekki kótangensfallið sem spurt er um.
- *Skref 6–7. Viðmiðunarpunktar kótangensgrafsins eru* $(6,2),(8,-2)$, og $(10,-6)$. Við notum samband grunnfallanna tangens og kótangens, ásamt teygju og hliðrun, til að teikna $f(x)=4\cot\left(\frac{\pi}{8}x-\frac{\pi}{2}\right)-2$.
- *Skref 8. Lóðfellurnar eru* $x=4$ og $x=12$.

Grafið er sýnt á mynd 15.



Mynd 15 Ein lota hliðraðs kótangensfalls.

Notkun grafa hornafalla til að leysa raunveruleg verkefni

Hornaföll geta lýst ýmsum lotubundnum fyrirbærum. Snúum aftur að snúningsljósinu í upphafi kaflans. Við getum notað tangensfall til að setja fram einfalt líkan af formerktri staðsetningu ljósbletts á vegg. Líkanið lýsir hvar lína í stefnu geislans sker vegginn. Það tekur ekki tillit til þess að veggurinn er endanlegur eða að geislinn getur snúið frá honum.

SÝNIDÆMI 10

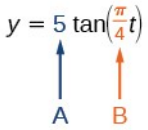
Notkun hornafalla til að leysa raunveruleg verkefni

Í einföldu líkani gefur $y=5\tan\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ formerkta staðsetningu ljósbletts á vegg, mælda í fetum frá punktinum beint á móti kyrrstæðum lögreglubíl. Hér er t tími í sekúndum og y staðsetningin eftir veggnum. Í líkaninu eru veggurinn og stefna geislans framlengd sem beinar línur. Jákvæð og neikvæð gildi vísa til gagnstæðra átta eftir veggnum.

1. ⓐ Finnið og túlkið teygjustuðulinn og lotuna.
2. ⓑ Teiknið graf á bilinu $[0,5]$.
3. ⓒ Reiknið $f(1)$ og ræðið gildi fallsins fyrir þetta inntak.

Lausn

1. ⓐ Af almenna forminu $y=A\tan(Bt)$ vitum við að $|A|$ er teygjustuðullinn og $\frac{\pi}{B}$ er lotan.

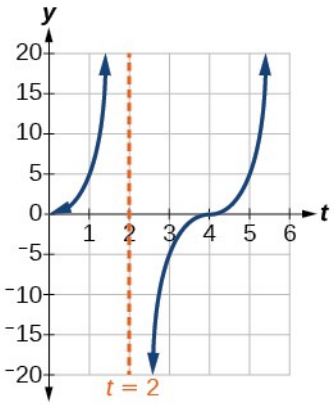


Mynd 16. Stuðlar í líkani af staðsetningu ljósbletts.

Teygjustuðullinn 5 merkir að ljósbletturinn er 5 fet frá viðmiðunarpunktinum þegar tíminn er fjórðungi lotu fyrir eða eftir það augnablik þegar staðsetningin er 0. Formerkin eru gagnstæð sitt hvorum megin. Stuðullinn samsvarar einnig 5 feta hornréttri fjarlægð bílsins frá veggnum í þessu líkani.

Lotan er $\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{1}\cdot\frac{4}{\pi}=4$. Staðsetningin í stærðfræðilíkaninu endurtekur sig því á 4 sekúndna fresti. Þetta er lota stefnu línunnar; einátta ljósgeisli snýr aðeins að veggnum hluta úr hverjum heilum snúningi. Þegar línan nálgast stefnu samsíða veggnum vex fjarlægð skurðpunktsins frá viðmiðunarpunktinum án takmarka í líkaninu.

2. ⓑ Teiknið lóðfellu við $t=2$ og notið lotuna og teygjustuðulinn til að skissa grafið. Sjá mynd 17.



Mynd 17. Staðsetning ljósbletts sem fall af tíma.

3. ⓒ Reiknum: $f(1)=5\tan\left(\frac{\pi}{4}(1)\right)=5(1)=5$;. Eftir 1 sekúndu er ljósbletturinn 5 fet frá punktinum beint á móti bílnum í jákvæða átt eftir veggnum.

6

MIÐLAR

Skoðið þessi netgögn til að fá frekari kennslu og æfingu í gröfum annarra hornafalla.

- Teikning grafs tangensfallsins
- Teikning grafa kósekans- og sekansfallanna
- Teikning grafs kótangensfallsins

6.2 Kaflaæfingar

Munnleg verkefni

1. Útskýrið hvernig nota má graf sínusfallsins til að teikna graf $y=csc\,x$.

2. Hvernig má nota graf $y=\cos x$ til að teikna graf $y=sec\,x$?

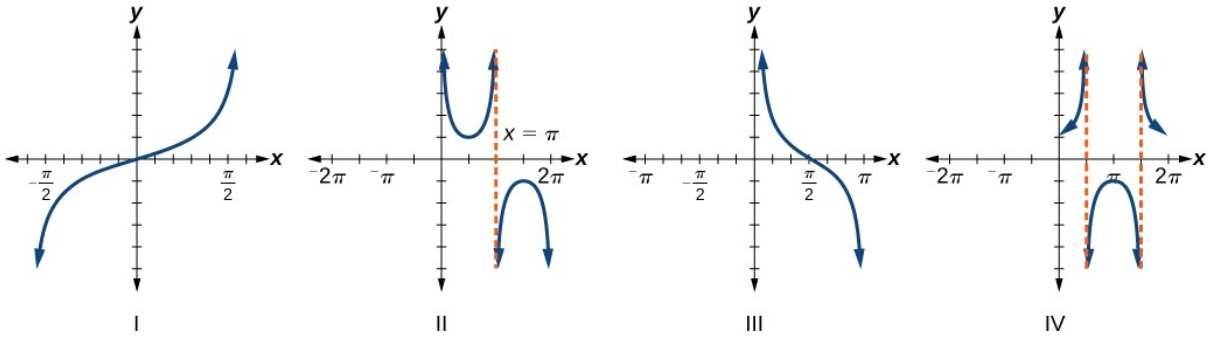
3. Útskýrið hvers vegna lota $\tan x$ er π.

4. Hvers vegna hefur graf $y=csc\,x$? enga skurðpunkta við hnitásana?

5. Hvernig er lota $y=csc\,x$ í samanburði við lotu $y=\sin x$?

Algebruverkefni

Parið hvert hornafall í eftirfarandi verkefnum við eitt grafanna hér fyrir neðan.



Mynd 18. Fjögur gröf til að para við hornaföll.

6.

$$f(x)=\tan x$$

7.

$$f(x)=sec\,x$$

8.

$$f(x)=csc\,x$$

9.

$$f(x)=\cot x$$

Finnið lotu og lárétta hliðrun hvers falls í eftirfarandi verkefnum.

10.

$$f(x)=2\tan(4x-32)$$

11.

$$h(x)=2\,sec\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$$

12.

$$m(x)=6\,csc\left(\frac{\pi}{3}x+\pi\right)$$

Reiknið gildi ummynduðu fallanna í eftirfarandi verkefnum.

13. Ef $\tan\ \ x=-1{,}5$, finnið $\tan(-x)$.

14. Ef $sec\,x=2$, finnið $sec(-x)$.

15. Ef $csc\,x=-5$, finnið $csc(-x)$.

16. Ef $x\sin x=2$, finnið $(-x)\sin(-x)$.

Umritið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum þannig að viðfangið x sé jákvætt.

17.

$$\cot(-x)\cos(-x)+\sin(-x)$$

18.

$$\cos(-x)+\tan(-x)\sin(-x)$$

Myndræn verkefni

Skissið tvær lotur af grafi hvers eftirfarandi falls. Tilgreinið teygjustuðul, lotu og aðfellur.

19.

$$f(x)=2\tan(4x-32)$$

20.

$$h(x)=2\,sec\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$$

21.

$$m(x)=6\,csc\left(\frac{\pi}{3}x+\pi\right)$$

22.

$$j(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

23.

$$p(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

24.

$$f(x)=4\tan(x)$$

25.

$$f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

26.

$$f(x)=\pi\tan(\pi x-\pi)-\pi$$

27.

$$f(x)=2\,csc(x)$$

28.

$$f(x)=-\frac{1}{4}csc(x)$$

29.

$$f(x)=4\,sec(3x)$$

30.

$$f(x)=-3\cot(2x)$$

31.

$$f(x)=7\,sec(5x)$$

32.

$$f(x)=\frac{9}{10}csc(\pi x)$$

33.

$$f(x)=2csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$$

34.

$$f(x)=-sec\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$$

35.

$$f(x)=\frac{7}{5}csc\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

36.

$$f(x)=5\left(\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\right)$$

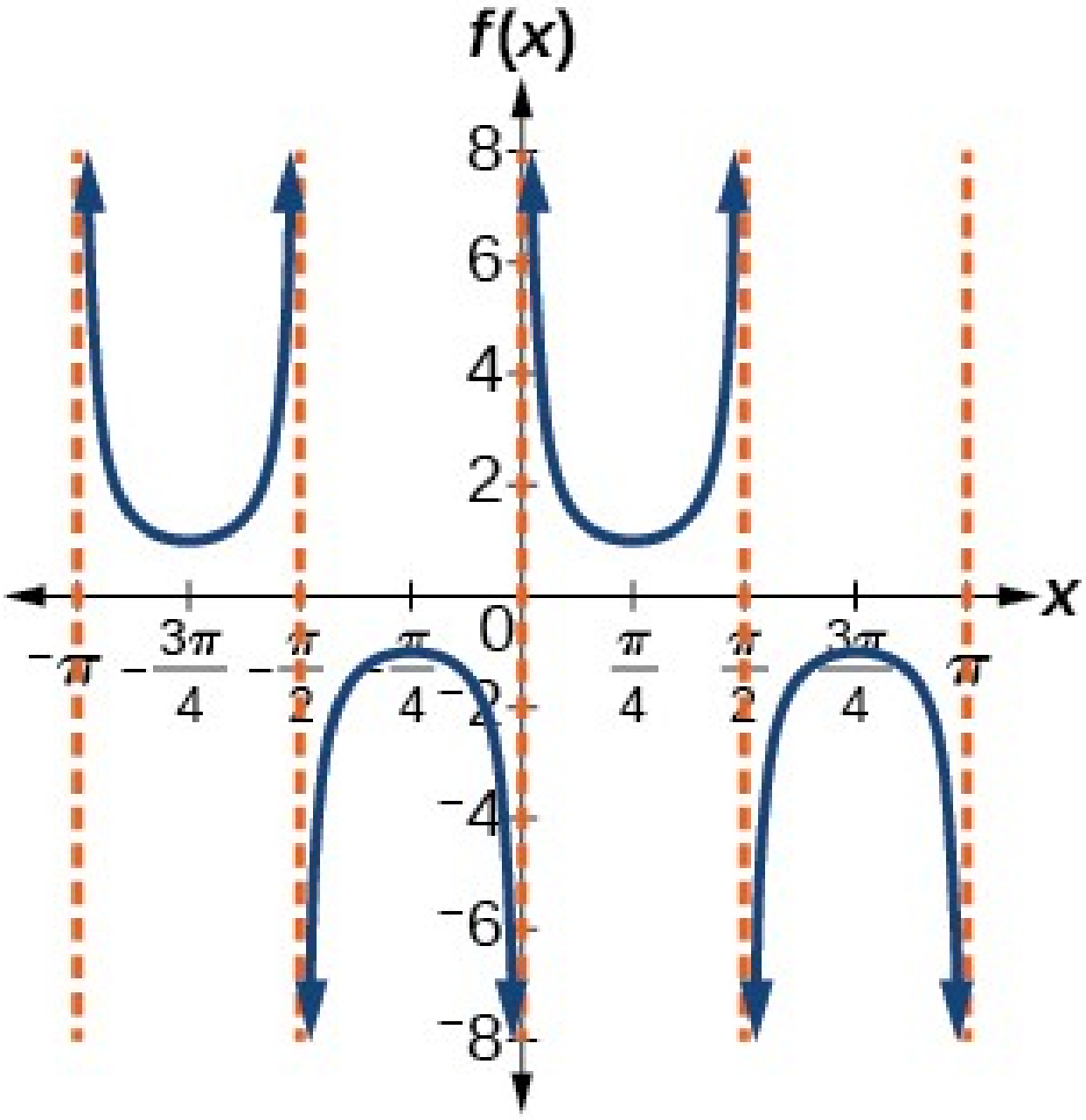
Finnið í eftirfarandi verkefnum lotubundna fallið með gefna teygjustuðlinum, $|A|$, lotunni og fasahliðruninni og teiknið tvær lotur þess.

37. Tangensfall með $A=1$, lotuna $(\frac{\pi}{3};)$ og hliðrunina $(h,k)=\left(\frac{\pi}{4},2\right)$.

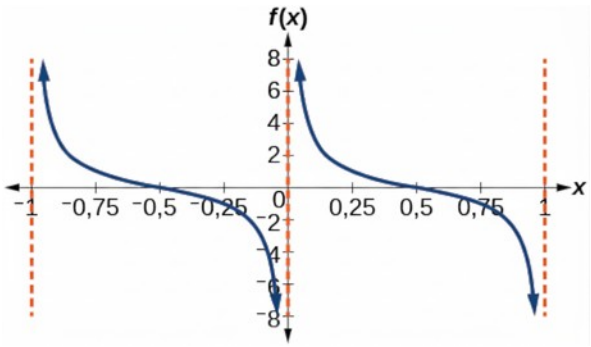
38. Tangensfall með $A=-2$, lotuna $(\frac{\pi}{4},)$ og hliðrunina $(h,k)=\left(-\frac{\pi}{4},-2\right)$.

Finnið jöfnu fyrir graf hvers falls í eftirfarandi verkefnum.

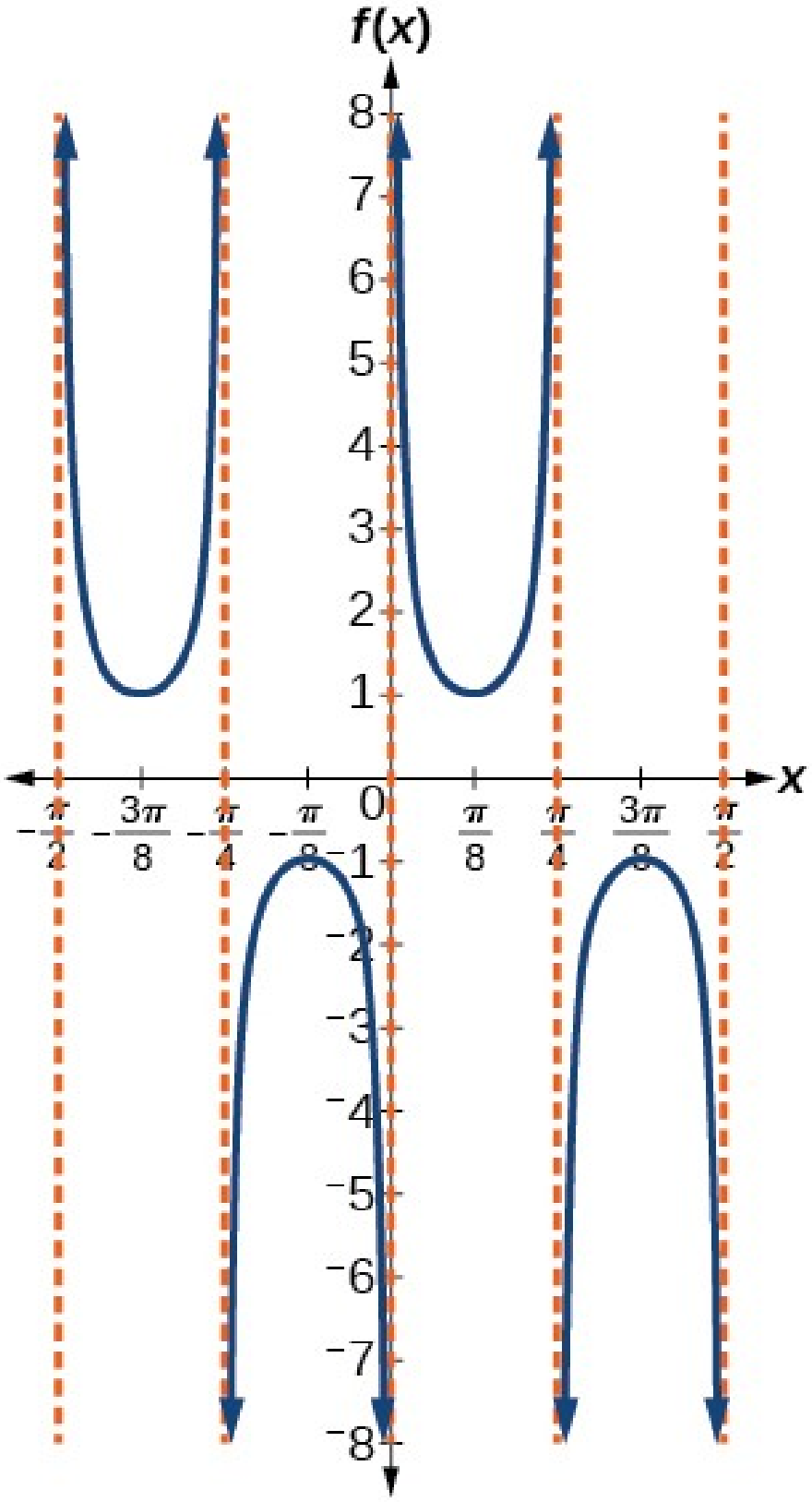
39.


f(x)
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
x
$-\pi$
$-\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π

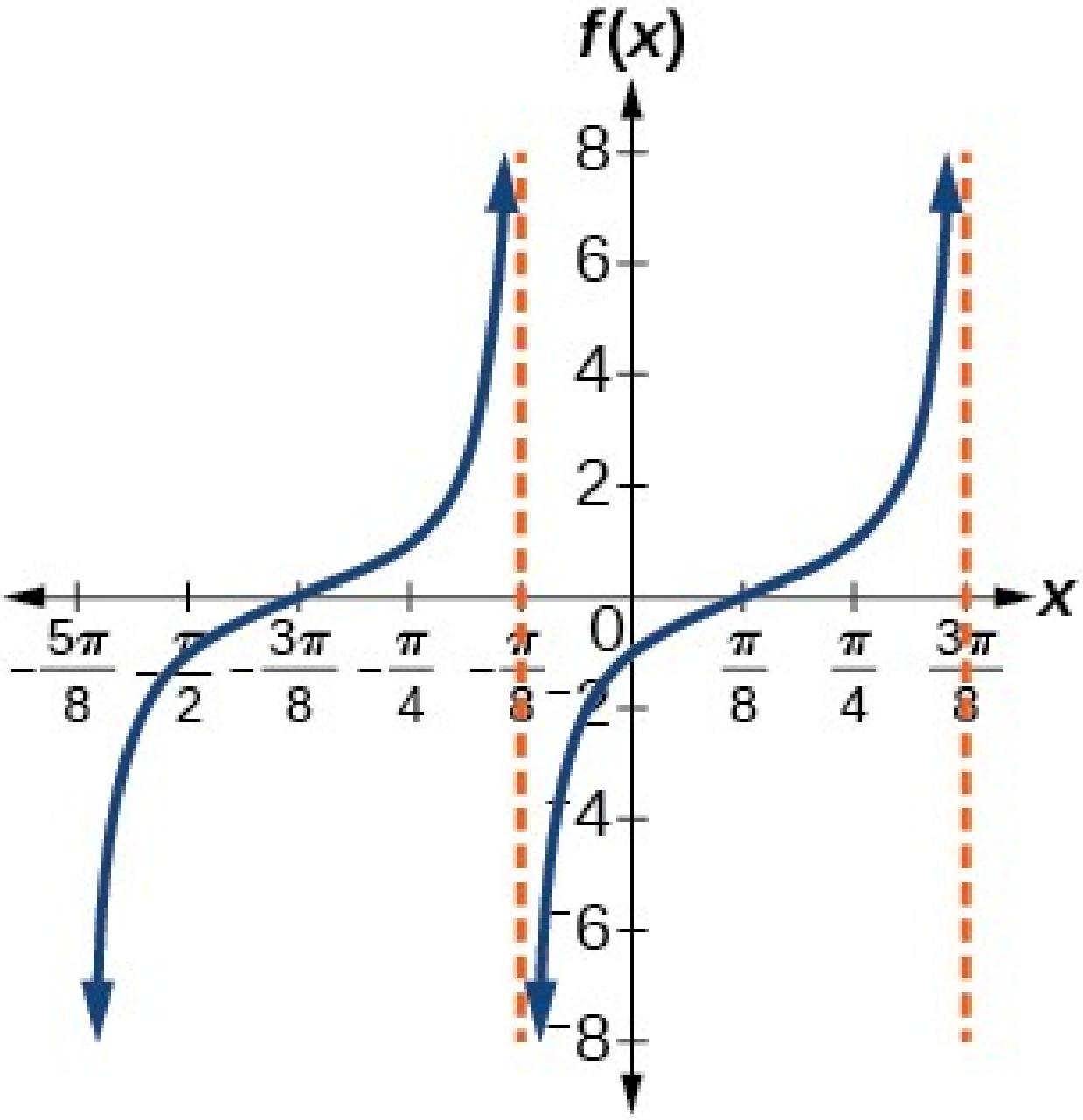
40.


f(x)
8
6
4
2
x
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1
-2
-4
-6
-8

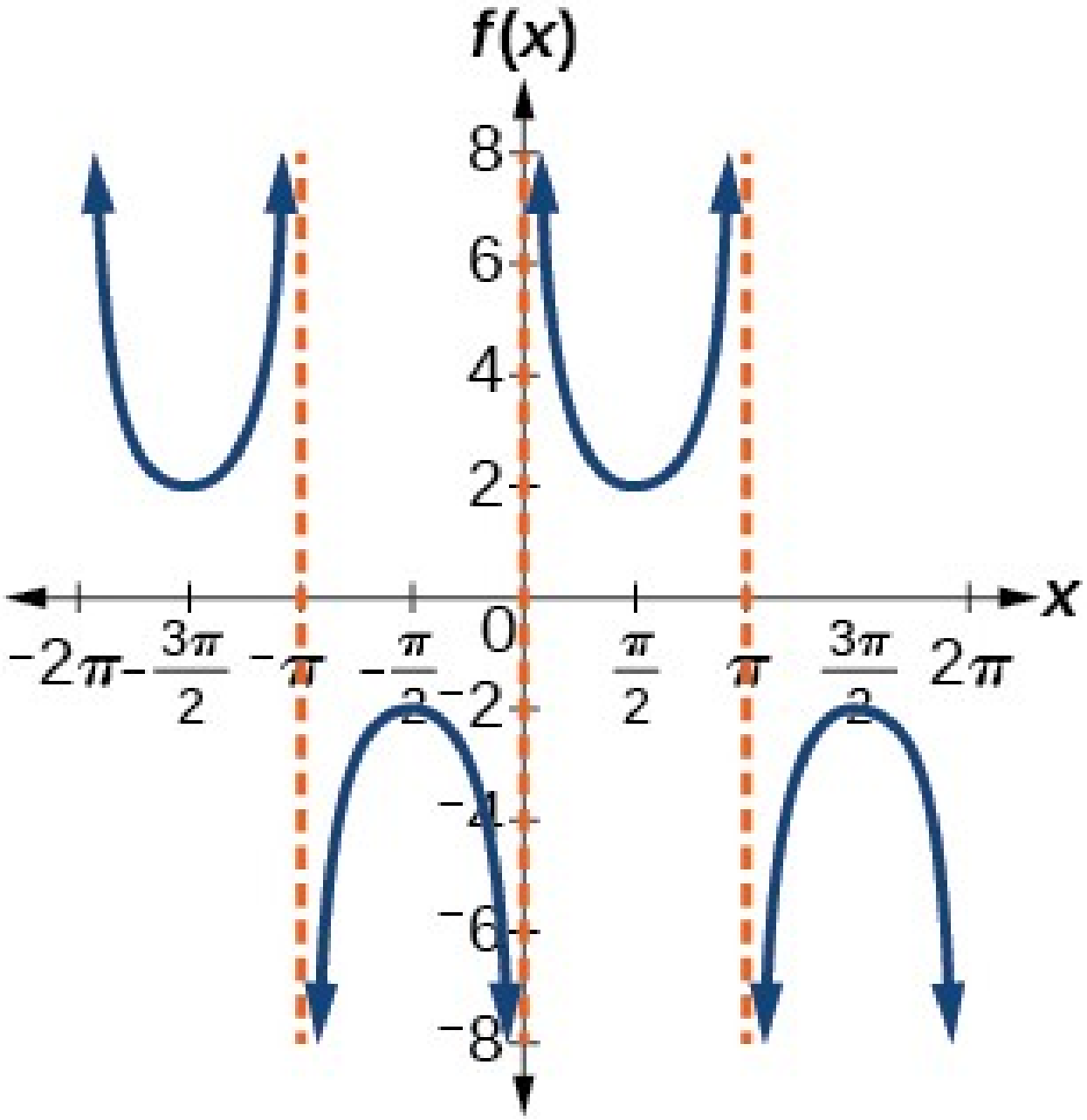
41.



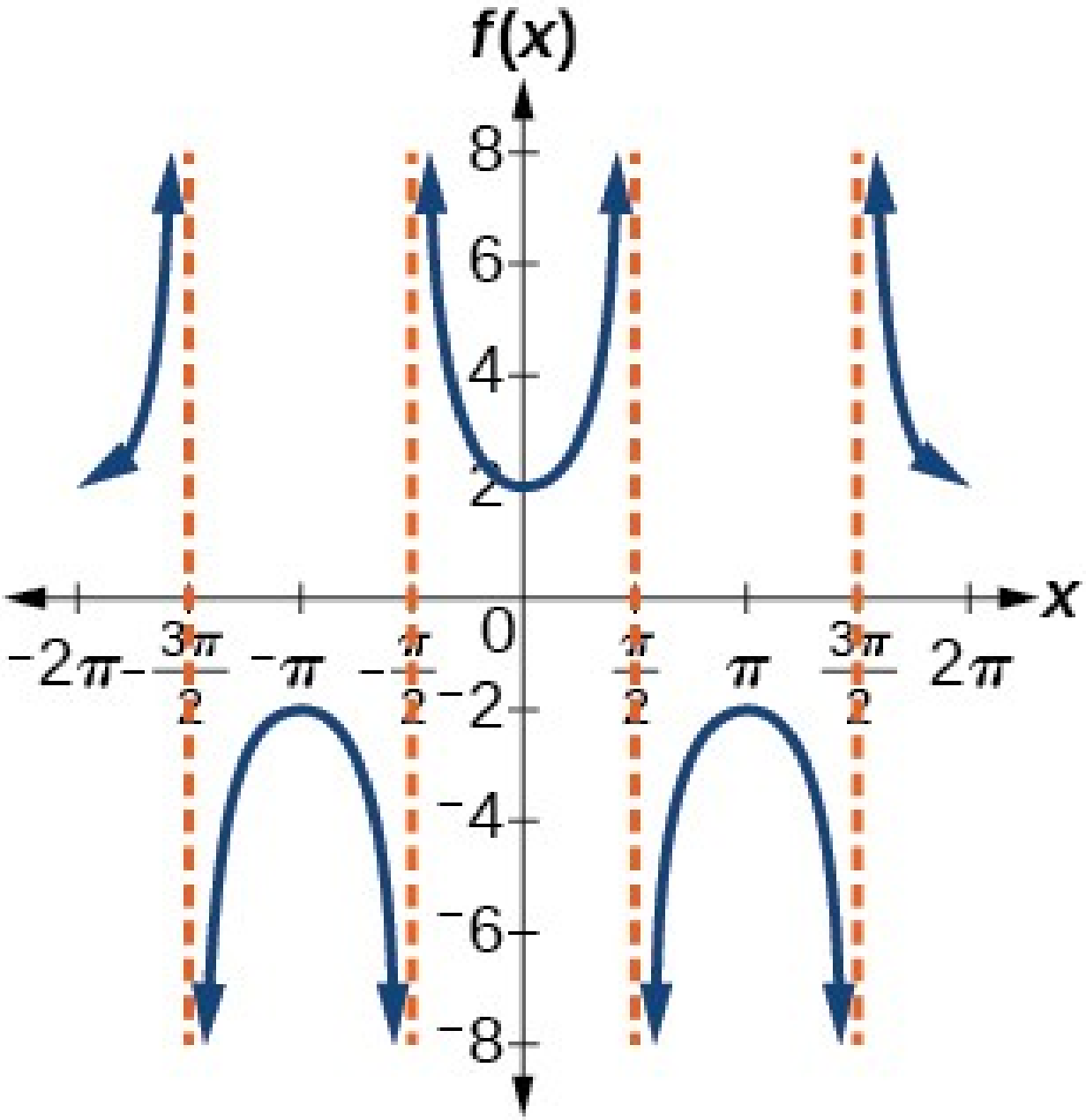
42.


f(x)
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
x
$-\frac{5\pi}{8}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{8}$
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{8}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{8}$

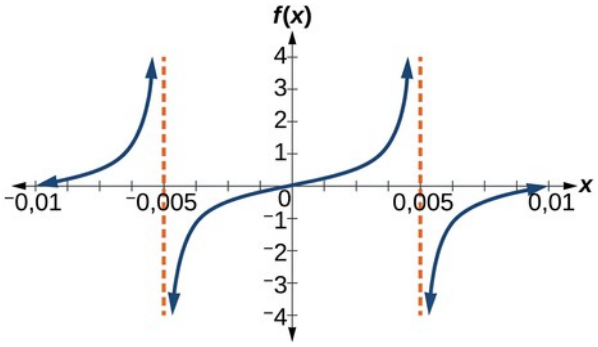
43.


f(x)
8
6
4
2
x
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
−2
−4
−6
−8

44.


f(x)
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
x
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π

45.


f(x)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
x
−0,01
−0,005
0,005
0,01

Tækniverkefni

Notið grafreikni til að teikna tvær lotur gefna fallsins í eftirfarandi verkefnum. Athugið:

Flestir grafreiknar hafa ekki hnapp fyrir kósekans. Því þarf að slá $csc\,x$ inn sem $\frac{1}{\sin x}$.

46.

$$f(x)=\left|csc(x)\right|$$

47.

$$f(x)=\left|\cot(x)\right|$$

48.

$$f(x)=2^{csc(x)}$$

49.

$$f(x)=\frac{csc(x)}{sec(x)}$$

50. Teiknið graf $f(x)=1+sec^2(x)-\tan^2(x)$. Hvaða fall sést á grafinu?

51.

$$f\,(x)=sec\,(0{,}001\,x)$$

52.

$$f(x)=\cot(100\,\pi\,x)$$

53.

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$$

Raunveruleg verkefni

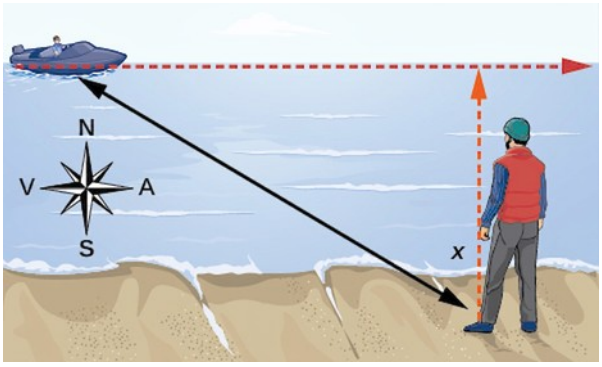
54. Í einföldu líkani gefur $f(x)=20\tan\left(\frac{\pi}{10}x\right)$ formerkta staðsetningu ljósbletts eftir vegg.

Bíllinn stendur kyrr og tíminn x, er mældur í sekúndum. Staðsetningin $f(x)$, er mæld í fetum frá punktinum beint á móti ljósinu. Veggurinn og stefna geislans eru framlengd sem beinar línur í líkaninu.

1. ⓐ Teiknið graf á bilinu $[0,5]$.
2. ⓑ Finnið og túlkið teygjustuðulinn, lotuna og aðfelluna.
3. ⓒ Reiknið $f(1)$ og $f\,(2{,}5)$ og ræðið gildi fallsins fyrir þessi inntök.

55. Veiðimaður stendur á vatnsbakka og sér bát langt í burtu á vinstri hönd. Látum x, vera hornið í radíönum milli sjónlínunnar að bátnum og línu beint í norður frá veiðimanninum. Hornið er 0 í norður og x er neikvætt til vinstri en jákvætt til hægri. Sjá mynd 19. Báturinn siglir eftir beinni línu frá vestri til austurs norðan við veiðimanninn. Ef sveigja jarðar er hunsuð er fjarlægðin $d(x)$, í kílómetrum, gefin með $d\,(x)=1{,}5\ sec\,(x)$

1. ⓐ Hvert er eðlilegt skilgreiningarmengi fyrir $d(x)$?
2. ⓑ Teiknið graf $d(x)$ á þessu skilgreiningarmengi.
3. ⓒ Finnið lóðfellur á grafi $d(x)$. og ræðið merkingu þeirra.
4. ⓓ Reiknið og túlkið $d\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Námundið að tveimur aukastöfum.
5. ⓔ Reiknið og túlkið $d\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Námundið að tveimur aukastöfum.
6. ⓕ Hver er minnsta fjarlægðin milli veiðimannsins og bátsins? Hvenær verður hún?



Mynd 19. Sjónlína frá veiðimanni að báti.

56. Leysifjarlægðarmælir er læstur á halastjörnu sem nálgast jörðina. Fjarlægð halastjörnunnar, $g(x)$, í kílómetrum, eftir x daga, fyrir x á bilinu 0 til 30 dagar, er gefin með $g\,(x)=250.000\ csc\left(\frac{\pi}{30}\,x\right)$

1. ⓐ Teiknið graf $g(x)$ á bilinu $[0,30]$.
2. ⓑ Reiknið $g(5)$ og túlkið niðurstöðuna.
3. ⓒ Hver er minnsta fjarlægðin milli halastjörnunnar og jarðar? Hvenær verður hún? Hvaða fasta í jöfnunni samsvarar hún?
4. ⓓ Finnið lóðfellur og ræðið merkingu þeirra.

57. Myndavél beinist að eldflaug á skotpalli í 2 mílna láréttri fjarlægð. Gerið ráð fyrir að eldflaugin rísi lóðrétt. Eftir x sekúndur er sjónarhornið upp frá láréttu að eldflauginni $\frac{\pi}{120}x$., mælt í radíönum.

1. ⓐ Skrifið fall sem gefur hæð eldflaugarinnar $h(x)$, yfir jörðu í mílum eftir x sekúndur. Hunsið sveigju jarðar.
2. ⓑ Teiknið graf $h(x)$ á bilinu $(0, 60)$.
3. ⓒ Reiknið og túlkið gildin $h(0)$ og $h(30)$.
4. ⓓ Hvað verður um gildi $h(x)$ þegar x nálgast 60 sekúndur? Túlkið þetta í samhengi verkefnisins.

6.3 Andhverf hornaföll

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum kafla lærið þið að:

- Skilja og nota andhverf sínus-, kósínus- og tangensföll.
- Finna nákvæm gildi stæðna sem innihalda andhverf sínus-, kósínus- og tangensföll.
- Nota reiknivél til að reikna gildi andhverfra hornafalla.
- Finna nákvæm gildi samsettra falla með andhverfum hornaföllum.

Ef annað hvössu hornanna og lengd einnar hliðar rétthyrnds þríhyrnings eru gefin getum við fundið hin hornin og hliðarnar. En hvað ef aðeins lengdir tveggja hliða eru gefnar? Þá þurfum við aðferð sem leiðir okkur frá hlutfalli hliðarlengda að horni. Þar koma andhverfur hornafalla við sögu. Í þessum kafla skoðum við andhverf hornaföll.

Skilningur og notkun andhverfra sínus-, kósínus- og tangensfalla

Andhverft fall tekur til baka aðgerð upphaflega fallsins. Til að skilgreina andhverfu hornafalls þurfum við fyrst að takmarka skilgreiningarmengi þess svo að það verði eintækt. Skilgreiningarmengi andhverfunnar er þá myndmengi takmarkaða fallsins og myndmengi hennar er skilgreiningarmengi þess, eins og sýnt er á mynd 1.



Mynd 1. Hornafall tengir hornamál við hlutfall en andhverfan hlutfall við hornamál.

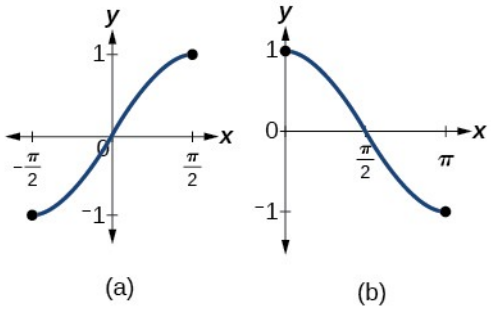
Ef $f(x) = \sin x$, á viðeigandi takmörkuðu skilgreiningarmengi skrifum við $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$. Athugið að $\sin^{-1} x$ merkir ekki $\frac{1}{\sin x}$. Dæmin hér á eftir sýna hvernig andhverfu hornaföllin eru notuð:

- Þar sem $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, þá er $\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- Þar sem $\cos(\pi)=-1$, er $\pi=\cos^{-1}(-1)$.
- Þar sem $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, þá er $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}(1)$.

Í fyrri köflum reiknuðum við gildi hornafalla fyrir ýmis horn. Stundum þurfum við hins vegar að finna horn sem gefur tiltekið sínus-, kósínus- eða tangensgildi. Til þess notum við andhverf föll. Ef eintækt fall uppfyllir $f(a)=b$, uppfyllir andhverfa þess $f^{-1}(b)=a$.

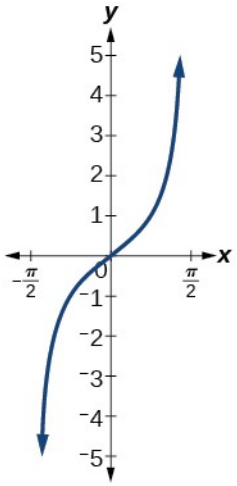
Hafið í huga að sínus-, kósínus- og tangensföllin eru ekki eintæk. Graf hvers falls stenst ekki lárétta línuprófið. Raunar getur ekkert lotubundið fall verið eintækt, því hvert gildi í myndmengi þess samsvarar að minnsta kosti einu inntaki í hverri lotu og loturnar eru óendanlega margar. Eins og með önnur föll sem eru ekki eintæk þurfum við að takmarka skilgreiningarmengi hvers falls til að fá nýtt eintækt fall. Fyrir hvert fall veljum við skilgreiningarmengi sem inniheldur töluna 0. Mynd 2 sýnir graf sínusfallsins takmarkað við $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ og graf kósínusfallsins takmarkað við $[0,\pi]$.

6



Mynd 2. (a) Sínus á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; (b) kósínus á bilinu $[0,\pi]$.

Mynd 3 sýnir graf tangensfallsins takmarkað við $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



Mynd 3. Tangens á opna bilinu $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

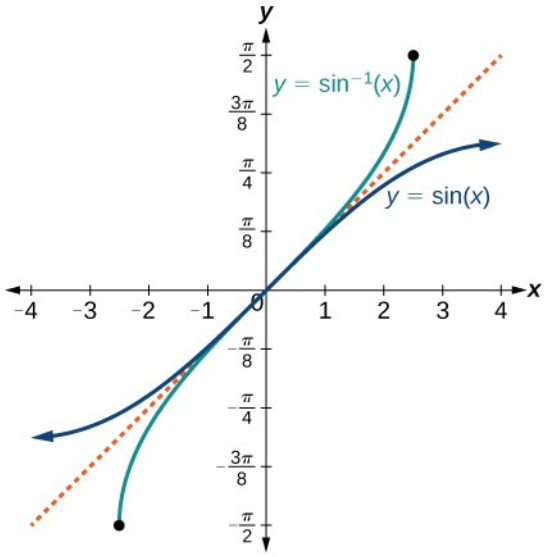
Þetta hefðbundna val á takmörkuðum skilgreiningarmengjum er að nokkru leyti handahófskennt en hefur gagnlega eiginleika. Hvert mengi inniheldur töluna 0 og jákvæðar tölur. Á hverju þessara mengja er fallið eintækt og á því andhverfu. Skilgreiningarmengið sem valið er fyrir tangens nær milli tveggja samliggjandi lóðfella. Engin lóðfella skiptir því í tvo hluta.

Á þessum takmörkuðu skilgreiningarmengjum getum við skilgreint andhverfu hornaföllin.

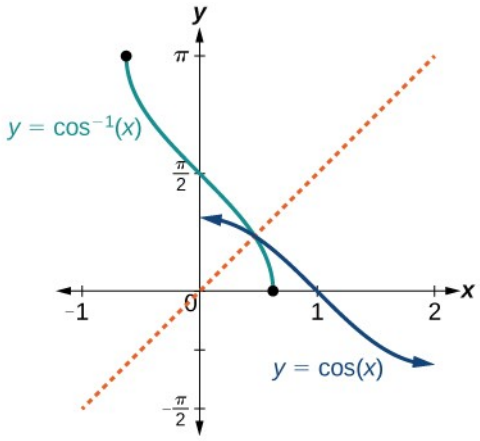
- Andhverfa sínusfallið $y=\sin^{-1}x$ merkir $x=\sin y$. Andhverfa sínusfallið er stundum kallað arkarsínus og táknað $\arcsin x$.
  $y=\sin^{-1}x$ hefur skilgreiningarmengið $[-1,1]$ og myndmengið $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
- Andhverfa kósínusfallið $y=\cos^{-1}x$ merkir $x=\cos y$. Andhverfa kósínusfallið er stundum kallað arkarkósínus og táknað $\arccos x$.
  $y=\cos^{-1}x$ hefur skilgreiningarmengið $[-1,1]$ og myndmengið $[0,\pi]$
- Andhverfa tangensfallið $y=\tan^{-1}x$ merkir $x=\tan y$. Andhverfa tangensfallið er stundum kallað arkartangens og táknað $\arctan x$.
  $y=\tan^{-1}x$ hefur skilgreiningarmengið $(-\infty,\infty)$ og myndmengið $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Gröf andhverfu fallanna eru sýnd á mynd 4, mynd 5 og mynd 6. Úttak hvers þessara falla er tala, hornamál í radíönum. Fallið $\sin^{-1}x$ hefur skilgreiningarmengið $[-1,1]$ og myndmengið $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,. Fallið $\cos^{-1}x$ hefur skilgreiningarmengið $[-1,1]$ og myndmengið $[0,\pi]$,. Fallið $\tan^{-1}x$ hefur skilgreiningarmengi allra rauntalna og myndmengið $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Við skiptum þannig á skilgreiningarmengi og myndmengi upphaflega fallsins eftir að það hefur verið

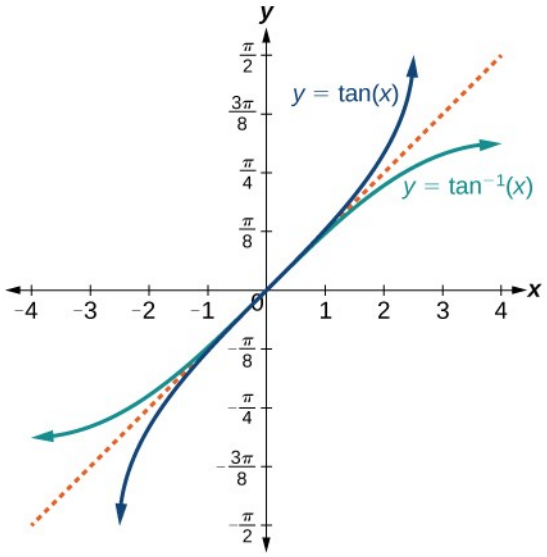
takmarkað við viðeigandi bil. Graf andhverfunnar fæst með því að spegla graf takmarkaða fallsins um línuna $y = x$.



Mynd 4 Skýring á sambandi sínusfalls og arkussínusfalls. Hnitakvarðar frumgerðarinnar eru ónákvæmir; endapunktar arkussínusgrafsins eiga að vera (−1, −π/2) og (1, π/2). Speglunarsambandið á við um takmarkaða sínusfallið.



Mynd 5 Skýring á sambandi kósínusfalls og arkuskósínusfalls. Hnitakvarðar frumgerðarinnar eru ónákvæmir; endapunktar arkuskósínusgrafsins eiga að vera (−1, π) og (1, 0). Speglunarsambandið á við um takmarkaða kósínusfallið.



Mynd 6 Skýring á sambandi tangensfalls og arkustangensfalls. Hnitakvarðar frumgerðarinnar eru ónákvæmir. Tangens hefur lóðfellur við x=−π/2 og x=π/2 en arkustangens láfellur við y=−π/2 og y=π/2.

6

SAMBÖND FYRIR ANDHVERF SÍNUS-, KÓSÍNUS- OG TANGENSFÖLL

Ef hornið y er á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, og $\sin y=x$, þá er $\sin^{-1}x=y$.

Ef hornið y er á bilinu $[0,\pi]$, og $\cos y=x$, þá er $\cos^{-1}x=y$.

Ef hornið y er á bilinu $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, og $\tan y=x$, þá er $\tan^{-1}x=y$.

SÝNIDÆMI 1

Samband fyrir andhverft fall skrifað

Gefið er að $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\approx 0{,}96593$. Skrifið samsvarandi samband með andhverfa sínusfallinu.

Lausn

Notið sambandið fyrir andhverfa sínusfallið. Ef $\sin y=x$, þá er $\sin^{-1}x=y$.

Hér notum við nálgunina $x=0{,}96593$ og hornið $y=\frac{5\pi}{12}$.

$$\sin^{-1}\left(0{,}96593\right)\approx\frac{5\pi}{12}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Gefið er að $\cos\left(0{,}5\right)\approx 0{,}8776$. Skrifið samsvarandi samband með andhverfa kósínusfallinu.

Nákvæm gildi stæðna með andhverfum sínus-, kósínus- og tangensföllum fundin

Nú þegar við getum borið kennsl á andhverf föll lærum við að reikna gildi þeirra. Fyrir flest gildi í skilgreiningarmengjum þeirra þurfum við að reikna gildi andhverfu hornafallanna með reiknivél, brúun úr töflu eða annarri tölulegri aðferð. Rétt eins og fyrir upphaflegu hornaföllin getum við gefið nákvæm gildi andhverfu fallanna fyrir sérhornin, það er $(\frac{\pi}{6})$ (30°), $(\frac{\pi}{4})$ (45°) og $(\frac{\pi}{3})$ (60°), ásamt spegilmyndum þeirra í öðrum fjórðungum.

AÐFERÐ

Reiknið gildi andhverfs hornafalls þegar „sérstakt“ inntaksgildi er gefið.

1. Finnið hornið x þar sem upphaflega hornafallið hefur sama gildi og gefna inntakið í andhverfa hornafallinu.
2. Ef x er ekki í myndmengi andhverfa fallsins finnið þá horn y sem er í því myndmengi og hefur sama sínus-, kósínus- eða tangensgildi og x, eftir því hvaða fall er til skoðunar.

SÝNIDÆMI 2

Gildi andhverfra hornafalla reiknuð fyrir sérstök inntaksgildi

Reiknið hvert eftirfarandi gildi.

1. ⓐ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$
2. ⓑ $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
3. ⓒ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. ⓓ $\tan^{-1}\left(1\right)$

Lausn

1. ⓐ Að reikna $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ jafngildir því að finna hornið sem hefur sínusgildið $\frac{1}{2}$. Hvaða horn x uppfyllir jöfnuna $\sin\left(x\right)=\frac{1}{2}$? Mörg horn uppfylla hana, til dæmis $(\frac{\pi}{6})$ og $\frac{5\pi}{6}$, en hornið sem við leitum að þarf að vera á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,. Því er $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Andhverfan er fall og gefur því nákvæmlega eitt úttak fyrir hvert inntak í skilgreiningarmengi sínu.

2. ⓑ Til að reikna $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, athugum við að hornin ($\frac{5\pi}{4}$) og ($\frac{7\pi}{4}$) hafa bæði sínusgildið $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,. Hvorugt er þó á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Við veljum neikvætt horn með sama lokaarm og ($\frac{7\pi}{4}$:). Þá fæst $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$.
3. ⓒ Til að reikna $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, leitum við að horni á bilinu $[0,\pi]$ með kósínusgildið $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Því fæst $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$.
4. ⓓ Til að reikna $\tan^{-1}(1)$, leitum við að horni á bilinu $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ með tangensgildið 1. Því er $\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

6

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Reiknið hvert eftirfarandi gildi.

1. ⓐ $\sin^{-1}(-1)$
2. ⓑ $\tan^{-1}(-1)$
3. ⓒ $\cos^{-1}(-1)$
4. ⓓ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Reiknivél notuð til að reikna gildi andhverfra hornafalla

Til að reikna andhverf hornaföll sem tengjast ekki sérhornunum sem fjallað var um áður þurfum við að nota reiknivél eða annars konar tækni. Flestar vísindareiknivélar og reiknivélaforrit hafa sérstaka hnappa fyrir andhverfu sínus-, kósínus- og tangensföllin. Þeir geta til dæmis verið merktir SIN $^{-1}$, ARCSIN eða ASIN.

Í fyrri kafla notuðum við hornafræði í rétthyrndum þríhyrningi til að finna hliðar hans þegar ein hlið og eitt horn til viðbótar voru gefin. Með andhverfum hornaföllum getum við fundið horn rétthyrnds þríhyrnings þegar tvær hliðar eru gefnar og notað reiknivél til að finna gildin með nokkrum aukastöfum.

Í þessum dæmum og verkefnum táknum við hornið sem finna á með θ. Reiknivélin getur sýnt hornamál í gráðum eða radíönum. Veljið stillingu sem hæfir viðfangsefninu.

SÝNIDÆMI 3

Andhverfa sínusfallið reiknað með reiknivél

Reiknið $\sin^{-1}(0{,}97)$ með reiknivél.

Lausn

Úttak andhverfa fallsins er horn. Reiknivélin gefur það í gráðum ef hún er í gráðuham og í radíönum ef hún er í radíanaham. Reiknivélar nota einnig sömu takmarkanir á hornunum og við notum.

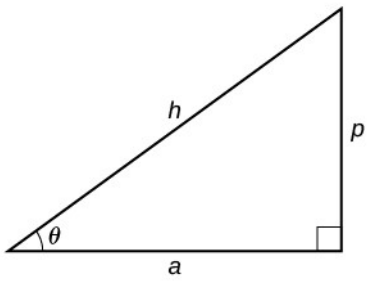
Í radíanaham fæst $\sin^{-1}(0{,}97) \approx 1{,}3252$ Í gráðuham fæst $\sin^{-1}(0{,}97) \approx 75{,}93^\circ$. Í stærðfræðigreiningu og lengra komnu efni notum við radíana í nær öllum tilvikum.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Reiknið $\cos^{-1}(-0{,}4)$ með reiknivél.

AÐFERÐ

Finnið horn þegar tvær hliðar rétthyrnds þríhyrnings eins og þess sem sýndur er á mynd 7 eru gefnar.



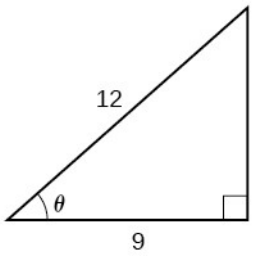
Mynd 7. Aðlæg skammhlið a, mótlæg skammhlið p og langhlið h miðað við hornið θ.

1. Ef gefnar eru lengd langhliðarinnar *h* og lengd aðlægu skammhliðarinnar *a* notum við jöfnuna $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{h}\right)$.
2. Ef gefnar eru lengd langhliðarinnar *h* og lengd mótlægu skammhliðarinnar *p* notum við jöfnuna $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{p}{h}\right)$.
3. Ef lengdir beggja skammhliðanna eru gefnar notum við jöfnuna $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{p}{a}\right)$.

SÝNIDÆMI 4

Andhverfa kósínusfallinu beitt á rétthyrndan þríhyrning

Finnið hornið θ. í þríhyrningnum á mynd 8.



Mynd 8. Rétthyrndur þríhyrningur með aðlæga skammhlið 9 og langhlið 12.

Lausn

Við þekkjum langhliðina og hliðina sem liggur að horninu. Því er eðlilegt að nota kósínusfallið.

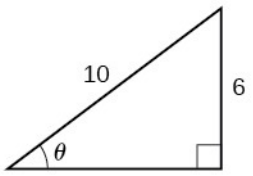
$$\cos\ \theta = \frac{9}{12}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{9}{12}\right) \qquad \text{Notum skilgreiningu andhverfu .}$$

$$\theta \approx 0{,}7227 \text{ eða um } 41{,}4096\,° \qquad \text{Reiknum gildið .}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Finnið hornið θ. í þríhyrningnum á mynd 9.



Mynd 9. Rétthyrndur þríhyrningur með mótlæga skammhlið 6 og langhlið 10.

Nákvæm gildi samsettra falla með andhverfum hornaföllum fundin

Stundum þurfum við að setja saman hornafall og andhverft hornafall. Í slíkum tilvikum getum við yfirleitt fundið nákvæm gildi stæðnanna sem fást án þess að nota reiknivél. Jafnvel þegar inntak samsetta fallsins er breyta eða stæða getum við oft fundið stæðu fyrir úttakið. Til að greina tilvikin skulum við láta $f(x)$ og $g(x)$ vera tvö ólík hornaföll í menginu $\{\sin(x), \cos(x), \tan(x)\}$ og $f^{-1}(y)$ og $g^{-1}(y)$ vera andhverfur þeirra.

Samsetning hornafalls og andhverfu þess

Samsetningin $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ gildir fyrir öll y í skilgreiningarmengi andhverfunnar. Þetta leiðir af skilgreiningu andhverfs falls: myndmengi f er skilgreiningarmengi f^{-1}. Við þurfum hins vegar að gæta að takmörkun skilgreiningarmengisins þegar við reiknum stæður af gerðinni $f^{-1}\left(f(x)\right)$.

SAMSETNINGAR HORNAFALLS OG ANDHVERFU ÞESS

$$\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x \quad \text{þegar} \quad -1\le x\le 1$$
$$\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x \quad \text{þegar} \quad -1\le x\le 1$$
$$\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x \quad \text{þegar} \quad -\infty<x<\infty$$

$$\sin^{-1}\left(\sin\ x\right)=x \quad \text{aðeins þegar} \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$$
$$\cos^{-1}\left(\cos\ x\right)=x \quad \text{aðeins þegar} \quad 0\le x\le\pi$$
$$\tan^{-1}\left(\tan\ x\ \right)=x \quad \text{aðeins þegar} \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

6

SPURT OG SVARAÐ

Er rétt að $\sin^{-1}(\sin x)=x$ **?**

Nei. Jafnan er rétt ef x tilheyrir takmarkaða skilgreiningarmenginu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$*, en sínusfallið er skilgreint fyrir allar rauntölur. Fyrir x utan takmarkaða bilsins er jafnan ekki rétt, því andhverfa sínusfallsins skilar alltaf gildi á bilinu* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$*. Hið sama á við um kósínus og tangens og andhverfur þeirra. Til dæmis er* $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$.

AÐFERÐ

Gefin er stæða á forminu f⁻¹(f(θ)) þar sem $f(\theta)=\sin\theta,\cos\theta,$ eða $\tan\theta$, **Reiknið hana.**

1. Ef θ er í takmörkuðu skilgreiningarmengi f, þá $f^{-1}\left(f(\theta)\right)=\theta$.
2. Annars finnið þið horn ϕ innan takmarkaða skilgreiningarmengis f þannig að $f(\phi)=f(\theta)$. Þá er $f^{-1}\left(f(\theta)\right)=\phi$.

SÝNIDÆMI 5

Notkun andhverfra hornafalla

Reiknið eftirfarandi:

1. ⓐ $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
2. ⓑ $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
3. ⓒ $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
4. ⓓ $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Lausn

1. ⓐ $\frac{\pi}{3}$ er í $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, svo $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$.
2. ⓑ $\frac{2\pi}{3}$ er ekki í $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, en $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, svo $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$.
3. ⓒ $\frac{2\pi}{3}$ er í $[0,\pi]$, svo $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{2\pi}{3}$.
4. ⓓ $-\frac{\pi}{3}$ er ekki í $[0,\pi]$, en $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ því kósínus er jafnstætt fall. $\frac{\pi}{3}$ er í $[0,\pi]$, svo $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{\pi}{3}$.

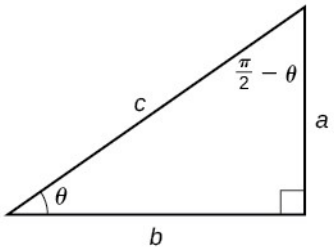
6

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Reiknið $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ og $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right)$.

Andhverft hornafall utan um annað hornafall

Við skoðum nú samsetningar af gerðinni $f^{-1}(g(x))$., þar sem andhverfa eins hornafalls er sett saman við annað hornafall. Fyrir sérstök gildi á x, má reikna innra fallgildið nákvæmlega og síðan ytra fallgildið. Almennari aðferð fæst með því að skoða hvössu hornin í rétthyrndum þríhyrningi. Ef annað þeirra er θ, er hitt $\frac{\pi}{2}-\theta$. Skoðum sínus og kósínus hornanna á mynd 10.



Mynd 10 Hvössu horn rétthyrnds þríhyrnings hafa summuna π/2.

Í rétthyrnda þríhyrningnum er $\cos\theta = \frac{b}{c} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$,. Þessi samsemd samsvarandi hornafalla gildir líka utan fyrsta fjórðungs. Af henni fæst $\sin^{-1}(\cos\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$ þegar $0 \le \theta \le \pi$. Ef hornið θ er utan þessa bils finnum við horn á bilinu sem hefur sama kósínus og θ og drögum það frá $\frac{\pi}{2}$. Í þríhyrningnum gildir einnig $\sin\theta = \frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$,. Af samsemdinni fæst $\cos^{-1}(\sin\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$ þegar $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Þetta eru í raun samsemdir samsvarandi hornafalla, settar fram á annan hátt.

AÐFERÐ

Reiknið gildi samsetninganna $\sin^{-1}(\cos x)$ og $\cos^{-1}(\sin x)$,.

1. Ef x er í $[0, \pi]$, þá er $\sin^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$.
2. Ef x er ekki í $[0, \pi]$, finnið þá annað horn y í $[0, \pi]$ þannig að $\cos y = \cos x$.
   $\sin^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - y$
3. Ef x er í $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, þá er $\cos^{-1}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$.
4. Ef x er ekki í $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, finnið þá annað horn y í $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ þannig að $\sin y = \sin x$.
   $\cos^{-1}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - y$

SÝNIDÆMI 6

Gildi samsetningar andhverfs sínusfalls og kósínusfalls reiknað

Reiknið $\sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)\right)$

1. ⓐ með beinum útreikningi.

2. ⓑ með aðferðinni sem lýst var hér að framan.

Lausn

1. ⓐ Hér getum við reiknað innri hluta samsetningarinnar beint.

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{13\pi}{6}) &= \cos(\tfrac{\pi}{6} + 2\pi) \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{6}) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Reiknum síðan gildi andhverfa fallsins:

$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

2. ⓑ Við höfum $x=\frac{13\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{6}$, og

$$\begin{aligned}\sin^{-1}\left(\cos\left(\tfrac{13\pi}{6}\right)\right) &= \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{6} \\ &= \tfrac{\pi}{3}\end{aligned}$$

6

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Reiknið $\cos^{-1}\left(\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right)$.

Hornafall utan um andhverfu annars hornafalls

Fyrir samsetningar af gerðinni $f\left(g^{-1}(x)\right)$, þar sem f og g eru hornaföll, má oft finna nákvæmar formúlur. Inntakið x þarf að vera í skilgreiningarmengi g^{-1}, og úttak andhverfunnar þarf að vera í skilgreiningarmengi ytra fallsins. Til dæmis er $\sin\left(\cos^{-1}x\right)=\sqrt{1-x^2}$. Slíkar formúlur má leiða út með rétthyrndum þríhyrningi og reglu Pýþagórasar. Pýþagórasarsamsemdin $\sin^2x+\cos^2x=1$, tengir sínus- og kósínusgildi sama horns. Því má finna annað gildið þegar hitt er þekkt. Við getum einnig notað andhverf hornaföll á þennan hátt þegar inntakið er algebrustæða.

SÝNIDÆMI 7

Gildi samsetningar sínusfalls og andhverfs kósínusfalls reiknað

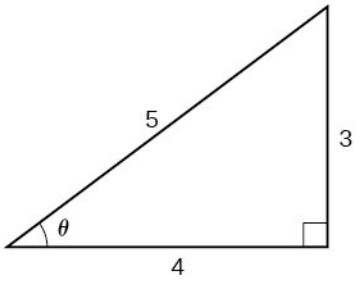
Finnið nákvæmt gildi $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.

Lausn

Byrjum á innra fallinu og látum $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$,. Þá er $\cos\theta=\frac{4}{5}$, og við leitum að $\sin\theta$. Notum Pýþagórasarsamsemdina.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \text{Setjum inn þekkt kósínusgildi .}$$
$$\sin^2\theta+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1 \qquad \text{Einangrum sínus .}$$
$$\sin^2\theta=1-\frac{16}{25}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}$$

Þar sem $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ er í fyrsta fjórðungi verður $\sin\theta$ að vera jákvæður, svo lausnin er $\frac{3}{5}$. Sjá mynd 11.



Mynd 11. Rétthyrndur þríhyrningur þar sem $\cos\theta=\frac{4}{5}$, og $\sin\theta=\frac{3}{5}$.

Andhverfa kósínusfallið gefur horn á bilinu $[0,\pi]$,. Sínus þess er því ekki neikvæður. Hér er hann jákvæður, því hornið er í fyrsta fjórðungi. Því er $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)=\sin\theta=\frac{3}{5}$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 7

Reiknið $\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$.

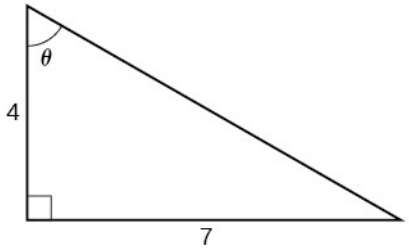
SÝNIDÆMI 8

Gildi samsetningar sínusfalls og andhverfs tangensfalls reiknað

Finnið nákvæmt gildi $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)\right)$.

Lausn

Við gætum notað svipaða aðferð og í dæmi 6 en sýnum hér aðra aðferð. Út frá innra fallinu vitum við að til er horn þannig að $\tan\theta=\frac{7}{4}$. Við getum hugsað okkur þetta sem mótlægu og aðlægu hliðarnar í rétthyrndum þríhyrningi, eins og sýnt er á mynd 12.



Mynd 12 Rétthyrndur þríhyrningur með aðlæga skammhlið 4 og mótlæga skammhlið 7.

Með reglu Pýþagórasar getum við fundið langhlið þríhyrningsins.

$$4^2+7^2=\text{ langhlið }^2$$
$$\text{langhlið }=\sqrt{65}$$

Sínus hornsins er lengd mótlægu skammhliðarinnar deilt með lengd langhliðarinnar.

$$\sin\theta=\frac{7}{\sqrt{65}}$$

Þannig fæst samsetningin sem leitað var að.

$$\begin{aligned}\sin\left(\tan^{-1}\left(\tfrac{7}{4}\right)\right) &= \sin\ \theta\\ &= \tfrac{7}{\sqrt{65}}\\ &= \tfrac{7\sqrt{65}}{65}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 8

Reiknið $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{7}{9}\right)\right)$.

SÝNIDÆMI 9

Kósínus andhverfs sínusfalls af algebrustæðu fundinn

Finnið einfaldaða stæðu fyrir $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$ þegar $-3\le x\le 3$.

Lausn

Við vitum að til er horn θ þannig að $\sin\theta=\frac{x}{3}$.

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta+\cos^2\theta&=1 && \text{Notum Pýþagórasarsamsemdina .}\\
\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cos^2\theta&=1 && \text{Einangrum kósínus .}\\
\cos^2\theta&=1-\frac{x^2}{9}\\
\cos\theta&=\pm\sqrt{\frac{9-x^2}{9}}=\pm\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}
\end{aligned}$$

Þar sem við vitum að andhverfa sínusfallið hlýtur að gefa horn á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, getum við ályktað að kósínus þess horns hljóti að vera jákvæður.

$$\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

6

REYNIÐ SJÁLF NR. 9

Finnið einfaldaða stæðu fyrir $\sin\left(\tan^{-1}(4x)\right)$ þegar $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{4}$.

MIÐLAR

Skoðið þetta netefni til að fá frekari kennslu og æfingu í andhverfum hornaföllum.

- Stæður með andhverfum hornaföllum reiknaðar

6.3 Kaflaæfingar

Munnleg verkefni

1. Hvers vegna hafa föllin $f(x)=\sin^{-1}x$ og $g(x)=\cos^{-1}x$ ólík myndmengi?

2. Föllin $y=\cos x$ og $y=\cos^{-1}x$ eru andhverfur þegar skilgreiningarmengi kósínusfallsins hefur verið takmarkað við hefðbundna bilið. Hvers vegna er þá $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ekki jafnt $-\frac{\pi}{6}$?

3. Útskýrið merkingu $\frac{\pi}{6}=\arcsin(0{,}5)$.

4. Á flestum reiknivélum er enginn hnappur til að reikna $sec^{-1}(2)$. Útskýrið hvernig má gera það með kósínusfallinu eða andhverfa kósínusfallinu.

5. Hvers vegna þarf að takmarka skilgreiningarmengi sínusfallsins $\sin x$, til að skilgreina andhverfu þess? Útskýrið hefðbundna valið á bilinu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Ræðið hvers vegna eftirfarandi fullyrðing er röng: $\arccos(\cos x) = x$ fyrir öll x.

7. Ákvarðið hvort eftirfarandi fullyrðing sé sönn eða ósönn og rökstyðjið svarið: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Algebruverkefni

Reiknið stæðurnar í eftirfarandi verkefnum.

8.

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

9.

$$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

10.

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

11.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

12.

$$\tan^{-1}(1)$$

13.

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

14.

$$\tan^{-1}(-1)$$

15.

$$\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

16.

$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Notið reiknivél til að reikna stæðurnar í eftirfarandi verkefnum. Gefið hornamál í radíönum og námundið að tveimur aukastöfum.

17.

$$\cos^{-1}(-0{,}4)$$

18.

$$\arcsin(0{,}23)$$

19.

$$\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

20.

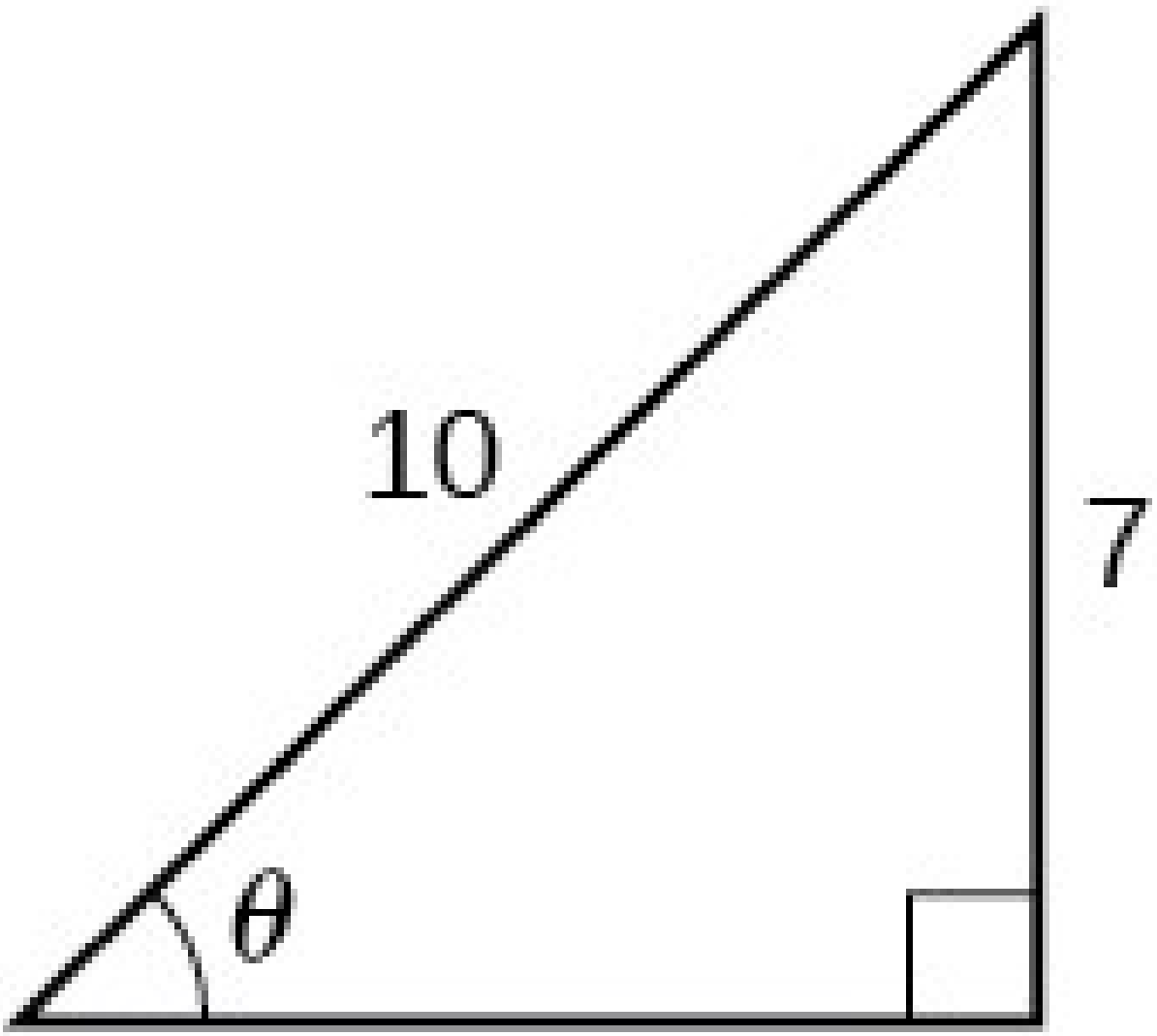
$$\cos^{-1}(0{,}8)$$

21.

$$\tan^{-1}(6)$$

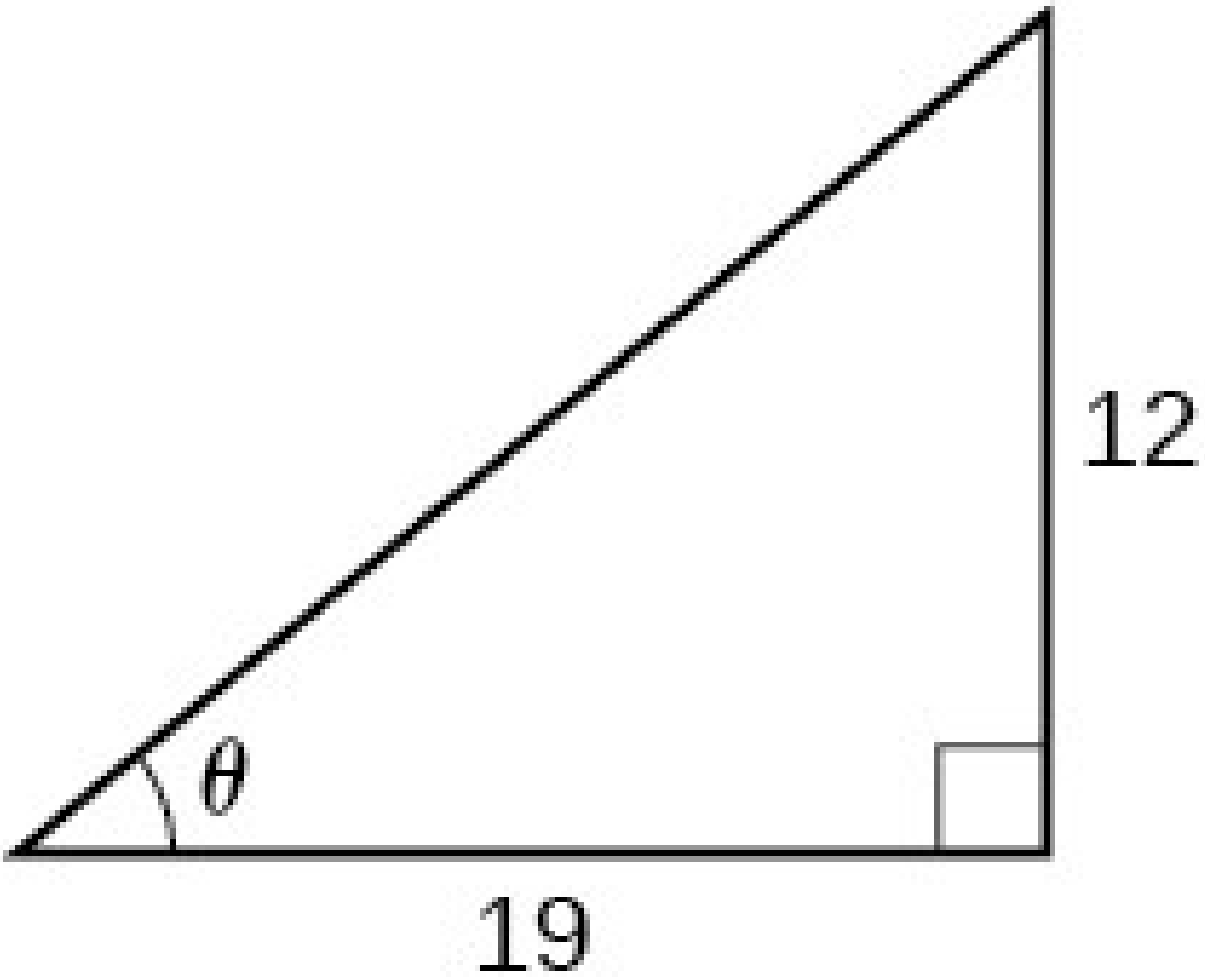
Finnið hornið θ í hverjum þríhyrningi. Gefið hornamálið í radíönum og námundið að tveimur aukastöfum.

22.



6

23.



Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi verkefnum, ef það er hægt án reiknivélar. Ef það er ekki hægt, útskýrið þá hvers vegna.

24.

$$\sin^{-1}(\cos(\pi))$$

25.

$$\tan^{-1}(\sin(\pi))$$

26.

$$\cos^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

27.

$$\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

28.

$$\sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

29.

$$\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

30.

$$\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

6

31.

$$\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-5\pi}{2}\right)\right)$$

32.

$$\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

33.

$$\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

34.

$$\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

35.

$$\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)\right)$$

36.

$$\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Finnið nákvæmt gildi stæðunnar sem fall af x í eftirfarandi verkefnum. Notið viðmiðunarþríhyrning.

37.

$$\tan\left(\sin^{-1}(x-1)\right)$$

38.

$$\sin\left(\cos^{-1}(1-x)\right)$$

39.

$$\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

40.

$$\cos\left(\tan^{-1}(3x-1)\right)$$

41.

$$\tan\left(\sin^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

6

Viðbótarverkefni

Reiknið stæðuna án reiknivélar í eftirfarandi verkefnum. Gefið nákvæmt gildi.

42.

$$\frac{\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\cos^{-1}(1)}{\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}(0)}$$

Í eftirfarandi verkefnum er $\sin t=\frac{x}{x+1}$. Látum t vera aðalhornið sem andhverfa sínusfallið gefur. Finnið umbeðna stæðu á því skilgreiningarmengi þar sem hún er skilgreind.

43.

$$\cos t$$

44.

$$\sec t$$

45.

$$\cot t$$

46.

$$\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

47.

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2x+1}}\right)$$

Myndræn verkefni

48. Teiknið graf $y=\sin^{-1}x$ og tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins.

49. Teiknið graf $y=\arccos x$ og tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins.

50. Teiknið graf $y=\tan^{-1}x$ og tilgreinið skilgreiningarmengi og myndmengi fallsins.

51. Fyrir hvaða gildi á x er $\sin x=\sin^{-1}x$? Notið grafreikni til að nálga svarið.

52. Fyrir hvaða gildi á x er $\cos x=\cos^{-1}x$? Notið grafreikni til að nálga svarið.

6

Raunveruleg verkefni

53. Gerum ráð fyrir að 13 feta stigi halli upp að byggingu og nái að neðri brún glugga á annarri hæð, 12 fetum yfir jörðu. Hvaða horn, í radíönum, myndar stiginn við bygginguna?

54. Ekið er 0,6 mílur eftir beinum vegarkafla með jöfnum halla. Hæðin eykst úr 0 fetum í 150 fet. Hvert er hallahorn vegarins?

55. Jafnarma þríhyrningur hefur tvær jafnlangar hliðar sem eru 9 tommur að lengd. Þriðja hliðin er 8 tommur. Finnið hornið milli 9 tommu hliðar og 8 tommu hliðarinnar.

56. Nálgið gildi $\arctan\left(10.000\right)$ án reiknivélar. Útskýrið hvers vegna svarið er eðlilegt.

57. Þakstóll húss er gerður úr tveimur eins rétthyrndum þríhyrningum. Grunnlína hvors er 12 fet og hæðin 4 fet. Finnið stærð hvassa hornsins sem liggur að 4 feta hliðinni.

58. Línan $y=\frac{3}{5}x$ fer í gegnum upphafspunktinn í x,y-hnitakerfinu. Hvert er hornið milli línunnar og jákvæða x-ássins?

59. Línan $y=\frac{-3}{7}x$ fer í gegnum upphafspunktinn í x,y-hnitakerfinu. Hvert er hornið milli línunnar og neikvæða x-ássins?

60. Hver er halli vegar í prósentum ef hallahorn hans er 4 gráður? Prósentuhalli segir hve mörg fet vegurinn hækkar á 100 feta láréttri vegalengd. Til dæmis merkir 5% halli að vegurinn hækkar um 5 fet fyrir hver 100 fet sem farið er lárétt.

61. 20 feta stigi hallar upp að byggingu þannig að fótur hans er 10 fet frá veggnum. Samkvæmt öryggiskröfum á hallahorn stigans að vera á milli 35 og 45 gráða. Uppfyllir staðsetning stigans þær kröfur?

62. Gerum ráð fyrir að 15 feta stigi halli upp að húsi þannig að hallahorn hans sé 42 gráður. Hve langt er fótur stigans frá húsveggnum?

Lykilhugtök

útslag

fjarlægðin frá miðlínu sínuslaga falls að hágildi þess; útslagið er algildi stuðulsins A í almennu formi fallsins

arkuskósínus

annað heiti á andhverfa kósínusfallinu; $\arccos x = \cos^{-1} x$

arkussínus

annað heiti á andhverfa sínusfallinu; $\arcsin x = \sin^{-1} x$

arkustangens

annað heiti á andhverfa tangensfallinu; $\arctan x = \tan^{-1} x$

andhverft kósínusfall

fallið $\cos^{-1} x$, sem er andhverfa kósínusfallsins og gefur hornið sem hefur kósínus jafnan gefinni tölu

andhverft sínusfall

fallið $\sin^{-1} x$, sem er andhverfa sínusfallsins og gefur hornið sem hefur sínus jafnan gefinni tölu

andhverft tangensfall

fallið $\tan^{-1} x$, sem er andhverfa tangensfallsins og gefur hornið sem hefur tangens jafnan gefinni tölu

miðlína

lárétta línan $y = D$, þar sem D er fastinn sem bætist við í almennu formi sínuslaga falls

lotubundið fall

fall $f(x)$ sem uppfyllir $f(x+P) = f(x)$ fyrir tiltekinn jákvæðan fasta P og öll x í skilgreiningarmengi þess; skilgreiningarmengið helst einnig óbreytt við þessa hliðrun

fasahliðrun

lárétt hliðrun grunnfalls sínuss eða kósínuss; í almennu formi sínuslaga falls er hún $(\frac{C}{B})$, þar sem B er ekki núll

sínuslaga fall

fall sem má rita á forminu $f(x)=A\sin(Bx-C)+D$ eða $f(x)=A\cos(Bx-C)+D$

Lykiljöfnur

Sínuslaga föll	$f(x) = A\sin(Bx - C) + D$ $f(x) = A\cos(Bx - C) + D$

Hliðrað, samþjappað og/eða teygt tangensfall	$y=A\tan(Bx-C)+D$
Hliðrað, samþjappað og/eða teygt sekansfall	$y=A\,sec(Bx-C)+D$
Hliðrað, samþjappað og/eða teygt kósekansfall	$y=A\,csc(Bx-C)+D$
Hliðrað, samþjappað og/eða teygt kótangensfall	$y=A\cot(Bx-C)+D$

6

Meginatriði

6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla

- Lotubundið fall endurtekur gildi sín þegar inntakið er aukið um tiltekna jákvæða stærð. Minnsta slíka stærðin, ef hún er til, er grunnlota fallsins. Grunnföll sínuss og kósínuss hafa lotuna 2π.
- Fallið $\sin x$ er oddstætt og graf þess er því samhverft um upphafspunktinn. Fallið $\cos x$ er jafnstætt og graf þess er því samhverft um y-ásinn.
- Graf sínuslaga falls hefur sömu almennu lögun og graf sínus- eða kósínusfalls.
- Í almennu formi sínuslaga falls, þar sem A og B eru ekki núll, er lotan $P=\frac{2\pi}{|B|}$. Sjá dæmi 1.
- Í almennu formúlunni fyrir sínuslaga fall táknar $|A|$ útslagið. Ef $|A|>1$, er fallið teygt en ef $|A|<1$, er því þjappað saman. Sjá dæmi 2.
- Gildið $\frac{C}{B}$ í almennu formi sínuslaga falls gefur fasahliðrunina, að því gefnu að B sé ekki núll. Sjá dæmi 3.
- Gildið D í almennu formúlunni fyrir sínuslaga fall gefur til kynna lóðrétta hliðrun frá miðlínunni. Sjá dæmi 4.
- Greina má samsettar umbreytingar sínuslaga falla út frá jöfnu. Sjá dæmi 5.
- Ákvarða má jöfnu sínuslaga falls út frá grafi. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.

- Útslag og lota nýtast við að teikna graf sínuslaga falls. Einnig þarf að taka mið af fasahliðrun og miðlínu. Sjá dæmi 8 og dæmi 9.
- Teikna má graf sínuslaga falls með því að ákvarða útslag þess, lotu, fasahliðrun og lóðrétta hliðrun. Sjá dæmi 10.
- Nota má sínuslaga föll til að leysa verkefni úr raunveruleikanum. Sjá dæmi 11, dæmi 12 og dæmi 13.

6.2 Gröf annarra hornafalla

- Tangensfallið hefur lotuna π.
- Fallið $f(x)=A\tan(Bx-C)+D$ fæst með því að hliðra tangensfallinu og teygja graf þess eða þjappa því saman lóðrétt og/eða lárétt. Hér er gert ráð fyrir að A og B séu ekki núll. Sjá dæmi 1, dæmi 2 og dæmi 3.
- Sekansfallið og kósekansfallið eru lotubundin föll með lotuna 2π. Fallið $f(x)=A\,sec(Bx-C)+D$ lýsir hliðruðu, samþjöppuðu og/eða teygðu sekansfalli. Hér er gert ráð fyrir að A og B séu ekki núll. Sjá dæmi 4 og dæmi 5.
- Fallið $f(x)=A\,csc(Bx-C)+D$ lýsir hliðruðu, samþjöppuðu og/eða teygðu kósekansfalli. Hér er gert ráð fyrir að A og B séu ekki núll. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Kótangensfallið hefur lotuna π og lóðfellur við $0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots$
- Myndmengi kótangensfallsins er $(-\infty,\infty)$, og fallið er strangt minnkandi á hverju bili milli tveggja samliggjandi lóðfella.
- Kótangensfallið hefur núllstöðvar við $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\ldots$
- Fallið $f(x)=A\cot(Bx-C)+D$ fæst með því að hliðra kótangensfallinu og teygja graf þess eða þjappa því saman lóðrétt og/eða lárétt. Hér er gert ráð fyrir að A og B séu ekki núll. Sjá dæmi 8 og dæmi 9.
- Leysa má verkefni úr raunveruleikanum með gröfum hornafalla. Sjá dæmi 10.

6.3 Andhverf hornaföll

- Andhverft fall snýr vörpun upphaflega fallsins við. Skilgreiningarmengi andhverfa fallsins er myndmengi upphaflega fallsins og myndmengi andhverfa fallsins er skilgreiningarmengi upphaflega fallsins.
- Hornaföllin eru ekki eintæk á skilgreiningarmengjum sínum. Til að skilgreina andhverf hornaföll er því skilgreiningarmengi upphaflega hornafallsins takmarkað við bil þar sem það er eintækt.

- Fyrir hornafall $f(x)$, gildir að ef $x=f^{-1}(y)$, þá er $f(x)=y$. Hins vegar leiðir $f(x)=y$ aðeins til $x=f^{-1}(y)$ ef x er í því takmarkaða skilgreiningarmengi sem notað er til að skilgreina andhverfu f. Sjá dæmi 1.
- Sérhorn eru úttök andhverfra hornafalla fyrir sérstök inntaksgildi; til dæmis $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}(1)$ og $\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$. Sjá dæmi 2.
- Þegar andhverft hornafall er reiknað á reiknivél fæst horn innan þess takmarkaða skilgreiningarmengis sem valið var fyrir upphaflega hornafallið. Sjá dæmi 3.
- Með andhverfum hornaföllum má finna stærð hvass horns þegar lengdir tveggja hliða rétthyrnds þríhyrnings eru þekktar. Sjá dæmi 4.
- Þegar innra fallið í samsetningu falla er andhverft hornafall eru til nákvæmar stæður; til dæmis $\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)=\sqrt{1-x^2}$. Sjá dæmi 5.
- Þegar innra fallið er hornafall gilda meðal annars samböndin $\sin^{-1}(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$ ef $0\le x\le\pi$ og $\cos^{-1}(\sin x)=\frac{\pi}{2}-x$ ef $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Þegar gildi samsetningar hornafalls og andhverfs hornafalls er reiknað getur viðmiðunarþríhyrningur hjálpað til við að finna hlutfall hliðarlengda sem gefur niðurstöðuna. Sjá dæmi 8.
- Þegar gildi samsetningar hornafalls og andhverfs hornafalls er reiknað má nota hornafallasamsemdir til að finna hlutfall hliðarlengda. Sjá dæmi 9.

Yfirlitsverkefni

Gröf sínus- og kósínusfalla

Í næstu verkefnum skal teikna gröf fallanna yfir tvær lotur og ákvarða útslag, lotu og jöfnu miðlínu. Tilgreinið einnig aðfellur ef þær eru til.

1.

$$f(x)=-3\cos x+3$$

2.

$$f(x)=\frac{1}{4}\sin x$$

3.

$$f(x)=3\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

4.

$$f(x)=-2\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$$

5.

$$f(x)=3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-4$$

6.

$$f(x)=2\left(\cos\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)+1\right)$$

7.

$$f(x)=6\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-1$$

8.

$$f(x)=-100\sin(50x-20)$$

Gröf annarra hornafalla

Í næstu verkefnum skal teikna gröf fallanna yfir tvær lotur og ákvarða útslag, lotu og jöfnu miðlínu. Tilgreinið einnig aðfellur ef þær eru til.

9.

$$f(x)=\tan x-4$$

10.

$$f(x)=2\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

11.

$$f(x)=-3\tan(4x)-2$$

12.

$$f\left(x\right)=0{,}2\cos\left(0{,}1\ x\right)+0{,}3$$

Í næstu verkefnum skal teikna tvær heilar lotur og tilgreina lotu, fasahliðrun, lóðréttan teygjustuðul og aðfellur. Þessi föll hafa ekkert útslag af því að þau eru ótakmörkuð.

13.

$$f(x)=\frac{1}{3}\sec x$$

14.

$$f(x)=3\cot x$$

15.

$$f(x)=4\,csc(5x)$$

16.

$$f(x)=8\,sec\left(\frac{1}{4}x\right)$$

17.

$$f(x)=\frac{2}{3}csc\left(\frac{1}{2}x\right)$$

18.

$$f(x)=-csc(2x+\pi)$$

6

Notið eftirfarandi aðstæður í verkefnunum: Íbúafjöldi borgar hefur aukist og minnkað á 20 ára tímabili. Lýsa má íbúafjöldanum með eftirfarandi falli:
$y=12.000+8.000\ \sin\left(0{,}628\ x\right)$, þar sem skilgreiningarmengið er fjöldi ára frá 1980 og myndmengið er íbúafjöldi borgarinnar.

19. Hver er mesti og minnsti mögulegi íbúafjöldi borgarinnar samkvæmt líkaninu?

20. Teiknið graf fallsins á skilgreiningarmenginu $[0,40]$.

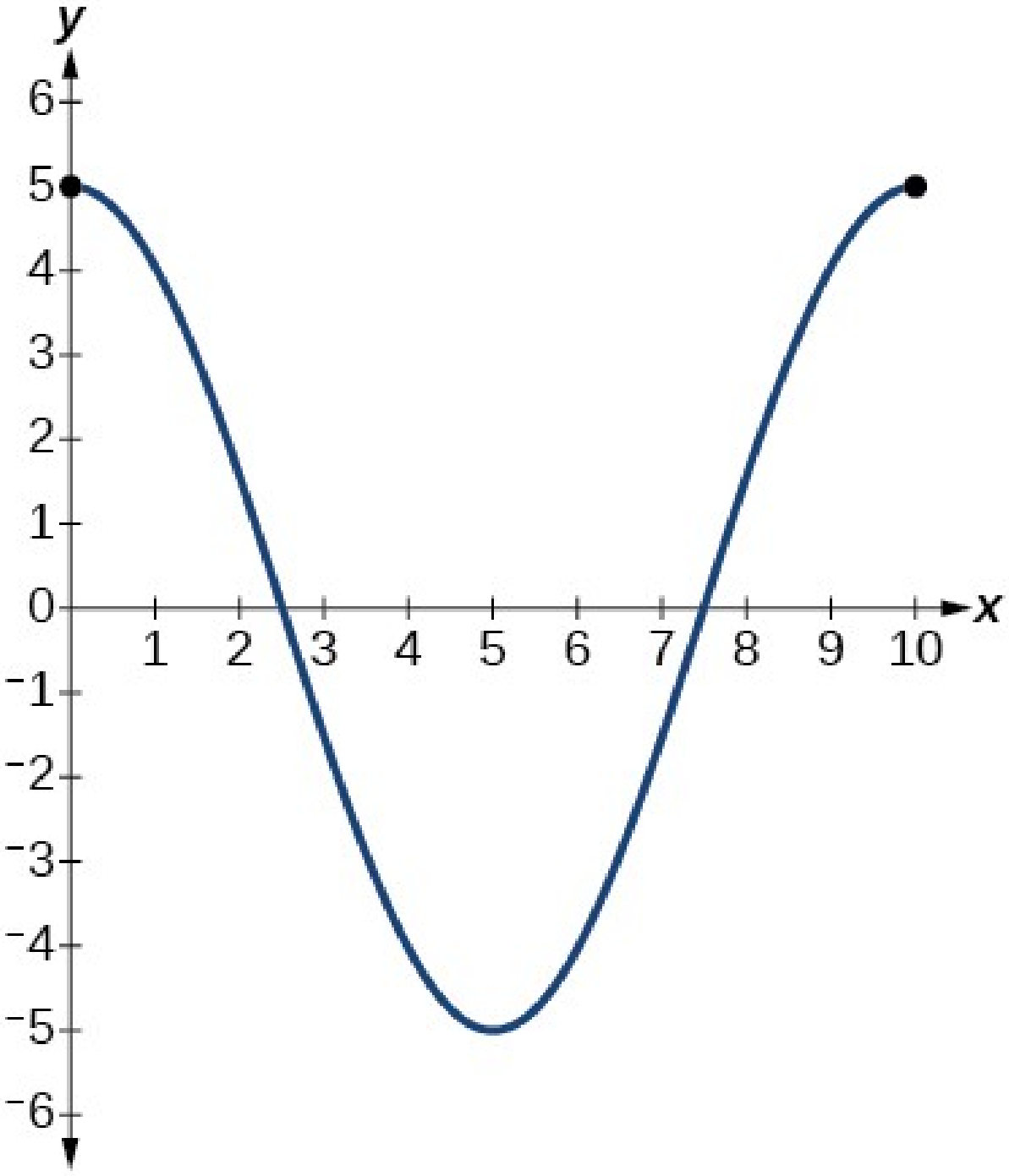
21. Hvert er útslag fallsins, lota þess og fasahliðrun?

22. Hvenær á tímabilinu $0\le x\le 40$ nær íbúafjöldinn 18.000? En 13.000?

23. Hver er áætlaður íbúafjöldi árið 2007? En árið 2010?

Í næstu verkefnum er gert ráð fyrir að lóð sé fest við gorm og sveiflist samhverft upp og niður um jafnvægisstöðu.

24. Á mynd 1 er graf færslu lóðsins. Gildin á x-ásnum tákna tíma í sekúndum og gildin á y-ásnum færslu frá jafnvægisstöðu í tommum. Finnið jöfnu sem lýsir lóðréttri færslu lóðsins á gorminum.



Mynd 1. Færsla lóðs á gormi sem fall af tíma.

25. Hver er færsla lóðsins við tímann 0?

26. Hvenær er færslan frá jafnvægisstöðu núll?

27. Hve langan tíma tekur lóðið að snúa aftur í upphafsstöðu sína, 5 tommum ofan við jafnvægisstöðu? Með öðrum orðum, hver er lota færslufallsins?

Andhverf hornaföll

Finnið nákvæmt gildi stæðanna í næstu verkefnum án reiknivélar. Ef stæða hefur ekkert raungilt gildi skuluð þið taka það fram.

28.

$$\sin^{-1}(1)$$

29.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

30.

$$\tan^{-1}(-1)$$

31.

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

32.

$$\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

33.

$$\sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

34.

$$\cos^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

35.

$$\sin\left(sec^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

36.

$$\cot\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

37.

$$\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right)$$

38.

$$\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

39. Teiknið gröf $f(x)=\cos x$ og $f(x)=sec\,x$ á bilinu $[0,2\pi)$ og útskýrið það sem þið sjáið.

40. Teiknið gröf $f(x)=\sin x$ og $f(x)=csc\,x$ og lýsið því sem þið sjáið.

41. Teiknið graf fallsins $f(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$ á bilinu $[-1,1]$ og berið það saman við graf $f(x)=\sin x$ á sama bili. Lýsið því sem þið sjáið.

Kaflapróf

Skissið graf hvers falls yfir tvær heilar lotur í eftirfarandi verkefnum. Ákvarðið útslag (eða lóðréttan teygjustuðul, eftir því sem við á), lotu og jöfnu miðlínu. Tangens-, sekans- og kósekansföll eru ótakmörkuð og hafa ekki útslag.

1.

$$f\ (x)=0{,}5\ \sin\ \ x$$

2.

$$f(x)=5\cos x$$

3.

$$f(x)=5\sin x$$

4.

$$f(x)=\sin(3x)$$

5.

$$f(x)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$$

6.

$$f(x)=5\sin\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+4$$

7.

$$f(x)=3\cos\left(\frac{1}{3}x-\frac{5\pi}{6}\right)$$

8.

$$f(x)=\tan(4x)$$

9.

$$f(x)=-2\tan\left(x-\frac{7\pi}{6}\right)+2$$

10.

$$f(x)=\pi\cos(3x+\pi)$$

11.

$$f(x)=5\,csc(3x)$$

12.

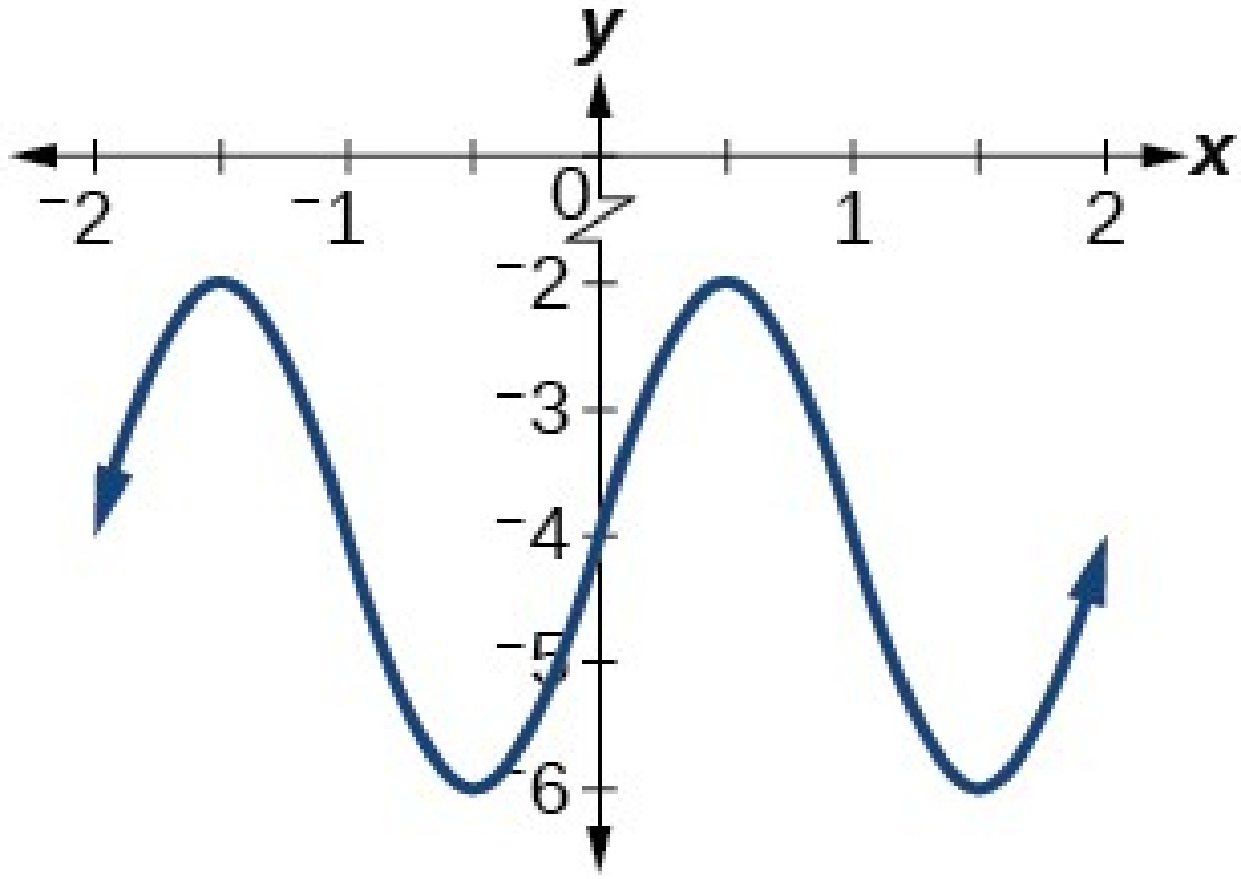
$$f(x)=\pi\,sec\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

13.

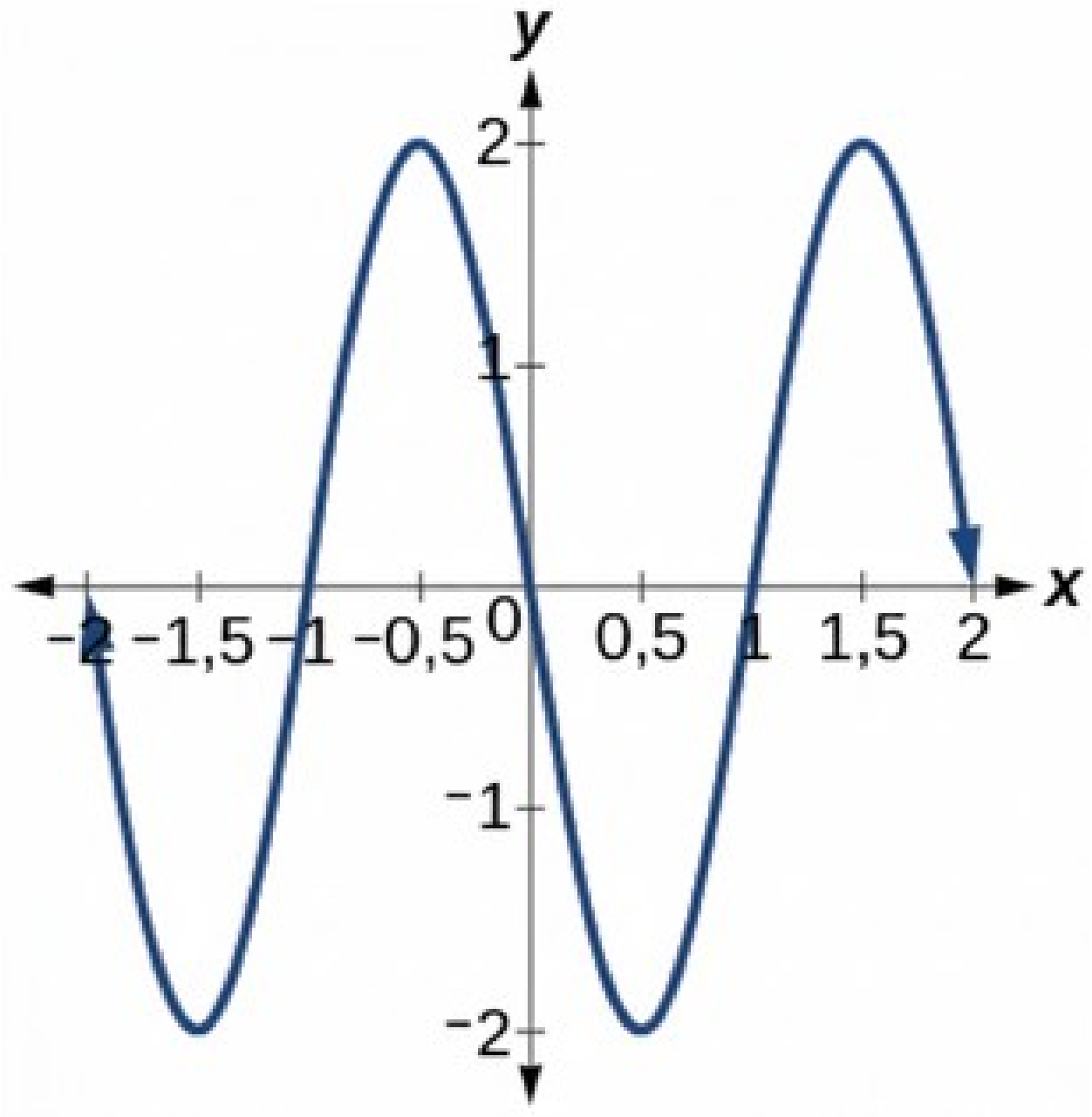
$$f(x)=2\,csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3$$

Ákvarðið útslag (eða lóðréttan teygjustuðul, eftir því sem við á), lotu og miðlínu grafsins í eftirfarandi verkefnum. Finnið síðan formúlu fyrir fallið.

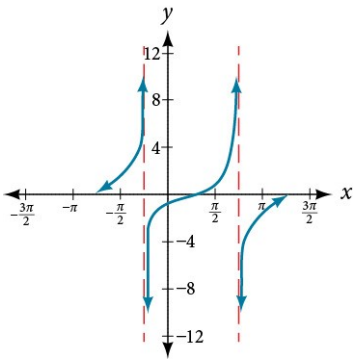
14. Ritið formúluna með sínusfalli.



15. Ritið formúluna með sínusfalli.



16. Ritið formúluna með tangensfalli.



Finnið útslag, lotu, fasahliðrun og miðlínu í eftirfarandi verkefnum.

17.

$$y=\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\pi\right)-3$$

18.

$$y=8\sin\left(\frac{7\pi}{6}x+\frac{7\pi}{2}\right)+6$$

19. Lýsa má útihita yfir daginn með sínuslaga falli. Gerum ráð fyrir að hitinn sé 68°F á miðnætti og að hæsti og lægsti hiti dagsins séu 80°F og 56°F. Látum t vera fjölda klukkustunda frá miðnætti og finnið fall fyrir hitastigið, D, sem fall af t.

20. Vatni er dælt í geymslutank og það tæmt úr honum þannig að vatnsdýptin breytist lotubundið. Hún er minnst 3 fet klukkan 02:00 og mest 71 fet. Hámarkið endurtekur sig á 5 klukkustunda fresti. Ritið kósínusfall sem lýsir vatnsdýptinni sem falli af tíma í klukkustundum frá miðnætti. Teiknið síðan graf þess yfir eina lotu.

Finnið lotu og lárétta hliðrun hvers falls í eftirfarandi verkefnum.

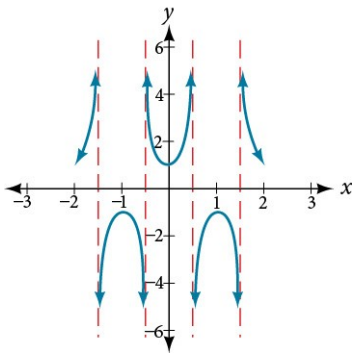
21.

$$g(x)=3\tan(6x+42)$$

22.

$$n(x)=4\,csc\left(\frac{5\pi}{3}x-\frac{20\pi}{3}\right)$$

23. Ritið jöfnu grafsins á mynd 1 með sekansfalli og gefið upp lotu og fasahliðrun.



Mynd 1. Graf sekansfalls.

24. Ef $\tan x = 3$, finnið $\tan(-x)$.

25. Ef $sec\, x = 4$, finnið $sec(-x)$.

Teiknið gröf fallanna innan tilgreindra marka í eftirfarandi verkefnum og svarið spurningunum.

6

26. Teiknið graf $m(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$ í glugganum $[-10, 10]$ sinnum $[-3, 3]$. Áætlið lotu grafsins.

27. Teiknið graf $n(x) = 0{,}02 \sin(50\ \pi\ x)$ á eftirfarandi skilgreiningarmengjum í x: $[0, 1]$ og $[0, 3]$. Gerum ráð fyrir að fallið lýsi hljóðbylgjum. Hvers vegna líta þessar myndir svona ólíkt út?

28. Teiknið graf $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ á $[-0{,}5; 0{,}5]$ og útskýrið það sem þið sjáið.

Í eftirfarandi verkefnum er $f(x) = \frac{3}{5}\cos(6x)$.

29. Hvert er stærsta mögulega gildi $f(x)$?

30. Hvert er minnsta mögulega gildi $f(x)$?

31. Hvar er fallið vaxandi á bilinu $[0, 2\pi]$?

Finnið í eftirfarandi verkefnum formúlu fyrir sínuslaga fall með gefnu útslagi, lotu og hliðrun og teiknið eina lotu þess. Hliðrunin (h; k) táknar lárétta hliðrun h og lóðrétta hliðrun k.

32. Sínusferill með útslag 3, lotu $\frac{\pi}{3}$, og fasahliðrun $(h, k) = \left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

33. Kósínusferill með útslag 2, lotu $\frac{\pi}{6}$, og fasahliðrun $(h, k) = \left(-\frac{\pi}{4}, 3\right)$

Teiknið graf fallsins í eftirfarandi verkefnum. Lýsið grafinu og, eftir því sem við á, lotubundinni hegðun, útslagi, aðfellum og gildum óháðu breytunnar þar sem fallið er óskilgreint.

34.

$$f(x)=5\cos(3x)+4\sin(2x)$$

35.

$$f(x)=e^{\sin t}$$

Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi verkefnum. Ef niðurstaðan er háð x skuluð þið einfalda stæðuna og tilgreina fyrir hvaða raungildi x hún er skilgreind.

36.

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

37.

$$\tan^{-1}(\sqrt{3})$$

38.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

39.

$$\cos^{-1}(\sin(\pi))$$

40.

$$\cos^{-1}\left(\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$

41.

$$\cos(\sin^{-1}(1-2x))$$

42.

$$\cos^{-1}(-0{,}4)$$

43.

$$\cos(\tan^{-1}(x^2))$$

Gerið ráð fyrir í eftirfarandi verkefnum að $\sin t=\frac{x}{x+1}$. Reiknið eftirfarandi stæður.

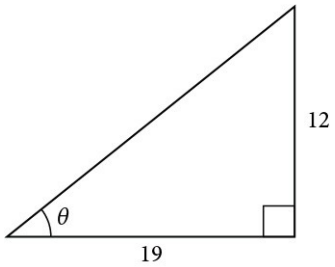
44.

$$\tan t$$

45.

$$\csc t$$

46. Finnið stærð hornsins θ á mynd 2 með þremur aukastöfum. Svarið í radíönum.



Mynd 2. Rétthyrndur þríhyrningur með gefnum skammhliðum.

6

Ákvarðið hvort jafnan sé sönn eða ósönn í eftirfarandi verkefnum.

47.

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\frac{5\pi}{6}$$

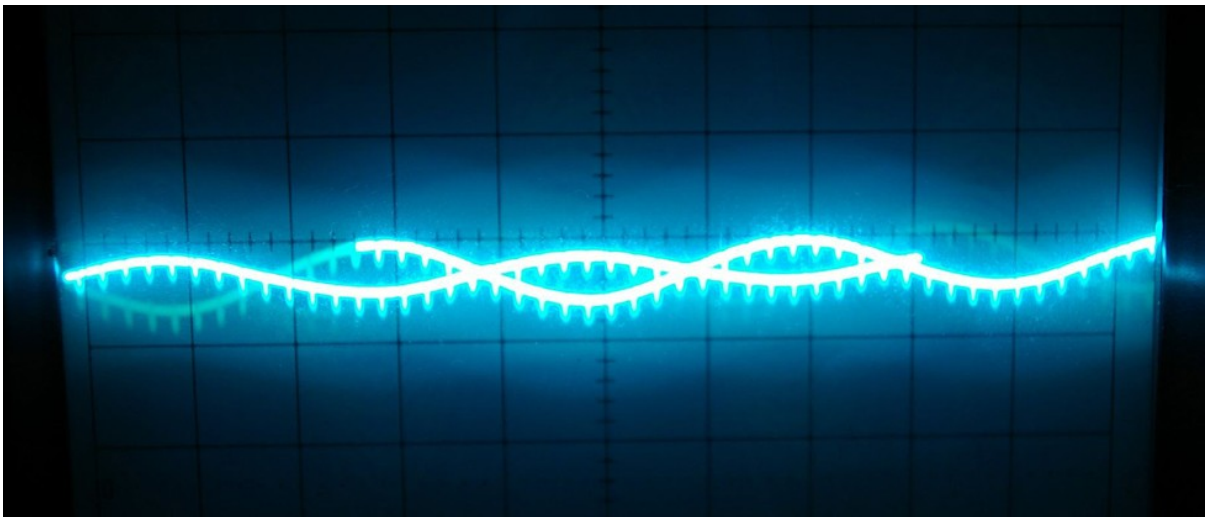
48.

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)=\frac{5\pi}{6}$$

49. Halli vegar er 7%. Það þýðir að fyrir hver 100 fet í lárétta stefnu hækkar vegurinn um 7 fet. Finnið hornið sem vegurinn myndar við lárétta stefnu og gefið svarið í radíönum.

7. KAFLI

Hornafallasamsemdir og -jöfnur



Sínuslaga bylgjur má nota til að lýsa sveiflum. (Mynd: aðlagað eftir verki Mikaels Altemark á Flickr.)

Yfirlit kaflans

- 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
- 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
- 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur
- 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu
- 7.5 Lausnir hornafallajafna
- 7.6 Líkangerð með hornaföllum

Inngangur að hornafallasamsemdum og -jöfnum

Stærðfræði er alls staðar, jafnvel þar sem við komum ekki strax auga á hana. Stærðfræðileg vensl lýsa til dæmis flutningi mynda, ljóss og hljóðs. Með sínuslaga bylgjum má lýsa hljóðmerkjum, svo sem tónlist sem leikin er í síma, útvarpi eða tölvu. Myndin hér að ofan

sýnir bylgjuform á sveiflusjárskjá. Slíkum bylgjuformum má lýsa með hornaföllum og hornafallajöfnum. Í þessum kafla skoðum við hvernig nota má ýmsar formúlur og hornafallasamsemdir til að umrita hornafallajöfnur með algebru. Við skoðum einnig hvernig nota má hornafallajöfnur til að búa til líkön af raunverulegum fyrirbærum.

7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda

NÁMSMARKMIÐ

Eftir þennan hluta eigið þið að geta:

- sannprófað grundvallarsamsemdir hornafallanna.
- einfaldað hornafallastæður með algebru og samsemdum.



Mynd 1 Vegabréf og ferðaskilríki

Í njósnamyndum sjáum við alþjóðlega njósnara með mörg vegabréf sem hvert um sig gefur upp önnur persónueinkenni. Við vitum þó að öll vegabréfin tilheyra sömu manneskjunni. Hornafallasamsemdir virka svipað og mörg vegabréf: sömu hornafallastæðuna má rita á marga vegu. Rétt eins og njósnari velur ítalskt vegabréf þegar hann ferðast til Ítalíu veljum við þá samsemd sem á við þegar við leysum tiltekna hornafallajöfnu.

Í þessum hluta skoðum við grundvallarsamsemdir hornafallanna, hvernig má sannprófa þær og nota til að einfalda hornafallastæður.

Sannprófun grundvallarsamsemda hornafallanna

Samsemdir gera okkur kleift að einfalda flóknar stæður. Þær eru grunnverkfæri hornafræðinnar við lausn hornafallajafna, rétt eins og þáttun, samnefnari og sérformúlur eru grunnverkfæri við lausn algebrujafna. Við notum raunar stöðugt algebruaðferðir til að einfalda hornafallastæður. Grundvallareiginleikar og formúlur algebrunnar, svo sem reglan um mismun ferninga og reglan um ferning tvíliðu, einfalda vinnu með hornafallastæður og -jöfnur. Við vitum nú þegar að öll hornaföllin tengjast, enda eru þau öll skilgreind út frá einingarhringnum. Því má rita hverja hornafallasamsemd á marga vegu.

Þegar við sannprófum hornafallasamsemdir byrjum við yfirleitt á flóknari hlið jöfnunnar og umritum stæðuna þar til hún hefur tekið sömu mynd og stæðan hinum megin við jafnaðarmerkið. Stundum þarf að þátta stæður, margfalda upp úr svigum, finna samnefnara eða nota aðrar algebruaðferðir til að fá æskilega niðurstöðu. Í þessum fyrsta hluta vinnum við með grundvallarsamsemdirnar: Pýþagórasarsamsemdir, samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla, samsemdir um margföldunarandhverfur og kvótasamsemdir. Samsemd gildir fyrir öll gildi þar sem báðar hliðar hennar eru skilgreindar. Þegar við deilum, styttum og einföldum þarf því að halda til haga öllum skilyrðum um að nefnarar séu ekki núll. Einfaldari stæða getur verið skilgreind víðar en upprunalega stæðan.

Við byrjum á Pýþagórasarsamsemdunum (sjá töflu 1), sem eru jöfnur með hornaföllum og byggjast á eiginleikum rétthyrnds þríhyrnings. Við höfum þegar séð og notað þá fyrstu en nú notum við einnig fleiri samsemdir.

Tafla 1

Pýþagórasarsamsemdir		
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$	$1+\cot^2\theta=csc^2\theta$	$1+\tan^2\theta=sec^2\theta$

Aðra og þriðju samsemdina má fá með því að umrita þá fyrstu. Samsemdin $1+\cot^2\theta=csc^2\theta$ fæst með því að umrita vinstri hliðina með sínus og kósínus.

Sannið: $1+\cot^2\theta=csc^2\theta$

$$1+\cot^2\theta=\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \qquad \text{Umritum vinstri hliðina.}$$

$$=\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)+\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \qquad \text{Ritum báða liði með sama nefnara.}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$=csc^2\theta$$

Á sama hátt má fá $1+\tan^2\theta=sec^2\theta$ með því að umrita vinstri hliðina með sínus og kósínus. Þá fæst

$$
\begin{aligned}
1+\tan^2\theta &= 1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 && \text{Umritum vinstri hliðina.}\\
&= \left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 && \text{Ritum báða liði með sama nefnara.}\\
&= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \frac{1}{\cos^2\theta}\\
&= sec^2\theta
\end{aligned}
$$

Í næsta flokki grundvallarsamsemda eru samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla. Þær tengja saman gildi hornafalls fyrir horn og gagnstætt horn og sýna hvort fallið er jafnstætt eða oddstætt. Sjá töflu 2.

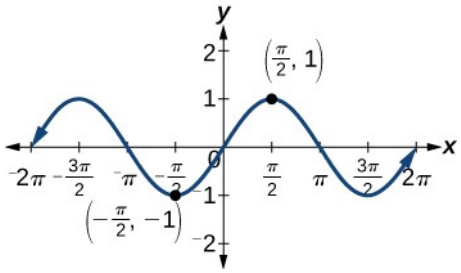
Tafla 2

Samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla		
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$

Munið að oddstætt fall uppfyllir $f(-x)=-f(x)$ fyrir öll x í skilgreiningarmengi f. Skilgreiningarmengið þarf jafnframt að vera samhverft um núll. Sínusfallið er oddstætt því að $\sin(-\theta)=-\sin\theta$. Graf oddstæðs falls er samhverft um upphafspunktinn. Skoðum til dæmis inntökin ($\frac{\pi}{2}$) og $-\frac{\pi}{2}$. Fallgildið $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ er gagnstæð tala við fallgildið $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Því er

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\\
&\text{og}\\
&\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&=-1
\end{aligned}
$$

Þetta er sýnt á mynd 2.



Mynd 2 Graf $y = \sin\theta$

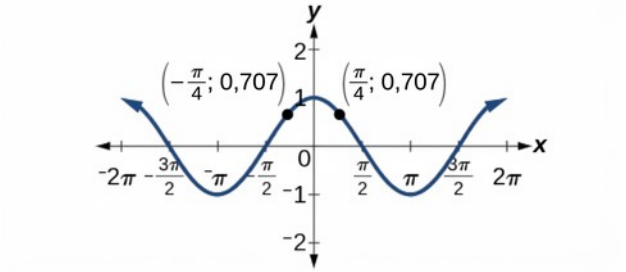
Munið að skilgreiningarmengi jafnstæðs falls er samhverft um núll og að fallið uppfyllir eftirfarandi:

$$f(-x) = f(x) \text{ fyrir öll } x \text{ í skilgreiningarmengi } f$$

Graf jafnstæðs falls er samhverft um y-ásinn. Samsemdin $\cos(-\theta) = \cos\theta$. sýnir að kósínusfallið er jafnstætt. Skoðum til dæmis inntökin ($\frac{\pi}{4}$) og $-\frac{\pi}{4}$. og berum saman fallgildin. Fallgildin $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ og $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. eru jöfn. Því er

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\approx 0{,}707$$

Sjá mynd 3.



Mynd 3 Graf $y = \cos\theta$

Fyrir öll horn θ getum við sett fram eftirfarandi um sínus og kósínus:

- Samsemdin $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, sýnir að sínus er oddstætt fall.
- Samsemdin $\cos(-\theta) = \cos\theta$, sýnir að kósínus er jafnstætt fall.

Hinar samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla leiða af því að sínus er oddstætt fall og kósínus jafnstætt. Skoðum til dæmis tangenssamsemdina $\tan(-\theta) = -tan\theta$. Með því að rita tangens sem hlutfall sínuss og kósínuss fæst $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$. Tangens er því oddstætt fall og uppfyllir $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ fyrir öll θ í skilgreiningarmengi sínu.

Samsemdin $\cot(-\theta) = -\cot\theta$, leiðir einnig af sínus- og kósínussamsemdunum. Með því að rita kótangens sem hlutfall kósínuss og sínuss fæst $\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$. Kótangens er því oddstætt fall og uppfyllir $\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$ fyrir öll θ í skilgreiningarmengi sínu.

Gildi kósekans er margföldunarandhverfa gildis sínuss þar sem sínus er ekki núll. Því fæst $csc(-\theta) = \frac{1}{\sin(-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -csc\,\theta$. Kósekansfallið er því oddstætt.

Gildi sekans er margföldunarandhverfa gildis kósínuss þar sem kósínus er ekki núll. Því fæst $sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = sec\,\theta$. Sekansfallið er því jafnstætt.

Af sex grunnhornaföllunum eru kósínus og sekans jafnstæð. Hin fjögur eru oddstæð, eins og samsemdirnar sýna.

Samsemdir um margföldunarandhverfur tengja saman hornaföll þar sem gildi annars er margföldunarandhverfa gildis hins. Þær gilda þar sem báðar hliðar eru skilgreindar. Sjá töflu 3.

Tafla 3

Samsemdir um margföldunarandhverfur	
$\sin\theta = \frac{1}{csc\,\theta}$	$csc\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
$\cos\theta = \frac{1}{sec\,\theta}$	$sec\,\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

Síðasti flokkurinn er kvótasamsemdir. Þær lýsa tengslum tiltekinna hornafalla og geta nýst vel við sannprófun annarra samsemda. Sjá töflu 4.

Tafla 4

Kvótasamsemdir	
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Samsemdirnar um margföldunarandhverfur og kvótasamsemdirnar leiða af skilgreiningum grunnhornafallanna.

SAMANTEKT HORNAFALLASAMSEMDA

Pýþagórasarsamsemdir byggjast á eiginleikum rétthyrnds þríhyrnings.

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$1+\cot^2\theta=csc^2\theta$$

$$1+\tan^2\theta=sec^2\theta$$

Samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla tengja saman gildi hornafalls fyrir tiltekið horn og fyrir gagnstætt horn.

$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=-\cot\theta$$

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$csc(-\theta)=-csc\,\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$sec(-\theta)=sec\,\theta$$

Samsemdir um margföldunarandhverfur tengja saman hornafallagildi sem eru margföldunarandhverfur hvort annars.

$$\sin\theta=\frac{1}{csc\,\theta}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{sec\,\theta}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$$

$$csc\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$sec\,\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

Kvótasamsemdir skilgreina tengsl hornafallanna.

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

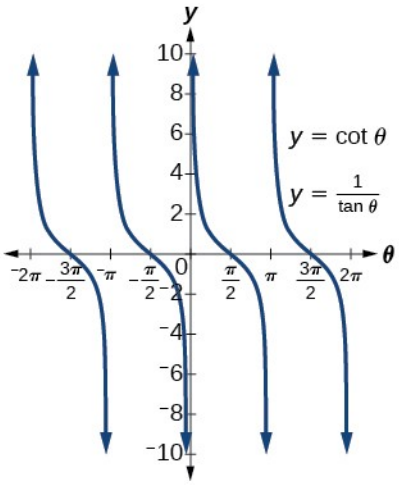
DÆMI 1

Teikning grafa stæðna í samsemd

Teiknið graf beggja hliða samsemdarinnar $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$. Teiknið með öðrum orðum á grafreikni gröfin $y = \cot\theta$ og $y = \frac{1}{\tan\theta}$. Berið gröfin saman þar sem báðar stæðurnar eru skilgreindar.

Lausn

Sjá mynd 4.



Mynd 4. Gröfin falla saman á sameiginlegu skilgreiningarmengi. Sjá umfjöllun um punktana sem vantar í greiningunni.

Greining

Gröfin liggja hvort yfir öðru þar sem báðar stæðurnar eru skilgreindar. Skilgreiningarmengin eru þó ekki þau sömu: kótangens er skilgreindur þar sem sínus er ekki núll, en til að reikna margföldunarandhverfu tangens þurfa bæði sínus og kósínus að vera frábrugðnir núlli. Því vantar punkta á seinna grafið við oddatölumargfeldi af $\pi/2$, þótt það sjáist ekki á myndinni. Samsvörun grafa getur stutt niðurstöðu en er ekki sönnun á samsemd. Til þess þarf gildar algebruumritanir á sameiginlegu skilgreiningarmengi.

AÐFERÐ

Sannprófið að gefin hornafallasamsemd sé sönn.

1. Vinnið aðeins með aðra hlið jöfnunnar. Yfirleitt er betra að byrja á flóknari hliðinni því auðveldara er að einfalda en að byggja upp.
2. Leitið færa á að þátta stæður, hefja tvíliðu í annað veldi eða leggja saman brot.
3. Takið eftir hvaða föll koma fyrir í lokastæðunni, leitið færa á að nota samsemdirnar og gerið viðeigandi innsetningar.

4. Ef þessi skref gefa ekki æskilega niðurstöðu skuluð þið reyna að umrita alla liði með sínus og kósínus.

DÆMI 2

Sannprófun hornafallasamsemdar

Sannprófið $\tan\theta\cos\theta=\sin\theta$.

Lausn

Við byrjum á vinstri hliðinni þar sem hún er flóknari:

$$\begin{aligned}\tan\ \theta\cos\ \theta &= \left(\tfrac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}\right)\cos\ \theta \\ &= \left(\tfrac{\sin\ \theta}{\cancel{\cos\ \theta}}\right)\cancel{\cos\ \theta} \\ &= \sin\ \theta\end{aligned}$$

Greining

Þessa samsemd var tiltölulega einfalt að sannprófa þar sem aðeins þurfti að rita $\tan\theta$ með $\sin\theta$ og $\cos\theta$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Sannprófið samsemdina $csc\,\theta\cos\theta\tan\theta=1$.

DÆMI 3

Sannprófun jafngildis með samsemdum jafnstæðra og oddstæðra falla

Sannprófið eftirfarandi jafngildi með samsemdum jafnstæðra og oddstæðra falla:

$$(1+\sin x)\left[1+\sin(-x)\right]=\cos^2 x$$

Lausn

Við vinnum með vinstri hlið jöfnunnar og fáum

$(1+\sin\ \ x)\,[1+\sin(-x)]=(1+\sin\ \ x)\,(1-\sin\ \ x)$ Þar sem $\sin(-x)=-\sin\ \ x$

$=1-\sin^2 x$ Mismunur ferninga

$=\cos^2 x \quad \cos^2 x=1-\sin^2 x$

DÆMI 4

Sannprófun samsemdar með sekans í öðru veldi

Sannprófið samsemdina $\dfrac{sec^2\theta-1}{sec^2\theta}=\sin^2\theta$

Lausn

Þar sem vinstri hliðin er flóknari byrjum við á henni.

$$\begin{aligned}
\frac{\sec^2\theta-1}{\sec^2\theta} &= \frac{(\tan^2\theta+1)-1}{\sec^2\theta} && \sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \\
&= \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta} \\
&= \tan^2\theta\left(\frac{1}{\sec^2\theta}\right) \\
&= \tan^2\theta(\cos^2\theta) && \cos^2\theta = \frac{1}{\sec^2\theta} \\
&= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)(\cos^2\theta) && \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\right)(\cancel{\cos^2\theta}) \\
&= \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Sannprófa má samsemd á fleiri en einn veg. Hér er önnur leið. Við getum aftur byrjað á vinstri hliðinni.

$$\begin{aligned}
\frac{\sec^2\theta-1}{\sec^2\theta} &= \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} - \frac{1}{\sec^2\theta} \\
&= 1 - \cos^2\theta \\
&= \sin^2\theta
\end{aligned}$$

7

Greining

Í fyrri aðferðinni notuðum við samsemdina $sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$ og héldum áfram að einfalda. Í seinni aðferðinni skiptum við brotinu í tvö brot með sama nefnara, eitt fyrir hvorn lið teljarans. Dæmið sýnir að sannprófa má samsemd á marga vegu. Hugkvæmni getur stundum einfaldað aðferðina. Ef umbreytingarnar eru gildar á sameiginlega skilgreiningarmenginu verður niðurstaðan sú sama.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Sýnið að $\dfrac{\cot\theta}{csc\,\theta} = \cos\theta$.

DÆMI 5

Myndun og sannprófun samsemdar

Myndið samsemd fyrir stæðuna $2\tan\theta\,sec\,\theta$ með því að umrita hana eingöngu með sínus.

Lausn

Byrja má á marga vegu en hér notum við kvótasamsemdir og samsemdir um margföldunarandhverfur til að umrita stæðuna:

$$2\quad\tan\quad\theta\;sec\quad\theta = 2\left(\frac{\sin\quad\theta}{\cos\quad\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\quad\theta}\right)$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$= \frac{2 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$ Setjum $1 - \sin^2 \theta$ í stað $\cos^2 \theta$

Því er

$$2 \tan \theta \sec \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta}$$

DÆMI 6

Sannprófun samsemdar með algebru og samsemdum jafnstæðra og oddstæðra falla

Sannprófið samsemdina:

$$\frac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)} = \cos\theta - \sin\theta$$

Lausn

Byrjum á vinstri hliðinni og einföldum:

$$\frac{\sin^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)} = \frac{[\sin(-\theta)]^2 - [\cos(-\theta)]^2}{\sin(-\theta) - \cos(-\theta)}$$

$$= \frac{(-\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\sin\theta - \cos\theta} \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \text{og} \quad \cos(-x) = \cos x$$

$= \frac{(\sin\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\sin\theta - \cos\theta}$ Mismunur ferninga

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}{-(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}{-(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \cos\theta - \sin\theta$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Sannprófið samsemdina

$$\frac{\sin^2\theta - 1}{\tan\theta \sin\theta - \tan\theta} = \frac{\sin\theta + 1}{\tan\theta}.$$

DÆMI 7

Sannprófun samsemdar með kósínus og kótangens

Sannprófið samsemdina: $\left(1-\cos^2 x\right)\left(1+\cot^2 x\right)=1$.

Lausn

Við vinnum með vinstri hlið jöfnunnar.

$$\left(1-\cos^2 x\right)\left(1+\cot^2 x\right)=\left(1-\cos^2 x\right)\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$=\left(1-\cos^2 x\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$ Finnum samnefnara.

$$=\left(1-\cos^2 x\right)\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\left(\sin^2 x\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$=1$$

7

Notkun algebru til að einfalda hornafallastæður

Við höfum séð að algebra er mjög mikilvæg þegar við sannprófum hornafallasamsemdir. Hún er ekki síður mikilvæg þegar við einföldum hornafallastæður áður en við leysum jöfnur. Ef við þekkjum grundvallareiginleika og formúlur algebrunnar, svo sem regluna um mismun ferninga, regluna um ferning tvíliðu og innsetningu, verður auðveldara að vinna með hornafallastæður og -jöfnur.

Jafnan $\left(\sin x+1\right)\left(\sin x-1\right)=0$ líkist til dæmis jöfnunni $\left(x+1\right)\left(x-1\right)=0$, sem notar þáttað form mismunar ferninga. Með algebru verður lausnin einföld og kunnugleg. Við getum sett hvorn þátt jafnan núlli og leyst. Þetta er dæmi um að bera kennsl á algebrumynstur í hornafallastæðum eða -jöfnum.

Annað dæmi er reglan um mismun ferninga, $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$, sem er mikið notuð á mörgum sviðum utan stærðfræðinnar, svo sem í verkfræði, byggingarlist og eðlisfræði. Við getum einnig myndað eigin samsemdir með því að liða stæðu aftur og aftur og gera viðeigandi innsetningar. Með eiginleikum og formúlum algebrunnar verða margar hornafallajöfnur auðveldari að skilja og leysa.

DÆMI 8

Hornafallastæða rituð sem algebrustæða

Ritið eftirfarandi hornafallastæðu sem algebrustæðu: $2\cos^2\theta+\cos\theta-1$.

Lausn

Takið eftir að mynstrið hefur sama form og venjuleg annars stigs stæða, $a\,x^2+b\,x+c$. Með því að setja $\cos\theta=x$, getum við umritað stæðuna á eftirfarandi hátt:

$$2\,x^2+x-1$$

Þátta má stæðuna sem $(2\,x-1)(x+1)$. Ef hún væri sett jöfn núlli og við vildum leysa jöfnuna myndum við nota núllþáttaregluna og leysa hvorn þátt fyrir x. Þá myndum við skipta x út fyrir $\cos\theta$ og leysa fyrir θ.

DÆMI 9

Umritun hornafallastæðu með mismun ferninga

Umritið hornafallastæðuna: $4\cos^2\theta-1$.

Lausn

Fyrri liðurinn er ferningur tvöfalds kósínusgildis og síðari liðurinn er ferningur tölunnar 1. Stæðan er því mismunur ferninga. Þá fæst

$$\begin{aligned}4\ \cos^2\theta-1&=(2\ \cos\ \theta)^2-1\\&=(2\ \cos\ \theta-1)(2\ \cos\ \theta+1)\end{aligned}$$

Greining

Ef þessi stæða væri rituð sem jafna sett jöfn núlli gætum við leyst hvorn þátt með núllþáttareglunni. Einnig gætum við notað innsetningu eins og í dæminu á undan og látið $\cos\theta=x$, umritað stæðuna sem $4\,x^2-1$, og þáttað $(2\,x-1)(2\,x+1)$. Síðan skiptum við x út fyrir $\cos\theta$ og leysum fyrir hornið.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Umritið hornafallastæðuna: $25-9\sin^2\theta$.

DÆMI 10

Einföldun með umritun og innsetningu

Einfaldið stæðuna með umritun og samsemdum:

$$csc^2\theta-\cot^2\theta$$

Lausn

Við getum byrjað á Pýþagórasarsamsemdinni.

$$1+\cot^2\theta=csc^2\theta$$

Nú getum við einfaldað með því að setja $1+\cot^2\theta$ í stað $csc^2\theta$. Þá fæst

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1 + \cot^2\theta - \cot^2\theta$$
$$= 1$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Notið algebruaðferðir til að sannprófa samsemdina $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$.

(Vísbending: Margfaldið teljara og nefnara vinstra megin með $1-\sin\theta$.)

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í grundvallarsamsemdum hornafallanna.

- Grundvallarsamsemdir hornafallanna
- Sannprófun hornafallasamsemda

7.1 Verkefni hlutans

Orðleg verkefni

7

1. Við vitum að $g(x)=\cos x$ er jafnstætt fall en $f(x)=\sin x$ og $h(x)=\tan x$ eru oddstæð föll. Hvað með $G(x)=\cos^2 x$, $F(x)=\sin^2 x$, og $H(x)=\tan^2 x$? Eru þau jafnstæð, oddstæð eða hvorugt? Hvers vegna?
2. Skoðið graf $f(x)=sec\,x$ á bilinu $[-\pi,\pi]$. Hvernig má sjá hvort fallið er jafnstætt eða oddstætt með því einu að skoða graf $f(x)=sec\,x$?
3. Skoðið samsemdina um margföldunarandhverfu fyrir $sec\,t$, og útskýrið hvers vegna fallið er óskilgreint í tilteknum punktum.
4. Allar Pýþagórasarsamsemdirnar tengjast. Lýsið hvernig umrita má jöfnuna $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ til að fá hinar myndirnar.

Algebruverkefni

Notið grundvallarsamsemdirnar til að einfalda stæðuna í hverju verkefni eins og hægt er.

5.

$$\sin x\cos x\,sec\,x$$

6.

$$\sin(-x)\cos(-x)\,csc(-x)$$

7.

$$\tan x\sin x + sec\,x\cos^2 x$$

8.

$$csc\,x+\cos x\cot(-x)$$

9.

$$\frac{\cot t+\tan t}{sec(-t)}$$

10.

$$3\sin^3 t\,csc\,t+\cos^2 t+2\cos(-t)\cos t$$

11.

$$-\tan(-x)\cot(-x)$$

12.

$$\frac{-\sin(-x)\cos x\,sec\,x\,csc\,x\tan x}{\cot x}$$

13.

$$\frac{1+\tan^2\theta}{csc^2\theta}+\sin^2\theta+\frac{1}{sec^2\theta}$$

14.

$$\left(\frac{\tan x}{csc^2 x}+\frac{\tan x}{sec^2 x}\right)\left(\frac{1+\tan x}{1+\cot x}\right)-\frac{1}{\cos^2 x}$$

15.

$$\frac{1-\cos^2 x}{\tan^2 x}+2\sin^2 x$$

Einfaldið fyrri hornafallastæðuna í hverju verkefni og ritið niðurstöðuna með seinni stæðunni. Ef velja þarf formerki við kvaðratrót skal tilgreina á hvaða hornabili hvert formerki gildir.

16.

$$\frac{\tan x+\cot x}{csc\,x};\cos x$$

17.

$$\frac{sec\,x+csc\,x}{1+\tan x};\sin x$$

18.

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}+\tan x\,;\cos x$$

19.

$$\frac{1}{\sin x\cos x}-\cot x\,;\cot x$$

20.

$$\frac{1}{1-\cos x}-\frac{\cos x}{1+\cos x}\,;csc\,x$$

21.

$$\left(sec\,x+csc\,x\right)\left(\sin x+\cos x\right)-2-\cot x\,;\tan x$$

22.

$$\frac{1}{csc\,x-\sin x}\,;sec\,x\ \text{ og }\ \tan x$$

23.

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}-\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\,;sec\,x\ \text{ og }\ \tan x$$

24.

$$\tan x\,;sec\,x$$

25.

$$sec\,x\,;\cot x$$

26.

$$sec\,x\,;\sin x$$

27.

$$\cot x\,;\sin x$$

28.

$$\cot x\,;csc\,x$$

Sannprófið samsemdina í eftirfarandi verkefnum.

29.

$$\cos x-\cos^3 x=\cos x\sin^2 x$$

30.

$$\cos x\left(\tan x - sec\left(-x\right)\right)=\sin x-1$$

31.

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+2\tan^2 x$$

32.

$$\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cos x$$

33.

$$\cos^2 x-\tan^2 x=2-\sin^2 x-sec^2 x$$

Viðbótarverkefni

Sannið eða hrekjið samsemdina í eftirfarandi verkefnum.

34.

$$\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{1-\cos\left(-x\right)}=-2\cot x\,csc\,x$$

35.

$$csc^2 x\left(1+\sin^2 x\right)=\cot^2 x$$

36.

$$\left(\frac{sec^2\left(-x\right)-\tan^2 x}{\tan x}\right)\left(\frac{2+2\tan x}{2+2\cot x}\right)-2\sin^2 x=\cos 2x$$

37.

$$\frac{\tan x}{sec\,x}\sin\left(-x\right)=\cos^2 x$$

38.

$$\frac{sec\left(-x\right)}{\tan x+\cot x}=-\sin\left(-x\right)$$

39.

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{1+\sin\left(-x\right)}$$

Ákvarðið hvort samsemdin sé sönn eða ósönn í eftirfarandi verkefnum. Ef hún er ósönn skuluð þið finna viðeigandi jafngilda stæðu.

40.

$$\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 - \tan^2\theta} = \sin^2\theta$$

41.

$$3\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = 3 + \cos^2\theta$$

42.

$$\frac{sec\,\theta + \tan\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = sec^2\theta$$

7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun

NÁMSMARKMIÐ

Eftir þennan hluta áttu að geta:

- notað summu- og mismunarsamsemdir kósínuss.
- notað summu- og mismunarsamsemdir sínuss.
- notað summu- og mismunarsamsemdir tangens.
- notað samsemdir sem tengja hornaföll við fyllihorn.
- notað summu- og mismunarsamsemdir til að sannprófa aðrar samsemdir.



Mynd 1 Denali, einnig nefnt Mount McKinley, í Denali-þjóðgarðinum í Alaska er hæsti tindur Norður-Ameríku. Samkvæmt mælingu USGS frá 2015 er hæðin 20.310 fet (6.190 m). (Mynd: Daniel A. Leifheit, Flickr)

Hvernig má mæla hæð fjalls? Hvað með fjarlægðina frá jörðinni til sólarinnar? Við leysum mörg verkefni sem virðast óleysanleg með stærðfræðiformúlum. Hornafallasamsemdir eru algengar í stærðfræðilegum sönnunum og hafa um aldir haft hagnýtt gildi, meðal annars við útreikninga á miklum fjarlægðum.

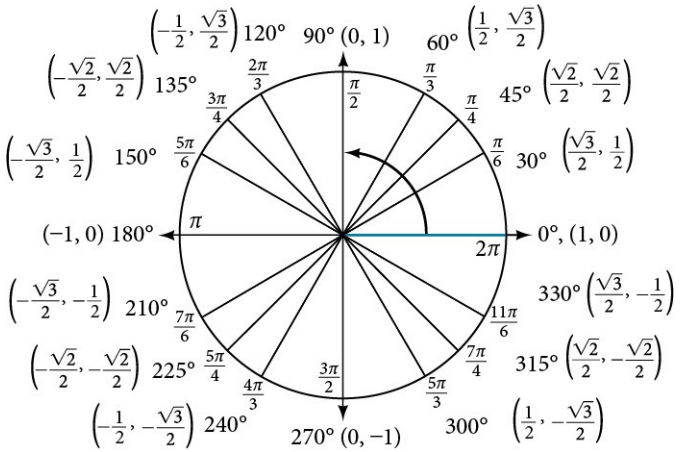
Hornafallasamsemdirnar sem við skoðum í þessum hluta má rekja til persnesks stjörnufræðings sem var uppi um 950 e.Kr. Forn-Grikkir þekktu samsvarandi tengsl miklu

fyrr og settu þau fram með strengjum hrings. Samsemdir eru jöfnur sem gilda fyrir öll gildi þar sem báðar hliðar eru skilgreindar. Þær hafa margvísleg not.

Í þessum hluta lærum við aðferðir til að leysa verkefni eins og þau sem nefnd voru hér að framan. Formúlurnar sem fylgja einfalda margar hornafallastæður og -jöfnur. Hafið í huga að í öllum þessum hluta er orðið formúla notað í sömu merkingu og orðið samsemd.

Notkun summu- og mismunarsamsemda kósínuss

Oft er auðveldara að finna nákvæmt gildi sínuss, kósínuss eða tangens horns ef rita má hornið sem summu eða mismun tveggja horna með þekkt hornafallagildi. Við getum notað sérhornin, sem sjá má á einingarhringnum á mynd 2.



Mynd 2 Sérhorn á einingarhringnum.

Við byrjum á summu- og mismunarformúlunum fyrir kósínus. Með þeim má finna kósínus tiltekins horns ef rita má hornið sem summu eða mismun tveggja sérhorna. Sjá töflu 1.

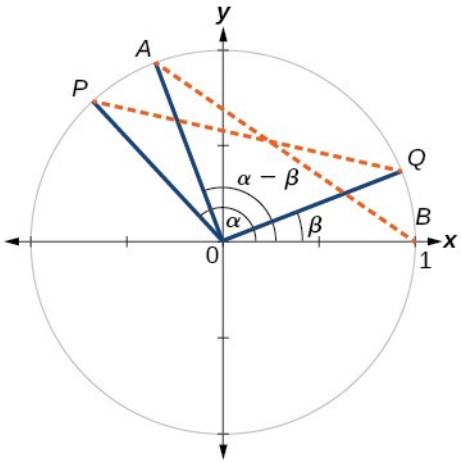
Tafla 1

Summusamsemd	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
Mismunarsamsemd	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Fyrst sönnum við mismunarformúlu kósínuss. Skoðum tvo punkta á einingarhringnum, sjá mynd 3. Punkturinn P er við hornið α frá jákvæða x-ásnum og hefur hnitin $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ og punkturinn Q er við hornið β frá jákvæða x-ásnum og hefur hnitin $(\cos\beta, \sin\beta)$. Athugið að hornið POQ er $\alpha-\beta$.

Merkjum tvo punkta til viðbótar: A við hornið $(\alpha-\beta)$ frá jákvæða x-ásnum með hnitin $(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$; og punktinn B með hnitin $(1, 0)$. Þríhyrningurinn POQ er snúningur þríhyrningsins AOB og því er fjarlægðin frá P til Q sú sama og fjarlægðin frá A til B.

7



Mynd 3. Jafnlangir strengir á einingarhringnum.

Notum fjarlægðarformúluna til að finna fjarlægðina frá P til Q.

$$\begin{aligned} d_{PQ} &= \sqrt{(\cos\ \alpha - \cos\ \beta)^2 + (\sin\ \alpha - \sin\ \beta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\alpha - 2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\ \sin\ \alpha\ \sin\ \beta + \sin^2\beta} \end{aligned}$$

Síðan beitum við Pýþagórasarsamsemdinni og einföldum.

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2\ \sin\ \alpha\ \sin\ \beta} \\ &= \sqrt{1 + 1 - 2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2\ \sin\ \alpha\ \sin\ \beta} \\ &= \sqrt{2 - 2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2\ \sin\ \alpha\ \sin\ \beta} \end{aligned}$$

Á sama hátt finnum við fjarlægðina frá A til B.

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(\alpha - \beta) - 2\ \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Notum Pýþagórasarsamsemdina og einföldum. Þá fæst:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)) - 2\ \cos(\alpha - \beta) + 1} \\ &= \sqrt{1 - 2\ \cos(\alpha - \beta) + 1} \\ &= \sqrt{2 - 2\ \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Fjarlægðirnar tvær eru jafnar. Við setjum þær því jafnar hvor annarri og einföldum.

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - 2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2\ \sin\ \alpha \sin\ \beta} &= \sqrt{2 - 2\ \cos(\alpha - \beta)} \\ 2 - 2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - 2\ \sin\ \alpha \sin\ \beta &= 2 - 2\ \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Að lokum drögum við 2 frá báðum hliðum og deilum í þær með -2.

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$$

Þannig höfum við fengið mismunarformúlu kósínuss. Með svipuðum aðferðum má leiða út formúlu fyrir kósínus summu tveggja horna.

SUMMU- OG MISMUNARFORMÚLUR FYRIR KÓSÍNUS

Með þessum formúlum má reikna kósínus af summu og mismun horna.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

AÐFERÐ

Finnið kósínus mismunar tveggja gefinna horna.

1. Ritið mismunarformúlu kósínuss.
2. Setjið gildi gefnu hornanna inn í formúluna.
3. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 1

Nákvæmt gildi fundið með mismunarformúlu kósínuss

Notið formúluna fyrir kósínus mismunar tveggja horna til að finna nákvæmt gildi $\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$.

Lausn

Notum mismunarformúlu kósínuss. Við fáum

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta)&=\cos\ \alpha\cos\ \beta+\sin\ \alpha\sin\ \beta\\ \cos\left(\tfrac{5\pi}{4}-\tfrac{\pi}{6}\right)&=\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\\ &=\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)\\ &=-\tfrac{\sqrt{6}}{4}-\tfrac{\sqrt{2}}{4}\\ &=\tfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Finnið nákvæmt gildi $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

SÝNIDÆMI 2

Nákvæmt gildi fundið með summuformúlu kósínuss

Finnið nákvæmt gildi $\cos\left(75^\circ\right)$.

Lausn

Þar sem $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, getum við reiknað $\cos\left(75^\circ\right)$ með því að rita $\cos\left(45^\circ + 30^\circ\right)$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\cos(45^\circ + 30^\circ) &= \cos(45^\circ)\cos(30^\circ) - \sin(45^\circ)\sin(30^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið nákvæmt gildi $\cos\left(105^\circ\right)$.

Notkun summu- og mismunarsamsemda sínuss

Summu- og mismunarformúlurnar fyrir sínus má leiða út á sama hátt og formúlurnar fyrir kósínus og þær eru svipaðar þeim.

7

SUMMU- OG MISMUNARFORMÚLUR FYRIR SÍNUS

Með þessum formúlum má reikna sínus af summu og mismun horna.

$$\sin\left(\alpha + \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin\left(\alpha - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

AÐFERÐ

Finnið sínus mismunar tveggja gefinna horna.

1. Ritið mismunarformúlu sínuss.
2. Setjið gefnu hornin inn í formúluna.
3. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 3

Sínus mismunar tveggja horna reiknaður

Notið samsemdirnar fyrir summu og mismun til að reikna sínus mismunar hornanna og sýnið að a-liður sé jafn b-lið.

1. ⓐ $\sin\left(45^\circ - 30^\circ\right)$

2. ⓑ $\sin\left(135^\circ - 120^\circ\right)$

Lausn

1. ⓐ Byrjum á að rita formúluna og setja gefnu hornin inn.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$$
$$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin(45^\circ)\cos(30^\circ) - \cos(45^\circ)\sin(30^\circ)$$

Næst þurfum við að finna gildi hornafallastæðnanna.

$\sin\left(45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(30^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(30^\circ\right)=\frac{1}{2}$

Nú getum við sett þessi gildi inn í jöfnuna og einfaldað.

$$\begin{aligned}\sin(45^\circ - 30^\circ) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)\\ &= \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2. ⓑ Aftur ritum við formúluna og setjum gefnu hornin inn.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$$
$$\sin(135^\circ - 120^\circ) = \sin(135^\circ)\cos(120^\circ) - \cos(135^\circ)\sin(120^\circ)$$

Næst finnum við gildi hornafallastæðnanna.

$\sin\left(135^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\left(120^\circ\right)=-\frac{1}{2}, \cos\left(135^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(120^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nú getum við sett þessi gildi inn í jöfnuna og einfaldað.

$$\begin{aligned}\sin(135^\circ - 120^\circ) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \tfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ &= \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(135^\circ - 120^\circ) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \tfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ &= \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

SÝNIDÆMI 4

Nákvæmt gildi stæðu með andhverfu hornafalli fundið

Finnið nákvæmt gildi

$$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{3}{5}\right).$$

Lausn

Hér reiknum við $\sin(\alpha+\beta)$. Látum $\alpha=\cos^{-1}\frac{1}{2}$ og $\beta=\sin^{-1}\frac{3}{5}$. Þá má rita

$$\begin{aligned}\cos\ \alpha &= \tfrac{1}{2}, 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \sin\ \beta &= \tfrac{3}{5}, -\tfrac{\pi}{2} \leq \beta \leq \tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Notum Pýþagórasarsamsemdirnar til að finna $\sin\alpha$ og $\cos\beta$. Bæði hornin eru í fyrsta fjórðungi og því veljum við jákvæðu kvaðratræturnar.

$$\begin{aligned}\sin\ \alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ &= \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\tfrac{3}{4}} \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\ \beta &= \sqrt{1-\sin^2\beta} \\ &= \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} \\ &= \sqrt{\tfrac{16}{25}} \\ &= \tfrac{4}{5}\end{aligned}$$

7

Með summuformúlu sínuss fæst

$$\begin{aligned}&\sin\left(\cos^{-1}\ \tfrac{1}{2}+\sin^{-1}\ \tfrac{3}{5}\right)=\sin\left(\alpha+\beta\right) \\ &=\sin\ \alpha\ \cos\ \beta+\cos\ \alpha\ \sin\ \beta \\ &=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{4}{5}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{5} \\ &=\tfrac{4\sqrt{3}+3}{10}\end{aligned}$$

Notkun summu- og mismunarsamsemda tangens

Nokkuð flóknara er að finna nákvæm gildi tangens af summu eða mismun tveggja horna, en aftur snýst það um að þekkja mynstrið.

Til að finna summuformúlu tangens deilum við summuformúlu sínuss með summuformúlu kósínuss og einföldum. Munið að $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\neq 0$.

Leiðum summuformúlu tangens út.

$$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}$$

$$=\frac{\sin\ \alpha\ \cos\ \beta+\cos\ \alpha\ \sin\ \beta}{\cos\ \alpha\ \cos\ \beta-\sin\ \alpha\ \sin\ \beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

Deilum í teljara og nefnara með cos

$$\alpha$$

$$\cos\beta$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Á svipaðan hátt má leiða mismunarformúlu tangens út.

7

SUMMU- OG MISMUNARFORMÚLUR FYRIR TANGENS

Summu- og mismunarformúlurnar fyrir tangens eru:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

AÐFERÐ

Finnið tangens summu tveggja gefinna horna.

1. Ritið summuformúlu tangens.
2. Setjið gefnu hornin inn í formúluna.
3. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 5

Nákvæmt gildi stæðu með tangens fundið

Finnið nákvæmt gildi $\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$.

Lausn

Ritum fyrst summuformúlu tangens og setjum gefnu hornin inn í formúluna.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

Næst finnum við einstök tangensgildi í formúlunni:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}},\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

Þá fæst

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)&=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1)}\\&=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)\\&=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\end{aligned}$$

7

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Finnið nákvæmt gildi $\tan\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

SÝNIDÆMI 6

Hornafallagildi summu og mismunar horna

Gefið er $\sin\alpha=\frac{3}{5},0<\alpha<\frac{\pi}{2},\cos\beta=-\frac{5}{13},\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, Finnið

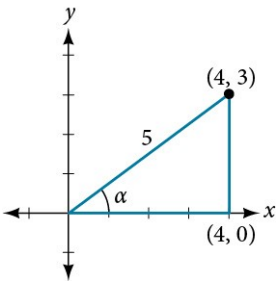
1. ⓐ $\sin(\alpha+\beta)$
2. ⓑ $\cos(\alpha+\beta)$
3. ⓒ $\tan(\alpha+\beta)$
4. ⓓ $\tan(\alpha-\beta)$

Lausn

Við getum notað formúlurnar fyrir summu og mismun til að finna hornafallagildi summu eða mismunar horna þegar sínus, kósínus eða tangens hvors horns um sig er gefinn. Til þess teiknum við svokallaðan viðmiðunarþríhyrning sem hjálpar okkur að finna hvern lið í formúlunum fyrir summu og mismun.

1. ⓐ Til að finna $\sin(\alpha+\beta)$, byrjum við á $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ og $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Mótlæga hliðin við α hefur lengdina 3, langhliðin hefur lengdina 5 og α er í fyrsta fjórðungi. Sjá mynd 4. Með reglu Pýþagórasar getum við fundið lengd hliðarinnar

$$\begin{aligned} & a^2+3^2=5^2 \\ a: \quad & a^2=16 \\ & a=4 \end{aligned}$$

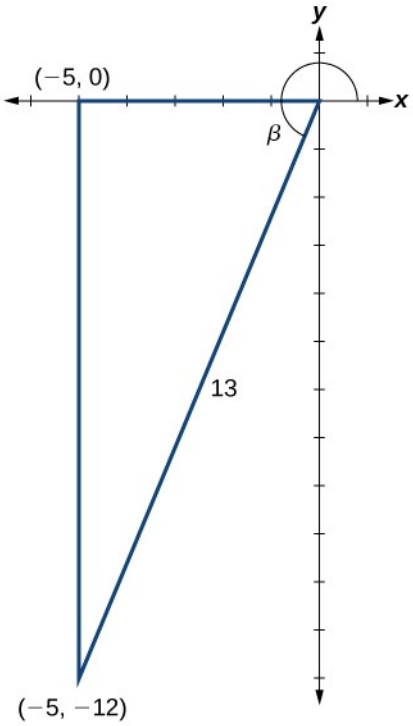


Mynd 4. Viðmiðunarþríhyrningur fyrir hornið α.

Þar sem $\cos\beta=-\frac{5}{13}$ og $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, er aðlæga hliðin við β jöfn -5, langhliðin er 13 og β er í þriðja fjórðungi. Sjá mynd 5. Aftur notum við reglu Pýþagórasar og fáum

$$\begin{aligned} (-5)^2+a^2&=13^2 \\ 25+a^2&=169 \\ a^2&=144 \\ a&=\pm 12 \end{aligned}$$

Þar sem endaarmur β liggur í þriðja fjórðungi fæst $a=-12$.



Mynd 5. Hnit á endaarmi hornsins β í þriðja fjórðungi.

7

Næsta skref er að finna kósínus α og sínus β. Kósínus α er aðlæga hliðin deilt með langhliðinni. Við getum fundið hann út frá þríhyrningnum á mynd 5: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Einnig getum við fundið sínus β út frá þríhyrningnum á mynd 5, sem mótlægu hliðina deilt með langhliðinni: $\sin\beta = -\frac{12}{13}$. Nú getum við reiknað $\sin(\alpha+\beta)$.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\ \alpha\cos\ \beta + \cos\ \alpha\sin\ \beta \\ &= \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(-\tfrac{5}{13}\right) + \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(-\tfrac{12}{13}\right) \\ &= -\tfrac{15}{65} - \tfrac{48}{65} \\ &= -\tfrac{63}{65}\end{aligned}$$

2. ⓑ Við getum fundið $\cos(\alpha+\beta)$ á svipaðan hátt. Við setjum gildin inn samkvæmt formúlunni.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta \\ &= \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(-\tfrac{5}{13}\right) - \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(-\tfrac{12}{13}\right) \\ &= -\tfrac{20}{65} + \tfrac{36}{65} \\ &= \tfrac{16}{65}\end{aligned}$$

3. ⓒ Fyrir $\tan(\alpha+\beta)$, ef $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ og $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, þá

$$\tan\alpha=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$$

Þar sem $\sin\beta=-\frac{12}{13}$ og $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, fæst

$$\tan\beta=\frac{\frac{-12}{13}}{\frac{-5}{13}}=\frac{12}{5}$$

Þá fæst

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{4}\left(\frac{12}{5}\right)}\\ &= \frac{\frac{63}{20}}{-\frac{16}{20}}\\ &= -\frac{63}{16}\end{aligned}$$

4. ⓓ Til að finna $\tan(\alpha-\beta)$, höfum við gildin sem við þurfum. Við getum sett þau inn og reiknað.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\ &= \frac{\frac{3}{4}-\frac{12}{5}}{1+\frac{3}{4}\left(\frac{12}{5}\right)}\\ &= \frac{-\frac{33}{20}}{\frac{56}{20}}\\ &= -\frac{33}{56}\end{aligned}$$

Greining

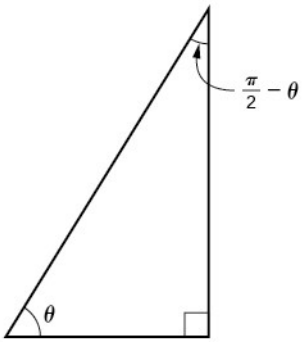
Í verkefnum af þessu tagi er algeng villa að halda að α og β séu horn í sama þríhyrningi. Svo er ekki hér. Takið einnig eftir að

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

Hornaföll og fyllihorn

Nú getum við notað summu- og mismunarsamsemdir til að tengja hornaföll við fyllihorn. Eins og kom fram í kaflanum Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningum eru tvö jákvæð horn fyllihorn hvort annars ef summa þeirra er $(\frac{\pi}{2},)$. Summa hvössu hornanna í rétthyrndum þríhyrningi er $(\frac{\pi}{2},)$. Ef annað þeirra er θ, er hitt því $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Sjá mynd 6.

Í þríhyrningnum fæst $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$: sama hlutfall skammhliðar og langhliðar er sínus annars hvassa hornsins og kósínus hins. Því er sínus θ jafn kósínus fyllihorns θ. Á sama hátt tengjast tangens og kótangens annars vegar og sekans og kósekans hins vegar.



Mynd 6. Hvössu hornin í rétthyrndum þríhyrningi eru fyllihorn hvort annars.

Af þessum tengslum fást samsemdir samsvarandi hornafalla.

SAMSEMDIR SAMSVARANDI HORNAFALLA

Samsemdir samsvarandi hornafalla eru teknar saman í töflu 2.

7

Tafla 2

$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Takið eftir að einnig má rökstyðja formúlurnar í töflunni með algebru og formúlunum fyrir summu og mismun. Með því að nota til dæmis

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

getum við ritað

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos\ \tfrac{\pi}{2}\ \cos\ \theta + \sin\ \tfrac{\pi}{2}\ \sin\ \theta \\ &= (0)\cos\ \theta + (1)\sin\ \theta \\ &= \sin\ \theta\end{aligned}$$

SÝNIDÆMI 7

Samsvarandi hornafall með sama gildi og gefin stæða fundið

Ritið $\tan\dfrac{\pi}{9}$ sem kótangens fyllihornsins.

Lausn

Notum samsemdina $\tan\theta = \cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right) &= \cot\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{9}\right) \\ &= \cot\left(\tfrac{9\pi}{18}-\tfrac{2\pi}{18}\right) \\ &= \cot\left(\tfrac{7\pi}{18}\right)\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Ritið $\sin\dfrac{\pi}{7}$ sem kósínus fyllihornsins.

Notkun formúlna fyrir summu og mismun til að sannprófa samsemdir

Summu- og mismunarsamsemdir má nota til að sannprófa aðrar hornafallasamsemdir. Þá umritum við aðra hlið jöfnunnar þar til hún verður eins og hin. Við höldum til haga öllum skilyrðum um hvar stæðurnar eru skilgreindar. Samsemdin gildir á sameiginlegu skilgreiningarmengi beggja hliða. Gott er að hafa lista yfir samsemdir við höndina. Rifjið einnig upp almennu aðferðirnar í Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda.

AÐFERÐ

Sannprófið gefna samsemd með formúlum fyrir summu og mismun.

1. Byrjið á stæðunni þeim megin við jafnaðarmerkið sem virðist flóknari. Umritið stæðuna þar til hún verður eins og stæðan hinum megin. Stundum þarf að breyta báðum hliðum, en skilvirkast er að vinna aðeins með aðra hliðina.
2. Kannið hvar nota má formúlurnar fyrir summu og mismun.
3. Umritið summu eða mismun kvóta sem einn kvóta.
4. Ef útreikningarnir verða þunglamalegir skuluð þið umrita stæðuna með sínus og kósínus.

SÝNIDÆMI 8

Samsemd með sínus sannprófuð

Sannprófið samsemdina $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$.

Lausn

Við sjáum að vinstra megin í jöfnunni eru sínus af summu horna og sínus af mismun þeirra.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\ \alpha\ \cos\ \beta+\cos\ \alpha\ \sin\ \beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\ \alpha\ \cos\ \beta-\cos\ \alpha\ \sin\ \beta$$

Við getum umritað hvort tveggja með formúlunum fyrir summu og mismun.

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\sin\ \alpha\ \cos\ \beta+\cos\ \alpha\ \sin\ \beta+\sin\ \alpha\ \cos\ \beta-\cos\ \alpha\ \sin\ \beta$$
$$=2\ \sin\ \alpha\ \cos\ \beta$$

Samsemdin er þar með sannprófuð.

SÝNIDÆMI 9

Samsemd með tangens sannprófuð

Sannprófið eftirfarandi samsemd.

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha-\tan\beta$$

Lausn

Við getum byrjað á að umrita teljarann vinstra megin í jöfnunni.

$$\frac{\sin\ (\alpha-\beta)}{\cos\ \alpha\ \cos\ \beta}=\frac{\sin\ \alpha\ \cos\ \beta-\cos\ \alpha\ \sin\ \beta}{\cos\ \alpha\ \cos\ \beta}$$

$=\frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}\ \frac{\cos\ \beta}{\cos\ \beta}-\frac{\cos\ \alpha}{\cos\ \alpha}\ \frac{\sin\ \beta}{\cos\ \beta}$ Ritum sem tvö brot með sama nefnara.

$=\frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}-\frac{\sin\ \beta}{\cos\ \beta}$ Styttum.

$=\tan\ \alpha-\tan\ \beta$ Ritum með tangens.

Samsemdin er þar með sannprófuð. Oft má sannprófa tangenssamsemdir með því að rita tangens með sínus og kósínus.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Sannprófið samsemdina $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$.

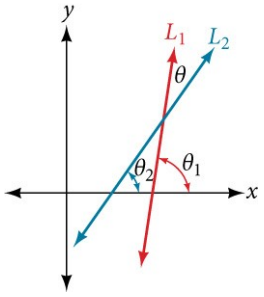
SÝNIDÆMI 10

Hagnýtt verkefni leyst með formúlum fyrir summu og mismun

Látum L_1 og L_2 vera tvær línur sem skerast og eru hvorki lóðréttar né hornréttar hvor á aðra. Látum θ vera hvassa hornið milli L_1 og L_2. Sjá mynd 7. Sýnið að

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

þar sem m_1 og m_2 eru hallatölur L_1 og L_2. Vísbending: Notið $\tan\theta_1 = m_1$ og $\tan\theta_2 = m_2$.



Mynd 7. Hvassa hornið milli tveggja lína.

Lausn

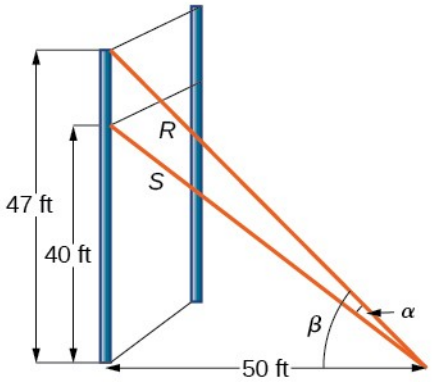
Með mismunarformúlu tangens er verkefnið ekki eins óárennilegt og það kann að virðast.

$$\begin{aligned}\tan\ \theta &= \tan(\theta_1 - \theta_2)\\ &= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}\\ &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\end{aligned}$$

SÝNIDÆMI 11

Verkefni um stagvíra kannað

Stagvír R fyrir klifurvegg er festur í lóðréttan staur í 47 feta hæð. Annar stagvír, S, er festur í sama staur í 40 feta hæð. Vírarnir eru festir við jörðina 50 fetum frá staurnum. Finnið hornið α milli þeirra. Sjá mynd 8.



Mynd 8. Stagvírar sem mynda hornið α.

Lausn

Tökum fyrst saman upplýsingarnar á myndinni. Við þekkjum aðeins skammhliðar rétthyrndu þríhyrninganna og notum því tangens: $\tan\beta=\frac{47}{50}$, og $\tan(\beta-\alpha)=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$. Síðan notum við mismunarsamsemd tangens.

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

7

Setjum þekktu gildin inn í formúluna. Þá fæst

$$\frac{4}{5}=\frac{\frac{47}{50}-\tan\alpha}{1+\frac{47}{50}\tan\alpha}$$
$$4\left(1+\tfrac{47}{50}\tan\alpha\right)=5\left(\tfrac{47}{50}-\tan\alpha\right)$$

Notum dreifiregluna og einföldum síðan stæðurnar.

$$4(1)+4\left(\frac{47}{50}\right)\tan\alpha=5\left(\frac{47}{50}\right)-5\tan\alpha$$
$$4+3{,}76\tan\alpha=4{,}7-5\tan\alpha$$
$$5\tan\alpha+3{,}76\tan\alpha=0{,}7$$
$$8{,}76\tan\alpha=0{,}7$$
$$\tan\alpha\approx0{,}07991$$
$$\tan^{-1}(0{,}07991)\approx0{,}079741$$

Nú getum við reiknað hornið í gráðum.

$$\alpha\approx0{,}079741\left(\frac{180}{\pi}\right)\approx4{,}57^{\circ}$$

Greining

Þegar rétthyrndur þríhyrningur kemur fyrir í hagnýtu verkefni dettur okkur stundum í hug að leysa það með reglu Pýþagórasar. Það getur að hluta til átt við, en það fer eftir því hvað spurt er um og hvaða upplýsingar eru gefnar.

MIÐLAR

Á þessum vefsíðum fáið þið meiri kennslu og æfingu í samsemdum fyrir summu og mismun.

- Summu- og mismunarformúlur fyrir kósínus
- Summu- og mismunarformúlur fyrir sínus
- Summu- og mismunarformúlur fyrir tangens

7.2 Verkefni hlutans

Orðleg verkefni

1. Útskýrið á hverju samsemdir samsvarandi hornafalla byggjast og hvenær þær eiga við.

2. Er aðeins ein leið til að reikna $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$? Útskýrið hvernig setja má lausnina upp á tvo ólíka vegu og reiknið síðan til að ganga úr skugga um að báðar gefi sama svar.

3. Útskýrið hvernig summu- og mismunarsamsemdir sýna hvort föllin $f(x)=\sin(x)$ og $g(x)=\cos(x)$. séu jafnstæð eða oddstæð. Vísbending: $0-x=-x$.

Algebruverkefni

Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi verkefnum.

4.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

5.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

6.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

7.

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

8.

$$\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

9.

$$\tan\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

Umritið stæðurnar í eftirfarandi verkefnum með $\sin x$ og $\cos x$.

10.

$$\sin\left(x+\frac{11\pi}{6}\right)$$

11.

$$\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

12.

$$\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$$

7

13.

$$\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

Einfaldið gefnu stæðuna í eftirfarandi verkefnum.

14.

$$csc\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$$

15.

$$sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

16.

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

17.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

18.

$$\sin(2x)\cos(5x)-\sin(5x)\cos(2x)$$

19.

$$\frac{\tan\left(\frac{3}{2}x\right)-\tan\left(\frac{7}{5}x\right)}{1+\tan\left(\frac{3}{2}x\right)\tan\left(\frac{7}{5}x\right)}$$

Finnið umbeðnar upplýsingar í eftirfarandi verkefnum.

20. Gefið er að $\sin a=\frac{2}{3}$ og $\cos b=-\frac{1}{4}$, þar sem a og b eru bæði á bilinu $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$, Finnið $\sin(a+b)$ og $\cos(a-b)$.

21. Gefið er að $\sin a=\frac{4}{5}$, og $\cos b=\frac{1}{3}$, þar sem a og b eru bæði á bilinu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, Finnið $\sin(a-b)$ og $\cos(a+b)$.

Finnið nákvæmt gildi hverrar stæðu í eftirfarandi verkefnum.

22.

$$\sin\left(\cos^{-1}(0)-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

23.

$$\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

24.

$$\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Myndræn verkefni

Einfaldið stæðuna í hverju verkefni með algebru og tilgreinið takmarkanir á skilgreiningarmengi. Teiknið síðan graf upprunalegu stæðunnar og graf einfölduðu stæðunnar og kannið hvort gröfin falli saman þar sem báðar stæðurnar eru skilgreindar.

25.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

26.

$$\sin(\pi-x)$$

27.

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

28.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

29.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

30.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}+x\right)$$

31.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

7

32.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}+x\right)$$

Notið í eftirfarandi verkefnum graf til að ákvarða hvort föllin eru eins eða ólík. Ef þau eru eins, sýnið hvers vegna. Ef þau eru ólík, skiptið seinna fallinu út fyrir fall sem er eins og það fyrra. (Vísbending: hugsið $2x=x+x$.)

33. $f(x)=\sin(4x)-\sin(3x)\cos x,\ g(x)=\sin x\cos(3x)$

34.

$$f(x)=\cos(4x)+\sin x\sin(3x),\ g(x)=-\cos x\cos(3x)$$

35. $f(x)=\sin(3x)\cos(6x),\ g(x)=-\sin(3x)\cos(6x)$

36. $f(x)=\sin(4x),\ g(x)=\sin(5x)\cos x-\cos(5x)\sin x$

37. $f(x)=\sin(2x),\ g(x)=2\sin x\cos x$

38. $f(\theta)=\cos(2\theta),\ g(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

39. $f(\theta)=\tan(2\theta),\ g(\theta)=\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

40. $f(x)=\sin(3x)\sin x,\ g(x)=\sin^2(2x)\cos^2 x-\cos^2(2x)\sin^2 x$

41. $f(x)=\tan(-x)$, $g(x)=\dfrac{\tan x-\tan(2x)}{1-\tan x\tan(2x)}$

Tækniverkefni

Finnið nákvæma gildið með algebru í eftirfarandi verkefnum og staðfestið síðan svarið með reiknivél með fjórum aukastöfum.

42.

$$\sin(75^\circ)$$

43.

$$\sin(195^\circ)$$

44.

$$\cos(165^\circ)$$

45.

$$\cos(345^\circ)$$

46.

$$\tan(-15^\circ)$$

Viðbótarverkefni

Sannið gefnu samsemdirnar í eftirfarandi verkefnum.

47.

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x+1}{1-\tan x}$$

48.

$$\frac{\tan(a+b)}{\tan(a-b)}=\frac{\sin a\cos a+\sin b\cos b}{\sin a\cos a-\sin b\cos b}$$

49.

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos a\cos b}=1-\tan a\tan b$$

50.

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$$

51.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}$$

Sannið eða hrekjið staðhæfingarnar í eftirfarandi verkefnum.

52.

$$\tan(u+v)=\frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\tan v}$$

53.

$$\tan(u-v)=\frac{\tan u-\tan v}{1+\tan u\tan v}$$

54.

$$\frac{\tan(x+y)}{1+\tan x\tan x}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan^2 x\tan^2 y}$$

55. Ef α, β, og γ eru horn í sama þríhyrningi, sannið eða afsannið að $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$.

56. Ef α, β, og γ eru horn í sama þríhyrningi, sannið eða afsannið að

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

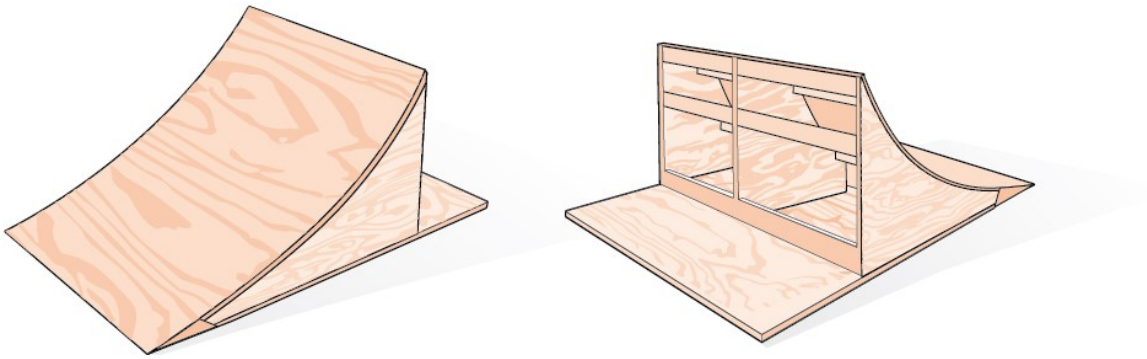
7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur

7

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota tvöföldunarformúlur til að finna nákvæm gildi.
- Nota tvöföldunarformúlur til að sannprófa samsemdir.
- Nota veldislækkunarformúlur til að einfalda stæðu.
- Nota helmingunarformúlur til að finna nákvæm gildi.



Mynd 1 Teikning af hjólarömpum. Í reiknidæminu er rampurinn einfaldaður sem beinn flötur með föstum halla.

Hæð hjólarampa sem ætlaðir eru til keppni (sjá mynd 1) verður að ráðast af færni keppenda. Fyrir vana keppendur á hornið θ milli rampsins og jarðarinnar að vera þannig að $\tan\theta=\frac{5}{3}$.

Hornið er helmingað fyrir byrjendur. Hver er bratti rampsins fyrir byrjendur? Í þessum hluta skoðum við þrjá flokka samsemda til viðbótar sem nota má til að svara spurningum af þessu tagi.

Nákvæm gildi fundin með tvöföldunarformúlum

Í síðasta hluta notuðum við samlagningar- og frádráttarformúlur hornafalla. Nú skoðum við sömu formúlur aftur. Tvöföldunarformúlurnar eru sértilvik summuformúlanna þar sem $\alpha = \beta$. Til að leiða út tvöföldunarformúlu sínuss byrjum við á summuformúlunni

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Ef við setjum $\alpha = \beta = \theta$, fæst:

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \theta) &= \sin\ \theta\ \cos\ \theta + \cos\ \theta\ \sin\ \theta \\ \sin(2\theta) &= 2\sin\ \theta\ \cos\ \theta\end{aligned}$$

Tvöföldunarformúlu kósínuss má rita á þrjá jafngilda vegu. Við byrjum á summuformúlunni $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, og setjum $\alpha = \beta = \theta$,. Þá fæst:

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \theta) &= \cos\ \theta\ \cos\ \theta - \sin\ \theta\sin\ \theta \\ \cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

Með Pýþagórasarsamsemdunum getum við umritað þessa tvöföldunarformúlu kósínuss á tvo vegu til viðbótar. Fyrri umritunin er:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

Síðari umritunin er:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \\ &= 2\ \cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

Á sama hátt fæst tvöföldunarformúla tangens með því að setja $\alpha = \beta = \theta$ í summuformúluna:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \tfrac{\tan\ \alpha + \tan\ \beta}{1 - \tan\ \alpha\ \tan\ \beta} \\ \tan(\theta + \theta) &= \tfrac{\tan\ \theta + \tan\ \theta}{1 - \tan\ \theta\ \tan\ \theta} \\ \tan(2\theta) &= \tfrac{2\tan\ \theta}{1 - \tan^2\theta}\end{aligned}$$

TVÖFÖLDUNARFORMÚLUR

Tvöföldunarformúlurnar eru teknar saman hér að neðan. Formúlan fyrir tangens gildir þar sem tangens hornsins og tangens tvöfalda hornsins eru báðir skilgreindir og nefnarinn er ekki 0.

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\ \sin^2\theta \\ &= 2\ \cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

AÐFERÐ

Notið tvöföldunarformúlurnar til að finna nákvæmt gildi þegar tangens horns og fjórðungurinn sem hornið liggur í eru gefin.

1. Teiknið þríhyrning sem sýnir gefnu upplýsingarnar.
2. Veljið rétta tvöföldunarformúlu.
3. Setjið gildi úr þríhyrningnum inn í formúluna.
4. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 1

Nákvæm hornafallagildi fundin með tvöföldunarformúlum

7

Gefið er að $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ og θ sé í öðrum fjórðungi. Finnið eftirfarandi:

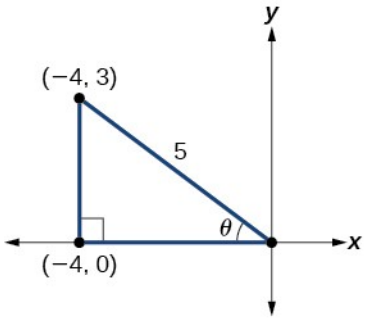
1. ⓐ $\sin(2\theta)$
2. ⓑ $\cos(2\theta)$
3. ⓒ $\tan(2\theta)$

Lausn

Ef við teiknum þríhyrning sem endurspeglar gefnu upplýsingarnar getum við fundið gildin sem þarf til að leysa verkefnin á myndinni. Gefið er $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, þannig að θ er í öðrum fjórðungi. Tangens horns er jafn mótlægu hliðinni deilt með aðlægu hliðinni og þar sem θ er í öðrum fjórðungi er aðlæga hliðin á x-ásnum og neikvæð. Notið reglu Pýþagórasar til að finna lengd langhliðarinnar:

$$\begin{aligned}(-4)^2 + (3)^2 &= c^2 \\ 16 + 9 &= c^2 \\ 25 &= c^2 \\ c &= 5\end{aligned}$$

Nú getum við teiknað þríhyrning svipaðan þeim sem sýndur er á mynd 2.



Mynd 2. Athugið að litla hornið sem merkt er θ á myndinni er viðmiðunarhornið 180° – θ. Hornið θ í textanum liggur í öðrum fjórðungi.

1. ⓐByrjum á að rita tvöföldunarformúlu sínuss.
$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
Við þurfum gildin $\sin\theta$ og $\cos\theta$. Á mynd 2 sést að langhliðin er 5 einingar að lengd. Því er $\sin\theta = \frac{3}{5}$, og $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. Setjum gildin inn í formúluna og einföldum.
Þá fæst:

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2\left(\tfrac{3}{5}\right)\left(-\tfrac{4}{5}\right)\\ &= -\tfrac{24}{25}\end{aligned}$$

2. ⓑ Ritið tvöföldunarformúlu kósínuss.
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
Setjið aftur gildi sínuss og kósínuss inn í jöfnuna og einfaldið.

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \left(-\tfrac{4}{5}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{5}\right)^2\\ &= \tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\\ &= \tfrac{7}{25}\end{aligned}$$

3. ⓒ Ritið tvöföldunarformúlu tangens.
$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$
Í þessari formúlu þurfum við tangensgildið, en gefið er að $\tan\theta = -\frac{3}{4}$. Setjið þetta gildi inn í jöfnuna og einfaldið.

$$\begin{aligned}\tan(2\theta) &= \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} \\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{16}{7}\right) \\ &= -\frac{24}{7}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Gefið er $\sin\alpha = \frac{5}{8}$, þar sem θ er í fyrsta fjórðungi. Finnið $\cos\left(2\alpha\right)$.

SÝNIDÆMI 2

Tvöföldunarformúla kósínuss notuð án nákvæmra gilda

Notið tvöföldunarformúlu kósínuss til að rita $\cos\left(6x\right)$ með $\cos\left(3x\right)$.

Lausn

$$\begin{aligned}\cos(6x) &= \cos\left(2(3x)\right) \\ &= \cos^2\left(3x\right) - \sin^2\left(3x\right) \\ &= 2\cos^2\left(3x\right) - 1\end{aligned}$$

7

Greining

Dæmið sýnir að nota má tvöföldunarformúluna án þess að þekkja tölugildi hornafallanna. Það er formgerð samsemdarinnar sem skiptir máli. Samsemd gildir fyrir öll horn þar sem báðar hliðar hennar eru skilgreindar.

Notkun tvöföldunarformúlna til að sannprófa samsemdir

Við staðfestum samsemdir með tvöföldunarformúlum í sömu skrefum og við notuðum til að leiða út formúlurnar fyrir summu og mismun. Veljið flóknari hlið jöfnunnar og umritið hana þar til hún er eins og hin hliðin.

SÝNIDÆMI 3

Samsemd staðfest með tvöföldunarformúlum

Staðfestið eftirfarandi samsemd með tvöföldunarformúlum:

$$1+\sin\left(2\theta\right)=\left(\sin\theta+\cos\theta\right)^2$$

Lausn

Við vinnum með hægri hlið jafnaðarmerkisins og umritum stæðuna þar til hún er eins og vinstri hliðin.

$$\begin{aligned}(\sin\ \theta+\cos\ \theta)^2 &= \sin^2\theta+2\ \ \sin\ \theta\ \cos\ \theta+\cos^2\theta\\ &= (\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\ \ \sin\ \theta\ \cos\ \theta\\ &= 1+2\ \ \sin\ \theta\ \cos\ \theta\\ &= 1+\sin(2\theta)\end{aligned}$$

Greining

Þessi aðferð er ekki flókin svo framarlega sem við munum formúluna fyrir ferning tvíliðu úr algebru:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

þar sem $a=\sin\theta$ og $b=\cos\theta$. Til að ná árangri í stærðfræði skiptir miklu að geta þekkt mynstur. Liðirnir eða táknin geta breyst en algebran er sú sama.

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Staðfestið samsemdina: $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos(2\theta)$.

SÝNIDÆMI 4

Tvöföldunarsamsemd tangens sannprófuð

Miðið við sameiginlegt skilgreiningarmengi beggja hliða. Þar eru bæði tangens og kótangens skilgreindir og enginn nefnari er 0. Sannprófið samsemdina:

$$\tan(2\theta)=\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}$$

Lausn

Í þessu tilviki vinnum við með vinstri hlið jöfnunnar og einföldum eða umritum þar til hún er jöfn hægri hliðinni.

$$\tan\ (2\ \theta)=\frac{2\ \ \tan\ \ \theta}{1-\tan^2\ \theta}$$ Tvöföldunarformúla

$$=\frac{2\ \ \tan\ \ \theta\left(\frac{1}{\tan\ \ \theta}\right)}{(1-\tan^2\ \theta)\left(\frac{1}{\tan\ \ \theta}\right)}$$ Stækkum brotið.

$$=\frac{2}{\frac{1}{\tan\ \ \theta}-\frac{\tan^2\ \theta}{\tan\ \ \theta}}$$

$$=\frac{2}{\cot\ \ \theta-\tan\ \ \theta}$$ Notum umhverfusamsemdina fyrir $\frac{1}{\tan\ \ \theta}$.

Greining

Þótt hægri hlið upphaflegu jöfnunnar virðist flóknari völdum við að umrita þá vinstri. Einnig má fara í hina áttina og byrja hægra megin. Tökum sem dæmi að við viljum sýna að

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta}$$

Vinnum með hægri hliðina.

$$\begin{aligned}\frac{2}{\cot\theta-\tan\theta} &= \frac{2}{\frac{1}{\tan\theta}-\tan\theta}\left(\frac{\tan\theta}{\tan\theta}\right)\\ &= \frac{2\tan\theta}{\frac{1}{\cancel{\tan\theta}}(\cancel{\tan\theta})-\tan\theta(\tan\theta)}\\ &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

Þegar samsemdir eru notaðar til að einfalda hornafallastæðu eða leysa hornafallajöfnu eru yfirleitt margar leiðir að markinu. Engin föst regla segir til um hvorri hliðinni skuli breyta. Þó ættum við að byrja á því að fylgja leiðbeiningunum sem gefnar voru fyrr.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Sannprófið samsemdina: $\cos(2\theta)\cos\theta=\cos^3\theta-\cos\theta\sin^2\theta$.

7

Veldislækkunarformúlur notaðar til að einfalda stæðu

Með tvöföldunarformúlunum má leiða út veldislækkunarformúlur. Með þeim má lækka veldi sínuss og kósínuss. Ef þær eru notaðar aftur og aftur má rita slétt veldi sínuss og kósínuss með fyrsta veldi kósínuss af margföldum hornum. Formúlurnar nýtast einkum í stærðfræðigreiningu. Hér leiðum við út þrjár slíkar formúlur.

Við getum notað tvær af þremur tvöföldunarformúlum kósínuss til að leiða út lækkunarformúlur sínuss og kósínuss. Byrjum á $\cos(2\theta)=1-2\sin^2\theta$. Einangrið $\sin^2\theta$:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 1-2\ \sin^2\theta\\ 2\ \sin^2\theta &= 1-\cos(2\theta)\\ \sin^2\theta &= \tfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\end{aligned}$$

Næst notum við formúluna $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$. Einangrið $\cos^2\theta$:

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 2\ \cos^2\theta-1\\ 1+\cos(2\theta) &= 2\ \cos^2\theta\\ \tfrac{1+\cos(2\theta)}{2} &= \cos^2\theta\end{aligned}$$

Síðasta veldislækkunarformúlan er leidd út með því að rita tangens með sínus og kósínus:

$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\frac{1-\cos\left(2\,\theta\right)}{2}}{\frac{1+\cos\left(2\,\theta\right)}{2}}$$ Setjum inn veldislækkunarformúlurnar.

$$= \left(\frac{1-\cos\left(2\,\theta\right)}{2}\right)\left(\frac{2}{1+\cos\left(2\,\theta\right)}\right)$$

$$= \frac{1-\cos\left(2\,\theta\right)}{1+\cos\left(2\,\theta\right)}$$

VELDISLÆKKUNARFORMÚLUR

Veldislækkunarformúlurnar eru teknar saman hér:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos\left(2\theta\right)}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos\left(2\theta\right)}{2}$$

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos\left(2\theta\right)}{1+\cos\left(2\theta\right)}$$

7

SÝNIDÆMI 5

Jafngild stæða án velda hærri en 1 rituð

Ritið jafngilda stæðu fyrir $\cos^4 x$ sem inniheldur engin veldi sínuss eða kósínuss hærri en 1.

Lausn

Við beitum veldislækkunarformúlu kósínuss tvisvar.

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2$$

$$= \left(\frac{1+\cos\left(2\,x\right)}{2}\right)^2$$ Veldislækkun.

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos\left(2\,x\right)+\cos^2\left(2\,x\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\left(2\,x\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 2\left(2\,x\right)}{2}\right)$$ Veldislækkun aftur.

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos\left(2\,x\right)+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos\left(4\,x\right)$$

$$= \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos\left(2\,x\right)+\frac{1}{8}\cos\left(4\,x\right)$$

Greining

Lausnin fæst með því að nota lækkunarformúluna tvisvar, eins og fram hefur komið, og formúluna fyrir ferning tvíliðu úr algebru.

SÝNIDÆMI 6

Veldislækkunarformúlur notaðar til að sanna samsemd

Notið veldislækkunarformúlurnar til að sanna

$$\sin^3(2x)=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]\left[1-\cos(4x)\right]$$

Lausn

Við einföldum vinstri hlið jöfnunnar:

$$\sin^3(2x)=[\sin(2x)]\,[\sin^2(2x)]$$

$$=\sin(2x)\left[\frac{1-\cos(4x)}{2}\right] \quad \text{Notum veldislækkunarformúluna.}$$

$$=\sin(2x)\left(\frac{1}{2}\right)[1-\cos(4x)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(2x)]\,[1-\cos(4x)]$$

Greining

Takið eftir að í þessu dæmi settum við

$$\frac{1-\cos(4x)}{2}$$

í stað $\sin^2(2x)$. Formúlan segir

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

Setjum $\theta=2x$, þá er $2\theta=4x$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Notið veldislækkunarformúlurnar til að sanna að $10\cos^4 x=\frac{15}{4}+5\cos(2x)+\frac{5}{4}\cos(4x)$.

Nákvæm gildi fundin með helmingunarformúlum

Næsti flokkur samsemda er helmingunarformúlurnar. Þær má leiða út frá lækkunarformúlunum og nota þegar horn er helmingur sérhorns. Ef við skiptum θ út fyrir $\frac{\alpha}{2}$, fæst helmingunarformúla sínuss með því að einfalda jöfnuna og einangra $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Takið eftir að ± stendur framan við helmingunarformúlurnar. Það merkir ekki að bæði jákvæða og neikvæða stæðan gildi. Rétt formerki ræðst af fjórðungnum þar sem lokaarmur $\frac{\alpha}{2}$ liggur.

Helmingunarformúla sínuss er leidd út þannig:

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \tfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\\ \sin^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \tfrac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\\ &= \tfrac{1-\cos\ \alpha}{2}\\ \sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\ \alpha}{2}}\end{aligned}$$

Helmingunarformúla kósínuss er leidd út þannig:

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \tfrac{1+\cos(2\theta)}{2}\\ \cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \tfrac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\\ &= \tfrac{1+\cos\ \alpha}{2}\\ \cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos\ \alpha}{2}}\end{aligned}$$

Helmingunarformúla tangens fæst þannig:

$$\begin{aligned}\tan^2\theta &= \tfrac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}\\ \tan^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \tfrac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}\\ &= \tfrac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}\\ \tan\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) &= \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}\end{aligned}$$

HELMINGUNARFORMÚLUR

Helmingunarformúlurnar eru teknar saman hér að neðan. Formerkið ræðst af því hvort hornafallið af hálfa horninu sé jákvætt eða neikvætt. Formúlur með nefnara gilda aðeins þar sem hann er ekki 0. Síðasta tangensformúlan, með sínus í nefnara, hefur þrengra skilgreiningarmengi en tangens hálfa hornsins.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}$$
$$=\frac{\sin\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}$$
$$=\frac{1-\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha}$$

SÝNIDÆMI 7

Nákvæmt sínusgildi fundið með helmingunarformúlu

Finnið $\sin\left(15^\circ\right)$ með helmingunarformúlu.

Lausn

Þar sem $15^\circ=\frac{30^\circ}{2}$, notum við helmingunarformúlu sínuss:

$$\sin\ \frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Greining

Takið eftir að við notuðum aðeins jákvæðu rótina því $\sin\left(15^\circ\right)$ er jákvætt.

AÐFERÐ

Finnið nákvæm gildi hornafallanna af helmingi horns þegar tangens hornsins og fjórðungurinn sem það liggur í eru gefin.

1. Teiknið þríhyrning sem sýnir gefnu upplýsingarnar.
2. Veljið rétta helmingunarformúlu.
3. Setjið gildi úr þríhyrningnum inn í formúluna.
4. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 8

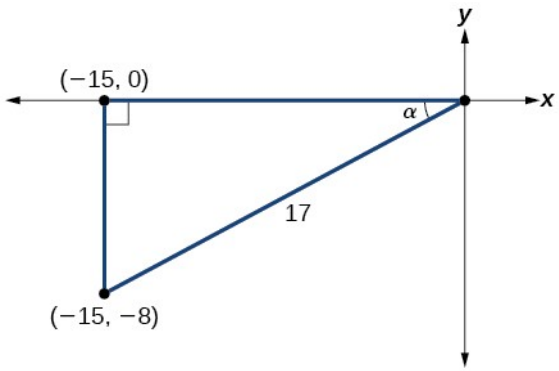
Nákvæm gildi fundin með helmingunarsamsemdum

Gefið er að $\tan\alpha = \frac{8}{15}$ og að α liggi í þriðja fjórðungi. Finnið nákvæmt gildi eftirfarandi:

1. ⓐ $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
2. ⓑ $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
3. ⓒ $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Lausn

Með gefnu upplýsingunum getum við teiknað þríhyrninginn á mynd 3. Með setningu Pýþagórasar finnum við að langhliðin er 17. Því getum við reiknað $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$ og $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$.



Mynd 3. Athugið að litla hornið sem merkt er α á myndinni er viðmiðunarhornið α − 180°. Hornið α í textanum liggur í þriðja fjórðungi.

1. ⓐ Áður en við byrjum verðum við að muna að ef α er í þriðja fjórðungi, þá er $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, svo $\frac{180^\circ}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{270^\circ}{2}$. Það merkir að lokaarmur $\frac{\alpha}{2}$ er í öðrum fjórðungi, þar sem $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$.

   Til að finna $\sin\frac{\alpha}{2}$, byrjum við á helmingunarformúlu sínuss. Setjum síðan inn kósínusgildið sem fæst úr þríhyrningnum á mynd 3 og einföldum.

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{1-\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{\frac{32}{17}}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{32}{17}\cdot\tfrac{1}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{16}{17}} \\
&= \pm\tfrac{4}{\sqrt{17}} \\
&= \tfrac{4\sqrt{17}}{17}
\end{aligned}$$

Við veljum jákvæða gildið á $\sin\frac{\alpha}{2}$ því lokaarmur hornsins liggur í öðrum fjórðungi og sínus er jákvæður þar.

2. ⓑ Til að finna $\cos\frac{\alpha}{2}$, ritum við helmingunarformúlu kósínuss, setjum inn kósínusgildið sem við fundum út frá þríhyrningnum á mynd 3 og einföldum.

7

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{1+\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{\frac{2}{17}}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{2}{17}\cdot\tfrac{1}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{1}{17}} \\
&= -\tfrac{\sqrt{17}}{17}
\end{aligned}$$

Við veljum neikvæða gildið á $\cos\frac{\alpha}{2}$ því lokaarmur hornsins liggur í öðrum fjórðungi og kósínus er neikvæður þar.

3. ⓒ Til að finna $\tan\frac{\alpha}{2}$, ritum við helmingunarformúlu tangens. Aftur setjum við inn kósínusgildið sem við fundum út frá þríhyrningnum á mynd 3 og einföldum.

$$\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{1-(-\frac{15}{17})}{1+(-\frac{15}{17})}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{\frac{2}{17}}}\\ &= \pm\sqrt{\frac{32}{2}}\\ &= -\sqrt{16}\\ &= -4\end{aligned}$$

Við veljum neikvæða gildið á $\tan\frac{\alpha}{2}$ því $\frac{\alpha}{2}$ liggur í öðrum fjórðungi og tangens er neikvæður þar.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Gefið er að $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ og að α liggi í fjórða fjórðungi. Finnið nákvæmt gildi $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

SÝNIDÆMI 9

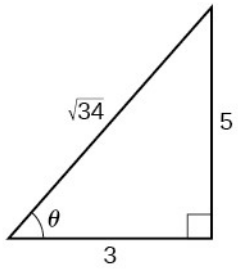
Stærð hálfs horns fundin

Nú snúum við aftur að verkefninu sem sett var fram í upphafi hlutans. Hjólarampur fyrir keppni reyndra hjólreiðamanna myndar hornið θ við jörðina. Byggja á annan ramp fyrir byrjendur sem myndar helmingi minna horn við jörðina. Hér er hornið helmingað, ekki hlutfall hæðar og láréttrar lengdar. Ef $\tan\theta = \frac{5}{3}$ fyrir keppni reyndra, hvert er þá hornið á rampinum fyrir byrjendur?

Lausn

Hornið á rampinum fyrir byrjendur er helmingur hornsins á rampinum fyrir keppni reyndra. Við vitum að $\tan\theta = \frac{5}{3}$ fyrir keppni reyndra. Því getum við fundið $\cos\theta$ með rétthyrnda þríhyrningnum og setningu Pýþagórasar og síðan notað helmingunarsamsemdirnar. Sjá mynd 4.

$$3^2 + 5^2 = 34$$
$$c = \sqrt{34}$$



Mynd 4

Við sjáum að $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$. Við getum notað helmingunarformúlu tangens: $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$. Þar sem $\tan\theta$ er í fyrsta fjórðungi er $\tan\frac{\theta}{2}$. það líka. Því er

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1-\frac{3\sqrt{34}}{34}}{1+\frac{3\sqrt{34}}{34}}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{34-3\sqrt{34}}{34}}{\frac{34+3\sqrt{34}}{34}}} \\ &= \sqrt{\frac{34-3\sqrt{34}}{34+3\sqrt{34}}} \\ &\approx 0{,}57\end{aligned}$$

Við getum tekið andhverfan tangens til að finna hornið: $\tan^{-1}(0{,}57) \approx 29{,}7^\circ$. Halli rampsins í keppni byrjenda er því $\approx 29{,}7^\circ$.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í tvöföldunar-, helmingunar- og veldislækkunarformúlum.

- Tvöföldunarsamsemdir
- Helmingunarsamsemdir

7.3 Verkefni hlutans

Orðleg verkefni

1. Útskýrið hvernig leiða má veldislækkunarsamsemdirnar út frá tvöföldunarsamsemdinni $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

2. Útskýrið hvernig leiða má tvöföldunarformúlu $\tan(2x)$ út með tvöföldunarformúlunum fyrir $\cos(2x)$ og $\sin(2x)$.

3. Helmingunarformúlu $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$ má leiða út með því að deila formúlunni fyrir $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ með $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Útskýrið hvernig leiða má út tvær formúlur fyrir $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ sem innihalda engar kvaðratrætur. Kvaðratrótarformúlan hér er rituð fyrir óneikvætt tangensgildi. Almennt þarf að velja formerkið eftir því hvar hálfa hornið liggur. Takið jafnframt fram skilgreiningarmengi hvorrar formúlu.

4. Skoðið skilgreiningarmengi helmingunarformúlunnar fyrir $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, í fyrra verkefni.

Hvaða gildi $\cos x$ gerir nefnarann 0 og hvers vegna er tangens hálfa hornsins þá einnig óskilgreindur? Ef notuð er formúla með sínus í nefnara þarf að athuga sérstaklega hvar sá nefnari er 0.

Algebruverkefni

Finnið nákvæm gildi a) $\sin(2x)$, b) $\cos(2x)$, og c) $\tan(2x)$ í eftirfarandi verkefnum án þess að finna hornið x. Notið tvöföldunarformúlurnar.

5. Gefið er að $\sin x=\frac{1}{8}$, og að x sé í fyrsta fjórðungi.

6. Gefið er að $\cos x=\frac{2}{3}$, og að x sé í fyrsta fjórðungi.

7. Gefið er að $\cos x=-\frac{1}{2}$, og að x sé í þriðja fjórðungi.

8. Gefið er að $\tan x=-8$, og að x sé í fjórða fjórðungi.

Finnið gildi hornafallanna sex í eftirfarandi verkefnum ef gefnu skilyrðin gilda.

9. $\cos(2\theta)=\frac{3}{5}$ og $90^\circ\le\theta\le 180^\circ$

10. $\cos(2\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ og $180^\circ\le\theta\le 270^\circ$

Einfaldið í eina hornafallastæðu í eftirfarandi verkefnum.

11.

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

12.

$$4\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Finnið nákvæmt gildi með helmingunarformúlum í eftirfarandi verkefnum.

13.

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

14.

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$$

15.

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

7

16.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

17.

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

18.

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{12}\right)$$

19.

$$\tan\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum nákvæm gildi a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, b) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, og c) $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ án þess að leysa fyrir x, þegar $0 \le x < 2\pi$

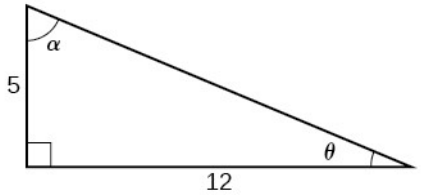
20. Gefið er að $\tan x = -\frac{4}{3}$, og að x sé í fjórða fjórðungi.

21. Gefið er að $\sin x = -\frac{12}{13}$, og að x sé í þriðja fjórðungi.

22. Gefið er að $\csc x = 7$, og að x sé í öðrum fjórðungi.

23. Gefið er að $\sec x = -4$, og að x sé í öðrum fjórðungi.

Notið mynd 5 til að finna umbeðin hornafallagildi fyrir hálf og tvöföld horn í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 5 Rétthyrndur þríhyrningur með skammhliðum af lengd 5 og 12.

24. Finnið $\sin(2\theta)$, $\cos(2\theta)$, og $\tan(2\theta)$.

25. Finnið $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, og $\tan(2\alpha)$.

26. Finnið $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, og $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

27. Finnið $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, og $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Einfaldið hverja stæðu í eftirfarandi verkefnum. Reiknið ekki gildið.

28.

$$\cos^2(28^\circ) - \sin^2(28^\circ)$$

29.

$$2\cos^2(37^\circ) - 1$$

30.

$$1 - 2\sin^2(17^\circ)$$

31.

$$\cos^2(9x) - \sin^2(9x)$$

32.

$$4\sin(8x)\cos(8x)$$

33.

$$6\sin(5x)\cos(5x)$$

Sannið gefnu samsemdina í eftirfarandi verkefnum. Samsemdirnar eiga að gilda á sameiginlegu skilgreiningarmengi beggja hliða.

34.

$$(\sin t - \cos t)^2 = 1 - \sin(2t)$$

35.

$$\sin(2x) = -2\sin(-x)\cos(-x)$$

36.

$$\cot x - \tan x = 2\cot(2x)$$

37.

$$\frac{1+\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}\tan^2\theta = \tan\theta$$

Umritið stæðurnar í eftirfarandi verkefnum þannig að ekkert veldi sínuss eða kósínuss sé hærra en 1.

38.

$$\cos^2(5x)$$

39.

$$\cos^2(6x)$$

40.

$$\sin^4(8x)$$

41.

$$\sin^4(3x)$$

42.

$$\cos^2 x \sin^4 x$$

43.

$$\cos^4 x \sin^2 x$$

44.

$$\tan^2 x \sin^2 x$$

Tækniverkefni

Umritið föllin í eftirfarandi verkefnum þannig að ekkert veldi sínuss eða kósínuss sé hærra en 1. Staðfestið síðan svörin með gröfum.

45.

$$\tan^4 x$$

46.

$$\sin^2(2x)$$

47.

$$\sin^2 x \cos^2 x$$

48.

$$\tan^2 x \sin x$$

49.

$$\tan^4 x \cos^2 x$$

50.

$$\cos^2 x \sin(2x)$$

51.

$$\cos^2(2x) \sin x$$

52.

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \sin x$$

Finnið jafngilt fall með algebru í eftirfarandi verkefnum, aðeins með $\sin x$ og/eða $\cos x$, og staðfestið síðan svarið með því að teikna gröf beggja jafna.

53.

$$\sin(4x)$$

54.

$$\cos(4x)$$

Viðbótarverkefni

Sannið samsemdirnar í eftirfarandi verkefnum. Miðið við sameiginlegt skilgreiningarmengi beggja hliða.

55.

$$\sin(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

56.

$$\cos(2\alpha)=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

57.

$$\tan(2x)=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-1}$$

58.

$$\left(\sin^2 x-1\right)^2=\cos(2x)+\sin^4 x$$

59.

$$\sin(3x)=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$$

60.

$$\cos(3x)=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x$$

61.

$$\frac{1+\cos(2t)}{\sin(2t)-\cos t}=\frac{2\cos t}{2\sin t-1}$$

62.

$$\sin(16x)=16\sin x\cos x\cos(2x)\cos(4x)\cos(8x)$$

63.

$$\cos(16x)=\left(\cos^2(4x)-\sin^2(4x)-\sin(8x)\right)\left(\cos^2(4x)-\sin^2(4x)+\sin(8x)\right)$$

7

7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu

NÁMSMARKMIÐ

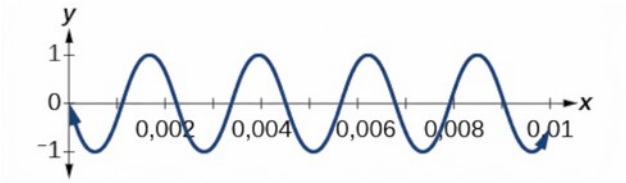
Í þessum hluta lærið þið að:

- Rita margfeldi sem summur.
- Rita summur sem margfeldi.



Mynd 1 Lúðrasveit UCLA-háskóla (mynd: Eric Chan, Flickr).

Lúðrasveit gengur eftir vellinum og skapar tilkomumikinn hljóm sem hleypir lífi í áhorfendur. Hljóðið berst sem bylgja sem túlka má með hornaföllum. Mynd 2 sýnir til dæmis hljóðbylgju tónsins A. Í þessum hluta skoðum við hornafallasamsemdir sem liggja að baki hversdagslegum fyrirbærum á borð við hljóðbylgjur.



Mynd 2

Margfeldi rituð sem summur

Við höfum þegar lært ýmsar formúlur sem nýtast við að liða eða einfalda hornafallastæður, en stundum þarf að rita margfeldi kósínuss og sínuss sem summu. Til þess má nota formúlurnar sem breyta margfeldi í summu. Skoðum fyrst kósínussamsemdina og síðan sínussamsemdina.

Margfeldi kósínusa rituð sem summur

Við getum leitt formúluna sem breytir margfeldi í summu út frá summu- og mismunarsamsemdum kósínuss. Ef við leggjum jöfnurnar tvær saman fæst:

$$\begin{aligned}
&\cos\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \alpha\ \sin\ \beta = \cos(\alpha - \beta) \\
&+\underline{\cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta = \cos(\alpha + \beta)} \\
&2\ \cos\ \alpha\ \cos\ \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

Síðan deilum við með 2 til að einangra margfeldi kósínusanna:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

AÐFERÐ

Ritið gefið margfeldi kósínusa sem summu.

1. Ritið formúluna fyrir margfeldi kósínusa.
2. Setjið gefnu hornin inn í formúluna.
3. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 1

Margfeldi ritað sem summa með formúlu fyrir margfeldi kósínusa

Ritið eftirfarandi margfeldi kósínusa sem summu: $2\cos\left(\frac{7x}{2}\right)\cos\frac{3x}{2}$.

7

Lausn

Við byrjum á að rita formúluna fyrir margfeldi kósínusa:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Síðan getum við sett gefnu hornin inn í formúluna og einfaldað.

$$\begin{aligned}
2\ \cos\left(\tfrac{7x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3x}{2}\right) &= (2)\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\tfrac{7x}{2}-\tfrac{3x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{7x}{2}+\tfrac{3x}{2}\right)\right] \\
&= \left[\cos\left(\tfrac{4x}{2}\right)+\cos\left(\tfrac{10x}{2}\right)\right] \\
&= \cos\ \ 2x + \cos\ \ 5x
\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Notið formúluna sem breytir margfeldi í summu til að rita margfeldið sem summu eða mismun: $\cos(2\theta)\cos(4\theta)$.

Margfeldi sínuss og kósínuss ritað sem summa

Næst leiðum við formúluna sem breytir margfeldi sínuss og kósínuss í summu út frá summu- og mismunarformúlum sínuss. Ef við leggjum summu- og mismunarsamsemdirnar saman fæst:

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ \sin\ \beta \\
+\ &\underline{\qquad\qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ \sin\ \beta} \\
&\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\ \sin\ \alpha\ \cos\ \beta
\end{aligned}$$

Síðan deilum við með 2 til að einangra margfeldi kósínuss og sínuss:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

SÝNIDÆMI 2

Margfeldi ritað sem summa sem inniheldur aðeins sínus eða kósínus

Ritið eftirfarandi margfeldi sem summu sem inniheldur aðeins sínus eða kósínus en engin margfeldi: $\sin(4\theta)\cos(2\theta)$.

Lausn

Ritið formúluna fyrir margfeldi sínuss og kósínuss. Setjið síðan gefnu gildin inn í formúluna og einfaldið.

$$\begin{aligned}
&\sin\ \alpha\ \cos\ \beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \\
&\sin(4\theta)\cos(2\theta) = \tfrac{1}{2}[\sin(4\theta+2\theta) + \sin(4\theta-2\theta)] \\
&= \tfrac{1}{2}[\sin(6\theta) + \sin(2\theta)]
\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Notið formúluna sem breytir margfeldi í summu til að rita margfeldið sem summu: $\sin(x+y)\cos(x-y)$.

Margfeldi sínusa ritað með kósínus

Formúla sem ritar margfeldi sínusa með kósínus er einnig leidd út frá summu- og mismunarsamsemdum kósínuss. Í þessu tilviki drögum við fyrst aðra kósínusformúluna frá hinni:

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha-\beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \alpha\ \sin\ \beta \\
-\ &\underline{\qquad\qquad \cos(\alpha+\beta) = -(\cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta)} \\
&\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\ \sin\ \alpha\ \sin\ \beta
\end{aligned}$$

Síðan deilum við með 2 til að einangra margfeldi sínusanna:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Á sama hátt mætti rita margfeldi kósínusa með sínus eða leiða út aðrar formúlur sem breyta margfeldi í summu.

FORMÚLUR SEM BREYTA MARGFELDI Í SUMMU

Formúlurnar sem breyta margfeldi í summu eru:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

SÝNIDÆMI 3

Margfeldi ritað sem summa eða mismunur

Ritið $\cos(3\theta)\cos(5\theta)$ sem summu eða mismun.

Lausn

Við höfum margfeldi kósínusa og byrjum því á að rita viðeigandi formúlu. Síðan setjum við gefnu hornin inn og einföldum.

$$\cos\ \alpha\ \cos\ \beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$$

$$\cos\left(3\,\theta\right)\cos\left(5\,\theta\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(3\,\theta-5\,\theta\right)+\cos\left(3\,\theta+5\,\theta\right)\right]$$

$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\,\theta\right)+\cos\left(8\,\theta\right)\right]$ Notið samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Notið formúluna sem breytir margfeldi í summu til að reikna $\cos\frac{11\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$.

Summur ritaðar sem margfeldi

Í sumum verkefnum þarf að snúa við ferlinu sem við notuðum hér á undan. Formúlurnar sem breyta summu í margfeldi gera okkur kleift að rita summur sínusa eða kósínusa sem margfeldi. Þær má leiða út frá samsemdunum sem breyta margfeldi í summu. Með nokkrum innsetningum getum við til dæmis leitt út samsemd sem breytir summu sínusa í margfeldi.

Látum $\frac{u+v}{2}=\alpha$ og $\frac{u-v}{2}=\beta$.

Þá er

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \tfrac{u+v}{2}+\tfrac{u-v}{2}\\ &= \tfrac{2u}{2}\\ &= u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha-\beta &= \tfrac{u+v}{2}-\tfrac{u-v}{2}\\ &= \tfrac{2v}{2}\\ &= v\end{aligned}$$

Ef α og β er síðan skipt út fyrir nýju stæðurnar í formúlunni sem breytir margfeldi í summu fæst

$$\sin\ \alpha\ \cos\ \beta=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\ u+\sin\ v\right]\quad\text{Setjið inn fyrir}\left(\alpha+\beta\right)\text{ og }\left(\alpha-\beta\right)$$

$$2\ \sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)=\sin\ u+\sin\ v$$

Hinar samsemdirnar sem breyta summu í margfeldi eru leiddar út á sama hátt.

FORMÚLUR SEM BREYTA SUMMU Í MARGFELDI

Formúlurnar sem breyta summu í margfeldi eru:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

SÝNIDÆMI 4

Mismunur sínusa ritaður sem margfeldi

Ritið eftirfarandi mismun sínusa sem margfeldi: $\sin\left(4\theta\right)-\sin\left(2\theta\right)$.

Lausn

Við byrjum á að rita formúluna fyrir mismun sínusa.

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Setjið gildin inn í formúluna og einfaldið.

$$\begin{aligned}\sin(4\theta)-\sin(2\theta) &= 2\sin\left(\tfrac{4\theta-2\theta}{2}\right)\ \cos\left(\tfrac{4\theta+2\theta}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\tfrac{2\theta}{2}\right)\ \cos\left(\tfrac{6\theta}{2}\right)\\ &= 2\ \sin\ \theta\ \cos(3\theta)\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Notið formúluna sem breytir summu í margfeldi til að rita summuna sem margfeldi: $\sin(3\theta)+\sin(\theta)$.

SÝNIDÆMI 5

Gildi reiknað með formúlu sem breytir summu í margfeldi

Reiknið $\cos(15^\circ)-\cos(75^\circ)$.

Lausn

Við byrjum á að rita formúluna fyrir mismun kósínusa.

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Síðan setjum við gefnu hornin inn og einföldum.

$$\begin{aligned}\cos(15^\circ)-\cos(75^\circ) &= -2\sin\left(\tfrac{15^\circ+75^\circ}{2}\right)\ \sin\left(\tfrac{15^\circ-75^\circ}{2}\right)\\ &= -2\sin(45^\circ)\ \sin(-30^\circ)\\ &= -2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

SÝNIDÆMI 6

Samsemd sönnuð

Sannið samsemdina:

$$\frac{\cos(4t)-\cos(2t)}{\sin(4t)+\sin(2t)}=-\tan t$$

Lausn

Við byrjum vinstra megin, á flóknari hlið jöfnunnar, og umritum stæðuna þar til hún samsvarar hægri hliðinni.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(4t)-\cos(2t)}{\sin(4t)+\sin(2t)} &= \frac{-2\ \sin\left(\frac{4t+2t}{2}\right)\ \sin\left(\frac{4t-2t}{2}\right)}{2\ \sin\left(\frac{4t+2t}{2}\right)\ \cos\left(\frac{4t-2t}{2}\right)} \\ &= \frac{-2\ \sin(3t)\sin\ t}{2\ \sin(3t)\cos\ t} \\ &= \frac{-\cancel{2}\ \cancel{\sin(3t)}\ \sin\ t}{\cancel{2}\ \cancel{\sin(3t)}\ \cos\ t} \\ &= -\frac{\sin\ t}{\cos\ t} \\ &= -\tan\ t\end{aligned}$$

Greining

Munið að sérstakar reglur gilda þegar hornafallasamsemdir eru sannprófaðar. Aðferðir við að leysa jöfnu eru ekki þær sömu og aðferðir við að sannprófa samsemd. Þegar við sönnum samsemd veljum við aðra hliðina og gerum innsetningar þar til hún er orðin eins og hin hliðin.

SÝNIDÆMI 7

Samsemd sannprófuð með tvöföldunar- og umhverfusamsemdum

Sannprófið samsemdina $csc^2\theta - 2 = \dfrac{\cos(2\theta)}{\sin^2\theta}$.

Lausn

Til að sannprófa þessa jöfnu notum við nokkrar samsemdir saman. Við notum tvöföldunarformúluna og umhverfusamsemdirnar. Við vinnum með hægri hlið jöfnunnar og umritum hana þar til hún samsvarar vinstri hliðinni.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(2\theta)}{\sin^2\theta} &= \frac{1-2\ \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{2\ \sin^2\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \csc^2\theta - 2\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Sannprófið samsemdina $\tan\theta\cot\theta - \cos^2\theta = \sin^2\theta$.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í samsemdum sem breyta margfeldi í summu og summu í margfeldi.

- Samsemdir sem breyta summu í margfeldi
- Samsemdir sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu

7.4 Verkefni hlutans

Orðleg verkefni

1. Byrjið á formúlunni $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$, sem breytir margfeldi í summu. Útskýrið síðan hvernig leiða má út formúluna fyrir $\cos\alpha\sin\beta$.
2. Útskýrið tvær ólíkar aðferðir til að reikna $\cos(195^\circ)\cos(105^\circ)$, þar sem önnur notar formúlu sem breytir margfeldi í summu. Hvor aðferðin er auðveldari?
3. Lýsið aðstæðum þar sem breyta þarf jöfnu úr summu í margfeldi og gefið dæmi.
4. Lýsið aðstæðum þar sem breyta þarf jöfnu úr margfeldi í summu og gefið dæmi.

Algebruverkefni

Umritið margfeldið sem summu eða mismun í eftirfarandi verkefnum.

5. $$16\sin(16x)\sin(11x)$$
6. $$20\cos(36t)\cos(6t)$$
7. $$2\sin(5x)\cos(3x)$$
8. $$10\cos(5x)\sin(10x)$$
9. $$\sin(-x)\sin(5x)$$
10. $$\sin(3x)\cos(5x)$$

Umritið summuna eða mismuninn sem margfeldi í eftirfarandi verkefnum.

11. $$\cos(6t)+\cos(4t)$$
12. $$\sin(3x)+\sin(7x)$$
13. $$\cos(7x)+\cos(-7x)$$

14.

$$\sin(3x) - \sin(-3x)$$

15.

$$\cos(3x) + \cos(9x)$$

16.

$$\sin h - \sin(3h)$$

Reiknið margfeldið með summu eða mismun tveggja falla í eftirfarandi verkefnum.

17.

$$\cos(45^\circ)\cos(15^\circ)$$

18.

$$\cos(45^\circ)\sin(15^\circ)$$

19.

$$\sin(-345^\circ)\sin(-15^\circ)$$

20.

$$\sin(195^\circ)\cos(15^\circ)$$

21.

$$\sin(-45^\circ)\sin(-15^\circ)$$

Reiknið margfeldið með summu eða mismun tveggja falla í eftirfarandi verkefnum. Setjið svarið fram með sínus og kósínus.

22.

$$\cos(23^\circ)\sin(17^\circ)$$

23.

$$2\sin(100^\circ)\sin(20^\circ)$$

24.

$$2\sin(-100^\circ)\sin(-20^\circ)$$

25.

$$\sin(213^\circ)\cos(8^\circ)$$

26.

$$2\cos(56^\circ)\cos(47^\circ)$$

Umritið summuna sem margfeldi tveggja falla í eftirfarandi verkefnum. Setjið svarið fram með sínus og kósínus.

27.

$$\sin\left(76^\circ\right)+\sin\left(14^\circ\right)$$

28.

$$\cos\left(58^\circ\right)-\cos\left(12^\circ\right)$$

29.

$$\sin\left(101^\circ\right)-\sin\left(32^\circ\right)$$

30.

$$\cos\left(100^\circ\right)+\cos\left(200^\circ\right)$$

31.

$$\sin\left(-1^\circ\right)+\sin\left(-2^\circ\right)$$

Sannið samsemdina í eftirfarandi verkefnum.

32.

$$\frac{\cos\left(a+b\right)}{\cos\left(a-b\right)}=\frac{1-\tan a\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

33.

$$4\sin\left(3x\right)\cos\left(4x\right)=2\sin\left(7x\right)-2\sin x$$

34.

$$\frac{6\cos\left(8x\right)\sin\left(2x\right)}{\sin\left(-6x\right)}=-3\sin\left(10x\right)csc\left(6x\right)+3$$

35.

$$\sin x+\sin\left(3x\right)=4\sin x\cos^2 x$$

36.

$$2\left(\cos^3 x-\cos x\sin^2 x\right)=\cos\left(3x\right)+\cos x$$

37.

$$2\tan x\cos\left(3x\right)=sec\,x\left(\sin\left(4x\right)-\sin\left(2x\right)\right)$$

38.

$$\cos\left(a+b\right)+\cos\left(a-b\right)=2\cos a\cos b$$

Töluleg verkefni

Umritið summuna sem margfeldi tveggja falla eða margfeldið sem summu tveggja falla í eftirfarandi verkefnum. Setjið svarið fram með sínus og kósínus. Reiknið síðan lokasvarið tölulega og námundið að fjórum aukastöfum.

39.

$$\cos\left(58^\circ\right)+\cos\left(12^\circ\right)$$

40.

$$\sin\left(2^\circ\right)-\sin\left(3^\circ\right)$$

41.

$$\cos\left(44^\circ\right)-\cos\left(22^\circ\right)$$

42.

$$\cos\left(176^\circ\right)\sin\left(9^\circ\right)$$

43.

$$\sin\left(-14^\circ\right)\sin\left(85^\circ\right)$$

Tækniverkefni

Ákvarðið með algebru í eftirfarandi verkefnum hvort hver gefin jafna sé sönn samsemd. Ef hún er ekki samsemd skuluð þið skipta hægri hliðinni út fyrir stæðu sem er jafngild vinstri hliðinni. Staðfestið niðurstöðurnar með því að teikna gröf beggja stæðna í reiknivél.

44.

$$2\sin\left(2x\right)\sin\left(3x\right)=\cos x-\cos\left(5x\right)$$

45.

$$\frac{\cos\left(10\theta\right)+\cos\left(6\theta\right)}{\cos\left(6\theta\right)-\cos\left(10\theta\right)}=\cot\left(2\theta\right)\cot\left(8\theta\right)$$

46.

$$\frac{\sin\left(3x\right)-\sin\left(5x\right)}{\cos\left(3x\right)+\cos\left(5x\right)}=\tan x$$

47.

$$2\cos\left(2x\right)\cos x+\sin\left(2x\right)\sin x=2\sin x$$

48.

$$\frac{\sin\left(2x\right)+\sin\left(4x\right)}{\sin\left(2x\right)-\sin\left(4x\right)}=-\tan\left(3x\right)\cot x$$

Einfaldið stæðuna í einn lið í eftirfarandi verkefnum. Teiknið síðan gröf upphaflega fallsins og einfölduðu stæðunnar til að staðfesta að þau séu eins.

49.

$$\frac{\sin(9t)-\sin(3t)}{\cos(9t)+\cos(3t)}$$

50.

$$2\sin(8x)\cos(6x)-\sin(2x)$$

51.

$$\frac{\sin(3x)-\sin x}{\sin x}$$

52.

$$\frac{\cos(5x)+\cos(3x)}{\sin(5x)+\sin(3x)}$$

53.

$$\sin x\cos(15x)-\cos x\sin(15x)$$

7

Viðbótarverkefni

Sannið eftirfarandi formúlur sem breyta summu í margfeldi.

54.

$$\sin x-\sin y=2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

55.

$$\cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Sannið samsemdina í eftirfarandi verkefnum.

56.

$$\frac{\sin(6x)+\sin(4x)}{\sin(6x)-\sin(4x)}=\tan(5x)\cot x$$

57.

$$\frac{\cos(3x)+\cos x}{\cos(3x)-\cos x}=-\cot(2x)\cot x$$

58.

$$\frac{\cos(6y)+\cos(8y)}{\sin(6y)-\sin(4y)}=\cot y\cos(7y)sec(5y)$$

59.

$$\frac{\cos(2y)-\cos(4y)}{\sin(2y)+\sin(4y)}=\tan y$$

60.

$$\frac{\sin(10x)-\sin(2x)}{\cos(10x)+\cos(2x)}=\tan(4x)$$

61.

$$\cos x-\cos(3x)=4\sin^2 x\cos x$$

62.

$$(\cos(2x)-\cos(4x))^2+(\sin(4x)+\sin(2x))^2=4\sin^2(3x)$$

63.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$$

7.5 Lausnir hornafallajafna

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Leysa línulegar hornafallajöfnur með sínus og kósínus.
- Leysa jöfnur sem innihalda eitt hornafall.
- Leysa hornafallajöfnur með reiknivél.
- Leysa hornafallajöfnur sem eru annars stigs að formi.
- Leysa hornafallajöfnur með grundvallarsamsemdum.
- Leysa hornafallajöfnur með margfeldi horna.
- Leysa verkefni um rétthyrnda þríhyrninga.



Mynd 1 Egypsku pýramídarnir skammt frá nútímaborg. (Mynd: Oisin Mulvihill)

Þales frá Míletos (um 625–547 f.Kr.) er talinn upphafsmaður rúmfræðinnar. Sagan segir að hann hafi reiknað hæð Keopspýramídans mikla í Gísa í Egyptalandi með kenningu sinni um einslaga þríhyrninga, sem hann þróaði með því að mæla skugga stafs síns. Kenningin byggist á hlutföllum og nýtist á ýmsum sviðum, meðal annars í brotarúmfræði, verkfræði og byggingarlist. Háhorn og lághorn eru oft fundin með einslaga þríhyrningum.

Í fyrri hlutum þessa kafla skoðuðum við hornafallasamsemdir. Samsemdir gilda fyrir öll gildi á skilgreiningarmengi breytunnar. Í þessum hluta byrjum við að skoða hornafallajöfnur og notum þær á raunhæf viðfangsefni, svo sem að finna stærðir pýramídanna.

7

Lausnir línulegra hornafallajafna með sínus og kósínus

Hornafallajöfnur eru, eins og heitið gefur til kynna, jöfnur sem innihalda hornaföll. Líkt og við lausn margliðujafna eða ræðra jafna eru aðeins tiltekin gildi breytunnar lausnir, ef einhverjar lausnir eru til. Oft leysum við hornafallajöfnu á tilteknu bili. Jafnoft er þó beðið um allar mögulegar lausnir. Hornaföll eru lotubundin og því endurtaka lausnirnar sig í hverri lotu. Hornafallajöfnur geta með öðrum orðum haft óendanlega margar lausnir. Eins og í ræðum jöfnum þarf einnig að taka tillit til skilgreiningarmengis fallsins áður en lausn er talin gild. Lota bæði sínusfallsins og kósínusfallsins er 2π. Það merkir að y-gildin endurtaka sig á 2π eininga fresti. Ef finna á allar mögulegar lausnir þarf að bæta $2\pi k$, þar sem k er heiltala, við upphaflegu lausnina. Rifjið upp regluna um það hvernig allar mögulegar lausnir falls eru ritaðar þegar fallið hefur lotuna 2π:

$$\sin\theta = \sin\left(\theta \pm 2k\pi\right)$$

Sambærilegar reglur gilda um það hvernig allar mögulegar lausnir hinna hornafallanna eru ritaðar. Við lausn hornafallajafna eru notaðar sömu aðferðir og við lausn algebrujafna. Við lesum jöfnuna lárétt frá vinstri til hægri eins og setningu. Við leitum að þekktum mynstrum, þáttum, finnum samnefnara og setjum breytu í stað tiltekinna stæðna til að gera lausnina einfaldari. Í hornafallajöfnum getum við auk þess notað samsemdirnar sem við leiddum út í fyrri hlutum.

SÝNIDÆMI 1

Línuleg hornafallajafna með kósínusfalli leyst

Finnið allar mögulegar nákvæmar lausnir jöfnunnar $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

Lausn

Af einingarhringnum vitum við að

$$\begin{aligned}\cos\ \theta &= \tfrac{1}{2}\\ \theta &= \tfrac{\pi}{3}, \tfrac{5\pi}{3}\end{aligned}$$

Þetta eru lausnirnar á bilinu $[0,2\pi]$. Allar mögulegar lausnir eru

$$\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi \quad \text{og} \quad \frac{5\pi}{3}\pm 2k\pi$$

þar sem k er heiltala.

SÝNIDÆMI 2

Línuleg jafna með sínusfalli leyst

Finnið allar mögulegar nákvæmar lausnir jöfnunnar $\sin t=\frac{1}{2}$.

Lausn

Að leysa fyrir öll möguleg gildi t merkir að lausnirnar ná út fyrir lotuna 2π. Af mynd 2 sést að lausnirnar eru $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$. Verkefnið biður þó um öll möguleg gildi sem leysa jöfnuna. Svarið er því

$$\frac{\pi}{6}\pm 2\pi k \quad \text{og} \quad \frac{5\pi}{6}\pm 2\pi k$$

þar sem k er heiltala.

AÐFERÐ

Leysið gefna hornafallajöfnu með algebru.

1. Leitið að mynstri sem bendir til algebrureglu, til dæmis mismunar ferninga, eða að mynstri sem leyfir þáttun.
2. Setjið eina breytu í stað hornafallastæðunnar, til dæmis x eða u.
3. Leysið jöfnuna á sama hátt og algebrujöfnu.
4. Setjið hornafallastæðuna aftur í stað breytunnar í stæðunum sem fást.
5. Leysið fyrir hornið.

SÝNIDÆMI 3

Hornafallajafna á línulegu formi leyst

Leysið jöfnuna nákvæmlega: $2\cos\theta - 3 = -5, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Lausn

Notið algebruaðferðir til að leysa jöfnuna.

$$\begin{aligned} 2\ \cos\ \theta - 3 &= -5 \\ 2\ \cos\ \theta &= -2 \\ \cos\ \theta &= -1 \\ \theta &= \pi \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Leysið eftirfarandi línulegu jöfnu nákvæmlega á bilinu $[0, 2\pi)$: $2\sin x + 1 = 0$.

Lausnir jafna sem innihalda eitt hornafall

Þegar jafna inniheldur aðeins eitt hornafallanna sex er hún leyst með algebruaðferðum og einingarhringnum (sjá mynd 2). Hafa þarf nokkur atriði í huga þegar jafnan inniheldur annað hornafall en sínus eða kósínus. Verkefni sem innihalda umhverfur grunnhornafallanna þarf að skoða frá sjónarhóli algebru. Við ritum þá umhverfufallið og leysum fyrir hornin með fallinu. Jafna með tangensfalli er einnig nokkuð frábrugðin jöfnu með sínus- eða kósínusfalli. Í fyrsta lagi er lota tangens, eins og við vitum, π, en ekki 2π. Skilgreiningarmengi tangens er auk þess allar rauntölur nema oddatölumargfeldi af $\frac{\pi}{2}$, en verkefnið getur auðvitað sett eigin skorður á skilgreiningarmengið.

SÝNIDÆMI 4

Verkefni með einu hornafalli leyst

Leysið verkefnið nákvæmlega: $2\sin^2\theta - 1 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Lausn

Ekki er auðvelt að þátta stæðuna og því leysum við jöfnuna með ferningsrótarreglunni. Fyrst notum við algebru til að einangra $\sin\theta$. Síðan finnum við hornin.

$$
\begin{aligned}
2\ \sin^2\theta - 1 &= 0 \\
2\ \sin^2\theta &= 1 \\
\sin^2\theta &= \tfrac{1}{2} \\
\sqrt{\sin^2\theta} &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \\
\sin\ \theta &= \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
\theta &= \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}, \tfrac{7\pi}{4}
\end{aligned}
$$

SÝNIDÆMI 5

Hornafallajafna með kósekans leyst

Leysið eftirfarandi jöfnu nákvæmlega: $csc\,\theta = -2, 0 \le \theta < 4\pi$.

Lausn

Við viljum finna öll gildi θ sem uppfylla $csc\,\theta = -2$ á bilinu $0 \le \theta < 4\pi$.

$$
\begin{aligned}
\csc\ \theta &= -2 \\
\tfrac{1}{\sin\ \theta} &= -2 \\
\sin\ \theta &= -\tfrac{1}{2} \\
\theta &= \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}, \tfrac{19\pi}{6}, \tfrac{23\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Greining

Þar sem $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, eru allar fjórar lausnirnar í þriðja og fjórða fjórðungi.

SÝNIDÆMI 6

Jafna með tangens leyst

Leysið jöfnuna nákvæmlega: $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 1, 0 \le \theta < 2\pi$.

Lausn

Rifjið upp að lota tangensfallsins er π. Á bilinu $[0, \pi)$, við hornið $\frac{\pi}{4}$, hefur tangens gildið 1.

Hornið sem við leitum að er hins vegar $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. Ef $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, þá er

$$
\begin{aligned}
\theta - \tfrac{\pi}{2} &= \tfrac{\pi}{4} \\
\theta &= \tfrac{3\pi}{4} \pm k\pi
\end{aligned}
$$

Á bilinu $[0, 2\pi)$, fáum við tvær lausnir:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ og } \frac{3\pi}{4}+\pi=\frac{7\pi}{4}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Finnið allar lausnir jöfnunnar $\tan x=\sqrt{3}$.

SÝNIDÆMI 7

Allar lausnir jöfnu með tangens fundnar

Finnið allar nákvæmar lausnir jöfnunnar $2(\tan x+3)=5+\tan x, 0\le x<2\pi$.

Lausn

Við getum leyst þessa jöfnu eingöngu með algebru. Einangrið stæðuna $\tan x$ vinstra megin við jafnaðarmerkið.

$$\begin{aligned} 2(\tan x)+2(3) &= 5+\tan x \\ 2\tan\ x+6 &= 5+\tan\ x \\ 2\tan x-\tan x &= 5-6 \\ \tan x &= -1 \end{aligned}$$

7

Tvö horn á einingarhringnum hafa tangensgildið $-1: \theta=\frac{3\pi}{4}$ og $\theta=\frac{7\pi}{4}$.

Hornafallajöfnur leystar með reiknivél

Ekki er hægt að leysa allar jöfnur nákvæmlega með einingarhringnum einum. Þegar leysa þarf jöfnu með öðru horni en sérhorni þurfum við að nota reiknivél. Gangið úr skugga um að hún sé stillt á rétta einingu, gráður eða radíana, eftir því hvað verkefnið biður um.

SÝNIDÆMI 8

Hornafallajafna með sínus leyst með reiknivél

Notið reiknivél til að leysa jöfnuna $\sin\ \theta=0{,}8$, þar sem θ er í radíönum.

Lausn

Gangið úr skugga um að reiknivélin sé stillt á radíana. Til að finna θ, notum við andhverfa sínusfallið. Á flestum reiknivélum þarf að ýta á hnappinn 2ND og síðan á SIN til að kalla fram fallið $\sin^{-1}$. Á skjánum birtist $\sin^{-1}($. Reiknivélin bíður þá eftir inntaki innan svigans. Í þessu verkefni sláum við inn $\sin^{-1}(0{,}8)$, og ýtum á ENTER. Að fjórum aukastöfum fæst því

$$\sin^{-1}(0{,}8)\approx 0{,}9273$$

Lausnin er

$$0{,}9273\pm 2\ \pi\ k$$

Stærð hornsins í gráðum er

$$\theta \approx 53{,}1^\circ$$
$$\theta \approx 180^\circ - 53{,}1^\circ$$
$$\approx 126{,}9^\circ$$

Greining

Takið eftir að reiknivél skilar aðeins horni í fyrsta eða fjórða fjórðungi fyrir sínusfallið, því það er myndmengi andhverfa sínusfallsins. Hitt hornið fæst með $\pi - \theta$.

SÝNIDÆMI 9

Hornafallajafna með sekans leyst með reiknivél

Notið reiknivél til að leysa jöfnuna $\sec\theta = -4$, og gefið svarið í radíönum.

Lausn

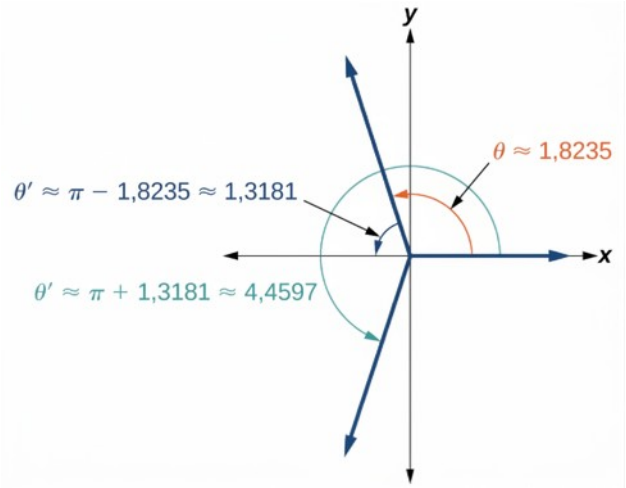
Við getum byrjað á algebru.

$$\sec\ \theta = -4$$
$$\frac{1}{\cos\ \theta} = -4$$
$$\cos\ \theta = -\frac{1}{4}$$

Gangið úr skugga um að MODE-stilling reiknivélarinnar sé á radíönum. Notið nú andhverfa kósínusfallið.

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 1{,}8235$$
$$\theta \approx 1{,}8235 + 2\ \pi\ k$$

Þar sem $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ og $\pi \approx 3{,}14$, er 1,8235 milli þessara talna og því er $\theta \approx 1\ ,8235$ í öðrum fjórðungi. Kósínus er einnig neikvæður í þriðja fjórðungi. Takið eftir að reiknivél skilar aðeins horni í fyrsta eða öðrum fjórðungi fyrir kósínusfallið, því það er myndmengi andhverfa kósínusfallsins. Sjá mynd 2.



Mynd 2

Við þurfum einnig að finna stærð hornsins í þriðja fjórðungi. Þar er viðmiðunarhornið $\theta' \approx \pi - 1{,}8235 \approx 1{,}3181$. Hin lausnin í þriðja fjórðungi er $\pi + 1{,}3181 \approx 4{,}4597$.

Lausnirnar eru $1{,}8235 \pm 2\pi k$ og $4{,}4597 \pm 2\pi k$.

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

7

Leysið $\cos\theta = -0{,}2$.

Lausnir hornafallajafna á annars stigs formi

Lausn annars stigs jöfnu getur verið flóknari, en aftur getum við notað algebru eins og fyrir hverja aðra annars stigs jöfnu. Skoðið mynstur jöfnunnar. Er fleiri en eitt hornafall í henni eða aðeins eitt? Hvaða hornafall er í öðru veldi? Ef aðeins eitt fall kemur fyrir og einn liðurinn er í öðru veldi skuluð þið hugsa um staðlað form annars stigs jöfnu. Setjið breytu í stað hornafallsins, til dæmis x eða u. Ef innsetningin gefur jöfnunni form annars stigs jöfnu getum við notað sömu aðferðir og við lausn annars stigs jafna til að leysa hornafallajöfnuna.

SÝNIDÆMI 10

Hornafallajafna á annars stigs formi leyst

Leysið jöfnuna nákvæmlega: $\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0, 0 \le \theta < 2\pi$.

Lausn

Við byrjum á innsetningu og skiptum $\cos\theta$ út fyrir x. Innsetning er ekki nauðsynleg en getur gert form verkefnisins skýrara. Látum $\cos\theta = x$. Þá höfum við

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

Ekki er hægt að þátta jöfnuna og því notum við lausnarformúlu annars stigs jöfnu $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(1)(-1)}}{2} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Skiptið x aftur út fyrir $\cos\theta$, og leysið síðan jöfnuna. Þá fæst

$$\begin{aligned} \cos\ \theta &= \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right) \end{aligned}$$

Takið eftir að aðeins formerkið + er notað. Ástæðan er sú að reiknivélin gefur villu þegar við leysum $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)$ því skilgreiningarmengi andhverfa kósínusfallsins er $[-1,1]$.

Önnur lausn er þó til:

$$\begin{aligned} &\cos^{-1}\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right) \\ &\approx 1{,}26 \end{aligned}$$

Lokaarmur þessa horns liggur í fyrsta fjórðungi. Þar sem kósínus er einnig jákvæður í fjórða fjórðungi er hin lausnin

$$\begin{aligned} &2\ \pi-\cos^{-1}\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right) \\ &\approx 5{,}02 \end{aligned}$$

7

SÝNIDÆMI 11

Hornafallajafna á annars stigs formi leyst með þáttun

Leysið jöfnuna nákvæmlega: $2\sin^2\theta-5\sin\theta+3=0, 0\le\theta\le 2\pi$.

Lausn

Með hópun má þátta þessa annars stigs stæðu. Annaðhvort gerum við raunverulega innsetningu, $\sin\theta=u$, eða höfum hana í huga þegar við þáttum:

$$\begin{aligned} 2\ \sin^2\theta-5\ \ \sin\ \theta+3&=0 \\ (2\ \ \sin\ \theta-3)(\sin\ \theta-1)&=0 \end{aligned}$$

Setjið nú hvorn þátt jafnan núlli.

$$\begin{aligned} 2\ \sin\ \theta - 3 &= 0 \\ 2\ \sin\ \theta &= 3 \\ \sin\ \theta &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\ \theta - 1 &= 0 \\ \sin\ \theta &= 1 \end{aligned}$$

Leysið næst fyrir $\theta : \sin\theta \neq \frac{3}{2}$, því myndmengi sínusfallsins er $[-1, 1]$. Hins vegar er $\sin\theta = 1$, sem gefur lausnina $\frac{\pi}{2}$.

Greining

Prófið allar lausnir á gefna skilgreiningarmenginu, því sumir þættir gefa enga lausn.

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Leysið $\sin^2\theta = 2\cos\theta + 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. [Vísbending: Gerið innsetningu til að rita jöfnuna aðeins með kósínus.]

SÝNIDÆMI 12

Hornafallajafna leyst með algebru

Leysið nákvæmlega:

$$2\sin^2\theta + \sin\theta = 0; 0 \leq \theta < 2\pi$$

Lausn

Verkefnið ætti að virðast kunnuglegt því jafnan líkist annars stigs jöfnu. Látum $\sin\theta = x$. Jafnan verður $2x^2 + x = 0$. Við byrjum á að þátta:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x &= 0 \\ x(2x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Setjið hvorn þátt jafnan núlli.

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ (2x + 1) &= 0 \\ x &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Setjið síðan upprunalegu stæðuna $\sin\theta$ aftur inn í jöfnuna í stað x. Þá fæst

$$\begin{aligned}\sin\ \theta &= 0\\ \theta &= 0, \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\ \theta &= -\tfrac{1}{2}\\ \theta &= \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

Lausnirnar á skilgreiningarmenginu $0 \leq \theta < 2\pi$ eru $0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Ef við viljum ekki gera innsetningu getum við leyst jöfnuna á sama hátt: við þáttum og setjum hvorn þátt jafnan núlli.

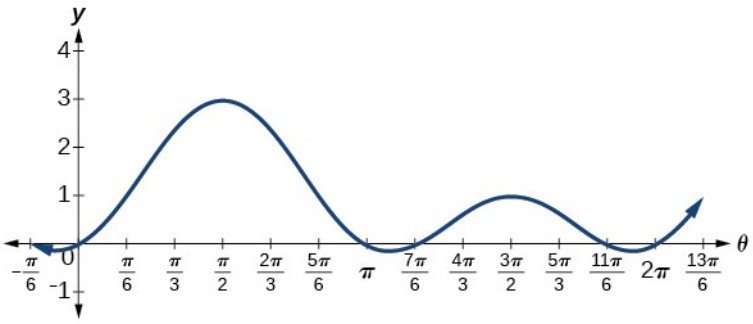
$$\begin{aligned}2\ \sin^2\theta + \sin\ \theta &= 0\\ \sin\ \theta(2\sin\ \theta + 1) &= 0\\ \sin\ \theta &= 0\\ \theta &= 0, \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\ \sin\ \theta + 1 &= 0\\ 2\sin\ \theta &= -1\\ \sin\ \theta &= -\tfrac{1}{2}\\ \theta &= \tfrac{7\pi}{6}, \tfrac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

7

Greining

Lausnirnar sjást á grafinu á mynd 3. Á bilinu $0 \leq \theta < 2\pi$, sker grafið x-ásinn fjórum sinnum, við lausnirnar sem tilgreindar voru. Takið eftir að hornafallajöfnur á annars stigs formi geta gefið allt að fjórar lausnir í stað þeirra tveggja sem búast má við fyrir annars stigs jöfnur. Í þessu dæmi gefur hvert jákvætt sínusgildi tvö horn með því gildi.



Mynd 3

Við getum einnig staðfest lausnirnar á einingarhringnum á mynd 2.

SÝNIDÆMI 13

Hornafallajafna á annars stigs formi leyst

Leysið jöfnuna á annars stigs formi nákvæmlega: $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Lausn

Við getum þáttað með hópun. Lausnargildi θ má finna á einingarhringnum:

$$\begin{aligned}(2\ \sin\ \theta-1)(\sin\ \theta-1)&=0\\ 2\ \sin\ \theta-1&=0\\ \sin\ \theta&=\tfrac{1}{2}\\ \theta&=\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\ \theta&=1\\ \theta&=\tfrac{\pi}{2}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Leysið annars stigs jöfnuna $2\cos^2\theta+\cos\theta=0$.

Hornafallajöfnur leystar með grundvallarsamsemdum

Þótt leysa megi margar hornafallajöfnur með algebru getum við einnig notað grundvallarsamsemdirnar því þær gera lausnina einfaldari. Munið að aðferðir við lausn jafna eru ekki þær sömu og við sannprófun samsemda. Hér notum við grunnreglur algebru en umritum ekki aðra hlið samsemdarinnar þar til hún verður eins og hin. Í næsta dæmi notum við tvær samsemdir til að einfalda jöfnuna.

7

SÝNIDÆMI 14

Samsemdir notaðar til að leysa jöfnu

Notið samsemdir til að leysa hornafallajöfnuna nákvæmlega á bilinu $0\le x<2\pi$.

$$\cos x\cos(2x)+\sin x\sin(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lausn

Takið eftir að vinstra megin í jöfnunni er mismunarformúla kósínuss.

$$\cos\ \ x\ \ \cos\ (2\ x)+\sin\ \ x\ \ \sin\ (2\ x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos\ (x-2\ x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Mismunarformúla kósínuss

$\cos\ (-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Notið samsemdina fyrir neikvætt horn.

$$\cos\ \ x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Af einingarhringnum á mynd 2 sjáum við að $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ þegar $x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

SÝNIDÆMI 15

Jafna leyst með tvöföldunarformúlu

Leysið jöfnuna nákvæmlega með tvöföldunarformúlu: $\cos(2\theta) = \cos\theta$.

Lausn

Við getum valið milli þriggja stæðna til að setja í stað kósínuss af tvöföldu horni. Einfaldara er að leysa fyrir eitt hornafall í einu og því veljum við tvöföldunarsamsemd sem inniheldur aðeins kósínus:

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos\ \theta \\ 2\cos^2\theta - 1 &= \cos\ \theta \\ 2\ \cos^2\theta - \cos\ \theta - 1 &= 0 \\ (2\ \cos\ \theta + 1)(\cos\ \theta - 1) &= 0 \\ 2\cos\ \theta + 1 &= 0 \\ \cos\ \theta &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\ \theta - 1 &= 0 \\ \cos\ \theta &= 1 \end{aligned}$$

Ef $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, þá er $\theta = \frac{2\pi}{3} \pm 2\pi k$ og $\theta = \frac{4\pi}{3} \pm 2\pi k$; ef $\cos\theta = 1$, þá er $\theta = 0 \pm 2\pi k$.

SÝNIDÆMI 16

Jafna leyst með samsemd

Leysið jöfnuna nákvæmlega með samsemd: $3\cos\theta + 3 = 2\sin^2\theta, 0 \le \theta < 2\pi$.

Lausn

Ef við umritum hægri hliðina getum við ritað jöfnuna með kósínus:

$$\begin{aligned}
3\cos\theta+3 &= 2\sin^2\theta \\
3\cos\theta+3 &= 2(1-\cos^2\theta) \\
3\cos\theta+3 &= 2-2\cos^2\theta \\
2\cos^2\theta+3\cos\theta+1 &= 0 \\
(2\cos\theta+1)(\cos\theta+1) &= 0 \\
2\cos\theta+1 &= 0 \\
\cos\theta &= -\tfrac{1}{2} \\
\theta &= \tfrac{2\pi}{3},\tfrac{4\pi}{3} \\
\cos\theta+1 &= 0 \\
\cos\theta &= -1 \\
\theta &= \pi
\end{aligned}$$

Lausnirnar eru $\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\pi$.

Hornafallajöfnur með margfeldi horna leystar

Stundum er ekki hægt að leysa hornafallajöfnu með samsemdum þegar hún inniheldur margfeldi horns, svo sem $\sin(2x)$ eða $\cos(3x)$. Þegar slíkar jöfnur koma fyrir skuluð þið rifja upp að $y=\sin(2x)$ er lárétt samþjöppun með stuðlinum 2 á fallinu $y=\sin x$. Á bili með lengdina 2π, getum við teiknað tvær lotur af $y=\sin(2x)$, í stað einnar lotu af $y=\sin x$. Þessi samþjöppun grafsins bendir til þess að $\sin(2x)=0$ geti haft tvöfalt fleiri skurðpunkta við x-ásinn, eða lausnir, en $\sin x=0$. Þessar upplýsingar hjálpa okkur að leysa jöfnuna.

7

SÝNIDÆMI 17

Hornafallajafna með margfeldi horns leyst

Leysið nákvæmlega: $\cos(2x)=\frac{1}{2}$ á $[0,2\pi)$.

Lausn

Við sjáum að þetta er hefðbundin jafna með margfeldi horns. Ef $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$, vitum við að α er í fyrsta og fjórða fjórðungi. Þótt $\theta=\cos^{-1}\frac{1}{2}$ gefi aðeins lausnir í fyrsta og öðrum fjórðungi vitum við að lausnir jöfnunnar $\cos\theta=\frac{1}{2}$ verða í fyrsta og fjórða fjórðungi.

Mögulegu hornin eru því $\theta=\frac{\pi}{3}$ og $\theta=\frac{5\pi}{3}$. Þá er $2x=\frac{\pi}{3}$ eða $2x=\frac{5\pi}{3}$, sem merkir að $x=\frac{\pi}{6}$ eða $x=\frac{5\pi}{6}$. Er þetta rökrétt? Já, því $\cos\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

Eru aðrar lausnir mögulegar? Snúum aftur að fyrsta skrefinu.

Í fyrsta fjórðungi er $2x=\frac{\pi}{3}$, og því $x=\frac{\pi}{6}$ eins og áður kom fram. Förum annan hring um einingarhringinn:

$$\begin{aligned} 2x &= \tfrac{\pi}{3} + 2\pi \\ &= \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{6\pi}{3} \\ &= \tfrac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

og því $x=\frac{7\pi}{6}$.

Einn hringur til gefur

$$\begin{aligned} 2x &= \tfrac{\pi}{3} + 4\pi \\ &= \tfrac{\pi}{3} + \tfrac{12\pi}{3} \\ &= \tfrac{13\pi}{3} \end{aligned}$$

$x=\frac{13\pi}{6}>2\pi$, sem merkir að þetta gildi á x er stærra en 2π, svo að það er ekki lausn á $[0,2\pi)$.

Í fjórða fjórðungi er $2x=\frac{5\pi}{3}$, og því $x=\frac{5\pi}{6}$ eins og áður kom fram. Förum annan hring um einingarhringinn:

$$\begin{aligned} 2x &= \tfrac{5\pi}{3} + 2\pi \\ &= \tfrac{5\pi}{3} + \tfrac{6\pi}{3} \\ &= \tfrac{11\pi}{3} \end{aligned}$$

og því $x=\frac{11\pi}{6}$.

Einn hringur til gefur

$$\begin{aligned} 2x &= \tfrac{5\pi}{3} + 4\pi \\ &= \tfrac{5\pi}{3} + \tfrac{12\pi}{3} \\ &= \tfrac{17\pi}{3} \end{aligned}$$

$x=\frac{17\pi}{6}>2\pi$, sem merkir að þetta gildi á x er stærra en 2π, svo að það er ekki lausn á $[0,2\pi)$.

Lausnirnar eru $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$, og $\frac{11\pi}{6}$. Takið eftir að þegar við leysum verkefni á forminu $\sin(nx)=c$, þurfum við að fara n sinnum um einingarhringinn.

Lausnir verkefna um rétthyrnda þríhyrninga

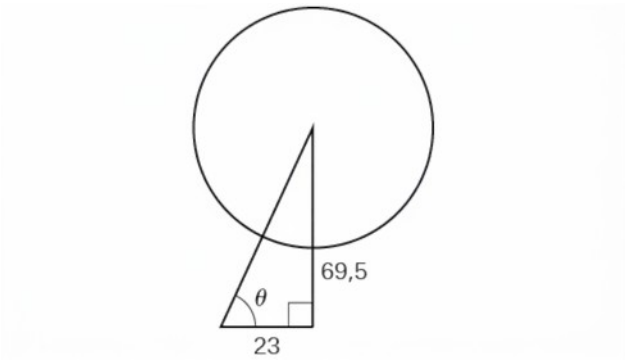
Nú getum við notað allar aðferðirnar sem við höfum lært til að leysa verkefni með eiginleikum rétthyrndra þríhyrninga og setningu Pýþagórasar. Við byrjum á setningu Pýþagórasar, $a^2+b^2=c^2$, og setjum upp jöfnu sem lýsir aðstæðunum.

SÝNIDÆMI 18

Jafna sett upp með setningu Pýþagórasar

Notið setningu Pýþagórasar og eiginleika rétthyrndra þríhyrninga til að setja upp jöfnu sem lýsir verkefninu.

Skipta þarf um einn strenginn sem festir miðju London Eye-parísarhjólsins við jörðina. Miðja hjólsins er 69,5 metrum yfir jörðu og seinni festingin á jörðinni er 23 metra frá undirstöðu hjólsins. Hve langur er strengurinn um það bil og hvert er háhornið frá jörðinni að miðju hjólsins? Sjá mynd 4.



Mynd 4

Lausn

Með gefnu upplýsingunum getum við teiknað rétthyrndan þríhyrning. Lengd strengsins má finna með setningu Pýþagórasar.

$$a^2+b^2=c^2$$
$$(23)^2+(69{,}5)^2\approx 5359$$
$$\sqrt{5359}\approx 73{,}2 \text{ m}$$

Háhornið er θ, og myndast milli seinni festingarinnar á jörðinni og strengsins sem liggur að miðju hjólsins. Við getum fundið stærð þess með tangensfallinu. Námundið að tveimur aukastöfum.

$$\tan\ \theta = \frac{69{,}5}{23}$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{69{,}5}{23}\right) \approx 1{,}2522$$
$$\approx 71{,}69^{\circ}$$

Háhornið er um það bil $71{,}7^{\circ}$, og strengurinn er 73,2 metrar á lengd.

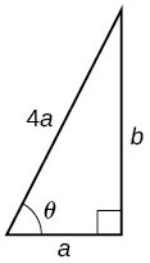
SÝNIDÆMI 19

Óhlutbundið verkefni sett upp með setningu Pýþagórasar

Öryggisreglur OSHA kveða á um að neðri endi stiga skuli vera 1 fet frá vegg fyrir hver 4 fet af lengd stigans. Finnið hornið sem stiginn myndar við jörðina, hver sem lengd hans er. Finnið einnig hæðina þar sem stiginn snertir vegginn.

Lausn

Fyrir stiga af hvaða lengd sem er þarf neðri endinn að vera frá veggnum sem nemur fjórðungi af lengd stigans. Ef neðri endi stigans er „a“ fet frá veggnum er lengd stigans með öðrum orðum 4 a fet. Sjá mynd 5.



Mynd 5

Hliðin aðlæg θ er a og langhliðin er $4a$. Því fæst

$$\cos\ \theta = \frac{a}{4\ a} = \frac{1}{4}$$
$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75{,}5^{\circ}$$

Stiginn myndar hornið $75{,}5^{\circ}$ við jörðina. Hæðina þar sem stiginn snertir vegginn má finna með setningu Pýþagórasar:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (4a)^2 \\ b^2 &= (4a)^2 - a^2 \\ b^2 &= 16a^2 - a^2 \\ b^2 &= 15a^2 \\ b &= \sqrt{15}a \end{aligned}$$

Stiginn snertir því vegginn í $\sqrt{15}\,a$ feta hæð yfir jörðu.

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfa ykkur í að leysa hornafallajöfnur.

- Lausnir hornafallajafna I
- Lausnir hornafallajafna II
- Lausnir hornafallajafna III
- Lausnir hornafallajafna IV
- Lausnir hornafallajafna V
- Lausnir hornafallajafna VI

7.5 Verkefni hlutans

7

Orðleg verkefni

1. Eru alltaf til lausnir á jöfnum með hornaföllum? Ef ekki, lýsið þá jöfnu sem hefur enga lausn. Útskýrið hvers vegna.
2. Þegar leysa á hornafallajöfnu sem inniheldur fleiri en eitt hornafall, eigum við þá alltaf að reyna að umrita hana með einu hornafalli? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?
3. Hvernig vitum við hvort línuleg hornafallajafna sem inniheldur aðeins sínus eða kósínus hafi lausnir?

Algebruverkefni

Finnið allar lausnir í eftirfarandi verkefnum nákvæmlega á bilinu $0 \le \theta < 2\pi$.

4. $$2\sin\theta = -\sqrt{2}$$
5. $$2\sin\theta = \sqrt{3}$$
6. $$2\cos\theta = 1$$
7. $$2\cos\theta = -\sqrt{2}$$

8.

$$\tan\theta = -1$$

9.

$$\tan x = 1$$

10.

$$\cot x + 1 = 0$$

11.

$$4\sin^2 x - 2 = 0$$

12.

$$csc^2 x - 4 = 0$$

Leysið eftirfarandi verkefni nákvæmlega á $[0, 2\pi)$.

13.

$$2\cos\theta = \sqrt{2}$$

14.

$$2\cos\theta = -1$$

15.

$$2\sin\theta = -1$$

16.

$$2\sin\theta = -\sqrt{3}$$

17.

$$2\sin(3\theta) = 1$$

18.

$$2\sin(2\theta) = \sqrt{3}$$

19.

$$2\cos(3\theta) = -\sqrt{2}$$

20.

$$\cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

21.

$$2\sin(\pi\theta)=1$$

22.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{5}\theta\right)=\sqrt{3}$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum allar nákvæmar lausnir á $[0,2\pi)$.

23.

$$sec(x)\sin(x)-2\sin(x)=0$$

24.

$$\tan(x)-2\sin(x)\tan(x)=0$$

25.

$$2\cos^2 t+\cos(t)=1$$

26.

$$2\tan^2(t)=3\,sec(t)$$

27.

$$2\sin(x)\cos(x)-\sin(x)+2\cos(x)-1=0$$

28.

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

29.

$$sec^2 x=1$$

30.

$$\tan^2(x)=-1+2\tan(-x)$$

31.

$$8\sin^2(x)+6\sin(x)+1=0$$

32.

$$\tan^5(x)=\tan(x)$$

Notið aðferðirnar úr þessum hluta til að leysa eftirfarandi verkefni nákvæmlega á bilinu $[0,2\pi)$.

33.

$$\sin\left(3\ x\right)\cos\left(6\ x\right)-\cos\left(3\ x\right)\sin\left(6\ x\right)=-0{,}9$$

34.

$$\sin\left(6\ x\right)\cos\left(11\ x\right)-\cos\left(6\ x\right)\sin\left(11\ x\right)=-0{,}1$$

35.

$$\cos(2x)\cos x+\sin(2x)\sin x=1$$

36.

$$6\sin(2t)+9\sin t=0$$

37.

$$9\cos(2\theta)=9\cos^2\theta-4$$

38.

$$\sin(2t)=\cos t$$

39.

$$\cos(2t)=\sin t$$

40.

$$\cos(6x)-\cos(3x)=0$$

Leysið eftirfarandi verkefni nákvæmlega á bilinu $[0,2\pi)$. Notið lausnarformúlu annars stigs jöfnu ef ekki er hægt að þátta jöfnurnar.

41.

$$\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x=0$$

42.

$$\sin^2 x+\sin x-2=0$$

43.

$$\sin^2 x-2\sin x-4=0$$

44.

$$5\cos^2 x+3\cos x-1=0$$

45.

$$3\cos^2 x-2\cos x-2=0$$

46.

$$5\sin^2 x+2\sin x-1=0$$

47.

$$\tan^2 x+5\tan x-1=0$$

48.

$$\cot^2 x=-\cot x$$

49.

$$-\tan^2 x-\tan x-2=0$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum nákvæmar lausnir á bilinu $[0,2\pi)$. Leitið að tækifærum til að nota hornafallasamsemdir.

50.

$$\sin^2 x-\cos^2 x-\sin x=0$$

51.

$$\sin^2 x+\cos^2 x=0$$

52.

$$\sin(2x)-\sin x=0$$

53.

$$\cos(2x)-\cos x=0$$

54.

$$\frac{2\tan x}{2-sec^2 x}-\sin^2 x=\cos^2 x$$

55.

$$1-\cos(2x)=1+\cos(2x)$$

56.

$$sec^2 x=7$$

57.

$$10\sin x\cos x=6\cos x$$

58.

$$-3\sin t=15\cos t\sin t$$

59.

$$4\cos^2 x - 4 = 15\cos x$$

60.

$$8\sin^2 x + 6\sin x + 1 = 0$$

61.

$$8\cos^2\theta = 3 - 2\cos\theta$$

62.

$$6\cos^2 x + 7\sin x - 8 = 0$$

63.

$$12\sin^2 t + \cos t - 6 = 0$$

64.

$$\tan x = 3\sin x$$

65.

$$\cos^3 t = \cos t$$

Myndræn verkefni

Ákvarðið allar lausnir hornafallajöfnunnar nákvæmlega með algebru í eftirfarandi verkefnum. Staðfestið síðan niðurstöðurnar með því að teikna graf jöfnunnar og finna núllstöðvarnar. Notið bilið $[0, 2\pi)$.

66.

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$$

67.

$$8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$$

68.

$$100\tan^2 x + 20\tan x - 3 = 0$$

69.

$$2\cos^2 x - \cos x + 15 = 0$$

70.

$$20\sin^2 x - 27\sin x + 7 = 0$$

71.

$$2\tan^2 x+7\tan x+6=0$$

72.

$$130\tan^2 x+69\tan x-130=0$$

Tækniverkefni

Notið reiknivél til að finna allar lausnir að fjórum aukastöfum í eftirfarandi verkefnum.

73.

$$\sin\ x=0{,}27$$

74.

$$\sin\ x=-0{,}55$$

75.

$$\tan\ x=-0{,}34$$

76.

$$\cos\ x=0{,}71$$

7

Leysið jöfnurnar með algebru í eftirfarandi verkefnum og notið síðan reiknivél til að finna gildin á bilinu $[0,2\pi)$. Námundið að fjórum aukastöfum.

77.

$$\tan^2 x+3\tan x-3=0$$

78.

$$6\tan^2 x+13\tan x=-6$$

79.

$$\tan^2 x-\sec x=1$$

80.

$$\sin^2 x-2\cos^2 x=0$$

81.

$$2\tan^2 x+9\tan x-6=0$$

82.

$$4\sin^2 x+\sin(2x)\sec x-3=0$$

Viðbótarverkefni

Finnið í eftirfarandi verkefnum allar lausnir jafnanna nákvæmlega á bilinu $[0,2\pi)$.

83.

$$\csc^2 x - 3\csc x - 4 = 0$$

84.

$$\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$$

85.

$$\sin^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) + \cos^2 x\left(1 - \sin^2 x\right) = 0$$

86.

$$3\sec^2 x + 2 + \sin^2 x - \tan^2 x + \cos^2 x = 0$$

87.

$$\sin^2 x - 1 + 2\cos\left(2x\right) - \cos^2 x = 1$$

88.

$$\tan^2 x - 1 - \sec^3 x \cos x = 0$$

89.

$$\frac{\sin\left(2x\right)}{\sec^2 x} = 0$$

90.

$$\frac{\sin\left(2x\right)}{2\csc^2 x} = 0$$

91.

$$2\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x - 5 = 0$$

92.

$$\frac{1}{\sec^2 x} + 2 + \sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$$

Raunhæf viðfangsefni

93. Flugvél hefur aðeins eldsneyti til að fljúga til borgar sem er 200 mílur norðaustur af henni. Flugmaðurinn veit að borgin er 25 mílum norðar en flugvélin. Hve margar gráður norður frá austri á flugvélin að fljúga?

94. Hleðslurampur er settur við vörubíl í 4 feta hæð og er 15 fet á lengd. Hvaða horn myndar rampurinn við jörðina?

95. Hleðslurampur er settur við vörubíl í 2 feta hæð og er 20 fet á lengd. Hvaða horn myndar rampurinn við jörðina?

96. Kona fylgist með eldflaug sem hefur verið skotið á loft og er nú í 11 mílna hæð. Hún stendur 4 mílur frá skotpallinum. Undir hvaða horni frá láréttu horfir hún upp?

97. Geimfari er í eldflaug sem hefur verið skotið á loft og er nú í 15 mílna hæð. Maður stendur 2 mílur frá skotpallinum. Undir hvaða horni horfir hún niður til hans frá láréttu? (Vísbending: Þetta nefnist lághorn.)

98. Kona stendur 8 metra frá 10 metra hárri byggingu. Undir hvaða horni horfir hún á topp byggingarinnar?

99. Maður stendur 10 metra frá 6 metra hárri byggingu. Manneskja á þaki byggingarinnar horfir niður til hans. Undir hvaða horni horfir manneskjan á hann?

100. 20 feta há bygging varpar 55 feta löngum skugga. Hvert er háhorn sólarinnar?

101. 90 feta há bygging varpar 2 feta löngum skugga. Hvert er háhorn sólarinnar?

102. Kastljós á jörðinni, 3 metra frá 2 metra háum manni, varpar 6 metra háum skugga á vegg sem er 6 metra frá manninum. Undir hvaða horni lýsir kastljósið?

103. Kastljós á jörðinni, 3 fet frá 5 feta hárri konu, varpar 15 feta háum skugga á vegg sem er 6 fet frá konunni. Undir hvaða horni lýsir kastljósið?

Leysið orðdæmin með algebru í eftirfarandi verkefnum. Notið síðan reiknivél til að staðfesta niðurstöðuna. Námundið svarið að næsta tíunda hluta úr gráðu.

104. Maður stendur á höndum með fæturna upp við vegg og hendurnar 1,5 fet frá veggnum. Hann er 6 fet á hæð. Hvaða horn mynda fætur hans við vegginn?

105. Kona stendur á höndum með fæturna upp við vegg og hendurnar 3 fet frá veggnum. Hún er 5 fet á hæð. Hvaða horn mynda fætur hennar við vegginn?

106. 23 feta stigi stendur upp við hús. Ef neðri endi stigans er 7 fet frá húsinu er núningurinn ekki nægur og stiginn rennur til. Hvaða horn ætti stiginn að mynda við jörðina til að renna ekki?

7.6 Líkangerð með hornaföllum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Ákvarða útslag og lotu sínuslaga falla.
- Setja fram jöfnur sínuslaga falla og teikna gröf þeirra.
- Lýsa lotubundinni hegðun með líkönum.
- Lýsa sveifluhreyfingu með föllum.



Mynd 1 Vísar klukku hreyfast lotubundið: þeir koma aftur í sömu stöðu á tólf klukkustunda fresti. (Mynd: „zoutedrop“/Flickr)

Hugsum okkur að við skráum meðalhita hvers dags í New York-borg yfir heilt ár. Við myndum búast við lægsta hitanum í janúar og febrúar en hæsta hitanum í júlí og ágúst. Þessi kunnuglega sveifla endurtekur sig ár eftir ár. Ef grafið væri framlengt yfir mörg ár myndi það líkjast lotubundnu falli.

Mörg önnur náttúrufyrirbæri eru einnig lotubundin. Tunglkvartaskipti hafa til dæmis um það bil 28 daga lotu og fuglar vita að þeir eiga að fljúga suður á svipuðum tíma ár hvert.

Hvernig getum við þá sett fram jöfnu sem lýsir lotubundinni hegðun? Fyrst þurfum við að safna gögnum og skrá þau. Síðan finnum við fall sem líkist mynstrinu sem við sjáum. Að lokum gerum við nauðsynlegar breytingar á fallinu til að fá áreiðanlegt líkan. Í þessum hluta skoðum við nánar tilteknar gerðir lotubundinnar hegðunar og setjum fram jöfnur sem hæfa gögnunum.

Útslag og lota sínuslaga falls ákvörðuð

Hreyfing sem endurtekur sig á föstu tímabili kallast lotubundin hreyfing og unnt er að lýsa henni með sínuslaga falli. Útslag sínuslaga falls er fjarlægðin frá miðlínunni að hæsta gildinu eða frá miðlínunni að lægsta gildinu. Miðlínan er meðalgildið. Sínuslaga föll sveiflast ofan og neðan við miðlínuna, eru lotubundin og endurtaka gildi sín í föstum lotum. Rifjið upp úr Gröf sínus- og kósínusfalla að lota sínusfallsins og kósínusfallsins er 2π. Með öðrum orðum gildir að fyrir sérhvert gildi á x,

$$\sin(x \pm 2\pi k) = \sin x \quad \text{og} \quad \cos(x \pm 2\pi k) = \cos x \quad \text{þar sem } k \text{ er heiltala}$$

STAÐALFORM JAFNA SÍNUSLAGA FALLA

Almenn form jöfnu sínuslaga falls eru

$$y = A\sin(Bt - C) + D \text{ eða } y = A\cos(Bt - C) + D$$

þar sem útslag $= |A|$, B tengist lotunni þannig að lota $= \frac{2\pi}{B}$, C er fasahliðrunin þannig að $\frac{C}{B}$ táknar láréttu hliðrunina og D táknar lóðréttu hliðrunina frá grunngrafinu.

Takið eftir að líkönin eru stundum rituð sem $y=a\sin(\omega t\pm C)+D$ eða $y=a\cos(\omega t\pm C)+D$, og lotan er þá $\frac{2\pi}{\omega}$.

Munurinn á gröfum sínus og kósínus er sá að sínusgrafið byrjar í meðalgildi fallsins en kósínusgrafið byrjar í hæsta eða lægsta gildi fallsins.

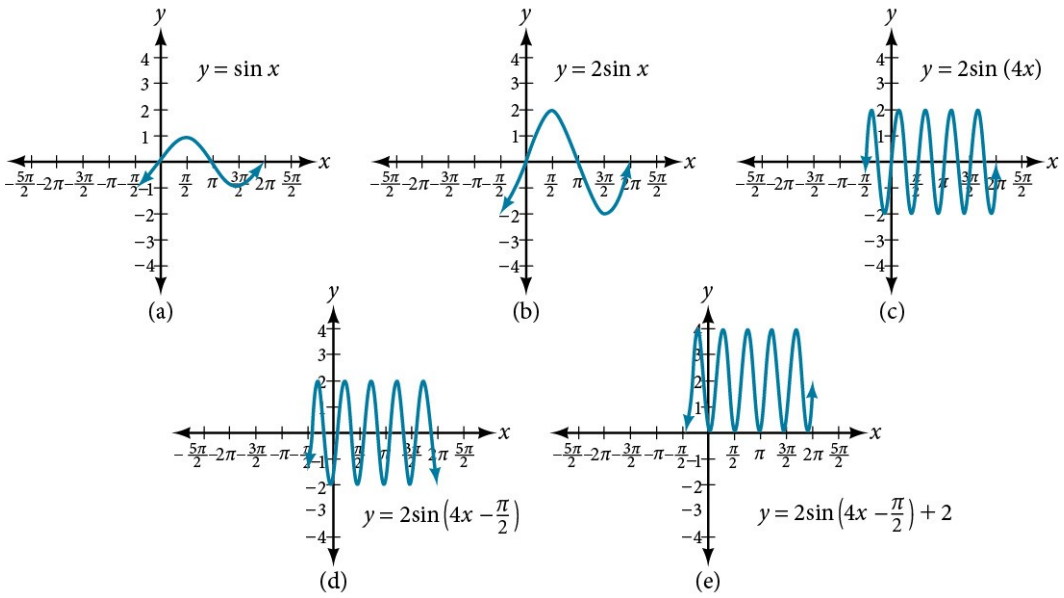
SÝNIDÆMI 1

Sýnt hvernig eiginleikar hornafalls geta ummyndað graf

Sýnið ummyndun grafsins af $y=\sin x$ í grafið af $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+2$.

Lausn

Skoðið grafaröðina á mynd 2 og hvernig hver breyting á jöfnunni breytir grafinu.



Mynd 2 (a) Grunngraf $y=\sin x$ (b) Þegar útslaginu er breytt úr 1 í 2 fæst graf $y=2\sin x$. (c) Lota sínusfallsins breytist með gildinu á B, þannig að $\text{lota}=\frac{2\pi}{B}$. Hér er $B=4$, sem gefur lotuna $\frac{\pi}{2}$. Grafið lýkur einni heilli lotu á $\frac{\pi}{2}$ einingum. (d) Grafið sýnir lárétta hliðrun jafna $\frac{C}{B}$, eða $\frac{\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{\pi}{8}$. (e) Að lokum er grafinu hliðrað lóðrétt um gildið á D. Í þessu tilviki er grafinu hliðrað upp um 2 einingar.

SÝNIDÆMI 2

Útslag og lota falls fundin

Finnið útslag og lotu fallanna hér fyrir neðan og teiknið eina lotu af hverju grafi.

1. ⓐⓐ $y=2\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$
2. ⓑⓑ $y=-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$
3. ⓒⓒ $y=\cos x+3$

Lausn

Við leysum þessi verkefni samkvæmt líkönunum.

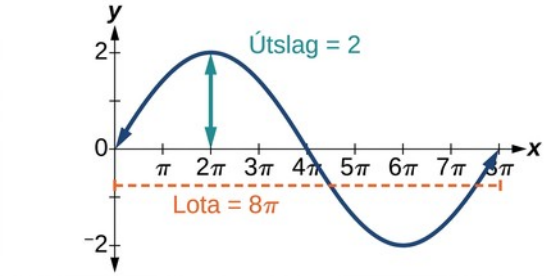
1. ⓐ $y=2\sin\left(\frac{1}{4}x\right)$ inniheldur sínus og því notum við formið

   $y=A\sin(Bt+C)+D$

   Við vitum að $|A|$ er útslagið og því er útslagið 2. Lotan er $\frac{2\pi}{B}$, svo lotan er

   $$\begin{aligned}\tfrac{2\pi}{B} &= \tfrac{2\pi}{\frac{1}{4}}\\ &= 8\pi\end{aligned}$$

   Sjá grafið á mynd 3.



Mynd 3

2. ⓑⓑ $y=-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ inniheldur sínus og því notum við formið

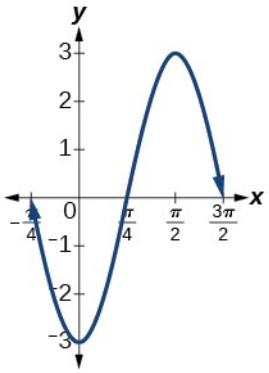
   $y=A\sin(Bt-C)+D$

   Útslagið er $|A|$, svo það er $|-3|=3$. Þar sem A er neikvætt speglast grafið um x-ásinn.

   Lotan er $\frac{2\pi}{B}$, svo hún er

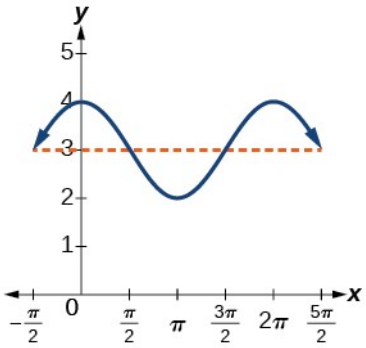
   $\frac{2\pi}{B}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

   Grafið er hliðrað til vinstri um $\frac{C}{B}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ einingar. Sjá mynd 4.



Mynd 4

3. ⓒ $y=\cos x+3$ inniheldur kósínus og því notum við formið
$y=A\cos\left(Bt\pm C\right)+D$
Útslagið er $\left|A\right|$, svo það er 1. Lotan er 2π. Sjá mynd 5. Þetta er staðlaða kósínusfallið hliðrað upp um þrjár einingar.



Mynd 5

7

REYNIÐ SJÁLF NR. 1

Hver eru útslag og lota fallsins $y=3\cos\left(3\pi x\right)$?

Jöfnur sínuslaga falla fundnar og gröf þeirra teiknuð

Ein aðferð við að teikna gröf sínuslaga falla er að finna fimm lykilpunkta. Punktarnir svara til jafnlangra bila sem hvert er $\frac{1}{4}$ af lotunni. Lykilpunktarnir sýna hvar hæstu og lægstu gildin eru. Ef grafinu er ekki hliðrað lóðrétt sýna þeir einnig skurðpunkta við x-ásinn. Hugsum okkur til dæmis að við viljum teikna graf fallsins $y=\cos\theta$. Við vitum að lotan er 2π, svo bilið milli lykilpunkta finnst þannig.

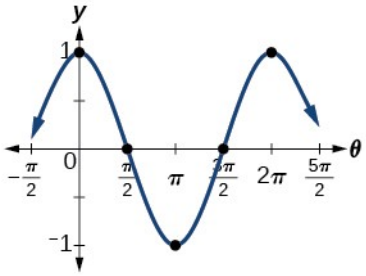
$$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Við byrjum með $\theta = 0$, reiknum fyrsta y-gildið, leggjum lengd bilsins $\frac{\pi}{2}$ við 0 og reiknum annað y-gildið. Síðan leggjum við $\frac{\pi}{2}$ ítrekað við þar til lykilpunktarnir fimm eru fundnir.

Síðasta gildið ætti að vera jafnt því fyrsta, því útreikningarnir ná yfir eina heila lotu. Með töflu á borð við töflu 1 sjást þessir lykilpunktar greinilega á grafinu á mynd 6.

Tafla 1

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos\theta$	1	0	-1	0	1



Mynd 6

7

SÝNIDÆMI 3

Gröf sínuslaga falla teiknuð með lykilpunktum

Teiknið graf fallsins $y = -4\cos(\pi x)$ með útslagi, lotu og lykilpunktum.

Lausn

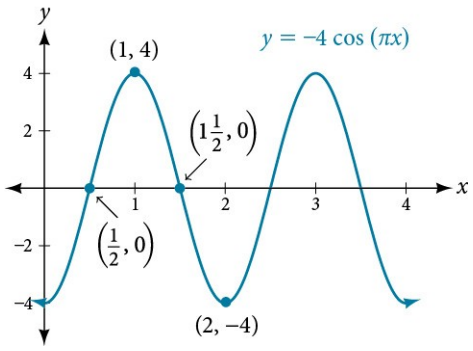
Útslagið er $|-4| = 4$. Lotan er $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. (Rifjið upp að stundum táknum við B með ω.))

Teikna má eina lotu grafsins á bilinu $[0, 2]$. Til að finna lykilpunktana deilum við lotunni með 4. Gerið töflu á borð við töflu 2, byrjið með $x = 0$ og leggið síðan $\frac{1}{2}$ ítrekað við x og reiknið y.

Sjá grafið á mynd 7.

Tafla 2

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = -4\cos(\pi x)$	-4	0	4	0	-4



Mynd 7

REYNIÐ SJÁLF NR. 2

Teiknið graf fallsins $y = 3\sin(3x)$ með útslagi, lotu og lykilpunktunum fimm.

Líkangerð lotubundinnar hegðunar

Nú notum við þessar hugmyndir í verkefnum um lotubundna hegðun.

7

SÝNIDÆMI 4

Jafna sett fram og graf sínuslaga falls skissað samkvæmt skilyrðum

Meðalhiti hvers mánaðar í smábæ í Oregon er gefinn í töflu 3. Finnið sínuslaga fall af gerðinni $y = A\sin(Bt - C) + D$ sem hæfir gögnunum (námundið að næsta tíunda hluta) og skissið grafið.

Tafla 3

Mánuður	**Hitastig,** $^{\circ}\mathrm{F}$
Janúar	42,5
Febrúar	44,5
Mars	48,5
Apríl	52,5
Maí	58
Júní	63
Júlí	68,5
Ágúst	69
September	64,5
Október	55,5
Nóvember	46,5
Desember	43,5

Lausn

Rifjið upp að við finnum útslagið með formúlunni

$$A=\frac{\text{stærsta gildi } - \text{minnsta gildi}}{2}$$

Útslagið er því

$$\begin{aligned}|A| &= \frac{69-42{,}5}{2} \\ &= 13{,}25\end{aligned}$$

Gögnin ná yfir 12 mánaða lotu, svo $\frac{2\pi}{B}=12$ sem gefur $B=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.

Lóðréttu hliðrunina finnum við með þessari jöfnu:

$$D=\frac{\text{hæsta gildi}+\text{lægsta gildi}}{2}$$

Lóðrétta hliðrunin er því

$$\begin{aligned}D &= \frac{69+42{,}5}{2} \\ &= 55{,}8\end{aligned}$$

Enn sem komið er höfum við jöfnuna $y=13{,}3 \sin\left(\frac{\pi}{6}x-C\right)+55{,}8$.

Til að finna láréttu hliðrunina setjum við x-gildið og y-gildið fyrir fyrsta mánuðinn inn í jöfnuna og leysum fyrir C.

$$42{,}5=13{,}3 \sin\left(\frac{\pi}{6}(1)-C\right)+55{,}8$$

$$-13{,}3=13{,}3 \sin\left(\frac{\pi}{6}-C\right)$$

$$-1=\sin\left(\frac{\pi}{6}-C\right) \qquad \sin\theta=-1 \rightarrow \theta=-\frac{\pi}{2}$$

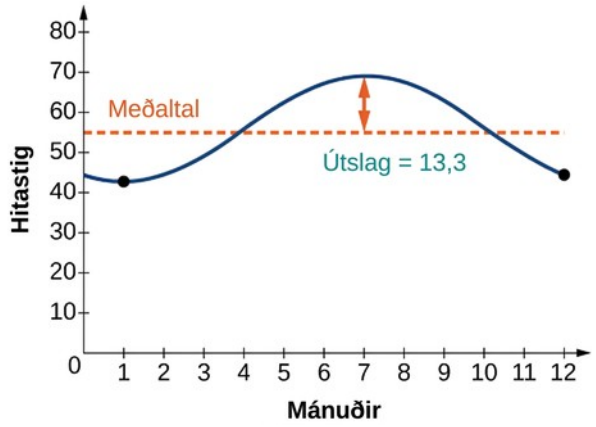
$$\frac{\pi}{6}-C=-\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=C$$

$$=\frac{2\pi}{3}$$

Við höfum jöfnuna $y=13{,}3 \sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{2\pi}{3}\right)+55{,}8$. Sjá grafið á mynd 8.

7



Mynd 8

SÝNIDÆMI 5

Lotubundinni hreyfingu lýst

Klukkustundarvísir stóru klukkunnar á vegg Union Station er 24 tommur á lengd. Á hádegi er oddur vísisins 30 tommur frá loftinu. Klukkan 3 e.h. er oddurinn 54 tommur frá loftinu og klukkan 6 e.h. er hann 78 tommur frá því. Klukkan 9 e.h. er hann aftur 54 tommur frá loftinu og á miðnætti snýr oddur vísisins aftur í upphafsstöðuna, 30 tommur frá loftinu. Látum y tákna fjarlægðina frá oddi klukkustundarvísisins að loftinu x klukkustundum eftir hádegi. Finnið jöfnuna sem lýsir hreyfingu klukkunnar og skissið grafið.

Lausn

Byrjið á að gera gildatöflu eins og í töflu 4.

Tafla 4

x	y	**Punktar sem á að teikna**
Hádegi	30 in	$(0,30)$
3 PM	54 in	$(3,54)$
6 PM	78 in	$(6,78)$
9 PM	54 in	$(9,54)$
Miðnætti	30 in	$(12,30)$

Til að setja fram jöfnu þurfum við fyrst að finna útslagið.

$$\begin{aligned} |A| &= \left|\tfrac{78-30}{2}\right| \\ &= 24 \end{aligned}$$

Hreyfing klukkunnar endurtekur sig á 12 klukkustunda fresti. Því er

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{2\pi}{12} \\ &= \tfrac{\pi}{6} \end{aligned}$$

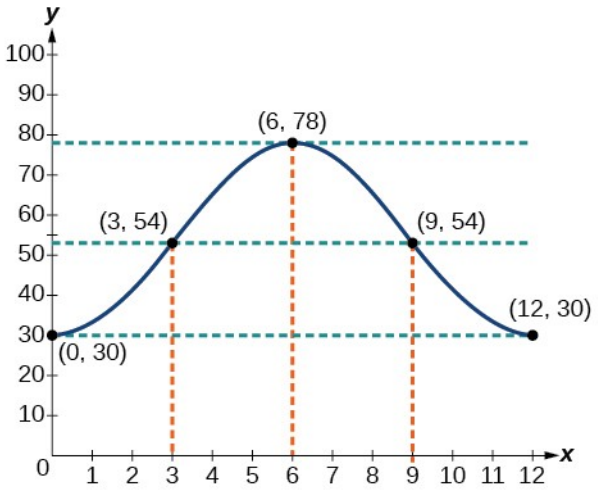
Lóðrétta hliðrunin er

$$\begin{aligned} D &= \tfrac{78+30}{2} \\ &= 54 \end{aligned}$$

Hér er engin lárétt hliðrun, svo $C=0$. Fallið byrjar í lægsta gildi y þegar $x=0$ (en ekki hæsta gildinu) og því notum við kósínusfallið með neikvæðu gildi á A. Á forminu $y=A\cos(Bx\pm C)+D$, er jafnan

$$y=-24\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+54$$

Sjá mynd 9.



Mynd 9

SÝNIDÆMI 6

Líkan fyrir sjávarföll ákvarðað

7

Í litlum strandbæ er sjávarhæðin mæld við sjóvarnargarð. Sjávarhæðin sveiflast milli 7 feta á fjöru og 15 feta á flóði. Á tilteknum degi var fjara klukkan 6 f.h. og flóð á hádegi. Lotan endurtekur sig á um það bil 12 klukkustunda fresti. Finnið jöfnu sem lýsir sjávarhæðinni.

Lausn

Sjávarhæðin breytist frá 7 fetum upp í 15 fet og því getum við reiknað útslagið þannig:

$$|A| = \left|\frac{(15-7)}{2}\right|$$
$$= 4$$

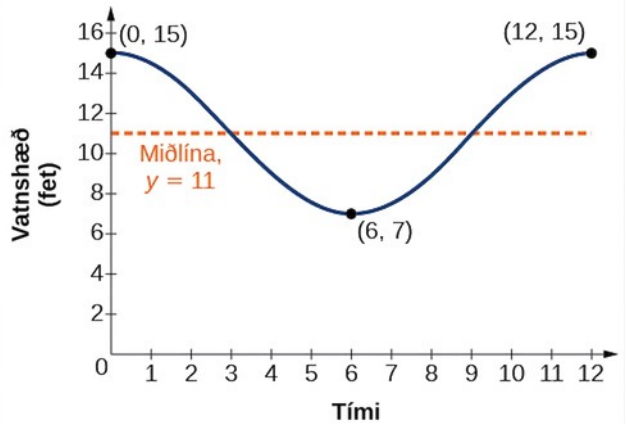
Lotan endurtekur sig á 12 klukkustunda fresti og því er B

$$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Lóðrétta hliðrunin er $\frac{(15+7)}{2} = 11$. Þar sem gildi fallsins er í hámarki þegar $t = 0$, notum við kósínusfallið með jákvæðu gildi á A.

$$y = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 11$$

Sjá mynd 10.



Mynd 10

REYNIÐ SJÁLF NR. 3

Í mars sveiflast hitinn í tiltekinni borg á hverjum degi frá lægsta gildinu 24 °F upp í hæsta gildið 40 °F. Finnið sínuslaga fall sem lýsir daglegu hitastigi og skissið grafið. Áætlið hvenær hitastigið nær frostmarki, 32 °F. Látið $t = 0$ samsvara hádegi.

SÝNIDÆMI 7

Jafna lotubundinnar hegðunar túlkuð

Blóðþrýstingi meðalmanneskju er lýst með fallinu $f(t) = 20\sin(160\pi t) + 100$, þar sem $f(t)$ táknar blóðþrýstinginn á tímanum t, mældum í mínútum. Túlkið fallið með hliðsjón af lotu og tíðni. Skissið grafið og finnið blóðþrýstingsgildið.

Lausn

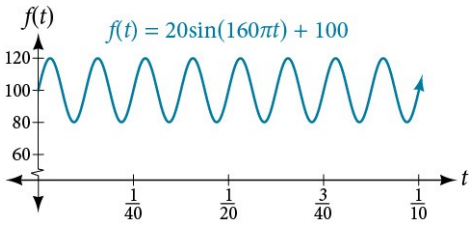
Lotan er gefin með

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{2\pi}{160\pi} \\ &= \frac{1}{80} \end{aligned}$$

Í blóðþrýstingsfalli táknar tíðnin fjölda hjartslátta á mínútu. Tíðnin er umhverfa lotunnar og er gefin með

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} &= \frac{160\pi}{2\pi} \\ &= 80 \end{aligned}$$

Sjá grafið á mynd 11.



Mynd 11 Blóðþrýstingsgildið á grafinu er $\frac{120}{80}\left(\frac{\text{hágildi}}{\text{lággildi}}\right)$.

Greining

Blóðþrýstingur $\frac{120}{80}$ telst eðlilegur. Efri talan er hámarks- eða slagbilsgildið og mælir þrýstinginn í slagæðum þegar hjartað dregst saman. Neðri talan er lágmarks- eða hlébilsgildið og mælir þrýstinginn í slagæðum þegar hjartað slakar á milli slaga og fyllist aftur af blóði. Því má lýsa eðlilegum blóðþrýstingi með lotubundnu falli sem hefur hámarkið 120 og lágmarkið 80.

Líkangerð sveifluhreyfinga

Sveifluhreyfing er tegund lotubundinnar hreyfingar, en tiltekin atriði greina þessar tvær gerðir að. Almenn lotubundin hreyfing endurtekur lotur sínar án ytri áhrifa en sveifluhreyfing krefst endurheimtarkrafts. Dæmi um sveifluhreyfingu eru hreyfing gorma og hreyfing vegna þyngdar- eða segulkrafts.

Einföld sveifluhreyfing

Hreyfing sem kallast einföld sveifluhreyfing felur í sér endurheimtarkraft en gert er ráð fyrir að hreyfingin haldi áfram endalaust. Hugsum okkur lóð sem hangir í gormi. Þegar ekkert hreyfir við lóðinu segjum við að það sé í kyrrstöðu eða jafnvægi. Ef lóðið er dregið niður og síðan sleppt togar kraftur gormsins það aftur í átt að jafnvægisstöðunni og sveifluhreyfing hefst. Endurheimtarkrafturinn er í beinu hlutfalli við færslu lóðsins frá jafnvægisstöðunni. Í upphafi gildir $t=0, d=0$.

EINFÖLD SVEIFLUHREYFING

Við sjáum að jöfnur einfaldrar sveifluhreyfingar eru gefnar með færslu:

$$d=a\cos(\omega t) \quad \text{eða} \quad d=a\sin(\omega t)$$

þar sem $|a|$ er útslagið, $\frac{2\pi}{\omega}$ er lotan og $\frac{\omega}{2\pi}$ er tíðnin, það er fjöldi lotna á tímaeiningu.

SÝNIDÆMI 8

Færsla, lota og tíðni fundnar og graf falls teiknað

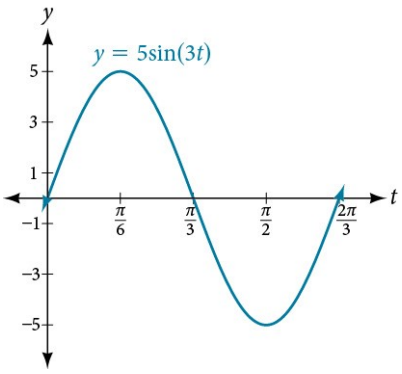
Fyrir gefnu föllin skuluð þið:

1. Finna mestu færslu hlutar.
2. Finna lotuna, það er tímann sem ein sveifla tekur.
3. Finna tíðnina.
4. Skissa grafið.

1. ⓐ $y=5\sin(3t)$
2. ⓑ $y=6\cos(\pi t)$
3. ⓒ $y=5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

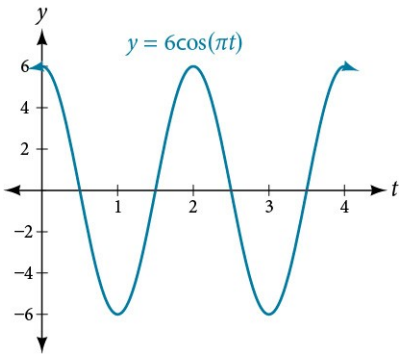
Lausn

1. ⓐ $y=5\sin(3t)$
   1. Mesta færslan er jöfn útslaginu $|a|$, sem er 5.
   2. Lotan er $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$.
   3. Tíðnin er $\frac{\omega}{2\pi}=\frac{3}{2\pi}$.
   4. Sjá mynd 12. Grafið sýnir lykilpunktana fimm.



Mynd 12

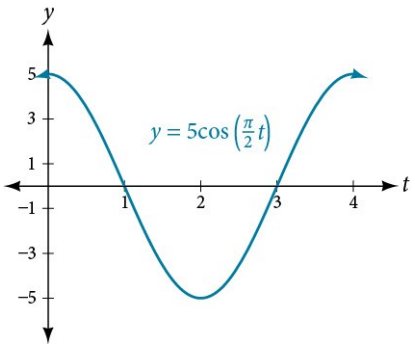
2. ⓑ $y=6\cos(\pi t)$
   1. Mesta færslan er 6.
   2. Lotan er $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2$.
   3. Tíðnin er $\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$.
   4. Sjá mynd 13.



Mynd 13

3. ⓒ $y=5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)t$

1. Mesta færslan er 5.
2. Lotan er $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.
3. Tíðnin er $\frac{1}{4}$.
4. Sjá mynd 14.



Mynd 14

Deyfð sveifluhreyfing

Í raun sveiflast pendúll ekki fram og aftur að eilífu og hlutur á gormi skoppar ekki endalaust upp og niður. Að lokum hættir pendúllinn að sveiflast og hluturinn að skoppa og bæði færast aftur í jafnvægisstöðu. Lotubundin hreyfing þar sem orkutapandi kraftur, eða deyfingarstuðull, verkar kallast deyfð sveifluhreyfing. Yfirleitt er það núningur sem veldur deyfingunni.

Í eðlisfræði eru ýmsar formúlur notaðar til að taka tillit til deyfingarstuðulsins sem verkar á hlut á hreyfingu. Sumar þeirra byggjast á stærðfræðigreiningu og fela í sér afleiður. Hér notum við formúlur fyrir einföld líkön deyfðrar sveifluhreyfingar.

DEYFÐ SVEIFLUHREYFING

Í deyfðri sveifluhreyfingu er færsla hlutar sem sveiflast frá jafnvægisstöðu sinni á tímanum t gefin með

$$f(t)=ae^{-ct}\sin(\omega t) \text{ eða } f(t)=ae^{-ct}\cos(\omega t)$$

þar sem c er deyfingarstuðull, $|a|$ er upphafsfærslan og $\frac{2\pi}{\omega}$ er lotan.

SÝNIDÆMI 9

Líkangerð deyfðrar sveifluhreyfingar

Model the equations that fit the two scenarios and use a graphing utility to graph the functions: Two mass-spring systems exhibit damped harmonic motion at a frequency of 0,5 cycles per second. Both have an initial displacement of 10 cm. The first has a damping factor of 0,5 and the second has a damping factor of 0,1.

Lausn

Þegar $t=0$, er færslan í hámarkinu 10 cm og því á kósínusfallið við. Við notum kósínusfallið í báðum líkönunum.

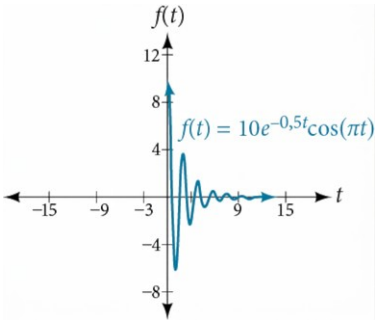
Tíðnin er gefin sem $f=\frac{\omega}{2\pi}$ og er 0,5 lotur á sekúndu. Því er

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{2\pi}&=0{,}5\\ \omega&=(0{,}5)\,2\pi\\ &=\pi\end{aligned}$$

The first spring system has a damping factor of $c=0{,}5$. Following the general model for damped harmonic motion, we have

$$f(t)=10e^{-0{,}5t}\cos(\pi t)$$

Mynd 15 lýsir hreyfingu fyrra gormskerfisins.

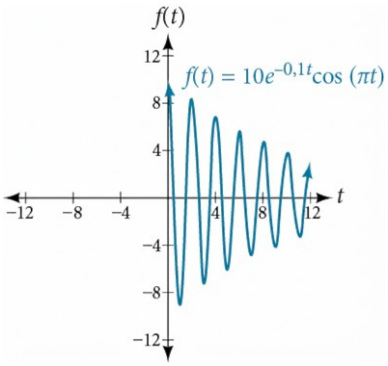


Mynd 15

The second spring system has a damping factor of $c=0{,}1$ and can be modeled as

$$f\left(t\right)=10\ e^{-0{,}1\,t}\cos\left(\pi\ t\right)$$

Mynd 16 lýsir hreyfingu síðara gormskerfisins.



Mynd 16

Greining

Notice the differing effects of the damping constant. The local maximum and minimum values of the function with the damping factor $c=0{,}5$ decreases much more rapidly than that of the function with $c=0{,}1$.

7

SÝNIDÆMI 10

Kósínusfall sem lýsir deyfðri sveifluhreyfingu fundið

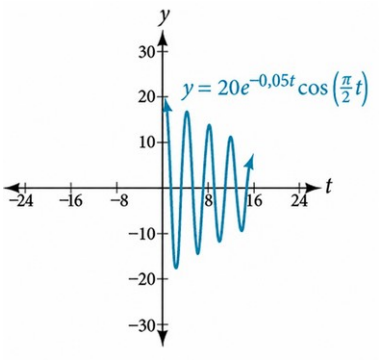
Finnið og teiknið graf falls af gerðinni $y=a\,e^{-c\,t}\cos\left(\omega\,t\right)$ sem lýsir gefnum upplýsingum.

1. ⓐ $a=20\,,c=0{,}05\,,p=4$
2. ⓑ $a=2\,,c=1{,}5\,,f=3$

Lausn

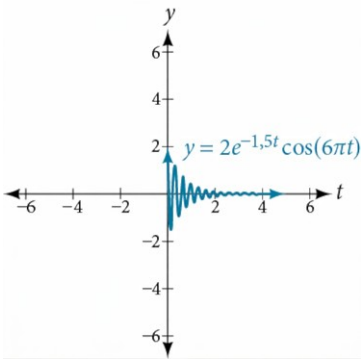
Setjið gefnu gildin inn í líkanið. Rifjið upp að lotan er $\frac{2\,\pi}{\omega}$ og tíðnin er $\frac{\omega}{2\,\pi}$.

1. ⓐ $y=20\ e^{-0{,}05\,t}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)$. Sjá mynd 17.



Mynd 17

2. ⓑ $y=2\ e^{-1,5\,t}\ \cos\left(6\ \pi\ t\right)$. Sjá mynd 18.



Mynd 18

REYNIÐ SJÁLF NR. 4

Þessi jafna er líkan af deyfðri sveifluhreyfingu: $f\left(t\right)=5e^{-6t}\cos\left(4\,t\right)$ Finnið upphafsfærsluna, deyfingarstuðulinn og tíðnina.

SÝNIDÆMI 11

Sínusfall sem lýsir deyfðri sveifluhreyfingu fundið

Finnið og teiknið graf falls af gerðinni $y=a\,e^{-ct}\sin\left(\omega\,t\right)$ sem lýsir gefnum upplýsingum.

1. ⓐ $a=7\,,c=10\,,p=\frac{\pi}{6}$

2. ⓑ $a=0{,}3\,,c=0{,}2\,,f=20$

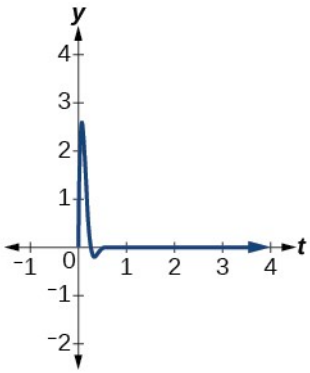
Lausn

Reiknið gildið á ω og setjið þekktu gildin inn í líkanið.

1. ⓐ Þar sem lotan er $\frac{2\pi}{\omega}$, höfum við

$$\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega\pi = 6(2\pi)$$
$$\omega = 12$$

Deyfingarstuðullinn er 10 og útslagið er 7. Líkanið er því $y = 7e^{-10t}\sin(12t)$. Sjá mynd 19.



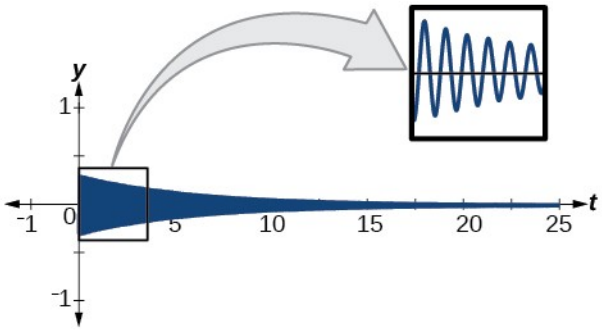
Mynd 19

7

2. ⓑ Þar sem tíðnin er $\frac{\omega}{2\pi}$, höfum við

$$20 = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$40\pi = \omega$$

Deyfingarstuðullinn er 0,2 og útslagið er 0,3. Líkanið er $y = 0{,}3\ e^{-0{,}2\,t}\ \sin\left(40\ \pi\ t\right)$. Sjá mynd 20.



Mynd 20

Greining

Síðustu tvö dæmi sýna hvernig við veljum milli sínus- og kósínusfalls þegar við lýsum sínuslaga hegðun. Kósínusfallið er í mestri færslu þegar $t = 0$, en sínusfallið er í

jafnvægisstöðu þegar $t=0$. Skoðum til dæmis jöfnuna $y=20\ e^{-0,05\,t}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)$ úr sýnidæmi 10. Á grafinu sést að í byrjun gildir $t=0$, $y=20$, sem er upphafsútslagið. Staðfestið þetta með því að setja $t=0$ inn í kósínusjöfnuna:

$$\begin{aligned} y&=20\ e^{-0,05\,(0)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)\\ &=20\,(1)\,(1)\\ &=20 \end{aligned}$$

Ef sínusfallið er notað fæst

$$\begin{aligned} y&=20\ e^{-0,05\,(0)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)\\ &=20\,(1)\,(0)\\ &=0 \end{aligned}$$

Kósínus er því rétta fallið.

REYNIÐ SJÁLF NR. 5

Write the equation for damped harmonic motion given $a=10$, $c=0,5$, and $p=2$.

7

SÝNIDÆMI 12

Sveiflum gorms lýst með líkani

Gormi sem er 10 tommur að náttúrulegri lengd er þjappað saman um 5 tommur og honum síðan sleppt. Hann sveiflast einu sinni á 3 sekúndna fresti og útslag hans minnkar um 30% á sekúndu. Finnið jöfnu sem lýsir stöðu gormsins t sekúndum eftir að honum er sleppt.

Lausn

Útslagið byrjar í 5 tommum og minnkar um 30% á sekúndu. Gormurinn er samanþjappaður í upphafi og því ritum við A sem neikvætt gildi. Útslagshluta fallsins má rita sem

$$A\,(t)=5\,(1-0,30)^{t}$$

Við ritum $(1-0,30)^{t}$ á forminu e^{ct} þannig:

$$\begin{aligned} 0,7&=e^{c}\\ c&=\ln 0,7\\ c&=-0,357 \end{aligned}$$

Nú skulum við skoða lotuna. Gormurinn fer í gegnum stöður sínar á 3 sekúndna fresti. Þetta er lotan og með formúlunni getum við fundið ómega.

$$3 = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{3}$$

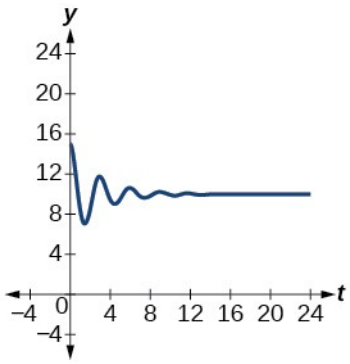
Náttúrulega lengdin, 10 tommur, er miðlínan. Við notum kósínusfallið því gormurinn byrjar í mestri færslu. Þessi hluti jöfnunnar er

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 10$$

Að lokum setjum við föllin tvö saman. Líkanið fyrir stöðu gormsins eftir t sekúndur er

$$y = -5\ e^{-0{,}357\ t}\ \cos\left(\frac{2\ \pi}{3}\ t\right) + 10$$

Sjá grafið á mynd 21.



Mynd 21

REYNIÐ SJÁLF NR. 6

Massi sem hangir í gormi er lyft 5 cm yfir jafnvægisstöðu sína. Massanum er sleppt þegar $t = 0$ og hann látinn sveiflast. Eftir $\frac{1}{3}$ sekúndu sést að massinn er aftur kominn í hæstu stöðu. Finnið fall sem lýsir hreyfingunni miðað við upphaflegu jafnvægisstöðuna.

SÝNIDÆMI 13

Gildi deyfingarstuðulsins c fundið út frá gefnum skilyrðum

Gítarstrengur er plokkaður og sveiflast með deyfðri sveifluhreyfingu. Strengurinn er dreginn 2 cm frá jafnvægisstöðu sinni. Eftir 3 sekúndur mælist færsla strengsins 1 cm. Finnið deyfingarstuðulinn.

Lausn

Færsluþátturinn táknar útslagið og ákvarðast af stuðlinum $a\,e^{-ct}$ í líkani deyfðrar sveifluhreyfingar. Deyfingarstuðullinn kemur fyrir í liðnum e^{-ct}. Við vitum að eftir 3 sekúndur er staðbundna hámarkið helmingur af upphaflegu gildi sínu. Því höfum við jöfnuna

$$a\,e^{-c(t+3)} = \frac{1}{2}\,a\,e^{-ct}$$

Notið algebru og veldareglur til að leysa fyrir c.

$$a\ e^{-c\,(t+3)} = \frac{1}{2}\ a\ e^{-c\,t}$$

$$e^{-c\,t}\cdot e^{-3\,c} = \frac{1}{2}\ e^{-c\,t} \qquad \text{Styttið burt } a.$$

$$e^{-3\,c} = \frac{1}{2} \qquad \text{Styttið burt } e^{-c\,t}.$$

$$e^{3\,c} = 2 \qquad \text{Takið umhverfu beggja hliða.}$$

Notið síðan logareglurnar.

$$e^{3c} = 2$$
$$3c = \ln\ (2)$$
$$c = \tfrac{\ln\ (2)}{3}$$

Deyfingarstuðullinn er $\frac{\ln(2)}{3}$.

Afmarkandi ferlar í sveifluhreyfingu

Gröf sveifluhreyfinga geta legið innan afmarkandi ferla. Þegar fall hefur breytilegt útslag sem vex og minnkar mörgum sinnum innan einnar lotu getum við ákvarðað afmarkandi ferlana út frá hluta fallsins.

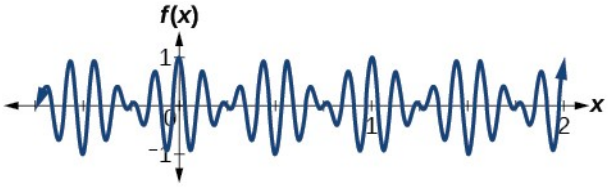
SÝNIDÆMI 14

Sveiflandi kósínusferill teiknaður

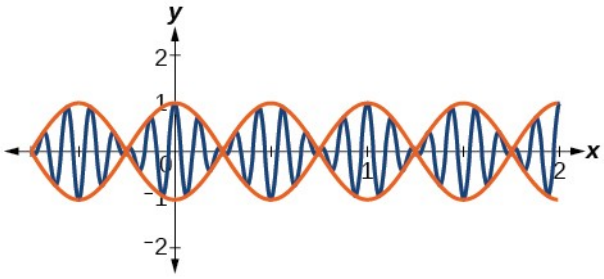
Teiknið graf fallsins $f(x) = \cos(2\pi x)\cos(16\pi x)$.

Lausn

Grafið sem fallið myndar verður sýnt í tvennu lagi. Fyrra grafið sýnir nákvæmlega fallið $f(x)$ (sjá mynd 22) og síðara grafið sýnir fallið $f(x)$ ásamt afmarkandi falli (sjá mynd 23). Gröfin líta mjög ólíkt út.



Mynd 22



Mynd 23

Greining

Ferlarnir $y = \cos(2\pi x)$ og $y = -\cos(2\pi x)$ eru afmarkandi ferlar: þeir afmarka fallið að ofan og neðan og fylgja hæstu og lægstu punktum þess. Graf sveifluhreyfingarinnar liggur innan afmarkandi ferlanna. Þetta er dæmi um fall þar sem útslagið minnkar ekki aðeins með tíma heldur vex og minnkar mörgum sinnum innan hverrar lotu.

7

MIÐLAR

Notið þessi nettilföng til að fá frekari útskýringar og æfingar í notkun hornafalla.

- Verkefni leyst með hornafræði
- Hornafræði parísarhjóls
- Daglegt hitastig og hornafræði
- Einföld sveifluhreyfing

7.6 Verkefni úr hlutanum

Munnleg verkefni

1. Útskýrið hvaða gerðum eðlisfræðilegra fyrirbæra er best lýst með sínuslaga föllum. Hvaða eiginleikar þurfa að vera fyrir hendi?
2. Hvaða upplýsingar þarf til að setja fram hornafallalíkan fyrir daglegt hitastig? Nefnið tvö dæmi um ólíkar upplýsingar sem dygðu til að lýsa hitastiginu með jöfnu.
3. Væri sínuslaga fall gott líkan ef við vildum lýsa uppsafnaðri úrkomu yfir heilt ár? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?
4. Útskýrið áhrif deyfingarstuðuls á gröf falla sem lýsa sveifluhreyfingu.

Algebruverkefni

Finnið í eftirfarandi verkefnum hugsanlega formúlu fyrir hornafallið sem gildataflan sýnir.

5.

x	y
0	-4
3	-1
6	2
9	-1
12	-4
15	-1
18	2

6.

x	y
0	5
2	1
4	-3
6	1
8	5
10	1
12	-3

7.

x	y
0	2
$\frac{\pi}{4}$	7
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{4}$	-3
π	2
$\frac{5\pi}{4}$	7
$\frac{3\pi}{2}$	2

8.

x	y
0	1
1	-3
2	-7
3	-3
4	1
5	-3
6	-7

9.

x	y
0	-2
1	4
2	10
3	4
4	-2
5	4
6	10

10.

x	y
0	5
1	-3
2	5
3	13
4	5
5	-3
6	5

11.

x	y
-3	$-1-\sqrt{2}$
-2	-1
-1	$1-\sqrt{2}$
0	0
1	$\sqrt{2}-1$
2	1
3	$\sqrt{2}+1$

12.

x	y
-1	$\sqrt{3}-2$
0	0
1	$2-\sqrt{3}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
3	1
4	$\sqrt{3}$
5	$2+\sqrt{3}$

Myndræn verkefni

Teiknið í eftirfarandi verkefnum graf gefna fallsins og finnið síðan hugsanlegt eðlisfræðilegt ferli sem jafnan gæti lýst.

13.

$$f(x)=-30\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)-20\cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right)+80\,[0,12]$$

14. $f(x)=-18\cos\left(\frac{x\pi}{12}\right)-5\sin\left(\frac{x\pi}{12}\right)+100$ á bilinu $[0,24]$

15. $f(x)=10-\sin\left(\frac{x\pi}{6}\right)+24\tan\left(\frac{x\pi}{240}\right)$ á bilinu $[0,80]$

Tækniverkefni

Setjið í eftirfarandi verkefni fram fall sem lýsir hegðuninni og notið reiknivél til að finna umbeðnar niðurstöður.

16. Meðalársúrkoma í borg er nú 20 tommur og sveiflast árstíðabundið um 5 tommur. Vegna ófyrirséðra aðstæðna virðist úrkoman minnka 15% á ári. Eftir hve mörg ár má búast við að úrkoman nái fyrst 0 tommum? Athugið að líkanið gildir ekki lengur þegar það spáir neikvæðri úrkomu. Veljið því fyrsta punktinn þar sem úrkoman fer undir 0.

Raunveruleg viðfangsefni

Setjið í eftirfarandi verkefnum fram sínuslaga fall út frá gefnum upplýsingum og leysið síðan jöfnuna fyrir umbeðin gildi.

17. Lýsa má útihita yfir daginn með sínuslaga falli. Gerum ráð fyrir að hæsti hitinn, 105 °F, mælist klukkan 5 e.h. og að meðalhiti dagsins sé 85 °F. Finnið hitastigið klukkan 9 f.h. og námundið að næstu heilu gráðu.

18. Lýsa má útihita yfir daginn með sínuslaga falli. Gerum ráð fyrir að hæsti hitinn, 84 °F, mælist klukkan 6 e.h. og að meðalhiti dagsins sé 70 °F . Finnið hitastigið klukkan 7 f.h. og námundið að næstu heilu gráðu.

19. Lýsa má útihita yfir daginn með sínuslaga falli. Gerum ráð fyrir að hitastigið breytist milli 47 °F og 63 °F yfir daginn og að meðalhiti dagsins mælist fyrst klukkan 10 f.h. Hve mörgum klukkustundum eftir miðnætti nær hitastigið fyrst 51 °F?

20. Lýsa má útihita yfir daginn með sínuslaga falli. Gerum ráð fyrir að hitastigið breytist milli 64 °F og 86 °F yfir daginn og að meðalhiti dagsins mælist fyrst klukkan 12 á miðnætti. Hve mörgum klukkustundum eftir miðnætti nær hitastigið fyrst 70 °F?

21. Parísarhjól er 20 metrar í þvermál og gengið er um borð af palli sem er 2 metra yfir jörðu. Staðan „klukkan sex“ á hjólinu er í sömu hæð og pallurinn. Hjólið lýkur 1 heilum snúningi á 6 mínútum. Hve langan hluta ferðarinnar, í mínútum og sekúndum, er farþeginn hærra en 13 metra yfir jörðu?

22. Parísarhjól er 45 metrar í þvermál og gengið er um borð af palli sem er 1 metra yfir jörðu. Staðan „klukkan sex“ á hjólinu er í sömu hæð og pallurinn. Hjólið lýkur 1 heilum snúningi á 10 mínútum. Hve margar mínútur ferðarinnar er farþeginn hærra en 27 metra yfir jörðu? Námundið að næstu sekúndu.

23. Flatarmál hafíss umhverfis norðurpólinn sveiflast milli um 6 milljóna ferkílómetra þann 1. september og 14 milljóna ferkílómetra þann 1. mars. Gerið ráð fyrir sínuslaga sveiflu. Hvenær er hafísinn minni en 9 milljónir ferkílómetra? Gefið svarið sem dagabil og námundið að næsta degi.

24. Flatarmál hafíss umhverfis suðurpólinn sveiflast milli um 18 milljóna ferkílómetra í september og 3 milljóna ferkílómetra í mars. Gerið ráð fyrir sínuslaga sveiflu. Hvenær er hafísinn meiri en 15 milljónir ferkílómetra? Gefið svarið sem dagabil og námundið að næsta degi.

25. Á 90 daga monsúntímabili má lýsa daglegri úrkomu með sínuslaga föllum. Ef úrkoman sveiflast milli lágmarksins 2 tomma á degi 10 og 12 tomma á degi 55, á hvaða tímabili er dagleg úrkoma meiri en 10 tommur?

26. Á 90 daga monsúntímabili má lýsa daglegri úrkomu með sínuslaga föllum. Minnsta úrkoman, 4 tommur, mældist á degi 30 og meðalúrkoma á dag var 8 tommur. Á hvaða tímabili var dagleg úrkoma minni en 5 tommur?

27. Á tilteknu svæði nær mánaðarúrkoma hámarkinu 8 tommum þann 1. júní og lágmarkinu 1 tommu þann 1. desember. Finnið hvenær flóðaástand ríkir á svæðinu (meira en 7 tommur) og hvenær þurrkaástand ríkir (minna en 2 tommur). Námundið svarið að næsta degi.

28. Á tilteknu svæði nær mánaðarúrkoma hámarkinu 24 tommum í september og lágmarkinu 4 tommum í mars. Finnið hvenær flóðaástand ríkir á svæðinu (meira en 22 tommur) og hvenær þurrkaástand ríkir (minna en 5 tommur). Námundið svarið að næsta degi.

Finnið í eftirfarandi verkefnum útslag, lotu og tíðni gefna fallsins.

29. Færslu $h(t)$ í sentímetrum hjá massa sem hangir í gormi er lýst með fallinu $h(t)=8\sin(6\pi t)$, þar sem t er mælt í sekúndum. Finnið útslag, lotu og tíðni færslunnar.

30. Færslu $h(t)$ í sentímetrum hjá massa sem hangir í gormi er lýst með fallinu $h(t)=11\sin(12\pi t)$, þar sem t er mælt í sekúndum. Finnið útslag, lotu og tíðni færslunnar.

31. Færslu $h(t)$ í sentímetrum hjá massa sem hangir í gormi er lýst með fallinu $h(t)=4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, þar sem t er mælt í sekúndum. Finnið útslag, lotu og tíðni færslunnar.

Setjið í eftirfarandi verkefnum fram jöfnu sem lýsir hegðuninni.

32. Færslu $h(t)$, í sentímetrum, hjá massa sem hangir í gormi er lýst með fallinu $h(t)=-5\cos(60\pi t)$, þar sem t er mælt í sekúndum. Finnið útslag, lotu og tíðni færslunnar.

Setjið í eftirfarandi verkefnum fram jöfnu sem lýsir hegðuninni.

33. Dádýrastofn sveiflast um 19 yfir og undir meðaltali yfir árið og nær lágmarki í janúar. Í upphafi er meðalstofninn 800 dádýr og hann stækkar um 160 dýr á ári. Finnið fall sem lýsir stofninum P, sem falli af fjölda mánaða frá janúar, t.

34. Kanínustofn sveiflast um 15 yfir og undir meðaltali yfir árið og nær lágmarki í janúar. Í upphafi er meðalstofninn 650 kanínur og hann stækkar um 110 dýr á ári. Finnið fall sem lýsir stofninum P, sem falli af fjölda mánaða frá janúar, t.

35. Bísamrottustofn sveiflast um 33 yfir og undir meðaltali yfir árið og nær lágmarki í janúar. Í upphafi er meðalstofninn 900 bísamrottur og hann stækkar um 7% á mánuði. Finnið fall sem lýsir stofninum P, sem falli af fjölda mánaða frá janúar, t.

36. Fiskistofn sveiflast um 40 yfir og undir meðaltali yfir árið og nær lágmarki í janúar. Í upphafi er meðalstofninn 800 fiskar og hann stækkar um 4% á mánuði. Finnið fall sem lýsir stofninum P, sem falli af fjölda mánaða frá janúar, t.

37. Gormur sem festur er í loft er dreginn 10 cm niður frá jafnvægisstöðu og sleppt. Útslagið minnkar um 15% á sekúndu. Gormurinn sveiflast 18 sinnum á sekúndu. Finnið fall sem lýsir fjarlægð D, enda gormsins frá jafnvægisstöðu sem falli af sekúndunum t, frá því gorminum var sleppt.

38. Gormur sem festur er í loft er dreginn 7 cm niður frá jafnvægisstöðu og sleppt. Útslagið minnkar um 11% á sekúndu. Gormurinn sveiflast 20 sinnum á sekúndu. Finnið fall sem lýsir fjarlægð D, enda gormsins frá jafnvægisstöðu sem falli af sekúndunum t, frá því gorminum var sleppt.

39. Gormur sem festur er í loft er dreginn 17 cm niður frá jafnvægisstöðu og sleppt. Eftir 3 sekúndur hefur útslagið minnkað í 13 cm. Gormurinn sveiflast 14 sinnum á sekúndu. Finnið fall sem lýsir fjarlægð D, enda gormsins frá jafnvægisstöðu sem falli af sekúndunum t, frá því gorminum var sleppt.

40. Gormur sem festur er í loft er dreginn 19 cm niður frá jafnvægisstöðu og sleppt. Eftir 4 sekúndur hefur útslagið minnkað í 14 cm. Gormurinn sveiflast 13 sinnum á sekúndu. Finnið fall sem lýsir fjarlægð D, enda gormsins frá jafnvægisstöðu sem falli af sekúndunum t, frá því gorminum var sleppt.

Setjið í eftirfarandi verkefnum fram fall sem lýsir hegðuninni. Reiknið síðan umbeðna niðurstöðu með reiknivél.

41. Í tilteknu vatni er silungsstofninn nú að meðaltali 20.000. Stofninn sveiflast náttúrulega um 2.000 yfir og undir meðaltalinu ár hvert. Vatnið var opnað fyrir veiðum á þessu ári. Ef veiðimenn veiða 3.000 fiska á ári, hve langur tími líður þar til enginn silungur er eftir í vatninu?

42. Stofn hvítfisks í vatni er nú 500. Stofninn sveiflast náttúrulega um 25 yfir og undir meðaltalinu ár hvert. Ef ofveiði manna nemur 4% af stofninum á ári, eftir hve mörg ár verða í fyrsta sinn færri en 200 hvítfiskar í vatninu?

43. A spring attached to a ceiling is pulled down 11 cm from equilibrium and released. After 2 seconds, the amplitude has decreased to 6 cm. The spring oscillates 8 times each second. Find when the spring first comes between $-0{,}1$ and $0{,}1$ cm, effectively at rest.

44. A spring attached to a ceiling is pulled down 21 cm from equilibrium and released. After 6 seconds, the amplitude has decreased to 4 cm. The spring oscillates 20 times each second. Find when the spring first comes between $-0{,}1$ and $0{,}1$ cm, effectively at rest.

45. Two springs are pulled down from the ceiling and released at the same time. The first spring, which oscillates 8 times per second, was initially pulled down 32 cm from equilibrium, and the amplitude decreases by 50% each second. The second spring, oscillating 18 times per second, was initially pulled down 15 cm from equilibrium and after 4 seconds has an amplitude of 2 cm. Which spring comes to rest first, and at what time? Consider “rest” as an amplitude less than $0{,}1$ cm.

46. Two springs are pulled down from the ceiling and released at the same time. The first spring, which oscillates 14 times per second, was initially pulled down 2 cm from equilibrium, and the amplitude decreases by 8% each second. The second spring, oscillating 22 times per second, was initially pulled down 10 cm from equilibrium and after 3 seconds has an amplitude of 2 cm. Which spring comes to rest first, and at what time? Consider “rest” as an amplitude less than $0{,}1$ cm.

Viðbótarverkefni

47. Flugvél flýgur í 1 klukkustund á 150 mílna hraða á klukkustund í stefnu 22° austan við norður og heldur síðan áfram í 1,5 klukkustundir á 120 mílna hraða á klukkustund, nú í stefnu 112° austan við norður. Finnið heildarfjarlægðina frá upphafspunktinum og beina hornið norðan við austur.

48. Flugvél flýgur í 2 klukkustundir á 200 mílna hraða á klukkustund í stefnuna 60°, og heldur síðan áfram í 1,5 klukkustundir á sama hraða, nú í stefnuna 150°. Finnið fjarlægðina frá upphafspunktinum og stefnuhornið þaðan. Vísbending: Stefnuhorn er mælt rangsælis frá norðri.

Finnið í eftirfarandi verkefnum fall af gerðinni $y = a\,b^x + c\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ sem hæfir gefnum gögnum.

49.

x	0	1	2	3
y	6	29	96	379

50.

x	0	1	2	3
y	6	34	150	746

51.

x	0	1	2	3
y	4	0	16	-40

Finnið í eftirfarandi verkefnum fall af gerðinni $y = a\,b^x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$ sem hæfir gefnum gögnum.

52.

x	0	1	2	3
y	11	3	1	3

53.

x	0	1	2	3
y	4	1	−11	1

Lykilhugtök

deyfð sveifluhreyfing
sveifluhreyfing sem líkist lotubundinni hreyfingu og einfaldri sveifluhreyfingu, en deyfingarstuðull hefur áhrif á graf hennar, það er áhrif sem valda orkutapi í hreyfingunni, svo sem núningur

tvöföldunarformúlur
samsemdir sem eru leiddar af summuformúlum sínuss, kósínuss og tangens þegar hornin eru jöfn

samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla
jöfnusafn með hornaföllum þannig að ef $f(-x)=-f(x)$, er samsemdin oddstæð, en ef $f(-x)=f(x)$, er hún jafnstæð

helmingunarformúlur
samsemdir sem eru leiddar af lækkunarformúlum og notaðar til að ákvarða hornafallagildi hálfs horns

formúla sem breytir margfeldi í summu
hornafallasamsemd sem nota má til að rita margfeldi hornafalla sem summu eða mismun hornafalla

Pýþagórasarsamsemdir
jöfnusafn með hornaföllum sem byggist á eiginleikum rétthyrndra þríhyrninga

kvótasamsemdir
samsemdapar sem byggist á því að tangens er hlutfall sínuss og kósínuss en kótangens er hlutfall kósínuss og sínuss

umhverfusamsemdir
jöfnusafn sem felur í sér umhverfur grunnskilgreininga hornafallanna

lækkunarformúlur
samsemdir sem eru leiddar af tvöföldunarformúlum og notaðar til að lækka veldi hornafalls

einföld sveifluhreyfing
endurtekin hreyfing sem lýsa má með lotubundinni sínuslaga sveiflu

formúla sem breytir summu í margfeldi
hornafallasamsemd sem nota má, með innsetningu, til að rita summu hornafalla sem margfeldi hornafalla

Lykiljöfnur

Pýþagórasarsamsemdir	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
Samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla	$\tan(-\theta) = -\tan\ \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\ \theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\ \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\ \theta$ $\cos(-\theta) = \cos\ \theta$ $\sec(-\theta) = \sec\ \theta$
Umhverfusamsemdir	$\sin\ \theta = \frac{1}{\csc\ \theta}$ $\cos\ \theta = \frac{1}{\sec\ \theta}$ $\tan\ \theta = \frac{1}{\cot\ \theta}$ $\csc\ \theta = \frac{1}{\sin\ \theta}$ $\sec\ \theta = \frac{1}{\cos\ \theta}$ $\cot\ \theta = \frac{1}{\tan\ \theta}$
Kvótasamsemdir	$\tan\ \theta = \frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}$ $\cot\ \theta = \frac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}$
Summuformúla kósínuss	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
Mismunarformúla kósínuss	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
Summuformúla sínuss	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
Mismunarformúla sínuss	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
Summuformúla tangens	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
Mismunarformúla tangens	$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
Samsemdir samsvarandi hornafalla	$\sin\ \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\ \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\tan\ \theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\ \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\sec\ \theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\ \theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

7

Tvöföldunarformúlur	$\sin(2\theta) = 2\sin\ \theta\ \cos\ \theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $= 1 - 2\sin^2\theta$ $= 2\cos^2\theta - 1$ $\tan(2\theta) = \frac{2\tan\ \theta}{1-\tan^2\theta}$
Lækkunarformúlur	$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ $\tan^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$
Helmingunarformúlur	$\sin\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{2}}$ $\cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}$ $\tan\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}$ $= \frac{\sin\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}$ $= \frac{1-\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha}$
Formúlur sem breyta margfeldi í summu	$\cos\ \alpha\ \cos\ \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ $\sin\ \alpha\ \cos\ \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\sin\ \alpha\ \sin\ \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\ \alpha\ \sin\ \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
Formúlur sem breyta summu í margfeldi	$\sin\ \alpha+\sin\ \beta = 2\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\ \alpha-\sin\ \beta = 2\ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $\cos\ \alpha-\cos\ \beta = -2\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\ \alpha+\cos\ \beta = 2\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
Staðalform jöfnu sínuslaga falls	$y=A\sin(Bt-C)+D$ eða $y=A\cos(Bt-C)+D$
Einföld sveifluhreyfing	$d=a\cos(\omega t)$ eða $d=a\sin(\omega t)$
Deyfð sveifluhreyfing	$f(t)=ae^{-ct}\sin(\omega t)$ eða $f(t)=ae^{-ct}\cos(\omega t)$

7

Meginatriði

7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemdar

- Setja má hornafallastæðu fram á marga vegu. Þegar samsemdir eru sannprófaðar sést hvernig umrita má stæður til að einfalda verkefni.
- Með því að teikna gröf beggja hliða samsemdar má sannprófa hana. Sjá Dæmi 1.
- Önnur leið til að sannprófa samsemd er að einfalda aðra hlið jöfnunnar þar til hún verður jöfn hinni. Sjá Dæmi 2 og Dæmi 3.
- Aðferðin við að sannprófa samsemd ræðst af gerð hennar. Oft er gagnlegt að byrja á flóknari hlið jöfnunnar. Sjá Dæmi 4.
- Við getum búið til samsemd með því að einfalda stæðu og sannprófa hana síðan. Sjá Dæmi 5.
- Til að sannprófa samsemd getur þurft algebrureikning með grunnsamsemdunum. Sjá Dæmi 6 og Dæmi 7.
- Nota má algebruaðferðir til að einfalda hornafallastæður. Þær eru notaðar í allri bókinni enda byggjast þær á grunnreglum stærðfræðinnar. Sjá Dæmi 8, Dæmi 9 og Dæmi 10.

7.2 Summu- og mismunarsamsemdir

- Summuformúla kósínuss segir að kósínus summu tveggja horna sé margfeldi kósínusa hornanna að frádregnu margfeldi sínusa þeirra. Mismunarformúla kósínuss segir að kósínus mismunar tveggja horna sé margfeldi kósínusa hornanna að viðbættu margfeldi sínusa þeirra.
- Nota má summu- og mismunarformúlurnar til að finna nákvæm gildi sínuss, kósínuss eða tangens horns. Sjá Dæmi 1 og Dæmi 2.
- Summuformúla sínuss segir að sínus summu tveggja horna sé margfeldi sínuss fyrra hornsins og kósínuss þess síðara að viðbættu margfeldi kósínuss fyrra hornsins og sínuss þess síðara. Mismunarformúla sínuss segir að sínus mismunar tveggja horna sé margfeldi sínuss fyrra hornsins og kósínuss þess síðara að frádregnu margfeldi kósínuss fyrra hornsins og sínuss þess síðara. Sjá Dæmi 3.
- Einnig má nota summu- og mismunarformúlur sínuss og kósínuss fyrir andhverf hornaföll. Sjá Dæmi 4.
- Summuformúla tangens segir að tangens summu tveggja horna sé summa tangensgilda hornanna deild með 1 að frádregnu margfeldi tangensgilda þeirra. Mismunarformúla tangens segir að tangens mismunar tveggja horna sé mismunur tangensgilda hornanna deildur með 1 að viðbættu margfeldi tangensgilda þeirra. Sjá Dæmi 5.
- Nota má reglu Pýþagórasar ásamt summu- og mismunarformúlunum til að finna margfaldar summur og mismuni horna. Sjá Dæmi 6.
- Samsemdir samsvarandi hornafalla gilda um fyllihorn og pör umhverfra falla. Sjá Dæmi 7.
- Summu- og mismunarformúlur nýtast við sannprófun samsemda. Sjá Dæmi 8 og Dæmi 9.

- Oft er auðveldara að leysa hagnýt verkefni með summu- og mismunarformúlum. Sjá Dæmi 10 og Dæmi 11.

7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur

- Tvöföldunarsamsemdir eru leiddar af summuformúlum grunnhornafallanna sínuss, kósínuss og tangens. Sjá Dæmi 1, Dæmi 2, Dæmi 3 og Dæmi 4.
- Lækkunarformúlur eru sérstaklega gagnlegar í stærðfræðigreiningu því með þeim má lækka veldi hornafallaliðarins. Sjá Dæmi 5 og Dæmi 6.
- Helmingunarformúlur gera okkur kleift að finna gildi hornafalla af hálfum hornum, hvort sem upprunalega hornið er þekkt eða ekki. Sjá Dæmi 7, Dæmi 8 og Dæmi 9.

7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu

- Af summu- og mismunarsamsemdunum má leiða formúlur sem breyta margfeldi í summu og summu í margfeldi fyrir sínus og kósínus.
- Nota má formúlurnar sem breyta margfeldi í summu til að umrita margfeldi sínusgilda, margfeldi kósínusgilda og margfeldi sínuss og kósínuss sem summur eða mismuni sínus- og kósínusgilda. Sjá Dæmi 1, Dæmi 2 og Dæmi 3.
- Einnig má leiða samsemdir sem breyta summu í margfeldi af samsemdum sem breyta margfeldi í summu með innsetningu.
- Nota má formúlurnar sem breyta summu í margfeldi til að umrita summu eða mismun sínusgilda, kósínusgilda eða margfeldis sínuss og kósínuss sem margfeldi sínus- og kósínusgilda. Sjá Dæmi 4.
- Oft er auðveldara að reikna gildi hornafallastæðna með formúlunum. Sjá Dæmi 5.
- Sannprófa má samsemdir með öðrum formúlum eða með því að umrita stæðurnar með sínus og kósínus. Til að sannprófa samsemd veljum við flóknari hlið jafnaðarmerkisins og umritum hana þar til hún verður eins og hin hliðin. Sjá Dæmi 6 og Dæmi 7.

7.5 Lausn hornafallajafna

- Þegar við leysum línulegar hornafallajöfnur getum við notað algebruaðferðir á sama hátt og þegar við leysum algebrujöfnur. Leitið að mynstrum, svo sem mismun tveggja ferninga, annars stigs formi eða stæðu sem hentar vel fyrir innsetningu. Sjá Dæmi 1, Dæmi 2 og Dæmi 3.

- Jöfnur með einu hornafalli má leysa eða sannprófa með einingarhringnum. Sjá Dæmi 4, Dæmi 5, Dæmi 6 og Dæmi 7.
- Einnig getum við leyst hornafallajöfnur með grafískri reiknivél. Sjá Dæmi 8 og Dæmi 9.
- Margar jöfnur hafa form annars stigs jöfnu. Með innsetningu má láta jöfnuna líta einfaldari út og nota síðan sömu aðferðir og við lausn algebrulegrar annars stigs jöfnu, svo sem þáttun og lausnarformúluna. Sjá Dæmi 10, Dæmi 11, Dæmi 12 og Dæmi 13.
- Einnig má nota samsemdirnar til að leysa hornafallajöfnur. Sjá Dæmi 14, Dæmi 15 og Dæmi 16.
- Nota má innsetningu til að leysa marghornajöfnu, sem lýsir samþjöppun staðlaðs hornafalls. Taka þarf tillit til samþjöppunarinnar og ganga úr skugga um að allar lausnir á gefna bilinu hafi fundist. Sjá Dæmi 17.
- Nota má reglu Pýþagórasar og hornaföll til að gera líkön af raunverulegum viðfangsefnum og leysa þau. Sjá Dæmi 18.

7.6 Líkangerð með hornaföllum

- Sínuslaga föll eru sett fram með gröfum sínuss og kósínuss. Af staðalforminu getum við fundið útslag, lotu og láréttar og lóðréttar hliðranir. Sjá Dæmi 1 og Dæmi 2.
- Notið lykilpunkta til að teikna graf sínuslaga falls. Lykilpunktarnir fimm eru lággildi, hágildi og gildi á miðlínunni. Sjá Dæmi 3.
- Lotubundin föll geta lýst atburðum sem endurtaka sig í föstum lotum, svo sem kvartilaskiptum tunglsins, hreyfingu vísa á klukku og árstíðum ársins. Sjá Dæmi 4, Dæmi 5, Dæmi 6 og Dæmi 7.
- Föll sem lýsa sveifluhreyfingu eru ákvörðuð út frá gefnum gögnum. Sveifluhreyfing krefst endurheimtarkrafts, eins og í dæmunum um lotubundna hreyfingu. Þyngdarkraftur og fjaðurhreyfing af völdum þunga eru dæmi um slíkt. Sjá Dæmi 8.
- Deyfð sveifluhreyfing er lotubundin hegðun sem deyfingarstuðull hefur áhrif á. Orkudreifandi þættir, svo sem núningur, valda því að færsla hlutarins minnkar. Sjá Dæmi 9, Dæmi 10, Dæmi 11, Dæmi 12 og Dæmi 13.
- Afmarkandi ferlar marka graf sveifluhreyfingar með breytilegum há- og lággildum. Sjá Dæmi 14.

Upprifjunaræfingar

Einföldun og sannprófun hornafallasamsemdar

Finnið í eftirfarandi dæmum allar nákvæmar lausnir á bilinu $[0, 2\pi)$.

1.

$$csc^2 t = 3$$

2.

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$

3.

$$2\sin\theta = -1$$

4.

$$\tan x \sin x + \sin(-x) = 0$$

5.

$$9\sin\omega - 2 = 4\sin^2\omega$$

6.

$$1 - 2\tan(\omega) = \tan^2(\omega)$$

Notið grunnsamsemdir til að einfalda stæðuna í eftirfarandi dæmum.

7.

$$sec\, x \cos x + \cos x - \frac{1}{sec\, x}$$

8.

$$\sin^3 x + \cos^2 x \sin x$$

Ákvarðið í eftirfarandi dæmum hvort gefnar samsemdir séu jafngildar.

9.

$$\sin^2 x + sec^2 x - 1 = \frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

10.

$$\tan^3 x\, csc^2 x \cot^2 x \cos x \sin x = 1$$

<u>Summu- og mismunarsamsemdir</u>

Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi dæmum.

11.

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

12.

$$\cos\left(\frac{25\pi}{12}\right)$$

13.

$$\sin(70^\circ)\cos(25^\circ)-\cos(70^\circ)\sin(25^\circ)$$

14.

$$\cos(83^\circ)\cos(23^\circ)+\sin(83^\circ)\sin(23^\circ)$$

Sannið samsemdina í eftirfarandi dæmum.

15.

$$\cos(4x)-\cos(3x)\cos x=\sin^2 x-4\cos^2 x\sin^2 x$$

16.

$$\cos(3x)-\cos^3 x=-\cos x\sin^2 x-\sin x\sin(2x)$$

Einfaldið stæðuna í eftirfarandi dæmi.

17.

$$\frac{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+\tan\left(\frac{1}{8}x\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{8}x\right)\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

7

Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi dæmum.

18.

$$\cos\left(\sin^{-1}(0)-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

19.

$$\tan\left(\sin^{-1}(0)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur

Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi dæmum.

20. Finnið $\sin(2\theta),\cos(2\theta)$, og $\tan(2\theta)$ þegar $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ og θ er á bilinu $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

21. Finnið $\sin(2\theta),\cos(2\theta)$, og $\tan(2\theta)$ þegar $\sec\theta=-\frac{5}{3}$ og θ er á bilinu $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

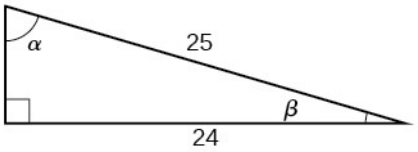
22.

$$\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

23.

$$sec\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Notið mynd 1 til að finna umbeðnar stærðir í eftirfarandi dæmum.



Mynd 1

24.

$$\sin(2\beta), \cos(2\beta), \tan(2\beta), \sin(2\alpha), \cos(2\alpha), \text{ og } \tan(2\alpha)$$

25.

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right), \cos\left(\frac{\beta}{2}\right), \tan\left(\frac{\beta}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{ og } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Sannið samsemdina í eftirfarandi dæmum.

26.

$$\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \cot x - \tan x$$

27.

$$\cot x \cos(2x) = -\sin(2x) + \cot x$$

Umritið stæðuna án velda í eftirfarandi dæmum.

28.

$$\cos^2 x \sin^4(2x)$$

29.

$$\tan^2 x \sin^3 x$$

Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu

Reiknið margfeldið í eftirfarandi dæmum með summu eða mismun tveggja falla. Gefið nákvæmt svar.

30.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

31.

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

32.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Reiknið summuna í eftirfarandi dæmum með margfeldisformúlu. Gefið nákvæmt svar.

33.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

34.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

Breytið föllunum í eftirfarandi dæmum úr margfeldi í summu eða úr summu í margfeldi.

35.

$$\sin(9x)\cos(3x)$$

36.

$$\cos(7x)\cos(12x)$$

37.

$$\sin(11x)+\sin(2x)$$

38.

$$\cos(6x)+\cos(5x)$$

Lausn hornafallajafna

Finnið í eftirfarandi dæmum allar nákvæmar lausnir á bilinu $[0,2\pi)$.

39.

$$\tan x+1=0$$

40.

$$2\sin(2x)+\sqrt{2}=0$$

Finnið í eftirfarandi dæmum allar nákvæmar lausnir á bilinu $[0,2\pi)$.

41.

$$2\sin^2 x-\sin x=0$$

42.

$$\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

43.

$$2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$$

44.

$$\cos x - 5\sin(2x) = 0$$

45.

$$\frac{1}{sec^2 x} + 2 + \sin^2 x + 4\cos^2 x = 0$$

Einfaldið jöfnuna í eftirfarandi dæmum eins mikið og hægt er með algebru. Notið síðan reiknivél til að finna lausnirnar á bilinu $[0, 2\pi)$. Námundið að fjórum aukastöfum.

46.

$$\sqrt{3}\cot^2 x + \cot x = 1$$

47.

$$csc^2 x - 3\,csc\, x - 4 = 0$$

Teiknið graf hvorrar hliðar jöfnunnar í eftirfarandi dæmum til að finna núllstöðvarnar á bilinu $[0, 2\pi)$.

48.

$$20\cos^2 x + 21\cos x + 1 = 0$$

49.

$$sec^2 x - 2\,sec\, x = 15$$

<u>Líkangerð með hornafallajöfnum</u>

Teiknið punktana í eftirfarandi dæmum og finnið mögulega formúlu fyrir hornafallagildin í töflunni.

50.

x	y
0	1
1	6
2	11
3	-6
4	-1
5	6

51.

x	y
0	-2
1	1
2	-2
3	-5
4	-2
5	1

52.

x	y
-3	$3+2\sqrt{2}$
-2	3
-1	$2\sqrt{2}-1$
0	1
1	$3-2\sqrt{2}$
2	-1
3	$-1-2\sqrt{2}$

53. Maður stendur 3 fet frá neðri enda 15 feta lóðréttts stiga og augnhæð hans er 6 fet yfir jörðu. Við hvaða horn upp frá láréttu horfir hann á efri enda stigans?

54. Notið stigann úr fyrra dæmi. Byggingarstarfsmaður, 6 fet á hæð, stendur efst í stiganum og horfir niður á fætur mannsins sem stendur neðst. Við hvaða horn niður frá láréttu horfir hann?

Setjið fram í eftirfarandi dæmum föll sem líkja eftir hegðuninni sem lýst er.

55. Fjöldi læmingja sveiflast yfir árið og fer lægst niður í 500 í mars. Meðalfjöldi læmingja yfir árið er 950. Setjið fram fall sem lýsir fjöldanum sem falli af t, mánuðinum.

56. Dagshiti í eyðimörkinni getur sveiflast mjög mikið. Hitinn fer frá 90 °F niður í 30 °F og nær meðalhita dagsins fyrst klukkan 10 að morgni. Setjið fram fall sem lýsir þessari hegðun.

Finnið útslag, tíðni og lotu gefnu jafnanna í eftirfarandi dæmum.

57.

$$y = 3\cos(x\pi)$$

58.

$$y = -2\sin(16x\pi)$$

Setjið fram í eftirfarandi dæmum líkan af hegðuninni sem lýst er og finnið umbeðin gildi.

59. Ágengri tegund vatnakarpa er sleppt í Ferskvatn. Í upphafi eru 100 karpar í vatninu og fjöldinn sveiflast árstíðabundið um 20 fiska. Á ári 5 eru karparnir orðnir 625. Finnið fall sem lýsir fjölda karpa sem falli af t, fjölda ára frá deginum í dag.

60. Meðalfjöldi innfæddra fiska í Ferskvatni er 2500 og fjöldinn sveiflast árstíðabundið um 100 fiska. Ágengu karparnir keppa við innfæddu fiskana um auðlindir og því er gert ráð fyrir að innfæddum fiskum fækki um 5% á ári. Finnið fall sem lýsir fjölda innfæddra fiska sem falli af t, fjölda ára frá deginum í dag. Ákvarðið einnig hve mörg ár líða þar til karparnir verða fleiri en innfæddu fiskarnir.

Æfingapróf

Einfaldið gefnu stæðuna í eftirfarandi dæmum.

1.

$$\cos(-x)\sin x\cot x + \sin^2 x$$

2.

$$\sin(-x)\cos(-2x) - \sin(-x)\cos(-2x)$$

Finnið nákvæmt gildi í eftirfarandi dæmum.

3.

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

4.

$$\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

5.

$$\tan\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$$

6.

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Finnið allar nákvæmar lausnir jöfnunnar á bilinu $[0,2\pi)$.

7.

$$\cos^2 x-\sin^2 x-1=0$$

8.

$$\cos^2 x=\cos x$$

9.

$$\cos(2x)+\sin^2 x=0$$

10.

$$2\sin^2 x-\sin x=0$$

11. Umritið stæðuna sem margfeldi í stað summu: $\cos(2x)+\cos(-8x)$.

12. Finnið allar lausnir jöfnunnar $\tan(x)-\sqrt{3}=0$.

13. Finnið lausnir jöfnunnar $sec^2 x-2\,sec\,x=15$ á bilinu $[0,2\pi)$ með algebru. Teiknið síðan graf hvorrar hliðar jöfnunnar til að staðfesta svarið.

14. Finnið $\sin(2\theta),\cos(2\theta)$, og $\tan(2\theta)$ þegar $\cot\theta=-\frac{3}{4}$ og θ er á bilinu $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

15. Finnið $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, og $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ þegar $\cos\theta=\frac{7}{25}$ og θ er í fjórða fjórðungi.

16. Umritið stæðuna $\sin^4 x$ þannig að ekkert veldi sé hærra en 1.

Sannið samsemdina í eftirfarandi dæmum.

17.

$$\tan^3 x-\tan x\,sec^2 x=\tan(-x)$$

18.

$$\sin(3x)-\cos x\sin(2x)=\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$$

19.

$$\frac{\sin(2x)}{\sin x}-\frac{\cos(2x)}{\cos x}=sec\,x$$

20. Teiknið punktana og finnið fall af gerðinni $y=A\cos(Bx+C)+D$ sem fellur að gefnu gögnunum.

x	0	1	2	3	4	5
y	-2	2	-2	2	-2	2

21. Færsla $h(t)$ í sentímetrum hjá massa sem hangir í fjöður er gefin með fallinu $h(t)=\frac{1}{4}\sin(120\pi t)$, þar sem t er mælt í sekúndum. Finnið útslag, lotu og tíðni færslunnar.

22. Kona stendur 300 fet frá 2000 feta hárri byggingu. Við hvaða horn upp frá láréttu horfir hún á efsta hluta byggingarinnar? Starfsmaður sem leiðist horfir niður á hana frá 15. hæð (1500 fetum fyrir ofan hana). Við hvaða horn niður frá láréttu horfir hann á hana? Námundið að næsta tíunda hluta úr gráðu.

23. Tvær tíðnir hljóðs eru leiknar á hljóðfæri sem lýst er með jöfnunni $n(t)=8\cos(20\pi t)\cos(1000\pi t)$. Hver er lota og tíðni „hröðu“ og „hægfara“ sveiflnanna? Hvert er útslagið?

24. Meðalsnjókoma á mánuði í litlu þorpi í Himalajafjöllum er 6 tommur og lágmarkið, 1 tomma, er í júlí. Setjið fram fall sem lýsir snjókomunni. Á hvaða tímabili er snjókoman meiri en 10 tommur?

25. Fjöður sem er fest við loft er toguð 20 cm niður. Eftir 3 sekúndur, þegar hún hefur lokið 6 heilum lotum, er útslagið aðeins 15 cm. Finnið fall sem lýsir stöðu fjaðrarinnar t sekúndum eftir að henni er sleppt. Hvenær stöðvast fjöðrin? Lítið hér á 1 cm útslag sem kyrrstöðu.

26. Vatnsdýpi nálægt jökli er nú að meðaltali 9 fet. Það sveiflast eftir árstíðum um 2 tommur upp og niður frá meðaltalinu og nær hámarki í janúar. Vegna hlýnunar jarðar hefur jökullinn tekið að bráðna hraðar en áður. Á hverju ári hækkar vatnsborðið jafnt og þétt um 3 tommur. Finnið fall sem lýsir vatnsdýpinu eftir t mánuði. Bryggjurnar eru 2 fetum yfir núverandi vatnsborði. Hvenær fer vatnið fyrst upp fyrir þær?

8. KAFLI

Frekari notkun hornafræði



General Sherman, stærsta núlifandi tré heims. (mynd: Mike Baird, Flickr)

8

Yfirlit kaflans

- 8.1 Óréttþyrndir þríhyrningar: sínusreglan
- 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
- 8.3 Pólhnit
- 8.4 Pólhnit: gröf
- 8.5 Pólform tvinntalna
- 8.6 Stikajöfnur
- 8.7 Stikajöfnur: gröf
- 8.8 Vigrar

Inngangur að frekari notkun hornafræði

Stærsta tré heims að rúmmáli, General Sherman, er 274,9 fet á hæð og stendur í norðurhluta Kaliforníu. 1 En hvernig vita vísindamenn hver raunveruleg hæð þess er? Oft er hæðin mæld með því að finna háhornið. Það er hornið milli jarðar og sjónlínunnar upp í tréð frá punkti í nokkurri fjarlægð frá stofni þess. Þessi aðferð er mun hagkvæmari en að klifra upp í tréð og láta mjög langt málband síga niður.

1

Heimild: National Park Service. „General Sherman-tréð.“ http://www.nps.gov/seki/naturescience/sherman.htm. Skoðað 25. apríl 2014.

Í þessum kafla skoðum við hvernig nota má hornafræði til að leysa margvísleg verkefni, meðal annars að finna hæð trés. Við byggjum ofan á efni sem kynnt var í kaflanum um hornaföll og förum dýpra í notkun þess.

8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan

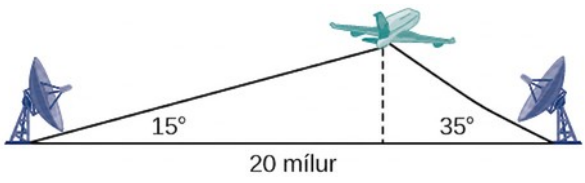
NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota sínusregluna til að leysa órétthyrnda þríhyrninga.
- Finna flatarmál órétthyrnds þríhyrnings með sínusfallinu.
- Leysa hagnýt verkefni með sínusreglunni.

8

Á álagstímum geta rúmlega 5.000 bandarískar flugvélar verið samtímis á lofti. Til að tryggja öryggi þeirra fá flugumferðarstjórar gögn frá öflugu ratsjárvitakerfi, fylgjast með vélunum og eiga samskipti við þær. Gerum ráð fyrir að tvær ratsjárstöðvar í 20 mílna fjarlægð hvor frá annarri greini flugvél á milli sín. Háhornið sem fyrri stöðin mælir er 35 gráður en háhornið sem sú síðari mælir er 15 gráður. Hvernig getum við fundið flughæð vélarinnar? Á mynd 1 sést að þríhyrningurinn sem flugvélin og stöðvarnar tvær mynda er ekki rétthyrndur og því getum við ekki notað það sem við vitum um rétthyrnda þríhyrninga. Í þessum hluta lærum við að leysa verkefni um órétthyrnda þríhyrninga.



Mynd 1

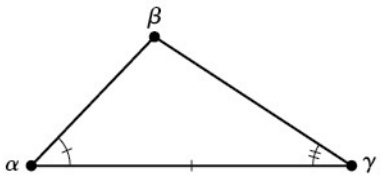
Notkun sínusreglunnar til að leysa órétthyrnda þríhyrninga

Í hvaða þríhyrningi sem er getum við dregið hæð, það er hornrétta línu frá einum hornpunkti að mótlægri hlið, og þannig myndað tvo rétthyrnda þríhyrninga. Þó væri betra að hafa

aðferðir sem nota má beint á órétthyrnda þríhyrninga, án þess að búa fyrst til rétthyrnda þríhyrninga.

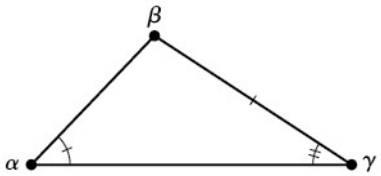
Þríhyrningur sem er ekki rétthyrndur kallast órétthyrndur þríhyrningur. Að leysa órétthyrndan þríhyrning merkir að finna stærðir allra þriggja hornanna og lengdir allra þriggja hliðanna. Til þess þurfum við að þekkja að minnsta kosti þrjár þessara stærða, þar á meðal lengd að minnsta kosti einnar hliðar. Við skoðum þrjár mögulegar gerðir verkefna um órétthyrnda þríhyrninga:

1. **ASA (horn–hlið–horn)** Við þekkjum stærðir tveggja horna og hliðarinnar á milli þeirra. Sjá mynd 2.



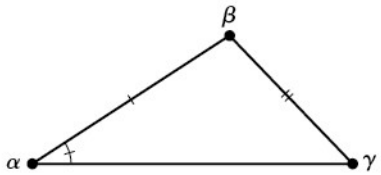
Mynd 2

2. AAS (horn–horn–hlið) Við þekkjum stærðir tveggja horna og hlið sem liggur ekki á milli þekktu hornanna. Sjá mynd 3. Mynd



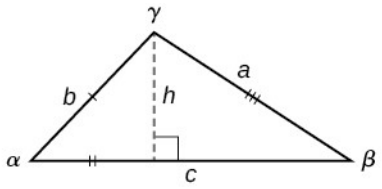
Mynd 3

3. SSA (hlið–hlið–horn) Við þekkjum lengdir tveggja hliða og stærð horns sem liggur ekki á milli þekktu hliðanna. Sjá mynd 4. Mynd



Mynd 4

Ef við kunnum að leysa hverja þessara gerða getum við leyst órétthyrnda þríhyrninga án þess að draga hornrétta línu og mynda tvo rétthyrnda þríhyrninga. Þess í stað getum við notað að hlutfall sínuss horns og lengdar mótlægrar hliðar er hið sama fyrir öll þrjú hornin. Skoðum hvernig þetta er leitt út með þríhyrningnum á mynd 5.



Mynd 5

Af tengslum í rétthyrndum þríhyrningum vitum við að $\sin\alpha = \frac{h}{b}$ og $\sin\beta = \frac{h}{a}$. Ef við leysum báðar jöfnurnar fyrir h fást tvær ólíkar stæður fyrir h.

$$h = b\sin\alpha \text{ og } h = a\sin\beta$$

Síðan setjum við stæðurnar jafnar hvor annarri.

$$b\ \sin\ \alpha = a\ \sin\ \beta$$

$\left(\frac{1}{a\ b}\right)(b\ \sin\ \alpha) = (a\ \sin\ \beta)\left(\frac{1}{a\ b}\right)$ Margfaldið báðar hliðar með $\frac{1}{a\ b}$.

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b}$$

Á sama hátt getum við borið saman hin hlutföllin.

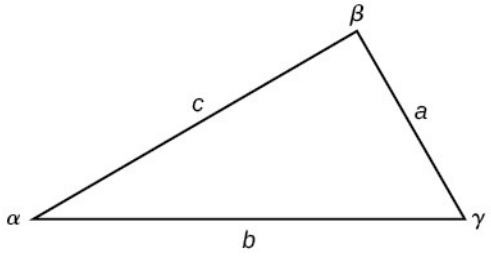
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \text{ og } \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Þessi tengsl kallast einu nafni sínusreglan.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Athugið hefðbundna merkingu þríhyrninga: hornið α (alfa) er á móti hliðinni a; hornið β (beta) er á móti hliðinni b; og hornið γ (gamma) er á móti hliðinni c. Sjá mynd 6.

Þegar horn og hliðar eru reiknuð skal nota nákvæm gildi alla leið að lokasvarinu. Lokasvör eru yfirleitt námunduð að næsta tíunda hluta nema annað sé tekið fram.



Mynd 6

SÍNUSREGLAN

Fyrir þríhyrning þar sem horn og mótlægar hliðar eru merkt eins og á mynd 6 eru hlutföll sínuss hvers horns og lengdar mótlægrar hliðar jöfn. Öll hlutföllin eru því jöfn. Sínusreglan byggist á hlutföllum og má rita á tvo táknræna vegu.

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

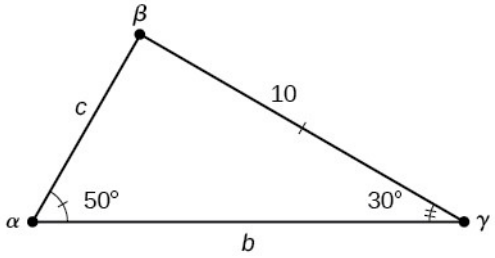
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Notið eitthvert par af þeim hlutföllum sem eiga við til að leysa óréttþyrndan þríhyrning.

DÆMI 1

Lausn fyrir tvær óþekktar hliðar og horn í AAS-þríhyrningi

Leysið þríhyrninginn á mynd 7 og námundið að næsta tíunda hluta.



Mynd 7

Lausn

Hornin þrjú verða samanlagt 180 gráður. Af því leiðir að

$$\begin{aligned}\beta &= 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ \\ &= 100^\circ\end{aligned}$$

Til að finna óþekkta hlið þurfum við að þekkja mótlæga hornið og eitt þekkt hlutfall. Við vitum að hornið $\alpha=50^\circ$ og mótlæg hlið þess er $a=10$. Við getum notað þetta hlutfall úr sínusreglunni til að finna lengd c.

$$\frac{\sin(50°)}{10}=\frac{\sin(30°)}{c}$$

$c\,\dfrac{\sin(50°)}{10}=\sin(30°)$ Margfaldið báðar hliðar með c.

$c=\sin(30°)\,\dfrac{10}{\sin(50°)}$ Margfaldið með umhverfunni til að einangra c.

$$c \approx 6{,}5$$

Til að leysa fyrir b, setjum við á sama hátt upp annað hlutfall.

$$\frac{\sin(50°)}{10} = \frac{\sin(100°)}{b}$$

$b \sin(50°) = 10 \sin(100°)$ Margfaldið báðar hliðar með b.

$b = \frac{10 \sin(100°)}{\sin(50°)}$ Margfaldið með umhverfunni til að einangra b.

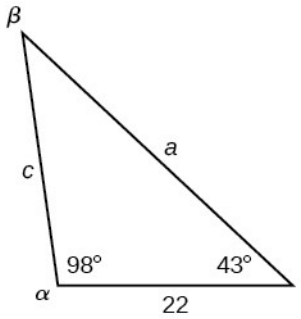
$$b \approx 12{,}9$$

Heildarlausnin fyrir horn og hliðar er því

$$\begin{array}{ll} \alpha = 50° & a = 10 \\ \beta = 100° & b \approx 12{,}9 \\ \gamma = 30° & c \approx 6{,}5 \end{array}$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Leysið þríhyrninginn á mynd 8 og námundið að næsta tíunda hluta.



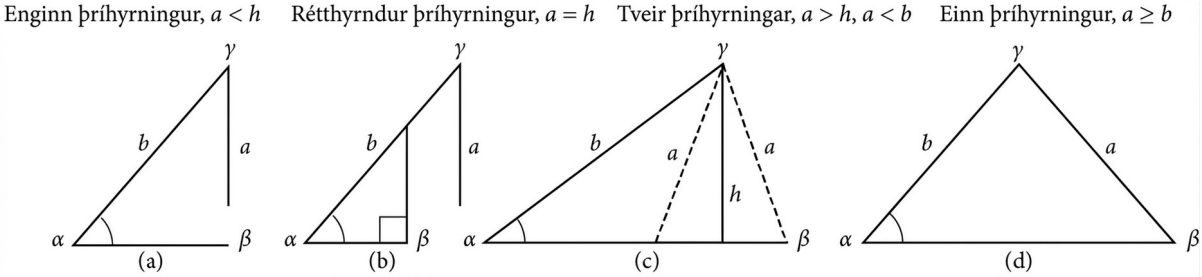
Mynd 8

Notkun sínusreglunnar til að leysa SSA-þríhyrninga

Nota má sínusregluna til að leysa alla óréttþyrnda þríhyrninga, en lausnin er ekki alltaf einföld. Stundum uppfyllir fleiri en einn þríhyrningur gefnu skilyrðin og það köllum við tvíræða tilvikið. Í SSA-þríhyrningum eru gefnar lengdir tveggja hliða og stærð horns á móti annarri þeirra. Slíkir þríhyrningar geta haft eina lausn, tvær lausnir eða jafnvel enga.

MÖGULEGAR NIÐURSTÖÐUR FYRIR SSA-ÞRÍHYRNINGA

Óréttþyrndir þríhyrningar af gerðinni SSA geta haft fjórar ólíkar niðurstöður. Mynd 9 sýnir lausnirnar með þekktum hliðum a og b og þekktu horni α.

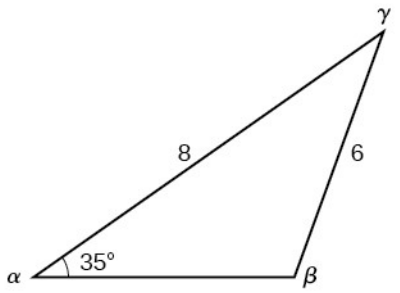


Mynd 9

DÆMI 2

Lausn órétthyrnds SSA-þríhyrnings

Finnið óþekktu hliðina í þríhyrningnum á mynd 10 og stærðir óþekktu hornanna, námundað að næsta tíunda hluta.



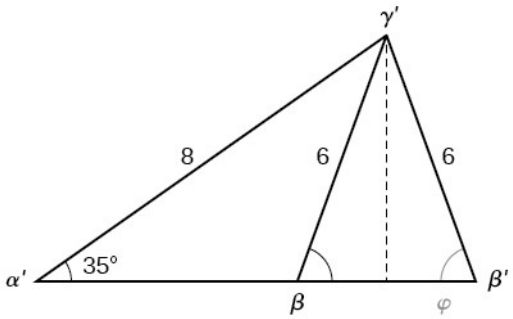
Mynd 10

Lausn

Notið sínusregluna til að finna hornið β og hornið γ, og síðan hliðina c. Til að leysa fyrir β, notum við hlutfallið

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b}$$
$$\frac{\sin\left(35°\right)}{6} = \frac{\sin\ \beta}{8}$$
$$\frac{8\ \sin\left(35°\right)}{6} = \sin\ \beta$$
$$0{,}7648 \approx \sin\ \beta$$
$$\sin^{-1}\left(0{,}7648\right) \approx 49{,}9°$$
$$\beta \approx 49{,}9°$$

Á myndinni virðist hornið β hins vegar vera gleitt og gæti verið stærra en 90°. Hvernig fengum við hvasst horn og hvernig finnum við stærð β? Skoðum þetta nánar. Við drögum hornrétta línu frá γ og skoðum þríhyrninginn út frá rétthyrndum þríhyrningi, eins og á mynd 11. Svo virðist sem annar þríhyrningur geti einnig uppfyllt gefnu skilyrðin.



Mynd 11

Grannhorn β er um það bil 49,9°, sem þýðir að $\beta = 180^\circ - 49{,}9^\circ = 130{,}1^\circ$. (Munið að sínusfallið er jákvætt bæði í fyrsta og öðrum fjórðungi.) Þegar leyst er fyrir γ, fæst

$$\gamma = 180^\circ - 35^\circ - 130{,}1^\circ \approx 14{,}9^\circ$$

Þá getum við notað þessar stærðir til að leysa hinn þríhyrninginn. Þar sem γ' er grannhorn summu α' og β', fæst

$$\gamma' = 180^\circ - 35^\circ - 49{,}9^\circ \approx 95{,}1^\circ$$

Nú þurfum við að finna c og c'.

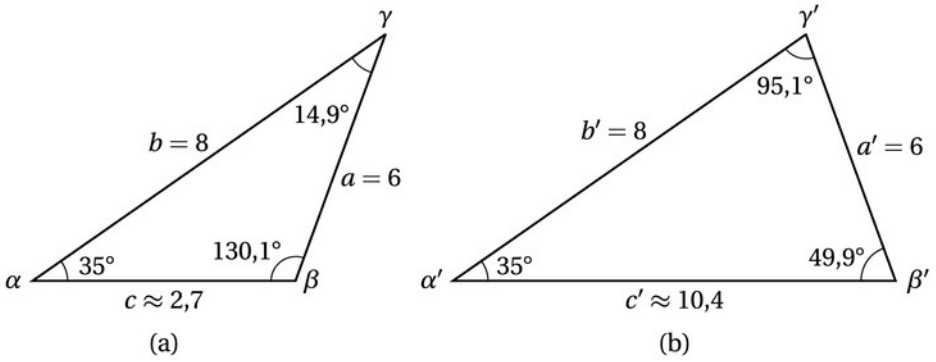
Við fáum

$$\frac{c}{\sin(14{,}9^\circ)} = \frac{6}{\sin(35^\circ)}$$
$$c = \frac{6\sin(14{,}9^\circ)}{\sin(35^\circ)} \approx 2{,}7$$

Að lokum

$$\frac{c'}{\sin(95{,}1^\circ)} = \frac{6}{\sin(35^\circ)}$$
$$c' = \frac{6\sin(95{,}1^\circ)}{\sin(35^\circ)} \approx 10{,}4$$

Í stuttu máli eru til tveir þríhyrningar með 35° horn, aðlæga hlið með lengdina 8 og mótlæga hlið með lengdina 6, eins og sýnt er á mynd 12.



Mynd 12

Við leituðum þó að gildunum fyrir þríhyrninginn með gleiða hornið β. Þau sjást í fyrri þríhyrningnum (a) á mynd 12.

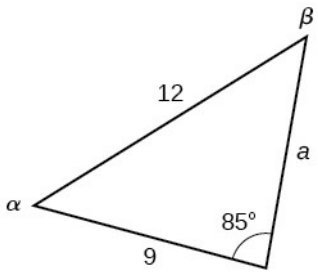
REYNIÐ SJÁLF #2

Gefið er $\alpha = 80^\circ$, $a = 120$, og $b = 121$,. Finnið óþekktu hliðina og hornin. Ef fleiri en ein lausn er möguleg skal sýna þær báðar.

DÆMI 3

Lausn fyrir óþekktar hliðar og horn SSA-þríhyrnings

Leysið fyrir óþekktu hliðina og hornin í þríhyrningnum á mynd 13. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.



Mynd 13

Lausn

Skoðið gefnu upplýsingarnar þegar þið veljið hvaða hlutfallapar úr sínusreglunni á að nota. Hér þekkjum við hornið $\gamma = 85^\circ$, og mótlæga hlið þess $c = 12$, og við þekkjum hliðina $b = 9$. Við notum þetta hlutfall til að leysa fyrir β.

$$\frac{\sin(85^\circ)}{12} = \frac{\sin\ \beta}{9}$$

Einangrið óþekktu stærðina.

$$\frac{9\sin(85^\circ)}{12} = \sin\ \beta$$

Til að finna β, notið þið andhverfa sínusfallið. Það gefur eitt gildi en hafið í huga að tvö gildi geta komið til greina fyrir β. Mikilvægt er að sannreyna niðurstöðuna. Gildar lausnir geta verið tvær, aðeins ein (algengasta tilvikið) eða engin.

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{9\,\sin\left(85°\right)}{12}\right)$$
$$\beta \approx \sin^{-1}\left(0{,}7471\right)$$
$$\beta \approx 48{,}3°$$

Ef β er dregið frá 180°, sést hér að önnur lausn gæti verið til. Því er $\beta = 180^\circ - 48{,}3^\circ \approx 131{,}7^\circ$. Til að kanna lausnina drögum við bæði hornin, 131,7° og 85°, frá 180°. Það gefur

$$\alpha = 180^\circ - 85^\circ - 131{,}7^\circ \approx -36{,}7^\circ,$$

sem er ómögulegt og því er $\beta \approx 48{,}3^\circ$.

Til að finna þau gildi sem enn vantar reiknum við $\alpha = 180^\circ - 85^\circ - 48{,}3^\circ \approx 46{,}7^\circ$. Nú vantar aðeins hliðina a. Notið eitt hlutfallanna í sínusreglunni til að leysa fyrir a.

$$\frac{\sin\left(85°\right)}{12} = \frac{\sin\left(46{,}7°\right)}{a}$$
$$a\,\frac{\sin\left(85°\right)}{12} = \sin\left(46{,}7°\right)$$
$$a = \frac{12\,\sin\left(46{,}7°\right)}{\sin\left(85°\right)} \approx 8{,}8$$

Heildarlausnin fyrir gefna þríhyrninginn er

$$\alpha \approx 46{,}7° \quad a \approx 8{,}8$$
$$\beta \approx 48{,}3° \quad b = 9$$
$$\gamma = 85° \quad c = 12$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Gefið er $\alpha = 80^\circ, a = 100, b = 10,$. Finnið óþekktu hliðina og hornin. Ef fleiri en ein lausn er möguleg skal sýna þær báðar. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.

DÆMI 4

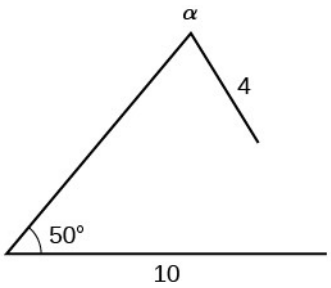
Þríhyrningar sem uppfylla gefin skilyrði

Finnið alla mögulega þríhyrninga ef ein hlið hefur lengdina 4 og er á móti 50° horni og önnur hlið hefur lengdina 10.

Lausn

Með gefnu upplýsingunum getum við leyst fyrir hornið á móti hliðinni sem hefur lengdina 10. Sjá mynd 14.

$$\frac{\sin\ \alpha}{10}=\frac{\sin\left(50°\right)}{4}$$
$$\sin\ \alpha=\frac{10\ \sin\left(50°\right)}{4}$$
$$\sin\ \alpha\approx 1{,}915$$



Mynd 14

Við getum hætt hér án þess að finna gildið á α. Þar sem myndmengi sínusfallsins er $\left[-1,1\right]$, getur sínusgildið ekki verið 1,915. Ef $\sin^{-1}\left(1{,}915\right)$ er slegið inn í grafíska reiknivél birtast raunar skilaboðin ERROR DOMAIN. Því er ekki hægt að teikna neinn þríhyrning með gefnum stærðum.

8

REYNIÐ SJÁLF #4

Ákvarðið hve margir þríhyrningar eru mögulegir þegar

$$a=31,$$

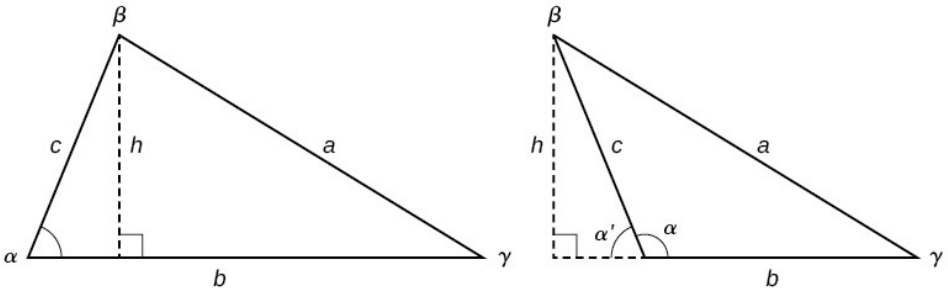
$$b=26,$$

$$\beta=48^{\circ}.$$

Flatarmál órétthyrnds þríhyrnings fundið með sínusfallinu

Nú þegar við getum fundið óþekkt gildi í þríhyrningi getum við notað sum þeirra ásamt sínusfallinu til að finna flatarmál órétthyrnds þríhyrnings. Munið að flatarmálsformúla þríhyrnings er Flatarmál $=\frac{1}{2}bh$, þar sem b er grunnlínan og h er hæðin. Fyrir órétthyrnda þríhyrninga verðum við að finna h áður en við getum notað flatarmálsformúluna. Skoðum þríhyrningana tvo á mynd 15, annan hvasshyrndan og hinn gleiðhyrndan. Við getum dregið hornrétta línu sem táknar hæðina og síðan notað hornafræðitengslin $\sin\alpha=\frac{\text{mótlæg}}{\text{langhlið}}$ til að setja fram jöfnu fyrir flatarmál órétthyrndra þríhyrninga. Í hvasshyrnda þríhyrningnum er

$\sin\alpha = \frac{h}{c}$ eða $c\sin\alpha = h$. Í gleiðhyrnda þríhyrningnum drögum við hins vegar hornréttu línuna utan við þríhyrninginn og framlengjum grunnlínuna b til að mynda rétthyrndan þríhyrning. Hornið sem notað er í útreikningnum er α', eða $180 - \alpha$.



Mynd 15

Því er

$$\text{Flatarmál} = \frac{1}{2}(\text{grunnlína})(\text{hæð}) = \frac{1}{2}b(c\sin\alpha)$$

Á sama hátt fæst

$$\text{Flatarmál} = \frac{1}{2}a(b\sin\gamma) = \frac{1}{2}a(c\sin\beta)$$

FLATARMÁL ÓRÉTTHYRNDS ÞRÍHYRNINGS

Formúlan fyrir flatarmál óréttthyrnds þríhyrnings er

$$\begin{aligned}\text{Flatarmál} &= \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin\ \alpha \\ &= \frac{1}{2}\ a\ c\ \sin\ \beta \\ &= \frac{1}{2}\ a\ b\ \sin\ \gamma\end{aligned}$$

Þetta jafngildir helmingi margfeldis tveggja hliða og sínuss hornsins á milli þeirra.

DÆMI 5

Flatarmál óréttthyrnds þríhyrnings fundið

Finnið flatarmál þríhyrnings með hliðarnar $a = 90, b = 52$, og hornið $\gamma = 102^\circ$. Námundið flatarmálið að næstu heilu tölu.

Lausn

Með formúlunni fæst

$$\text{Flatarmál} = \frac{1}{2}\, a\, b \sin \gamma$$

$$\text{Flatarmál} = \frac{1}{2}\,(90)\,(52) \sin (102^\circ)$$

$$\text{Flatarmál} \approx 2289 \text{ fereiningar}$$

REYNIÐ SJÁLF #5

Finnið flatarmál þríhyrningsins þegar $\beta = 42^\circ$, $a = 7{,}2$ ft, $c = 3{,}4$ ft. Námundið flatarmálið að næsta tíunda hluta.

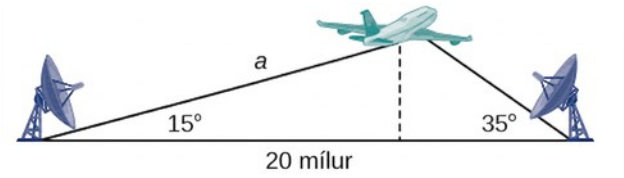
Lausn hagnýtra verkefna með sínusreglunni

Því meira sem við kynnumst notkun hornafræði, því betur sjáum við að hún nýtist á óteljandi vegu. Sum verkefni eru tvívíð og má sýna þau á teikningu, en mörg verkefni í stærðfræðigreiningu, verkfræði og eðlisfræði fjalla um þrívídd og hreyfingu.

DÆMI 6

Flughæð fundin

Finnið flughæð vélarinnar í verkefninu í upphafi þessa hluta, sem sýnt er á mynd 16. Námundið hæðina að næsta tíunda hluta úr mílu.



Mynd 16

Lausn

Til að finna flughæð vélarinnar finnum við fyrst fjarlægðina frá annarri stöðinni að vélinni, til dæmis hliðina a, og notum síðan tengsl í rétthyrndum þríhyrningi til að finna hæð vélarinnar, h.

Horn þríhyrningsins eru samanlagt 180 gráður og því hlýtur óþekkta hornið að vera $180° - 15° - 35° = 130°$. Hornið er á móti hliðinni sem hefur lengdina 20 og því getum við sett upp hlutfall samkvæmt sínusreglunni.

$$\frac{\sin\left(130°\right)}{20}=\frac{\sin\left(35°\right)}{a}$$
$$a\sin\left(130°\right)=20\sin\left(35°\right)$$
$$a=\frac{20\sin\left(35°\right)}{\sin\left(130°\right)}$$
$$a\approx 14{,}98$$

Fjarlægðin frá annarri stöðinni að flugvélinni er um 14,98 mílur.

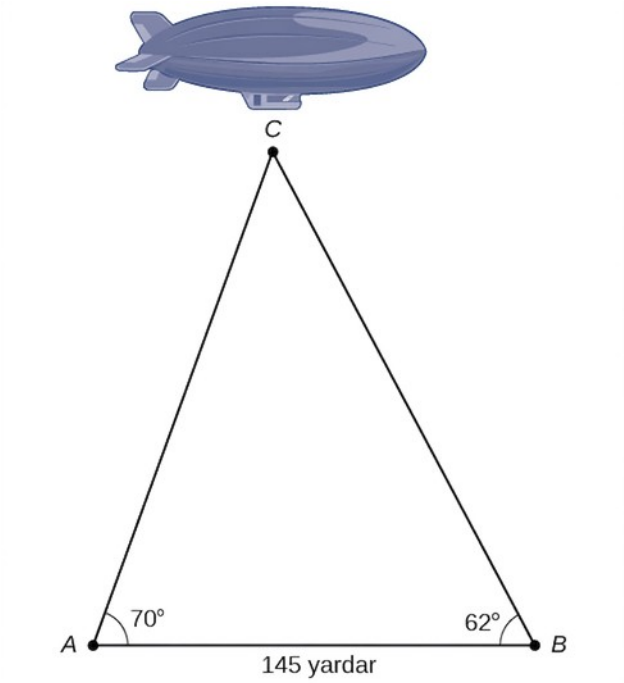
Nú þegar við þekkjum a, getum við notað tengsl í rétthyrndum þríhyrningi til að leysa fyrir h.

$$\sin\left(15°\right)=\frac{\text{mótlæg}}{\text{langhlið}}$$
$$\sin\left(15°\right)=\frac{h}{a}$$
$$\sin\left(15°\right)=\frac{h}{14{,}98}$$
$$h=14{,}98\sin\left(15°\right)$$
$$h\approx 3{,}88$$

Flugvélin er í um það bil 3,9 mílna hæð.

REYNIÐ SJÁLF #6

Teikningin á mynd 17 sýnir hæð loftskips sem flýgur yfir knattspyrnuvelli. Finnið hæð loftskipsins ef háhornið frá syðra endamarkssvæðinu, punkti A, er 70°, háhornið frá nyrðra endamarkssvæðinu, punkti B, er 62° og fjarlægðin milli athugunarstaðanna á endamarkssvæðunum er 145 yardar.



Mynd 17

MARGMIÐLUN

Skoðið þessi vefgögn til að fá frekari kennslu og æfingu í notkun hornafræði.

- Sínusreglan: grunnatriði
- Sínusreglan: tvíræða tilvikið

8.1 Æfingar hluta

Spurningar

1. Lýsið hæð þríhyrnings.

2. Berið saman rétthyrnda og órétthyrnda þríhyrninga.

3. Hvenær má nota sínusregluna til að finna óþekkt horn?

4. Hvernig tengjast hornið í teljara og hliðin í nefnara í sínusreglunni?

5. Hvaða gerð þríhyrnings leiðir til tvíræða tilviksins?

Algebra

Gerið ráð fyrir því í dæmunum hér á eftir að α sé á móti hliðinni a, β sé á móti hliðinni b, og γ sé á móti hliðinni c. Leysið hvern þríhyrning ef unnt er. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.

6.

$$\alpha = 43^\circ, \gamma = 69^\circ, a = 20$$

7.

$$\alpha = 35^\circ, \gamma = 73^\circ, c = 20$$

8.

$$\alpha = 60^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 60^\circ$$

9.

$$a = 4,\ \alpha = 60^\circ,\ \beta = 100^\circ$$

10.

$$b = 10,\ \beta = 95^\circ, \gamma = 30^\circ$$

Notið sínusregluna í eftirfarandi dæmum til að finna hliðina sem vantar í hvern óréttthyrndan þríhyrning. Námundið hvert svar að næsta hundraðshluta. Gerið ráð fyrir að hornið A sé á móti hliðinni a, hornið B sé á móti hliðinni b, og hornið C sé á móti hliðinni c.

11. Finnið hliðina b þegar

$$A = 37^\circ,$$

$$B = 49^\circ,$$

$$c = 5.$$

12. Finnið hliðina a þegar $A = 132^\circ, C = 23^\circ, b = 10$.

13. Finnið hliðina c þegar

$$B = 37^\circ, C = 21^\circ,$$

$$b = 23.$$

Gerið ráð fyrir því í dæmunum hér á eftir að α sé á móti hliðinni a, β sé á móti hliðinni b, og γ sé á móti hliðinni c. Ákvarðið hvort enginn, einn eða tveir þríhyrningar séu mögulegir. Leysið síðan hvern þríhyrning ef unnt er. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.

14.

$$\alpha = 119^\circ, a = 14, b = 26$$

15.

$$\gamma = 113^\circ, b = 10, c = 32$$

16.

$$b = 3{,}5,\ c = 5{,}3,\ \gamma = 80^\circ$$

17.

$$a=12,\ c=17,\ \alpha=35^\circ$$

18.

$$a=20{,}5,\ b=35{,}0,\ \beta=25^\circ$$

19.

$$a=7,\ c=9,\ \alpha=43^\circ$$

20.

$$a=7, b=3, \beta=24^\circ$$

21.

$$b=13, c=5, \gamma=10^\circ$$

22.

$$a=2{,}3, c=1{,}8, \gamma=28^\circ$$

23.

$$\beta=119^\circ, b=8{,}2, a=11{,}3$$

Notið sínusregluna í dæmunum hér á eftir til að finna óþekktu hliðina eða hornið í hverjum þríhyrningi, ef það er hægt. Í tvíræða tilvikinu á það við um báða þríhyrningana. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.

8

24. Finnið hornið A þegar $a=24, b=5, B=22^\circ$.

25. Finnið hornið A þegar $a=13, b=6, B=20^\circ$.

26. Finnið hornið B þegar $A=12^\circ, a=2, b=9$.

Finnið flatarmál þríhyrningsins með gefnum stærðum í eftirfarandi dæmum. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.

27.

$$a=5, c=6, \beta=35^\circ$$

28.

$$b=11, c=8, \alpha=28^\circ$$

29.

$$a=32, b=24, \gamma=75^\circ$$

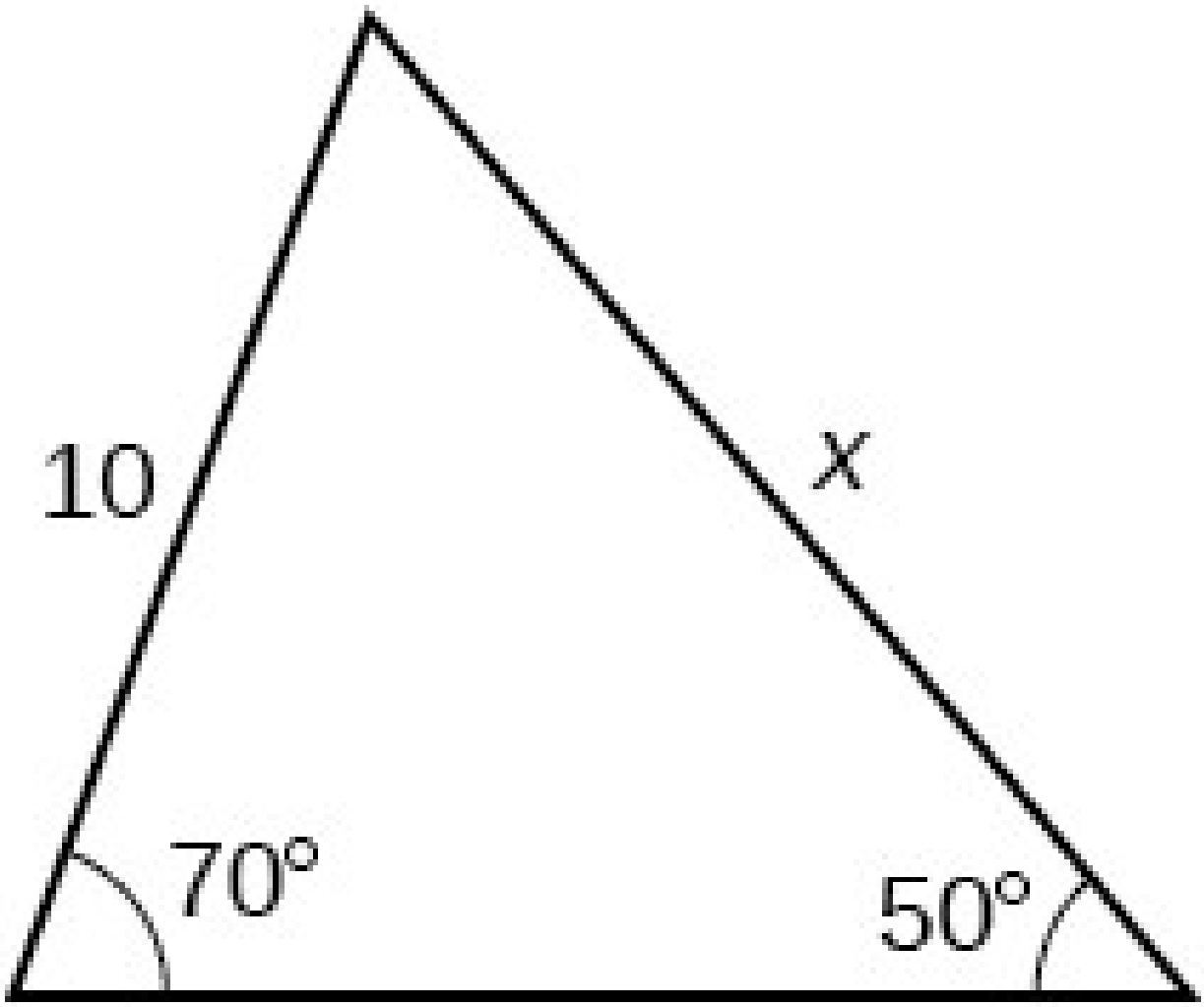
30.

$$a=7{,}2, b=4{,}5, \gamma=43^\circ$$

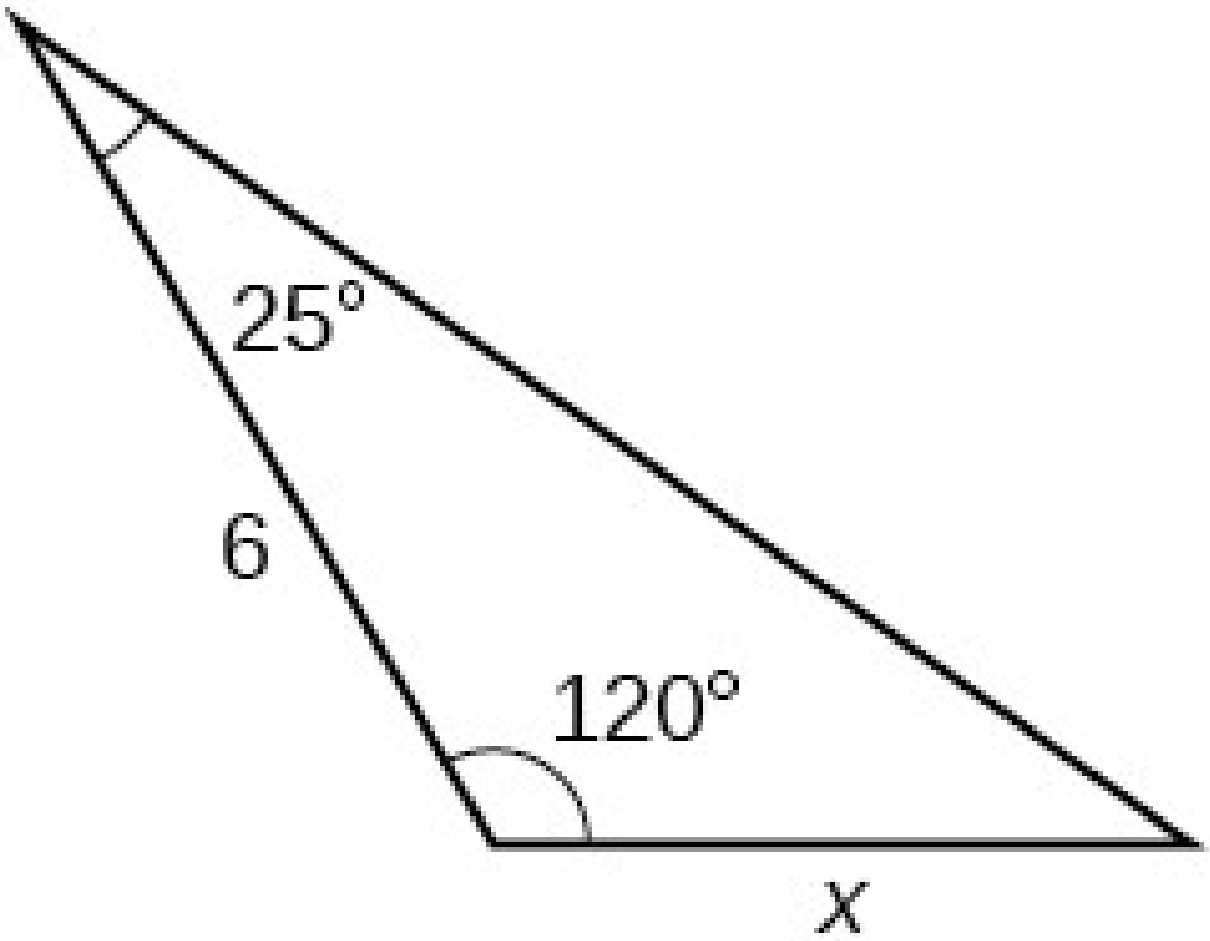
Myndrænt

Finnið í eftirfarandi dæmum lengd hliðarinnar x. Námundið að næsta tíunda hluta.

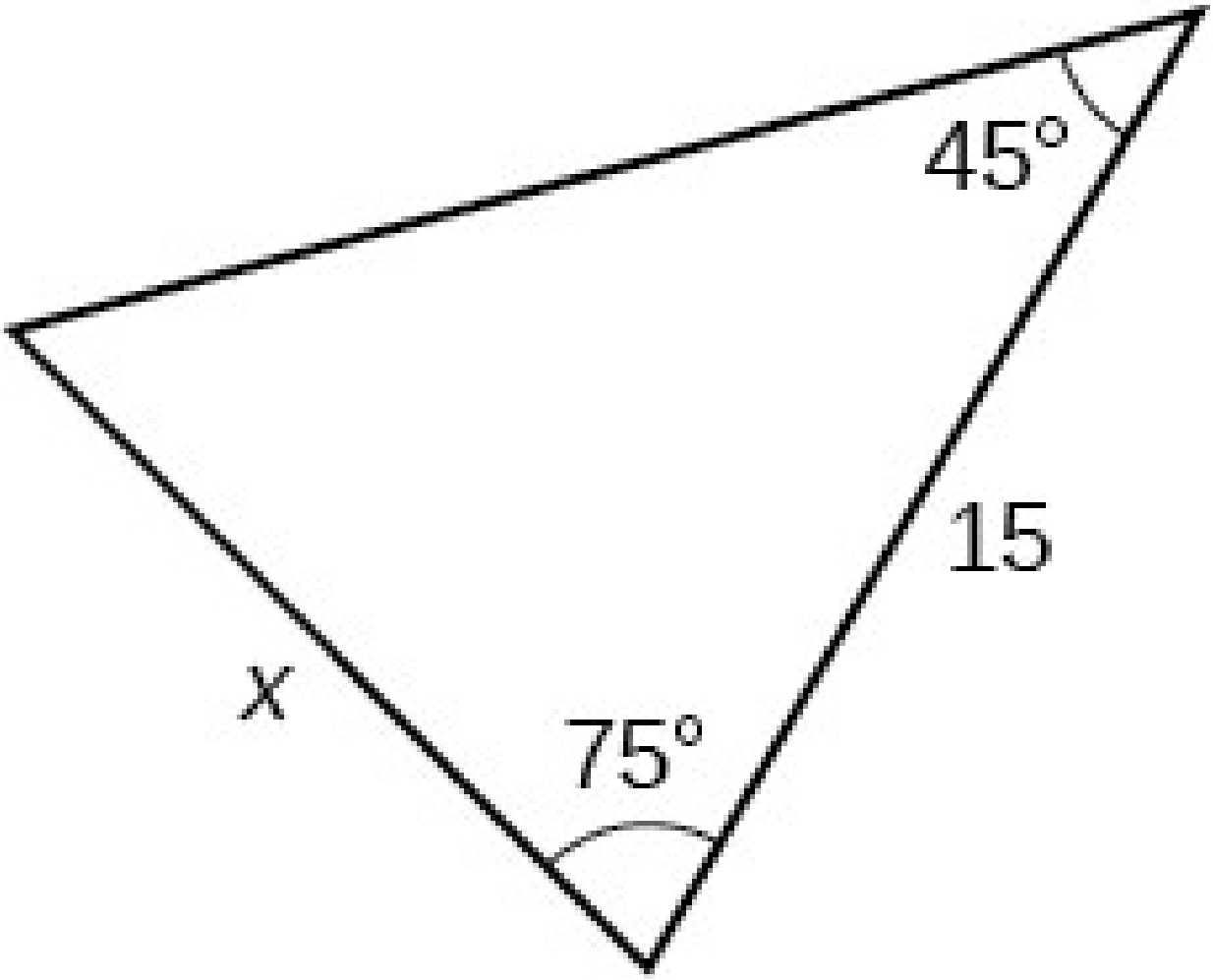
31.



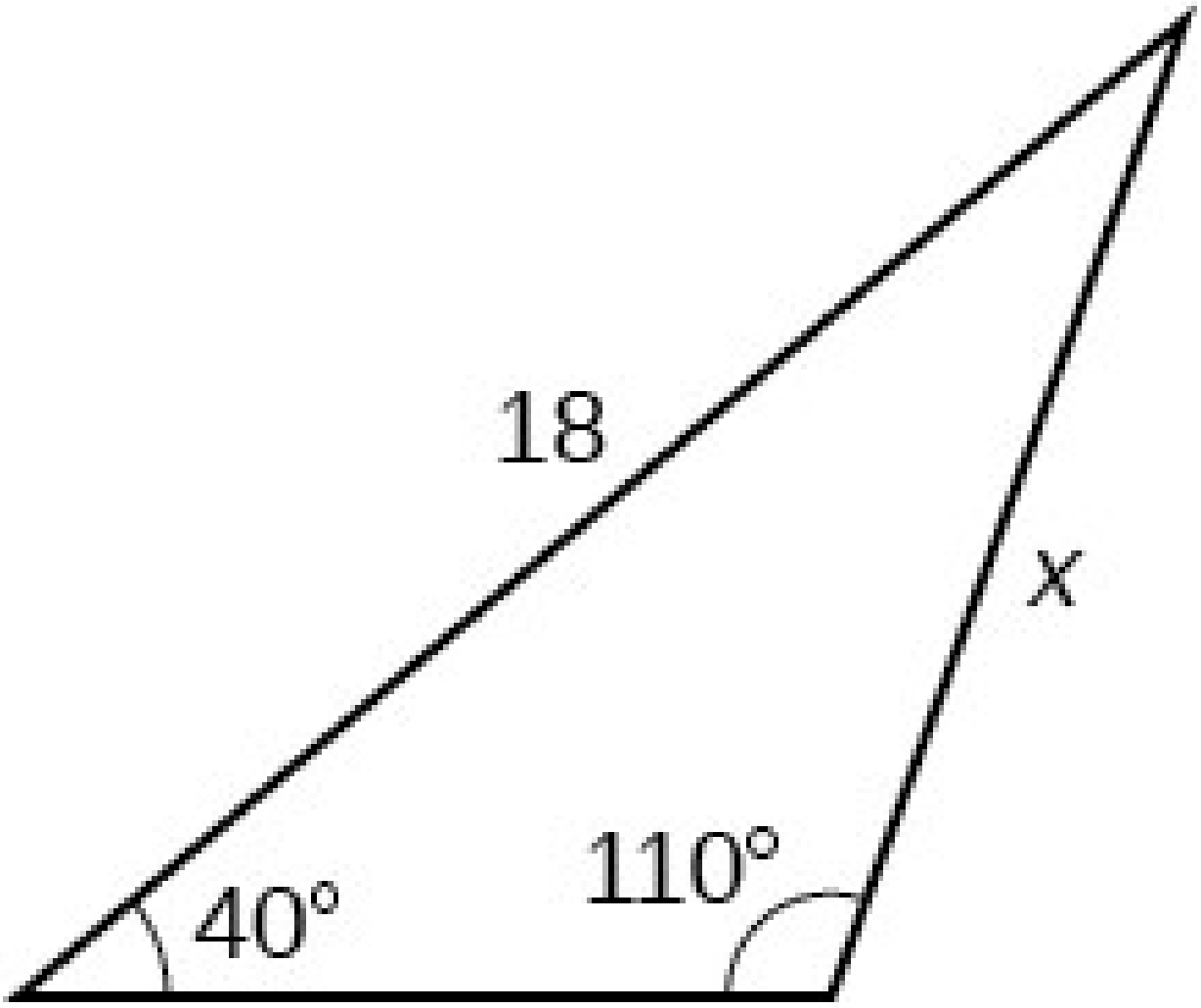
32.



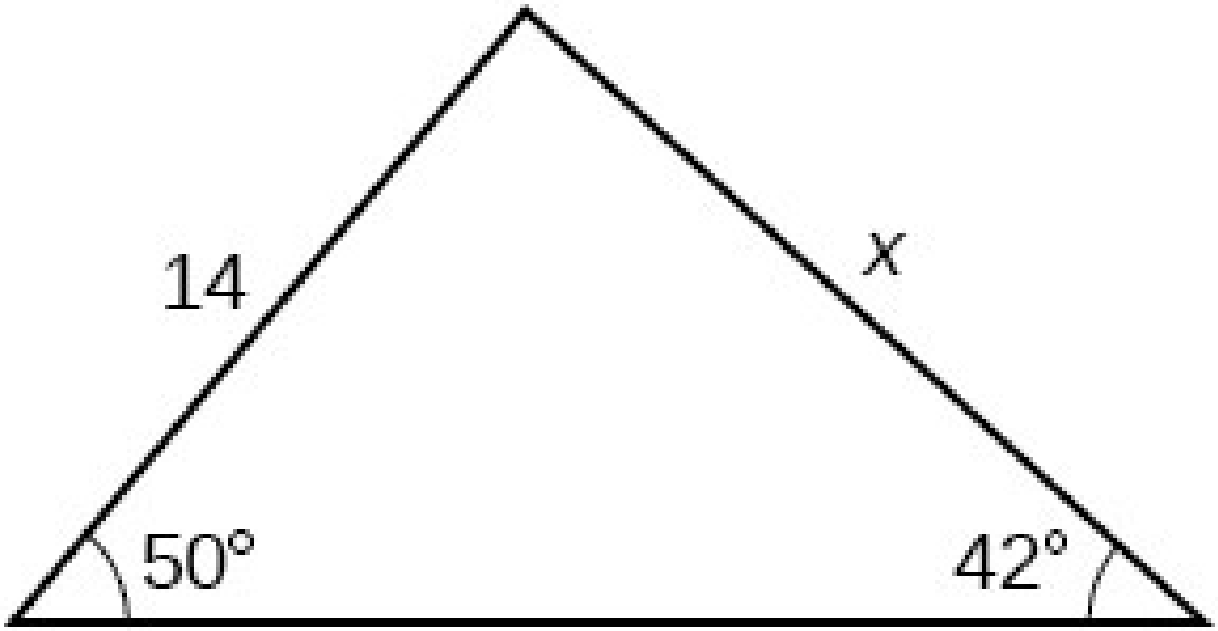
33.



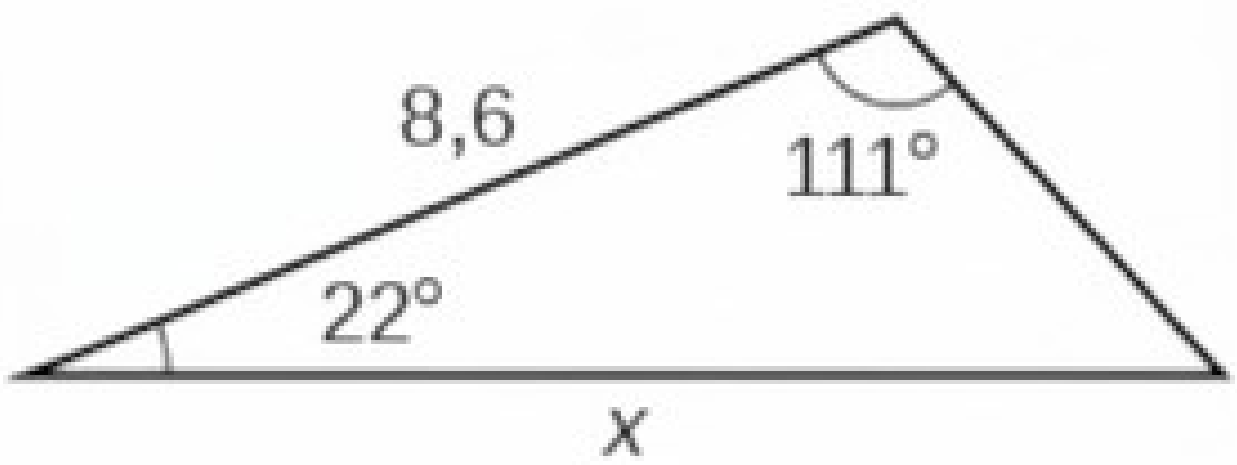
34.



35.

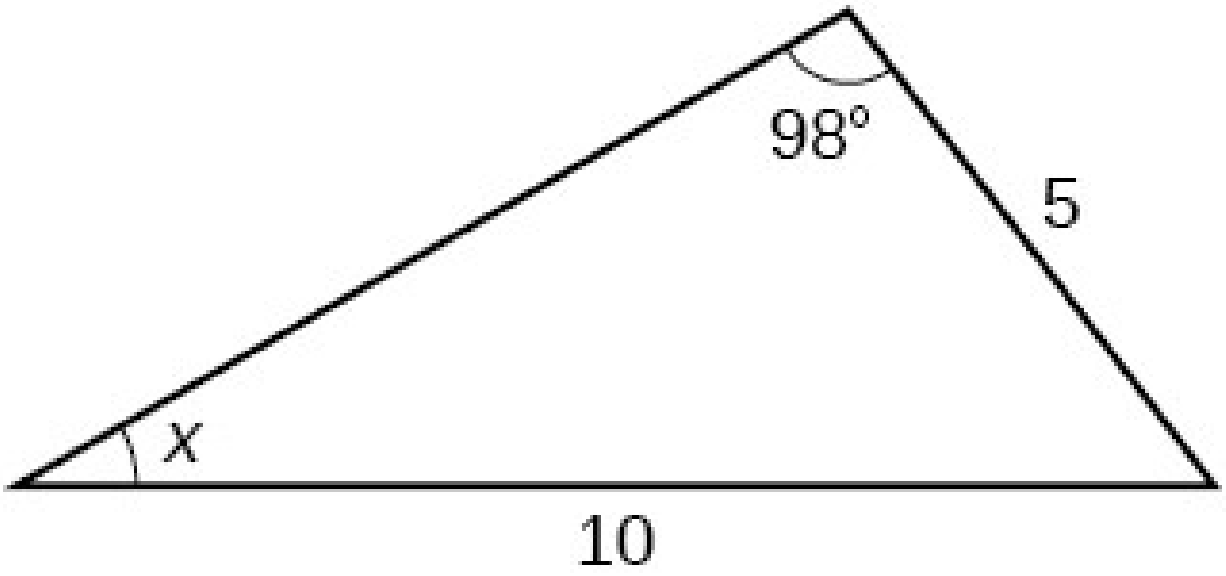


36.

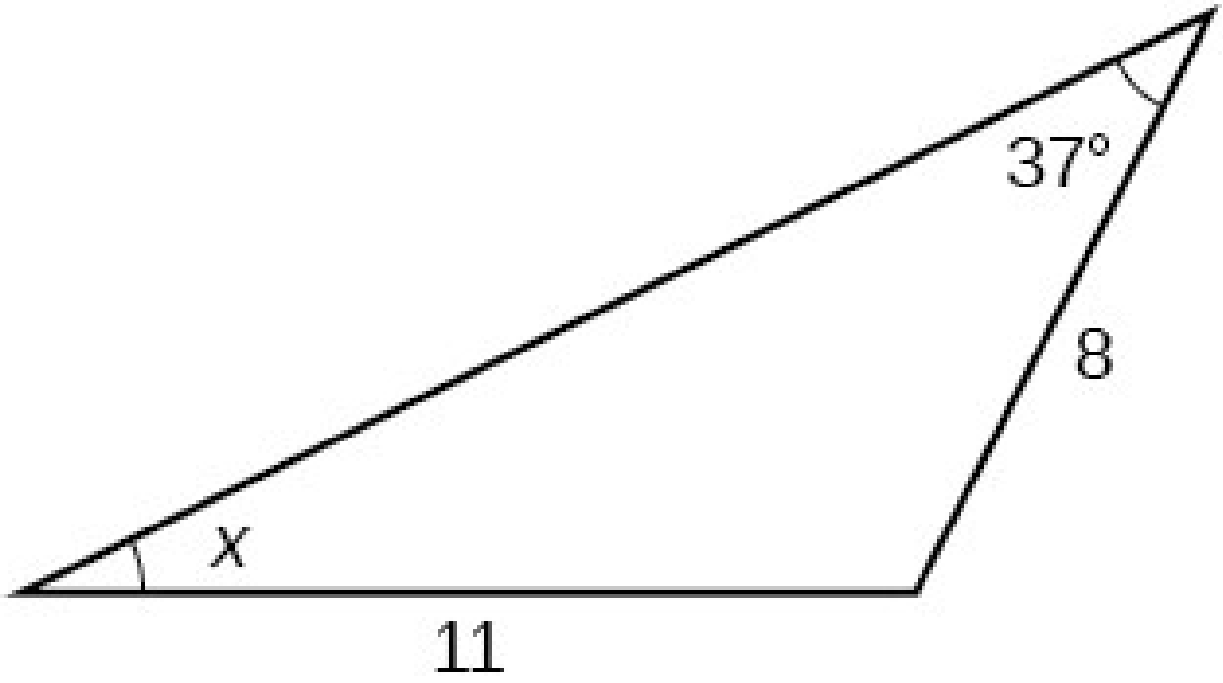


Finnið stærð hornsins x, í eftirfarandi dæmum ef unnt er. Námundið að næsta tíunda hluta.

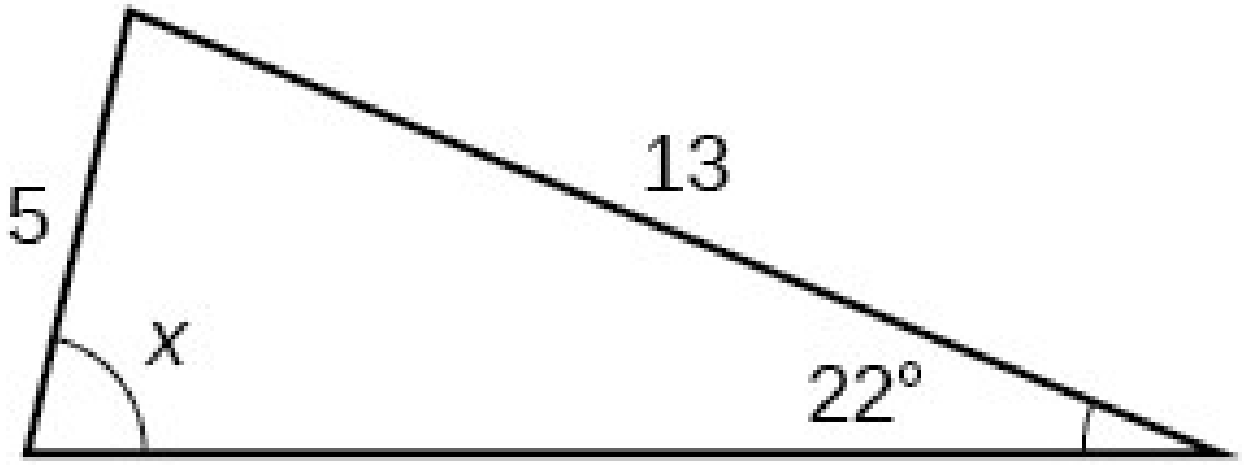
37.



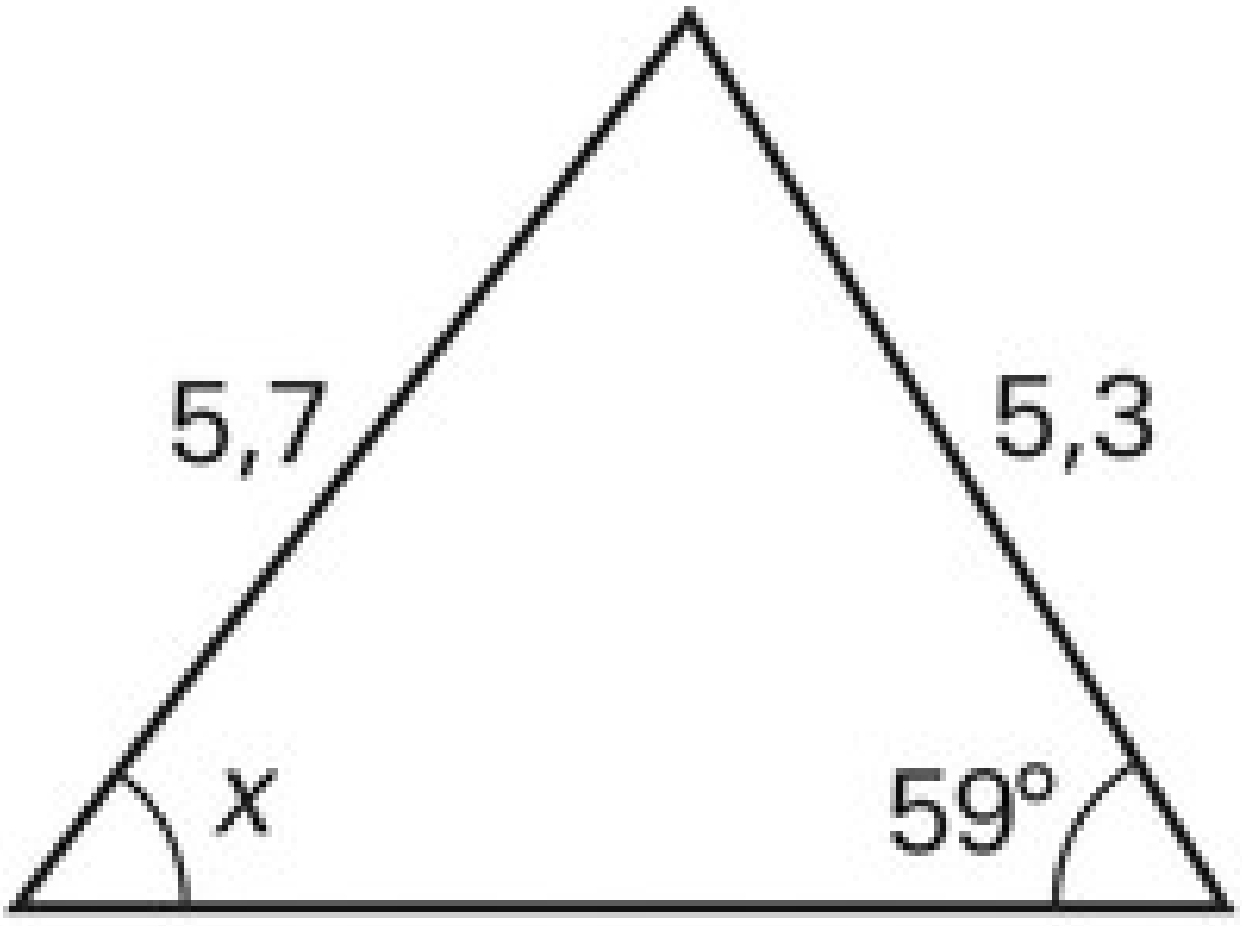
38.



39.

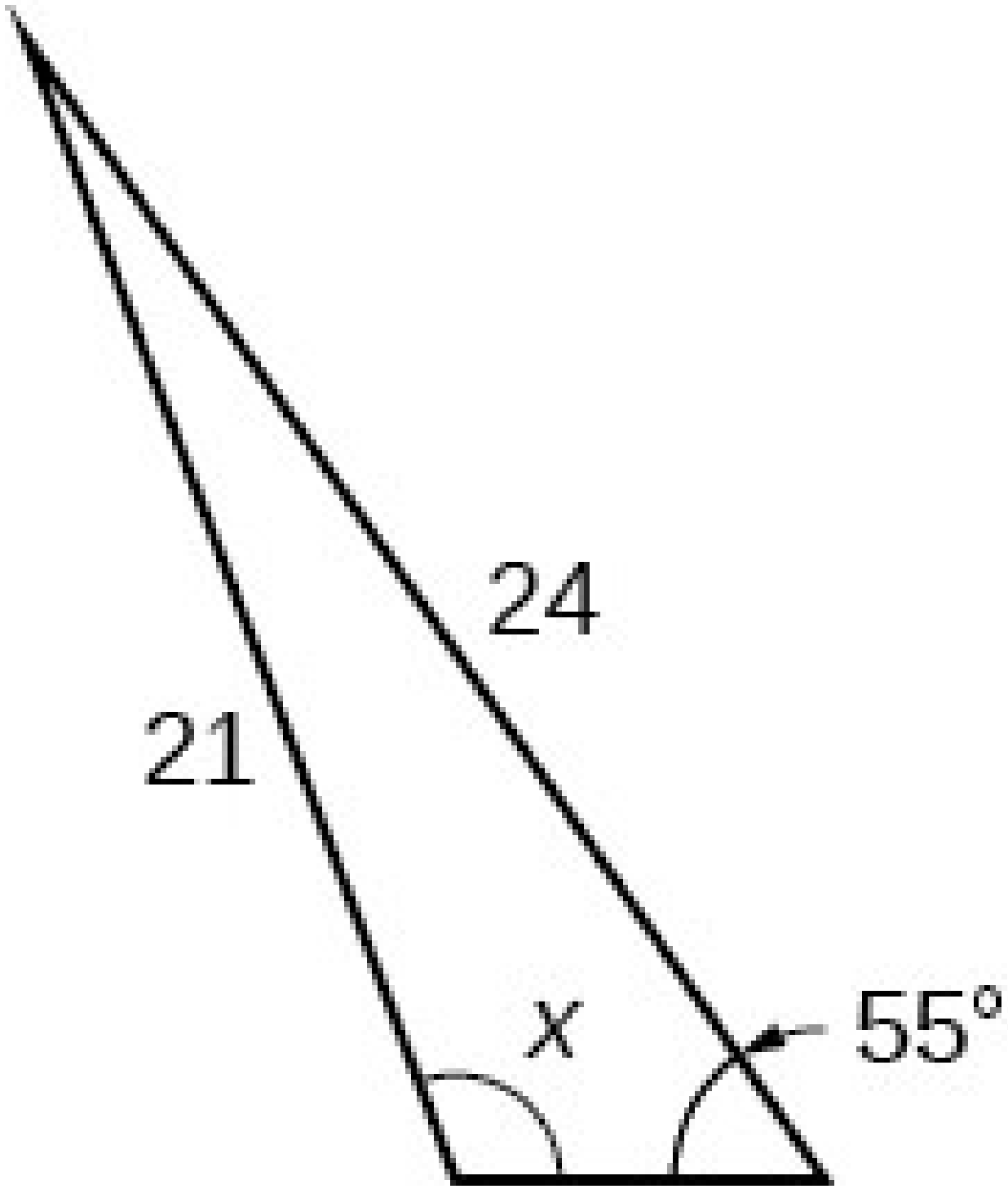


40.

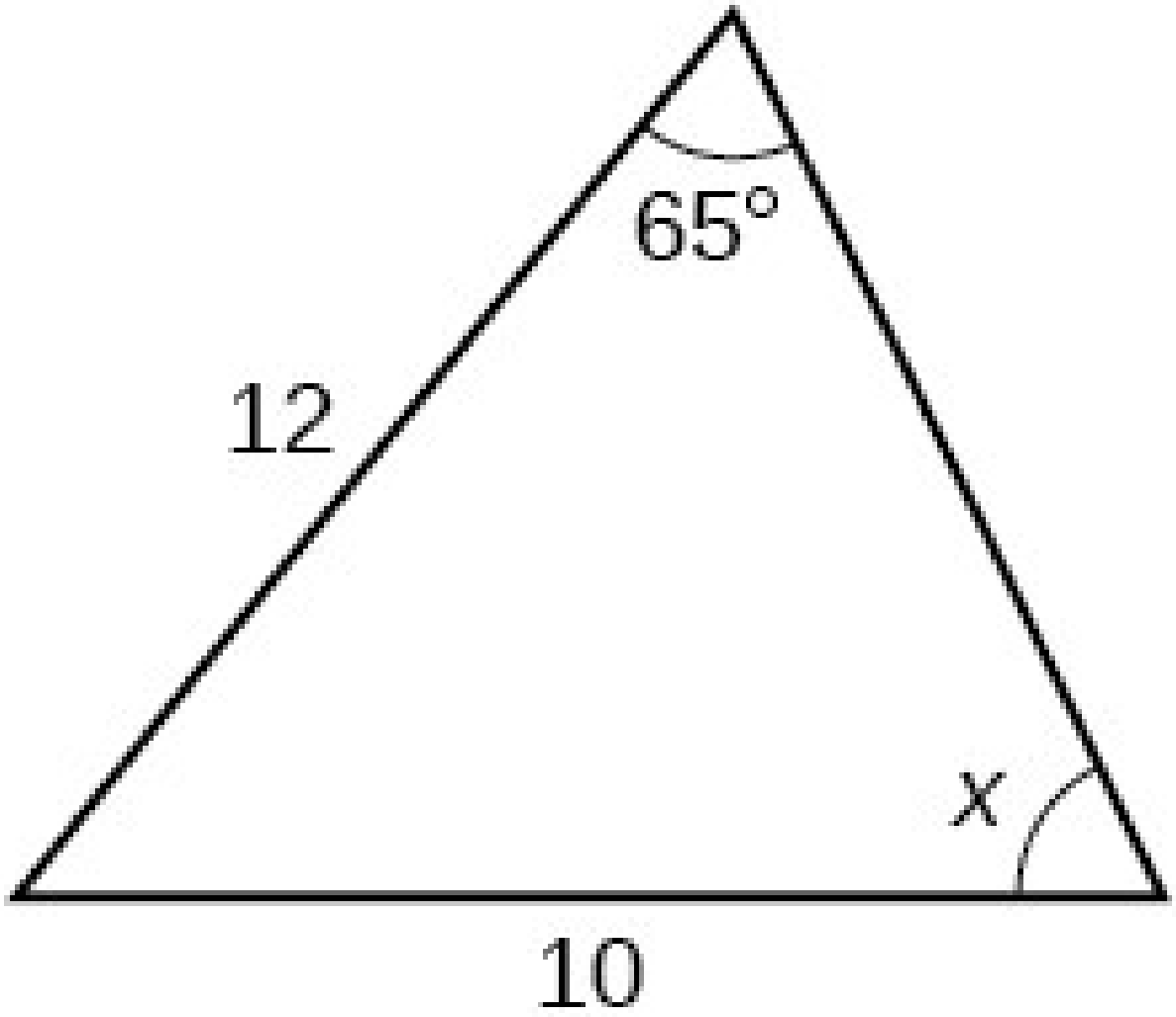


41. Athugið að x er gleitt horn.

8

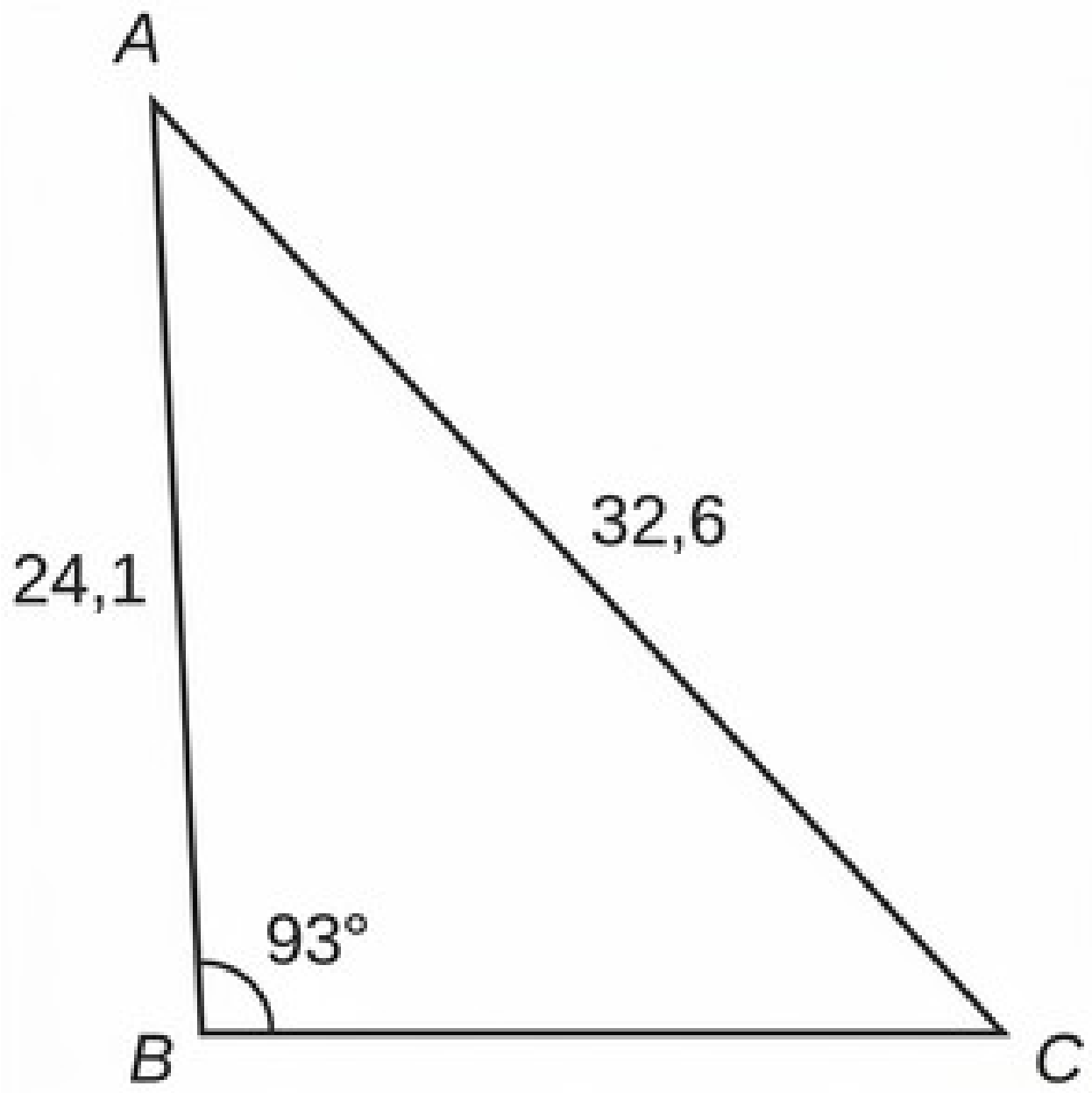


42.

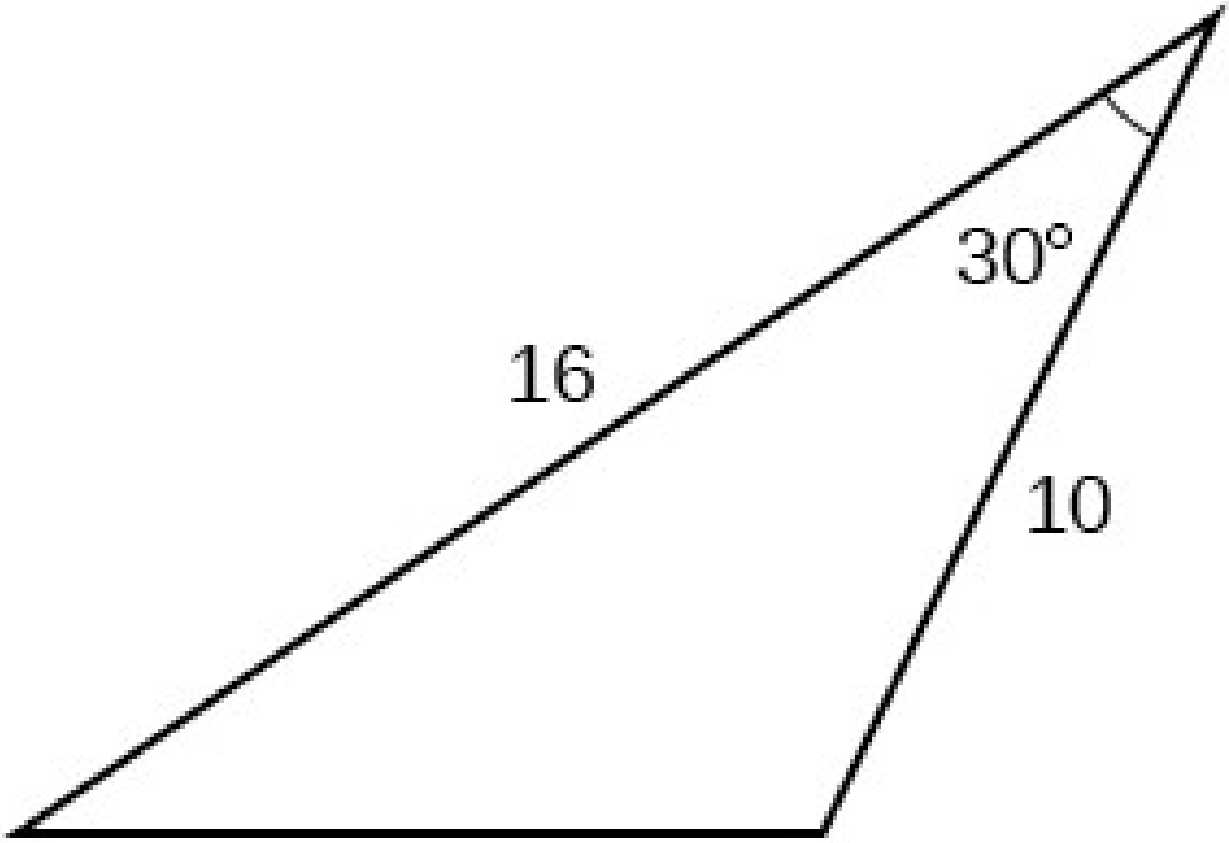


Leysið þríhyrninginn í eftirfarandi dæmi. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.

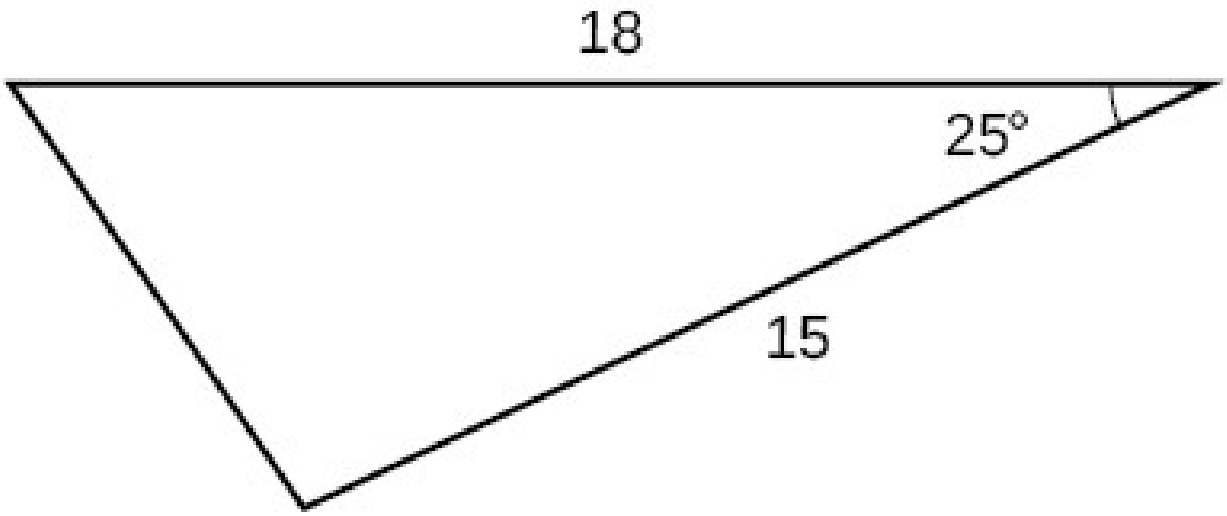
43.



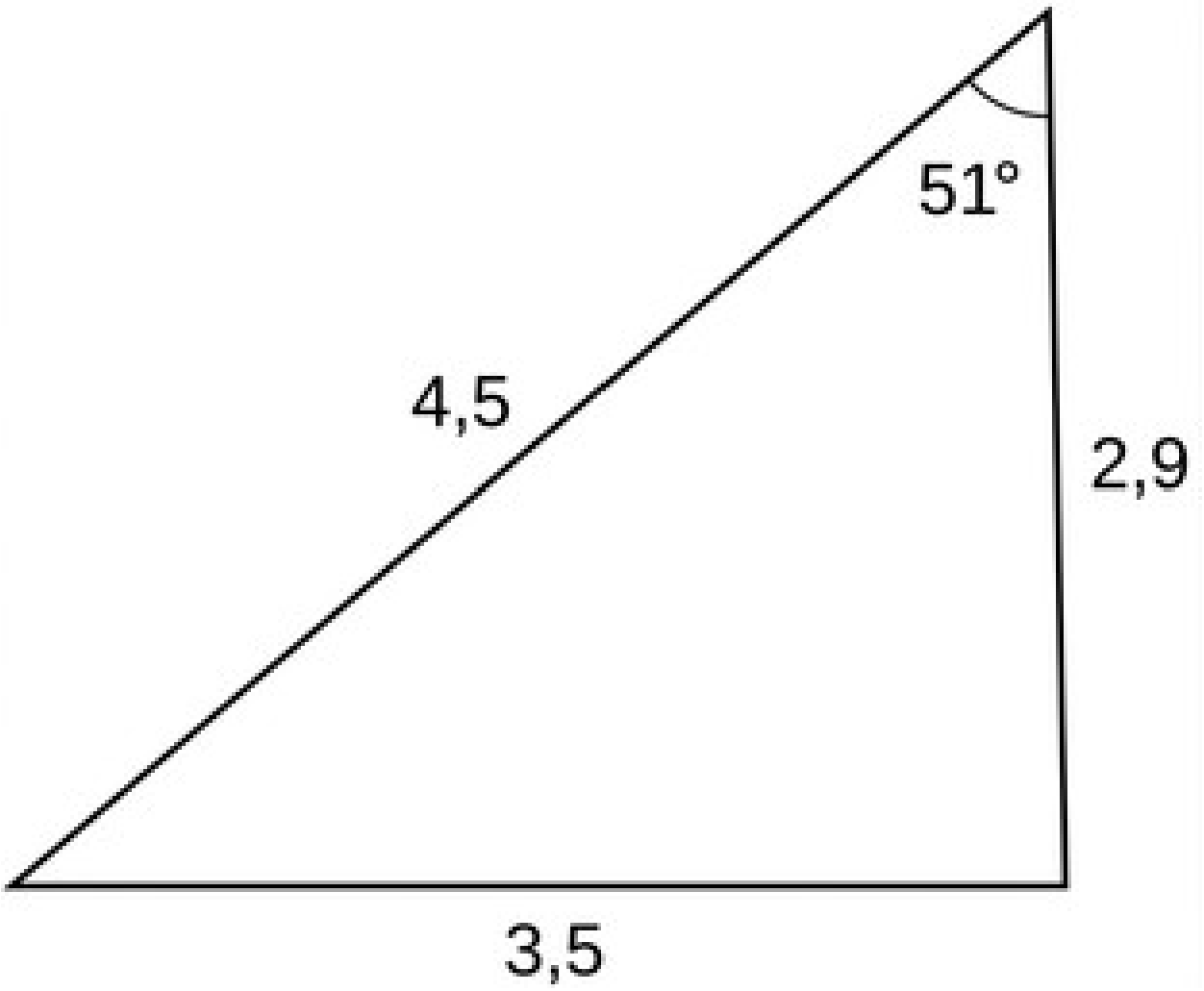
44. Finnið flatarmál hvers þríhyrnings í eftirfarandi dæmum. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.



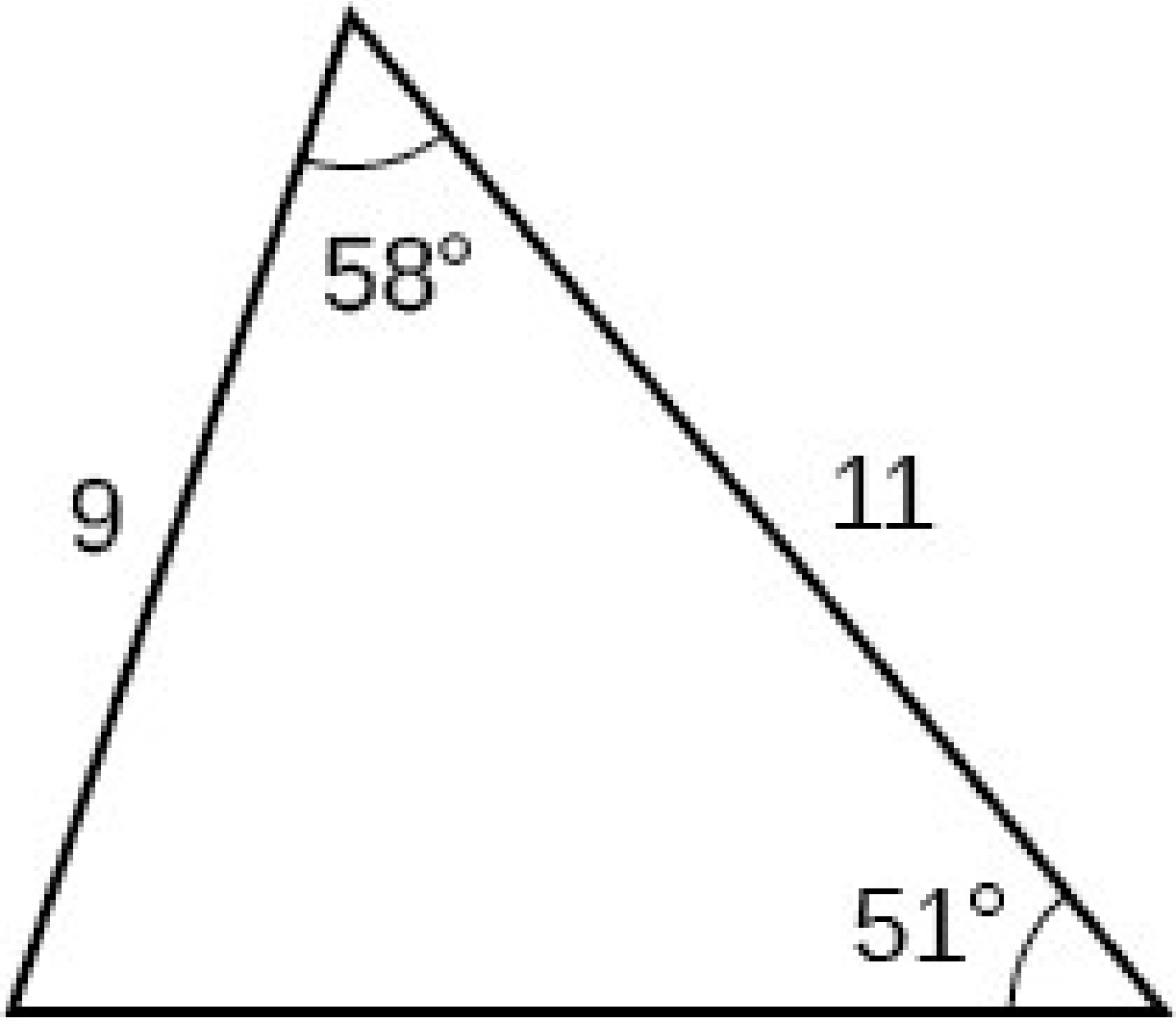
45.



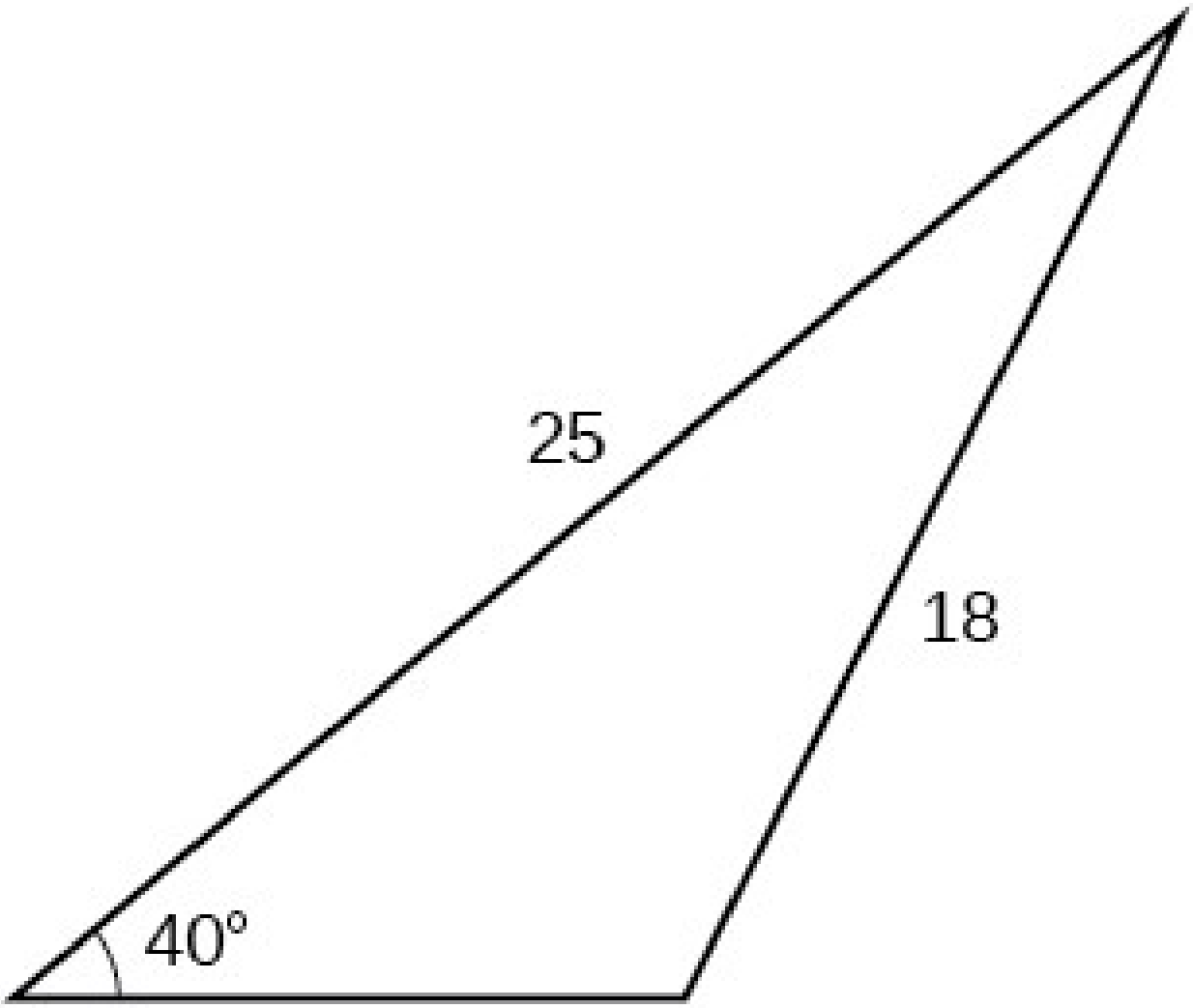
46.



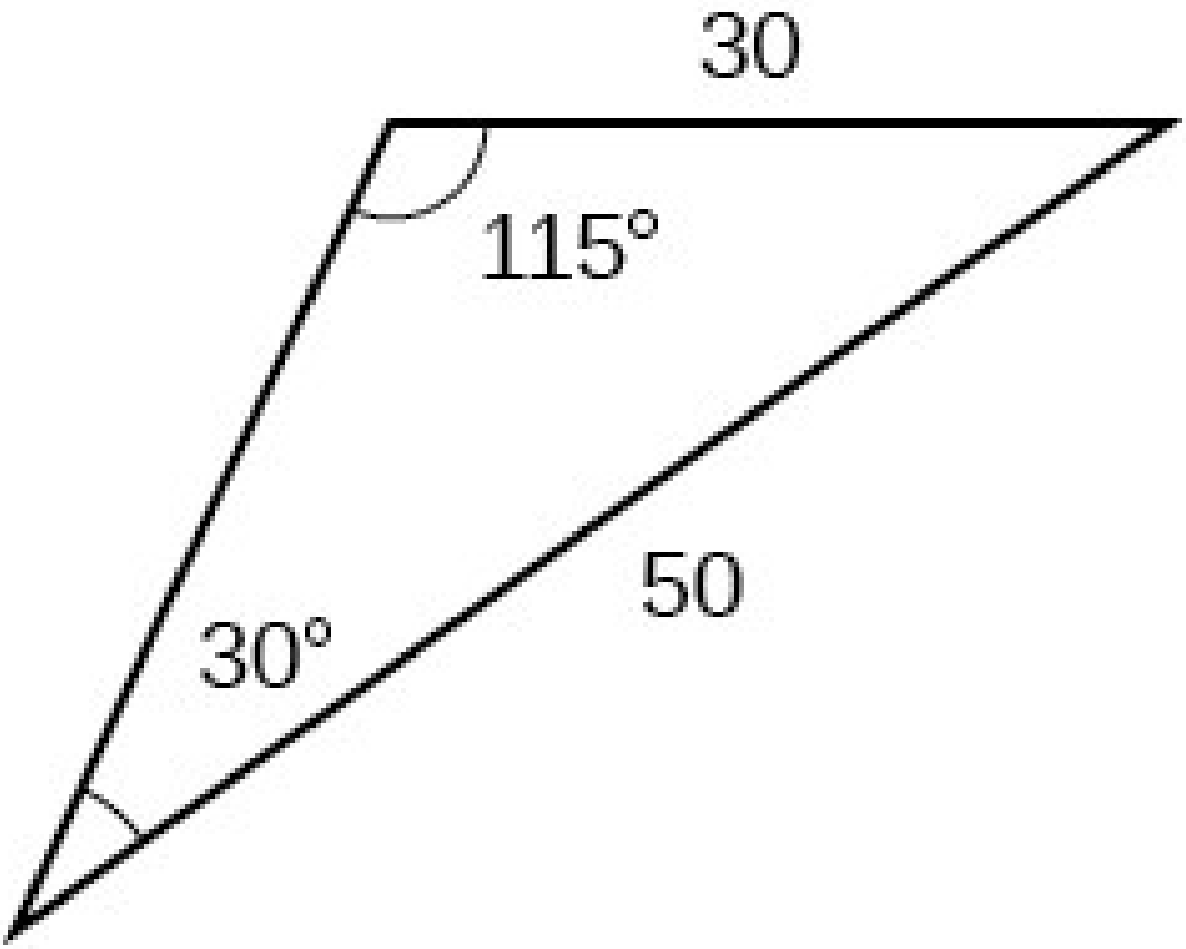
47.



48.

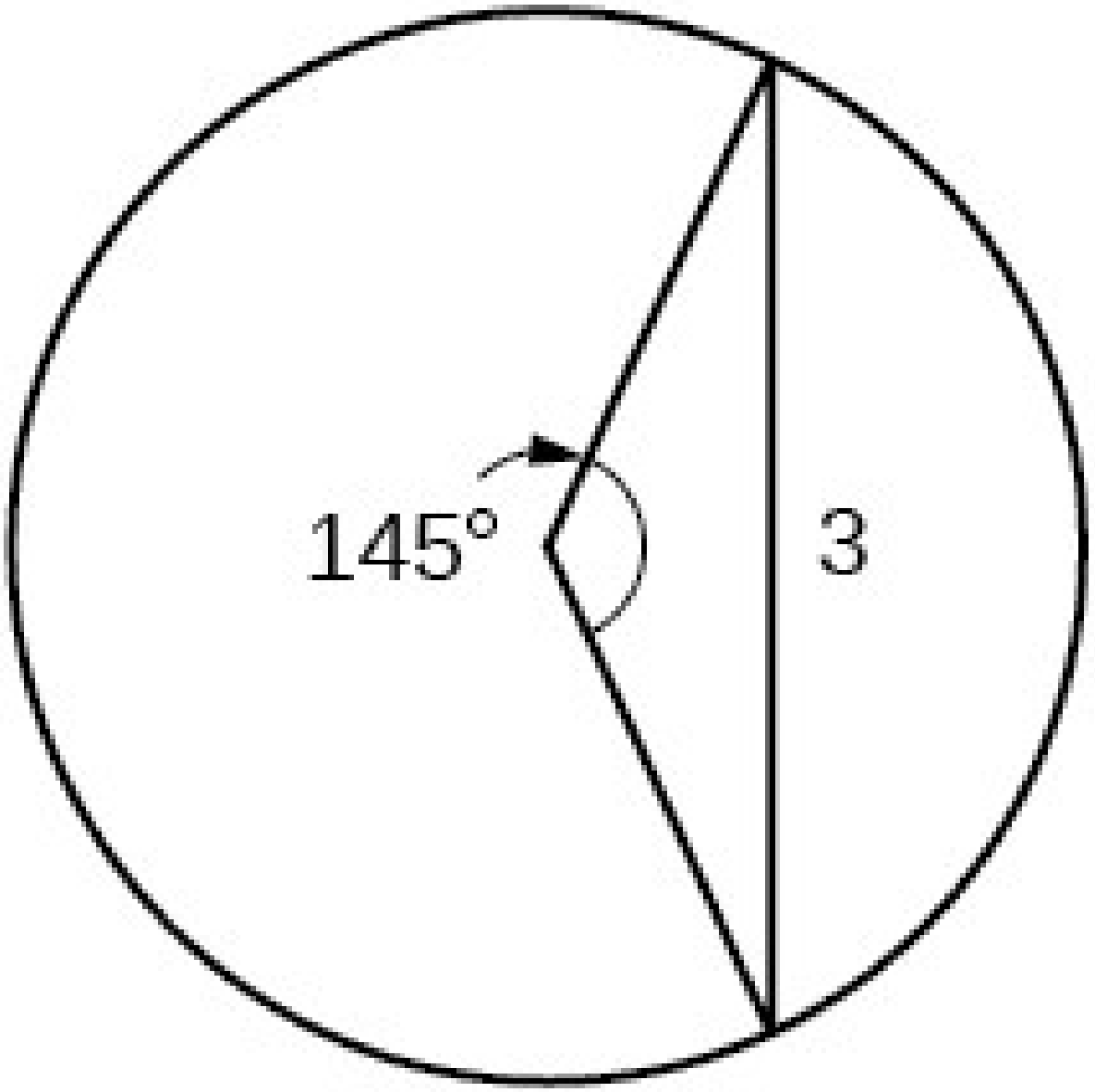


49.



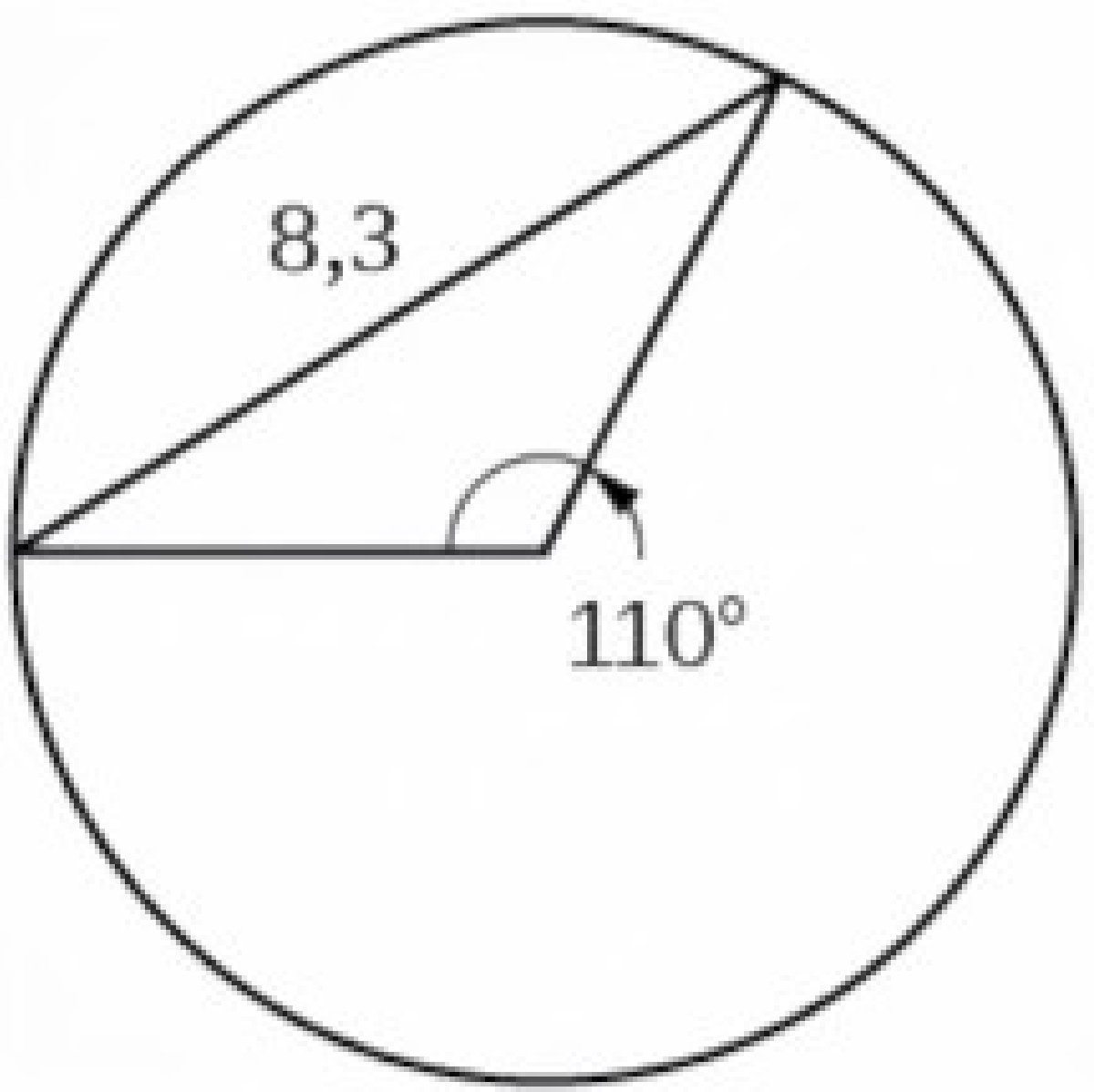
Viðbótarverkefni

50. Finnið geisla hringsins á mynd 18. Námundið að næsta tíunda hluta.



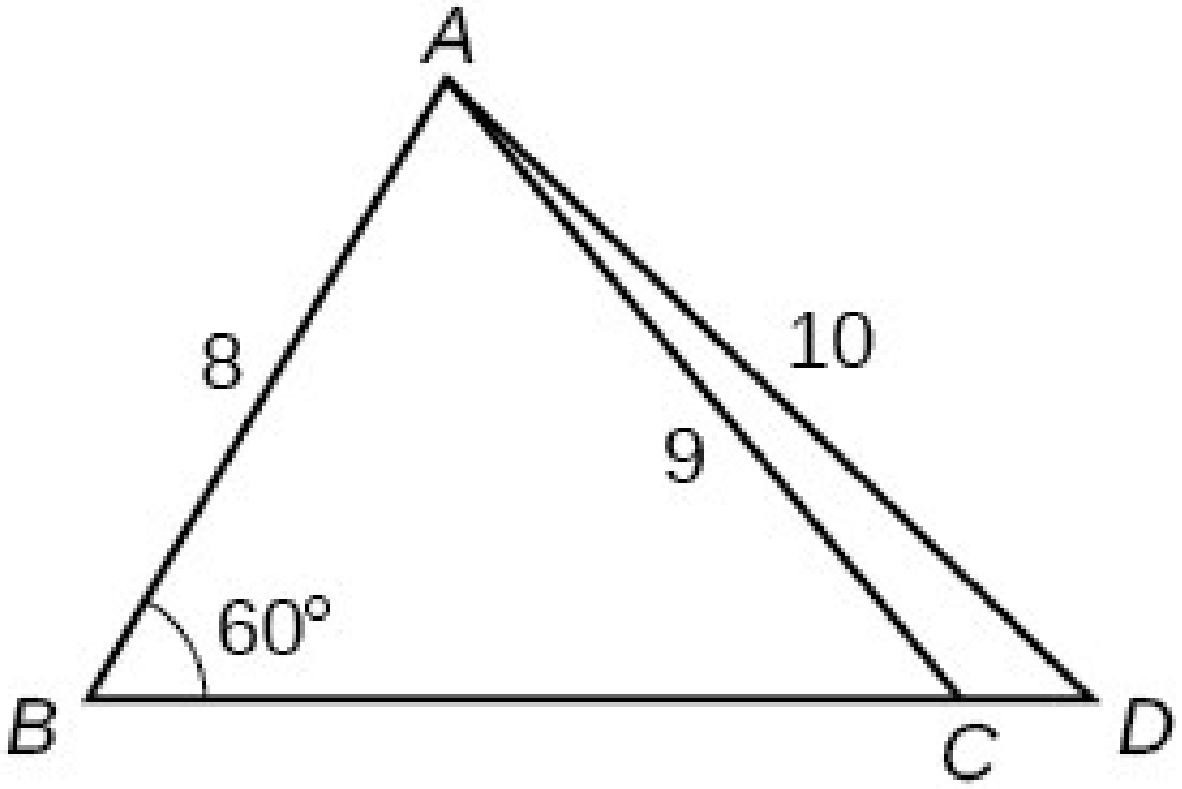
Mynd 18

51. Finnið þvermál hringsins á mynd 19. Námundið að næsta tíunda hluta.



Mynd 19

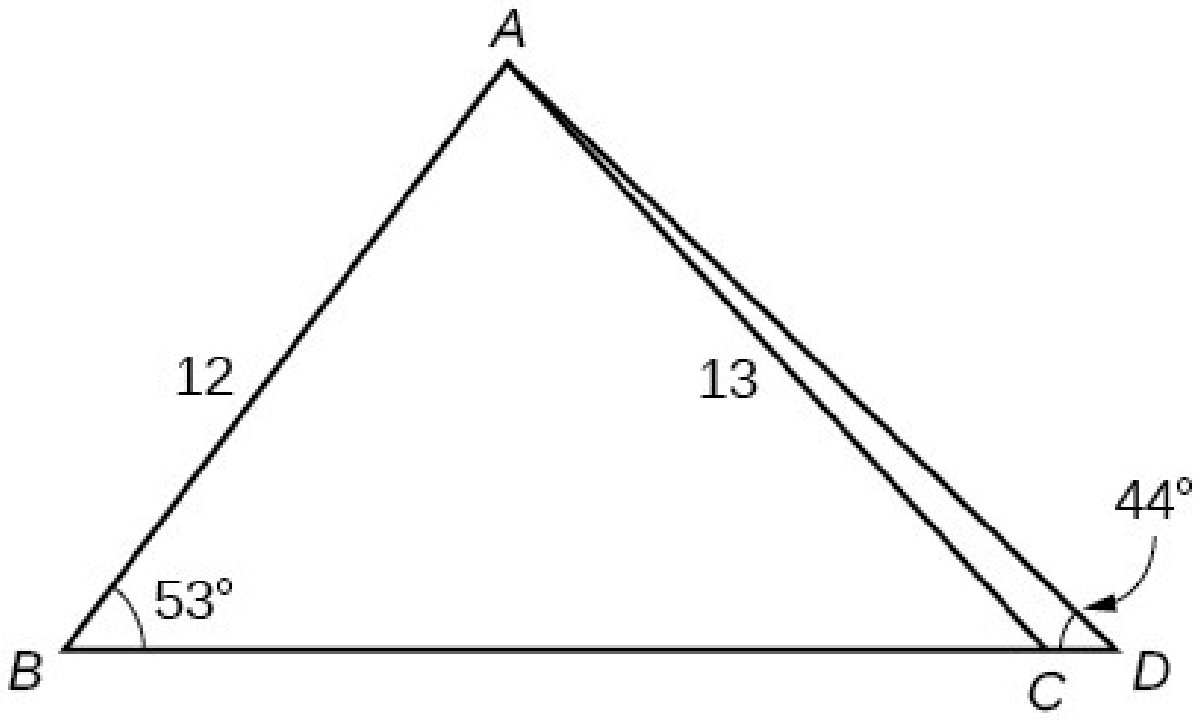
52. Finnið $m \angle ADC$ á mynd 20. Námundið að næsta tíunda hluta.



Mynd 20

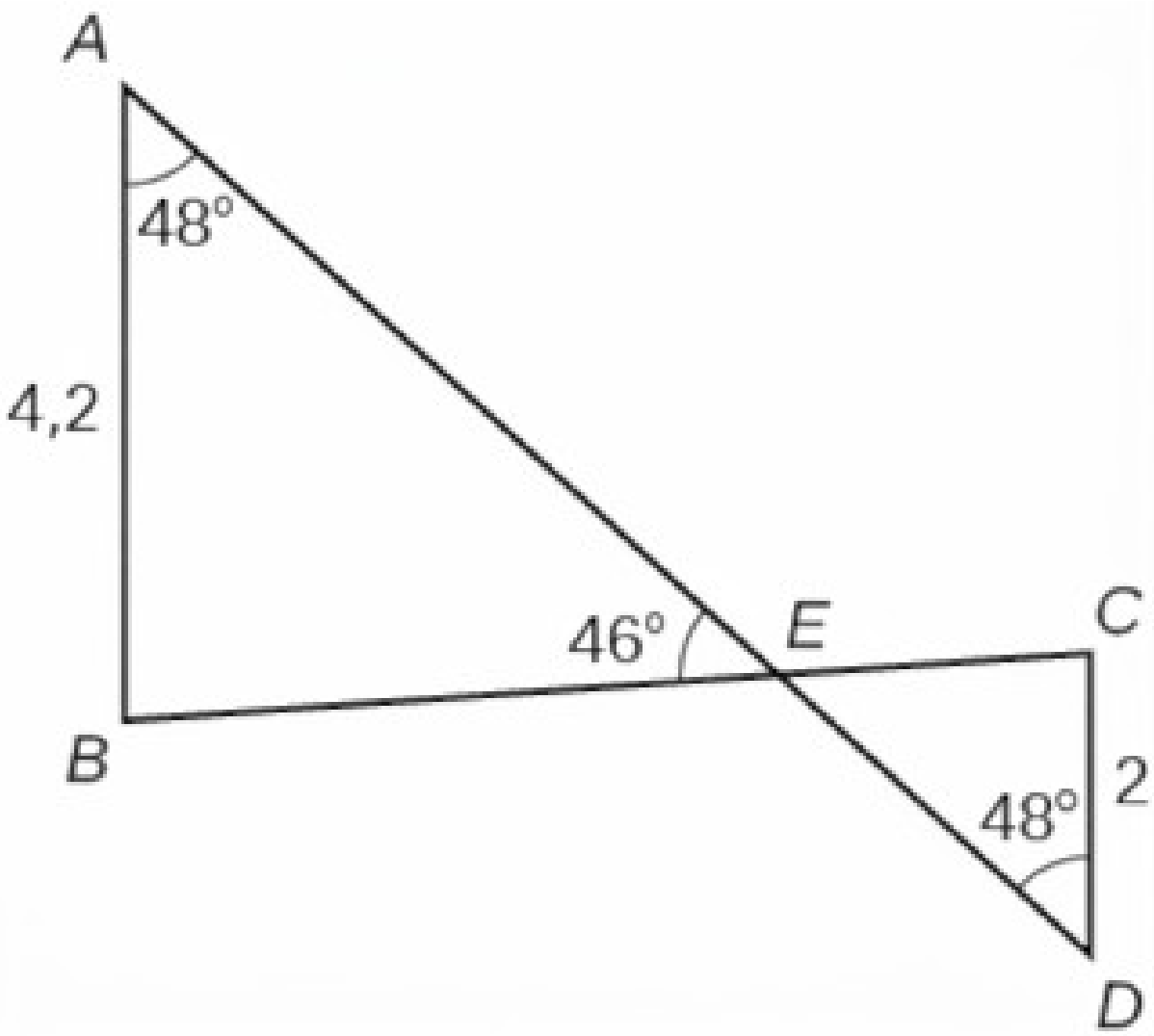
8

53. Finnið AD á mynd 21. Námundið að næsta tíunda hluta.



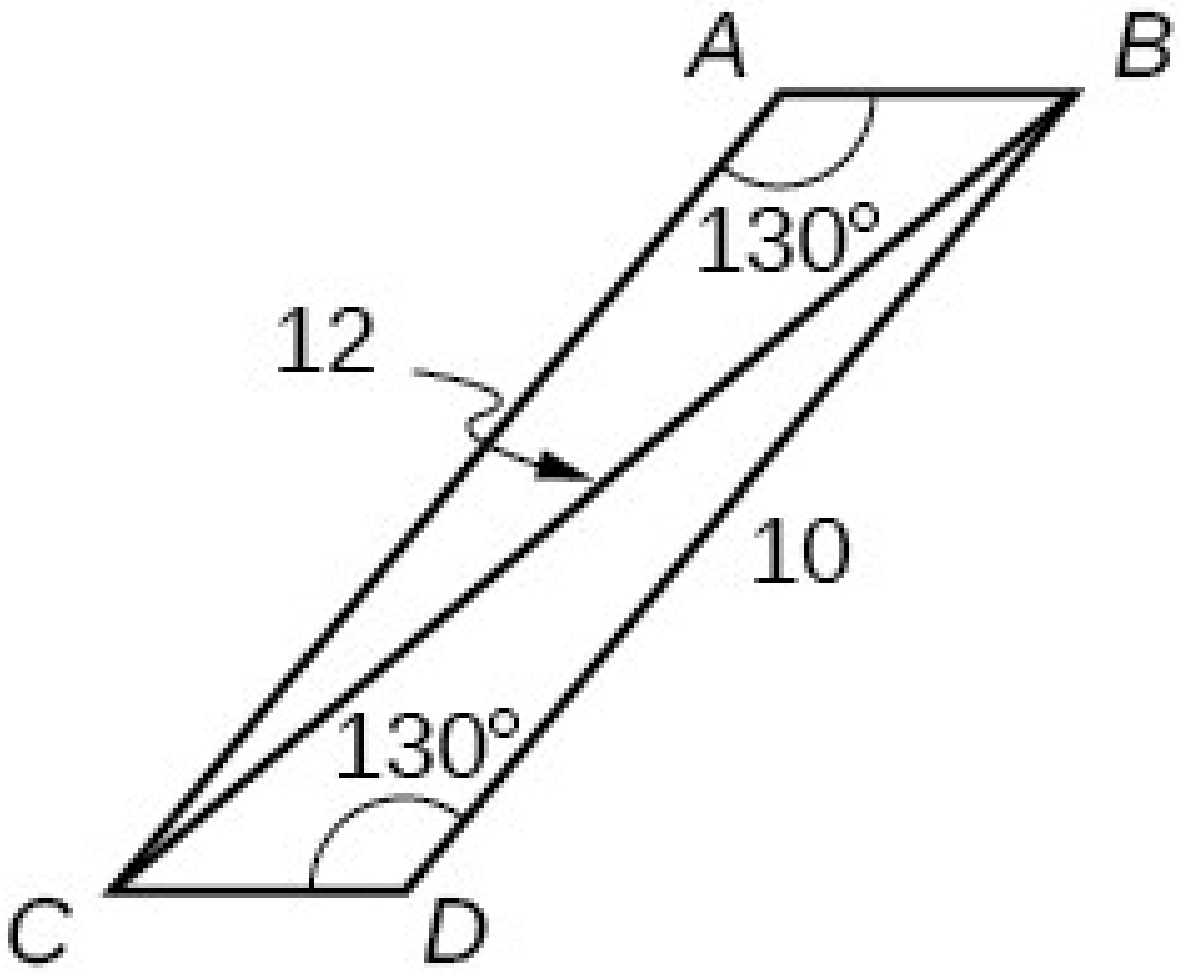
Mynd 21

54. Leysið báða þríhyrningana á mynd 22. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.



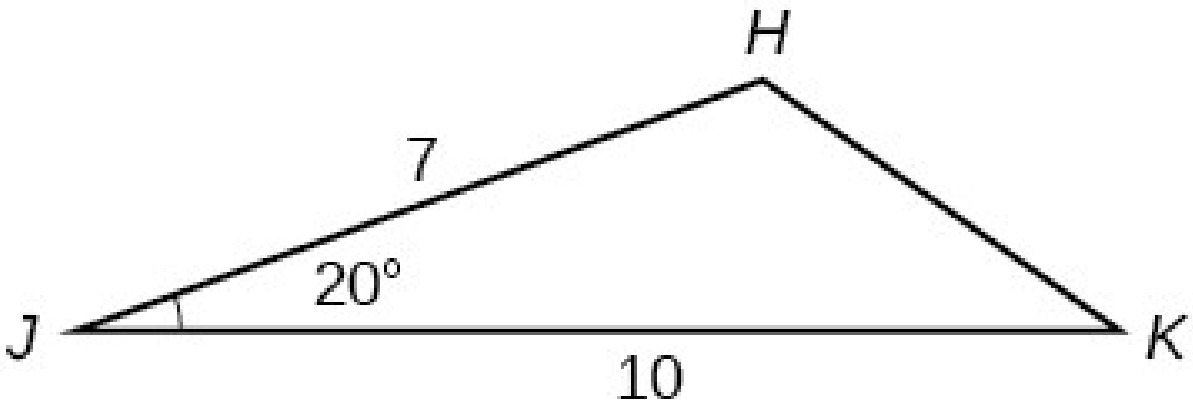
Mynd 22

55. Finnið AB í samsíðungnum á mynd 23.



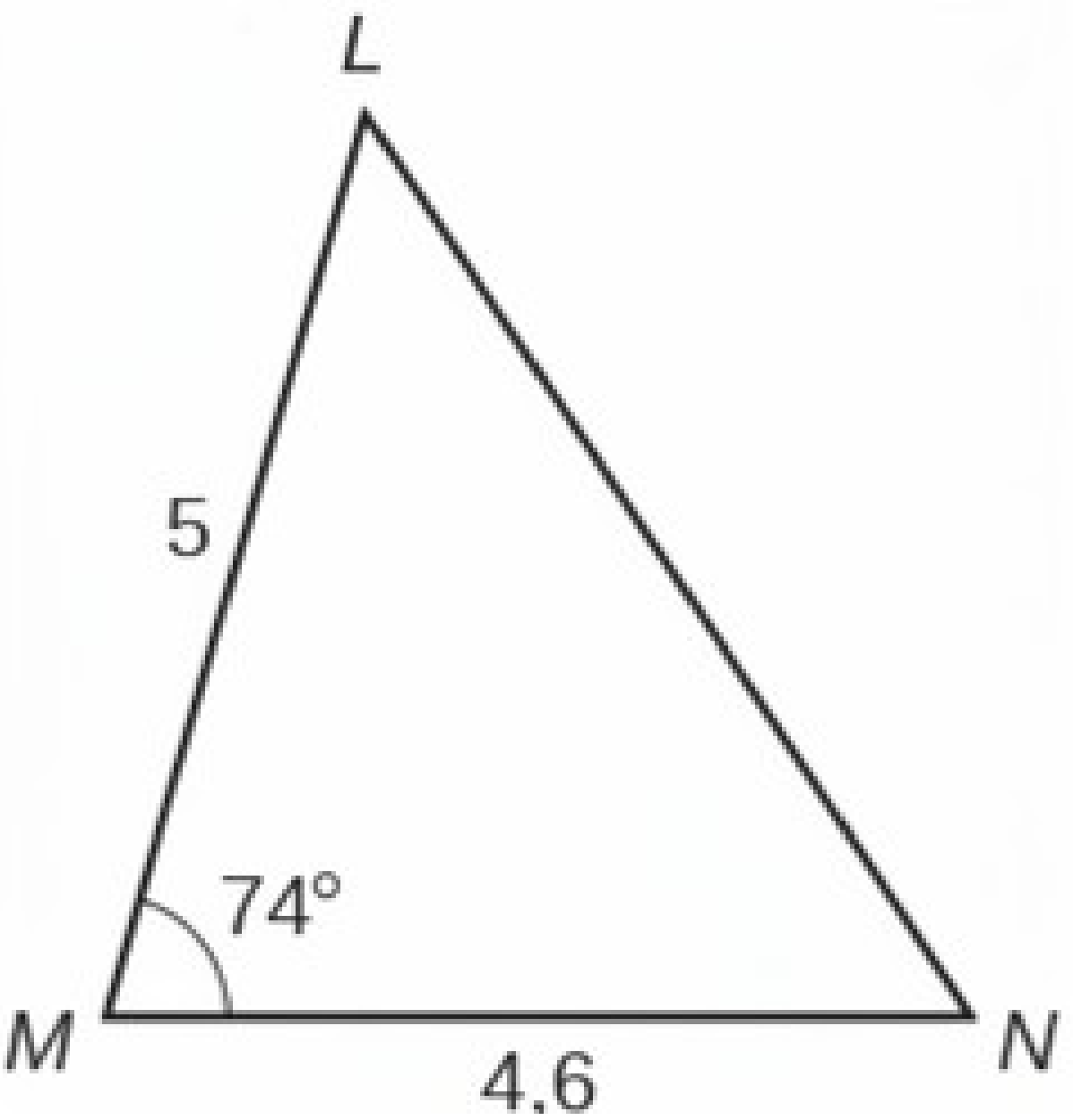
Mynd 23

56. Leysið þríhyrninginn á mynd 24. (Vísbending: Dragið hornrétta línu frá H að JK).
Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.



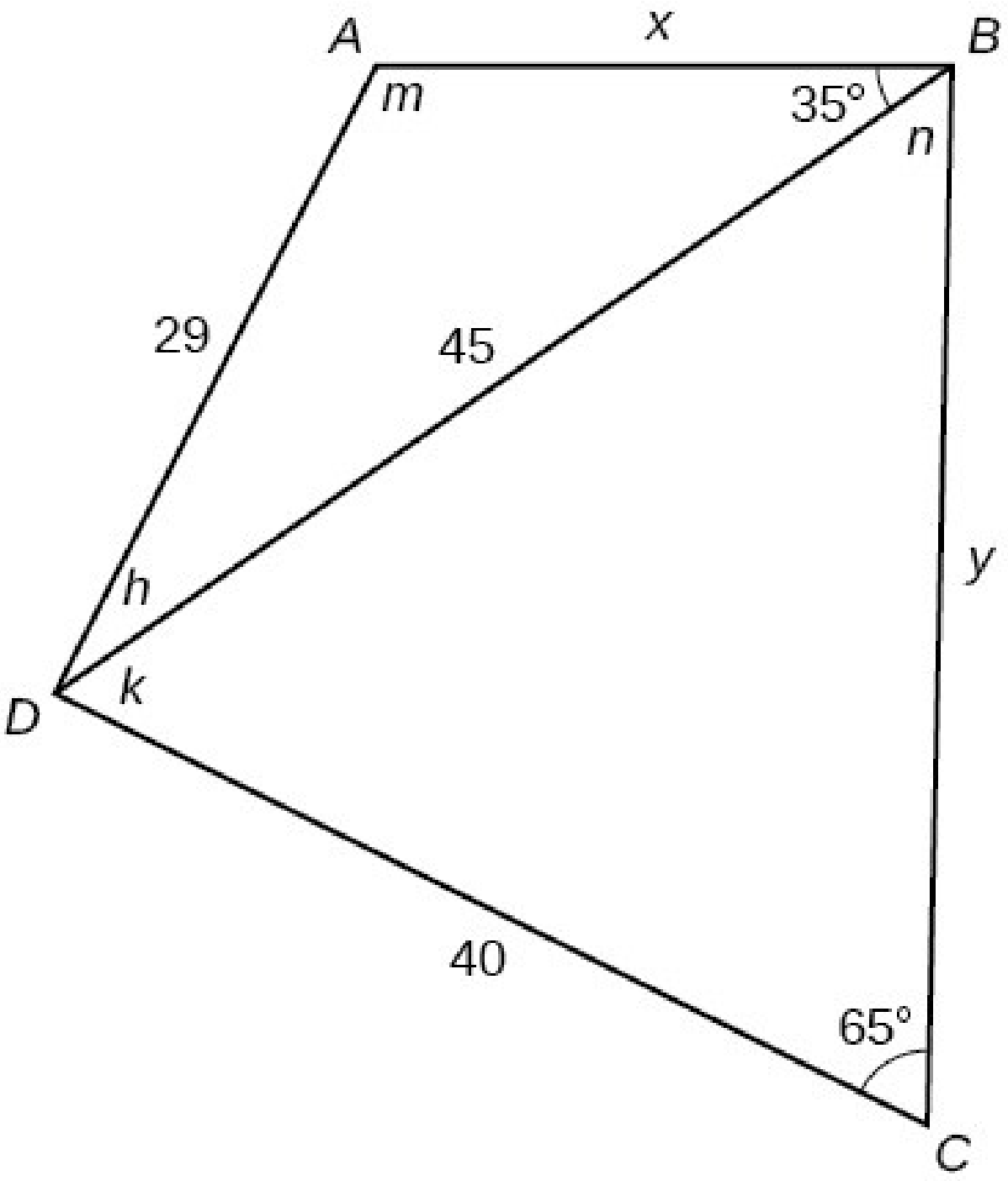
Mynd 24

57. Leysið þríhyrninginn á mynd 25. (Vísbending: Dragið hornrétta línu frá N að LM).
Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.



Mynd 25

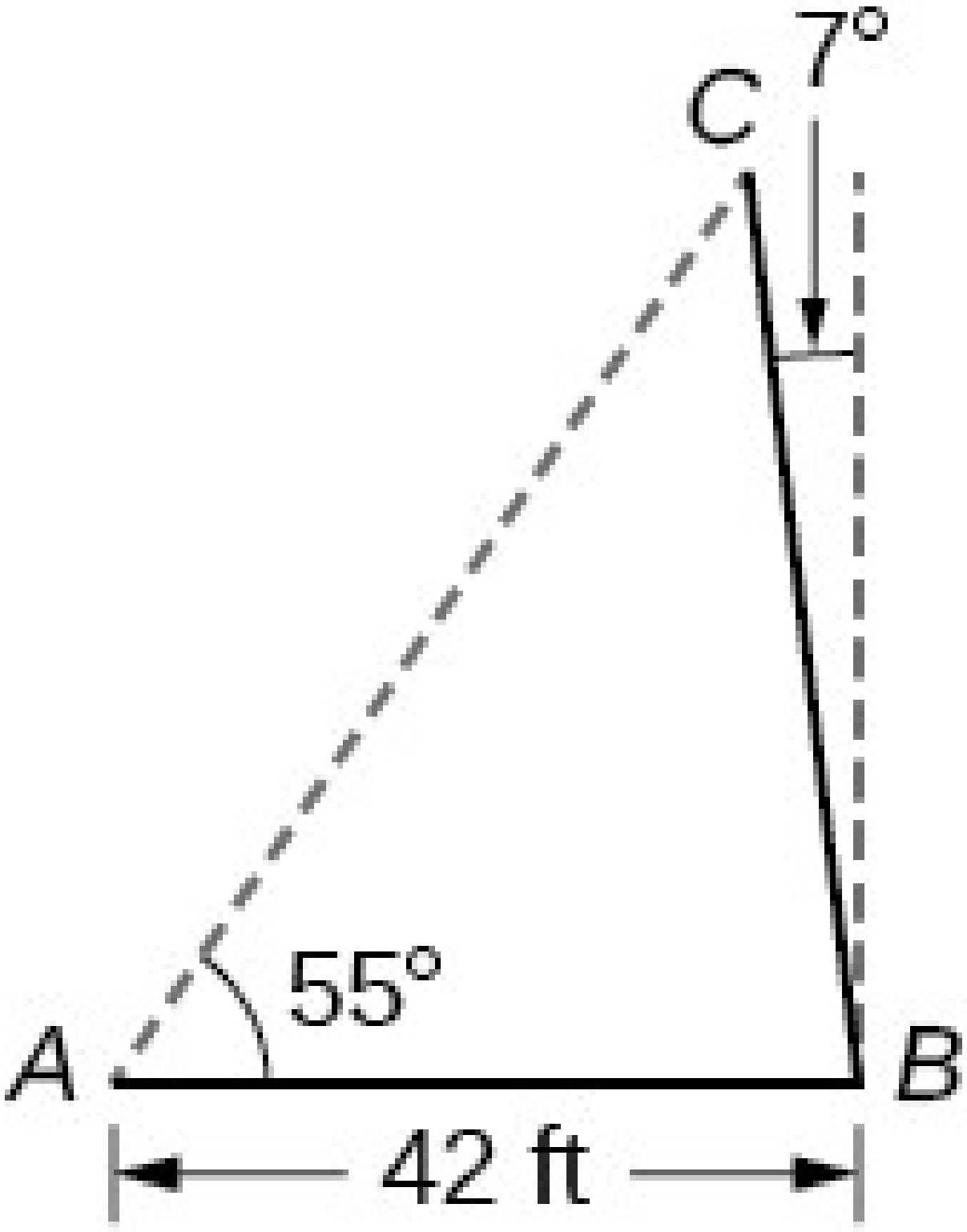
58. Á mynd 26 er $ABCD$ ekki samsíðungur. $\angle m$ er gleitt. Leysið báða þríhyrningana.
Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.



Mynd 26

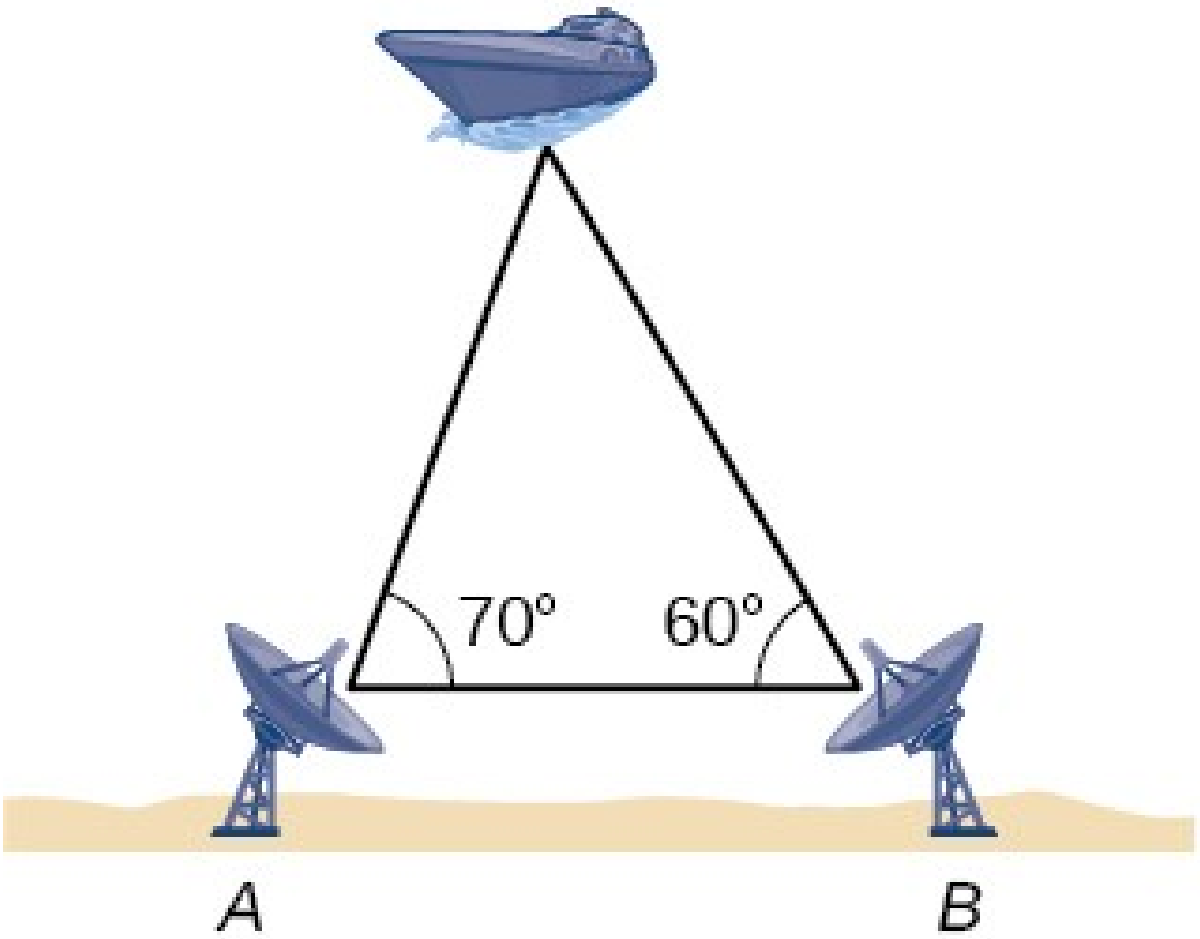
Raunveruleg viðfangsefni

59. Staur hallar frá sólu um 7 ˚ frá lóðréttu, eins og sýnt er á mynd 27. Þegar sólarhæðin er 55 ˚ , varpar staurinn 42 feta löngum skugga á lárétta jörð. Hve langur er staurinn? Námundið svarið að næsta tíunda hluta.



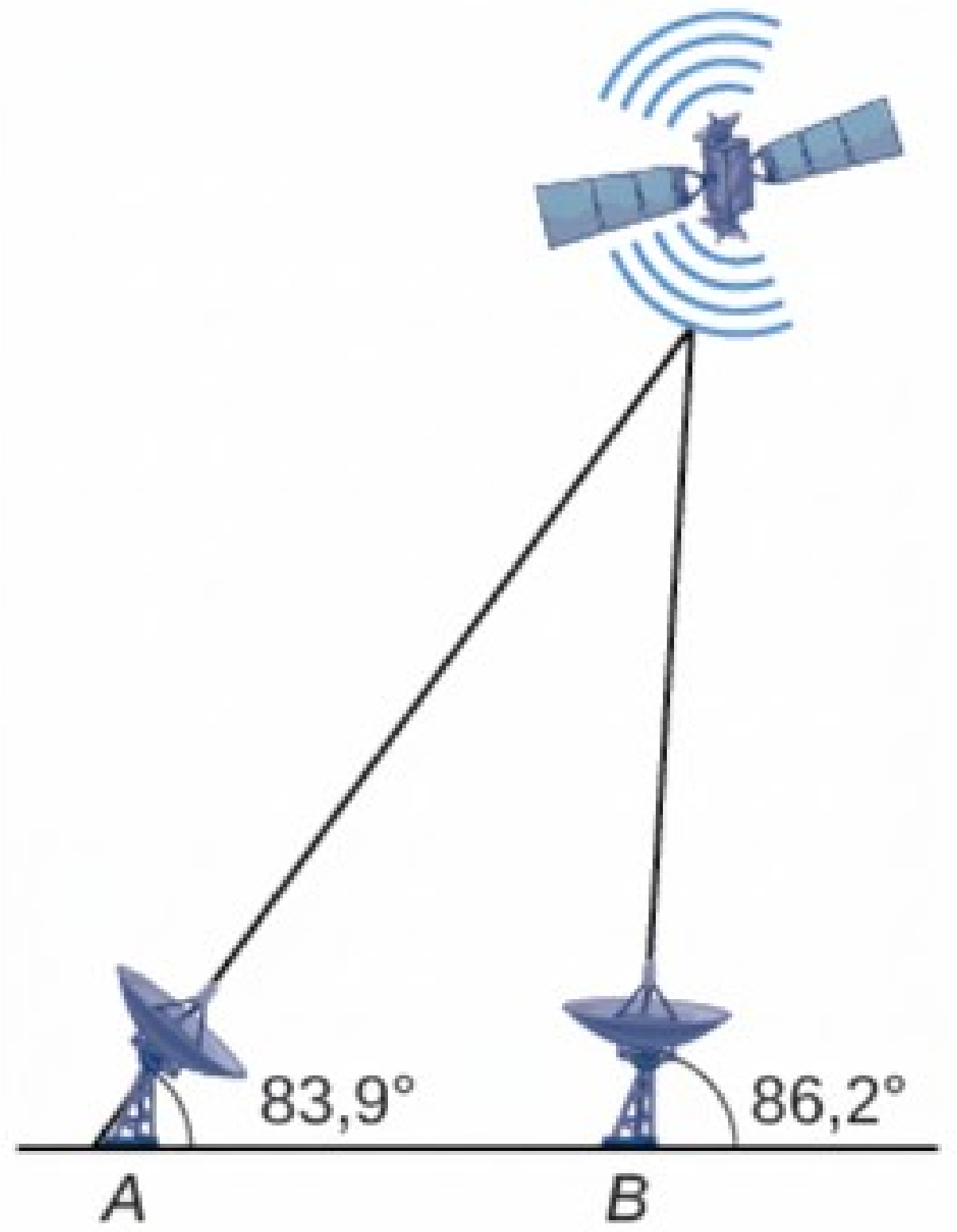
Mynd 27

60. Tvær ratsjárstöðvar eru 500 fet hvor frá annarri. Til að finna hve langt bátur er frá landi mæla þær hornin að bátnum, eins og sýnt er á mynd 28. Finnið fjarlægð bátsins frá stöð *A* og fjarlægð hans frá landi. Námundið svörin að næsta heila feti.



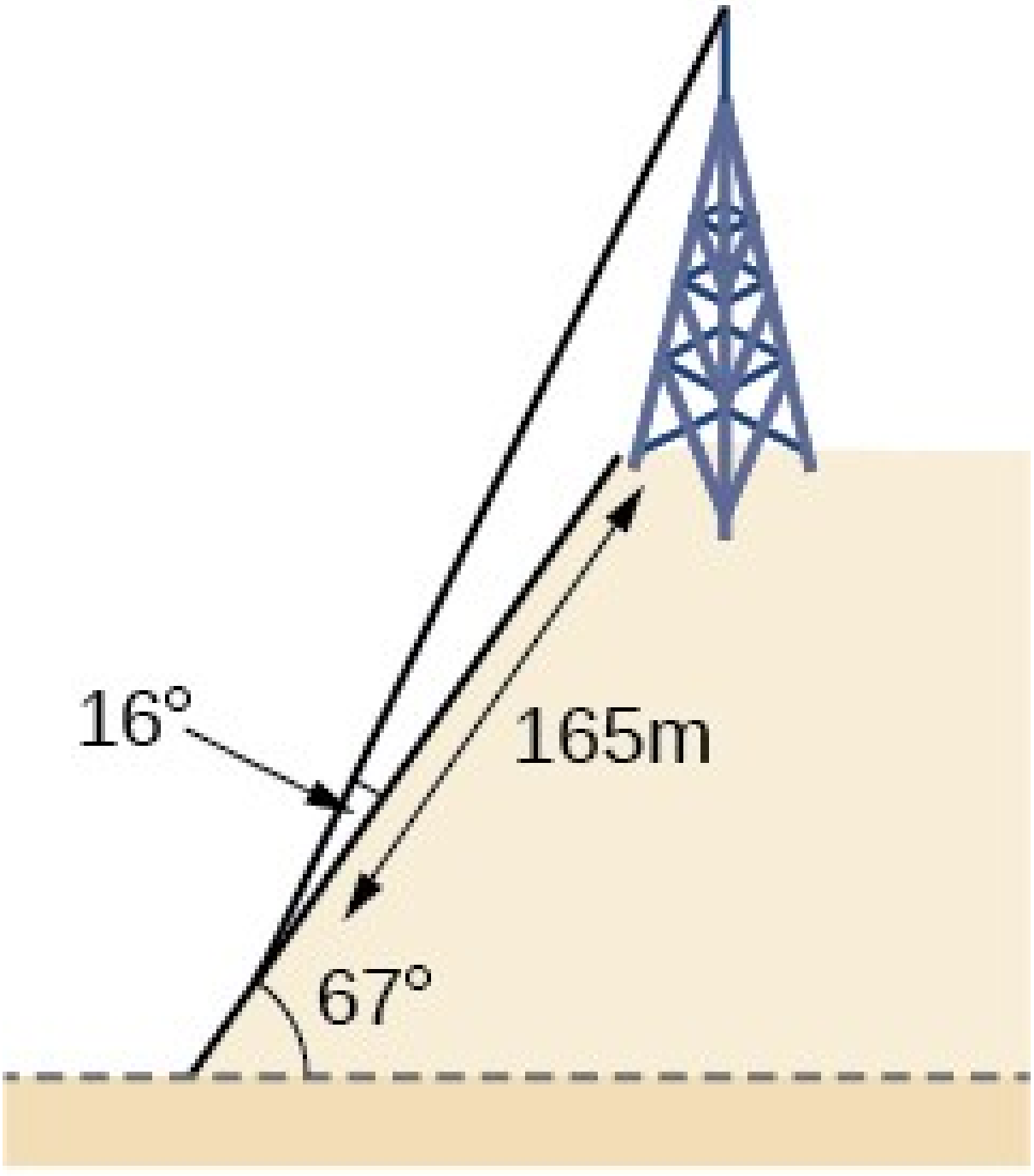
Mynd 28

61. Mynd 29 sýnir gervitungl á braut um jörðu. Gervitunglið fer beint yfir mælistöðvarnar A og B, sem eru í 69 mílna fjarlægð hvor frá annarri. Þegar gervitunglið er öðrum megin við stöðvarnar tvær mælast háhornin við A og B vera $83{,}9^\circ$ og $86{,}2^\circ$, í þessari röð. Hve langt er gervitunglið frá stöð A og hve hátt er það yfir jörðu? Námundið svörin að næstu heilu mílu.



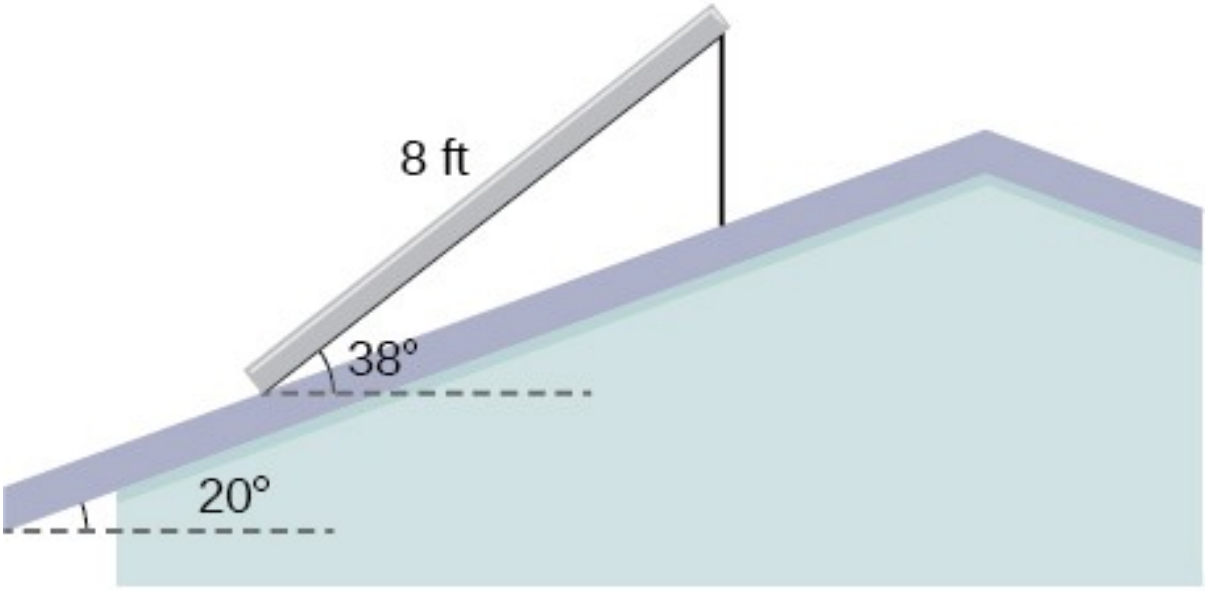
Mynd 29

62. Fjarskiptaturn stendur efst á brattri hæð, eins og sýnt er á mynd 30. Hallahorn hæðarinnar er 67°. Stagvír á að festa efst í turninn og í jörðina í brekkunni, 165 metrum neðan við turnfótinn. Hornið milli stagvírsins og hæðarinnar er 16°. Finnið hve langan vír þarf í stagið og námundið að næsta heila metra.



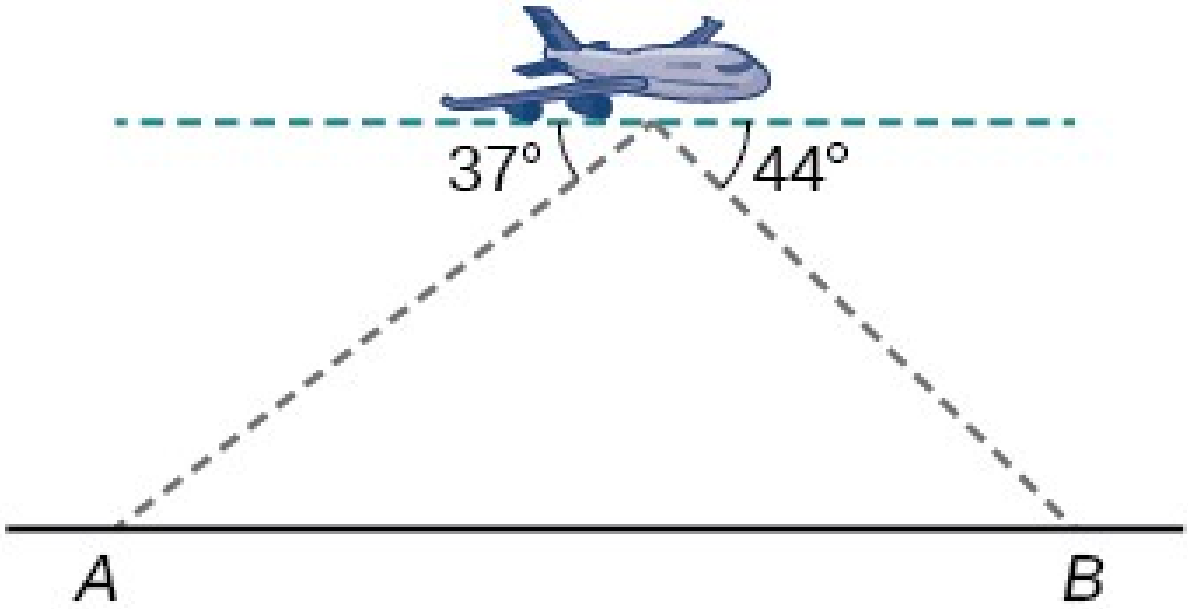
Mynd 30

63. Þak húss hallar um 20 ˚. Festa á 8 feta sólarrafhlöðu á þakið og hún á að halla um 38 ˚ frá láréttu til að skila sem bestum árangri. (Sjá mynd 31.) Hve langur þarf lóðrétti stuðningurinn undir aftari brún rafhlöðunnar að vera? Námundið að næsta tíunda hluta.



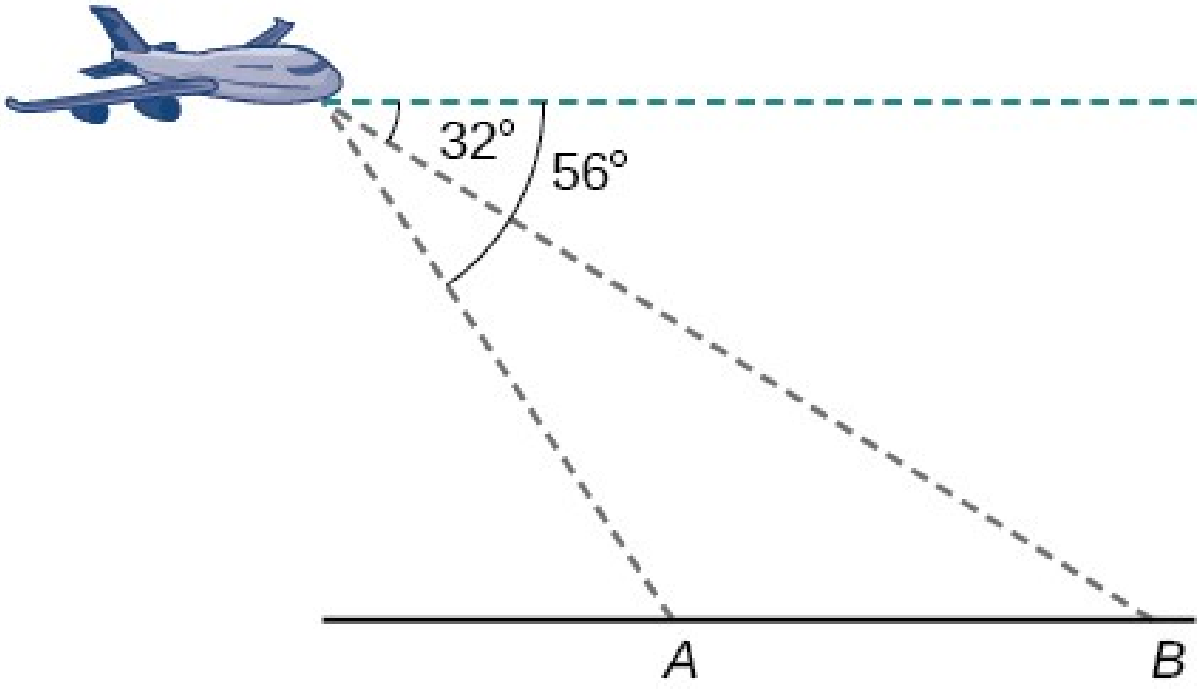
Mynd 31

64. Líkt og háhorn er lághorn hvassa hornið milli láréttrar línu og sjónlínu athuganda að hlut neðan við láréttu línuna. Flugmaður flýgur yfir beinum þjóðvegi. Hann mælir lághornin að tveimur vegalengdarstikum í 6,6 km fjarlægð hvor frá annarri sem 37 ˚ og 44 ˚, eins og sýnt er á mynd 32. Finnið fjarlægð flugvélarinnar frá punkti A, námundaða að næsta tíunda hluta úr kílómetra.



Mynd 32

65. Flugmaður flýgur yfir beinum þjóðvegi. Hann mælir lághornin að tveimur vegalengdarstikum í 4,3 km fjarlægð hvor frá annarri sem 32° og 56°, eins og sýnt er á mynd 33. Finnið fjarlægð flugvélarinnar frá punkti A, námundaða að næsta tíunda hluta úr kílómetra.



Mynd 33

66. Til að áætla hæð byggingar standa tveir nemendur í tiltekinni fjarlægð frá henni í götuhæð. Þaðan mæla þeir háhornið frá götunni upp á topp byggingarinnar og fá 39°. Síðan færa þeir sig 300 fet nær byggingunni og fá þá háhornið 50°. Gerið ráð fyrir að gatan sé lárétt og áætlið hæð byggingarinnar að næsta heila feti.

67. Til að áætla hæð byggingar standa tveir nemendur í tiltekinni fjarlægð frá henni í götuhæð. Þaðan mæla þeir háhornið frá götunni upp á topp byggingarinnar og fá 35°. Síðan færa þeir sig 250 fet nær byggingunni og fá þá háhornið 53°. Gerið ráð fyrir að gatan sé lárétt og áætlið hæð byggingarinnar að næsta heila feti.

68. Punktar A og B eru hvor sínum megin við stöðuvatn. Punktur C er 97 metra frá A. Stærð hornsins BAC mælist 101° og stærð hornsins ACB mælist 53°. Hver er fjarlægðin frá A til B, námunduð að næsta heila metra?

69. Karl og kona sem standa í $3\frac{1}{2}$ mílna fjarlægð hvort frá öðru koma samtímis auga á loftbelg. Háhornið frá manninum að belgnum er 27° og frá konunni 41°. Finnið flughæð belgsins að næsta heila feti.

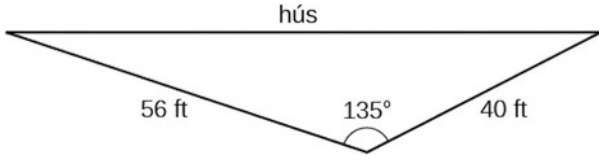
70. Tveir leitarhópar koma auga á fjallgöngumann í sjálfheldu. Fyrri hópurinn er 0,5 mílur frá þeim síðari og báðir eru í 1 mílu hæð. Háhornið frá fyrri hópnum að fjallgöngumanninum er 15°. Háhornið frá síðari hópnum að honum er 22°. Í hvaða hæð er fjallgöngumaðurinn? Námundið að næsta tíunda hluta úr mílu.

71. Götuljós er fest á staur. 6 feta hár maður stendur á götunni skammt frá staurnum og varpar skugga. Háhornið frá enda skugga mannsins að hvirfli hans er 28°. 6 feta há kona stendur á sömu götu hinum megin við staurinn. Háhornið frá enda skugga hennar að hvirfli hennar er 28°. Ef maðurinn og konan eru 20 fet hvort frá öðru, hve langt er frá götuljósinu að enda skugga hvors þeirra? Námundið fjarlægðina að næsta tíunda hluta úr feti.

72. Þrjár borgir, A, B, og C, liggja þannig að borg A er beint austur af borg B. Ef borg C er 35° vestan við norður frá borg B, 100 mílur frá borg A og 70 mílur frá borg B, hve langt er þá milli borga A og B? Námundið fjarlægðina að næsta tíunda hluta úr mílu.

73. Tvær götur mætast í 80° horni. Byggja á þríhyrndan almenningsgarð við gatnamótin. Finnið flatarmál garðsins ef hann nær 180 fet eftir annarri götunni og 215 fet eftir hinni.

74. Hús Brians stendur á hornlóð. Finnið flatarmál framgarðsins ef jaðrarnir eru 40 og 56 fet, eins og sýnt er á mynd 34.

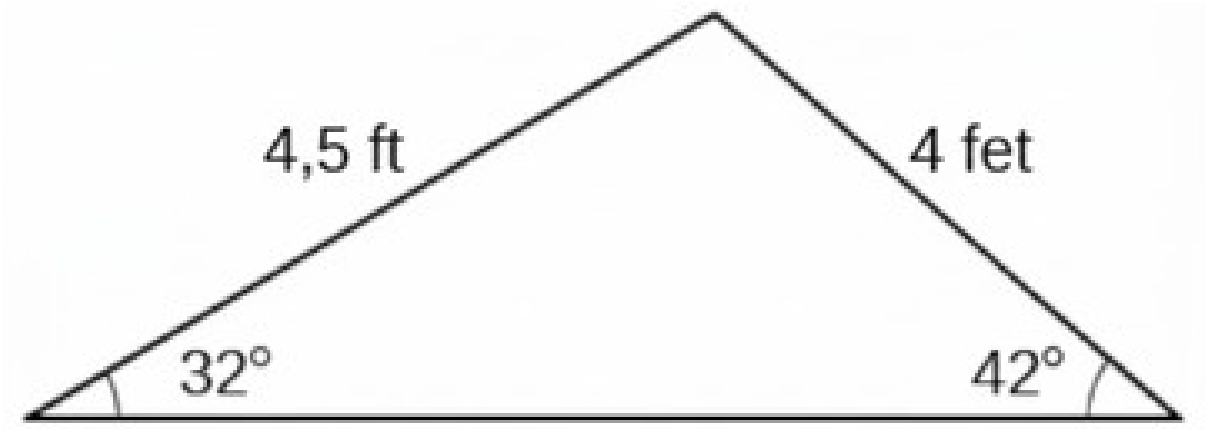


Mynd 34

75. Bermúdaþríhyrningurinn er svæði í Atlantshafi milli Bermúda, Flórída og Púertó Ríkó. Finnið flatarmál hans ef fjarlægðin frá Flórída til Bermúda er 1030 mílur, fjarlægðin frá Púertó Ríkó til Bermúda er 980 mílur og hornið milli leiðanna tveggja er 62°.

76. Biðskyldumerki er 30 tommur á hverri hlið. Hvert er flatarmál merkisins?

77. Naomi keypti borðstofuborð með þríhyrndri borðplötu. Finnið flatarmál plötunnar ef tvær hliðanna eru 4 fet og 4,5 fet og minni hornin eru 32° og 42°, eins og sýnt er á mynd 35.



Mynd 35

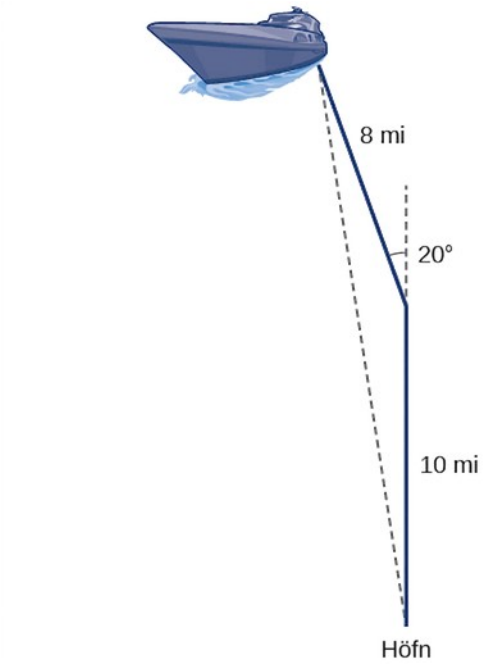
8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota kósínusregluna til að leysa óréttþyrnda þríhyrninga.
- Leysa hagnýt verkefni með kósínusreglunni.
- Nota Heronsformúlu til að finna flatarmál þríhyrnings.

Gerum ráð fyrir að bátur sigli frá höfn, fari 10 mílur, beygi um 20 gráður og fari síðan aðrar 8 mílur, eins og sýnt er á mynd 1. Hve langt er báturinn frá höfninni?



Mynd 1

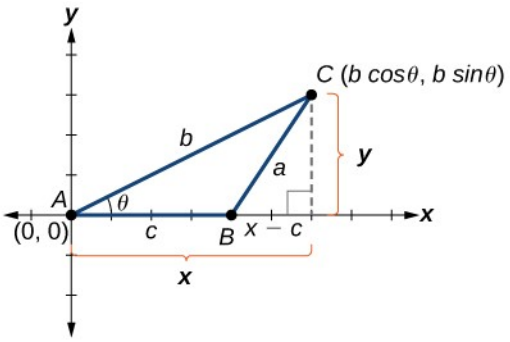
Þótt sínusreglan geri okkur kleift að leysa mörg tilvik óréttþyrndra þríhyrninga gagnast hún ekki þegar þekkta hornið liggur milli tveggja þekktra hliða, SAS-þríhyrningur (hlið–horn–hlið), eða þegar allar þrjár hliðarnar eru þekktar en ekkert horn, SSS-þríhyrningur (hlið–hlið–hlið). Í þessum hluta skoðum við annað verkfæri til að leysa óréttþyrnda þríhyrninga af þessum tveimur gerðum.

8

Notkun kósínusreglunnar til að leysa óréttþyrnda þríhyrninga

Verkfærið sem við þurfum til að leysa verkefnið um fjarlægð bátsins frá höfninni er kósínusreglan, sem lýsir tengslum hornastærða og hliðarlengda í óréttþyrndum þríhyrningum. Kósínusreglan er sett fram í þremur formúlum. Við fyrstu sýn geta þær virst flóknar því að í þeim eru margar breytur. Þegar þið hafið áttað ykkur á mynstrinu er þó auðveldara að vinna með kósínusregluna en flestar formúlur á þessu stigi stærðfræðinnar.

Auðveldara er að nota formúlurnar ef þið skiljið hvernig kósínusreglan er leidd út. Afleiðslan hefst á almennu reglu Pýþagórasar, sem útvíkkar reglu Pýþagórasar yfir á óréttþyrnda þríhyrninga. Hún virkar þannig: Ótiltekinn óréttþyrndur þríhyrningur ABC er settur í hnitakerfi þannig að hornpunktur A sé í upphafspunkti, hlið c liggi eftir x-ásnum og hornpunktur C sé í einhverjum punkti (x, y), eins og sýnt er á mynd 2. Almennt geta þríhyrningar legið hvar sem er í fletinum, en í þessari skýringu setjum við þríhyrninginn eins og lýst var.



Mynd 2

Við getum dregið hornrétta línu frá C að x-ásnum; hún er hæðin. Út frá grunnhornafallasamsemdunum vitum við að

$$\cos\theta = \frac{x\,(\text{aðlæg})}{b\,(\text{langhlið})} \text{ og } \sin\theta = \frac{y\,(\text{mótlæg})}{b\,(\text{langhlið})}$$

Út frá horninu θ, $x = b\cos\theta$ og $y = b\sin\theta$. Punkturinn (x, y) við C hefur hnitin $(b\cos\theta, b\sin\theta)$. Með hliðina $(x - c)$ sem aðra skammhlið rétthyrnds þríhyrnings og y sem hina getum við fundið lengd langhliðarinnar a með reglu Pýþagórasar. Því er

$$a^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$= (b\cos\theta - c)^2 + (b\sin\theta)^2$ Setjið $(b\cos\theta)$ í stað x og $(b\sin\theta)$ í stað y.

$= (b^2\cos^2\theta - 2bc\cos\theta + c^2) + b^2\sin^2\theta$ Liðið fullkomna ferninginn.

$= b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + c^2 - 2bc\cos\theta$ Flokkið liðina og athugið að $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$= b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + c^2 - 2bc\cos\theta$ Takið út fyrir sviga b^2.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

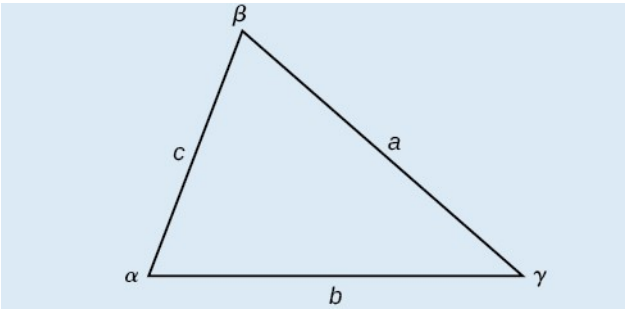
Formúlan sem var leidd út er ein af þremur jöfnum kósínusreglunnar. Hinar jöfnurnar fást á svipaðan hátt.

Það hjálpar alltaf að skissa þríhyrninginn þegar finna á horn eða hliðar. Í raunverulegum verkefnum skuluð þið reyna að teikna mynd af aðstæðunum. Þegar nýjar upplýsingar koma fram gæti þurft að breyta myndinni. Gerið þær breytingar og að lokum verður auðveldara að leysa verkefnið.

KÓSÍNUSREGLAN

Kósínusreglan segir að annað veldi hverrar hliðar þríhyrnings sé jafnt summu annarra velda hinna hliðanna tveggja að frádregnu tvöföldu margfeldi þessara tveggja hliða og kósínuss hornsins á milli þeirra. Fyrir þríhyrninga merkta eins og á mynd 3, með hornin α, β, og γ, og mótlægar hliðar þeirra a, b, og c, er kósínusreglan sett fram með þremur jöfnum.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Mynd 3

Til að finna óþekkta hlið þarf að þekkja stærð mótlæga hornsins.

Þegar horn er fundið þarf að þekkja lengd mótlægu hliðarinnar. Til að finna horn getum við notað annað form kósínusreglunnar.

$$\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos \beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

8

AÐFERÐ

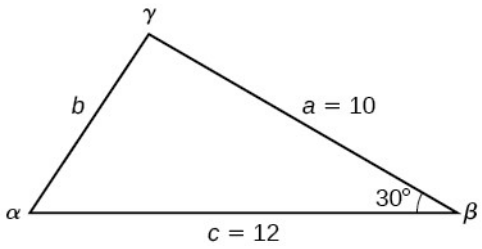
Finnið hliðina og hornin sem eftir eru í þríhyrningi þegar tvær hliðar og hornið milli þeirra (SAS) eru gefin.

1. Skissið þríhyrninginn. Merkið inn þekktar hliðar og horn. Notið breytur fyrir óþekktar hliðar og horn.
2. Beitið kósínusreglunni til að finna lengd óþekktu hliðarinnar eða stærð óþekkta hornsins.
3. Beitið sínus- eða kósínusreglunni til að finna stærð annars horns.
4. Reiknið stærð hornsins sem eftir er.

DÆMI 1

Óþekkt hlið og horn SAS-þríhyrnings fundin

Finnið óþekktu hliðina og hornin í þríhyrningnum á mynd 4.



Mynd 4

Lausn

Skráum fyrst hvað er gefið: tvær hliðar og hornið milli þeirra. Þetta er SAS-tilvik og þá höfum við allt sem þarf til að nota kósínusregluna.

Hver hinna þriggja forma kósínusreglunnar hefst á öðru veldi óþekktrar hliðar á móti þekktu horni. Í þessu dæmi finnum við fyrst hliðina b, því að við þekkjum stærð mótlæga hornsins β.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ \cos\ \beta$$

$b^2 = 10^2 + 12^2 - 2\,(10)\,(12)\cos(30^\circ)$ Setjið þekktu stærðirnar inn.

$b^2 = 100 + 144 - 240\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Reiknið kósínusinn og byrjið að einfalda.

$$b^2 = 244 - 120\ \sqrt{3}$$

$b = \sqrt{244 - 120\ \sqrt{3}}$ Notið kvaðratrótareiginleikann.

$$b \approx 6{,}013$$

Við erum að finna lengd og notum því aðeins jákvæðu kvaðratrótina. Nú þegar við þekkjum lengdina b, getum við notað sínusregluna til að finna hornin sem eftir eru. Þegar leyst er fyrir hornið α, fæst

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b}$$

$$\frac{\sin\ \alpha}{10} = \frac{\sin(30^\circ)}{6{,}013}$$

$\sin\ \alpha = \frac{10\ \sin(30^\circ)}{6{,}013}$ Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með 10.

$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{10\ \sin(30^\circ)}{6{,}013}\right)$ Finnið andhverfan sínus af $\frac{10\ \sin(30^\circ)}{6{,}013}$.

$$\alpha \approx 56{,}3^\circ$$

Hinn möguleikinn fyrir α væri $\alpha = 180^\circ - 56{,}3^\circ \approx 123{,}7^\circ$. Á upphaflegu myndinni liggur α að lengstu hliðinni og því er α hvasst horn; þess vegna gengur $123{,}7^\circ$ ekki upp. Athugið að ef við beitum kósínusreglunni fæst ótvírætt svar. Við þurfum ekki að skoða aðra möguleika því kósínus hefur einkvæmt gildi fyrir horn milli 0° og 180°. Þegar við vitum að $\alpha \approx 56{,}3^\circ$, getum við síðan fundið þriðja horn þríhyrningsins.

$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ - 56{,}3^\circ \approx 93{,}7^\circ$$

Öll horn og hliðar þríhyrningsins eru þá

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 56{,}3^\circ & a &= 10 \\ \beta &= 30^\circ & b &\approx 6{,}013 \\ \gamma &\approx 93{,}7^\circ & c &= 12 \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Finnið hliðina og hornin sem vantar í gefna þríhyrninginn:

$$\alpha = 30^\circ,$$

$$b = 12,$$

$$c = 24.$$

DÆMI 2

8

Horn SSS-þríhyrnings fundið

Finnið hornið α í gefna þríhyrningnum ef hlið $a = 20$, hlið $b = 25$, og hlið $c = 18$.

Lausn

Í þessu dæmi eru engin horn gefin. Við getum fundið hvaða horn sem er með kósínusreglunni. Þegar leyst er fyrir hornið α, fæst

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\,\alpha$$

$20^2 = 25^2 + 18^2 - 2\,(25)\,(18)\cos\,\alpha$ Setjið inn viðeigandi mælingar.

$400 = 625 + 324 - 900\,\cos\,\alpha$ Einfaldið í hverju skrefi.

$$400 = 949 - 900\,\cos\,\alpha$$

$-549 = -900\,\cos\,\alpha$ Einangrið $\cos\,\alpha$.

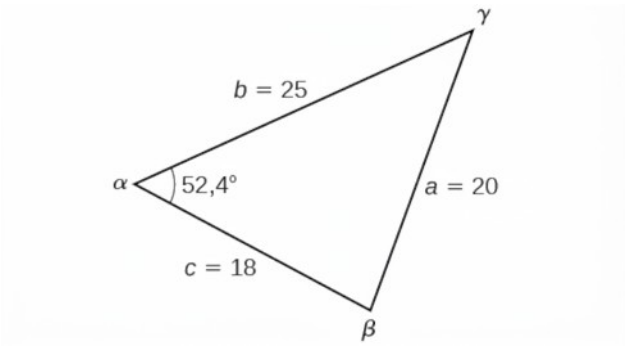
$$\frac{-549}{-900} = \cos\,\alpha$$

$$0{,}61 \approx \cos\,\alpha$$

$\cos^{-1}(0{,}61) \approx \alpha$ Beitið andhverfa kósínusfallinu.

$$\alpha \approx 52{,}4\,^\circ$$

Sjá mynd 5.



Mynd 5

Greining

Andhverfa kósínusfallið getur skilað hvaða horni sem er milli 0 og 180 gráða. Því verða engin tvíræð tilvik með þessari aðferð.

REYNIÐ SJÁLF #2

Ef $a=5$, $b=7$, og $c=10$, finnið þá hornin sem vantar.

Lausn hagnýtra verkefna með kósínusreglunni

Sínusreglan gaf hentugar jöfnur til að leysa margvísleg verkefni. Á sama hátt nýtist kósínusreglan þegar gefnu gögnin falla að kósínuslíkönum. Slík verkefni koma meðal annars fyrir í siglingafræði, landmælingum, stjörnufræði og rúmfræði.

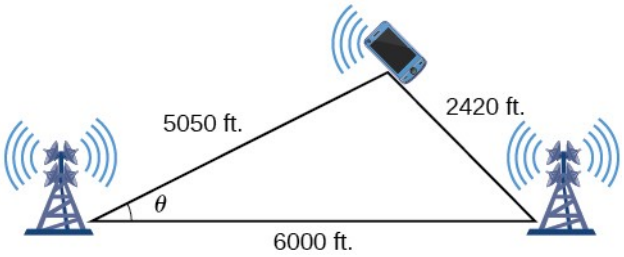
DÆMI 3

Kósínusreglan notuð til að leysa fjarskiptaverkefni

Margir farsímar með GPS geta gefið áætlaða staðsetningu áður en GPS-merkið berst. Það er gert með þríhyrningsmælingu sem notar fjarlægðir frá tveimur þekktum punktum. Gerum ráð fyrir að tveir farsímaturnar séu innan drægis síma. Turnarnir standa með 6000 feta millibili við beinan þjóðveg sem liggur frá austri til vesturs og síminn er norðan við veginn. Af seinkun merkisins má ráða að síminn sé 5.050 fet frá fyrri turninum og 2.420 fet frá þeim síðari. Finnið hve langt norður og austur af fyrri turninum síminn er og hve langt hann er frá þjóðveginum.

Lausn

Til einföldunar byrjum við á að teikna mynd á borð við mynd 6 og merkja inn gefnu upplýsingarnar.



Mynd 6

Using the Law of Cosines, we can solve for the angle θ. Remember that the Law of Cosines uses the square of one side to find the cosine of the opposite angle. For this example, let $a=2.420, b=5.050$, and $c=6.000$. Thus, θ corresponds to the opposite side $a=2.420$.

$$a^2=b^2+c^2-2\ b\ c\cos\ \theta$$

$$(2.420)^2=(5.050)^2+(6.000)^2-2\ (5.050)\ (6.000)\cos\ \theta$$

$$(2.420)^2-(5.050)^2-(6.000)^2=-2\ (5.050)\ (6.000)\cos\ \theta$$

$$\frac{(2.420)^2-(5.050)^2-(6.000)^2}{-2\ (5.050)\ (6.000)}=\cos\ \theta$$

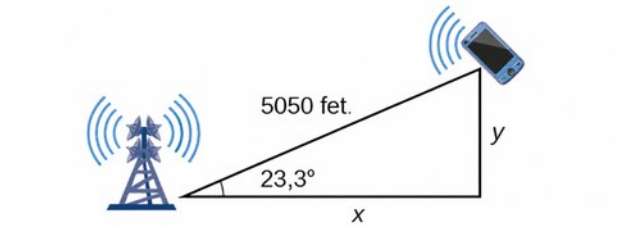
$$\cos\ \theta\approx 0,9183$$

$$\theta\approx\cos^{-1}\ (0,9183)$$

$$\theta\approx 23,3°$$

8

Til að svara spurningunum um staðsetningu símans norður og austur af turninum og fjarlægð hans frá þjóðveginum drögum við hornrétta línu frá símanum, eins og á mynd 7. Þá myndast tveir rétthyrndir þríhyrningar, en í þessu verkefni þurfum við aðeins þann sem fyrri turninn er í.



Mynd 7

Með horninu $\theta=23,3^{\circ}$ og grunnhornafallasamsemdunum getum við fundið lausnirnar. Því er

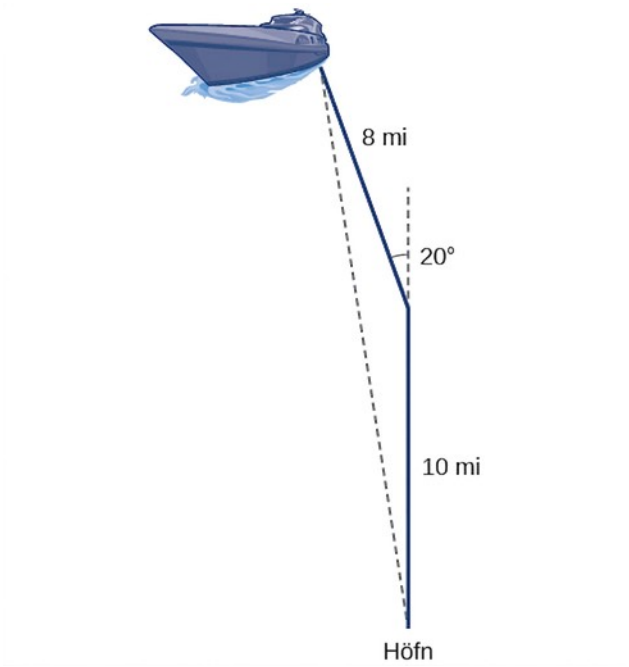
$$\cos\left(23{,}3°\right)=\frac{x}{5.050}$$
$$x=5.050\cos\left(23{,}3°\right)$$
$$x\approx 4.638{,}15 \text{ fet}$$
$$\sin\left(23{,}3°\right)=\frac{y}{5.050}$$
$$y=5.050\sin\left(23{,}3°\right)$$
$$y\approx 1.997{,}5 \text{ fet}$$

Síminn er um það bil 4.638 fet austur og 1998 fet norður af fyrri turninum og 1998 fet frá þjóðveginum.

DÆMI 4

Farin vegalengd reiknuð með SAS-þríhyrningi

Víkjum aftur að verkefninu í upphafi hlutans. Gerum ráð fyrir að bátur sigli frá höfn, fari 10 mílur, beygi um 20 gráður og fari síðan aðrar 8 mílur. Hve langt er báturinn frá höfninni? Myndin er endurtekin á mynd 8.



Mynd 8

Lausn

Báturinn beygði um 20 gráður og því er gleiða horn óréttthyrnda þríhyrningsins grannhornið $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. Nú getum við notað kósínusregluna til að finna hliðina sem vantar í gleiðhyrnda þríhyrninginn, það er fjarlægð bátsins frá höfninni.

$$x^2 = 8^2 + 10^2 - 2\,(8)\,(10)\cos(160°)$$
$$x^2 = 314{,}35$$
$$x = \sqrt{314{,}35}$$
$$x \approx 17{,}7 \text{ mílur}$$

Báturinn er um 17,7 mílur frá höfninni.

Heronsformúla notuð til að finna flatarmál þríhyrnings

Við höfum þegar lært að finna flatarmál órétthyrnds þríhyrnings þegar tvær hliðar og eitt horn eru þekkt. Við þekkjum einnig formúluna sem notar grunnlínu og hæð til að finna flatarmál þríhyrnings. Þegar allar þrjár hliðarnar eru þekktar getum við hins vegar notað Heronsformúlu í stað þess að finna hæðina. Heron frá Alexandríu var rúmfræðingur sem var uppi á fyrstu öld e.Kr. Hann uppgötvaði formúlu til að finna flatarmál órétthyrndra þríhyrninga þegar þrjár hliðar eru þekktar.

HERONSFORMÚLA

Heronsformúla gefur flatarmál órétthyrndra þríhyrninga þegar hliðarnar a, b, og c eru þekktar.

$$\text{Flatarmál} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

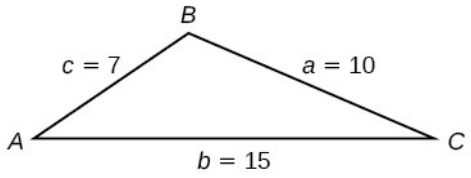
þar sem $s = \frac{(a+b+c)}{2}$ er helmingur ummáls þríhyrningsins og kallast stundum hálfummál.

8

DÆMI 5

Heronsformúla notuð til að finna flatarmál gefins þríhyrnings

Finnið flatarmál þríhyrningsins á mynd 9 með Heronsformúlu.



Mynd 9

Lausn

Fyrst reiknum við s.

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$
$$s = \frac{(10+15+7)}{2} = 16$$

Síðan beitum við formúlunni.

$$\text{Flatarmál} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$
$$\text{Flatarmál} = \sqrt{16\,(16-10)\,(16-15)\,(16-7)}$$
$$\text{Flatarmál} \approx 29{,}4$$

Flatarmálið er um það bil 29,4 ferningseiningar.

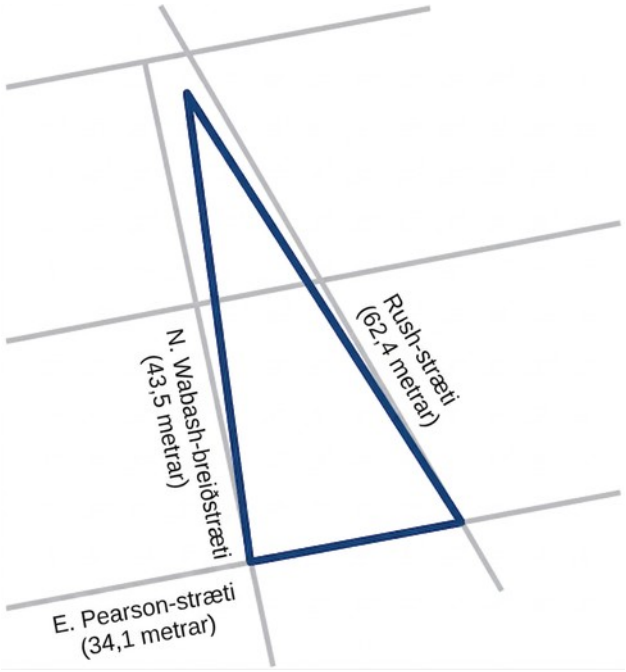
REYNIÐ SJÁLF #3

Notið Heronsformúlu til að finna flatarmál þríhyrnings með hliðarlengdirnar $a = 29{,}7\ \text{ft}$, $b = 42{,}3\ \text{ft}$, og $c = 38{,}4\ \text{ft}$.

DÆMI 6

Heronsformúlu beitt á raunverulegt viðfangsefni

Byggingaraðili í Chicago vill reisa hús með vinnustofum fyrir listamenn á þríhyrndri lóð sem afmarkast af Rush Street, Wabash Avenue og Pearson Street. Framhliðin við Rush Street er um 62,4 metrar, við Wabash Avenue um 43,5 metrar og við Pearson Street um 34,1 metrar. Hve margir fermetrar eru til ráðstöfunar? Mynd 10 sýnir lóðina í borginni.



Mynd 10

Lausn

Finnið gildið á s, sem er helmingur ummálsins.

$$s = \frac{(62{,}4 + 43{,}5 + 34{,}1)}{2}$$
$$s = 70\ \text{m}$$

Beitið Heronsformúlu.

$$\text{Flatarmál} = \sqrt{70\,(70-62{,}4)\,(70-43{,}5)\,(70-34{,}1)}$$
$$\text{Flatarmál} = \sqrt{506.118{,}2}$$
$$\text{Flatarmál} \approx 711{,}4$$

Byggingaraðilinn hefur um 711,4 fermetra til ráðstöfunar.

REYNIÐ SJÁLF #4

Finnið flatarmál þríhyrnings þegar $a = 4{,}38$ ft , $b = 3{,}79$ ft, og $c = 5{,}22$ ft.

MARGMIÐLUN

Skoðið þessi vefgögn til að fá frekari kennslu og æfingu í kósínusreglunni.

- Kósínusreglan
- Kósínusreglan: notkun
- Kósínusreglan: notkun 2

8.2 Æfingar hluta

Spurningar

1. Hvað þurfið þið að vita þegar kósínusreglan er notuð til að finna óþekkta hlið þríhyrnings?
2. Hvað þurfið þið að vita þegar kósínusreglan er notuð til að finna óþekkt horn þríhyrnings?
3. Útskýrið hvað s táknar í Heronsformúlu.
4. Útskýrið tengsl reglu Pýþagórasar og kósínusreglunnar.
5. Hvenær þurfið þið að nota kósínusregluna í stað reglu Pýþagórasar?

Algebra

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið gera ráð fyrir að α sé á móti hliðinni a, β sé á móti hliðinni b, og γ sé á móti hliðinni c. Finnið óþekktu hliðina í hverjum þríhyrningi ef það er hægt. Námundið að næsta tíunda hluta.

6.

$$\gamma = 41{,}2^\circ, a = 2{,}49, b = 3{,}13$$

7.

$$\alpha = 120^\circ, b = 6, c = 7$$

8.

$$\beta = 58{,}7^\circ, a = 10{,}6, c = 15{,}7$$

9.

$$\gamma = 115^\circ, a = 18, b = 23$$

10.

$$\alpha = 119^\circ, a = 26, b = 14$$

11.

$$\gamma = 113^\circ, b = 10, c = 32$$

12.

$$\beta = 67^\circ, a = 49, b = 38$$

13.

$$\alpha = 43{,}1^\circ, a = 184{,}2, b = 242{,}8$$

14.

$$\alpha = 36{,}6^\circ, a = 186{,}2, b = 242{,}2$$

15.

$$\beta = 50^\circ, a = 105, b = 45$$

Notið kósínusregluna í eftirfarandi dæmum til að finna hornið sem vantar í óréttthyrnda þríhyrninginn. Námundið að næsta tíunda hluta.

16. $a = 42, b = 19, c = 30$; finnið hornið A.

17. $a = 14, b = 13, c = 20$; finnið hornið C.

18. $a = 16, b = 31, c = 20$; finnið hornið B.

19. $a = 13, b = 22, c = 28$; finnið hornið A.

20. $a = 108, b = 132, c = 160$; finnið hornið C.

Leysið þríhyrninginn í eftirfarandi dæmum. Námundið að næsta tíunda hluta.

21.

$$A = 35^\circ, b = 8, c = 11$$

22.

$$B = 88^\circ, a = 4{,}4, c = 5{,}2$$

23.

$$C = 121^\circ, a = 21, b = 37$$

24.

$$a=13\,,b=11\,,c=15$$

25.

$$a=3{,}1\,,b=3{,}5\,,c=5$$

26.

$$a=51\,,b=25\,,c=29$$

Notið Heronsformúlu í eftirfarandi dæmum til að finna flatarmál þríhyrningsins. Námundið að næsta hundraðshluta.

27. Finnið flatarmál þríhyrnings með hliðarlengdirnar 18 tommur, 21 tommur og 32 tommur. Námundið að næsta tíunda hluta.

28. Finnið flatarmál þríhyrnings með hliðarlengdirnar 20 cm, 26 cm og 37 cm. Námundið að næsta tíunda hluta.

29.

$$a=\frac{1}{2}\,\text{m}\,,b=\frac{1}{3}\,\text{m}\,,c=\frac{1}{4}\,\text{m}$$

30.

$$a=12{,}4\ \text{ft}\,,\quad b=13{,}7\ \text{ft}\,,\quad c=20{,}2\ \text{ft}$$

31.

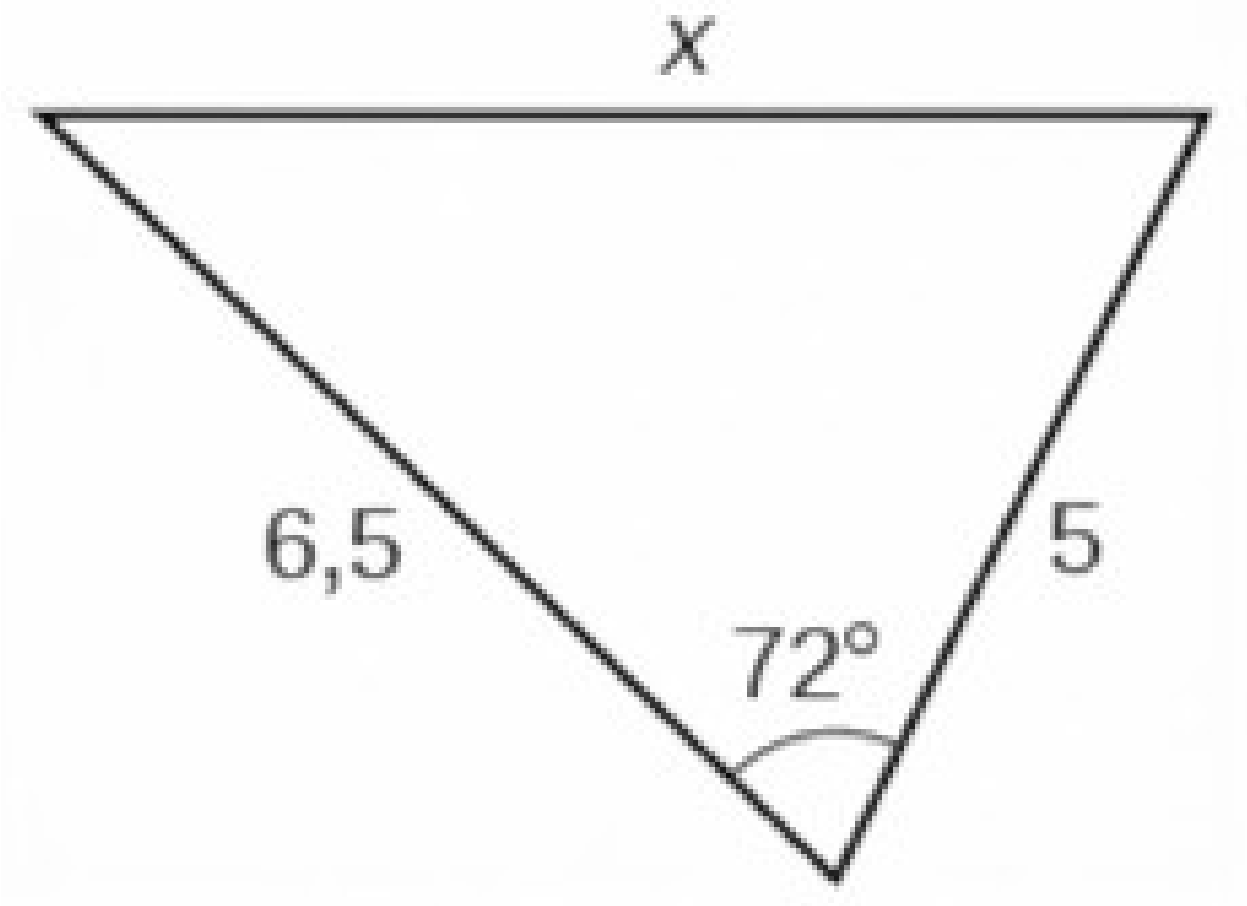
$$a=1{,}6\ \text{yd}\,,\quad b=2{,}6\ \text{yd}\,,\quad c=4{,}1\ \text{yd}$$

8

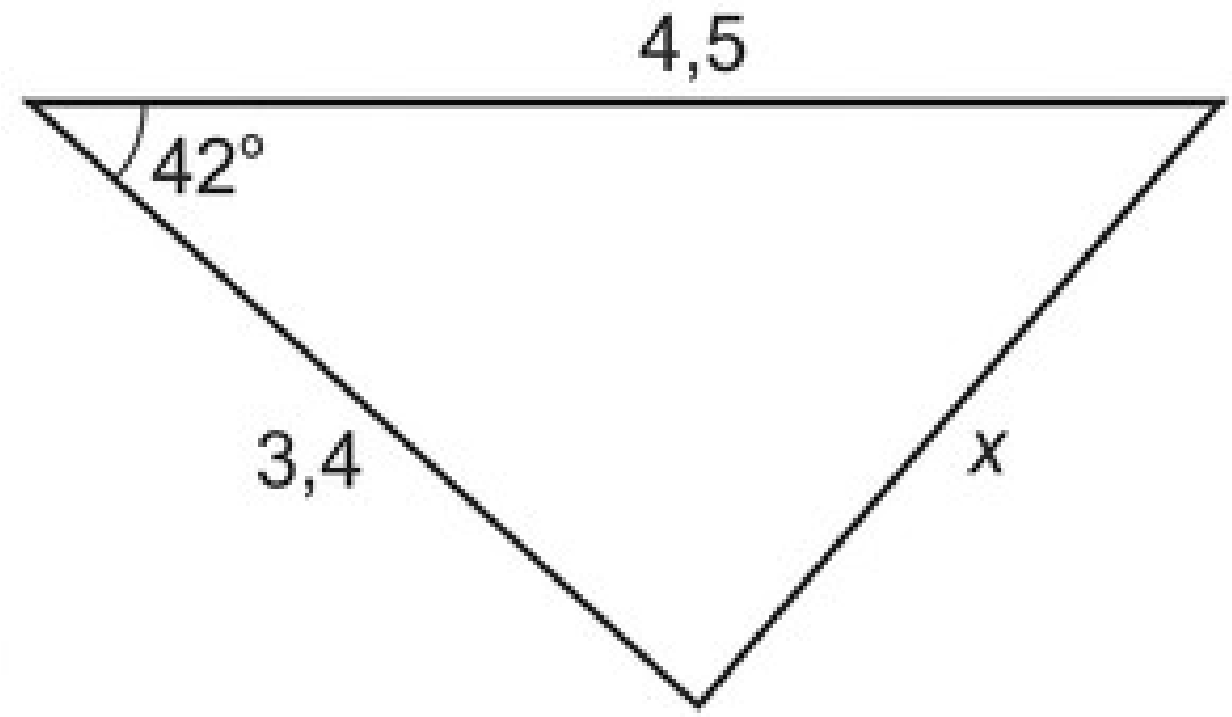
Myndrænt

Finnið í eftirfarandi dæmum lengd hliðarinnar x. Námundið að næsta tíunda hluta.

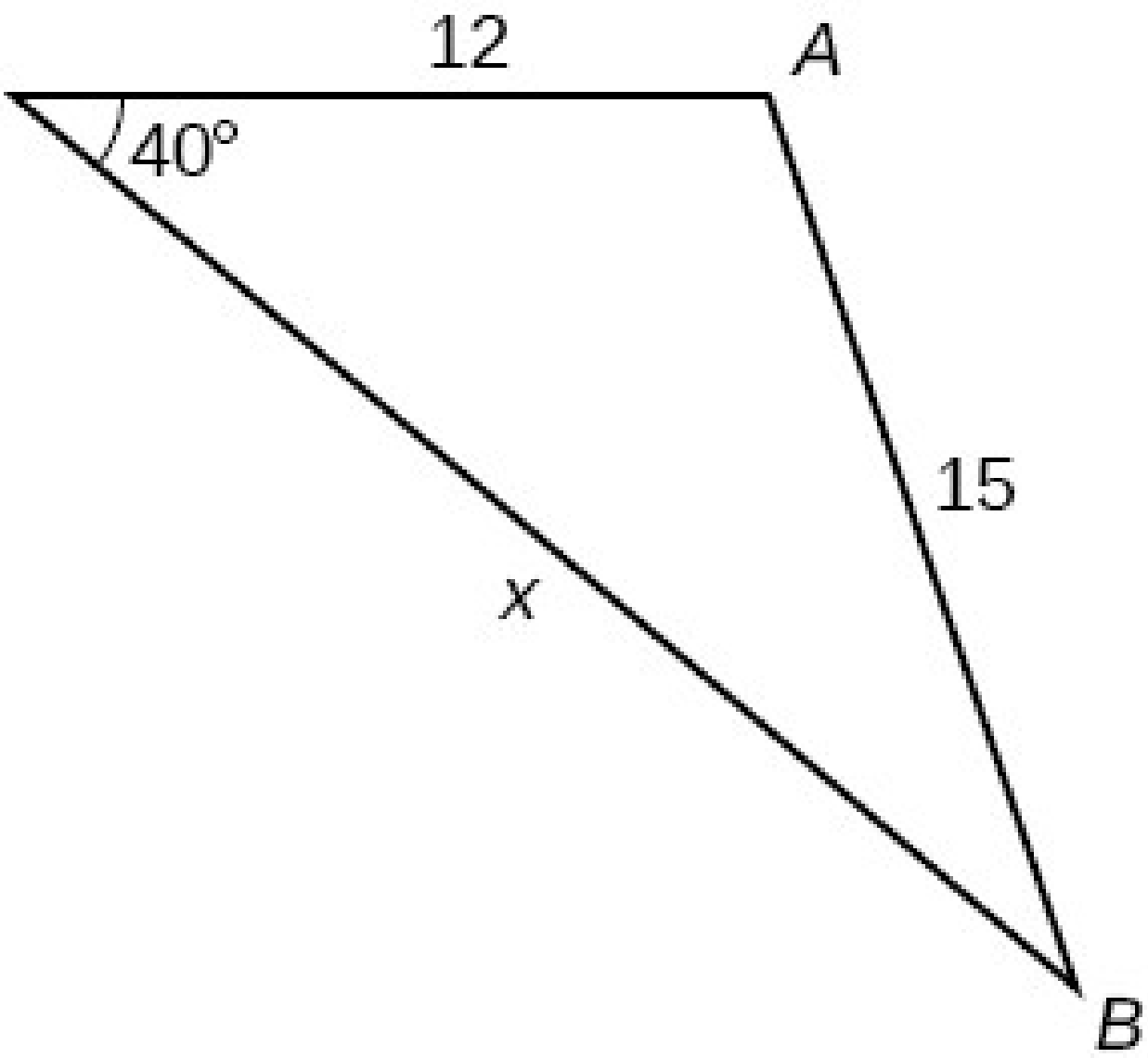
32.



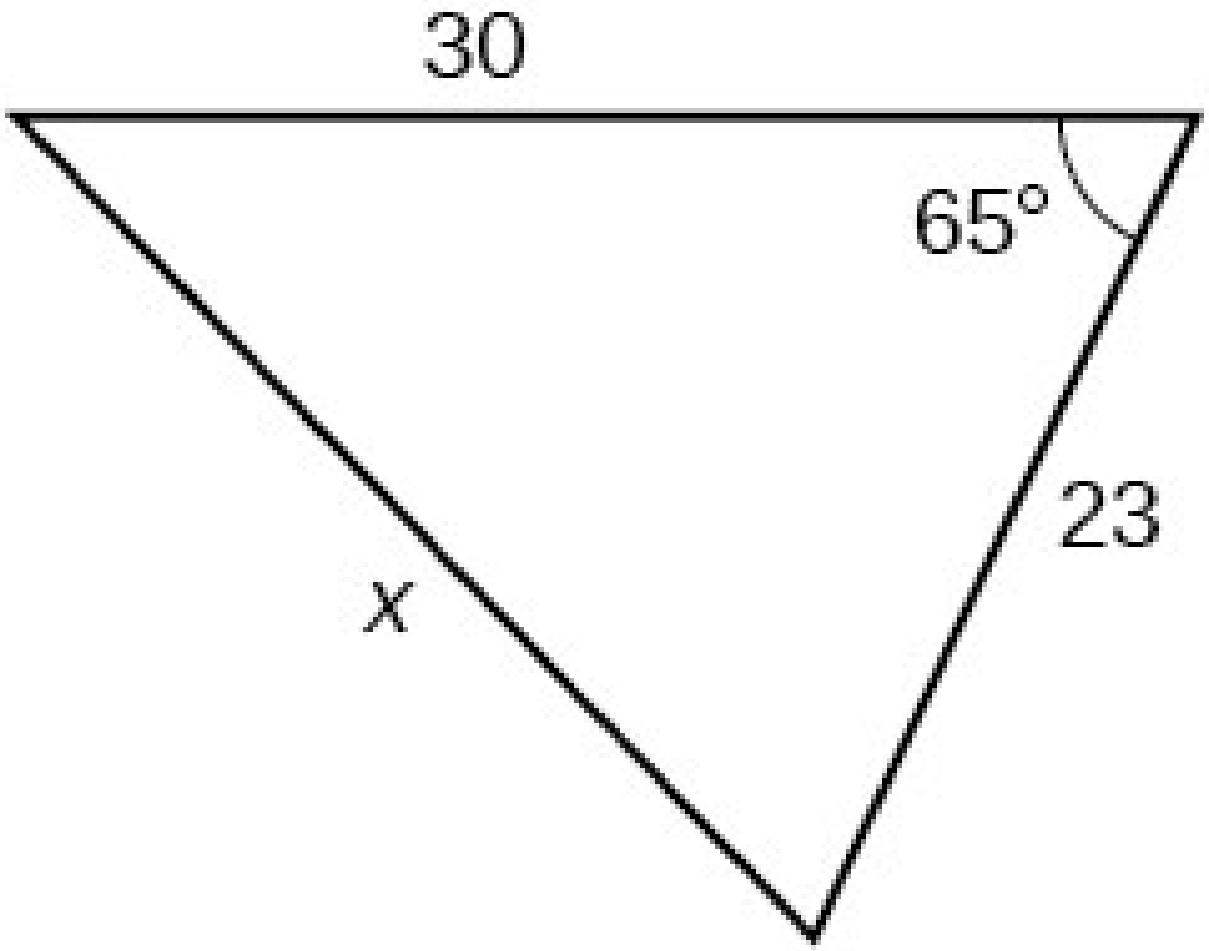
33.



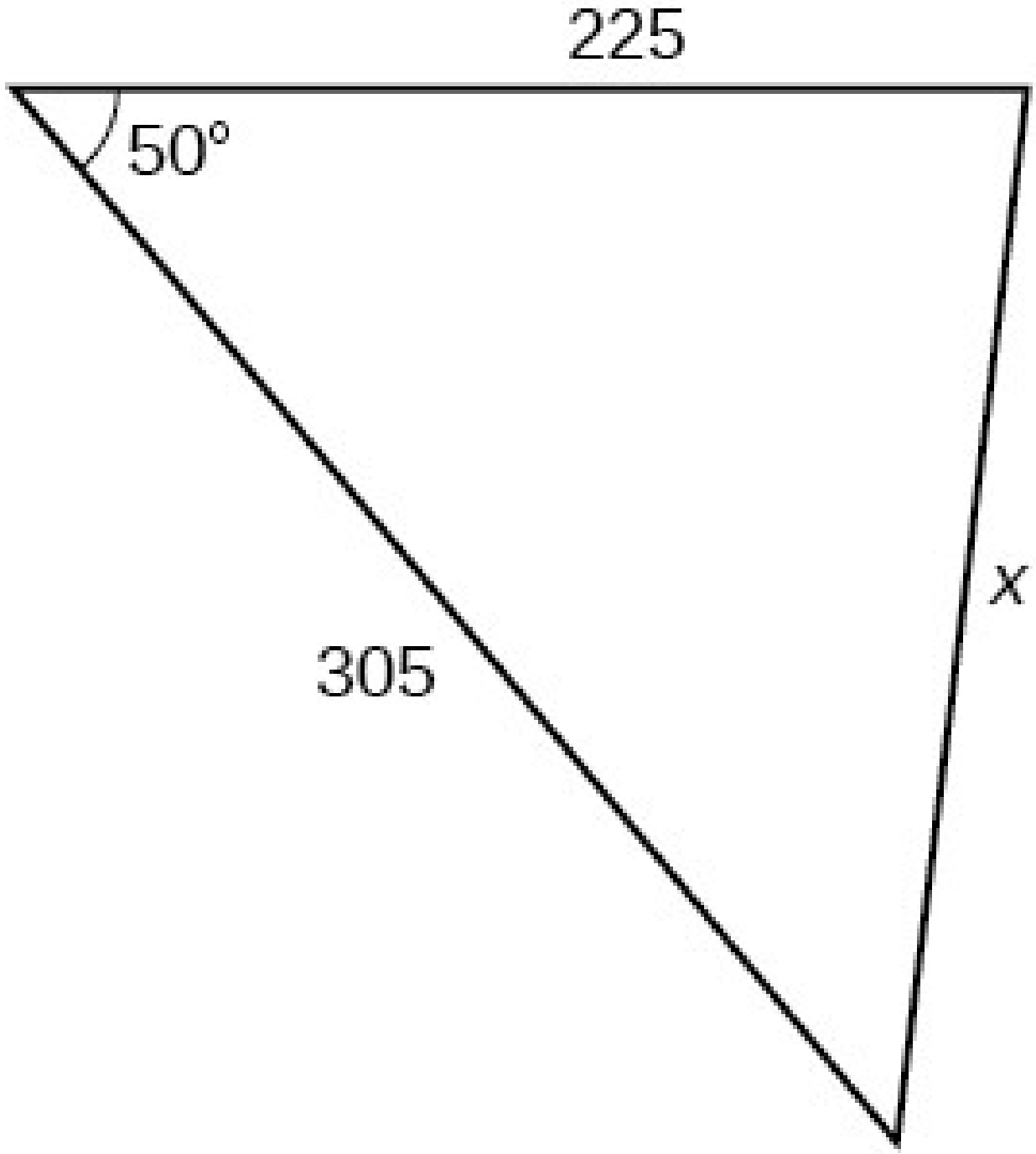
34.



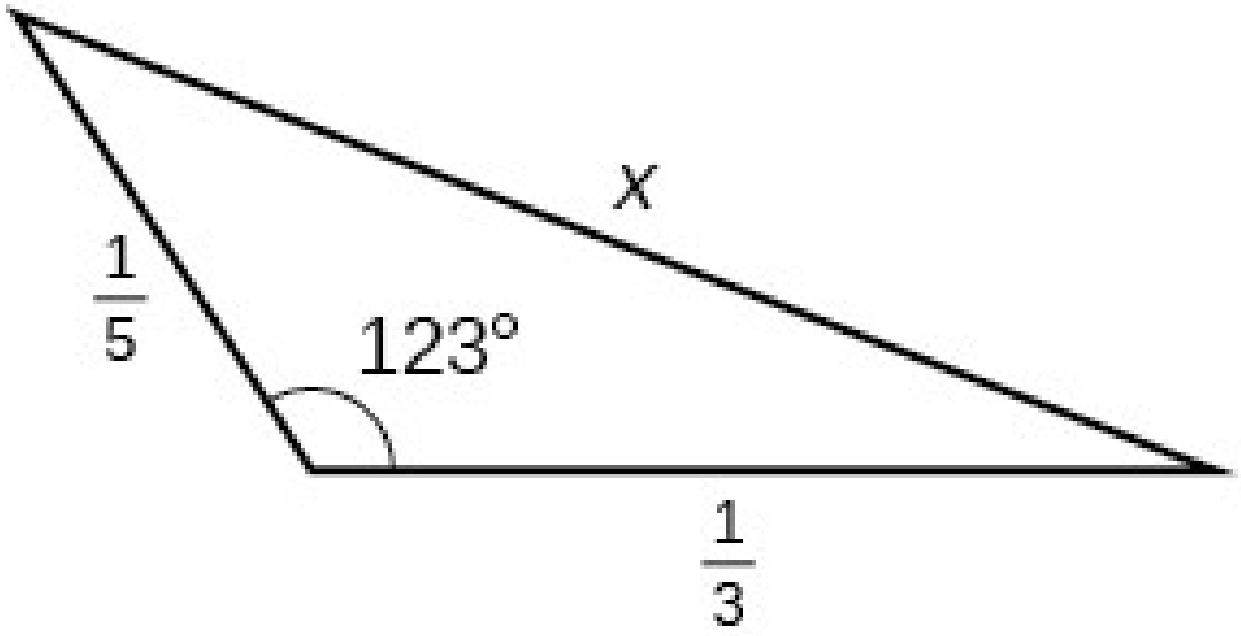
35.



36.

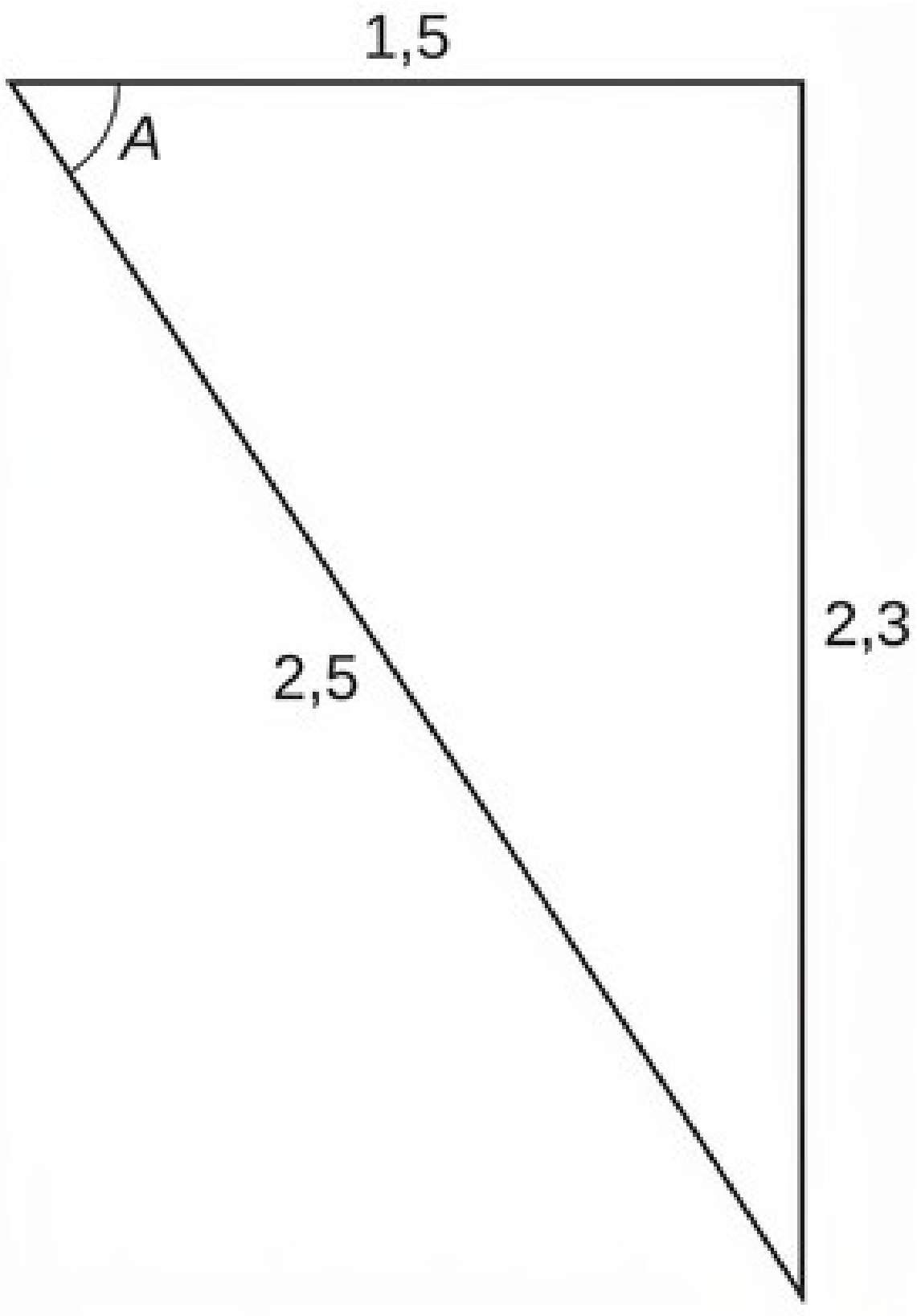


37.

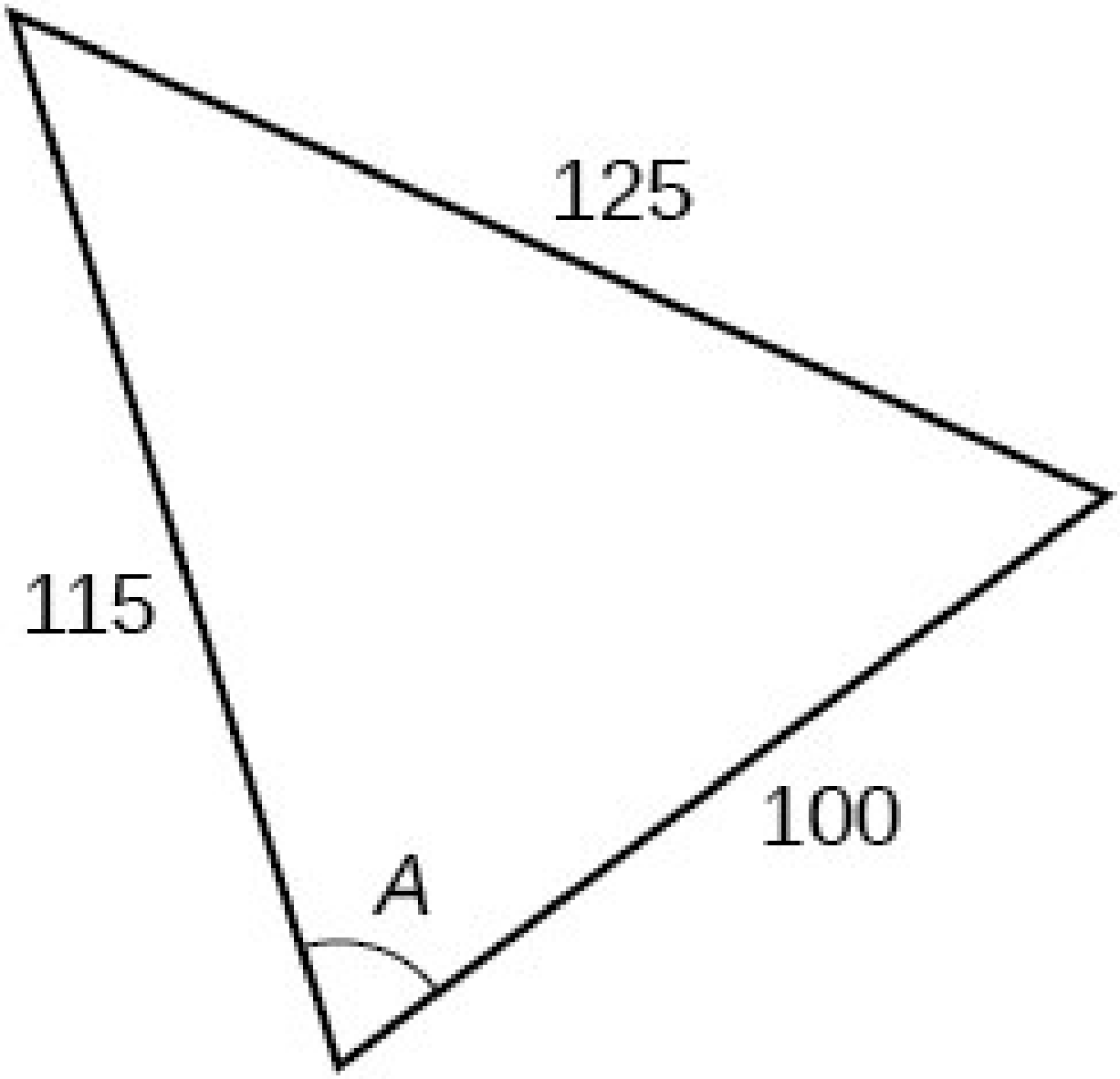


Finnið í eftirfarandi dæmum stærð hornsins A.

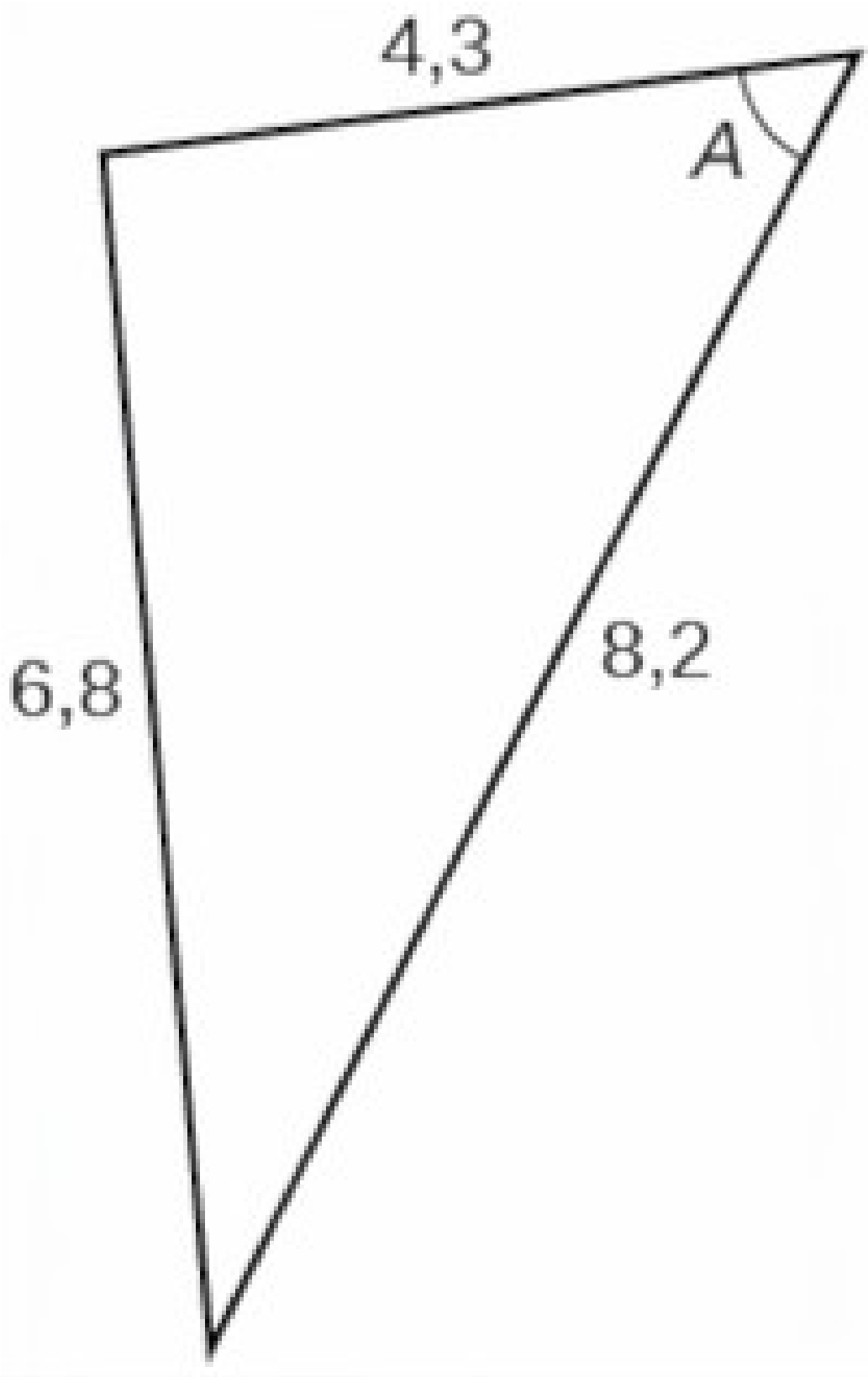
38.



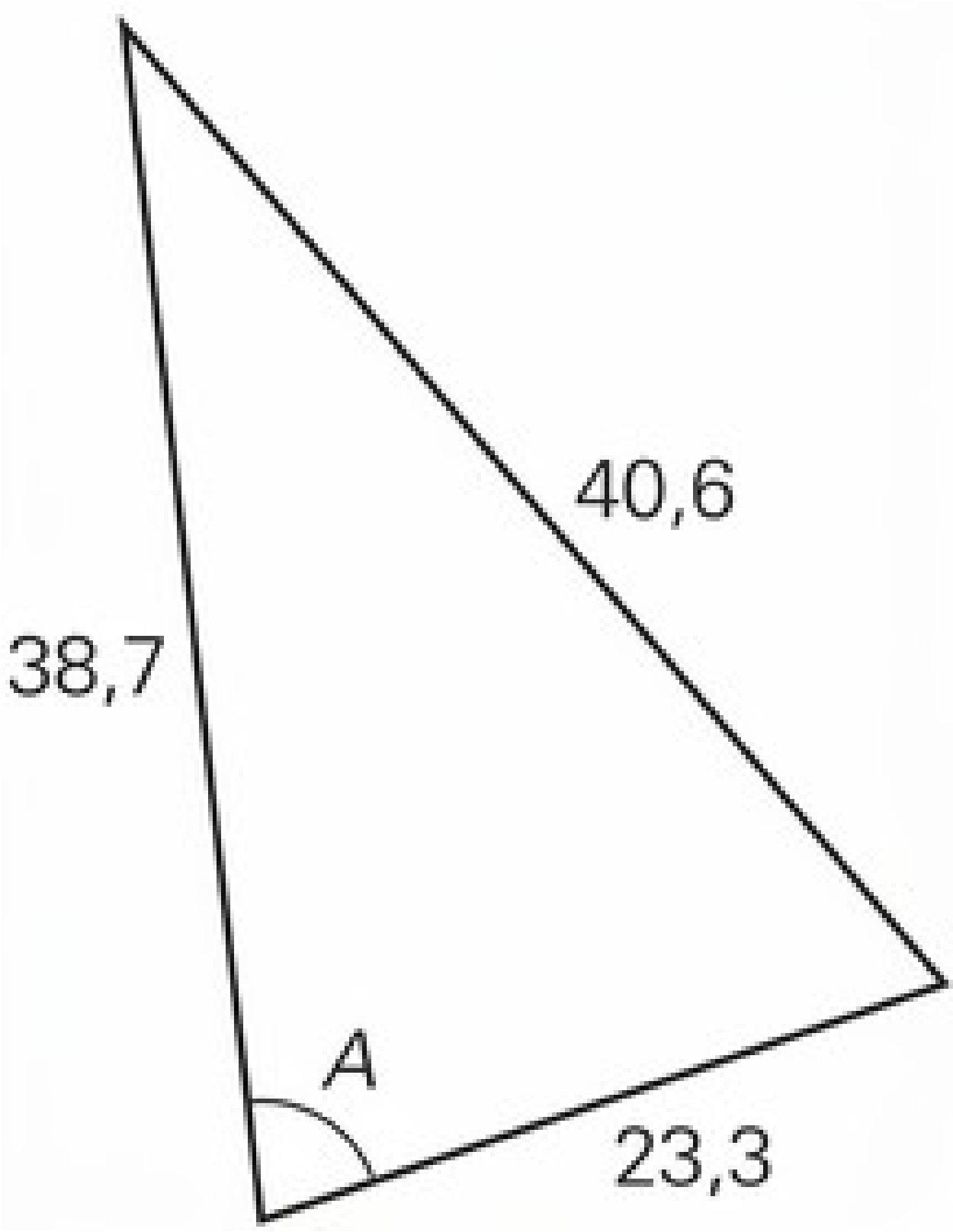
39.



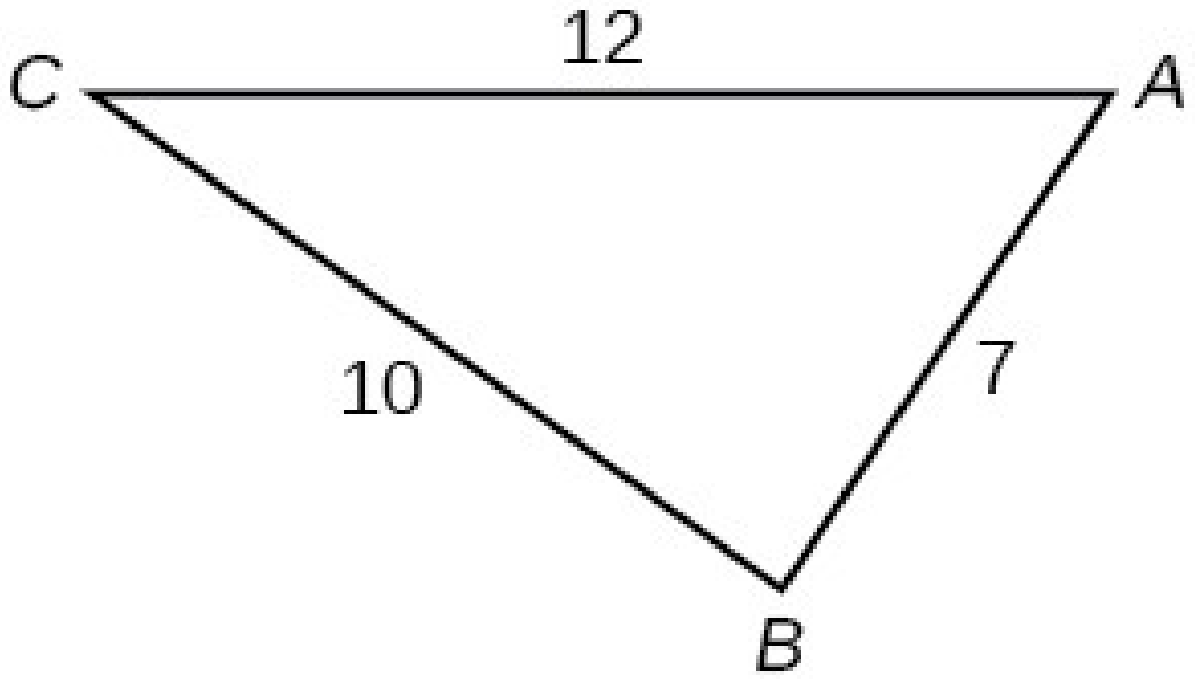
40.



41.



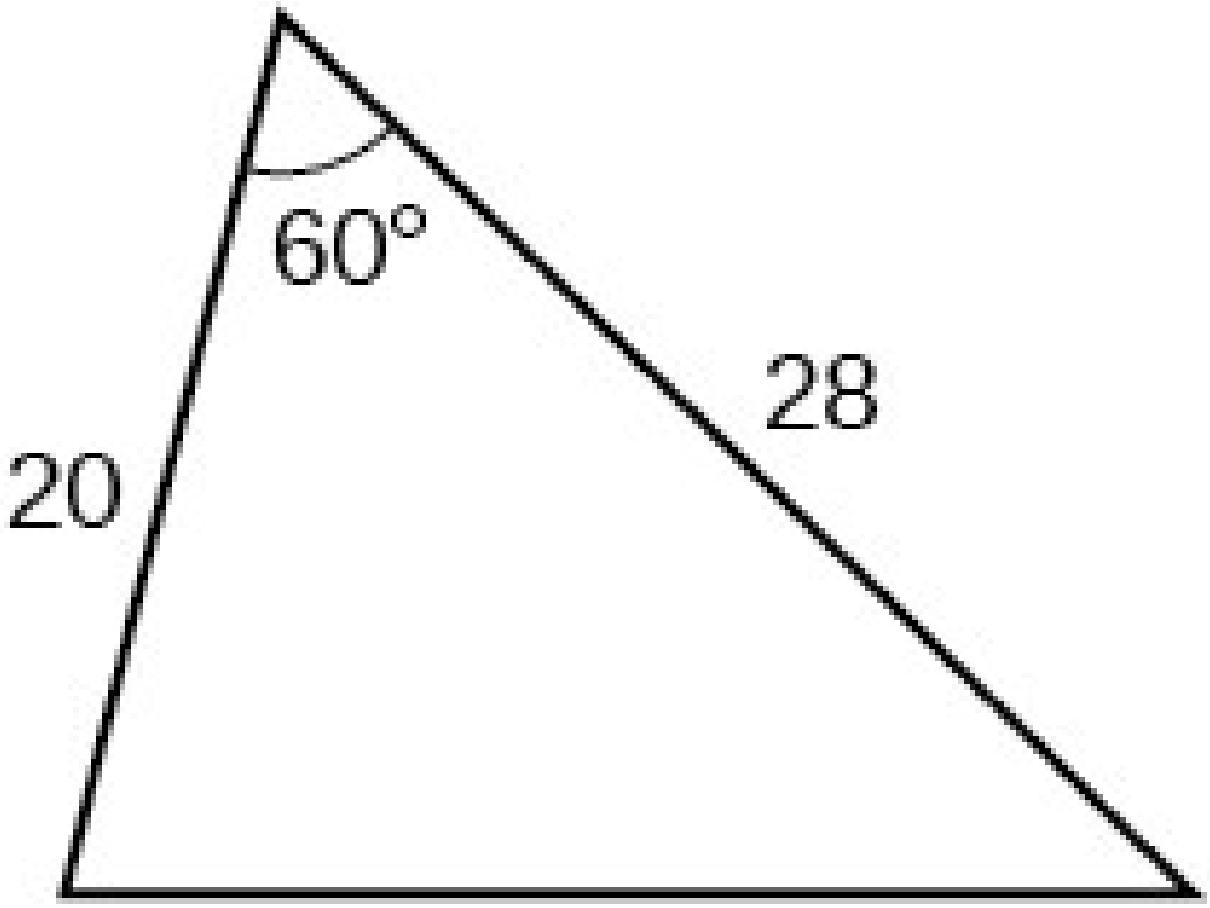
42. Finnið stærð hvers horns í þríhyrningnum á mynd 11. Námundið að næsta tíunda hluta.



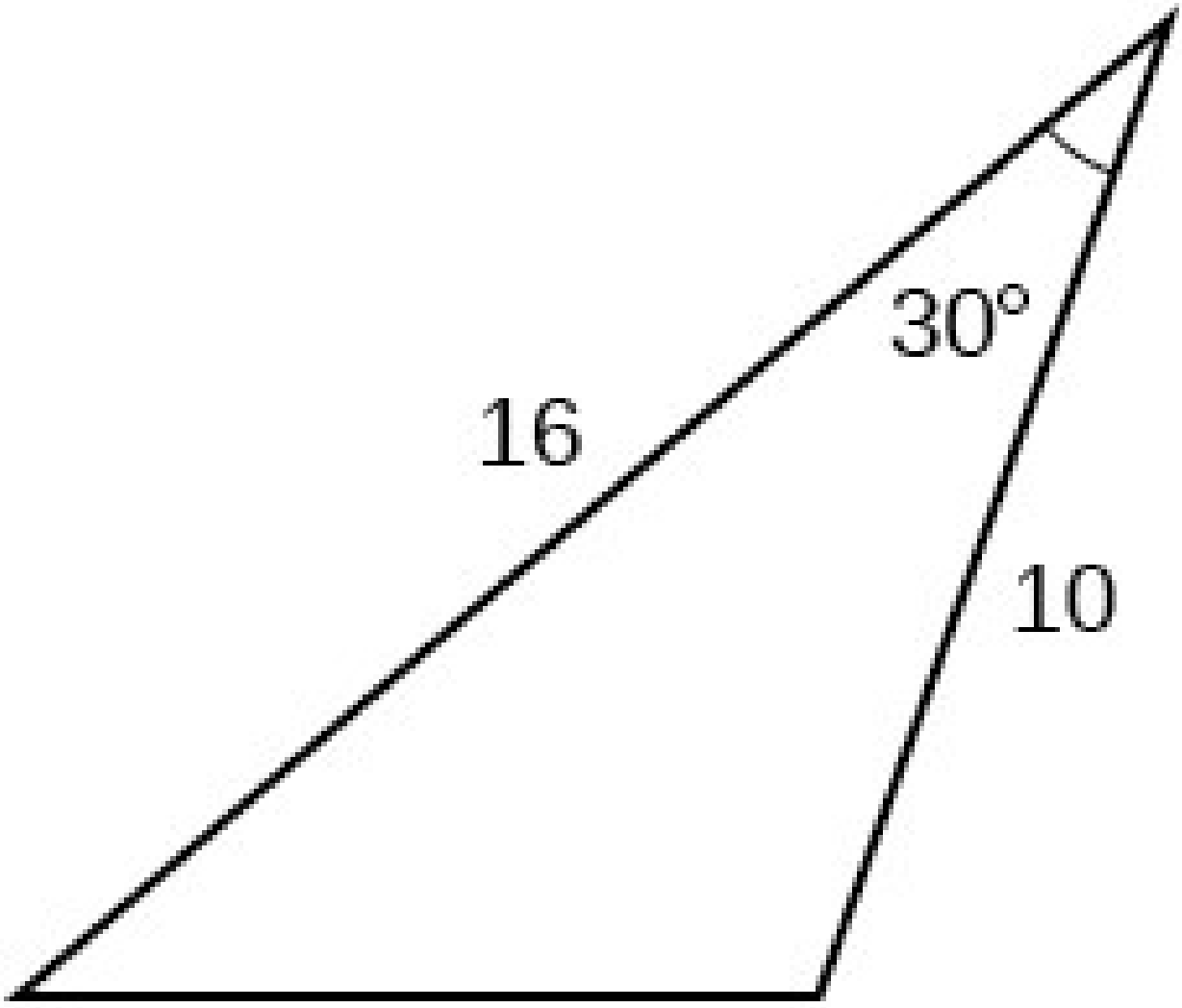
Mynd 11

Leysið fyrir óþekktu hliðina í eftirfarandi dæmum. Námundið að næsta tíunda hluta.

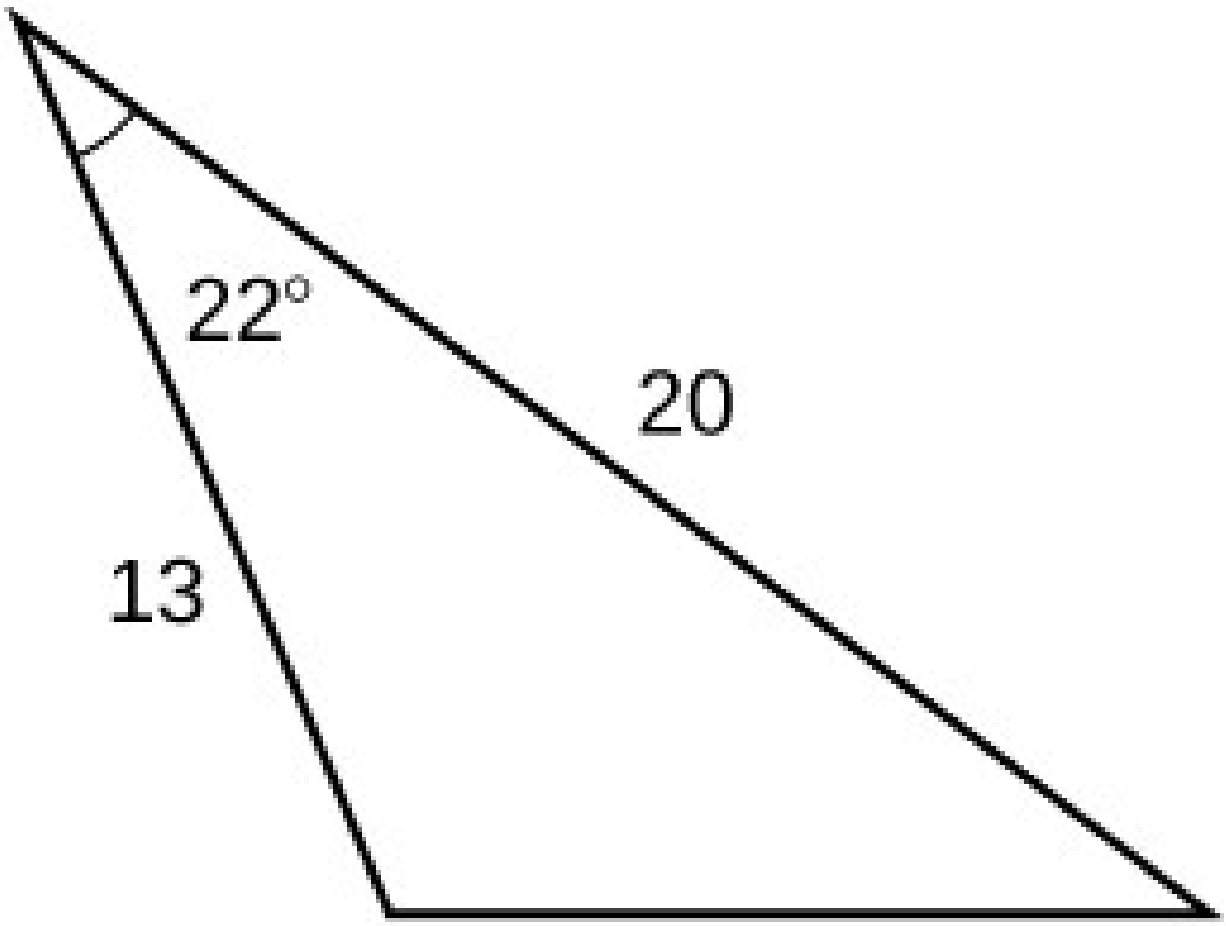
43.



44.

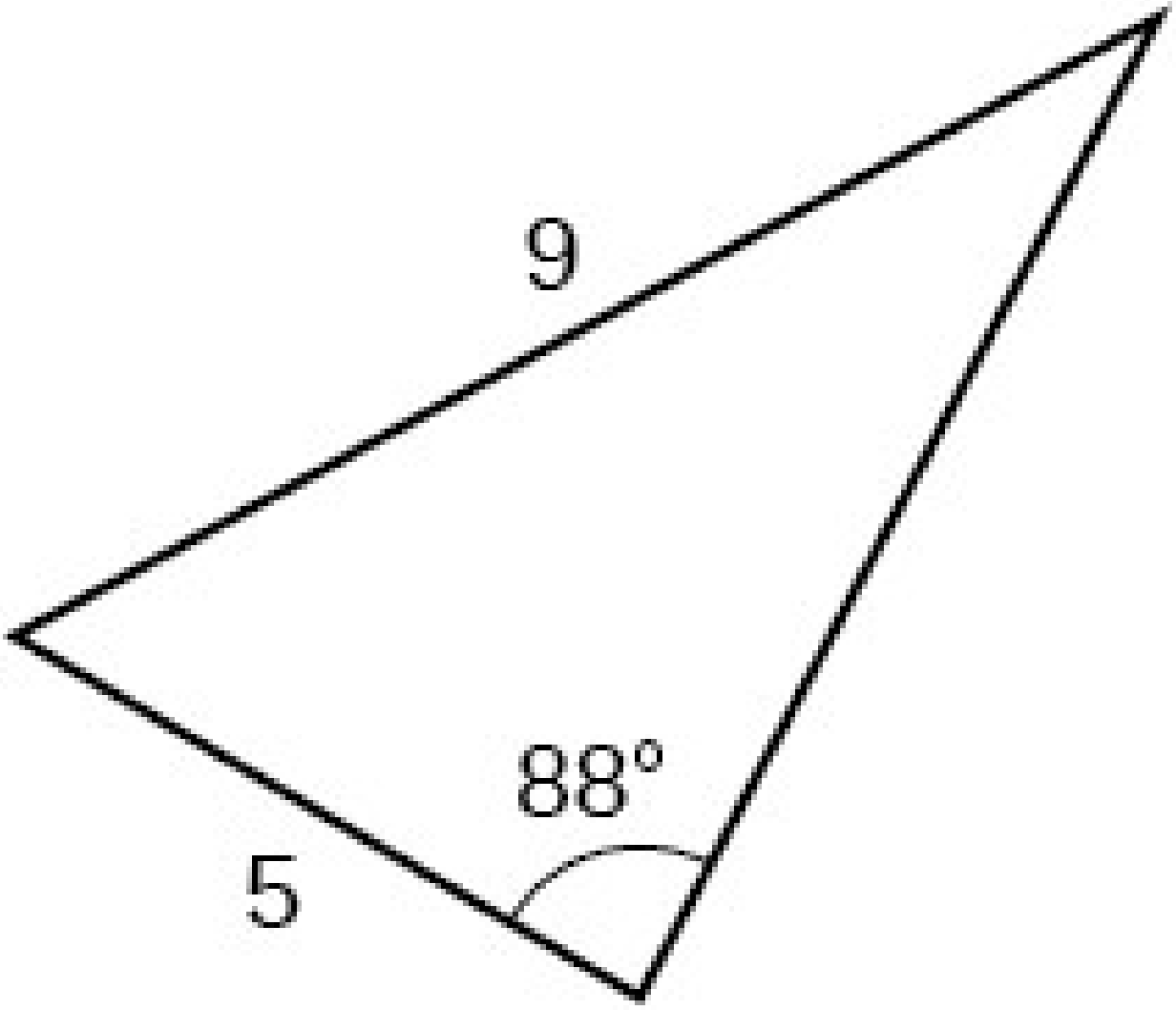


45.



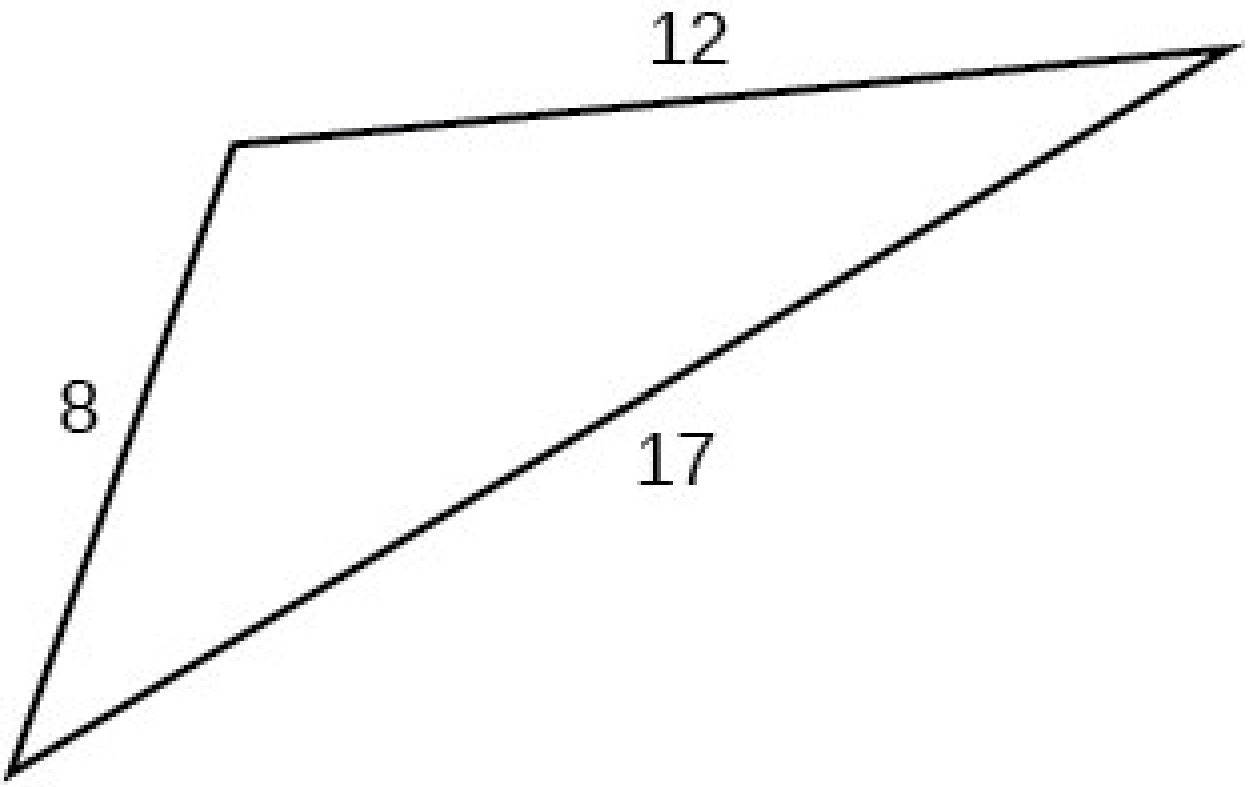
8

46.

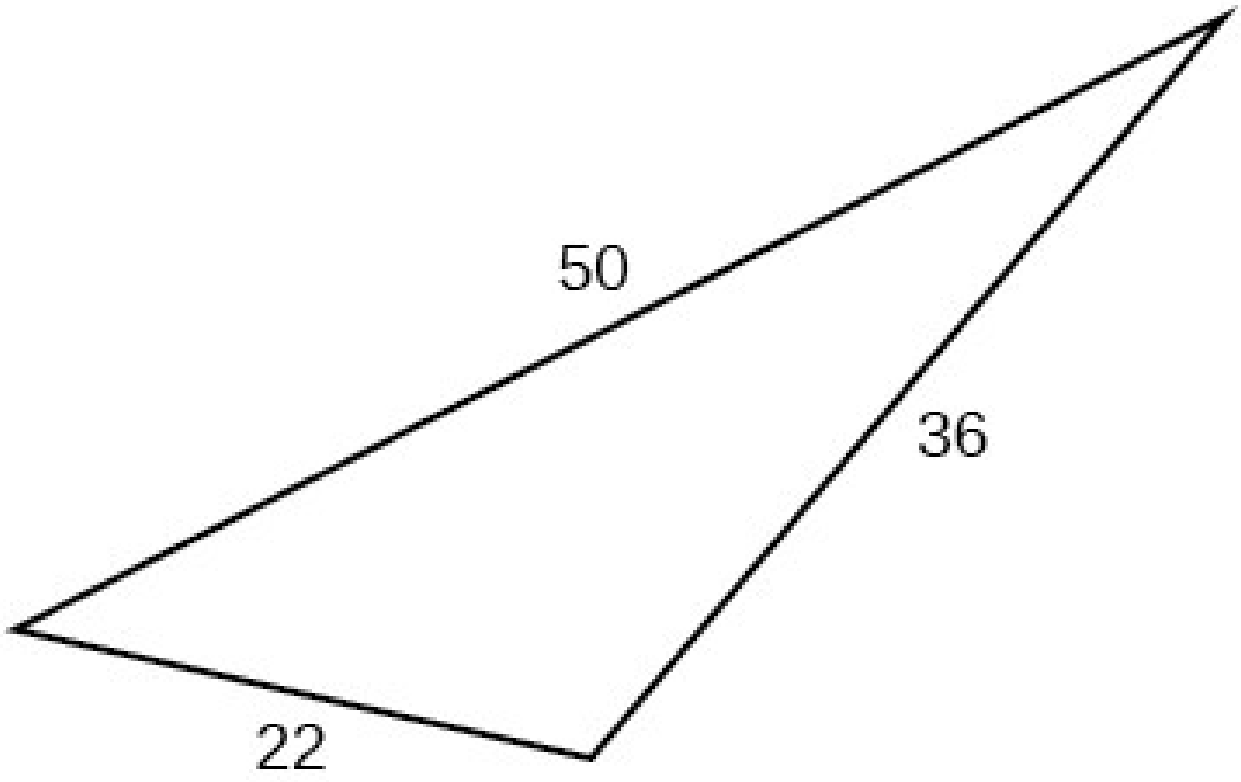


Finnið flatarmál þríhyrningsins í eftirfarandi dæmum. Námundið að næsta hundraðshluta.

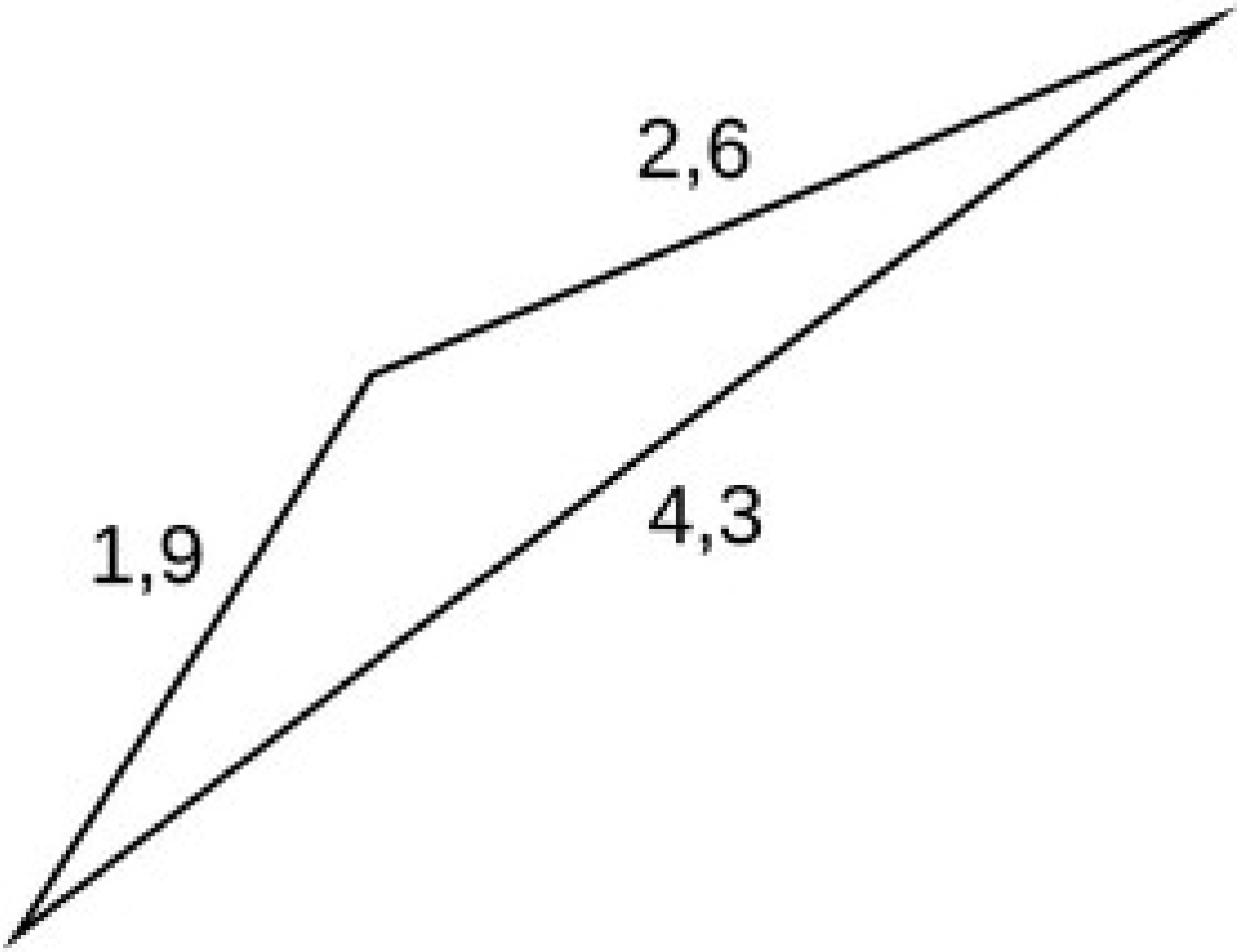
47.



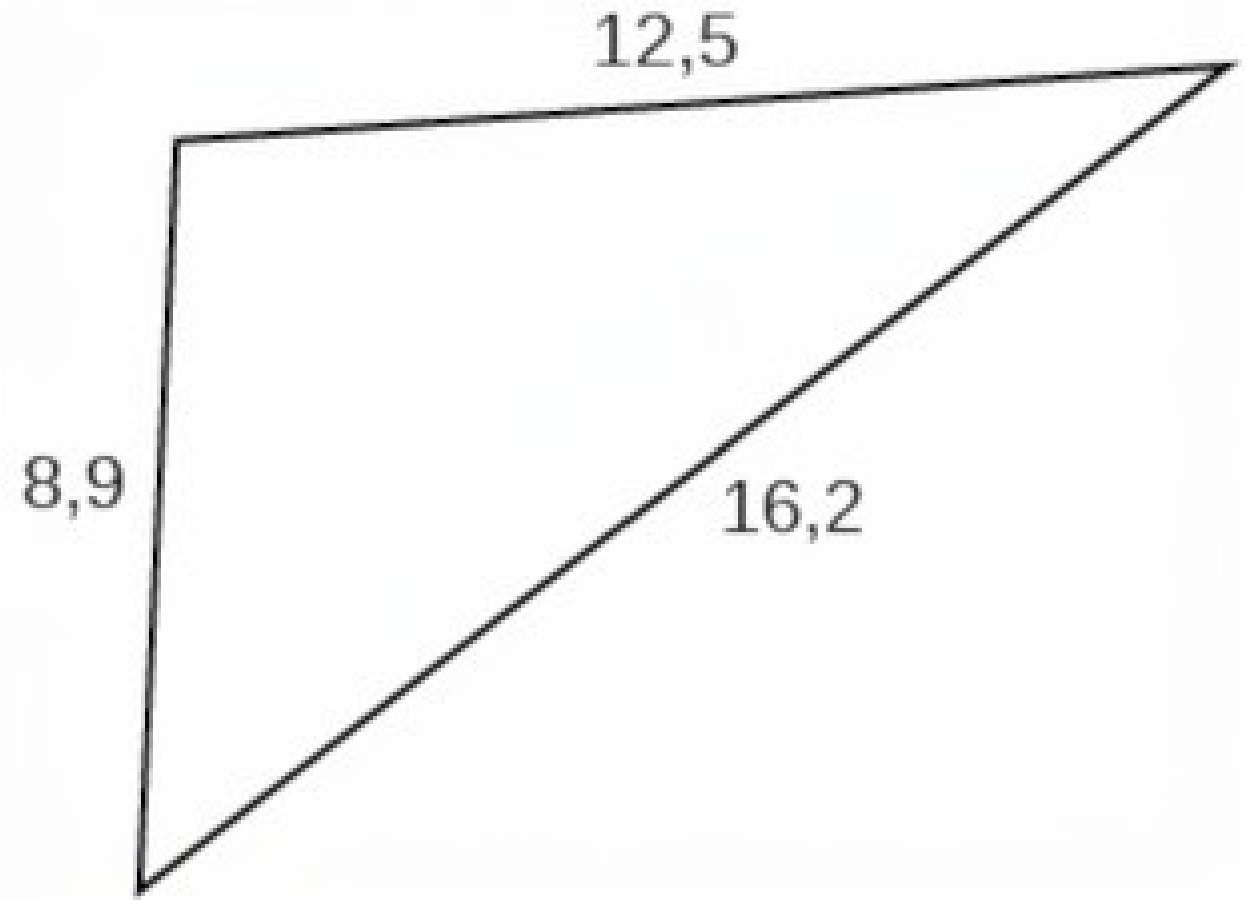
48.



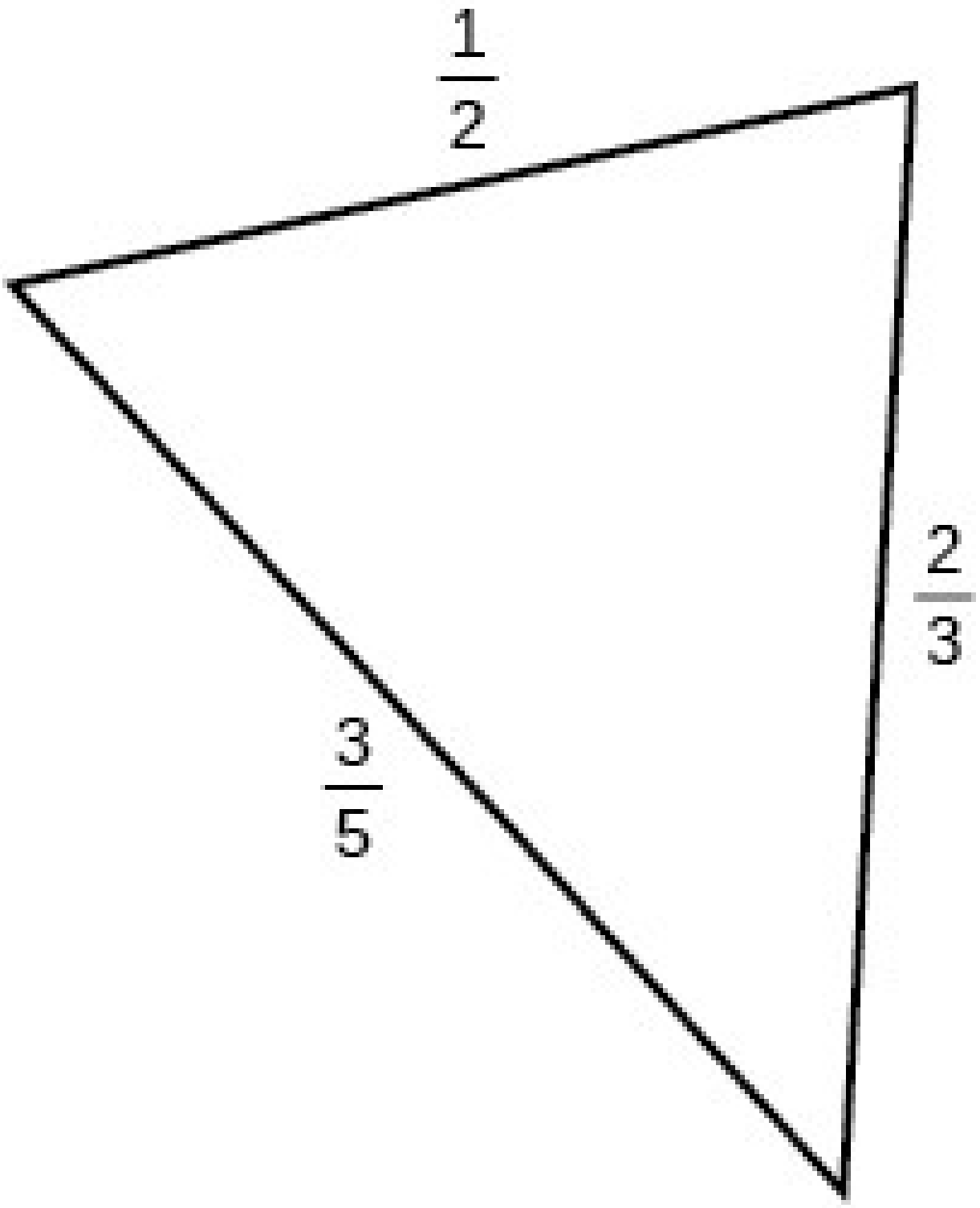
49.



50.



51.



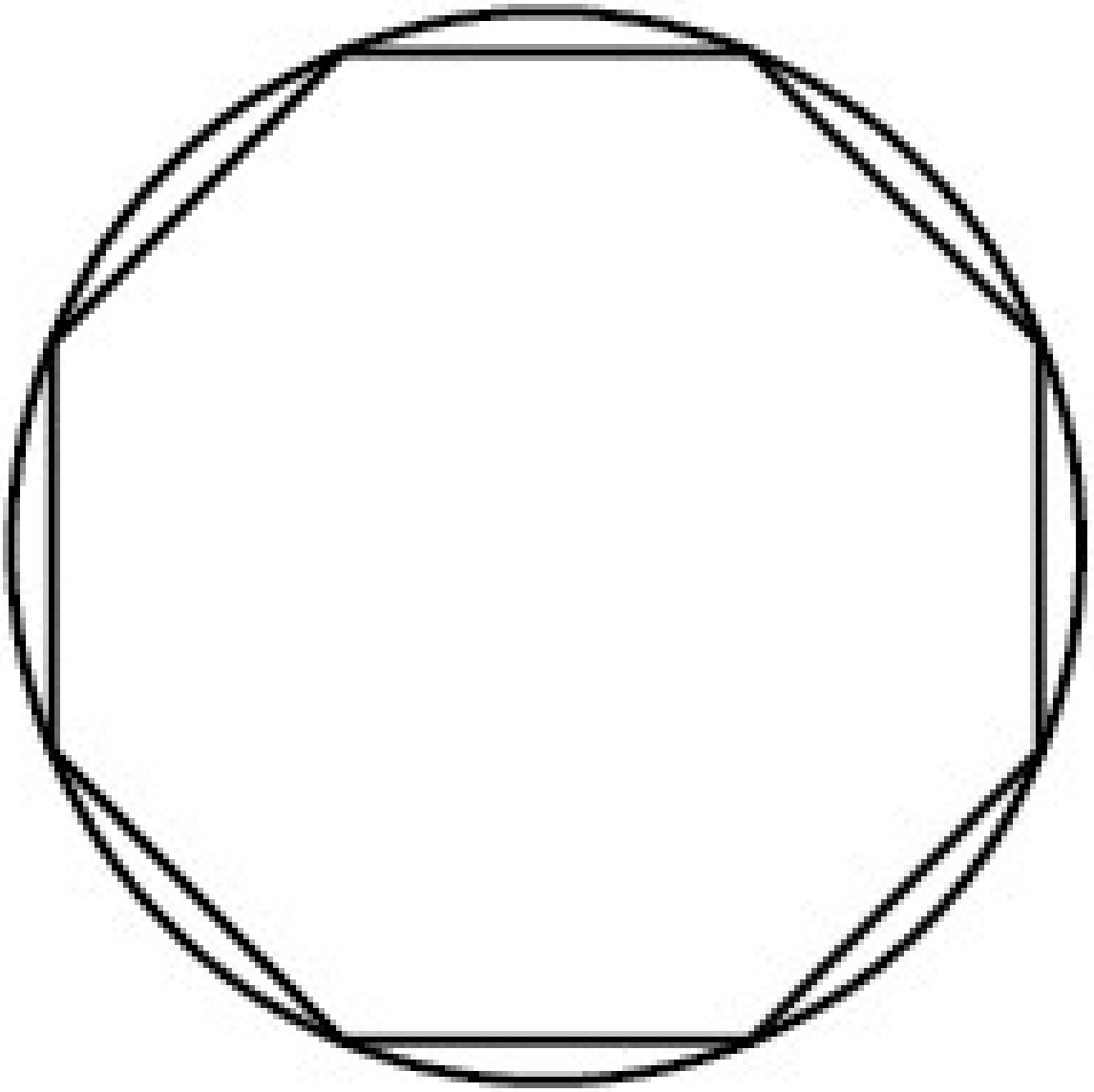
Viðbótarverkefni

52. Samsíðungur hefur hliðar með lengdirnar 16 og 10 einingar. Styttri hornalínan er 12 einingar. Finnið lengd lengri hornalínunnar.

53. Hliðar samsíðungs eru 11 fet og 17 fet. Lengri hornalínan er 22 fet. Finnið lengd styttri hornalínunnar.

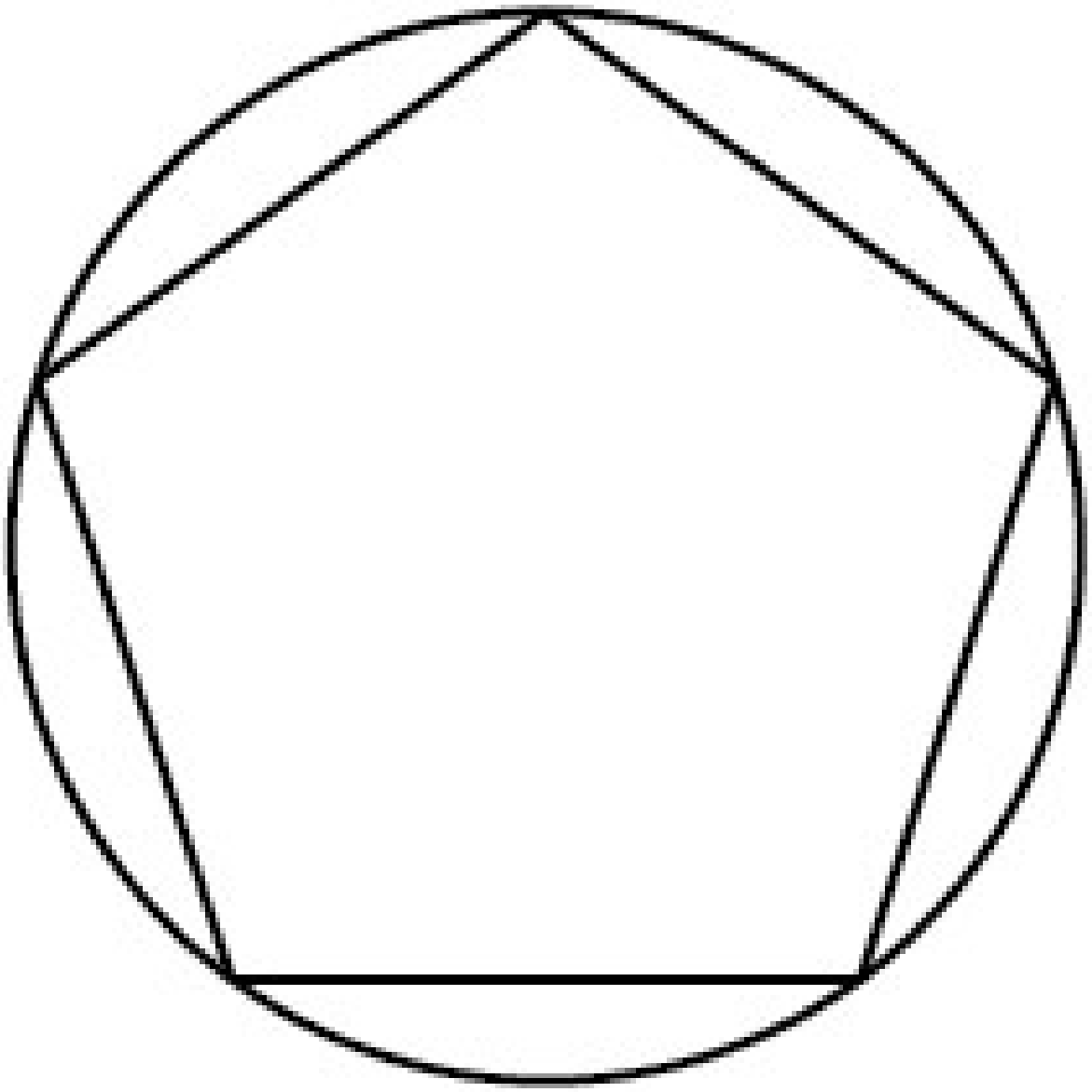
54. Hliðar samsíðungs eru 28 sentímetrar og 40 sentímetrar. Stærra hornið er 100°. Finnið lengd styttri hornalínunnar.

55. Reglulegur átthyrningur er innritaður í hring með geislann 8 tommur. (Sjá mynd 12.) Finnið ummál átthyrningsins.



Mynd 12

56. Reglulegur fimmhyrningur er innritaður í hring með geislann 12 cm. (Sjá mynd 13.) Finnið ummál fimmhyrningsins. Námundið að næsta tíunda hluta úr sentímetra.



Mynd 13

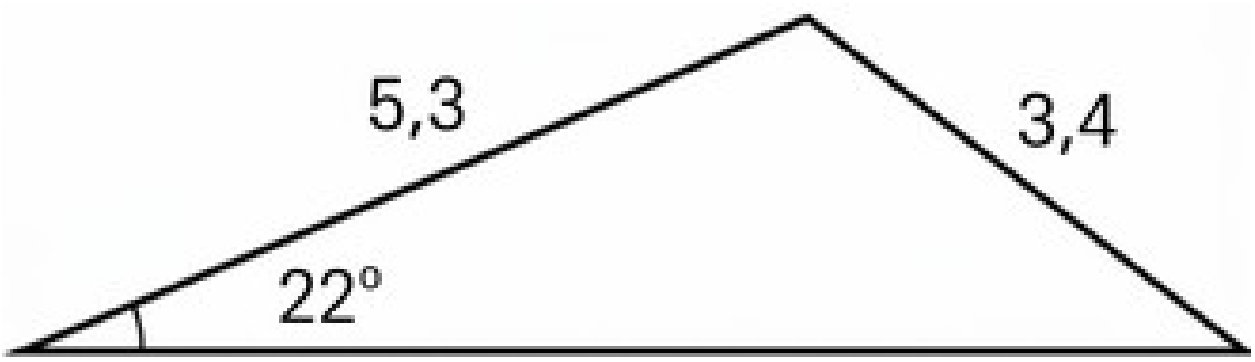
Í eftirfarandi dæmum skuluð þið gera ráð fyrir að $x^2 = 25 + 36 - 60\cos(52)$ lýsi tengslum þriggja hliða þríhyrnings og kósínuss horns.

57. Teiknið þríhyrninginn.

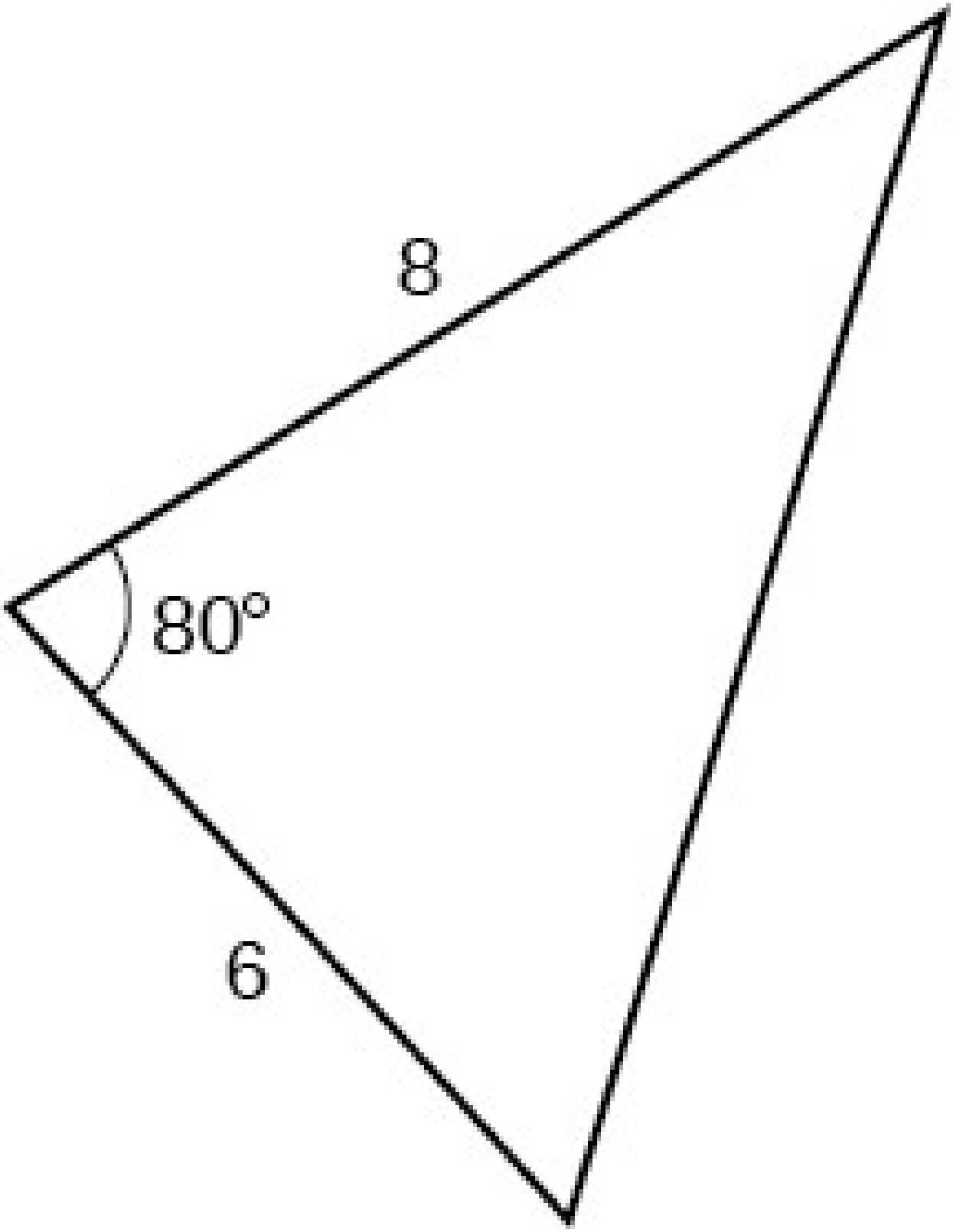
58. Finnið lengd þriðju hliðarinnar.

Finnið flatarmál þríhyrningsins í eftirfarandi dæmum.

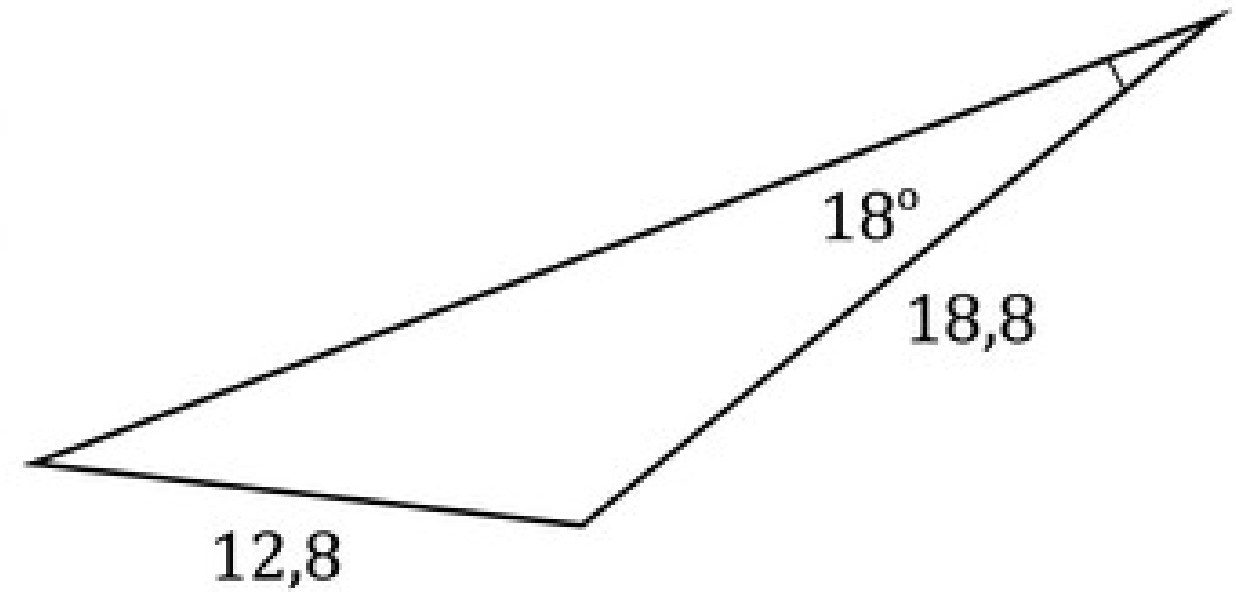
59.



60.

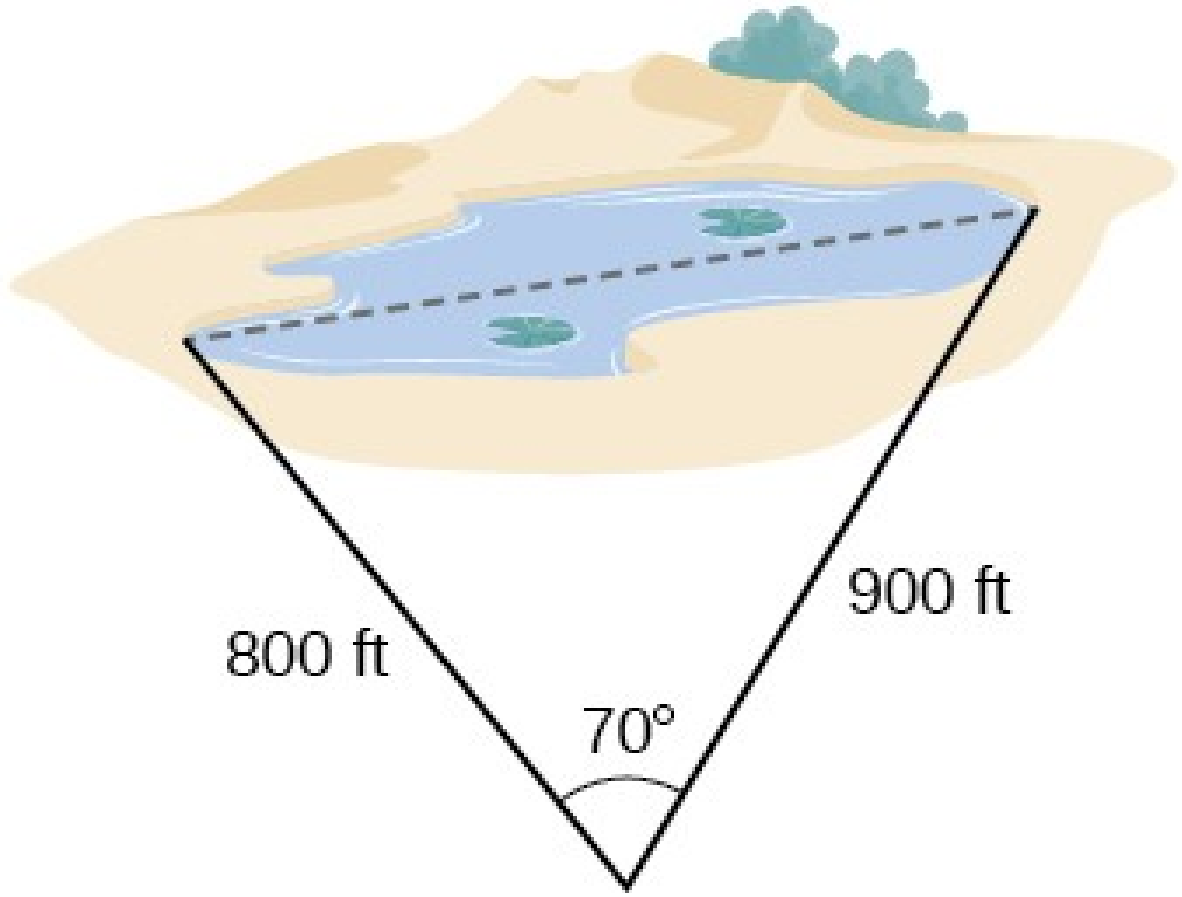


61.



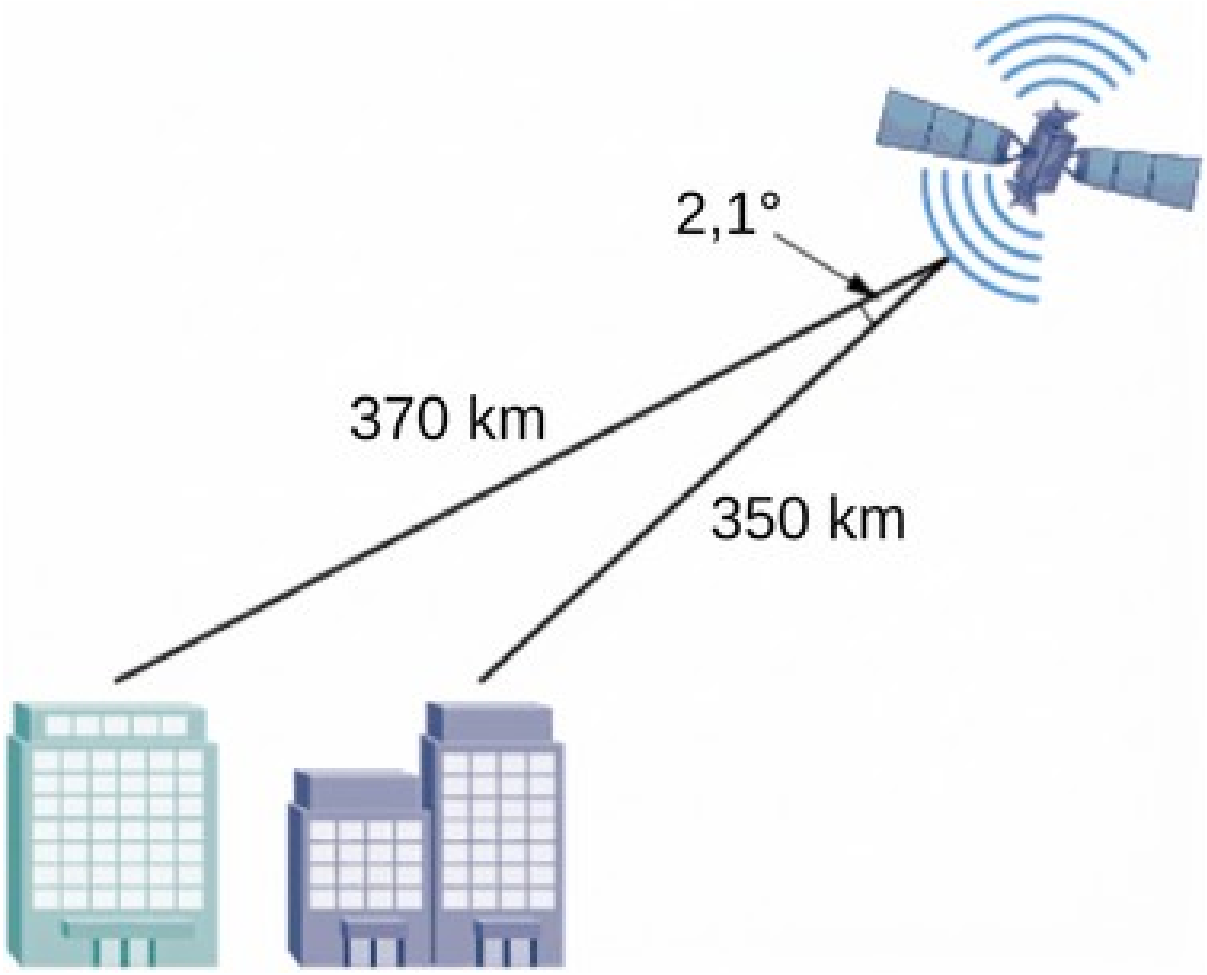
Raunveruleg viðfangsefni

62. Landmælingamaður hefur gert mælingarnar sem sýndar eru á mynd 14. Finnið fjarlægðina yfir vatnið. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.



Mynd 14

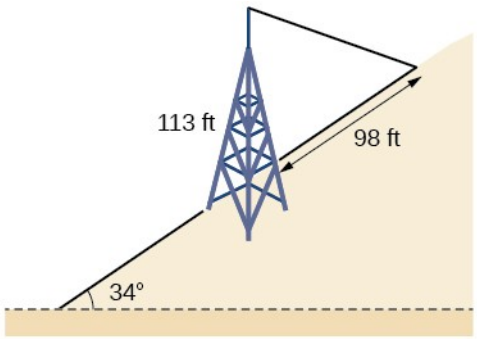
63. Gervitungl reiknar fjarlægðirnar og hornið sem sýnd eru á mynd 15 (ekki í réttum hlutföllum). Finnið fjarlægðina milli borganna tveggja. Námundið svörin að næsta tíunda hluta.



Mynd 15

64. Flugvél flýgur 220 mílur í stefnuna 40° og síðan 180 mílur í stefnuna 170°. Hve langt er flugvélin frá upphafsstaðnum og hvert er stefnuhornið? Námundið svörin að næsta tíunda hluta.

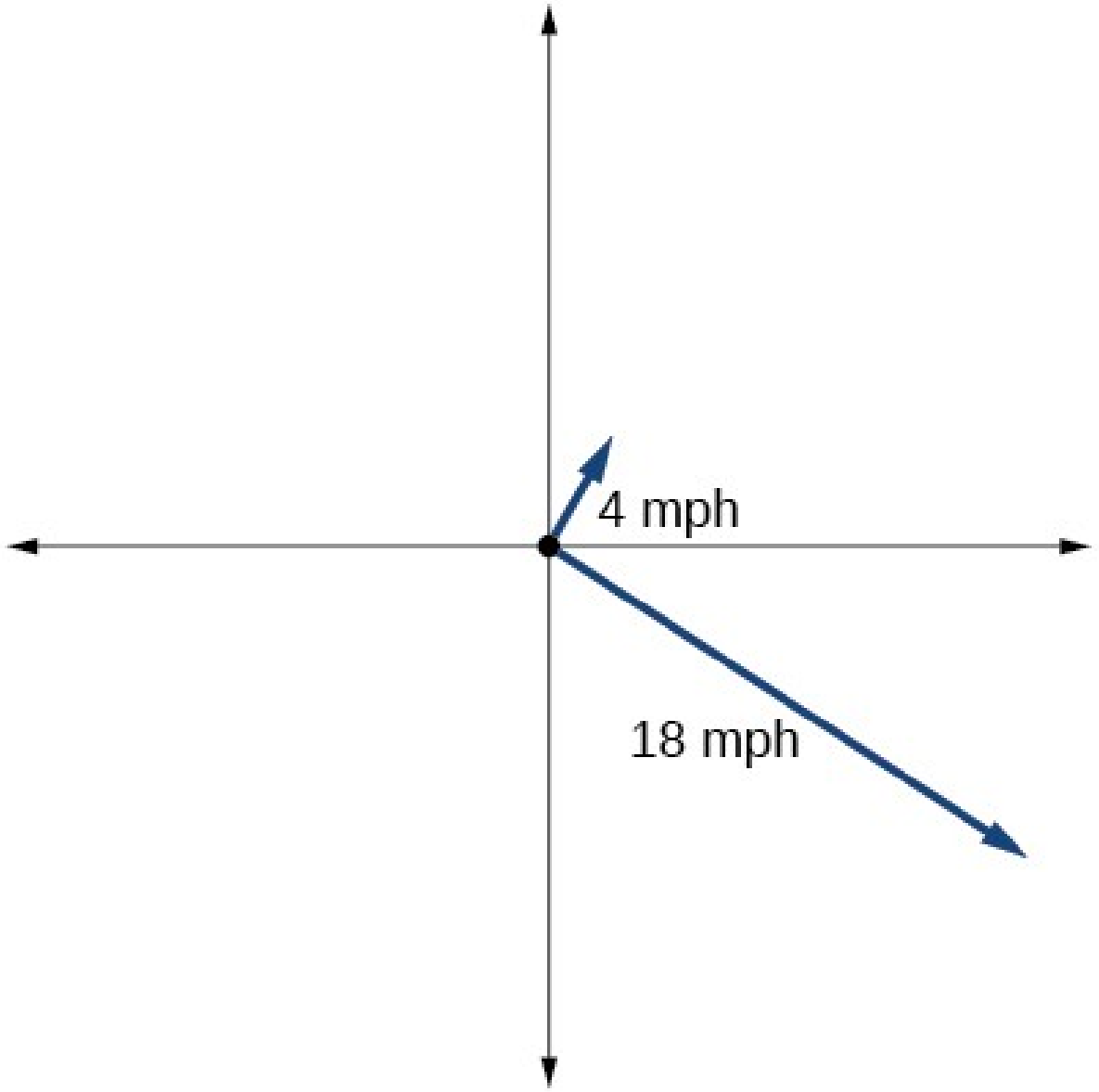
65. 113 feta turn stendur á hæð sem hallar um 34° frá láréttu, eins og sýnt er á mynd 16. Stagvír á að festa við topp turnsins og í punkt 98 fetum ofar í brekkunni en turnfóturinn. Finnið hve langan vír þarf.



Mynd 16

66. Tvö skip lögðu samtímis úr höfn. Annað sigldi á 18 mílna hraða á klukkustund í stefnuna 320°. Hitt sigldi á 22 mílna hraða á klukkustund í stefnuna 194°. Finnið fjarlægðina milli skipanna eftir 10 klukkustundir.

67. Grafið á mynd 17 sýnir tvo báta leggja samtímis frá sömu bryggju. Fyrri báturinn siglir á 18 mílna hraða á klukkustund í stefnuna 327° og sá síðari á 4 mílna hraða á klukkustund í stefnuna 60°. Finnið fjarlægðina milli bátanna eftir 2 klukkustundir.



Mynd 17

68. Þríhyrnd sundlaug er 40 fet á einni hlið og 65 fet á annarri. Hliðarnar mynda 50° horn. Hve löng er þriðja hliðin, námunduð að næsta tíunda hluta?

69. Flugmaður flýgur beina leið í 1 klukkustund og 30 mínútur. Síðan breytir hún stefnu um 10° til hægri frá upphaflegri stefnu og flýgur í 2 klukkustundir í nýju stefnuna. Hún heldur jöfnum hraða, 680 mílum á klukkustund. Hve langt er hún þá frá upphafsstaðnum?

70. Los Angeles er 1.744 mílur frá Chicago, Chicago er 714 mílur frá New York og New York er 2.451 mílur frá Los Angeles. Teiknið þríhyrning milli borganna þriggja og finnið horn hans.

71. Philadelphia er 140 mílur frá Washington, D.C., Washington, D.C. er 442 mílur frá Boston og Boston er 315 mílur frá Philadelphia. Teiknið þríhyrning milli borganna þriggja og finnið horn hans.

72. Tvær flugvélar leggja samtímis af stað frá sama flugvelli. Önnur flýgur 20° austan við norður á 500 mílna hraða á klukkustund. Hin flýgur 30° austan við suður á 600 mílna hraða á klukkustund. Hve langt er milli vélanna eftir 2 klukkustundir?

73. Tvær flugvélar hefja sig til flugs í ólíkar áttir. Önnur flýgur beint í vestur á 300 mílna hraða á klukkustund en hin 25° norðan við vestur á 420 mílna hraða á klukkustund. Hve langt er milli þeirra eftir 90 mínútur, að því gefnu að þær fljúgi í sömu hæð?

74. Samsíðungur hefur hliðar með lengdirnar 15,4 og 9,8 einingar. Flatarmál hans er 72,9 ferningseiningar. Finnið lengd lengri hornalínunnar.

75. Fjórar samliggjandi hliðar ferhyrnings hafa lengdirnar 4,5 cm, 7,9 cm, 9,4 cm og 12,9 cm. Hornið milli stystu hliðanna tveggja er 117°. Hvert er flatarmál ferhyrningsins?

76. Fjórar samliggjandi hliðar ferhyrnings hafa lengdirnar 5,7 cm, 7,2 cm, 9,4 cm og 12,8 cm. Hornið milli stystu hliðanna tveggja er 106°. Hvert er flatarmál ferhyrningsins?

77. Finnið flatarmál þríhyrndrar lóðar sem er 30 fet á einni hlið og 42 fet á annarri; hornið milli þeirra er 132°. Námundið að næsta heila ferfeti.

78. Finnið flatarmál þríhyrndrar lóðar sem er 110 fet á einni hlið og 250 fet á annarri; hornið milli þeirra er 85°. Námundið að næsta heila ferfeti.

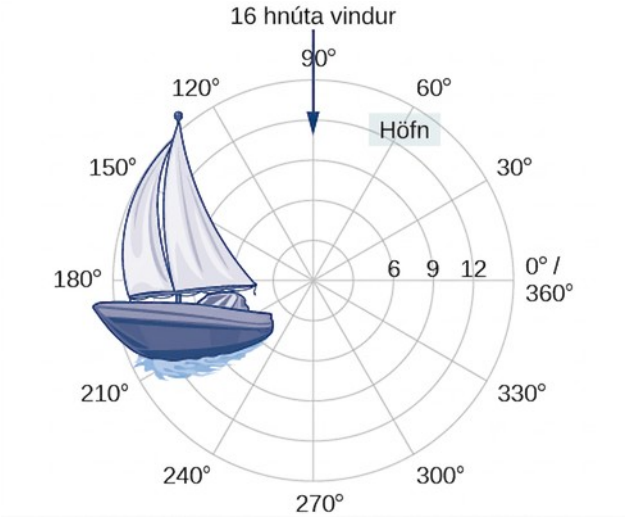
8.3 Pólhnit

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna punkta með pólhnitum.
- Umrita pólhnit í rétthyrnd hnit.
- Umrita rétthyrnd hnit í pólhnit.
- Umrita jöfnur milli pólhnitaforms og rétthyrnds forms.
- Þekkja og teikna pólhnitajöfnur með því að umrita þær í rétthyrndar jöfnur.

Í meira en 12 kílómetra fjarlægð frá höfn lendir seglbátur í slæmu veðri og 16 hnúta vindur feykir honum af leið (sjá mynd 1). Hvernig getur siglingamaðurinn gefið Landhelgisgæslunni upp staðsetningu sína? Í þessum hluta skoðum við aðferð til að tákna staðsetningu sem er frábrugðin venjulegu hnitakerfi.

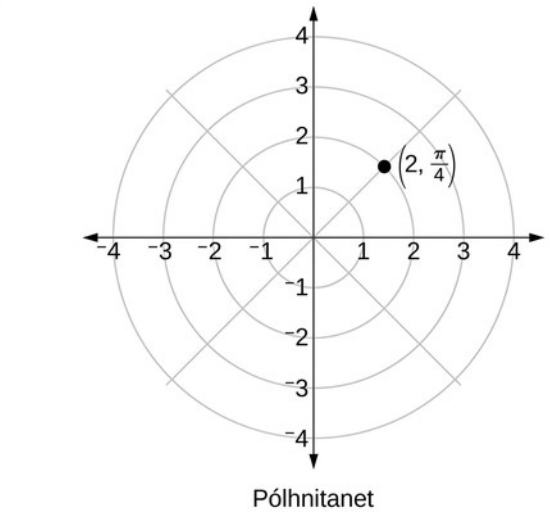


Mynd 1

Að teikna punkta með pólhnitum

Þegar við hugsum um að teikna punkta í fleti koma rétthyrnd hnit (x, y) í kartesísku hnitaplani yfirleitt fyrst upp í hugann. Hnitapar má þó rita á fleiri vegu og til eru önnur hnitakerfi. Í þessum hluta kynnumst við pólhnitum, þar sem punktar eru táknaðir (r, θ) og teiknaðir á pólhnitanet. Pólhnitanetið er myndað úr sammiðja hringjum sem ganga út frá skautinu, það er upphafspunkti hnitaplansins.

Pólhnitanetið er kvarðað eins og einingarhringurinn, en jákvæði x-ásinn er nú pólhnitaásinn og upphafspunkturinn er skautið. Fyrra hnitið r er geislinn, eða lengd stefnda línustriksins frá skautinu. Hornið θ, mælt í radíönum, segir til um stefnu r. Við færum okkur rangsælis frá pólhnitaásnum um hornið θ, og mælum stefnt línustrik af lengdinni r í stefnu θ. Þótt við mælum θ fyrst og síðan r, er r-hnitið ritað á undan í pólhnitapunktinum. Til að teikna til dæmis punktinn $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, færum við okkur $\frac{\pi}{4}$ einingar rangsælis og síðan um lengdina 2 frá skautinu. Punkturinn er teiknaður á netið á mynd 2.



Pólhnitanet

Mynd 2

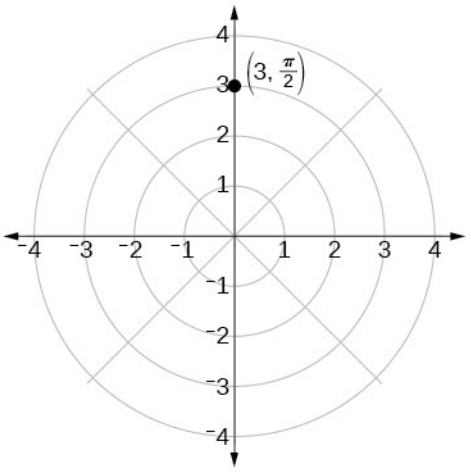
SÝNIDÆMI 1

Að teikna punkt á pólhnitanet

Teiknið punktinn $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ á pólhnitanetið.

Lausn

Hornið $\frac{\pi}{2}$ fæst með því að fara 90° rangsælis frá pólhnitaásnum. Punkturinn er í 3 eininga fjarlægð frá skautinu í stefnu $\frac{\pi}{2}$, eins og sýnt er á mynd 3.



Mynd 3

PRÓFIÐ SJÁLF #1

Teiknið punktinn $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ á pólhnitanetið.

SÝNIDÆMI 2

Að teikna punkt með neikvætt hnit í pólhnitakerfi

Teiknið punktinn $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$ á pólhnitanetið.

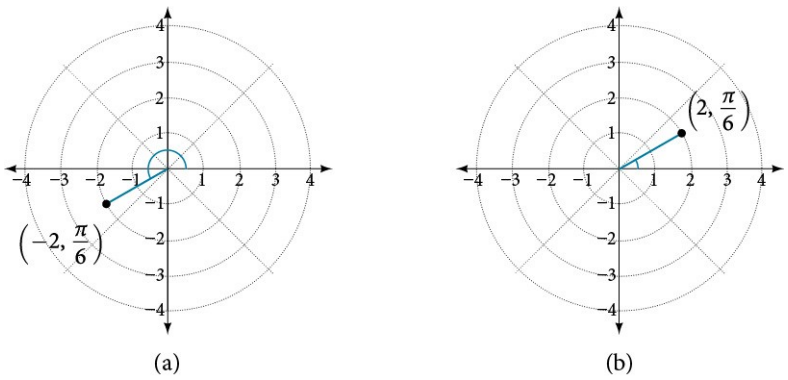
Lausn

Við vitum að $\frac{\pi}{6}$ er í fyrsta fjórðungi. Hins vegar er $r = -2$. Punkt með neikvætt r má teikna á tvo vegu:

1. Teiknið punktinn $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ með því að fara $\frac{\pi}{6}$ rangsælis og draga stefnt línustrik 2 einingar inn í fyrsta fjórðung. Farið síðan aftur eftir línustrikinu gegnum skautið og haldið áfram 2 einingar inn í þriðja fjórðung;
2. Farið $\frac{\pi}{6}$ rangsælis og dragið stefnt línustrik frá skautinu 2 einingar í neikvæða stefnu, inn í þriðja fjórðung.

8

Sjá mynd 4 (a). Berið þetta saman við graf pólhnitapunktsins $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ á mynd 4 (b).



Mynd 4

PRÓFIÐ SJÁLF #2

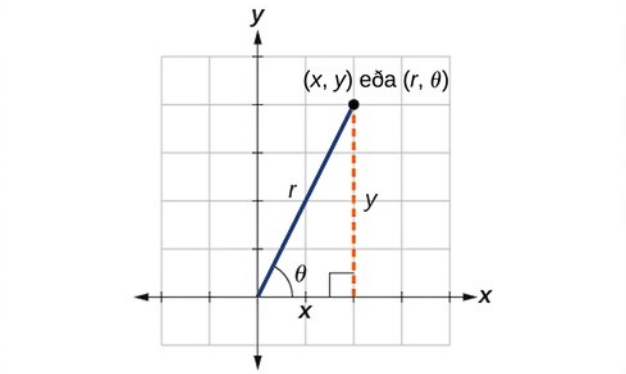
Teiknið punktana $\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$ og $\left(2, \frac{9\pi}{4}\right)$ á sama pólhnitanet.

Umritun pólhnita í rétthyrnd hnit

Þegar pólhnit eru gefin gæti þurft að umrita þau í rétthyrnd hnit. Til þess rifjum við upp tengsl breytanna x, y, r, og θ.

$$\cos\ \theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\ \theta$$
$$\sin\ \theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\ \theta$$

Ef við drögum lóðrétta línu frá punktinum í fletinum niður á x-ásinn myndast rétthyrndur þríhyrningur, eins og sýnt er á mynd 5. Auðvelt er að muna jöfnurnar hér að ofan með því að hugsa um $\cos\theta$ sem aðlæga skammhlið deilda með langhlið og $\sin\theta$ sem mótlæga skammhlið deilda með langhlið.



Mynd 5

8

UMRITUN PÓLHNITA Í RÉTTHYRND HNIT

Til að umrita pólhnit (r,θ) í rétthyrnd hnit (x,y), látum við

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$$

AÐFERÐ

Umritið gefin pólhnit í rétthyrnd hnit.

1. Fyrir pólhnitin (r,θ), ritið $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.
2. Reiknið $\cos\theta$ og $\sin\theta$.
3. Margfaldið $\cos\theta$ með r til að finna x-hnit rétthyrnda hnitaformsins.
4. Margfaldið $\sin\theta$ með r til að finna y-hnit rétthyrnda hnitaformsins.

SÝNIDÆMI 3

Að rita pólhnit sem rétthyrnd hnit

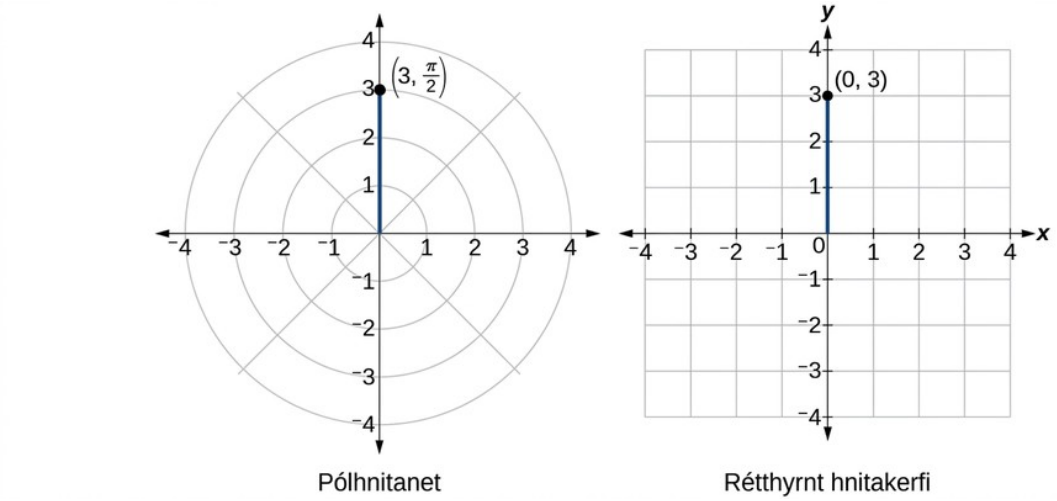
Ritið pólhnitin $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ sem rétthyrnd hnit.

Lausn

Notið jafngildu tengslin.

$$x = r\cos\ \theta$$
$$x = 3\cos\ \tfrac{\pi}{2} = 0$$
$$y = r\sin\ \theta$$
$$y = 3\sin\ \tfrac{\pi}{2} = 3$$

Rétthyrndu hnitin eru $(0, 3)$. Sjá mynd 6.



Mynd 6

SÝNIDÆMI 4

Að rita pólhnit sem rétthyrnd hnit

Ritið pólhnitin $(-2, 0)$ sem rétthyrnd hnit.

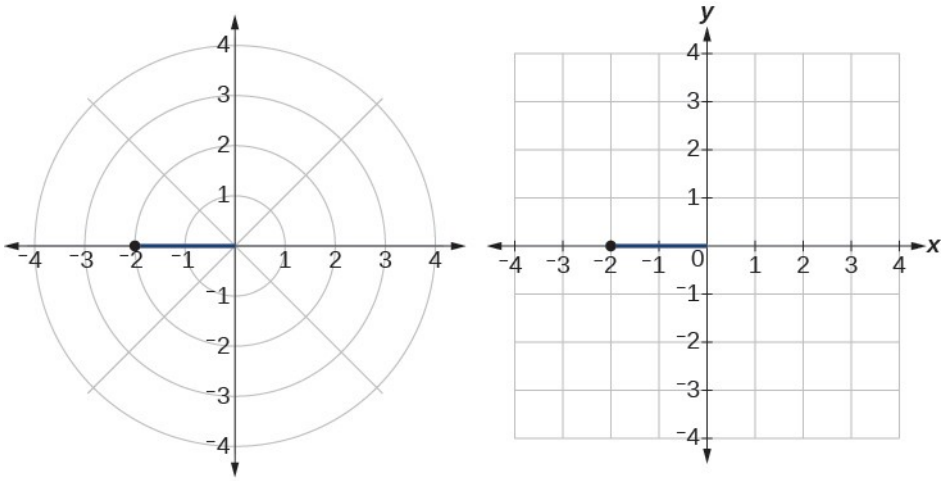
Lausn

Sjá mynd 7. Þegar pólhnitin eru rituð sem rétthyrnd hnit fæst

$$x = r\cos\ \theta$$
$$x = -2\cos(0) = -2$$

$$y = r\sin\ \theta$$
$$y = -2\sin(0) = 0$$

Rétthyrndu hnitin eru einnig $(-2, 0)$.



Mynd 7

PRÓFIÐ SJÁLF #3

Ritið pólhnitin $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$ sem rétthyrnd hnit.

Umritun rétthyrndra hnita í pólhnit

Til að umrita rétthyrnd hnit í pólhnit notum við tvenn önnur kunnugleg tengsl. Við þessa umritun þarf þó að hafa í huga að eitt par rétthyrndra hnita gefur fleiri en einn pólhnitapunkt.

UMRITUN RÉTTHYRNDRA HNITA Í PÓLHNIT

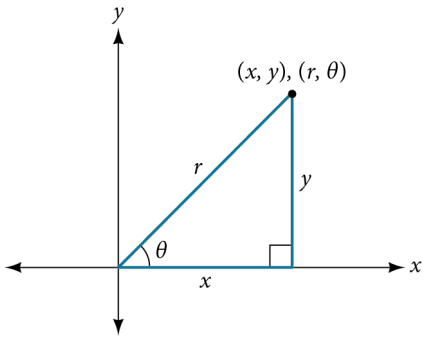
Til að umrita rétthyrnd hnit í pólhnit þarf að nota ein eða fleiri af tengslunum sem sýnd eru á mynd 8.

$$\cos\ \theta = \frac{x}{r} \text{ eða } x = r\ \cos\ \theta$$

$$\sin\ \theta = \frac{y}{r} \quad \text{eða} \quad y = r\ \sin\ \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\ \theta = \frac{y}{x}$$



Mynd 8

SÝNIDÆMI 5

Að rita rétthyrnd hnit sem pólhnit

Umritið rétthyrndu hnitin $(3,3)$ í pólhnit.

Lausn

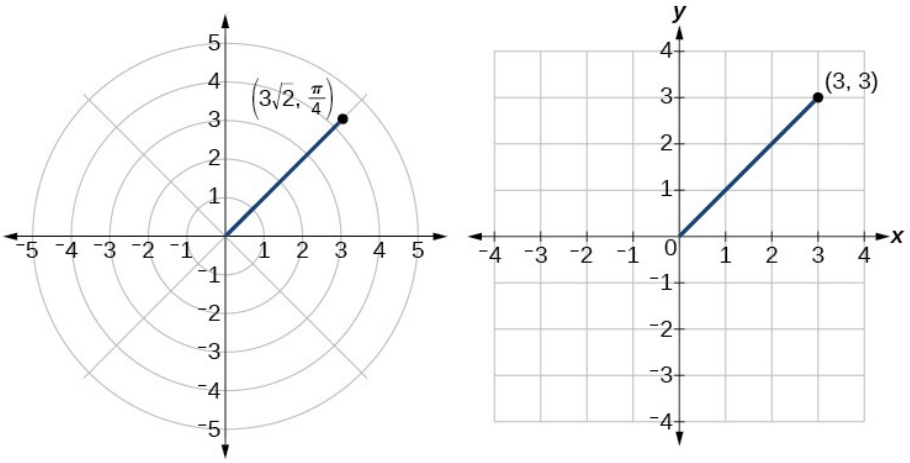
Við sjáum að upphaflegi punkturinn $(3,3)$ er í fyrsta fjórðungi. Til að finna θ, notum við formúluna $\tan\theta=\frac{y}{x}$. Þá fæst

$$\begin{aligned}\tan\ \theta &= \tfrac{3}{3}\\ \tan\ \theta &= 1\\ \theta &= \tan^{-1}(1)\\ \theta &= \tfrac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Til að finna r, setjum við gildi x og y inn í formúluna $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Við vitum að r verður að vera jákvætt þar sem $\frac{\pi}{4}$ er í fyrsta fjórðungi. Því fæst

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{3^2+3^2}\\ r &= \sqrt{9+9}\\ r &= \sqrt{18}=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Því er $r=3\sqrt{2}$ og $\theta=\frac{\pi}{4}$, svo pólhnitapunkturinn er $\left(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$. Sjá mynd 9.



Mynd 9

Greining

Önnur pólhnitapör tákna sama punkt og fyrsta lausnin okkar. Punktarnir $\left(-3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ og $\left(3\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{4}\right)$ falla til dæmis saman við upphaflegu lausnina $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Punkturinn $\left(-3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ merkir að farið er lengra rangsælis um π, sem er beint á móti $\frac{\pi}{4}$. Geislinn er gefinn sem $-3\sqrt{2}$. Hornið $\frac{5\pi}{4}$ er hins vegar í þriðja fjórðungi og þar sem r er neikvætt framlengjum við stefnda línustrikið í gagnstæða átt, inn í fyrsta fjórðung. Þetta er sami punktur og $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Punkturinn $\left(3\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{4}\right)$ fæst með því að fara lengra réttsælis um $-\frac{7\pi}{4}$, talið frá $\frac{\pi}{4}$. Geislinn, $3\sqrt{2}$, er sá sami.

Umritun jafna milli pólhnitaforms og rétthyrnds forms

Nú getum við umritað hnit milli pólhnitaforms og rétthyrnds forms. Erfiðara getur verið að umrita jöfnur, en gagnlegt er að geta farið á milli formanna tveggja. Sumar pólhnitajöfnur er ekki hægt að setja skýrt fram á kartesísku formi, og öfugt. Við getum því notað sömu aðferðir og við notuðum til að umrita punkta milli hnitakerfanna. Síðan má nota grafreikni til að teikna annaðhvort rétthyrnda form jöfnunnar eða pólhnitaform hennar.

AÐFERÐ

Teiknið gefna jöfnu á pólhnitaformi með grafreikni.

1. Breytið MODE í POL, sem stendur fyrir pólhnitaform.
2. Ýtið á Y= hnappinn til að opna skjá þar sem hægt er að setja inn sex jöfnur: $r_1, r_2, \ldots, r_6$.

3. Setjið inn pólhnitajöfnuna, leysta fyrir r.
4. Ýtið á GRAPH.

SÝNIDÆMI 6

Að rita kartesíska jöfnu á pólhnitaformi

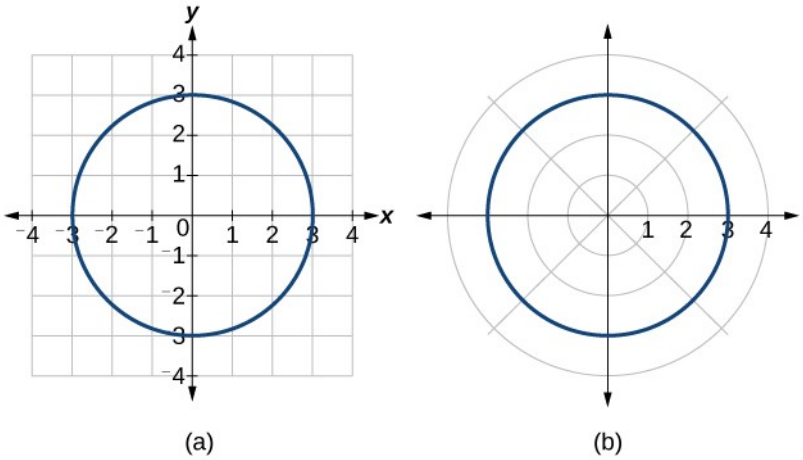
Ritið kartesísku jöfnuna $x^2+y^2=9$ á pólhnitaformi.

Lausn

Markmiðið er að eyða x og y úr jöfnunni og setja í staðinn r og θ. Best væri að rita jöfnuna þannig að r sé fall af θ. Til að fá pólhnitaformið notum við tengslin milli (x, y) og (r, θ). Þar sem $x=r\cos\theta$ og $y=r\sin\theta$, getum við sett inn og leyst fyrir r.

$$
\begin{aligned}
(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2&=9 \\
r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta&=9 \\
r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)&=9 \\
r^2(1)&=9 && \text{Setjið inn } \cos^2\theta+\sin^2\theta=1. \\
r&=\pm 3 && \text{Notið kvaðratrótareiginleikann.}
\end{aligned}
$$

Því ættu $x^2+y^2=9$, $r=3$, og $r=-3$ að gefa sama graf. Sjá mynd 10.



Mynd 10 (a) Kartesískt form $x^2+y^2=9$ (b) Pólform $r=3$

Til að teikna hring á rétthyrndu formi verðum við fyrst að leysa fyrir y.

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$y^2 = 9 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Athugið að hér eru tvö aðskilin föll, því að hringur stenst ekki lóðrétta línuprófið. Því þarf að setja jákvæðu og neikvæðu kvaðratræturnar inn í reiknivélina sitt í hvoru lagi sem tvær jöfnur á forminu $Y_1 = \sqrt{9 - x^2}$ og $Y_2 = -\sqrt{9 - x^2}$. Ýtið á GRAPH.

SÝNIDÆMI 7

Að endurrita kartesíska jöfnu sem pólhnitajöfnu

Endurritið kartesísku jöfnuna $x^2 + y^2 = 6y$ sem pólhnitajöfnu.

Lausn

Þessi jafna líkist jöfnunni í fyrra sýnidæmi en til að umrita hana þarf önnur skref.

Við getum samt fylgt sömu aðferðum og áður og gert þessar innsetningar:

$r^2 = 6y$ Notið $x^2 + y^2 = r^2$.

$r^2 = 6r\sin\theta$ Setjið inn $y = r\sin\theta$.

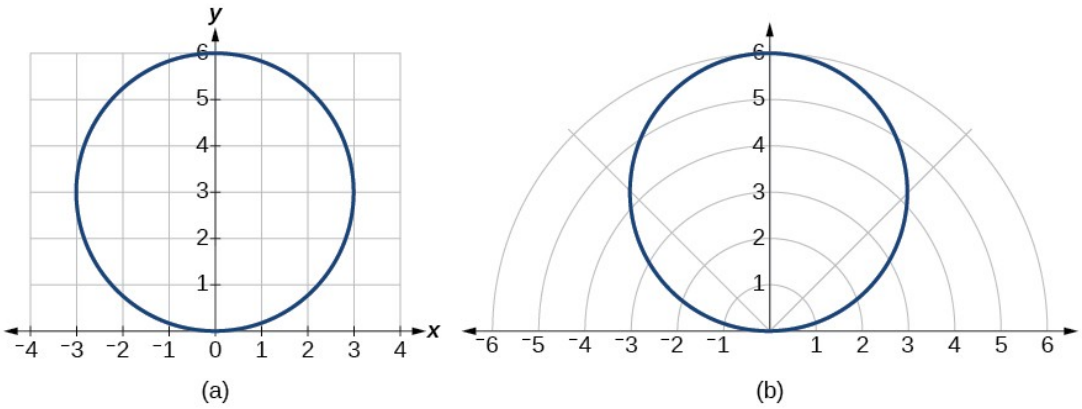
$r^2 - 6r\sin\theta = 0$ Setjið jafnt og 0.

$r(r - 6\sin\theta) = 0$ Þáttið og leysið.

$r = 0$ Við höfnum $r = 0$, þar sem það táknar aðeins einn punkt, $(0, 0)$.

$$r = 6\sin\theta$$

Því ættu jöfnurnar $x^2 + y^2 = 6y$ og $r = 6\sin\theta$ að gefa sama graf. Sjá mynd 11.



Mynd 11 (a) Kartesískt form $x^2 + y^2 = 6y$ (b) pólform $r = 6\sin\theta$

Við teiknum kartesísku, eða rétthyrndu, jöfnuna á rétthyrnt net og pólhnitajöfnuna á pólhnitanet. Gröfin eru greinilega eins.

SÝNIDÆMI 8

Að endurrita kartesíska jöfnu á pólhnitaformi

Endurritið kartesísku jöfnuna $y=3x+2$ sem pólhnitajöfnu.

Lausn

Við notum tengslin $x=r\cos\theta$ og $y=r\sin\theta$.

$$\begin{aligned} y &= 3x+2 \\ r\sin\theta &= 3r\cos\theta+2 \\ r\sin\theta-3r\cos\theta &= 2 \\ r(\sin\theta-3\cos\theta) &= 2 \qquad \text{Einangrið } r. \\ r=\frac{2}{\sin\theta-3\cos\theta} &\qquad \text{Leysið fyrir } r. \end{aligned}$$

PRÓFIÐ SJÁLF #4

Endurritið kartesísku jöfnuna $y^2=3-x^2$ á pólhnitaformi.

Að þekkja og teikna pólhnitajöfnur með umritun í rétthyrndar jöfnur

Við höfum lært að umrita rétthyrnd hnit í pólhnit og séð að punktarnir eru í raun þeir sömu. Við höfum einnig umritað pólhnitajöfnur í rétthyrndar jöfnur og öfugt. Nú sýnum við fram á að gröf þeirra eru eins þótt þau séu teiknuð á mismunandi hnitakerfi.

8

SÝNIDÆMI 9

Að teikna pólhnitajöfnu með umritun í rétthyrnda jöfnu

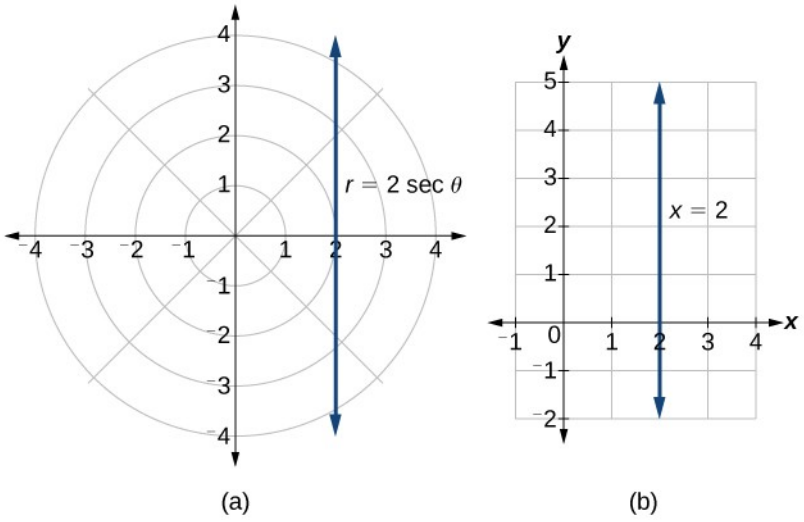
Umritið pólhnitajöfnuna $r=2\sec\theta$ í rétthyrnda jöfnu og teiknið samsvarandi graf.

Lausn

Umritunin er

$$\begin{aligned} r &= 2\sec\theta \\ r &= \frac{2}{\cos\theta} \\ r\cos\theta &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Athugið að jafnan $r=2\sec\theta$ á pólhnitaneti gefur greinilega sömu lóðréttu línu og $x=2$ á rétthyrndu neti (sjá mynd 12). Rétt eins og $x=c$ er staðalform lóðréttrar línu á rétthyrndu formi er $r=c\sec\theta$ staðalform lóðréttrar línu á pólhnitaformi.



Mynd 12 (a) Pólhnitanet (b) Rétthyrnt hnitakerfi

Á svipaðan hátt mætti sýna að graf fallsins $r=2\,csc\,\theta$ er lárétta línan $y=2$. Reyndar er $r=c\,csc\,\theta$ staðalform láréttrar línu á pólhnitaformi og samsvarar rétthyrnda forminu $y=c$.

SÝNIDÆMI 10

Að endurrita pólhnitajöfnu á kartesísku formi

Endurritið pólhnitajöfnuna $r=\dfrac{3}{1-2\cos\theta}$ sem kartesíska jöfnu.

Lausn

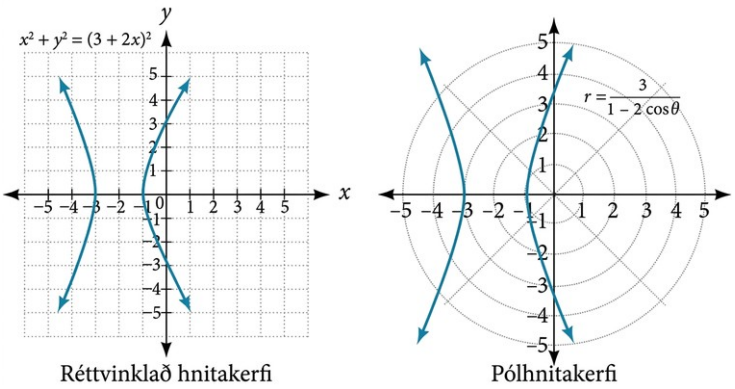
Markmiðið er að eyða θ og r, en setja í staðinn x og y. Við eyðum brotinu og notum síðan innsetningu. Til að skipta r út fyrir x og y, verðum við að nota sambandið $x^2+y^2=r^2$.

$$
\begin{array}{rcll}
r & = & \dfrac{3}{1-2\ \cos\ \theta} & \\
r\left(1-2\left(\dfrac{x}{r}\right)\right) & = & 3 & \\
r-2\ x & = & 3 & \text{Notið } \cos\ \theta=\dfrac{x}{r} \text{ til að eyða } \theta \\
r-2\ x & = & 3 & \\
r & = & 3+2\ x & \text{Einangrið } r \\
r^2 & = & (3+2\ x)^2 & \text{Hefjið í annað veldi báðar hliðar} \\
x^2+y^2 & = & (3+2\ x)^2 & \text{Notið } x^2+y^2=r^2
\end{array}
$$

Kartesíska jafnan er $x^2+y^2=(3+2x)^2$. Til að teikna hana, einkum með grafreikni eða tölvuforriti, viljum við þó einangra y.

$$x^2 + y^2 = (3 + 2x)^2$$
$$y^2 = (3 + 2x)^2 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{(3 + 2x)^2 - x^2}$$

Þegar allri jöfnunni hefur verið breytt úr r og θ í x og y, getum við hætt, nema beðið sé um að leysa fyrir y eða einfalda. Sjá mynd 13.



Réttvinklað hnitakerfi Pólhnitakerfi

Mynd 13

„Stundaglaslögun“ grafsins nefnist breiðbogi. Breiðbogar hafa marga áhugaverða rúmfræðilega eiginleika og margvíslega notkun sem við skoðum nánar í greinandi rúmfræði.

Greining

8

Í þessu dæmi má margfalda upp hægri hlið jöfnunnar og einfalda hana frekar, eins og sýnt er hér að ofan. Hins vegar er ekki hægt að rita jöfnuna sem eitt fall á kartesísku formi. Ef til vill viljum við rita rétthyrndu jöfnuna á staðalformi breiðboga. Þá getum við byrjað á upphaflegu jöfnunni.

$$x^2+y^2=(3+2\ x)^2$$

$$x^2+y^2-(3+2\ x)^2=0$$

$$x^2+y^2-(9+12\ x+4\ x^2)=0$$

$$x^2+y^2-9-12\ x-4\ x^2=0$$

$-3\ x^2-12\ x+y^2=9$ Margfaldið í gegn með -1

$$3\ x^2+12\ x-y^2=-9$$

$$3\ (x^2+4\ x+)-y^2=-9$$

$3\ (x^2+4\ x+4)-y^2=-9+12$ Raðið liðunum til að fylla í ferninginn fyrir x

$$3\ (x+2)^2-y^2=3$$

$$(x+2)^2-\frac{y^2}{3}=1$$

PRÓFIÐ SJÁLF #5

Endurritið pólhnitajöfnuna $r=2\sin\theta$ á kartesísku formi.

SÝNIDÆMI 11

Að endurrita pólhnitajöfnu á kartesísku formi

Endurritið pólhnitajöfnuna $r=\sin(2\theta)$ á kartesísku formi.

Lausn

$$\begin{aligned}
r&=\sin(2\,\theta) && \text{Notið tvöföldunarformúluna fyrir sínus.}\\
r&=2\sin\ \theta\cos\ \theta && \text{Notið } \cos\ \theta=\frac{x}{r} \text{ og } \sin\ \theta=\frac{y}{r}.\\
r&=2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right) && \text{Einfaldið.}\\
r&=\frac{2\ x\ y}{r^2} && \text{Margfaldið báðar hliðar með } r^2.\\
r^3&=2\ x\ y\\
\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3&=2\ x\ y && \text{Þar sem } x^2+y^2=r^2, r=\sqrt{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Jöfnuna má einnig rita sem

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}=2xy \text{ eða } x^2+y^2=(2xy)^{\frac{2}{3}}$$

EFNI Á NETINU

Í þessu efni á netinu getið þið lært meira um pólhnit og æft ykkur.

- Inngangur að pólhnitum
- Samanburður á pólhnitum og rétthyrndum hnitum

8.3 Æfingar

Hugtök

1. Að hvaða leyti eru pólhnit frábrugðin rétthyrndum hnitum?

2. Að hvaða leyti eru pólhnitaásarnir frábrugðnir x- og y-ásum kartesíska plansins?

3. Útskýrið hvernig punktar í pólhnitum eru teiknaðir.

4. Hvernig tengjast punktarnir $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$ og $\left(-3,\frac{\pi}{2}\right)$?

5. Útskýrið hvers vegna punktarnir $\left(-3, \frac{\pi}{2}\right)$ og $\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$ eru sami punkturinn.

Reikningur

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita gefin pólhnit í kartesísk hnit. Þegar θ er ákvarðað skuluð þið gæta að því í hvaða fjórðungi punkturinn er.

6.

$$\left(7, \frac{7\pi}{6}\right)$$

7.

$$(5, \pi)$$

8.

$$\left(6, -\frac{\pi}{4}\right)$$

9.

$$\left(-3, \frac{\pi}{6}\right)$$

10.

$$\left(4, \frac{7\pi}{4}\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita gefin kartesísk hnit í pólhnit þar sem $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$. Gætið að því í hvaða fjórðungi punkturinn er.

11.

$$(4, 2)$$

12.

$$(-4, 6)$$

13.

$$(3, -5)$$

14.

$$(-10, -13)$$

15.

$$(8, 8)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita gefna kartesíska jöfnu í pólhnitajöfnu.

16.

$$x=3$$

17.

$$y=4$$

18.

$$y=4x^2$$

19.

$$y=2x^4$$

20.

$$x^2+y^2=4y$$

21.

$$x^2+y^2=3x$$

22.

$$x^2-y^2=x$$

23.

$$x^2-y^2=3y$$

24.

$$x^2+y^2=9$$

25.

$$x^2=9y$$

26.

$$y^2=9x$$

27.

$$9xy=1$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita gefna pólhnitajöfnu í kartesíska jöfnu. Ritið hana á staðalformi keilusniðs ef unnt er og tilgreinið hvaða keilusnið hún táknar.

28.

$$r=3\sin\theta$$

29.

$$r = 4\cos\theta$$

30.

$$r = \frac{4}{\sin\theta + 7\cos\theta}$$

31.

$$r = \frac{6}{\cos\theta + 3\sin\theta}$$

32.

$$r = 2\sec\theta$$

33.

$$r = 3\csc\theta$$

34.

$$r = \sqrt{r\cos\theta + 2}$$

35.

$$r^2 = 4\sec\theta\csc\theta$$

36.

$$r = 4$$

37.

$$r^2 = 4$$

38.

$$r = \frac{1}{4\cos\theta - 3\sin\theta}$$

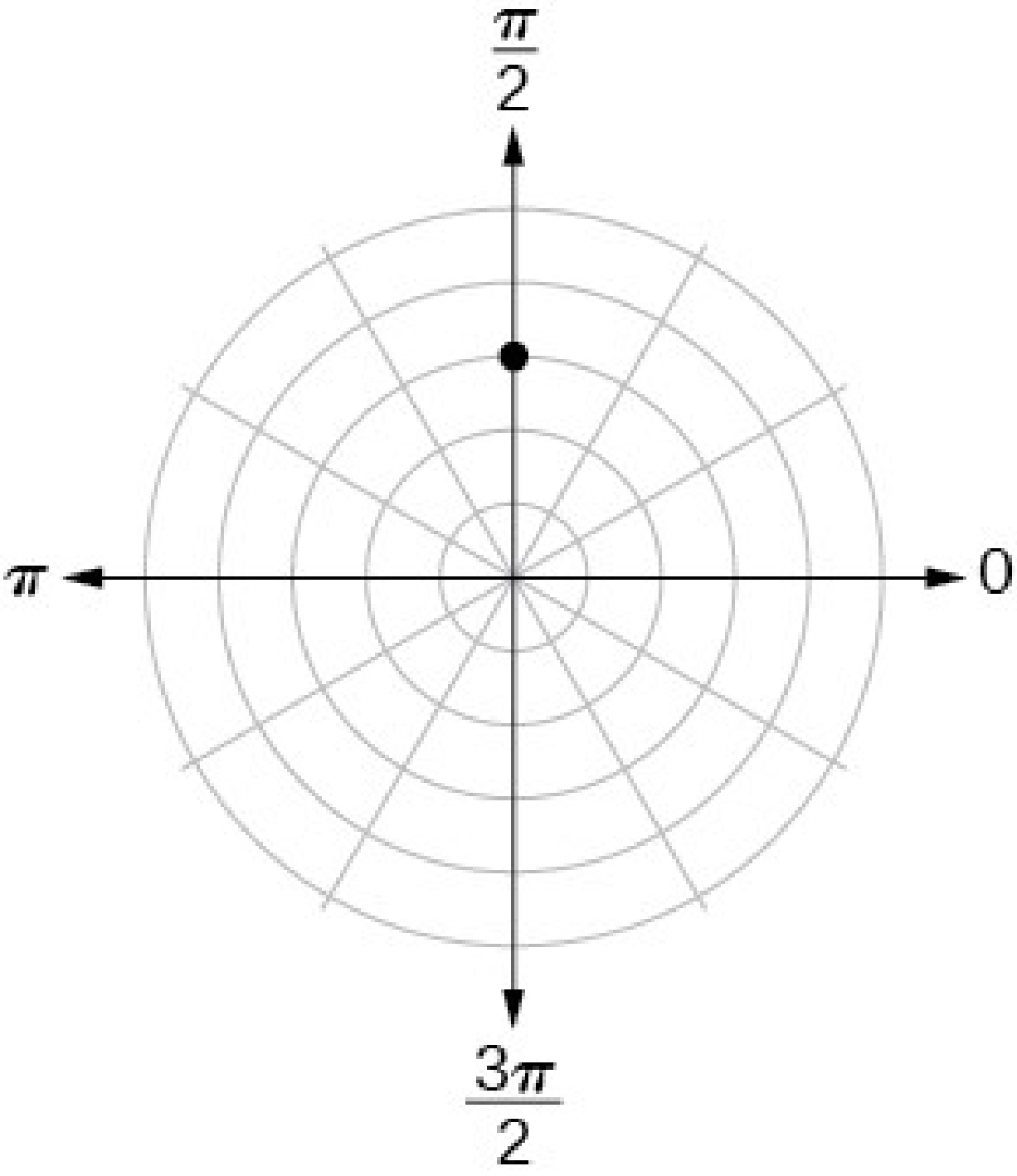
39.

$$r = \frac{3}{\cos\theta - 5\sin\theta}$$

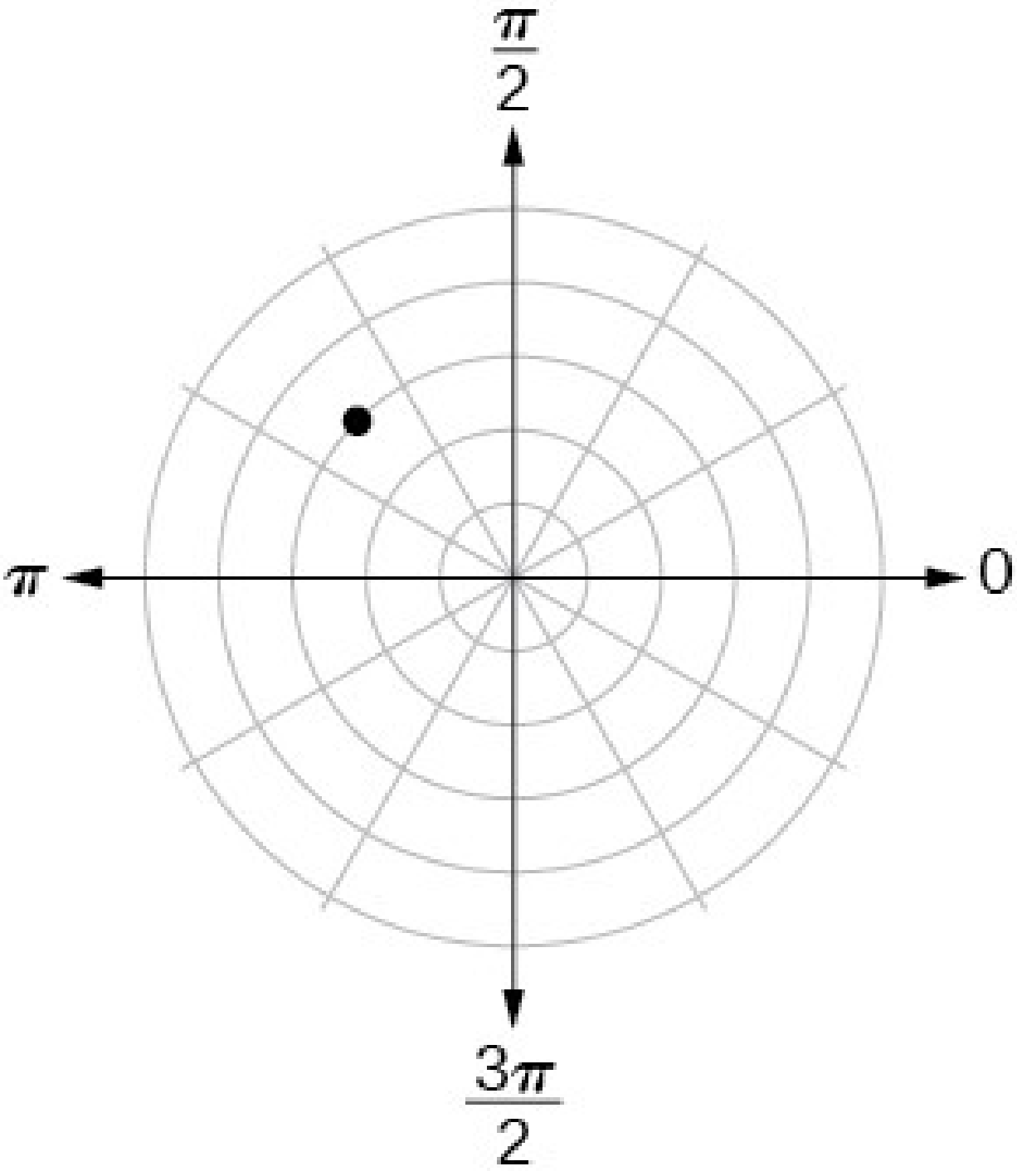
Gröf

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna pólhnit punktsins.

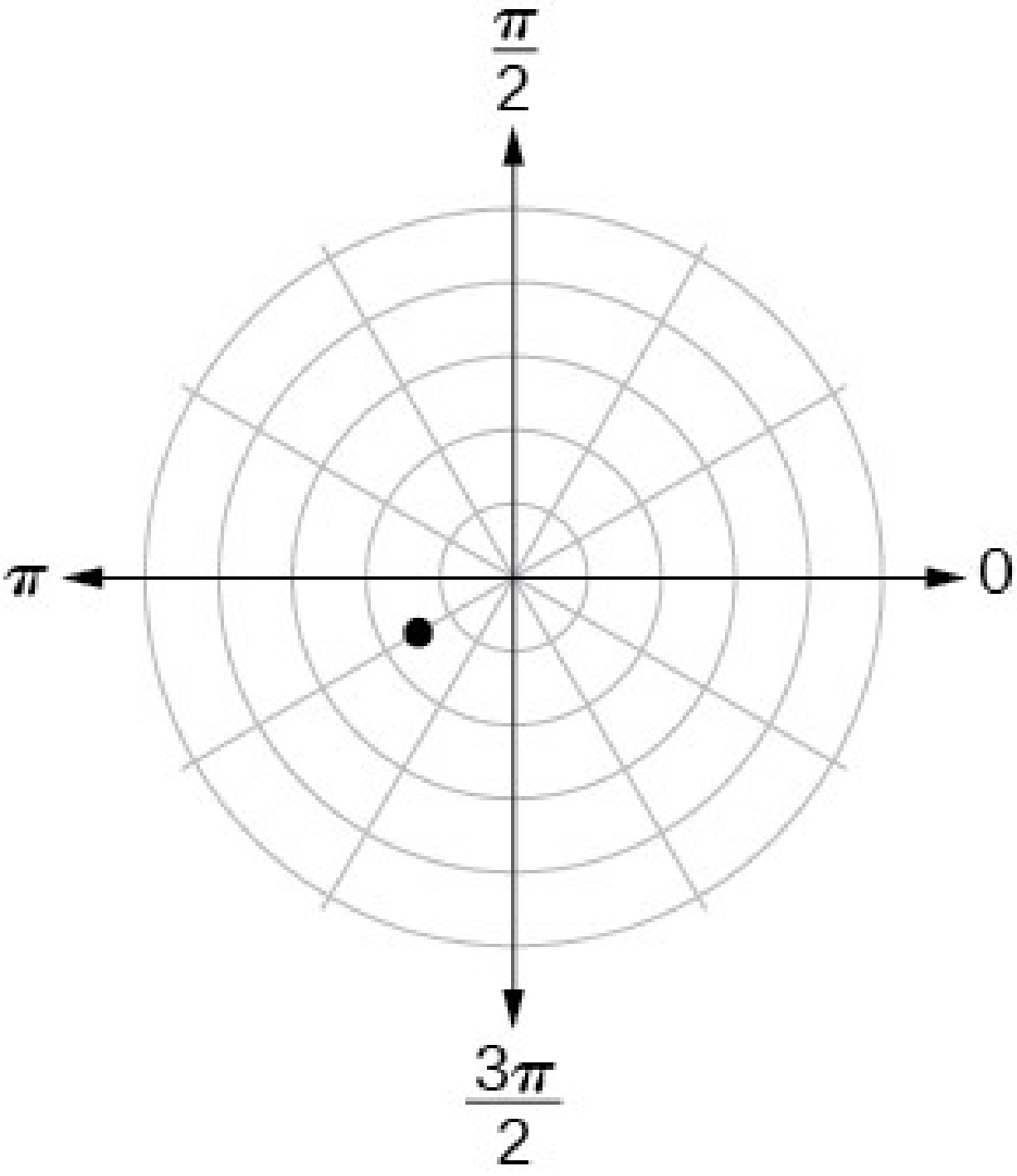
40.



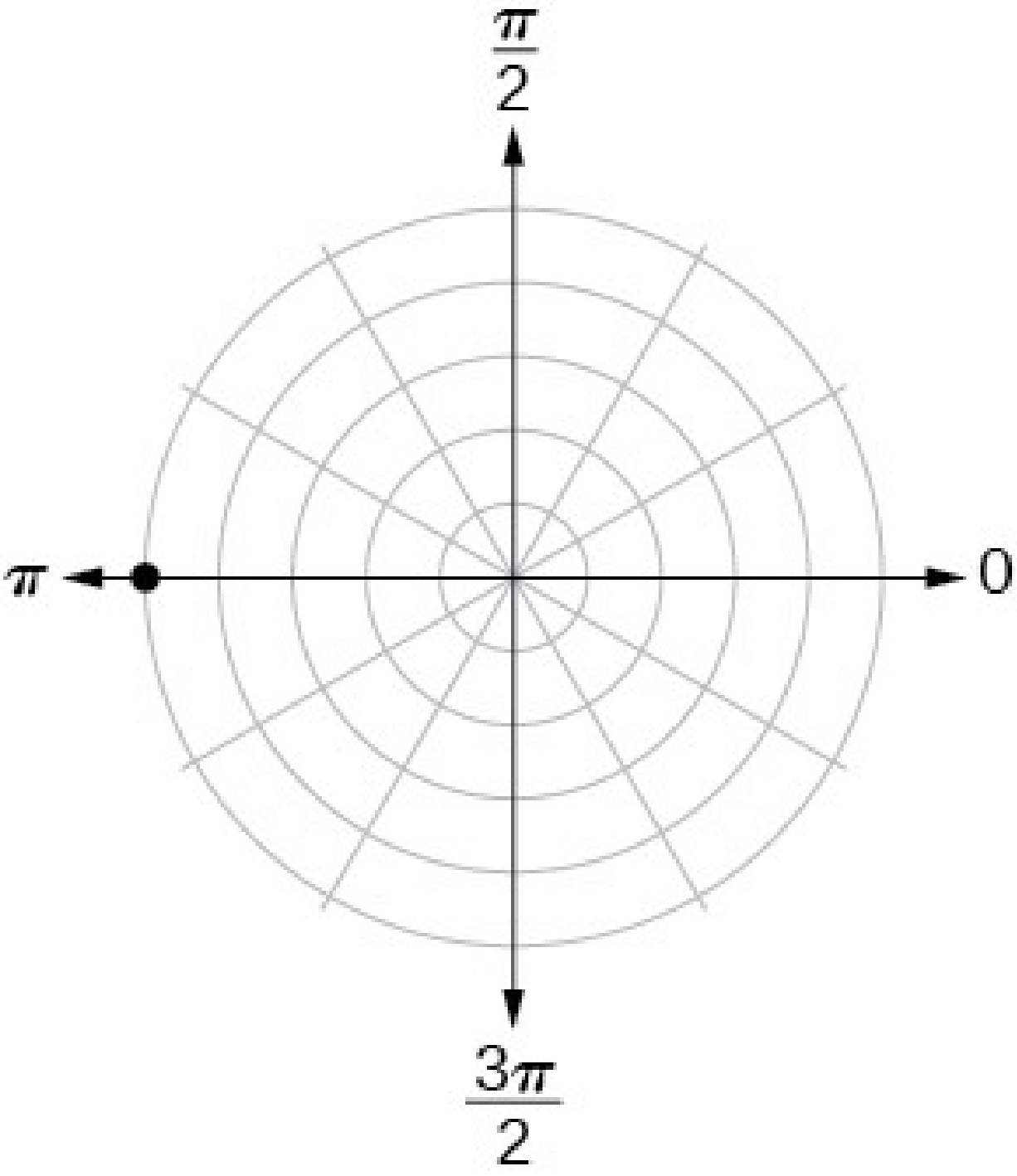
41.



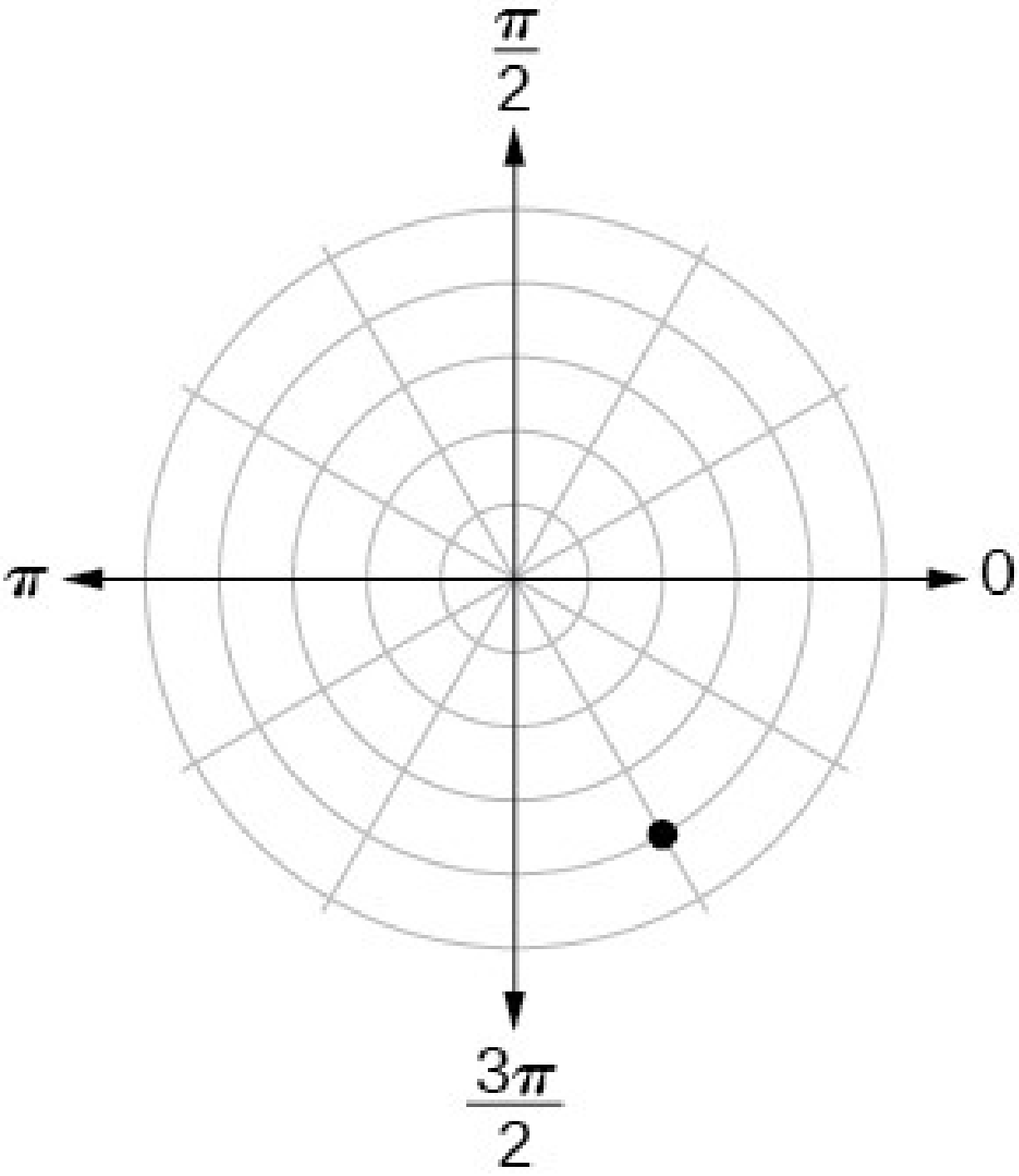
42.



43.



44.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna punktana.

45.

$$\left(-2, \frac{\pi}{3}\right)$$

46.

$$\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$$

47.

$$\left(3{,}5; \frac{7\,\pi}{4}\right)$$

48.

$$\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$$

49.

$$\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$$

50.

$$\left(4, \frac{-5\,\pi}{4}\right)$$

51.

$$\left(3, \frac{5\,\pi}{6}\right)$$

52.

$$\left(-1{,}5; \frac{7\,\pi}{6}\right)$$

53.

$$\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$$

54.

$$\left(1, \frac{3\,\pi}{2}\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita jöfnuna úr rétthyrndu formi í pólhnitaform og teikna hana á pólhnitanet.

55.

$$5\,x - y = 6$$

56.

$$2x+7y=-3$$

57.

$$x^2+(y-1)^2=1$$

58.

$$(x+2)^2+(y+3)^2=13$$

59.

$$x=2$$

60.

$$x^2+y^2=5y$$

61.

$$x^2+y^2=3x$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita jöfnuna úr pólhnitaformi í rétthyrnt form og teikna hana á rétthyrnt hnitaplan.

62.

$$r=6$$

63.

$$r=-4$$

64.

$$\theta=-\frac{2\pi}{3}$$

65.

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

66.

$$r=\sec\theta$$

67.

$$r=-10\sin\theta$$

68.

$$r=3\cos\theta$$

Tækni

69. Notið grafreikni til að finna rétthyrnd hnit punktsins $\left(2, -\frac{\pi}{5}\right)$. Námundið að næsta þúsundasta hluta.

70. Notið grafreikni til að finna rétthyrnd hnit punktsins $\left(-3, \frac{3\pi}{7}\right)$. Námundið að næsta þúsundasta hluta.

71. Notið grafreikni til að finna pólhnit punktsins $(-7, 8)$ í gráðum. Námundið að næsta þúsundasta hluta.

72. Notið grafreikni til að finna pólhnit punktsins $(3, -4)$ í gráðum. Námundið að næsta hundraðasta hluta.

73. Notið grafreikni til að finna pólhnit punktsins $(-2, 0)$ í radíönum. Námundið að næsta hundraðasta hluta.

Viðbótarverkefni

74. Lýsið grafi $r = a \sec\theta\,;\, a > 0$.

75. Lýsið grafi $r = a \sec\theta\,;\, a < 0$.

76. Lýsið grafi $r = a \csc\theta\,;\, a > 0$.

77. Lýsið grafi $r = a \csc\theta\,;\, a < 0$.

78. Hvaða pólhnitajöfnur gefa skálínu?

Í eftirfarandi æfingu skuluð þið teikna pólhnitaójöfnuna.

79.

$$r < 4$$

80.

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

81.

$$\theta = \frac{\pi}{4}, r \ge 2$$

82.

$$\theta = \frac{\pi}{4}, r \ge -3$$

83.

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, r < 2$$

84.

$$\frac{-\pi}{6} < \theta \leq \frac{\pi}{3}, -3 < r < 2$$

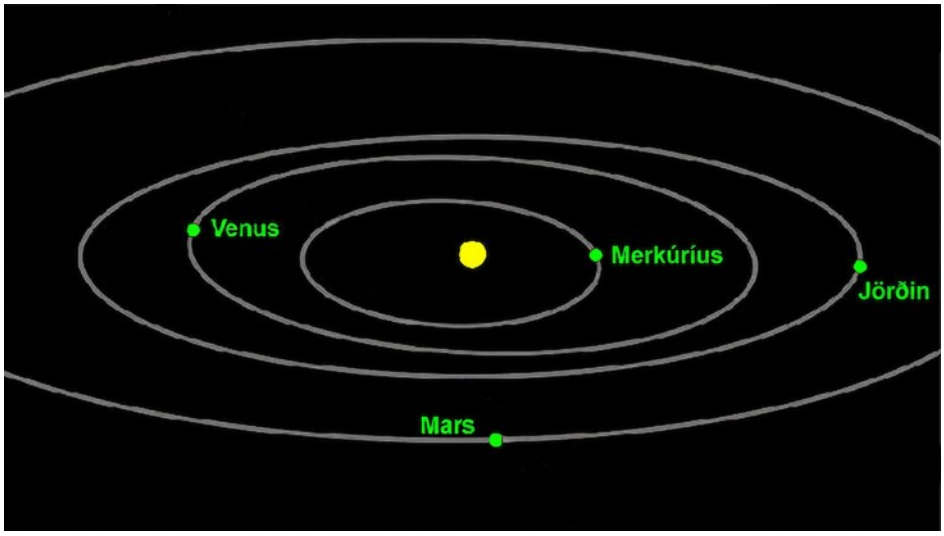
8.4 Pólhnit: gröf

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Prófa pólhnitajöfnur með tilliti til samhverfu.
- Teikna gröf pólhnitajafna með því að merkja inn punkta.

Reikistjörnurnar ferðast um geiminn á sporöskjulaga, lotubundnum brautum um sólina, eins og sýnt er á mynd 1. Þær eru á stöðugri hreyfingu og því gildir nákvæm staðsetning hverrar reikistjörnu aðeins eitt augnablik. Með öðrum orðum getum við aðeins ákvarðað hvar hún er á tilteknu augnabliki. Þetta er ein hagnýting pólhnita, sem eru táknuð (r, θ). Við túlkum r sem fjarlægð frá miðju sólar og θ sem stefnuhorn reikistjörnunnar, það er stefnu hennar frá miðju sólar. Í þessum hluta einbeitum við okkur að pólhnitakerfinu og gröfum sem verða til beint út frá pólhnitum.



Mynd 1 Reikistjörnur fylgja sporöskjulaga brautum um sólina. (mynd: breytt verk eftir NASA/JPL-Caltech)

Prófun pólhnitajafna með tilliti til samhverfu

Rétt eins og rétthyrnda jafnan $y=x^2$ lýsir tengslum x og y á kartesísku neti lýsir pólhnitajafna tengslum r og θ á pólhnitaneti. Munið að hnitaparið (r,θ) merkir að við förum rangsælis frá pólhnitaásnum (jákvæða x-ásnum) um hornið θ, og drögum geisla frá skautinu (upphafspunktinum) r einingar í stefnu θ. Allir punktar sem uppfylla pólhnitajöfnuna liggja á grafinu.

Samhverfa er eiginleiki sem hjálpar okkur að þekkja og teikna graf sérhverrar jöfnu. Ef graf jöfnu er samhverft um ás merkir það að ef grafið væri brotið saman eftir ásnum félli hluti þess öðrum megin saman við hlutann hinum megin. Með þremur prófunum sjáum við hvernig beita má eiginleikum samhverfu á pólhnitajöfnur. Auk þess notum við samhverfu (ásamt því að merkja inn lykilpunkta, núllstöðvar og hágildi r) til að ákvarða graf pólhnitajöfnu.

Í fyrstu prófuninni skoðum við samhverfu um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$ (y-ásinn). Við skiptum (r,θ) út fyrir $(-r,-\theta)$ til að kanna hvort nýja jafnan sé jafngild upphaflegu jöfnunni. Gerum til dæmis ráð fyrir að gefin sé jafnan $r=2\sin\theta$;

$$\begin{aligned} r&=2\sin\theta \\ -r&=2\sin(-\theta) && \text{Skiptið } (r,\theta) \text{ út fyrir } (-r,-\theta). \\ -r&=-2\sin\theta && \text{Samsemd: } \sin(-\theta)=-\sin\theta. \\ r&=2\sin\theta && \text{Margfaldið báðar hliðar með } -1. \end{aligned}$$

Jafnan er samhverf um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$.

8

Í annarri prófuninni skoðum við samhverfu um pólhnitaásinn (x-ásinn). Við skiptum (r,θ) út fyrir $(r,-\theta)$ eða $(-r,\pi-\theta)$ til að kanna hvort prófaða jafnan sé jafngild upphaflegu jöfnunni. Gerum til dæmis ráð fyrir að gefin sé jafnan $r=1-2\cos\theta$.

$$\begin{aligned} r&=1-2\cos\theta \\ r&=1-2\cos(-\theta) && \text{Skiptið } (r,\theta) \text{ út fyrir } (r,-\theta). \\ r&=1-2\cos\theta && \text{Samsemd jafnstæðra og oddstæðra falla} \end{aligned}$$

Graf jöfnunnar er samhverft um pólhnitaásinn.

Í þriðju prófuninni skoðum við samhverfu um skautið (upphafspunktinn). Við skiptum (r,θ) út fyrir $(-r,\theta)$ til að kanna hvort prófaða jafnan sé jafngild upphaflegu jöfnunni. Gerum til dæmis ráð fyrir að gefin sé jafnan $r=2\sin(3\theta)$.

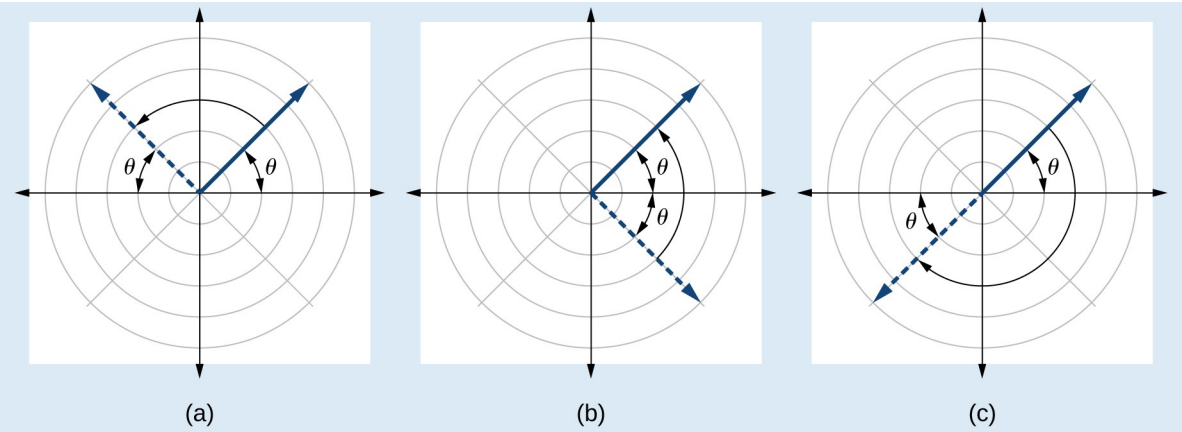
$$\begin{aligned} r &= 2\sin(3\theta) \\ -r &= 2\sin(3\theta) \end{aligned}$$

Jafnan stenst ekki samhverfuprófið, en það merkir ekki að hún sé ekki samhverf um skautið. Ef jafna stenst eitt eða fleiri samhverfupróf staðfestir það að graf hennar hafi viðkomandi samhverfu. Þótt prófin bregðist þarf grafið hins vegar ekki að vera ósamhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, pólhnitaásinn eða skautið. Í slíkum tilvikum getum við staðfest samhverfu með því að

teikna spegilpunkta yfir ætlaðan samhverfuás eða um skautið. Samhverfuprófun einfaldar teikningu pólhnitajafna en aðferðin er ekki fullkomin.

SAMHVERFUPRÓF

Pólhnitajafna lýsir ferli á pólhnitaneti. Graf pólhnitajöfnu má prófa með tilliti til þriggja gerða samhverfu, eins og sýnt er á mynd 2.



Mynd 2 (a) Graf er samhverft um línuna $\theta = \frac{\pi}{2}$ (y-ásinn) ef jafngild jafna fæst þegar (r, θ) er skipt út fyrir $(-r, -\theta)$ (b) Graf er samhverft um pólhnitaásinn (x-ásinn) ef jafngild jafna fæst þegar (r, θ) er skipt út fyrir $(r, -\theta)$ eða $(-r, \pi - \theta)$ (c) Graf er samhverft um skautið (upphafspunktinn) ef jafngild jafna fæst þegar (r, θ) er skipt út fyrir $(-r, \theta)$

8

AÐFERÐ

Prófið gefna pólhnitajöfnu með tilliti til samhverfu.

1. Setjið viðeigandi samsetningu hnita inn fyrir (r, θ): $(-r, -\theta)$ fyrir samhverfu um $\theta = \frac{\pi}{2}$; $(r, -\theta)$ fyrir samhverfu um pólhnitaásinn; og $(-r, \theta)$ fyrir samhverfu um skautið.
2. Ef jöfnurnar sem fást eru jafngildar í einu eða fleiri prófanna hefur grafið þá samhverfu sem við var að búast.

SÝNIDÆMI 1

Prófun pólhnitajöfnu með tilliti til samhverfu

Prófið jöfnuna $r = 2 \sin \theta$ með tilliti til samhverfu.

Lausn

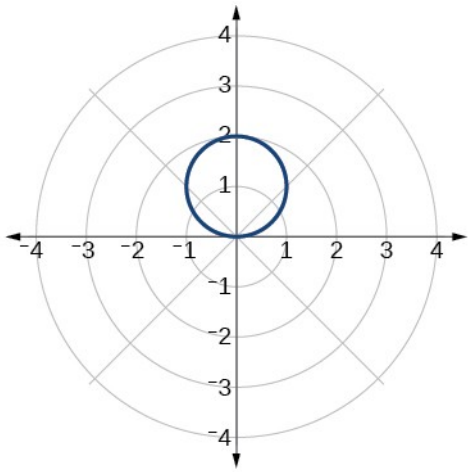
Prófið allar þrjár gerðir samhverfu.

Tafla 1

1) Þegar (r,θ) er skipt út fyrir $(-r,-\theta)$ fæst sama niðurstaða. Grafið er því samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$.	$-r=2\sin(-\theta)$ $-r=-2\sin\theta$ Samsemd jafnstæðra og oddstæðra falla $r=2\sin\theta$ Margföldum með -1 Stenst
2) Þegar θ er skipt út fyrir $-\theta$ fæst ekki sama jafna. Grafið stenst því ekki prófið og kann að vera samhverft um pólhnitaásinn eða ekki.	$r=2\sin(-\theta)$ $r=-2\sin\theta$ Samsemd jafnstæðra og oddstæðra falla $r=-2\sin\theta \neq 2\sin\theta$ Stenst ekki
3) Þegar r er skipt út fyrir $-r$ breytist jafnan og stenst ekki prófið. Grafið kann að vera samhverft um skautið eða ekki.	$-r=2\sin\theta$ $r=-2\sin\theta \neq 2\sin\theta$ Stenst ekki

Greining

Með grafreikni sjáum við að jafnan $r=2\sin\theta$ lýsir hring með miðju í $(0,1)$ og geisla $r=1$; grafið er í raun samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$. Við sjáum einnig að grafið er hvorki samhverft um pólhnitaásinn né skautið. Sjá mynd 3.



Mynd 3

PRÓFIÐ SJÁLF #1

Prófið jöfnuna með tilliti til samhverfu: $r=-2\cos\theta$.

Að teikna gröf pólhnitajafna með punktum

Til að teikna graf í rétthyrndu hnitakerfi búum við til töflu yfir gildi x og y. Til að teikna graf í pólhnitakerfi búum við til töflu yfir gildi θ og r. Við setjum gildi θ inn í pólhnitajöfnu og reiknum r. Með því að nýta samhverfu og finna lykilgildi θ og r þarf þó færri útreikninga.

Að finna núllstöðvar og hágildi

Til að finna núllstöðvar pólhnitajöfnu leysum við fyrir þau gildi θ sem gefa $r=0$. Munið að til að finna núllstöðvar margliðufalla setjum við jöfnuna jafna núlli og leysum síðan fyrir x. Við notum sama ferli fyrir pólhnitajöfnur. Setjið $r=0$, og leysið fyrir θ.

Fyrir mörg þeirra forma sem við skoðum fæst hágildi pólhnitajöfnu með því að setja inn þau gildi θ sem gefa hágildi hornafallanna. Skoðum $r=5\cos\theta$; mesta fjarlægð milli ferilsins og skautsins er 5 einingar. Hágildi kósínusfallsins er 1 þegar $\theta=0$, svo pólhnitajafnan okkar er $5\cos\theta$, og gildið $\theta=0$ gefur hágildi $|r|$.

Á sama hátt er hágildi sínusfallsins 1 þegar $\theta=\frac{\pi}{2}$, og ef pólhnitajafnan er $r=5\sin\theta$, gefur $\theta=\frac{\pi}{2}$ hágildi $|r|$. Fleiri upplýsingar fást með því að reikna r þegar $\theta=0$. Þannig fást skurðpunktar við pólhnitaásinn, sem geta hjálpað okkur að teikna grafið og greina ferilinn.

SÝNIDÆMI 2

Að finna núllstöðvar og hágildi pólhnitajöfnu

Notið jöfnuna í dæmi 1 til að finna núllstöðvar og hágildi $|r|$ og, ef þörf krefur, skurðpunkta við pólhnitaásinn fyrir $r=2\sin\theta$.

8

Lausn

Til að finna núllstöðvarnar setjum við r jafnt og núll og leysum fyrir θ.

$$\begin{aligned} 2\sin\theta &= 0 \\ \sin\theta &= 0 \\ \theta &= \sin^{-1} 0 \\ \theta &= n\pi \qquad \text{þar sem } n \text{ er heiltala} \end{aligned}$$

Setjið eitthvert gildanna á θ inn í jöfnuna. Við notum 0.

$$\begin{aligned} r &= 2\sin(0) \\ r &= 0 \end{aligned}$$

Punktarnir $(0,0)$ og $(0,\pm n\pi)$ eru núllstöðvar jöfnunnar. Þeir falla allir saman og því sést aðeins einn punktur á grafinu. Punkturinn er jafnframt eini skurðpunkturinn við pólhnitaásinn.

Til að finna hágildi jöfnunnar skoðum við hágildi hornafallsins $\sin\theta$, sem verður þegar $\theta=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$ og gefur $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. Setjið $\frac{\pi}{2}$ inn fyrir θ.

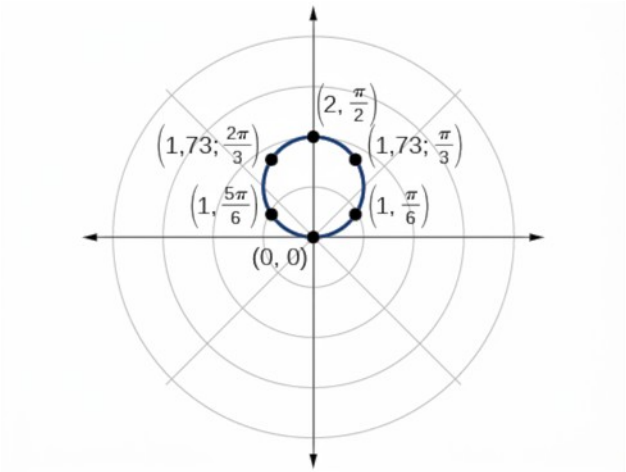
$$\begin{aligned} r &= 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ r &= 2(1) \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Greining

Punkturinn $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ gefur hágildi grafsins. Merkjum inn nokkra punkta til viðbótar til að staðfesta hringlaga grafið. Sjá töflu 2 og mynd 4.

Tafla 2

θ	$r=2\sin\theta$	r
0	$r=2\sin(0)=0$	0
$\frac{\pi}{6}$	$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$	1
$\frac{\pi}{3}$	$r=2\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx 1{,}73$	1,73
$\frac{\pi}{2}$	$r=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$	2
$\frac{2\pi}{3}$	$r=2\ \sin\left(\frac{2\ \pi}{3}\right)\approx 1{,}73$	1,73
$\frac{5\pi}{6}$	$r=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1$	1
π	$r=2\sin(\pi)=0$	0



Mynd 4

PRÓFIÐ SJÁLF #2

Prófið jöfnuna með tilliti til samhverfu án þess að umrita hana í kartesísk hnit. Finnið einnig núllstöðvar og hágildi

$$|r|:$$

$$r = 3\cos\theta.$$

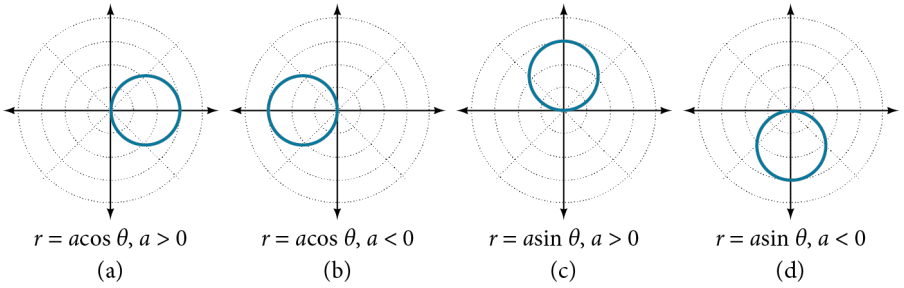
Rannsókn hringa

Nú höfum við séð jöfnu hrings í pólhnitakerfinu. Í síðustu tveimur sýnidæmum var sama jafnan notuð til að sýna eiginleika samhverfu og hvernig finna má núllstöðvar, hágildi og punkta sem mynda gröfin. Hringurinn er þó aðeins eitt af mörgum formum pólhnitaferla.

Fimm sígildir pólhnitaferlar eru hjartaferlar, snigilferlar, lemniskötur, rósir og vefjur Arkimedesar. Við skoðum fyrst stuttlega pólhnitaformúlur hrings og förum síðan yfir sígildu ferlana og afbrigði þeirra.

FORMÚLUR FYRIR JÖFNU HRINGS

Sumar formúlurnar sem gefa graf hrings í pólhnitum eru $r = a\cos\theta$ og $r = a\sin\theta$, þar sem a er þvermál hringsins eða fjarlægðin frá skautinu að fjarlægasta punkti hringferilsins. Geislinn er $\frac{|a|}{2}$, eða helmingur þvermálsins. Fyrir $r = a\cos\theta$, er miðjan $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. Fyrir $r = a\sin\theta$, er miðjan $\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mynd 5 sýnir gröf þessara fjögurra hringa.



Mynd 5

SÝNIDÆMI 3

Að skissa graf pólhnitajöfnu hrings

Skissið graf $r=4\cos\theta$.

Lausn

Fyrst prófum við jöfnuna með tilliti til samhverfu og sjáum að grafið er samhverft um pólhnitaásinn. Næst finnum við núllstöðvar og hágildi $|r|$ fyrir $r=4\cos\theta$. Setjum fyrst $r=0$, og leysum fyrir θ. Núllstöð verður því við $\theta=\frac{\pi}{2}\pm k\,\pi$. Lykilpunktur til að merkja inn er $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

8

Til að finna hágildi r, athugum við að hágildi kósínusfallsins er 1 þegar $\theta=0\pm 2k\,\pi$. Setjið $\theta=0$ inn í jöfnuna:

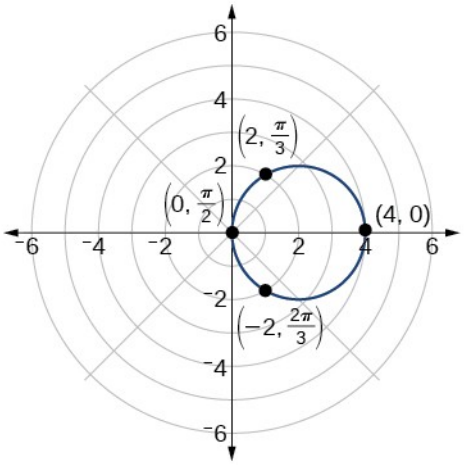
$$r=4\cos\ \theta$$
$$r=4\cos(0)$$
$$r=4(1)=4$$

Hágildi jöfnunnar er 4. Lykilpunktur til að merkja inn er $(4,0)$.

Þar sem $r=4\cos\theta$ er samhverft um pólhnitaásinn þurfum við aðeins að reikna r-gildi fyrir θ á bilinu $[\,[0,\pi\,]$. Síðan má spegla punkta í efri fjórðungi yfir í neðri fjórðung. Búið til gildistöflu svipaða töflu 3. Grafið er sýnt á mynd 6.

Tafla 3

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	3,46	2,83	2	0	−2	−2,83	−3,46	−4



Mynd 6

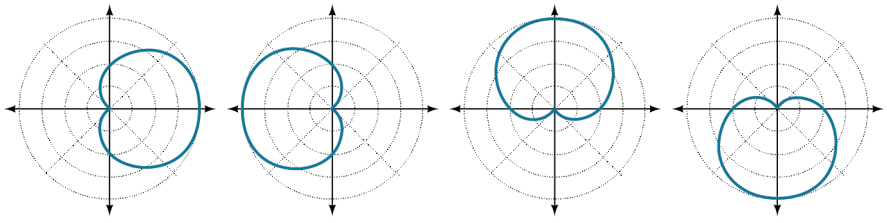
Rannsókn hjartaferla

Stundum virðist einfaldara að umrita pólhnit í kartesísk hnit, en í raun er auðveldara að teikna sígildu ferlana í pólhnitakerfinu. Næsti ferill nefnist hjartaferill vegna þess að hann líkist hjarta. Þetta form er oft talið til fjölskyldu snigilferla, en hér fjöllum við sérstaklega um hjartaferilinn.

FORMÚLUR FYRIR HJARTAFERIL

Hjartaferill hefur formið $r = a \pm b\cos\theta$ eða $r = a \pm b\sin\theta$, þar sem $a > 0$, $b > 0$, og $\frac{a}{b} = 1$.

Ferillinn fer gegnum skautið; sjá mynd 7.



Mynd 7

AÐFERÐ

Skissið graf gefinnar pólhnitajöfnu hjartaferils.

1. Kannið jöfnuna með tilliti til allra þriggja gerða samhverfu.
2. Finnið núllstöðvarnar. Setjið $r = 0$.
3. Finnið hágildi jöfnunnar út frá hágildi hornafallastæðunnar.

4. Búið til gildistöflu fyrir r og θ.
5. Merkið punktana inn og skissið grafið.

SÝNIDÆMI 4

Að skissa graf hjartaferils

Skissið graf $r=2+2\cos\theta$.

Lausn

Fyrst prófum við jöfnuna með tilliti til samhverfu og sjáum að graf hennar er samhverft um pólhnitaásinn. Næst finnum við núllstöðvar og hágildi. Þegar $r=0$, fæst $\theta=\pi+2k\pi$. Núllstöð jöfnunnar er í $(0,\pi)$. Grafið fer gegnum þennan punkt.

Hágildi $r=2+2\cos\theta$ fæst þegar $\cos\theta$ er í hámarki, það er þegar $\cos\theta=1$ eða $\theta=0$. Setjið $\theta=0$ inn í jöfnuna og leysið fyrir r.

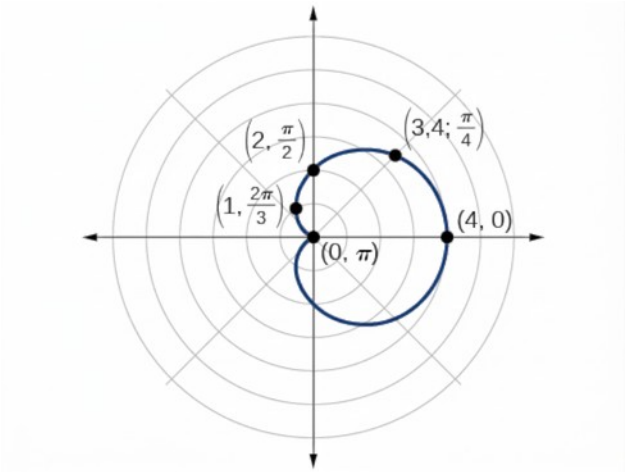
$$r = 2 + 2\cos(0)$$
$$r = 2 + 2(1) = 4$$

Punkturinn $(4,0)$ gefur hágildi grafsins.

Við komumst að því að pólhnitajafnan er samhverf um pólhnitaásinn, en þar sem grafið nær inn í alla fjóra fjórðunga þurfum við að teikna gildi á bilinu $[0,\pi]$. Síðan er efri hluti grafsins speglaður um pólhnitaásinn. Næst búum við til gildistöflu eins og töflu 4, merkjum punktana inn og teiknum grafið. Sjá mynd 8.

Tafla 4

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	4	3,41	2	1	0



Mynd 8

Rannsókn snigilferla

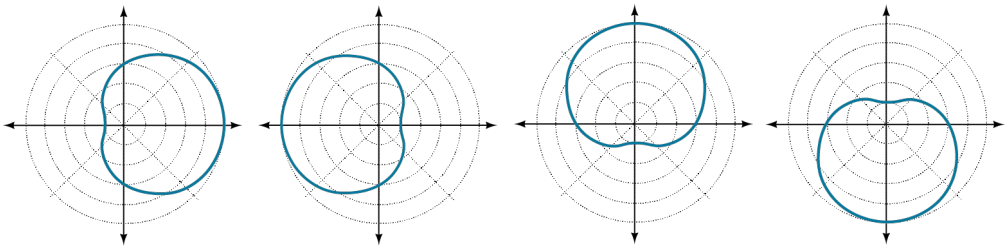
Orðið limaçon er fornfranska og merkir „snigill“, sem lýsir lögun grafsins. Eins og áður kom fram tilheyrir hjartaferill fjölskyldu snigilferla og líkindi grafanna eru augljós. Önnur form í þessum flokki eru einlykkju- og tvílykkjuferlar, einnig nefndir innri lykkjuferlar.

Einlykkjuferlar eru stundum nefndir dældaðir snigilferlar þegar $1<\frac{a}{b}<2$ og kúptir snigilferlar þegar $\frac{a}{b}\geq 2$.

8

FORMÚLUR FYRIR EINLYKKJU-SNIGILFERLA

Formúlurnar sem gefa graf dældaðs einlykkju-snigilferils eru $r=a\pm b\cos\theta$ og $r=a\pm b\sin\theta$ þar sem $a>0, b>0$, og $1<\frac{a}{b}<2$. Öll fjögur gröfin eru sýnd á mynd 9.



Mynd 9 Dældaðir snigilferlar

AÐFERÐ

Skissið graf gefinnar pólhnitajöfnu einlykkju-snigilferils.

1. Prófið jöfnuna með tilliti til samhverfu. Munið að þótt jafnan standist ekki samhverfupróf þarf formið ekki að vera ósamhverft. Oft kemur samhverfan í ljós þegar punktarnir eru merktir inn.
2. Finnið núllstöðvarnar.
3. Finnið hágildin út frá hornafallastæðunni.
4. Búið til töflu.
5. Merkið punktana inn og skissið grafið.

SÝNIDÆMI 5

Að skissa graf einlykkju-snigilferils

Teiknið graf jöfnunnar $r = 4 - 3\sin\theta$.

Lausn

Fyrst prófum við jöfnuna með tilliti til samhverfu. Hún stenst ekkert prófanna þriggja, sem merkir að grafið kann að vera samhverft eða ekki og við getum því ekki nýtt samhverfu við teikninguna. Graf jöfnunnar er þó greinilega samhverft um línuna $\theta = \frac{\pi}{2}$, þótt jafnan standist ekkert prófanna. Grafreiknir sýnir speglunareiginleika grafsins þegar í stað.

Næst finnum við núllstöðvar og hágildi og merkjum inn spegilpunkta til að kanna samhverfu. Þegar $r = 0$ er θ óskilgreint. Hvað merkir það? Hvernig getur θ verið óskilgreint? Hornið θ er óskilgreint ef $\sin\theta > 1$. Þess vegna er θ óskilgreint, því að ekkert gildi á θ uppfyllir $\sin\theta > 1$. Grafið fer því ekki gegnum skautið. Ef til vill sker grafið pólhnitaásinn, en þá ekki í skautinu. Við getum leitað að öðrum skurðpunktum með því að reikna r þegar $\theta = 0$.

$$r(0) = 4 - 3\sin(0)$$
$$r = 4 - 3 \cdot 0 = 4$$

Því er að minnsta kosti einn skurðpunktur við pólhnitaásinn í $(4, 0)$.

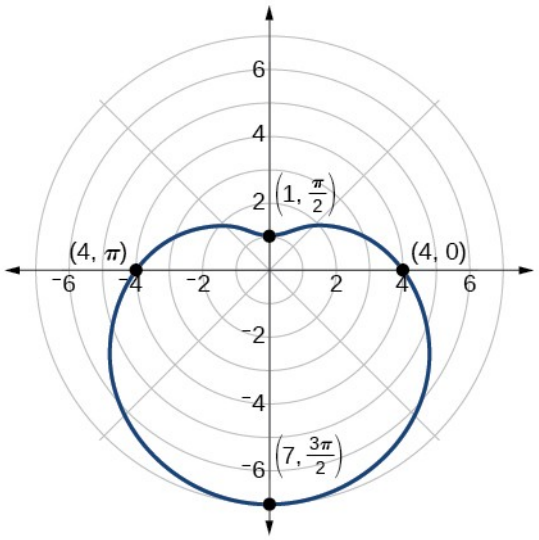
Þar sem hágildi sínusfallsins er 1 þegar $\theta = \frac{\pi}{2}$, setjum við næst $\theta = \frac{\pi}{2}$ inn í jöfnuna og leysum fyrir r. Því er $r = 1$.

Búið til hnitatöflu svipaða töflu 5.

Tafla 5

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	4	2,5	1,4	1	1,4	2,5	4	5,5	6,6	7	6,6	5,5	4

Grafið er sýnt á mynd 10.



Mynd 10 Einlykkju-snigilferill

Greining

Þetta er dæmi um feril þar sem gildistafla er nauðsynleg til að fá nákvæmt graf. Samhverfuprófin bregðast og núllstöðin er óskilgreind. Þótt líklegt kunni að virðast að jafna sem inniheldur $\sin\theta$ sé samhverf um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, er gott að reikna fleiri punkta til að staðfesta að grafið sé rétt.

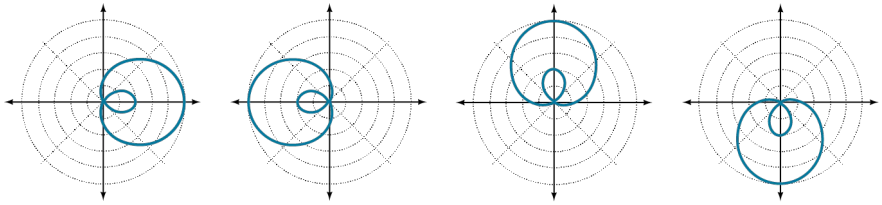
PRÓFIÐ SJÁLF #3

Skissið graf $r=3-2\cos\theta$.

Önnur gerð snigilferils, snigilferill með innri lykkju, dregur nafn sitt af lykkjunni innan í almenna snigilferilsforminu. Þýski listamaðurinn Albrecht Dürer (1471–1528) uppgötvaði ferilinn og birti aðferð til að teikna hann í bók sinni Underweysung der Messing frá 1525. Öld síðar enduruppgötvaði Étienne Pascal (1588–1651), faðir stærðfræðingsins Blaise Pascal, ferilinn.

FORMÚLUR FYRIR SNIGILFERLA MEÐ INNRI LYKKJU

Formúlurnar sem gefa snigilferla með innri lykkju eru $r=a\pm b\cos\theta$ og $r=a\pm b\sin\theta$, þar sem $a>0$, $b>0$, og $a<b$. Graf snigilferils með innri lykkju fer tvisvar gegnum skautið, einu sinni fyrir ytri lykkjuna og einu sinni fyrir þá innri. Sjá gröfin á mynd 11.



Mynd 11

SÝNIDÆMI 6

Að skissa graf snigilferils með innri lykkju

Skissið graf $r = 2 + 5\cos\theta$.

Lausn

Við prófun á samhverfu kemur í ljós að graf jöfnunnar er samhverft um pólhnitaásinn. Næst sýna núllstöðvarnar að þegar $r = 0$, er $\theta = 1{,}98$. Hágildið $|r|$ fæst þegar $\cos\theta = 1$ eða þegar $\theta = 0$. Hágildið er því í punktinum (7, 0).

Við höfum fundið samhverfu, núllstöð og hágildi, en ef við merkjum inn fleiri punkta sést lögunin betur og mynstur kemur í ljós.

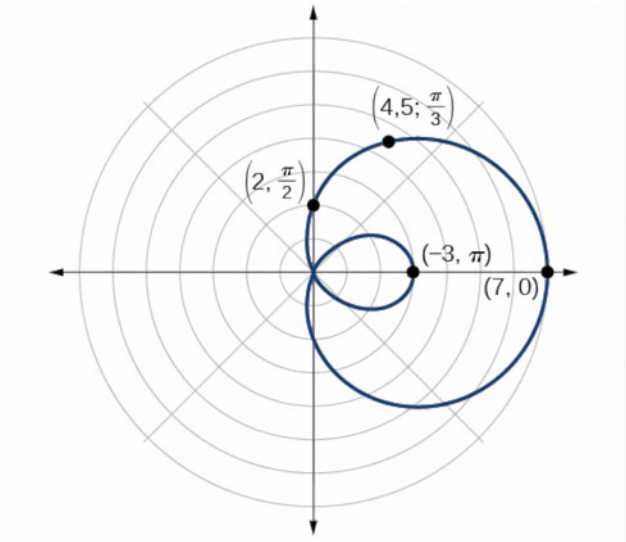
Sjá töflu 6.

8

Tafla 6

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	7	6,3	4,5	2	−0,5	−2,3	−3	−2,3	−0,5	2	4,5	6,3	7

Eins og við var að búast byrja gildin að endurtaka sig eftir $\theta = \pi$. Grafið er sýnt á mynd 12.



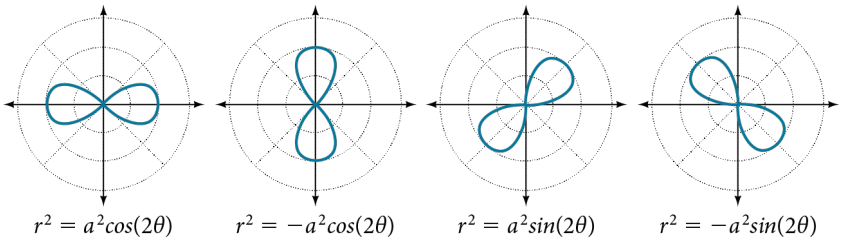
Mynd 12 Snigilferill með innri lykkju

Rannsókn lemniskata

Lemniskata er pólhnitaferill sem líkist óendanleikamerkinu ∞ eða tölustafnum 8. Lemniskata með miðju í skautinu er samkvæmt skilgreiningu samhverf.

FORMÚLUR FYRIR LEMNISKÖTUR

Lemniskata hefur formið $r^2=a^2\cos 2\theta$ eða $r^2=a^2\sin 2\theta$, þar sem $a\neq 0$. Formið $r^2=a^2\sin 2\theta$ er samhverft um skautið. Formið $r^2=a^2\cos 2\theta$ er samhverft um skautið, línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, og pólhnitaásinn. Sjá mynd 13.



Mynd 13

SÝNIDÆMI 7

Að skissa graf lemniskötu

Skissið graf $r^2=4\cos 2\theta$.

Lausn

Jafnan er samhverf um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, pólhnitaásinn og skautið.

Finnum núllstöðvarnar. Aðferðin ætti nú að vera kunnugleg, en við nálgumst þessa jöfnu á svolítið annan hátt með innsetningunni $u=2\theta$.

$$
\begin{aligned}
0&=4\cos\ 2\theta \\
0&=4\cos\ u \\
0&=\cos\ u \\
\cos^{-1}0&=\frac{\pi}{2} \\
u&=\frac{\pi}{2} \qquad \text{Setjið } 2\theta \text{ aftur inn í stað } u. \\
2\theta&=\frac{\pi}{2} \\
\theta&=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Punkturinn $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ er því núllstöð jöfnunnar.

Finnum nú hágildið. Þar sem hágildi $\cos u=1$ fæst þegar $u=0$, fæst hágildi $\cos 2\theta=1$ þegar $2\theta=0$. Því fæst

$$
\begin{aligned}
r^2 &= 4\cos(0) \\
r^2 &= 4(1)=4 \\
r &= \pm\sqrt{4}\ \pm 2
\end{aligned}
$$

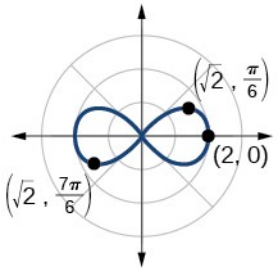
Hágildi er í (2, 0). Þar sem grafið er samhverft um skautið, línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, og pólhnitaásinn þurfum við aðeins að merkja inn punkta í fyrsta fjórðungi.

Búið til töflu svipaða töflu 7.

Tafla 7

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	± 2	$\pm\sqrt{2}$	0

Merkið punktana inn á grafið, eins og sýnt er á mynd 14.



Mynd 14 Lemniskata

Greining

Innsetning á borð við $u = 2\theta$ er algeng í stærðfræði þar sem hún getur einfaldað útreikninga. Við megum þó ekki gleyma að skipta innsettu stærðinni aftur út fyrir upphaflegu stærðina í lokin og leysa síðan fyrir óþekktu stærðina.

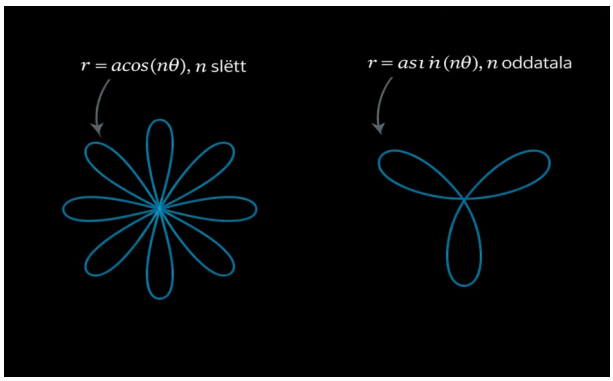
Sumir punktar grafsins birtast ef til vill ekki með Trace-aðgerð TI-84 grafreiknis og tafla reiknisins kann að sýna villu fyrir sömu gildi r. Ástæðan er sú að engar rauntölukvaðratrætur eru til fyrir þessi gildi θ. Með öðrum orðum eru samsvarandi r-gildi $\sqrt{4\cos(2\theta)}$ tvinntölur þar sem neikvæð tala er undir rótarmerkinu.

Rannsókn rósa

Næsta gerð pólhnitajöfnu gefur krónublaðalögun sem nefnist rós. Þótt gröfin virðist flókin myndar einföld pólhnitajafna mynstrið.

RÓSIR

Formúlurnar sem gefa graf rósar eru $r = a\cos n\theta$ og $r = a\sin n\theta$, þar sem $a \neq 0$. Ef n er slétt hefur ferillinn $2n$ krónublöð. Ef n er oddatala hefur ferillinn n krónublöð. Sjá mynd 15.



Mynd 15

SÝNIDÆMI 8

Að skissa graf rósar (n slétt)

Skissið graf $r=2\cos 4\theta$.

Lausn

Við samhverfuprófun sjáum við aftur að prófin segja ekki alla söguna. Grafið er ekki aðeins samhverft um pólhnitaásinn heldur einnig um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$ og skautið.

Finnum núllstöðvarnar. Gerið fyrst innsetninguna $u=4\theta$.

$$\begin{aligned} 0 &= 2\cos\ 4\theta \\ 0 &= \cos\ 4\theta \\ 0 &= \cos\ u \\ \cos^{-1}0 &= u \\ u &= \tfrac{\pi}{2} \\ 4\theta &= \tfrac{\pi}{2} \\ \theta &= \tfrac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Núllstöðin er $\theta=\frac{\pi}{8}$. Punkturinn $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ liggur á ferlinum.

Næst finnum við hágildi $|r|$. Við vitum að hágildi $\cos u=1$ fæst þegar $\theta=0$. Því fæst

$$\begin{aligned} r &= 2\cos(4\cdot 0) \\ r &= 2\cos(0) \\ r &= 2(1)=2 \end{aligned}$$

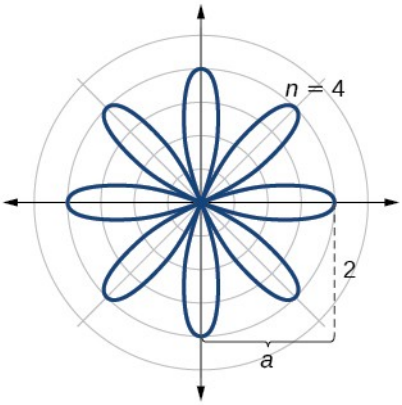
Punkturinn $(2,0)$ liggur á ferlinum.

Graf rósarinnar hefur sérstaka eiginleika sem koma fram í töflu 8.

Tafla 8

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
r	2	0	−2	0	2	0	−2

Þar sem $r=0$ þegar $\theta=\frac{\pi}{8}$, er eðlilegt að skipta gildunum í töflunni með millibili sem nemur $\frac{\pi}{8}$ einingum. Skýrt mynstur kemur fram. Skoðið röð r-gildanna: 2, 0, −2, 0, 2, 0, −2 og svo framvegis. Þetta sýnir hvernig ferillinn myndast eitt krónublað í einu. Frá $r=0$, nær hvert krónublað út í fjarlægðina $r=2$, og snýr síðan aftur í núll $2n$ sinnum, svo krónublöðin verða alls átta. Sjá grafið á mynd 16.



Mynd 16 Rósarferill, n slétt tala

Greining

Best er að merkja punkta þessara ferla inn í réttri röð eins og í töflu 8. Þá sjáum við hvernig grafið nær hágildi, oddi krónublaðs, fer í lykkju aftur gegnum skautið, nær gagnstæðu hágildi og fer aftur í skautið. Ferlið heldur samfellt áfram þar til öll krónublöðin hafa verið teiknuð.

PRÓFIÐ SJÁLF #4

Skissið graf $r=4\sin(2\theta)$.

SÝNIDÆMI 9

Að skissa graf rósar (n oddatala)

Skissið graf $r=2\sin(5\theta)$.

Lausn

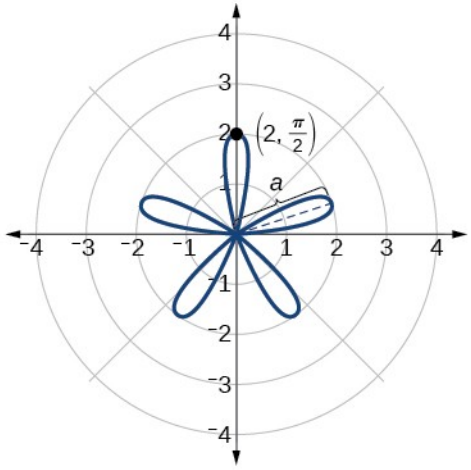
Graf jöfnunnar er samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$. Næst finnum við núllstöðvar og hágildi. Við notum innsetninguna $u=5\theta$.

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\sin(5\theta) \\
0 &= \sin\ u \\
\sin^{-1}0 &= 0 \\
u &= 0 \\
5\theta &= 0 \\
\theta &= 0
\end{aligned}
$$

Við reiknum hágildið við hornið þar sem $\sin\theta$ er í hámarki. Því fæst

$$r = 2\sin\left(5 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$r = 2(1) = 2$$

Hágildi pólhnitajöfnunnar er því 2. Það er lengd hvers krónublaðs. Þar sem ferill með oddatölu n hefur jafn mörg krónublöð og n, verða fimm krónublöð á grafinu. Sjá mynd 17.



Mynd 17 Rósarferill, n oddatala

Búið til gildistöflu svipaða töflu 9.

Tafla 9

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	1	−1,73	2	−1,73	1	0

PRÓFIÐ SJÁLF #5

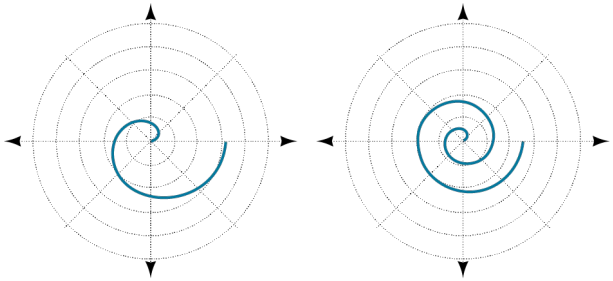
Skissið graf $r = 3\cos(3\theta)$.

Rannsókn vefju Arkimedesar

Síðasta pólhnitajafnan sem við fjöllum um er vefja Arkimedesar, nefnd eftir þeim sem uppgötvaði hana, gríska stærðfræðingnum Arkimedesi (um 287 f.Kr.–um 212 f.Kr.), sem á heiðurinn af fjölmörgum uppgötvunum í rúmfræði og aflfræði.

VEFJA ARKIMEDESAR

Formúlan sem gefur graf vefju Arkimedesar er $r = \theta$ fyrir $\theta \geq 0$. Þegar θ vex eykst r með jöfnum hraða eftir sífellt víðari, endalausri vefju. Sjá mynd 18.



Mynd 18

AÐFERÐ

Ef vefja Arkimedesar er gefin á bilinu $[0, 2\pi]$, skissið þá graf hennar.

1. Búið til gildistöflu fyrir r og θ á gefna skilgreiningarmenginu.
2. Merkið punktana inn og skissið grafið.

SÝNIDÆMI 10

Að skissa graf vefju Arkimedesar

Skissið graf $r = \theta$ á $[0, 2\pi]$.

Lausn

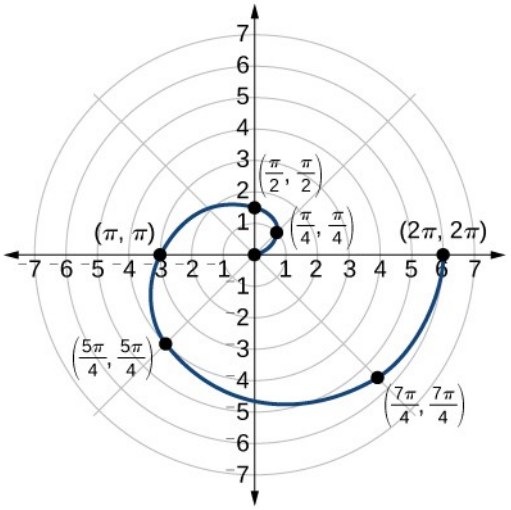
Þar sem r er jafnt θ, hefst graf vefju Arkimedesar í skautinu í punktinum (0, 0). Grafið gefur vísbendingu um samhverfu en stenst formlega ekkert samhverfupróf. Ekkert hágildi er heldur til nema skilgreiningarmengið sé takmarkað.

Búið til töflu eins og töflu 10.

Tafla 10

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	0,785	1,57	3,14	4,71	5,50	6,28

Athugið að r-gildin eru einfaldlega hornin í radíönum, rituð sem tugabrot. Þau sjást á grafinu á mynd 19.



Mynd 19 Vefja Arkimedesar

Greining

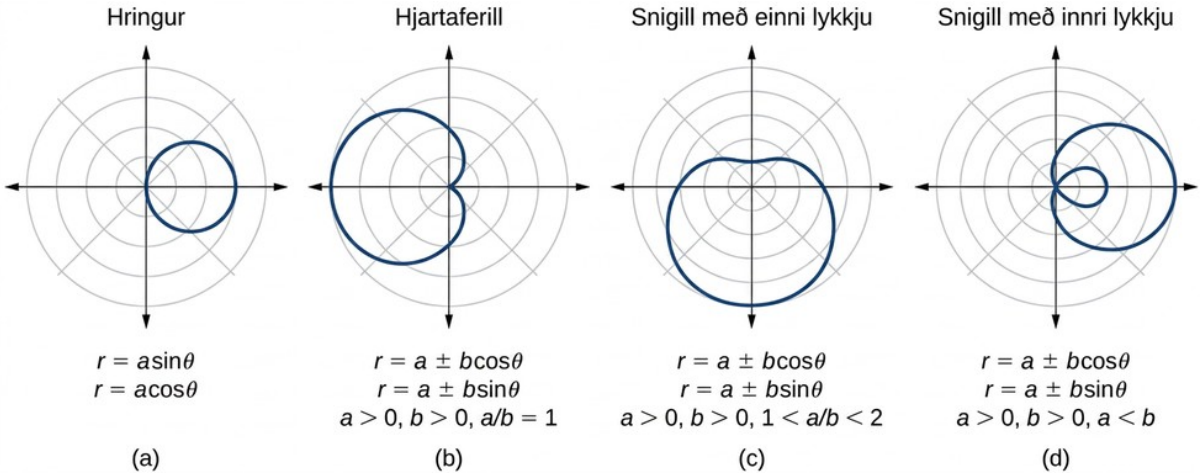
Skilgreiningarmengi þessa pólhnitaferils er $[0, 2\pi]$. Almennt er skilgreiningarmengi fallsins þó $(-\infty, \infty)$. Fremur einfalt er að teikna jöfnu vefju Arkimedesar þótt myndin láti hana virðast flókna.

PRÓFIÐ SJÁLF #6

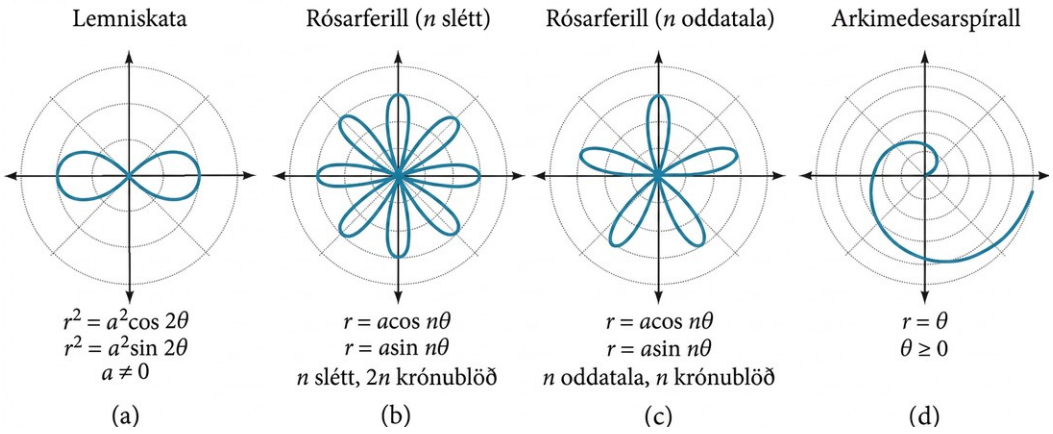
Skissið graf $r = -\theta$ á bilinu $[0, 4\pi]$.

Yfirlit ferla

Í þessum hluta höfum við skoðað nokkra pólhnitaferla sem virðast flóknir. Mynd 20 og mynd 21 draga saman gröf og jöfnur hvers ferils.



Mynd 20



Mynd 21

EFNI Á NETINU

Notið þessi netgögn til frekari kennslu og æfinga í gröfum pólhnitajafna.

- Að teikna pólhnitajöfnur, hluti 1
- Að teikna pólhnitajöfnur, hluti 2
- Hreyfimynd: gröf pólhnitajafna
- Að teikna pólhnitajöfnur á TI-84

8.4 Æfingar

Hugtök

1. Lýsið þremur gerðum samhverfu pólhnitagrafa og berið þær saman við samhverfu kartesíska plansins.

2. Hverjar af þremur gerðum samhverfu pólhnitagrafa samsvara samhverfu um x-ás, y-ás og upphafspunkt?
3. Hvaða skrefum skal fylgja þegar pólhnitajöfnur eru teiknaðar?
4. Lýsið lögun grafa hjartaferla, snigilferla og lemniskata.
5. Hvaða hluti jöfnunnar ákvarðar lögun grafs pólhnitajöfnu?

Gröf

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið prófa jöfnuna með tilliti til samhverfu.

6.

$$r = 5\cos 3\theta$$

7.

$$r = 3 - 3\cos\theta$$

8.

$$r = 3 + 2\sin\theta$$

9.

$$r = 3\sin 2\theta$$

10.

$$r = 4$$

11.

$$r = 2\theta$$

12.

$$r = 4\cos\frac{\theta}{2}$$

13.

$$r = \frac{2}{\theta}$$

14.

$$r = 3\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

15.

$$r = \sqrt{5\sin 2\theta}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna graf pólhnitajöfnunnar og tilgreina heiti lögunarinnar.

16.

$$r = 3\cos\theta$$

17.

$$r = 4\sin\theta$$

18.

$$r = 2 + 2\cos\theta$$

19.

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

20.

$$r = 5 - 5\sin\theta$$

21.

$$r = 3 + 3\sin\theta$$

22.

$$r = 3 + 2\sin\theta$$

23.

$$r = 7 + 4\sin\theta$$

24.

$$r = 4 + 3\cos\theta$$

25.

$$r = 5 + 4\cos\theta$$

26.

$$r = 10 + 9\cos\theta$$

27.

$$r = 1 + 3\sin\theta$$

28.

$$r = 2 + 5\sin\theta$$

29.

$$r = 5 + 7\sin\theta$$

30.

$$r=2+4\cos\theta$$

31.

$$r=5+6\cos\theta$$

32.

$$r^2=36\cos(2\theta)$$

33.

$$r^2=10\cos(2\theta)$$

34.

$$r^2=4\sin(2\theta)$$

35.

$$r^2=10\sin(2\theta)$$

36.

$$r=3\sin(2\theta)$$

37.

$$r=3\cos(2\theta)$$

38.

$$r=5\sin(3\theta)$$

39.

$$r=4\sin(4\theta)$$

40.

$$r=4\sin(5\theta)$$

41.

$$r=-\theta$$

42.

$$r=2\theta$$

43.

$$r=-3\theta$$

Tækni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafreikni til að skissa graf pólhnitajöfnunnar.

44.

$$r=\frac{1}{\theta}$$

45.

$$r=\frac{1}{\sqrt{\theta}}$$

46. $r=2\sin\theta\tan\theta$, síssóíða

47. $r=2\sqrt{1-\sin^2\theta}$, hippópeda

48.

$$r=5+\cos(4\theta)$$

49.

$$r=2-\sin(2\theta)$$

50.

$$r=\theta^2$$

51.

$$r=\theta+1$$

52.

$$r=\theta\sin\theta$$

53.

$$r=\theta\cos\theta$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafbúnað til að teikna hvert par pólhnitajafna á skilgreiningarmenginu $[0,4\pi]$ og útskýra síðan muninn sem sést á gröfunum.

54.

$$r=\theta, r=-\theta$$

55.

$$r=\theta, r=\theta+\sin\theta$$

56.

$$r=\sin\theta+\theta, r=\sin\theta-\theta$$

57.

$$r=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), r=\theta\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

58.

$$r=\sin\left(\cos\left(3\theta\right)\right) r=\sin\left(3\theta\right)$$

59. Notið grafbúnað til að teikna $r=\sin\left(\frac{16}{5}\theta\right)$ á $[\,[0,\,4\pi\,]\,]$, $[\,[0,\,8\pi\,]\,]$, $[\,[0,\,12\pi\,]\,]$ og $[\,[0,\,16\pi\,]\,]$. Lýsið áhrifum þess að breikka skilgreiningarmengið.

60. Notið grafbúnað til að teikna og skissa $r=\sin\theta+\left(\sin\left(\frac{5}{2}\theta\right)\right)^3$ á $[0,4\pi]$.

61. Notið grafbúnað til að teikna hverja pólhnitajöfnu. Útskýrið líkindi og mun sem þið sjáið á gröfunum.

$$r_1 = 3\sin(3\theta)$$
$$r_2 = 2\sin(3\theta)$$
$$r_3 = \sin(3\theta)$$

62. Notið grafbúnað til að teikna hverja pólhnitajöfnu. Útskýrið líkindi og mun sem þið sjáið á gröfunum.

$$r_1 = 3 + 3\cos\ \theta$$
$$r_2 = 2 + 2\cos\ \theta$$
$$r_3 = 1 + \cos\ \theta$$

63. Notið grafbúnað til að teikna hverja pólhnitajöfnu. Útskýrið líkindi og mun sem þið sjáið á gröfunum.

$$r_1 = 3\theta$$
$$r_2 = 2\theta$$
$$r_3 = \theta$$

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna hverja pólhnitajöfnu á sama pólhnitanet og finna skurðpunkta þeirra.

64.

$$r_1=3+2\sin\theta, r_2=2$$

65.

$$r_1=6-4\cos\theta, r_2=4$$

66.

$$r_1 = 1 + \sin\theta, r_2 = 3\sin\theta$$

67.

$$r_1 = 1 + \cos\theta, r_2 = 3\cos\theta$$

68.

$$r_1 = \cos(2\theta), r_2 = \sin(2\theta)$$

69. $r_1 = \sin^2(2\theta), r_2 = 1 - \cos(4\theta)$

70.

$$r_1 = \sqrt{3}, r_2 = 2\sin(\theta)$$

71.

$$r_1{}^2 = \sin\theta, r_2{}^2 = \cos\theta$$

72. $r_1 = 1 + \cos\theta, r_2 = 1 - \sin\theta$

8.5 Pólform tvinntalna

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna tvinntölur í tvinntalnaplani.
- Finna tölugildi tvinntölu.
- Rita tvinntölur á pólformi.
- Umrita tvinntölu af pólformi á rétthyrnt form.
- Finna margfeldi tvinntalna á pólformi.
- Finna kvóta tvinntalna á pólformi.
- Finna veldi tvinntalna á pólformi.
- Finna rætur tvinntalna á pólformi.

„Guð skapaði heilu tölurnar; allt annað er verk mannsins.“ Þessi þekkta tilvitnun í þýska stærðfræðinginn Leopold Kronecker frá nítjándu öld er viðeigandi inngangur að pólformi tvinntölu. Tvinntölur eru mannlegt hugverk og afrakstur meira en þúsund ára samfelldra rannsókna og glímu stærðfræðinga á borð við Pýþagóras, Descartes, de Moivre, Euler, Gauss og fleiri. Tvinntölur svöruðu spurningum sem höfðu vafist fyrir mestu vísindahugum um aldir.

Við kynntumst fyrst tvinntölum í hlutanum Tvinntölur. Hér einbeitum við okkur að því hvernig reiknað er með tvinntölum: hvernig þær eru umritaðar milli pólforms og rétthyrnds

forms, hvernig þær eru túlkaðar í hagnýtum verkefnum og hvernig setning de Moivres er notuð.

Að teikna tvinntölur í tvinntalnaplani

Að teikna tvinntöluna $a+bi$ líkist því að teikna rauntölu, nema að lárétti ásinn táknar raunhlutann a, og lóðrétti ásinn þverhlutann bi.

AÐFERÐ

Teiknið gefna tvinntölu $a+bi$, í tvinntalnaplani.

1. Merkið lárétta ásinn sem raunás og lóðrétta ásinn sem þverás.
2. Teiknið punktinn í tvinntalnaplaninu með því að færa ykkur a einingar lárétt og b einingar lóðrétt.

SÝNIDÆMI 1

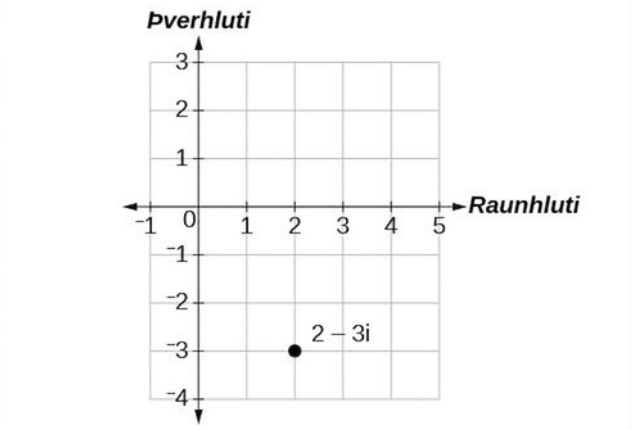
Að teikna tvinntölu í tvinntalnaplani

Teiknið tvinntöluna $2-3i$ í tvinntalnaplani.

Lausn

Farið tvær einingar frá upphafspunktinum í jákvæða lárétta stefnu og þrjár einingar í neikvæða lóðrétta stefnu. Sjá mynd 1.

8



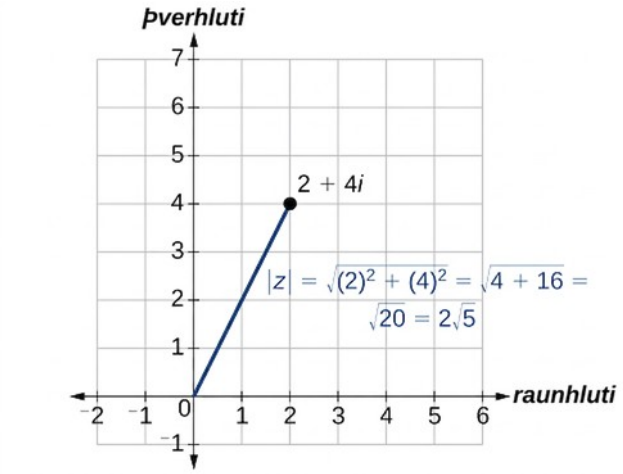
Mynd 1

PRÓFIÐ SJÁLF #1

Teiknið punktinn $1+5i$ í tvinntalnaplani.

Að finna tölugildi tvinntölu

Fyrsta skrefið við að vinna með tvinntölu á pólformi er að finna tölugildi hennar. Tölugildi tvinntölu er jafnt stærð hennar, eða $|z|$. Það mælir fjarlægðina frá upphafspunktinum að punkti í planinu. Grafið af $z=2+4i$, á mynd 2 sýnir til dæmis $|z|$.



Mynd 2

TÖLUGILDI TVINNTÖLU

Fyrir tvinntöluna $z=x+yi$, er tölugildi z skilgreint sem

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

Það er fjarlægðin frá upphafspunktinum að punktinum (x, y).

Athugið að tölugildi rauntölu gefur fjarlægð tölunnar frá 0, en tölugildi tvinntölu gefur fjarlægð hennar frá upphafspunktinum $(0, 0)$.

SÝNIDÆMI 2

Að finna tölugildi tvinntölu með rótarstæðu

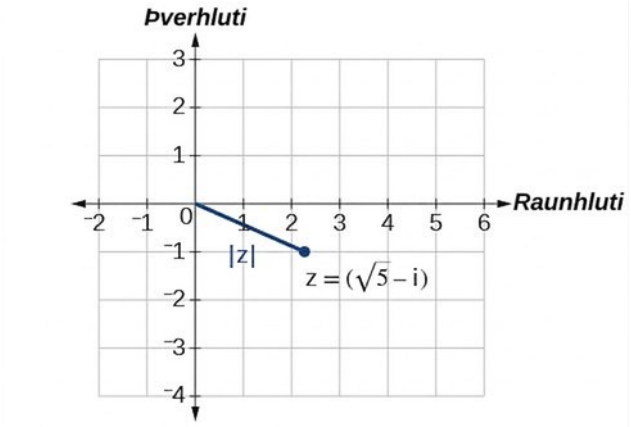
Finnið tölugildi $z=\sqrt{5}-i$.

Lausn

Með formúlunni fæst

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + (-1)^2}$$
$$|z| = \sqrt{5 + 1}$$
$$|z| = \sqrt{6}$$

Sjá mynd 3.



Mynd 3

PRÓFIÐ SJÁLF #2

Finnið tölugildi tvinntölunnar $z = 12 - 5i$.

SÝNIDÆMI 3

Að finna tölugildi tvinntölu

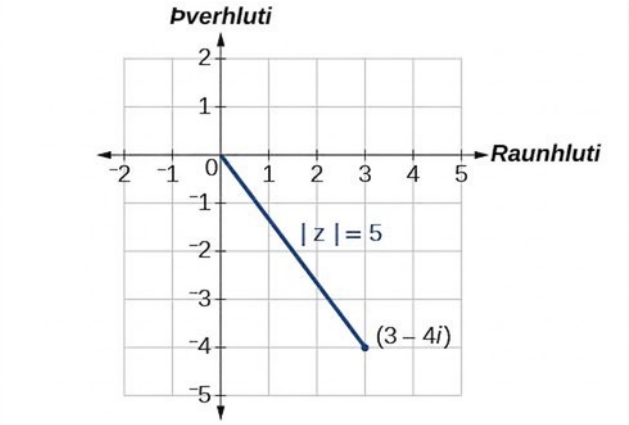
Fyrir $z = 3 - 4i$, skuluð þið finna $|z|$.

Lausn

Með formúlunni fæst

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$$
$$|z| = \sqrt{9 + 16}$$
$$|z| = \sqrt{25}$$
$$|z| = 5$$

Tölugildi z er 5. Sjá mynd 4.



Mynd 4

PRÓFIÐ SJÁLF #3

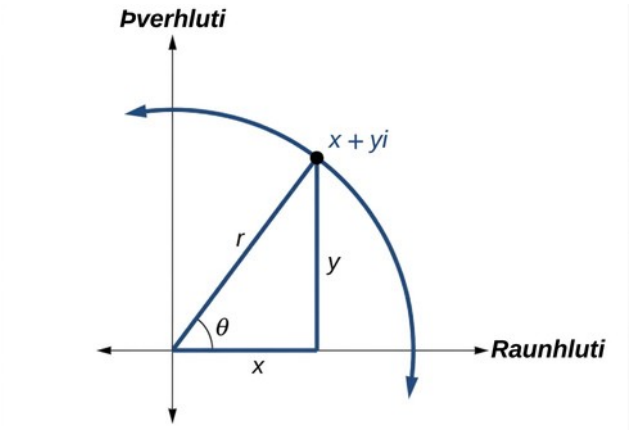
Fyrir $z = 1 - 7i$, skuluð þið finna $|z|$.

Að rita tvinntölur á pólformi

Pólform tvinntölu setur töluna fram með horni θ og fjarlægð frá upphafspunkti r. Fyrir tvinntölu á rétthyrndu formi, $z = x + yi$, notum við sömu umritunarformúlur og þegar talan er rituð á hornafallasniði:

$$x = r\cos\ \theta$$
$$y = r\sin\ \theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Við rifjum þessi tengsl upp á mynd 5.



Mynd 5

Við notum hugtakið tölugildi um stærð tvinntölu, það er fjarlægð frá upphafspunktinum að punktinum (x, y). Tölugildið er því hið sama og r, geislinn á pólformi. Við notum θ fyrir stefnuhornið, rétt eins og í pólhnitum. Með innsetningu fæst

$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ z &= r\cos\ \theta + (r\sin\ \theta)i \\ z &= r\left(\cos\ \theta + i\sin\ \theta\right) \end{aligned}$$

PÓLFORM TVINNTÖLU

Til að rita tvinntölu á pólformi notum við þessar umritunarformúlur:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\ \theta \\ y &= r\sin\ \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Með beinni innsetningu fæst

$$\begin{aligned} z &= x + yi \\ z &= (r\cos\ \theta) + i\,(r\sin\ \theta) \\ z &= r\left(\cos\ \theta + i\sin\ \theta\right) \end{aligned}$$

þar sem r er tölugildið og θ er stefnuhornið. Oft er skammstöfunin $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ notuð fyrir $r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.

8

SÝNIDÆMI 4

Að setja tvinntölu fram með pólhnitum

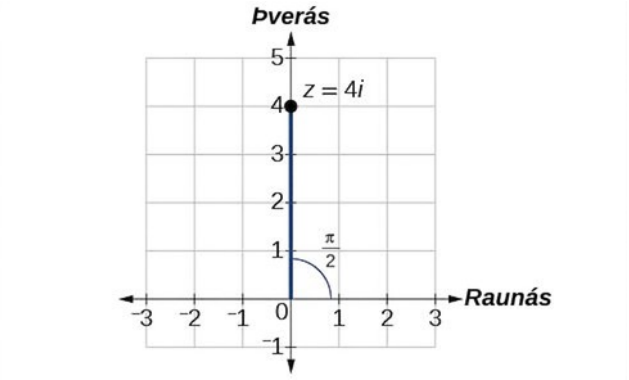
Setjið tvinntöluna $4\,i$ fram með pólhnitum.

Lausn

Í tvinntalnaplaninu er talan $z = 4\,i$ sú sama og $z = 0 + 4\,i$. Til að rita hana á pólformi verðum við fyrst að reikna r.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ r &= \sqrt{0^2 + 4^2} \\ r &= \sqrt{16} \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Næst skoðum við x. Ef $x = r\cos\theta$, og $x = 0$, þá er $\theta = \frac{\pi}{2}$. Með pólhnitum má rita tvinntöluna $z = 0 + 4\,i$ sem $z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ eða $4\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Sjá mynd 6.



Mynd 6

PRÓFIÐ SJÁLF #4

Ritið $z=3\,i$ sem $r\,\mathrm{cis}\,\theta$ á pólformi.

SÝNIDÆMI 5

Að finna pólform tvinntölu

Finnið pólform $-4+4\,i$.

Lausn

Finnið fyrst gildi r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{(-4)^2 + (4^2)}$$
$$r = \sqrt{32}$$
$$r = 4\sqrt{2}$$

Finnið hornið θ með formúlunni:

$$\cos\ \theta = \tfrac{x}{r}$$
$$\cos\ \theta = \tfrac{-4}{4\sqrt{2}}$$
$$\cos\ \theta = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{3\pi}{4}$$

Lausnin er því $4\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{3\,\pi}{4}\right)$.

PRÓFIÐ SJÁLF #5

Ritið $z=\sqrt{3}+i$ á pólformi.

Umritun tvinntölu af pólformi á rétthyrnt form

Til að umrita tvinntölu af pólformi á rétthyrnt form reiknum við gefnu stærðirnar og beitum dreifireglunni. Fyrir $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, reiknum við fyrst hornaföllin $\cos\theta$ og $\sin\theta$. Síðan margföldum við upp úr sviganum með r.

SÝNIDÆMI 6

Umritun af pólformi á rétthyrnt form

Umritið gefnu tvinntöluna úr pólformi á rétthyrnt form:

$$z=12\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Lausn

Við byrjum á að reikna hornafallastæðurnar.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ og }\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Eftir innsetningu er tvinntalan

$$z=12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

Við beitum dreifireglunni:

$$\begin{aligned} z &= 12\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}i\right) \\ &= (12)\tfrac{\sqrt{3}}{2}+(12)\tfrac{1}{2}i \\ &= 6\sqrt{3}+6i \end{aligned}$$

Á rétthyrndu formi er gefni punkturinn tvinntalan $6\sqrt{3}+6i$.

SÝNIDÆMI 7

Að finna rétthyrnt form tvinntölu

Finnið rétthyrnt form tvinntölunnar þegar $r=13$ og $\tan\theta=\frac{5}{12}$. Gerið ráð fyrir að talan sé í fyrsta fjórðungi.

Lausn

Ef $\tan\theta=\frac{5}{12}$, og $\tan\theta=\frac{y}{x}$, staðfestum við fyrst að $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$. Síðan finnum við $\cos\theta=\frac{x}{r}$ og $\sin\theta=\frac{y}{r}$.

$$\begin{aligned} z &= 13(\cos\ \theta + i\sin\ \theta) \\ &= 13\left(\tfrac{12}{13} + \tfrac{5}{13}i\right) \\ &= 12 + 5i \end{aligned}$$

Rétthyrnt form gefnu tvinntölunnar er $12+5i$.

PRÓFIÐ SJÁLF #6

Umritið tvinntöluna á rétthyrnt form:

$$z=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

Að finna margfeldi tvinntalna á pólformi

Nú þegar við getum umritað tvinntölur á pólform lærum við að reikna með þeim á því formi. Í því sem eftir er hlutans notum við formúlur franska stærðfræðingsins Abrahams de Moivre (1667–1754). Þær einfalda margfeldi, kvóta, veldi og rætur tvinntalna verulega. Reglurnar byggjast á því að margfalda tölugildin og leggja stefnuhornin saman.

MARGFELDI TVINNTALNA Á PÓLFORMI

Ef $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$ og $z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$, er margfeldi talnanna

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right] \\ z_1z_2 &= r_1r_2\operatorname{cis}\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{aligned}$$

Athugið að til að finna margfeldið margföldum við tölugildin og leggjum hornin saman.

SÝNIDÆMI 8

Að finna margfeldi tveggja tvinntalna á pólformi

Finnið margfeldið z_1z_2, þegar $z_1=4\left(\cos\left(80^\circ\right)+i\sin\left(80^\circ\right)\right)$ og $z_2=2\left(\cos\left(145^\circ\right)+i\sin\left(145^\circ\right)\right)$.

Lausn

Fylgið formúlunni

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 4 \cdot 2[\cos(80^\circ + 145^\circ) + i\sin(80^\circ + 145^\circ)] \\
z_1 z_2 &= 8[\cos(225^\circ) + i\sin(225^\circ)] \\
z_1 z_2 &= 8\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right] \\
z_1 z_2 &= 8\left[-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\
z_1 z_2 &= -4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Að finna kvóta tvinntalna á pólformi

Kvóti tveggja tvinntalna á pólformi fæst með því að deila tölugildunum og draga stefnuhornin frá.

KVÓTAR TVINNTALNA Á PÓLFORMI

Ef $z_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ og $z_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$, er kvóti talnanna

$$
\begin{aligned}
\tfrac{z_1}{z_2} &= \tfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0 \\
\tfrac{z_1}{z_2} &= \tfrac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2), \quad z_2 \neq 0
\end{aligned}
$$

Athugið að tölugildunum er deilt og hornin dregin frá.

AÐFERÐ

Finnið kvóta tveggja gefinna tvinntalna á pólformi.

8

1. Deilið $\dfrac{r_1}{r_2}$.
2. Finnið $\theta_1 - \theta_2$.
3. Setjið niðurstöðurnar inn í formúluna $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$. Skiptið r út fyrir $\dfrac{r_1}{r_2}$, og θ út fyrir $\theta_1 - \theta_2$.
4. Reiknið nýju hornafallastæðurnar og margfaldið upp með r.

SÝNIDÆMI 9

Að finna kvóta tveggja tvinntalna

Finnið kvóta $z_1 = 2\left(\cos\left(213^\circ\right) + i\sin\left(213^\circ\right)\right)$ og $z_2 = 4\left(\cos\left(33^\circ\right) + i\sin\left(33^\circ\right)\right)$.

Lausn

Með formúlunni fæst

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{4}[\cos(213^\circ - 33^\circ) + i\sin(213^\circ - 33^\circ)] \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{2}[\cos(180^\circ) + i\sin(180^\circ)] \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{2}[-1 + 0i] \\
\frac{z_1}{z_2} &= -\frac{1}{2} + 0i \\
\frac{z_1}{z_2} &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

PRÓFIÐ SJÁLF #7

Finnið margfeldi og kvóta $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(150^\circ\right) + i\sin\left(150^\circ\right)\right)$ og $z_2 = 2\left(\cos\left(30^\circ\right) + i\sin\left(30^\circ\right)\right)$.

Að finna veldi tvinntalna á pólformi

Með setningu de Moivres verður mun einfaldara að reikna veldi tvinntalna. Hún segir að fyrir jákvæða heiltölu n, z^n fáist með því að hefja tölugildið í n-ta veldi og margfalda stefnuhornið með n. Þetta er staðalaðferðin í nútímastærðfræði.

SETNING DE MOIVRES

Ef $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ er tvinntala, þá gildir

$$\begin{aligned}
z^n &= r^n\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right] \\
z^n &= r^n\mathrm{cis}\left(n\theta\right)
\end{aligned}$$

þar sem n er jákvæð heiltala.

SÝNIDÆMI 10

Að reikna stæðu með setningu de Moivres

Reiknið stæðuna $\left(1+i\right)^5$ með setningu de Moivres.

Lausn

Setning de Moivres gildir um tvinntölur á pólformi, svo að við verðum fyrst að rita $\left(1+i\right)$ á pólformi. Finnum r.

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
r &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \\
r &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Síðan finnum við θ. Formúlan $\tan\theta = \frac{y}{x}$ gefur

$$\tan\ \theta = \tfrac{1}{1}$$
$$\tan\ \theta = 1$$
$$\theta = \tfrac{\pi}{4}$$

Notið setningu de Moivres til að reikna stæðuna.

$$(a+bi)^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$
$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 \left[\cos\left(5\cdot\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(5\cdot\tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$(1+i)^5 = 4\sqrt{2}\left[-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$
$$(1+i)^5 = -4-4i$$

Að finna rætur tvinntalna á pólformi

Til að finna n-tu rót tvinntölu á pólformi notum við setninguna um n-tu rót eða setningu de Moivres og hefjum tvinntöluna í veldi með ræðum veldisvísi. Formúlu fyrir n-tu rætur tvinntalna á pólformi má setja fram á nokkra vegu.

SETNINGIN UM N-TU RÓT

Til að finna n-tu rót tvinntölu á pólformi notið þið formúluna

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

8

þar sem $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$. Við leggjum $\frac{2k\pi}{n}$ við $\frac{\theta}{n}$ til að fá lotubundnu ræturnar.

SÝNIDÆMI 11

Að finna n-tu rót tvinntölu

Reiknið teningsrætur $z=8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Lausn

Þá fæst

$$z^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\tfrac{\frac{2\pi}{3}}{3} + \tfrac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\frac{2\pi}{3}}{3} + \tfrac{2k\pi}{3}\right)\right]$$
$$z^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\left(\tfrac{2\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi}{9} + \tfrac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Ræturnar eru þrjár: $k=0,1,2$. Þegar $k=0$, fæst

$$z^{\frac{1}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)$$

Þegar $k=1$, fæst

$z^{\frac{1}{3}}=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{6\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{6\pi}{9}\right)\right]$ Leggjum $\frac{2(1)\pi}{3}$ við hvort horn.

$$z^{\frac{1}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right)$$

Þegar $k=2$, fæst

$z^{\frac{1}{3}}=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{12\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{12\pi}{9}\right)\right]$ Leggjum $\frac{2(2)\pi}{3}$ við hvort horn.

$$z^{\frac{1}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right)$$

Munið að finna samnefnara til að einfalda brot í tilvikum sem þessu. Fyrir $k=1$, einfaldast hornið svona:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\frac{2\pi}{3}}{3}+\tfrac{2(1)\pi}{3}=\tfrac{2\pi}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{2(1)\pi}{3}\left(\tfrac{3}{3}\right)\\&=\tfrac{2\pi}{9}+\tfrac{6\pi}{9}\\&=\tfrac{8\pi}{9}\end{aligned}$$

PRÓFIÐ SJÁLF #8

Finnið fjórar fjórðu rætur $16\left(\cos\left(120^\circ\right)+i\sin\left(120^\circ\right)\right)$.

EFNI Á NETINU

Á þessum vefsíðum fáið þið frekari kennslu og æfingu í pólformi tvinntalna.

- Margfeldi og kvóti tvinntalna á hornafallasniði
- Setning de Moivres

8.5 Æfingar

Hugtök

1. Tvinntala er $a+bi$. Útskýrið hvorn hluta.

2. Hvað táknar tölugildi tvinntölu?

3. Hvernig er tvinntala umrituð á pólform?

4. Hvernig finnum við margfeldi tveggja tvinntalna?

5. Hvað er setning de Moivres og til hvers er hún notuð?

Reikningur

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna tölugildi gefinnar tvinntölu.

6.

$$5+3i$$

7.

$$-7+i$$

8.

$$-3-3i$$

9.

$$\sqrt{2}-6i$$

10.

$$2i$$

11.

$$2{,}2-3{,}1\,i$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita tvinntöluna á pólformi.

12.

$$2+2i$$

13.

$$8-4i$$

14.

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

15.

$$\sqrt{3}+i$$

16.

$$3i$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið umrita tvinntöluna af pólformi á rétthyrnt form.

17.

$$z=7cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

18.

$$z=2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

19.

$$z=4cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

20.

$$z=7cis\left(25^\circ\right)$$

21.

$$z=3cis\left(240^\circ\right)$$

22.

$$z=\sqrt{2}cis\left(100^\circ\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna $z_1 z_2$ á pólformi.

23.

$$z_1=2\sqrt{3}cis\left(116^\circ\right);z_2=2cis\left(82^\circ\right)$$

24.

$$z_1=\sqrt{2}cis\left(205^\circ\right);z_2=2\sqrt{2}cis\left(118^\circ\right)$$

25.

$$z_1=3cis\left(120^\circ\right);z_2=\frac{1}{4}cis\left(60^\circ\right)$$

26.

$$z_1=3cis\left(\frac{\pi}{4}\right);z_2=5cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

27.

$$z_1=\sqrt{5}cis\left(\frac{5\pi}{8}\right);z_2=\sqrt{15}cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

28.

$$z_1=4\,cis\left(\frac{\pi}{2}\right);z_2=2\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna $\frac{z_1}{z_2}$ á pólformi.

29.

$$z_1=21\,cis\left(135^\circ\right);z_2=3\,cis\left(65^\circ\right)$$

30.

$$z_1=\sqrt{2}\,cis\left(90^\circ\right);z_2=2\,cis\left(60^\circ\right)$$

31.

$$z_1=15\,cis\left(120^\circ\right);z_2=3\,cis\left(40^\circ\right)$$

32.

$$z_1=6\,cis\left(\frac{\pi}{3}\right);z_2=2\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

33.

$$z_1=5\sqrt{2}\,cis\left(\pi\right);z_2=\sqrt{2}\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

8

34.

$$z_1=2\,cis\left(\frac{3\pi}{5}\right);z_2=3\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna veldi hverrar tvinntölu á pólformi.

35. Finnið z^3 þegar $z=5\,cis\left(45^\circ\right)$.

36. Finnið z^4 þegar $z=2\,cis\left(70^\circ\right)$.

37. Finnið z^2 þegar $z=3\,cis\left(120^\circ\right)$.

38. Finnið z^2 þegar $z=4\,cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

39. Finnið z^4 þegar $z=cis\left(\frac{3\pi}{16}\right)$.

40. Finnið z^3 þegar $z=3\,cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið reikna hverja rót.

41. Reiknið teningsrót z þegar $z=27\,cis\left(240^\circ\right)$.

42. Reiknið kvaðratrót z þegar $z=16\,cis\left(100^\circ\right)$.

43. Reiknið teningsrót z þegar $z=32\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

44. Reiknið kvaðratrót z þegar $z=32\,\mathrm{cis}\left(\pi\right)$.

45. Reiknið kvaðratrót z þegar $z=8\,cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Gröf

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna tvinntöluna í tvinntalnaplani.

46.

$$2+4i$$

47.

$$-3-3i$$

48.

$$5-4i$$

49.

$$-1-5i$$

50.

$$3+2i$$

51.

$$2i$$

52.

$$-4$$

53.

$$6-2i$$

54.

$$-2+i$$

55.

$$1-4i$$

Tækni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið námunda öll svör að næsta hundraðasta hluta.

56. Notið þá aðgerð grafreiknisins sem umritar úr rétthyrndu formi í pólform til að breyta $5+5i$ í pólform.

57. Notið þá aðgerð grafreiknisins sem umritar úr rétthyrndu formi í pólform til að breyta $3-2i$ í pólform.

58. Notið þá aðgerð grafreiknisins sem umritar úr rétthyrndu formi í pólform til að breyta $-3-8i$ í pólform.

59. Notið þá aðgerð grafreiknisins sem umritar úr pólformi í rétthyrnt form til að breyta $4\,cis\left(120^\circ\right)$ í rétthyrnt form.

60. Notið þá aðgerð grafreiknisins sem umritar úr pólformi í rétthyrnt form til að breyta $2\,cis\left(45^\circ\right)$ í rétthyrnt form.

61. Notið þá aðgerð grafreiknisins sem umritar úr pólformi í rétthyrnt form til að breyta $5\,cis\left(210^\circ\right)$ í rétthyrnt form.

8.6 Stikajöfnur

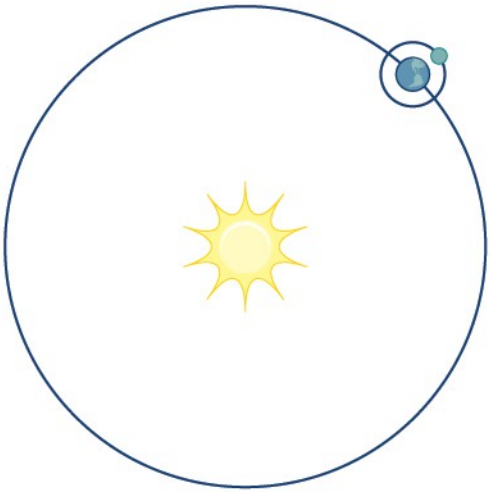
NÁMSMARKMIÐ

8

Í þessum hluta lærið þið að:

- Stika feril.
- Eyða stikanum.
- Finna rétthyrnda jöfnu ferils sem er skilgreindur með stikajöfnum.
- Finna stikajöfnur ferla sem eru skilgreindir með rétthyrndum jöfnum.

Skoðum braut tungls á sporbraut um reikistjörnu sem snýst um leið um sólina, eins og sést á mynd 1. Á hverju augnabliki er tunglið á ákveðnum stað miðað við reikistjörnuna. En hvernig ritum við og leysum jöfnu fyrir staðsetningu tunglsins þegar fjarlægðin frá reikistjörnunni, hraði tunglsins á sporbrautinni um reikistjörnuna og snúningshraðinn um sólina eru allt óþekktar stærðir? Við getum aðeins leyst fyrir eina breytu í einu.



Mynd 1

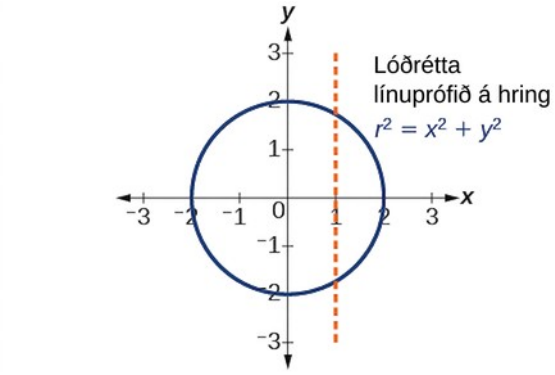
Í þessum hluta skoðum við jöfnupör af gerðinni $x(t)$ og $y(t)$ þar sem t er óháða tímabreytan. Við getum notað þessar stikajöfnur í ýmsum verkefnum þegar við leitum ekki aðeins að ákveðinni staðsetningu heldur einnig hreyfistefnunni. Þegar við rekjum hvert gildi t, á fætur öðru kemur stefna ferilsins skýrt í ljós. Þetta er einn helsti kostur stikajafna: við getum rakið hvernig hlutur hreyfist eftir braut með tímanum. Fyrst skoðum við grunnþætti stikajafna og hvað felst í því að stika feril. Síðan lærum við að eyða stikanum og að umrita stikajöfnur ferils sem rétthyrnda jöfnu. Loks finnum við stikajöfnur ferla sem eru skilgreindir með rétthyrndum jöfnum.

Að stika feril

Þegar hlutur hreyfist eftir ferli, eða boginni braut, í tiltekna stefnu á tilteknum tíma er staðsetning hans í planinu gefin með x-hniti og y-hniti. Bæði x og y breytast þó með tíma og eru því föll af tíma. Af þeim sökum bætum við við annarri breytu, stikanum, sem bæði x og y eru háð föll af. Í dæminu í inngangi hlutans er stikinn tíminn, t. Staða tunglsins í $x$stefnu á tímanum t, er táknuð með fallinu $x(t)$, og staða þess í $y$stefnu á tímanum t, með fallinu $y(t)$. Saman nefnast $x(t)$ og $y(t)$ stikajöfnur og þær gefa raðað par $(x(t), y(t))$. Stikajöfnur lýsa fyrst og fremst hreyfingu og stefnu.

Þegar við stikum feril umritum við eina jöfnu með tveimur breytum, svo sem x og y, í jafngilt jöfnupár með þremur breytum, x, y, og t. Ein ástæða þess að við stikum feril er að stikajöfnurnar gefa meiri upplýsingar, einkum um það í hvaða stefnu hluturinn hreyfist með tímanum.

Þegar við teiknum gröf stikajafna getum við skoðað hegðun x og hegðun y. Ýmis form er ekki hægt að setja fram sem $y=f(x)$, sem þýðir að þau eru ekki föll. Skoðum til dæmis graf hrings sem gefinn er með $r^2=x^2+y^2$. Þegar leyst er fyrir y fæst $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$, eða jöfnurnar tvær $y_1=\sqrt{r^2-x^2}$ og $y_2=-\sqrt{r^2-x^2}$. Ef við teiknum gröf y_1 og y_2 saman stenst grafið ekki lóðrétta línuprófið, eins og sést á mynd 2. Jafna hrings lýsir því ekki falli.



Mynd 2

Ef við teiknuðum hins vegar graf hvorrar jöfnu fyrir sig myndi hvort graf standast lóðrétta línuprófið og því lýsa falli. Að sumu leyti er það að skipta jöfnu hrings í tvö föll líkt því að búa til stikajöfnur, því að þá eru tvö föll notuð til að lýsa ferli sem er ekki graf falls. Þetta skýrist betur hér á eftir.

STIKAJÖFNUR

Gerum ráð fyrir að t sé tala á bili I. Mengi raðaðra tvennda $(x(t), y(t))$, þar sem $x=f(t)$ og $y=g(t)$, myndar feril í plani með stikanum t. Jöfnurnar $x=f(t)$ og $y=g(t)$ eru stikajöfnur ferilsins.

DÆMI 1

Að stika feril

Stikið ferilinn $y=x^2-1$ með því að láta $x(t)=t$. Teiknið gröf beggja jafnanna.

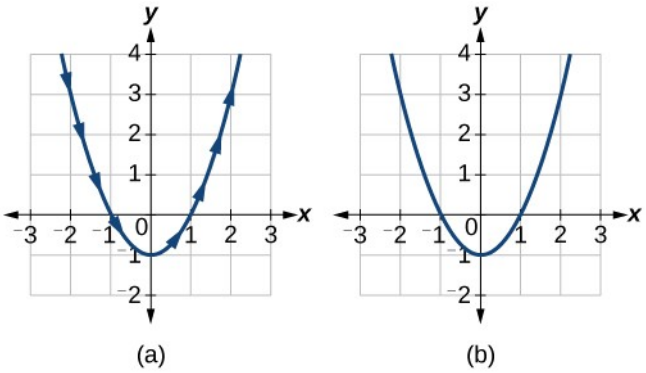
Lausn

Ef $x(t)=t$, þá finnum við $y(t)$ með því að skipta breytunni x út fyrir stæðuna sem gefin er í $x(t)$. Með öðrum orðum er $y(t)=t^2-1$. Gerið gildistöflu á borð við töflu 1 og skissið grafið.

Tafla 1

t	$x(t)$	$y(t)$
-4	-4	$y(-4)=(-4)^2-1=15$
-3	-3	$y(-3)=(-3)^2-1=8$
-2	-2	$y(-2)=(-2)^2-1=3$
-1	-1	$y(-1)=(-1)^2-1=0$
0	0	$y(0)=(0)^2-1=-1$
1	1	$y(1)=(1)^2-1=0$
2	2	$y(2)=(2)^2-1=3$
3	3	$y(3)=(3)^2-1=8$
4	4	$y(4)=(4)^2-1=15$

Sjá gröfin á mynd 3. Gagnlegt getur verið að nota TRACE-aðgerð grafreiknis til að sjá hvernig punktarnir myndast þegar t vex.



Mynd 3 (a) Stikajafna $y(t)=t^2-1$ (b) Rétthyrnd jafna $y=x^2-1$

Greining

Örvarnar sýna í hvaða stefnu ferillinn er rakinn. Takið eftir að ferillinn er eins og ferillinn $y=x^2-1$.

REYNIÐ SJÁLF 1

Gerið gildistöflu og teiknið stikajöfnurnar

$$x(t)=t-3,$$

$$y(t)=2t+4;-1\le t\le 2.$$

DÆMI 2

Að finna stikajöfnupár

Finnið stikajöfnupár sem lýsir grafi $y=1-x^2$, með stikanum $x(t)=t$. Teiknið nokkra punkta og skissið grafið.

Lausn

Ef $x(t)=t$ og við setjum t inn fyrir x í jöfnunni fyrir y, þá er $y(t)=1-t^2$. Stikajöfnupárið er

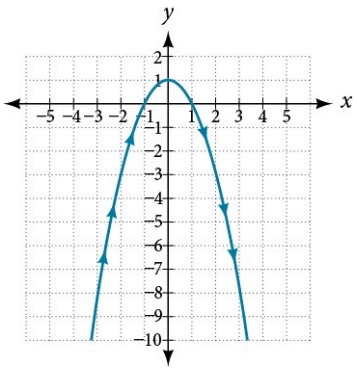
$$x(t) = t$$
$$y(t) = 1 - t^2$$

Til að teikna gröfin gerum við fyrst gildistöflu eins og töflu 2. Við getum valið gildi í kringum $t=0$, frá $t=-3$ til $t=3$. Gildin í dálkinum $x(t)$ verða þau sömu og í dálkinum t því $x(t)=t$. Reiknið gildin í dálkinum $y(t)$.

Tafla 2

t	$x(t)=t$	$y(t)=1-t^2$
-3	-3	$y(-3)=1-(-3)^2=-8$
-2	-2	$y(-2)=1-(-2)^2=-3$
-1	-1	$y(-1)=1-(-1)^2=0$
0	0	$y(0)=1-0=1$
1	1	$y(1)=1-(1)^2=0$
2	2	$y(2)=1-(2)^2=-3$
3	3	$y(3)=1-(3)^2=-8$

Grafið $y=1-t^2$ er fleygbogi sem opnast niður, eins og sést á mynd 4. Við höfum rakið ferilinn á bilinu $[-3,3]$, sem er sýndur með heilli línu og örvum sem sýna stefnu ferilsins miðað við t. Með stefnu er átt við brautina sem er rakin eftir ferlinum með vaxandi gildum á t. Þar sem fleygboginn er samhverfur um línuna $x=0$, speglast gildi x um y-ásinn.



Mynd 4

REYNIÐ SJÁLF 2

Stikið ferilinn sem gefinn er með $x = y^3 - 2y$.

DÆMI 3

Að finna stikajöfnur sem uppfylla gefin skilyrði

Hlutur ferðast með jöfnum hraða eftir beinni braut frá $(-5, 3)$ til $(3, -1)$ í sama plani á fjórum sekúndum. Hnitin eru mæld í metrum. Finnið stikajöfnur fyrir staðsetningu hlutarins.

Lausn

Stikajöfnurnar eru einfaldar línulegar stæður en við þurfum að leysa verkefnið skref fyrir skref. Staða hlutarins á x-ásnum byrjar í -5 metrum og endar í 3 metrum. Það merkir að vegalengdin x breytist um 8 metra á 4 sekúndum, sem samsvarar hraðanum $\frac{8\text{ m}}{4\text{ s}}$, eða $2\,\text{m/s}$.

Við getum ritað x-hnitið sem línulegt fall af tíma: $x(t) = 2t - 5$. Í sniðmáti línulegs falls $y = mx + b$, $2t = mx$ og $-5 = b$.

Á sama hátt byrjar y-gildi hlutarins í 3 og endar í -1, sem er breyting um -4 metra á 4 sekúndum og samsvarar hraðanum $\frac{-4\text{ m}}{4\text{ s}}$, eða $-1\,\text{m/s}$. Við getum einnig ritað y-hnitið sem línulega fallið $y(t) = -t + 3$. Saman eru þetta stikajöfnurnar fyrir staðsetningu hlutarins, þar sem x og y eru mæld í metrum og t táknar tíma:

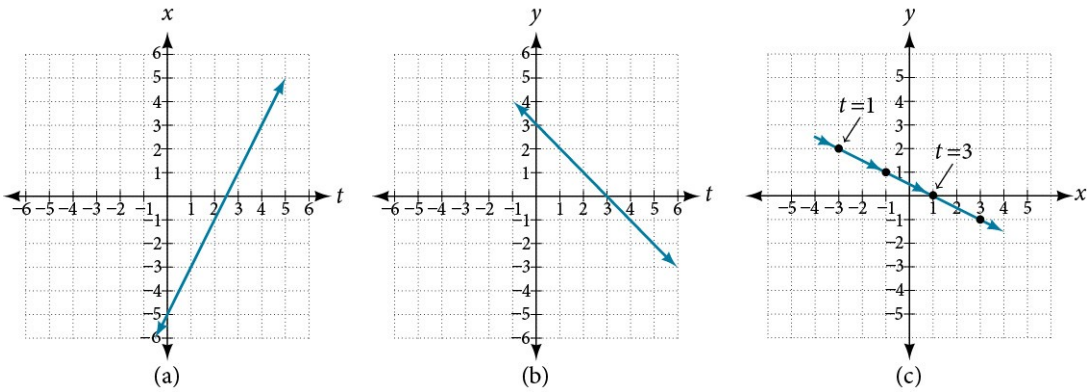
$$x(t) = 2t - 5$$
$$y(t) = -t + 3$$

Með þessum jöfnum getum við gert gildistöflu fyrir t, x, og y (sjá töflu 3). Í þessu dæmi takmörkuðum við gildi t við óneikvæðar tölur. Almennt má nota hvaða gildi t sem er.

Tafla 3

t	$x(t)=2t-5$	$y(t)=-t+3$
0	$x=2(0)-5=-5$	$y=-(0)+3=3$
1	$x=2(1)-5=-3$	$y=-(1)+3=2$
2	$x=2(2)-5=-1$	$y=-(2)+3=1$
3	$x=2(3)-5=1$	$y=-(3)+3=0$
4	$x=2(4)-5=3$	$y=-(4)+3=-1$

Út frá töflunni getum við teiknað þrjú gröf, eins og sést á mynd 5.



Mynd 5 (a) Graf x á móti t, sem sýnir lárétta staðsetningu með tíma. (b) Graf y á móti t, sem sýnir lóðrétta staðsetningu með tíma. (c) Graf y á móti x, sem sýnir staðsetningu hlutarins í planinu á tímanum t.

Greining

Á mynd 5 (c) sjáum við aftur að þegar stikinn táknar tíma getum við sýnt hreyfingu hlutarins eftir brautinni með örvum.

Að eyða stikanum

Oft höfum við stikajöfnupár en auðveldara er að teikna ferilinn ef jafnan inniheldur aðeins tvær breytur, svo sem x og y. Ef stikanum er eytt getur orðið auðveldara að teikna suma ferla. Ef við viljum hins vegar vita hvernig jafnan rekur ferilinn með tíma þarf einnig að sýna stefnu ferilsins. Ýmsar aðferðir má nota til að eyða stikanum t úr stikajöfnupári en engin ein aðferð hentar öllum gerðum jafna. Hér förum við yfir aðferðir fyrir algengustu gerðirnar.

Að eyða stikanum úr margliðu-, vísis- og lograjöfnum

Þegar margliðu-, vísis- eða lograjafna er sett fram sem tvær stikajöfnur veljum við þá jöfnu sem auðveldast er að vinna með og leysum hana fyrir t. Síðan setjum við stæðuna sem fæst fyrir t inn í hina jöfnuna. Þá fæst ein jafna með x og y.

DÆMI 4

Að eyða stikanum úr margliðujöfnum

Eyðið stikanum úr jöfnunum $x(t)=t^2+1$ og $y(t)=2+t$, og ritið stikajöfnurnar sem kartesíska jöfnu.

Lausn

Við byrjum á jöfnunni fyrir y því auðveldara er að leysa línulegu jöfnuna fyrir t.

$$y = 2 + t$$
$$y - 2 = t$$

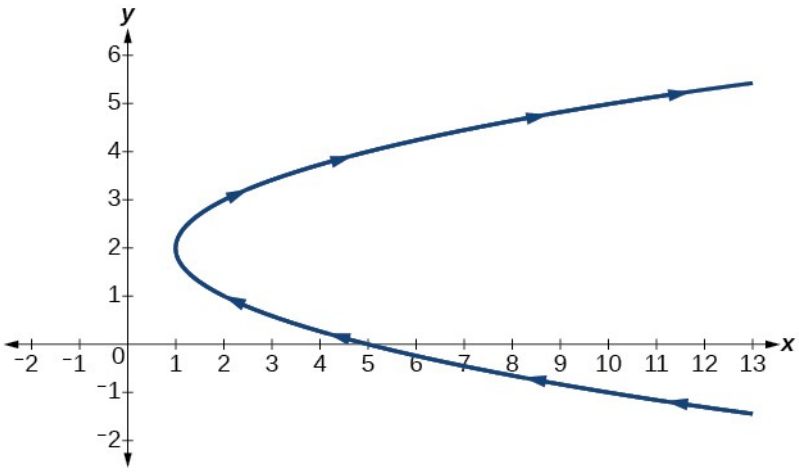
Næst setjum við $y-2$ inn fyrir t í $x(t)$.

$$\begin{aligned} x &= t^2+1 \\ x &= (y-2)^2+1 \qquad \text{Setjið stæðuna fyrir } t \text{ inn í } x. \\ x &= y^2-4\ y+4+1 \\ x &= y^2-4\ y+5 \\ x &= y^2-4\ y+5 \end{aligned}$$

Kartesíska formið er $x=y^2-4\,y+5$.

Greining

Þetta er jafna fleygboga og í rétthyrndri framsetningu er x háð y. Grafið opnast til hægri frá hvirfilpunkti ferilsins í $(1,2)$, eins og sést á mynd 6. Í þessum hluta skoðum við jöfnupör sem eru gefin með föllunum $x(t)$ og $y(t)$, þar sem t er óháða tímabreytan. Takið eftir að bæði x og y eru föll af tíma. Almennt er y því ekki fall af x.



Mynd 6

REYNIÐ SJÁLF 3

Eyðið stikanum úr jöfnunum hér á eftir og ritið rétthyrnda jöfnu fyrir y sem fall af x.

$$x(t) = 2t^2 + 6$$
$$y(t) = 5 - t$$

DÆMI 5

Að eyða stikanum úr vísisjöfnum

Eyðið stikanum og ritið kartesíska jöfnu: $x(t)=e^{-t}$ og $y(t)=3e^{t}$

Lausn

Einangrið e^t.

$$x = e^{-t}$$
$$e^t = \frac{1}{x}$$

Setjið stæðuna inn í $y(t)$.

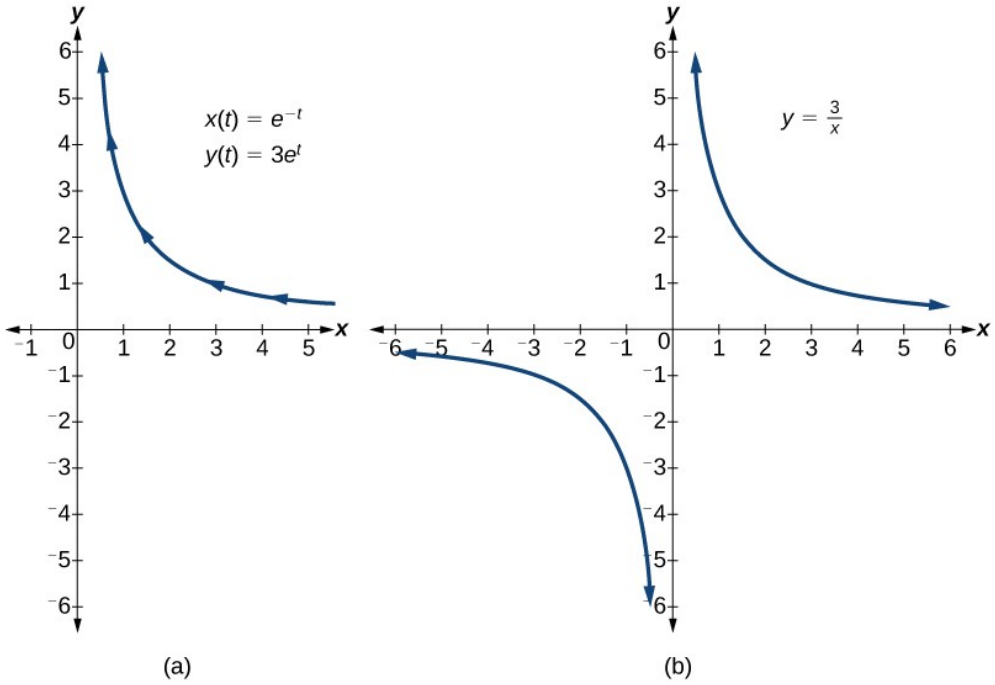
$$y = 3e^t$$
$$y = 3\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$y = \frac{3}{x}$$

Kartesíska formið er $y=\frac{3}{x}$.

Greining

Graf stikajöfnunnar er sýnt á mynd 7**(a)**. Skilgreiningarmengið takmarkast við $t>0$.

Kartesíska jafnan $y=\frac{3}{x}$ er sýnd á mynd 7**(b)** og hefur aðeins eina takmörkun á skilgreiningarmenginu, $x\neq 0$.



Mynd 7

DÆMI 6

Að eyða stikanum úr lograjöfnum

Eyðið stikanum og ritið kartesíska jöfnu: $x(t)=\sqrt{t}+2$ og $y(t)=\log(t)$.

Lausn

Leysið fyrri jöfnuna fyrir t.

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{t}+2 \\ x-2&=\sqrt{t} \\ (x-2)^2&=t \quad \text{Hefjið báðar hliðar í annað veldi.} \end{aligned}$$

Setjið síðan stæðuna fyrir t inn í jöfnuna fyrir y.

$$\begin{aligned} y &= \log(t) \\ y &= \log(x-2)^2 \end{aligned}$$

Kartesíska formið er $y=\log(x-2)^2$.

Greining

Til að ganga úr skugga um að stikajöfnurnar séu jafngildar kartesísku jöfnunni berum við saman skilgreiningarmengin. Stikajafnan takmarkar skilgreiningarmengið í $x=\sqrt{t}+2$ við $t>0$; við takmörkum skilgreiningarmengi x við $x>2$. Skilgreiningarmengi stikajöfnunnar $y=\log(t)$ takmarkast við $t>0$; við takmörkum skilgreiningarmengi $y=\log(x-2)^2$ við $x>2$.

8

REYNIÐ SJÁLF 4

Eyðið stikanum og ritið rétthyrnda jöfnu.

$$x(t) = t^2$$
$$y(t) = \ln\ t \quad t > 0$$

Að eyða stikanum úr hornafallajöfnum

Einfalt er að eyða stikanum úr hornafallajöfnum með innsetningu. Við getum notað nokkrar kunnuglegar hornafallasamsemdir og reglu Pýþagórasar.

Fyrst notum við samsemdirnar:

$$x\,(t) = a\cos\ t$$
$$y\,(t) = b\sin\ t$$

Þegar leyst er fyrir $\cos t$ og $\sin t$, fæst

$$\frac{x}{a} = \cos\ t$$
$$\frac{y}{b} = \sin\ t$$

Notum síðan reglu Pýþagórasar:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Með innsetningu fæst

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

8

DÆMI 7

Að eyða stikanum úr stikajöfnupári hornafalla

Eyðið stikanum úr gefnu hornafallajöfnupári þar sem $0 \le t \le 2\,\pi$ og skissið grafið.

$$x(t) = 4\cos\ t$$
$$y(t) = 3\sin\ t$$

Lausn

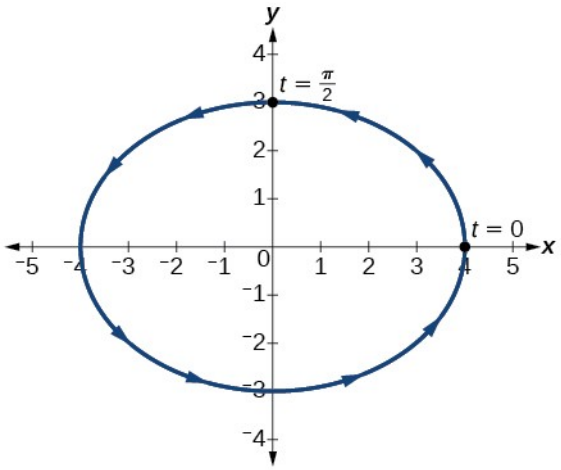
Þegar leyst er fyrir $\cos t$ og $\sin t$, fæst

$$x = 4\cos\ t$$
$$\frac{x}{4} = \cos\ t$$
$$y = 3\sin\ t$$
$$\frac{y}{3} = \sin\ t$$

Notið næst Pýþagórasarsamsemdina og setjið stæðurnar inn.

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Graf jöfnunnar er sýnt á mynd 8.



Mynd 8

Greining

Með almennu jöfnunum fyrir keilusnið (sem kynntar voru í Hnitarúmfræði) getum við greint $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ sem sporbaug með miðju í $(0,0)$. Takið eftir að þegar $t=0$ eru hnitin $(4,0)$, og þegar $t=\frac{\pi}{2}$ eru hnitin $(0,3)$. Þetta sýnir stefnu ferilsins með vaxandi gildum á t.

8

REYNIÐ SJÁLF 5

Eyðið stikanum úr gefna stikajöfnupárinu og ritið kartesíska jöfnu: $x(t)=2\cos t$ og $y(t)=3\sin t$.

Að finna kartesískar jöfnur ferla sem eru skilgreindir með stikajöfnum

Þegar við fáum stikajöfnupár og eigum að finna jafngilda kartesíska jöfnu erum við í raun að „eyða stikanum“. Ýmsar aðferðir má þó nota til að umrita stikajöfnupár sem kartesíska jöfnu. Einfaldasta aðferðin er að láta aðra jöfnuna vera jafna stikanum, til dæmis $x(t)=t$. Þá má $y(t)$ vera hvaða stæða sem er. Skoðum til dæmis þetta jöfnupár.

$$x(t) = t$$
$$y(t) = t^2 - 3$$

Til að umrita stikajöfnupárið setjum við x inn fyrir t. Kartesíska jafnan er því $y=x^2-3$.

DÆMI 8

Að finna kartesíska jöfnu með ólíkum aðferðum

Notið tvær ólíkar aðferðir til að finna kartesísku jöfnuna sem er jafngild gefna stikajöfnupárinu.

$$x(t) = 3t - 2$$
$$y(t) = t + 1$$

Lausn

Aðferð 1. Fyrst leysum við jöfnuna fyrir x með tilliti til t. Síðan getum við sett niðurstöðuna inn í jöfnuna fyrir y.

$$x = 3t - 2$$
$$x + 2 = 3t$$
$$\frac{x+2}{3} = t$$

Setjið nú stæðuna fyrir t inn í jöfnuna fyrir y.

$$y = t + 1$$
$$y = \left(\frac{x+2}{3}\right) + 1$$
$$y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} + 1$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Aðferð 2. Leysið jöfnuna fyrir y með tilliti til t og setjið stæðuna inn í jöfnuna fyrir x.

$$y = t + 1$$
$$y - 1 = t$$

Setjið stæðuna inn og leysið síðan fyrir y.

$$x = 3(y - 1) - 2$$
$$x = 3y - 3 - 2$$
$$x = 3y - 5$$
$$x + 5 = 3y$$
$$\frac{x+5}{3} = y$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

REYNIÐ SJÁLF 6

Ritið gefnu stikajöfnurnar sem kartesíska jöfnu: $x(t)=t^3$ og $y(t)=t^6$.

Að finna stikajöfnur ferla sem eru skilgreindir með rétthyrndum jöfnum

Við höfum sýnt að aðeins ein leið er til að túlka stikajöfnupár sem rétthyrnda jöfnu, en margar leiðir eru til að túlka rétthyrnda jöfnu sem stikajöfnupár. Hvaða aðferð sem er til að

finna stikajöfnurnar er gild ef hún gefur jafngilda framsetningu. Ef við veljum með öðrum orðum stæðu fyrir x, og setjum hana inn í jöfnuna fyrir y, er stikajöfnupárið gilt ef það gefur sama graf á sama skilgreiningarmengi og rétthyrnda jafnan. Ef skilgreiningarmengið þrengist í stikajöfnupárinu þannig að fallið leyfir ekki sömu gildi á x og skilgreiningarmengi rétthyrndu jöfnunnar verða gröfin ólík.

DÆMI 9

Að finna stikajöfnupár fyrir ferla sem eru skilgreindir með rétthyrndum jöfnum

Finnið jafngilt stikajöfnupár fyrir $y=(x+3)^2+1$.

Lausn

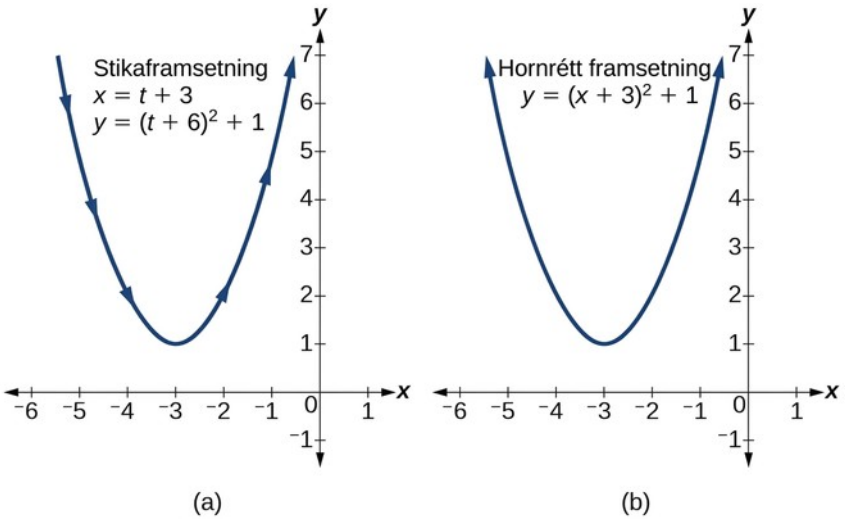
Augljóst val væri að láta $x(t)=t$. Þá væri $y(t)=(t+3)^2+1$. Prófum þó áhugaverðari leið. Hvað gerist ef við látum $x=t+3$? Þá fæst

$$\begin{aligned} y &= (x+3)^2+1 \\ y &= ((t+3)+3)^2+1 \\ y &= (t+6)^2+1 \end{aligned}$$

Stikajöfnupárið er

$$\begin{aligned} x(t) &= t+3 \\ y(t) &= (t+6)^2+1 \end{aligned}$$

Sjá mynd 9.



Mynd 9

VEFGÖGN

Notið þessi netgögn til frekari kennslu og æfinga í stikajöfnum.

- Inngangur að stikajöfnum
- Umritun stikajafna á rétthyrnt form

8.6 Æfingar hlutans

Hugtakaspurningar

1. Hvað er stikajöfnuhneppi?
2. Tími, lengd, hraði og mælikvarði eru dæmi um stika sem þriðju breytu. Útskýrið hvenær tími er notaður sem stiki.
3. Útskýrið hvernig á að eyða stikanum úr gefnu stikajöfnupári.
4. Hvaða kostur fylgir því að rita stikajöfnuhneppi sem kartesíska jöfnu?
5. Hvaða kostur fylgir því að nota stikajöfnur?
6. Hvers vegna geta mörg ólík stikajöfnupör lýst sama ferli sem er gefinn með kartesískri jöfnu?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið eyða stikanum t og rita stikajöfnurnar sem kartesíska jöfnu.

7.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 5 - t \\ y\left(t\right) = 8 - 2t \end{cases}$$

8.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 6 - 3t \\ y\left(t\right) = 10 - t \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 2t + 1 \\ y\left(t\right) = 3\sqrt{t} \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 3t - 1 \\ y\left(t\right) = 2t^2 \end{cases}$$

11.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 2e^t \\ y\left(t\right) = 1 - 5t \end{cases}$$

12.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = e^{-2t} \\ y\left(t\right) = 2e^{-t} \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} x(t) = 4\log(t) \\ y(t) = 3 + 2t \end{cases}$$

14.

$$\begin{cases} x(t) = \log(2t) \\ y(t) = \sqrt{t-1} \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = t^3 - t \\ y\left(t\right) = 2t \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = t - t^4 \\ y\left(t\right) = t + 2 \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = e^{2t} \\ y\left(t\right) = e^{6t} \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = t^5 \\ y\left(t\right) = t^{10} \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos\ t \\ y(t) = 5\sin\ t \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x\left(t\right) = 3\sin\ t \\ y\left(t\right) = 6\cos\ t \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos^2 t \\ y(t) = -\sin\ t \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} x(t) = \cos\ t + 4 \\ y(t) = 2\sin^2 t \end{cases}$$

23.

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x(t) = -t \\ y(t) = t^3 + 1 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t^3 - 2 \end{cases}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið gera $x-y$-töflu og nota hana til að rita stikajöfnurnar sem kartesíska jöfnu.

26.

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t + 4 \end{cases}$$

8

27.

$$\begin{cases} x(t) = 4 - t \\ y(t) = 3t + 2 \end{cases}$$

28.

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = 5t \end{cases}$$

29.

$$\begin{cases} x(t) = 4t - 1 \\ y(t) = 4t + 2 \end{cases}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið stika hverja kartesíska jöfnu, það er rita stikajöfnur fyrir hana, með því að láta $x(t)=t$ eða $y(t)=t$.

30.

$$y(x)=3x^2+3$$

31.

$$y(x)=2\sin x+1$$

32.

$$x(y)=3\log(y)+y$$

33.

$$x(y)=\sqrt{y}+2y$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið stika hverja kartesíska jöfnu með því að nota $x(t)=a\cos t$ og $y(t)=b\sin t$. Greinið ferilinn.

34.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

35.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$$

36.

$$x^2+y^2=16$$

37.

$$x^2+y^2=10$$

38. Stikið línuna frá $(3,0)$ til $(-2,-5)$ þannig að punkturinn sé í $(3,0)$ þegar $t=0$, og í $(-2,-5)$ þegar $t=1$.

39. Stikið línuna frá $(-1,0)$ til $(3,-2)$ þannig að punkturinn sé í $(-1,0)$ þegar $t=0$, og í $(3,-2)$ þegar $t=1$.

40. Stikið línuna frá $(-1,5)$ til $(2,3)$ þannig að punkturinn sé í $(-1,5)$ þegar $t=0$, og í $(2,3)$ þegar $t=1$.

41. Stikið línuna frá $(4,1)$ til $(6,-2)$ þannig að punkturinn sé í $(4,1)$ þegar $t=0$, og í $(6,-2)$ þegar $t=1$.

Tækniverkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota töfluaðgerð grafreiknis til að ákvarða hvort gröfin skerist.

42.

$$\begin{cases} x_1(t)=3t \\ y_1(t)=2t-1 \end{cases} \text{ og } \begin{cases} x_2(t)=t+3 \\ y_2(t)=4t-4 \end{cases}$$

43.

$$\begin{cases} x_1(t)=t^2 \\ y_1(t)=2\,t-1 \end{cases} \text{ og } \begin{cases} x_2(t)=-t+6 \\ y_2(t)=t+1 \end{cases}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafreikni til að fylla út gildistöfluna fyrir hvert stikajöfnupár.

44.

$$\begin{cases} x_1(t) = 3t^2 - 3t + 7 \\ y_1(t) = 2t + 3 \end{cases}$$

t	x	y
–1		
0		
1		

45.

$$\begin{cases} x_1(t) = t^2 - 4 \\ y_1(t) = 2t^2 - 1 \end{cases}$$

t	x	y
1		
2		
3		

8

46.

$$\begin{cases} x_1(t) = t^4 \\ y_1(t) = t^3 + 4 \end{cases}$$

t	x	y
-1		
0		
1		
2		

Ítarverkefni

47. Finnið tvö ólík stikajöfnupör fyrir $y=(x+1)^2$.

48. Finnið tvö ólík stikajöfnupör fyrir $y=3x-2$.

49. Finnið tvö ólík stikajöfnupör fyrir $y=x^2-4x+4$.

8.7 Stikajöfnur: gröf

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Teikna ferla í plani sem lýst er með stikajöfnum með því að merkja inn punkta.
- Teikna gröf stikajafna.

Ekki eru allir stuðningsmenn eða liðsstjórar hrifnir af því, en hafnabolti og margar aðrar íþróttir reiða sig nú mjög á gagnagreiningu. Hún felst í því að skrá gögn í smáatriðum og meta þau tölulega til að skilja og spá fyrir um hegðun. Áhrif gagnagreiningar voru í fyrstu einkum tölfræðileg en á síðari árum hafa eðlisfræði og önnur vísindi einnig komið við sögu. Þar ber hæst áherslan á upphafshorn og hraða boltans frá kylfunni, en tiltekin gildi þeirra geta nánast tryggt heimahlaup. Á hinn bóginn verða leikmenn mun oftar brenndir þegar áherslan er á upphafshorn og heimahlaup fremur en góð högg almennt. Hugsum okkur þessar aðstæður: Síðari hluti níundu lotu er hafinn, tveir leikmenn eru brenndir og tveir eru á höfn. Heimaliðið er tveimur stigum undir. Slagmaðurinn slær boltann með hraðanum 140 fet á sekúndu undir um það bil 45° horni við lárétt. Hve langt fer boltinn? Fer hann yfir girðinguna og tryggir sigur með heimahlaupi? Niðurstaðan kann að ráðast að hluta af öðrum þáttum, til dæmis vindi, en stærðfræðingar geta notað stikajöfnur til að líkja eftir kastferlinum og spá nokkurn veginn fyrir um drægni boltans. Í þessum hluta fjöllum við um stikajöfnur og nokkur algeng notkunarsvið þeirra, svo sem verkefni um kasthreyfingu.



Mynd 1 Með stikajöfnum má lýsa kastferli. (Mynd: Paul Kreher, Flickr)

Að teikna gröf stikajafna með því að merkja inn punkta

Ef hvorki grafreiknir né grafteikniforrit er við höndina er venjan að teikna graf jöfnu með því að merkja inn punkta. Aðferðin er mjög áreiðanleg ef gildin eru reiknuð af nákvæmni.

AÐFERÐ

Gefið stikajöfnupár. Skissið graf með því að merkja inn punkta.

1. Gerið töflu með þremur dálkum: t, $x(t)$, og $y(t)$.
2. Reiknið x og y fyrir gildi t á bilinu þar sem föllin eru skilgreind.
3. Merkið inn tvenndirnar sem fást, (x, y).

DÆMI 1

Að skissa graf stikajöfnupárs með því að merkja inn punkta

Skissið graf stikajafnanna

$$x(t)=t^2+1,$$

$$y(t)=2+t.$$

Lausn

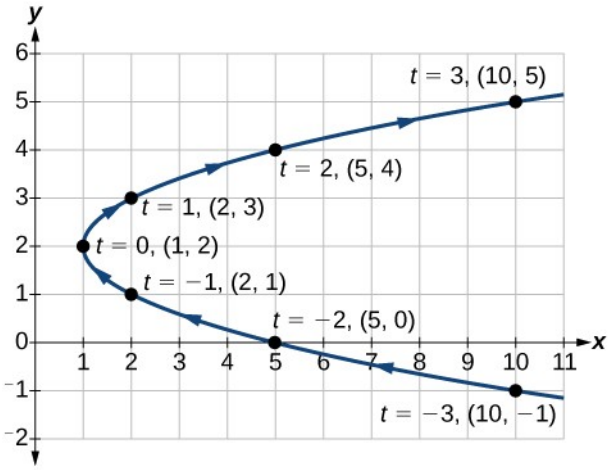
Gerið gildistöflu fyrir t, $x(t)$, og $y(t)$, eins og í töflu 1 og merkið punktana inn í plan.

8

Tafla 1

t	$x(t)=t^2+1$	$y(t)=2+t$
-5	26	-3
-4	17	-2
-3	10	-1
-2	5	0
-1	2	1
0	1	2
1	2	3
2	5	4
3	10	5
4	17	6
5	26	7

Grafið er fleygbogi með hvirfilpunkti í $(1,2)$, sem opnast til hægri. Sjá mynd 2.



Mynd 2

Greining

Þegar gildi t vaxa í jákvæða stefnu frá 0 til 5 rekja punktarnir efri helming fleygbogans. Þegar gildi t verða neikvæð rekja þeir neðri helminginn. Skilgreiningarmengið er ótakmarkað. Örvarnar sýna stefnuna miðað við vaxandi gildi t. Grafið lýsir ekki falli því það stenst ekki lóðrétta línuprófið. Grafið er teiknað í tveimur hlutum: fyrir jákvæð gildi t, og fyrir neikvæð gildi t.

8

REYNIÐ SJÁLF 1

Skissið graf stikajafnanna

$$x=\sqrt{t},$$

$$y=2t+3,$$

$$0\le t\le 3.$$

DÆMI 2

Að skissa graf stikajafna hornafalla

Gerið gildistöflu fyrir gefnu stikajöfnurnar og skissið grafið:

$$x = 2\cos\ t$$
$$y = 4\sin\ t$$

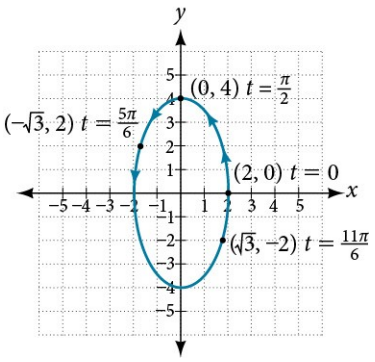
Lausn

Gerið töflu eins og töflu 2 með horn í radíönum sem inntaksgildi t, og reiknið x og y. Útreikningarnir verða auðveldari ef valin eru fyrir t horn með þekktum sínus- og kósínusgildum.

Tafla 2

t	$x=2\cos t$	$y=4\sin t$
0	$x=2\cos(0)=2$	$y=4\sin(0)=0$
$\frac{\pi}{6}$	$x=2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$	$y=4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$
$\frac{\pi}{3}$	$x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$	$y=4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$
$\frac{2\pi}{3}$	$x=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$	$y=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$x=2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$	$y=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2$
π	$x=2\cos(\pi)=-2$	$y=4\sin(\pi)=0$
$\frac{7\pi}{6}$	$x=2\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$	$y=4\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-2$
$\frac{4\pi}{3}$	$x=2\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-1$	$y=4\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	$x=2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$	$y=4\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-4$
$\frac{5\pi}{3}$	$x=2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=1$	$y=4\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$x=2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$	$y=4\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-2$
2π	$x=2\cos(2\pi)=2$	$y=4\sin(2\pi)=0$

Mynd 3 sýnir grafið.



Mynd 3

Af samhverfunni í gildum x og y, sjáum við að stikajöfnurnar lýsa sporbaug. Sporbaugurinn er rakinn rangsælis, eins og örvarnar sem sýna vaxandi gildi t gefa til kynna.

Greining

Við höfum séð að teikna má gröf stikajafna með því að merkja inn punkta. Grafreiknir sparar þó tíma og sýnir smáatriði í grafi sem gæti tekið of langan tíma að finna með því að reikna í höndunum.

Gangið úr skugga um að reiknirinn sé stilltur á stikaham (PAR). Til staðfestingar ætti glugginn $Y=$ að sýna

$$X_{1T} =$$
$$Y_{1T} =$$

í stað $Y_1=$.

8

REYNIÐ SJÁLF 2

Teiknið graf stikajafnanna

$$x=5\cos t\,,$$

$$y=3\sin t\,.$$

DÆMI 3

Að teikna stikajöfnur og rétthyrnt form saman

Teiknið graf stikajafnanna $x=5\cos t$ og $y=2\sin t$. Teiknið fyrst grafið með punktum sem fást úr stikaframsetningunni. Teiknið síðan rétthyrnda form jöfnunnar. Berið gröfin saman.

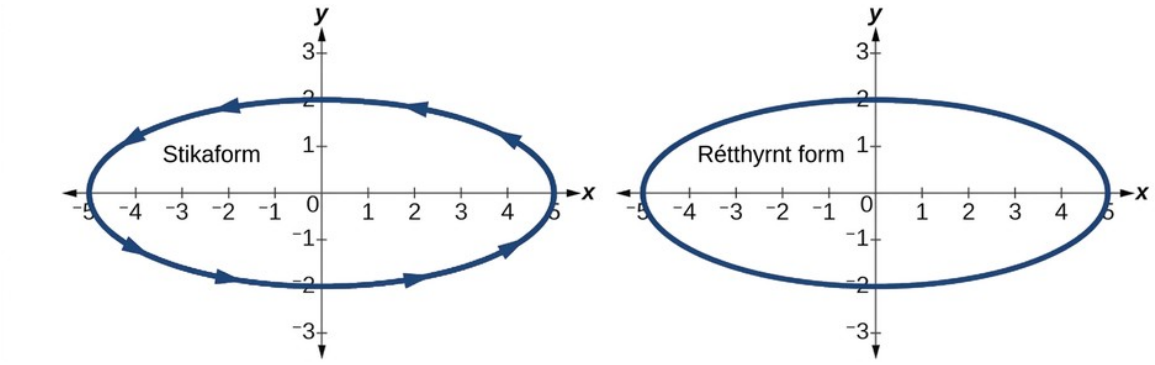
Lausn

Gerið gildistöflu eins og töflu 3.

Tafla 3

t	$x=5\cos t$	$y=2\sin t$
0	$x=5\cos(0)=5$	$y=2\sin(0)=0$
1	$x=5\cos(1)\approx 2{,}7$	$y=2\sin(1)\approx 1{,}7$
2	$x=5\cos(2)\approx -2{,}1$	$y=2\sin(2)\approx 1{,}8$
3	$x=5\cos(3)\approx -4{,}95$	$y=2\sin(3)\approx 0{,}28$
4	$x=5\cos(4)\approx -3{,}3$	$y=2\sin(4)\approx -1{,}5$
5	$x=5\cos(5)\approx 1{,}4$	$y=2\sin(5)\approx -1{,}9$
-1	$x=5\cos(-1)\approx 2{,}7$	$y=2\sin(-1)\approx -1{,}7$
-2	$x=5\cos(-2)\approx -2{,}1$	$y=2\sin(-2)\approx -1{,}8$
-3	$x=5\cos(-3)\approx -4{,}95$	$y=2\sin(-3)\approx -0{,}28$
-4	$x=5\cos(-4)\approx -3{,}3$	$y=2\sin(-4)\approx 1{,}5$
-5	$x=5\cos(-5)\approx 1{,}4$	$y=2\sin(-5)\approx 1{,}9$

Merkið gildin (x, y) úr töflunni inn. Sjá mynd 4.



Mynd 4

Næst umritum við stikajöfnurnar á rétthyrnt form. Til þess leysum við fyrir t í annaðhvort $x(t)$ eða $y(t)$, og setjum síðan stæðuna fyrir t inn í hina jöfnuna. Niðurstaðan verður fallið $y(x)$ ef t er leyst sem fall af x, eða $x(y)$ ef t er leyst sem fall af y.

$$x=5\cos t$$

$$\frac{x}{5}=\cos t \qquad \text{Leysið fyrir } \cos t.$$

$$y=2\sin t \qquad \text{Leysið fyrir } \sin t.$$

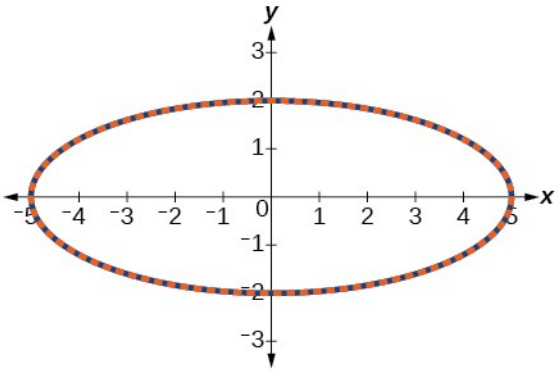
$$\frac{y}{2}=\sin t$$

Notið síðan reglu Pýþagórasar.

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Greining

Á mynd 5 eru gögn stikajafnanna og rétthyrndu jöfnunnar teiknuð saman. Stikajöfnurnar eru bláar en graf rétthyrndu jöfnunnar er teiknað ofan á þær með rauðri punktalínu. Ljóst er að bæði formin gefa sama graf.



Mynd 5

8

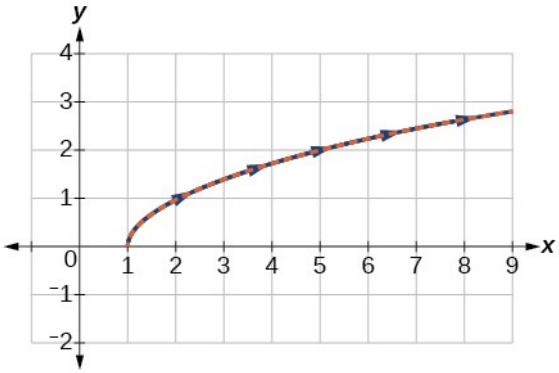
DÆMI 4

Að teikna stikajöfnur og rétthyrndar jöfnur í sama hnitakerfi

Teiknið stikajöfnurnar $x = t + 1$ og $y = \sqrt{t}$, $t \geq 0$, og jafngildu rétthyrndu jöfnuna $y = \sqrt{x - 1}$ í sama hnitakerfi.

Lausn

Gerið gildistöflu fyrir stikajöfnurnar eins og í dæminu á undan og teiknið $y = \sqrt{t}$, $t \geq 0$ á sama hnitakerfi, eins og á mynd 6.



Mynd 6

Greining

Skilgreiningarmengi t er takmarkað og því teiknum við aðeins jákvæð gildi t. Gögn stikajafnanna eru blá en graf rétthyrndu jöfnunnar er rauð punktalína. Enn á ný sjáum við að formin tvö falla saman.

REYNIÐ SJÁLF 3

Skissið graf stikajafnanna $x = 2\cos\theta$ og $y = 4\sin\theta$, ásamt rétthyrndu jöfnunni í sama hnitakerfi.

Notkun stikajafna

Margir kostir stikajafna verða augljósir þegar þær eru notaðar til að leysa raunveruleg verkefni. Rétthyrndar jöfnur með x og y gefa heildarmynd af braut hlutar en sýna ekki staðsetningu hans á tilteknum tíma. Stikajöfnur sýna hins vegar hvernig gildi x og y breytast eftir t og þar með staðsetningu hlutar á hreyfingu á hverjum tíma.

Stikajöfnur eru oft notaðar til að leysa verkefni um kasthreyfingu. Í slíkri hreyfingu er hlut varpað fram og upp undir horninu θ við lárétt, með upphafshraðanum v_0, og úr hæðinni h yfir láréttum fleti.

Ferill hlutar sem varpað er undir horninu θ við lárétt, með upphafshraðanum v_0, og úr hæðinni h yfir láréttum fleti er gefinn með

$$x = (v_0 \cos\theta)t$$
$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + h$$

þar sem g stendur fyrir þyngdarhröðun og h er upphafshæð hlutarins. Notið, eftir því hvaða einingar eru notaðar í verkefninu, $g = 32\ \text{ft/s}^2$ eða $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Jafnan fyrir x gefur lárétta vegalengd og jafnan fyrir y lóðrétta vegalengd.

AÐFERÐ

Gefið verkefni um kasthreyfingu. Notið stikajöfnur til að leysa það.

1. Lárétta vegalengdin er gefin með $x=\left(v_0\cos\theta\right)t$. Setjið upphafshraða hlutarins inn fyrir v_0.
2. Stæðan $\cos\theta$ sýnir hornið sem hlutnum er varpað undir. Setjið hornið í gráðum inn fyrir $\cos\theta$.
3. Lóðrétta vegalengdin er gefin með formúlunni $y=-\frac{1}{2}gt^2+\left(v_0\sin\theta\right)t+h$. Liðurinn $-\frac{1}{2}gt^2$ lýsir áhrifum þyngdarhröðunar. Notið, eftir því hvaða einingar eru notaðar, $g=32\ \text{ft/s}^2$ eða $g=9{,}8\ \text{m/s}^2$. Setjið aftur upphafshraðann inn fyrir v_0, og hæðina sem hlutnum var varpað úr inn fyrir h.
4. Reiknið hvern lið og leysið fyrir t.

DÆMI 5

Að finna stikajöfnur fyrir hreyfingu hafnabolta

Leysið verkefnið sem sett var fram í upphafi hlutans. Slær leikmaðurinn heimahlaup sem tryggir sigur? Gerið ráð fyrir að boltinn sé sleginn með upphafshraðanum 140 fet á sekúndu undir 45 ˚ horni við lárétt og að kylfan hitti boltann 3 fetum yfir jörðu.

1. ⓐ Finnið stikajöfnur sem lýsa ferli hafnaboltans.
2. ⓑ Hvar er boltinn eftir 2 sekúndur?
3. ⓒ Hve lengi er boltinn á lofti?
4. ⓓ Er þetta heimahlaup?

Lausn

1. ⓐ

   Notið formúlurnar til að setja upp jöfnurnar. Lárétta staðsetningin fæst með stikajöfnunni fyrir x. Því er

   $$\begin{aligned} x &= (v_0\cos\ \theta)t \\ x &= (140\cos(45^\circ))t \end{aligned}$$

   Lóðrétta staðsetningin fæst með stikajöfnunni fyrir y. Því er

   $$\begin{aligned} y &= -16t^2+(v_0\sin\ \theta)t+h \\ y &= -16t^2+(140\sin(45^\circ))t+3 \end{aligned}$$

2. ⓑ

   Setjið 2 inn í jöfnurnar til að finna lárétta og lóðrétta staðsetningu boltans.

   $$\begin{aligned} x&=(140\ \cos\ (45^\circ))\ (2) \\ x&=198\ \text{fet} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} y&=-16\ (2)^2+(140\ \sin\ (45^\circ))\ (2)+3 \\ y&=137\ \text{fet} \end{aligned}$$

8

Eftir 2 sekúndur er boltinn 198 fet frá sláreitnum og 137 fet yfir jörðu.

3. ⓒ

Til að reikna hve lengi boltinn er á lofti þurfum við að finna hvenær hann lendir, það er hvenær $y=0$. Því er

$y=-16\,t^2+(140\,\sin\,(45^\circ))\,t+3$

$y=0$ Setjið $y\,(t)=0$ og leysið annars stigs jöfnuna.

$t=6{,}2173$

þegar $t=6{,}2173$ seconds, the ball has hit the ground. (The quadratic equation can be solved in various ways, but this problem was solved using a computer math program.)

4. ⓓ

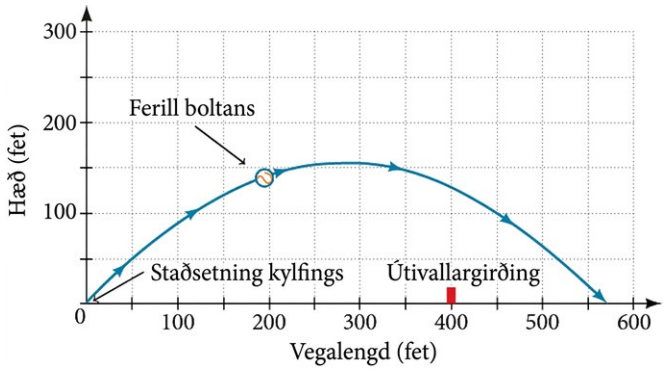
Við getum ekki staðfest að höggið hafi verið heimahlaup án þess að taka tillit til stærðar útvallarins, sem er breytileg milli valla. Til einföldunar skulum við þó gera ráð fyrir að útvallarveggurinn sé 400 fet frá heimahöfn þar sem völlurinn er dýpstur og að veggurinn sé 10 fet á hæð. Til að ákvarða hvort boltinn fari yfir vegginn þurfum við að reikna hæð hans þegar x = 400 fet. Við setjum því x = 400, leysum fyrir t, og setjum t inn í y.

$$x=(140\,\cos\,(45^\circ))\,t$$
$$400=(140\,\cos\,(45^\circ))\,t$$
$$t=4{,}04$$

$$y=-16\,(4{,}04)^2+(140\,\sin\,(45^\circ))\,(4{,}04)+3$$
$$y=141{,}8$$

Boltinn er 141,8 fet yfir jörðu þegar hann flýgur út af vellinum. Þetta var því heimahlaup. Sjá mynd 7.

8



Mynd 7

VEFGÖGN

Notið netgögnin hér á eftir til að fá frekari útskýringar og æfa ykkur í að teikna gröf stikajafna.

- Að teikna gröf stikajafna á TI-84

8.7 Æfingar hlutans

Hugtakaspurningar

1. Hvaða tvær aðferðir eru notaðar til að teikna gröf stikajafna?
2. Nefnið einn mun á því að teikna stikajöfnur og kartesískar jöfnur með því að merkja inn punkta.
3. Hvers vegna eru örvar á sumum gröfum?
4. Nefnið nokkrar algengar gerðir grafa stikajafna.
5. Hvers vegna eru stikagröf mikilvæg til að skilja kasthreyfingu?

Grafísk verkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna hvert stikajöfnupár með því að gera gildistöflu. Sýnið stefnu ferilsins á grafinu.

6.

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

7.

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

t	-3	-2	-1	0	1	2
x						
y						

8.

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 3 - 2t \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2	3
x						
y						

9.

$$\begin{cases} x(t) = -2 - 2t \\ y(t) = 3 + t \end{cases}$$

t	-3	-2	-1	0	1
x					
y					

10.

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t + 2 \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2
x					
y					

11.

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t + 3 \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2
x					
y					

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skissa ferilinn og sýna stefnu hans.

12.

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{t} \end{cases}$$

13.

$$\begin{cases} x(t) = -\sqrt{t} \\ y(t) = t \end{cases}$$

14.

$$\begin{cases} x(t) = 5 - |t| \\ y(t) = t + 2 \end{cases}$$

15.

$$\begin{cases} x(t) = -t + 2 \\ y(t) = 5 - |t| \end{cases}$$

16.

$$\begin{cases} x(t) = 4\sin\, t \\ y(t) = 2\cos\, t \end{cases}$$

17.

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin\, t \\ y(t) = 4\cos\, t \end{cases}$$

18.

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos^2 t \\ y(t) = -3\sin\, t \end{cases}$$

19.

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos^2 t \\ y(t) = -3\sin^2 t \end{cases}$$

20.

$$\begin{cases} x(t) = \sec\, t \\ y(t) = \tan\, t \end{cases}$$

21.

$$\begin{cases} x(t) = \sec\, t \\ y(t) = \tan^2 t \end{cases}$$

22.

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{e^{2t}} \\ y(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna graf jöfnunnar og sýna stefnu ferilsins. Ritið síðan kartesísku jöfnuna.

23.

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = -t^2 \end{cases}$$

24.

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t + 3 \end{cases}$$

25.

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos\ t \\ y(t) = -\sin\ t \end{cases}$$

26.

$$\begin{cases} x(t) = 7\cos\ t \\ y(t) = 7\sin\ t \end{cases}$$

27.

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = -e^{\,t} \end{cases}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið teikna graf jöfnunnar og sýna stefnu ferilsins.

28.

$$x=t^2, y=3t, 0\le t\le 5$$

29.

$$x=2t, y=t^2, -5\le t\le 5$$

30.

$$x=t,\ y=\sqrt{25-t^2},\ 0<t\le 5$$

31.

$$x(t)=-t, y(t)=\sqrt{t},\ t\ge 0$$

32.

$$x=-2\cos t,\ y=6\sin t,\ 0\le t\le \pi$$

33.

$$x=-\sec t,\ y=\tan t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota stikajöfnurnar fyrir heiltölurnar a og b:

$$x(t) = a\cos((a+b)t)$$
$$y(t) = a\cos((a-b)t)$$

34. Teiknið graf á skilgreiningarmenginu $[-\pi, 0]$, þar sem $a=2$ og $b=1$, og sýnið stefnu ferilsins.

35. Teiknið graf á skilgreiningarmenginu $[-\pi, 0]$, þar sem $a=3$ og $b=2$, og sýnið stefnu ferilsins.

36. Teiknið graf á skilgreiningarmenginu $[-\pi, 0]$, þar sem $a=4$ og $b=3$, og sýnið stefnu ferilsins.

37. Teiknið graf á skilgreiningarmenginu $[-\pi, 0]$, þar sem $a=5$ og $b=4$, og sýnið stefnu ferilsins.

38. Ef a er 1 meira en b, lýsið þá áhrifum gilda a og b á graf stikajafnanna.

39. Lýsið grafinu ef $a=100$ og $b=99$.

40. Hvað gerist ef b er 1 meira en a? Lýsið grafinu.

41. Stikajöfnurnar $x(t)=t^2$ og $y(t)=6-3t$ hafa graf sem er liggjandi fleygbogi sem opnast til hægri. Hvað myndi breyta stefnu ferilsins?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið lýsa grafi stikajöfnupársins.

42. $x(t)=-t^2$ og $y(t)$ er línulegt

43. $y(t)=t^2$ og $x(t)$ er línulegt

44. $y(t)=-t^2$ og $x(t)$ er línulegt

45. Ritið stikajöfnur hrings með miðju í $(0,0)$, geisla 5 og stefnu rangsælis.

46. Ritið stikajöfnur sporbaugs með miðju í $(0,0)$, langás af lengd 10, skammás af lengd 6 og stefnu rangsælis.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafteikniforrit til að teikna graf í glugganum $[-3,3]$ sinnum $[-3,3]$ á skilgreiningarmenginu $[0, 2\pi)$ fyrir eftirfarandi gildi a og b og sýna stefnu ferilsins.

$$\begin{cases} x(t) = \sin(at) \\ y(t) = \sin(bt) \end{cases}$$

47.

$$a=1, b=2$$

48.

$$a=2, b=1$$

49.

$$a=3, b=3$$

50.

$$a=5, b=5$$

51.

$$a=2, b=5$$

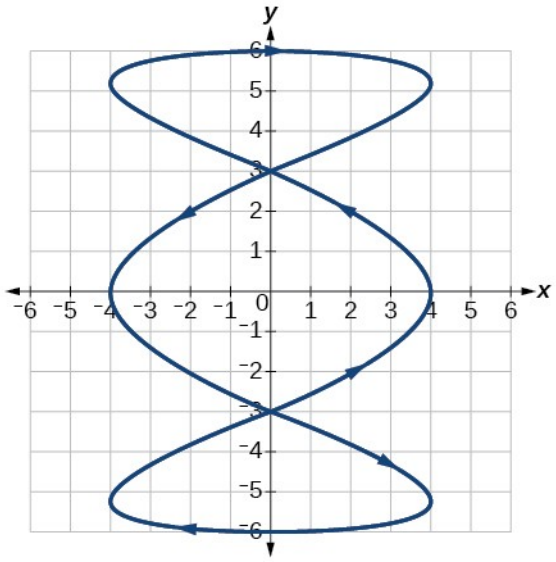
52.

$$a=5, b=2$$

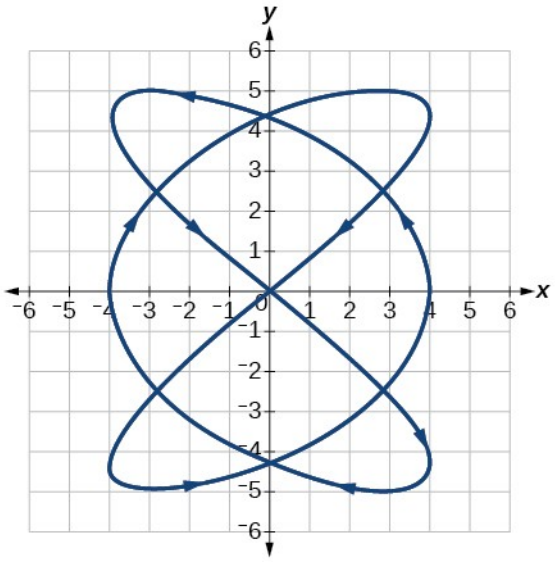
Tækniverkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skoða gröf stikajafna af gerðinni $\begin{cases} x(t) = a\cos(bt) \\ y(t) = c\sin(dt) \end{cases}$.
Notið stikaham grafreiknis til að finna gildi a, b, c, og d sem gefa hvert graf.

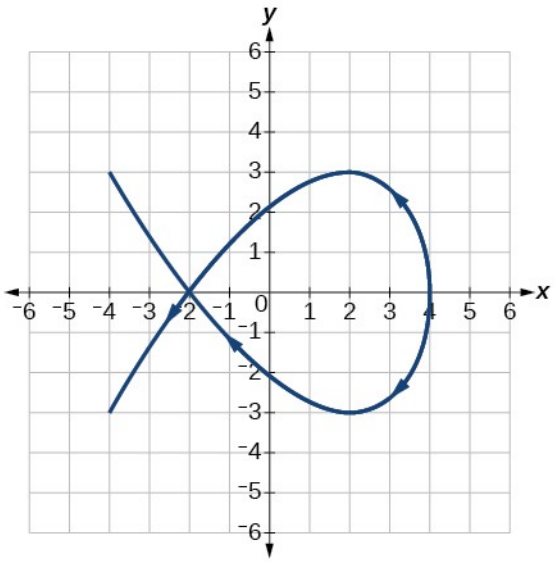
53.



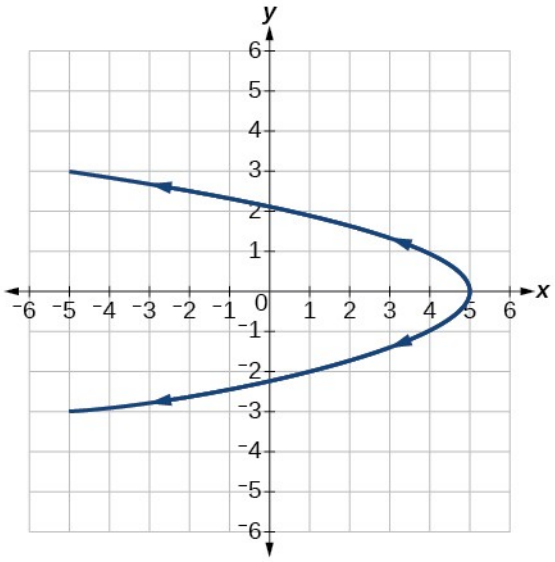
54.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

55.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

56.



Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota grafteikniforrit til að teikna gröf stikajafnanna.

a. $\begin{cases} x(t) = \cos t - 1 \\ y(t) = \sin t + t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = \cos t + t \\ y(t) = \sin t - 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = \cos t - 1 \end{cases}$

8

57. Teiknið öll þrjú stikajöfnupörin á skilgreiningarmenginu $[0, 2\pi]$.

58. Teiknið öll þrjú stikajöfnupörin á skilgreiningarmenginu $[0, 4\pi]$.

59. Teiknið öll þrjú stikajöfnupörin á skilgreiningarmenginu $[-4\pi, 6\pi]$.

60. Graf hvers stikajöfnupárs virðist „skríða“ eftir öðrum ásnum. Hvað ræður því eftir hvorum ásnum grafið skríður?

61. Útskýrið áhrif þess á graf stikajöfnunnar að víxla $\sin t$ og $\cos t$.

62. Útskýrið hvaða áhrif það hefur á graf stikajöfnunnar að breyta skilgreiningarmenginu.

Ítarverkefni

63. Hlut er kastað upp í loft með lóðrétta hraðanum 20 ft/s og lárétta hraðanum 15 ft/s. Hæð hlutarins má lýsa með jöfnunni $y(t) = -16t^2 + 20t$ en hluturinn hreyfist lárétt með jafna hraðanum 15 ft/s. Ritið stikajöfnur fyrir staðsetningu hlutarins og eyðið síðan tímanum til að rita hæðina sem fall af láréttri staðsetningu.

64. Hjólabrettamaður fer eftir láréttum fleti með jafna hraðanum 9 ft/s og kastar bolta upp í loft. Hæð boltans má lýsa með jöfnunni $y(t) = -16t^2 + 10t + 5$. Ritið stikajöfnur fyrir staðsetningu boltans og eyðið síðan tímanum til að rita hæðina sem fall af láréttri staðsetningu.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota þessar aðstæður: Pílu er kastað upp með upphafshraðanum 64 ft/s undir hæðarhorninu 52°. Skoðið staðsetningu pílunnar á hverjum tíma t. Lítið fram hjá loftmótstöðu.

65. Finnið stikajöfnur sem lýsa aðstæðunum.

66. Finnið öll möguleg gildi x sem lýsa aðstæðunum.

67. Hvenær lendir pílan?

68. Finnið hámarkshæð pílunnar.

69. Hvenær nær pílan hámarkshæð?

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið skoða gröf fjögurra stikajafna. Þótt þau virðist óvenjuleg og falleg eru þau svo algeng að þau bera sérstök heiti sem koma fram í hverri æfingu. Notið grafteikniforrit til að teikna hvert graf á tilgreindu skilgreiningarmengi.

70.

Úthjólferill: $\begin{cases} x(t) = 14\cos\ t - \cos(14t) \\ y(t) = 14\sin\ t + \sin(14t) \end{cases}$ á skilgreiningarmenginu $[0, 2\pi]$.

71.

Innhjólferill: $\begin{cases} x(t) = 6\sin\ t + 2\sin(6t) \\ y(t) = 6\cos\ t - 2\cos(6t) \end{cases}$ á skilgreiningarmenginu $[0, 2\pi]$.

72.

Innsveifarferill: $\begin{cases} x(t) = 2\sin\ t + 5\cos(6t) \\ y(t) = 5\cos\ t - 2\sin(6t) \end{cases}$ á skilgreiningarmenginu $[0, 2\pi]$.

73.

Rós: $\begin{cases} x(t) = 5\sin(2t)\sin t \\ y(t) = 5\sin(2t)\cos t \end{cases}$ á skilgreiningarmenginu $[0, 2\pi]$.

8.8 Vigrar

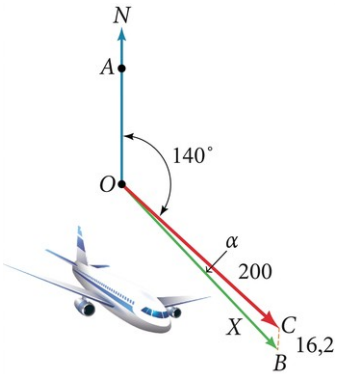
NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Skoða vigra rúmfræðilega.
- Finna stærð og stefnu.
- Leggja saman vigra og margfalda vigur með tölu.
- Finna þáttaframsetningu vigurs.
- Finna einingarvigur í stefnu v.

- Reikna með vigrum með i og j.
- Finna innfeldi tveggja vigra.

Flugvél flýgur með lofthraðanum 200 mílur á klukkustund og stefnir í suðaustur eftir stefnunni 140°. Norðanvindur, frá norðri til suðurs, blæs með hraðanum 16,2 mílur á klukkustund, eins og sýnt er á mynd 1. Hver eru ferð flugvélarinnar miðað við jörð og raunveruleg stefna hennar?



Mynd 1

Ferð miðað við jörð er ferð flugvélar miðað við yfirborð jarðar. Lofthraði er ferð flugvélar miðað við loftmassann umhverfis hana. Þessar tvær stærðir eru ekki þær sömu vegna áhrifa vinds. Í fyrri hluta notuðum við þríhyrninga til að leysa svipað verkefni um hreyfingu báta. Síðar í þessum hluta finnum við ferð og stefnu flugvélarinnar miðað við jörð og skoðum um leið aðra aðferð við verkefni af þessu tagi. Fyrst skulum við þó kynna okkur undirstöðuatriði vigra.

8

Rúmfræðileg sýn á vigra

Vigur er tiltekin stærð sem er teiknuð sem línustrik með örvaroddi á öðrum endanum. Hann hefur upphafspunkt þar sem hann byrjar og endapunkt þar sem hann endar. Vigur er skilgreindur með stærð sinni, það er lengd línustriksins, og stefnu sem örvaroddurinn við endapunktinn sýnir. Vigur er því stefnt línustrik. Ýmis tákn eru notuð til að greina vigra frá öðrum stærðum:

- Lágstafur í feitletri, með eða án örvar yfir, til dæmis

$$\mathbf{v},$$

$$u,$$

$$w,$$

$$\vec{v},$$

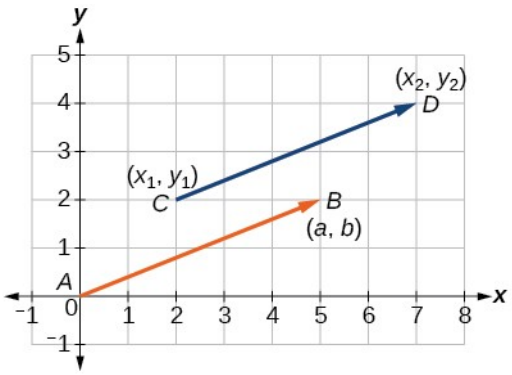
$$\vec{u}, \vec{w}.$$

- Ef upphafspunkturinn er P og endapunkturinn Q, má tákna vigurinn með $P\vec{Q}$. Örin yfir tákninu sýnir að ekki er aðeins um línu að ræða heldur stefnt línustrik.
- Ef upphafspunkturinn er $(0,0)$ og endapunkturinn $(a\,b)$, má tákna vigurinn með $\langle (a,b). \rangle$.

Síðasta táknið $\langle (a,b) \rangle$ hefur sérstaka merkingu og nefnist staðalstaða. Staðsetningarvigurinn hefur upphafspunktinn $(0,0)$ og endapunktinn (a,b). Til að færa hvaða vigur sem er í staðalstöðu skoðum við breytinguna á x-hnitunum og breytinguna á y-hnitunum. Ef upphafspunktur vigursins $C\vec{D}$ er $C(x_1, y_1)$ og endapunkturinn er $D(x_2, y_2)$, fæst staðsetningarvigurinn með því að reikna

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \\ &= \langle a, b \rangle\end{aligned}$$

Á mynd 2 sjáum við upprunalega vigurinn $C\vec{D}$ og staðsetningarvigurinn $A\vec{B}$.



Mynd 2

EIGINLEIKAR VIGRA

Vigur er stefnt línustrik með upphafspunkt og endapunkt. Vigrar eru ákvarðaðir með stærð, það er lengd línustriksins, og stefnu sem örvaroddurinn að endapunktinum sýnir. Staðsetningarvigur hefur upphafspunkt í $(0,0)$ og er ákvarðaður með endapunkti sínum (a,b).

DÆMI 1

Að finna staðsetningarvigur

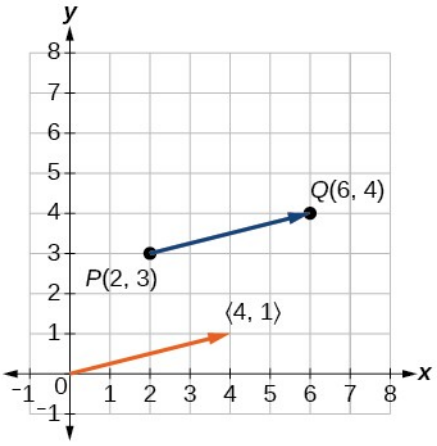
Skoðið vigur með upphafspunktinn $P(2,3)$ og endapunktinn $Q(6,4)$. Finnið staðsetningarvigurinn.

Lausn

Staðsetningarvigurinn fæst með því að draga annað x-hnitið frá hinu og annað y-hnitið frá hinu. Því er

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle 6-2, 4-3 \rangle \\ &= \langle 4, 1 \rangle\end{aligned}$$

Staðsetningarvigurinn hefst í $(0,0)$ og endar í $(4,1)$. Gröf beggja vigra eru sýnd á mynd 3.



Mynd 3

Við sjáum að staðsetningarvigurinn er $\langle (4,1). \rangle$.

8

DÆMI 2

Að teikna vigur sem uppfyllir gefin skilyrði og jafngildan staðsetningarvigur hans

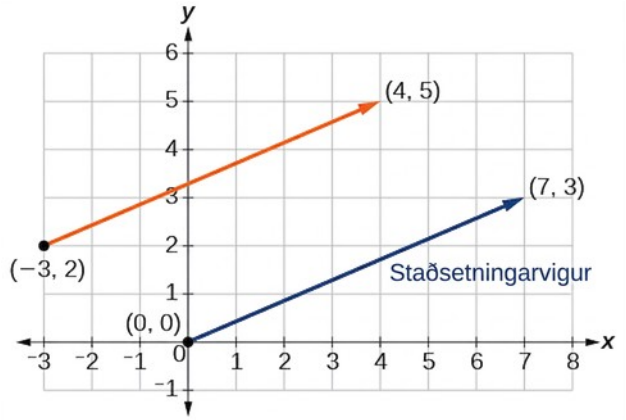
Finnið staðsetningarvigurinn þegar vigurinn v hefur upphafspunkt í $(-3,2)$ og endapunkt í $(4,5)$, og teiknið síðan báða vigrana í sama plani.

Lausn

Staðsetningarvigurinn fæst með þessum útreikningi:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle 4-(-3), 5-2 \rangle \\ &= \langle 7, 3 \rangle\end{aligned}$$

Staðsetningarvigurinn hefst því í $(0,0)$ og endar í $(7,3)$. Sjá mynd 4.



Mynd 4

REYNIÐ SJÁLF 1

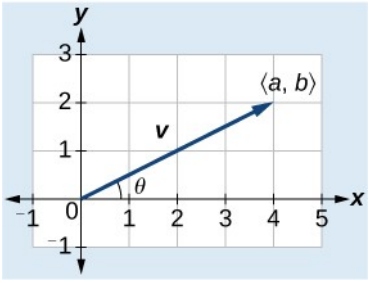
Teiknið vigur v frá upphafspunktinum að punktinum $(3,5)$.

Að finna stærð og stefnu

Til að reikna með vigri þurfum við að geta fundið stærð hans og stefnu. Stærðina finnum við með reglu Pýþagórasar eða fjarlægðarformúlunni og stefnuna með andhverfu tangensfalli.

STÆRÐ OG STEFNA VIGURS

Fyrir staðsetningarvigur $v = \langle a, b \rangle$, fæst lengdin með $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Stefnan er jöfn horninu við x-ásinn, eða við y-ásinn, eftir notkun. Fyrir staðsetningarvigur fæst stefnan með $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$, eins og sýnt er á mynd 5.



Mynd 5

Tveir vigrar v og u teljast jafnir ef þeir hafa sömu stærð og stefnu. Ef báðir hafa sama staðsetningarvigur eru þeir einnig jafnir.

DÆMI 3

Að finna stærð og stefnu vigurs

Finnið stærð og stefnu vigursins með upphafspunktinn $P(-8,1)$ og endapunktinn $Q(-2,-5)$. Teiknið vigurinn.

Lausn

Finnum fyrst staðsetningarvigurinn.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \langle -2, -(-8), -5-1 \rangle \\ &= \langle 6, -6 \rangle\end{aligned}$$

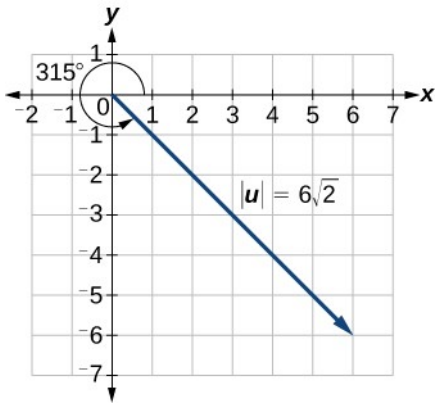
Við notum reglu Pýþagórasar til að finna stærðina.

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}| &= \sqrt{(6)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{72} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

Stefnan er gefin með

$$\begin{aligned}\tan\ \theta &= \tfrac{-6}{6} = -1 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1) \\ &= -45^\circ\end{aligned}$$

Hornið endar hins vegar í fjórða fjórðungi og því leggjum við 360° við til að fá jákvætt horn. Þá er $-45^\circ + 360^\circ = 315^\circ$. Sjá mynd 6.



Mynd 6

DÆMI 4

Að sýna að tveir vigrar séu jafnir

Sýnið að vigurinn v með upphafspunkt í $(5,-3)$ og endapunkt í $(-1,2)$ sé jafn vigrinum u með upphafspunkt í $(-1,-3)$ og endapunkt í $(-7,2)$. Teiknið staðsetningarvigurinn á sama hnitakerfi og v og u. Finnið síðan stærð og stefnu hvors vigurs.

Lausn

Eins og sýnt er á mynd 7 skuluð þið teikna vigurinn *v* frá upphafspunktinum $(5,-3)$ að endapunktinum $(-1,2)$. Teiknið vigurinn *u* með upphafspunktinn $(-1,-3)$ og endapunktinn $(-7,2)$. Finnið staðalstöðu hvors vigurs.

Finnið og skissið næst staðsetningarvigur v og u. Þá fæst

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle -1-5, 2-(-3)\rangle \\ &= \langle -6, 5\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \langle -7-(-1), 2-(-3)\rangle \\ &= \langle -6, 5\rangle\end{aligned}$$

Þar sem staðsetningarvigrarnir eru eins eru v og u sami vigurinn.

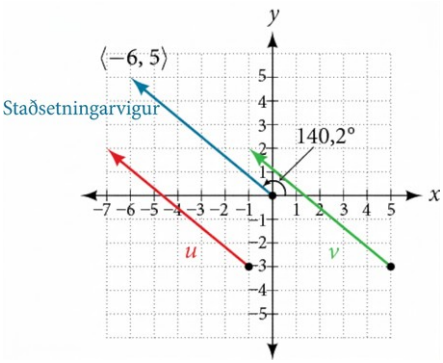
Önnur leið til að sannreyna að vigrar séu jafnir er að sýna að þeir hafi sömu stærð og stefnu. Notið reglu Pýþagórasar til að sýna að stærðirnar séu jafnar.

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}| &= \sqrt{(-1-5)^2+(2-(-3))^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2+(5)^2} \\ &= \sqrt{36+25} \\ &= \sqrt{61} \\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{(-7-(-1))^2+(2-(-3))^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2+(5)^2} \\ &= \sqrt{36+25} \\ &= \sqrt{61}\end{aligned}$$

Þar sem stærðirnar eru jafnar þurfum við nú að sannreyna stefnuna. Ef við notum tangensfallið á staðsetningarvigurinn fæst

$$\begin{aligned}\tan\ \theta &= -\frac{5}{6} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{6}\right) \\ &= -39{,}8\,^\circ\end{aligned}$$

Við sjáum hins vegar að staðsetningarvigurinn endar í öðrum fjórðungi og því þurfum við að bæta við $180\,^\circ$. Stefnan er því $-39{,}8\,^\circ + 180\,^\circ = 140{,}2\,^\circ$.



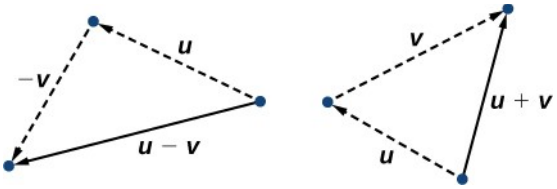
Mynd 7

Samlagning vigra og margföldun vigurs með tölu

Nú þegar við skiljum eiginleika vigra getum við reiknað með þeim. Þótt þægilegt sé að líta á vigurinn $u = \langle x, y \rangle$ sem ör eða stefnt línustrik frá upphafspunktinum að punktinum $\langle x, y \rangle$, geta vigrar legið hvar sem er í planinu. Summa tveggja vigra u og v, eða vigursamlagning, gefur þriðja vigurinn u + v, summuvigurinn.

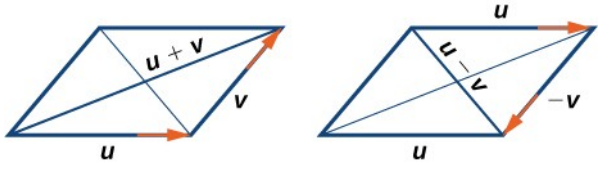
Til að finna u + v teiknum við fyrst vigurinn u og síðan vigurinn v frá endapunkti u. Upphafspunktur v er með öðrum orðum látinn falla að endapunkti u. Þetta samsvarar því að fara fyrst eftir öðrum vigrinum og síðan eftir hinum frá endapunkti þess fyrri. Summan u + v er summuvigurinn því hann fæst við samlagningu eða frádrátt tveggja vigra. Summuvigurinn liggur beint frá upphafspunkti u að endapunkti v, eins og sýnt er á mynd 8.

8



Mynd 8

Frádráttur vigra svipar til samlagningar. Til að finna u – v lítum við á stæðuna sem u + (–v). Að leggja –v við jafngildir því að snúa stefnu v við og leggja hann við endapunkt u. Nýi vigurinn hefst í upphafspunkti u og endar í endapunkti –v. Á mynd 9 er samlagning og frádráttur vigra borin saman með samsíðungum.



Mynd 9

DÆMI 5

Samlagning og frádráttur vigra

Gefnir eru $u = \langle 3, -2 \rangle$ og $v = \langle -1, 4 \rangle$, Finnið nýju vigrana tvo u + v og u − v.

Lausn

Til að finna summu tveggja vigra leggjum við þættina saman. Því er

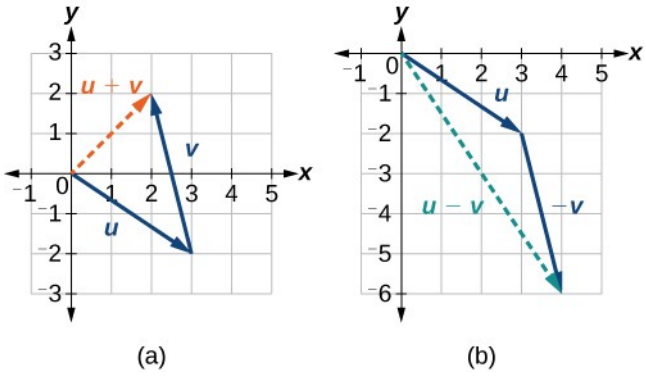
$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle 3, -2 \rangle + \langle -1, 4 \rangle \\ &= \langle 3 + (-1), -2 + 4 \rangle \\ &= \langle 2, 2 \rangle \end{aligned}$$

Sjá mynd 10 **(a).**

Til að finna mismun tveggja vigra leggjum við neikvæða þætti v við u. Því er

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) &= \langle 3, -2 \rangle + \langle 1, -4 \rangle \\ &= \langle 3 + 1, -2 + (-4) \rangle \\ &= \langle 4, -6 \rangle \end{aligned}$$

Sjá mynd 10 **(b).**



Mynd 10 (a) Summa tveggja vigra (b) Mismunur tveggja vigra

Margföldun vigurs með tölu

Þegar vigrar eru lagðir saman eða dregnir hvor frá öðrum fæst nýr vigur með aðra stærð og stefnu. Þegar vigur er margfaldaður með tölu, það er fasta, breytist hins vegar aðeins stærð vigursins eða lengd línustriksins. Margföldun vigurs með tölu hefur ekki áhrif á stefnu nema talan sé neikvæð; þá verður stefna vigursins sem fæst gagnstæð stefnu upphaflega vigursins.

MARGFÖLDUN VIGURS MEÐ TÖLU

Margföldun vigurs með tölu (skala) felst í margfeldi vigurs og tölu. Hver þáttur vigursins er margfaldaður með tölunni. Til að margfalda $v = \langle a, b \rangle$ með k, fæst því

$$k\,v = \langle k\,a, k\,b \rangle$$

Aðeins stærðin breytist nema k sé neikvætt; þá snýst stefna vigursins við.

DÆMI 6

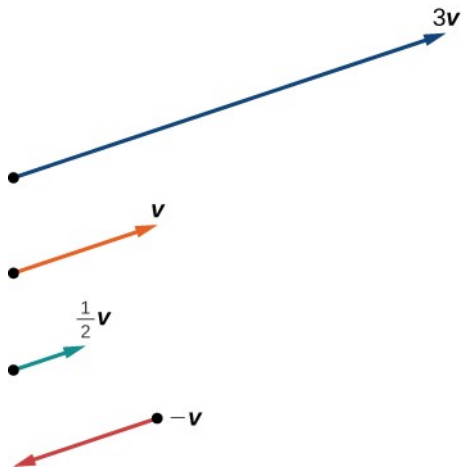
Að margfalda vigur með tölu

Gefinn er vigurinn $v = \langle 3, 1 \rangle$, Finnið 3v, $\frac{1}{2}v$, og –v.

Lausn

Sjá rúmfræðilega túlkun á mynd 11. Ef $v = \langle 3, 1 \rangle$, þá er

$$
\begin{aligned}
3\mathbf{v} &= \langle 3 \cdot 3, 3 \cdot 1 \rangle \\
&= \langle 9, 3 \rangle \\
\tfrac{1}{2}\mathbf{v} &= \left\langle \tfrac{1}{2} \cdot 3, \tfrac{1}{2} \cdot 1 \right\rangle \\
&= \left\langle \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle \\
-\mathbf{v} &= \langle -3, -1 \rangle
\end{aligned}
$$



Mynd 11

Greining

Takið eftir að vigurinn 3v er þrisvar sinnum lengri en v, $\frac{1}{2}v$ er helmingi styttri en v og –v er jafnlangur v en stefnir í gagnstæða átt.

REYNIÐ SJÁLF 2

Finnið margfeldið 3 u þegar

$$u = \langle 5, 4 \rangle.$$

DÆMI 7

Að finna nýjan vigur með vigursamlagningu og margföldun með tölu

Gefið er $u = \langle 3, -2 \rangle$ og $v = \langle -1, 4 \rangle$, Finnið nýja vigurinn w = 3u + 2v.

Lausn

Fyrst margföldum við hvorn vigur með tölunni.

$$\begin{aligned} 3\mathbf{u} &= 3\langle 3, -2 \rangle \\ &= \langle 9, -6 \rangle \\ 2\mathbf{v} &= 2\langle -1, 4 \rangle \\ &= \langle -2, 8 \rangle \end{aligned}$$

Leggjum síðan vigrana saman.

$$\begin{aligned} w &= 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \\ &= \langle 9, -6 \rangle + \langle -2, 8 \rangle \\ &= \langle 9 - 2, -6 + 8 \rangle \\ &= \langle 7, 2 \rangle \end{aligned}$$

Því er

$$\begin{aligned} & w \\ =& \langle 7, 2 \rangle. \end{aligned}$$

Að finna þáttaframsetningu

Í sumum verkefnum með vigra er gagnlegt að geta skipt vigri í þætti. Vigur hefur tvo þætti: lárétti þátturinn er í x-stefnu og lóðrétti þátturinn í y-stefnu. Á grafinu á mynd 12 sjáum við til dæmis að staðsetningarvigurinn $\langle\langle 2, 3 \rangle\rangle$ fæst með því að leggja saman vigrana v_1 og v_2. Vigurinn v_1 hefur upphafspunktinn $(0, 0)$ og endapunktinn $(2, 0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \langle 2 - 0, 0 - 0 \rangle \\ &= \langle 2, 0 \rangle \end{aligned}$$

Við höfum einnig vigurinn v_2 með upphafspunktinn $(0, 0)$ og endapunktinn $(0, 3)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \langle 0 - 0, 3 - 0 \rangle \\ &= \langle 0, 3 \rangle \end{aligned}$$

Staðsetningarvigurinn er því

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \langle 2 + 0, 3 + 0 \rangle \\ &= \langle 2, 3 \rangle \end{aligned}$$

Samkvæmt reglu Pýþagórasar er stærð v_1 jöfn 2 og stærð v_2 jöfn 3. Notið formúluna með staðsetningarvigrinum til að finna stærð v.

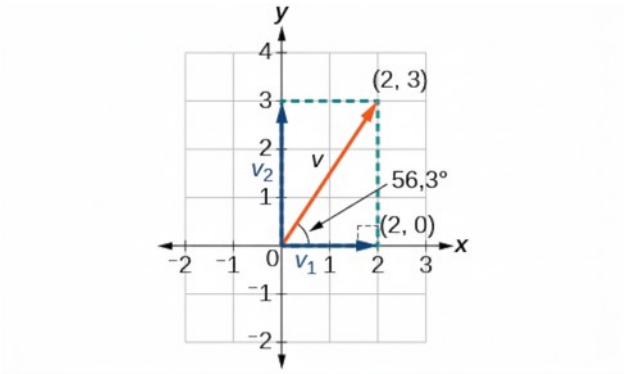
$$
\begin{aligned}
|\mathbf{v}| &= \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2} \\
&= \sqrt{2^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

Stærð v er $\sqrt{13}$. Til að finna stefnuna notum við tangensfallið $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

$$\tan\ \theta = \frac{|v_2|}{|v_1|}$$

$$\tan\ \theta = \frac{3}{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56{,}3\,°$$



8

Mynd 12

Stærð *v* er því $\sqrt{13}$ og stefnan er $56{,}3^{\circ}$ frá láréttu.

DÆMI 8

Að finna þætti vigurs

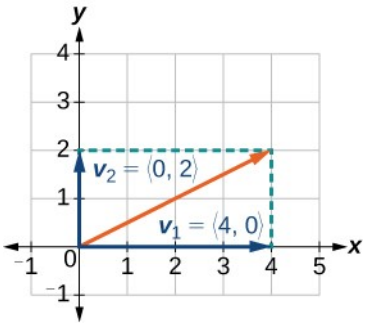
Finnið þætti vigursins *v* með upphafspunktinn $(3, 2)$ og endapunktinn $(7, 4)$.

Lausn

Finnið fyrst staðalstöðuna.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \langle 7 - 3, 4 - 2 \rangle \\
&= \langle 4, 2 \rangle
\end{aligned}
$$

Sjá skýringarmynd á mynd 13.



Mynd 13

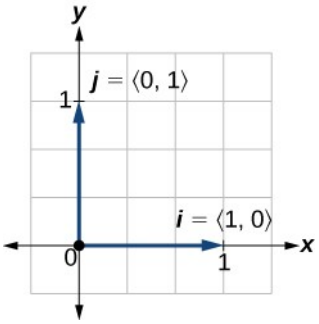
Lárétti þátturinn er $v_1 = \langle 4, 0 \rangle$ og lóðrétti þátturinn er

$$v_2 = \langle 0, 2 \rangle.$$

Að finna einingarvigur í stefnu v

Auk þess að finna þætti vigurs er gagnlegt við lausn verkefna að finna vigur sem stefnir í sömu átt og gefni vigurinn en hefur stærðina 1. Vigur með stærðina 1 nefnist einingarvigur. Þannig höldum við stefnu upphaflega vigursins en einföldum útreikningana.

Einingarvigrar eru skilgreindir með þáttum. Lárétti einingarvigurinn er ritaður $i = \langle 1, 0 \rangle$ og stefnir eftir jákvæða lárétta ásnum. Lóðrétti einingarvigurinn er ritaður $j = \langle 0, 1 \rangle$ og stefnir eftir jákvæða lóðrétta ásnum. Sjá mynd 14.



Mynd 14

EININGARVIGRAR

Ef v er vigur sem er ekki núllvigur þá er $\frac{v}{|v|}$ einingarvigur í stefnu v. Ef vigri er deilt með stærð sinni fæst einingarvigur. Takið eftir að stærðin er alltaf tala og að það að deila með tölu jafngildir því að margfalda með umhverfu hennar.

DÆMI 9

Að finna einingarvigur í stefnu v

Finnið einingarvigur í sömu stefnu og

$$v = \langle -5, 12 \rangle .$$

Lausn

Fyrst finnum við stærðina.

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

Síðan deilum við hverjum þætti með $|v|$, og fáum einingarvigur í sömu stefnu og v:

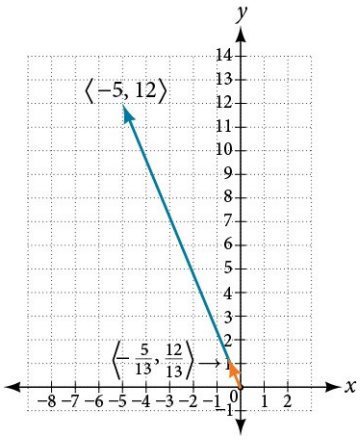
$$\frac{v}{|v|} = -\frac{5}{13} i + \frac{12}{13} j$$

eða á þáttaframsetningu

$$\frac{v}{|v|} = \left\langle -\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$$

8

Sjá mynd 15.



Mynd 15

Sannreynið að stærð einingarvigursins sé 1. Stærð $-\frac{5}{13} i + \frac{12}{13} j$ er gefin með

$$\sqrt{\left(-\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{169}+\frac{144}{169}}$$
$$=\sqrt{\frac{169}{169}}=1$$

Vigurinn u $=\frac{5}{13}$ i $\frac{+12}{13}$ j er einingarvigurinn í sömu stefnu og v $=\langle -5,12\rangle$.

Reikningar með vigrum með i og j

Hingað til höfum við skoðað undirstöðuatriði vigra: stærð og stefnu, samlagningu og frádrátt vigra, margföldun vigurs með tölu, þætti vigra og rúmfræðilega framsetningu þeirra. Nú þegar við þekkjum almennar aðferðir við reikning með vigrum setjum við vigra fram í rétthyrndum hnitum með i og j.

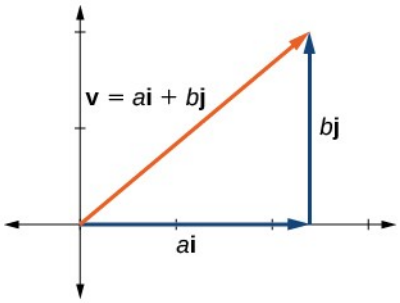
VIGRAR Í RÉTTHYRNDA PLANINU

Ef vigurinn v hefur upphafspunktinn $P=(x_1,y_1)$ og endapunktinn $Q=(x_2,y_2)$, er hann ritaður

$$v=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j$$

Staðsetningarvigurinn frá $(0,0)$ til (a,b), þar sem $(x_2-x_1)=a$ og $(y_2-y_1)=b$, er ritaður v = ai + bj. Þessi vigursumma nefnist línuleg samantekt vigranna i og j.

Lengd v = ai + bj er gefin með $|v|=\sqrt{a^2+b^2}$. Sjá mynd 16.



Mynd 16

DÆMI 10

Að rita vigur með i og j

Ef vigurinn v hefur upphafspunktinn $P=(2,-6)$ og endapunktinn $Q=(-6,6)$, ritið hann þá með i og j.

Lausn

Byrjið á að rita almennt form vigursins. Setjið síðan gefnu gildin inn fyrir hnitin.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \\ &= (-6 - 2)\mathbf{i} + (6 - (-6))\mathbf{j} \\ &= -8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}\end{aligned}$$

DÆMI 11

Að rita vigur með i og j út frá upphafs- og endapunkti

Ef upphafspunkturinn er $P_1 = (-1, 3)$ og endapunkturinn $P_2 = (2, 7)$, ritið þá vigurinn v með i og j.

Lausn

Byrjið á að rita almennt form vigursins. Setjið síðan gefnu gildin inn fyrir hnitin.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \\ \mathbf{v} &= (2 - (-1))\mathbf{i} + (7 - 3)\mathbf{j} \\ &= 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF 3

Ritið vigurinn u með upphafspunktinn $P = (-1, 6)$ og endapunktinn $Q = (7, -5)$ með i og j.

Reikningar með vigrum með i og j

Þegar vigrar eru ritaðir með i og j, getum við lagt þá saman, dregið þá hvorn frá öðrum og margfaldað þá með tölu með því að reikna með samsvarandi þáttum.

8

SAMLAGNING OG FRÁDRÁTTUR VIGRA Í RÉTTHYRNDUM HNITUM

Ef gefnir eru v = ai + bj og u = ci + dj þá er

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{u} &= (a + c)\mathbf{i} + (\mathbf{b} + d)\mathbf{j} \\ \mathbf{v} - \mathbf{u} &= (a - c)\mathbf{i} + (\mathbf{b} - d)\mathbf{j}\end{aligned}$$

DÆMI 12

Að finna summu vigra

Finnið summu $v_1 = 2i - 3j$ og $v_2 = 4i + 5j$.

Lausn

Samkvæmt formúlunni fæst

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= (2+4)\mathbf{i} + (-3+5)\mathbf{j} \\ &= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\end{aligned}$$

Að reikna þáttaframsetningu vigurs: stefna

Við höfum séð hvernig vigrar eru teiknaðir út frá upphafs- og endapunkti og hvernig staðsetningarvigur er fundinn. Við höfum einnig skoðað ritháttt fyrir vigra sem eru teiknaðir sérstaklega í kartesísku hnitakerfi með i og j. Lengd allra þessara vigra má reikna. Nú viljum við tengja saman meginatriðin og skoða nánar hugtökin lengd og stefnu.

Stefna er reiknuð með sömu einföldu aðferð og við notuðum fyrir pólhnit. Við finnum stefnu vigursins með því að finna hornið við lárétt. Til þess notum við grundvallarsamsemdir hornafalla en setjum $|v|$ í stað r.

ÞÆTTIR VIGURS ÚT FRÁ STÆRÐ OG STEFNU

Ef staðsetningarvigur $v = \langle x, y \rangle$ og stefnuhorn θ, eru gefin,

$$\cos\ \theta = \frac{x}{|v|} \qquad \text{og} \qquad \sin\ \theta = \frac{y}{|v|}$$
$$x = |v|\cos\ \theta \qquad\qquad y = |v|\sin\ \theta$$

Því er $v = x\,i + y\,j = |v|\cos\theta\,i + |v|\sin\theta\,j$, og stærðin er gefin með $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

DÆMI 13

Að rita vigur á þáttaframsetningu þegar stærð og stefna eru gefnar

Gefinn er vigur með lengdina 7 og hornið 135°. Ritið hann á þáttaframsetningu.

Lausn

Ef við notum umritunarformúlurnar $x = |v|\cos\theta$ og $y = |v|\sin\theta$, fæst

$$\begin{aligned}x &= 7\cos(135^\circ) \\ &= -\tfrac{7\sqrt{2}}{2} \\ y &= 7\sin(135^\circ) \\ &= \tfrac{7\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Vigurinn má rita sem $v = 7\cos\left(135^\circ\right) + 7\sin\left(135^\circ\right)$ eða á einfölduðu formi sem

$$v = -\frac{7\sqrt{2}}{2}i + \frac{7\sqrt{2}}{2}j$$

REYNIÐ SJÁLF 4

Vigur liggur frá upphafspunktinum að punktinum $(3, 5)$. Ritið vigurinn með stærð og stefnu.

Að finna innfeldi tveggja vigra

Eins og fram kom fyrr í hlutanum er útkoman vigur við margföldun vigurs með tölu. Ef vigur er margfaldaður með vigri koma tveir möguleikar til greina: innfeldi og krossfeldi. Hér skoðum við aðeins innfeldið; krossfeldi kann að koma fyrir í lengra komnum stærðfræðinámskeiðum.

Innfeldi tveggja vigra fæst með því að margfalda vigrana saman og útkoman er tala.

INNFELDI

Innfeldi tveggja vigra $v=\langle a, b\rangle$ og $u=\langle c, d\rangle$ er summa margfeldis láréttu þáttanna og margfeldis lóðréttu þáttanna.

$$v \cdot u = a\,c + b\,d$$

Notið formúluna hér á eftir til að finna hornið milli vigranna.

$$\cos\theta = \frac{v}{|v|} \cdot \frac{u}{|u|}$$

DÆMI 14

Að finna innfeldi tveggja vigra

Finnið innfeldi $v=\langle 5, 12\rangle$ og $u=\langle -3, 4\rangle$.

Lausn

Með formúlunni fæst

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= \langle 5, 12\rangle \cdot \langle -3, 4\rangle \\ &= 5 \cdot (-3) + 12 \cdot 4 \\ &= -15 + 48 \\ &= 33\end{aligned}$$

DÆMI 15

Að finna innfeldi tveggja vigra og hornið milli þeirra

Finnið innfeldi $\mathrm{v}_1 = 5\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{j}$ og $\mathrm{v}_2 = 3\,\mathrm{i} + 7\,\mathrm{j}$. Finnið síðan hornið milli vigranna.

Lausn

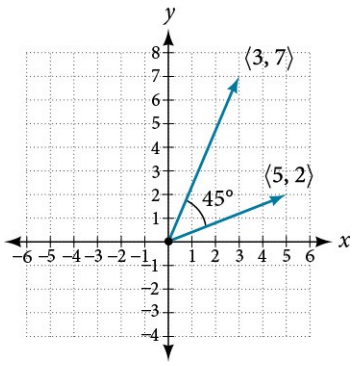
Til að finna innfeldið margföldum við samsvarandi þætti.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \langle 5, 2\rangle \cdot \langle 3, 7\rangle \\ &= 5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \\ &= 15 + 14 \\ &= 29\end{aligned}$$

Til að finna hornið milli vigranna notum við formúluna $\cos\theta = \frac{v}{|v|} \cdot \frac{u}{|u|}$.

$$\begin{aligned}\frac{v}{|v|} \cdot \frac{u}{|u|} &= \left\langle \frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{3}{\sqrt{58}}, \frac{7}{\sqrt{58}} \right\rangle \\ &= \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{\sqrt{58}} + \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{7}{\sqrt{58}} \\ &= \frac{15}{\sqrt{1682}} + \frac{14}{\sqrt{1682}} = \frac{29}{\sqrt{1682}} \\ &= 0{,}707107 \\ \cos^{-1}(0{,}707107) &= 45°\end{aligned}$$

Sjá mynd 17.



Mynd 17

8

DÆMI 16

Að finna hornið milli tveggja vigra

Finnið hornið milli $u = \langle -3, 4\rangle$ og $v = \langle 5, 12\rangle$.

Lausn

Með formúlunni fæst

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u}{|u|}\cdot\frac{v}{|v|}\right)$$

$$\left(\frac{u}{|u|}\cdot\frac{v}{|v|}\right) = \frac{-3\,i+4\,j}{5}\cdot\frac{5\,i+12\,j}{13}$$

$$= \left(-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}\right)$$

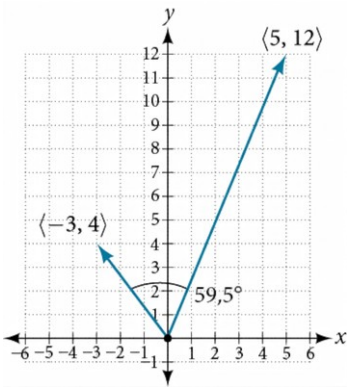
$$= -\frac{15}{65}+\frac{48}{65}$$

$$= \frac{33}{65}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$$

$$= 59{,}5^{\circ}$$

Sjá mynd 18.



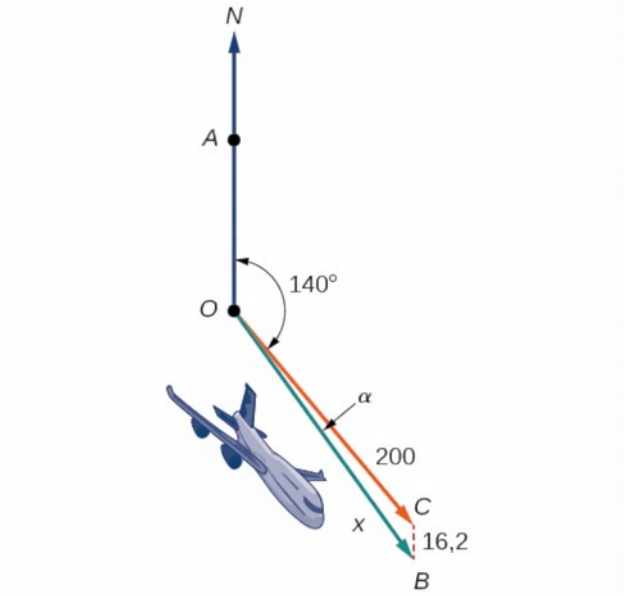
Mynd 18

DÆMI 17

Að finna ferð og stefnu miðað við jörð með vigrum

Nú höfum við tækin til að leysa verkefnið sem kynnt var í upphafi hlutans.

Flugvél flýgur með lofthraðanum 200 mílur á klukkustund og stefnir í suðaustur eftir stefnunni 140°. Norðanvindur, frá norðri til suðurs, blæs með hraðanum 16,2 mílur á klukkustund. Hver eru ferð flugvélarinnar miðað við jörð og raunveruleg stefna hennar? Sjá mynd 19.



Mynd 19

Lausn

Ferðin miðað við jörð er táknuð með x á myndinni og við þurfum að finna hornið α til að reikna leiðréttu stefnuna, sem verður $140^\circ + \alpha$.

Takið eftir á mynd 19 að hornið BCO verður að vera jafnt horninu AOC samkvæmt reglunni um víxlhorn og því er hornið BCO jafnt 140°. Við getum fundið x með kósínusreglunni:

$$x^2 = (16{,}2)^2 + (200)^2 - 2\,(16{,}2)\,(200)\cos(140^\circ)$$
$$x^2 = 45.226{,}41$$
$$x = \sqrt{45.226{,}41}$$
$$x = 212{,}7$$

Ferðin miðað við jörð er um það bil 213 mílur á klukkustund. Nú getum við reiknað stefnuna með sínusreglunni.

$$\frac{\sin\ \alpha}{16{,}2} = \frac{\sin(140^\circ)}{212{,}7}$$
$$\sin\ \alpha = \frac{16{,}2\ \sin(140^\circ)}{212{,}7}$$
$$= 0{,}04896$$
$$\sin^{-1}(0{,}04896) = 2{,}8^\circ$$

Flugvélin stefnir því í suðaustur eftir stefnunni 140°+2,8°=142,8°. Ferðin miðað við jörð er 212,7 mílur á klukkustund.

VEFGÖGN

Í þessum netgögnum finnið þið frekari útskýringar og æfingar í vigrum.

- Inngangur að vigrum
- Reikningar með vigrum
- Einingarvigurinn

8.8 Æfingar hlutans

Hugtakaspurningar

1. Hvaða einkenni hafa bókstafirnir sem almennt eru notaðir til að tákna vigra?

2. Að hvaða leyti er vigur nákvæmari lýsing en línustrik?

3. Hvað eru i og j, og hvað tákna þeir?

4. Hvað er þáttaframsetning?

5. Þegar einingarvigur er ritaður sem $\langle \langle a, b \rangle, \rangle$, hvor bókstafurinn er stuðull i og hvor stuðull j?

Algebruverkefni

6. Ef vigur hefur upphafspunktinn $(5, 2)$ og endapunktinn $(-1, -3)$, finnið þá jafngildan vigur með upphafspunktinn $(0, 0)$. Ritið vigurinn á þáttaframsetningunni $\langle \langle a, b \rangle . \rangle$.

7. Ef vigur hefur upphafspunktinn $(-4, 2)$ og endapunktinn $(3, -3)$, finnið þá jafngildan vigur með upphafspunktinn $(0, 0)$. Ritið vigurinn á þáttaframsetningunni $\langle \langle a, b \rangle . \rangle$.

8. Ef vigur hefur upphafspunktinn $(7, -1)$ og endapunktinn $(-1, -7)$, finnið þá jafngildan vigur með upphafspunktinn $(0, 0)$. Ritið vigurinn á þáttaframsetningunni $\langle \langle a, b \rangle . \rangle$.

8

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið ákvarða hvort vigrarnir u og v séu jafnir, þar sem u hefur upphafspunktinn P_1 og endapunktinn P_2 og v hefur upphafspunktinn P_3 og endapunktinn P_4.

9. $P_1 = (5, 1), P_2 = (3, -2), P_3 = (-1, 3)$, og $P_4 = (9, -4)$

10. $P_1 = (2, -3), P_2 = (5, 1), P_3 = (6, -1)$, og $P_4 = (9, 3)$

11. $P_1 = (-1, -1), P_2 = (-4, 5), P_3 = (-10, 6)$, og $P_4 = (-13, 12)$

12. $P_1 = (3, 7), P_2 = (2, 1), P_3 = (1, 2)$, og $P_4 = (-1, -4)$

13. $P_1 = (8, 3), P_2 = (6, 5), P_3 = (11, 8)$, og $P_4 = (9, 10)$

14. Ef upphafspunkturinn er $P_1 = (-3, 1)$ og endapunkturinn $P_2 = (5, 2)$, ritið þá vigurinn v með i og j.

15. Ef upphafspunkturinn er $P_1 = (6, 0)$ og endapunkturinn $P_2 = (-1, -3)$, ritið þá vigurinn v með i og j.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota vigrana u = i + 5 j, v = −2 i − 3 j og w = 4 i − j.

16. Finnið u + (v – w)

17. Finnið 4 v + 2 u

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota gefnu vigrana til að reikna u + v, u – v og 2 u – 3 v.

18.

$$u=\langle 2,-3\rangle, v=\langle 1,5\rangle$$

19.

$$u=\langle -3,4\rangle, v=\langle -2,1\rangle$$

20. Látum v = −4 i + 3 j. Finnið vigur sem er helmingi styttri og stefnir í sömu átt og v.

21. Látum v = 5 i + 2 j. Finnið vigur sem er tvöfalt lengri og stefnir í gagnstæða átt við v.

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna einingarvigur í sömu stefnu og gefni vigurinn.

22. $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

23. $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

24. $\boldsymbol{c} = 10\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

25.

$$d=-\frac{1}{3}i+\frac{5}{2}j$$

26. $\boldsymbol{u} = 100\boldsymbol{i} + 200\boldsymbol{j}$

27. $\boldsymbol{u} = -14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið finna stærð og stefnu vigursins, $0 \le \theta < 2\pi$.

28.

$$\langle 0,4\rangle$$

29.

$$\langle 6,5\rangle$$

30.

$$\langle 2,-5\rangle$$

31.

$$\langle -4,-6\rangle$$

32. Gefnir eru u = 3i – 4j og v = −2i + 3j. Reiknið $u \cdot v$.

33. Gefnir eru u = –i – j og v = i + 5j. Reiknið $u \cdot v$.

34. Gefnir eru $u=\langle -2,4\rangle$ og $v=\langle -3,1\rangle$, Reiknið $u \cdot v$.

35. Gefnir eru u $=\langle -1,6\rangle$ og v $=\langle 6,-1\rangle$, Reiknið $u \cdot v$.

Grafísk verkefni

Í eftirfarandi æfingum er vigurinn v, gefinn. Teiknið v, 3v, og $\frac{1}{2}v$.

36.

$$\langle 2, -1 \rangle$$

37.

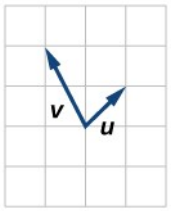
$$\langle -1, 4 \rangle$$

38.

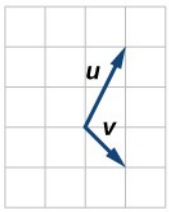
$$\langle -3, -2 \rangle$$

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota sýndu vigrana til að skissa u + v, u − v og 2 u.

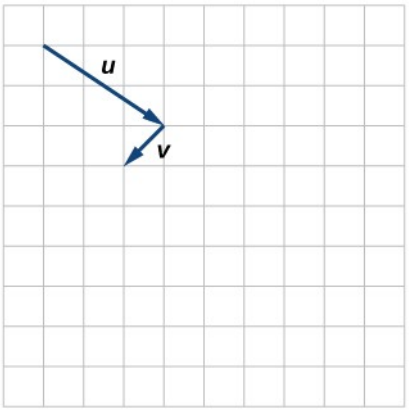
39.



40.

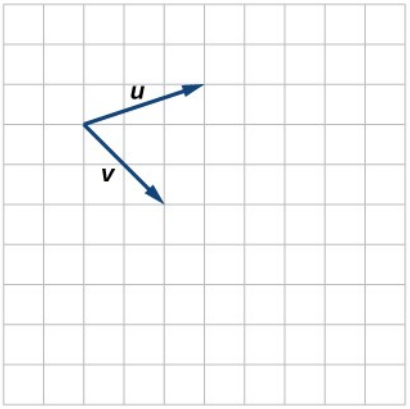


41.

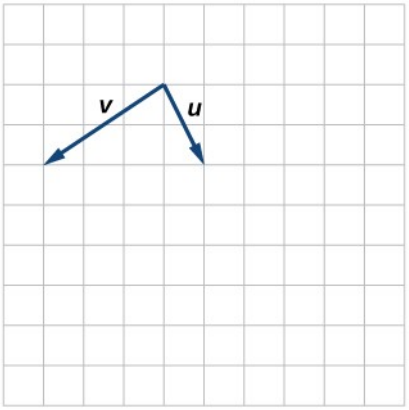


Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota sýndu vigrana til að skissa 2 u + v.

42.

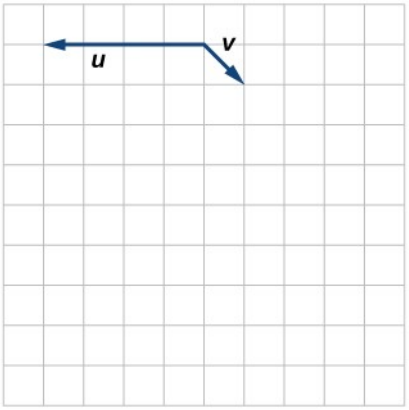


43.

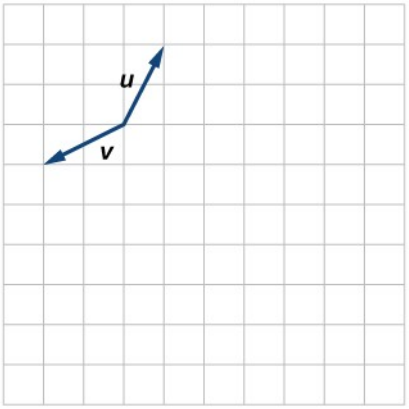


Í eftirfarandi æfingum skuluð þið nota sýndu vigrana til að skissa u − 3 v.

44.

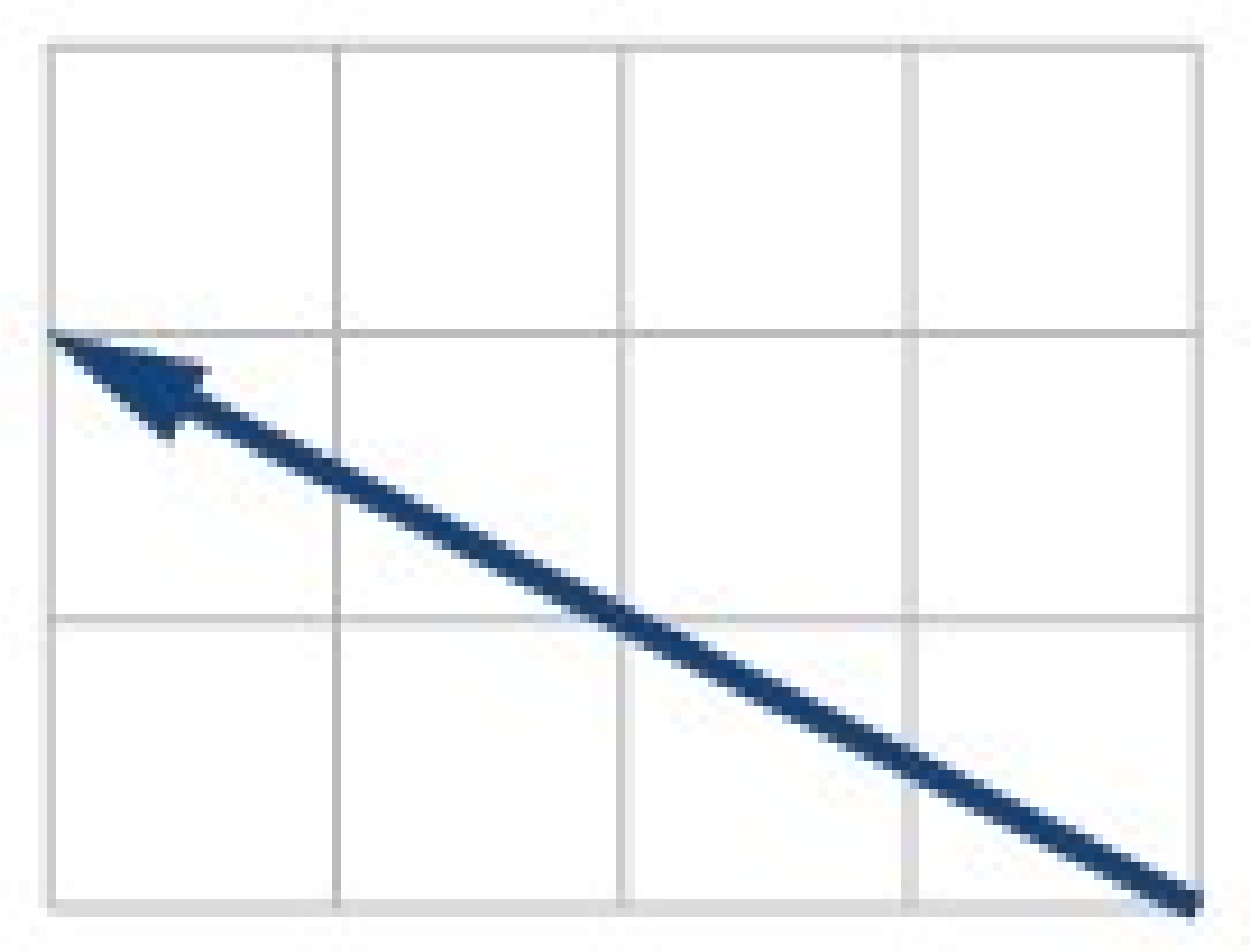


45.

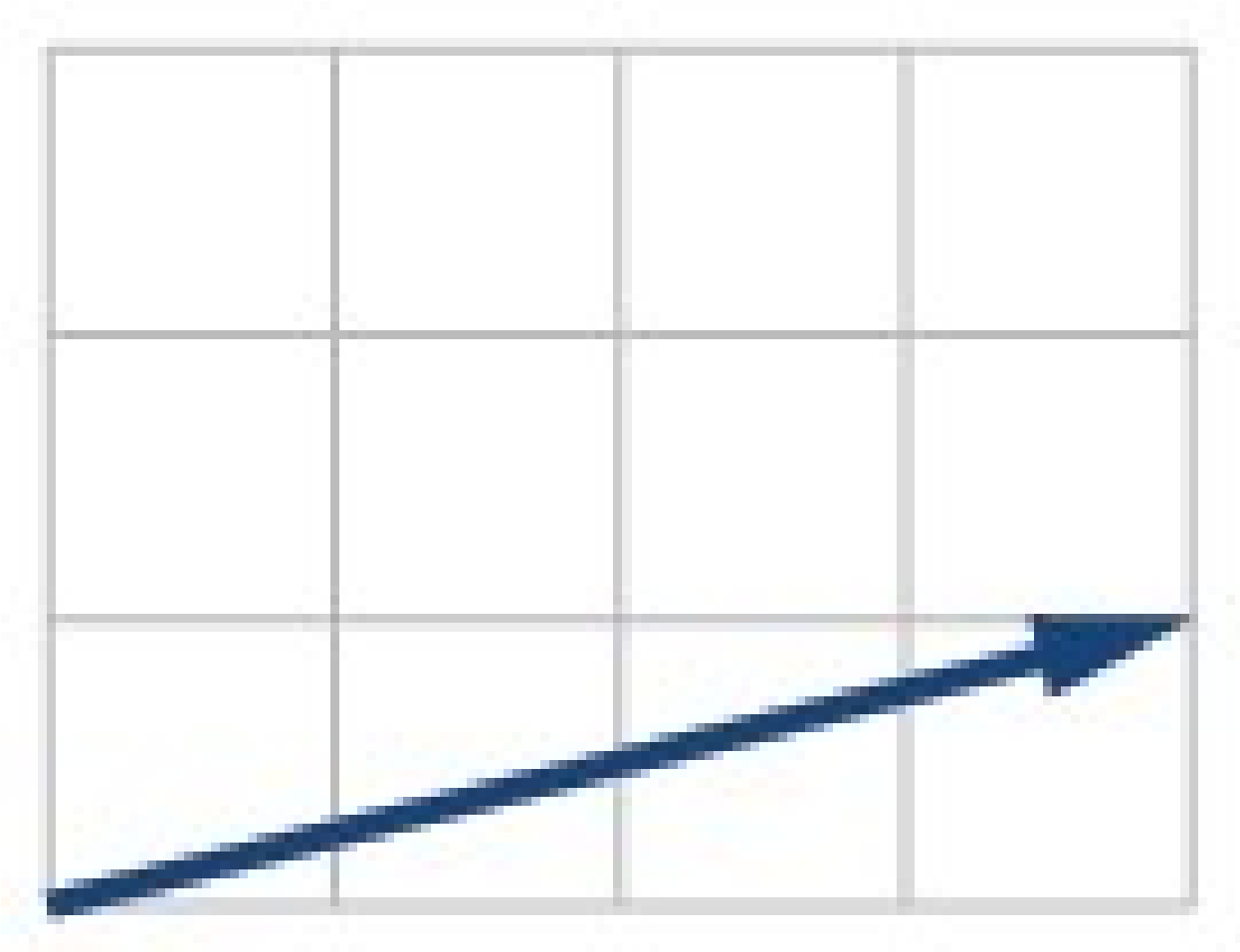


Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita sýnda vigurinn á þáttaframsetningu.

46.



47.



48. Ef upphafspunkturinn er $P_1=(2,1)$ og endapunkturinn $P_2=(-1,2)$, ritið þá vigurinn v með i og j, og teiknið síðan vigurinn á grafið.

49. Ef upphafspunkturinn er $P_1=(4,-1)$ og endapunkturinn $P_2=(-3,2)$, ritið þá vigurinn v með i og j. Teiknið punktana og vigurinn á grafið.

50. Ef upphafspunkturinn er $P_1=(3,3)$ og endapunkturinn $P_2=(-3,3)$, ritið þá vigurinn v með i og j. Teiknið punktana og vigurinn á grafið.

Ítarverkefni

Í eftirfarandi æfingum eru stærð og stefna í staðalstöðu gefnar. Ritið vigurinn á þáttaframsetningu.

51.

$$|v|=6,\theta=45^\circ$$

52.

$$|v|=8,\theta=220^\circ$$

53.

$$|v|=2,\theta=300^\circ$$

54.

$$|v|=5,\theta=135^\circ$$

55. Kassi sem vegur 60 pund hvílir á skáfleti sem hallar um 12°. Námundið að næsta tíunda hluta.

1. ⓐ Finnið stærð þverþáttar kraftsins, það er þáttarins sem er hornréttur á flötinn.
2. ⓑ Finnið stærð kraftþáttarins sem er samsíða skáfletinum.

56. Kassi sem vegur 25 pund hvílir á skáfleti sem hallar um 8°. Námundið að næsta tíunda hluta.

1. ⓐ Finnið stærð þverþáttar kraftsins, það er þáttarins sem er hornréttur á flötinn.
2. ⓑ Finnið stærð kraftþáttarins sem er samsíða skáfletinum.

57. Finnið stærð lárétta og lóðrétta þáttar vigurs með stærðina 8 pund sem stefnir 27° yfir láréttu. Námundið að næsta hundraðshluta.

58. Finnið stærð lárétta og lóðrétta þáttar vigursins með stærðina 4 pund sem stefnir 127° yfir láréttu. Námundið að næsta hundraðshluta.

59. Finnið stærð lárétta og lóðrétta þáttar vigurs með stærðina 5 pund sem stefnir 55° yfir láréttu. Námundið að næsta hundraðshluta.

60. Finnið stærð lárétta og lóðrétta þáttar vigursins með stærðina 1 pund sem stefnir 8° yfir láréttu. Námundið að næsta hundraðshluta.

8

Verkefni úr raunveruleikanum

61. Kona fer að heiman og gengur 3 mílur í vestur og síðan 2 mílur í suðvestur. Hve langt er hún að heiman og í hvaða átt þarf hún að ganga til að fara beint heim?

62. Bátur leggur frá höfn og siglir 6 mílur í norður og síðan 2 mílur í norðaustur. Hve langt er báturinn frá höfninni og í hvaða átt þarf hann að sigla til að fara beint aftur til hafnar?

63. Maður gengur að heiman 4 mílur í austur, 2 mílur í suðaustur, 5 mílur í suður, 4 mílur í suðvestur og 2 mílur í austur. Hve langt hefur hann gengið? Hve langt þyrfti hann að ganga ef hann færi beint heim?

64. Kona gengur að heiman 4 mílur í austur, 7 mílur í suðaustur, 6 mílur í suður, 5 mílur í suðvestur og 3 mílur í austur. Hve langt hefur hún gengið? Hve langt þyrfti hún að ganga ef hún færi beint heim?

65. Maður gengur að heiman 3 mílur eftir stefnunni 20° norður frá vestri, síðan 5 mílur eftir stefnunni 10° vestur frá suðri og loks 4 mílur eftir stefnunni 15° norður frá austri. Hve langt og í hvaða átt þyrfti hann að ganga til að fara beint heim?

66. Kona gengur að heiman 6 mílur eftir stefnunni 40° norður frá austri, síðan 2 mílur eftir stefnunni 15° austur frá suðri og loks 5 mílur eftir stefnunni 30° suður frá vestri. Hve langt og í hvaða átt þyrfti hún að ganga til að fara beint heim?

67. Flugvél stefnir í norður með lofthraðanum 600 km/hr en vindur blæs úr suðvestri með hraðanum 80 km/hr. Hve margar gráður rekur flugvélina af stefnu og hver er ferð hennar miðað við jörð?

68. Flugvél stefnir í norður með lofthraðanum 500 km/hr en vindur blæs úr norðvestri með hraðanum 50 km/hr. Hve margar gráður rekur flugvélina af stefnu og hver er ferð hennar miðað við jörð?

69. Flugvél þarf að stefna beint í norður en vindur blæs úr suðvestri með hraðanum 60 km/hr. Flugvélin flýgur með lofthraðanum 550 km/hr. Hve margar gráður vestur frá norðri þarf flugmaðurinn að stefna vélinni svo hún fljúgi beint í norður?

70. Flugvél þarf að stefna beint í norður en vindur blæs úr norðvestri með hraðanum 80 km/hr. Flugvélin flýgur með lofthraðanum 500 km/hr. Hve margar gráður vestur frá norðri þarf flugmaðurinn að stefna vélinni svo hún fljúgi beint í norður?

71. Í tölvuleik er punktinum $(5, 7)$ snúið rangsælis um upphafspunktinn um hornið 35°. Finnið ný hnit punktsins.

72. Í tölvuleik er punktinum $(7, 3)$ snúið rangsælis um upphafspunktinn um hornið 40°. Finnið ný hnit punktsins.

73. Tvö börn kasta bolta fram og til baka beint þvert yfir aftursæti bíls. Boltanum er kastað á 10 mílna hraða á klukkustund miðað við bílinn og bíllinn ekur eftir veginum á 25 mílna hraða á klukkustund. Ef annað barnið grípur ekki boltann og hann flýgur út um gluggann, í hvaða átt flýgur hann ef litið er fram hjá loftmótstöðu?

74. Tvö börn kasta bolta fram og til baka beint þvert yfir aftursæti bíls. Boltanum er kastað á 8 mílna hraða á klukkustund miðað við bílinn og bíllinn ekur eftir veginum á 45 mílna hraða á klukkustund. Ef annað barnið grípur ekki boltann og hann flýgur út um gluggann, í hvaða átt flýgur hann ef litið er fram hjá loftmótstöðu?

75. Hlutur sem vegur 50 pund hvílir á skáfleti sem hallar um 19°. Finnið stærð kraftþáttanna sem eru samsíða skáfletinum og hornréttir á hann. Námundið að næsta tíunda hluta úr pundi.

76. Gerum ráð fyrir að á hlut verki þrír kraftar: 10 pund til hægri, 25 pund upp á við og 5 pund undir horninu 45° við lárétt. Hvaða einstaki kraftur er heildarkrafturinn sem verkar á hlutinn?

77. Gerum ráð fyrir að á hlut verki þrír kraftar: 10 pund til hægri, 25 pund undir horninu −135° við lárétt og 5 pund undir horninu 150° við lárétt. Hvaða einstaki kraftur er heildarkrafturinn sem verkar á hlutinn?

78. Jafnvægisskilyrðið er að summa kraftanna sem verka á hlut sé núllvigurinn. Gerum ráð fyrir að á hlut verki þrír kraftar: 2 pund til hægri, 5 pund upp á við og 3 pund undir horninu 45° við lárétt. Hvaða einstaka kraft þarf til að koma hlutnum í jafnvægi?

79. Gerum ráð fyrir að á hlut verki þrír kraftar: 3 pund til vinstri, 4 pund upp á við og 2 pund undir horninu 30° við lárétt. Hvaða einstaka kraft þarf til að koma hlutnum í jafnvægi? Teiknið vigurinn.

Lykilhugtök

hæð

hornrétt línustrik frá einum hornpunkti þríhyrnings að mótlægri hlið, eða að framlengingu hennar ef þríhyrningurinn er gleiðhyrndur; hæðin myndar tvo rétthyrnda þríhyrninga

tvíræða tilvikið

tilvik þar sem fleiri en einn þríhyrningur er gild lausn fyrir gefinn órétthyrndan SSA-þríhyrning

vefja Arkimedesar

pólferill sem gefinn er með $r=\theta$. Þegar jafnan er margfölduð með fasta fæst formið $r=a\theta$. Þegar $r=\theta$, heldur ferillinn áfram að víkka í vefju eftir öllu skilgreiningarmenginu

stefnuhorn

hornið sem tengist tvinntölu; hornið milli línunnar frá upphafspunkti að punktinum og jákvæða raunássins

hjartaferill

ferill af ætt snigilferla sem dregur nafn sitt af hjartalögun sinni; jafna hans er $r=a\pm b\cos\theta$ eða $r=a\pm b\sin\theta$, þar sem $\frac{a}{b}=1$

kúptur snigilferill

gerð einlykkju-snigilferils sem lýst er með $r=a\pm b\cos\theta$ eða $r=a\pm b\sin\theta$ þannig að $\frac{a}{b}\geq 2$

setning de Moivres

formúla sem er notuð til að finna n-ta veldi eða n-tu rætur tvinntölu; hún segir að fyrir jákvæða heiltölu n, z^n fáist með því að hefja tölugildið í n-ta veldi og margfalda hornin með n

dældaður snigilferill

gerð einlykkju-snigilferils sem lýst er með $r=a\pm b\cos\theta$ eða $r=a\pm b\sin\theta$ þannig að $1<\frac{a}{b}<2$

innfeldi
tala sem fæst úr tveimur vigrum með því að margfalda saman láréttu þættina, margfalda saman lóðréttu þættina og leggja margfeldin saman

almenna regla Pýþagórasar
útvíkkun á kósínusreglunni sem tengir saman hliðar óréttþyrnds þríhyrnings og er notuð fyrir SAS- og SSS-þríhyrninga

upphafspunktur
upphaf vigurs

snigilferill með innri lykkju
pólferill sem líkist hjartaferli en hefur innri lykkju; hann fer tvisvar gegnum skautið og er lýst með $r = a \pm b\cos\theta$ eða $r = a \pm b\sin\theta$ þar sem $a < b$

kósínusreglan
segir að annað veldi hverrar hliðar þríhyrnings sé jafnt summu annars veldis hinna hliðanna tveggja, að frádregnu tvöföldu margfeldi þessara tveggja hliða og kósínuss hornsins á milli þeirra

sínusreglan
segir að hlutfall sínuss horns í þríhyrningi og lengdar mótlægrar hliðar sé hið sama fyrir öll þrjú hornin; nota má hvaða tvö hlutföll sem er til að finna óþekkt horn eða óþekkta hlið

lemniskata
pólferill sem líkist tölunni 8 og er gefinn með jöfnunum $r^2 = a^2\cos 2\theta$ og $r^2 = a^2\sin 2\theta$, þar sem $a \neq 0$

stærð
lengd vigurs; getur táknað stærð á borð við hraða og er reiknuð með reglu Pýþagórasar

tölugildi
tölugildi tvinntölu eða fjarlægðin frá upphafspunkti að punktinum (x, y); einnig kallað sveifluvídd

óréttþyrndur þríhyrningur
þríhyrningur sem er ekki rétthyrndur

einlykkju-snigilferill
pólferill sem lýst er með $r = a \pm b\cos\theta$ eða $r = a \pm b\sin\theta$ þannig að $a > 0$, $b > 0$, og $\frac{a}{b} > 1$; hann getur verið dældur eða kúptur og fer ekki gegnum skautið

stiki
breyta, oft tími, sem bæði x og y eru háð

pólhnitaás
í pólhnitaneti samsvarar hann jákvæða x-ásnum í rétthyrndu hnitakerfi

pólhnit
hnit punkts í pólhnitaneti, táknuð (r, θ), þar sem θ gefur snúningshornið frá pólhnitaásnum og r táknar geislann, það er fjarlægð punktsins frá skautinu í stefnu θ

póljafna
jafna sem lýsir ferli í pólhnitaneti

pólform tvinntölu
tvinntala sett fram með horni θ og fjarlægðinni r; frá upphafspunkti; finna má formið með umreikningsformúlunum $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

skaut
upphafspunktur pólhnitanetsins

summuvigur
vigur sem fæst þegar tveir vigrar eru lagðir saman eða annar dreginn frá hinum, eða þegar vigur er margfaldaður með tölu

rós
pólferill sem líkist blómi og er gefinn með jöfnunum $r = a\cos n\theta$ eða $r = a\sin n\theta$; þegar n er slétt tala hefur ferillinn $2n$ krónublöð og mikla samhverfu, en þegar n er oddatala hefur hann n krónublöð

skalarstærð
stærð sem hefur tölugildi en enga stefnu; fasti

margföldun vigurs með tölu
felst í því að margfalda hvern þátt vigurs með fasta

staðalstaða
staðsetning vigurs með upphafspunkt í $(0, 0)$ og endapunkt í (a, b), þar sem vigurinn er táknaður með breytingunni á x-hnitum og breytingunni á y-hnitum upprunalega vigursins

endapunktur
lokapunktur vigurs, yfirleitt sýndur með ör sem gefur stefnu hans til kynna

einingarvigur
vigur sem hefst í upphafspunkti og hefur lengdina 1; lárétti einingarvigurinn liggur eftir x-ásnum og er skilgreindur sem $i = \langle 1, 0 \rangle$ en lóðrétti einingarvigurinn liggur eftir y-ásnum og er skilgreindur sem $j = \langle 0, 1 \rangle$.

vigur
stærð sem hefur bæði tölugildi og stefnu og er táknuð með stefndu línustriki með upphafspunkti og endapunkti

vigursamlagning
summa tveggja vigra sem fæst með því að leggja saman samsvarandi þætti

Lykiljöfnur

Sínusreglan	$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b} = \frac{\sin\ \gamma}{c}$ $\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{\sin\ \gamma}$
Flatarmál óréttþyrndra þríhyrninga	$\text{Flatarmál} = \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin\ \ \alpha$ $= \frac{1}{2}\ a\ c\ \sin\ \ \beta$ $= \frac{1}{2}\ a\ b\ \sin\ \ \gamma$
Kósínusreglan	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\ \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\ \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\ \gamma$
Heronsformúla	Flatarmál $= \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$ þar sem $s = \frac{(a+b+c)}{2}$
Umreikningsformúlur	$\cos\ \theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\ \theta$ $\sin\ \theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\ \theta$ $r^2 = x^2 + y^2$ $\tan\ \theta = \frac{y}{x}$

8

Meginatriði

8.1 Óréttþyrndir þríhyrningar: sínusreglan

- Nota má sínusregluna til að leysa óréttþyrnda þríhyrninga.
- Samkvæmt sínusreglunni er hlutfall sínuss horns og lengdar mótlægrar hliðar jafnt samsvarandi hlutfalli fyrir hin hornin tvö.
- Þrjú tilvik koma til greina: ASA, AAS og SSA. Út frá gefnum upplýsingum má velja viðeigandi jöfnu til að finna lausnina sem leitað er að. Sjá dæmi 1.
- Tvíræða tilvikið kemur upp þegar fleiri en ein útkoma er möguleg fyrir óréttþyrndan þríhyrning.
- Þrjú tilvik geta komið upp við SSA-röðun: ein lausn, tvær mögulegar lausnir eða engin lausn. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Nota má sínusregluna til að leysa þríhyrninga með gefnum skilyrðum. Sjá dæmi 4.
- Almenna flatarmálsformúlan fyrir þríhyrninga gildir einnig um óréttþyrnda þríhyrninga ef viðeigandi hæð er fundin fyrst. Sjá dæmi 5.

- Hornafræði nýtist í margs konar verkefnum. Oft má leysa slík verkefni með því að teikna fyrst mynd af gefnum upplýsingum og nota síðan viðeigandi jöfnu. Sjá dæmi 6.

8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan

- Kósínusreglan lýsir sambandinu milli hornastærða og hliðarlengda í óréttþyrndum þríhyrningum.
- Almenna regla Pýþagórasar er kósínusreglan fyrir tvö tilvik óréttþyrndra þríhyrninga: SAS og SSS. Með því að draga ímyndaða hæð má skipta óréttþyrnda þríhyrningnum í tvo réttþyrnda þríhyrninga eða mynda einn slíkan. Þá má tengja hliðarnar saman og reikna óþekktar stærðir. Sjá dæmi 1 og dæmi 2.
- Kósínusreglan nýtist í margs konar hagnýtum verkefnum. Fyrsta skrefið er yfirleitt að teikna skissu af aðstæðunum. Ef gefnu upplýsingarnar falla að einu líkananna þriggja (jafnanna þriggja) er kósínusreglan notuð til að finna lausn. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Með Heronsformúlu má reikna flatarmál óréttþyrndra þríhyrninga. Lengdir allra þriggja hliðanna verða að vera þekktar. Sjá dæmi 5 og sjá dæmi 6.

8.3 Pólhnit

8

- Pólhnitanet er myndað úr sammiðja hringjum sem liggja út frá skautinu, það er upphafspunktinum.
- Til að staðsetja punkt á forminu $(r, \theta), \theta > 0$, er farið rangsælis frá pólhnitaásnum um hornið θ, og síðan dregið stefnt línustrik af lengdinni r frá skautinu í stefnu θ. Ef θ er neikvætt er farið réttsælis og stefnt línustrik af lengdinni r dregið í stefnu θ. Sjá dæmi 1.
- Ef r er neikvætt er stefnda línustrikið dregið í gagnstæða stefnu við θ. Sjá dæmi 2.
- Til að breyta pólhnitum í réttþyrnd hnit eru notaðar formúlurnar $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Til að breyta réttþyrndum hnitum í pólhnit eru notaðar ein eða fleiri formúlanna $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$, og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sjá dæmi 5.
- Til að breyta jöfnum milli pólforms og réttþyrnds forms eru gerðar viðeigandi innsetningar út frá formúlunum og jöfnurnar umritaðar með algebru. Sjá dæmi 6, dæmi 7 og dæmi 8.
- Með viðeigandi innsetningum má umrita póljöfnu sem réttþyrnda jöfnu og teikna síðan graf hennar í réttþyrnda hnitakerfinu. Sjá dæmi 9, dæmi 10 og dæmi 11.

8.4 Pólhnit: gröf

- Auðveldara er að teikna gröf póljafna ef hægt er að prófa samhverfu jafnanna um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, pólhnitaásinn eða skautið.
- Þrjú samhverfupróf gefa til kynna hvort graf póljöfnu sé samhverft. Þótt jafna standist ekki samhverfupróf getur graf hennar samt verið samhverft, en þarf ekki að vera það. Sjá dæmi 1.
- Teikna má graf póljöfnu með því að gera gildistöflu fyrir θ og r.
- Hágildi póljöfnu fæst með því að setja inn það gildi θ sem gefur hágildi hornafallastæðunnar.
- Núllstöðvar póljöfnu finnast með því að setja $r=0$ og leysa fyrir θ. Sjá dæmi 2.
- Meðal formúlna sem gefa graf hrings í pólhnitum eru $r=a\cos\theta$ og $r=a\sin\theta$. Sjá dæmi 3.
- Formúlurnar sem gefa gröf hjartaferla eru $r=a\pm b\cos\theta$ og $r=a\pm b\sin\theta$, fyrir $a>0$, $b>0$, og $\frac{a}{b}=1$. Sjá dæmi 4.
- Formúlurnar sem gefa gröf einlykkju-snigilferla eru $r=a\pm b\cos\theta$ og $r=a\pm b\sin\theta$ fyrir $1<\frac{a}{b}<2$. Sjá dæmi 5.
- Formúlurnar sem gefa gröf snigilferla með innri lykkju eru $r=a\pm b\cos\theta$ og $r=a\pm b\sin\theta$ fyrir $a>0$, $b>0$, og $a<b$. Sjá dæmi 6.
- Formúlurnar sem gefa gröf lemniskata eru $r^2=a^2\cos 2\theta$ og $r^2=a^2\sin 2\theta$, þar sem $a\neq 0$. Sjá dæmi 7.
- Formúlurnar sem gefa gröf rósa eru $r=a\cos n\theta$ og $r=a\sin n\theta$, þar sem $a\neq 0$; ef n er slétt tala eru krónublöðin $2n$ talsins, en ef n er oddatala eru þau n talsins. Sjá dæmi 8 og dæmi 9.
- Formúlan sem gefur graf vefju Arkimedesar er $r=\theta$, $\theta\geq 0$. Sjá dæmi 10.

8.5 Pólform tvinntalna

- Tvinntölur á forminu $a+bi$ eru teiknaðar í tvinntalnaplan á svipaðan hátt og rétthyrnd hnit í rétthyrndu hnitakerfi. x-ásinn er merktur sem raunás og y-ásinn sem þverás. Sjá dæmi 1.
- Tölugildi tvinntölu er hið sama og stærð hennar. Það er fjarlægðin frá upphafspunkti að punktinum: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Til að rita tvinntölur á pólformi eru notaðar formúlurnar $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, og $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Þá er $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. Sjá dæmi 4 og dæmi 5.
- Til að breyta úr pólformi í rétthyrnt form eru hornaföllin fyrst reiknuð. Síðan er margfaldað inn í svigann með r. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.

- Til að finna margfeldi tveggja tvinntalna eru tölugildi þeirra margfölduð og hornin lögð saman. Reiknið hornaföllin og margfaldið með dreifireglu. Sjá dæmi 8.
- Til að finna kvóta tveggja tvinntalna á pólformi er fundinn kvóti tölugildanna og mismunur hornanna. Sjá dæmi 9.
- Til að finna veldi tvinntölunnar z^n, er r hafið í veldið n, og θ margfaldað með n. Sjá dæmi 10.
- Að finna rætur tvinntölu jafngildir því að hefja tvinntölu í veldi, en með ræðum veldisvísi. Sjá dæmi 11.

8.6 Stikajöfnur

- Að stika feril felur í sér að breyta rétthyrndri jöfnu í tveimur breytum, x og y, í tvær jöfnur í þremur breytum, x, y og t. Oft fást meiri upplýsingar úr stikajöfnum. Sjá dæmi 1, dæmi 2 og dæmi 3.
- Stundum er einfaldara að teikna graf jafna þegar þær eru ritaðar á rétthyrndu formi. Þegar t, er eytt fæst jafna í x og y.
- Til að eyða t, er önnur jafnan leyst fyrir t, og stæðan sett inn í hina jöfnuna. Sjá dæmi 4, dæmi 5, dæmi 6 og dæmi 7.
- Að finna rétthyrnda jöfnu ferils sem er gefinn með stikajöfnum er í raun það sama og að eyða stikanum. Leysið aðra jöfnuna fyrir t og setjið stæðuna inn í hina jöfnuna. Sjá dæmi 8.
- Velja má óendanlega mörg stikajöfnupör fyrir feril sem er gefinn með rétthyrndri jöfnu.
- Finnið stæðu fyrir x þannig að skilgreiningarmengi stikajöfnupársins haldist hið sama og skilgreiningarmengi upprunalegu rétthyrndu jöfnunnar. Sjá dæmi 9.

8

8.7 Stikajöfnur: gröf

- Þegar til er þriðja breyta, stiki, sem x og y eru háð, má nota stikajöfnur.
- Til að teikna graf stikajafna með punktum er gerð tafla með þremur dálkum merktum t, $x(t)$, og $y(t)$. Veljið vaxandi gildi fyrir t og teiknið punktana úr síðustu tveimur dálkunum fyrir x og y. Sjá dæmi 1 og dæmi 2.
- Þegar stikaferill er teiknaður með punktum skal merkja viðeigandi t-gildi og sýna stefnu ferilsins með örvum á grafinu. Sjá dæmi 3 og dæmi 4.
- Stikajöfnur gera kleift að sýna stefnu ferils á grafinu. Teikna má gröf jafna sem eru ekki föll og nota þær í mörgum verkefnum um hreyfingu. Sjá dæmi 5.
- Kasthreyfing byggist á stikajöfnunum tveimur $x=(v_0\cos\theta)t$ og $y=-16t^2+(v_0\sin\theta)t+h$. Upphafshraðinn er táknaður með v_0. θ táknar upphafshorn hlutarins þegar honum er kastað og h hæðina sem honum er kastað úr.

8.8 Vigrar

- Upphafspunktur staðsetningarvigurs er í upphafspunkti hnitakerfisins. Sjá dæmi 1.
- Ef tveir vigrar hafa sama staðsetningarvigur eru þeir jafnir. Sjá dæmi 2.
- Vigrar ákvarðast af stærð og stefnu. Sjá dæmi 3.
- Ef tveir vigrar hafa sömu stærð og stefnu eru þeir jafnir. Sjá dæmi 4.
- Við samlagningu eða frádrátt vigra fæst nýr vigur með því að leggja saman eða draga frá samsvarandi þætti. Sjá dæmi 5.
- Margföldun vigurs með tölu felst í að margfalda vigurinn með fasta. Aðeins stærðin breytist en stefnan helst óbreytt. Sjá dæmi 6 og dæmi 7.
- Vigrar hafa tvo þætti: láréttan þátt eftir jákvæða x-ásnum og lóðréttan þátt eftir jákvæða y-ásnum. Sjá dæmi 8.
- Einingarvigur í sömu stefnu og tiltekinn vigur sem er ekki núllvigur fæst með því að deila vigrinum með stærð hans.
- Stærð vigurs í rétthyrndu hnitakerfi er $|v|=\sqrt{a^2+b^2}$. Sjá dæmi 9.
- Í rétthyrndu hnitakerfi má tákna einingarvigra með i og j þar sem i táknar lárétta þáttinn og j táknar lóðrétta þáttinn. Þá er v = ai + bj margfeldi v með rauntölunum a og b. Sjá dæmi 10 og dæmi 11.
- Að leggja saman og draga frá vigra sem eru settir fram með i og j felst í að leggja saman eða draga frá samsvarandi stuðla við i og samsvarandi stuðla við j. Sjá dæmi 12.
- Vigurinn $v = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ er ritaður með lengd og stefnu sem $v=|v|\cos\theta\, i+|v|\sin\theta\, j$. Sjá dæmi 13.
- Innfeldi tveggja vigra er margfeldi i -liðanna að viðbættu margfeldi j -liðanna. Sjá dæmi 14.
- Nota má innfeldi til að finna hornið milli tveggja vigra. Dæmi 15 og dæmi 16.
- Innfeldi nýtast í margs konar verkefnum í eðlisfræði. Sjá dæmi 17.

8

Yfirlitsverkefni

Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan

Í eftirfarandi verkefnum skal gera ráð fyrir að α sé á móti hlið a, β á móti hlið b, og γ á móti hlið c. Leysið hvern þríhyrning ef það er mögulegt. Námundið hvert svar að næsta tíunda hluta.

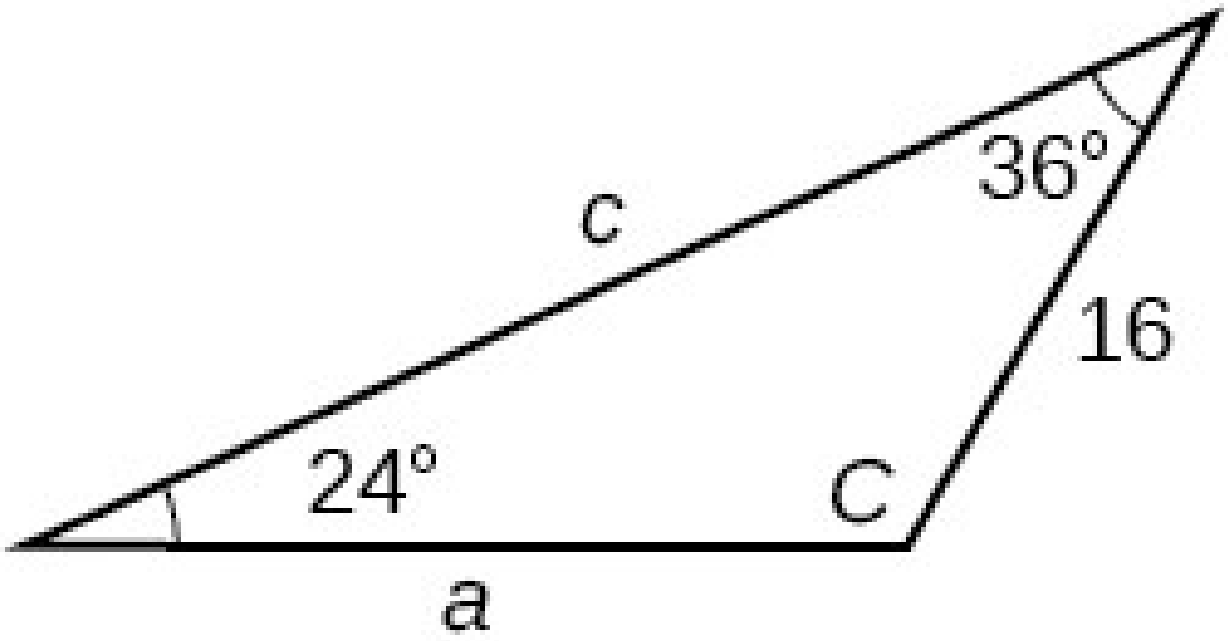
1.

$$\beta=50^\circ, a=105, b=45$$

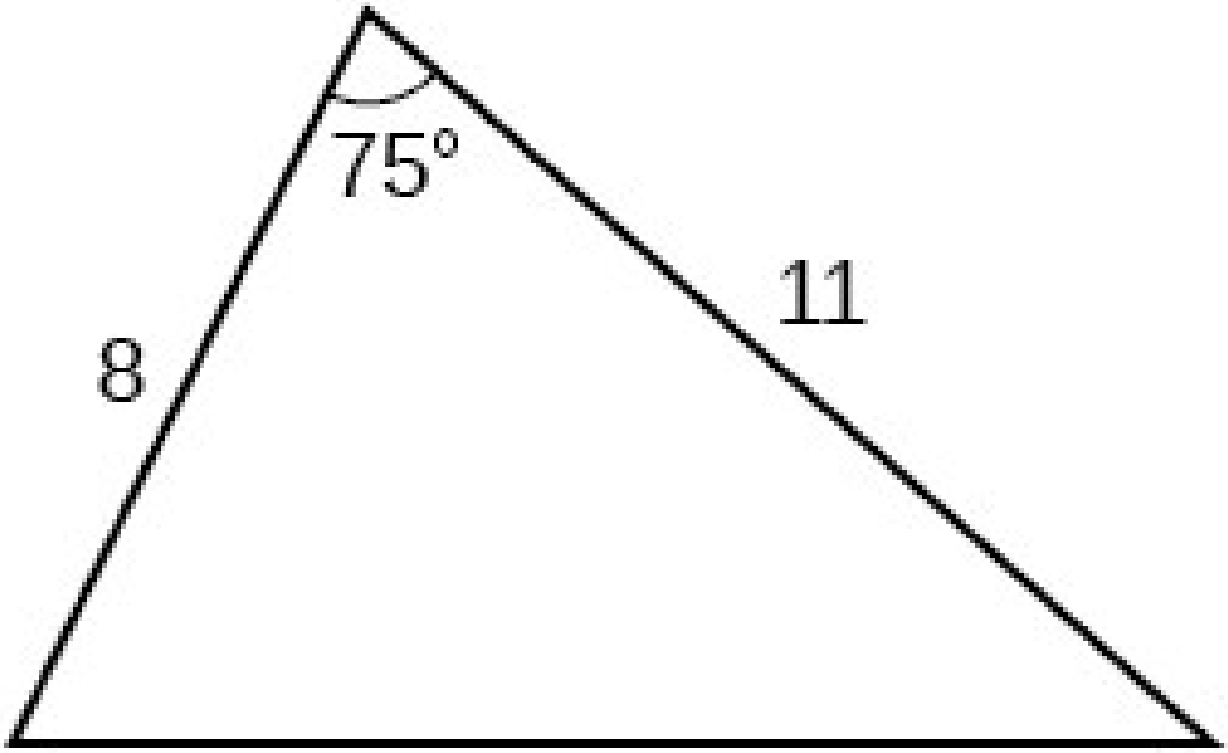
2.

$$\alpha=43{,}1^\circ, a=184{,}2, b=242{,}8$$

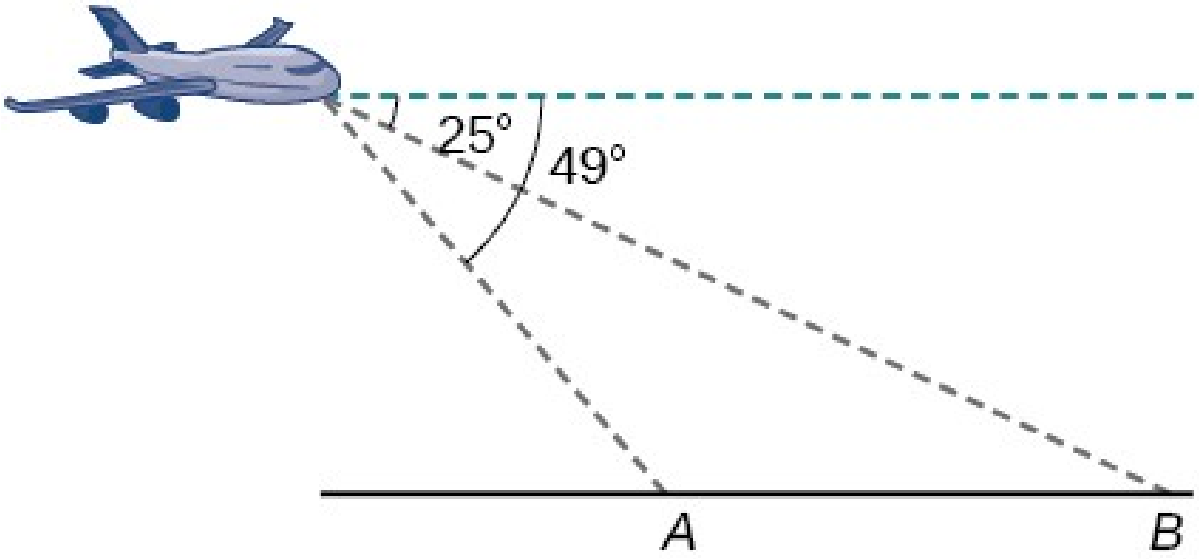
3. Leysið þríhyrninginn.



4. Finnið flatarmál þríhyrningsins.



5. Flugmaður flýgur yfir beinum þjóðvegi. Hann mælir lægðarhornin að tveimur kílómetrastaurum með 2,1 km millibili og fær 25° og 49°, eins og sýnt er á mynd 1. Finnið fjarlægð flugvélarinnar frá punkti A og flughæð hennar.

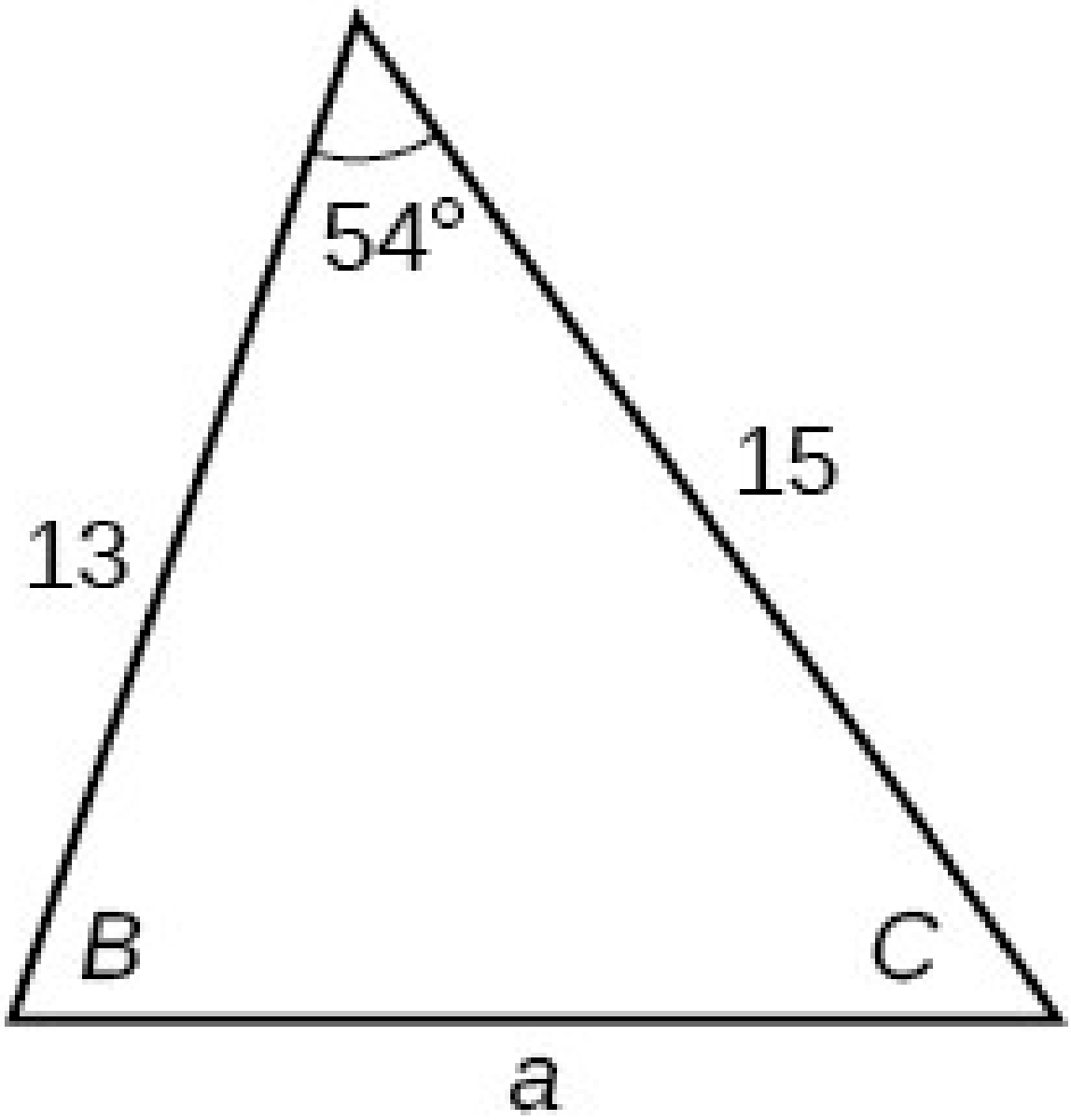


Mynd 1

Óréttthyrndir þríhyrningar: kósínusreglan

6. Leysið þríhyrninginn og námundið að næsta tíunda hluta. Gerið ráð fyrir að α sé á móti hlið a, β á móti hlið b, og γ á móti hlið c: $a=4$, $b=6$, $c=8$.

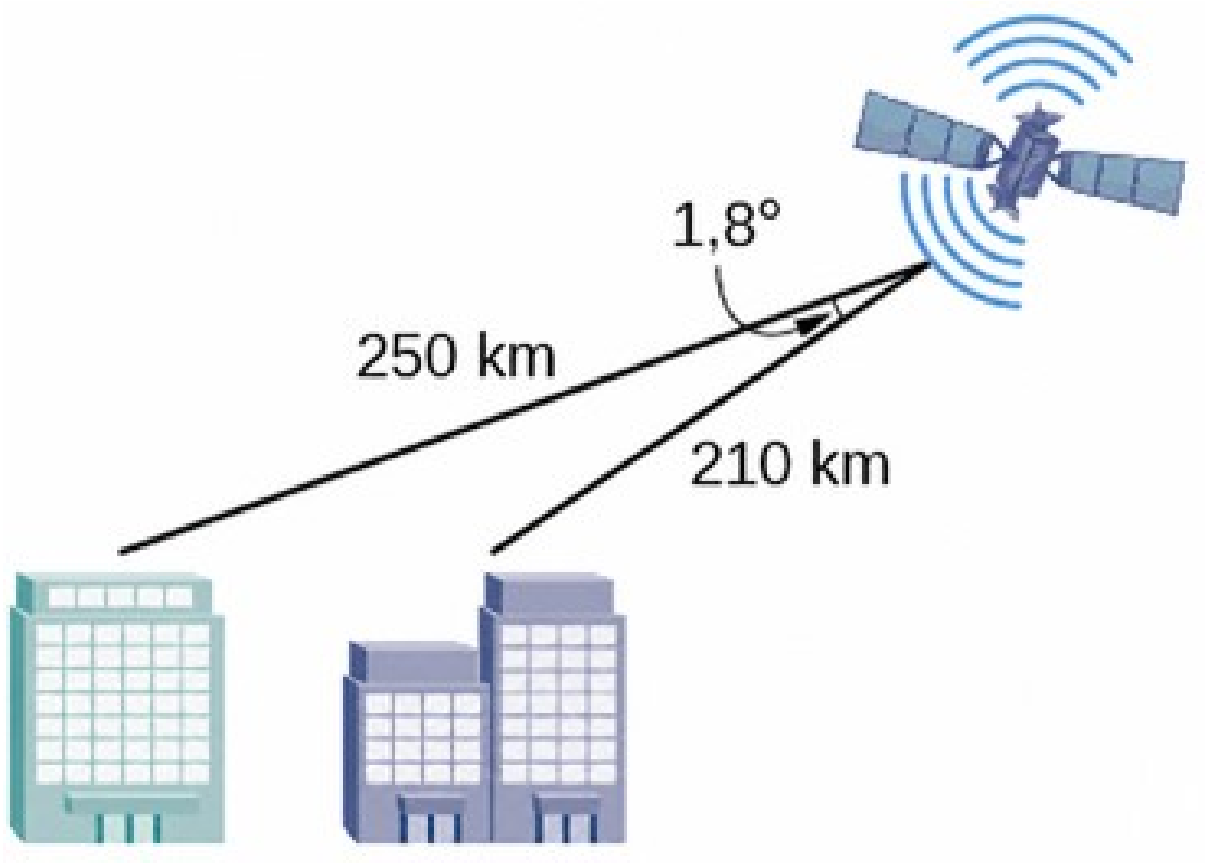
7. Leysið þríhyrninginn á mynd 2 og námundið að næsta tíunda hluta.



Mynd 2

8. Finnið flatarmál þríhyrnings með hliðarlengdirnar 8,3, 6,6 og 9,1.

9. Til að finna fjarlægð milli tveggja borga reiknar gervitungl fjarlægðirnar og hornið sem sýnd eru á mynd 3 (ekki í réttum hlutföllum). Finnið fjarlægðina milli borganna og námundið að næsta tíunda hluta.



Mynd 3

Pólhnit

10. Teiknið punktinn með pólhnitin $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

11. Teiknið punktinn með pólhnitin $\left(5, -\frac{2\pi}{3}\right)$.

12. Breytið $\left(6, -\frac{3\pi}{4}\right)$ í rétthyrnd hnit.

13. Breytið $\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$ í rétthyrnd hnit.

14. Breytið $(7, -2)$ í pólhnit.

15. Breytið $(-9, -4)$ í pólhnit.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið breyta gefinni kartesískri jöfnu í póljöfnu.

16.

$$x = -2$$

17.

$$x^2+y^2=64$$

18.

$$x^2+y^2=-2y$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið breyta gefinni póljöfnu í kartesíska jöfnu.

19.

$$r=7\cos\theta$$

20.

$$r=\frac{-2}{4\cos\theta+\sin\theta}$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið breyta í rétthyrnt form og teikna grafið.

21.

$$\theta=\frac{3\pi}{4}$$

22.

$$r=5\sec\theta$$

Pólhnit: gröf

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið prófa hverja jöfnu með tilliti til samhverfu.

23.

$$r=4+4\sin\theta$$

24.

$$r=7$$

25. Skissið graf póljöfnunnar $r=1-5\sin\theta$. Merkið skurðpunkta við ásana.

26. Skissið graf póljöfnunnar $r=5\sin(7\theta)$.

27. Skissið graf póljöfnunnar $r=3-3\cos\theta$.

Pólform tvinntalna

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna tölugildi hverrar tvinntölu.

28.

$$-2+6i$$

29.

$$4-3i$$

Ritið tvinntöluna á pólformi.

30.

$$5+9i$$

31.

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið breyta tvinntölunni úr pólformi í rétthyrnt form.

32.

$$z=5cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

33.

$$z=3cis\left(40^\circ\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna margfeldið $z_1 z_2$ á pólformi.

34.

$$z_1=2cis\left(89^\circ\right)$$

$$z_2=5cis\left(23^\circ\right)$$

35.

$$z_1=10cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2=6cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna kvótann $\frac{z_1}{z_2}$ á pólformi.

36.

$$z_1=12cis\left(55^\circ\right)$$

$$z_2=3cis\left(18^\circ\right)$$

37.

$$z_1=27cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$z_2=9cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna veldi hverrar tvinntölu á pólformi.

38. Finnið z^4 þegar $z=2\,cis\left(70^\circ\right)$.

39. Finnið z^2 þegar $z=5\,cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna hverja rót.

40. Reiknið teningsrót z þegar $z=64\,cis\left(210^\circ\right)$.

41. Reiknið kvaðratrót z þegar $z=25\,cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið teikna tvinntöluna í tvinntalnaplaninu.

42.

$$6-2i$$

43.

$$-1+3i$$

Stikajöfnur

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið eyða stikanum t og umrita stikajöfnuna sem kartesíska jöfnu.

44.

$$\begin{cases} x\left(t\right)=3t-1 \\ y\left(t\right)=\sqrt{t} \end{cases}$$

45.

$$\begin{cases} x(t)=-\cos\ t \\ y(t)=2\sin^2 t \end{cases}$$

46. Stikið hverja kartesíska jöfnu (ritið stikajöfnu fyrir hana) með því að nota $x\left(t\right)=a\cos t$ og $y\left(t\right)=b\sin t$ fyrir $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

47. Stikið línuna frá $\left(-2,3\right)$ til $\left(4,7\right)$ þannig að hún fari gegnum $\left(-2,3\right)$ þegar $t=0$ og $\left(4,7\right)$ þegar $t=1$.

Stikajöfnur: gröf

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið gera gildistöflu fyrir hvert stikajöfnupár, teikna graf jafnanna með stefnu og rita síðan kartesísku jöfnuna.

48.

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t - 1 \end{cases}$$

49.

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = -2e^{5t} \end{cases}$$

50.

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$$

51. Bolta er skotið með upphafshraðanum 80 fet á sekúndu undir 40° horni við láréttan flöt. Boltanum er sleppt úr 4 feta hæð yfir jörðu.

1. ⓐ Finnið stikajöfnur sem lýsa ferli boltans.
2. ⓑ Hvar er boltinn eftir 3 sekúndur?
3. ⓒ Hve lengi er boltinn á lofti?

Vigrar

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið ákvarða hvort vigrarnir tveir u og v, séu jafnir, þar sem u hefur upphafspunktinn P_1 og endapunktinn P_2, en v hefur upphafspunktinn P_3 og endapunktinn P_4.

52. $P_1=(-1,4), P_2=(3,1), P_3=(5,5)$ og $P_4=(9,2)$

53. $P_1=(6,11), P_2=(-2,8), P_3=(0,-1)$ og $P_4=(-8,2)$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota vigrana $u=2i-j$, $v=4i-3j$, og $w=-2i+5j$ til að reikna stæðuna.

54. $\boldsymbol{u - v}$

55. $\boldsymbol{2v - u + w}$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna einingarvigur í sömu stefnu og gefni vigurinn.

56. $\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j}$

57. $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið finna stærð og stefnu vigursins.

58.

$$\langle 6, -2 \rangle$$

59.

$$\langle -3, -3 \rangle$$

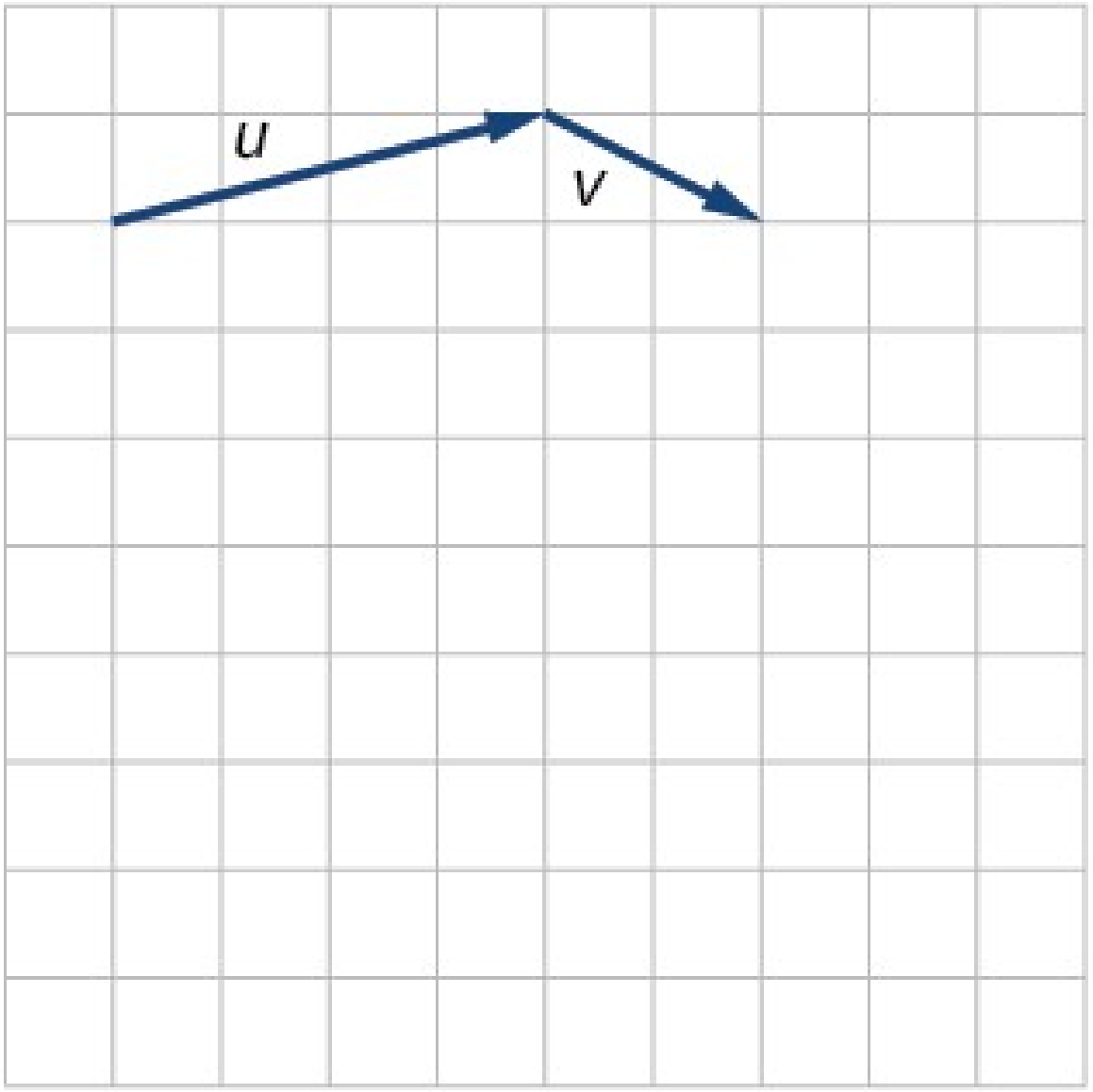
Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið reikna $u \cdot v$.

60. $\boldsymbol{u} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$

61. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

62. Gefinn er v $= \langle -3, 4 \rangle$ Teiknið v, 2v og $\frac{1}{2}$ v.

63. Vigrarnir á mynd 4 eru gefnir. Skissið u + v, u – v og 3v.



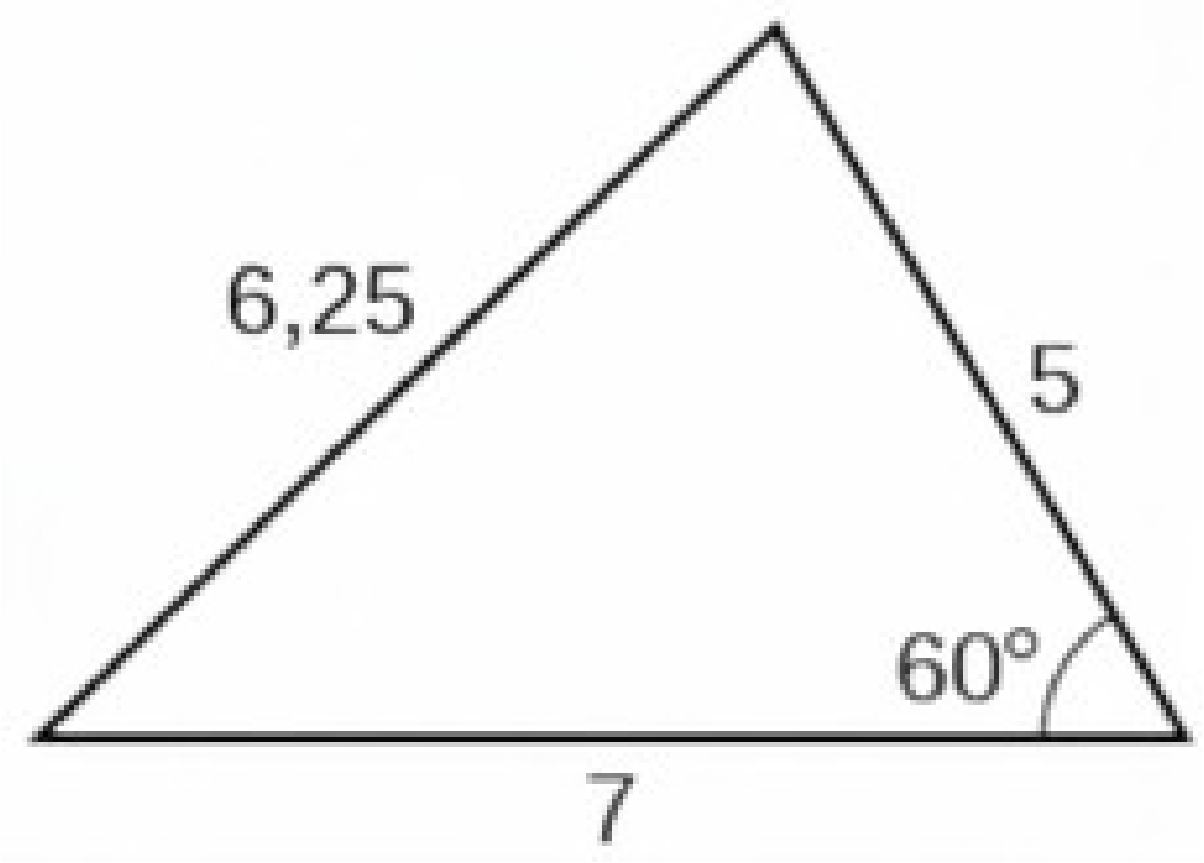
Mynd 4

64. Gefnir eru upphafspunkturinn $P_1 = (3, 2)$ og endapunkturinn $P_2 = (-5, -1)$,. Ritið vigurinn v með i og j. Teiknið punktana og vigurinn í hnitakerfið.

Æfingapróf

1. Gerið ráð fyrir að α sé á móti hlið a, β á móti hlið b, og γ á móti hlið c. Leysið þríhyrninginn ef það er mögulegt og námundið hvert svar að næsta tíunda hluta þegar $\beta = 68^\circ, b = 21, c = 16$.

2. Finnið flatarmál þríhyrningsins á mynd 1. Námundið svarið að næsta tíunda hluta.



Mynd 1

3. Flugmaður flýgur beint í 2 klukkustundir. Síðan breytir hann um stefnu um 15° til hægri frá upphaflegri stefnu og flýgur í 1 klukkustund í nýju stefnuna. Hve langt er hann frá upphafsstaðnum ef hann heldur jöfnum hraða, 575 mílum á klukkustund?

4. Breytið $(2, 2)$ í pólhnit og teiknið síðan punktinn.

5. Breytið $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ í rétthyrnd hnit.

6. Breytið póljöfnunni í kartesíska jöfnu: $x^2 + y^2 = 5y$.

7. Breytið í rétthyrnt form og teiknið grafið: $r = -3\csc\theta$.

8. Prófið jöfnuna með tilliti til samhverfu: $r = -4\sin(2\theta)$.

9. Teiknið graf $r = 3 + 3\cos\theta$.

10. Teiknið graf $r=3-5\sin\theta$.

11. Finnið tölugildi tvinntölunnar $5-9i$.

12. Ritið tvinntöluna á pólformi: $4+i$.

13. Breytið tvinntölunni úr pólformi í rétthyrnt form: $z=5\,\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Gefin eru $z_1=8\,cis\left(36^\circ\right)$ og $z_2=2\,cis\left(15^\circ\right)$, reiknið hverja stæðu.

14.

$$z_1 z_2$$

15.

$$\frac{z_1}{z_2}$$

16.

$$\left(z_2\right)^3$$

17.

$$\sqrt{z_1}$$

18. Teiknið tvinntöluna $-5-i$ í tvinntalnaplaninu.

8

19.

Eyðið stikanum t til að rita eftirfarandi stikajöfnur sem kartesíska jöfnu:

$$\begin{cases} x(t)=t+1 \\ y(t)=2t^2 \end{cases}.$$

20. Stikið kartesísku jöfnuna hér á eftir, það er ritið hana sem stikajöfnur, með því að nota $x\left(t\right)=a\cos t$ og

$$y\left(t\right)=b\sin t:$$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1.$$

21.

Teiknið graf stikajafnanna og finnið kartesísku jöfnuna: $\begin{cases} x(t)=-2\sin\ t \\ y(t)=5\cos\ t \end{cases}$.

22. Bolta er skotið með upphafshraðanum 95 fet á sekúndu undir 52° horni miðað við lárétt. Boltanum er sleppt úr 3,5 feta hæð yfir jörðu.

1. ⓐ Finnið stikajöfnur sem lýsa ferli boltans.
2. ⓑ Hvar er boltinn eftir 2 sekúndur?
3. ⓒ Hve lengi er boltinn á lofti?

Í eftirfarandi verkefnum skuluð þið nota vigrana u = i − 3 j og v = 2 i + 3 j.

23. Finnið 2u − 3v.

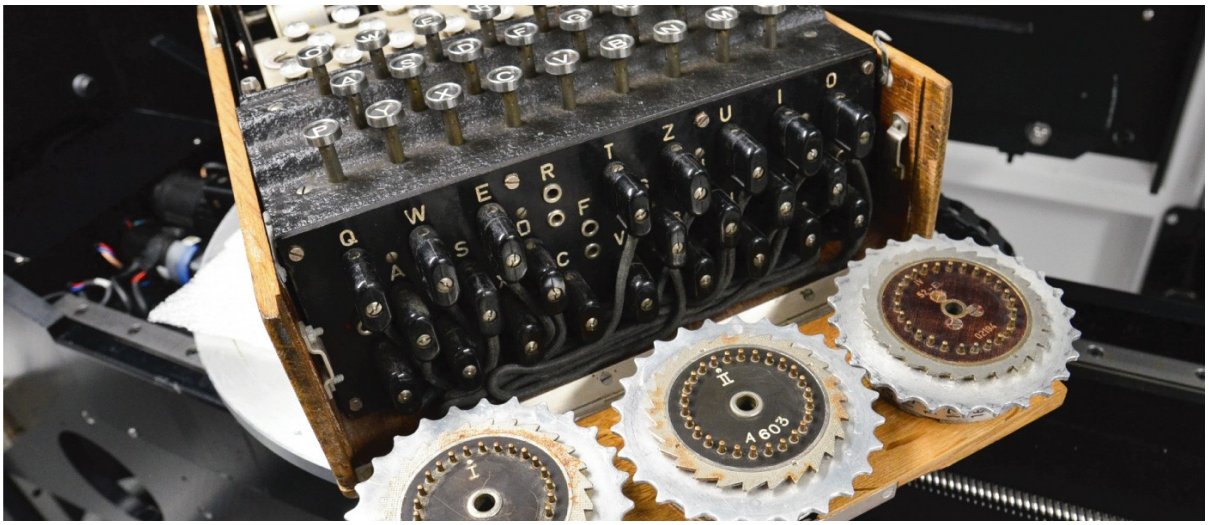
24. Reiknið $u \cdot v$.

25. Finnið einingarvigur í sömu stefnu og v.

26. Ef vigurinn v hefur upphafspunktinn $P_1 = (2, 2)$ og endapunktinn $P_2 = (-1, 0)$, ritið þá vigurinn v með i og j. Teiknið í hnitakerfið v, og $-v$.

9. KAFLI

Jöfnuhneppi og ójöfnuhneppi



Stjórnvöld og herir notuðu Enigma-vélar á borð við þessa til að dulrita og ráða háleynileg samskipti í síðari heimsstyrjöldinni. Með mismunandi tengingum á tengiborðinu og stillingum snúðanna gátu dulritarar beitt flókinni dulkóðun á skilaboðin. Takið eftir að snúðarnir þrír hafa hver um sig 26 tengipinna, einn fyrir hvern staf stafrófsins; síðari gerðir höfðu fjóra eða fimm snúða. (Mynd: aðlögun á „Enigma Machine“ frá School of Mathematics, University of Manchester/flickr)

Efnisyfirlit kaflans

- 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
- 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum
- 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
- 9.4 Stofnbrot
- 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
- 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu
- 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
- 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers

Inngangur að jöfnuhneppum og ójöfnuhneppum

Í upphafi síðari heimsstyrjaldarinnar áttuðu breskir her- og leyniþjónustufulltrúar sig á því að bandamenn yrðu að vita hvað óvinurinn hygðist fyrir ef takast ætti að sigra Þýskaland nasista. Verkefnið var erfitt vegna þess að þýski herinn dulritaði öll samskipti sín með vél sem kölluð var Enigma og kóðinn var talinn óbrjótanlegur. Þjóðverjar höfðu dulritað skilaboð sín með vélinni frá því upp úr 1930. Þeir treystu öryggi hennar svo vel að þeir notuðu hana jafnt fyrir hversdagsleg hersamskipti sem mikilvægustu hernaðaráætlanir. Vegna vaxandi hernaðarógnar hófu önnur Evrópuríki að reyna að ráða Enigma-kóðana. Pólland varð fyrst til að ná verulegum árangri með því að þjálfa og ráða nýjan hóp dulmálsfræðinga: stærðfræðinema frá háskólanum í Poznań. Með hjálp upplýsinga frá frönskum njósnurum tókst pólskum stærðfræðingum undir forystu Marians Rejewski að ráða fyrstu kóðana og síðar skilja raflagnir vélanna; að lokum smíðuðu þeir eftirlíkingar. Þýski herinn gerði vélarnar þó síðar flóknari með því að bæta við snúðum og þá þurfti nýja aðferð til að ráða dulmálið.

Vélin tengdi bókstafi á lyklaborði við þrjá, fjóra eða fimm snúða, eftir gerð, og hver snúður hafði 26 mögulegar upphafsstöður sem stilla mátti áður en dulritun hófst. Afkóðunarkóði, svonefndur dulmálslykill, sagði viðtakanda skilaboðanna í raun hvernig vélin var stillt. Þannig gat hann lesið skilaboðin með annarri Enigma-vél. Jafnvel einfaldari gerðin með þremur snúðum hafði 17.576 mögulegar samsetningar upphafsstaða (26 x 26 x 26) og vélin hafði auk þess fjölmargar aðrar leiðir til að breyta dulrituninni. Skömmu eftir að stríðið hófst söfnuðu Bretar saman hópi afburðafólks til að brjóta Enigma-kóðann. Hópurinn, undir forystu Alans Turing, nýtti þekkingu sína á Enigma-vélinni til að smíða vélræna reiknivél sem gat brotið kóðann. Vitneskjan um áætlanir Þjóðverja átti síðan stóran þátt í lokasigri bandamanna á Þýskalandi nasista árið 1945.

Enigma er ef til vill þekktasta dulritunartæki sögunnar. Vélin er skýrt dæmi um það lykilhlutverk sem dulritun hefur gegnt í samfélaginu. Með nútímatækni fer dulmálsgreining nú fram í stafrænum heimi.

Mörg dulmál nota andhverfanleg fylki til að flytja skilaboð, enda er það yfirleitt hluti af afkóðuninni að finna andhverfu fylkis. Auk þess að þekkja fylkið og andhverfu þess þarf viðtakandinn að vita lykilinn sem gerir honum kleift að lesa skilaboðin með andhverfa fylkinu.

Í þessum kafla skoðum við fylki og andhverfur þeirra ásamt ýmsum leiðum til að nota fylki við lausn jöfnuhneppa. Fyrst skoðum við þó jöfnuhneppi ein og sér, bæði línuleg og ólínuleg, og síðan stofnbrotaliðun. Hér brjótum við enga leynikóða, en leggjum grunn að síðari námskeiðum.

9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Leysa jöfnuhneppi með grafi.

- Leysa jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.
- Leysa jöfnuhneppi með samlagningaraðferð.
- Þekkja ósamkvæm jöfnuhneppi með tveimur breytum.
- Setja fram lausnir háðra jöfnuhneppa með tveimur breytum.



Mynd 1 (heimild: Thomas Sørenes)

Hjólabrettaframleiðandi setur nýja vörulínu á markað. Hann skráir kostnaðinn, það er útgjöldin við framleiðslu brettanna, og tekjurnar af sölu þeirra. Hvernig getur fyrirtækið komist að því hvort nýja vörulínan skili hagnaði? Hve mörg hjólabretti þarf að framleiða og selja áður en hagnaður verður mögulegur? Í þessum hluta notum við línulegar jöfnur með tveimur breytum til að svara þessum og svipuðum spurningum.

Inngangur að jöfnuhneppum

Til að rannsaka aðstæður á borð við rekstur hjólabrettaframleiðandans þurfum við að gera okkur grein fyrir að fleiri en ein breyta og líklega fleiri en ein jafna koma við sögu. Línulegt jöfnuhneppi samanstendur af tveimur eða fleiri línulegum jöfnum með tveimur eða fleiri breytum, þar sem allar jöfnur hneppisins eru skoðaðar samtímis. Til að finna einkvæma lausn línulegs jöfnuhneppis þurfum við að finna tölugildi fyrir hverja breytu sem uppfyllir allar jöfnurnar í senn. Sum línuleg hneppi hafa enga lausn en önnur óendanlega margar lausnir. Til að línulegt hneppi geti haft einkvæma lausn þurfa jöfnurnar að vera að minnsta kosti jafn margar og breyturnar, en það eitt tryggir þó ekki einkvæma lausn.

Í þessum hluta skoðum við línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, sem samanstanda af tveimur jöfnum með tveimur ólíkum breytum. Skoðum til dæmis þetta línulega jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 15 \\ 3x - y &= 5 \end{aligned}$$

Lausn línulegs jöfnuhneppis með tveimur breytum er hver sú röðuð tvennd sem uppfyllir hvora jöfnuna um sig. Í þessu dæmi er raðaða tvenndin $(4, 7)$ lausn hneppisins. Staðfesta má lausnina með því að setja gildin inn í hvora jöfnuna og athuga hvort tvenndin uppfylli þær báðar. Brátt skoðum við aðferðir til að finna slíka lausn ef hún er til.

$$\begin{aligned} 2(4) + (7) &= 15 \quad \text{Satt} \\ 3(4) - (7) &= 5 \quad \text{Satt} \end{aligned}$$

Auk fjölda jafna og breyta má flokka línuleg jöfnuhneppi eftir fjölda lausna. Samkvæmt jöfnuhneppi hefur að minnsta kosti eina lausn. Samkvæmt hneppi með nákvæmlega eina lausn, eins og dæmið sem við skoðuðum, er óháð jöfnuhneppi. Línurnar tvær hafa ólíkar hallatölur og skerast í einum punkti í planinu. Samkvæmt hneppi er háð jöfnuhneppi ef jöfnurnar hafa sömu hallatölu og sama skurðpunkt við y-ás. Þá falla línurnar saman og jöfnurnar tákna sömu línuna. Hver punktur á línunni gefur hnitapar sem uppfyllir hneppið og lausnirnar eru því óendanlega margar.

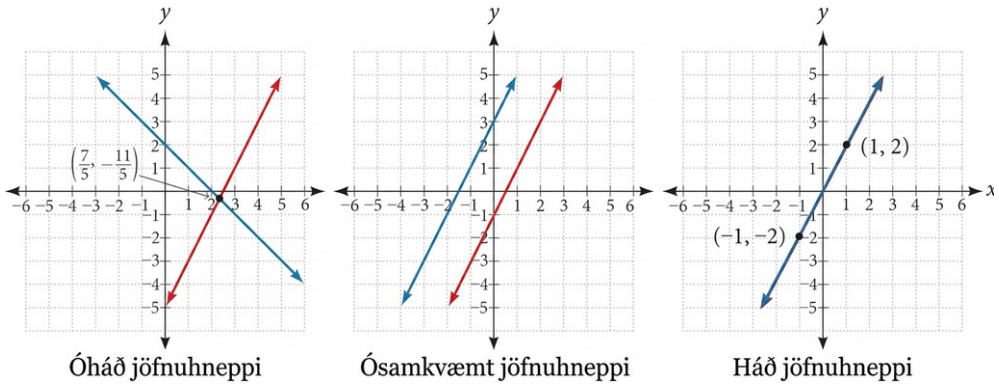
Önnur gerð línulegs jöfnuhneppis er ósamkvæmt jöfnuhneppi, þar sem jöfnurnar tákna tvær samsíða línur. Línurnar hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás. Enginn punktur liggur á báðum línunum og hneppið hefur því enga lausn.

GERÐIR LÍNULEGRA JÖFNUHNEPPA

Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum skiptast í þrjár gerðir og lausnirnar eru líka af þremur gerðum.

- Óháð jöfnuhneppi hefur nákvæmlega eina lausnartvennd (x, y). Skurðpunktur línanna tveggja er eina lausnin.
- Ósamkvæmt jöfnuhneppi hefur enga lausn. Línurnar tvær eru samsíða og skerast því aldrei.
- Háð jöfnuhneppi hefur óendanlega margar lausnir. Línurnar falla saman; þær eru sama línan og því er sérhvert hnitapar á línunni lausn á báðum jöfnunum.

Mynd 2 ber saman gröf gerðanna þriggja.



Mynd 2

AÐFERÐ

Gefið er línulegt jöfnuhneppi og röðuð tvennd. Ákvarðið hvort tvenndin sé lausn.

1. Setjið röðuðu tvenndina inn í hverja jöfnu hneppisins.
2. Athugið hvort innsetningin gefi sanna fullyrðingu í báðum jöfnum. Ef svo er, þá er raðaða tvenndin lausn.

DÆMI 1

Að ákvarða hvort röðuð tvennd sé lausn jöfnuhneppis

Ákvarðið hvort raðaða tvenndin $(5, 1)$ sé lausn gefna jöfnuhneppisins.

$$x + 3y = 8$$
$$2x - 9 = y$$

Lausn

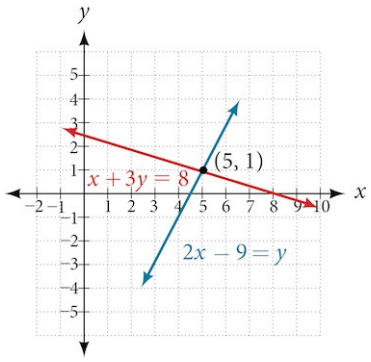
Setjið röðuðu tvenndina $(5, 1)$ inn í báðar jöfnurnar.

$$\begin{aligned} (5)+3\,(1)&=8 \\ 8&=8 \qquad \text{Satt} \\ 2\,(5)-9&=(1) \\ 1&=1 \qquad \text{Satt} \end{aligned}$$

Raðaða tvenndin $(5, 1)$ uppfyllir báðar jöfnurnar og er því lausn hneppisins.

Greining

Lausnin sést skýrt þegar graf hvorrar jöfnu er teiknað. Lausnin er röðuð tvennd sem uppfyllir báðar jöfnurnar. Hún er því punktur á báðum línunum og þar með skurðpunktur þeirra. Sjá mynd 3.



Mynd 3

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Ákvarðið hvort raðaða tvenndin $(8, 5)$ sé lausn eftirfarandi hneppis.

$$5x-4y=20$$
$$2x+1=3y$$

Að leysa jöfnuhneppi með grafi

Til eru margar aðferðir við að leysa línuleg jöfnuhneppi. Fyrir línulegt jöfnuhneppi með tveimur breytum má ákvarða bæði gerð hneppisins og lausnina með því að teikna gröf jafnanna í sama hnitakerfi.

DÆMI 2

Að leysa jöfnuhneppi með tveimur breytum með grafi

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með grafi og tilgreinið gerð hneppisins.

$$2x+y=-8$$
$$x-y=-1$$

Lausn

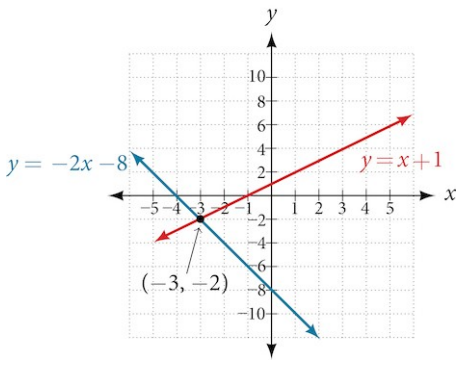
Leysið fyrri jöfnuna fyrir y.

$$2x+y=-8$$
$$y=-2x-8$$

Leysið síðari jöfnuna fyrir y.

$$x-y=-1$$
$$y=x+1$$

Teiknið gröf beggja jafna í sama hnitakerfi eins og á mynd 4.



Mynd 4

Línurnar virðast skerast í punktinum $(-3,-2)$. Staðfesta má að þetta sé lausn hneppisins með því að setja röðuðu tvenndina inn í báðar jöfnurnar.

$$\begin{aligned} 2\,(-3)+(-2) &= -8 \\ -8 &= -8 \qquad \text{Satt} \\ (-3)-(-2) &= -1 \\ -1 &= -1 \qquad \text{Satt} \end{aligned}$$

Lausn hneppisins er raðaða tvenndin $(-3, -2)$, og hneppið er því óháð.

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með grafi.

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -25 \\ -4x + 5y &= 35 \end{aligned}$$

SPURT OG SVARAÐ

Má nota graf til að leysa ósamkvæmt eða háð jöfnuhneppi?

Já, í báðum tilvikum má teikna gröf hneppisins til að ákvarða gerð þess og lausnir. Ef línurnar tvær eru samsíða hefur hneppið enga lausn og er ósamkvæmt. Ef línurnar falla saman eru lausnirnar óendanlega margar og hneppið er háð.

Að leysa jöfnuhneppi með innsetningaraðferð

Að leysa línulegt jöfnuhneppi með tveimur breytum með grafi hentar vel þegar lausnin er heiltölutvennd. Ef lausnin inniheldur tugabrot eða almenn brot er aðferðin hins vegar ekki nægilega nákvæm. Við skoðum því tvær aðrar og nákvæmari aðferðir. Önnur þeirra er innsetningaraðferðin. Þá er önnur jafnan leyst fyrir aðra breytuna og niðurstaðan sett inn í hina jöfnuna til að leysa fyrir hina breytuna. Aðeins er hægt að leysa fyrir eina breytu í einu og þess vegna er innsetningaraðferðin bæði gagnleg og hagkvæm.

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi með tveimur jöfnum og tveimur breytum. Leysið það með innsetningaraðferð.

1. Leysið aðra jöfnuna fyrir aðra breytuna, svo að sú breyta sé gefin sem stæða í hinni.
2. Setjið stæðuna fyrir breytuna inn í hina jöfnuna og leysið síðan fyrir breytuna sem eftir er.
3. Setjið lausnina inn í aðra hvora upphaflegu jöfnuna til að finna gildi fyrri breytunnar. Ritið lausnina sem raðaða tvennd ef hægt er.
4. Athugið lausnina í báðum jöfnum.

DÆMI 3

Að leysa jöfnuhneppi með tveimur breytum með innsetningaraðferð

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.

$$\begin{aligned} -x + y &= -5 \\ 2x - 5y &= 1 \end{aligned}$$

Lausn

Leysum fyrst fyrri jöfnuna fyrir y.

$$\begin{aligned} -x + y &= -5 \\ y &= x - 5 \end{aligned}$$

Nú má setja stæðuna $x - 5$ í stað y í síðari jöfnunni.

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 1 \\ 2x - 5(x - 5) &= 1 \\ 2x - 5x + 25 &= 1 \\ -3x &= -24 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Síðan setjum við $x = 8$ inn í fyrri jöfnuna og leysum fyrir y.

$$\begin{aligned} -(8) + y &= -5 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Lausnin er $(8, 3)$.

Athugið lausnina með því að setja $(8, 3)$ inn í báðar jöfnurnar.

$$\begin{aligned} -x + y &= -5 \\ -(8) + (3) &= -5 \qquad \text{Satt} \\ 2x - 5y &= 1 \\ 2(8) - 5(3) &= 1 \qquad \text{Satt} \end{aligned}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #3

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með innsetningaraðferð.

$$\begin{aligned} x &= y + 3 \\ 4 &= 3x - 2y \end{aligned}$$

SPURT OG SVARAÐ

Má nota innsetningaraðferðina til að leysa sérhvert línulegt jöfnuhneppi með tveimur breytum?

Já, en aðferðin hentar best ef einhver breyta í annarri jöfnunni hefur stuðulinn 1 eða −1. Þá þarf ekki að reikna með brotum.

Að leysa jöfnuhneppi með tveimur breytum með samlagningaraðferð

Þriðja leiðin til að leysa línuleg jöfnuhneppi er samlagningaraðferðin. Þá eru lagðir saman tveir liðir með sömu breytu en gagnstæða stuðla, svo summan verði núll. Ekki eru öll hneppi sett fram þannig að stuðlar annarrar breytunnar séu gagnstæðar tölur. Oft þarf að margfalda aðra eða báðar jöfnurnar með tölu svo hægt sé að fella aðra breytuna út með samlagningu.

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi. Leysið það með samlagningaraðferð.

1. Ritið báðar jöfnurnar þannig að x- og y-breyturnar séu vinstra megin við jafnaðarmerkið og fastarnir hægra megin.
2. Ritið aðra jöfnuna fyrir ofan hina og látið samsvarandi breytur standast á. Ef stuðull breytu í efri jöfnunni er samlagningarandhverfa stuðuls sömu breytu í neðri jöfnunni skuluð þið leggja jöfnurnar saman og fella þannig breytuna út. Ef svo er ekki skal margfalda aðra eða báðar jöfnurnar með tölu sem er ekki núll svo stuðlarnir verði samlagningarandhverfur, og leggja síðan jöfnurnar saman.
3. Leysið jöfnuna sem fæst fyrir breytuna sem eftir er.
4. Setjið gildið inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysið fyrir hina breytuna.
5. Athugið lausnina með því að setja gildin inn í hina jöfnuna.

DÆMI 4

Að leysa jöfnuhneppi með samlagningaraðferð

Leysið gefna jöfnuhneppið með samlagningu.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ -x + y &= 3 \end{aligned}$$

Lausn

Báðar jöfnurnar eru þegar jafnar fasta. Takið eftir að stuðull x í síðari jöfnunni, -1, er samlagningarandhverfa stuðuls x í fyrri jöfnunni, 1. Því má leggja jöfnurnar saman og fella x út án þess að margfalda með fasta.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ -x + y &= 3 \\ \hline 3y &= 2 \end{aligned}$$

Þegar x, hefur verið fellt út má leysa jöfnuna sem fæst fyrir y.

$$3y = 2$$
$$y = \frac{2}{3}$$

Síðan setjum við gildið fyrir y inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysum fyrir x.

$$-x + y = 3$$
$$-x + \frac{2}{3} = 3$$
$$-x = 3 - \frac{2}{3}$$
$$-x = \frac{7}{3}$$
$$x = -\frac{7}{3}$$

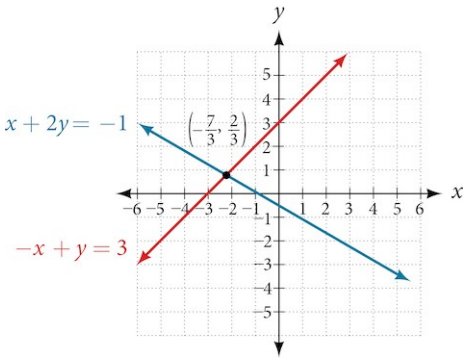
Lausn hneppisins er $\left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Athugið lausnina í fyrri jöfnunni.

$$x+2\ y=-1$$
$$\left(-\frac{7}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right)=$$
$$-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}=$$
$$-\frac{3}{3}=$$
$$-1=-1 \qquad \text{Satt}$$

Greining

Grafísk framsetning gefur mikilvæga innsýn í jöfnuhneppi. Á mynd 5 sést að jöfnurnar skerast í lausnarpunktinum. Ekki þarf að velta fyrir sér hvort önnur lausn sé til, því grafið staðfestir að hneppið hefur nákvæmlega eina lausn.



Mynd 5

DÆMI 5

Að nota samlagningaraðferð þegar margfalda þarf aðra jöfnuna

Leysið gefna jöfnuhneppið með samlagningaraðferð.

$$3x + 5y = -11$$

$$x - 2y = 11$$

Lausn

Ef jöfnurnar eru lagðar saman eins og þær standa fellur hvorug breytan út. Í fyrri jöfnunni er þó liðurinn $3x$ en í þeirri síðari liðurinn x. Ef síðari jafnan er margfölduð með -3, verður summa x-liðanna núll.

$$\begin{aligned} x\ -2\ y &= 11 \\ -3\left(x\ -2\ y\right) &= -3\left(11\right) \\ -3\ x+6\ y &= -33 \end{aligned}$$

Margfaldið báðar hliðar með -3.
Notið dreifiregluna.

Leggjum nú jöfnurnar saman.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= -11 \\ -3x + 6y &= -33 \\ \hline 11y &= -44 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

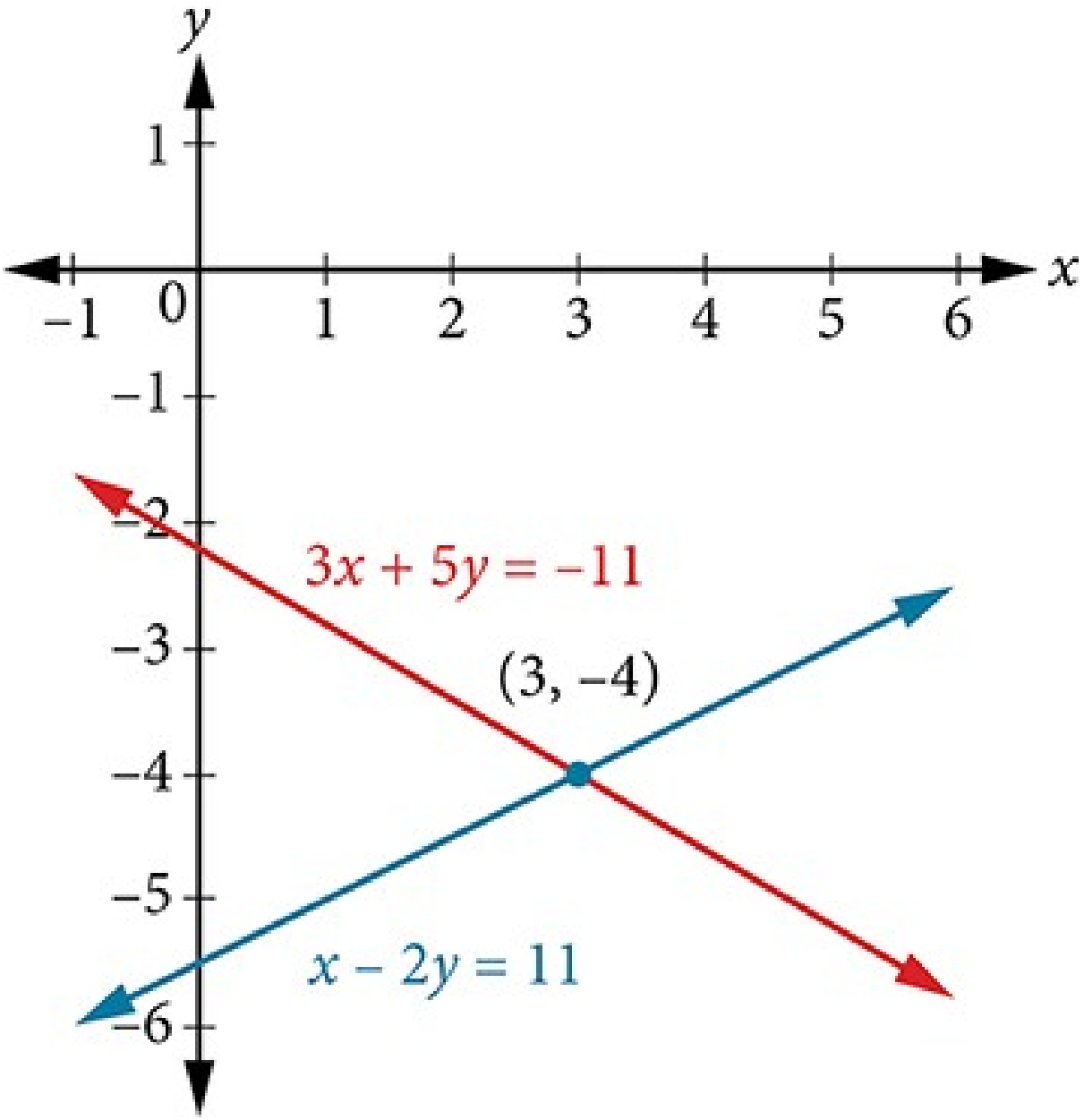
Að lokum setjum við $y = -4$ inn í aðra upphaflegu jöfnuna og leysum fyrir x.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= -11 \\ 3x + 5(-4) &= -11 \\ 3x - 20 &= -11 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Lausnin er raðaða tvenndin $(3, -4)$. Sjá mynd 6. Athugið lausnina í síðari upphaflegu jöfnunni.

$$\begin{aligned} x-2\ y &= 11 \\ (3)-2\left(-4\right) &= 3+8 \\ 11 &= 11 \end{aligned}$$

Satt



Mynd 6

REYNDU SJÁLF(UR) #4

Leysið jöfnuhneppið með samlagningu.

$$2x-7y=2$$
$$3x+y=-20$$

DÆMI 6

Að nota samlagningaraðferð þegar margfalda þarf báðar jöfnurnar

Leysið gefna jöfnuhneppið með tveimur breytum með samlagningu.

$$2x+3y=-16$$
$$5x-10y=30$$

Lausn

Í annarri jöfnunni er $2\,x$ en í hinni $5\,x$. Minnsta sameiginlega margfeldið er $10\,x$ og því þarf að margfalda báðar jöfnurnar með fasta til að fella aðra breytuna út. Fellum x út með því að margfalda fyrri jöfnuna með -5 og þá síðari með 2.

$$\begin{aligned}-5(2x+3y)&=-5(-16)\\ -10x-15y&=80\\ 2(5x-10y)&=2(30)\\ 10x-20y&=60\end{aligned}$$

Síðan leggjum við jöfnurnar saman.

$$\begin{aligned}-10x-15y&=80\\ 10x-20y&=60\\ \hline -35y&=140\\ y&=-4\end{aligned}$$

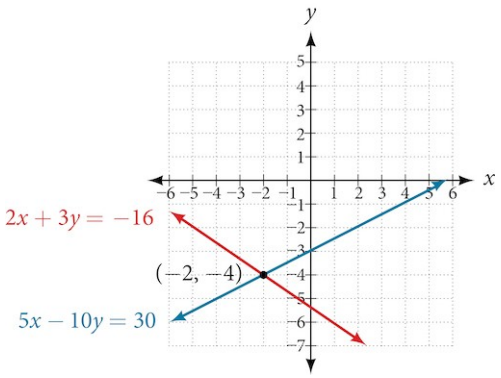
Setjið $y=-4$ inn í fyrri upphaflegu jöfnuna.

$$\begin{aligned}2x+3(-4)&=-16\\ 2x-12&=-16\\ 2x&=-4\\ x&=-2\end{aligned}$$

Lausnin er $(-2,-4)$. Athugið hana í hinni jöfnunni.

$$\begin{aligned}5x-10y&=30\\ 5(-2)-10(-4)&=30\\ -10+40&=30\\ 30&=30\end{aligned}$$

Sjá mynd 7.



Mynd 7

DÆMI 7

Að nota samlagningaraðferð fyrir jöfnuhneppi með brotum

Leysið gefna jöfnuhneppið með tveimur breytum með samlagningu.

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{3} + \tfrac{y}{6} &= 3 \\ \tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Lausn

Losið jöfnurnar fyrst við brotin með því að margfalda báðar hliðar hvorrar jöfnu með minnsta samnefnara.

$$\begin{aligned} 6\left(\tfrac{x}{3} + \tfrac{y}{6}\right) &= 6(3) \\ 2x + y &= 18 \\ 4\left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{4}\right) &= 4(1) \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

Margfaldið nú síðari jöfnuna með -1 svo hægt sé að fella x-breytuna út.

$$\begin{aligned} -1(2x - y) &= -1(4) \\ -2x + y &= -4 \end{aligned}$$

Leggið jöfnurnar saman til að fella x-breytuna út og leysið jöfnuna sem fæst.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ -2x + y &= -4 \\ \hline 2y &= 14 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Setjið $y = 7$ inn í fyrri jöfnuna.

$$\begin{aligned} 2\,x+(7)&=18\\ 2\,x&=11\\ x&=\frac{11}{2}\\ &=5{,}5 \end{aligned}$$

Lausnin er $\left(\frac{11}{2}, 7\right)$. Athugið hana í hinni jöfnunni.

$$\begin{aligned} \tfrac{x}{2}-\tfrac{y}{4}&=1\\ \tfrac{\frac{11}{2}}{2}-\tfrac{7}{4}&=1\\ \tfrac{11}{4}-\tfrac{7}{4}&=1\\ \tfrac{4}{4}&=1 \end{aligned}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #5

Leysið jöfnuhneppið með samlagningu.

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 8\\ 3x+5y &= 10 \end{aligned}$$

Að þekkja ósamkvæm jöfnuhneppi með tveimur breytum

Nú þegar við þekkjum nokkrar aðferðir við að leysa jöfnuhneppi getum við notað þær til að bera kennsl á ósamkvæm hneppi. Munum að ósamkvæmt hneppi táknar samsíða línur með sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y -ás. Línurnar skerast aldrei. Þegar leitað er að lausn ósamkvæms hneppis fæst ósönn fullyrðing á borð við $12=0$.

9

DÆMI 8

Að leysa ósamkvæmt jöfnuhneppi

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} x &= 9-2y\\ x+2y &= 13 \end{aligned}$$

Lausn

Tvennt kemur til greina. Þar sem önnur jafnan er þegar leyst fyrir x, er augljósast að nota innsetningu.

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 13 \\
(9 - 2y) + 2y &= 13 \\
9 + 0y &= 13 \\
9 &= 13
\end{aligned}
$$

Þessi fullyrðing er augljóslega mótsögn því $9 \neq 13$. Hneppið hefur því enga lausn.

Hin leiðin er að umrita fyrst báðar jöfnurnar á hallatölu- og skurðpunktsform. Fyrri jöfnunni er breytt þannig:

$$
\begin{aligned}
x &= 9-2y \\
2y &= -x + 9 \\
y &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Síðari jöfnunni er síðan breytt í hallatölu- og skurðpunktsform.

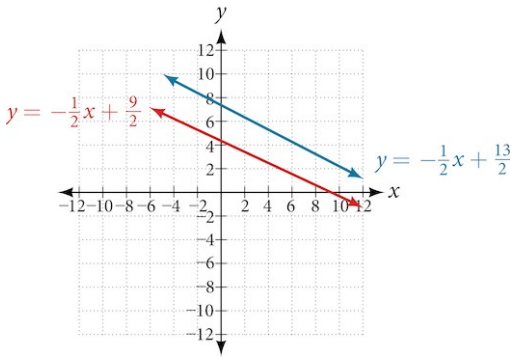
$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 13 \\
2y &= -x + 13 \\
y &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{13}{2}
\end{aligned}
$$

Þegar jöfnurnar eru bornar saman sést að þær hafa sömu hallatölu en ólíka skurðpunkta við y-ás. Línurnar eru því samsíða og skerast ekki.

$$
\begin{aligned}
y &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{9}{2} \\
y &= -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{13}{2}
\end{aligned}
$$

Greining

Þegar jöfnurnar eru ritaðar á hallatölu- og skurðpunktsform sést að hneppið er ósamkvæmt, því allar ósamsíða línur skerast einhvers staðar. Samsíða línur skerast aldrei og línurnar tvær eiga því engan punkt sameiginlegan. Gröf jafnanna í dæminu eru sýnd á mynd 8.



Mynd 8

REYNDU SJÁLF(UR) #6

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með tveimur breytum.

$$\begin{aligned} 2y-2x &= 2 \\ 2y-2x &= 6 \end{aligned}$$

Að setja fram lausnir háðra jöfnuhneppa með tveimur breytum

Háð jöfnuhneppi með tveimur breytum er hneppi þar sem jöfnurnar tvær tákna sömu línuna. Háð hneppi hafa óendanlega margar lausnir því allir punktar annarrar línunnar liggja einnig á hinni. Eftir innsetningu eða samlagningu fæst samsemd á borð við $0=0$.

DÆMI 9

Að finna lausn á háðu línulegu jöfnuhneppi

Finnið lausn jöfnuhneppisins með samlagningaraðferð.

$$\begin{aligned} x+3y &= 2 \\ 3x+9y &= 6 \end{aligned}$$

Lausn

Með samlagningaraðferð viljum við fella aðra breytuna út með því að leggja jöfnurnar saman. Hér skulum við fella x. út. Ef báðar hliðar fyrri jöfnunnar eru margfaldaðar með -3, má fella x-breytuna út.

$$\begin{aligned} x+3y &= 2 \\ (-3)(x+3y) &= (-3)(2) \\ -3x-9y &= -6 \end{aligned}$$

Leggjum nú jöfnurnar saman.

$$\begin{array}{rl} -3x-9y & = -6 \\ +\ 3x+9y & = 6 \\ \hline 0 & = 0 \end{array}$$

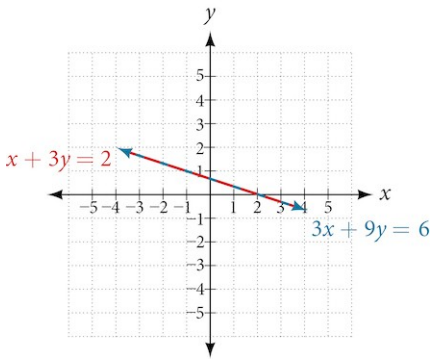
Sjá má að óendanlega margar lausnir uppfylla báðar jöfnurnar.

Greining

Ef báðar jöfnurnar væru ritaðar á hallatölu- og skurðpunktsform mætti sjá fyrir hvernig lausnin liti út áður en þær væru lagðar saman. Skoðum hvað gerist þegar hneppinu er breytt í það form.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 3y &= -x + 2 \\ y &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \\ 3x + 9y &= 6 \\ 9y &= -3x + 6 \\ y &= -\tfrac{3}{9}x + \tfrac{6}{9} \\ y &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Sjá mynd 9. Niðurstaðan er sú sama. Almenn lausn hneppisins er $\left(x, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$.



Mynd 9

REYNDU SJÁLF(UR) #7

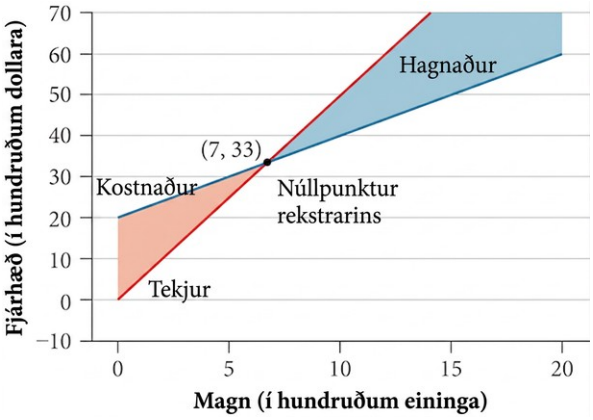
Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með tveimur breytum.

$$\begin{aligned} y - 2x &= 5 \\ -3y + 6x &= -15 \end{aligned}$$

Notkun jöfnuhneppa til að kanna hagnað

Nú getum við notað það sem við höfum lært um jöfnuhneppi og snúið aftur að dæminu um hjólabrettaframleiðandann í upphafi hlutans. Tekjufall framleiðandans er fallið sem notað er til að reikna hve mikið fé kemur inn í reksturinn. Það má tákna með jöfnunni $R = x\,p$, þar sem $x =$ magn og $p =$ verð. Tekjufallið er sýnt með appelsínugulum lit á mynd 10.

Kostnaðarfallið er fallið sem notað er til að reikna kostnað við reksturinn. Það tekur bæði til fasts kostnaðar, svo sem húsaleigu og launa, og breytilegs kostnaðar, svo sem veitugjalda. Kostnaðarfallið er sýnt með bláum lit á mynd 10. x -ásinn sýnir magn í hundruðum eininga. y-ásinn sýnir annaðhvort kostnað eða tekjur í hundruðum dollara.



Mynd 10

Punkturinn þar sem línurnar tvær skerast kallast núllpunktur rekstrarins. Af grafinu sést að ef 700 einingar eru framleiddar er kostnaðurinn $3.300 og tekjurnar einnig $3.300. Með öðrum orðum stendur fyrirtækið á núlli ef það framleiðir og selur 700 einingar. Þá verður hvorki hagnaður né tap.

Skyggða svæðið hægra megin við núllpunktinn táknar það magn sem skilar fyrirtækinu hagnaði. Skyggða svæðið vinstra megin táknar það magn sem veldur fyrirtækinu tapi. Hagnaðarfallið er tekjufallið að frádregnu kostnaðarfallinu og er ritað $P(x)=R(x)-C(x)$. Það skiptir fyrirtæki augljóslega miklu máli að vita við hvaða magn kostnaður og tekjur eru jafnar.

DÆMI 10

Að finna núllpunkt og hagnaðarfall með innsetningu

Gefin eru kostnaðarfallið $C(x)=0{,}85\ x+35.000$ og tekjufallið $R(x)=1{,}55\ x$.. Finnið núllpunktinn og hagnaðarfallið.

9

Lausn

Ritið jöfnuhneppið og notið y í stað fallatáknunar.

$$\begin{aligned} y&=0{,}85\ x+35.000 \\ y&=1{,}55\ x \end{aligned}$$

Setjið stæðuna $0{,}85\ x+35.000$ úr fyrri jöfnunni inn í þá síðari og leysið fyrir x.

$$\begin{aligned} 0{,}85\ x+35.000&=1{,}55\ x \\ 35.000&=0{,}7\ x \\ 50.000&=x \end{aligned}$$

Then, we substitute $x=50.000$ into either the cost function or the revenue function.

$$1{,}55\ (50.000)=77.500$$

Núllpunkturinn er $(50.000, 77.500)$.

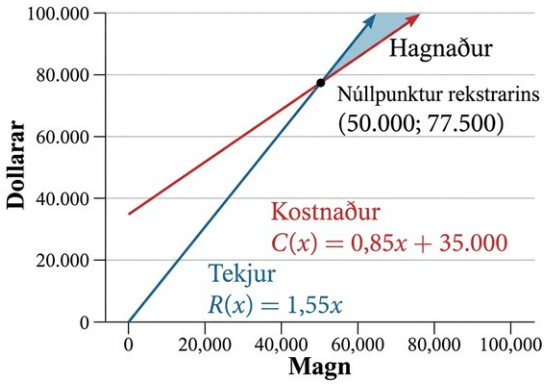
Hagnaðarfallið fæst með formúlunni $P(x)=R(x)-C(x)$.

$$\begin{aligned} P\ (x)&=1{,}55\ x-(0{,}85\ x+35.000) \\ &=0{,}7\ x-35.000 \end{aligned}$$

Hagnaðarfallið er $P\ (x)=0{,}7\ x\ -35.000$.

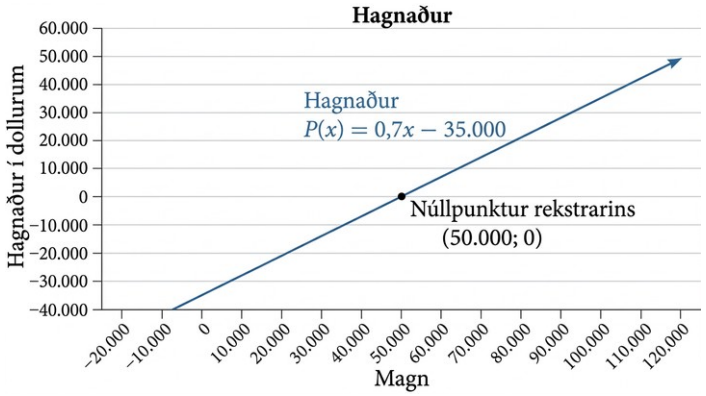
Greining

Kostnaðurinn við að framleiða 50.000 einingar er $77.500 og tekjurnar af sölu 50.000 eininga eru einnig $77.500. Til að skila hagnaði þarf fyrirtækið að framleiða og selja fleiri en 50.000 einingar. Sjá mynd 11.



Mynd 11

We see from the graph in Figure 12 that the profit function has a negative value until $x=50.000$, when the graph crosses the x-axis. Then, the graph emerges into positive y-values and continues on this path as the profit function is a straight line. This illustrates that the break-even point for businesses occurs when the profit function is 0. The area to the left of the break-even point represents operating at a loss.



Mynd 12

DÆMI 11

Að setja upp og leysa jöfnuhneppi með tveimur breytum

Miði á sirkusinn kostar $ 25,00 fyrir börn og $ 50,00 fyrir fullorðna. Á tilteknum degi sóttu 2.000 manns sirkusinn og heildartekjur af miðasölu voru $ 70.000. Hve mörg börn og hve margir fullorðnir keyptu miða?

Lausn

Látum c = fjöldi barna og a = fjöldi fullorðinna sem mættu.

The total number of people is 2.000. We can use this to write an equation for the number of people at the circus that day.

$$c+a=2.000$$

Tekjur af öllum barnamiðunum fást með því að margfalda $ 25,00 með fjölda barna, $25c$. Tekjur af öllum miðum fyrir fullorðna fást með því að margfalda $ 50,00 með fjölda fullorðinna, $50a$. Heildartekjurnar eru $ 70.000. Við getum notað þetta til að setja upp jöfnu fyrir tekjurnar.

$$25\ c+50\ a=70.000$$

Við höfum nú línulegt jöfnuhneppi með tveimur breytum.

$$\begin{gathered} c+a=2.000 \\ 25\ c+50\ a=70.000 \end{gathered}$$

Í fyrri jöfnunni er stuðull beggja breyta 1. Við getum auðveldlega leyst hana fyrir annaðhvort c eða a. Við leysum fyrir a.

$$\begin{gathered} c+a=2.000 \\ a=2.000-c \end{gathered}$$

Substitute the expression $2.000-c$ in the second equation for a and solve for c.

$$\begin{gathered} 25\ c+50\ (2.000-c)=70.000 \\ 25\ c+100.000-50\ c=70.000 \\ -25\ c=-30.000 \\ c=1.200 \end{gathered}$$

Substitute $c=1.200$ into the first equation to solve for a.

$$\begin{gathered} 1.200+a=2.000 \\ a=800 \end{gathered}$$

We find that 1.200 children and 800 adults bought tickets to the circus that day.

REYNDU SJÁLF(UR) #8

Máltíðarmiðar í sirkusnum kosta $ 4,00 fyrir börn og $ 12,00 fyrir fullorðna. Ef keyptir voru 1.650 máltíðarmiðar fyrir samtals $ 14.200, hve mörg börn og hve margir fullorðnir keyptu máltíðarmiða?

MIÐLAR

Skoðið þessi netgögn til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í línulegum jöfnuhneppum.

- Að leysa jöfnuhneppi með innsetningu
- Að leysa jöfnuhneppi með því að fella út breytu
- Notkun jöfnuhneppa

9.1 Æfingar úr hlutanum

Munnlegar spurningar

1. Getur línulegt jöfnuhneppi haft nákvæmlega tvær lausnir? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.

2. Segjum að þið gerið núllpunktsgreiningu fyrir fyrirtæki og að kostnaðar- og tekjujöfnur þess séu háðar. Útskýrið hvaða áhrif það hefur á hagnaðarhlutfall fyrirtækisins.

3. Segjum að þið gerið núllpunktsgreiningu og fáið neikvæðan núllpunkt. Útskýrið hvað það merkir fyrir fyrirtækið.

4. Segjum að þið gerið núllpunktsgreiningu og enginn núllpunktur sé til. Útskýrið hvað það merkir fyrir fyrirtækið. Hvernig ætti það að tryggja að núllpunktur sé til?

5. Gefið er jöfnuhneppi. Útskýrið að minnsta kosti tvær ólíkar aðferðir til að leysa hneppið.

Algebruleg verkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið ákvarða hvort gefna raðaða tvenndin sé lausn jöfnuhneppisins.

6.
$$\begin{aligned} 5x - y &= 4 \\ x + 6y &= 2 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (4, 0)$$

7.
$$\begin{aligned} -3x - 5y &= 13 \\ -x + 4y &= 10 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (-6, 1)$$

8.
$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 1 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (2, 3)$$

9.
$$\begin{aligned} -2x + 5y &= 7 \\ 2x + 9y &= 7 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (-1, 1)$$

10.

$x + 8y = 43$
$3x - 2y = -1$ og $(3, 5)$

Leysið hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum með innsetningu.

11.

$$x + 3y = 5$$
$$2x + 3y = 4$$

12.

$$3x - 2y = 18$$
$$5x + 10y = -10$$

13.

$$4x + 2y = -10$$
$$3x + 9y = 0$$

14.

$$2\,x + 4\,y = -3{,}8$$
$$9\,x - 5\,y = 1{,}3$$

15.

$$-2\,x + 3\,y = 1{,}2$$
$$-3\,x - 6\,y = 1{,}8$$

16.

$$x - 0{,}2\,y = 1$$
$$-10\,x + 2\,y = 5$$

17.

$$3x + 5y = 9$$
$$30x + 50y = -90$$

18.

$$-3x + y = 2$$
$$12x - 4y = -8$$

19.

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y = 16$$
$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{4}y = 9$$

20.

$$-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y = 11$$
$$-\frac{1}{8}x + \frac{1}{3}y = 3$$

Leysið hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum með samlagningu.

21.

$$-2x + 5y = -42$$
$$7x + 2y = 30$$

22.

$$6x - 5y = -34$$
$$2x + 6y = 4$$

23.

$$5\ x - y = -2{,}6$$
$$-4\ x\ -6\ y = 1{,}4$$

24.

$$7\ x\ -2\ y = 3$$
$$4\ x + 5\ y = 3{,}25$$

25.

$$-\mathrm{x} + 2y = -1$$
$$5x - 10y = 6$$

26.

$$7x + 6y = 2$$
$$-28x - 24y = -8$$

27.

$$\frac{5}{6}x + \frac{1}{4}y = 0$$
$$\frac{1}{8}x - \frac{1}{2}y = -\frac{43}{120}$$

28.

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}y = \frac{2}{9}$$
$$-\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y = -\frac{1}{3}$$

29.

$$-0{,}2\ x + 0{,}4\ y = 0{,}6$$
$$x\ -2\ y = -3$$

30.

$$-0{,}1\ x+0{,}2\ y=0{,}6$$
$$5\ x\ -10\ y=1$$

Leysið hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum með hvaða aðferð sem er.

31.

$$5x+9y=16$$
$$x+2y=4$$

32.

$$6\ x\ -8\ y=-0{,}6$$
$$3\ x+2\ y=0{,}9$$

33.

$$5\ x\ -2\ y=2{,}25$$
$$7\ x\ -4\ y=3$$

34.

$$x-\frac{5}{12}y=-\frac{55}{12}$$
$$-6x+\frac{5}{2}y=\frac{55}{2}$$

35.

$$7x-4y=\frac{7}{6}$$
$$2x+4y=\frac{1}{3}$$

9

36.

$$3x+6y=11$$
$$2x+4y=9$$

37.

$$\frac{7}{3}x-\frac{1}{6}y=2$$
$$-\frac{21}{6}x+\frac{3}{12}y=-3$$

38.

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}$$
$$\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}y=-\frac{1}{8}$$

39.

$$2{,}2\ x+1{,}3\ y=-0{,}1$$
$$4{,}2\ x+4{,}2\ y=2{,}1$$

40.

$$0{,}1\ x+0{,}2\ y=2$$
$$0{,}35\ x\ -0{,}3\ y=0$$

Grafísk verkefni

Teiknið graf jöfnuhneppisins í eftirfarandi æfingum. Takið fram hvort hneppið sé samkvæmt, ósamkvæmt eða háð og hvort það hafi eina lausn, enga lausn eða óendanlega margar lausnir.

41.

$$3\ x-y=0{,}6$$
$$x\ -2\ y=1{,}3$$

42.

$$-x+2y=4$$
$$2x-4y=1$$

43.

$$x+2y=7$$
$$2x+6y=12$$

44.

$$3x-5y=7$$
$$x-2y=3$$

45.

$$3x-2y=5$$
$$-9x+6y=-15$$

Tækniverkefni

Notið skurðpunktsaðgerð grafreiknis til að leysa hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum. Námundið öll svör að næsta hundraðshluta.

46.

$$0{,}1\ x+0{,}2\ y=0{,}3$$
$$-0{,}3\ x+0{,}5\ y=1$$

47.

$$-0{,}01\ x+0{,}12\ y=0{,}62$$
$$0{,}15\ x+0{,}20\ y=0{,}52$$

48.

$$0{,}5\ x+0{,}3\ y=4$$
$$0{,}25\ x\ -0{,}9\ y=0{,}46$$

49.

$$\begin{aligned} 0{,}15\ x+0{,}27\ y&=0{,}39\\ -0{,}34\ x+0{,}56\ y&=1{,}8 \end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned} -0{,}71\ x+0{,}92\ y&=0{,}13\\ 0{,}83\ x+0{,}05\ y&=2{,}1 \end{aligned}$$

Viðbótarverkefni

Leysið hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum og ritið lausnina með A, B, C, D, E, og F þar sem $A-F$ eru tölur aðrar en núll. Athugið að $A \neq B$ og $AE \neq BD$.

51.

$$\begin{aligned} x+y&=A\\ x-y&=B \end{aligned}$$

52.

$$\begin{aligned} x+Ay&=1\\ x+By&=1 \end{aligned}$$

53.

$$\begin{aligned} Ax+y&=0\\ Bx+y&=1 \end{aligned}$$

54.

$$\begin{aligned} Ax+By&=C\\ x+y&=1 \end{aligned}$$

55.

$$\begin{aligned} Ax+By&=C\\ Dx+Ey&=F \end{aligned}$$

Hagnýt verkefni

Finnið umbeðna stærð í eftirfarandi æfingum.

56. Fyrirtæki sem framleiðir tuskudýr hefur heildarkostnaðarfallið $C=12x+30$ og tekjufallið $R=20x$. Finnið núllpunktinn.

57. Eþíópískur veitingastaður hefur kostnaðarfallið $C(x)=11x+120$ og tekjufallið $R(x)=5x$. Við hvaða magn fer fyrirtækið að skila hagnaði?

58. Farsímaverksmiðja hefur kostnaðarfallið $C(x)=150\ x+10.000$ og tekjufallið $R(x)=200x$. Hver er núllpunkturinn?

59. Tónlistarmaður tekur gjaldið $C(x)=64\ x+20.000$ þar sem x er heildarfjöldi tónleikagesta. Tónleikastaðurinn tekur $80 fyrir hvern miða. Hve margir þurfa að kaupa miða til að tónleikastaðurinn standi á núlli, og hvert er þá heildarverðmæti seldra miða?

60. Gítarverksmiðja hefur kostnaðarfallið $C(x)=75\ x+50.000$. Ef fyrirtækið þarf að ná núllpunkti eftir sölu 150 eininga, á hvaða verði ætti það að selja hvern gítar? Námundið upp að næsta dollara og ritið tekjufallið.

Leysið eftirfarandi æfingar með línulegu jöfnuhneppi sem hefur tvær jöfnur og tvær breytur.

61. Finnið tvær tölur sem hafa summuna 28 og mismuninn 13.

62. Önnur tala er 9 hærri en hin. Tvöföld summa talnanna er 10. Finnið tölurnar tvær.

63. Stofnkostnaður veitingastaðar er $120.000 og hver máltíð kostar staðinn $10 í framleiðslu. Ef hver máltíð er síðan seld á $15, eftir hve margar seldar máltíðir stendur staðurinn á núlli?

64. Flutningafyrirtæki tekur fast gjald að upphæð $150 og að auki $5 fyrir hvern kassa. Leigubílaþjónusta tæki $20 fyrir hvern kassa. Hve marga kassa þyrfti til að ódýrara væri að nota flutningafyrirtækið og hver yrði heildarkostnaðurinn?

65. Alls komu 1.595 nemendur á fyrsta og öðru ári í háskóla saman á hvatningarfund. Fyrsta árs nemendurnir voru 15 fleiri en annars árs nemendurnir. Hve margir nemendur úr hvorum árgangi mættu?

66. 276 nemendur skráðu sig í inngangsnámskeið í efnafræði. Í lok misserisins stóðust 5 sinnum fleiri nemendur námskeiðið en féllu. Finnið fjölda þeirra sem stóðust námskeiðið og fjölda þeirra sem féllu.

67. 130 kennarar og annað akademískt starfsfólk sóttu ráðstefnu. Konurnar sem mættu voru 18 fleiri en karlarnir. Hve margir af hvoru kyni sóttu ráðstefnuna?

68. Jeppi og pallbíll aka inn á þjóðveg sem liggur í austur–vestur um sömu aðrein en halda hvor í sína áttina. Jeppinn ók inn á þjóðveginn 30 mínútum á undan pallbílnum og ók 7 mílum á klukkustund hægar. 2 klukkustundum eftir að pallbíllinn ók inn á þjóðveginn voru bílarnir 306,5 mílur hvor frá öðrum. Finnið hraða hvors bíls, að því gefnu að þeir hafi verið á hraðastilli og haldið jöfnum hraða.

69. Vísindamaður blandaði 10% saltlausn og 60% saltlausn til að fá 25 gallon af 40% saltlausn. Hve mörgum gallonum af 10% lausn og 60% lausn var blandað?

70. Fjárfestir hafði þrefalt meiri hagnað en árið áður. Ef heildarhagnaður beggja ára var $500.000,48, hve mikinn hagnað hafði fjárfestirinn hvort ár?

71. Fjárfestir lagði 1,1 milljón dollara í tvær fasteignafjárfestingar. Arðsemi fyrri fjárfestingarinnar, Swan Peak, var 110% af fjárhæðinni sem hún fjárfesti. Af síðari fjárfestingunni, Riverside Community, fékk hún 50% umfram það sem hún fjárfesti. Ef hagnaður hennar var $1 milljón, hve mikið fjárfesti hún í hvorri eign?

72. Fjárfestir leggur samtals $25.000 í tvö skuldabréf. Annað greiðir 3% einfalda vexti en hitt $2\frac{7}{8}$% vexti. Ef fjárfestirinn fær $737,50 í ársvexti, hve mikið var lagt í hvorn reikning?

73. Fjárfestir leggur $23.000 í tvö skuldabréf. Annað greiðir 4% einfalda vexti en hitt 2% einfalda vexti. Ef fjárfestirinn fær $710,00 í ársvexti, hve mikið var lagt í hvorn reikning?

74. Blu-ray-diskar kosta $5,96 meira en venjulegir DVD-diskar í raftækjaversluninni All Bets Are Off Electronics. Hvað myndu 6 Blu-ray-diskar og 2 DVD-diskar kosta ef 5 Blu-ray-diskar og 2 DVD-diskar kosta $127,73?

75. Verslunarstarfsmaður seldi 60 pör af íþróttaskóm. Háu skórnir kostuðu $98,99 og lágu skórnir $129,99. Ef heildartekjur af sölu beggja tegunda voru $6.404,40, hve mörg pör af hvorri tegund seldust?

76. Tónleikastjóri taldi 350 selda miða daginn eftir tónleika. Nemendamiði kostaði $12,50 og miði fyrir fullorðna $16,00. Sjóðvélin staðfestir að $5.075 komu inn. Hve margir nemendamiðar og hve margir miðar fyrir fullorðna seldust?

77. Aðgangur að skemmtigarði fyrir 4 börn og 2 fullorðna kostar $116,90. Fyrir 6 börn og 3 fullorðna kostar aðgangurinn $175,35. Ef miðaverð er ólíkt fyrir börn og fullorðna, hvað kostar barnamiði og hvað kostar miði fyrir fullorðinn?

9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Leysa hneppi þriggja jafna með þremur breytum.
- Þekkja ósamkvæm jöfnuhneppi með þremur breytum.
- Setja fram lausn á háðu jöfnuhneppi með þremur breytum.



Mynd 1 (Mynd: „Elembis“, Wikimedia Commons)

Jordi fékk $12.000 í arf sem hann skipti í þrjá hluta og fjárfesti með þrennum hætti: í peningamarkaðssjóði sem greiddi 3% ársvexti, í skuldabréfum sveitarfélaga sem greiddu 4% ársvexti og í verðbréfasjóðum sem greiddu 7% ársvexti. Jordi fjárfesti $4.000 meira í verðbréfasjóðum en í skuldabréfum sveitarfélaga. Fyrsta árið fékk hann $670 í vexti. Hve mikið fjárfesti Jordi í hverri tegund sjóðs?

Ef verkefni af þessu tagi er rétt sett upp þarf aðeins að fylgja ákveðnu mynstri til að leysa það. Í þessum hluta leysum við þetta verkefni og önnur sambærileg verkefni með þremur jöfnum og þremur breytum. Til þess notum við svipaðar aðferðir og þegar við leysum hneppi tveggja jafna með tveimur breytum. Að leysa hneppi þriggja jafna krefst þó aðeins meira skipulags og svolítillar rúmskynjunar.

Að leysa hneppi þriggja jafna með þremur breytum

Helsta verkfærið sem við notum til að leysa jöfnuhneppi með þremur breytum, svokölluð 3×3-jöfnuhneppi, kallast Gauss-eyðing og er kennt við hinn afkastamikla þýska stærðfræðing Karl Friedrich Gauss. Þótt engin ein ákveðin röð aðgerða sé fyrirskipuð gilda tilteknar reglur um hvaða aðgerðir eru leyfilegar. Við getum tölusett jöfnurnar til að halda utan um skrefin. Markmiðið er að eyða einni breytu í einu þar til efra þríhyrningsform fæst, sem er besta form 3×3-jöfnuhneppis því þá má finna lausnina (x, y, z), með einfaldri bakinnsetningu, en hún kallast röðuð þrennd. Jöfnuhneppi á efra þríhyrningsformi lítur svona út:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ Ey + Fz &= G \\ Hz &= K \end{aligned}$$

Leysa má þriðju jöfnuna fyrir z, og nota síðan bakinnsetningu til að finna y og x. Til að koma hneppinu á efra þríhyrningsform má nota þessar aðgerðir:

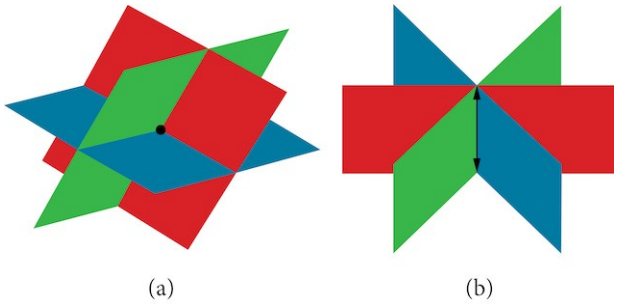
1. Víxla röð hvaða tveggja jafna sem er.
2. Margfalda báðar hliðar jöfnu með fasta sem er ekki núll.
3. Leggja margfeldi einnar jöfnu, með tölu sem er ekki núll, við aðra jöfnu.

Lausnamengi 3×3-jöfnuhneppis er röðuð þrennd $\{(x, y, z)\}$. Á grafi skilgreinir röðuð þrenndin punktinn þar sem þrjú plön skerast í rúmi. Sjá má slíkan skurðpunkt fyrir sér með því að hugsa um horn í rétthyrndu herbergi. Hornið ákvarðast af þremur plönum: tveimur aðliggjandi veggjum og gólfinu (eða loftinu). Sérhver punktur þar sem tveir veggir og gólfið mætast er skurðpunktur þriggja plana.

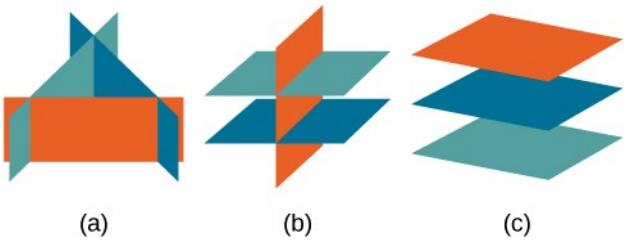
FJÖLDI MÖGULEGRA LAUSNA

Mynd 2 og mynd 3 sýna hvers konar lausnir 3×3-jöfnuhneppi geta haft.

- Hneppi sem hafa eina lausn eru þau sem eftir eyðingu gefa lausnamengi með einni raðaðri þrennd $\{(x, y, z)\}$. Á grafi skilgreinir raðaða þrenndin punkt þar sem þrjú plön skerast í rúmi.
- Hneppi sem hafa óendanlega margar lausnir eru þau sem eftir eyðingu gefa stæðu sem er alltaf sönn, svo sem $0 = 0$. Á grafi samsvara óendanlega margar lausnir línu eða plani sem fellur saman við annað plan og myndar skurðmengi þriggja plana í rúmi.
- Hneppi sem hafa enga lausn eru þau sem eftir eyðingu gefa mótsögn, svo sem $3 = 0$. Á grafi er hneppi án lausnar táknað með þremur plönum sem eiga engan punkt sameiginlegan.



Mynd 2 (a) Þrjú plön skerast í einum punkti og tákna 3×3-jöfnuhneppi með eina lausn. (b) Þrjú plön skerast eftir línu og tákna 3×3-jöfnuhneppi með óendanlega margar lausnir.



Mynd 3 Allar myndirnar þrjár tákna 3×3-jöfnuhneppi án lausnar. (a) Plönin þrjú skerast tvö og tvö en ekki öll í sama punkti. (b) Tvö plananna eru samsíða og skerast við þriðja planið en ekki hvort annað. (c) Öll þrjú plönin eru samsíða og því er enginn skurðpunktur.

DÆMI 1

Að ákvarða hvort röðuð þrennd sé lausn jöfnuhneppis

Ákvarðið hvort raðaða þrenndin $(3, -2, 1)$ sé lausn jöfnuhneppisins.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 6x - 4y + 5z &= 31 \\ 5x + 2y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

Lausn

Við prófum hverja jöfnu með því að setja gildi röðuðu þrenndarinnar inn fyrir x, y, og z.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ (3)+(-2)+(1) &= 2 \\ \text{Satt} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x-4y+5z &= 31 \\ 6(3)-4(-2)+5(1) &= 31 \\ 18+8+5 &= 31 \\ \text{Satt} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5\,x+2\,y+2\,z&=13\\ 5\,(3)+2\,(-2)+2\,(1)&=13\\ 15\,-4+2&=13\\ &\text{Satt} \end{aligned}$$

Raðaða þrenndin $(3,-2,1)$ er sannarlega lausn jöfnuhneppisins.

AÐFERÐ

Gefið er línulegt hneppi þriggja jafna. Leysið fyrir þrjár óþekktar stærðir.

1. Veljið hvaða tvær jöfnur sem er og fellið eina breytu út.
2. Veljið annað par jafna og fellið sömu breytu út.
3. Þá hefur myndast hneppi tveggja jafna með tveimur óþekktum stærðum. Leysið hneppið sem fæst.
4. Setjið þekktar breytur aftur inn í einhverja upphaflegu jöfnuna og leysið fyrir breytuna sem vantar.

DÆMI 2

Að leysa hneppi þriggja jafna með þremur breytum með eyðingu

Finnið lausn á eftirfarandi jöfnuhneppi:

$$\begin{aligned} x-2y+3z&=9 \quad (1)\\ -x+3y-z&=-6 \quad (2)\\ 2x-5y+5z&=17 \quad (3) \end{aligned}$$

Lausn

Alltaf má byrja á fleiri en einn hátt, en hér er augljósast að byrja á því að fella x út með því að leggja saman jöfnur (1) og (2).

$$\begin{array}{rl} x-2y+3z=9 & (1)\\ -x+3y-z=-6 & (2)\\ \hline y+2z=3 & (4) \end{array}$$

Í öðru skrefi margföldum við jöfnu (1) með -2 og leggjum niðurstöðuna við jöfnu (3). Með þessum tveimur skrefum fellum við út breytuna x.

$$\begin{aligned} -2\,x+4\,y-6\,z&=-18 \quad (1) \quad \text{margfölduð með } -2\\ \underline{2\,x-5\,y+5\,z}&\underline{=17 \quad (3)}\\ -y-z&=-1 \quad (5) \end{aligned}$$

Jöfnur (4) og (5) mynda nýtt hneppi tveggja jafna. Við getum leyst fyrir z með því að leggja jöfnurnar saman.

$$\begin{aligned} y + 2z &= 3 \quad (4) \\ -y - z &= -1 \quad (5) \\ \hline z &= 2 \quad (6) \end{aligned}$$

Með því að velja eina jöfnu úr hvoru nýju hneppi fæst efra þríhyrningsformið:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \quad (1) \\ y + 2z &= 3 \quad (4) \\ z &= 2 \quad (6) \end{aligned}$$

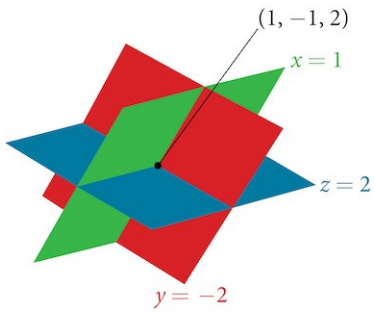
Næst setjum við $z = 2$ aftur inn í jöfnu (4) og leysum fyrir y.

$$\begin{aligned} y + 2(2) &= 3 \\ y + 4 &= 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Að lokum setjum við $z = 2$ og $y = -1$ aftur inn í jöfnu (1). Þá fæst lausnin fyrir x.

$$\begin{aligned} x - 2(-1) + 3(2) &= 9 \\ x + 2 + 6 &= 9 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Lausnin er raðaða þrenndin $(1, -1, 2)$. Sjá mynd 4.



Mynd 4

DÆMI 3

Að leysa hagnýtt verkefni með hneppi þriggja jafna með þremur breytum

Í verkefninu í upphafi hlutans fjárfesti Jordi $12.000 arfi sínum í þremur ólíkum sjóðum: hluta í peningamarkaðssjóði sem greiddi 3% ársvexti, hluta í skuldabréfum sveitarfélaga sem greiddu 4% ársvexti og afganginn í verðbréfasjóðum sem greiddu 7% ársvexti. Jordi fjárfesti $4.000 meira í verðbréfasjóðum en í skuldabréfum sveitarfélaga. Heildarvextir eftir eitt ár voru $670. Hve mikið fjárfesti hann í hverri tegund sjóðs?

Lausn

Til að leysa verkefnið notum við allar gefnar upplýsingar og setjum upp þrjár jöfnur. Fyrst látum við breytu tákna hverja af fjárhæðunum þremur sem Jordi fjárfesti:

$$x = \text{fjárhæð fjárfest í peningamarkaðssjóði}$$
$$y = \text{fjárhæð fjárfest í skuldabréfum sveitarfélaga}$$
$$z = \text{fjárhæð fjárfest í verðbréfasjóðum}$$

Fyrsta jafnan sýnir að summa höfuðstólanna þriggja er $12.000.

$$x + y + z = 12.000$$

Við myndum aðra jöfnuna út frá því að Jordi fjárfesti $4.000 meira í verðbréfasjóðum en í skuldabréfum sveitarfélaga.

$$z = y + 4.000$$

Þriðja jafnan sýnir að heildarvextirnir af sjóðunum eru $670.

$$0{,}03\ x + 0{,}04\ y + 0{,}07\ z = 670$$

Síðan ritum við jöfnurnar þrjár sem jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12.000 \\ -y + z &= 4.000 \\ 0{,}03\ x + 0{,}04\ y + 0{,}07\ z &= 670 \end{aligned}$$

Til að einfalda útreikningana getum við margfaldað þriðju jöfnuna með 100. Þá fæst

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12.000 \quad (1) \\ -y + z &= 4.000 \quad (2) \\ 3\ x + 4\ y + 7\ z &= 67.000 \quad (3) \end{aligned}$$

Skref 1. Víxlið jöfnu (2) og jöfnu (3) svo að jöfnurnar tvær með þremur breytum standi hvor undir annarri.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12.000 \\ 3\ x + 4\ y + 7\ z &= 67.000 \\ -y + z &= 4.000 \end{aligned}$$

Skref 2. Margfaldið jöfnu (1) með -3 og leggið við jöfnu (2). Ritið niðurstöðuna sem línu 2.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12.000 \\ y + 4\ z &= 31.000 \\ -y + z &= 4.000 \end{aligned}$$

Skref 3. Leggið jöfnu (2) við jöfnu (3) og ritið niðurstöðuna sem jöfnu (3).

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12.000 \\ y + 4\ z &= 31.000 \\ 5\ z &= 35.000 \end{aligned}$$

Skref 4. Leysið fyrir z í jöfnu (3). Setjið gildið aftur inn í jöfnu (2) og leysið fyrir y. Setjið síðan gildin fyrir z og y aftur inn í jöfnu (1) og leysið fyrir x.

$$\begin{aligned} 5\ z &= 35.000 \\ z &= 7.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + 4\ (7.000) &= 31.000 \\ y &= 3.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3.000 + 7.000 &= 12.000 \\ x &= 2.000 \end{aligned}$$

Jordi fjárfesti $2.000 í peningamarkaðssjóði, $3.000 í skuldabréfum sveitarfélaga og $7.000 í verðbréfasjóðum.

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Leysið jöfnuhneppið með þremur breytum.

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= -1 \\ 3x - 3y - z &= 5 \\ x - 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Að þekkja ósamkvæm jöfnuhneppi með þremur breytum

Rétt eins og með jöfnuhneppi með tveimur breytum getum við rekist á ósamkvæmt jöfnuhneppi með þremur breytum. Það merkir að engin lausn uppfyllir allar jöfnurnar þrjár. Jöfnurnar gætu táknað þrjú samsíða plön, tvö samsíða plön og eitt plan sem sker þau eða þrjú plön sem skerast tvö og tvö en ekki öll á sama stað. Eyðingin gefur þá ósanna fullyrðingu, svo sem $3 = 7$ eða aðra mótsögn.

DÆMI 4

Að leysa ósamkvæmt hneppi þriggja jafna með þremur breytum

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 4 \quad (1) \\ -x + 2y - 5z &= 3 \quad (2) \\ 5x - 13y + 13z &= 8 \quad (3) \end{aligned}$$

Lausn

Þegar stuðlar x, eru skoðaðir sést að fella má x út með því að leggja jöfnu (1) við jöfnu (2).

$$\begin{aligned} x-3y+z &= 4 \quad (1) \\ -x+2y-5z &= 3 \quad (2) \\ \hline -y-4z &= 7 \quad (4) \end{aligned}$$

Næst margföldum við jöfnu (1) með -5 og leggjum hana við jöfnu (3).

$$-5\,x+15\,y-5\,z=-20 \qquad (1) \quad \text{margfölduð með} \quad -5$$

$$\underline{5\,x-13\,y+13\,z=8} \qquad (3)$$

$$2\,y+8\,z=-12 \qquad (5)$$

Síðan margföldum við jöfnu (4) með 2 og leggjum hana við jöfnu (5).

$$-2\,y-8\,z=14 \quad (4) \quad \text{margfölduð með} \quad 2$$

$$\underline{2\,y+8\,z=-12 \quad (5)}$$

$$0=2$$

Lokajafnan $0=2$ er mótsögn. Við ályktum því að jöfnuhneppið sé ósamkvæmt og hafi enga lausn.

Greining

Í þessu hneppi sker hvert plan hin tvö, en skurðlínurnar liggja ekki á sama stað. Hneppið er því ósamkvæmt.

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Leysið hneppi þriggja jafna með þremur breytum.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ y-3z &= 1 \\ 2x+y+5z &= 0 \end{aligned}$$

Að setja fram lausn á háðu jöfnuhneppi með þremur breytum

Af jöfnuhneppum með tveimur breytum vitum við að háð jöfnuhneppi hefur óendanlega margar lausnir. Hið sama gildir um háð jöfnuhneppi með þremur breytum. Ýmsar aðstæður geta gefið óendanlega margar lausnir. Plönin þrjú gætu fallið saman, þannig að lausn einnar jöfnu væri einnig lausn hinna tveggja. Jöfnurnar þrjár gætu allar verið ólíkar en plönin gætu samt skorist eftir línu sem inniheldur óendanlega marga lausnarpunkta. Loks gætu tvær jöfnur verið eins. Plan þeirra sker þá þriðja planið eftir línu.

DÆMI 5

Að finna lausn á háðu jöfnuhneppi

Finnið lausn á gefnu hneppi þriggja jafna með þremur breytum.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \quad (1) \\ 4x + 2y - 6z &= 0 \quad (2) \\ x - y + z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Lausn

Fyrst getum við margfaldað jöfnu (1) með -2 og lagt hana við jöfnu (2).

$$\begin{gathered} -4\,x\,-2\,y+6\,z=0 \quad \text{jafna } (1) \quad \text{margfölduð með } -2 \\ \underline{\quad 4\,x+2\,y\,-6\,z=0 \quad (2)} \\ 0=0 \end{gathered}$$

Við þurfum ekki að halda lengra. Niðurstaðan er samsemdin $0=0$, sem segir okkur að hneppið hafi óendanlega margar lausnir. Einnig má byrja lausnina á annan hátt, til dæmis með því að margfalda jöfnu (3) með -2, og leggja hana við jöfnu (1). Síðan tökum við sömu skref og áður og fáum sömu niðurstöðu, $0=0$.

Þegar jöfnuhneppi er háð getum við fundið almennar stæður fyrir lausnirnar. Með því að leggja saman jöfnur (1) og (3) fæst

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ \hline 3x - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Síðan leysum við jöfnuna sem fæst fyrir z.

$$\begin{aligned} 3x - 2z &= 0 \\ z &= \tfrac{3}{2}x \end{aligned}$$

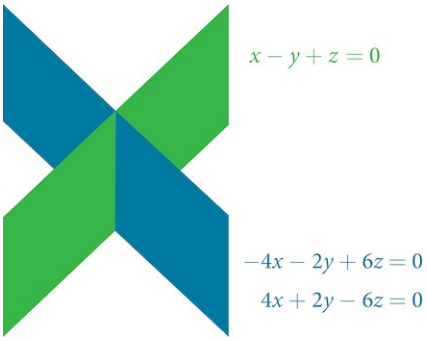
Við setjum stæðuna fyrir z aftur inn í eina jöfnuna og leysum fyrir y.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3\left(\tfrac{3}{2}x\right) &= 0 \\ 2x + y - \tfrac{9}{2}x &= 0 \\ y &= \tfrac{9}{2}x - 2x \\ y &= \tfrac{5}{2}x \end{aligned}$$

Almenna lausnin er því $\left(x, \frac{5}{2}x, \frac{3}{2}x\right)$. Í þessari lausn má x vera hvaða rauntala sem er. Gildi y og z ráðast af gildinu sem valið er fyrir x.

Greining

Eins og sést á mynd 5 falla tvö plananna saman og skerast við þriðja planið eftir línu. Lausnamengið er óendanlegt því allir punktar skurðlínunnar uppfylla jöfnurnar þrjár.



Mynd 5

SPURT OG SVARAÐ

Þarf alltaf að rita almenna lausn háðs jöfnuhneppis með x **?**

Nei, rita má almennu lausnina með hverri breytanna sem er, en algengt er að rita hana með x og, ef þörf krefur, x og y *.*

REYNDU SJÁLF(UR) #3

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ 3x - 2y - z &= 4 \\ x + 6y + 5z &= 24 \end{aligned}$$

MIÐLAR

Skoðið þessi netgögn til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í jöfnuhneppum með þremur breytum.

- Dæmi 1: Hneppi þriggja jafna með þremur óþekktum stærðum leyst með eyðingu
- Dæmi 2: Hneppi þriggja jafna með þremur óþekktum stærðum leyst með eyðingu

9.2 Æfingar úr hlutanum

Munnlegar spurningar

1. Getur línulegt hneppi þriggja jafna haft nákvæmlega tvær lausnir? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.
2. Gefin röðuð þrennd leysir jöfnuhneppið. Er lausnin þá ótvíræð? Ef svo er, útskýrið hvers vegna. Ef ekki, gefið dæmi þar sem hún er ekki ótvíræð.
3. Gefin röðuð þrennd leysir ekki jöfnuhneppið. Þýðir það að hneppið hafi enga lausn? Ef svo er, útskýrið hvers vegna. Ef ekki, gefið dæmi.

4. Er aðeins ein leið til að leysa hneppið með samlagningaraðferð?

5. Getið þið útskýrt hvort aðeins geti verið til ein aðferð til að leysa línulegt jöfnuhneppi? Ef svo er, gefið dæmi um slíkt hneppi. Ef ekki, útskýrið hvers vegna.

Algebruleg verkefni

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort gefna raðaða þrenndin sé lausn jöfnuhneppisins.

6.

$$\begin{aligned} 2x-6y+6z &= -12 \\ x+4y+5z &= -1 \\ -x+2y+3z &= -1 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (0,1,-1)$$

7.

$$\begin{aligned} 6x-y+3z &= 6 \\ 3x+5y+2z &= 0 \\ x+y &= 0 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (3,-3,-5)$$

8.

$$\begin{aligned} 6x-7y+z &= 2 \\ -x-y+3z &= 4 \\ 2x+y-z &= 1 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (4,2,-6)$$

9.

$$\begin{aligned} x-y &= 0 \\ x-z &= 5 \\ x-y+z &= -1 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (4,4,-1)$$

10.

$$\begin{aligned} -x-y+2z &= 3 \\ 5x+8y-3z &= 4 \\ -x+3y-5z &= -5 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (4,1,-7)$$

Leysið hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum með eyðingu.

11.

$$\begin{aligned} 3x-4y+2z &= -15 \\ 2x+4y+z &= 16 \\ 2x+3y+5z &= 20 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 5x-2y+3z &= 20 \\ 2x-4y-3z &= -9 \\ x+6y-8z &= 21 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 5x+2y+4z &= 9 \\ -3x+2y+z &= 10 \\ 4x-3y+5z &= -3 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} 4x-3y+5z &= 31 \\ -x+2y+4z &= 20 \\ x+5y-2z &= -29 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} 5x-2y+3z &= 4 \\ -4x+6y-7z &= -1 \\ 3x+2y-z &= 4 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} 4x+6y+9z &= 0 \\ -5x+2y-6z &= 3 \\ 7x-4y+3z &= -3 \end{aligned}$$

Leysið hvert jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum með Gauss-eyðingu.

17.

$$\begin{aligned} 2x-y+3z &= 17 \\ -5x+4y-2z &= -46 \\ 2y+5z &= -7 \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} 5x-6y+3z &= 50 \\ -x+4y &= 10 \\ 2x-z &= 10 \end{aligned}$$

9

19.

$$\begin{aligned} 2x+3y-6z &= 1 \\ -4x-6y+12z &= -2 \\ x+2y+5z &= 10 \end{aligned}$$

20.

$$\begin{aligned} 4x+6y-2z &= 8 \\ 6x+9y-3z &= 12 \\ -2x-3y+z &= -4 \end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned} 2x+3y-4z &= 5 \\ -3x+2y+z &= 11 \\ -x+5y+3z &= 4 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} 10x + 2y - 14z &= 8 \\ -x - 2y - 4z &= -1 \\ -12x - 6y + 6z &= -12 \end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 14 \\ 2y + 3z &= -14 \\ -16y - 24z &= -112 \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 4z &= -1 \\ -4x + 2y - 3z &= 0 \\ -x + 5y + 7z &= -11 \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 6 \\ 5x - 4y + 3z &= -12 \\ 4x + 5y - 2z &= 15 \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned} 3x - \tfrac{1}{2}y - z &= -\tfrac{1}{2} \\ 4x + z &= 3 \\ -x + \tfrac{3}{2}y &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} 6x - 5y + 6z &= 38 \\ \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{3}{5}z &= 1 \\ -4x - \tfrac{3}{2}y - z &= -74 \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}z&=-\frac{13}{10}\\ \frac{1}{4}x-\frac{2}{5}y-\frac{1}{5}z&=-\frac{7}{20}\\ -\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z&=-\frac{5}{4}\end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z&=\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z&=2\\ -\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}z&=0\\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{10}y+\frac{2}{5}z&=-2\\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{5}y-\frac{1}{8}z&=2\end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned}\frac{4}{5}x-\frac{7}{8}y+\frac{1}{2}z&=1\\ -\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{3}z&=-8\\ -\frac{2}{5}x-\frac{7}{8}y+\frac{1}{2}z&=-5\end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z&=-\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}x-\frac{7}{8}y+\frac{1}{3}z&=-\frac{23}{3}\\ -\frac{1}{3}x-\frac{5}{8}y+\frac{5}{6}z&=0\end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y+\frac{5}{2}z&=-5\\ -\frac{1}{2}x-\frac{5}{3}y+\frac{5}{4}z&=\frac{55}{12}\\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned}\frac{1}{40}x+\frac{1}{60}y+\frac{1}{80}z&=\frac{1}{100}\\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z&=-\frac{1}{5}\\ \frac{3}{8}x+\frac{3}{12}y+\frac{3}{16}z&=\frac{3}{20}\end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} 0{,}1\,x-0{,}2\,y+0{,}3\,z&=2\\ 0{,}5\,x-0{,}1\,y+0{,}4\,z&=8\\ 0{,}7\,x-0{,}2\,y+0{,}3\,z&=8 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned} 0{,}2\,x+0{,}1\,y-0{,}3\,z&=0{,}2\\ 0{,}8\,x+0{,}4\,y-1{,}2\,z&=0{,}1\\ 1{,}6\,x+0{,}8\,y-2{,}4\,z&=0{,}2 \end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned} 1{,}1\,x+0{,}7\,y-3{,}1\,z&=-1{,}79\\ 2{,}1\,x+0{,}5\,y-1{,}6\,z&=-0{,}13\\ 0{,}5\,x+0{,}4\,y-0{,}5\,z&=-0{,}07 \end{aligned}$$

40.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x-0{,}5\,y+0{,}5\,z&=10\\ 0{,}2\,x-0{,}2\,y+0{,}2\,z&=4\\ 0{,}1\,x-0{,}1\,y+0{,}1\,z&=2 \end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned} 0{,}1\,x+0{,}2\,y+0{,}3\,z&=0{,}37\\ 0{,}1\,x-0{,}2\,y-0{,}3\,z&=-0{,}27\\ 0{,}5\,x-0{,}1\,y-0{,}3\,z&=-0{,}03 \end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x-0{,}5\,y-0{,}3\,z&=0{,}13\\ 0{,}4\,x-0{,}1\,y-0{,}3\,z&=0{,}11\\ 0{,}2\,x-0{,}8\,y-0{,}9\,z&=-0{,}32 \end{aligned}$$

43.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x+0{,}2\,y-0{,}3\,z&=1\\ 0{,}4\,x-0{,}6\,y+0{,}7\,z&=0{,}8\\ 0{,}3\,x-0{,}1\,y-0{,}9\,z&=0{,}6 \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned} 0{,}3\,x+0{,}3\,y+0{,}5\,z&=0{,}6\\ 0{,}4\,x+0{,}4\,y+0{,}4\,z&=1{,}8\\ 0{,}4\,x+0{,}2\,y+0{,}1\,z&=1{,}6 \end{aligned}$$

45.

$$\begin{aligned} 0{,}8\,x+0{,}8\,y+0{,}8\,z&=2{,}4\\ 0{,}3\,x-0{,}5\,y+0{,}2\,z&=0\\ 0{,}1\,x+0{,}2\,y+0{,}3\,z&=0{,}6 \end{aligned}$$

Viðbótarverkefni

Leysið jöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum fyrir x, y, og z.

46.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ \tfrac{x-1}{2}+\tfrac{y-3}{2}+\tfrac{z+1}{2} &= 0 \\ \tfrac{x-2}{3}+\tfrac{y+4}{3}+\tfrac{z-3}{3} &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

47.

$$\begin{aligned} 5x-3y-\tfrac{z+1}{2} &= \tfrac{1}{2} \\ 6x+\tfrac{y-9}{2}+2z &= -3 \\ \tfrac{x+8}{2}-4y+z &= 4 \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} \tfrac{x+4}{7}-\tfrac{y-1}{6}+\tfrac{z+2}{3} &= 1 \\ \tfrac{x-2}{4}+\tfrac{y+1}{8}-\tfrac{z+8}{12} &= 0 \\ \tfrac{x+6}{3}-\tfrac{y+2}{3}+\tfrac{z+4}{2} &= 3 \end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned} \tfrac{x-3}{6}+\tfrac{y+2}{2}-\tfrac{z-3}{3} &= 2 \\ \tfrac{x+2}{4}+\tfrac{y-5}{2}+\tfrac{z+4}{2} &= 1 \\ \tfrac{x+6}{2}-\tfrac{y-3}{2}+z+1 &= 9 \end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{3}+\frac{y+3}{4}+\frac{z+2}{6} &= 1 \\ 4x+3y-2z &= 11 \\ 0{,}02x+0{,}015y-0{,}01z &= 0{,}065 \end{aligned}$$

9

Hagnýt verkefni

51. Þrjár sléttar tölur hafa summuna 108. Sú minnsta er helmingur þeirrar stærstu og miðtalan er $\frac{3}{4}$ af stærstu tölunni. Hverjar eru tölurnar þrjár?

52. Þrjár tölur hafa summuna 147. Minnsta talan er helmingur miðtölunnar, sem er helmingur stærstu tölunnar. Hverjar eru tölurnar þrjár?

53. Á ættarmóti voru aðeins blóðskyldir ættingjar: börn, foreldrar og afar og ömmur. Alls mættu 400 manns. Foreldrarnir voru tvöfalt fleiri en afar og ömmur og börnin voru 50 fleiri en foreldrarnir. Hve mörg börn, hve margir foreldrar og hve margir afar og ömmur mættu?

54. Í dýraathvarfi eru alls 350 dýr: kettir, hundar og kanínur. Kanínurnar eru 5 færri en helmingur kattanna og kettirnir eru 20 fleiri en hundarnir. Hve mörg dýr af hverri tegund eru í athvarfinu?

55. Sambýliskona þín, Shani, bauðst til að kaupa matvörur fyrir þig og hinn sambýlinginn. Heildarreikningurinn var $82. Hún gleymdi að geyma kvittanirnar fyrir hvert ykkar en mundi að matvörurnar þínar kostuðu $0,05 minna en helmingur hennar eigin matvara og að matvörur hins sambýlingsins kostuðu $2,10 meira en þínar. Hve mikið kostuðu matvörur hvers ykkar?

56. Sambýlismaður þinn, John, bauðst til að kaupa heimilisvörur fyrir þig og hinn sambýlinginn. Þið búið nærri landamærum þriggja ríkja og hvert þeirra leggur á ólíkan söluskatt. Alls kostuðu vörurnar $100,75. Vörurnar þínar báru 5% skatt, vörur Johns 8% skatt og vörur þriðja sambýlingsins 9% söluskatt. Heildarverð án skatta var $93,50. Ef vörurnar þínar fyrir skatt kostuðu $1 meira en helmingur vara þriðja sambýlingsins fyrir skatt, hve miklu eyddi hvert ykkar? Gefið svarið bæði með og án skatta.

57. Þrír vinnufélagar starfa hjá sama vinnuveitanda. Þeir eru vöruhússtjóri, skrifstofustjóri og vörubílstjóri. Samanlögð árslaun vöruhússtjórans og skrifstofustjórans eru $82.000. Skrifstofustjórinn fær $4.000 meira á ári en vörubílstjórinn. Samanlögð árslaun vöruhússtjórans og vörubílstjórans eru $78.000. Hver eru árslaun hvers vinnufélaga?

58. Í lok dags voru tekjur á skemmtihátíð $2.914,25. Barnamiði kostaði $20,50, miði fyrir fullorðna $29,75 og miði fyrir eldri borgara $15,25. Tvöfalt fleiri eldri borgarar en fullorðnir mættu og börnin voru 20 fleiri en eldri borgararnir. Hve margir barnamiðar, miðar fyrir fullorðna og miðar fyrir eldri borgara seldust?

59. Uppselt er á tónleika hljómsveitar úr heimabyggð. Allir 1.175 miðarnir seljast og heildartekjurnar eru $28.112,50. Nemendamiðar kostuðu $20, barnamiðar $22,50 og miðar fyrir fullorðna $29. Ef hljómsveitin seldi tvöfalt fleiri miða fyrir fullorðna en barnamiða, hve margir miðar af hverri tegund seldust?

60. Barn á 325 myntir að verðmæti $19,50 í poka. Myntirnar eru af þremur gerðum: eins senta, fimm senta og tíu senta myntir. Ef jafnmargar fimm senta og tíu senta myntir eru í pokanum, hve margar myntir af hverri gerð eru þar?

61. Á síðasta ári var hægt að kaupa tiltekna gerð BMW, Jeep og Toyota hjá bílaumboðinu Haven's Pond fyrir samtals $140.000. Vegna verðbólgu myndu sömu bílar kosta $151.830 í ár. Verð BMW hækkaði um 8%, Jeep um 5% og Toyota um 12%. Ef Jeep-bíllinn kostaði $7.000 minna en BMW-bíllinn í fyrra, hvert var verð bílanna þriggja þá?

62. Þegar yngsta barn Deandres flutti að heiman seldi hann húsið sitt og notaði söluhagnaðinn í þrjár fjárfestingar. Hann lagði $80.500 inn á þrjá reikninga: einn sem greiddi 4% einfalda vexti, annan sem greiddi $3\frac{1}{8}$% einfalda vexti og þann þriðja sem greiddi $2\frac{1}{2}$% einfalda vexti. Eftir eitt ár fékk hann $2.670 í vexti. Ef fjárhæðin á öðrum reikningnum var fjórföld fjárhæðin á þeim þriðja, hve mikið var lagt inn á hvern reikning?

63. Þið erfið eina milljón dollara og leggið allt féð inn á þrjá reikninga í eitt ár. Fyrsti reikningurinn ber 3% ársvexti með vaxtavöxtum, annar 4% ársvexti með vaxtavöxtum og sá þriðji 2% ársvexti með vaxtavöxtum. Eftir eitt ár fáið þið $34.000 í vexti. Ef þið leggið fjórfalt meira fé á reikninginn sem greiðir 3% en reikninginn sem greiðir 2%, hve mikið lögðuð þið inn á hvern reikning?

64. Frumkvöðull selur hluta fyrirtækis síns fyrir hundrað þúsund dollara og leggur allt féð inn á þrjá reikninga í eitt ár. Fyrsti reikningurinn ber 4% ársvexti með vaxtavöxtum, annar 3% ársvexti með vaxtavöxtum og sá þriðji 2% ársvexti með vaxtavöxtum. Eftir eitt ár fær frumkvöðullinn $3.650 í vexti. Ef fimmfalt meira fé var lagt á reikninginn sem greiðir 4% en reikninginn sem greiðir 3%, hve mikið var lagt inn á hvern reikning?

65. Þau þrjú lönd sem notuðu mest af olíu á tilteknu ári voru Bandaríkin, Japan og Kína. Miðað við milljónir tunna á dag notuðu löndin þrjú 39,8% af olíunotkun heimsins. Bandaríkin notuðu 0,7% meira en fjórfalda notkun Kína. Bandaríkin notuðu 5% meira en þrefalda notkun Japans. Hve stórt hlutfall af olíunotkun heimsins féll á Bandaríkin, Japan og Kína? 1

1
„Olíubirgðir, -framleiðsla og -neysla árið 2001“, skoðað 6. apríl 2014, http://scaruffi.com/politics/oil.html.

66. Þau þrjú lönd sem framleiddu mest af olíu sama ár voru Sádi-Arabía, Bandaríkin og Rússland. Miðað við milljónir tunna á dag framleiddu löndin þrjú 31,4% af olíuframleiðslu heimsins. Sádi-Arabía og Bandaríkin framleiddu saman 22,1% af heimsframleiðslunni og Sádi-Arabía framleiddi 2% meiri olíu en Rússland. Hve stórt hlutfall af olíuframleiðslu heimsins féll á Sádi-Arabíu, Bandaríkin og Rússland? 2

2
„Olíubirgðir, -framleiðsla og -neysla árið 2001“, skoðað 6. apríl 2014, http://scaruffi.com/politics/oil.html.

67. Sama ár fluttu Bandaríkin mest inn af olíu frá Sádi-Arabíu, Mexíkó og Kanada. Löndin þrjú stóðu fyrir 47% olíuinnflutningsins. Bandaríkin fluttu inn 1,8% meira frá Sádi-Arabíu en frá Mexíkó og 1,7% meira frá Sádi-Arabíu en frá Kanada. Hve stórt hlutfall olíuinnflutnings Bandaríkjanna kom frá þessum þremur löndum? 3

3

„Olíubirgðir, -framleiðsla og -neysla árið 2001“, skoðað 6. apríl 2014, http://scaruffi.com/politics/oil.html.

68. Þau þrjú svæði í Bandaríkjunum sem framleiddu mest af olíu á tilteknu ári voru Mexíkóflói, Texas og Alaska. Svæðin þrjú stóðu fyrir 64% af olíuframleiðslu Bandaríkjanna. Mexíkóflói og Texas framleiddu saman 47% af olíunni. Texas framleiddi 3% meira en Alaska. Hve stórt hlutfall olíuframleiðslu Bandaríkjanna kom frá þessum svæðum? 4

4
„Bandaríkin: Yfirvofandi olíukreppa á heimsvísu“, skoðað 6. apríl 2014, http://www.oilcrisis.com/us/.

69. Á ákveðnum tíma voru 398 dýrategundir á lista yfir tegundir í útrýmingarhættu í Bandaríkjunum. Stærstu hóparnir voru spendýr, fuglar og fiskar, sem saman voru 55% tegundanna á listanum. Fuglar voru 0,7% fleiri en fiskar og fiskar 1,5% fleiri en spendýr. Hve stórt hlutfall tegundanna í útrýmingarhættu voru spendýr, fuglar og fiskar?

70. Kjötneyslu í Bandaríkjunum má skipta í þrjá flokka: rautt kjöt, alifuglakjöt og fisk. Ef fiskneysla er 4% minni en fjórðungur alifuglakjötsneyslu og neysla rauðs kjöts er 18,2% meiri en alifuglakjötsneysla, hvert er hlutfall hvers flokks af kjötneyslunni? 5

5
„Bandarískt kjötiðnaðurinn í hnotskurn“, skoðað 6. apríl 2014, http://www.meatami.com/ht/d/sp/i/47465/pid/47465.

9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Leysa ólínulegt jöfnuhneppi með innsetningu.
- Leysa ólínulegt jöfnuhneppi með eyðingu.
- Teikna graf ólínulegrar ójöfnu.
- Teikna graf ólínulegs ójöfnuhneppis.

Halley-halastjarnan (mynd 1) gengur um sólina á um það bil 75 ára fresti. Braut hennar má líta á sem mjög ílangan sporbaug. Aðrar halastjörnur fylgja svipuðum brautum í geimnum. Rannsaka má slíkar brautir með jöfnuhneppum. Þessi hneppi eru þó ólík þeim sem við skoðuðum í fyrri hlutanum því jöfnurnar eru ekki línulegar.



Mynd 1 Halley-halastjarnan (mynd: „NASA Blueshift"/Flickr)

Í þessum hluta skoðum við skurðmengi fleygboga og línu, hrings og línu og hrings og sporbaugs. Ólínuleg jöfnuhneppi eru leyst með svipuðum aðferðum og línuleg hneppi.

Að leysa ólínulegt jöfnuhneppi með innsetningu

Ólínulegt jöfnuhneppi er hneppi tveggja eða fleiri jafna með tveimur eða fleiri breytum þar sem að minnsta kosti ein jafnan er ekki línuleg. Línulega jöfnu má rita á forminu $A\,x+B\,y+C=0$. Jafna sem ekki er hægt að rita á þessu formi er ólínuleg.

Innsetningaraðferðin sem við notuðum fyrir línuleg hneppi virkar líka fyrir ólínuleg hneppi. Við leysum eina jöfnu fyrir eina breytu, setjum niðurstöðuna inn í hina jöfnuna, leysum fyrir aðra breytu og svo framvegis. Mögulegar niðurstöður eru þó fjölbreyttari.

Skurðmengi fleygboga og línu

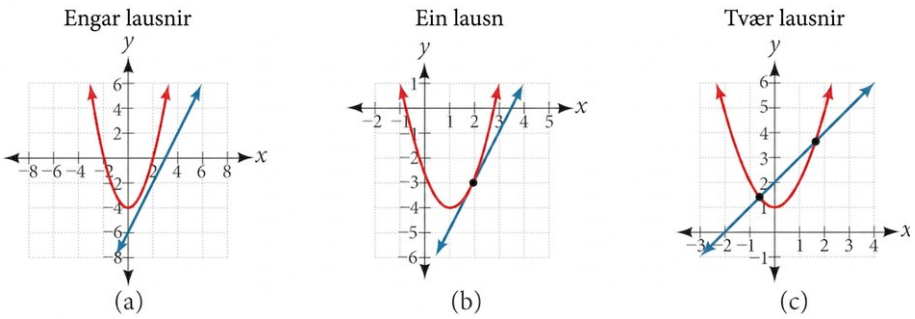
Þrjár gerðir lausna eru mögulegar fyrir ólínulegt jöfnuhneppi sem inniheldur fleygboga og línu.

9

MÖGULEGAR GERÐIR LAUSNA FYRIR SKURÐPUNKTA FLEYGBOGA OG LÍNU

Mynd 2 sýnir möguleg lausnamengi fyrir jöfnuhneppi sem inniheldur fleygboga og línu.

- Engin lausn. Línan sker fleygbogann aldrei.
- Ein lausn. Línan er snertill við fleygbogann og snertir hann í nákvæmlega einum punkti.
- Tvær lausnir. Línan liggur inn um fleygbogann og sker hann í tveimur punktum.



Mynd 2

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi sem inniheldur línu og fleygboga. Finnið lausnina.

1. Leysið línulegu jöfnuna fyrir aðra breytuna.
2. Setjið stæðuna úr fyrsta skrefi inn í jöfnu fleygbogans.
3. Leysið fyrir breytuna sem eftir er.
4. Prófið lausnirnar í báðum jöfnum.

DÆMI 1

Að leysa ólínulegt jöfnuhneppi sem táknar fleygboga og línu

Leysið jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ y &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Lausn

Leysið fyrri jöfnuna fyrir x og setjið stæðuna sem fæst inn í síðari jöfnuna.

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x &= y - 1 \end{aligned} \qquad \text{Leysið fyrir } x.$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ y &= (y - 1)^2 + 1 \end{aligned} \qquad \text{Setjið stæðu inn fyrir } x.$$

Margfaldið upp úr svigum og færið alla liði yfir á aðra hliðina svo að núll standi á hinni.

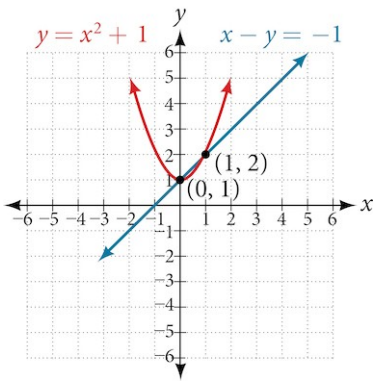
$$\begin{aligned} y &= (y-1)^2 + 1 \\ &= (y^2 - 2y + 1) + 1 \\ &= y^2 - 2y + 2 \\ 0 &= y^2 - 3y + 2 \\ &= (y-2)(y-1) \end{aligned}$$

Þegar leyst er fyrir y fæst $y = 2$ og $y = 1$. Setjið næst hvort gildi y fyrir sig inn í fyrri jöfnuna og leysið fyrir x. Setjið gildið alltaf inn í línulegu jöfnuna til að kanna hvort aukalausnir hafi komið fram.

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ x - (2) &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - (1) &= -1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Lausnirnar eru $(1, 2)$ og $(0, 1)$, sem staðfesta má með því að setja þessi (x, y)-gildi inn í báðar upphaflegu jöfnurnar. Sjá mynd 3.



Mynd 3

SPURT OG SVARAÐ

Hefðum við getað sett gildin fyrir y inn í síðari jöfnuna og leyst fyrir x í dæmi 1?

Já, en þar sem x er í öðru veldi í síðari jöfnunni gætu komið fram aukalausnir fyrir x.

Ef $y = 1$ þá gildir:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ 1 &= x^2 + 1 \\ x^2 &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{0} = 0 \end{aligned}$$

Þetta gefur sama gildi og fékkst í lausninni.

Ef $y = 2$ þá gildir:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 1 \\ 2 &= x^2 + 1 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{aligned}$$

Athugið að -1 er aukalausn.

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Leysið gefna jöfnuhneppið með innsetningu.

$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ 2x^2 - y &= 0 \end{aligned}$$

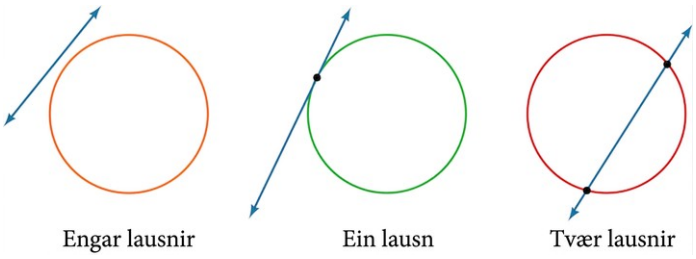
Skurðmengi hrings og línu

Rétt eins og fyrir fleygboga og línu eru þrjár mögulegar niðurstöður þegar leyst er jöfnuhneppi sem táknar hring og línu.

MÖGULEGAR GERÐIR LAUSNA FYRIR SKURÐPUNKTA HRINGS OG LÍNU

Mynd 4 sýnir möguleg lausnamengi fyrir jöfnuhneppi sem inniheldur hring og línu.

- Engin lausn. Línan sker ekki hringinn.
- Ein lausn. Línan er snertill við hringinn og snertir hann í nákvæmlega einum punkti.
- Tvær lausnir. Línan sker hringinn í tveimur punktum.



Mynd 4

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi sem inniheldur línu og hring. Finnið lausnina.

1. Leysið línulegu jöfnuna fyrir aðra breytuna.
2. Setjið stæðuna úr fyrsta skrefi inn í jöfnu hringsins.
3. Leysið fyrir breytuna sem eftir er.
4. Prófið lausnirnar í báðum jöfnum.

DÆMI 2

Að finna skurðpunkta hrings og línu með innsetningu

Finnið skurðpunkta gefna hringsins og gefnu línunnar með innsetningu.

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$y = 3x - 5$$

Lausn

Önnur jafnan hefur þegar verið leyst fyrir y. Við setjum $y = 3x - 5$ inn í jöfnu hringsins.

$$x^2 + (3x - 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 9x^2 - 30x + 25 = 5$$
$$10x^2 - 30x + 20 = 0$$

Næst þáttum við og leysum fyrir x.

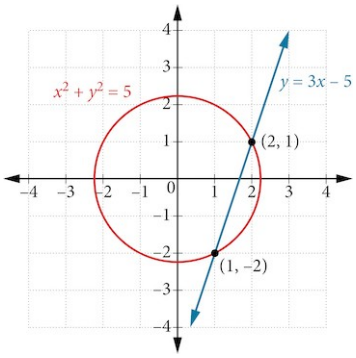
$$10(x^2 - 3x + 2) = 0$$
$$10(x - 2)(x - 1) = 0$$
$$x = 2$$
$$x = 1$$

Setjið x-gildin tvö inn í upphaflegu línulegu jöfnuna og leysið fyrir y.

$$y = 3(2) - 5$$
$$= 1$$

$$y = 3(1) - 5$$
$$= -2$$

Línan sker hringinn í punktunum $(2, 1)$ og $(1, -2)$, sem staðfesta má með því að setja þessi (x, y)-gildi inn í báðar upphaflegu jöfnurnar. Sjá mynd 5.



Mynd 5

9

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Leysið ólínulega jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ x - 3y &= -10 \end{aligned}$$

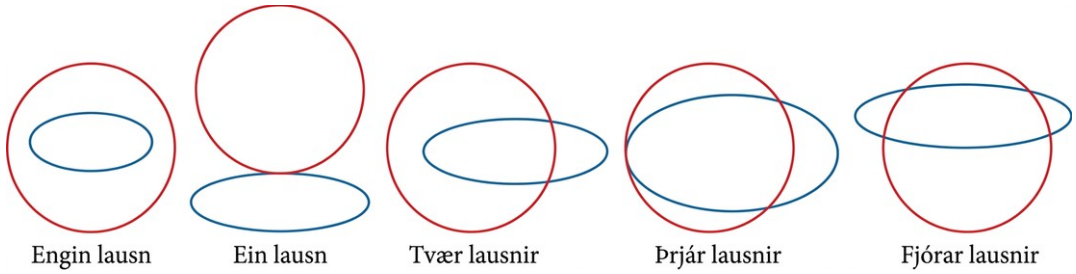
Að leysa ólínulegt jöfnuhneppi með eyðingu

Við höfum séð að innsetning er oft heppilegasta aðferðin þegar jöfnuhneppi inniheldur eina línulega og eina ólínulega jöfnu. Þegar báðar jöfnurnar innihalda sams konar breytuliði af öðru stigi er þó oft auðveldara að fella þá út með samlagningu en að nota innsetningu. Almennt er eyðing mun einfaldari fyrir hneppi tveggja jafna með tveimur breytum en fyrir 3×3-jöfnuhneppi, því skrefin eru færri. Sem dæmi könnum við mögulegar gerðir lausna þegar leyst er jöfnuhneppi sem táknar hring og sporbaug.

MÖGULEGAR GERÐIR LAUSNA FYRIR SKURÐPUNKTA HRINGS OG SPORBAUGS

Mynd 6 sýnir möguleg lausnamengi fyrir jöfnuhneppi sem inniheldur hring og sporbaug.

- Engin lausn. Hringurinn og sporbaugurinn skerast ekki. Annað formið liggur inni í hinu eða bil er á milli hringsins og sporbaugsins.
- Ein lausn. Hringurinn og sporbaugurinn snertast í nákvæmlega einum punkti.
- Tvær lausnir. Hringurinn og sporbaugurinn skerast í tveimur punktum.
- Þrjár lausnir. Hringurinn og sporbaugurinn skerast í þremur punktum.
- Fjórar lausnir. Hringurinn og sporbaugurinn skerast í fjórum punktum.



Mynd 6

DÆMI 3

Að leysa ólínulegt jöfnuhneppi sem táknar hring og sporbaug

Leysið ólínulega jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 26 \quad (1) \\ 3x^2 + 25y^2 &= 100 \quad (2) \end{aligned}$$

Lausn

Byrjum á að margfalda jöfnu (1) með -3, og leggja hana við jöfnu (2).

$$\begin{aligned} (-3)(x^2 + y^2) &= (-3)(26) \\ -3x^2 - 3y^2 &= -78 \\ 3x^2 + 25y^2 &= 100 \\ \hline 22y^2 &= 22 \end{aligned}$$

Við leggjum jöfnurnar saman og leysum síðan fyrir y.

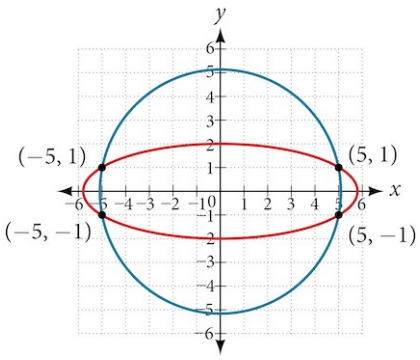
$$\begin{aligned} y^2 &= 1 \\ y &= \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{aligned}$$

Setjið $y = \pm 1$ inn í aðra jöfnuna og leysið fyrir x.

$$\begin{aligned} x^2 + (1)^2 &= 26 \\ x^2 + 1 &= 26 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} = \pm 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (-1)^2 &= 26 \\ x^2 + 1 &= 26 \\ x^2 &= 25 = \pm 5 \end{aligned}$$

Lausnirnar eru fjórar: $(5,1), (-5,1), (5,-1)$, og $(-5,-1)$. Sjá mynd 7.



Mynd 7

REYNDU SJÁLF(UR) #3

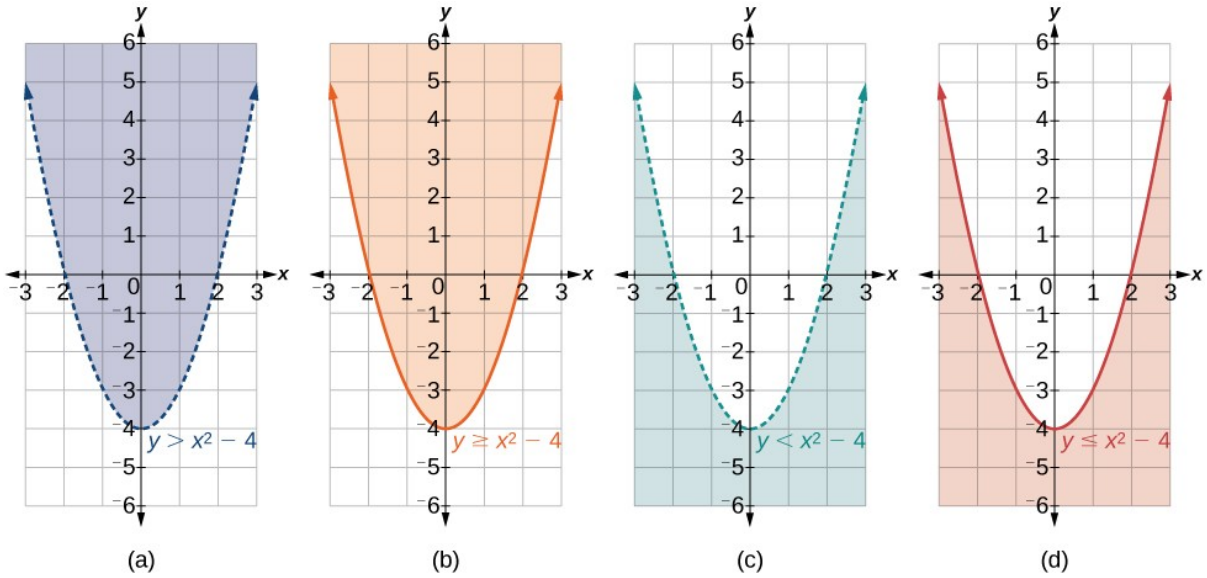
Finnið lausnamengi gefna ólínulega jöfnuhneppisins.

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &= 13 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}$$

Að teikna graf ólínulegrar ójöfnu

Öll hneppin sem við höfum skoðað hingað til hafa verið jöfnuhneppi, en hneppi geta einnig innihaldið ójöfnur. Við höfum þegar lært að teikna graf línulegrar ójöfnu með því að teikna graf samsvarandi jöfnu og skyggja síðan svæðið sem ójöfnumerkið táknar. Nú fylgjum við svipuðum skrefum til að teikna graf ólínulegrar ójöfnu. Þannig búum við okkur undir að leysa ólínuleg ójöfnuhneppi. Ólínuleg ójafna er ójafna sem inniheldur ólínulega stæðu. Graf hennar er teiknað á svipaðan hátt og graf línulegrar ójöfnu.

Þegar ójafnan er stærra en, $y > a$, eða minna en, $y < a$, er grafið teiknað með slitinni línu. Þegar ójafnan er stærra en eða jafnt og, $y \geq a$, eða minna en eða jafnt og, $y \leq a$, er grafið teiknað með heilli línu. Gröfin skipta planinu í svæði og við prófum hvort hvert svæði innihaldi lausnir. Ef einn punktur á svæði uppfyllir ójöfnuna gera allir punktar svæðisins það. Það svæði er skyggt. Sjá mynd 8.



Mynd 8 (a) dæmi um $y>a$; (b) dæmi um $y\geq a$; (c) dæmi um $y<a$; (d) dæmi um $y\leq a$

AÐFERÐ

Gefin er ójafna sem afmarkast af fleygboga. Teiknið graf hennar.

1. Teiknið fleygbogann eins og um jöfnu væri að ræða. Hann myndar jaðar svæðisins sem er lausnamengið.
2. Ef jaðarinn tilheyrir svæðinu, það er ójöfnumerkið er ≤ eða ≥, er fleygboginn teiknaður með heilli línu.
3. Ef jaðarinn tilheyrir ekki svæðinu, það er ójöfnumerkið er < eða >, er fleygboginn teiknaður með slitinni línu.
4. Prófið punkt á öðru svæðinu til að ákvarða hvort hann uppfylli ójöfnuna. Ef fullyrðingin er sönn er lausnamengið svæðið sem inniheldur punktinn. Ef hún er ósönn er lausnamengið svæðið hinum megin við jaðarlínuna.
5. Skyggið svæðið sem táknar lausnamengið.

DÆMI 4

Að teikna graf ójöfnu sem afmarkast af fleygboga

Teiknið graf ójöfnunnar $y>x^2+1$.

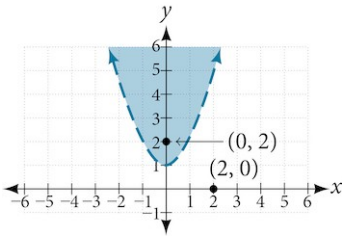
Lausn

Teiknið fyrst graf samsvarandi jöfnu $y=x^2+1$. Þar sem $y>x^2+1$ inniheldur stærra-en-merki teiknum við grafið með slitinni línu. Síðan veljum við prófunarpunkta bæði innan og utan fleygbogans. Prófum punktana $(0,2)$ og $(2,0)$. Annar punkturinn liggur greinilega innan fleygbogans og hinn utan hans.

$$y > x^2 + 1$$
$$2 > (0)^2 + 1$$
$$2 > 1 \qquad \text{Satt}$$

$$0 > (2)^2 + 1$$
$$0 > 5 \qquad \text{Ósatt}$$

Grafið er sýnt á mynd 9. Lausnamengið samanstendur af öllum punktum innan fleygbogans en ekki punktunum á grafinu sjálfu.



Mynd 9

Að teikna graf ólínulegs ójöfnuhneppis

Nú þegar við höfum lært að teikna gröf ólínulegra ójafna getum við teiknað gröf ólínulegra ójöfnuhneppa. Ólínulegt ójöfnuhneppi er hneppi tveggja eða fleiri ójafna með tveimur eða fleiri breytum þar sem að minnsta kosti ein ójafnan er ekki línuleg. Graf ólínulegs ójöfnuhneppis er teiknað á svipaðan hátt og graf línulegs ójöfnuhneppis. Munurinn er sá að grafið getur innihaldið fleiri skyggð svæði sem tákna lausn en graf línulegs hneppis. Lausn ólínulegs ójöfnuhneppis er svæðið þar sem skyggðu svæði ójafnanna skarast, það er skurðmengi svæðanna. Það kallast leyfilegt svæði.

9

AÐFERÐ

Gefið er ólínulegt ójöfnuhneppi. Teiknið graf þess.

1. Finnið skurðpunktana með því að leysa samsvarandi ólínulegt jöfnuhneppi.
2. Teiknið gröf ólínulegu jafnanna.
3. Finnið skyggða svæðið fyrir hverja ójöfnu.
4. Finnið leyfilega svæðið sem skurðmengi skyggðu svæðanna, það er mengi punkta sem uppfylla allar ójöfnurnar.

DÆMI 5

Að teikna graf ójöfnuhneppis

Teiknið graf gefna ójöfnuhneppisins.

$$x^2 - y \leq 0$$
$$2x^2 + y \leq 12$$

Lausn

Jöfnurnar tvær tákna greinilega fleygboga. Við getum fundið skurðpunktana með eyðingu: Leggið jöfnurnar saman og breytan y fellur út. Leysið síðan fyrir x.

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ 2x^2 + y &= 12 \\ \hline 3x^2 &= 12 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Setjið x-gildin inn í aðra jöfnuna og leysið fyrir y.

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ (2)^2 - y &= 0 \\ 4 - y &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

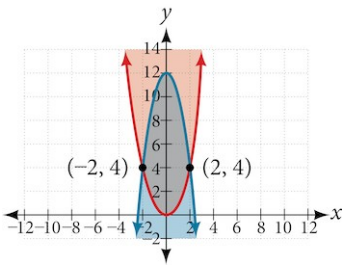
$$\begin{aligned} (-2)^2 - y &= 0 \\ 4 - y &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Skurðpunktarnir tveir eru $(2, 4)$ og $(-2, 4)$. Athugið að umrita má jöfnurnar þannig:

$$\begin{aligned} x^2 - y &\leq 0 \\ x^2 &\leq y \\ y &\geq x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + y &\leq 12 \\ y &\leq -2x^2 + 12 \end{aligned}$$

Teiknið graf hvorrar ójöfnu. Sjá mynd 10. Leyfilega svæðið liggur milli grafanna tveggja og afmarkast að ofan af $2x^2 + y \leq 12$ og að neðan af $x^2 - y \leq 0$.



Mynd 10

REYNDU SJÁLF(UR) #4

Teiknið graf gefna ójöfnuhneppisins.

$$\begin{aligned} y &\geq x^2 - 1 \\ x - y &\geq -1 \end{aligned}$$

MIÐLAR

Skoðið þessi netgögn til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í ólínulegum jöfnum.

- Að leysa ólínulegt jöfnuhneppi með innsetningu
- Að leysa ólínulegt jöfnuhneppi með eyðingu

9.3 Æfingar úr hlutanum

9

Munnlegar spurningar

1. Útskýrið hvort hneppi tveggja ólínulegra jafna geti haft nákvæmlega tvær lausnir. En nákvæmlega þrjár? Ef það er ekki hægt, útskýrið hvers vegna. Ef það er hægt, gefið dæmi um slíkt hneppi á grafi og útskýrið hvers vegna það hefur tvær eða þrjár lausnir.
2. Þegar graf ójöfnu er teiknað nægir að prófa einn punkt til að ákvarða hvort heilt svæði tilheyri lausnamenginu. Útskýrið hvers vegna.
3. Er alltaf til leyfilegt svæði þegar graf ójöfnuhneppis er teiknað? Ef svo er, útskýrið hvers vegna. Ef ekki, gefið dæmi um graf ójöfnuhneppis án leyfilegs svæðis og útskýrið hvers vegna ekkert slíkt svæði er til.
4. Segjum að þið teiknið gröf tekjufalls og kostnaðarfalls. Útskýrið hvernig ákvarða má á hvaða svæðum hagnaður fæst.
5. Segjum að núllpunktsgreining gefi fleiri en eina lausn. Útskýrið hvernig ákvarða má hvaða x-gildi gefa hagnað og hver ekki.

Algebruleg verkefni

Leysið ólínulega jöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum með innsetningu.

6.

$$x + y = 4$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

7.

$$y = x - 3$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

8.

$$y = x$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

9.

$$y = -x$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

10.

$$x = 2$$
$$x^2 - y^2 = 9$$

Leysið ólínulega jöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum með eyðingu.

11.

$$4x^2 - 9y^2 = 36$$
$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

12.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

13.

$$2x^2 + 4y^2 = 4$$
$$2x^2 - 4y^2 = 25x - 10$$

14.

$$y^2 - x^2 = 9$$
$$3x^2 + 2y^2 = 8$$

15.

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{16} = 2500$$
$$y = 2x^2$$

Leysið ólínulega jöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum með hvaða aðferð sem er.

16.

$$-2x^2 + y = -5$$
$$6x - y = 9$$

17.

$$-x^2 + y = 2$$
$$-x + y = 2$$

18.

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = 20x^2 - 1$$

19.

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y = -x^2$$

20.

$$2x^3 - x^2 = y$$
$$y = \frac{1}{2} - x$$

9

21.

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$
$$(x-6)^2 + y^2 = 1$$

22.

$$x^4 - x^2 = y$$
$$x^2 + y = 0$$

23.

$$2x^3 - x^2 = y$$
$$x^2 + y = 0$$

Leysið ólínulega hneppið í eftirfarandi æfingum með hvaða aðferð sem er.

24.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ y &= 3 - x^2 \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 9 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned} -x^2 + y &= 2 \\ -4x + y &= -1 \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} -x^2 + y &= 2 \\ 2y &= -x \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 - y^2 &= 36 \end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= x^2 \end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned} 16x^2 - 9y^2 + 144 &= 0 \\ y^2 + x^2 &= 16 \end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 &= 12 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 &= 12 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 &= 12 \\ x^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 6x - 4y - 11 &= 0 \\ -x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y &= 7 \\ x^2 + y &= 1 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 6 \\ xy &= 1 \end{aligned}$$

Grafísk verkefni

Teiknið graf ójöfnunnar í eftirfarandi æfingum.

39.

$$x^2 + y < 9$$

40.

$$x^2 + y^2 < 4$$

Teiknið graf ójöfnuhneppisins í eftirfarandi æfingum. Merkið alla skurðpunkta.

41.

$$\begin{aligned} x^2 + y &< 1 \\ y &> 2x \end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned} x^2 + y &< -5 \\ y &> 5x + 10 \end{aligned}$$

43.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &< 25 \\ 3x^2 - y^2 &> 12 \end{aligned}$$

44.

$$x^2 - y^2 > -4$$
$$x^2 + y^2 < 12$$

45.

$$x^2 + 3y^2 > 16$$
$$3x^2 - y^2 < 1$$

Viðbótarverkefni

Teiknið graf ójöfnunnar í eftirfarandi æfingum.

46.

$$y \geq e^x$$
$$y \leq \ln(x) + 5$$

47.

$$y \leq -\log(x)$$
$$y \leq e^x$$

Finnið lausnir ólínulegu jafnanna með tveimur breytum í eftirfarandi æfingum.

48.

$$\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 24$$
$$\frac{5}{x^2} - \frac{2}{y^2} + 4 = 0$$

49.

$$\frac{6}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 8$$
$$\frac{1}{x^2} - \frac{6}{y^2} = \frac{1}{8}$$

50.

$$x^2 - xy + y^2 - 2 = 0$$
$$x + 3y = 4$$

51.

$$x^2 - xy - 2y^2 - 6 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

52.

$$x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$$
$$x = y + 2$$

Tækniverkefni

Leysið ójöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum. Notið reiknivél til að teikna graf hneppisins og staðfesta svarið.

53.

$$\begin{aligned} xy &< 1 \\ y &> \sqrt{x} \end{aligned}$$

54.

$$\begin{aligned} x^2 + y &< 3 \\ y &> 2x \end{aligned}$$

Hagnýt verkefni

Setjið upp ólínulegt jöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum í æfingunum hér á eftir. Finnið síðan lausnirnar sem beðið er um.

55. Summa tveggja talna er 300. Önnur talan er tvisvar sinnum ferningur hinnar. Hverjar eru tölurnar?

56. Summa ferninga tveggja talna er 360. Síðari talan er helmingur fernings fyrri tölunnar. Hverjar eru tölurnar?

57. Fartölvufyrirtæki hefur ákvarðað eftirfarandi kostnaðar- og tekjuföll fyrir hvern dag: $C(x) = 3x^2 - 10x + 200$ og $R(x) = -2x^2 + 100x + 50$. Á hvaða bili þarf fjöldi fartölva sem fyrirtækið framleiðir á dag að vera til að það skili hagnaði? Námundið að næstu heiltölu sem gefur hagnað.

58. Farsímafyrirtæki hefur eftirfarandi kostnaðar- og tekjuföll: $C(x) = 8x^2 - 600x + 21.500$ og $R(x) = -3x^2 + 480x$. Á hvaða bili þarf fjöldi farsíma sem fyrirtækið framleiðir á dag að vera til að það skili hagnaði? Námundið að næstu heiltölu sem gefur hagnað.

9

9.4 Stofnbrot

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar $Q(x)$ hefur aðeins óendurtekna línulega þætti.
- Liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar $Q(x)$ hefur endurtekna línulega þætti.
- Liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar $Q(x)$ hefur óendurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt.

- Liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar $Q(x)$ hefur endurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt.

Fyrr í þessum kafla skoðuðum við hneppi tveggja jafna með tveimur breytum, hneppi þriggja jafna með þremur breytum og ólínuleg hneppi. Hér kynnum við aðra notkun jöfnuhneppa: liðun ræðra stæða í stofnbrot.

Brot geta verið flókin og breyta í nefnara gerir þau enn flóknari. Aðferðirnar í þessum hluta auðvelda okkur að vinna með ræðar stæður.

Að liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar Q(x) hefur aðeins óendurtekna línulega þætti

Rifjum upp hvernig ræðar stæður eru lagðar saman og dregnar frá. Þessar aðgerðir byggjast á því að finna samnefnara svo að rita megi summuna eða mismuninn sem eina einfaldaða ræða stæðu. Í þessum hluta skoðum við stofnbrotaliðun, sem snýr við ferlinu við að leggja saman eða draga frá ræðar stæður. Með öðrum orðum er farið frá einni einfaldaðri ræðri stæðu aftur í upphaflegu stæðurnar, sem kallast stofnbrot.

Segjum til dæmis að við leggjum saman eftirfarandi brot:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{-1}{x+2}$$

Fyrst þyrftum við að finna samnefnarann $(x+2)(x-3)$.

Næst myndum við rita hvora stæðu með þessum samnefnara og finna summu liðanna.

$$\frac{2}{x-3}\left(\frac{x+2}{x+2}\right)+\frac{-1}{x+2}\left(\frac{x-3}{x-3}\right)=$$
$$\frac{2x+4-x+3}{(x+2)(x-3)}=\frac{x+7}{x^2-x-6}$$

Stofnbrotaliðun snýr þessu ferli við. Við byrjum á niðurstöðunni og umritum hana, eða liðum, sem summu tveggja brota.

$$\underbrace{\frac{x+7}{x^2-x-6}}_{\text{Einfölduð summa}}=\underbrace{\frac{2}{x-3}+\frac{-1}{x+2}}_{\text{Stofnbrotaliðun}}$$

Við skoðum ræðar stæður með línulega og annars stigs þætti í nefnara þar sem stig teljarans er lægra en stig nefnarans. Óháð gerð stæðunnar sem á að liða er fyrsta og mikilvægasta skrefið alltaf að þátta nefnarann.

Þegar nefnari einfölduðu stæðunnar inniheldur ólíka línulega þætti hefur hver upphaflegu ræðu stæðanna, sem lagðar voru saman eða dregnar frá, líklega haft einn línulegu þáttanna sem nefnara. Í dæminu hér að framan eru þættir x^2-x-6 því $(x-3)(x+2)$, sem eru nefnarar stofnbrotanna. Við umritum því einfaldaða formið sem summu einstakra brota og látum breytu tákna hvern teljara. Síðan finnum við teljarana með einni af nokkrum aðferðum stofnbrotaliðunar.

STOFNBROTALIÐUN $\frac{P(x)}{Q(x)}$ HEFUR ÓENDURTEKNA LÍNULEGA ÞÆTTI

Stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ þegar $Q(x)$ hefur óendurtekna línulega þætti og stig $P(x)$ er lægra en stig $Q(x)$ er

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\frac{A_3}{(a_3x+b_3)}+\cdots+\frac{A_n}{(a_nx+b_n)}.$$

AÐFERÐ

Gefin er ræð stæða með ólíka línulega þætti í nefnara. Liðið hana í stofnbrot.

1. Notið breytu fyrir upphaflegu teljarana, yfirleitt A, B, eða C, eftir fjölda þátta, og setjið hverja breytu yfir einn þátt. Í þessari skilgreiningu notum við A_n fyrir hvern teljara
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(a_nx+b_n)}$$
2. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með samnefnaranum til að eyða brotunum.
3. Margfaldið upp úr svigum hægra megin og takið saman samkynja liði.
4. Setjið stuðla samkynja liða vinstra megin jafna stuðlunum hægra megin. Þá fæst jöfnuhneppi sem leysa má til að finna teljarana.

DÆMI 1

Að liða ræða stæðu með ólíka línulega þætti í stofnbrot

Liðið gefnu ræðu stæðuna með ólíka línulega þætti í stofnbrot.

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)}$$

Lausn

Við aðskiljum þætti nefnarans og merkjum hvern teljara með tákni, svo sem A, B, eða C.

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}$$

Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með samnefnaranum til að eyða brotunum:

$$(x+2)(x-1)\left[\frac{3x}{(x+2)(x-1)}\right]=(x+2)(x-1)\left[\frac{A}{(x+2)}\right]+(x+2)(x-1)\left[\frac{B}{(x-1)}\right]$$

Jafnan sem fæst er

$$3x=A(x-1)+B(x+2)$$

Margfaldið upp úr svigum hægra megin og takið saman samkynja liði.

$$3x = Ax - A + Bx + 2B$$
$$3x = (A + B)x - A + 2B$$

Setjið upp jöfnuhneppi með því að para saman samsvarandi stuðla.

$$\begin{aligned} 3 &= \quad A + B \\ 0 &= -A + 2B \end{aligned}$$

Leggið jöfnurnar saman og leysið fyrir B.

$$\begin{aligned} 3 &= \quad A + B \\ 0 &= -A + 2B \\ \hline 3 &= \quad 0 \quad + 3B \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Setjið $B=1$ inn í aðra upphaflegu jöfnu hneppisins.

$$\begin{aligned} 3 &= A + 1 \\ 2 &= A \end{aligned}$$

Stofnbrotaliðunin er því

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)}$$

Önnur aðferð við að finna A eða B er að nota jöfnuna sem fékkst þegar brotunum var eytt. Í hana setjum við gildi fyrir x sem gerir annaðhvort A-liðinn eða B-liðinn jafnan 0. Ef við látum $x=1$, verður
A −liðurinn jafn 0 og þá má leysa beint fyrir B.

$$\begin{aligned} 3x &= A(x-1) + B(x+2) \\ 3(1) &= A[(1)-1] + B[(1)+2] \\ 3 &= 0 + 3B \\ 1 &= B \end{aligned}$$

Næst má annaðhvort setja $B=1$ inn í jöfnuna og leysa fyrir A, eða gera B-liðinn 0 með því að setja $x=-2$ inn í jöfnuna.

$$\begin{aligned} 3x &= A(x-1) + B(x+2) \\ 3(-2) &= A[(-2)-1] + B[(-2)+2] \\ -6 &= -3A + 0 \\ \tfrac{-6}{-3} &= A \\ 2 &= A \end{aligned}$$

Báðar aðferðir gefa sömu gildi fyrir A og B og því sömu stofnbrotaliðun.

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)}$$

Þessi aðferð sést sjaldan í kennslubókum, en við kynnum hana hér sem valkost sem getur einfaldað sumar stofnbrotaliðanir. Hún kallast aðferð Heavisides eftir Charles Heaviside, frumkvöðul í rannsóknum á rafeindatækni.

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Finnið stofnbrotaliðun eftirfarandi stæðu.

$$\frac{x}{(x-3)(x-2)}$$

Að liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar Q(x) hefur endurtekna línulega þætti

Sum brot eru sértilvik sem liða má í stofnbrot með endurteknum línulegum þáttum. Gæta þarf að endurteknum þáttum með því að rita hvert veldi þáttarins í vaxandi röð.

STOFNBROTALIÐUN $\frac{P(x)}{Q(x)}$: $Q(x)$ HEFUR ENDURTEKNA LÍNULEGA ÞÆTTI

Stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$, þegar $Q(x)$ hefur línulegan þátt sem kemur fyrir n sinnum og stig $P(x)$ er lægra en stig $Q(x)$, er

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Ritið veldi nefnarans í vaxandi röð.

AÐFERÐ

9

Gefin er ræð stæða með endurtekna línulega þætti. Liðið hana í stofnbrot.

1. Notið breytu, svo sem A, B, eða C fyrir teljarana og takið tillit til vaxandi velda nefnaranna.
   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$
2. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með samnefnaranum til að eyða brotunum.
3. Margfaldið upp úr svigum hægra megin og takið saman samkynja liði.
4. Setjið stuðla samkynja liða vinstra megin jafna stuðlunum hægra megin. Þá fæst jöfnuhneppi sem leysa má til að finna teljarana.

DÆMI 2

Stofnbrotaliðun með endurteknum línulegum þáttum

Liðið gefnu ræðu stæðuna með endurtekna línulega þætti í stofnbrot.

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$$

Lausn

Þættir nefnarans eru $x(x-2)^2$. Vegna endurtekins þáttarins $(x-2)$, verða þrír nefnarar í liðuninni: x, $(x-2)$, og $(x-2)^2$. Því fæst

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

Næst margföldum við báðar hliðar með samnefnaranum.

$$\begin{aligned} x(x-2)^2\left[\tfrac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}\right] &= \left[\tfrac{A}{x}+\tfrac{B}{(x-2)}+\tfrac{C}{(x-2)^2}\right]x(x-2)^2 \\ -x^2+2x+4 &= A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx \end{aligned}$$

Hægra megin margföldum við upp úr svigum og tökum saman samkynja liði.

$$\begin{aligned} -x^2+2x+4 &= A(x^2-4x+4)+B(x^2-2x)+Cx \\ &= Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-2Bx+Cx \\ &= (A+B)x^2+(-4A-2B+C)x+4A \end{aligned}$$

Næst berum við saman stuðlana beggja vegna. Þá fæst jöfnuhneppi með þremur breytum:

$$-x^2+2x+4=(A+B)x^2+(-4A-2B+C)x+4A$$

$$\begin{aligned} A+B &= -1 \quad (1) \\ -4A-2B+C &= 2 \quad (2) \\ 4A &= 4 \quad (3) \end{aligned}$$

Þegar leyst er fyrir A fæst

$$\begin{aligned} 4A &= 4 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Setjið $A=1$ inn í jöfnu (1).

$$\begin{aligned} A+B &= -1 \\ (1)+B &= -1 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

Til að leysa fyrir C, setjum við síðan gildin fyrir A og B inn í jöfnu (2).

$$\begin{aligned} -4A-2B+C &= 2 \\ -4(1)-2(-2)+C &= 2 \\ -4+4+C &= 2 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Því fæst

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Finnið stofnbrotaliðun stæðunnar með endurteknum línulegum þáttum.

$$\frac{6x-11}{(x-1)^2}$$

Að liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$, í stofnbrot þegar Q(x) hefur óendurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt

Hingað til höfum við stofnbrotaliðað stæður sem hafa línulega þætti í nefnara og notað teljarana A, B, eða C sem tákna fasta. Nú skoðum við dæmi þar sem einn þáttur nefnarans er annars stigs stæða sem ekki er hægt að þátta. Slíkur þáttur kallast óþáttanlegur annars stigs þáttur. Í slíkum tilvikum notum við línulegan teljara, svo sem $Ax+B, Bx+C$, og svo framvegis.

STOFNBROTALIÐUN $\frac{P(x)}{Q(x)}: Q(x)$ HEFUR ÓENDURTEKINN ÓÞÁTTANLEGAN ANNARS STIGS ÞÁTT

Stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ þegar $Q(x)$ hefur óendurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt og stig $P(x)$ er lægra en stig $Q(x)$ er rituð sem

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Ef nefnarinn hefur líka línulega þætti getur liðunin innihaldið fleiri ræðar stæður. Hver línulegur þáttur fær sinn eigin fasta teljara: A, B, C, og svo framvegis.

AÐFERÐ

Gefin er ræð stæða þar sem þættir nefnarans eru ólíkir, óþáttanlegir annars stigs þættir. Liðið hana í stofnbrot.

1. Notið breytur eins og A, B, eða C fyrir fasta teljara yfir línulegum þáttum og línulegar stæður eins og A_1x+B_1, A_2x+B_2, o.s.frv. fyrir teljara hvers annars stigs þáttar í nefnaranum.
   $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$
2. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með samnefnaranum til að eyða brotunum.
3. Margfaldið upp úr svigum hægra megin og takið saman samkynja liði.

4. Setjið stuðla samkynja liða vinstra megin jafna stuðlunum hægra megin. Þá fæst jöfnuhneppi sem leysa má til að finna teljarana.

DÆMI 3

Að liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar Q(x) inniheldur óendurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt

Finnið stofnbrotaliðun gefnu stæðunnar.

$$\frac{8x^2+12x-20}{(x+3)(x^2+x+2)}$$

Lausn

Í nefnaranum er einn línulegur þáttur og einn óþáttanlegur annars stigs þáttur. Annar teljarinn verður því fasti en hinn línuleg stæða. Því fæst

$$\frac{8x^2+12x-20}{(x+3)(x^2+x+2)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+2)}$$

Við fylgjum sömu skrefum og í fyrri dæmum. Fyrst eyðum við brotunum með því að margfalda báðar hliðar jöfnunnar með samnefnaranum.

$$\begin{aligned}(x+3)(x^2+x+2)\left[\tfrac{8x^2+12x-20}{(x+3)(x^2+x+2)}\right] &= \left[\tfrac{A}{(x+3)}+\tfrac{Bx+C}{(x^2+x+2)}\right](x+3)(x^2+x+2)\\ 8x^2+12x-20 &= A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x+3)\end{aligned}$$

Takið eftir að auðvelt er að leysa fyrir A með því að velja gildi á x sem gerir liðinn $Bx+C$ jafnan 0. Látum $x=-3$ og setjum það inn í jöfnuna.

$$\begin{aligned}8x^2+12x-20 &= A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x+3)\\ 8(-3)^2+12(-3)-20 &= A((-3)^2+(-3)+2)+(B(-3)+C)((-3)+3)\\ 16 &= 8A\\ A &= 2\end{aligned}$$

Nú þegar gildi A, er þekkt setjum við það aftur inn í jöfnuna. Síðan margföldum við upp úr svigum hægra megin og tökum saman samkynja liði.

$$\begin{aligned}8x^2+12x-20 &= 2(x^2+x+2)+(Bx+C)(x+3)\\ 8x^2+12x-20 &= 2x^2+2x+4+Bx^2+3B+Cx+3C\\ 8x^2+12x-20 &= (2+B)x^2+(2+3B+C)x+(4+3C)\end{aligned}$$

Við setjum stuðla liðanna hægra megin jafna stuðlum samsvarandi liða vinstra megin og fáum þá jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} 2+B&=8 \quad (1)\\ 2+3B+C&=12 \quad (2)\\ 4+3C&=-20 \quad (3) \end{aligned}$$

Leysið fyrir B með jöfnu (1) og fyrir C með jöfnu (3).

$$\begin{aligned} 2+B&=8 \quad (1)\\ B&=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4+3C&=-20 \quad (3)\\ 3C&=-24\\ C&=-8 \end{aligned}$$

Stofnbrotaliðun stæðunnar er því

$$\frac{8x^2+12x-20}{(x+3)(x^2+x+2)}=\frac{2}{(x+3)}+\frac{6x-8}{(x^2+x+2)}$$

SPURT OG SVARAÐ

Hefðum við getað sett beint upp jöfnuhneppi til að leysa dæmi 3?

Já, við hefðum getað leyst það með því að setja upp jöfnuhneppi án þess að leysa fyrst fyrir A. Margföldunin hægra megin hefði þá verið:

$$\begin{aligned} 8x^2+12x-20&=Ax^2+Ax+2A+Bx^2+3B+Cx+3C\\ 8x^2+12x-20&=(A+B)x^2+(A+3B+C)x+(2A+3C) \end{aligned}$$

Jöfnuhneppið hefði því verið:

$$\begin{aligned} A+B&=8\\ A+3B+C&=12\\ 2A+3C&=-20 \end{aligned}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #3

Finnið stofnbrotaliðun stæðunnar sem hefur óendurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt.

$$\frac{5x^2-6x+7}{(x-1)(x^2+1)}$$

Að liða $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot þegar Q(x) hefur endurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt

Nú kunnum við að liða einfaldaða ræða stæðu með óþáttanlegum annars stigs þætti. Næst lærum við stofnbrotaliðun þegar einfaldaða ræða stæðan hefur endurtekna óþáttanlega

annars stigs þætti. Liðunin samanstendur þá af stofnbrotum með línulega teljara yfir hverju vaxandi veldi óþáttanlega annars stigs þáttarins.

STOFNBROTALIÐUN $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ÞEGAR Q(X) HEFUR ENDURTEKINN ÓÞÁTTANLEGAN ANNARS STIGS ÞÁTT

Stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$, þegar $Q(x)$ hefur endurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt og stig $P(x)$ er lægra en stig $Q(x)$, er

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ritið nefnarana í vaxandi veldum.

AÐFERÐ

Gefin er ræð stæða með endurtekinn óþáttanlegan þátt. Liðið hana í stofnbrot.

1. Notið breytur eins og A, B, eða C fyrir fasta teljara yfir línulegum þáttum og línulegar stæður eins og A_1x+B_1, A_2x+B_2, o.s.frv. fyrir teljara hvers annars stigs þáttar í nefnaranum, ritaða í vaxandi veldum, svo sem
   $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_n+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$
2. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með samnefnaranum til að eyða brotunum.
3. Margfaldið upp úr svigum hægra megin og takið saman samkynja liði.
4. Setjið stuðla samkynja liða vinstra megin jafna stuðlunum hægra megin. Þá fæst jöfnuhneppi sem leysa má til að finna teljarana.

DÆMI 4

Að liða rætt fall með endurteknum óþáttanlegum annars stigs þætti í nefnara

Liðið gefnu stæðuna sem hefur endurtekinn óþáttanlegan þátt í nefnara.

$$\frac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}$$

Lausn

Þættir nefnarans eru x, (x^2+1), og $(x^2+1)^2$. Rifjum upp að þegar þáttur í nefnara er annars stigs stæða með að minnsta kosti tveimur liðum verður teljarinn að vera á línulega forminu $Ax+B$. Byrjum því á liðuninni.

$$\frac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Við eyðum nefnurunum með því að margfalda hvern lið með $x\left(x^2+1\right)^2$. Því fæst

$$x^4+x^3+x^2-x+1=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x)$$

Margfaldið upp úr svigum hægra megin.

$$\begin{aligned} x^4+x^3+x^2-x+1 &= A(x^4+2x^2+1)+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex \\ &= Ax^4+2Ax^2+A+Bx^4+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+Ex \end{aligned}$$

Nú tökum við saman samkynja liði.

$$x^4+x^3+x^2-x+1=(A+B)x^4+(C)x^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$$

Setjið upp jöfnuhneppi með því að para saman samsvarandi stuðla beggja vegna jafnaðarmerkisins.

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ C &= 1 \\ 2A+B+D &= 1 \\ C+E &= -1 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Héðan má nota innsetningu. Setjið $A=1$ inn í fyrstu jöfnuna.

$$\begin{aligned} 1+B &= 1 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

Setjið $A=1$ og $B=0$ inn í þriðju jöfnuna.

$$\begin{aligned} 2(1)+0+D &= 1 \\ D &= -1 \end{aligned}$$

Setjið $C=1$ inn í fjórðu jöfnuna.

$$\begin{aligned} 1+E &= -1 \\ E &= -2 \end{aligned}$$

Nú höfum við leyst fyrir allar óþekktu stærðirnar hægra megin við jafnaðarmerkið. Við höfum $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=-1$, og $E=-2$. Við getum ritað liðunina þannig:

$$\frac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)}-\frac{x+2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #4

Finnið stofnbrotaliðun stæðunnar sem hefur endurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt.

$$\frac{x^3-4x^2+9x-5}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$$

MIÐLAR

Notið þessi netgögn til frekari útskýringa og æfinga í stofnbrotum.

- Stofnbrotaliðun
- Stofnbrotaliðun með endurteknum línulegum þáttum
- Stofnbrotaliðun með línulegum og annars stigs þáttum

9.4 Æfingar kaflans

Munnleg verkefni

1. Er hægt að liða sérhvert hlutfall margliða í að minnsta kosti tvö stofnbrot? Ef svo er, útskýrið hvers vegna; ef ekki, gefið dæmi um slíkt brot.

2. Getið þið útskýrt hvers vegna stofnbrotaliðun er ótvíræð? (Vísbending: Hugsið um hana sem jöfnuhneppi.)

3. Getið þið útskýrt hvernig sannreyna má stofnbrotaliðun með myndriti?

4. Þið eruð ekki viss um að stofnbrotaliðunin sé rétt. Útskýrið hvernig þið getið yfirfarið svarið.

5. Getið þið útskýrt aðra aðferð til að leysa jöfnuhneppið sem stofnbrotaliðun gefur? Ef til dæmis $\frac{7x+13}{3x^2+8x+15}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{3x+5}$ fæst að lokum eftir einföldun $7x+13=A(3x+5)+B(x+1)$. Útskýrið hvernig velja má hentugt gildi á x sem eyðir annaðhvort A eða B svo að leysa megi fyrir A og B.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal finna stofnbrotaliðun fyrir óendurtekna línulega þætti.

6.

$$\frac{5x+16}{x^2+10x+24}$$

7.

$$\frac{3x-79}{x^2-5x-24}$$

8.

$$\frac{-x-24}{x^2-2x-24}$$

9.

$$\frac{10x+47}{x^2+7x+10}$$

10.

$$\frac{x}{6x^2+25x+25}$$

11.

$$\frac{32x-11}{20x^2-13x+2}$$

12.

$$\frac{x+1}{x^2+7x+10}$$

13.

$$\frac{5x}{x^2-9}$$

14.

$$\frac{10x}{x^2-25}$$

15.

$$\frac{6x}{x^2-4}$$

16.

$$\frac{2x-3}{x^2-6x+5}$$

17.

$$\frac{4x-1}{x^2-x-6}$$

18.

$$\frac{4x+3}{x^2+8x+15}$$

19.

$$\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna stofnbrotaliðun fyrir endurtekna línulega þætti.

20.

$$\frac{-5x-19}{(x+4)^2}$$

21.

$$\frac{x}{(x-2)^2}$$

22.

$$\frac{7x+14}{(x+3)^2}$$

23.

$$\frac{-24x-27}{(4x+5)^2}$$

24.

$$\frac{-24x-27}{(6x-7)^2}$$

25.

$$\frac{5-x}{(x-7)^2}$$

26.

$$\frac{5x+14}{2x^2+12x+18}$$

27.

$$\frac{5x^2+20x+8}{2x(x+1)^2}$$

28.

$$\frac{4x^2+55x+25}{5x(3x+5)^2}$$

29.

$$\frac{54x^3+127x^2+80x+16}{2x^2(3x+2)^2}$$

30.

$$\frac{x^3-5x^2+12x+144}{x^2\left(x^2+12x+36\right)}$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna stofnbrotaliðun fyrir óendurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt.

31.

$$\frac{4x^2+6x+11}{(x+2)\left(x^2+x+3\right)}$$

32.

$$\frac{4x^2+9x+23}{(x-1)\left(x^2+6x+11\right)}$$

33.

$$\frac{-2x^2+10x+4}{(x-1)\left(x^2+3x+8\right)}$$

34.

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+1)\left(x^2+5x-2\right)}$$

35.

$$\frac{4x^2+17x-1}{(x+3)\left(x^2+6x+1\right)}$$

9

36.

$$\frac{4x^2}{(x+5)\left(x^2+7x-5\right)}$$

37.

$$\frac{4x^2+5x+3}{x^3-1}$$

38.

$$\frac{-5x^2+18x-4}{x^3+8}$$

39.

$$\frac{3x^2-7x+33}{x^3+27}$$

40.

$$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}$$

41.

$$\frac{4x^2+4x+12}{8x^3-27}$$

42.

$$\frac{-50x^2+5x-3}{125x^3-1}$$

43.

$$\frac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^4+216x}$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna stofnbrotaliðun fyrir endurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt.

44.

$$\frac{3x^3+2x^2+14x+15}{\left(x^2+4\right)^2}$$

45.

$$\frac{x^3+6x^2+5x+9}{\left(x^2+1\right)^2}$$

46.

$$\frac{x^3-x^2+x-1}{\left(x^2-3\right)^2}$$

47.

$$\frac{x^2+5x+5}{\left(x+2\right)^2}$$

48.

$$\frac{x^3+2x^2+4x}{\left(x^2+2x+9\right)^2}$$

49.

$$\frac{x^2+25}{\left(x^2+3x+25\right)^2}$$

50.

$$\frac{2x^3+11x^2+7x+70}{\left(2x^2+x+14\right)^2}$$

51.

$$\frac{5x+2}{x\left(x^2+4\right)^2}$$

52.

$$\frac{x^4+x^3+8x^2+6x+36}{x\left(x^2+6\right)^2}$$

53.

$$\frac{2x-9}{\left(x^2-x\right)^2}$$

54.

$$\frac{5x^3-2x+1}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

9

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal finna stofnbrotaliðunina.

55.

$$\frac{x^2+4}{\left(x+1\right)^3}$$

56.

$$\frac{x^3-4x^2+5x+4}{\left(x-2\right)^3}$$

Í eftirfarandi æfingum skal framkvæma aðgerðina og finna síðan stofnbrotaliðunina.

57.

$$\frac{7}{x+8}+\frac{5}{x-2}-\frac{x-1}{x^2-6x-16}$$

58.

$$\frac{1}{x-4}-\frac{3}{x+6}-\frac{2x+7}{x^2+2x-24}$$

59.

$$\frac{2x}{x^2-16}-\frac{1-2x}{x^2+6x+8}-\frac{x-5}{x^2-4x}$$

9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Finna summu og mismun tveggja fylkja.
- Finna margfeldi fylkis og tölu.
- Finna margfeldi tveggja fylkja.



Mynd 1 (heimild: „SD Dirk“, Flickr)

Tvö félagslið í knattspyrnu, Wildcats og Mud Cats, vilja kaupa nýjan búnað fyrir komandi keppnistímabil. Tafla 1 sýnir búnaðarþörf beggja liða.

Tafla 1

	Wildcats	Mud Cats
Mörk	6	10
Boltar	30	24
Keppnistreyjur	14	20

Mark kostar $300, bolti kostar $10 og keppnistreyja kostar $30. Hvernig getum við fundið heildarkostnað búnaðarins sem hvort lið þarf? Í þessum hluta kynnumst við aðferð til að setja gögnin í töflunni yfir knattspyrnubúnað fram þannig að reikna megi með þeim. Þá getum við reiknað kostnað búnaðarins.

Að finna summu og mismun tveggja fylkja

Til að leysa verkefni eins og verkefnið um knattspyrnuliðin getum við notað fylki, sem er rétthyrnd tafla talna. Lína í fylki er talnaruna sem liggur lárétt. Dálkur í fylki er talnaruna sem liggur lóðrétt. Hver tala er stak í fylkinu. Fylki eru afmörkuð með [ ] eða ( ) og yfirleitt táknuð með stórum bókstöfum. Hér fyrir neðan sjást til dæmis þrjú fylki sem nefnast A, B, og C.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9

Lýsing fylkja

Fylki er oft lýst með stærð þess: $m \times n$ táknar m línur og n dálka. Stak fylkis er fyrst auðkennt með línu og síðan dálki. Til að finna stak í fylki A sem táknað er a_{ij}, leitum við til dæmis að stakinu í línu i, og dálki j. Í fylki A, hér fyrir neðan er stakið í línu 2 og dálki 3 jafnt a_{23}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Fylki af stærðinni $n \times n$, kallast ferningsfylki; það hefur jafnmargar línur og dálka. 3×3 fylkið hér að framan er dæmi um ferningsfylki.

Línufylki er fylki með einni línu og er af stærðinni $1 \times n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

Dálkfylki er fylki með einum dálki og er af stærðinni $m \times 1$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Nota má fylki til að tákna jöfnuhneppi. Þá tákna tölurnar stuðla breytanna í hneppinu. Oft er auðveldara að leysa jöfnuhneppi með fylkjum vegna þess að breyturnar sjálfar eru ekki skrifaðar. Við skoðum þetta nánar í næsta hluta en lítum fyrst á helstu fylkjaaðgerðir.

FYLKI

Fylki er rétthyrnd tafla talna sem yfirleitt er táknuð með stórum bókstaf: A, B, C, og svo framvegis. Hvert stak fylkis er táknað a_{ij}, þar sem i táknar línuna og j dálkinn. Fylkjum er oft lýst með stærð þeirra: $m \times n$ táknar m línur og n dálka.

DÆMI 1

Að finna stærð gefins fylkis og staðsetja stök

Gefið er fylkið A:

1. ⓐ Hver er stærð fylkisins A?
2. ⓑ Hver eru stökin í a_{31} og a_{22}?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Lausn

1. ⓐ Stærðin er 3×3 því fylkið hefur þrjár línur og þrjá dálka.
2. ⓑ Stakið a_{31} er talan í línu 3 og dálki 1, sem er 3. Stakið a_{22} er talan í línu 2 og dálki 2, sem er 4. Munið að línan er tilgreind á undan dálkinum.

Samlagning og frádráttur fylkja

Við notum fylki til að skrá gögn eða tákna hneppi. Stökin eru tölur og því getum við framkvæmt aðgerðir á fylkjum. Við leggjum fylki saman eða drögum þau frá með því að leggja saman eða draga frá samsvarandi stök.

Til þess verða stökin að samsvara hvert öðru. Því er aðeins hægt að leggja saman eða draga frá fylki af sömu stærð. Við getum lagt saman eða dregið frá 3×3 fylki og annað 3×3 fylki en ekki 2×3 fylki og 3×3 fylki, því þá eiga sum stök annars fylkisins sér ekkert samsvarandi stak í hinu.

SAMLAGNING OG FRÁDRÁTTUR FYLKJA

Gefin eru jafnstór fylki A og B. Við samlagningu og frádrátt A og B fæst fylki C eða fylki D af sömu stærð.

$$A+B=C \text{ þannig að } a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

$$A-B=D \text{ þannig að } a_{ij}-b_{ij}=d_{ij}$$

Víxlregla gildir um samlagningu fylkja.

$$A+B=B+A$$

Tengiregla gildir einnig.

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

DÆMI 2

Að finna summu fylkja

Finnið summu A og B, þegar

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ og } B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Lausn

Leggið saman samsvarandi stök.

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

DÆMI 3

9

Að leggja saman fylkin A og B

Finnið summu A og B.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } B=\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Lausn

Leggið saman samsvarandi stök. Leggið stakið í línu 1 og dálki 1, a_{11}, í fylki A við stakið í línu 1 og dálki 1, b_{11}, í B. Haldið sama mynstri áfram þar til öll stökin hafa verið lögð saman.

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4+5 & 1+9 \\ 3+0 & 2+7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

DÆMI 4

Að finna mismun tveggja fylkja

Finnið mismun A og B.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Lausn

Við drögum samsvarandi stök fylkjanna frá hvert öðru.

$$\begin{aligned} A-B &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2-8 & 3-1 \\ 0-5 & 1-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

DÆMI 5

Að finna summu og mismun tveggja 3 × 3 fylkja

Gefin eru A og B:

1. ⓐ Finnið summuna.
2. ⓑ Finnið mismuninn.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -10 & -2 \\ 14 & 12 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 0 & -12 & -4 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Lausn

1. ⓐ Leggið saman samsvarandi stök.

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 2 & -10 & -2 \\ 14 & 12 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 0 & -12 & -4 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+6 & -10+10 & -2-2 \\ 14+0 & 12-12 & 10-4 \\ 4-5 & -2+2 & 2-2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 14 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. ⓑ Dragið samsvarandi stök frá hvert öðru.

$$\begin{aligned} A-B &= \begin{bmatrix} 2 & -10 & -2 \\ 14 & 12 & 10 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 0 & -12 & -4 \\ -5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-6 & -10-10 & -2+2 \\ 14-0 & 12+12 & 10+4 \\ 4+5 & -2-2 & 2+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & -20 & 0 \\ 14 & 24 & 14 \\ 9 & -4 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Leggið saman fylkið A og fylkið B.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ og } B=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Að finna margfeldi fylkis og tölu

Auk þess að leggja saman og draga frá heil fylki þurfum við oft að margfalda fylki með fasta sem kallast skali. Rifjum upp að skali er rauntala sem hefur stærð en enga stefnu. Tími, hitastig og vegalengd eru til dæmis skalarstærðir. Við skölun fylkis er hvert stak þess margfaldað með skala. Margfeldi fylkis og skala er fylkið sem fæst við slíka skölun.

Skoðum raunhæft dæmi þar sem háskóli þarf að fjölga tölvum, tölvuborðum og stólum í tveimur tölvuverum vegna aukins nemendafjölda. Áætlað er að auka þurfi búnaðinn um 15% í báðum tölvuverum. Núverandi búnaður skólans er sýndur í töflu 2.

Tafla 2

	Tölvuver A	**Tölvuver B**
Tölvur	15	27
Tölvuborð	16	34
Stólar	16	34

Þegar gögnunum er breytt í fylki fæst

$$C_{2013} = \begin{bmatrix} 15 & 27 \\ 16 & 34 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

Til að reikna hversu mikinn tölvubúnað þarf margföldum við öll stök fylkisins C með 0,15.

$$(0{,}15)\, C_{2013} = \begin{bmatrix} (0{,}15)\ 15 & (0{,}15)\ 27 \\ (0{,}15)\ 16 & (0{,}15)\ 34 \\ (0{,}15)\ 16 & (0{,}15)\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}25 & 4{,}05 \\ 2{,}4 & 5{,}1 \\ 2{,}4 & 5{,}1 \end{bmatrix}$$

Við verðum að námunda upp að næstu heiltölu og fáum þá fjöldann sem þarf af nýjum búnaði:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Þegar við leggjum fylkin saman eins og sýnt er hér fyrir neðan fáum við nýja heildarfjöldann.

$$\begin{bmatrix} 15 & 27 \\ 16 & 34 \\ 16 & 34 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 32 \\ 19 & 40 \\ 19 & 40 \end{bmatrix}$$

Þetta þýðir að

$$C_{2014} = \begin{bmatrix} 18 & 32 \\ 19 & 40 \\ 19 & 40 \end{bmatrix}$$

Tölvuver A verður því með 18 tölvur, 19 tölvuborð og 19 stóla en tölvuver B með 32 tölvur, 40 tölvuborð og 40 stóla.

SKÖLUN

Við skölun er hvert stak fylkis margfaldað með fasta. Gefið er

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

og margfeldið $c\,A$ er

$$\begin{aligned} cA &= c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dreifiregla gildir um skölun. Fyrir fylkin A, B, og C og skalana a og b, gildir

$$\begin{aligned} a(A+B) &= aA + aB \\ (a+b)A &= aA + bA \end{aligned}$$

DÆMI 6

Að margfalda fylki með skala

Margfaldið fylkið A með skalanum 3.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Lausn

Margfaldið hvert stak í A með skalanum 3.

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 8 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Gefið er fylkið B,. Finnið $-2\,B$ þegar

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

DÆMI 7

Að finna summu skalaðra fylkja

Finnið summuna $3\,A + 2\,B$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -6\end{bmatrix} \text{ og } B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}$$

Lausn

Finnið fyrst $3A$, og síðan $2B$.

$$\begin{aligned}3A &= \begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3(-2) & 3\cdot 0\\ 3\cdot 0 & 3(-1) & 3\cdot 2\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 3 & 3(-6)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3 & -6 & 0\\ 0 & -3 & 6\\ 12 & 9 & -18\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2B &= \begin{bmatrix}2(-1) & 2\cdot 2 & 2\cdot 1\\ 2\cdot 0 & 2(-3) & 2\cdot 2\\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 & 2(-4)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\ 0 & -6 & 4\\ 0 & 2 & -8\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Leggið nú saman $3A+2B$.

$$\begin{aligned}3A+2B &= \begin{bmatrix}3 & -6 & 0\\ 0 & -3 & 6\\ 12 & 9 & -18\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\ 0 & -6 & 4\\ 0 & 2 & -8\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3-2 & -6+4 & 0+2\\ 0+0 & -3-6 & 6+4\\ 12+0 & 9+2 & -18-8\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & -9 & 10\\ 12 & 11 & -26\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Að finna margfeldi tveggja fylkja

Auk þess að margfalda fylki með skala getum við margfaldað saman tvö fylki. Margfeldi tveggja fylkja er aðeins skilgreint þegar innri stærðirnar eru jafnar, það er þegar fjöldi dálka í fyrra fylkinu er jafn fjölda lína í því síðara. Ef A er $m \times r$ fylki og B er $r \times n$ fylki, þá er

margfeldisfylkið AB af stærðinni $m \times n$. Margfeldið AB er til dæmis skilgreint vegna þess að fjöldi dálka í A er jafn fjölda lína í B. Ef innri stærðirnar eru ekki jafnar er margfeldið ekki skilgreint.

$$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 3}{B}$$

jafnar

Við margföldum stök A með stökum B samkvæmt tilteknu mynstri sem lýst er hér á eftir. Fylkjamargföldun verður skýrari þegar við reiknum dæmi með rauntölum.

Til að fá stökin í línu i í AB, margföldum við stökin í línu i í A með samsvarandi stökum í dálki j í B og leggjum margfeldin saman. Gefin eru til dæmis fylkin A og B, þar sem stærð A er 2×3 og stærð B er 3×3,. Margfeldið AB verður þá 2×3 fylki.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Margfaldið og leggið saman eins og hér er sýnt til að fá fyrsta stak margfeldisfylkisins AB.

1. Til að fá stakið í línu 1 og dálki 1 í AB, margföldum við fyrstu línuna í A með fyrsta dálkinum í B, og leggjum saman.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

2. Til að fá stakið í línu 1 og dálki 2 í AB, margföldum við fyrstu línuna í A með öðrum dálkinum í B, og leggjum saman.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$$

3. Til að fá stakið í línu 1 og dálki 3 í AB, margföldum við fyrstu línuna í A með þriðja dálkinum í B, og leggjum saman.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33}$$

Við förum eins að til að fá aðra línu í AB. Með öðrum orðum margföldum við línu 2 í A með dálki 1 í B;, línu 2 í A með dálki 2 í B; og línu 2 í A með dálki 3 í B. Þegar þessu er lokið verður margfeldisfylkið

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \end{bmatrix}$$

EIGINLEIKAR FYLKJAMARGFÖLDUNAR

Fyrir fylkin A, B, og C gilda eftirfarandi eiginleikar.

- Tengiregla gildir um fylkjamargföldun: $(AB)C = A(BC)$.
- Dreifiregla gildir um fylkjamargföldun: $C(A+B) = CA + CB,$ $(A+B)C = AC + BC.$

Athugið að víxlregla gildir ekki um fylkjamargföldun.

DÆMI 8

Að margfalda saman tvö fylki

Margfaldið saman fylkið A og fylkið B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Lausn

Fyrst athugum við stærð fylkjanna. Fylkið A er af stærðinni 2×2 og fylkið B er af stærðinni 2×2. Innri stærðirnar eru jafnar og því getum við margfaldað fylkin. Margfeldið verður af stærðinni 2×2.

Við framkvæmum aðgerðirnar sem lýst var hér að framan.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(5) + 2(7) & 1(6) + 2(8) \\ 3(5) + 4(7) & 3(6) + 4(8) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

DÆMI 9

Að margfalda saman tvö fylki

Gefin eru A og B:

1. ⓐ Finnið AB.
2. ⓑ Finnið BA.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } B=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Lausn

1. ⓐ Þar sem stærð A er 2×3 og stærð B er 3×2, má margfalda fylkin saman, því fjöldi dálka í A er jafn fjölda lína í B. Margfeldið verður 2×2 fylki, það er fjöldi lína í A sinnum fjöldi dálka í B.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1(5)+2(-4)+3(2) & -1(-1)+2(0)+3(3) \\ 4(5)+0(-4)+5(2) & 4(-1)+0(0)+5(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 30 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. ⓑ Stærð B er 3×2 og stærð A er 2×3. Innri stærðirnar eru jafnar og því er margfeldið skilgreint og verður 3×3 fylki.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5(-1)+-1(4) & 5(2)+-1(0) & 5(3)+-1(5) \\ -4(-1)+0(4) & -4(2)+0(0) & -4(3)+0(5) \\ 2(-1)+3(4) & 2(2)+3(0) & 2(3)+3(5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9 & 10 & 10 \\ 4 & -8 & -12 \\ 10 & 4 & 21 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Greining

Takið eftir að margfeldin AB og BA eru ekki jöfn.

$$AB = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 30 & 11 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -9 & 10 & 10 \\ 4 & -8 & -12 \\ 10 & 4 & 21 \end{bmatrix} = BA$$

Þetta sýnir að víxlregla gildir ekki um fylkjamargföldun.

SPURT OG SVARAÐ

Getur AB verið skilgreint en BA ekki?

Já. Skoðum fylki A af stærðinni 3×4 *og fylki B af stærðinni* 4×2. *Fyrir margfeldið AB eru innri stærðirnar 4 og margfeldið er skilgreint, en fyrir margfeldið BA eru innri stærðirnar 2 og 3 og því er margfeldið ekki skilgreint.*

DÆMI 10

Notkun fylkja í raunhæfum verkefnum

Snúum aftur að verkefninu í upphafi þessa hluta. Tafla 3 sýnir búnaðarþörf tveggja knattspyrnuliða.

Tafla 3

	Wildcats	Mud Cats
Mörk	6	10
Boltar	30	24
Keppnistreyjur	14	20

Einnig er gefið verð búnaðarins eins og sýnt er í töflu 4.

Tafla 4

Mark	$300
Bolti	$10
Keppnistreyja	$30

Við breytum gögnunum í fylki. Fylkið yfir búnaðarþörf er þá ritað sem

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 30 & 24 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

Kostnaðarfylkið er ritað sem

$$C = \begin{bmatrix} 300 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

Við notum fylkjamargföldun til að reikna kostnað búnaðarins.

$$\begin{aligned} C\ E &= \begin{bmatrix} 300 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 30 & 24 \\ 14 & 20 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 300\,(6)+10\,(30)+30\,(14) & 300\,(10)+10\,(24)+30\,(20) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.520 & 3.840 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Búnaðurinn kostar Wildcats samtals $2.520 og Mud Cats samtals $3.840.

AÐFERÐ

Gefin er fylkjaaðgerð. Reiknið hana með reiknivél.

1. Geymið hvert fylki sem fylkjabreytu $[A], [B], [C], \ldots$
2. Sláið aðgerðina inn í reiknivélina og sækið hverja fylkjabreytu eftir þörfum.
3. Ef aðgerðin er skilgreind sýnir reiknivélin lausnarfylkið; ef hún er ekki skilgreind birtir hún villuboð.

DÆMI 11

Notkun reiknivélar við fylkjaaðgerðir

Finnið $AB - C$ þegar

$$A = \begin{bmatrix} -15 & 25 & 32 \\ 41 & -7 & -28 \\ 10 & 34 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 45 & 21 & -37 \\ -24 & 52 & 19 \\ 6 & -48 & -31 \end{bmatrix}, \text{og } C$$

$$= \begin{bmatrix} -100 & -89 & -98 \\ 25 & -56 & 74 \\ -67 & 42 & -75 \end{bmatrix}.$$

Lausn

Á fylkjasíðu reiknivélarinnar skráum við fylkið A hér að framan sem fylkjabreytuna $[A]$, fylkið B sem fylkjabreytuna $[B]$, og fylkið C sem fylkjabreytuna $[C]$.

Á heimaskjá reiknivélarinnar sláum við verkefnið inn og sækjum hverja fylkjabreytu eftir þörfum.

$$[A][B] - [C]$$

Reiknivélin skilar þessu fylki.

$$\begin{bmatrix} -983 & -462 & 136 \\ 1.820 & 1.897 & -856 \\ -311 & 2.032 & 413 \end{bmatrix}$$

MIÐLAR

Í þessum netgögnum finnið þið frekari útskýringar og æfingar í fylkjum og fylkjaaðgerðum.

- Stærð fylkis
- Samlagning og frádráttur fylkja
- Fylkjaaðgerðir
- Fylkjamargföldun

9.5 Æfingar kaflans

Munnleg verkefni

1. Er hægt að leggja saman hvaða tvö fylki sem er? Ef svo er, útskýrið hvers vegna; ef ekki, útskýrið hvers vegna ekki og gefið dæmi um tvö fylki sem ekki er hægt að leggja saman.
2. Er hægt að margfalda hvaða dálkfylki sem er með hvaða línufylki sem er? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.
3. Geta bæði margfeldin AB og BA verið skilgreind? Ef svo er, útskýrið hvernig; ef ekki, útskýrið hvers vegna.
4. Er hægt að margfalda saman hvaða tvö jafnstór fylki sem er? Ef svo er, útskýrið hvers vegna; ef ekki, útskýrið hvers vegna ekki og gefið dæmi um tvö jafnstór fylki sem ekki er hægt að margfalda saman.
5. Gildir víxlregla um fylkjamargföldun, það er gildir $AB = BA$? Ef svo er, sannið það. Ef ekki, útskýrið hvers vegna.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og framkvæma tilgreinda samlagningu eða frádrátt. Takið fram ef aðgerðin er ekki skilgreind.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 22 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 92 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 2 \\ 5 & 61 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 78 & 17 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$$

6.

$$A+B$$

7.

$$C+D$$

8.

$$A+C$$

9.

$$B-E$$

10.

$$C+F$$

11.

$$D-B$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og skala þau eins og tilgreint er.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 13 & 12 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 21 & 12 \\ 0 & 64 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 7 & 18 \\ 90 & 5 & 3 & 29 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 18 & 12 & 13 \\ 8 & 14 & 6 \\ 7 & 4 & 21 \end{bmatrix}$$

12.

$$5A$$

13.

$$3B$$

14.

$$-2B$$

15.

$$-4C$$

16.

$$\frac{1}{2}C$$

17.

$$100D$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og framkvæma fylkjamargföldunina.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ -8 & 0 & 12 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

9

18.

$$AB$$

19.

$$BC$$

20.

$$CA$$

21.

$$BD$$

22.

$$DC$$

23.

$$C\,B$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og framkvæma tilgreinda aðgerð ef það er hægt. Ef það er ekki hægt skal útskýra hvers vegna.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 6 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-9 & 6\\ -4 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 9\\ 7 & 1\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-8 & 7 & -5\\ 4 & 3 & 2\\ 0 & 9 & 2\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}4 & 5 & 3\\ 7 & -6 & -5\\ 1 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

24.

$$A+B-C$$

25.

$$4\,A+5\,D$$

26.

$$2\,C+B$$

27.

$$3\,D+4\,E$$

28.

$$C\ -0{,}5\ D$$

29.

$$100\,D-10\,E$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og framkvæma tilgreinda aðgerð ef það er hægt. Ef það er ekki hægt skal útskýra hvers vegna. (Vísbending: $A^2=A\cdot A$)

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 20\\ 5 & 25\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}40 & 10\\ -20 & 30\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

30.

$$A\,B$$

31.

$$B\,A$$

32.

$$C\,A$$

33.

$$BC$$

34.

$$A^2$$

35.

$$B^2$$

36.

$$C^2$$

37.

$$B^2 A^2$$

38.

$$A^2 B^2$$

39.

$$(AB)^2$$

40.

$$(BA)^2$$

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og framkvæma tilgreinda aðgerð ef það er hægt. Ef það er ekki hægt skal útskýra hvers vegna. (Vísbending: $A^2 = A \cdot A$)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & -5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}1\\ 1 & 0{,}2\\ -0{,}5 & 0{,}3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -6 & 7 & 5\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

41.

$$AB$$

42.

$$BA$$

43.

$$BD$$

44.

$$DC$$

45.

$$D^2$$

46.

$$A^2$$

47.

$$D^3$$

48.

$$(AB)C$$

49.

$$A(BC)$$

Tækniverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkin hér fyrir neðan og framkvæma tilgreinda aðgerð ef það er hægt. Ef það er ekki hægt skal útskýra hvers vegna. Notið reiknivél til að sannreyna lausnina.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 9\\ 1 & 8 & -3\\ 0{,}5 & 4 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0{,}5 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 6\\ 8 & 7 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

50.

$$AB$$

51.

$$BA$$

52.

$$CA$$

53.

$$BC$$

54.

$$ABC$$

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal nota fylkið hér fyrir neðan og framkvæma tilgreinda aðgerð á því.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

55.

$$B^2$$

56.

$$B^3$$

57.

$$B^4$$

58.

$$B^5$$

59. Notið verkefnin hér að framan til að finna formúlu fyrir B^n. Prófið formúluna fyrir B^{201} og B^{202}, með reiknivél.

9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Rita aukið fylki jöfnuhneppis.
- Rita jöfnuhneppi út frá auknu fylki.
- Framkvæma línuaðgerðir á fylki.
- Leysa línulegt jöfnuhneppi með fylkjum.



Mynd 1 Þýski stærðfræðingurinn Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

Carl Friedrich Gauss var uppi seint á 18. öld og snemma á 19. öld en er enn talinn einn afkastamesti stærðfræðingur sögunnar. Framlag hans til stærðfræði og eðlisfræði nær meðal annars til algebru, talnafræði, stærðfræðigreiningar, deildarúmfræði, stjörnufræði og ljósfræði. Uppgötvanir hans í fylkjafræði breyttu vinnubrögðum stærðfræðinga síðustu tvær aldir.

Við kynntumst fyrst Gauss-eyðingu í hlutanum Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum. Hér rifjum við aðferðina upp og notum nú fylki til að leysa jöfnuhneppi.

Að rita aukið fylki jöfnuhneppis

Fylki má nota til að tákna og leysa jöfnuhneppi. Til að setja hneppi fram á fylkjaformi tökum við stuðla breytanna og fastana úr jöfnunum og gerum þá að stökum fylkisins. Lóðrétt strik skilur stuðlana frá föstunum og kemur í stað jafnaðarmerkjanna. Hneppi á þessu formi kallast aukið fylki.

Skoðum til dæmis eftirfarandi 2×2 jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 4x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

Við getum ritað hneppið sem aukið fylki:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

Við getum einnig ritað fylki sem inniheldur aðeins stuðlana. Það kallast stuðlafylki.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Þriggja sinnum þriggja jöfnuhneppi á borð við

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 0 \\ x + y &= 5 \\ 2x - 3z &= 2 \end{aligned}$$

hefur stuðlafylkið

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

og er táknað með aukna fylkinu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Takið eftir að fylkið er ritað þannig að hver breyta myndar eigin dálk: x-liðir eru í fyrsta dálki, y-liðir í öðrum og z-liðir í þriðja. Mjög mikilvægt er að rita hverja jöfnu á staðlaða forminu $a\,x + b\,y + c\,z = d$ svo samsvarandi breytur raðist í sömu dálka. Ef breytulið vantar í jöfnu er stuðull hans 0.

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi. Ritið aukið fylki þess.

1. Ritið stuðla x-liðanna niður eftir fyrsta dálki.
2. Ritið stuðla y-liðanna niður eftir öðrum dálki.
3. Ef z-liðir eru í hneppinu, ritið þá stuðla þeirra niður eftir þriðja dálki.
4. Dragið lóðrétt strik og ritið fastana hægra megin við það.

9

DÆMI 1

Að rita aukið fylki jöfnuhneppis

Ritið aukið fylki gefna jöfnuhneppisins.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ x - 3y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Lausn

Aukna fylkið sýnir stuðla breytanna og einn viðbótardálk fyrir fastana.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Ritið aukið fylki gefna jöfnuhneppisins.

$$\begin{aligned} 4x-3y &= 11 \\ 3x+2y &= 4 \end{aligned}$$

Að rita jöfnuhneppi út frá auknu fylki

Aukin fylki hjálpa okkur að leysa jöfnuhneppi, því aðgerðirnar verða einfaldari þegar breyturnar sjálfar eru ekki hafðar með. Mikilvægt er þó að kunna að fara á milli þessara tveggja forma, því þá verður auðveldara að finna lausnir. Hér notum við upplýsingar í auknu fylki til að rita jöfnuhneppið á stöðluðu formi.

DÆMI 2

Að rita jöfnuhneppi út frá auknu fylki

Finnið jöfnuhneppið sem aukna fylkið táknar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Lausn

Þegar dálkarnir tákna breyturnar x, y, og z, fæst

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{r} x-3y-5z=-2 \\ \rightarrow 2x-5y-4z=5 \\ -3x+5y+4z=6 \end{array}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Ritið jöfnuhneppið sem aukna fylkið táknar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -9 \end{array}\right]$$

Línuaðgerðir á fylki

Nú þegar við getum ritað jöfnuhneppi sem aukið fylki skoðum við þær línuaðgerðir sem framkvæma má á fylki, svo sem samlagningu, margföldun með fasta og víxlun lína.

Við leysum jöfnuhneppi með því að framkvæma línuaðgerðir á fylki. Til að leysa hneppið viljum við koma fylkinu á efra stallaform, þar sem einingar liggja á hornalínunni frá efra vinstra horni að neðra hægra horni og öll stök neðan hornalínunnar eru núll, eins og sýnt er hér.

Efra stallaform

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Við notum línuaðgerðir sem samsvara aðgerðum á jöfnum til að fá nýtt, línujafngilt fylki á einfaldara formi. Reglurnar hér á eftir lýsa efra stallaformi.

1. Í hverri línu sem er ekki núlllína er fyrsta stakið sem er ekki núll talan 1. Það kallast forystueining eða forystu-1.
2. Allar núlllínur eru settar neðst í fylkið.
3. Hver forystu-1 er neðar og lengra til hægri en næsta forystu-1 á undan.
4. Í dálki sem inniheldur forystu-1 eru öll önnur stök núll.

Til að leysa jöfnuhneppi notum við línuaðgerðirnar hér á eftir til að koma stuðlafylkinu á efra stallaform. Síðan finnum við lausnina með bakinnsetningu.

1. Víxlið línum. (Ritháttur: $R_i \leftrightarrow R_j$)
2. Margfaldið línu með fasta. (Ritháttur: $c\,R_i$)
3. Leggið margfeldi línu og fasta við aðra línu. (Ritháttur: $R_i + c\,R_j$))

Hver línuaðgerð samsvarar aðgerð sem við höfum þegar lært að nota til að leysa jöfnuhneppi með þremur breytum. Með nokkrum lykilskrefum má nota þessar aðgerðir til að koma fylki fljótt á efra stallaform. Við notum Gauss-eyðingu til að fá 1 sem fyrsta stak svo nota megi línu 1 til að umbreyta línunum fyrir neðan.

9

GAUSS-EYÐING

Gauss-eyðing er aðferð til að koma fylki á efra stallaform. Markmiðið er að rita fylkið A þannig að talan 1 liggi eftir hornalínunni og öll stök þar fyrir neðan séu núll.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Eftir Gauss-eyðingu}} A = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fyrsta skref Gauss-eyðingar er að fá 1 sem fyrsta stak svo nota megi línu 1 til að breyta línunum fyrir neðan.

AÐFERÐ

Gefið er aukið fylki. Notið línuaðgerðir til að koma því á efra stallaform.

1. Forystustuðull fyrstu jöfnunnar á að vera 1. Víxlið línum eða margfaldið með fasta ef þörf krefur.
2. Notið línuaðgerðir til að fá núll niður eftir fyrsta dálki fyrir neðan fyrsta stakið 1.
3. Notið línuaðgerðir til að fá 1 í línu 2 og dálki 2.
4. Notið línuaðgerðir til að fá núll niður eftir dálki 2 fyrir neðan stakið 1.
5. Notið línuaðgerðir til að fá 1 í línu 3 og dálki 3.
6. Haldið þannig áfram í öllum línum þar til hvert stak á hornalínunni er 1 og aðeins núll eru fyrir neðan hana.
7. Setjið núlllínur, ef einhverjar eru, neðst.

DÆMI 3

Að leysa 2×2 jöfnuhneppi með Gauss-eyðingu

Leysið gefna jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x - y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Lausn

Fyrst ritum við hneppið sem aukið fylki.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Við viljum fá 1 í línu 1 og dálki 1. Það má gera með því að víxla línu 1 og línu 2.

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Nú er 1 fyrsta stakið í línu 1 og dálki 1. Næst skulum við fá 0 í línu 2 og dálki 1. Það má gera með því að margfalda línu 1 með -2, og leggja niðurstöðuna síðan við línu 2.

$$-2R_1 + R_2 = R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Aðeins eitt skref er eftir: að margfalda línu 2 með $\dfrac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5}R_2 = R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Notið bakinnsetningu. Önnur lína fylkisins táknar $y=1$. Setjið $y=1$ inn í fyrstu jöfnuna.

$$x-(1)=\tfrac{1}{2}$$
$$x=\tfrac{3}{2}$$

Lausnin er punkturinn $\left(\frac{3}{2},1\right)$.

REYNDU SJÁLF(UR) #3

Leysið gefna jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu.

$$4x+3y=11$$
$$x-3y=-1$$

DÆMI 4

Notkun Gauss-eyðingar til að leysa jöfnuhneppi

Notið Gauss-eyðingu til að leysa gefna 2×2 jöfnuhneppið.

$$2x+y=1$$
$$4x+2y=6$$

Lausn

Ritið hneppið sem aukið fylki.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Fáið 1 í línu 1 og dálki 1. Það má gera með því að margfalda fyrstu línu með $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}R_1=R_1\to\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Næst viljum við fá 0 í línu 2 og dálki 1. Margfaldið línu 1 með -4 og leggið línu 1 við línu 2.

$$-4R_1+R_2=R_2\to\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Önnur línan táknar jöfnuna $0=4$. Jöfnuhneppið er því ósamkvæmt og hefur enga lausn.

DÆMI 5

Að leysa háð jöfnuhneppi

Leysið jöfnuhneppið.

$$3x + 4y = 12$$
$$6x + 8y = 24$$

Lausn

Framkvæmið línuaðgerðir á aukna fylkinu til að reyna að koma því á efra stallaform.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 12 \\ 6 & 8 & 24 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}R_2 + R_1 = R_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 24 \end{array}\right]$$
$$R_1 \leftrightarrow R_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Síðasta lína fylkisins verður núlllína: $0\,y = 0$. Lausnirnar eru því óendanlega margar og jöfnuhneppið flokkast sem háð. Til að finna almennu lausnina förum við aftur í eina af upphaflegu jöfnunum og leysum fyrir y.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 12 \\ 4y &= 12 - 3x \\ y &= 3 - \tfrac{3}{4}x \end{aligned}$$

Lausnamengi jöfnuhneppisins er því $\left(x, 3 - \dfrac{3}{4}x\right)$.

DÆMI 6

Línuaðgerðir á 3×3 auknu fylki til að fá efra stallaform

Framkvæmið línuaðgerðir á gefna fylkinu til að koma því á efra stallaform.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Lausn

Það er þegar 1 í línu 1 og dálki 1. Næst margföldum við línu 1 með -2 og leggjum hana við línu 2. Síðan skiptum við línu 2 út fyrir niðurstöðuna.

$$-2R_1 + R_2 = R_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Næst fáum við núll í línu 3 og dálki 1.

$$3R_1 + R_3 = R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 16 & 15 \end{array}\right]$$

Næst fáum við núll í línu 3 og dálki 2.

$$6R_2 + R_3 = R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{array}\right]$$

Síðasta skrefið er að fá 1 í línu 3 og dálki 3.

$$\frac{1}{4}R_3 = R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} \end{array}\right]$$

REYNDU SJÁLF(UR) #4

Komið jöfnuhneppinu á efra stallaform.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

Að leysa línulegt jöfnuhneppi með fylkjum

Við höfum séð hvernig jöfnuhneppi er ritað sem aukið fylki og hvernig línuaðgerðir og bakinnsetning eru notaðar til að fá efra stallaform. Nú göngum við skrefi lengra og leysum 3 sinnum 3 línulegt jöfnuhneppi. Grunnhugmyndin er að nota línuaðgerðir til að eyða öllum breytum nema einni og nota síðan bakinnsetningu til að finna gildi hinna breytanna.

9

DÆMI 7

Að leysa línulegt jöfnuhneppi með fylkjum

Leysið línulega jöfnuhneppið með fylkjum.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 8 \\ 2x + 3y - z &= -2 \\ 3x - 2y - 9z &= 9 \end{aligned}$$

Lausn

Fyrst ritum við aukna fylkið.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right]$$

Næst framkvæmum við línuaðgerðir til að fá efra stallaform.

$$-2R_1 + R_2 = R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right] \qquad -3R_1 + R_3 = R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right]$$

Einfaldast er að fá 1 í línu 2 og dálki 2 með því að víxla R_2 og R_3.

$$\text{Víxlið} \quad R_2 \quad \text{og} \quad R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right]$$

Þá fæst

$$-5R_2 + R_3 = R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right] \qquad -\tfrac{1}{57}R_3 = R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Síðasta fylkið táknar jafngilda jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 8 \\ y - 12z &= -15 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Með bakinnsetningu fæst lausnin $(4, -3, 1)$.

DÆMI 8

Að leysa háð línulegt jöfnuhneppi með fylkjum

Leysið eftirfarandi línulega jöfnuhneppi með fylkjum.

$$\begin{aligned} -x - 2y + z &= -1 \\ 2x + 3y &= 2 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Lausn

Ritið aukna fylkið.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Margfaldið fyrst línu 1 með -1 til að fá 1 í línu 1 og dálki 1. Framkvæmið síðan línuaðgerðir til að fá efra stallaform.

$$-R_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$-2R_1 + R_3 = R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_2 + R_3 = R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Síðasta fylkið táknar eftirfarandi jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ y - 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Af samsemdinni $0=0$ sjáum við að jöfnuhneppið er háð og hefur óendanlega margar lausnir. Næst finnum við almennu lausnina. Með því að leysa aðra jöfnuna fyrir y og setja niðurstöðuna inn í fyrstu jöfnuna getum við ritað z sem fall af x.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ y &= 2z \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} x + 2(2z) - z &= 1 \\ x + 3z &= 1 \\ z &= \tfrac{1-x}{3} \end{aligned}$$

Nú setjum við stæðuna fyrir z inn í aðra jöfnuna og ritum y sem fall af x.

$$\begin{aligned} y - 2z &= 0 \\ z &= \tfrac{1-x}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 2\left(\tfrac{1-x}{3}\right) &= 0 \\ y &= \tfrac{2-2x}{3} \end{aligned}$$

Almenna lausnin er $\left(x, \dfrac{2-2x}{3}, \dfrac{1-x}{3}\right)$.

REYNDU SJÁLF(UR) #5

Leysið jöfnuhneppið með fylkjum.

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 4 \\ 2x + 5y + 8z &= 15 \\ x + 3y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

SPURT OG SVARAÐ

Er hægt að leysa sérhvert línulegt jöfnuhneppi með Gauss-eyðingu?

Já, hægt er að leysa línulegt jöfnuhneppi af hvaða stærð sem er með Gauss-eyðingu.

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi. Leysið það með fylkjum og reiknivél.

1. Geymið aukna fylkið sem fylkjabreytu $[A], [B], [C], \ldots$.
2. Notið fallið ref(í reiknivélinni og sækið hverja fylkjabreytu eftir þörfum.

DÆMI 9

Að leysa jöfnuhneppi með fylkjum og reiknivél

Leysið jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 9z &= -1 \\ -2x + 3y - z &= -2 \\ -x - 4y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

Lausn

Ritið aukið fylki jöfnuhneppisins.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 9 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

Sláið aukna fylkið hér að framan inn á fylkjasíðu reiknivélarinnar sem fylkjabreytuna $[A]$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Notið fallið ref(í reiknivélinni og sækið fylkjabreytuna $[A]$.

$$\text{ref}([A])$$

Reiknið.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{13}{21} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{24}{187} \end{bmatrix} \begin{array}{l} x + \frac{3}{5}y + \frac{9}{5}z = -\frac{1}{5} \\ \rightarrow y + \frac{13}{21}z = -\frac{4}{7} \\ z = -\frac{24}{187} \end{array}$$

Með bakinnsetningu fæst lausnin $\left(\frac{61}{187}, -\frac{92}{187}, -\frac{24}{187}\right)$.

DÆMI 10

Notkun 2 × 2 fylkja í fjármálum

Carolyn fjárfestir samtals $12.000 í tveimur sveitarfélagsskuldabréfum. Annað ber 10,5% vexti en hitt 12% vexti. Vaxtatekjurnar af bréfunum tveimur voru $1.335 á síðasta ári. Hversu há fjárhæð var fjárfest á hvorum vöxtunum?

Lausn

Við höfum jöfnuhneppi með tveimur jöfnum og tveimur breytum. Látum $x=$ fjárhæðina sem fjárfest er á 10,5% vöxtum og $y=$ fjárhæðina sem fjárfest er á 12% vöxtum.

$$\begin{array}{l} x+y=12.000 \\ 0{,}105\ x+0{,}12\ y=1.335 \end{array}$$

Á fylkjaformi fæst

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12.000 \\ 0{,}105 & 0{,}12 & 1.335 \end{array}\right]$$

Multiply row 1 by $-0{,}105$ and add the result to row 2.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12.000 \\ 0 & 0{,}015 & 75 \end{array}\right]$$

Þá fæst

$$\begin{array}{l} 0{,}015\ y=75 \\ y=5.000 \end{array}$$

Því er $12.000 - 5.000 = 7.000$.

Því voru $5.000 fjárfestir á 12% vöxtum og $7.000 á 10,5% vöxtum.

DÆMI 11

Notkun 3 × 3 fylkja í fjármálum

Ava fjárfestir samtals $10.000 á þremur reikningum. Einn ber 5% vexti, annar 8% og sá þriðji 9%. Vaxtatekjurnar af reikningunum þremur voru $770 á síðasta ári. Fjárhæðin á 9% vöxtunum var tvöfalt hærri en fjárhæðin á 5% vöxtunum. Hversu há fjárhæð var fjárfest á hverjum vöxtum?

Lausn

Við höfum jöfnuhneppi með þremur jöfnum og þremur breytum. Látum x vera fjárhæðina sem fjárfest er á 5% vöxtum, y fjárhæðina sem fjárfest er á 8% vöxtum og z fjárhæðina sem fjárfest er á 9% vöxtum. Þá fæst

$$\begin{gathered} x+y+z=10.000 \\ 0{,}05\ x+0{,}08\ y+0{,}09\ z=770 \\ 2\ x-z=0 \end{gathered}$$

Á fylkjaformi fæst

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}09 & 770 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Nú beitum við Gauss-eyðingu til að fá efra stallaform.

$$-0{,}05\ R_1+R_2=R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0 & 0{,}03 & 0{,}04 & 270 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-2\ R_1+R_3=R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0 & 0{,}03 & 0{,}04 & 270 \\ 0 & -2 & -3 & -20.000 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{0{,}03}\ R_2=R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 9.000 \\ 0 & -2 & -3 & -20.000 \end{array}\right]$$

$$2\ R_2+R_3=R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10.000 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 9.000 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -2.000 \end{array}\right]$$

Þriðja línan segir okkur að $-\frac{1}{3}\ z=-2.000$; því er $z=6.000$.

Önnur línan segir okkur að $y+\frac{4}{3}\ z=9.000$. Þegar við setjum inn $z=6.000$, fæst

$$\begin{gathered} y+\frac{4}{3}\left(6.000\right)=9.000 \\ y+8.000=9.000 \\ y=1.000 \end{gathered}$$

Fyrsta línan segir okkur að $x+y+z=10{,}000$. Þegar við setjum inn $y=1.000$ og $z=6.000$, fæst

$$x+1.000+6.000=10.000$$
$$x=3.000$$

Svarið er að $3.000 voru fjárfestir á 5% vöxtum, $1.000 á 8% vöxtum og $6.000 á 9% vöxtum.

REYNDU SJÁLF(UR) #6

Lítið skófyrirtæki tók $1.500.000 lán til að auka birgðir sínar. Hluti fjárhæðarinnar var tekinn að láni á 7% vöxtum, hluti á 8% og hluti á 10%. Fjárhæðin sem tekin var að láni á 10% vöxtum var fjórum sinnum hærri en fjárhæðin á 7% vöxtum og árlegir vextir af lánunum þremur voru $130.500. Notið fylki til að finna fjárhæðina sem tekin var að láni á hverjum vöxtum.

MIÐLAR

Í þessum netgögnum eru fleiri útskýringar og æfingar í að leysa línuleg jöfnuhneppi með Gauss-eyðingu.

- Að leysa jöfnuhneppi með tveimur jöfnum með auknu fylki
- Að leysa jöfnuhneppi með þremur jöfnum með auknu fylki
- Aukin fylki í reiknivél

9.6 Æfingar kaflans

Munnleg verkefni

1. Er hægt að rita sérhvert línulegt jöfnuhneppi sem aukið fylki? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki og lýsið hvernig aukna fylkið er ritað.

2. Er hægt að rita sérhvert fylki sem línulegt jöfnuhneppi? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki og lýsið hvernig jöfnuhneppið er ritað.

3.
Er aðeins ein rétt leið til að nota línuaðgerðir á fylki? Lýsið tveimur ólíkum línuaðgerðum sem nota mætti til að leysa aukna fylkið $\left[\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{array}\right]$.

4. Er hægt að leysa fylki sem hefur stakið 0 á hornalínunni? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki. Hvað mynduð þið gera til að bæta úr því?

5. Getur fylki með heila línu af 0 haft eina lausn? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal rita aukið fylki línulega jöfnuhneppisins.

6.

$$\begin{aligned} 8x-37y &= 8 \\ 2x+12y &= 3 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 16y &= 4 \\ 9x-y &= 2 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 3x+2y+10z &= 3 \\ -6x+2y+5z &= 13 \\ 4x+z &= 18 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} x+5y+8z &= 19 \\ 12x+3y &= 4 \\ 3x+4y+9z &= -7 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} 6x+12y+16z &= 4 \\ 19x-5y+3z &= -9 \\ x+2y &= -8 \end{aligned}$$

Í eftirfarandi æfingum skal rita línulega jöfnuhneppið sem aukna fylkið táknar.

11.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 5 & 5 \\ 6 & -18 & 26 \end{array}\right]$$

12.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 10 \\ 10 & 17 & 439 \end{array}\right]$$

13.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -9 & 4 & -1 \\ 8 & 5 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

14.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 29 & 1 & 43 \\ -1 & 7 & 5 & 38 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{array}\right]$$

15.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 58 & 2 \\ 8 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu.

16.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

17.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

18.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$$

19.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{array}\right]$$

20.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

21.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -9 \\ 5x + 4y &= 58 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} 6x + 2y &= -4 \\ 3x + 4y &= -17 \end{aligned}$$

23.

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + y = 14$$

24.

$$-4x-3y = -2$$
$$3x-5y = -13$$

25.

$$-5x + 8y = 3$$
$$10x + 6y = 5$$

26.

$$3x + 4y = 12$$
$$-6x-8y = -24$$

27.

$$-60x + 45y = 12$$
$$20x-15y = -4$$

28.

$$11x + 10y = 43$$
$$15x + 20y = 65$$

29.

$$2x - y = 2$$
$$3x + 2y = 17$$

30.

$$-1{,}06\ x\ -2{,}25\ y=5{,}51$$
$$-5{,}03\ x\ -1{,}08\ y=5{,}40$$

31.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{5}y = 4$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 1$$

32.

$$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = -1$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$$

33.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 87 \end{array}\right]$$

34.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & -90 \end{array}\right]$$

35.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

36.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}8 \end{array}\right]$$

37.

$$\begin{aligned} -2x + 3y - 2z &= 3 \\ 4x + 2y - z &= 9 \\ 4x - 8y + 2z &= -6 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= -4 \\ 5x - 3y - 2z &= 0 \\ 2x + 6y + 7z &= 30 \end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 1 \\ -4x - 6y - 4z &= -2 \\ 10x + 15y + 10z &= 5 \end{aligned}$$

40.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ -x - 2y + 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 3z &= 5 \end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned} x+2y-z&=1\\ -x-2y+2z&=-2\\ 3x+6y-3z&=3 \end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned} x+y&=2\\ x+z&=1\\ -y-z&=-3 \end{aligned}$$

43.

$$\begin{aligned} x+y+z&=100\\ x+2z&=125\\ -y+2z&=25 \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x-\tfrac{2}{3}z&=-\tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{3}y&=\tfrac{4}{7}\\ \tfrac{1}{5}y-\tfrac{1}{3}z&=\tfrac{2}{9} \end{aligned}$$

45.

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{7}z&=-\tfrac{53}{14}\\ \tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{4}z&=3\\ \tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{5}y+\tfrac{1}{3}z&=\tfrac{23}{15} \end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{4}z&=-\tfrac{29}{6}\\ \tfrac{1}{5}x+\tfrac{1}{6}y-\tfrac{1}{7}z&=\tfrac{431}{210}\\ -\tfrac{1}{8}x+\tfrac{1}{9}y+\tfrac{1}{10}z&=-\tfrac{49}{45} \end{aligned}$$

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal nota Gauss-eyðingu til að leysa jöfnuhneppið.

47.

$$\begin{aligned} \tfrac{x-1}{7}+\tfrac{y-2}{8}+\tfrac{z-3}{4}&=0\\ x+y+z&=6\\ \tfrac{x+2}{3}+2y+\tfrac{z-3}{3}&=5 \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{4}-\frac{y+1}{4}+3z&=-1\\ \frac{x+5}{2}+\frac{y+7}{4}-z&=4\\ x+y-\frac{z-2}{2}&=1\end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{4}-\frac{y-1}{3}+2z&=-1\\ \frac{x+5}{2}+\frac{y+5}{2}+\frac{z+5}{2}&=8\\ x+y+z&=1\end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{10}+\frac{y+3}{2}-2z&=3\\ \frac{x+5}{4}-\frac{y-1}{8}+z&=\frac{3}{2}\\ \frac{x-1}{4}+\frac{y+4}{2}+3z&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

51.

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{4}-\frac{y-1}{3}+2z&=-1\\ \frac{x+5}{2}+\frac{y+5}{2}+\frac{z+5}{2}&=7\\ x+y+z&=1\end{aligned}$$

Raunhæf verkefni

Í eftirfarandi æfingum skal setja upp aukið fylki sem lýsir aðstæðunum og finna umbeðna lausn.

9

52. Á hverjum degi selur bollakökubúð Angeni 5.000 bollakökur með súkkulaði- eða vanillubragði. Ef súkkulaðibragðið er 3 sinnum vinsælla en vanillubragðið, hversu margar kökur af hvorri gerð selur búðin á dag?

53. Í bollakökubúð Bakari, sem keppir við búð Angeni, eru daglega seldar bollakökur fyrir $4.520. Súkkulaðibollakökurnar kosta $2,25 og rauðu flauelsbollakökurnar $1,75. Ef samtals seljast 2.200 bollakökur á dag, hversu margar af hvorri gerð seljast daglega?

54. Þið lögðuð $10.000 inn á tvo reikninga. Annar ber 3% einfalda vexti en hinn 2,5% vexti. Ef vextirnir voru samtals $283,50 eftir eitt ár, hversu há fjárhæð var á hvorum reikningi að árinu liðnu?

55. Þið fjárfestið $2.300 á reikningi 1 og $2.700 á reikningi 2. Ef heildarvextir eftir eitt ár eru $254 og reikningur 2 ber 1,5 sinnum hærri vexti en reikningur 1, hverjir eru vextir reikninganna? Gerið ráð fyrir einföldum vöxtum.

56. Bikes'R'Us framleiðir reiðhjól sem seljast á $250. Framleiðslukostnaður er $180 á hvert hjól auk $3.500 stofnkostnaðar. Hversu mörg hjól þarf að selja til að reksturinn standi á sléttu?

57. Stór raftækjaverslun hefur samþykkt að panta ryksugur frá sprotafyrirtæki sem verkfræðinemar stofnuðu. Verslunin getur keypt hverja ryksugu á $86 og greiðir $9.200 sendingargjald óháð fjölda seldra ryksuga. Ef verslunin þarf að fara að skila hagnaði þegar 230 einingar hafa selst, hvaða verð á hún að setja á ryksugurnar?

58. Þrjú vinsælustu ísbrögðin eru súkkulaði, jarðarber og vanilla og mynda saman 83% af seldum ís í ísbúð. Ef sala vanilluíss er 1% meiri en tvöföld sala jarðarberjaíss og sala súkkulaðiíss er 11% meiri en sala vanilluíss, hvert er hlutfall vanillu-, súkkulaði- og jarðarberjaíss af heildarsölunni?

59. Í ísbúð eykst eftirspurn eftir þremur bragðtegundum. Á síðasta ári voru banana-, graskers- og Rocky Road-ísar 12% af heildarsölu íss. Í ár voru sömu þrjár tegundir 16,9% af íssölunni. Sala Rocky Road-íss tvöfaldaðist, sala bananaíss jókst um 50% og sala graskersíss um 20%. Hlutdeild Rocky Road-íss var einu prósentustigi minni en hlutdeild bananaíss. Finnið hlutfall hverrar tegundar af íssölunni á síðasta ári.

60. Poki af blönduðum hnetum inniheldur kasjúhnetur, pistasíuhnetur og möndlur. Alls eru 1.000 hnetur í pokanum og möndlurnar eru 100 færri en pistasíuhneturnar. Kasjúhneturnar vega 3 g hver, pistasíuhneturnar 4 g og möndlurnar 5 g. Pokinn vegur 3,7 kg. Finnið fjölda hneta af hverri tegund.

61. Poki af blönduðum hnetum inniheldur kasjúhnetur, pistasíuhnetur og möndlur. Upphaflega voru 900 hnetur í pokanum. 30% af möndlunum, 20% af kasjúhnetunum og 10% af pistasíuhnetunum voru borðaðar og nú eru 770 hnetur eftir. Upphaflega voru kasjúhneturnar 100 fleiri en möndlurnar. Finnið upphaflegan fjölda hneta af hverri tegund.

9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Finna andhverfu fylkis.
- Leysa línulegt jöfnuhneppi með andhverfu fylkis.

Soriya ætlar að fjárfesta $10.500 í tveimur ólíkum skuldabréfum til að dreifa áhættunni. Fyrra skuldabréfið skilar 10% á ári og hið síðara 6%. Hversu mikið á Soriya að fjárfesta í hvoru skuldabréfi til að fá 8,5% samanlagða ávöxtun? Hvaða aðferð hentar best til að leysa verkefnið?

Hægt er að leysa verkefnið á ýmsa vegu. Eins og við höfum séð í fyrri hlutum nýtast jöfnuhneppi og fylki vel til að leysa raunhæf verkefni í fjármálum. Að loknum þessum hluta höfum við verkfærin til að leysa skuldabréfaverkefnið með andhverfu fylkis.

Að finna andhverfu fylkis

Við vitum að margföldunarandhverfa rauntölunnar a er a^{-1}, og að $a\,a^{-1}=a^{-1}\,a=\left(\frac{1}{a}\right)a=1$. Til dæmis er $2^{-1}=\frac{1}{2}$ og $\left(\frac{1}{2}\right)2=1$. Andhverfa fylkis byggist á svipaðri hugmynd, nema hvað margfeldi fylkisins A og andhverfu þess A^{-1} er einingarfylkið. Einingarfylki er ferningsfylki með einingum á hornalínunni og núllum alls staðar annars staðar. Við táknum einingarfylki með I_n þar sem n táknar stærð fylkisins. Skoðið jöfnurnar hér á eftir.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Einingarfylkið gegnir hlutverki 1 í fylkjaalgebru. Til dæmis er $A\,I=I\,A=A$.

Fylki sem hefur andhverfu uppfyllir eiginleikana

$$AA^{-1} = I$$
$$A^{-1}A = I$$

Fylki sem hefur andhverfu kallast andhverfanlegt fylki. Aðeins ferningsfylki getur haft andhverfu, því skilyrðið $A\,A^{-1}=A^{-1}\,A=I$, verður að gilda í báðar áttir. Ekki hafa öll ferningsfylki andhverfu, en ef A er andhverfanlegt er A^{-1} ótvírætt ákvarðað. Við skoðum tvær aðferðir til að finna andhverfu 2×2 fylkis og þriðju aðferðina sem nota má fyrir bæði 2×2 og 3×3 fylki.

9

EININGARFYLKIÐ OG ANDHVERFA FYLKIS

Einingarfylkið, I_n, er ferningsfylki með einingum á hornalínunni og núllum alls staðar annars staðar.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$2\times 2 \qquad\qquad 3\times 3$$

Ef A er $n\times n$ fylki og B er $n\times n$ fylki þannig að $A\,B=B\,A=I_n$, er $B=A^{-1}$, andhverfa fylkisins A.

DÆMI 1

Að sýna að einingarfylkið gegni hlutverki 1

Gefið er fylkið A. Sýnið að $A\,I = I\,A = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Lausn

Notið fylkjamargföldun til að sýna að margfeldi A og einingarfylkisins sé jafnt margfeldi einingarfylkisins og A.

$$AI = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 0 + 4\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 5\cdot 0 & -2\cdot 0 + 5\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot(-2) & 1\cdot 4 + 0\cdot 5 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot(-2) & 0\cdot 4 + 1\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

AÐFERÐ

Gefin eru tvö fylki. Sýnið að annað sé andhverfa hins.

1. Gefin eru fylkið A af stærðinni $n \times n$ og fylkið B af stærðinni $n \times n$. Margfaldið $A\,B$.
2. Ef $A\,B = I$, finnið þá margfeldið $B\,A$. Ef $B\,A = I$, er $B = A^{-1}$ og $A = B^{-1}$.

DÆMI 2

Að sýna að fylkið A sé andhverfa fylkisins B

Sýnið að gefnu fylkin séu andhverfur hvort annars.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lausn

Margfaldið $A\,B$ og $B\,A$. Ef bæði margfeldin eru jöfn einingarfylkinu eru fylkin andhverfur hvort annars.

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1(-9)+5(2) & 1(-5)+5(1) \\ -2(-9)-9(2) & -2(-5)-9(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -9(1)-5(-2) & -9(5)-5(-9) \\ 2(1)+1(-2) & 2(5)+1(-9) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

A og B eru andhverfur hvort annars.

REYNDU SJÁLF(UR) #1

Sýnið að eftirfarandi tvö fylki séu andhverfur hvort annars.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Að finna andhverfu með fylkjamargföldun

Nú getum við ákvarðað hvort tvö fylki séu andhverfur, en hvernig finnum við andhverfu gefins fylkis? Við vitum að margfeldi fylkis og andhverfu þess er einingarfylkið. Því getum við fundið andhverfuna með því að setja upp jöfnu og nota fylkjamargföldun.

9

DÆMI 3

Að finna andhverfu með fylkjamargföldun

Notið fylkjamargföldun til að finna andhverfu gefna fylkisins.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Lausn

Í þessari aðferð margföldum við A með fylki óþekktra fasta og setjum margfeldið jafnt einingarfylkinu.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finnið margfeldi fylkjanna tveggja vinstra megin við jafnaðarmerkið.

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1a-2c & 1b-2d\\ 2a-3c & 2b-3d\end{bmatrix}$$

Setjið næst upp jöfnuhneppi. Setjið stakið í línu 1 og dálki 1 í nýja fylkinu jafnt fyrsta staki einingarfylkisins, sem er 1. Setjið stakið í línu 2 og dálki 1 í nýja fylkinu jafnt samsvarandi staki einingarfylkisins, sem er 0.

$$\begin{aligned}1a-2c&=1\quad R_1\\ 2a-3c&=0\quad R_2\end{aligned}$$

Notið línuaðgerðir og margfaldið og leggið saman þannig: $(-2)R_1+R_2\to R_2$. Leggið jöfnurnar saman og leysið fyrir c.

$$\begin{aligned}1a-2c&=1\\ 0+1c&=-2\\ c&=-2\end{aligned}$$

Notið bakinnsetningu til að leysa fyrir a.

$$\begin{aligned}a-2(-2)&=1\\ a+4&=1\\ a&=-3\end{aligned}$$

Setjið upp annað jöfnuhneppi. Setjið stakið í línu 1 og dálki 2 í nýja fylkinu jafnt samsvarandi staki einingarfylkisins, sem er 0. Setjið stakið í línu 2 og dálki 2 jafnt samsvarandi staki einingarfylkisins.

$$\begin{aligned}1b-2d&=0\quad R_1\\ 2b-3d&=1\quad R_2\end{aligned}$$

Notið línuaðgerðir og margfaldið og leggið saman þannig: $(-2)R_1+R_2=R_2$. Leggið jöfnurnar tvær saman og leysið fyrir d.

$$\begin{aligned}1b-2d&=0\\ \tfrac{0+1d=1}{d=1}&\end{aligned}$$

Notið aftur bakinnsetningu og leysið fyrir b.

$$\begin{aligned} b-2(1) &= 0 \\ b-2 &= 0 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Að finna andhverfu með því að bæta einingarfylkinu við

Önnur leið til að finna andhverfuna er að bæta einingarfylkinu við. Þegar fylkinu A er umbreytt í I, umbreytist viðbætta fylkið I í A^{-1}.

Gefið er til dæmis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Bætið einingarfylkinu við A

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Framkvæmið línuaðgerðir með það að markmiði að umbreyta A í einingarfylkið.

1. Víxlið línu 1 og línu 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2. Margfaldið línu 2 með -2 og leggið við línu 1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

3. Margfaldið línu 1 með -2 og leggið við línu 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

4. Leggið línu 2 við línu 1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

5. Margfaldið línu 2 með -1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

Fylkið sem við höfum fundið er A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Að finna andhverfu 2×2 fylkis með formúlu

Þegar finna þarf andhverfu 2×2 fylkis getum við notað sérstaka formúlu í stað þess að nota fylkjamargföldun eða bæta einingarfylkinu við.

Ef A er 2×2 fylki á borð við

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er andhverfa A gefin með formúlunni

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

þar sem $ad - bc \neq 0$. Ef $ad - bc = 0$, hefur A enga andhverfu.

DÆMI 4

Notkun formúlunnar til að finna andhverfu fylkisins A

Notið formúluna til að finna andhverfu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Lausn

Með formúlunni fæst

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{(1)(-3)-(-2)(2)} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-3+4} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Greining

Við getum athugað hvort formúlan virki með því að reikna andhverfuna með annarri aðferð. Bætum einingarfylkinu við A.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Framkvæmið línuaðgerðir með það að markmiði að umbreyta A í einingarfylkið.

1. Margfaldið línu 1 með -2 og leggið við línu 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

2. Margfaldið línu 2 með 2 og leggið við línu 1.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Þar með höfum við staðfest upphaflegu lausnina.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

REYNDU SJÁLF(UR) #2

Notið formúluna til að finna andhverfu fylkisins A. Staðfestið svarið með því að bæta einingarfylkinu við.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

DÆMI 5

Að finna andhverfu fylkis, ef hún er til

Finnið andhverfu gefna fylkisins ef hún er til.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

9

Lausn

Við notum aðferðina þar sem við bætum einingarfylkinu við.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1. Víxlið línu 1 og línu 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2. Margfaldið línu 1 með -3 og leggið hana við línu 2.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

3. Ekki er hægt að ganga lengra. Núllin í línu 2 sýna að fylkið hefur enga andhverfu.

Að finna andhverfu 3×3 fylkja

Því miður er engin formúla, lík þeirri fyrir 2×2 fylki, til að finna andhverfu 3×3 fylkis. Þess í stað bætum við einingarfylkinu við upphaflega fylkið og notum línuaðgerðir til að finna andhverfuna.

Gefið er 3×3 fylkið

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Bætið einingarfylkinu við A

$$A \left| I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fyrst ritum við aukna fylkið með einingarfylkið hægra megin og A vinstra megin. Með einföldum línuaðgerðum færum við einingarfylkið yfir á vinstri hlið og þá fæst andhverfa fylkið hægra megin. Við finnum andhverfu þessa fylkis í næsta dæmi.

AÐFERÐ

Gefið er 3×3 fylki. Finnið andhverfu þess.

1. Ritið upphaflega fylkið með einingarfylkinu hægra megin.
2. Notið einfaldar línuaðgerðir þannig að einingarfylkið birtist vinstra megin.
3. Fylkið sem fæst hægra megin er andhverfa upphaflega fylkisins.
4. Notið fylkjamargföldun til að sýna að $A\,A^{-1} = I$ og $A^{-1}A = I$.

DÆMI 6

Að finna andhverfu 3 × 3 fylkis

Ef gefið er 3×3 fylkið A, finnið þá andhverfu þess.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Lausn

Bætið einingarfylkinu við A og framkvæmið síðan línuaðgerðir þar til einingarfylkið kemur í stað A. Fylkið hægra megin verður andhverfa A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{Víxlið } R_2 \text{ og } R_1 \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-R_2+R_1=R_1\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\2&3&1&1&0&0\\2&4&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$-R_2+R_3=R_3\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\2&3&1&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$R_3\ \leftrightarrow\ R_2\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\2&3&1&1&0&0\end{array}\right]$$

$$-2R_1+R_3=R_3\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&3&1&3&-2&0\end{array}\right]$$

$$-3R_2+R_3=R_3\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&6&-2&-3\end{array}\right]$$

Því fæst

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\6&-2&-3\end{bmatrix}$$

Greining

Til að sanna að $B=A^{-1}$, margföldum við fylkin tvö saman og athugum hvort margfeldið sé einingarfylkið, það er hvort $A\,A^{-1}=I$ og $A^{-1}\,A=I$.

9

$$
\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2(-1)+3(-1)+1(6) & 2(1)+3(0)+1(-2) & 2(0)+3(1)+1(-3) \\ 3(-1)+3(-1)+1(6) & 3(1)+3(0)+1(-2) & 3(0)+3(1)+1(-3) \\ 2(-1)+4(-1)+1(6) & 2(1)+4(0)+1(-2) & 2(0)+4(1)+1(-3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1(2)+1(3)+0(2) & -1(3)+1(3)+0(4) & -1(1)+1(1)+0(1) \\ -1(2)+0(3)+1(2) & -1(3)+0(3)+1(4) & -1(1)+0(1)+1(1) \\ 6(2)+-2(3)+-3(2) & 6(3)+-2(3)+-3(4) & 6(1)+-2(1)+-3(1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

REYNDU SJÁLF(UR) #3

Finnið andhverfu 3×3 fylkisins.

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}
$$

Að leysa línulegt jöfnuhneppi með andhverfu fylkis

Til að leysa línulegt jöfnuhneppi með andhverfu fylkis skilgreinum við tvö ný fylki: X táknar breytur jöfnuhneppisins og B táknar fastana. Með fylkjamargföldun getum við ritað jöfnuhneppi með jafnmörgum jöfnum og breytum sem

$$A\,X = B$$

Til að leysa línulegt jöfnuhneppi með andhverfu fylkis látum við A vera stuðlafylkið, X breytufylkið og B fastafylkið. Við viljum því leysa hneppið $A\,X = B$. Skoðum til dæmis jöfnuhneppið hér á eftir.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Stuðlafylki hneppisins er

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Breytufylkið er

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Fastafylkið er

$$B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Þá lítur $A\,X = B$ svona út:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Munið að fyrr í þessum hluta margfölduðum við rauntölu með andhverfu hennar, $\left(2^{-1}\right)2 = \left(\frac{1}{2}\right)2 = 1$. Til að leysa eina línulega jöfnu $a\,x = b$ fyrir x, margföldum við einfaldlega báðar hliðar jöfnunnar með margföldunarandhverfu (gagnhverfri tölu) a. Þá fæst

$$\begin{aligned} ax &= b \\ \left(\tfrac{1}{a}\right)ax &= \left(\tfrac{1}{a}\right)b \\ (a^{-1}\quad)ax &= (a^{-1})b \\ [(a^{-1})a]x &= (a^{-1})b \\ 1x &= (a^{-1})b \\ x &= (a^{-1})b \end{aligned}$$

Eini munurinn á lausn línulegrar jöfnu og jöfnuhneppis á fylkjaformi er að flóknara er að finna andhverfu fylkis og fylkjamargföldun tekur fleiri skref. Markmiðið er þó hið sama: að einangra breytuna.

Við skoðum þessa hugmynd ítarlega, en gagnlegt er að byrja á 2×2 hneppi og fara síðan yfir í 3×3 hneppi.

AÐ LEYSA JÖFNUHNEPPI MEÐ ANDHVERFU FYLKIS

Gefið er jöfnuhneppi. Ritið stuðlafylkið A, breytufylkið X, og fastafylkið B. Þá er

$$A\,X = B$$

Margfaldið báðar hliðar með andhverfu A til að fá lausnina.

$$\begin{aligned}\left(A^{-1}\right)AX &= \left(A^{-1}\right)B\\ \left[\left(A^{-1}\right)A\right]X &= \left(A^{-1}\right)B\\ IX &= \left(A^{-1}\right)B\\ X &= \left(A^{-1}\right)B\end{aligned}$$

SPURT OG SVARAÐ

Ef stuðlafylkið hefur enga andhverfu, merkir það þá að jöfnuhneppið hafi enga lausn?

Nei. Ef stuðlafylkið er ekki andhverfanlegt getur jöfnuhneppið verið ósamkvæmt og haft enga lausn eða háð og haft óendanlega margar lausnir.

DÆMI 7

Að leysa 2 × 2 jöfnuhneppi með andhverfu fylkis

Leysið gefna jöfnuhneppið með andhverfu fylkis.

$$\begin{aligned}3x + 8y &= 5\\ 4x + 11y &= 7\end{aligned}$$

Lausn

Ritið hneppið með stuðlafylki, breytufylki og fastafylki.

$$A = \begin{bmatrix}3 & 8\\ 4 & 11\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$$

Þá fæst

$$\begin{bmatrix}3 & 8\\ 4 & 11\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$$

Fyrst þurfum við að reikna A^{-1}. Með formúlunni fyrir andhverfu 2 sinnum 2 fylkis fæst

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \tfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\\ &= \tfrac{1}{3(11)-8(4)}\begin{bmatrix}11 & -8\\ -4 & 3\end{bmatrix}\\ &= \tfrac{1}{1}\begin{bmatrix}11 & -8\\ -4 & 3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Því

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}11 & -8\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$

Nú getum við leyst hneppið. Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með A^{-1}.

$$
\begin{aligned}
&(A^{-1})AX = (A^{-1})B \\
&\begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11(5) + (-8)7 \\ -4(5) + 3(7) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Lausnin er $(-1, 1)$.

SPURT OG SVARAÐ

Getum við leyst fyrir X með því að finna margfeldið BA^{-1}?

Nei. Munið að víxlregla gildir ekki um fylkjamargföldun og því er $A^{-1}B \neq BA^{-1}$. Skoðum skrefin sem við tókum til að leysa fylkjajöfnuna.

$$
\begin{aligned}
(A^{-1})AX &= (A^{-1})B \\
[(A^{-1})A]X &= (A^{-1})B \\
IX &= (A^{-1})B \\
X &= (A^{-1})B
\end{aligned}
$$

Takið eftir að í fyrsta skrefinu margfölduðum við báðar hliðar jöfnunnar með A^{-1}, en A^{-1} var vinstra megin við A á vinstri hliðinni og vinstra megin við B á hægri hliðinni. Víxlregla gildir ekki um fylkjamargföldun og því skiptir röðin máli.

DÆMI 8

9

Að leysa 3 × 3 jöfnuhneppi með andhverfu fylkis

Leysið eftirfarandi jöfnuhneppi með andhverfu fylkis.

$$
\begin{aligned}
5x + 15y + 56z &= 35 \\
-4x - 11y - 41z &= -26 \\
-x - 3y - 11z &= -7
\end{aligned}
$$

Lausn

Ritið jöfnuna $AX = B$.

$$
\begin{bmatrix} 5 & 15 & 56 \\ -4 & -11 & -41 \\ -1 & -3 & -11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -26 \\ -7 \end{bmatrix}
$$

Fyrst finnum við andhverfu A með því að bæta einingarfylkinu við.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 15 & 56 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -11 & -41 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Margfaldið línu 1 með $\frac{1}{5}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & \frac{56}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -4 & -11 & -41 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Margfaldið línu 1 með 4 og leggið við línu 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & \frac{56}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Leggið línu 1 við línu 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & \frac{56}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Margfaldið línu 2 með -3 og leggið við línu 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Margfaldið línu 3 með 5.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{11}{5} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Margfaldið línu 3 með $\frac{1}{5}$ og leggið við línu 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{19}{5} & \frac{4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Margfaldið línu 3 með $-\frac{19}{5}$ og leggið við línu 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Því

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -19 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Margfaldið báðar hliðar jöfnunnar með A^{-1}. Við viljum fá $A^{-1}AX = A^{-1}B$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -19 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 15 & 56 \\ -4 & -11 & -41 \\ -1 & -3 & -11 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -19 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 35 \\ -26 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Því fæst

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -70 + 78 - 7 \\ -105 - 26 + 133 \\ 35 + 0 - 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lausnin er $(1, 2, 0)$.

REYNDU SJÁLF(UR) #4

Leysið jöfnuhneppið með andhverfu stuðlafylkisins.

$$\begin{aligned} 2x - 17y + 11z &= 0 \\ -x + 11y - 7z &= 8 \\ 3y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

9

AÐFERÐ

Gefið er jöfnuhneppi. Leysið það með andhverfum fylkja og reiknivél.

1. Geymið stuðlafylkið og fastafylkið sem fylkjabreyturnar $[A]$ og $[B]$.
2. Sláið margföldunina inn í reiknivélina og sækið hverja fylkjabreytu eftir þörfum.
3. Ef stuðlafylkið er andhverfanlegt sýnir reiknivélin lausnarfylkið; ef það er ekki andhverfanlegt birtir hún villuboð.

DÆMI 9

Notkun reiknivélar til að leysa jöfnuhneppi með andhverfum fylkja

Leysið jöfnuhneppið með andhverfum fylkja og reiknivél.

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 32 \\
3x + 3y + z &= -27 \\
2x + 4y + z &= -2
\end{aligned}
$$

Lausn

Opnið fylkjasíðu reiknivélarinnar og skráið stuðlafylkið sem fylkjabreytuna $[\,A\,]$, og fastafylkið sem fylkjabreytuna $[\,B\,]$.

$$
[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 32 \\ -27 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

Farið á heimaskjá reiknivélarinnar og sláið inn margföldunina sem leysir fyrir X, og sækið hverja fylkjabreytu eftir þörfum.

$$
[\,A\,]^{-1} \times [\,B\,]
$$

Reiknið stæðuna.

$$
\begin{bmatrix} -59 \\ -34 \\ 252 \end{bmatrix}
$$

MIÐLAR

Á þessum vefsíðum finnið þið frekari útskýringar og æfingar í að leysa jöfnuhneppi með andhverfum fylkja.

- Einingarfylkið
- Að ákvarða andhverfur fylkja
- Notkun fylkjajöfnu til að leysa jöfnuhneppi

9.7 Æfingar kaflans

Munnleg verkefni

1. Í fyrri hluta sýndum við að víxlregla gildir almennt ekki um fylkjamargföldun, það er $A\,B \neq B\,A$. Getið þið útskýrt hvers vegna fylki og andhverfa þess víxlast í margföldun, það er hvers vegna $A^{-1}\,A = A\,A^{-1}$?

2. Hefur hvert 2×2 fylki andhverfu? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki og hvaða skilyrði þarf að uppfylla svo andhverfa sé til.

3. Getið þið útskýrt hvort 2×2 fylki með heila núlllínu geti haft andhverfu?

4. Getur fylki með heilum núlldálki haft andhverfu? Útskýrið hvers vegna eða hvers vegna ekki.

5. Getur fylki með núllum á hornalínunni haft andhverfu? Ef svo er, finnið dæmi. Ef ekki, sannið að það sé ekki hægt. Til einföldunar megið þið gera ráð fyrir 2×2 fylki.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal sýna að fylkið A sé andhverfa fylkisins B.

6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{35} \end{bmatrix}$$

9.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 17 & -3 & -5 \\ -12 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

12.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} -6 & 84 & -6 \\ 7 & -26 & 1 \\ -1 & -22 & 5 \end{bmatrix}$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna andhverfu hvers fylkis ef hún er til.

13.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

16.

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

18.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

23.

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

24.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 8 & -12 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

25.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

26.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa jöfnuhneppið með andhverfu 2×2 fylkis.

27.

$$\begin{aligned} 5x - 6y &= -61 \\ 4x + 3y &= -2 \end{aligned}$$

9

28.

$$\begin{aligned} 8x + 4y &= -100 \\ 3x - 4y &= 1 \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ -x + 5y &= -2 \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned} 5\,x - 4\,y &= -5 \\ 4\,x + y &= 2{,}3 \end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned} -3x - 4y &= 9 \\ 12x + 4y &= -6 \end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= \tfrac{3}{10} \\ -x + 5y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned} \tfrac{8}{5}x - \tfrac{4}{5}y &= \tfrac{2}{5} \\ -\tfrac{8}{5}x + \tfrac{1}{5}y &= \tfrac{7}{10} \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}y &= -\tfrac{1}{4} \\ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{5}y &= -\tfrac{9}{4} \end{aligned}$$

Í eftirfarandi æfingum skal leysa jöfnuhneppi með andhverfu 3×3 fylkis.

35.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 21 \\ 5x + 4y &= 37 \\ x - 2y - 5z &= 5 \end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned} 4x + 4y + 4z &= 40 \\ 2x - 3y + 4z &= -12 \\ -x + 3y + 4z &= 9 \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} 6x - 5y - z &= 31 \\ -x + 2y + z &= -6 \\ 3x + 3y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned} 6x - 5y + 2z &= -4 \\ 2x + 5y - z &= 12 \\ 2x + 5y + z &= 12 \end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= -12 \\ 2x + 2y - 9z &= 33 \\ 6y - 4z &= 1 \end{aligned}$$

40.

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}x-\frac{1}{5}y+4z&=\frac{-41}{2}\\ \frac{1}{5}x-20y+\frac{2}{5}z&=-101\\ \frac{3}{10}x+4y-\frac{3}{10}z&=23\end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y+\frac{1}{5}z&=\frac{31}{100}\\ -\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z&=\frac{7}{40}\\ -\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned}0{,}1\,x+0{,}2\,y+0{,}3\,z&=-1{,}4\\ 0{,}1\,x-0{,}2\,y+0{,}3\,z&=0{,}6\\ 0{,}4\,y+0{,}9\,z&=-2\end{aligned}$$

Tækniverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal nota reiknivél til að leysa jöfnuhneppið með andhverfum fylkja.

43.

$$\begin{aligned}2\,x-y&=-3\\ -x+2\,y&=2{,}3\end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y&=-\frac{43}{20}\\ \frac{5}{2}x+\frac{11}{5}y&=\frac{31}{4}\end{aligned}$$

9

45.

$$\begin{aligned}12{,}3\,x-2\,y-2{,}5\,z&=2\\ 36{,}9\,x+7\,y-7{,}5\,z&=-7\\ 8\,y-5\,z&=-10\end{aligned}$$

46.

$$\begin{aligned}0{,}5\,x-3\,y+6\,z&=-0{,}8\\ 0{,}7\,x-2\,y&=-0{,}06\\ 0{,}5\,x+4\,y+5\,z&=0\end{aligned}$$

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal finna andhverfu gefna fylkisins.

47.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

48.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

49.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

50.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

51.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Raunhæf verkefni

Í eftirfarandi æfingum skuluð þið rita jöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum. Leysið það síðan með andhverfu fylkis.

52. 2.400 miðar voru seldir á körfuboltaleik. Miðaverð fyrir svæði 1 og svæði 2 var ólíkt og heildartekjurnar voru $64.000. Hvert var verð hvorrar miðategundar?

53. Gerið ráð fyrir að í fyrri æfingu hafi verið seldir 400 fleiri miðar á svæði 2 en á svæði 1. Hvert var þá verð hvorrar miðategundar?

54. Í matarsöfnun söfnuðust tvær gerðir niðursuðuvara, grænar baunir og nýrnabaunir. Alls söfnuðust 350 dósir og samanlögð þyngd matargjafanna var 348 pund og 12 únsur. Dósirnar með grænum baunum vega 2 únsum minna en dósirnar með nýrnabaunum. Hversu margar dósir af hvorri gerð voru gefnar?

55. Nemendur voru beðnir að koma með uppáhaldsávöxtinn sinn í kennslustund. 95% ávaxtanna voru bananar, epli eða appelsínur. Appelsínur voru tvöfalt vinsælli en bananar og epli 5% óvinsælli en bananar. Hvert var hlutfall hverrar ávaxtategundar?

56. Hjúkrunarfræðiklúbburinn hélt kökusölu til fjáröflunar og seldi brúnkur og súkkulaðibitakökur. Brúnkurnar kostuðu $1 og súkkulaðibitakökurnar $0,75. Klúbburinn safnaði $700 og seldi 850 kökur. Hversu margar brúnkur og hversu margar smákökur seldust?

57. Fataverslun þarf að endurnýja birgðir. Hún selur þrjár gerðir hatta: stráhatta, húfur og kúrekahatta. Stráhattur kostar $13,99, húfa $7,99 og kúrekahattur $14,49. Á síðasta ársfjórðungi seldust 100 hattar fyrir samtals $1.119 og húfur voru 10 fleiri en kúrekahattar. Hversu marga hatta af hverri gerð á verslunin að panta til að bæta upp hattana sem seldust?

58. Anna, Percy og Morgan vega samtals 370 pund. Morgan vegur 20 pundum meira en Percy og Anna vegur 1,5 sinnum það sem Percy vegur. Hvað vegur hvert þeirra?

59. Þrír herbergisfélagar deildu pakka með 12 ískinnum en enginn man hversu marga hver borðaði. Micah borðaði tvöfalt fleiri ískinna en Joe og Albert þremur færri en Micah. Hversu marga ískinna borðaði hver þeirra?

60. Bóndi smíðaði hænsnakofa úr hænsnaneti, timbri og krossviði. Hænsnanetið kostaði $2 á ferfet, timbrið $10 á ferfet og krossviðurinn $5 á ferfet. Bóndinn greiddi samtals $51 og efnið sem hann notaði var alls $14\,\text{ft}^2$. Hann notaði $3\ \text{ft}^2$ meira af hænsnaneti en krossviði. Hve mikið notaði bóndinn af hverju efni?

61. Jay er með sítrónu-, appelsínu- og granateplatré í bakgarðinum. Appelsína vegur 8 únsur, sítróna 5 únsur og granatepli 11 únsur. Jay tíndi 142 ávexti sem vógu samtals 70 pund og 10 únsur. Hann tíndi 15,5 sinnum fleiri appelsínur en granatepli. Hversu marga ávexti af hverri tegund tíndi Jay?

9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Reikna 2×2 ákveður.
- Nota reglu Cramers til að leysa tveggja breyta jöfnuhneppi.
- Reikna 3×3 ákveður.
- Nota reglu Cramers til að leysa þriggja breyta jöfnuhneppi með þremur jöfnum.

- Þekkja eiginleika ákveða.

Við höfum lært að leysa tveggja og þriggja breyta jöfnuhneppi með ýmsum aðferðum: innsetningu, samlagningu, Gauss-eyðingu, andhverfu fylkis og myndrænni lausn. Sumar aðferðirnar eru auðveldari í notkun en aðrar og henta betur við tilteknar aðstæður. Í þessum hluta skoðum við tvær aðferðir í viðbót til að leysa jöfnuhneppi.

Útreikningur ákveðu 2×2 fylkis

Ákveða er rauntala sem nýtist víða í stærðfræði, til dæmis við útreikning flatarmáls, rúmmáls og annarra stærða. Hér notum við stök ferningsfylkis til að kanna með ákveðu hvort fylkið sé andhverfanlegt og hvort jöfnuhneppið hafi lausn. Ein áhugaverðasta notkun ákveða er ef til vill í dulmálsfræði. Örugg merki eða skilaboð eru stundum send dulkóðuð í fylki. Aðeins er hægt að afkóða gögnin með andhverfanlegu fylki og ákveðunni. Við einbeitum okkur hér að ákveðunni sem vísbendingu um hvort fylkið sé andhverfanlegt. Til að reikna ákveðu fylkis þarf að fylgja tilteknum mynstrum sem lýst er í þessum hluta.

AÐ FINNA ÁKVEÐU 2 × 2 FYLKIS

Ákveða 2×2 fylkisins sem gefið er með

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er skilgreind sem

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Takið eftir breyttum rithætti. Hægt er að tákna ákveðuna með ýmsum hætti, meðal annars sem $det\left(A\right)$ og með því að setja lóðrétt strik í stað hornklofa fylkisins, $\left|A\right|$.

SÝNIDÆMI 1

Að finna ákveðu 2 × 2 fylkis

Finnið ákveðu gefna fylkisins.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Lausn

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 5(3) - (-6)(2) \\ &= 27 \end{aligned}$$

Notkun reglu Cramers til að leysa tveggja breyta jöfnuhneppi

Nú kynnum við síðustu aðferðina til að leysa jöfnuhneppi. Hún byggist á ákveðum. Aðferðin nefnist regla Cramers, er frá miðri 18. öld og kennd við upphafsmann hennar, svissneska stærðfræðinginn Gabriel Cramer (1704–1752). Hann kynnti hana árið 1750 í verkinu Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques. Regla Cramers er nothæf og skilvirk aðferð til að finna lausnir jöfnuhneppa með hvaða fjölda óþekktra stærða sem er, að því gefnu að jöfnurnar séu jafnmargar og óþekktu stærðirnar.

Regla Cramers gefur einkvæma lausn jöfnuhneppis ef hún er til. Ef jöfnuhneppið hefur enga lausn eða óendanlega margar lausnir er ákveðan hins vegar núll. Til að kanna hvort jöfnuhneppið sé ósamkvæmt eða háð þarf að nota aðra aðferð, til dæmis eyðingu.

Til að skilja reglu Cramers skulum við skoða nánar hvernig við leysum línuleg jöfnuhneppi með einföldum línuaðgerðum. Skoðum tveggja breyta jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \quad (1) \\ a_2x + b_2y &= c_2 \quad (2) \end{aligned}$$

Við eyðum annarri breytunni með línuaðgerðum og leysum fyrir hinni. Gerum ráð fyrir að við viljum leysa fyrir x. Ef jafna (2) er margfölduð með gagnstæðu tölu stuðuls y í jöfnu (1), jafna (1) er margfölduð með stuðli y í jöfnu (2) og jöfnurnar síðan lagðar saman fellur breytan y út.

$b_2\ a_1\ x + b_2\ b_1\ y = b_2\ c_1$ Margfaldið R_1 með b_2

$\underline{-b_1\ a_2\ x - b_1\ b_2\ y = -b_1\ c_2}$ Margfaldið R_2 með $-b_1$

$$b_2\ a_1\ x - b_1\ a_2\ x = b_2\ c_1 - b_1\ c_2$$

Leysið nú fyrir x.

$$\begin{aligned} b_2a_1x - b_1a_2x &= b_2c_1 - b_1c_2 \\ x(b_2a_1 - b_1a_2) &= b_2c_1 - b_1c_2 \\ x &= \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{b_2a_1 - b_1a_2} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Til að leysa fyrir y, eyðum við á sama hátt x.

$a_2\ a_1\ x + a_2\ b_1\ y = a_2\ c_1$ Margfaldið R_1 með a_2

$\underline{-a_1\ a_2\ x - a_1\ b_2\ y = -a_1\ c_2}$ Margfaldið R_2 með $-a_1$

$$a_2\,b_1\,y - a_1\,b_2\,y = a_2\,c_1 - a_1\,c_2$$

Þegar leyst er fyrir y fæst

$$\begin{aligned} a_2b_1y - a_1b_2y &= a_2c_1 - a_1c_2 \\ y(a_2b_1 - a_1b_2) &= a_2c_1 - a_1c_2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Takið eftir að nefnari bæði x og y er ákveða stuðlafylkisins.

Við getum notað þessar formúlur til að leysa fyrir x og y, en regla Cramers innleiðir einnig nýjan rithátt:

- D: ákveða stuðlafylkisins
- D_x: ákveða teljarans í lausninni fyrir x

  $$x = \frac{D_x}{D}$$
- D_y: ákveða teljarans í lausninni fyrir y

  $$y = \frac{D_y}{D}$$

Lykilatriðið í reglu Cramers er að setja fastadálkinn í stað dálks breytunnar sem leysa á fyrir og reikna síðan ákveðurnar. Síðan má rita x og y sem hlutfall tveggja ákveða.

REGLA CRAMERS FYRIR 2×2 JÖFNUHNEPPI

Regla Cramers er aðferð sem notar ákveður til að leysa jöfnuhneppi þegar jöfnurnar eru jafnmargar og breyturnar.

Skoðum tveggja breyta jöfnuhneppi með tveimur línulegum jöfnum.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Lausnin með reglu Cramers er

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad D \neq 0; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad D \neq 0.$$

Ef leysa á fyrir x, er x-dálkinum skipt út fyrir fastadálkinn. Ef leysa á fyrir y, er y-dálkinum skipt út fyrir fastadálkinn.

SÝNIDÆMI 2

Notkun reglu Cramers til að leysa 2 × 2 jöfnuhneppi

Leysið eftirfarandi 2×2 jöfnuhneppi með reglu Cramers.

$$\begin{aligned} 12x + 3y &= 15 \\ 2x - 3y &= 13 \end{aligned}$$

Lausn

Leysið fyrir x.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 13 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-45 - 39}{-36 - 6} = \frac{-84}{-42} = 2$$

Leysið fyrir y.

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 15 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{156 - 30}{-36 - 6} = -\frac{126}{42} = -3$$

Lausnin er $(2, -3)$.

PRÓFIÐ SJÁLF #1

Notið reglu Cramers til að leysa 2×2 jöfnuhneppið.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -11 \\ -2x + y &= -13 \end{aligned}$$

Útreikningur ákveðu 3 × 3 fylkis

Auðvelt er að finna ákveðu 2×2 fylkis en flóknara að finna ákveðu 3×3 fylkis. Ein aðferð er að bæta fyrstu tveimur dálkunum aftan við 3×3 fylkið og mynda þannig 3×5 fylki. Síðan reiknum við summu margfelda stakanna niður hverja hornalínanna þriggja, frá efra vinstra horni að neðra hægra horni. Loks drögum við frá margfeldi stakanna upp hverja hornalínanna þriggja, frá neðra vinstra horni að efra hægra horni. Auðveldara er að skilja þetta með mynd og sýnidæmi.

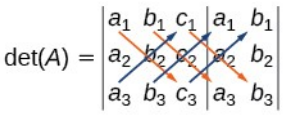
Finnið ákveðu 3×3 fylkisins.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

1. Bætið fyrstu tveimur dálkunum aftan við A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

2. Frá efra vinstra horni að neðra hægra horni: Margfaldið stökin niður fyrstu hornalínuna. Leggið niðurstöðuna við margfeldi stakanna niður aðra hornalínuna. Leggið síðan margfeldi stakanna niður þriðju hornalínuna við niðurstöðuna.
3. Frá neðra vinstra horni að efra hægra horni: Dragið margfeldi stakanna upp fyrstu hornalínuna frá. Dragið margfeldi stakanna upp aðra hornalínuna frá niðurstöðunni. Dragið loks margfeldi stakanna upp þriðju hornalínuna frá niðurstöðunni.



Algebrureikningurinn er sem hér segir:

$$|A| = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

SÝNIDÆMI 3

Að finna ákveðu 3 × 3 fylkis

Finnið ákveðu 3 × 3 fylkisins sem gefið er með

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lausn

Bætið fyrstu tveimur dálkunum aftan við fylkið og fylgið síðan formúlunni. Þá fæst

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\,(-1)\,(1) + 2\,(1)\,(4) + 1\,(3)\,(0) - 4\,(-1)\,(1) - 0\,(1)\,(0) - 1\,(3)\,(2) \\ &= 0 + 8 + 0 + 4 - 0 - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

PRÓFIÐ SJÁLF #2

Finnið ákveðu 3 × 3 fylkisins.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

SPURT OG SVARAÐ

Getum við notað sömu aðferð til að finna ákveðu stærra fylkis?

Nei, þessi aðferð gildir aðeins fyrir 2×2 *og* 3×3 *fylki. Fyrir stærri fylki er best að nota grafreikni eða tölvuhugbúnað.*

Notkun reglu Cramers til að leysa þriggja breyta jöfnuhneppi með þremur jöfnum

Nú þegar við kunnum að finna ákveðu 3×3 fylkis getum við beitt reglu Cramers til að leysa þriggja breyta jöfnuhneppi með þremur jöfnum. Regla Cramers er einföld og fylgir sama mynstri og fyrir 2×2 fylki. Þegar stig fylkisins hækkar í 3×3 fjölgar reikniaðgerðunum hins vegar verulega.

Ef ákveðan reynist núll gefur regla Cramers ekki til kynna hvort jöfnuhneppið hafi enga lausn eða óendanlega margar lausnir. Til að komast að því þarf að beita eyðingu á jöfnuhneppið.

Skoðum 3×3 jöfnuhneppi.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}, D \neq 0$$

þar sem

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Þegar við ritum ákveðuna D_x, skiptum við x-dálkinum út fyrir fastadálkinn. Þegar við ritum ákveðuna D_y, skiptum við y-dálkinum út fyrir fastadálkinn. Þegar við ritum ákveðuna D_z, skiptum við z-dálkinum út fyrir fastadálkinn. Sannreynið alltaf svarið.

SÝNIDÆMI 4

Lausn 3×3 jöfnuhneppis með reglu Cramers

Finnið lausn gefna 3×3 jöfnuhneppisins með reglu Cramers.

$$x + y - z = 6$$
$$3x - 2y + z = -5$$
$$x + 3y - 2z = 14$$

Lausn

Notum reglu Cramers.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 14 & 3 & -2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 14 & -2 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

Þá fæst

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3}{-3} = 1$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-9}{-3} = 3$$
$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{6}{-3} = -2$$

Lausnin er $(1, 3, -2)$.

PRÓFIÐ SJÁLF #3

Notið reglu Cramers til að leysa 3×3 fylkið.

$$x - 3y + 7z = 13$$
$$x + y + z = 1$$
$$x - 2y + 3z = 4$$

SÝNIDÆMI 5

Notkun reglu Cramers til að leysa ósamkvæmt jöfnuhneppi

Leysið jöfnuhneppið með reglu Cramers.

$$3x - 2y = 4 \quad (1)$$
$$6x - 4y = 0 \quad (2)$$

Lausn

Við byrjum á að finna ákveðurnar $D, D_x,$ og D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 6(-2) = 0$$

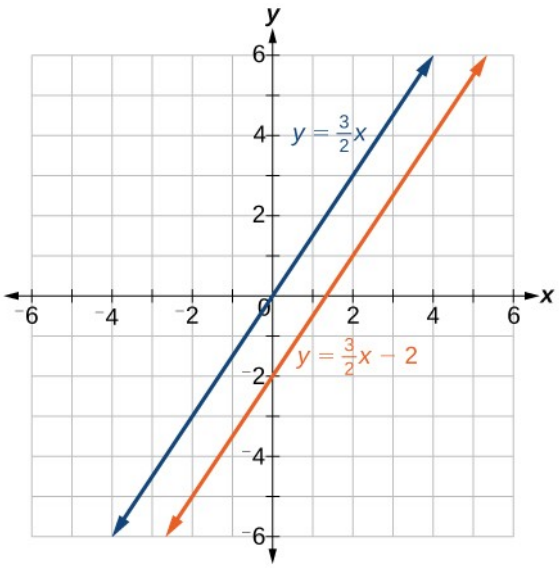
Við vitum að þegar ákveðan er núll hefur jöfnuhneppið annaðhvort enga lausn eða óendanlega margar lausnir. Til að greina þar á milli beitum við eyðingu. Markmiðið er að eyða annarri breytunni.

1. Margfaldið jöfnu (1) með -2.

2. Leggið niðurstöðuna við jöfnu (2).

$$\begin{aligned} -6x + 4y &= -8 \\ 6x - 4y &= 0 \\ \hline 0 &= -8 \end{aligned}$$

Við fáum jöfnuna $0 = -8$, sem er ósönn. Jöfnuhneppið hefur því enga lausn. Myndrit jöfnuhneppisins sýnir tvær samsíða línur. Sjá mynd 1.



Mynd 1

9

SÝNIDÆMI 6

Notkun reglu Cramers til að leysa háð jöfnuhneppi

Leysið jöfnuhneppið sem hefur óendanlega margar lausnir.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \quad (1) \\ 3x + y - 2z &= 0 \quad (2) \\ 2x - 4y + 6z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Lausn

Finnum ákveðuna fyrst. Setjið upp fylki og bætið fyrstu tveimur dálkunum aftan við það.

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 & -4 \end{array}\right|$$

Þá fæst

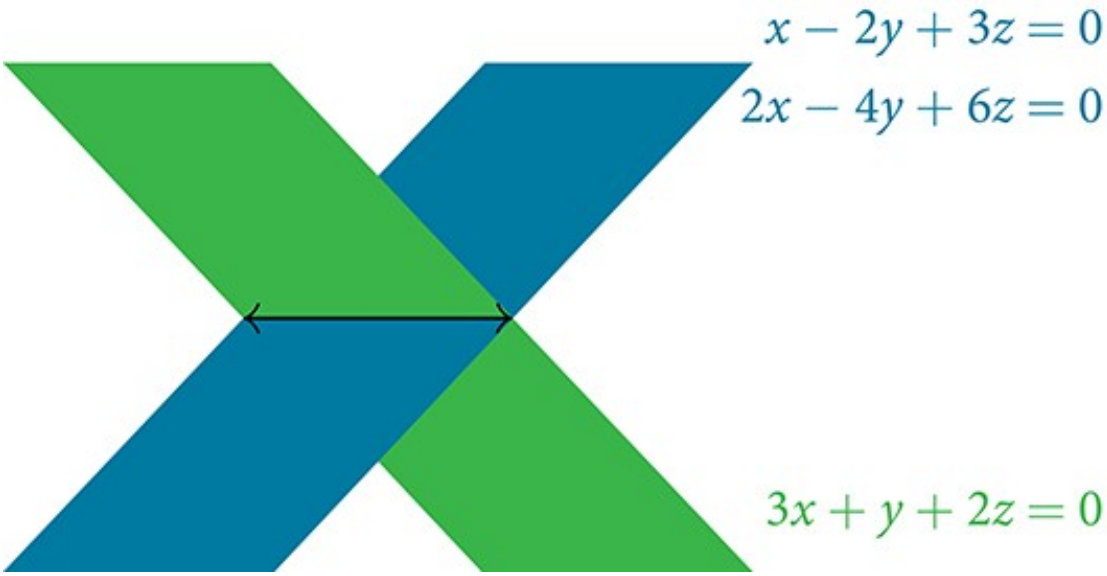
$$1(1)(6)+(-2)(-2)(2)+3(3)(-4)-2(1)(3)-(-4)(-2)(1)-6(3)(-2)=0$$

Þar sem ákveðan er núll hefur jöfnuhneppið annaðhvort enga lausn eða óendanlega margar lausnir. Við þurfum að beita eyðingu til að komast að því.

1. Margfaldið jöfnu (3) með -2 og leggið niðurstöðuna við jöfnu (1).

$$\begin{array}{r} -2x + 4y - 6z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

2. Svarið $0=0$, sem er alltaf sönn fullyrðing, merkir að jöfnuhneppið hefur óendanlega margar lausnir. Á myndriti jöfnuhneppisins sést að tvö plananna falla saman og skera bæði þriðja planið í línu. Sjá mynd 2.



Mynd 2

Eiginleikar ákveða

Ákveður hafa marga eiginleika. Hér eru taldir nokkrir eiginleikar sem auðvelda okkur að reikna ákveðu fylkis.

EIGINLEIKAR ÁKVEÐA

1. Ef fylkið er á efra þríhyrningsformi er ákveðan margfeldi stakanna á aðalhornalínunni.
2. Þegar tveimur línum er víxlað um sæti skiptir ákveðan um formerki.
3. Ef annaðhvort tvær línur eða tveir dálkar eru eins er ákveðan jöfn núlli.
4. Ef öll stök í einhverri línu eða einhverjum dálki fylkis eru núll er ákveðan jöfn núlli.
5. Ákveða andhverfa fylkisins A^{-1} er gagnhverfa ákveðu fylkisins A.
6. Ef einhver lína eða dálkur er margfaldaður með fasta margfaldast ákveðan með sama stuðli.

SÝNIDÆMI 7

Sýnidæmi um eiginleika ákveða

Sýnið hvern eiginleika ákveða með dæmi.

Lausn

Eiginleiki 1 segir að ef fylkið er á efra þríhyrningsformi sé ákveðan margfeldi stakanna á aðalhornalínunni.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Bætið fyrstu tveimur dálkunum aftan við A.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Þá fæst

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1(2)(-1) + 2(1)(0) + 3(0)(0) - 0(2)(3) - 0(1)(1) + 1(0)(2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Eiginleiki 2 segir að þegar línum er víxlað um sæti skipti ákveðan um formerki. Gefið er

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = (-1)(-3) - (4)(5) = 3 - 20 = -17$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = (4)(5) - (-1)(-3) = 20 - 3 = 17$$

Eiginleiki 3 segir að ef tvær línur eða tveir dálkar eru eins sé ákveðan jöfn núlli.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1(2)(2) + 2(2)(-1) + 2(2)(2) + 1(2)(2) - 2(2)(1) - 2(2)(2) \\ &= 4 - 4 + 8 + 4 - 4 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Eiginleiki 4 segir að ef öll stök línu eða dálks séu núll sé ákveðan jöfn núlli. Því fæst

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \det(A) = 1\,(0) - 2\,(0) = 0$$

Eiginleiki 5 segir að ákveða andhverfa fylkisins A^{-1} sé gagnhverfa ákveðu fylkisins A. Því fæst

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \det\left(A\right) = 1\,(4) - 3\,(2) = -2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \det\left(A^{-1}\right) = -2\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{3}{2}\right)(1) = -\tfrac{1}{2}$$

Eiginleiki 6 segir að ef einhver lína eða dálkur fylkis er margfaldaður með fasta margfaldist ákveðan með sama stuðli. Því fæst

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \det\left(A\right) = 1\,(4) - 2\,(3) = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} 2\,(1) & 2\,(2) \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \det\left(B\right) = 2\,(4) - 3\,(4) = -4$$

SÝNIDÆMI 8

Notkun reglu Cramers og eiginleika ákveða til að leysa jöfnuhneppi

Finnið lausn gefna 3×3 jöfnuhneppisins.

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 4z &= 2 \quad (1) \\ 3x + 7y + 7z &= -5 \quad (2) \\ x + 2y + 2z &= 4 \quad (3) \end{aligned}$$

9

Lausn

Með reglu Cramers fæst

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Takið eftir að annar og þriðji dálkurinn eru eins. Samkvæmt eiginleika 3 er ákveðan jöfn núlli og því hefur jöfnuhneppið annaðhvort enga lausn eða óendanlega margar lausnir. Við þurfum að beita eyðingu til að komast að því.

1. Margfaldið jöfnu (3) með -2 og leggið niðurstöðuna við jöfnu (1).

$$\begin{array}{r} -2x - 4y - 4x = -8 \\ 2x + 4y + 4z = 2 \\ \hline 0 = -6 \end{array}$$

Þegar mótsögn fæst merkir það að jöfnuhneppið hefur enga lausn.

MIÐLAR

Notið þessi vefgögn til að læra meira um reglu Cramers og æfa ykkur í henni.

- Lausn tveggja jafna jöfnuhneppis með reglu Cramers
- Lausn þriggja jafna jöfnuhneppis með reglu Cramers

9.8 Æfingar

Orðleg verkefni

1. Útskýrið hvers vegna alltaf er hægt að reikna ákveðu ferningsfylkis.

2. Skoðið reglu Cramers og útskýrið hvers vegna jöfnuhneppið hefur enga einkvæma lausn þegar ákveða fylkisins er 0. Notið 2×2 fylki til einföldunar.

3. Útskýrið hvað það segir um andhverfu fylkis að ákveða þess sé 0.

4. Ákveða 2×2 fylkisins A er 3. Línunum er víxlað og síðan er fyrsta línan margfölduð með 6 og önnur línan með 2. Útskýrið hvernig finna má ákveðuna og gefið svarið.

Algebruverkefni

Finnið ákveðuna í eftirfarandi æfingum.

5.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

6.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

7.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

8.

$$\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

9.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

10.

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}$$

11.

$$\begin{vmatrix} 10 & 0{,}2 \\ 5 & 0{,}1 \end{vmatrix}$$

12.

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

13.

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3{,}1 & 4.000 \end{vmatrix}$$

14.

$$\begin{vmatrix} -1{,}1 & 0{,}6 \\ 7{,}2 & -0{,}5 \end{vmatrix}$$

15.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

16.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

17.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

18.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

19.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -8 \\ 2 & -8 & -3 \end{vmatrix}$$

20.

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 5 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

21.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}$$

22.

$$\begin{vmatrix} 1{,}1 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4{,}1 & -0{,}4 & 2{,}5 \end{vmatrix}$$

9

23.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1{,}6 & 3{,}1 \\ 1{,}1 & 3 & -8 \\ -9{,}3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

24.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$$

Leysið línulega jöfnuhneppið með reglu Cramers í eftirfarandi æfingum.

25.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ 4x + 5y &= 9 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= 2 \\ -4x + 7y &= 6 \end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned} 6x - 3y &= 2 \\ -8x + 9y &= -1 \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 12 \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 23 \\ 2x - y &= -1 \end{aligned}$$

30.

$$\begin{aligned} 10x - 6y &= 2 \\ -5x + 8y &= -1 \end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -3 \\ 2x + 6y &= -4 \end{aligned}$$

32.

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 7 \\ -3x + 9y &= 0 \end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned} 4x + 10y &= 180 \\ -3x - 5y &= -105 \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= -3 \\ -4x + 6y &= 4 \end{aligned}$$

Leysið línulega jöfnuhneppið með reglu Cramers í eftirfarandi æfingum.

35.

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -1 \\ 7x + 3y + 5z &= 26 \\ -2x - 6y + 7z &= -6 \end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned} -5x + 2y - 4z &= -47 \\ 4x - 3y - z &= -94 \\ 3x - 3y + 2z &= 94 \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned} 4x + 5y - z &= -7 \\ -2x - 9y + 2z &= 8 \\ 5y + 7z &= 21 \end{aligned}$$

38.

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 4z &= 10 \\ 5x - 2z &= -2 \\ 3x + 2y - 5z &= -9 \end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= 6 \\ -6x + y &= -2 \\ 2x + 7y + 8z &= 24 \end{aligned}$$

40.

$$\begin{aligned} 5\,x + 2\,y - z &= 1 \\ -7\,x - 8\,y + 3\,z &= 1{,}5 \\ 6\,x - 12\,y + z &= 7 \end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned} 13x - 17y + 16z &= 73 \\ -11x + 15y + 17z &= 61 \\ 46x + 10y - 30z &= -18 \end{aligned}$$

42.

$$\begin{aligned} -4\,x - 3\,y - 8\,z &= -7 \\ 2\,x - 9\,y + 5\,z &= 0{,}5 \\ 5\,x - 6\,y - 5\,z &= -2 \end{aligned}$$

43.

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 8z &= 10 \\ -2x + 3y - 4z &= -5 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

44.

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 8z &= 10 \\ -2x + 3y - 4z &= -5 \\ 12x + 18y - 24z &= -30 \end{aligned}$$

Tækni

Notið ákveðufall grafreiknis í eftirfarandi æfingum.

45.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

46.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

47.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 7 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 100 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2.000 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

48.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Raunhæf verkefni

Setjið upp línulegt jöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum í eftirfarandi æfingum. Reiknið síðan ákveðuna. Er einkvæm lausn til? Finnið hana ef svo er.

49. Summa tveggja talna er 56. Önnur talan er 20 minni en hin.

50. Summa tveggja talna er 104. Ef tvöföld fyrri talan og tvöföld síðari talan eru lagðar saman fæst 208.

51. Summa þriggja talna er 106. Fyrsta talan er 3 minni en önnur talan. Þriðja talan er 4 stærri en sú fyrsta.

52. Summa þriggja talna er 216. Summa fyrstu tveggja talnanna er 112. Þriðja talan er 8 minni en summa fyrstu tveggja talnanna.

Setjið upp línulegt jöfnuhneppi sem lýsir aðstæðunum í eftirfarandi æfingum. Finnið síðan allar lausnir jöfnuhneppisins með reglu Cramers.

53. Þið fjárfestið $10.000 á tveimur reikningum sem bera 8% vexti og 5% vexti. Í lok árs er samanlögð inneign reikninganna $10.710. Hve mikið var lagt inn á hvorn reikning?

54. Þið fjárfestið $80.000 á tveimur reikningum, $22.000 á öðrum og $58.000 á hinum. Eftir eitt ár hafið þið fengið $2.470 í einfalda vexti. Vextir síðari reikningsins eru hálfu prósentustigi lægri en tvöfaldir vextir fyrri reikningsins. Hverjir eru vextir reikninganna?

55. Leikhús þarf að vita hve margir fullorðinsmiðar og barnamiðar seldust af alls 1.200 miðum. Barnamiði kostar $5,95, fullorðinsmiði $11,15 og heildartekjurnar voru $12.756. Hve margir barnamiðar og fullorðinsmiðar seldust?

56. Tónleikastaður selur staka miða á $40 og parmiða á $65. Heildartekjurnar voru $18.090 og 321 miði seldist. Hve margir stakir miðar og hve margir parmiðar seldust?

57. Þið ákveðið að mála eldhúsið grænt og blandið saman gulri og blárri málningu. Þið munið ekki hve mörg gallon af hvorum lit fóru í blönduna en vitið að hún var samtals 10 gallon. Kvittunin sýnir að heildarkostnaðurinn var $29,50. Hvert gallon af gulri málningu kostar $2,59 og hvert gallon af blárri $3,19. Hve mörg gallon af hvorum lit fóru í grænu blönduna?

58. Þið seldið tvær gerðir trefla á bændamarkaði og viljið vita hvor gerðin var vinsælli. Alls seldust 56 treflar, guli trefillinn kostaði $10 og sá fjólublái $11. Heildartekjurnar voru $583. Hve margir gulir og hve margir fjólubláir treflar seldust?

59. Í garðinum uxu tvær tegundir tómata, grænir og rauðir. Rauðu tómatarnir vega 10 únsur hver og þeir grænu 4 únsur. Tómatarnir eru 30 og vega samtals 13 pund og 14 únsur. Hve margir tómatar eru af hvorri tegund?

60. Á markaði standa þrjár vinsælustu grænmetistegundirnar fyrir 53% af grænmetissölunni. Maís selst 4% meira en spergilkál og spergilkál 5% meira en laukur. Hvert er markaðshlutfall hverrar grænmetistegundar?

61. Á sama markaði standa þrjár vinsælustu ávaxtategundirnar fyrir 37% af öllum seldum ávöxtum. Jarðarber seljast tvöfalt meira en appelsínur og kívíávextir einu prósentustigi meira en appelsínur. Finnið hlutfall hverrar ávaxtategundar af heildarsölunni.

62. Þrír listamenn komu fram á tónleikastað. Miði á fyrsta listamanninn kostaði $15, miði á þann næsta $45 og miði á þann síðasta $22. Alls seldust 510 miðar fyrir $12.700. Fyrsta hljómsveitin hafði 40 fleiri áhorfendur en sú næsta. Hve margir miðar seldust á hverja hljómsveit?

63. Kvikmyndahús seldi miða á þrjár kvikmyndir. Miði á fyrstu myndina kostaði $5, á aðra myndina $11 og á þá þriðju $12. 100 miðar seldust á fyrstu myndina. Alls seldust 642 miðar fyrir samtals $6.774. Hve margir miðar seldust á hverja mynd?

Næstu æfingar byggjast á eftirfarandi aðstæðum: Fyrirtæki sem leggur áherslu á hollustu ákveður að búa til hnetu- og ávaxtablöndu úr möndlum, þurrkuðum trönuberjum og súkkulaðihúðuðum kasjúhnetum. Næringarupplýsingar hráefnanna eru sýndar í töflu 1.

Tafla 1

	Fita (g)	Prótín (g)	Kolvetni (g)
Möndlur (10)	6	2	3
Trönuber (10)	0,02	0	8
Kasjúhnetur (10)	7	3,5	5,5

64. Í sérstöku lágkolvetnablöndunni eru 1.000 bitar. Kolvetnin eru samtals 425 g og fitan 570,2 g. Kasjúhnetubitarnir eru 200 fleiri en trönuberin. Hve margir bitar eru af hverri gerð í blöndunni?

65. Í göngublöndunni eru 1.000 bitar sem innihalda 390,8 g af fitu og 165 g af prótíni. Möndlurnar og kasjúhneturnar eru jafnmargar. Hve margir bitar eru af hverri gerð í blöndunni?

66. Í orkublöndunni eru 1.000 bitar sem innihalda 145 g af prótíni og 625 g af kolvetnum. Samanlagður fjöldi mandla og kasjúhneta er jafn fjölda trönuberja. Hve margir bitar eru af hverri gerð í blöndunni?

Lykilhugtök

samlagningaraðferð
algebruaðferð til að leysa línuleg jöfnuhneppi þar sem jöfnurnar eru lagðar saman þannig að önnur breytan falli út; jafnan sem fæst er leyst fyrir hinni breytunni og síðan er innsetning notuð til að finna fyrri breytuna

aukið fylki
stuðlafylki sem fastadálki hefur verið bætt við; lóðrétt strik innan hornklofa fylkisins skilur dálkinn frá stuðlafylkinu

núllpunktur rekstrar
punkturinn þar sem kostnaðarfall og tekjufall skerast og hagnaðurinn er núll

stuðlafylki
fylki sem inniheldur eingöngu stuðla jöfnuhneppis

dálkur
talnasafn sem raðað er lóðrétt í fylki

samkvæmt jöfnuhneppi
jöfnuhneppi sem hefur annaðhvort eina sameiginlega lausn allra jafnanna og er þá óháð, eða óendanlega margar lausnir og er þá háð

kostnaðarfall
fall sem notað er til að reikna kostnað við rekstur fyrirtækis; það skiptist yfirleitt í fastan kostnað og breytilegan kostnað

regla Cramers
aðferð sem notar ákveður til að leysa jöfnuhneppi þar sem jöfnurnar eru jafnmargar og breyturnar

háð jöfnuhneppi
línulegt jöfnuhneppi þar sem jöfnurnar tvær lýsa sömu línu; háð jöfnuhneppi hefur óendanlega margar lausnir

ákveða
tala sem er reiknuð út frá stökum ferningsfylkis og segir meðal annars til um hvort jöfnuhneppi hafi lausn

stak
eining, stuðull eða fasti í fylki

leyfilegt svæði
lausn ólínulegs ójöfnuhneppis; það svæði myndritsins þar sem skyggðu svæði allra ójafnanna skerast

Gauss-eyðing
að nota einfaldar línuaðgerðir til að koma fylki á efra stallaform

9

einingarfylki
ferningsfylki með einingum á aðalhornalínunni og núllum alls staðar annars staðar; það gegnir hlutverki 1 í fylkjareikningi

ósamkvæmt jöfnuhneppi
línulegt jöfnuhneppi sem hefur enga sameiginlega lausn vegna þess að jöfnurnar lýsa samsíða línum sem eiga hvorki punkt né línu sameiginlega

óháð jöfnuhneppi
línulegt jöfnuhneppi með nákvæmlega eitt lausnarpar (x, y)

aðalhornalína
stök ferningsfylkis sem liggja á ská frá efra vinstra horni að neðra hægra horni

fylki
rétthyrnd röðun talna

andhverfa fylkis
fylki sem gefur einingarfylkið þegar það er margfaldað með upprunalega fylkinu

ólínuleg ójafna
ójafna sem inniheldur ólínulega stæðu

stofnbrotaliðun
ferlið við að liða einfaldaða ræða stæðu aftur í upprunalegt form, summu eða mismun einfaldari ræðra stæða

stofnbrot
einstöku brotin sem mynda summu eða mismun ræðrar stæðu áður en þau eru sameinuð í einfaldaða ræða stæðu

hagnaðarfall
hagnaðarfallið er ritað $P(x)=R(x)-C(x)$, það er tekjur að frádregnum kostnaði

tekjufall
fall sem notað er til að reikna tekjur og er einfaldlega ritað $R=x\,p$, þar sem $x=$ magn og $p=$ verð

lína
talnasafn sem raðað er lárétt í fylki

línuaðgerðir
að leggja eina línu við aðra, margfalda línu með fasta, víxla línum og svo framvegis með það að markmiði að fá efra stallaform

efra stallaform
fylkjaform sem fæst eftir línuaðgerðir og hefur einingar á aðalhornalínunni og núll í öllum sætum neðan hornalínunnar

línujafngild
tvö fylki A og B eru línujafngild ef hægt er að fá annað þeirra út frá hinu með einföldum línuaðgerðum

margfeldi með tölu
stak fylkis sem hefur verið margfaldað með tölu

lausnamengi
mengi allra raðaðra para eða þrennda sem uppfylla allar jöfnur jöfnuhneppis

innsetningaraðferð
algebruaðferð til að leysa línuleg jöfnuhneppi þar sem önnur af jöfnunum tveimur er leyst fyrir annarri breytunni; stæðan sem fæst er síðan sett inn í hina jöfnuna til að finna síðari breytuna

línulegt jöfnuhneppi
safn tveggja eða fleiri jafna í tveimur eða fleiri breytum sem þarf að skoða samtímis

ólínulegt jöfnuhneppi
jöfnuhneppi sem inniheldur að minnsta kosti eina jöfnu af hærra stigi en eitt

ólínulegt ójöfnuhneppi
hneppi tveggja eða fleiri ójafna í tveimur eða fleiri breytum þar sem að minnsta kosti ein ójafnan er ólínuleg

Lykiljöfnur

Einingarfylki fyrir 2×2 fylki	$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Einingarfylki fyrir 3×3 fylki	$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Andhverfa 2×2 fylkis	$A^{-1} = \frac{1}{a\ d - b\ c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, þar sem $a\ d - b\ c \neq 0$

Meginatriði

9.1 Tveggja breyta línuleg jöfnuhneppi

- Í línulegu jöfnuhneppi eru tvær eða fleiri jöfnur í tveimur eða fleiri breytum og skoða þarf allar jöfnur hneppisins samtímis.
- Lausn tveggja breyta línulegs jöfnuhneppis er hvert það raðaða par sem uppfyllir hvora jöfnu fyrir sig. Sjá sýnidæmi 1.
- Jöfnuhneppi flokkast sem óháð með eina lausn, háð með óendanlega margar lausnir eða ósamkvæmt án lausnar.
- Ein aðferð við að leysa tveggja breyta línulegt jöfnuhneppi er myndræn lausn. Þá teiknum við jöfnurnar í sama hnitakerfi. Sjá sýnidæmi 2.
- Önnur aðferð við að leysa línulegt jöfnuhneppi er innsetning. Þá leysum við aðra jöfnuna fyrir annarri breytunni og setjum niðurstöðuna inn í hina jöfnuna. Sjá sýnidæmi 3.
- Þriðja aðferðin við að leysa línulegt jöfnuhneppi er samlagning. Þá má eyða breytu með því að leggja jöfnurnar saman þegar stuðlar hennar eru gagnstæðir. Sjá sýnidæmi 4.
- Oft þarf að margfalda aðra eða báðar jöfnurnar með fasta svo að ein breytan falli burt þegar jöfnurnar eru lagðar saman. Sjá sýnidæmi 5, sýnidæmi 6 og sýnidæmi 7.
- Báðar lausnaraðferðirnar gefa ósanna fullyrðingu fyrir ósamkvæmt jöfnuhneppi vegna þess að það lýsir samsíða línum sem skerast aldrei. Sjá sýnidæmi 8.
- Lausn háðs jöfnuhneppis gefur alltaf sanna fullyrðingu vegna þess að báðar jöfnurnar lýsa sömu línu. Sjá sýnidæmi 9.

- Nota má jöfnuhneppi til að leysa raunhæf verkefni með fleiri en einni breytu, til dæmis um tekjur, kostnað og hagnað. Sjá sýnidæmi 10 og sýnidæmi 11.

9.2 Þriggja breyta línuleg jöfnuhneppi

- Lausnamengi er röðuð þrennd $\{ \left| \left(x , y , z \right) \right| \}$ sem táknar skurðpunkt þriggja plana í rúmi. Sjá sýnidæmi 1.
- Leysa má þriggja breyta jöfnuhneppi með þremur jöfnum í skrefum sem eyða breytu. Skrefin fela meðal annars í sér að víxla röð jafna, margfalda báðar hliðar jöfnu með fasta sem er ekki núll og leggja margfeldi einnar jöfnu með tölu sem er ekki núll við aðra jöfnu. Sjá sýnidæmi 2.
- Þriggja breyta jöfnuhneppi með þremur jöfnum nýtast til að leysa margs konar raunhæf verkefni. Sjá sýnidæmi 3.
- Þriggja breyta jöfnuhneppi er ósamkvæmt ef engin lausn er til. Eftir eyðingaraðgerðir fæst þá mótsögn. Sjá sýnidæmi 4.
- Ósamkvæmt þriggja breyta jöfnuhneppi getur lýst þremur samsíða plönum, tveimur samsíða plönum og einu plani sem sker þau eða þremur plönum sem hvert sker hin tvö en ekki öll á sama stað.
- Þriggja breyta jöfnuhneppi er háð ef það hefur óendanlega margar lausnir. Eftir eyðingaraðgerðir fæst þá samsemd. Sjá sýnidæmi 5.
- Háð þriggja breyta jöfnuhneppi getur lýst þremur plönum sem falla saman, þremur plönum sem skerast í línu eða tveimur plönum sem falla saman og skera þriðja planið í línu.

9.3 Tveggja breyta ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi

- Jöfnuhneppi sem lýsir línu og fleygboga getur haft þrenns konar lausnir: (1) enga lausn ef línan sker ekki fleygbogann; (2) eina lausn ef línan snertir fleygbogann; og (3) tvær lausnir ef línan sker fleygbogann í tveimur punktum. Sjá sýnidæmi 1.
- Jöfnuhneppi sem lýsir hring og línu getur haft þrenns konar lausnir: (1) enga lausn ef línan sker ekki hringinn; (2) eina lausn ef línan snertir hringinn; og (3) tvær lausnir ef línan sker hringinn í tveimur punktum. Sjá sýnidæmi 2.
- Ólínulegt jöfnuhneppi sem lýsir sporbaug og hring getur haft fimm gerðir lausna: (1) enga lausn ef hringurinn og sporbaugurinn skerast ekki; (2) eina lausn ef hringurinn og sporbaugurinn snertast; (3) tvær lausnir ef hringurinn og sporbaugurinn skerast í tveimur punktum; (4) þrjár lausnir ef þeir skerast á þremur stöðum; og (5) fjórar lausnir ef þeir skerast í fjórum punktum. Sjá sýnidæmi 3
  .

- Ójafna er teiknuð á svipaðan hátt og jafna, nema þegar táknið er > eða <; þá teiknum við strikalínu og skyggjum svæðið sem inniheldur lausnamengið. Sjá sýnidæmi 4.
- Ójöfnur leysum við á sama hátt og jöfnur, en lausnir ójöfnuhneppis verða að uppfylla báðar ójöfnurnar. Sjá sýnidæmi 5.

9.4 Stofnbrot

- Liðið $\frac{P(x)}{Q(x)}$ í stofnbrot með því að rita þau sem $\frac{A}{a_1x+b_1}+\frac{B}{a_2x+b_2}$. Eyðið brotunum, margfaldið upp úr svigum hægra megin, takið saman líka liði og látið samsvarandi stuðla vera jafna. Setjið síðan upp jöfnuhneppi og leysið það. Sjá sýnidæmi 1.
- Við stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ með endurteknum línulegum þáttum verða þættir nefnarans að koma fram í hækkandi veldum. Sjá sýnidæmi 2.
- Við stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$ með óendurteknum, óþáttanlegum annars stigs þætti þarf línulegan teljara yfir annars stigs þættinum, eins og í $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{\left(ax^2+bx+c\right)}$. Sjá sýnidæmi 3.
- Í stofnbrotaliðun $\frac{P(x)}{Q(x)}$, þar sem $Q(x)$ hefur endurtekinn óþáttanlegan annars stigs þátt verður að tákna veldi nefnaraþáttanna í vaxandi veldum sem

  $$\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}.$$

  Sjá sýnidæmi 4.

9

9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir

- Fylki er rétthyrnd röðun talna. Stökunum er raðað í línur og dálka.
- Stærð fylkis ræðst af fjölda lína og dálka. 3×2 fylki hefur þrjár línur og tvo dálka. Sjá sýnidæmi 1.
- Við leggjum saman og drögum frá fylki af sömu stærð með því að leggja saman eða draga frá samsvarandi stök. Sjá sýnidæmi 2, sýnidæmi 3, sýnidæmi 4 og sýnidæmi 5.
- Þegar fylki er margfaldað með tölu er hvert stak þess margfaldað með sama fasta. Sjá sýnidæmi 6.
- Oft þarf að margfalda fylki með tölu áður en leggja má fylkin saman eða draga annað frá hinu. Sjá sýnidæmi 7.

- Hægt er að margfalda fylki þegar innri stærðirnar eru þær sömu, það er þegar dálkar fyrra fylkisins eru jafnmargir og línur síðara fylkisins.
- Margfeldi fylkjanna A og B, fæst með því að margfalda hvert stak í línu 1 í A með hverju staki í dálki 1 í B; síðan er hvert stak í línu 1 í A margfaldað með hverju staki í dálki 2 í B, og svo koll af kolli. Sjá sýnidæmi 8 og sýnidæmi 9.
- Oft má leysa raunhæf verkefni með fylkjum. Sjá sýnidæmi 10.
- Nota má reiknivél til fylkjaaðgerða eftir að hvert fylki hefur verið vistað sem fylkjabreyta. Sjá sýnidæmi 11.

9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

- Aukið fylki inniheldur stuðla og fasta jöfnuhneppis. Sjá sýnidæmi 1.
- Aukið fylki með fastadálki má rita aftur sem upprunalega jöfnuhneppið. Sjá sýnidæmi 2.
- Línuaðgerðir fela meðal annars í sér að margfalda línu með fasta, leggja eina línu við aðra og víxla línum.
- Nota má Gauss-eyðingu til að leysa jöfnuhneppi. Sjá sýnidæmi 3, sýnidæmi 4 og sýnidæmi 5.
- Við notum línuaðgerðir á fylki til að fá efra stallaform. Sjá sýnidæmi 6.
- Til að leysa jöfnuhneppi ritið þið það fyrst sem aukið fylki. Notið síðan línuaðgerðir til að fá efra stallaform og finnið lausnirnar með bakinnsetningu. Sjá sýnidæmi 7 og sýnidæmi 8.
- Nota má reiknivél til að leysa jöfnuhneppi með fylkjum. Sjá sýnidæmi 9.
- Mörg raunhæf verkefni má leysa með auknum fylkjum. Sjá sýnidæmi 10 og sýnidæmi 11.

9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja

- Einingarfylki hefur eiginleikann $A\,I = I\,A = A$. Sjá sýnidæmi 1.
- Andhverfanlegt fylki hefur eiginleikann $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$. Sjá sýnidæmi 2.
- Notið fylkjamargföldun og einingarfylkið til að finna andhverfu 2×2 fylkis. Sjá sýnidæmi 3.
- Finna má andhverfuna með formúlu. Sjá sýnidæmi 4.
- Önnur aðferð við að finna andhverfuna er að bæta einingarfylkinu við. Sjá sýnidæmi 5.
- Við getum bætt einingarfylkinu hægra megin við 3×3 fylki og beitt línuaðgerðum til að breyta upprunalega fylkinu í einingarfylkið; þá verður fylkið hægra megin að andhverfunni. Sjá sýnidæmi 6.
- Ritið jöfnuhneppið sem $A\,X = B$, og margfaldið báðar hliðar með andhverfu $A: A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B$. Sjá sýnidæmi 7 og sýnidæmi 8.
- Einnig má nota reiknivél til að leysa jöfnuhneppi með andhverfum fylkja. Sjá sýnidæmi 9.

9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers

- Ákveða fylkisins $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $ad - bc$. Sjá sýnidæmi 1.
- Í reglu Cramers er dálki breytu skipt út fyrir fastadálkinn. Lausnirnar eru $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$. Sjá sýnidæmi 2.
- Til að finna ákveðu 3×3 fylkis bætið þið fyrstu tveimur dálkunum aftan við fylkið. Leggið saman margfeldin eftir hornalínunum þremur frá efra vinstra horni að neðra hægra horni og dragið frá margfeldin eftir hornalínunum þremur frá neðra vinstra horni að efra hægra horni. Sjá sýnidæmi 3.
- Til að leysa þriggja breyta jöfnuhneppi með þremur jöfnum samkvæmt reglu Cramers skiptið þið út dálki hverrar breytu sem leysa á fyrir og setjið fastadálkinn í staðinn: $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}$. Sjá sýnidæmi 4.
- Regla Cramers nýtist einnig til að greina jöfnuhneppi sem hefur enga lausn eða óendanlega margar lausnir. Sjá sýnidæmi 5 og sýnidæmi 6.
- Nokkrir eiginleikar ákveða nýtast við lausn verkefna. Til dæmis:
  - Ef fylkið er á efra þríhyrningsformi er ákveðan margfeldi stakanna á aðalhornalínunni.
  - Þegar tveimur línum er víxlað um sæti skiptir ákveðan um formerki.
  - Ef annaðhvort tvær línur eða tveir dálkar eru eins er ákveðan jöfn núlli.
  - Ef fylki inniheldur annaðhvort línu eða dálk með eingöngu núllum er ákveðan jöfn núlli.
  - Ákveða andhverfa fylkisins A^{-1} er gagnhverfa ákveðu fylkisins A.
  - Ef einhver lína eða dálkur er margfaldaður með fasta margfaldast ákveðan með sama stuðli. Sjá sýnidæmi 7 og sýnidæmi 8.

9

Yfirlitsverkefni

Tveggja breyta línuleg jöfnuhneppi

Ákvarðið í eftirfarandi æfingum hvort raðaða parið sé lausn jöfnuhneppisins.

1.
$$\begin{aligned} 3x - y &= 4 \\ x + 4y &= -3 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (-1, 1)$$

2.
$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 24 \\ -3x + 3y &= 18 \end{aligned} \quad \text{og} \quad (9, 15)$$

Leysið jöfnuhneppið með innsetningu í eftirfarandi æfingum.

3.

$$\begin{aligned} 10x + 5y &= -5 \\ 3x - 2y &= -12 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{7}x + \tfrac{1}{5}y &= \tfrac{43}{70} \\ \tfrac{5}{6}x - \tfrac{1}{3}y &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 14 \\ 4x + 8y &= 8 \end{aligned}$$

Leysið jöfnuhneppið með samlagningu í eftirfarandi æfingum.

6.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -7 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 2 \\ 9x + 12y &= 3 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 8\,x + 4\,y &= 2 \\ 6\,x - 5\,y &= 0{,}7 \end{aligned}$$

Ritið jöfnuhneppi sem lýsir hverju verkefni og leysið það.

9. Verksmiðja hefur kostnaðarfallið $C\,(x) = 150\,x + 15.000$ og tekjufallið $R(x) = 200\,x$. Hver er núllpunktur rekstrarins?

10. Listamaður rukkar $C\,(x) = 50\,x + 10.000$, þar sem x er heildarfjöldi gesta á sýningu. Sýningarstaðurinn rukkar $75 fyrir hvern miða. Hve margir þurfa að kaupa miða til að sýningarstaðurinn standi á núlli og hvert er heildarverð seldra miða við þann fjölda?

Þriggja breyta línuleg jöfnuhneppi

Leysið þriggja jafna jöfnuhneppið með innsetningu eða samlagningu í eftirfarandi æfingum.

11.

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x - 0{,}5\,y &= 10 \\ -0{,}2\,y + 0{,}2\,x &= 4 \\ 0{,}1\,x + 0{,}1\,z &= 2 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 5x + 3y - z &= 5 \\ 3x - 2y + 4z &= 13 \\ 4x + 3y + 5z &= 22 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 3x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \\ x + y + z &= -4 \\ 4x + 2y - 3z &= 33 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= -10 \\ x - y + 2z &= 7 \\ -x + 3y + z &= -2 \end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned} 3x + 4z &= -11 \\ x - 2y &= 5 \\ 4y - z &= -10 \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 2x + 4y - 3z &= 0 \\ 6x - 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} 6x - 4y - 2z &= 2 \\ 3x + 2y - 5z &= 4 \\ 6y - 7z &= 5 \end{aligned}$$

Ritið jöfnuhneppi sem lýsir hverju verkefni og leysið það.

19. Summa þriggja oddatalna er 61. Minnsta talan er þriðjungur þeirrar stærstu og miðtalan er 16 minni en sú stærsta. Hverjar eru tölurnar þrjár?

20. Uppselt var á sýningu í leikhúsi og allir 500 miðarnir seldust fyrir samtals $8.070,00. Nemendamiðar kostuðu $15, barnamiðar $12 og fullorðinsmiðar $18. Ef hljómsveitin seldi þrefalt fleiri fullorðinsmiða en barnamiða, hve margir miðar af hverri gerð seldust?

Tveggja breyta ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi

Leysið ólínulega jöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum.

21.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 7 \\ y &= 5x - 13 \end{aligned}$$

22.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4 \\ y &= 5x + 10 \end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \\ y &= x - 8 \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ y &= x^2 + 5 \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y - x^2 &= 3 \end{aligned}$$

Teiknið ójöfnuna í eftirfarandi æfingum.

26.

$$y > x^2 - 1$$

27.

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 < 4$$

Teiknið ójöfnuhneppið í eftirfarandi æfingum.

28.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x &< 3 \\ y &> -x^2 - 3 \end{aligned}$$

29.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4x &< 4 \\ y &< -x + 4 \end{aligned}$$

30.

$$x^2 + y^2 < 1$$
$$y^2 < x$$

Stofnbrot

Liðið í stofnbrot í eftirfarandi æfingum.

31.

$$\frac{-2x+6}{x^2+3x+2}$$

32.

$$\frac{10x+2}{4x^2+4x+1}$$

33.

$$\frac{7x+20}{x^2+10x+25}$$

34.

$$\frac{x-18}{x^2-12x+36}$$

35.

$$\frac{-x^2+36x+70}{x^3-125}$$

36.

$$\frac{-5x^2+6x-2}{x^3+27}$$

37.

$$\frac{x^3-4x^2+3x+11}{\left(x^2-2\right)^2}$$

38.

$$\frac{4x^4-2x^3+22x^2-6x+48}{x\left(x^2+4\right)^2}$$

Fylki og fylkjaaðgerðir

Reiknið það sem beðið er um með gefnu fylkjunum í eftirfarandi æfingum.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & 7 & -3\\ 11 & -2 & 4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 11 & -2\\ 14 & 0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & -4 & 9\\ 10 & 5 & -7\\ 2 & 8 & 5\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}7 & -14 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 9\end{bmatrix}$$

39.

$$-4A$$

40.

$$10D-6E$$

41.

$$B+C$$

42.

$$AB$$

43.

$$BA$$

44.

$$BC$$

45.

$$CB$$

46.

$$DE$$

47.

$$ED$$

48.

$$EC$$

49.

$$CE$$

50.

$$A^3$$

Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

Ritið línulega jöfnuhneppið sem aukna fylkið lýsir í eftirfarandi æfingum. Takið fram hvort einkvæm lausn sé til.

51.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

52.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Ritið aukna fylkið sem línulega jöfnuhneppið lýsir í eftirfarandi æfingum.

53.

$$\begin{aligned} -2x + 2y + z &= 7 \\ 2x - 8y + 5z &= 0 \\ 19x - 10y + 22z &= 3 \end{aligned}$$

54.

$$\begin{aligned} 4x + 2y - 3z &= 14 \\ -12x + 3y + z &= 100 \\ 9x - 6y + 2z &= 31 \end{aligned}$$

55.

$$\begin{aligned} x + 3z &= 12 \\ -x + 4y &= 0 \\ y + 2z &= -7 \end{aligned}$$

9

Leysið línulega jöfnuhneppið með Gauss-eyðingu í eftirfarandi æfingum.

56.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -7 \\ -6x + 8y &= 14 \end{aligned}$$

57.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ -6x + 8y &= 6 \end{aligned}$$

58.

$$\begin{aligned} -1{,}1\ x - 2{,}3\ y &= 6{,}2 \\ -5{,}2\ x - 4{,}1\ y &= 4{,}3 \end{aligned}$$

59.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 1 \\ -4x - 6y - 4z &= -2 \\ 10x + 15y + 10z &= 0 \end{aligned}$$

60.

$$\begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 8 \\ 3y + 8z &= -4 \\ -7x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja

Finnið andhverfu fylkisins í eftirfarandi æfingum.

61.

$$\begin{bmatrix} -0{,}2 & 1{,}4 \\ 1{,}2 & -0{,}4 \end{bmatrix}$$

62.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

63.

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

64.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Finnið lausnirnar með því að reikna andhverfu fylkisins í eftirfarandi æfingum.

65.

$$\begin{aligned} 0{,}3\ x - 0{,}1\ y &= -10 \\ -0{,}1\ x + 0{,}3\ y &= 14 \end{aligned}$$

66.

$$\begin{aligned} 0{,}4\ x - 0{,}2\ y &= -0{,}6 \\ -0{,}1\ x + 0{,}05\ y &= 0{,}3 \end{aligned}$$

67.

$$\begin{aligned} 4\,x+3\,y-3\,z&=-4{,}3\\ 5\,x-4\,y-z&=-6{,}1\\ x+z&=-0{,}7 \end{aligned}$$

68.

$$\begin{aligned} -2x-3y+2z&=3\\ -x+2y+4z&=-5\\ -2y+5z&=-3 \end{aligned}$$

Ritið jöfnuhneppi sem lýsir hverju verkefni og leysið það.

69. Nemendur voru beðnir að koma með uppáhaldsávöxtinn sinn í kennslustund. 90% ávaxtanna voru bananar, epli eða appelsínur. Vinsældir appelsína voru helmingur af vinsældum banana og epli voru 5% vinsælli en bananar. Hvert var hlutfall hverrar ávaxtategundar?

70. Skólaklúbbur hélt kökusölu til fjáröflunar og seldi brúnkur og súkkulaðibitakökur. Brúnkurnar kostuðu \$2 og súkkulaðibitakökurnar \$1. Klúbburinn safnaði \$250 og seldi 175 kökur. Hve margar brúnkur og hve margar smákökur seldust?

Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers

Finnið ákveðuna í eftirfarandi æfingum.

71.

$$\begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

9

72.

$$\begin{vmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 \\ 0{,}7 & -1{,}1 \end{vmatrix}$$

73.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

74.

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Notið reglu Cramers til að leysa línulegu jöfnuhneppin í eftirfarandi æfingum.

75.

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 23 \\ -5x - 10y &= -35 \end{aligned}$$

76.

$$\begin{aligned} 0{,}2\ x - 0{,}1\ y &= 0 \\ -0{,}3\ x + 0{,}3\ y &= 2{,}5 \end{aligned}$$

77.

$$\begin{aligned} -0{,}5\ x + 0{,}1\ y &= 0{,}3 \\ -0{,}25\ x + 0{,}05\ y &= 0{,}15 \end{aligned}$$

78.

$$\begin{aligned} x + 6y + 3z &= 4 \\ 2x + y + 2z &= 3 \\ 3x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

79.

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 5z &= -\tfrac{5}{2} \\ 7x - 9y - 3z &= \tfrac{3}{2} \\ x - 5y - 5z &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

80.

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{10}x - \tfrac{1}{5}y - \tfrac{3}{10}z &= -\tfrac{1}{50} \\ \tfrac{1}{10}x - \tfrac{1}{10}y - \tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{9}{50} \\ \tfrac{2}{5}x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{5}z &= -\tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

9

Kaflapróf

Er eftirfarandi raðað par lausn jöfnuhneppisins?

1.

$$\begin{aligned} -5x - y &= 12 \\ x + 4y &= 9 \end{aligned} \quad \text{með} \quad (-3, 3)$$

Leysið línulegu og ólínulegu jöfnuhneppin með innsetningu eða eyðingu í eftirfarandi æfingum. Takið fram ef engin lausn er til.

2.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y &= 4 \\ \tfrac{3}{2}x - y &= 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x - 4y &= 4 \\ 2x + 16y &= 2 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 5x - y &= 1 \\ -10x + 2y &= -2 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 4x - 6y - 2z &= \frac{1}{10} \\ x - 7y + 5z &= -\frac{1}{4} \\ 3x + 6y - 9z &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} x + z &= 20 \\ x + y + z &= 20 \\ x + 2y + z &= 10 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 5x - 4y - 3z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 0 \\ x - 6y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x - 3 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 25 \\ y^2 - 2x^2 &= 1 \end{aligned}$$

Teiknið ójöfnurnar í eftirfarandi æfingum.

10.

$$y < x^2 + 9$$

11.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &> 4 \\ y &< x^2 + 1 \end{aligned}$$

Ritið stofnbrotaliðunina í eftirfarandi æfingum.

12.

$$\frac{-8x-30}{x^2+10x+25}$$

13.

$$\frac{13x+2}{(3x+1)^2}$$

14.

$$\frac{x^4-x^3+2x-1}{x(x^2+1)^2}$$

Framkvæmið fylkjaaðgerðirnar í eftirfarandi æfingum.

15.

$$5\begin{bmatrix}4 & 9\\ -2 & 3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-6 & 12\\ 4 & -8\end{bmatrix}$$

16.

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -7\\ -2 & 9 & 5\\ 12 & 0 & -4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 3\\ 5 & 10\end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}^{-1}$$

18.

$$det\begin{vmatrix}0 & 0\\ 400 & 4.000\end{vmatrix}$$

19.

$$\det\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}$$

20. Ef $det(A)=-6$, hver yrði ákveðan ef þið víxluðuð línum 1 og 3, margfölduðuð aðra línuna með 12 og tækjuð síðan andhverfuna?

21. Ritið línulega jöfnuhneppið sem aukið fylki.

$$\begin{aligned} 14x - 2y + 13z &= 140 \\ -2x + 3y - 6z &= -1 \\ x - 5y + 12z &= 11 \end{aligned}$$

22. Ritið aukna fylkið sem línulegt jöfnuhneppi.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 9 & -5 \\ -6 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

Notið Gauss-eyðingu til að leysa jöfnuhneppin í eftirfarandi æfingum.

23.

$$\begin{aligned} x - 6y &= 4 \\ 2x - 12y &= 0 \end{aligned}$$

24.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= -3 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ x - y - z &= 6 \end{aligned}$$

Notið andhverfu fylkis til að leysa jöfnuhneppin í eftirfarandi æfingum.

25.

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= -50 \\ -x + 2y &= 80 \end{aligned}$$

26.

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{100}x - \tfrac{3}{100}y + \tfrac{1}{20}z &= -49 \\ \tfrac{3}{100}x - \tfrac{7}{100}y - \tfrac{1}{100}z &= 13 \\ \tfrac{9}{100}x - \tfrac{9}{100}y - \tfrac{9}{100}z &= 99 \end{aligned}$$

Notið reglu Cramers til að leysa jöfnuhneppin í eftirfarandi æfingum.

27.

$$\begin{aligned} 200x - 300y &= 2 \\ 400x + 715y &= 4 \end{aligned}$$

28.

$$\begin{aligned} 0{,}1\,x + 0{,}1\,y - 0{,}1\,z &= -1{,}2 \\ 0{,}1\,x - 0{,}2\,y + 0{,}4\,z &= -1{,}2 \\ 0{,}5\,x - 0{,}3\,y + 0{,}8\,z &= -5{,}9 \end{aligned}$$

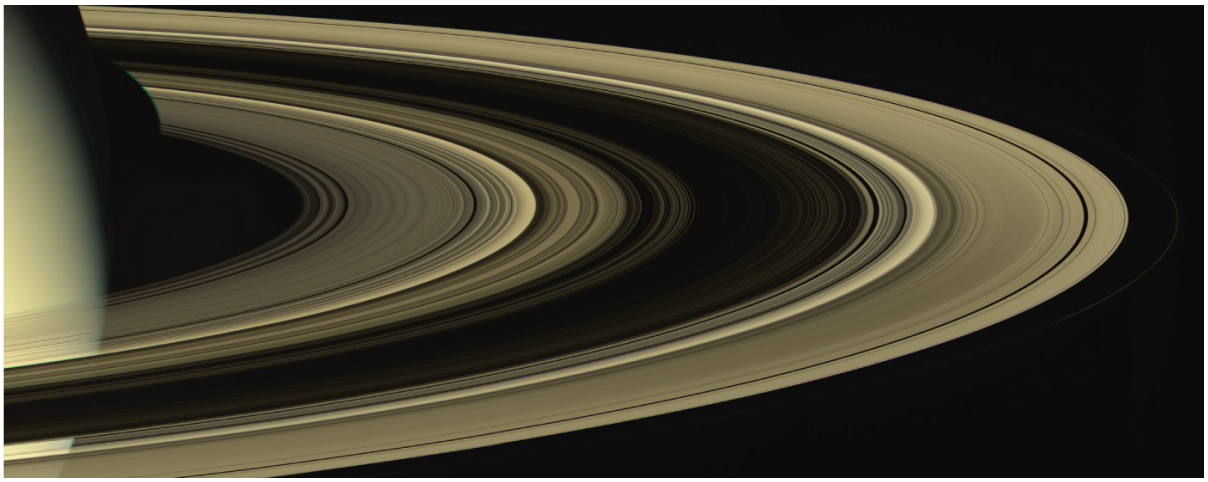
Leysið með línulegu jöfnuhneppi í eftirfarandi æfingum.

29. Verksmiðja sem framleiðir farsíma hefur kostnaðar- og tekjuföllin $C(x)=x^2+75\ x+2.688$ og $R(x)=x^2+160\,x$. Á hvaða bili á fjöldi framleiddra farsíma á dag að vera svo reksturinn skili hagnaði? Námundið að næsta fjölda sem gefur hagnað.

30. Lítil hátíð rukkar $1,50 fyrir nemendur, $1 fyrir börn og $2 fyrir fullorðna. Á einum degi komu þrefalt fleiri börn en fullorðnir. Alls seldust 800 miðar fyrir $1.050. Hve margir miðar af hverri gerð seldust?

10. KAFLI

Rúmfræði með hnitum



Hringar Satúrnusar hafa vakið undrun og jafnframt misskilning frá því Galíleó uppgötvaði þá fyrst; í upphafi taldi hann þá vera tungl. Jafnvel á þessari nærmynd frá Cassini-geimfarinu líta þeir út eins og röð heillegra skífa, en stærðfræðingar 19. aldar sönnuðu að þeir væru samsettir úr milljörðum smárra hluta sem þyrpast saman. (mynd: aðlögun á „Saturn“ eftir NASA/JPL–Caltech/SSI/Kevin M. Gill/flickr)

10

Efnisyfirlit kafla

- 10.1 Sporbaugur
- 10.2 Breiðbogi
- 10.3 Fleygboginn
- 10.4 Snúningur hnitása
- 10.5 Keilusnið í pólhnitum

Inngangur að hnitarúmfræði

Gríski stærðfræðingurinn Menaechmus (um 380–um 320 f.Kr.) er almennt talinn hafa uppgötvað ferlana sem myndast þegar plan sker rétta hringkeilu. Eftir því hvernig hann

hallaði planinu þegar það skar keiluna mynduðust ólíkir ferlar í skurðinum, fagrir ferlar með nær fullkomna samhverfu.

Einnig er sagt að Aristóteles hafi ef til vill haft innsæisskilning á þessum ferlum, enda taldi hann braut reikistjörnu vera hringlaga. Hann gerði ráð fyrir að reikistjörnurnar gengju á hringlaga brautum umhverfis jörðina og sú skoðun var almennt viðtekin í nær 2000 ár.

Það var ekki fyrr en á endurreisnartímanum að Johannes Kepler tók eftir því að brautir reikistjarnanna voru ekki hringlaga. Hann birti lögmál sitt um hreyfingu reikistjarna upp úr 1600 og það breytti sýn okkar á sólkerfið til frambúðar. Hann hélt því fram að sólin væri við annan enda brautanna og reikistjörnurnar gengju umhverfis hana eftir sporöskjulaga ferli.

Önnur fyrirbæri í sólkerfinu, og ef til vill öðrum sólkerfum, fylgja svipuðum sporbaugsferli, þar á meðal hinir stórbrotnu hringar Satúrnusar. Á þessum grunni sýndu stærðfræðingar 19. aldar á borð við James Clerk Maxwell og Sofya Kovalevskaya að þrátt fyrir útlit hringanna í sjónaukum þess tíma, og jafnvel nútímasjónaukum, væru þeir ekki heilir og samfelldir heldur samsettir úr smáum ögnum. Voyager- og Cassini-leiðangrarnir hafa aflað ítarlegra gagna um gerð hringanna af stuttu færi. Samt byggist fullur skilningur á uppbyggingu þeirra enn að miklu leyti á stærðfræðilegri greiningu. Sérstaklega áhugaverð eru áhrif tungla og smátungla Satúrnusar og hvernig þau bæði raska gerð hringanna og viðhalda henni.

Í þessum kafla rannsökum við tvívíðu ferlana sem myndast þegar plan sker rétta hringkeilu. Við byrjum á að skoða hvern þessara þriggja ferla fyrir sig. Við leiðum út skilgreinandi jöfnur hvers ferils og lærum síðan að nota þær til að leysa fjölbreytt verkefni.

10.1 Sporbaugur

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærir þú að:

- rita jöfnur sporbauga á staðalformi.
- teikna graf sporbauga með miðju í upphafspunkti.
- teikna graf sporbauga með miðju utan upphafspunkts.
- leysa hagnýt verkefni um sporbauga.



Mynd 1 National Statuary Hall í Washington, D.C. (mynd: Greg Palmer, Flickr)

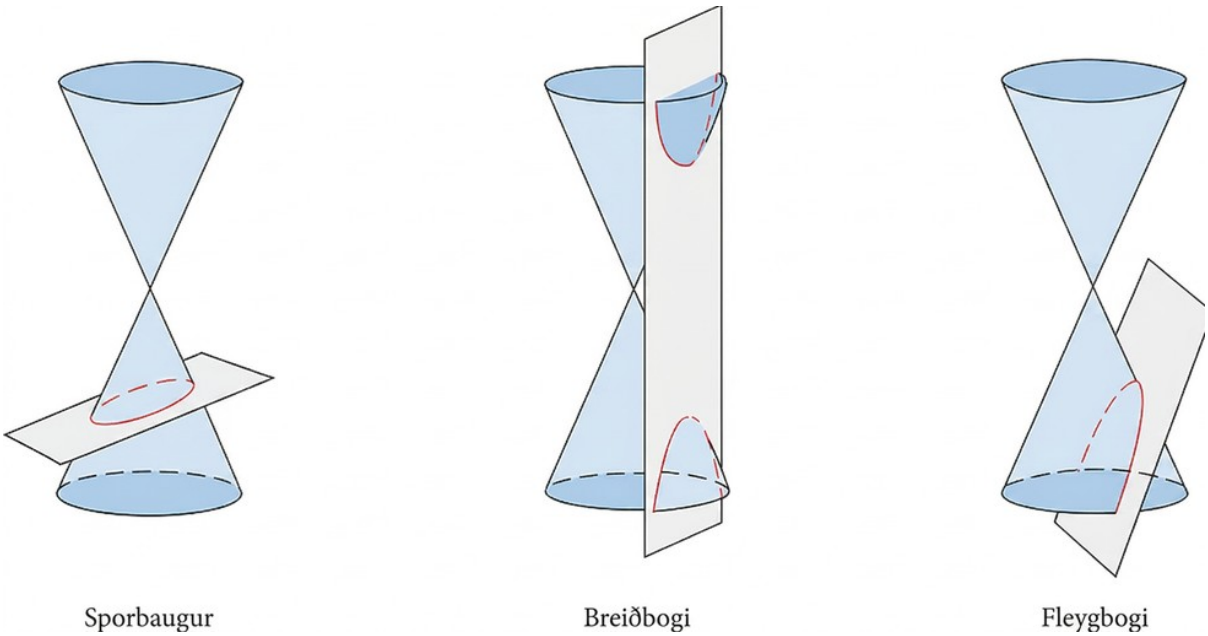
Getið þið ímyndað ykkur að standa öðrum megin í stórum sal en heyra samt hvísl frá manneskju sem stendur hinum megin? National Statuary Hall í Washington, D.C., sem sést á mynd 1, er slíkur salur. [1] Hann er hálfhringlaga og kallast hvíslasalur vegna þess að lögun hans gerir hljóði kleift að berast með veggjum og hvolfþaki. Í þessum hluta rannsökum við lögun salarins og hagnýta notkun hennar, meðal annars hversu langt má vera á milli tveggja manneskja í salnum svo að þær heyri samt hvísl hvor annarrar.

1
Architect of the Capitol. http://www.aoc.gov. Skoðað 15. apríl 2014.

10

Jöfnur sporbauga ritaðar á staðalformi

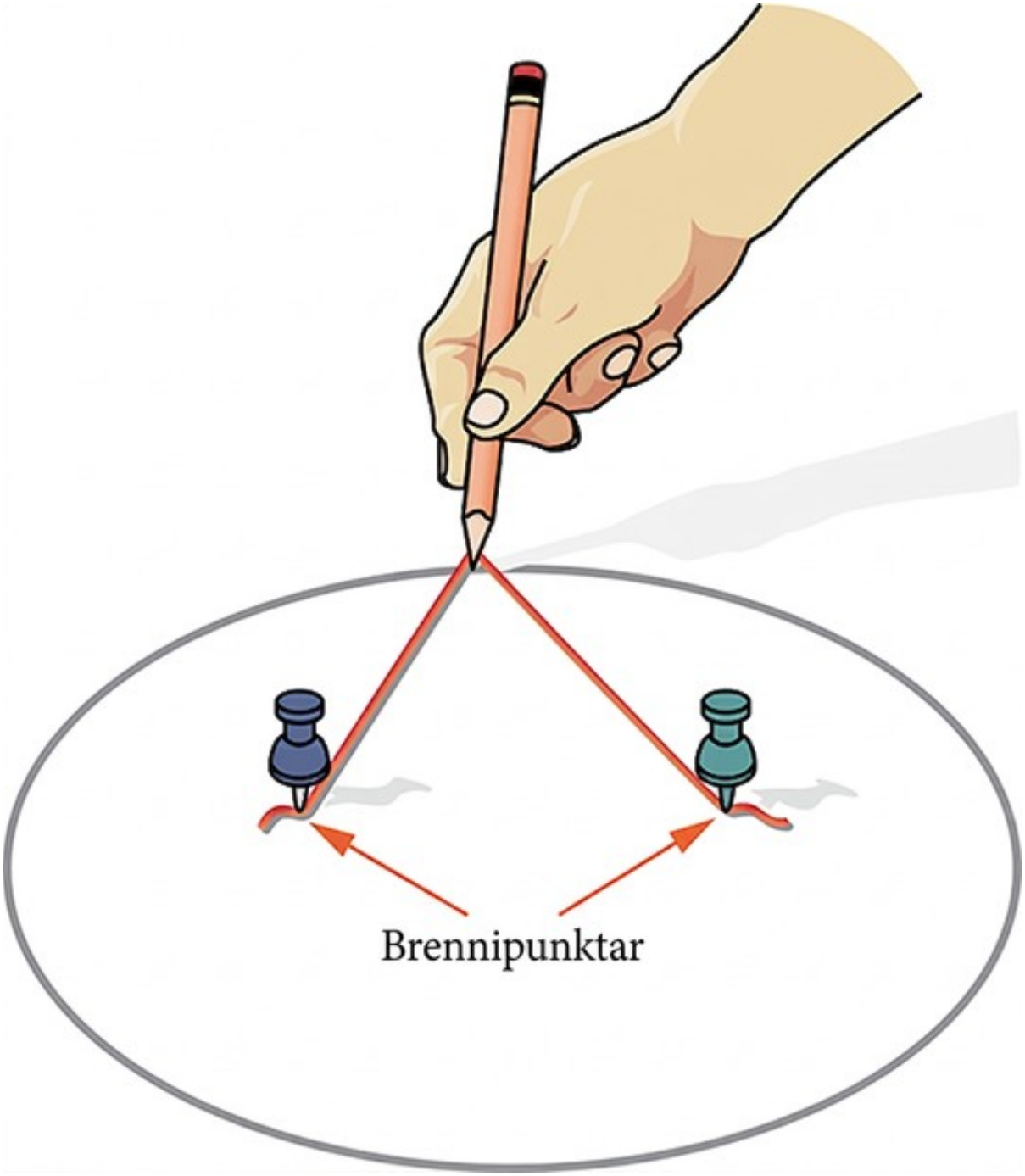
Keilusnið er ferill sem myndast þegar plan sker réttan hringkeiluflöt. Hornið sem planið myndar við keiluflötinn ræður lögun ferilsins, eins og sést á mynd 2.



Mynd 2

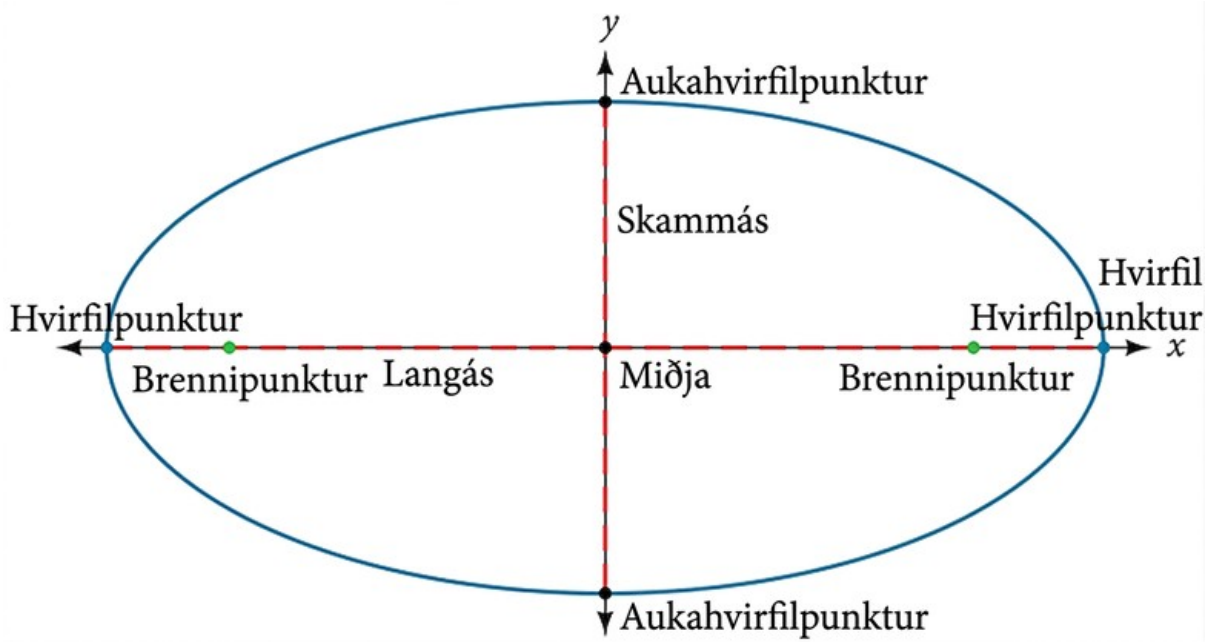
Keilusniðum má einnig lýsa sem punktamengjum í hnitafleti. Síðar í þessum kafla sjáum við að graf sérhverrar annars stigs jöfnu með tveimur breytum er keilusnið. Formerki liðanna og stuðlar breytuliðanna ráða löguninni. Í þessum hluta er fjallað um fjórar gerðir staðalforms jöfnu sporbaugs. Sporbaugur er mengi allra punkta (x, y) í plani þannig að summa fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum er fasti. Hvor fastur punktur kallast brennipunktur.

Við getum teiknað sporbaug með pappaspjaldi, tveimur teiknibólum, blýanti og spotta. Stingið teiknibólunum í spjaldið þannig að þær myndi brennipunkta sporbaugsins. Klippið spotta sem er lengri en fjarlægðin milli teiknibólanna. Lengd spottans táknar fastann í skilgreiningunni. Festið hvorn enda spottans undir sína teiknibólu og teiknið feril með blýantinum þannig að spottinn haldist strekktur. Útkoman er sporbaugur. Sjá mynd 3.



Mynd 3

Allir sporbaugar hafa tvo samhverfuása. Lengri ásinn kallast langás og sá styttri skammás. Hvor endapunktur langássins er hvirfilpunktur sporbaugsins og hvor endapunktur skammássins er aukahvirfilpunktur. Miðja sporbaugs er miðpunktur bæði langáss og skammáss. Ásarnir eru hornréttir hvor á annan í miðjunni. Brennipunktarnir liggja alltaf á langásnum og summa fjarlægðanna frá brennipunktunum að hvaða punkti sem er á sporbaugnum (fasta summan) er meiri en fjarlægðin milli brennipunktanna. Sjá mynd 4.



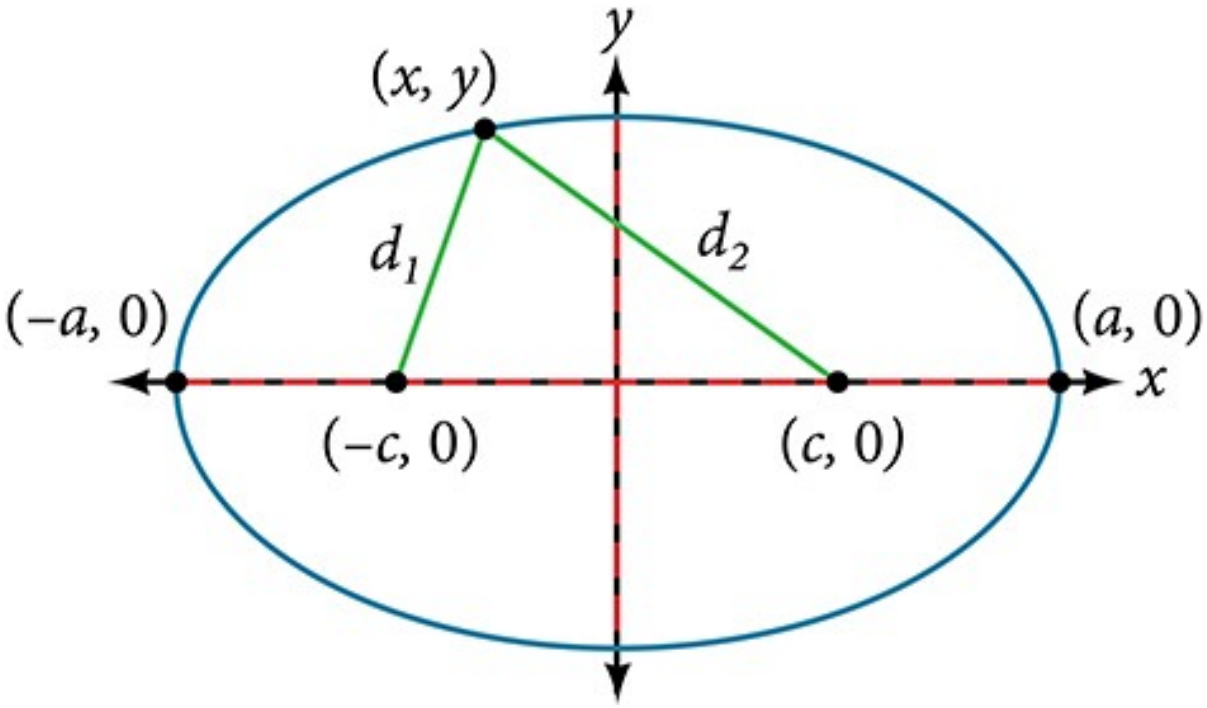
Mynd 4

Í þessum hluta takmörkum við okkur við sporbauga sem liggja lóðrétt eða lárétt í hnitafletinum. Ásar þeirra liggja því annaðhvort á x- og y-ásunum eða samsíða þeim. Síðar í kaflanum skoðum við sporbauga sem hefur verið snúið í hnitafletinum.

Þegar við vinnum með lárétta og lóðrétta sporbauga í hnitafletinum skoðum við tvö tilvik: sporbaug með miðju í upphafspunkti og sporbaug með miðju í öðrum punkti. Fyrst leiðum við út jöfnur sporbauga og lærum síðan að rita þær á staðalformi. Að því loknu notum við það sem við höfum lært til að teikna gröf þeirra.

Jafna sporbaugs með miðju í upphafspunkti leidd út

Til að leiða út jöfnu sporbaugs með miðju í upphafspunkti byrjum við á brennipunktunum $(-c, 0)$ og $(c, 0)$. Sporbaugurinn er mengi allra punkta (x, y) þannig að summa fjarlægðanna frá (x, y) að brennipunktunum er fasti, eins og sýnt er á mynd 5.



Mynd 5

Ef $(a,0)$ er hvirfilpunktur sporbaugsins er fjarlægðin frá $(-c,0)$ að $(a,0)$ jöfn $a-(-c)=a+c$. Fjarlægðin frá $(c,0)$ að $(a,0)$ er $a-c$. Summa fjarlægðanna frá brennipunktunum að hvirfilpunktinum er

$$(a+c)+(a-c)=2a$$

Ef (x,y) er punktur á sporbaugnum getum við skilgreint eftirfarandi breytur:

$$d_1=\text{fjarlægðin frá } (-c,0) \text{ að } (x,y)$$
$$d_2=\text{fjarlægðin frá } (c,0) \text{ að } (x,y)$$

Samkvæmt skilgreiningu sporbaugs er d_1+d_2 fasti fyrir sérhvern punkt (x,y) á sporbaugnum. Við vitum að summa þessara fjarlægða er $2a$ fyrir hvirfilpunktinn $(a,0)$. Því gildir $d_1+d_2=2a$ fyrir alla punkta á sporbaugnum. Við byrjum útleiðsluna á fjarlægðarformúlunni. Afgangurinn er hrein algebra.

$d_1+d_2=\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$ Fjarlægðarformúlan

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ Einfalda stæður.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Færa rótarlið yfir á hina hliðina.

$(x+c)^2+y^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$ Hefja báðar hliðar í annað veldi.

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$ Margfalda upp úr ferningsliðunum.

$x^2+2\ c\ x+c^2+y^2=4\ a^2-4\ a\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2\ c\ x+c^2+y^2$ Margfalda upp úr ferningsliðunum sem eftir eru.

$2\ c\ x=4\ a^2-4\ a\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}-2\ c\ x$ Sameina líka liði.

$4\ c\ x-4\ a^2=-4\ a\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Einangra rótarliðinn.

$c\ x-a^2=-a\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Deila með 4.

$[c\ x-a^2]^2=a^2\ [\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2$ Hefja báðar hliðar í annað veldi.

$c^2\ x^2-2\ a^2\ c\ x+a^4=a^2\ (x^2-2\ c\ x+c^2+y^2)$ Margfalda upp úr ferningsliðunum.

$c^2\ x^2-2\ a^2\ c\ x+a^4=a^2\ x^2-2\ a^2\ c\ x+a^2\ c^2+a^2\ y^2$ Margfalda inn í svigann a^2.

$a^2\ x^2-c^2\ x^2+a^2\ y^2=a^4-a^2\ c^2$ Umrita.

$x^2\ (a^2-c^2)+a^2\ y^2=a^2\ (a^2-c^2)$ Taka sameiginlega þætti út fyrir sviga.

$x^2\ b^2+a^2\ y^2=a^2\ b^2$ Setja $b^2=a^2-c^2$.

$\frac{x^2\ b^2}{a^2\ b^2}+\frac{a^2\ y^2}{a^2\ b^2}=\frac{a^2\ b^2}{a^2\ b^2}$ Deila báðum hliðum með $a^2\ b^2$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ Einfalda.

Staðaljafna sporbaugs er því $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Þessi jafna skilgreinir sporbaug með miðju í upphafspunkti. Ef $a>b$, teygist sporbaugurinn meira í lárétta stefnu. Ef $b>a$, teygist hann meira í lóðrétta stefnu.

Jöfnur sporbauga með miðju í upphafspunkti ritaðar á staðalformi

Staðalform jafna sýna helstu einkenni grafa þeirra. Rifjum upp nokkur staðalform jafna sem við höfum áður unnið með: línulegar jöfnur, annars og þriðja stigs jöfnur, vísisjöfnur, lograjöfnur og fleiri. Þegar við lærum að túlka staðalform jafna tengjum við saman algebrulega og rúmfræðilega lýsingu á stærðfræðilegum fyrirbærum.

Lykileinkenni sporbaugs eru miðja hans, hvirfilpunktar, aukahvirfilpunktar og brennipunktar, auk lengdar og legu langáss og skammáss. Rétt eins og í öðrum jöfnum getum við fundið öll þessi einkenni með því einu að skoða staðalform jöfnunnar. Staðalform jöfnu sporbaugs hefur fjórar gerðir. Þær eru fyrst flokkaðar eftir staðsetningu miðjunnar, það er hvort hún er í upphafspunkti eða ekki, og síðan eftir legu sporbaugsins, láréttri eða lóðréttri. Hverju formi fylgir lýsing á því hvernig liðir jöfnunnar tengjast grafinu. Þegar við túlkum þessa liði getum við séð sporbauginn fyrir okkur.

10

STAÐALFORM JÖFNU SPORBAUGS MEÐ MIÐJU Í (0,0)

Staðalform jöfnu sporbaugs með miðju í $(0,0)$ og langás á x-ásnum er

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

þar sem

- $a>b$
- lengd langássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(\pm a, 0)$
- lengd skammássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(0, \pm b)$
- hnit brennipunktanna eru $(\pm c, 0)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Sjá mynd 6a

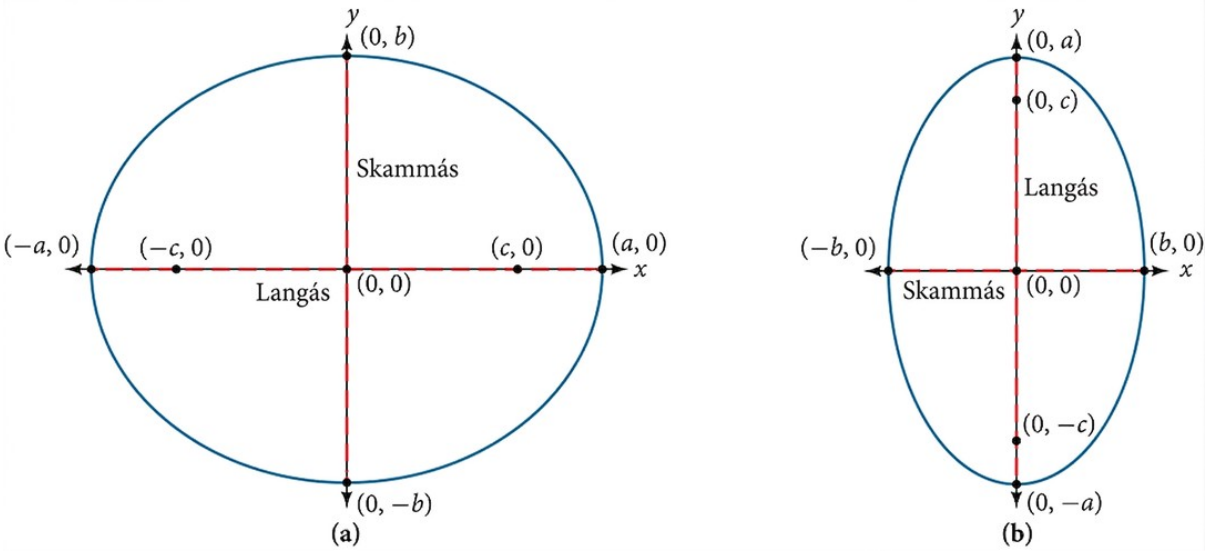
Staðalform jöfnu sporbaugs með miðju í $(0, 0)$ og langás á x-ásnum er

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

þar sem

- $a>b$
- lengd langássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(0, \pm a)$
- lengd skammássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(\pm b, 0)$
- hnit brennipunktanna eru $(0, \pm c)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Sjá mynd 6b

Athugið að hvirfilpunktar, aukahvirfilpunktar og brennipunktar tengjast með jöfnunni $c^2=a^2-b^2$. Þegar hnit brennipunkta og hvirfilpunkta sporbaugs eru gefin getum við notað þessi tengsl til að finna jöfnu sporbaugsins á staðalformi.



Mynd 6 (a) Láréttur sporbaugur með miðju í $(0, 0)$ (b) Lóðréttur sporbaugur með miðju í $(0, 0)$

AÐFERÐ

Ritið jöfnu sporbaugs með miðju í upphafspunkti á staðalformi þegar hvirfilpunktar og brennipunktar hans eru gefnir.

1. Ákvarðið hvort langásinn liggi á x-ásnum eða y-ásnum.
   a. Ef gefin hnit hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru annars vegar á forminu $(\pm a, 0)$ og hins vegar $(\pm c, 0)$ er langásinn x-ásinn. Notið staðalformið $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
   b. Ef gefin hnit hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru annars vegar á forminu $(0, \pm a)$ og hins vegar $(0, \pm c)$, er langásinn y-ásinn. Notið staðalformið $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.
2. Notið jöfnuna $c^2=a^2-b^2$, ásamt gefnum hnitum hvirfilpunktanna og brennipunktanna til að leysa fyrir b^2.
3. Setjið gildin á a^2 og b^2 inn í staðalform jöfnunnar sem þið funduð í skrefi 1.

DÆMI 1

Jafna sporbaugs með miðju í upphafspunkti rituð á staðalformi

Hver er jafna sporbaugsins á staðalformi ef hvirfilpunktar hans eru $(\pm 8, 0)$ og brennipunktar hans eru $(\pm 5, 0)$?

Lausn

Brennipunktarnir liggja á x-ásnum og því er langásinn x-ásinn. Jafnan verður því á forminu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Hvirfilpunktarnir eru $(\pm 8, 0)$, svo $a=8$ og $a^2=64$.

Brennipunktarnir eru $(\pm 5, 0)$, svo $c=5$ og $c^2=25$.

Við vitum að hvirfilpunktar og brennipunktar tengjast með jöfnunni $c^2=a^2-b^2$. Þegar leyst er fyrir b^2, fæst:

$$\begin{aligned} c^2&=a^2-b^2 \\ 25&=64-b^2 && \text{Setja inn fyrir } c^2 \text{ og } a^2. \\ b^2&=39 && \text{Leysa fyrir } b^2. \end{aligned}$$

Nú þurfum við aðeins að setja $a^2=64$ og $b^2=39$ inn í staðalform jöfnunnar. Jafna sporbaugsins er $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 1

Hver er jafna sporbaugsins á staðalformi ef hvirfilpunktar hans eru $(0, \pm 4)$ og brennipunktar hans eru $(0, \pm\sqrt{15})$?

SPURT OG SVARAÐ

Getum við ritað jöfnu sporbaugs með miðju í upphafspunkti ef aðeins hnit eins brennipunkts og eins hvirfilpunkts eru gefin?

Já. Sporbaugar eru samhverfir og því eru hnit hvirfilpunkta sporbaugs með miðju í upphafspunkti alltaf á forminu $(\pm a, 0)$ eða $(0, \pm a)$. Á sama hátt eru hnit brennipunktanna alltaf á forminu $(\pm c, 0)$ eða $(0, \pm c)$. Með því að nota a og c úr gefnu punktunum ásamt jöfnunni $c^2 = a^2 - b^2$, getum við fundið b^2.

Jöfnur sporbauga með miðju utan upphafspunkts ritaðar

Líkt og gröfum annarra jafna má hliðra grafi sporbaugs. Ef sporbaugi er hliðrað um h einingar lárétt og k einingar lóðrétt verður miðja sporbaugsins (h, k). Við þessa hliðrun fæst staðalform jöfnunnar sem við sáum áður, þar sem x er skipt út fyrir $(x - h)$ og y er skipt út fyrir $(y - k)$.

STAÐALFORM JÖFNU SPORBAUGS MEÐ MIÐJU Í (H, K)

Staðalform jöfnu sporbaugs með miðju í (h, k) og langás samsíða x-ásnum er

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

þar sem

- $a > b$
- lengd langássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(h \pm a, k)$
- lengd skammássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h, k \pm b)$
- hnit brennipunktanna eru $(h \pm c, k)$, þar sem $c^2 = a^2 - b^2$. Sjá mynd 7a

Staðalform jöfnu sporbaugs með miðju í (h, k) og langás samsíða x-ásnum er

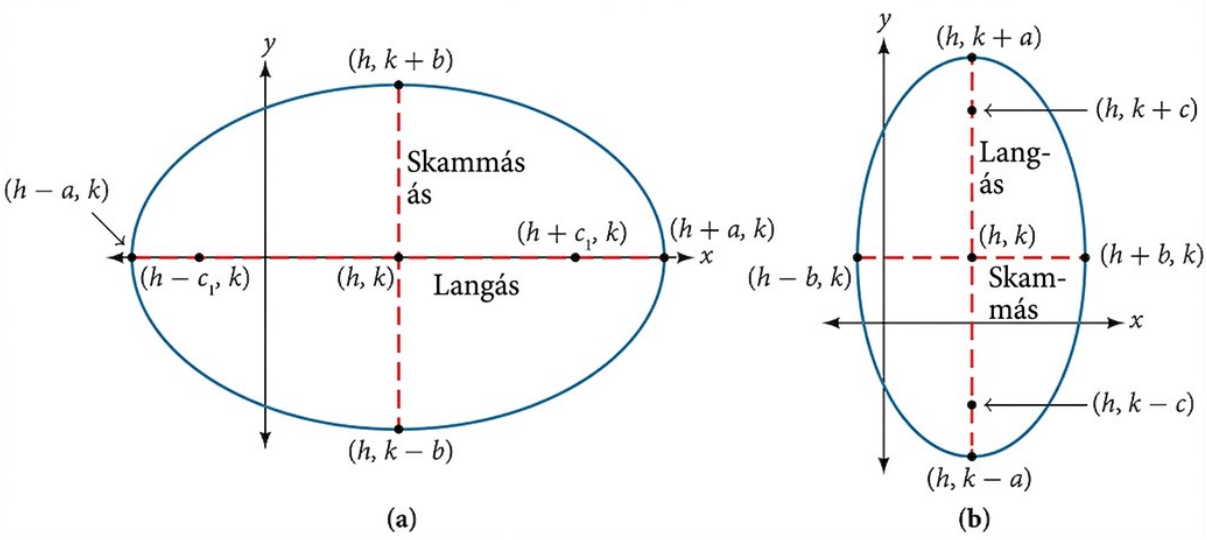
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

þar sem

- $a > b$
- lengd langássins er $2a$

- hnit hvirfilpunktanna eru $(h, k \pm a)$
- lengd skammássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h \pm b, k)$
- hnit brennipunktanna eru $(h, k \pm c)$, þar sem $c^2 = a^2 - b^2$. Sjá mynd 7b

Rétt eins og sporbaugar með miðju í upphafspunkti hafa sporbaugar með miðju í punkti (h, k) hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta sem tengjast með jöfnunni $c^2 = a^2 - b^2$. Þegar hvirfilpunktar og brennipunktar eru gefnir getum við notað þessi tengsl ásamt miðpunkts- og fjarlægðarformúlunum til að finna jöfnu sporbaugsins á staðalformi.



Mynd 7 (a) Láréttur sporbaugur með miðju í (h, k) (b) Lóðréttur sporbaugur með miðju í (h, k)

AÐFERÐ

Ritið jöfnu sporbaugs með miðju utan upphafspunkts á staðalformi þegar hvirfilpunktar og brennipunktar hans eru gefnir.

1. Ákvarðið hvort langásinn sé samsíða x-ásnum eða y-ásnum.
   a. Ef y-hnit gefnu hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru jöfn er langásinn samsíða x-ásnum. Notið staðalformið $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
   b. Ef x-hnit gefnu hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru jöfn er langásinn samsíða y-ásnum. Notið staðalformið $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$.
2. Finnið miðju sporbaugsins (h, k) með miðpunktsformúlunni og gefnum hnitum hvirfilpunktanna.
3. Finnið a^2 með því að reikna út lengd langássins, $2a$, sem er fjarlægðin milli gefnu hvirfilpunktanna.

4. Finnið c^2 með því að nota h og k, sem fundust í skrefi 2, ásamt gefnum hnitum brennipunktanna.
5. Leysið fyrir b^2 með jöfnunni $c^2=a^2-b^2$.
6. Setjið gildin á h, k, a^2, og b^2 inn í staðalform jöfnunnar sem þið funduð í skrefi 1.

DÆMI 2

Jafna sporbaugs með miðju utan upphafspunkts rituð

Hver er jafna sporbaugsins á staðalformi ef hvirfilpunktar hans eru $(-2,-8)$ og $(-2,2)$ og brennipunktar hans eru $(-2,-7)$ og $(-2,1)$?

Lausn

x-hnit hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru jöfn og því er langásinn samsíða y-ásnum. Jafna sporbaugsins verður því á forminu

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Fyrst finnum við miðjuna, (h,k). Miðjan er mitt á milli hvirfilpunktanna $(-2,-8)$ og $(-2,2)$. Með miðpunktsformúlunni fæst:

$$\begin{aligned}(h,k) &= \left(\tfrac{-2+(-2)}{2}, \tfrac{-8+2}{2}\right)\\ &= (-2,-3)\end{aligned}$$

Næst finnum við a^2. Hvirfilpunktarnir afmarka langásinn, sem er $2a$, á lengd. Við leysum fyrir a með því að finna fjarlægðina milli y-hnita hvirfilpunktanna.

$$\begin{aligned}2a &= 2-(-8)\\ 2a &= 10\\ a &= 5\end{aligned}$$

Því er $a^2=25$.

Nú finnum við c^2. Brennipunktarnir eru gefnir með $(h,k\pm c)$. Því er $(h,k-c)=(-2,-7)$ og $(h,k+c)=(-2,1)$. Við setjum $k=-3$ inn í annan hvorn þessara punkta og leysum fyrir c.

$$\begin{aligned}k+c &= 1\\ -3+c &= 1\\ c &= 4\end{aligned}$$

Því er $c^2=16$.

Næst leysum við fyrir b^2 með jöfnunni $c^2=a^2-b^2$.

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$16 = 25 - b^2$$
$$b^2 = 9$$

Að lokum setjum við gildin sem fundust á h, k, a^2, og b^2 inn í staðaljöfnu sporbaugs:

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 2

Hver er jafna sporbaugsins á staðalformi ef hvirfilpunktar hans eru $(-3, 3)$ og $(5, 3)$ og brennipunktar hans eru $(1-2\sqrt{3}, 3)$ og $(1+2\sqrt{3}, 3)$?

Gröf sporbauga með miðju í upphafspunkti teiknuð

Rétt eins og við getum ritað jöfnu sporbaugs þegar graf hans er gefið getum við teiknað graf sporbaugs þegar jafna hans er gefin. Til að teikna gröf sporbauga með miðju í upphafspunkti notum við staðalformið $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$ fyrir lárétta sporbauga og $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, a > b$ fyrir lóðrétta sporbauga.

AÐFERÐ

Teiknið graf sporbaugs með miðju í $(0, 0)$,

1. Notið staðalform jafna sporbaugs til að ákvarða langás, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.
   a. Ef jafnan er á forminu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, þar sem $a > b$, þá
      - langásinn x-ásinn
      - hnit hvirfilpunktanna eru $(\pm a, 0)$
      - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(0, \pm b)$
      - hnit brennipunktanna eru $(\pm c, 0)$
   b. Ef jafnan er á forminu $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, þar sem $a > b$, þá
      - langásinn y-ásinn
      - hnit hvirfilpunktanna eru $(0, \pm a)$
      - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(\pm b, 0)$
      - hnit brennipunktanna eru $(0, \pm c)$
2. Leysið fyrir c með jöfnunni $c^2 = a^2 - b^2$.
3. Merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta inn í hnitaflatann og dragið sléttan feril sem myndar sporbauginn.

DÆMI 3

Graf sporbaugs með miðju í upphafspunkti teiknað

Teiknið sporbauginn sem jafnan $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. lýsir. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

Lausn

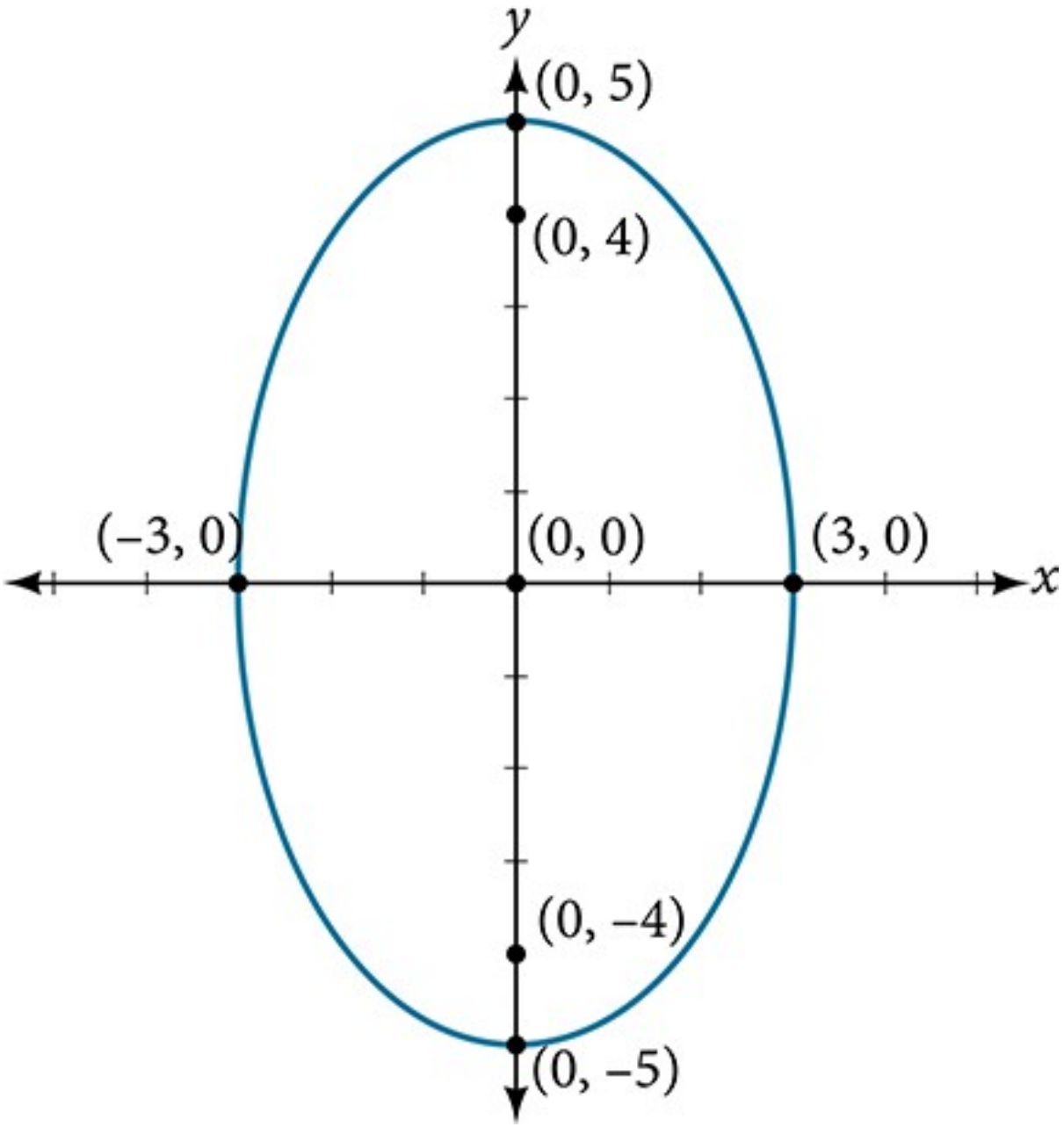
Fyrst ákvarðum við legu langássins. Þar sem $25>9$, liggur langásinn á y-ásnum. Jafnan er því á forminu $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, þar sem $b^2=9$ og $a^2=25$. Því gildir:

- miðja sporbaugsins er $(0,0)$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(0,\pm a)=(0,\pm\sqrt{25})=(0,\pm 5)$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(\pm b,0)=(\pm\sqrt{9},0)=(\pm 3,0)$
- hnit brennipunktanna eru $(0,\pm c)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Þegar leyst er fyrir c, fæst:

$$\begin{aligned} c &= \pm\sqrt{a^2-b^2} \\ &= \pm\sqrt{25-9} \\ &= \pm\sqrt{16} \\ &= \pm 4 \end{aligned}$$

Hnit brennipunktanna eru því $(0,\pm 4)$.

Næst merkjum við miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta inn á hnitaflatann og drögum sléttan feril sem myndar sporbauginn. Sjá mynd 8.



Mynd 8

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 3

Teiknið sporbauginn sem jafnan $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. lýsir. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

DÆMI 4

Graf sporbaugs með miðju í upphafspunkti teiknað út frá jöfnu sem er ekki á staðalformi

Teiknið sporbauginn sem jafnan $4x^2+25y^2=100$. lýsir. Ritið jöfnuna á staðalformi. Finnið og merkið síðan miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

Lausn

Notum fyrst algebru til að rita jöfnuna á staðalformi.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 25y^2 &= 100 \\ \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} &= \frac{100}{100} \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Næst ákvarðum við legu langássins. Þar sem $25>4$, liggur langásinn á x-ásnum. Jafnan er því á forminu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, þar sem $a^2=25$ og $b^2=4$. Því gildir:

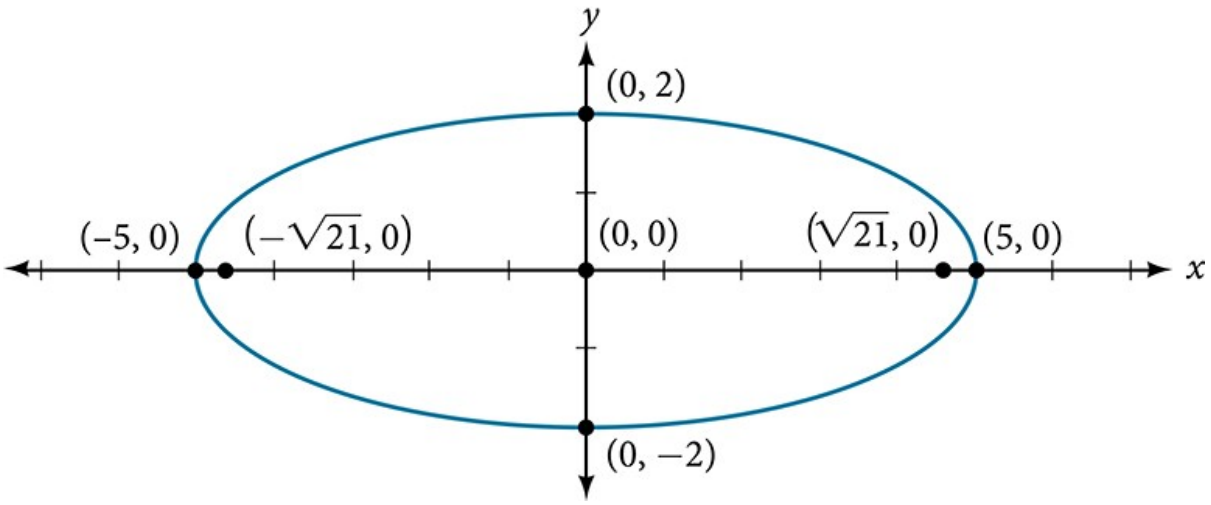
- miðja sporbaugsins er $(0,0)$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(\pm a,0)=(\pm\sqrt{25},0)=(\pm 5,0)$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(0,\pm b)=(0,\pm\sqrt{4})=(0,\pm 2)$
- hnit brennipunktanna eru $(\pm c,0)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Þegar leyst er fyrir c, fæst:

$$\begin{aligned} c &= \pm\sqrt{a^2-b^2} \\ &= \pm\sqrt{25-4} \\ &= \pm\sqrt{21} \end{aligned}$$

Hnit brennipunktanna eru því $(\pm\sqrt{21},0)$.

Næst merkjum við miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta inn á hnitaflatann og drögum sléttan feril sem myndar sporbauginn.

10



Mynd 9

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 4

Teiknið sporbauginn sem jafnan $49x^2+16y^2=784$. lýsir. Ritið jöfnuna á staðalformi. Finnið og merkið síðan miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

Gröf sporbauga með miðju utan upphafspunkts teiknuð

Þótt miðja sporbaugs sé ekki í upphafspunkti getum við samt notað staðalformin til að finna lykileinkenni grafsins. Þegar miðja sporbaugsins er í einhverjum punkti (h,k), notum við staðalformin $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, a>b$ fyrir lárétta sporbauga og $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1, a>b$ fyrir lóðrétta sporbauga. Út frá þessum staðaljöfnum getum við auðveldlega ákvarðað miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta, ásamt legu langáss og skammáss.

AÐFERÐ

Teiknið graf sporbaugs með miðju í (h,k), þegar jafna hans á staðalformi er gefin.

1. Notið staðalform jafna sporbaugs til að ákvarða miðju, legu langáss, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

   a. Ef jafnan er á forminu $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, þar sem $a>b$, þá

   - miðjan (h,k)
   - langásinn samsíða x-ásnum
   - hnit hvirfilpunktanna eru $(h\pm a,k)$
   - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h,k\pm b)$

- hnit brennipunktanna eru $(h \pm c, k)$

b. Ef jafnan er á forminu $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, þar sem $a>b$, þá

- miðjan (h, k)
- langásinn samsíða y-ásnum
- hnit hvirfilpunktanna eru $(h, k \pm a)$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h \pm b, k)$
- hnit brennipunktanna eru $(h, k \pm c)$

2. Leysið fyrir c með jöfnunni $c^2=a^2-b^2$.
3. Merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta inn í hnitaflatann og dragið sléttan feril sem myndar sporbauginn.

DÆMI 5

Graf sporbaugs með miðju í (h, k) teiknað

Teiknið sporbauginn sem jafnan $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$. lýsir. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

Lausn

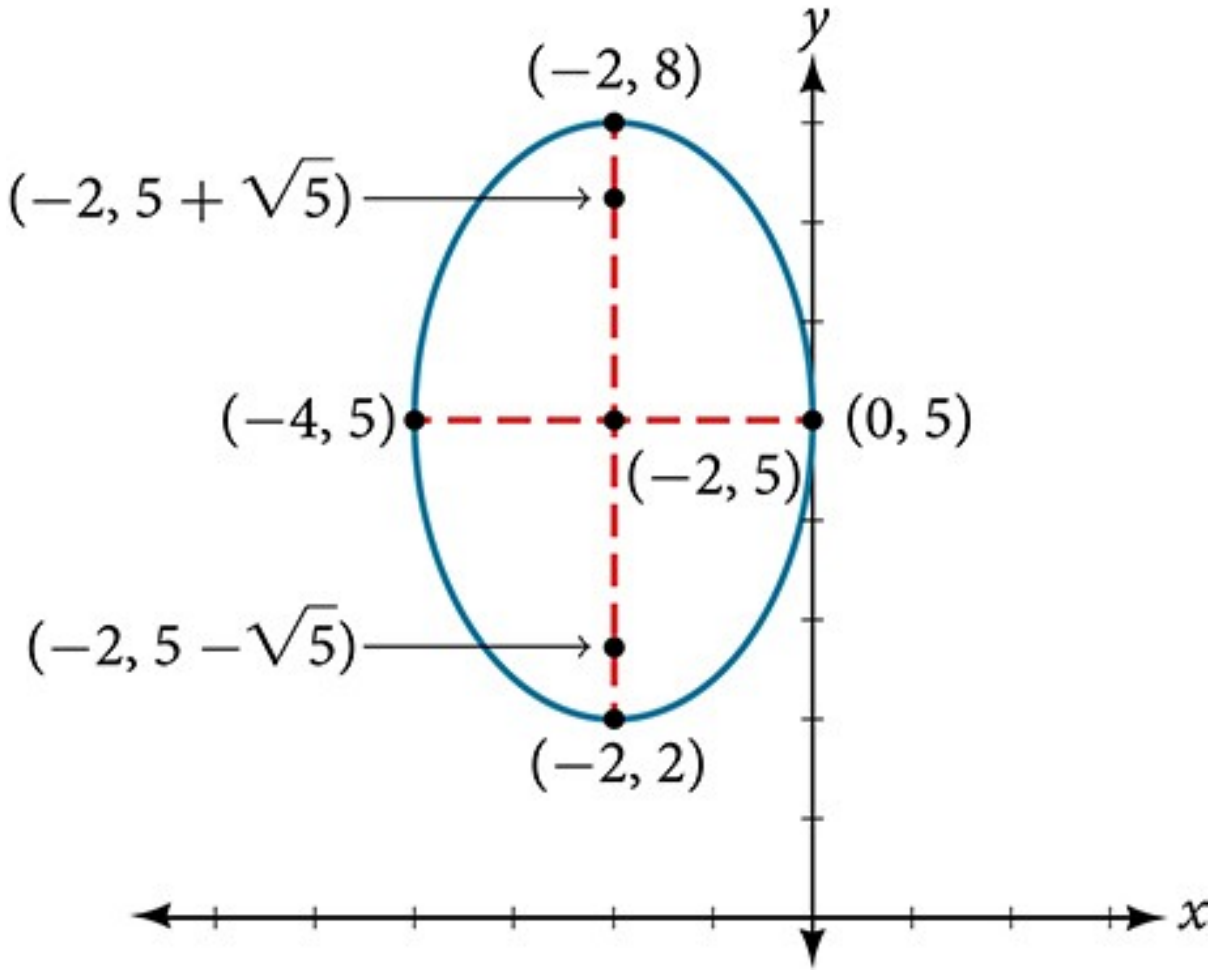
Fyrst ákvarðum við legu langássins. Þar sem $9>4$, er langásinn samsíða y-ásnum. Jafnan er því á forminu $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, þar sem $b^2=4$ og $a^2=9$. Því gildir:

- miðja sporbaugsins er $(h, k)=(-2, 5)$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(h, k \pm a)=(-2, 5 \pm \sqrt{9})=(-2, 5 \pm 3)$, eða $(-2, 2)$ og $(-2, 8)$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h \pm b, k)=(-2 \pm \sqrt{4}, 5)=(-2 \pm 2, 5)$, eða $(-4, 5)$ og $(0, 5)$
- hnit brennipunktanna eru $(h, k \pm c)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Þegar leyst er fyrir c, fæst:

$$
\begin{aligned}
c &= \pm\sqrt{a^2-b^2} \\
&= \pm\sqrt{9-4} \\
&= \pm\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Hnit brennipunktanna eru því $(-2, 5-\sqrt{5})$ og $(-2, 5+\sqrt{5})$.

Næst merkjum við miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta inn á hnitaflatann og drögum sléttan feril sem myndar sporbauginn.



Mynd 10

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 5

Teiknið sporbauginn sem jafnan $\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$. lýsir. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

AÐFERÐ

Setjið jöfnu sporbaugs með miðju í (h, k) á staðalform þegar hún er gefin á almennu formi.

1. Athugið að jafna sporbaugs á forminu $a\,x^2+b\,y^2+c\,x+d\,y+e=0$ er á almennu formi.
2. Raðið liðum jöfnunnar upp á nýtt þannig að liðir með sömu breytu standi saman. Færið fastaliðinn yfir á hina hlið jöfnunnar.
3. Takið stuðla x^2 - og y^2-liðanna út fyrir sviga svo að hægt sé að fylla í ferninginn.

4. Fyllið í ferninginn fyrir hvora breytu. Þá verður vinstri hlið jöfnunnar summa margfelda af tveimur tvíliðum í öðru veldi og hægri hliðin fasti, á forminu $m_1(x-h)^2+m_2(y-k)^2=m_3$, þar sem m_1, m_2, og m_3 eru fastar.
5. Deilið báðum hliðum jöfnunnar með fastanum til að setja jöfnuna á staðalform.

DÆMI 6

Graf sporbaugs með miðju í (h, k) teiknað eftir að jafnan hefur verið sett á staðalform

Teiknið sporbauginn sem jafnan $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$. lýsir. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta.

Lausn

Við byrjum á að rita jöfnuna á staðalformi.

$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$$

Flokkið saman liði sem innihalda sömu breytu og færið fastaliðinn yfir á hina hlið jöfnunnar.

$$(4x^2-40x)+(9y^2+36y)=-100$$

Takið stuðla ferningsliðanna út fyrir sviga.

$$4(x^2-10x)+9(y^2+4y)=-100$$

Fyllið tvisvar í ferninginn. Munið að halda jöfnunni í jafnvægi með því að bæta sömu föstum við báðar hliðar hennar.

$$4(x^2-10x+25)+9(y^2+4y+4)=-100+100+36$$

Ritið liðina sem ferninga tvíliða.

$$4(x-5)^2+9(y+2)^2=36$$

Deilið báðum hliðum með fastanum til að setja jöfnuna á staðalform.

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

Nú þegar jafnan er á staðalformi getum við ákvarðað legu langássins. Þar sem $9>4$, er langásinn samsíða x-ásnum. Jafnan er því á forminu $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, þar sem $a^2=9$ og $b^2=4$. Því gildir:

- miðja sporbaugsins er $(h,k)=(5,-2)$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(h\pm a,k)=(5\pm\sqrt{9},-2)=(5\pm3,-2)$, eða $(2,-2)$ og $(8,-2)$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h,k\pm b)=(5,-2\pm\sqrt{4})=(5,-2\pm2)$, eða $(5,-4)$ og $(5,0)$

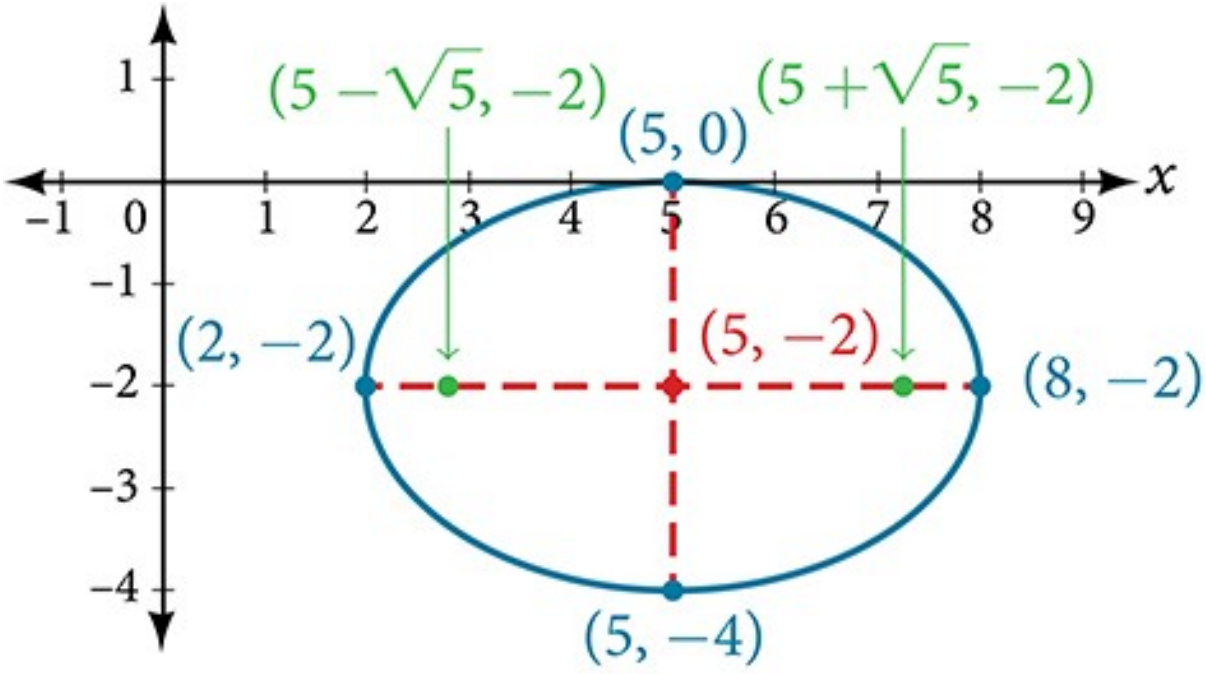
10

- hnit brennipunktanna eru $(h \pm c, k)$, þar sem $c^2 = a^2 - b^2$. Þegar leyst er fyrir c, fæst:

$$\begin{aligned} c &= \pm\sqrt{a^2 - b^2} \\ &= \pm\sqrt{9 - 4} \\ &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Hnit brennipunktanna eru því $(5 - \sqrt{5}, -2)$ og $(5 + \sqrt{5}, -2)$.

Næst merkjum við miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta inn á hnitaflatann og drögum sléttan feril sem myndar sporbauginn, eins og sýnt er á mynd 11.



Mynd 11

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 6

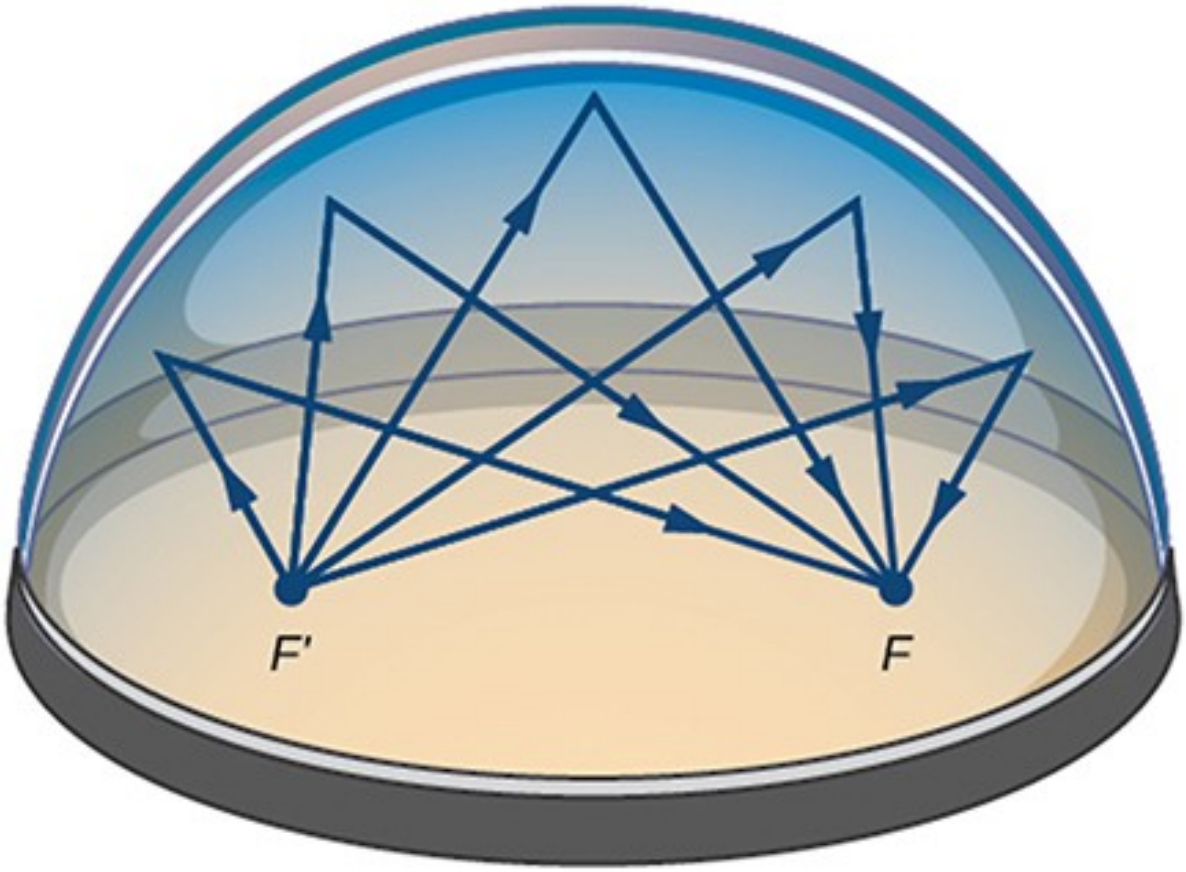
Setjið jöfnu sporbaugsins á staðalform. Finnið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta sporbaugsins.

$$4x^2 + y^2 - 24x + 2y + 21 = 0$$

Hagnýt verkefni um sporbauga leyst

Sporbaugar koma víða fyrir í raunveruleikanum, til dæmis í brautum reikistjarna, gervitungla, tungla og halastjarna og í lögun kjala og stýra báta og sumra flugvélavængja. Lækningatæki sem nefnist nýrnasteinbrjótur notar sporbauglaga endurkastara til að brjóta nýrnasteina með hljóðbylgjum. Sumar byggingar, svokallaðir hvíslasalir, eru hannaðar með sporbauglaga hvolfþökum þannig að hvísl manneskju í öðrum brennipunktinum heyrist auðveldlega í hinum brennipunktinum. Þetta stafar af hljóðfræðilegum eiginleikum

sporbaugs. Hljóðbylgja sem fer út frá öðrum brennipunkti hvíslasalar endurkastast af sporbauglaga hvolfþakinu að hinum brennipunktinum. Sjá mynd 12. Í hvíslasal Vísinda- og iðnaðarsafnsins í Chicago geta tvær manneskjur sem standa í brennipunktunum, með um 43 fet á milli sín, heyrt hvísl hvor annarrar. Þegar slíkir salir eru á óvæntum stöðum, eins og í George Bush-alþjóðaflugstöðinni í Houston og Grand Central Terminal í New York, geta þeir vakið undrun ferðalanga.



Mynd 12 Hljóðbylgjur endurkastast milli brennipunkta í sporbauglaga sal sem kallast hvíslasalur.

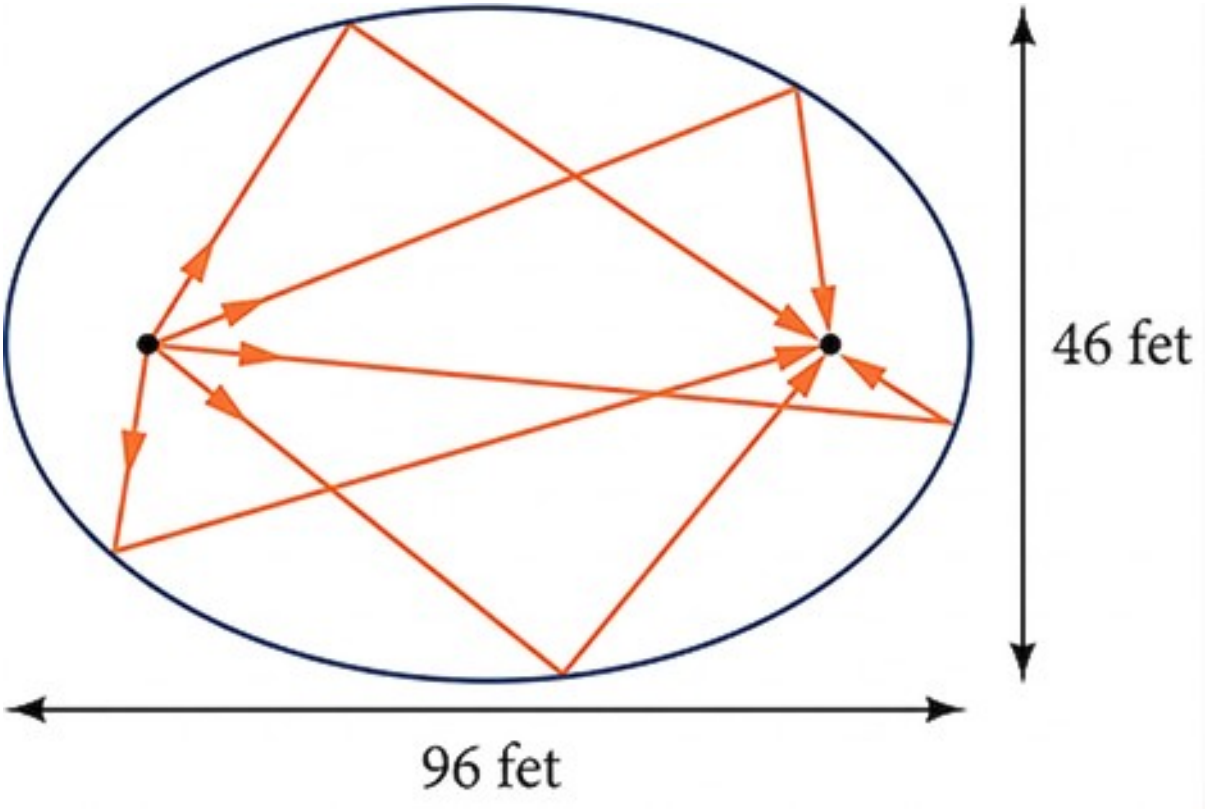
DÆMI 7

Brennipunktar hvíslasalar fundnir

Stór salur í listasafni er hvíslasalur. Hann er 46 fet á breidd og 96 fet á lengd, eins og sýnt er á mynd 13.

a. Hvert er staðalform jöfnu sporbaugsins sem lýsir útlínum salarins? Ábending: Gerið ráð fyrir láréttum sporbaugi og látið miðju salarins vera punktinn $(0,0)$.

b. Ef tveir gestir sem standa í brennipunktum salarins geta heyrt hvísl hvor annars, hversu langt er á milli þeirra? Námundið að næsta feti.



Mynd 13

Lausn

a. Við gerum ráð fyrir láréttum sporbaug með miðju í $(0,0)$, og þurfum því að finna jöfnu á forminu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, þar sem $a>b$. Við vitum að lengd langássins, $2a$, er meiri en lengd skammássins, $2b$. Lengd salarins, 96, svarar því til langássins og breidd salarins, 46, til skammássins.

- Þegar leyst er fyrir a, fæst $2a=96$, svo $a=48$, og $a^2=2304$.
- Þegar leyst er fyrir b, fæst $2b=46$, svo $b=23$, og $b^2=529$.

Jafna sporbaugsins er því $\frac{x^2}{2304}+\frac{y^2}{529}=1$.

b. Til að finna fjarlægðina milli þingmannanna þurfum við að finna fjarlægðina milli brennipunktanna, $(\pm c,0)$, þar sem $c^2=a^2-b^2$. Þegar leyst er fyrir c, fæst:

$$
\begin{aligned}
c^2&=a^2-b^2 \\
c^2&=2304-529 && \text{Setja inn gildin sem fundust í lið (a).} \\
c&=\pm\sqrt{2304-529} && \text{Taka kvaðratrót af báðum hliðum.} \\
c&=\pm\sqrt{1775} && \text{Draga frá.} \\
c&\approx\pm 42 && \text{Námunda að næsta feti.}
\end{aligned}
$$

Punktarnir $(\pm 42,0)$ tákna brennipunktana. Fjarlægðin milli gestanna er því $2(42)=84$ fet.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 7

Gerum ráð fyrir að hvíslasalur sé 480 fet á lengd og 320 fet á breidd.

ⓐ Hvert er staðalform jöfnu sporbaugsins sem lýsir salnum? Ábending: Gerið ráð fyrir láréttum sporbaugi og látið miðju salarins vera punktinn $(0,0)$. ⓑ Ef tvær manneskjur standa í brennipunktum salarins og geta heyrt hvísl hvor annarrar, hversu langt er á milli þeirra? Námundið að næsta feti.

MIÐLAR

Á þessum vefsíðum finnið þið meira efni og fleiri æfingar um sporbauga.

- Keilusnið: sporbaugur
- Graf sporbaugs með miðju í upphafspunkti teiknað
- Graf sporbaugs með miðju utan upphafspunkts teiknað

10.1 Verkefni hlutans

Orðleg verkefni

1. Skilgreinið sporbaug út frá brennipunktum hans.

2. Hvar verða brennipunktar sporbaugs að liggja?

3. Hvaða sértilvik sporbaugs fæst þegar langás og skammás eru jafnlangir?

4. Hvað gildir um brennipunkta sporbaugsins í sértilvikinu sem nefnt var í fyrri spurningunni?

5. Hvað má segja um samhverfu grafs sporbaugs með miðju í upphafspunkti og brennipunkta á y-ásnum?

Algebruverkefni

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort gefnu jöfnurnar lýsi sporbaugum. Ef svo er, ritið þær á staðalformi.

6.

$$2x^2+y=4$$

7.

$$4x^2+9y^2=36$$

8.

$$4x^2-y^2=4$$

9.

$$4x^2+9y^2=1$$

10.

$$4x^2-8x+9y^2-72y+112=0$$

Ritið í eftirfarandi verkefnum jöfnu sporbaugs á staðalformi og finnið endapunkta langáss og skammáss ásamt brennipunktunum.

11.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$$

12.

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

13.

$$x^2+9y^2=1$$

14.

$$4x^2+16y^2=1$$

15.

$$\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$$

16.

$$\frac{(x-2)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

17.

$$\frac{(x+5)^2}{4}+\frac{(y-7)^2}{9}=1$$

18.

$$\frac{(x-7)^2}{49}+\frac{(y-7)^2}{49}=1$$

19.

$$4x^2-8x+9y^2-72y+112=0$$

20.

$$9x^2-54x+9y^2-54y+81=0$$

21.

$$4x^2-24x+36y^2-360y+864=0$$

22.

$$4x^2+24x+16y^2-128y+228=0$$

23.

$$4x^2+40x+25y^2-100y+100=0$$

24.

$$x^2+2x+100y^2-1000y+2401=0$$

25.

$$4x^2+24x+25y^2+200y+336=0$$

26.

$$9x^2+72x+16y^2+16y+4=0$$

Finnið brennipunkta gefnu sporbauganna í eftirfarandi verkefnum.

27.

$$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

28.

$$\frac{(x+1)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

29.

$$x^2+y^2=1$$

30.

$$x^2+4y^2+4x+8y=1$$

31.

$$10x^2+y^2+200x=0$$

Myndræn verkefni

Teiknið gefnu sporbaugana í eftirfarandi verkefnum og merkið miðju, hvirfilpunkta og brennipunkta.

32.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$$

33.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

34.

$$4x^2+9y^2=1$$

35.

$$81x^2+49y^2=1$$

36.

$$\frac{(x-2)^2}{64}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

37.

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

38.

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$$

39.

$$4x^2-8x+16y^2-32y-44=0$$

40.

$$x^2-8x+25y^2-100y+91=0$$

41.

$$x^2+8x+4y^2-40y+112=0$$

42.

$$64x^2+128x+9y^2-72y-368=0$$

43.

$$16x^2+64x+4y^2-8y+4=0$$

44.

$$100x^2+1000x+y^2-10y+2425=0$$

45.

$$4x^2+16x+4y^2+16y+16=0$$

Notið gefnar upplýsingar um graf hvers sporbaugs í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða jöfnu hans.

46. Miðja í upphafspunkti, samhverfur um x- og y-ás, brennipunktur í $(4,0)$, og punktur á grafinu í $(0,3)$.

47. Miðja í upphafspunkti, samhverfur um x- og y-ás, brennipunktur í $(0,-2)$, og punktur á grafinu í $(5,0)$.

48. Miðja í upphafspunkti, samhverfur um x- og y-ás, brennipunktur í $(3,0)$, og langásinn tvöfalt lengri en skammásinn.

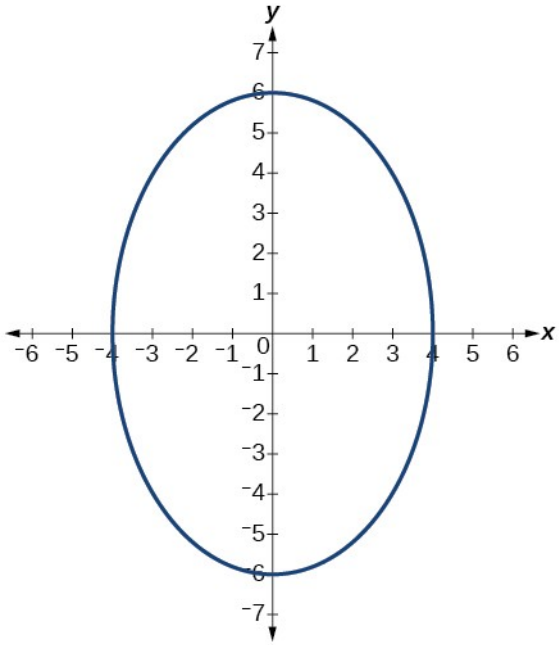
49. Miðja $(4,2)$; hvirfilpunktur $(9,2)$; annar brennipunkturinn: $(4+2\sqrt{6},2)$.

50. Miðja $(3,5)$; hvirfilpunktur $(3,11)$; annar brennipunkturinn: $(3,5+4\sqrt{2})$

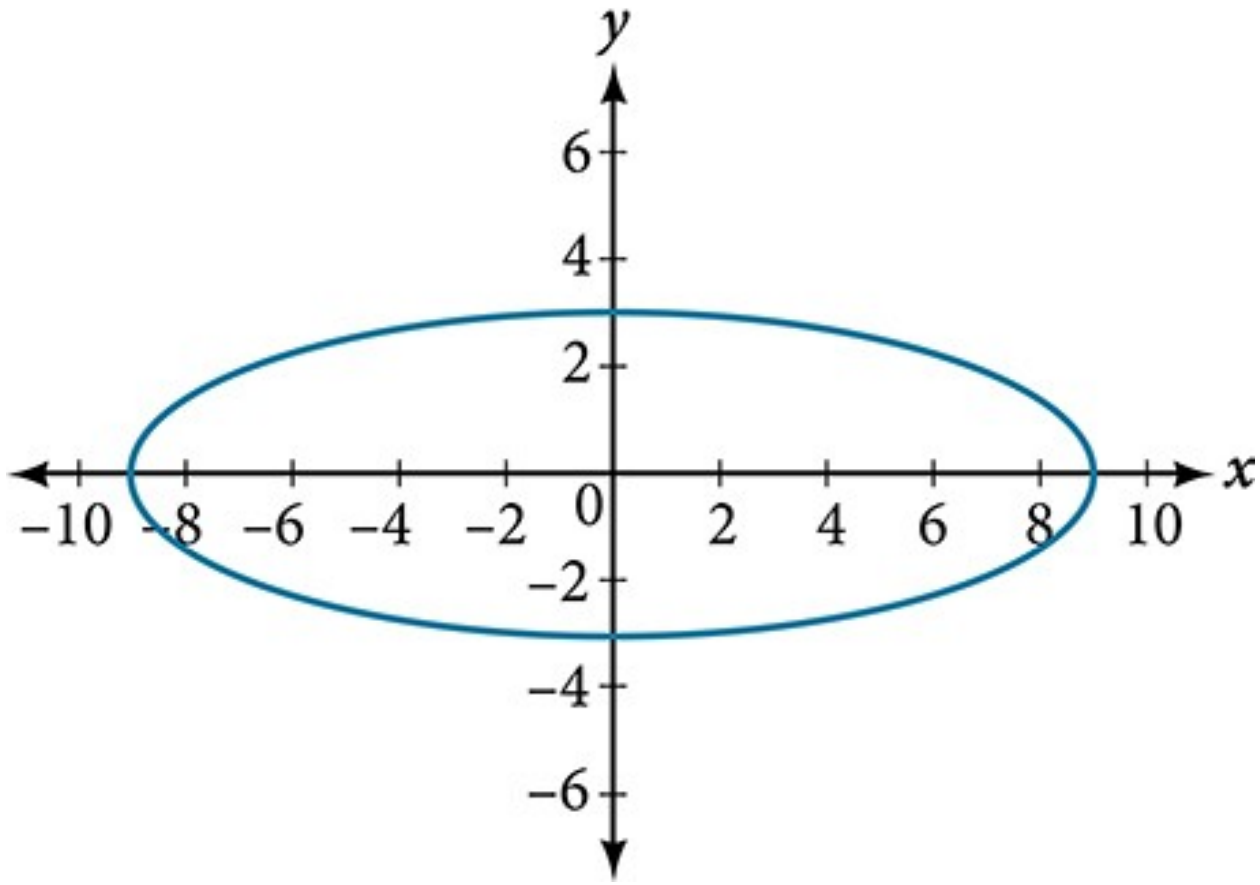
51. Miðja $(-3,4)$; hvirfilpunktur $(1,4)$; annar brennipunkturinn: $(-3+2\sqrt{3},4)$

Ákvarðið jöfnu sporbaugsins út frá gefnu grafi í eftirfarandi verkefnum.

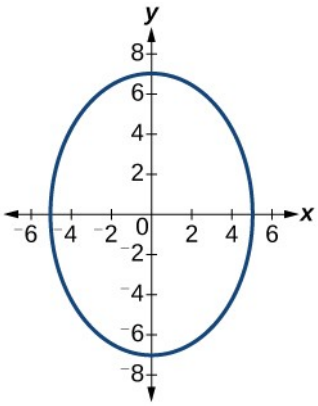
52.



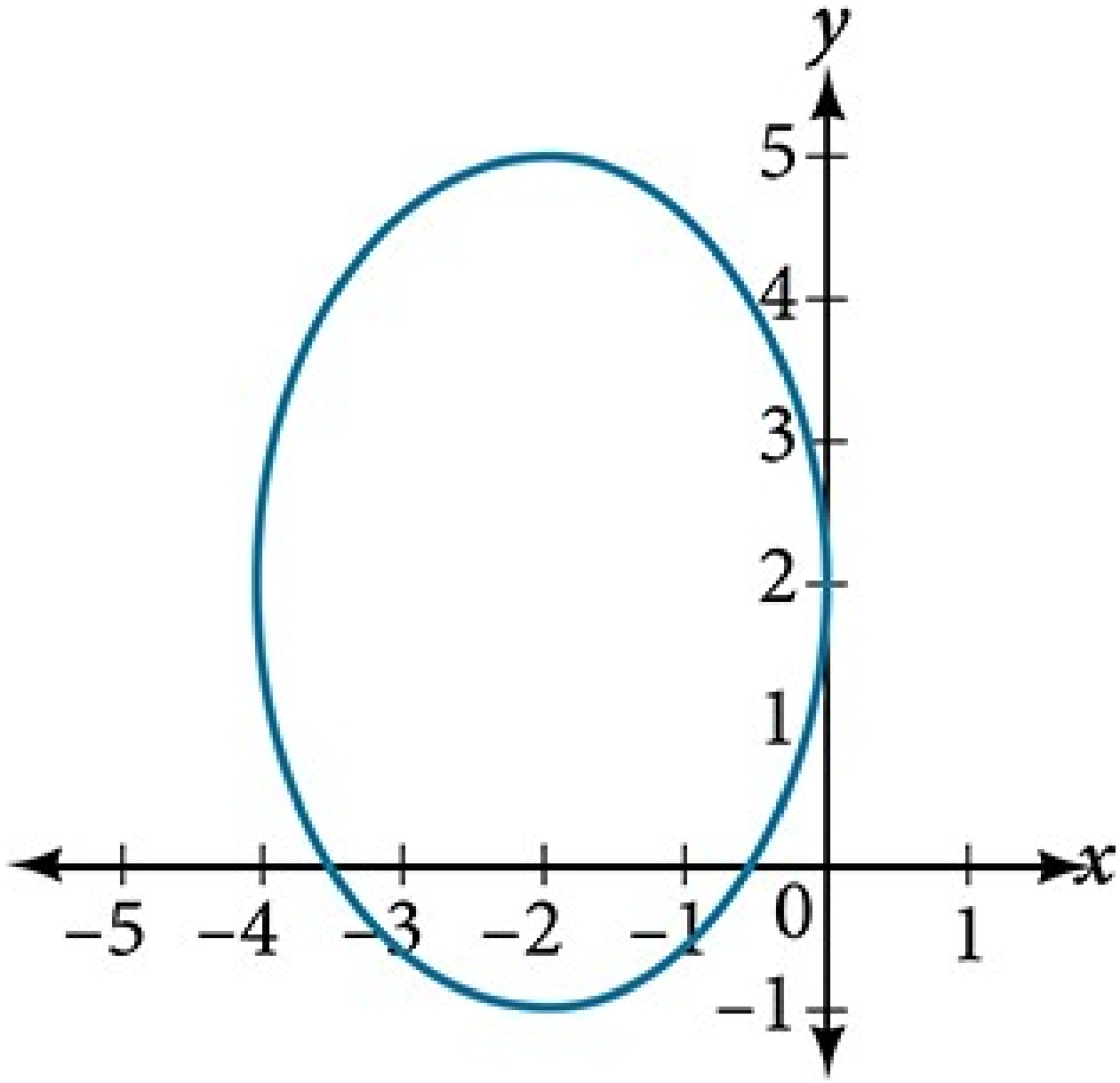
53.



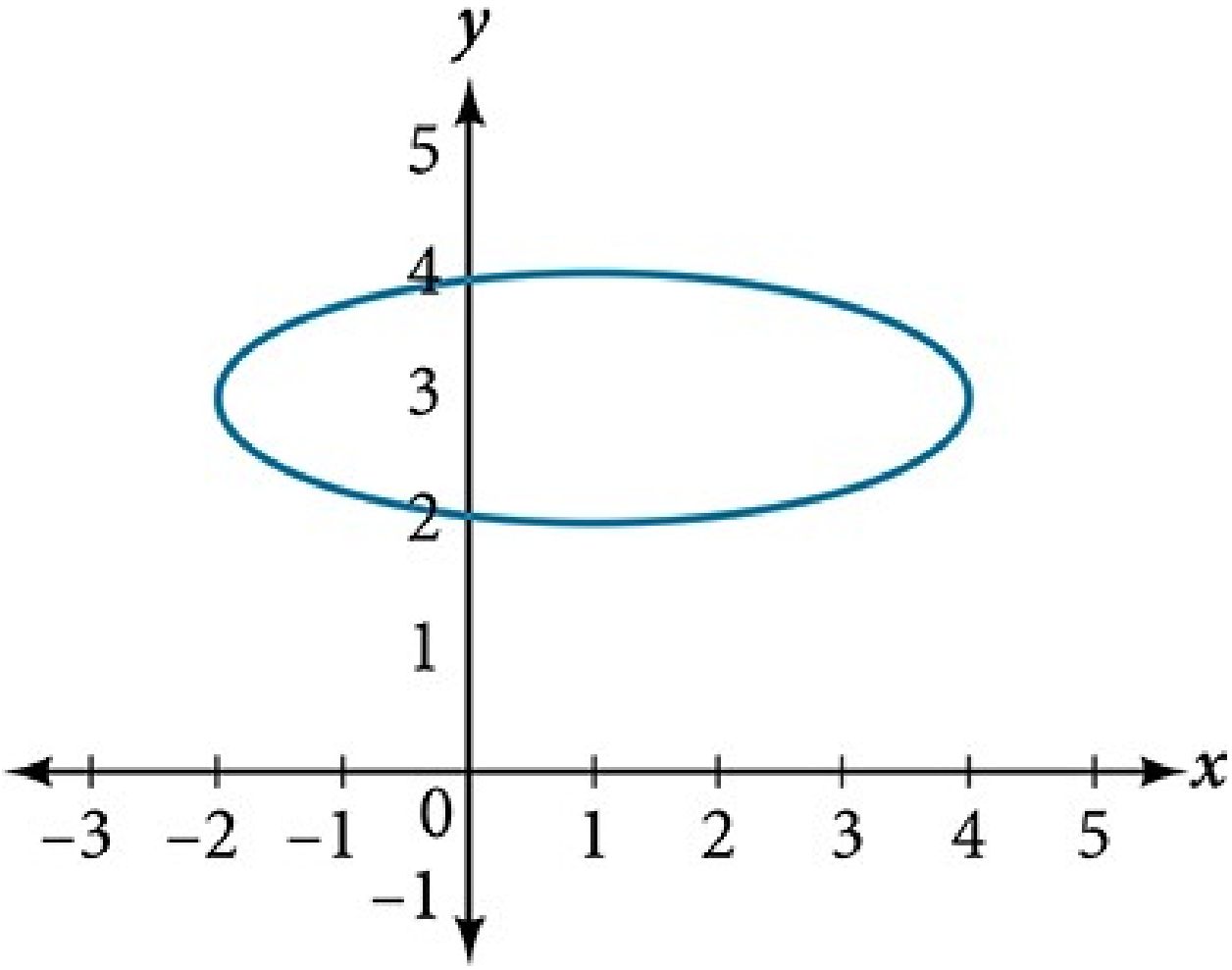
54.



55.



56.



Viðbótarverkefni

Finnið flatarmál sporbaugsins í eftirfarandi verkefnum. Flatarmál sporbaugs er gefið með formúlunni Flatarmál $= a \cdot b \cdot \pi$.

57.

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

58.

$$\frac{(x+6)^2}{16}+\frac{(y-6)^2}{36}=1$$

59.

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{5}=1$$

60.

$$4x^2 - 8x + 9y^2 - 72y + 112 = 0$$

61.

$$9x^2 - 54x + 9y^2 - 54y + 81 = 0$$

Hagnýt verkefni

62. Finnið jöfnu sporbaugs sem passar nákvæmlega inn í rétthyrning sem er 8 einingar á breidd og 4 einingar á hæð.

63. Finnið jöfnu sporbaugs sem passar nákvæmlega inn í rétthyrning sem er fjórum sinnum breiðari en hann er hár. Setjið jöfnuna fram með $h\ h$,, hæðinni.

64. Bogi er í laginu eins og hálfur sporbaugur, það er efri helmingur sporbaugs. Boginn er 8 fet á hæð og hefur 20 feta haf. Finnið jöfnu sporbaugsins og notið hana til að finna hæð bogans í 4 feta fjarlægð frá miðju. Námundið að næsta 0,01 úr feti.

65. Bogi er í laginu eins og hálfur sporbaugur. Boginn er 12 fet á hæð og hefur 40 feta haf. Finnið jöfnu sporbaugsins og notið hana til að finna fjarlægðina frá miðju að punkti þar sem hæðin er 6 fet. Námundið að næsta hundraðshluta.

66. Byggja á brú með boga í laginu eins og hálfur sporbaugur. Haf bogans á að vera 120 fet. Hæð bogans í 40 feta fjarlægð frá miðju á að vera 8 fet. Finnið hæð bogans í miðju hans.

67. Manneskja sem stendur í öðrum brennipunkti hvíslasalar getur hvíslað og manneskja í hinum brennipunktinum heyrt hvíslið vegna þess að allar hljóðbylgjur sem ná til loftsins endurkastast að hinni manneskjunni. Hvíslasalur er 120 fet á lengd og brennipunktarnir eru 30 fet frá miðju. Finnið lofthæðina í miðju salarins.

68. Manneskja stendur 8 fet frá næsta vegg í hvíslasal. Ef hún stendur í öðrum brennipunktinum og hinn brennipunkturinn er í 80 feta fjarlægð, hver eru þá lengd salarins og hæð hans í miðju?

10

10.2 Breiðbogi

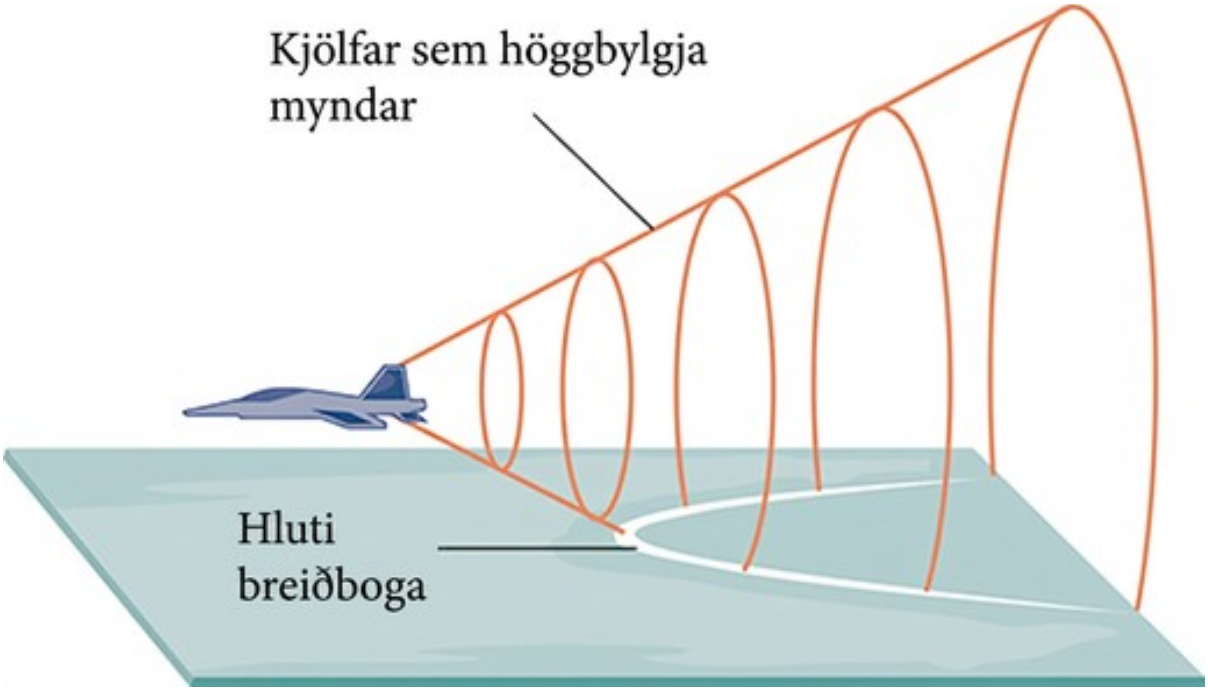
NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- finna hvirfilpunkta og brennipunkta breiðboga.
- rita jöfnur breiðboga á staðalformi.
- teikna gröf breiðboga með miðju í upphafspunkti.
- teikna gröf breiðboga með miðju utan upphafspunkts.
- leysa hagnýt verkefni um breiðboga.

Hvað eiga ferlar halastjarna, hljóðhvellir, forngrískar súlur og kæliturnar með náttúrulegu loftstreymi sameiginlegt? Lýsa má þeim öllum með sömu gerð keilusniðs. Þegar hlutur

hreyfist til dæmis hraðar en hljóðið myndast keilulaga höggbylgja. Þegar bylgjan sker jörðina myndast hluti keilusniðs og hljóðhvellur heyrist. Sjá mynd 1.

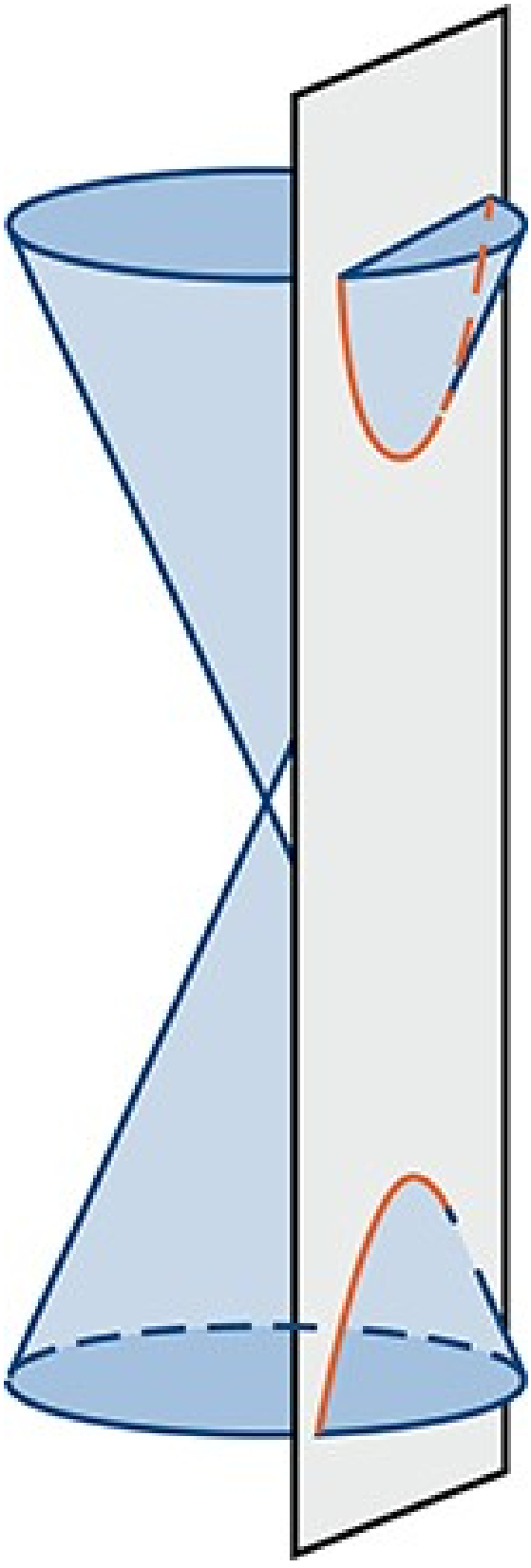


Mynd 1 Höggbylgja sem sker jörðina myndar hluta keilusniðs og veldur hljóðhvelli.

Flestir þekkja hljóðhvell sem yfirhljóðsflugvél myndar, en menn voru farnir að rjúfa hljóðmúrinn löngu fyrir fyrsta yfirhljóðsflugið. Svipuhvellur myndast vegna þess að oddur svipunnar fer hraðar en hljóðið. Kúlur úr mörgum skotvopnum rjúfa einnig hljóðmúrinn, þótt skothvellurinn yfirgnæfi yfirleitt hljóðhvellinn.

Hvirfilpunktar og brennipunktar breiðboga fundnir

Í hnitarúmfræði er breiðbogi keilusnið sem myndast þegar plan sker réttan hringkeiluflöt undir horni þannig að báðir helmingar keiluflatarins skerast. Við skurðinn myndast tveir aðskildir, ótakmarkaðir ferlar sem eru spegilmyndir hvor annars. Sjá mynd 2.

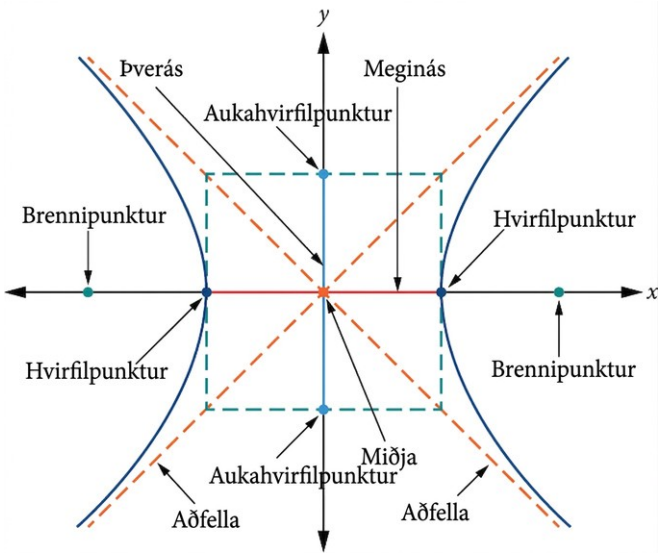


Mynd 2 Breiðbogi

Líkt og sporbaug má skilgreina breiðboga sem punktamengi í hnitafleti. Breiðbogi er mengi allra punkta (x, y) í plani þannig að mismunur fjarlægðanna frá (x, y) að brennipunktunum er jákvæður fasti.

Athugið að skilgreining breiðboga er mjög lík skilgreiningu sporbaugs. Munurinn er sá að breiðbogi er skilgreindur út frá mismuni tveggja fjarlægða en sporbaugur út frá summu tveggja fjarlægða.

Líkt og sporbaugur hefur sérhver breiðbogi tvo samhverfuása. Meginásinn er línustrik sem liggur um miðju breiðbogans og hefur hvirfilpunktana sem endapunkta. Brennipunktarnir liggja á línunni sem meginásinn er hluti af. Þverásinn er hornréttur á meginásinn og hefur aukahvirfilpunktana sem endapunkta. Miðja breiðboga er skurðpunktur og miðpunktur bæði meginass og þverass. Sérhver breiðbogi hefur einnig tvær aðfellur sem liggja um miðjuna. Þegar greinar breiðbogans fjarlægjast miðjuna nálgast þær aðfellurnar. Miðrétthyrningur breiðbogans hefur miðju í upphafspunkti og hliðar sem liggja um hvern hvirfilpunkt og aukahvirfilpunkt. Hann kemur að góðu gagni þegar teikna á breiðbogann og aðfellur hans. Til að teikna aðfellurnar nægir að draga hornalínur miðrétthyrningsins og framlengja þær. Sjá mynd 3.

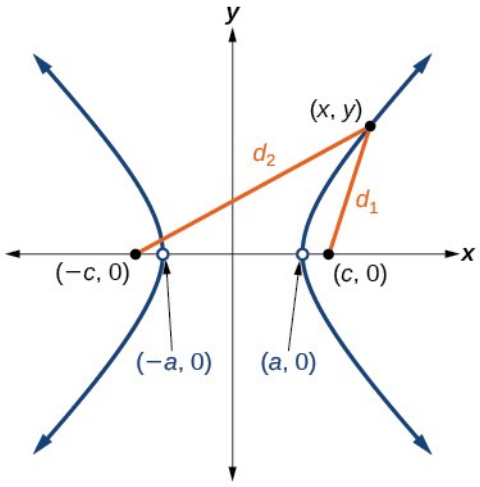


Mynd 3 Lykileinkenni breiðboga

Í þessum hluta takmörkum við umfjöllunina við breiðboga sem liggja lóðrétt eða lárétt í hnitafletinum; ásar þeirra liggja annaðhvort á x- og y-ásunum eða samsíða þeim. Við skoðum tvö tilvik: breiðboga með miðju í upphafspunkti og breiðboga með miðju í öðrum punkti.

Jafna breiðboga með miðju í upphafspunkti leidd út

Látum $(-c, 0)$ og $(c, 0)$ vera brennipunkta breiðboga með miðju í upphafspunkti. Breiðboginn er mengi allra punkta (x, y) þannig að mismunur fjarlægðanna frá (x, y) að brennipunktunum er fasti. Sjá mynd 4.



Mynd 4

Ef $(a,0)$ er hvirfilpunktur breiðbogans er fjarlægðin frá $(-c,0)$ að $(a,0)$ jöfn $a-(-c)=a+c$. Fjarlægðin frá $(c,0)$ að $(a,0)$ er $c-a$. Mismunur fjarlægðanna frá brennipunktunum að hvirfilpunktinum er

$$(a+c)-(c-a)=2a$$

Ef (x,y) er punktur á breiðboganum getum við skilgreint þessar breytur:

$$d_2=\text{fjarlægðin frá } (-c,0) \text{ að } (x,y)$$
$$d_1=\text{fjarlægðin frá } (c,0) \text{ að } (x,y)$$

Samkvæmt skilgreiningu breiðboga er d_2-d_1 fasti fyrir sérhvern punkt (x,y) á breiðboganum. Við vitum að mismunur þessara fjarlægða er $2a$ fyrir hvirfilpunktinn $(a,0)$. Því gildir $d_2-d_1=2a$ fyrir sérhvern punkt á breiðboganum. Líkt og við útleiðslu jöfnu sporbaugs byrjum við á að beita fjarlægðarformúlunni. Afgangurinn af útleiðslunni er algebrulegur. Berið þessa útleiðslu saman við útleiðsluna fyrir sporbauga í fyrri hlutanum.

$d_2-d_1=\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$ Fjarlægðarformúlan

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ Einfalda stæður.

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Færa rótarlið yfir á hina hliðina.

$(x+c)^2+y^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$ Hefja báðar hliðar í annað veldi.

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$ Margfalda upp úr ferningsliðunum.

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$ Margfalda upp úr ferningsliðnum sem eftir er.

$2cx=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2cx$ Sameina líka liði.

$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Einangra rótarliðinn.

$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ Deila með 4.

10

$(c\ x-a^2)^2=a^2\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$ Hefja báðar hliðar í annað veldi.

$c^2\ x^2-2\ a^2\ c\ x+a^4=a^2\left(x^2-2\ c\ x+c^2+y^2\right)$ Margfalda upp úr ferningsliðunum.

$c^2\ x^2-2\ a^2\ c\ x+a^4=a^2\ x^2-2\ a^2\ c\ x+a^2\ c^2+a^2\ y^2$ Margfalda inn í svigann með a^2.

$a^4+c^2\ x^2=a^2\ x^2+a^2\ c^2+a^2\ y^2$ Sameina líka liði.

$c^2\ x^2-a^2\ x^2-a^2\ y^2=a^2\ c^2-a^4$ Endurraða liðum.

$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2\ y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$ Taka sameiginlega þætti út fyrir sviga.

$x^2\ b^2-a^2\ y^2=a^2\ b^2$ Setja $b^2=c^2-a^2$.

$\frac{x^2\ b^2}{a^2\ b^2}-\frac{a^2\ y^2}{a^2\ b^2}=\frac{a^2\ b^2}{a^2\ b^2}$ Deila báðum hliðum með $a^2\ b^2$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Þessi jafna skilgreinir breiðboga með miðju í upphafspunkti, hvirfilpunkta í $(\pm a,0)$ og aukahvirfilpunkta í $(0\pm b)$.

STAÐALFORM JÖFNU BREIÐBOGA MEÐ MIÐJU Í (0,0)

Staðalform jöfnu breiðboga með miðju í $(0,0)$ og meginás á x-ásnum er

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

þar sem

- lengd meginássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(\pm a,0)$
- lengd þverássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(0,\pm b)$
- fjarlægðin milli brennipunktanna er $2c$, þar sem $c^2=a^2+b^2$
- hnit brennipunktanna eru $(\pm c,0)$
- jöfnur aðfellanna eru $y=\pm\frac{b}{a}x$

Sjá mynd 5a.

Staðalform jöfnu breiðboga með miðju í $(0,0)$ og meginás á x-ásnum er

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

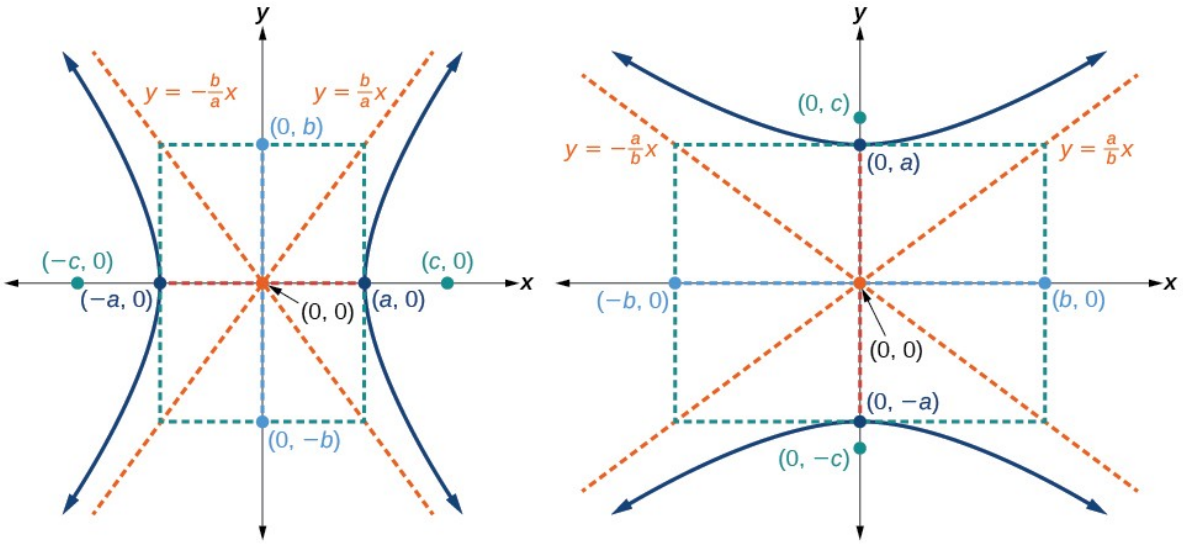
þar sem

- lengd meginássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(0,\pm a)$

- lengd þverássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(\pm b, 0)$
- fjarlægðin milli brennipunktanna er $2c$, þar sem $c^2 = a^2 + b^2$
- hnit brennipunktanna eru $(0, \pm c)$
- jöfnur aðfellanna eru $y = \pm \frac{a}{b}x$

Sjá mynd 5b.

Athugið að hvirfilpunktar, aukahvirfilpunktar og brennipunktar tengjast með jöfnunni $c^2 = a^2 + b^2$. Þegar jafna breiðboga er gefin getum við notað þessi tengsl til að finna hvirfilpunkta og brennipunkta hans.



Mynd 5 (a) Láréttur breiðbogi með miðju í $(0, 0)$ (b) Lóðréttur breiðbogi með miðju í $(0, 0)$

10

AÐFERÐ

Finnið hvirfilpunkta og brennipunkta breiðboga þegar jafna hans á staðalformi er gefin.

1. Ákvarðið hvort þverásinn liggur á x- eða y-ásnum. Takið eftir að a^2 er alltaf undir breytunni með jákvæða stuðulinn. Ef hin breytan er sett jöfn núlli má því auðveldlega finna skurðpunktana. Þegar breiðboginn hefur miðju í upphafspunkti falla skurðpunktarnir saman við hvirfilpunktana.
   a. Ef jafnan er á forminu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, liggur meginásinn á x-ásnum. Hvirfilpunktarnir eru í $(\pm a, 0)$, og brennipunktarnir í $(\pm c, 0)$.

b. Ef jafnan er á forminu $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, liggur meginásinn á y-ásnum. Hvirfilpunktarnir eru í $(0,\pm a)$, og brennipunktarnir í $(0,\pm c)$.

2. Leysið fyrir a með jöfnunni $a=\sqrt{a^2}$.
3. Leysið fyrir c með jöfnunni $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

DÆMI 1

Hvirfilpunktar og brennipunktar breiðboga fundnir

Finnið hvirfilpunkta og brennipunkta breiðbogans með jöfnuna $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{32}=1$.

Lausn

Jafnan er á forminu $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, svo meginásinn liggur á y-ásnum. Miðja breiðbogans er í upphafspunkti og því eru hvirfilpunktarnir y-skurðpunktar grafsins. Til að finna hvirfilpunktana setjum við $x=0$, og leysum fyrir y.

$$\begin{aligned}1&=\tfrac{y^2}{49}-\tfrac{x^2}{32}\\1&=\tfrac{y^2}{49}-\tfrac{0^2}{32}\\1&=\tfrac{y^2}{49}\\y^2&=49\\y&=\pm\sqrt{49}=\pm 7\end{aligned}$$

Brennipunktarnir eru í $(0,\pm c)$. Þegar leyst er fyrir c,

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{49+32}=\sqrt{81}=9$$

Hvirfilpunktarnir eru því í $(0,\pm 7)$, og brennipunktarnir í $(0,\pm 9)$.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 1

Finnið hvirfilpunkta og brennipunkta breiðbogans með jöfnuna $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$.

Jöfnur breiðboga ritaðar á staðalformi

Líkt og með sporbauga gerir staðalform jöfnu breiðboga okkur kleift að reikna lykileinkenni hans: miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur, ásamt lengd og legu meginass og þverass. Á hinn bóginn má finna jöfnu breiðboga þegar lykileinkenni hans eru gefin. Við byrjum á staðaljöfnum breiðboga með miðju í upphafspunkti og snúum okkur síðan að staðaljöfnum breiðboga með miðju í öðrum punkti.

Breiðbogar með miðju í upphafspunkti

Ef við rifjum upp staðalform breiðboga með miðju í $(0,0)$, sjáum við að hvirfilpunktar, aukahvirfilpunktar og brennipunktar tengjast með jöfnunni $c^2=a^2+b^2$. Einnig má rita þessa jöfnu sem $b^2=c^2-a^2$. Þessi tengsl eru notuð til að rita jöfnu breiðboga þegar hnit brennipunkta hans og hvirfilpunkta eru gefin.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu breiðboga með miðju í $(0,0)$, á staðalformi þegar hvirfilpunktar og brennipunktar hans eru gefnir.

1. Ákvarðið hvort meginásinn liggi á x-ásnum eða y-ásnum.
   - **a.** Ef gefin hnit hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru annars vegar á forminu $(\pm a,0)$ og hins vegar $(\pm c,0)$, er meginásinn x-ásinn. Notið staðalformið $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
   - **b.** Ef gefin hnit hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru annars vegar á forminu $(0,\pm a)$ og hins vegar $(0,\pm c)$, er meginásinn y-ásinn. Notið staðalformið $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$.
2. Finnið b^2 með jöfnunni $b^2=c^2-a^2$.
3. Setjið gildin á a^2 og b^2 inn í staðalform jöfnunnar sem var ákvarðað í skrefi 1.

DÆMI 2

Jafna breiðboga með miðju í (0,0) fundin út frá brennipunktum og hvirfilpunktum hans

Hver er jafna breiðbogans á staðalformi ef hvirfilpunktar hans eru $(\pm 6,0)$ og brennipunktar hans eru $(\pm 2\sqrt{10},0)$?

10

Lausn

Hvirfilpunktarnir og brennipunktarnir liggja á x-ásnum. Jafna breiðbogans verður því á forminu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

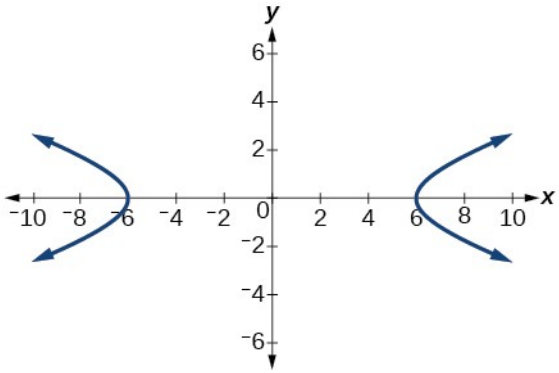
Hvirfilpunktarnir eru $(\pm 6,0)$, svo $a=6$ og $a^2=36$.

Brennipunktarnir eru $(\pm 2\sqrt{10},0)$, svo $c=2\sqrt{10}$ og $c^2=40$.

Þegar leyst er fyrir b^2, fæst

$$b^2=c^2-a^2$$
$$b^2=40-36 \qquad \text{Setja inn fyrir } c^2 \text{ og } a^2.$$
$$b^2=4 \qquad \text{Draga frá.}$$

Að lokum setjum við $a^2=36$ og $b^2=4$ inn í staðalform jöfnunnar, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Jafna breiðbogans er $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$, eins og sýnt er á mynd 6.



Mynd 6

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 2

Hver er jafna breiðbogans á staðalformi ef hvirfilpunktar hans eru $(0,\pm 2)$ og brennipunktar hans eru $(0,\pm 2\sqrt{5})$?

Breiðbogar með miðju utan upphafspunkts

Líkt og gröfum annarra jafna má hliðra grafi breiðboga. Ef breiðboga er hliðrað um h einingar lárétt og k einingar lóðrétt verður miðja breiðbogans (h,k). Við þessa hliðrun fæst staðalform jöfnunnar sem við sáum áður, þar sem x er skipt út fyrir $(x-h)$ og y er skipt út fyrir $(y-k)$.

STAÐALFORM JÖFNU BREIÐBOGA MEÐ MIÐJU Í (H, K)

Staðalform jöfnu breiðboga með miðju í (h,k) og meginás samsíða x-ásnum er

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

þar sem

- lengd meginássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(h\pm a,k)$
- lengd þverássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h,k\pm b)$
- fjarlægðin milli brennipunktanna er $2c$, þar sem $c^2=a^2+b^2$
- hnit brennipunktanna eru $(h\pm c,k)$

Aðfellur breiðbogans falla saman við hornalínur miðrétthyrningsins. Lengd rétthyrningsins er $2a$ og breidd hans er $2b$. Hallatölur hornalínanna eru $\pm\frac{b}{a}$, og hvor hornalína liggur um miðjuna (h,k). Með punkthallaformúlunni má auðveldlega sýna að jöfnur aðfellanna eru $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$. Sjá mynd 7a

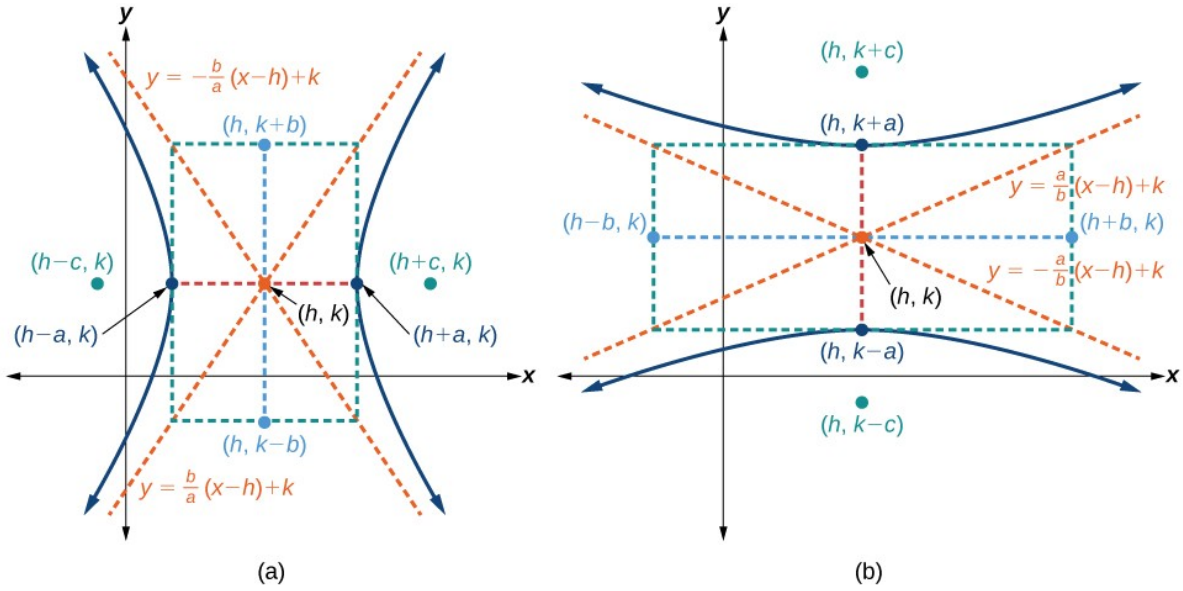
Staðalform jöfnu breiðboga með miðju í (h,k) og meginás samsíða x-ásnum er

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

þar sem

- lengd meginássins er $2a$
- hnit hvirfilpunktanna eru $(h,k\pm a)$
- lengd þverássins er $2b$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h\pm b,k)$
- fjarlægðin milli brennipunktanna er $2c$, þar sem $c^2=a^2+b^2$
- hnit brennipunktanna eru $(h,k\pm c)$

Með sömu rökum og hér að ofan fást jöfnur aðfellanna $y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$. Sjá mynd 7b.



Mynd 7 (a) Láréttur breiðbogi með miðju í (h,k) (b) Lóðréttur breiðbogi með miðju í (h,k)

Líkt og breiðbogar með miðju í upphafspunkti hafa breiðbogar með miðju í punkti (h,k) hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta sem tengjast með jöfnunni $c^2=a^2+b^2$. Þegar hvirfilpunktar og brennipunktar eru gefnir getum við notað þessi tengsl ásamt miðpunkts- og fjarlægðarformúlunum til að finna staðaljöfnu breiðbogans.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu breiðboga með miðju í (h, k), á staðalformi þegar hvirfilpunktar og brennipunktar hans eru gefnir.

1. Ákvarðið hvort meginásinn sé samsíða x-ásnum eða y-ásnum.
   a. Ef y-hnit gefnu hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru jöfn er meginásinn samsíða x-ásnum. Notið staðalformið $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.
   b. Ef x-hnit gefnu hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru jöfn er meginásinn samsíða y-ásnum. Notið staðalformið $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$.
2. Finnið miðju breiðbogans, (h, k), með miðpunktsformúlunni og gefnum hnitum hvirfilpunktanna.
3. Finnið a^2 með því að reikna lengd meginássins, $2a$, sem er fjarlægðin milli gefnu hvirfilpunktanna.
4. Finnið c^2 með því að nota h og k sem fundust í skrefi 2 ásamt gefnum hnitum brennipunktanna.
5. Leysið fyrir b^2 með jöfnunni $b^2=c^2-a^2$.
6. Setjið gildin á h, k, a^2, og b^2 inn í staðalform jöfnunnar sem var ákvarðað í skrefi 1.

DÆMI 3

Jafna breiðboga með miðju í (h, k) fundin út frá brennipunktum og hvirfilpunktum

Hver er staðaljafna breiðbogans sem hefur hvirfilpunkta í $(0, -2)$ og $(6, -2)$ og brennipunkta í $(-2, -2)$ og $(8, -2)$?

Lausn

y-hnit hvirfilpunktanna og brennipunktanna eru jöfn og því er meginásinn samsíða x-ásnum. Jafna breiðbogans verður því á forminu

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Fyrst finnum við miðjuna (h, k). Miðjan er mitt á milli hvirfilpunktanna $(0, -2)$ og $(6, -2)$. Með miðpunktsformúlunni fæst

$$(h,k)=\left(\frac{0+6}{2},\frac{-2+(-2)}{2}\right)=(3,-2)$$

Næst finnum við a^2. Meginásinn, sem hefur lengdina $2a$, liggur milli hvirfilpunktanna. Við getum því fundið a^2 með því að reikna fjarlægðina milli x-hnita hvirfilpunktanna.

$$\begin{aligned} 2a &= |0-6| \\ 2a &= 6 \\ a &= 3 \\ a^2 &= 9 \end{aligned}$$

Nú þurfum við að finna c^2. Hnit brennipunktanna eru $(h \pm c, k)$. Því er $(h-c, k)=(-2, -2)$ og $(h+c, k)=(8, -2)$. Við getum notað x-hnit annars hvors þessara punkta til að leysa fyrir c. Við notum punktinn $(8, -2)$, og setjum inn $h=3$,

$$\begin{aligned} h + c &= 8 \\ 3 + c &= 8 \\ c &= 5 \\ c^2 &= 25 \end{aligned}$$

Næst leysum við fyrir b^2 með jöfnunni $b^2=c^2-a^2$:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 \\ &= 25 - 9 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Að lokum setjum við fundin gildi á h, k, a^2, og b^2 inn í staðalform jöfnunnar.

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 3

Hver er staðaljafna breiðbogans sem hefur hvirfilpunkta í $(1, -2)$ og $(1, 8)$ og brennipunkta í $(1, -10)$ og $(1, 16)$?

Teikning breiðboga með miðju í upphafspunkti

10

Þegar jafna breiðboga með miðju í upphafspunkti er á staðalformi getum við túlkað einstaka hluta hennar til að finna helstu einkenni grafsins: miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, aðfellur, brennipunkta og lengdir og legu meginass og þverass. Til að teikna breiðboga með miðju í upphafspunkti notum við staðalformið $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fyrir lárétta breiðboga og staðalformið $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ fyrir lóðrétta breiðboga.

AÐFERÐ

Ef gefin er staðaljafna breiðboga með miðju í $(0, 0)$, teiknið þá grafið.

1. Ákvarðið hvaða staðalform á við um gefnu jöfnuna.

2. Notið staðalformið sem var valið í skrefi 1 til að ákvarða legu meginássins, hnit hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta og jöfnur aðfellanna.

   a. Ef jafnan er á forminu $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, þá

   - liggur meginásinn á x-ásnum
   - hnit hvirfilpunktanna eru $(\pm a, 0)$
   - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(0, \pm b)$
   - hnit brennipunktanna eru $(\pm c, 0)$
   - jöfnur aðfellanna eru $y=\pm\frac{b}{a}x$

   b. Ef jafnan er á forminu $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, þá

   - liggur meginásinn á y-ásnum
   - hnit hvirfilpunktanna eru $(0, \pm a)$
   - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(\pm b, 0)$
   - hnit brennipunktanna eru $(0, \pm c)$
   - jöfnur aðfellanna eru $y=\pm\frac{a}{b}x$

3. Leysið fyrir hnit brennipunktanna með jöfnunni $c=\pm\sqrt{a^2+b^2}$.
4. Merkið hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur inn á hnitakerfið og teiknið mjúkan feril sem myndar breiðbogann.

DÆMI 4

Graf breiðboga með miðju í (0, 0) teiknað út frá jöfnu á staðalformi

Teiknið breiðbogann sem gefinn er með jöfnunni $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1$. Finnið og merkið hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur.

Lausn

Staðalformið sem á við um gefnu jöfnuna er $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. Meginásinn liggur því á y-ásnum.

Hnit hvirfilpunktanna eru $(0, \pm a)=(0, \pm\sqrt{64})=(0, \pm 8)$.

Hnit aukahvirfilpunktanna eru $(\pm b, 0)=(\pm\sqrt{36}, 0)=(\pm 6, 0)$.

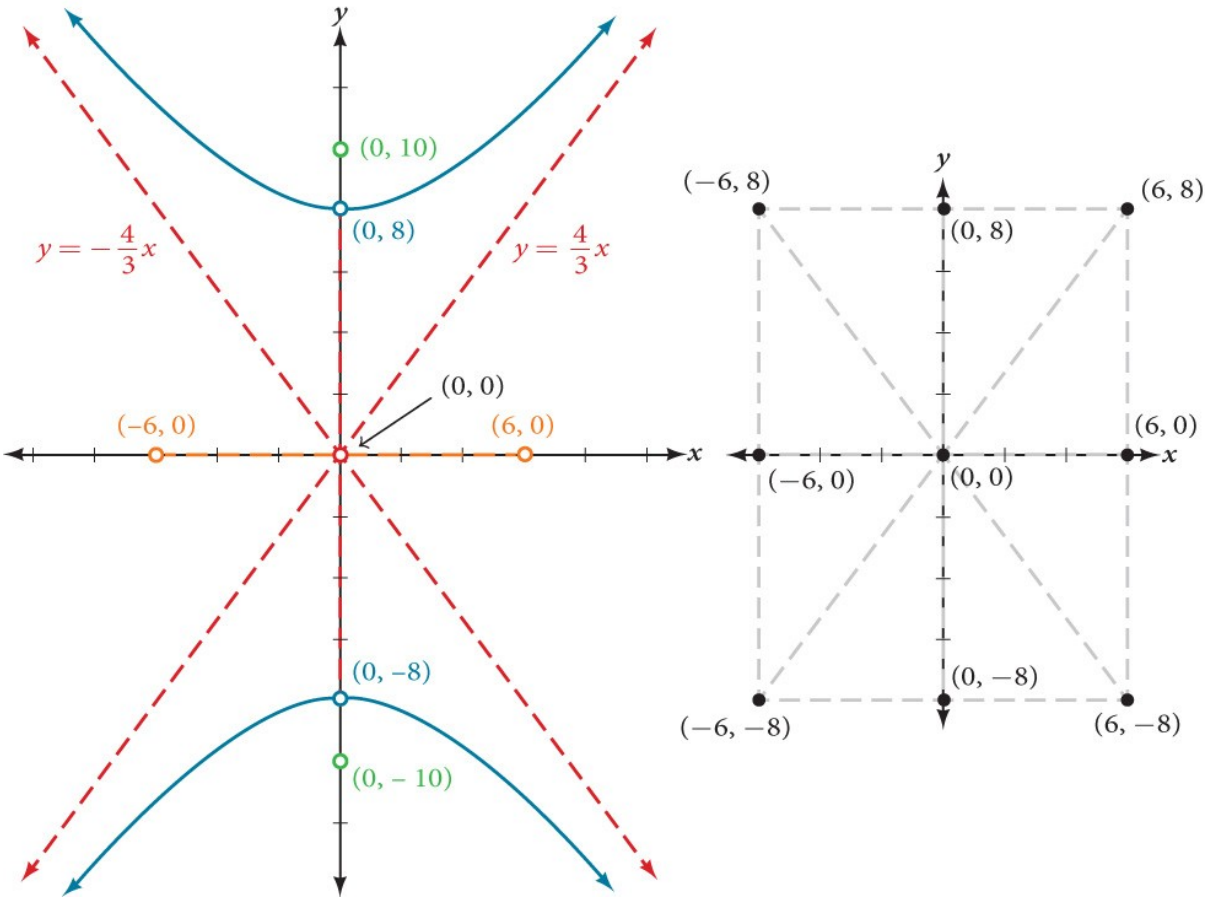
Hnit brennipunktanna eru $(0, \pm c)$, þar sem $c=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Þegar leyst er fyrir c, fæst

$$c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{64+36}=\pm\sqrt{100}=\pm 10$$

Hnit brennipunktanna eru því $(0, \pm 10)$.

Jöfnur aðfellanna eru $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{8}{6}x=\pm\frac{4}{3}x$.

Merkið hvirfilpunkta og aukahvirfilpunkta inn og teiknið síðan miðrétthyrninginn. Hliðar rétthyrningsins eru samsíða ásunum og liggja um hvirfilpunktana og aukahvirfilpunktana. Teiknið hornalínur miðrétthyrningsins og framlengið þær til að sýna aðfellurnar. Miðrétthyrningurinn og aðfellurnar mynda stoðgrindina sem þarf til að teikna nákvæmt graf breiðbogans. Merkið brennipunktana og aðfellurnar og teiknið mjúkan feril sem myndar breiðbogann, eins og sýnt er á mynd 8.



Mynd 8

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 4

Teiknið breiðbogann sem gefinn er með jöfnunni $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$. Finnið og merkið hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur.

Teikning breiðboga sem hafa ekki miðju í upphafspunkti

Breiðbogar með miðju í punkti (h, k) öðrum en upphafspunkti eru teiknaðir á svipaðan hátt og sporbaugar með miðju utan upphafspunkts. Við notum staðalformin $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ fyrir lárétta breiðboga og $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ fyrir lóðrétta breiðboga. Út frá þessum staðaljöfnum getum við auðveldlega reiknað og merkt inn helstu einkenni grafsins: hnit miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta, jöfnur aðfella og legu meginass og þveráss.

AÐFERÐ

Ef gefið er almennt form breiðboga með miðju í (h, k), teiknið þá grafið.

1. Umritið almenna formið á staðalform. Ákvarðið hvaða staðalform á við um gefnu jöfnuna.
2. Notið staðalformið sem var valið í skrefi 1 til að ákvarða legu meginássins, hnit miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta og brennipunkta og jöfnur aðfellanna.
   a. Ef jafnan er á forminu $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, þá
      - er meginásinn samsíða x-ásnum
      - miðjan er (h, k)
      - hnit hvirfilpunktanna eru $(h \pm a, k)$
      - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h, k \pm b)$
      - hnit brennipunktanna eru $(h \pm c, k)$
      - jöfnur aðfellanna eru $y = \pm \frac{b}{a}(x-h) + k$
   b. Ef jafnan er á forminu $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, þá
      - er meginásinn samsíða y-ásnum
      - miðjan er (h, k)
      - hnit hvirfilpunktanna eru $(h, k \pm a)$
      - hnit aukahvirfilpunktanna eru $(h \pm b, k)$
      - hnit brennipunktanna eru $(h, k \pm c)$
      - jöfnur aðfellanna eru $y = \pm \frac{a}{b}(x-h) + k$
3. Leysið fyrir hnit brennipunktanna með jöfnunni $c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$.
4. Merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur inn á hnitakerfið og teiknið mjúkan feril sem myndar breiðbogann.

DÆMI 5

Graf breiðboga með miðju í (h, k) teiknað út frá jöfnu á almennu formi

Teiknið breiðbogann sem gefinn er með jöfnunni $9x^2-4y^2-36x-40y-388=0$. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur.

Lausn

Byrjið á að rita jöfnuna á staðalformi. Flokkið saman liði sem innihalda sömu breytu og færið fastann yfir jafnaðarmerkið.

$$\left(9x^2-36x\right)-\left(4y^2+40y\right)=388$$

Takið fremsta stuðul hvorrar stæðu út fyrir sviga.

$$9\left(x^2-4x\right)-4\left(y^2+10y\right)=388$$

Fyllið tvisvar í ferninginn. Gætið þess að halda jöfnunni í jafnvægi með því að leggja sömu fasta við báðar hliðar.

$$9\left(x^2-4x+4\right)-4\left(y^2+10y+25\right)=388+36-100$$

Umritið sem fullkomna ferninga.

$$9\left(x-2\right)^2-4\left(y+5\right)^2=324$$

Deilið báðum hliðum með fastaliðnum til að færa jöfnuna á staðalform.

$$\frac{\left(x-2\right)^2}{36}-\frac{\left(y+5\right)^2}{81}=1$$

Staðalformið sem á við um gefnu jöfnuna er $\frac{\left(x-h\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-k\right)^2}{b^2}=1$, þar sem $a^2=36$ og $b^2=81$, eða $a=6$ og $b=9$. Meginásinn er því samsíða x-ásnum. Af því leiðir að

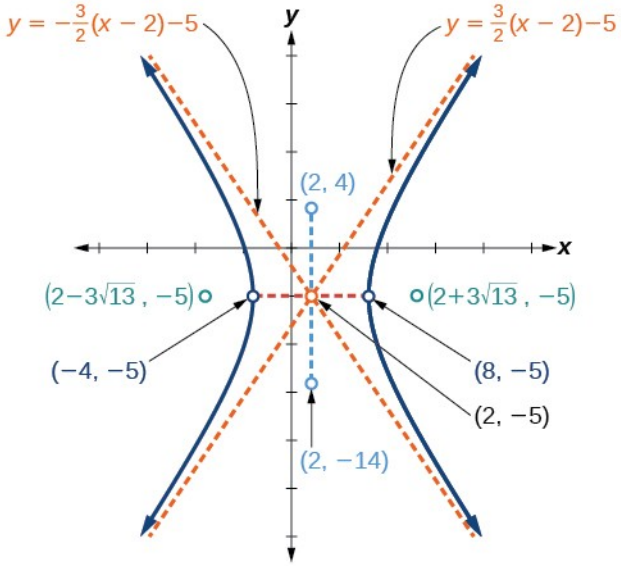
- miðja breiðbogans er $\left(h,k\right)=\left(2,-5\right)$
- hnit hvirfilpunktanna eru $\left(h\pm a,k\right)=\left(2\pm6,-5\right)$, það er $\left(-4,-5\right)$ og $\left(8,-5\right)$
- hnit aukahvirfilpunktanna eru $\left(h,k\pm b\right)=\left(2,-5\pm9\right)$, það er $\left(2,-14\right)$ og $\left(2,4\right)$
- hnit brennipunktanna eru $\left(h\pm c,k\right)$, þar sem $c=\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Þegar leyst er fyrir c, fæst

$$c=\pm\sqrt{36+81}=\pm\sqrt{117}=\pm3\sqrt{13}$$

Hnit brennipunktanna eru því $\left(2-3\sqrt{13},-5\right)$ og $\left(2+3\sqrt{13},-5\right)$.

Jöfnur aðfellanna eru $y=\pm\frac{b}{a}\left(x-h\right)+k=\pm\frac{3}{2}\left(x-2\right)-5$.

Næst merkjum við miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur inn og teiknum mjúka ferla sem mynda breiðbogann, eins og sýnt er á mynd 9.



Mynd 9

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 5

Teiknið breiðbogann sem gefinn er með staðaljöfnunni $\frac{(y+4)^2}{100} - \frac{(x-3)^2}{64} = 1$. Finnið og merkið miðju, hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur.

Hagnýt verkefni um breiðboga leyst

Eins og rætt var í upphafi kaflahlutans koma breiðbogar við sögu í raunverulegum verkefnum á mörgum sviðum, svo sem stjörnufræði, eðlisfræði, verkfræði og byggingarlist. Skilvirk hönnun breiðbogalaga kæliturna er sérstaklega áhugaverð. Kæliturnar flytja afgangsvarma út í andrúmsloftið og oft er lögð áhersla á þátt þeirra í skilvirkri orkuframleiðslu. Breiðbogalagið gerir þessum mannvirkjum kleift að standast afar hvassa vinda þótt minna efni þurfi í þau en önnur mannvirki af sambærilegri stærð og styrk. Sjá mynd 10. Til dæmis má gera 500 feta háan turn úr járnbentri steinsteypuskel sem er aðeins 6 eða 8 tommur á þykkt!



Mynd 10 Kæliturnar við Drax-orkuverið í Norður-Yorkshire á Bretlandi (mynd: Les Haines, Flickr)

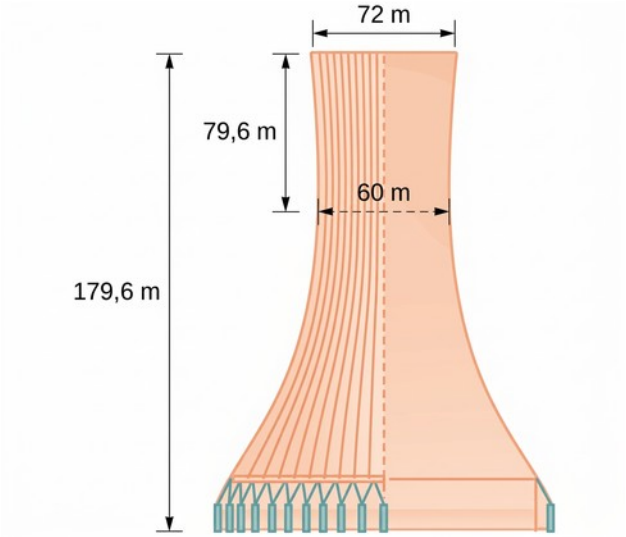
Fyrstu breiðbogalaga turnarnir voru hannaðir árið 1914 og voru 35 metrar á hæð. Nú eru hæstu kæliturnarnir í Frakklandi og ná hvorki meira né minna en 170 metra hæð. Í dæmi 6 notum við hönnun kæliturns til að finna breiðbogajöfnu sem lýsir hliðum hans.

10

DÆMI 6

Hagnýt verkefni um breiðboga leyst

Hönnun kæliturns er sýnd á mynd 11. Turninn er 179,6 metra hár. Þvermál turnsins efst er 72 metrar. Þar sem hliðar turnsins liggja næst hvor annarri eru 60 metrar á milli þeirra.



Mynd 11 Hönnun náttúrulegs kæliturns

Finnið jöfnu breiðbogans sem lýsir hliðum kæliturnsins. Gerið ráð fyrir að miðja breiðbogans — merkt með skurðpunkti strikalínanna sem eru hornréttar hvor á aðra á myndinni — sé upphafspunktur hnitakerfisins. Námundið lokagildi að fjórum aukastöfum.

Lausn

Við gerum ráð fyrir að miðja turnsins sé í upphafspunkti og getum því notað staðalform lárétts breiðboga með miðju í upphafspunkti: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, þar sem greinar breiðbogans mynda hliðar kæliturnsins. Við þurfum að finna gildin á a^2 og b^2 til að fullgera líkanið.

Fyrst finnum við a^2. Munið að lengd meginásss breiðboga er $2a$. Þessi lengd samsvarar fjarlægðinni þar sem hliðar turnsins eru næst hvor annarri, en hún er gefin sem 60 metrar. Því er $2a=60$. Þar af leiðandi er $a=30$ og $a^2=900$.

Til að leysa fyrir b^2, þurfum við að setja inn gildi fyrir x og y úr þekktum punkti í jöfnuna. Við getum notað mál turnsins til að finna punkt (x, y) sem liggur á breiðboganum. Við látum efra hægra horn turnsins tákna þann punkt. Þar sem y-ásinn helmingar turninn má tákna x-gildið með geisla turnsins efst, eða 36 metrum. y-gildið er fjarlægðin frá upphafspunkti upp á topp turnsins. Hún er gefin sem 79,6 metrar. Því fæst

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ Staðalform lárétts breiðboga.

$$b^2=\frac{y^2}{\frac{x^2}{a^2}-1}$$ Einangra b^2

$$=\frac{(79{,}6)^2}{\frac{(36)^2}{900}-1}$$ Setja inn fyrir $a^2, x,$ og y

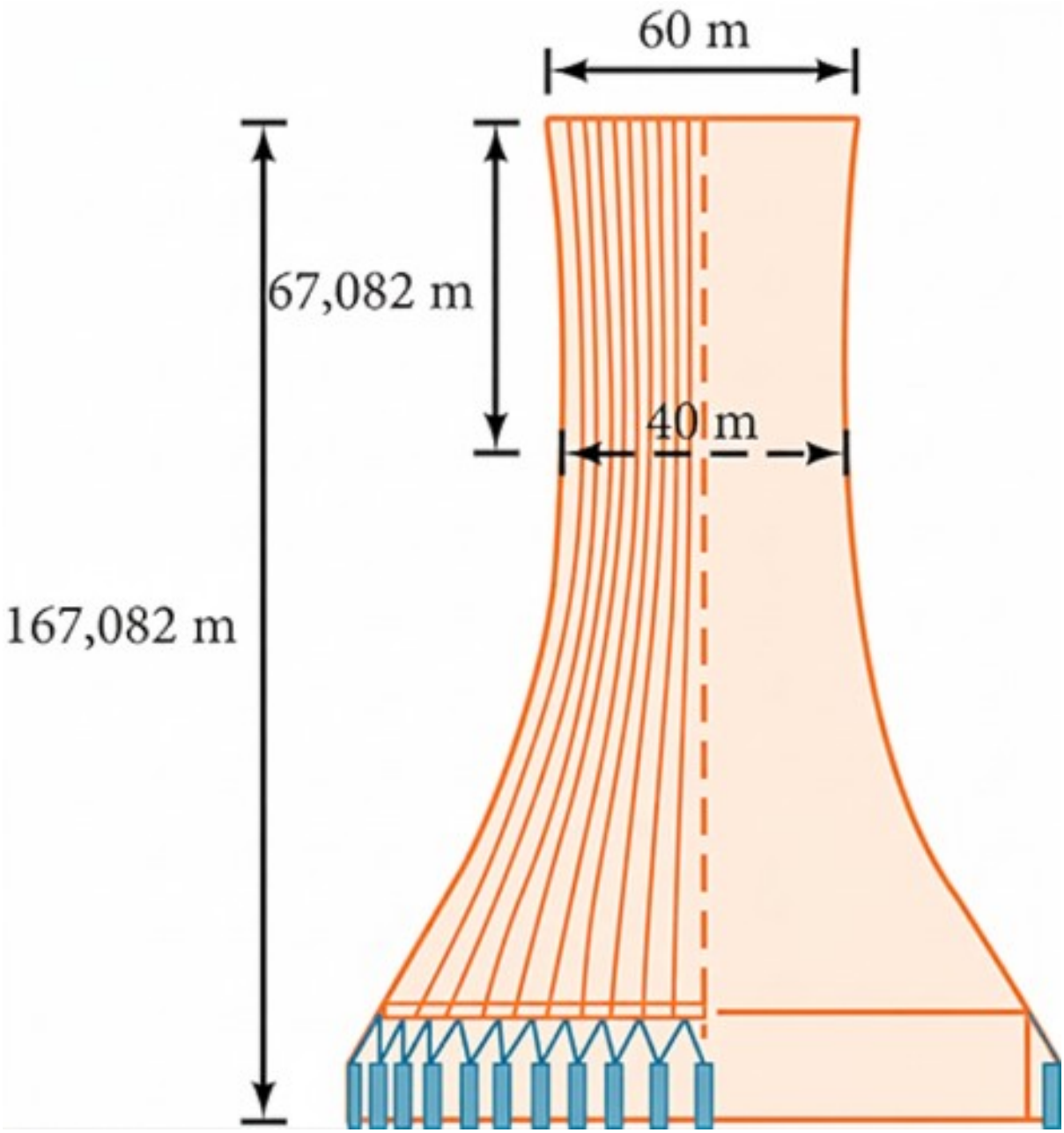
$$\approx 14.400{,}3636$$ Námunda að fjórum aukastöfum

Lýsa má hliðum turnsins með breiðbogajöfnunni

$$\frac{x^2}{900}-\frac{y^2}{14.400{,}3636}=1, \text{ eða} \quad \frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{120{,}0015^2}=1$$

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 6

Hönnun kæliturns er sýnd á mynd 12. Finnið jöfnu breiðbogans sem lýsir hliðum kæliturnsins. Gerið ráð fyrir að miðja breiðbogans — merkt með skurðpunkti strikalínanna sem eru hornréttar hvor á aðra á myndinni — sé upphafspunktur hnitakerfisins. Námundið lokagildi að fjórum aukastöfum.



Mynd 12

MIÐLAR

Notið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í breiðbogum.

- Keilusnið: Breiðboginn, hluti 1 af 2
- Keilusnið: Breiðboginn, hluti 2 af 2
- Graf breiðboga með miðju í upphafspunkti
- Graf breiðboga með miðju utan upphafspunkts

10.2 Æfingar kaflahlutans

Munnleg verkefni

1. Skilgreinið breiðboga út frá brennipunktum hans.
2. Hvað má ályktа um breiðboga ef aðfellur hans skerast í upphafspunkti?
3. Hvað verður að gilda um brennipunkta breiðboga?
4. Hvað vitum við um grafið ef meginás breiðboga er lóðréttur?
5. Hvar verður miðja breiðboga að liggja miðað við brennipunkta hans?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hvort jöfnurnar lýsi breiðbogum. Ef svo er skal rita þær á staðalformi.

6.

$$3y^2+2x=6$$

7.

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$$

8.

$$5y^2+4x^2=6x$$

9.

$$25x^2-16y^2=400$$

10.

$$-9x^2+18x+y^2+4y-14=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal rita jöfnu breiðbogans á staðalformi ef hún er ekki þegar á því formi, finna hvirfilpunkta og brennipunkta og rita jöfnur aðfellanna.

11.

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$$

12.

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{9}=1$$

13.

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{81}=1$$

14.

$$9y^2-4x^2=1$$

15.

$$\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$$

16.

$$\frac{(y-6)^2}{36}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$$

17.

$$\frac{(x-2)^2}{49}-\frac{(y+7)^2}{49}=1$$

18.

$$4x^2-8x-9y^2-72y+112=0$$

19.

$$-9x^2-54x+9y^2-54y+81=0$$

20.

$$4x^2-24x-36y^2-360y+864=0$$

21.

$$-4x^2+24x+16y^2-128y+156=0$$

22.

$$-4x^2+40x+25y^2-100y+100=0$$

23.

$$x^2+2x-100y^2-1000y+2401=0$$

24.

$$-9x^2+72x+16y^2+16y+4=0$$

25.

$$4x^2+24x-25y^2+200y-464=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal finna jöfnur aðfellna hvers breiðboga.

26.

$$\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{3^2}=1$$

27.

$$\frac{(x-3)^2}{5^2}-\frac{(y+4)^2}{2^2}=1$$

28.

$$\frac{(y-3)^2}{3^2}-\frac{(x+5)^2}{6^2}=1$$

29.

$$9x^2-18x-16y^2+32y-151=0$$

30.

$$16y^2+96y-4x^2+16x+112=0$$

Myndræn verkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal skissa graf breiðbogans og merkja hvirfilpunkta og brennipunkta.

31.

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$$

32.

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{4}=1$$

33.

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$$

34.

$$81x^2-9y^2=1$$

35.

$$\frac{(y+5)^2}{9}-\frac{(x-4)^2}{25}=1$$

36.

$$\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(y+3)^2}{27}=1$$

37.

$$\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{9}=1$$

38.

$$-4x^2-8x+16y^2-32y-52=0$$

39.

$$x^2-8x-25y^2-100y-109=0$$

40.

$$-x^2+8x+4y^2-40y+88=0$$

41.

$$64x^2+128x-9y^2-72y-656=0$$

42.

$$16x^2+64x-4y^2-8y-4=0$$

43.

$$-100x^2+1000x+y^2-10y-2575=0$$

44.

$$4x^2+16x-4y^2+16y+16=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal finna jöfnu breiðbogans út frá gefnum upplýsingum um graf hans.

45. Hvirfilpunktar í $(3,0)$ og $(-3,0)$ og annar brennipunkturinn í $(5,0)$.

46. Hvirfilpunktar í $(0,6)$ og $(0,-6)$ og annar brennipunkturinn í $(0,-8)$.

47. Hvirfilpunktar í $(1,1)$ og $(11,1)$ og annar brennipunkturinn í $(12,1)$.

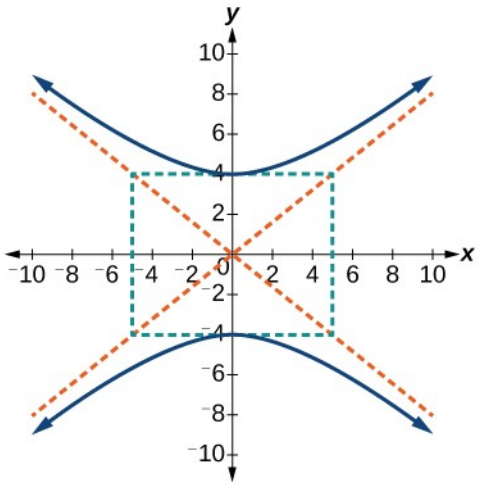
48. Miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktur: $(0,-13)$; annar brennipunkturinn: $(0,\sqrt{313})$.

49. Miðja: $(4,2)$; hvirfilpunktur: $(9,2)$; annar brennipunkturinn: $(4+\sqrt{26},2)$.

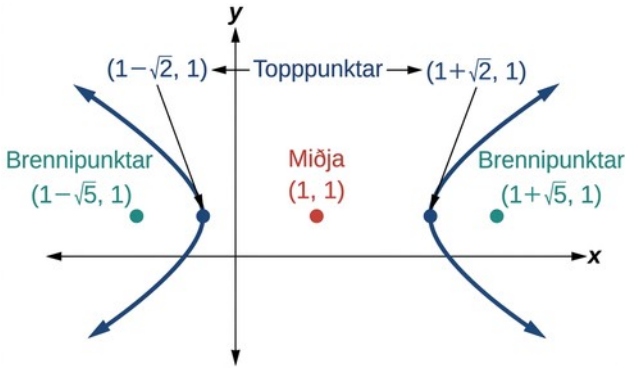
50. Miðja: $(3,5)$; hvirfilpunktur: $(3,11)$; annar brennipunkturinn: $(3,5+2\sqrt{10})$.

Í eftirfarandi verkefnum skal finna jöfnu breiðbogans út frá gefnu grafi hans.

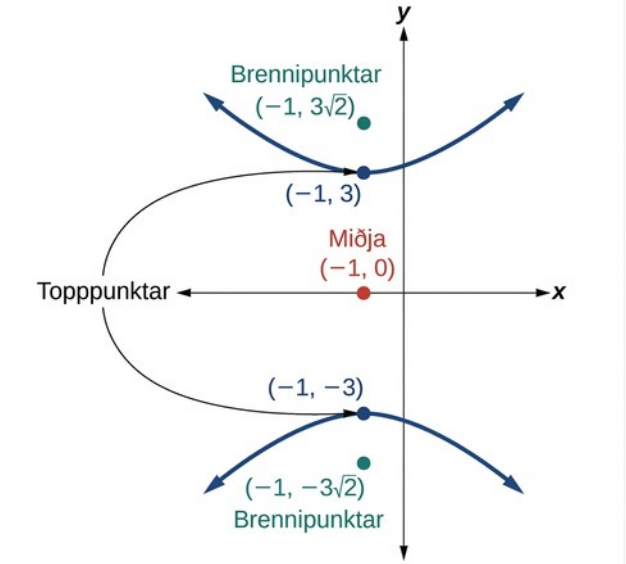
51.


y
x
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−10 −8 −6 −4 −2 2 4 6 8 10

52.

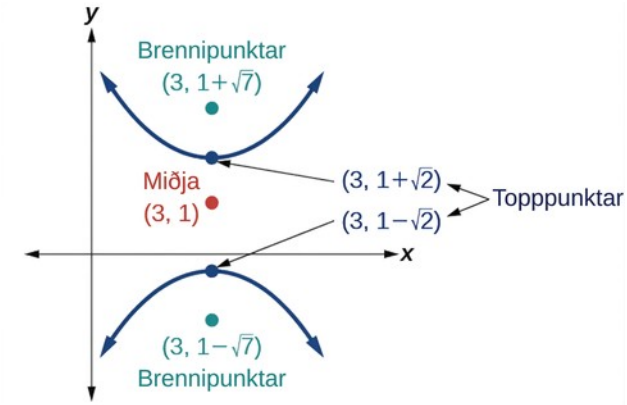

y
x
(1−√2, 1)
Topppunktar
(1+√2, 1)
Brennipunktar
(1−√5, 1)
Miðja
(1, 1)
Brennipunktar
(1+√5, 1)

53.

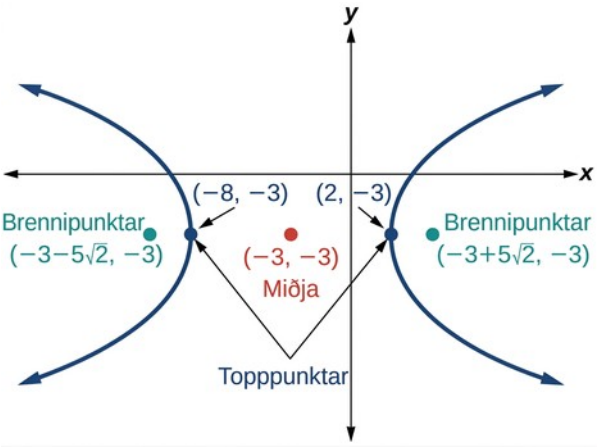

y
x
Brennipunktar
(−1, 3√2)
(−1, 3)
Miðja
(−1, 0)
Topppunktar
(−1, −3)
(−1, −3√2)
Brennipunktar

10

54.



55.



Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal setja jöfnu breiðbogans fram sem tvö föll þar sem y er fall af x. Einfaldið eins og unnt er. Notið grafreikni til að skissa gröf beggja falla í sama hnitakerfi.

56.

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

57.

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{1}=1$$

58.

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

59.

$$-4x^2-16x+y^2-2y-19=0$$

60.

$$4x^2 - 24x - y^2 - 4y + 16 = 0$$

Hagnýt verkefni

Í eftirfarandi verkefnum á að gera limgerði í laginu eins og breiðbogi við gosbrunn í miðjum garði. Finnið jöfnu breiðbogans og skissið grafið.

61. Limgerðið fylgir aðfellunum $y = x$ og $y = -x$, og minnsta fjarlægð þess frá gosbrunninum í miðjunni er 5 yardar.

62. Limgerðið fylgir aðfellunum $y = 2x$ og $y = -2x$, og minnsta fjarlægð þess frá gosbrunninum í miðjunni er 6 yardar.

63. Limgerðið fylgir aðfellunum $y = \frac{1}{2}x$ og $y = -\frac{1}{2}x$, og minnsta fjarlægð þess frá gosbrunninum í miðjunni er 10 yardar.

64. Limgerðið fylgir aðfellunum $y = \frac{2}{3}x$ og $y = -\frac{2}{3}x$, og minnsta fjarlægð þess frá gosbrunninum í miðjunni er 12 yardar.

65. Limgerðið fylgir aðfellunum $y = \frac{3}{4}x$ og $y = -\frac{3}{4}x$, og minnsta fjarlægð þess frá gosbrunninum í miðjunni er 20 yardar.

Í eftirfarandi verkefnum skal gera ráð fyrir að fyrirbæri komi inn í sólkerfið og að við viljum teikna feril þess í hnitakerfi þar sem sólin er í upphafspunkti og x-ásinn er samhverfuás ferilsins. Finnið jöfnu ferils hvers fyrirbæris út frá gefnum upplýsingum.

66. Fyrirbærið kemur inn eftir ferli sem má nálga með línunni $y = x - 2$ og kemst næst sólu í 1 stjörnufræðieiningar fjarlægð, þannig að sólin er annar brennipunktur breiðbogans. Síðan yfirgefur það sólkerfið eftir ferli sem má nálga með línunni $y = -x + 2$.

67. Fyrirbærið kemur inn eftir ferli sem má nálga með línunni $y = 2x - 2$ og kemst næst sólu í 0,5 stjörnufræðieininga fjarlægð, þannig að sólin er annar brennipunktur breiðbogans. Síðan yfirgefur það sólkerfið eftir ferli sem má nálga með línunni $y = -2x + 2$.

68. Fyrirbærið kemur inn eftir ferli sem má nálga með línunni $y = 0{,}5x + 2$ og kemst næst sólu í 1 stjörnufræðieiningar fjarlægð, þannig að sólin er annar brennipunktur breiðbogans. Síðan yfirgefur það sólkerfið eftir ferli sem má nálga með línunni $y = -0{,}5x - 2$.

69. Fyrirbærið kemur inn eftir ferli sem má nálga með línunni $y = \frac{1}{3}x - 1$ og kemst næst sólu í 1 stjörnufræðieiningar fjarlægð, þannig að sólin er annar brennipunktur breiðbogans. Síðan yfirgefur það sólkerfið eftir ferli sem má nálga með línunni $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

70. Fyrirbærið kemur inn eftir ferli sem má nálga með línunni $y = 3x - 9$ og kemst næst sólu í 1 stjörnufræðieiningar fjarlægð, þannig að sólin er annar brennipunktur breiðbogans. Síðan yfirgefur það sólkerfið eftir ferli sem má nálga með línunni $y = -3x + 9$.

10.3 Fleygboginn

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- teikna gröf fleygboga með hvirfilpunkt í upphafspunkti.
- rita jöfnur fleygboga á staðalformi.
- teikna gröf fleygboga með hvirfilpunkt utan upphafspunkts.
- leysa hagnýt verkefni um fleygboga.



Mynd 1 Brautryðjendastarf Katherine Johnson við útreikninga á fleygbogaferlum og öðrum brautum gegndi mikilvægu hlutverki í þróun geimferða Bandaríkjanna. (mynd: NASA)

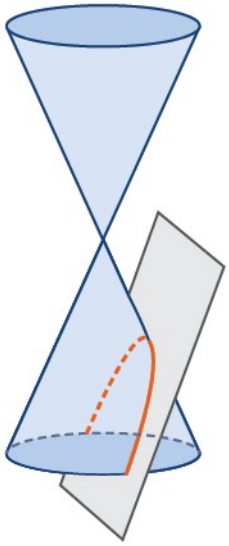
Katherine Johnson var brautryðjandi í hópi stærðfræðinga NASA og átti lykilþátt í að fjölmargar mannaðar geimferðir og gervihnattaferðir heppnuðust og að geimförin sneru heil heim. Áður en hún vann verkið sem kvikmyndin Hidden Figures fjallar um hafði hún þegar lagt mikið af mörkum til geimáætlunarinnar. Hún greindi feril Mercury-geimferðarinnar, þegar Alan Shepard varð fyrsti Bandaríkjamaðurinn til að komast út í geim. Hún og verkfræðingurinn Ted Sopinski skrifuðu líka tímamótagrein um hvernig koma má hlut á nákvæma braut og láta hann snúa heilan aftur til jarðar. Margar brautanna sem hún ákvarðaði voru settar saman úr fleygbogum og hæfni hennar til að sameina ólíkar greinar stærðfræðinnar gerði henni kleift að ná áður óþekktri nákvæmni. Johnson sagði: „Segið mér

hvenær þið viljið fá það og hvar það á að lenda, þá reikna ég aftur á bak og segi ykkur hvenær á að leggja af stað.“

Vinna Johnson að fleygbogabrautum og annarri flókinni stærðfræði stuðlaði að árangursríkum brautarferðum, tungllendingum og þróun geimskutluáætlunarinnar. Notkun fleygboga er einnig mikilvæg á öðrum sviðum vísinda. Fleygbogaspeglar, eða -endurkastarar, geta safnað orku og beint henni í einn punkt. Kostir þessa eiginleika sjást vel á öllum þeim fleygbogalaga hlutum sem við notum daglega, svo sem gervihnattadiskum, hengibrúm, stjörnusjónaukum, hljóðnemum, kastljósum og bílljósum. Fleygbogaendurkastarar eru einnig notaðir í búnaði fyrir endurnýjanlega orku, svo sem sólareldavélum og vatnshiturum, því framleiðsla þeirra er ódýr og viðhaldsþörfin lítil. Í þessum hluta könnum við fleygbogann og notkun hans, meðal annars í ódýrum og orkusparandi sólartækjum.

Gröf fleygboga með hvirfilpunkt í upphafspunkti teiknuð

Í hlutanum Sporbaugurinn sáum við að sporbaugur myndast þegar plan sker réttan hringkeiluflöt. Ef planið er samsíða hlið keilunnar myndast ótakmarkaður ferill. Sá ferill er fleygbogi. Sjá mynd 2.

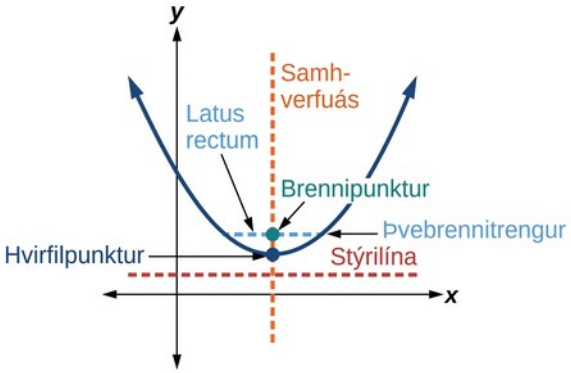


Mynd 2 Fleygbogi

Líkt og sporbaug og breiðboga má einnig skilgreina fleygboga sem punktamengi í hnitafleti. Fleygbogi er mengi allra punkta (x, y) í plani sem eru jafnlangt frá fastri línu, sem nefnist stýrilína, og föstum punkti utan stýrilínunnar, sem nefnist brennipunktur.

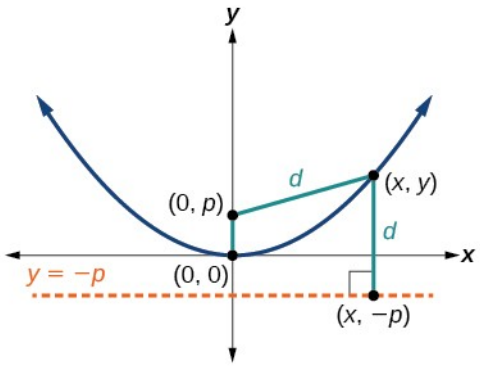
Í hlutanum Annars stigs föll lærðum við um hvirfilpunkt og samhverfuás fleygboga. Nú bætum við öðrum helstu einkennum fleygbogans við umfjöllunina. Sjá mynd 3. Athugið að samhverfuásinn liggur um brennipunktinn og hvirfilpunktinn og er hornréttur á stýrilínuna. Hvirfilpunkturinn er miðpunktur milli stýrilínunnar og brennipunktsins.

Línustrikið sem liggur um brennipunktinn og er samsíða stýrilínunni nefnist þverbrennistrengur. Endapunktar þverbrennistrengsins liggja á ferlinum. Samkvæmt skilgreiningu er fjarlægðin d frá brennipunktinum að sérhverjum punkti P á fleygboganum jöfn fjarlægðinni frá P að stýrilínunni.



Mynd 3 Helstu einkenni fleygbogans

Þegar unnið er með fleygboga í hnitafleti skoðum við tvö tilvik: fleygboga með hvirfilpunkt í upphafspunkti og fleygboga með hvirfilpunkt annars staðar. Við byrjum á fyrra tilvikinu.



Mynd 4

Látum (x, y) vera punkt á fleygboga með hvirfilpunkt í $(0, 0)$, brennipunkt í $(0, p)$, og stýrilínu $y = -p$ eins og sýnt er á mynd 4. Fjarlægðin d frá punktinum (x, y) að punktinum $(x, -p)$ á stýrilínunni er mismunur y-gildanna: $d = y + p$. Fjarlægðin frá brennipunktinum $(0, p)$ að punktinum (x, y) er einnig jöfn d og hana má setja fram með fjarlægðarformúlunni.

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

Setjið stæðurnar tvær fyrir d jafnar og leysið fyrir y til að leiða út jöfnu fleygbogans. Þetta gerum við vegna þess að fjarlægðin frá (x, y) að $(0, p)$ er jöfn fjarlægðinni frá (x, y) að $(x, -p)$.

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$$

Síðan hefjum við báðar hliðar jöfnunnar í annað veldi, margföldum upp úr ferningsliðunum og einföldum með því að sameina líka liði.

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\
x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2 \\
x^2 - 2py &= 2py \\
x^2 &= 4py
\end{aligned}
$$

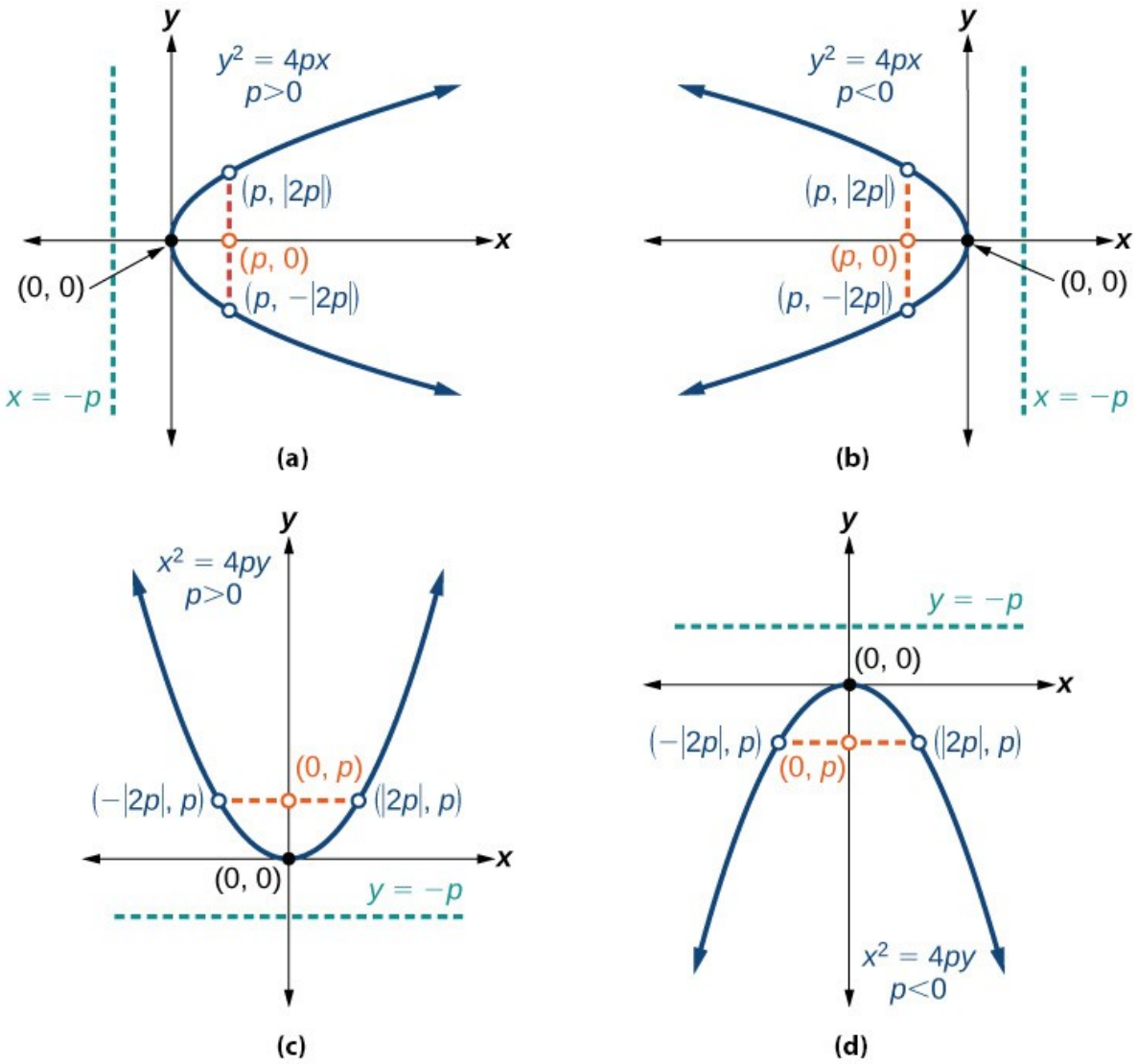
Jöfnur fleygboga með hvirfilpunkt í $(0,0)$ eru $y^2 = 4\,p\,x$ þegar x-ásinn er samhverfuás og $x^2 = 4\,p\,y$ þegar y-ásinn er samhverfuás. Þessi staðalform eru sýnd hér á eftir ásamt almennum gröfum og helstu einkennum.

STAÐALFORM FLEYGBOGA MEÐ HVIRFILPUNKT Í (0, 0)

Tafla 1 og mynd 5 draga saman helstu einkenni fleygboga með hvirfilpunkt í upphafspunkti.

Tafla 1

Samhverfuás	Jafna	Brennipunktur	Stýrilína	Endapunktar þverbrennistrengs
x-ás	$y^2 = 4\,p\,x$	$(p,0)$	$x = -p$	$(p,\pm 2p)$
y-ás	$x^2 = 4\,p\,y$	$(0,p)$	$y = -p$	$(\pm 2p,p)$

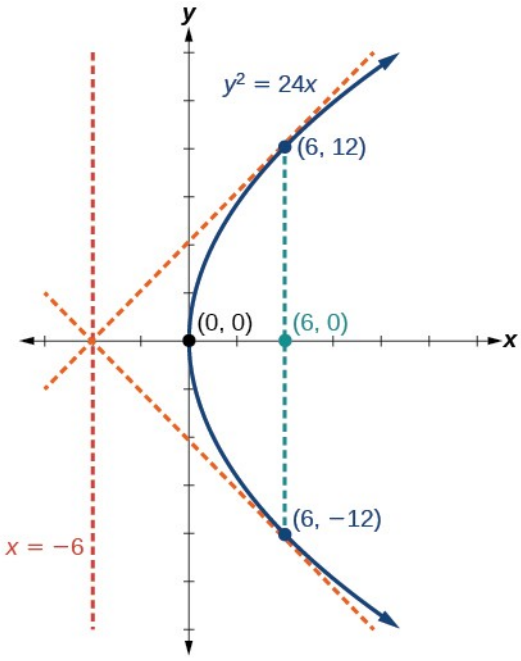


Mynd 5 (a) Þegar $p>0$ og x-ásinn er samhverfuás opnast fleygboginn til hægri. (b) Þegar $p<0$ og x-ásinn er samhverfuás opnast fleygboginn til vinstri. (c) Þegar $p>0$ og y-ásinn er samhverfuás opnast fleygboginn upp. (d) Þegar $p<0$ og y-ásinn er samhverfuás opnast fleygboginn niður.

10

Helstu einkenni fleygboga eru hvirfilpunktur, samhverfuás, brennipunktur, stýrilína og þverbrennistrengur. Sjá mynd 5. Þegar staðaljafna fleygboga með hvirfilpunkt í upphafspunkti er gefin getum við auðveldlega fundið helstu einkennin og teiknað grafið.

Lína nefnist snertill ferils ef hún sker ferilinn í nákvæmlega einum punkti. Ef við teiknum snertla fleygbogans í endapunktum þverbrennistrengsins skerast línurnar á samhverfuásnum, eins og sýnt er á mynd 6.



Mynd 6

AÐFERÐ

Teiknið graf út frá staðaljöfnu fleygboga með hvirfilpunkt í (0, 0).

1. Ákvarðið hvaða staðalform á við um gefnu jöfnuna: $y^2=4\,p\,x$ eða $x^2=4\,p\,y$.
2. Notið staðalformið sem var valið í skrefi 1 til að ákvarða samhverfuás, brennipunkt, jöfnu stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengs.
   a. Ef jafnan er á forminu $y^2=4\,p\,x$, þá
   - er x-ásinn samhverfuás, $y=0$
   - setjið 4 p jafnt stuðli x í gefnu jöfnunni og leysið fyrir p. Ef $p>0$, opnast fleygboginn til hægri. Ef $p<0$, opnast fleygboginn til vinstri.
   - notið p til að finna hnit brennipunktsins, $(p\,,0)$
   - notið p til að finna jöfnu stýrilínunnar, $x=-p$
   - notið p til að finna endapunkta þverbrennistrengsins, $(p\,,\pm 2\,p)$. Einnig má setja $x=p$ inn í upphaflegu jöfnuna.

   b. Ef jafnan er á forminu $x^2=4\,p\,y$, þá
   - er y-ásinn samhverfuás, $x=0$
   - setjið 4 p jafnt stuðli y í gefnu jöfnunni og leysið fyrir p. Ef $p>0$, opnast fleygboginn upp. Ef $p<0$, opnast fleygboginn niður.
   - notið p til að finna hnit brennipunktsins, $(0\,,p)$
   - notið p til að finna jöfnu stýrilínunnar, $y=-p$
   - notið p til að finna endapunkta þverbrennistrengsins, $(\pm 2\,p\,,p)$

10

3. Merkið brennipunkt, stýrilínu og þverbrennistreng inn og teiknið mjúkan feril sem myndar fleygbogann.

DÆMI 1

Graf fleygboga með hvirfilpunkt í (0, 0) og x-ás sem samhverfuás teiknað

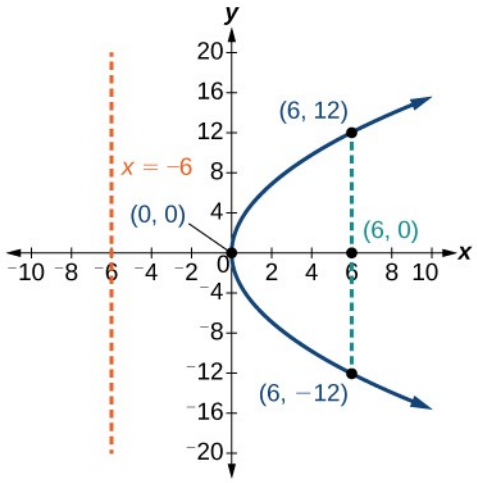
Teiknið graf $y^2=24x$. Finnið og merkið brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

Lausn

Staðalformið sem á við um gefnu jöfnuna er $y^2=4px$. x-ásinn er því samhverfuás. Af því leiðir að

- $24=4p$, svo að $p=6$. Þar sem $p>0$, opnast fleygboginn til hægri.
- hnit brennipunktsins eru $(p,0)=(6,0)$
- jafna stýrilínunnar er $x=-p=-6$
- endapunktar þverbrennistrengsins hafa sama x-hnit og brennipunkturinn. Til að finna endapunktana setjum við $x=6$ inn í upphaflegu jöfnuna: $(6,\pm 12)$

Næst merkjum við brennipunkt, stýrilínu og þverbrennistreng inn og teiknum mjúkan feril sem myndar fleygbogann. Sjá mynd 7.



Mynd 7

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 1

Teiknið graf $y^2=-16x$. Finnið og merkið brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

DÆMI 2

Graf fleygboga með hvirfilpunkt í (0, 0) og y-ás sem samhverfuás teiknað

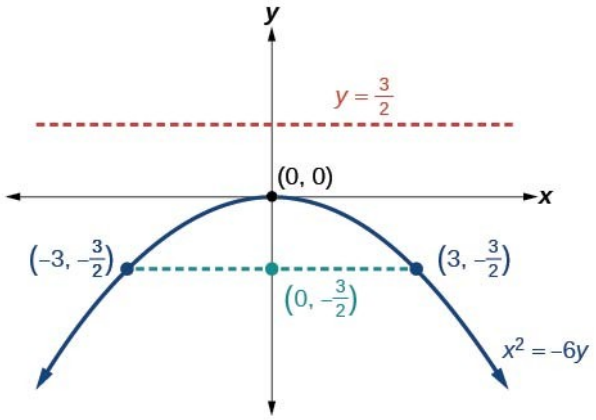
Teiknið graf $x^2 = -6y$. Finnið og merkið brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

Lausn

Staðalformið sem á við um gefnu jöfnuna er $x^2 = 4py$. y-ásinn er því samhverfuás. Af því leiðir að

- $-6 = 4p$, svo að $p = -\frac{3}{2}$. Þar sem $p < 0$, opnast fleygboginn niður.
- hnit brennipunktsins eru $(0, p) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$
- jafna stýrilínunnar er $y = -p = \frac{3}{2}$
- endapunkta þverbrennistrengsins má finna með því að setja $y = \frac{3}{2}$ inn í upphaflegu jöfnuna, $\left(\pm 3, -\frac{3}{2}\right)$

Næst merkjum við brennipunkt, stýrilínu og þverbrennistreng inn og teiknum mjúkan feril sem myndar fleygbogann.



Mynd 8

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 2

Teiknið graf $x^2 = 8y$. Finnið og merkið brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

Jöfnur fleygboga ritaðar á staðalformi

Í fyrri dæmunum notuðum við staðaljöfnu fleygboga til að reikna staðsetningu helstu einkenna hans. Við getum einnig snúið útreikningunum við og ritað jöfnu fleygboga þegar helstu einkenni hans eru gefin.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu fleygboga á staðalformi þegar brennipunktur hans og stýrilína eru gefin.

1. Ákvarðið hvort x-ásinn eða y-ásinn sé samhverfuás.
   a. Ef hnit gefna brennipunktsins eru á forminu $(p, 0)$, þá er x-ásinn samhverfuás. Notið staðalformið $y^2 = 4px$.
   b. Ef hnit gefna brennipunktsins eru á forminu $(0, p)$, þá er y-ásinn samhverfuás. Notið staðalformið $x^2 = 4py$.
2. Margfaldið $4p$.
3. Setjið gildið úr skrefi 2 inn í jöfnuna sem var valin í skrefi 1.

DÆMI 3

Jafna fleygboga rituð á staðalformi út frá brennipunkti og stýrilínu

Hver er jafna fleygbogans með brennipunkt í $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ og stýrilínu $x = \frac{1}{2}$?

Lausn

Brennipunkturinn er á forminu $(p, 0)$, svo jafnan verður á forminu $y^2 = 4px$.

- Með því að margfalda $4p$, fæst $4p = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.
- Þegar sett er inn fyrir $4p$, fæst $y^2 = 4px = -2x$.

Jafna fleygbogans er því $y^2 = -2x$.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 3

Hver er jafna fleygbogans með brennipunkt í $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ og stýrilínu $y = -\frac{7}{2}$?

Gröf fleygboga með hvirfilpunkt utan upphafspunkts teiknuð

Líkt og öðrum gröfum sem við höfum unnið með má hliðra grafi fleygboga. Ef fleygboga er hliðrað um h einingar lárétt og k einingar lóðrétt verður hvirfilpunkturinn (h, k). Við þessa hliðrun fæst staðalform jöfnunnar sem við sáum áður, þar sem x er skipt út fyrir $(x - h)$ og y fyrir $(y - k)$.

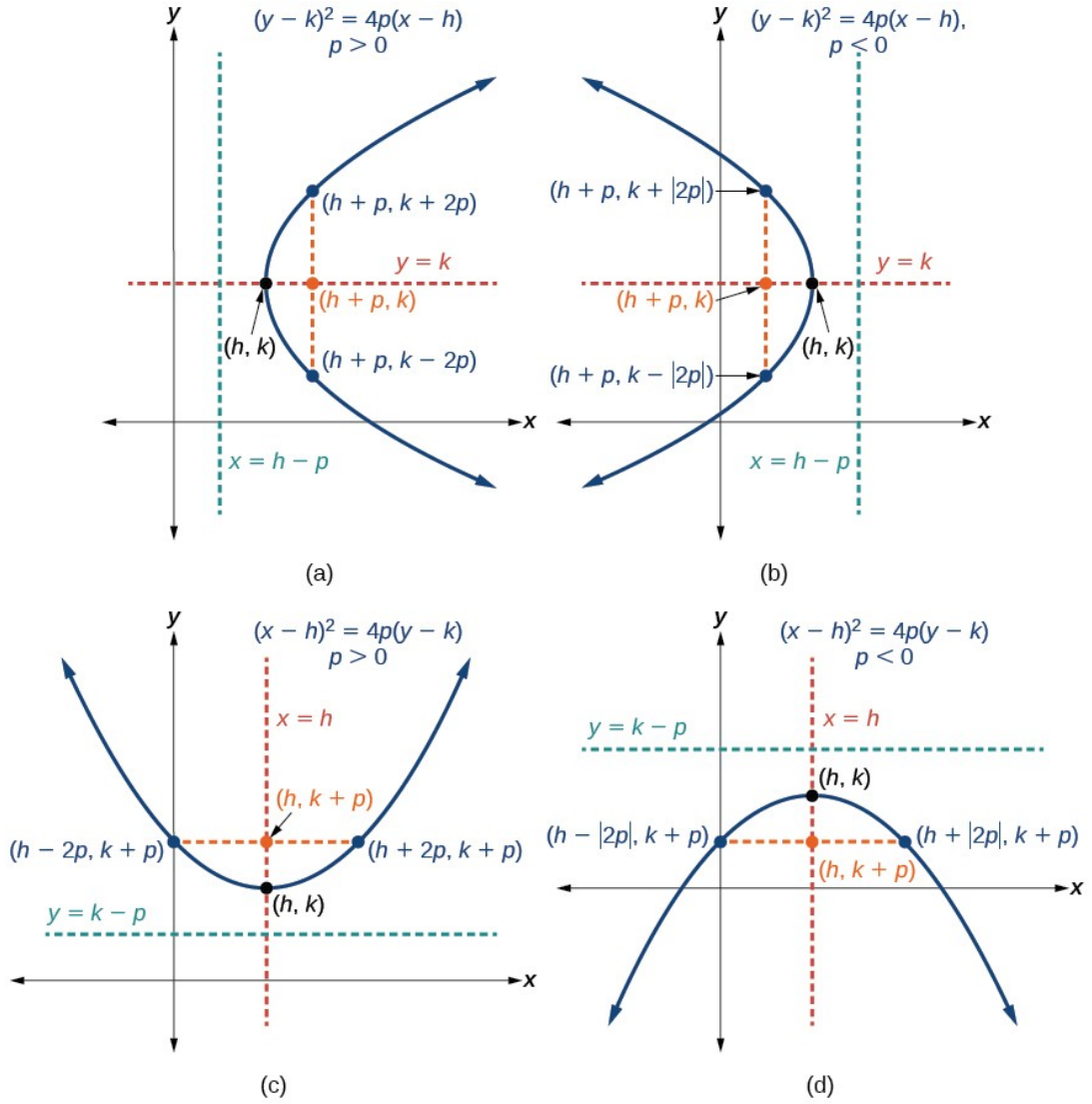
Til að teikna fleygboga með hvirfilpunkt (h, k) utan upphafspunkts notum við staðalformið $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ fyrir fleygboga með samhverfuás samsíða x-ásnum og $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ fyrir fleygboga með samhverfuás samsíða y-ásnum. Þessi staðalform eru sýnd hér á eftir ásamt almennum gröfum og helstu einkennum.

STAÐALFORM FLEYGBOGA MEÐ HVIRFILPUNKT Í (H, K)

Tafla 2 og mynd 9 draga saman helstu einkenni fleygboga með hvirfilpunkt í (h, k).

Tafla 2

Samhverfuás	Jafna	Brennipunktur	Stýrilína	Endapunktar þverbrennistrengs
$y = k$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$(h+p, k)$	$x = h-p$	$(h+p, k \pm 2p)$
$x = h$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$(h, k+p)$	$y = k-p$	$(h \pm 2p, k+p)$



Mynd 9 (a) Þegar $p>0$, opnast fleygboginn til hægri. (b) Þegar $p<0$, opnast fleygboginn til vinstri. (c) Þegar $p>0$, opnast fleygboginn upp. (d) Þegar $p<0$, opnast fleygboginn niður.

10

AÐFERÐ

Teiknið graf út frá staðaljöfnu fleygboga með hvirfilpunkt í (h, k).

1. Ákvarðið hvaða staðalform á við um gefnu jöfnuna: $(y-k)^2=4p(x-h)$ eða $(x-h)^2=4p(y-k)$.
2. Notið staðalformið sem var valið í skrefi 1 til að ákvarða hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, jöfnu stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengs.
   a. Ef jafnan er á forminu $(y-k)^2=4p(x-h)$, þá:
   - nota gefnu jöfnuna til að finna h og k fyrir hvirfilpunktinn (h,k)
   - nota gildið á k til að ákvarða samhverfuásinn, $y=k$

- setja $4p$ jafnt stuðli $(x-h)$ í gefnu jöfnunni og leysa fyrir p. Ef $p>0$, opnast fleygboginn til hægri. Ef $p<0$, opnast fleygboginn til vinstri.
- nota h, k, og p til að finna hnit brennipunktsins, $(h+p, k)$
- nota h og p til að finna jöfnu stýrilínunnar, $x=h-p$
- nota h, k, og p til að finna endapunkta þverbrennistrengsins, $(h+p, k\pm 2p)$

b. Ef jafnan er á forminu $(x-h)^2=4p(y-k)$, þá:

- nota gefnu jöfnuna til að finna h og k fyrir hvirfilpunktinn (h, k)
- nota gildið á h til að ákvarða samhverfuásinn, $x=h$
- setja $4p$ jafnt stuðli $(y-k)$ í gefnu jöfnunni og leysa fyrir p. Ef $p>0$, opnast fleygboginn upp. Ef $p<0$, opnast fleygboginn niður.
- nota h, k, og p til að finna hnit brennipunktsins, $(h, k+p)$
- nota k og p til að finna jöfnu stýrilínunnar, $y=k-p$
- nota h, k, og p til að finna endapunkta þverbrennistrengsins, $(h\pm 2p, k+p)$

3. Merkið hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og þverbrennistreng inn og teiknið mjúkan feril sem myndar fleygbogann.

DÆMI 4

Graf fleygboga með hvirfilpunkt í (h, k) og samhverfuás samsíða x-ásnum teiknað

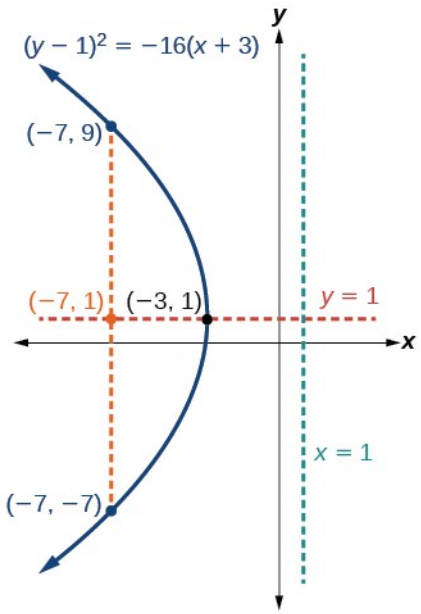
Teiknið graf $(y-1)^2=-16(x+3)$. Finnið og merkið hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

Lausn

Staðalformið sem á við um gefnu jöfnuna er $(y-k)^2=4p(x-h)$. Samhverfuásinn er því samsíða x-ásnum. Af því leiðir að

- hvirfilpunkturinn er $(h, k)=(-3, 1)$
- samhverfuásinn er $y=k=1$
- $-16=4p$, svo að $p=-4$. Þar sem $p<0$, opnast fleygboginn til vinstri.
- hnit brennipunktsins eru $(h+p, k)=(-3+(-4), 1)=(-7, 1)$
- jafna stýrilínunnar er $x=h-p=-3-(-4)=1$
- endapunktar þverbrennistrengsins eru $(h+p, k\pm 2p)=(-3+(-4), 1\pm 2(-4))$, það er $(-7, -7)$ og $(-7, 9)$

Næst merkjum við hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og þverbrennistreng inn og teiknum mjúkan feril sem myndar fleygbogann. Sjá mynd 10.



Mynd 10

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 4

Teiknið graf $(y+1)^2=4(x-8)$. Finnið og merkið hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

DÆMI 5

Graf fleygboga teiknað út frá jöfnu á almennu formi

Teiknið graf $x^2-8x-28y-208=0$. Finnið og merkið hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

Lausn

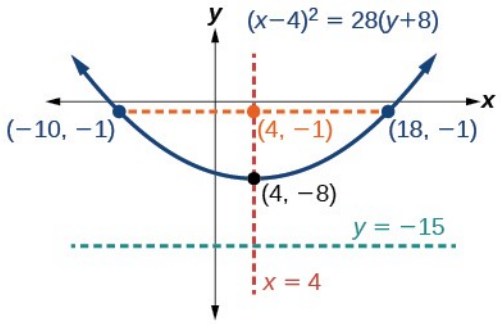
Byrjið á að rita jöfnu fleygbogans á staðalformi. Staðalformið sem á við um gefnu jöfnuna er $(x-h)^2=4p(y-k)$. Samhverfuásinn er því samsíða y-ásnum. Til að setja jöfnu fleygbogans fram á þessu formi byrjum við á að einangra liðina sem innihalda breytuna x svo hægt sé að fylla í ferninginn.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x - 28y - 208 &= 0 \\ x^2 - 8x &= 28y + 208 \\ x^2 - 8x + 16 &= 28y + 208 + 16 \\ (x-4)^2 &= 28y + 224 \\ (x-4)^2 &= 28(y+8) \\ (x-4)^2 &= 4 \cdot 7 \cdot (y+8) \end{aligned}$$

Af því leiðir að

- hvirfilpunkturinn er $(h, k) = (4, -8)$
- samhverfuásinn er $x = h = 4$
- þar sem $p = 7$, $p > 0$ og því opnast fleygboginn upp
- hnit brennipunktsins eru $(h, k+p) = (4, -8+7) = (4, -1)$
- jafna stýrilínunnar er $y = k - p = -8 - 7 = -15$
- endapunktar þverbrennistrengsins eru $(h \pm 2p, k+p) = (4 \pm 2(7), -8+7)$, það er $(-10, -1)$ og $(18, -1)$

Næst merkjum við hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og þverbrennistreng inn og teiknum mjúkan feril sem myndar fleygbogann. Sjá mynd 11.



Mynd 11

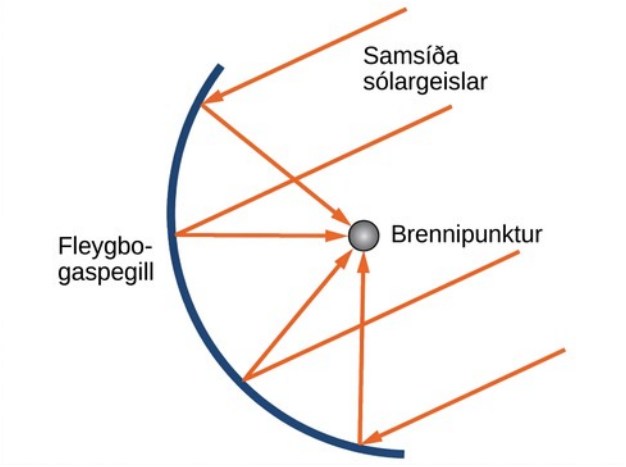
10

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 5

Teiknið graf $(x+2)^2 = -20(y-3)$. Finnið og merkið hvirfilpunkt, samhverfuás, brennipunkt, stýrilínu og endapunkta þverbrennistrengsins.

Hagnýt verkefni um fleygboga leyst

Eins og nefnt var í upphafi hlutans eru fleygbogar notaðir við hönnun margra hluta sem við notum daglega, svo sem stjörnusjónauka, hengibrúa, hljóðnema og ratsjárbúnaðar. Fleygbogaspeglar, eins og sá sem notaður er til að kveikja ólympíueldinn, hafa sérstæðan endurkastseiginleika. Þegar ljósgeislar samsíða samhverfuás fleygbogans falla á yfirborð spegilsins endurkastast ljósið beint að brennipunktinum. Sjá mynd 12. Þess vegna kviknar í ólympíukyndlinum þegar honum er haldið í brennipunkti fleygbogaspegilsins.



Mynd 12 Endurkastseiginleiki fleygboga

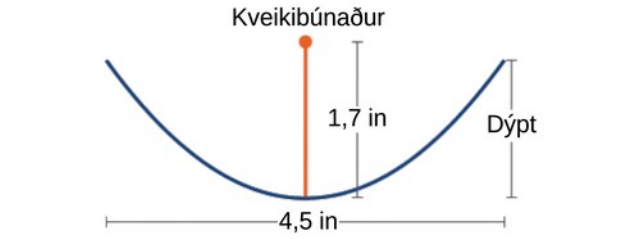
Fleygbogaspeglar geta beint orku sólarinnar í einn punkt og hækkað hitann um hundruð gráða á fáeinum sekúndum. Því eru fleygbogaspeglar notaðir í mörgum ódýrum og orkusparandi sólartækjum, svo sem sólareldavélum, sólarhitunarbúnaði og jafnvel handhægum ferðakveikjum.

DÆMI 6

Hagnýt verkefni um fleygboga leyst

Þversnið af hönnun handhægrar ferðakveikju með sólspegli er sýnt á mynd 13. Sólargeislar endurkastast af fleygbogaspeglinum að hlut sem er festur við kveikibúnaðinn. Kveikibúnaðurinn er í brennipunkti fleygbogans og því kveikja endurköstuðu geislarnir í hlutnum á fáeinum sekúndum.

- ⓐ Finnið jöfnu fleygbogans sem lýsir eldkveikjunni. Gerið ráð fyrir að hvirfilpunktur fleygbogaspegilsins sé upphafspunktur hnitakerfisins.
- ⓑ Notið jöfnuna úr lið ⓐ til að finna dýpt eldkveikjunnar.



Mynd 13 Þversnið handhægrar ferðakveikju með sólspegli

Lausn

- ⓐ Hvirfilpunktur disksins er upphafspunktur hnitakerfisins og því verður fleygboginn á staðalforminu $x^2 = 4\,p\,y$, þar sem $p > 0$. Kveikjan, sem er brennipunkturinn, er 1,7 tommum ofan við hvirfilpunkt disksins. Því fæst $p = 1{,}7$.

  $x^2 = 4\ p\ y$ Staðalform fleygboga sem opnast upp og hefur hvirfilpunkt í (0,0)

  $x^2 = 4\ (1{,}7)\ y$ Setja inn 1,7 fyrir p.

  $x^2 = 6{,}8\ y$ Margfalda.

- ⓑ Diskurinn nær $\frac{4{,}5}{2} = 2{,}25$ tommur til hvorrar hliðar frá upphafspunktinum. Við getum sett 2,25 í stað x í jöfnuna úr lið (a) til að finna dýpt disksins.

  $x^2 = 6{,}8\ y$ Jafnan sem fannst í lið (a).

  $(2{,}25)^2 = 6{,}8\ y$ Setja inn $2{,}25$ fyrir x.

  $y \approx 0{,}74$ Leysa fyrir y.

  Diskurinn er um 0,74 tommur á dýpt.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 6

Sólareldavélar sem komast fyrir á svölum hafa verið hannaðar fyrir fjölskyldur á Indlandi. Opið á diskinum er 1600 mm í þvermál. Sólargeislar endurkastast af fleygbogaspeglinum að „eldavélinni“, sem er komið fyrir 320 mm frá botninum.

ⓐ Finnið jöfnu sem lýsir þversniði sólareldavélarinnar. Gerið ráð fyrir að hvirfilpunktur fleygbogaspegilsins sé upphafspunktur hnitakerfisins og að fleygboginn opnist til hægri, það er að x-ásinn sé samhverfuás hans.

ⓑ Notið jöfnuna úr lið ⓐ til að finna dýpt eldavélarinnar.

MIÐLAR

Notið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í fleygbogum.

- Keilusnið: Fleygboginn, hluti 1 af 2
- Keilusnið: Fleygboginn, hluti 2 af 2
- Fleygbogi með lóðréttan ás
- Fleygbogi með láréttan ás

10.3 Æfingar kaflahlutans

Hugtakaspurningar

1. Skilgreinið fleygboga út frá brennipunkti hans og stýrilínu.
2. Hvað má ályktа um graf fleygboga ef jafna hans er á staðalformi, p er jákvætt og stýrilínan er lóðrétt?

3. Hvað má ályktа um graf fleygboga ef jafna hans er á staðalformi, p er neikvætt og stýrilínan er lárétt?

4. Hvaða áhrif á graf fleygboga með jöfnu á staðalformi hafa hækkandi gildi p?

5. Hvað verður um fjarlægðina milli brennipunkts og stýrilínu þegar graf fleygboga breikkar?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hvort gefna jafnan lýsi fleygboga. Ef svo er skal umrita hana á staðalform.

6.

$$y^2=4-x^2$$

7.

$$y=4x^2$$

8.

$$3x^2-6y^2=12$$

9.

$$(y-3)^2=8(x-2)$$

10.

$$y^2+12x-6y-51=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal umrita gefnu jöfnuna á staðalform og finna síðan hvirfilpunkt (V), brennipunkt (F), og stýrilínu (d) fleygbogans.

11.

$$x=8y^2$$

12.

$$y=\frac{1}{4}x^2$$

13.

$$y=-4x^2$$

14.

$$x=\frac{1}{8}y^2$$

15.

$$x=36\,y^2$$

16.

$$x=\frac{1}{36}\,y^2$$

17.

$$(x-1)^2=4(y-1)$$

18.

$$(y-2)^2=\frac{4}{5}(x+4)$$

19.

$$(y-4)^2=2(x+3)$$

20.

$$(x+1)^2=2(y+4)$$

21.

$$(x+4)^2=24(y+1)$$

22.

$$(y+4)^2=16(x+4)$$

23.

$$y^2+12\,x-6\,y+21=0$$

24.

$$x^2-4\,x-24\,y+28=0$$

25.

$$5\,x^2-50\,x-4\,y+113=0$$

26.

$$y^2-24\,x+4\,y-68=0$$

27.

$$x^2-4\,x+2\,y-6=0$$

28.

$$y^2-6y+12x-3=0$$

29.

$$3y^2-4x-6y+23=0$$

30.

$$x^2+4x+8y-4=0$$

Myndræn verkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna graf fleygbogans og merkja brennipunkt og stýrilínu.

31.

$$x=\frac{1}{8}y^2$$

32.

$$y=36x^2$$

33.

$$y=\frac{1}{36}x^2$$

34.

$$y=-9x^2$$

35.

$$(y-2)^2=-\frac{4}{3}(x+2)$$

36.

$$-5(x+5)^2=4(y+5)$$

37.

$$-6(y+5)^2=4(x-4)$$

38.

$$y^2-6y-8x+1=0$$

39.

$$x^2+8x+4y+20=0$$

40.

$$3x^2+30x-4y+95=0$$

41.

$$y^2-8x+10y+9=0$$

42.

$$x^2+4x+2y+2=0$$

43.

$$y^2+2y-12x+61=0$$

44.

$$-2x^2+8x-4y-24=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal finna jöfnu fleygbogans út frá gefnum upplýsingum um graf hans.

45. Hvirfilpunktur er $(0,0)$; stýrilína er $y=4$, brennipunktur er $(0,-4)$.

46. Hvirfilpunktur er $(0,0)$; stýrilína er $x=4$, brennipunktur er $(-4,0)$.

47. Hvirfilpunktur er $(2,2)$; stýrilína er $x=2-\sqrt{2}$, brennipunktur er $(2+\sqrt{2},2)$.

48. Hvirfilpunktur er $(-2,3)$; stýrilína er $x=-\frac{7}{2}$, brennipunktur er $\left(-\frac{1}{2},3\right)$.

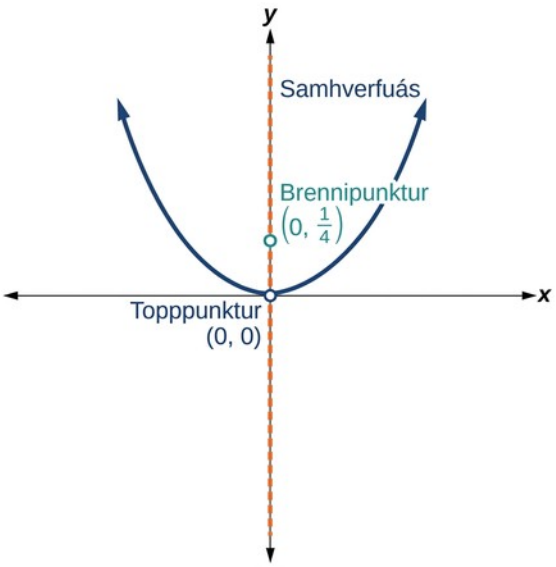
49. Hvirfilpunktur er $(\sqrt{2},-\sqrt{3})$; stýrilína er $x=2\sqrt{2}$, brennipunktur er $(0,-\sqrt{3})$.

50. Hvirfilpunktur er $(1,2)$; stýrilína er $y=\frac{11}{3}$, brennipunktur er $\left(1,\frac{1}{3}\right)$.

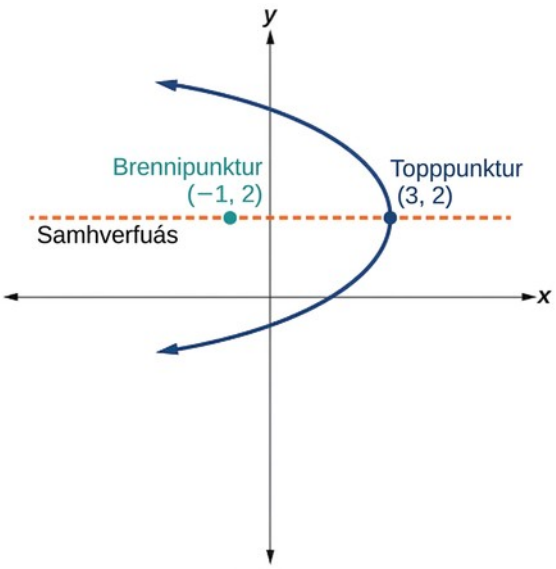
10

Í eftirfarandi verkefnum skal finna jöfnu fleygbogans út frá grafi hans.

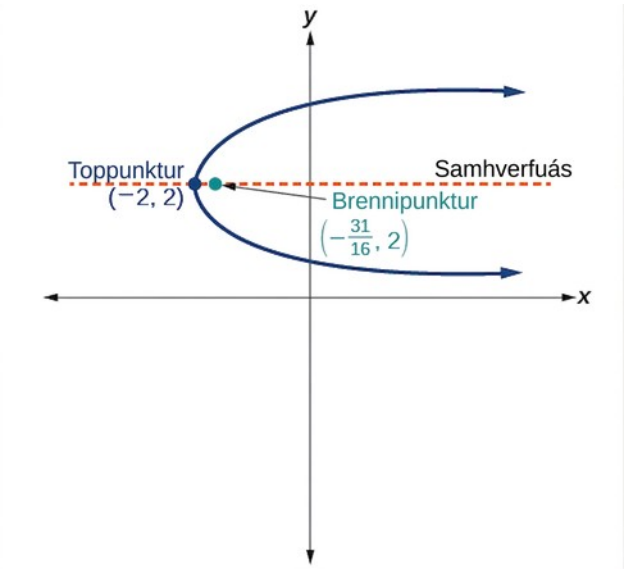
51.


y
Samhverfuás
Brennipunktur
$\left(0, \frac{1}{4}\right)$
x
Topppunktur
(0, 0)

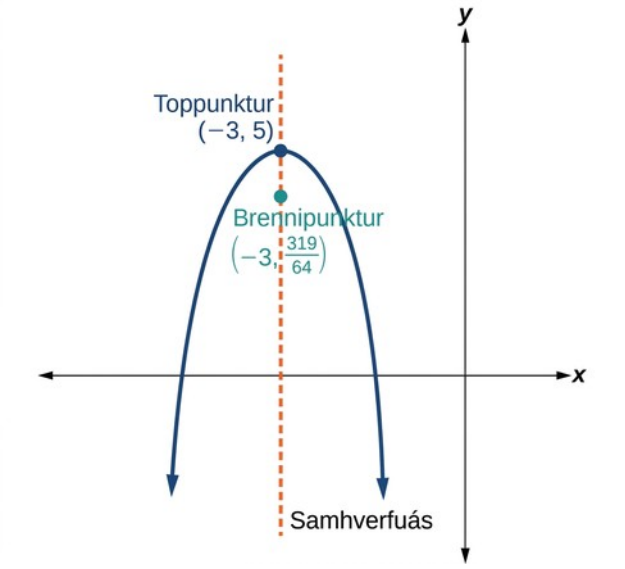
52.


y
Brennipunktur
(−1, 2)
Topppunktur
(3, 2)
Samhverfuás
x

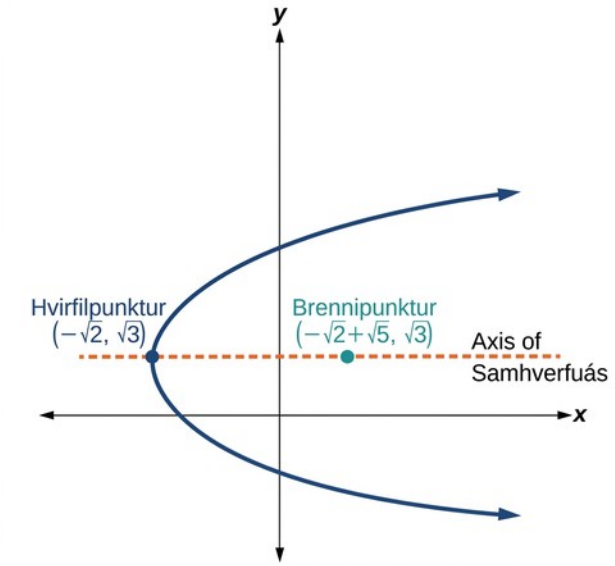
53.


y
Toppunktur
(−2, 2)
Samhverfuás
Brennipunktur
$\left(-\frac{31}{16}, 2\right)$
x

54.


y
Toppunktur
(−3, 5)
Brennipunktur
$\left(-3, \frac{319}{64}\right)$
x
Samhverfuás

55.



Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi verkefnum eru hvirfilpunktur og endapunktar þverbrennistrengs fleygboga gefnir. Finnið jöfnuna.

56. $V(0,0)$, endapunktar $(2,1), (-2,1)$

57. $V(0,0)$, endapunktar $(-2,4), (-2,-4)$

58. $V(1,2)$, endapunktar $(-5,5), (7,5)$

59. $V(-3,-1)$, endapunktar $(0,5), (0,-7)$

60. $V(4,-3)$, endapunktar $\left(5,-\frac{7}{2}\right), \left(3,-\frac{7}{2}\right)$

Hagnýt verkefni

61. Spegill í bílframljósi hefur fleygbogalaga þversnið og ljósaperan er í brennipunktinum. Á skýringarmynd er jafna fleygbogans gefin sem $x^2 = 4y$. Í hvaða hnitum á að koma ljósaperunni fyrir?

62. Ef við viljum smíða spegilinn úr fyrra verkefni þannig að brennipunkturinn sé í $(0;0{,}25)$, hver á jafna fleygbogans þá að vera?

63. Gervihnattadiskur hefur lögun snúðfleygboga. Það þýðir að hann myndast þegar fleygboga er snúið um samhverfuás hans. Móttakaranum á að koma fyrir í brennipunktinum. Ef op disksins er 12 fet á breidd og diskurinn er 4 fet á dýpt í miðju, hvar á þá að koma móttakaranum fyrir?

64. Skoðið gervihnattadiskinn úr fyrra verkefni. Ef op disksins er 8 fet á breidd og diskurinn er 2 fet á dýpt, hvar á þá að koma móttakaranum fyrir?

65. Endurkastarinn í leitarljósi hefur lögun snúðfleygboga. Ljósgjafi er 1 fet frá botninum eftir samhverfuásnum. Finnið dýptina ef op leitarljóssins er 3 fet á breidd.

66. Finnið dýpt endurkastarans í leitarljósinu úr fyrra verkefni ef ljósgjafinn er 6 tommur frá botninum eftir samhverfuásnum og opið er 4 fet á breidd.

67. Bogi er í laginu eins og fleygbogi. Haf hans er 100 fet og mesta hæð hans 20 fet. Finnið jöfnu fleygbogans og hæð bogans í 40 feta fjarlægð frá miðju.

68. Gerið ráð fyrir að haf bogans úr fyrra verkefni sé 160 fet og mesta hæð hans 40 fet. Finnið jöfnu fleygbogans og fjarlægðina frá miðju þar sem hæðin er 20 fet.

69. Hlut er skotið eftir fleygbogaferli sem gefinn er með $y = -x^2 + 96x$, þar sem x er lárétt vegalengd í fetum og y er hæðin. Finnið mestu hæð sem hluturinn nær.

70. Gerið ráð fyrir að ferill hlutarins úr fyrra verkefni sé gefinn með $y = -0{,}5\ x^2 + 80\ x$. Finnið láréttu vegalengdina sem hluturinn fer þar til hann nær mestri hæð.

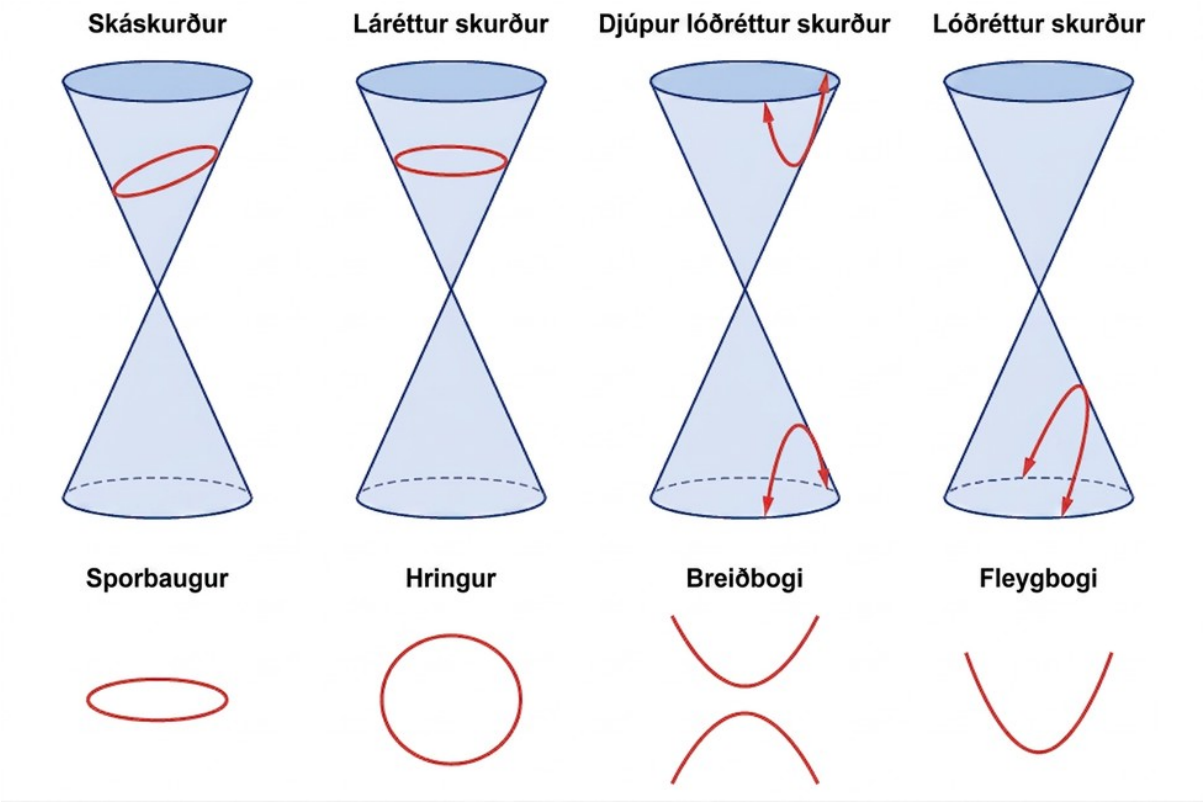
10.4 Snúningur hnitása

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

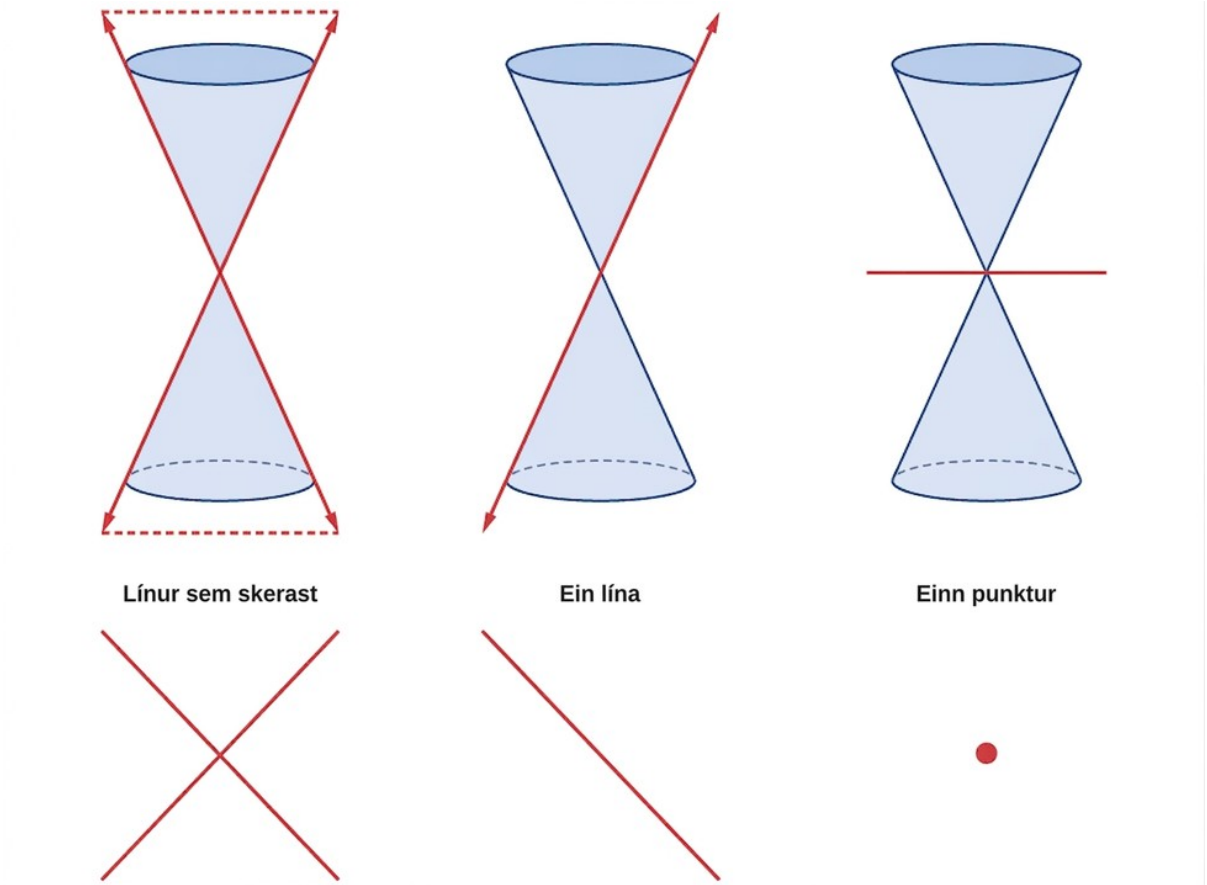
- þekkja óúrkynjuð keilusnið út frá jöfnum þeirra á almennu formi.
- nota formúlur fyrir snúning hnitása.
- rita jöfnur snúinna keilusniða á staðalformi.
- þekkja keilusnið án þess að snúa hnitásunum.

Eins og við höfum séð myndast keilusnið þegar plan sker tvær réttar hringkeilur sem liggja odd við odd og ná óendanlega langt í gagnstæðar áttir; slíkt form köllum við einnig tvíkeilu. Hvernig tvíkeilan er skorin ræður því hvaða keilusnið myndast í skurðinum. Hringur myndast þegar keila er skorin með plani sem er hornrétt á samhverfuás keilunnar. Sporbaugur myndast þegar annar keiluhelmingurinn er skorinn með skáhallandi plani sem er ekki hornrétt á samhverfuásinn. Fleygbogi myndast þegar planið sker gegnum efri eða neðri hluta tvíkeilunnar, en breiðbogi myndast þegar planið sker bæði efri og neðri hluta hennar. Sjá mynd 1.



Mynd 1 Óúrkynjuðu keilusniðin

Sporbaugar, hringir, breiðbogar og fleygbogar eru stundum kölluð óúrkynjuð keilusnið, til aðgreiningar frá úrkynjuðu keilusniðunum sem sýnd eru á mynd 2. Úrkynjað keilusnið myndast þegar plan sker tvíkeiluna og fer í gegnum oddpunkt hennar. Eftir horni plansins eru þrjár gerðir úrkynjaðra keilusniða mögulegar: punktur, lína eða tvær línur sem skerast.



Mynd 2 Úrkynjuð keilusnið

Óúrkynjuð keilusnið þekkt á almennu formi

Í fyrri hlutum þessa kafla höfum við einkum skoðað jöfnur óúrkynjaðra keilusniða á staðalformi. Nú snúum við okkur að almennu formi jöfnunnar, en það má nota fyrir hvaða keilusnið sem er. Almenna formið er sett jafnt og núll, og liðirnir og stuðlarnir eru í tiltekinni röð, eins og hér er sýnt.

$$A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

þar sem A, B, og C eru ekki öll núll. Við getum notað gildi stuðlanna til að ákvarða hvaða keilusnið tiltekin jafna táknar.

Ef til vill takið þið eftir að í jöfnunni á almennu formi er liðurinn $x\,y$, sem við höfum ekki séð í neinni jöfnu á staðalformi. Eins og við sjáum síðar veldur liðurinn $x\,y$ snúningi keilusniðsins þegar B er ekki núll.

Tafla 1

Keilusnið	**Dæmi**
sporbaugur	$4x^2+9y^2=1$
hringur	$4x^2+4y^2=1$
breiðbogi	$4x^2-9y^2=1$
fleygbogi	$4x^2=9y$ eða $4y^2=9x$
ein lína	$4x+9y=1$
línur sem skerast	$(x-4)(y+4)=0$
samsíða línur	$(x-4)(x-9)=0$
punktur	$4x^2+4y^2=0$
ekkert graf	$4x^2+4y^2=-1$

ALMENNT FORM KEILUSNIÐA

Keilusnið hefur almenna formið

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

þar sem A, B, og C eru ekki öll núll.

Tafla 2 tekur saman mismunandi keilusnið þegar $B=0$, og A og C eru rauntölur frábrugðnar núlli. Það merkir að keilusniðinu hefur ekki verið snúið.

Tafla 2

sporbaugur	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, $A\neq C$ og $AC>0$
hringur	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, $A=C$
breiðbogi	$Ax^2-Cy^2+Dx+Ey+F=0$ eða $-Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, þar sem A og C eru jákvæð
fleygbogi	$Ax^2+Dx+Ey+F=0$ eða $Cy^2+Dx+Ey+F=0$

AÐFERÐ

Þekkið gerð keilusniðs út frá jöfnu þess.

1. Ritið jöfnuna á almenna forminu $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.
2. Finnið gildi A og C út frá almenna forminu.

10

a. Ef A og C eru frábrugðin núlli, hafa sama formerki og eru ekki jöfn, getur grafið verið sporbaugur.
b. Ef A og C eru jöfn, frábrugðin núlli og hafa sama formerki, getur grafið verið hringur.
c. Ef A og C eru frábrugðin núlli og hafa gagnstæð formerki, getur grafið verið breiðbogi.
d. Ef annaðhvort A eða C er núll getur grafið verið fleygbogi.

Ef B = 0 hefur keilusniðið lóðréttan og/eða láréttan ás. Ef B er ekki jafnt 0, eins og sýnt er hér á eftir, er keilusniðinu snúið. Takið eftir orðalaginu „getur verið“ í skilgreiningunum. Ástæðan er sú að jafnan táknar hugsanlega ekkert keilusnið, eftir gildum A, B, C, D, E og F. Úrkynjun hrings eða sporbaugs er til dæmis punktur: $A\,x^2+B\,y^2=0$, þegar A og B hafa sama formerki. Úrkynjun breiðboga er tvær línur sem skerast:
$A\,x^2+B\,y^2=0$, þegar A og B hafa gagnstæð formerki. Jafnan
$A\,x^2+B\,y^2+1=0$, þegar A og B eru jákvæð táknar hins vegar ekkert graf, því engin raðpör rauntalna uppfylla hana.

SÝNIDÆMI 1

Keilusnið þekkt á almennu formi

Þekkið graf hverrar eftirfarandi jöfnu. Öll keilusniðin eru óúrkynjuð.

1. ⓐ $4\,x^2-9\,y^2+36\,x+36\,y-125=0$
2. ⓑ $9\,y^2+16\,x+36\,y-10=0$
3. ⓒ $3\,x^2+3\,y^2-2\,x-6\,y-4=0$
4. ⓓ $-25\,x^2-4\,y^2+100\,x+16\,y+20=0$

Lausn

- ⓐ Þegar jafnan er rituð á almenna forminu fæst $A=4$ og $C=-9$, svo við sjáum að A og C hafa gagnstæð formerki. Graf jöfnunnar er breiðbogi.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$4x^2 + 0xy + (-9)y^2 + 36x + 36y + (-125) = 0$$

- ⓑ Þegar jafnan er rituð á almenna forminu fæst $A=0$ og $C=9$. Við getum ályktað að jafnan lýsi fleygboga þar sem A er núll.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$0x^2 + 0xy + 9y^2 + 16x + 36y + (-10) = 0$$

- ⓒ Þegar jafnan er rituð á almenna forminu fæst $A=3$ og $C=3$. Þar sem $A=C$, er graf jöfnunnar hringur.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$3x^2 + 0xy + 3y^2 + (-2)x + (-6)y + (-4) = 0$$

- ⓓ Þegar jafnan er rituð á almenna forminu fæst $A=-25$ og $C=-4$. Þar sem $AC>0$ og $A\neq C$, er graf jöfnunnar sporbaugur.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$(-25)x^2 + 0xy + (-4)y^2 + 100x + 16y + 20 = 0$$

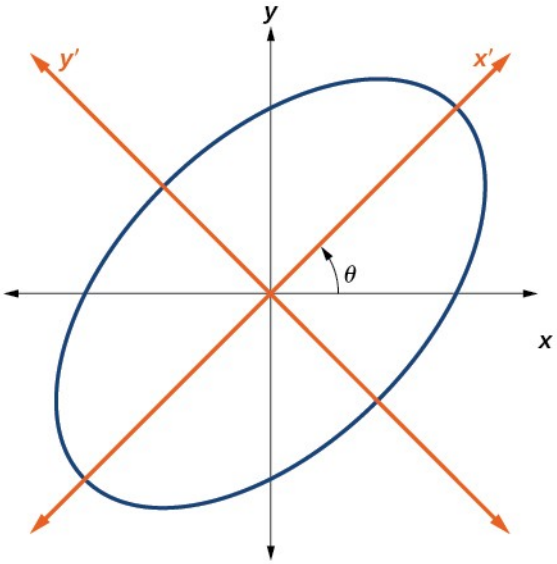
REYNDU SJÁLF(UR) NR. 1

Þekkið graf hverrar eftirfarandi jöfnu. Öll keilusniðin eru óúrkynjuð.

1. ⓐ $16y^2 - x^2 + x - 4y - 9 = 0$
2. ⓑ $16x^2 + 4y^2 + 16x + 49y - 81 = 0$

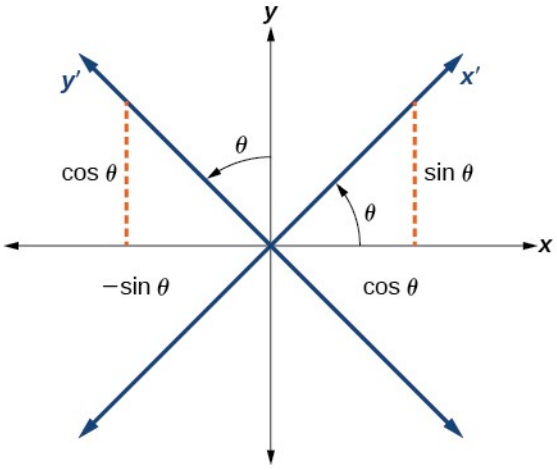
Ný framsetning jöfnu fundin eftir snúning um gefið horn

Hingað til höfum við skoðað jöfnur keilusniða án xy-liðar, þannig að gröfin liggja samsíða x- og y-ásunum. Þegar xy-lið er bætt við er keilusniðinu snúið um upphafspunktinn. Ef x- og y-ásunum er snúið um horn, til dæmis θ, má líta svo á að hver punktur í planinu hafi tvær framsetningar: (x, y) í kartesíska planinu með upphaflegu x- og y-ásunum og (x', y') í nýja planinu sem nýju, snúnu ásarnir skilgreina. Þeir nefnast x′-ás og y′-ás. Sjá mynd 3.



Mynd 3 Graf snúna sporbaugsins $x^2 + y^2 - xy - 15 = 0$

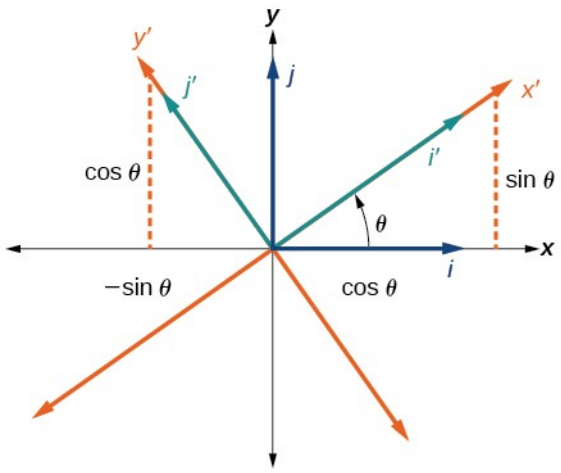
Við finnum sambandið milli x og y í kartesíska planinu annars vegar og x' og y' í nýja snúna planinu hins vegar. Sjá mynd 4.



Mynd 4 Kartesíska planið með x- og y-ásum og x′- og y′-ásarnir sem fást með snúningi um hornið θ.

Upphaflegu x- og y-hnitásarnir hafa einingarvigrana i og j. Snúnu hnitásarnir hafa einingarvigrana i' og j'. Hornið θ nefnist snúningshorn. Sjá mynd 5. Við getum ritað nýju einingarvigrana með hjálp þeirra upphaflegu.

$$i' = \cos\ \theta i + \sin\ \theta j$$
$$j' = -\sin\ \theta i + \cos\ \theta j$$



Mynd 5 Samband gamla og nýja hnitaplansins.

Lítum á vigur u í nýja hnitaplaninu. Hann má setja fram með hnitásum þess.

$$u = x'\ i' + y'\ j'$$

$u = x'\ (i\cos\theta + j\sin\theta) + y'\ (-i\sin\theta + j\cos\theta)$ Setja inn.
$u = i\ x'\cos\theta + j\ x'\sin\theta - i\ y'\sin\theta + j\ y'\cos\theta$ Margfalda inn í sviga.
$u = i\ x'\ \cos\ \theta - i\ y'\ \sin\ \theta + j\ x'\ \sin\ \theta + j\ y'\ \cos\ \theta$ Beita víxlreglu.
$u = (x'\ \cos\ \theta - y'\ \sin\ \theta)\ i + (x'\ \sin\ \theta + y'\ \cos\ \theta)\ j$ Þátta með hópun.
Þar sem $u = x'\ i' + y'\ j'$, getum við ritað x og y með nýja hnitakerfinu.

$$x = x'\ \cos\ \theta - y'\ \sin\ \theta$$
og
$$y = x'\ \sin\ \theta + y'\ \cos\ \theta$$

10

SNÚNINGSJÖFNUR

Ef punkturinn (x, y) í kartesíska planinu er settur fram í nýju hnitaplani þar sem ásarnir fást með snúningi um hornið θ frá jákvæða x-ásnum, þá eru hnit punktsins miðað við nýju ásana (x', y'). Snúningsjöfnurnar hér á eftir lýsa sambandinu milli (x, y) og (x', y'):

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

og

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

AÐFERÐ

Finnið nýja framsetningu jöfnu keilusniðs eftir snúning um gefið horn.

1. Finnið x og y þar sem $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ og $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$.
2. Setjið segðirnar fyrir x og y inn í gefnu jöfnuna og einfaldið síðan.
3. Ritið jöfnurnar með x' og y' á staðalformi.

SÝNIDÆMI 2

Ný framsetning jöfnu fundin eftir snúning um gefið horn

Finnið nýja framsetningu jöfnunnar $2x^2 - xy + 2y^2 - 30 = 0$ eftir snúning um hornið $\theta = 45^\circ$.

Lausn

Finnið x og y, þar sem $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ og $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$.

Þar sem $\theta = 45^\circ$,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(45^\circ) - y' \sin(45^\circ) \\ x &= x' \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - y' \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ x &= \tfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} y &= x' \sin(45^\circ) + y' \cos(45^\circ) \\ y &= x' \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + y' \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ y &= \tfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Setjið $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$ og $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$ inn í $2x^2 - xy + 2y^2 - 30 = 0$.

$$2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 30 = 0$$

Einfaldið.

$$2\,\frac{(x' - y')(x' - y')}{2} - \frac{(x' - y')(x' + y')}{2} + 2\,\frac{(x' + y')(x' + y')}{2} - 30$$

$= 0$ Margfalda lið fyrir lið

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 - \frac{(x'^2 - y'^2)}{2} + x'^2 + 2x'y' + y'^2 - 30$$

$= 0$ Sameina samstæð liði.

$2\,x'^{2}+2\,y'^{2}-\dfrac{\left(x'^{2}-y'^{2}\right)}{2}=30$ Sameina samstæð liði.

$2\left(2\,x'^{2}+2\,y'^{2}-\dfrac{\left(x'^{2}-y'^{2}\right)}{2}\right)=2\,(30)$ Margfalda báðar hliðar með 2.

$4\,x'^{2}+4\,y'^{2}-\left(x'^{2}-y'^{2}\right)=60$ Einfalda.

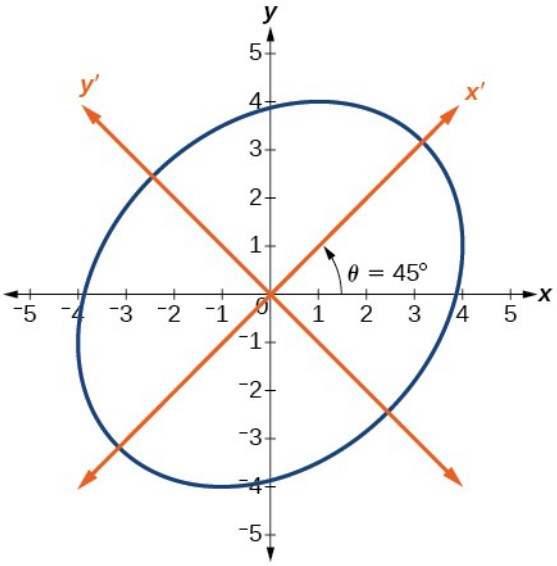
$4\,x'^{2}+4\,y'^{2}-x'^{2}+y'^{2}=60$ Margfalda inn í sviga.

$\dfrac{3\,x'^{2}}{60}+\dfrac{5\,y'^{2}}{60}=\dfrac{60}{60}$ Setja jafnt og 1.

Ritið jöfnurnar með x' og y' á staðalformi.

$$\frac{x'^{2}}{20}+\frac{y'^{2}}{12}=1$$

Jafnan lýsir sporbaugi. Mynd 6 sýnir grafið.



Mynd 6

Jöfnur snúinna keilusniða ritaðar á staðalformi

Við getum nú fundið staðalform keilusniðs þegar snúningshorn er gefið. Næst lærum við að ummynda jöfnu keilusniðs á forminu $A\,x^{2}+B\,x\,y+C\,y^{2}+D\,x+E\,y+F=0$ yfir á staðalform með því að snúa hnitásunum. Til þess ritum við almenna formið sem jöfnu í hnitakerfinu með x' og y', án $x'\,y'$-liðar, með því að snúa ásunum um horn θ sem uppfyllir

$$\cot(2\theta)=\frac{A-C}{B}$$

Við höfum þegar séð að hvert keilusnið má setja fram með annars stigs jöfnunni

$$A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

þar sem A, B, og C eru ekki öll núll. Ef $B\neq 0$, kemur hins vegar fyrir $x\,y$-liður sem kemur í veg fyrir að við getum ritað jöfnuna á staðalformi. Til að eyða honum getum við snúið ásunum um hvasst horn θ þar sem $\cot(2\theta)=\dfrac{A-C}{B}$.

- Ef $\cot(2\theta)>0$, er 2θ í fyrsta fjórðungi og θ liggur á bilinu $(0^\circ, 45^\circ)$.
- Ef $\cot(2\theta)<0$, er 2θ í öðrum fjórðungi og θ liggur á bilinu $(45^\circ, 90^\circ)$.
- Ef $A=C$, þá er $\theta=45^\circ$.

AÐFERÐ

Ritið jöfnu keilusniðs í $x'\,y'$-kerfinu án $x'\,y'$-liðar með x' og y', þar sem x'- og y'-ásarnir fást með snúningi staðalásanna um θ gráður.

1. Finnið $\cot(2\theta)$.
2. Finnið $\sin\theta$ og $\cos\theta$.
3. Setjið $\sin\theta$ og $\cos\theta$ inn í $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ og $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$.
4. Setjið segðirnar fyrir x og y inn í gefnu jöfnuna og einfaldið síðan.
5. Ritið jöfnurnar með x' og y' á staðalformi miðað við snúnu ásana.

SÝNIDÆMI 3

Jafna rituð miðað við x′- og y′-ásana án x′y′-liðar

Ritið jöfnuna $8\,x^2-12\,x\,y+17\,y^2=20$ í $x'\,y'$-kerfinu án $x'\,y'$-liðar.

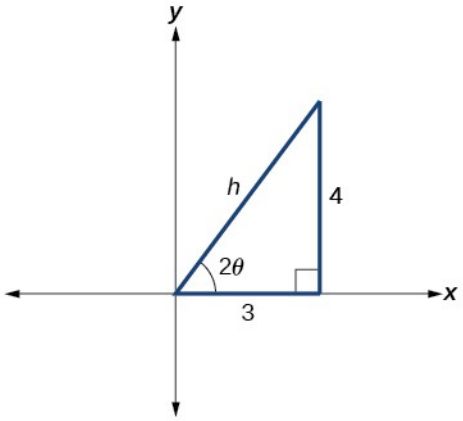
Lausn

Fyrst finnum við $\cot(2\theta)$. Sjá mynd 7.

$$8\,x^2-12\,x\,y+17\,y^2=20 \Rightarrow A=8,\quad B=-12\quad\text{og}\quad C=17$$

$$\cot(2\theta)=\frac{A-C}{B}=\frac{8-17}{-12}$$

$$\cot(2\theta)=\frac{-9}{-12}=\frac{3}{4}$$



Mynd 7

$$\cot(2\theta)=\frac{3}{4}=\frac{\text{aðlæg}}{\text{mótlæg}}$$

Lengd langhliðarinnar er því

$$\begin{aligned} 3^2+4^2&=h^2\\ 9+16&=h^2\\ 25&=h^2\\ h&=5 \end{aligned}$$

Næst finnum við $\sin\theta$ og $\cos\theta$.

$$\sin\ \theta=\sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5}{5}-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5-3}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin\ \theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\ \theta=\sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5}{5}+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5+3}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\cos\ \theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Setjið gildi $\sin\theta$ og $\cos\theta$ inn í $x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ og $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$.

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\ \theta-y'\sin\ \theta\\ x&=x'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-y'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ x&=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

og

$$y = x' \sin\ \theta + y' \cos\ \theta$$
$$y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$y = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}$$

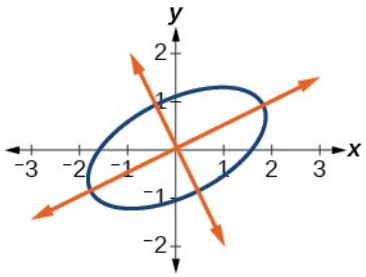
Setjið segðirnar fyrir x og y inn í gefnu jöfnuna og einfaldið síðan.

$$8\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 12\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 17\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 = 20$$
$$8\left(\frac{(2x'-y')(2x'-y')}{5}\right) - 12\left(\frac{(2x'-y')(x'+2y')}{5}\right) + 17\left(\frac{(x'+2y')(x'+2y')}{5}\right) = 20$$
$$8\left(4x'^2 - 4x'y' + y'^2\right) - 12\left(2x'^2 + 3x'y' - 2y'^2\right) + 17\left(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2\right) = 100$$
$$32x'^2 - 32x'y' + 8y'^2 - 24x'^2 - 36x'y' + 24y'^2 + 17x'^2 + 68x'y' + 68y'^2 = 100$$
$$25x'^2 + 100y'^2 = 100$$
$$\frac{25}{100}x'^2 + \frac{100}{100}y'^2 = \frac{100}{100}$$

Ritið jöfnurnar með x' og y' á staðalformi miðað við nýja hnitakerfið.

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

Mynd 8 sýnir graf sporbaugsins.



Mynd 8

10

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 2

Ritið jöfnuna $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$ í $x'y'$-kerfinu án $x'y'$-liðar.

SÝNIDÆMI 4

Graf jöfnu án x'y'-liðar

Teiknið graf eftirfarandi jöfnu miðað við $x'y'$-kerfið:

$$x^2 + 12xy - 4y^2 = 30$$

Lausn

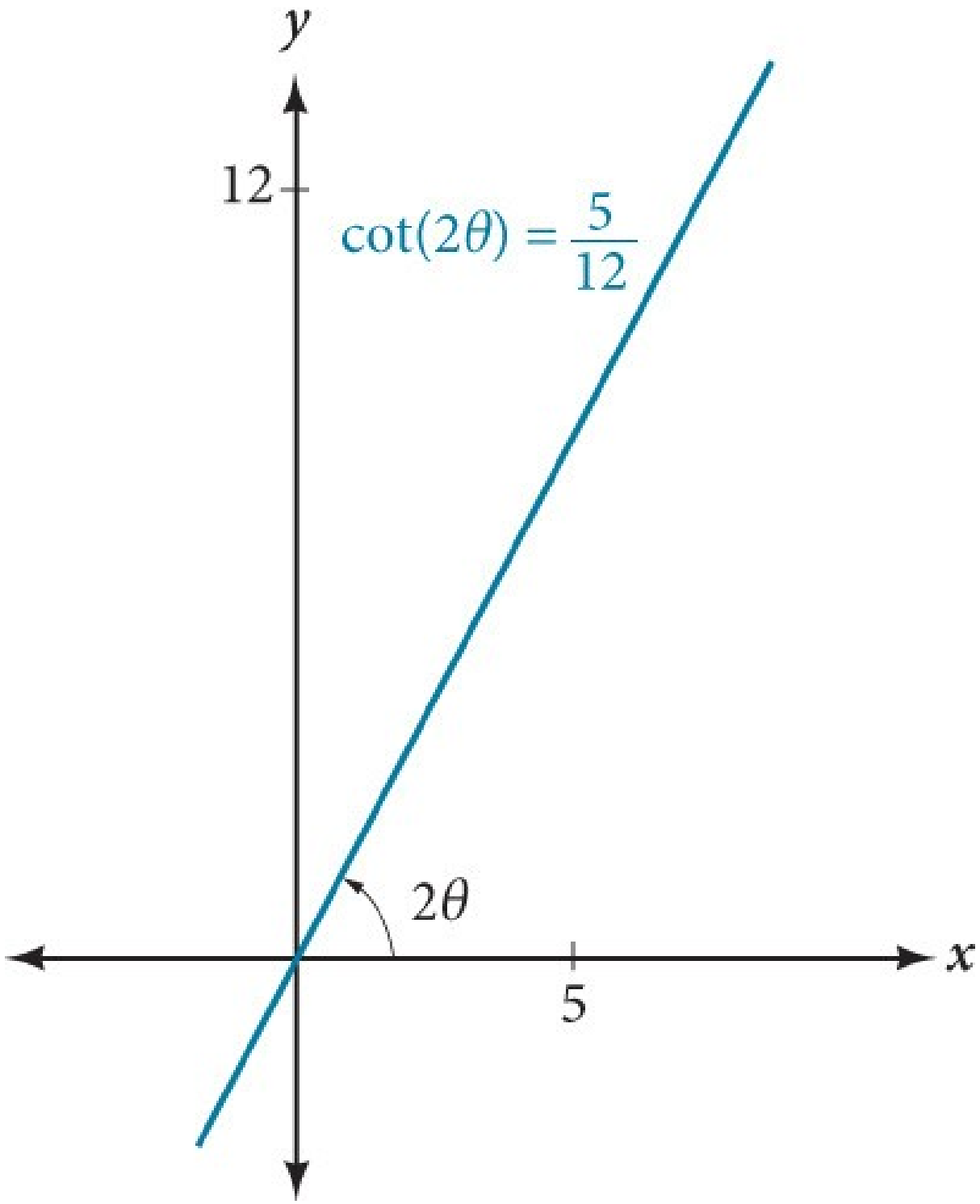
Fyrst finnum við $\cot(2\theta)$.

$$x^2+12xy-4y^2=20 \Rightarrow A=1, B=12, \text{og } C=-4$$

$$\begin{aligned}\cot(2\theta) &= \frac{A-C}{B} \\ \cot(2\theta) &= \frac{1-(-4)}{12} \\ \cot(2\theta) &= \frac{5}{12}\end{aligned}$$

Þar sem $\cot(2\theta)=\frac{5}{12}$, getum við teiknað viðmiðunarþríhyrning eins og á mynd 9.

10



Mynd 9

$$\cot(2\theta)=\frac{5}{12}=\frac{\text{aðlæg}}{\text{mótlæg}}$$

Lengd langhliðarinnar er því

$$\begin{aligned} 5^2 + 12^2 &= h^2 \\ 25 + 144 &= h^2 \\ 169 &= h^2 \\ h &= 13 \end{aligned}$$

Næst finnum við $\sin\theta$ og $\cos\theta$. Við notum hálfhornssamsemdir.

$$\sin\ \theta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{13}-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{13}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\ \theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{13}+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{13}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Nú finnum við x og y.

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\ \theta - y'\sin\ \theta \\ x &= x'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - y'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \\ x &= \frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} y &= x'\sin\ \theta + y'\cos\ \theta \\ y &= x'\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + y'\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \\ y &= \frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Nú setjum við $x=\frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}$ og $y=\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}$ inn í $x^2+12xy-4y^2=30$.

10

$$\left(\frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}\right)^2+12\left(\frac{3x'-2y'}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}\right)-4\left(\frac{2x'+3y'}{\sqrt{13}}\right)^2$$

$$=30$$

$$\left(\frac{1}{13}\right)\left[(3x'-2y')^2+12(3x'-2y')(2x'+3y')\right.$$

$$\left.-4(2x'+3y')^2\right]=30$$

Þátta.

$$\left(\frac{1}{13}\right)\left[9x'^2-12x'y'+4y'^2+12(6x'^2+5x'y'-6y'^2)\right.$$

$$\left.-4(4x'^2+12x'y'+9y'^2)\right]=30$$

Margfalda.

$$\left(\frac{1}{13}\right)\left[9\,x'^{2}-12\,x'\,y'+4\,y'^{2}+72\,x'^{2}+60\,x'\,y'-72\,y'^{2}\right.$$

$$\left.-16\,x'^{2}-48\,x'\,y'-36\,y'^{2}\right]=30$$

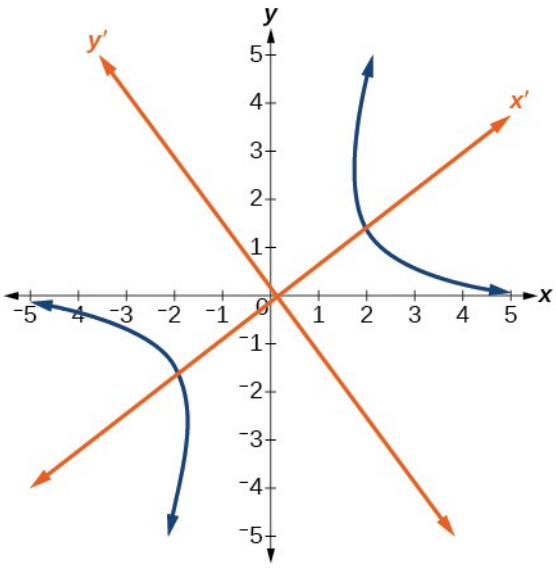
Margfalda inn í sviga.

$\left(\frac{1}{13}\right)[65\,x'^{2}-104\,y'^{2}]=30$ Sameina samstæð liði.

$65\,x'^{2}-104\,y'^{2}=390$ Margfalda.

$\frac{x'^{2}}{6}-\frac{4\,y'^{2}}{15}=1$ Deila með 390.

Mynd 10 sýnir graf breiðbogans $\frac{x'^{2}}{6}-\frac{4\,y'^{2}}{15}=1$.



Mynd 10

Keilusnið þekkt án þess að snúa hnitásum

Nú er hringnum lokað. Hvernig þekkjum við gerð keilusniðs sem jafna lýsir? Hvað gerist þegar hnitásunum er snúið? Rifjum upp að almennt form keilusniðs er

$$A\,x^{2}+B\,x\,y+C\,y^{2}+D\,x+E\,y+F=0$$

Ef við notum snúningsformúlurnar á þessa jöfnu fáum við formið

$$A'\,x'^{2}+B'\,x'\,y'+C'\,y'^{2}+D'\,x'+E'\,y'+F'=0$$

Sýna má að $B^2-4\,A\,C=B'^2-4\,A'\,C'$. Segðin breytist ekki við snúning og nefnist því óbreyta. Aðgreinirinn $B^2-4\,A\,C$, er óbreyta og helst óbreyttur við snúning. Aðgreinirinn breytist ekki og því getum við notað gildi hans til að þekkja keilusniðið.

KEILUSNIÐ ÞEKKT MEÐ AÐGREININUM

Ef jafnan $A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$ er ummynduð með snúningi hnitása í jöfnuna $A'\,x'^2+B'\,x'\,y'+C'\,y'^2+D'\,x'+E'\,y'+F'=0$, þá er $B^2-4\,A\,C=B'^2-4\,A'\,C'$.

Jafnan $A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$ lýsir sporbaugi, fleygboga eða breiðboga, eða úrkynjuðu tilviki eins þeirra.

Ef aðgreinirinn $B^2-4\,A\,C$, er

- <0, er keilusniðið sporbaugur
- $=0$, er keilusniðið fleygbogi
- >0, er keilusniðið breiðbogi

SÝNIDÆMI 5

Keilusniðið þekkt án þess að snúa hnitásum

Þekkið keilusniðið í hverju eftirfarandi tilviki án þess að snúa hnitásunum.

1. ⓐ $5\,x^2+2\sqrt{3}\,x\,y+2\,y^2-5=0$
2. ⓑ $5\,x^2+2\sqrt{3}\,x\,y+12\,y^2-5=0$

Lausn

- ⓐ Byrjum á að finna A, B, og C.
  $\underbrace{5}_{A}\,x^2+\underbrace{2\sqrt{3}}_{B}\,x\,y+\underbrace{2}_{C}\,y^2-5=0$
  Nú finnum við aðgreininn.

$$\begin{aligned} B^2-4AC &= \left(2\sqrt{3}\right)^2-4(5)(2) \\ &= 4(3)-40 \\ &= 12-40 \\ &= -28<0 \end{aligned}$$

  Jafnan $5\,x^2+2\sqrt{3}\,x\,y+2\,y^2-5=0$ lýsir því sporbaugi.
- ⓑ Byrjum aftur á að finna A, B, og C.
  $\underbrace{5}_{A}\,x^2+\underbrace{2\sqrt{3}}_{B}\,x\,y+\underbrace{12}_{C}\,y^2-5=0$
  Nú finnum við aðgreininn.

10

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4(5)(12) \\ &= 4(3) - 240 \\ &= 12 - 240 \\ &= -228 < 0 \end{aligned}$$

Jafnan $5x^2+2\sqrt{3}xy+12y^2-5=0$ lýsir því sporbaugi.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 3

Þekkið keilusniðið í hverju eftirfarandi tilviki án þess að snúa hnitásunum.

1. ⓐ $x^2-9xy+3y^2-12=0$
2. ⓑ $10x^2-9xy+4y^2-4=0$

MIÐLAR

Í þessu netefni fáið þið frekari kennslu og æfingu í keilusniðum og snúningi hnitása.

- Inngangur að keilusniðum

10.4 Æfingar

Orðleg verkefni

1. Hvaða áhrif hefur xy-liðurinn á graf keilusniðs?
2. Ef jafna keilusniðs er rituð á forminu $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ og $AB=0$, hvað má þá ályktа?
3. Ef jafna keilusniðs er rituð á forminu $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, og $B^2-4AC>0$, hvað má þá ályktа?
4. Hvað má ályktа um jöfnuna $ax^2+4x+3y^2-12=0$, ef $a>0$?
5. Fyrir jöfnuna $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, hvaða upplýsingar gefur gildi θ sem uppfyllir $\cot(2\theta)=\dfrac{A-C}{B}$?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða hvaða keilusnið gefna jafnan táknar.

6. $$9x^2+4y^2+72x+36y-500=0$$

7. $$x^2-10x+4y-10=0$$

8.

$$2x^2-2y^2+4x-6y-2=0$$

9.

$$4x^2-y^2+8x-1=0$$

10.

$$4y^2-5x+9y+1=0$$

11.

$$2x^2+3y^2-8x-12y+2=0$$

12.

$$4x^2+9xy+4y^2-36y-125=0$$

13.

$$3x^2+6xy+3y^2-36y-125=0$$

14.

$$-3x^2+3\sqrt{3}xy-4y^2+9=0$$

15.

$$2x^2+4\sqrt{3}xy+6y^2-6x-3=0$$

16.

$$-x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2-2y+1=0$$

17.

$$8x^2+4\sqrt{2}xy+4y^2-10x+1=0$$

10

Í eftirfarandi æfingum skal finna nýja framsetningu gefnu jöfnunnar eftir snúning um gefið horn.

18.

$$3x^2+xy+3y^2-5=0, \theta=45^\circ$$

19.

$$4x^2-xy+4y^2-2=0, \theta=45^\circ$$

20.

$$2x^2+8xy-1=0, \theta=30^\circ$$

21.

$$-2x^2+8xy+1=0, \theta=45^\circ$$

22.

$$4x^2+\sqrt{2}xy+4y^2+y+2=0, \theta=45^\circ$$

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða hornið θ sem eyðir xy-liðnum og rita samsvarandi jöfnu án xy-liðar.

23.

$$x^2+3\sqrt{3}xy+4y^2+y-2=0$$

24.

$$4x^2+2\sqrt{3}xy+6y^2+y-2=0$$

25.

$$9x^2-3\sqrt{3}xy+6y^2+4y-3=0$$

26.

$$-3x^2-\sqrt{3}xy-2y^2-x=0$$

27.

$$16x^2+24xy+9y^2+6x-6y+2=0$$

28.

$$x^2+4xy+4y^2+3x-2=0$$

29.

$$x^2+4xy+y^2-2x+1=0$$

30.

$$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2-1=0$$

Myndræn verkefni

Í eftirfarandi æfingum skal snúa gefnu jöfnunni um gefna hornið. Ritið nýju jöfnuna og teiknið gröf upphaflegu jöfnunnar og þeirrar snúnu.

31.

$$y=-x^2, \theta=-45^\circ$$

32.

$$x=y^2, \theta=45^\circ$$

33.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \theta=45^\circ$$

34.

$$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1, \theta=45^\circ$$

35.

$$y^2-x^2=1, \theta=45^\circ$$

36.

$$y=\frac{x^2}{2}, \theta=30^\circ$$

37.

$$x=(y-1)^2, \theta=30^\circ$$

38.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \theta=30^\circ$$

Í eftirfarandi æfingum skal teikna graf jöfnunnar miðað við $x'y'$-kerfið þar sem jafnan hefur engan $x'y'$-lið.

39.

$$xy=9$$

40.

$$x^2+10xy+y^2-6=0$$

41.

$$x^2-10xy+y^2-24=0$$

42.

$$4x^2-3\sqrt{3}xy+y^2-22=0$$

43.

$$6x^2+2\sqrt{3}xy+4y^2-21=0$$

44.

$$11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2-64=0$$

45.

$$21x^2+2\sqrt{3}xy+19y^2-18=0$$

46.

$$16x^2+24xy+9y^2-130x+90y=0$$

47.

$$16x^2+24xy+9y^2-60x+80y=0$$

48.

$$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2-16=0$$

49.

$$4x^2-4xy+y^2-8\sqrt{5}x-16\sqrt{5}y=0$$

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða snúningshornið sem eyðir xy-liðnum. Teiknið síðan nýju hnitásana.

50.

$$6x^2-5\sqrt{3}xy+y^2+10x-12y=0$$

51.

$$6x^2-5xy+6y^2+20x-y=0$$

52.

$$6x^2-8\sqrt{3}xy+14y^2+10x-3y=0$$

53.

$$4x^2+6\sqrt{3}xy+10y^2+20x-40y=0$$

54.

$$8x^2+3xy+4y^2+2x-4=0$$

55.

$$16x^2+24xy+9y^2+20x-44y=0$$

Í eftirfarandi æfingum skal ákvarða gildi k út frá gefnu jöfnunni.

56. Gefin er jafnan $4x^2+kxy+16y^2+8x+24y-48=0$, finnið k þannig að grafið verði fleygbogi.

57. Gefin er jafnan $2x^2+kxy+12y^2+10x-16y+28=0$, finnið k þannig að grafið verði sporbaugur.

58. Gefin er jafnan $3x^2+kxy+4y^2-6x+20y+128=0$, finnið k þannig að grafið verði breiðbogi.

59. Gefin er jafnan $kx^2+8xy+8y^2-12x+16y+18=0$, finnið k þannig að grafið verði fleygbogi.

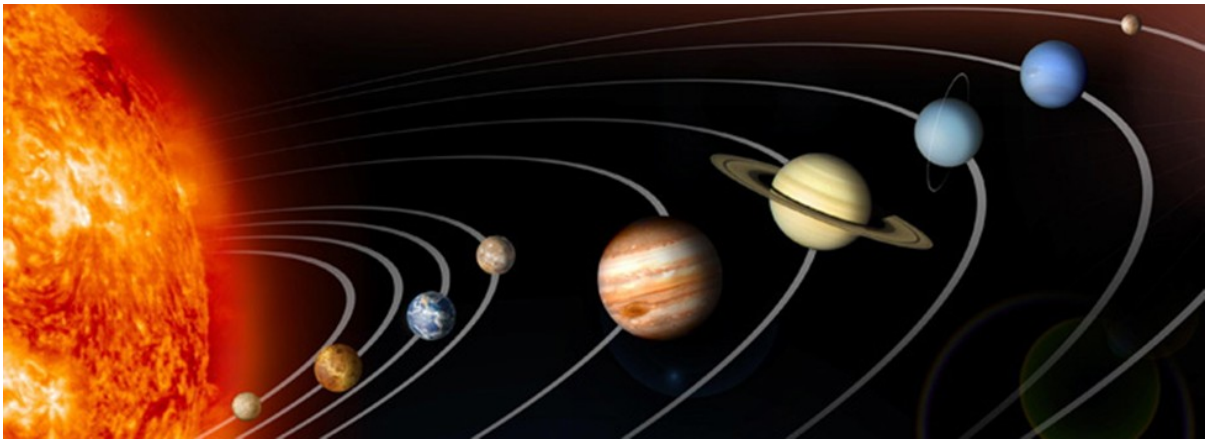
60. Gefin er jafnan $6x^2+12xy+ky^2+16x+10y+4=0$, finnið k þannig að grafið verði sporbaugur.

10.5 Keilusnið í pólhnitum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- þekkja keilusnið á pólformi.
- teikna gröf póljafna keilusniða.
- skilgreina keilusnið með brennipunkti og stýrilínu.



10

Mynd 1 Reikistjörnur á braut um sólina fylgja sporöskjulaga ferlum. (mynd: NASA Blueshift, Flickr)

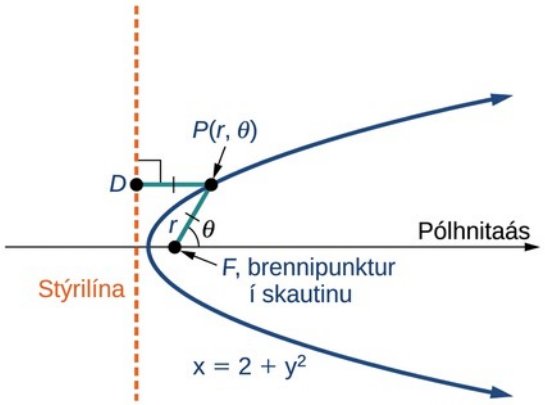
Flest þekkjum við brautarhreyfingu, til dæmis hreyfingu reikistjörnu um sólina eða rafeindar um atómkjarna. Í reikistjörnukerfi eru brautir reikistjarna, smástirna og halastjarna um stærri himinhnött oft sporöskjulaga. Braut halastjörnu getur þó verið fleygboga- eða breiðbogalaga. Eiginleikar brauta reikistjarnanna geta auk þess breyst með tímanum. Hver braut tengist staðsetningu himinhnattarins sem farið er um og fjarlægð og stefnu reikistjörnunnar eða annars hlutar frá honum. Því eru pólhnit gjarnan notuð til að lýsa þessum brautum.

Á sporbaugsbraut er nándarpunktur sá punktur þar sem hlutirnir tveir eru næst hvor öðrum og firrðarpunktur sá þar sem þeir eru fjærst hvor öðrum. Hraði hlutar á braut eykst almennt þegar hann nálgast nándarpunktinn en minnkar þegar hann nálgast firrðarpunktinn. Sumir hlutir ná lausnarhraða og braut þeirra verður þá óendanleg. Slíkir hlutir fylgja fleygboga- eða breiðbogalaga braut um himinhnött; hluturinn losnar undan

þyngdartogi hans og þýtur út í geiminn. Lýsa má hverri þessara brauta með keilusniði í pólhnitakerfinu.

Keilusnið þekkt á pólformi

Hvert keilusnið ræðst af þremur atriðum: einum brennipunkti, fastri línu sem nefnist stýrilína og hlutfalli fjarlægðanna frá hvoru þeirra að punkti á grafinu. Lítum á fleygbogann $x=2+y^2$ á mynd 2.



Mynd 2

Í hlutanum Fleygboginn lærðum við að fleygbogi er skilgreindur með brennipunkti (föstum punkti) og stýrilínu (fastri línu). Hér lærum við að skilgreina hvaða keilusnið sem er í pólhnitakerfinu með föstum punkti, brennipunktinum $P(r,\theta)$ í skautinu, og línu, stýrilínunni, sem er hornrétt á pólhnitaásinn.

Látum F vera fastan punkt, brennipunktinn, og D fasta línu, stýrilínuna. Þá má láta e vera fasta jákvæða tölu sem nefnist miðskekkja og er skilgreind sem hlutfall fjarlægðar punkts á grafinu frá brennipunktinum og fjarlægðar hans frá stýrilínunni. Mengi allra punkta P sem uppfylla $e=\frac{PF}{PD}$ er þá keilusnið. Með öðrum orðum má skilgreina keilusnið sem mengi allra punkta P þar sem hlutfall fjarlægðarinnar frá P til F og fjarlægðarinnar frá P til D er jafnt fastanum e.

Fyrir keilusnið með miðskekkjuna e,

- ef $0\le e<1$, er keilusniðið sporbaugur
- ef $e=1$, er keilusniðið fleygbogi
- ef $e>1$, er keilusniðið breiðbogi

Með þessari skilgreiningu getum við nú skilgreint keilusnið með stýrilínunni $x=\pm p$, miðskekkjunni e, og horninu θ. Því má rita hvert keilusnið sem póljöfnu, það er jöfnu með r og θ.

PÓLJAFNA KEILUSNIÐS

Fyrir keilusnið með brennipunkt í upphafspunktinum og stýrilínuna $x = \pm p$, þar sem p er jákvæð rauntala, og jákvæða miðskekkju e, hefur keilusniðið póljöfnuna

$$r = \frac{e\,p}{1 \pm e\cos\theta}$$

Fyrir keilusnið með brennipunkt í upphafspunktinum og stýrilínuna $y = \pm p$, þar sem p er jákvæð rauntala, og jákvæða miðskekkju e, hefur keilusniðið póljöfnuna

$$r = \frac{e\,p}{1 \pm e\sin\theta}$$

AÐFERÐ

Þekkið gerð keilusniðs, stýrilínu þess og miðskekkju út frá póljöfnu þess.

1. Margfaldið teljara og nefnara með margföldunarandhverfu fastans í nefnaranum til að rita jöfnuna á staðalformi.
2. Þekkið miðskekkjuna e sem stuðul hornafallsins í nefnaranum.
3. Berið e saman við 1 til að ákvarða lögun keilusniðsins.
4. Ákvarðið stýrilínuna sem $x = p$ ef kósínus er í nefnaranum og $y = p$ ef sínus er í nefnaranum. Setjið $e\,p$ jafnt teljaranum á staðalforminu og leysið fyrir x eða y.

SÝNIDÆMI 1

Keilusnið þekkt út frá pólformi

Þekkið í hverri jöfnu hér á eftir keilusniðið með brennipunkt í upphafspunktinum, stýrilínuna og miðskekkjuna.

a. $r = \dfrac{6}{3 + 2\sin\theta}$

b. $r = \dfrac{12}{4 + 5\cos\theta}$

c. $r = \dfrac{7}{2 - 2\sin\theta}$

Lausn

Fyrir keilusniðin þrjú ritum við jöfnuna á staðalformi. Á staðalformi er fastinn í nefnaranum 1. Fyrsta skrefið í öllum þremur liðunum er því að margfalda teljara og nefnara með margföldunarandhverfu fastans í upphaflegu jöfnunni, $\frac{1}{c}$, þar sem c er sá fasti.

a. Margfaldið teljara og nefnara með $\frac{1}{3}$.

$$r=\frac{6}{3+2\sin\theta}\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{6\left(\frac{1}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)\sin\theta}=\frac{2}{1+\frac{2}{3}\sin\theta}$$

Þar sem $\sin\theta$ er í nefnaranum er stýrilínan $y=p$. Samanburður við staðalform sýnir að $e=\frac{2}{3}$. Af teljaranum fæst því

$$\begin{aligned}2&=ep\\2&=\tfrac{2}{3}p\\\left(\tfrac{3}{2}\right)2&=\left(\tfrac{3}{2}\right)\tfrac{2}{3}p\\3&=p\end{aligned}$$

Þar sem $e<1$, er keilusniðið sporbaugur. Miðskekkjan er $e=\frac{2}{3}$ og stýrilínan er $y=3$.

b. Margfaldið teljara og nefnara með $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}r&=\frac{12}{4+5\cos\theta}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}\\r&=\frac{12\left(\frac{1}{4}\right)}{4\left(\frac{1}{4}\right)+5\left(\frac{1}{4}\right)\cos\theta}\\r&=\frac{3}{1+\frac{5}{4}\cos\theta}\end{aligned}$$

Þar sem $\cos\theta$ er í nefnaranum er stýrilínan $x=p$. Samanburður við staðalform sýnir að $e=\frac{5}{4}$. Af teljaranum fæst því

$$\begin{aligned}3&=ep\\3&=\tfrac{5}{4}p\\\left(\tfrac{4}{5}\right)3&=\left(\tfrac{4}{5}\right)\tfrac{5}{4}p\\\tfrac{12}{5}&=p\end{aligned}$$

Since $e>1$, the conic is a hyperbola. The eccentricity is $e=\frac{5}{4}$ and the directrix is $x=\frac{12}{5}=2{,}4$.

c. Margfaldið teljara og nefnara með $\frac{1}{2}$.

$$r = \frac{7}{2-2\ \sin\ \theta} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$r = \frac{7\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{2}\right)\ \sin\ \theta}$$
$$r = \frac{\frac{7}{2}}{1-\sin\ \theta}$$

Þar sem sínus er í nefnaranum er stýrilínan $y=-p$. Samanburður við staðalform sýnir að $e=1$. Af teljaranum fæst því

$$\frac{7}{2} = ep$$
$$\frac{7}{2} = (1)p$$
$$\frac{7}{2} = p$$

Because $e=1$, the conic is a parabola. The eccentricity is $e=1$ and the directrix is $y=-\frac{7}{2}=-3{,}5$.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 1

Þekkið keilusniðið með brennipunkt í upphafspunktinum, stýrilínuna og miðskekkjuna fyrir $r=\frac{2}{3-\cos\theta}$.

Gröf póljafna keilusniða teiknuð

Þegar graf er teiknað í kartesískum hnitum hefur hvert keilusnið sína sérstöku jöfnu. Þetta á ekki við þegar graf er teiknað í pólhnitum. Nota þarf miðskekkju keilusniðsins til að ákvarða hvers konar feril á að teikna og síðan nánari eiginleika hans. Fyrsta skrefið er að rita keilusniðið á staðalformi eins og í fyrra sýnidæmi. Með öðrum orðum þarf að rita jöfnuna þannig að nefnarinn byrji á 1. Þá getum við ákvarðað e og þar með lögun ferilsins. Næst setjum við inn gildi fyrir θ og leysum fyrir r til að teikna nokkra lykilpunkta. Með því að setja θ jafnt $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, og $\frac{3\pi}{2}$ fást hvirfilpunktarnir og þá má teikna grófa mynd af grafinu.

SÝNIDÆMI 2

Graf fleygboga á pólformi teiknað

Teiknið graf $r=\frac{5}{3+3\cos\theta}$.

Lausn

Fyrst ritum við keilusniðið á staðalformi með því að margfalda teljara og nefnara með margföldunarandhverfu 3, sem er $\frac{1}{3}$.

$$r = \frac{5}{3+3\ \cos\ \theta} = \frac{5\left(\frac{1}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)\cos\ \theta}$$
$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1+\cos\ \theta}$$

Þar sem $e=1$, teiknum við fleygboga með brennipunkt í upphafspunktinum. Fallið inniheldur $\cos\theta$, og samlagningarmerki er í nefnaranum, svo stýrilínan er $x=p$.

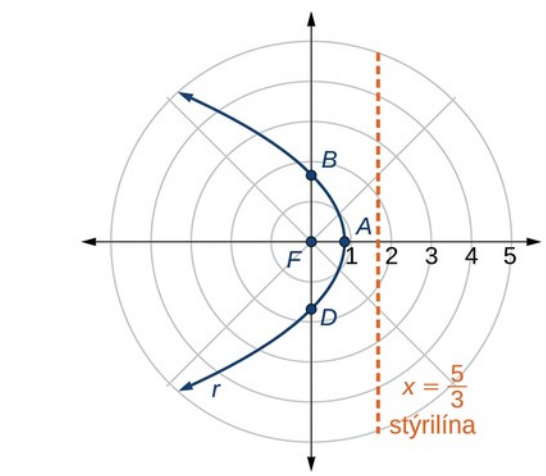
$$\frac{5}{3} = ep$$
$$\frac{5}{3} = (1)p$$
$$\frac{5}{3} = p$$

Stýrilínan er $x=\frac{5}{3}$.

Með því að teikna nokkra lykilpunkta eins og í töflu 1 sjáum við hvirfilpunktana. Sjá mynd 3.

Tafla 1

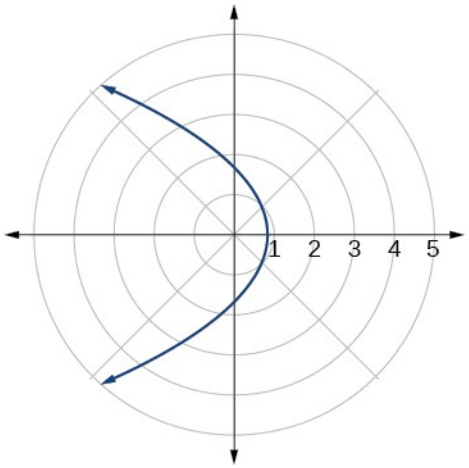
	A	B	C	D
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$r=\frac{5}{3+3\cos\theta}$	$\frac{5}{6}\approx 0{,}83$	$\frac{5}{3}\approx 1{,}67$	óskilgreint	$\frac{5}{3}\approx 1{,}67$



Mynd 3

Greining

Við getum sannreynt niðurstöðuna með grafteikniforriti. Sjá mynd 4.



Mynd 4

SÝNIDÆMI 3

Graf breiðboga á pólformi teiknað

Teiknið graf $r = \frac{8}{2 - 3\sin\theta}$.

Lausn

Fyrst ritum við keilusniðið á staðalformi með því að margfalda teljara og nefnara með margföldunarandhverfu 2, sem er $\frac{1}{2}$.

$$r = \frac{8}{2-3\sin\theta} = \frac{8\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{2}\right)\sin\theta}$$
$$r = \frac{4}{1-\frac{3}{2}\sin\theta}$$

Þar sem $e=\frac{3}{2}, e>1$, teiknum við breiðboga með brennipunkt í upphafspunktinum. Fallið inniheldur $\sin\theta$ og frádráttarmerki er í nefnaranum, svo stýrilínan er $y=-p$.

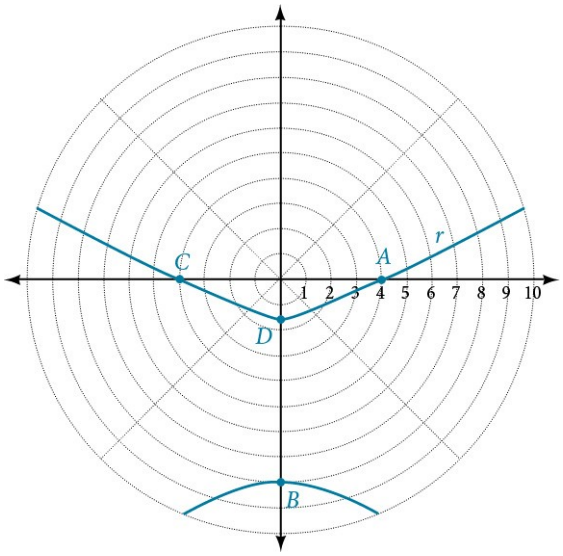
$$4 = ep$$
$$4 = \left(\tfrac{3}{2}\right)p$$
$$4\left(\tfrac{2}{3}\right) = p$$
$$\tfrac{8}{3} = p$$

Stýrilínan er $y=-\frac{8}{3}$.

Með því að teikna nokkra lykilpunkta eins og í töflu 2 sjáum við hvirfilpunktana. Sjá mynd 5.

Tafla 2

	A	B	C	D
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$r=\frac{8}{2-3\sin\theta}$	4	-8	4	$\frac{8}{5}=1{,}6$



Mynd 5

SÝNIDÆMI 4

Graf sporbaugs á pólformi teiknað

Teiknið graf $r=\frac{10}{5-4\cos\theta}$.

Lausn

Fyrst ritum við keilusniðið á staðalformi með því að margfalda teljara og nefnara með margföldunarandhverfu 5, sem er $\frac{1}{5}$.

$$r=\frac{10}{5-4\cos\ \theta}=\frac{10\left(\frac{1}{5}\right)}{5\left(\frac{1}{5}\right)-4\left(\frac{1}{5}\right)\cos\ \theta}$$
$$r=\frac{2}{1-\frac{4}{5}\ \cos\ \theta}$$

Þar sem $e=\frac{4}{5}, e<1$, teiknum við sporbaug með brennipunkt í upphafspunktinum. Fallið inniheldur $\cos\theta$, og frádráttarmerki er í nefnaranum, svo stýrilínan er $x=-p$.

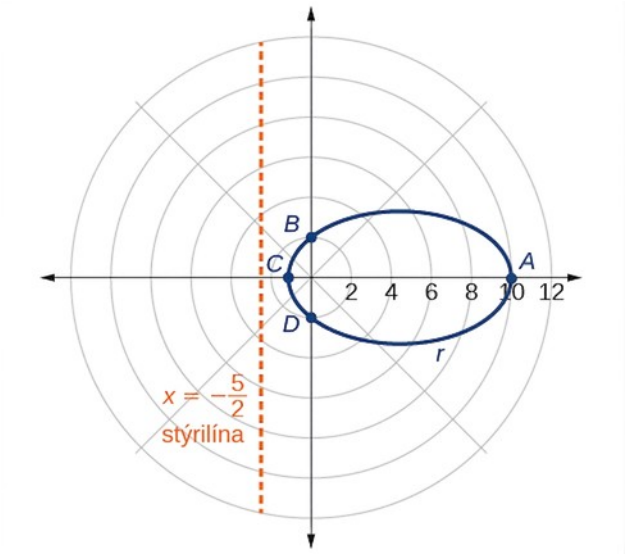
$$2=ep$$
$$2=\left(\frac{4}{5}\right)p$$
$$2\left(\frac{5}{4}\right)=p$$
$$\frac{5}{2}=p$$

Stýrilínan er $x=-\frac{5}{2}$.

Með því að teikna nokkra lykilpunkta eins og í töflu 3 sjáum við hvirfilpunktana. Sjá mynd 6.

Tafla 3

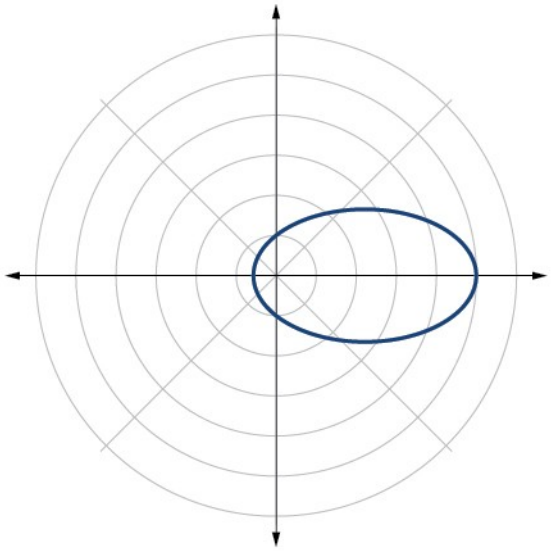
	A	B	C	D
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$r=\frac{10}{5-4\cos\theta}$	10	2	$\frac{10}{9}\approx 1{,}1$	2



Mynd 6

Greining

Við getum sannreynt niðurstöðuna með grafteikniforriti. Sjá mynd 7.



Mynd 7 $r = \frac{10}{5 - 4\cos\theta}$ teiknað í glugganum $[-3, 12, 1]$ sinnum $[-4, 4, 1]$, $\theta\,\min = 0$ og $\theta\,\max = 2\pi$.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 2

Teiknið graf $r = \frac{2}{4 - \cos\theta}$.

Keilusnið skilgreind með brennipunkti og stýrilínu

Hingað til höfum við notað póljöfnur keilusniða til að lýsa ferlinum og teikna graf hans. Nú vinnum við í hina áttina og notum upplýsingar um upphafspunkt, miðskekkju og stýrilínu til að ákvarða póljöfnuna.

AÐFERÐ

Ákvarðið póljöfnu keilusniðs út frá brennipunkti, miðskekkju og stýrilínu.

1. Ákvarðið hvort stýrilínan er lárétt eða lóðrétt. Ef stýrilínan er gefin með y, notum við almenna pólformið með sínus. Ef stýrilínan er gefin með x, notum við almenna pólformið með kósínus.
2. Ákvarðið formerkið í nefnaranum. Ef $p<0$, notið frádrátt. Ef $p>0$, notið samlagningu.
3. Ritið gefnu miðskekkjuna sem stuðul hornafallsins.
4. Ritið tölugildi p í teljarann og einfaldið jöfnuna.

SÝNIDÆMI 5

Pólform lóðrétts keilusniðs fundið út frá brennipunkti í upphafspunktinum, miðskekkju og stýrilínu

Finnið pólform keilusniðsins með brennipunkt í upphafspunktinum, $e=3$ og stýrilínuna $y=-2$.

Lausn

Stýrilínan er $y=-p$, svo hornafallið í nefnaranum er sínus.

Þar sem $y=-2, -2<0$, er frádráttarmerki í nefnaranum. Við notum staðalformið

$$r=\frac{e\,p}{1-e\sin\theta}$$

og $e=3$ og $|-2|=2=p$.

Því fæst

$$r=\frac{(3)(2)}{1-3\sin\theta}$$
$$r=\frac{6}{1-3\sin\theta}$$

SÝNIDÆMI 6

Pólform láréttrs keilusniðs fundið út frá brennipunkti í upphafspunktinum, miðskekkju og stýrilínu

Finnið pólform keilusniðs með brennipunkt í upphafspunktinum, $e=\frac{3}{5}$, og stýrilínuna $x=4$.

Lausn

Þar sem stýrilínan er $x=p$, er hornafallið í nefnaranum kósínus. Þar sem $x=4, 4>0$, er samlagningarmerki í nefnaranum. Við notum staðalformið

$$r=\frac{e\,p}{1+e\cos\theta}$$

og $e=\frac{3}{5}$ og $|4|=4=p$.

Því fæst

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)(4)}{1+\frac{3}{5}\cos\theta} \\
r &= \frac{\frac{12}{5}}{1+\frac{3}{5}\cos\theta} \\
r &= \frac{\frac{12}{5}}{1\left(\frac{5}{5}\right)+\frac{3}{5}\cos\theta} \\
r &= \frac{\frac{12}{5}}{\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\cos\theta} \\
r &= \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{5+3\cos\theta} \\
r &= \frac{12}{5+3\cos\theta}
\end{aligned}$$

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 3

Finnið pólform keilusniðsins með brennipunkt í upphafspunktinum, $e=1$, og stýrilínuna $x=-1$.

SÝNIDÆMI 7

Keilusniði á pólformi breytt yfir á rétthyrnt form

Breytið keilusniðinu $r=\frac{1}{5-5\sin\theta}$ yfir á rétthyrnt form.

Lausn

Við umritum formúluna til að nota samsemdirnar

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, x=r\cos\theta, \text{og } y=r\sin\theta.$$

$$r=\frac{1}{5-5\sin\theta}$$

$r\cdot(5-5\sin\theta)=\frac{1}{5-5\sin\theta}\cdot(5-5\sin\theta)$ Eyða brotinu.

$5r-5r\sin\theta=1$ Margfalda inn í sviga.

$5\ r = 1 + 5\ r\ \sin\ \theta$ Einangra $5\ r$.

$25\ r^2 = (1 + 5\ r\ \sin\ \theta)^2$ Setja báðar hliðar í annað veldi.

$25\ (x^2 + y^2) = (1 + 5\ y)^2$ Setja inn $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $y = r\ \sin\ \theta$.

$25\ x^2 + 25\ y^2 = 1 + 10\ y + 25\ y^2$ Margfalda inn í sviga og lið fyrir lið.

$25\ x^2 - 10\ y = 1$ Endurraða liðum og setja jafnt og 1.

REYNDU SJÁLF(UR) NR. 4

Breytið keilusniðinu $r = \frac{2}{1 + 2\cos\theta}$ yfir á rétthyrnt form.

MIÐLAR

Notið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í keilusniðum í pólhnitum.

- Póljöfnur keilusniða
- Gröf póljafna keilusniða teiknuð – 1
- Gröf póljafna keilusniða teiknuð – 2

10.5 Æfingar

Orðleg verkefni

1. Útskýrið hvernig miðskekkja ákvarðar hvaða keilusnið er gefið.

2. Hvað þarf að gilda um nefnarann ef keilusnið er ritað sem póljafna?

3. Ef keilusnið er ritað sem póljafna og nefnarinn inniheldur $\sin\theta$, hvaða ályktun má draga um stýrilínuna?

4. Hvað vitum við um jöfnu grafsins ef stýrilína keilusniðs er hornrétt á pólhnitaásinn?

5. Hvað vitum við um brennipunkt eða brennipunkta keilusniðs ef það er ritað sem póljafna?

Algebruverkefni

Í eftirfarandi æfingum skal þekkja keilusniðið með brennipunkt í upphafspunktinum og tilgreina síðan stýrilínu þess og miðskekkju.

6.

$$r = \frac{6}{1 - 2\cos\theta}$$

7.

$$r = \frac{3}{4 - 4\sin\theta}$$

8.

$$r=\frac{8}{4-3\cos\theta}$$

9.

$$r=\frac{5}{1+2\sin\theta}$$

10.

$$r=\frac{16}{4+3\cos\theta}$$

11.

$$r=\frac{3}{10+10\cos\theta}$$

12.

$$r=\frac{2}{1-\cos\theta}$$

13.

$$r=\frac{4}{7+2\cos\theta}$$

14.

$$r\left(1-\cos\theta\right)=3$$

15.

$$r\left(3+5\sin\theta\right)=11$$

16.

$$r\left(4-5\sin\theta\right)=1$$

17.

$$r\left(7+8\cos\theta\right)=7$$

Í eftirfarandi æfingum skal breyta póljöfnu keilusniðs yfir í rétthyrnda jöfnu.

18.

$$r=\frac{4}{1+3\sin\theta}$$

19.

$$r=\frac{2}{5-3\sin\theta}$$

20.

$$r=\frac{8}{3-2\cos\theta}$$

21.

$$r=\frac{3}{2+5\cos\theta}$$

22.

$$r=\frac{4}{2+2\sin\theta}$$

23.

$$r=\frac{3}{8-8\cos\theta}$$

24.

$$r=\frac{2}{6+7\cos\theta}$$

25.

$$r=\frac{5}{5-11\sin\theta}$$

26.

$$r(5+2\cos\theta)=6$$

27.

$$r(2-\cos\theta)=1$$

28.

$$r\ (2{,}5-2{,}5\quad\sin\quad\theta)=5$$

29.

$$r=\frac{6\sec\theta}{-2+3\sec\theta}$$

30.

$$r=\frac{6\csc\theta}{3+2\csc\theta}$$

Í eftirfarandi æfingum skal teikna gefið keilusnið. Ef það er fleygbogi skal merkja hvirfilpunkt, brennipunkt og stýrilínu. Ef það er sporbaugur eða breiðbogi skal merkja hvirfilpunkta og brennipunkta.

31.

$$r=\frac{5}{2+\cos\theta}$$

32.

$$r=\frac{2}{3+3\sin\theta}$$

33.

$$r=\frac{10}{5-4\sin\theta}$$

34.

$$r=\frac{3}{1+2\cos\theta}$$

35.

$$r=\frac{8}{4-5\cos\theta}$$

36.

$$r=\frac{3}{4-4\cos\theta}$$

37.

$$r=\frac{2}{1-\sin\theta}$$

38.

$$r=\frac{6}{3+2\sin\theta}$$

39.

$$r\left(1+\cos\theta\right)=5$$

40.

$$r(3-4\sin\theta)=9$$

41.

$$r(3-2\sin\theta)=6$$

42.

$$r(6-4\cos\theta)=5$$

Í eftirfarandi æfingum skal finna póljöfnu keilusniðsins með brennipunkt í upphafspunktinum og gefna miðskekkju og stýrilínu.

43. Stýrilína: $x=4\,;e=\frac{1}{5}$

44. Stýrilína: $x=-4\,;e=5$

45. Stýrilína: $y=2\,;e=2$

46. Stýrilína: $y=-2\,;e=\frac{1}{2}$

47. Stýrilína: $x=1\,;e=1$

48. Stýrilína: $x=-1\,;e=1$

49. Stýrilína: $x=-\frac{1}{4}\,;e=\frac{7}{2}$

50. Stýrilína: $y=\frac{2}{5}\,;e=\frac{7}{2}$

51. Stýrilína: $y=4\,;e=\frac{3}{2}$

52. Stýrilína: $x=-2\,;e=\frac{8}{3}$

53. Stýrilína: $x=-5\,;e=\frac{3}{4}$

54. Stýrilína: $y=2\,;\quad e=2{,}5$

55. Stýrilína: $x=-3\,;e=\frac{1}{3}$

Viðbótarverkefni

Rifjið upp úr hlutanum Snúningur hnitása að gröf keilusniða með $x\,y$-lið eru snúin. Í eftirfarandi æfingum skal setja hverja jöfnu fram á pólformi með r sem fall af θ.

56.

$$x\,y=2$$

57.

$$x^2+x\,y+y^2=4$$

58.

$$2\,x^2+4\,x\,y+2\,y^2=9$$

59.

$$16\,x^2+24\,x\,y+9\,y^2=4$$

60.

$$2\,x\,y+y=1$$

Lykilhugtök

snúningshorn
hvasst horn sem myndast þegar hnitásum er snúið frá kartesíska planinu. Ef $\cot(2\theta)>0$, þá liggur θ á bilinu $(0^\circ, 45^\circ)$; ef $\cot(2\theta)<0$, þá liggur θ á bilinu $(45^\circ, 90^\circ)$; og ef $\cot(2\theta)=0$, þá er $\theta=45^\circ$

miðja breiðboga
miðpunktur bæði meginass og þverass breiðboga

miðja sporbaugs
miðpunktur bæði langáss og skammáss

keilusnið
hvert það form sem myndast þegar plan sker rétta hringkeilu

þverás
ás breiðboga sem er hornréttur á meginásinn og hefur aukahvirfilpunktana sem endapunkta

úrkynjuð keilusnið
hvert það form sem getur myndast þegar plan sker tvíkeilu í gegnum oddpunkt hennar. Úrkynjuð keilusnið geta verið punktur, lína eða línur sem skerast.

stýrilína
lína sem er hornrétt á samhverfuás fleygboga; lína þannig að hlutfall fjarlægðar punkta á keilusniðinu frá brennipunktinum og fjarlægðar þeirra frá stýrilínunni er fast

miðskekkja
hlutfall fjarlægða punkts P á grafinu frá brennipunktinum F og frá stýrilínunni D, táknað með $e=\frac{PF}{PD}$, þar sem e er jákvæð rauntala

sporbaugur
mengi allra punkta (x, y) í plani þannig að summa fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum er fasti

brennipunktar
fleirtala orðsins brennipunktur

brennipunktur fleygboga
fastur punktur innan fleygboga sem liggur á samhverfuásnum

brennipunktur sporbaugs
annar tveggja fastra punkta á langás sporbaugs þannig að summa fjarlægðanna frá punktunum að hverjum punkti (x, y) á sporbaugnum er fasti

breiðbogi
mengi allra punkta (x, y) í plani þannig að mismunur fjarlægðanna milli (x, y) og brennipunktanna er jákvæður fasti

þverbrennistrengur
línustrik sem liggur í gegnum brennipunkt fleygboga samsíða stýrilínunni og hefur endapunkta á fleygboganum

langás
lengri ás sporbaugs

skammás
styttri ás sporbaugs

óúrkynjað keilusnið
form sem myndast þegar plan sker rétta tvíkeilu án þess að fara í gegnum oddpunktinn; óúrkynjuð keilusnið eru hringir, sporbaugar, breiðbogar og fleygbogar

fleygbogi
mengi allra punkta (x, y) í plani sem eru jafnlangt frá fastri línu, stýrilínunni, og föstum punkti, brennipunktinum, sem liggur ekki á stýrilínunni

póljafna
jafna ferils í pólhnitunum r og θ

meginás
ás breiðboga sem inniheldur brennipunktana og hefur hvirfilpunktana sem endapunkta

Lykiljöfnur

Láréttur sporbaugur með miðju í upphafspunktinum	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$
Lóðréttur sporbaugur með miðju í upphafspunktinum	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, a>b$
Láréttur sporbaugur með miðju í (h,k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1, a>b$
Lóðréttur sporbaugur með miðju í (h,k)	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1, a>b$
Breiðbogi með miðju í upphafspunktinum og meginás á x-ásnum	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Breiðbogi með miðju í upphafspunktinum og meginás á y-ásnum	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
Breiðbogi með miðju í (h,k), og meginás samsíða x-ásnum	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
Breiðbogi með miðju í (h,k), og meginás samsíða y-ásnum	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Fleygbogi með hvirfilpunkt í upphafspunktinum og samhverfuás á x-ásnum	$y^2=4px$
Fleygbogi með hvirfilpunkt í upphafspunktinum og samhverfuás á y-ásnum	$x^2=4py$
Fleygbogi með hvirfilpunkt í (h,k), og samhverfuás á x-ásnum	$(y-k)^2=4p(x-h)$
Fleygbogi með hvirfilpunkt í (h,k), og samhverfuás á y-ásnum	$(x-h)^2=4p(y-k)$
Almennt form jöfnu keilusniðs	$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
Snúningur keilusniðs	$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$
Snúningshorn	θ, þar sem $\cot(2\theta)=\frac{A-C}{B}$

Lykilhugtök

10.1 Sporbaugurinn

- Sporbaugur er mengi allra punkta (x, y) í plani þannig að summa fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum sé fasti. Hvor fasti punkturinn kallast brennipunktur.
- Þegar hnit brennipunkta og hvirfilpunkta sporbaugs eru gefin getum við skrifað jöfnu sporbaugsins á staðalformi. Sjá sýnidæmi 1 og sýnidæmi 2.
- Þegar jafna sporbaugs með miðju í upphafspunkti er gefin á staðalformi getum við fundið hvirfilpunkta hans, aukahvirfilpunkta og brennipunkta ásamt lengd og legu langáss og skammáss. Út frá þessu getum við teiknað sporbauginn. Sjá sýnidæmi 3 og sýnidæmi 4.
- Þegar jafna sporbaugs með miðju í öðrum punkti en upphafspunkti er gefin getum við fundið helstu einkenni hans og teiknað sporbauginn. Sjá sýnidæmi 5 og sýnidæmi 6.
- Búa má til líkan af raunverulegum aðstæðum með staðaljöfnum sporbauga og nota það síðan til að finna helstu stærðir, svo sem lengd ása og fjarlægð milli brennipunkta. Sjá sýnidæmi 7.

10.2 Breiðboginn

- Breiðbogi er mengi allra punkta (x, y) í plani þannig að mismunur fjarlægðanna milli (x, y) og brennipunktanna sé jákvæður fasti.
- Nota má staðalform breiðboga til að finna hvirfilpunkta hans og brennipunkta. Sjá sýnidæmi 1.
- Þegar hnit brennipunkta og hvirfilpunkta breiðboga eru gefin getum við skrifað jöfnu breiðbogans á staðalformi. Sjá sýnidæmi 2 og sýnidæmi 3.
- Þegar jafna breiðboga er gefin getum við fundið hvirfilpunkta, aukahvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur hans ásamt lengd og legu meginass og þverass til að teikna breiðbogann. Sjá sýnidæmi 4 og sýnidæmi 5.
- Búa má til líkan af raunverulegum aðstæðum með staðaljöfnum breiðboga. Ef til dæmis mál sjálfdragskæliturns eru gefin getum við fundið breiðbogajöfnu sem lýsir hliðum hans. Sjá sýnidæmi 6.

10.3 Fleygboginn

- Fleygbogi er mengi allra punkta (x, y) í plani sem eru í sömu fjarlægð frá fastri línu, sem kallast stýrilína, og föstum punkti (brennipunktinum) sem liggur ekki á stýrilínunni.
- Nota má staðalform fleygboga með hvirfilpunkt $(0, 0)$ og x -ásinn sem samhverfuás til að teikna fleygbogann. Ef $p>0$, opnast fleygboginn til hægri. Ef $p<0$, opnast fleygboginn til vinstri. Sjá sýnidæmi 1.
- Nota má staðalform fleygboga með hvirfilpunkt $(0, 0)$ og y -ásinn sem samhverfuás til að teikna fleygbogann. Ef $p>0$, opnast fleygboginn upp. Ef $p<0$, opnast fleygboginn niður. Sjá sýnidæmi 2.
- Þegar brennipunktur og stýrilína fleygboga eru gefin getum við skrifað jöfnu hans á staðalformi. Sjá sýnidæmi 3.
- Nota má staðalform fleygboga með hvirfilpunkt (h, k) og samhverfuás samsíða x -ásnum til að teikna fleygbogann. Ef $p>0$, opnast fleygboginn til hægri. Ef $p<0$, opnast fleygboginn til vinstri. Sjá sýnidæmi 4.
- Nota má staðalform fleygboga með hvirfilpunkt (h, k) og samhverfuás samsíða y -ásnum til að teikna fleygbogann. Ef $p>0$, opnast fleygboginn upp. Ef $p<0$, opnast fleygboginn niður. Sjá sýnidæmi 5.
- Búa má til líkan af raunverulegum aðstæðum með staðaljöfnum fleygboga. Ef þvermál og brennipunktur þversniðs fleygbogaspegils eru til dæmis gefin getum við fundið jöfnu sem lýsir hliðum hans. Sjá sýnidæmi 6.

10.4 Snúningur ása

- Fjögur grunnform geta myndast þegar plan sker tvær réttar hringkeilur sem liggja odd við odd. Þau eru sporbaugur, hringur, breiðbogi og fleygbogi.
- Óúrkynjað keilusnið hefur almenna formið $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ þar sem A, B og C eru ekki öll núll. Gildi A, B, og C ákvarða gerð keilusniðsins. Sjá sýnidæmi 1.
- Jöfnum keilusniða með xy-lið hefur verið snúið um upphafspunktinn. Sjá sýnidæmi 2.
- Umbreyta má almenna forminu í jöfnu í x' - og y'-hnitakerfinu án $x'y'$-liðar. Sjá sýnidæmi 3 og sýnidæmi 4.
- Stæða kallast óbreyta ef hún helst óbreytt við snúning. Þar sem aðgreinirinn er óbreyta getum við greint keilusniðið út frá honum. Sjá sýnidæmi 5.

10.5 Keilusnið í pólhnitum

- Hvert keilusnið má ákvarða með einum brennipunkti, tilheyrandi miðskekkju og stýrilínu. Einnig má skilgreina keilusnið út frá föstum punkti, brennipunktinum $P(r,\theta)$ í skautinu, og línu, stýrilínunni, sem er hornrétt á pólhnitaásinn.
- Keilusnið er mengi allra punkta $e=\frac{PF}{PD}$, þar sem miðskekkjan e er jákvæð rauntala.

  Skrifa má hvert keilusnið með póljöfnu sinni. Sjá sýnidæmi 1.
- Teikna má póljöfnur keilusniða. Sjá sýnidæmi 2, sýnidæmi 3 og sýnidæmi 4.
- Skilgreina má keilusnið út frá brennipunkti, stýrilínu og miðskekkju. Sjá sýnidæmi 5 og sýnidæmi 6.
- Við getum notað samsemdirnar $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=r\cos\theta$, og $y=r\sin\theta$ til að breyta jöfnu keilusniðs úr pólformi í rétthyrnt form. Sjá sýnidæmi 7.

Yfirlitsverkefni

Sporbaugurinn

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa jöfnu sporbaugsins á staðalformi. Tilgreinið síðan miðju hans, hvirfilpunkta og brennipunkta.

1.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$$

2.

$$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1$$

3.

$$9x^2+y^2+54x-4y+76=0$$

4.

$$9x^2+36y^2-36x+72y+36=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna sporbauginn og merkja miðju hans, hvirfilpunkta og brennipunkta.

5.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

6.

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{49}=1$$

7.

$$4x^2+y^2+16x+4y-44=0$$

8.

$$2x^2+3y^2-20x+12y+38=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota gefnar upplýsingar til að finna jöfnu sporbaugsins.

9. Miðja í $(0,0)$, brennipunktur í $(3,0)$, hvirfilpunktur í $(-5,0)$

10. Miðja í $(2,-2)$, hvirfilpunktur í $(7,-2)$, brennipunktur í $(4,-2)$

11. Byggja á hvíslasal þannig að brennipunktarnir séu 35 fet frá miðjunni. Ef salurinn á að vera 100 fet á lengd, hver á lofthæðin þá að vera?

Breiðboginn

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa jöfnu breiðbogans á staðalformi. Tilgreinið síðan miðju hans, hvirfilpunkta og brennipunkta.

12.

$$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{9}=1$$

13.

$$\frac{(y+1)^2}{16}-\frac{(x-4)^2}{36}=1$$

14.

$$9y^2-4x^2+54y-16x+29=0$$

15.

$$3x^2-y^2-12x-6y-9=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna breiðbogann og merkja hvirfilpunkta hans og brennipunkta.

16.

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

17.

$$\frac{(y-1)^2}{49}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$$

18.

$$x^2-4y^2+6x+32y-91=0$$

19.

$$2y^2-x^2-12y-6=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal finna jöfnu breiðbogans.

20. Miðja í $(0,0)$, hvirfilpunktur í $(0,4)$, brennipunktur í $(0,-6)$

21. Brennipunktar í $(3,7)$ og $(7,7)$, hvirfilpunktur í $(6,7)$

Fleygboginn

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa jöfnu fleygbogans á staðalformi. Tilgreinið síðan hvirfilpunkt hans, brennipunkt og stýrilínu.

22.

$$y^2=12x$$

23.

$$(x+2)^2=\frac{1}{2}(y-1)$$

24.

$$y^2-6y-6x-3=0$$

25.

$$x^2+10x-y+23=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna fleygbogann og merkja hvirfilpunkt hans, brennipunkt og stýrilínu.

26.

$$x^2+4y=0$$

27.

$$(y-1)^2=\frac{1}{2}(x+3)$$

28.

$$x^2-8x-10y+46=0$$

29.

$$2y^2+12y+6x+15=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal nota gefnar upplýsingar til að skrifa jöfnu fleygbogans.

30. Brennipunktur í $(-4,0)$; stýrilínan er $x=4$

31. Brennipunktur í $\left(2,\frac{9}{8}\right)$; stýrilínan er $y=\frac{7}{8}$

32. Gervihnattadiskur er í laginu eins og snúðfleygbogi. Móttakaranum er komið fyrir í brennipunktinum. Finnið hvar hann er ef op disksins er 5 fet á breidd og diskurinn er 1,5 fet á dýpt.

Snúningur ása

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hvaða keilusnið jafnan táknar.

33.

$$16x^2+24xy+9y^2+24x-60y-60=0$$

34.

$$4x^2+14xy+5y^2+18x-6y+30=0$$

35.

$$4x^2+xy+2y^2+8x-26y+9=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hornið θ sem eyðir xy-liðnum og skrifa samsvarandi jöfnu án xy-liðar.

36.

$$x^2+4xy-2y^2-6=0$$

37.

$$x^2-xy+y^2-6=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna graf jöfnunnar miðað við $x'y'$-hnitakerfið þar sem jafnan hefur engan $x'y'$-lið.

38.

$$9x^2-24xy+16y^2-80x-60y+100=0$$

39.

$$x^2-xy+y^2-2=0$$

40.

$$6x^2+24xy-y^2-12x+26y+11=0$$

Keilusnið í pólhnitum

Í eftirfarandi verkefnum er póljafna keilusniðs með brennipunkt í upphafspunkti gefin. Finnið miðskekkju þess og stýrilínu.

41.

$$r=\frac{10}{1-5\cos\theta}$$

42.

$$r=\frac{6}{3+2\cos\theta}$$

43.

$$r=\frac{1}{4+3\sin\theta}$$

44.

$$r=\frac{3}{5-5\sin\theta}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna keilusniðið sem gefið er á pólformi. Ef það er fleygbogi skal merkja hvirfilpunkt, brennipunkt og stýrilínu. Ef það er sporbaugur eða breiðbogi skal merkja hvirfilpunkta og brennipunkta.

45.

$$r=\frac{3}{1-\sin\theta}$$

46.

$$r=\frac{8}{4+3\sin\theta}$$

47.

$$r=\frac{10}{4+5\cos\theta}$$

48.

$$r=\frac{9}{3-6\cos\theta}$$

Í eftirfarandi verkefnum eru gefnar upplýsingar um graf keilusniðs með brennipunkt í upphafspunkti. Finnið jöfnu þess á pólformi.

49. Stýrilínan er $x=3$ og miðskekkjan $e=1$

50. Stýrilínan er $y=-2$ og miðskekkjan $e=4$

Kaflapróf

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa jöfnuna á staðalformi og tilgreina miðju, hvirfilpunkta og brennipunkta.

1.

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

2.

$$9y^2+16x^2-36y+32x-92=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skissa grafið og merkja miðju þess, hvirfilpunkta og brennipunkta.

3.

$$\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

4.

$$2x^2+y^2+8x-6y-7=0$$

5. Skrifið á staðalformi jöfnu sporbaugs sem hefur miðju í $(1,2)$, hvirfilpunkt í $(7,2)$, og brennipunkt í $(4,2)$.

6. Byggja á 150 feta langan hvíslasal. Ef brennipunktarnir eiga að vera 20 fet frá veggnum, hver á lofthæðin þá að vera?

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa jöfnu breiðbogans á staðalformi og tilgreina miðju hans, hvirfilpunkta, brennipunkta og aðfellur.

7.

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{81}=1$$

8.

$$16y^2-9x^2+128y+112=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna breiðbogann og merkja miðju hans, hvirfilpunkta og brennipunkta. Tilgreinið jöfnur aðfellanna.

9.

$$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y+3)^2}{1}=1$$

10.

$$y^2-x^2+4y-4x-18=0$$

11. Skrifið á staðalformi jöfnu breiðboga sem hefur brennipunkta í $(1,0)$ og $(1,6)$, og hvirfilpunkt í $(1,2)$.

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa jöfnu fleygbogans á staðalformi og tilgreina hvirfilpunkt hans, brennipunkt og jöfnu stýrilínunnar.

12.

$$y^2+10x=0$$

13.

$$3x^2-12x-y+11=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna fleygbogann og merkja hvirfilpunkt hans, brennipunkt og stýrilínu.

14.

$$(x-1)^2=-4(y+3)$$

15.

$$y^2+8x-8y+40=0$$

16. Skrifið jöfnu fleygboga með brennipunkt í $(2,3)$ og stýrilínu $y=-1$.

17. Leitarljós er í laginu eins og snúðfleygbogi. Ef ljósgjafinn er 1,5 fet frá botninum eftir samhverfuásnum og dýpt leitarljóssins er 3 fet, hve breitt á opið þá að vera?

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hvaða keilusnið gefna jafnan táknar og síðan finna hornið θ sem eyðir $x\,y$-liðnum.

18.

$$3x^2-2xy+3y^2=4$$

19.

$$x^2+4xy+4y^2+6x-8y=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal umrita jöfnuna í $x'y'$-hnitakerfinu án $x'y'$-liðar og teikna snúna grafið.

20.

$$11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2=4$$

21.

$$16x^2+24xy+9y^2-125x=0$$

Í eftirfarandi verkefnum skal greina keilusniðið sem hefur brennipunkt í upphafspunkti og tilgreina síðan stýrilínu þess og miðskekkju.

22.

$$r=\frac{3}{2-\sin\theta}$$

23.

$$r=\frac{5}{4+6\cos\theta}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna gefna keilusniðið. Ef það er fleygbogi skal merkja hvirfilpunkt, brennipunkt og stýrilínu. Ef það er sporbaugur eða breiðbogi skal merkja hvirfilpunkta og brennipunkta.

24.

$$r=\frac{12}{4-8\sin\theta}$$

25.

$$r=\frac{2}{4+4\sin\theta}$$

26. Finnið póljöfnu keilusniðsins sem hefur brennipunkt í upphafspunkti, miðskekkjuna $e=2$, og stýrilínuna $x=3$.

11. KAFLI

Runur, líkur og talningarfræði



(mynd: Robert Couse-Baker, Flickr.)

Efnisyfirlit kafla

- 11.1 Runur og ritháttur þeirra
- 11.2 Jafnmunarunur
- 11.3 Kvótarunur
- 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
- 11.5 Talningarreglur
- 11.6 Tvíliðusetningin
- 11.7 Líkur

Inngangur að runum, líkum og talningarfræði

Sá sem vinnur í happdrætti þarf að taka stórar ákvarðanir um hvað hann eigi að gera við vinninginn. Kaupa nýtt hús? Lúxusblæjubíl? Fara í skemmtisiglingu umhverfis jörðina?

Líkurnar á að vinna í happdrætti eru litlar, en okkur finnst öllum gaman að láta okkur dreyma um hvað við gætum keypt fyrir vinninginn. Eitt það fyrsta sem vinningshafinn þarf að ákveða er hvort hann taki vinninginn sem eingreiðslu eða sem reglulegar greiðslur yfir langan tíma. Slíkar greiðslur nefnast jöfn greiðsluröð.

Ákvörðunin byggist oft á mörgum þáttum, svo sem skattaáhrifum, vöxtum og fjárfestingarstefnu. Einnig þarf að huga að persónulegum ástæðum og færa má margvísleg rök fyrir hvorum kostinum sem er. Flestir vinningshafar í happdrætti velja þó eingreiðsluna.

Í þessum kafla könnum við stærðfræðina að baki aðstæðum sem þessum. Við skoðum jafnar greiðsluraðir ítarlega. Einnig kynnumst við þeirri grein stærðfræðinnar sem gerir okkur kleift að reikna fjölda leiða til að velja happdrættistölur og líkurnar á að vinna.

11.1 Runur og ritháttur þeirra

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Skrifa liði runu sem er skilgreind á lokuðu formi.
- Skrifa liði runu sem er skilgreind með rakningarvenslum.
- Nota rithátt aðfeldis.

Tölvuleikjafyrirtæki hrindir af stað spennandi nýrri auglýsingaherferð. Starfsfólkið spáir því að fjöldi heimsókna á vef fyrirtækisins tvöfaldist á hverjum degi. Líkanið sem það notar sýnir 2 heimsóknir fyrsta daginn, 4 heimsóknir annan daginn, 8 heimsóknir þriðja daginn og svo framvegis. Sjá töflu 1.

Tafla 1

Dagur	1	2	3	4	5	...
Heimsóknir	2	4	8	16	32	...

Ef líkanið heldur áfram að gilda, hversu margar verða heimsóknirnar í lok mánaðarins? Til að svara spurningunni þurfum við fyrst að kunna að finna lista talna sem eru skrifaðar í tiltekinni röð. Í þessum hluta skoðum við slíka raðaða lista.

11

Liðir runu sem er skilgreind á lokuðu formi skrifaðir

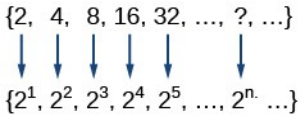
Ein leið til að lýsa röðuðum lista talna er sem runu. Runa er fall þar sem skilgreiningarmengið er hlutmengi náttúrlegu talnanna. Runan sem fjöldi heimsókna á vefinn myndar er

$$\left(2, 4, 8, 16, 32, \ldots\right).$$

Úrfellingarpunktarnir (...) tákna að runan haldi áfram endalaust. Hver tala í rununni kallast liður. Fyrstu fimm liðir þessarar runu eru 2, 4, 8, 16 og 32.

Það getur verið seinlegt að telja upp alla liði runu. Til að finna fjölda heimsókna á vefinn í lok mánaðar þyrfti til dæmis að telja upp allt að 31 liði. Fljótlegra er að finna tiltekinn lið með því að skrifa formúlu sem skilgreinir rununa.

Ein gerð slíkra formúla er lokað form, sem skilgreinir liði runu út frá sæti þeirra í rununni. Lokuð form koma sér vel þegar við viljum finna tiltekinn lið runu án þess að finna alla liðina á undan honum. Nota má formúluna til að finna n-ta lið rununnar, þar sem n er hvaða jákvæð tala sem er. Í dæminu okkar er hver tala í rununni tvöföld talan á undan og því getum við notað veldi af 2 til að skrifa formúlu fyrir n-ta liðinn.



Fyrsti liður rununnar er $2^1=2$, annar liðurinn er $2^2=4$, þriðji liðurinn er $2^3=8$, og svo framvegis. Finna má n-ta lið rununnar með því að hefja 2 í n-ta veldi. Lokað form runu er táknað með lágstaf $a, b, c \ldots$ með fótvísinn n. Lokað form þessarar runu er

$$a_n=2^n.$$

Nú þegar við höfum formúlu fyrir n-ta lið rununnar getum við svarað spurningunni í upphafi hlutans. Við áttum að finna fjölda heimsókna í lok mánaðarins og gerum ráð fyrir að mánuðurinn sé 31 dagur. Til að finna fjölda heimsókna á síðasta degi mánaðarins þurfum við að finna 31. lið rununnar. Við setjum 31 í stað n í formúlunni.

$$a_{31}=2^{31}$$
$$=2.147.483.648$$

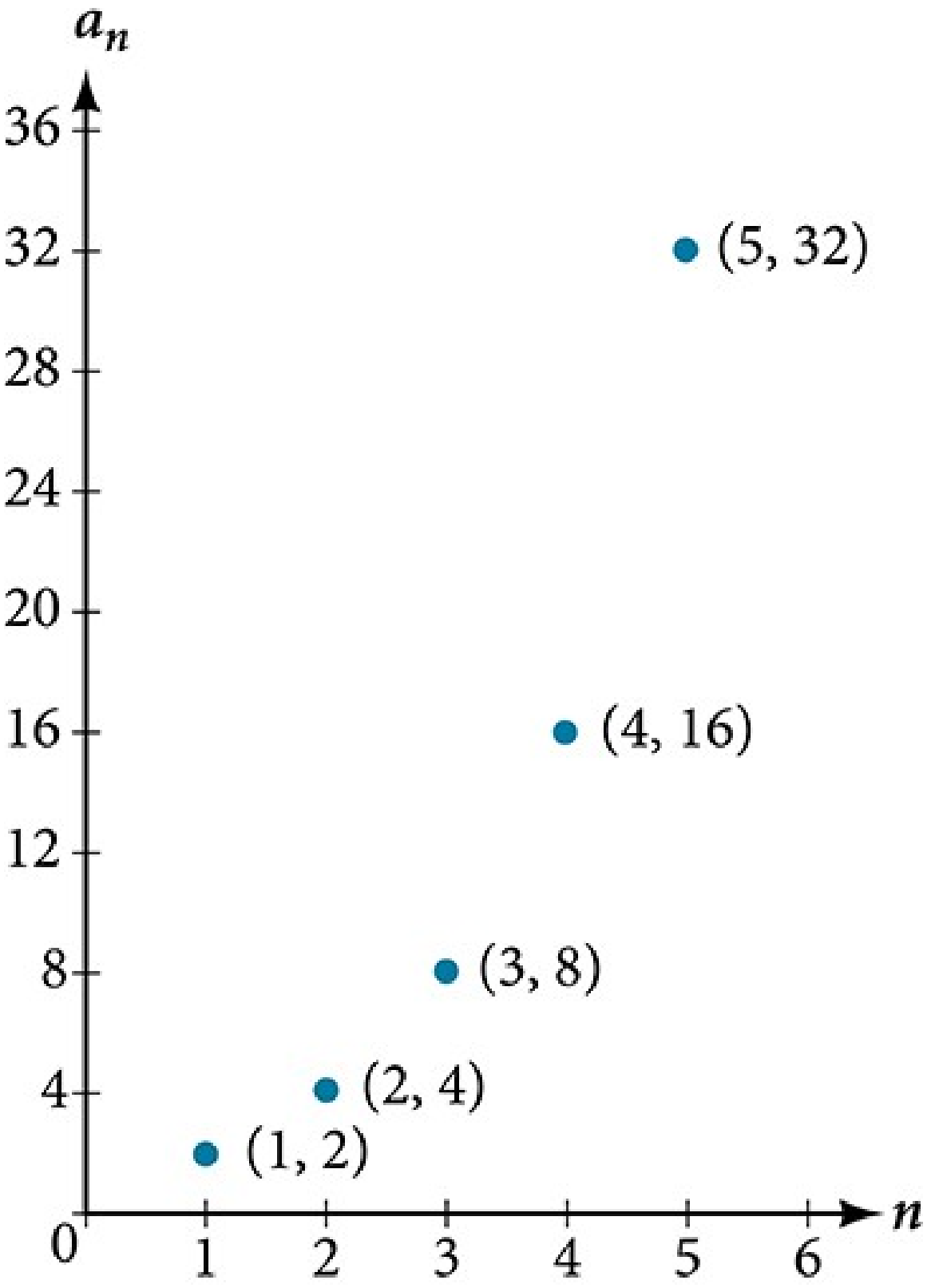
If the doubling trend continues, the company will get 2.147.483.648 hits on the last day of the month. That is over 2,1 billion hits! The huge number is probably a little unrealistic because it does not take consumer interest and competition into account. It does, however, give the company a starting point from which to consider business decisions.

Einnig má sýna rununa í töflu. Fyrstu fimm liðir rununnar og n-ti liður hennar eru sýndir í töflu 2.

Tafla 2

n	1	2	3	4	5	n
n-ti **liður rununnar,** a_n	2	4	8	16	32	2^n

Á grafi birtist runan sem mengi stakra punkta. Af grafinu á mynd 1 sést að fjöldi heimsókna vex með veldishraða. Þessi tiltekna runa myndar vísisfall.



Mynd 1

Að lokum getum við skrifað þessa tilteknu runu sem

$$\left(2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^n, \ldots\right).$$

Runa sem heldur áfram endalaust kallast óendanleg runa. Skilgreiningarmengi óendanlegrar runu er mengi náttúrlegu talnanna. Ef við skoðum aðeins fyrstu 10 liði rununnar getum við skrifað

$$\left(2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^n, \ldots, 1024\right).$$

Þessi runa kallast endanleg runa vegna þess að hún heldur ekki áfram endalaust.

RUNA

Runa er fall þar sem skilgreiningarmengið er mengi jákvæðra heiltalna. Endanleg runa er runa þar sem skilgreiningarmengið samanstendur aðeins af fyrstu n jákvæðu heiltölunum. Tölurnar í runu kallast liðir. Breytan a með tölu sem fótvísi táknar liði runu og sýnir sæti liðarins í rununni.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Við köllum a_1 fyrsta lið rununnar, a_2 annan lið rununnar, a_3 þriðja lið rununnar og svo framvegis. Liðurinn a_n kallast n-ti liður rununnar eða almenni liður rununnar. Lokað form skilgreinir n-ta lið runu út frá sæti liðarins. Runa sem heldur áfram endalaust er óendanleg runa.

SPURT OG SVARAÐ

Þarf runa alltaf að byrja á a_1?

Nei. Í sumum verkefnum getur verið gagnlegt að skilgreina upphafsliðinn sem a_0 í stað a_1. Í slíkum verkefnum inniheldur skilgreiningarmengi fallsins 0.

AÐFERÐ

Skrifa fyrstu n liði runu þegar lokað form er gefið.

1. Setjið hvert gildi n inn í formúluna. Byrjið á $n=1$ til að finna fyrsta liðinn, a_1.
2. Til að finna annan liðinn, a_2, skal nota $n=2$.
3. Haldið áfram á sama hátt þar til allir n liðirnir hafa verið fundnir.

SÝNIDÆMI 1

Liðir runu sem er skilgreind á lokuðu formi skrifaðir

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar sem er skilgreind með lokaða forminu $a_n = -3n+8$.

Lausn

Setjið $n=1$ inn í formúluna. Endurtakið með gildunum 2 til 5 fyrir n.

$$
\begin{aligned}
n &= 1 \qquad a_1 = -3(1) + 8 = 5 \\
n &= 2 \qquad a_2 = -3(2) + 8 = 2 \\
n &= 3 \qquad a_3 = -3(3) + 8 = -1 \\
n &= 4 \qquad a_4 = -3(4) + 8 = -4 \\
n &= 5 \qquad a_5 = -3(5) + 8 = -7
\end{aligned}
$$

Fyrstu fimm liðirnir eru $\left[5, 2, -1, -4, -7\right]$.

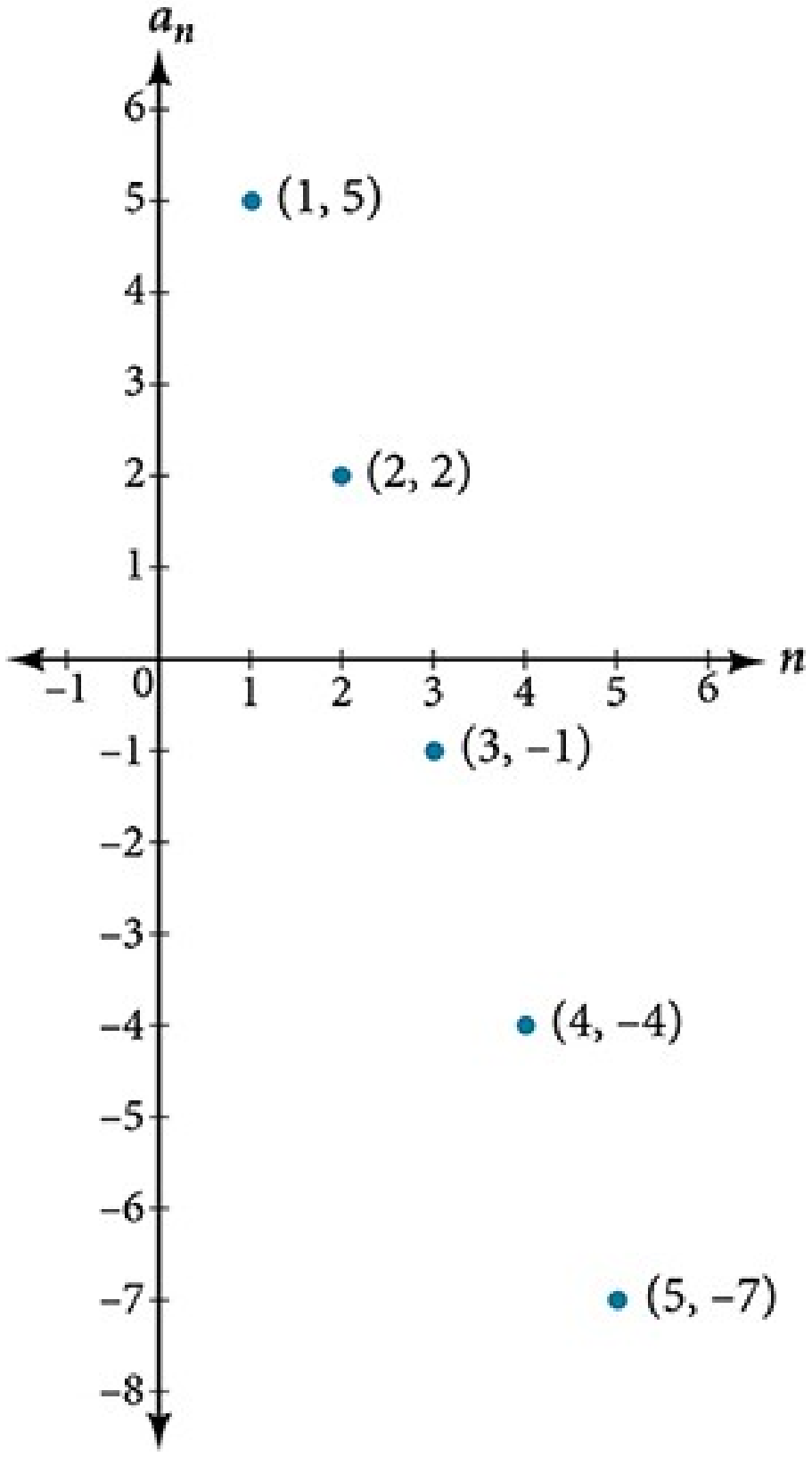
Greining

Skrá má gildi rununnar í töflu. Tafla á borð við töflu 3 er hentug leið til að setja fallið inn í grafteikniforrit.

Tafla 3

n	1	2	3	4	5
a_n	5	2	–1	–4	–7

Teikna má graf út frá þessari gildistöflu. Af grafinu á mynd 2 sést að runan táknar línulegt fall, en takið eftir að grafið er ekki samfellt þar sem skilgreiningarmengið nær aðeins yfir jákvæðu heiltölurnar.



Mynd 2

REYNIÐ SJÁLF #1

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar sem er skilgreind með lokaða forminu $t_n = 5n - 4$.

Víxlrunur rannsakaðar

Stundum víxlast liðir runu. Formerki liðanna geta jafnvel víxlast. Skrefin við að finna liði rununnar eru þau sömu og ef formerkin víxluðust ekki. Liðirnir sem fást vaxa þó hvorki né minnka jafnt og þétt þegar n vex. Skoðum þessa runu.

$$(2, -4, 6, -8)$$

Takið eftir að fyrsti liðurinn er stærri en annar liðurinn, annar liðurinn er minni en þriðji liðurinn og þriðji liðurinn er stærri en fjórði liðurinn. Þetta mynstur heldur áfram endalaust. Raðið liðunum ekki upp eftir stærð þegar þið túlkið rununa.

AÐFERÐ

Skrifa fyrstu n liði runu þegar lokað form með víxlandi liðum er gefið.

1. Setjið hvert gildi n inn í formúluna. Byrjið á $n = 1$ til að finna fyrsta liðinn, a_1. Formerki liðarins ræðst af $(-1)^n$ í lokaða forminu.
2. Til að finna annan liðinn, a_2, skal nota $n = 2$.
3. Haldið áfram á sama hátt þar til allir n liðirnir hafa verið fundnir.

SÝNIDÆMI 2

Liðir víxlrunu sem er skilgreind á lokuðu formi skrifaðir

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar.

$$a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$$

Lausn

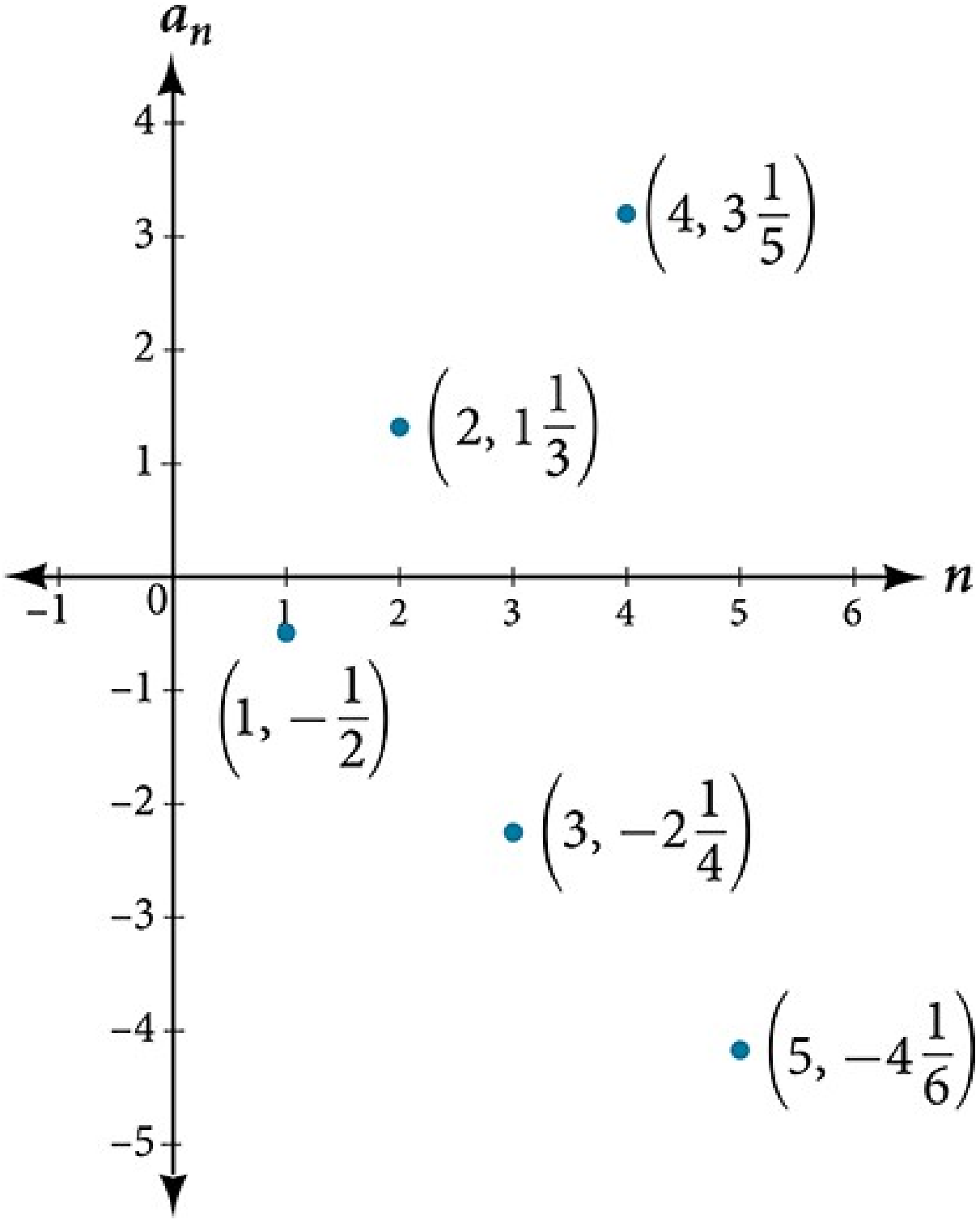
Setjið $n = 1$, $n = 2$, og svo framvegis inn í formúluna.

$$\begin{aligned}
n = 1 \qquad & a_1 = \frac{(-1)^1 1^2}{1+1} = -\frac{1}{2} \\
n = 2 \qquad & a_2 = \frac{(-1)^2 2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \\
n = 3 \qquad & a_3 = \frac{(-1)^3 3^2}{3+1} = -\frac{9}{4} \\
n = 4 \qquad & a_4 = \frac{(-1)^4 4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \\
n = 5 \qquad & a_5 = \frac{(-1)^5 5^2}{5+1} = -\frac{25}{6}
\end{aligned}$$

Fyrstu fimm liðirnir eru $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{9}{4}, \frac{16}{5}, -\frac{25}{6}\right\}$.

Greining

Graf fallsins, sem sýnt er á mynd 3, er ólíkt gröfunum sem við höfum áður séð í þessum hluta þar sem liðir rununnar víxlast milli jákvæðra og neikvæðra gilda.



Mynd 3

SPURT OG SVARAÐ

Skýrir (-1) í veldinu n formerkjavíxlin í sýnidæmi 2?

Já. Veldisvísirinn getur verið $n, n+1, n-1,$ og svo framvegis, en oddatöluveldi gefur alltaf neikvæðan lið og slétttöluveldi jákvæðan lið.

REYNIÐ SJÁLF #2

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar.

$$a_n = \frac{4n}{(-2)^n}$$

Lokuð form hlutskilgreindra falla rannsökuð

Við höfum lært að runur eru föll þar sem skilgreiningarmengið nær yfir jákvæðu heiltölurnar. Þetta gildir einnig um aðrar gerðir falla, þar á meðal sum hlutskilgreind föll. Munið að hlutskilgreint fall er skilgreint í nokkrum hlutum. Hver hluti getur haft sína eigin formúlu.

AÐFERÐ

Skrifa fyrstu n liði runu þegar lokað form hlutskilgreinds falls er gefið

1. Finnið formúluna sem gildir þegar $n=1$.
2. Til að finna fyrsta liðinn, a_1, skal nota $n=1$ í viðeigandi formúlu.
3. Finnið formúluna sem gildir þegar $n=2$.
4. Til að finna annan liðinn, a_2, skal nota $n=2$ í viðeigandi formúlu.
5. Haldið áfram á sama hátt þar til allir n liðirnir hafa verið fundnir.

SÝNIDÆMI 3

Liðir runu sem er skilgreind með lokuðu formi hlutskilgreinds falls skrifaðir

Skrifið fyrstu sex liði rununnar.

$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{ef } n \text{ er ekki deilanleg með } 3 \\ \dfrac{n}{3} & \text{ef } n \text{ er deilanleg með } 3 \end{cases}$$

Lausn

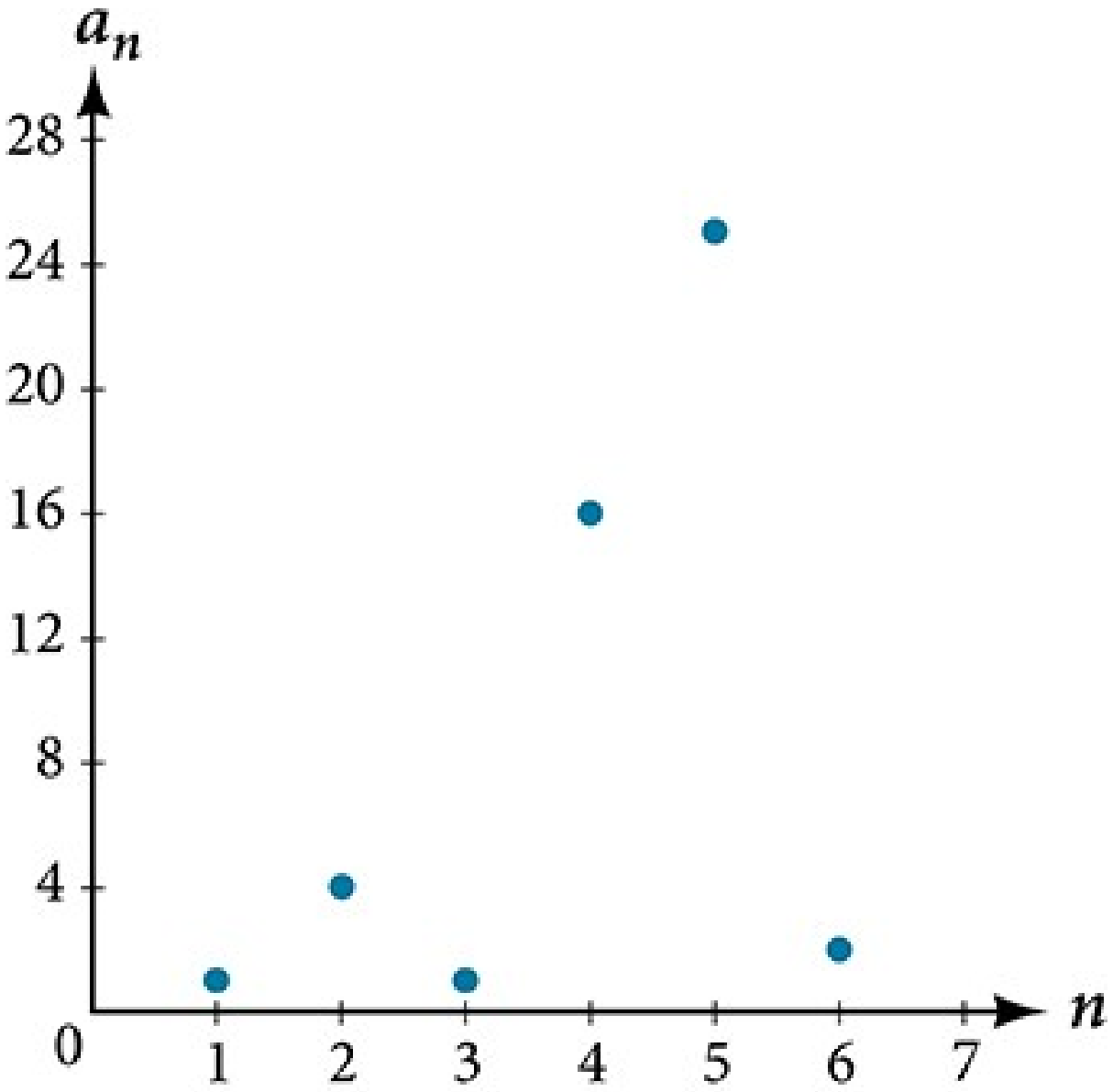
Setjið $n=1, n=2,$ og svo framvegis inn í viðeigandi formúlu. Notið n^2 þegar n er ekki margfeldi af 3. Notið $\frac{n}{3}$ þegar n er margfeldi af 3.

$$
\begin{aligned}
a_1 = 1^2 = 1 &\quad \text{1 er ekki margfeldi af 3. Notið } n^2.\\
a_2 = 2^2 = 4 &\quad \text{2 er ekki margfeldi af 3. Notið } n^2.\\
a_3 = \frac{3}{3} = 1 &\quad \text{3 er margfeldi af 3. Notið } \frac{n}{3}.\\
a_4 = 4^2 = 16 &\quad \text{4 er ekki margfeldi af 3. Notið } n^2.\\
a_5 = 5^2 = 25 &\quad \text{5 er ekki margfeldi af 3. Notið } n^2.\\
a_6 = \frac{6}{3} = 2 &\quad \text{6 er margfeldi af 3. Notið } \frac{n}{3}.
\end{aligned}
$$

Fyrstu sex liðirnir eru $\left(1, 4, 1, 16, 25, 2\right)$.

Greining

Þriðji hver punktur á grafinu á mynd 4 sker sig úr miðað við punktana tvo næst honum. Ástæðan er sú að runan var skilgreind með hlutskilgreindu falli.



Mynd 4

REYNIÐ SJÁLF #3

Skrifið fyrstu sex liði rununnar.

$$a_n = \begin{cases} 2\,n^3 & \text{ef } n \text{ er oddatala} \\ \dfrac{5\,n}{2} & \text{ef } n \text{ er slétt tala} \end{cases}$$

Lokað form fundið

Hingað til höfum við fengið lokaða formið gefið og átt að finna nokkra liði rununnar.
Stundum er lokað form fyrir n-ta lið runu ekki gefið. Í staðinn fáum við nokkra liði rununnar.

Þá getum við unnið aftur á bak og fundið lokað form út frá fyrstu liðum rununnar. Lykillinn að því að finna lokað form er að leita að mynstri í liðunum. Hafið í huga að mynstrið getur falist í víxlandi formerkjum, formúlum fyrir teljara eða nefnara, veldisvísum eða veldisstofnum.

AÐFERÐ

Finna lokað form runu þegar fyrstu liðir hennar eru gefnir.

1. Leitið að mynstri meðal liðanna.
2. Ef liðirnir eru brot, leitið þá að einu mynstri í teljurunum og öðru í nefnurunum.
3. Leitið að mynstri í formerkjum liðanna.
4. Skrifið formúlu fyrir a_n sem fall af n. Prófið formúluna fyrir $n=1$, $n=2$, og $n=3$.

SÝNIDÆMI 4

Lokað form fyrir n-ta lið runu skrifað

Skrifið lokað form fyrir n-ta lið hverrar runu.

1. ⓐ $\left\{-\frac{2}{11},\frac{3}{13},-\frac{4}{15},\frac{5}{17},-\frac{6}{19},\ldots\right\}$
2. ⓑ

$$\left\{-\frac{2}{25},-\frac{2}{125},-\frac{2}{625},-\frac{2}{3.125},-\frac{2}{15.625},\ldots\right\}$$

3. ⓒ $\left\{e^4,e^5,e^6,e^7,e^8,\ldots\right\}$

Lausn

Leitið að mynstrinu í hverri runu.

1. ⓐ Liðirnir víxlast milli jákvæðra og neikvæðra gilda. Við getum notað $(-1)^n$ til að láta formerkin víxlast. Tákna má teljarann með $n+1$. Tákna má nefnarann með $2n+9$.

   $a_n=\frac{(-1)^n(n+1)}{2n+9}$

2. ⓑ

   Liðirnir eru allir neikvæðir.

   $\left\{-\frac{2}{25},-\frac{2}{125},-\frac{2}{625},-\frac{2}{3.125},-\frac{2}{15.125},\cdots\right\}$ Teljarinn er 2.

   $\left\{-\frac{2}{5^2},-\frac{2}{5^3},-\frac{2}{5^4},-\frac{2}{5^6},-\frac{2}{5^7},\ldots,-\frac{2}{5^n}\right\}$ Nefnararnir eru vaxandi veldi af 5.

   Við vitum því að brotið er neikvætt, teljarinn er 2 og tákna má nefnarann með 5^{n+1}.

   $a_n=-\frac{2}{5^{n+1}}$

3. ⓒ

Liðirnir eru veldi af e. Þegar $n=1$, er fyrsti liðurinn e^4 og veldisvísirinn hlýtur því að vera $n+3$.

$a_n=e^{n+3}$

REYNIÐ SJÁLF #4

Skrifið lokað form fyrir n-ta lið rununnar.

$$\{9,-81,729,-6.561,59.049,\ldots\}$$

REYNIÐ SJÁLF #5

Skrifið lokað form fyrir n-ta lið rununnar.

$$\left\{-\frac{3}{4},-\frac{9}{8},-\frac{27}{12},-\frac{81}{16},-\frac{243}{20},\ldots\right\}$$

REYNIÐ SJÁLF #6

Skrifið lokað form fyrir n-ta lið rununnar.

$$\left\{\frac{1}{e^2},\frac{1}{e},1,e,e^2,\ldots\right\}$$

Liðir runu sem er skilgreind með rakningarformúlu skrifaðir

Runur koma náttúrulega fyrir í vaxtarmynstrum kuðunga nautilus-smokkfisks, köngla, trjágreina og margra annarra náttúrulegra forma. Rununa má sjá í uppröðun laufblaða eða greina, fjölda krónublaða blóms eða mynstri hólfa í kuðungi nautilus-smokkfisks. Vöxturinn fylgir Fibonacci-rununni, frægri runu þar sem hver liður fæst með því að leggja saman tvo næstu liði á undan. Tölurnar í rununni eru 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Önnur dæmi úr náttúrunni sem sýna Fibonacci-rununa eru kalla-liljan, sem hefur aðeins eitt krónublað, sólhattur með 13 krónublöð og ýmis afbrigði fagurfífla sem geta haft 21 eða 34 krónublöð.

Hver liður Fibonacci-rununnar er háður liðunum á undan. Ekki er auðvelt að skrifa Fibonacci-rununa á lokuðu formi. Þess í stað lýsum við henni með rakningarformúlu, formúlu sem skilgreinir liði runu út frá fyrri liðum.

Rakningarformúla hefur alltaf tvo hluta: gildi upphafsliðar (eða upphafsliða) og jöfnu sem skilgreinir a_n út frá fyrri liðum. Gerum til dæmis ráð fyrir að við vitum þetta:

$$a_1=3$$
$$a_n=2\ a_{n-1}-1 \text{ fyrir } n\geq 2$$

Við getum fundið næstu liði rununnar út frá fyrsta liðnum.

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2(3) - 1 = 5$$
$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2(5) - 1 = 9$$
$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2(9) - 1 = 17$$

Fyrstu fjórir liðir rununnar eru $\left[3, 5, 9, 17\right]$.

Rakningarformúla Fibonacci-rununnar tilgreinir fyrstu tvo liðina og skilgreinir hvern næsta lið sem summu tveggja næstu liða á undan.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ fyrir } n \geq 3$$

Til að finna tíunda lið rununnar þyrftum við til dæmis að leggja saman áttunda og níunda liðinn. Áður kom fram að þeir eru 21 og 34, þannig að

$$a_{10} = a_9 + a_8 = 34 + 21 = 55$$

RAKNINGARFORMÚLA

Rakningarformúla er formúla sem skilgreinir hvern lið runu út frá einum eða fleiri fyrri liðum. Í rakningarformúlu verður alltaf að tilgreina upphafslið eða upphafsliði rununnar.

SPURT OG SVARAÐ

Þarf alltaf að gefa fyrstu tvo liðina í rakningarformúlu?

Nei. Fibonacci-runan skilgreinir hvern lið út frá næstu tveimur liðum á undan, en margar rakningarformúlur skilgreina hvern lið út frá aðeins einum fyrri lið. Fyrir slíkar runur þarf aðeins að skilgreina fyrsta liðinn.

AÐFERÐ

Skrifa fyrstu n liði runu þegar rakningarformúla og aðeins fyrsti liðurinn eru gefin.

1. Finnið upphafsliðinn, a_1, sem er gefinn sem hluti formúlunnar. Þetta er fyrsti liðurinn.
2. Til að finna annan liðinn, a_2, skal setja upphafsliðinn inn í formúluna fyrir a_{n-1}. Leysið.
3. Til að finna þriðja liðinn, a_3, skal setja annan liðinn inn í formúluna. Leysið.
4. Endurtakið þar til leyst hefur verið fyrir n-ta liðinn.

SÝNIDÆMI 5

Liðir runu sem er skilgreind með rakningarformúlu skrifaðir

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar sem er skilgreind með rakningarformúlunni.

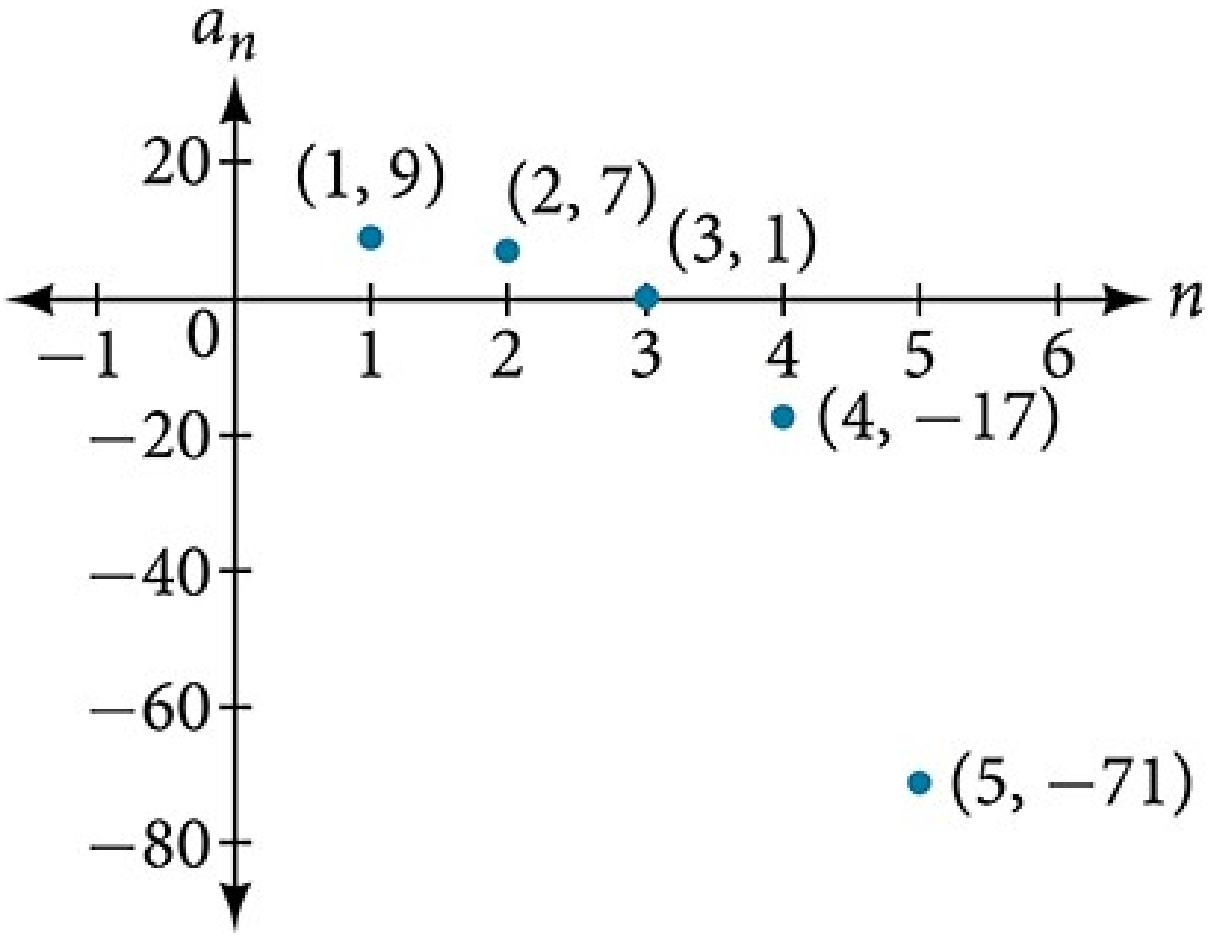
$$a_1 = 9$$
$$a_n = 3\,a_{n-1} - 20, \text{ fyrir } n \geq 2$$

Lausn

Fyrsti liðurinn er gefinn í formúlunni. Fyrir hvern næsta lið setjum við gildi liðarins á undan í stað a_{n-1}.

$$\begin{aligned}
n &= 1 \qquad a_1 = 9 \\
n &= 2 \qquad a_2 = 3a_1 - 20 = 3(9) - 20 = 27 - 20 = 7 \\
n &= 3 \qquad a_3 = 3a_2 - 20 = 3(7) - 20 = 21 - 20 = 1 \\
n &= 4 \qquad a_4 = 3a_3 - 20 = 3(1) - 20 = 3 - 20 = -17 \\
n &= 5 \qquad a_5 = 3a_4 - 20 = 3(-17) - 20 = -51 - 20 = -71
\end{aligned}$$

Fyrstu fimm liðirnir eru $\left[9, 7, 1, -17, -71\right]$. Sjá mynd 5.



Mynd 5

REYNIÐ SJÁLF #7

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar sem er skilgreind með rakningarformúlunni.

$$a_1=2$$
$$a_n=2\ a_{n-1}+1, \text{ fyrir } n\geq 2$$

AÐFERÐ

Skrifa fyrstu n liði runu þegar rakningarformúla með tveimur upphafsliðum er gefin.

1. Finnið upphafsliðinn, a_1, sem er gefinn sem hluti formúlunnar.
2. Finnið annan liðinn, a_2, sem er gefinn sem hluti formúlunnar.
3. Til að finna þriðja liðinn skal setja upphafsliðinn og annan liðinn inn í formúluna. Reiknið.
4. Endurtakið þar til n-ti liðurinn hefur verið reiknaður.

SÝNIDÆMI 6

Liðir runu sem er skilgreind með rakningarformúlu skrifaðir

Skrifið fyrstu sex liði rununnar sem er skilgreind með rakningarformúlunni.

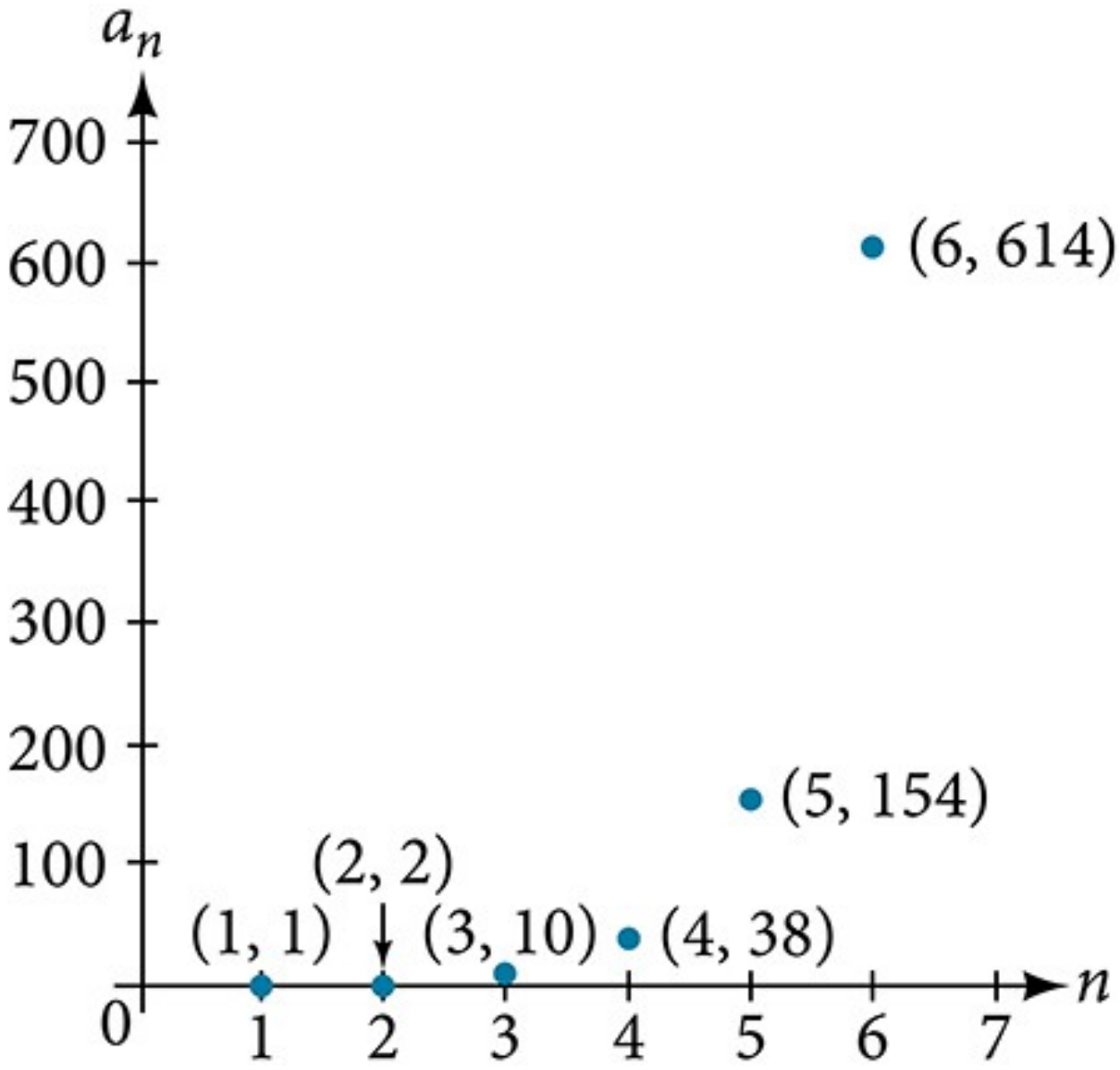
$$a_1=1$$
$$a_2=2$$
$$a_n=3\ a_{n-1}+4\ a_{n-2}, \text{ fyrir } n\geq 3$$

Lausn

Fyrstu tveir liðirnir eru gefnir. Fyrir hvern næsta lið setjum við gildi tveggja næstu liða á undan í stað a_{n-1} og a_{n-2}.

$$\begin{aligned} n=3 \qquad & a_3=3a_2+4a_1=3(2)+4(1)=10 \\ n=4 \qquad & a_4=3a_3+4a_2=3(10)+4(2)=38 \\ n=5 \qquad & a_5=3a_4+4a_3=3(38)+4(10)=154 \\ n=6 \qquad & a_6=3a_5+4a_4=3(154)+4(38)=614 \end{aligned}$$

Fyrstu sex liðirnir eru $\{1,2,10,38,154,614\}$. Sjá mynd 6.



Mynd 6

REYNIÐ SJÁLF #8

Skrifið fyrstu 8 liði rununnar sem er skilgreind með rakningarformúlunni.

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 1$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} + a_{n-3}, \text{ fyrir } n \geq 4$$

Ritháttur aðfeldis notaður

Formúlur sumra runa innihalda margfeldi samliggjandi jákvæðra heiltalna. Aðfeldi n, **táknað** $n!$, er margfeldi jákvæðu heiltalnanna frá 1 til n. Til dæmis er

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Dæmi um formúlu sem inniheldur aðfeldi er $a_n = (n+1)!$. Finna má sjötta lið rununnar með því að setja 6 í stað n.

$$a_6 = (6+1)! = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

Aðfeldi hverrar náttúrlegrar tölu n er $n(n-1)!$ Við getum því einnig litið á $5!$ sem $5 \cdot 4!$.

AÐFELDI N

Aðfeldi n er reikniaðgerð sem skilgreina má með rakningarformúlu. Aðfeldi n, táknað $n!$, er skilgreint fyrir jákvæða heiltölu n sem:

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(2)\,(1), \text{ fyrir } n \geq 2$$

Sértilvikið $0!$ er skilgreint sem $0! = 1$.

SPURT OG SVARAÐ

Er alltaf hægt að reikna aðfeldi með reiknivél?

Nei. Aðfeldi verða mjög stór mjög hratt — hraðar en jafnvel vísisföll! Þegar útkoman verður of stór fyrir reiknivélina getur hún ekki reiknað aðfeldið.

SÝNIDÆMI 7

Liðir runu skrifaðir með aðfeldum

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar sem er skilgreind með lokaða forminu $a_n = \dfrac{5n}{(n+2)!}$.

Lausn

Setjið $n = 1, n = 2$, og svo framvegis inn í formúluna.

$$n=1 \qquad a_1=\frac{5\,(1)}{(1+2)!}=\frac{5}{3!}=\frac{5}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{5}{6}$$

$$n=2 \qquad a_2=\frac{5\,(2)}{(2+2)!}=\frac{10}{4!}=\frac{10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{5}{12}$$

$$n=3 \qquad a_3=\frac{5\,(3)}{(3+2)!}=\frac{15}{5!}=\frac{15}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{8}$$

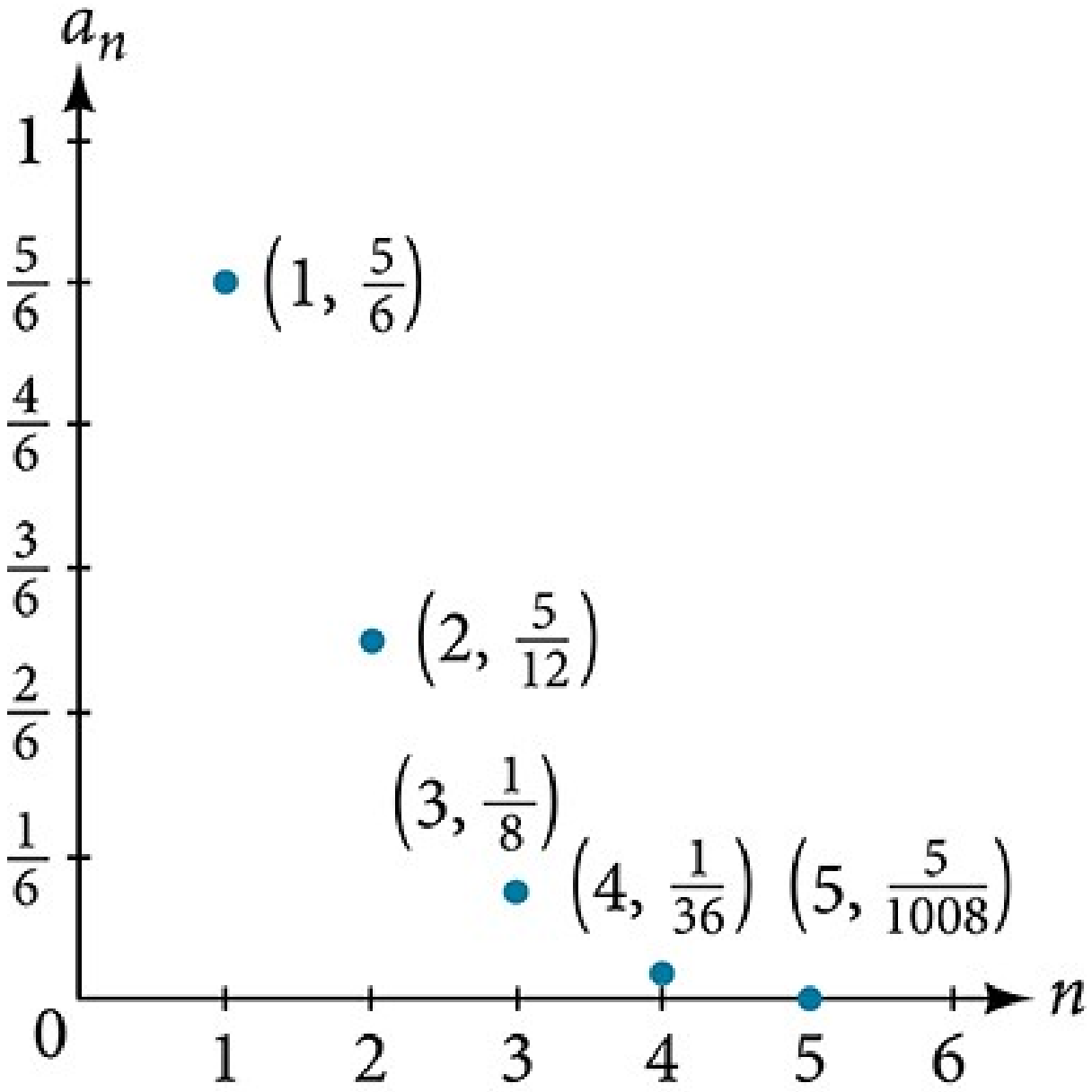
$$n=4 \qquad a_4=\frac{5\,(4)}{(4+2)!}=\frac{20}{6!}=\frac{20}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{36}$$

$$n=5 \qquad a_5=\frac{5\,(5)}{(5+2)!}=\frac{25}{7!}=\frac{25}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{5}{1.008}$$

Fyrstu fimm liðirnir eru $\left\{\frac{5}{6},\frac{5}{12},\frac{1}{8},\frac{1}{36},\frac{5}{1.008}\right\}$.

Greining

Mynd 7 sýnir graf runnunnar. Takið eftir að aðfeldi vaxa mjög hratt. Aðfeldið í nefnaranum veldur því að nefnarinn verður miklu stærri en teljarinn þegar *n* vex. Kvótinn minnkar því. Eins og graf liðanna sýnir minnka liðirnir og nálgast núll.



Mynd 7

REYNIÐ SJÁLF #9

Skrifið fyrstu fimm liði rununnar sem er skilgreind með lokaða forminu $a_n = \frac{(n+1)!}{2n}$.

MIÐLAR

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari kennslu og æfingu í runum.

- Liðir runu fundnir

11.1 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Ræðið merkingu runu. Hvert er skilgreiningarmengi endanlegrar runu sem er skilgreind með formúlu? En óendanlegrar runu?

2. Lýsið þremur leiðum til að skilgreina runu.

3. Er raðað mengi sléttra talna óendanleg runa? En raðað mengi oddatalna? Rökstyðjið svarið.

4. Hvað verður um liði a_n runu þegar formúlan inniheldur neikvæðan þátt sem er hafinn í veldi með veldisvísi sem inniheldur n? Hvaða heiti er notað um þetta fyrirbæri?

5. Hvað er aðfeldi og hvernig er það táknað? Sýnið með dæmi hvernig ritháttur aðfeldis getur verið gagnlegur.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa fyrstu fjóra liði rununnar.

6.

$$a_n = 2^n - 2$$

7.

$$a_n = -\frac{16}{n+1}$$

8.

$$a_n = -(-5)^{n-1}$$

9.

$$a_n = \frac{2^n}{n^3}$$

10.

$$a_n = \frac{2n+1}{n^3}$$

11.

$$a_n = 1{,}25 \cdot (-4)^{n-1}$$

12.

$$a_n = -4 \cdot (-6)^{n-1}$$

13.

$$a_n=\frac{n^2}{2n+1}$$

14.

$$a_n=(-10)^n+1$$

15.

$$a_n=-\left(\frac{4\cdot(-5)^{n-1}}{5}\right)$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa fyrstu átta liði hlutskilgreindu rununnar.

16.

$$a_n=\begin{cases}(-2)^n-2 & \text{ef } n \text{ er slétt tala}\\ (3)^{n-1} & \text{ef } n \text{ er oddatala}\end{cases}$$

17.

$$a_n=\begin{cases}\frac{n^2}{2n+1} & \text{ef } n \leq 5\\ n^2-5 & \text{ef } n > 5\end{cases}$$

18.

$$a_n=\begin{cases}(2n+1)^2 & \text{ef } n \text{ er deilanleg með 4}\\ \frac{2}{n} & \text{ef } n \text{ er ekki deilanleg með 4}\end{cases}$$

19.

$$a_n=\begin{cases}-0{,}6\cdot 5^{n-1} & \text{ef } n \text{ er frumtala eða 1}\\ 2{,}5\cdot(-2)^{n-1} & \text{ef } n \text{ er samsett tala}\end{cases}$$

20.

$$a_n=\begin{cases}4\left(n^2-2\right) & \text{ef } n \leq 3 \text{ eða } n > 6\\ \frac{n^2-2}{4} & \text{ef } 3<n\leq 6\end{cases}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa lokað form fyrir hverja runu.

21.

$$4,7,12,19,28,\ldots$$

22.

$$-4, 2, -10, 14, -34, \ldots$$

23.

$$1, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \ldots$$

24.

$$0, \frac{1-e^1}{1+e^2}, \frac{1-e^2}{1+e^3}, \frac{1-e^3}{1+e^4}, \frac{1-e^4}{1+e^5}, \ldots$$

25.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa fyrstu fimm liði rununnar.

26.

$$a_1 = 9, a_n = a_{n-1} + n$$

27.

$$a_1 = 3, a_n = (-3)a_{n-1}$$

28.

$$a_1 = -4, a_n = \frac{a_{n-1} + 2n}{a_{n-1} - 1}$$

29.

$$a_1 = -1, a_n = \frac{(-3)^{n-1}}{a_{n-1} - 2}$$

30.

$$a_1 = -30, a_n = (2 + a_{n-1})\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa fyrstu átta liði rununnar.

31.

$$a_1 = \frac{1}{24}, a_2 = 1, a_n = (2a_{n-2})(3a_{n-1})$$

32.

$$a_1 = -1, a_2 = 5, a_n = a_{n-2}(3 - a_{n-1})$$

33.

$$a_1=2, a_2=10, a_n=\frac{2\left(a_{n-1}+2\right)}{a_{n-2}}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa rakningarformúlu fyrir hverja runu.

34.

$$-2{,}5, -5, -10, -20, -40, \ldots$$

35.

$$-8, -6, -3, 1, 6, \ldots$$

36.

$$2, 4, 12, 48, 240, \ldots$$

37.

$$35, 38, 41, 44, 47, \ldots$$

38.

$$15, 3, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \ldots$$

Í eftirfarandi verkefnum skal reikna aðfeldið.

39.

$$6!$$

40.

$$\left(\frac{12}{6}\right)!$$

41.

$$\frac{12!}{6!}$$

42.

$$\frac{100!}{99!}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa fyrstu fjóra liði rununnar.

43.

$$a_n=\frac{n!}{n^2}$$

44.

$$a_n=\frac{3\cdot n!}{4\cdot n!}$$

45.

$$a_n=\frac{n!}{n^2-n-1}$$

46.

$$a_n=\frac{100\cdot n}{n(n-1)!}$$

Myndræn verkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal teikna fyrstu fimm liði tilgreindrar runu.

47.

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n}+n$$

48.

$$a_n=\begin{cases}\frac{4+n}{2\ n} & \text{ef } n \text{ er slétt tala}\\ 3+n & \text{ef } n \text{ er oddatala}\end{cases}$$

49.

$$a_1=2, a_n=(-a_{n-1}+1)^2$$

50.

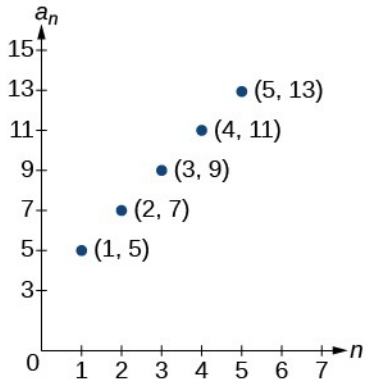
$$a_1=1, a_n=a_{n-1}+8$$

51.

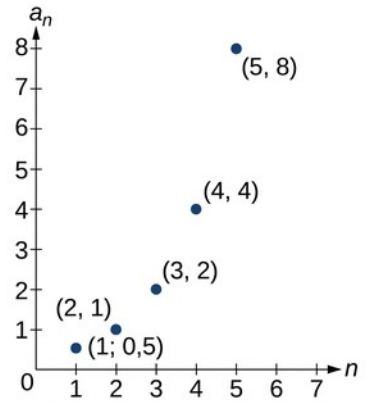
$$a_n=\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa lokað form rununnar út frá fyrstu fimm punktunum sem sýndir eru á grafinu.

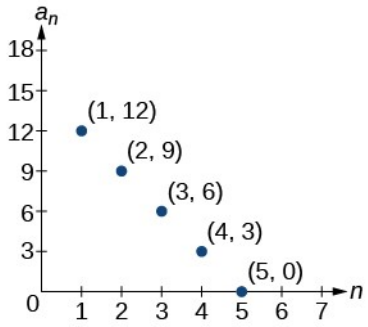
52.



53.



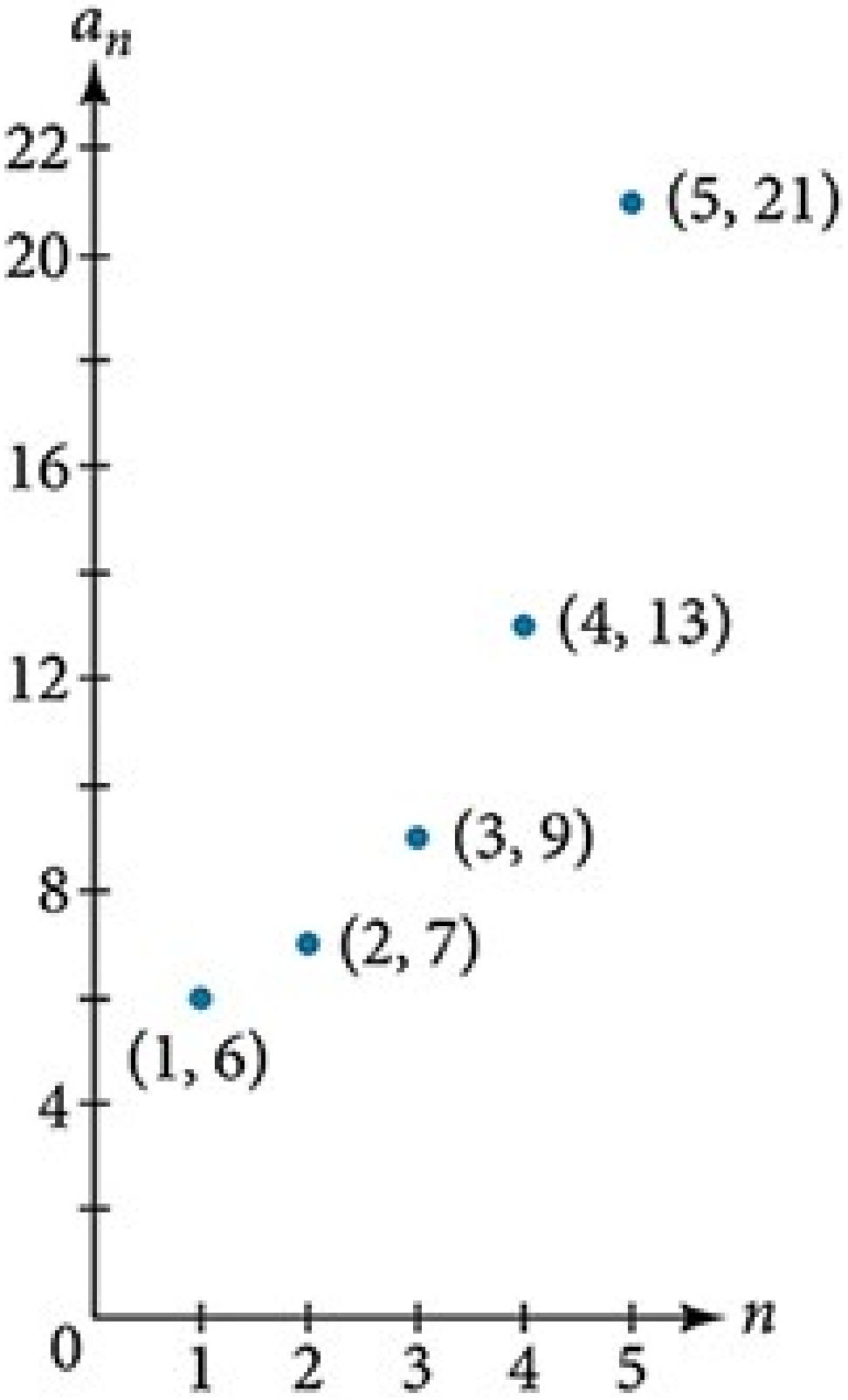
54.



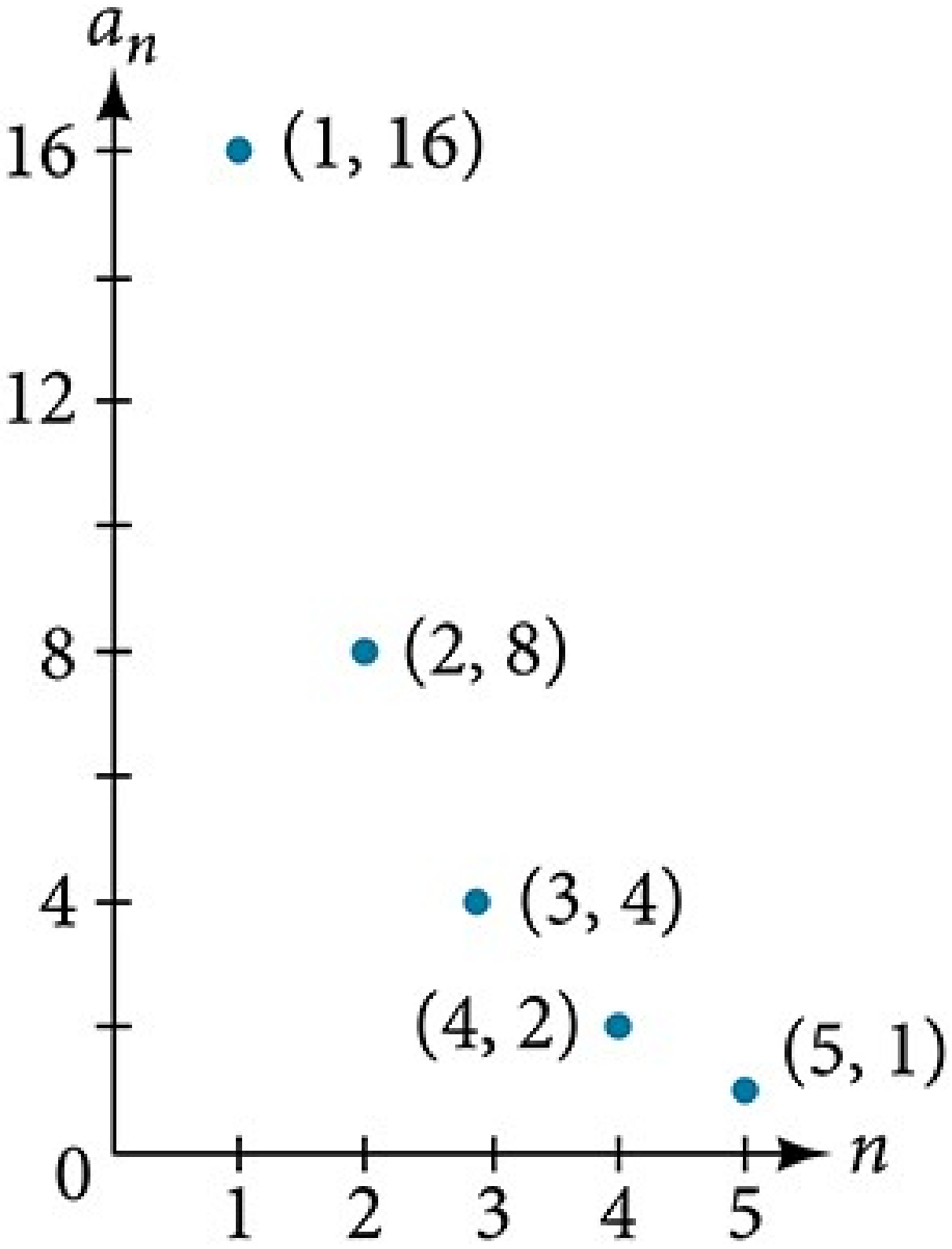
11

Í eftirfarandi verkefnum skal skrifa rakningarformúlu rununnar út frá fyrstu fimm punktunum sem sýndir eru á grafinu.

55.



56.



Tækni

Fylgið þessum skrefum til að reikna runu sem er skilgreind með rakningarformúlu í grafreikni:

- Sláið gildi upphafsliðarins a_1 inn á heimaskjánum og ýtið á [ENTER].
- Sláið rakningarformúluna inn með því að slá inn öll tölugildi sem gefin eru í formúlunni ásamt lyklunum [2ND] ANS fyrir fyrri liðinn a_{n-1}. Ýtið á [ENTER].
- Haldið áfram að ýta á [ENTER] til að reikna gildi hvers næsta liðar.

Í eftirfarandi verkefnum skal nota skrefin hér á undan til að finna tilgreindan lið eða liði rununnar.

57. Finnið fyrstu fimm liði rununnar $a_1=\frac{87}{111}$, $a_n=\frac{4}{3}a_{n-1}+\frac{12}{37}$. Notið >Frac-aðgerðina til að fá niðurstöður sem brot.

58. Finnið 15. lið rununnar $a_1=625$, $a_n=0{,}8\ a_{n-1}+18$.

59. Finnið fyrstu fimm liði rununnar $a_1=2$, $a_n=2^{[(a_n-1)-1]}+1$.

60. Finnið fyrstu tíu liði rununnar $a_1=8$, $a_n=\frac{(a_{n-1}+1)!}{a_{n-1}!}$.

61. Finnið tíunda lið rununnar $a_1=2$, $a_n=n\,a_{n-1}$

Fylgið þessum skrefum til að reikna endanlega runu sem er skilgreind á lokuðu formi. Gerið eftirfarandi á TI-84-reiknivél.

- Ýtið á [2ND] LIST á heimaskjánum.
- Færið bendilinn yfir á OPS og veljið „seq(“ af fellilistanum. Ýtið á [ENTER].
- Sláið lokaða formið inn í línuna sem merkt er „Expr:“ og notið hnappinn [X,T ,θ , n] fyrir n
- Sláið breytuna sem notuð var í fyrra skrefi inn í línuna sem merkt er „Variable:“
- Sláið inn gildi n sem runan byrjar á í línuna sem merkt er „start:“
- Sláið inn gildi n sem runan endar á í línuna sem merkt er „end:“
- Ýtið 3 sinnum á [ENTER] til að fara aftur á heimaskjáinn. Ritháttur rununnar birtist á skjánum. Ýtið á [ENTER] til að sjá lista yfir liði skilgreindu endanlegu rununnar. Notið hægri örvarlykilinn til að fletta í gegnum listann.

Gerið eftirfarandi á TI-83-reiknivél.

- Ýtið á [2ND] LIST á heimaskjánum.
- Færið bendilinn yfir á OPS og veljið „seq(“ af fellilistanum. Ýtið á [ENTER].
- Sláið atriðin inn í röðinni „Expr“, „Variable“, „start“, „end“ og aðskiljið þau með kommum. Lýsing á hverju atriði er í leiðbeiningunum hér á undan.
- Ýtið á [ENTER] til að sjá lista yfir liði skilgreindu endanlegu rununnar. Notið hægri örvarlykilinn til að fletta í gegnum listann.

Í eftirfarandi verkefnum skal nota skrefin hér á undan til að finna tilgreinda liði rununnar. Námundið að næsta þúsundasta hluta þegar þess þarf.

62. Teljið upp fyrstu fimm liði rununnar $a_n = -\frac{28}{9}n + \frac{5}{3}$.

63. Teljið upp fyrstu sex liði rununnar $a_n = \frac{n^3 - 3{,}5\ n^2 + 4{,}1\ n - 1{,}5}{2{,}4\ n}$.

64. Teljið upp fyrstu fimm liði rununnar $a_n = \frac{15n \cdot (-2)^{n-1}}{47}$

65. Teljið upp fyrstu fjóra liði rununnar $a_n = 5{,}7^n + 0{,}275\ (n-1)!$

66. Teljið upp fyrstu sex liði rununnar $a_n = \frac{n!}{n}$.

Viðbótarverkefni

67. Skoðið rununa sem er skilgreind með $a_n = -6 - 8n$. Er $a_n = -421$ liður í rununni? Staðfestið niðurstöðuna.

68. Hvaða liður rununnar $a_n = \frac{n^2 + 4n + 4}{2(n+2)}$ hefur gildið 41 ? Staðfestið niðurstöðuna.

69. Finnið rakningarformúlu fyrir rununa 1, 0, −1, −1, 0, 1, 1, 0, −1, −1, 0, 1, 1, ... (Ábending: Finnið mynstur fyrir a_n út frá fyrstu tveimur liðunum.)

70. Reiknið fyrstu átta liði runanna $a_n = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$ og $b_n = n^3 + 3n^2 + 2n$, og setjið síðan fram tilgátu um tengsl runanna tveggja.

71. Sannið tilgátuna sem sett var fram í verkefninu á undan.

11.2 Jafnmunarunur

11

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

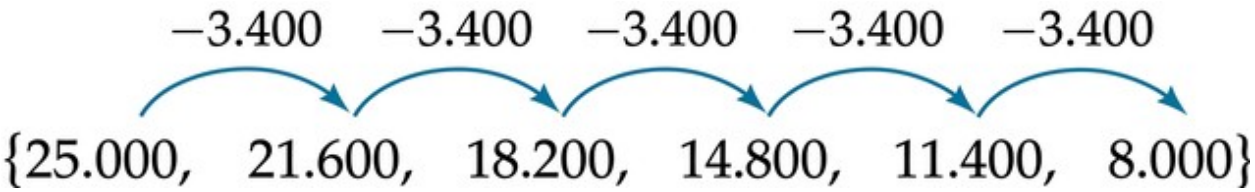
- Finna fasta mismuninn í jafnmunarunu.
- Skrifa liði jafnmunarunu.
- Nota rakningarformúlu fyrir jafnmunarunu.
- Nota lokað form fyrir jafnmunarunu.

Fyrirtæki kaupa oft dýran búnað, svo sem tölvur og ökutæki, til rekstrarins. Vegna skatta lækkar bókfært virði slíkra eigna á hverju ári. Þessi virðislækkun kallast afskriftir. Ein leið til að reikna afskriftir er línuleg afskrift, þar sem virði eignarinnar lækkar um sömu fjárhæð á hverju ári.

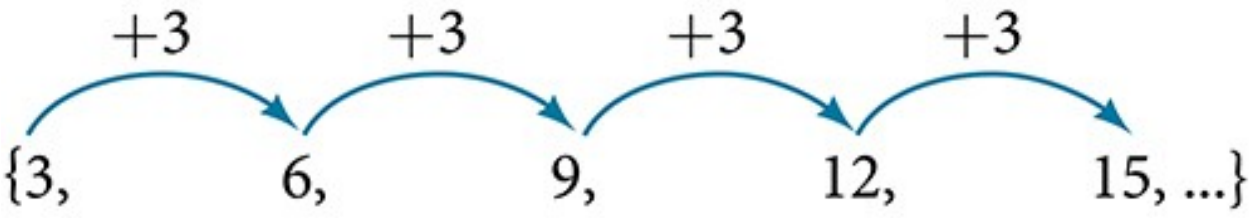
Skoðum til dæmis konu sem stofnar lítið verktakafyrirtæki. Hún kaupir nýjan vörubíl á $25.000. Eftir fimm ár áætlar hún að geta selt bílinn á $8.000. Virðistap vörubílsins verður því $17.000, eða $3.400 á ári í fimm ár. Vörubíllinn verður $21.600 virði eftir fyrsta árið, $18.200 eftir tvö ár, $14.800 eftir þrjú ár, $11.400 eftir fjögur ár og $8.000 í lok fimmta árs. Í þessum hluta skoðum við runur af tiltekinni gerð sem nota má til að reikna afskriftir, til dæmis virði vörubílsins.

Fastur mismunur fundinn

Virði vörubílsins í dæminu mynda jafnmunarunu vegna þess að þau breytast um fasta fjárhæð á hverju ári. Hver liður hækkar eða lækkar um sama fasta gildið, sem kallast fastur mismunur rununnar. Í þessari runu er fasti mismunurinn −3.400.



Runan hér á eftir er annað dæmi um jafnmunarunu. Hér er fasti mismunurinn 3. Velja má hvaða lið rununnar sem er og leggja 3 við hann til að finna næsta lið.



JAFNMUNARUNA

Jafnmunaruna er runa þar sem mismunur hverra tveggja aðliggjandi liða er fasti. Þessi fasti kallast fastur mismunur. Ef a_1 er fyrsti liður jafnmunarunu og d er fasti mismunurinn er runan:

$$\{a_n\} = \{a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \ldots\}$$

SÝNIDÆMI 1

Fastur mismunur fundinn

Er hvor runa jafnmunaruna? Finnið fasta mismuninn ef svo er.

1. ⓐ $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$
2. ⓑ $\{-3, 1, 5, 9, 13, \ldots\}$

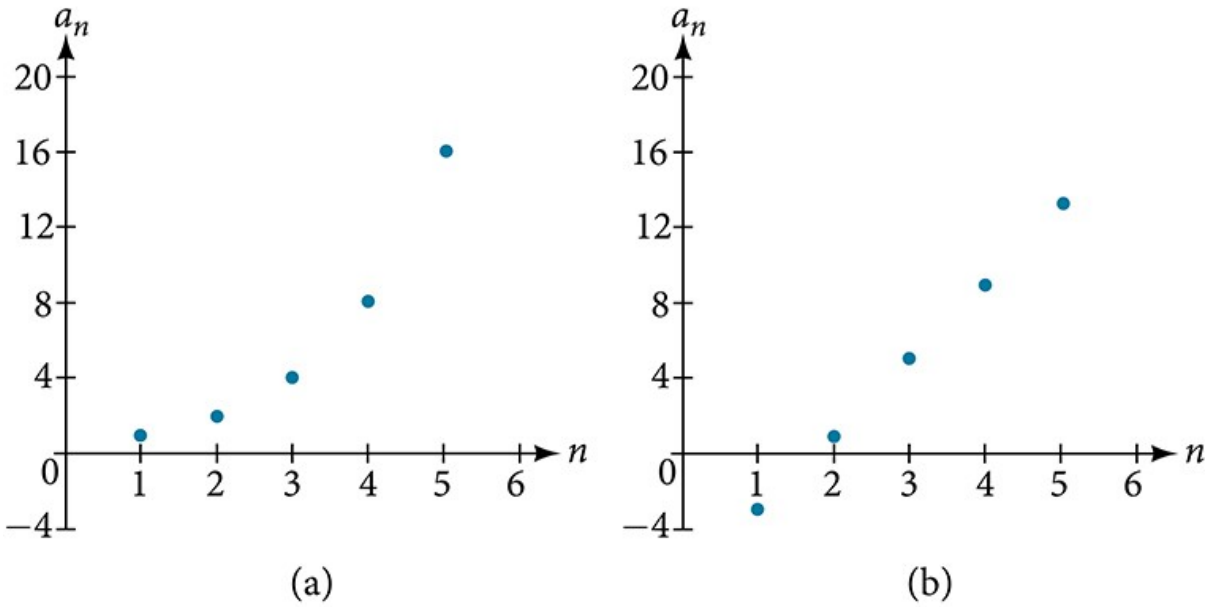
Lausn

Dragið hvern lið frá næsta lið til að athuga hvort runan hafi fastan mismun.

1. ⓐ Runan er ekki jafnmunaruna vegna þess að hún hefur engan fastan mismun.
   $2-1=1$ $4-2=2$ $8-4=4$ $16-8=8$
2. ⓑ Runan er jafnmunaruna vegna þess að hún hefur fastan mismun. Fasti mismunurinn er 4. $1-(-3)=4$ $5-1=4$ $9-5=4$ $13-9=4$

Greining

Graf hvorrar runu er sýnt á mynd 1. Af gröfunum sést að þótt báðar runurnar vaxi er a ekki línuleg en b er línuleg. Jafnmunarunur hafa fastan breytingarhraða og því liggja punktarnir á gröfum þeirra alltaf á beinni línu.



Mynd 1

SPURT OG SVARAÐ

Ef vitað er að runa sé jafnmunaruna, þarf þá að draga hvern lið frá næsta lið til að finna fasta mismuninn?

Nei. Ef við vitum að runan er jafnmunaruna getum við valið hvaða lið hennar sem er og dregið hann frá næsta lið til að finna fasta mismuninn.

REYNIÐ SJÁLF #1

Er gefna runan jafnmunaruna? Finnið fasta mismuninn ef svo er.

$$\{18, 16, 14, 12, 10, \ldots\}$$

REYNIÐ SJÁLF #2

Er gefna runan jafnmunaruna? Finnið fasta mismuninn ef svo er.

$$\left(1,3,6,10,15,\ldots\right)$$

Liðir jafnmunarunu skrifaðir

Nú þegar við getum þekkt jafnmunarunu getum við fundið liði hennar þegar fyrsti liðurinn og fasti mismunurinn eru gefnir. Liðirnir fást með því að byrja á fyrsta liðnum og leggja fasta mismuninn við aftur og aftur. Einnig má finna hvaða lið sem er með því að setja gildi n og d inn í formúluna hér á eftir.

$$a_n = a_1 + \left(n-1\right)d$$

AÐFERÐ

Finna fyrstu nokkra liði jafnmunarunu þegar fyrsti liðurinn og fasti mismunurinn eru gefnir.

1. Leggið fasta mismuninn við fyrsta liðinn til að finna annan liðinn.
2. Leggið fasta mismuninn við annan liðinn til að finna þriðja liðinn.
3. Haldið áfram þar til þið hafið fundið alla liðina sem beðið er um.
4. Skrifið liðina aðskilda með kommum innan hornklofa.

SÝNIDÆMI 2

Liðir jafnmunarunu skrifaðir

Skrifið fyrstu fimm liði jafnmunarununnar þar sem $a_1 = 17$ og $d = -3$.

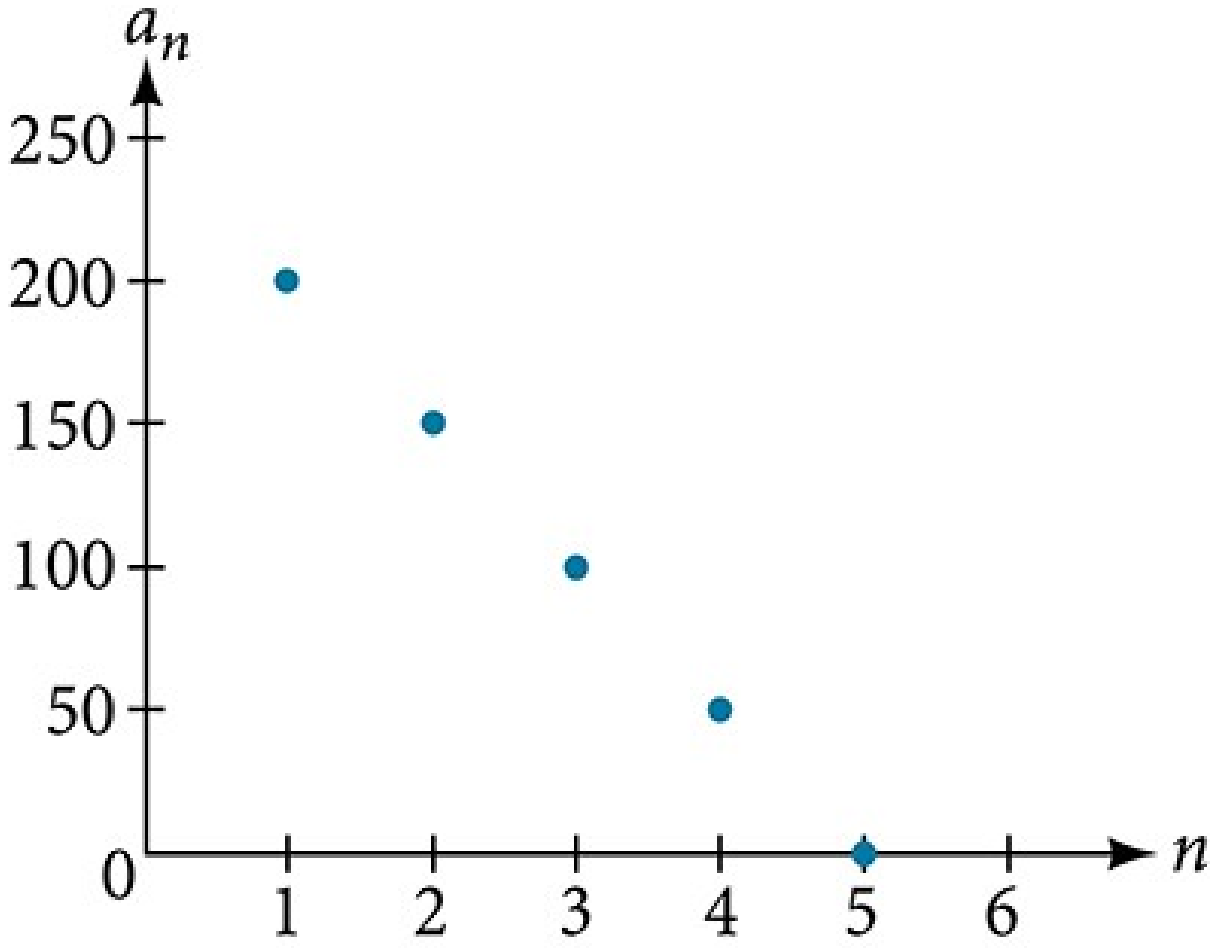
Lausn

Að leggja -3 við er hið sama og að draga 3 frá. Byrjið á fyrsta liðnum og dragið 3 frá hverjum lið til að finna næsta lið.

Fyrstu fimm liðirnir eru $\left(17,14,11,8,5\right)$

Greining

Eins og búast mátti við liggja punktarnir á grafi rununnar á beinni línu, eins og sýnt er á mynd 2.



Mynd 2

REYNIÐ SJÁLF #3

Skráið fyrstu fimm liði jafnmunarununnar þar sem $a_1=1$ og $d=5$.

AÐFERÐ

11

Finna tiltekinn lið jafnmunarunu þegar fyrsti liðurinn og einhver annar liður eru gefnir.

1. Setjið gefin gildi a_1, a_n, n inn í formúluna $a_n=a_1+(n-1)d$ og leysið fyrir d.
2. Finnið tiltekinn lið með því að setja viðeigandi gildi a_1, n, og d inn í formúluna $a_n=a_1+(n-1)d$.

SÝNIDÆMI 3

Liðir jafnmunarunu skrifaðir

Þegar $a_1=8$ og $a_4=14$ eru gefin, finnið a_5.

Lausn

Skrifa má rununa út frá upphafsliðnum 8 og fasta mismuninum d.

$$\left\{8, 8+d, 8+2d, 8+3d\right\}$$

Við vitum að fjórði liðurinn er 14 og að hann hefur formið $a_1+3d=8+3d$.

Við getum fundið fasta mismuninn d.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)\,d \\ a_4 &= a_1+3\,d \\ a_4 &= 8+3\,d && \text{Skrifið fjórða lið rununnar út frá } a_1 \text{ og } d. \\ 14 &= 8+3\,d && \text{Setjið } 14 \text{ í stað } a_4. \\ d &= 2 && \text{Leysið fyrir fasta mismuninn.} \end{aligned}$$

Finnið fimmta liðinn með því að leggja fasta mismuninn við fjórða liðinn.

$$a_5=a_4+2=16$$

Greining

Takið eftir að fasta mismuninum er lagt einu sinni við fyrsta liðinn til að finna annan liðinn, tvisvar til að finna þriðja liðinn, þrisvar til að finna fjórða liðinn og svo framvegis. Tíunda liðinn mætti finna með því að leggja fasta mismuninn níu sinnum við fyrsta liðinn eða nota jöfnuna $a_n=a_1+(n-1)d$.

REYNIÐ SJÁLF #4

Þegar $a_3=7$ og $a_5=17$ eru gefin, finnið a_2.

Rakningarformúlur jafnmunaruna notaðar

Sumar jafnmunarunur eru skilgreindar út frá liðnum á undan með rakningarformúlu. Formúlan gefur algebrulega reglu til að ákvarða liði rununnar. Með rakningarformúlu má finna hvaða lið jafnmunarunu sem er sem fall af liðnum á undan. Hver liður er summa fyrri liðarins og fasta mismunarins. Ef fasti mismunurinn er til dæmis 5 er hver liður fyrri liðurinn að viðbættum 5. Eins og í öllum rakningarformúlum þarf fyrsti liðurinn að vera gefinn.

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad n \geq 2$$

RAKNINGARFORMÚLA FYRIR JAFNMUNARUNU

Rakningarformúla jafnmunarunu með fasta mismuninn d er:

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad n \geq 2$$

AÐFERÐ

Skrifa rakningarformúlu fyrir gefna jafnmunarunu.

1. Dragið hvaða lið sem er frá næsta lið til að finna fasta mismuninn.
2. Tilgreinið upphafsliðinn og setjið fasta mismuninn inn í rakningarformúlu jafnmunaruna.

SÝNIDÆMI 4

Rakningarformúla fyrir jafnmunarunu skrifuð

Skrifið rakningarformúlu fyrir jafnmunarununa.

$$\left(-18,\ -7,\ 4,\ 15,\ 26,\ \ldots\right)$$

Lausn

Fyrsti liðurinn er gefinn sem -18. Finna má fasta mismuninn með því að draga fyrsta liðinn frá öðrum liðnum.

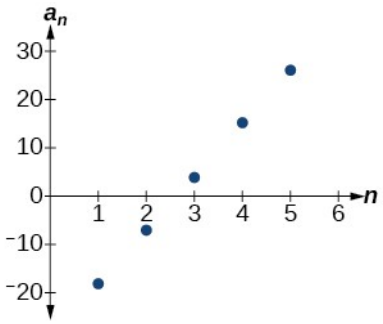
$$d = -7 - \left(-18\right) = 11$$

Setjið upphafsliðinn og fasta mismuninn inn í rakningarformúlu jafnmunaruna.

$$a_1 = -18$$
$$a_n = a_{n-1} + 11, \quad \text{fyrir } n \geq 2$$

Greining

Við sjáum að fasti mismunurinn er hallatala línunnar sem myndast þegar liðir rununnar eru teiknaðir, eins og sýnt er á mynd 3. Runan vex um fastan mismun, 11 einingar, í hverju skrefi.



Mynd 3

SPURT OG SVARAÐ

Þarf að draga fyrsta liðinn frá öðrum liðnum til að finna fasta mismuninn?

Nei. Við getum dregið hvaða lið rununnar sem er frá næsta lið. Algengast er þó að draga fyrsta liðinn frá öðrum liðnum því það er oft einfaldasta leiðin til að finna fasta mismuninn.

REYNIÐ SJÁLF #5

Skrifið rakningarformúlu fyrir jafnmunarununa.

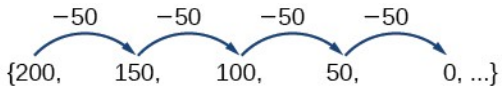
$$\{25,\ 37,\ 49,\ 61,\ \ldots\}$$

Lokuð form jafnmunaruna notuð

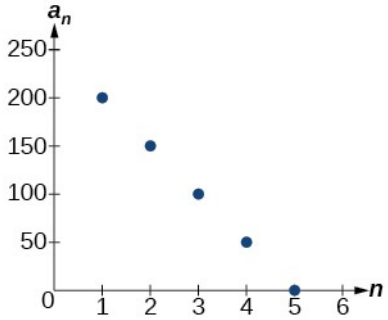
Líta má á jafnmunarunu sem fall með náttúrlegu tölurnar að skilgreiningarmengi. Fallið er línulegt vegna þess að breytingarhraðinn er fastur. Fasti mismunurinn er fasti breytingarhraðinn, eða hallatala fallsins. Við getum myndað línulega fallið ef hallatalan og skurðpunkturinn við lóðrétta ásinn eru þekkt.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Til að finna skurðpunkt fallsins við y-ásinn má draga fasta mismuninn frá fyrsta lið rununnar. Skoðum rununa hér á eftir.



Fasti mismunurinn er -50 og því táknar runan línulegt fall með hallatöluna -50. Til að finna skurðpunktinn við y-ásinn drögum við -50 frá $200: 200-(-50)=200+50=250$. Einnig má finna skurðpunktinn við y-ásinn með því að teikna graf fallsins og ákvarða hvar lína gegnum punktana sker lóðrétta ásinn. Grafið er sýnt á mynd 4.



Mynd 4

Munum að hallaskurðarform línu er $y=mx+b$. Í runum notum við a_n í stað y og n í stað x. Ef hallatala og skurðpunktur fallsins við lóðrétta ásinn eru þekkt getum við sett þau í stað m og b í hallaskurðarformi línu. Þegar -50 er sett í stað hallatölunnar og 250 í stað skurðpunktsins við lóðrétta ásinn fæst jafnan:

$$a_n = -50n + 250$$

Ekki þarf að finna skurðpunktinn við lóðrétta ásinn til að skrifa lokað form jafnmunarunu. Annað lokað form þessarar runu er $a_n = 200 - 50(n-1)$, sem einfaldast í $a_n = -50n + 250$.

LOKAÐ FORM JAFNMUNARUNU

Lokað form n-ta liðar jafnmunarunu er

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

AÐFERÐ

Skrifa lokað form þegar fyrstu nokkrir liðir jafnmunarunu eru gefnir.

1. Finnið fasta mismuninn, $a_2 - a_1$.
2. Setjið fasta mismuninn og fyrsta liðinn inn í $a_n = a_1 + d(n-1)$.

SÝNIDÆMI 5

Lokað form n-ta liðar jafnmunarunu skrifað

Skrifið lokað form fyrir jafnmunarununa.

$$\{2,\ 12,\ 22,\ 32,\ 42,\ \ldots\}$$

Lausn

Finna má fasta mismuninn með því að draga fyrsta liðinn frá öðrum liðnum.

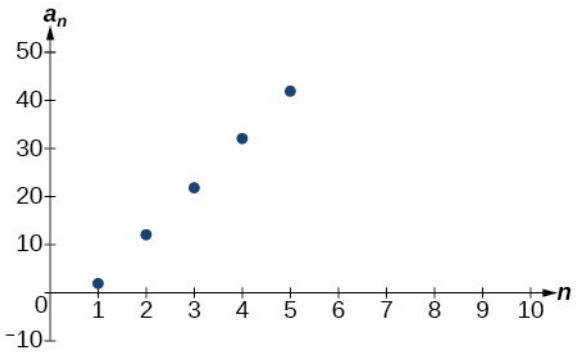
$$\begin{aligned} d &= a_2 - a_1 \\ &= 12 - 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Fasti mismunurinn er 10. Setjið fasta mismuninn og fyrsta lið rununnar inn í formúluna og einfaldið.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + 10(n-1) \\ a_n &= 10n - 8 \end{aligned}$$

Greining

Graf þessarar runu, sem sýnt er á mynd 5, hefur hallatöluna 10 og sker lóðrétta ásinn í -8.



Mynd 5

REYNIÐ SJÁLF #6

Skrifið lokað form fyrir eftirfarandi jafnmunarunu.

$$\{50, 47, 44, 41, \ldots\}$$

Fjöldi liða í endanlegri jafnmunarunu fundinn

Nota má lokuð form til að ákvarða fjölda liða í endanlegri jafnmunarunu. Við þurfum að finna fasta mismuninn og síðan ákvarða hve oft þarf að leggja hann við fyrsta liðinn til að fá síðasta lið rununnar.

AÐFERÐ

Finna heildarfjölda liða þegar fyrstu þrír liðir og síðasti liður endanlegrar jafnmunarunu eru gefnir.

1. Finnið fasta mismuninn d.
2. Setjið fasta mismuninn og fyrsta liðinn inn í $a_n = a_1 + d(n-1)$.
3. Setjið síðasta liðinn í stað a_n og leysið fyrir n.

SÝNIDÆMI 6

Fjöldi liða í endanlegri jafnmunarunu fundinn

Finnið fjölda liða í endanlegu jafnmunarununni.

$$\{8, 1, -6, \ldots, -41\}$$

Lausn

Finna má fasta mismuninn með því að draga fyrsta liðinn frá öðrum liðnum.

$$1 - 8 = -7$$

Fasti mismunurinn er -7. Setjið fasta mismuninn og upphafslið rununnar inn í formúluna fyrir n-ta liðinn og einfaldið.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n-1) \\ a_n &= 8 + (-7)(n-1) \\ a_n &= 15 - 7n \end{aligned}$$

Setjið -41 í stað a_n og leysið fyrir n

$$\begin{aligned} -41 &= 15 - 7n \\ 8 &= n \end{aligned}$$

Runan hefur átta liði.

REYNIÐ SJÁLF #7

Finnið fjölda liða í endanlegu jafnmunarununni.

$$\{6,\ 11,\ 16,\ \ldots,\ 56\}$$

Hagnýt verkefni leyst með jafnmunarunum

Í mörgum hagnýtum verkefnum er eðlilegra að nota upphafsliðinn a_0 í stað a_1. Í slíkum verkefnum breytum við lokaða forminu lítillega til að taka tillit til þess að upphafsliðurinn er annar en áður. Við notum eftirfarandi formúlu:

$$a_n = a_0 + d\,n$$

SÝNIDÆMI 7

Hagnýt verkefni leyst með jafnmunarunum

Fimm ára barn fær \$1 í vasapeninga á viku. Foreldrar þess lofa að hækka vikulega fjárhæðina um \$2 á ári.

1. ⓐ Skrifið formúlu fyrir vikulega vasapeninga barnsins á tilteknu ári.
2. ⓑ Hve háir verða vasapeningar barnsins þegar það er 16 ára?

Lausn

1. ⓐ
   Lýsa má aðstæðunum með jafnmunarunu með upphafsliðinn 1 og fasta mismuninn 2. Látum A tákna fjárhæð vasapeninganna og n fjölda ára frá 5 ára aldri. Með breytta lokaða forminu fyrir jafnmunarunu fæst:
   $A_n = 1 + 2\,n$
2. ⓑ
   Við finnum fjölda ára frá 5 ára aldri með frádrætti.
   $16 - 5 = 11$

Við leitum að vasapeningum barnsins eftir 11 ár. Setjið 11 inn í formúluna til að finna vasapeningana við 16 ára aldur.

$A_{11}=1+2(11)=23$

Vikulegir vasapeningar barnsins við 16 ára aldur verða $23.

REYNIÐ SJÁLF #8

Kona ákveður að hlaupa í 10 mínútur daglega þessa viku og ætlar að lengja daglegan hlaupatíma um 4 mínútur í hverri viku. Skrifið formúlu fyrir hlaupatímann eftir n vikur. Hve lengi hleypur hún á dag eftir 8 vikur?

MIÐLAR

Skoðið þetta nettilfang til að fá frekari kennslu og æfingu í jafnmunarunum.

- Jafnmunarunur

11.2 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Hvað er jafnmunaruna?
2. Hvernig finnum við fasta mismun jafnmunarunu?
3. Hvernig ákvarðum við hvort runa sé jafnmunaruna?
4. Hver er helsti munurinn á því að lýsa jafnmunarunu með rakningarformúlu annars vegar og lokuðu formi hins vegar?
5. Lýsið því að hvaða leyti línuleg föll og jafnmunarunur eru lík og að hvaða leyti þau eru ólík.

Algebruverkefni

Finnið fasta mismun gefinnar jafnmunarunu í eftirfarandi verkefnum.

6.

$$\{5,11,17,23,29,\ldots\}$$

7.

$$\left\{0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\ldots\right\}$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort runan sé jafnmunaruna. Finnið fasta mismuninn ef svo er.

8.

$$\{11{,}4,9{,}3,7{,}2,5{,}1,3,\ldots\}$$

9.

$$\{4, 16, 64, 256, 1024, \ldots\}$$

Skrifið í eftirfarandi verkefnum fyrstu fimm liði jafnmunarunnar þegar fyrsti liðurinn og fasti mismunurinn eru gefnir.

10. $a_1 = -25,\ d = -9$

11. $a_1 = 0,\ d = \frac{2}{3}$

Skrifið í eftirfarandi verkefnum fyrstu fimm liði jafnmunarunnar þegar tveir liðir eru gefnir.

12.

$$a_1 = 17,\ a_7 = -31$$

13.

$$a_{13} = -60,\ a_{33} = -160$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum tilgreindan lið jafnmunarunnar þegar fyrsti liðurinn og fasti mismunurinn eru gefnir.

14. Fyrsti liðurinn er 3 og fasti mismunurinn er 4. Finnið 5. liðinn.

15. Fyrsti liðurinn er 4 og fasti mismunurinn er 5. Finnið 4. liðinn.

16. Fyrsti liðurinn er 5 og fasti mismunurinn er 6. Finnið 8. liðinn.

17. Fyrsti liðurinn er 6 og fasti mismunurinn er 7. Finnið 6. liðinn.

18. Fyrsti liðurinn er 7 og fasti mismunurinn er 8. Finnið 7. liðinn.

Finnið í eftirfarandi verkefnum fyrsta liðinn þegar tveir liðir jafnmunarunu eru gefnir.

19. Finnið fyrsta liðinn, eða a_1, í jafnmunarunu ef $a_6 = 12$ og $a_{14} = 28$.

20. Finnið fyrsta liðinn, eða a_1, í jafnmunarunu ef $a_7 = 21$ og $a_{15} = 42$.

21. Finnið fyrsta liðinn, eða a_1, í jafnmunarunu ef $a_8 = 40$ og $a_{23} = 115$.

22. Finnið fyrsta liðinn, eða a_1, í jafnmunarunu ef $a_9 = 54$ og $a_{17} = 102$.

23. Finnið fyrsta liðinn, eða a_1, í jafnmunarunu ef $a_{11} = 11$ og $a_{21} = 16$.

Finnið í eftirfarandi verkefnum tilgreindan lið þegar tveir liðir jafnmunarunu eru gefnir.

24. $a_1 = 33$ og $a_7 = -15$. Finnið a_4.

25. $a_3 = -17{,}1$ og $a_{10} = -15{,}7$. Finnið a_{21}.

Notið rakningarformúluna í eftirfarandi verkefnum til að skrifa fyrstu fimm liði jafnmunarunnar.

26.

$$a_1 = 39\,;\, a_n = a_{n-1} - 3$$

27.

$$a_1 = -19\,;\quad a_n = a_{n-1} - 1{,}4$$

Skrifið rakningarformúlu fyrir hverja jafnmunarunu í eftirfarandi verkefnum.

28.

$$a = \{40\,,60\,,80\,,\ldots\}$$

29.

$$a = \{17\,,26\,,35\,,\ldots\}$$

30.

$$a = \{-1\,,2\,,5\,,\ldots\}$$

31.

$$a = \{12\,,17\,,22\,,\ldots\}$$

32.

$$a = \{-15\,,-7\,,1\,,\ldots\}$$

33.

$$a = \{8{,}9\,,10{,}3\,,11{,}7\,,\ldots\}$$

34.

$$a = \{-0{,}52\,,-1{,}02\,,-1{,}52\,,\ldots\}$$

35.

$$a = \left\{\frac{1}{5}\,,\frac{9}{20}\,,\frac{7}{10}\,,\ldots\right\}$$

36.

$$a = \left\{-\frac{1}{2}\,,-\frac{5}{4}\,,-2\,,\ldots\right\}$$

37.

$$a = \left\{\frac{1}{6}\,,-\frac{11}{12}\,,-2\,,\ldots\right\}$$

Skrifið í eftirfarandi verkefnum rakningarformúlu fyrir gefna jafnmunarunu og finnið síðan tilgreindan lið.

38. $a=\left(7,\ 4,\ 1,\ \ldots\right)$; Finnið 17. liðinn.

39. $a=\left(4,\ 11,\ 18,\ \ldots\right)$; Finnið 14. liðinn.

40. $a=\left(2,\ 6,\ 10,\ \ldots\right)$; Finnið 12. liðinn.

Notið lokaða formið í eftirfarandi verkefnum til að skrifa fyrstu fimm liði jafnmunarununnar.

41.

$$a_n=24-4n$$

42.

$$a_n=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$$

Skrifið lokað form fyrir hverja jafnmunarunu í eftirfarandi verkefnum.

43.

$$a=\left(3,5,7,\ldots\right)$$

44.

$$a=\left(32,24,16,\ldots\right)$$

45.

$$a=\left(-5,\ 95,\ 195,\ \ldots\right)$$

46.

$$a=\left(-17,\ -217,\ -417,\ldots\right)$$

47.

$$a=\left\{1{,}8,\ 3{,}6,\ 5{,}4,\ \ldots\right\}$$

48.

$$a=\left\{-18{,}1,-16{,}2,-14{,}3,\ldots\right\}$$

49.

$$a=\left\{15{,}8,18{,}5,21{,}2,\ldots\right\}$$

50.

$$a=\left\{\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-3,\ \ldots\right\}$$

51.

$$a=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\ldots\right\}$$

52.

$$a=\left\{-5,-\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\ldots\right\}$$

Finnið fjölda liða í gefinni endanlegri jafnmunarunu í eftirfarandi verkefnum.

53.

$$a=\{3,-4,-11,\ldots,-60\}$$

54.

$$a=\{1{,}2,1{,}4,1{,}6,\ldots,3{,}8\}$$

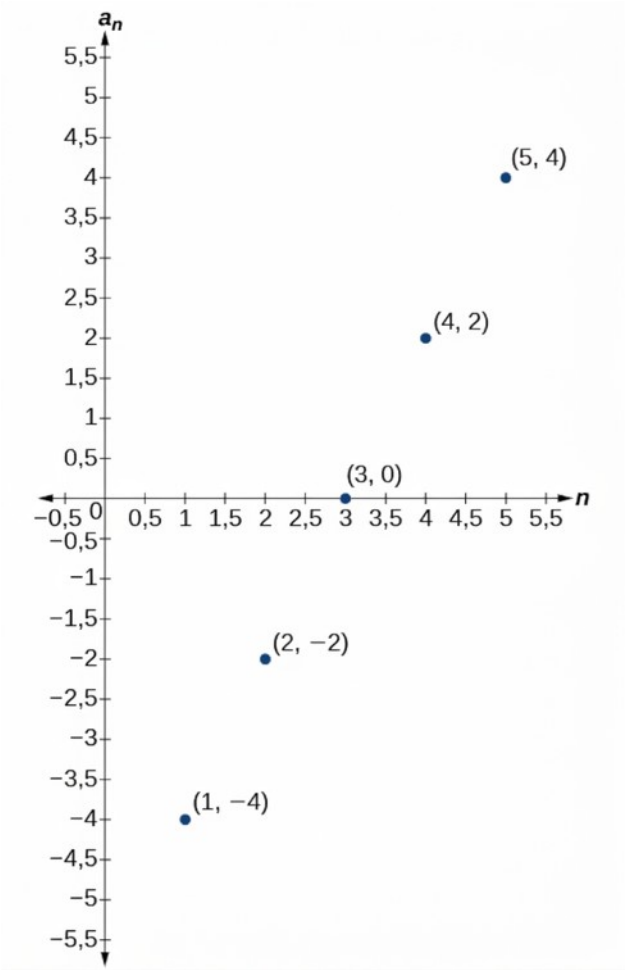
55.

$$a=\left\{\frac{1}{2},2,\frac{7}{2},\ldots,8\right\}$$

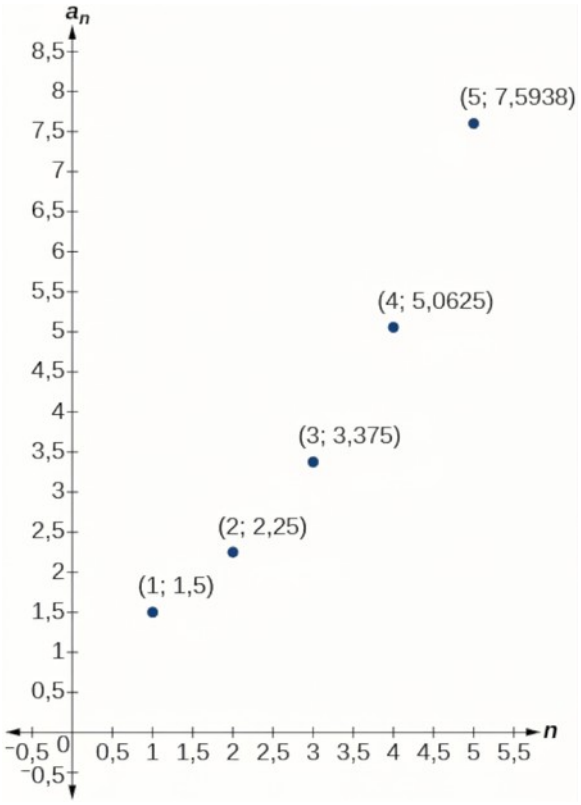
Grafisk verkefni

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort grafið sem sýnt er tákni jafnmunarunu.

56.



57.



Notið gefnar upplýsingar í eftirfarandi verkefnum til að teikna graf fyrstu 5 liða jafnmunarununnar.

58.

$$a_1 = 0, d = 4$$

59.

$$a_1 = 9; a_n = a_{n-1} - 10$$

60.

$$a_n = -12 + 5n$$

11

Tækniverkefni

Fylgið skrefunum í eftirfarandi verkefnum til að vinna með jafnmunarununa $a_n = 3n - 2$ á grafískri reiknivél:

- Ýtið á [MODE]
  - Veljið SEQ í fjórðu línu
  - Veljið DOT í fimmtu línu
  - Ýtið á [ENTER]
- Ýtið á [Y=]
  - nMin er fyrsta talan sem talin er í rununni. Stillið $n\text{Min} = 1$
  - $u(n)$ er mynstur rununnar. Stillið $u(n) = 3n - 2$

  - $u(n\,\text{Min})$ er fyrsta talan í rununni. Stillið $u(n\,\text{Min})=1$
- Ýtið á [2ND] og síðan [WINDOW] til að fara í TBLSET
  - Stillið TblStart $=1$
  - Stillið $\Delta\,\text{Tbl}=1$
  - Stillið Indpnt: Auto og Depend: Auto
- Ýtið á [2ND] og síðan [GRAPH] til að fara í TABLE

61. Hverjir eru fyrstu sjö liðirnir sem sýndir eru í dálkinum með fyrirsögninni $u(n)$?

62. Notið niðurörina til að fletta að $n=50$. Hvaða gildi er gefið fyrir $u(n)$?

63. Ýtið á [WINDOW]. Stillið $n\,\text{Min}=1$, $n\,\text{Max}=5$, $x\,\text{Min}=0$, $x\,\text{Max}=6$, $y\,\text{Min}=-1$ og $y\,\text{Max}=14$. Ýtið síðan á [GRAPH]. Teiknið rununa eins og hún birtist á grafísku reiknivélinni.

Fylgið skrefunum hér að framan í eftirfarandi verkefnum til að vinna með jafnmunarununa $a_n=\frac{1}{2}n+5$ á grafískri reiknivél.

64. Hverjir eru fyrstu sjö liðirnir sem sýndir eru í dálkinum með fyrirsögninni $u(n)$ í TABLE-aðgerðinni?

65. Teiknið rununa eins og hún birtist á grafísku reiknivélinni. Gætið þess að laga WINDOW-stillingarnar eftir þörfum.

Viðbótarverkefni

66. Gefið tvö dæmi um jafnmunarunur þar sem 4. liðurinn er 9.

67. Gefið tvö dæmi um jafnmunarunur þar sem 10. liðurinn er 206.

68. Finnið 5. lið jafnmunarununnar $\{9b, 5b, b, \ldots\}$.

69. Finnið 11. lið jafnmunarununnar $\{3a-2b, a+2b, -a+6b \ldots\}$.

70. Við hvaða lið fer runan $\{5{,}4\,,14{,}5\,,23{,}6\,,\ldots\}$ yfir 151?

71. Frá og með hvaða lið tekur runan $\left\{\frac{17}{3}, \frac{31}{6}, \frac{14}{3}, \ldots\right\}$ neikvæð gildi?

72. Fyrir hvaða liði hefur endanlega jafnmunarunan $\left\{\frac{5}{2}, \frac{19}{8}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{1}{8}\right\}$ heiltölugildi?

73. Skrifið jafnmunarunu með rakningarformúlu. Sýnið fyrstu 4 liðina og finnið síðan 31. liðinn.

74. Skrifið jafnmunarunu á lokuðu formi. Sýnið fyrstu 4 liðina og finnið síðan 28. liðinn.

11.3 Kvótarunur

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Finna hlutfallstölu kvótarunu.
- Skrá liði kvótarunu.
- Nota rakningarformúlu fyrir kvótarunu.
- Nota lokað form fyrir kvótarunu.

Í mörgum störfum hækka launin árlega í takt við framfærslukostnað svo að þau haldi í við verðbólgu. Gerum til dæmis ráð fyrir að nýútskrifaður háskólanemi fái starf sem sölustjóri með $26.000 í árslaun. Honum er lofað 2% launahækkun vegna framfærslukostnaðar á hverju ári. Árslaun hvers árs fást með því að margfalda laun fyrra árs með 102%. Launin verða $26.520 eftir eitt ár, $27.050,40 eftir tvö ár, $27.591,41 eftir þrjú ár og svo framvegis. Þegar laun hækka árlega um fast hlutfall vaxa þau með föstum margföldunarstuðli. Í þessum hluta skoðum við runur sem vaxa með þessum hætti.

Hlutfallstala fundin

Árslaunin sem lýst var mynda kvótarunu vegna þess að þau breytast með föstum margföldunarstuðli á hverju ári. Hver liður kvótarunu hækkar eða lækkar með föstum stuðli sem kallast hlutfallstala. Runan hér á eftir er dæmi um kvótarunu þar sem hver liður vex með fasta stuðlinum 6. Næsti liður fæst með því að margfalda hvaða lið rununnar sem er með hlutfallstölunni 6.

$$\{1, \overset{\times 6}{\rightarrow} 6, \overset{\times 6}{\rightarrow} 36, \overset{\times 6}{\rightarrow} 216, \overset{\times 6}{\rightarrow} 1.296, \ldots\}$$

SKILGREINING KVÓTARUNU

Kvótaruna er runa þar sem kvóti hvers liðar og liðarins á undan er fasti. Þessi fasti kallast hlutfallstala rununnar. Finna má hlutfallstöluna með því að deila hvaða lið rununnar sem er með liðnum á undan. Ef a_1 er upphafsliður kvótarunu og r er hlutfallstalan er runan

$$\left\{a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \ldots\right\}.$$

AÐFERÐ

Ákvarða hvort gefið talnamengi myndi kvótarunu.

1. Deilið hverjum lið með liðnum á undan.
2. Berið kvótana saman. Ef þeir eru allir jafnir er hlutfallstala til staðar og runan er kvótaruna.

SÝNIDÆMI 1

Hlutfallstala fundin

Er runan kvótaruna? Finnið hlutfallstöluna ef svo er.

1. ⓐ $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
2. ⓑ $48, 12, 4, 2, \ldots$

Lausn

Deilið hverjum lið með liðnum á undan til að ákvarða hvort hlutfallstala sé til staðar.

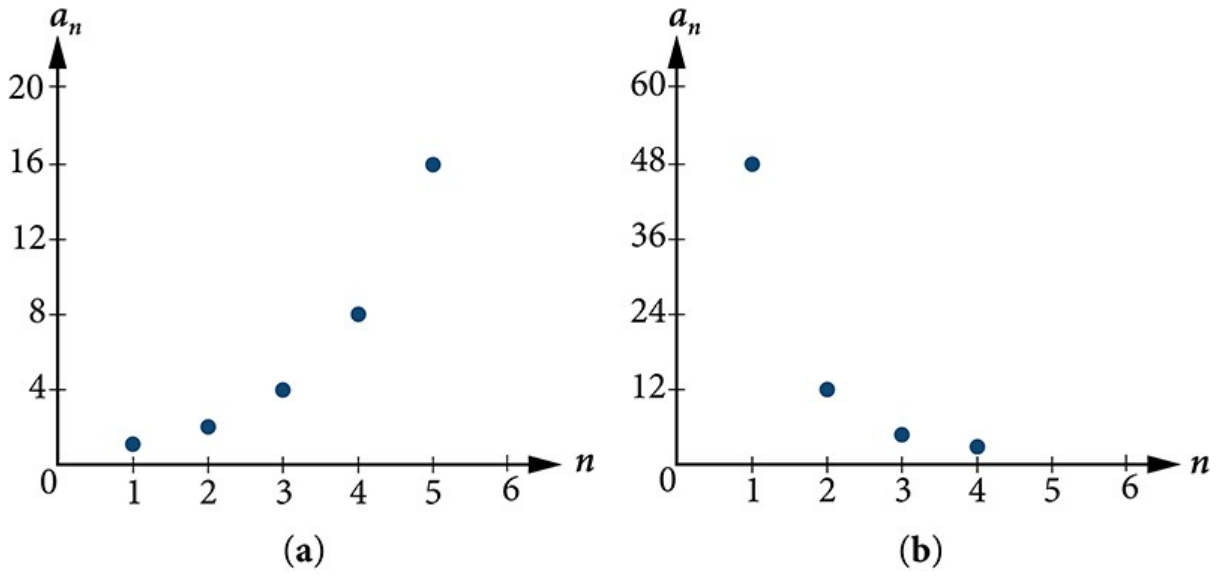
1. ⓐ $\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{8}{4} = 2 \qquad \frac{16}{8} = 2$

   Runan er kvótaruna vegna þess að hún hefur hlutfallstölu. Hlutfallstalan er 2.
2. ⓑ $\frac{12}{48} = \frac{1}{4} \qquad \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

   Runan er ekki kvótaruna vegna þess að hún hefur enga hlutfallstölu.

Greining

Graf hvorrar runu er sýnt á mynd 1. Af gröfunum virðist sem bæði (a) og (b) líti út eins og graf vísisfalls í þessum sýniglugga. Við vitum þó að (a) er kvótaruna, svo að túlkunin á við um hana, en (b) er ekki kvótaruna.



Mynd 1

SPURT OG SVARAÐ

Ef vitað er að runa sé kvótaruna, þarf þá að deila hverjum lið með liðnum á undan til að finna hlutfallstöluna?

Nei. Ef vitað er að runan er kvótaruna má velja hvaða lið hennar sem er og deila honum með liðnum á undan til að finna hlutfallstöluna.

REYNIÐ SJÁLF #1

Er runan kvótaruna? Finnið hlutfallstöluna ef svo er.

$$5, 10, 15, 20, \ldots$$

REYNIÐ SJÁLF #2

Er runan kvótaruna? Finnið hlutfallstöluna ef svo er.

$$100, 20, 4, \frac{4}{5}, \ldots$$

Liðir kvótarunu skrifaðir

Nú þegar við getum þekkt kvótarunu lærum við að finna liði hennar þegar fyrsti liðurinn og hlutfallstalan eru gefin. Liðir kvótarunu fást með því að byrja á fyrsta liðnum og margfalda endurtekið með hlutfallstölunni. Ef fyrsti liður kvótarunu er til dæmis $a_1 = -2$ og hlutfallstalan er $r = 4$, finnum við næstu liði með því að margfalda $-2 \cdot 4$ og fá -8, margfalda síðan niðurstöðuna $-8 \cdot 4$ og fá -32 og svo framvegis.

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_2 &= (-2 \cdot 4) = -8 \\ a_3 &= (-8 \cdot 4) = -32 \\ a_4 &= (-32 \cdot 4) = -128 \end{aligned}$$

Fyrstu fjórir liðirnir eru $\{-2, -8, -32, -128\}$.

AÐFERÐ

Finna fyrstu fjóra liði kvótarunu þegar fyrsti liðurinn og hlutfallstalan eru gefin.

1. Margfaldið upphafsliðinn a_1, með hlutfallstölunni til að finna næsta lið, a_2.
2. Endurtakið ferlið. Notið $a_n = a_2$ til að finna a_3 og síðan a_3 til að finna a_4, þar til allir fjórir liðirnir hafa fundist.
3. Skrifið liðina innan slaufusviga með kommum á milli.

SÝNIDÆMI 2

Liðir kvótarunu skrifaðir

Skráið fyrstu fjóra liði kvótarununnar þar sem $a_1 = 5$ og $r = -2$.

Lausn

Margfaldið a_1 með -2 til að finna a_2. Endurtakið ferlið og notið a_2 til að finna a_3, og svo framvegis.

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = -2a_1 = -10$$
$$a_3 = -2a_2 = 20$$
$$a_4 = -2a_3 = -40$$

Fyrstu fjórir liðirnir eru $\left[5, -10, 20, -40\right]$.

REYNIÐ SJÁLF #3

Skráið fyrstu fimm liði kvótarununnar þar sem $a_1 = 18$ og $r = \frac{1}{3}$.

Rakningarformúlur kvótaruna notaðar

Með rakningarformúlu má finna hvaða lið kvótarunu sem er út frá liðnum á undan. Hver liður er margfeldi hlutfallstölunnar og liðarins á undan. Gerum til dæmis ráð fyrir að hlutfallstalan sé 9. Þá fæst hver liður með því að margfalda liðinn á undan með níu. Eins og í öllum rakningarformúlum þarf upphafsliðurinn að vera gefinn.

RAKNINGARFORMÚLA FYRIR KVÓTARUNU

Rakningarformúla kvótarunu með hlutfallstöluna r og fyrsta liðinn a_1 er

$$a_n = r\,a_{n-1}, n \geq 2$$

AÐFERÐ

Skrifa rakningarformúlu þegar fyrstu nokkrir liðir kvótarunu eru gefnir.

1. Tilgreinið upphafsliðinn.
2. Finnið hlutfallstöluna með því að deila hvaða lið sem er með liðnum á undan.
3. Setjið hlutfallstöluna inn í rakningarformúlu kvótarunu.

SÝNIDÆMI 3

Rakningarformúlur kvótaruna notaðar

Skrifið rakningarformúlu fyrir eftirfarandi kvótarunu.

$$\left\{6,\ 9,\ 13{,}5,\ 20{,}25,\ \ldots\right\}$$

Lausn

Gefið er að fyrsti liðurinn sé 6. Finna má hlutfallstöluna með því að deila öðrum liðnum með fyrsta liðnum.

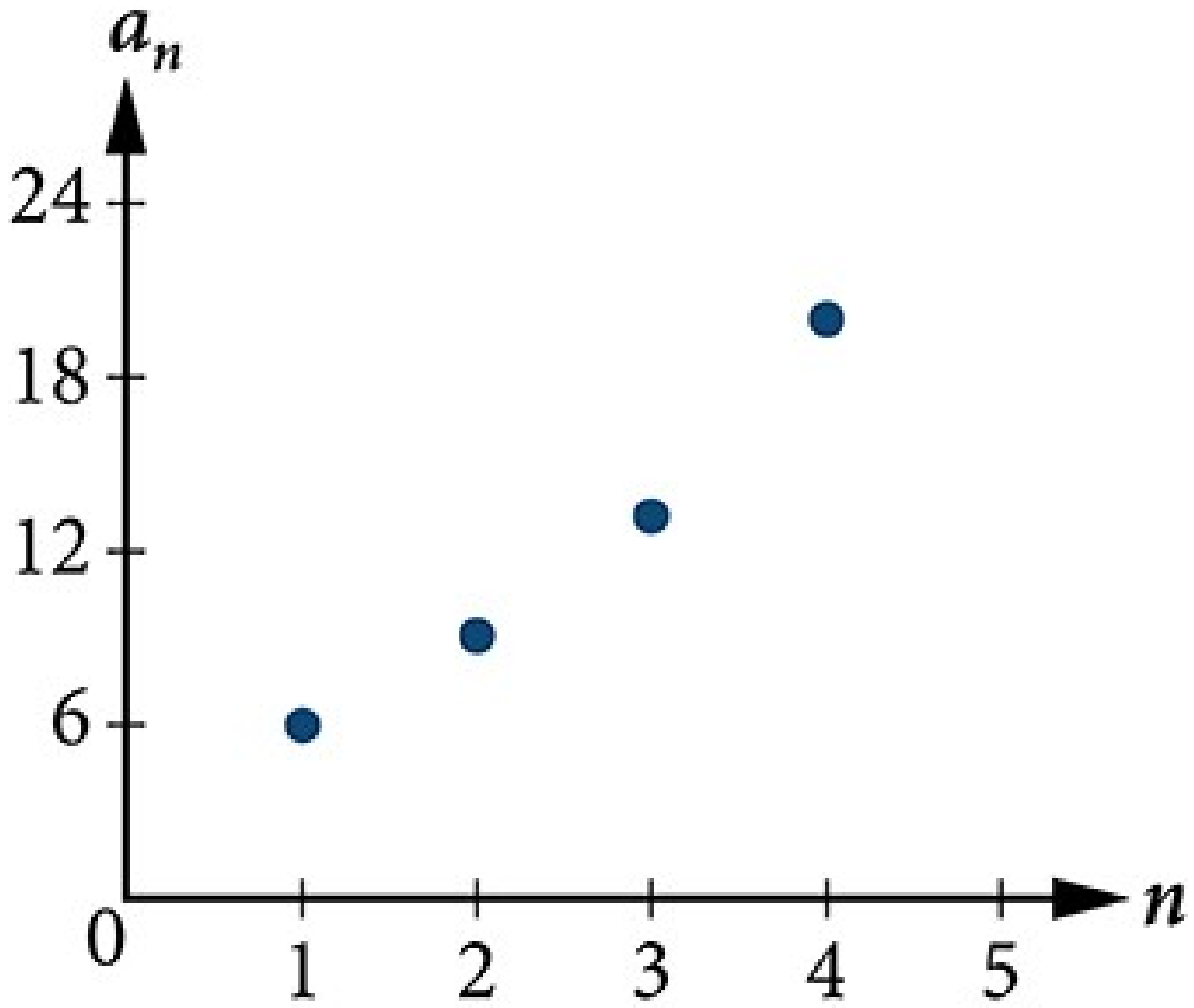
$$r = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

Setjið hlutfallstöluna inn í rakningarformúlu kvótarunu og skilgreinið a_1.

$$a_n = r\ a_{n-1}$$
$$a_n = 1{,}5\ a_{n-1} \quad \text{fyrir } n \geq 2$$
$$a_1 = 6$$

Greining

Gagnapunktarnir fylgja vísismynstri. Hlutfallstalan er einnig grunntala vísisfalls, eins og sýnt er á mynd 2.



Mynd 2

SPURT OG SVARAÐ

Þarf að deila öðrum liðnum með fyrsta liðnum til að finna hlutfallstöluna?

Nei. Við getum deilt hvaða lið rununnar sem er með liðnum á undan. Algengast er þó að deila öðrum liðnum með fyrsta liðnum því það er oft einfaldasta leiðin til að finna hlutfallstöluna.

REYNIÐ SJÁLF #4

Skrifið rakningarformúlu fyrir eftirfarandi kvótarunu.

$$\left\{2,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{16}{27},\ \ldots\right\}$$

Lokuð form kvótaruna notuð

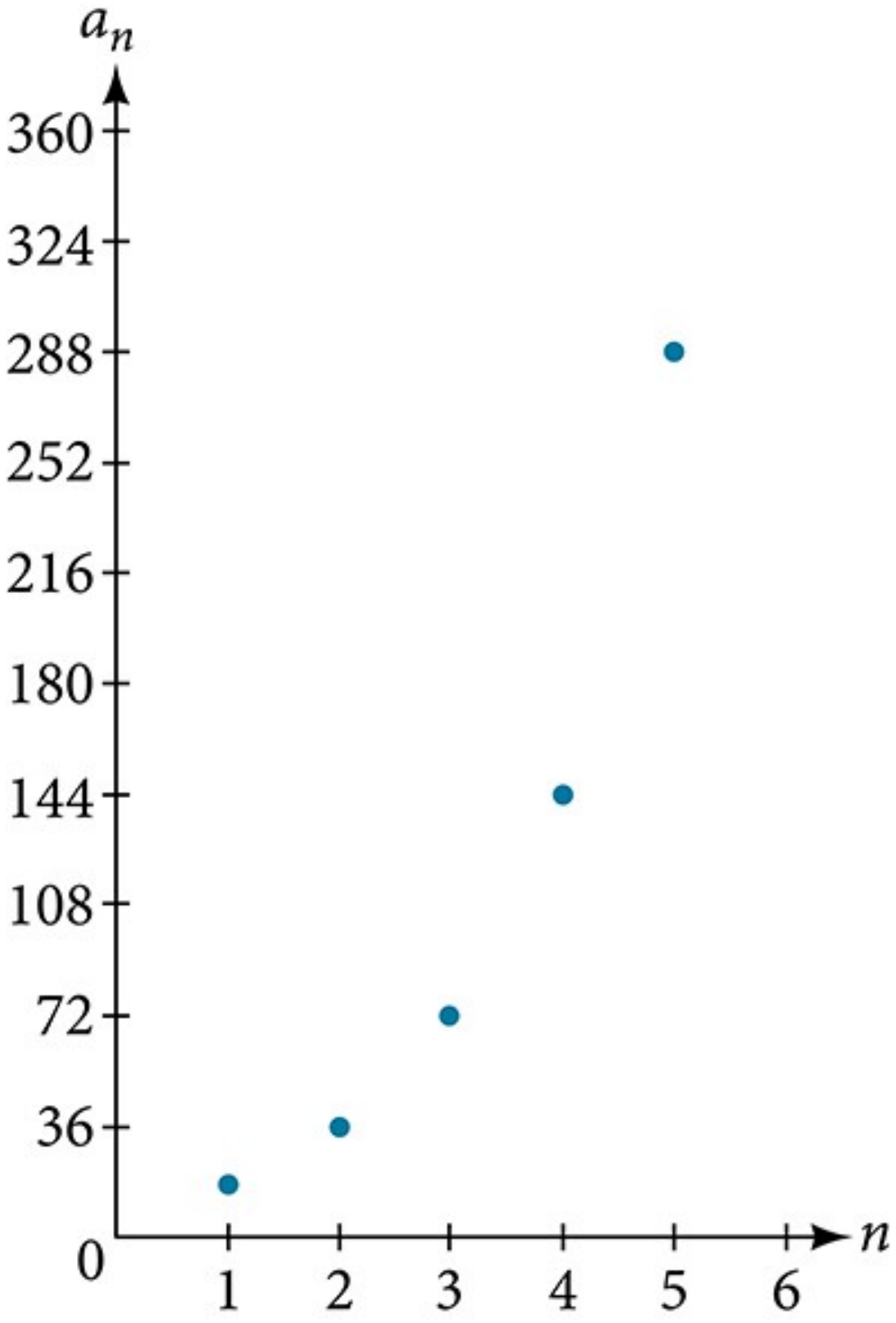
Kvótaruna er vísisfall með mengi jákvæðu heiltalnanna að skilgreiningarmengi og hlutfallstalan er grunntala fallsins. Því getum við skrifað lokuð form sem gera okkur kleift að finna tiltekna liði.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Skoðum rununa $\left(18,\ 36,\ 72,\ 144,\ 288,\ \ldots\right)$. Þetta er kvótaruna með hlutfallstöluna 2 og vísisfall með grunntöluna 2. Lokað form rununnar er

$$a_n = 18 \cdot 2^{n-1}$$

Graf rununnar er sýnt á mynd 3.



Mynd 3

LOKAÐ FORM KVÓTARUNU

Lokað form n -ta liðar kvótarunu er:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

SÝNIDÆMI 4

Liðir kvótarunu fundnir með lokuðu formi

Í kvótarunu eru $a_1 = 3$ og $a_4 = 24$,. Finnið a_2.

Lausn

Skrifa má rununa út frá upphafsliðnum og hlutfallstölunni r.

$$3, 3r, 3r^2, 3r^3, \ldots$$

Notið gefna fjórða liðinn til að finna hlutfallstöluna.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1\, r^{n-1} \\ a_4 &= 3\, r^3 && \text{Skrifið fjórða lið rununnar út frá } \alpha_1 \text{ og } r \\ 24 &= 3\, r^3 && \text{Setjið } 24 \text{ í stað } a_4 \\ 8 &= r^3 && \text{Deilið} \\ r &= 2 && \text{Leysið fyrir hlutfallstöluna} \end{aligned}$$

Finnið annan liðinn með því að margfalda fyrsta liðinn með hlutfallstölunni.

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ &= 2(3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Greining

Við margföldum fyrsta liðinn einu sinni með hlutfallstölunni til að finna annan liðinn, tvisvar til að finna þriðja liðinn, þrisvar til að finna fjórða liðinn og svo framvegis. Tíunda liðinn má finna með því að margfalda fyrsta liðinn níu sinnum með hlutfallstölunni eða einu sinni með níunda veldi hennar.

REYNIÐ SJÁLF #5

Í kvótarunu eru $a_2 = 4$ og $a_3 = 32$. Finnið a_6.

SÝNIDÆMI 5

Lokað form n -ta liðar kvótarunu skrifað

Skrifið lokað form fyrir n-ta lið eftirfarandi kvótarunu.

$$\{2,\ 10,\ 50,\ 250,\ \ldots\}$$

Lausn

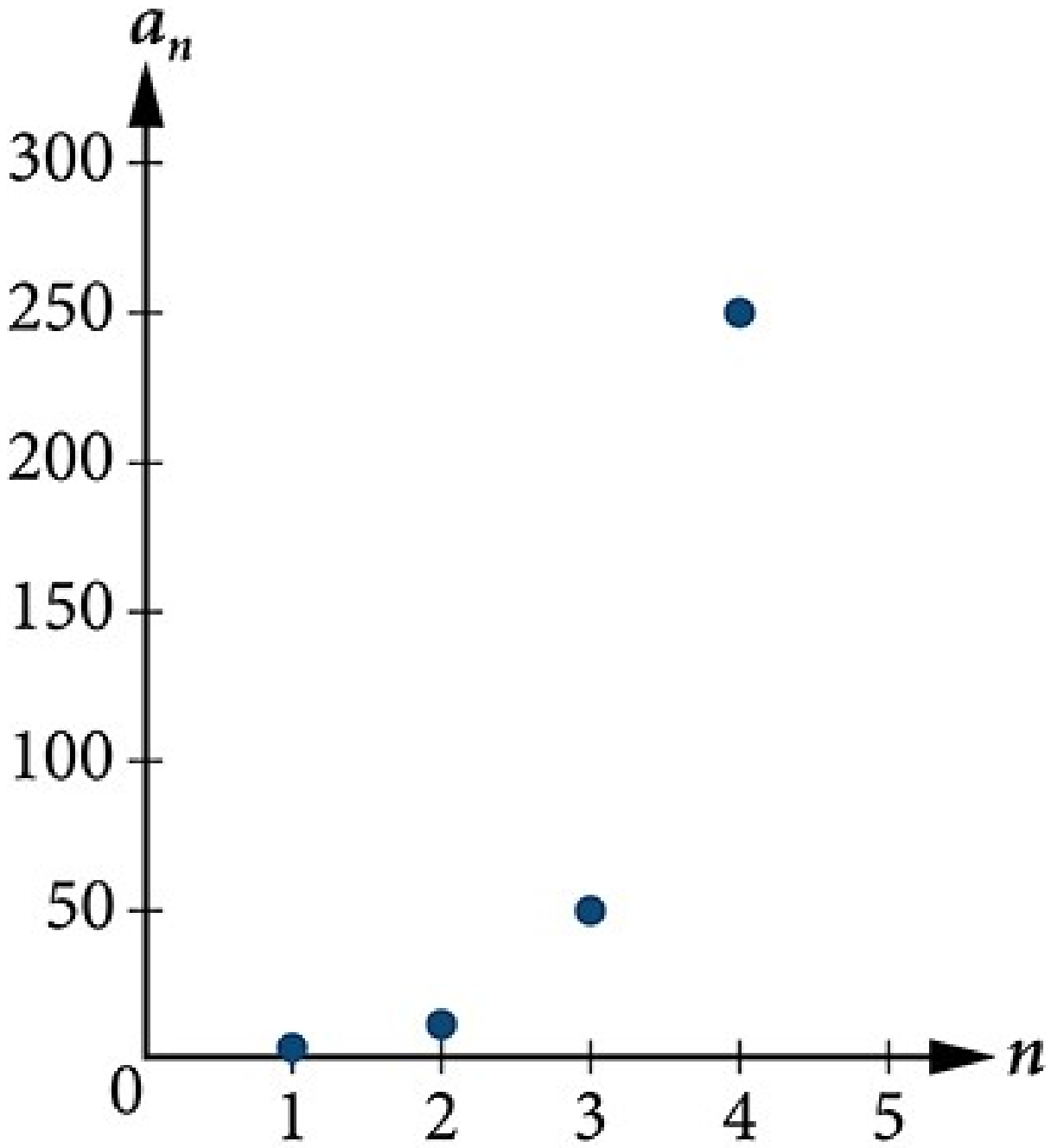
Fyrsti liðurinn er 2. Finna má hlutfallstöluna með því að deila öðrum liðnum með fyrsta liðnum.

$$\frac{10}{2}=5$$

Hlutfallstalan er 5. Setjið hlutfallstöluna og fyrsta lið rununnar inn í formúluna.

$$a_n = a_1 r^{(n-1)}$$
$$a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$$

Graf þessarar runu á mynd 4 sýnir vísismynstur.



Mynd 4

REYNIÐ SJÁLF #6

Skrifið lokað form fyrir eftirfarandi kvótarunu.

$$\{-1, 3, -9, 27, \ldots\}$$

Hagnýt verkefni leyst með kvótarunum

Í hagnýtum verkefnum með kvótarunum getur þurft að nota upphafsliðinn a_0 í stað a_1. Í slíkum verkefnum má breyta lokaða forminu lítillega og nota eftirfarandi formúlu:

$$a_n = a_0 r^n$$

SÝNIDÆMI 6

Hagnýt verkefni leyst með kvótarunum

Árið 2013 eru 284 nemendur í litlum skóla. Áætlað er að nemendafjöldinn aukist um 4% á ári.

1. ⓐ Skrifið formúlu fyrir nemendafjöldann.
2. ⓑ Áætlið nemendafjöldann árið 2020.

Lausn

1. ⓐ
   Lýsa má aðstæðunum með kvótarunu sem hefur upphafsliðinn 284. Nemendafjöldinn verður 104% af fjölda fyrra árs og því er hlutfallstalan 1,04.
   Látum P tákna nemendafjöldann og n fjölda ára frá 2013. Með lokaða forminu fyrir kvótarunu fæst
   $P_n = 284 \cdot 1{,}04^n$
2. ⓑ
   Við finnum fjölda ára frá 2013 með frádrætti.
   $2020 - 2013 = 7$
   Við leitum að nemendafjöldanum eftir 7 ár. Við setjum 7 í stað n til að áætla nemendafjöldann árið 2020.
   $P_7 = 284 \cdot 1{,}04^7 \approx 374$
   Nemendafjöldinn verður um 374 árið 2020.

REYNIÐ SJÁLF #7

Fyrirtæki opnar nýjan vef. Í fyrstu eru heimsóknirnar 293 því að fólk er forvitið. Fyrirtækið áætlar að heimsóknum fjölgi um 2,6% á viku.

1. ⓐ Skrifið formúlu fyrir fjölda heimsókna.
2. ⓑ Áætlið fjölda heimsókna eftir 5 vikur.

MIÐLAR

Á þessum vefsíðum fáið þið frekari kennslu og æfingu í kvótarunum.

- Kvótarunur
- Ákvarðið gerð rununnar
- Finnið formúlu runu

11.3 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Hvað er kvótaruna?

2. Hvernig er hlutfallstala kvótarunu fundin?

3. Hvernig má ákvarða hvort runa sé kvótaruna?

4. Hver er munurinn á jafnmunarunu og kvótarunu?

5. Lýsið því að hvaða leyti vísisföll og kvótarunur eru lík og að hvaða leyti þau eru ólík.

Algebruverkefni

Finnið hlutfallstölu kvótarununnar í eftirfarandi verkefnum.

6.

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots$$

7.

$$-0{,}125, 0{,}25, -0{,}5, 1, -2, \ldots$$

8.

$$-2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{128}, \ldots$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort runan sé kvótaruna. Finnið hlutfallstöluna ef svo er.

9.

$$-6, -12, -24, -48, -96, \ldots$$

10.

$$5, 5{,}2, 5{,}4, 5{,}6, 5{,}8, \ldots$$

11.

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$$

12.

$$6, 8, 11, 15, 20, \ldots$$

13.

$$0{,}8, 4, 20, 100, 500, \ldots$$

Skrifið í eftirfarandi verkefnum fyrstu fimm liði kvótarununnar þegar fyrsti liðurinn og hlutfallstalan eru gefin.

14.

$$a_1=8, \qquad r=0{,}3$$

15.

$$a_1 = 5, \quad r = \tfrac{1}{5}$$

Skrifið í eftirfarandi verkefnum fyrstu fimm liði kvótarununnar þegar einhverjir tveir liðir eru gefnir.

16.

$$a_7 = 64, \quad a_{10} = 512$$

17.

$$a_6=25, \qquad a_8=6{,}25$$

Finnið í eftirfarandi verkefnum tilgreindan lið kvótarununnar þegar fyrsti liðurinn og hlutfallstalan eru gefin.

18. Fyrsti liðurinn er 2, og hlutfallstalan er 3. Finnið 5. liðinn.

19. Fyrsti liðurinn er 16 og hlutfallstalan er $-\frac{1}{3}$. Finnið 4. liðinn.

Finnið í eftirfarandi verkefnum tilgreindan lið kvótarununnar þegar fyrstu fjórir liðirnir eru gefnir.

20. $a_n=\{-1,2,-4,8,\ldots\}$. Finnið a_{12}.

21. $a_n=\left\{-2,\frac{2}{3},-\frac{2}{9},\frac{2}{27},\ldots\right\}$. Finnið a_7.

Skrifið fyrstu fimm liði kvótarununnar í eftirfarandi verkefnum.

22.

$$a_1 = -486, \quad a_n = -\tfrac{1}{3}a_{n-1}$$

23.

$$a_1=7, \qquad a_n=0{,}2\ a_{n-1}$$

Skrifið rakningarformúlu fyrir hverja kvótarunu í eftirfarandi verkefnum.

24.

$$a_n=\{-1,5,-25,125,\ldots\}$$

25.

$$a_n=\{-32,-16,-8,-4,\ldots\}$$

26.

$$a_n=\{14,56,224,896,\ldots\}$$

27.

$$a_n=\{10,-3,0{,}9,-0{,}27,\ldots\}$$

28.

$$a_n=\{0{,}61,1{,}83,5{,}49,16{,}47,\ldots\}$$

29.

$$a_n=\left\{\frac{3}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{60},\frac{1}{360},\ldots\right\}$$

30.

$$a_n=\left\{-2,\frac{4}{3},-\frac{8}{9},\frac{16}{27},\ldots\right\}$$

31.

$$a_n=\left\{\frac{1}{512},-\frac{1}{128},\frac{1}{32},-\frac{1}{8},\ldots\right\}$$

Skrifið fyrstu fimm liði kvótarununnar í eftirfarandi verkefnum.

32.

$$a_n=-4\cdot 5^{n-1}$$

33.

$$a_n=12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Skrifið lokað form fyrir hverja kvótarunu í eftirfarandi verkefnum.

34.

$$a_n=\{-2,-4,-8,-16,\ldots\}$$

35.

$$a_n=\{1,3,9,27,\ldots\}$$

36.

$$a_n=\{-4,-12,-36,-108,\ldots\}$$

37.

$$a_n=\{0{,}8,-4,20,-100,\ldots\}$$

38.

$$a_n = \{-1{,}25, -5, -20, -80, \ldots\}$$

39.

$$a_n = \left\{-1, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}, -\frac{64}{125}, \ldots\right\}$$

40.

$$a_n = \left\{2, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}, \frac{1}{108}, \ldots\right\}$$

41.

$$a_n = \left\{3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \ldots\right\}$$

Finnið tilgreindan lið gefinnar kvótarunu í eftirfarandi verkefnum.

42. Látum $a_1 = 4$, $a_n = -3a_{n-1}$. Finnið a_8.

43. Látum $a_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Finnið a_{12}.

Finnið fjölda liða í gefinni endanlegri kvótarunu í eftirfarandi verkefnum.

44.

$$a_n = \{-1, 3, -9, \ldots, 2187\}$$

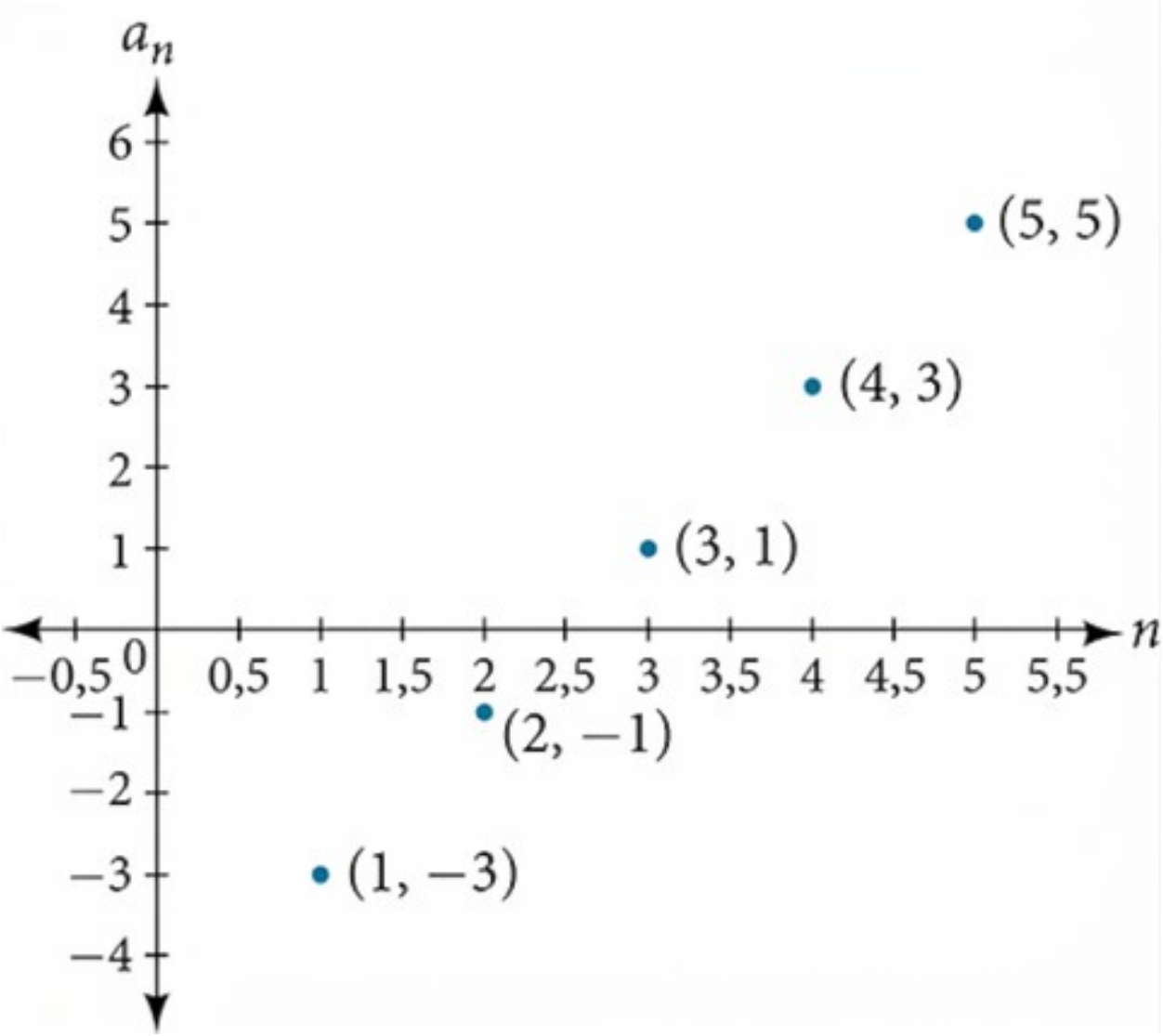
45.

$$a_n = \left\{2, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{1024}\right\}$$

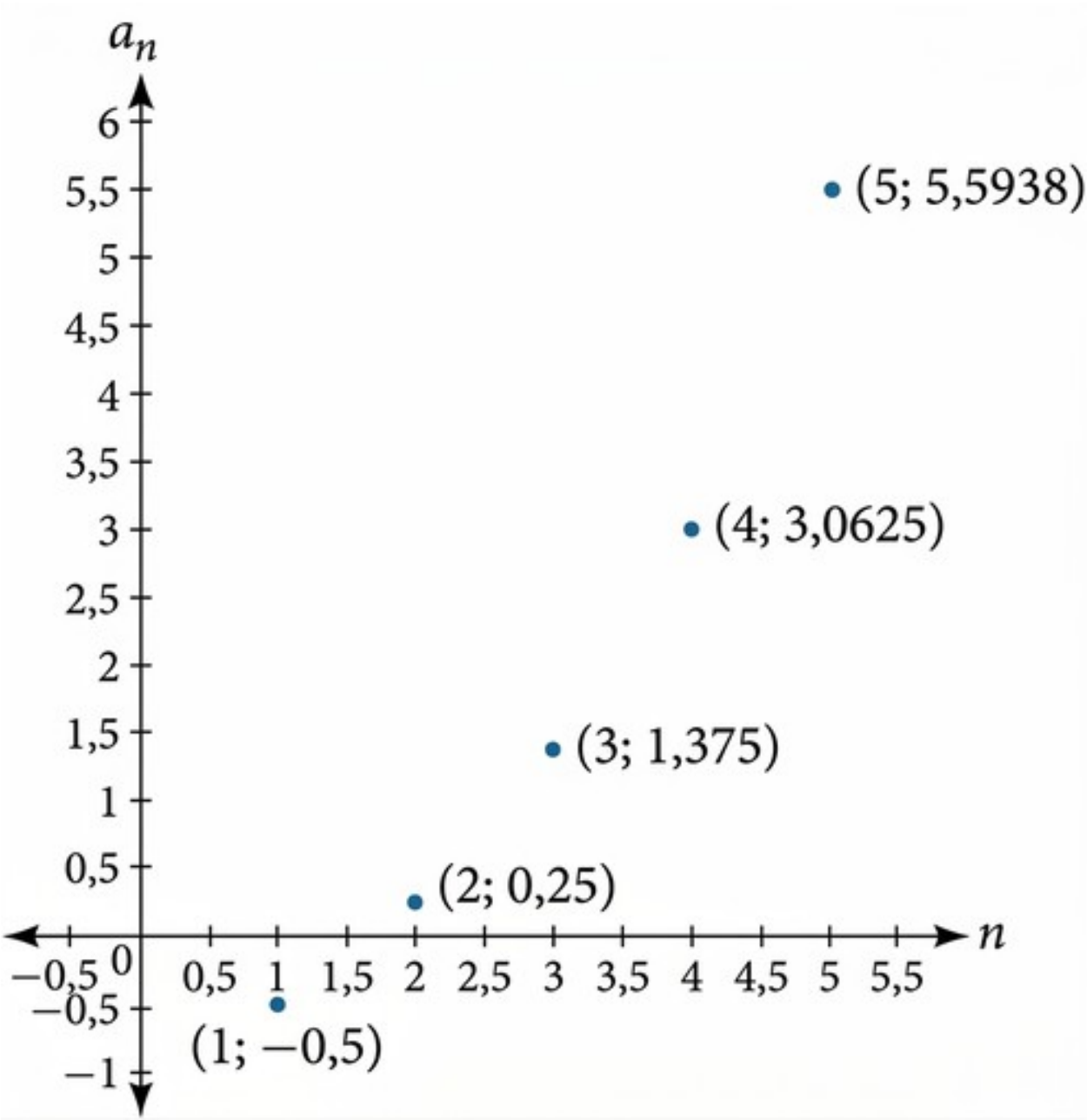
Grafisk verkefni

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort grafið sem sýnt er tákni kvótarunu.

46.



47.



11

Teiknið í eftirfarandi verkefnum graf fyrstu fimm liða kvótarununnar út frá gefnum upplýsingum.

48.

$$a_1 = 1, \quad r = \tfrac{1}{2}$$

49.

$$a_1 = 3, \quad a_n = 2a_{n-1}$$

50.

$$a_n = 27 \cdot 0{,}3^{n-1}$$

Viðbótarverkefni

51. Notið rakningarformúlur til að gefa tvö dæmi um kvótarunur þar sem 3. liðurinn er 200.

52. Notið lokuð form til að gefa tvö dæmi um kvótarunur þar sem 7. liðurinn er 1024.

53. Finnið 5. lið kvótarununnar $\{b, 4b, 16b, \ldots\}$.

54. Finnið 7. lið kvótarununnar $\{64a(-b), 32a(-3b), 16a(-9b), \ldots\}$.

55. Við hvaða lið fer runan $\{10, 12, 14{,}4, 17{,}28, \ \ldots\}$ yfir 100?

56. Frá og með hvaða lið tekur runan $\left\{\frac{1}{2187}, \frac{1}{729}, \frac{1}{243}, \frac{1}{81} \ldots\right\}$ heiltölugildi?

57. Við hvaða lið tekur kvótarunan $a_n = -36\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ fyrst gildi sem er ekki heiltala?

58. Notið rakningarformúlu til að skrifa kvótarunu með heiltölu sem hlutfallstölu. Sýnið fyrstu fjóra liðina og finnið síðan 10. liðinn.

59. Notið lokað form til að skrifa kvótarunu með tugabrot milli 0 og 1 sem hlutfallstölu. Sýnið fyrstu 4 liðina og finnið síðan 8. liðinn.

60. Getur runa verið bæði jafnmunaruna og kvótaruna? Gefið dæmi ef svo er.

11.4 Raðir og ritháttur þeirra

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota summutákn.
- Nota formúlu fyrir summu fyrstu n liða jafnmunaraðar.
- Nota formúlu fyrir summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar.
- Nota formúlu fyrir summu óendanlegrar geómetrískrar raðar.
- Leysa verkefni um jafngreiðsluraðir.

Foreldri ákveður að stofna háskólasjóð fyrir dóttur sína. Foreldrið ætlar að leggja $50 í sjóðinn í hverjum mánuði. Sjóðurinn ber 6% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Hve mikið verður komið í sjóðinn þegar dóttirin hefur háskólanám eftir 6 ár? Í þessum hluta lærum við að svara þessari spurningu. Til þess þurfum við að skoða bæði hve mikið er lagt inn og hve miklir vextir safnast.

Summutákn notað

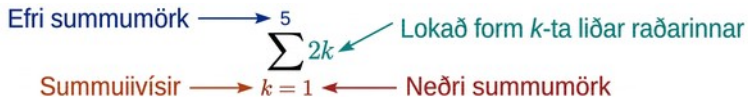
Til að finna heildarfjárhæðina í háskólasjóðnum og samanlagðar innlagnir þurfum við að leggja saman mánaðarlegar innlagnir og vextina sem ávinnast í hverjum mánuði. Summa liða runu kallast röð. Skoðum til dæmis eftirfarandi röð.

$$3+7+11+15+19+\ldots$$

n-ta hlutsumma raðar er summa endanlegs fjölda samliggjandi liða frá og með fyrsta liðnum. Táknið S_n táknar hlutsummuna.

$$\begin{aligned} S_1 &= 3 \\ S_2 &= 3+7=10 \\ S_3 &= 3+7+11=21 \\ S_4 &= 3+7+11+15=36 \end{aligned}$$

Summutákn er notað til að tákna raðir. Það er oft nefnt sigma-ritháttur vegna þess að gríski hástafurinn sigma, Σ, táknar summuna. Ritátturinn felur í sér lokað form og tilgreinir fyrsta og síðasta lið raðarinnar. Lokað form hvers liðar er hægra megin við sigma-táknið. Breyta sem kallast summuvísir er skrifuð neðan við sigma. Summuvísirinn er látinn jafngilda neðri summumörkum, tölunni sem myndar fyrsta lið raðarinnar. Talan fyrir ofan sigma kallast efri summumörk og myndar síðasta lið raðarinnar.



Ritátturinn segir okkur að finna summu liðanna í röðinni $a_k=2k$ fyrir $k=1$ til $k=5$. Við byrjum á að setja gildin fyrir k inn og skrá liði raðarinnar.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(1)=2 \\ a_2 &= 2(2)=4 \\ a_3 &= 2(3)=6 \\ a_4 &= 2(4)=8 \\ a_5 &= 2(5)=10 \end{aligned}$$

Við finnum summu raðarinnar með því að leggja liðina saman:

$$\sum_{k=1}^{5} 2k=2+4+6+8+10=30$$

SUMMUTÁKN

Skrifa má summu fyrstu n liða raðar með summutákni á eftirfarandi hátt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ritháttur inn segir okkur að finna summu a_k frá $k=1$ til $k=n$.

k kallast summuvísir, 1 eru neðri summumörk og n efri summumörk.

SPURT OG SVARAÐ

Þurfa neðri summumörkin að vera 1?

Nei. Neðri summumörkin geta verið hvaða tala sem er, en 1 er oft notuð. Við skoðum dæmi þar sem neðri summumörkin eru önnur en 1.

AÐFERÐ

Reikna gildi raðar þegar summutákn hennar er gefið.

1. Finnið neðri summumörkin.
2. Finnið efri summumörkin.
3. Setjið hvert gildi k frá neðri summumörkum til efri summumarka inn í formúluna.
4. Leggið saman til að finna summuna.

SÝNIDÆMI 1

Summutákn notað

Reiknið $\sum_{k=3}^{7} k^2$.

Lausn

Samkvæmt rithættinum eru neðri summumörkin 3 og þau efri 7. Við þurfum því að finna summu k^2 frá $k=3$ til $k=7$. Liðir raðarinnar fást með því að setja $k=3,4,5,6$, og 7 inn í fallið k^2. Við leggjum liðina saman til að finna summuna.

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{7} k^2 &= 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2\\ &= 9+16+25+36+49\\ &= 135\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Reiknið $\sum_{k=2}^{5} (3k-1)$.

Formúla fyrir jafnmunaraðir notuð

Rétt eins og við skoðuðum sérstakar gerðir runa skoðum við nú sérstakar gerðir raða. Jafnmunaruna er runa þar sem mismunur tveggja samliggjandi liða er alltaf fasti mismunurinn d. Summa liða jafnmunarunu kallast jafnmunaröð. Skrifa má summu fyrstu n liða jafnmunaraðar sem:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - d) + a_n.$$

Einnig má snúa röð liðanna við og skrifa summuna sem

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + d) + a_1.$$

Ef við leggjum saman þessar tvær framsetningar á summu fyrstu n liða jafnmunaraðar getum við leitt út formúlu fyrir summu fyrstu n liða hvaða jafnmunaraðar sem er.

$$\begin{aligned} & S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - d) + a_n \\ + \quad & S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + d) + a_1 \\ \hline & 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Röðin hefur n liði og því má einfalda summuna í

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

Við deilum með 2 til að fá formúlu fyrir summu fyrstu n liða jafnmunaraðar.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

FORMÚLA FYRIR SUMMU FYRSTU N LIÐA JAFNMUNARAÐAR

Jafnmunaröð er summa liða jafnmunarunu. Formúlan fyrir summu fyrstu n liða jafnmunarunu er

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

11

AÐFERÐ

Finna summu fyrstu n liða þegar liðir jafnmunaraðar eru gefnir.

1. Finnið a_1 og a_n.
2. Ákvarðið n.
3. Setjið gildi a_1, a_n, og n inn í formúluna $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.
4. Einfaldið til að finna S_n.

SÝNIDÆMI 2

Summa fyrstu n liða jafnmunaraðar fundin

Finnið summu hverrar jafnmunaraðar.

1. ⓐ

$$5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32$$

2. ⓑ $20 + 15 + 10 + \ldots + -50$

3. ⓒ $\sum_{k=1}^{12} 3k - 8$

Lausn

1. ⓐ

Gefið er að $a_1 = 5$ og $a_n = 32$.

Teljið liði rununnar til að fá $n = 10$.

Setjið gildi a_1, a_n, og n inn í formúluna og einfaldið.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$S_{10} = \frac{10(5+32)}{2} = 185$$

2. ⓑ

Gefið er að $a_1 = 20$ og $a_n = -50$.

Notið formúlu fyrir almenna lið jafnmunarunu til að finna n.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ -50 &= 20 + (n-1)(-5) \\ -70 &= (n-1)(-5) \\ 14 &= n - 1 \\ 15 &= n \end{aligned}$$

Setjið gildi a_1, a_n, n inn í formúluna og einfaldið.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$S_{15} = \frac{15(20-50)}{2} = -225$$

3. ⓒ

Til að finna a_1, setjið $k = 1$ inn í gefna lokaða formið.

$$a_k = 3k - 8$$
$$a_1 = 3(1) - 8 = -5$$

Gefið er að $n=12$. Til að finna a_{12}, setjið $k=12$ inn í gefna lokaða formið.

$$a_k = 3k - 8$$
$$a_{12} = 3(12) - 8 = 28$$

Setjið gildi a_1, a_n, og n inn í formúluna og einfaldið.

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
$$S_{12} = \frac{12(-5+28)}{2} = 138$$

Notið formúluna til að finna summu hverrar jafnmunaraðar.

REYNIÐ SJÁLF #2

$$1{,}4 + 1{,}6 + 1{,}8 + 2{,}0 + 2{,}2 + 2{,}4 + 2{,}6 + 2{,}8 + 3{,}0 + 3{,}2 + 3{,}4$$

REYNIÐ SJÁLF #3

$$13 + 21 + 29 + \ldots + 69$$

REYNIÐ SJÁLF #4

$$\sum_{k=1}^{10} 5 - 6k$$

SÝNIDÆMI 3

Hagnýt verkefni með jafnmunaröðum leyst

Sunnudaginn eftir minni háttar aðgerð getur kona gengið hálfa mílu. Á hverjum sunnudegi gengur hún fjórðungi úr mílu lengra. Hve margar mílur hefur hún gengið samtals eftir 8 vikur?

11

Lausn

Lýsa má verkefninu með jafnmunaröð þar sem $a_1=\frac{1}{2}$ og $d=\frac{1}{4}$. Við leitum að heildarvegalengd eftir 8 vikur, þannig að $n=8$, og við eigum að finna S_8. Til að finna a_8, notum við lokað form jafnmunarunu.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$a_8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(8-1) = \frac{9}{4}$$

Nú getum við notað formúluna fyrir jafnmunaraðir.

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$
$$S_8 = \frac{8(\frac{1}{2}+\frac{9}{4})}{2} = 11$$

Hún hefur gengið samtals 11 mílur.

REYNIÐ SJÁLF #5

Maður vinnur sér inn $100 fyrstu vikuna í júní. Í hverri viku vinnur hann sér inn $12,50 meira en vikuna á undan. Hve mikið hefur hann unnið sér inn eftir 12 vikur?

Formúla fyrir geómetríska raðir notuð

Rétt eins og summa liða jafnmunarunu kallast jafnmunaröð, kallast summa liða kvótarunu geómetrísk röð. Kvótaruna er runa þar sem kvóti tveggja samliggjandi liða er alltaf hlutfallstalan r. Skrifa má summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar sem

$$S_n = a_1 + r\,a_1 + r^2 a_1 + \ldots + r^{n-1} a_1.$$

Eins og fyrir jafnmunaraðir getum við notað algebru til að leiða út formúlu fyrir summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar. Við byrjum á að margfalda báðar hliðar jöfnunnar með r.

$$r\,S_n = r\,a_1 + r^2 a_1 + r^3 a_1 + \ldots + r^n a_1$$

Næst drögum við þessa jöfnu frá upphaflegu jöfnunni.

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + ra_1 + r^2 a_1 + \ldots + r^{n-1} a_1 \\ \underline{-rS_n = -(ra_1 + r^2 a_1 + r^3 a_1 + \ldots + r^n a_1)} \\ (1-r)S_n = a_1 - r^n a_1 \end{array}$$

Takið eftir að þegar við drögum frá styttast allir liðir út nema fyrsti liður efri jöfnunnar og síðasti liður neðri jöfnunnar. Til að fá formúlu fyrir S_n, deilum við báðum hliðum með $(1-r)$.

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad r \neq 1$$

FORMÚLA FYRIR SUMMU FYRSTU N LIÐA GEÓMETRÍSKRAR RAÐAR

Geómetrísk röð er summa liða kvótarunu. Formúlan fyrir summu fyrstu n liða kvótarunu er

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad r \neq 1$$

AÐFERÐ

Finna summu fyrstu

1. Finnið a_1, r, og n.
2. Setjið gildi a_1, r, og n inn í formúluna $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$.
3. Einfaldið til að finna S_n.

SÝNIDÆMI 4

Summa fyrstu n liða geómetrískrar raðar fundin

Notið formúluna til að finna tilgreinda hlutsummu hverrar geómetrískrar raðar.

1. ⓐ S_{11} fyrir röðina 8 + -4 + 2 + …
2. ⓑ $\sum_{k=1}^{6} 3 \cdot 2^k$

Lausn

1. ⓐ

   $a_1 = 8$, og gefið er að $n = 11$.

   Við finnum r með því að deila öðrum lið raðarinnar með þeim fyrsta.

   $r = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

   Setjið gildi a_1, r, og n inn í formúluna og einfaldið.

   $$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

   $$S_{11} = \frac{8\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{11}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \approx 5{,}336$$

2. ⓑ

   Finnið a_1 með því að setja $k = 1$ inn í gefna lokaða formið.

   $a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$

   Af lokaða forminu sést að $r = 2$. Efri summumörkin eru 6, þannig að $n = 6$.

   Setjið gildi a_1, r, og n inn í formúluna og einfaldið.

   $$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

   $$S_6 = \frac{6(1-2^6)}{1-2} = 378$$

Notið formúluna til að finna tilgreinda hlutsummu hverrar geómetrískrar raðar.

REYNIÐ SJÁLF #6

S_{20} fyrir röðina $1.000 + 500 + 250 + \ldots$

REYNIÐ SJÁLF #7

$$\sum_{k=1}^{8} 3^k$$

SÝNIDÆMI 5

Hagnýtt verkefni með geómetrískri röð leyst

Í nýju starfi eru byrjunarlaun starfsmanns $26.750. Laun hans hækka um 1,6% árlega. Finnið heildartekjur hans eftir 5 ár.

Lausn

Lýsa má verkefninu með geómetrískri röð þar sem $a_1 = 26.750$; $n = 5$; og $r = 1{,}016$. Setjið gildi a_1, r, og n inn í formúluna og einfaldið til að finna heildartekjurnar í lok 5 ára.

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$S_5 = \frac{26.750\left(1 - 1{,}016^5\right)}{1 - 1{,}016} \approx 138.099{,}03$$

Hann hefur unnið sér inn samtals $138.099,03 eftir 5 ár.

REYNIÐ SJÁLF #8

Í nýju starfi eru byrjunarlaun starfsmanns $32.100. Laun hennar hækka um 2% árlega. Hve mikið hefur hún unnið sér inn eftir 8 ár?

Formúla fyrir summu óendanlegrar geómetrískrar raðar notuð

Hingað til höfum við aðeins skoðað endanlegar raðir. Stundum viljum við þó finna summu liða óendanlegrar runu en ekki aðeins summu fyrstu n liðanna. Óendanleg röð er summa liða óendanlegrar runu. Dæmi um óendanlega röð er $2+4+6+8+\ldots$

Einnig má skrifa röðina með summutáknun sem $\sum_{k=1}^{\infty} 2k$, þar sem efri summumörkin eru óendanleiki. Liðirnir stefna ekki á núll og því vex summa raðarinnar án takmarka eftir því sem fleiri liðum er bætt við. Summa þessarar óendanlegu raðar er því ekki skilgreind. Þegar summan er ekki rauntala segjum við að röðin sé ósamleitin.

Ákvarðað hvort summa óendanlegrar geómetrískrar raðar sé skilgreind

Ef liðir óendanlegrar kvótarunu stefna á 0 má skilgreina summu óendanlegrar geómetrískrar raðar. Liðir þessarar raðar stefna á 0:

$$1+0{,}2+0{,}04+0{,}008+0{,}0016+\ldots$$

Hlutfallstalan er $r = 0{,}2$. Þegar n verður mjög stórt verða gildi r^n mjög lítil og stefna á 0. Hver nýr liður hefur minni áhrif á summuna en liðurinn á undan. Eftir því sem liðirnir nálgast 0 nálgast summa þeirra endanlegt gildi. Liðir allra óendanlegra geómetrískra raða þar sem $-1<r<1$ stefna á 0; summa geómetrískrar raðar er skilgreind þegar $-1<r<1$.

ÁKVARÐAÐ HVORT SUMMA ÓENDANLEGRAR GEÓMETRÍSKRAR RAÐAR SÉ SKILGREIND

Summa óendanlegrar raðar er skilgreind ef röðin er geómetrísk og $-1<r<1$.

AÐFERÐ

Ákvarða hvort summa raðar sé til þegar fyrstu nokkrir liðir óendanlegrar raðar eru gefnir.

1. Finnið hlutfall annars liðarins og hins fyrsta.
2. Finnið hlutfall þriðja liðarins og hins annars.
3. Haldið svona áfram til að ganga úr skugga um að hlutfall hvers liðar og liðarins á undan sé alltaf það sama. Ef svo er, er röðin geómetrísk.
4. Ef hlutfallstalan r, fannst í skrefi 3, athugið þá hvort $-1<r<1$. Ef svo er, er summan skilgreind, annars ekki.

SÝNIDÆMI 6

Ákvarðað hvort summa óendanlegrar raðar sé skilgreind

Ákvarðið hvort summa hverrar óendanlegrar raðar sé skilgreind.

1. ⓐ $12 + 8 + 4 + \ldots$
2. ⓑ $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$
3. ⓒ $\sum_{k=1}^{\infty} 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$
4. ⓓ $\sum_{k=1}^{\infty} 5k$

Lausn

1. ⓐ Hlutfall annars liðarins og hins fyrsta er $\frac{2}{3}$, sem er ekki jafnt hlutfalli þriðja liðarins og hins annars, $\frac{1}{2}$. Röðin er ekki geómetrísk.

2. ⓑ Hlutfall annars liðarins og hins fyrsta er jafnt hlutfalli þriðja liðarins og hins annars. Röðin er geómetrísk með hlutfallstöluna $\frac{2}{3}$. Summa óendanlegu raðarinnar er skilgreind.

3. ⓒ Gefna formúlan er vísisformúla með grunntöluna $\frac{1}{3}$; röðin er geómetrísk með hlutfallstöluna $\frac{1}{3}$. Summa óendanlegu raðarinnar er skilgreind.

4. ⓓ Gefna formúlan er ekki vísisformúla. Röðin er ekki geómetrísk vegna þess að liðirnir vaxa. Því getur hún ekki haft endanlega summu.

Ákvarðið hvort summa óendanlegu raðarinnar sé skilgreind.

REYNIÐ SJÁLF #9

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{9}{8}+\ldots$$

REYNIÐ SJÁLF #10

$$24+\left(-12\right)+6+\left(-3\right)+\ldots$$

REYNIÐ SJÁLF #11

$$\sum_{k=1}^{\infty} 15\cdot\left(-0{,}3\right)^{k}$$

Summur óendanlegra raða fundnar

Þegar summa óendanlegrar geómetrískrar raðar er til getum við reiknað hana. Formúlan fyrir summuna tengist formúlunni fyrir summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar.

$$S_n=\frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

Skoðum óendanlega röð þar sem $r=\frac{1}{2}$. Hvað verður um r^n þegar n vex?

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^3=\tfrac{1}{8}$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^4=\tfrac{1}{16}$$

Gildi r^n minnkar hratt. Hvað gerist þegar við notum stærri gildi á n?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1.024}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=\frac{1}{1.048.576}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\frac{1}{1.073.741.824}$$

Þegar n verður mjög stórt verður r^n mjög lítið. Við segjum að þegar n vex án takmarka stefni r^n á 0. Þegar r^n stefnir á 0 stefnir $1-r^n$ á 1. Þá stefnir teljarinn á a_1. Þannig fæst formúla fyrir summu óendanlegrar geómetrískrar raðar.

FORMÚLA FYRIR SUMMU ÓENDANLEGRAR GEÓMETRÍSKRAR RAÐAR

Formúlan fyrir summu óendanlegrar geómetrískrar raðar þar sem $-1<r<1$ er

$$S=\frac{a_1}{1-r}$$

AÐFERÐ

Finna summu óendanlegrar geómetrískrar raðar.

1. Finnið a_1 og r.
2. Staðfestið að $-1<r<1$.
3. Setjið gildi a_1 og r inn í formúluna $S=\frac{a_1}{1-r}$.
4. Einfaldið til að finna S.

SÝNIDÆMI 7

Summa óendanlegrar geómetrískrar raðar fundin

Finnið summu hverrar raðar ef hún er til:

1. ⓐ $10+9+8+7+\ldots$
2. ⓑ $248{,}6+99{,}44+39{,}776+\quad\ldots$
3. ⓒ $\sum_{k=1}^{\infty} 4{,}374\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
4. ⓓ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{k}$

Lausn

1. ⓐ Hlutfallið er ekki fast og því er röðin ekki geómetrísk.

2. ⓑ

Hlutfallið er fast og röðin því geómetrísk. $a_1=248{,}6$ og $r=\frac{99{,}44}{248{,}6}=0{,}4$, svo summan er til. Setjið $a_1=248{,}6$ og $r=0{,}4$ inn í formúluna og einfaldið:

$$S=\frac{a_1}{1-r}$$

$$S=\frac{248{,}6}{1-0{,}4}=414{,}\overline{3}$$

3. ⓒ

Formúlan er vísisformúla, þannig að röðin er geómetrísk með $r=-\frac{1}{3}$. Finnið a_1 með því að setja $k=1$ inn í gefna lokaða formið:

$$a_1=4.374\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{1-1}=4.374$$

Setjið $a_1=4.374$ og $r=-\frac{1}{3}$ inn í formúluna og einfaldið:

$$S=\frac{a_1}{1-r}$$

$$S=\frac{4.374}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=3.280{,}5$$

4. ⓓ Formúlan er vísisformúla og röðin því geómetrísk, en $r>1$. Summan er ekki til.

SÝNIDÆMI 8

Jafngilt brot endurtekins tugabrots fundið

Finnið jafngilt brot fyrir endurtekna tugabrotið $0{,}\overline{3}$

Lausn

Við sjáum að endurtekna tugabrotið er $0{,}\overline{3}=0{,}333\ldots$ og því getum við skrifað það sem summu liða.

$$0{,}\overline{3}=0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots$$

Við leitum að mynstri og umritum summuna. Þá sést að fyrsti liðurinn er margfaldaður með 0,1 til að fá annan liðinn og annar liðurinn með 0,1 til að fá þriðja liðinn.

$$0{,}\overline{3}=0{,}3+(0{,}1)\underbrace{(0{,}3)}_{\text{Fyrsti liður}}+(0{,}1)\underbrace{(0{,}1)(0{,}3)}_{\text{Annar liður}}$$

Takið eftir mynstrinu: hver liður er margfaldaður með hlutfallstölunni 0,1, frá og með fyrsta liðnum 0,3. Þegar gildin eru sett inn í formúluna fyrir summu óendanlegrar geómetrískrar raðar fæst

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{0,3}{1-0,1}=\frac{0,3}{0,9}=\frac{1}{3}.$$

Finnið summuna ef hún er til.

REYNIÐ SJÁLF #12

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$$

REYNIÐ SJÁLF #13

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0,76\,k+1$$

REYNIÐ SJÁLF #14

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{8}\right)^k$$

Verkefni um jafngreiðsluraðir leyst

Í upphafi hlutans skoðuðum við verkefni þar sem foreldri lagði fasta fjárhæð mánaðarlega í háskólasjóð í sex ár. Jafngreiðsluröð er fjárfesting þar sem kaupandinn greiðir jafnháa fjárhæð með jöfnu millibili. Til að finna virði jafngreiðsluraðar þarf að leggja saman allar greiðslur og áunna vexti. Í dæminu leggur foreldrið $50 inn á mánuði. Það er upphaflega innleggið. Reikningurinn ber 6% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Til að finna vexti á greiðslutímabili deilum við ársvöxtunum, 6%, með 12. Mánaðarlegu vextirnir eru því 0,5%. Við getum margfaldað inneignina í hverjum mánuði með 100,5% til að finna virði reikningsins eftir að vöxtum hefur verið bætt við.

Finna má virði jafngreiðsluraðarinnar strax eftir síðasta innlegg með geómetrískri röð þar sem $a_1=50$ og $r=100,5\,\%=1,005$. Eftir fyrsta innleggið er virði jafngreiðsluraðarinnar $50. Skoðum hvort við getum ákvarðað fjárhæðina í háskólasjóðnum og áunna vexti.

Finna má virði jafngreiðsluraðar eftir n innlagnir með formúlunni fyrir summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar. Á 6 árum eru 72 mánuðir og því er $n=72$. Við setjum $a_1=50$, $r=1,005$, og $n=72$ inn í formúluna og einföldum til að finna virði jafngreiðsluraðarinnar eftir 6 ár.

$$S_{72}=\frac{50\left(1-1,005^{72}\right)}{1-1,005}\approx 4.320,44$$

After the last deposit, the parent will have a total of $4.320,44 in the account. Notice, the parent made 72 payments of $50 each for a total of 72(50) = $3.600. This means that because of the annuity, the parent earned $720,44 interest in their college fund.

AÐFERÐ

Finna virði jafngreiðsluraðar þegar upphaflegt innlegg og vextir eru gefin.

1. Ákvarðið a_1, virði upphaflega innleggsins.
2. Ákvarðið n, fjölda innlagna.
3. Ákvarðið r.
   a. Deilið árlegum vöxtum með fjölda vaxtatímabila á ári.
   b. Leggið 1 við niðurstöðuna til að finna r.
4. Setjið gildi a_1, r, og n inn í formúluna fyrir summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar, $S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$.
5. Einfaldið til að finna S_n, virði jafngreiðsluraðarinnar eftir n innlagnir.

SÝNIDÆMI 9

Verkefni um jafngreiðsluröð leyst

Í upphafi hvers mánaðar er $100 lagt í háskólasjóð í 10 ár. Sjóðurinn ber 9% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Vextirnir eru greiddir í lok hvers mánaðar. Hve mikið er á reikningnum strax eftir síðasta innleggið?

Lausn

Virði upphaflega innleggsins er $100, þannig að $a_1 = 100$. Alls eru gerðar 120 mánaðarlegar innlagnir á 10 árum og því $n = 120$. Til að finna r, deilum við árlegum vöxtum með 12 til að finna mánaðarlega vexti og leggjum 1 við til að tákna nýja mánaðarlega innleggið.

$$r = 1 + \frac{0{,}09}{12} = 1{,}0075$$

Setjið $a_1 = 100$, $r = 1{,}0075$, og $n = 120$ inn í formúluna fyrir summu fyrstu n liða geómetrískrar raðar og einfaldið til að finna virði jafngreiðsluraðarinnar.

$$S_{120} = \frac{100\left(1 - 1{,}0075^{120}\right)}{1 - 1{,}0075} \approx 19.351{,}43$$

Því eru $19.351,43 á reikningnum eftir síðasta innleggið.

REYNIÐ SJÁLF #15

Í upphafi hvers mánaðar eru $200 lagðir í lífeyrissjóð. Sjóðurinn ber 6% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Vextirnir eru greiddir inn á reikninginn í lok hvers mánaðar. Hve mikið er á reikningnum ef greitt er inn í 10 ár?

MIÐLAR

Skoðið þessi nettilföng til að fá frekari kennslu og æfingu í röðum.

- Jafnmunaraðir
- Geómetrískar raðir
- Summutákn

11.4 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Hvað er n-ta hlutsumma?

2. Hver er munurinn á jafnmunarunu og jafnmunaröð?

3. Hvað er geómetrísk röð?

4. Hvað er ólíkt með því að finna summu óendanlegrar geómetrískrar raðar og því að finna n-tu hlutsummuna?

5. Hvað er jafngreiðsluröð?

Algebruverkefni

Lýsið hverri summu í eftirfarandi verkefnum með summutákni.

6. Summa liðanna m^2+3m frá $m=1$ til $m=5$

7. Summan frá $n=0$ til $n=4$ af $5n$

8. Summa $6k-5$ frá $k=-2$ til $k=1$

9. Summan sem fæst þegar talan 4 er lögð saman fimm sinnum

Skrifið hverja jafnmunasummu í eftirfarandi verkefnum með summutákni.

10.

$$5+10+15+20+25+30+35+40+45+50$$

11.

$$10+18+26+\ldots+162$$

12.

$$\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\ldots+4$$

Notið í eftirfarandi verkefnum formúluna fyrir summu fyrstu n liða hverrar jafnmunarunu.

13.

$$\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\frac{7}{2}$$

14.

$$19+25+31+\ldots+73$$

15.

$$3{,}2+3{,}4+3{,}6+\ldots+5{,}6$$

Skrifið hverja geómetríska summu í eftirfarandi verkefnum með summutákni.

16.

$$1+3+9+27+81+243+729+2187$$

17.

$$8+4+2+\ldots+0{,}125$$

18.

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{768}$$

Notið í eftirfarandi verkefnum formúluna fyrir summu fyrstu n liða hverrar kvótarunu og tilgreinið síðan summuna.

19.

$$9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

20.

$$\sum_{n=1}^{9} 5 \cdot 2^{n-1}$$

21.

$$\sum_{a=1}^{11} 64 \cdot 0{,}2^{a-1}$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort óendanlega röðin hafi summu. Skrifið formúlu fyrir summuna ef svo er, en tilgreinið annars ástæðuna.

22.

$$12+18+24+30+\ldots$$

23.

$$2+1{,}6+1{,}28+1{,}024+\ldots$$

24.

$$\sum_{m=1}^{\infty} 4^{m-1}$$

25.

$$\sum_{\infty}^{k=1} -\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Grafisk verkefni

Notið eftirfarandi aðstæður í verkefnunum. Javier leggur mánaðarlega inn á sparnaðarreikning. Hann stofnaði reikninginn með $50 upphafsinnleggi og hækkaði síðan innleggið um $20 í hverjum mánuði.

26. Teiknið graf jafnmunarununnar sem sýnir innlagnir Javiers í eitt ár.

27. Teiknið graf jafnmunaraðarinnar sem sýnir samanlagðar innlagnir Javiers í lok hvers mánaðar í eitt ár.

Notið geómetrísku röðina $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$. í eftirfarandi verkefnum.

28. Teiknið graf fyrstu 7 hlutsumma raðarinnar.

29. Hvaða tölu virðist S_n nálgast á grafinu? Finnið summuna til að skýra hvers vegna það er eðlilegt.

Töluleg verkefni

Finnið tilgreinda summu í eftirfarandi verkefnum.

30.

$$\sum_{a=1}^{14} a$$

31.

$$\sum_{n=1}^{6} n(n-2)$$

32.

$$\sum_{k=1}^{17} k^2$$

33.

$$\sum_{k=1}^{7} 2^k$$

Notið í eftirfarandi verkefnum formúluna fyrir summu fyrstu n liða jafnmunaraðar til að finna summuna.

34.

$$-1{,}7+-0{,}4+0{,}9+2{,}2+3{,}5+4{,}8$$

35.

$$6+\frac{15}{2}+9+\frac{21}{2}+12+\frac{27}{2}+15$$

36.

$$-1+3+7+\ldots+31$$

37.

$$\sum_{k=1}^{11}\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

Notið í eftirfarandi verkefnum formúluna fyrir summu fyrstu n liða geómetríska raðar til að finna hlutsummuna.

38. S_6 fyrir röðina $-2-10-50-250\ldots$

39. S_7 fyrir röðina $0{,}4-2+10-50\ldots$

40.

$$\sum_{k=1}^{9}2^{k-1}$$

41.

$$\sum_{n=1}^{10}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Finnið summu óendanlegu geómetrísku raðarinnar í eftirfarandi verkefnum.

42.

$$4+2+1+\frac{1}{2}\ldots$$

43.

$$-1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{64}\ldots$$

44.

$$\sum_{\infty}^{k=1}3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

45.

$$\sum_{n=1}^{\infty}4{,}6\cdot 0{,}5^{n-1}$$

Ákvarðið virði jafngreiðsluraðarinnar í eftirfarandi verkefnum út frá mánaðarlegri innborgun, fjölda innborgana og vöxtum.

46. Innborgun: $\$50$; heildarfjöldi innborgana: 60; vextir: 5%, með mánaðarlegri vaxtavöxtun

47. Innborgun: $\$150$; heildarfjöldi innborgana: 24; vextir: 3%, með mánaðarlegri vaxtavöxtun

48. Innborgun: $\$450$; heildarfjöldi innborgana: 60; vextir: $4{,}5\%$, með ársfjórðungslegri vaxtavöxtun

49. Innborgun: $\$100$; heildarfjöldi innborgana: 120; vextir: 10%, með hálfsárslegri vaxtavöxtun

Viðbótarverkefni

50. Summa liðanna $50-k^2$ frá $k=x$ til 7 er 115. Hvert er x?

51. Skrifið lokað form fyrir a_k þannig að $\sum_{k=0}^{6} a_k = 189$. Gerið ráð fyrir að þetta sé jafnmunaröð.

52. Finnið minnsta gildi n þannig að $\sum_{k=1}^{n} (3k-5) > 100$.

53. Hve marga liði þarf að leggja saman áður en summa raðarinnar $-1-3-5-7\ldots.$ verður minni en -75?

54. Skrifið $0,\overline{65}$ sem óendanlega geómetríska röð með summutákni. Notið síðan formúluna fyrir summu óendanlegrar geómetrískrar raðar til að breyta $0,\overline{65}$ í brot.

55. Summa óendanlegrar geómetrískrar raðar er fimmfalt gildi fyrsta liðarins. Hver er hlutfallstala raðarinnar?

56. Til að fá hagstæðustu lánsvexti vill Coleman-fjölskyldan safna fyrir 20% útborgun í húsi sem kostar $160.000. Hún ætlar að leggja $125 mánaðarlega inn á fjárfestingarreikning sem ber 8,5% ársvexti með hálfsárslegri vaxtavöxtun. Mun fjölskyldan eiga nóg fyrir 20% útborgun eftir fimm ár? Hve mikið hefur hún þá sparað?

57. Karl hefur tvö ár til að safna $\$10.000$ fyrir notuðum bíl þegar hann útskrifast. Hve háar þurfa mánaðarlegar innborganir hans að vera, námundað að næsta Bandaríkjadal, ef reikningurinn ber 4,2% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun?

Raunveruleg verkefni

58. Keisha útbjó vikulanga námsáætlun fyrir lokapróf. Fyrsta daginn ætlar hún að læra í 1 klukkustund og lengja námstímann um 30 mínútur á hverjum degi. Hve margar klukkustundir hefur Keisha lært eftir eina viku?

59. Stór steinn valt niður fjall og fór 6 fet fyrstu sekúnduna. Eftir það jókst vegalengdin um 8 fet á hverri sekúndu. Hve langt fór steinninn á 10 sekúndum?

60. Vísindamaður setur 50 frumur í ræktunarskál. Stofninn vex um 1,5% á klukkustund. Hve margar verða frumurnar eftir 1 sólarhring?

61. Pendúll fer 3 fet í fyrstu sveiflu. Í hverri sveiflu eftir það fer hann $\frac{3}{4}$ af vegalengd sveiflunnar á undan. Hver er heildarvegalengdin þegar pendúllinn stöðvast?

62. Rachael leggur $1.500 árlega í lífeyrissjóð. Sjóðurinn ber 8,2% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Ef hún stofnaði reikninginn 19 ára, hve mikið á hún þegar hún verður 55 ára? Hve stór hluti fjárhæðarinnar eru áunnir vextir?

11.5 Talningarreglur

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

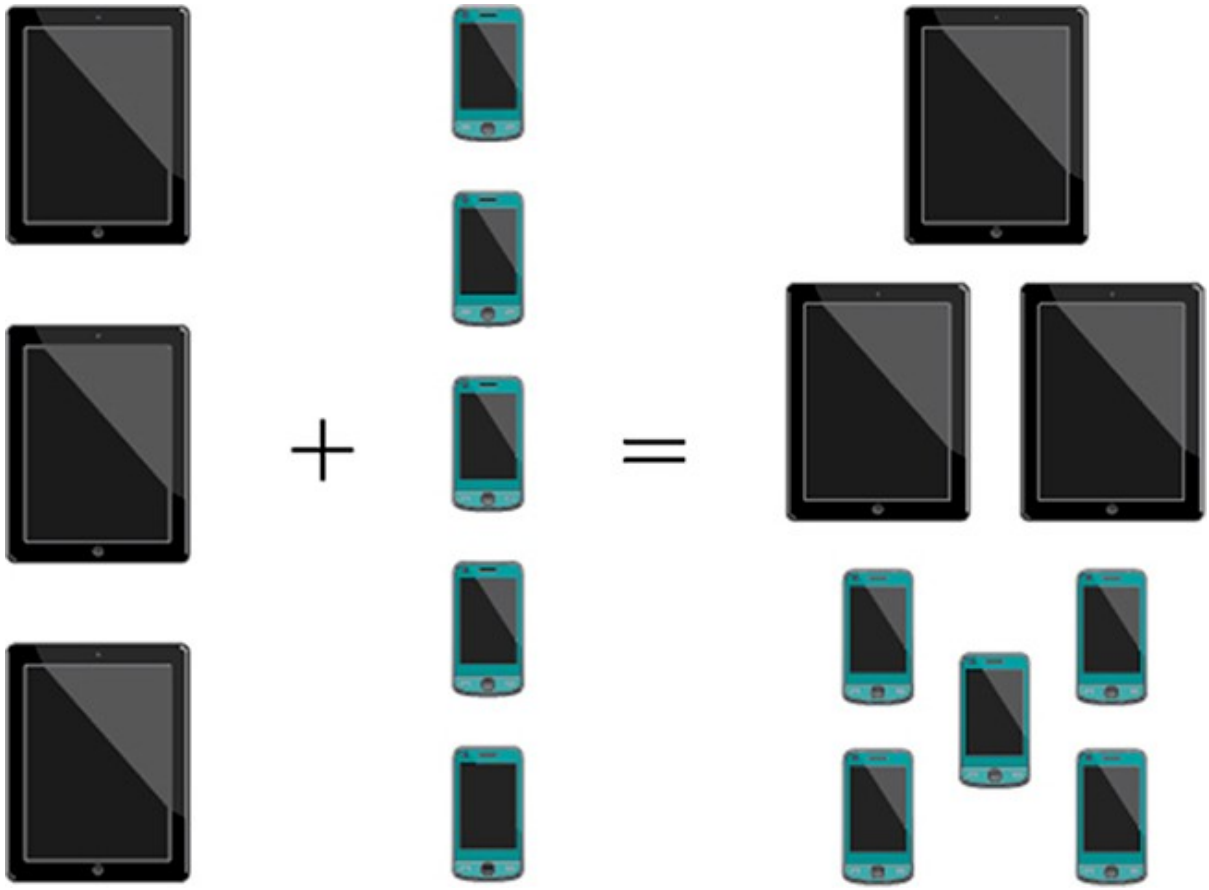
- Leysa talningarverkefni með samlagningarlögmálinu.
- Leysa talningarverkefni með margföldunarlögmálinu.
- Leysa talningarverkefni um umröðun n aðgreinanlegra hluta.
- Leysa talningarverkefni með samantektum.
- Finna fjölda hlutmengja gefins mengis.
- Leysa talningarverkefni um umröðun n hluta sem eru ekki allir aðgreinanlegir.

Nýtt fyrirtæki selur sérsniðin hulstur fyrir spjaldtölvur og snjallsíma. Hvert hulstur er fáanlegt í ýmsum litum og gegn aukagjaldi má gera það persónulegt með myndum eða fangamarki. Viðskiptavinur getur sleppt persónulegri útfærslu eða valið eina, tvær eða þrjár myndir eða fangamark. Hann getur einnig valið röð myndanna og stafanna í fangamarkinu. Fyrirtækið vinnur með auglýsingastofu að markaðsherferð sem leggur áherslu á gríðarlegan fjölda valkosta. Það er krefjandi að telja alla möguleikana!

Við rekumst daglega á margs konar talningarverkefni. Sérstök grein stærðfræðinnar, talningarfræði, fjallar um slík verkefni. Talning nýtist líka þegar búa á til örugg lykilorð, meta úrslit í kappreiðum eða setja saman stundatöflu í háskóla. Í þessum hluta skoðum við slíka stærðfræði.

Samlagningarlögmálið notað

Fyrirtækið sem selur sérsniðin hulstur býður hulstur fyrir spjaldtölvur og snjallsíma. Hulstrin fást fyrir 3 gerðir spjaldtölva og 5 gerðir snjallsíma. Samlagningarlögmálið segir að leggja megi fjölda spjaldtölvukosta við fjölda snjallsímakosta til að finna heildarfjöldann. Samkvæmt samlagningarlögmálinu eru valkostirnir alls 8, eins og sést á mynd 1.



Mynd 1

SAMLAGNINGARLÖGMÁLIÐ

Samkvæmt samlagningarlögmálinu gildir: Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður, sem hefur enga sameiginlega útkomu með hinum fyrri, getur gerst á n vegu, getur annar hvor atburðurinn gerst á $m+n$ vegu.

SÝNIDÆMI 1

11

Samlagningarlögmálið notað

Á kvöldverðarseðli eru 2 grænmetisréttir og 5 kjötréttir. Hver er heildarfjöldi aðalrétta sem velja má um?

Lausn

Við leggjum fjölda grænmetisrétta við fjölda kjötrétta til að finna heildarfjölda aðalrétta.

Grænmetisréttur + Grænmetisréttur + Kjötréttur + Kjötréttur + Kjötréttur + Kjötréttur + Kjötréttur

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Grænmetisréttur + Grænmetisréttur + Kjötréttur + Valkostur 4 + Valkostur + Valkostur 6 + Kjötréttur

Valkostur 1 + Valkostur 2 + Valkostur 3 + Valkostur 4 + Valkosti 5 + Valkostur 6 + Valkostur 7

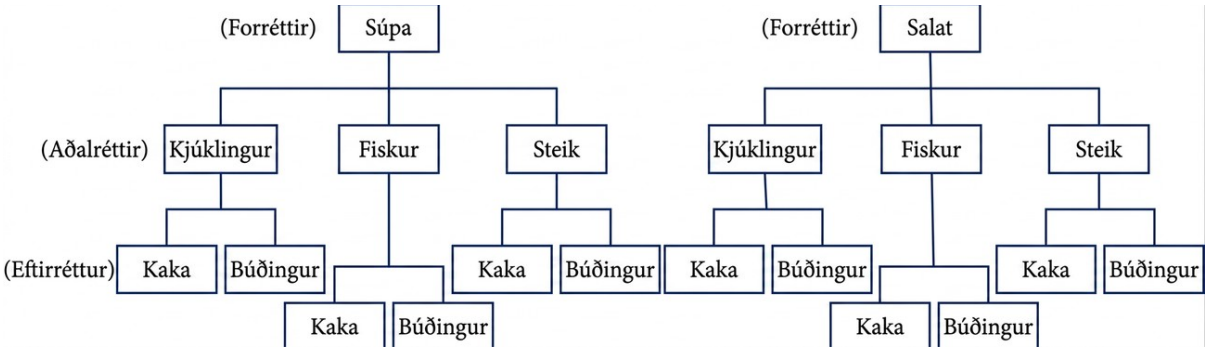
Valkostirnir eru alls 7.

REYNIÐ SJÁLF #1

Nemandi ætlar að kaupa nýja tölvu. Hann velur milli 3 borðtölva og 4 fartölva. Hver er heildarfjöldi valkosta?

Margföldunarlögmálið notað

Margföldunarlögmálið á við þegar valin eru fleiri en eitt atriði. Segjum að við eigum að velja forrétt, aðalrétt og eftirrétt. Ef á fastverðsmatseðli eru 2 forréttir, 3 aðalréttir og 2 eftirréttir eru samtals 12 mögulegar máltíðir með einum rétti af hverri tegund, eins og trjáritið á mynd 2 sýnir.



Mynd 2

Möguleikarnir eru:

1. súpa, kjúklingur, kaka
2. súpa, kjúklingur, búðingur
3. súpa, fiskur, kaka
4. súpa, fiskur, búðingur
5. súpa, steik, kaka
6. súpa, steik, búðingur
7. salat, kjúklingur, kaka
8. salat, kjúklingur, búðingur
9. salat, fiskur, kaka
10. salat, fiskur, búðingur
11. salat, steik, kaka
12. salat, steik, búðingur

Einnig má finna heildarfjölda mögulegra máltíða með margföldun.

Við hefðum líka getað séð strax með margföldunarlögmálinu að mögulegar máltíðir eru 12.

$$\#\text{ valkosta í forrétt} \times \#\text{ valkosta í aðalrétt} \times \#\text{ valkosta í eftirrétt}$$

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

MARGFÖLDUNARLÖGMÁLIÐ

Samkvæmt margföldunarlögmálinu gildir: Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður getur gerst á n vegu eftir að sá fyrri hefur gerst, geta báðir atburðirnir gerst á $m \times n$ vegu. Þetta nefnist einnig grundvallartalningarreglan.

SÝNIDÆMI 2

Margföldunarlögmálið notað

Diane tók með sér 2 pils, 4 blússur og 2 peysur í vinnuferð. Fyrir hvern klæðnað þarf hún að velja pils og blússu og ákveða hvort hún klæðist peysunni. Notið margföldunarlögmálið til að finna heildarfjölda mögulegra klæðnaða.

Lausn

Margfaldið saman fjölda kosta fyrir pils, blússur og peysur til að finna heildarfjölda klæðnaða.

fjöldi pilskosta × fjöldi blóssukosta × fjöldi peysukosta

2 × 4 × 2 = 16

Mögulegir klæðnaðir eru 16.

REYNIÐ SJÁLF #2

Veitingastaður býður morgunverðartilboð með morgunverðarsamloku, meðlæti og drykk. Í boði eru 3 gerðir samloka, 4 meðlæti og 5 drykkir. Finnið heildarfjölda mögulegra morgunverðartilboða.

Fjöldi umröðana n aðgreinanlegra hluta fundinn

Margföldunarlögmálið má nota til að leysa margs konar verkefni. Ein tegund verkefna felst í að raða hlutum. Við röðum stöfum í orð og tölustöfum í tölur, stillum okkur upp fyrir myndatökur, skreytum herbergi og fleira. Tiltekin röðun hluta nefnist umröðun.

Fjöldi umröðana n aðgreinanlegra hluta fundinn með margföldunarlögmálinu

Þegar umröðunarverkefni eru leyst er oft gagnlegt að teikna strik fyrir hvert sæti. Þannig má ákvarða fjölda kosta í hverju sæti og margfalda síðan. Gerum til dæmis ráð fyrir að við höfum fjögur málverk og viljum finna á hve marga vegu má hengja þrjú þeirra í röð á vegg. Við teiknum þrjú strik fyrir sætin þrjú á veggnum.

____ × ____ × ____

Fjórir kostir eru fyrir fyrsta sætið og því skrifum við 4 á fyrsta strikið.

$$\underline{\quad 4 \quad} \times \underline{\quad\quad} \times \underline{\quad\quad}$$

Þegar búið er að fylla fyrsta sætið eru þrír kostir fyrir annað sætið og því skrifum við 3 á annað strikið.

$$\underline{\quad 4 \quad} \times \underline{\quad 3 \quad} \times \underline{\quad\quad}$$

Þegar búið er að fylla annað sætið eru tveir kostir fyrir þriðja sætið og því skrifum við 2 á þriðja strikið. Að lokum finnum við margfeldið.

$$\underline{\quad 4 \quad} \times \underline{\quad 3 \quad} \times \underline{\quad 2 \quad} = 24$$

Mögulegar umraðanir málverkanna eru 24.

AÐFERÐ

Ákvarða fjölda umröðana þegar gefnir eru n aðgreinanlegir kostir.

1. Ákvarðið fjölda kosta fyrir fyrsta sætið.
2. Ákvarðið hve margir kostir eru eftir fyrir annað sætið.
3. Haldið áfram þar til öll sætin hafa verið fyllt.
4. Margfaldið tölurnar saman.

SÝNIDÆMI 3

Fjöldi umröðana fundinn með margföldunarlögmálinu

Níu sundmenn keppa í sundmóti.

1. ⓐ Á hve marga vegu geta þeir lent í fyrsta, öðru og þriðja sæti?
2. ⓑ Á hve marga vegu geta þeir lent í fyrsta, öðru og þriðja sæti ef keppandi að nafni Ariel vinnur? (Gerið ráð fyrir að aðeins einn keppandi heiti Ariel.)
3. ⓒ Á hve marga vegu geta sundmennirnir níu stillt sér upp fyrir myndatöku?

Lausn

1. ⓐ Teiknið strik fyrir hvert sæti.

   $$\underline{\text{kostir fyrir 1. sæti}} \times \underline{\text{kostir fyrir 2. sæti}} \times \underline{\text{kostir fyrir 3. sæti}}$$

   Kostirnir fyrir fyrsta sætið eru 9. Eftir að einhver hefur unnið fyrsta sætið eru 8 kostir eftir fyrir annað sætið. Eftir að fyrsta og annað sætið hafa verið ákveðin eru 7 kostir eftir fyrir þriðja sætið.

   $$\underline{\quad 9 \quad} \times \underline{\quad 8 \quad} \times \underline{\quad 7 \quad} = 504$$

   Margfaldið til að finna að mögulegar úrslitaraðir sundmannanna eru 504.
2. ⓑ Teiknið strik fyrir hvert sæti.

   $$\underline{\text{kostir fyrir 1. sæti}} \times \underline{\text{kostir fyrir 2. sæti}} \times \underline{\text{kostir fyrir 3. sæti}}$$

   Ariel verður að vinna og því er aðeins 1 kostur fyrir fyrsta sætið. Síðan eru 8 kostir fyrir annað sætið og 7 kostir fyrir þriðja sætið.

$$\underline{\ 1\ } \times \underline{\ 8\ } \times \underline{\ 7\ } = 56$$

Margfaldið til að finna að mögulegar úrslitaraðir eru 56 ef Ariel vinnur.

3. ⓒ

Teiknið strik fyrir hvert sæti á myndinni.

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

Kostirnir fyrir fyrsta sætið eru 9, síðan 8 fyrir annað sætið, 7 fyrir þriðja sætið, 6 fyrir fjórða sætið og svo framvegis, þar til aðeins 1 manneskja er eftir fyrir síðasta sætið.

$$\underline{\ 9\ } \times \underline{\ 8\ } \times \underline{\ 7\ } \times \underline{\ 6\ } \times \underline{\ 5\ } \times \underline{\ 4\ } \times \underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 1\ } = 362.880$$

Mögulegar umraðanir sundmannanna eru 362.880.

Greining

Takið eftir að í c-lið fundum við 9! leiðir fyrir 9 manneskjur til að stilla sér upp. Fjölda umröðana n aðgreinanlegra hluta má alltaf finna með $n!$.

Fimm manna fjölskylda fer í myndatöku. Notið margföldunarlögmálið til að leysa eftirfarandi verkefni.

REYNIÐ SJÁLF #3

Á hve marga vegu getur fjölskyldan stillt sér upp fyrir myndina?

REYNIÐ SJÁLF #4

Á hve marga vegu getur ljósmyndarinn stillt 3 fjölskyldumeðlimum upp?

REYNIÐ SJÁLF #5

Á hve marga vegu getur fjölskyldan stillt sér upp ef foreldrarnir verða að standa hvort á sínum enda raðarinnar?

Fjöldi umröðana n aðgreinanlegra hluta fundinn með formúlu

Í sumum umröðunarverkefnum er óhentugt að nota margföldunarlögmálið vegna þess hve margar tölur þarf að margfalda. Sem betur fer má leysa þessi verkefni með formúlu. Skoðum fyrst tvo algenga rithætti fyrir umraðanir. Ef við höfum mengi með n hlutum og viljum velja r hluti úr menginu í tiltekinni röð skrifum við $P(n,r)$. Einnig má skrifa þetta sem ${}_nP_r$, sem er algengur ritháttur í tölvum og reiknivélum. Til að reikna $P(n,r)$, byrjum við á að finna $n!$, fjölda leiða til að raða öllum n hlutunum. Síðan deilum við með $(n-r)!$ til að stytta burt $(n-r)$ hlutina sem við viljum ekki raða.

Skoðum einfalt dæmi. Ímyndum okkur sex manna félag sem þarf að kjósa formann, varaformann og gjaldkera. Sex geta orðið formaður, hver hinna fimm getur orðið varaformaður og hver hinna fjögurra sem eftir eru getur orðið gjaldkeri. Fjöldi leiða til að gera þetta er $6 \times 5 \times 4 = 120$. Með aðfeldum fæst sama niðurstaða.

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Til eru 120 leiðir til að velja 3 embættismenn í röð úr félagi með 6 meðlimum. Þetta nefnist umröðun 6 hluta þar sem 3 eru teknir í einu. Almenna formúlan er þessi.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Takið eftir að formúlan gildir einnig ef við veljum alla n hlutina og röðum þeim. Þá deilum við með $(n-n)!$ eða $0!$, sem við sögðum áður að væri 1. Fjöldi umröðana n hluta þegar n eru teknir í einu er því $\frac{n!}{1}$ eða einfaldlega $n!$.

FORMÚLA FYRIR UMRAÐANIR N AÐGREINANLEGRA HLUTA

Ef gefnir eru n aðgreinanlegir hlutir er fjöldi leiða til að velja r hluti úr menginu í tiltekinni röð

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

AÐFERÐ

Reikna fjölda mögulegra umröðana í orðadæmi.

1. Finnið n út frá gefnum upplýsingum.
2. Finnið r út frá gefnum upplýsingum.
3. Setjið gefin gildi n og r inn í formúluna.
4. Reiknið.

SÝNIDÆMI 4

Fjöldi umröðana fundinn með formúlunni

Kennari býr til próf með 9 spurningum úr spurningabanka með 12 spurningum. Á hve marga vegu getur hún valið spurningarnar og raðað þeim?

Lausn

Setjið $n = 12$ og $r = 9$ inn í umröðunarformúluna og einfaldið.

$$P\left(n,r\right)=\frac{n!}{\left(n-r\right)!}$$

$$P\left(12,9\right)=\frac{12!}{\left(12-9\right)!}=\frac{12!}{3!}=79.833.600$$

Mögulegar umraðanir prófspurninganna eru 79.833.600!

Greining

Einnig má nota reiknivél til að finna umraðanir. Í þessu verkefni sláum við inn 12, veljum fallið ${}_nP_r$, sláum inn 9 og veljum síðan jafnaðarmerkið. Fallið ${}_nP_r$ kann að vera undir valmyndinni MATH með líkindaskipunum.

SPURT OG SVARAÐ

Hefðum við getað leyst sýnidæmi 4 með margföldunarlögmálinu?

Já. Við hefðum getað margfaldað $12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$ til að fá sama svar.

Í leikriti eru 7 leikarar sem búa sig undir að stíga fram og hneigja sig í leikslok. Notið umröðunarformúluna til að leysa eftirfarandi verkefni.

REYNIÐ SJÁLF #6

Á hve marga vegu geta leikararnir 7 stillt sér upp?

REYNIÐ SJÁLF #7

Á hve marga vegu má velja 5 af leikurunum 7 og stilla þeim upp?

Fjöldi samantekta fundinn með formúlunni

Hingað til höfum við skoðað verkefni þar sem raða á hlutum. Í mörgum verkefnum viljum við velja nokkra hluti úr hópi án þess að röðin skipti máli. Þegar hlutir eru valdir og röðin skiptir ekki máli er um samantekt að ræða. Val á r hlutum úr mengi með n hlutum, þar sem röðin skiptir ekki máli, má tákna með $C\left(n,r\right)$. Líkt og fyrir umraðanir má einnig skrifa $\mathrm{C}\left(n,r\right)$ sem ${}_nC_r$. Almenna formúlan er þessi.

$$\mathrm{C}\left(n,r\right)=\frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$$

Í fyrra verkefni voru valin 3 af 4 mögulegum málverkum til að hengja á vegg. Við fundum 24 leiðir til að velja 3 af málverkunum 4 í tiltekinni röð. En hvað ef röðin skipti ekki máli? Þá væri fjöldinn minni, því val á málverkum 1, 2, 3 væri sama val og 2, 3, 1. Til að finna fjölda leiða til að velja 3 af málverkunum 4, án tillits til raðar, deilum við fjölda umröðana með fjölda leiða til að raða 3 málverkum. Til eru $3!=3\cdot2\cdot1=6$ leiðir til að raða 3 málverkum. Til eru $\frac{24}{6}$, eða 4 leiðir til að velja 3 af málverkunum 4. Þessi fjöldi er rökréttur því í hvert sinn

sem við veljum 3 málverk sleppum við að velja 1 málverk. Hægt er að sleppa hverju sem er af málverkunum 4, svo til eru 4 leiðir til að velja 3 af málverkunum 4.

FORMÚLA FYRIR SAMANTEKTIR N AÐGREINANLEGRA HLUTA

Ef gefnir eru n aðgreinanlegir hlutir er fjöldi leiða til að velja r hluti úr menginu

$$\mathrm{C}(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

AÐFERÐ

Ákvarða fjölda mögulegra samantekta þegar fjöldi kosta er gefinn.

1. Finnið n út frá gefnum upplýsingum.
2. Finnið r út frá gefnum upplýsingum.
3. Setjið gefin gildi n og r inn í formúluna.
4. Reiknið.

SÝNIDÆMI 5

Fjöldi samantekta fundinn með formúlunni

Skyndibitastaður býður fimm meðlæti. Tvö meðlæti fylgja máltíðinni.

1. ⓐ Á hve marga vegu má velja meðlætin?
2. ⓑ Á hve marga vegu má velja 3 meðlæti?

Lausn

1. ⓐ Við viljum velja 2 meðlæti af 5 kostum.

   $$\mathrm{C}(5,2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$$

2. ⓑ Við viljum velja 3 meðlæti af 5 kostum.

   $$\mathrm{C}(5,3)=\frac{5!}{3!(5-3)!}=10$$

Greining

Einnig má nota grafreikni til að finna samantektir. Sláið inn 5, veljið síðan ${}_nC_r$, sláið inn 3 og veljið jafnaðarmerkið. Fallið ${}_nC_r$, kann að vera undir valmyndinni MATH með líkindaskipunum.

SPURT OG SVARAÐ

Er það tilviljun að a- og b-liður í sýnidæmi 5 hafi sama svar?

Nei. Þegar við veljum r hluti af n hlutum veljum við ***ekki*** $(n-r)$ *hluti. Því er* $C(n,r)=C(n,n-r)$.

REYNIÐ SJÁLF #8

Ísbúð býður 10 bragðtegundir. Á hve marga vegu má velja 3 bragðtegundir á bananasplitt?

Fjöldi hlutmengja mengis fundinn

Hingað til höfum við aðeins skoðað samantektarverkefni þar sem nákvæmlega r hlutir voru valdir. Í sumum verkefnum má velja hvaða fjölda hluta sem er. Tökum sem dæmi pítsustað sem býður 5 áleggstegundir. Panta má hvaða fjölda áleggstegunda sem er. Hve margar mismunandi pítsur eru mögulegar?

Til að svara spurningunni þurfum við að skoða pítsur með hvaða fjölda áleggstegunda sem er. Til er $C(5,0)=1$ leið til að panta pítsu án áleggs. Til eru $C(5,1)=5$ leiðir til að panta pítsu með nákvæmlega einni áleggstegund. Ef við höldum áfram fæst

$$C(5,0)+C(5,1)+C(5,2)+C(5,3)+C(5,4)+C(5,5)=32$$

Mögulegar pítsur eru 32. Þessi niðurstaða er jöfn 2^5.

Hér tökum við hverja ákvörðunina á fætur annarri. Fyrir hvern hinna n hluta höfum við tvo kosti: að hafa hann með í hlutmenginu eða ekki. Við tökum því n ákvarðanir, hverja með tveimur kostum. Heildarfjöldi hlutmengja er því $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$. Þau spanna allt frá tóma menginu, sem fæst þegar svarið er „nei“ í hvert sinn, til upphaflega mengisins sjálfs, sem fæst þegar svarið er „já“ í hvert sinn.

FORMÚLA FYRIR FJÖLDA HLUTMENGJA MENGIS

Mengi með n aðgreinanlegum hlutum hefur 2^n hlutmengi.

SÝNIDÆMI 6

Fjöldi hlutmengja mengis fundinn

Veitingastaður býður smjör, ost, graslauk og sýrðan rjóma sem álegg á bakaða kartöflu. Á hve marga mismunandi vegu má panta kartöfluna?

Lausn

Við leitum að fjölda hlutmengja mengis með 4 hlutum. Setjið $n=4$ inn í formúluna.

$$\begin{aligned} 2^n &= 2^4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Mögulegar pantanir á kartöflu eru 16.

REYNIÐ SJÁLF #9

Ísbar í brúðkaupi býður 6 áleggstegundir. Velja má hvaða fjölda sem er. Hve margir mismunandi ísréttir eru mögulegir?

Fjöldi umröðana n hluta sem eru ekki aðgreinanlegir fundinn

Við höfum skoðað umraðanir þar sem allir hlutirnir voru aðgreinanlegir. Hvað gerist ef sumir hlutanna eru óaðgreinanlegir? Gerum til dæmis ráð fyrir límmiðaörk með 12 límmiðum. Ef allir límmiðarnir væru aðgreinanlegir væru til $12!$ leiðir til að raða þeim. Hins vegar eru 4 límmiðanna stjörnur sem eru allar eins og 3 tungl sem eru öll eins. Hlutirnir eru ekki allir aðgreinanlegir og því eru margar af $12!$ umröðunum sem við töldum tvíteknar. Almenna formúlan fyrir slík tilvik er þessi.

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$$

Í þessu dæmi þurfum við að deila með fjölda leiða til að raða 4 stjörnunum og fjölda leiða til að raða 3 tunglunum til að finna fjölda ólíkra umröðana límmiðanna. Til eru $4!$ leiðir til að raða stjörnunum og $3!$ leiðir til að raða tunglunum.

$$\frac{12!}{4!3!}=3.326.400$$

Til eru 3.326.400 leiðir til að raða límmiðaörkinni.

FORMÚLA FYRIR FJÖLDA UMRÖÐANA N HLUTA SEM ERU EKKI AÐGREINANLEGIR

Ef n stök eru í mengi og r_1 þeirra eru eins, r_2 eru eins, r_3 eru eins og svo framvegis að r_k, má finna fjölda umröðana með

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$$

SÝNIDÆMI 7

Fjöldi umröðana n hluta sem eru ekki aðgreinanlegir fundinn

Finnið fjölda umröðana stafanna í orðinu DISTINCT.

Lausn

Stafirnir eru 8. Bæði I og T koma fyrir 2 sinnum. Setjið $n=8$, $r_1=2$, og $r_2=2$ inn í formúluna.

$$\frac{8!}{2!2!}=10.080$$

Umraðanirnar eru 10.080.

REYNIÐ SJÁLF #10

Finnið fjölda umröðana stafanna í orðinu CARRIER.

MIÐLAR

Notið þessi vefgögn til frekari kennslu og æfinga í samantektum og umröðunum.

- Samantektir
- Umraðanir

11.5 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

Gerið ráð fyrir í eftirfarandi verkefnum að á n vegu geti atburður A gerst, á m vegu geti atburður B gerst og að A og B skarist ekki.

1. Notið samlagningarlögmál talningar til að útskýra á hve marga vegu atburðurinn A eða B getur gerst.

2. Notið margföldunarlögmál talningar til að útskýra á hve marga vegu atburðurinn A og B getur gerst.

Svarið eftirfarandi spurningum.

3. Þegar tveir aðskildir atburðir eru gefnir, hvernig vitum við hvort nota eigi samlagningarlögmálið eða margföldunarlögmálið til að reikna mögulegar útkomur? Hvaða samtengingar geta gefið vísbendingu um hvora reikniaðgerðina eigi að nota?

4. Lýsið muninum á umröðun n hluta og umröðun þar sem r hlutir eru valdir úr mengi með n hlutum. Sýnið hvernig hvort tveggja er reiknað.

5. Hvað nefnist val á r hlutum úr mengi með n hlutum þegar röð r hlutanna skiptir ekki máli? Hvaða formúla gefur fjölda mögulegra útkoma fyrir slíkt val?

Töluverkefni

Í eftirfarandi verkefnum skal ákvarða hvort nota eigi samlagningarlögmálið eða margföldunarlögmálið og reikna síðan.

6. Látum mengið $A=\{-5,-3,-1,2,3,4,5,6\}$. Á hve marga vegu má velja neikvæða tölu eða slétta tölu úr A?

7. Látum mengið $B=\{-23,-16,-7,-2,20,36,48,72\}$. Á hve marga vegu má velja jákvæða tölu eða oddatölu úr A?

8. Á hve marga vegu má draga rauðan ás eða lauf úr venjulegum spilastokk?

9. Á hve marga vegu má velja málningarlit úr 5 grænum litbrigðum, 4 bláum eða 7 gulum?

10. Hve margar útkomur eru mögulegar þegar tveimur myntum er kastað?

11. Hve margar útkomur eru mögulegar þegar mynt og 6-hliða teningi er kastað?

12. Hve marga tveggja stafa strengi má mynda þar sem fyrri stafurinn er úr A og sá síðari úr B — ef $A=\{b,c,d\}$ og $B=\{a,e,i,o,u\}$?

13. Á hve marga vegu má mynda streng með 3 tölustöfum ef endurtaka má tölustafi?

14. Á hve marga vegu má mynda streng með 3 tölustöfum ef ekki má endurtaka tölustafi?

Reiknið gildi stæðunnar í eftirfarandi verkefnum.

15.

$$P(5,2)$$

16.

$$P(8,4)$$

17.

$$P(3,3)$$

18.

$$P(9,6)$$

19.

$$P(11,5)$$

20.

$$C(8,5)$$

21.

$$C(12,4)$$

22.

$$C(26,3)$$

23.

$$C(7,6)$$

24.

$$C(10,3)$$

Finnið fjölda hlutmengja í hverju gefnu mengi í eftirfarandi verkefnum.

25.

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

26.

$$\{a,b,c,\ldots,z\}$$

27. Mengi með 5 aðgreinanlegum tölum, 4 aðgreinanlegum stöfum og 3 aðgreinanlegum táknum

28. Mengi sléttra talna frá 2 til 28

29. Mengi tveggja stafa talna milli 1 og 100 sem innihalda tölustafinn 0

Finnið fjölda ólíkra umröðana í eftirfarandi verkefnum.

30. Stafirnir í orðinu „juggernaut“

31. Stafirnir í orðinu „academia“

32. Stafirnir í orðinu „academia“ þar sem umröðunin byrjar og endar á „a“

33. Táknin í strengnum #,#,#,@,@,$,$,$,%,%,%,%

34. Táknin í strengnum #,#,#,@,@,$,$,$,%,%,%,% þar sem strengurinn byrjar og endar á „%“

Frekari verkefni

35. The set, S consists of 900.000.000 whole numbers, each being the same number of digits long. How many digits long is a number from S ? (*Hint:* use the fact that a whole number cannot start with the digit 0.)

36. Fjöldi 5-staka hlutmengja í mengi með n stökum er jafn fjölda 6-staka hlutmengja í sama mengi. Hvert er gildi n ? (Vísbending: Það skiptir ekki máli í hvaða röð stök hlutmengjanna eru valin.)

37. Getur $C(n,r)$ nokkurn tíma verið jafnt $P(n,r)$? Útskýrið.

38. Gerum ráð fyrir að mengið A hafi 2.048 hlutmengi. Hve margir aðgreinanlegir hlutir eru í A ?

39. Hve margar umraðanir má mynda úr stöfum orðsins „mountains“ ef allir sérhljóðarnir verða að mynda samfelldan streng?

Hagnýt verkefni

40. Fjölskylda með 2 foreldra og 3 börn stillir sér upp fyrir mynd með 2 fjölskyldumeðlimi fremst og 3 fyrir aftan.

1. ⓐ Hve margar umraðanir eru mögulegar án takmarkana?
2. ⓑ Hve margar umraðanir eru mögulegar ef foreldrarnir verða að sitja fremst?
3. ⓒ Hve margar umraðanir eru mögulegar ef foreldrarnir verða að vera hlið við hlið?

41. Farsímafyrirtæki býður 6 mismunandi talpakka og 8 mismunandi gagnapakka. Af þeim innihalda 3 pakkar bæði tal og gögn. Á hve marga vegu má velja annaðhvort tal eða gögn en ekki hvort tveggja?

42. Í kappreiðum er talað um „þríhestaspá“ þegar veðjandi vinnur með því að velja fyrstu þrjá hestana í réttri röð (fyrsta sæti, annað sæti og þriðja sæti). Hve margar mismunandi þríhestaspár eru mögulegar ef 14 hestar eru í hlaupinu?

43. Heildsala með boli býður stærðirnar small, medium, large og extra-large í lífrænni eða ólífrænni bómull og litina hvítan, svartan, gráan, bláan og rauðan. Hve margar mismunandi gerðir bola má velja um?

44. Hector vill setja upp auglýsingaskilti víðs vegar um sýsluna fyrir nýja fyrirtækið sitt. Á hve marga vegu getur hann valið 15 hverfi til að auglýsa í ef hverfin í sýslunni eru 30?

45. Listvöruverslun er með 4 vörumerki málningarpenna í 12 litum og með 3 blektegundum. Um hve marga málningarpenna er að velja?

46. Á hve marga vegu má mynda nefnd með 3 nýnemum og 4 nemendum á þriðja ári úr hópi 8 nýnema og 11 nemenda á þriðja ári?

47. Á hve marga vegu getur hafnaboltaþjálfari ákveðið í hvaða röð 9 leikmenn eiga að slá ef leikmenn liðsins eru 15?

48. Hljómsveitarstjóri þarf 5 sellóleikara og 5 fiðluleikara til að spila á viðburði á vegum utanríkisþjónustunnar. Hann raðar 10 sellóleikurum og 16 fiðluleikurum hljómsveitarinnar eftir tónlistarhæfni. Hvert er hlutfallið milli heildarfjölda mögulegra raðana sellóleikaranna og heildarfjölda mögulegra raðana fiðluleikaranna?

49. Mótorhjólaverslun er með 10 chopper-hjól, 6 bobber-hjól og 5 café racer-hjól, sem eru mismunandi gerðir fornhjóla. Á hve marga vegu getur verslunin valið 3 chopper-hjól, 5 bobber-hjól og 2 café racer-hjól fyrir helgarsýningu?

50. Hjólabrettaverslun selur 10 gerðir bretta, 3 gerðir hjólastella og 4 gerðir hjóla. Hve mörg mismunandi hjólabretti má setja saman?

51. Just-For-Kicks-skófyrirtækið býður upp á sérsnið á netinu. Á hve marga vegu má hanna sérsniðið par af Just-For-Kicks-skóm ef viðskiptavinur getur valið allt frá venjulegum skó upp í skó með 11 sérsniðnum valkostum?

52. Bílaþvottastöð býður eftirfarandi aukaval við grunnþvott: glæra vaxhúð, þriggja froðutegunda bón, undirvagnsþvott, ryðvörn, felguhreinsun, loftfrískara og sjampóþvott innan í bílnum. Hve margar mismunandi þvottaleiðir eru mögulegar ef bæta má hvaða fjölda aukavalkosta sem er við grunnþvottinn?

53. Suni keypti 20 plöntur til að raða meðfram jaðri garðsins. Hve margar ólíkar umraðanir getur hún myndað ef plönturnar eru 6 túlípanar, 6 rósir og 8 baldursbrár?

54. Á hve marga ólíka vegu má raða jólaseríu með 9 rauðum, 10 grænum, 6 hvítum og 12 gylltum perum?

11.6 Tvíliðusetningin

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Nota tvíliðusetninguna.

Margliða með tveimur liðum nefnist tvíliða. Við höfum þegar lært að margfalda tvíliður og hefja þær í veldi, en það getur verið seinlegt og tímafrekt að hefja tvíliðu í hátt veldi. Í þessum hluta kynnumst við styttri aðferð til að finna $(x+y)^n$ án þess að margfalda tvíliðuna n sinnum með sjálfri sér.

Tvíliðustuðlar fundnir

Í Talningarreglum kynntumst við samantektum. Í styttri aðferðinni til að finna $(x+y)^n$, notum við samantektir til að finna stuðlana sem koma fyrir í tvíliðuliðuninni. Hér notum við ritháttinn $\binom{n}{r}$ í stað $C(n,r)$, en gildið er reiknað á sama hátt. Því fæst

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Samantektin $\binom{n}{r}$ nefnist **tvíliðustuðull**. Dæmi um tvíliðustuðul er $\binom{5}{2} = C(5,2) = 10$.

TVÍLIÐUSTUÐLAR

Ef n og r eru heiltölur, stærri en eða jafnar 0, og $n \geq r$, þá er tvíliðustuðullinn

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

SPURT OG SVARAÐ

Er tvíliðustuðull alltaf heil tala?

Já. Rétt eins og fjöldi samantekta verður alltaf að vera heil tala er tvíliðustuðull alltaf heil tala.

SÝNIDÆMI 1

Tvíliðustuðlar fundnir

Finnið hvern tvíliðustuðul.

1. ⓐ $\binom{5}{3}$
2. ⓑ $\binom{9}{2}$
3. ⓒ $\binom{9}{7}$

Lausn

Notið formúluna til að reikna hvern tvíliðustuðul. Einnig má nota fallið nC_r á reiknivélinni.

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1. ⓐ $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!2!} = 10$
2. ⓑ $\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{2!7!} = 36$
3. ⓒ $\binom{9}{7} = \frac{9!}{7!(9-7)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!2!} = 36$

Greining

Takið eftir að sama niðurstaða fékkst í b- og c-lið. Ef þið skoðið lausnir liðanna vandlega sjáið þið að sömu tvö aðfeldin koma fyrir í nefnaranum, en í öfugri röð, rétt eins og í samantektum.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Finnið hvern tvíliðustuðul.

1. ⓐ $\binom{7}{3}$
2. ⓑ $\binom{11}{4}$

Tvíliðusetningin notuð

Þegar $(x+y)^n$ er liðað með margföldun nefnist niðurstaðan tvíliðuliðun og hún inniheldur tvíliðustuðla. Ef við vildum liða $(x+y)^{52}$, gætum við margfaldað $(x+y)$ fimmtíu og tvisvar sinnum með sjálfri sér. Það gæti tekið klukkustundir! Með því að skoða einfaldar tvíliðuliðanir finnum við mynstur sem leiða til styttri aðferðar við flóknari liðanir.

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2\\ (x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\\ (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

Skoðum fyrst veldisvísana. Í hverjum nýjum lið lækkar veldisvísir x en veldisvísir y hækkar. Summa veldisvísanna tveggja er n í hverjum lið.

Skoðum næst stuðlana. Takið eftir að þeir hækka fyrst og lækka síðan í samhverfu mynstri. Stuðlarnir fylgja mynstrinu:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}.$$

Þessi mynstur leiða til tvíliðusetningarinnar, sem nota má til að liða hvaða tvíliðu sem er.

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k \\ &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n\end{aligned}$$

Önnur leið til að sjá stuðlana er að skoða liðun tvíliðu á almenna forminu $x+y$, í veldin 1, 2, 3 og 4.

$$\begin{aligned}(x+y)^1 &= x+y \\ (x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\ (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\ (x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\end{aligned}$$

Getið þið giskað á næstu liðun tvíliðunnar $(x+y)^5$?

Pascal-þríhyrningurinn

	Veldi	Mynstur	Fjöldi liða
$(x+y)^{①} = x+y$	1	$1+1$	2
$(x+y)^{②} = x^2+2xy+y^2$	2	$2+1$	3
$(x+y)^{③} = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	3	$3+1$	4
$(x+y)^{④} = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$	4	$4+1$	5
	n	$n+1$	$n+1$

Summa veldisvísa:	xy^{4+0}	xy^{3+1}	xy^{2+2}	xy^{1+3}	xy^{0+4}
Veldisvísar á x:	4	3	2	1	0
Veldisvísar á y:	0	1	2	3	4

Mynd 1

Sjá mynd 1, sem sýnir eftirfarandi:

- Það eru $n+1$ liðir í liðun $(x+y)^n$.
- Stig hvers liðar, það er summa veldisvísanna, er n.
- Veldin á x byrja á n og lækka niður í 0.
- Veldin á y byrja á 0 og hækka upp í n.
- Stuðlarnir eru samhverfir.

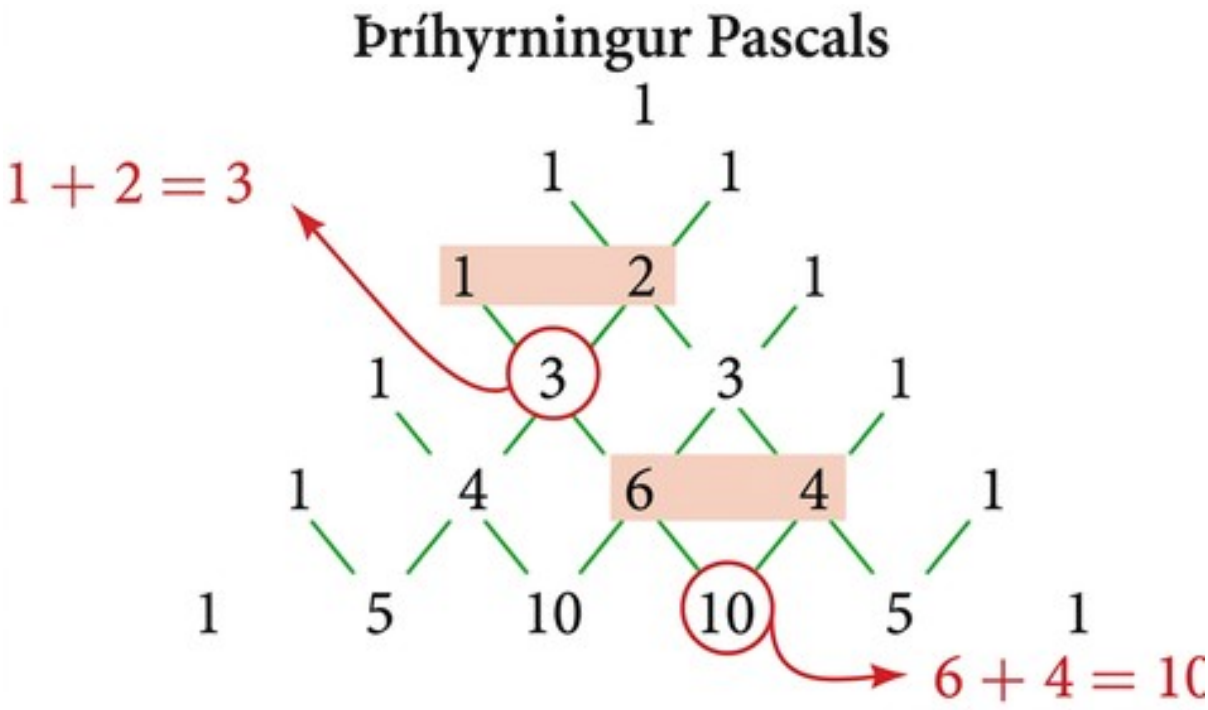
Til að finna liðun $(x+y)^5$, sjáum við að $n=5$, svo liðirnir verða 5+1 = 6. Samanlagt stig hvers liðar er 5. Þegar veldi x, eru sett í lækkandi röð fæst þetta mynstur:

- Byrjið á x^5, og lækkið síðan veldisvísi x um 1 í hverjum lið þar til $x^0=1$ fæst.
- Byrjið á $y^0=1$, og hækkið síðan veldisvísi y um 1 þar til y^5 fæst.
  $x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5$

Næsta liðun er því

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$

En hvaðan koma stuðlarnir? Tvíliðustuðlarnir eru samhverfir. Þessa stuðla má sjá í talnaformi sem nefnist þríhyrningur Pascals og er sýnt á mynd 2. Pascal fann ekki upp þríhyrninginn. Undirstöðuhugmyndir hans höfðu verið þróaðar og skráðar í meira en 1500 ár, fyrst af indverska stærðfræðingnum og skáldinu Pingala á annarri öld f.Kr. Aðrir fræðimenn í Asíu og Evrópu unnu síðar með hugmyndirnar. Íranski stærðfræðingurinn og stjörnufræðingurinn Omar Khayyam birti fyrstur þríhyrninginn á myndrænu formi og í Íran er hann kenndur við Khayyam. Franski stærðfræðingurinn Blaise Pascal gerði þríhyrninginn aftur víðkunnan þegar hann endurbirti hann og notaði til að leysa ýmis líkindaverkefni.



Mynd 2

Til að mynda þríhyrning Pascals byrjum við á að skrifa 1. Í línuna fyrir neðan, línu 2, skrifum við tvo 1-stafi. Í 3. línunni setjum við 1 á báða enda og leggjum saman 1+1 til að finna miðtöluna, 2. Í n-tu línunni setjum við 1 á báða enda. Hvert stak í þríhyrningnum er summa stakanna tveggja beint fyrir ofan það.

Til að sjá tengsl þríhyrnings Pascals og tvíliðustuðla skulum við skoða aftur liðun tvíliða á almennu formi.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \rightarrow & (x+y)^0 = 1 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \rightarrow & (x+y)^1 = x + y \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \rightarrow & (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \rightarrow & (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \rightarrow & (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & \rightarrow & (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5
\end{array}
$$

TVÍLIÐUSETNINGIN

Tvíliðusetningin er formúla sem nota má til að liða hvaða tvíliðu sem er.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n
\end{aligned}
$$

AÐFERÐ

Liða gefna tvíliðu.

1. Ákvarðið gildi n út frá veldisvísinum.
2. Reiknið liðina frá $k=0$ til $k=n$ með formúlu tvíliðusetningarinnar.
3. Einfaldið.

SÝNIDÆMI 2

Tvíliða liðuð

Liðið.

1. ⓐ $(x+y)^5$
2. ⓑ $(3x-y)^4$

Lausn

1. ⓐ Setjið $n=5$ inn í formúluna. Reiknið liðina frá $k=0$ til $k=5$. Einfaldið.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^5 &= \binom{5}{0} x^5 y^0 + \binom{5}{1} x^4 y^1 + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x^1 y^4 + \binom{5}{5} x^0 y^5 \\
(x+y)^5 &= x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5
\end{aligned}
$$

2. ⓑ Setjið $n=4$ inn í formúluna. Reiknið liðina frá $k=0$ til $k=4$ Takið eftir að $3x$ kemur í stað x og að $-y$ kemur í stað y. Við setjum þær því inn. Einfaldið.

$$(3x-y)^4 = \binom{4}{0}(3x)^4(-y)^0 + \binom{4}{1}(3x)^3(-y)^1 + \binom{4}{2}(3x)^2(-y)^2 + \binom{4}{3}(3x)^1(-y)^3 + \binom{4}{4}(3x)^0(-y)^4$$
$$(3x-y)^4 = 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$$

Greining

Takið eftir að formerkin víxlast í b-lið. Ástæðan er sú að $(-y)$ í oddatöluveldi er neikvætt en $(-y)$ í sléttutöluveldi er jákvætt. Þetta gerist alltaf þegar frádráttarmerki er í tvíliðunni.

REYNIÐ SJÁLF #2

Liðið.

1. ⓐ $(x-y)^5$
2. ⓑ $(2x+5y)^3$

Tvíliðusetningin notuð til að finna einn lið

Það getur verið langt ferli að liða tvíliðu með háum veldisvísi, svo sem $(x+2y)^{16}$.

Stundum viljum við aðeins finna einn tiltekinn lið í tvíliðuliðun. Ekki þarf að liða tvíliðuna að fullu til að finna slíkan lið.

Takið eftir mynstri stuðlanna í liðun $(x+y)^5$.

$$(x+y)^5 = x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5$$

Annar liðurinn er $\binom{5}{1}x^4y$. Þriðji liðurinn er $\binom{5}{2}x^3y^2$. Þessa niðurstöðu má alhæfa.

$$\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

(R+1)-TI LIÐUR TVÍLIÐULIÐUNAR

$(r+1)$-ti liður tvíliðuliðunarinnar á $(x+y)^n$ er:

$$\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

AÐFERÐ

Finna tiltekinn lið tvíliðuliðunar án þess að liða tvíliðuna að fullu.

1. Ákvarðið gildi *n* út frá veldisvísinum.
2. Ákvarðið $(r+1)$.
3. Ákvarðið r.

4. Setjið r inn í formúluna fyrir $(r+1)$-ta lið tvíliðuliðunarinnar.

SÝNIDÆMI 3

Tiltekinn liður tvíliðuliðunar skrifaður

Finnið tíunda lið $(x+2y)^{16}$ án þess að liða tvíliðuna að fullu.

Lausn

Þar sem við leitum að tíunda liðnum er $r+1=10$, og því notum við $r=9$ í útreikningunum.

$$\binom{n}{r}x^{n-r}y^{r}$$

$$\binom{16}{9}x^{16-9}(2y)^{9}=5.857.280\,x^{7}y^{9}$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Finnið sjötta lið $(3x-y)^{9}$ án þess að liða tvíliðuna að fullu.

MYNDEFNI

Á þessum vefsíðum finnið þið fleiri útskýringar og æfingar í tvíliðuliðun.

- Tvíliðusetningin
- Dæmi um tvíliðusetninguna

11.6 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Hvað er tvíliðustuðull og hvernig er hann reiknaður?
2. Hvaða hlutverki gegna tvíliðustuðlar í tvíliðuliðun? Takmarkast þeir við tiltekna tegund talna?
3. Hvað er tvíliðusetningin og til hvers er hún notuð?
4. Hvenær er hagkvæmt að nota tvíliðusetninguna? Útskýrið.

Algebruverkefni

Reiknið tvíliðustuðulinn í eftirfarandi verkefnum.

5.

$$\binom{6}{2}$$

6.

$$\binom{5}{3}$$

7.

$$\binom{7}{4}$$

8.

$$\binom{9}{7}$$

9.

$$\binom{10}{9}$$

10.

$$\binom{25}{11}$$

11.

$$\binom{17}{6}$$

12.

$$\binom{200}{199}$$

Notið tvíliðusetninguna til að liða hverja tvíliðu í eftirfarandi verkefnum.

13.

$$(4a-b)^3$$

14.

$$(5a+2)^3$$

15.

$$(3a+2b)^3$$

16.

$$(2x+3y)^4$$

17.

$$(4x+2y)^5$$

18.

$$(3x-2y)^4$$

19.

$$(4x-3y)^5$$

20.

$$\left(\frac{1}{x}+3y\right)^5$$

21.

$$(x^{-1}+2y^{-1})^4$$

22.

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^5$$

Notið tvíliðusetninguna til að skrifa fyrstu þrjá liði hverrar tvíliðu í eftirfarandi verkefnum.

23.

$$(a+b)^{17}$$

24.

$$(x-1)^{18}$$

25.

$$(a-2b)^{15}$$

26.

$$(x-2y)^8$$

27.

$$(3a+b)^{20}$$

28.

$$(2a+4b)^7$$

29.

$$(x^3-\sqrt{y})^8$$

Finnið tilgreindan lið hverrar tvíliðu í eftirfarandi verkefnum án þess að liða hana að fullu.

30. Fjórði liður $(2x-3y)^4$

31. Fjórði liður $(3x-2y)^5$

32. Þriðji liður $(6x-3y)^7$

33. Áttundi liður $(7+5y)^{14}$

34. Sjöundi liður $(a+b)^{11}$

35. Fimmti liður $(x-y)^7$

36. Tíundi liður $(x-1)^{12}$

37. Níundi liður $(a-3b^2)^{11}$

38. Fjórði liður $\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^{10}$

39. Áttundi liður $\left(\frac{y}{2}+\frac{2}{x}\right)^9$

Myndræn verkefni

Notið tvíliðusetninguna í eftirfarandi verkefnum til að liða tvíliðuna $f(x)=(x+3)^4$. Finnið síðan og teiknið graf hverrar tilgreindrar summu í sama hnitakerfi.

40. Finnið og teiknið graf $f_1(x)$, þannig að $f_1(x)$ sé fyrsti liður liðunarinnar.

41. Finnið og teiknið graf $f_2(x)$, þannig að $f_2(x)$ sé summa fyrstu tveggja liða liðunarinnar.

42. Finnið og teiknið graf $f_3(x)$, þannig að $f_3(x)$ sé summa fyrstu þriggja liða liðunarinnar.

43. Finnið og teiknið graf $f_4(x)$, þannig að $f_4(x)$ sé summa fyrstu fjögurra liða liðunarinnar.

44. Finnið og teiknið graf $f_5(x)$, þannig að $f_5(x)$ sé summa fyrstu fimm liða liðunarinnar.

Frekari verkefni

45.

Í liðun $(5x+3y)^n$, er hver liður á forminu $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, þar sem k tekur hvert á fætur öðru gildin $0,1,2,\ldots,n$. Ef $\binom{n}{k}=\binom{7}{2}$, hver er þá samsvarandi liður?

46. Í liðun $(a+b)^n$, er stuðull $a^{n-k}b^k$ jafn stuðli hvaða annars liðar?

47. Skoðið liðun $(x+b)^{40}$. Hver er veldisvísir b í k-ta liðnum?

48.

Finnið $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$ og skrifið svarið sem tvíliðustuðul á forminu $\binom{n}{k}$. Sannið niðurstöðuna. *Vísbending:* Notið það að fyrir hverja heiltölu p, þar sem $p\geq 1$, $p!=p(p-1)!$.

49. Hvaða stæðu er ekki hægt að liða með tvíliðusetningunni? Útskýrið.

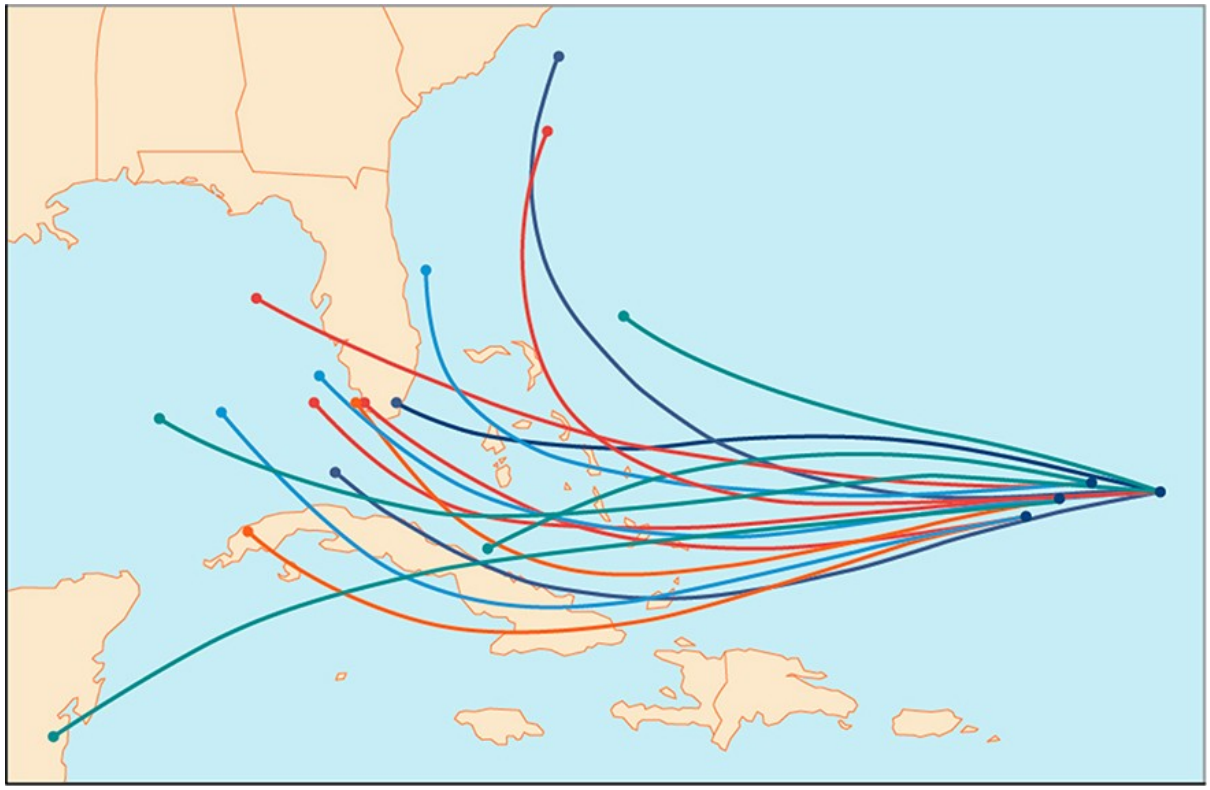
- $\left(x^2-2x+1\right)$
- $\left(\sqrt{a}+4\sqrt{a}-5\right)^8$
- $\left(x^3+2y^2-z\right)^5$
- $\left(3x^2-\sqrt{2y^3}\right)^{12}$

11.7 Líkur

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- Setja fram líkindalíkön.
- Reikna líkur jafnlíklegra útkoma.
- Reikna líkur sammengis tveggja atburða.
- Nota fyllireglunna til að finna líkur.
- Reikna líkur með talningarfræði.



Mynd 1 Dæmi um svonefnt „spaghettílíkan“, sem nota má til að spá fyrir um mögulegar leiðir hitabeltisstorms. 1

1

Myndin er aðeins til skýringar og sýnir ekki líkan af tilteknum stormi.

Íbúar suðausturhluta Bandaríkjanna þekkja mjög vel kort eins og það sem sýnt er á mynd 1. Slík kort nefnast spaghettílíkön. Í þeim eru margs konar veðurgögn sameinuð til að spá fyrir um líklegustu leið fellibyls. Hver lituð lína sýnir eina mögulega leið. Hópur sveigðra lína getur minnt á spaghettíþræði og þaðan kemur heitið. Í þessum hluta kynnumst við aðferðum við slíkar spár.

Líkindalíkön sett fram

Gerum ráð fyrir að sex hliða teningi sé kastað. Teningakast er dæmi um tilraun, það er athöfn með sýnilega niðurstöðu. Tölurnar á teningnum eru mögulegar niðurstöður, eða útkomur, tilraunarinnar. Mengi allra mögulegra útkoma tilraunar nefnist úrtaksrúm hennar. Úrtaksrúm þessarar tilraunar er $\{1,2,3,4,5,6\}$. Atburður er hvaða hlutmengi úrtaksrúmsins sem er.

Líkur lýsa því hve líklegt er að atburður gerist. Líkur atburðar p eru tala sem uppfyllir alltaf $0 \leq p \leq 1$, þar sem 0 táknar ómögulegan atburð og 1 öruggan atburð. Líkindalíkan er stærðfræðileg lýsing á tilraun þar sem allar mögulegar útkomur og líkur þeirra eru tilgreindar. Ef til dæmis líkurnar á að vinna í happdrætti eru 1% og líkurnar á að tapa 99%, lítur líkindalíkanið svipað út og tafla 1.

Tafla 1

Útkoma	Líkur
Happdrættið vinnst	1%
Happdrættið tapast	99%

Summa líknanna í líkindalíkani verður að vera 1, eða 100%.

AÐFERÐ

Setja fram líkindalíkan þegar allar útkomur eru jafnlíklegar.

1. Tilgreinið allar útkomur.
2. Finnið heildarfjölda mögulegra útkoma.
3. Berið hverja útkomu saman við heildarfjölda mögulegra útkoma.

SÝNIDÆMI 1

Líkindalíkan sett fram

Setjið fram líkindalíkan fyrir eitt kast með sanngjörnum teningi þar sem atburðurinn er talan sem kemur upp.

Lausn

Byrjið á að telja upp allar mögulegar útkomur tilraunarinnar. Útkomurnar eru tölurnar sem geta komið upp: 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Þessar sex mögulegu útkomur mynda úrtaksrúmið.

Finnið líkur hverrar útkomu í úrtaksrúminu sem hlutfall hennar af fjölda mögulegra útkoma. Hver talnanna sex kemur einu sinni fyrir á teningnum og engin ástæða er til að telja að ein hlið komi frekar upp en önnur. Líkurnar á hverri tölu eru því $\frac{1}{6}$.

Tafla 2

Útkoma	1 kemur upp	2 kemur upp	3 kemur upp	4 kemur upp	5 kemur upp	6 kemur upp
Líkur	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

SPURT OG SVARAÐ

Þarf alltaf að tákna líkur með almennu broti?

Nei. Líkur má tákna með almennu broti, tugabroti eða prósentu. Þær verða alltaf að vera tala á bilinu frá 0 til 1, að báðum endapunktunum 0 og 1 meðtöldum.

REYNIÐ SJÁLF #1

Setjið fram líkindalíkan fyrir kast með sanngjarnri mynt.

Líkur jafnlíklegra útkoma reiknaðar

Látum S vera úrtaksrúm tilraunar. Í líkindafræði er atburður hvaða hlutmengi sem er í S. Þegar allar útkomur tilraunar eru jafnlíklegar má finna líkur atburðar með því að deila fjölda útkoma í atburðinum með heildarfjölda útkoma í S. Gerum ráð fyrir að teningi sé kastað og við viljum finna líkurnar á atburðinum „tala sem er minni en eða jöfn 4 kemur upp“. Í atburðinum eru 4 mögulegar útkomur og í S, eru 6 mögulegar útkomur. Líkur atburðarins eru því $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

LÍKUR ATBURÐAR MEÐ JAFNLÍKLEGUM ÚTKOMUM REIKNAÐAR

Líkur atburðar E í tilraun með úrtaksrúmið S og jafnlíklegar útkomur eru

$$P(E)=\frac{\text{fjöldi staka í } E}{\text{fjöldi staka í } S}=\frac{n(E)}{n(S)}$$

E er hlutmengi S, og því gildir alltaf $0\le P(E)\le 1$.

SÝNIDÆMI 2

Líkur atburðar með jafnlíklegum útkomum reiknaðar

Sex hliða teningi er kastað. Finnið líkurnar á að oddatala komi upp.

Lausn

Atburðurinn „oddatala kemur upp“ inniheldur þrjár útkomur. Í úrtaksrúminu eru 6 jafnlíklegar útkomur. Deilið til að finna líkur atburðarins.

$$P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

REYNIÐ SJÁLF #2

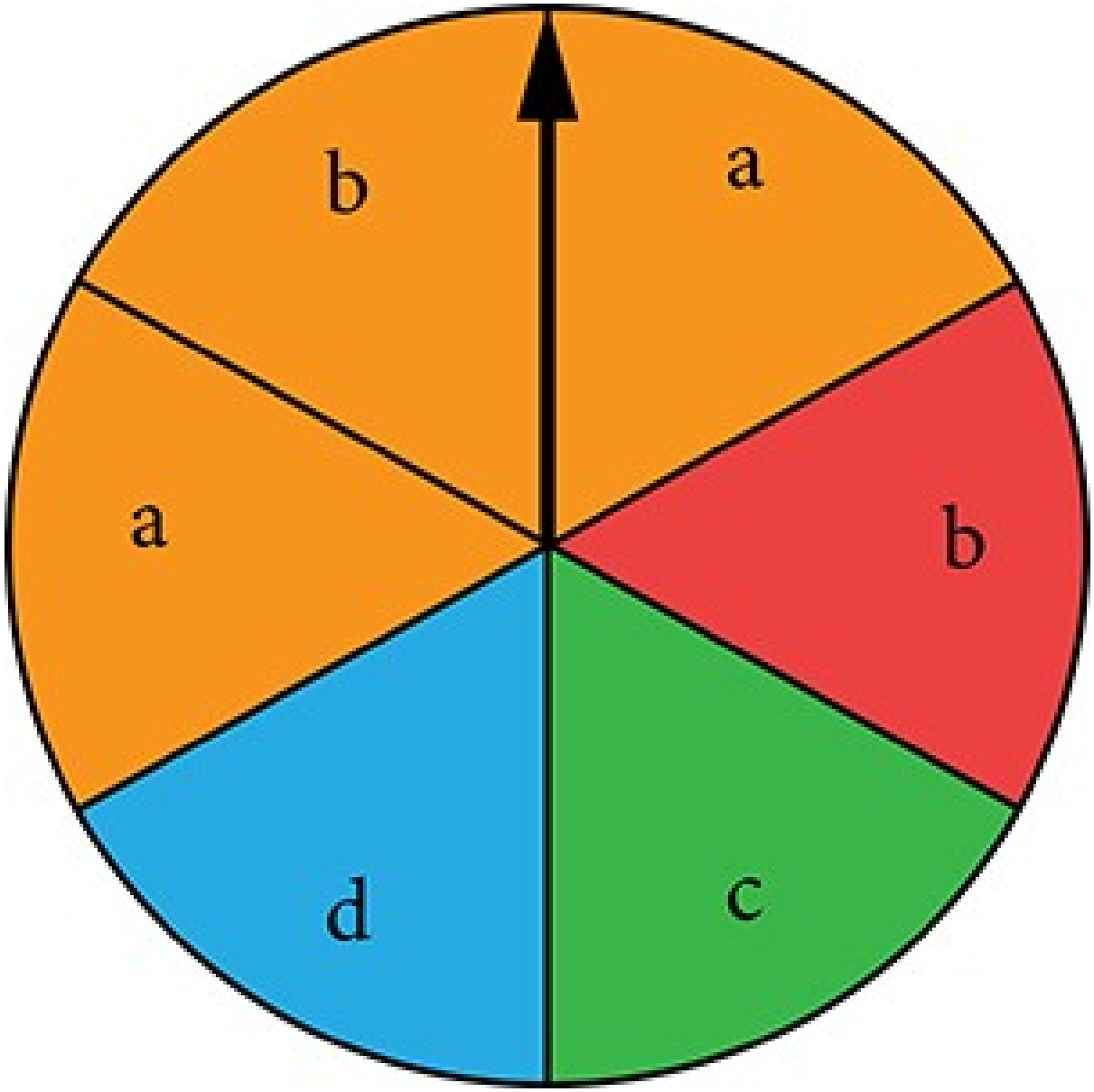
Teningi er kastað. Finnið líkurnar á að tala stærri en 2 komi upp.

Líkur sammengis tveggja atburða reiknaðar

Oft viljum við finna líkurnar á að einhver af nokkrum atburðum gerist. Gerum ráð fyrir að við spilum spil og vinnum ef næsta spil sem við drögum er annaðhvort hjarta eða kóngur. Þá viljum við finna líkurnar á að næsta spil sé hjarta eða kóngur. Sammengi tveggja atburða E og F, ritað $E \cup F$, er atburðurinn sem gerist ef annar eða báðir atburðirnir gerast.

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

Gerum ráð fyrir að skífunni á mynd 2 sé snúið. Við viljum finna líkurnar á að skífan stöðvist á appelsínugulum geira eða á b.



Mynd 2

Geirarnir eru alls 6 og 3 þeirra eru appelsínugulir. Líkurnar á appelsínugulum geira eru því $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Geirarnir eru alls 6 og 2 þeirra eru merktir b. Líkurnar á b eru því $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Ef við legðum þessar líkur saman teldum við geirann sem er bæði appelsínugulur og merktur b tvisvar. Til að finna líkurnar á appelsínugulum geira eða b, þurfum við að draga frá líkurnar á geira sem er bæði appelsínugulur og merktur b.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

Líkurnar á appelsínugulum geira eða b eru $\frac{2}{3}$.

LÍKUR SAMMENGIS TVEGGJA ATBURÐA

Líkur sammengis tveggja atburða E og F, táknað $E \cup F$, eru summa líkanna á E og F að frádregnum líkunum á að E og F gerist samtímis (sá atburður nefnist sniðmengi E og F og er táknaður $E \cap F$).

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

SÝNIDÆMI 3

Líkur sammengis tveggja atburða reiknaðar

Spil er dregið úr venjulegum spilastokk. Finnið líkurnar á að draga hjarta eða 7.

Lausn

Í venjulegum spilastokki eru jafnmörg hjörtu, tíglar, lauf og spaðar. Líkurnar á að draga hjarta eru því $\frac{1}{4}$. Í venjulegum spilastokki eru fjögur spil með tölunni 7 og spilin eru alls 52.

Líkurnar á að draga 7 eru því $\frac{1}{13}$.

Eina spilið í stokknum sem er bæði hjarta og 7 er hjarta-7, svo líkurnar á að draga spil sem er bæði hjarta og 7 eru $\frac{1}{52}$. Setjið $P(H) = \frac{1}{4}$, $P(7) = \frac{1}{13}$, og $P(H \cap 7) = \frac{1}{52}$ inn í formúluna.

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) - P(E \cap F) \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{52} \\ &= \tfrac{4}{13} \end{aligned}$$

Líkurnar á að draga hjarta eða 7 eru $\frac{4}{13}$.

REYNIÐ SJÁLF #3

Spil er dregið úr venjulegum spilastokki. Finnið líkurnar á að draga rautt spil eða ás.

Líkur ósamrýmanlegra atburða reiknaðar

Gerum ráð fyrir að skífunni á mynd 2 sé snúið aftur en nú viljum við finna líkurnar á appelsínugulum geira eða d. Enginn geiri er bæði appelsínugulur og merktur d, svo þessir atburðir hafa enga sameiginlega útkomu. Atburðir sem hafa enga sameiginlega útkomu nefnast ósamrýmanlegir. Atburðirnir skarast ekki og því þarf ekkert að draga frá. Almenna formúlan verður þá

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Takið eftir að sniðmengi ósamrýmanlegra atburða E og F er tóma mengið. Líkurnar á appelsínugulum geira eru $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ og líkurnar á d eru $\frac{1}{6}$. Líkurnar á appelsínugulum geira eða d fáum við einfaldlega með því að leggja þessar líkur saman.

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E) + P(F) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} \\ &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Líkurnar á appelsínugulum geira eða d eru $\frac{2}{3}$.

LÍKUR SAMMENGIS ÓSAMRÝMANLEGRA ATBURÐA

Líkur sammengis tveggja ósamrýmanlegra atburða E og F eru gefnar með

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

AÐFERÐ

Reikna líkur sammengis ósamrýmanlegra atburða.

1. Finnið heildarfjölda útkoma fyrri atburðarins.
2. Finnið líkur fyrri atburðarins.
3. Finnið heildarfjölda útkoma seinni atburðarins.
4. Finnið líkur seinni atburðarins.
5. Leggið líkurnar saman.

SÝNIDÆMI 4

Líkur sammengis ósamrýmanlegra atburða reiknaðar

Spil er dregið úr venjulegum spilastokki. Finnið líkurnar á að draga hjarta eða spaða.

11

Lausn

Atburðirnir „hjarta er dregið“ og „spaði er dreginn“ eru ósamrýmanlegir vegna þess að þeir geta ekki gerst samtímis. Líkurnar á hjarta eru $\frac{1}{4}$, og líkurnar á spaða eru einnig $\frac{1}{4}$,. Líkurnar á hjarta eða spaða eru því

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

REYNIÐ SJÁLF #4

Spil er dregið úr venjulegum spilastokki. Finnið líkurnar á að draga ás eða kóng.

Fyllireglan notuð til að reikna líkur

Við höfum fjallað um hvernig reikna má líkurnar á að atburður gerist. Stundum viljum við finna líkurnar á að hann gerist ekki. Fylliatburður atburðar E, táknaður E', er mengi þeirra útkoma í úrtaksrúminu sem eru ekki í E. Gerum til dæmis ráð fyrir að við viljum finna líkurnar á að hestur tapi kapphlaupi. Ef atburðurinn W er að hesturinn vinni er fylliatburður W að hesturinn tapi.

Til að finna líkurnar á að hesturinn tapi notum við þá staðreynd að summa allra líkna í líkindalíkani verður að vera 1.

$$P(E') = 1 - P(E)$$

Samanlagðar líkur á að hesturinn vinni og að hann tapi verða að vera 1. Ef líkurnar á sigri eru $\frac{1}{9}$, eru líkurnar á tapi því einfaldlega

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

FYLLIREGLAN

Líkurnar á að fylliatburður atburðar gerist eru

$$P(E') = 1 - P(E)$$

SÝNIDÆMI 5

Fyllireglan notuð til að reikna líkur

Tveimur sex hliða teningum er kastað.

1. ⓐ Finnið líkurnar á að summa talnanna sem koma upp sé minni en eða jöfn 3.
2. ⓑ Finnið líkurnar á að summa talnanna sem koma upp sé stærri en 3.

Lausn

Fyrsta skrefið er að tilgreina úrtaksrúmið, sem inniheldur allar mögulegar útkomur. Teningarnir eru tveir og hvor þeirra hefur sex mögulegar útkomur. Með margföldunarlögmálinu fæst að mögulegar útkomur eru alls 6×6, eða 36. Til dæmis táknar 1-1 að 1 komi upp á báðum teningum.

Tafla 3

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

1. ⓐ Telja þarf leiðirnar til að fá summu sem er 3 eða minni. Útkomurnar eru 1-1, 1-2 og 2-1. Aðeins þrjár útkomur gefa summu sem er 3 eða minni. Líkurnar eru
   $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$
2. ⓑ Í stað þess að telja upp allar útkomur getum við notað fyllireglunа. Við höfum þegar fundið líkur fylliatburðarins og drögum þær því frá 1 til að finna líkurnar á að summa talnanna sé stærri en 3.

$$\begin{aligned} P(E') &= 1 - P(E) \\ &= 1 - \tfrac{1}{12} \\ &= \tfrac{11}{12} \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #5

Tveimur teningum er kastað. Notið fyllireglunа til að finna líkurnar á að summan sé minni en 10.

Líkur reiknaðar með talningarfræði

Mörg áhugaverð líkindaverkefni byggjast á talningarreglum, umröðunum og samantektum. Í slíkum verkefnum notum við umraðanir og samantektir til að finna fjölda staka í atburðum og úrtaksrúmum. Verkefnin geta verið flókin en verða viðráðanlegri ef þeim er skipt í smærri talningarverkefni.

Gerum til dæmis ráð fyrir að verslun eigi 8 farsíma og að 3 þeirra séu gallaðir. Við gætum viljað finna líkurnar á að par sem kaupir 2 síma fái 2 ógallaða síma. Þá þarf að reikna bæði fjölda leiða til að velja 2 ógallaða síma og fjölda leiða til að velja 2 síma alls. Ógölluðu símarnir eru 5, svo velja má 2 þeirra á $C(5,2)$ vegu. Símarnir eru alls 8, svo velja má 2 síma á $C(8,2)$ vegu. Líkurnar á að velja 2 ógallaða síma eru:

$$\frac{\text{fjöldi leiða til að velja 2 ógallaða síma}}{\text{fjöldi leiða til að velja 2 síma}} = \frac{C\left(5,2\right)}{C\left(8,2\right)}$$
$$= \frac{10}{28}$$
$$= \frac{5}{14}$$

SÝNIDÆMI 6

Líkur reiknaðar með talningarfræði

Barn velur af handahófi 5 leikföng úr kassa sem inniheldur 3 kanínur, 5 hunda og 6 birni.

1. ⓐ Finnið líkurnar á að aðeins birnir séu valdir.
2. ⓑ Finnið líkurnar á að 2 birnir og 3 hundar séu valdir.
3. ⓒ Finnið líkurnar á að að minnsta kosti 2 hundar séu valdir.

Lausn

1. ⓐ Telja þarf bæði fjölda leiða til að velja aðeins birni og heildarfjölda leiða til að velja 5 leikföng. Birnirnir eru 6, svo velja má 5 birni á $C\left(6,5\right)$ vegu. Leikföngin eru 14, svo velja má hvaða 5 leikföng sem er á $C\left(14,5\right)$ vegu.
   $$\frac{C\left(6,5\right)}{C\left(14,5\right)} = \frac{6}{2.002} = \frac{3}{1.001}$$
2. ⓑ Telja þarf fjölda leiða til að velja 2 birni og 3 hunda og heildarfjölda leiða til að velja 5 leikföng. Birnirnir eru 6, svo velja má 2 birni á $C\left(6,2\right)$ vegu. Hundarnir eru 5, svo velja má 3 hunda á $C\left(5,3\right)$ vegu. Birnir og hundar eru valdir samtímis, svo við notum margföldunarlögmálið. Velja má 2 birni og 3 hunda á $C\left(6,2\right) \cdot C\left(5,3\right)$ vegu. Þessa niðurstöðu notum við til að finna líkurnar.
   $$\frac{C\left(6,2\right)C\left(5,3\right)}{C\left(14,5\right)} = \frac{15 \cdot 10}{2.002} = \frac{75}{1.001}$$
3. ⓒ Oft er auðveldast að leysa verkefni um „að minnsta kosti“ með fyllireglunni. Byrjum á að finna líkurnar á að færri en 2 hundar séu valdir. Ef færri en 2 hundar eru valdir er annaðhvort enginn hundur valinn eða 1 hundur.
   Ef enginn hundur er valinn koma öll 5 leikföngin úr hópi 9 leikfanga sem eru ekki hundar. Velja má úr þessum 9 leikföngum á $C\left(9,5\right)$ vegu. Leikföngin eru alls 14, svo velja má 5 úr öllum leikföngunum á $C\left(14,5\right)$ vegu.
   $$\frac{C\left(9,5\right)}{C\left(14,5\right)} = \frac{63}{1.001}$$
   Ef 1 hundur er valinn verða 4 leikföng að koma úr hópi 9 leikfanga sem eru ekki hundar og 1 úr hópi 5 hunda. Þar sem bæði hundur og annað leikfang eru valin samtímis notum við margföldunarlögmálið. Velja má 1 hund og 1 annað leikfang á $C\left(5,1\right) \cdot C\left(9,4\right)$ vegu.
   $$\frac{C\left(5,1\right)C\left(9,4\right)}{C\left(14,5\right)} = \frac{5 \cdot 126}{2.002} = \frac{315}{1.001}$$

Atburðirnir geta ekki gerst samtímis og eru því ósamrýmanlegir. Þess vegna leggjum við líkurnar saman til að finna líkurnar á að færri en 2 hundar séu valdir.

$$\frac{63}{1.001}+\frac{315}{1.001}=\frac{378}{1.001}$$

Að lokum drögum við þær líkur frá 1 til að finna líkurnar á að að minnsta kosti 2 hundar séu valdir.

$$1-\frac{378}{1.001}=\frac{623}{1.001}$$

REYNIÐ SJÁLF #6

Barn velur af handahófi 3 tyggjókúlur úr íláti með 4 fjólubláum, 8 gulum og 2 grænum tyggjókúlum.

1. ⓐ Finnið líkurnar á að allar 3 tyggjókúlurnar sem valdar eru séu fjólubláar.
2. ⓑ Finnið líkurnar á að engin gul tyggjókúla sé valin.
3. ⓒ Finnið líkurnar á að að minnsta kosti 1 gul tyggjókúla sé valin.

MYNDEFNI

Skoðið þessi netgögn til frekari útskýringa og æfinga í líkindareikningi.

- Inngangur að líkindum
- Líkur ákvarðaðar

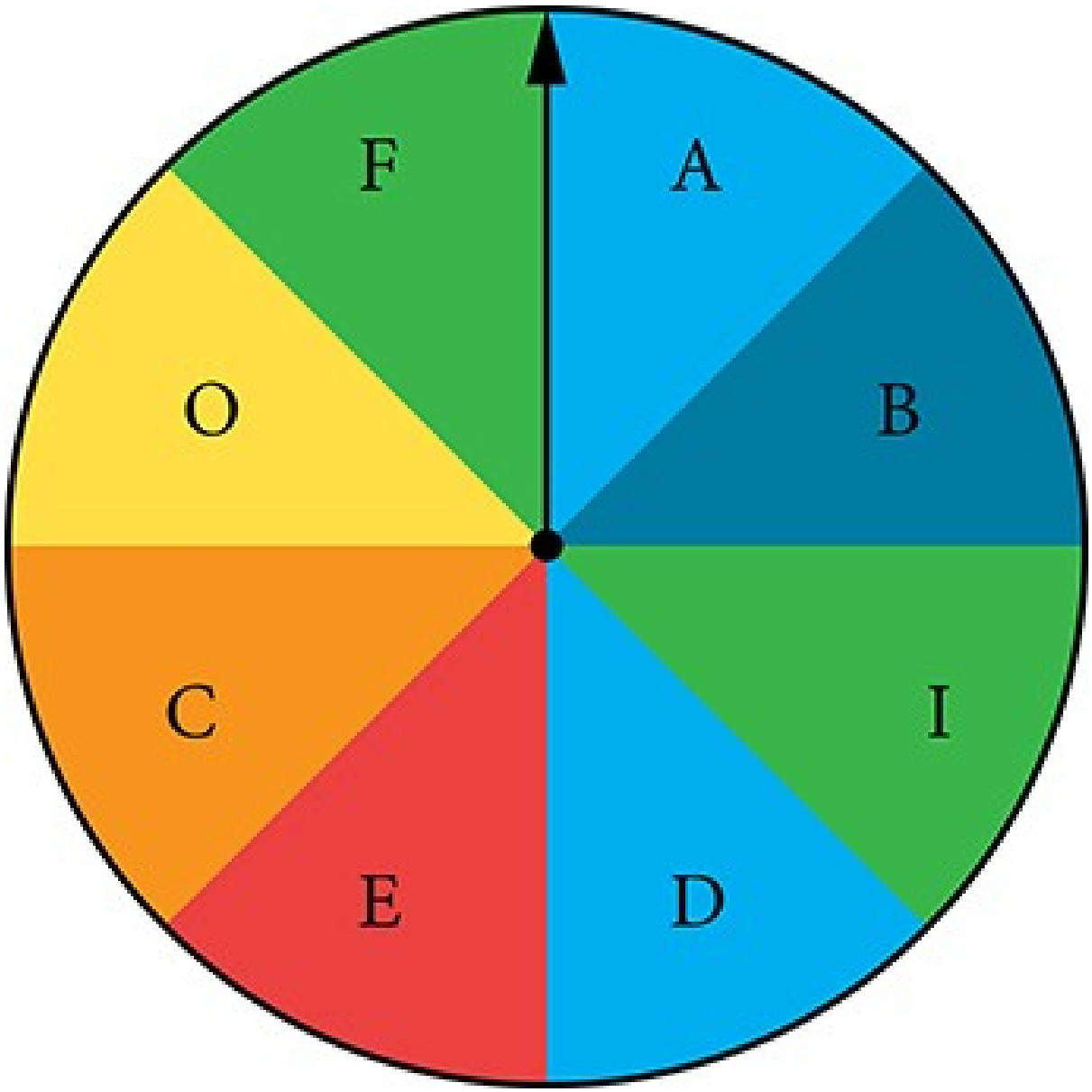
11.7 Verkefni hlutans

Munnleg verkefni

1. Hvaða hugtak lýsir því hve líklegt er að atburður gerist? Eru einhverjar takmarkanir á gildum þess? Ef svo er, hverjar? Ef ekki, útskýrið.
2. Hvað er úrtaksrúm?
3. Hvað er tilraun?
4. Hver er munurinn á atburðum og útkomum? Nefnið dæmi um hvort tveggja með úrtaksrúmi þar sem peningi er kastað 50 sinnum.
5. Sammengi tveggja mengja er mengi þeirra staka sem eru í að minnsta kosti öðru menginu. Að hvaða leyti svipar þessari skilgreiningu til skilgreiningar á sammengi tveggja atburða í líkindalíkani? Að hvaða leyti er hún frábrugðin?

Töluleg verkefni

Notið skífuna á mynd 3 í eftirfarandi verkefnum til að finna tilgreindar líkur.



Mynd 3

6. Skífan stöðvast á rauðu

7. Skífan stöðvast á sérhljóða

8. Skífan stöðvast ekki á bláu

9. Skífan stöðvast á fjólubláu eða sérhljóða

10. Skífan stöðvast á bláu eða sérhljóða

11. Skífan stöðvast á grænu eða bláu

12. Skífan stöðvast á gulu eða samhljóða

13. Skífan stöðvast ekki á gulu eða samhljóða

Tveimur peningum er kastað í eftirfarandi verkefnum.

14. Hvert er úrtaksrúmið?

15. Finnið líkurnar á að skjaldarmerki komi upp á báðum peningum.

16. Finnið líkurnar á að nákvæmlega einn fiskur komi upp.

17. Finnið líkurnar á að að minnsta kosti einn fiskur komi upp.

Fjórum peningum er kastað í eftirfarandi verkefnum.

18. Hvert er úrtaksrúmið?

19. Finnið líkurnar á að nákvæmlega tvö skjaldarmerki komi upp.

20. Finnið líkurnar á að nákvæmlega þrjú skjaldarmerki komi upp.

21. Finnið líkurnar á fjórum skjaldarmerkjum eða fjórum fiskum.

22. Finnið líkurnar á að fiskur komi upp á öllum peningunum.

23. Finnið líkurnar á að fiskur komi ekki upp á öllum peningunum.

24. Finnið líkurnar á nákvæmlega tveimur skjaldarmerkjum eða að minnsta kosti tveimur fiskum.

25. Finnið líkurnar á annaðhvort tveimur eða þremur skjaldarmerkjum.

Eitt spil er dregið úr venjulegum 52 spila stokki í eftirfarandi verkefnum. Finnið líkurnar á að draga:

26. Lauf

27. Tvist

28. Sexu eða sjöu

29. Rauða sexu

30. Ás eða tígul

31. Spil sem er ekki ás

32. Hjarta eða spil sem er ekki gosi

Tveimur teningum er kastað í eftirfarandi verkefnum og tölurnar lagðar saman.

33. Gerið töflu sem sýnir úrtaksrúm útkoma og summa.

34. Finnið líkurnar á summunni 3.

35. Finnið líkurnar á að talan fjórir komi upp á að minnsta kosti öðrum teningnum eða að summan sé 8.

36. Finnið líkurnar á oddatölusummu sem er minni en 9.

37. Finnið líkurnar á summu sem er stærri en eða jöfn 15.

38. Finnið líkurnar á summu sem er minni en 15.

39. Finnið líkurnar á summu sem er minni en 6 eða stærri en 9.

40. Finnið líkurnar á að fá summu frá og með 6 til og með 9,.

41. Finnið líkurnar á summunni 5 eða 6.

42. Finnið líkurnar á hvaða summu sem er annarri en 5 eða 6.

Í eftirfarandi verkefnum er peningi kastað og spil dregið úr venjulegum spilastokki. Finnið líkurnar á eftirfarandi:

43. Skjaldarmerki á peningnum eða lauf

44. Fiskur á peningnum eða rauður ás

45. Skjaldarmerki á peningnum eða mannspil

46. Engir ásar

Notið eftirfarandi aðstæður í næstu verkefnum: Poki af M&M-sælgæti inniheldur 12 bláar, 6 brúnar, 10 appelsínugular, 8 gular, 8 rauðar og 4 grænar M&M-kúlur. Manneskja seilist í pokann og tekur 5 kúlur.

47. Hverjar eru líkurnar á að allar M&M-kúlurnar séu bláar?

48. Hverjar eru líkurnar á að fá 4 bláar M&M-kúlur?

49. Hverjar eru líkurnar á að fá 3 bláar M&M-kúlur?

50. Hverjar eru líkurnar á að fá enga brúna M&M-kúlu?

Frekari verkefni

Notið eftirfarandi aðstæður í næstu verkefnum: Í Keno velur leikmaður fyrst 20 tölur úr tölunum 1 til 80. Þegar leikmaðurinn hefur valið eru 20 vinningstölur valdar af handahófi úr tölunum 1 til 80. Leikmaður vinnur ef hann hefur valið rétt 3, 4, eða 5 af 20 vinningstölunum. Námundið öll svör að næsta hundraðshluta úr prósentu.

51. Hverjar eru prósentulíkurnar á að leikmaður velji nákvæmlega 3 vinningstölur?

52. Hverjar eru prósentulíkurnar á að leikmaður velji nákvæmlega 4 vinningstölur?

53. Hverjar eru prósentulíkurnar á að leikmaður velji allar 5 vinningstölurnar?

54. Hverjar eru prósentulíkurnar á vinningi?

55. Hve miklu minni eru líkurnar á að leikmaður velji 3 vinningstölur en að hann velji annaðhvort 4 eða 5 vinningstölur?

Hagnýt verkefni

Notið eftirfarandi gögn í næstu verkefnum: Árið 2013 voru um 317 milljónir bandarískra ríkisborgara og um 40 milljónir þeirra voru aldraðar, það er 65 ára eða eldri. [2]

[2] Manntalsskrifstofa Bandaríkjanna. http://www.census.gov

56. Ef þið hittið bandaríska ríkisborgara, hverjar eru prósentulíkurnar á að viðkomandi sé aldraður? Námundið að næsta tíundahluta úr prósentu.

57. Ef þið hittið fimm bandaríska ríkisborgara, hverjar eru prósentulíkurnar á að nákvæmlega einn þeirra sé aldraður? Námundið að næsta tíundahluta úr prósentu.

58. Ef þið hittið fimm bandaríska ríkisborgara, hverjar eru prósentulíkurnar á að þrír þeirra séu aldraðir? Námundið að næsta tíundahluta úr prósentu.

59. Ef þið hittið fimm bandaríska ríkisborgara, hverjar eru prósentulíkurnar á að fjórir þeirra séu aldraðir? Námundið að næsta þúsundshluta úr prósentu.

60. Því er spáð að árið 2030 verði einn af hverjum fimm bandarískum ríkisborgurum aldraður. Hve miklu meiri verða líkurnar á að hitta aldraða manneskju þá? Hvaða stefnubreytingar teljið þið líklegar ef þessi spá rætist?

Lykilhugtök

Samlagningarlögmálið
Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður, sem hefur enga sameiginlega útkomu með hinum fyrri, getur gerst á n vegu, getur annar hvor atburðurinn gerst á $m+n$ vegu.

jafngreiðsluröð
fjárfesting þar sem kaupandinn greiðir sömu upphæð með reglulegu millibili

jafnmunaruna
runa þar sem mismunur sérhverra tveggja samliggjandi liða er fasti

jafnmunaröð
summa liða jafnmunarunu

tvíliðustuðull
fjöldi leiða til að velja r hluti úr n hlutum þegar röðin skiptir ekki máli; jafngildir $C(n,r)$, og er táknaður $\binom{n}{r}$

tvíliðuliðun
niðurstaðan þegar $(x+y)^n$ er liðað með margföldun

Tvíliðusetningin
formúla sem nota má til að liða hvaða tvíliðu sem er

samantekt
val hluta þar sem röðin skiptir ekki máli

fastur mismunur
mismunur sérhverra tveggja samliggjandi liða jafnmunarunu

hlutfallstala
hlutfall hverra tveggja samliggjandi liða kvótarunu

fylliatburður
mengi þeirra útkoma í úrtaksrúminu sem eru ekki í atburðinum E

vera ósamleitin
röð er sögð ósamleitin ef summa hennar er ekki rauntala

atburður
hvert hlutmengi úrtaksrúms

tilraun
athöfn með sýnilega niðurstöðu

lokað form
formúla sem skilgreinir hvern lið runu út frá sæti hans í rununni

endanleg runa
fall þar sem skilgreiningarmengið er endanlegt hlutmengi jákvæðu heiltalnanna $\{1, 2, \ldots n\}$ fyrir einhverja jákvæða heiltölu n

grundvallartalningarreglan
Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður getur gerst á n vegu eftir að sá fyrri hefur gerst, geta báðir atburðirnir gerst á $m \times n$ vegu. Reglan nefnist einnig margföldunarlögmálið.

kvótaruna
runa þar sem hlutfall liðar og liðarins næst á undan er fasti

kvótaröð
summa liða kvótarunu

summuvísir
breytan í lokaða forminu fyrir liði raðar þegar röðin er skrifuð með summutákni; hún er skrifuð neðan við sigmatáknið ásamt neðri summumörkum

óendanleg runa
fall þar sem skilgreiningarmengið er mengi jákvæðu heiltalnanna

óendanleg röð
summa liða óendanlegrar runu

neðri summumörk
talan sem notuð er í lokaða forminu til að finna fyrsta lið raðar

margföldunarlögmálið
Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður getur gerst á n vegu eftir að sá fyrri hefur gerst, geta báðir atburðirnir gerst á $m \times n$ vegu. Reglan nefnist einnig grundvallartalningarreglan.

ósamrýmanlegir atburðir
atburðir sem hafa engar sameiginlegar útkomur

n aðfeldi
margfeldi allra jákvæðra heiltalna frá 1 til n

n-ta hlutsumma
summa fyrstu n liða runu

n-ti liður runu
formúla fyrir almennan lið runu

útkomur
mögulegar niðurstöður tilraunar

umröðun
val hluta þar sem röðin skiptir máli

líkur
tala frá 0 til 1 sem lýsir því hve líklegt er að atburður gerist

líkindalíkan
stærðfræðileg lýsing á tilraun þar sem allar mögulegar útkomur og líkur þeirra eru tilgreindar

rakningarformúla
formúla sem skilgreinir hvern lið runu með fyrri lið eða liðum

úrtaksrúm
mengi allra mögulegra útkoma tilraunar

runa
fall þar sem skilgreiningarmengið er hlutmengi jákvæðu heiltalnanna

röð
summa liða runu

summutákn
ritháttur fyrir raðir sem notar gríska stafinn sigma; hann inniheldur lokað form og tilgreinir fyrsta og síðasta lið raðarinnar

liður
tala í runu

sammengi tveggja atburða
atburðurinn sem gerist ef annar eða báðir atburðirnir gerast

efri summumörk
talan sem notuð er í lokaða forminu til að finna síðasta lið raðar

Lykiljöfnur

Formúla fyrir aðfeldi	$0!=1$ $1!=1$ $n!=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots\left(2\right)\left(1\right)$, þegar $n\geq 2$
rakningarformúla fyrir n-ta lið jafnmunarunu	$a_n=a_{n-1}+d, n\geq 2$
lokað form fyrir n-ta lið jafnmunarunu	$a_n = a_1 + d(n-1)$
rakningarformúla fyrir $n\,t\,h$ lið kvótarunu	$a_n=r\,a_{n-1}, n\geq 2$
lokað form fyrir $n\,t\,h$ lið kvótarunu	$a_n=a_1 r^{n-1}$
summa fyrstu n liða jafnmunaraðar	$S_n=\frac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}$
summa fyrstu n liða kvótaraðar	$S_n=\frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}, r\neq 1$
summa óendanlegrar kvótaraðar þar sem $-1<r<1$	$S_n=\frac{a_1}{1-r}, r\neq 1$
fjöldi umröðana n aðgreinanlegra hluta teknum r í einu	$P\left(n,r\right)=\frac{n!}{\left(n-r\right)!}$
fjöldi samantekta n aðgreinanlegra hluta teknum r í einu	$C\left(n,r\right)=\frac{n!}{r!\left(n-r\right)!}$
fjöldi umröðana n hluta sem eru ekki allir aðgreinanlegir	$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$
Tvíliðusetningin	$(x+y)^n=\sum_{k-0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$
$\left(r+1\right)t\,h$ liður tvíliðuliðunar	$\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$
líkur atburðar með jafnlíklegum útkomum	$P\left(E\right)=\frac{n\left(E\right)}{n\left(S\right)}$
líkur sammengis tveggja atburða	$P\left(E\,U\,F\right)=P\left(E\right)+P\left(F\right)-P\left(E\cap F\right)$
líkur sammengis ósamrýmanlegra atburða	$P\left(E\,U\,F\right)=P\left(E\right)+P\left(F\right)$
líkur fylliatburðar	$P\left(E'\right)=1-P\left(E\right)$

Lykilatriði

11.1 Runur og ritháttur þeirra

- Runa er listi talna, sem nefnast liðir, í tiltekinni röð.
- Lokað form skilgreinir hvern lið runu út frá sæti hans. Sjá sýnidæmi 1, sýnidæmi 2 og sýnidæmi 3.
- Finna má lokað form fyrir n-ta lið runu með því að greina mynstur nokkurra liða. Sjá dæmi 4.
- Rakningarformúlur skilgreina hvern lið runu með fyrri liðum.
- Í rakningarformúlu verður að tilgreina upphafslið rununnar, eða upphafsliðina.
- Skrifa má mengi liða með rakningarformúlu. Sjá sýnidæmi 5 og sýnidæmi 6.
- Aðfeldi er stærðfræðileg aðgerð sem skilgreina má með rakningu.
- Aðfeldi n er margfeldi allra heiltalna frá 1 til n. Sjá sýnidæmi 7.

11.2 Jafnmunarunur

- Jafnmunaruna er runa þar sem mismunur hverra tveggja samliggjandi liða er fasti.
- Fastinn milli tveggja samliggjandi liða nefnist fastur mismunur.
- Fasti mismunurinn er talan sem lögð er við lið jafnmunarunu til að fá næsta lið. Sjá sýnidæmi 1.
- Finna má liði jafnmunarunu með því að byrja á upphafsliðnum og leggja fasta mismuninn við aftur og aftur. Sjá sýnidæmi 2 og sýnidæmi 3.
- Rakningarformúla fyrir jafnmunarunu með fasta mismuninn d er $a_n = a_{n-1} + d, n \geq 2$. Sjá sýnidæmi 4.
- Eins og í öllum rakningarformúlum verður að gefa upp upphafslið rununnar.
- Lokað form jafnmunarunu með fasta mismuninn d er $a_n = a_1 + d(n-1)$. Sjá sýnidæmi 5.
- Nota má lokað form til að finna fjölda liða í runu. Sjá sýnidæmi 6.
- Í hagnýtum verkefnum breytum við stundum lokaða forminu lítillega í $a_n = a_0 + dn$. Sjá sýnidæmi 7.

11.3 Kvótarunur

- Kvótaruna er runa þar sem hlutfall hverra tveggja samliggjandi liða er fasti.
- Fasta hlutfallið milli tveggja samliggjandi liða nefnist hlutfallstala.

- Finna má hlutfallstöluna með því að deila hverjum lið rununnar með liðnum á undan. Sjá sýnidæmi 1.
- Finna má liði kvótarunu með því að byrja á fyrsta liðnum og margfalda aftur og aftur með hlutfallstölunni. Sjá sýnidæmi 2 og sýnidæmi 4.
- Rakningarformúla fyrir kvótarunu með hlutfallstöluna r er $a_n = r\,a_{n-1}$ fyrir $n \geq 2$.
- Eins og í öllum rakningarformúlum verður að gefa upp upphafslið rununnar. Sjá sýnidæmi 3.
- Lokað form kvótarunu með hlutfallstöluna r er $a_n = a_1 r^{n-1}$. Sjá sýnidæmi 5.
- Í hagnýtum verkefnum breytum við stundum lokaða forminu lítillega í $a_n = a_0 r^n$. Sjá sýnidæmi 6.

11.4 Raðir og ritháttur þeirra

- Summa liða runu nefnist röð.
- Algengur ritháttur fyrir raðir nefnist summutákn og notar gríska stafinn sigma til að tákna summuna. Sjá sýnidæmi 1.
- Summa liða jafnmunarunu nefnist jafnmunaröð.
- Finna má summu fyrstu n liða jafnmunaraðar með formúlu. Sjá sýnidæmi 2 og sýnidæmi 3.
- Summa liða kvótarunu nefnist kvótaröð.
- Finna má summu fyrstu n liða kvótaraðar með formúlu. Sjá sýnidæmi 4 og sýnidæmi 5.
- Summa óendanlegrar raðar er til ef röðin er kvótaröð og $-1 < r < 1$.
- Ef summa óendanlegrar raðar er til má finna hana með formúlu. Sjá sýnidæmi 6, sýnidæmi 7 og sýnidæmi 8.
- Jafngreiðsluröð er reikningur sem fjárfestir greiðir reglulega inn á. Finna má verðmæti jafngreiðsluraðar með kvótaröðum. Sjá sýnidæmi 9.

11.5 Talningarreglur

- Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður, sem hefur enga sameiginlega útkomu með hinum fyrri, getur gerst á n vegu, getur annar hvor atburðurinn gerst á $m+n$ vegu. Sjá sýnidæmi 1.
- Ef einn atburður getur gerst á m vegu og annar atburður getur gerst á n vegu eftir að sá fyrri hefur gerst, geta báðir atburðirnir gerst á $m \times n$ vegu. Sjá sýnidæmi 2.
- Umröðun er röðun n hluta.
- Ef við höfum mengi með n hlutum og viljum velja r hluti úr menginu í tiltekinni röð skrifum við $P(n, r)$.

- Leysa má umröðunarverkefni með margföldunarlögmálinu eða formúlunni fyrir $P(n,r)$. Sjá sýnidæmi 3 og sýnidæmi 4.
- Val hluta þar sem röðin skiptir ekki máli nefnist samantekt.
- Ef við höfum *n* aðgreinanlega hluti er fjöldi leiða til að velja *r* hluti úr menginu $\mathrm{C}(n,r)$ og má finna hann með formúlu. Sjá sýnidæmi 5.
- Mengi með *n* aðgreinanlegum hlutum hefur 2^n hlutmengi. Sjá sýnidæmi 6.
- Í talningarverkefnum með hlutum sem eru ekki allir aðgreinanlegir þarf að deila til að telja ekki sömu umraðanirnar oftar en einu sinni. Sjá sýnidæmi 7.

11.6 Tvíliðusetningin

- $\binom{n}{r}$ $C(n,r)$. Sjá dæmi 1.
- Með tvíliðusetningunni má liða tvíliður án margföldunar. Sjá sýnidæmi 2.
- Finna má tiltekinn lið tvíliðuliðunar án þess að liða tvíliðuna að fullu. Sjá sýnidæmi 3.

11.7 Líkur

- Líkur eru alltaf tala milli 0 og 1, þar sem 0 táknar ómögulegan atburð og 1 öruggan atburð.
- Summa líkna í líkindalíkani verður að vera 1. Sjá sýnidæmi 1.
- Þegar allar útkomur tilraunar eru jafnlíklegar má finna líkur atburðar með því að deila fjölda útkoma í atburðinum með heildarfjölda útkoma í úrtaksrúmi tilraunarinnar. Sjá sýnidæmi 2.
- Til að finna líkur sammengis tveggja atburða leggjum við saman líkur atburðanna og drögum frá líkurnar á að báðir gerist samtímis. Sjá sýnidæmi 3.
- Til að finna líkur sammengis tveggja ósamrýmanlegra atburða leggjum við saman líkur hvors atburðar. Sjá sýnidæmi 4.
- Líkur fylliatburðar eru mismunurinn á 1 og líkunum á að atburðurinn gerist. Sjá sýnidæmi 5.
- Í sumum líkindaverkefnum þarf að nota umraðanir og samantektir til að finna fjölda staka í atburðum og úrtaksrúmum. Sjá sýnidæmi 6.

Yfirlitsverkefni

Runur og ritháttur þeirra

1. Skrifið fyrstu fjóra liði rununnar sem skilgreind er með rakningarformúlunni $a_1=2, a_n=a_{n-1}+n$.

2. Reiknið $\frac{6!}{(5-3)!3!}$.

3. Skrifið fyrstu fjóra liði rununnar sem skilgreind er með lokaða forminu $a_n=10^n+3$.

4. Skrifið fyrstu fjóra liði rununnar sem skilgreind er með lokaða forminu $a_n=\frac{n!}{n(n+1)}$.

Jafnmunarunur

5. Er runan $\frac{4}{7}, \frac{47}{21}, \frac{82}{21}, \frac{39}{7}, \ldots$ jafnmunaruna? Finnið fasta mismuninn ef svo er.

6. Er runan $2, 4, 8, 16, \ldots$ jafnmunaruna? Finnið fasta mismuninn ef svo er.

7. Jafnmunaruna hefur fyrsta liðinn $a_1=18$ og fasta mismuninn $d=-8$. Hverjir eru fyrstu fimm liðirnir?

8. Jafnmunaruna hefur liðina $a_3=11{,}7$ og $a_8=-14{,}6$. Hver er fyrsti liðurinn?

9. Skrifið rakningarformúlu fyrir jafnmunarununa $-20, -10, 0, 10, \ldots$

10. Skrifið rakningarformúlu fyrir jafnmunarununa $0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$, og finnið síðan 31. liðinn.

11. Skrifið lokað form fyrir jafnmunarununa $\frac{7}{8}, \frac{29}{24}, \frac{37}{24}, \frac{15}{8}, \ldots$

12. Hve margir liðir eru í endanlegu jafnmunarununni $12, 20, 28, \ldots, 172$?

Kvótarunur

13. Find the common ratio for the geometric sequence $2{,}5,\ \ 5,\ \ 10,\ \ 20, \ldots$

14. Er runan 4, 16, 28, 40 ... kvótaruna? Finnið hlutfallstöluna ef svo er. Ef svo er ekki, útskýrið hvers vegna.

15. Kvótaruna hefur liðina $a_7=16.384$ og $a_9=262.144$. Hverjir eru fyrstu fimm liðirnir?

16. Kvótaruna hefur fyrsta liðinn $a_1=-3$ og hlutfallstöluna $r=\frac{1}{2}$. Hver er 8. liðurinn?

17. Hverjir eru fyrstu fimm liðir kvótarununnar $a_1=3, a_n=4\cdot a_{n-1}$?

18. Skrifið rakningarformúlu fyrir kvótarununa $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

19. Skrifið lokað form fyrir kvótarununa $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{15}, -\frac{1}{45}, -\frac{1}{135}, \ldots$

20. Hve margir liðir eru í endanlegu kvótarununni $-5, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{9}, \ldots, -\frac{5}{59.049}$?

Raðir og ritháttur þeirra

21. Notið summutákn til að skrifa summu liðanna $\frac{1}{2}m+5$ frá $m=0$ til $m=5$.

22. Notið summutákn til að skrifa summuna sem fæst þegar talan 13 er lögð saman tuttugu sinnum.

23. Notið formúluna fyrir summu fyrstu *n* liða jafnmunaraðar til að finna summu fyrstu ellefu liða raðarinnar 2,5, 4, 5,5, ...

24. Stigi hefur 15 mjókkandi þrep sem lengjast um fastan mismun. Fyrsta þrepið er 5 tommur og hið síðasta 20 tommur. Hver er samanlögð lengd þrepanna?

25. Notið formúluna fyrir summu fyrstu n liða kvótaraðar til að finna S_9 fyrir röðina $12, 6, 3, \frac{3}{2}, \ldots$

26. Félagsgjöld veiðifélags fyrstu þrjú árin eru sýnd í töflu 1. Ef gjöldin halda áfram að hækka í sama hlutfalli, hver verður heildarkostnaðurinn fyrstu tíu árin?

Tafla 1

Ár	Félagsgjöld
1	$1500
2	$1950
3	$2535

27. Finnið summu óendanlegu geómetrísku raðarinnar $\sum_{k=1}^{\infty} 45 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

28. Bolti skoppar upp í $\frac{3}{5}$ af hæð skoppsins á undan. Skrifið röð sem táknar heildarvegalengd boltans ef honum var sleppt úr 5 feta hæð. Hver er heildarvegalengdin? (Vísbending: Vegalengdin í hverju skoppi er summa hækkunar og lækkunar.)

29. Alejandro leggur $80 af mánaðartekjum sínum inn í jafngreiðsluröð sem ber 6,25% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Hve mikið hefur hann sparað eftir 5 ár?

30. Tvíburarnir Hoa og Binh stofnuðu báðir eftirlaunareikninga á 21. afmælisdegi sínum. Hoa leggur inn $4.800,00 á ári og fær 5,5% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Binh leggur inn $3.600,00 á ári og fær 8,5% ársvexti með mánaðarlegri vaxtavöxtun. Hvort þeirra hefur fengið meiri vexti þegar þau verða 55 ára og hve miklu munar?

Talningarreglur

31. Á hve marga vegu má velja tölu úr menginu $\{-10,-6,4,10,12,18,24,32\}$ sem er deilanleg með annaðhvort 4 eða 6 ?

32. Í hópi 20 tónlistarmanna leika 12 á píanó, 7 á trompet og 2 á bæði píanó og trompet. Hve margir leika annaðhvort á píanó eða trompet?

33. Á hve marga vegu má mynda 4 stafa talnakóða ef endurtaka má tölustafi?

34. Í vatnslitakassa eru 3 græn litbrigði, 3 blá, 2 rauð, 2 gul og 1 svart litbrigði. Á hve marga vegu má velja eitt litbrigði af hverjum lit?

35. Reiknið $P(18,4)$.

36. Í nemendahópi eru 5 fyrsta árs nemar, 10 annars árs nemar, 3 þriðja árs nemar og 2 fjórða árs nemar. Á hve marga vegu má kjósa formann, varaformann og gjaldkera?

37. Reiknið $C(15,6)$.

38. Kaffihús hefur 7 tegundir af gvatemölsku kaffi, 4 af kúbversku og 10 af kostarísku. Á hve marga vegu getur kaffihúsið valið 2 gvatemalskar, 2 kúbverskar og 3 kostarískar tegundir í kaffismökkun?

39. Hve mörg hlutmengi hefur mengið $\{1,3,5,\ldots,99\}$?

40. Heilsulind tekur grunngjald fyrir daginn sem felur í sér aðgang að gufubaði, sundlaug og sturtum. Gegn aukagjaldi má velja nudd, líkamsskrúbb, handsnyrtingu, fótsnyrtingu, andlitsmeðferð og rakstur með rakhníf. Á hve marga vegu má panta viðbótarþjónustu?

41. Hve margar ólíkar umraðanir má mynda úr orðinu DEADWOOD?

42. Hve margar ólíkar umraðanir stafanna í DEADWOOD byrja og enda á D?

Tvíliðusetningin

43.

Reiknið tvíliðustuðulinn $\binom{23}{8}$.

44. Notið tvíliðusetninguna til að liða $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)^6$.

45. Notið tvíliðusetninguna til að skrifa fyrstu þrjá liði $(2a+b)^{17}$.

46. Finnið fjórða lið $(3a^2-2b)^{11}$ án þess að liða tvíliðuna að fullu.

Líkur

Í næstu verkefnum er tveimur teningum kastað.

47. Gerið töflu sem sýnir úrtaksrúmið.

48. Hverjar eru líkurnar á að 2 komi upp á að minnsta kosti öðrum teningnum? 2 ?

49. Hverjar eru líkurnar á pari?

50. Hverjar eru líkurnar á að 2 komi upp á að minnsta kosti öðrum teningnum eða að par komi upp?

51. Hverjar eru líkurnar á að hvorki 2 komi upp né par?

52. Hverjar eru líkurnar á að 5 eða 6 komi upp?

53. Hverjar eru líkurnar á að hvorki 5 né 6 komi upp?

Notið þessi gögn í næstu verkefnum: Könnun í grunnskóla leiddi í ljós að 350 af 500 nemendum kusu gosdrykk fremur en mjólk. Gerið ráð fyrir að 8 börn úr skólanum séu í afmælisveislu. Sýnið útreikninga og námundið að næsta tíundahluta úr prósentu.

54. Hverjar eru líkurnar, í prósentum, á að öll börnin í veislunni kjósi gosdrykk?

55. Hverjar eru líkurnar, í prósentum, á að minnst eitt barnanna í veislunni kjósi mjólk?

56. Hverjar eru líkurnar, í prósentum, á að nákvæmlega 3 barnanna í veislunni kjósi gosdrykk?

57. Hverjar eru líkurnar, í prósentum, á að nákvæmlega 3 barnanna í veislunni kjósi mjólk?

Æfingapróf

1. Skrifið fyrstu fjóra liði rununnar sem skilgreind er með rakningarformúlunni $a=-14, a_n=\frac{2+a_{n-1}}{2}$.

2. Skrifið fyrstu fjóra liði rununnar sem skilgreind er með lokaða forminu $a_n=\frac{n^2-n-1}{n!}$.

3. Is the sequence $0{,}3,\ 1{,}2,\ 2{,}1,\ 3, \ldots$ arithmetic? If so find the common difference.

4. Jafnmunaruna hefur fyrsta liðinn $a_1=-4$ og fasta mismuninn $d=-\frac{4}{3}$. Hver er 6. liðurinn?

5. Skrifið rakningarformúlu fyrir jafnmunarununa $-2, -\frac{7}{2}, -5, -\frac{13}{2}, \ldots$ og finnið síðan 22. liðinn.

6. Write an explicit formula for the arithmetic sequence $15{,}6,\ 15,\ 14{,}4,\ 13{,}8, \ldots$ and then find the 32nd term.

7. Er runan $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$ kvótaruna? Finnið hlutfallstöluna ef svo er en útskýrið annars hvers vegna ekki.

8. What is the 11th term of the geometric sequence $-1{,}5, -3, -6, -12, \ldots$?

9. Skrifið rakningarformúlu fyrir kvótarununa $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

10. Skrifið lokað form fyrir kvótarununa $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$

11. Notið summutákn til að skrifa summu liðanna $3k^2 - \frac{5}{6}k$ frá $k = -3$ til $k = 15$.

12. Á hafnaboltavelli sveitarfélags eru 10 sæti í fyrstu röð, 13 í annarri, 16 í þriðju og svo framvegis. Raðirnar eru alls 56. Hve mörg sæti eru á vellinum?

13. Notið formúluna fyrir summu fyrstu *n* liða geómetríska raðar til að finna $\sum_{k=1}^{7} -0{,}2 \cdot (-5)^{k-1}$.

14. Finnið summu óendanlegu geómetrísku raðarinnar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$.

15. Ramla leggur $3.600 árlega í eftirlaunasjóð. Sjóðurinn ber 7,5% ársvexti með mánaðarlegum vaxtavöxtum. Hún stofnaði reikninginn þegar hún var 20 ára. Hve mikið á hún þegar hún verður 55 ára? Hve stór hluti upphæðarinnar eru vextir?

16. Í keppni 50 atvinnudansara keppa 22 í foxtrotti, 18 í tangó og 6 í báðum greinum. Hve margir keppa í foxtrotti eða tangó?

17. Kaupandi nýrrar fólksbifreiðar getur sérpantað hana með því að velja úr 5 ytri litum, 3 innri litum, 2 hljóðkerfum, 3 vélargerðum og annaðhvort beinskiptingu eða sjálfskiptingu. Hve marga valkosti hefur kaupandinn?

18. Til að úthluta árlegum bónusgreiðslum þarf stjórnandi að velja fjóra bestu starfsmenn sína og raða þeim frá fyrsta til fjórða sætis. Á hve marga vegu getur hann búið til listann „Fjórir bestu“ úr hópi 32 starfsmanna?

19. Hljómsveit þarf að velja 3 lög fyrir árlega hljómsveitakeppni. Á hve marga vegu getur hún valið lögin ef hún hefur 15 lög að velja úr?

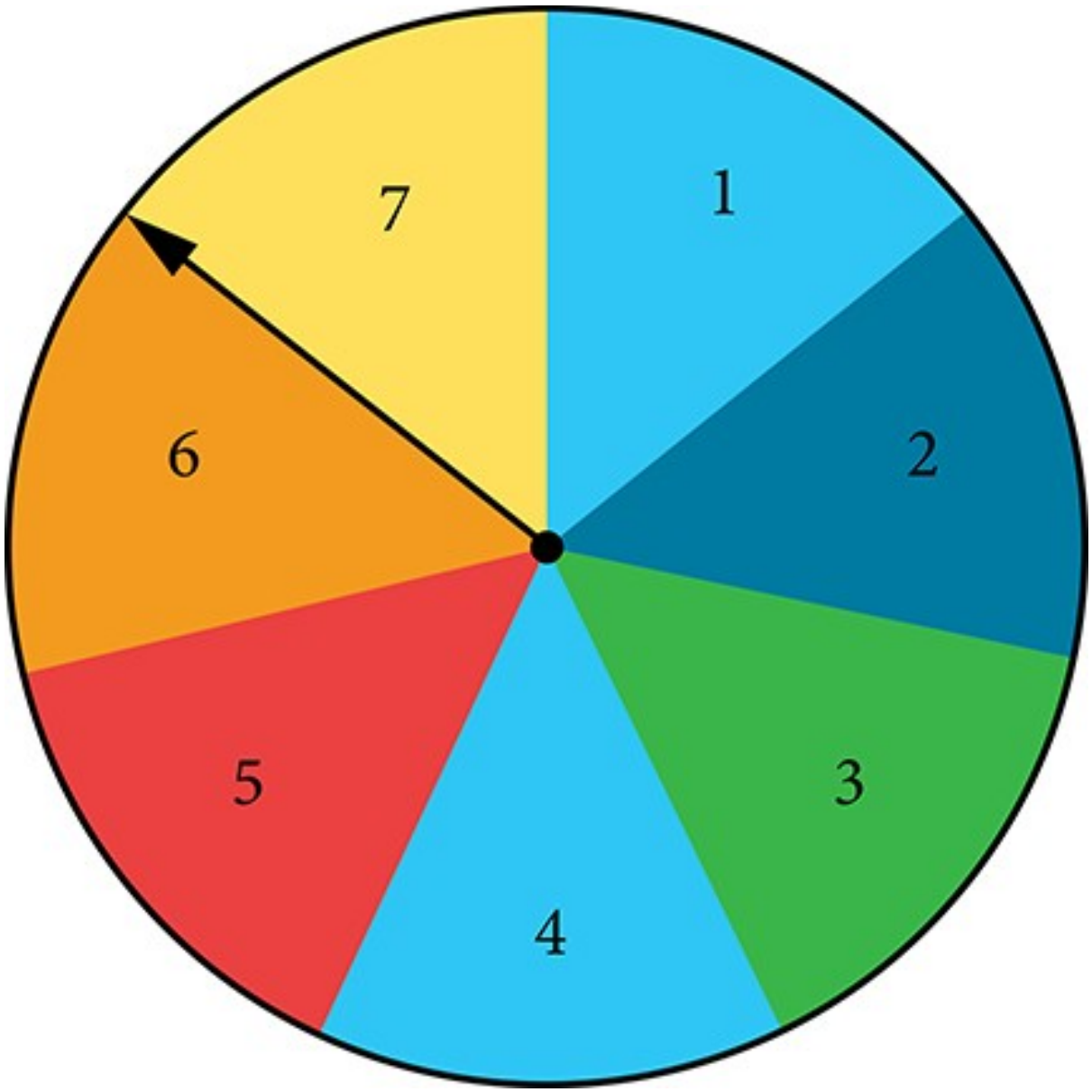
20. Í sjálfsafgreiðslubúð með frosna jógúrt má velja úr 8 tegundum af sælgætisáleggi og 4 tegundum af ávaxtaáleggi. Á hve marga vegu má velja álegg á jógúrtina?

21. Hve margar ólíkar umraðanir má mynda úr orðinu EVANESCENCE ef síðasti stafurinn verður að vera E?

22. Notið tvíliðusetninguna til að liða $\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y\right)^5$.

23. Finnið sjöunda lið $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^{13}$ án þess að liða tvíliðuna að fullu.

Notið skífuna á mynd 1 í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 1

24. Setjið fram líkindalíkan sem sýnir allar mögulegar útkomur og líkur þeirra. Notið fyrsta staf litaheitanna.

25. Hverjar eru líkurnar á að skífan stöðvist á oddatölu?

26. Hverjar eru líkurnar á að skífan stöðvist á bláu?

27. Hverjar eru líkurnar á að skífan stöðvist á bláu eða oddatölu?

28. Hverjar eru líkurnar á að skífan stöðvist á öðru en bláu eða oddatölu?

29. Í skál eru 16 piparmyntumolar, 14 smjörkaramellur og 10 jarðarberjamolar. Einhver grípur 7 mola í lófann. Hverjar eru prósentulíkurnar á að nákvæmlega 3 þeirra séu smjörkaramellur? Sýnið útreikninga og námundið að næsta tíundahluta úr prósentu.

12. KAFLI

Inngangur að stærðfræðigreiningu



Hollenski hlauparinn Sifan Hassan fer fram úr fremstu keppendunum á leið sinni til sigurs.

Yfirlit kafla

- 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum
- 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda
- 12.3 Samfelldni
- 12.4 Afleiður

12

12 Inngangur að stærðfræðigreiningu

Sifan Hassan er hollenskur hlaupari, fædd í Eþíópíu, og hefur verið meðal fremstu langhlaupara heims um árabil. Hún varð fyrst allra hlaupara til að vinna bæði 1500 og 10.000 metra hlaup á sama heimsmeistaramóti. Á Ólympíuleikunum í Tókýó keppti hún í 1500, 5000 og 10.000 metra hlaupum, en fáir reyna við þá þrennu. Hún varð aðeins annar hlauparinn í sögunni til að vinna til verðlauna í öllum þremur. Hún vann gull bæði í 5000 og 10.000 metra hlaupum og brons í 1500 metra hlaupi. Einkennandi keppnisaðferð Hassan er

að halda sig aftarlega í hópnum mestan hluta hlaupsins en sækja síðan fram á síðustu hringjunum.

Hassan hleypur ekki á hámarkshraða á hverju augnabliki. Hvernig getum við þá nálgað hraða hennar á tilteknu augnabliki? Í þessum kafla finnum við svarið við þeirri spurningu og mörgum skyldum spurningum.

12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- skilja táknmál markgilda.
- finna markgildi með grafi.
- finna markgildi með töflu.

Við höfum innsæi fyrir því hvað takmörk eru. Bíll kemst aðeins upp í ákveðinn hraða og ekki hraðar. Ruslatunna tekur ef til vill 33 gallon en ekki meira. Það er eðlilegt að mælanlegar stærðir hafi takmörk. Hver eru til dæmis takmörk á hæð konu? Hávaxnasta kona sem sögur fara af var Jinlian Zeng frá Kína, sem var 8 fet og 1 tomma á hæð. 1 Eru þetta takmörk þess hversu háar konur geta orðið? Ef til vill ekki, en líklega eru einhver takmörk sem mætti lýsa í tommum ef unnt væri að ákvarða þau.

1 https://en.wikipedia.org/wiki/Human_height og http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_tallest_people

Á máli stærðfræðinnar má segja að fallið sem tekur konu sem inntak og skilar mældri hæð hennar í tommum hafi markgildi. Í þessum hluta skoðum við tölulegar og myndrænar aðferðir til að finna markgildi.

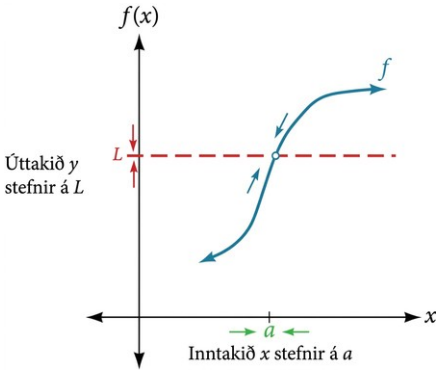
Skilningur á táknmáli markgilda

Við höfum séð að runa getur haft markgildi, það er gildi sem liðir rununnar nálgast þegar liðum fjölgar. Til dæmis nálgast liðir rununnar

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$$

gildið 0 æ meir. Runa er ein tegund falls, en föll sem eru ekki runur geta einnig haft markgildi. Við getum lýst hegðun falls þegar inntaksgildin nálgast tiltekið gildi. Ef markgildi falls er $f(x) = L$, þýðir það að þegar inntakið x nálgast a, nálgast úttakið, eða y-hnitið, æ meir L. Við segjum að úttakið „stefni á“ L.

Mynd 1 sýnir hugtakið markgildi á myndrænan hátt. Þegar inntaksgildið x stefnir á a, stefnir úttaksgildið $f(x)$ á L.



Mynd 1 Úttakið (y-hnitið) stefnir á L þegar inntakið (x-hnitið) stefnir á a.

Við ritum jöfnu markgildis sem

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Þetta táknmál gefur til kynna að þegar x stefnir á a bæði frá vinstri við $x = a$ og frá hægri við $x = a$, stefnir úttaksgildið á L.

Skoðum fallið

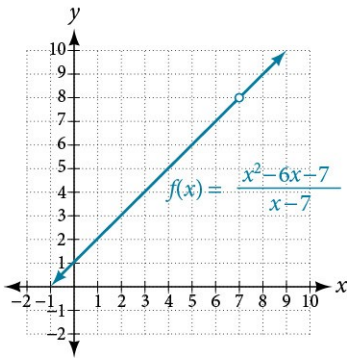
$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x - 7}.$$

Við getum þáttað fallið eins og sýnt er.

$f(x) = \frac{(x-7)(x+1)}{x-7}$ Styttið sameiginlega þætti í teljara og nefnara.

$f(x) = x + 1, x \neq 7$ Einfaldið.

Athugum að x má ekki vera 7, því þá væri deilt með 0. Því er 7 ekki í skilgreiningarmengi upphaflega fallsins. Til að fallið breytist ekki þegar við einföldum það setjum við sama skilyrði, $x \neq 7$, fyrir einfaldaða fallið. Við getum sýnt fallið myndrænt eins og á mynd 2.



Mynd 2 Þar sem 7 er ekki leyfilegt inntak er enginn punktur við $x = 7$.

Það sem gerist þegar $x = 7$ er allt annað en það sem gerist í punktum beggja vegna við $x = 7$ og nálægt því gildi. Táknmálið

$$\lim_{x \to 7} f(x) = 8$$

gefur til kynna að þegar inntakið x stefnir á 7 annaðhvort frá vinstri eða hægri, stefnir úttakið á 8. Úttakið getur komist eins nálægt 8 og við viljum ef inntakið er nægilega nálægt 7.

Hvað gerist þegar $x = 7$? Þegar $x = 7$, er ekkert samsvarandi úttak. Við ritum það sem

$$f(7) \text{ er ekki til.}$$

Þetta táknmál gefur til kynna að 7 sé ekki í skilgreiningarmengi fallsins. Við höfðum þegar gefið það til kynna þegar við rituðum fallið sem

$$f(x) = x + 1, x \neq 7.$$

Athugum að markgildi falls getur verið til þótt $f(x)$ sé ekki skilgreint þegar $x = a$. Í framhaldinu munum við oft finna markgildi falla þegar x nálgast a, þótt úttakið við $x = a$ sé ekki til.

MARKGILDI FALLS

Stærðin L er markgildi fallsins $f(x)$ þegar x stefnir á a ef það gildir að þegar inntaksgildi x nálgast a (en eru ekki jöfn a), nálgast samsvarandi úttaksgildi $f(x)$ æ meir L. Athugum að markgildið er óháð úttaksgildi $f(x)$ við a. Bæði a og L verða að vera rauntölur. Við ritum þetta sem

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

SÝNIDÆMI 1

Skilningur á markgildi falls

Fyrir eftirfarandi markgildi skuluð þið tilgreina $a, f(x)$, og L.

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 11$$

Lausn

Fyrst berum við kennsl á táknmál markgildis. Ef markgildið er til og x stefnir á a, ritum við

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Gefið er

$$\lim_{x \to 2} (3x + 5) = 11.$$

Það merkir að $a = 2, f(x) = 3x + 5, \text{ og } L = 11.$

Greining

Munum að $y=3x+5$ er bein lína án rofa. Þegar inntaksgildin nálgast 2 nálgast úttaksgildin 11. Þetta má setja fram með jöfnunni $\lim_{x \to 2}(3x+5)=11$, sem merkir að þegar x nálgast 2 (en er ekki nákvæmlega 2) kemst úttak fallsins $f(x)=3x+5$ eins nálægt $3(2)+5$, eða 11, og við viljum. Þetta er markgildið L, þegar við veljum gildi x nægilega nálægt 2 en þó ekki $x=2$.

REYNIÐ SJÁLF #1

Fyrir eftirfarandi markgildi skuluð þið tilgreina a, $f(x)$, og L.

$$\lim_{x \to 5}(2x^2-4)=46$$

Skilningur á markgildum frá vinstri og hægri

Við getum nálgast tiltekið inntaksgildi falls frá hvorri hlið sem er, frá vinstri eða hægri. Mynd 3 sýnir gildi

$$f(x)=x+1, x \neq 7$$

eins og áður var lýst og sýnt á mynd 2.

	Gildi x stefna á 7 frá vinstri ($x < 7$)			$x = 7$	Gildi x stefna á 7 frá hægri ($x > 7$)		
x	6,9	6,99	6,999	7	7,001	7,01	7,1
$f(x)$	7,9	7,99	7,999	Óskilgreint	8,001	8,01	8,1
	Úttaksgildin nálgast markgildið 8				Úttaksgildin nálgast markgildið 8		

Mynd 3

Gildi sem sögð eru koma „frá vinstri“ eru minni en inntaksgildið 7 og birtast því vinstra megin við gildið á talnalínu. Inntaksgildin á mynd 3 sem stefna á 7 frá vinstri eru 6,9, 6,99, og 6,999. Samsvarandi úttök eru 7,9, 7,99, og 7,999. Þessi gildi nálgast 8. Markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á tiltekið gildi frá vinstri nefnist markgildi frá vinstri. Fyrir þetta fall er 8 markgildi fallsins $f(x)=x+1, x \neq 7$ frá vinstri þegar x stefnir á 7.

Gildi sem sögð eru koma „frá hægri“ eru stærri en inntaksgildið 7 og birtast því hægra megin við gildið á talnalínu. Inntaksgildin á mynd 3 sem stefna á 7 frá hægri eru 7,1, 7,01, og 7,001. Samsvarandi úttök eru 8,1, 8,01, og 8,001. Þessi gildi nálgast 8. Markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á tiltekið gildi frá hægri nefnist markgildi frá hægri. Fyrir þetta fall er 8 einnig markgildi fallsins $f(x)=x+1, x \neq 7$ frá hægri þegar x stefnir á 7.

Mynd 3 sýnir að við getum fengið úttak fallsins sem er innan við 0,1 frá 8 með því að nota inntak sem er innan við 0,1 frá 7. Með öðrum orðum þarf inntakið x að vera á bilinu $6{,}9<x<7{,}1$ til að úttaksgildi $f(x)$ verði á bilinu $7{,}9<f(x)<8{,}1$.

Við sjáum einnig að úttaksgildi $f(x)$ komast sífellt nær 8 þegar við veljum inntaksgildi nær 7. Raunar getum við fengið úttaksgildi á hvaða gefnu bili sem er ef við veljum viðeigandi inntaksgildi.

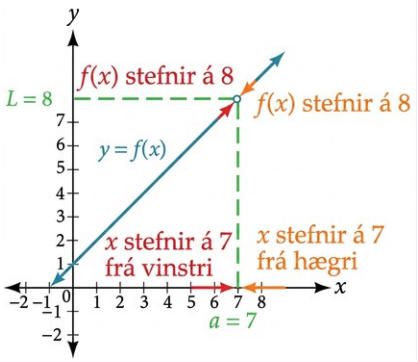
Mynd 4 sýnir markgildi fallsins frá vinstri og hægri. Af grafi $f(x)$, sjáum við að úttakið kemst óendanlega nálægt $L=8$ bæði þegar x stefnir á 7 frá vinstri og þegar x stefnir á 7 frá hægri.

Til að tákna markgildið frá vinstri ritum við

$$\lim_{x \to 7^-} f(x)=8.$$

Til að tákna markgildið frá hægri ritum við

$$\lim_{x \to 7^+} f(x)=8.$$



Mynd 4 Markgildin frá vinstri og hægri eru þau sömu fyrir þetta fall.

MARKGILDI FRÁ VINSTRI OG HÆGRI

Markgildi fallsins $f(x)$ frá vinstri þegar x stefnir á a er jafnt L, og er táknað með

$$\lim_{x \to a^-} f(x)=L.$$

Gildi $f(x)$ komast eins nálægt markgildinu L og við viljum með því að velja gildi x nægilega nálægt a þannig að $x<a$ og $x \neq a$.

Markgildi fallsins $f(x)$, frá hægri þegar x stefnir á a er jafnt L, og er táknað með

$$\lim_{x \to a^+} f(x)=L.$$

Gildi $f(x)$ komast eins nálægt markgildinu L og við viljum með því að velja gildi x nægilega nálægt a en stærri en a. Bæði a og L eru rauntölur.

Skilningur á tvíhliða markgildi

Í dæminu á undan eru markgildin frá vinstri og hægri jöfn þegar x stefnir á a. Ef markgildin frá vinstri og hægri eru jöfn segjum við að fallið $f(x)$ hafi tvíhliða markgildi þegar x stefnir á a. Yfirleitt köllum við tvíhliða markgildi einfaldlega markgildi. Ef markgildið frá vinstri er ekki jafnt markgildinu frá hægri, eða annað þeirra er ekki til, segjum við að markgildið sé ekki til.

TVÍHLIÐA MARKGILDI FALLS ÞEGAR X STEFNIR Á A

Markgildi fallsins $f(x)$, þegar x stefnir á a, er jafnt L, það er

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

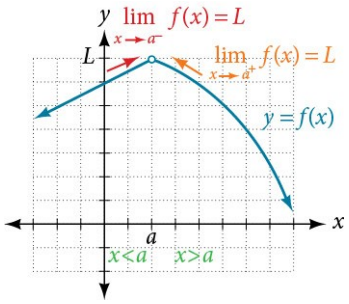
þá og því aðeins að

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Með öðrum orðum er markgildi fallsins $f(x)$ frá vinstri þegar x stefnir á a jafnt markgildi sama falls frá hægri þegar x stefnir á a. Ef slíkt markgildi er til köllum við það tvíhliða markgildi. Annars segjum við að markgildið sé ekki til.

Markgildi fundið með grafi

Til að ákvarða myndrænt hvort markgildi sé til þegar x stefnir á a, skoðum við graf fallsins þegar x er mjög nálægt $x = a$. Á mynd 5 skoðum við hegðun grafsins beggja vegna a.



Mynd 5

Til að ákvarða hvort markgildi frá vinstri sé til skoðum við grein grafsins vinstra megin við $x = a$, en nálægt $x = a$. Þar gildir $x < a$. Við sjáum að úttökin nálgast rauntölu L og því er markgildi frá vinstri til.

Til að ákvarða hvort markgildi frá hægri sé til skoðum við grein grafsins hægra megin við $x = a$, en nálægt $x = a$. Þar gildir $x > a$. Við sjáum að úttökin nálgast rauntölu L, og því er markgildi frá hægri til.

Ef markgildin frá vinstri og hægri eru þau sömu, eins og á mynd 5, vitum við að fallið hefur tvíhliða markgildi. Þegar við tölum um „markgildi“ eigum við venjulega við tvíhliða markgildi, nema það sé sérstaklega kallað einhliða markgildi.

Að lokum getum við athugað hvort fallið $f(x)$ hafi úttaksgildi þegar inntaksgildið x er jafnt a. Hnit punktsins væru $(a, f(a))$. Ef slíkur punktur er til hefur $f(a)$ gildi. Ef punkturinn er ekki til, eins og á mynd 5, segjum við að $f(a)$ sé ekki til.

AÐFERÐ

Notið graf til að finna markgildi fallsins $f(x)$, og fallgildi þess þegar x stefnir á a.

1. Skoðið grafið og ákvarðið hvort markgildi frá vinstri sé til.
2. Skoðið grafið og ákvarðið hvort markgildi frá hægri sé til.
3. Ef einhliða markgildin tvö eru til og eru jöfn er tvíhliða markgildi til, það sem við köllum venjulega „markgildi“.
4. Ef punktur er til þar sem $x = a$, er $f(a)$ samsvarandi fallgildi.

SÝNIDÆMI 2

Markgildi fundið með grafi

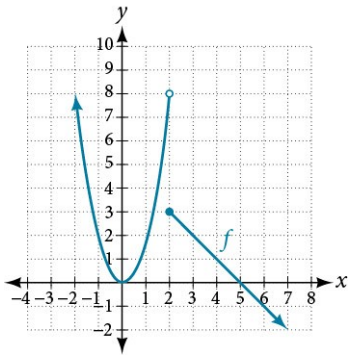
a. Finnið eftirfarandi markgildi og fallgildi fallsins f sem sýnt er á mynd 6.

i. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

iv. $f(2)$



Mynd 6

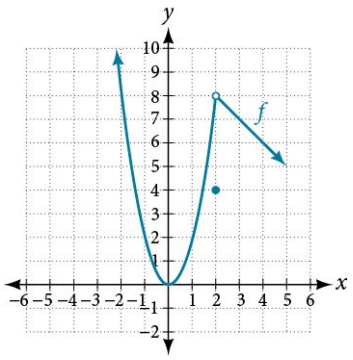
b. Finnið eftirfarandi markgildi og fallgildi fallsins f sem sýnt er á mynd 7.

i. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

iv. $f(2)$



Mynd 7

Lausn

a. Af mynd 6 sést:

i. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 8;$ þegar $x < 2$, en er óendanlega nálægt 2 nálgast úttaksgildin $y = 8$.

ii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3;$ þegar $x > 2$, en er óendanlega nálægt 2 stefna úttaksgildin á $y = 3$.

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ er ekki til vegna þess að $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x);$ markgildin frá vinstri og hægri eru ekki jöfn.

iv. $f(2) = 3$ vegna þess að graf fallsins f liggur í gegnum punktinn $(2, f(2))$ eða $(2, 3)$.

b. Af mynd 7 sést:

i. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 8;$ þegar $x < 2$ en er óendanlega nálægt 2 stefna úttaksgildin á $y = 8$.

ii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 8;$ þegar $x > 2$ en er óendanlega nálægt 2 stefna úttaksgildin á $y = 8$.

iii. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$ vegna þess að $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 8;$ markgildin frá vinstri og hægri eru jöfn.

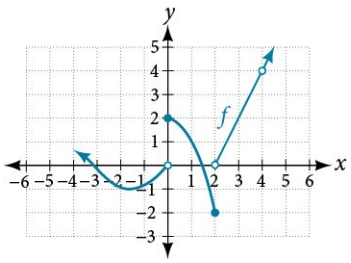
iv. $f(2) = 4$ vegna þess að graf fallsins f liggur í gegnum punktinn $(2, f(2))$ eða $(2, 4)$.

REYNIÐ SJÁLF #2

Notið graf fallsins $y = f(x)$ á mynd 8 til að áætla eftirfarandi markgildi.

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$
5. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$
6. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

7. $\lim_{x \to 4^-} f(x)$
8. $\lim_{x \to 4^+} f(x)$
9. $\lim_{x \to 4} f(x)$



Mynd 8

Markgildi fundið með töflu

Með því að útbúa töflu má finna markgildi út frá tölulegum upplýsingum. Við búum til gildistöflu þar sem inntaksgildi x nálgast a frá báðum hliðum. Síðan athugum við hvort úttaksgildin nálgist sífellt einhverja rauntölu, markgildið L.

Skoðum dæmi með eftirfarandi falli:

$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^3 - 125}{x - 5} \right)$$

Til að útbúa töfluna reiknum við gildi fallsins fyrir inntaksgildi nálægt $x = 5$. Við notum nokkur inntaksgildi minni en 5 og nokkur stærri en 5, eins og á mynd 9. Gildin í töflunni sýna að þegar $x > 5$ en nálgast 5 kemst samsvarandi úttak nálægt 75. Þegar $x > 5$ en nálgast 5 kemst samsvarandi úttak einnig nálægt 75.

x	4,9	4,99	4,999	5	5,001	5,01	5,1
$f(x)$	73,51	74,8501	74,985001	Óskilgreint	75,015001	75,1501	76,51

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 75$ $\lim_{x \to 5^+} f(x) = 75$

Mynd 9

Þar sem

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 75 = \lim_{x \to 5^+} f(x),$$

þá er

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 75.$$

Munum að $f(5)$ er ekki til.

AÐFERÐ

Notið töflu til að finna markgildi fallsins f, þegar x stefnir á a og gildi $f(a)$, ef það er til.

1. Veljið nokkur inntaksgildi sem stefna á a bæði frá vinstri og hægri. Skráið þau í töflu.
2. Reiknið gildi fallsins fyrir hvert inntaksgildi. Skráið niðurstöðurnar í töfluna.
3. Ákvarðið hvort töflugildin gefi til kynna markgildi frá vinstri og markgildi frá hægri.
4. Ef markgildin frá vinstri og hægri eru til og eru jöfn er tvíhliða markgildi til.
5. Skiptið x út fyrir a til að finna gildi $f(a)$.

SÝNIDÆMI 3

Markgildi fundið með töflu

Áætlið markgildi eftirfarandi stæðu tölulega með því að útbúa gildistöflu beggja vegna markgildisins.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5 \sin(x)}{3x} \right)$$

Lausn

Við getum áætlað markgildi, sé það til, með því að reikna fallgildi fyrir gildi nálægt $x = 0$. Við getum ekki fundið fallgildi beint þegar $x = 0$, því þá yrði nefnarinn jafn 0 og stæðan því óskilgreind.

$$f(x) = \frac{5 \sin(x)}{3x}$$

Við búum til töfluna á mynd 10 með því að velja nokkur inntaksgildi nálægt $x = 0$, helming þeirra minni en $x = 0$ og helming þeirra stærri en $x = 0$. Gæta þarf þess að reiknivélin sé stillt á radíana. Við reiknum fallgildi fyrir hvert inntaksgildi og fyllum þannig út töfluna.

Töflugildin gefa til kynna að þegar $x < 0$ en stefnir á 0 nálgast samsvarandi úttak $\frac{5}{3}$.

Þegar $x > 0$ en stefnir á 0 nálgast samsvarandi úttak einnig $\frac{5}{3}$.

x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$	1,66389	1,666639	1,666666	Óskilgreint	1,666666	1,666639	1,66389

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{5}{3}$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{5}{3}$

Mynd 10

Þar sem

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{5}{3} = \lim_{x \to 0^+} f(x),$$

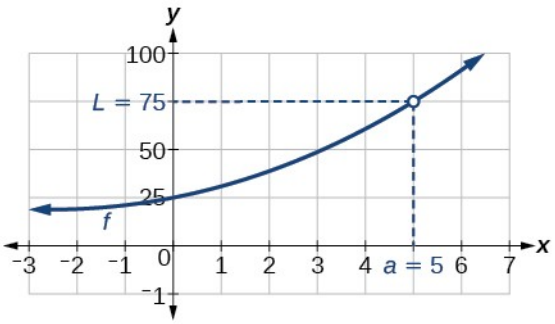
þá er

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{5}{3}.$$

SPURT OG SVARAÐ

Er hægt að sannreyna svarið með grafteikniforriti?

Já. Áður notuðum við töflu til að finna markgildið 75 fyrir fallið $f(x) = \frac{x^3 - 125}{x - 5}$ *þegar* x *stefnir á 5. Til að sannreyna niðurstöðuna teiknum við graf fallsins í skoðunarglugganum á mynd 11. Myndræn athugun sýnir að báðar greinar grafsins nálgast úttakið 75 þegar* x *nálgast 5. Auk þess getum við notað rakningaraðgerðina (e. trace) í grafreiknivél. Þegar við færumst að* $x = 5$ *sjáum við tölulega að samsvarandi úttök nálgast* 75.



Mynd 11

REYNIÐ SJÁLF #3

Áætlið markgildi eftirfarandi falls tölulega með því að útbúa töflu:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{20 \sin(x)}{4x} \right)$$

SPURT OG SVARAÐ

Er önnur aðferðin til að finna markgildi betri en hin?

Nei. Báðar aðferðir hafa kosti. Með grafi má fá skjóta yfirsýn. Töflur má nota þegar grafteikniforrit eru ekki tiltæk. Með þeim má líka fá meiri nákvæmni en augað getur greint á grafi.

SÝNIDÆMI 4

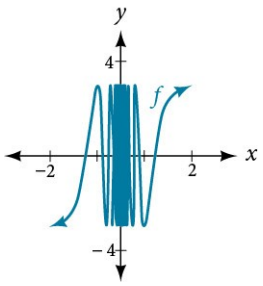
Grafteikniforrit notað til að finna markgildi

Notið grafteikniforrit, ef unnt er, til að finna markgildi eftirfarandi falls frá vinstri og hægri þegar x stefnir á 0. Ef fallið hefur markgildi þegar x stefnir á 0 skuluð þið tilgreina það. Annars skuluð þið útskýra hvers vegna markgildið er ekki til.

$$f(x)=3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

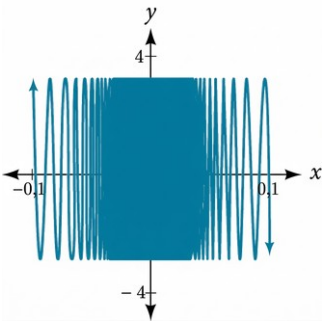
Lausn

Við getum notað grafteikniforrit til að kanna hegðun grafsins nálægt $x=0$. Við miðum gluggann við $x=0$, og veljum tvo skoðunarglugga. Í þeim síðari er þysjað nær $x=0$ en í þeim fyrri. Niðurstaðan líkist mynd 12 fyrir $[-2,2]$ á móti $[-3,3]$.



Mynd 12

The result would resemble Figure 13 for $[-0{,}1\,;0{,}1]$ by $[-3,3]$.



Mynd 13 Enn nær núlli verður enn erfiðara að greina nokkurt markgildi.

Því nær sem við komum 0, þeim mun meiri verða sveiflur úttaksgildanna. Þannig hegðar fall með markgildi frá vinstri eða hægri sér ekki. Og sé hvorki markgildi frá vinstri né hægri til er markgildi fallsins $f(x)$ þegar x stefnir á 0 vissulega ekki til.

Við ritum

$$\lim_{x\to 0^-}\left(3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \text{ er ekki til.}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(3 \sin\left(\frac{\pi}{x} \right) \right) \text{ er ekki til.}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(3 \sin\left(\frac{\pi}{x} \right) \right) \text{ er ekki til.}$$

REYNIÐ SJÁLF #4

Áætlið eftirfarandi markgildi tölulega: $\lim_{x \to 0} \left(\sin\left(\frac{2}{x} \right) \right)$.

NÁMSEFNI

Skoðið þessi vefgögn til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í að finna markgildi.

- Inngangur að markgildum
- Formleg skilgreining markgildis

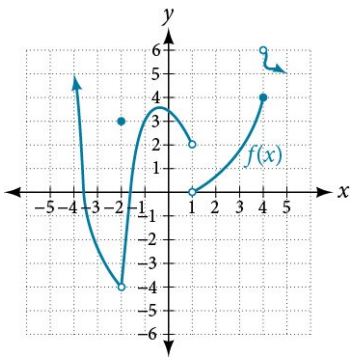
12.1 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Útskýrið muninn á gildi við $x = a$ og markgildinu þegar x stefnir á a.
2. Útskýrið hvers vegna við segjum að fall hafi ekki markgildi þegar x stefnir á a ef það gildir að þegar x stefnir á a, er markgildið frá vinstri ekki jafnt markgildinu frá hægri.

Myndræn verkefni

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið áætla fallgildi og markgildi út frá grafi fallsins f á mynd 14.



Mynd 14

3.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x)$$

4.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x)$$

5.

$$\lim_{x \to -2} f(x)$$

6.

$$f(-2)$$

7.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)$$

8.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

9.

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

10.

$$f(1)$$

11.

$$\lim_{x \to 4^-} f(x)$$

12.

$$\lim_{x \to 4^+} f(x)$$

13.

$$\lim_{x \to 4} f(x)$$

14.

$$f(4)$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið teikna graf falls út frá gefnum fallgildum og markgildum.

15. $\lim_{x \to 0^-} f(x)=2, \lim_{x \to 0^+} f(x)=-3, \lim_{x \to 2} f(x)=2, f(0)=4, f(2)=-1, f(-3)$ er ekki til.

16. $\lim_{x \to 2^-} f(x)=0, \lim_{x \to 2^+} =-2, \lim_{x \to 0} f(x)=3, f(2)=5, f(0)$

17. $\lim_{x \to 2^-} f(x)=2, \lim_{x \to 2^+} f(x)=-3, \lim_{x \to 0} f(x)=5, f(0)=1, f(1)=0$

18. $\lim_{x \to 3^-} f(x)=0, \lim_{x \to 3^+} f(x)=5, \lim_{x \to 5} f(x)=0, f(5)=4, f(3)$ er ekki til.

19. $\lim_{x \to 4} f(x)=6, \lim_{x \to 6^+} f(x)=-1, \lim_{x \to 0} f(x)=5, f(4)=6, f(2)=6$

20. $\lim_{x \to -3} f(x)=2, \lim_{x \to 1^+} f(x)=-2, \lim_{x \to 3} f(x)=-4, f(-3)=0, f(0)=0$

21. $\lim_{x \to \pi} f(x)=\pi^2, \lim_{x \to -\pi} f(x)=\frac{\pi}{2}, \lim_{x \to 1^-} f(x)=0, f(\pi)=\sqrt{2}, f(0)$ er ekki til.

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota grafreiknivél til að finna markgildið með 5 aukastafa nákvæmni þegar x stefnir á 0.

22.

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

23.

$$g(x)=(1+x)^{\frac{2}{x}}$$

24.

$$h(x)=(1+x)^{\frac{3}{x}}$$

25.

$$i(x)=(1+x)^{\frac{4}{x}}$$

26.

$$j(x)=(1+x)^{\frac{5}{x}}$$

27. Notið mynstrið sem þið sáuð í dæmunum hér á undan til að setja fram tilgátu um markgildi

$$f(x)=(1+x)^{\frac{6}{x}},$$

$$g(x)=(1+x)^{\frac{7}{x}},$$

$$\text{og } h(x)=(1+x)^{\frac{n}{x}}.$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota grafteikniforrit til að finna myndræn rök fyrir markgildum fallsins frá vinstri og hægri þegar x stefnir á a. Ef fallið hefur markgildi þegar x

stefnir á a, skuluð þið tilgreina það. Annars skuluð þið útskýra hvers vegna markgildið er ekki til.

28.

$$(x)=\begin{cases}|x|-1, & \text{ef } x\neq 1\\ x^3, & \text{ef } x=1\end{cases} \quad a=1$$

29.

$$(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & \text{ef } x=-2\\ (x+1)^2, & \text{ef } x\neq -2\end{cases} \quad a=-2$$

Töluleg verkefni

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota töluleg rök til að ákvarða hvort markgildið sé til þegar $x=a$. Ef það er ekki til skuluð þið lýsa hegðun grafs fallsins nálægt $x=a$. Námundið svörin að tveimur aukastöfum.

30.

$$f(x)=\frac{x^2-4x}{16-x^2};a=4$$

31.

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2-9};a=3$$

32.

$$f(x)=\frac{x^2-6x-7}{x^2-7x};a=7$$

33.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2};a=1$$

34.

$$f(x)=\frac{1-x^2}{x^2-3x+2};a=1$$

35.

$$f(x)=\frac{10-10x^2}{x^2-3x+2};a=1$$

36.

$$f(x)=\frac{x}{6x^2-5x-6};a=\frac{3}{2}$$

37.

$$f(x)=\frac{x}{4x^2+4x+1};a=-\frac{1}{2}$$

38.

$$f(x)=\frac{2}{x-4};a=4$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota reiknivél til að áætla markgildið með því að útbúa gildistöflu. Ef markgildið er ekki til skuluð þið lýsa hegðun fallsins þegar x stefnir á gefna gildið.

39.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7\tan x}{3x}$$

40.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x-4}$$

41.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{4\tan x}$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota grafteikniforrit til að finna töluleg eða myndræn rök fyrir markgildum fallsins frá vinstri og hægri þegar x stefnir á a. Ef fallið hefur markgildi þegar x stefnir á a, skuluð þið tilgreina það. Annars skuluð þið útskýra hvers vegna markgildið er ekki til.

42.

$$\lim_{x\to 0}e^{e^{\frac{1}{x}}}$$

43.

$$\lim_{x\to 0}e^{e^{-\frac{1}{x^2}}}$$

44.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

45.

$$\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$$

46.

$$\lim_{x \to 5} \frac{|x-5|}{5-x}$$

47.

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2}$$

48.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^3}$$

49.

$$\lim_{x \to 0} \frac{5}{1-e^{\frac{2}{x}}}$$

50. Notið töluleg og myndræn rök til að bera saman markgildi tveggja falla sem hafa svipaðar formúlur: $f(x)=\left|\frac{1-x}{x}\right|$ og $g(x)=\left|\frac{1+x}{x}\right|$ þegar x stefnir á 0. Notið grafteikniforrit, ef unnt er, til að finna markgildi fallanna $f(x)$ og $g(x)$ frá vinstri og hægri þegar x stefnir á 0. Ef föllin hafa markgildi þegar x stefnir á 0 skuluð þið tilgreina það. Annars skuluð þið útskýra hvers vegna markgildið er ekki til.

Viðbótarverkefni

51. Samkvæmt afstæðiskenningunni er massi m ögnar háður hraða hennar v. Það er

$$m=\frac{m_o}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

þar sem m_o er massinn þegar ögnin er kyrr og c er ljóshraðinn. Finnið markgildi massans m, þegar v stefnir á c^-.

52. Látum ljóshraðann, c, vera 1,0. Ef massinn, m, er 1, hvað verður þá um m þegar $v \to c$? Notið gildin í töflu 1 til að setja fram tilgátu um massann þegar v stefnir á 1,00.

Tafla 1

v	m
0,5	1,15
0,9	2,29
0,95	3,20
0,99	7,09
0,999	22,36
0,99999	223,61

12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- finna markgildi summu, mismunar og margfeldis.
- finna markgildi margliðu.
- finna markgildi veldis eða rótar.
- finna markgildi kvóta.

Skoðum ræða fallið

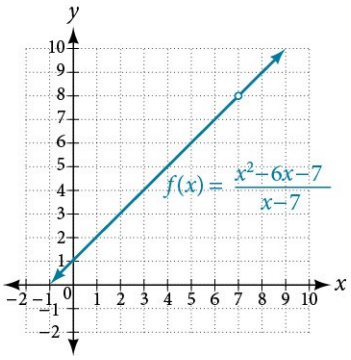
$$f(x)=\frac{x^2-6x-7}{x-7}$$

Fallið má þátta sem hér segir:

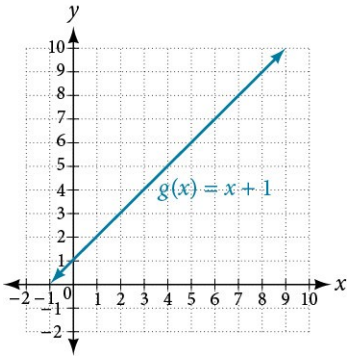
$$f(x)=\frac{(x-7)(x+1)}{x-7}, \text{sem gefur okkur } f(x)=x+1,\ x\neq 7.$$

Merkir þetta að fallið f sé sama fall og $g(x)=x+1$?

Svarið er nei. Fallið f hefur ekki $x=7$ í skilgreiningarmengi sínu en fallið g hefur það. Myndrænt sjáum við gat á grafi $f(x)$ þegar $x=7$, eins og sýnt er á mynd 1, en ekkert slíkt gat á grafi $g(x)$, á mynd 2.



Mynd 1 Graf fallsins f hefur rof við $x=7$ og er því ekki samfellt við $x=7$.



Mynd 2 Graf fallsins g er samfellt.

Hafa þessi tvö ólíku föll þá einnig ólík markgildi þegar x stefnir á 7?

Ekki endilega. Munum að þegar markgildi falls er fundið og x stefnir á a, skiptir máli hvort úttakið stefnir á rauntölu þegar við nálgumst $x=a$. Tilvist markgildis er ekki háð því sem gerist þegar x er jafnt a.

Skoðum mynd 1 og mynd 2 aftur. Athugum að á báðum gröfum stefna úttaksgildin á 8 þegar x stefnir á 7. Þetta merkir að

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} g(x).$$

Munum að þegar við finnum markgildi skiptir máli hvað gerist nálægt $x=a$, en ekki þegar $x=a$. Í þessum hluta notum við ýmsar aðferðir, svo sem að umrita föll með þáttun, til að reikna markgildi. Með þeim getum við staðfest með formlegum hætti það sem við höfum áður metið með innsæi.

Markgildi summu, mismunar og margfeldis fundið

Það getur verið seinlegt og fyrirhafnarmikið að teikna graf falls eða kanna gildistöflu til að finna markgildi. Þegar hægt er er fljótlegra að nota eiginleika markgilda, en þeir eru safn setninga sem nota má til að finna markgildi.

Ef við þekkjum eiginleika markgilda getum við reiknað markgildi beint. Við getum lagt saman, dregið frá, margfaldað og deilt markgildum falla eins og við værum að gera

aðgerðirnar á föllunum sjálfum og þannig fundið markgildi niðurstöðunnar. Á sama hátt finnum við markgildi falls í veldi með því að setja markgildið í það veldi. Við getum einnig fundið markgildi rótar falls með því að taka rót af markgildinu. Með þessum reikniaðgerðum getum við fundið markgildi flóknari falla út frá markgildum einfaldari fallanna sem þau eru sett saman úr.

EIGINLEIKAR MARKGILDA

Látum a, k, A, og B tákna rauntölur og f og g vera föll þannig að $\lim_{x \to a} f(x) = A$ og $\lim_{x \to a} g(x) = B$. Fyrir markgildi sem eru til og endanleg eru eiginleikar markgilda teknir saman í töflu 1.

Tafla 1

Fasti, k	$\lim_{x \to a} k = k$
Fasti margfaldaður með falli	$\lim_{x \to a} \left[k \cdot f(x)\right] = k \lim_{x \to a} f(x) = k\,A$
Summa falla	$\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$
Mismunur falla	$\lim_{x \to a} \left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$
Margfeldi falla	$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$
Kvóti falla	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0$
Fall sett í veldi	$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = A^n$, þar sem n er jákvæð heiltala
n-ta rót falls, þar sem n er jákvæð heiltala	$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} \left[f(x)\right]} = \sqrt[n]{A}$
Margliðufall	$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$

SÝNIDÆMI 1

Markgildi falls reiknað með algebru

Reiknið $\lim_{x \to 3} (2x + 5)$.

Lausn

$\lim_{x \to 3} (2x+5) = \lim_{x \to 3} (2x) + \lim_{x \to 3} (5)$ Eiginleiki um summu falla

$= 2 \lim_{x \to 3} (x) + \lim_{x \to 3} (5)$ Eiginleiki um fasta margfaldaðan með falli

$= 2(3) + 5$ Reiknið

$= 11$

REYNIÐ SJÁLF #1

Reiknið markgildið: $\lim_{x \to -12} (-2x+2)$.

Markgildi margliðu fundið

Ekki eru öll föll eða markgildi þeirra aðeins samsett úr einfaldri samlagningu, frádrætti eða margföldun. Sum þeirra geta innihaldið margliður. Munum að margliða er stæða sem er summa tveggja eða fleiri liða og hver liður er margfeldi fasta og breytu í veldi sem er ekki neikvæð heiltala. Til að finna markgildi margliðufalls getum við fundið markgildi einstakra liða fallsins og lagt þau síðan saman. Markgildi margliðufalls þegar x stefnir á a jafngildir einnig því að reikna einfaldlega gildi fallsins fyrir a.

AÐFERÐ

Finnið markgildi falls sem inniheldur margliðu.

1. Notið eiginleika markgilda til að skipta margliðunni í einstaka liði.
2. Finnið markgildi einstakra liða.
3. Leggið markgildin saman.
4. Einnig getið þið reiknað gildi fallsins fyrir a.

SÝNIDÆMI 2

Markgildi falls reiknað með algebru

Reiknið $\lim_{x \to 3} (5x^2)$.

Lausn

$\lim_{x \to 3} (5x^2) = 5 \lim_{x \to 3} (x^2)$ Eiginleiki um fasta margfaldaðan með falli

$= 5(3^2)$ Eiginleiki um fall í veldi

$= 45$

REYNIÐ SJÁLF #2

Reiknið $\lim_{x \to 4} \left(x^3 - 5\right)$.

SÝNIDÆMI 3

Markgildi margliðu reiknað með algebru

Reiknið $\lim_{x \to 5} \left(2x^3 - 3x + 1\right)$.

Lausn

$$\lim_{x \to 5} \left(2\,x^3 - 3\,x + 1\right) = \lim_{x \to 5} \left(2\,x^3\right) - \lim_{x \to 5} \left(3\,x\right) + \lim_{x \to 5} \left(1\right) \quad \text{Summa falla}$$

$$= 2 \lim_{x \to 5} \left(x^3\right) - 3 \lim_{x \to 5} \left(x\right) + \lim_{x \to 5} \left(1\right) \quad \text{Fasti margfaldaður með falli}$$

$$= 2\left(5^3\right) - 3\left(5\right) + 1 \quad \text{Fall sett í veldi}$$

$$= 236 \quad \text{Reiknið}$$

REYNIÐ SJÁLF #3

Reiknið markgildið: $\lim_{x \to -1} \left(x^4 - 4x^3 + 5\right)$.

Markgildi veldis eða rótar fundið

Þegar markgildi inniheldur veldi eða rót þurfum við annan eiginleika til að reikna það. Annað veldi markgildis falls er jafnt markgildi annars veldis fallsins og hið sama gildir um hærri veldi. Á sama hátt er kvaðratrót markgildis falls jöfn markgildi kvaðratrótar fallsins og hið sama gildir um rætur af hærri stigi.

SÝNIDÆMI 4

Markgildi veldis reiknað

Reiknið $\lim_{x \to 2} \left(3x + 1\right)^5$.

Lausn

Við finnum markgildi fallsins þegar x stefnir á 2 og setjum niðurstöðuna í 5. veldi.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \left(3\,x + 1\right)^5 &= \left(\lim_{x \to 2} \left(3\,x + 1\right)\right)^5 \\ &= \left(3\left(2\right) + 1\right)^5 \\ &= 7^5 \\ &= 16.807 \end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #4

Reiknið markgildið: $\lim_{x \to -4} (10x+36)^3$.

SPURT OG SVARAÐ

Ef við getum ekki beitt eiginleikum markgilda beint, til dæmis í $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2+6x+8}{x-2} \right)$, getum við þá samt fundið markgildi fallsins þegar x stefnir á a?

Já. Sum föll má umrita með algebru á einfaldara, jafngilt form og reikna síðan markgildi þess.

Markgildi kvóta fundið

Flóknara getur verið að finna markgildi falls sem er ritað sem kvóti. Oft þarf að umrita fallið með algebru áður en eiginleikum markgilda er beitt. Ef nefnarinn verður 0 þegar við beitum eiginleikum markgilda beint verðum við að umrita kvótann. Ein aðferð er að rita kvótann á þáttaðri mynd og einfalda.

AÐFERÐ

Notið þáttun til að reikna markgildi falls sem er gefið á kvótaformi.

1. Þáttið teljara og nefnara að fullu.
2. Einfaldið með því að deila út öllum sameiginlegum þáttum teljara og nefnara.
3. Reiknið markgildið sem fæst og gætið þess að nota rétt skilgreiningarmengi.

SÝNIDÆMI 5

Markgildi kvóta reiknað með þáttun

Reiknið $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-6x+8}{x-2} \right)$.

Lausn

Þáttið þar sem það er hægt og einfaldið.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-6x+8}{x-2} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \right) \quad \text{Þáttið teljarann.}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \right) \quad \text{Styttið sameiginlega þætti.}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x-4) \quad \text{Reiknið.}$$

$$= 2-4 = -2$$

Greining

Þegar ekki er unnt að reikna markgildi ræðs falls beint má stundum þátta teljara og nefnara og einfalda þannig að hægt sé að reikna niðurstöðuna.

Athugum að fallið

$$f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-2}$$

er jafngilt fallinu

$$f(x)=x-4, x\neq 2.$$

Athugum að markgildið er til þótt fallið sé ekki skilgreint þegar $x = 2$.

REYNIÐ SJÁLF #5

Reiknið markgildið: $\lim_{x\to 7}\left(\frac{x^2-11x+28}{7-x}\right)$.

SÝNIDÆMI 6

Markgildi kvóta reiknað með því að finna minnsta samnefnara

Reiknið $\lim_{x\to 5}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{5}}{x-5}\right)$.

Lausn

Finnið minnsta samnefnara brotanna tveggja í teljaranum og framlengið bæði brotin þannig að þau hafi minnsta samnefnarann.

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{5}}{x-5}\right)=\lim_{x\to 5}\left(\frac{5x\frac{1}{x}-}{5x(x-5)}\right)$$ Margfaldaðu teljara og nefnara með minnsta samnefnaranum.

$$=\lim_{x\to 5}\left(\frac{5x\left(\frac{1}{x}\right)-5x\frac{1}{5}}{5x(x-5)}\right)$$ Beittu dreifireglunni.

$$=\lim_{x\to 5}\left(\frac{5-x}{5x(x-5)}\right)$$ Einfaldaðu.

$$=\lim_{x\to 5}\left(\frac{-1(x-5)}{5x(x-5)}\right)$$ Þáttaðu teljarann.

$$=\lim_{x\to 5}-\frac{1}{5x}$$ Styttu út samsvarandi þætti.

$$=-\frac{1}{5(5)}$$ Reiknaðu gildið þegar $x=5$.

$$=-\frac{1}{25}$$

Greining

Þegar finna á markgildi ræðs falls sem hefur summu eða mismun liða í teljara eða nefnara er fyrsta skrefið að finna samnefnara þeirra liða. Síðan eru báðir liðir framlengdir þannig að þeir hafi þann nefnara, eða ræða fallið er einfaldað með því að margfalda teljara og nefnara með minnsta samnefnara. Að lokum er athugað hvort teljari og nefnari sem fást hafi sameiginlega þætti.

REYNIÐ SJÁLF #6

Reiknið $\lim\limits_{x\to -5}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{x}}{10+2x}\right)$.

AÐFERÐ

Notið samoka til að reikna markgildi falls sem inniheldur rót.

1. Ef gefni kvótinn er ekki á óákvarðaða forminu $\left(\frac{0}{0}\right)$ skuluð þið reikna hann beint.

2. Annars skuluð þið umrita summu (eða mismun) tveggja kvóta sem einn kvóta með minnsta samnefnara.
3. Ef teljarinn inniheldur rót skuluð þið gera teljarann ræðan með því að margfalda teljara og nefnara með samoka teljarans. Munum að $a \pm \sqrt{b}$ eru samokar.
4. Einfaldið.
5. Reiknið markgildið sem fæst.

SÝNIDÆMI 7

Markgildi með rót reiknað með samoka

Reiknið $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{25-x}-5}{x} \right)$.

Lausn

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{25-x}-5}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{(\sqrt{25-x}-5)}{x} \cdot \dfrac{(\sqrt{25-x}+5)}{(\sqrt{25-x}+5)} \right)$ Margfaldið teljara og nefnara með samokanum.

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{(25-x)-25}{x\,(\sqrt{25-x}+5)} \right)$ Margfaldið: $(\sqrt{25-x}-5)\cdot(\sqrt{25-x}+5) = (25-x)-25.$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{-x}{x\,(\sqrt{25-x}+5)} \right)$ Sameinið samkynja liði.

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{-x}{x\,(\sqrt{25-x}+5)} \right)$ Einfaldið $\dfrac{-x}{x} = -1.$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{25-0}+5}$ Reiknið.

$$= \frac{-1}{5+5} = -\frac{1}{10}$$

Greining

Þegar markgildi falls með rót í öðrum af tveimur liðum er fundið og ekki er hægt að reikna það beint er gott að margfalda teljara og nefnara með samoka liðanna.

REYNIÐ SJÁLF #7

Reiknið markgildið: $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{16-h}-4}{h} \right)$.

SÝNIDÆMI 8

Markgildi kvóta falls reiknað með þáttun

Reiknið $\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2}\right)$.

Lausn

$\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2}\right)=\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{(2+\sqrt{x})\,(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-2}\right)$ Þáttið.

$=\lim\limits_{x \to 4}\left(\dfrac{(2+\sqrt{x})\,(2-\sqrt{x})}{-(2-\sqrt{x})}\right)$ Takið -1 út fyrir sviga í nefnaranum. Einfaldið.

$=\lim\limits_{x \to 4}-(2+\sqrt{x})$ Reiknið.

$$=-(2+\sqrt{4})$$

$$=-4$$

Greining

Ef við margfölduðum með samoka þyrftum við að liða teljarann. Leitum frekar að þáttum í teljaranum. Talan fjórir er ferningstala og því er teljarinn á forminu

$$a^2-b^2$$

og má þátta sem

$$(a+b)(a-b).$$

REYNIÐ SJÁLF #8

Reiknið markgildið: $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\right)$.

AÐFERÐ

Reiknið markgildi kvóta sem inniheldur tölugildi.

1. Reynið að þátta eða finna minnsta samnefnara.
2. Ef ekki er unnt að finna markgildið skuluð þið velja nokkur gildi nálægt inntakinu þar sem fallið er óskilgreint, sitt hvorum megin við það.
3. Notið útreiknuðu gildin til að áætla markgildin frá báðum hliðum.

SÝNIDÆMI 9

Markgildi kvóta með tölugildi reiknað

Reiknið $\lim_{x \to 7} \frac{|x-7|}{x-7}$.

Lausn

Fallið er óskilgreint þegar $x=7$, svo við prófum gildi nálægt 7 frá vinstri og hægri.

Markgildi frá vinstri:

$$\frac{|6{,}9-7|}{6{,}9-7}=\frac{|6{,}99-7|}{6{,}99-7}=\frac{|6{,}999-7|}{6{,}999-7}=-1$$

Markgildi frá hægri:

$$\frac{|7{,}1-7|}{7{,}1-7}=\frac{|7{,}01-7|}{7{,}01-7}=\frac{|7{,}001-7|}{7{,}001-7}=1$$

Markgildin frá vinstri og hægri eru ekki jöfn og því er markgildið ekki til.

REYNIÐ SJÁLF #9

Reiknið $\lim_{x \to 6^+} \frac{6-x}{|x-6|}$.

NÁMSEFNI

Skoðið þetta vefefni til að fá frekari leiðbeiningar og æfa ykkur í að nota eiginleika markgilda.

- Markgildi fundið með algebru

12.2 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Nefnið dæmi um tegund falls f þar sem markgildið þegar x stefnir á a, er $f(a)$.

2. Þegar bein innsetning er notuð til að reikna markgildi ræðs falls þegar x stefnir á a og niðurstaðan er $f(a)=\frac{0}{0}$, merkir það þá að markgildi f sé ekki til?

3. Hvað merkir það að segja að markgildi $f(x)$, þegar x stefnir á c, sé óskilgreint?

Algebruverkefni

Reiknið markgildin í eftirfarandi dæmum með algebru.

4.

$$\lim_{x \to 0}(3)$$

5.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{-5x}{x^2 - 1} \right)$$

6.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 2} \right)$$

7.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x - 3} \right)$$

8.

$$\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right)$$

9.

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \left(\frac{6x^2 - 17x + 12}{2x - 3} \right)$$

10.

$$\lim_{x \to -\frac{7}{2}} \left(\frac{8x^2 + 18x - 35}{2x + 7} \right)$$

11.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} \right)$$

12.

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{-7x^4 - 21x^3}{-12x^4 + 108x^2} \right)$$

13.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 3} \right)$$

14.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{(3 + h)^3 - 27}{h} \right)$$

15.

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{(2-h)^3-8}{h}\right)$$

16.

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{(h+3)^2-9}{h}\right)$$

17.

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt{5-h}-\sqrt{5}}{h}\right)$$

18.

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)$$

19.

$$\lim_{x \to 9}\left(\frac{x^2-81}{3-\sqrt{x}}\right)$$

20.

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}\right)$$

21.

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}\right)$$

22.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-\frac{1}{4}}{2x-1}\right)$$

23.

$$\lim_{x \to 4}\left(\frac{x^3-64}{x^2-16}\right)$$

24.

$$\lim_{x \to 2^-}\left(\frac{|x-2|}{x-2}\right)$$

25.

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{|x-2|}{x-2} \right)$$

26.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{|x-2|}{x-2} \right)$$

27.

$$\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{|x-4|}{4-x} \right)$$

28.

$$\lim_{x \to 4^+} \left(\frac{|x-4|}{4-x} \right)$$

29.

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{|x-4|}{4-x} \right)$$

30.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{-8+6x-x^2}{x-2} \right)$$

Í eftirfarandi dæmi skuluð þið nota gefnar upplýsingar til að reikna markgildin: $\lim_{x \to c} f(x) = 3$, $\lim_{x \to c} g(x) = 5$.

31.

$$\lim_{x \to c} \left[2f(x) + \sqrt{g(x)} \right]$$

32.

$$\lim_{x \to c} \left[3f(x) + \sqrt{g(x)} \right]$$

33.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Reiknið markgildin í eftirfarandi dæmum.

34.

$$\lim_{x \to 2} \cos(\pi x)$$

35.

$$\lim_{x \to 2} \sin(\pi x)$$

36.

$$\lim_{x \to 2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

37.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1, & x \leq 0 \\ x - 3, & x > 0 \end{cases}; \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

38.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1, & x \leq 0 \\ x - 3, & x > 0 \end{cases}; \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

39.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1, & x \leq 0 \\ x - 3, & x > 0 \end{cases}; \lim_{x \to 0} f(x)$$

40.

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$$

41.

$$\lim_{x \to 2^+} (2x - [x])$$

42.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - x - 2}$$

43.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið finna meðalbreytingarhraðann $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

44.

$$f(x) = x + 1$$

45.

$$f(x)=2x^2-1$$

46.

$$f(x)=x^2+3x+4$$

47.

$$f(x)=x^2+4x-100$$

48.

$$f(x)=3x^2+1$$

49.

$$f(x)=\cos(x)$$

50.

$$f(x)=2x^3-4x$$

51.

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

52.

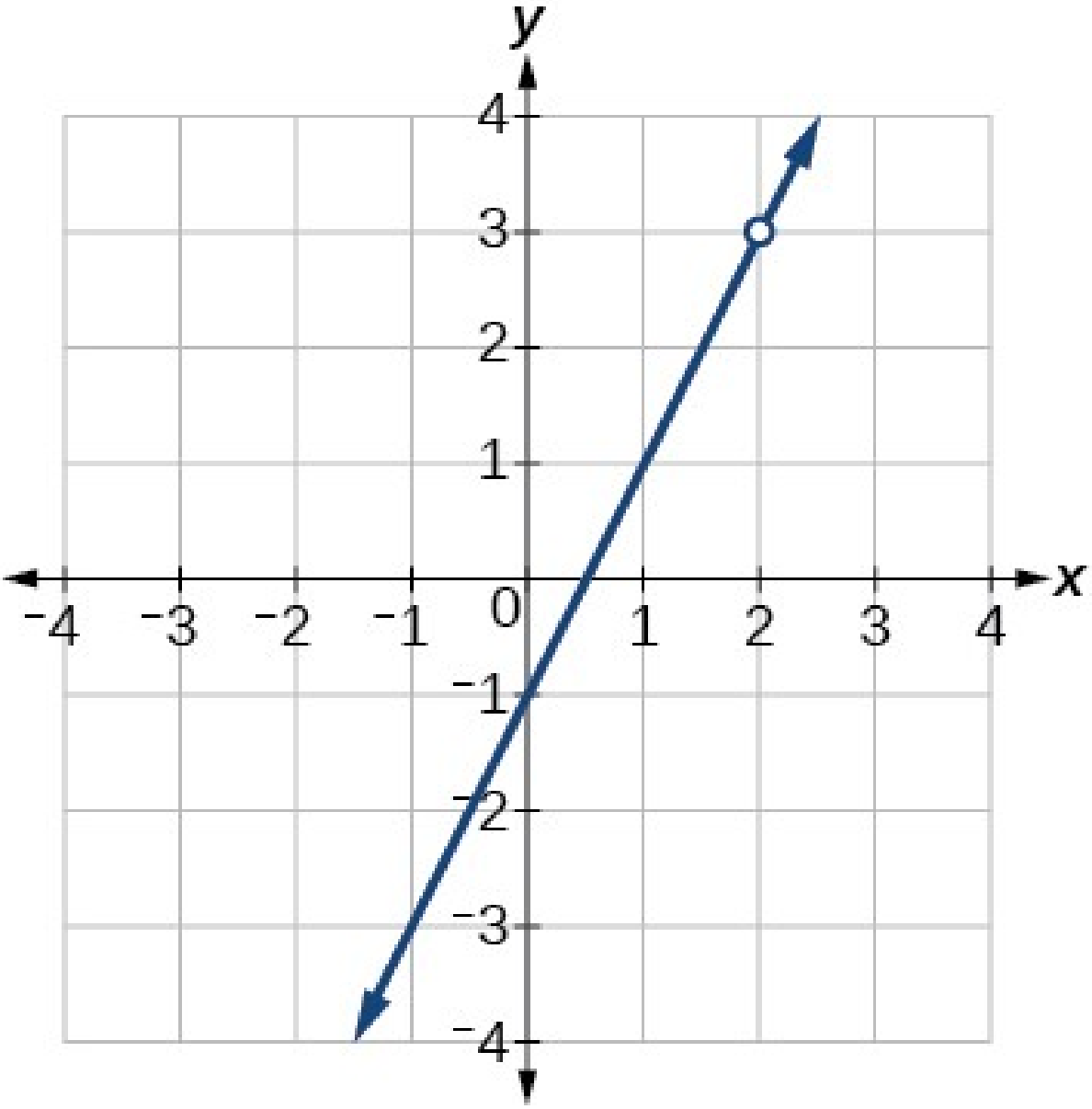
$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

53.

$$f(x)=\sqrt{x}$$

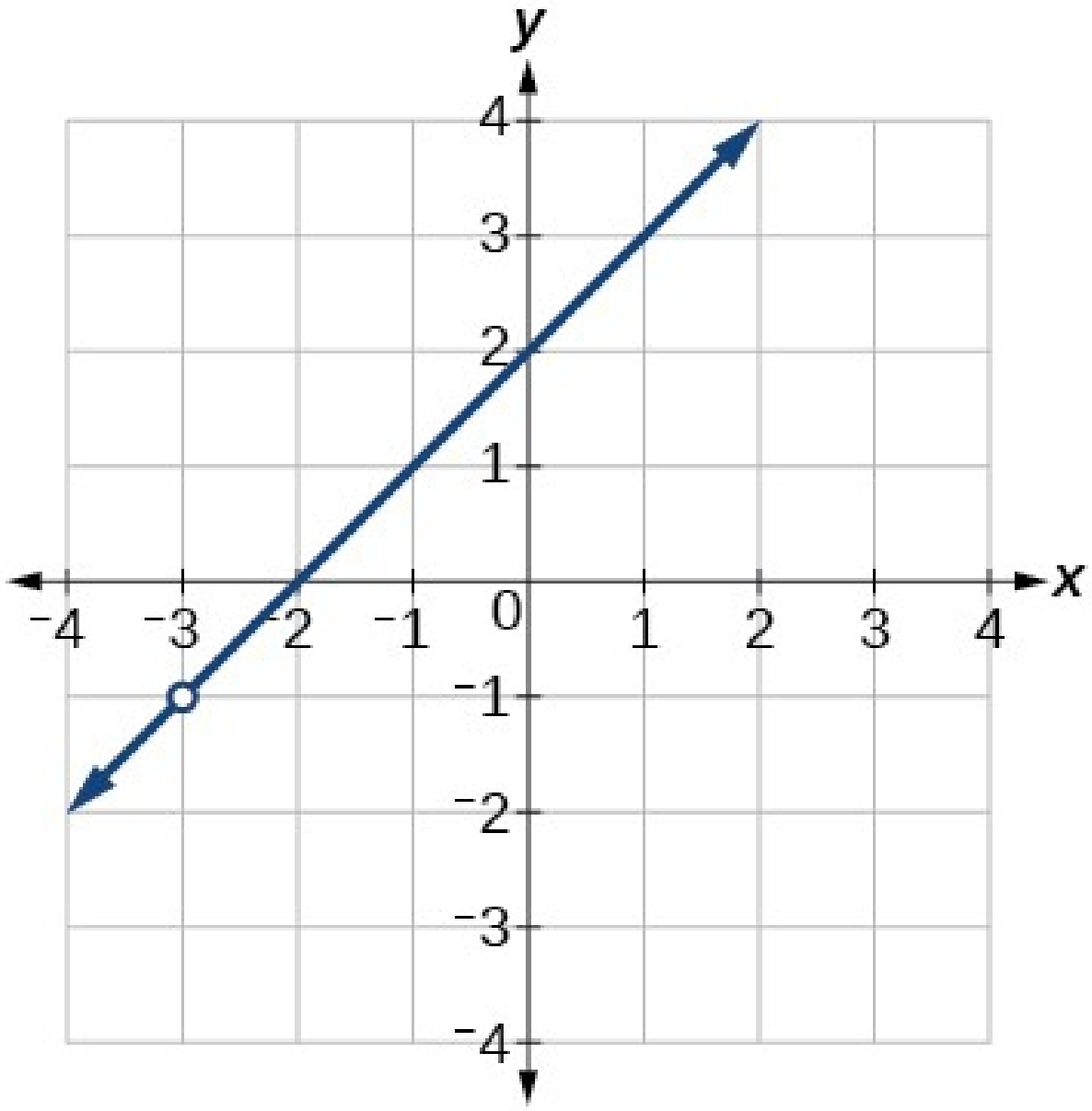
Myndræn verkefni

54. Finnið jöfnu sem gæti átt við grafið á mynd 3.



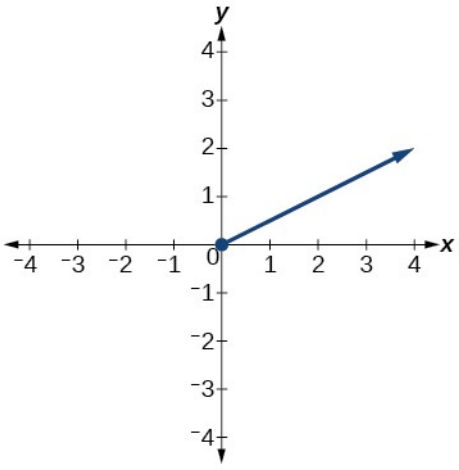
Mynd 3

55. Finnið jöfnu sem gæti átt við grafið á mynd 4.



Mynd 4

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota mynd 5.



Mynd 5

56. Hvert er markgildi fallsins frá hægri þegar x stefnir á 0?

57. Hvert er markgildi fallsins frá vinstri þegar x stefnir á 0?

Raunhæf viðfangsefni

58. Staðsetningarfallið $s(t) = -16t^2 + 144t$ gefur staðsetningu kasthlutar sem fall af tíma. Finnið meðalhraðann (meðalbreytingarhraðann) á bilinu $[1, 2]$.

59. Hæð kasthlutar er gefin með $s(t) = -64t^2 + 192t$. Finnið meðalbreytingarhraða hæðarinnar frá $t = 1$ sekúndu til $t = 1{,}5$ sekúndna.

60. Fjárhæðin á reikningi eftir t ár, með samfelldri vaxtavöxtun og 4,25% vöxtum, er gefin með formúlunni $A = A_0\, e^{0{,}0425\, t}$, þar sem A_0 er upphaflega fjárfestingin. Finnið meðalbreytingarhraða innstæðunnar frá $t = 1$ ári til $t = 2$ ára ef upphaflega fjárfestingin er $1.000,00.

12.3 Samfelldni

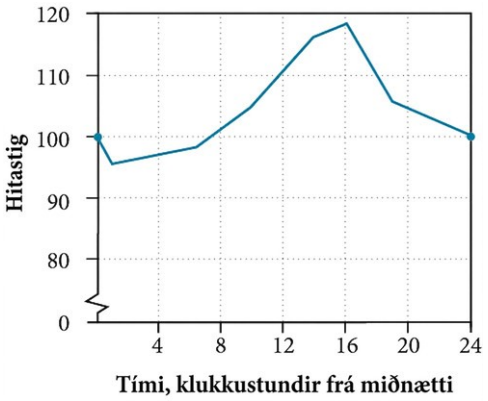
NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- ákvarða hvort fall sé samfellt við tiltekna tölu.
- finna tölurnar þar sem fall er ósamfellt.
- ákvarða hvort fall sé samfellt.

Arizona er þekkt fyrir þurran hita. Á tilteknum degi gæti hitinn farið allt upp í 118° F og aðeins lækkað niður í svalar 95° F. Mynd 1 sýnir fallið T, þar sem úttak $T(x)$ er hitastigið í

Fahrenheit-gráðum og inntakið x er tími dags á tilteknum sumardegi, gefinn miðað við 24 klukkustunda tímasnið.



Mynd 1 Hitastig sem fall af tíma myndar samfellt fall.

Þegar við greinum grafið tökum við eftir tilteknum eiginleika. Engin rof eru á grafinu. Við gætum dregið upp grafið án þess að lyfta blýantinum. Þessi eina athugun segir okkur margt um fallið. Í þessum hluta könnum við föll með og án rofa.

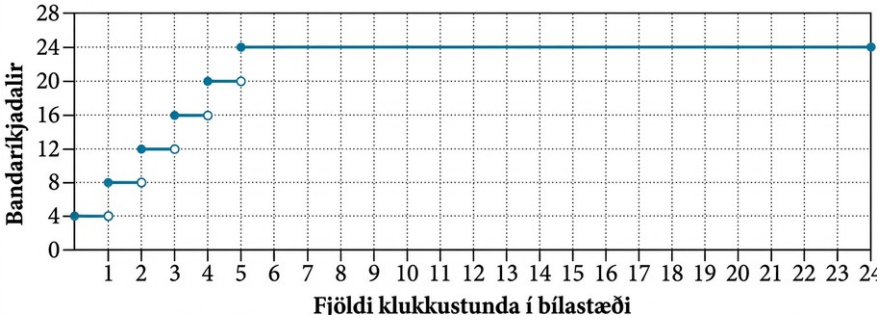
Ákvarðað hvort fall sé samfellt við tiltekna tölu

Skoðum tiltekið dæmi um hitastig á ákveðnum stað og degi, svo sem 27. júní 2013 í Phoenix í Arizona. Grafið á mynd 1 sýnir að klukkan 2 að morgni var hitinn 96° F. Klukkan 2 síðdegis hafði hitinn stigið í 116° F, og klukkan 4 síðdegis var hann 118° F. Einhvern tíma milli klukkan 2 að morgni og 4 síðdegis hlýtur útihitinn að hafa verið nákvæmlega $110{,}5^\circ$ F. Reyndar kom hvert hitastig milli 96° F og 118° F fyrir einhvern tíma þennan dag. Þetta merkir að fallið tekur á einhverjum tímapunkti öll raungildi úttaksins milli 96° F og 118° F, samkvæmt milligildissetningunni.

Skoðum mynd 1 aftur. Á þessu 24 klukkustunda tímabili eru engin rof á grafi fallsins. Hitastigið hætti aldrei að vera til og hvergi stökk það samstundis um nokkrar gráður. Fall sem hefur hvorki göt né rof á grafi sínu nefnist samfellt fall. Hitastig sem fall af tíma er dæmi um samfellt fall.

Ef hitastig er dæmi um samfellt fall, hvers konar fall væri þá ekki samfellt? Skoðum kostnað í Bandaríkjadölum sem fall af fjölda klukkustunda í bílastæði. Skilgreinum fallið D, þar sem úttakið $D(x)$ er kostnaðurinn í Bandaríkjadölum fyrir að leggja í x klukkustundir. Sjá mynd 2.

Gerum ráð fyrir að bílastæðahús rukki \$4,00 fyrir hverja klukkustund eða hluta úr klukkustund, að hámarki \$25 á dag. Sé lagt í tvær klukkustundir og fimm mínútur kostar það \$12. Sé lagt í eina klukkustund til viðbótar kostar það \$16. Kostnaðurinn getur aldrei orðið \$13, \$14 eða \$15. Milli 12 og 16 eru rauntölur sem fallið tekur aldrei. Á þessu 24 klukkustunda tímabili eru rof á grafi fallsins þar sem bílastæðagjaldið hækkar samstundis um nokkra Bandaríkjadali.

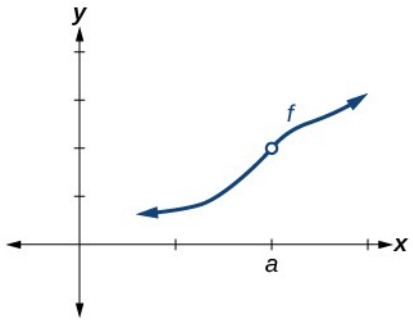


Mynd 2 Bílastæðagjöld mynda ósamfellt fall.

Fall sem helst fast á bili en stekkur síðan samstundis í hærra gildi nefnist þrepafall. Þetta fall er dæmi um slíkt fall.

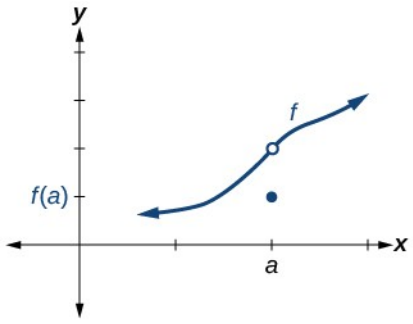
Fall sem hefur gat eða rof á grafi sínu nefnist ósamfellt fall. Þrepafall, svo sem bílastæðagjald sem fall af fjölda klukkustunda í bílastæði, er dæmi um ósamfellt fall.

Hvernig getum við þá ákvarðað hvort fall sé samfellt við tiltekna tölu? Við getum athugað þrjú skilyrði. Notum fallið $y=f(x)$ á mynd 3 sem dæmi.



Mynd 3

Skilyrði 1 Samkvæmt skilyrði 1 verður fallgildið $f(a)$ að vera skilgreint við $x=a$. Með öðrum orðum er y-hnit til við $x=a$, eins og á mynd 4.



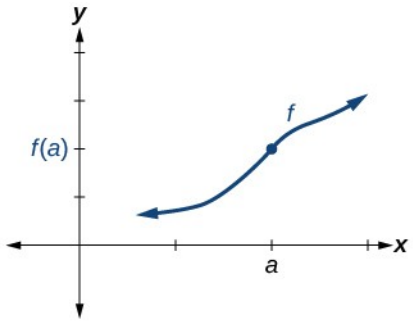
Mynd 4

Skilyrði 2 Samkvæmt skilyrði 2 verður markgildið við $x=a$, ritað $\lim_{x \to a} f(x)$, að vera til. Þetta merkir að við $x=a$ verður markgildið frá vinstri að vera jafnt markgildinu frá hægri.

Athugum á mynd 3 að þegar graf f nálgast $x=a$ frá vinstri og hægri stefnir það á sama y-hnit. Því er skilyrði 2 uppfyllt. Samt gæti enn verið gat á grafinu við $x=a$.

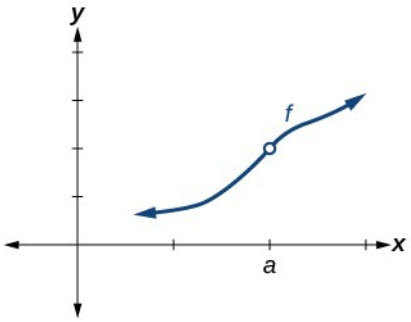
Skilyrði 3 Samkvæmt skilyrði 3 fyllir samsvarandi y-hnit við $x=a$ upp í gatið á grafi f. Þetta er ritað $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$.

Þegar öll þrjú skilyrðin eru uppfyllt er fallið samfellt. Öll þrjú skilyrðin eru uppfyllt fyrir fallið á mynd 5, svo fallið er samfellt við $x=a$.

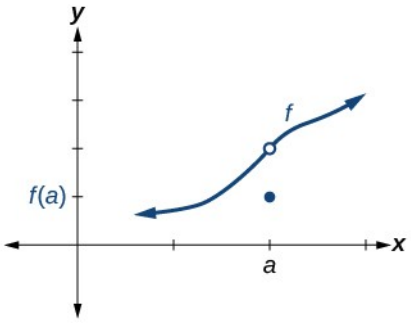


Mynd 5 Öll þrjú skilyrðin eru uppfyllt. Fallið er samfellt við $x=a$.

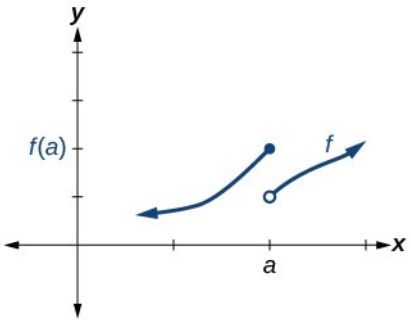
Myndir 6 til 9 sýna nokkur dæmi um gröf falla sem eru ekki samfelld við $x=a$ og hvaða skilyrði bregðast.



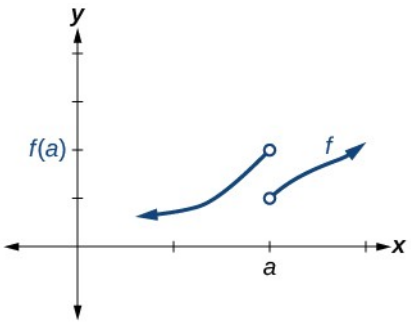
Mynd 6 Skilyrði 2 er uppfyllt. Skilyrði 1 og 3 bregðast bæði.



Mynd 7 Skilyrði 1 og 2 eru bæði uppfyllt. Skilyrði 3 bregst.



Mynd 8 Skilyrði 1 er uppfyllt. Skilyrði 2 og 3 bregðast.



Mynd 9 Skilyrði 1, 2 og 3 bregðast öll.

SKILGREINING Á SAMFELLDNI

Fall $f(x)$ er samfellt við $x=a$ ef öll þrjú skilyrðin hér á eftir eru uppfyllt:

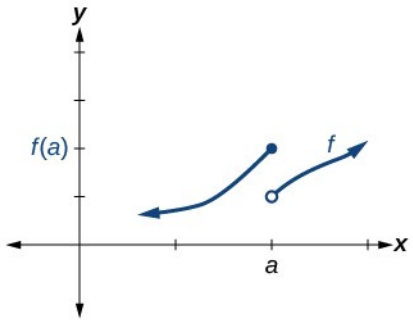
- Skilyrði 1: $f(a)$ er til.
- Skilyrði 2: $\lim_{x \to a} f(x)$ er til við $x=a$.
- Skilyrði 3: $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$.

Ef fall $f(x)$ er ekki samfellt við $x=a$, er fallið ósamfellt við $x=a$.

Borið kennsl á stökkósamfelldni

Ósamfelldni getur komið fram með ýmsum hætti. Í hlutanum á undan sáum við að fall getur haft markgildi frá vinstri og markgildi frá hægri þótt þau séu ekki jöfn. Ef bæði markgildin eru til en ólík, „stekkur“ grafið við $x=a$. Þá er sagt að fallið hafi stökkósamfelldni.

Skoðum sem dæmi graf fallsins $y=f(x)$ á mynd 10. Athugum að þegar x stefnir á a stefnir úttakið á ólík gildi frá vinstri og hægri.



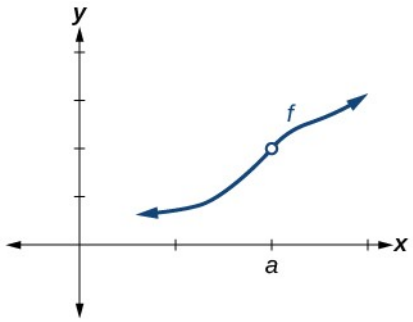
Mynd 10 Graf falls með stökkósamfelldni.

STÖKKÓSAMFELLDNI

Fall $f(x)$ hefur stökkósamfelldni við $x=a$ ef markgildin frá vinstri og hægri eru bæði til en ekki jöfn: $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Borið kennsl á afmáanlega ósamfelldni

Sum föll eru ósamfelld en unnt er að endurskilgreina fallið í ósamfelldnipunktinum þannig að það verði samfellt. Þá er sagt að fallið hafi afmáanlega ósamfelldni. Skoðum fallið $y=f(x)$ á mynd 11. Fallið hefur markgildi en gat er á grafinu við $x=a$. Fylla má upp í gatið með því að víkka skilgreiningarmengið svo það innihaldi inntakið $x=a$ og skilgreina samsvarandi úttak fallsins sem markgildi fallsins við $x=a$.



Mynd 11 Graf fallsins f með afmáanlega ósamfelldni við $x=a$.

AFMÁANLEG ÓSAMFELLDNI

Fall $f(x)$ hefur afmáanlega ósamfelldni við $x=a$ ef markgildið $\lim_{x \to a} f(x)$, er til en annaðhvort

1. $f(a)$ er ekki til eða
2. $f(a)$, gildi fallsins við $x=a$, er ekki jafnt markgildinu, $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$.

SÝNIDÆMI 1

Ósamfelldnipunktar fundnir

Finnið alla ósamfelldnipunkta fallanna hér á eftir og flokkið hvern þeirra sem stökkósamfelldni eða afmáanlega ósamfelldni.

1. ⓐ $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x-5}$
2. ⓑ $g(x)=\begin{cases} x+1, & x<2 \\ -x, & x \geq 2 \end{cases}$

Lausn

1. ⓐ

   Athugum að fallið er skilgreint alls staðar nema þegar $x=5$.

   Því er $f(5)$ ekki til og skilyrði 2 er ekki uppfyllt. Þar sem skilyrði 1 er uppfyllt er markgildið þegar x stefnir á 5 jafnt 8, en skilyrði 2 er ekki uppfyllt. Því er afmáanleg ósamfelldni við $x=5$.

2. ⓑ

   Skilyrði 2 er uppfyllt því $g(2)=-2$.

   Athugum að fallið er kaflaskipt og hver grein þess er skilgreind alls staðar á sínu skilgreiningarmengi. Skoðum skilyrði 1 með því að finna markgildin frá vinstri og hægri þegar x stefnir á 2.

   Markgildi frá vinstri: $\lim_{x \to 2^-} (x+1)=2+1=3$. Markgildið frá vinstri er til.

Markgildi frá hægri: $\lim_{x \to 2^+}(-x) = -2$. Markgildið frá hægri er til. En $\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Því er $\lim_{x \to 2} f(x)$ ekki til og skilyrði 2 bregst: ósamfelldnin er ekki afmáanleg. Þar sem markgildin frá vinstri og hægri eru hins vegar bæði til en ekki jöfn eru skilyrði stökkósamfelldni uppfyllt við $x = 2$.

REYNIÐ SJÁLF #1

Finnið alla ósamfelldnipunkta fallanna hér á eftir og flokkið hvern þeirra sem stökkósamfelldni eða afmáanlega ósamfelldni.

1. ⓐ $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x - 6}$

2. ⓑ $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4 \\ 2x, & x \geq 4 \end{cases}$

Samfelld og ósamfelld föll með raungildi

Mörg fallanna sem við höfum séð í fyrri köflum eru samfelld alls staðar. Þau hafa aldrei gat og stökkva aldrei úr einu gildi í annað. Fyrir öll þessi föll er markgildi $f(x)$ þegar x stefnir á a hið sama og gildi $f(x)$ þegar $x = a$. Því er $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Sum föll eru samfelld alls staðar. Önnur eru ekki skilgreind fyrir allar rauntölur og eru því aðeins samfelld þar sem þau eru skilgreind.

DÆMI UM SAMFELLD FÖLL

Eftirfarandi föll eru samfelld alls staðar:

Tafla 1

Margliðuföll	Dæmi: $f(x) = x^4 - 9x^2$
Vísisföll	Dæmi: $f(x) = 4^{x+2} - 5$
Sínusföll	Dæmi: $f(x) = \sin(2x) - 4$
Kósínusföll	Dæmi: $f(x) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Eftirfarandi föll eru samfelld alls staðar þar sem þau eru skilgreind:

Tafla 2

Lograföll	Dæmi: $f(x)=2\ln(x)$, $x>0$
Tangensföll	Dæmi: $f(x)=\tan(x)+2$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, þar sem k er heiltala
Ræð föll	Dæmi: $f(x)=\frac{x^2-25}{x-7}$, $x\neq 7$

AÐFERÐ

Ákvarðið hvort fallið $f(x)$, sé samfellt við $x=a$.

1. Athugið skilyrði 1: $f(a)$ er til.
2. Athugið skilyrði 2: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ er til við $x=a$.
3. Athugið skilyrði 3: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
4. Ef öll þrjú skilyrðin eru uppfyllt er fallið samfellt við $x=a$. Ef eitthvert skilyrðanna er ekki uppfyllt er fallið ekki samfellt við $x=a$.

SÝNIDÆMI 2

Ákvarðað hvort kaflaskipt fall sé samfellt við gefna tölu

Ákvarðið hvort fallið $f(x)=\begin{cases}4x, & x\leq 3\\ 8+x, & x>3\end{cases}$ sé samfellt við

1. ⓐ $x=3$
2. ⓑ $x=\frac{8}{3}$

Lausn

Til að ákvarða hvort fallið f sé samfellt við $x=a$, athugum við hvort samfelldniskilyrðin þrjú séu uppfyllt við $x=a$.

- ⓐ

  Skilyrði 1: Er $f(a)$ til?

  $f(3)=4(3)=12$

  $\Rightarrow$ Skilyrði 1 er uppfyllt.

  Skilyrði 2: Er $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ til?

  Vinstra megin við $x=3$, er $f(x)=4x$; hægra megin við $x=3$, er $f(x)=8+x$. Við þurfum að reikna markgildin frá vinstri og hægri þegar x stefnir á 1.

  – Markgildi frá vinstri: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 4(3)=12$

– Markgildi frá hægri: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (8+x) = 8+3 = 11$

Þar sem $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$, er $\lim_{x \to 3} f(x)$ ekki til.

⇒ Skilyrði 2 bregst.

Ekki þarf að halda lengra. Skilyrði 2 bregst við $x=3$. Ef eitthvert samfelldniskilyrðanna er ekki uppfyllt við $x=3$, er fallið $f(x)$ ekki samfellt við $x=3$.

- ⓑ

$x=\frac{8}{3}$

Skilyrði 1: Er $f\left(\frac{8}{3}\right)$ til?

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = 4\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

⇒ Skilyrði 1 er uppfyllt.

Skilyrði 2: Er $\lim_{x \to \frac{8}{3}} f(x)$ til?

Vinstra megin við $x=\frac{8}{3}$, er $f(x)=4x$; hægra megin við $x=\frac{8}{3}$, er $f(x)=8+x$. Við þurfum að reikna markgildin frá vinstri og hægri þegar x stefnir á $\frac{8}{3}$.

– Markgildi frá vinstri: $\lim_{x \to \frac{8}{3}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{8}{3}^-} 4\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$

– Markgildi frá hægri:

$$\lim_{x \to \frac{8}{3}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{8}{3}^+} (8+x) = 8+\frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

Þar sem $\lim_{x \to \frac{8}{3}} f(x)$ er til,

⇒ Skilyrði 2 er uppfyllt.

Skilyrði 3: Gildir $f\left(\frac{8}{3}\right) = \lim_{x \to \frac{8}{3}} f(x)$?

$$f\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{32}{3} = \lim_{x \to \frac{8}{3}} f(x)$$

⇒ Skilyrði 3 er uppfyllt.

Þar sem öll samfelldniskilyrðin þrjú eru uppfyllt við $x=\frac{8}{3}$, er fallið $f(x)$ samfellt við $x=\frac{8}{3}$.

REYNIÐ SJÁLF #2

Ákvarðið hvort fallið $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\leq 2\\ 9x-11{,}5, & x>2\end{cases}$ sé samfellt við $x=2$.

SÝNIDÆMI 3

Ákvarðað hvort rætt fall sé samfellt við gefna tölu

Ákvarðið hvort fallið $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ sé samfellt við $x=5$.

Lausn

Til að ákvarða hvort fallið f sé samfellt við $x=5$, athugum við hvort samfelldniskilyrðin þrjú séu uppfyllt við $x=5$.

Skilyrði 1:

$$f(5) \text{ er ekki til.}$$
$$\Rightarrow \text{Skilyrði 1 er ekki uppfyllt.}$$

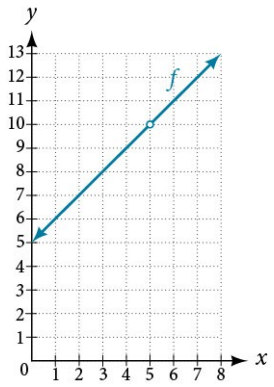
Ekki þarf að halda lengra. Skilyrði 2 bregst við $x=5$. Ef eitthvert samfelldniskilyrðanna er ekki uppfyllt við $x=5$, er fallið f ekki samfellt við $x=5$.

Greining

Sjá mynd 12. Athugum að fyrir skilyrði 2 höfum við

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to 5}(x+5)$$
$$=5+5=10$$
$$\Rightarrow \text{Skilyrði 2 er uppfyllt.}$$

Við $x=5$, er afmáanleg ósamfelldni. Sjá mynd 12.



Mynd 12

REYNIÐ SJÁLF #3

Ákvarðið hvort fallið $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x^2-3x}$ sé samfellt við $x=3$. Ef svo er ekki, tilgreinið þá gerð ósamfelldninnar.

Inntaksgildi þar sem fall er ósamfellt fundin

Nú þegar við getum borið kennsl á samfelld föll, stökkósamfelldni og afmáanlega ósamfelldni skoðum við flóknari föll og finnum ósamfelldnipunkta þeirra. Hér greinum við kaflaskipt fall til að ákvarða hvort til séu rauntölur þar sem fallið er ekki samfellt. Kaflaskipt fall getur verið ósamfellt bæði við skilpunkta þess og innan fallanna sem mynda það.

Til að finna rauntölurnar þar sem kaflaskipt fall úr margliðuföllum er ekki samfellt munum við að margliðuföll eru sjálf samfelld á mengi rauntalna. Öll ósamfelldni væri því við skilpunktana. Við þurfum þess vegna að kanna samfelldniskilyrðin þrjú við skilpunkta kaflaskipta fallsins.

AÐFERÐ

Ákvarðið hvort kaflaskipt fall sé samfellt við skilpunkta þess.

1. Fyrir hvern skilpunkt a kaflaskipta fallsins skuluð þið finna markgildin frá vinstri og hægri þegar x stefnir á a, og fallgildið við a.
2. Athugið hvert skilyrði fyrir hvert gildi og ákvarðið hvort öll þrjú séu uppfyllt.
3. Ákvarðið hvort hvert gildi uppfylli skilyrði 1: $f(a)$ er til.
4. Ákvarðið hvort hvert gildi uppfylli skilyrði 2: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ er til.
5. Ákvarðið hvort hvert gildi uppfylli skilyrði 3: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
6. Ef öll þrjú skilyrðin eru uppfyllt er fallið samfellt við $x=a$. Ef eitthvert skilyrðanna bregst er fallið ekki samfellt við $x=a$.

SÝNIDÆMI 4

Inntaksgildi þar sem kaflaskipt fall er ósamfellt fundin

Ákvarðið hvort fallið f sé ósamfellt fyrir einhverjar rauntölur.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 3, & 2 \leq x < 4 \\ x^2 - 11, & x \geq 4 \end{cases}$$

Lausn

Kaflaskipta fallið er skilgreint með þremur föllum sem öll eru margliðuföll: $f(x)=x+1$ þegar $x<2$, $f(x)=3$ þegar $2\leq x<4$, og $f(x)=x^2-5$ þegar $x\geq 4$. Margliðuföll eru samfelld alls staðar. Öll ósamfelldni væri við skilpunktana $x=2$ og $x=4$.

Við $x=2$, skulum við athuga samfelldniskilyrðin þrjú.

Skilyrði 1:

$$f(2)=3$$
$$\Rightarrow \text{Skilyrði 1 er uppfyllt.}$$

Skilyrði 2: Þar sem ólík föll skilgreina úttakið vinstra og hægra megin við $x=2$, gildir þá $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$?

- Markgildi frá vinstri: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$
- Markgildi frá hægri: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 3=3$

Þar sem $3=3$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

$$\Rightarrow \text{Skilyrði 2 er uppfyllt.}$$

Skilyrði 3:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=3=f(2)$$
$$\Rightarrow \text{Skilyrði 3 er uppfyllt.}$$

Þar sem öll þrjú skilyrðin eru uppfyllt við $x=2$, er fallið $f(x)$ samfellt við $x=2$.

Við $x=4$, skulum við athuga samfelldniskilyrðin þrjú.

Skilyrði 2: Þar sem ólík föll skilgreina úttakið vinstra og hægra megin við $x=4$, gildir þá $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$?

- Markgildi frá vinstri: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} 3=3$
- Markgildi frá hægri: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}(x^2-11)=4^2-11=5$

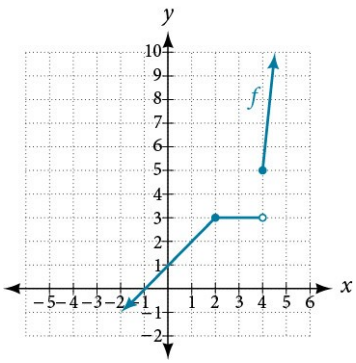
Þar sem $3 \neq 5$ gildir $\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x)$, og því er $\lim_{x \to 4} f(x)$ ekki til.

$$\Rightarrow \text{Skilyrði 2 bregst}.$$

Þar sem eitt skilyrðanna þriggja er ekki uppfyllt við $x = 4$, er fallið $f(x)$ ósamfellt við $x = 4$.

Greining

Sjá mynd 13. Við $x = 4$, er stökkósamfelldni. Athugum að fallið er samfellt við $x = 2$.



Mynd 13 Grafið er samfellt við $x = 2$ en hefur stökkósamfelldni við $x = 4$.

REYNIÐ SJÁLF #4

Ákvarðið hvar fallið $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{4}, & x < 2 \\ \frac{\pi}{x}, & 2 \leq x \leq 6 \\ 2\pi x, & x > 6 \end{cases}$ er ósamfellt.

Ákvarðað hvort fall sé samfellt

Til að ákvarða hvort kaflaskipt fall sé samfellt eða ósamfellt þurfum við að athuga skilpunktana. Auk þess þurfum við að athuga hvort hvert fallanna sem mynda kaflaskipta fallið sé samfellt.

AÐFERÐ

Ákvarðið hvort kaflaskipt fall sé samfellt.

1. Ákvarðið hvort hvert hlutafall kaflaskipta fallsins sé samfellt. Ef ósamfelldni er til staðar, er hún þá innan skilgreiningarmengisins þar sem hlutafallið gildir?
2. Fyrir hvern skilpunkt $x = a$ kaflaskipta fallsins skuluð þið ákvarða hvort hvert skilyrðanna þriggja sé uppfyllt.

SÝNIDÆMI 5

Ákvarðað hvort kaflaskipt fall sé samfellt

Ákvarðið hvort fallið hér á eftir sé samfellt. Ef svo er ekki, tilgreinið þá hvar hver ósamfelldni er og af hvaða gerð hún er.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x < 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$$

Lausn

Föllin tvö sem mynda þetta kaflaskipta fall eru $f(x)=\sin(x)$ þegar $x<0$ og $f(x)=x^3$ þegar $x>0$. Sínusfallið og öll margliðuföll eru samfelld alls staðar. Öll ósamfelldni væri við skilpunktinn

Við $x=0$, skulum við athuga samfelldniskilyrðin þrjú.

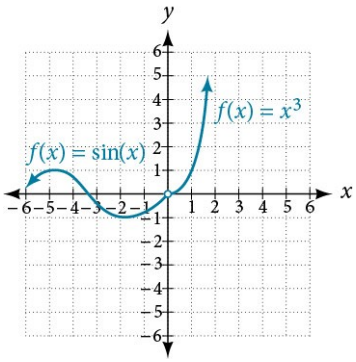
Skilyrði 1:

$$f(0) \text{ er ekki til.}$$
$$\Rightarrow \text{Skilyrði 1 er ekki uppfyllt.}$$

Þar sem skilyrðin þrjú eru ekki öll uppfyllt við $x=0$, er fallið $f(x)$ ósamfellt við $x=0$.

Greining

Sjá mynd 14. Afmáanleg ósamfelldni er við $x=0$; $\lim_{x \to 0} f(x)=0$, svo markgildið er til og endanlegt en $f(a)$ er ekki til.



Mynd 14 Fallið hefur afmáanlega ósamfelldni við 0.

NÁMSEFNI

Skoðið þessi vefgögn til að fá frekari leiðbeiningar og æfingu í samfelldni.

- Samfelldni í punkti
- Samfelldni í punkti: athugun á hugtakaskilningi

12.3 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Lýsið með eigin orðum hvað felst í því að fall f sé samfellt við $x=c$.

2. Lýsið með eigin orðum hvað felst í því að fall sé samfellt á bilinu (a,b).

Algebruverkefni

Í dæmunum hér á eftir skuluð þið ákvarða hvers vegna fallið f er ósamfellt í gefnum punkti a á grafinu. Tilgreinið hvaða skilyrði bregst.

3. $$f(x)=\ln|x+3|, a=-3$$

4. $$f(x)=\ln\left|5x-2\right|, a=\frac{2}{5}$$

5. $$f(x)=\frac{x^2-16}{x+4}, a=-4$$

6. $$f(x)=\frac{x^2-16x}{x}, a=0$$

7. $$f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 3\\ 2x, & x=3\end{cases} a=3$$

8. $$f(x)=\begin{cases}5, & x\neq 0\\ 3, & x=0\end{cases} a=0$$

9. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x}, & x\neq 2\\ 3, & x=2\end{cases} a=2$$

10. $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+6}, & x=-6\\ x^2, & x\neq -6\end{cases} a=-6$$

11.

$$f(x)=\begin{cases}3+x, & x<1\\ x, & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases} \quad a=1$$

12.

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<1\\ x, & x=1\\ 2x^2, & x>1\end{cases} \quad a=1$$

13.

$$f(x)=\begin{cases}3+2x, & x<1\\ x, & x=1\\ -x^2, & x>1\end{cases} \quad a=1$$

14.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<-2\\ 2x+1, & x=-2\\ x^3, & x>-2\end{cases} \quad a=-2$$

15.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3}, & x<-3\\ x-9, & x=-3\\ \frac{1}{x}, & x>-3\end{cases} \quad a=-3$$

16.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x+3}, & x<-3\\ x-9, & x=-3\\ -6, & x>-3\end{cases} \quad a=3$$

17.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, a=2$$

18.

$$f(x)=\frac{25-x^2}{x^2-10x+25}, a=5$$

19.

$$f(x)=\frac{x^3-9x}{x^2+11x+24}, a=-3$$

20.

$$f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-3x}, a=3$$

21.

$$f(x)=\frac{x}{|x|}, a=0$$

22.

$$f(x)=\frac{2|x+2|}{x+2}, a=-2$$

Í dæmunum hér á eftir skuluð þið ákvarða hvort gefna fallið f sé samfellt alls staðar. Ef það er samfellt alls staðar þar sem það er skilgreint, tilgreinið þá á hvaða mengi það er samfellt. Ef það er ósamfellt, tilgreinið hvar.

23.

$$f(x)=x^3-2x-15$$

24.

$$f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x-5}$$

25.

$$f(x)=2\cdot 3^{x+4}$$

26.

$$f(x)=-sin(3x)$$

27.

$$f(x)=\frac{|x-2|}{x^2-2x}$$

28.

$$f(x)=\tan(x)+2$$

29.

$$f(x)=2x+\frac{5}{x}$$

30.

$$f(x)=\log_2(x)$$

31.

$$f(x)=\ln x^2$$

32.

$$f(x)=e^{2x}$$

33.

$$f(x)=\sqrt{x-4}$$

34. $f(x)=sec(x)-3.$

35.

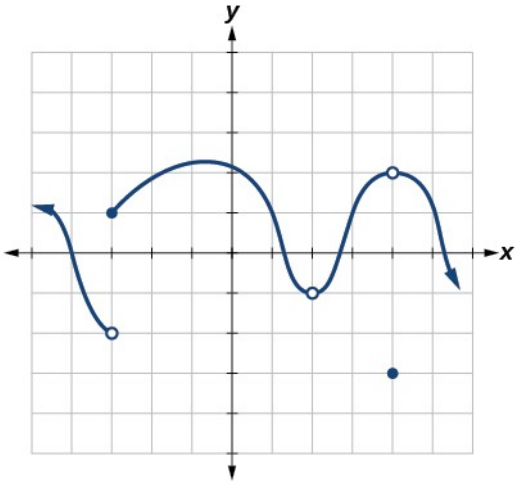
$$f(x)=x^2+\sin(x)$$

36. Finnið gildi b og c þannig að eftirfarandi fall sé samfellt á allri rauntalnalínunni.

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 1<x<3\\ x^2+bx+c, & |x-2|\geq 1\end{cases}$$

Myndræn verkefni

Í dæmunum hér á eftir skuluð þið nota mynd 15. Hver reitur táknar eina ferningseiningu. Fyrir hvert gildi a, skuluð þið ákvarða hvaða samfelldniskilyrðanna þriggja eru uppfyllt við $x=a$ og hvaða skilyrði eru það ekki.



Mynd 15

37.

$$x=-3$$

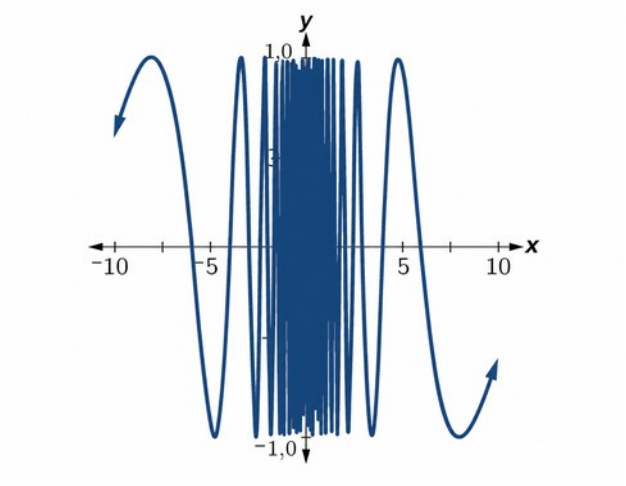
38.

$$x=2$$

39.

$$x=4$$

Í dæmunum hér á eftir skuluð þið nota grafteikniforrit til að teikna graf fallsins $f(x)=\sin\left(\frac{12\pi}{x}\right)$ eins og á mynd 16. Stillið x-ásinn á stutt bil hvorum megin við 0 til að sýna ósamfelldnipunktinn.



Mynd 16

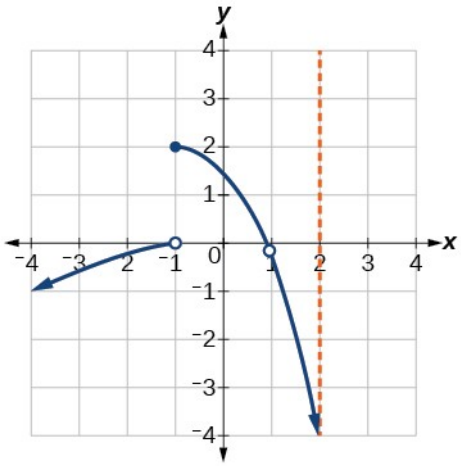
40. Hvaða samfelldniskilyrði bregðast í ósamfelldnipunktinum?

41. Reiknið $f(0)$.

42. Finnið x ef $f(x)=0$.

43. Hvert er skilgreiningarmengi $f(x)$?

Í dæmunum hér á eftir skuluð þið skoða fallið á mynd 17.

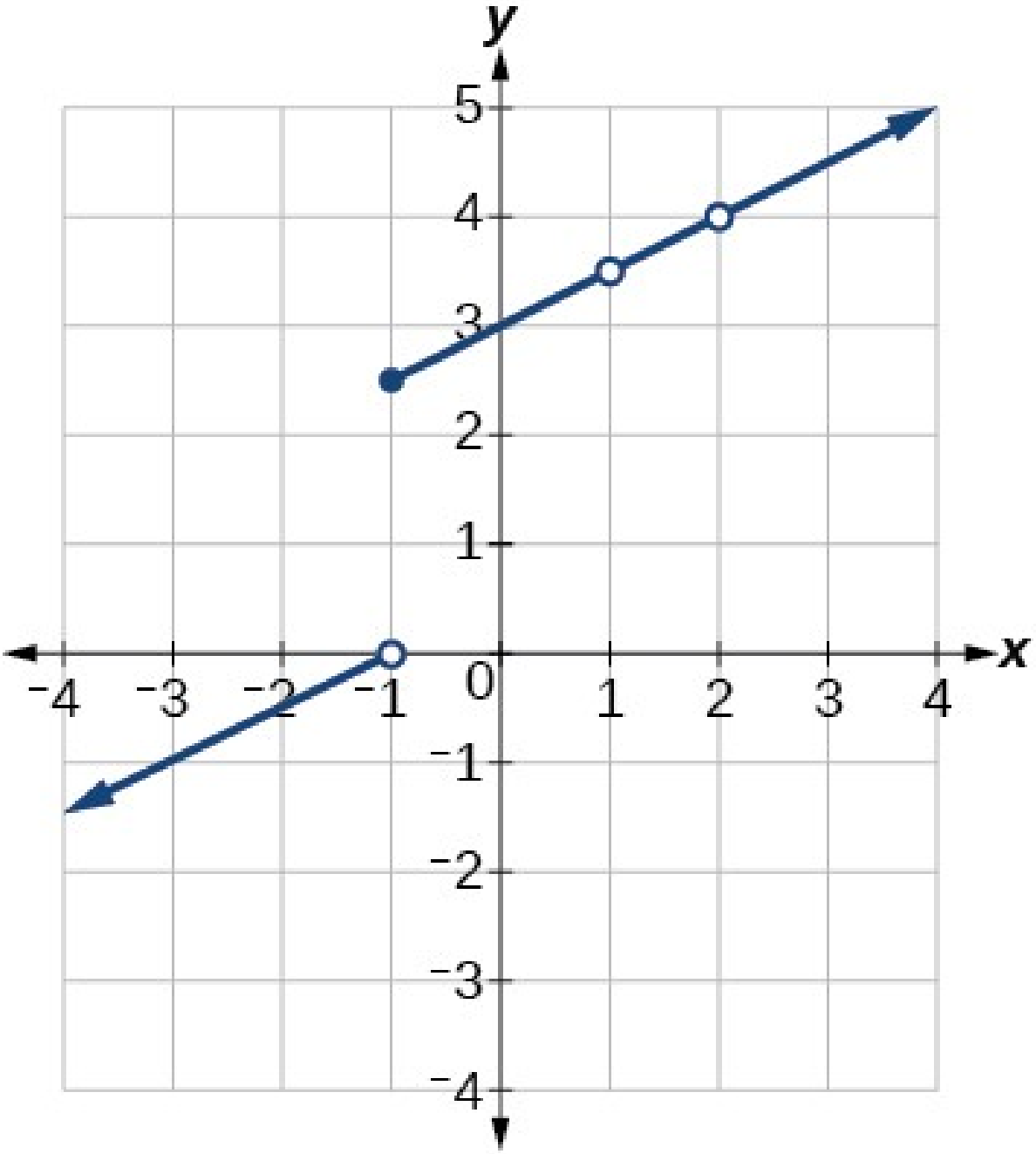


Mynd 17

44. Við hvaða x-hnit er fallið ósamfellt?

45. Hvaða samfelldniskilyrði er ekki uppfyllt í þessum punktum?

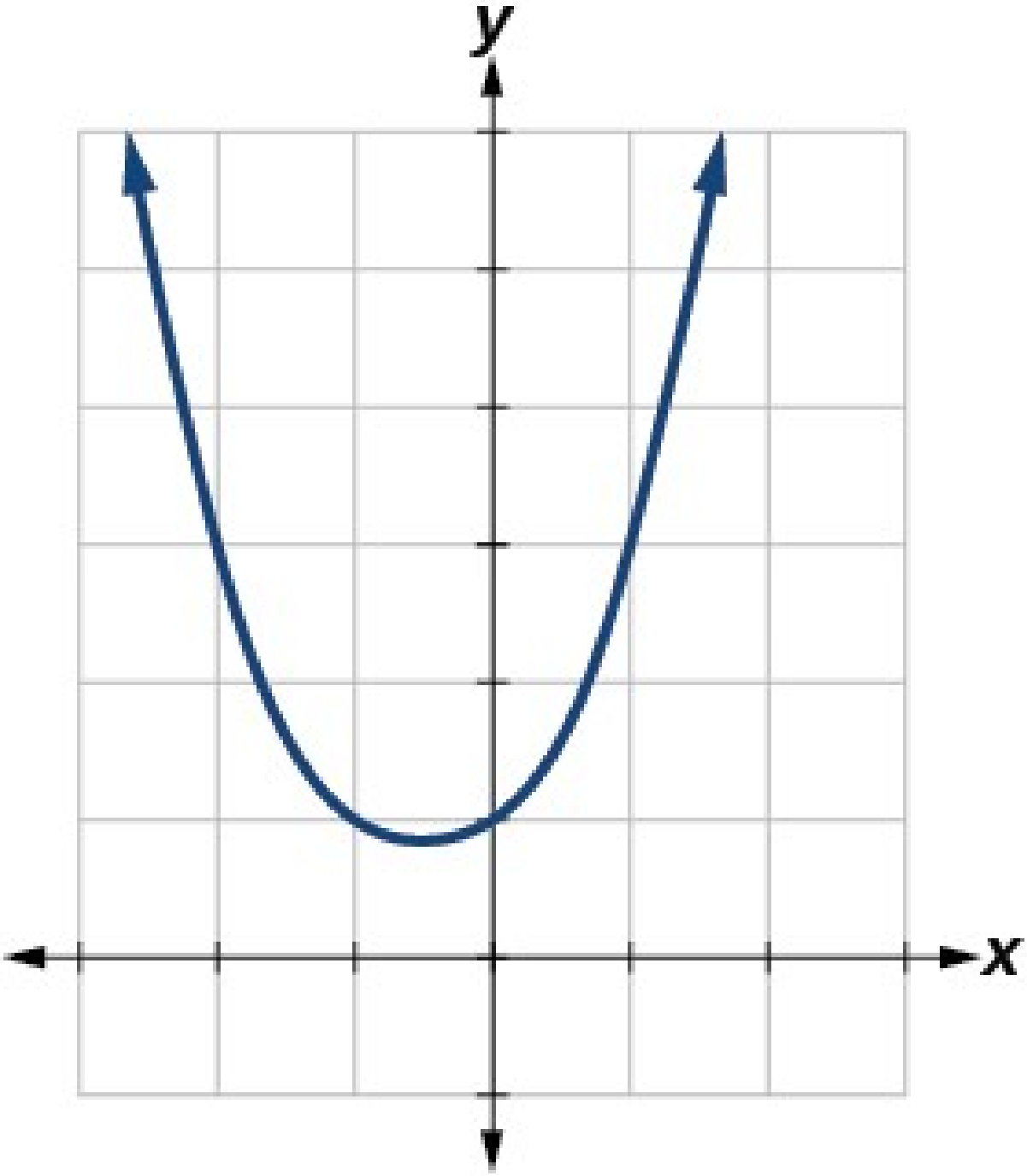
46. Skoðið fallið á mynd 18. Við hvaða x-hnit er fallið ósamfellt? Hvaða samfelldniskilyrði voru brotin?



Mynd 18

47. Búið til fall sem liggur í gegnum upphafspunktinn með fasta hallatölu 1 og hefur afmáanlega ósamfelldni við $x=-7$ og $x=1$.

48. Fallið $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ er teiknað á mynd 19. Það virðist samfellt á bilinu $[-3,3]$, en á bilinu er x-gildi þar sem fallið er ósamfellt. Finnið gildið x þar sem fallið er ósamfellt og útskýrið hvaða hætta fylgir því að treysta á tæknina þegar samfelldni falls er metin út frá grafi þess.

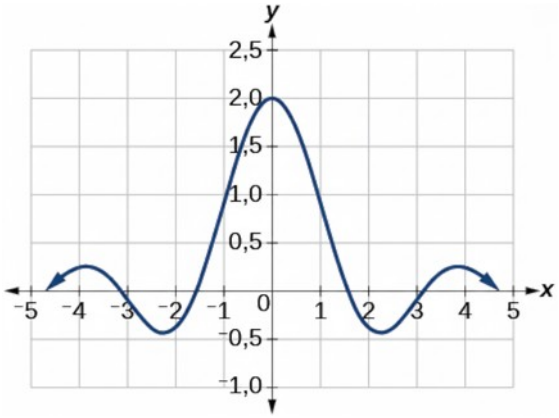


Mynd 19

49. Finnið markgildið $\lim_{x \to 1} f(x)$ og ákvarðið hvort eftirfarandi fall sé samfellt við $x = 1$:

$$fx = \begin{cases} x^2 + 4 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

50. Graf fallsins $f(x) = \frac{\sin(2x)}{x}$ er sýnt á mynd 20. Er fallið $f(x)$ samfellt við $x = 0$? Hvers vegna eða hvers vegna ekki?



Mynd 20

12.4 Afleiður

NÁMSMARKMIÐ

Í þessum hluta lærið þið að:

- finna afleiðu falls.
- finna augnabliksbreytingarhraða.
- finna jöfnu snertils við graf falls í punkti.
- finna augnablikshraða agnar.

Notkun tækja og miðla breytist mishratt hjá ólíkum hópum fólks. Fjarskipta- og tæknifyrirtæki, markaðsfólk, kennarar og talsmenn þeirra fylgjast grannt með þróun og óskum. Samkvæmt gögnum frá Pew Research Center jókst hlutfall aldamótakynslóðarinnar sem á snjallsíma aðeins um eitt prósentustig frá 2018 til 2019 (úr 92% í 93%). Hjá fólki eldra en 74 ára hækkaði hlutfallið hins vegar úr 30% í 40% á sama tímabili.

Önnur þróun í tækjaeign og -notkun getur verið ólík eftir kynslóðum. Frá 2018 til 2019 lækkaði hlutfall aldamótakynslóðarinnar sem á spjaldtölvu úr 64% í 52%. Á sama tímabili stóð hlutfall eftirstríðskynslóðarinnar sem á spjaldtölvu nákvæmlega í stað í 52%. Hjá hópnum 74 ára og eldri jókst spjaldtölvueign úr 25% í 33%. [2]

2

2https://www.pewresearch.org/fact-tank/2019/09/09/us-generations-technology-use/

Hvað eiga þessar aðstæður sameiginlegt? Föllin sem lýsa þeim hafa breyst með tíma. Í þessum hluta skoðum við aðferðir til að reikna slíkar breytingar yfir tíma.

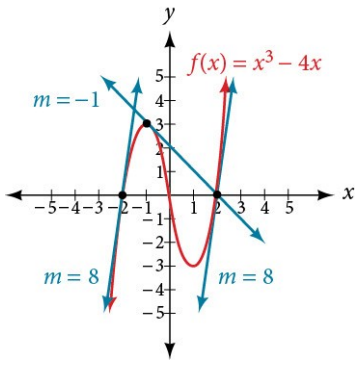
Meðalbreytingarhraði falls fundinn

Föllin sem lýsa dæmunum hér á undan fela í sér breytingu með tíma. Breyting deilt með tíma er eitt dæmi um hraða. Breytingarhraðinn er ólíkur eftir dæmum: sumt breyttist hraðar en annað. Ef við teiknuðum gröf fallanna gætum við borið hraðana saman með því að ákvarða hallatölur grafanna.

Snertill við feril er lína sem sker ferilinn aðeins í einum punkti en fer ekki yfir hann þar. (Snertillinn getur skorið ferilinn aftur í öðrum punkti fjarri punktinum sem verið er að skoða.) Ef ferillinn er stækkaður upp í grennd við punktinn virðist hann línulegur og halli ferilsins í punktinum er nærri hallatölu snertilsins þar.

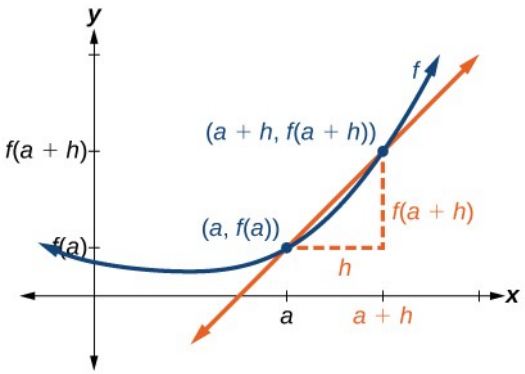
Mynd 1 sýnir fallið $f(x)=x^3-4x$. Við sjáum hallann í ýmsum punktum á ferlinum.

- hallinn við $x=-2$ er 8
- hallinn við $x=-1$ er -1
- hallinn við $x=2$ er 8



Mynd 1 Graf sem sýnir snertla við ferilinn þegar x er −2, −1 og 2.

Hugsum okkur punkt á ferli fallsins f við $x=a$, eins og sýnt er á mynd 2. Hnit punktsins eru $(a, f(a))$. Tengjum þennan punkt við annan punkt á ferlinum örlítið hægra megin við $x=a$, þar sem x-gildið hefur hækkað um einhverja litla rauntölu h. Hnit síðari punktsins eru $(a+h, f(a+h))$ fyrir eitthvert jákvætt h.



Mynd 2 Með því að tengja punktinn a við punkt örlítið hægra megin getum við mælt halla sem er nærri halla snertilsins við $x=a$.

Við getum reiknað hallatölu línunnar sem tengir punktana tvo $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$, og nefnist sniðill, með hallatöluformúlunni:

$$\text{hallatala} = \frac{\text{breyting á } y}{\text{breyting á } x}$$

Við táknum hallatölu sniðilsins sem tengir punktana tvo með m_{sec}.

$$\begin{aligned} m_{\text{sec}} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-(a)} \\ &= \frac{f(a+h)-f(a)}{\cancel{a}+h-\cancel{a}} \end{aligned}$$

Hallatalan m_{sec} er jöfn meðalbreytingarhraðanum milli punktanna tveggja $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$.

$$m_{sec} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

MEÐALBREYTINGARHRAÐI MILLI TVEGGJA PUNKTA Á FERLI

Meðalbreytingarhraðinn milli punktanna tveggja $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ á ferli f er hallatala línunnar sem tengir punktana og er gefinn með

$$\text{MBR} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

SÝNIDÆMI 1

Meðalbreytingarhraði fundinn

Finnið meðalbreytingarhraðann milli punktanna $(2, -6)$ og $(-1, 5)$.

Lausn

Við vitum að meðalbreytingarhraðinn milli tveggja punkta er gefinn með

$$\text{MBR} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ef annar punkturinn er $(2, -6)$, eða $(2, f(2))$, þá er $f(2) = -6$.

Gildið h er hliðrunin frá 2 til -1, og er því $-1-2 = -3$.

Fyrir hinn punktinn er $f(a+h)$ y-hnitið við $a+h$, sem er $2+(-3)$ eða -1, og því er $f(a+h) = f(-1) = 5$.

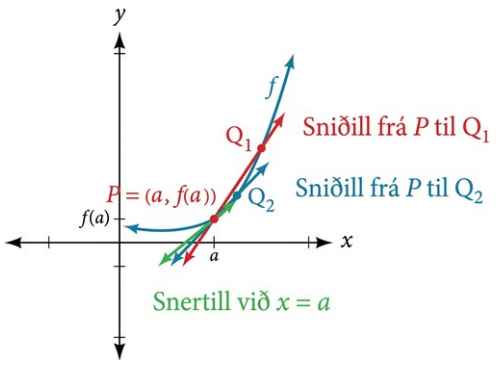
$$\begin{aligned}\text{MBR} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \frac{5-(-6)}{-3} \\ &= \frac{11}{-3} \\ &= -\frac{11}{3}\end{aligned}$$

REYNIÐ SJÁLF #1

Finnið meðalbreytingarhraðann milli punktanna $(-5;1{,}5)$ og $(-2{,}5;9)$.

Augnabliksbreytingarhraði skilinn

Nú getum við fundið meðalbreytingarhraða. Gerum ráð fyrir að við látum h á mynd 2 minnka sífellt. Þá stefnir $a+h$ á a þegar h minnkar og nálgast 0. Á sama hátt nálgast síðari punkturinn $(a+h, f(a+h))$ fyrri punktinn $(a, f(a))$. Línan sem tengir punktana tvo, sniðillinn, færist því sífellt nær því að vera snertill við fallið í $x=a$, og hallatala sniðilsins nálgast hallatölu snertilsins við $x=a$. Sjá mynd 3.



Mynd 3 Línan sem tengir punktana tvo færist nær því að vera snertill við $x=a$.

Þar sem við leitum að hallatölu snertilsins við $x=a$, má líta á halla ferils fallsins f í tilteknum punkti sem breytingarhraða á tilteknu augnabliki. Við köllum þennan halla augnabliksbreytingarhraða eða afleiðu fallsins við $x=a$. Hvort tveggja má finna með því að reikna markgildi hallatölu línu sem tengir punktinn við $x=a$ við annan punkt óendanlega nærri honum á ferlinum. Fyrir fall f eru bæði augnabliksbreytingarhraði fallsins og afleiða þess við $x=a$ táknuð með $f'(a)$, og má skilgreina þau sem tvíhliða markgildi sem hefur sama gildi hvort sem nálgast er frá vinstri eða hægri.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Stæðan sem markgildið er fundið með nefnist mismunakvóti.

SKILGREINING Á AUGNABLIKSBREYTINGARHRAÐA OG AFLEIÐU

Afleiða, eða augnabliksbreytingarhraði, falls f við $x=a$, er gefin með

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Stæðan $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nefnist mismunakvóti.

Við notum mismunakvótann til að reikna markgildi breytingarhraða fallsins þegar h stefnir á 0.

Afleiður: túlkun og ritháttur

Afleiðu falls má túlka á ólíka vegu. Hana má sjá í hegðun grafs fallsins eða reikna sem tölulegan breytingarhraða fallsins.

- Afleiða falls $f(x)$ í punkti $x=a$ er hallatala snertils við ferilinn $f(x)$ við $x=a$. Afleiða $f(x)$ við $x=a$ er táknuð með $f'(a)$.
- Afleiðan $f'(a)$ mælir hvernig ferillinn breytist í punktinum $(a, f(a))$.
- Líta má á afleiðuna $f'(a)$ sem augnabliksbreytingarhraða fallsins $f(x)$ við $x=a$.
- Ef fall mælir vegalengd sem fall af tíma mælir afleiðan augnablikshraðann á tímanum $t=a$.

RITHÁTTUR FYRIR AFLEIÐU

Jafna afleiðu falls $f(x)$ er rituð $y'=f'(x)$, þar sem $y=f(x)$. Rithátturinn $f'(x)$ er lesinn „f prím af x.“ Aðrir rithættir fyrir afleiðu eru meðal annars:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)$$

Stæðan $f'(x)$ er nú fall af x; fallið gefur hallatölu ferilsins $y=f(x)$ fyrir hvert gildi x. Afleiða falls $f(x)$ í punkti $x=a$ er táknuð með $f'(a)$.

AÐFERÐ

Finnið afleiðu gefins falls f, með skilgreiningu afleiðunnar.

1. Reiknið $f(a+h)$.
2. Reiknið $f(a)$.
3. Setjið inn og einfaldið $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
4. Reiknið markgildið ef það er til: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

SÝNIDÆMI 2

Afleiða margliðufalls fundin

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=x^2-3x+5$ við $x=a$.

Lausn

Við höfum:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ Skilgreining afleiðu

Setjið inn $f(a+h)=(a+h)^2-3(a+h)+5$ og $f(a)=a^2-3a+5$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)(a+h)-3(a+h)+5-(a^2-3a+5)}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-3a-3h+5-a^2+3a-5}{h}$ Reiknið til að eyða svigum.

$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-3a-3h+5-a^2+3a-5}{h}$ Einfaldið.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-3h}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h-3)}{h}$ Takið út fyrir sviga þáttinn h.

$=2a+0-3$ Reiknið markgildið.

$$=2a-3$$

REYNIÐ SJÁLF #2

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=3x^2+7x$ við $x=a$.

Afleiður ræðra falla fundnar

Til að finna afleiðu ræðs falls þurfum við stundum að einfalda stæðuna með algebruaðferðum sem við höfum þegar lært.

SÝNIDÆMI 3

Afleiða ræðs falls fundin

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=\frac{3+x}{2-x}$ við $x=a$.

Lausn

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+(a+h)}{2-(a+h)}-\left(\frac{3+a}{2-a}\right)}{h}$ Setjið inn $f(a+h)$ og $f(a)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(2-(a+h))(2-a)\left[\frac{3+(a+h)}{2-(a+h)}-\left(\frac{3+a}{2-a}\right)\right]}{(2-(a+h))(2-a)(h)}$ Margfaldið teljara og nefnara með $(2-(a+h))(2-a)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(2-(a+h))(2-a)\left(\frac{3+(a+h)}{(2-(a+h))}\right)-(2-(a+h))(2-a)\left(\frac{3+a}{2-a}\right)}{(2-(a+h))(2-a)(h)}$ Margfaldið inn í sviga

$=\lim_{h\to 0}\frac{6-3\,a+2\,a-a^2+2\,h-a\,h-6+3\,a+3\,h-2\,a+a^2+a\,h}{(2-(a+h))(2-a)(h)}$ Margfaldið

$=\lim_{h\to 0}\frac{5\,h}{(2-(a+h))(2-a)(h)}$ Sameinið samkynja liði

$=\lim_{h\to 0}\frac{5}{(2-(a+h))(2-a)}$ Strikið út sams konar þætti

$=\frac{5}{(2-(a+0))(2-a)}=\frac{5}{(2-a)(2-a)}=\frac{5}{(2-a)^2}$ Reiknið markgildið

REYNIÐ SJÁLF #3

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=\frac{10x+11}{5x+4}$ við $x=a$.

Afleiður falla með rótum fundnar

Til að finna afleiður falla með rótum notum við sömu aðferðir og við lærðum til að finna markgildi slíkra falla, meðal annars að margfalda með samoka.

SÝNIDÆMI 4

Afleiða falls með rót fundin

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=4\sqrt{x}$ við $x=36$.

Lausn

Við höfum

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\sqrt{a+h}-4\sqrt{a}}{h}$$ Setjið inn $f(a+h)$ og $f(a)$

Margfaldið teljara og nefnara með samokanum: $\frac{4\sqrt{a+h}+4\sqrt{a}}{4\sqrt{a+h}+4\sqrt{a}}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{4\sqrt{a+h}-4\sqrt{a}}{h}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a+h}+4\sqrt{a}}{4\sqrt{a+h}+4\sqrt{a}}\right)$$

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{16(a+h)-16a}{h\,4\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\right)$ Margfaldið.

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{16a+16h-16a}{h\,4\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}\right)$ Margfaldið inn í sviga og sameinið samkynja liði.

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{16h}{h\left(4\sqrt{a+h}+4\sqrt{a}\right)}\right)$ Einfaldið.

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{16}{4\sqrt{a+h}+4\sqrt{a}}\right)$ Reiknið markgildið með því að setja $h=0$.

$$=\frac{16}{8\sqrt{a}}=\frac{2}{\sqrt{a}}$$

$f'(36)=\frac{2}{\sqrt{36}}$ Reiknið gildi afleiðunnar við $x=36$.

$$=\frac{2}{6}$$

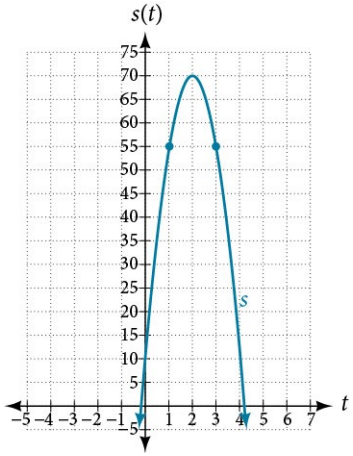
$$=\frac{1}{3}$$

REYNIÐ SJÁLF #4

Finnið afleiðu fallsins $f(x)=9\sqrt{x}$ við $x=9$.

Augnabliksbreytingarhraðar fundnir

Afleiður eru oft notaðar til að finna breytingarhraða falls á tilteknu augnabliki þegar óháða breytan er tími. Þess vegna er talað um augnabliksbreytingarhraða. Skoðum hæð bolta sem kastað er upp á við með upphafshraðanum 64 fet á sekúndu, gefna með $s(t)=-16t^2+64t+6$, þar sem t er mælt í sekúndum og $s(t)$ í fetum. Við vitum að ferillinn er fleygbogi. Afleiðan segir okkur hvernig hæðin breytist á hverju augnabliki. Hæð boltans er sýnd sem fall af tíma á mynd 4. Í eðlisfræði köllum við þetta „s - t-graf“.



Mynd 4

SÝNIDÆMI 5

Augnabliksbreytingarhraði fundinn

Notið fallið hér á undan, $s(t) = -16t^2 + 64t + 6$,. Hver er augnablikshraði boltans eftir 1 sekúndu og 3 sekúndur af fluginu?

Lausn

Hraðinn við $t = 1$ og $t = 3$ er augnabliksbreytingarhraði vegalengdar með tilliti til tíma, það er hraði. Athugum að upphafshæðin er 6 fet. Til að finna augnablikshraðann finnum við afleiðuna og reiknum gildi hennar við $t = 1$ og $t = 3$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{-16(t+h)^2 + 64(t+h) + 6 - (-16t^2 + 64t + 6)}{h}$ Setjið inn $s(t+h)$ og $s(t)$.

$= \lim_{h \to 0} \frac{-16t^2 - 32ht - h^2 + 64t + 64h + 6 + 16t^2 - 64t - 6}{h}$ Margfaldið inn í sviga.

$= \lim_{h \to 0} \frac{-32ht - h^2 + 64h}{h}$ Einfaldið.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-32t - h + 64)}{h}$ Þáttið teljarann.

$= \lim_{h \to 0} -32t - h + 64$ Strikið út sameiginlega þáttinn h.

$s'(t) = -32t + 64$ Reiknið markgildið með því að setja $h = 0$.

Fyrir hvert gildi t gefur $s'(t)$ hraðann við það gildi t.

Reiknið gildið við $t=1$ og $t=3$.

$$s'(1) = -32(1) + 64 = 32$$
$$s'(3) = -32(3) + 64 = -32$$

Hraði boltans eftir 1 sekúndu er 32 fet á sekúndu þegar hann er á uppleið.

Hraði boltans eftir 3 sekúndur er -32 fet á sekúndu þegar hann er á niðurleið.

REYNIÐ SJÁLF #5

Staða boltans er gefin með $s(t)=-16t^2+64t+6$. Hver er hraði hans eftir 2 sekúndur af fluginu?

Gröf notuð til að finna augnabliksbreytingarhraða

Við getum áætlað augnabliksbreytingarhraða við $x=a$ með því að skoða halla ferils fallsins $f(x)$ við $x=a$. Það gerum við með því að teikna snertil við fallið í $x=a$ og finna hallatölu hans.

AÐFERÐ

Finnið út frá grafi gefins falls $f(x)$, augnabliksbreytingarhraða þess við $x=a$.

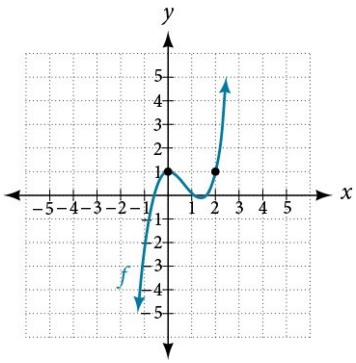
1. Finnið $x=a$ á grafi fallsins $f(x)$.
2. Teiknið snertil, það er línu sem fer í gegnum ferilinn við $x=a$ í a en engan annan punkt á þessum hluta ferilsins. Framlengið línuna nógu langt til að geta reiknað hallatölu hennar sem breyting á y/breyting á x.
   $\frac{\text{breyting á } y}{\text{breyting á } x}$.

SÝNIDÆMI 6

Afleiða í punkti á grafi falls áætluð

Áætlið eftirfarandi gildi út frá grafi fallsins $y=f(x)$ á mynd 5:

1. ⓐ $f(0)$
2. ⓑ $f(2)$
3. ⓒ $f'(0)$
4. ⓓ $f'(2)$

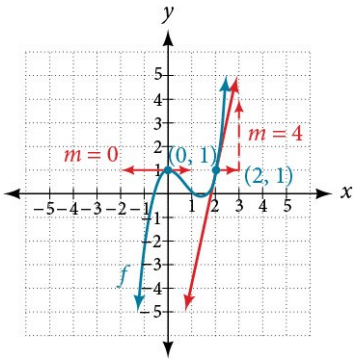


Mynd 5

Lausn

Til að finna fallgildið $f(a)$, finnum við y-hnitið við $x=a$.

Til að finna afleiðuna við $x=a$, $f'(a)$, teiknum við snertil við $x=a$, og áætlum hallatölu hans. Sjá mynd 6.

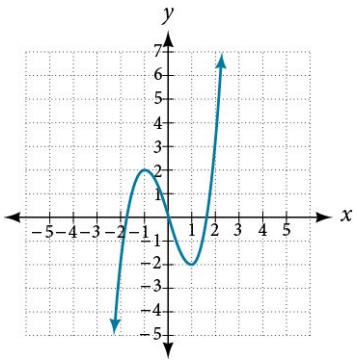


Mynd 6

1. ⓐ $f(0)$ er y-hnitið við $x=0$. Punkturinn hefur hnitin $(0,1)$, og því er $f(0)=1$.
2. ⓑ $f(2)$ er y-hnitið við $x=2$. Punkturinn hefur hnitin $(2,1)$, og því er $f(2)=1$.
3. ⓒ $f'(0)$ er fundið með því að áætla hallatölu snertils við ferilinn við $x=0$. Snertillinn við ferilinn við $x=0$ virðist láréttur. Láréttar línur hafa hallatöluna 0 og því er $f'(0)=0$.
4. ⓓ $f'(2)$ er fundið með því að áætla hallatölu snertils við ferilinn við $x=2$. Skoðið legu snertilsins við ferilinn við $x=2$. Þegar x færist eina einingu til hægri færist y fjórar einingar upp í annan punkt á línunni. Hallatalan er því 4 og $f'(2)=4$.

REYNIÐ SJÁLF #6

Notið graf fallsins $f(x)=x^3-3x$ á mynd 7 til að áætla $f(1)$, $f'(1)$, $f(0)$, og $f'(0)$.



Mynd 7

Augnabliksbreytingarhraði notaður til að leysa raunveruleg viðfangsefni

Önnur leið til að túlka augnabliksbreytingarhraða við $x=a$ er að skoða fallið í raunverulegu samhengi. Eining afleiðu falls $f(x)$ er

$$\frac{\text{úttakseiningar}}{\text{inntakseining}}$$

Slík eining sýnir um hve margar einingar úttakið breytist þegar inntakið breytist um eina einingu. Augnabliksbreytingarhraði á tilteknu augnabliki sýnir hið sama: hve mikið úttakið breytist þegar inntakið breytist um eina einingu.

Jaðarkostnaður er eitt dæmi um augnabliksbreytingarhraða. Gerum til dæmis ráð fyrir að kostnaður fyrirtækis við að framleiða x einingar sé gefinn með $C(x)$, í þúsundum dala. Afleiðufallið segir hvernig kostnaðurinn breytist fyrir hvert gildi x í skilgreiningarmengi fallsins. Með öðrum orðum er $C'(x)$ túlkað sem jaðarkostnaður, það er viðbótarkostnaður í þúsundum dala við að framleiða eina einingu til viðbótar þegar x einingar hafa verið framleiddar. Til dæmis er $C'(11)$ áætlaður viðbótarkostnaður í þúsundum dala við að framleiða 12. einingunna eftir að 11 einingar hafa verið framleiddar. $C'(11)=2{,}50$ merkir að þegar 11 einingar hafa verið framleiddar myndi framleiðsla 12. einingarinnar auka heildarkostnaðinn um það bil um $2.500,00.

SÝNIDÆMI 7

Jaðarkostnaður fundinn

Kostnaðurinn í Bandaríkjadölum við að framleiða x fartölvur er $f(x)=x^2-100x$. Þegar 200 tölvur hafa verið framleiddar, hver er þá áætlaður kostnaður við að framleiða 201. einingunna?

Lausn

Ef $f(x)=x^2-100x$ lýsir kostnaðinum við að framleiða x tölvur lýsir $f'(x)$ jaðarkostnaðinum. Við þurfum að finna afleiðuna. Til að reikna hana getum við notað þessi föll:

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 100(x+h)$$
$$f(x) = x^2 - 100x$$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ Formúla fyrir afleiðu

$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 100(x+h) - (x^2 - 100x)}{h}$ Setjið inn $f(x+h)$ og $f(x)$.

$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 100x - 100h - x^2 + 100x}{h}$ Margfaldið margliður og dreifið.

$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 100h}{h}$ Sameinið samkynja liði.

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 100)}{h}$ Þáttið og strikið út sams konar þætti.

$= \lim_{h \to 0} 2x + h - 100$ Einfaldið.

$= (2x - 100)$ Reiknið þegar $h = 0$.

$f'(x) = 2x - 100$ Formúla fyrir jaðarkostnað

$f'(200) = 2(200) - 100 = 300$ Reiknið fyrir 200 einingar.

Jaðarkostnaður við að framleiða 201. einninguna er um það bil \$300.

SÝNIDÆMI 8

Afleiða túlkuð í samhengi

Bíll ekur frá gatnamótum. Vegalengdin sem hann ekur í mílum er gefin með fallinu $f(t)$, þar sem t táknar klukkustundir. Útskýrið eftirfarandi rithátt:

1. ⓐ $f(0) = 0$
2. ⓑ $f'(1) = 60$
3. ⓒ $f(1) = 70$
4. ⓓ $f(2{,}5) = 150$

Lausn

Fyrst þurfum við að reikna gildi fallsins $f(t)$ og afleiðu þess $f'(t)$, og greina á milli þeirra. Þegar við reiknum gildi fallsins $f(t)$, finnum við vegalengdina sem bíllinn hefur ekið á t klukkustundum. Þegar við reiknum gildi afleiðunnar $f'(t)$, finnum við hraða bílsins eftir t klukkustundir.

1. ⓐ $f(0) = 0$ merkir að eftir núll klukkustundir hefur bíllinn ekið núll mílur.

2. ⓑ $f'(1)=60$ merkir að einni klukkustund eftir upphaf ferðarinnar ekur bíllinn á 60 mílna hraða á klukkustund.
3. ⓒ $f(1)=70$ merkir að einni klukkustund eftir upphaf ferðarinnar hefur bíllinn ekið 70 mílur. Einhvern tíma á fyrstu klukkustundinni hlýtur bíllinn því að hafa ekið hraðar en þegar 1 klukkustund var liðin.
4. ⓓ $f\ (2{,}5)=150$ merkir að tveimur klukkustundum og þrjátíu mínútum eftir upphaf ferðarinnar hefur bíllinn ekið 150 mílur.

REYNIÐ SJÁLF #7

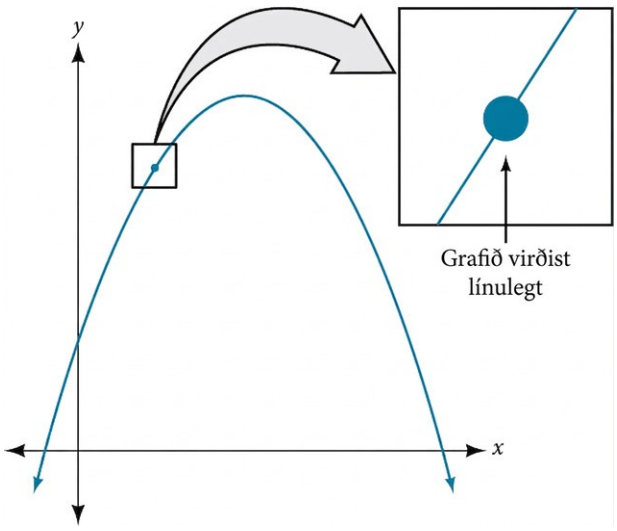
Hlaupari hleypur eftir beinum vegi sem liggur í austur og vestur. Fallið $f(t)$ gefur hve mörgum fetum austan við upphafspunktinn hún er eftir t sekúndur. Túlkið hvert eftirfarandi atriði í samhengi við hlauparann.

1. ⓐ $f(0)=0$
2. ⓑ $f(10)=150$
3. ⓒ $f'(10)=15$
4. ⓓ $f'(20)=-10$
5. ⓔ $f(40)=-100$

Punktar þar sem afleiða falls er ekki til fundnir

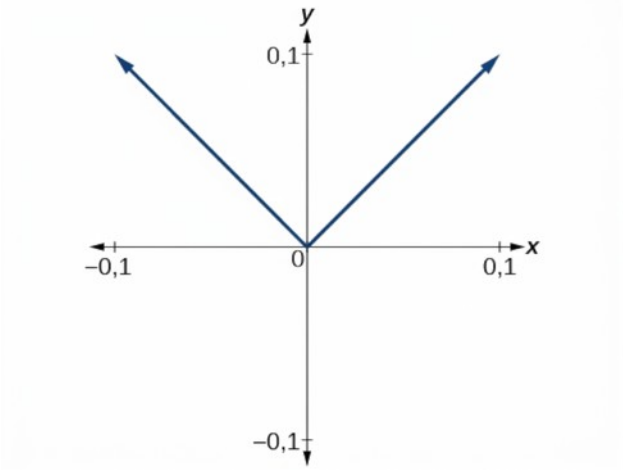
Til að skilja hvar afleiða falls er ekki til þurfum við að rifja upp hvað gerist að jafnaði þegar fall $f(x)$ hefur afleiðu við $x=a$. Gerum ráð fyrir að við notum grafteikniforrit til að stækka upp grafið við $x=a$. Ef fallið $f(x)$ er deildanlegt, það er ef unnt er að deilda það, nálgast grafið beina línu því meira sem við stækkum. Þessi eiginleiki nefnist línuleiki.

Skoðið grafið á mynd 8. Því meira sem við stækkum grafið við punktinn, þeim mun línulegri virðist ferillinn.



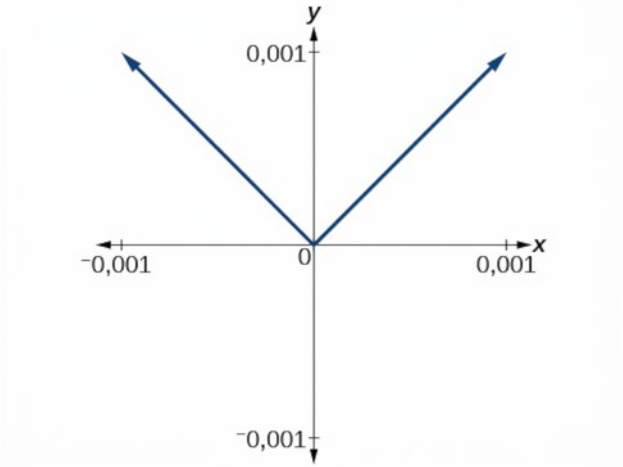
Mynd 8

Ætla mætti að hið sama gerðist fyrir öll samfelld föll en svo er ekki. Fallið $f(x)=|x|$, er til dæmis samfellt við $x=0$, en ekki deildanlegt við $x=0$. Þegar við stækkum upp grafið nærri 0 á mynd 9 nálgast það ekki beina línu. Sama hve mikið er stækkað heldur grafið hvössu horninu.



Mynd 9 Graf fallsins $f(x)=|x|$, með x-ás frá –0,1 til 0,1 og y-ás frá –0,1 til 0,1.

Við stækkum grafið enn frekar með því að þrengja gildissviðið og fáum mynd 10. Lögunin er enn sú sama. Grafið virðist ekki línulegt við $x=0$.



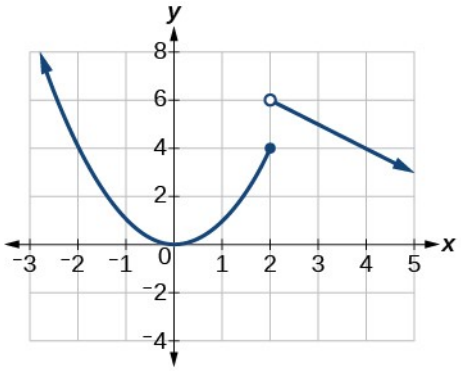
Mynd 10 Graf fallsins $f(x)=|x|$, með x-ás frá –0,001 til 0,001 og y-ás frá –0,001 til 0,001.

Hvaða einkenni hefur graf sem er ekki deildanlegt í punkti? Hér eru nokkur dæmi þar sem fallið $f(x)$ er ekki deildanlegt við $x=a$.

Á mynd 11 sjáum við grafið af

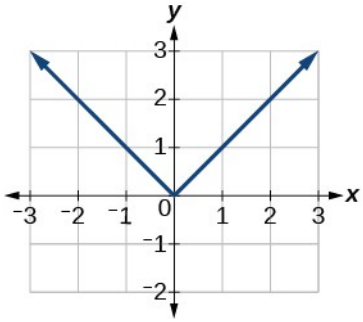
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2\\ 8-x, & x>2\end{cases}.$$

Athugum að þegar x stefnir á 2 frá vinstri sést að markgildið frá vinstri er 4, en þegar x stefnir á 2 frá hægri sést að markgildið frá hægri er 6. Fallið er því ósamfellt við $x=2$.



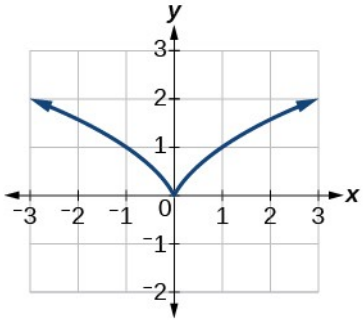
Mynd 11 Graf $f(x)$ er ósamfellt við $x=2$.

Á mynd 12 sjáum við graf $f(x)=|x|$. Grafið hefur hornpunkt við $x=0$.



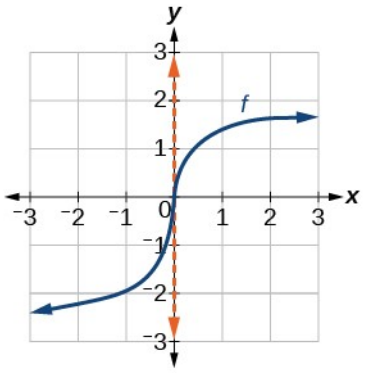
Mynd 12 Graf $f(x)=|x|$ hefur horn við $x=0$.

Á mynd 13 sjáum við að graf $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ hefur brodd við $x=0$. Broddur hefur sérstakt einkenni. Þegar farið er frá broddinum stefna markgildin bæði frá vinstri og hægri annaðhvort á óendanlegt eða mínus óendanlegt. Athugum að þegar x stefnir á 0 frá báðum hliðum virðast snertlarnir verða sífellt brattari, en annar hefur neikvæða hallatölu og hinn jákvæða.



Mynd 13 Graf $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ hefur brodd við $x=0$.

Á mynd 14 sjáum við að graf $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ hefur lóðréttan snertil við $x=0$. Rifjum upp að lóðréttir snertlar eru lóðréttar línur. Þar sem lóðréttur snertill er til er hallatala línunnar því óskilgreind. Afleiðan, sem mælir hallann, er þess vegna ekki til þar.



Mynd 14 Graf $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ hefur lóðréttan snertil við $x=0$.

DEILDANLEIKI

Fall $f(x)$ er deildanlegt við $x=a$ ef afleiðan er til við $x=a$, það er ef $f'(a)$ er til.

Fall $f(x)$ getur af fjórum ástæðum verið ódeildanlegt í punkti $x=a$.

1. Þegar fallið er ósamfellt við $x=a$.
2. Þegar hornpunktur er við $x=a$.
3. Þegar broddur er við $x=a$.
4. Í öðrum tilvikum þegar lóðréttur snertill er við $x=a$.

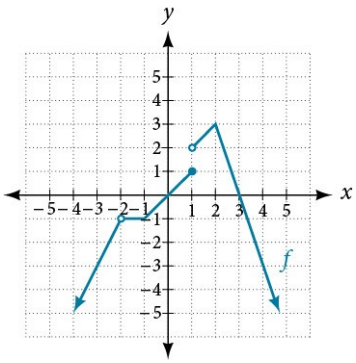
SÝNIDÆMI 9

Samfelldni og deildanleiki falls ákvörðuð út frá grafi

Notið mynd 15 til að ákvarða hvar fallið er

a. samfellt
b. ósamfellt
c. deildanlegt
d. ekki deildanlegt

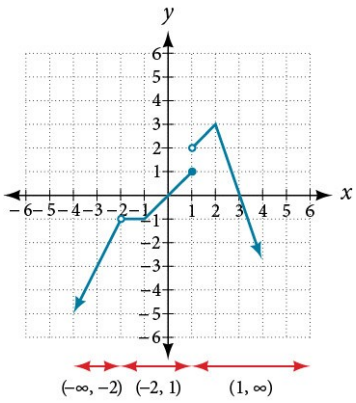
Í punktunum þar sem grafið er ósamfellt eða ekki deildanlegt skuluð þið útskýra hvers vegna.



Mynd 15

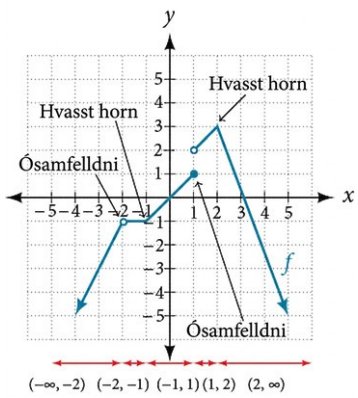
Lausn

Graf $f(x)$ er samfellt á $(-\infty,-2)U(-2,1)U(1,\infty)$. Graf $f(x)$ hefur afmáanlega ósamfelldni við $x=-2$ og stökkósamfelldni við $x=1$. Sjá mynd 16.



Mynd 16 Þrjú bil þar sem fallið er samfellt

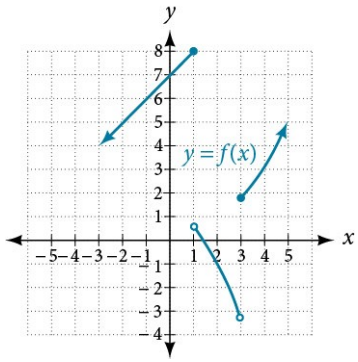
Grafið er deildanlegt á $(-\infty,-2)U(-2,-1)U(-1,1)U(1,2)U(2,\infty)$. Graf $f(x)$ er ekki deildanlegt við $x=-2$ vegna ósamfelldni, við $x=-1$ vegna hvass horns, við $x=1$ vegna ósamfelldni og við $x=2$ vegna hvass horns. Sjá mynd 17.



Mynd 17 Fimm bil þar sem fallið er deildanlegt

REYNIÐ SJÁLF #8

Ákvarðið út frá grafi hvar fallið $y=f(x)$ á mynd 18 er samfellt og deildanlegt.



Mynd 18

Jafna snertils við graf falls fundin

Jafna snertils við feril fallsins $f(x)$ við $x=a$ er leidd af punkthallaformi línu, $y=m(x-x_1)+y_1$. Hallatala línunnar er halli ferilsins við $x=a$ og því jöfn $f'(a)$, afleiðu $f(x)$ við $x=a$. Hnit punktsins á línunni við $x=a$ eru $(a, f(a))$.

Ef við setjum inn í punkthallaformið fæst

$$m = f'(a) \quad x_1 = a \quad y_1 = f(a)$$
$$y = m(x - x_1) + y_1$$
$$f'(a) \quad a \quad f(a)$$

Jafna snertilsins er

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

JAFNA SNERTILS VIÐ FERIL FALLSINS F

Jafna línu sem snertir feril falls f í punkti $x=a$ er

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

AÐFERÐ

Finnið jöfnu snertils við gefið fall f, við $x=a$.

1. Finnið afleiðu $f(x)$ við $x=a$ með $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Reiknið fallgildið við $x=a$. Það er $f(a)$.
3. Setjið $(a,f(a))$ og $f'(a)$ inn í $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
4. Skrifið jöfnu snertilsins á forminu $y=mx+b$.

SÝNIDÆMI 10

Jafna snertils við fall í punkti fundin

Finnið jöfnu snertils við ferilinn $f(x)=x^2-4x$ við $x=3$.

Lausn

Notum:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Setjið inn $f(a+h)=(a+h)^2-4(a+h)$ og $f(a)=a^2-4a$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)(a+h)-4(a+h)-(a^2-4a)}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-4a-4h-a^2+4a}{h}$ Eyðið svigum.

$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-4a-4h-a^2+4a}{h}$ Sameinið samkynja liði.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-4h}{h}$$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h-4)}{h}$ Takið út fyrir sviga þáttinn h.

$$=2a+0-4$$

$f'(a)=2a-4$ Reiknið markgildið.

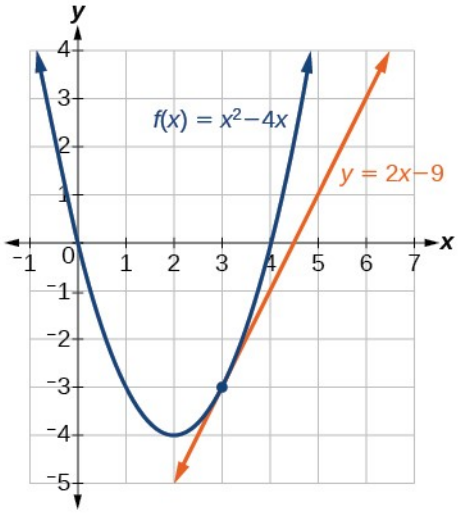
$$f'(3)=2(3)-4=2$$

Jafna snertils við $x=3$:

$$\begin{aligned} y &= f\prime(a)(x-a)+f(a) \\ y &= f\prime(3)(x-3)+f(3) \\ y &= 2(x-3)+(-3) \\ y &= 2x-9 \end{aligned}$$

Greining

Við getum notað grafteikniforrit til að teikna fallið og snertilinn. Þá sést snertipunkturinn við $x=3$, eins og sýnt er á mynd 19.



Mynd 19 Grafið staðfestir snertipunktinn við $x=3$.

REYNIÐ SJÁLF #9

Finnið jöfnu snertils við feril fallsins $f(x)=5x^2-x+4$ við $x=2$.

Augnabliksferð agnar fundin

Ef fall mælir staðsetningu sem fall af tíma mælir afleiðan færslu með tilliti til tíma, það er hraða hlutarins. Stærð hraðans nefnist ferð. Hraði á tilteknu augnabliki nefnist augnablikshraði.

Þegar reynt er að finna ferð eða hraða hlutar á tilteknu augnabliki virðist koma upp mótsögn. Við skilgreinum ferð venjulega sem farna vegalengd deilt með liðnum tíma. Á einu augnabliki er þó engin vegalengd farin og enginn tími líður. Hvernig eigum við þá að deila núlli með núlli? Afleiða leysir þennan vanda. Hún gerir okkur kleift að segja að þótt hraði hlutarins breytist stöðugt hafi hann ákveðinn hraða á tilteknu augnabliki. Það merkir að ef

hluturinn ferðaðist með nákvæmlega þeim hraða í eina tímaeiningu myndi hann fara tiltekna vegalengd.

AUGNABLIKSHRAÐI

Látum fallið $s(t)$ tákna staðsetningu hlutar á tímanum t. Augnablikshraði, eða hraði hlutarins, á tímanum $t=a$ er gefinn með

$$s'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

SÝNIDÆMI 11

Augnablikshraði fundinn

Bolta er kastað upp frá 200 feta hæð með upphafshraðanum 36 ft/sec. Ef hæð boltans í fetum eftir t sekúndur er gefin með $s(t)=-16t^2+36t+200$, finnið þá augnablikshraða boltans við $t=2$.

Lausn

Fyrst finnum við afleiðuna $s'(t)$. Síðan reiknum við gildi hennar við $t=2$, með $s(a+h)=-16(a+h)^2+36(a+h)+200$ og $s(a)=-16a^2+36a+200$.

$$\begin{aligned}
s'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-16(a+h)^2+36(a+h)+200-(-16a^2+36a+200)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-16(a^2+2ah+h^2)+36(a+h)+200-(-16a^2+36a+200)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-16a^2-32ah-16h^2+36a+36h+200+16a^2-36a-200}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{-16a^2}-32ah-16h^2\cancel{+36a}+36h\cancel{+200}\cancel{+16a^2}\cancel{-36a}\cancel{-200}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-32ah-16h^2+36h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-32a-16h+36)}{\cancel{h}}\\
&= \lim_{h\to 0}(-32a-16h+36)\\
&= -32a-16\cdot 0+36\\
s'(a) &= -32a+36\\
s'(2) &= -32(2)+36\\
&= -28
\end{aligned}$$

Greining

Niðurstaðan merkir að á tímanum $t=2$ sekúndur fellur boltinn með hraðanum 28 ft/sec.

REYNIÐ SJÁLF #10

Flugeldaflaug er skotið upp úr gryfju 12 fetum neðan jarðhæðar með hraðanum 60 ft/sec. Hæð hennar í fetum eftir t sekúndur er gefin með $s=-16t^2+60t-12$. Hver er augnablikshraði hennar eftir 4 sekúndur?

NÁMSEFNI

Á þessum vefsíðum fáið þið frekari leiðbeiningar og æfingu í afleiðum.

- Afleiðan áætluð
- Afleiðan áætluð, dæmi 4

12.4 Verkefni hluta

Hugtakaspurningar

1. Að hvaða leyti er hallatala línulegs falls svipuð afleiðu?
2. Hver er munurinn á meðalbreytingarhraða falls á bilinu $[x, x+h]$ og afleiðu fallsins við x?
3. Bíll ók 110 mílur frá kl. 2:00 e.h. til kl. 4:00 e.h. Hver var meðalhraði bílsins? Nákvæmlega kl. 2:30 e.h. sýndi hraðamælirinn nákvæmlega 62 mílur á klukkustund. Hvað nefnist ferð bílsins kl. 2:30 e.h. öðru nafni? Hvers vegna er þessi ferð frábrugðin meðalhraðanum?
4. Útskýrið hugtakið halli ferils í punkti x.
5. Gerum ráð fyrir að vatn renni í tank og að meðalrennslið sé 45 gallon á mínútu. Setjið þessa fullyrðingu fram á máli stærðfræðinnar.

Algebruverkefni

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota skilgreiningu afleiðu, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, til að reikna afleiðu hvers falls.

6.

$$f(x)=3x-4$$

7.

$$f(x)=-2x+1$$

8.

$$f(x)=x^2-2x+1$$

9.

$$f(x)=2x^2+x-3$$

10.

$$f(x)=2x^2+5$$

11.

$$f(x)=\frac{-1}{x-2}$$

12.

$$f(x)=\frac{2+x}{1-x}$$

13.

$$f(x)=\frac{5-2x}{3+2x}$$

14.

$$f(x)=\sqrt{1+3x}$$

15.

$$f(x)=3x^3-x^2+2x+5$$

16.

$$f(x)=5$$

17.

$$f(x)=5\pi$$

Finnið meðalbreytingarhraðann milli punktanna tveggja í dæmunum hér á eftir.

18. $(-2,0)$ og $(-4,5)$

19. $(4,-3)$ og $(-2,-1)$

20. $(0,5)$ og $(6,5)$

21. $(7,-2)$ og $(7,10)$

Finnið afleiður eftirfarandi margliðufalla.

22.

$$f(x)=x^3+1$$

23.

$$f(x)=-3x^2-7x=6$$

24.

$$f(x)=7x^2$$

25.

$$f(x)=3x^3+2x^2+x-26$$

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið finna jöfnu snertils við feril fallsins í gefnum punkti x á ferlinum.

26.

$$f(x) = 2x^2 - 3x \quad x = 3$$

27.

$$f(x) = x^3 + 1 \quad x = 2$$

28.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x = 9$$

Í eftirfarandi dæmi skuluð þið finna k þannig að gefna línan sé snertill við graf fallsins.

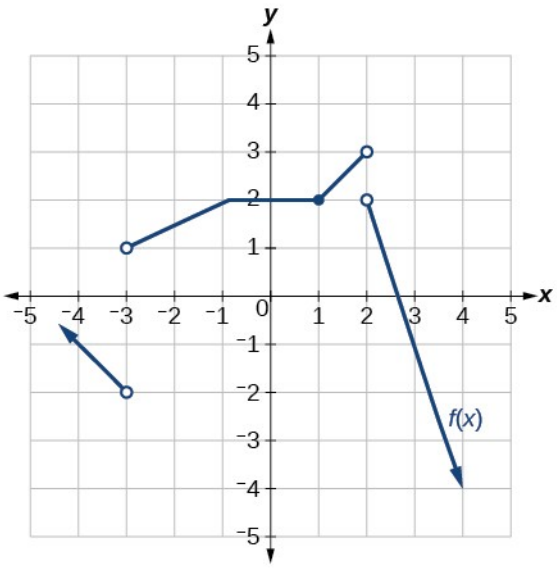
29.

$$f(x) = x^2 - kx, \quad y = 4x - 9$$

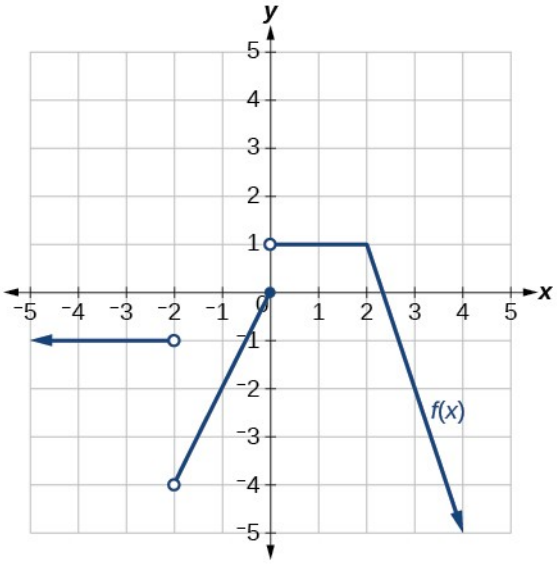
Myndræn verkefni

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið skoða graf fallsins f og ákvarða hvar fallið er samfellt eða ósamfellt og hvar það er deildanlegt eða ekki deildanlegt.

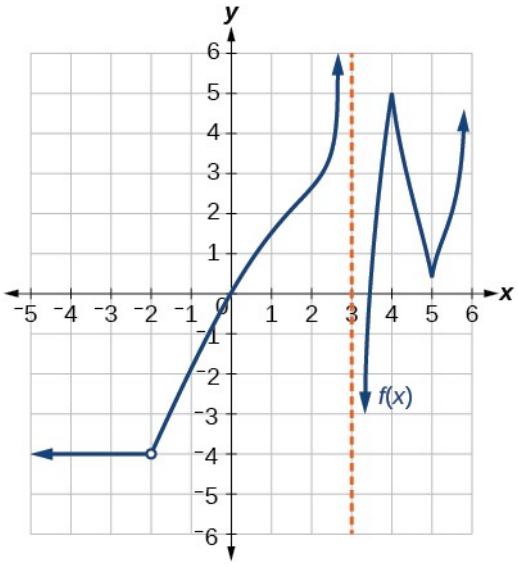
30.



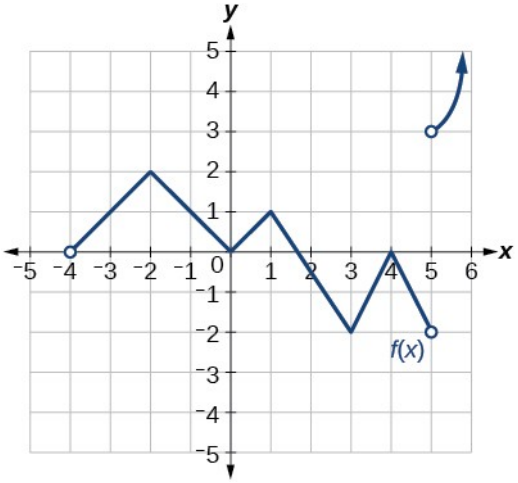
31.



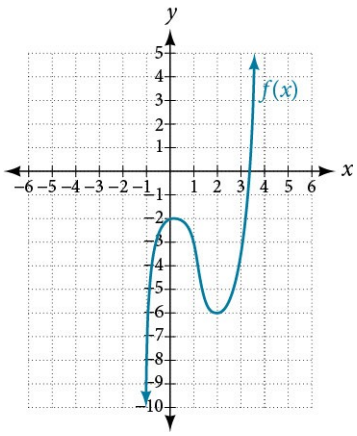
32.



33.



Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota mynd 20 til að áætla, eftir því sem tilgreint er, annaðhvort fallgildið við gefið gildi x eða afleiðuna við gefið gildi x ,.



Mynd 20

34.

$$f(-1)$$

35.

$$f(0)$$

36.

$$f(1)$$

37.

$$f(2)$$

38.

$$f(3)$$

39.

$$f'(-1)$$

40.

$$f'(0)$$

41.

$$f'(1)$$

42.

$$f'(2)$$

43.

$$f'(3)$$

44. Teiknið skissu af fallinu út frá eftirfarandi upplýsingum:

$f'(x)=2x, f(2)=4$

Tækniverkefni

45. Reiknið afleiðuna tölulega. Kannið hegðun grafsins $f(x)=x^2$ í grennd við $x=1$ með því að teikna fallið á eftirfarandi skilgreiningarmengjum: $[0{,}9\,;1{,}1]$, $[0{,}99\,;1{,}01]$, $[0{,}999\,;1{,}001]$ og $[0{,}9999\,;\ \ 1{,}0001]$. Á reiknivélinni getum við notað aðgerð sem stillir Ymin og Ymax sjálfkrafa á Xmin- og Xmax-gildin sem við völdum fyrir fram. (Í sumum algengum grafreiknivélum nefnist þessi aðgerð ZOOM FIT eða ZOOM AUTO.) Skoðið samsvarandi y-gildi gluggans og áætlið hvernig ferillinn breytist við $x=1$, það er áætlið afleiðuna við $x=1$.

Raunveruleg viðfangsefni

Útskýrið ritháttinn með orðum í dæmunum hér á eftir. Rúmmál bensíns í tanki er $f(t)$ gallon, t mínútum eftir hádegi.

46.

$$f(0)=600$$

47.

$$f'(30)=-20$$

48.

$$f(30)=0$$

49.

$$f'(200)=30$$

50.

$$f(240)=500$$

Útskýrið föllin með orðum í dæmunum hér á eftir. Hæð kasthlutar, s, eftir t sekúndur er gefin með $s(t)=-16t^2+80t$.

51.

$$s(2)=96$$

52.

$$s'(2)=16$$

53.

$$s(3)=96$$

54.

$$s'(3)=-16$$

55.

$$s(0)=0, s(5)=0.$$

Í eftirfarandi dæmum er rúmmál V kúlu sem fall af radíus hennar r gefið með $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

56. Finnið meðalbreytingarhraða V þegar r breytist úr 1 cm í 2 cm.

57. Finnið augnabliksbreytingarhraða V þegar $r=3$ cm.

Í eftirfarandi dæmum eru tekjur af sölu x eininga gefnar með $R(x)=2x^2+10x$.

58. Finnið meðalbreytingu tekjufallsins þegar x breytist úr $x=10$ í $x=20$.

59. Finnið $R'(10)$ og túlkið niðurstöðuna.

60. Finnið $R'(15)$ og túlkið niðurstöðuna. Berið $R'(15)$ saman við $R'(10)$, og útskýrið muninn.

Í eftirfarandi dæmum er kostnaði við að framleiða x farsíma lýst með fallinu $C(x)=x^2-4x+1000$.

61. Finnið meðalbreytingarhraða heildarkostnaðarins þegar x breytist frá $x=10$ til $x=15$.

62. Finnið áætlaðan jaðarkostnað við að framleiða 16. farsímann þegar 15 farsímar hafa verið framleiddir.

63. Finnið áætlaðan jaðarkostnað við að framleiða 21. farsímann þegar 20 farsímar hafa verið framleiddir.

Viðbótarverkefni

Í eftirfarandi dæmum skuluð þið nota skilgreiningu afleiðu í punkti $x=a$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, til að finna afleiður fallanna.

64.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

65.

$$f(x)=5x^2-x+4$$

66.

$$f(x)=-x^2+4x+7$$

67.

$$f(x)=\frac{-4}{3-x^2}$$

Lykilhugtök

meðalbreytingarhraði

hallatala línunnar sem tengir punktana tvo $(a, f(a))$ og $(a+h, f(a+h))$ á ferli $f(x)$; hún er gefin með

$$\text{MBR}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

samfellt fall

fall sem hefur hvorki göt né rof í grafi sínu

afleiða

hallatala falls í tilteknum punkti; táknuð $f'(a)$, í punktinum $x=a$ er hún $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, að því gefnu að markgildið sé til

deildanlegt

fall $f(x)$ sem hefur afleiðu í $x=a$. Með öðrum orðum er $f'(a)$ til

ósamfellt fall

fall sem er ekki samfellt í $x=a$

augnabliksbreytingarhraði

hallatala falls í tilteknum punkti; í $x=a$ er hún gefin með $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

augnablikshraði

breyting hraða eða stefnu á tilteknu augnabliki; fallið $s(t)$ táknar staðsetningu hlutar á tíma t, og augnablikshraði hlutarins á tíma $t=a$ er gefinn með $s'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$.

stökkósamfelldni

ósamfelldnipunktur falls $f(x)$ í $x=a$ þar sem bæði markgildið frá vinstri og markgildið frá hægri eru til, en $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq\lim_{x\to a^+} f(x)$

markgildi frá vinstri

markgildi gilda

$$f(x)$$

þegar x stefnir á a frá vinstri, táknað

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Gildi

$$f(x)$$

geta komist eins nálægt markgildinu L og við viljum með því að taka gildi x nægilega nálægt a þannig að

$$x < a$$

og

$$x \neq a.$$

Bæði a og L eru rauntölur.

markgildi

þegar það er til, gildið L, sem úttak falls $f(x)$ stefnir á þegar inntakið x nálgast a meira og meira en verður ekki jafnt a. Gildi úttaksins,

$$f(x),$$

getur komist eins nálægt L og við kjósum með því að nota inntaksgildi x nægilega nálægt $x = a$, en ekki endilega í $x = a$. Bæði a og L eru rauntölur og L er táknað

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

eiginleikar markgilda

safn setninga til að finna markgildi falla með því að framkvæma reikniaðgerðir á markgildunum

afmáanleg ósamfelldni

ósamfelldnipunktur falls $f(x)$ þar sem fallið er ósamfellt en má endurskilgreina þannig að það verði samfellt

markgildi frá hægri

markgildi gilda

$$f(x)$$

þegar

$$x$$

stefnir á a frá hægri, táknað

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Gildi

$$f(x)$$

geta komist eins nálægt markgildinu

$$L$$

og við viljum með því að taka gildi x nægilega nálægt a þar sem

$$x>a,$$

og

$$x\neq a.$$

Bæði

$$a$$

og L eru rauntölur.

sniðill
lína sem sker feril í tveimur punktum

snertill
lína sem sker feril í einum punkti

tvíhliða markgildi
markgildi falls

$$f(x),$$

þegar x stefnir á a, er jafnt L, það er,

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

ef og aðeins ef

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x).$$

Lykiljöfnur

meðalbreytingarhraði	$\text{MBR}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
afleiða falls	$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Meginatriði

12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum

- Fall hefur markgildi ef úttaksgildin stefna á eitthvert gildi L þegar inntaksgildin stefna á einhverja tölu a. Sjá dæmi 1.
- Styttur ritháttur er notaður til að lýsa markgildi falls á forminu $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sem gefur til kynna að þegar x stefnir á a, bæði frá vinstri við $x = a$ og hægri við $x = a$, nálgast úttaksgildið L.
- Fall hefur markgildi frá vinstri ef $f(x)$ stefnir á L þegar x stefnir á a þar sem $x < a$. Fall hefur markgildi frá hægri ef $f(x)$ stefnir á L þegar x stefnir á a þar sem $x > a$.
- Tvíhliða markgildi er til ef markgildi fallsins frá vinstri og hægri eru jöfn. Við segjum að fall hafi markgildi ef það hefur tvíhliða markgildi.
- Með grafi má ákvarða markgildi falls sjónrænt.
- Ef fallið hefur markgildi þegar x stefnir á a, nálgast greinar grafsins sama $y-$ hnitið í grennd við $x = a$ frá vinstri og hægri. Sjá dæmi 2.
- Nota má töflu til að ákvarða hvort fall hafi markgildi. Taflan á að sýna inntaksgildi sem stefna á a úr báðum áttum svo hægt sé að meta úttaksgildin sem fást. Ef úttaksgildin stefna á einhverja tölu hefur fallið markgildi. Sjá dæmi 3.
- Einnig má nota grafreikni til að finna markgildi. Sjá dæmi 4.

12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda

- Með eiginleikum markgilda má reikna með markgildum falla í stað fallanna sjálfra. Sjá dæmi 1.
- Markgildi margliðufalls má finna með því að leggja saman markgildi einstakra liða. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Markgildi veldis af falli er jafnt sama veldi af markgildi fallsins. Önnur aðferð er bein innsetning. Sjá dæmi 4.
- Markgildi rótar af falli er jafnt samsvarandi rót af markgildi fallsins.
- Ein leið til að finna markgildi falls sem er ritað sem kvóti er að þátta kvótann og einfalda. Sjá dæmi 5.
- Önnur aðferð til að finna markgildi flókins brots er að finna minnsta samnefnarann. Sjá dæmi 6.
- Markgildi sem inniheldur fall með rót má meta með samoka stæðu. Sjá dæmi 7.
- Markgildi sumra falla sem rituð eru sem kvótar má finna með þáttun. Sjá dæmi 8.

- Ein leið til að meta markgildi kvóta með tölugildum er að nota tölulegar upplýsingar. Einnig getur verið gagnlegt að setja stæðuna fram kaflaskipt. Sjá dæmi 9.

12.3 Samfelldni

- Samfellt fall má sýna með grafi sem hefur hvorki göt né rof.
- Fall sem hefur göt í grafi sínu er ósamfellt fall.
- Fall er samfellt í tiltekinni tölu ef þrjú skilyrði eru uppfyllt:
  - Skilyrði 1: $f(a)$ er til.
  - Skilyrði 2: $\lim_{x \to a} f(x)$ er til í $x=a$.
  - Skilyrði 3: $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$.
- Fall hefur stökkósamfelldni ef markgildin frá vinstri og hægri eru ólík þannig að grafið „stekkur“.
- Fall hefur afmáanlega ósamfelldni ef hægt er að endurskilgreina það í ósamfelldnipunktinum þannig að það verði samfellt. Sjá dæmi 1.
- Sum föll, svo sem margliðuföll, eru samfelld alls staðar. Önnur föll, svo sem lograföll, eru samfelld á skilgreiningarmengi sínu. Sjá dæmi 2 og dæmi 3.
- Til að kaflaskipt fall sé samfellt þarf hver grein þess að vera samfelld á sínum hluta skilgreiningarmengisins og fallið í heild að vera samfellt á skilpunktunum. Sjá dæmi 4 og dæmi 5.

12.4 Afleiður

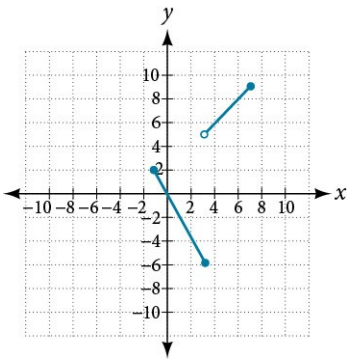
- Hallatala sniðilsins sem tengir tvo punkta er meðalbreytingarhraði fallsins milli punktanna. Sjá dæmi 1.
- Afleiðan, eða augnabliksbreytingarhraðinn, mælir halla ferils falls í tilteknum punkti, eða hallatölu snertils við ferilinn í punktinum. Sjá dæmi 2, dæmi 3 og dæmi 4.
- Mismunakvótinn er kvótinn í formúlunni fyrir augnabliksbreytingarhraða:
  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Nota má augnabliksbreytingarhraða til að leysa mörg raunveruleg viðfangsefni. Sjá dæmi 5.
- Finna má augnabliksbreytingarhraða með því að skoða halla falls í punkti á grafi og draga snertil við fallið í þeim punkti. Sjá dæmi 6.
- Túlka má augnabliksbreytingarhraða til að lýsa raunverulegum aðstæðum. Sjá dæmi 7 og dæmi 8.
- Sum föll eru ekki deildanleg í einum eða fleiri punktum. Sjá dæmi 9.
- Nota má punkthallaform línu til að finna jöfnu snertils við feril falls. Sjá dæmi 10.

- Hraði er breyting staðsetningar með tilliti til tíma. Augnablikshraði lýsir hraða hlutar á tilteknu augnabliki. Meðalhraði lýsir hraðanum sem hluturinn heldur að meðaltali á tímabili.
- Með afleiðunni má reikna augnablikshraða þótt enginn tími líði. Sjá dæmi 11.

Yfirlitsverkefni

Markgildi fundin með tölulegri og myndrænni nálgun

Notið mynd 1 í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 1

1.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x)$$

2.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x)$$

3.

$$\lim_{x \to -1} f(x)$$

4.

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

5. Fyrir hvaða gildi x er fallið ósamfellt? Hvaða samfelldniskilyrði er ekki uppfyllt?

6. Notið töflu 1 til að áætla $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Tafla 1

x	$F(x)$
−0,1	2,875
−0,01	2,92
−0,001	2,998
0	Óskilgreint
0,001	2,9987
0,01	2,865
0,1	2,78145
0,15	2,678

Notið grafreikni í eftirfarandi verkefnum. Ákvarðið út frá tölum eða grafi markgildi fallsins frá vinstri og frá hægri þegar x stefnir á a. Ef fallið hefur markgildi þegar x stefnir á a, skuluð þið tilgreina það. Ef svo er ekki skuluð þið útskýra hvers vegna markgildið er ekki til.

7.

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & if \quad x \neq 1 \\ x^3, & if \quad x = 1 \end{cases} \quad a = 1$$

8.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & if \quad x = -2 \\ (x+1)^2, & if \quad x \neq -2 \end{cases} \quad a = -2$$

9.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & if \quad x < 1 \\ -\sqrt[3]{x}, & if \quad x > 1 \end{cases} \quad a = 1$$

Markgildi fundin með eiginleikum markgilda

Finnið markgildin í eftirfarandi verkefnum ef $\lim_{x \to c} f(x) = -3$ og $\lim_{x \to c} g(x) = 5$.

10.

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) + g(x) \right)$$

11.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

12.

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot g(x) \right)$$

13.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x), f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & x > 0 \\ 5x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

14.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x), f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & x > 0 \\ 5x + 3 & x < 0 \end{cases}$$

15.

$$\lim_{x \to 3^+} \left(3x - [x] \right)$$

Reiknið markgildin í eftirfarandi verkefnum með algebruaðferðum.

16.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{(h+6)^2 - 36}{h} \right)$$

17.

$$\lim_{x \to 25} \left(\frac{x^2 - 625}{\sqrt{x} - 5} \right)$$

18.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{-x^2 - 9x}{x} \right)$$

19.

$$\lim_{x \to 4} \frac{7 - \sqrt{12x+1}}{x-4}$$

20.

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}}{3+x} \right)$$

Samfelldni

Notið tölulegar upplýsingar í eftirfarandi verkefnum til að ákvarða hvort markgildið sé til í $x = a$. Ef svo er ekki skuluð þið lýsa því hvernig graf fallsins hegðar sér í $x = a$.

21.

$$f(x)=\frac{-2}{x-4};a=4$$

22.

$$f(x)=\frac{-2}{(x-4)^2};a=4$$

23.

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-x-6};a=3$$

24.

$$f(x)=\frac{6x^2+23x+20}{4x^2-25};a=-\frac{5}{2}$$

25.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{9-x};a=9$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvar fallið $f(x)$ er samfellt. Þar sem það er ekki samfellt skuluð þið tilgreina hvaða skilyrði eru ekki uppfyllt og flokka hverja ósamfelldni.

26.

$$f(x)=x^2-2x-15$$

27.

$$f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x-5}$$

28.

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$$

29.

$$f(x)=\frac{x^3-125}{2x^2-12x+10}$$

30.

$$f(x)=\frac{x^2-\frac{1}{x}}{2-x}$$

31.

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-3x-10}$$

32.

$$f(x)=\frac{x+2}{x^3+8}$$

Afleiður

Finnið í eftirfarandi verkefnum meðalbreytingarhraðann $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

33.

$$f(x)=3x+2$$

34.

$$f(x)=5$$

35.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

36.

$$f(x)=\ln(x)$$

37.

$$f(x)=e^{2x}$$

Finnið afleiðu fallsins í eftirfarandi verkefnum.

38.

$$f(x)=4x-6$$

39.

$$f(x)=5x^2-3x$$

40. Finnið jöfnu snertils við graf $f(x)$ þar sem x hefur tilgreint gildi.

$f(x)=-x^3+4x;\ x=2.$

Notið grafreikni í eftirfarandi verkefnum til að útskýra hvers vegna fallið er ekki deildanlegt alls staðar á skilgreiningarmengi sínu. Tilgreinið punktana þar sem það er ekki deildanlegt.

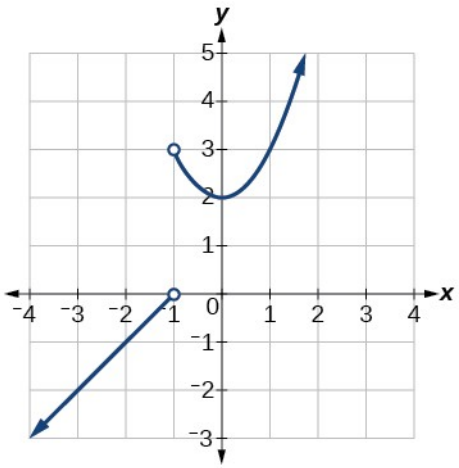
41.

$$f(x)=\frac{x}{|x|}$$

42. Rúmmál réttrar keilu er $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Tiltekin keila hefur fasta hæð 9 cm og breytilegan radíus. Finnið augnabliksbreytingarhraða rúmmálsins með tilliti til radíussins þegar radíusinn er 2 cm. Gefið nákvæmt svar með π.

Æfingapróf

Notið graf f á mynd 1 í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 1

1.

$$f(1)$$

2.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)$$

3.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)$$

4.

$$\lim_{x\to -1} f(x)$$

5.

$$\lim_{x \to -2} f(x)$$

6. Fyrir hvaða gildi x er f ósamfellt? Hvaða eiginleiki samfelldni er ekki uppfylltur?

Notið grafreikni í eftirfarandi verkefnum og ákvarðið markgildi fallsins frá vinstri og hægri út frá tölulegum eða myndrænum upplýsingum þegar x stefnir á a. Ef fallið hefur markgildi þegar x stefnir á a, skuluð þið tilgreina það. Ef ekki skuluð þið útskýra hvers vegna markgildið er ekki til.

7.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 3, \text{ if} & x \leq 2 \\ x^3 + 1, if & x > 2 \end{cases} \quad a = 2$$

8.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & if \quad x < 1 \\ 3x^2 - 1, & if \quad x = 1 a = 1 \\ -\sqrt{x+3} + 4, & if \quad x > 1 \end{cases}$$

Reiknið hvert markgildi í eftirfarandi verkefnum með algebruaðferðum.

9.

$$\lim_{x \to -5} \left(\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{x}}{10 + 2x} \right)$$

10.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{h^2 + 25} - 5}{h^2} \right)$$

11.

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2 + h} \right)$$

Ákvarðið í eftirfarandi verkefnum hvort gefna fallið f sé samfellt. Ef það er samfellt skuluð þið sýna hvers vegna. Ef það er ekki samfellt skuluð þið tilgreina hvaða skilyrði eru ekki uppfyllt.

12.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

13.

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2-9x+36}{x^3-3x^2+2x-6}$$

Notið skilgreiningu afleiðu í eftirfarandi verkefnum til að finna afleiðu gefna fallsins í $x=a$.

14.

$$f(x)=\frac{3}{5+2x}$$

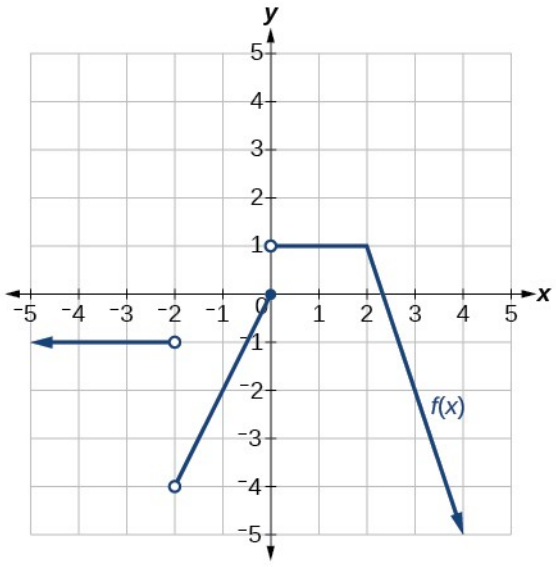
15.

$$f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$$

16.

$$f(x)=2x^2+9x$$

17. Ákvarðið fyrir grafið á mynd 2 hvar fallið er samfellt eða ósamfellt og hvar það er deildanlegt eða ekki deildanlegt.



Mynd 2

Notið grafreikni í eftirfarandi verkefnum til að útskýra hvers vegna fallið er ekki deildanlegt alls staðar á skilgreiningarmengi sínu. Tilgreinið punktana þar sem fallið er ekki deildanlegt.

18.

$$f(x)=|x-2|-|x+2|$$

19.

$$f(x)=\frac{2}{1+e^{\frac{2}{x}}}$$

Útskýrið ritháttinn með orðum í eftirfarandi verkefnum. Hæð skotkúlu í fetum, s, er fall af tímanum t í sekúndum eftir að henni er skotið á loft og er gefin með fallinu $s(t)$.

20.

$$s(0)$$

21.

$$s(2)$$

22.

$$s'(2)$$

23.

$$\frac{s(2)-s(1)}{2-1}$$

24.

$$s(t)=0$$

Notið tæknibúnað í eftirfarandi verkefnum til að reikna markgildið.

25.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{3x}$$

26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{2x}$$

27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{2x^2}$$

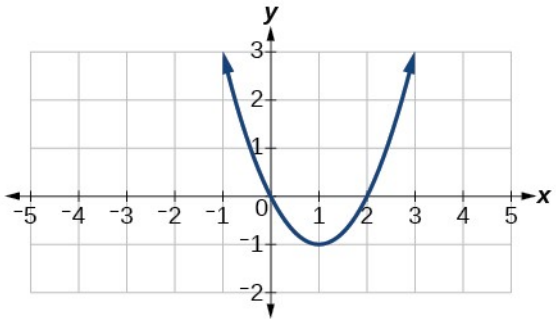
28. Reiknið markgildið án tæknibúnaðar.

$$\lim_{x\to 1} f(x),\ \text{þar sem } f(x)=\begin{cases}4x-7 & x\neq 1\\ x^2-4 & x=1\end{cases}$$

Fyrir hvaða gildi x er fallið hér fyrir neðan ósamfellt?

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 7 & x \neq 1 \\ x^2 - 4 & x = 1 \end{cases}$$

Skoðið fallið sem grafið á mynd 3 sýnir í eftirfarandi verkefnum.



Mynd 3

29. Finnið meðalbreytingarhraða fallsins frá $x=1$ til $x=3$.

30. Finnið öll gildi x þar sem $f'(x)=0$.

31. Finnið öll gildi x þar sem $f'(x)$ er ekki til.

32. Finnið jöfnu snertils við graf f í tilgreinda punktinum: $f(x)=3x^2-2x-6, \quad x=-2$

Notið fallið $f(x)=x(1-x)^{\frac{2}{5}}$ í eftirfarandi verkefnum.

33. Teiknið graf fallsins $f(x)=x(1-x)^{\frac{2}{5}}$ með því að slá fyrst inn $f(x)=x\left((1-x)^2\right)^{\frac{1}{5}}$ og síðan $f(x)=x\left((1-x)^{\frac{1}{5}}\right)^2$.

34. Kannið hegðun grafs $f(x)$ í grennd við $x=1$ með því að teikna fallið á eftirfarandi skilgreiningarmengjum: [0,9, 1,1], [0,99, 1,01], [0,999, 1,001] og [0,9999, 1,0001]. Notið upplýsingarnar til að ákvarða hvort fallið virðist vera deildanlegt í $x=1$.

Finnið afleiðu hvers falls í eftirfarandi verkefnum með skilgreiningunni $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

35.

$$f(x)=2x-8$$

36.

$$f(x)=4x^2-7$$

37.

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$$

38.

$$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

39.

$$f(x)=\frac{3}{x-1}$$

40.

$$f(x)=-x^3+1$$

41.

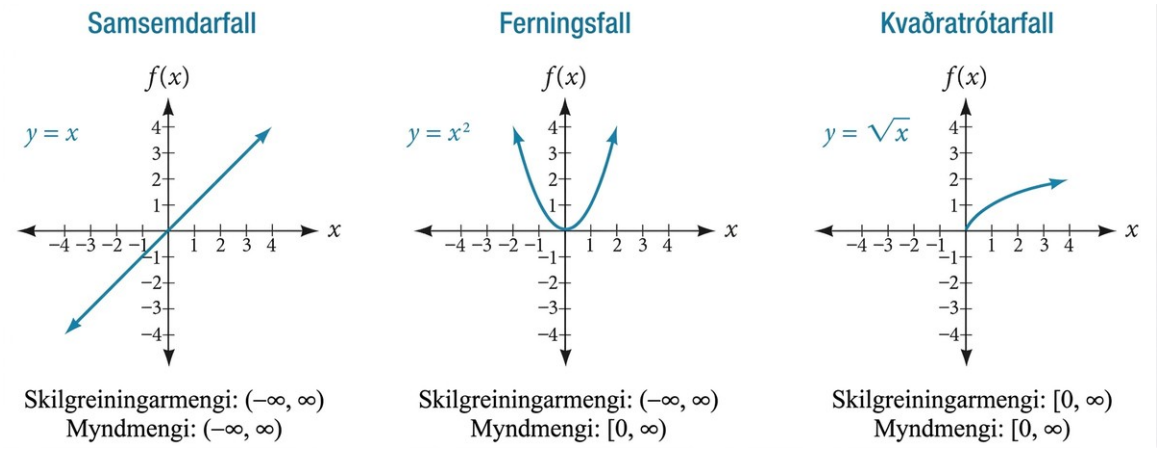
$$f(x)=x^2+x^3$$

42.

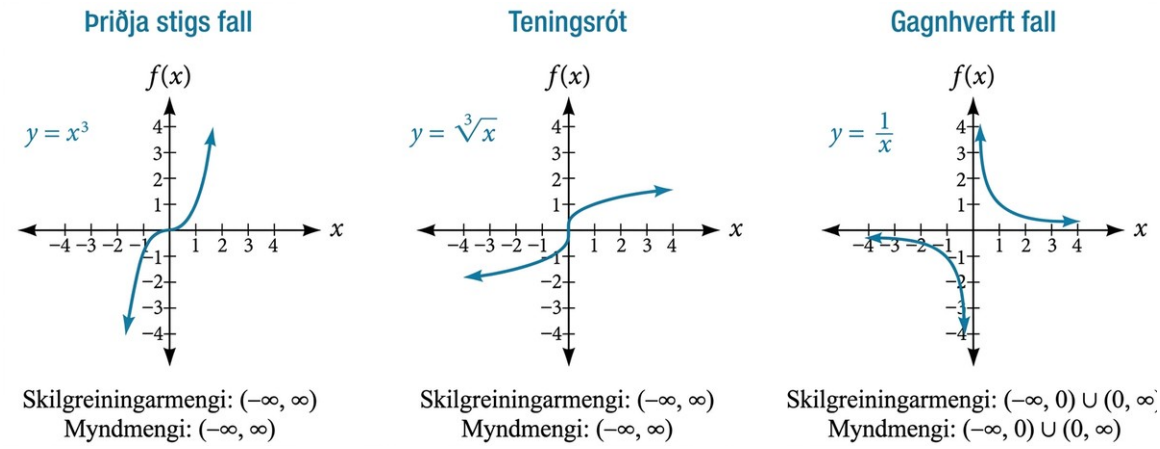
$$f(x)=\sqrt{x-1}$$

Viðauki A Grunnföll og samsemdir

Gröf grunnfalla

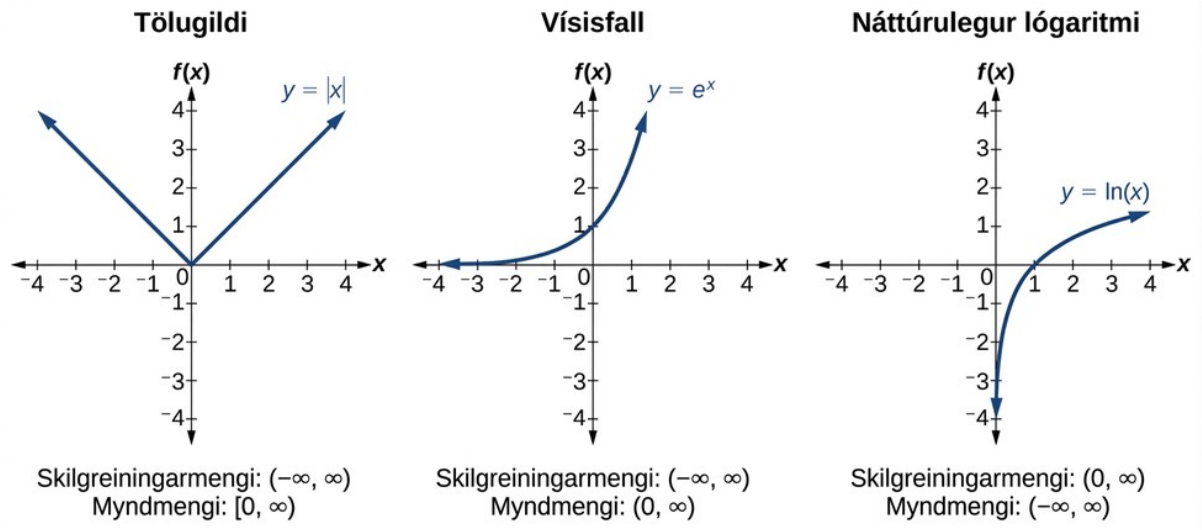


Mynd A1



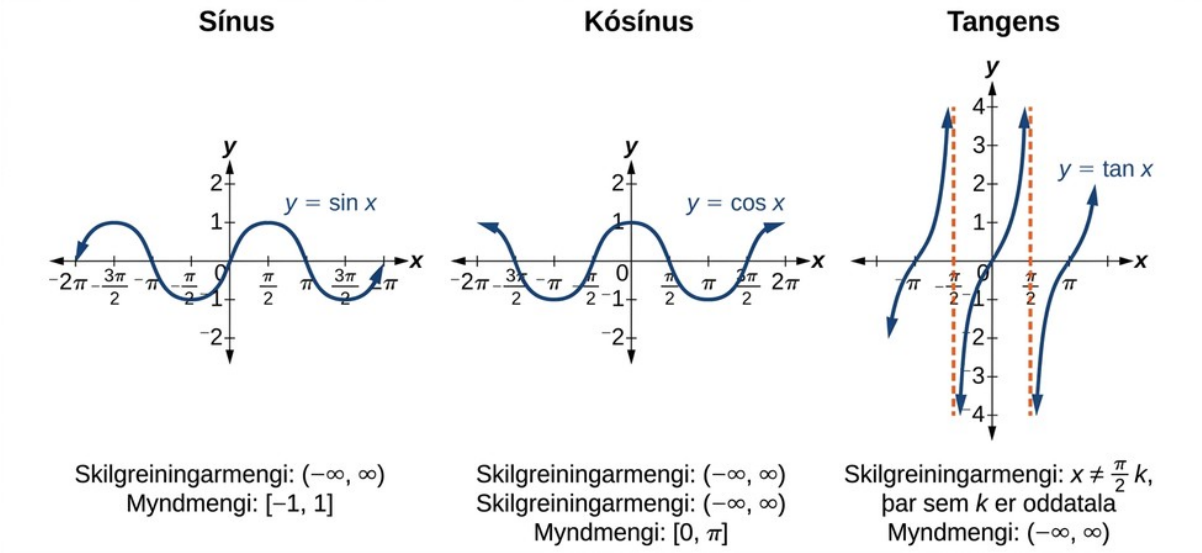
Mynd A2

A

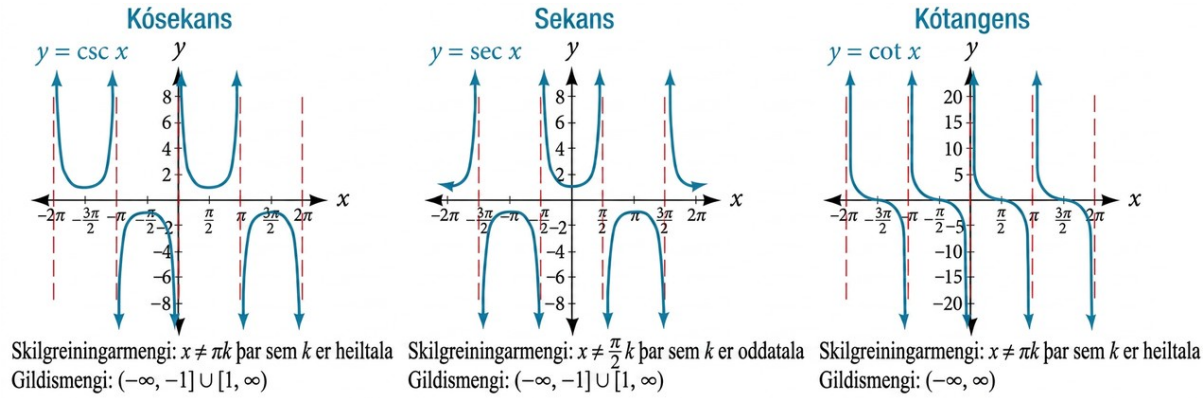


Mynd A3

Gröf hornafalla

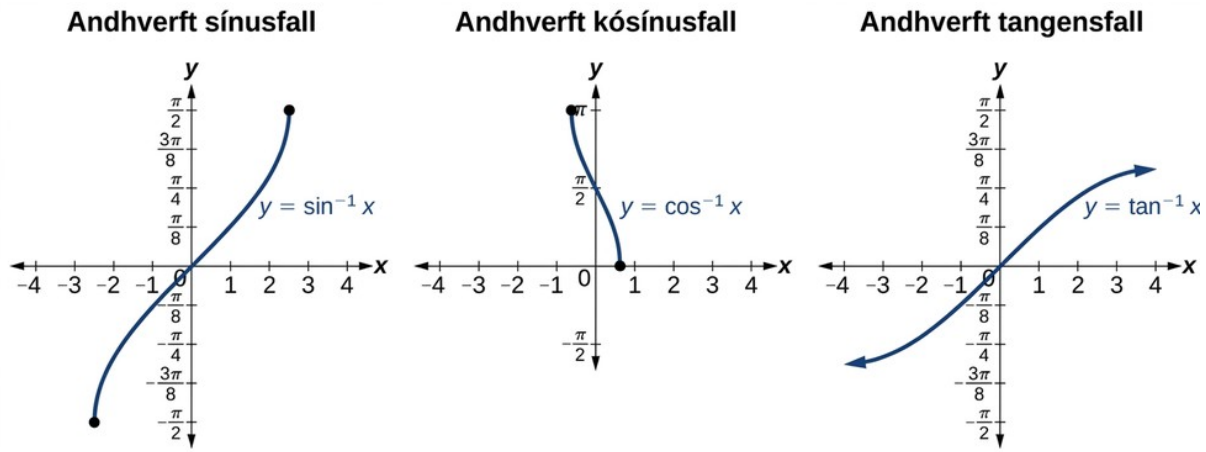


Mynd A4



A

Mynd A5

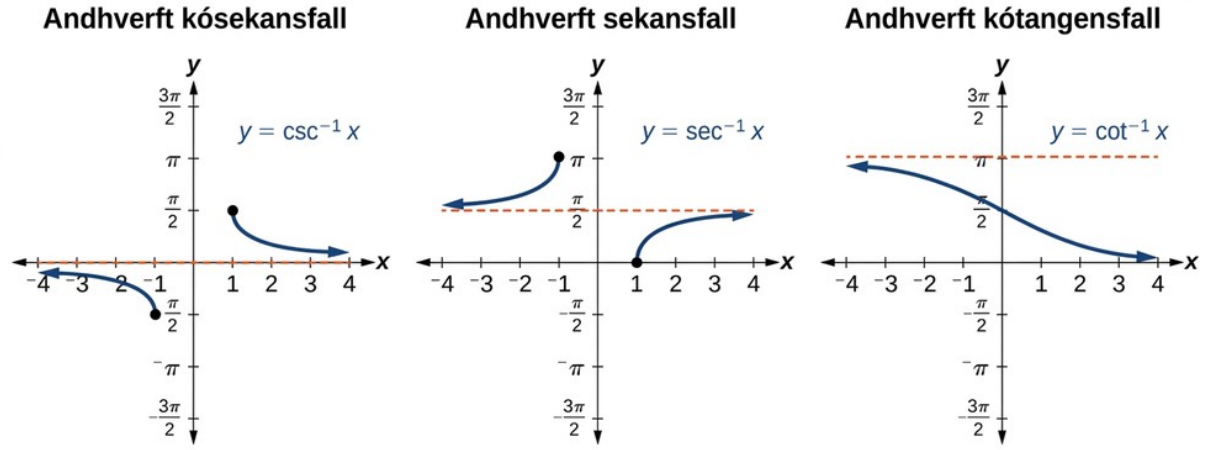


Skilgreiningarmengi: $[-1, 1]$
Myndmengi: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Skilgreiningarmengi: $[-1, 1]$
Myndmengi: $[0, \pi]$

Skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$
Myndmengi: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Mynd A6



Skilgreiningarmengi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Myndmengi: $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Skilgreiningarmengi: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Myndmengi: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$
Myndmengi: $(0, \pi)$

Mynd A7

Hornafallasamsemdir

Pýþagórasar-samsemdir	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
Samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla	$\cos(-\theta) = \cos\ \theta$ $\sec(-\theta) = \sec\ \theta$ $\sin(-\theta) = -\sin\ \theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\ \theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\ \theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\ \theta$
Fyllihornasamsemdir	$\cos\ \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\sin\ \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\tan\ \theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\ \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\sec\ \theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\ \theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
Grunnsamsemdir	$\tan\ \theta = \frac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}$ $\sec\ \theta = \frac{1}{\cos\ \theta}$ $\csc\ \theta = \frac{1}{\sin\ \theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
Samlagningar- og frádráttarsamsemdir	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\ \alpha\ \cos\ \beta + \sin\ \alpha\ \sin\ \beta$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta + \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\ \alpha\ \cos\ \beta - \cos\ \alpha\ \sin\ \beta$ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\ \alpha + \tan\ \beta}{1 - \tan\ \alpha\ \tan\ \beta}$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\ \alpha - \tan\ \beta}{1 + \tan\ \alpha\ \tan\ \beta}$
Tvöföldunarformúlur	$\sin(2\theta) = 2\ \sin\ \theta\ \cos\ \theta$ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos(2\theta) = 1 - 2\ \sin^2\theta$ $\cos(2\theta) = 2\ \cos^2\theta - 1$ $\tan(2\theta) = \frac{2\ \tan\ \theta}{1 - \tan^2\theta}$

A

Helmingunarformúlur	$\sin\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{2}}$ $\cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}$ $\tan\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}$ $\tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}$ $\tan\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha}$
Lækkunarformúlur	$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ $\tan^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}$
Margfeldi í summu	$\cos\ \alpha\ \cos\ \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ $\sin\ \alpha\ \cos\ \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\sin\ \alpha\ \sin\ \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\ \alpha\ \sin\ \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
Summa í margfeldi	$\sin\ \alpha+\sin\ \beta = 2\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\ \alpha-\sin\ \beta = 2\ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ $\cos\ \alpha-\cos\ \beta = -2\ \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\ \alpha+\cos\ \beta = 2\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
Sínusreglan	$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b} = \frac{\sin\ \gamma}{c}$ $\frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{c}{\sin\ \gamma}$
Kósínusreglan	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\ \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\ \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\ \gamma$

Tafla A1

Svarlykill

Kafli 1

Prófaðu

1.1 Föll og fallatáknun

1.

1. ⓐ já
2. ⓑ já. (Athugaðu: Ef tveir leikmenn hefðu verið jafnir í til dæmis 4th sæti væri nafnið ekki fall af sætinu.)

2.

$$w = f(d)$$

3. já

4.

$$g(5) = 1$$

5.

$$m = 8$$

6.

$$y = f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$$

7.

$$g(1) = 8$$

8. $x = 0$ eða $x = 2$

9.

1. ⓐ já, því hver bankareikningur hefur aðeins eina innstæðu á hverjum tíma
2. ⓑ nei, því fleiri en eitt bankareikningsnúmer geta haft sömu innstæðu
3. ⓒ nei, því sama úttak getur samsvarað fleiri en einu inntaki.

10.

1. ⓐ Já, bókstafseinkunn er fall af prósentueinkunn;

2. ⓑ Nei, fallið er ekki eintækt. Til eru 100 mismunandi prósentutölur en aðeins um fimm mögulegar bókstafseinkunnir, svo ekki getur aðeins ein prósentutala samsvarað hverri bókstafseinkunn.

11. já

12. Nei, því grafið stenst ekki lárétta línuprófið.

1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi

1.

$$\{-5, 0, 5, 10, 15\}$$

2.

$$(-\infty, \infty)$$

3.

$$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) U \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

4.

$$\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$$

5.

1. ⓐ gildi sem eru minni en eða jöfn −2, eða gildi sem eru stærri en eða jöfn −1 og minni en 3;

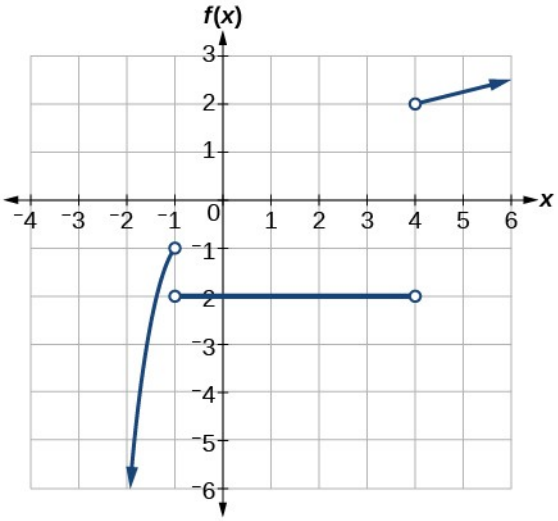
2. ⓑ $\{x | x \leq -2 \text{ eða } -1 \leq x < 3\}$;

3. ⓒ $(-\infty, -2] U [-1, 3)$

6. skilgreiningarmengi =[1950,2002] myndmengi = [47,000,000,89,000,000]

7. skilgreiningarmengi: $(-\infty, 2]$; myndmengi: $(-\infty, 0]$

8.



1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa

1. $\frac{\$\ 2{,}84-\$\ 2{,}31}{5\ \text{ár}}=\frac{\$\ 0{,}53}{5\ \text{ár}}=\$\ 0{,}106$ á ári.

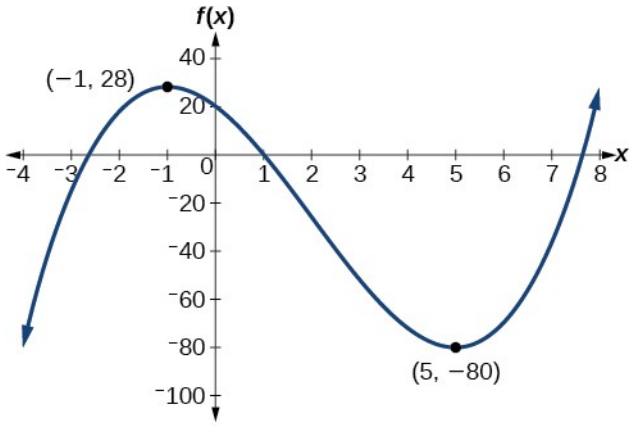
2.

$$\frac{1}{2}$$

3.

$$a+7$$

4. Staðbundna hágildið virðist vera í $(-1,28)$, og staðbundna lággildið er í $(5,-80)$. Fallið er vaxandi á $(-\infty,-1)U(5,\infty)$ og minnkandi á $(-1,5)$.



1.4 Samskeyting falla

1.

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x-1)\left(x^2-1\right) = x^3 - x^2 - x + 1$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x-1) - \left(x^2-1\right) = x - x^2$$

Nei, föllin eru ekki eins.

2. Þyngdarkraftur er áfram kraftur, svo $a\left(G\left(r\right)\right)$ er merkingarbær sem hröðun reikistjörnu í fjarlægðinni r frá sólu vegna þyngdarkrafts, en $G\left(a\left(F\right)\right)$ er ekki merkingarbær.

3. $f\left(g\left(1\right)\right)=f\left(3\right)=3$ og $g\left(f\left(4\right)\right)=g\left(1\right)=3$

4.

$$g\left(f\left(2\right)\right)=g\left(5\right)=3$$

5.

1. ⓐ 8
2. ⓑ 20

6.

$$\left[-4,0\right)U\left(0,\infty\right)$$

7. Mögulegt svar:

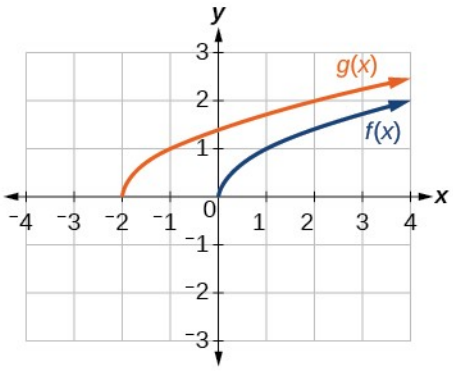
$$g\left(x\right)=\sqrt{4+x^2}$$
$$h\left(x\right)=\frac{4}{3-x}$$
$$f=h\circ g$$

1.5 Ummyndanir falla

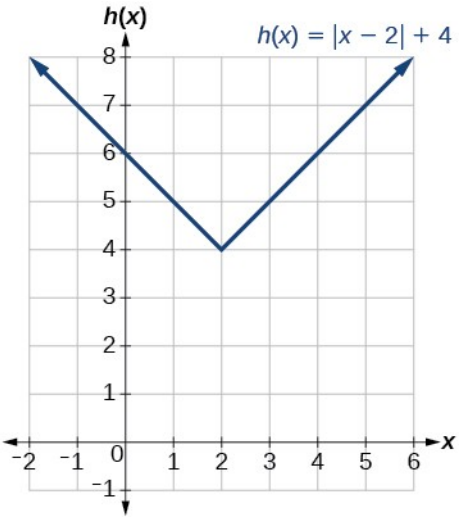
1.

$$b\left(t\right)=h\left(t\right)+10=-4{,}9\ t^2+30\ t+10$$

2. Gröf $f\left(x\right)$ og $g\left(x\right)$ eru sýnd hér fyrir neðan. Ummyndunin er lárétt hliðrun. Fallinu er hliðrað um 2 einingar til vinstri.



3.

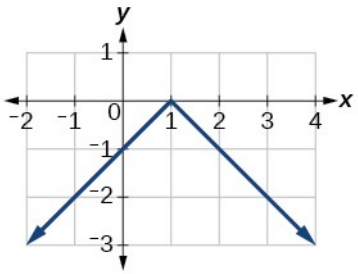


4.

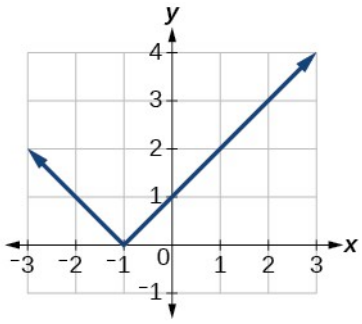
$$g(x)=\frac{1}{x-1}+1$$

5.

a.



b.



6.

1. ⓐ

$g(x)=-f(x)$

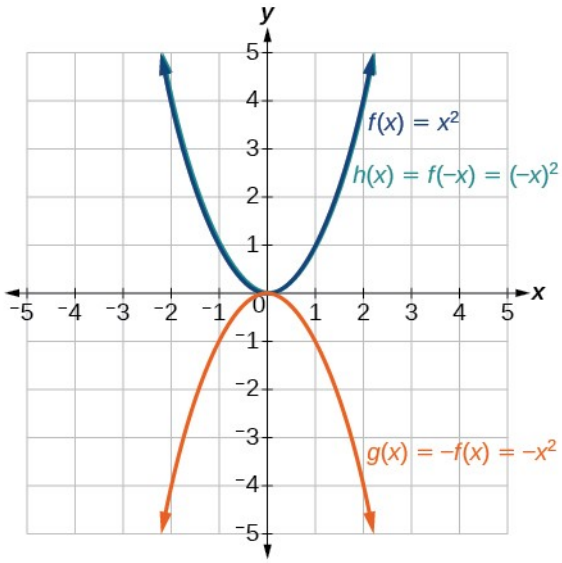
x	-2	0	2	4
$g(x)$	-5	-10	-15	-20

2. ⓑ

$h(x)=f(-x)$

x	-2	0	2	4
$h(x)$	15	10	5	óþekkt

7.



Athugaðu: $g(x)=f(-x)$ lítur eins út og $f(x)$.

8. jafnstætt

9.

x	2	4	6	8
$g(x)$	9	12	15	0

10.

$$g(x)=3x-2$$

11. $g(x)=f\left(\frac{1}{3}x\right)$, svo með kvaðratrótarfallinu fæst $g(x)=\sqrt{\frac{1}{3}x}$.

1.6 Tölugildisföll

1.

$$|x-2|\leq 3$$

2. með breytunni p fyrir að standast, $|p-80|\leq 20$

3.

$$f(x)=-|x+2|+3$$

4. $x=-1$ eða $x=2$

5. $f(0)=1$, svo grafið sker lóðrétta ásinn í $(0,1)$. $f(x)=0$ þegar $x=-5$ og $x=1$, svo grafið sker lárétta ásinn í $(-5,0)$ og $(1,0)$.

6.

$$-8\leq x\leq 4$$

7. $k\leq 1$ eða $k\geq 7$; með biltákni er þetta $(-\infty,1]U[7,\infty)$

1.7 Andhverf föll

1.

$$h(2)=6$$

2. Já

3. Já

4. Skilgreiningarmengi fallsins f^{-1} er $(-\infty,-2)$ og myndmengi fallsins f^{-1} er $(1,\infty)$.

5.

a. $f(60)=50$. Á 60 mínútum eru eknar 50 mílur.

b. $f^{-1}(60)=70$. Það tekur 70 mínútur að aka 60 mílur.

6. a. 3; b. 5,6

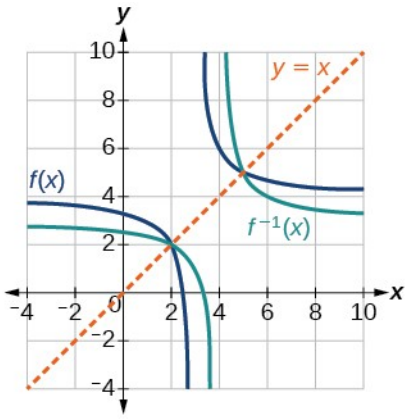
7.

$$x=3y+5$$

8.

$f^{-1}(x)=(2-x)^2$; skilgreiningarmengi $f:[0,\infty)$; skilgreiningarmengi $f^{-1}:(-\infty,2]$

9.



1.1 Kaflaverkefni

1. Vensl eru mengi raðaðra para. Fall er sérstök gerð vensla þar sem engin tvö röðuð pör hafa sama fyrra hnit.

3. Þegar lóðrétt lína sker graf vensla oftar en einu sinni merkir það að fleiri en eitt úttak samsvarar því inntaki. Til að venslin séu fall má aðeins eitt úttak samsvara hverju tilteknu inntaksgildi.

5. Þegar lárétt lína sker graf falls oftar en einu sinni merkir það að fleiri en eitt inntak samsvarar því úttaki. Fall er eintækt ef aðeins eitt inntak samsvarar hverju úttaki.

7. fall

9. fall

11. fall

13. fall

15. fall

17. fall

19. fall

21. fall

23. fall

25. ekki fall

27.

$$f(-3)=-11;$$
$$f(2)=-1;$$
$$f(-a)=-2a-5;$$
$$-f(a)=-2a+5;$$
$$f(a+h)=2a+2h-5$$

29.

$$f(-3)=\sqrt{5}+5;$$
$$f(2)=5;$$
$$f(-a)=\sqrt{2+a}+5;$$
$$-f(a)=-\sqrt{2-a}-5;$$
$$f(a+h)=\sqrt{2-a-h}+5$$

31.

$$f(-3)=2;\ f(2)=1-3=-2;$$
$$f(-a)=\left|-a-1\right|-\left|-a+1\right|;$$
$$-f(a)=-\left|a-1\right|+\left|a+1\right|;$$
$$f(a+h)=\left|a+h-1\right|-\left|a+h+1\right|$$

33.

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=x+a+2,\ x\neq a$$

35.

1. ⓐ $f(-2)=14;$
2. ⓑ $x=3$

37.

1. ⓐ $f(5)=10;$
2. ⓑ $x=-1$ eða $x=4$

39.

1. ⓐ $f(t)=6-\frac{2}{3}t;$
2. ⓑ $f(-3)=8;$
3. ⓒ $t=6$

41. ekki fall

43. fall

45. fall

47. fall

49. fall

51. fall

53.

1. ⓐ $f(0)=1$;
2. ⓑ $f(x)=-3, x=-2$ eða $x=2$

55. ekki fall og því heldur ekki eintækt fall

57. eintækt fall

59. fall, en ekki eintækt

61. fall

63. fall

65. ekki fall

67.

$$f(x)=1, x=2$$

69.

$$f(-2)=14;\quad f(-1)=11;\quad f(0)=8;\quad f(1)=5;\quad f(2)=2$$

71.

$$f(-2)=4;$$

$$f(-1)=4{,}414;$$

$$f(0)=4{,}732;$$

$$f(1)=5;$$

$$f(2)=5{,}236$$

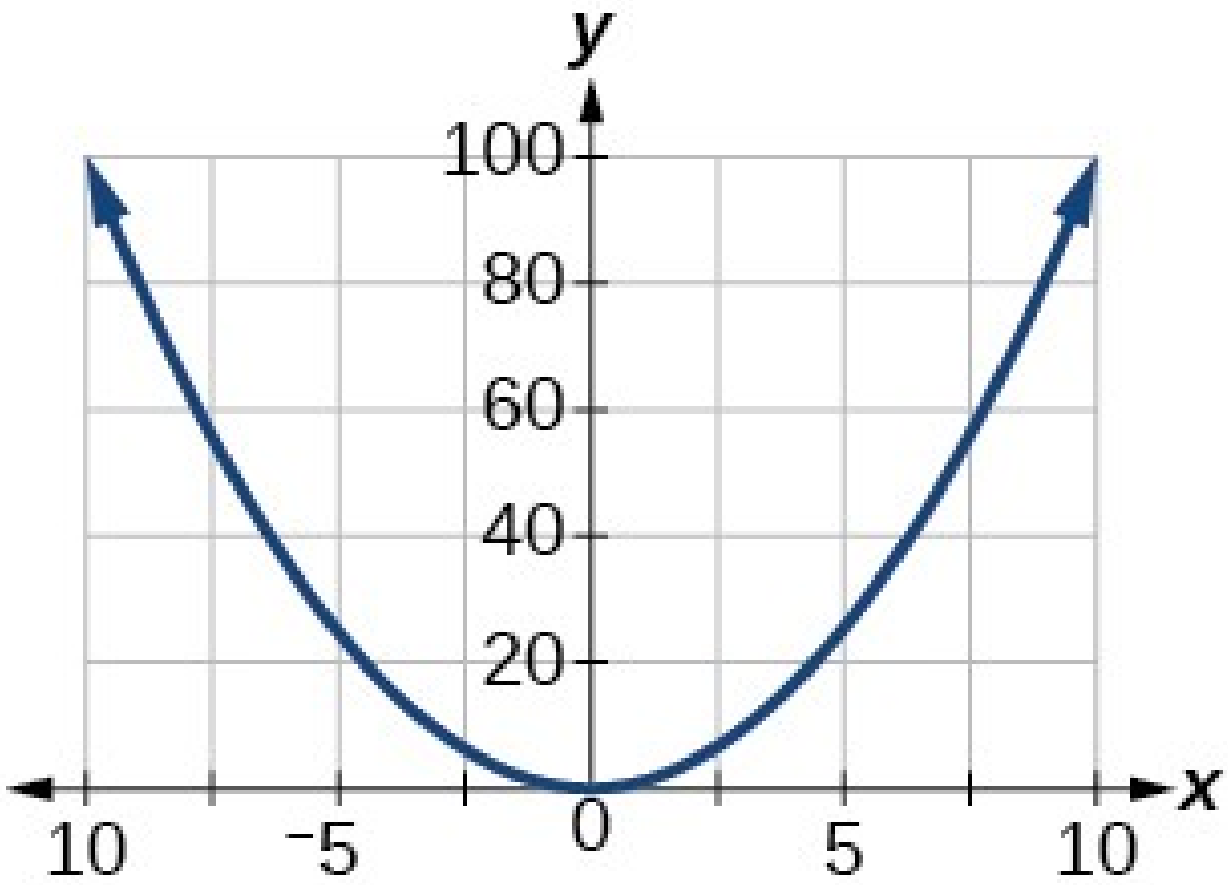
73.

$$f(-2)=\tfrac{1}{9};\quad f(-1)=\tfrac{1}{3};\quad f(0)=1;\quad f(1)=3;\quad f(2)=9$$

75. 20

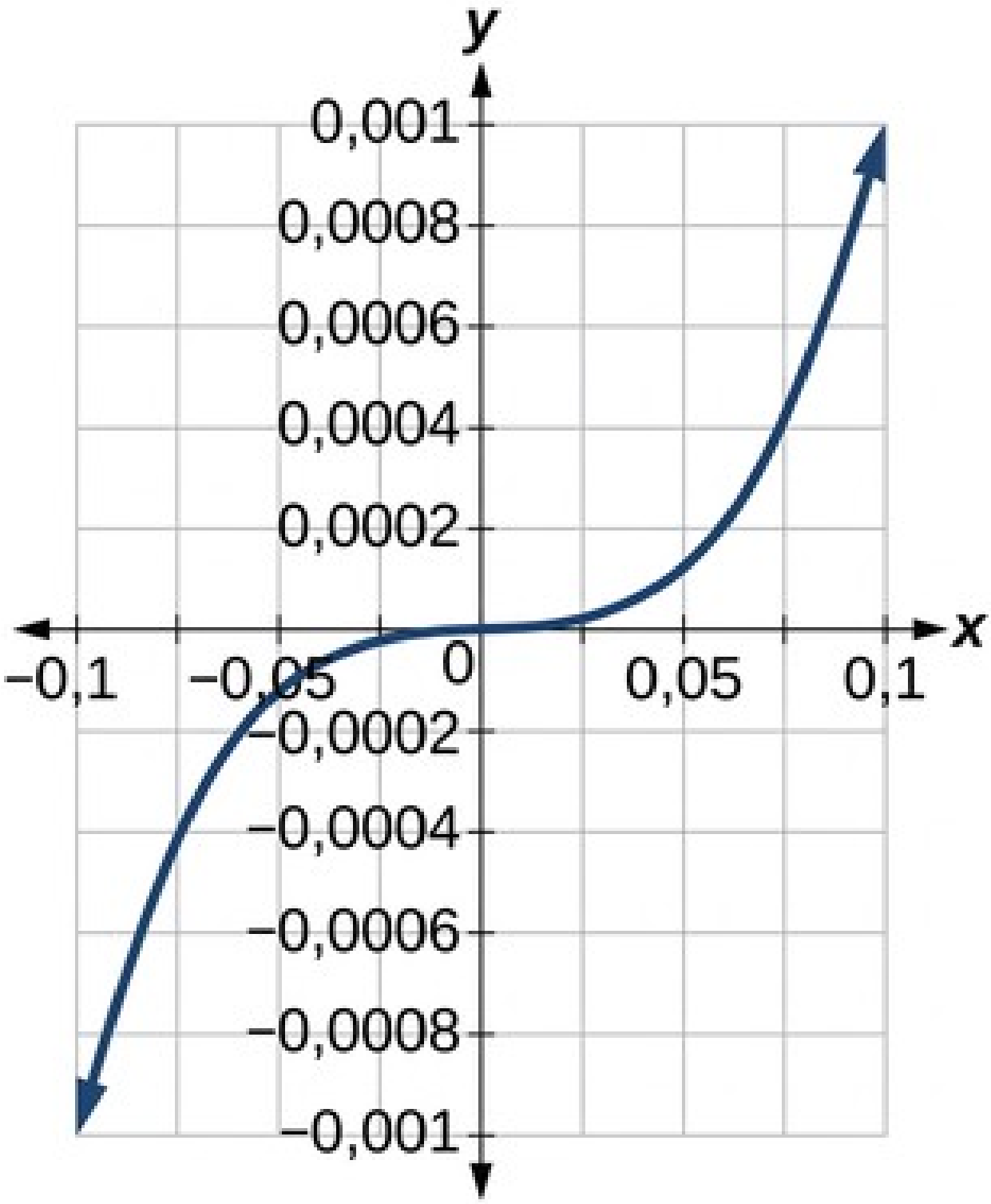
77.

$$[0,\ 100]$$



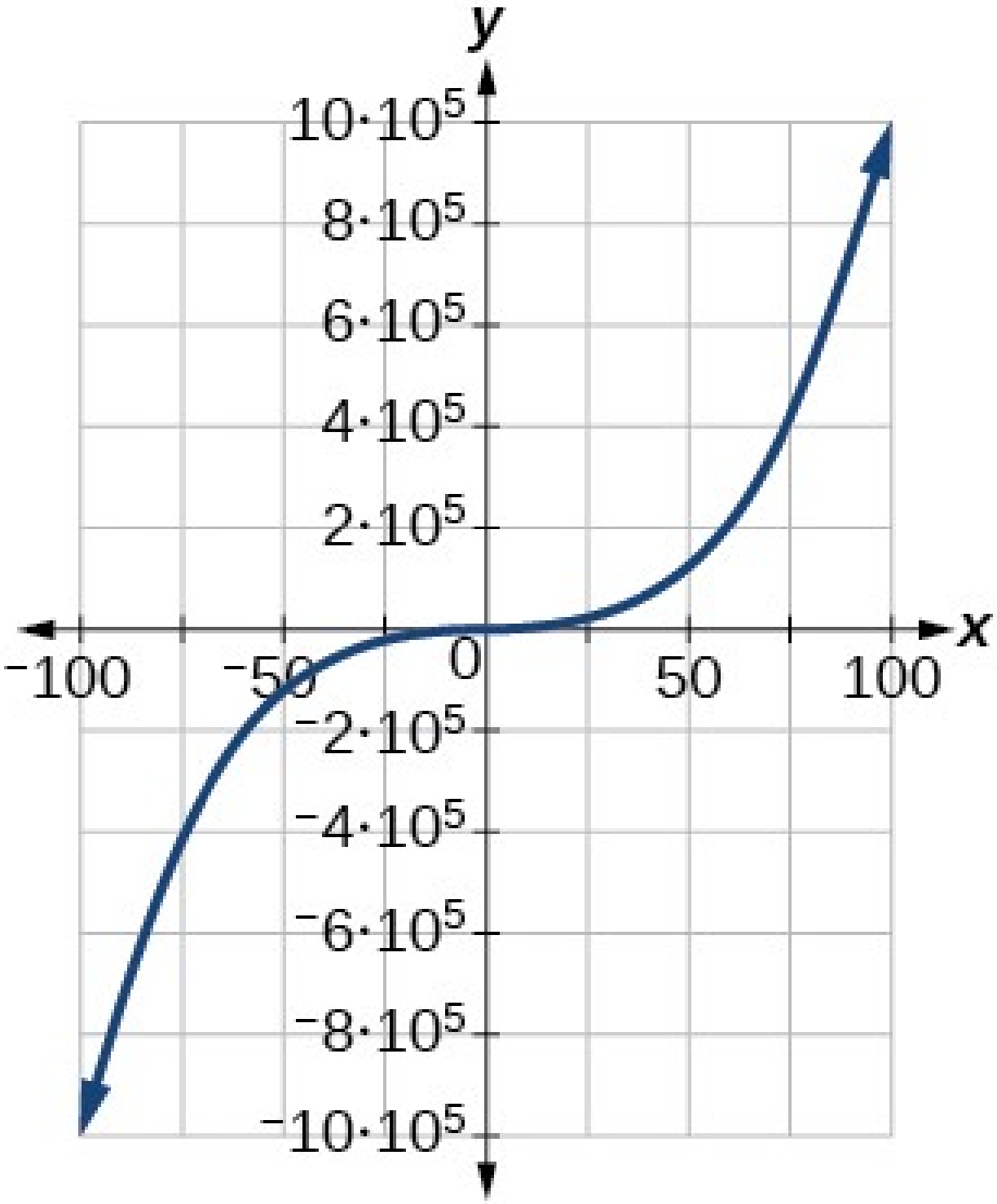
79.

$[-0{,}001;\ 0{,}001]$



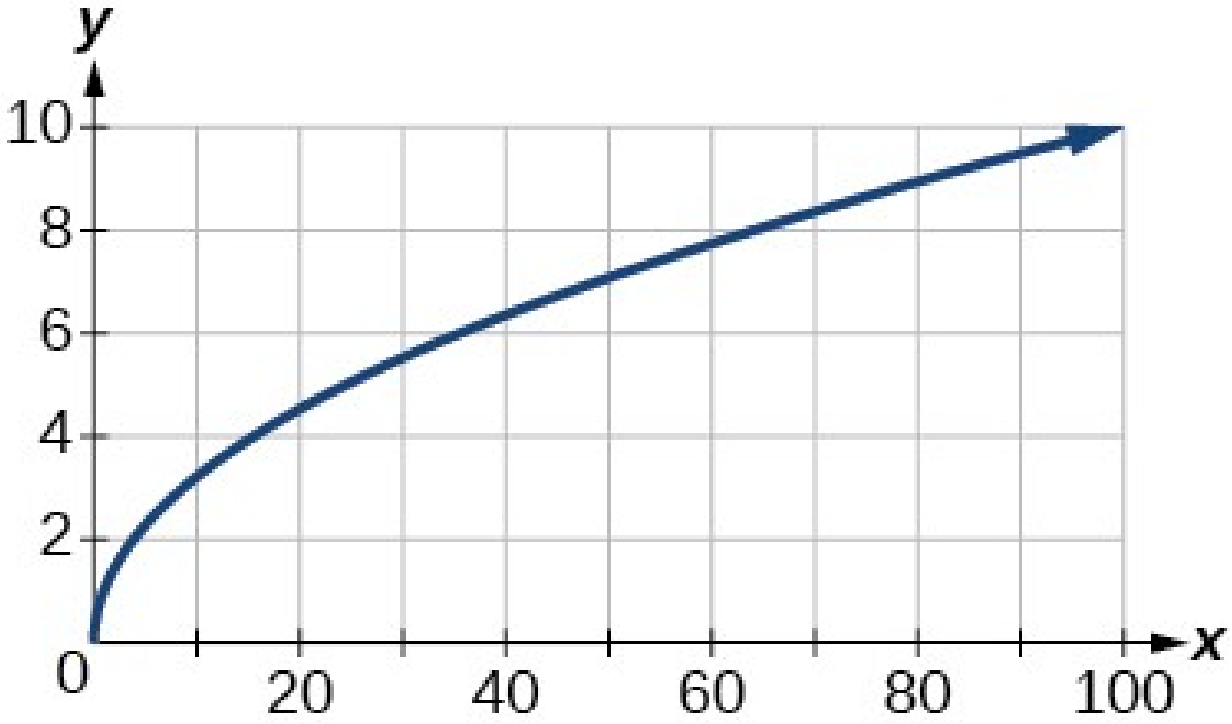
81.

$$[-1.000.000,\ 1.000.000]$$


y
x
$10 \cdot 10^5$
$8 \cdot 10^5$
$6 \cdot 10^5$
$4 \cdot 10^5$
$2 \cdot 10^5$
$-2 \cdot 10^5$
$-4 \cdot 10^5$
$-6 \cdot 10^5$
$-8 \cdot 10^5$
$-10 \cdot 10^5$
−100
−50
0
50
100

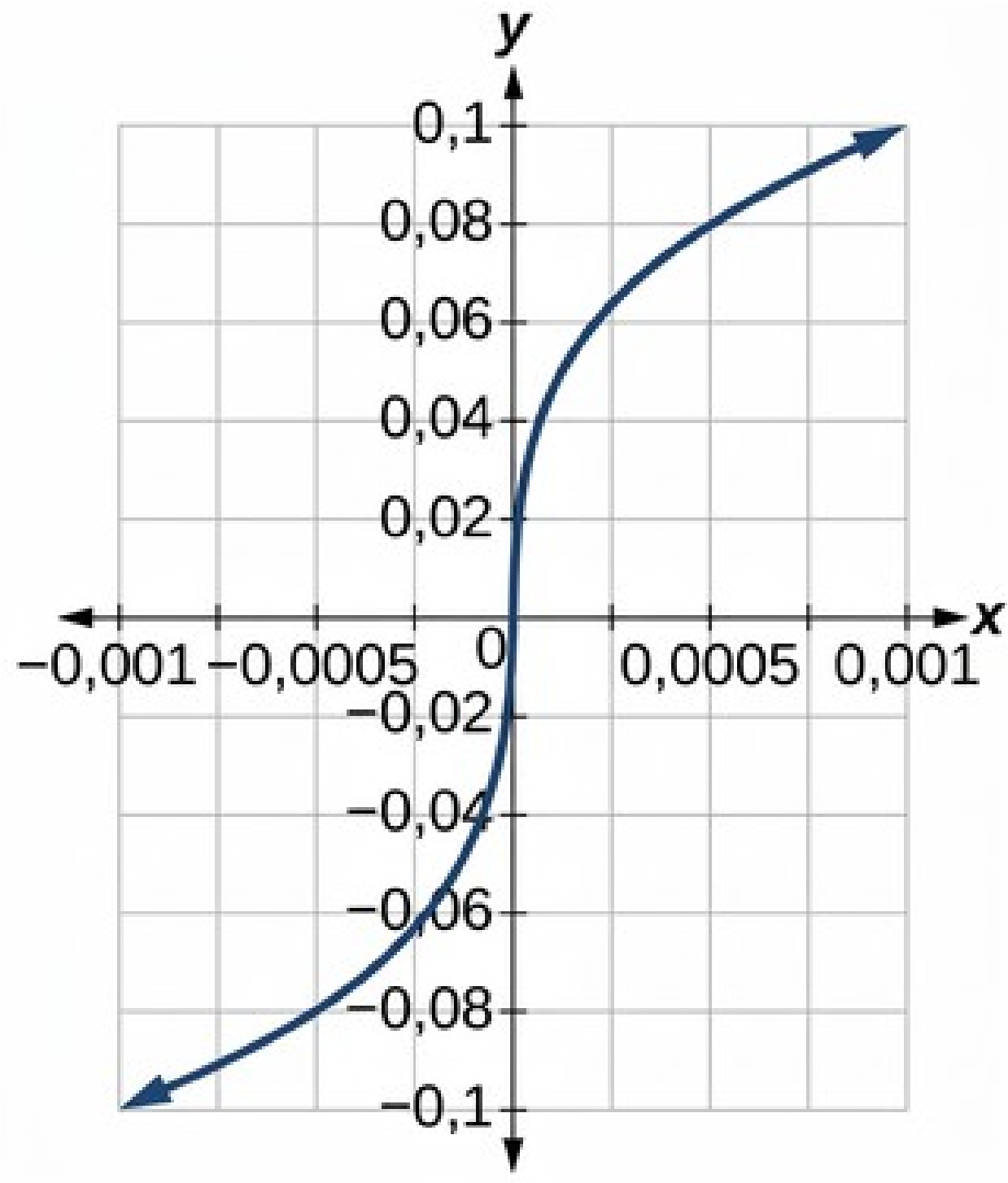
83.

$[0, 10]$



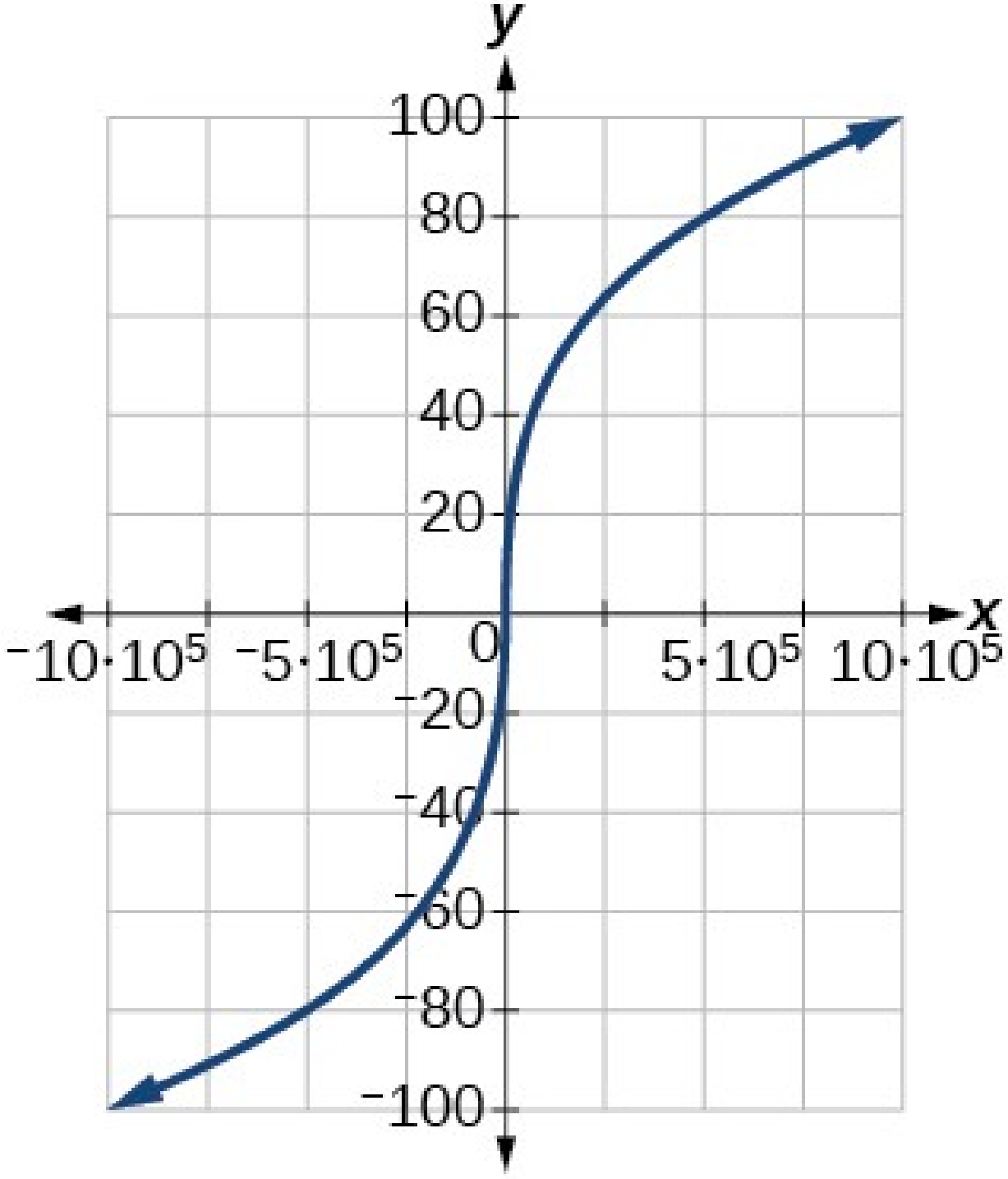
85.

$[-0{,}1\,;0{,}1]$



87.

$[-100,\ 100]$



89.

1. ⓐ $g(5000)=50$;
2. ⓑ Fjöldi rúmyarda af jarðvegi sem þarf fyrir 100 ferfeta garð er 1.

91.

1. ⓐ Hæð eldflaugar yfir jörðu eftir 1 sekúndu er 200 fet.
2. ⓑ hæð eldflaugar yfir jörðu eftir 2 sekúndur er 350 fet.

1.2 Kaflaverkefni

1. Skilgreiningarmengi falls ræðst af því hvaða gildi óháðu breytunnar gera fallið óskilgreint eða gefa tvinntölugildi.

3. Engin takmörkun er á x fyrir $f(x)=\sqrt[3]{x}$, því að taka má teningsrót af hvaða rauntölu sem er. Skilgreiningarmengið er því allar rauntölur, $(-\infty,\infty)$. Þegar unnið er með rauntölur er ekki hægt að taka kvaðratrót af neikvæðum tölum. Gildi x takmarkast því við óneikvæðar tölur fyrir $f(x)=\sqrt{x}$ og skilgreiningarmengið er $[0,\infty)$.

5. Teiknaðu graf hverrar formúlu kaflaskipta fallsins á samsvarandi hluta skilgreiningarmengisins. Notaðu sama kvarða á x -ás og y -ás fyrir hvert graf. Sýndu innifalda endapunkta með fylltum hring og útilokaða endapunkta með opnum hring. Notaðu ör til að tákna $-\infty$ eða ∞. Sameinaðu gröfin til að fá graf kaflaskipta fallsins.

7.

$$(-\infty,\infty)$$

9.

$$(-\infty,3]$$

11.

$$(-\infty,\infty)$$

13.

$$(-\infty,\infty)$$

15.

$$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)U\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$$

17.

$$(-\infty,-11)U(-11,2)U(2,\infty)$$

19.

$$(-\infty,-3)U(-3,5)U(5,\infty)$$

21.

$$(-\infty,5)$$

23.

$$[6,\infty)$$

25.

$$(-\infty,-9)\cup(-9,9)\cup(9,\infty)$$

27. skilgreiningarmengi: $(2,8]$, myndmengi: $[6,8)$

29. skilgreiningarmengi: $[-4,\ 4]$, myndmengi: $[0,\ 2]$

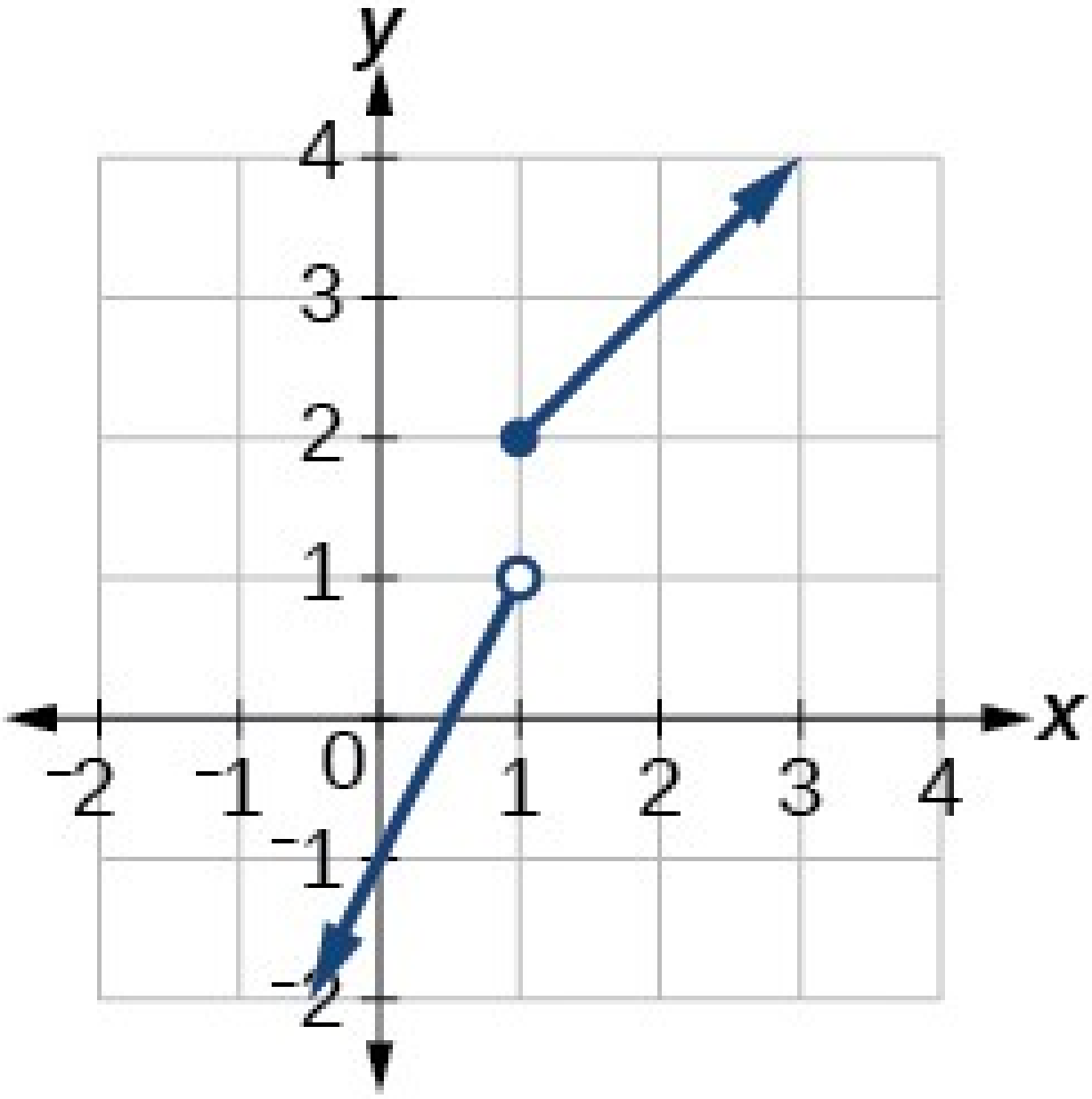
31. skilgreiningarmengi: $[-5,3)$, myndmengi: $[0,2]$

33. skilgreiningarmengi: $(-\infty,1]$, myndmengi: $[0,\infty)$

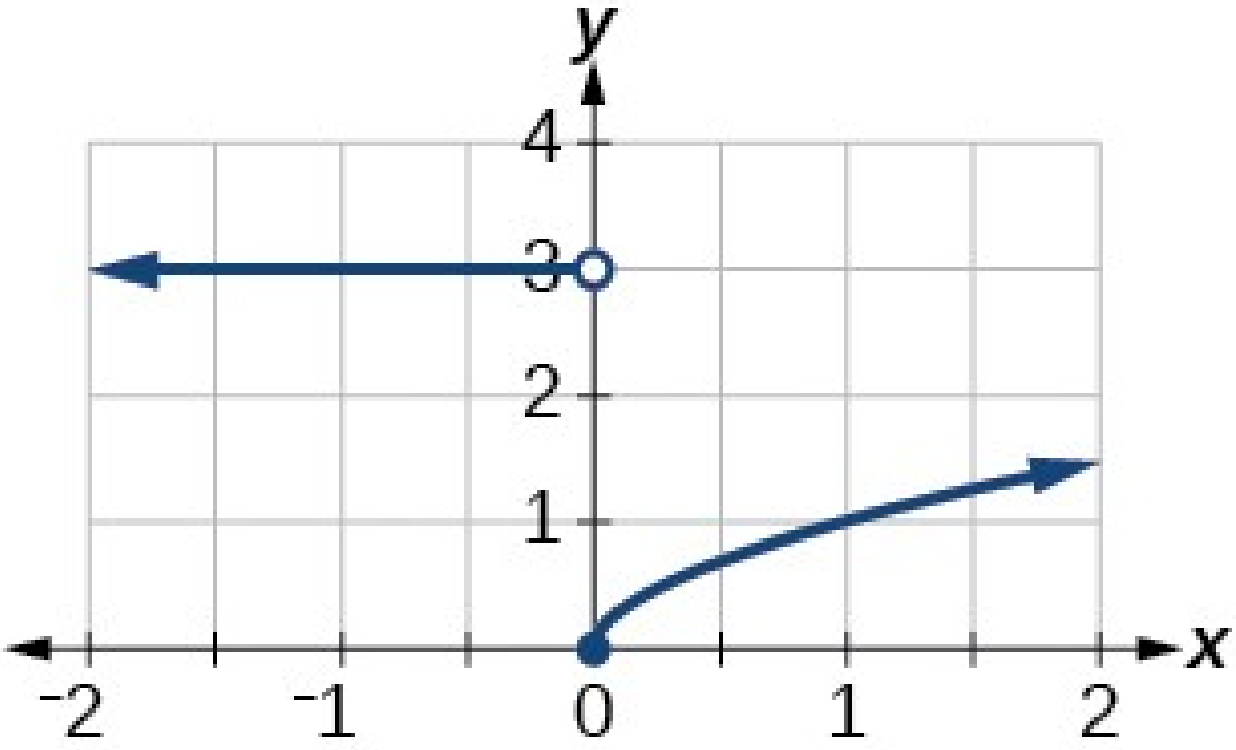
35. skilgreiningarmengi: $\left[-6,-\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{6},6\right]$; myndmengi: $\left[-6,-\frac{1}{6}\right]\cup\left[\frac{1}{6},6\right]$

37. skilgreiningarmengi: $[-3,\infty)$; myndmengi: $[0,\infty)$

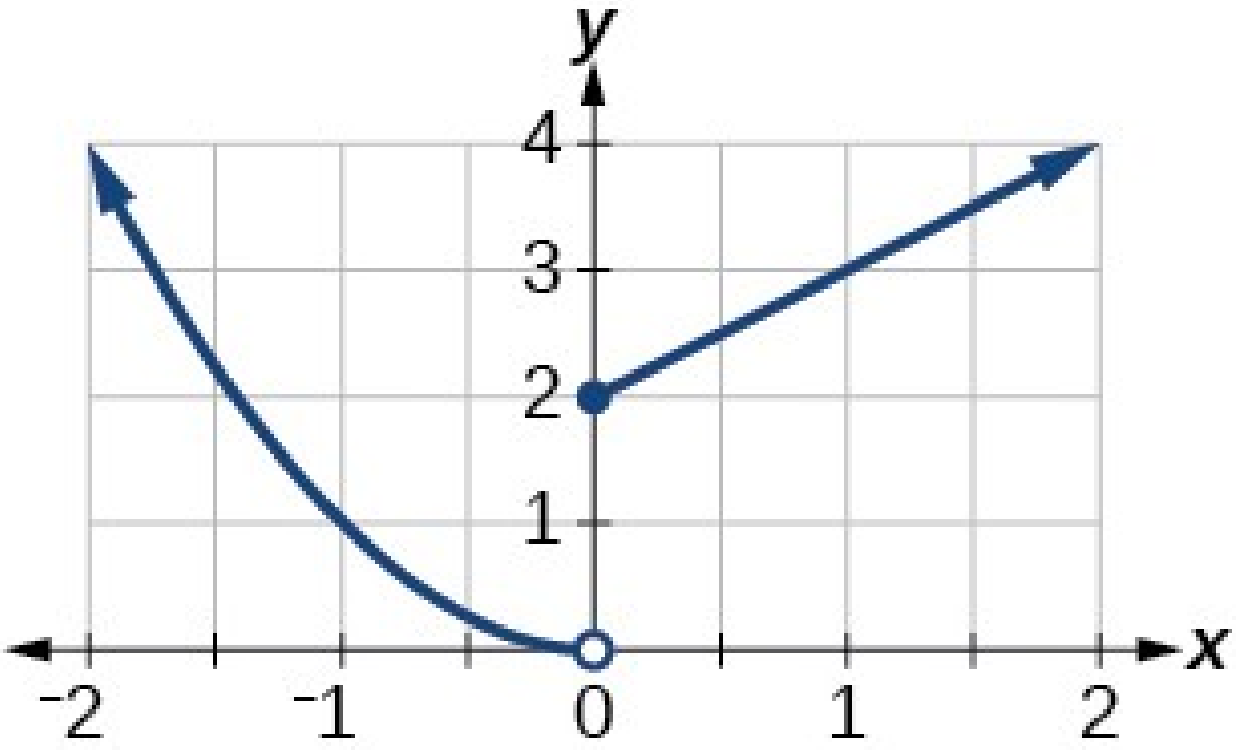
39. skilgreiningarmengi: $(-\infty,\infty)$



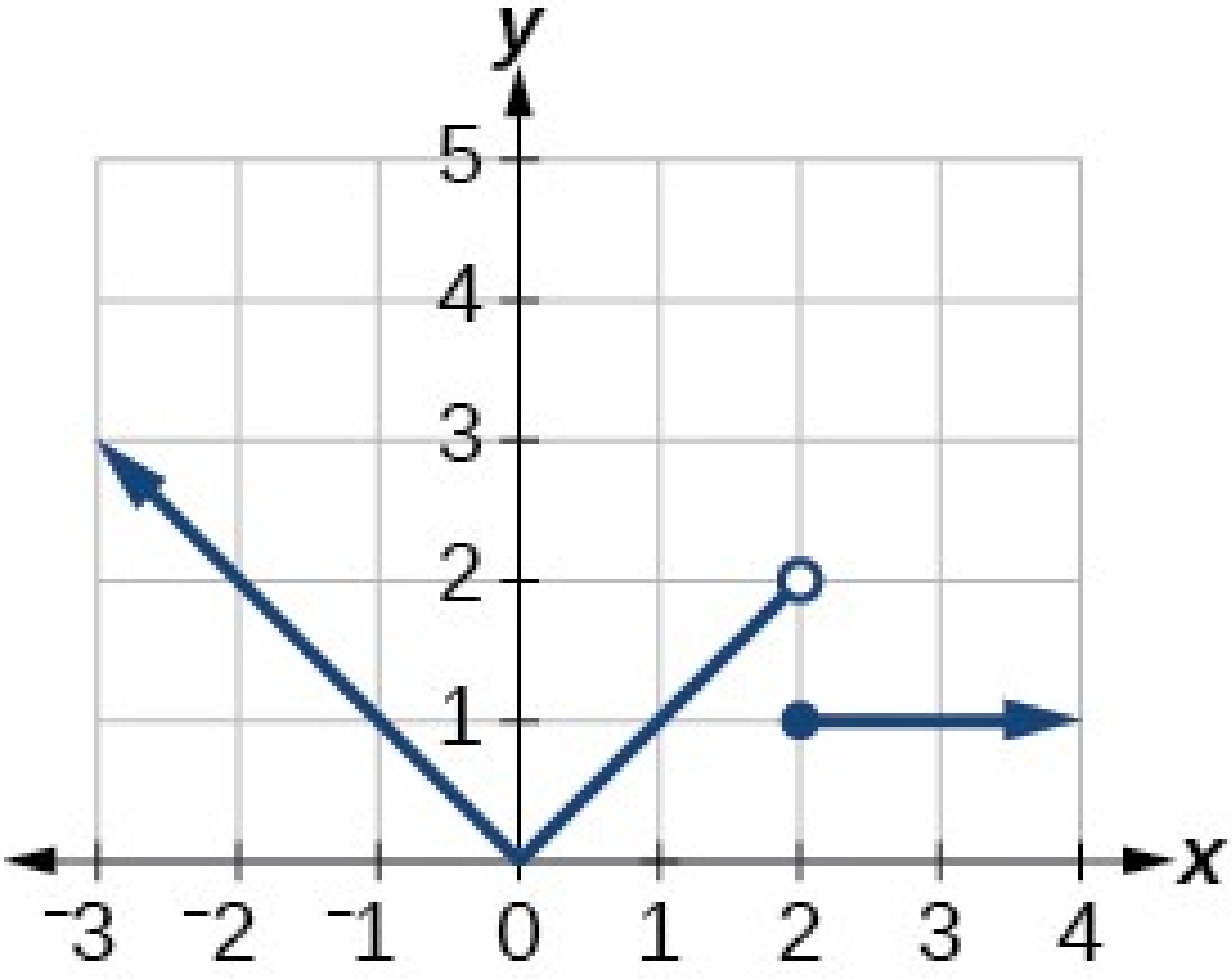
41. skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$



43. skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$



45. skilgreiningarmengi: $(-\infty, \infty)$



47.

$$f(-3)=1;\quad f(-2)=0;\quad f(-1)=0;\quad f(0)=0$$

49.

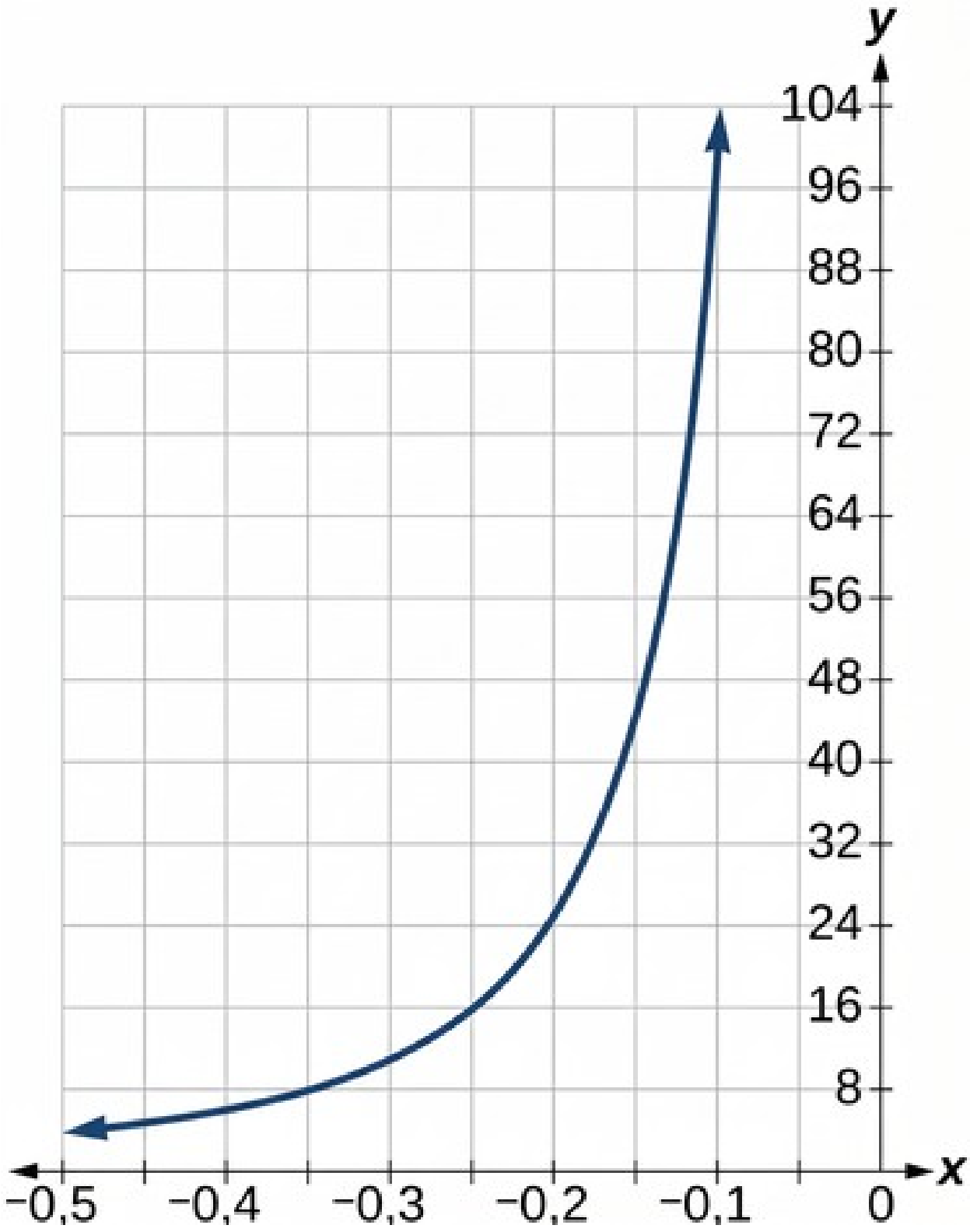
$$f(-1)=-4;\quad f(0)=6;\quad f(2)=20;\quad f(4)=34$$

51.

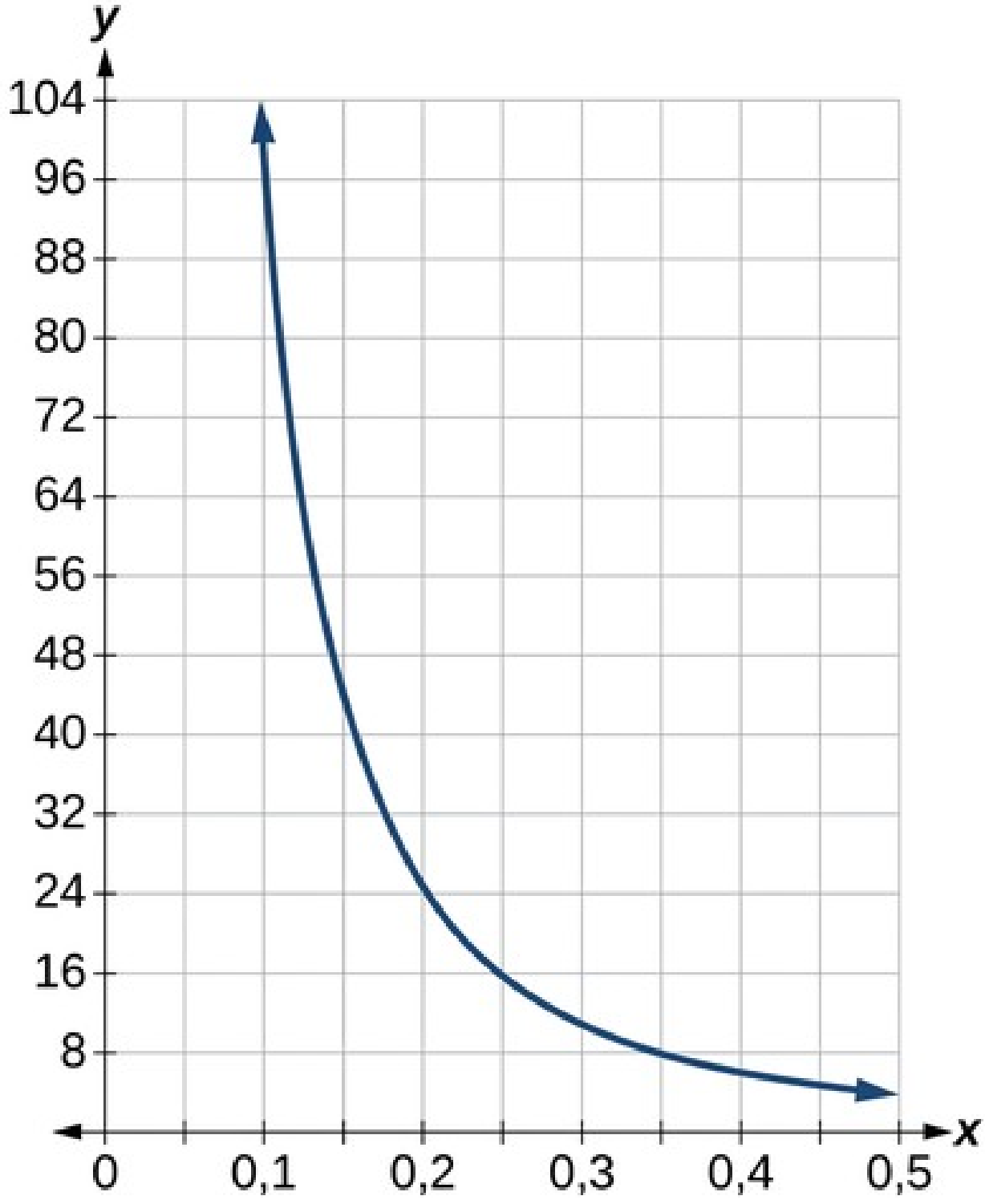
$$f(-1)=-5;\quad f(0)=3;\quad f(2)=3;\quad f(4)=16$$

53. skilgreiningarmengi: $(-\infty,1)U(1,\infty)$

55.



gluggi: $[-0{,}5\,;-0{,}1\,]$; myndmengi: $[\,4\,,100\,]$



gluggi: $[0{,}1\,;\ \ 0{,}5]$; myndmengi: $[4\,,100]$

57.

$[0\,,8]$

59. Mörg svör koma til greina. Eitt fall er $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

1.3 Kaflaverkefni

1. Já, meðalbreytingarhraði allra línulegra falla er fastur.

3. Algilt hágildi og lággildi varða allt grafið en staðbundin útgildi aðeins tiltekið svæði umhverfis opið bil.

5.

$$4(b+1)$$

7. 3

9.

$$4x+2h$$

11.

$$\frac{-1}{13(13+h)}$$

13.

$$3h^2+9h+9$$

15.

$$4x+2h-3$$

17.

$$\frac{4}{3}$$

19. vaxandi á $(-\infty;-2{,}5)\,U\,(1,\infty)$, minnkandi á $(-2{,}5;\ \ 1)$

21. vaxandi á $(-\infty,1)\,U\,(3,4)$, minnkandi á $(1,3)\,U\,(4,\infty)$

23. staðbundið hágildi: $(-3,50)$, staðbundið lággildi: $(3,-50)$

25. algilt hágildi um það bil í $(7,150)$, algilt lággildi um það bil í $(-7{,}5;\ \ -220)$

27. a. –3000; b. –1250

29. -4

31. 27

33. –0,167

35. Staðbundið lággildi í $(3,-22)$, minnkandi á $(-\infty,3)$, vaxandi á $(3,\infty)$

37. Staðbundið lággildi í $(-2,-2)$, minnkandi á $(-3,-2)$, vaxandi á $(-2,\infty)$

39. Staðbundið hágildi í $(-0{,}39\,;\ \ 5{,}98)$, staðbundin lággildi í $(-3{,}15\,;-47{,}62)$ og $(2{,}04\,;-32{,}04)$, minnkandi á $(-\infty\,;-3{,}15)\cup(-0{,}39\,;\ \ 2{,}04)$, vaxandi á $(-3{,}15\,;\ \ -0{,}39)\cup(2{,}04\,;\ \ \infty)$

41. A

43.

$$b=5$$

45. 2,7 gallon á mínútu

47. um það bil –0,6 milligrömm á dag

1.4 Kaflaverkefni

1. Finndu tölurnar sem gera fallið g í nefnaranum jafnt núlli og athugaðu hvort aðrar takmarkanir séu á skilgreiningarmengjum f og g, svo sem rót með slétta vísitölu eða núll í nefnara.

3. Já. Dæmi um svar: Látum $f(x)=x+1$ og $g(x)=x-1$. Þá er $f(g(x))=f(x-1)=(x-1)+1=x$ og $g(f(x))=g(x+1)=(x+1)-1=x$. Því er $f\circ g=g\circ f$.

5. $(f+g)(x)=2x+6$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,\infty)$

$(f-g)(x)=2x^2+2x-6$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,\infty)$

$(fg)(x)=-x^4-2x^3+6x^2+12x$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+2x}{6-x^2}$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,-\sqrt{6})\cup(-\sqrt{6},\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},\infty)$

7. $(f+g)(x)=\frac{4x^3+8x^2+1}{2x}$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$(f-g)(x)=\frac{4x^3+8x^2-1}{2x}$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$(fg)(x)=x+2$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=4x^3+8x^2$, skilgreiningarmengi: $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

9. $(f+g)(x)=3x^2+\sqrt{x-5}$, skilgreiningarmengi: $[5,\infty)$

$(f-g)(x)=3x^2-\sqrt{x-5}$, skilgreiningarmengi: $[5,\infty)$

$(fg)(x)=3x^2\sqrt{x-5}$, skilgreiningarmengi: $[5,\infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{3x^2}{\sqrt{x-5}}$, skilgreiningarmengi: $(5,\infty)$

11.

1. ⓐ 3

2. ⓑ $f(g(x))=2(3x-5)^2+1$;
3. ⓒ $g(f)(x))=6x^2-2$;
4. ⓓ $(g\circ g)(x)=3(3x-5)-5=9x-20$;
5. ⓔ $(f\circ f)(-2)=163$

13.

$$f(g(x))=\sqrt{x^2+3}+2, g(f(x))=x+4\sqrt{x}+7$$

15.

$$f(g(x))=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}, g(f(x))=\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x}$$

17.

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\frac{2}{x}+4-4}=\frac{x}{2}, (g\circ f)(x)=2x-4$$

19.

$$f(g(h(x)))=\left(\frac{1}{x+3}\right)^2+1$$

21.

- ⓐ Texti $(g\circ f)(x)=-\frac{3}{\sqrt{2-4x}}$;
- ⓑ $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

23.

1. ⓐ $(0,2)U(2,\infty)$;
2. ⓑ $(-\infty,-2)U(2,\infty)$; c. $(0,\infty)$

25.

$$(1,\infty)$$

27.

$f(x) = x^3$

Dæmi um svar: $g(x) = x - 5$

29.

$f(x) = \frac{4}{x}$

Dæmi um svar: $g(x) = (x+2)^2$

31.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Dæmi um svar: $g(x) = \frac{1}{2x-3}$

33.

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Dæmi um svar: $g(x) = \frac{3x-2}{x+5}$

35. Dæmi um svar:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$g(x)=2x+6$$

37. Dæmi um svar:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$g(x)=(x-1)$$

39. Dæmi um svar:

$$f(x)=x^3$$

$$g(x)=\frac{1}{x-2}$$

41. Dæmi um svar:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$g(x)=\frac{2x-1}{3x+4}$$

43. 2

45. 5

47. 4

49. 0

51. 2

53. 1

55. 4

57. 4

59. 9

61. 4

63. 2

65. 3

67. 11

69. 0

71. 7

73.

$$f(g(0))=27, g(f(0))=-94$$

75.

$$f(g(0))=\frac{1}{5}, g(f(0))=5$$

77.

$$18x^2+60x+51$$

79.

$$g \circ g(x)=9x+20$$

81. 2

83.

$$(-\infty, \infty)$$

85. Ósatt

87. $(f \circ g)(6)=6; (g \circ f)(6)=6$

89.

$$(f \circ g)(11)=11, (g \circ f)(11)=11$$

91. c

93. $A(t)=\pi(25\sqrt{t+2})^2$ og $A(2)=\pi(25\sqrt{4})^2=2500\pi$ fertommur

95. $A(5)=\pi(2(5)+1)^2=121\pi$ ferningseiningar

97.

- ⓐ

$$N(T(t))=23(5t+1{,}5)^2-56(5t+1{,}5)+1;$$

- ⓑ 3,38 klukkustundir

1.5 Kaflaverkefni

1. Lárétt hliðrun verður þegar fasta er bætt við inntakið eða hún dregin frá því. Lóðrétt hliðrun verður þegar fasta er bætt við úttakið eða hún dregin frá því.

3. Lárétt samþjöppun verður þegar inntakið er margfaldað með fasta stærri en 1. Lóðrétt samþjöppun verður þegar úttakið er margfaldað með fasta milli 0 og 1.

5. Fyrir fall f, skaltu setja $(-x)$ í stað (x) í $f(x)$. Einfaldaðu. Ef fallið sem fæst er sama fall og upphaflega fallið, $f(-x)=f(x)$, er fallið jafnstætt. Ef fallið sem fæst er neikvæða upphaflega fallið, $f(-x)=-f(x)$, er upphaflega fallið oddstætt. Ef fallið er hvorki það sama né neikvæða þess er það hvorki jafnstætt né oddstætt.

7.

$$g(x)=|x-1|-3$$

9.

$$g(x)=\frac{1}{(x+4)^2}+2$$

11. Graf $f(x+43)$ er lárétt hliðrun um 43 einingar til vinstri á grafi f.

13. Graf $f(x-4)$ er lárétt hliðrun um 4 einingar til hægri á grafi f.

15. Graf $f(x)+8$ er lóðrétt hliðrun um 8 einingar upp á grafi f.

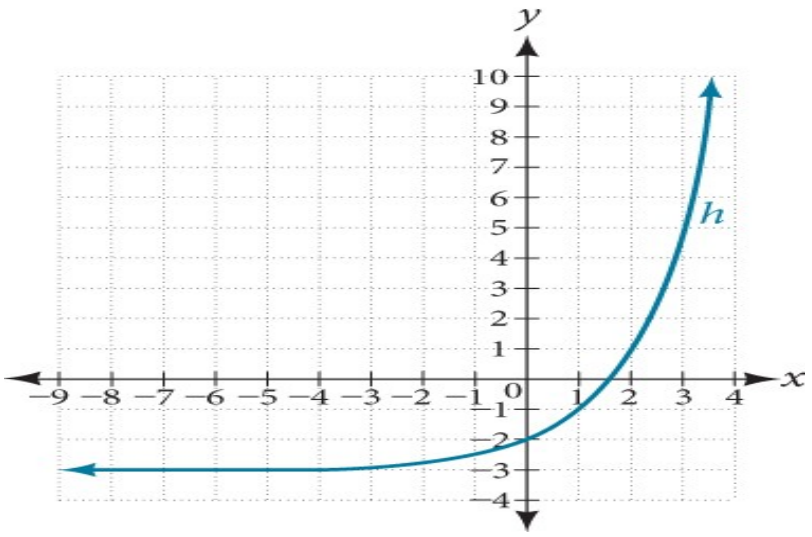
17. Graf $f(x)-7$ er lóðrétt hliðrun um 7 einingar niður á grafi f.

19. Graf $f(x+4)-1$ er lárétt hliðrun um 4 einingar til vinstri og lóðrétt hliðrun um 1 einingu niður á grafi f.

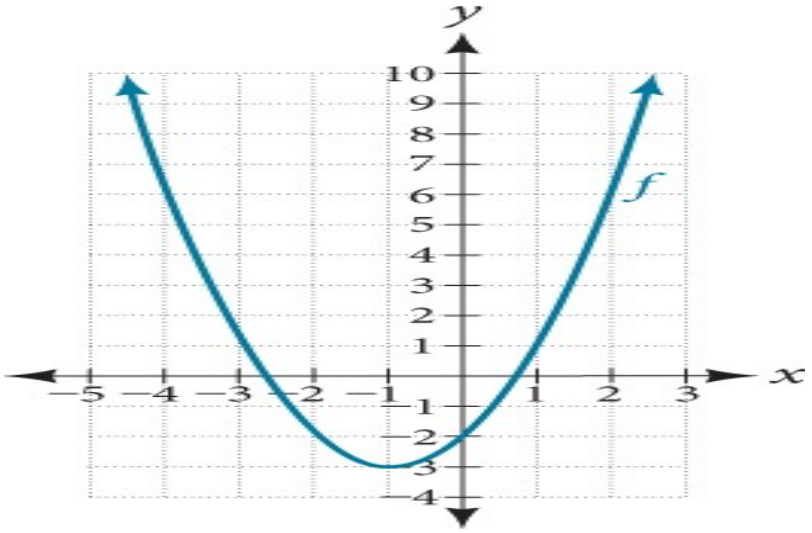
21. minnkandi á $(-\infty,-3)$ og vaxandi á $(-3,\infty)$

23. minnkandi á $[0, \infty)$

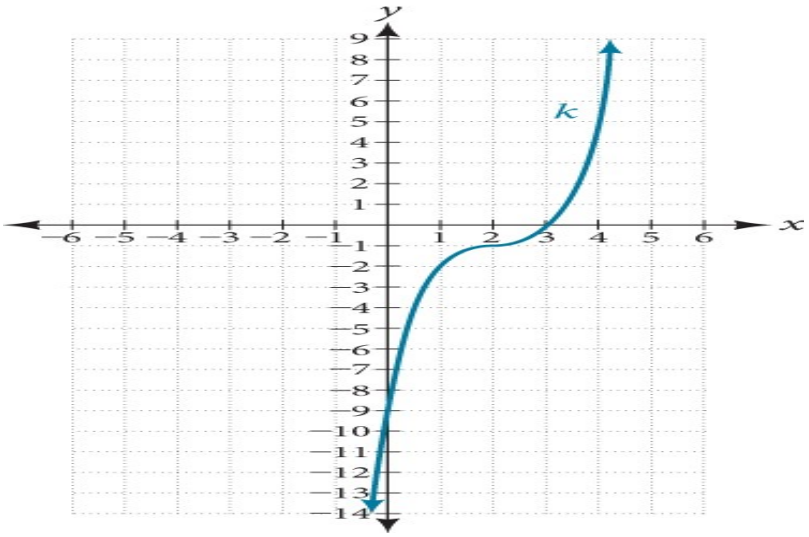
25.



27.



29.



31.

$$g(x)=f(x-1), h(x)=f(x)+1$$

33.

$$f(x)=|x-3|-2$$

35.

$$f(x)=\sqrt{x+3}-1$$

37.

$$f(x)=(x-2)^2$$

39.

$$f(x)=|x+3|-2$$

41.

$$f(x)=-\sqrt{x}$$

43.

$$f(x)=-(x+1)^2+2$$

45.

$$f(x)=\sqrt{-x}+1$$

47. jafnstætt

49. oddstætt

51. jafnstætt

53. Graf g er lóðrétt speglun (um x-ásinn) á grafi f.

55. Graf g er lóðrétt teygja með stuðlinum 4 á grafi f.

57. Graf g er lárétt samþjöppun með stuðlinum $\frac{1}{5}$ á grafi f.

59. Graf g er lárétt teygja með stuðlinum 3 á grafi f.

61. Graf g er lárétt speglun um y-ásinn og lóðrétt teygja með stuðlinum 3 á grafi f.

63.

$$g(x)=|-4x|$$

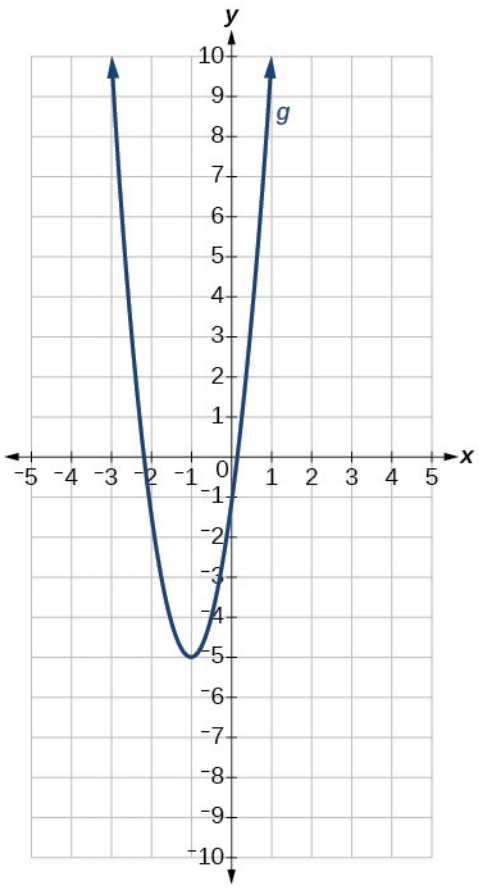
65.

$$g(x)=\frac{1}{3(x+2)^2}-3$$

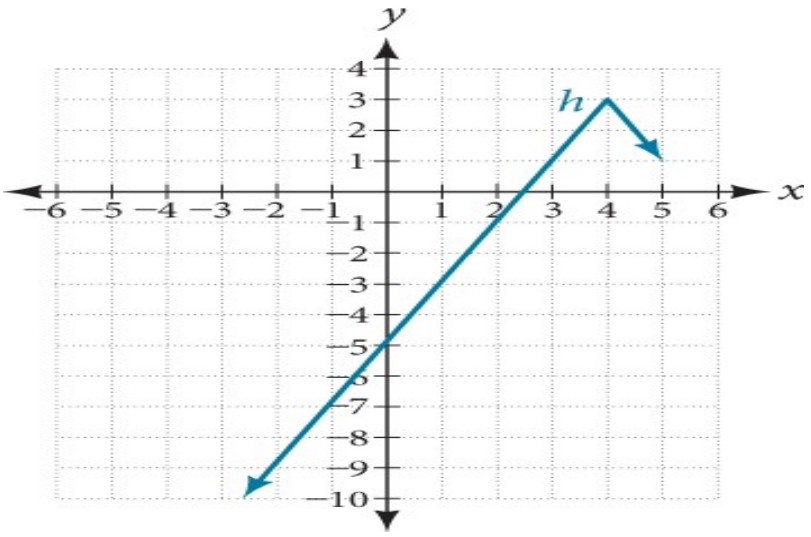
67.

$$g(x)=\frac{1}{2}(x-5)^2+1$$

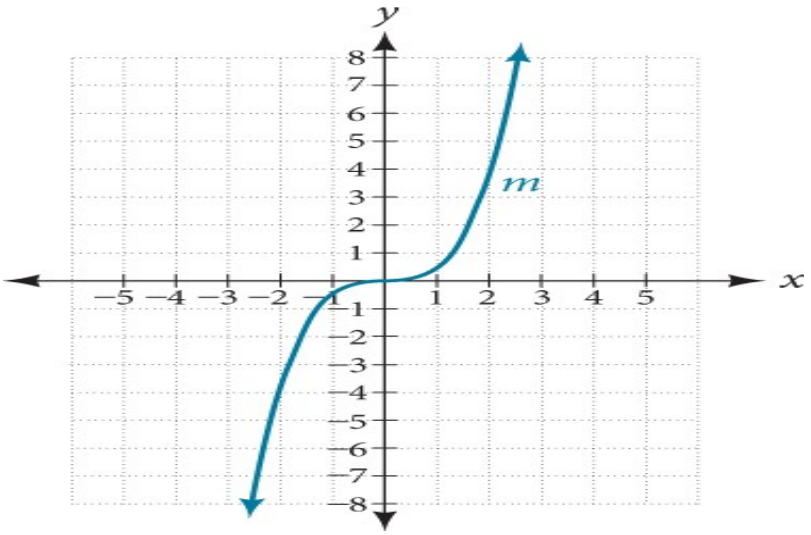
69. Grafi fallsins $f(x)=x^2$ er hliðrað um 1 einingu til vinstri, það teygt lóðrétt með stuðlinum 4 og hliðrað um 5 einingar niður.



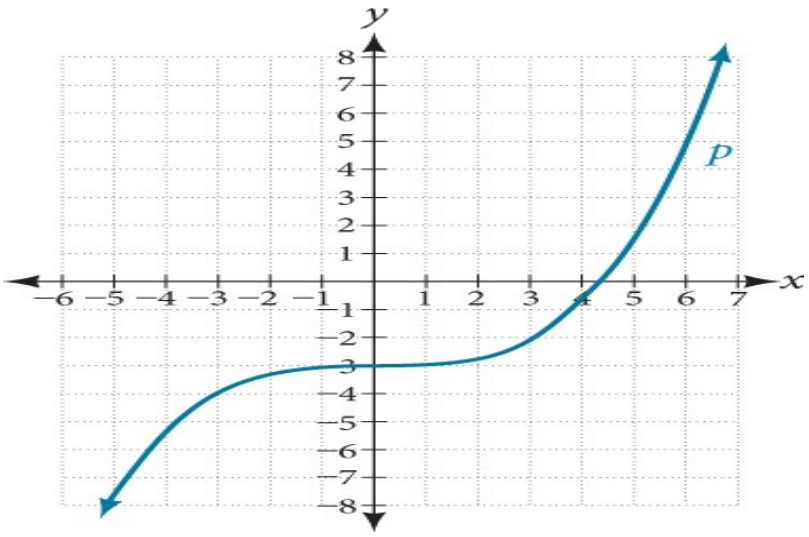
71. Graf $f(x)=|x|$ er teygt lóðrétt með stuðlinum 2, hliðrað lárétt um 4 einingar til hægri, speglað um lárétta ásinn og síðan hliðrað lóðrétt um 3 einingar upp.



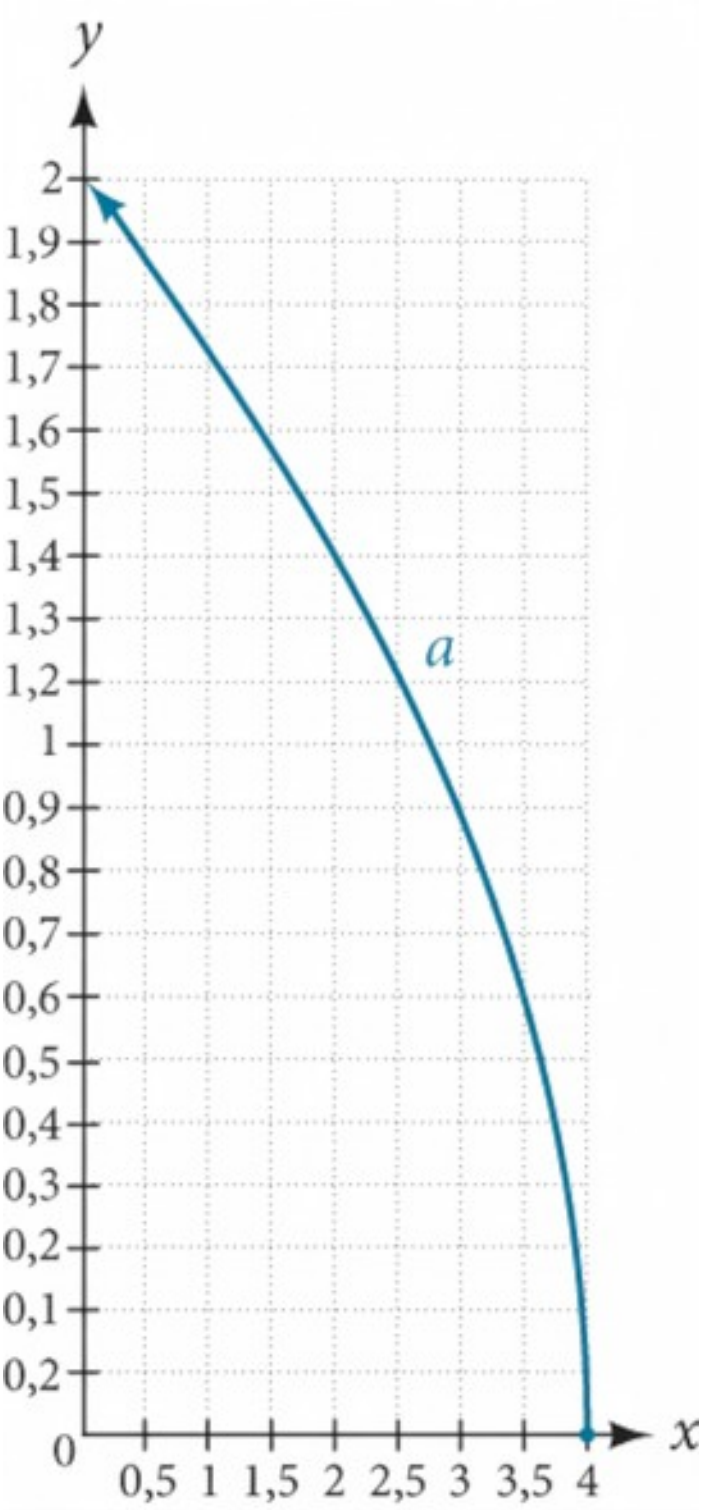
73. Graf fallsins $f(x)=x^3$ er þjappað lóðrétt saman með stuðlinum $\frac{1}{2}$.



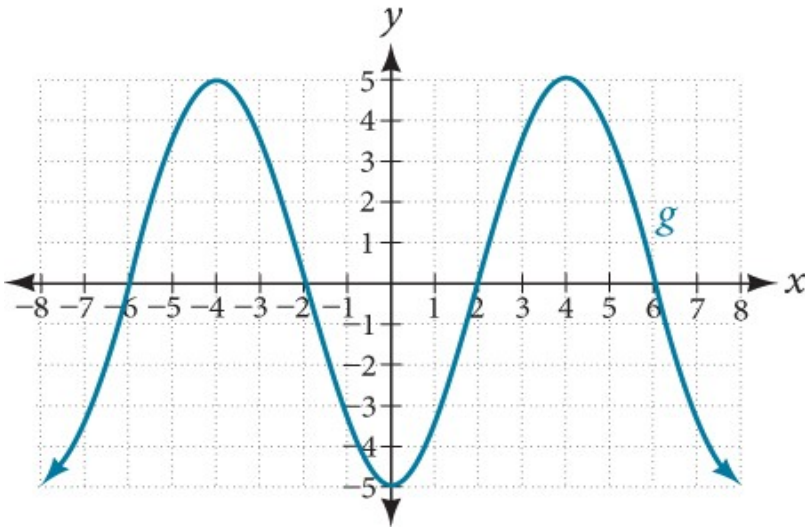
75. Grafið er teygt lárétt með stuðlinum 3 og síðan hliðrað lóðrétt um 3 einingar niður.



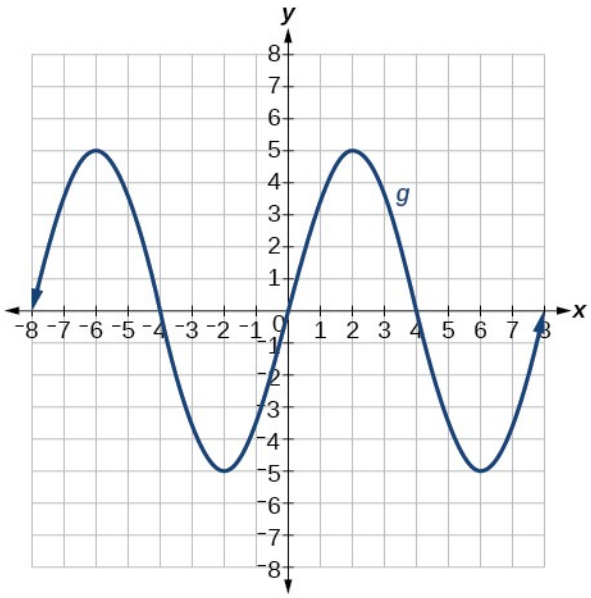
77. Grafi $f(x)=\sqrt{x}$ er hliðrað um 4 einingar til hægri og það síðan speglað um lóðréttu línuna $x=4$.


y
2
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,2
0
a
x
0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4

79.



81.



1.6 Kaflaverkefni

1. Einangraðu tölugildisliðinn þannig að jafnan sé á forminu $|A| = B$. Myndaðu eina jöfnu með því að setja stæðuna innan tölugildismerkjanna, A, jafna stæðunni hinum megin jafnaðarmerkisins, B. Myndaðu aðra jöfnu með því að setja A jafnt neikvæðri stæðunni hinum megin jafnaðarmerkisins, $-B$. Leystu hvora jöfnu fyrir breytuna.

3. Graf tölugildisfallsins sker ekki x -ásinn og liggur því annaðhvort allt fyrir ofan eða allt fyrir neðan x -ásinn.

5. Finndu fyrst markpunktana með því að leysa jöfnuna. Notaðu markpunktana til að mynda möguleg lausnarbil. Veldu prófunargildi á hverju bili til að ákvarða hvaða gildi uppfylla ójöfnuna.

7.

$$|x+4|=\frac{1}{2}$$

9.

$$|f(x)-8|<0{,}03$$

11.

$$(1,11)$$

13.

$$\left\{-\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right\}$$

15.

$$\left\{\frac{10}{3},\frac{20}{3}\right\}$$

17.

$$\left\{\frac{11}{5},\frac{29}{5}\right\}$$

19.

$$\left\{\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right\}$$

21. Engin lausn

23.

$$(-57,27)$$

25.

$$(0,-8);(-6,0),(4,0)$$

27. $(0,-7)$; engir skurðpunktar við x-ás

29.

$$(-\infty,-8)U(12,\infty)$$

31.

$$\left[\frac{-4}{3},4\right]$$

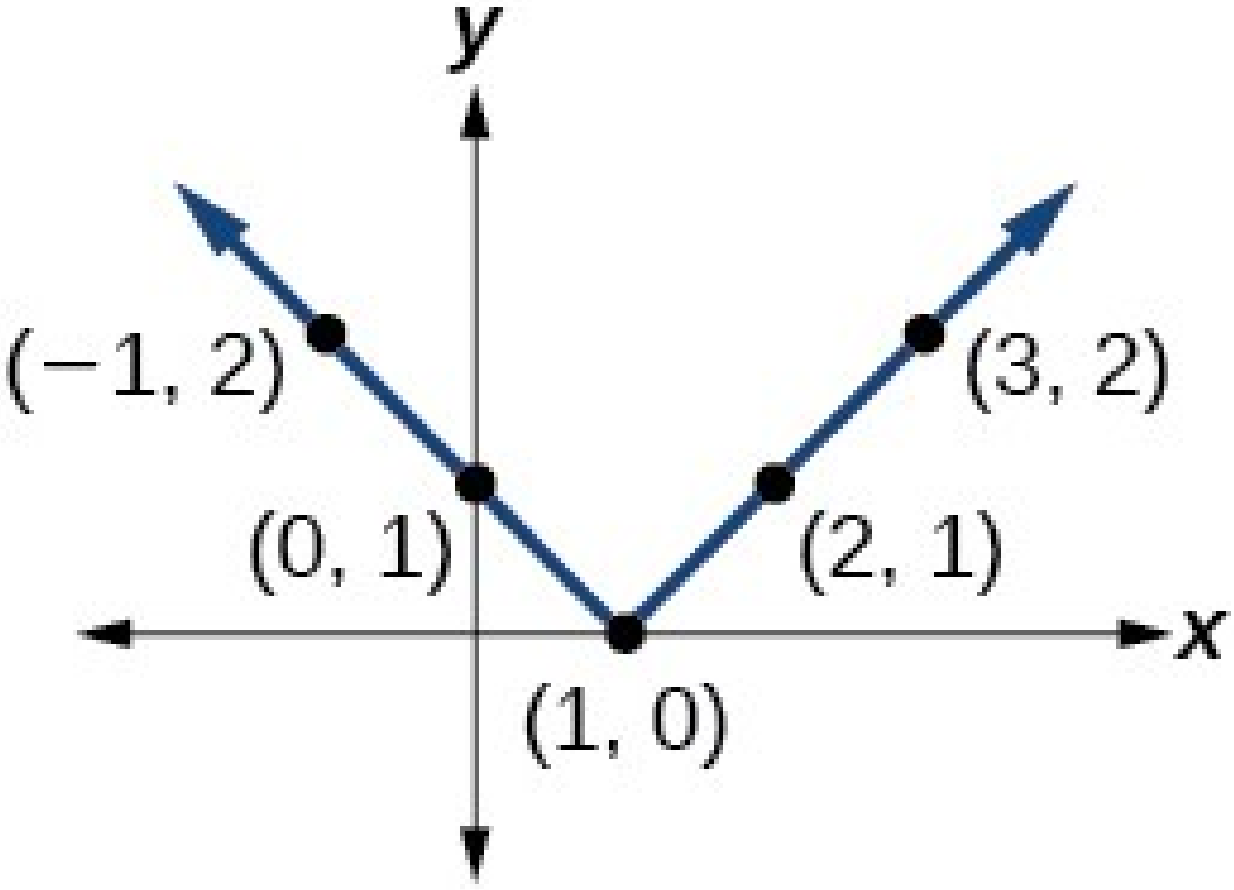
33.

$$\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] U [6, \infty)$$

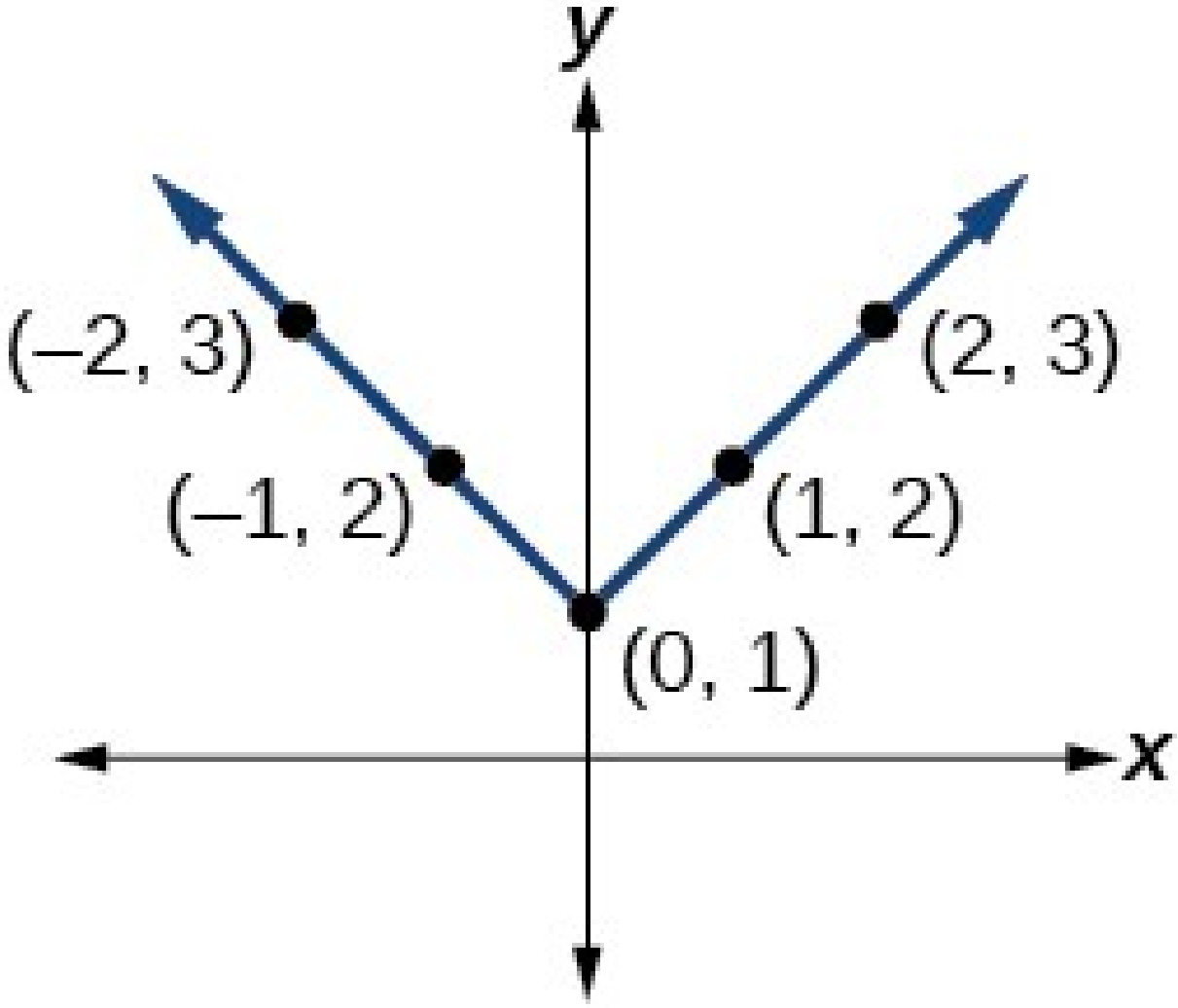
35.

$$\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] U [16, \infty)$$

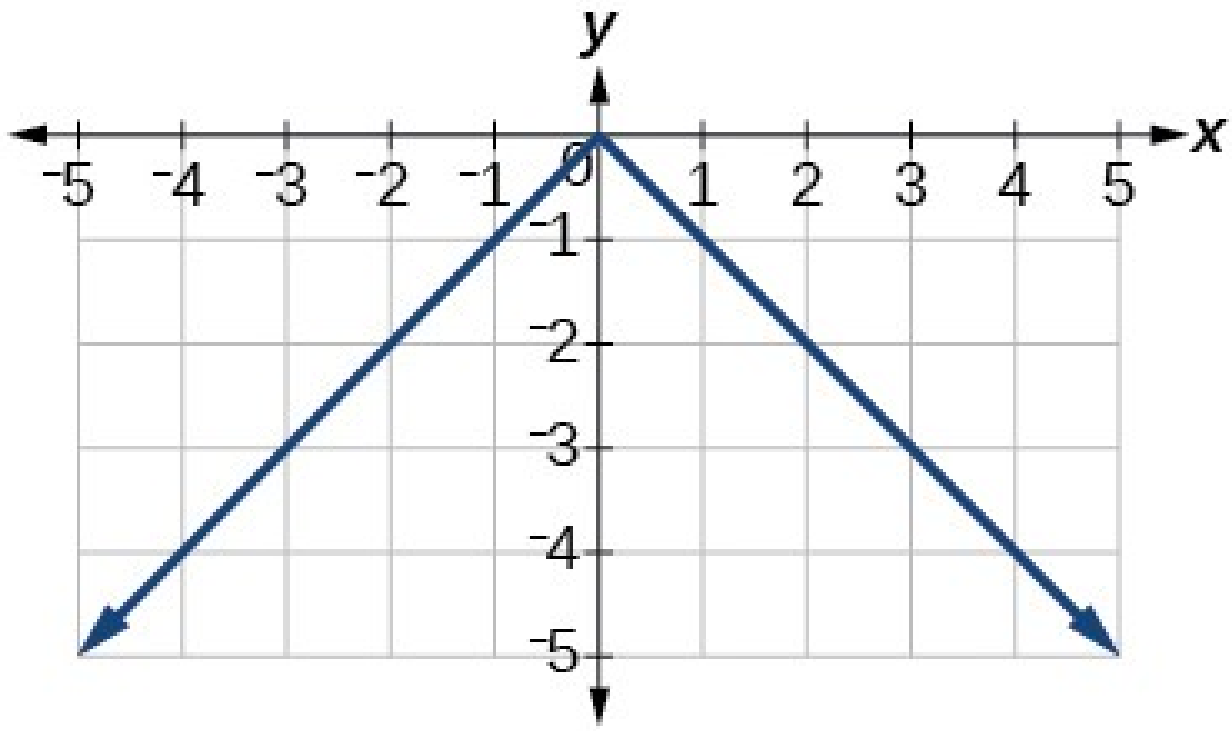
37.



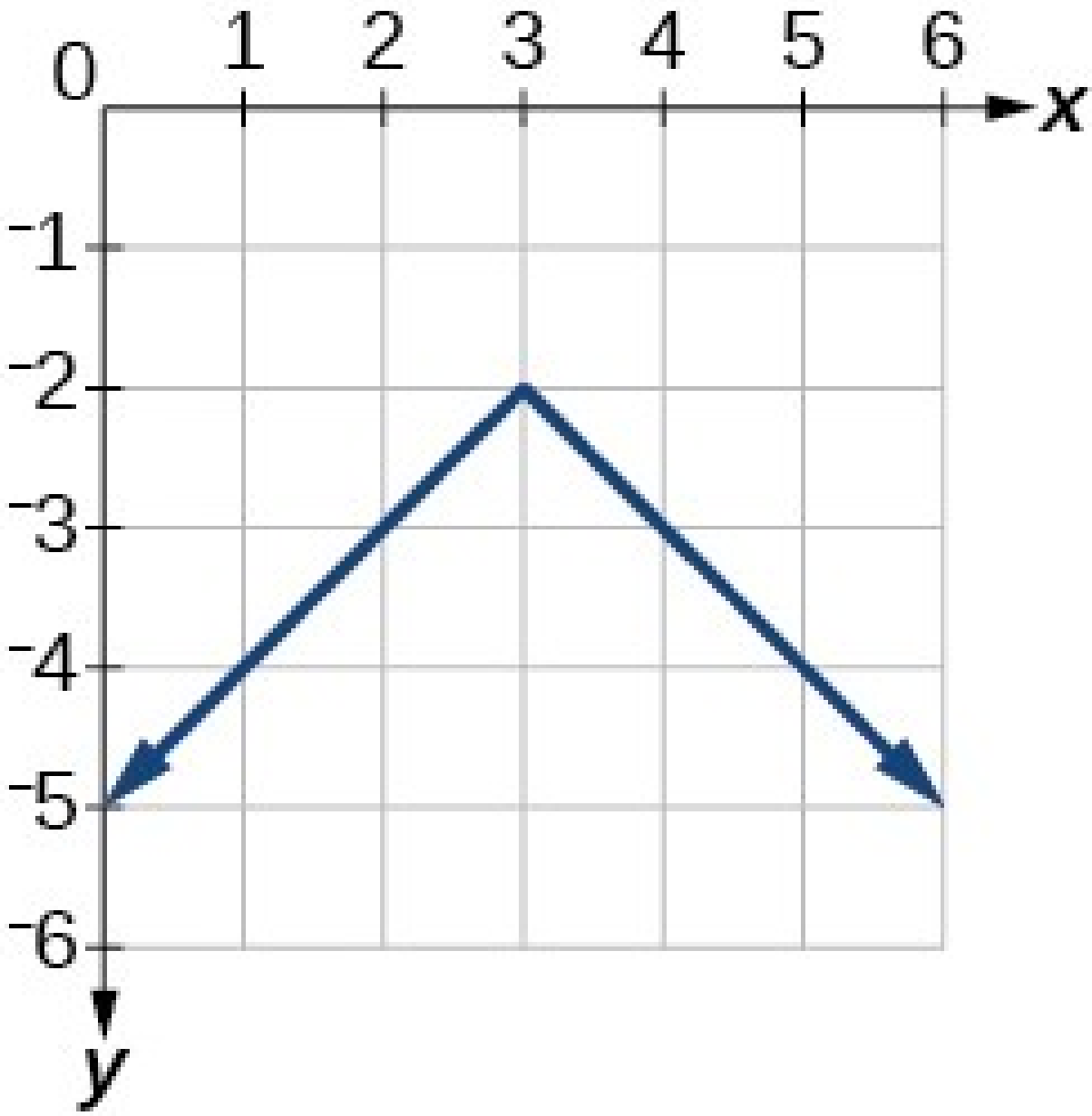
39.



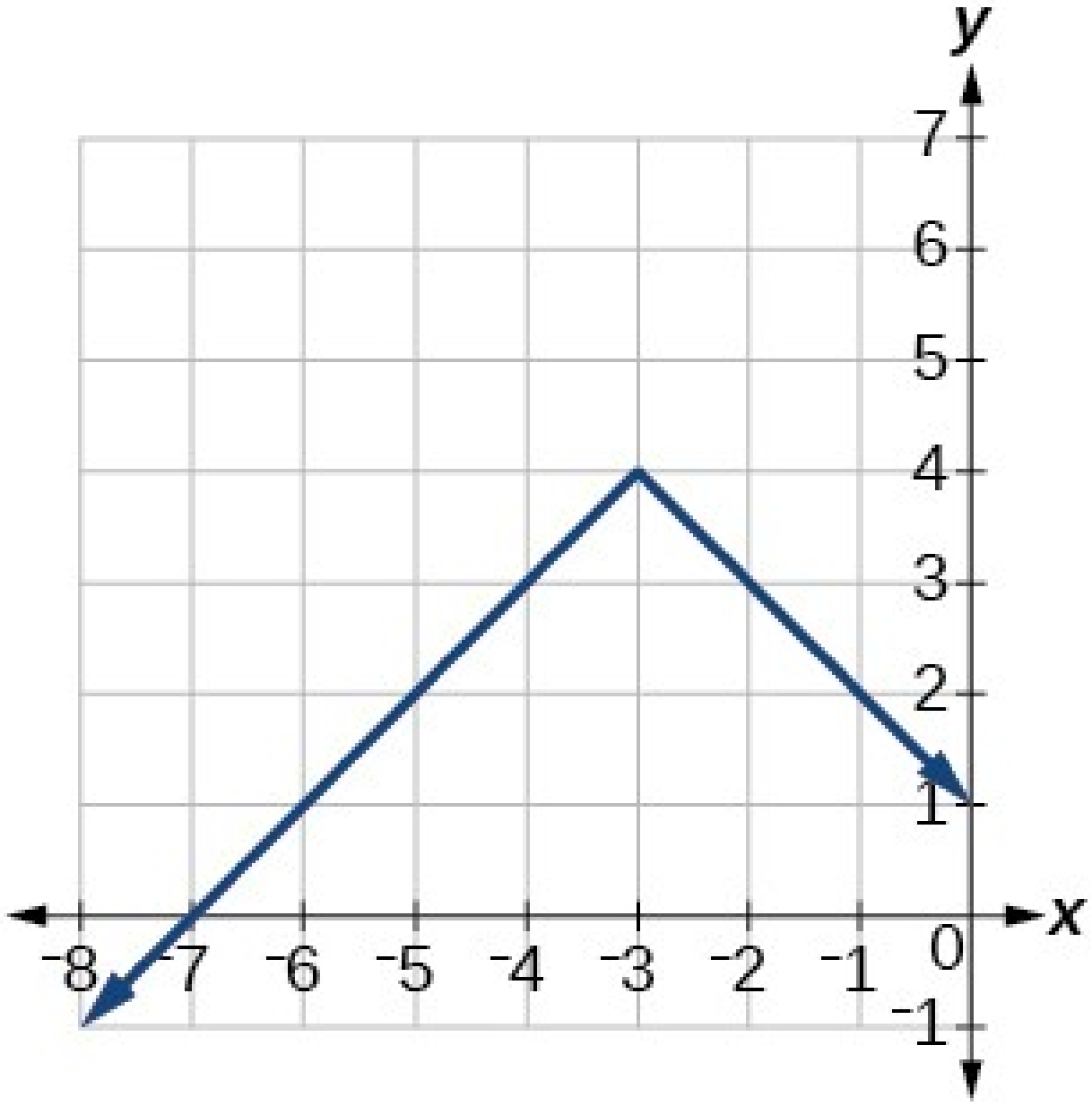
41.



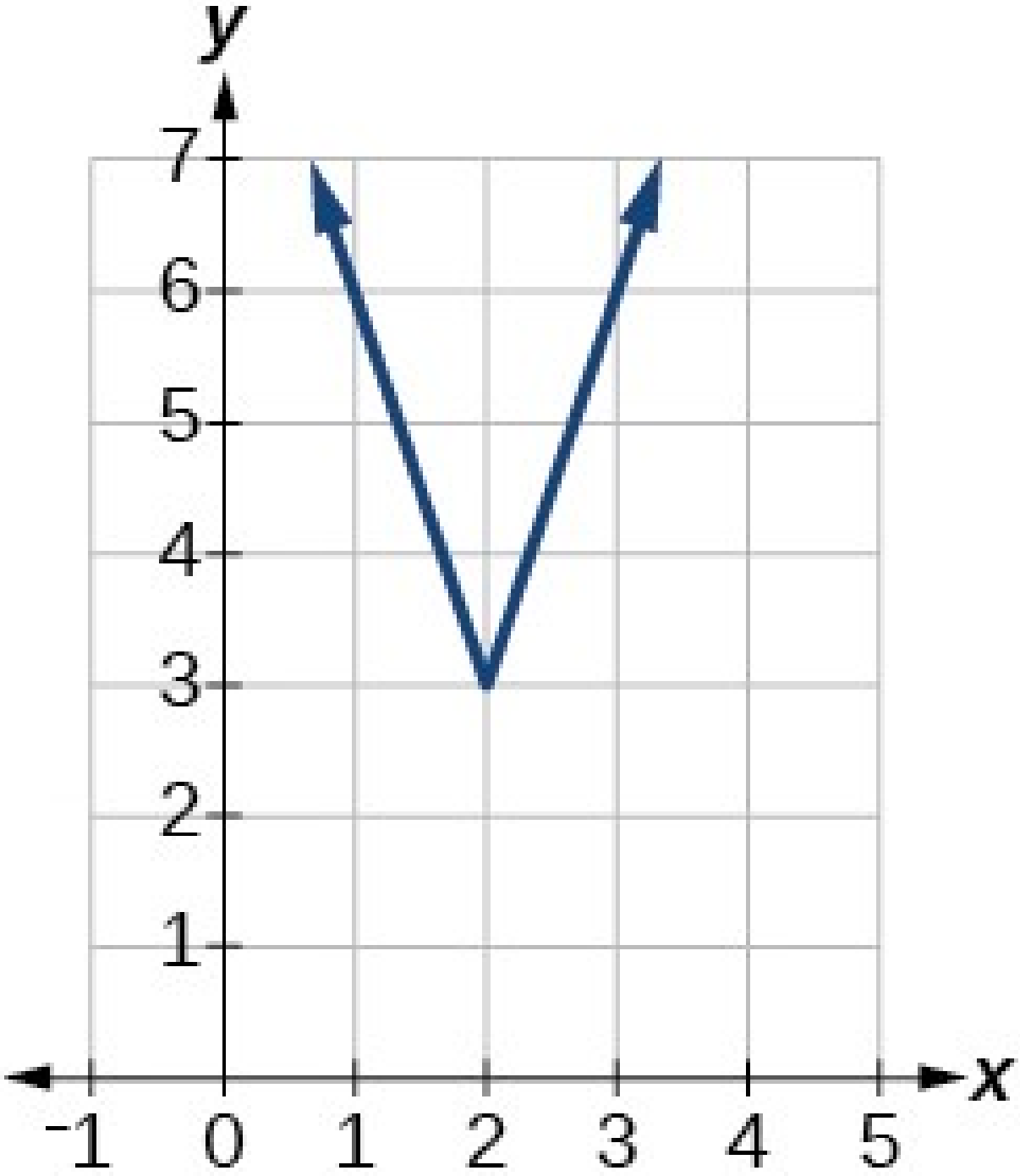
43.



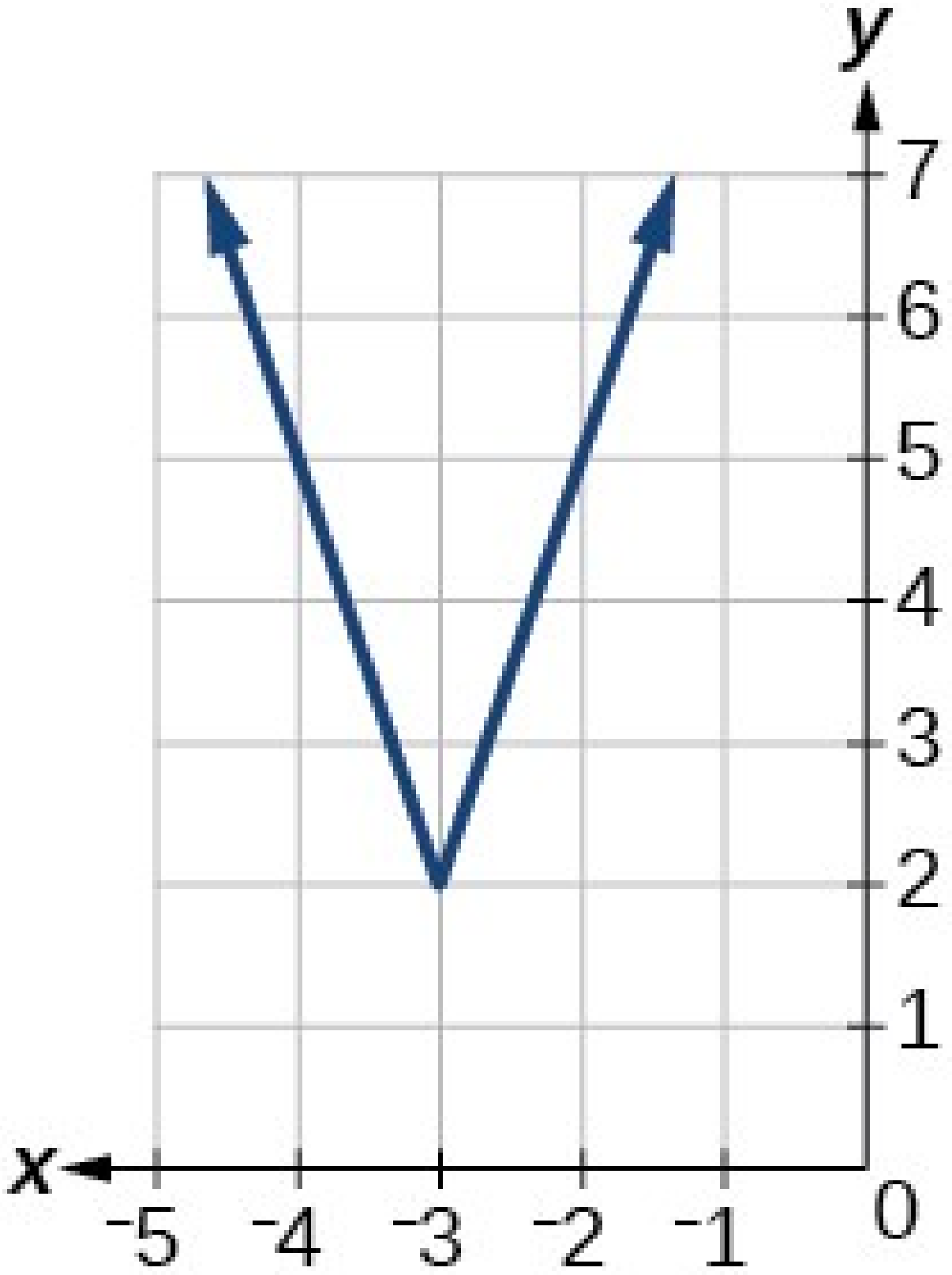
45.



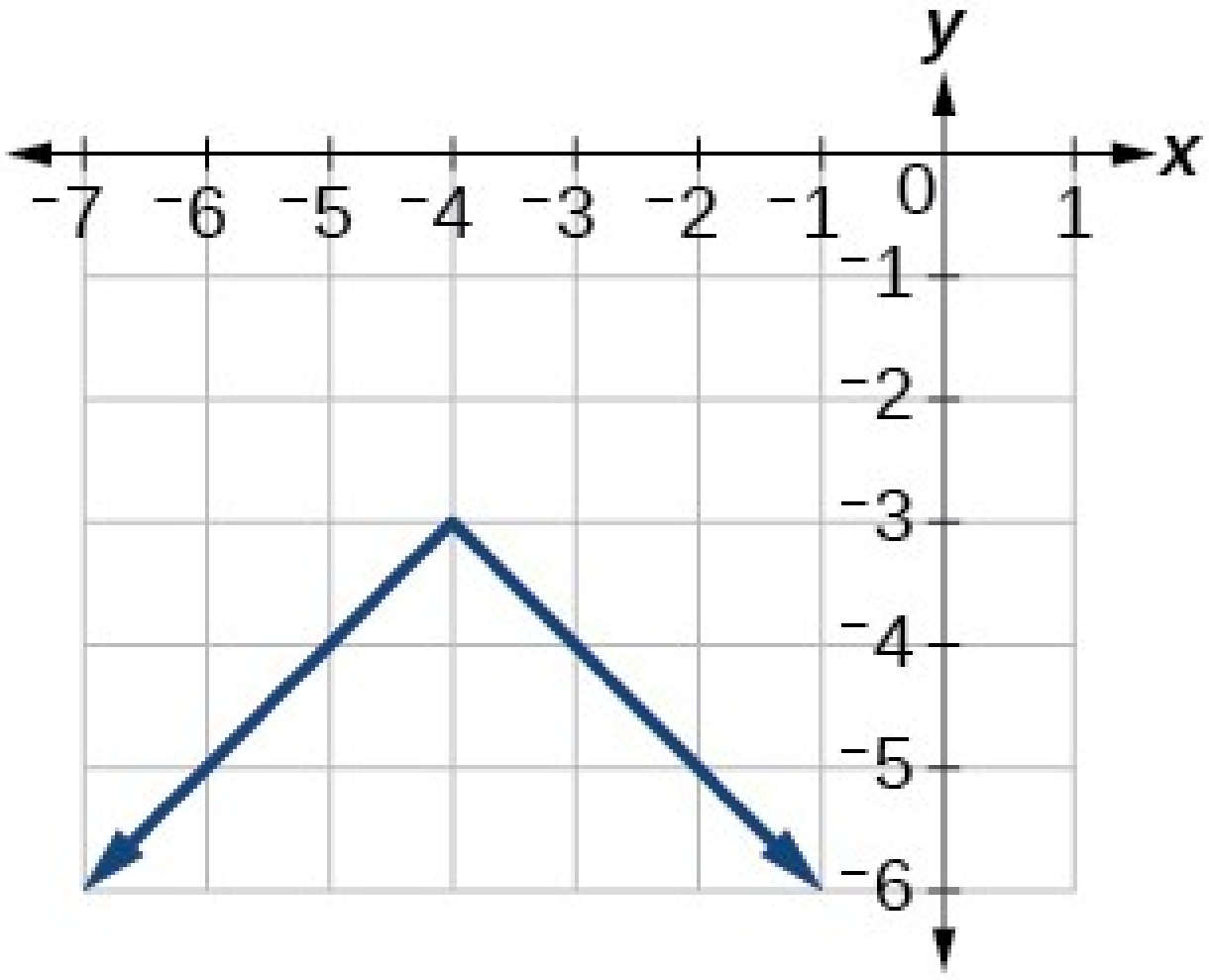
47.



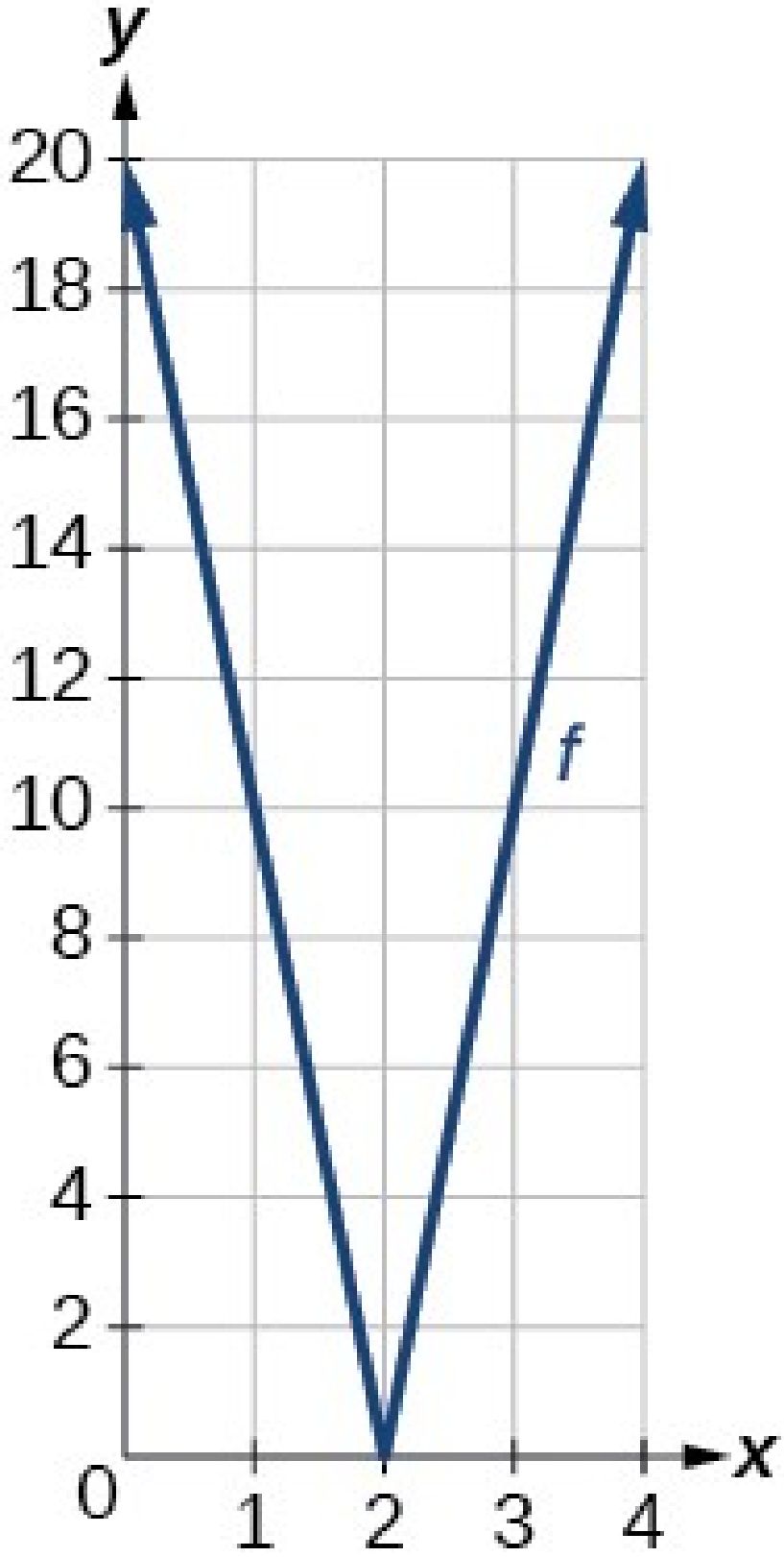
49.



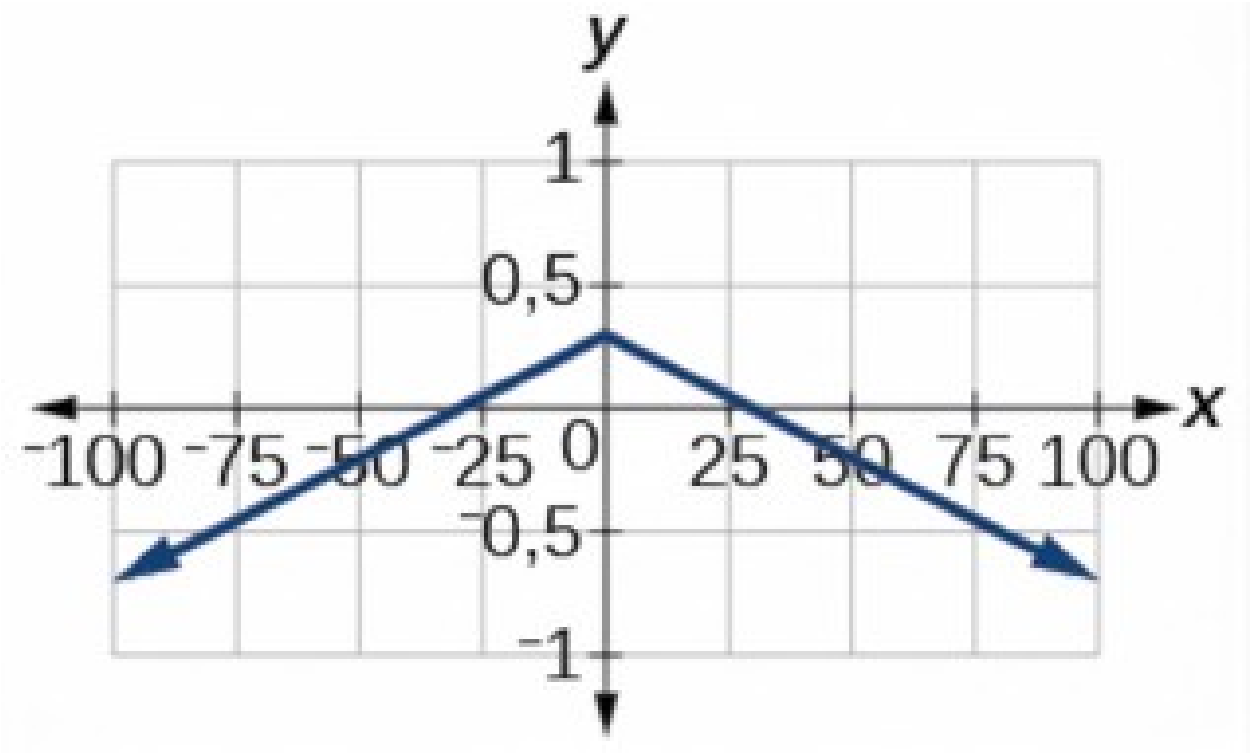
51.



53. myndmengi: $[0, 20]$



55. x – skurðpunktar:



57.

$$(-\infty, \infty)$$

59. Ekkert gildi a kemur í veg fyrir að fallið hafi skurðpunkt við y -ás. Tölugildisfallið sker alltaf y -ásinn þegar $x = 0$.

61.

$$|p - 0{,}08| \leq 0{,}015$$

63.

$$|x - 5{,}0| \leq 0{,}01$$

1.7 Kaflaverkefni

1. Til að fall sé eintækt verður aðeins eitt inntak að samsvara hverju úttaki. Ef einhver lárétt lína sker graf falls oftar en einu sinni endurtaka y -gildi sig og fallið er ekki eintækt. Ef engin lárétt lína sker graf fallsins oftar en einu sinni endurtaka engin y -gildi sig og fallið er eintækt.

3. Já. Til dæmis er $f(x) = \frac{1}{x}$ sitt eigið andhverfa fall.

5. Fyrir fall $y = f(x)$, skaltu leysa fyrir x með y. Víxlaðu x og y. Leystu nýju jöfnuna fyrir y. Stæðan fyrir y er andhverfa fallið, $y = f^{-1}(x)$.

7.

$$f^{-1}(x)=x-3$$

9.

$$f^{-1}(x)=2-x$$

11.

$$f^{-1}(x)=\frac{-2x}{x-1}$$

13. skilgreiningarmengi $f(x):[-7,\infty); f^{-1}(x)=\sqrt{x}-7$

15. skilgreiningarmengi $f(x):[0,\infty); f^{-1}(x)=\sqrt{x+5}$

16.

1. ⓐ $f(g(x))=x$ og $g(f(x))=x$.
2. ⓑ Þetta segir okkur að f og g séu andhverf föll

17.

$$f(g(x))=x, g(f(x))=x$$

19. eintækt

21. eintækt

23. ekki eintækt

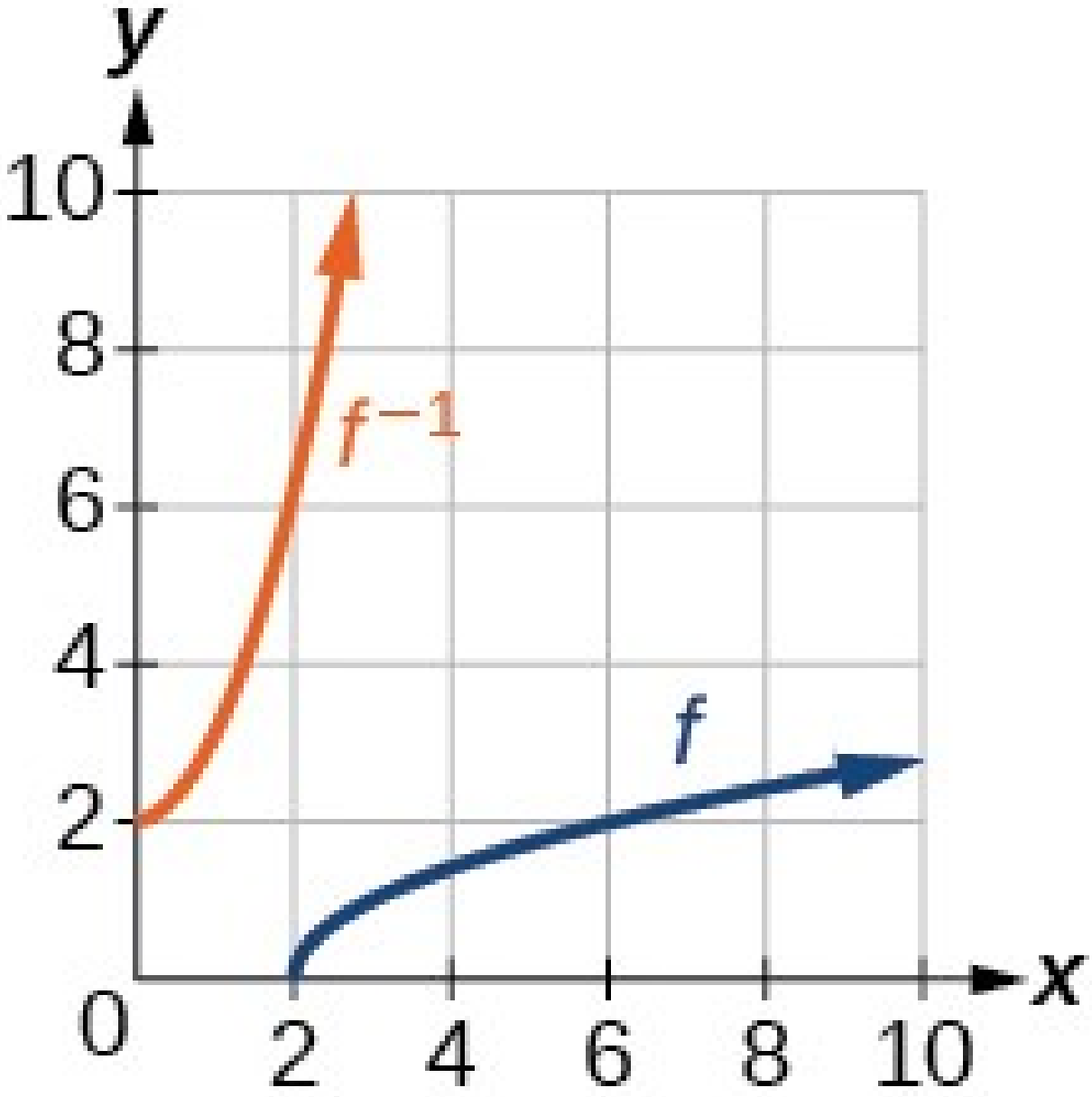
25.

3

27.

2

29.



31.

$[2, 10]$

33.

6

35.

-4

37.

$$0$$

39.

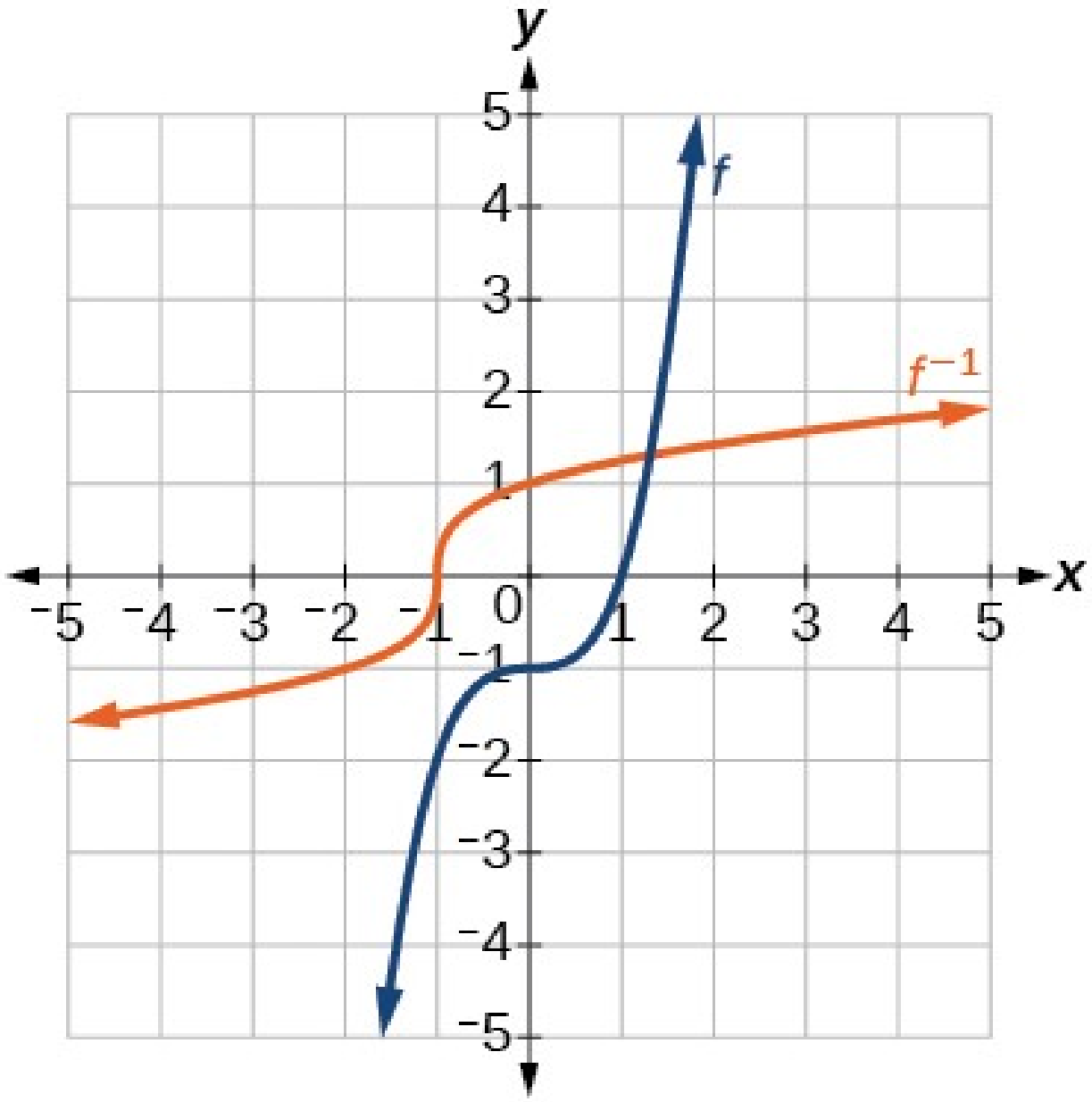
$$1$$

41.

x	1	4	7	12	16
$f^{-1}(x)$	3	6	9	13	14

43.

$$f^{-1}(x)=(1+x)^{1/3}$$



45. $f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$. Þegar Fahrenheit-hitastigið x, er gefið má nota þessa formúlu til að reikna Celsíus-hitastigið.

47. $t(d)=\frac{d}{50}$, $t(180)=\frac{180}{50}$. Það tekur bílinn 3.6 klukkustundir að aka 180 mílur.

Yfirlitsverkefni

1. fall

3. ekki fall

5.

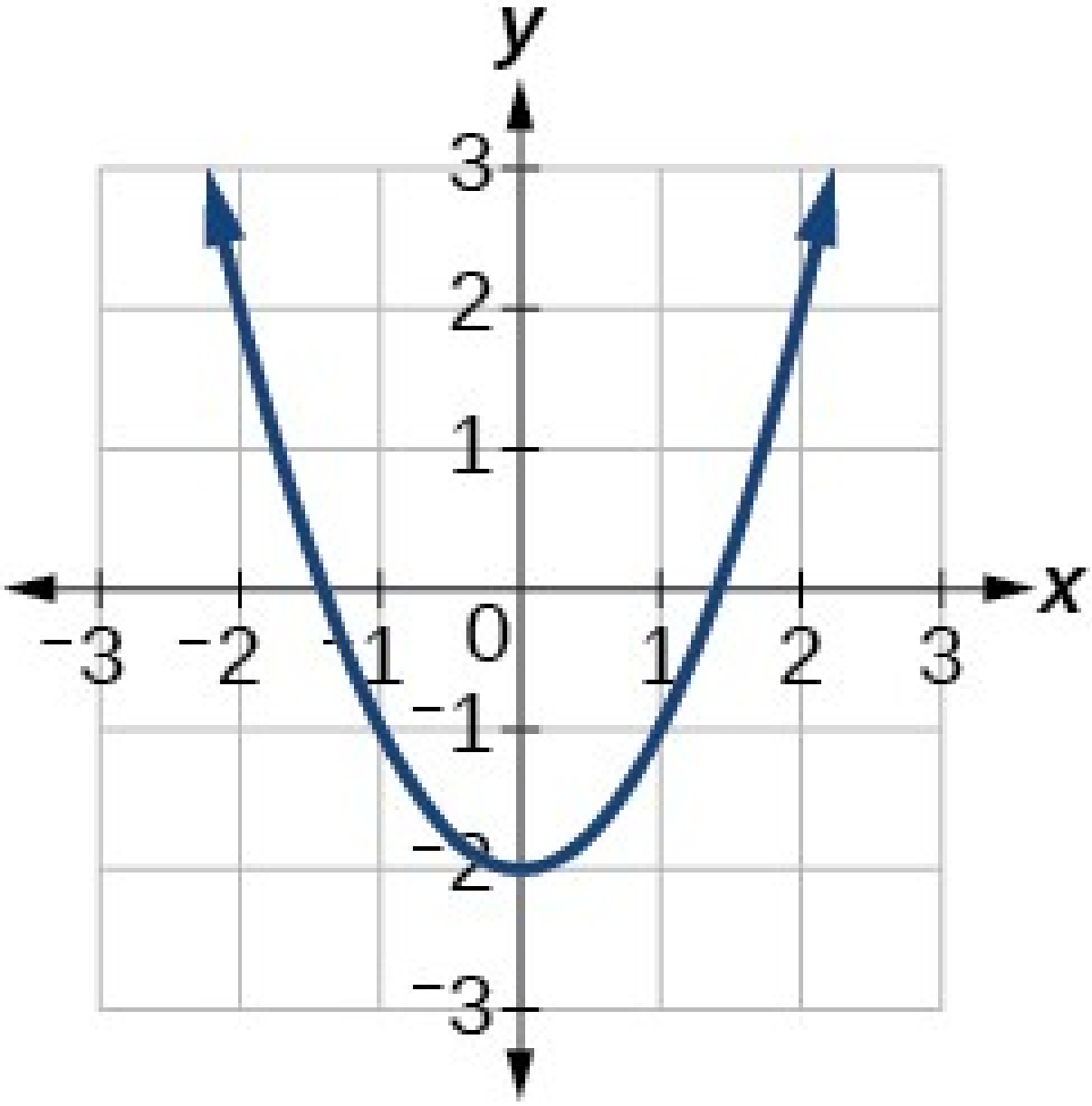
$$f(-3)=-27;\ f(2)=-2;\ f(-a)=-2a^2-3a;$$
$$-f(a)=2a^2-3a;\ f(a+h)=-2a^2+3a-4ah+3h-2h^2$$

7. eintækt

9. fall

11. fall

13.



15.

17. $x=-1{,}8$ eða eða $x=1{,}8$

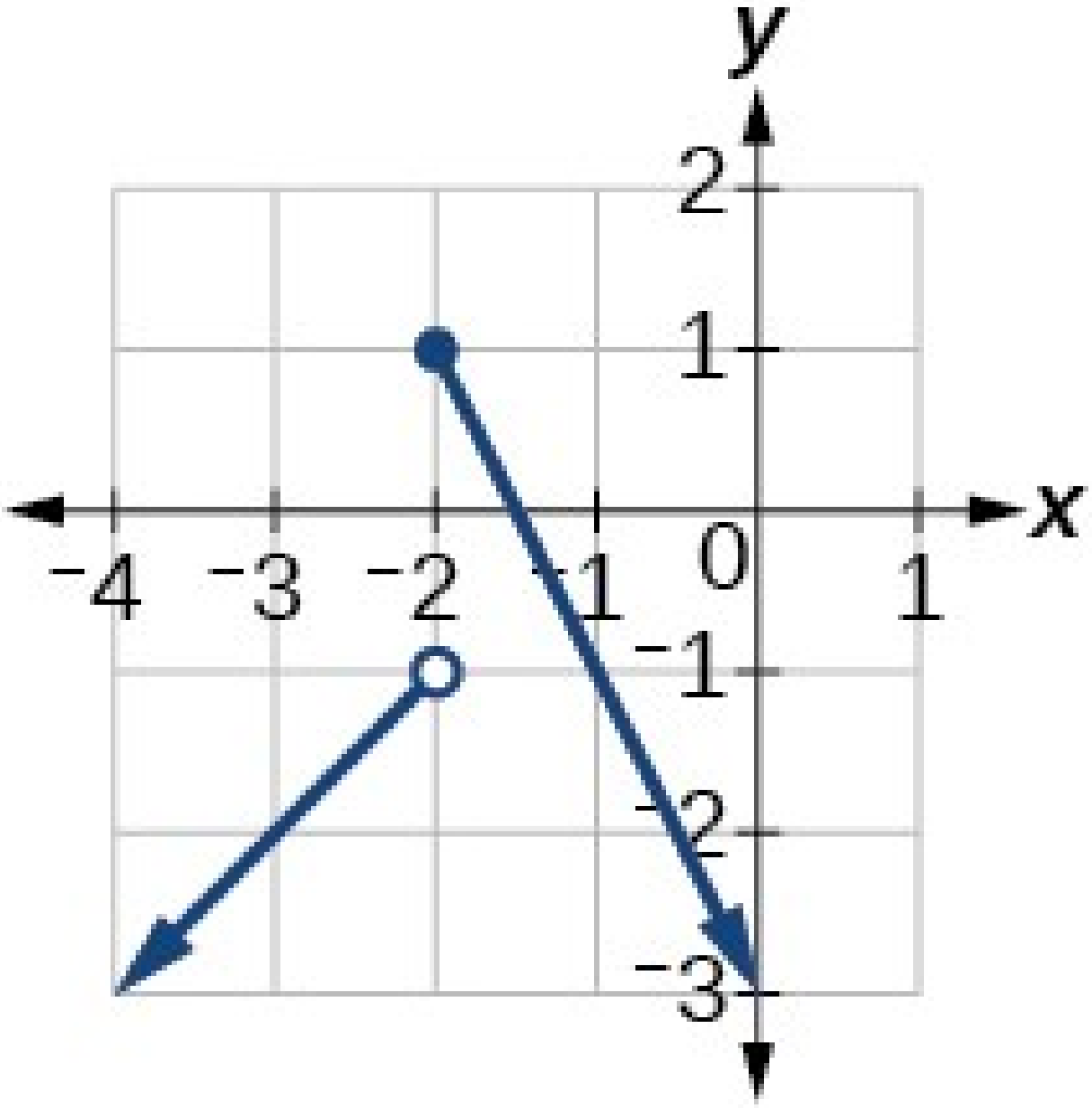
19.

$$\frac{-64+80a-16a^2}{-1+a}=-16a+64$$

21.

$$(-\infty,-2)U(-2,6)U(6,\infty)$$

23.



25.

31

27. vaxandi á $(2,\infty)$; minnkandi á $(-\infty,2)$

29. vaxandi á $(-3,1)$; fast á $(-\infty,-3)U(1,\infty)$

31. staðbundið lággildi í $(-2,-3)$; staðbundið hágildi í $(1,3)$

33. Algilt hágildi: 10

35.

$$(f\circ g)(x)=17-18x;(g\circ f)(x)=-7-18x$$

37.

$$(f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{1}{x}+2};(g\circ f)(x)=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

39.

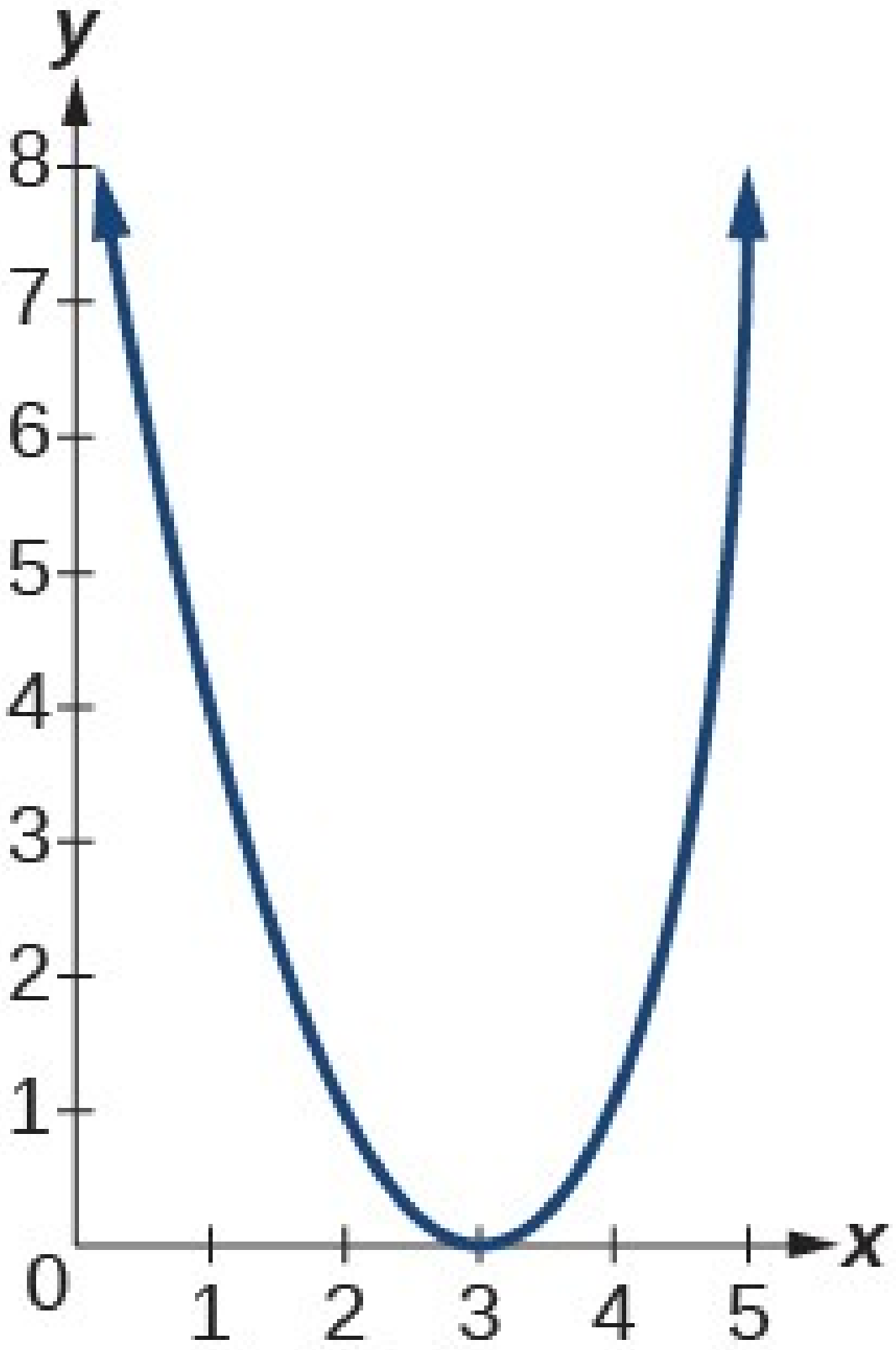
$$(f\circ g)(x)=\frac{1+x}{1+4x},x\neq 0,x\neq -\frac{1}{4}$$

41.

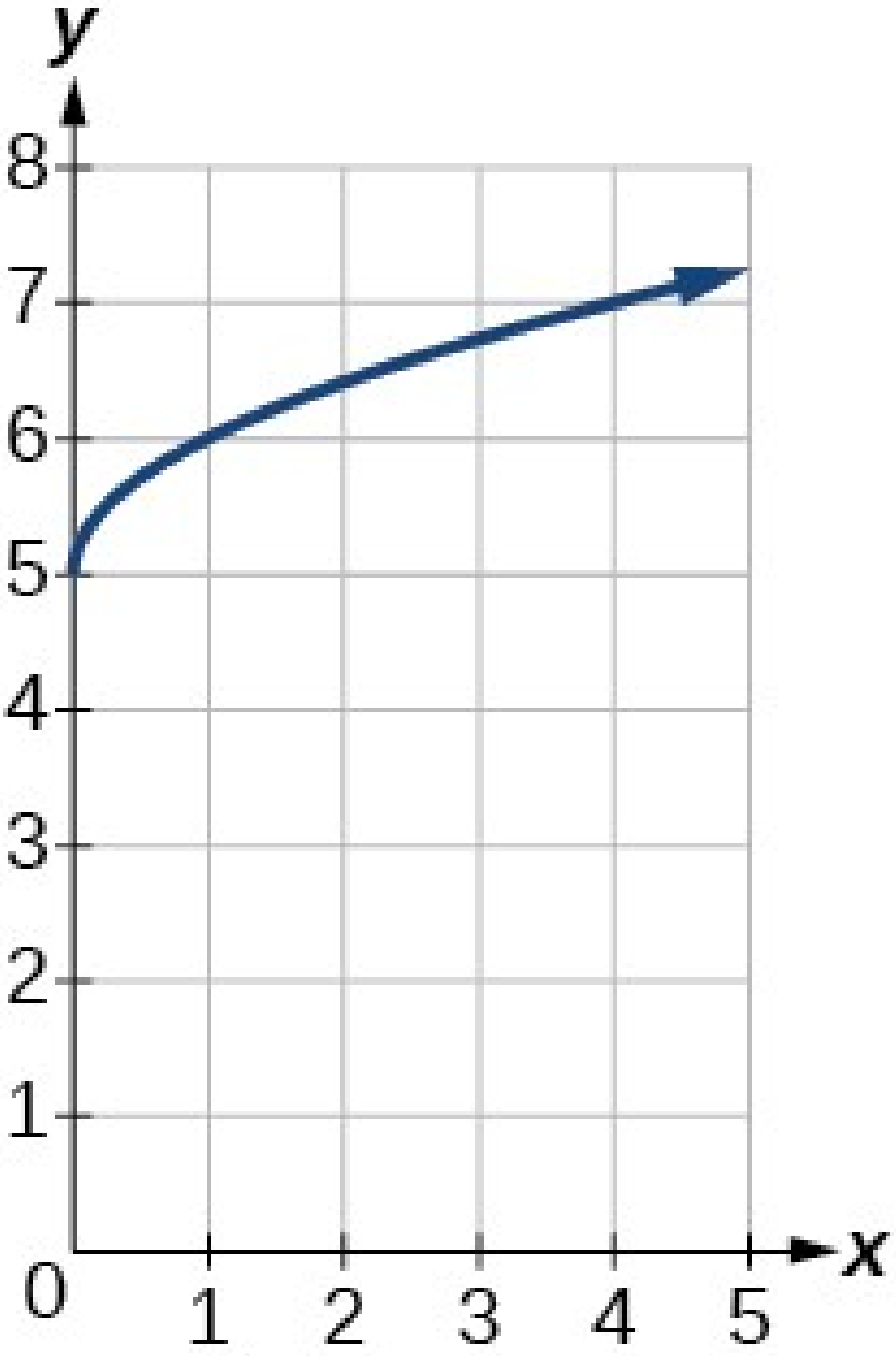
$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},x>0$$

43. Dæmi um svar: $g(x)=\frac{2x-1}{3x+4};f(x)=\sqrt{x}$

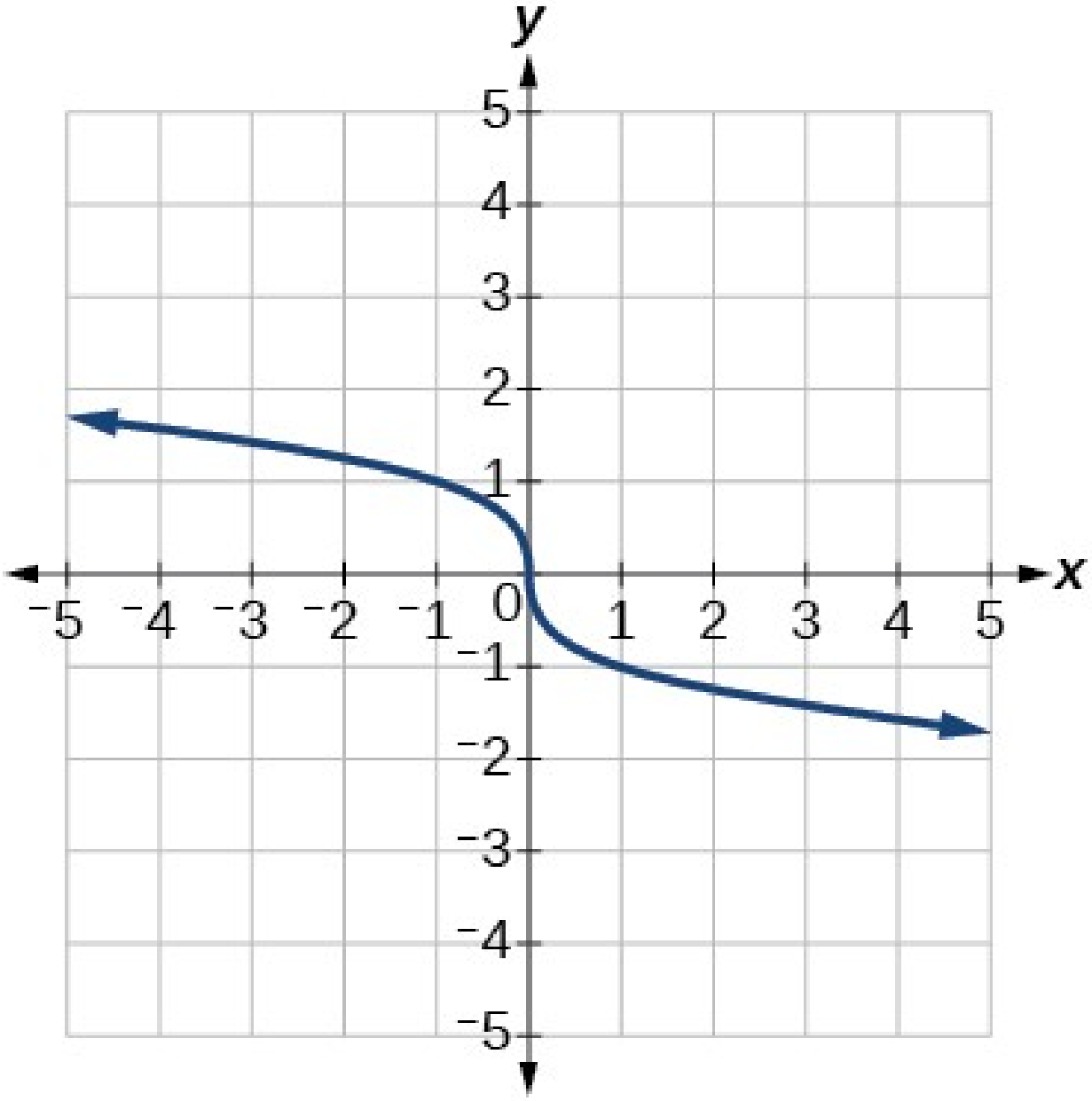
45.



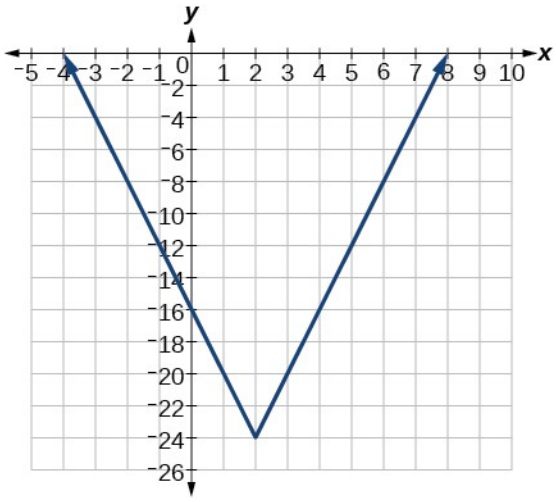
47.



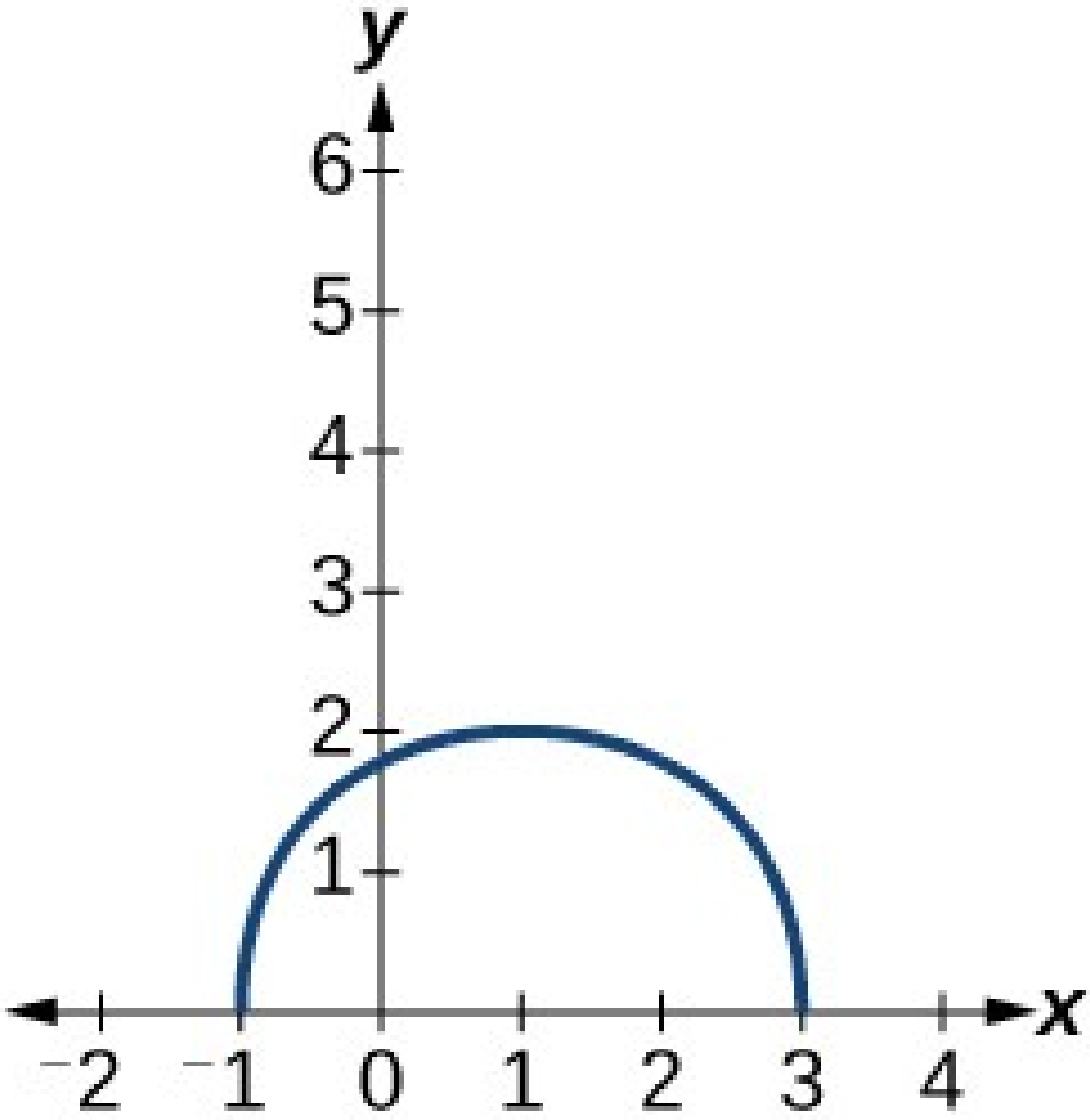
49.



51.



53.



55.

$$f(x)=|x-3|$$

57. jafnstætt

59. oddstætt

61. jafnstætt

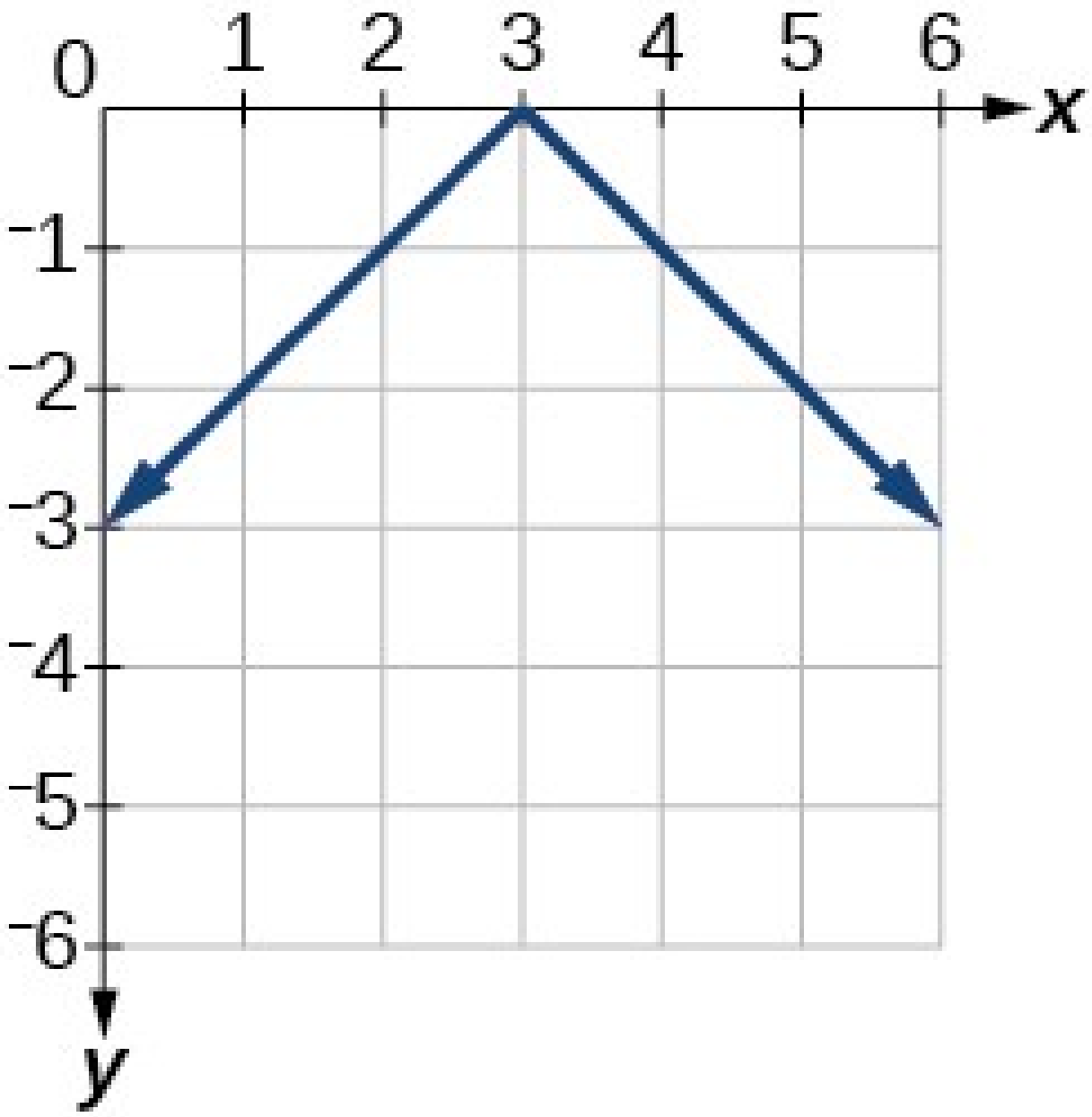
63.

$$f(x)=\frac{1}{2}|x+2|+1$$

65.

$$f(x)=-3|x-3|+3$$

67.



69.

$$x=-22, x=14$$

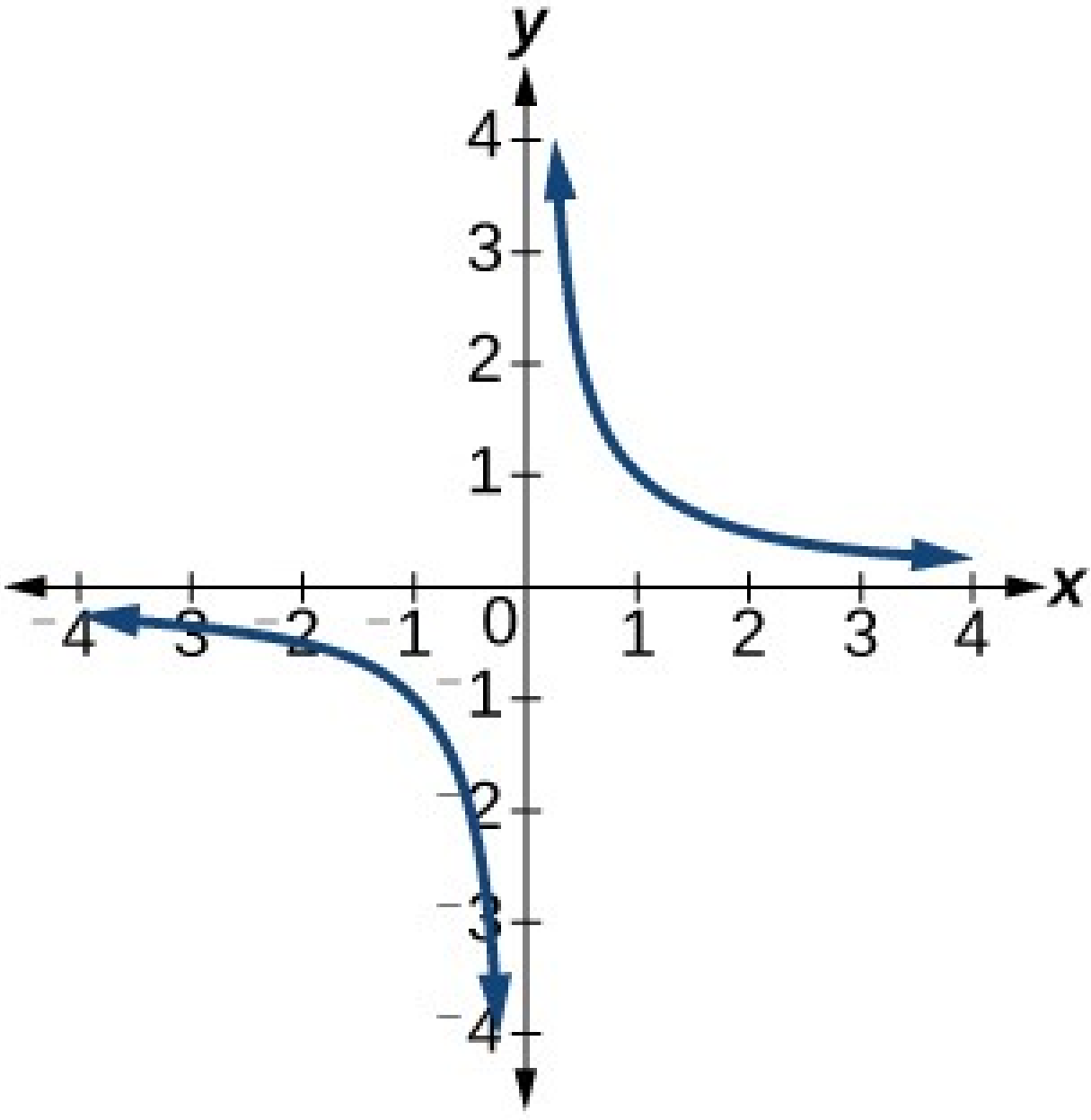
71.

$$\left(-\frac{5}{3}, 3\right)$$

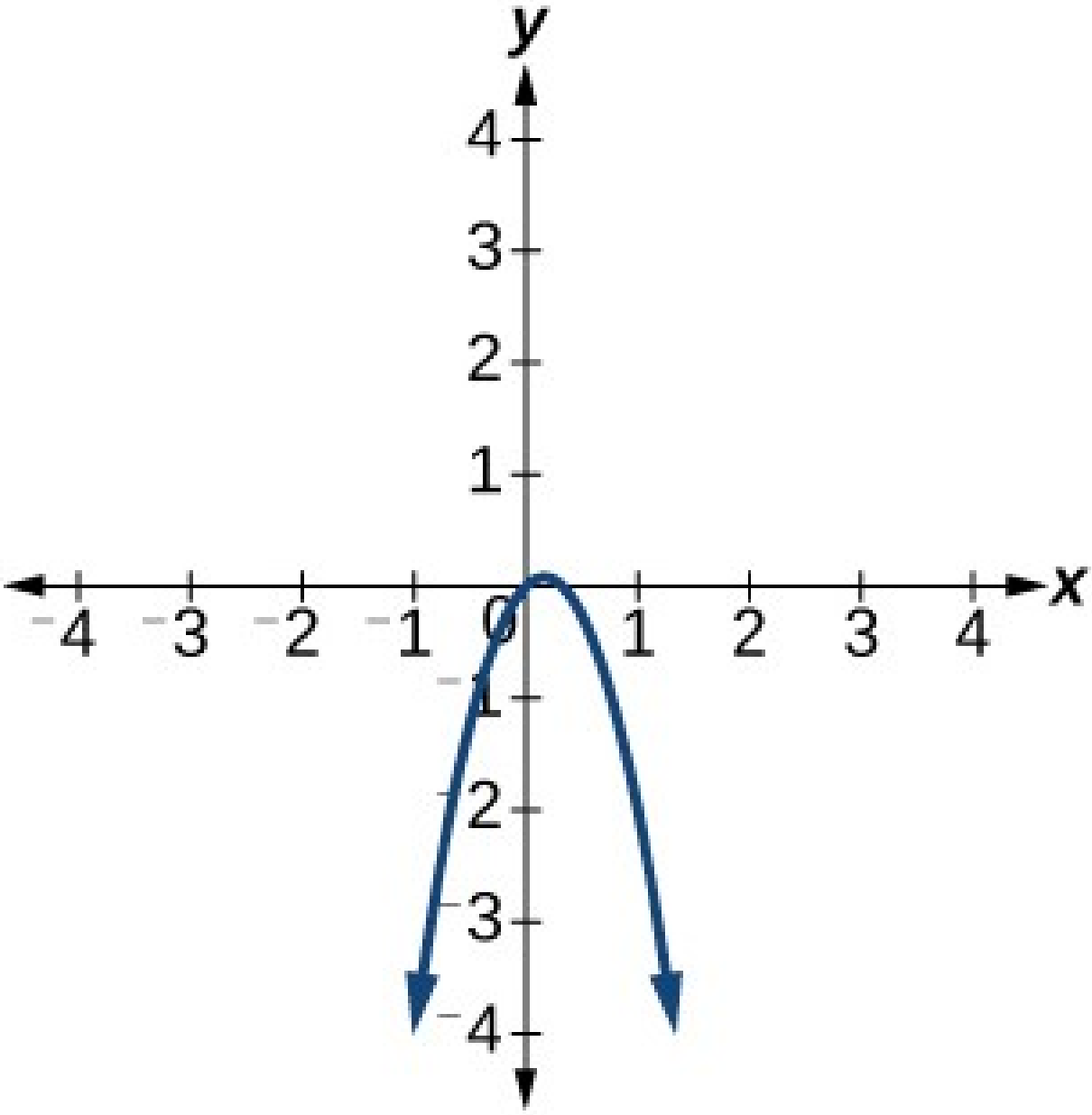
73.

$$f^{-1}(x)=\frac{x-9}{10}$$

77. Fallið er eintækt.



78. Fallið er ekki eintækt.



79.

5

Æfingapróf

1. Venslin eru fall.

3. −16

5. Grafið er fleygbogi og stenst ekki lárétta línuprófið.

7.

$$2a^2 - a$$

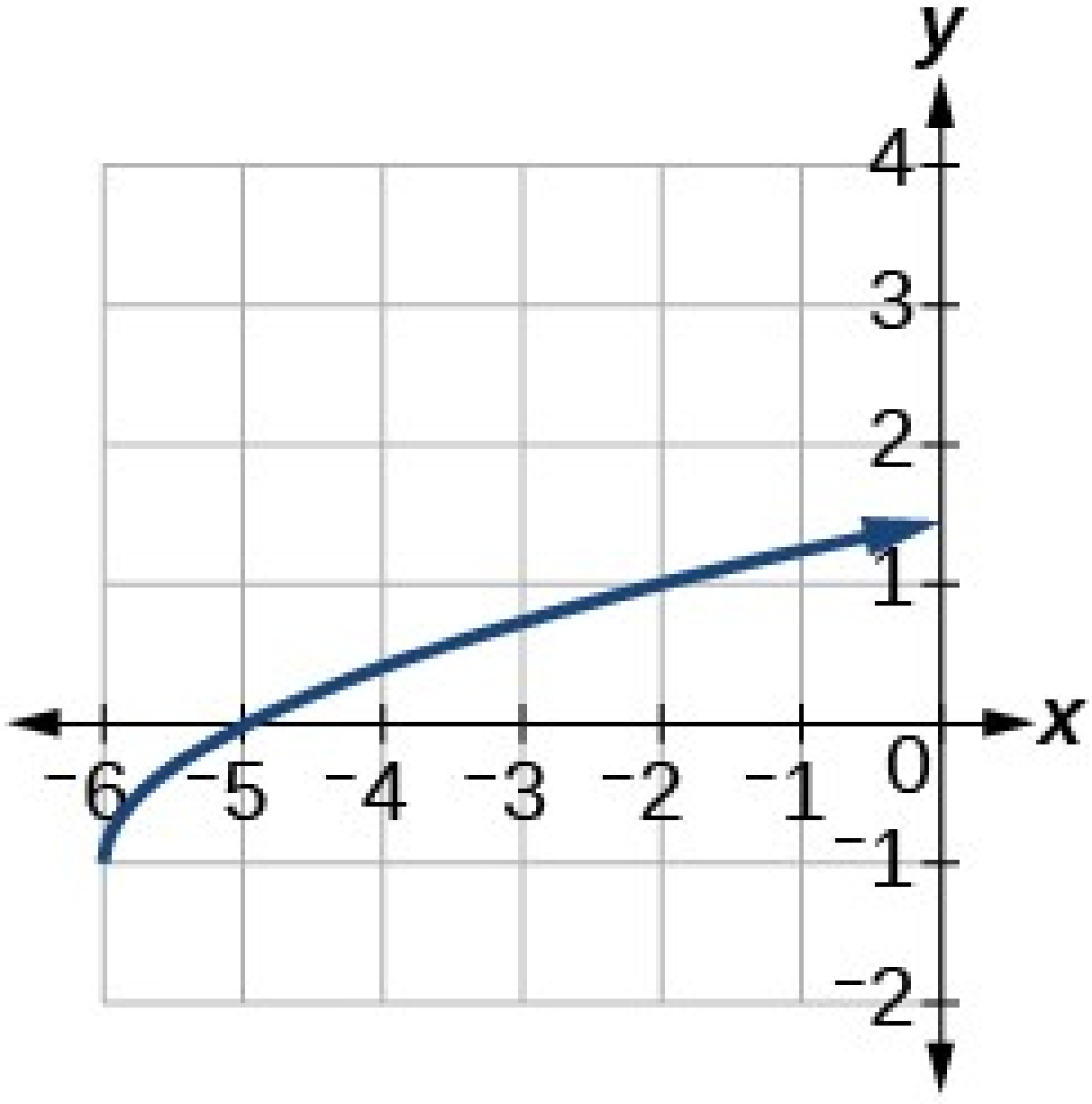
9.

$$-2(a+b)+1$$

11.

$$\sqrt{2}$$

13.



15.

slétt tala

17.

oddatala

19. $x=-7$ og $x=10$

21.

$$f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$$

23.

$$(-\infty;-1,1) \text{ og } (1,1;\infty)$$

25.

$$(1,1;-0,9)$$

27.

$$f(2)=2$$

29.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{ef } x\leq 2\\ 3 & \text{ef } x>2\end{cases}$$

31.

$$x=2$$

33. já

35.

$$f^{-1}(x)=-\frac{x-11}{2}$$

Kafli 2

Prófaðu

2.1 Línuleg föll

1. $m=\frac{4-3}{0-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$; minnkandi því $m<0$.

2.

$$m=\frac{1.868-1.442}{2.012-2.009}=\frac{426}{3}=142 \text{ manns á ári}$$

3. $y-2=-2(x+2)$; $y=-2x-2$

4. $y-0=-3(x-0)$; $y=-3x$

5.

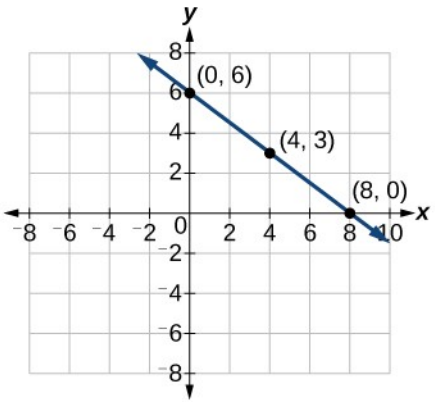
$$y=-7x+3$$

6.

$$H(x)=0{,}5\ x+12{,}5$$

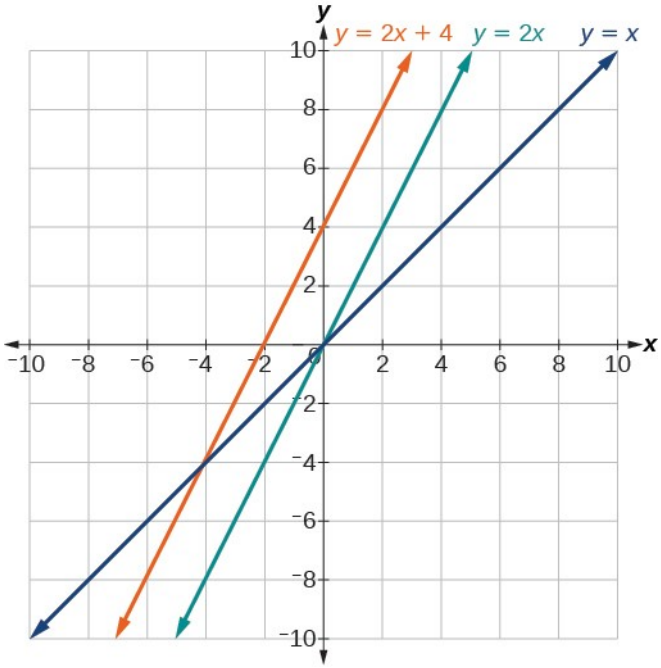
2.2 Gröf línulegra falla

1.



2. Möguleg svör eru meðal annars $(-3,7)$, $(-6,9)$, eða $(-9,11)$.

3.



4.

$$(16,\ 0)$$

5.

1. ⓐ $f(x)=2x$
2. ⓑ $g(x)=-\frac{1}{2}x$

6.

$$y=-\frac{1}{3}x+6$$

7.

1. ⓐ $(0,5)$
2. ⓑ $(5,\ 0)$
3. ⓒ Hallatala -1
4. ⓓ Hvorki samsíða né hornréttar
5. ⓔ Minnkandi fall
6. ⓕ Speglaðu samsemdarfallið lóðrétt um t-ásinn og hliðraðu því um 5 einingar upp.

2.3 Líkanagerð með línulegum föllum

1.

1. ⓐ $C\ (x)=0{,}25\ x+25.000$
2. ⓑ Skurðpunkturinn við y-ás er $(0,25.000)$. Þótt fyrirtækið framleiði engan kleinuhring ber það samt kostnað að fjárhæð $25.000.

2.

1. ⓐ 41.100
2. ⓑ 2020

3. 21,57 mílur

2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

1.

$$54^{\circ}\text{F}$$

2. 150,871 milljarðar gallona; framreikningur

2.1 Kaflaverkefni

1. Terry byrjar í 3000 feta hæð og lækkar um 70 fet á sekúndu.

3. 3 mílur á klukkustund

5.

$$d(t)=100-10t$$

7. Já.

9. Nei.

11. Nei.

13. Nei.

15. Vaxandi.

17. Minnkandi.

19. Minnkandi.

21. Vaxandi.

23. Minnkandi.

25. 3

27.

$$-\frac{1}{3}$$

29.

$$\frac{4}{5}$$

31.

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

33.

$$y=2x+3$$

35.

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{22}{3}$$

37.

$$y=\frac{4}{5}x+4$$

39.

$$-\frac{5}{4}$$

41.

$$y=\frac{2}{3}x+1$$

43.

$$y=-2x+3$$

45.

$$y=3$$

47. Línulegt, $g(x)=-3x+5$

49. Línulegt, $f(x)=5x-5$

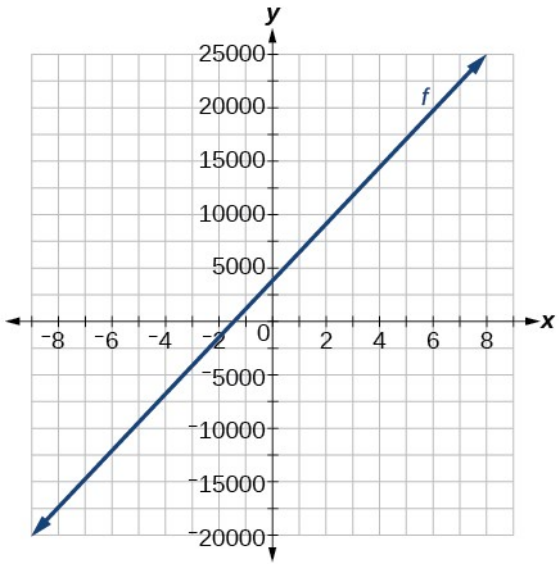
51. Línulegt, $g(x)=-\frac{25}{2}x+6$

53. Línulegt, $f(x)=10x-24$

55.

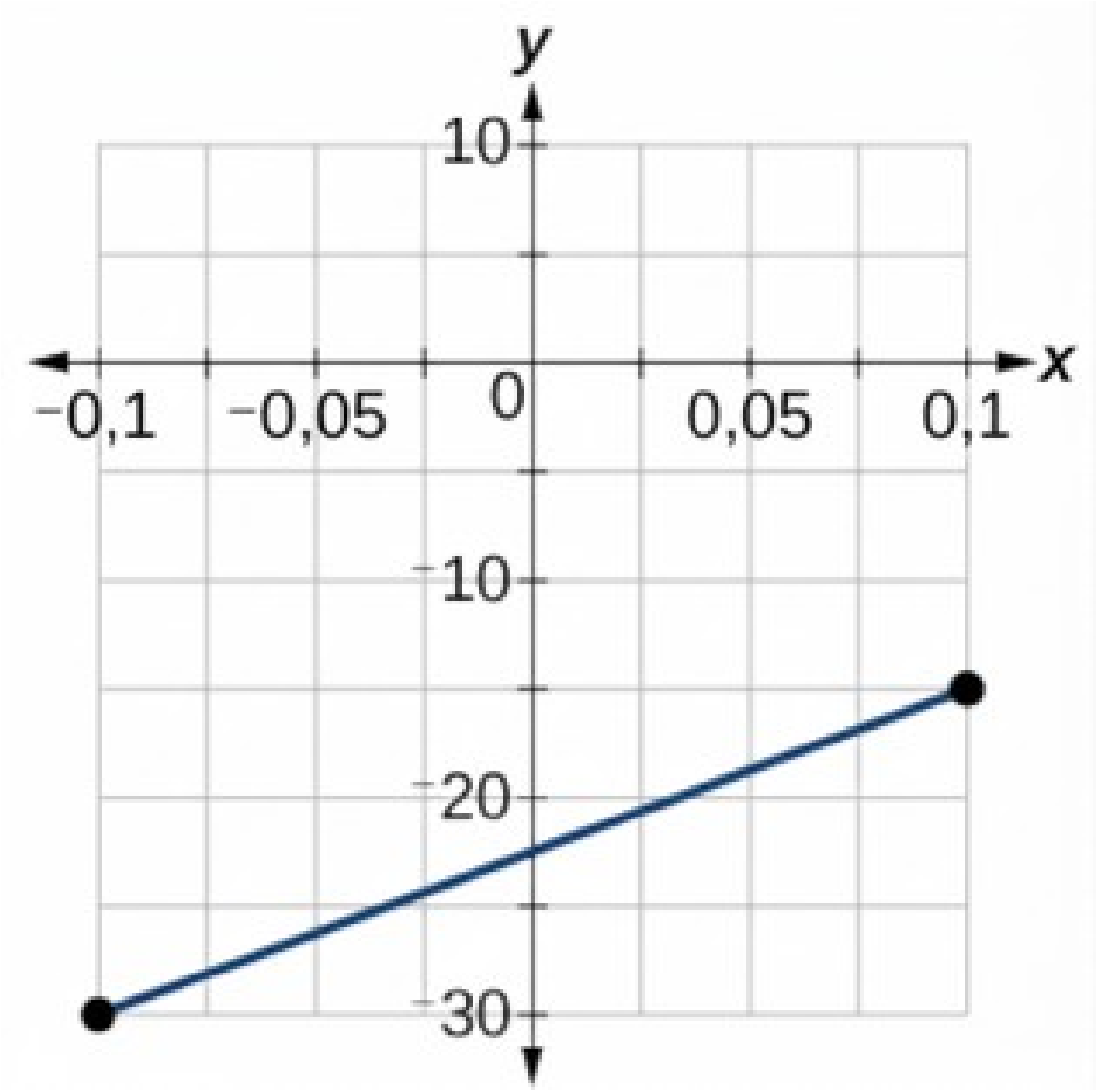
$$f(x)=-58x+17{,}3$$

57.



59. a. $a=11.900$; $b=1.000{,}1$ b. $q(p)=1000p-100$

61.



63.

$$x = -\frac{16}{3}$$

65.

$$x = a$$

67.

$$y = \frac{d}{c-a}x - \frac{ad}{c-a}$$

69. $45 á hverja æfingu.

71. Breytingarhraðinn er 0,1. Fyrir hverja viðbótarmínútu sem talað er hækkar mánaðargjaldið um $0,1, eða 10 sent. Upphafsgildið er 24. Þegar engar mínútur hafa verið notaðar er upphafsgjaldið $24.

73. Hallatalan er -400. Það merkir að á hverju ári milli 1960 og 1989 fækkaði íbúum borgarinnar um 400 á ári.

75. c.

2.2 Kaflaverkefni

1. Hallatölurnar eru jafnar en skurðpunktarnir við y-ás eru ekki jafnir.

3. Skurðpunkturinn er (a, a). Á láréttu línunni eru öll y-hnitin a og á lóðréttu línunni eru öll x-hnitin a. Skurðpunkturinn hefur því báða þessa eiginleika.

5. Finndu fyrst hallatölu línulega fallsins. Finndu síðan neikvætt gagnhverft gildi hallatölunnar; það er hallatala hornréttu línunnar. Settu hallatölu hornréttu línunnar og hnit gefna punktsins inn í jöfnuna $y = mx + b$ og leystu fyrir b. Ritaðu síðan jöfnu línunnar á forminu $y = mx + b$ með því að setja inn m og b.

7. hvorki samsíða né hornréttar

9. hornréttar

11. samsíða

13. $(-2, 0); (0, 4)$

15. $\left(\frac{1}{5}, 0\right); (0, 1)$

17. $(8, 0); (0, 28)$

19.

$$\text{Lína } 1: m = 8$$
$$\text{Lína } 2: m = -6$$
$$\text{Hvorugt}$$

21.

$$\text{Lína } 1: m = -\frac{1}{2}$$
$$\text{Lína } 2: m = 2$$
$$\text{Hornréttar}$$

23.

Lína $1: m=-2$
Lína $2: m=-2$
Samsíða

25.

$$g(x)=3x-3$$

27.

$$p(t)=-\frac{1}{3}t+2$$

29.

$$(-2,1)$$

31.

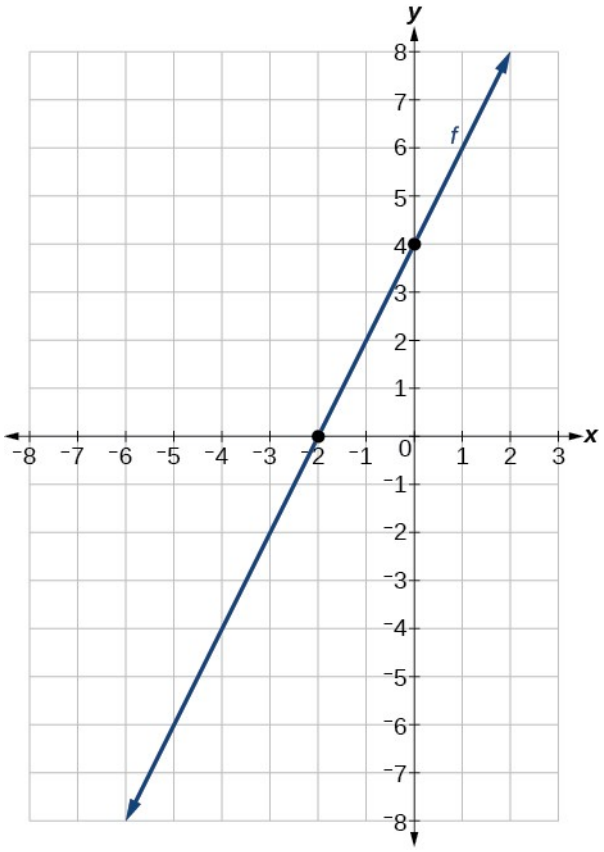
$$\left(-\frac{17}{5},\frac{5}{3}\right)$$

33. F

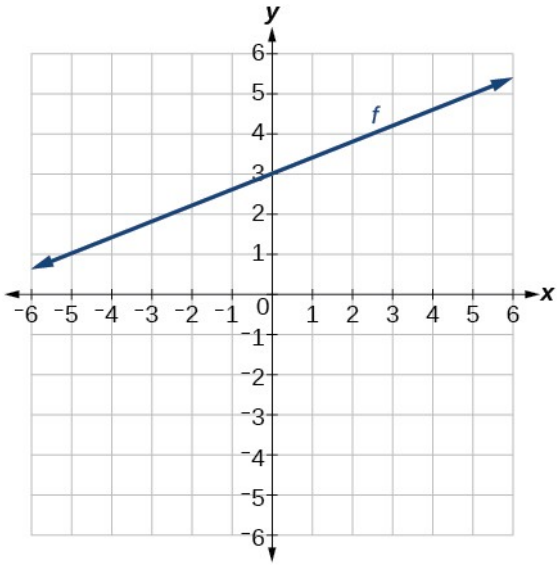
35. C

37. A

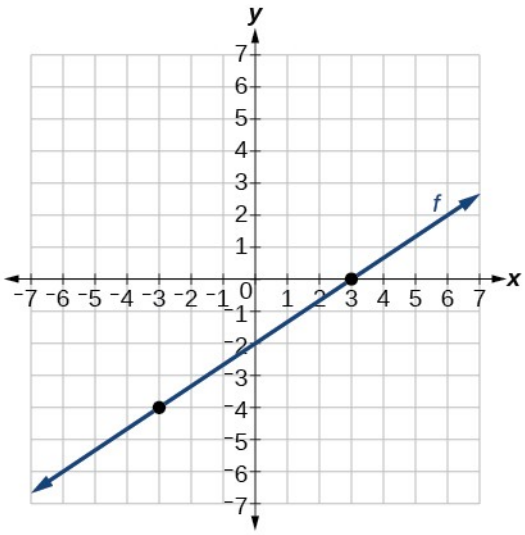
39.


y
x
f
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3

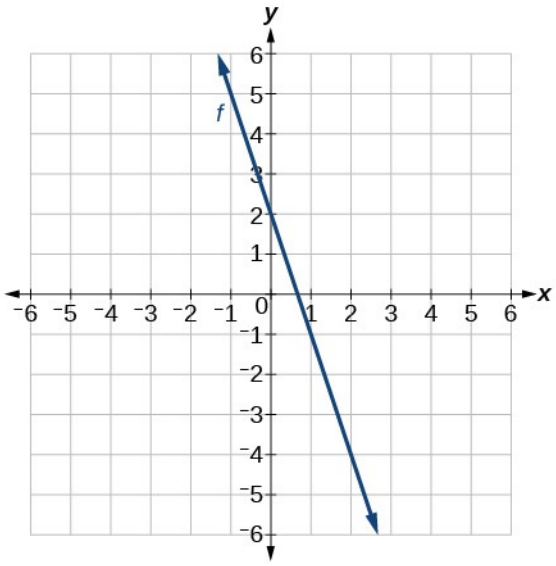
41.


y
x
f
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

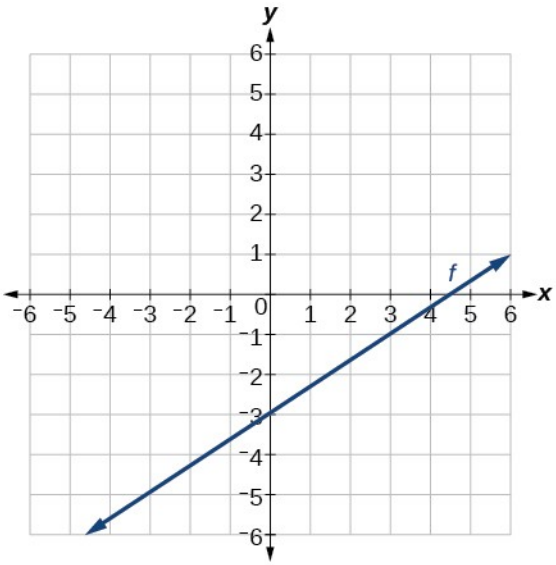
43.



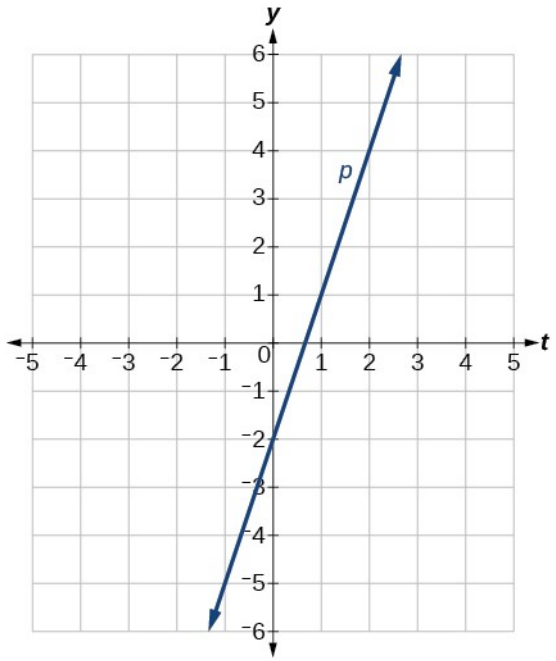
45.



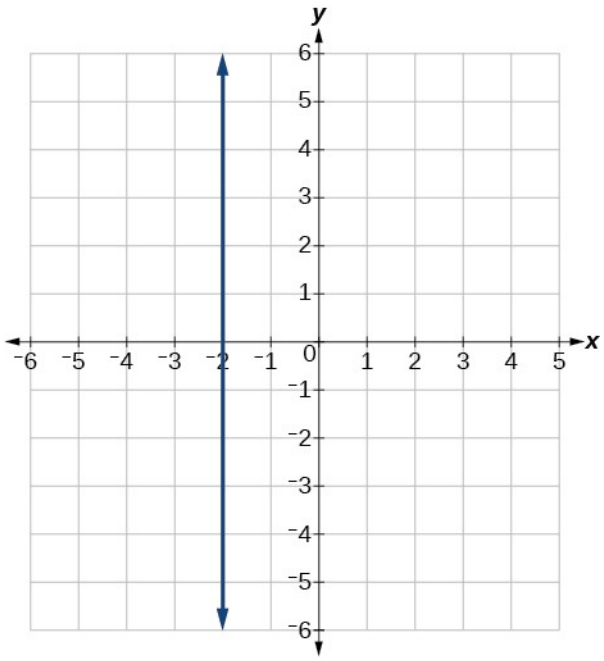
47.



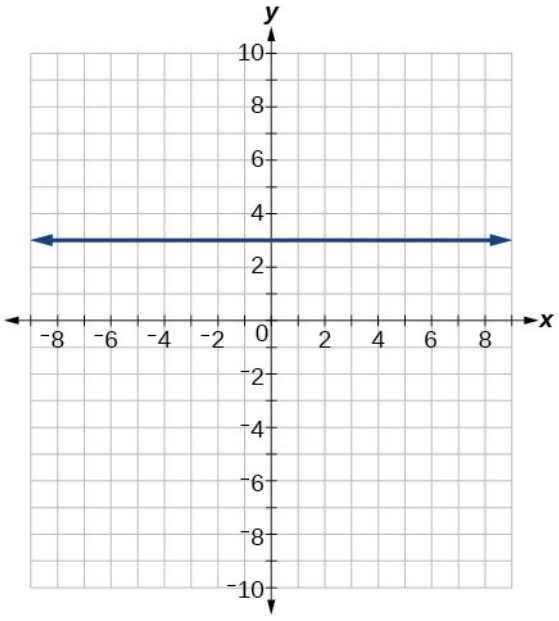
49.



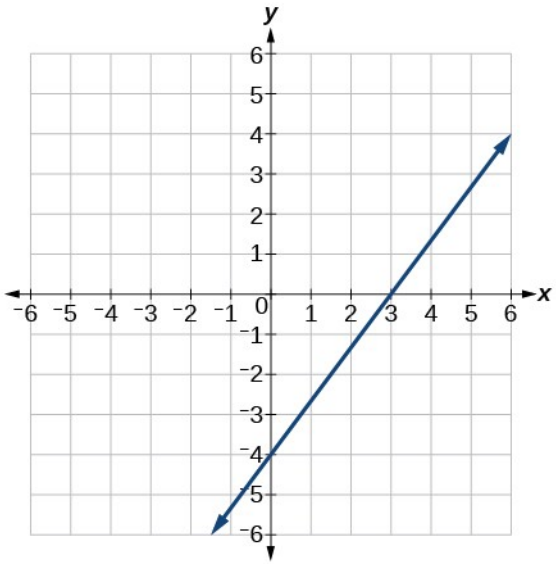
51.



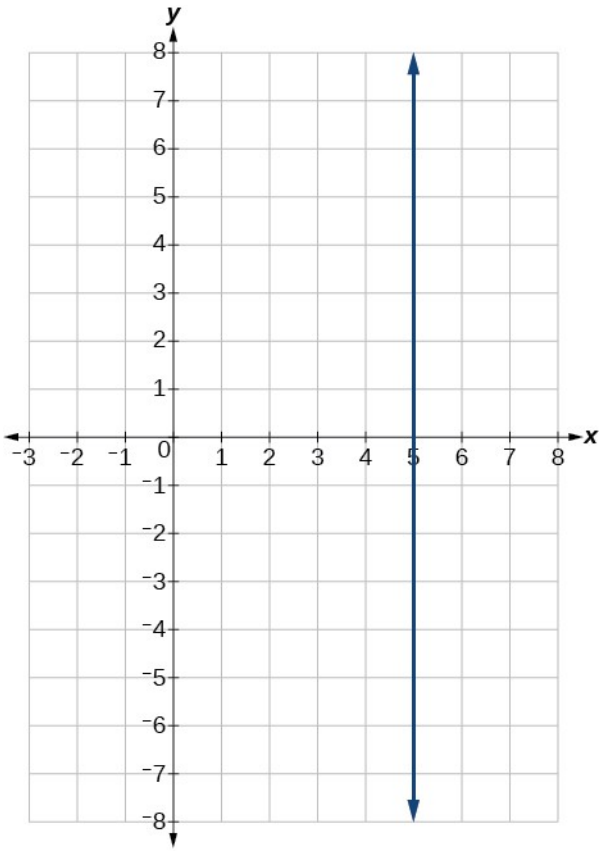
53.



55.



57.



59.

1. ⓐ $g\left(x\right)=0{,}75\ x-5{,}5$
2. ⓑ $0{,}75$
3. ⓒ $\left(0\,;-5{,}5\right)$

61.

$$y=3$$

63.

$$x=-3$$

65. enginn skurðpunktur

67.

$$(2,\ 7)$$

69.

$$(-10,\ -5)$$

71.

$$y=100x-98$$

73.

$$x<\frac{1999}{201}\ x>\frac{1999}{201}$$

75. Færri en 3000 textar

2.3 Kaflaverkefni

1. Ákvarðaðu óháðu breytuna. Hún er breytan sem úttakið er háð.

3. Til að ákvarða upphafsgildið skaltu finna úttakið þegar inntakið er núll.

5. 6 ferningseiningar

7. 20,012 ferningseiningar

9. 2.300

11. 64.170

13.

$$P\left(t\right)=75.000+2.500\ t$$

15. (−30, 0) Þrjátíu árum áður en líkanið hefst hafði bærinn enga íbúa. (0; 75.000) Í upphafi hafði bærinn 75.000 íbúa.

17. Tíu árum eftir að líkanið hófst.

19.

$$W(t)=0.5t+7.5$$

21. $(-15, 0)$: Skurðpunkturinn við x-ás er ekki raunhæft gagnapunktapar fyrir líkanið því það myndi merkja að barnið hefði verið 0 pund 15 mánuðum fyrir fæðingu. $(0,\ 7.5)$: Barnið vó 7,5 pund við fæðingu.

23. Við 5,8 mánaða aldur.

25.

$$C\left(t\right)=12.025-205\ t$$

27. (58,7; 0): In roughly 59 years, the number of people inflicted with the common cold would be 0. (0,12,025): Initially there were 12.025 people afflicted by the common cold.

29. 2064

31.

$$y=-2t+180$$

33. Árið 2070 verður hagnaður fyrirtækisins núll.

35.

$$y=30t-300$$

37. (10, 0) Árið 1990 var hagnaðurinn núll.

39. Havaí

41. Á árinu 1933

43. $105.620

45.

1. ⓐ 696 manns
2. ⓑ 4 ár
3. ⓒ 174 manns á ári
4. ⓓ 305 manns
5. ⓔ $P(t)=305+174t$
6. ⓕ 2.219 manns

47.

1. ⓐ $C\left(x\right)=0,15\ x+10$
2. ⓑ Fasta mánaðargjaldið er $10 og við bætist $0,15 fyrir hverja viðbótarmínútu sem er notuð
3. ⓒ $113,05

49.

1. ⓐ $P\left(t\right)=190\ t+4.360$
2. ⓑ 6.640 elgir

51.

1. ⓐ $R\left(t\right)=16-2{,}1\ t$
2. ⓑ 5,5 milljarðar rúmfeta
3. ⓒ Á árinu 2017

53. Meira en 133 mínútur

55. Skartgripir að verðmæti yfir $42.857,14

57. $66.666,67

2.4 Kaflaverkefni

1. Þegar líkanið hættir að eiga við eftir eitthvert gildi í skilgreiningarmenginu stenst líkanið sjálft ekki lengur.

3. Við spáum gildi utan skilgreiningar- og myndmengis gagnanna.

5. Því nær sem talan er 1, því minni er dreifing gagnanna; því nær sem talan er 0, því meiri er dreifingin.

7. 61,966 ár

9. Nei.

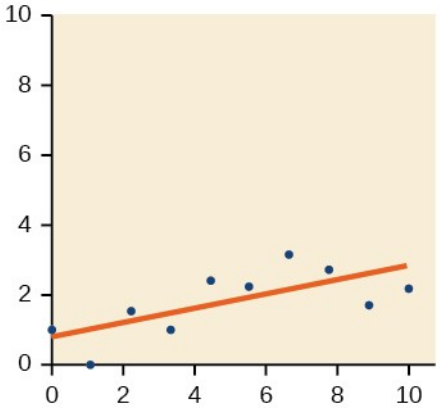
11. Nei.

13. Brúun. Um 60° F.

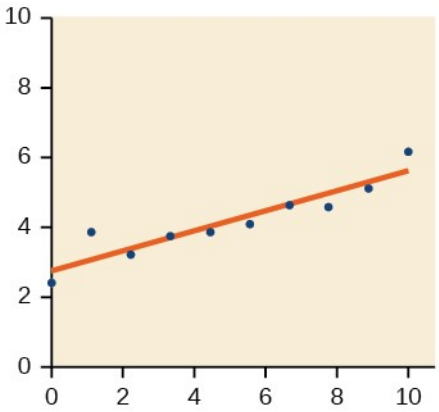
15. C

17. B

19.



21.



23. Já, leitnin virðist línuleg því $r=0.985$ og gildið fer yfir 12.000 um mitt ár 2016, 24,6 árum eftir 1992.

25. $y=1.640x+13.800, r=0.987$

27.

$$y=-0{,}962\ x+26{,}86,\quad r=-0{,}965$$

29. $y=-1.981x+60.197; r=-0.998$

31.

$$y=0.\ 121\ x-38{,}841,\quad r=0{,}998$$

33. $(-2,-6),(1,-12),(5,-20),(6,-22),(9,-28); y=-2x-10$

35. $(189.8,0)$ Ef 18.980 einingar seljast verður hagnaður fyrirtækisins núll dalir.

37.

$$y=0{,}00587\ x+1985\ ,4\ 1$$

39.

$$y=20.25x-671.5$$

41.

$$y=-10.75x+742.50$$

Yfirlitsverkefni

1. Já

3. Vaxandi.

5.

$$y=-3x+26$$

7. 3

9.

$$y=2x-2$$

11. Ekki línulegt.

13. samsíða

15.

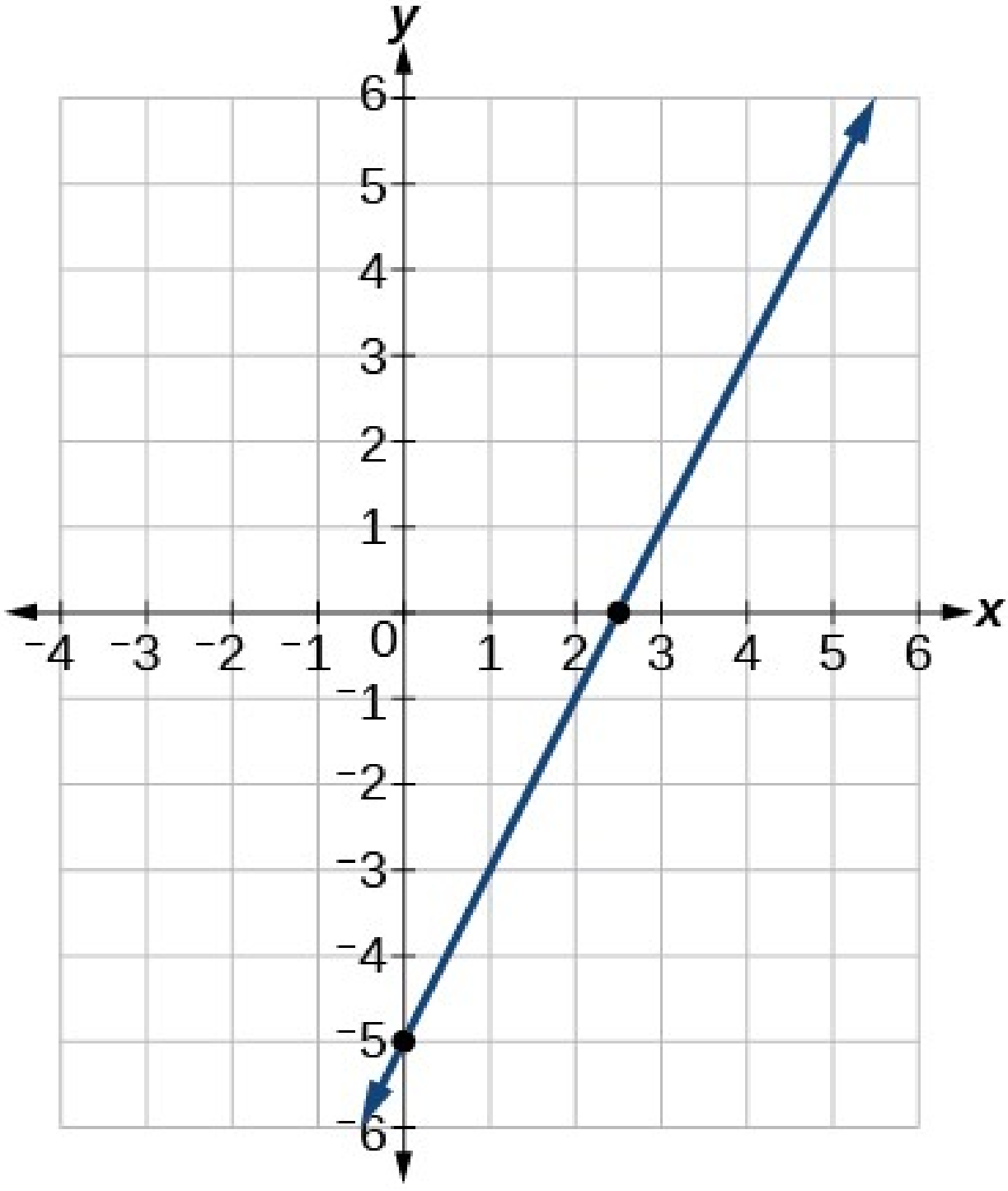
$$(-9,0);(0,-7)$$

17. Lína 1: $m=-2$; lína 2: $m=-2$; samsíða

19.

$$y=-0{,}2\ x+21$$

21.



23.

250.

25. 118.000.

27.

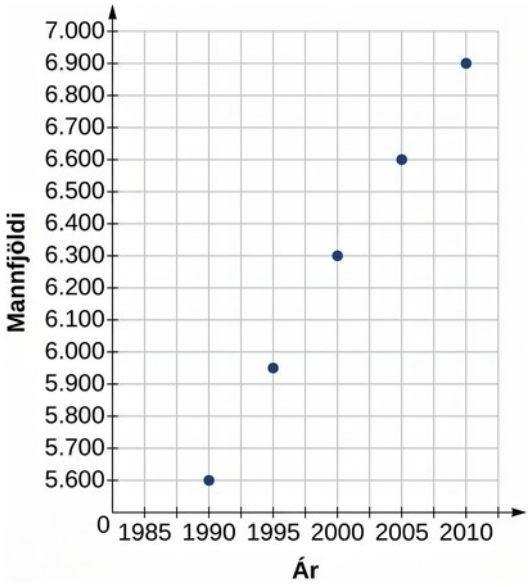
$$y = -300x + 11,500$$

29. a) 800; b) 100 nemendur á ári; c) $P(t)=100t+1700$

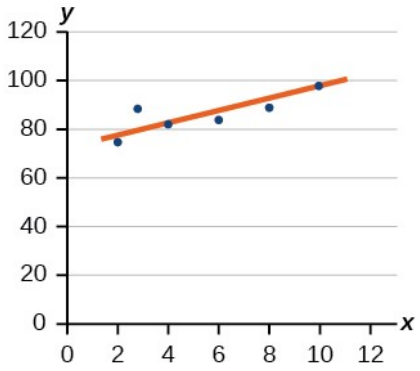
31. 18.500

33. $91.625

35. Framreikningur.



37.



39. Um mitt ár 2024.

41.

$$y=-1{,}294\ x+49{,}412;\quad r=-0{,}974$$

43. Snemma árs 2022

45. 7.660

Æfingapróf

1. Já.

3. Vaxandi

5.

$$y = -1{,}5\ x - 6$$

7.

$$y = -2x - 1$$

9. Nei.

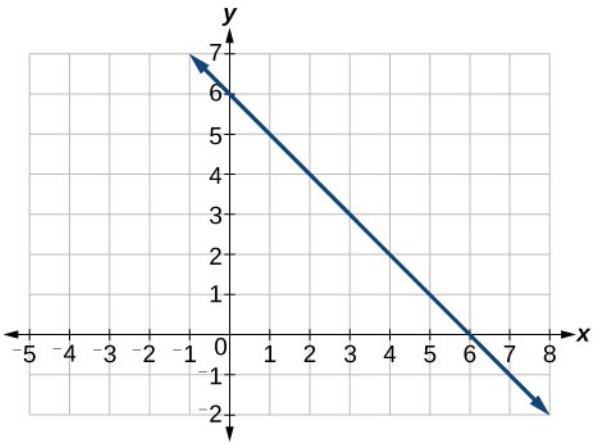
11. hornréttar

13. $(-7, 0); (0, -2)$

15.

$$y = -0{,}25\ x + 12$$

17.



19. 150

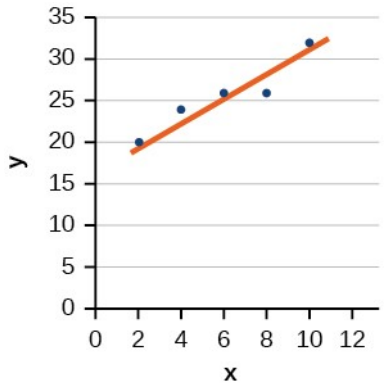
21. 165.000

23.

$$y = 875\ x + 10.675$$

25. a) 375; b) fækkaði að meðaltali um 46,875, eða um 47 manns á ári; c) $y = -46{,}875\ t + 1250$

27.



29. Snemma árs 2018

31.

$$y = 0{,}00455\ x \quad + \quad 1.979{,}5$$

33.

$$r = 0{,}999$$

Kafli 3

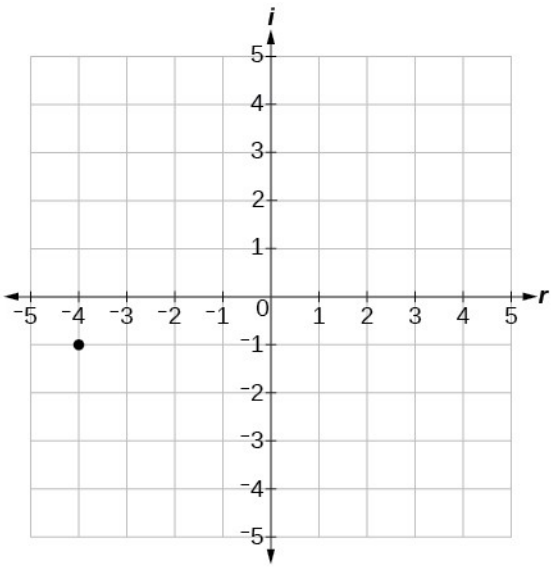
Prófaðu

3.1 Tvinntölur

1.

$$\sqrt{-24} = 0 + 2i\sqrt{6}$$

2.



3.

$$(3-4i)-(2+5i)=1-9i$$

4.

$$-8-24i$$

5.

$$18+i$$

6.

$$102-29i$$

7.

$$-\frac{3}{17}+\frac{5i}{17}$$

3.2 Annars stigs föll

1. Ferillinn liggur í gegnum upphafspunktinn og hefur hvirfilpunkt í $(-4,7)$, svo $(h)\,x=-\frac{7}{16}(x+4)^2+7$. Til að skotið heppnist þyrfti $h\,(-7{,}5)$ að vera um 4, en $h\,(-7{,}5)\approx 1{,}64$; skotið heppnast ekki.

2. $g(x)=x^2-6x+13$ á almennu formi; $g(x)=(x-3)^2+4$ á staðalformi

3. Skilgreiningarmengið er allar rauntölur. Myndmengið er $f(x)\geq\frac{8}{11}$, eða $\left[\frac{8}{11},\infty\right)$.

4. *Skurðpunktur við y-ás í (0, 13); engir skurðpunktar við* $x-$ ás

5.

1. ⓐ 3 sekúndur
2. ⓑ 256 fet
3. ⓒ 7 sekúndur

3.3 Veldisföll og margliðuföll

1. $f(x)$ er veldisfall því rita má það sem $f(x)=8x^4$. Hin föllin eru ekki veldisföll.

2. Þegar x stefnir á plús eða mínus óendanlegt minnkar $f(x)$ án neðri marka: þegar $x \to \pm\infty$ stefnir $f(x) \to -\infty$ vegna neikvæða stuðulsins.

3. Stigið er 6. Forystuliðurinn er $-x^6$. Forystustuðullinn er -1.

4. Þegar $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$; þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$. Grafið hefur lögun veldisfalls af sléttu stigi með neikvæðan stuðul.

5. Forystuliðurinn er $0{,}2\,x^3$, svo margliðan er af stigi 3. Þegar x stefnir á plús óendanlegt vex $f(x)$ án efri marka; þegar x stefnir á mínus óendanlegt minnkar $f(x)$ án neðri marka.

6. *Skurðpunktur við y-ás* $(0,0)$*;* skurðpunktar við x-ás $(0,0),(-2,0)$, og $(5,0)$

7. Skurðpunktar við $x-$ ás eru í mesta lagi 12 og snúningspunktar í mesta lagi 11.

8. Endahegðunin bendir til margliðufalls af oddatölustigi; skurðpunktar við $x-$ ás eru 3 og snúningspunktar 2, svo stigið er oddatala og að minnsta kosti 3. Af endahegðuninni vitum við að forystustuðullinn verður að vera neikvæður.

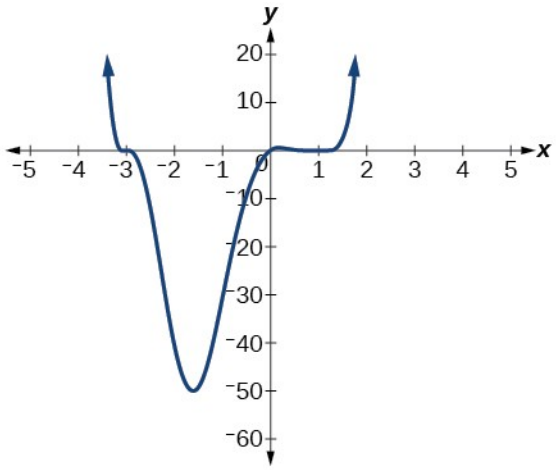
9. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(2,0),(-1,0)$, og $(5,0)$, skurðpunkturinn við y-ás er $(0,2)$, og grafið hefur í mesta lagi 2 snúningspunkta.

3.4 Gröf margliðufalla

1. *Skurðpunktur við y-ás* $(0,0)$*;* skurðpunktar við x-ás $(0,0),(-5,0),(2,0)$, og $(3,0)$

2. Grafið hefur núllstöðina –5 með margfeldni 3, núllstöðina –1 með margfeldni 2 og núllstöðina 3 með margfeldni 2.

3.



4. Þar sem f er margliðufall, $f(1)$ er neikvætt og $f(2)$ jákvætt er að minnsta kosti ein raunveruleg núllstöð milli $x=1$ og $x=2$.

5.

$$f(x)=-\frac{1}{8}(x-2)^3(x+1)^2(x-4)$$

6. Lággildið er um það bil í punktinum $(0;-6{,}5)$, og hágildið um það bil í punktinum $(3{,}5;7)$.

3.5 Deiling margliða

1.

$$4x^2-8x+15-\frac{78}{4x+5}$$

2.

$$3\ x^3-3\ x^2+21\ x-150+\frac{1.090}{x+7}$$

3.

$$3x^2-4x+1$$

3.6 Núllstöðvar margliðufalla

1.

$$f(-3)=-412$$

2. Núllstöðvarnar eru 2, −2 og −4.

3. Engar ræðar núllstöðvar eru til.

4. Núllstöðvarnar eru –4, $\frac{1}{2}$, og 1.

5.

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+10$$

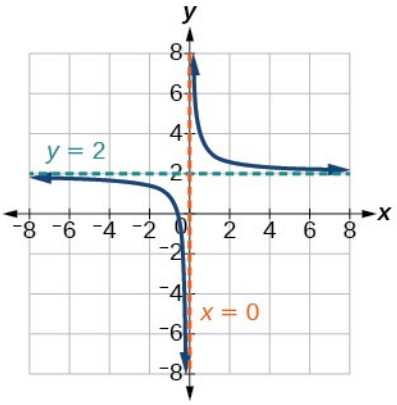
6. Jákvæðu raunræturnar verða að vera 4, 2 eða 0 talsins og neikvæðu raunræturnar 0. Grafið sýnir 2 jákvæðar og 0 neikvæðar raunverulegar núllstöðvar.

7. 3 metrar á 4 metra á 7 metra

3.7 Ræð föll

1. Endahegðun: þegar $x\to\pm\infty, f(x)\to 0$; staðbundin hegðun: þegar $x\to 0, f(x)\to\infty$ (engir skurðpunktar eru við x- eða y-ás)

2.



Fallinu og aðfellunum er hliðrað um 3 einingar til hægri og 4 einingar niður. Þegar $x\to 3, f(x)\to\infty$, og þegar $x\to\pm\infty, f(x)\to -4$.

Fallið er $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}-4$.

3.

$$\frac{12}{11}$$

4. Skilgreiningarmengið er allar rauntölur nema $x=1$ og $x=5$.

5. Afmáanleg ósamfelldni við $x=5$. Lóðfellur: $x=0, x=1$.

6. Lóðfellur við $x=2$ og $x=-3$; láfella við $y=4$.

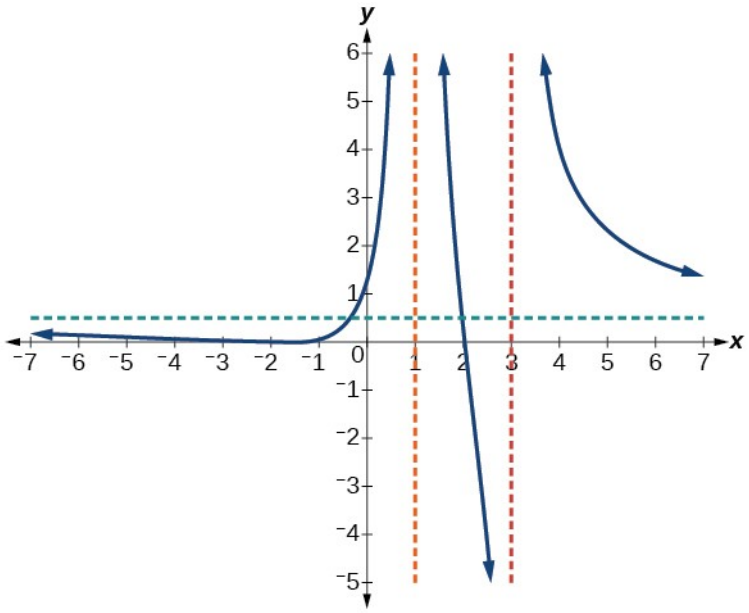
7. Fyrir ummyndað annað veldi umhverfufallsins finnum við ræða formið.

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}-4=\frac{1-4(x-3)^2}{(x-3)^2}=\frac{1-4(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-3)}=\frac{-4x^2+24x-35}{x^2-6x+9}$$

Þar sem teljarinn er af sama stigi og nefnarinn vitum við að þegar $x \to \pm\infty, f(x) \to -4$; svo $y=-4$ er láfellan. Næst setjum við nefnarann jafnan núlli og finnum að lóðfellan er $x=3$, því þegar $x \to 3, f(x) \to \infty$. Síðan setjum við teljarann jafnan 0 og finnum að skurðpunktarnir við x-ás eru í $(2{,}5\,;0)$ og $(3{,}5\,;0)$. Að lokum reiknum við gildi fallsins í 0 og finnum að skurðpunkturinn við y-ás er í $\left(0, \frac{-35}{9}\right)$.

8. Láfella við $y=\frac{1}{2}$. Lóðfellur við $x=1$ og $x=3$. Skurðpunktur við y-ás í $\left(0, \frac{4}{3}.\right)$

Skurðpunktar við x-ás í $(2,0)$ og $(-2,0)$. $(-2,0)$ er núllstöð með margfeldni 2 og grafið snertir x-ásinn og snýr við í þessum punkti. $(2,0)$ er einföld núllstöð og grafið sker ásinn í þessum punkti.



3.8 Andhverf föll og rótarfall

1. $f^{-1}(f(x))=f^{-1}\left(\frac{x+5}{3}\right)=3\left(\frac{x+5}{3}\right)-5=(x-5)+5=x$ og

$f\left(f^{-1}(x)\right)=f(3x-5)=\frac{(3x-5)+5}{3}=\frac{3x}{3}=x$

2.

$$f^{-1}(x)=x^3-4$$

3.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$$

4.

$$f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2}, x\geq 0$$

5.

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

3.9 Líkanagerð með hlutfallsvenslum

1.

$$\frac{128}{3}$$

2.

$$\frac{9}{2}$$

3.

$$x=20$$

3.1 Kaflaverkefni

1. Leggðu raunhlutana saman og þverhlutana saman.

3. i sinnum i er -1, sem er ekki þvertala. (svör eru mismunandi)

5.

$$-8+2i$$

7.

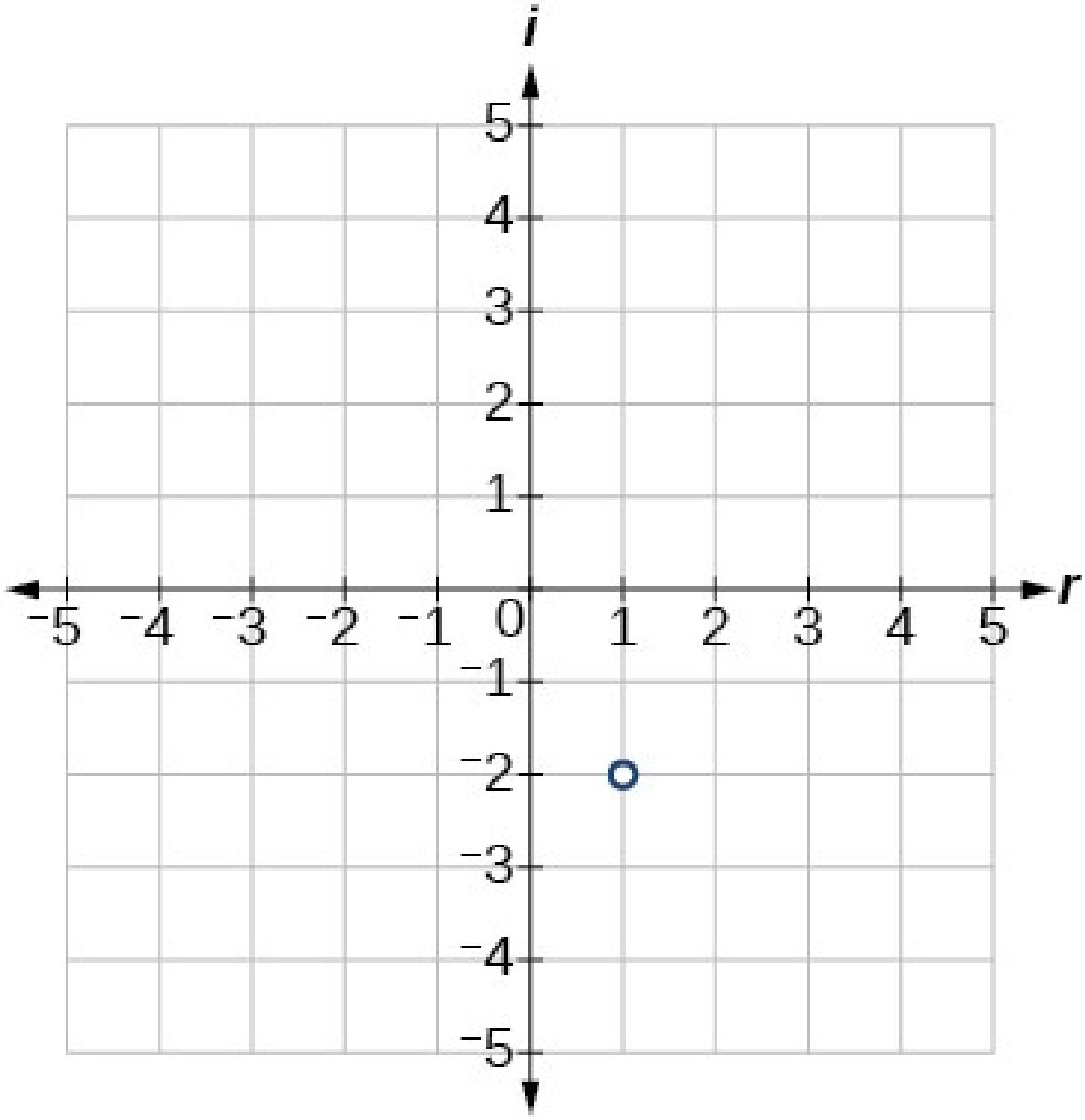
$$14+7i$$

9.

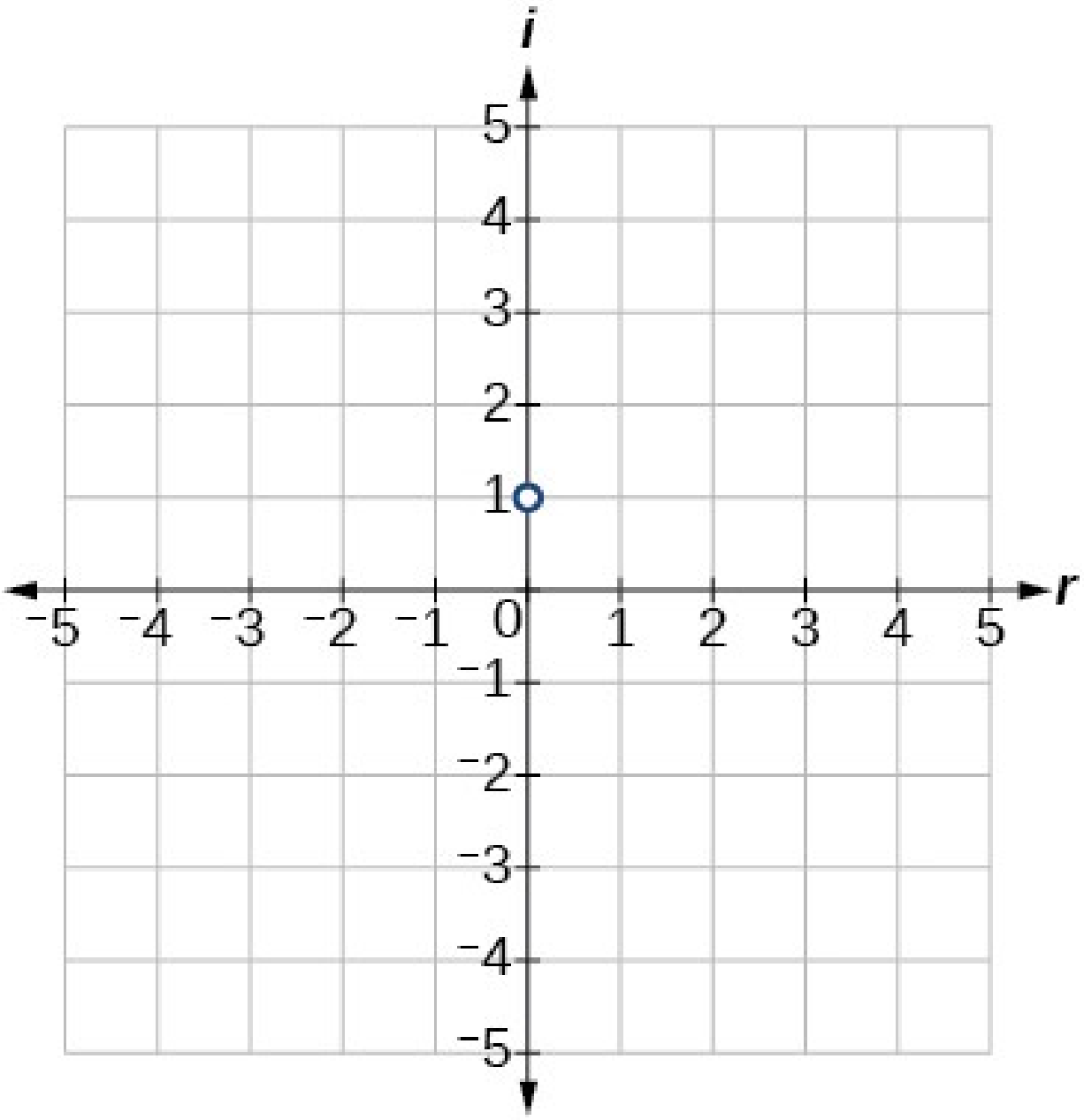
$$-\frac{23}{29}+\frac{15}{29}i$$

11. 2 rauntölur og 0 eiginlegar tvinntölur

13.



15.



17.

$$8-i$$

19.

$$-11+4i$$

21.

$$2-5i$$

23.

$$6+15i$$

25.

$$-16+32i$$

27.

$$-4-7i$$

29. 25

31.

$$2-\frac{2}{3}i$$

33.

$$4-6i$$

35.

$$\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$$

37.

$$15i$$

39.

$$1+i\sqrt{3}$$

41.

$$1$$

43.

$$-1$$

45. 128i

47.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6=-1$$

49.

$$3i$$

51. 0

53. $5-5\mathrm{i}$

55.

$$-2i$$

57.

$$\frac{9}{2}-\frac{9}{2}i$$

3.2 Kaflaverkefni

1. Á þessu formi er auðvelt að finna hvirfilpunktinn.

3. Ef $a=0$ verður fallið línulegt fall.

5. Ef hægt er notum við þáttun. Annars getum við notað lausnarformúlu annars stigs jöfnu.

7. $g(x)=(x+1)^2-4$, Hvirfilpunktur $(-1,-4)$

9. $f(x)=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4}$, Hvirfilpunktur $\left(-\frac{5}{2},-\frac{33}{4}\right)$

11. $f(x)=3(x-1)^2-12$, Hvirfilpunktur $(1,-12)$

13. $f(x)=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{37}{12}$, Hvirfilpunktur $\left(\frac{5}{6},-\frac{37}{12}\right)$

15. Lággildið er $-\frac{17}{2}$ og það verður við $\frac{5}{2}$. Samhverfuásinn er $x=\frac{5}{2}$.

17. Lággildið er $-\frac{17}{16}$ og það verður við $-\frac{1}{8}$. Samhverfuásinn er $x=-\frac{1}{8}$.

19. Lággildið er $-\frac{7}{2}$ og það verður við -3. Samhverfuásinn er $x=-3$.

21. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$. Myndmengið er $[2,\infty)$.

23. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$. Myndmengið er $[-5,\infty)$.

25. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$. Myndmengið er $[-12,\infty)$.

27.

$$\left\{2i\sqrt{2},-2i\sqrt{2}\right\}$$

29.

$$\left\{3i\sqrt{3},-3i\sqrt{3}\right\}$$

31.

$$\{2+i, 2-i\}$$

33.

$$\{2+3i, 2-3i\}$$

35.

$$\{5+i, 5-i\}$$

37.

$$\{2+2\sqrt{6}, 2-2\sqrt{6}\}$$

39.

$$\left\{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right\}$$

41.

$$\left\{-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i, -\frac{3}{5}-\frac{1}{5}i\right\}$$

43.

$$\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{7}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{7}\right\}$$

45.

$$f(x)=x^2-4x+4$$

47.

$$f(x)=x^2+1$$

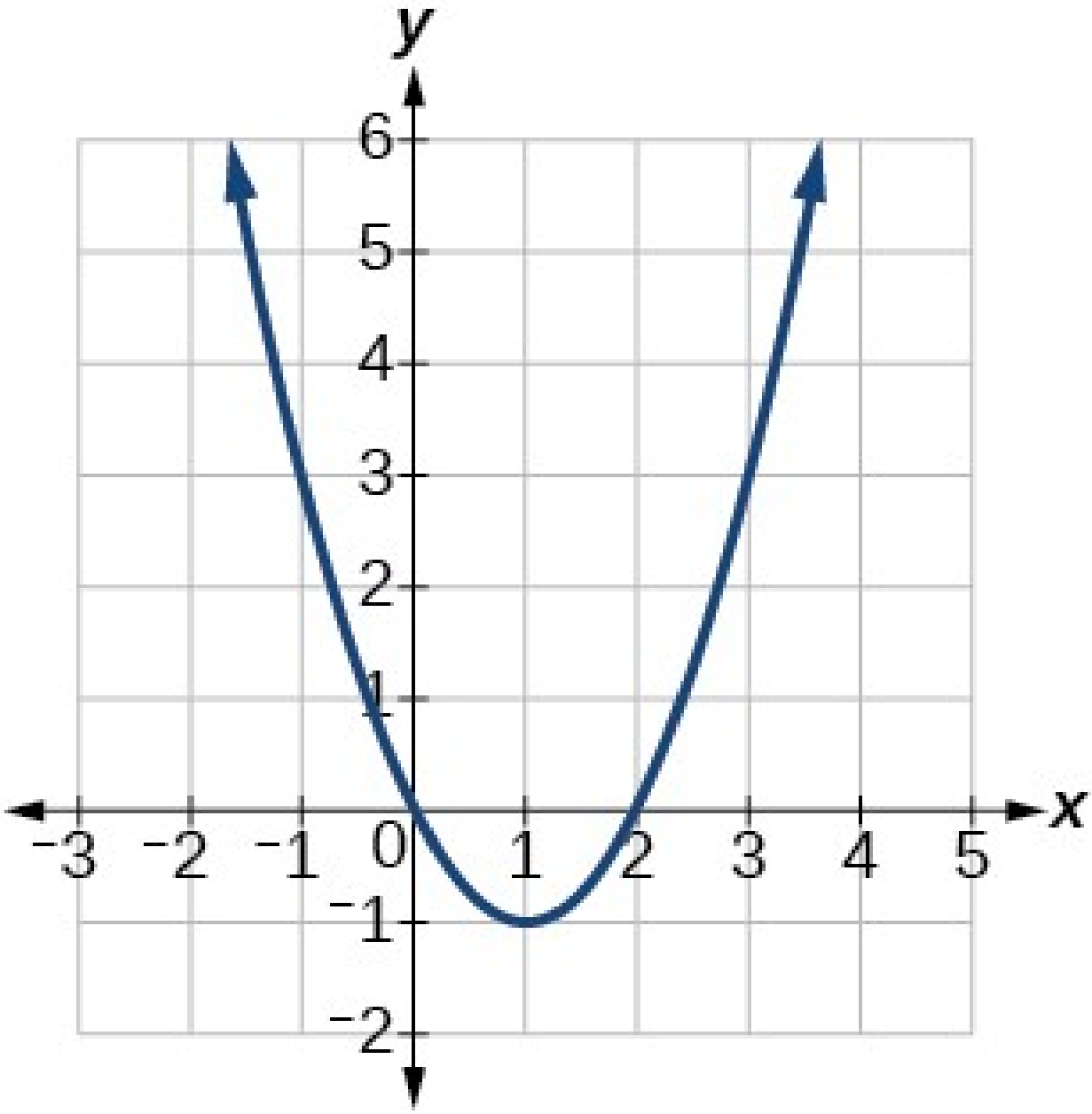
49.

$$f(x)=\frac{6}{49}x^2+\frac{60}{49}x+\frac{297}{49}$$

51.

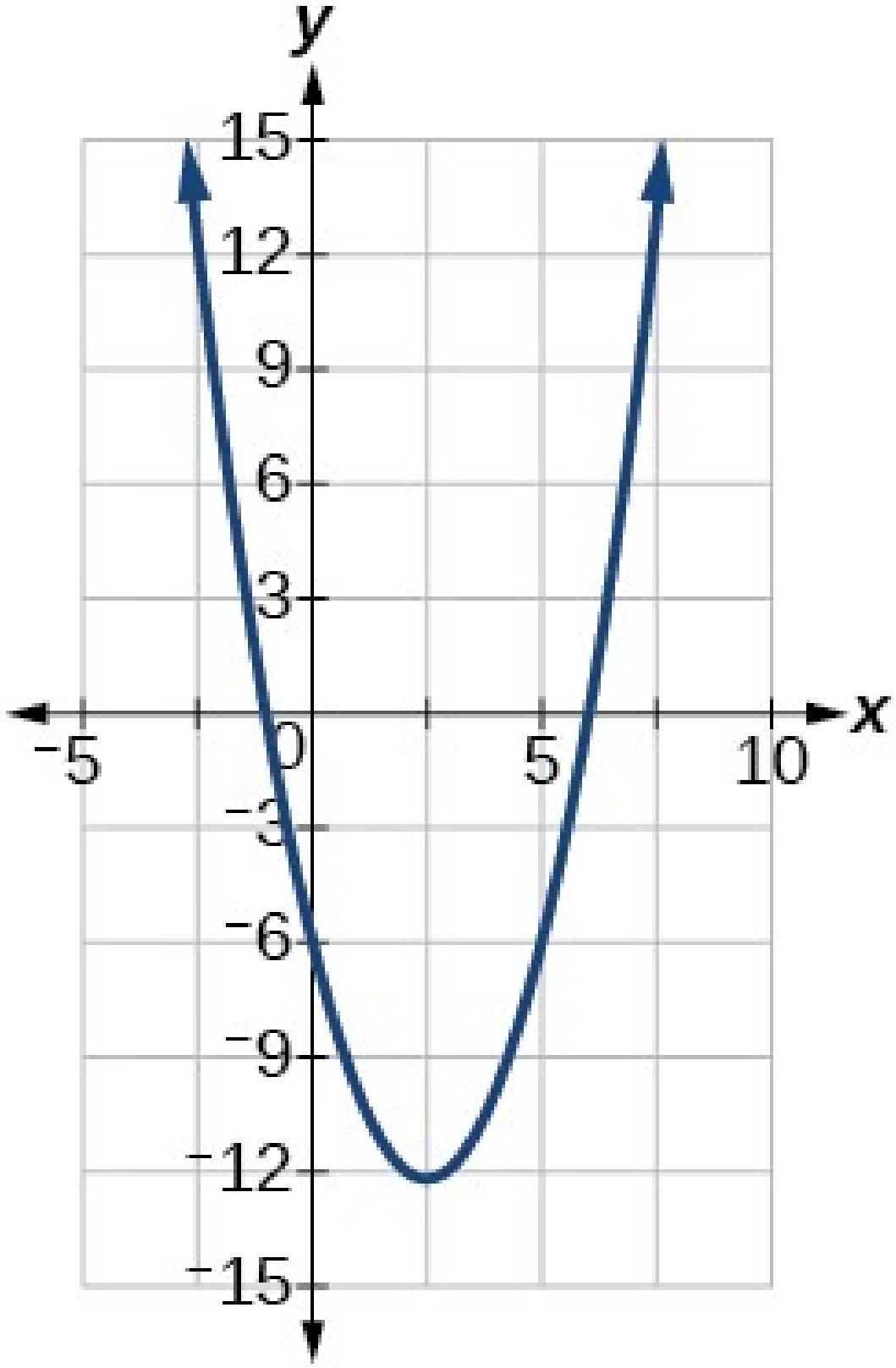
$$f(x)=-x^2+1$$

53.



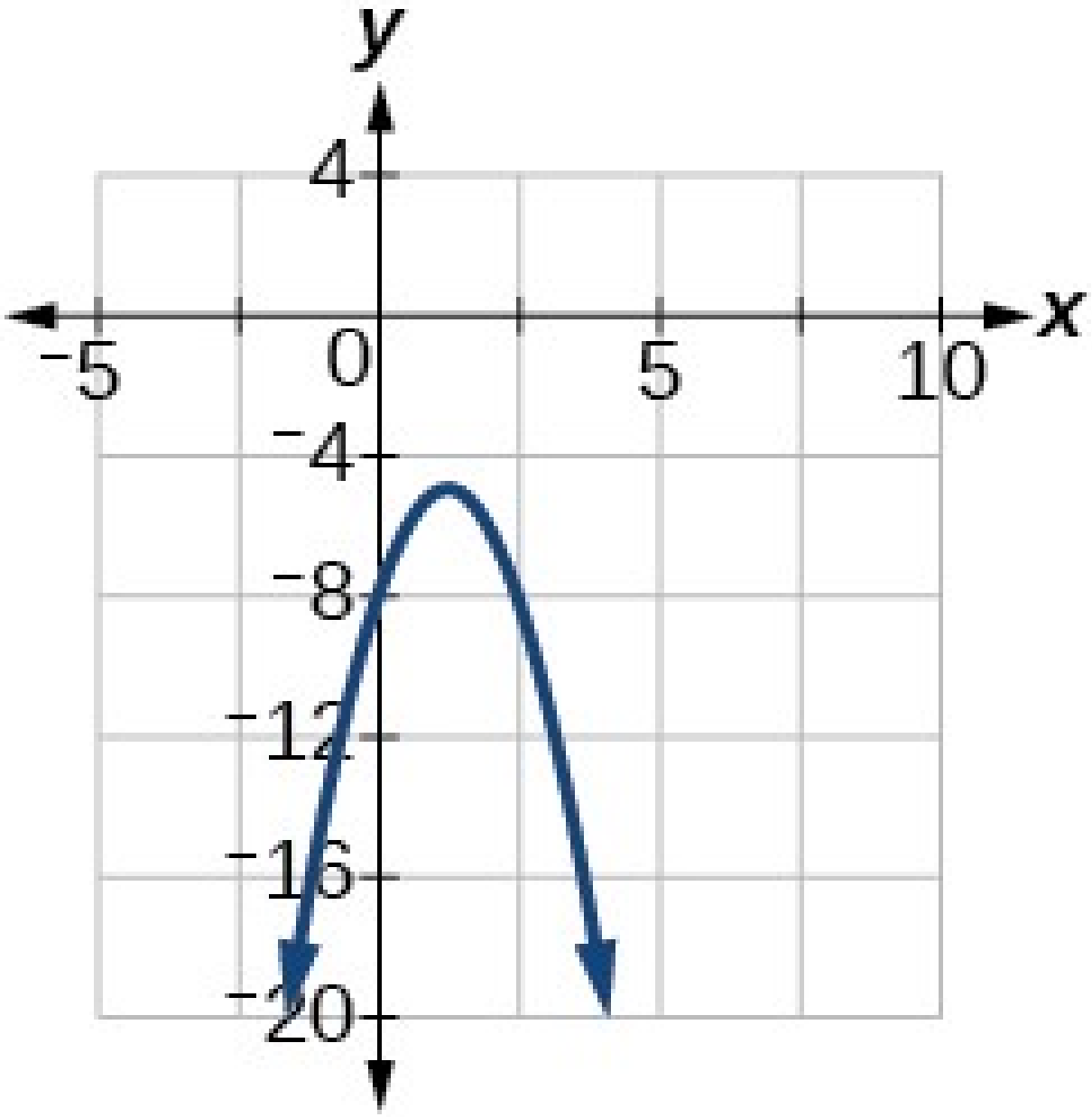
Hvirfilpunktur $(1,-1)$, Samhverfuásinn er $x=1$. Skurðpunktarnir eru $(0,0),(2,0)$.

55.



Hvirfilpunktur $\left(\frac{5}{2},\frac{-49}{4}\right)$, samhverfuásinn er $x=\frac{5}{2}$, skurðpunktarnir eru $(6,0),(-1,0)$.

57.



Hvirfilpunktur $\left(\frac{5}{4}, -\frac{39}{8}\right)$, Samhverfuásinn er $x=\frac{5}{4}$. Skurðpunktarnir eru $(0, -8)$.

59.

$$f(x)=x^2-4x+1$$

61.

$$f(x)=-2x^2+8x-1$$

63.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{7}{2}$$

65.

$$f(x)=x^2+1$$

67.

$$f(x)=2-x^2$$

69.

$$f(x)=2x^2$$

71. Grafinu er hliðrað upp eða niður, það er lóðrétt hliðrun.

73. 50 fet

75. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$. Myndmengið er $[-2,\infty)$.

77. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$ Myndmengið er $(-\infty,11]$.

79.

$$f(x)=2x^2-1$$

81.

$$f(x)=3x^2-9$$

83.

$$f(x)=5x^2-77$$

85. 50 fet á 50 fet. Hámarkaðu $f(x)=-x^2+100x$.

87. 125 fet á 62,5 fet. Hámarkaðu $f(x)=-2x^2+250x$.

89. 6 og -6; margfeldið er –36; hámarkaðu $f(x)=x^2+12x$.

91. 2909,56 metrar

93. $10,70

3.3 Kaflaverkefni

1. Stuðull veldisfallsins er rauntalan sem margfölduð er við breytuna í tilteknu veldi. Stigið er hæsta veldið sem kemur fyrir í fallinu.

3. Þegar x minnkar án neðri marka minnkar einnig $f(x)$. Þegar x vex án efri marka vex einnig $f(x)$.

5. Margliðufallið er af sléttu stigi og forystustuðullinn er neikvæður.

7. $f(x)$ er veldisfall því það hefur breytilegan grunn í föstu veldi. Það er einnig margliða þar sem allir stuðlar nema einn eru núll.

9. Hvorugt

11. Hvorugt

13. Stig = 2, stuðull = −2

15. Stig = 4, stuðull = −2

17. Þegar $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$, þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$

19. Þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$, þegar $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$

21. Þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$,þegar $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$

23. Þegar $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$, þegar $x \to -\infty$,$f(x) \to -\infty$

25. *Skurðpunktur við y-ás er* $(0,12)$, skurðpunktar við t-ás eru $(1,0);(-2,0);$ og $(3,0)$.

27. *Skurðpunktur við y-ás er* $(0,-16)$. Skurðpunktar við x-ás eru $(2,0)$ og $(-2,0)$.

29. *Skurðpunktur við y-ás er* $(0,0)$. Skurðpunktar við x-ás eru $(0,0),(4,0)$, og $(-2,0)$.

31. 3

33. 5

35. 3

37. 5

39. Já. Snúningspunktarnir eru 2. Minnsta mögulega stig er 3.

41. Já. Snúningspunktarnir eru 1. Minnsta mögulega stig er 2.

43. Já. Snúningspunktarnir eru 0. Minnsta mögulega stig er 1.

44. Nei.

45. Já. Snúningspunktarnir eru 0. Minnsta mögulega stig er 1.

47.

x	$f(x)$
10	9.500
100	99.950.000
−10	9.500
−100	99.950.000

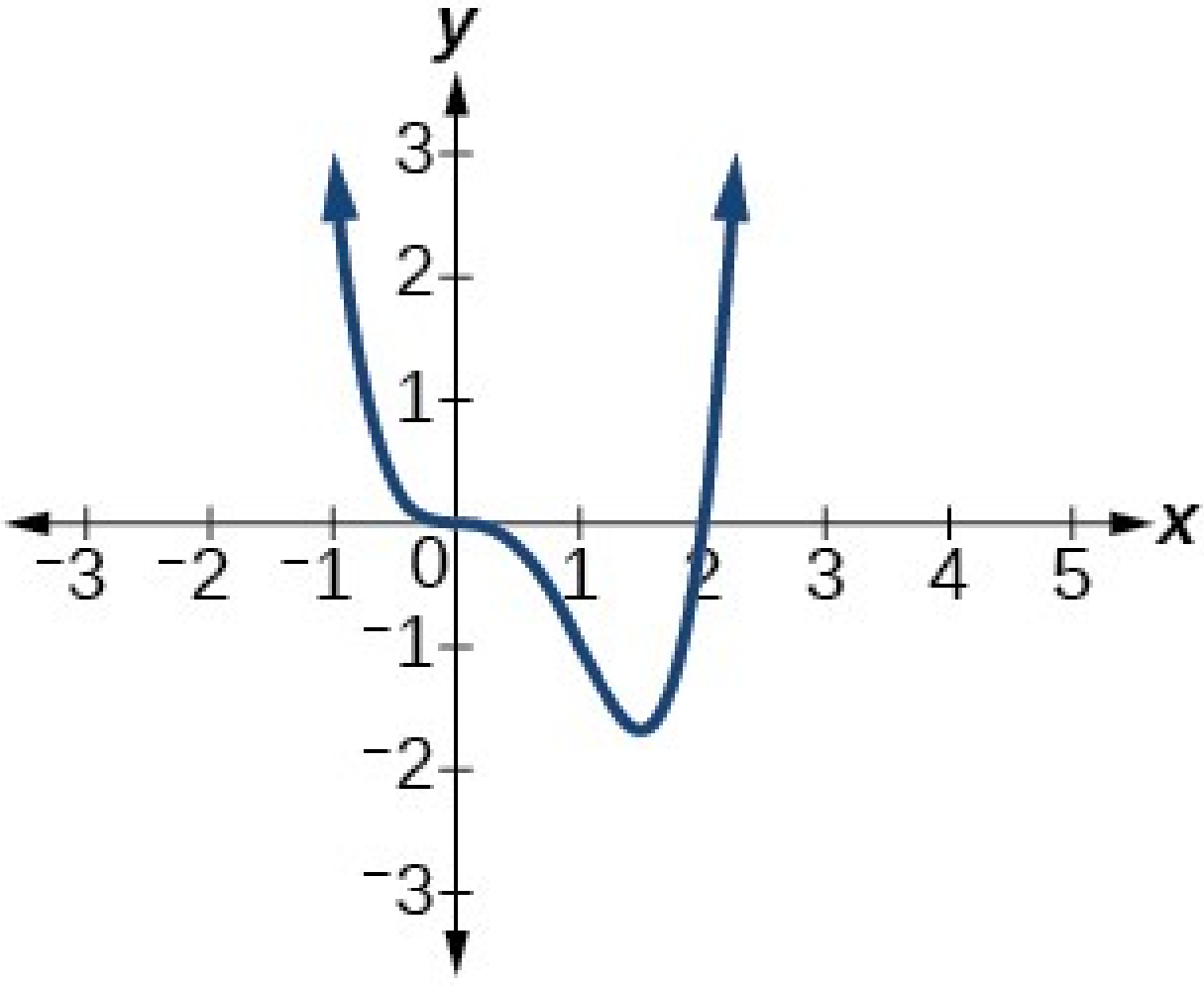
þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$, þegar $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$

49.

x	$f(x)$
10	−504
100	−941.094
−10	1.716
−100	1.061.106

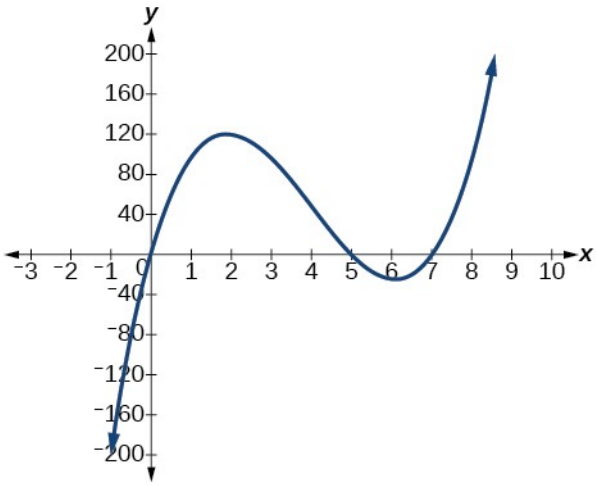
þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$, þegar $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$

51.



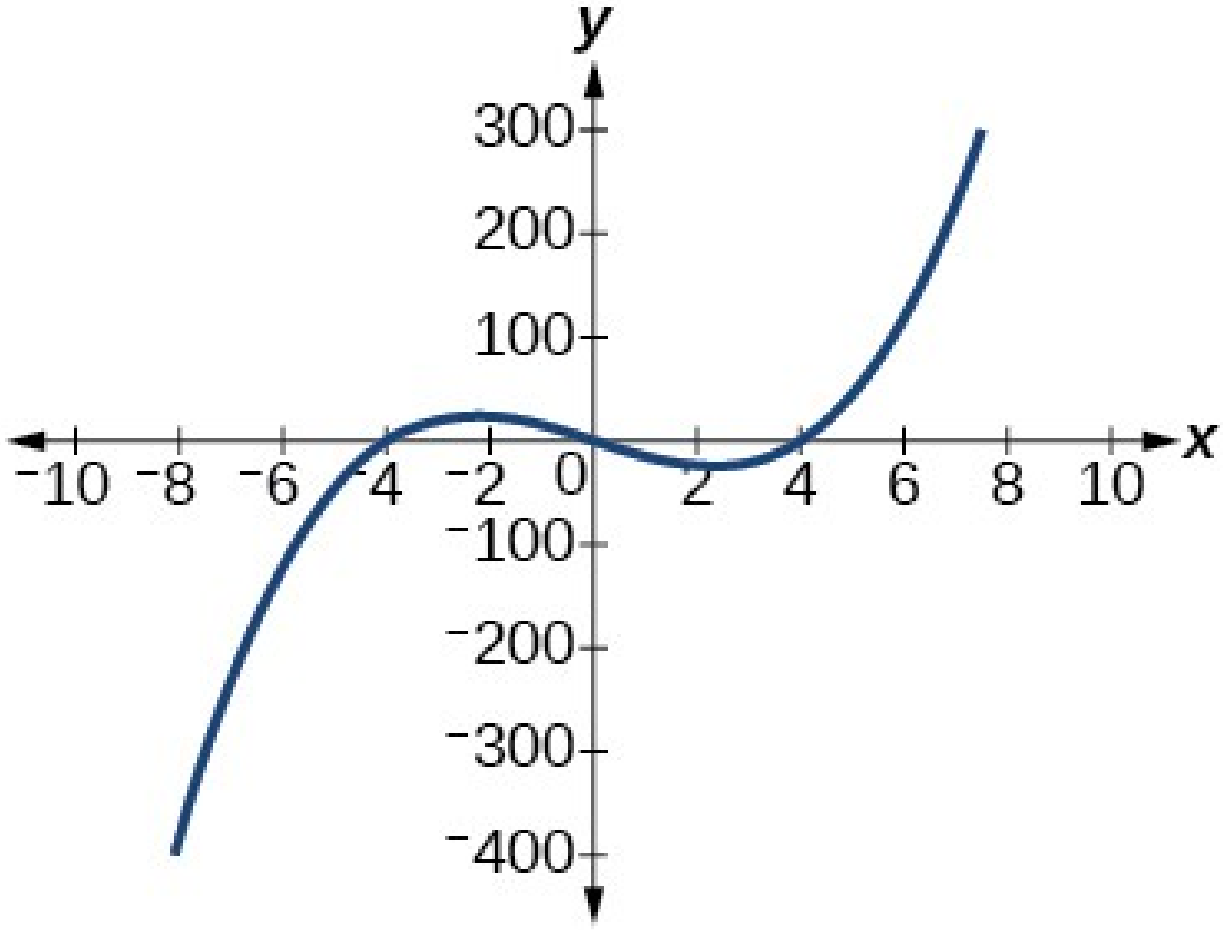
Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,0)$. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(0,0),(2,0)$. Þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$; þegar $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.

53.



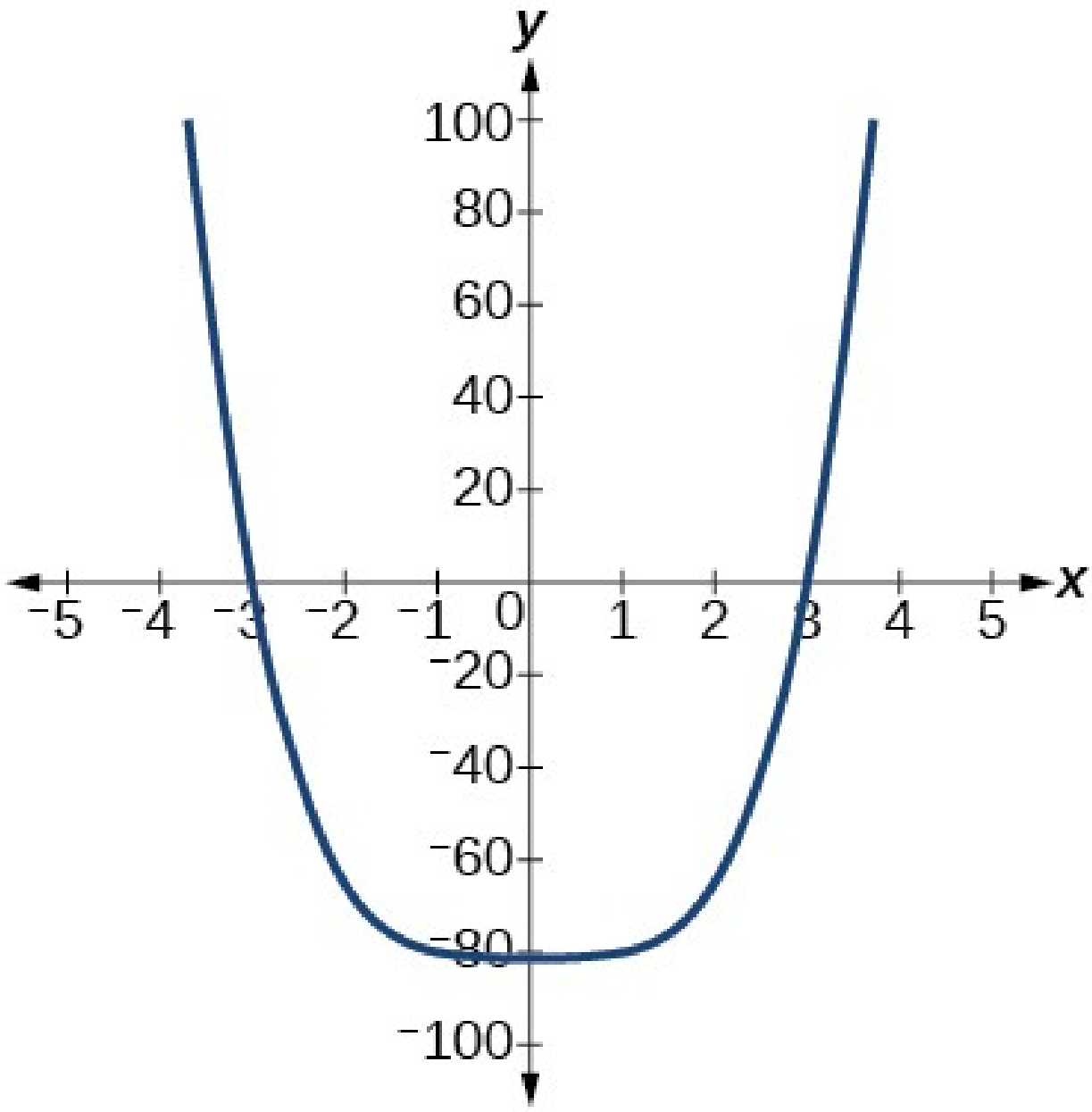
Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,0)$. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(0,0),(5,0),(7,0)$. Þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$; þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$.

55.



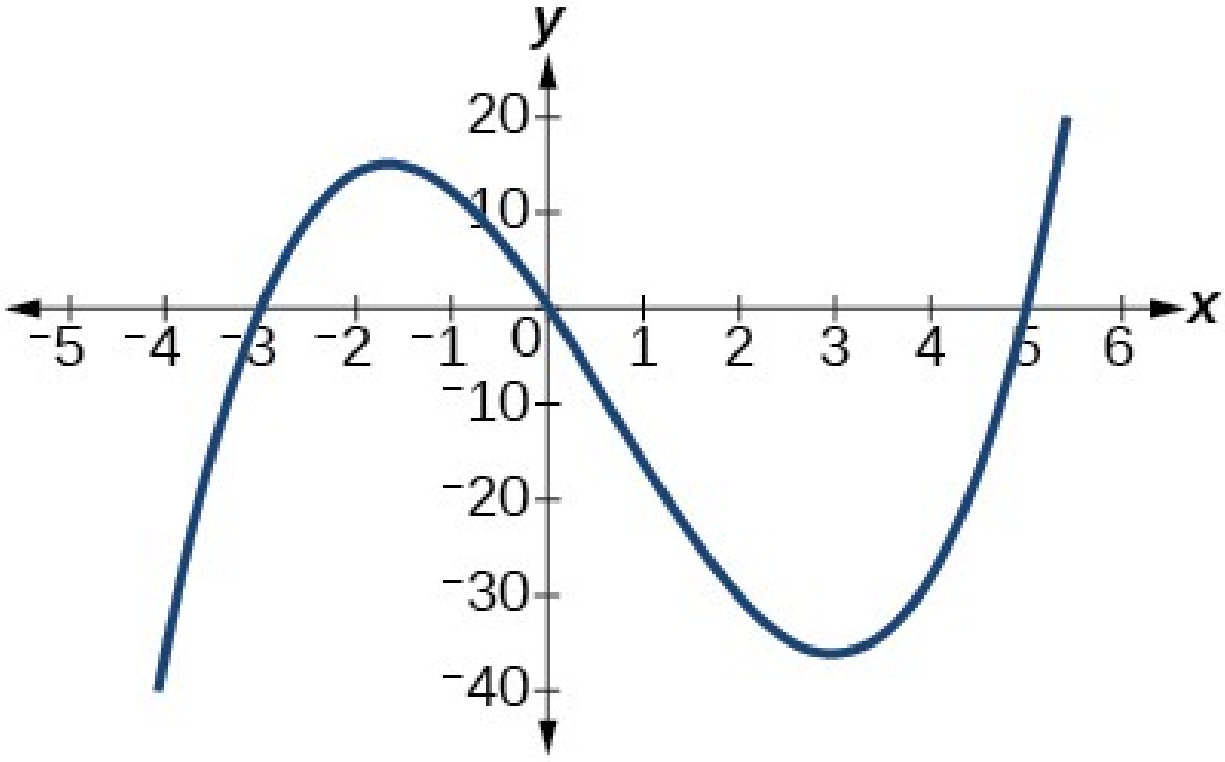
Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,0)$. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(-4,0),(0,0),(4,0)$. Þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$; þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$.

57.



Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,-81)$. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(3,0),(-3,0)$. Þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$; þegar $x \to \infty, f(x) \to \infty$.

59.



Skurðpunkturinn við $y-$ ás er $(0,0)$. Skurðpunktarnir við $x-$ ás eru $(-3,0),(0,0),(5,0)$.
Þegar $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$; þegar $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$.

61.

$$f(x)=x^2-4$$

63.

$$f(x)=x^3-4x^2+4x$$

65.

$$f(x)=x^4+1$$

67.

$$V(m)=8m^3+36m^2+54m+27$$

69.

$$V(x)=4x^3-32x^2+64x$$

3.4 Kaflaverkefni

1. Skurðpunktur við $x-$ ás er þar sem graf fallsins sker $x-$ ásinn og núllstöð fallsins er það inntaksgildi sem gefur $f(x)=0$.

3. Ef við reiknum fallsgildið í a og b og formerki fallsgildisins breytist vitum við að núllstöð er milli a og b.

5. Þar verður þáttur í sléttu veldi.

7.

$$(-2,0),(3,0),(-5,0)$$

9.

$$(3,0),(-1,0),(0,0)$$

11.

$$(0,0),(-5,0),(2,0)$$

13.

$$(0,0),(-5,0),(4,0)$$

15.

$$(2,0),(-2,0),(-1,0)$$

17.

$$(-2,0),(2,0),\left(\frac{1}{2},0\right)$$

19.

$$(1,0),(-1,0)$$

21.

$$(0,0),(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$$

23. $(0,0),(1,0),(-1,0),(2,0),(-2,0)$

25. $f(2)=-10$ og $f(4)=28$. Formerkjaskiptin staðfesta niðurstöðuna.

27. $f(1)=3$ og $f(3)=-77$. Formerkjaskiptin staðfesta niðurstöðuna.

29. $f\left(0{,}01\right)=1{,}000001$ og $f\left(0{,}1\right)=-7{,}999$. Formerkjaskiptin staðfesta niðurstöðuna.

31. 0 með margfeldni 2, $-\frac{3}{2}$ með margfeldni 5 og 4 með margfeldni 2

33. 0 með margfeldni 2 og –2 með margfeldni 2

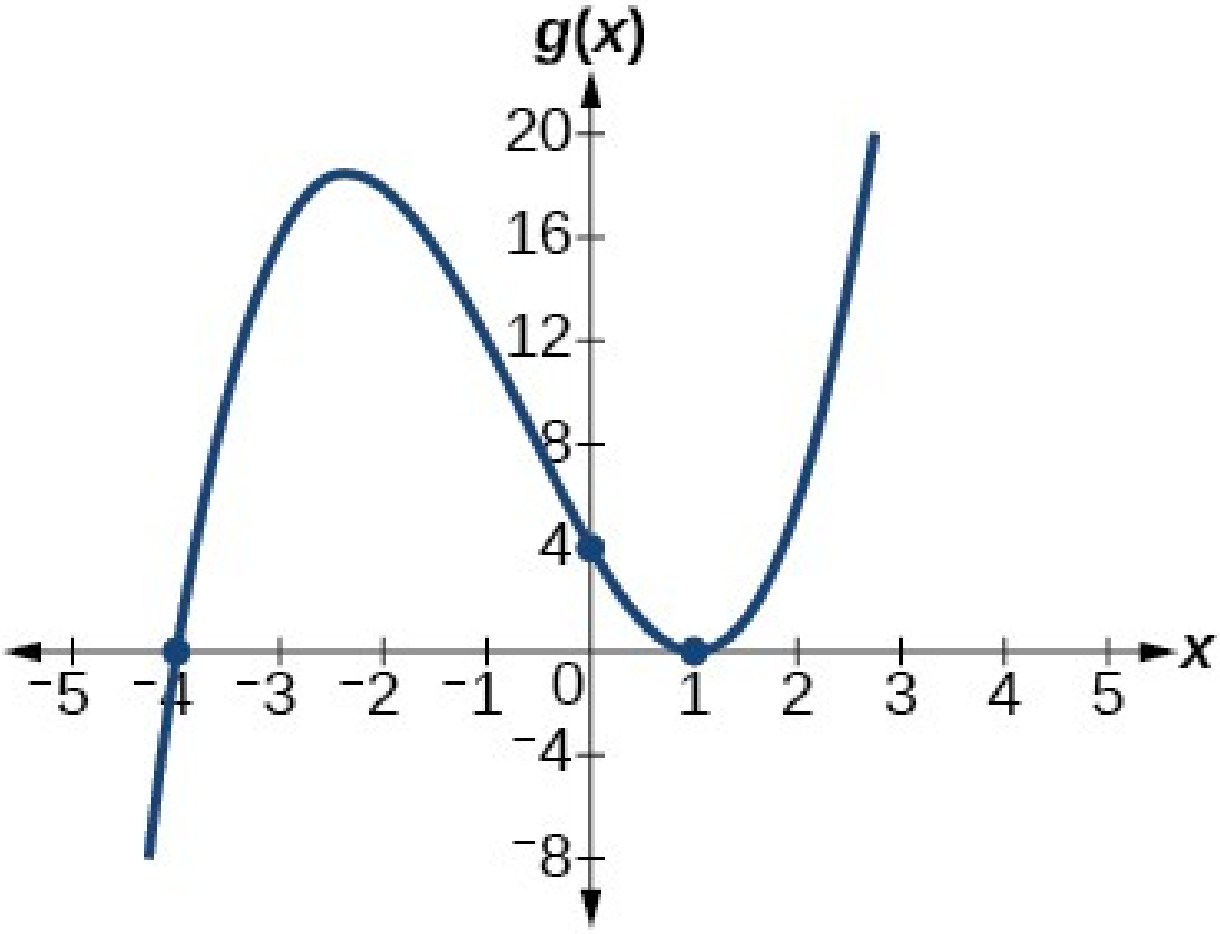
35. $-\frac{2}{3}$ með margfeldni $5,5$ með margfeldni 2

37. 0 með margfeldni $4,2$ með margfeldni $1,-1$ með margfeldni 1

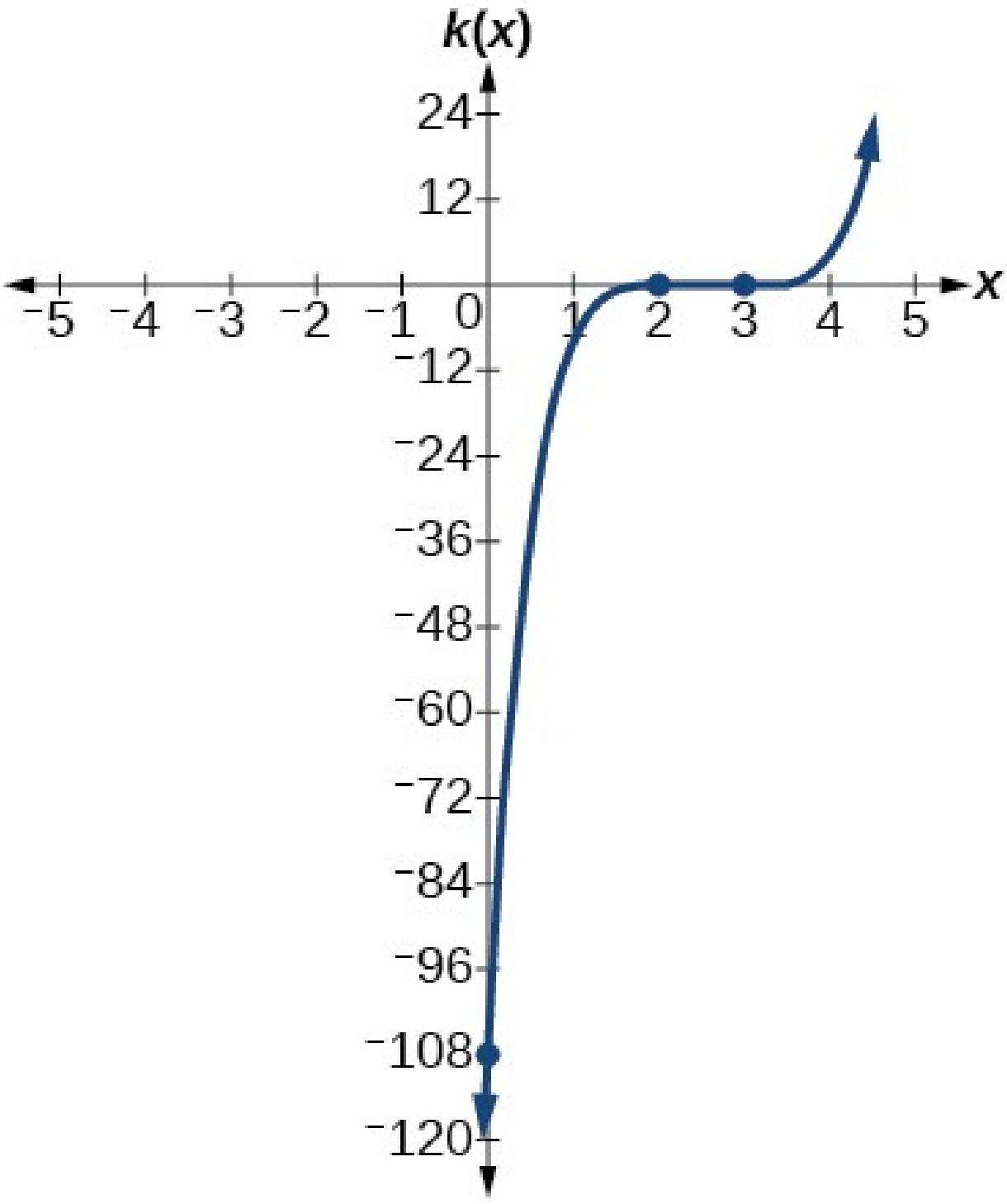
39. $\frac{3}{2}$ með margfeldni 2 og 0 með margfeldni 3

41. 0 með margfeldni 6, $\frac{2}{3}$ með margfeldni 2

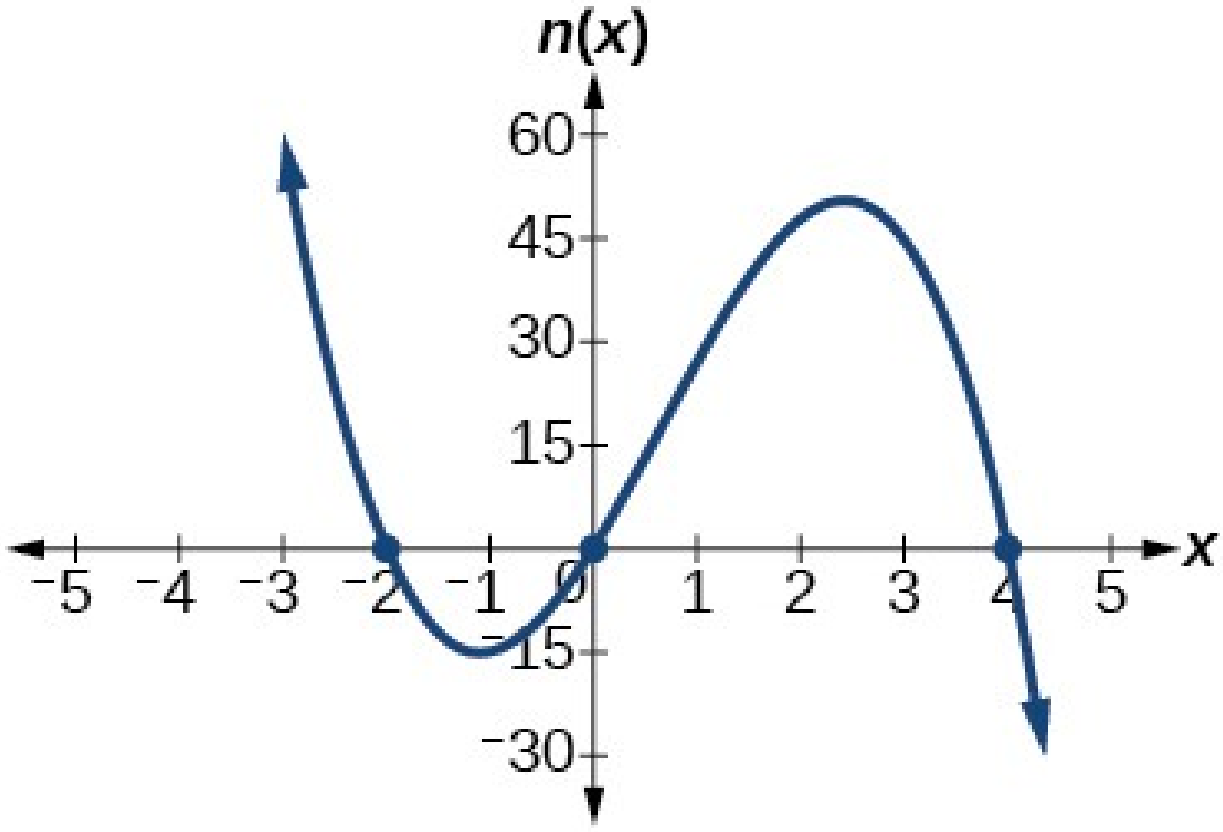
43. *Skurðpunktar við x-ás:* $(1,0)$ með margfeldni 2 og $(-4,0)$ með margfeldni 1; skurðpunktur við $y-$ ás: $(0,4)$. Þegar $x \to -\infty$ stefnir $g(x) \to -\infty$; þegar $x \to \infty$ stefnir $g(x) \to \infty$.



45. *Skurðpunktar við x-ás:* $(3,0)$ með margfeldni 3 og $(2,0)$ með margfeldni 2; skurðpunktur við $y-$ ás: $(0,-108)$. Þegar $x \to -\infty$ stefnir $k(x) \to -\infty$; þegar $x \to \infty$ stefnir $k(x) \to \infty$.



47. *Skurðpunktar við x-ás* $(0,0),(-2,0),(4,0)$ með margfeldni 1, skurðpunktur við y-ás $(0,0)$. Þegar $x \to -\infty$, $n(x) \to \infty$, þegar $x \to \infty$, $n(x) \to -\infty$.



49.

$$f(x)=-\frac{2}{9}(x-3)(x+1)(x+3)$$

51.

$$f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2(x-3)$$

53. −4, −2, 1 og 3 með margfeldni 1

55. −2 og 3, hvort um sig með margfeldni 2

57.

$$f(x)=-\frac{2}{3}(x+2)(x-1)(x-3)$$

59.

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-3)^2(x-1)^2(x+3)$$

61.

$$f(x)=-15(x-1)^2(x-3)^3$$

63.

$$f(x)=-2(x+3)(x+2)(x-1)$$

65.

$$f(x)=-\frac{3}{2}(2x-1)^2(x-6)(x+2)$$

67. staðbundið hágildi $(-0{,}58\,;-0{,}62)$ staðbundið lággildi $(0{,}58\,;-1{,}38)$

69. algilt lággildi $(-0{,}63\,;-0{,}47)$

71. algilt lággildi (,75; ,89)

73.

$$f(x)=(x-500)^2(x+200)$$

75.

$$f(x)=4x^3-36x^2+80x$$

77.

$$f(x)=4x^3-36x^2+60x+100$$

79.

$$f(x)=9\pi\left(x^3+5x^2+8x+4\right)$$

3.5 Kaflaverkefni

1. Tvíliðan er þáttur margliðunnar.

3. $x+6+\frac{5}{x-1}$, kvóti: $x+6$, afgangur: 5

5. $3x+2$, kvóti: $3x+2$, afgangur: 0

7. $x-5$, kvóti: $x-5$, afgangur: 0

9. $2x-7+\frac{16}{x+2}$, kvóti: $2x-7$, afgangur: 16

11. $x-2+\frac{6}{3x+1}$, kvóti: $x-2$, afgangur: 6

13. $2x^2-3x+5$, kvóti: $2x^2-3x+5$, afgangur: 0

15.

$$2x^2+2x+1+\frac{10}{x-4}$$

17.

$$2x^2 - 7x + 1 - \frac{2}{2x+1}$$

19.

$$3x^2 - 11x + 34 - \frac{106}{x+3}$$

21.

$$x^2 + 5x + 1$$

23.

$$4x^2 - 21x + 84 - \frac{323}{x+4}$$

25.

$$x^2 - 14x + 49$$

27.

$$3x^2 + x + \frac{2}{3x-1}$$

29.

$$x^3 - 3x + 1$$

31.

$$x^3 - x^2 + 2$$

33.

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

35.

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

37.

$$2x^3 - 2x + 2$$

39. Já $(x-2)(3x^3-5)$

41. Já $(x-2)(4x^3+8x^2+x+2)$

43. Nei

45.

$$(x-1)(x^2+2x+4)$$

47.

$$(x-5)(x^2+x+1)$$

49. Kvóti: $4x^2+8x+16$, afgangur: -1

51. Kvóti: $3x^2+3x+5$, afgangur: 0

53. Kvóti: x^3-2x^2+4x-8, afgangur: -6

55.

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

57.

$$x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$$

59.

$$1+\frac{1+i}{x-i}$$

61.

$$1+\frac{1-i}{x+i}$$

63.

$$x^2+ix-1+\frac{1-i}{x-i}$$

65.

$$2x^2+3$$

67.

$$2x+3$$

69.

$$x+2$$

71.

$$x-3$$

73.

$$3x^2 - 2$$

3.6 Kaflaverkefni

1. Nota má setninguna til að reikna gildi margliðu.

3. Ræðar núllstöðvar má rita sem almenn brot en raunverulegar núllstöðvar geta einnig verið óræðar tölur.

5. Margliðuföll geta haft endurteknar núllstöðvar. Þótt tala sé núllstöð útilokar það því ekki að hún komi aftur fyrir sem núllstöð.

7.

$$-106$$

9.

$$0$$

11.

$$255$$

13.

$$-1$$

15.

$$-2, 1, \frac{1}{2}$$

17.

$$-2$$

19.

$$-3$$

21.

$$-\frac{5}{2}, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$$

23.

$$2, -4, -\frac{3}{2}$$

25.

$$4, -4, -5$$

27.

$$5, -3, -\frac{1}{2}$$

29.

$$\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

31.

$$\frac{3}{2}$$

33.

$$2, 3, -1, -2$$

35.

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -3$$

37.

$$-1, -1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$$

39.

$$-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$$

41.

$$2, 3+2i, 3-2i$$

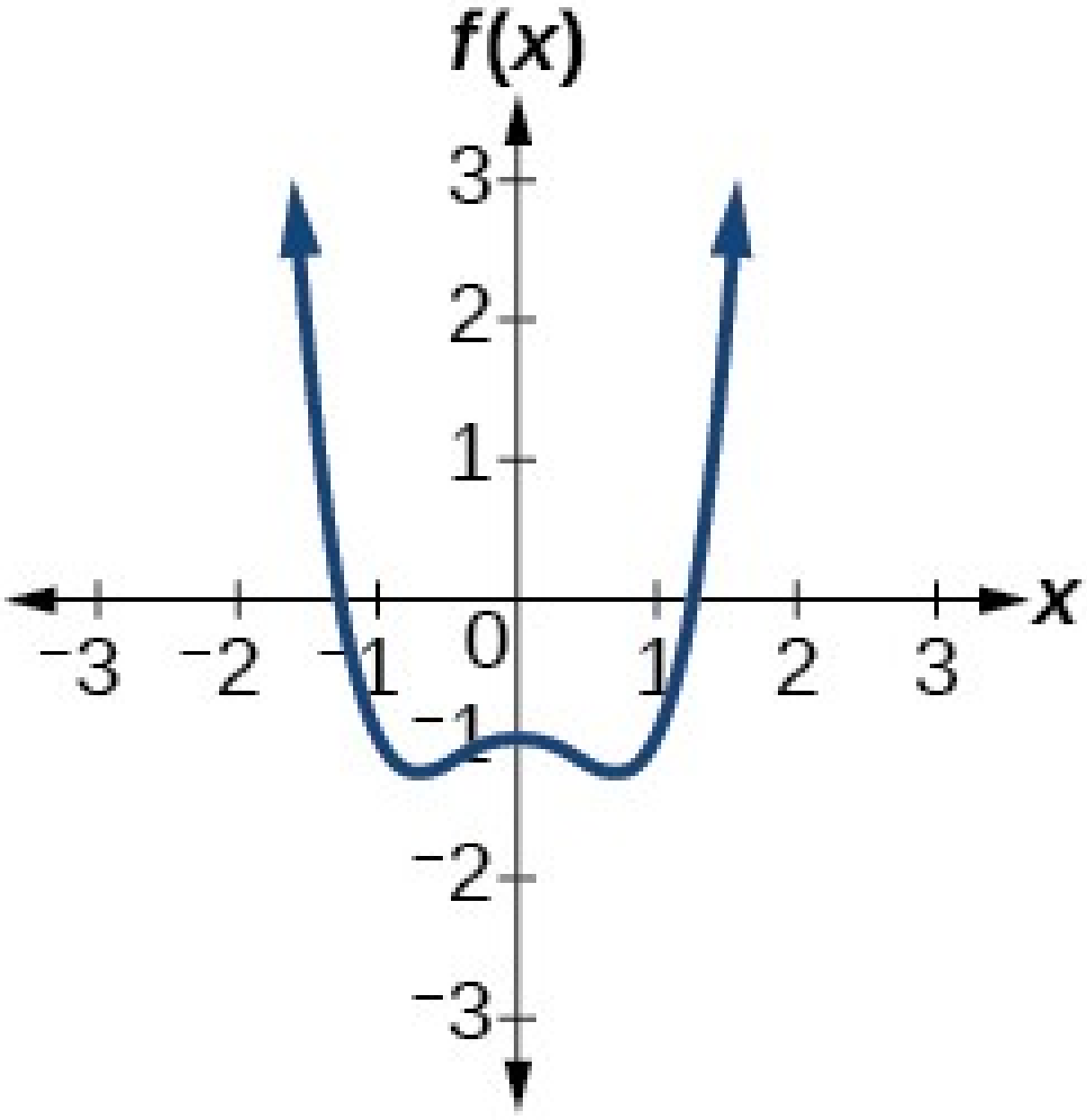
43.

$$-\frac{2}{3}, 1+2i, 1-2i$$

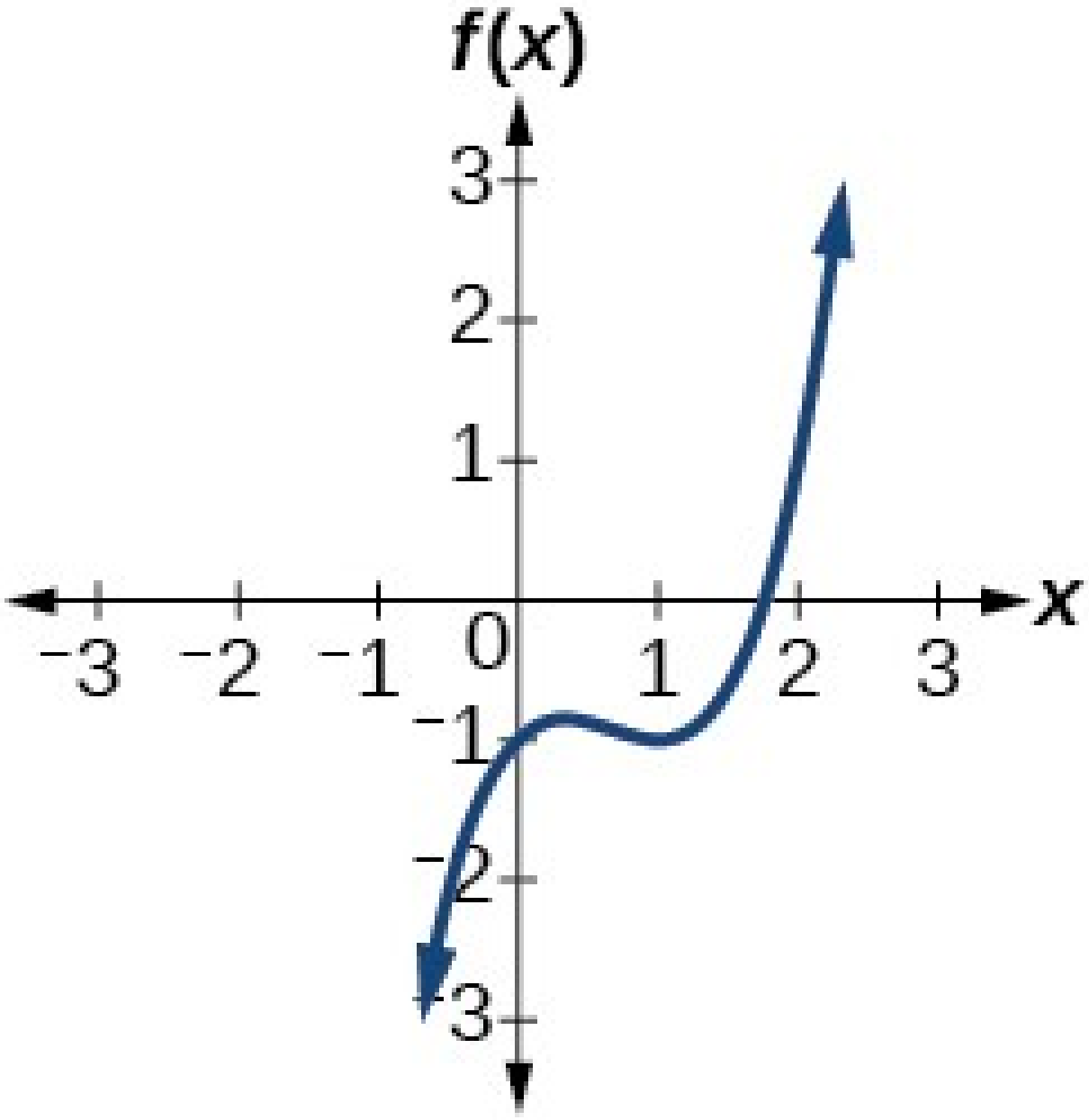
45.

$$-\frac{1}{2}, 1+4i, 1-4i$$

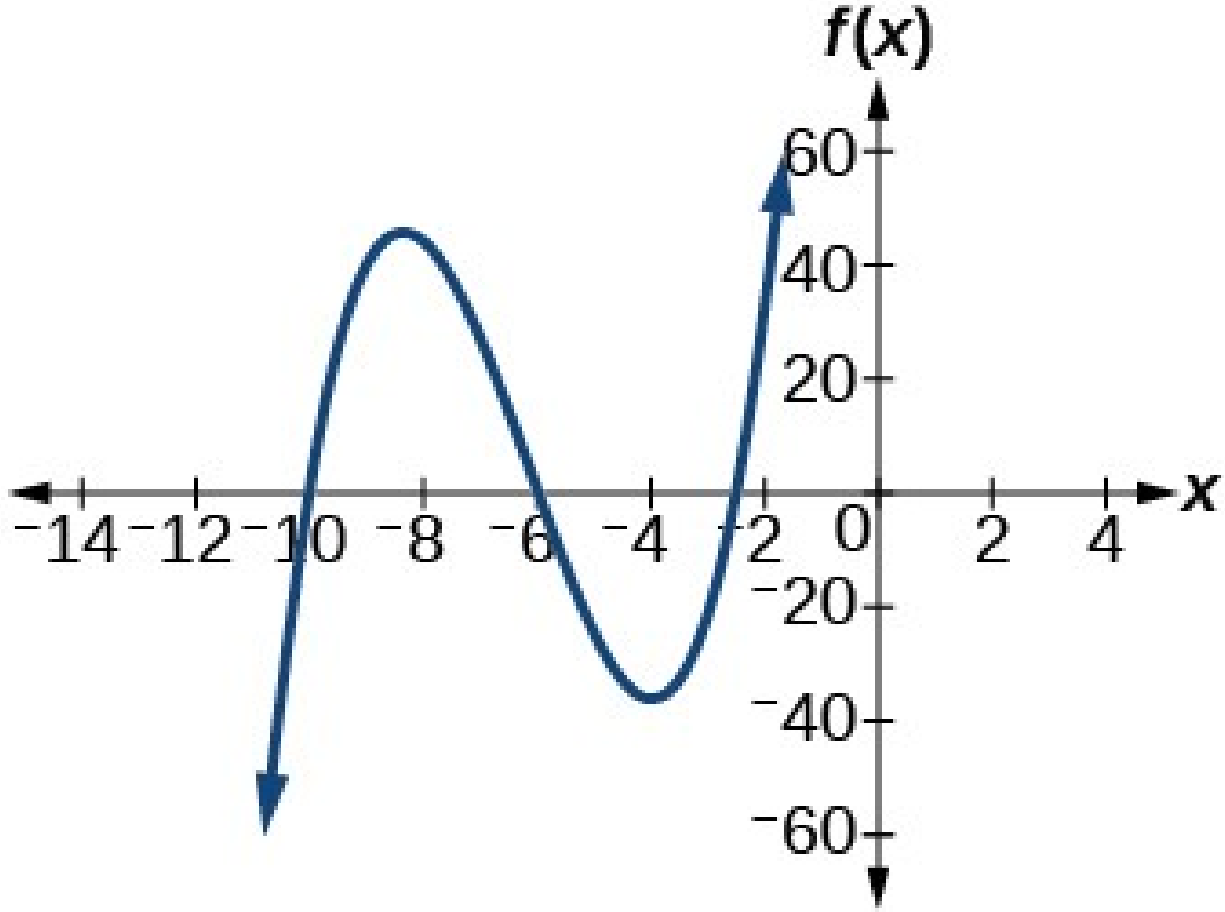
47. 1 jákvæð, 1 neikvæð



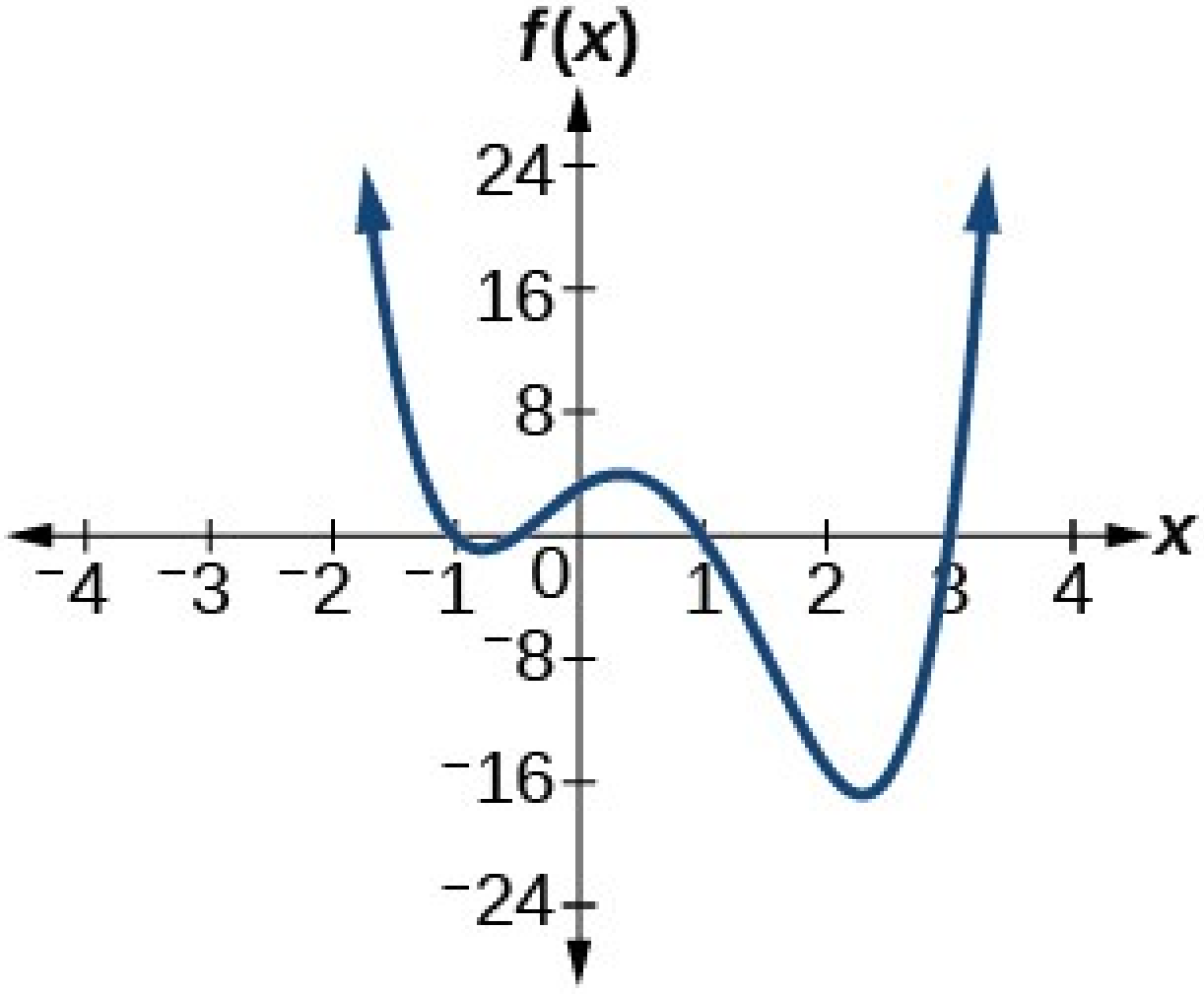
49. 3 eða 1 jákvæð, 0 neikvæð



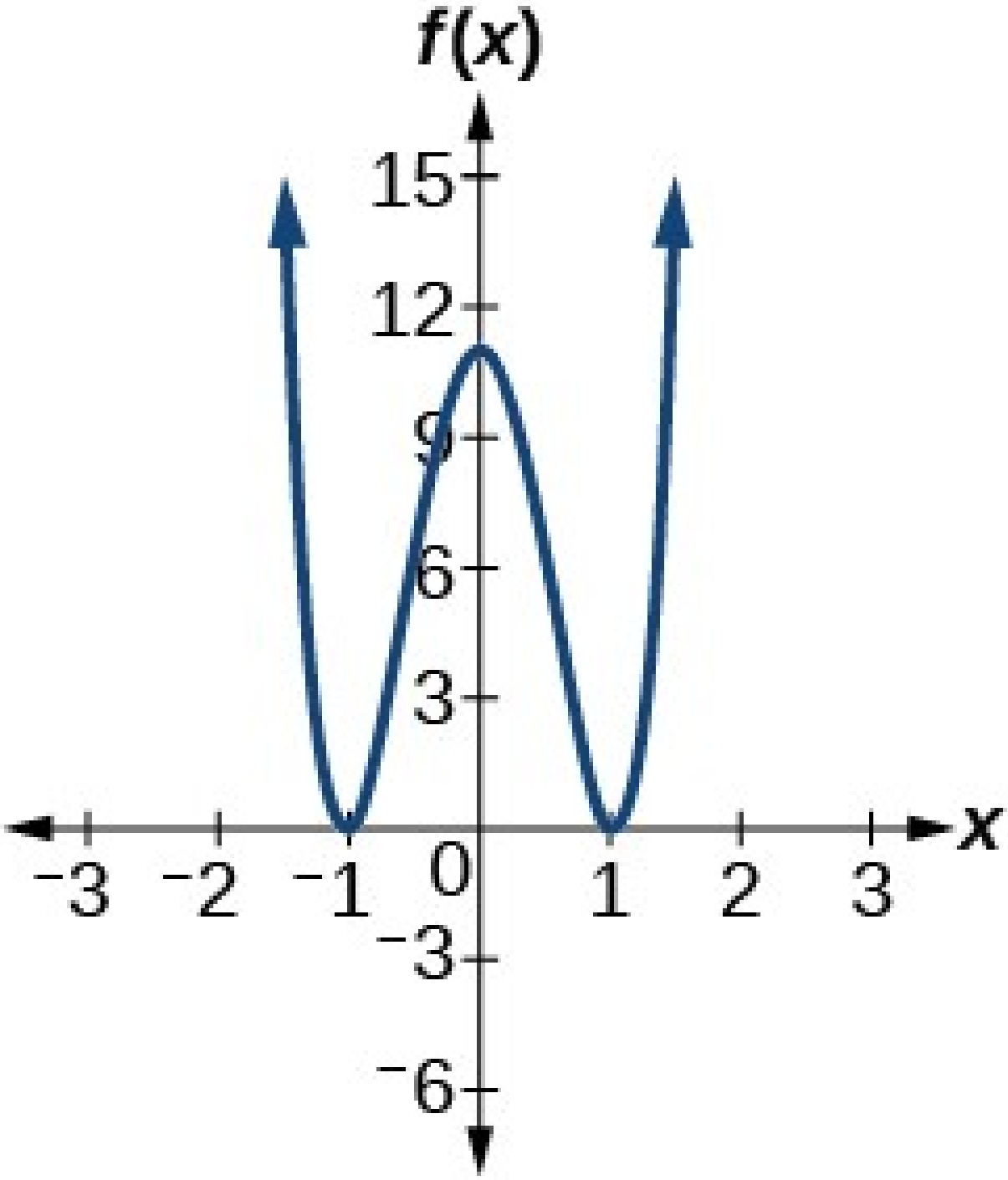
51. 0 jákvæð, 3 eða 1 neikvæð



53. 2 eða 0 jákvæð, 2 eða 0 neikvæð



55. 2 eða 0 jákvæð, 2 eða 0 neikvæð



57.

$$\pm 5, \pm 1, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{1}{2}$$

59.

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

61.

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

63.

$$2, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$$

65.

$$\frac{5}{4}$$

67.

$$f(x) = \frac{4}{9}\left(x^3 + x^2 - x - 1\right)$$

69.

$$f(x) = -\frac{1}{5}\left(4x^3 - x\right)$$

71. 8 sinnum 4 sinnum 6 tommur

73. 5,5 sinnum 4,5 sinnum 3,5 tommur

75. 8 sinnum 5 sinnum 3 tommur

77. Geisli = 6 metrar, hæð = 2 metrar

79. Geisli = 2,5 metrar, hæð = 4,5 metrar

3.7 Kaflaverkefni

1. Ræða fallið er ritað sem kvóti tveggja margliðufalla.

3. Teljari og nefnari verða að hafa sameiginlegan þátt.

5. Já. Teljari formúlu fallanna hefði aðeins tvinntölurætur og/eða þætti sem eru sameiginlegir teljara og nefnara.

7.

Allar rauntölur $x \neq -1, 1$

9.

Allar rauntölur $x \neq -1, -2, 1, 2$

11. Lóðfella við $x=-\frac{2}{5}$; láfella við $y=0$; skilgreiningarmengið er allar rauntölur þar sem $x\neq-\frac{2}{5}$

13. Lóðfellur við $x=4,-9$; láfella við $y=0$; skilgreiningarmengið er allar rauntölur þar sem $x\neq4,-9$

15. Lóðfellur við $x=0,4,-4$; láfella við $y=0$; skilgreiningarmengið er allar rauntölur þar sem $x\neq0,4,-4$

17. Lóðfella við $x=5$; láfella við $y=0$; skilgreiningarmengið er allar rauntölur þar sem $x\neq5,-5$

19. Lóðfella við $x=\frac{1}{3}$; láfella við $y=-\frac{2}{3}$; skilgreiningarmengið er allar rauntölur þar sem $x\neq\frac{1}{3}$.

21. engar

23.

$$x\text{-skurðpunktar engir, } y\text{-skurðpunktur } \left(0,\frac{1}{4}\right)$$

25. Staðbundin hegðun: $x\to-\frac{1}{2}^{+},f(x)\to-\infty,x\to-\frac{1}{2}^{-},f(x)\to\infty$

Endahegðun: þegar $x\to\pm\infty,f(x)\to\frac{1}{2}$.

27. Staðbundin hegðun: $x\to6^{+},f(x)\to-\infty,x\to6^{-},f(x)\to\infty$, endahegðun: $x\to\pm\infty,f(x)\to-2$.

29. Staðbundin hegðun: $x\to\frac{1}{3}^{+},f(x)\to-\infty,x\to\frac{1}{3}^{-}$,

$f(x)\to\infty,x\to-\frac{5}{2}^{-},f(x)\to-\infty,x\to-\frac{5}{2}^{+},f(x)\to\infty$

Endahegðun: þegar $x\to\pm\infty$, $f(x)\to\frac{1}{3}$.

31.

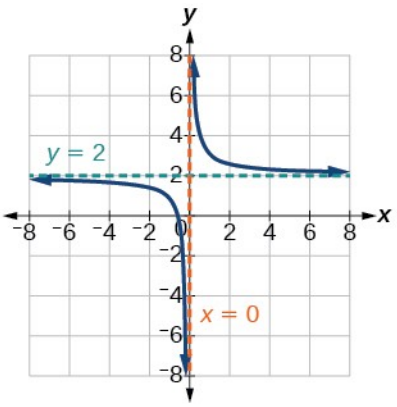
$$y=2x+4$$

33.

$$y=2x$$

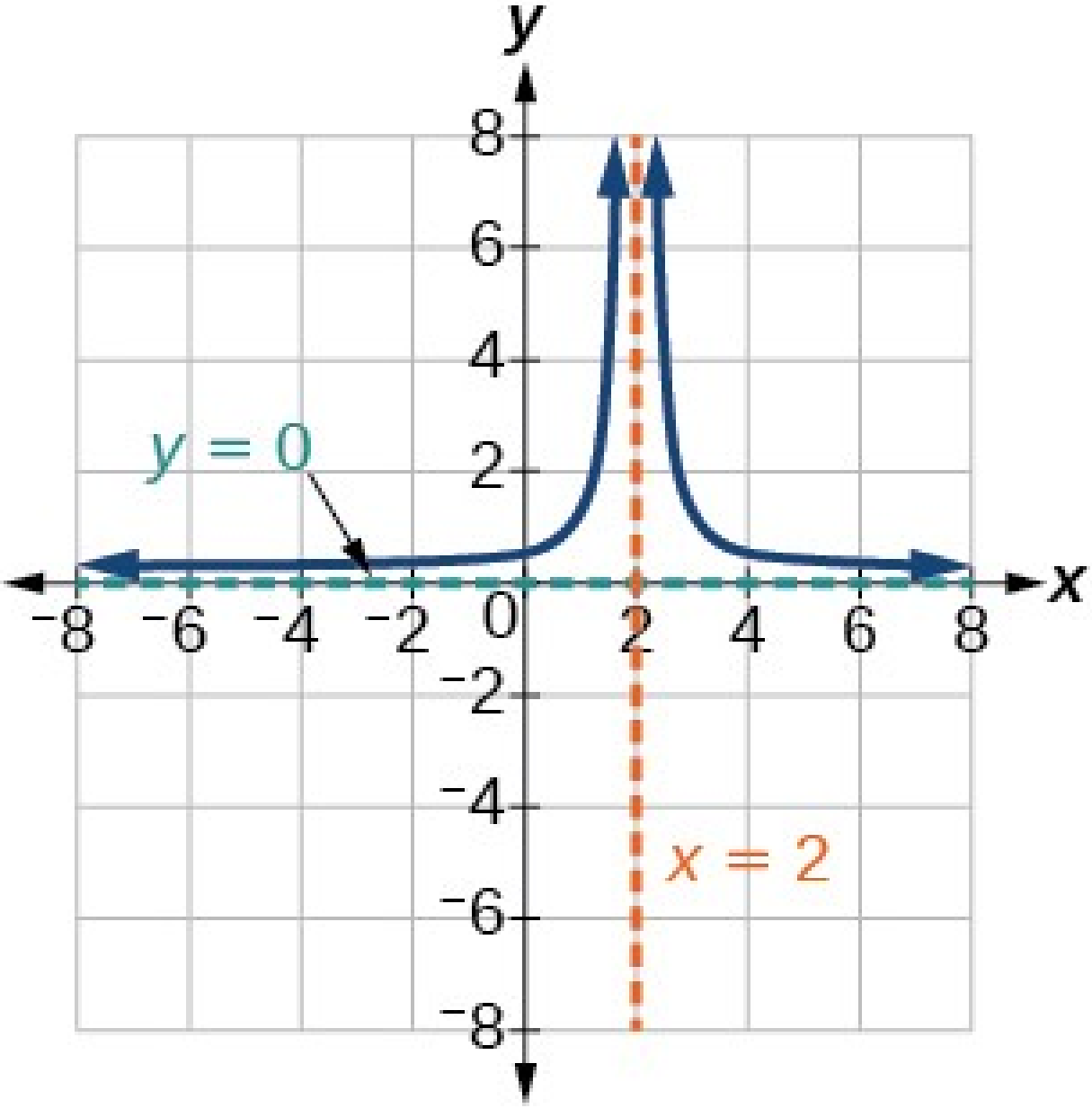
35.

$$V.A.\, x=0, H.A.\, y=2$$



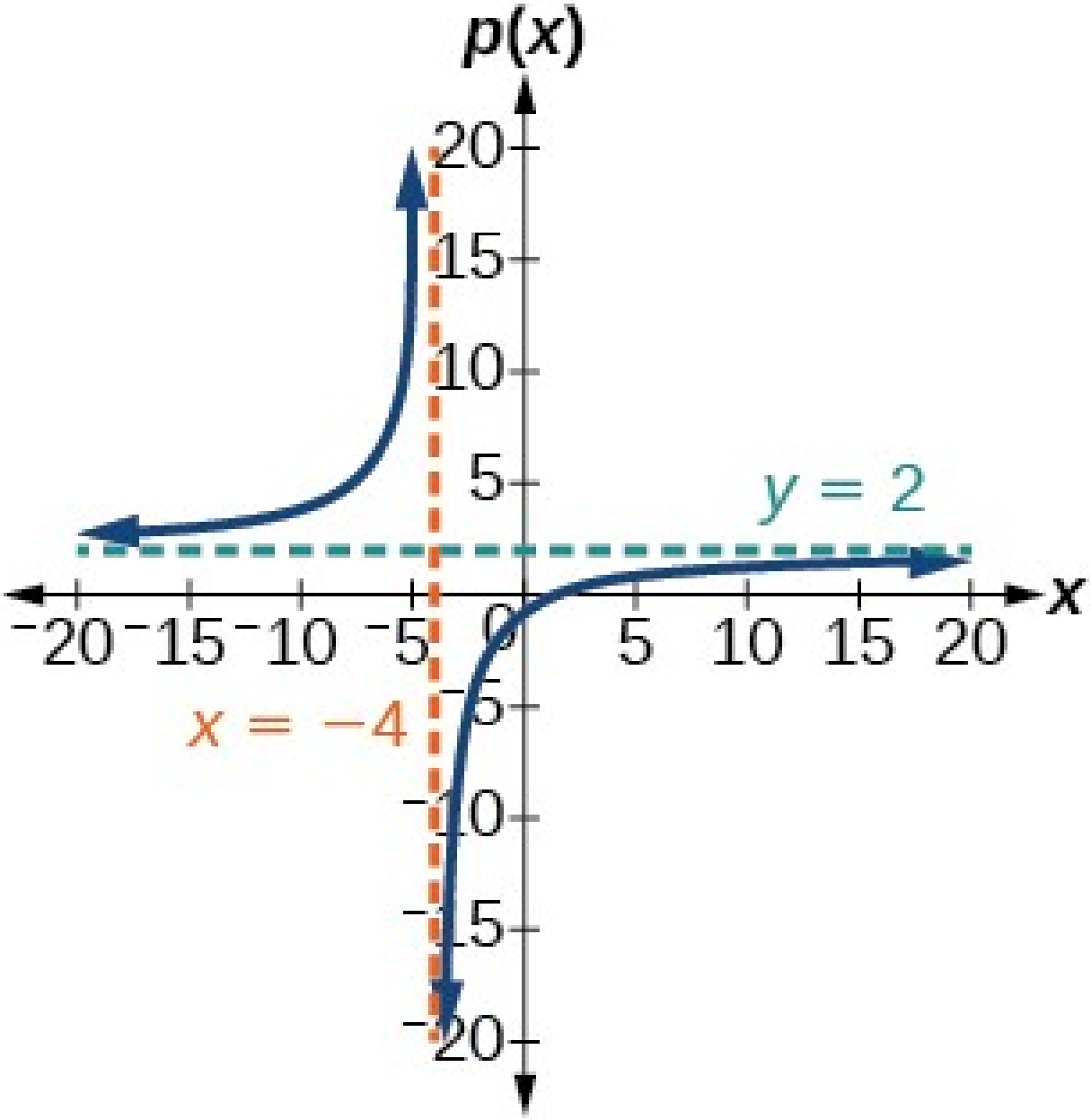
37.

$$V.A.\, x=2, H.A.\, y=0$$



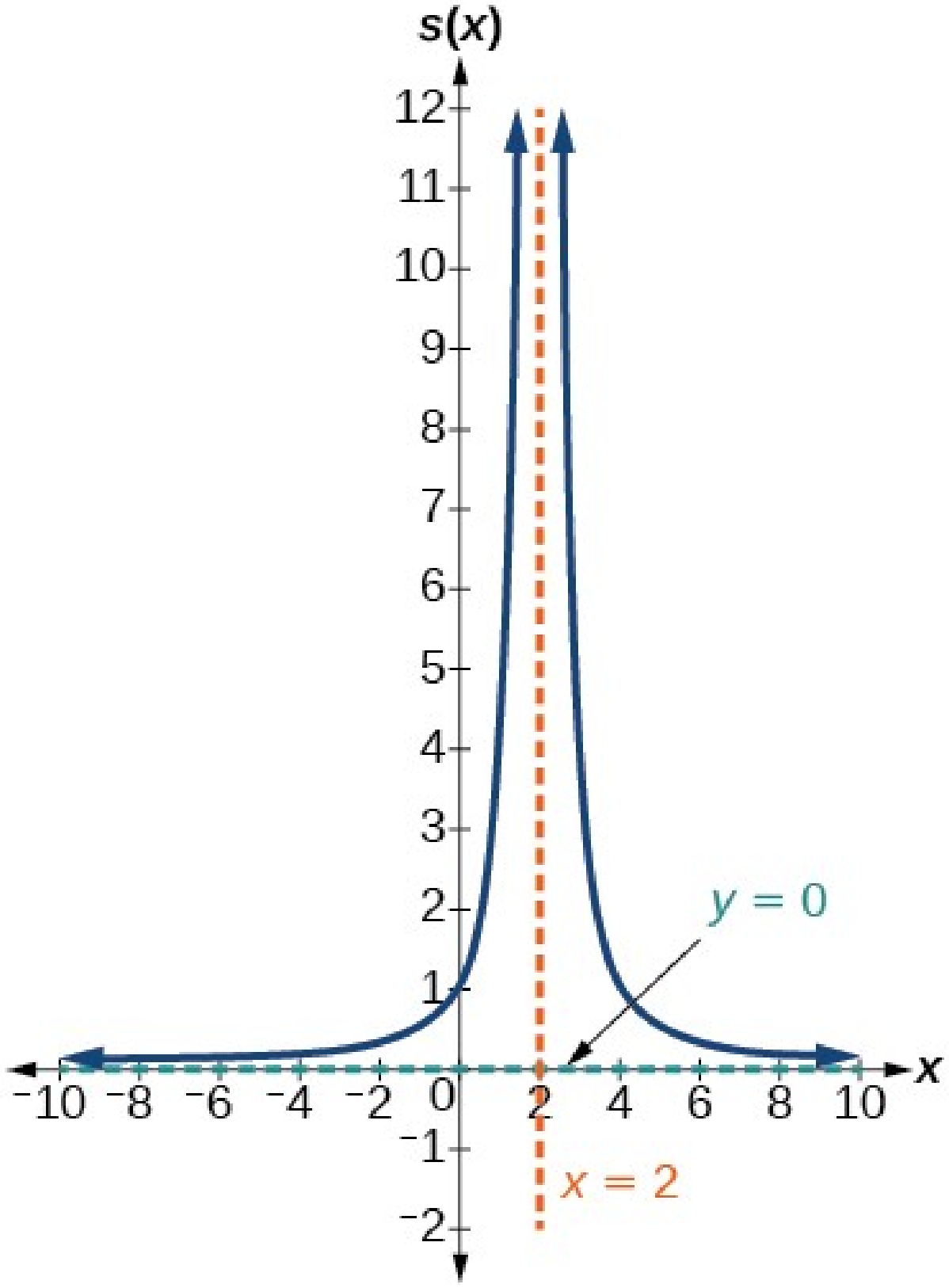
39.

$$V.A.x=-4, H.A.y=2; \left(\frac{3}{2},0\right); \left(0,-\frac{3}{4}\right)$$



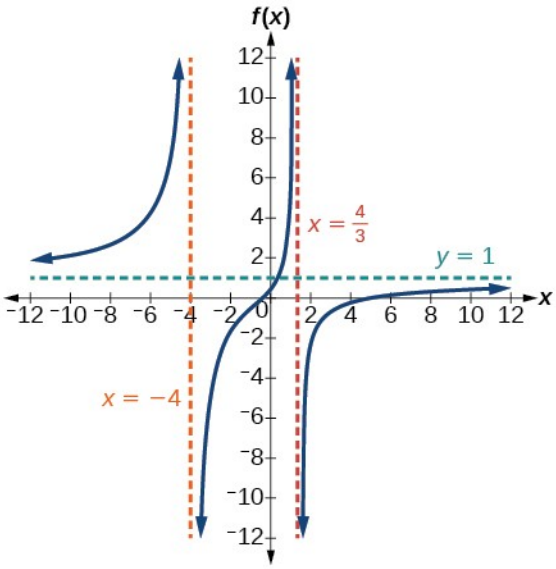
41.

$$V.A.x=2, H.A.y=0, (0,1)$$

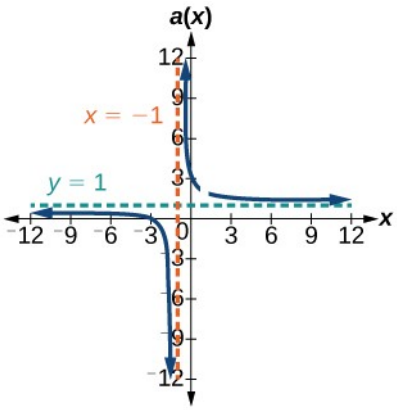


43.

$$V.A.x=-4, x=\frac{4}{3}, H.A.\ y=1; (5,0); \left(-\frac{1}{3},0\right); \left(0,\frac{5}{16}\right)$$

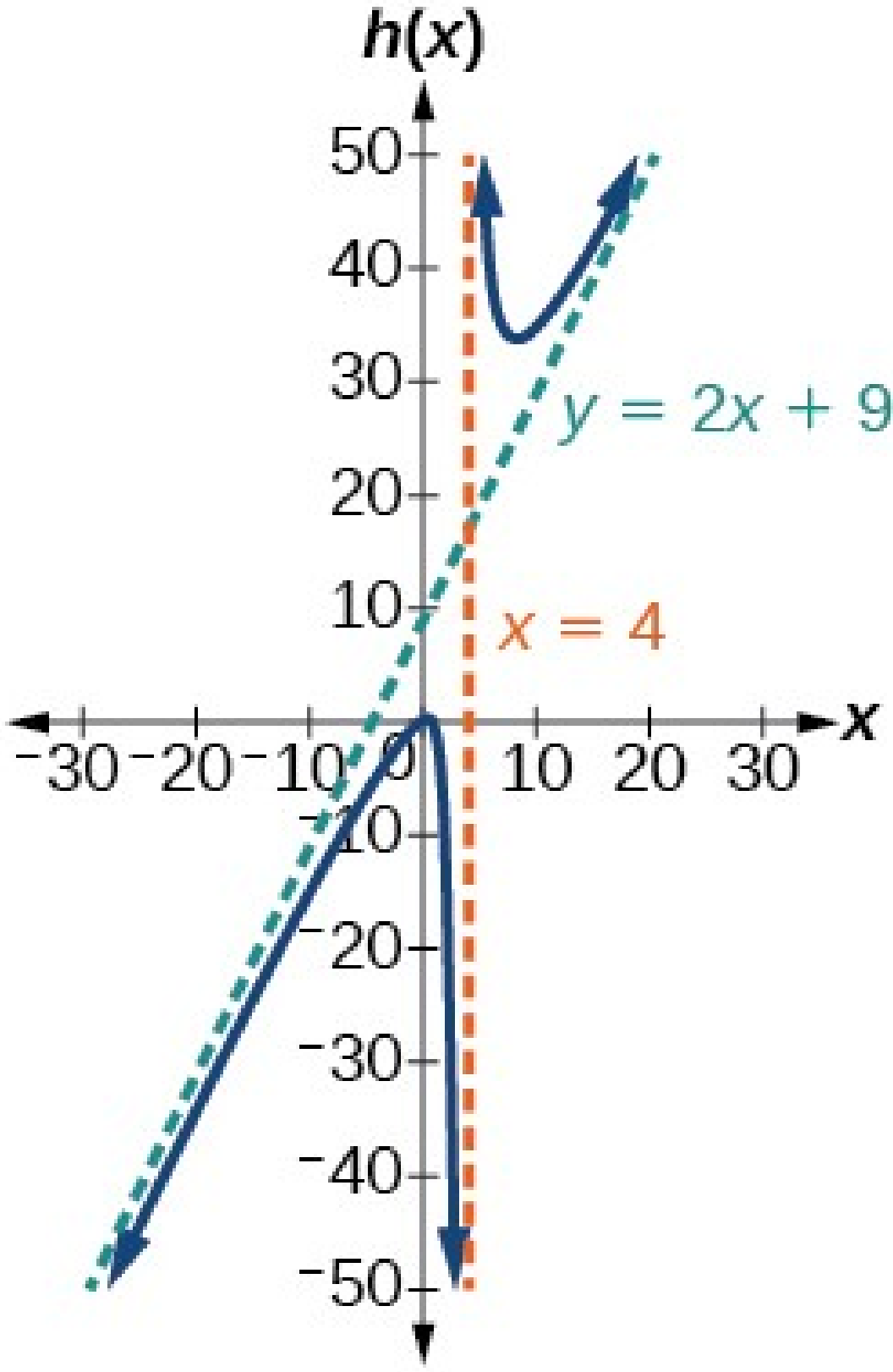


45. $V.A.x=-1, H.A.y=1; (-3,0); (0,3)$; afmáanleg ósamfelldni (gat) í $(1,2)$



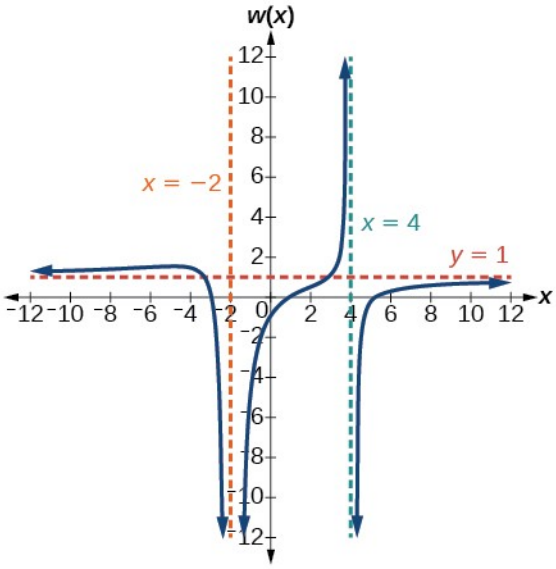
47.

$$V.A.x=4, S.A.y=2x+9; (-1,0); \left(\frac{1}{2},0\right); \left(0,\frac{1}{4}\right)$$



49.

$$V.A.x=-2, x=4, H.A.\ y=1, (1,0); (5,0); (-3,0); \left(0, -\frac{15}{16}\right)$$



51.

$$y = 50\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 25}$$

53.

$$y = 7\frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 9x + 20}$$

55.

$$y = \frac{1}{2}\frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1}$$

57.

$$y = 4\frac{x - 3}{x^2 - x - 12}$$

59. 27(x - 2) / ((x - 3)² (x + 3)) $y = 27\dfrac{x - 2}{(x - 3)^2(x + 3)}$

61.

$$y = \frac{1}{3}\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}$$

63.

$$y = -6\frac{(x - 1)^2}{(x + 3)(x - 2)^2}$$

65.

x	2,01	2,001	2,0001	1,99	1,999
y	100	1.000	10.000	−100	−1.000

x	10	100	1.000	10.000	100.000
y	.125	.0102	.001	.0001	.00001

Lóðfella $x=2$, láfella $y=0$

67.

x	−4,1	−4,01	−4,001	−3,99	−3,999
y	82	802	8.002	−798	−7998

x	10	100	1.000	10.000	100.000
y	1,4286	1,9331	1,992	1,9992	1,999992

Lóðfella $x=-4$, láfella $y=2$

69.

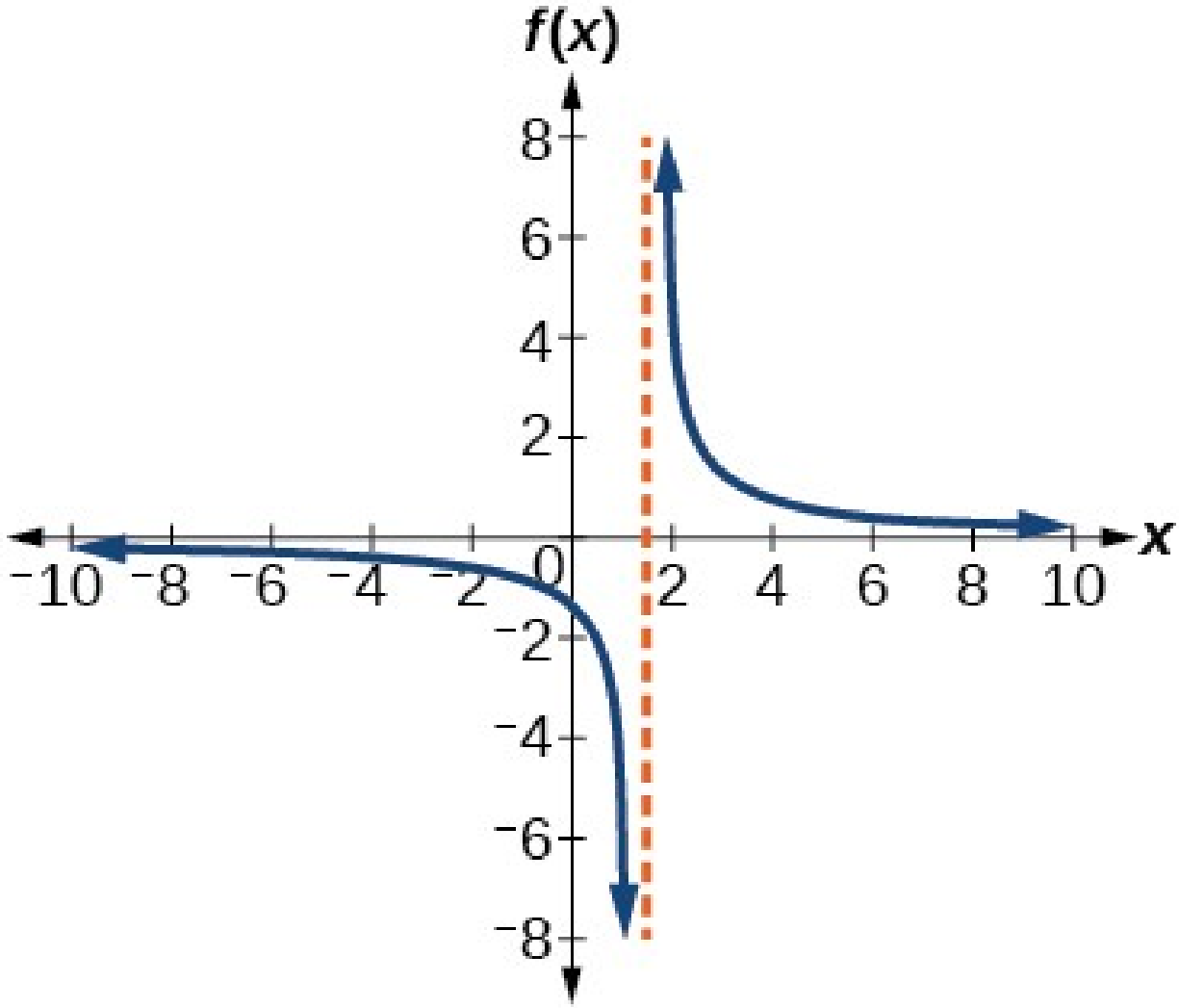
x	−.9	−.99	−.999	−1,1	−1,01
y	81	9.801	998.001	121	10.201

x	10	100	1.000	10.000	100.000
y	.82645	.9803	.998	.9998	

Lóðfella $x=-1$, láfella $y=1$

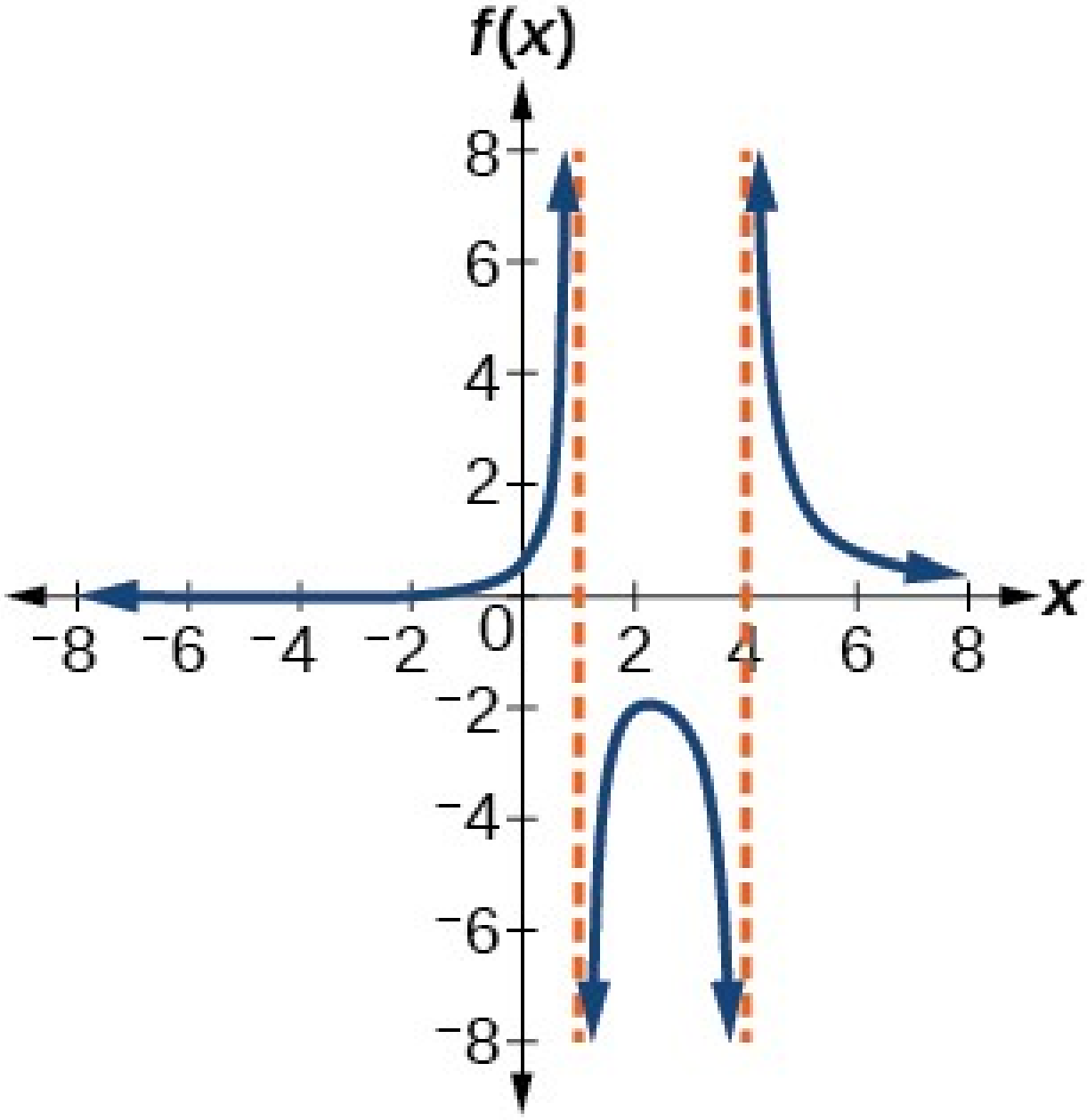
71.

$$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$$



73.

$(-2,1)U(4,\infty)$



75.

$(2,4)$

77.

$(2,5)$

79.

$(-1,1)$

81.

$$C(t)=\frac{8+2t}{300+20t}$$

83. Eftir um það bil 6,12 klukkustundir.

85. $A(x)=50x^2+\frac{800}{x}$. 2 fet á 2 fet á 5 fet.

87. $A(x)=\pi x^2+\frac{100}{x}$. Geisli = 2,52 metrar.

3.8 Kaflaverkefni

1. Það getur verið of erfitt eða ómögulegt að einangra x sem fall af y.

3. Við þurfum að takmarka skilgreiningarmengi svarsins.

5.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}+4$$

7.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x+3}-1$$

9.

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{x-5}{3}}$$

11.

$$f(x)=\sqrt{9-x}$$

13.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-5}$$

15.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{4-x}$$

17.

$$f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2},[0,\infty)$$

19.

$$f^{-1}(x)=\frac{(x-9)^2+4}{4},[9,\infty)$$

21.

$$f^{-1}(x)=\left(\frac{x-9}{2}\right)^3$$

23.

$$f^{-1}(x)=\frac{2-8x}{x}$$

25.

$$f^{-1}(x)=\frac{7x-3}{1-x}$$

27.

$$f^{-1}(x)=\frac{5x-4}{4x+3}$$

29.

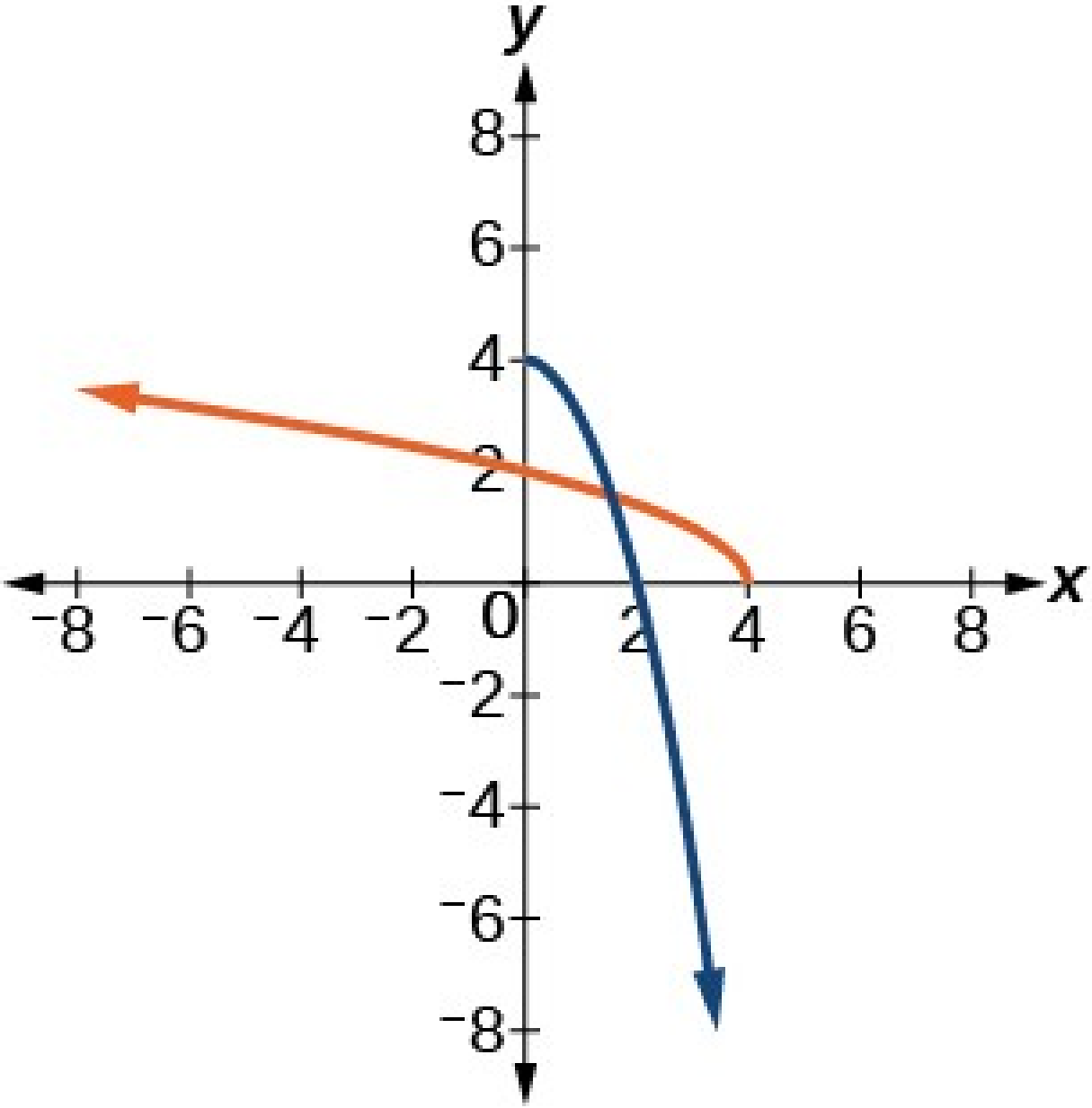
$$f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$$

31.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x+6}+3$$

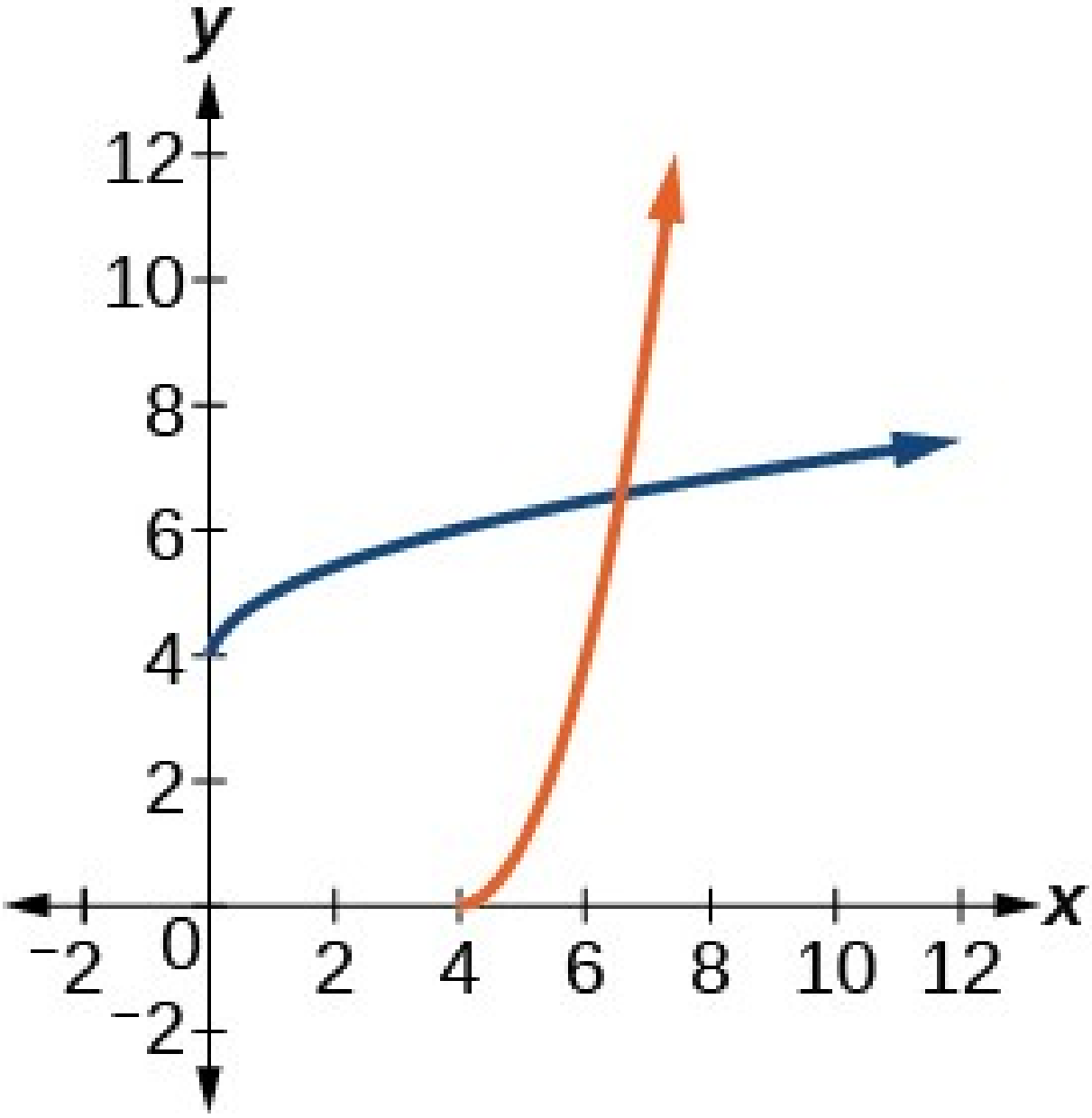
33.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{4-x}$$



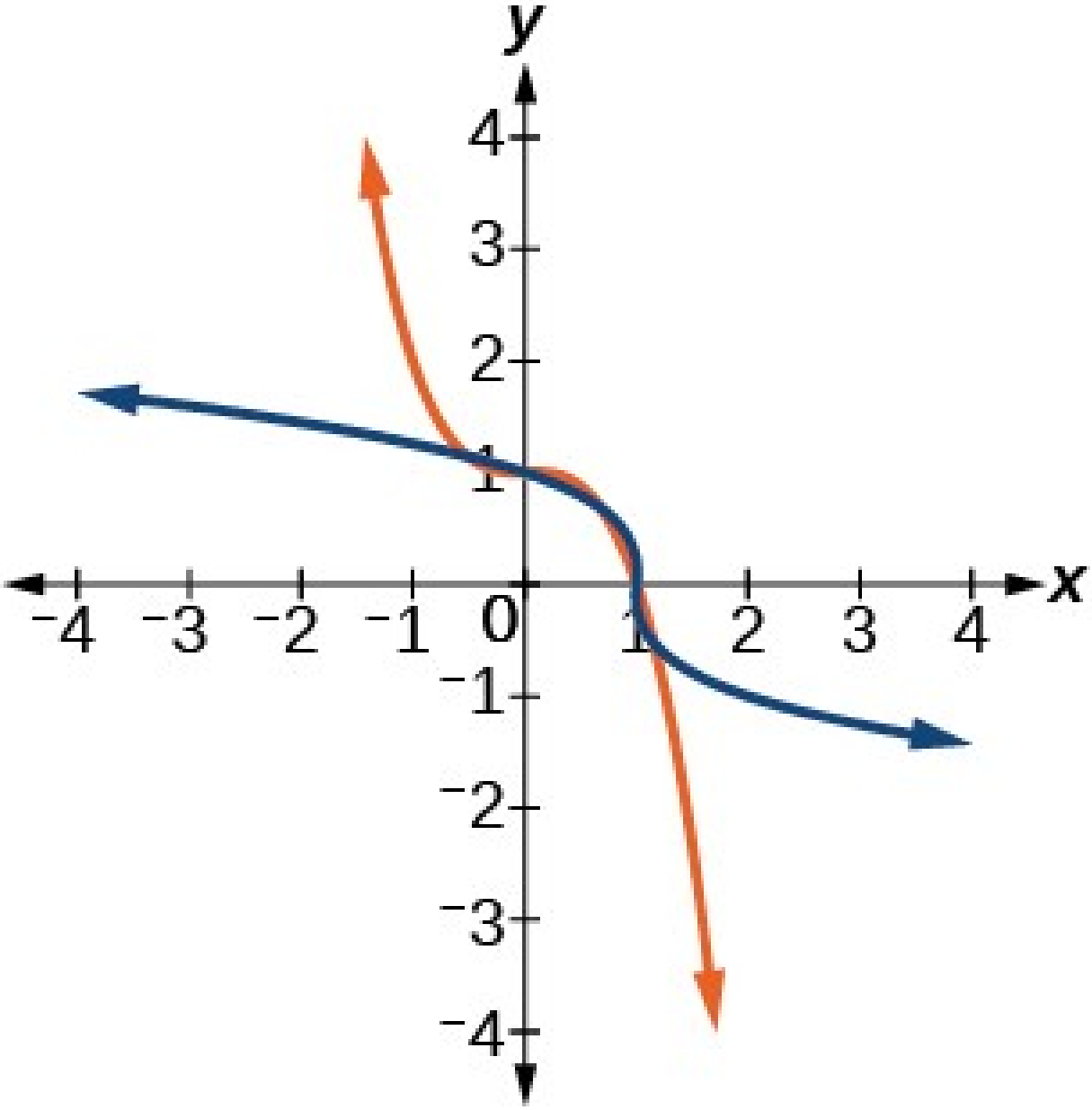
35.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}+4$$



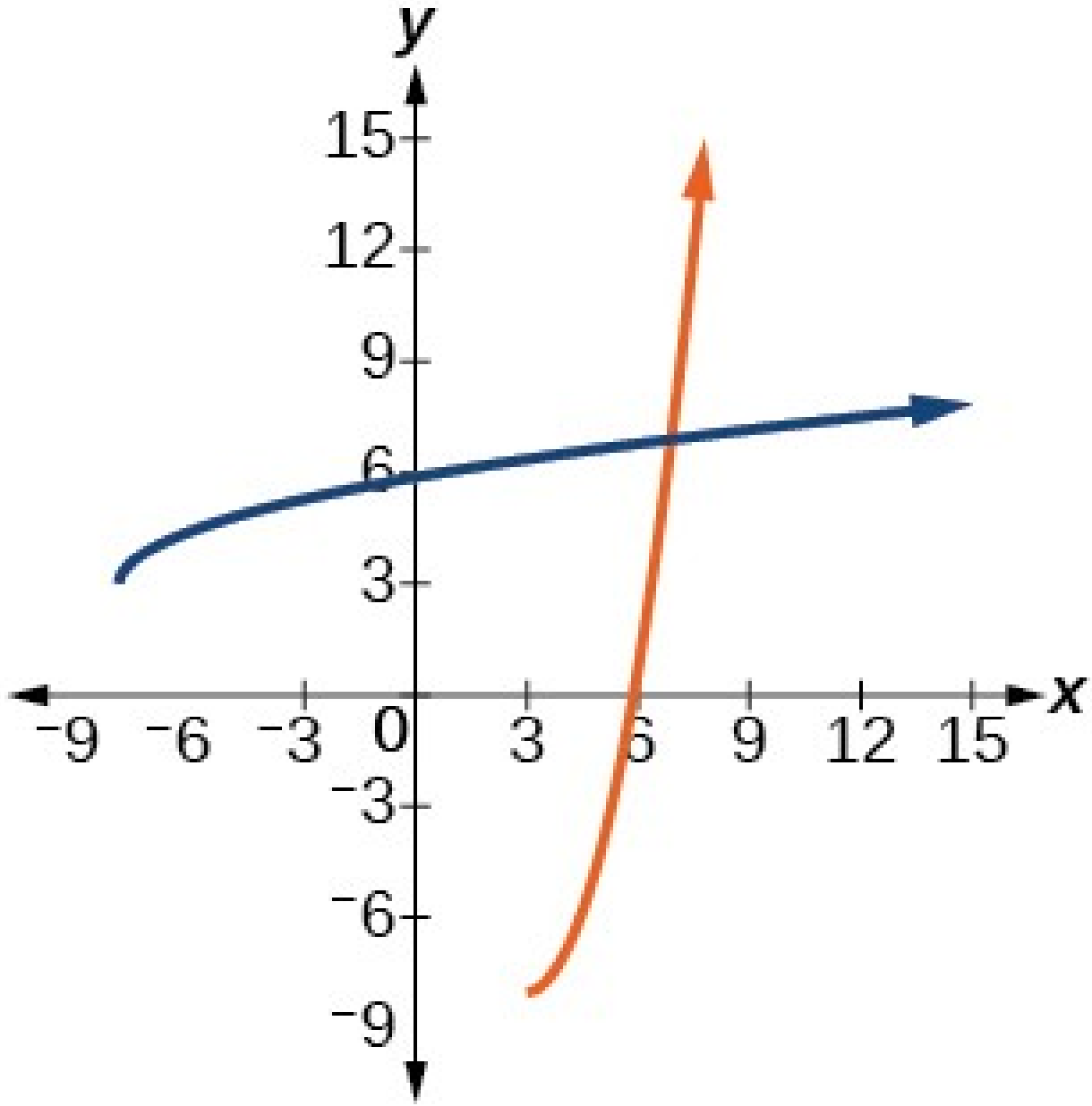
37.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x}$$



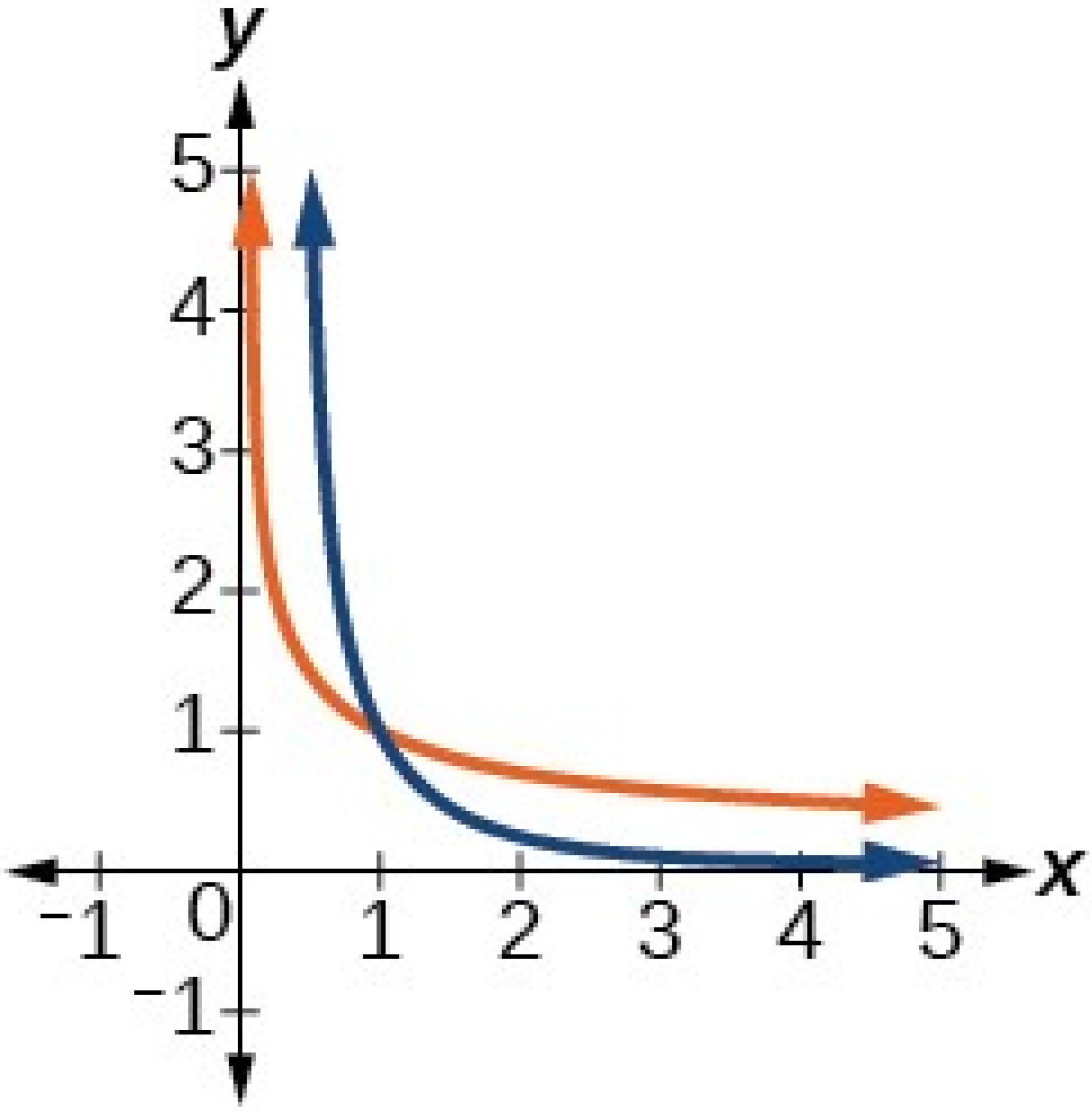
39.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x+8}+3$$



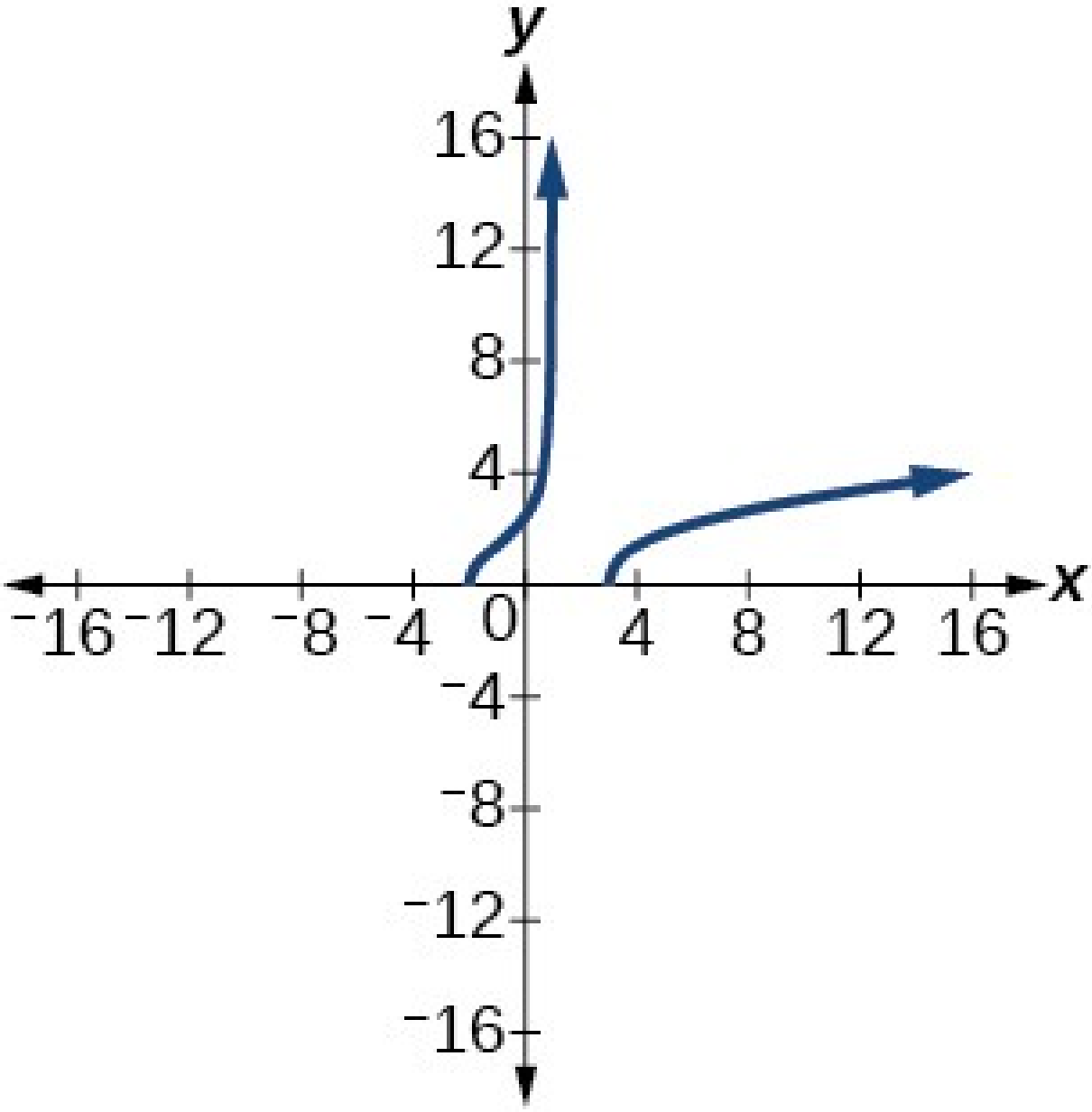
41.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1}{x}}$$



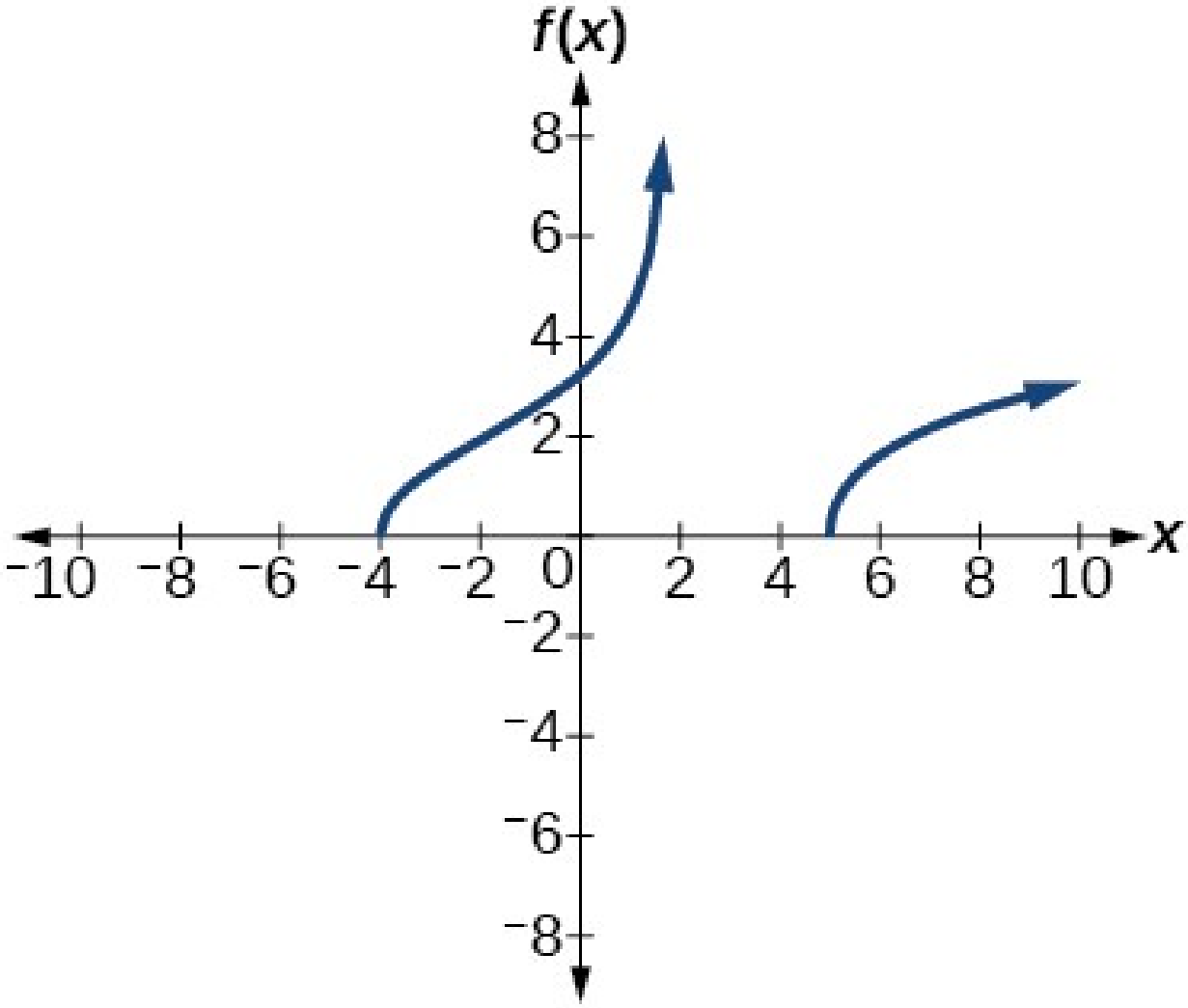
43.

$$[-2,1)U[3,\infty)$$



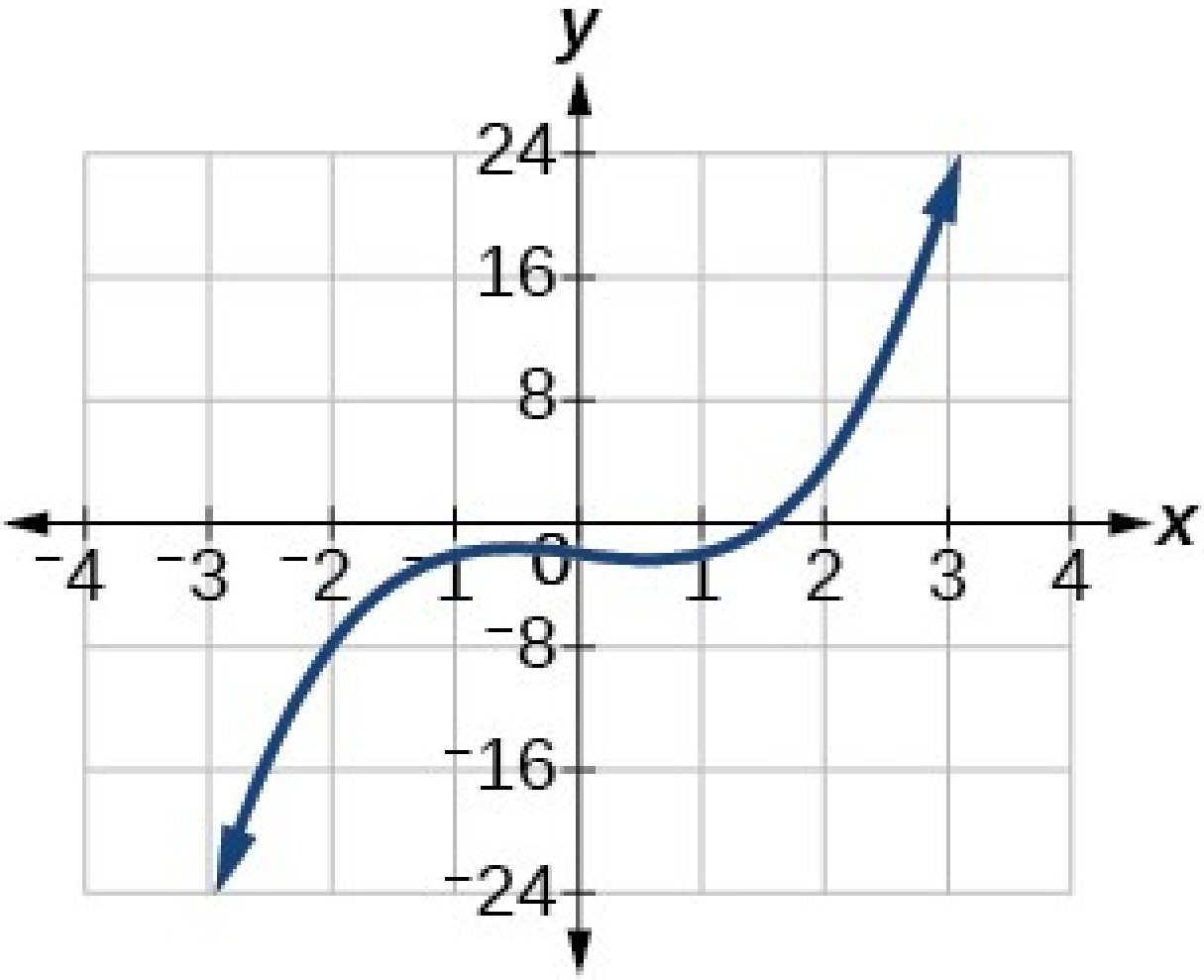
45.

$$[-4,2)\cup[5,\infty)$$



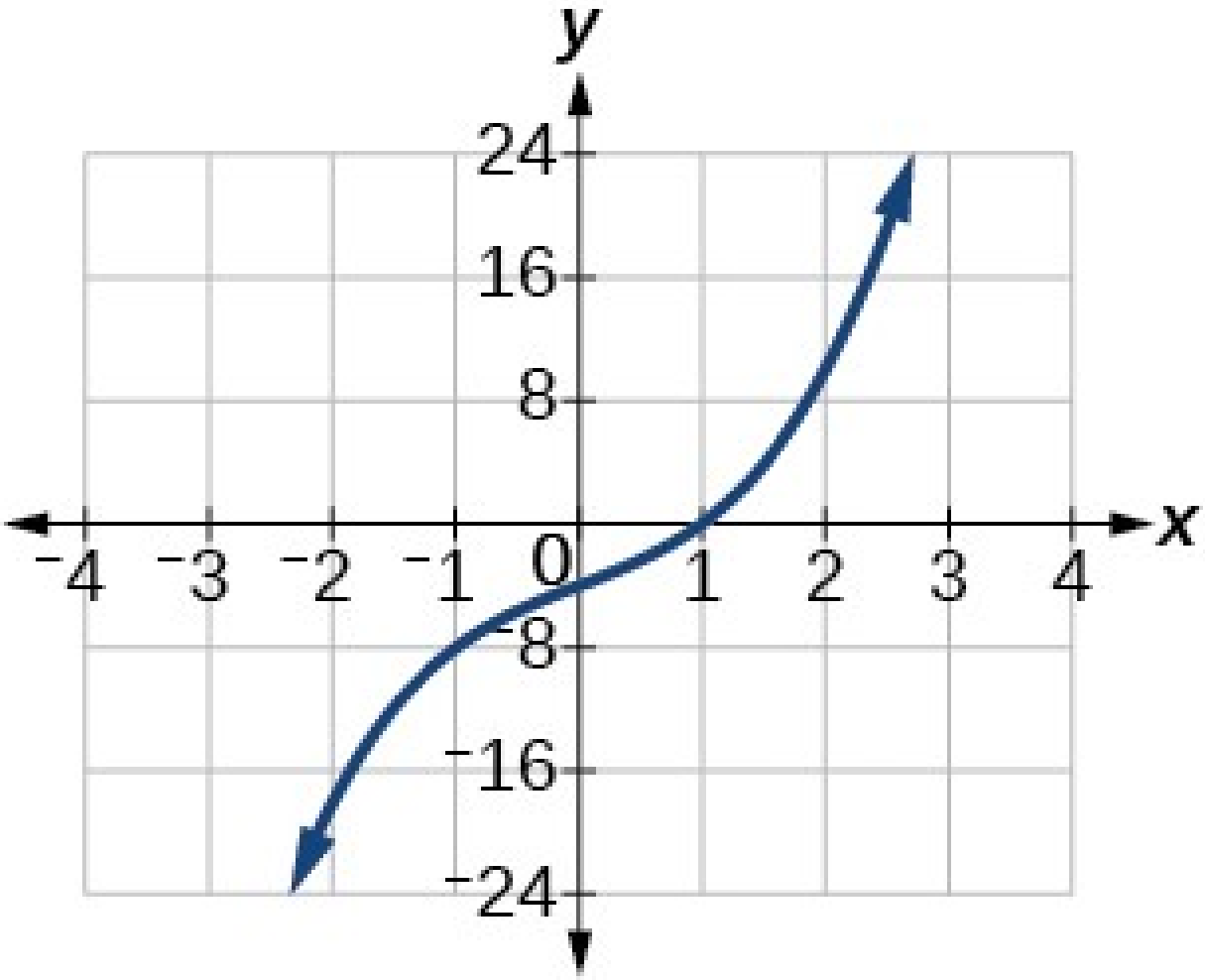
47.

$$(-2,0);(4,2);(22,3)$$



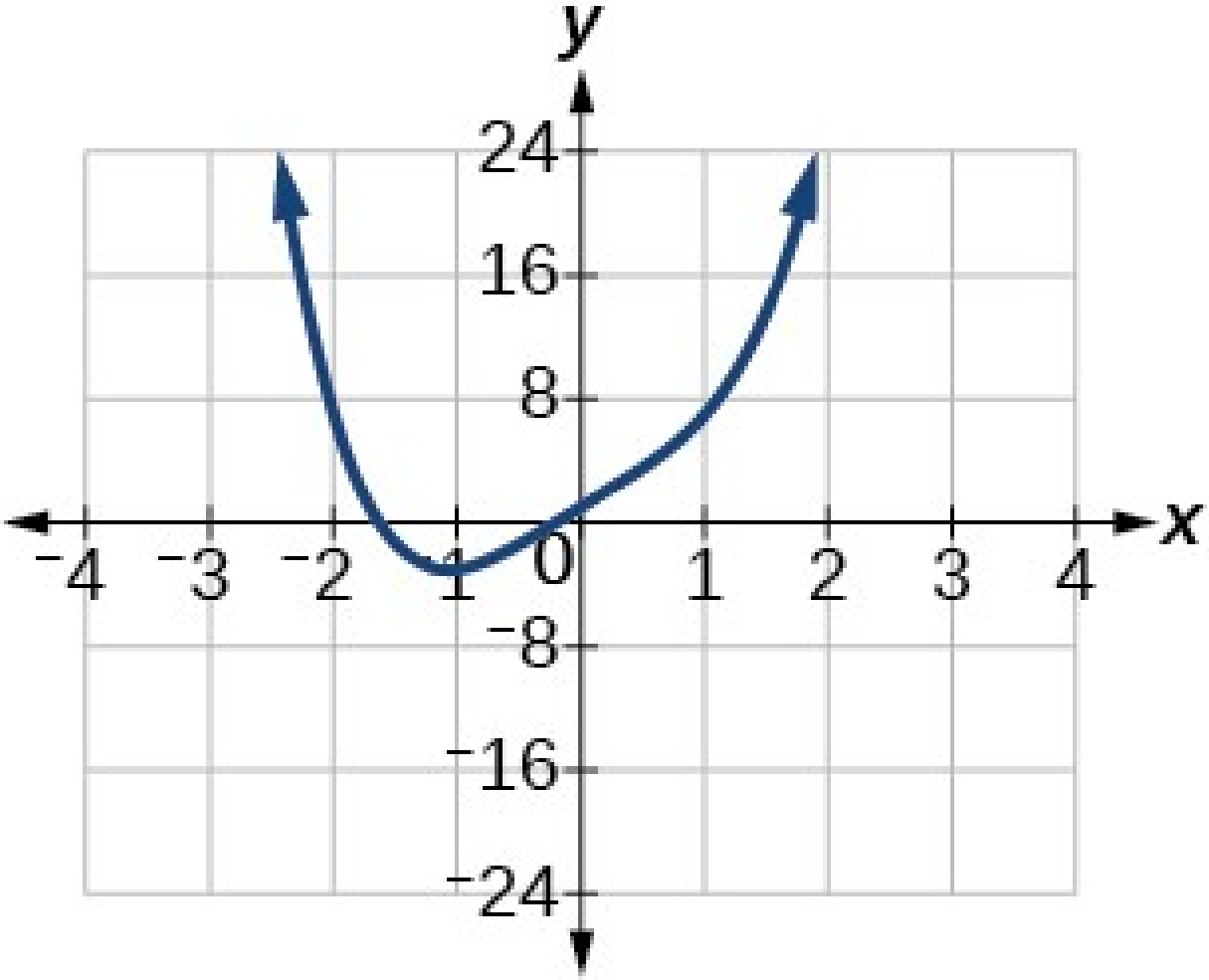
49.

$$(-4,0);(0,1);(10,2)$$



51.

$$(-3,-1);(1,0);(7,1)$$



53.

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x+\frac{b^2}{4}}-\frac{b}{2}$$

55.

$$f^{-1}(x)=\frac{x^3-b}{a}$$

57. $t\,(h)=\sqrt{\frac{200-h}{4{,}9}}$, 5,53 sekúndur

59. $r(V)=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, 3,63 fet

61. $n\,(C)=\frac{100\,C-25}{0{,}6-C}$, 250 mL

63. $r(V)=\sqrt{\frac{V}{6\pi}}$, 3,99 metrar

65. $r(V)=\sqrt{\frac{V}{4\pi}}$, 1,99 tommur

3.9 Kaflaverkefni

1. Grafið hefur yfirbragð veldisfalls.

3. Nei. Margar breytur geta breyst saman.

5.

$$y=5x^2$$

7.

$$y=\frac{1}{1944}x^3$$

9.

$$y=6x^4$$

11.

$$y=\frac{18}{x^2}$$

13.

$$y=\frac{81}{x^4}$$

15.

$$y=\frac{20}{\sqrt[3]{x}}$$

17.

$$y=10xzw$$

19.

$$y=10x\sqrt{z}$$

21.

$$y=4\frac{xz}{w}$$

23.

$$y=40\frac{xz}{\sqrt{w}t^2}$$

25.

$$y=256$$

27.

$$y=6$$

29.

$$y=6$$

31.

$$y=27$$

33.

$$y=3$$

35.

$$y=18$$

37.

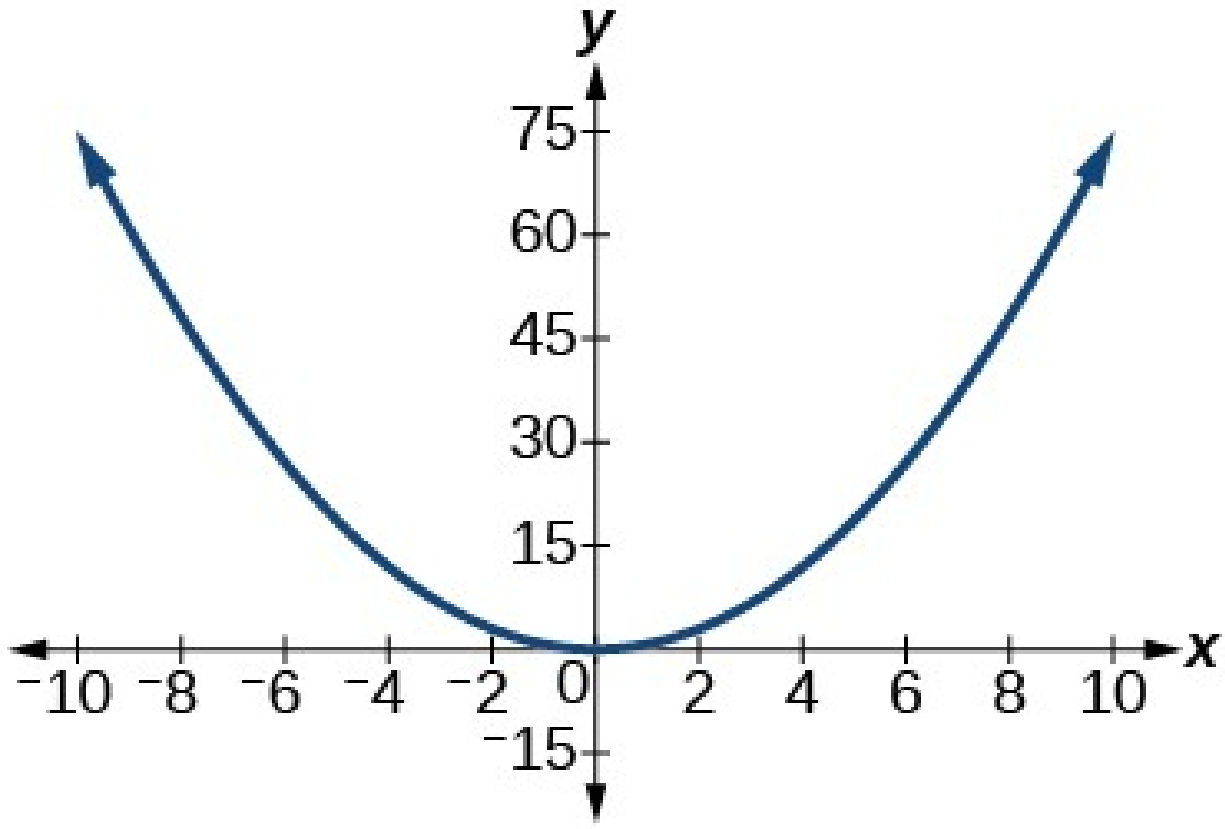
$$y=90$$

39.

$$y=\frac{81}{2}$$

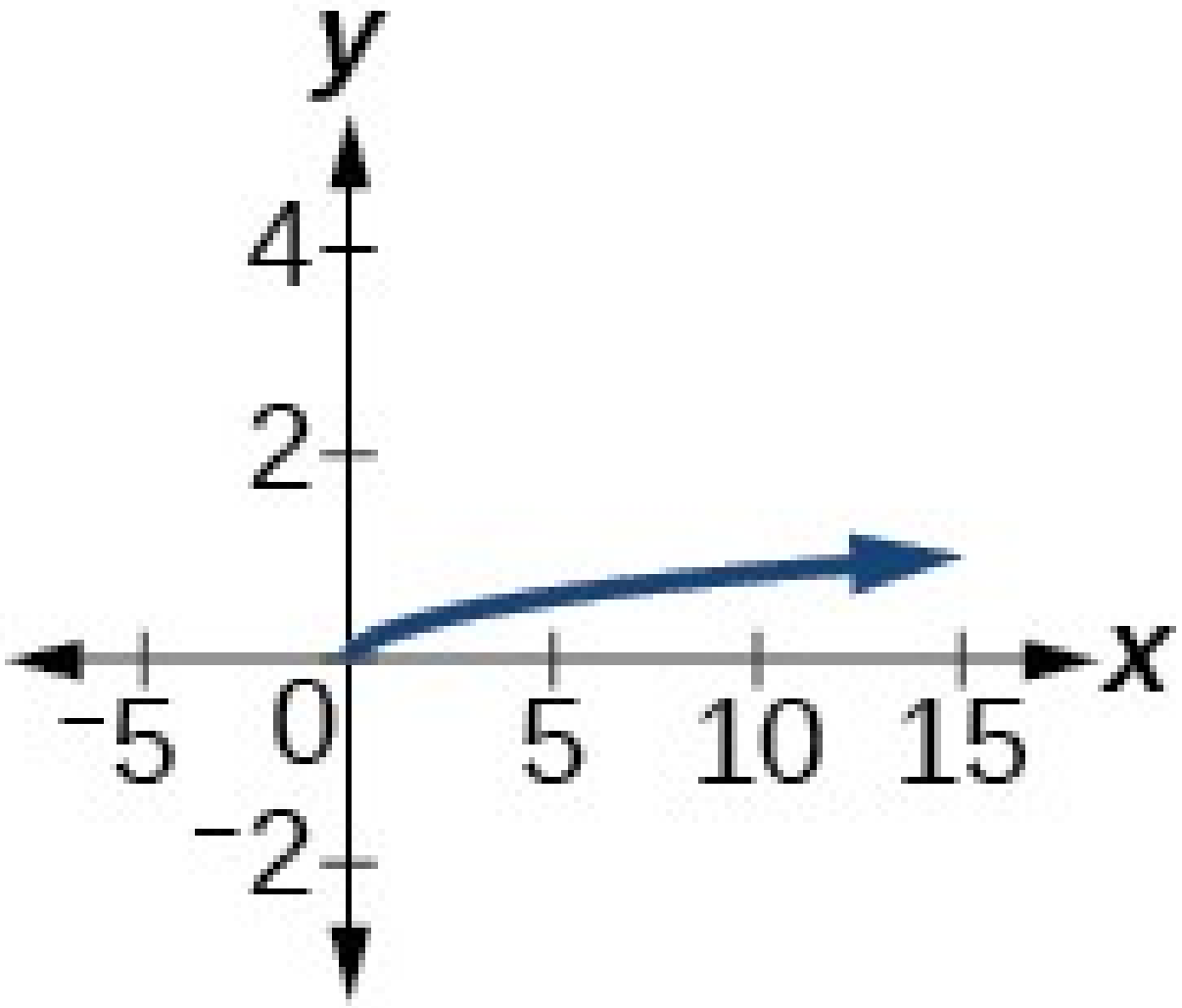
41.

$$y=\frac{3}{4}x^2$$



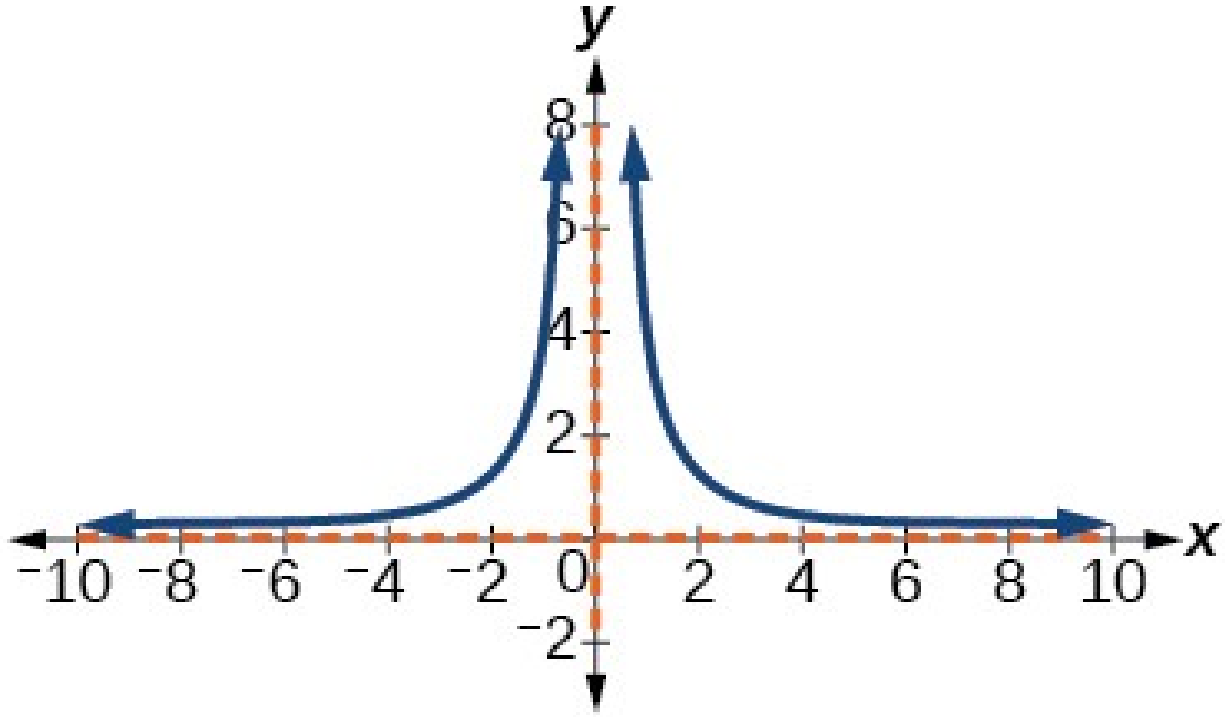
43.

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$$



~~45~~.

$$y=\frac{4}{x^2}$$



47. ≈ 1,89 ár

49. ≈ 0,61 ár

51. 3 sekúndur

53. 48 tommur

55. ≈ 49,75 pund

57. ≈ 33,33 amper

59. ≈ 2,88 tommur

Upprifjunarverkefni

1.

$$2-2i$$

3.

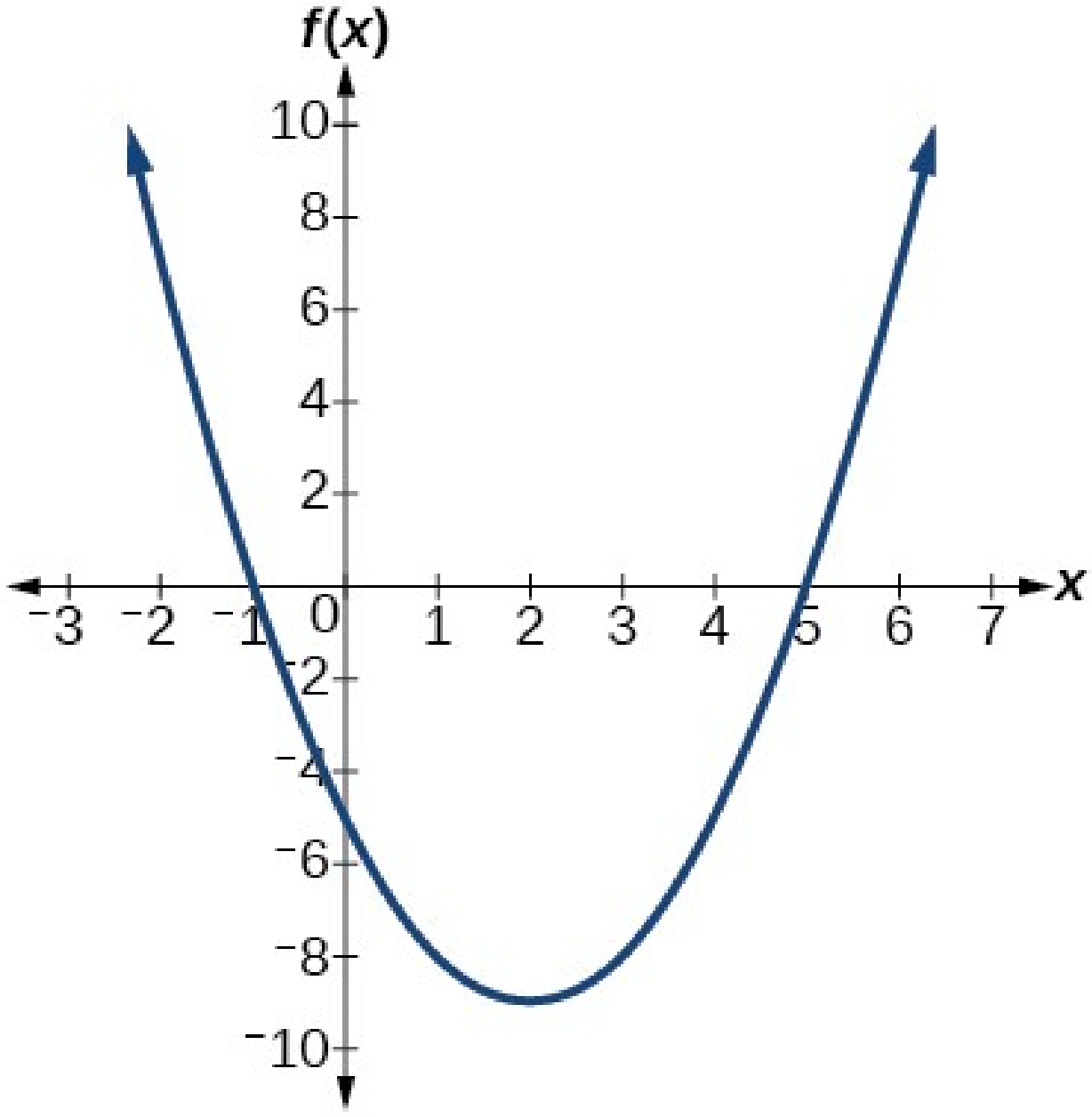
$$24+3i$$

5.

$$\{2+i, 2-i\}$$

7.

$$f(x)=(x-2)^2-9 \text{ hvirfilpunktur } (2,-9), \text{skurðpunktar } (5,0);(-1,0);(0,-5)$$



9.

$$f(x)=\frac{3}{25}(x+2)^2+3$$

11. 300 metrar á 150 metra; lengri hliðin er samsíða ánni.

13. Já, stig = 5, forystustuðull = 4

15. Já, stig = 4, forystustuðull = 1

17.

$$\text{Þegar } x \to -\infty, f(x) \to -\infty, \text{þegar } x \to \infty, f(x) \to \infty$$

19. -3 með margfeldni 2, $\frac{1}{2}$ með margfeldni 1 og -1 með margfeldni 3

21. 4 með margfeldni 1

23. $\frac{1}{2}$ með margfeldni 1 og 3 með margfeldni 3

25. x^2+4 með afganginn 12

27.

$$x^2-5x+20-\frac{61}{x+3}$$

29. $2x^2-2x-3$, svo þáttaða formið er $(x+4)(2x^2-2x-3)$

31.

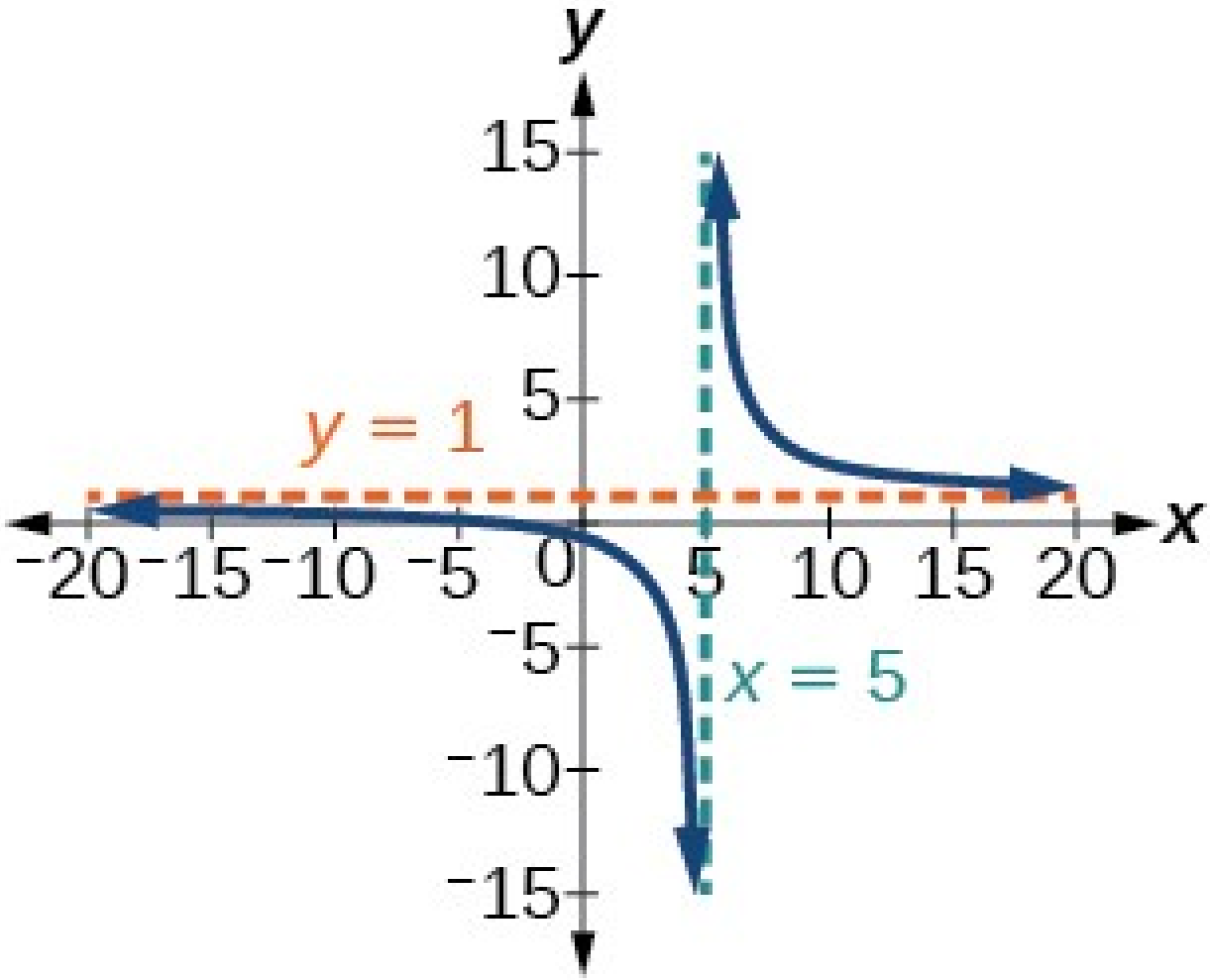
$$\left\{-2,4,-\frac{1}{2}\right\}$$

33.

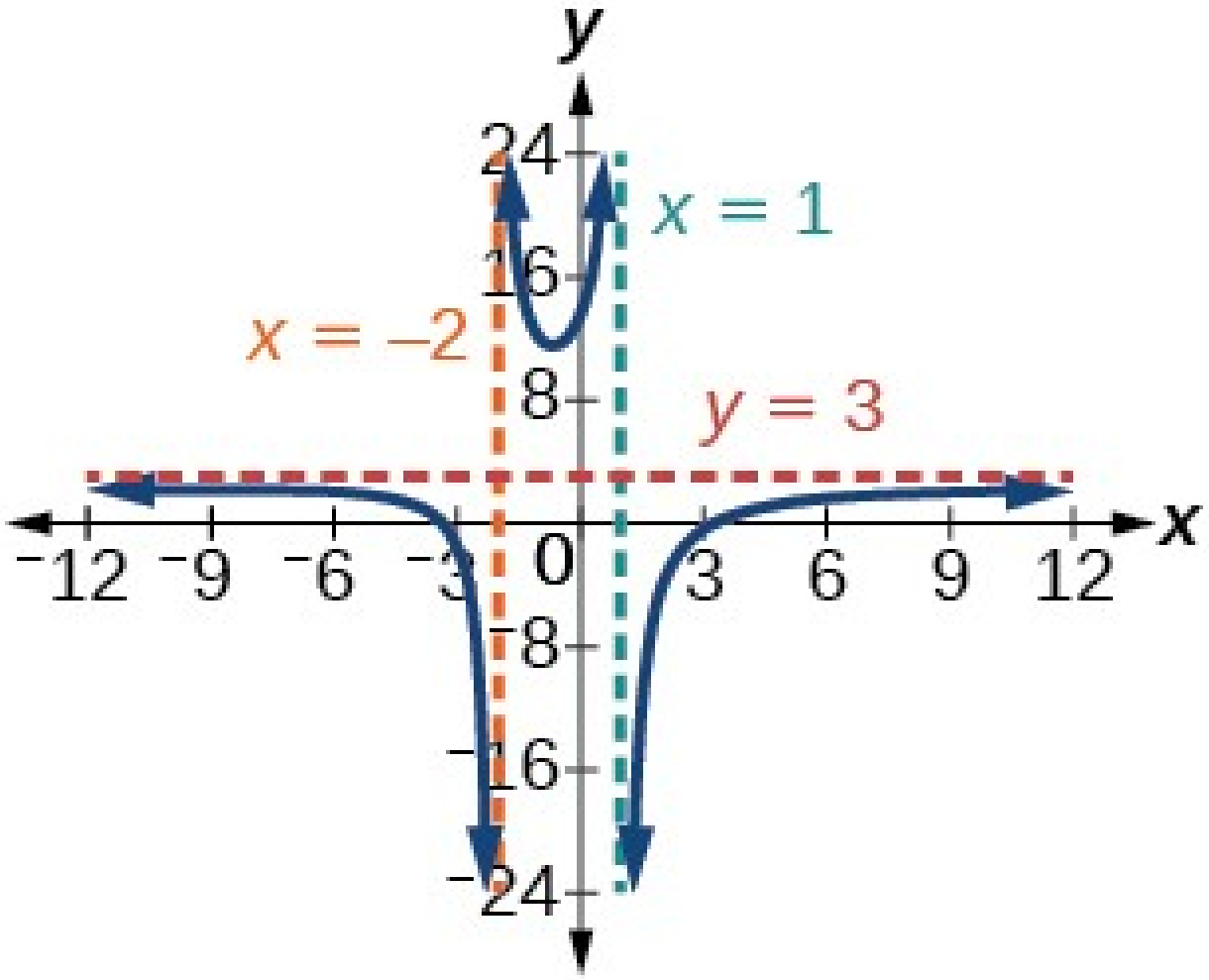
$$\left\{1,3,4,\frac{1}{2}\right\}$$

35. 0 eða 2 jákvæð, 1 neikvæð

37. Skurðpunktar $(-2,0)$ og $\left(0,-\frac{2}{5}\right)$, aðfellur $x=5$ og $y=1$.



39. Skurðpunktar: (3, 0), (-3, 0) og $\left(0, \frac{27}{2}\right)$; aðfellur: $x=1$, $x=-2$, $y=3$.



41.

$$y = x - 2$$

43.

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

45.

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + 11} - 3$$

47.

$$f^{-1}(x) = \frac{(x+3)^2 - 5}{4}, x \geq -3$$

49.

$$y = 64$$

51.

$$y=72$$

53. 148,5 pund

Æfingapróf

1.

$$20-10i$$

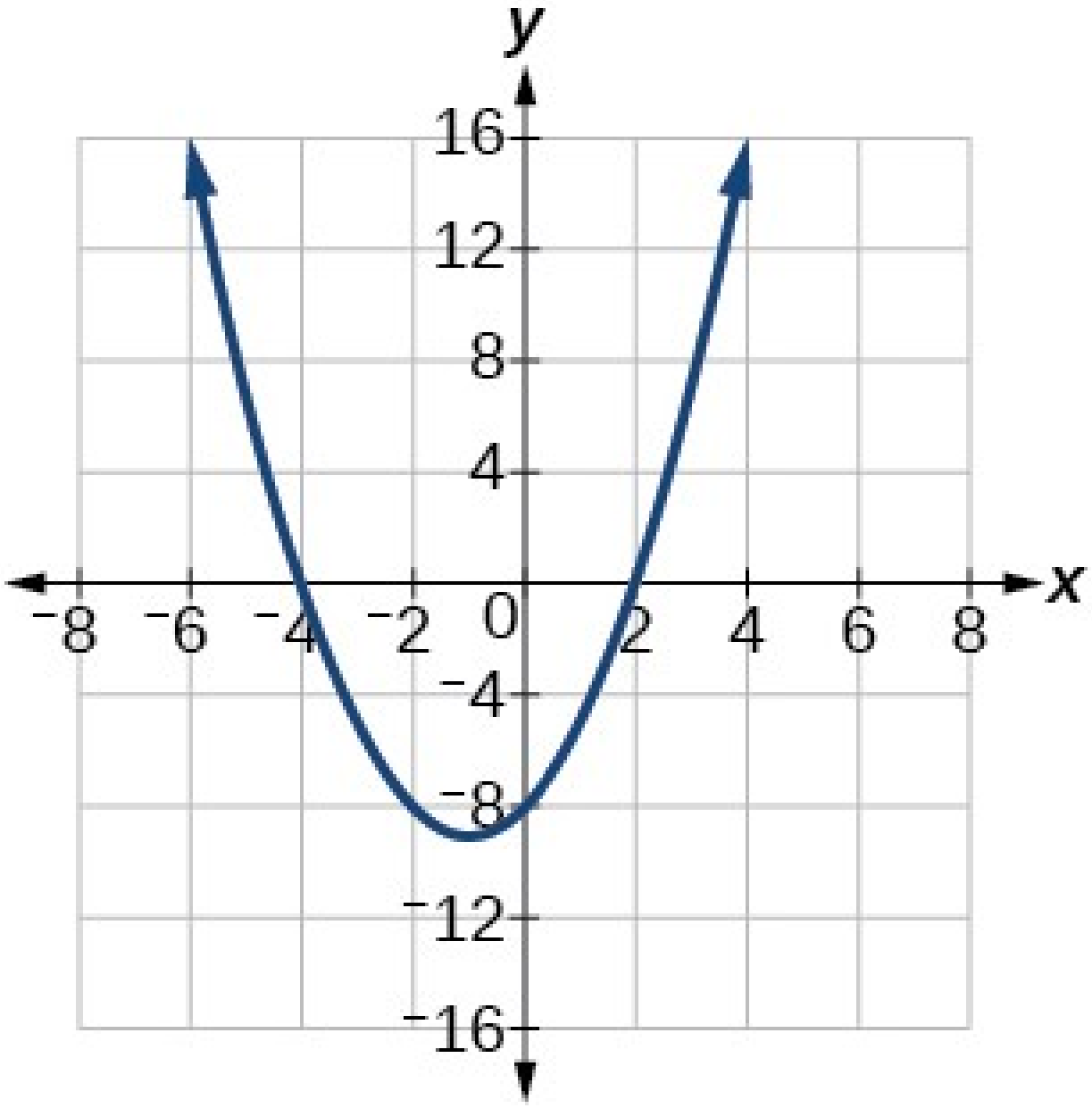
3.

$$\left\{2+3i, 2-3i\right\}$$

5.

Þegar $x \to -\infty$, $f\left(x\right) \to -\infty$, þegar $x \to \infty$, $f\left(x\right) \to \infty$

7. $f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2-9$, hvirfilpunktur $\left(-1,-9\right)$, skurðpunktar $\left(2,0\right);\left(-4,0\right);\left(0,-8\right)$



9. 60.000 ferfet

11. 0 með margfeldni 4 og 3 með margfeldni 2

13.

$$2x^2 - 4x + 11 - \frac{26}{x+2}$$

15. $2x^2 - x - 4$. Þáttaða formið er því $(x+3)(2x^2 - x - 4)$

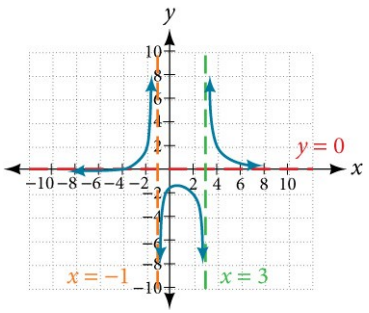
17. $-\frac{1}{2}$ (með margfeldni 2), $\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$

19. -2 (með margfeldni 3), $\pm i$

21.

$$f(x)=2(2x-1)^3(x+3)$$

23. Skurðpunktar: $(-4,0),\left(0,-\frac{4}{3}\right)$; aðfellur: $x=3, x=-1, y=0$.



25.

$$y=x+4$$

27.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+4}{3}}$$

29.

$$y=18$$

31. 4 sekúndur

Kafli 4

Prófaðu

4.1 Vísisföll

1. $g(x)=0{,}875^x$ og $j(x)=1.095{,}6^{-2x}$ eru vísisföll.

2.

5,5556

3. About 1,548 billion people; by the year 2031, India's population will exceed China's by about 0,001 billion, or 1 million people.

4. $(0,129)$ og

$$(2,236); \qquad N(t)=129(1,3526)^t$$

5.

$$f(x)=2(1,5)^x$$

6. $f(x)=\sqrt{2}(\sqrt{2})^x$. Svör geta verið mismunandi vegna námundunarskekkju. Svarið ætti að vera mjög nálægt $1,4142\ (1,4142)^x$.

7.

$$y\approx 12\cdot 1,85^x$$

8. um $3.644.675,88

9. $13.693

10.

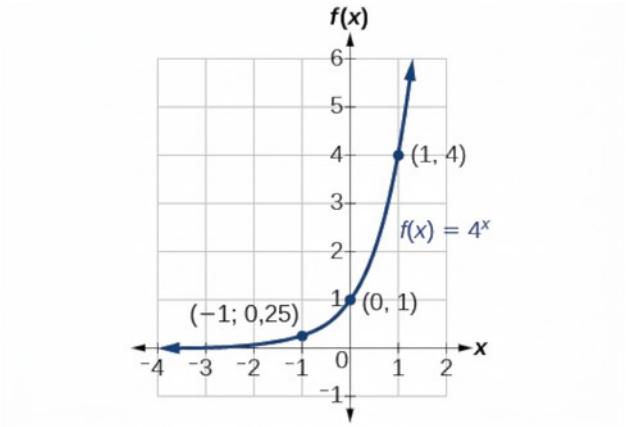
$$e^{-0,5}\approx 0,60653$$

11. $3.659.823,44

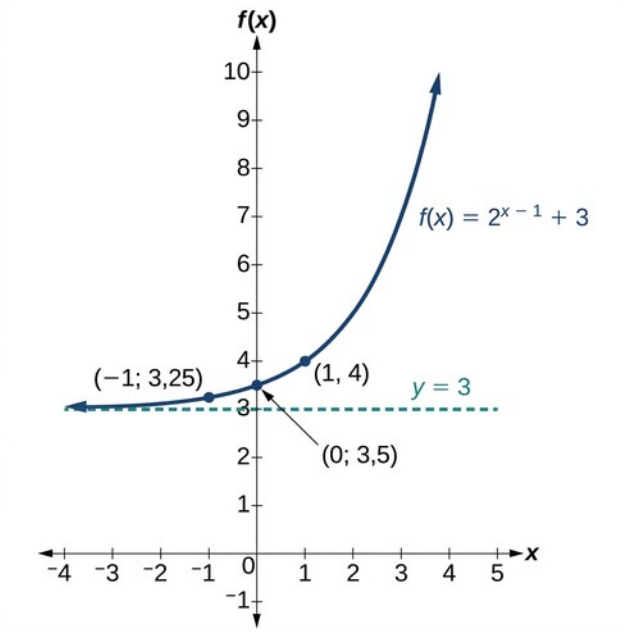
12. 3,77E-26 (Þetta er framsetning reiknivélar á tölunni sem er rituð $3,77\times 10^{-26}$ á staðalformi. Gildi vísisfalls er aldrei núll, en þessi tala er svo nálægt núlli að í öllum hagnýtum tilgangi má taka núll sem svar.)

4.2 Gröf vísisfalla

1. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$; myndmengið er $(0,\infty)$; láfellan er $y=0$.



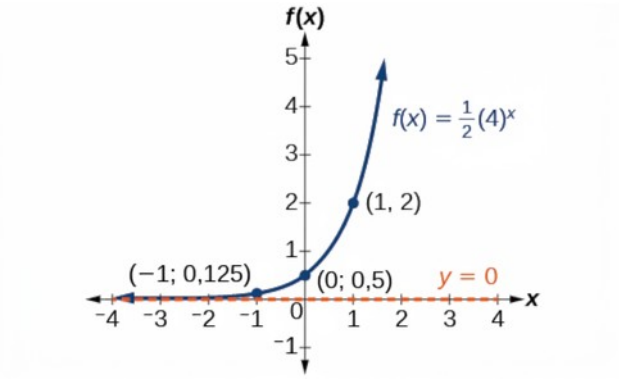
2. Skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$; myndmengið er $(3,\infty)$; láfellan er $y=3$.



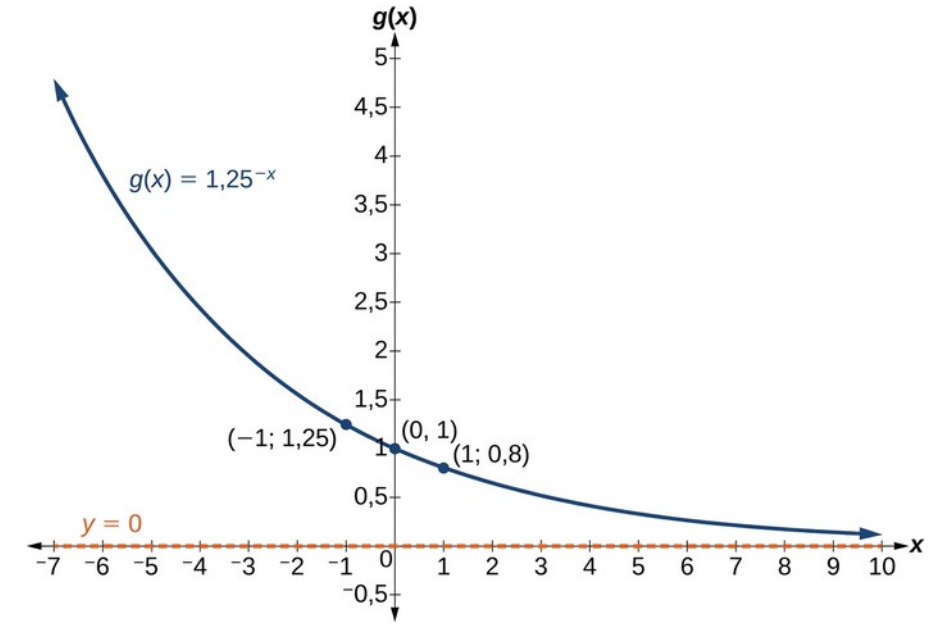
3.

$$x \approx -1{,}608$$

4. Skilgreiningarmengið er $(-\infty, \infty)$; myndmengið er $(0, \infty)$; láfellan er $y = 0$.



5. Skilgreiningarmengið er $(-\infty, \infty)$; myndmengið er $(0, \infty)$; láfellan er $y = 0$.



6. $f(x)=-\frac{1}{3}e^{x}-2$; skilgreiningarmengið er $(-\infty,\infty)$; myndmengið er $(-\infty,-2)$; láfellan er $y=-2$.

4.3 Lograföll

1.

1. ⓐ $\log_{10}(1.000.000)=6$ jafngildir $10^{6}=1.000.000$
2. ⓑ $\log_{5}(25)=2$ jafngildir $5^{2}=25$

2.

1. ⓐ $3^{2}=9$ jafngildir $\log_{3}(9)=2$
2. ⓑ $5^{3}=125$ jafngildir $\log_{5}(125)=3$
3. ⓒ $2^{-1}=\frac{1}{2}$ jafngildir $\log_{2}\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

3. $\log_{121}(11)=\frac{1}{2}$ (munið að $\sqrt{121}=(121)^{\frac{1}{2}}=11$)

4.

$$\log_{2}\left(\frac{1}{32}\right)=-5$$

5.

$$\log(1.000.000)=6$$

6.

$$\log(123)\approx 2{,}0899$$

7. The difference in magnitudes was about 3,929.

8. Ekki er hægt að taka logra af neikvæðri tölu í mengi rauntalna.

4.4 Gröf lografalla

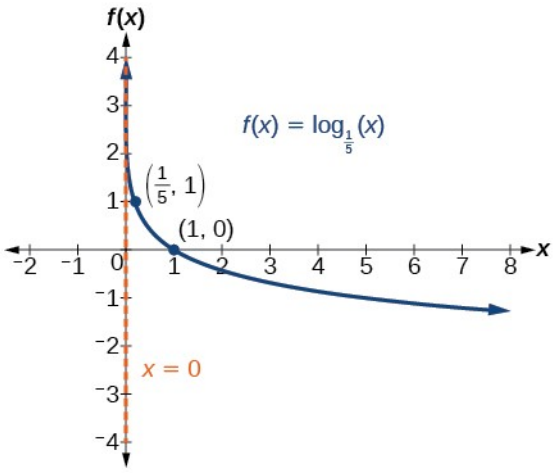
1.

$$(2,\infty)$$

2.

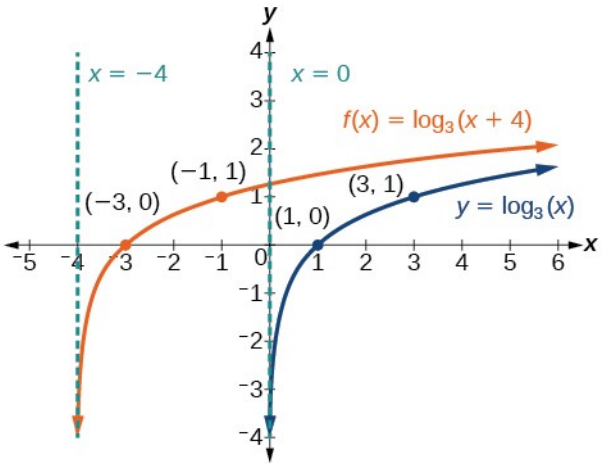
$$(5,\infty)$$

3.



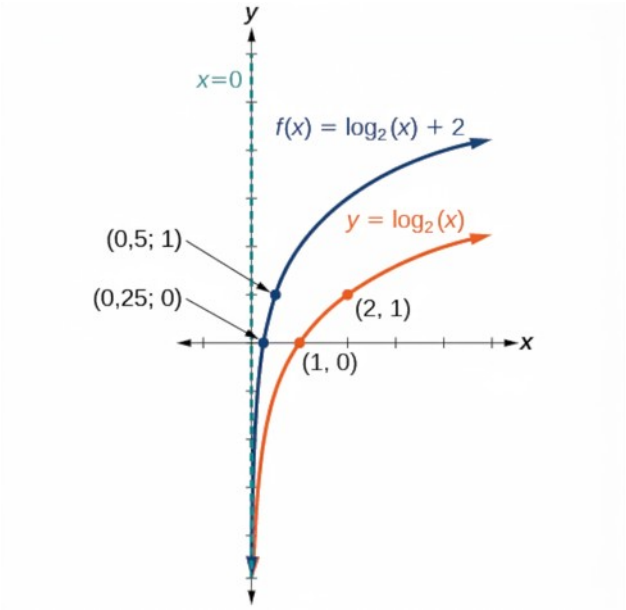
Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

4.



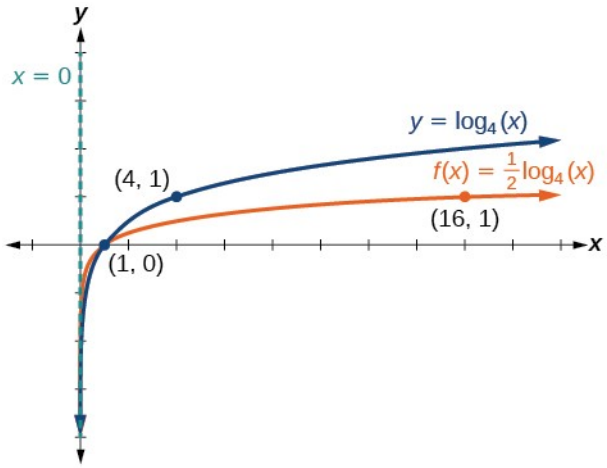
Skilgreiningarmengið er $(-4,\infty)$, myndmengið $(-\infty,\infty)$, og aðfellan $x=-4$.

5.



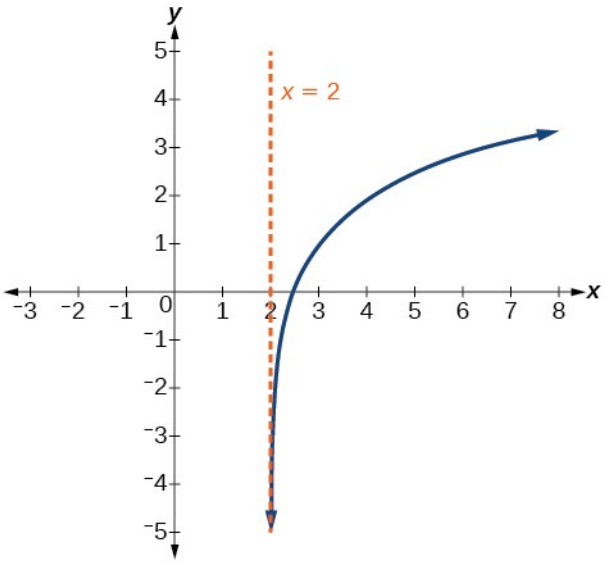
Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

6.



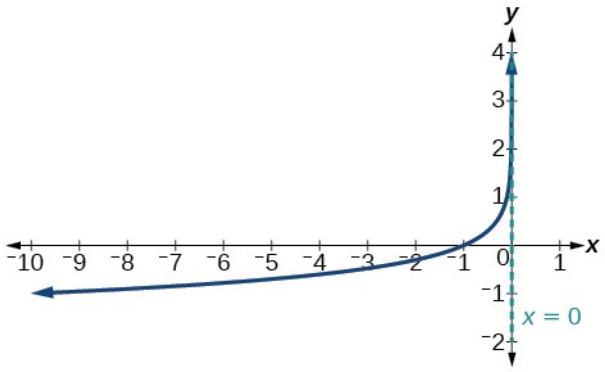
Skilgreiningarmengið er $(0,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

7.



Skilgreiningarmengið er $(2,\infty)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=2$.

8.



Skilgreiningarmengið er $(-\infty,0)$, myndmengið er $(-\infty,\infty)$, og lóðfellan er $x=0$.

9.

$$x\approx 3{,}049$$

10.

$$x=1$$

11.

$$f(x)=2\ln(x+3)-1$$

4.5 Lograreglur

1.

$$\log_b 2+\log_b 2+\log_b 2+\log_b k=3\log_b 2+\log_b k$$

2.

$$\log_3(x+3)-\log_3(x-1)-\log_3(x-2)$$

3.

$$2\ln x$$

4.

$$-2\ln(x)$$

5.

$$\log_3 16$$

6.

$$2\log x+3\log y-4\log z$$

7.

$$\frac{2}{3}\ln x$$

8.

$$\frac{1}{2}\ln(x-1)+\ln(2x+1)-\ln(x+3)-\ln(x-3)$$

9. $\log\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\right)$; einnig má rita þetta sem $\log\left(\frac{5}{8}\right)$ með því að fullstytta brotið.

10.

$$\log\left(\frac{5(x-1)^3\sqrt{x}}{(7x-1)}\right)$$

11. $\log\frac{x^{12}(x+5)^4}{(2x+3)^4}$; einnig má rita svarið $\log\left(\frac{x^3(x+5)}{(2x+3)}\right)^4$.

12. Hækkun sýrustigsins er um það bil 0,301.

13.

$$\frac{\ln 8}{\ln 0{,}5}$$

14.

$$\frac{\ln 100}{\ln 5}\approx\frac{4{,}6051}{1{,}6094}=2{,}861$$

4.6 Vísis- og lograjöfnur

1.

$$x=-2$$

2.

$$x=-1$$

3.

$$x=\frac{1}{2}$$

4. Jafnan hefur enga lausn.

5.

$$x=\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

6. $t=2\ln\left(\frac{11}{3}\right)$ eða $\ln\left(\frac{11}{3}\right)^2$

7.

$$t=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

8.

$$x=\ln 2$$

9.

$$x=e^4$$

10.

$$x=e^5-1$$

11.

$$x\approx 9{,}97$$

12. $x=1$ eða $x=-1$

13.

$$t=703.800.000\times\frac{\ln(0{,}8)}{\ln(0{,}5)}\text{ ár}\approx 226.572.993\text{ ár}.$$

4.7 Vísis- og logralíkön

1.

$$f\left(t\right)=A_0\ e^{-0,0000000087\ t}$$

2. innan 230 ára, nánar tiltekið 229,3157

3.

$$f\left(t\right)=A_0 e^{\frac{\ln 2}{3}t}$$

4. 6,026 klukkustundir

5. 895 tilfelli á 15. degi

6. Vísisfall. $y=2\ e^{0,5\ x}$.

7.

$$y=3\ e^{\left(\ln\ 0,5\right)\ x}$$

4.8 Aðhvarfsgreining vísislíkana

1.

1. ⓐ Vísisaðhvarfslíkanið sem fellur að gögnunum er $y=522,88585984\ \left(1,19645256\right)^x$.
2. ⓑ Ef útgjöld halda áfram að vaxa með þessum hraða verður kreditkortaskuld útskriftarnemans $4.499,38 eftir eitt ár.

2.

1. ⓐ Lograaðhvarfslíkanið sem fellur að gögnunum er

$$y=141,91242949+10,45366573\ \ln\left(x\right)$$

2. ⓑ Ef salan heldur áfram með þessum hraða seljast um 171.000 leikir árið 2015.

3.

1. ⓐ Lógistíska aðhvarfslíkanið sem fellur að gögnunum er

$$y=\frac{25,65665979}{1+6,113686306\ e^{-0,3852149008\ x}}.$$

2. ⓑ If the population continues to grow at this rate, there will be about 25.634 seals in 2020.
3. ⓒ Námundað að næstu heilu tölu er burðargetan 25.657.

4.1 Kaflaverkefni

1. Línuleg föll hafa fastan breytingarhraða. Vísisföll vaxa um hlutfall af upphafsgildinu.

3. Þegar vextir eru vaxtavæddir verður hlutfall áunninna vaxta af höfuðstólnum hærra en skráðir ársvextir fjárfestingarreikningsins. Skráðu ársvextirnir samsvara því ekki endilega raunverulegum áunnum vöxtum, sem er einmitt merking hugtaksins nafnvextir.

5. vísisfall; stofninn minnkar með hlutfallslegum hraða.

7. ekki vísisfall; hleðslan minnkar um fasta stærð í hverri heimsókn og setningin lýsir því línulegu falli.

9. Skóginum er lýst með fallinu $B\left(t\right)=82\left(1{,}029\right)^{t}$.

11. Eftir $t=20$ ár verða 43 fleiri tré í skógi A en skógi B.

13. Svör eru mismunandi. Dæmi um svar: Í nokkur ár verður trjáfjöldinn í skógi A æ meiri en í skógi B. Þar sem skógur B vex í raun hraðar verður trjáfjöldinn þar þó að lokum meiri en í skógi A og helst þannig meðan vaxtarlíkönin gilda. Þurrkar, faraldur sem fækkar trjánum og aðrir umhverfis- og líffræðilegir þættir geta haft áhrif á það hvort vísisvaxtarlíkanið gildi til langs tíma.

15. exponential growth; The growth factor, $1{,}06$, is greater than 1.

17. exponential decay; The decay factor, $0{,}97$, is between 0 and 1.

19.

$$f\left(x\right)=2000\left(0{,}1\right)^{x}$$

21.

$$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x}{5}}\approx 2{,}93\left(0{,}699\right)^{x}$$

23. Línulegt

25. Hvorugt

27. Línulegt

29.

$$\$\ 10.250$$

31.

$$\$\ 13.268{,}58$$

33.

$$P=A\left(t\right)\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}$$

35.

$$\$\ 4.572{,}56$$

37.

$$4\,\%$$

39. samfelldur vöxtur; vaxtarhraðinn er meiri en 0.

41. samfelld hrörnun; vaxtarhraðinn er minni en 0.

43.

$$\$\ 669{,}42$$

45.

$$f(-1)=-4$$

47.

$$f\,(-1)\approx -0{,}2707$$

49.

$$f\,(3)\approx 483{,}8146$$

51.

$$y=3\cdot 5^{x}$$

53.

$$y\approx 18\cdot 1{,}025^{x}$$

55.

$$y\approx 0{,}2\cdot 1{,}95^{x}$$

57.

$$\text{APY}=\frac{A(t)-a}{a}=\frac{a\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365(1)}-a}{a}=\frac{a\left[\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}-1\right]}{a}=\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}-1;\ I(n)=\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}-1$$

59. Látum f vera vísishnignunarfallið $f(x)=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$ þar sem $b>1$. Þá gildir fyrir einhverja tölu $n>0$, að

$$f(x)=a\cdot\left(\frac{1}{b}\right)^{x}=a\left(b^{-1}\right)^{x}=a\left(\left(e^{n}\right)^{-1}\right)^{x}=a\left(e^{-n}\right)^{x}=a(e)^{-nx}.$$

61. 47.622 refur

63.

$$1{,}39\,\%;\ \$\ 155.368{,}09$$

65.

$$\$\ 35.838{,}76$$

67.

$$\$\ 82.247{,}78;\ \$\ 449{,}75$$

4.2 Kaflaverkefni

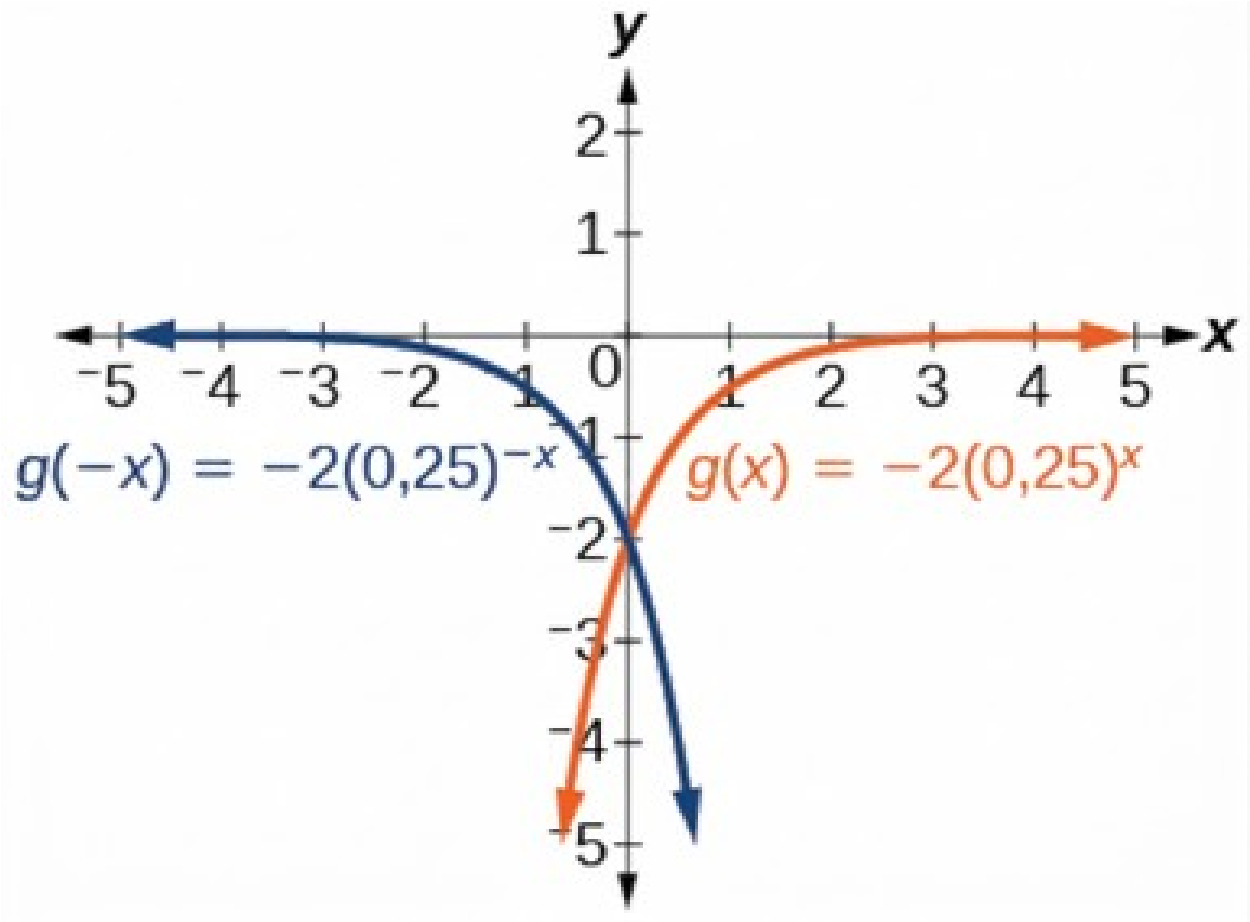
1. Aðfella er lína sem graf falls nálgast þegar x vex eða minnkar án marka. Láfella vísisfalls segir til um markgildi fallsgildanna þegar frumbreytan verður annaðhvort mjög stór eða mjög lítil.

3. $g(x)=4(3)^{-x}$; skurðpunktur við y-ás: $(0,4)$; skilgreiningarmengi: allar rauntölur; myndmengi: allar rauntölur stærri en 0.

5. $g(x)=-10^{x}+7$; skurðpunktur við y-ás: $(0,6)$; skilgreiningarmengi: allar rauntölur; myndmengi: allar rauntölur minni en 7.

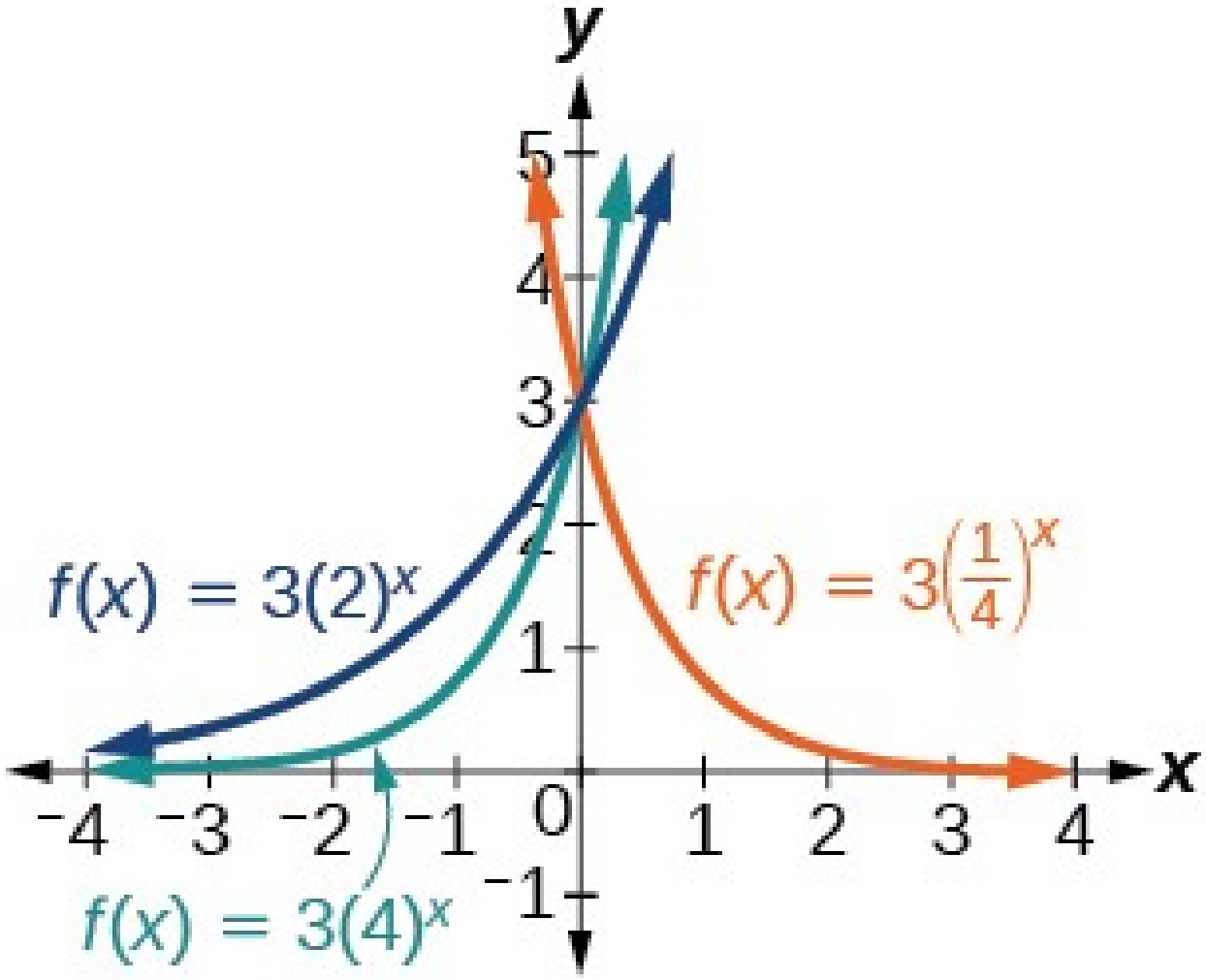
7. $g(x)=2\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$; skurðpunktur við y-ás: $(0,2)$; skilgreiningarmengi: allar rauntölur; myndmengi: allar rauntölur stærri en 0.

9.



skurðpunktur við y-ás: $(0, -2)$

11.



13. B

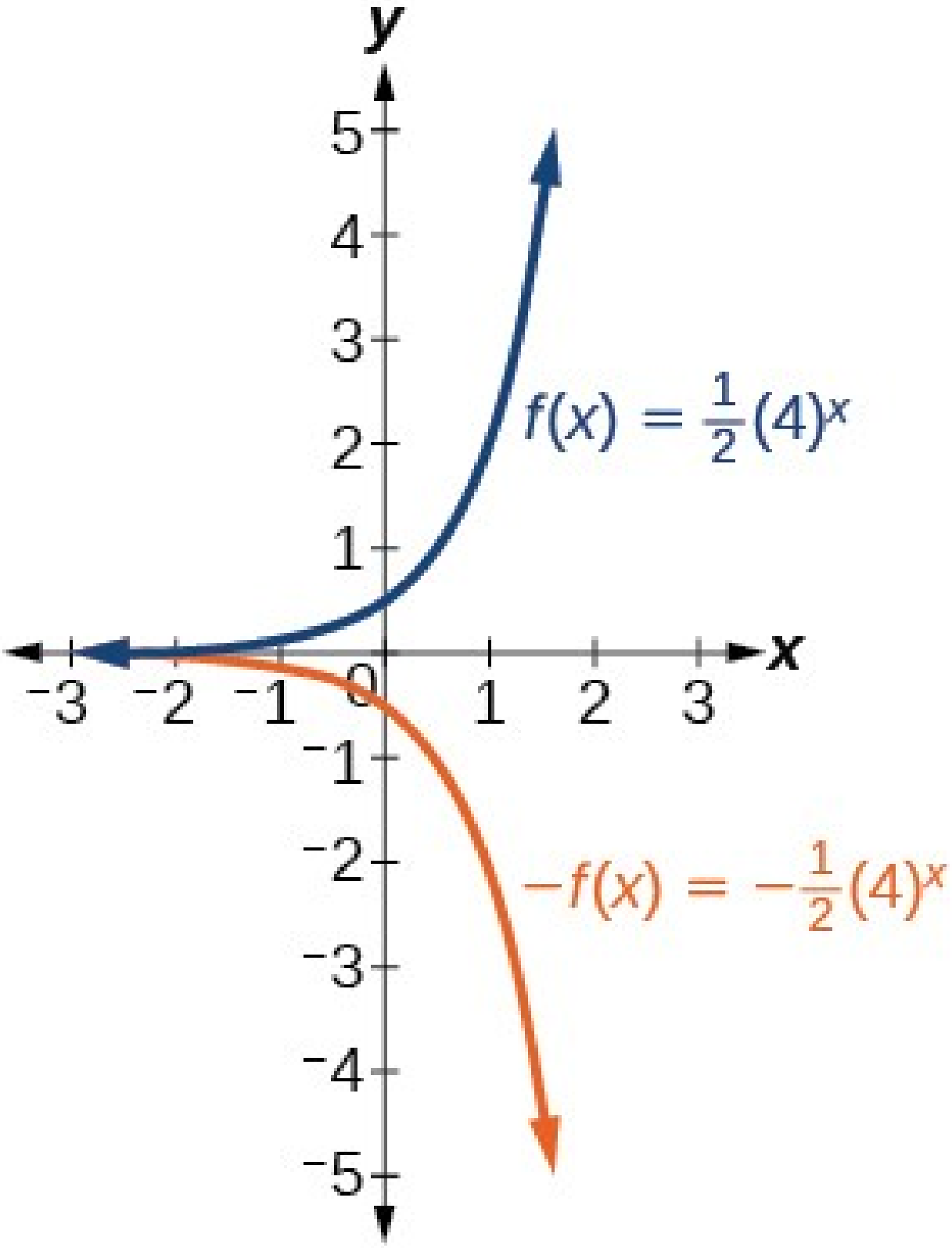
15. A

17. E

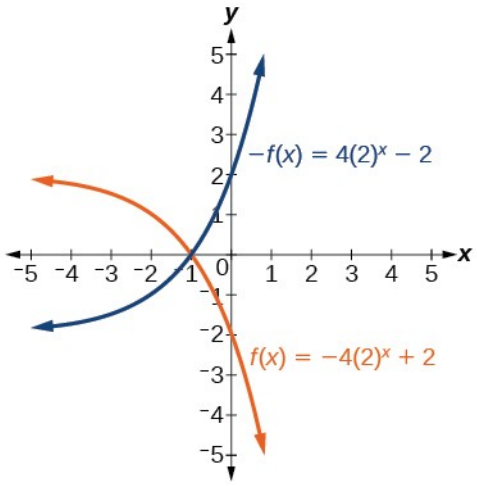
19. D

21. C

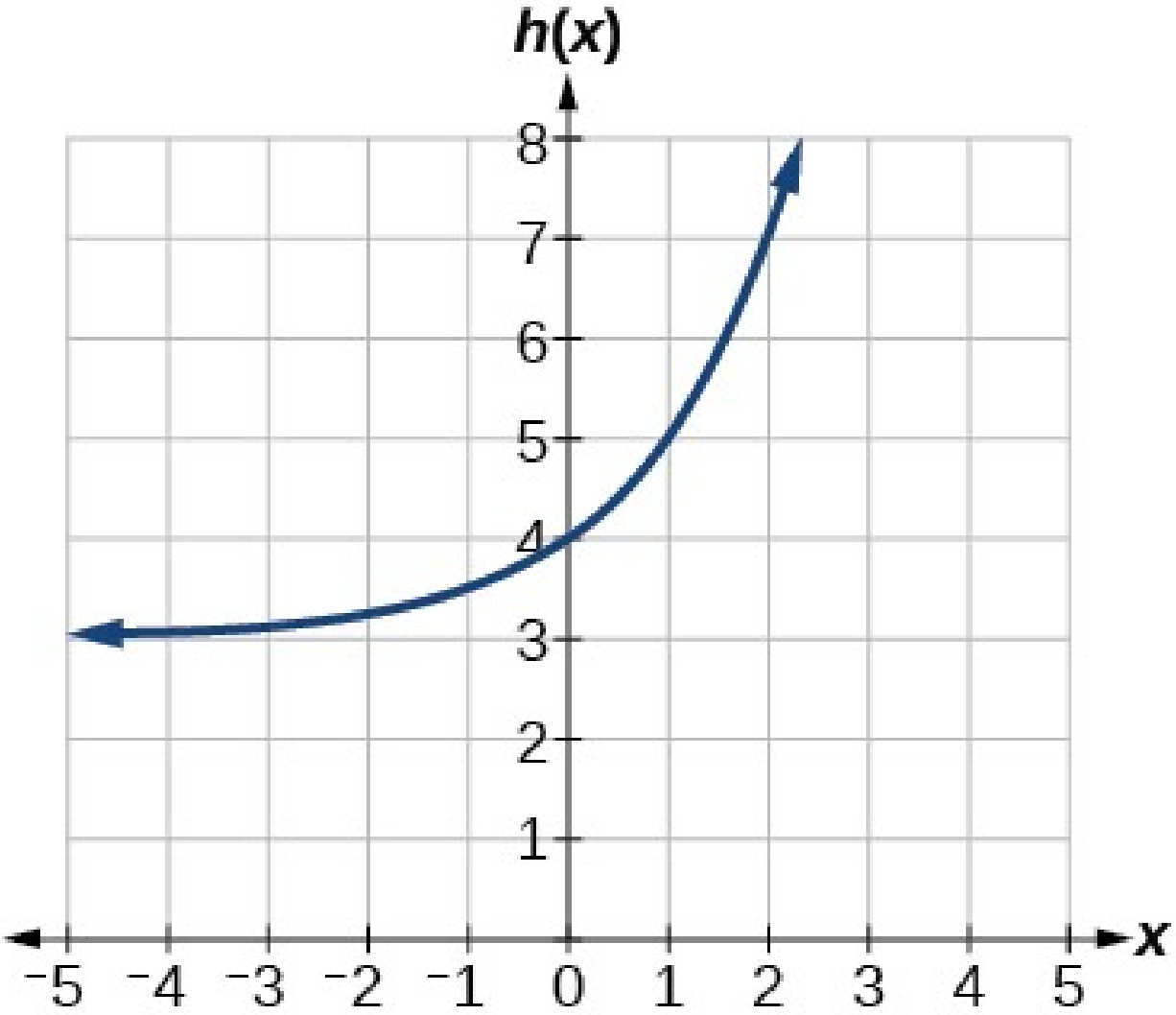
23.



25.



27.



Láfella: $h(x)=3$; skilgreiningarmengi: allar rauntölur; myndmengi: allar rauntölur sem eru stærri en 3.

29. Þegar $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; þegar $x \to -\infty, f(x) \to -1$

31. Þegar $x \to \infty, f(x) \to 2$; þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$

33.

$$f(x)=4^x-3$$

35.

$$f(x)=4^{x-5}$$

37.

$$f(x)=4^{-x}$$

39.

$$y=-2^{x}+3$$

41.

$$y=-2(3)^{x}+7$$

43.

$$g(6)=800+\frac{1}{3}\approx 800{,}3333$$

45.

$$h(-7)=-58$$

47.

$$x\approx -2{,}953$$

49.

$$x\approx -0{,}222$$

51. Graf $G(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$ er speglun um y-ásinn á grafi $F(x)=b^{x}$; Fyrir sérhverja rauntölu $b>0$ og fallið $f(x)=b^{x}$, er graf $\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$ speglun um y-ásinn, $F(-x)$.

53. Gröf $g(x)$ og $h(x)$ eru eins og fást með láréttri hliðrun grafs $f(x)$; til hægri. Fyrir sérhverja rauntölu n, rauntölu $b>0$, og fallið $f(x)=b^{x}$, er graf $\left(\frac{1}{b^{n}}\right)b^{x}$ lárétta hliðrunin $f(x-n)$.

4.3 Kaflaverkefni

1. Logri er veldisvísir. Nánar tiltekið er hann veldisvísirinn sem grunnur b er hafinn í til að fá tiltekið gildi. Í gefnu stæðunum hefur grunnurinn b sama gildi. Veldisvísinn y, í stæðunni b^{y} má einnig rita sem logrann $\log_{b} x$, og gildi x fæst þegar b er hafið í veldið y.

3. Þar sem lograjafna jafngildir vísisjöfnu má breyta henni í vísisjöfnuna $b^{y}=x$, og nota síðan veldareglur til að einangra x.

5. Náttúrulegi logrinn er sértilvik logra með grunn b þar sem grunnur náttúrulega logranns er alltaf e. Í stað þess að tákna náttúrulega logrann með $\log_e(x)$, er notuð táknunin $\ln(x)$.

7.

$$a^c = b$$

9.

$$x^y = 64$$

11.

$$15^b = a$$

13.

$$13^a = 142$$

15.

$$e^n = w$$

17.

$$\log_c(k) = d$$

19.

$$\log_{19} y = x$$

21.

$$\log_n(103) = 4$$

23.

$$\log_y\left(\frac{39}{100}\right) = x$$

25.

$$\ln(h) = k$$

27.

$$x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

29.

$$x = 3^3 = 27$$

31.

$$x = 9^{\frac{1}{2}} = 3$$

33.

$$x = 6^{-3} = \frac{1}{216}$$

35.

$$x = e^{2}$$

37.

$$32$$

39.

$$1{,}06$$

41.

$$14{,}125$$

43.

$$\frac{1}{2}$$

45.

$$4$$

47.

$$-3$$

49.

$$-12$$

51.

$$0$$

53.

$$10$$

55.

$$2.708$$

57.

0,151

59. Nei, fallið hefur ekkert skilgreint gildi fyrir $x=0$. Til staðfestingar skulum við gera ráð fyrir að $x=0$ sé í skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log(x)$. Þá er til tala n þannig að $n=\log(0)$. Umritun sem vísisjafna gefur $10^n=0$, sem er ómögulegt þar sem engin slík rauntala n er til. Því er $x=0$ ekki í skilgreiningarmengi fallsins $f(x)=\log(x)$.

61. Já. Gerum ráð fyrir að til sé rauntala x þannig að $\ln x=2$. Umritun sem vísisjafna gefur $x=e^2$, sem er rauntala. Til staðfestingar látum við $x=e^2$. Þá gildir samkvæmt skilgreiningu að $\ln(x)=\ln(e^2)=2$.

63. Nei; $\ln(1)=0$, svo $\frac{\ln\left(e^{1,725}\right)}{\ln\left(1\right)}$ er óskilgreint.

65.

2

4.4 Kaflaverkefni

1. Þar sem föllin eru andhverfur hvort annars eru gröf þeirra spegilmyndir um línuna $y=x$. Fyrir sérhvern punkt (a,b) á grafi lografalls er því samsvarandi punktur (b,a) á grafi andhverfa vísisfallsins.

3. Hliðrun fallsins til hægri eða vinstri og speglun þess um y-ásinn hafa áhrif á skilgreiningarmengið.

5. Nei. Láfella benti til takmarkana á myndmenginu, en myndmengi sérhvers lografalls á almennu formi er mengi allra rauntalna.

7. Skilgreiningarmengi: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$; myndmengi: $(-\infty,\infty)$

9. Skilgreiningarmengi: $\left(-\frac{17}{4},\infty\right)$; myndmengi: $(-\infty,\infty)$

11. Skilgreiningarmengi: $(5,\infty)$; lóðfella: $x=5$

13. Skilgreiningarmengi: $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$; lóðfella: $x=-\frac{1}{3}$

15. Skilgreiningarmengi: $(-3,\infty)$; lóðfella: $x=-3$

17. Skilgreiningarmengi: $\left(\frac{3}{7},\infty\right)$; lóðfella:

$x=\frac{3}{7}$; endahegðun: þegar $x\to\left(\frac{3}{7}\right)^+, f(x)\to-\infty$ og þegar $x\to\infty, f(x)\to\infty$

19. Skilgreiningarmengi: $(-3, \infty)$; lóðfella: $x = -3$; endahegðun: þegar $x \to -3^+$ stefnir $f(x) \to -\infty$ og þegar $x \to \infty$ stefnir $f(x) \to \infty$

21. Skilgreiningarmengi: $(1, \infty)$; myndmengi: $(-\infty, \infty)$; lóðfella: $x = 1$; skurðpunktur við x-ás: $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$; enginn skurðpunktur við y-ás

23. Skilgreiningarmengi: $(-\infty, 0)$; myndmengi: $(-\infty, \infty)$; lóðfella: $x = 0$; skurðpunktur við x-ás: $(-e^2, 0)$; enginn skurðpunktur við y-ás

25. Skilgreiningarmengi: $(0, \infty)$; myndmengi: $(-\infty, \infty)$; lóðfella: $x = 0$; skurðpunktur við x-ás: $(e^3, 0)$; enginn skurðpunktur við y-ás

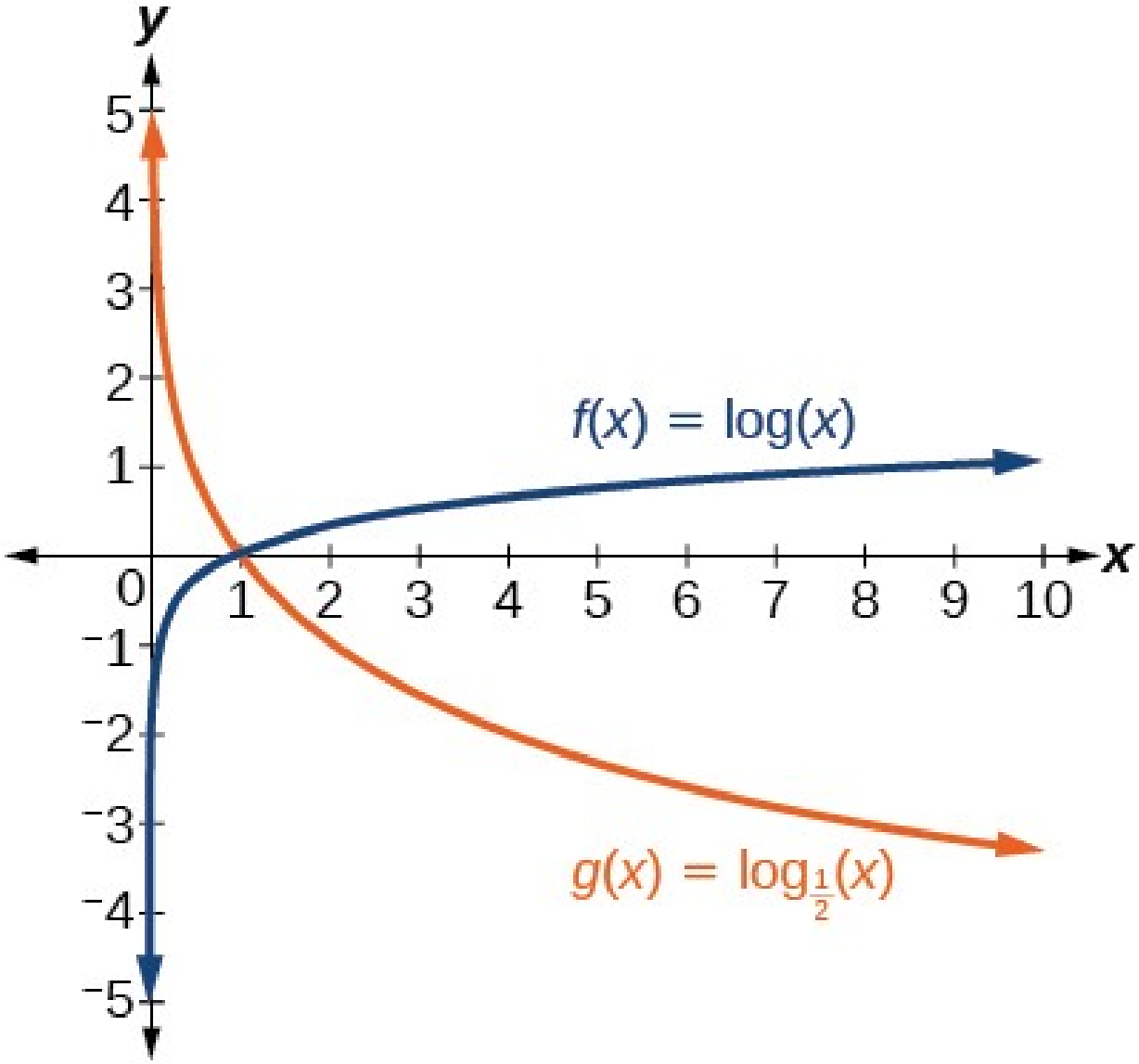
27. B

29. C

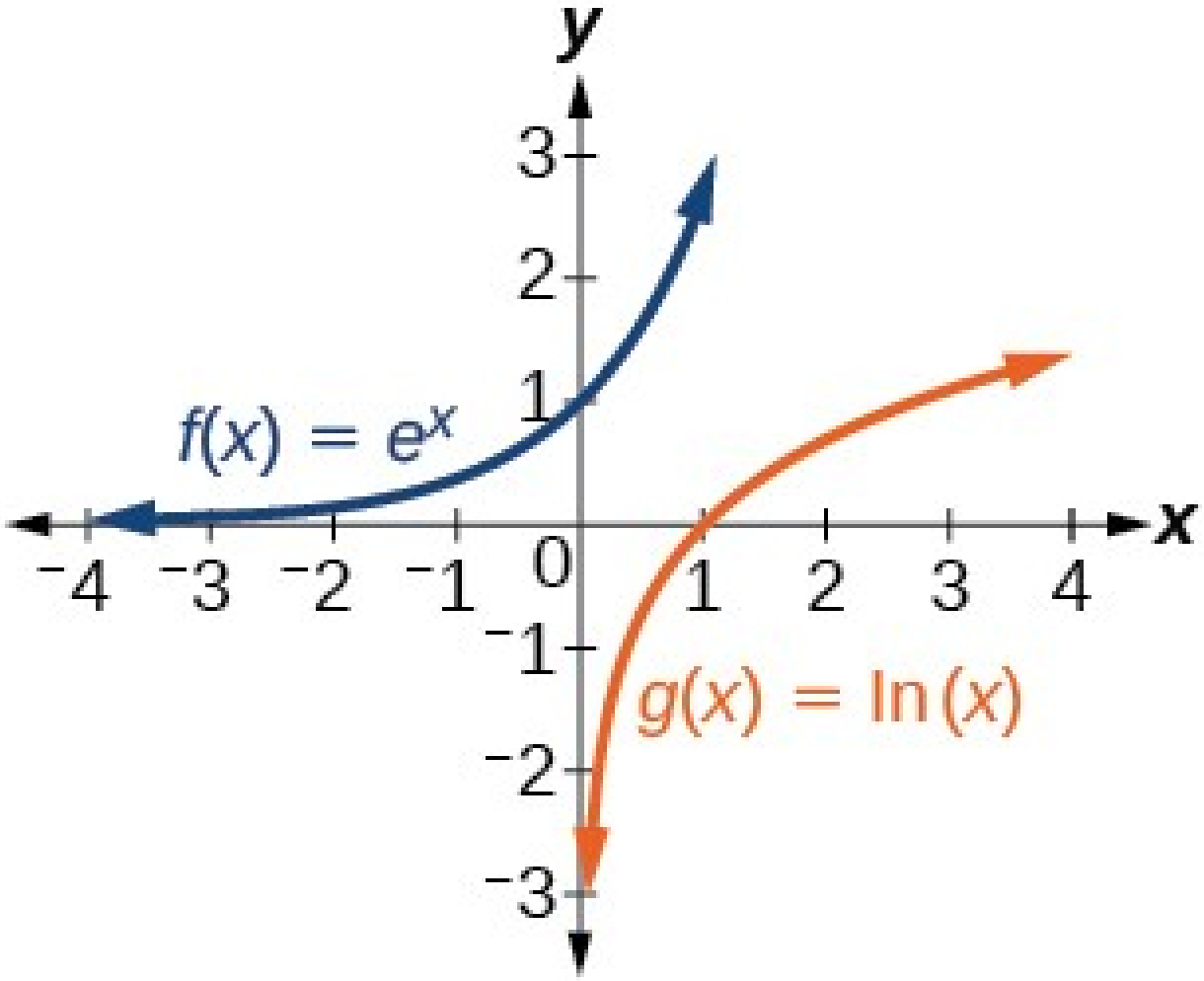
31. B

33. C

35.

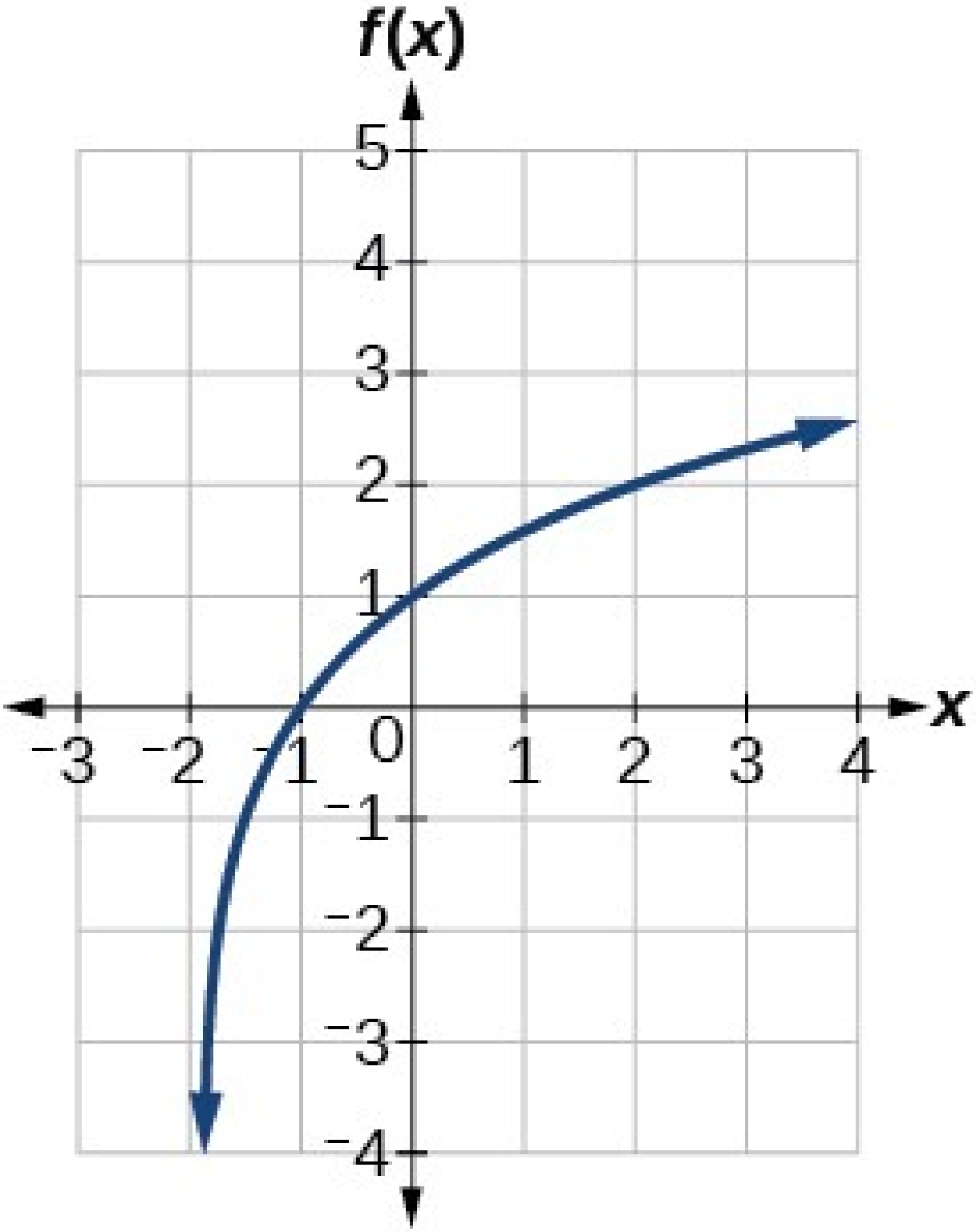


37.

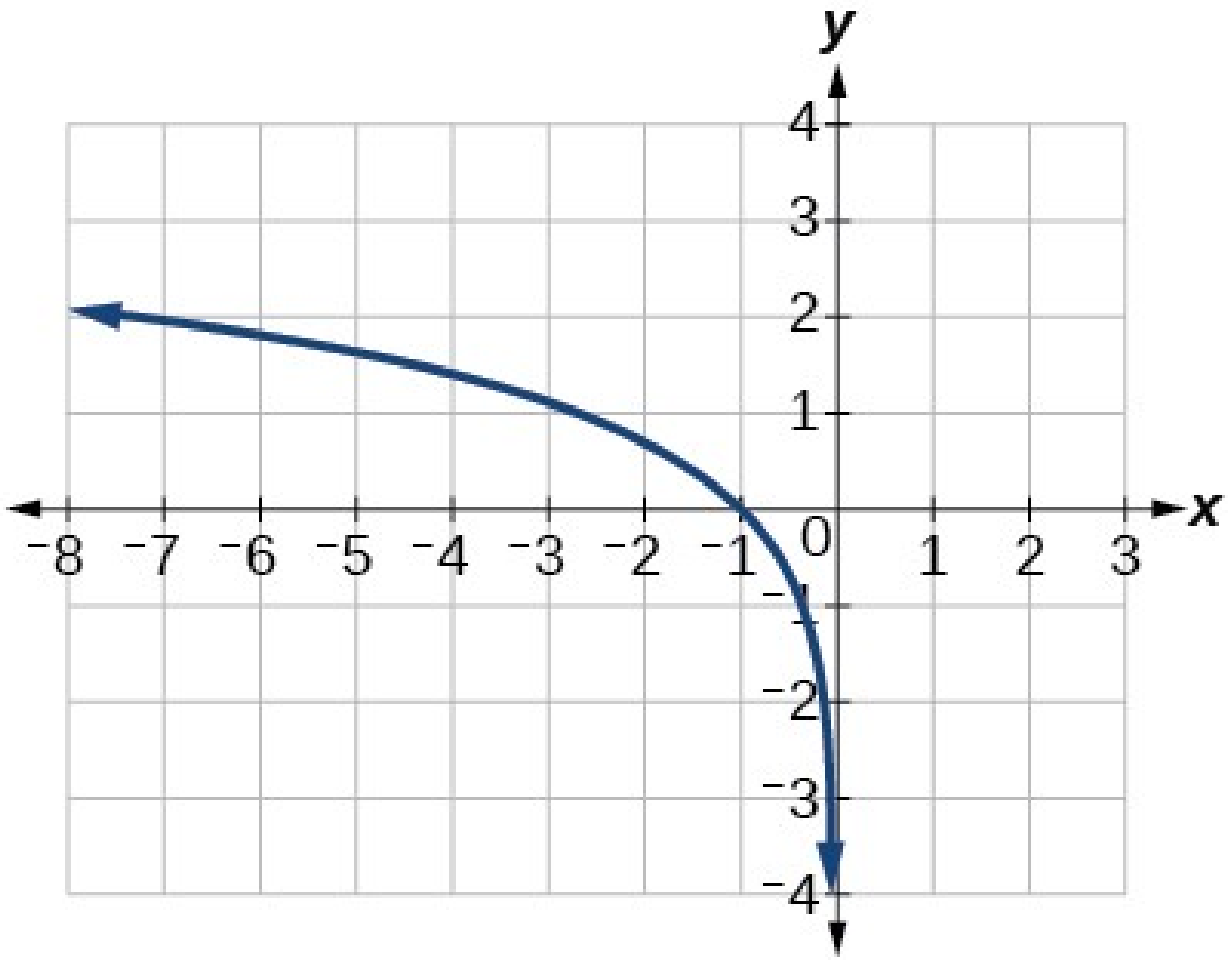


39. C

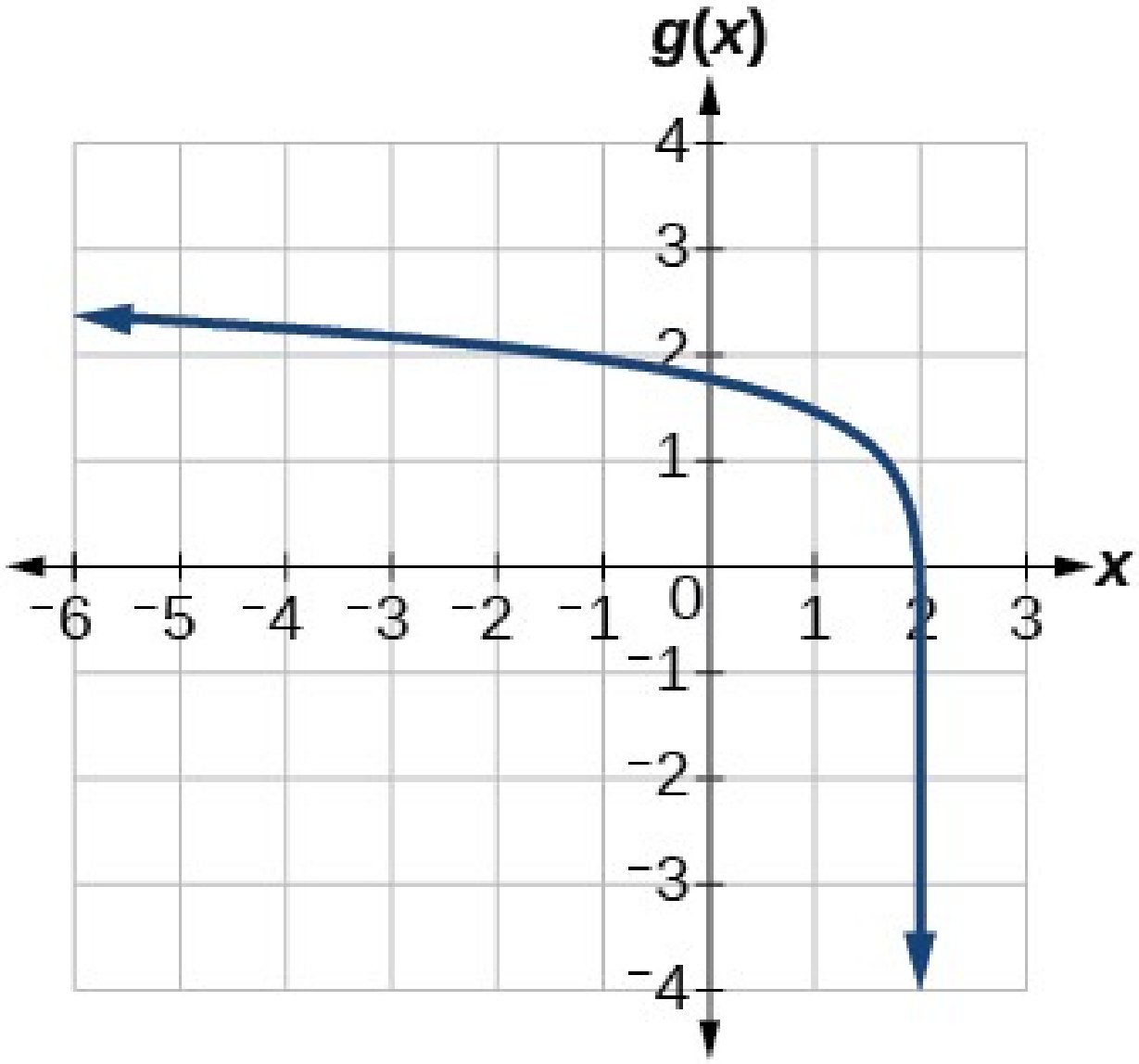
41.



43.



45.



47.

$$f(x)=\log_2(-(x-1))$$

49.

$$f(x)=3\log_4(x+2)$$

51.

$$x=2$$

53.

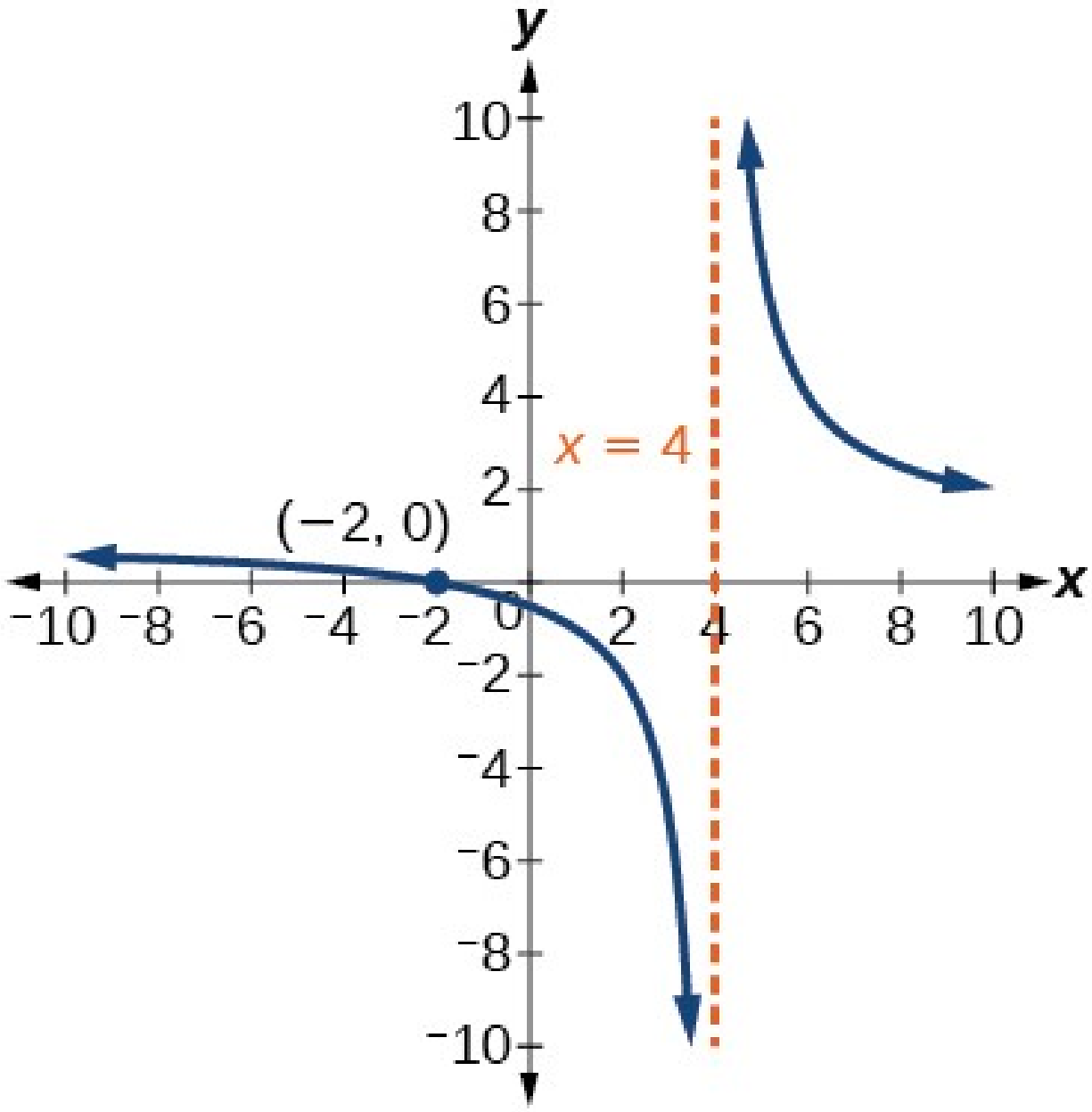
$$x\approx 2\ ,303$$

55.

$$x \approx -0{,}472$$

57. Gröf $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ og $g(x) = -\log_2(x)$ virðast vera eins. Tilgáta: Fyrir sérhverja jákvæða grunntölu $b \neq 1$, gildir að $\log_b(x) = -\log_{\frac{1}{b}}(x)$.

59. Munið að viðfang lografalls verður að vera jákvætt. Við ákvarðum því hvar $\frac{x+2}{x-4} > 0$. Á grafi fallsins $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$, sést að grafið liggur ofan x-ássins á bilinu $(-\infty, -2)$ og aftur hægra megin við lóðfelluna, það er á $(4, \infty)$. Skilgreiningarmengið er því $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.



4.5 Kaflaverkefni

1. Sérhverja rótarstæðu má umrita sem stæðu með ræðum veldisvísi svo beita megi veldareglunni og auðvelda þannig útreikning logranns. Því gildir $\log_b\left(x^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\log_b(x)$.

3.

$$\log_b(2)+\log_b(7)+\log_b(x)+\log_b(y)$$

5.

$$\log_b(13)-\log_b(17)$$

7.

$$-k\ln(4)$$

9.

$$\ln(7xy)$$

11.

$$\log_b(4)$$

13.

$$\log_b(7)$$

15.

$$15\log(x)+13\log(y)-19\log(z)$$

17.

$$\frac{3}{2}\log(x)-2\log(y)$$

19.

$$\frac{8}{3}\log(x)+\frac{14}{3}\log(y)$$

21.

$$\ln(2x^7)$$

23.

$$\log\left(\frac{xz^3}{\sqrt{y}}\right)$$

25.

$$\log_7(15)=\frac{\ln(15)}{\ln(7)}$$

27.

$$\log_{11}(5)=\frac{\log_5(5)}{\log_5(11)}=\frac{1}{b}$$

29.

$$\log_{11}\left(\frac{6}{11}\right)=\frac{\log_5\left(\frac{6}{11}\right)}{\log_5(11)}=\frac{\log_5(6)-\log_5(11)}{\log_5(11)}=\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-1$$

31.

$$3$$

33.

$$2{,}81359$$

35.

$$0{,}93913$$

37.

$$-2{,}23266$$

39. $x=4$; Samkvæmt deilingarreglunni: $\log_6(x+2)-\log_6(x-3)=\log_6\left(\frac{x+2}{x-3}\right)=1$.

Umritum sem vísisjöfnu og einangrum x:

$6^1 = \frac{x+2}{x-3}$ (eftir að báðar hliðar eru margfaldaðar með $(x-3)$)

$6(x-3) = x+2$ (dreifireglunni beitt vinstra megin)

$6x-18 = x+2$ (bætum 18 við báðar hliðar og drögum x frá báðum hliðum)

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

Við prófun sjáum við að $\log_6(4+2)-\log_6(4-3)=\log_6(6)-\log_6(1)$ er skilgreint og því er $x=4$.

41. Látum b og n vera jákvæðar heiltölur stærri en 1. Samkvæmt grunnskiptireglunni gildir þá $\log_b(n)=\frac{\log_n(n)}{\log_n(b)}=\frac{1}{\log_n(b)}$.

4.6 Kaflaverkefni

1. Athugið fyrst hvort umrita megi jöfnuna þannig að báðar hliðar hafi sama grunn. Ef svo er má setja veldisvísana jafna. Ef ekki er hægt að umrita jöfnuna þannig er tekinn logri af báðum hliðum og lograreglur notaðar til að leysa hana.

3. Nota má eintæknieiginleikann ef umrita má báðar hliðar jöfnunnar sem einn logra með sama grunn. Þá má setja viðföngin jöfn og leysa jöfnuna sem fæst með algebru. Ekki má nota eintæknieiginleikann þegar ekki er hægt að umrita hvora hlið sem einn logra með sama grunn.

5.

$$x = -\frac{1}{3}$$

7.

$$n = -1$$

9.

$$b = \frac{6}{5}$$

11.

$$x = 10$$

13. Engin lausn

15.

$$p = \log\left(\frac{17}{8}\right) - 7$$

17.

$$k = -\frac{\ln(38)}{3}$$

19.

$$x = \frac{\ln\left(\frac{38}{3}\right) - 8}{9}$$

21.

$$x = \ln 12$$

23.

$$x = \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right) - 3}{8}$$

25. Engin lausn

27.

$$x=\ln\left(3\right)$$

29.

$$10^{-2}=\frac{1}{100}$$

31.

$$n=49$$

33.

$$k=\frac{1}{36}$$

35.

$$x=\frac{9-e}{8}$$

37.

$$n=1$$

39. Engin lausn

41. Engin lausn

43.

$$x=\pm\frac{10}{3}$$

45.

$$x=10$$

47.

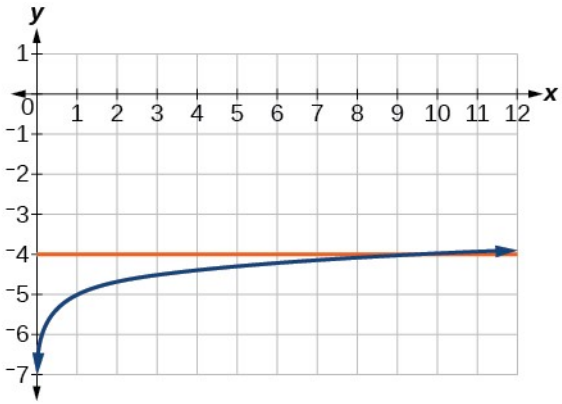
$$x=0$$

49.

$$x=\frac{3}{4}$$

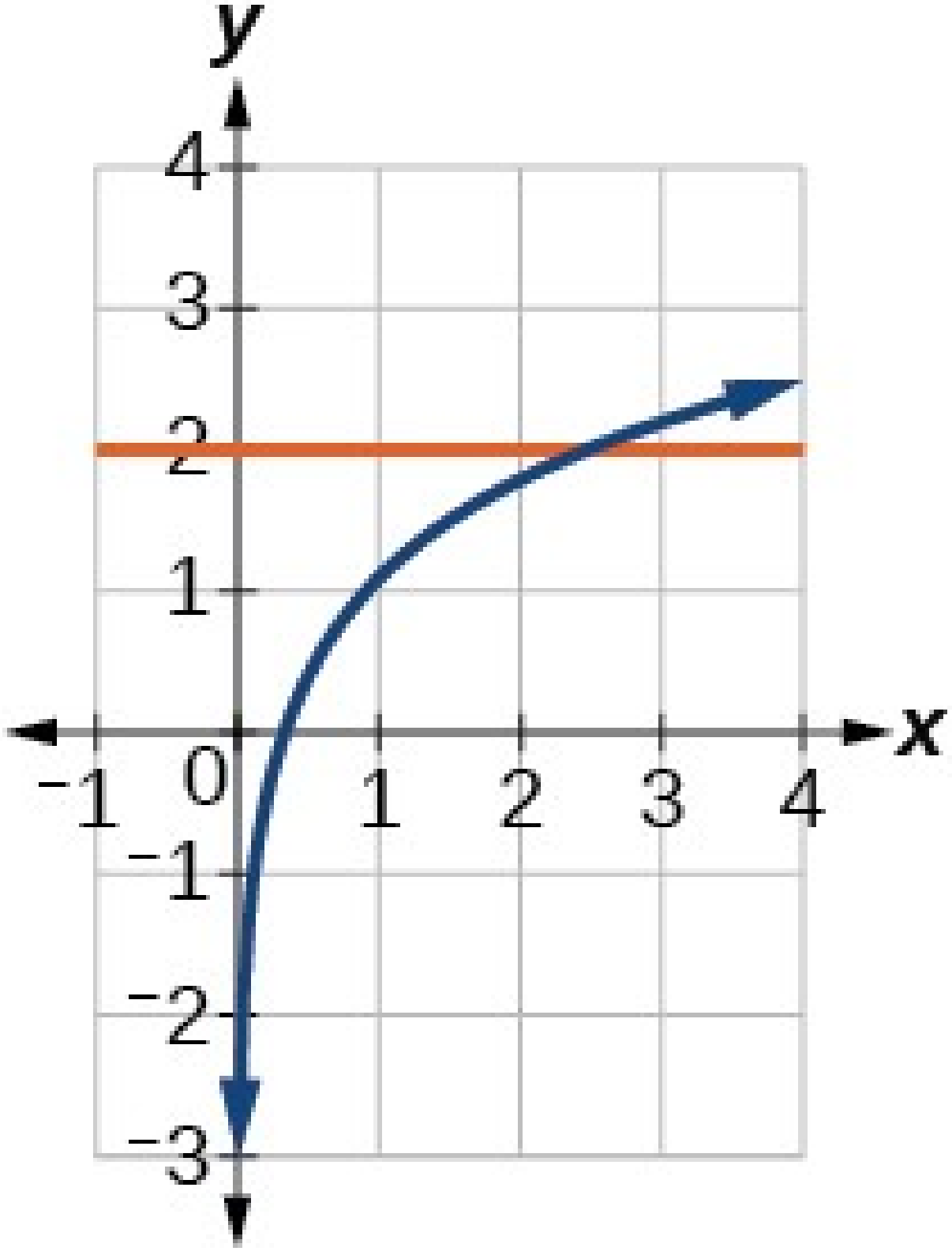
51.

$$x=9$$



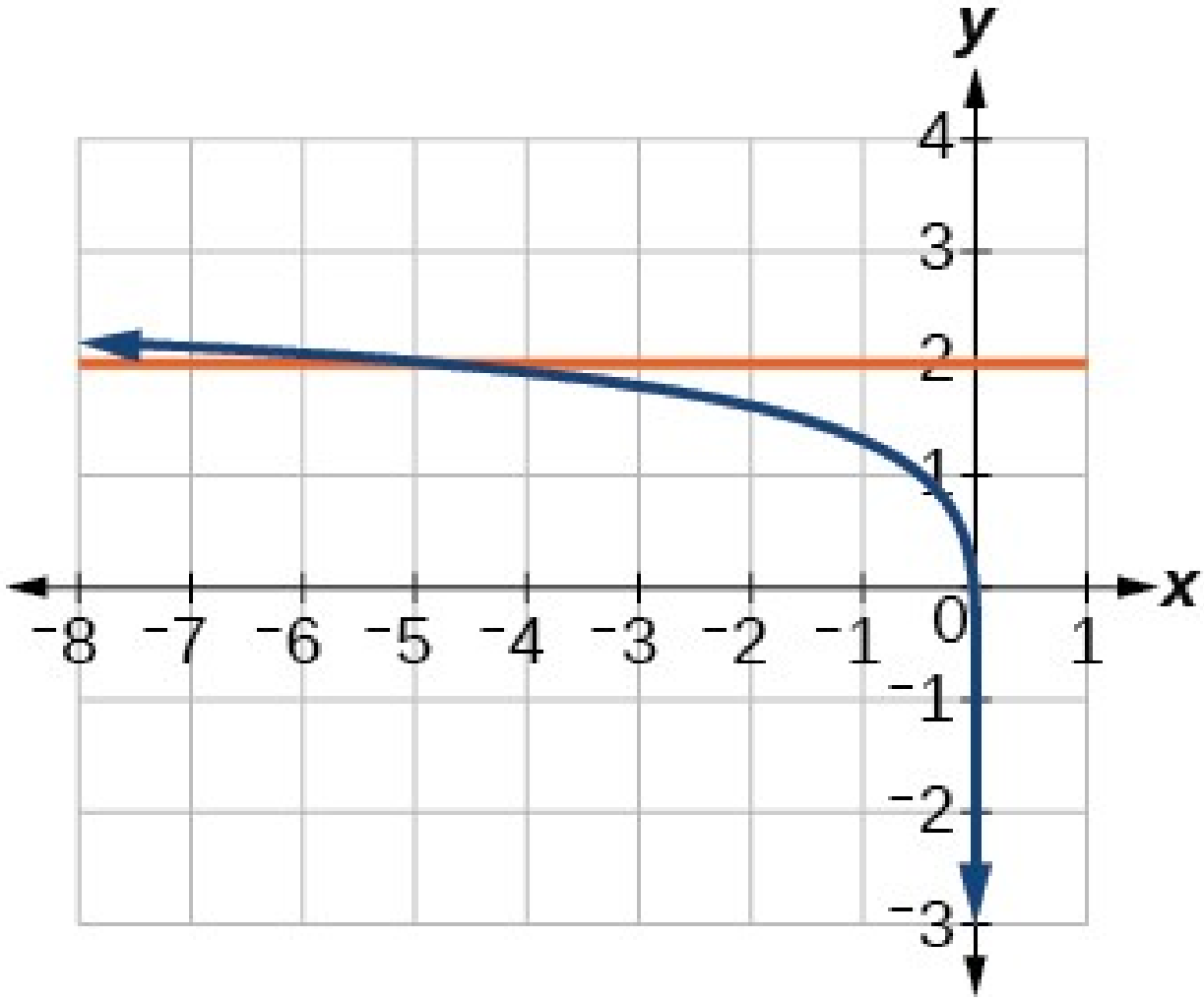
53.

$$x = \frac{e^2}{3} \approx 2{,}5$$



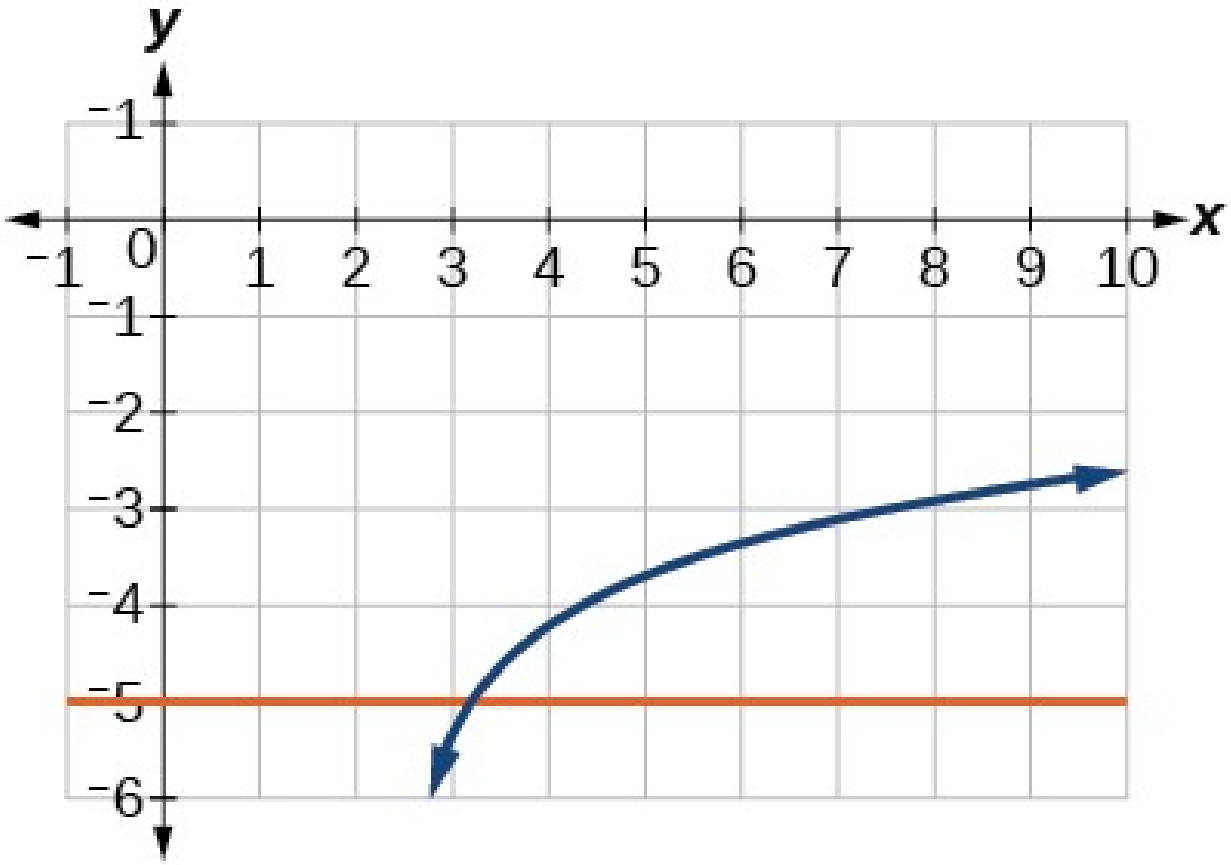
55.

$x = -5$

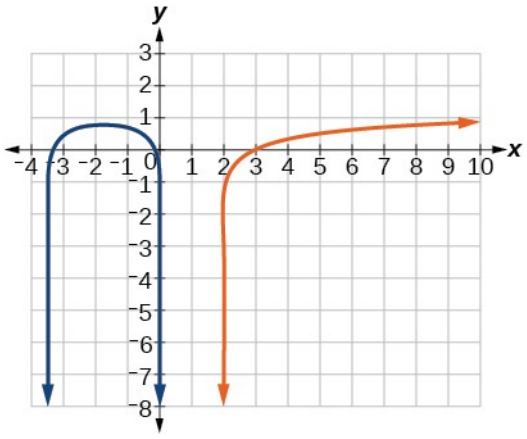


57.

$$x=\frac{e+10}{4}\approx 3{,}2$$

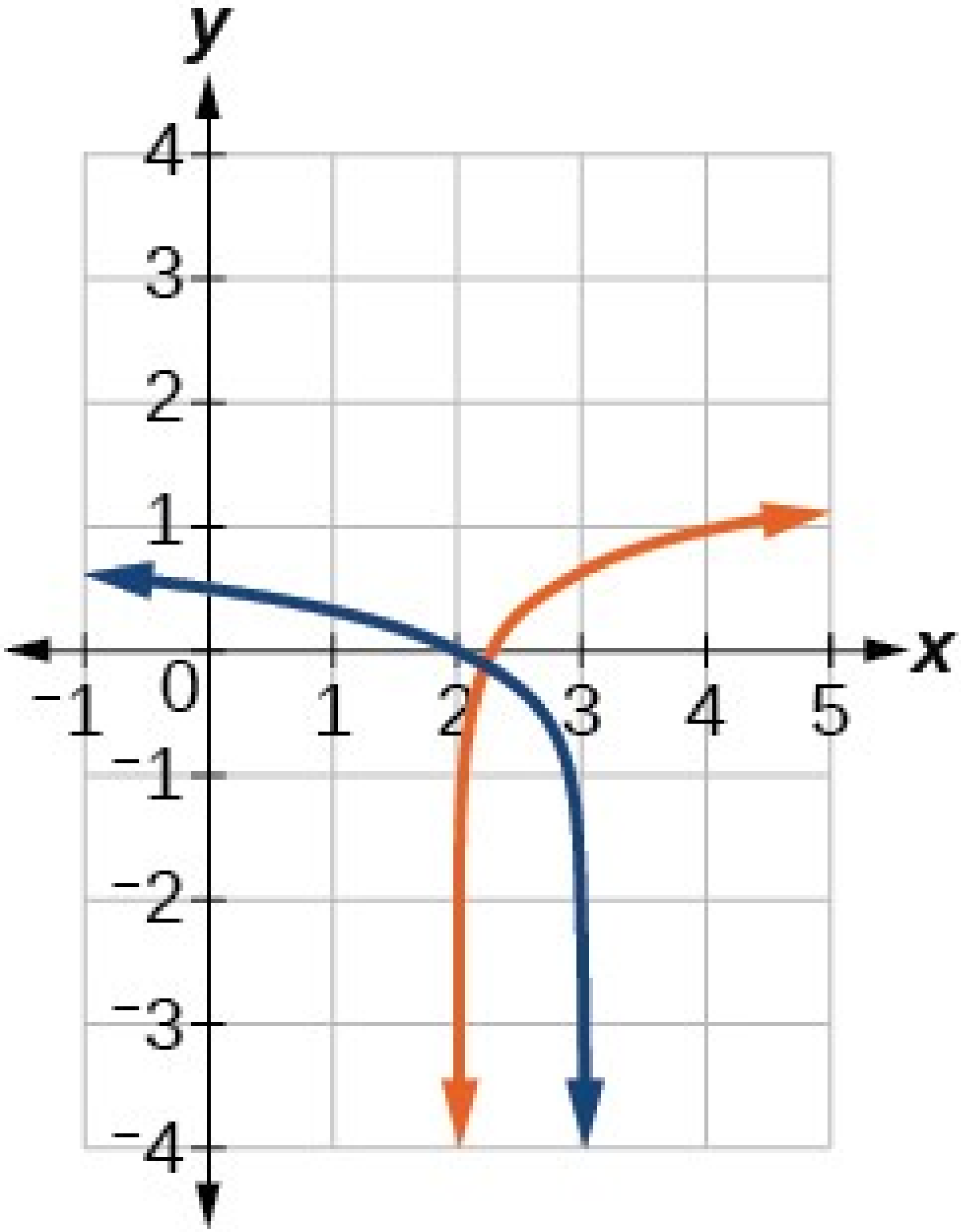


59. Engin lausn



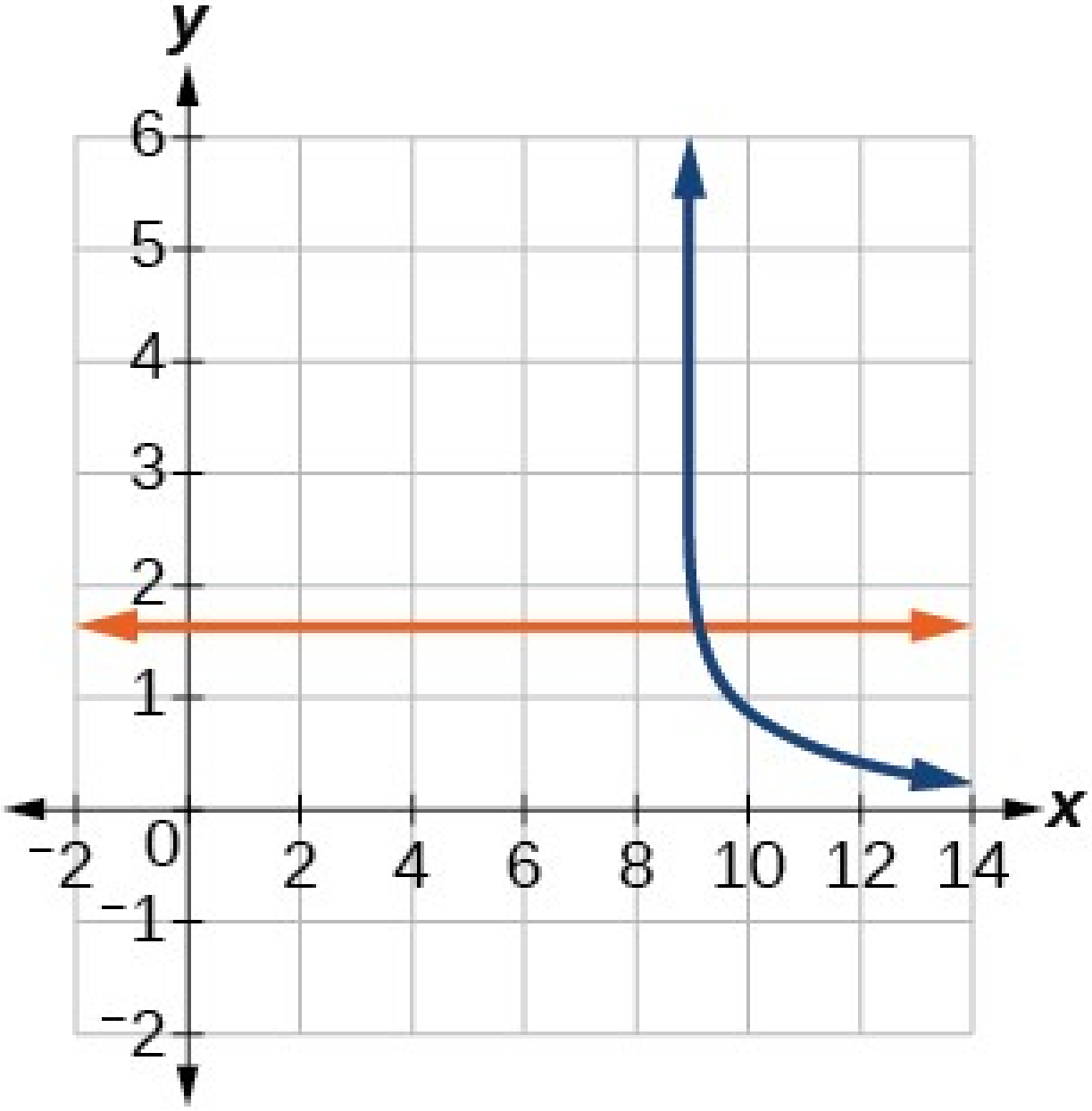
61.

$$x = \frac{11}{5} \approx 2{,}2$$

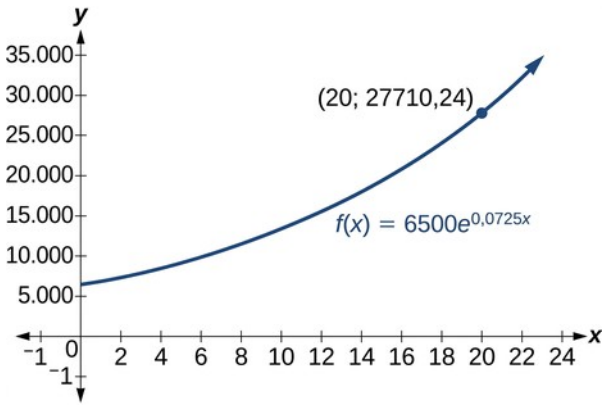


63.

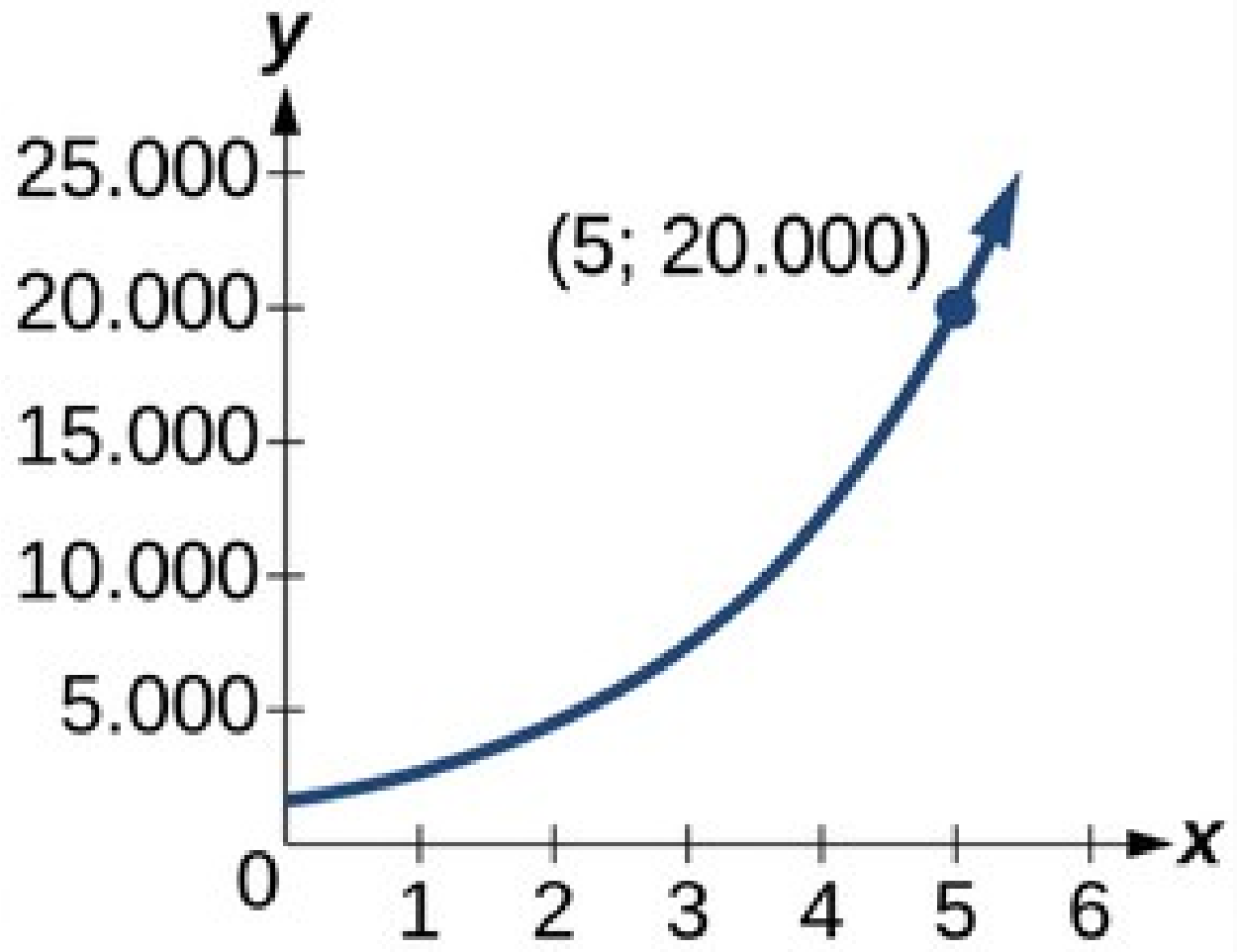
$$x=\frac{101}{11}\approx 9{,}2$$



65. um $ 27.710,24



67. um 5 ár



69.

$$\frac{\ln\left(17\right)}{5} \approx 0{,}567$$

71.

$$x = \frac{\log\left(38\right) + 5\ \log\left(3\right)}{4\ \log\left(3\right)} \approx 2{,}078$$

73.

$$x \approx 2{,}2401$$

75.

$$x \approx -44655.7143$$

77. um 5,83

79.

$$t = \ln\left(\left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$$

81.

$$t = \ln\left(\left(\frac{T - T_s}{T_0 - T_s}\right)^{-\frac{1}{k}}\right)$$

4.7 Kaflaverkefni

1. Helmingunartími er mælikvarði á hrörnun og tengist því vísishrörnunarlíkönum. Helmingunartími efnis eða stærðar er sá tími sem það tekur helming upphaflegs magns efnisins eða stærðarinnar að hrörna.

3. Tvöföldunartími er mælikvarði á vöxt og tengist því vísisvaxtarlíkönum. Tvöföldunartími efnis eða stærðar er sá tími sem það tekur upphaflegt magn efnisins eða stærðarinnar að tvöfaldast.

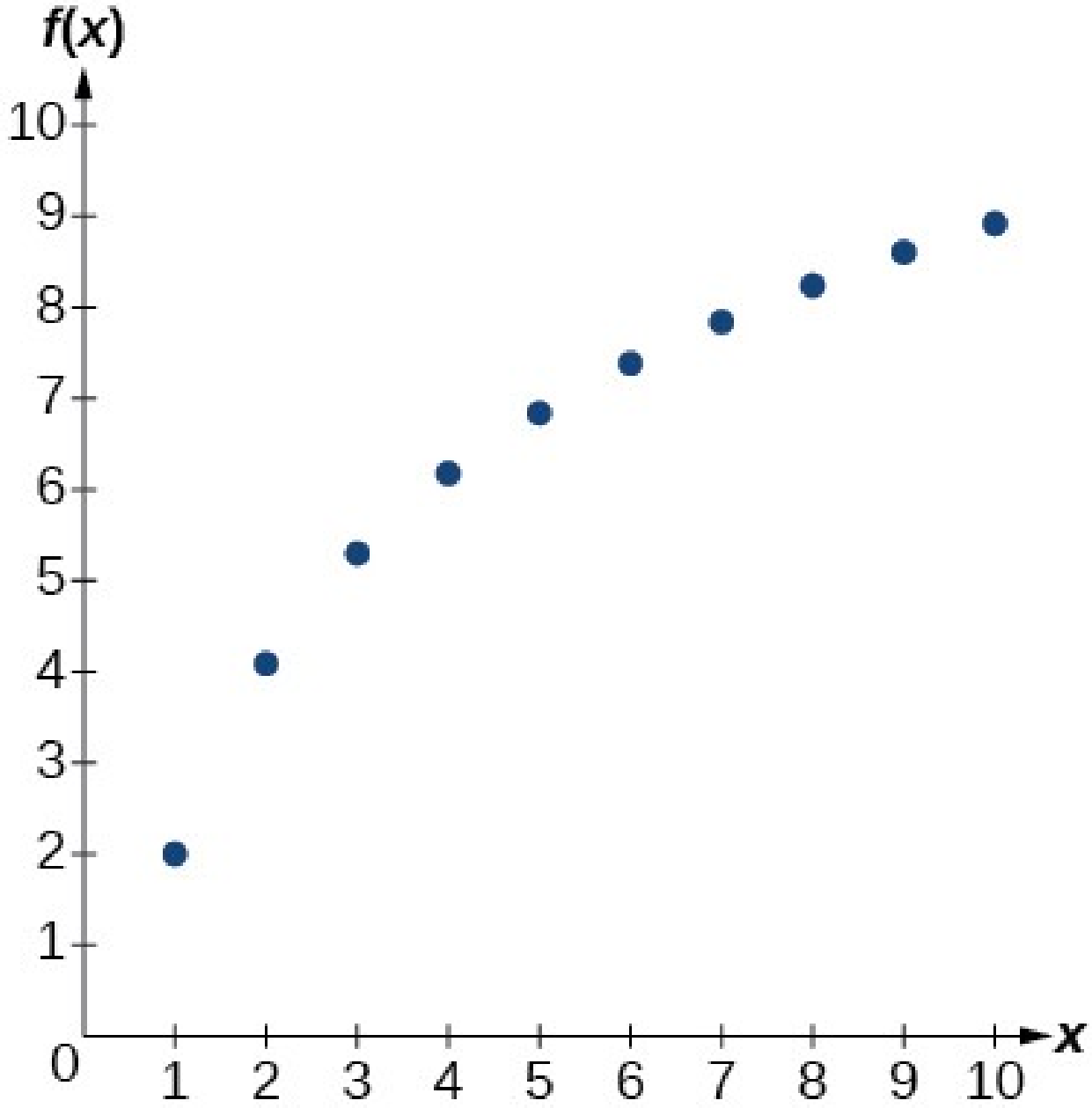
5. Stærðargráða er næsta veldi af tíu sem lýsir vísisvexti stærðar. Hún gefur einnig nálgun á staðsetningu á logaskala. Dæmi um svar: Stærðargráður nýtast við samanburð talna sem eru mjög ólíkar að stærð. Massi Satúrnusar er til dæmis 95 sinnum meiri en massi jarðar. Það jafngildir því að segja að massi Satúrnusar sé um 10^2 sinnum, eða 2 stærðargráðum, meiri en massi jarðar.

7. $f\left(0\right) \approx 16{,}7$; upphafsmagnið er um 16,7 einingar.

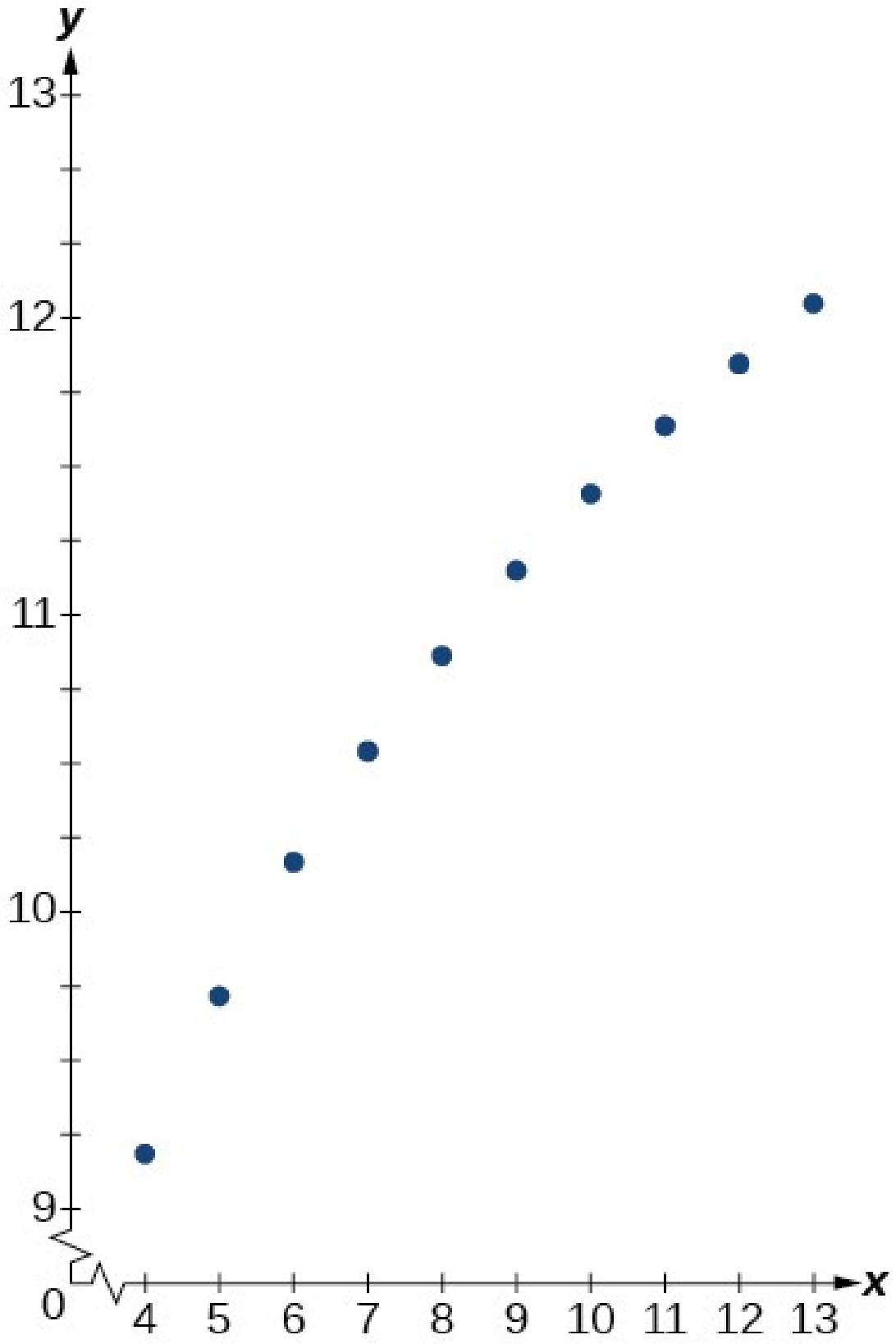
9. 150

11. vísisfall; $f\left(x\right) = 1{,}2^x$

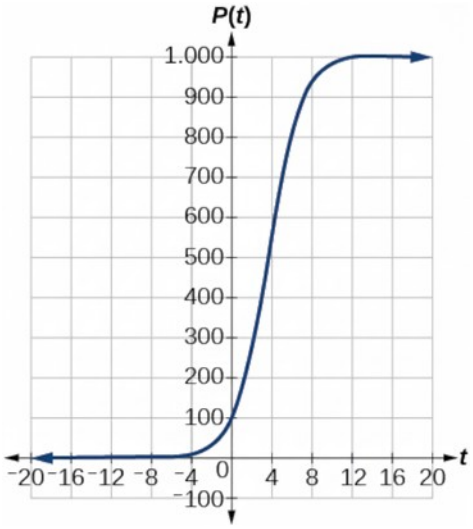
13. logríska



15. logríska


y
13
12
11
10
9
0
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
x

17.



19. um 1,4 ár

21. um 7,3 ár

23. 4 helmingunartímar; 8,18 mínútur

25.

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{S}{S_0}\right)$$
$$\log\left(\frac{S}{S_0}\right) = \frac{3}{2}M$$
$$\frac{S}{S_0} = 10^{\frac{3M}{2}}$$
$$S = S_0 10^{\frac{3M}{2}}$$

27. Látum $y = b^x$, þar sem b er einhver rauntala sem er ekki neikvæð og $b \neq 1$. Þá gildir:

$$\ln(y) = \ln(b^x)$$
$$\ln(y) = x\ln(b)$$
$$e^{\ln(y)} = e^{x\ln(b)}$$
$$y = e^{x\ln(b)}$$

29. $A = 125\ e^{(-0{,}3567\,t)}$; $A \approx 43$ mg

31. um 60 dagar

33. $A\,(t) = 250\ e^{(-0{,}00822\,t)}$; helmingunartími: um 84 mínútur

35. $r \approx -0{,}0667$, So the hourly decay rate is about 6,67 %

37. $f\,(t) = 1350\ e^{(0{,}03466\,t)}$; eftir 3 klukkustundir: $P\,(180) \approx 691.200$

39. $f\,(t) = 256\ e^{(0{,}068110\,t)}$; tvöföldunartími: um 10 mínútur

41. um 88 mínútur

43. $T\left(t\right)=90\ e^{\left(-0{,}008377\ t\right)}+75$, þar sem t er mælt í mínútum.

45. um 113 mínútur

47.

$$\log\left(x\right)=1{,}5;\quad x\approx 31{,}623$$

49. MMS-stærð: 5,82

51.

$$N\left(3\right)\approx 71$$

53. C

4.8 Kaflaverkefni

1. Lógistísk líkön henta best aðstæðum þar sem gildi eru takmörkuð. Stofnar geta til dæmis ekki vaxið endalaust þar sem auðlindir á borð við fæðu, vatn og rými eru takmarkaðar. Lógistískt líkan lýsir því stofnum best.

3. Aðhvarfsgreining felst í að finna jöfnu sem fellur best að gefnu safni gagnapunkta. Til að framkvæma aðhvarfsgreiningu með grafískri reiknivél eru punktarnir fyrst skráðir með valmyndunum STAT og síðan EDIT. Næst er dreifiritið teiknað með STAT PLOT. Lögun gagnapunktanna á dreifiritinu getur gefið til kynna hvaða gerð aðhvarfs skuli nota. Þegar það hefur verið ákveðið er viðeigandi aðhvarfsskipun valin í valmyndunum STAT og síðan CALC.

5. Skurðpunktur við y-ás á grafi lógistískrar jöfnu samsvarar upphaflegum stofnstærð í stofnlíkaninu.

7. C

9. B

11. $P\left(0\right)=22;\ 175$

13.

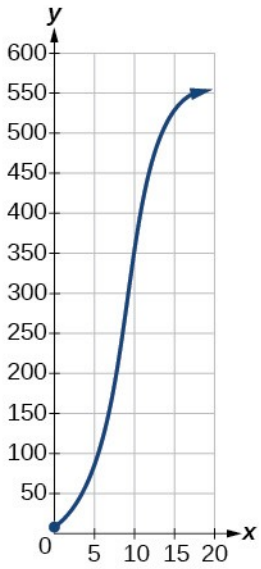
$$p\approx 2{,}67$$

15. *skurðpunktur við y-ás:* $\left(0\,,15\right)$

17. 4 koi-fiskar

19. um 6,8 mánuðir.

21.



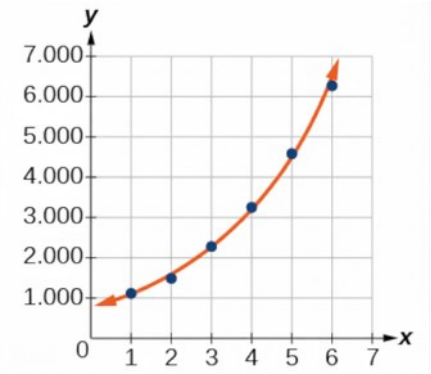
23. Um 38 úlfar

25. Um 8,7 ár

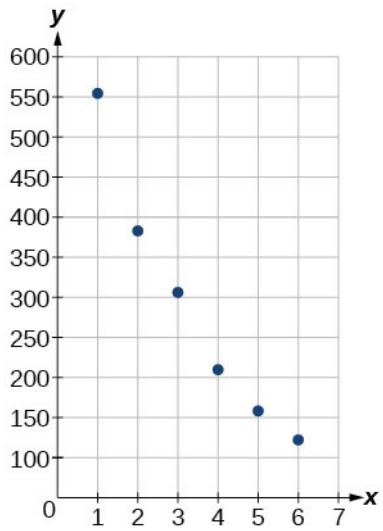
27.

$$f\left(x\right)=776{,}682\left(1{,}426\right)^{x}$$

29.



31.



33.

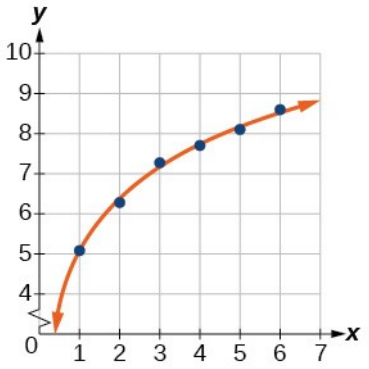
$$f\left(x\right)=731{,}92\ e^{-0{,}3038\ x}$$

35. Þegar $f\left(x\right)=250, x\approx 3{,}6$

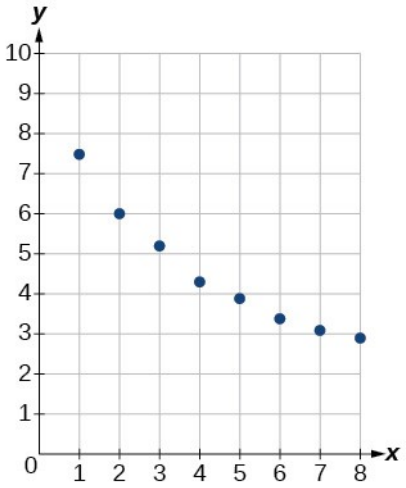
37.

$$y=5{,}063+1{,}934\ \log\left(x\right)$$

39.



41.



43. Þegar $f\left(10\right)\approx 2{,}3$

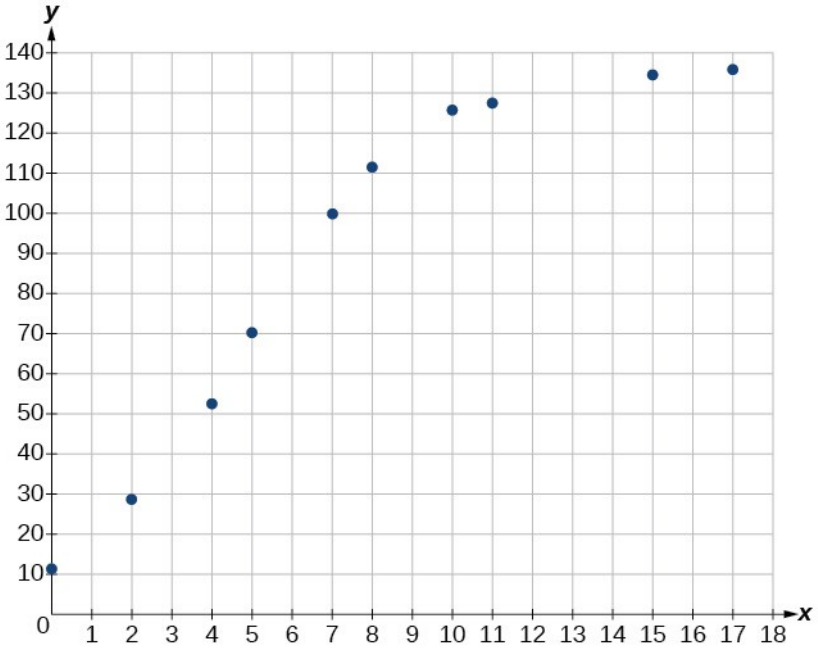
45. Þegar $f\left(x\right)=8, x\approx 0{,}82$

47.

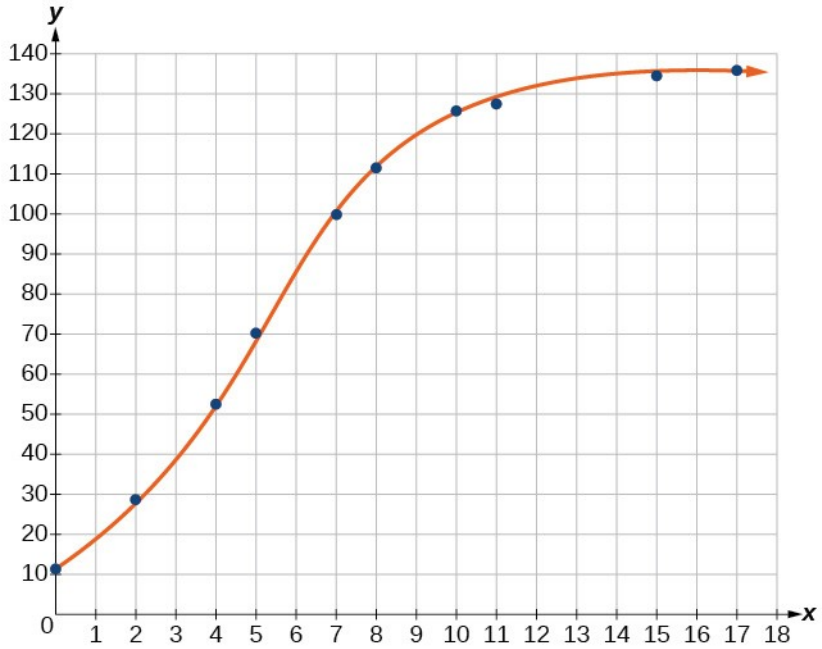
$$f\left(x\right)=\frac{25{,}081}{1+3{,}182\ e^{-0{,}545\ x}}$$

49. Um 25

51.



53.



55. Þegar $f\left(x\right)=68$, $x\approx 4{,}9$

57. $f\left(x\right)=1{,}034341\left(1{,}281204\right)^{x}$; $g\left(x\right)=4{,}035510$; aðhvarfsferlarnir eru samhverfir um $y=x$ og virðast því vera andhverf föll.

59.

$$f^{-1}(x)=\frac{\ln(a)-\ln\left(\frac{c}{x}-1\right)}{b}$$

Upprifjunarverkefni

1. exponential decay; The growth factor, $0{,}825$, is between 0 and 1.

3.

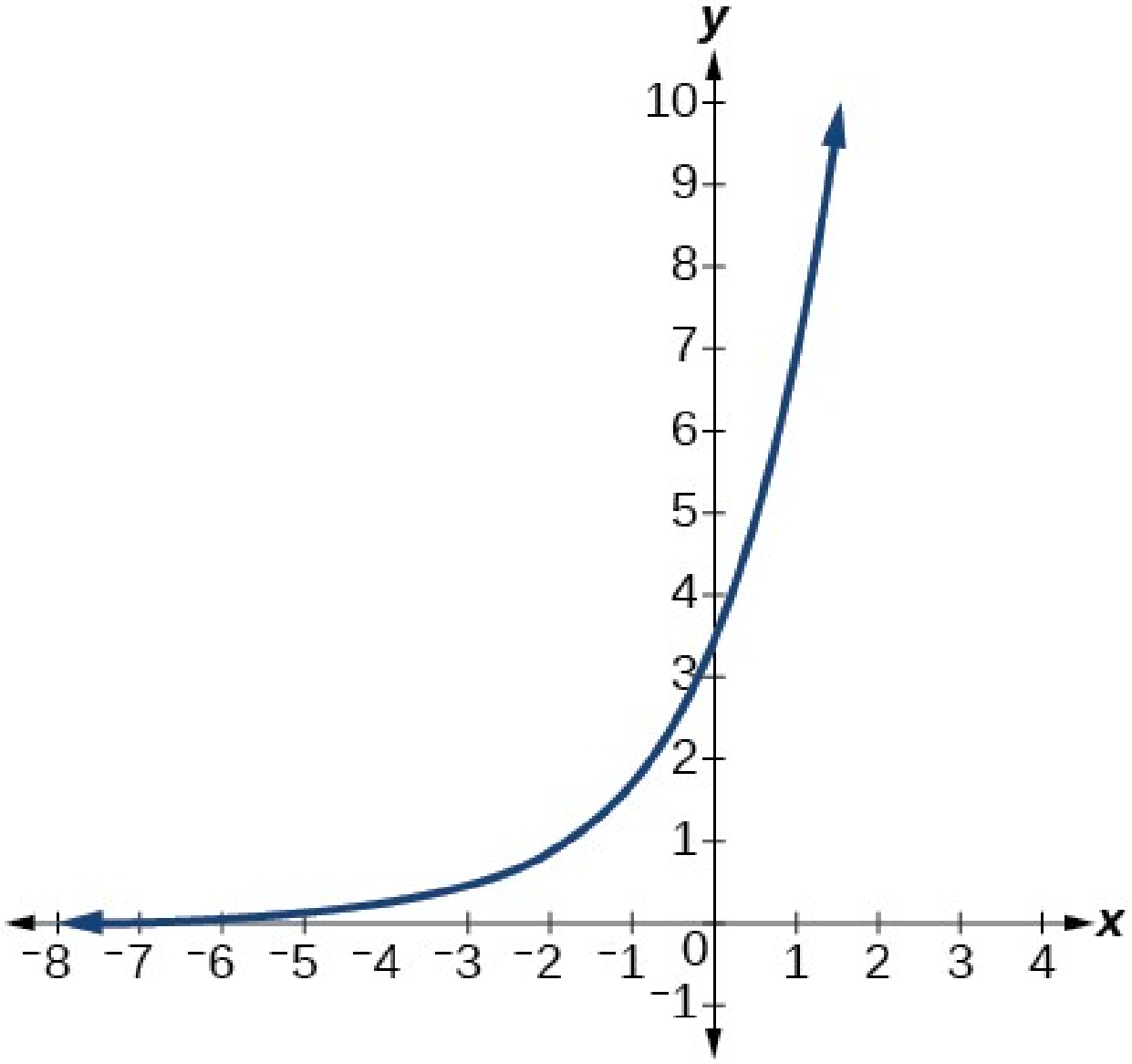
$$y=0{,}25\left(3\right)^{x}$$

5.

$$\$\ 42.888{,}18$$

7. samfelld hrörnun; vaxtarhraðinn er neikvæður.

9. skilgreiningarmengi: allar rauntölur; myndmengi: allar rauntölur sem eru stærri en núll; skurðpunktur við y-ás: (0; 3,5);



11. $g\left(x\right)=7\left(6{,}5\right)^{-x}$; skurðpunktur við y-ás: $\left(0,7\right)$; skilgreiningarmengi: allar rauntölur; myndmengi: allar rauntölur stærri en 0.

13.

$$17^{x}=4913$$

15.

$$\log_{a}b=-\frac{2}{5}$$

17.

$$x=64^{\frac{1}{3}}=4$$

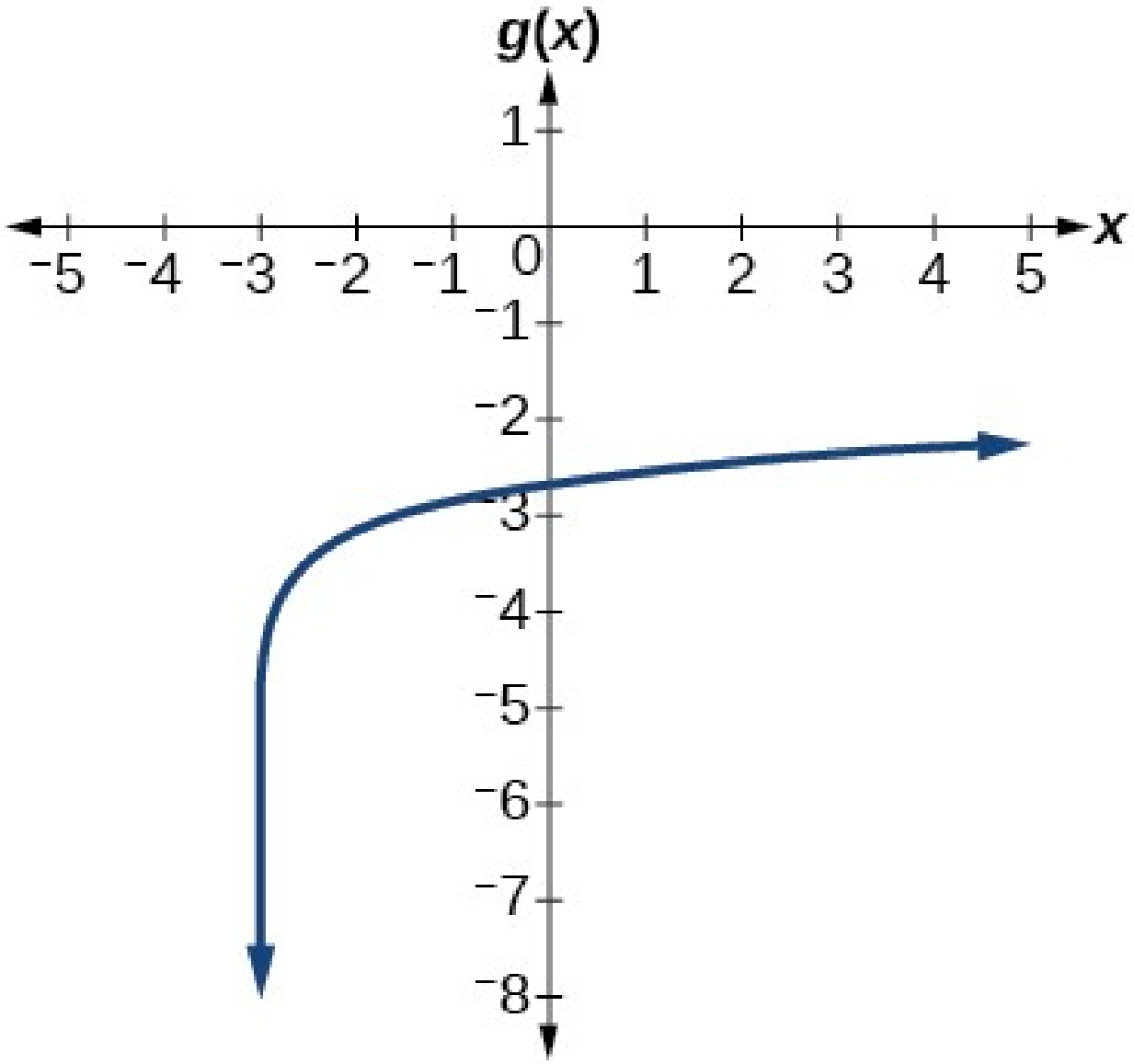
19.

$$\log\left(0\,,000001\right)=-6$$

21.

$$\ln\left(e^{-0,8648}\right)=-0,8648$$

23.



25. Skilgreiningarmengi: $x>-5$; lóðfella: $x=-5$; endahegðun: þegar $x\to-5^{+}, f\left(x\right)\to-\infty$ og þegar $x\to\infty, f\left(x\right)\to\infty$.

27.

$$\log_{8}(65\,x\,y)$$

29.

$$\ln\left(\frac{z}{x\,y}\right)$$

31.

$$\log_{y}(12)$$

33.

$$\ln(2)+\ln(b)+\frac{\ln(b+1)-\ln(b-1)}{2}$$

35.

$$\log_{7}\left(\frac{v^{3}w^{6}}{\sqrt[3]{u}}\right)$$

37.

$$x=\frac{\frac{\log(125)}{\log(5)}+17}{12}=\frac{5}{3}$$

39.

$$x=-3$$

41. Engin lausn

43. Engin lausn

45.

$$x=\ln(11)$$

47.

$$a=e^{4}-3$$

49.

$$x=\pm\frac{9}{5}$$

51. um 5,45 ár

53.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2^{4x}-1}$$

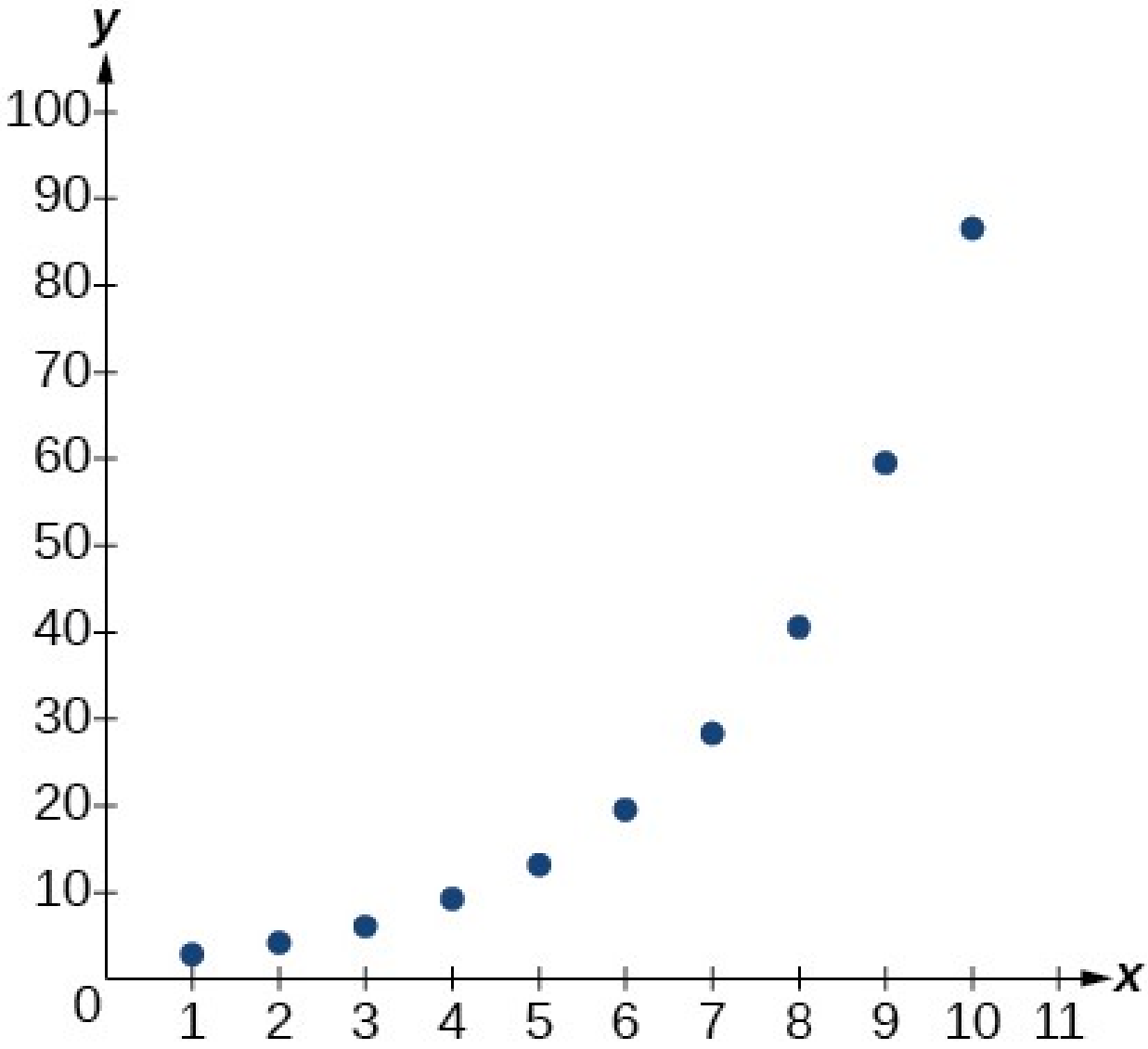
55.

$$f(t)=300\,(0{,}83)^t;$$
$$f(24)\approx 3{,}43\,g$$

57. um 45 mínútur

59. um 8,5 dagar

61. vísisfall

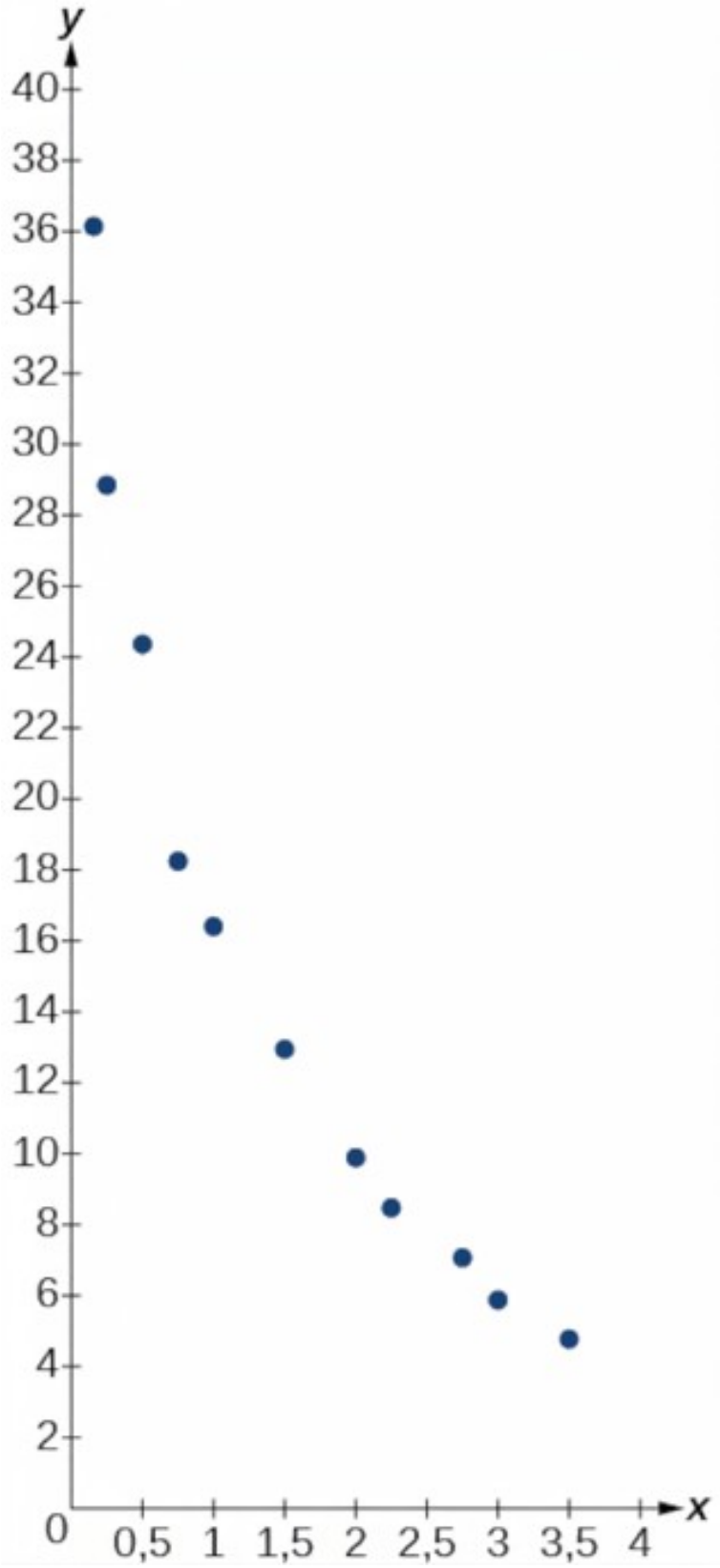


63.

$$y=4\,(0{,}2)^x;\ y=4\,e^{-1{,}609438\,x}$$

65. um 7,2 dagar

67. logríslt; $y=16{,}68718-9{,}71860\,\ln(x)$



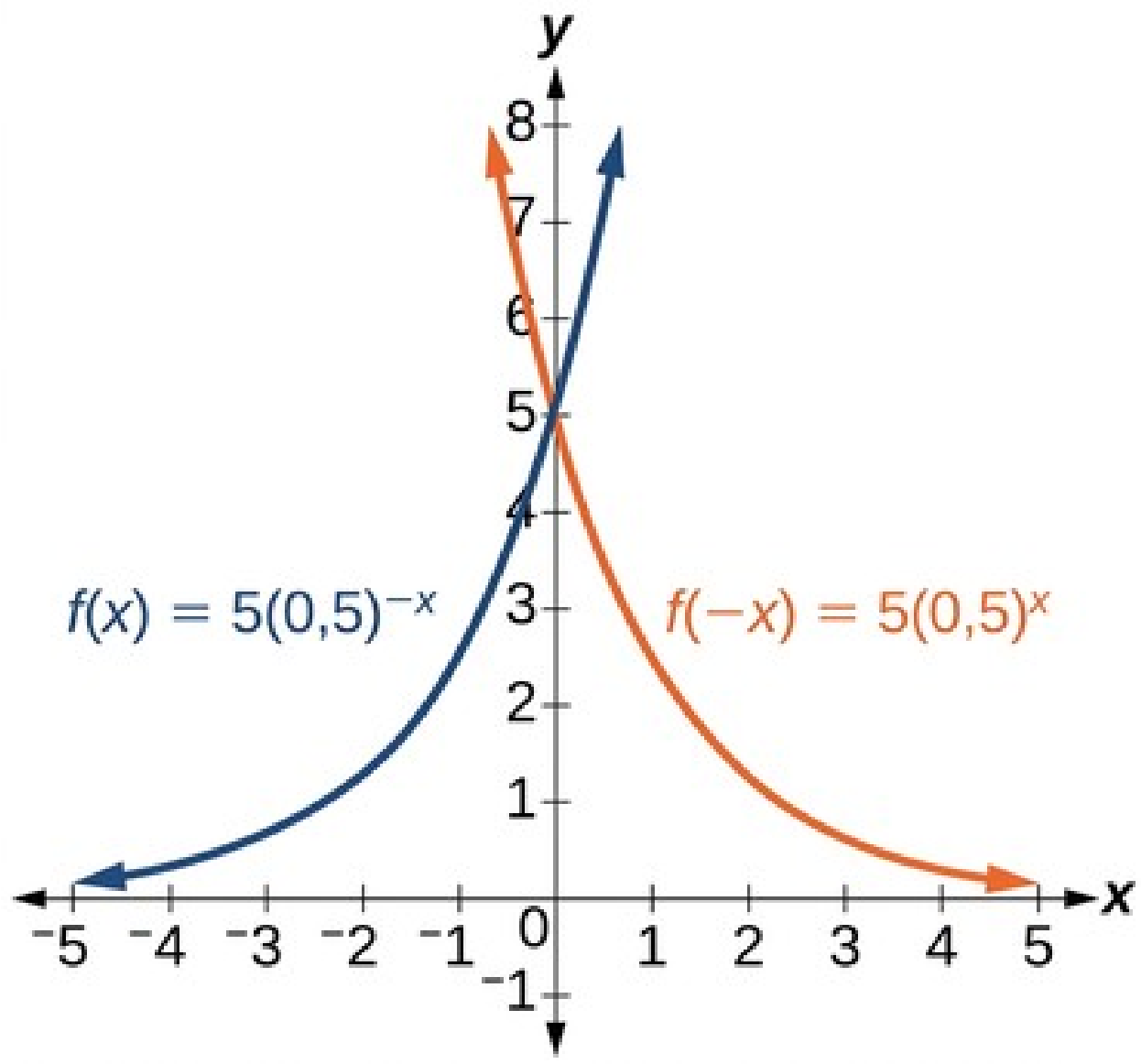
Æfingapróf

1. Um 13 höfrungar.

3.

$$\$\ 1.947$$

5. *skurðpunktur við y-ás:* $(0,5)$



7.

$$8{,}5^{a}=614{,}125$$

9.

$$x=\left(\frac{1}{7}\right)^{2}=\frac{1}{49}$$

11.

$$\ln\left(0{,}716\right)\approx-0{,}334$$

13. Skilgreiningarmengi: $x<3$; lóðfella: $x=3$; endahegðun: þegar $x \to 3^-, f(x) \to -\infty$ og þegar $x \to -\infty, f(x) \to \infty$

15.

$$\log_t(12)$$

17.

$$3\ln(y)+2\ln(z)+\frac{\ln(x-4)}{3}$$

19.

$$x=\frac{\frac{\ln(1000)}{\ln(16)}+5}{3}\approx 2{,}497$$

21.

$$a=\frac{\ln(4)+8}{10}$$

23. Engin lausn

25.

$$x=\ln(9)$$

27.

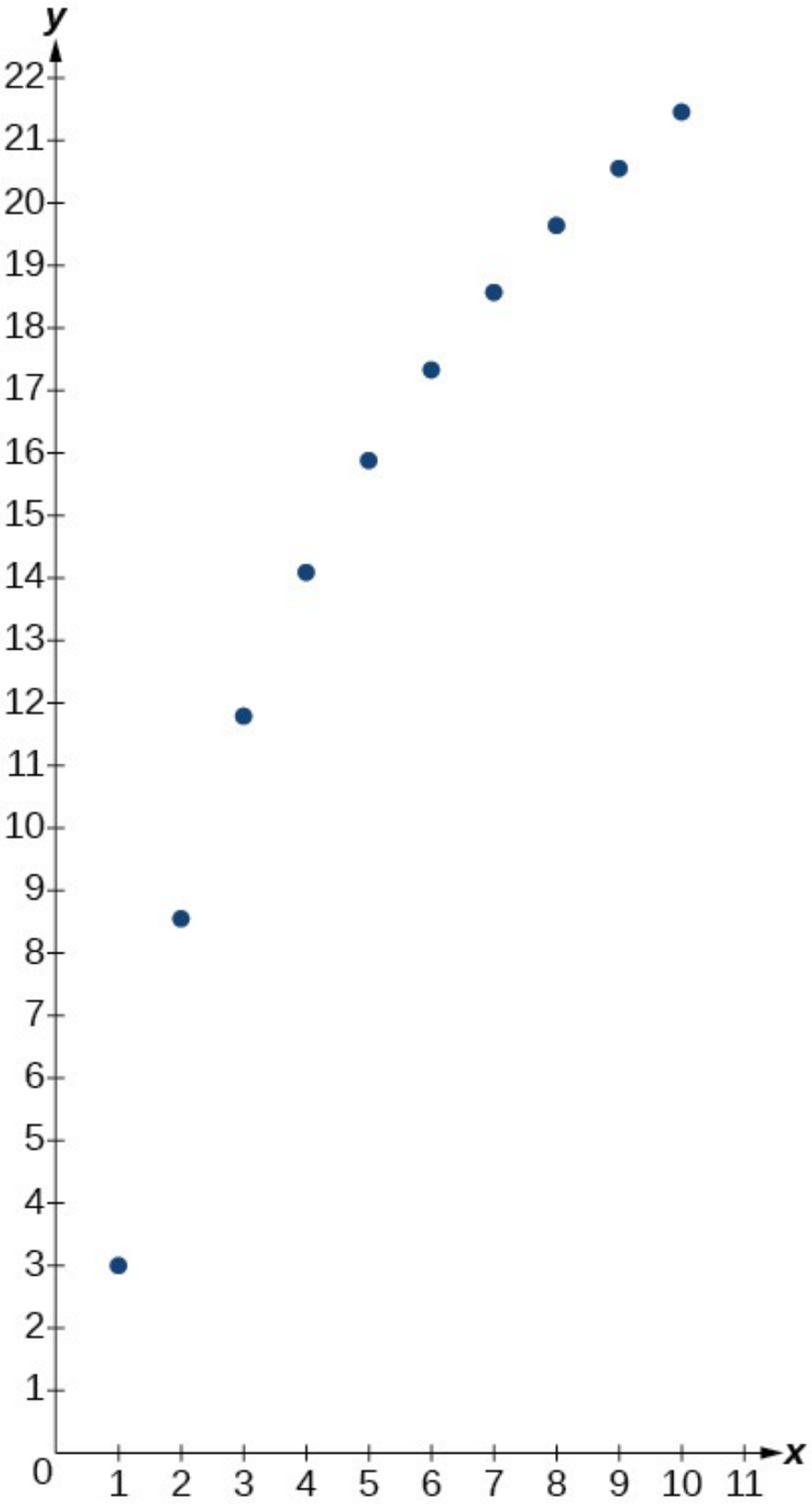
$$x=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

29. $f(t)=112e^{-,019792t}$; helmingunartími: um 35 dagar

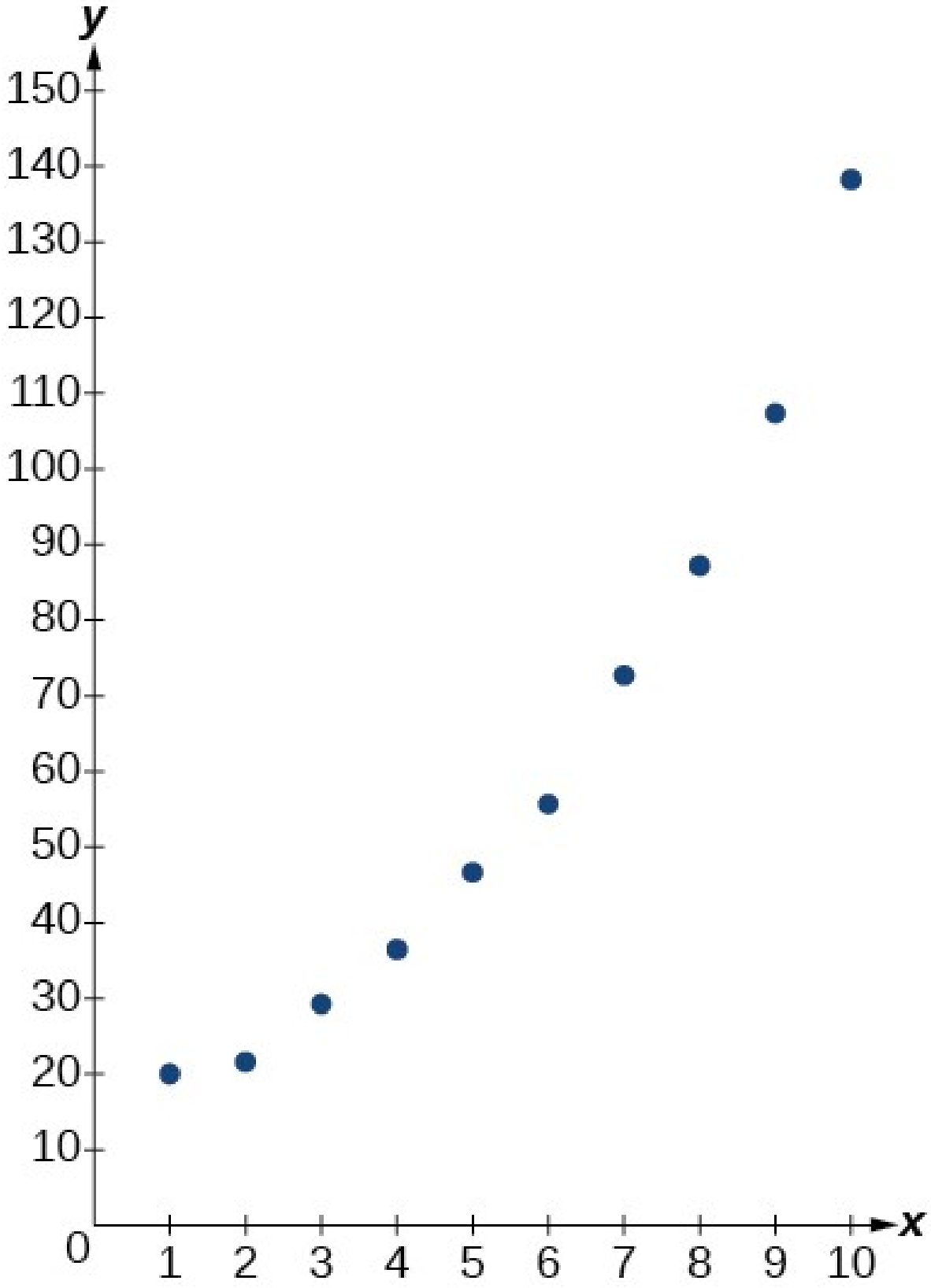
31.

$$T(t)=36\,e^{-0{,}025131\,t}+35; T(60)\approx 43^{\circ}\text{F}$$

33. logríska

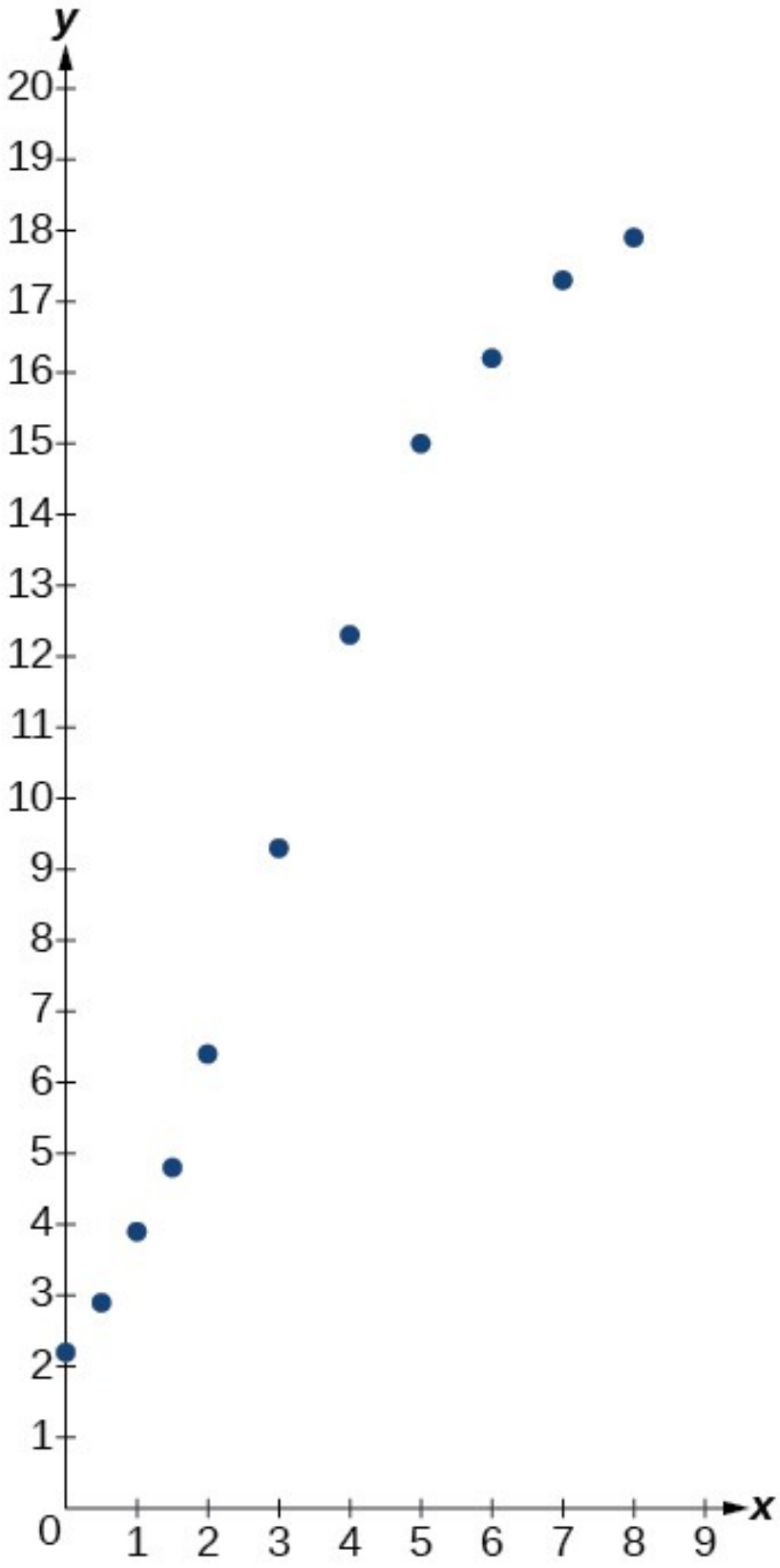


35. vísisfall; $y = 15{,}10062\left(1{,}24621\right)^{x}$



37. lógistískt;

$$y = \frac{18{,}41659}{1 + 7{,}54644\ e^{-0{,}68375\ x}}$$

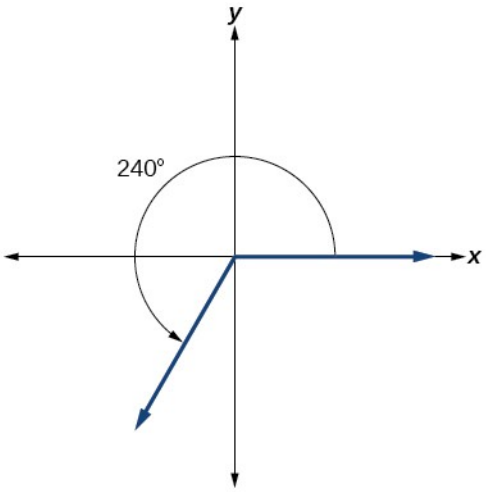

y
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x

Kafli 5

Prófaðu

5.1 Horn

1.



2.

$$\frac{3\pi}{2}$$

3. -135°

4.

$$\frac{7\pi}{10}$$

5.

$$\alpha = 150^{\circ}$$

6.

$$\beta = 60^{\circ}$$

7.

$$\frac{7\pi}{6}$$

8.

$$\frac{215\ \pi}{18} = 37{,}525 \text{ einingar}$$

9. 1,88

10. $\frac{3\pi}{2}$ rad/s

11. 1655 kílómetrar á klukkustund

5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll

1.

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.

$$\cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0$$

3.

$$\sin(t) = -\frac{7}{25}$$

4. um það bil 0,866025403

5.

$$\frac{\pi}{3}$$

6.

1. ⓐ $\cos(315^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(315^\circ) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
2. ⓑ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

7.

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

5.3 Hin hornaföllin

1. $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan t = -1, sec\, t = \sqrt{2}, csc\, t = -\sqrt{2}, \cot t = -1$

2. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, sec\frac{\pi}{3} = 2, csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3.

$$\sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=1,$$
$$sec\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=\sqrt{2},csc\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\cot\left(\frac{-7\pi}{4}\right)=1$$

4.

$$-\sqrt{3}$$

5.

$$-2$$

6.

$$\sin t$$

7.

$$\cos t=-\frac{8}{17},\sin t=\frac{15}{17},\tan t=-\frac{15}{8}$$
$$csc\,t=\frac{17}{15},\cot t=-\frac{8}{15}$$

8.

$$\sin\ \ t=-1,\cos\ \ t=0,\tan\ \ t=\text{Óskilgreint}$$
$$sec\ \ t=\text{ Óskilgreint, }csc\ \ t=-1,\cot\ \ t=0$$

9.

$$sec\,t=\sqrt{2},csc\,t=\sqrt{2},\tan t=1,\cot t=1$$

10.

$$\approx-2{,}414$$

5.4 Hornafræði rétthyrndra þríhyrninga

1.

$$\frac{7}{25}$$

2.

$$sin\ t=\tfrac{33}{65},\cos\ t=\tfrac{56}{65},tan\ t=\tfrac{33}{56},$$
$$\sec\ t=\tfrac{65}{56},\csc\ t=\tfrac{65}{33},\cot\ t=\tfrac{56}{33}$$

3.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,$$
$$sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},csc\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

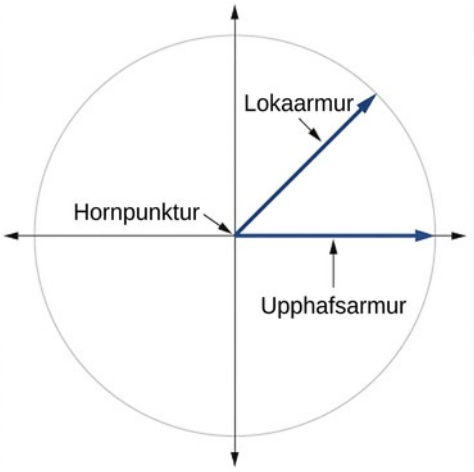
4. 2

5. $\text{aðlæg}=10$; $\text{mótlæg}=10\sqrt{3}$; hornið sem vantar er $\frac{\pi}{6}$

6. Um 52 fet

5.1 Kaflaverkefni

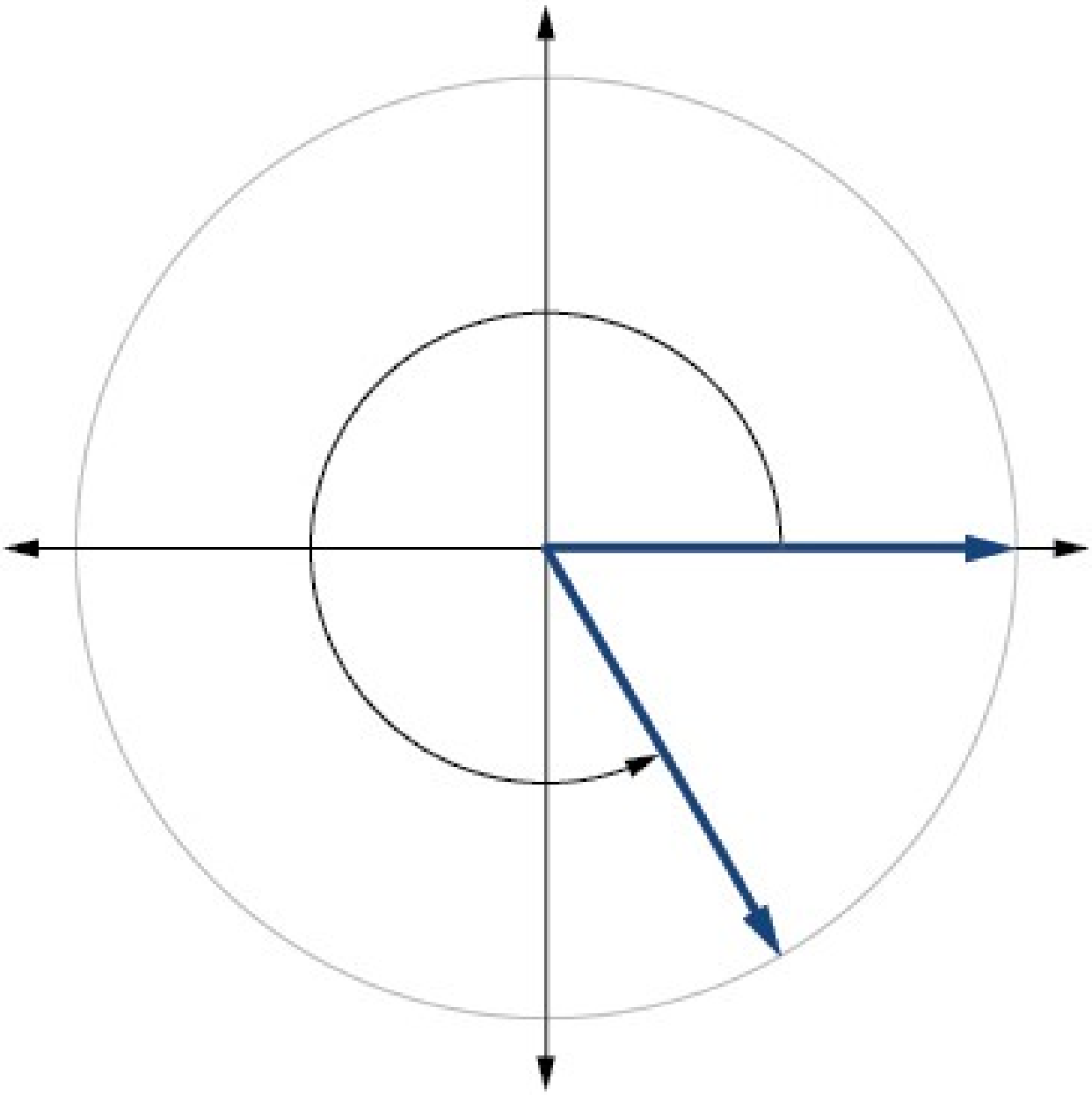
1.



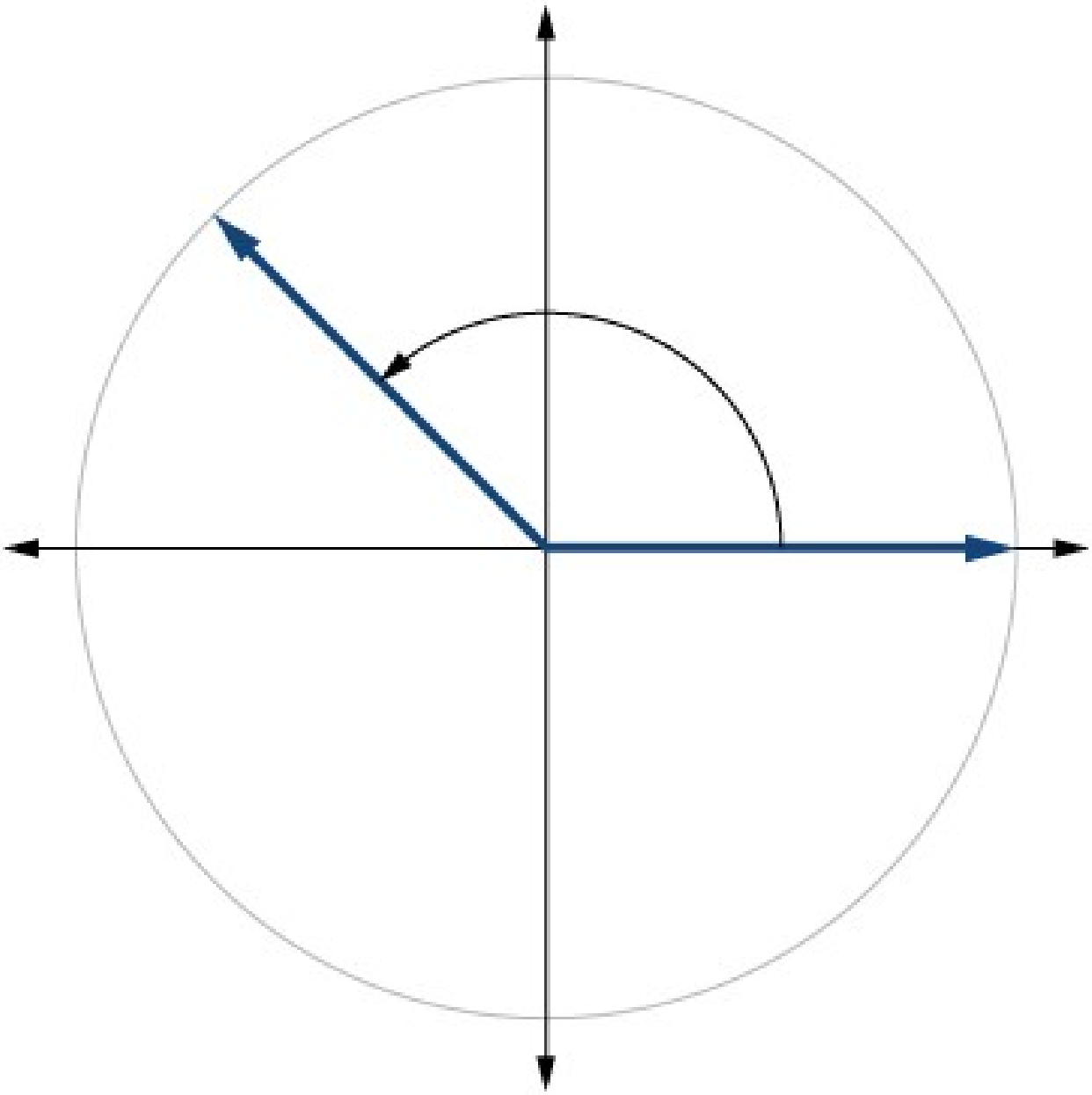
3. Formerki hornsins ræður stefnunni. Jákvætt horn er teiknað rangsælis en neikvætt horn réttsælis.

5. Línulegur hraði fæst með því að bera lengd boga saman við tíma. Hornhraði fæst með því að bera horn boga saman við tíma.

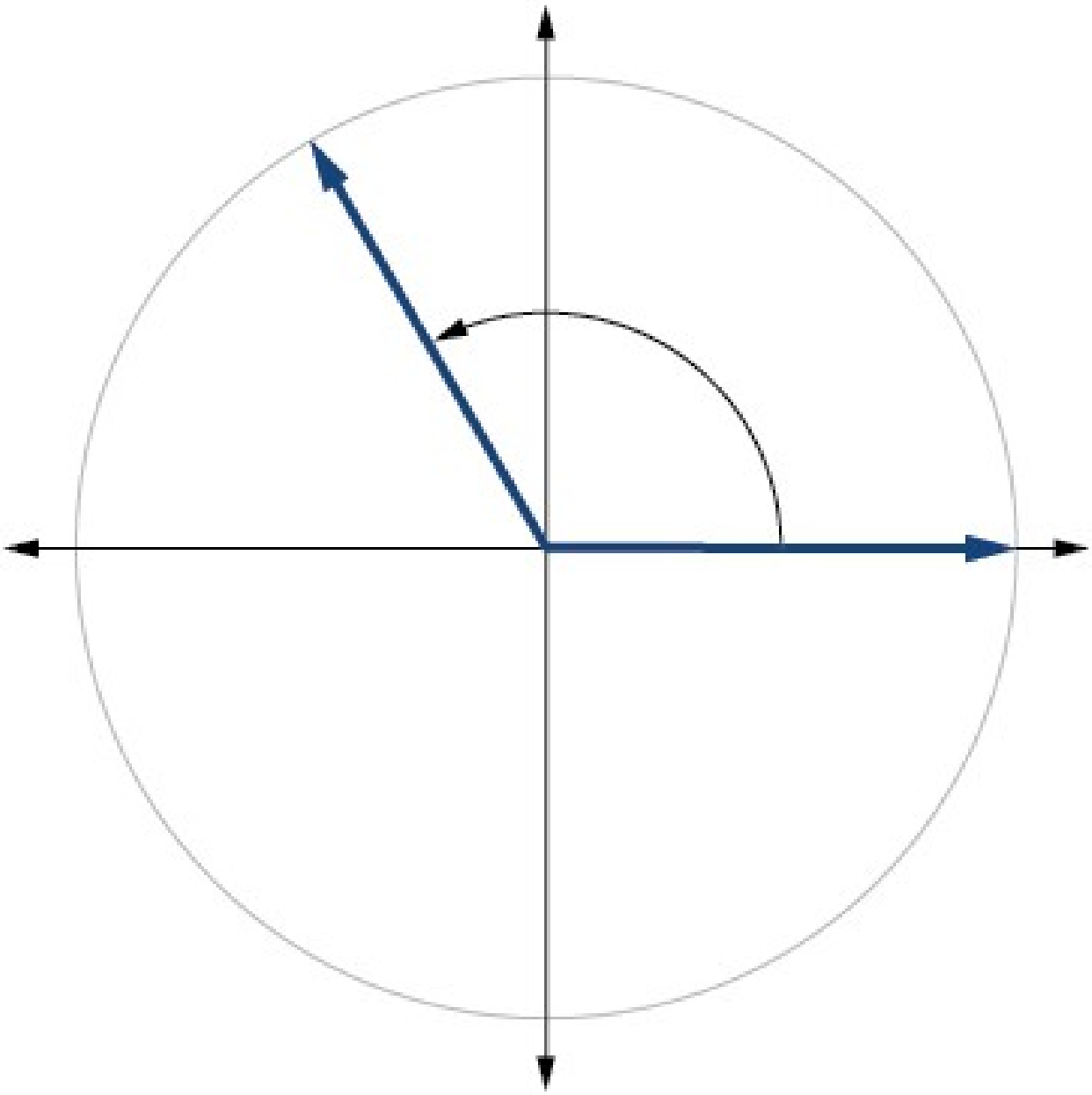
7.



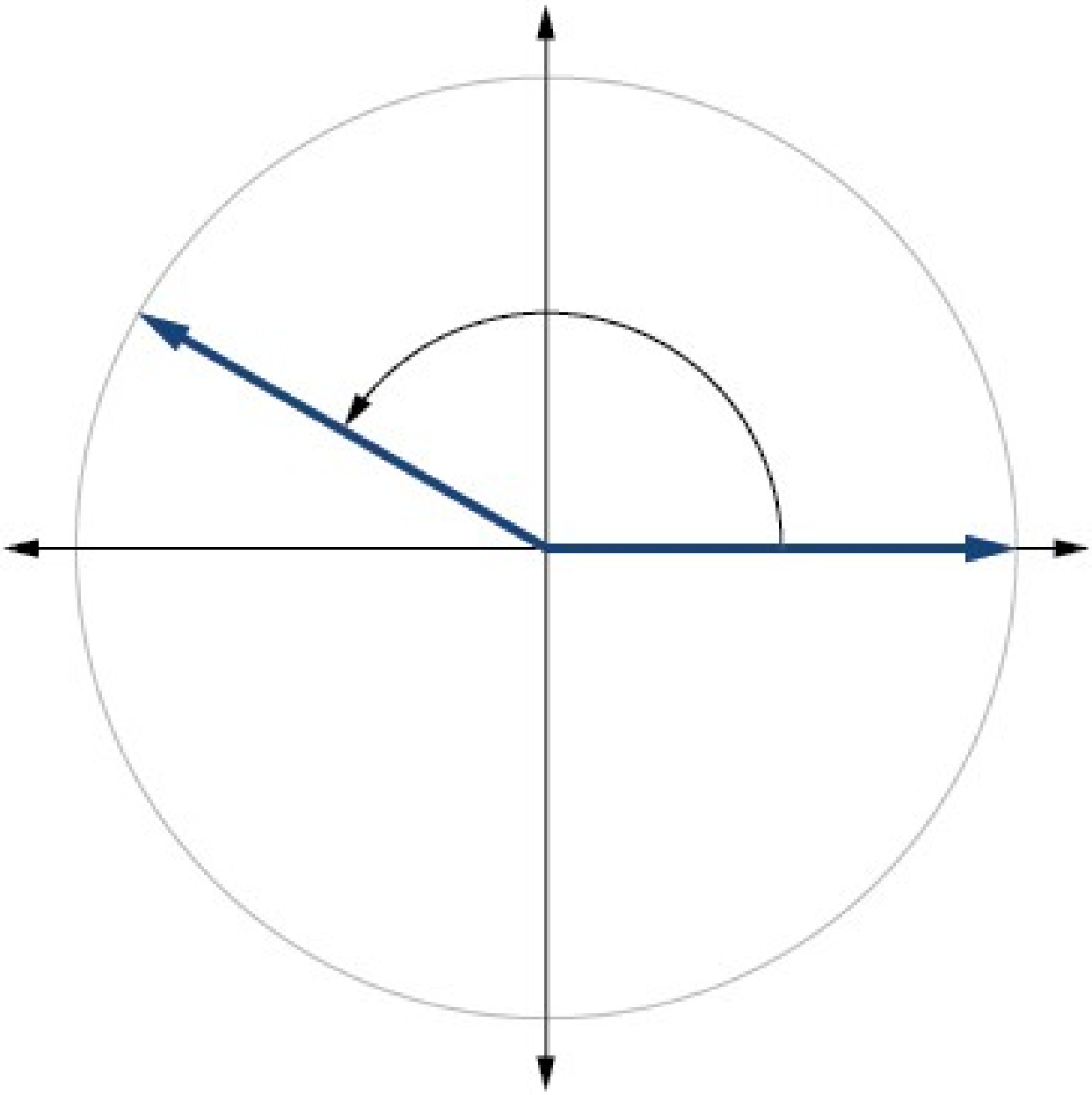
9.



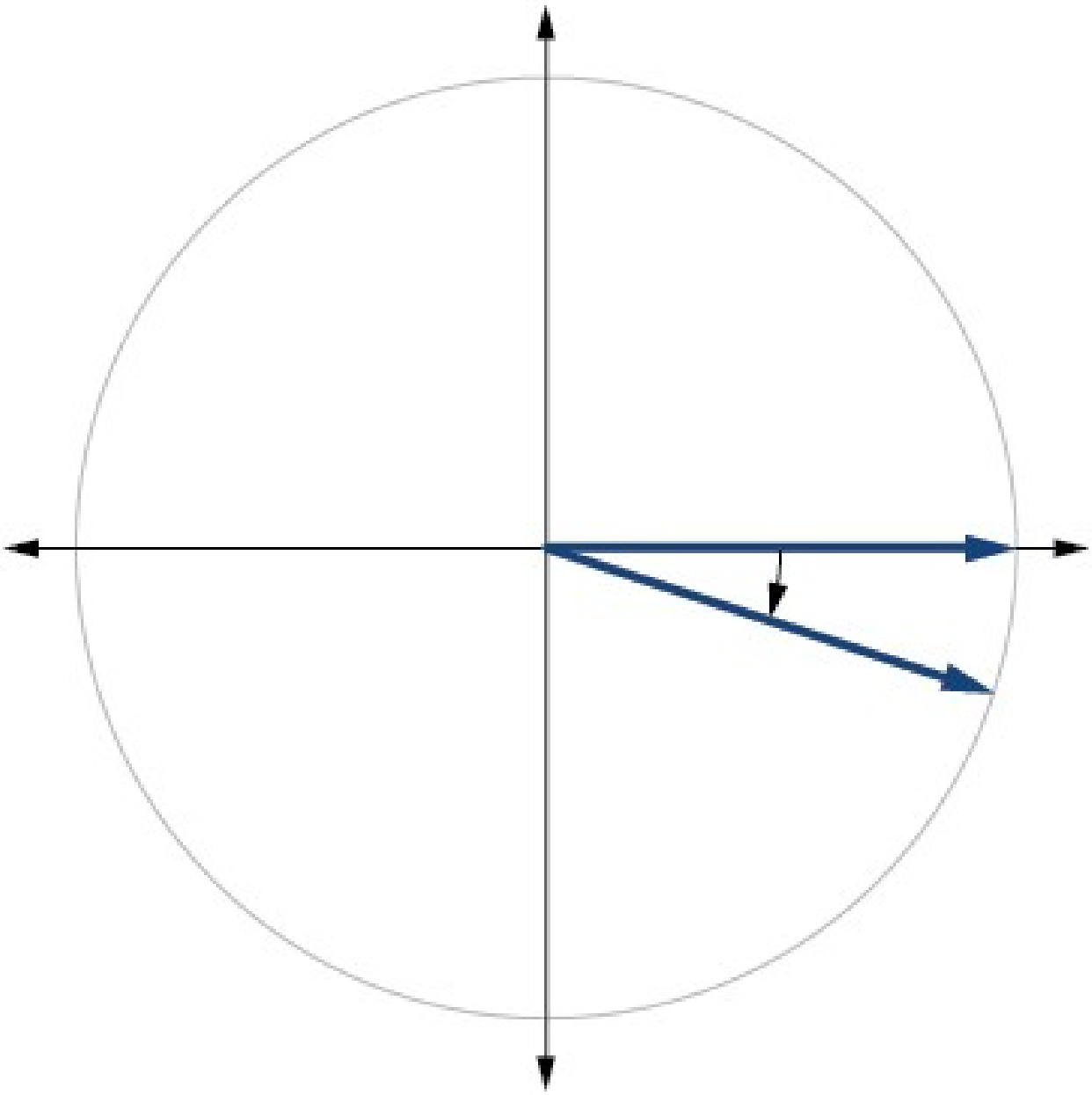
11.



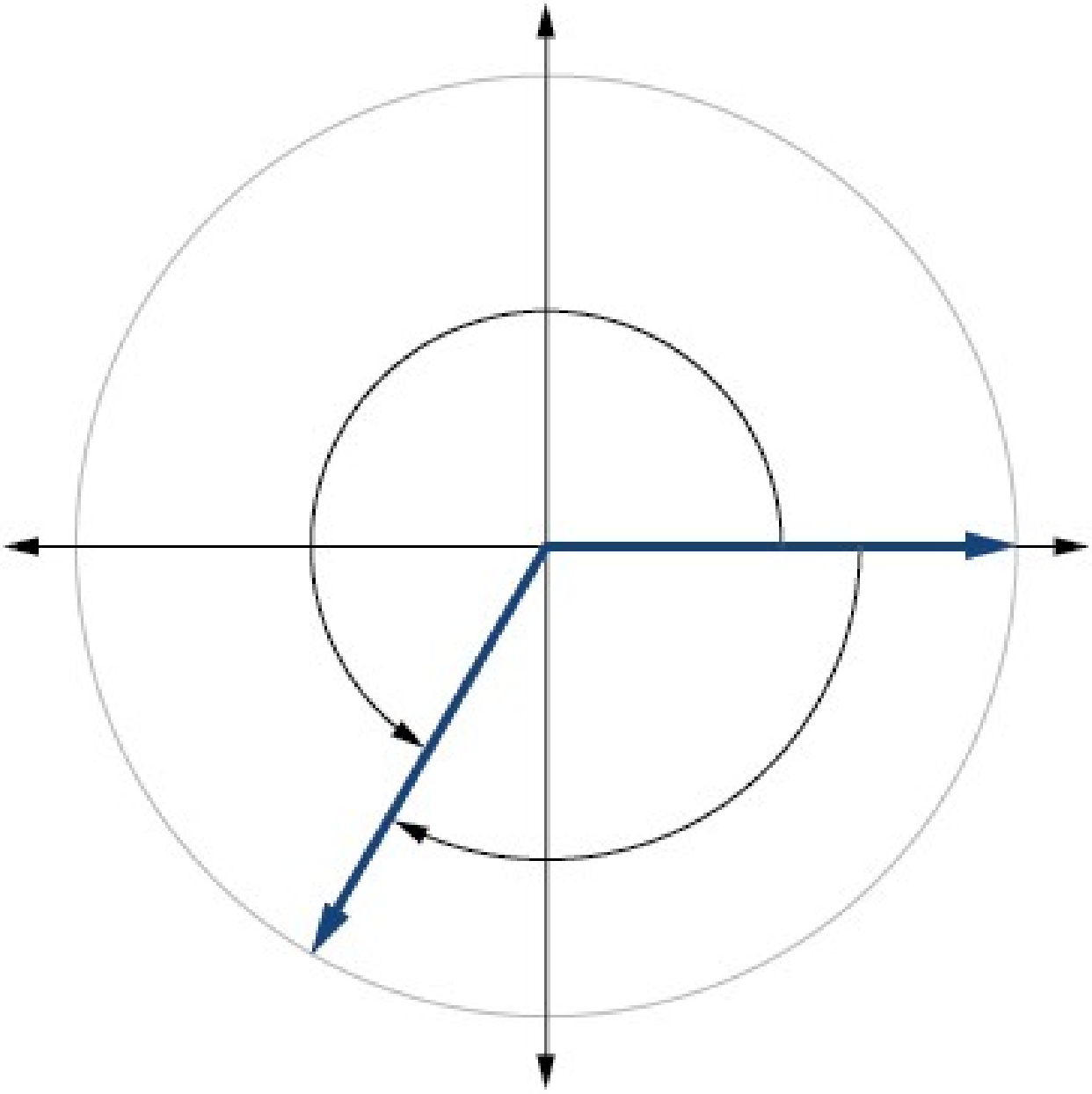
13.



15.

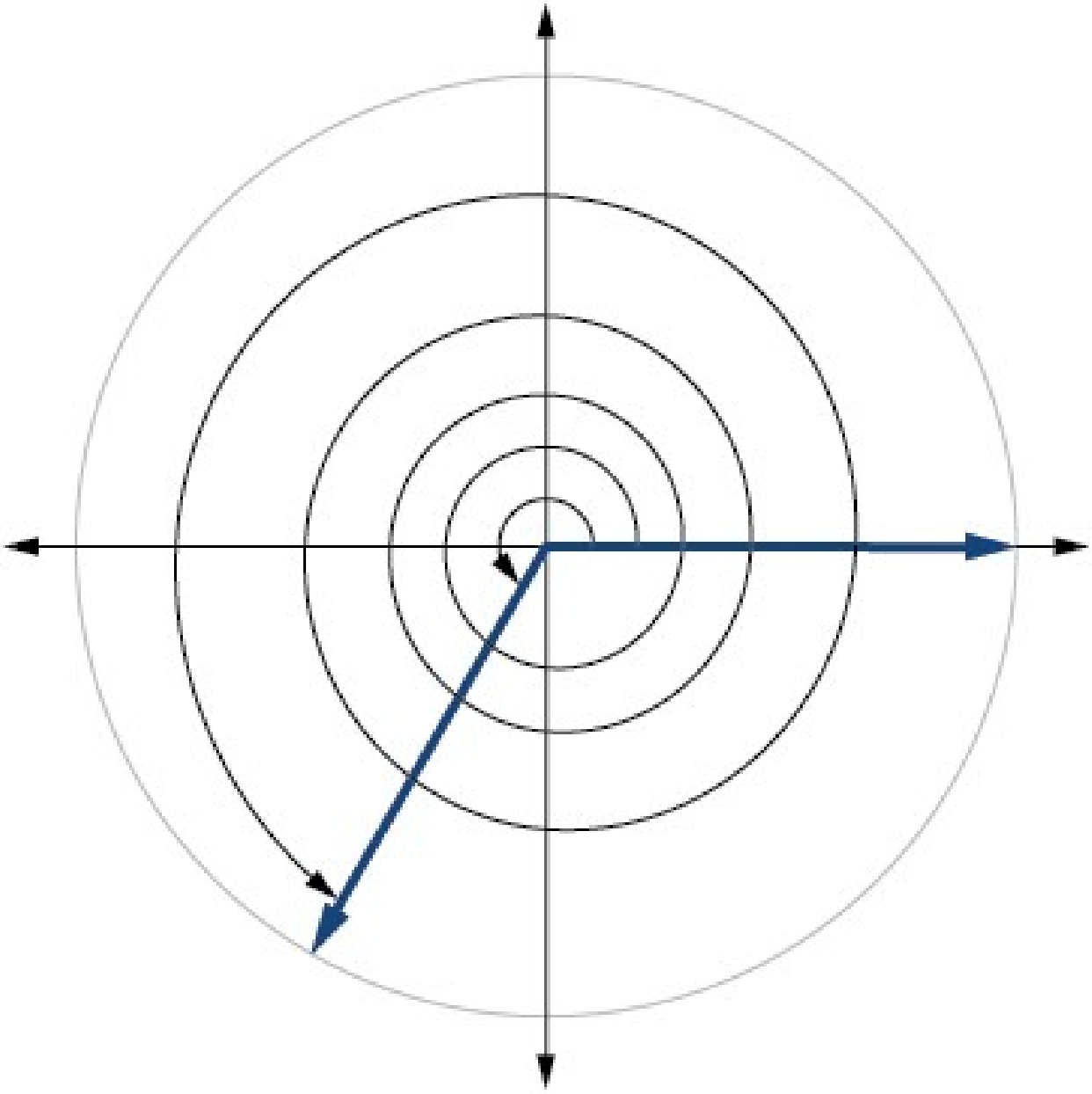


17. 240°



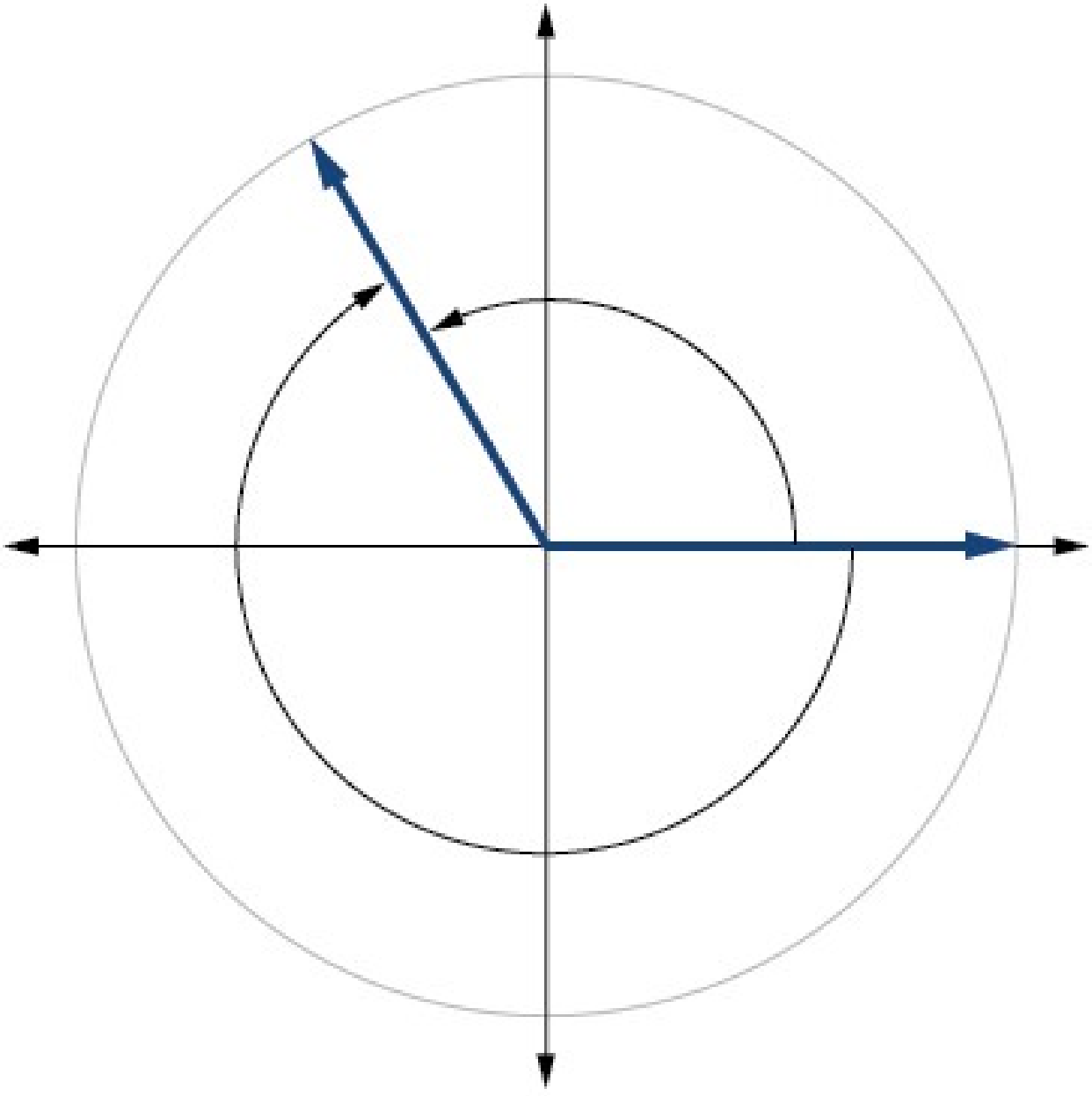
19.

$$\frac{4\pi}{3}$$



21.

$$\frac{2\pi}{3}$$



23.

$$\frac{7\pi}{2} \approx 11{,}00 \text{ in}^2$$

25.

$$\frac{81\pi}{20} \approx 12{,}72 \text{ cm}^2$$

27. 20°

29. 60°

31. -75°

33. $\frac{\pi}{2}$ radíanar

35. -3π radíanar

37. π radíanar

39. $\frac{5\pi}{6}$ radíanar

41. $\frac{5{,}02\ \pi}{3} \approx 5{,}26$ mílur

43. $\frac{25\ \pi}{9} \approx 8{,}73$ sentímetrar

45. $\frac{21\ \pi}{10} \approx 6{,}60$ metrar

47. 104,7198 cm^2

49. 0,7697 in^2

51. 250°

53. 320°

55.

$$\frac{4\pi}{3}$$

57.

$$\frac{8\pi}{9}$$

59. 1320 rad 210,085 sn./mín.

61. 7 tommur/sek., 4,77 sn./mín., 28,65 deg/s

63.

$$1.809.557{,}37 \text{ mm/min} = 30{,}16 \text{ m/s}$$

65. 5,76 mílur

67.

$$120^{\circ}$$

69. 794 mílur á klukkustund

71. 2.234 mílur á klukkustund

73. 11,5 tommur

5.2 Kaflaverkefni

1. Einingarhringurinn er hringur með geisla 1 og miðju í upphafspunktinum.

3. Horn með sama lokaarm eru horn þar sem lokaarmarnir falla saman. Viðmiðunarhorn er stærð minnsta hvassa hornsins t, sem lokaarmur hornsins t myndar við lárétta ásinn.

5. Sínusgildin eru jöfn.

7. I

9. IV

11.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

13.

$$\frac{1}{2}$$

15.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

17. 0

19. -1

21.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

23.

$$60^\circ$$

25.

$$80^\circ$$

27.

$$45^\circ$$

29.

$$\frac{\pi}{3}$$

31.

$$\frac{\pi}{3}$$

33.

$$\frac{\pi}{8}$$

35. 60°, fjórði fjórðungur, $\sin\left(300^\circ\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(300^\circ\right)=\frac{1}{2}$

37. 45°, annar fjórðungur,

$$\sin\left(135^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(135^\circ\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

39. 60°, annar fjórðungur,

$$\sin\left(120^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\left(120^\circ\right)=-\frac{1}{2}$$

41. 30°, annar fjórðungur,

$$\sin\left(150^\circ\right)=\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(150^\circ\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

43. $\frac{\pi}{6}$, þriðji fjórðungur,

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

45. $\frac{\pi}{4}$, annar fjórðungur,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

47. $\frac{\pi}{3}$, annar fjórðungur,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

49. $\frac{\pi}{4}$, fjórði fjórðungur,

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

51.

$$\frac{\sqrt{77}}{9}$$

53.

$$-\frac{\sqrt{15}}{4}$$

55.

$$\left(-10,10\sqrt{3}\right)$$

57.

$$\left(-2{,}778\,;15{,}757\right)$$

59.

$$\left[-1,1\right]$$

61.

$$\sin t=\frac{1}{2},\cos t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

63.

$$\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

65.

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos t = -\frac{1}{2}$$

67.

$$\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

69.

$$\sin t = 0, \cos t = -1$$

71.

$$\sin \quad t = -0{,}596, \cos \quad t = 0{,}803$$

73.

$$\sin t = \frac{1}{2}, \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

75.

$$\sin t = -\frac{1}{2}, \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

77.

$$\sin \quad t = 0{,}761, \cos \quad t = -0{,}649$$

79.

$$\sin t = 1, \cos t = 0$$

81. −0,1736

83. 0,9511

85. −0,7071

87. −0,1392

89. −0,7660

91.

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

93.

$$-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

95.

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

97.

$$\frac{\sqrt{2}}{4}$$

99. 0

101.

$$(0,-1)$$

103. 37,5 sekúndur, 97,5 sekúndur, 157,5 sekúndur, 217,5 sekúndur, 277,5 sekúndur, 337,5 sekúndur

5.3 Kaflaverkefni

1. Já, þegar viðmiðunarhornið er $\frac{\pi}{4}$ og lokaarmur hornsins er í fyrsta eða þriðja fjórðungi.

Við $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$, eru sínus- og kósínusgildin því jöfn.

3. Setjið sínus hornsins í stað y í reglu Pýþagórasar $x^2+y^2=1$. Einangrið x og veljið neikvæðu lausnina.

5. Gildi tangens og kótangens endurtaka sig á π eininga fresti.

7.

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

9.

$$\sqrt{3}$$

11.

$$\sqrt{2}$$

13. 1

15. 2

17.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

19.

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

21.

$$\sqrt{3}$$

23.

$$-\sqrt{2}$$

25. -1

27. -2

29.

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

31. 2

33.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

35. -2

37. -1

39. Ef $\sin t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $sec\, t = -3$, $csc\, t = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\tan t = 2\sqrt{2}$, $\cot t = \frac{\sqrt{2}}{4}$

41. $sec\, t = 2$, $csc\, t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\tan t = \sqrt{3}$, $\cot t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

43.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

45. 3,1

47. 1,4

49.

$$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan t = 1, \cot t = 1, sec\, t = \sqrt{2}, csc\, t = \sqrt{2}$$

51. $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t = -\frac{1}{2}$, $\tan t = \sqrt{3}$, $\cot t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $sec\, t = -2$, $csc\, t = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

53. −0,228

55. −2,414

57. 1,414

59. 1,540

61. 1,556

63.

$$\sin\left(t\right)\approx 0{,}79$$

65.

$$csc\ t\approx 1{,}16$$

67. jafnstætt

69. jafnstætt

71.

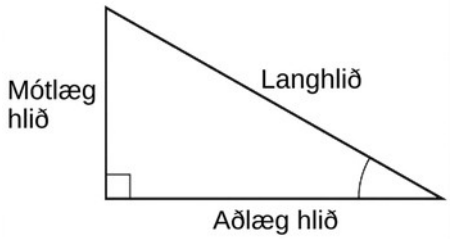
$$\frac{\sin t}{\cos t}=\tan t$$

73. 13,77 klukkustundir, lotulengd: $1000\,\pi$

75. 7,73 tommur

5.4 Kaflaverkefni

1.



3. Tangens horns er hlutfall mótlægu hliðarinnar og aðlægu hliðarinnar.

5. Sínus horns er til dæmis jafn kósínusi fyllihorns þess og kósínus horns er jafn sínusi fyllihorns þess.

7.

$$\frac{\pi}{6}$$

9.

$$\frac{\pi}{4}$$

11.

$$b=\frac{20\sqrt{3}}{3}, c=\frac{40\sqrt{3}}{3}$$

13.

$$a=10.000, c=10.000{,}5$$

15.

$$b=\frac{5\sqrt{3}}{3}, c=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

17.

$$\frac{5\sqrt{29}}{29}$$

19.

$$\frac{5}{2}$$

21.

$$\frac{\sqrt{29}}{2}$$

23.

$$\frac{5\sqrt{41}}{41}$$

25.

$$\frac{5}{4}$$

27.

$$\frac{\sqrt{41}}{4}$$

29.

$$c=14, b=7\sqrt{3}$$

31.

$$a=15, b=15$$

33.

$$b=9{,}9970, \quad c=12{,}2041$$

35.

$$a = 2{,}0838, \quad b = 11{,}8177$$

37.

$$a = 55{,}9808, c = 57{,}9555$$

39.

$$a = 46{,}6790, b = 17{,}9184$$

41.

$$a = 16{,}4662, c = 16{,}8341$$

43. 188,3159

45. 200,6737

47. 498,3471 ft

49. 1060,09 ft

51. 27,372 ft

53. 22,6506 ft

55. 368,7633 ft

Upprifjunarverkefni

1.

$$45^\circ$$

3.

$$-\frac{7\pi}{6}$$

5. 10,385 metrar

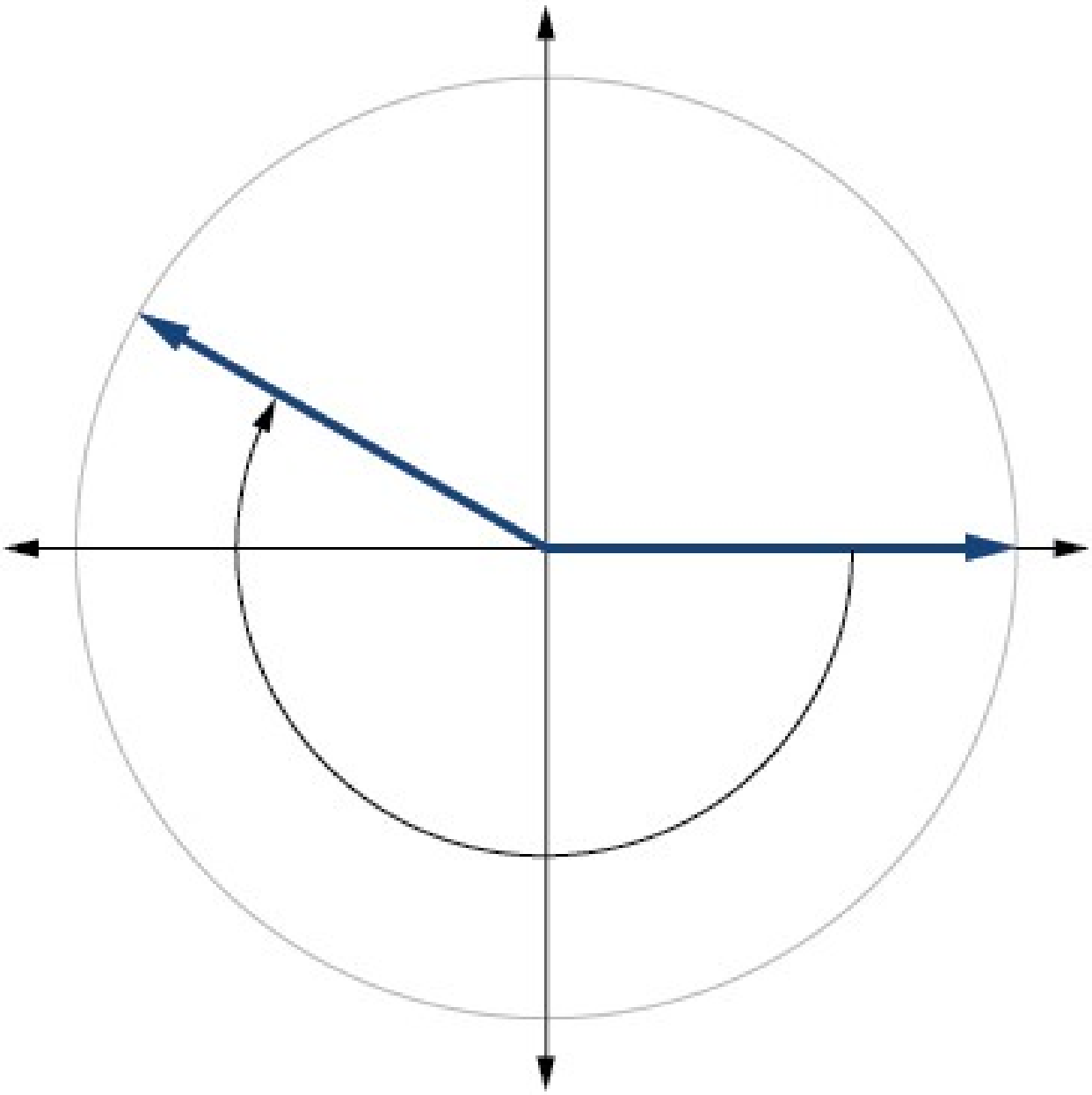
7.

$$60^\circ$$

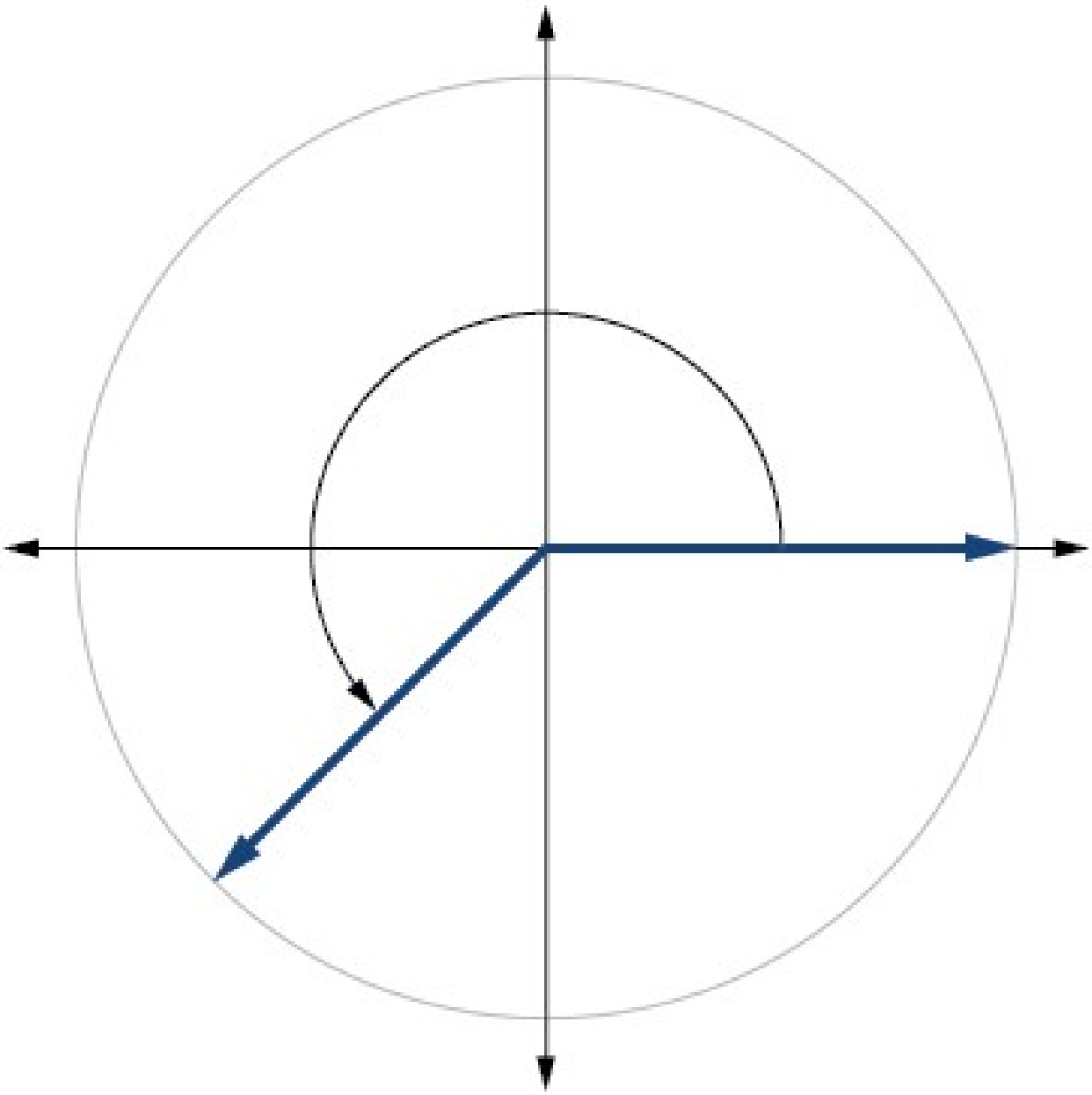
9.

$$\frac{2\pi}{11}$$

11.



13.



15. 1036,73 mílur á klukkustund

17.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

19. -1

21.

$$\frac{\pi}{4}$$

23.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

25.

$$[-1,1]$$

27. 1

29.

$$\sqrt{2}$$

31.

$$\sqrt{2}$$

33. 0,6

35. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ eða $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

37. sínus, kósekans, tangens, kótangens

39.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

41. 0

43.

$$b=8, c=10$$

45.

$$\frac{11\sqrt{157}}{157}$$

47.

$$a=4, b=4$$

49. 14,0954 ft

Æfingapróf

1.

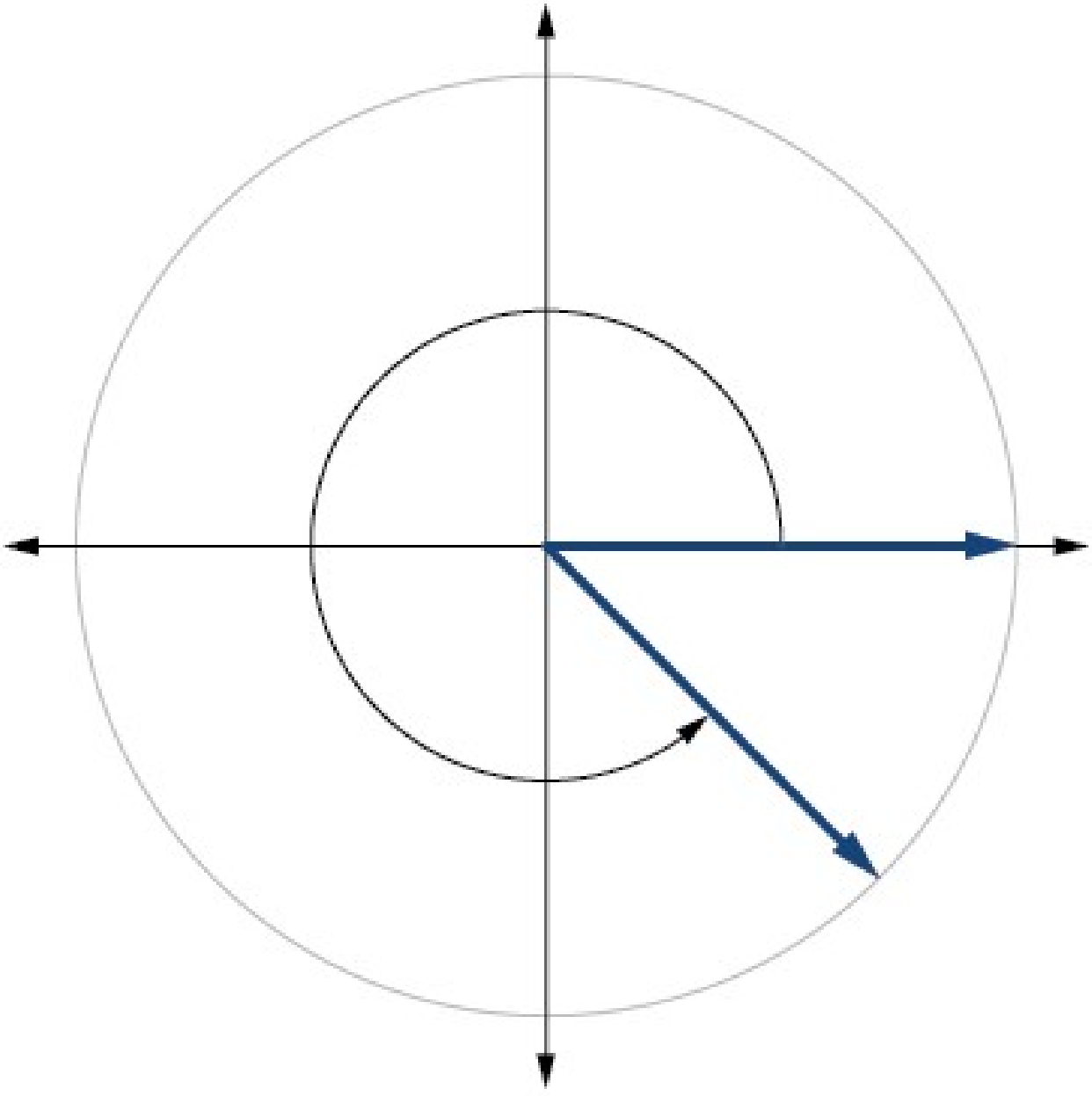
$$150^\circ$$

3. 6,283 sentímetrar

5.

$$15^\circ$$

7.



9. 3,351 fet á sekúndu, $\frac{2\pi}{75}$ radíanar á sekúndu

11.

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

13.

$$[-1,1]$$

15.

$$\sqrt{3}$$

17.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

19.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

21.

$$\frac{\pi}{3}$$

23.

$$a=\frac{9}{2}, b=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Kafli 6

Prófaðu

6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla

1.

$$6\pi$$

2. $\frac{1}{2}$ samþjappað

3. $\frac{\pi}{2}$; til hægri

4. 2 einingar upp

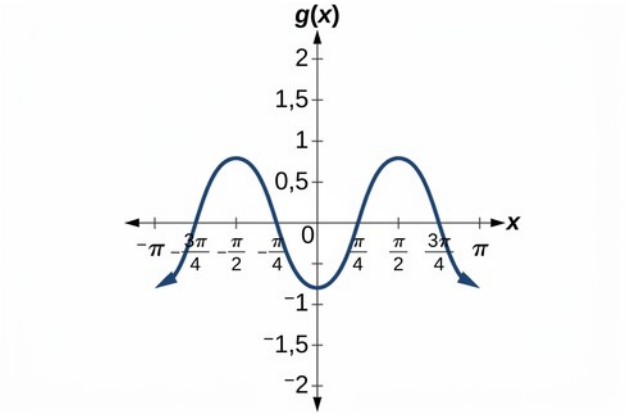
5. miðlína: $y=0$; útslag: $|A|=\frac{1}{2}$; lota: $P=\frac{2\pi}{|B|}=6\pi$; fasahliðrun: $\frac{C}{B}=\pi$

6.

$$f(x)=\sin(x)+2$$

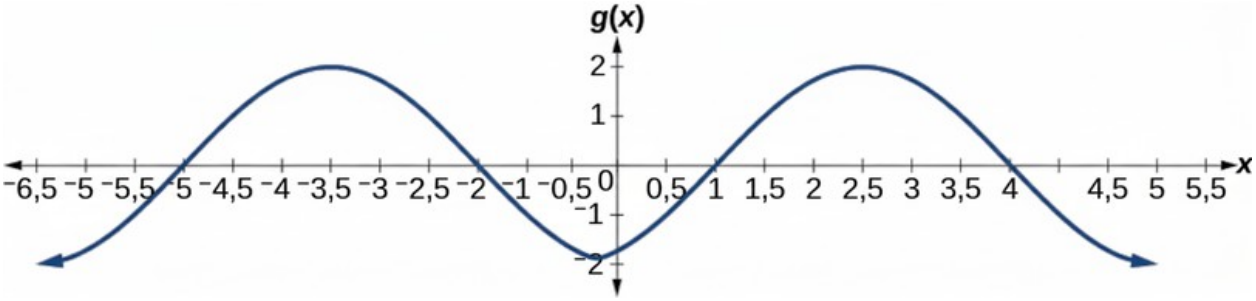
7. tveir möguleikar: $y=4\sin\left(\frac{\pi}{5}x-\frac{\pi}{5}\right)+4$ eða $y=-4\sin\left(\frac{\pi}{5}x+\frac{4\pi}{5}\right)+4$

8.



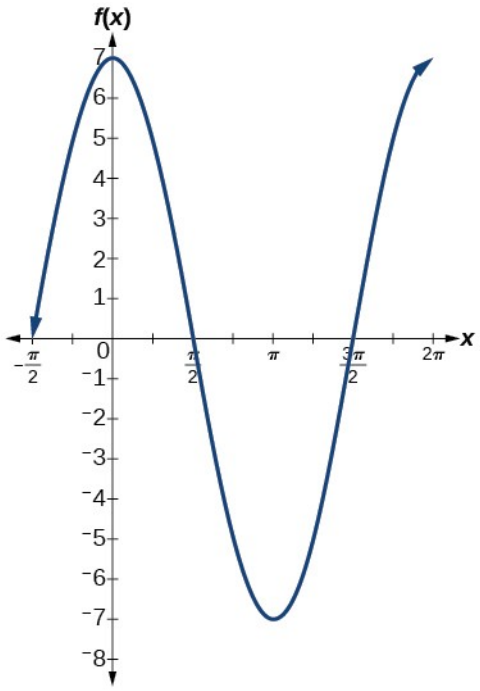
miðlína: $y=0$; útslag: $|A|=0{,}8$; lota: $P=\frac{2\pi}{|B|}=\pi$; fasahliðrun: $\frac{C}{B}=0$ eða engin

9.



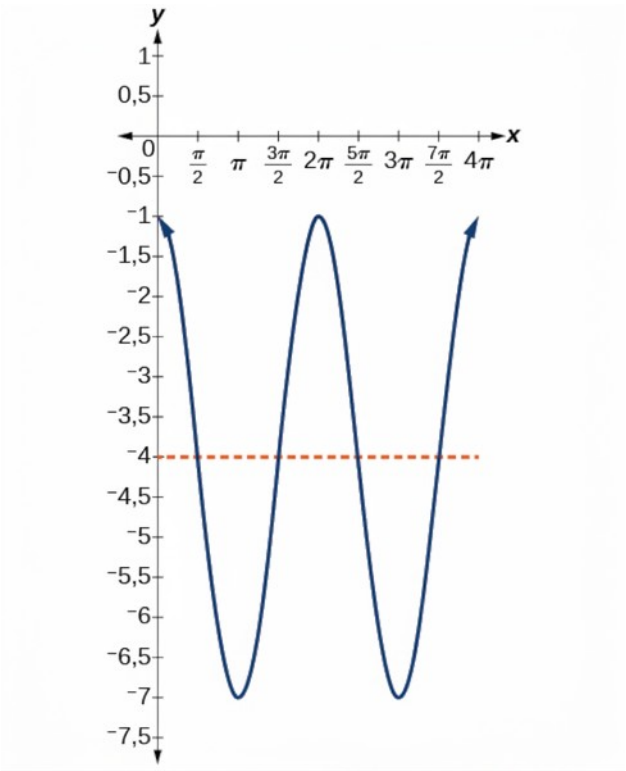
miðlína: $y=0$; útslag: $|A|=2$; lota: $P=\frac{2\pi}{|B|}=6$; fasahliðrun: $\frac{C}{B}=-\frac{1}{2}$

10. 7



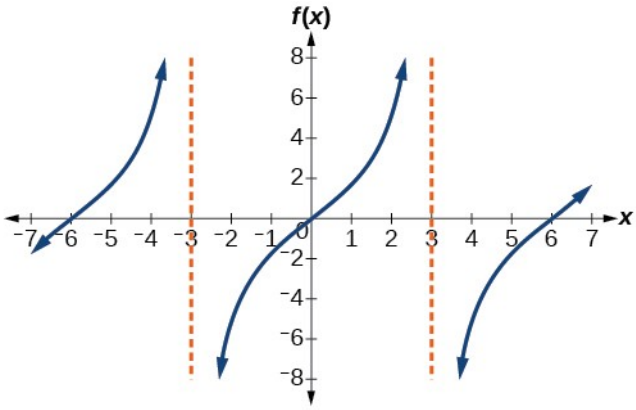
11.

$$y = 3\cos(x) - 4$$



6.2 Gröf hinna hornafallanna

1.

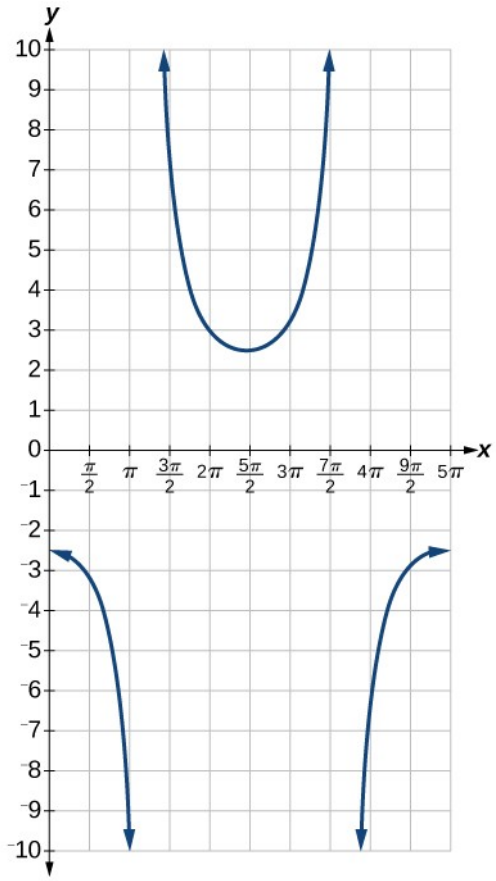


2. Grafið speglaðist um línuna $y=-1$, og yrði vaxandi fall.

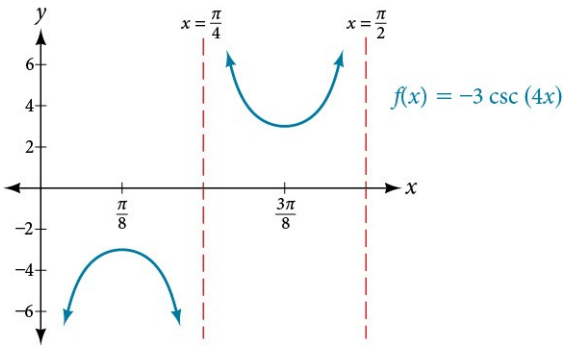
3.

$$g(x)=4\tan(2x)$$

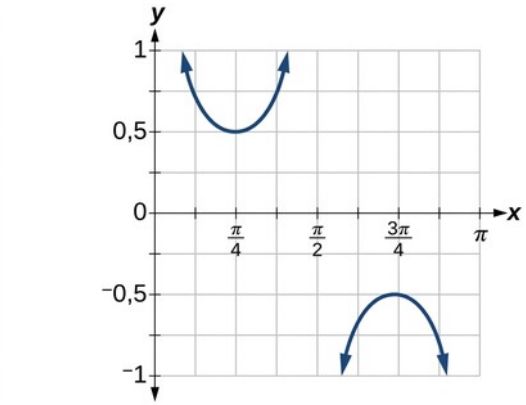
4. Þetta er lóðrétt speglun fyrra grafsins þar sem A er neikvætt.



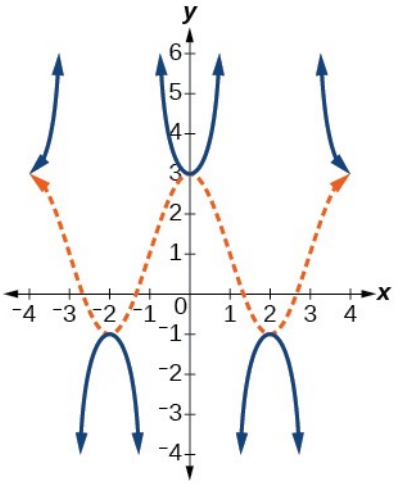
5.



6.



7.



6.3 Andhverf hornaföll

1.

$$\arccos\left(0{,}8776\right)\approx 0{,}5$$

2.

1. ⓐ $-\frac{\pi}{2}$;
2. ⓑ $-\frac{\pi}{4}$;
3. ⓒ π;
4. ⓓ $\frac{\pi}{3}$

3. 1,9823 eða 113,578°

4. $\sin^{-1}(0{,}6)=36{,}87^{\circ}=0{,}6435$ radíanar

5.

$$\frac{\pi}{8};\frac{2\pi}{9}$$

6.

$$\frac{3\pi}{4}$$

7.

$$\frac{12}{13}$$

8.

$$\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

9.

$$\frac{4x}{\sqrt{16x^2+1}}$$

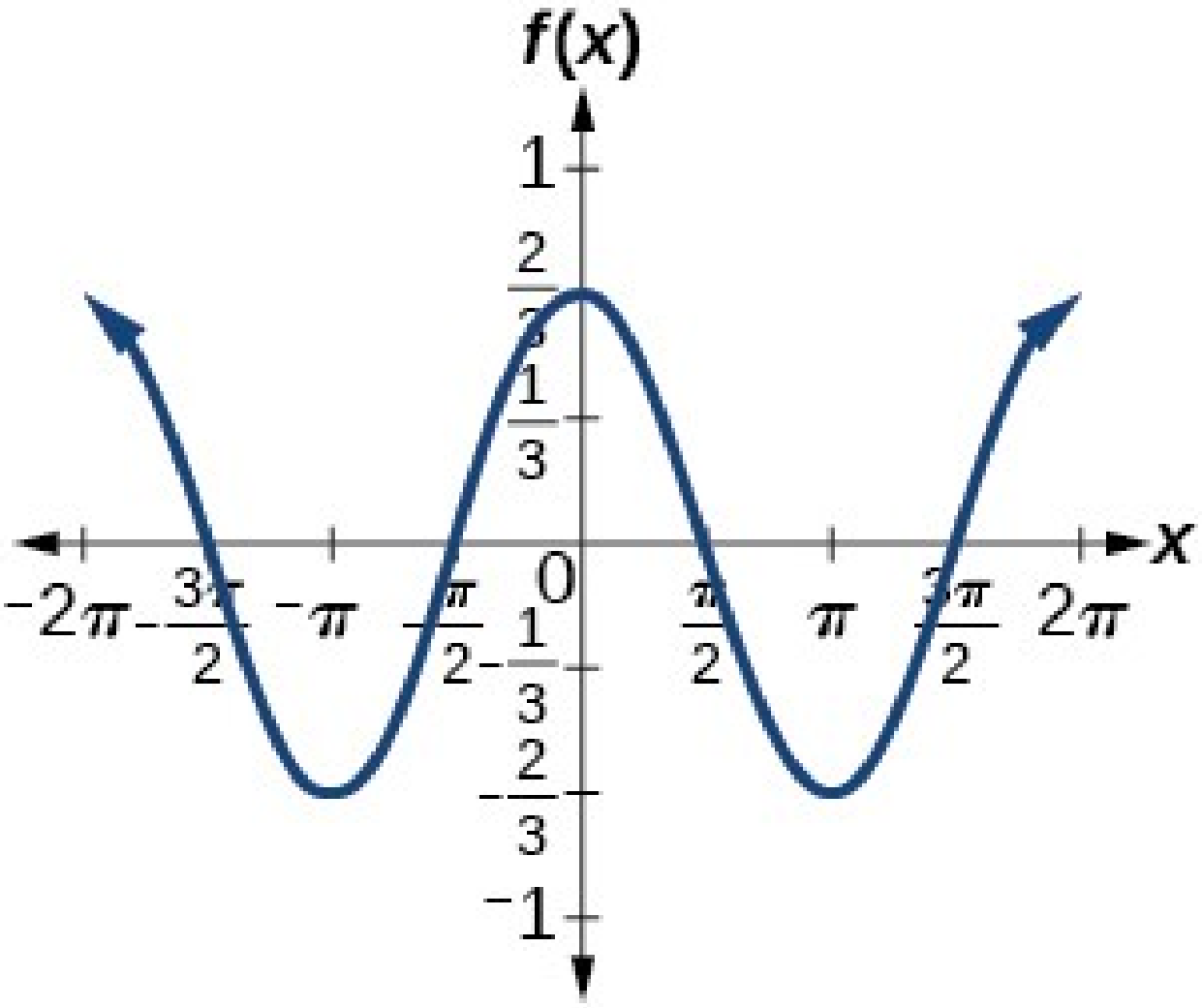
6.1 Kaflaverkefni

1. Sínus- og kósínusföll hafa þann eiginleika að $f(x+P)=f(x)$ fyrir tiltekið P. Það merkir að fallsgildin endurtaka sig á P eininga fresti á x-ásnum.

3. Algildi fastans A (útslagið) stækkar heildarmyndmengið og fastinn D (lóðrétta hliðrunin) hliðrar grafinu lóðrétt.

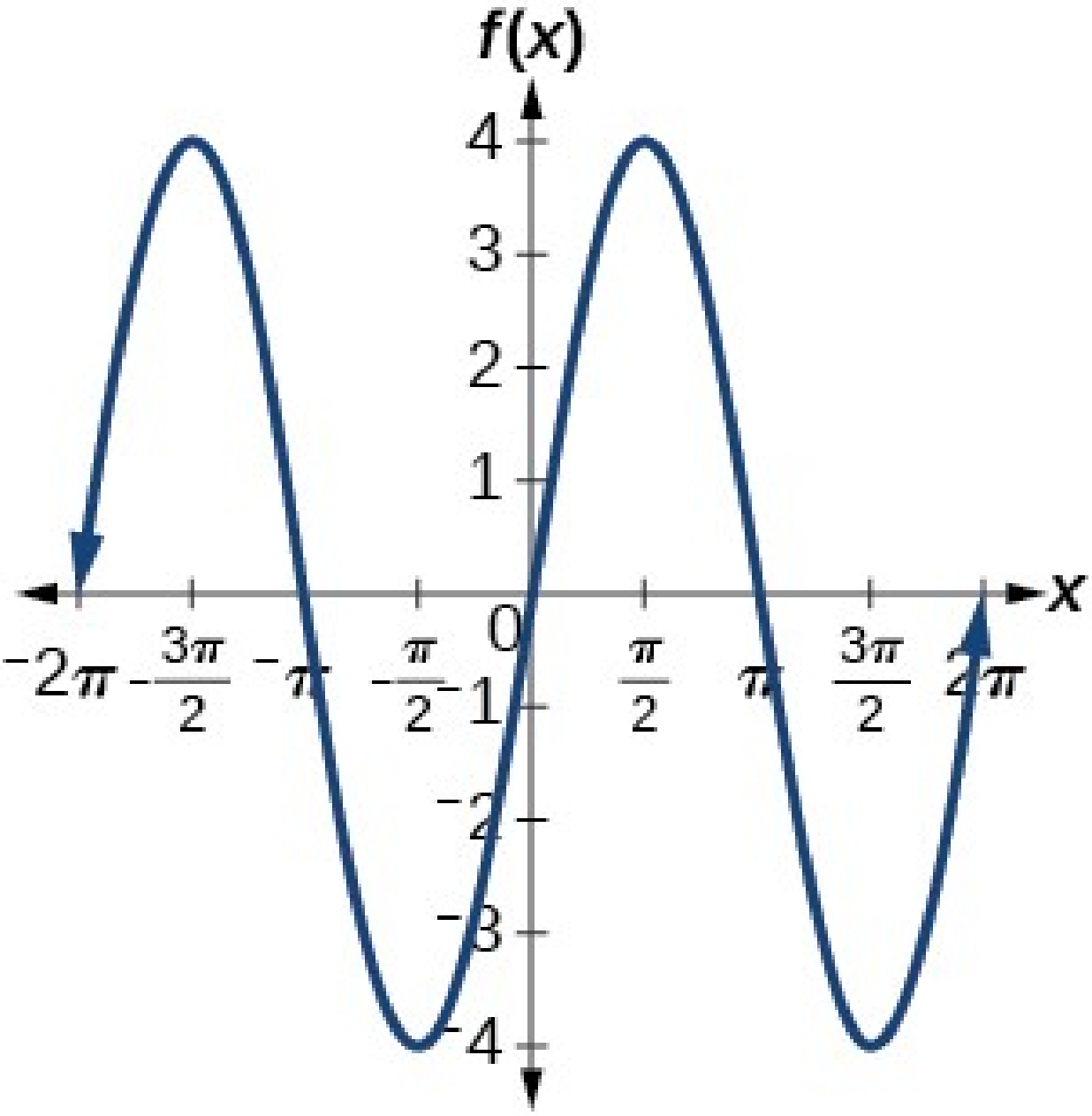
5. Í punktinum þar sem lokaarmur t sker einingarhringinn má sjá að $\sin t$ er jafnt y-hniti punktsins.

7.



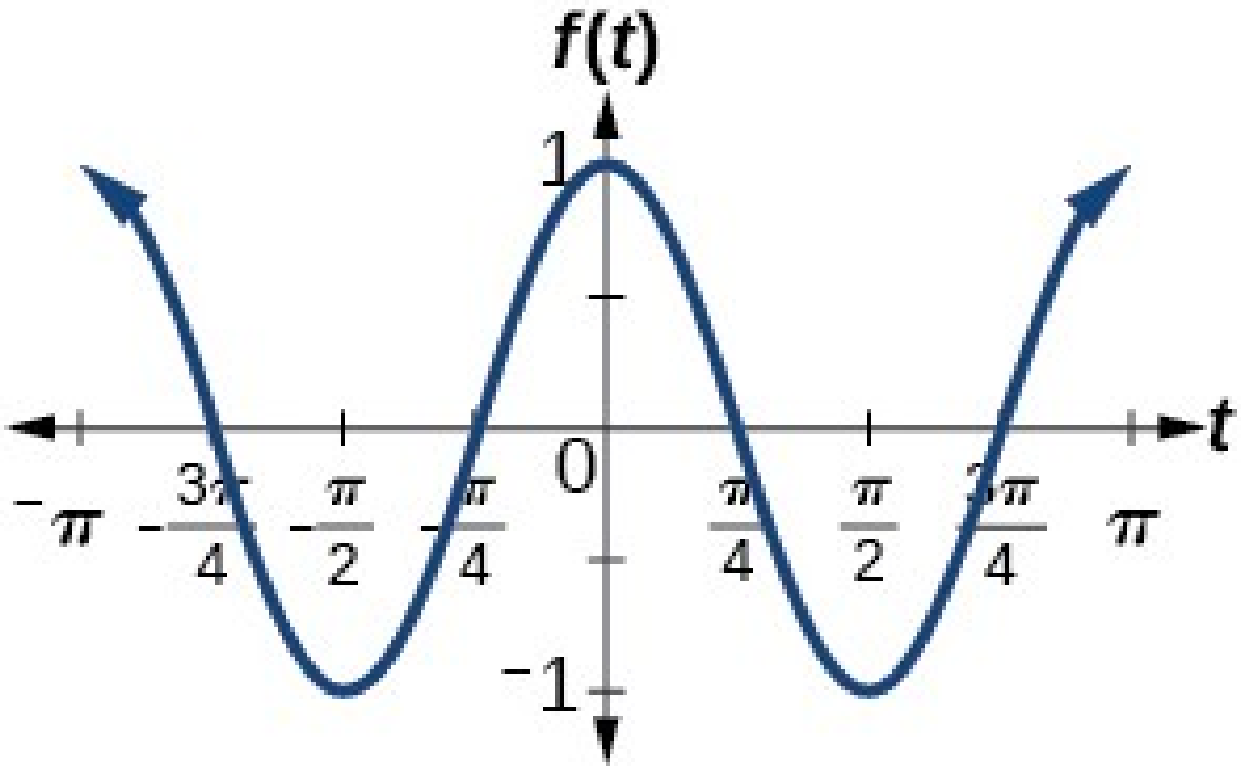
útslag: $\frac{2}{3}$; lota: 2π; miðlína: $y=0$; hágildi: $y=\frac{2}{3}$ fæst við $x=2\pi$; lággildi: $y=-\frac{2}{3}$ fæst við $x=\pi$; í einni lotu hefst grafið við 0 og endar við 2π

9.



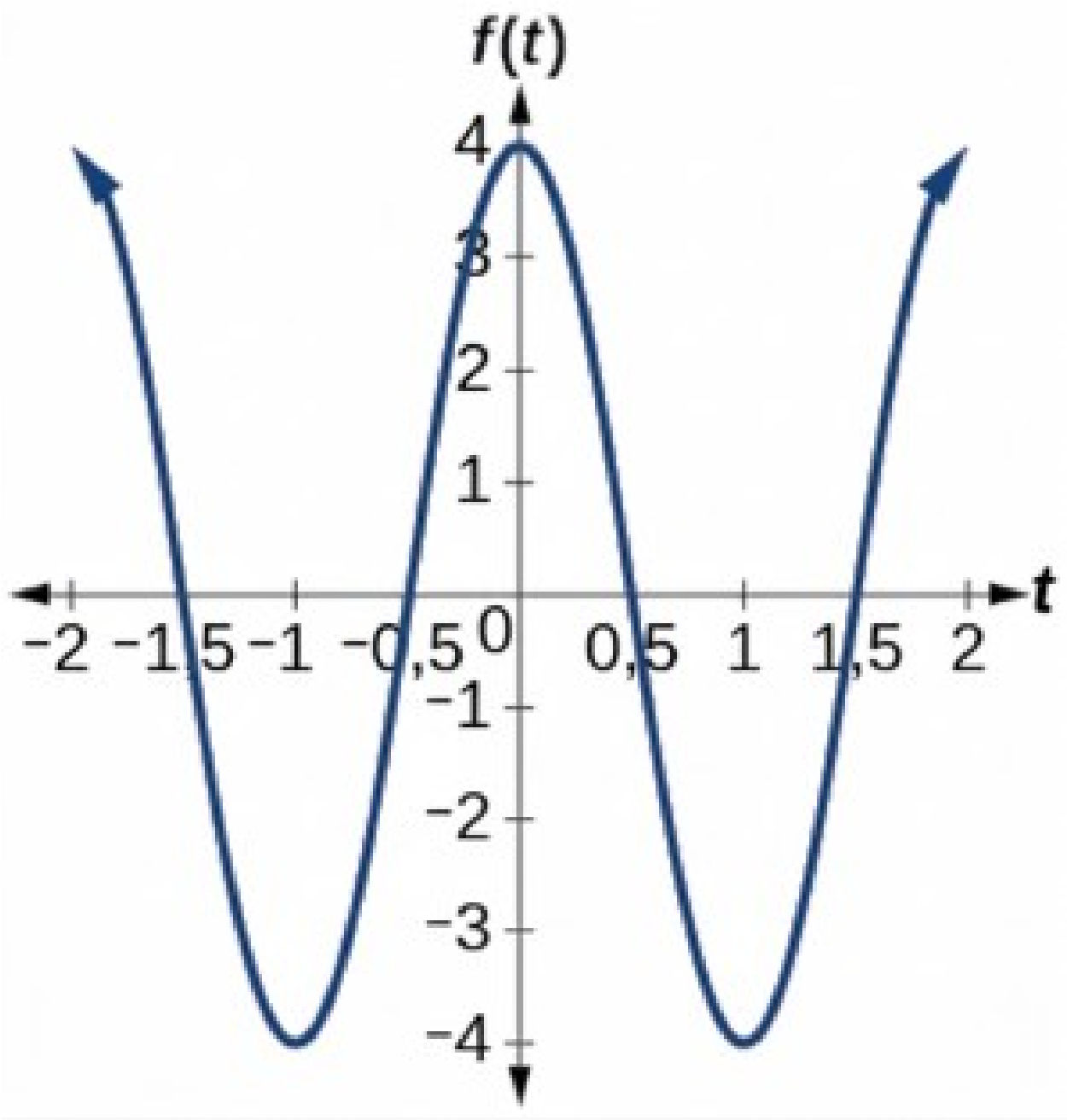
útslag: 4; lota: 2π; miðlína: $y=0$; hágildið $y=4$ fæst við $x=\frac{\pi}{2}$; lággildið $y=-4$ fæst við $x=\frac{3\pi}{2}$; ein heil lota er frá $x=0$ til $x=2\pi$

11.



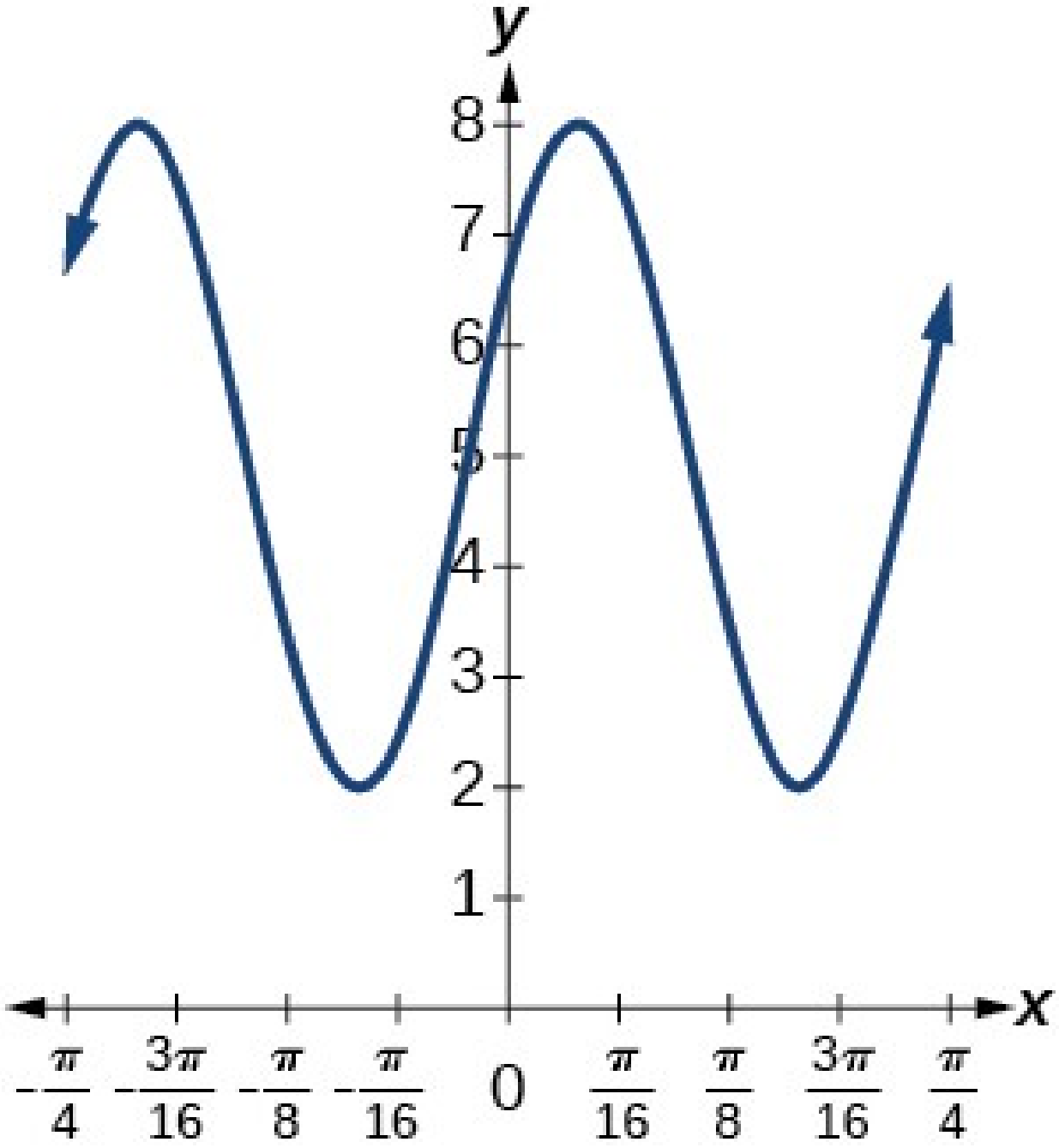
útslag: 1; lota: π; miðlína: $y=0$; hágildið $y=1$ fæst við $x=\pi$; lággildið $y=-1$ fæst við $x=\frac{\pi}{2}$; ein heil lota er teiknuð frá $x=0$ til $x=\pi$

13.



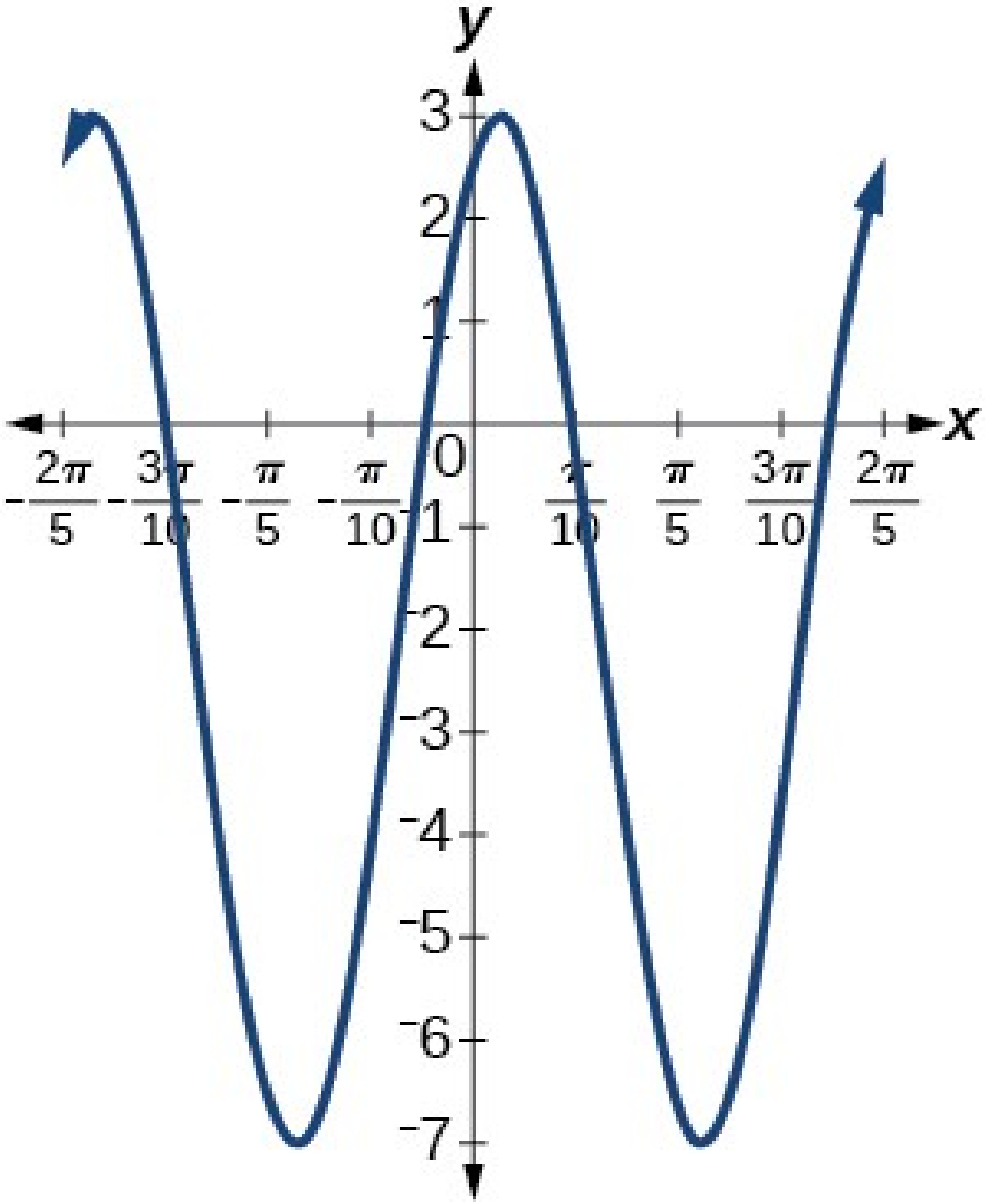
útslag: 4; lota: 2; miðlína: $y=0$; hágildið $y=4$ fæst við $x=2$; lággildið $y=-4$ fæst við $x=1$

15.



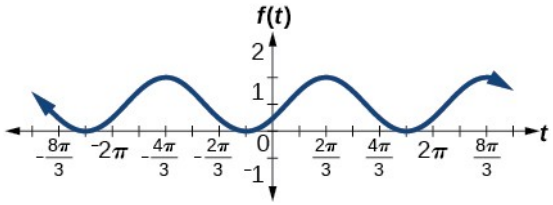
amplitude: 3; period: $\frac{\pi}{4}$; midline: $y=5$; maximum: $y=8$ occurs at $x=0{,}12$; minimum: $y=2$ occurs at $x=0{,}516$; horizontal shift: -4; vertical translation 5; one period occurs from $x=0$ to $x=\frac{\pi}{4}$

17.


y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
$-\frac{2\pi}{5}$
$-\frac{3\pi}{10}$
$-\frac{\pi}{5}$
$-\frac{\pi}{10}$
$\frac{\pi}{10}$
$\frac{\pi}{5}$
$\frac{3\pi}{10}$
$\frac{2\pi}{5}$

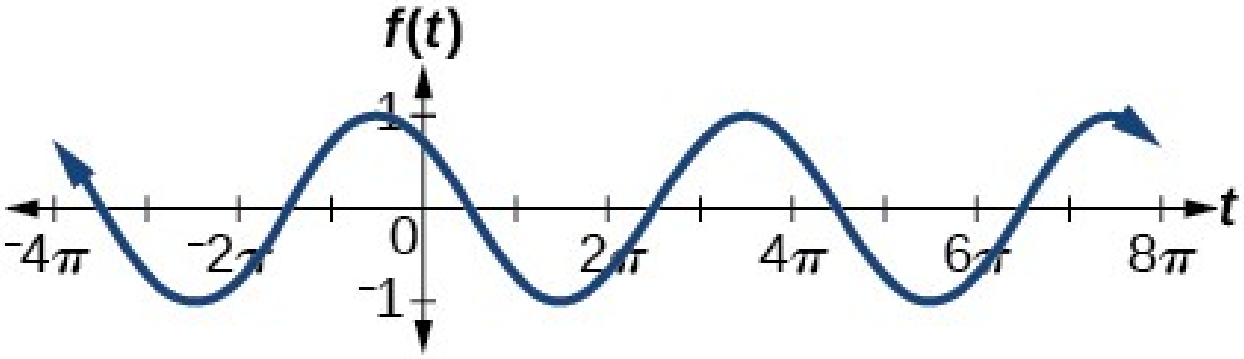
útslag: 5; lota: $\frac{2\pi}{5}$; miðlína: $y=-2$; hágildið $y=3$ fæst við $x=0{,}08$; lággildið $y=-7$ fæst við $x=0{,}71$; fasahliðrun: -4; lóðrétt hliðrun: -2; eina heila lotu má teikna frá $x=0$ til $x=\frac{2\pi}{5}$

19.



útslag: 1; lota: 2π; miðlína: $y=1$; hágildið $y=2$ fæst við $x=2{,}09$; lággildið $y=0$ fæst við $t=5{,}24$; fasahliðrun: $-\frac{\pi}{3}$; lóðrétt hliðrun: 1; ein heil lota er frá $t=0$ til $t=2\pi$

21.



útslag: 1; lota: 4π; miðlína: $y=0$; hágildið $y=1$ fæst við $t=11{,}52$; lággildið $y=-1$ fæst við $t=5{,}24$; fasahliðrun: $-\frac{10\pi}{3}$; lóðrétt hliðrun: 0

23. útslag: 2; miðlína: $y=-3$; lota: 4; jafna: $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-3$

25. útslag: 2; lota: 5; miðlína: $y=3$; jafna: $f(x)=-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)+3$

27. útslag: 4; lota: 2; miðlína: $y=0$; jafna: $f(x)=-4\cos\left(\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

29. útslag: 2; lota: 2; miðlína: $y=1$; jafna: $f(x)=2\cos(\pi x)+1$

31.

$0, \pi$

33.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

35.

$$\frac{\pi}{2}$$

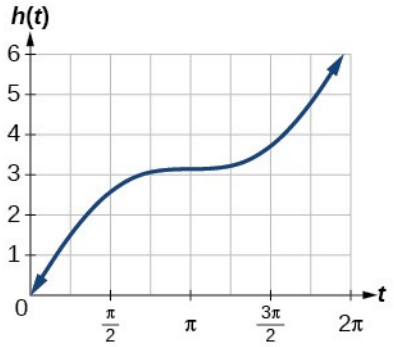
37. $f(x)=\sin x$ er samhverft

39.

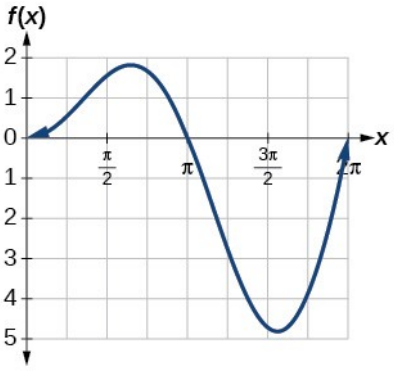
$$\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$$

41. Hágildi: 1 við $x=0$; lággildi: -1 við $x=\pi$

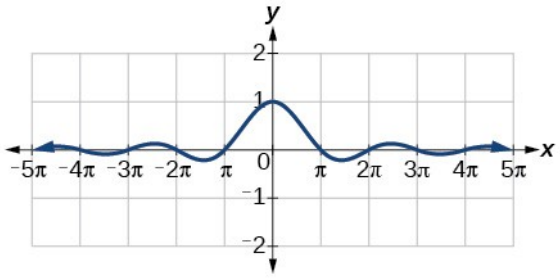
43. Línulegu falli er bætt við lotubundið sínusfall. Grafið hefur ekkert útslag þar sem samsetta fallið $h(x)=x+\sin x$ vex án marka þegar línulega fallið vex án marka. Grafið er afmarkað milli grafanna $y=x+1$ og $y=x-1$ þar sem sínus sveiflast milli -1 og 1.



45. Ekkert útslag er til þar sem fallið er ekki takmarkað.



47. Grafið er samhverft um y-ásinn og hefur ekkert útslag því mörk fallsins minnka þegar $|x|$ vex. Láfella virðist vera við $y=0$.



6.2 Kaflaverkefni

1. Þar sem $y = csc\, x$ er umhverfufall $y = \sin x$, má teikna umhverfur hnitanna á grafi $y = \sin x$ til að fá y-hnit $y = csc\, x$. Skurðpunktar grafsins $y = \sin x$ við x-ás eru lóðfellur grafsins $y = csc\, x$.

3. Svör eru mismunandi. Með einingarhringnum má sýna að $\tan(x + \pi) = \tan x$.

5. Lotan er sú sama: 2π.

7. IV

9. III

11. lota: 8; lárétt hliðrun: 1 einingu til vinstri

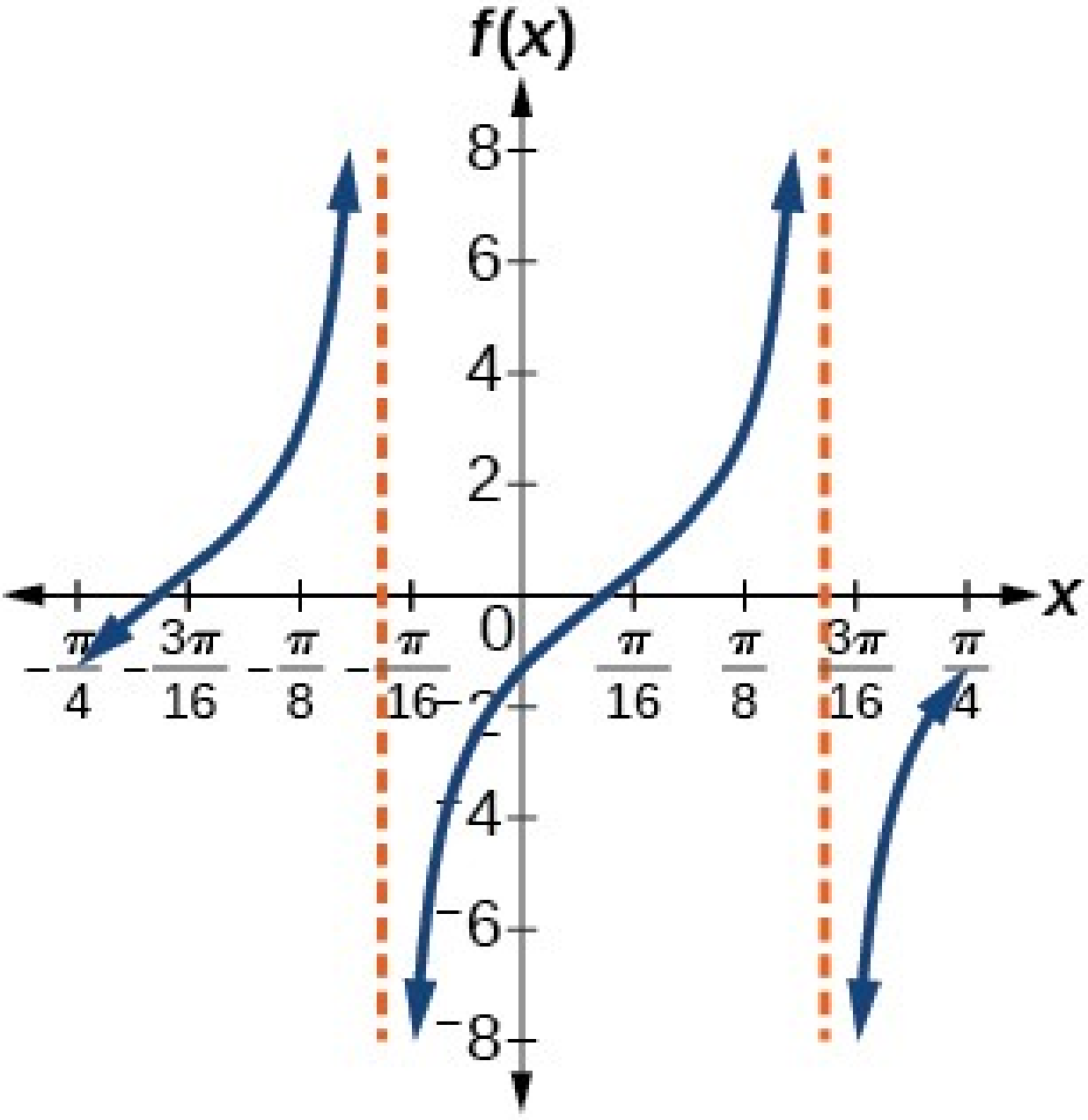
13. 1,5

15. 5

17.

$$-\cot x \cos x - \sin x$$

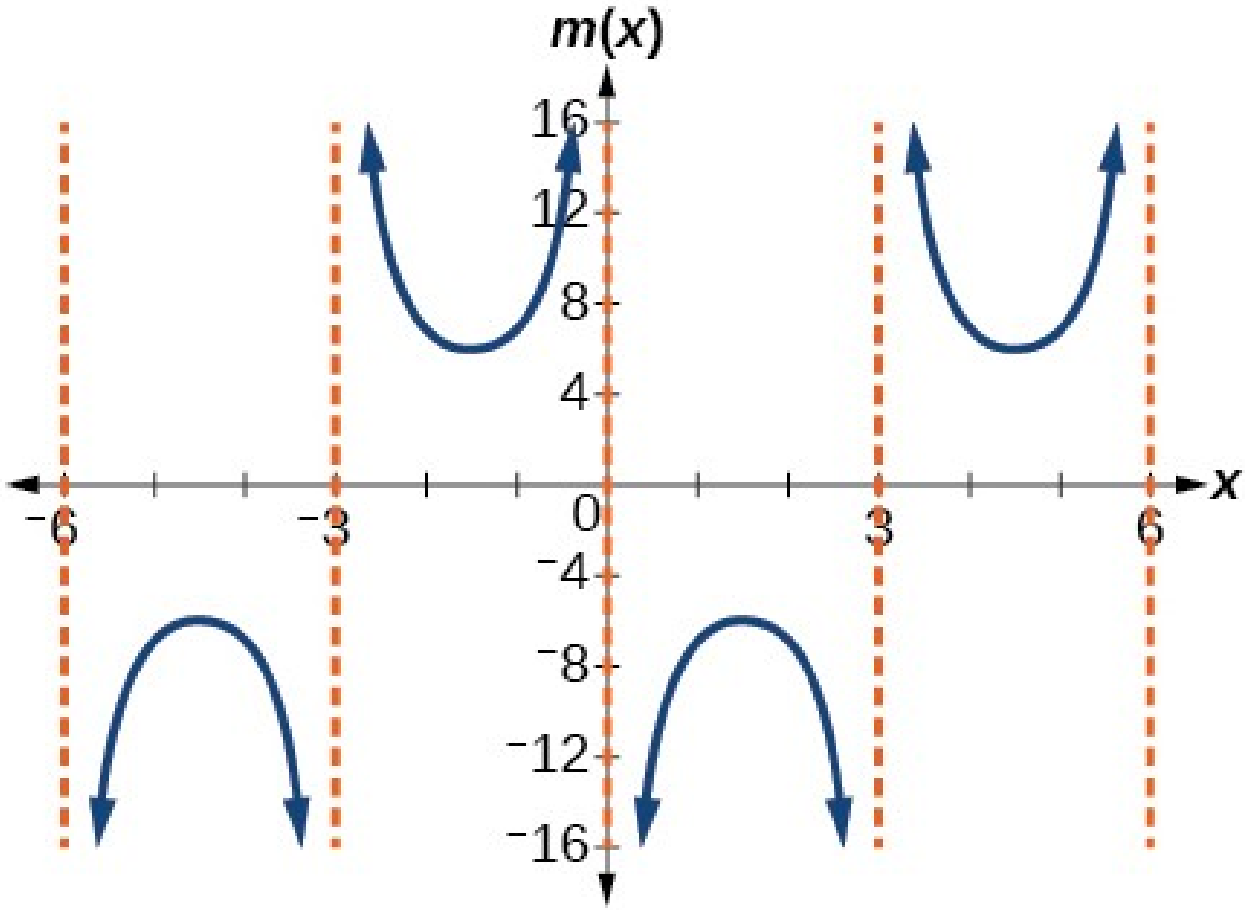
19.



teygjustuðull: 2; lota: $\frac{\pi}{4}$; aðfellur:

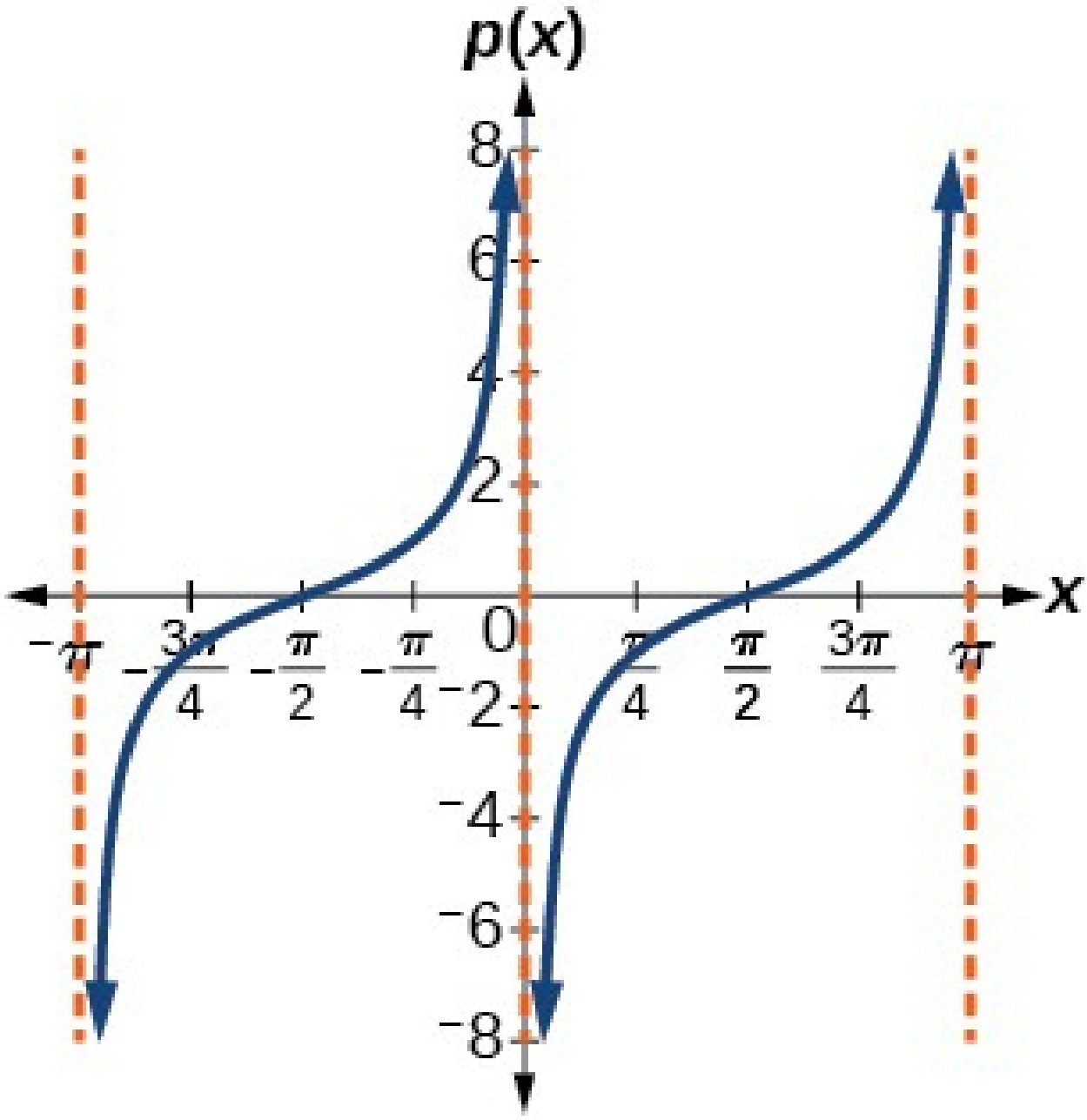
$$x=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)+8,\ \text{þar sem } k \text{ er heiltala}$$

21.



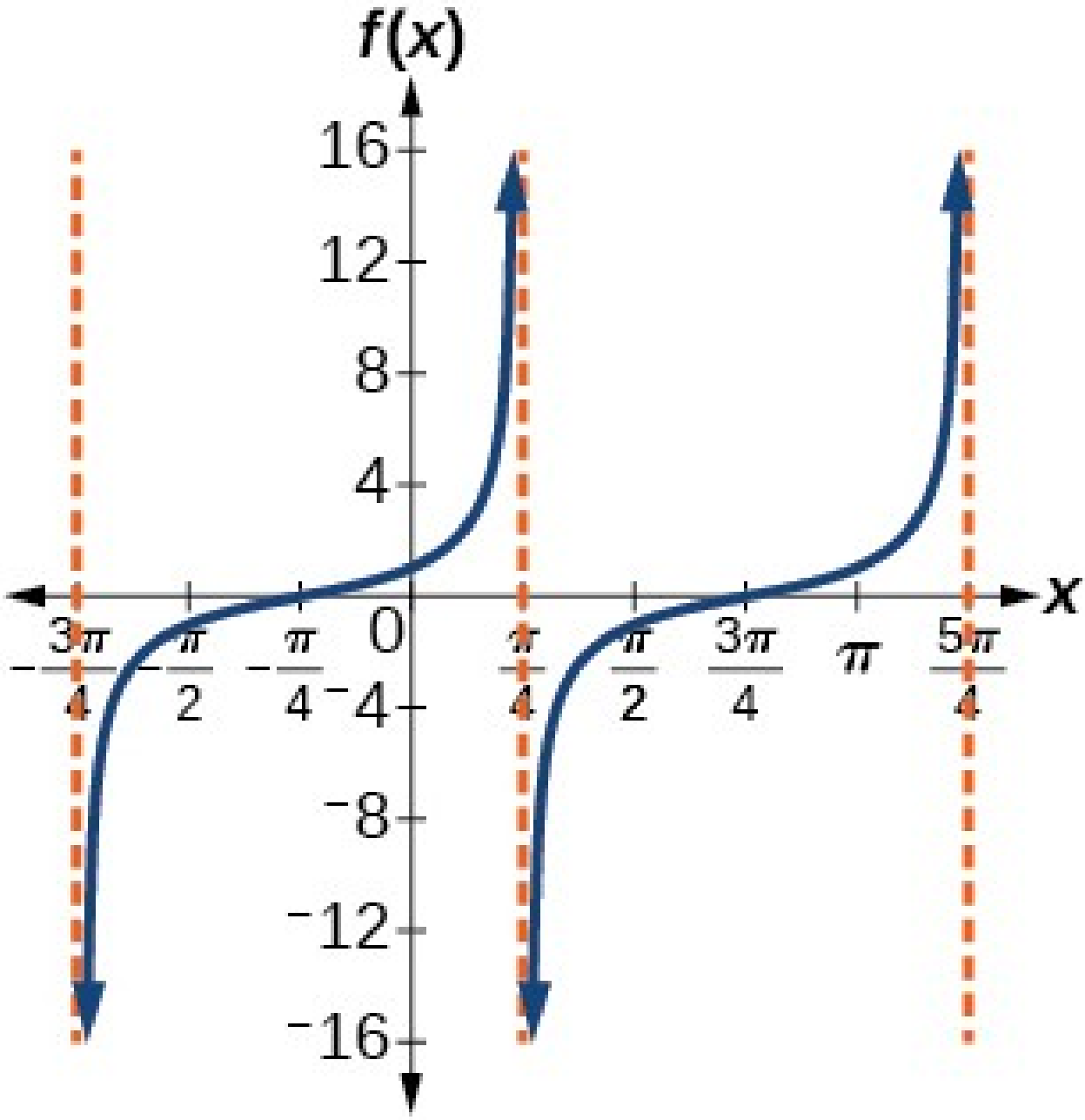
teygjustuðull: 6; lota: 6; aðfellur: $x = 3k$, þar sem k er heiltala

23.



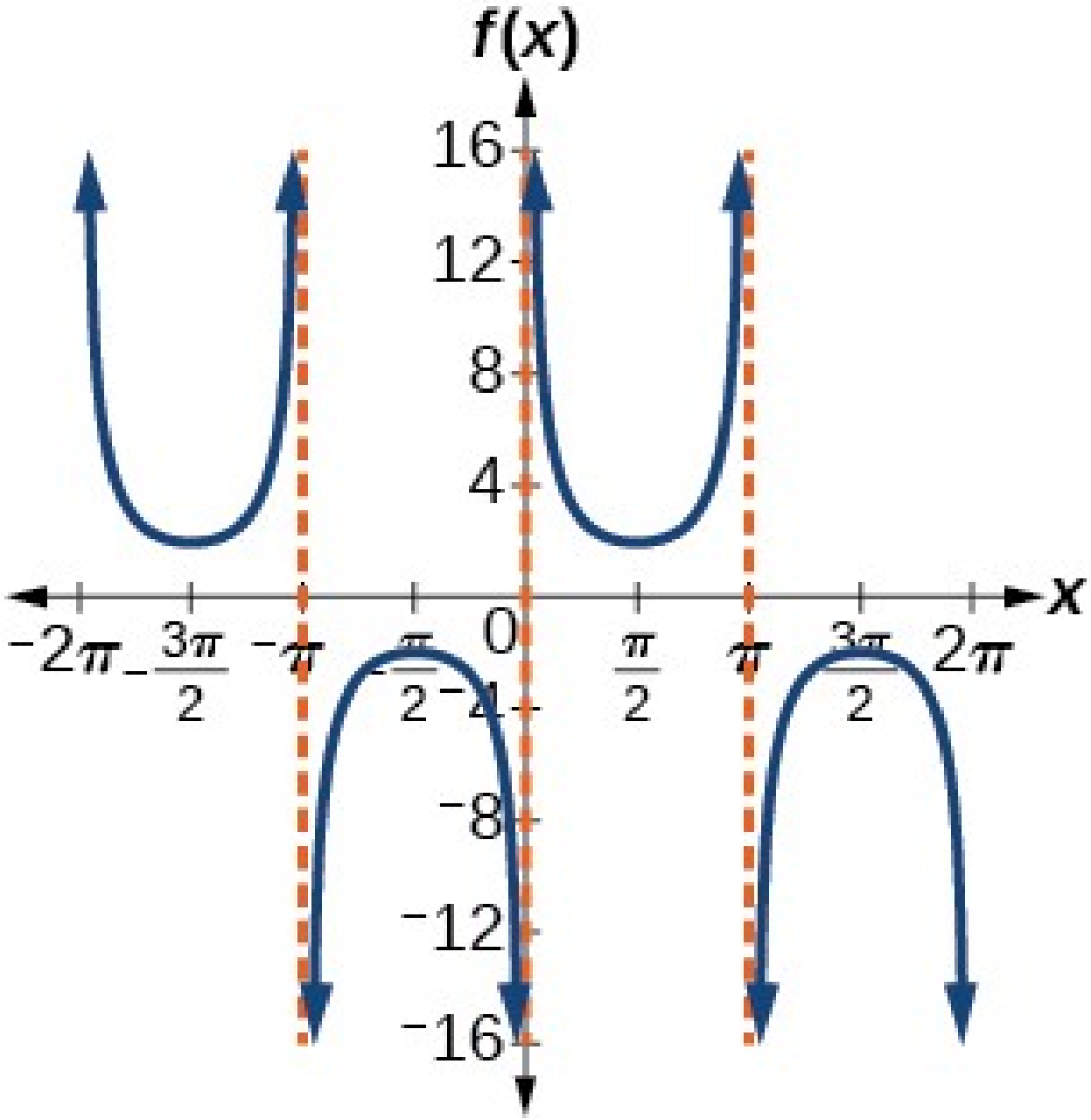
teygjustuðull: 1; lota: π; aðfellur: $x = \pi k$, þar sem k er heiltala

25.



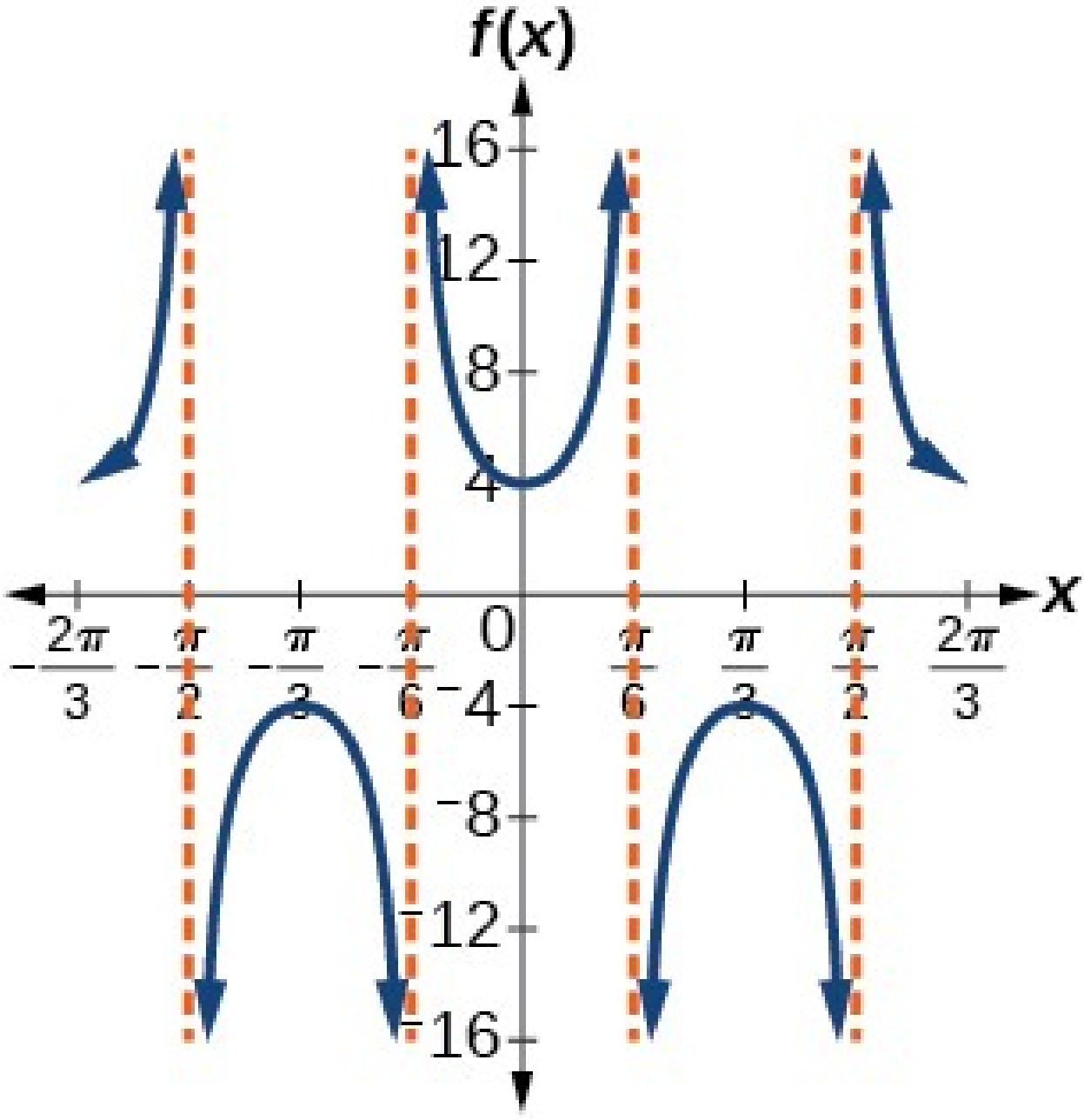
Teygjustuðull: 1; lota: π; aðfellur: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, þar sem k er heiltala

27.



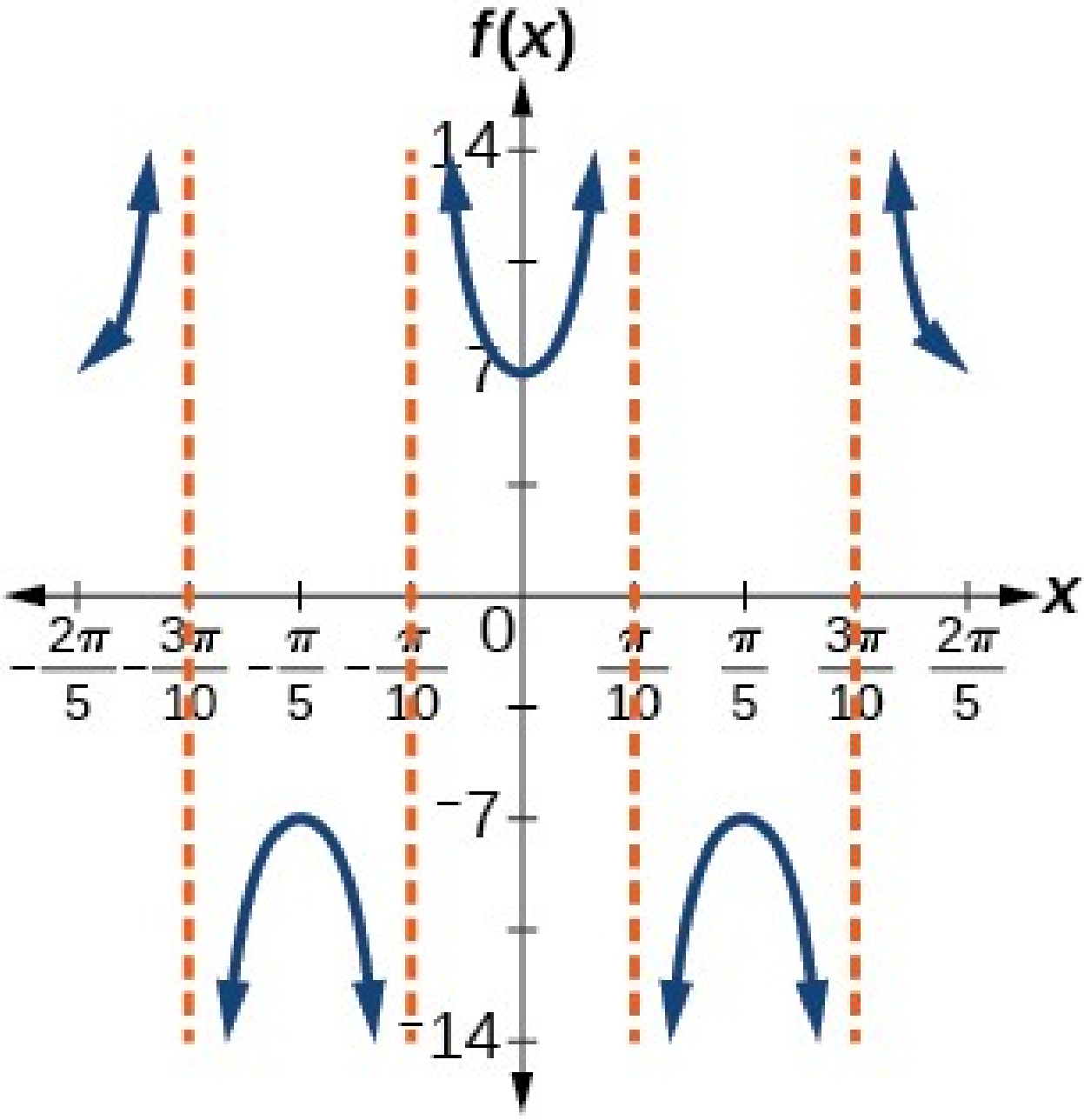
teygjustuðull: 2; lota: 2π; aðfellur: $x = \pi k$, þar sem k er heiltala

29.



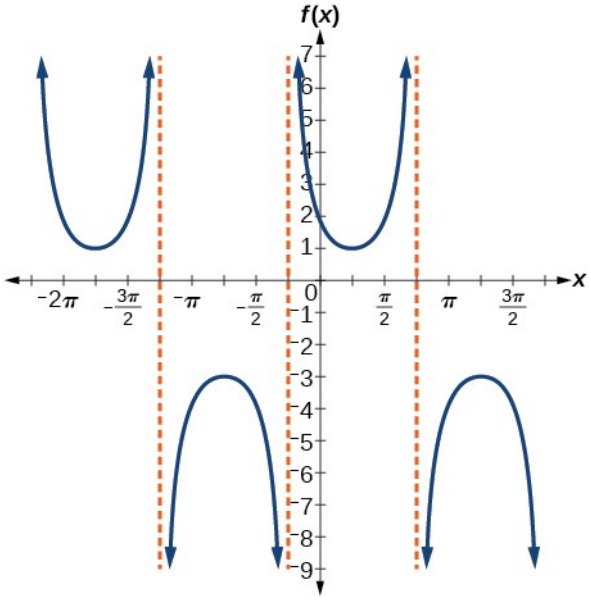
teygjustuðull: 4; lota: $\frac{2\pi}{3}$; aðfellur: $x=\frac{\pi}{6}k$, þar sem k er oddatala

31.



teygjustuðull: 7; lota: $\frac{2\pi}{5}$; aðfellur: $x=\frac{\pi}{10}k$, þar sem k er oddatala

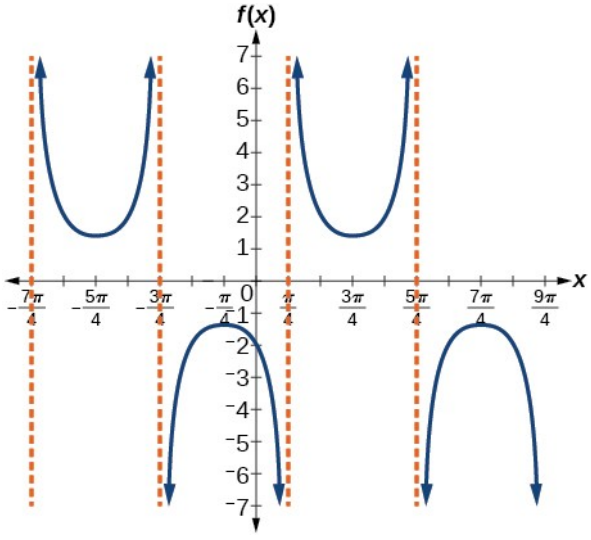
33.



teygjustuðull: 2; lota: 2π; aðfellur:

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \text{þar sem}\ k\ \text{er heiltala}$$

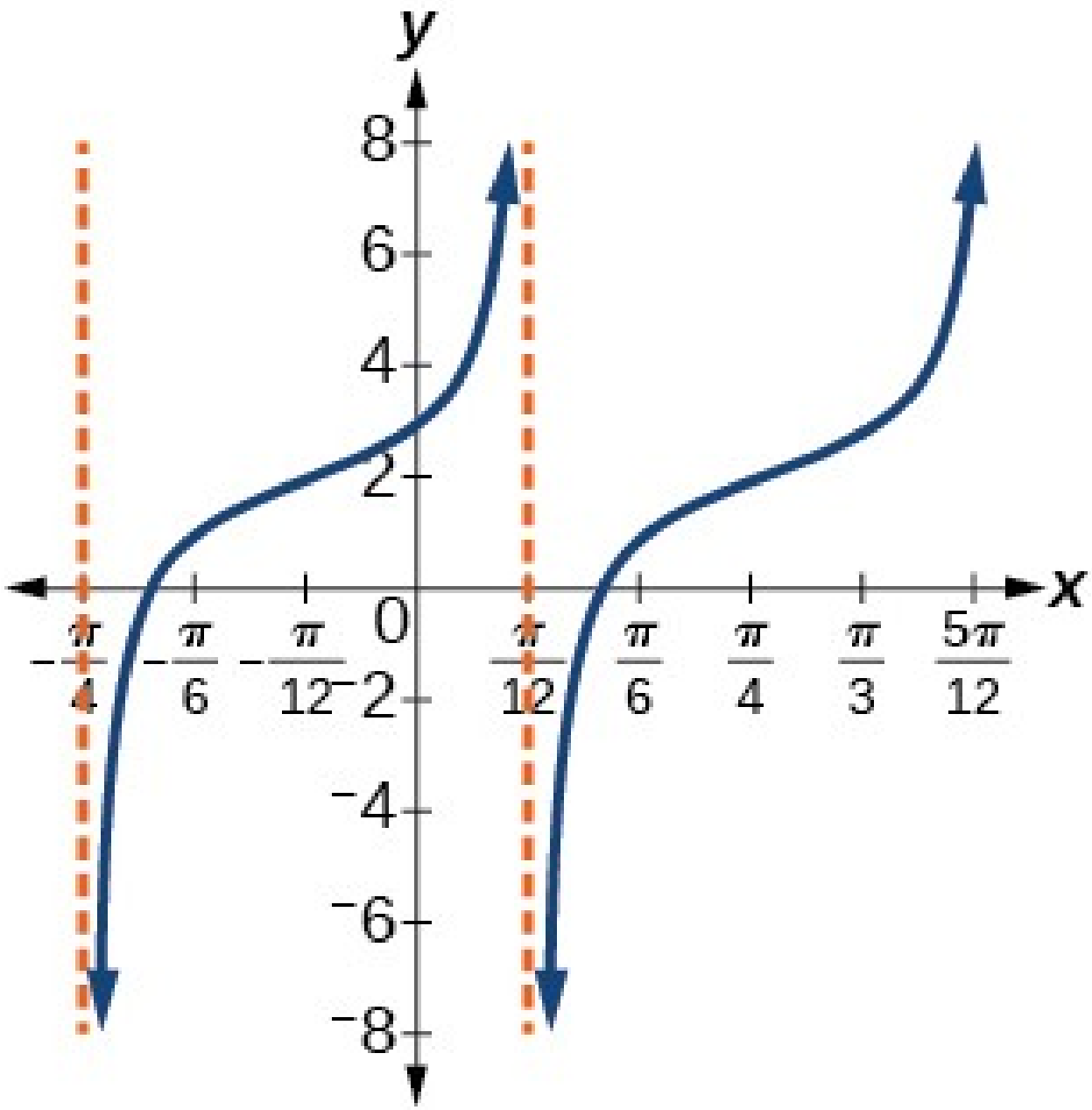
35.



teygjustuðull: $\frac{7}{5}$; lota: 2π; aðfellur: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, þar sem k er heiltala

37.

$$y=\tan\left(3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)+2$$



39.

$$f(x)=csc(2x)$$

41.

$$f(x)=csc(4x)$$

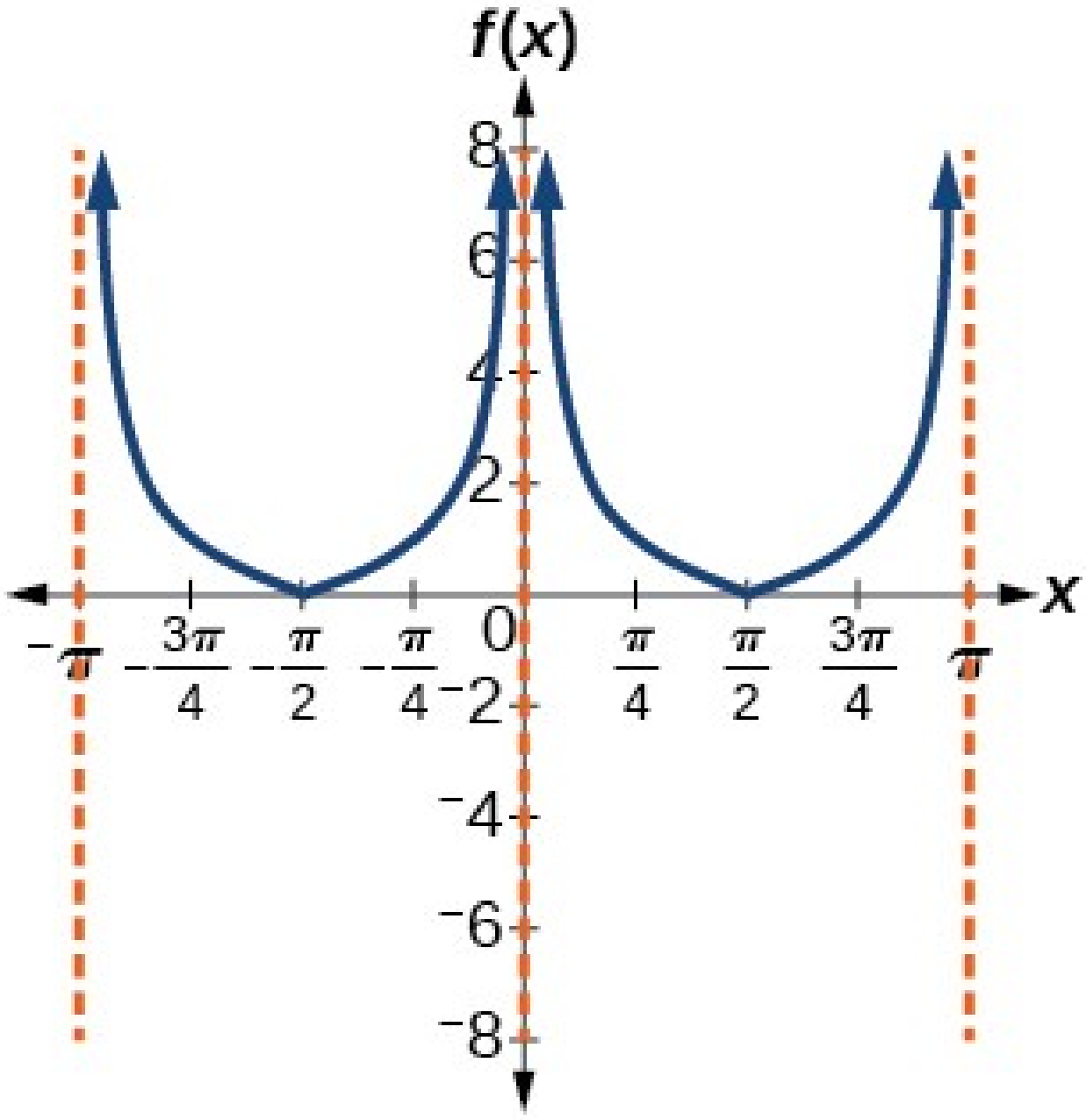
43.

$$f(x)=2csc\,x$$

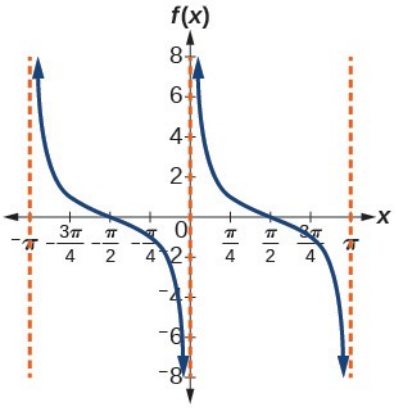
45.

$$f(x)=\frac{1}{2}\tan(100\pi x)$$

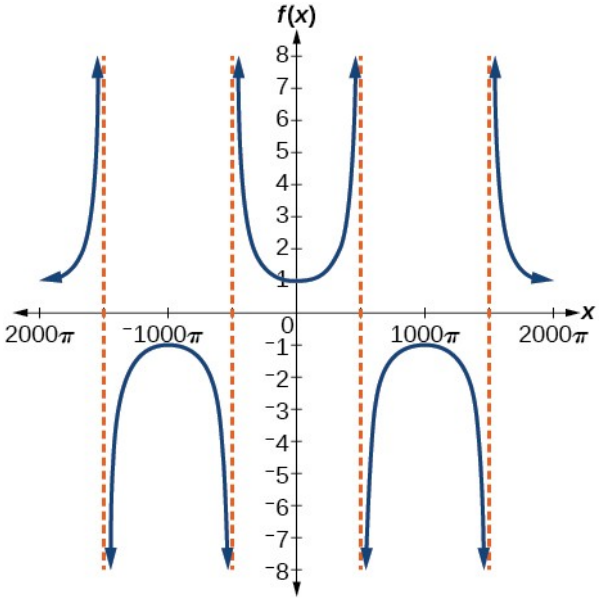
47.



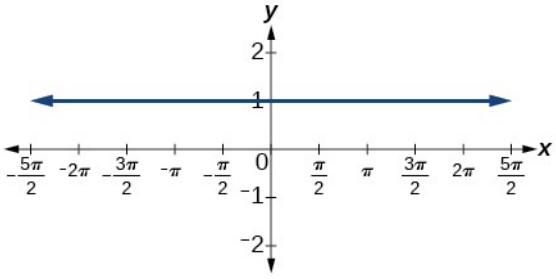
49.



51.



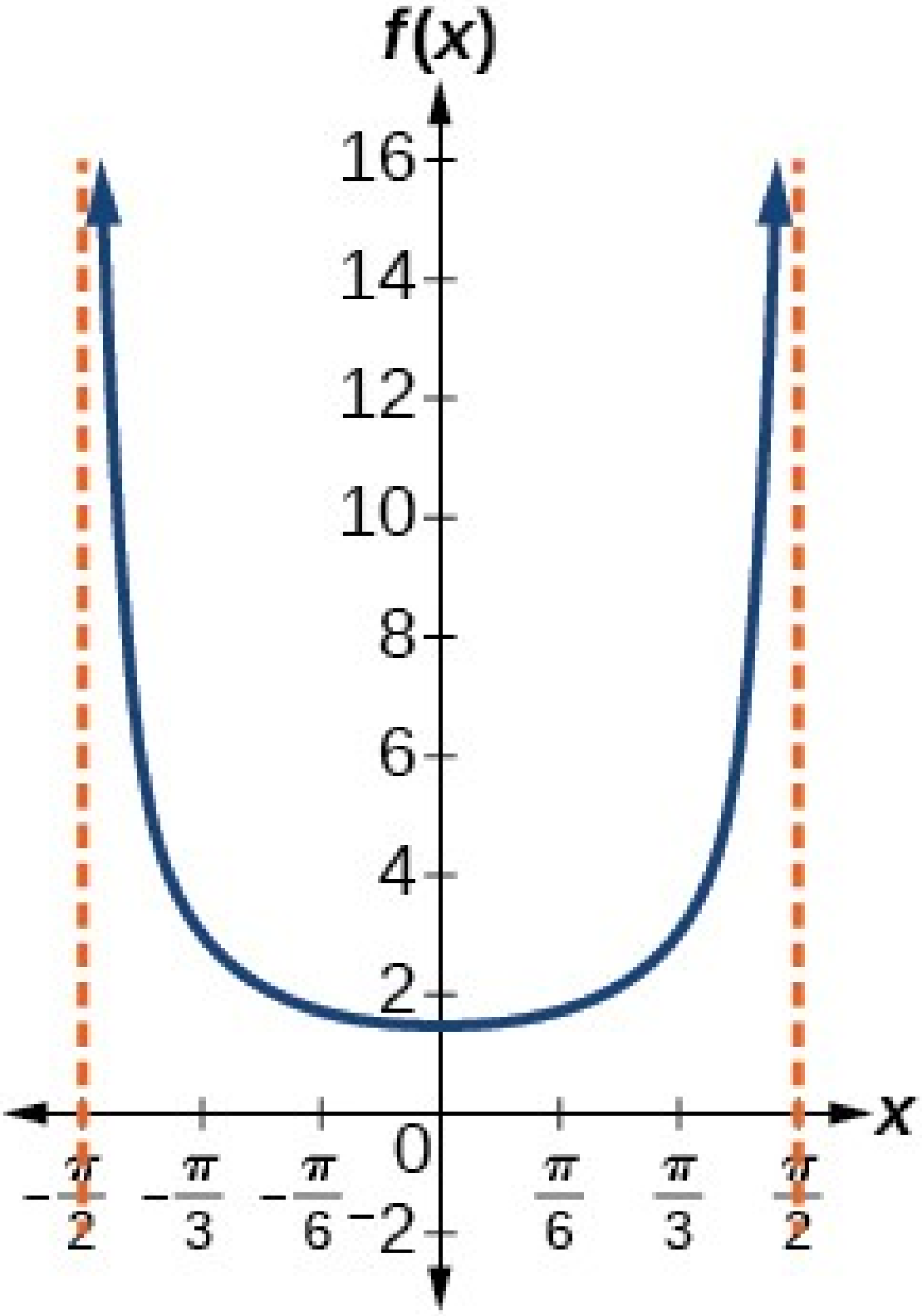
53.



55.

1. ⓐ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

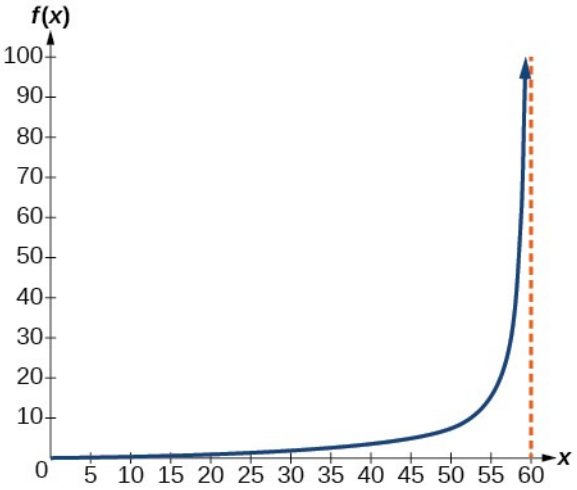
2. ⓑ



3. ⓒ $x=-\frac{\pi}{2}$ og $x=\frac{\pi}{2}$; fjarlægðin vex án takmarka þegar $|x|$ nálgast $\frac{\pi}{2}$ það er, hornrétt á línuna sem táknar hánorður væri báturinn svo langt í burtu að fiskimaðurinn sæi hann ekki;

4. ⓓ 3; þegar $x=-\frac{\pi}{3}$, er báturinn 3 km í burtu;
5. ⓔ 1,73; þegar $x=\frac{\pi}{6}$, er báturinn um 1,73 km í burtu;
6. ⓕ 1,5 km; þegar $x=0$

57.

1. ⓐ $h(x)=2\tan\left(\frac{\pi}{120}x\right)$;
2. ⓑ 

3. ⓒ $h(0)=0$: eftir 0 sekúndur er eldflaugin 0 mílur yfir jörðu; $h(30)=2$: eftir 30 sekúndur er eldflaugin í 2 mílna hæð;
4. ⓓ Þegar x nálgast 60 sekúndur verða gildi $h(x)$ sífellt stærri. Fjarlægðin að eldflauginni verður svo mikil að myndavélin getur ekki lengur fylgt henni.

6.3 Kaflaverkefni

1. Fallið $y=\sin x$ er eintækt á $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; þetta bil er því myndmengi andhverfu fallsins $y=\sin x$, $f(x)=\sin^{-1}x$. Fallið $y=\cos x$ er eintækt á $[0,\pi]$; þetta bil er því myndmengi andhverfu fallsins $y=\cos x$, $f(x)=\cos^{-1}x$.

3. $\frac{\pi}{6}$ er radíanamál horns milli $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ sem hefur sínusgildið 0,5.

5. Til að fall hafi andhverfu verður það að vera eintækt og standast próf láréttrar línu. Venjulega sínusfallið er ekki eintækt nema skilgreiningarmengi þess sé takmarkað. Samkomulag stærðfræðinga er að takmarka sínusfallið við bilið $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ svo það verði eintækt og hafi andhverfu.

7. Satt. Hornið θ_1 sem er jafnt $\arccos(-x)$, $x>0$, er horn í öðrum fjórðungi með viðmiðunarhornið θ_2, þar sem θ_2 er jafnt $\arccos x$, $x>0$. Þar sem θ_2 er viðmiðunarhorn θ_1, $\theta_2=\pi-\theta_1$ og $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$-

9.

$$-\frac{\pi}{6}$$

11.

$$\frac{3\pi}{4}$$

13.

$$-\frac{\pi}{3}$$

15.

$$\frac{\pi}{3}$$

17. 1,98

19. 0,93

21. 1,41

23. 0,56 radíanar

25. 0

27. 0,71

29. -0,71

31.

$$-\frac{\pi}{4}$$

33. 0,8

35.

$$\frac{5}{13}$$

37.

$$\frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x}}$$

39.

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

41.

$$\frac{x+0{,}5}{\sqrt{-x^2-x+\frac{3}{4}}}$$

43.

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{|x+1|}$$

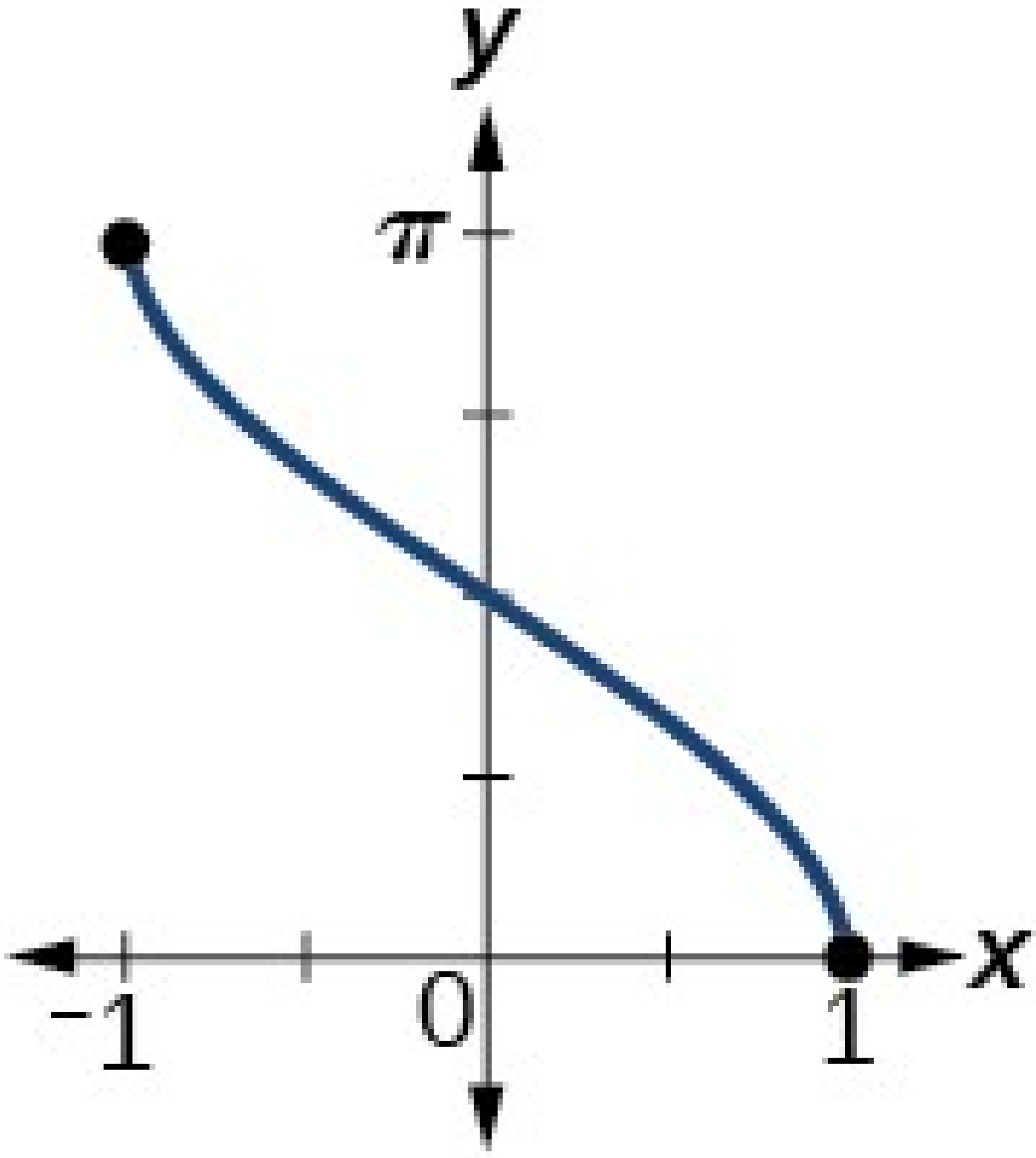
45.

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{x}$$

47.

$$t$$

49.



skilgreiningarmengi $[-1,1]$; myndmengi $[0,\pi]$

51. um það bil $x=0{,}00$

53. 0,395 radíanar

55. 1,11 radíanar

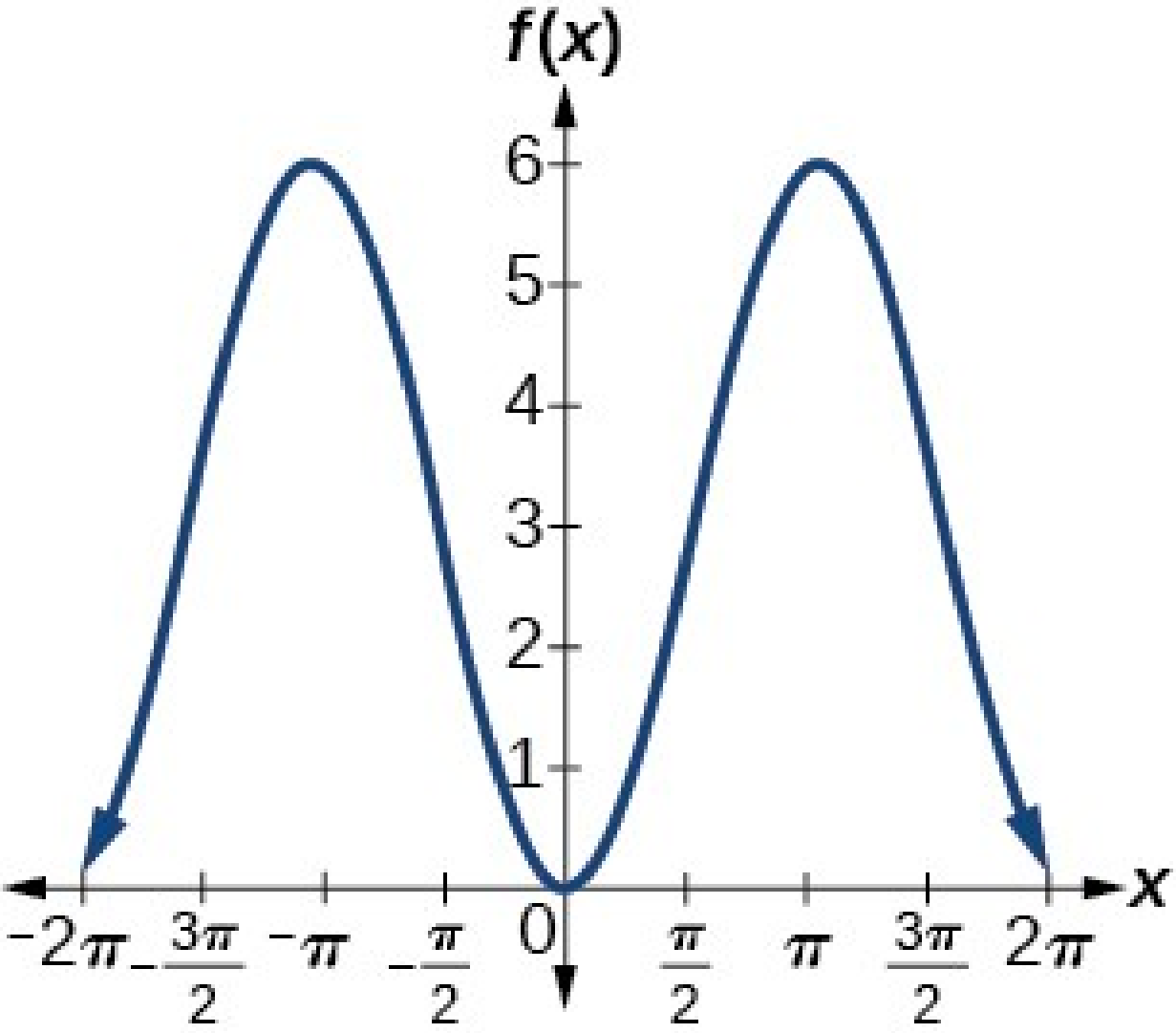
57. 1,25 radíanar

59. 0,405 radíanar

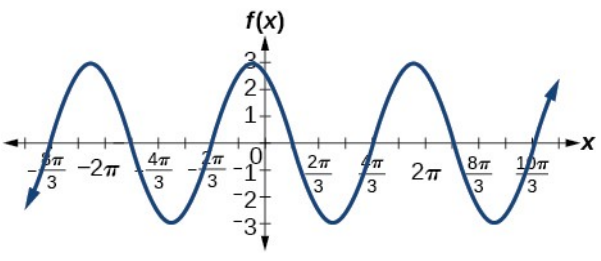
61. Nei. Hornið sem stiginn myndar við láréttan flöt er 60 gráður.

Upprifjunarverkefni

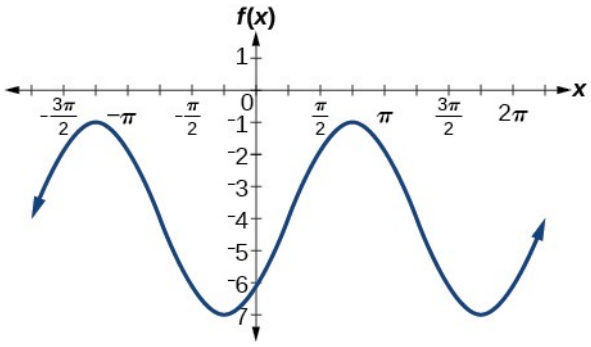
1. útslag: 3; lota: 2π; miðlína: $y=3$; engar aðfellur



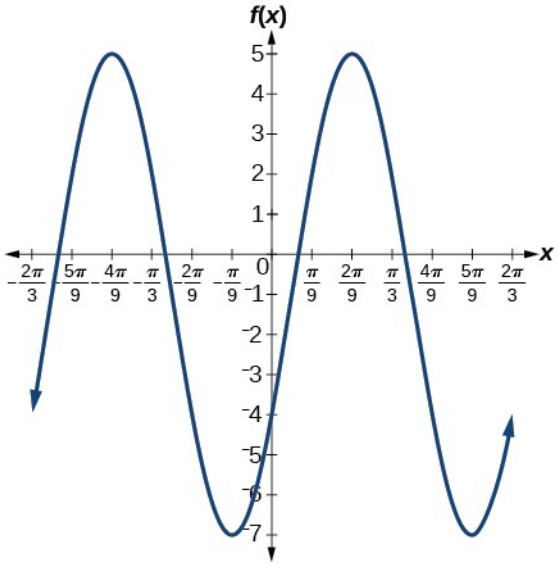
3. útslag: 3; lota: 2π; miðlína: $y=0$; engar aðfellur



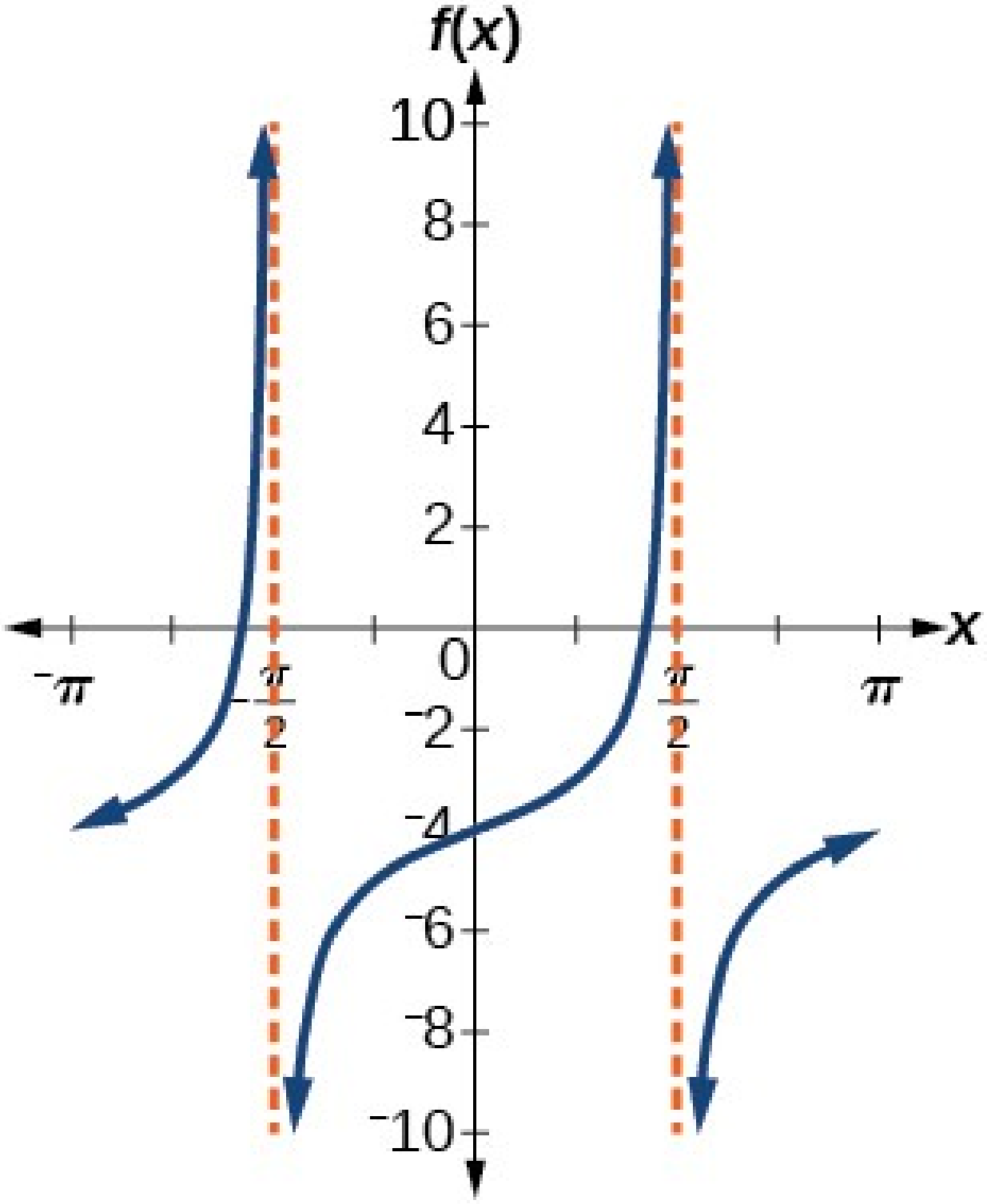
5. útslag: 3; lota: 2π; miðlína: $y=-4$; engar aðfellur



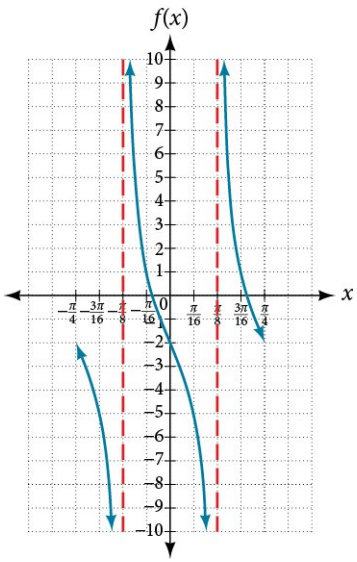
7. útslag: 6; lota: $\frac{2\pi}{3}$; miðlína: $y=-1$; engar aðfellur



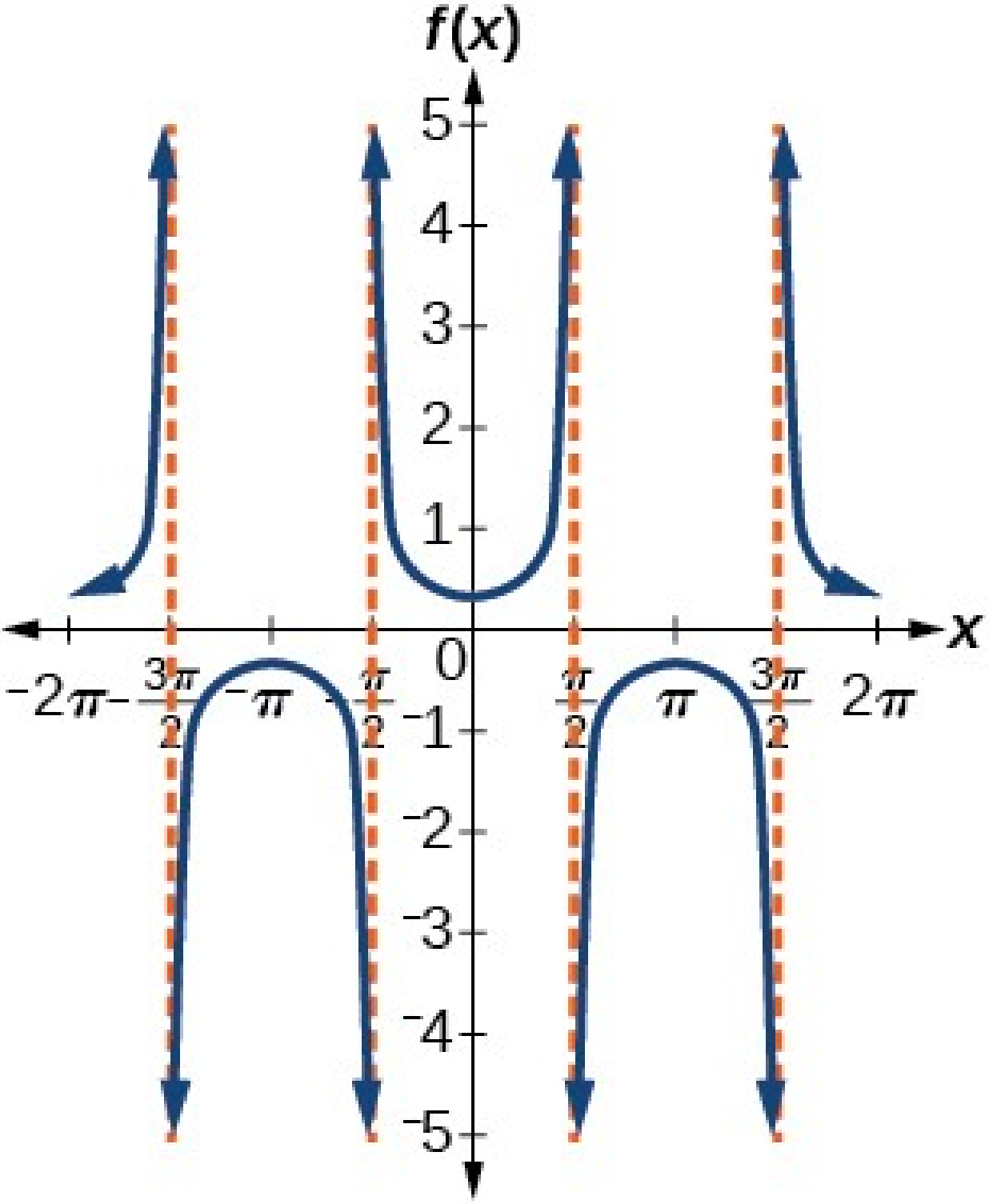
9. teygjustuðull: enginn; lota: π; miðlína: $y=-4$; aðfellur: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, þar sem k er heiltala



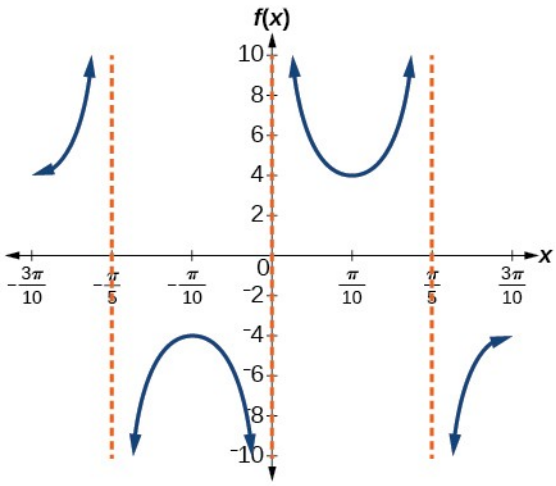
11. teygjustuðull: 3; lota: $\frac{\pi}{4}$; miðlína: $y=-2$; aðfellur: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$, þar sem k er heiltala



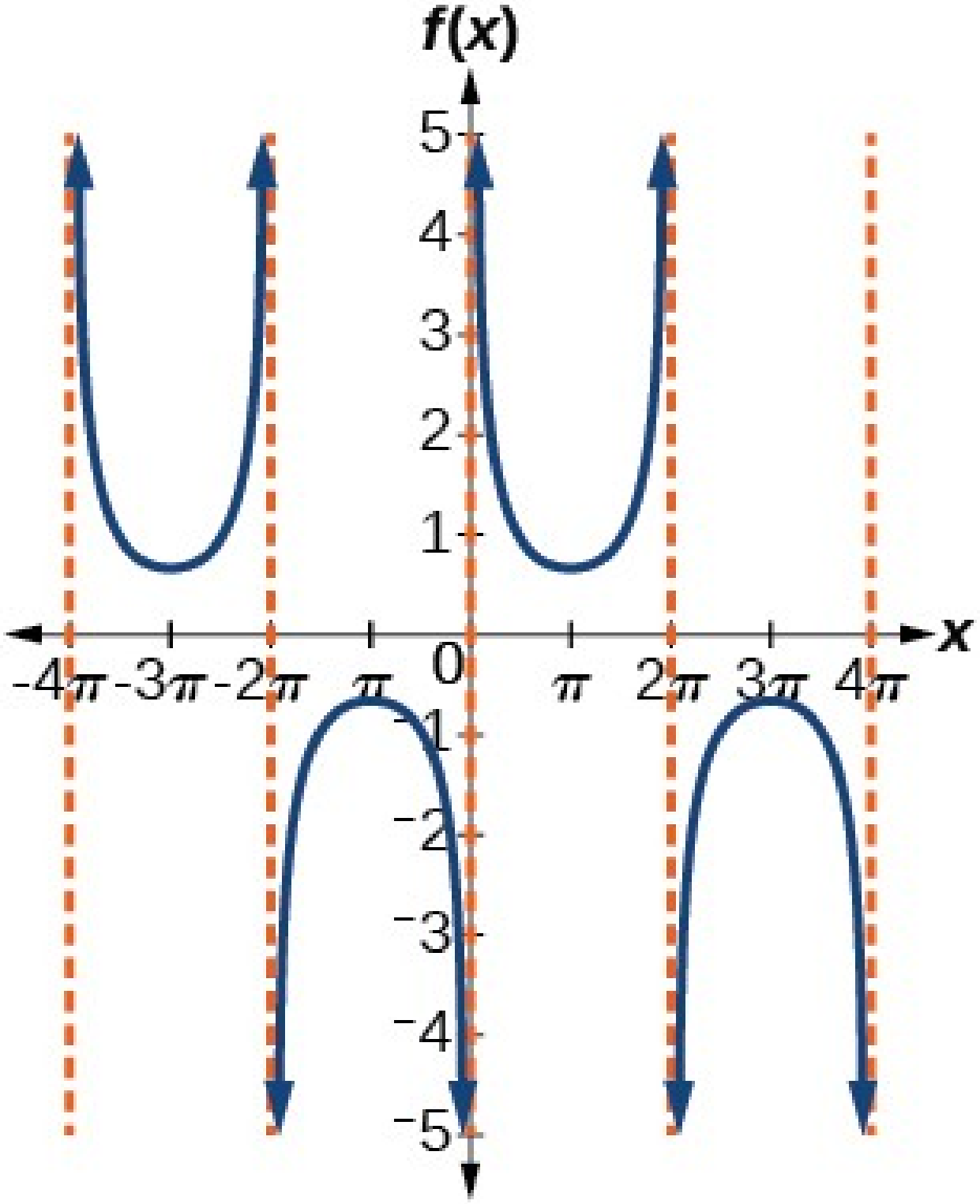
13. útslag: ekkert; lota: 2π; engin fasahliðrun; aðfellur: $x=\frac{\pi}{2}k$, þar sem k er oddatala



15. útslag: ekkert; lota: $\frac{2\pi}{5}$; engin fasahliðrun; aðfellur: $x=\frac{\pi}{5}k$, þar sem k er heiltala



17. útslag: ekkert; lota: 4π ; engin fasahliðrun; aðfellur: $x = 2\pi k$, þar sem k er heiltala



19. stærst: 20.000; minnst: 4.000

21. útslag: 8.000; lota: 10; fasahliðrun: 0

23. Árið 2007 er áætlaður mannfjöldi 4.413. Árið 2010 verður mannfjöldinn 11.924.

25. 5 in.

27. 10 sekúndur

29.

$$\frac{\pi}{6}$$

31.

$$\frac{\pi}{4}$$

33.

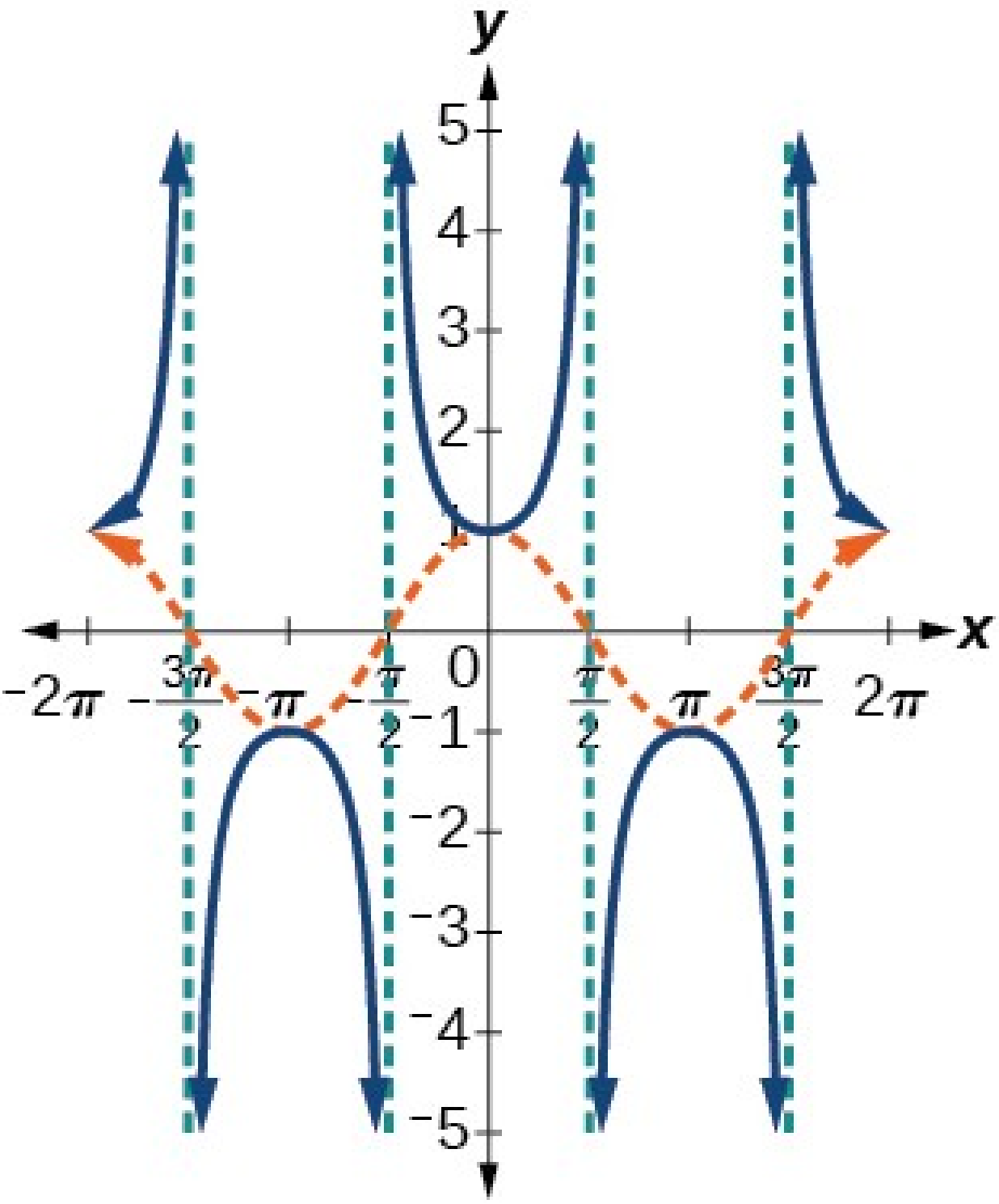
$$\frac{\pi}{3}$$

35. Engin lausn

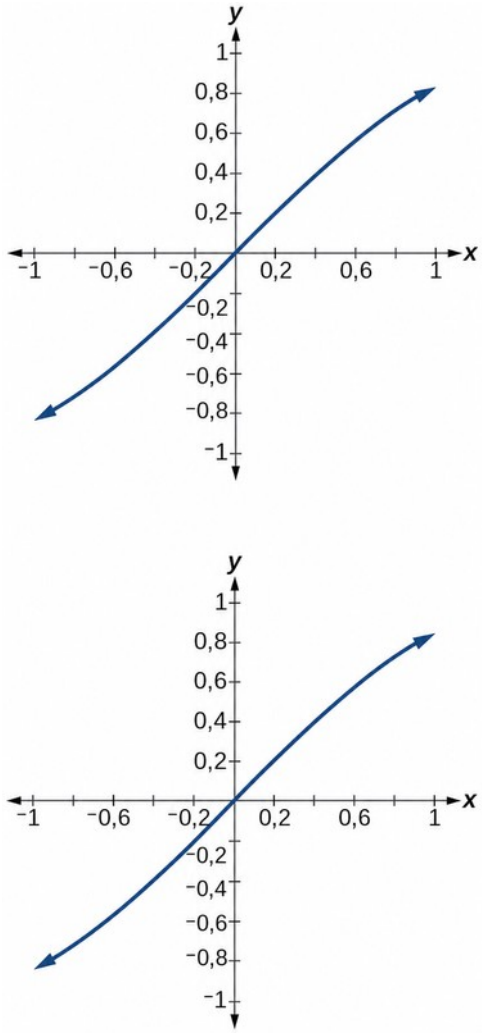
37.

$$\frac{12}{5}$$

39. Gröfin eru ekki samhverf um línuna $y = x$. Þau eru samhverf um y -ásinn.

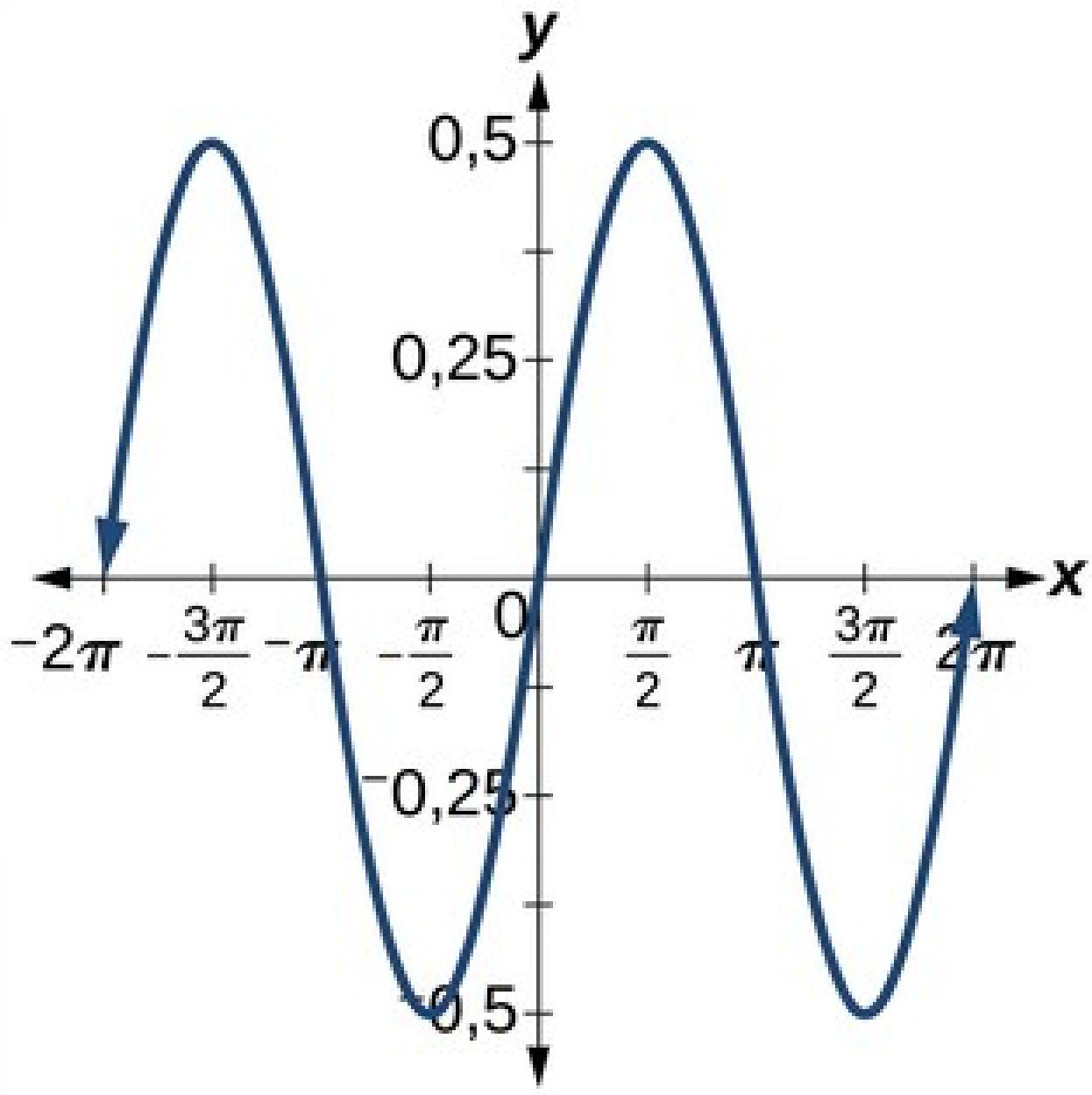


41. Gröfin virðast vera eins.

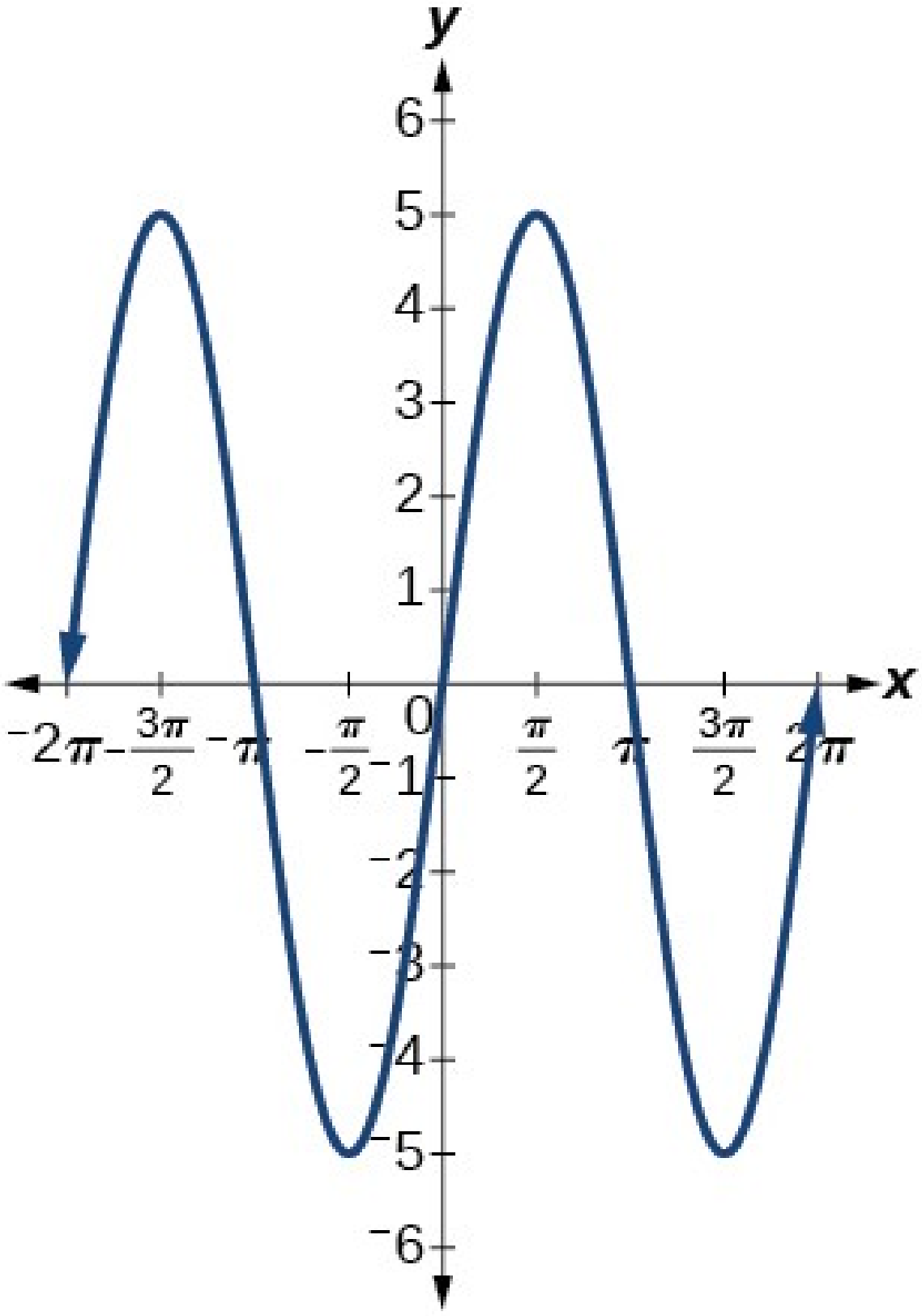


Æfingapróf

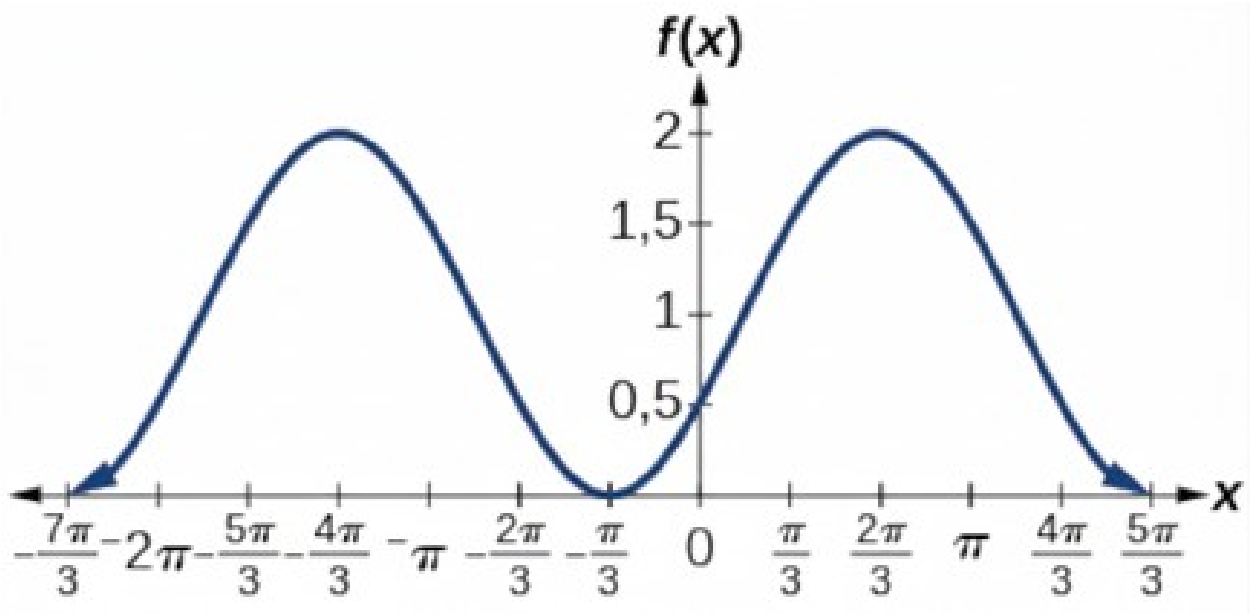
1. útslag: 0,5; lota: 2π; miðlína $y=0$



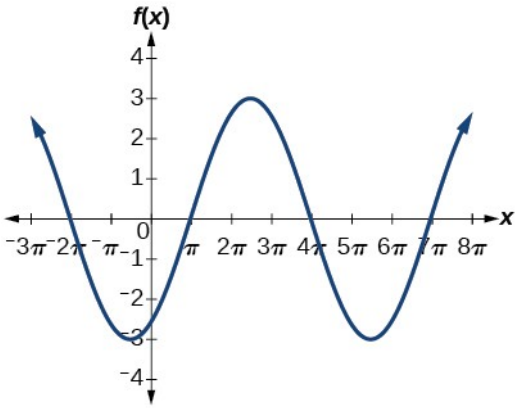
3. útslag: 5; lota: 2π; miðlína: $y=0$



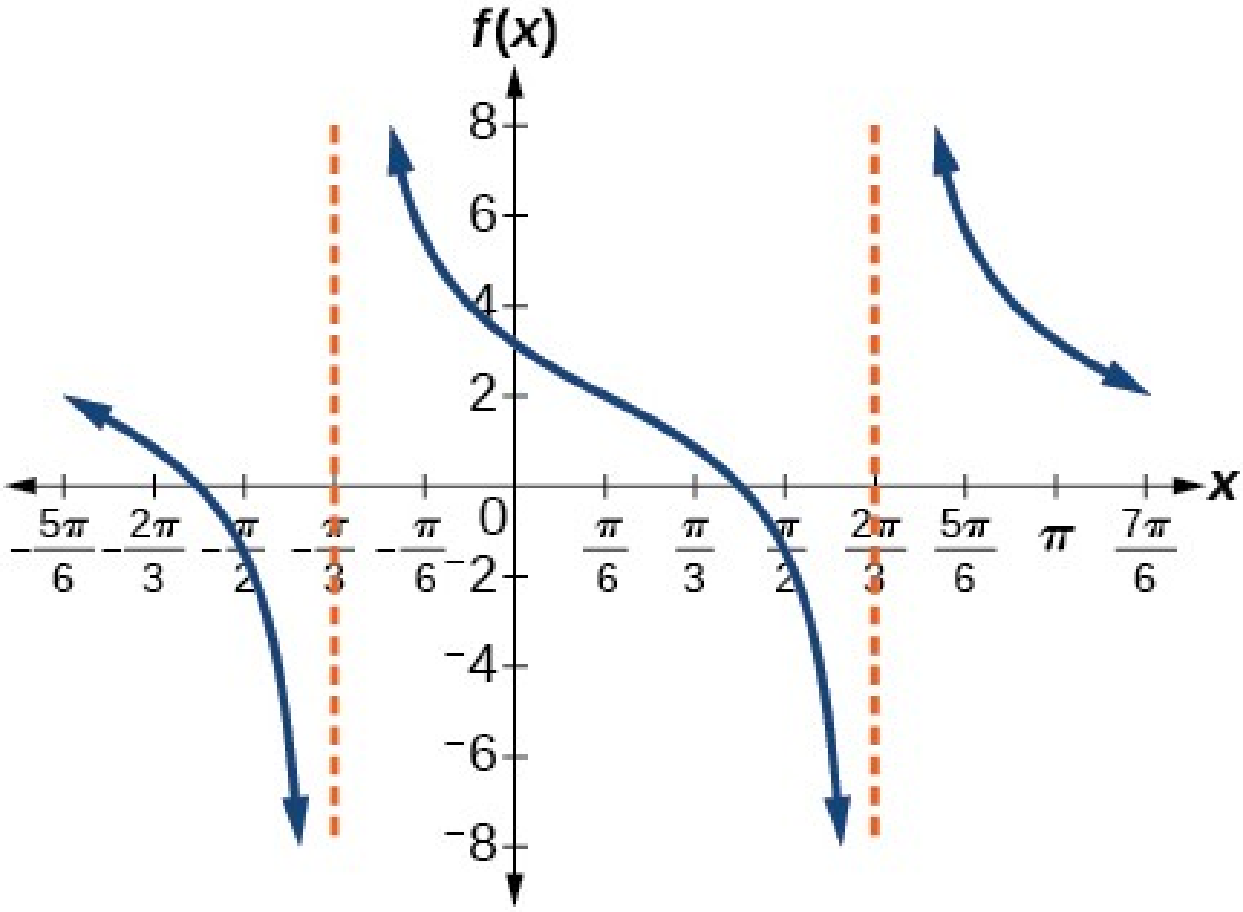
5. útslag: 1; lota: 2π; miðlína: $y=1$



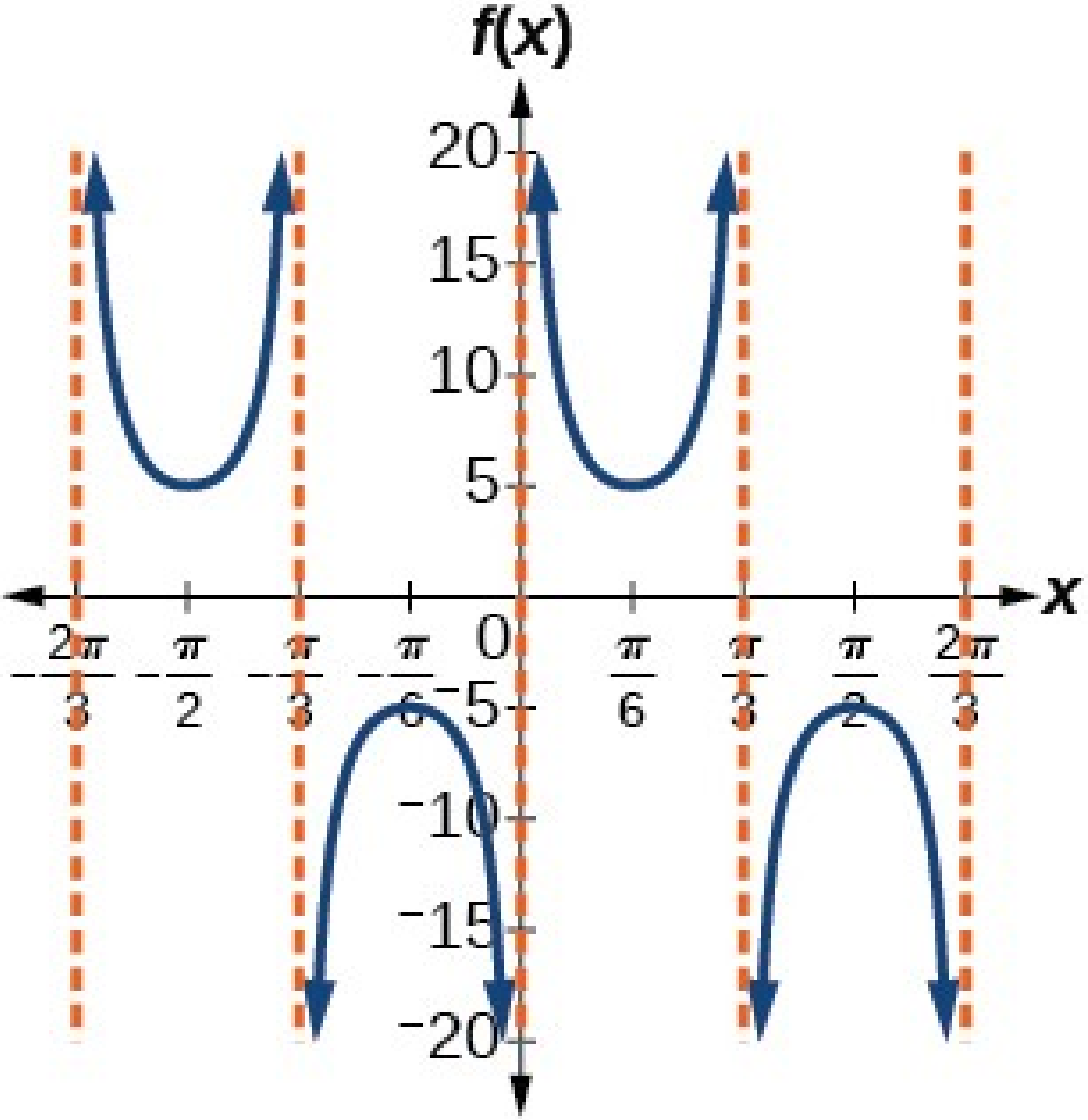
7. útslag: 3; lota: 6π; miðlína: $y=0$



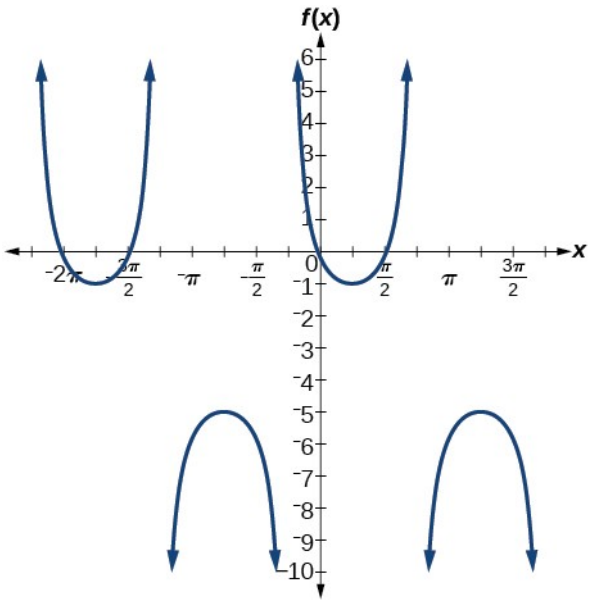
9. útslag: ekkert; lota: π; miðlína: $y=0$, aðfellur: $x=\frac{2\pi}{3}+\pi k$, þar sem k er heiltala



11. útslag: ekkert; lota: $\frac{2\pi}{3}$; miðlína: $y=0$, aðfellur: $x=\frac{\pi}{3}k$, þar sem k er heiltala



13. útslag: ekkert; lota: 2π; miðlína: $y=-3$



15. útslag: 2; lota: 2; miðlína:

$$y=0;$$

$$f(x)=2\sin(\pi(x-1))$$

17. útslag: 1; lota: 12; fasahliðrun: -6; miðlína $y=-3$

19.

$$D(t)=68-12\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$

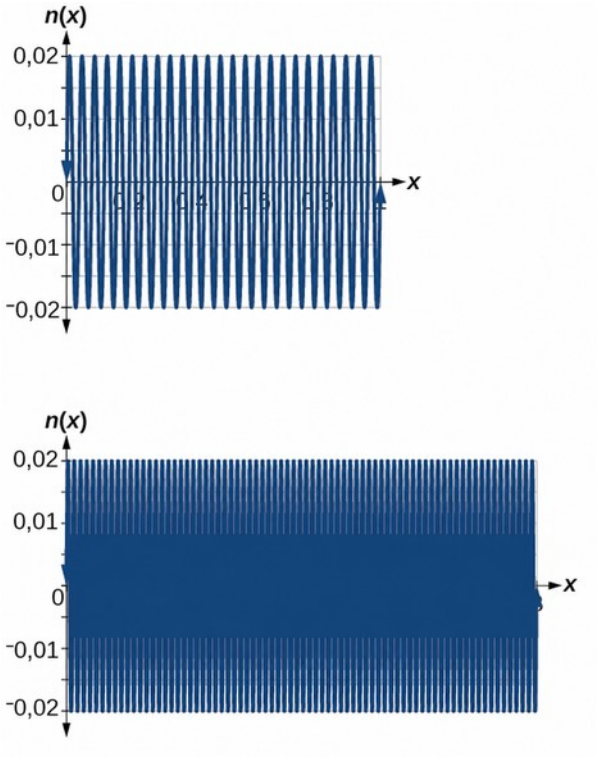
21. lota: $\frac{\pi}{6}$; lárétt hliðrun: -7

23. $f(x)=sec(\pi x)$; lota: 2; fasahliðrun: 0

25.

4

27. Myndirnar eru ólíkar þar sem lota bylgjunnar er $\frac{1}{25}$. Á stærra skilgreiningarmengi sjást fleiri lotur grafsins.



29.

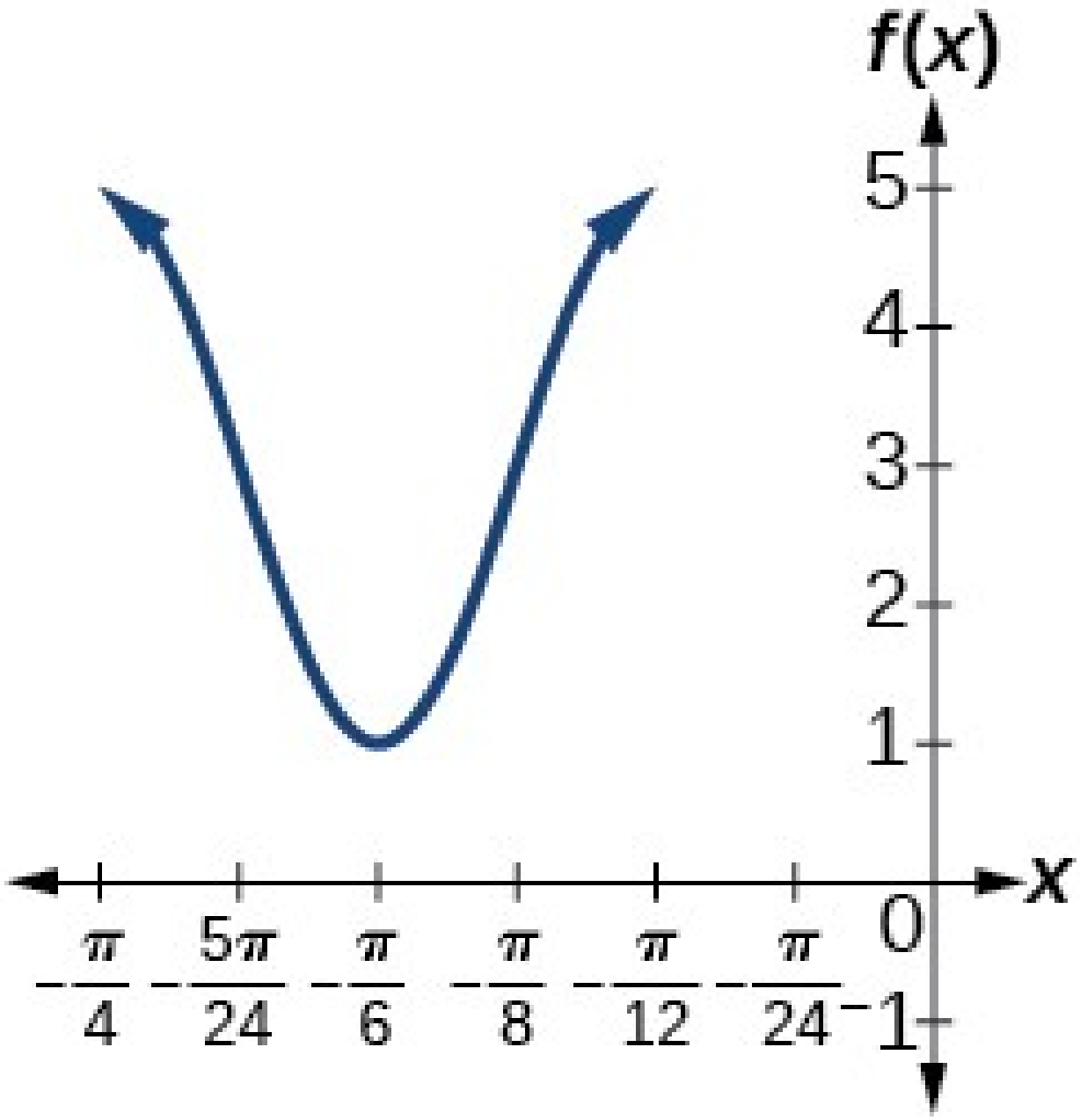
$$\frac{3}{5}$$

31. Á nálguðu bilunum

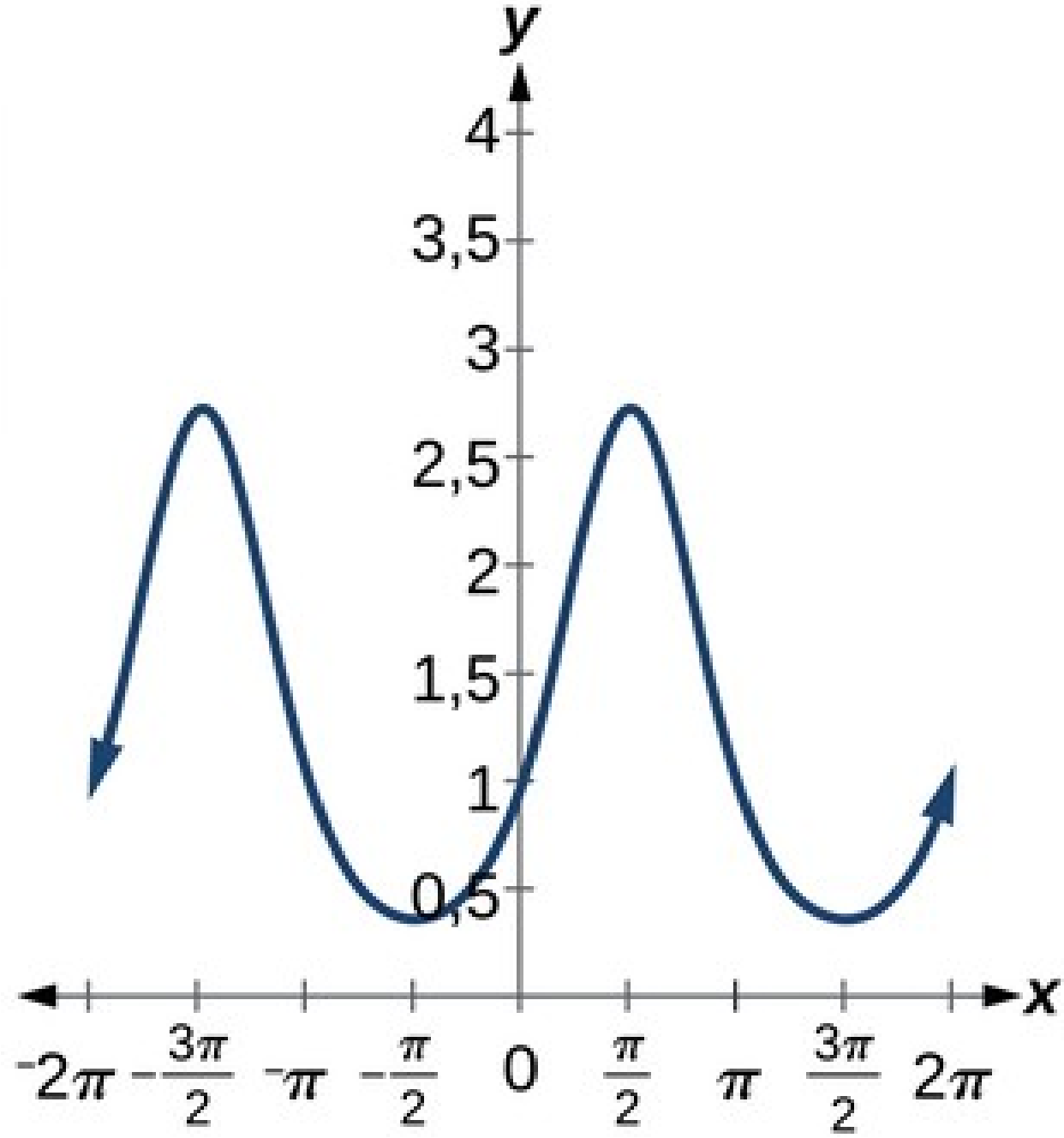
$$(0{,}5\,;1),(1{,}6\,;2{,}1),(2{,}6\,;3{,}1),(3{,}7\,;4{,}2),(4{,}7\,;5{,}2),(5{,}6\,;6{,}28)$$

33.

$$f(x)=2\cos\left(12\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)+3$$



35. Grafið er lotubundið með lotuna 2π.



37.

$$\frac{\pi}{3}$$

39.

$$\frac{\pi}{2}$$

41.

$$\sqrt{1-(1-2x)^2}$$

43.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

45.

$$\frac{x+1}{x}$$

47. Ósatt

49. um það bil 0,07 radíanar

Kafli 7

Prófaðu

7.1 Einföldun og sannprófun hornafallajafna

1.

$$\begin{aligned}\csc\ \theta\cos\ \theta\tan\ \theta &= \left(\tfrac{1}{\sin\ \theta}\right)\cos\ \theta\left(\tfrac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}\right)\\ &= \tfrac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}\left(\tfrac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}\right)\\ &= \tfrac{\sin\ \theta\cos\ \theta}{\sin\ \theta\cos\ \theta}\\ &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\cot\ \theta}{\csc\ \theta} &= \frac{\frac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}}{\frac{1}{\sin\ \theta}}\\ &= \frac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}\cdot\frac{\sin\ \theta}{1}\\ &= \cos\ \theta\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2\theta-1}{\tan\ \theta\sin\ \theta-\tan\ \theta} &= \frac{(\sin\ \theta+1)(\sin\ \theta-1)}{\tan\ \theta(\sin\ \theta-1)}\\ &= \frac{\sin\ \theta+1}{\tan\ \theta}\end{aligned}$$

4. Þetta er regla um mismun tveggja ferninga:

$$25-9\sin^2\theta=(5-3\sin\theta)(5+3\sin\theta).$$

5.

$$\begin{aligned}\frac{\cos\ \theta}{1+\sin\ \theta}\left(\frac{1-\sin\ \theta}{1-\sin\ \theta}\right) &= \frac{\cos\ \theta(1-\sin\ \theta)}{1-\sin^2\theta} \\ &= \frac{\cos\ \theta(1-\sin\ \theta)}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1-\sin\ \theta}{\cos\ \theta}\end{aligned}$$

7.2 Samlagningar- og frádráttarreglur

1.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

2.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3.

$$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

4.

$$\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$$

5.

$$\begin{aligned}\tan(\pi-\theta) &= \frac{\tan(\pi)-\tan\ \theta}{1+\tan(\pi)\tan\theta} \\ &= \frac{0-\tan\ \theta}{1+0\cdot\tan\ \theta} \\ &= -\tan\ \theta\end{aligned}$$

7.3 Reglur um tvöfalt horn, hálft horn og veldislækkun

1.

$$\cos(2\alpha)=\frac{7}{32}$$

2.

$$\cos^4\theta-\sin^4\theta=\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=\cos(2\theta)$$

3.

$$\cos(2\theta)\cos\theta=\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\cos\theta=\cos^3\theta-\cos\theta\sin^2\theta$$

4.

$$10\cos^4 x = 10\cos^4 x = 10\left(\cos^2 x\right)^2$$

$$= 10\left[\frac{1+\cos\left(2x\right)}{2}\right]^2 \quad \text{Setjið inn veldislækkunarformúlu fyrir } \cos^2 x.$$

$$= \frac{10}{4}\left[1+2\cos\left(2x\right)+\cos^2\left(2x\right)\right]$$

$$= \frac{10}{4}+\frac{10}{2}\cos\left(2x\right)+\frac{10}{4}\left(\frac{1+\cos 2\left(2x\right)}{2}\right) \quad \text{Setjið inn veldislækkunarformúlu fyrir } \cos^2 x.$$

$$= \frac{10}{4}+\frac{10}{2}\cos\left(2x\right)+\frac{10}{8}+\frac{10}{8}\cos\left(4x\right)$$

$$= \frac{30}{8}+5\cos\left(2x\right)+\frac{10}{8}\cos\left(4x\right)$$

$$= \frac{15}{4}+5\cos\left(2x\right)+\frac{5}{4}\cos\left(4x\right)$$

5.

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

7.4 Reglur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu

1.

$$\frac{1}{2}\left(\cos 6\theta+\cos 2\theta\right)$$

2.

$$\frac{1}{2}\left(\sin 2x+\sin 2y\right)$$

3.

$$\frac{-2-\sqrt{3}}{4}$$

4.

$$2\sin\left(2\theta\right)\cos\left(\theta\right)$$

5.

$$\begin{aligned}\tan\ \theta\ \cot\ \theta - \cos^2\theta &= \left(\tfrac{\sin\ \theta}{\cos\ \theta}\right)\left(\tfrac{\cos\ \theta}{\sin\ \theta}\right) - \cos^2\theta \\ &= 1 - \cos^2\theta \\ &= \sin^2\theta\end{aligned}$$

7.5 Lausn hornafallajafna

1.

$$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

2.

$$\frac{\pi}{3} \pm \pi k$$

3. $\theta \approx 1{,}7722 \pm 2\ \pi\ k$ og $\theta \approx 4{,}5110 \pm 2\ \pi\ k$

4.

$$\cos\theta = -1, \theta = \pi$$

5.

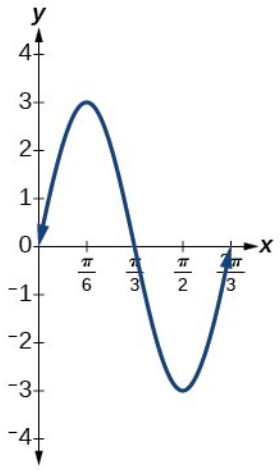
$$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$$

7.6 Líkön með hornaföllum

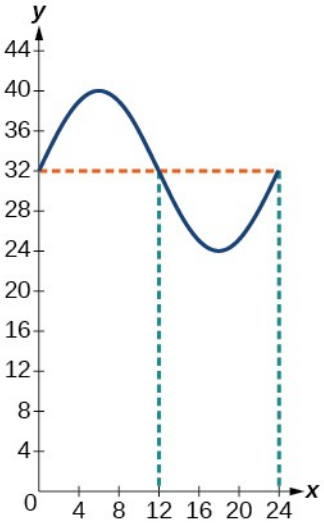
1. Útslagið er 3, og lotan er $\frac{2}{3}$.

2.

x	$3\sin(3x)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	3
$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-3
$\frac{2\pi}{3}$	0



3. $y=8\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)+32$ Hitastigið nær frostmarki á hádegi og miðnætti.



4. upphafsfærsla =6, deyfingarfasti = -6, tíðni = $\frac{2}{\pi}$

5.

$$y=10\ e^{-0,5\ t}\cos\left(\pi\ t\right)$$

6.

$$y=5\cos\left(6\pi t\right)$$

7.1 Kaflaverkefni

1. Öll föllin þrjú, F, G og H, eru jafnstæð.

Það er vegna þess að

$F\left(-x\right)=\sin\left(-x\right)\sin\left(-x\right)=\left(-\sin x\right)\left(-\sin x\right)=\sin^2 x=F\left(x\right), G\left(-x\right)=\cos\left(-x\right)\cos\left(-x\right)$ og
$=\cos x\cos x=\cos^2 x=G\left(x\right)$

$$H(-x)=\tan(-x)\tan(-x)=(-\tan x)(-\tan x)=\tan^2 x=H(x).$$

3. Þegar $\cos t=0$, þá er $sec\, t=\frac{1}{0}$, sem er óskilgreint.

5.

$$\sin x$$

7.

$$sec\, x$$

9.

$$csc\, t$$

11.

$$-1$$

13.

$$sec^2 x$$

15.

$$\sin^2 x+1$$

17.

$$\frac{1}{\sin x}$$

19.

$$\frac{1}{\cot x}$$

21.

$$\tan x$$

23.

$$-4\, sec\, x \tan x$$

25.

$$\pm\sqrt{\frac{1}{\cot^2 x}+1}$$

27.

$$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$$

29. Svör eru mismunandi. Dæmi um sönnun:

$$\begin{aligned}\cos x - \cos^3 x &= \cos x\left(1-\cos^2 x\right)\\ &= \cos x \sin^2 x\end{aligned}$$

31. Svör eru breytileg. Dæmi um sönnun:

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = sec^2 x + \tan^2 x = \tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x$$

33. Svör eru breytileg. Dæmi um sönnun:

$$\cos^2 x - \tan^2 x = 1 - \sin^2 x - \left(sec^2 x - 1\right) = 1 - \sin^2 x - sec^2 x + 1 = 2 - \sin^2 x - sec^2 x$$

35. Ósatt

37. Ósatt

39. Sannað með formerkjareglum og reglu Pýþagórasar

41. Satt

$$3\sin^2\theta + 4\cos^2\theta = 3\sin^2\theta + 3\cos^2\theta + \cos^2\theta = 3\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + \cos^2\theta = 3 + \cos^2\theta$$

7.2 Kaflaverkefni

1. Reglur um fylliföll eiga við um fyllihorn. Ef annað hvassa hornsins í rétthyrndum þríhyrningi er x, þá er hitt hornið $\frac{\pi}{2} - x$. Þá er $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Sama gildir um hinar reglurnar um fylliföll. Lykilatriðið er að hornin eru fyllihorn.

3. $\sin(-x) = -\sin x$, svo $\sin x$ er oddstætt. $\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos x$, svo $\cos x$ er jafnstætt.

5.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

7.

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

9.

$$-2-\sqrt{3}$$

11.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

13.

$$-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

15.

$$csc\,\theta$$

17.

$$\cot x$$

19.

$$\tan\left(\frac{x}{10}\right)$$

21.

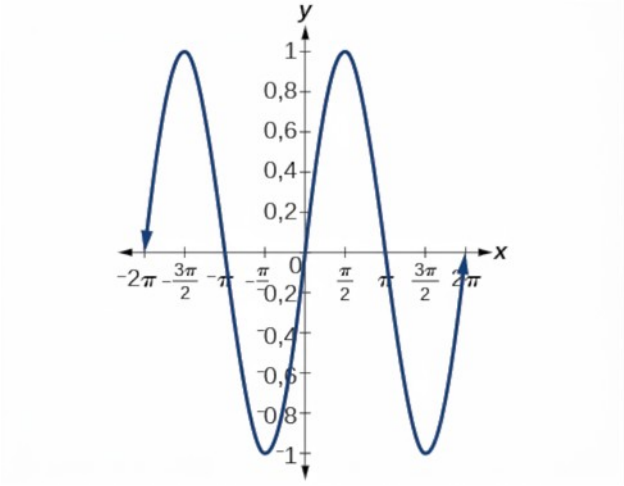
$$\sin(a-b)=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$$
$$\cos(a+b)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{3-8\sqrt{2}}{15}$$

23.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

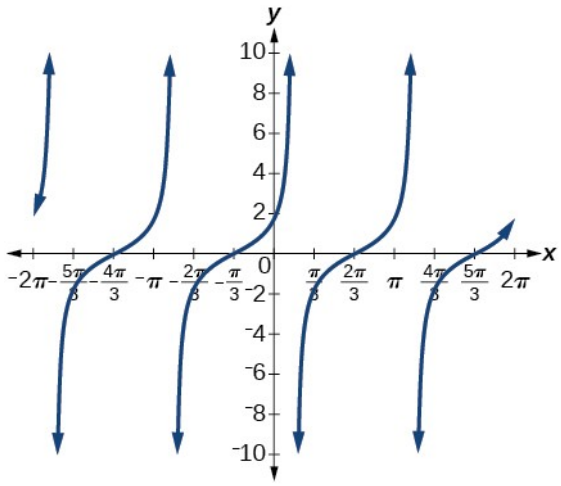
25.

$$\sin x$$



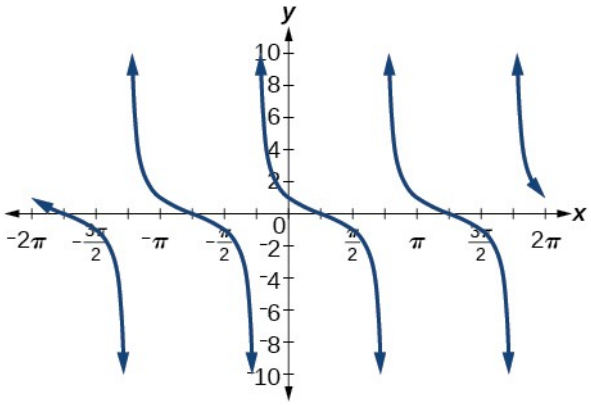
27.

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$



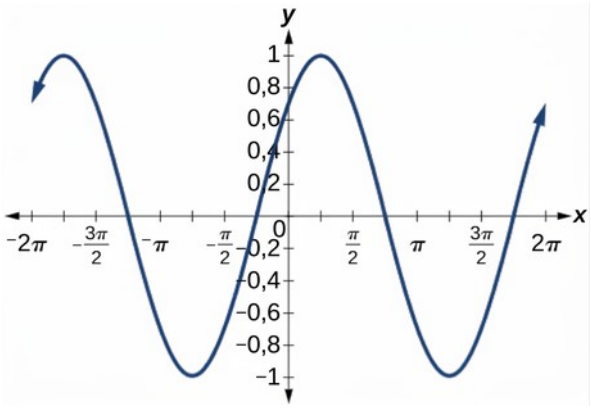
29.

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$



31.

$$\frac{\sin x}{\sqrt{2}}+\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$$



33. Þau eru eins.

35. Þau eru ólík; prófaðu $g(x)=\sin(9x)-\cos(3x)\sin(6x)$.

37. Þau eru eins.

39. Þau eru ólík; prófaðu $g(\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

41. Þau eru ólík; prófaðu $g(x)=\frac{\tan x-\tan(2x)}{1+\tan x\tan(2x)}$.

43.

$$-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \text{eða}\ -0{,}2588$$

45. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, eða 0,9659

47.

$$\tan\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=$$
$$\frac{\tan x+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan x\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}=$$
$$\frac{\tan x+1}{1-\tan x(1)}=\frac{\tan x+1}{1-\tan x}$$

49.

$$\frac{\cos(a+b)}{\cos a\cos b}=$$
$$\frac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=1-\tan a\tan b$$

51.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$$
$$\frac{\cos x\cosh-\sin x\sinh-\cos x}{h} =$$
$$\frac{\cos x(\cosh-1)-\sin x\sinh}{h} = \cos x\frac{\cos h-1}{h} - \sin x\frac{\sin h}{h}$$

53. Satt

55. Satt. Athugaðu að $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\pi-\gamma)$ og liðaðu hægri hliðina.

7.3 Kaflaverkefni

1. Notaðu reglu Pýþagórasar og einangraðu liðinn í öðru veldi.

3. $\frac{1-\cos x}{\sin x}, \frac{\sin x}{1+\cos x}$, með því að margfalda teljara og nefnara með $\sqrt{1-\cos x}$ og $\sqrt{1+\cos x}$, í þessari röð.

5. a) $\frac{3\sqrt{7}}{32}$ b) $\frac{31}{32}$ c) $\frac{3\sqrt{7}}{31}$

7. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{3}$

9.

$$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}, \tan\theta=-\frac{1}{2}, csc\,\theta=\sqrt{5}, sec\,\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}, \cot\theta=-2$$

11.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

13.

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

15.

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

17.

$$2+\sqrt{3}$$

19.

$$-1-\sqrt{2}$$

21. a) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ b) $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ c) $-\frac{3}{2}$

23. a) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

25.

$$\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, -\frac{120}{119}$$

27.

$$\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2}{3}$$

29.

$$\cos\left(74^{\circ}\right)$$

31.

$$\cos\left(18x\right)$$

33.

$$3\sin\left(10x\right)$$

35.

$$-2\sin\left(-x\right)\cos\left(-x\right)=-2\left(-\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)\right)=\sin\left(2x\right)$$

37.

$$\frac{\sin(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}\tan^2\theta=\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\cos^2\theta-\sin^2\theta}\tan^2\theta=$$
$$\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{2\cos^2\theta}\tan^2\theta=\frac{\sin(\theta)}{\cos\ \theta}\tan^2\theta=$$
$$\tan\theta\tan^2\theta=\tan^3\ \ \theta$$

39.

$$\frac{1+\cos\left(12x\right)}{2}$$

41.

$$\frac{3+\cos\left(12x\right)-4\cos\left(6x\right)}{8}$$

43.

$$\frac{2+\cos\left(2x\right)-2\cos\left(4x\right)-\cos\left(6x\right)}{32}$$

45.

$$\frac{3+\cos(4x)-4\cos(2x)}{3+\cos(4x)+4\cos(2x)}$$

47.

$$\frac{1-\cos(4x)}{8}$$

49.

$$\frac{3+\cos(4x)-4\cos(2x)}{4(\cos(2x)+1)}$$

51.

$$\frac{(1+\cos(4x))\sin x}{2}$$

53.

$$4\sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

55.

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=$$
$$\frac{2\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1}=2\sin x\cos x=\sin(2x)$$

57.

$$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x-1}=\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=\tan(2x)$$

59.

$$\sin(x+2x)=\sin\ x\cos(2x)+\sin(2x)\cos\ x$$
$$=\sin\ x(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin\ x\cos\ x\cos\ x$$
$$=\sin\ x\cos^2 x-\sin^3 x+2\sin\ x\cos^2 x$$
$$=3\sin\ x\cos^2 x-\sin^3 x$$

61.

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos(2t)}{\sin(2t)-\cos t} &= \frac{1+2\cos^2 t-1}{2\sin t\cos t-\cos t}\\ &= \frac{2\cos^2 t}{\cos t(2\sin t-1)}\\ &= \frac{2\cos t}{2\sin t-1}\end{aligned}$$

63.

$$\begin{aligned}&\left(\cos^2(4x)-\sin^2(4x)-\sin(8x)\right)\left(\cos^2(4x)-\sin^2(4x)+\sin(8x)\right)=\\ &=(\cos(8x)-\sin(8x))(\cos(8x)+\sin(8x))\\ &=\cos^2(8x)-\sin^2(8x)\\ &=\cos(16x)\end{aligned}$$

7.4 Kaflaverkefni

1. Settu α inn í kósínus og β inn í sínus og reiknaðu.

3. Svör eru mismunandi. Sumar jöfnur innihalda summu tveggja hornafallastæða og verða auðveldari úrlausnar þegar summunni er breytt í margfeldi. Til dæmis:

$\frac{\sin(3x)+\sin x}{\cos x}=1$. Þegar teljaranum er breytt í margfeldi verður jafnan:

$\frac{2\sin(2x)\cos x}{\cos x}=1$

5.

$$8\left(\cos(5x)-\cos(27x)\right)$$

7.

$$\sin(2x)+\sin(8x)$$

9.

$$\frac{1}{2}\left(\cos(6x)-\cos(4x)\right)$$

11.

$$2\cos(5t)\cos t$$

13.

$$2\cos(7x)$$

15.

$$2\cos(6x)\cos(3x)$$

17.

$$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

19.

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-2\right)$$

21.

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

23.

$$\cos\left(80^\circ\right)-\cos\left(120^\circ\right)$$

25.

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(221^\circ\right)+\sin\left(205^\circ\right)\right)$$

27.

$$\sqrt{2}\cos\left(31^\circ\right)$$

29.

$$2\cos\left(66{,}5^\circ\right)\sin\left(34{,}5^\circ\right)$$

31.

$$2\sin\left(-1{,}5^\circ\right)\cos\left(0{,}5^\circ\right)$$

33.

$$\begin{aligned}
&2\ \sin(7x)-2\ \sin x=2\ \sin(4x+3x)-2\ \sin(4x-3x)=\\
&2(\sin(4x)\cos(3x)+\sin(3x)\cos(4x))-2(\sin(4x)\cos(3x)-\sin(3x)\cos(4x))=\\
&2\ \sin(4x)\cos(3x)+2\ \sin(3x)\cos(4x))-2\ \sin(4x)\cos(3x)+2\ \sin(3x)\cos(4x))=\\
&4\ \sin(3x)\cos(4x)
\end{aligned}$$

35.

$$\begin{gathered}
\sin x+\sin\left(3x\right)=2\sin\left(\frac{4x}{2}\right)\cos\left(\frac{-2x}{2}\right)=\\
2\sin\left(2x\right)\cos x=2\left(2\sin x\cos x\right)\cos x=\\
4\sin x\cos^2 x
\end{gathered}$$

37.

$$2\tan x\cos(3x)=\frac{2\sin x\cos(3x)}{\cos x}=\frac{2(,5(\sin(4x)-\sin(2x)))}{\cos x}$$
$$=\frac{1}{\cos x}(\sin(4x)-\sin(2x))=sec\,x(\sin(4x)-\sin(2x))$$

39.

$$2\quad\cos(35^{\circ})\cos(23^{\circ}),\ 1{,}5081$$

41.

$$-2\quad\sin(33^{\circ})\sin(11^{\circ}),\quad -0{,}2078$$

43.

$$\frac{1}{2}(\cos(99^{\circ})-\cos(71^{\circ})),\quad -0{,}2410$$

45. Þetta er jafngildi.

47. Þetta er ekki jafngildi, en $2\cos^3 x$ er það.

49.

$$\tan(3t)$$

51.

$$2\cos(2x)$$

53.

$$-\sin(14x)$$

55. Byrjið á $\cos x+\cos y$. Gerið innsetningu og látið $x=\alpha+\beta$ og $y=\alpha-\beta$, svo $\cos x+\cos y$ verður

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$$

Þar sem $x=\alpha+\beta$ og $y=\alpha-\beta$, getum við leyst fyrir α og β með x og y, sett niðurstöðurnar inn í $2\cos\alpha\cos\beta$ og fengið $2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

57.

$$\frac{\cos(3x)+\cos x}{\cos(3x)-\cos x}=\frac{2\cos(2x)\cos x}{-2\sin(2x)\sin x}=-\cot(2x)\cot x$$

59.

$$\frac{\cos(2y)-\cos(4y)}{\sin(2y)+\sin(4y)} = \frac{-2\ \sin(3y)\sin(-y)}{2\ \sin(3y)\cos\ y} = \frac{2\ \sin(3y)\sin(y)}{2\ \sin(3y)\cos\ y} = \tan\ y$$

61.

$$\cos\ x - \cos(3x) = -2\ \sin(2x)\sin(-x) = 2(2\ \sin\ x\ \cos\ x)\sin\ x = 4\ \sin^2\ x\ \cos\ x$$

63.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan t}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan(t)}=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$$

7.5 Kaflaverkefni

1. Hornafallajöfnur hafa ekki alltaf lausnir. Einfalt dæmi er $\cos(x)=-5$.

3. Ef stuðull sínus- eða kósínusfallsins er einn skaltu einangra liðinn öðrum megin við jafnaðarmerkið. Ef algildi tölunnar hinum megin er minna en eða jafnt einum hefur jafnan lausnir, annars ekki. Ef stuðullinn er ekki einn skaltu samt einangra liðinn en deila síðan báðum hliðum jöfnunnar með stuðlinum. Ef algildi tölunnar sem þá stendur hinum megin er stærra en einn hefur jafnan enga lausn.

5.

$$\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$$

7.

$$\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

9.

$$\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$$

11.

$$\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

13.

$$\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

15.

$$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

17. $\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$

19.

$$\frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}$$

21.

$$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}, \frac{25}{6}, \frac{29}{6}, \frac{37}{6}$$

23.

$$0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

25.

$$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

27.

$$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$$

29.

$$0, \pi$$

31.

$$\pi - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right), \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

33.

$$\frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right), \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right), \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right), \pi - \frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right),$$
$$\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right), \frac{5\pi}{3} - \frac{1}{3}\left(\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right)$$

35.

$$0$$

37.

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \pi - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \pi + \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ 2\pi - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

39.

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

41.

$$0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$$

43. Engar lausnir eru til.

45.

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{7}\right)\right), 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(1-\sqrt{7}\right)\right)$$

47.

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{29}-5\right)\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{29}-5\right)\right), \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{29}-5\right)\right),$$
$$2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{29}-5\right)\right)$$

49. Engar lausnir eru til.

51. Engar lausnir eru til.

53.

$$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

55.

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

57.

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right), \frac{\pi}{2}, \pi - \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right), \frac{3\pi}{2}$$

59. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right), 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

61.

$$\frac{\pi}{3}, \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right), 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right), \frac{5\pi}{3}$$

63. $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right), \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right), 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right), 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

65.

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

67.

$$\frac{\pi}{3}, \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right), 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right), \frac{5\pi}{3}$$

69. Engar lausnir eru til.

71. $\pi + \tan^{-1}(-2)$,

$$\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right),$$

$$2\pi + \tan^{-1}(-2),$$

$$2\pi + \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

73.

$$2\ \pi\ k + 0{,}2734, 2\ \pi\ k + 2{,}8682$$

75.

$$\pi\ k - 0{,}3277$$

77.

$$0{,}6694, 1{,}8287, 3{,}8110, 4{,}9703$$

79.

$$1{,}0472, 3{,}1416, 5{,}2360$$

81.

$$0{,}5326, 1{,}7648, 3{,}6742, 4{,}9064$$

83.

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \frac{3\pi}{2}$$

85.

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

87. Engar lausnir eru til.

89.

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

91. Engar lausnir eru til.

93.

$$7{,}2^\circ$$

95.

$$5{,}7^\circ$$

97.

$$82{,}4^\circ$$

99.

$$31{,}0^\circ$$

101.

$$88{,}7^\circ$$

103.

$$59{,}0^\circ$$

105.

$$36{,}9^\circ$$

7.6 Kaflaverkefni

1. Eðlisfræðileg hegðun ætti að vera lotubundin eða sveiflukennd.

3. Þar sem uppsöfnuð úrkoma eykst alltaf hentar sínuslaga fall ekki vel hér.

5.

$$y = -3\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 1$$

7.

$$5\sin(2x) + 2$$

8.

$$y = 4 - 6\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$$

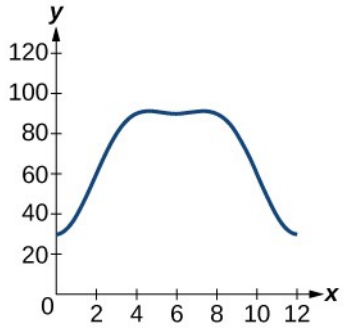
10.

$$y = \tan\left(\frac{x\pi}{8}\right)$$

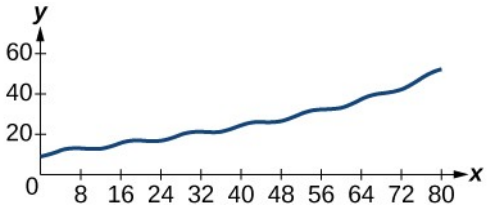
12.

$$\tan\left(\frac{x\pi}{12}\right)$$

13.



15.



17. 75 °F

19. 8 a.m.

21. 2:49

23. Frá júní 15 til nóvember 16

25. Frá degi 41 til dags 68

27. Flóð: 16. apríl til 15. júlí. Þurrkur: 16. október til 15. janúar.

29. útslag: 8, lota: $\frac{1}{3}$, tíðni: 3 Hz

31. Útslag: 4, lota: 4 , tíðni: $\frac{1}{4}$ Hz

33.

$$P(t) = -19\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 800 + \frac{160}{12}t \; P(t) = -19\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 800 + \frac{40}{3}t$$

35.

$$P\left(t\right) = -33\,\cos\left(\frac{\pi}{6}\,t\right) + 900 + \left(1{,}07\right)^{t}$$

37.

$$D\left(t\right) = 10\,\left(0{,}85\right)^{t}\,\cos\left(36\,\pi\,t\right)$$

39.

$$D\left(t\right) = 17\,\left(0{,}9145\right)^{t}\,\cos\left(28\,\pi\,t\right)$$

41. 6 ár

43. 15,4 sekúndur

45. Gormur 2 kemst fyrst í kyrrstöðu eftir 7,3 sekúndur.

47. 234,3 mílur, við 72,2°

49.

$$y = 6(4)^{x} + 5\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

51.

$$y = 4(-2)^{x} + 8\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

53.

$$y = 3(2)^{x}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) + 1$$

Upprifjunarverkefni

1.

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \pi + \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), 2\pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

3.

$$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

5.

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right), \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

7.

$$1$$

9. Já

11.

$$-2-\sqrt{3}$$

13.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

15.

$$\begin{aligned}
\cos(4x) - \cos(3x)\cos x &= \cos(2x+2x) - \cos(x+2x)\cos\ x \\
&= \cos(2x)\cos(2x) - \sin(2x)\sin(2x) - \cos\ x\ \cos(2x)\cos\ x + \sin\ x\ \sin(2x)\cos\ x \\
&= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 - 4\ \cos^2 x\ \sin^2 x - \cos^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \sin\ x\,(2)\sin\ x\ \cos\ x\ \cos\ x \\
&= \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 - 4\ \cos^2 x\ \sin^2 x - \cos^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2\ \sin^2 x\ \cos^2 x \\
&= \cos^4 x - 2\ \cos^2 x\ \sin^2 x + \sin^4 x - 4\ \cos^2 x\ \sin^2 x - \cos^4 x + \cos^2 x\ \sin^2 x + 2\ \sin^2 x\ \cos^2 x \\
&= \sin^4 x - 4\ \cos^2 x\ \sin^2 x + \cos^2 x\ \sin^2 x \\
&= \sin^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) - 4\ \cos^2 x\ \sin^2 x \\
&= \sin^2 x - 4\ \cos^2 x \sin^2 x
\end{aligned}$$

17.

$$\tan\left(\frac{5}{8}x\right)$$

19.

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

21.

$$-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{24}{7}$$

23.

$$\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$$

25.

$$\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$$

27.

$$\begin{aligned}\cot x \cos(2x) &= \cot x(1 - 2\sin^2 x) \\ &= \cot x - \tfrac{\cos x}{\sin x}(2)\sin^2 x \\ &= -2\sin x \cos x + \cot x \\ &= -\sin(2x) + \cot x\end{aligned}$$

29.

$$\frac{10\sin x - 5\sin(3x) + \sin(5x)}{8(\cos(2x) + 1)}$$

31.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

33.

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

35.

$$\frac{1}{2}(\sin(6x) + \sin(12x))$$

37.

$$2\sin\left(\frac{13}{2}x\right)\cos\left(\frac{9}{2}x\right)$$

39.

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

41.

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi$$

43.

$$\frac{3\pi}{2}$$

45. Engin lausn

47.

$$0{,}2527\,,2{,}8889\,,4{,}7124$$

49. 1,3694, 1,9106, 4,3726, 4,9137

51.

$$3\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)-2$$

53.

$$71{,}6^{\circ}$$

55.

$$P(t)=950-450\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

57. útslag: 3, lota: 2, tíðni: $\frac{1}{2}$ Hz

59.

$$C\left(t\right)=20\,\sin\left(2\,\pi\,t\right)+100\,\left(1{,}4427\right)^{t}$$

Æfingapróf

1. 1

3.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

5.

$$-2-\sqrt{3}$$

7.

$$0\,,\pi$$

9.

$$\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

11.

$$2\cos\left(3\,x\right)\cos\left(5\,x\right)$$

13.

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$$

15.

$$\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}$$

17.

$$\begin{aligned}\tan^3 x - \tan x \sec^2 x &= \tan x\left(\tan^2 x - \sec^2 x\right)\\ &= \tan x\left(\tan^2 x - \left(1 + \tan^2 x\right)\right)\\ &= \tan x\left(\tan^2 x - 1 - \tan^2 x\right)\\ &= -\tan x = \tan\left(-x\right) = \tan -x)\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x)}{\sin x} - \frac{\cos(2x)}{\cos x} &= \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}\\ &= 2\cos x - 2\cos x + \frac{1}{\cos x}\\ &= \frac{1}{\cos x} = \sec x = \sec x\end{aligned}$$

21. útslag: $\frac{1}{4}$, lota: $\frac{1}{60}$, tíðni: 60 Hz

23. útslag: 8, hröð lota: $\frac{1}{500}$, hröð tíðni: 500 Hz, hæg lota: $\frac{1}{10}$, hæg tíðni: 10 Hz

25. $D\left(t\right) = 20\left(0{,}9086\right)^t \cos\left(4\ \pi\ t\right)$, 31 sekúnda

Kafli 8

Prófaðu

8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan

1.

$$\begin{aligned}\alpha &= 98^\circ & a &= 34{,}6\\ \beta &= 39^\circ & b &= 22\\ \gamma &= 43^\circ & c &= 23{,}8\end{aligned}$$

2. Lausn 1

$$\begin{aligned}\alpha &= 80\,^\circ & a &= 120\\ \beta &\approx 83{,}2\,^\circ & b &= 121\\ \gamma &\approx 16{,}8\,^\circ & c &\approx 35{,}2\end{aligned}$$

Lausn 2

$$\alpha' = 80° \quad a' = 120$$
$$\beta' \approx 96{,}8° \quad b' = 121$$
$$\gamma' \approx 3{,}2° \quad c' \approx 6{,}8$$

3.

$$\beta \approx 5{,}7^\circ, \gamma \approx 94{,}3^\circ, c \approx 101{,}3$$

4. tveir

5. um það bil 8,2 ferfet

6. 161,9 yd.

8.2 Órétthyrndir þríhyrningar: kósínusreglan

1.

$$a \approx 14{,}9,\ \beta \approx 23{,}8^\circ,\ \gamma \approx 126{,}2^\circ.$$

2.

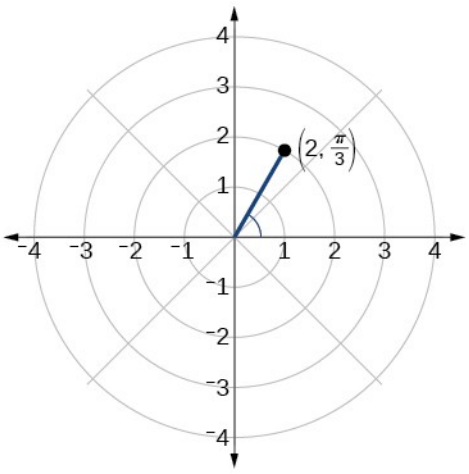
$$\alpha \approx 27{,}7^\circ,\ \beta \approx 40{,}5^\circ,\ \gamma \approx 111{,}8^\circ$$

3. Flatarmál = 552 ferfet

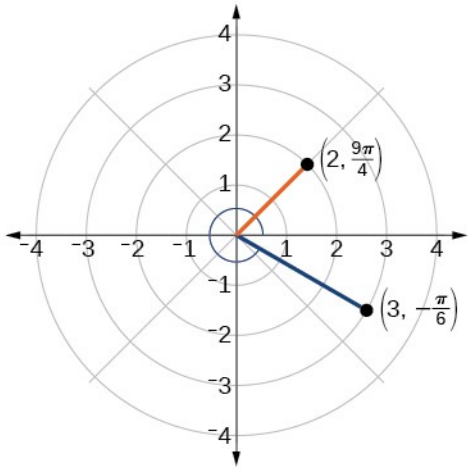
4. um það bil 8,15 ferfet

8.3 Pólhnit

1.



2.



3.

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

4.

$$r = \sqrt{3}$$

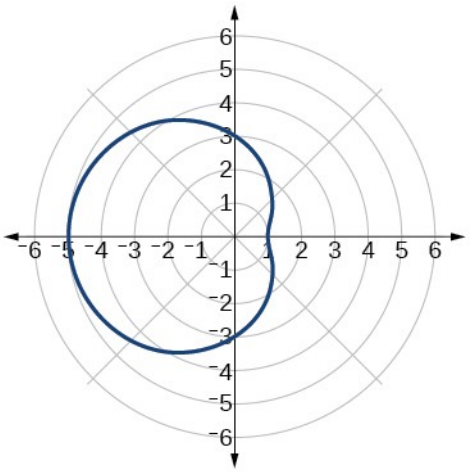
5. $x^2 + y^2 = 2y$ eða, á stöðluðu formi hrings, $x^2 + (y-1)^2 = 1$

8.4 Pólhnit: gröf

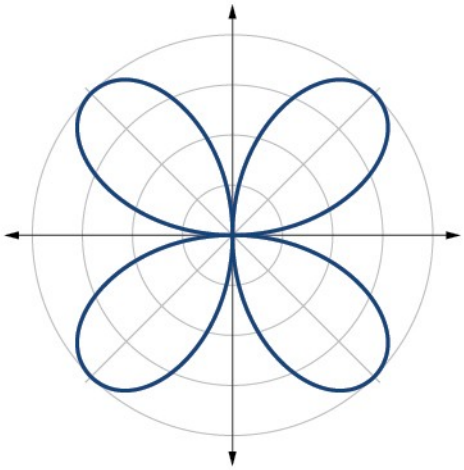
1. Jafnan stenst ekki samhverfupróf um línuna $\theta = \frac{\pi}{2}$ né um skautið. Hún stenst samhverfupróf um pólhnitaásinn.

2. Prófanir sýna samhverfu um pólhnitaásinn. Núllstöð er $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, og hágildið er $(3, 0)$.

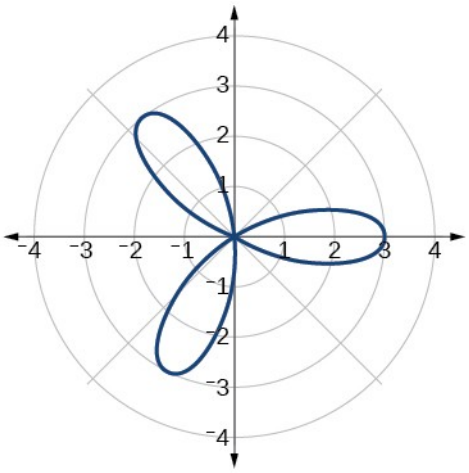
3.



4. Grafið er rós þar sem n er slétt tala

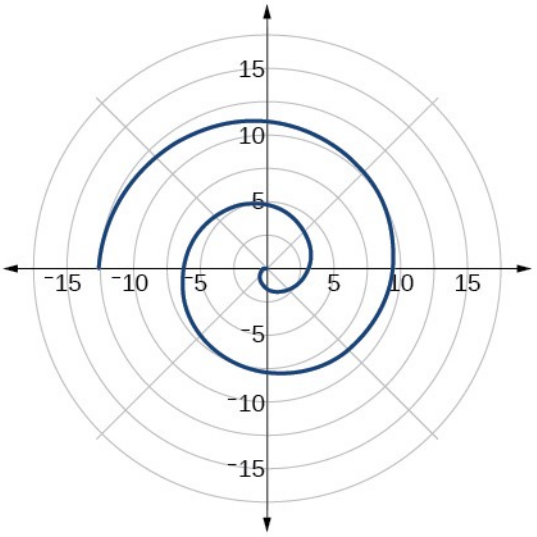


5.



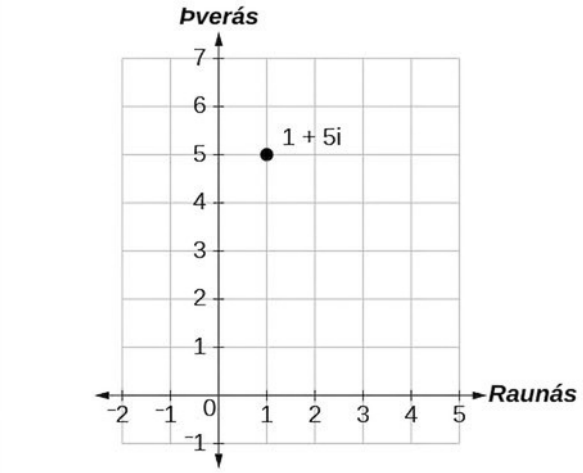
Rós þar sem n er oddatala

6.



8.5 Pólform tvinntalna

1.



2. 13

3.

$$|z| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

4.

$$z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

5.

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

6.

$$z=2\sqrt{3}-2i$$

7.

$$z_1 z_2=-4\sqrt{3};\frac{z_1}{z_2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$$

8.

$$z_0=2\left(\cos\left(30^\circ\right)+i\sin\left(30^\circ\right)\right)$$

$$z_1=2\left(\cos\left(120^\circ\right)+i\sin\left(120^\circ\right)\right)$$

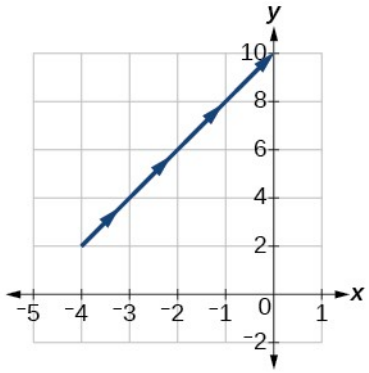
$$z_2=2\left(\cos\left(210^\circ\right)+i\sin\left(210^\circ\right)\right)$$

$$z_3=2\left(\cos\left(300^\circ\right)+i\sin\left(300^\circ\right)\right)$$

8.6 Stikajöfnur

1.

t	$x(t)$	$y(t)$
-1	-4	2
0	-3	4
1	-2	6
2	-1	8



2.

$$x(t) = t^3 - 2t$$
$$y(t) = t$$

3.

$$y=5-\sqrt{\frac{1}{2}x-3}$$

4.

$$y=\ln\sqrt{x}$$

5.

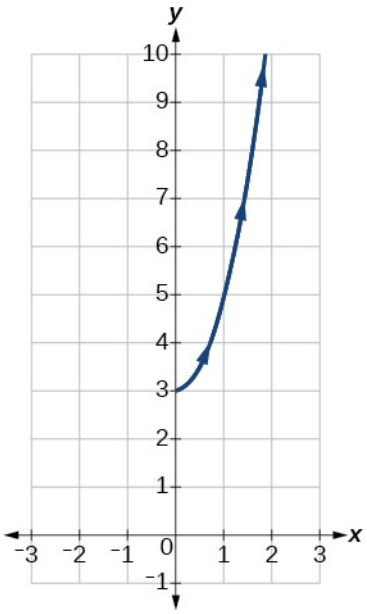
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

6.

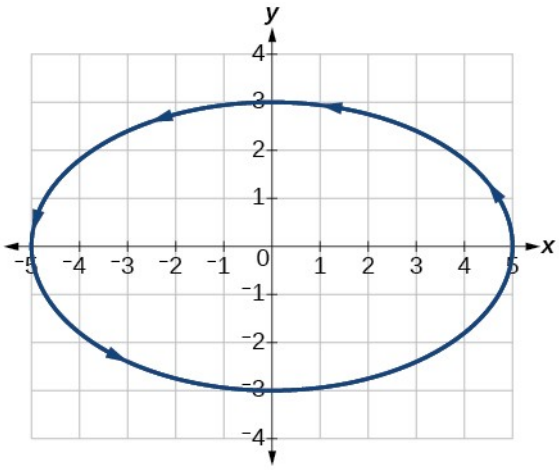
$$y=x^2$$

8.7 Stikajöfnur: gröf

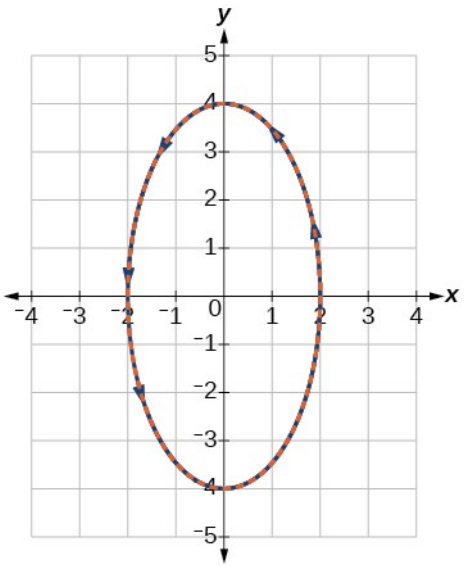
1.



2.

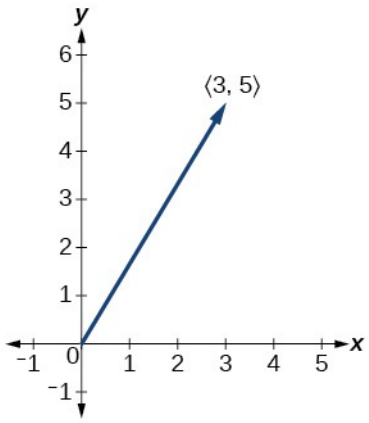


3. Graf stikajafnanna er rautt og graf rétthyrndu jöfnunnar er teiknað yfir það með bláum punktum.



8.8 Vigrar

1.



2.

$$3u = \langle 15, 12 \rangle$$

3.

$$u = 8i - 11j$$

4.

$$v = \sqrt{34}\cos\left(59^\circ\right)i + \sqrt{34}\sin\left(59^\circ\right)j$$

Lengd = $\sqrt{34}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59{,}04^\circ$$

8.1 Kaflaverkefni

1. Hæð þríhyrnings liggur frá hornpunkti að mótlægri hlið eða línunni sem hún liggur á og myndar 90° horn.

3. Þegar þekkta hliðin er mótlæg óþekkta horninu og önnur hlið ásamt mótlægu horni hennar er einnig þekkt.

5. Þríhyrningur með tvær gefnar hliðar og horn sem er ekki milli þeirra.

7.

$$\beta = 72^\circ, a \approx 12{,}0, b \approx 19{,}9$$

9.

$$\gamma = 20^\circ, b \approx 4{,}5, c \approx 1{,}6$$

11.

$$b \approx 3{,}78$$

13.

$$c \approx 13{,}70$$

15. einn þríhyrningur, $\alpha \approx 50{,}3^\circ, \beta \approx 16{,}7^\circ, a \approx 26{,}7$

17. tveir þríhyrningar, $\gamma \approx 54{,}3^\circ, \beta \approx 90{,}7^\circ, b \approx 20{,}9$ eða $\gamma' \approx 125{,}7^\circ, \beta' \approx 19{,}3^\circ, b' \approx 6{,}9$

19. tveir þríhyrningar, $\beta \approx 75{,}7^\circ, \gamma \approx 61{,}3^\circ, b \approx 9{,}9$ eða $\beta' \approx 18{,}3^\circ, \gamma' \approx 118{,}7^\circ, b' \approx 3{,}2$

21. tveir þríhyrningar, $\alpha \approx 143{,}2^\circ, \beta \approx 26{,}8^\circ, a \approx 17{,}3$ eða $\alpha' \approx 16{,}8^\circ, \beta' \approx 153{,}2^\circ, a' \approx 8{,}3$

23. enginn þríhyrningur er mögulegur

25. $A \approx 47{,}8^\circ$ eða $A' \approx 132{,}2^\circ$

27.

$$8{,}6$$

29.

$$370{,}9$$

31.

$$12{,}3$$

33.

$$12{,}2$$

35.

$$16{,}0$$

37.

$$29{,}7^\circ$$

39.

$$x = 76{,}9^\circ \text{ eða } x = 103{,}1^\circ$$

41.

$$110{,}6^\circ$$

43.

$$A \approx 39{,}4,\ C \approx 47{,}6,\ B\ C \approx 20{,}7$$

45.

$$57{,}1$$

47.

$$42{,}0$$

49.

$$430{,}2$$

51.

$$10{,}1$$

53.

$$A\ D \approx\ 13{,}8$$

55.

$$A\ B \approx 2{,}8$$

57.

$$L \approx 49{,}7\,,\ N \approx 56{,}3\,,\ L\ N \approx 5{,}8$$

59. 51,4 fet

61. Fjarlægðin frá gervitunglinu að stöð A er um það bil 1716 mílur. Gervitunglið er um það bil 1706 mílur yfir jörðu.

63. 2,6 ft

65. 5,6 km

67. 371 ft

69. 5936 ft

71. 24,1 ft

73. 19.056 ft²

75. 445.624 fermílur

77. 8,65 ft²

8.2 Kaflaverkefni

1. tvær hliðar og hornið á móti óþekktu hliðinni.

3. s er hálfummálið, það er helmingur ummáls þríhyrningsins.

5. Nota verður kósínusregluna fyrir sérhvern órétthyrndan þríhyrning.

7. 11,3

9. 34,7

11. 26,7

13.

$$c = 257{,}3\,,96{,}7$$

15. ekki mögulegt

17. 95,5°

19. 26,9°

21.

$$B \approx 45{,}9^\circ, C \approx 99{,}1^\circ, a \approx 6{,}4$$

23.

$$A \approx 20{,}6^\circ, B \approx 38{,}4^\circ, c \approx 51{,}1$$

25.

$$A \approx 37{,}8^\circ, B \approx 43{,}8, C \approx 98{,}4^\circ$$

27. 177,56 in²

29. 0,04 m²

31. 0,91 yd²

33. 3,0

35. 29,1

37. 0,5

39. 70,7°

41. 77,4°

43. 25,0

45. 9,3

47. 43,52

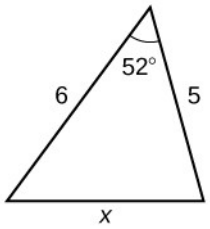
49. 1,41

51. 0,14

53. 18,3

55. 48,98

57.



59. 7,62

61. 85,1

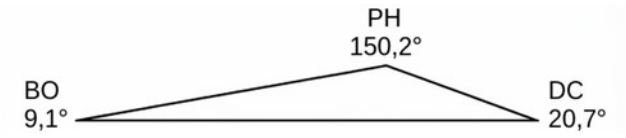
63. 24,0 km

65. 99,9 ft

67. 37,3 mílur

69. 2371 mílur

71.



73. 292,4 mílur

75. 65,4 cm^2

77. 468 ft^2

8.3 Kaflaverkefni

1. Í pólhnitum ræðst punktur í planinu af horninu frá jákvæða x-ásnum og fjarlægðinni frá upphafspunktinum, en í kartesískum hnitum táknar punkturinn lárétta og lóðrétta fjarlægð frá upphafspunktinum. Sérhver punktur í kartesísku hnitakerfi hefur eina framsetningu en sérhver punktur í pólhnitakerfi hefur óendanlega margar framsetningar.

3. Ákvarðaðu θ fyrir punktinn og færðu þig síðan r einingar frá skautinu til að merkja punktinn. Ef r er neikvætt skaltu færa þig r einingar frá skautinu í gagnstæða átt en eftir sömu hornlínu. Punkturinn er í fjarlægðinni r frá upphafspunktinum og í horninu θ frá pólhnitaásnum.

5. Punkturinn $\left(-3, \frac{\pi}{2}\right)$ hefur jákvætt horn en neikvæðan geisla. Hann er merktur með því að fara í hornið $\frac{\pi}{2}$ og síðan 3 einingar í neikvæða átt. Punkturinn verður þannig 3 einingar niður eftir neikvæða y-ásnum. Punkturinn $\left(3, -\frac{\pi}{2}\right)$ hefur neikvætt horn og jákvæðan geisla. Hann er merktur með því að fara fyrst í hornið $-\frac{\pi}{2}$ og síðan 3 einingar niður, sem er jákvæða stefnan fyrir neikvætt horn. Sá punktur er einnig 3 einingar niður eftir neikvæða y-ásnum.

7.

$$(-5, 0)$$

9.

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

11.

$$(2\sqrt{5};\ \ 0{,}464)$$

13.

$$(\sqrt{34}; 5{,}253)$$

15.

$$\left(8\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

17.

$$r = 4\csc\theta$$

19.

$$r = \sqrt[3]{\frac{\sin\theta}{2\cos^4\theta}}$$

21.

$$r = 3\cos\theta$$

23.

$$r = \frac{3\sin\theta}{\cos(2\theta)}$$

25.

$$r=\frac{9\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

27.

$$r=\sqrt{\frac{1}{9\cos\theta\sin\theta}}$$

29. $x^2+y^2=4x$ eða $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$; hringur

31. $3y+x=6$; lína

33. $y=3$; lína

35. $xy=4$; breiðbogi

37. $x^2+y^2=4$; hringur

39. $x-5y=3$; lína

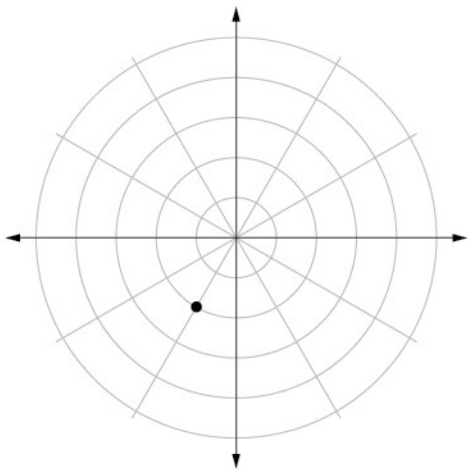
41.

$$\left(3,\frac{3\pi}{4}\right)$$

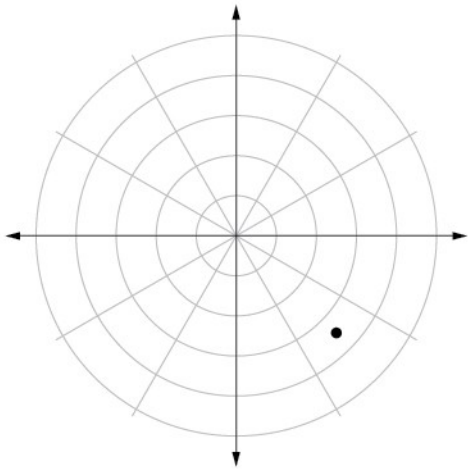
43.

$$(5,\pi)$$

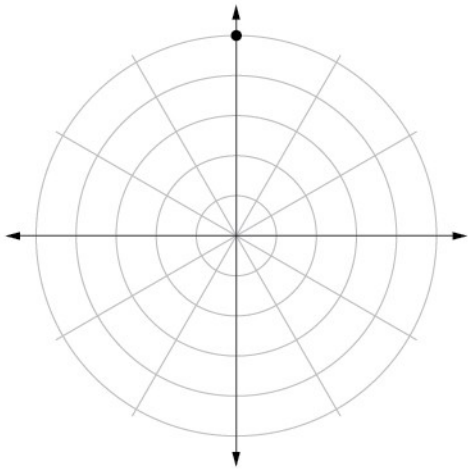
45.



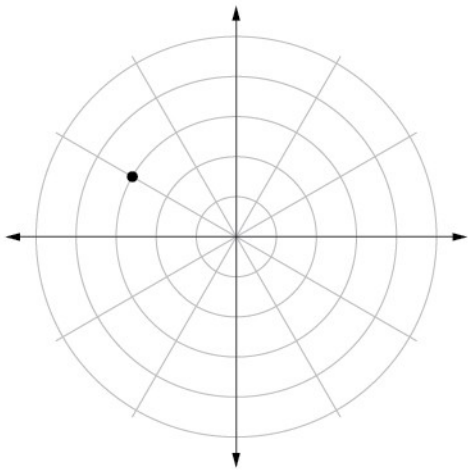
47.



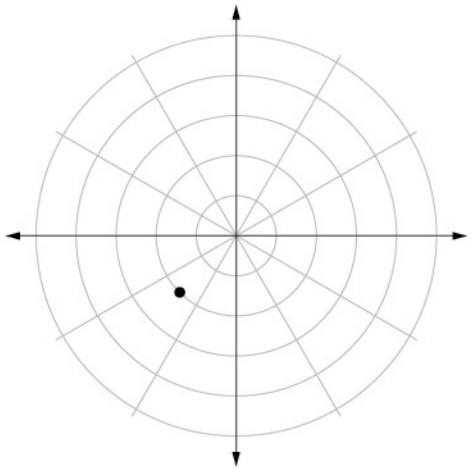
49.



51.

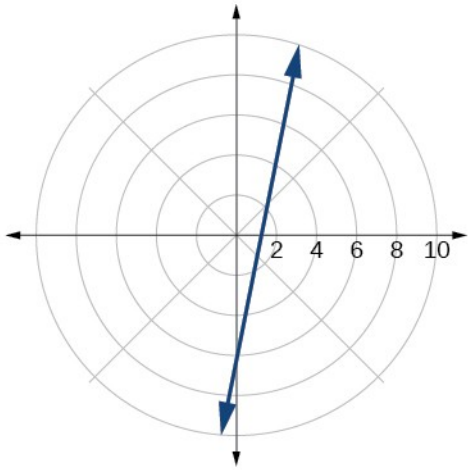


53.



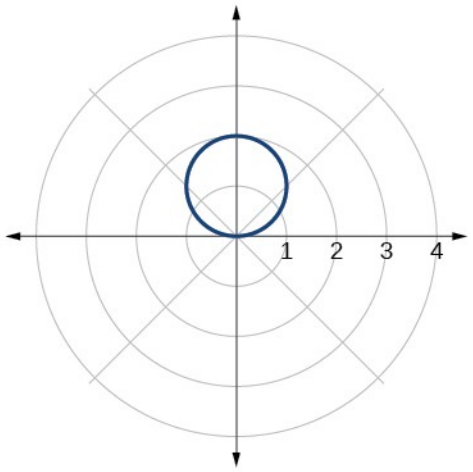
55.

$$r = \frac{6}{5\cos\theta - \sin\theta}$$



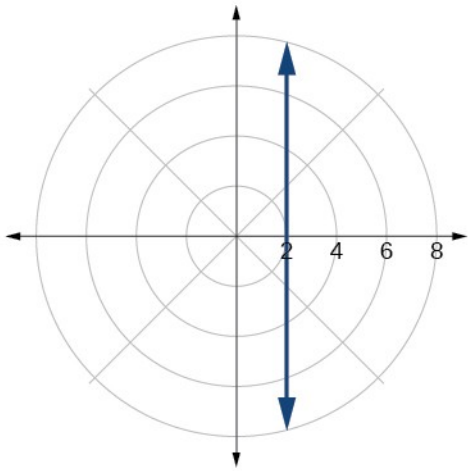
57.

$$r = 2\sin\theta$$



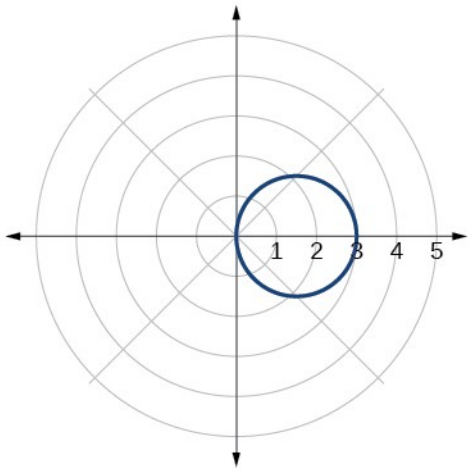
59.

$$r=\frac{2}{\cos\theta}$$



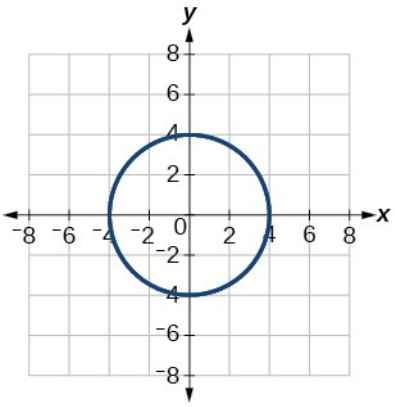
61.

$$r=3\cos\theta$$



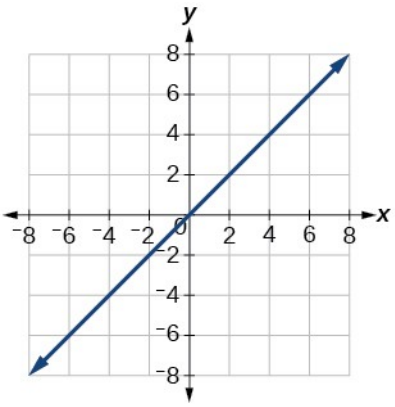
63.

$$x^2+y^2=16$$



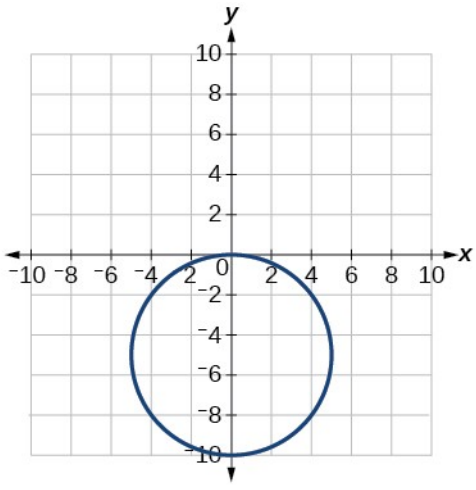
65.

$$y=x$$



67.

$$x^2+(y+5)^2=25$$



69.

$$(1{,}618\,;-1{,}176)$$

71.

$$(10{,}630\,;131{,}186^\circ)$$

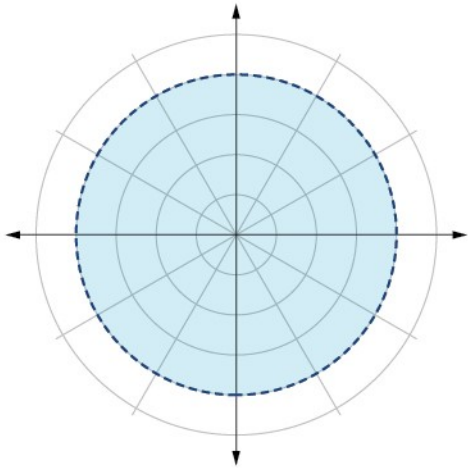
73.

$(2\,;3{,}14)$ eða $(2\,,\pi)$

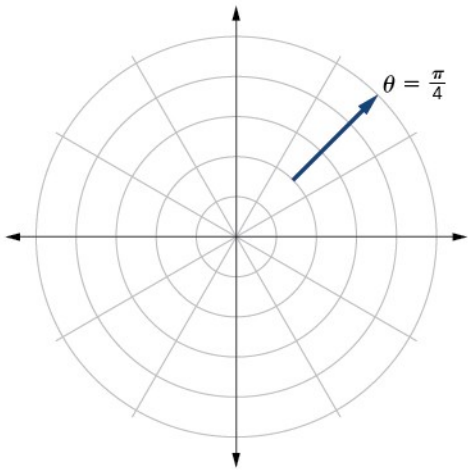
75. Lóðrétt lína sem er a einingum vinstra megin við y-ásinn.

77. Lárétt lína sem er a einingum neðan við x-ásinn.

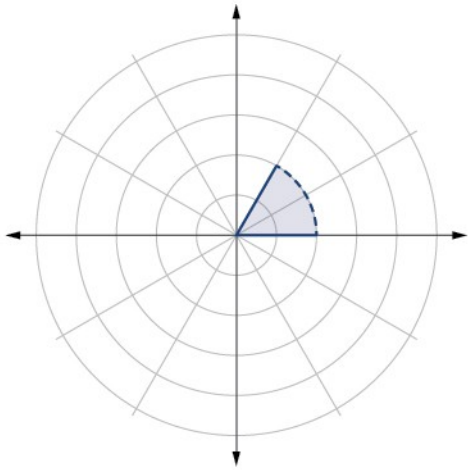
79.



81.



83.



8.4 Kaflaverkefni

1. Samhverfa um pólhnitaásinn samsvarar samhverfu um x -ásinn, samhverfa um skautið samsvarar samhverfu um upphafspunktinn og samhverfa um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$ samsvarar samhverfu um y -ásinn.

3. Prófaðu samhverfu, finndu núllstöðvar, skurðpunkta og hágildi og gerðu gildatöflu. Ákvarðaðu almenna gerð grafsins, svo sem hjartaferil, snigilferil eða lemniskötu, merktu síðan punkta við $\theta=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ og $\frac{3\pi}{2}$, og skissaðu grafið.

5. Lögun pólgrafsins ræðst af því hvort jafnan inniheldur sínus, kósínus og fasta.

7. samhverft um pólhnitaásinn

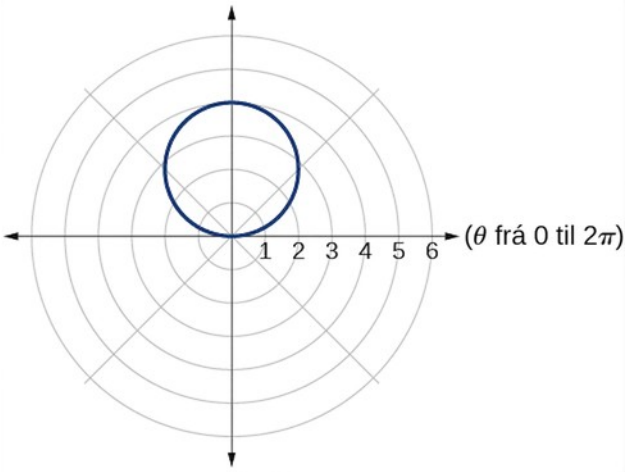
9. samhverft um pólhnitaásinn, samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$, samhverft um skautið

11. samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$

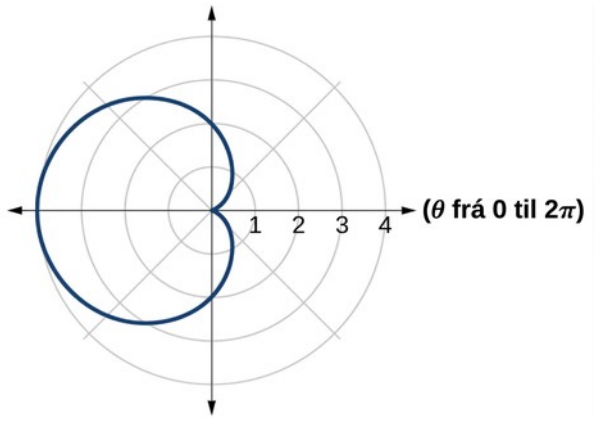
13. Samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$ (y-ásinn)

15. samhverft um skautið

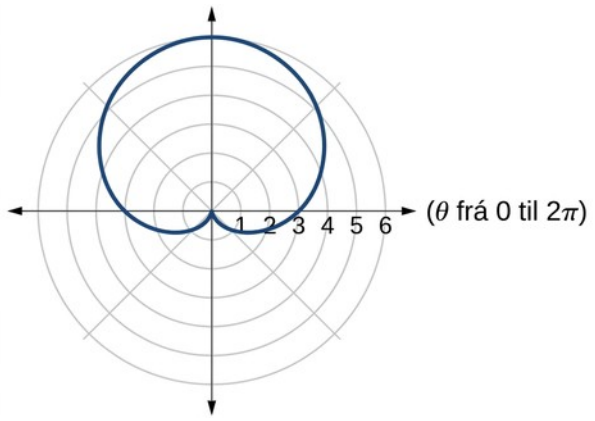
17. hringur



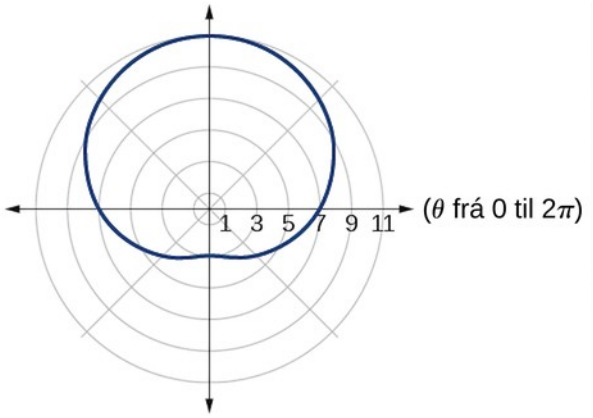
19. hjartaferill



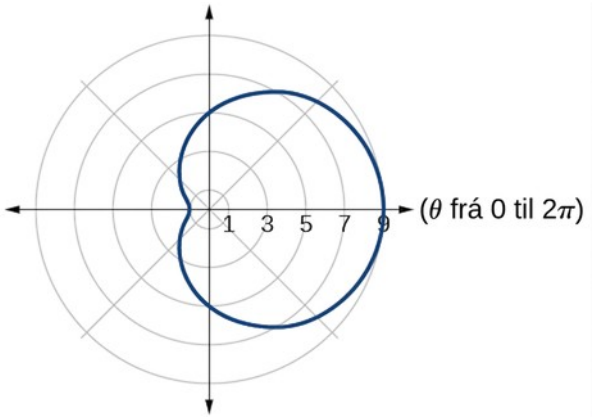
21. hjartaferill



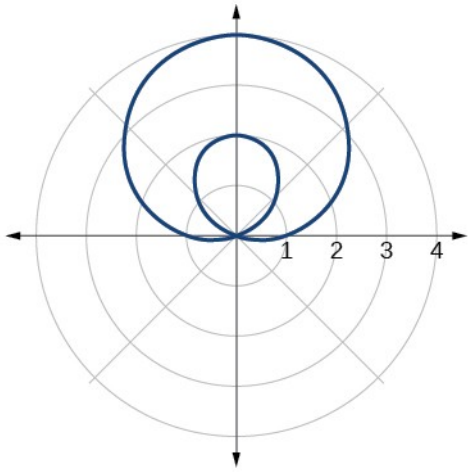
23. einlykkju-snigilferill/dældaður snigilferill



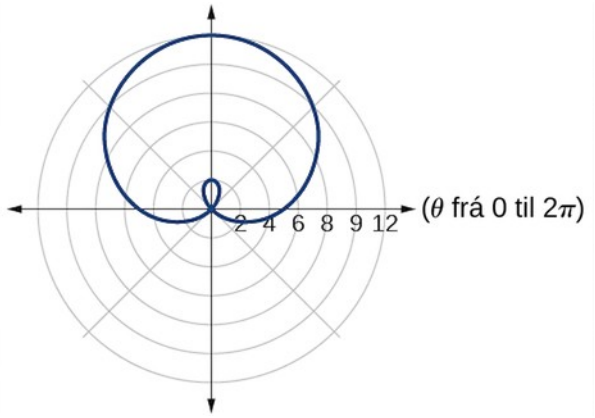
25. einlykkju-snigilferill/dældaður snigilferill



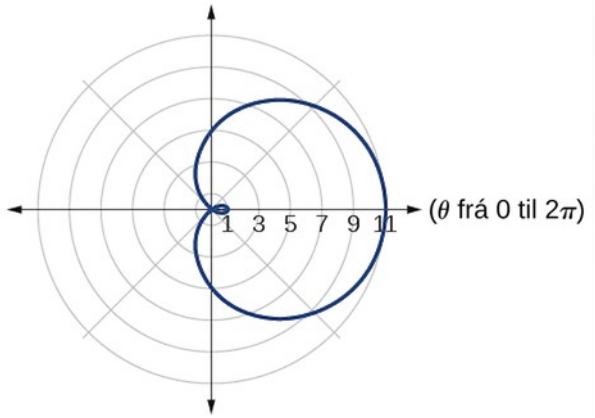
27. snigilferill með innri lykkju/tvílykkju-snigilferill



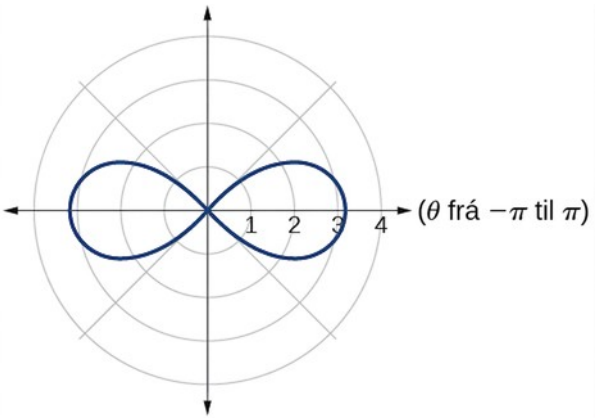
29. snigilferill með innri lykkju/tvílykkju-snigilferill



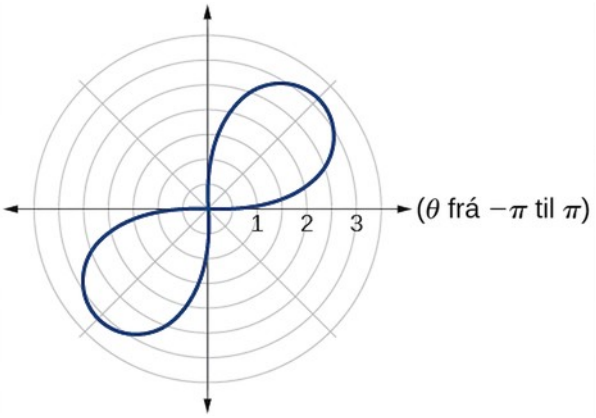
31. snigilferill með innri lykkju/tvílykkju-snigilferill



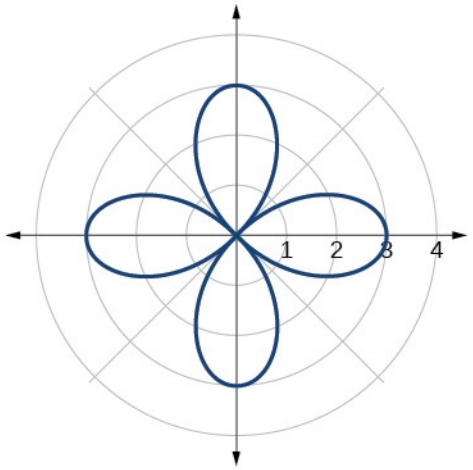
33. lemniskata



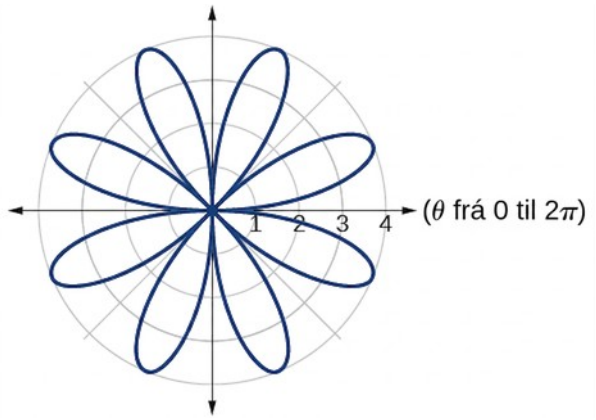
35. lemniskata



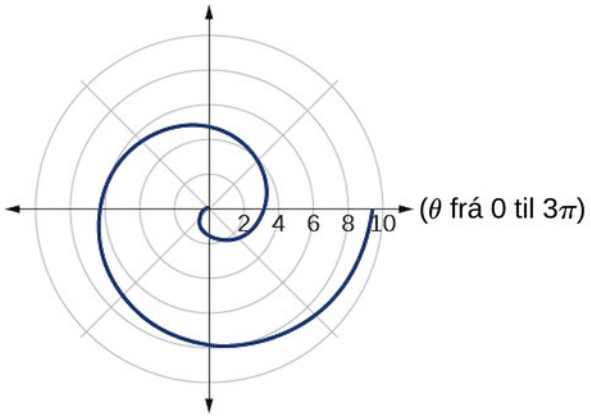
37. rós



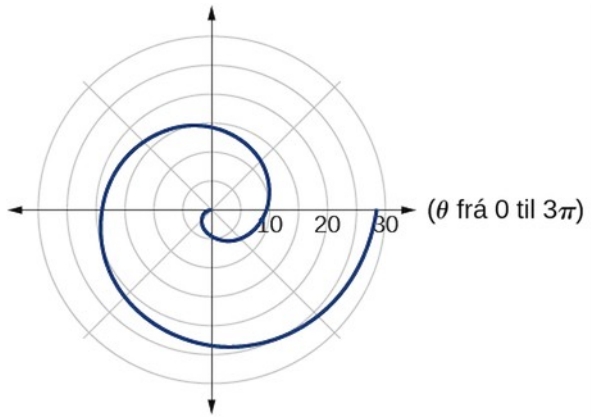
39. rós



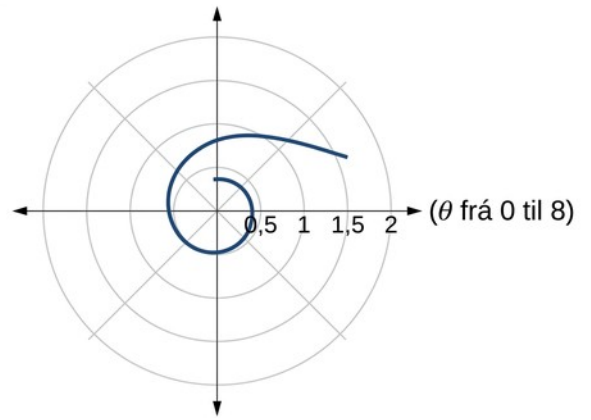
41. vefja Arkimedesar



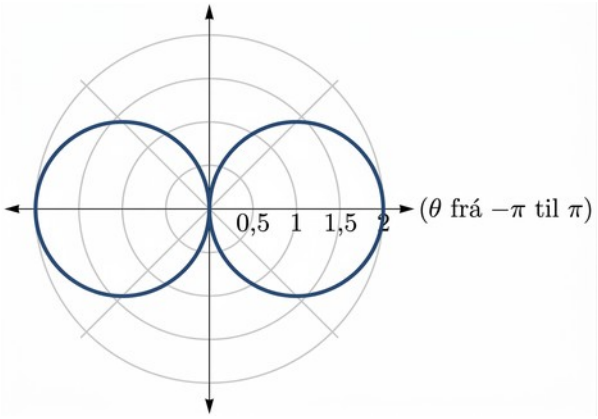
43. vefja Arkimedesar



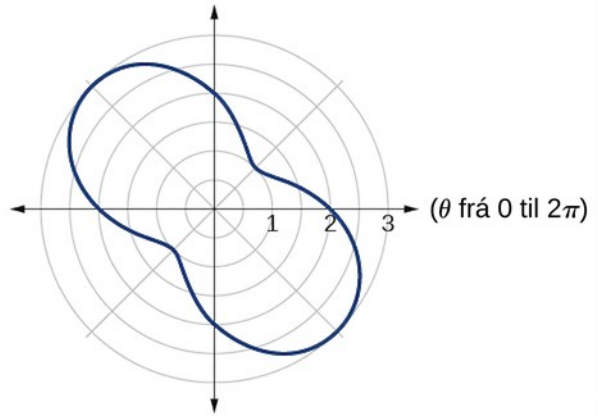
45.



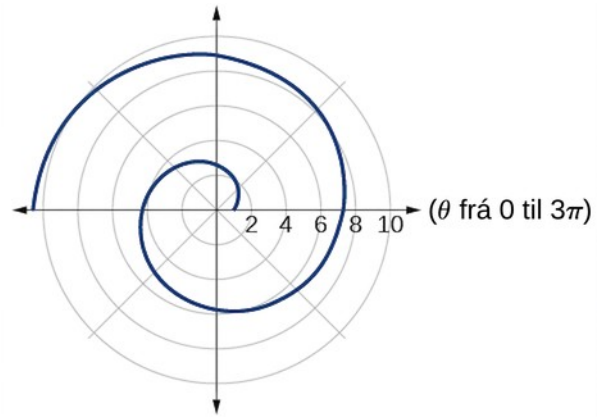
47.



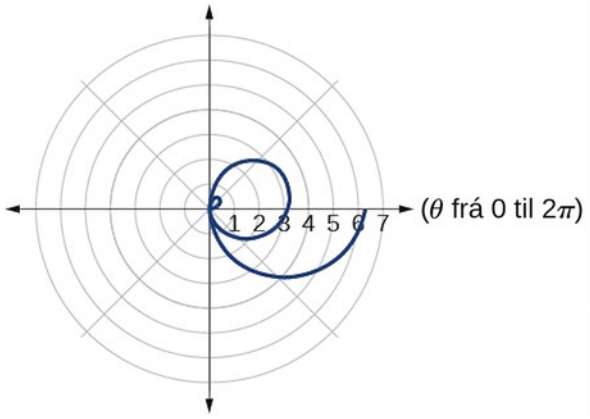
49.



51.



53.



55. Bæði eru spíralar en þó ekki alveg eins.

57. Bæði gröfin eru ferlar með 2 lykkjum. Jafnan þar sem stuðull θ kemur fyrir hefur tvær lykkjur vinstra megin, en jafnan með stuðulinn 2 hefur tvær lykkjur hlið við hlið. Teiknaðu gröfin frá 0 til 4π til að fá skýrari mynd.

59. Þegar skilgreiningarbilið er breikkað sjást fleiri krónublöð rósarinnar.

61. Gröfin eru þriggja krónublaða rósir. Því stærri sem stuðullinn er, því lengra liggur ferillinn frá skautinu.

63. Gröfin eru spíralar. Því minni sem stuðullinn er, því þéttari er spírallinn.

65.

$$\left(4,\frac{\pi}{3}\right),\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$$

67.

$$\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$$

69.

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),(0,\pi),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right),(0,2\pi)$$

71. $\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2},\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\sqrt[4]{8}}{2},\frac{5\pi}{4}\right)$ og í $\theta=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ þar sem r er í öðru veldi

8.5 Kaflaverkefni

1. *a er raunhlutinn, b er þverhlutinn og* $i=\sqrt{-1}$

3. Pólform fæst með því að breyta raun- og þverhluta tvinntölu með $x=r\cos\theta$ og $y=r\sin\theta$.

5. $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ Formúlan er notuð til að einfalda pólform þegar tala er hafin í veldi.

7.

$$5\sqrt{2}$$

9.

$$\sqrt{38}$$

11.

$$\sqrt{14{,}45}$$

13.

$$4\sqrt{5}\,cis(333{,}4^\circ)$$

15.

$$2\,cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

17.

$$\frac{7\sqrt{3}}{2} + i\frac{7}{2}$$

19.

$$-2\sqrt{3} - 2i$$

21.

$$-1{,}5 - i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

23.

$$4\sqrt{3}\,cis(198^\circ)$$

25.

$$\frac{3}{4}\,cis(180^\circ)$$

27.

$$5\sqrt{3}\,cis\left(\frac{17\pi}{24}\right)$$

29.

$$7cis(70^\circ)$$

31.

$$5cis(80^\circ)$$

33.

$$5cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

35.

$$125cis(135^\circ)$$

37.

$$9cis(240^\circ)$$

39.

$$cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

41.

$$3cis(80^\circ), 3cis(200^\circ), 3cis(320^\circ)$$

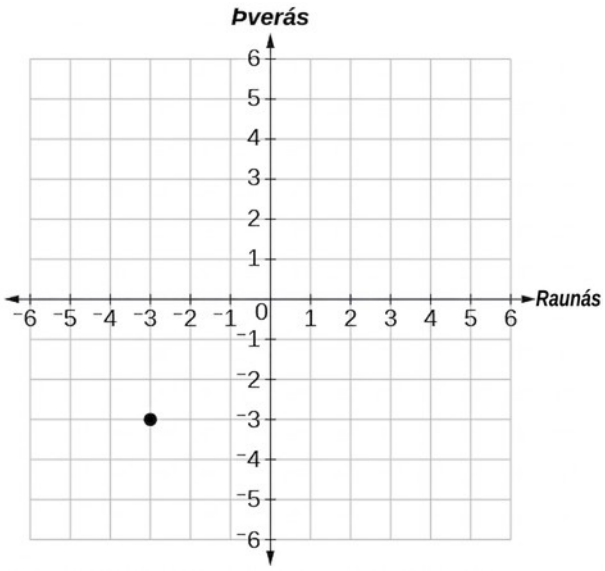
43.

$$2\sqrt[3]{4}cis\left(\frac{2\pi}{9}\right), 2\sqrt[3]{4}cis\left(\frac{8\pi}{9}\right), 2\sqrt[3]{4}cis\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

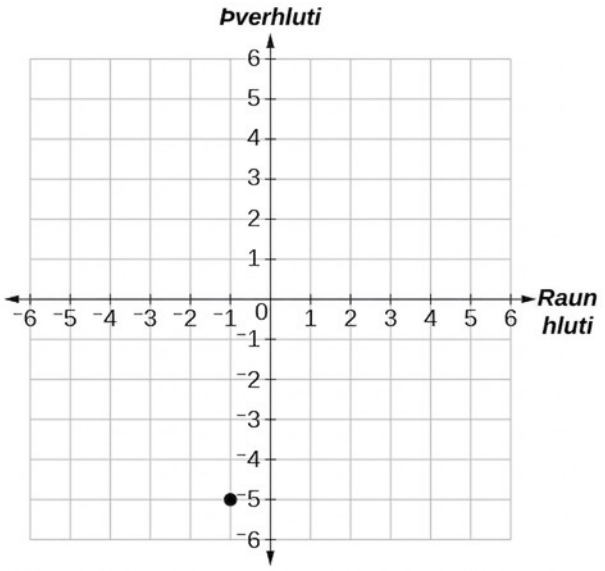
45.

$$2\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{8}\right), 2\sqrt{2}cis\left(\frac{15\pi}{8}\right)$$

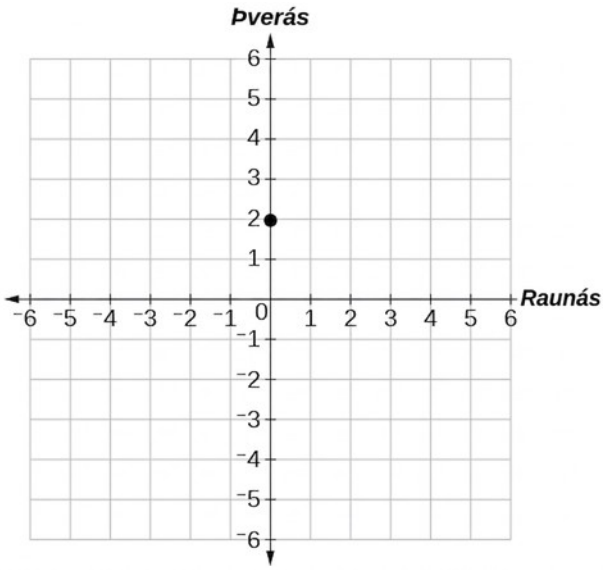
47.



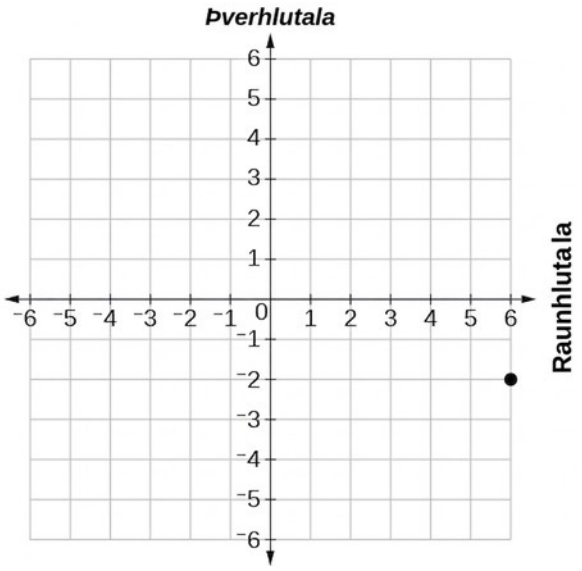
49.



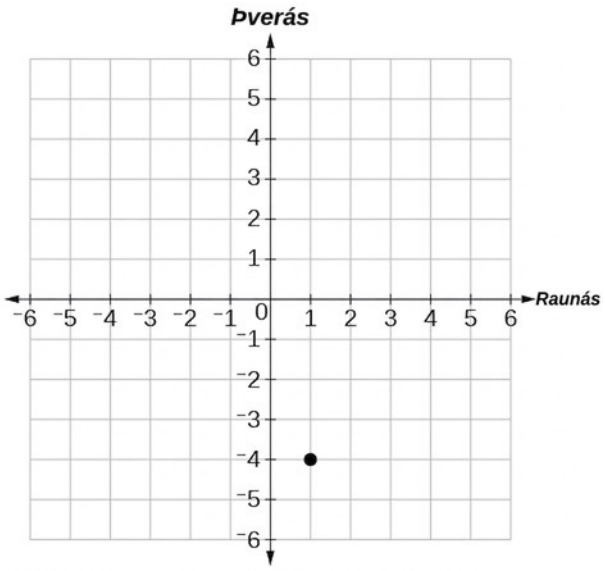
51.



53.



55.



57.

$$3{,}61\ e^{-0{,}59\ i}$$

59.

$$-2+3{,}46\ i$$

61.

$$-4{,}33-2{,}50\ i$$

8.6 Kaflaverkefni

1. Par falla sem eru háð ytri stærð. Bæði föllin eru rituð með sama stika, til dæmis $x=f(t)$ og $y=f(t)$.

3. Veldu aðra jöfnuna og leystu hana fyrir t, settu niðurstöðuna síðan inn í hina jöfnuna og einfaldaðu.

5. Sumar jöfnur, svo sem jafna hrings, er ekki hægt að rita sem föll. Ef þær eru hins vegar ritaðar sem tvær stikajöfnur er hvor jafna um sig fall.

7.

$$y=-2+2x$$

9.

$$y=3\sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

11. $x=2e^{\frac{1-y}{5}}$ eða $y=1-5ln\left(\frac{x}{2}\right)$

13.

$$x=4\log\left(\frac{y-3}{2}\right)$$

15.

$$x=\left(\frac{y}{2}\right)^3-\frac{y}{2}$$

17.

$$y=x^3$$

19.

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{y}{5}\right)^2=1$$

21.

$$y^2=1-\frac{1}{2}x$$

23.

$$y=x^2+2x+1$$

25.

$$y=\left(\frac{x+1}{2}\right)^3-2$$

27.

$$y=-3x+14$$

29.

$$y=x+3$$

31.

$$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=2\sin t+1 \end{cases}$$

33.

$$\begin{cases} x(t)=\sqrt{t}+2t \\ y(t)=t \end{cases}$$

35.

$\begin{cases} x(t) = 4\cos\ t \\ y(t) = 6\sin\ t \end{cases}$; Sporbaugur

37.

$\begin{cases} x(t) = \sqrt{10}\cos t \\ y(t) = \sqrt{10}\sin t \end{cases}$; hringur

39.

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 4t \\ y(t) = -2t \end{cases}$$

41.

$$\begin{cases} x(t) = 4 + 2t \\ y(t) = 1 - 3t \end{cases}$$

43. já, þegar $t = 2$

45.

t	x	y
1	-3	1
2	0	7
3	5	17

47. svör geta verið breytileg:

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \text{ og } \begin{cases} x(t) = t + 1 \\ y(t) = (t+2)^2 \end{cases}$$

49. svör geta verið breytileg: ,

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 - 4\ t + 4 \end{cases} \text{ og } \begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

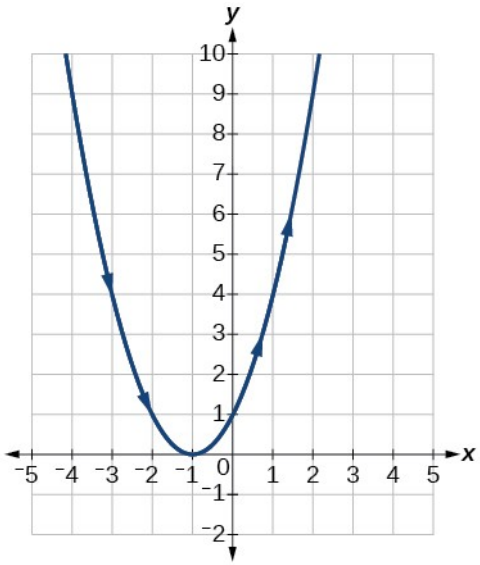
8.7 Kaflaverkefni

1. með því að merkja punkta, sýna stefnuna með ör og nota grafreikni

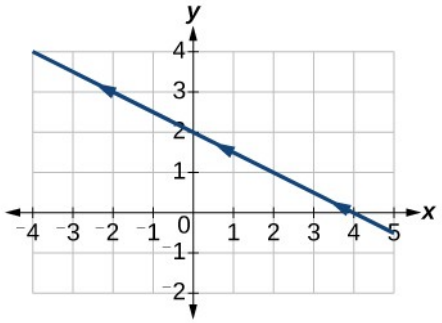
3. Örvarnar sýna stefnu ferilsins, það er hreyfistefnuna þegar sífellt hærri gildi eru sett inn fyrir t.

5. Stikajöfnurnar sýna ólíka lóðrétta og lárétta hreyfingu með tíma.

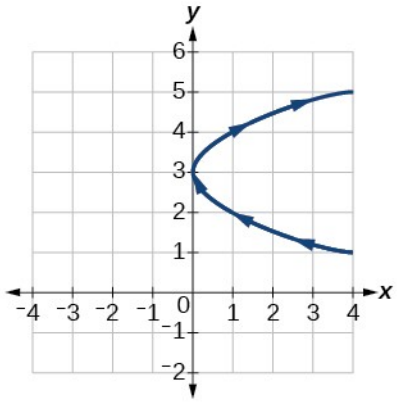
7.


y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5

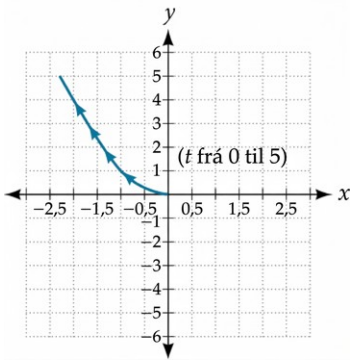
9.


y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5

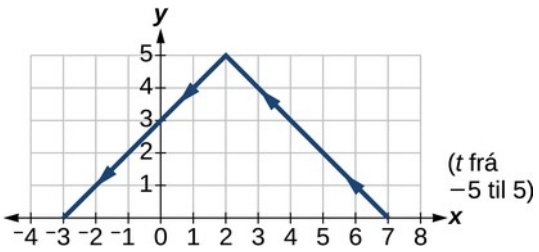
11.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

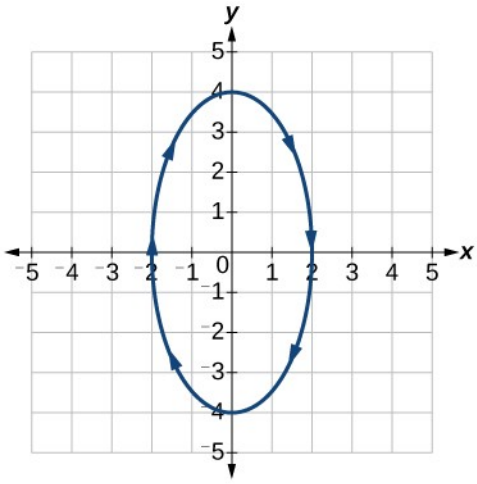
13.



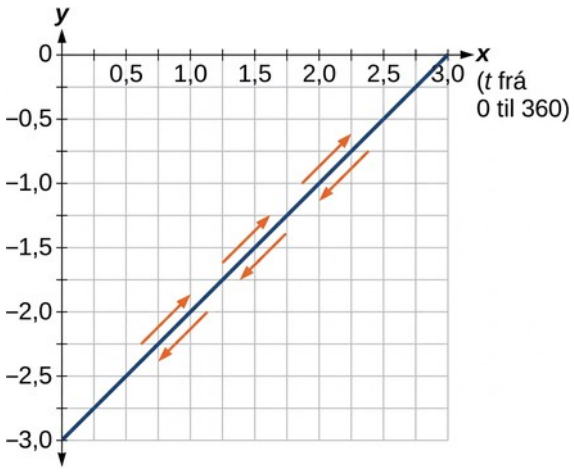
15.



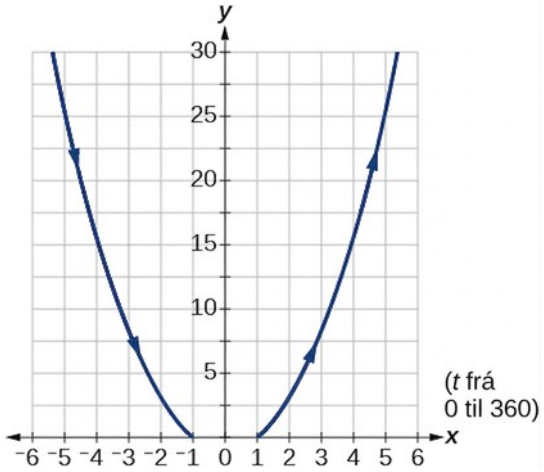
17.



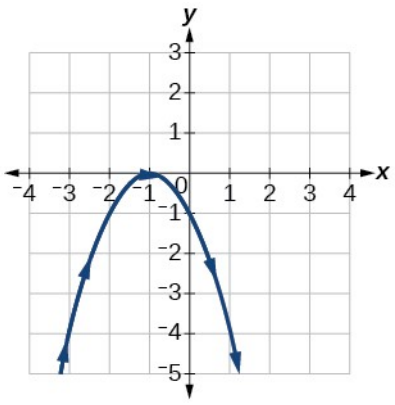
19.


y
x
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
(t frá
0 til 360)
−0,5
−1,0
−1,5
−2,0
−2,5
−3,0

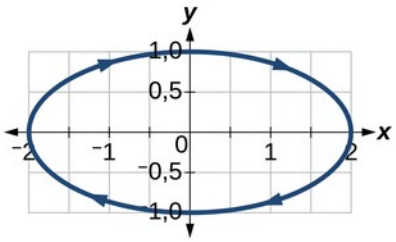
21.


y
x
30
25
20
15
10
5
(t frá
0 til 360)
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6

23.

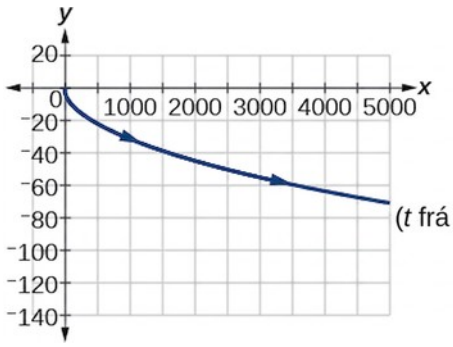

y
x
3
2
1
−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4
−1
−2
−3
−4
−5

25.



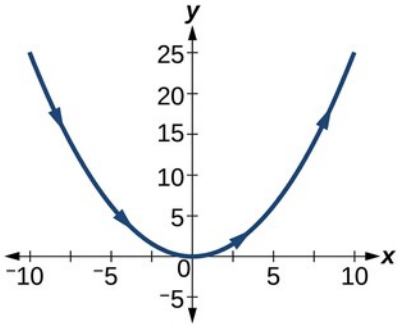
(t frá 0 til 2π)

27.



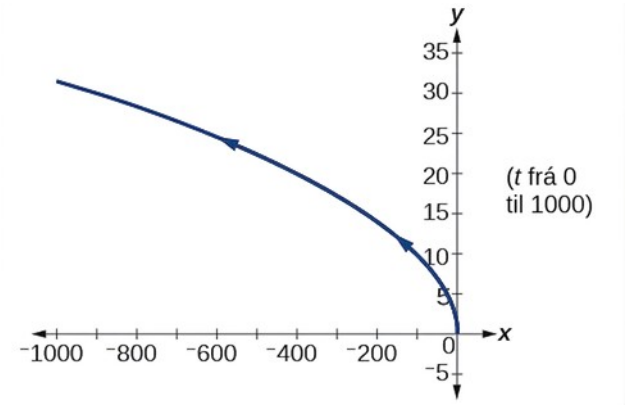
(t frá -1 til 5)

29.



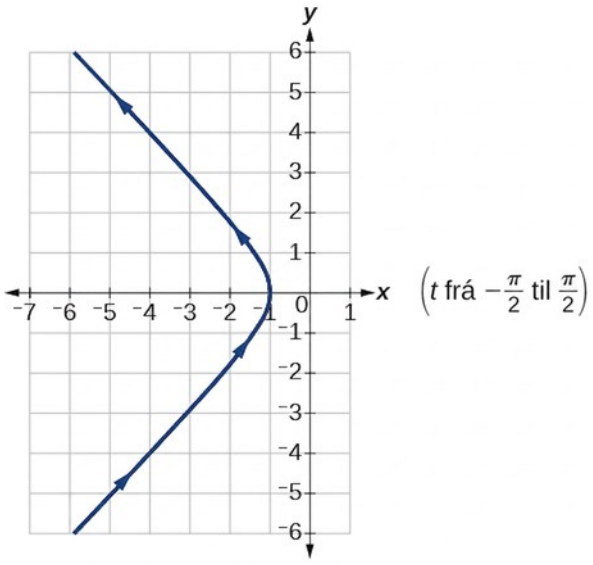
(t frá -5 til 5)

31.

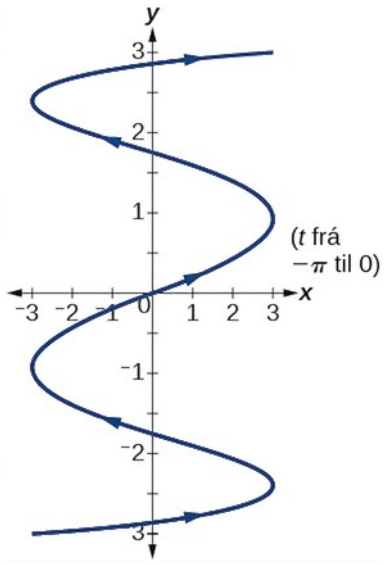


(t frá 0 til 1000)

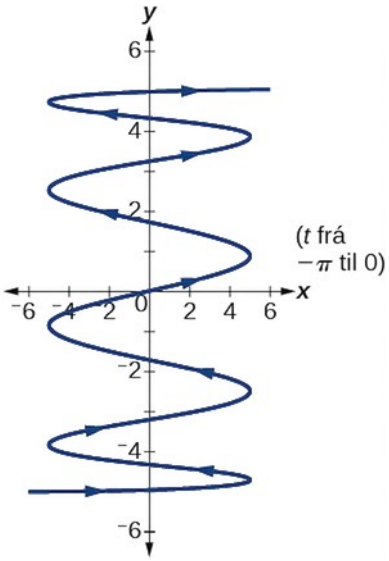
33.


y
x
$\left(t \text{ frá } -\frac{\pi}{2} \text{ til } \frac{\pi}{2}\right)$

35.


y
x
(t frá
$-\pi$ til 0)

37.



39. Hreyfingin fer 100 sinnum fram og til baka.

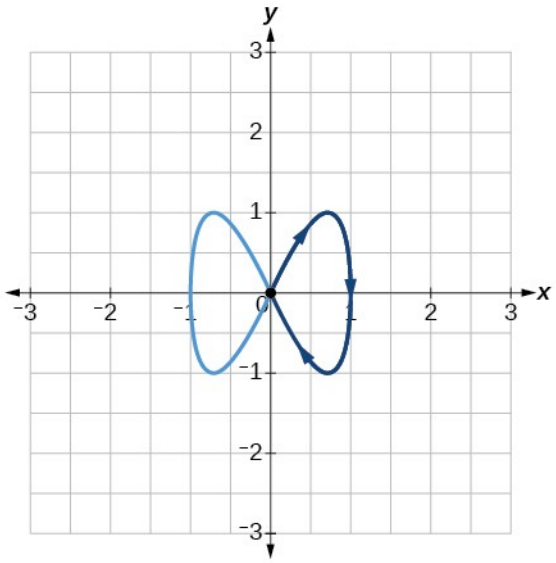
41. Taktu neikvætt gildi jöfnunnar fyrir $x(t)$.

43. Fleygboginn opnast upp.

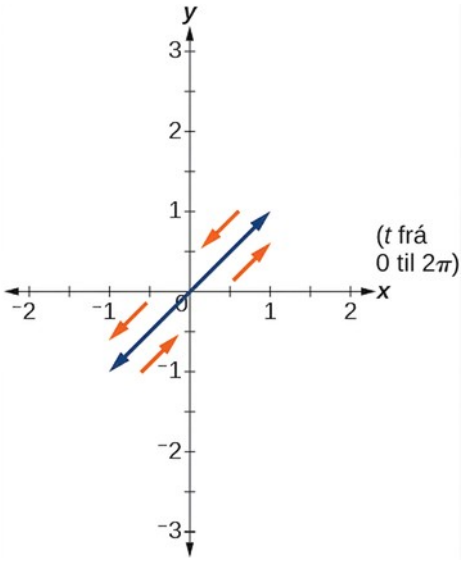
45.

$$\begin{cases} x(t) = 5\cos t \\ y(t) = 5\sin t \end{cases}$$

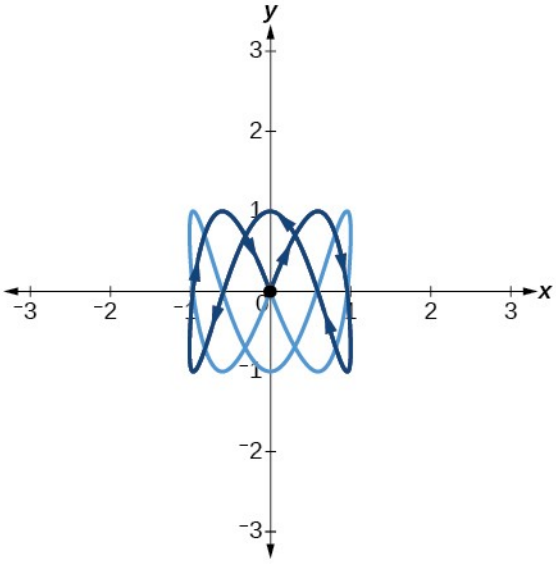
47.



49.



51.



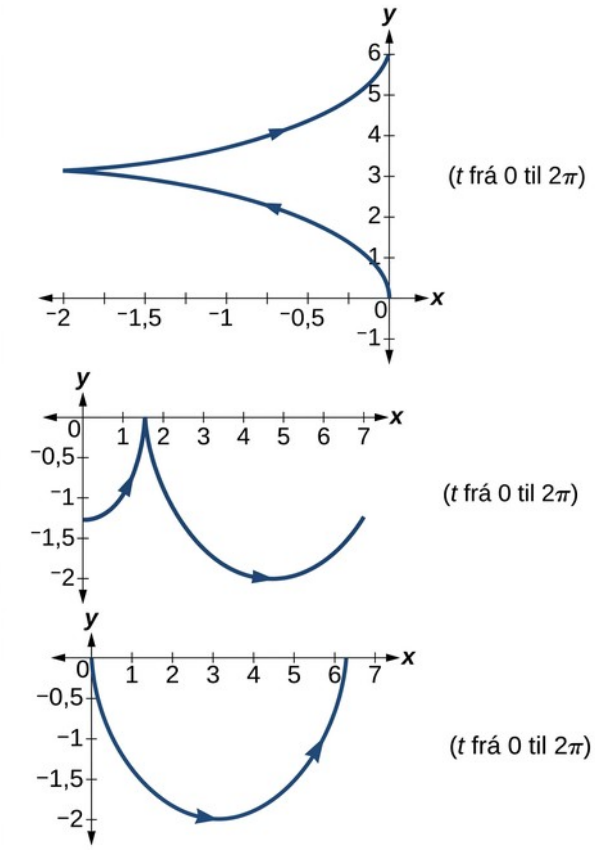
53.

$$a=4,\ b=3,\ c=6,\ d=1$$

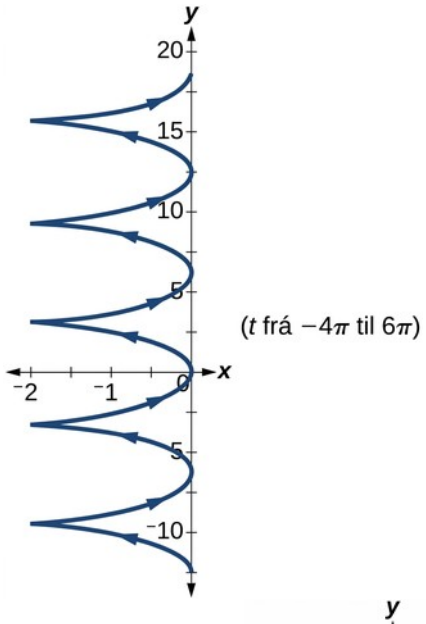
55.

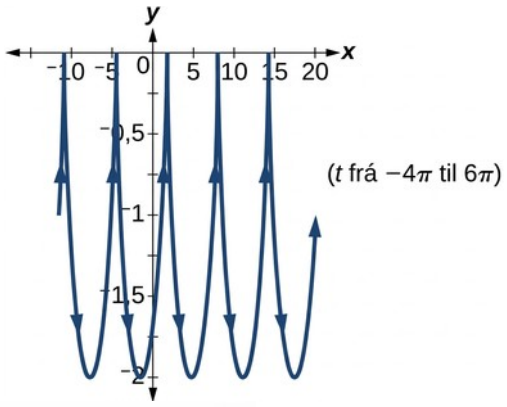
$$a=4,\ b=2,\ c=3,\ d=3$$

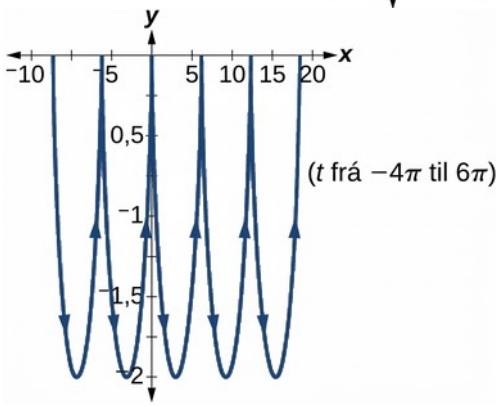
57.


y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−1,5
−1
−0,5
(t frá 0 til 2π)
y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
−0,5
−1
−1,5
−2
(t frá 0 til 2π)
y
x
0
1
2
3
4
5
6
7
−0,5
−1
−1,5
−2
(t frá 0 til 2π)

59.







61. Skurðpunkturinn við y-ásinn breytist.

63.

$$y(x) = -16\left(\frac{x}{15}\right)^2 + 20\left(\frac{x}{15}\right)$$

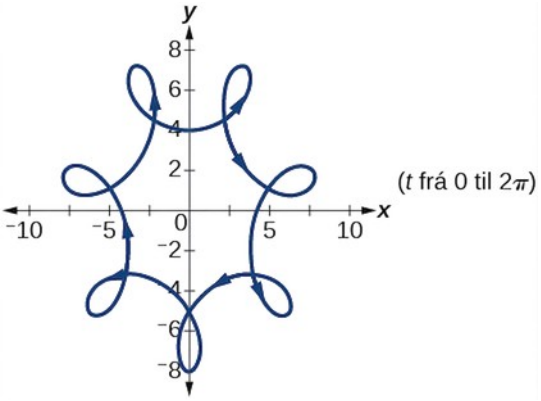
65.

$$\begin{cases} x(t) = 64t\cos(52^\circ) \\ y(t) = -16t^2 + 64t\sin(52^\circ) \end{cases}$$

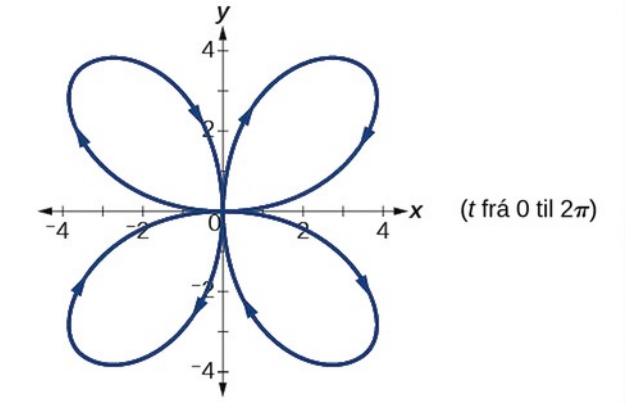
67. um það bil 3,2 sekúndur

69. 1,6 sekúndur

71.



73.



8.8 Kaflaverkefni

1. lágstafur með feitletri, venjulega u, v, w

3. Þeir eru einingarvigrar og eru notaðir til að tákna láréttan og lóðréttan þátt vigurs. Stærð hvors þeirra er 1.

5. Fyrri talan táknar alltaf stuðul i, og sú síðari stuðul j.

7.

$$\langle 7, -5 \rangle$$

9. ekki jafnir

11. jafnir

13. jafnir

15.

$$-7i - 3j$$

17.

$$-6i - 2j$$

19.

$$u+v=\langle -5,5\rangle, u-v=\langle -1,3\rangle, 2u-3v=\langle 0,5\rangle$$

21.

$$-10i-4j$$

23.

$$-\frac{2\sqrt{29}}{29}i+\frac{5\sqrt{29}}{29}j$$

25.

$$-\frac{2\sqrt{229}}{229}i+\frac{15\sqrt{229}}{229}j$$

27.

$$-\frac{7\sqrt{2}}{10}i+\frac{\sqrt{2}}{10}j$$

29.

$$|v|=7{,}810, \theta=39{,}806^\circ$$

31.

$$|v|=7{,}211, \theta=236{,}310^\circ$$

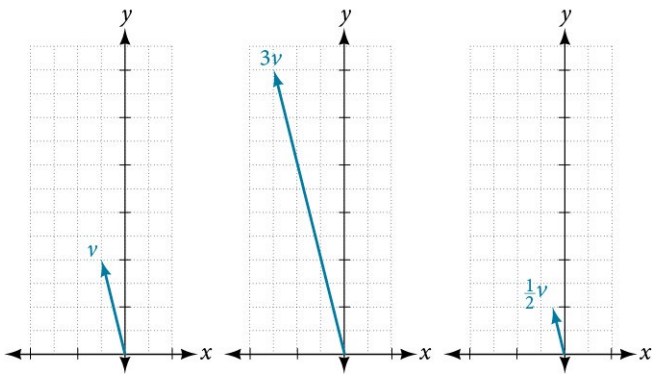
33.

$$-6$$

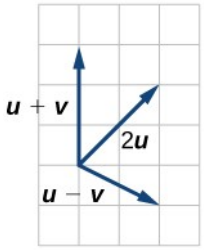
35.

$$-12$$

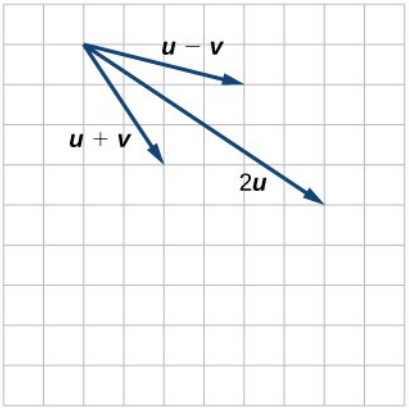
37.



39.



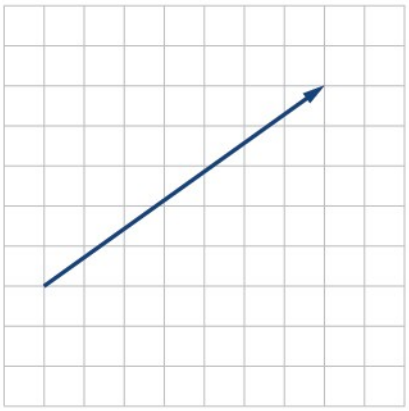
41.



43.



45.

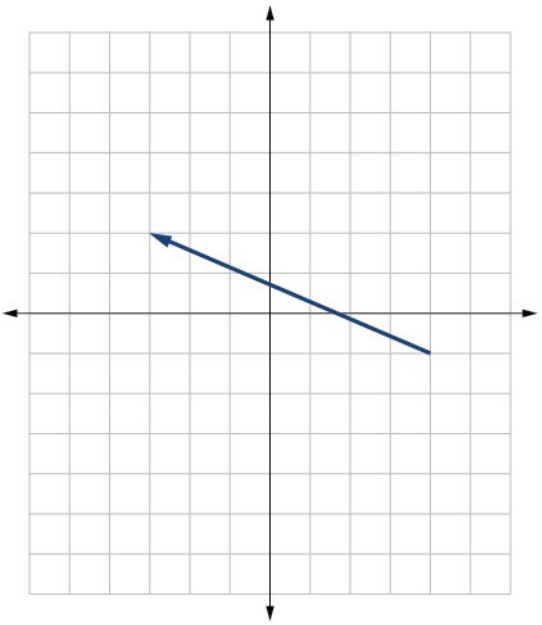


47.

$$\langle 4,1 \rangle$$

49.

$$v=-7i+3j$$



51.

$$3\sqrt{2}i+3\sqrt{2}j$$

53.

$$i-\sqrt{3}j$$

55.

1. ⓐ 58,7
2. ⓑ 12,5

57. $x = 7{,}13$ pund, $y = 3{,}63$ pund

59. $x = 2{,}87$ pund, $y = 4{,}10$ pund

61. 4,635 mílur, 17,764° norðan við austur

63. 17 mílur; 10,318 mílur

65. fjarlægð: 2,868; stefna: 86,474° norðan við vestur eða 3,526° vestan við norður

67. 4,924°. 659 km/hr

69. 4,424°

71.

$$(0{,}081\,;8{,}602)$$

73. 21,801° miðað við stefnu bílsins fram á við

75. samsíða: 16,28, hornrétt: 47,28 pund

77. 19,35 pund, 231,54° frá láréttu

79. 5,1583 pund, 75,8° frá láréttu

Upprifjunarverkefni

1. ekki mögulegt

3.

$$C = 120^\circ, a = 23{,}1, c = 34{,}1$$

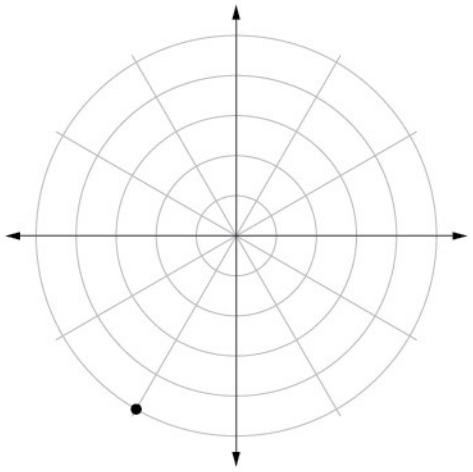
5. fjarlægð flugvélarinnar frá punkti A: 2,2 km, hæð flugvélarinnar: 1,6 km

7.

$$b = 71{,}0^\circ, C = 55{,}0^\circ, a = 12{,}8$$

9. 40,6 km

11.



13.

$$(0, 2)$$

15.

$$(9{,}8489, 203{,}96^\circ)$$

17.

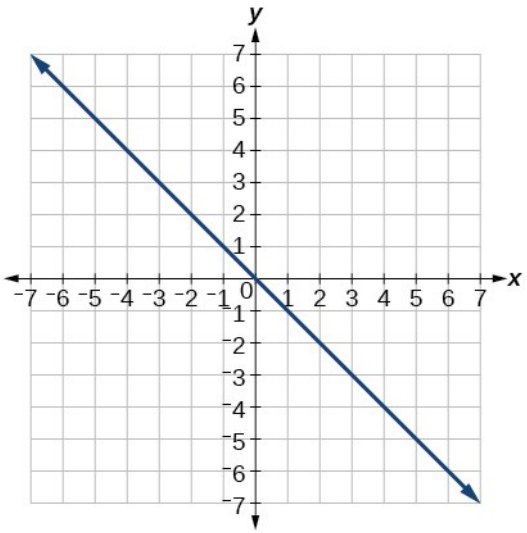
$$r = 8$$

19.

$$x^2 + y^2 = 7x$$

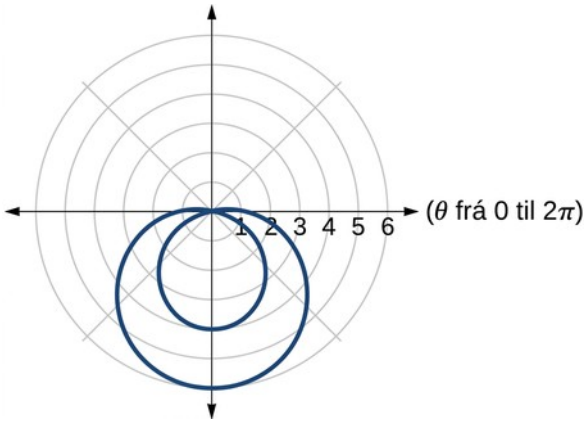
21.

$$y = -x$$

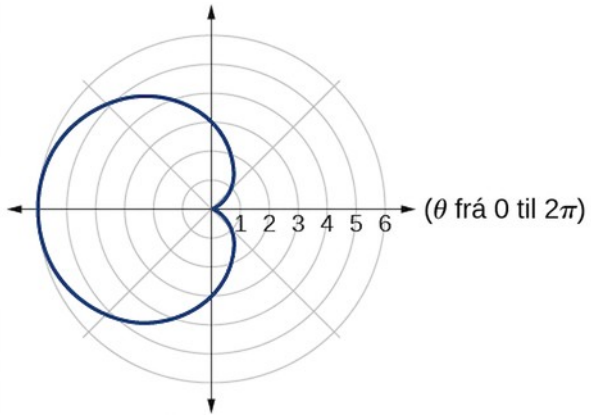


23. samhverft um línuna $\theta=\frac{\pi}{2}$

25.



27.



29. 5

31.

$$cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

33.

$$2{,}3+1{,}9\,i$$

35.

$$60\,cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

37.

$$3\,cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

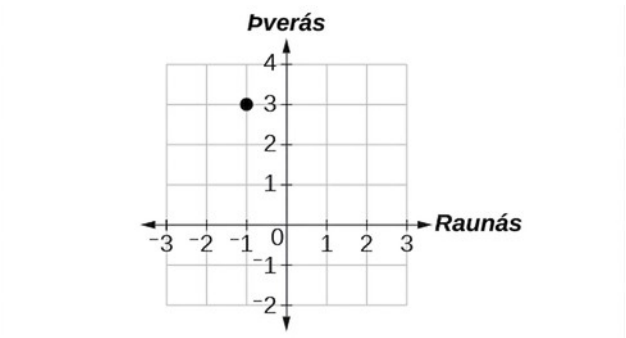
39.

$$25cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

41.

$$5cis\left(\frac{3\pi}{4}\right), 5cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

43.



45.

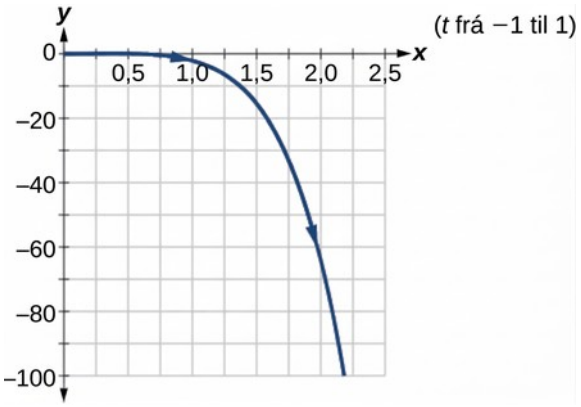
$$x^2+\frac{1}{2}y=1$$

47.

$$\begin{cases} x(t) = -2 + 6t \\ y(t) = 3 + 4t \end{cases}$$

49.

$$y=-2x^5$$



51.

a. $\begin{cases} x(t) = (80\cos(40^\circ))t \\ y(t) = -16t^2 + (80\sin(40^\circ))t + 4 \end{cases}$

b. Boltinn er 14 fet á hæð og 184 fet frá skotstaðnum.

c. 3,3 sekúndur

53. ekki jafnir

55. $4\boldsymbol{i}$

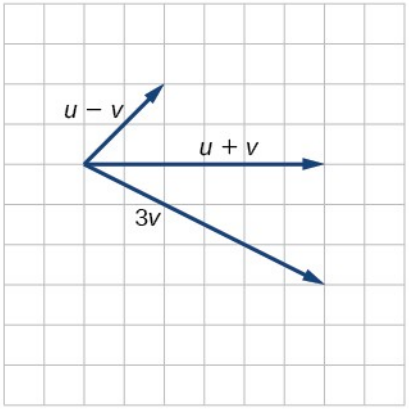
57. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}\,\mathrm{i} - \frac{\sqrt{10}}{10}\,\mathrm{j}$

59. stærð: $3\sqrt{2}$, stefna: 225°

61.

16

63.



Æfingapróf

1.

$$\alpha = 67{,}1^\circ, \gamma = 44{,}9^\circ, a = 20{,}9$$

3.

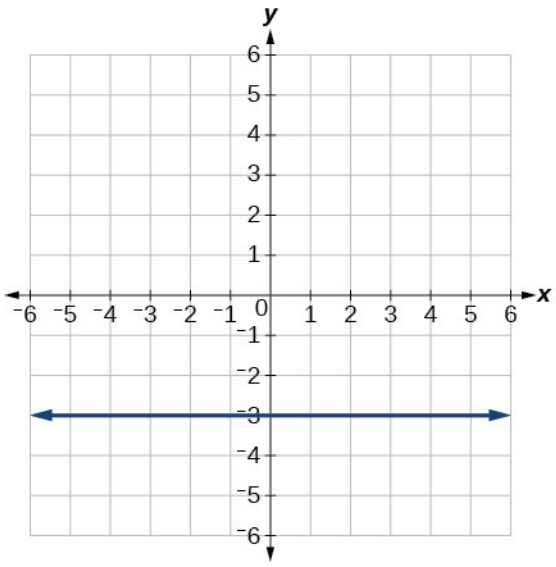
1712 mílur

5.

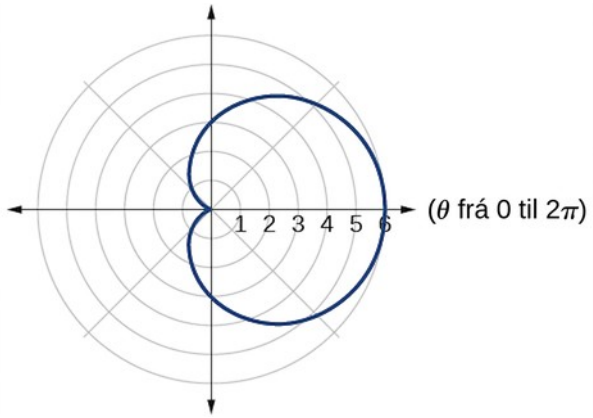
$$(1, \sqrt{3})$$

7.

$$y = -3$$



9.



11.

$$\sqrt{106}$$

13.

$$\frac{-5}{2}+i\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

15.

$$4cis\left(21^\circ\right)$$

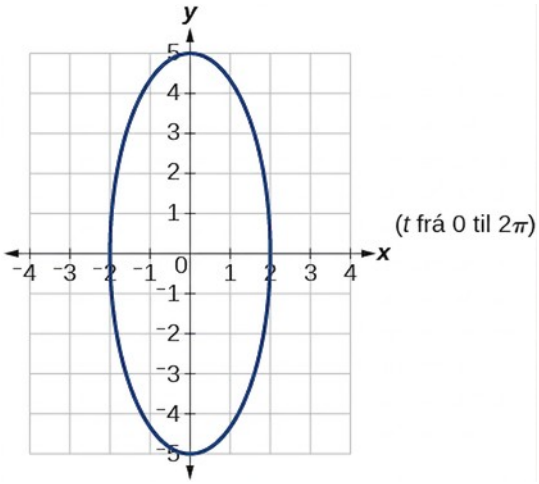
17.

$$2\sqrt{2}cis\left(18^\circ\right),2\sqrt{2}cis\left(198^\circ\right)$$

19.

$$y=2\left(x-1\right)^2$$

21.



23. $-4\boldsymbol{i} - 15\boldsymbol{j}$

25.

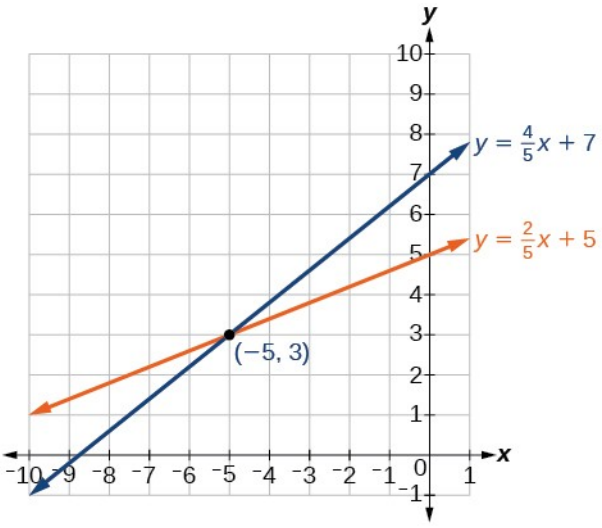
$$\frac{2\sqrt{13}}{13}i + \frac{3\sqrt{13}}{13}j$$

Kafli 9

Prófaðu

9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum

1. Ekki lausn.
2. Lausn hneppisins er raðaða parið $(-5, 3)$.



3.

$$(-2,-5)$$

4.

$$(-6,-2)$$

5.

$$(10,-4)$$

6. Engin lausn. Hneppið er ósamkvæmt.

7. Hneppið er háð og hefur því óendanlega margar lausnir af gerðinni $(x, 2x+5)$.

8. 700 börn, 950 fullorðnir

9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum

1.

$$(1,-1,1)$$

2. Engin lausn.

3. Óendanlega margar lausnir af gerðinni $(x, 4x-11, -5x+18)$.

9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum

1. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ og $(2,8)$

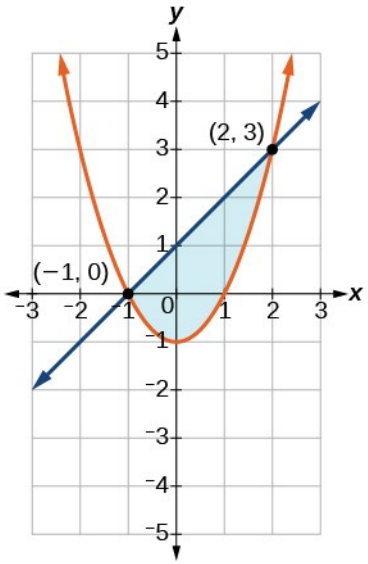
2.

$$(-1,3)$$

3.

$$\{(1,3),(1,-3),(-1,3),(-1,-3)\}$$

4.



9.4 Stofnbrot

1.

$$\frac{3}{x-3}-\frac{2}{x-2}$$

2.

$$\frac{6}{x-1}-\frac{5}{(x-1)^2}$$

3.

$$\frac{3}{x-1}+\frac{2x-4}{x^2+1}$$

4.

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3}+\frac{2x+1}{(x^2-2x+3)^2}$$

9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir

1.

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2+3 & 6+(-2)\\ 1+1 & 0+5\\ 1+(-4) & -3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & 5\\ -3 & 0\end{bmatrix}$$

2.

$$-2B = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$

9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

1.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

2.

$$\begin{gathered} x - y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ y + z = -9 \end{gathered}$$

3.

$$(2, 1)$$

4.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

5.

$$(1, 1, 1)$$

6. $150.000 við 7%, $750.000 við 8%, $600.000 við 10%

9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkjum

1.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-3) + 4(1) & 1(-4) + 4(1) \\ -1(-3) + -3(1) & -1(-4) + -3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(1) + -4(-1) & -3(4) + -4(-3) \\ 1(1) + 1(-1) & 1(4) + 1(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

4.

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 38 \\ 58 \end{bmatrix}$$

9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers

1.

$$(3, -7)$$

2.

$$-10$$

3.

$$\left(-2, \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

9.1 Kaflaverkefni

1. Nei, lausnirnar geta verið engar, ein eða óendanlega margar. Skoðaðu gröfin.

3. Þetta merkir að enginn raunhæfur núllpunktur rekstrar er til. Þegar fyrirtækið hefur framleitt eina einingu er það þegar farið að skila hagnaði.

5. Leystu með innsetningu, með því að einangra x eða y, með grafískri aðferð eða með samlagningu.

7. Já

9. Já

11.

$$(-1, 2)$$

13.

$$(-3, 1)$$

15.

$$\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$$

17. Engar lausnir eru til.

19.

$$\left(\frac{72}{5}, \frac{132}{5}\right)$$

21.

$$(6, -6)$$

23.

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right)$$

25. Engar lausnir eru til.

27.

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right)$$

29.

$$\left(x, \frac{x+3}{2}\right)$$

31.

$$(-4, 4)$$

33.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

35.

$$\left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

37.

$$(x, 2(7x-6))$$

39.

$$\left(-\frac{5}{6}, \frac{4}{3}\right)$$

41. Samkvæmt hneppi með eina lausn

43. Samkvæmt hneppi með eina lausn

45. Háð hneppi með óendanlega margar lausnir

47.

$$(-3{,}08\,;4{,}91)$$

49.

$$(-1{,}52\,;2{,}29)$$

51.

$$\left(\frac{A+B}{2},\frac{A-B}{2}\right)$$

53.

$$\left(\frac{-1}{A-B},\frac{A}{A-B}\right)$$

55.

$$\left(\frac{CE-BF}{BD-AE},\frac{AF-CD}{BD-AE}\right)$$

57. Reksturinn skilar aldrei hagnaði.

59.

$$(1.250,100.000)$$

61. Tölurnar eru 7,5 og 20,5.

63. 24.000

65. 790 nemendur á öðru ári, 805 nemendur á fyrsta ári

67. 56 karlar, 74 konur

69. 10 gallon af 10% lausn, 15 gallon af 60% lausn

71. Swan Peak: $750.000, Riverside: $350.000

73. $12.500 á fyrri reikningnum, $10.500 á þeim síðari.

75. Háir skór: 45, lágir skór: 15

77. Óendanlega margar lausnir. Frekari upplýsingar vantar.

9.2 Kaflaverkefni

1. Nei, lausnirnar geta aðeins verið ein, engar eða óendanlega margar.

3. Ekki endilega. Lausnirnar gætu verið engar, ein eða óendanlega margar. Til dæmis er $(0,0,0)$ ekki lausn hneppisins hér að neðan, en það merkir ekki að hneppið hafi enga lausn.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= 1 \\ -4x - 6y + 12z &= -2 \\ x + 2y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

5. Sérhvert jöfnuhneppi má leysa með grafískri aðferð, innsetningu og samlagningu. Hneppi þriggja jafna verða hins vegar mjög flókin í grafískri lausn og því eru aðrar aðferðir yfirleitt heppilegri.

7. Nei

9. Já

11.

$$(-1, 4, 2)$$

13.

$$\left(-\frac{85}{107}, \frac{312}{107}, \frac{191}{107}\right)$$

15.

$$\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

17.

$$(4, -6, 1)$$

19.

$$\left(x, \frac{1}{27}(65 - 16x), \frac{x+28}{27}\right)$$

21.

$$\left(-\frac{45}{13}, \frac{17}{13}, -2\right)$$

23. Engar lausnir eru til

25.

$$(0, 0, 0)$$

27.

$$\left(\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}\right)$$

29.

$$(7, 20, 16)$$

31.

$$(-6, 2, 1)$$

33.

$$(5, 12, 15)$$

35.

$$(-5, -5, -5)$$

37.

$$(10, 10, 10)$$

39.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

41.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

43.

$$(2, 0, 0)$$

45.

$$(1, 1, 1)$$

47.

$$\left(\frac{128}{557}, \frac{23}{557}, \frac{28}{557}\right)$$

49.

$$(6, -1, 0)$$

51. 24, 36, 48

53. 70 afar og ömmur, 140 foreldrar, 190 börn

55. Þinn hlutur var $19,95, hlutur Shani var $40 og hlutur hins sambýlingsins var $22,05.

57. Lausnirnar eru óendanlega margar; frekari upplýsingar vantar

59. 500 nemendur, 225 börn og 450 fullorðnir

61. BMW-bíllinn kostaði $49.636, Jeep-bíllinn $42.636 og Toyota-bíllinn $47.727.

63. $400.000 á reikningnum sem greiðir 3% vexti, $500.000 á reikningnum sem greiðir 4% vexti og $100.000 á reikningnum sem greiðir 2% vexti.

65. Bandaríkin notuðu 26,3%, Japan 7,1% og Kína 6,4% af olíu heimsins.

67. Sádi-Arabía flutti inn 16,8%, Kanada 15,1% og Mexíkó 15,0%

69. Fuglar voru 19,3%, fiskar 18,6% og spendýr 17,1% af tegunda í útrýmingarhættu

9.3 Kaflaverkefni

1. Ólínulegt hneppi gæti táknað tvo hringi sem skarast í tveimur punktum og gefa því tvær lausnir. Það gæti einnig táknað fleygboga og hring þar sem oddpunktur fleygbogans liggur á hringnum og báðar greinar hans skera hringinn; þá eru lausnirnar þrjár.

3. Nei. Leyfilegt svæði þarf ekki að vera til. Skoðaðu hneppi sem afmarkast af tveimur samsíða línum. Önnur ójafnan táknar svæðið ofan við efri línuna og hin svæðið neðan við neðri línuna. Enginn punktur plansins liggur þá á báðum svæðunum og því er ekkert leyfilegt svæði til.

5. Veldu tölu milli sérhverra tveggja lausna og settu hana inn í $C(x)$ og $R(x)$. Ef $C(x) < R(x)$, fæst hagnaður.

7.

$$(0,-3),(3,0)$$

9.

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

11.

$$(-3,0),(3,0)$$

13.

$$\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{62}}{8}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{62}}{8}\right)$$

15.

$$\left(-\frac{\sqrt{398}}{4},\frac{199}{4}\right),\left(\frac{\sqrt{398}}{4},\frac{199}{4}\right)$$

17.

$$(0,2),(1,3)$$

19.

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)},\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right),\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)},\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)$$

21.

$$(5,0)$$

23.

$$(0,0)$$

25.

$$(3,0)$$

27. Engar lausnir eru til

29. Engar lausnir eru til

31.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

33.

$$(2,0)$$

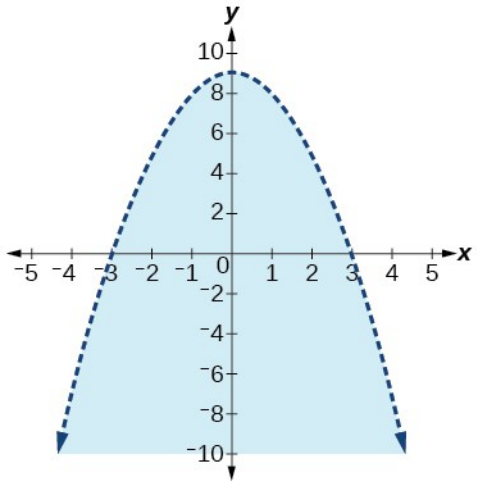
35.

$$(-\sqrt{7},-3),(-\sqrt{7},3),(\sqrt{7},-3),(\sqrt{7},3)$$

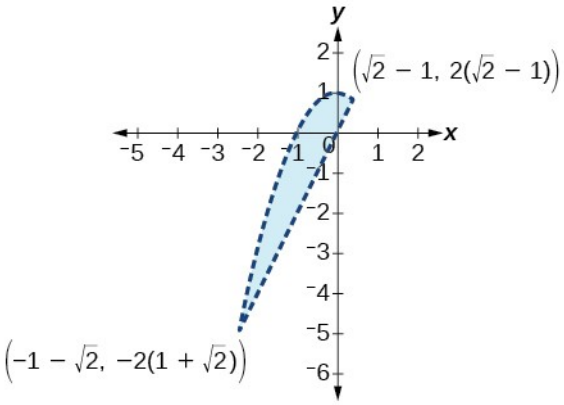
37.

$$\left(-\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{73}-5)},\frac{1}{2}(7-\sqrt{73})\right),\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{73}-5)},\frac{1}{2}(7-\sqrt{73})\right)$$

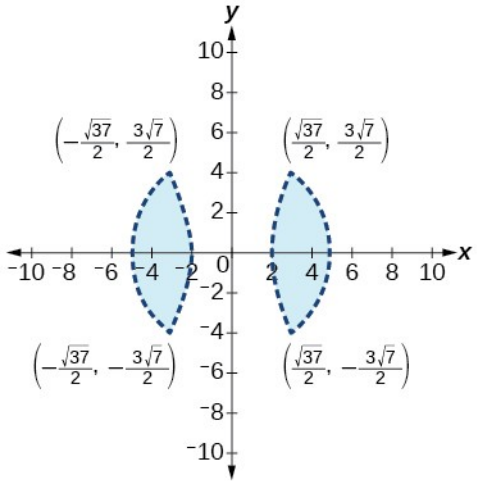
39.


y
x
10
8
6
4
2
-10
-8
-6
-4
-2
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

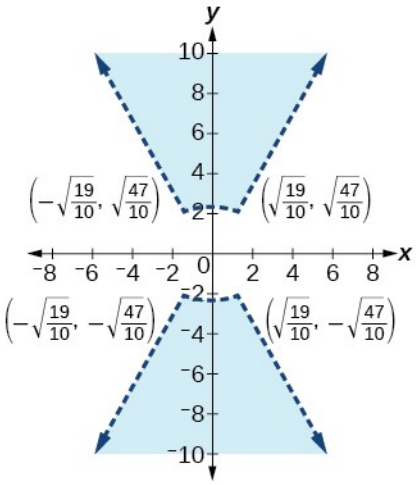
41.


y
x
$\left(\sqrt{2}-1, 2(\sqrt{2}-1)\right)$
$\left(-1-\sqrt{2}, -2(1+\sqrt{2})\right)$
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2

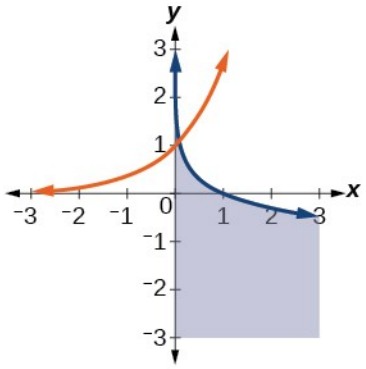
43.


y
x
$\left(-\frac{\sqrt{37}}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{37}}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{37}}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{37}}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

45.



47.



49.

$$\left(-2\sqrt{\frac{70}{383}}, -2\sqrt{\frac{35}{29}}\right), \left(-2\sqrt{\frac{70}{383}}, 2\sqrt{\frac{35}{29}}\right), \left(2\sqrt{\frac{70}{383}}, -2\sqrt{\frac{35}{29}}\right), \left(2\sqrt{\frac{70}{383}}, 2\sqrt{\frac{35}{29}}\right)$$

51. Engin lausn er til

53. $x=0$, $y>0$ og $0<x<1$, $\sqrt{x}<y<\frac{1}{x}$

55. 12, 288

57. 2–20 tölvur

9.4 Kaflaverkefni

1. Nei, ræðu falli verður aðeins liðað í stofnbrot ef hægt er að þátta nefnarann. Til dæmis er ekki hægt að liða $\frac{1}{x^2+1}$ þar sem nefnarinn verður ekki þáttaður.

3. Teiknaðu gröf beggja hliða og staðfestu að þær séu jafnar.

5. Ef við veljum $x=-1$, hverfur B-liðurinn og við sjáum strax að $A=3$. Að öðrum kosti gætum við sett inn $x=-\frac{5}{3}$ og fengið B-gildið -2.

7.

$$\frac{8}{x+3}-\frac{5}{x-8}$$

9.

$$\frac{1}{x+5}+\frac{9}{x+2}$$

11.

$$\frac{3}{5x-2}+\frac{4}{4x-1}$$

13.

$$\frac{5}{2(x+3)}+\frac{5}{2(x-3)}$$

15.

$$\frac{3}{x+2}+\frac{3}{x-2}$$

17.

$$\frac{9}{5(x+2)}+\frac{11}{5(x-3)}$$

19.

$$\frac{8}{x-3}-\frac{5}{x-2}$$

21.

$$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

23.

$$-\frac{6}{4x+5}+\frac{3}{(4x+5)^2}$$

25.

$$-\frac{1}{x-7}-\frac{2}{(x-7)^2}$$

27.

$$\frac{4}{x}-\frac{3}{2(x+1)}+\frac{7}{2(x+1)^2}$$

29.

$$\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{3x+2}+\frac{7}{2(3x+2)^2}$$

31.

$$\frac{x+1}{x^2+x+3}+\frac{3}{x+2}$$

33.

$$\frac{4-3x}{x^2+3x+8}+\frac{1}{x-1}$$

35.

$$\frac{2x-1}{x^2+6x+1}+\frac{2}{x+3}$$

37.

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{4}{x-1}$$

39.

$$\frac{2}{x^2-3x+9}+\frac{3}{x+3}$$

41.

$$-\frac{1}{4x^2+6x+9}+\frac{1}{2x-3}$$

43.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}-\frac{4x}{x^2-6x+36}$$

45.

$$\frac{x+6}{x^2+1}+\frac{4x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

47.

$$\frac{x+1}{x+2}+\frac{2x+3}{(x+2)^2}$$

49.

$$\frac{1}{x^2+3x+25}-\frac{3x}{(x^2+3x+25)^2}$$

51.

$$\frac{1}{8x}-\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{10-x}{2(x^2+4)^2}$$

53.

$$-\frac{16}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{16}{x-1}-\frac{7}{(x-1)^2}$$

55.

$$\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{5}{(x+1)^3}$$

57.

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{10(x+2)}+\frac{7}{x+8}-\frac{7}{10(x-8)}$$

59.

$$-\frac{5}{4x}-\frac{5}{2(x+2)}+\frac{11}{2(x+4)}+\frac{5}{4(x+4)}$$

9.5 Kaflaverkefni

1.

Nei, fylkin verða að vera jafnstór. Dæmi eru tvö fylki af ólíkri stærð. Ekki er hægt að leggja saman eftirfarandi fylki þar sem hið fyrra er 2×2 fylki og hið síðara 2×3 fylki. Summan $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ er ekki skilgreind.

3. Já, ef stærð A er $m \times n$ og stærð B er $n \times m$, eru bæði margfeldin skilgreind.

5. Ekki endilega. Til að finna AB, margföldum við fyrstu línu A með fyrsta dálki B og fáum fyrsta stak AB. Til að finna BA, margföldum við fyrstu línu B með fyrsta dálki A og fáum fyrsta stak BA. Ef þessi stök eru ekki jöfn er fylkjamargföldun því ekki víxlin.

7.

$$\begin{bmatrix} 11 & 19 \\ 15 & 94 \\ 17 & 67 \end{bmatrix}$$

9.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Óskilgreint; stærðirnar passa ekki saman

13.

$$\begin{bmatrix} 9 & 27 \\ 63 & 36 \\ 0 & 192 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} -64 & -12 & -28 & -72 \\ -360 & -20 & -12 & -116 \end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix} 1.800 & 1.200 & 1.300 \\ 800 & 1.400 & 600 \\ 700 & 400 & 2.100 \end{bmatrix}$$

19.

$$\begin{bmatrix} 20 & 102 \\ 28 & 28 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} 60 & 41 & 2 \\ -16 & 120 & -216 \end{bmatrix}$$

23.

$$\begin{bmatrix} -68 & 24 & 136 \\ -54 & -12 & 64 \\ -57 & 30 & 128 \end{bmatrix}$$

25. Óskilgreint; stærðirnar passa ekki saman.

27.

$$\begin{bmatrix} -8 & 41 & -3 \\ 40 & -15 & -14 \\ 4 & 27 & 42 \end{bmatrix}$$

29.

$$\begin{bmatrix} -840 & 650 & -530 \\ 330 & 360 & 250 \\ -10 & 900 & 110 \end{bmatrix}$$

31.

$$\begin{bmatrix} -350 & 1.050 \\ 350 & 350 \end{bmatrix}$$

33. Óskilgreint; innri stærðirnar passa ekki saman.

35.

$$\begin{bmatrix} 1.400 & 700 \\ -1,400 & 700 \end{bmatrix}$$

37.

$$\begin{bmatrix} 332.500 & 927.500 \\ -227,500 & 87.500 \end{bmatrix}$$

39.

$$\begin{bmatrix} 490.000 & 0 \\ 0 & 490.000 \end{bmatrix}$$

41.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -7 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

43.

$$\begin{bmatrix} -4 & 29 & 21 \\ -27 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

45.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -28 & 59 & 46 \\ -4 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

47.

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & -9 \\ -198 & 505 & 369 \\ -72 & 126 & 91 \end{bmatrix}$$

49.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1{,}6 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

51.

$$\begin{bmatrix} 2 & 24 & -4{,}5 \\ 12 & 32 & -9 \\ -8 & 64 & 61 \end{bmatrix}$$

53.

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 3 & 0{,}5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 10 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

55.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

57.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

59.

$$B^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, n \text{ slétt tala,} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, n \text{ oddatala.} \end{cases}$$

9.6 Kaflaverkefni

1. Já. Stuðlar breytanna í hverri jöfnu eru ritaðir þvert yfir samsvarandi línu, síðan er dregið lóðrétt strik og fastarnir ritaðir hægra megin við það.

3. Nei, margar réttar leiðir eru til að beita línuaðgerðum á fylki. Tvær mögulegar leiðir eru: (1) Víxlaðu línum 1 og 2. Þá er $R_2 = R_2 - 9\,R_1$. (2) $R_2 = R_1 - 9\,R_2$. Deildu síðan línu 1 með 9.

5. Nei. Fylki með 0 í öllum stökum einnar línu hefur annaðhvort enga lausn eða óendanlega margar lausnir.

7.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 16 & 4 \\ 9 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

9.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 8 & 19 \\ 12 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 9 & -7 \end{array}\right]$$

11.

$$\begin{aligned} -2x + 5y &= 5 \\ 6x - 18y &= 26 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ -x - 9y + 4z &= -1 \\ 8x + 5y + 7z &= 8 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} 4x + 5y - 2z &= 12 \\ y + 58z &= 2 \\ 8x + 7y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

17. Engar lausnir

19.

$$(-1, -2)$$

21.

$$(6, 7)$$

23.

$$(3, 2)$$

25.

$$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)$$

27.

$$\left(x,\frac{4}{15}(5x+1)\right)$$

29.

$$(3,4)$$

31.

$$\left(\frac{196}{39},-\frac{5}{13}\right)$$

33.

$$(31,-42,87)$$

35.

$$\left(\frac{21}{40},\frac{1}{20},\frac{9}{8}\right)$$

37.

$$\left(\frac{18}{13},\frac{15}{13},-\frac{15}{13}\right)$$

39.

$$\left(x,y,\frac{1}{2}(1-2x-3y)\right)$$

41.

$$\left(x,-\frac{x}{2},-1\right)$$

43.

$$(125,-25,0)$$

45.

$$(8,1,-2)$$

47.

$$(1,2,3)$$

49.

$$\left(x, \frac{31}{28} - \frac{3x}{4}, \frac{1}{28}(-7x - 3)\right)$$

51. Engar lausnir eru til.

53. 860 rauðar flauelskökur, 1.340 súkkulaðikökur

55. 4% fyrir reikningur 1, 6% fyrir reikningur 2

57. $126

59. Banana var 3%, grasker var 7% og Rocky Road var 2%

61. 100 möndlur, 200 kasjúhnetur, 600 pistasíuhnetur

9.7 Kaflaverkefni

1. Ef A^{-1} er andhverfa A, þá er $A\,A^{-1} = I$, einingarfylkið. Þar sem A er einnig andhverfa A^{-1}, $A^{-1}A = I$. Einnig má sannreyna þetta fyrir 2×2 fylki.

3. Nei, því bæði $a\,d$ og $b\,c$ eru 0, svo $a\,d - b\,c = 0$, sem þýðir að við þyrftum að deila með 0 í formúlunni.

5.

Já. Skoðaðu fylkið $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Andhverfan fæst með eftirfarandi útreikningi: $A^{-1} = \frac{1}{0(0)-1(1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7.

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

9.

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

11.

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

13.

$$\frac{1}{29} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

15.

$$\frac{1}{69}\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$

17. Engin andhverfa er til

19.

$$\frac{4}{7}\begin{bmatrix}0{,}5 & 1{,}5\\ 1 & -0{,}5\end{bmatrix}$$

21.

$$\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-5 & 5 & -3\\ 20 & -3 & 12\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

23.

$$\frac{1}{209}\begin{bmatrix}47 & -57 & 69\\ 10 & 19 & -12\\ -24 & 38 & -13\end{bmatrix}$$

25.

$$\begin{bmatrix}18 & 60 & -168\\ -56 & -140 & 448\\ 40 & 80 & -280\end{bmatrix}$$

27.

$$(-5,6)$$

29.

$$(2,0)$$

31.

$$\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{2}\right)$$

33.

$$\left(-\frac{2}{3},-\frac{11}{6}\right)$$

35.

$$\left(7,\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$$

37.

$$(5, 0, -1)$$

39.

$$\frac{1}{34}(-35, -97, -154)$$

41.

$$\frac{1}{690}(65, -1136, -229)$$

43.

$$\left(-\frac{37}{30}, \frac{8}{15}\right)$$

45.

$$\left(\frac{10}{123}, -1, \frac{2}{5}\right)$$

47.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

49.

$$\frac{1}{39}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -7 \\ 18 & -53 & 32 & 10 \\ 24 & -36 & 21 & 9 \\ -9 & 46 & -16 & -5 \end{bmatrix}$$

51.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

53. Óendanlega margar lausnir.

55. 50% appelsínur, 25% bananar, 20% epli

57. 10 stráhattar, 50 prjónahúfur, 40 kúrekahattar

59. Micah borðaði 6, Joe 3 og Albert 3.

61. 124 appelsínur, 10 sítrónur, 8 granatepli

9.8 Kaflaverkefni

1. Ákveða er summa margfelda staka í fylkinu og því er alltaf hægt að reikna hana, jafnvel þótt niðurstaðan verði 0.

3. Andhverfan er ekki til.

5.

$$-2$$

7.

$$7$$

9.

$$-4$$

11.

$$0$$

13.

$$-7.990{,}7$$

15.

$$3$$

17.

$$-1$$

19.

$$224$$

21.

$$15$$

23.

$$-17{,}03$$

25.

$$(1, 1)$$

27.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

29.

$$(2, 5)$$

31.

$$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$$

33.

$$(15, 12)$$

35.

$$(1, 3, 2)$$

37.

$$(-1, 0, 3)$$

39.

$$\left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$$

41.

$$(2, 1, 4)$$

43. Óendanlega margar lausnir

45.

$$24$$

47.

$$1$$

49. Já; 18, 38

51. Já; 33, 36, 37

53. $7.000 á fyrri reikningnum, $3.000 á þeim síðari.

55. 120 börn, 1.080 fullorðinn

57. 4 gallon af gulum lit, 6 gallon af bláum lit

59. 13 grænir tómatar, 17 rauðir tómatar

61. jarðarber 18%, appelsínur 9%, kíví 10%

63. 100 fyrir kvikmynd 1, 230 fyrir kvikmynd 2, 312 fyrir kvikmynd 3

65. 300 möndlur, 400 trönuber, 300 kasjúhnetur

Upprifjunarverkefni

1. Nei

3.

$$(-2, 3)$$

5.

$$(4, -1)$$

7. Engar lausnir eru til.

9.

$$(300, 60.000)$$

11. Óendanlega margar lausnir

13. Engar lausnir eru til.

15.

$$(-1, -2, 3)$$

17.

$$\left(x, \frac{8x}{5}, \frac{14x}{5}\right)$$

19. 11, 17, 33

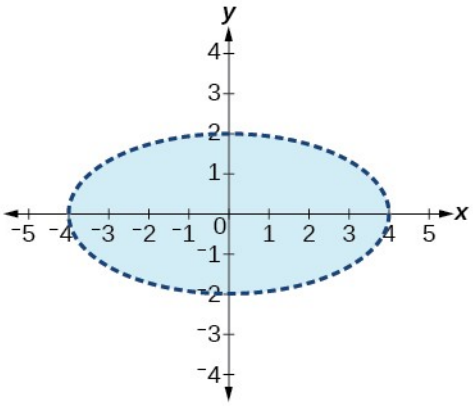
21.

$$(2, -3), (3, 2)$$

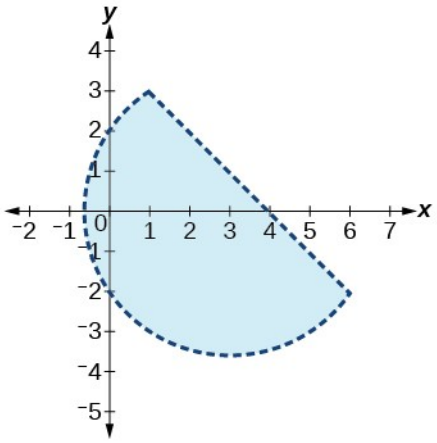
23. Engin lausn

25. Engin lausn

27.



29.



31.

$$\frac{2}{x+2}, \frac{-4}{x+1}$$

33.

$$\frac{7}{x+5}, \frac{-15}{(x+5)^2}$$

35.

$$\frac{3}{x-5}, \frac{-4x+1}{x^2+5x+25}$$

37.

$$\frac{x-4}{(x^2-2)}, \frac{5x+3}{(x^2-2)^2}$$

39.

$$\begin{bmatrix} -16 & 8 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}$$

41. óskilgreint; stærðirnar passa ekki saman

43. óskilgreint; innri stærðirnar passa ekki saman

45.

$$\begin{bmatrix} 113 & 28 & 10 \\ 44 & 81 & -41 \\ 84 & 98 & -42 \end{bmatrix}$$

47.

$$\begin{bmatrix} -127 & -74 & 176 \\ -2 & 11 & 40 \\ 28 & 77 & 38 \end{bmatrix}$$

49. óskilgreint; innri stærðirnar passa ekki saman

51.

$x - 3z = 7$
$y + 2z = -5$ með óendanlega margar lausnir

53.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -8 & 5 & 0 \\ 19 & -10 & 22 & 3 \end{array}\right]$$

55.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{array}\right]$$

57. Engar lausnir eru til.

59. Engar lausnir eru til.

61.

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

63. Engin andhverfa er til.

65.

$$(-20, 40)$$

67.

$$(-1;0{,}2;0{,}3)$$

69. 17% appelsínur, 34% bananar, 39% epli

71. 0

73. 6

75.

$$\left(6,\frac{1}{2}\right)$$

77. $(x, 5x + 3)$

79.

$$\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$$

Æfingapróf

1. Já

3. Engar lausnir eru til.

5.

$$\frac{1}{20}(10,5,4)$$

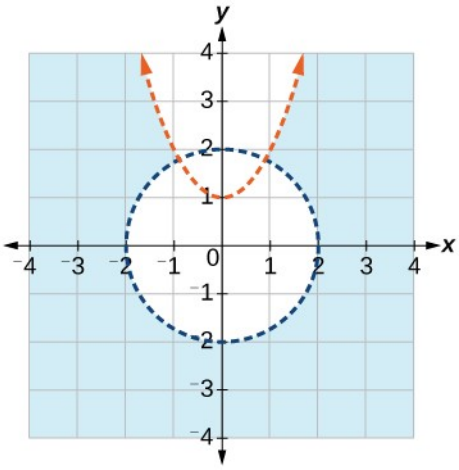
7.

$$\left(x,\frac{16x}{5}-\frac{13x}{5}\right)$$

9.

$$(-2\sqrt{2},-\sqrt{17}),(-2\sqrt{2},\sqrt{17}),(2\sqrt{2},-\sqrt{17}),(2\sqrt{2},\sqrt{17})$$

11.



13.

$$\frac{5}{3x+1}-\frac{2x+3}{(3x+1)^2}$$

15.

$$\begin{bmatrix}17 & 51\\ -8 & 11\end{bmatrix}$$

17.

$$\begin{bmatrix}12 & -20\\ -15 & 30\end{bmatrix}$$

19.

$$-\frac{1}{8}$$

21.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}14 & -2 & 13 & 140\\ -2 & 3 & -6 & -1\\ 1 & -5 & 12 & 11\end{array}\right]$$

23. Engar lausnir eru til.

25.

$$(100, 90)$$

27.

$$\left(\frac{1}{100}, 0\right)$$

29. 32 eða fleiri farsímar á dag

Kafli 10

Prófaðu

10.1 Sporbaugurinn

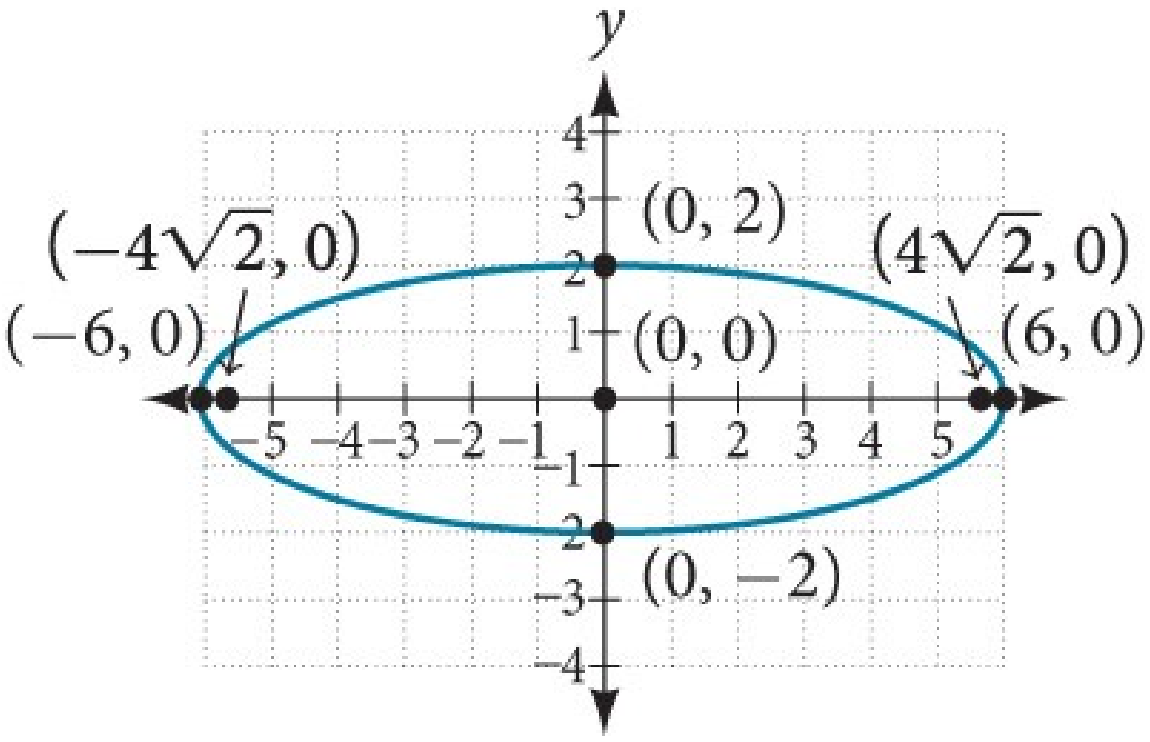
1.

$$x^2+\frac{y^2}{16}=1$$

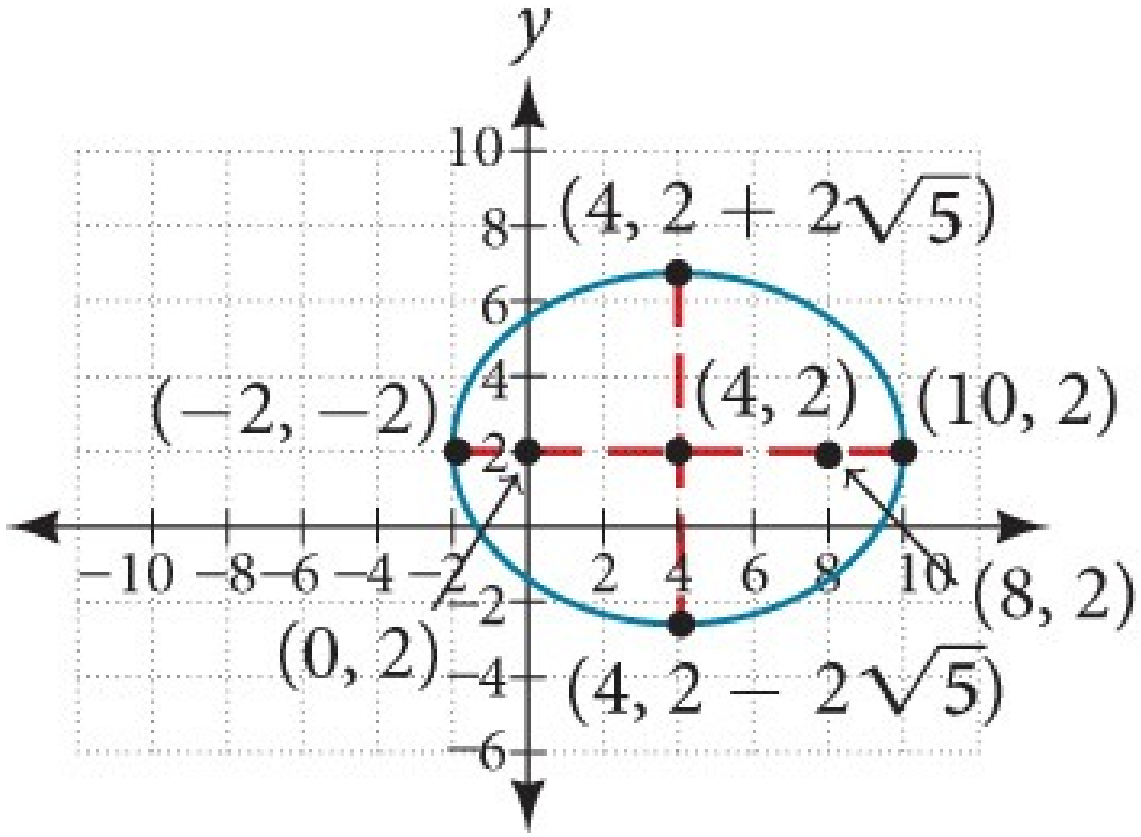
2.

$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

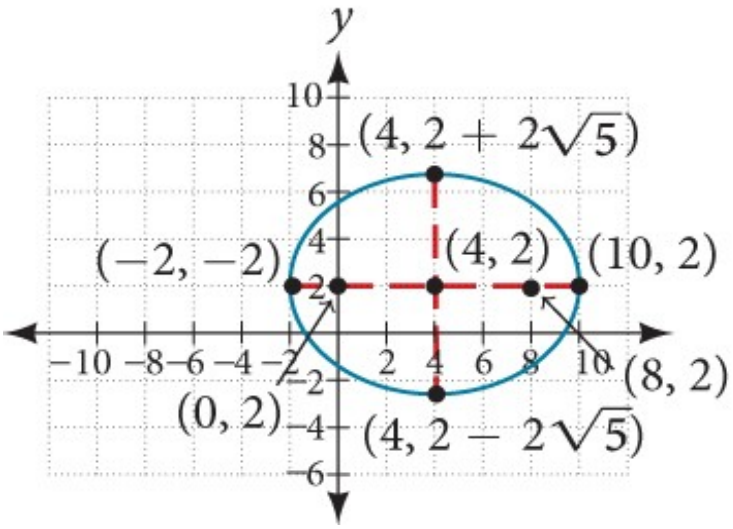
3. miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktar: $(\pm 6,0)$; aukahvirfilpunktar: $(0,\pm 2)$; brennipunktar: $(\pm 4\sqrt{2},0)$



4. Staðlað form: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{49}=1$; miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktar: $(0,\pm 7)$; aukahvirfilpunktar: $(\pm 4,0)$; brennipunktar: $(0,\pm\sqrt{33})$



5. Miðja: $(4,2)$; hvirfilpunktar: $(-2,2)$ og $(10,2)$; aukahvirfilpunktar: $(4,2-2\sqrt{5})$ og $(4,2+2\sqrt{5})$; brennipunktar: $(0,2)$ og $(8,2)$



6. $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$; miðja: $(3,-1)$; hvirfilpunktar: $(3,-5)$ og $(3,3)$; aukahvirfilpunktar: $(1,-1)$ og $(5,-1)$; brennipunktar: $(3,-1-2\sqrt{3})$ og $(3,-1+2\sqrt{3})$

7.

1. ⓐ $\frac{x^2}{57.600}+\frac{y^2}{25.600}=1$

2. ⓑ Fólkið stendur með 358 feta millibili.

10.2 Breiðboginn

1. Hvirfilpunktar: $(\pm 3, 0)$; Brennipunktar: $(\pm\sqrt{34}, 0)$

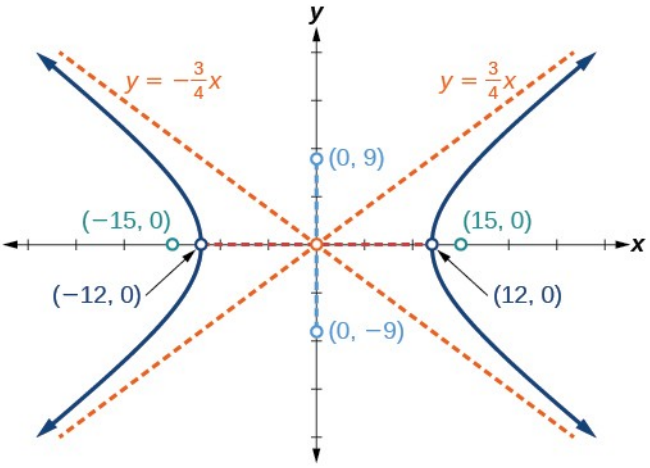
2.

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$$

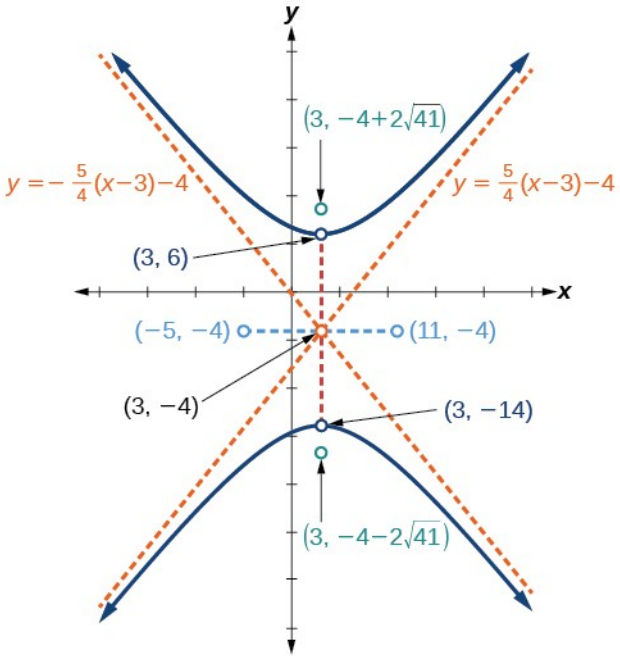
3.

$$\frac{(y-3)^2}{25}-\frac{(x-1)^2}{144}=1$$

4. hvirfilpunktar: $(\pm 12, 0)$; aukahvirfilpunktar: $(0, \pm 9)$; brennipunktar: $(\pm 15, 0)$; aðfellur: $y=\pm\frac{3}{4}x$;



5. miðja: $(3, -4)$; hvirfilpunktar: $(3, -14)$ og $(3, 6)$; aukahvirfilpunktar: $(-5, -4)$; og $(11, -4)$; brennipunktar: $(3, -4-2\sqrt{41})$ og $(3, -4+2\sqrt{41})$; aðfellur: $y=\pm\frac{5}{4}(x-3)-4$

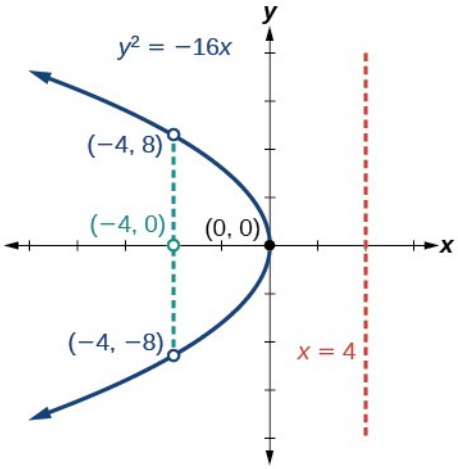


6. Lýsa má hliðum turnsins með breiðbogajöfnunni.

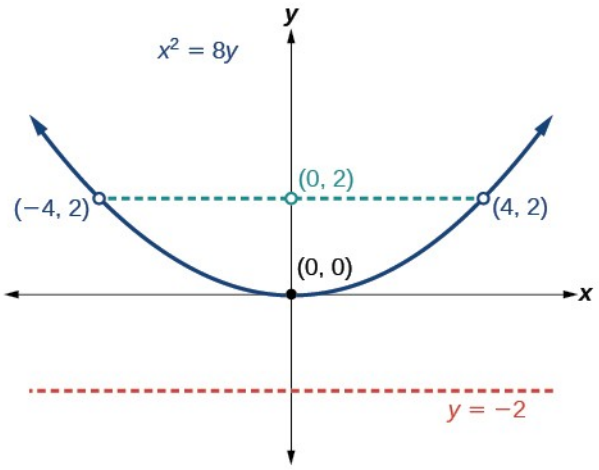
$$\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{3600}=1 \text{ eða } \frac{x^2}{20^2}-\frac{y^2}{60^2}=1.$$

10.3 Fleygboginn

1. Brennipunktur: $(-4,0)$; Stýrilína: $x=4$; Endapunktar þverbrennistrengs: $(-4,\pm 8)$



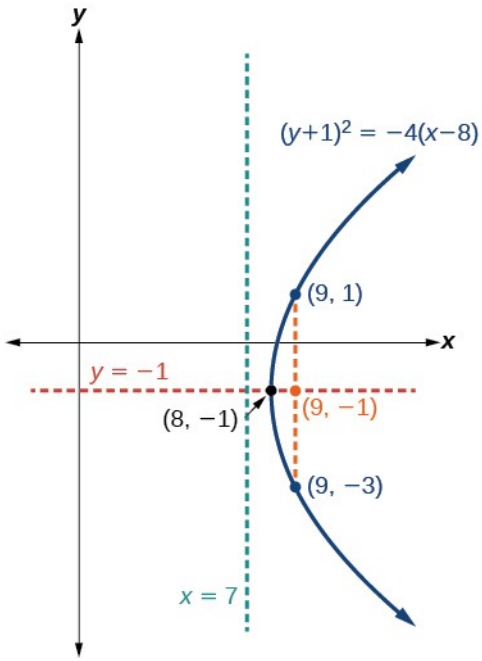
2. Brennipunktur: $(0,2)$; Stýrilína: $y=-2$; Endapunktar þverbrennistrengs: $(\pm 4,2)$.



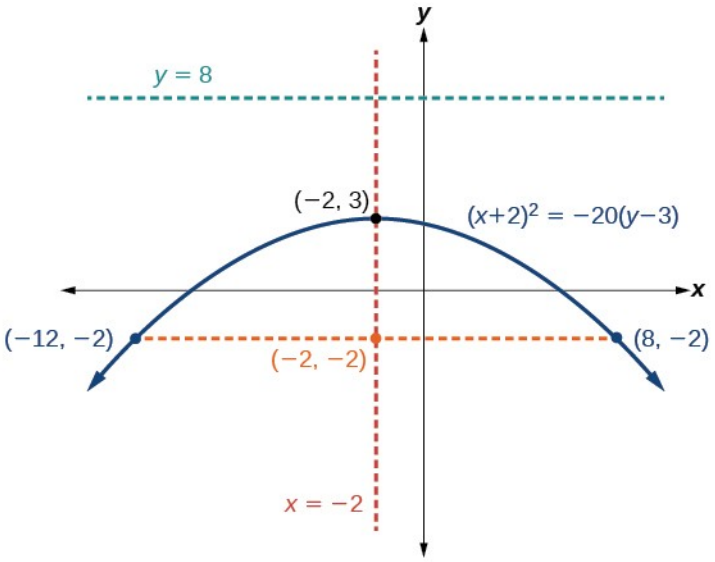
3.

$$x^2 = 14\,y\,.$$

4. Hvirfilpunktur: $(8\,,-1)$; Samhverfuás: $y=-1$; Brennipunktur: $(9\,,-1)$; Stýrilína: $x=7$; Endapunktar þverbrennistrengs: $(9\,,-3)$ og $(9\,,1)$.



5. Hvirfilpunktur: $(-2\,,3)$; Samhverfuás: $x=-2$; Brennipunktur: $(-2\,,-2)$; Stýrilína: $y=8$; Endapunktar þverbrennistrengs: $(-12\,,-2)$ og $(8\,,-2)$.



6.

1. ⓐ $y^2 = 1280\,x$
2. ⓑ Dýpt eldunartækisins er 500 mm.

10.4 Snúningur hnitása

1.

1. ⓐ breiðbogi
2. ⓑ sporbaugur

2.

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

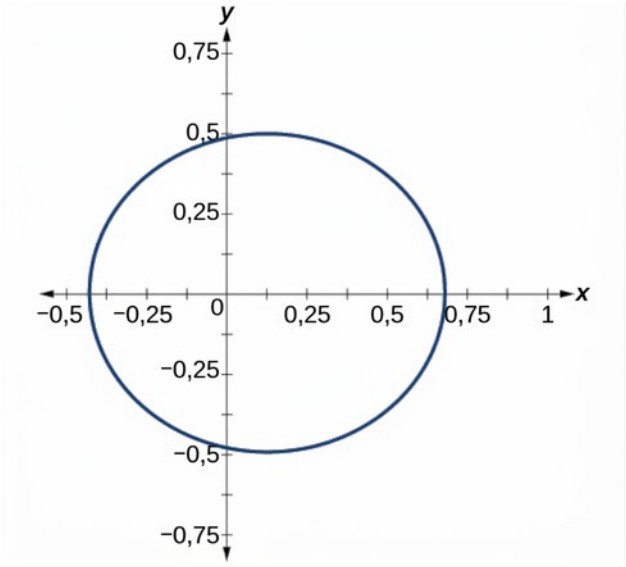
3.

1. ⓐ breiðbogi
2. ⓑ sporbaugur

10.5 Keilusnið í skauthnitum

1. sporbaugur; $e = \frac{1}{3}; x = -2$

2.



3.

$$r=\frac{1}{1-\cos\theta}$$

4.

$$4-8x+3x^2-y^2=0$$

10.1 Kaflaverkefni

1. Sporbaugur er mengi allra punkta í plani þannig að summa fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum, sem kallast brennipunktar, er fasti.

3. Þetta sértilvik væri hringur.

5. Hann er samhverfur um x-ásinn, y-ásinn og upphafspunktinn.

7. já; $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

9. já; $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$

11. $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{7^2}=1$; Endapunktar langáss $(0,7)$ og $(0,-7)$. Endapunktar skammáss $(2,0)$ og $(-2,0)$. Brennipunktar í $(0,3\sqrt{5}),(0,-3\sqrt{5})$.

13. $\frac{x^2}{(1)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=1$; Endapunktar langáss $(1,0)$ og $(-1,0)$. Endapunktar skammáss $\left(0,\frac{1}{3}\right),\left(0,-\frac{1}{3}\right)$. Brennipunktar í $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},0\right),\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},0\right)$.

15. $\frac{(x-2)^2}{7^2}+\frac{(y-4)^2}{5^2}=1$; Endapunktar langáss $(9,4),(-5,4)$. Endapunktar skammáss $(2,9),(2,-1)$. Brennipunktar í $(2+2\sqrt{6},4),(2-2\sqrt{6},4)$.

17. $\frac{(x+5)^2}{2^2}+\frac{(y-7)^2}{3^2}=1$; Endapunktar langáss $(-5,10),(-5,4)$. Endapunktar skammáss $(-3,7),(-7,7)$. Brennipunktar í $(-5,7+\sqrt{5}),(-5,7-\sqrt{5})$.

19. $\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y-4)^2}{2^2}=1$; Endapunktar langáss $(4,4),(-2,4)$. Endapunktar skammáss $(1,6),(1,2)$. Brennipunktar í $(1+\sqrt{5},4),(1-\sqrt{5},4)$.

21. $\frac{(x-3)^2}{(3\sqrt{2})^2}+\frac{(y-5)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$; Endapunktar langáss $(3+3\sqrt{2},5),(3-3\sqrt{2},5)$. Endapunktar skammáss $(3,5+\sqrt{2}),(3,5-\sqrt{2})$. Brennipunktar í $(7,5),(-1,5)$.

23. $\frac{(x+5)^2}{(5)^2}+\frac{(y-2)^2}{(2)^2}=1$; Endapunktar langáss $(0,2),(-10,2)$. Endapunktar skammáss $(-5,4),(-5,0)$. Brennipunktar í $(-5+\sqrt{21},2),(-5-\sqrt{21},2)$.

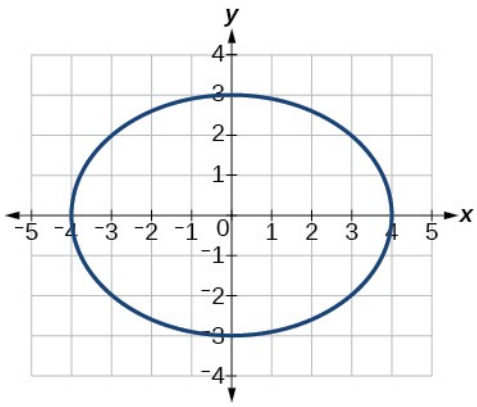
25. $\frac{(x+3)^2}{(5)^2}+\frac{(y+4)^2}{(2)^2}=1$; Endapunktar langáss $(2,-4),(-8,-4)$. Endapunktar skammáss $(-3,-2),(-3,-6)$. Brennipunktar í $(-3+\sqrt{21},-4),(-3-\sqrt{21},-4)$.

27. Brennipunktar $(-3,-1+\sqrt{11}),(-3,-1-\sqrt{11})$

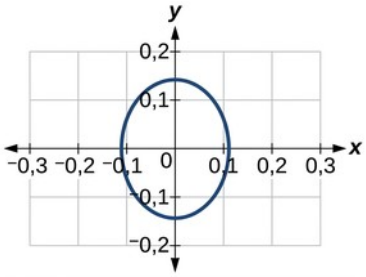
29. Brennipunktur $(0,0)$

31. Brennipunktar $(-10,30),(-10,-30)$

33. Miðja $(0,0)$, Hvirfilpunktar $(4,0),(-4,0),(0,3),(0,-3)$, Brennipunktar $(\sqrt{7},0),(-\sqrt{7},0)$

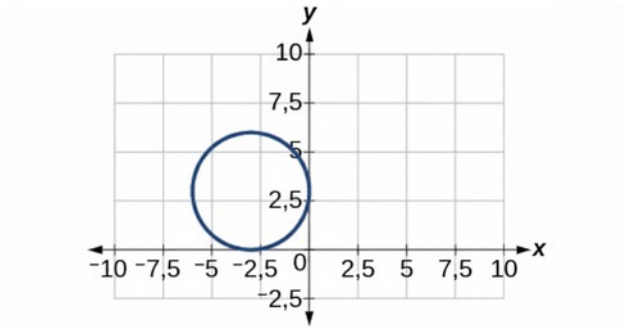


35. Miðja $(0,0)$, Hvirfilpunktar $\left(\frac{1}{9},0\right),\left(-\frac{1}{9},0\right),\left(0,\frac{1}{7}\right),\left(0,-\frac{1}{7}\right)$, Brennipunktar $\left(0,\frac{4\sqrt{2}}{63}\right),\left(0,-\frac{4\sqrt{2}}{63}\right)$

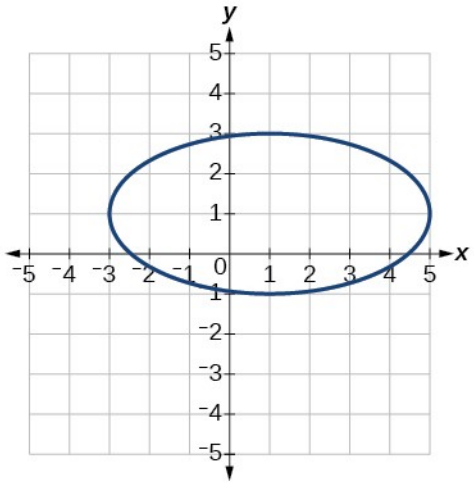


37. Miðja $(-3,3)$, Hvirfilpunktar $(0,3),(-6,3),(-3,0),(-3,6)$, Brennipunktur $(-3,3)$

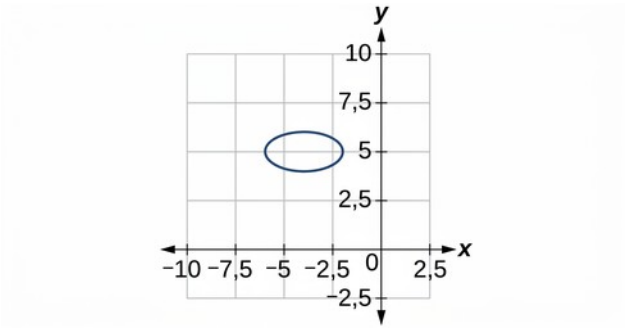
Athugaðu að þessi sporbaugur er hringur. Hringurinn hefur aðeins einn brennipunkt og hann fellur saman við miðjuna.



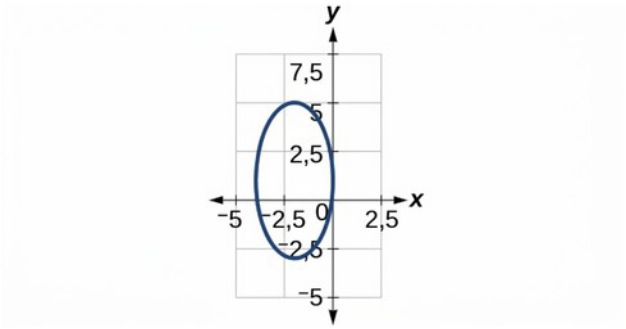
39. Miðja $(1,1)$, Hvirfilpunktar $(5,1),(-3,1),(1,3),(1,-1)$, Brennipunktar $(1+2\sqrt{3},1),(1-2\sqrt{3},1)$



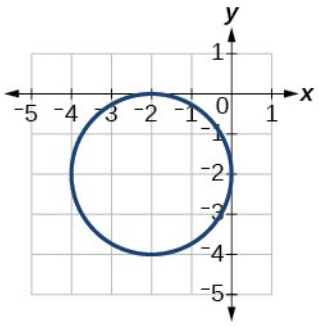
41. Miðja $(-4,5)$, Hvirfilpunktar $(-2,5),(-6,5),(-4,6),(-4,4)$, Brennipunktar $(-4+\sqrt{3},5),(-4-\sqrt{3},5)$



43. Miðja $(-2,1)$, Hvirfilpunktar $(0,1),(-4,1),(-2,5),(-2,-3)$, Brennipunktar $(-2,1+2\sqrt{3}),(-2,1-2\sqrt{3})$



45. Miðja $(-2,-2)$, Hvirfilpunktar $(0,-2),(-4,-2),(-2,0),(-2,-4)$, Brennipunktur $(-2,-2)$



47.

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{29}=1$$

49.

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{1}=1$$

51.

$$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{4}=1$$

53.

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$$

55.

$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

57.

Flatarmál = 12π ferningseiningar

59. Flatarmál = $2\sqrt{5}\pi$ ferningseiningar.

61. Flatarmál = 9π ferningseiningar.

63.

$$\frac{x^2}{4h^2}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}h^2}=1$$

65. $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{144}=1$. Fjarlægð = 17,32 fet

67. Um það bil 51,96 fet

10.2 Kaflaverkefni

1. Breiðbogi er mengi punkta í plani þannig að mismunur fjarlægða þeirra frá tveimur föstum punktum, brennipunktunum, er jákvæður fasti.

3. Brennipunktarnir verða að liggja á meginásnum og innan breiðbogans.

5. Miðjan verður að vera miðpunktur línustriksins sem tengir brennipunktana.

7. já $\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

9. já $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$

11. $\frac{x^2}{5^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$; hvirfilpunktar: $(5,0),(-5,0)$; brennipunktar: $(\sqrt{61},0),(-\sqrt{61},0)$; aðfellur: $y=\frac{6}{5}x, y=-\frac{6}{5}x$

13. $\frac{y^2}{2^2}-\frac{x^2}{9^2}=1$; hvirfilpunktar: $(0,2),(0,-2)$; brennipunktar: $(0,\sqrt{85}),(0,-\sqrt{85})$; aðfellur: $y=\frac{2}{9}x, y=-\frac{2}{9}x$

15. $\frac{(x-1)^2}{3^2}-\frac{(y-2)^2}{4^2}=1$; hvirfilpunktar: $(4,2),(-2,2)$; brennipunktar: $(6,2),(-4,2)$; aðfellur: $y=\frac{4}{3}(x-1)+2, y=-\frac{4}{3}(x-1)+2$

17. $\frac{(x-2)^2}{7^2}-\frac{(y+7)^2}{7^2}=1$; hvirfilpunktar: $(9,-7),(-5,-7)$; brennipunktar: $(2+7\sqrt{2},-7),(2-7\sqrt{2},-7)$; aðfellur: $y=x-9, y=-x-5$

19. $\frac{(x+3)^2}{3^2}-\frac{(y-3)^2}{3^2}=1$; hvirfilpunktar: $(0,3),(-6,3)$; brennipunktar: $(-3+3\sqrt{2},1),(-3-3\sqrt{2},1)$; aðfellur: $y=x+6, y=-x$

21. $\frac{(y-4)^2}{2^2}-\frac{(x-3)^2}{4^2}=1$; hvirfilpunktar: $(3,6),(3,2)$; brennipunktar: $(3,4+2\sqrt{5}),(3,4-2\sqrt{5})$; aðfellur: $y=\frac{1}{2}(x-3)+4, y=-\frac{1}{2}(x-3)+4$

23. $\frac{(y+5)^2}{7^2}-\frac{(x+1)^2}{70^2}=1$; hvirfilpunktar: $(-1,2),(-1,-12)$; brennipunktar: $(-1,-5+7\sqrt{101}),(-1,-5-7\sqrt{101})$; aðfellur: $y=\frac{1}{10}(x+1)-5, y=-\frac{1}{10}(x+1)-5$

25. $\frac{(x+3)^2}{5^2}-\frac{(y-4)^2}{2^2}=1$; hvirfilpunktar: $(2,4),(-8,4)$; brennipunktar: $(-3+\sqrt{29},4),(-3-\sqrt{29},4)$; aðfellur: $y=\frac{2}{5}(x+3)+4$, $y=-\frac{2}{5}(x+3)+4$

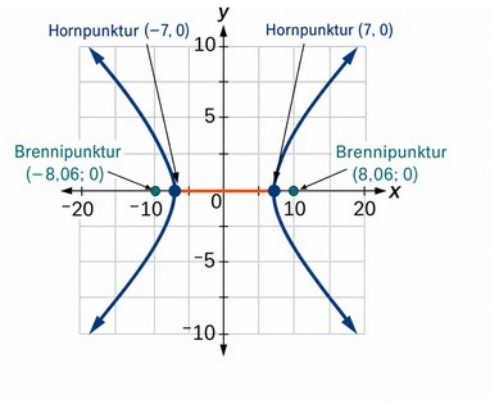
27.

$$y=\frac{2}{5}(x-3)-4,\ y=-\frac{2}{5}(x-3)-4$$

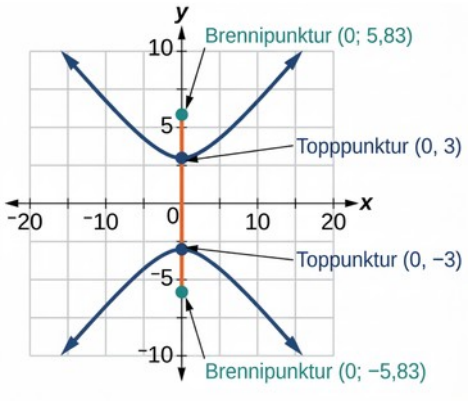
29.

$$y=\frac{3}{4}(x-1)+1,\ y=-\frac{3}{4}(x-1)+1$$

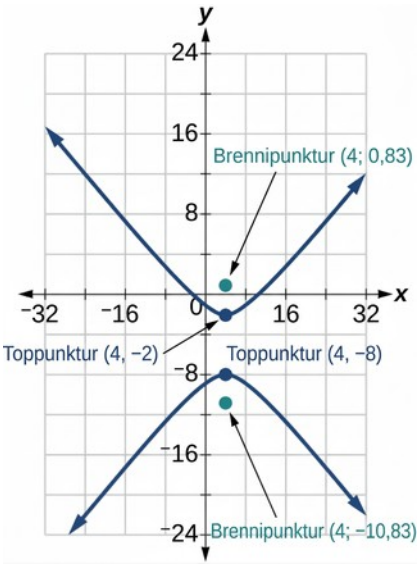
31.



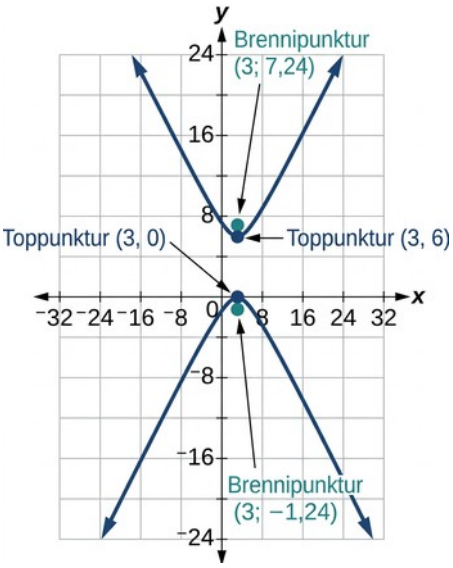
33.



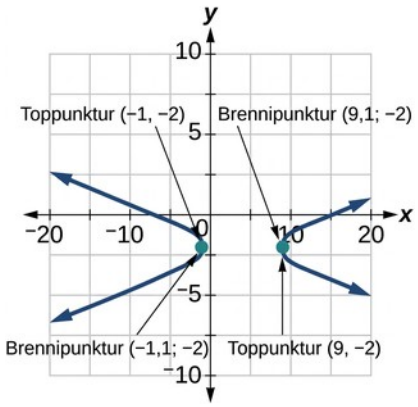
35.


y
24
16
8
−32
−16
0
16
32
x
Brennipunktur (4; 0,83)
Toppunktur (4, −2)
Toppunktur (4, −8)
−8
−16
−24
Brennipunktur (4; −10,83)

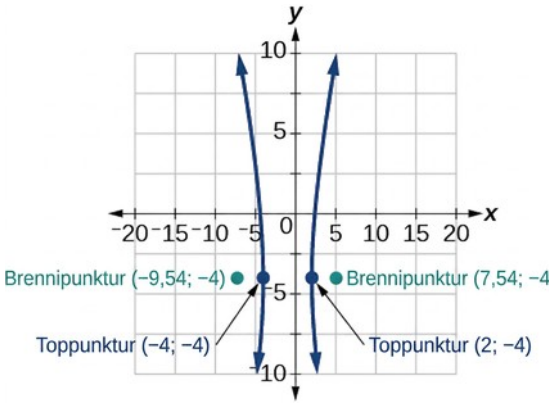
37.


y
Brennipunktur
(3; 7,24)
24
16
8
Toppunktur (3, 0)
Toppunktur (3, 6)
−32
−24
−16
−8
0
8
16
24
32
x
−8
−16
−24
Brennipunktur
(3; −1,24)

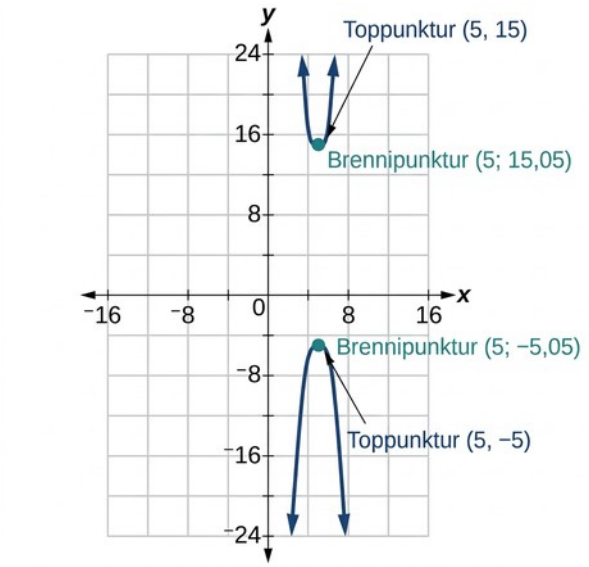
39.


y
10
5
Toppunktur (−1, −2)
Brennipunktur (9,1; −2)
−20
−10
0
10
20
x
−5
−10
Brennipunktur (−1,1; −2)
Toppunktur (9, −2)

41.



43.



45.

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

47.

$$\frac{(x-6)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{11}=1$$

49.

$$\frac{(x-4)^2}{25}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$$

51.

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1$$

53.

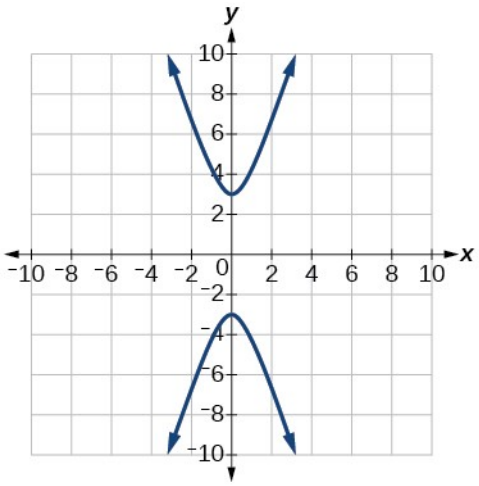
$$\frac{y^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{9}=1$$

55.

$$\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

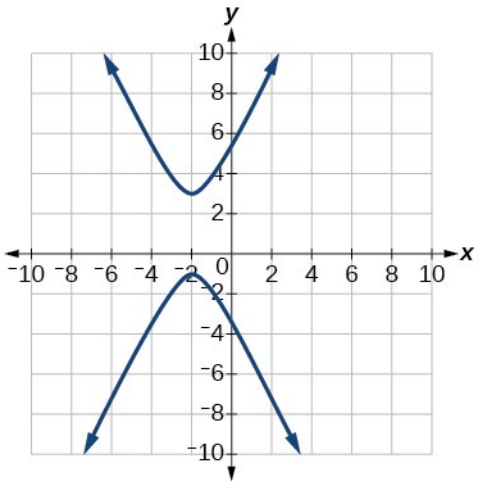
57.

$$y(x)=3\sqrt{x^2+1}, y(x)=-3\sqrt{x^2+1}$$



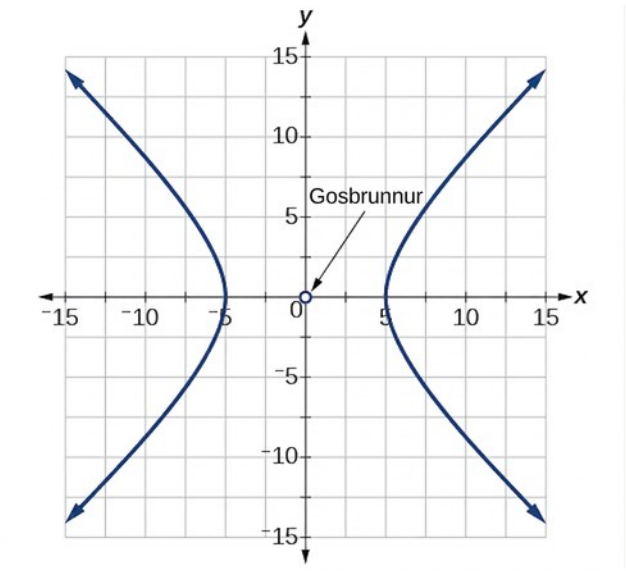
59.

$$y(x)=1+2\sqrt{x^2+4x+5}, y(x)=1-2\sqrt{x^2+4x+5}$$



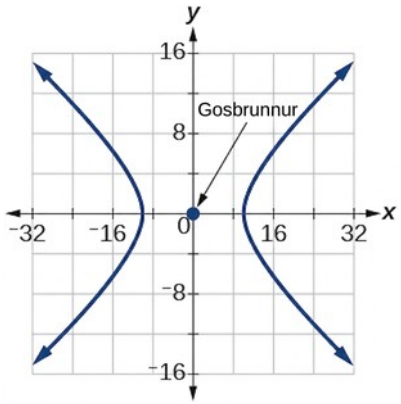
61.

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1$$



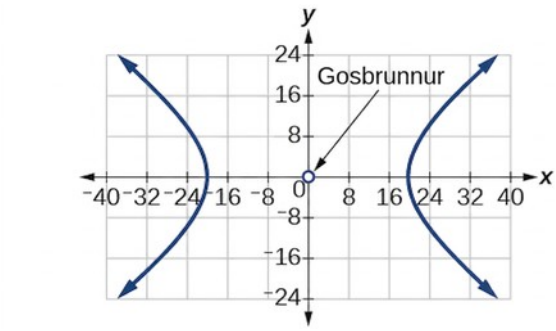
63.

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{25}=1$$



65.

$$\frac{x^2}{400}-\frac{y^2}{225}=1$$



67.

$$4(x-1)^2-y2^2=16$$

69.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=(x-3)^2-9\,y^2=4$$

10.3 Kaflaverkefni

1. Fleygbogi er mengi punkta í plani sem eru í sömu fjarlægð frá föstum punkti, brennipunktinum, og fastri línu, stýrilínunni.

3. Grafið opnast niður.

5. Fjarlægðin milli brennipunktsins og stýrilínunnar eykst.

7. já $x^2=4\left(\frac{1}{16}\right)y$

9. já $(y-3)^2=4(2)(x-2)$

11.

$$y^2=\frac{1}{8}x, V:(0,0); F:\left(\frac{1}{32},0\right); d: x=-\frac{1}{32}$$

13.

$$x^2=-\frac{1}{4}y, V:(0,0); F:\left(0,-\frac{1}{16}\right); d: y=\frac{1}{16}$$

15.

$$y^2=\frac{1}{36}x, V:(0,0); F:\left(\frac{1}{144},0\right); d: x=-\frac{1}{144}$$

17.

$$(x-1)^2=4(y-1), V:(1,1); F:(1,2); d: y=0$$

19.

$$(y-4)^2=2(x+3), V:(-3,4); F:\left(-\frac{5}{2},4\right); d: x=-\frac{7}{2}$$

21.

$$(x+4)^2=24(y+1), V:(-4,-1); F:(-4,5); d: y=-7$$

23.

$$(y-3)^2=-12(x+1), V:(-1,3); F:(-4,3); d: x=2$$

25.

$$(x-5)^2=\frac{4}{5}(y+3), V:(5,-3); F:\left(5,-\frac{14}{5}\right); d: y=-\frac{16}{5}$$

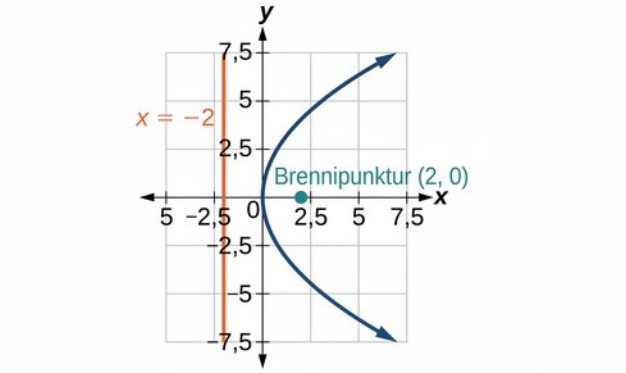
27.

$$(x-2)^2=-2(y-5), V:(2,5); F:\left(2,\frac{9}{2}\right); d: y=\frac{11}{2}$$

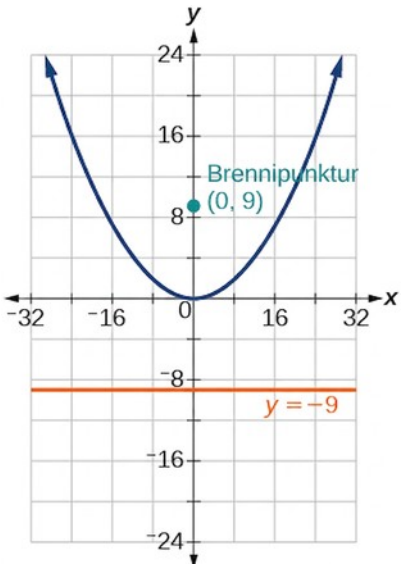
29.

$$(y-1)^2=\frac{4}{3}(x-5), V:(5,1); F:\left(\frac{16}{3},1\right); d: x=\frac{14}{3}$$

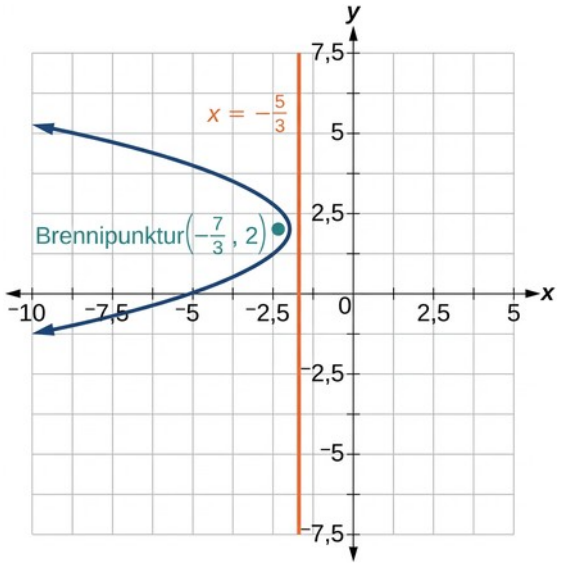
31.



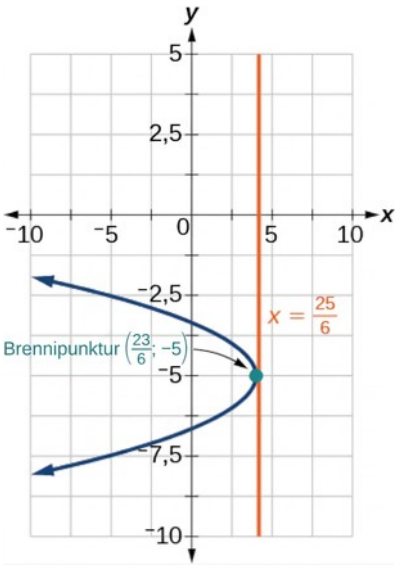
33.



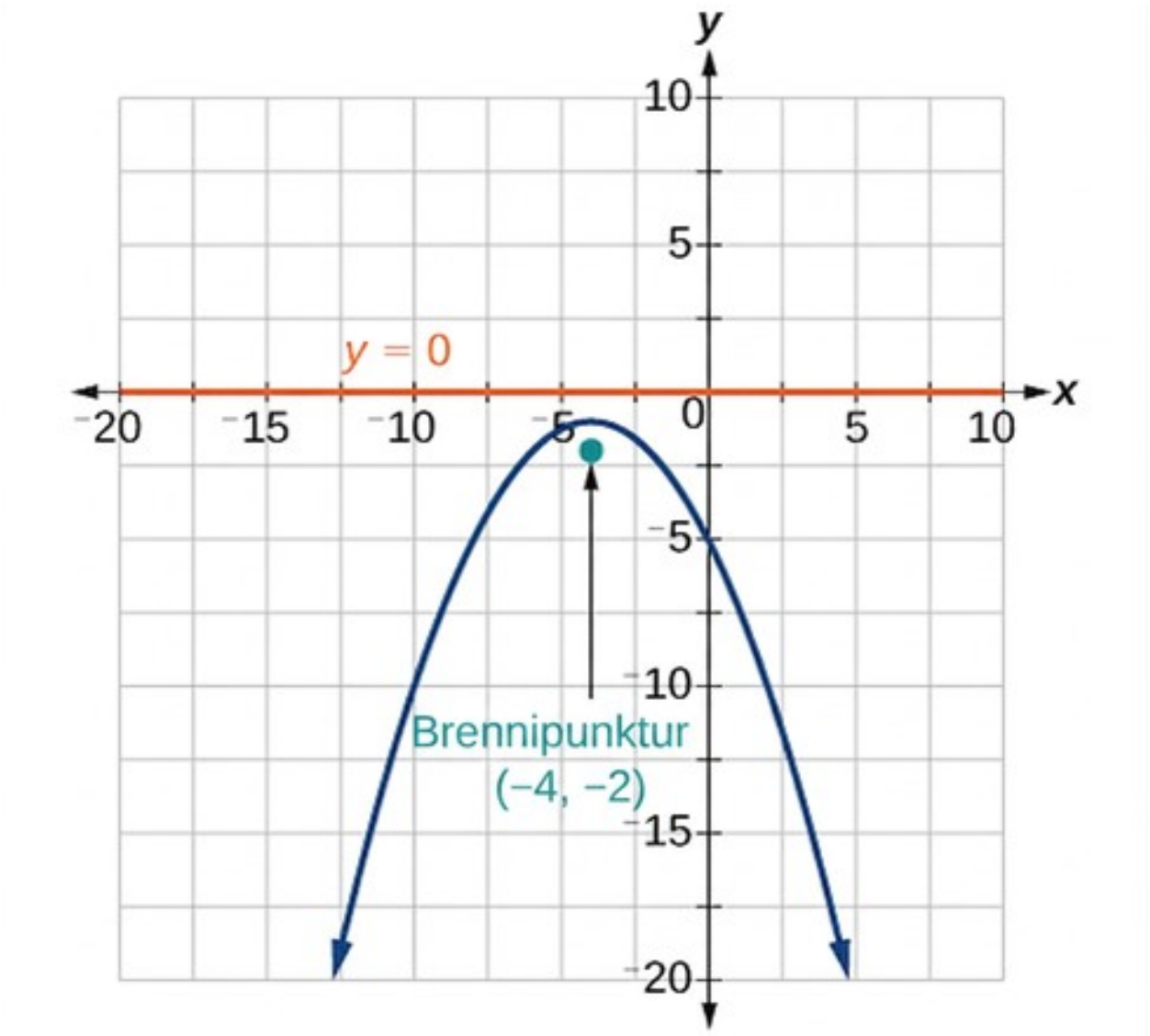
35.


y
7,5
5
2,5
$x = -\frac{5}{3}$
Brennipunktur $\left(-\frac{7}{3}, 2\right)$
−10
−7,5
−5
−2,5
0
2,5
5
x
−2,5
−5
−7,5

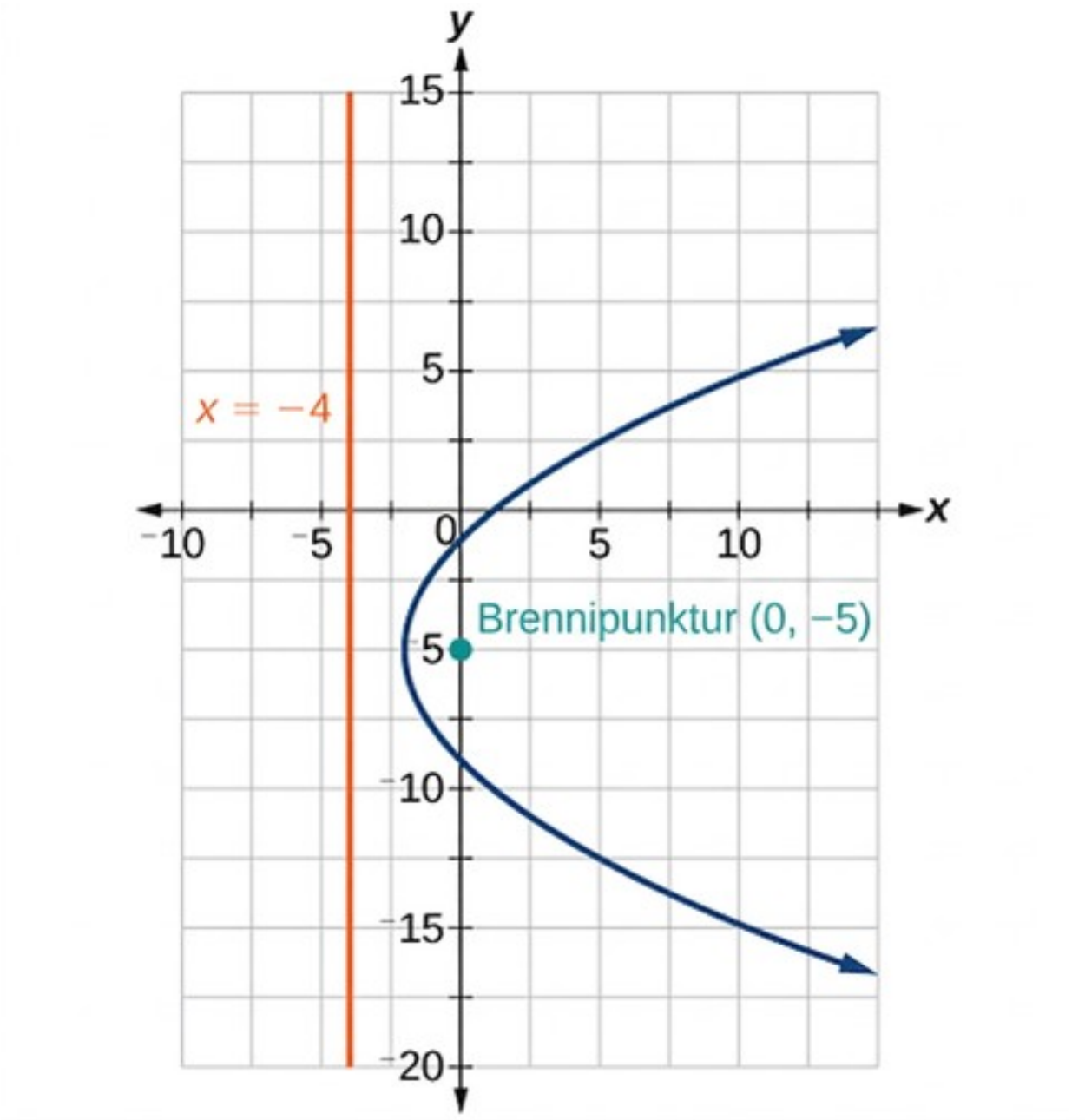
37.


y
5
2,5
−10
−5
0
5
10
x
−2,5
$x = \frac{25}{6}$
Brennipunktur $\left(\frac{23}{6}, -5\right)$
−5
−7,5
−10

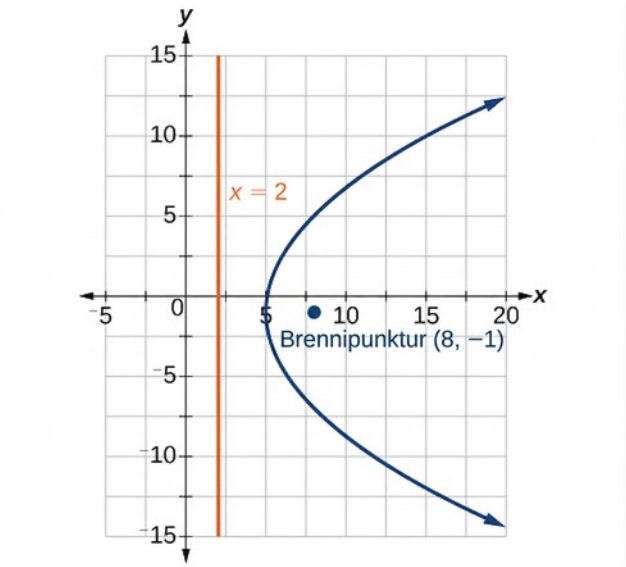
39.



41.



43.



45.

$$x^2 = -16y$$

47.

$$(y-2)^2 = 4\sqrt{2}(x-2)$$

49.

$$(y+\sqrt{3})^2 = -4\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$$

51.

$$x^2 = y$$

53.

$$(y-2)^2 = \frac{1}{4}(x+2)$$

55.

$$(y-\sqrt{3})^2 = 4\sqrt{5}(x+\sqrt{2})$$

57.

$$y^2 = -8x$$

59.

$$(y+1)^2 = 12(x+3)$$

61.

$$(0,1)$$

63. Í punktinum 2,25 fetum ofan við hvirfilpunktinn.

65. 0,5625 fet

67. $x^2=-125(y-20)$, hæðin er 7,2 fet

69. 2304 fet

10.4 Kaflaverkefni

1. Liðurinn $x\,y$ veldur snúningi grafsins.

3. Keilusniðið er breiðbogi.

5. Hann gefur snúningshorn hnitásanna sem eyðir liðnum $x\,y$.

7. $A\,B=0$, fleygbogi

9. $A\,B=-4<0$, breiðbogi

11. $A\,B=6>0$, sporbaugur

13. $B^2-4\,A\,C=0$, fleygbogi

15. $B^2-4\,A\,C=0$, fleygbogi

17. $B^2-4\,A\,C=-96<0$, sporbaugur

19.

$$7x'^2+9y'^2-4=0$$

21.

$$3x'^2+2x'y'-5y'^2+1=0$$

23.

$$\theta=60^\circ,11x'^2-y'^2+\sqrt{3}x'+y'-4=0$$

25.

$$\theta=-30^\circ,21x'^2+9y'^2+4x'-4\sqrt{3}y'-6=0$$

27.

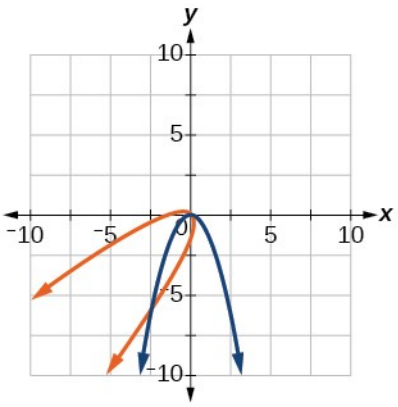
$$\theta\approx 36{,}9^\circ,125\,x'^2+6\,x'-42\,y'+10=0$$

29.

$$\theta=45^\circ,3x'^2-y'^2-\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'+1=0$$

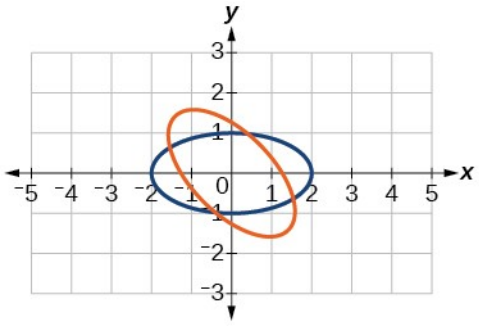
31.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'+y'\right)=\frac{1}{2}\left(x'-y'\right)^2$$



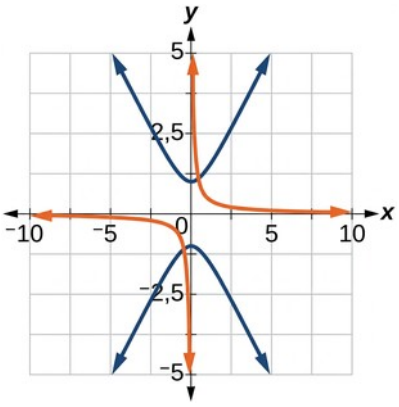
33.

$$\frac{\left(x'-y'\right)^2}{8}+\frac{\left(x'+y'\right)^2}{2}=1$$



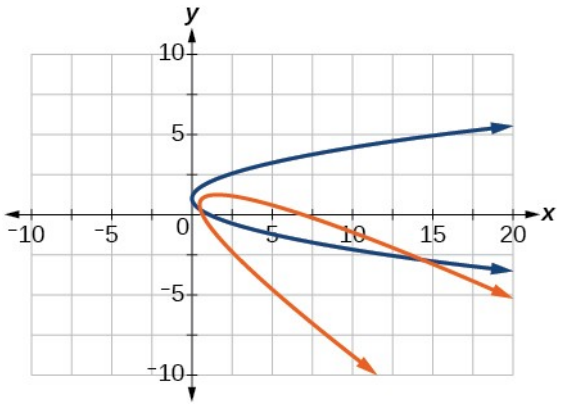
35.

$$\frac{\left(x'+y'\right)^2}{2}-\frac{\left(x'-y'\right)^2}{2}=1$$

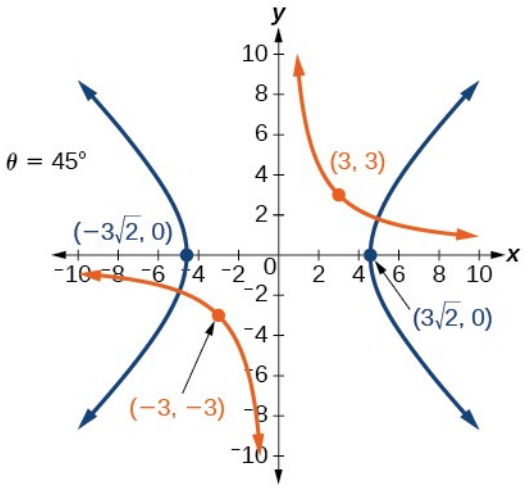


37.

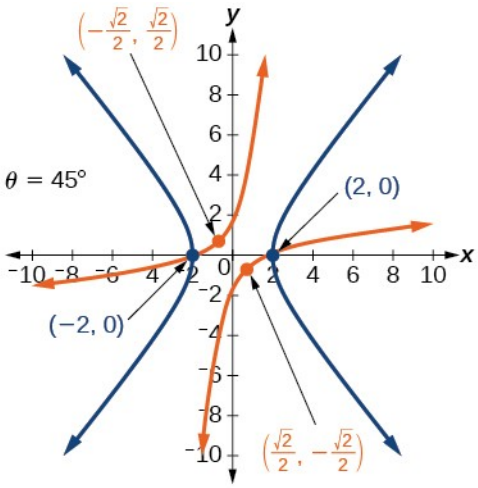
$$\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' = \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 1\right)^2$$



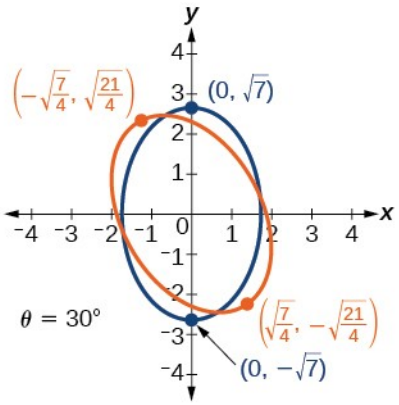
39.



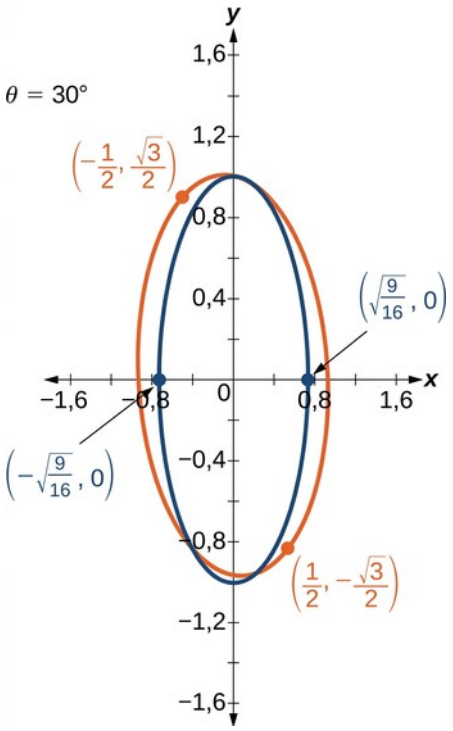
41.



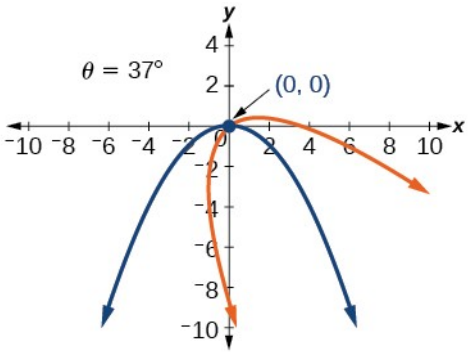
43.


y
x
$\left(-\sqrt{\frac{7}{4}}, \sqrt{\frac{21}{4}}\right)$
$(0, \sqrt{7})$
$\theta = 30°$
$\left(\sqrt{\frac{7}{4}}, -\sqrt{\frac{21}{4}}\right)$
$(0, -\sqrt{7})$

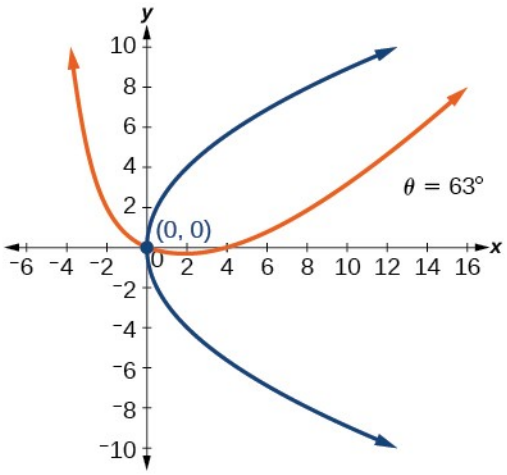
45.


y
x
$\theta = 30°$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\sqrt{\frac{9}{16}}, 0\right)$
$\left(-\sqrt{\frac{9}{16}}, 0\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

47.

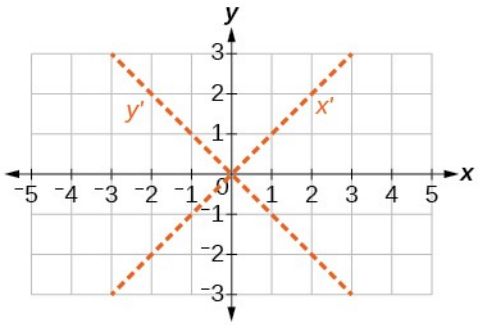

y
x
$\theta = 37°$
(0, 0)

49.



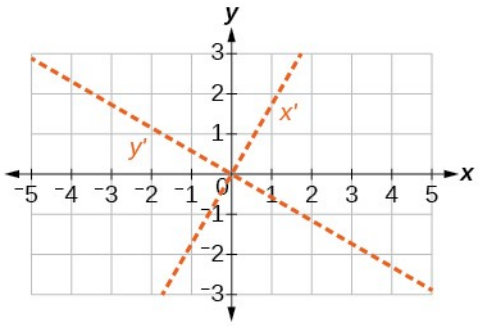
51.

$\theta = 45^\circ$



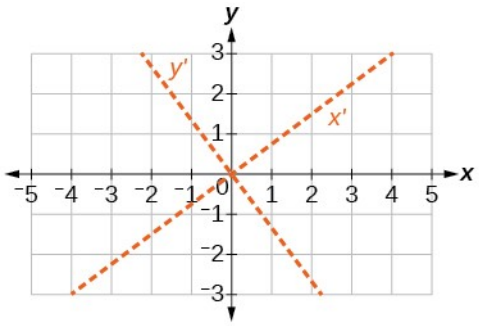
53.

$\theta = 60^\circ$



55.

$\theta \approx 36{,}9^\circ$



57.

$$-4\sqrt{6}<k<4\sqrt{6}$$

59.

$$k=2$$

10.5 Kaflaverkefni

1. Ef miðskekkjan er minni en 1 er ferillinn sporbaugur. Ef hún er jöfn 1 er hann fleygbogi. Ef hún er stærri en 1 er hann breiðbogi.

3. Stýrilínan er samsíða skautásnum.

5. Annar brennipunkturinn er í skautinu.

7. Fleygbogi með $e=1$ og stýrilínu $\frac{3}{4}$ einingum neðan við skautið.

9. Breiðbogi með $e=2$ og stýrilínu $\frac{5}{2}$ einingum ofan við skautið.

11. Fleygbogi með $e=1$ og stýrilínu $\frac{3}{10}$ einingum hægra megin við skautið.

13. Sporbaugur með $e=\frac{2}{7}$ og stýrilínu 2 einingum hægra megin við skautið.

15. Breiðbogi með $e=\frac{5}{3}$ og stýrilínu $\frac{11}{5}$ einingum ofan við skautið.

17. Breiðbogi með $e=\frac{8}{7}$ og stýrilínu $\frac{7}{8}$ einingum hægra megin við skautið.

19.

$$25x^2+16y^2-12y-4=0$$

21.

$$21x^2-4y^2-30x+9=0$$

23.

$$64\,y^2 = 48\,x + 9$$

25.

$$96\,y^2 - 25\,x^2 + 110\,y + 25 = 0$$

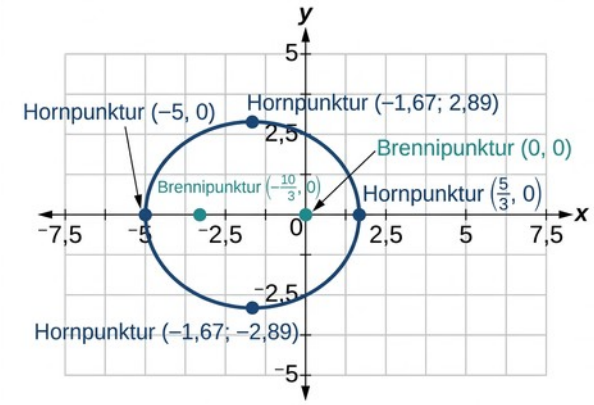
27.

$$3\,x^2 + 4\,y^2 - 2\,x - 1 = 0$$

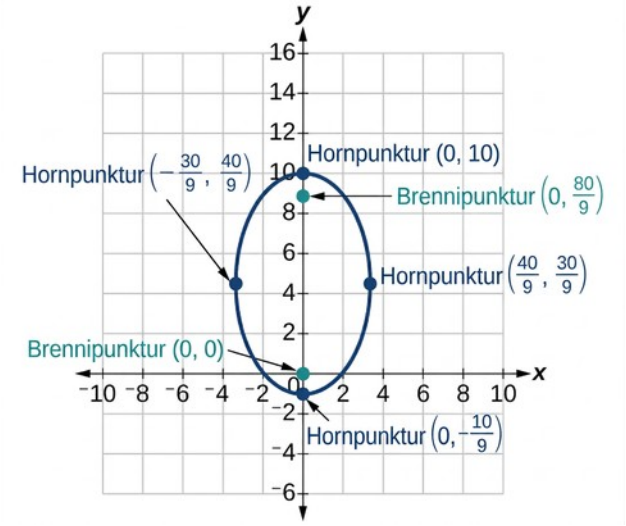
29.

$$5\,x^2 + 9\,y^2 - 24\,x - 36 = 0$$

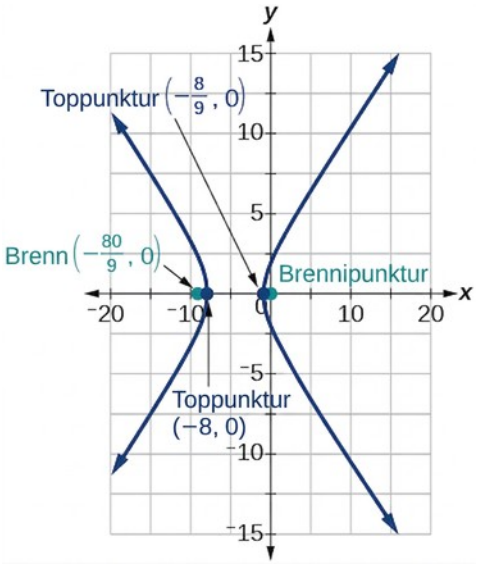
31.



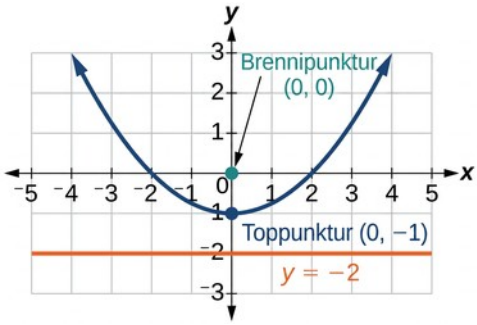
33.



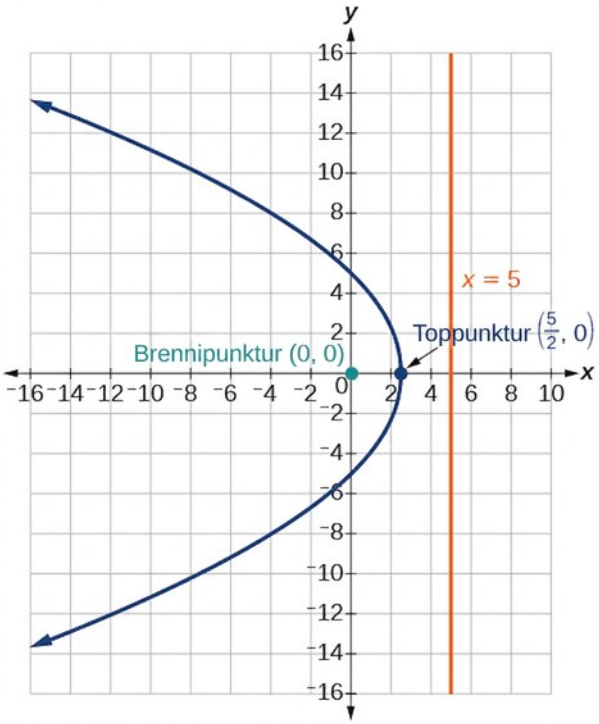
35.


y
x
Toppunktur $\left(-\frac{8}{9}, 0\right)$
Brenn $\left(-\frac{80}{9}, 0\right)$
Brennipunktur
Toppunktur
(−8, 0)

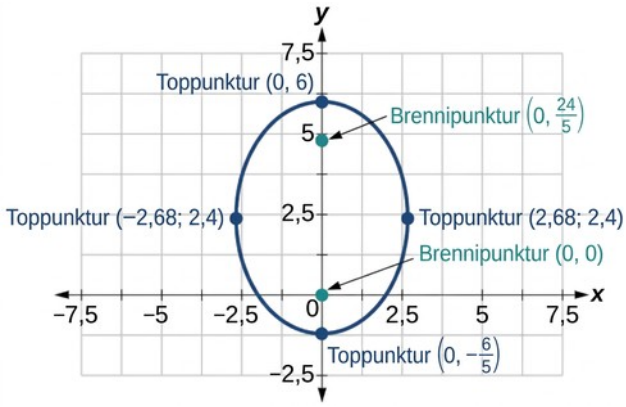
37.


y
x
Brennipunktur
(0, 0)
Toppunktur (0, −1)
y = −2

39.



41.



43.

$$r = \frac{4}{5 + \cos\theta}$$

45.

$$r = \frac{4}{1 + 2\sin\theta}$$

47.

$$r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

49.

$$r=\frac{7}{8-28\cos\theta}$$

51.

$$r=\frac{12}{2+3\sin\theta}$$

53.

$$r=\frac{15}{4-3\cos\theta}$$

55.

$$r=\frac{3}{3-3\cos\theta}$$

57.

$$r=\pm\frac{2}{\sqrt{1+\sin\theta\cos\theta}}$$

59.

$$r=\pm\frac{2}{4\cos\theta+3\sin\theta}$$

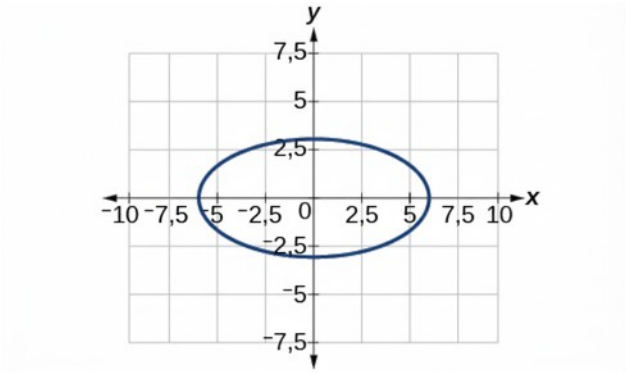
Upprifjunarverkefni

1. $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$; miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktar: $(5,0),(-5,0),(0,8),(0,-8)$; brennipunktar: $(0,\sqrt{39}),(0,-\sqrt{39})$

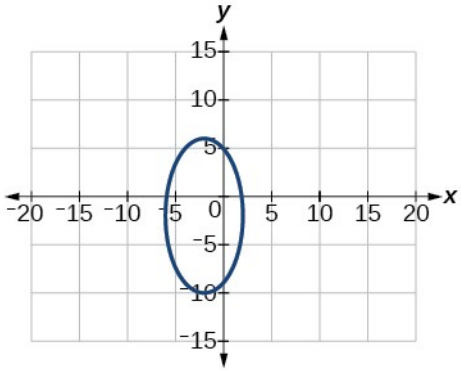
3.

$$\frac{(x+3)^2}{1^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1(-3,2);(-2,2),(-4,2),(-3,5),(-3,-1);(-3,2+2\sqrt{2}),(-3,2-2\sqrt{2})$$

5. miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktar: $(6,0),(-6,0),(0,3),(0,-3)$; brennipunktar: $(3\sqrt{3},0),(-3\sqrt{3},0)$



7. miðja: $(-2,-2)$; hvirfilpunktar: $(2,-2),(-6,-2),(-2,6),(-2,-10)$; brennipunktar: $(-2,-2+4\sqrt{3},),(-2,-2-4\sqrt{3})$



9.

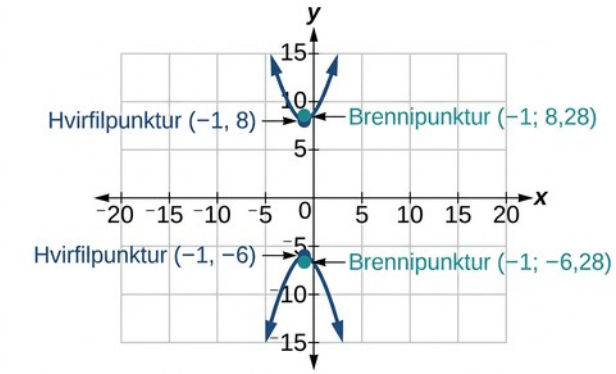
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

11. Um það bil 35,71 fet

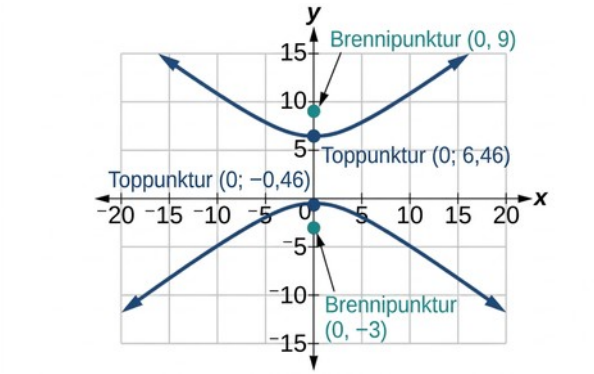
13. $\frac{(y+1)^2}{4^2}-\frac{(x-4)^2}{6^2}=1$; miðja: $(4,-1)$; hvirfilpunktar: $(4,3),(4,-5)$; brennipunktar: $(4,-1+2\sqrt{13}),(4,-1-2\sqrt{13})$

15. $\frac{(x-2)^2}{2^2}-\frac{(y+3)^2}{(2\sqrt{3})^2}=1$; miðja: $(2,-3)$; hvirfilpunktar: $(4,-3),(0,-3)$; brennipunktar: $(6,-3),(-2,-3)$

17.



19.



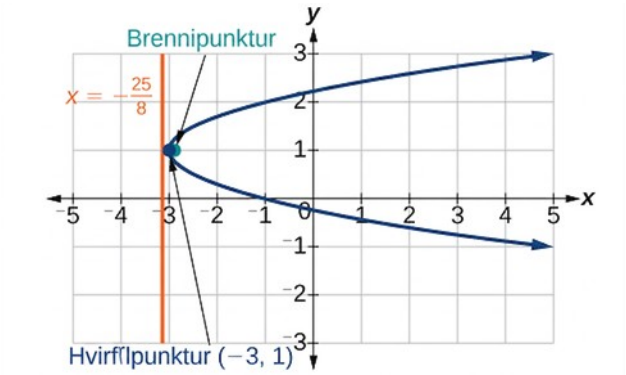
21.

$$\frac{(x-5)^2}{1}-\frac{(y-7)^2}{3}=1$$

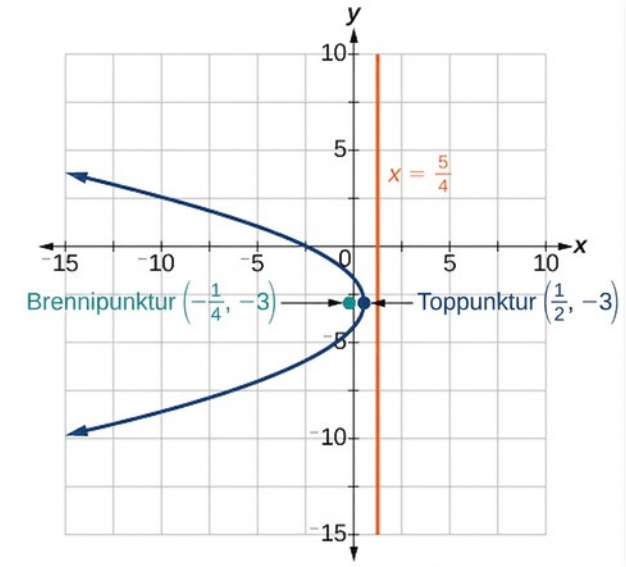
23. $(x+2)^2=\frac{1}{2}(y-1)$; hvirfilpunktur: $(-2,1)$; brennipunktur: $\left(-2,\frac{9}{8}\right)$; stýrilína: $y=\frac{7}{8}$

25. $(x+5)^2=(y+2)$; hvirfilpunktur: $(-5,-2)$; brennipunktur: $\left(-5,-\frac{7}{4}\right)$; stýrilína: $y=-\frac{9}{4}$

27.



29.



31.

$$(x-2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)(y-1)$$

33. $B^2-4AC=0$, fleygbogi

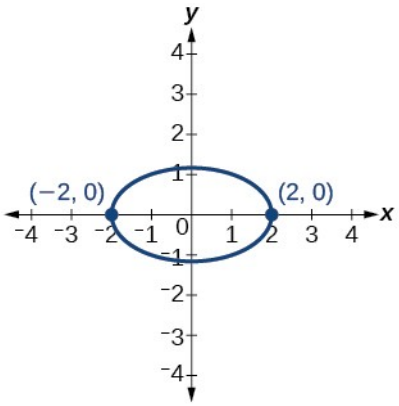
35. $B^2-4AC=-31<0$, sporbaugur

37.

$$\theta=45^\circ, x'^2+3y'^2-12=0$$

39.

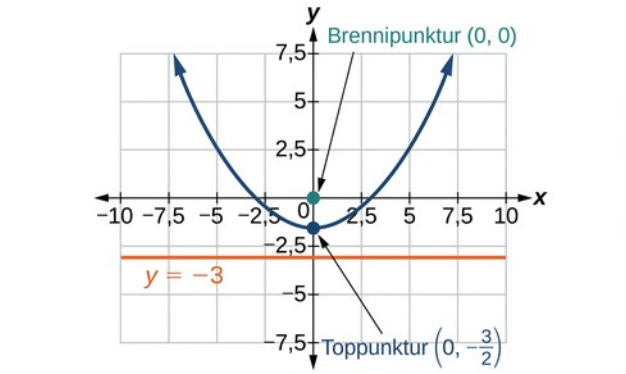
$$\theta=45^\circ$$



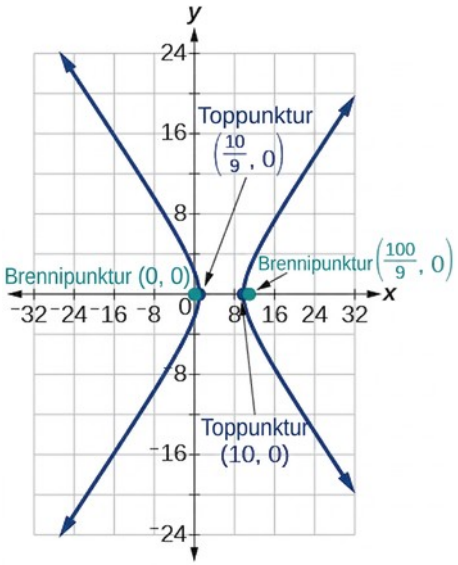
41. Breiðbogi með $e=5$ og stýrilínu 2 einingum vinstra megin við skautið.

43. Sporbaugur með $e=\frac{3}{4}$ og stýrilínu $\frac{1}{3}$ einingu ofan við skautið.

45.



47.



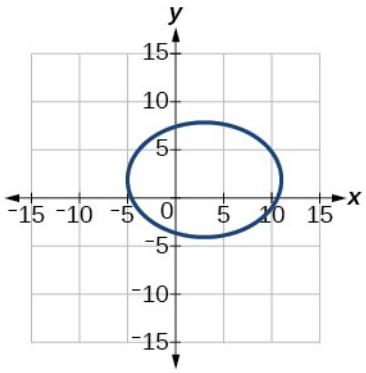
49.

$$r = \frac{3}{1+\cos\theta}$$

Æfingapróf

1. $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$; miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktar: $(3,0),(-3,0),(0,2),(0,-2)$; brennipunktar: $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$

3. miðja: $(3,2)$; hvirfilpunktar: $(11,2),(-5,2),(3,8),(3,-4)$; brennipunktar: $(3+2\sqrt{7},2),(3-2\sqrt{7},2)$

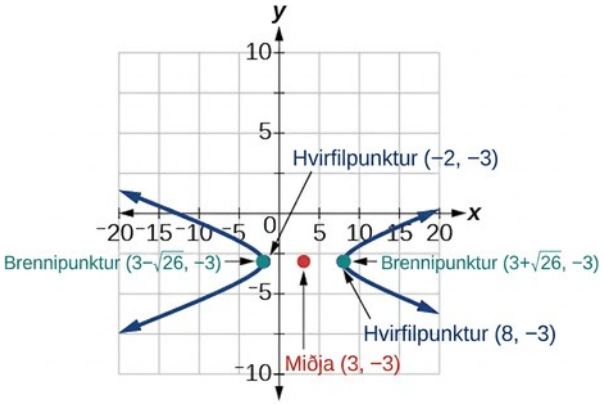


5.

$$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{27}=1$$

7. $\frac{x^2}{7^2}-\frac{y^2}{9^2}=1$; miðja: $(0,0)$; hvirfilpunktar: $(7,0),(-7,0)$; brennipunktar: $(\sqrt{130},0),(-\sqrt{130},0)$; aðfellur: $y=\pm\frac{9}{7}x$

9. miðja: $(3,-3)$; hvirfilpunktar: $(8,-3),(-2,-3)$; brennipunktar: $(3+\sqrt{26},-3),(3-\sqrt{26},-3)$; aðfellur: $y=\pm\frac{1}{5}(x-3)-3$

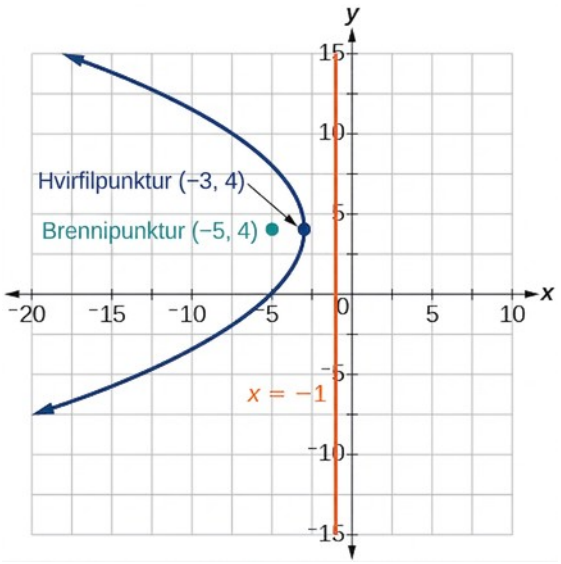


11.

$$\frac{(y-3)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{8}=1$$

13. $(x-2)^2=\frac{1}{3}(y+1)$; hvirfilpunktur: $(2,-1)$; brennipunktur: $\left(2,-\frac{11}{12}\right)$; stýrilína: $y=-\frac{13}{12}$

15.

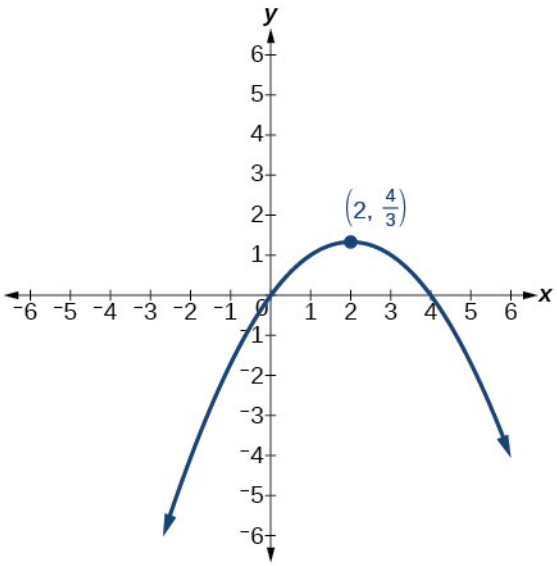


17. Um það bil 8,49 fet

19. fleygbogi; $\theta \approx 63{,}4^\circ$

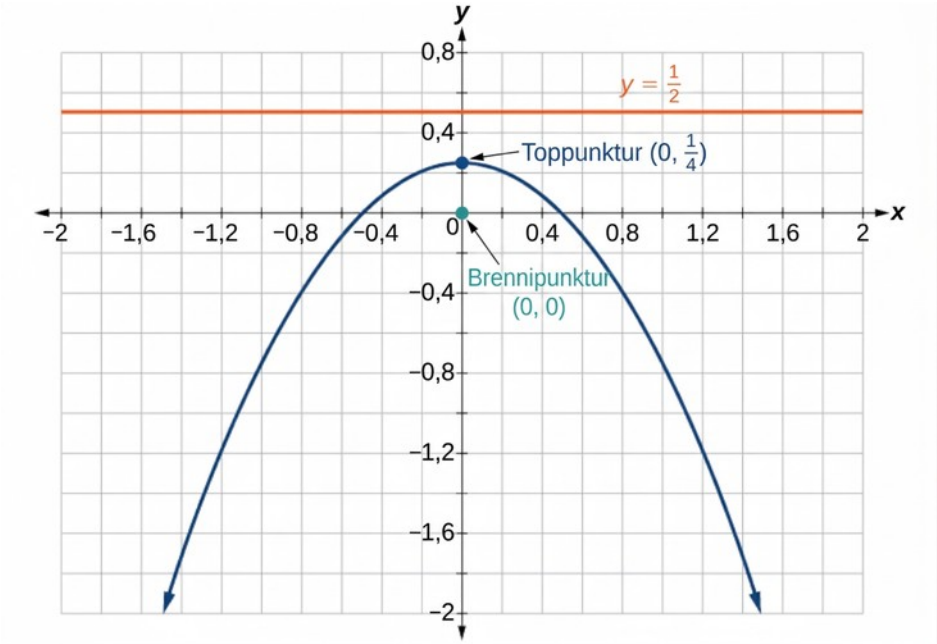
21.

$$x'^2 - 4x' + 3y' = 0$$



23. Breiðbogi með $e = \frac{3}{2}$, og stýrilínu $\frac{5}{6}$ einingum hægra megin við skautið.

25.



Kafli 11

Prófaðu

11.1 Runur og ritháttur þeirra

1. Fyrstu fimm liðirnir eru $\{1, 6, 11, 16, 21\}$.

2. Fyrstu fimm liðirnir eru $\left\{-2, 2, -\frac{3}{2}, 1, -\frac{5}{8}\right\}$.

3. Fyrstu sex liðirnir eru $\{2, 5, 54, 10, 250, 15\}$.

4.

$$a_n = (-1)^{n+1} 9^n$$

5.

$$a_n = -\frac{3^n}{4n}$$

6.

$$a_n = e^{n-3}$$

7.

$$\{2, 5, 11, 23, 47\}$$

8.

$$\left\{0, 1, 1, 1, 2, 3, \frac{5}{2}, \frac{17}{6}\right\}.$$

9. Fyrstu fimm liðirnir eru $\left\{1, \frac{3}{2}, 4, 15, 72\right\}$.

11.2 Jafnmunarunur

1. Runan er jafnmunaruna. Fasti mismunurinn er -2.

2. Runan er ekki jafnmunaruna því $3-1 \neq 6-3$.

3.

$$\{1, 6, 11, 16, 21\}$$

4.

$$a_2 = 2$$

5.

$$a_1 = 25$$
$$a_n = a_{n-1} + 12, \quad \text{fyrir } n \geq 2$$

6.

$$a_n = 53 - 3n$$

7. Það eru 11 liðir í rununni.

8. Formúlan er $T_n = 10 + 4n$, og það tekur hana 42 mínútur.

11.3 Kvótarunur

1. Runan er ekki kvótaruna því $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.

2. Runan er kvótaruna. Hlutfallstalan er $\frac{1}{5}$.

3.

$$\left\{18, 6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right\}$$

4.

$$a_1 = 2$$
$$a_n = \frac{2}{3}\, a_{n-1} \quad \text{fyrir } n \geq 2$$

5.

$$a_6 = 16.384$$

6.

$$a_n = -\left(-3\right)^{n-1}$$

7.

1. ⓐ $P_n = 293 \cdot 1{,}026\ a^n$

2. ⓑ Fjöldi heimsókna verður um það bil 333.

11.4 Raðir og ritháttur þeirra

1. 38

2.

$$26{,}4$$

3.

$$328$$

4.

$$-280$$

5. $2.025

6.

$$\approx 2{,}000{,}00$$

7. 9.840

8. $275.513,31

9. Summan er ekki skilgreind.

10. Summa óendanlegu raðarinnar er skilgreind.

11. Summa óendanlegu raðarinnar er skilgreind.

12. 3

13. Röðin er ekki geómetrísk.

14.

$$-\frac{3}{11}$$

15. $32.775,87

11.5 Talningarreglur

1. 7

2. Hægt er að velja 60 mismunandi morgunverðartilboð.

3. 120

4. 60

5. 12

6.

$$P\left(7,7\right)=5.040$$

7.

$$P\left(7,5\right)=2.520$$

8.

$$C\left(10,3\right)=120$$

9. 64 ísréttir

10. 840

11.6 Tvíliðusetningin

1.

1. ⓐ35
2. ⓑ330

2.

1. ⓐ $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$
2. ⓑ $8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$

3.

$$-10.206\ x^4\ y^5$$

11.7 Líkur

1.

Útkoma	Líkur
Skjaldarmerki	$\frac{1}{2}$
Fiskur	$\frac{1}{2}$

2.

$$\frac{2}{3}$$

3.

$$\frac{7}{13}$$

4.

$$\frac{2}{13}$$

5.

$$\frac{5}{6}$$

6.

a. $\frac{1}{91}$; b. $\frac{5}{91}$; c. $\frac{86}{91}$

11.1 Kaflaverkefni

1. Runa er röð talna í tiltekinni röð og getur verið endanleg eða óendanleg. Þegar endanleg runa er skilgreind með formúlu er skilgreiningarmengi hennar hlutmengi óneikvæðu heiltalnanna. Þegar óendanleg runa er skilgreind með formúlu er skilgreiningarmengið allar jákvæðar heiltölur eða allar óneikvæðar heiltölur.

3. Já, bæði mengin halda áfram án enda og eru því óendanlegar runur.

5. Aðfeldi er margfeldi jákvæðrar heiltölu og allra jákvæðra heiltalna sem eru minni en hún. Hrópmerki táknar aðgerðina. Svör geta verið breytileg. Kosturinn við ritháttaðfeldis er meðal annars að mun auðveldara er að rita hann en margfeldið
$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

7. Fyrstu fjórir liðirnir: $-8, -\frac{16}{3}, -4, -\frac{16}{5}$

9. Fyrstu fjórir liðirnir: $2, \frac{1}{2}, \frac{8}{27}, \frac{1}{4}$.

11. Fyrstu fjórir liðirnir: $1{,}25, \quad -5, \quad 20, \quad -80$.

13. Fyrstu fjórir liðirnir: $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}$.

15. Fyrstu fjórir liðirnir: $-\frac{4}{5}, 4, -20, 100$

17.

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \frac{25}{11}, 31, 44, 59$$

19.

$$-0{,}6, -3, -15, -20, -375, -80, -9375, -320$$

21.

$$a_n = n^2 + 3$$

23.

$$a_n = \frac{2^n}{2n} \text{ eða } \frac{2^{n-1}}{n}$$

25.

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

27. Fyrstu fimm liðirnir: $3, -9, 27, -81, 243$

29. Fyrstu fimm liðirnir: $-1, 1, -9, \frac{27}{11}, \frac{891}{5}$

31.

$$\frac{1}{24}, \quad 1, \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{81}{4}, \quad \frac{2187}{8}, \quad \frac{531.441}{16}$$

33.

$$2, 10, 12, \frac{14}{5}, \frac{4}{5}, 2, 10, 12$$

35.

$$a_1 = -8, a_n = a_{n-1} + n$$

37.

$$a_1 = 35, a_n = a_{n-1} + 3$$

39.

$$720$$

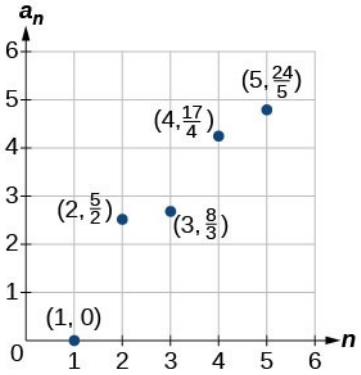
41.

$$665.280$$

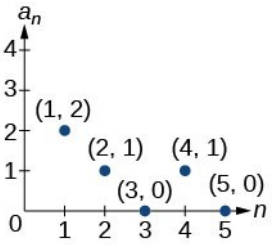
43. Fyrstu fjórir liðirnir: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

45. Fyrstu fjórir liðirnir: $-1, 2, \frac{6}{5}, \frac{24}{11}$

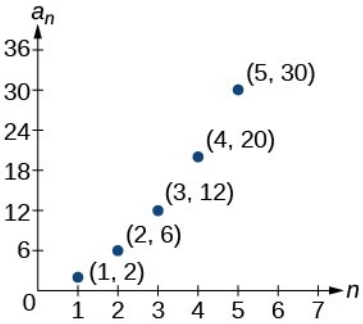
47.



49.



51.



53.

$$a_n = 2^{n-2}$$

55.

$$a_1 = 6, a_n = 2a_{n-1} - 5$$

57. Fyrstu fimm liðirnir: $\frac{29}{37}, \frac{152}{111}, \frac{716}{333}, \frac{3188}{999}, \frac{13724}{2997}$

59. Fyrstu fimm liðirnir: 2, 3, 5, 17, 65537

61.

$$a_{10}=7.257.600$$

63. Fyrstu sex liðirnir: 0,042, 0,146, 0,875, 2,385, 4,708

65. Fyrstu fjórir liðirnir: 5,975, 2,765, 185,743, 1.057,25, 6.023,521

67. Ef $a_n=-421$ er liður í rununni gefur lausn jöfnunnar $-421=-6-8n$ fyrir n óneikvæða heiltölu. Hins vegar gefur $-421=-6-8n$, gildið $n=51{,}875$ og því er $a_n=-421$ ekki liður í rununni.

69.

$$a_1=1, a_2=0, a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$$

71.

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot(n)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}=n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$$

11.2 Kaflaverkefni

1. Runa þar sem hver liður hækkar eða lækkar frá næsta lið á undan um fast gildi.

3. Við athugum hvort mismunur allra samliggjandi liða sé sá sami. Það jafngildir því að runan hafi fastan mismun.

5. Jafnmunarunur og línuleg föll hafa hvort tveggja fastan breytingarhraða. Þau eru ólík vegna þess að skilgreiningarmengin eru ekki þau sömu: línuleg föll eru skilgreind fyrir allar rauntölur en jafnmunarunur fyrir náttúrlegar tölur eða hlutmengi þeirra.

7. Fasti mismunurinn er $\frac{1}{2}$

9. Runan er ekki jafnmunaruna því $16-4\neq64-16$.

11.

$$0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}$$

13.

$$0, -5, -10, -15, -20$$

15.

$$a_4=19$$

17.

$$a_6=41$$

19.

$$a_1 = 2$$

21.

$$a_1 = 5$$

23.

$$a_1 = 6$$

25.

$$a_{21} = -13{,}5$$

27.

$$-19, -20{,}4, -21{,}8, -23{,}2, -24{,}6$$

29.

$$a_1 = 17;\ a_n = a_{n-1} + 9 \quad n \geq 2$$

31.

$$a_1 = 12;\ a_n = a_{n-1} + 5 \quad n \geq 2$$

33.

$$a_1 = 8{,}9;\ a_n = a_{n-1} + 1{,}4 \qquad n \geq 2$$

35.

$$a_1 = \tfrac{1}{5};\ a_n = a_{n-1} + \tfrac{1}{4} \quad n \geq 2$$

37.

$$_1 = \tfrac{1}{6};\ a_n = a_{n-1} - \tfrac{13}{12} \quad n \geq 2$$

39.

$$a_1 = 4;\ a_n = a_{n-1} + 7;\ a_{14} = 95$$

41. Fyrstu fimm liðirnir: $20, 16, 12, 8, 4$.

43.

$$a_n = 1 + 2n$$

45.

$$a_n = -105 + 100n$$

47.

$$a_n = 1{,}8\ n$$

49.

$$a_n = 13{,}1 + 2{,}7\ n$$

51.

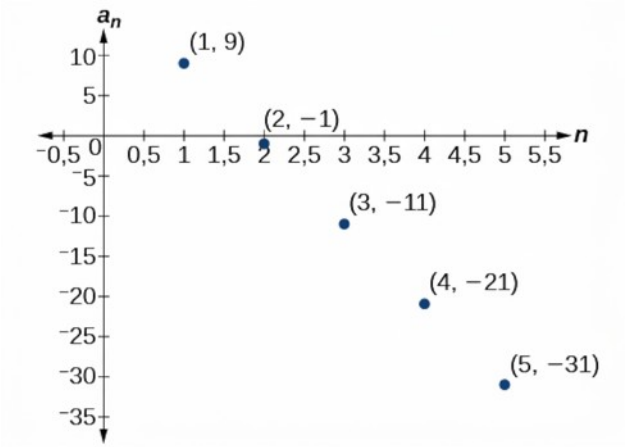
$$a_n = \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}$$

53. Það eru 10 liðir í rununni.

55. Það eru 6 liðir í rununni.

57. Grafið táknar ekki jafnmunarunu.

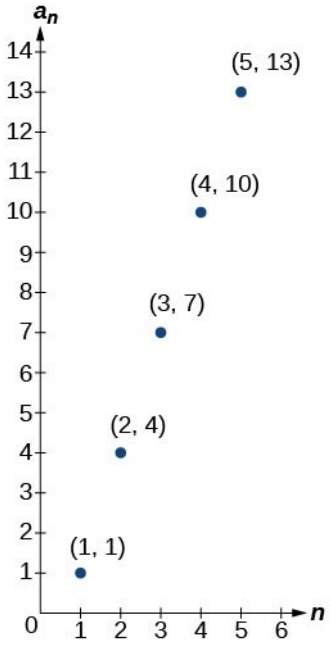
59.



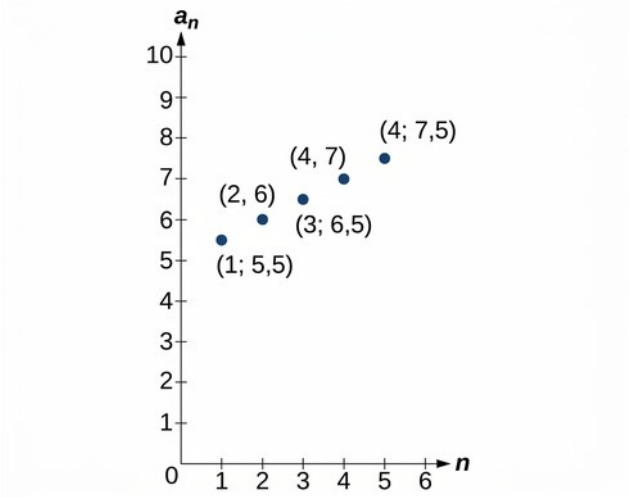
61.

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19$$

63.



65.



67. Svör eru breytileg. Dæmi: $a_n = 20{,}6\ n$ og $a_n = 2 + 20{,}4\ n$.

69.

$$a_{11} = -17a + 38b$$

71. Runan fær fyrst neikvætt gildi í 13. lið, þar sem $a_{13} = -\frac{1}{3}$

73.

Svör eru breytileg. Kannið hvort runan sé jafnmunaruna. Dæmi: Rakningarformúla: $a_1 = 3, a_n = a_{n-1} - 3$. Fyrstu 4 liðirnir: $3, 0, -3, -6 \quad a_{31} = -87$

11.3 Kaflaverkefni

1. Runa þar sem hlutfall sérhverra tveggja samliggjandi liða er fast.

3. Deildu hverjum lið rununnar með liðnum á undan. Ef kvótarnir eru allir jafnir er runan kvótaruna.

5. Kvótarunur og vísisföll hafa bæði fast hlutfall. Skilgreiningarmengin eru þó ólík: vísisföll eru skilgreind fyrir allar rauntölur en kvótarunur aðeins fyrir jákvæðar heiltölur. Grunntala kvótarunu, hlutfallstalan, getur auk þess verið neikvæð en grunntala vísisfalls verður að vera jákvæð.

7. Hlutfallstalan er -2

9. Runan er kvótaruna. Hlutfallstalan er 2.

11. Runan er kvótaruna. Hlutfallstalan er $-\frac{1}{2}$.

13. Runan er kvótaruna. Hlutfallstalan er $1/5$.

15.

$$5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}$$

17.

$$800, 400, 200, 100, 50$$

19.

$$a_4 = -\frac{16}{27}$$

21.

$$a_7 = -\frac{2}{729}$$

23.

$$7, 1{,}4, 0{,}28, 0{,}056, 0{,}0112$$

25.

$$a_1 = -32, \quad a_n = \tfrac{1}{2} a_{n-1}$$

27.

$$a_1 = 10, \qquad a_n = -0{,}3\, a_{n-1}$$

29.

$$a_1 = \tfrac{3}{5}, \quad a_n = \tfrac{1}{6} a_{n-1}$$

31.

$$a_1=\frac{1}{512}, a_n=-4\,a_{n-1}$$

33.

$$12, -6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$$

35.

$$a_n=3^{n-1}$$

37.

$$a_n=0{,}8\cdot(-5)^{n-1}$$

39.

$$a_n=-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

41.

$$a_n=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

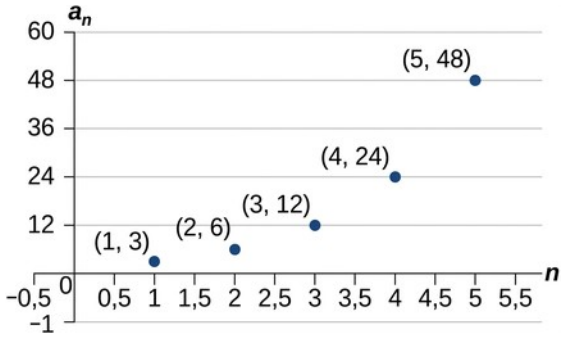
43.

$$a_{12}=\frac{1}{177.147}$$

45. Það eru 12 liðir í rununni.

47. Grafið táknar ekki kvótarunu.

49.



51. Svör eru breytileg. Dæmi: $a_1=800$, $a_n=0{,}5\ a_{n-1}$ og $a_1=12{,}5$, $a_n=4\ a_{n-1}$

53.

$$a_5=256\,b$$

55. Runan fer yfir 100 í 14. lið, $a_{14} \approx 107$.

57. $a_4 = -\frac{32}{3}$ er fyrsta gildið sem er ekki heiltala

59. Svör eru breytileg. Dæmi: Lokað form með fastan kvóta sem tugabrot: $a_n = 400 \cdot 0{,}5^{n-1}$;
Fyrstu 4 liðirnir: $400, 200, 100, 50$; $a_8 = 3{,}125$

11.4 Kaflaverkefni

1. n-ta hlutsumman er summa fyrstu n liða runu.

3. Geómetrísk röð er summa liða kvótarunu.

5. Lífeyrir er röð reglulegra, jafnra greiðslna sem bera fasta samsetta vexti.

7.

$$\sum_{n=0}^{4} 5n$$

9.

$$\sum_{k=1}^{5} 4$$

11.

$$\sum_{k=1}^{20} 8k+2$$

13.

$$S_5 = \frac{5\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)}{2}$$

15.

$$S_{13} = \frac{13\left(3{,}2+5{,}6\right)}{2}$$

17.

$$\sum_{k=1}^{7} 8 \cdot 0{,}5^{k-1}$$

19.

$$S_5=\frac{9\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{121}{9}\approx 13{,}44$$

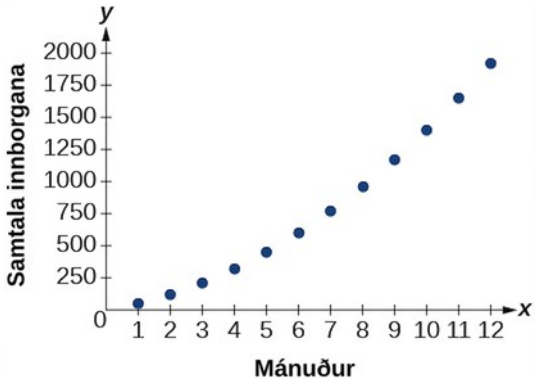
21.

$$S_{11}=\frac{64\left(1-0{,}2^{11}\right)}{1-0{,}2}=\frac{781.249.984}{9.765.625}\approx 80$$

23. Röðin er skilgreind. $S=\frac{2}{1-0{,}8}$

25. Röðin er skilgreind. $S=\frac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

27.



29. Dæmi um svar: Graf S_n virðist nálgast 1. Það er eðlilegt því $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ er skilgreind óendanleg geómetrísk röð með $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=1$.

31. 49

33. 254

35.

$$S_7=\frac{147}{2}$$

37.

$$S_{11}=\frac{55}{2}$$

39.

$$S_7=5.208,4$$

41.

$$S_{10}=-\frac{1023}{256}$$

43.

$$S=-\frac{4}{3}$$

45.

$$S=9,2$$

47. $3.705,42

49. $695.823,97

51.

$$a_k=30-k$$

53. 9 liðir

55.

$$r=\frac{4}{5}$$

57. $400 á mánuði

59. 420 fet

61. 12 fet

11.5 Kaflaverkefni

1. Það eru $m+n$ leiðir fyrir annaðhvort atburð A eða atburð B.

3. Samlagningarlögmálið er notað þegar heildarfjöldi mögulegra útkoma annars hvors atburðarins er fundinn. Margföldunarlögmálið er notað þegar heildarfjöldi mögulegra útkoma beggja atburða er fundinn. Orðið „eða“ bendir yfirleitt til samlagningar en „og“ til margföldunar.

5. Samantekt; $C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

7.

$$4+2=6$$

9.

$$5+4+7=16$$

11.

$$2\times 6=12$$

13.

$$10^3=1000$$

15.

$$P(5,2)=20$$

17.

$$P(3,3)=6$$

19.

$$P\left(11,5\right)=55.440$$

21.

$$C(12,4)=495$$

23.

$$C(7,6)=7$$

25.

$$2^{10}=1024$$

27.

$$2^{12}=4096$$

29.

$$2^9=512$$

31.

$$\frac{8!}{3!}=6720$$

33.

$$\frac{12!}{3!2!3!4!}$$

35. 9

37. Já, í léttvægu tilvikunum $r=0$ og $r=1$. Ef $r=0$, þá er $C(n,r)=P(n,r)=1$. Ef $r=1$, þá er $r=1$, og $C(n,r)=P(n,r)=n$.

39.

$$\frac{6!}{2!}\times 4!=8640$$

41.

$$6-3+8-3=8$$

43.

$$4\times 2\times 5=40$$

45.

$$4\times 12\times 3=144$$

47.

$$P\left(15,9\right)=1.816.214.400$$

49.

$$C\left(10,3\right)\times C\left(6,5\right)\times C\left(5,2\right)=7.200$$

51.

$$2^{11}=2048$$

53.

$$\frac{20!}{6!6!8!}=116.396.280$$

11.6 Kaflaverkefni

1.

Tvíliðustuðull er annar ritháttur fyrir samantektina $C(n,r)$. Hann er skilgreindur með $\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

3.

Tvíliðusetningin er $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$ og má nota til að liða sérhvern tvílið.

5. 15

7. 35

9. 10

11. 12.376

13.

$$64a^3 - 48a^2b + 12ab^2 - b^3$$

15.

$$27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$$

17.

$$1024x^5 + 2560x^4y + 2560x^3y^2 + 1280x^2y^3 + 320xy^4 + 32y^5$$

19.

$$1024x^5 - 3840x^4y + 5760x^3y^2 - 4320x^2y^3 + 1620xy^4 - 243y^5$$

21.

$$\frac{1}{x^4} + \frac{8}{x^3y} + \frac{24}{x^2y^2} + \frac{32}{xy^3} + \frac{16}{y^4}$$

23.

$$a^{17} + 17a^{16}b + 136a^{15}b^2$$

25.

$$a^{15} - 30a^{14}b + 420a^{13}b^2$$

27.

$$3.486.784.401\ a^{20} + 23.245.229.340\ a^{19}\ b + 73.609.892.910\ a^{18}\ b^2$$

29.

$$x^{24} - 8x^{21}\sqrt{y} + 28x^{18}y$$

31.

$$-720x^2y^3$$

33.

$$220.812.466.875.000\ y^7$$

35.

$$35x^3y^4$$

37.

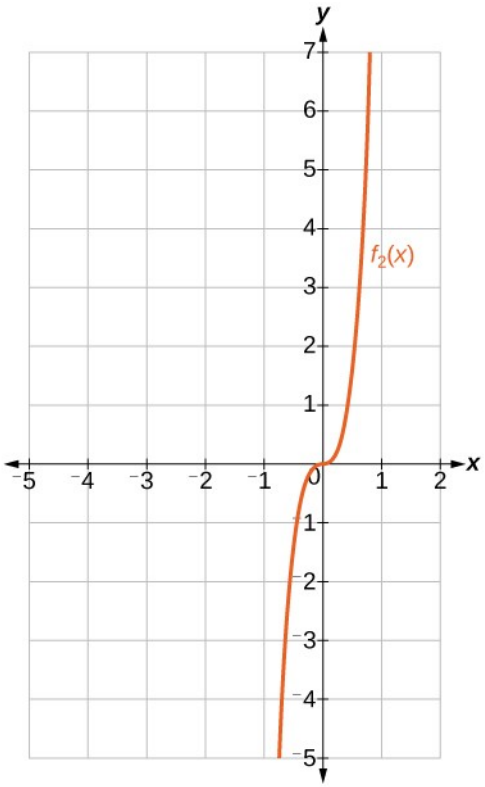
$$1.082.565\ a^3\ b^{16}$$

39.

$$\frac{1152\,y^2}{x^7}$$

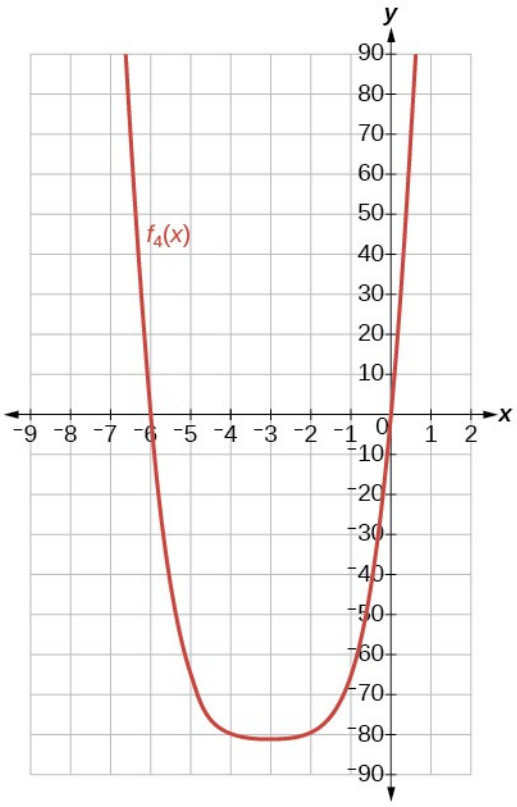
41.

$$f_2(x)=x^4+12\,x^3$$



43.

$$f_4(x)=x^4+12\,x^3+54\,x^2+108\,x$$



45.

$$590.625\ x^5\ y^2$$

47.

$$k-1$$

49. Ekki er hægt að liða segðina $\left(x^3+2\,y^2-z\right)^5$ með tvíliðusetningunni því ekki er hægt að rita hana sem tvílið.

11.7 Kaflaverkefni

1. líkur; Líkur atburðar takmarkast við gildi milli 0 og 1, að 0 og 1. meðtöldum.

3. Tilraun er athöfn með greinanlega útkomu.

5. Líkur á sammengi tveggja atburða eru tala sem lýsir því hve líklegt er að að minnsta kosti annar atburðanna í líkindalíkani eigi sér stað. Bæði í sammengi mengja A og B og sammengi atburða A og B, inniheldur sammengið annaðhvort A eða B eða bæði. Munurinn er sá að sammengi mengja er annað mengi en sammengi atburða eru líkur og því alltaf tölugildi milli 0 og 1.

7.

$$\frac{1}{2}.$$

9.

$$\frac{5}{8}.$$

11.

$$\frac{1}{2}.$$

13.

$$\frac{3}{8}.$$

15.

$$\frac{1}{4}.$$

17.

$$\frac{3}{4}.$$

19.

$$\frac{3}{8}.$$

21.

$$\frac{1}{8}.$$

23.

$$\frac{15}{16}.$$

25.

$$\frac{5}{8}.$$

27.

$$\frac{1}{13}.$$

29.

$$\frac{1}{26}.$$

31.

$$\frac{12}{13}.$$

33.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1) 2	(1,2) 3	(1,3) 4	(1,4) 5	(1,5) 6	(1,6) 7
2	(2,1) 3	(2,2) 4	(2,3) 5	(2,4) 6	(2,5) 7	(2,6) 8
3	(3,1) 4	(3,2) 5	(3,3) 6	(3,4) 7	(3,5) 8	(3,6) 9
4	(4,1) 5	(4,2) 6	(4,3) 7	(4,4) 8	(4,5) 9	(4,6) 10
5	(5,1) 6	(5,2) 7	(5,3) 8	(5,4) 9	(5,5) 10	(5,6) 11
6	(6,1) 7	(6,2) 8	(6,3) 9	(6,4) 10	(6,5) 11	(6,6) 12

35.

$$\frac{5}{12}.$$

37.

$$0.$$

39.

$$\frac{4}{9}.$$

41.

$$\frac{1}{4}.$$

43.

$$\frac{5}{8}$$

45.

$$\frac{8}{13}$$

47.

$$\frac{C(12,5)}{C(48,5)}=\frac{1}{2162}$$

49.

$$\frac{C(12,3)C(36,2)}{C(48,5)}=\frac{175}{2162}$$

51.

$$\frac{C\left(20,3\right)C\left(60,17\right)}{C\left(80,20\right)}\approx 12{,}49\,\%$$

53.

$$\frac{C\left(20,5\right)C\left(60,15\right)}{C\left(80,20\right)}\approx 23{,}33\,\%$$

55.

$$20{,}50+23{,}33-12{,}49=31{,}34\,\%$$

57.

$$\frac{C\left(40000000,1\right)C\left(277000000,4\right)}{C\left(317000000,5\right)}=36{,}78\,\%$$

59.

$$\frac{C\left(40000000,4\right)C\left(277000000,1\right)}{C\left(317000000,5\right)}=0{,}11\,\%$$

Upprifjunarverkefni

1.

$$2,4,7,11$$

3.

$$13,103,1003,10003$$

5. Runan er jafnmunaruna. Fasti mismunurinn er $d=\frac{5}{3}$.

7.

$$18,10,2,-6,-14$$

9.

$$a_1=-20,a_n=a_{n-1}+10$$

11.

$$a_n = \frac{1}{3}n + \frac{13}{24}$$

13.

$$r = 2$$

15. 4, 16, 64, 256, 1024

17.

$$3, 12, 48, 192, 768$$

19.

$$a_n = -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

21.

$$\sum_{m=0}^{5} \left(\frac{1}{2}m + 5\right).$$

23.

$$S_{11} = 110$$

25.

$$S_9 \approx 23{,}95$$

27.

$$S = \frac{135}{4}$$

29. $5.617,61

31. 6

33.

$$10^4 = 10.000$$

35.

$$P\left(18, 4\right) = 73.440$$

37.

$$C\left(15, 6\right) = 5005$$

39.

$$2^{50} = 1{,}13 \times 10^{15}$$

41.

$$\frac{8!}{3!2!} = 3360$$

43.

$$490.314$$

45.

$$131.072\ a^{17} + 1.114.112\ a^{16}\ b + 4.456.448\ a^{15}\ b^2$$

47.

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

49.

$$\frac{1}{6}$$

51.

$$\frac{5}{9}$$

53.

$$\frac{4}{9}$$

55.

$$1 - \frac{C\left(350,8\right)}{C\left(500,8\right)} \approx 94{,}4\,\%$$

57.

$$\frac{C\left(150,3\right)\,C\left(350,5\right)}{C\left(500,8\right)} \approx 25{,}6\,\%$$

Æfingapróf

1.

$$-14, -6, -2, 0$$

3. Runan er jafnmunaruna. Fasti mismunurinn er $d = 0{,}9$.

5.

$$a_1 = -2, a_n = a_{n-1} - \frac{3}{2}; a_{22} = -\frac{67}{2}$$

7. Runan er kvótaruna. Hlutfallstalan er $r = \frac{1}{2}$.

9.

$$a_1 = 1, a_n = -\frac{1}{2} \cdot a_{n-1}$$

11.

$$\sum_{k=-3}^{15} \left(3k^2 - \frac{5}{6}k\right)$$

13.

$$S_7 = -2.604{,}2$$

15. Heildarupphæð á reikningi: $\$\ 634.261{,}20$; Áunnir vextir: $\$\ 508.261{,}20$

17.

$$5 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$$

19.

$$C(15, 3) = 455$$

21.

$$\frac{10!}{2!3!2!} = 151.200$$

23.

$$\frac{429x^{14}}{16}$$

25.

$$\frac{4}{7}$$

27.

$$\frac{5}{7}$$

29.

$$\frac{C\left(14,3\right)C\left(26,4\right)}{C\left(40,7\right)}\approx 29{,}2\,\%$$

Kafli 12

Prófaðu

12.1 Markgildi fundin með tölulegum og grafískum aðferðum

1. $a=5$, $f\left(x\right)=2x^2-4$, og $L=46$.

2. a. 0; b. 2; c. er ekki til; d. -2; e. 0; f. er ekki til; g. 4; h. 4; i. 4

3.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{20\sin\left(x\right)}{4x}\right)=5$$

x	$f(x)$
−0,1	4,9916708
−0,01	4,9999167
−0,001	4,9999992
0	Villa
0,001	4,9999992
0,01	4,9999167
0,1	4,9916708

$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{20\sin(x)}{4x}\right)$ ↓ 5 5 ↑ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{20\sin(x)}{4x}\right)$

4. er ekki til

12.2 Markgildi fundin með reglum um markgildi

1. 26

2. 59

3. 10

4.

5.

$$-3$$

6.

$$-\frac{1}{50}$$

7.

$$-\frac{1}{8}$$

8.

$$2\sqrt{3}$$

9.

$$-1$$

12.3 Samfelldni

1.

1. ⓐ afmáanleg ósamfelldni við $x=6$;
2. ⓑ stökkósamfelldni við $x=4$

2. No. The function is not continuous at $x=2$ because the left hand limit is $\frac{1}{2}$ and the right hand limit is 6,5.

3. Nei, fallið er ekki samfellt við $x=3$. Afmáanleg ósamfelldni er við $x=3$.

4.

$$x=6$$

12.4 Afleiður

1. 3

2.

$$f'(a)=6a+7$$

3.

$$f'(a)=\frac{-15}{(5a+4)^2}$$

4.

$$\frac{3}{2}$$

5. 0

6. $-2, 0, 0, -3$

7.

1. ⓐ Eftir núll sekúndur hefur hún farið 0 fet.
2. ⓑ Eftir 10 sekúndur hefur hún farið 150 fet til austurs.
3. ⓒ Eftir 10 sekúndur hreyfist hún til austurs með hraðanum 15 ft/sec.
4. ⓓ Eftir 20 sekúndur hreyfist hún til vesturs með hraðanum 10 ft/sec.
5. ⓔ Eftir 40 sekúndur er hún 100 fetum vestan við upphafspunktinn.

8. Graf f er samfellt á $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$. Graf f er ósamfellt við $x = 1$ og $x = 3$. Graf f er deildanlegt á $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$. Graf f er ekki deildanlegt við $x = 1$ og $x = 3$.

9.

$$y = 19x - 16$$

10. −68 ft/sec; það fellur aftur til jarðar með hraðanum 68 ft/s.

12.1 Kaflaverkefni

1. Gildi fallsins, það er úttakið, við $x = a$ er $f(a)$. Þegar markgildið $\lim_{x \to a} f(x)$ er reiknað komast gildi x óendanlega nálægt a en verða aldrei jöfn a. Þegar gildi x nálgast a frá vinstri og hægri er markgildið það gildi sem fallið nálgast.

3. −4

5. −4

7. 2

9. er ekki til

11. 4

13. er ekki til

15. Svör eru breytileg.

16. Svör eru breytileg.

17. Svör eru breytileg.

18. Svör eru breytileg.

19. Svör eru breytileg.

20. Svör eru breytileg.

21. Svör eru breytileg.

23. 7,38906

25. 54,59815

27.

$$e^6 \approx 403{,}428794\,,\ e^7 \approx 1.096{,}633158\,,\ e^n$$

29.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1$$

31.

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \right) = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$$

33.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3\ x + 2} \right) = -2{,}00$$

35.

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{10 - 10\ x^2}{x^2 - 3\ x + 2} \right) = 20{,}00$$

37. $\lim_{x \to \frac{-1}{2}} \left(\frac{x}{4x^2 + 4x + 1} \right)$ er ekki til. Gildi fallsins minnka án neðri marka þegar x nálgast $-0{,}5$ frá báðum hliðum.

39.

$$\lim_{x \to 0} \frac{7 \tan x}{3x} = \frac{7}{3}$$

x	$f(x)$
−0,1	2,34114234
−0,01	2,33341114
−0,001	2,33333411
0	Óskilgreint
0,001	2,33333411
0,01	2,33341114
0,1	2,34114234

$\lim_{x\to 0^-}\frac{7\tan x}{3x}$ ↓ $\frac{7}{3}$ ↑ $\lim_{x\to 0^+}\frac{7\tan x}{3x}$

40.

x	$f(x)$
3,9	−152,1
3,99	−1592,01
3,999	−15992,001
4	Villa
4,001	16008,001
4,01	1608,1
4,1	168,1

$\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2}{x-4}$ ↓ $-\infty$ $+\infty$ ↑ $\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2}{x-4}$

43.

$$\lim_{x\to 0} e^{e^{-\frac{1}{x^2}}} = 1{,}0$$

45. $\lim_{x\to -1^-}\frac{|x+1|}{x+1}=\frac{-(x+1)}{(x+1)}=-1$ og $\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1|}{x+1}=\frac{(x+1)}{(x+1)}=1$; þar sem markgildin frá hægri og vinstri eru ekki jöfn er $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x+1}$ ekki til.

47. $\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}$ er ekki til. Fallið vex án efri marka þegar x nálgast -1 frá báðum hliðum.

49. $\lim_{x\to 0}\frac{5}{1-e^{\frac{2}{x}}}$ er ekki til. Fallgildin nálgast 5 frá vinstri og 0 frá hægri.

51. Með athugun á forsendunum og skilningi á afstæðisfræði fæst að þegar $v \to c$, þá gildir $m \to \infty$. Næsta skref lausnarinnar er

$$\lim_{v \to c^-} m = \lim_{v \to c^-} \frac{m_o}{\sqrt{1-\left(v^2/c^2\right)}} = \infty$$

12.2 Kaflaverkefni

1. Ef f er margliðufall er markgildi þess þegar x nálgast a alltaf $f(a)$.

3. Það getur annaðhvort merkt að (1) gildi fallsins vaxi eða minnki án marka þegar x nálgast c, eða að (2) markgildin frá vinstri og hægri séu ekki jöfn.

5.

$$\frac{-10}{3}$$

7. 6

9.

$$\frac{1}{2}$$

11. 6

13. er ekki til

15.

$$-12$$

17.

$$-\frac{\sqrt{5}}{10}$$

19.

$$-108$$

21. 1

23. 6

25. 1

27. 1

29. er ekki til

31.

$$6+\sqrt{5}$$

33.

$$\frac{3}{5}$$

35. 0

37.

$$-3$$

39. er ekki til; markgildið frá hægri er ekki það sama og markgildið frá vinstri.

41. 2

43. Markgildið er ekki til; það stefnir á óendanlegt.

45.

$$4x+2h$$

47.

$$2x+h+4$$

49.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

51.

$$\frac{-1}{x(x+h)}$$

53.

$$\frac{-1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

55.

$$f(x)=\frac{x^2+5x+6}{x+3}$$

57. er ekki til

59. 52

12.3 Kaflaverkefni

1. Óformlega sagt: Ef fall er samfellt við $x=c$, er ekkert rof í grafi þess við $f(c)$, og $f(c)$ er skilgreint.

3. ósamfellt við $a=-3$; $f(-3)$ er ekki til

5. afmáanleg ósamfelldni við $a=-4$; $f(-4)$ er ekki skilgreint

7. Ósamfellt við $a=3$; $\lim_{x\to 3} f(x)=3$, en $f(3)=6$, sem er ekki jafnt markgildinu.

9. $\lim_{x\to 2} f(x)$ er ekki til.

11. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=4$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$. Því er $\lim_{x\to 1} f(x)$ ekki til.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=5\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)=-1$. Því er $\lim_{x\to 1} f(x)$ ekki til.

15. $\lim_{x\to -3^-} f(x)=-6$, $\lim_{x\to -3^+} f(x)=-\frac{1}{3}$

Því er $\lim_{x\to -3} f(x)$ ekki til.

17. $f(2)$ er ekki skilgreint.

19. $f(-3)$ er ekki skilgreint.

21. $f(0)$ er ekki skilgreint.

23. Samfellt á $(-\infty,\infty)$

25. Samfellt á $(-\infty,\infty)$

27. Ósamfellt við $x=0$ og $x=2$

29. Ósamfellt við $x=0$

31. Samfellt á $(0,\infty)$

33. Samfellt á $[4,\infty)$

35. Samfellt á $(-\infty,\infty)$.

37. 1, en ekki 2 eða 3

39. 1 og 2, en ekki 3

41. $f(0)$ er óskilgreint.

43.

$$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

45. Við $x=-1$, er markgildið ekki til. Við $x=1$, er $f(1)$ ekki til.

Við $x=2$, virðist vera lóðrétt aðfella og markgildið er ekki til.

47.

$$\frac{x^3+6x^2-7x}{(x+7)(x-1)}$$

49. Fallið er ósamfellt við $x=1$ því markgildið þegar x nálgast 1 er 5 en $f(1)=2$.

12.4 Kaflaverkefni

1. Hallatala línulegs falls er föst. Afleiða almenns falls breytist með x. Bæði hallatala línu og afleiða í punkti mæla breytingarhraða fallsins.

3. Meðalhraðinn er 55 mílur á klukkustund. Augnablikshraðinn klukkan 2:30 síðdegis er 62 mílur á klukkustund. Augnablikshraði mælir hraða bílsins á tilteknu augnabliki en meðalhraði yfir tímabil.

5. Meðalbreytingarhraði vatnsmagnsins í tankinum er 45 gallon á mínútu. Ef $f(x)$ gefur vatnsmagnið við tímann t, er meðalbreytingarhraði $f(x)$ milli $t=a$ og $t=b$ jafnt og $f(a)+45(b-a)$.

7.

$$f'(x)=-2$$

9.

$$f'(x)=4x+1$$

11.

$$f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$$

13.

$$\frac{-16}{(3+2x)^2}$$

15.

$$f'(x)=9x^2-2x+2$$

17.

$$f'(x)=0$$

19.

$$-\frac{1}{3}$$

21. óskilgreint

23.

$$f'(x)=-6x-7$$

25.

$$f'(x)=9x^2+4x+1$$

27.

$$y=12x-15$$

29. $k=-10$ eða $k=2$

31. Ósamfellt við $x=-2$ og $x=0$. Ekki deildanlegt við –2, 0, 2.

33. Ósamfellt við $x=5$. Ekki deildanlegt við -4, –2, 0, 1, 3, 4, 5.

35.

$$f(0)=-2$$

37.

$$f(2)=-6$$

39.

$$f'(-1)=9$$

41.

$$f'(1)=-3$$

43.

$$f'(3)=9$$

45. Svör eru breytileg. Hallatala snertilsins nærri $x=1$ er 2.

47. Klukkan 12:30 síðdegis er breytingarhraði vatnsmagnsins –20 gallon á mínútu. Tankurinn tapar því 20 gallonum á mínútu.

49. 200 mínútum eftir hádegi breytist vatnsmagnið í tankinum um 30 gallon á mínútu.

51. Hæð skotkroppsins eftir 2 sekúndur er 96 fet.

53. Hæð skotkroppsins við $t=3$ sekúndur er 96 fet.

55. Hæð skotkroppsins er núll við $t=0$ og aftur við $t=5$. Hann hefst því á jörðu og fellur aftur til jarðar eftir 5 sekúndur.

57.

$$36\pi$$

59. \$50,00 á einingu, sem er augnabliksbreytingarhraði tekna þegar nákvæmlega 10 einingar eru seldar.

61. \$21 á einingu

63. $36

65.

$$f'(x)=10a-1$$

67.

$$\frac{4}{(3-x)^2}$$

Upprifjunarverkefni

1. 2

3. er ekki til

5. Ósamfellt við $x=-1\left(\lim_{x\to a} f(x)\right.$ er ekki til $)$, $x=3$(stökkósamfelldni), og$x=7\left(\lim_{x\to a} f(x)\right.$ er ekki til$)$.

7.

$$\lim_{x\to -2} \quad f(x)=0$$

9. er ekki til

11.

$$-\frac{3}{5}$$

13.

$$1$$

15.

$$6$$

17.

$$500$$

19.

$$-\frac{6}{7}$$

21. Við $x=4$, hefur fallið lóðrétta aðfellu.

23. Við $x=3$, hefur fallið lóðrétta aðfellu.

25. Afmáanleg ósamfelldni við $a=9$

27. Afmáanleg ósamfelldni við $x=5$

29. Afmáanleg ósamfelldni við $x=5$, ósamfelldni við $x=1$

31. Afmáanleg ósamfelldni við $x=-2$, ósamfelldni við $x=5$

33.

$$3$$

35.

$$\frac{1}{(x+1)(x+h+1)}$$

37.

$$\frac{e^{2x+2h}-e^{2x}}{h}$$

39.

$$10x-3$$

41. Fallið væri ekki deildanlegt þar; 0 er þó ekki í skilgreiningarmengi þess. Það er því deildanlegt alls staðar í skilgreiningarmenginu.

Æfingapróf

1. 3

3. 0

5.

$$-1$$

7. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\frac{5}{2}a$ og $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 9$. Því er markgildi fallsins þegar x nálgast 2 ekki til.

10.

$$-\frac{1}{50}$$

12.

$$1$$

14. Afmáanleg ósamfelldni við $x=3$

16.

$$f'(x) = -\frac{3}{2a\frac{3}{2}}$$

18. Ósamfellt við -2, 0, ekki deildanlegt við -2, 0, 2

20. Ekki deildanlegt við $x=0$ (ekkert markgildi)

22. Hæð skotkroppsins við $t=2$ sekúndur

24. Meðalhraðinn frá $t=1$ til $t=2$

26.

$$\frac{1}{3}$$

28.

$$0$$

29. 2

30.

$$x=1$$

32.

$$y=-14x-18$$

34. Grafið er ekki deildanlegt við $x=1$ (broddur).

36.

$$f'(x)=8x$$

38.

$$f'(x)=-\frac{1}{(2+x)^2}$$

40.

$$f'(x)=-3x^2$$

42.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Atriðisorðaskrá

A

AAS (horn–horn–hlið) 8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan

aðalhornalína 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

aðfeldi 11.1 Runur og ritháttur þeirra

aðfellur 10.2 Breiðbogi

aðferð Heavisides 9.4 Stofnbrot

aðhvarfsgreining 4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum, 4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum, 4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum

aðhvarfsgreining með minnstu kvaðrötum 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

aðlæg hlið 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga

afgangssetningin 3.6 Núllstöðvar margliðufalla

afgangur 3.5 Deiling margliða

afleiða 12.4 Afleiður, 12.4 Afleiður, 12.4 Afleiður, 12.4 Afleiður, 12.4 Afleiður

afmáanlegur sérstöðupunktur 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll, 12.3 Samfelldni

algilt hágildi 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa

algilt hágildi 3.4 Gröf margliðufalla

algilt lággildi 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa

algilt lággildi 3.4 Gröf margliðufalla

almenna regla Pýþagórasar 8.2 Órétthyrndir þríhyrningar: kósínusreglan

almennt form 3.2 Annars stigs föll

almennt form annars stigs falls 3.2 Annars stigs föll

andhverf hornaföll 6.3 Andhverf hornaföll, 6.3 Andhverf hornaföll, 6.3 Andhverf hornaföll, 6.3 Andhverf hornaföll

andhverfa fylkis 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja

andhverfa rótarfalls 3.8 Andhverf föll og rótaföll

andhverfa ræðs falls 3.8 Andhverf föll og rótaföll

andhverfanleg föll 3.8 Andhverf föll og rótaföll

andhverfanlegt fylki 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers
andhverft fall 1.7 Andhverf föll, 3.8 Andhverf föll og rótaföll, 3.8 Andhverf föll og rótaföll
andhverft fylki 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
annars stigs 9.4 Stofnbrot, 9.4 Stofnbrot
annars stigs fall 3.2 Annars stigs föll, 3.2 Annars stigs föll
annars stigs jafna 7.5 Lausnir hornafallajafna
arkuskósínus 6.3 Andhverf hornaföll
arkussínus 6.3 Andhverf hornaföll
arkustangens 6.3 Andhverf hornaföll
atburður 11.7 Líkur
augnabliksbreytingarhraði 12.4 Afleiður
augnablikshraði 12.4 Afleiður
aukahvirfilpunktar 10.1 Sporbaugur
aukahvirfilpunktur 10.1 Sporbaugur
aukalausn 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur
aukið fylki 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
Á
ákveða 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers
ársvextir 11.4 Raðir og riháttur þeirra
ársvextir (APR) 4.1 Vísisföll
áshorn 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll
B
beint hlutfall 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
biltáknum 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa
bogalengd 5.1 Horn, 5.1 Horn, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll
bogi 5.1 Horn
bogin braut 8.6 Stikajöfnur

breiðbogi 10.2 Breiðbogi, 10.2 Breiðbogi, 10.2 Breiðbogi, 10.2 Breiðbogi, 10.2 Breiðbogi, 10.2 Breiðbogi, 10.2 Breiðbogi, 10.3 Fleygboginn, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum

brennipunktar 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.2 Breiðbogi

brennipunktur 10.1 Sporbaugur, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum

breytingarhraði 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum

brúunar 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

burðargeta 4.7 Vísis- og logralíkön

bútavís föll 11.1 Runur og ritháttur þeirra

C

Celsíus 1.7 Andhverf föll

D

dálkfylki 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir

dálkur 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir

de Moivre 8.5 Pólform tvinntalna

deildanlegt 12.4 Afleiður

deiling með reikniriti Horners 3.5 Deiling margliða, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla

deilingarregla logra 4.5 Reiknireglur logra

deilingarreikniritið 3.5 Deiling margliða, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla

deilir 3.5 Deiling margliða

deilistofn 3.5 Deiling margliða

Descartes 8.5 Pólform tvinntalna

deyfð sveifluhreyfing 7.6 Líkangerð með hornaföllum, 7.6 Líkangerð með hornaföllum

dreifirit 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum

Dürer 8.4 Pólhnit: gröf

dældir snigilferlar 8.4 Pólhnit: gröf

E

efra stallaform 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

efra þríhyrningsform 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum

efri summumörk 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
eiginleikar ákveða 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers
eiginleikar markgilda 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda
einföld sveifluhreyfing 7.6 Líkangerð með hornaföllum, 7.6 Líkangerð með hornaföllum
einingarfylki 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
einingarhringur 5.1 Horn, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.3 Önnur hornaföll, 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga, 7.5 Lausnir hornafallajafna
einingarvigur 8.8 Vigrar
eintækt 3.8 Andhverf föll og rótaföll, 4.2 Gröf vísisfalla, 4.3 Lograföll, 4.5 Reiknireglur logra, 4.5 Reiknireglur logra
eintækt fall 1.1 Föll og fallatáknun, 1.7 Andhverf föll, 6.3 Andhverf hornaföll
endahegðun 3.3 Veldisföll og margliðuföll, 3.7 Ræð föll
endanleg jafnmunaruna 11.2 Jafnmunarunur
endanleg runa 11.1 Runur og ritháttur þeirra
endapunktur 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 5.1 Horn
endapunktur 8.8 Vigrar, 8.8 Vigrar
Euler 8.5 Pólform tvinntalna
eyðing 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum

F

Fahrenheit 1.7 Andhverf föll
fall 1.1 Föll og fallatáknun, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi
fallaritháttur 1.1 Föll og fallatáknun
fasahliðrun 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
fastur breytingarhraði 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum
fastur mismunur 11.2 Jafnmunarunur, 11.4 Raðir og ritháttur þeirra

ferningsfylki 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers
fjarlægðarformúla 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun, 10.2 Breiðbogi, 10.3 Fleygboginn
fjærpunktur 10.5 Keilusnið í pólhnitum
flatarmál hringgeira 5.1 Horn, 5.1 Horn
flatarmál hrings 3.3 Veldisföll og margliðuföll
fleygbogi 3.2 Annars stigs föll, 3.2 Annars stigs föll, 8.7 Stikajöfnur: gröf, 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum
Formerkjaregla Descartes 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
formúla 1.1 Föll og fallatáknun
forystuliður 3.3 Veldisföll og margliðuföll
forystustuðull 3.3 Veldisföll og margliðuföll
framreiknings 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum
fylgnistuðull 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum
fylki 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir, 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu
fylkjaaðgerðir 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
fylkjamargföldun 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
fylliatburður 11.7 Líkur
færsla 5.1 Horn
G
gagnhverfa 1.7 Andhverf föll, 3.3 Veldisföll og margliðuföll
gagnhverfufall 3.7 Ræð föll
gagnhverfujafna 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla
Gauss 8.5 Pólform tvinntalna, 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu
Gauss-eyðing 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu

geislakolsgreining 4.7 Vísis- og logralíkön
geisli 5.1 Horn
grundvallartalningarreglan 11.5 Talningarreglur
grunnfall 4.4 Gröf lografalla
grunnskiptiformúla 4.5 Reiknireglur logra, 4.5 Reiknireglur logra
H
hagnaðarfall 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
hallatala 2.1 Línuleg föll, 2.1 Línuleg föll
hallatöluform 2.1 Línuleg föll
halli ferilsins 12.4 Afleiður
halli snertilsins 12.4 Afleiður
háð breyta 1.1 Föll og fallatáknun
Háð jöfnuhneppi 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum
háhorn 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga, 8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan
helmingunarformúlur 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur, 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur
helmingunartími 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur, 4.7 Vísis- og logralíkön
Heron frá Alexandríu 8.2 Órétthyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
Heronsformúla 8.2 Órétthyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
hjartaferill 8.4 Pólhnit: gröf
hliðrun 10.1 Sporbaugur
hlutfallsstuðull 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
hlutfallstala 11.3 Kvótarunur, 11.4 Raðir og riththáttur þeirra
hlutskilgreint fall 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 12.3 Samfelldni, 12.3 Samfelldni, 12.3 Samfelldni
hneppi þriggja jafna með þremur breytum 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers
hnitaplan 10.3 Fleygboginn
horn 5.1 Horn, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll

horn með sama lokaarm 5.1 Horn, 5.1 Horn, 5.1 Horn
hornafallajöfnur 8.6 Stikajöfnur
hornafallajöfnur 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
hornaföll 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga
hornamál 5.1 Horn
hornhraði 5.1 Horn
hornréttar línur 2.2 Gröf línulegra falla
hraða 12.4 Afleiður, 12.4 Afleiður
hringgeiri 5.1 Horn
hringhreyfing 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
hringur 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
hvirfilpunktar 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur
hvirfilpunktsform annars stigs falls 3.2 Annars stigs föll
hvirfilpunktur 3.2 Annars stigs föll, 5.1 Horn, 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn
hæð 8.1 Óréttþyrndir þríhyrningar: sínusreglan
hæsta gildi 3.2 Annars stigs föll
I
innfeldi 8.8 Vigrar
innsetningaraðferð 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
inntak 1.1 Föll og fallatáknun
Í
í beinu hlutfalli 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
í öfugu hlutfalli 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
í öfugu hlutfalli 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
J
jaðarkostnaður 12.4 Afleiður
jafna 1.1 Föll og fallatáknun
jafngreiðsluröð 11.4 Raðir og riðháttur þeirra
jafnmunaruna 11.2 Jafnmunarunur, 11.2 Jafnmunarunur, 11.2 Jafnmunarunur, 11.2 Jafnmunarunur, 11.4 Raðir og riðháttur þeirra
jafnmunaröð 11.4 Raðir og riðháttur þeirra
jafnstætt fall 1.5 Ummyndanir falla, 5.3 Önnur hornaföll, 5.3 Önnur hornaföll, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda

jákvætt horn 5.1 Horn, 5.1 Horn
Johnson 10.3 Fleygboginn
jöfnuhneppi 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
jöfnuhneppi 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum
jöfnuhneppi 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
K
kartesísk jafna 8.3 Pólhnit
kartesísk jafna 8.3 Pólhnit, 8.6 Stikajöfnur
kartesískt form 8.5 Pólform tvinntalna, 8.7 Stikajöfnur: gröf
keilusnið 10.1 Sporbaugur, 10.2 Breiðbogi, 10.5 Keilusnið í pólhnitum
keilusnið 8.6 Stikajöfnur
keilusnið 10.4 Snúningur hnitása
kostnaðarfall 1.4 Samskeyting falla, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
Kovalevskaya Inngangur að hnitarúmfræði
kósekans 5.3 Önnur hornaföll, 6.2 Gröf annarra hornafalla
kósekansfallið 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
kósínus 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu, 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu
kósínusfall 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
kósínusfallið 6.3 Andhverf hornaföll
Kósínusreglan 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan, 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan

kótangens 5.3 Önnur hornaföll, 6.2 Gröf annarra hornafalla
kótangensfall 6.2 Gröf annarra hornafalla, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
Kronecker 8.5 Pólform tvinntalna
kúptir snigilferlar 8.4 Pólhnit: gröf
kvótaruna 11.3 Kvótarunur, 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
kvótaröð 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
kvótasamsemdir 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
kvóti 3.5 Deiling margliða
Kælingarlögmál Newtons 4.7 Vísis- og logralíkön
L
langás 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur
langás og skammás 10.1 Sporbaugur
langdeiling 3.5 Deiling margliða
langhlið 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga
lausn línulegra jöfnuhneppa 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
lausnamengi 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum
lausnarformúla annars stigs jöfnu 3.2 Annars stigs föll, 7.5 Lausnir hornafallajafna
láfella 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll
lághorn 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga
lárétt hliðrun 1.5 Ummyndanir falla, 4.2 Gröf vísisfalla, 4.4 Gröf lografalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
lárétt lína 2.2 Gröf línulegra falla
lárétt samþjöppun 1.5 Ummyndanir falla, 7.5 Lausnir hornafallajafna
lárétt speglun 1.5 Ummyndanir falla
lárétt teygja 1.5 Ummyndanir falla
lárétta línuprófið 1.1 Föll og fallatáknun
lemniskata 8.4 Pólhnit: gröf
leyfilegt svæði 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
liður 11.1 Runur og ritháttur þeirra, 11.2 Jafnmunarunur
liður margliðufalls 3.3 Veldisföll og margliðuföll

líkan hættir að eiga við 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum
líkanagerð 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum
líkindalíkan 11.7 Líkur
líkur 11.7 Líkur
lína 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
línuaðgerðir 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
línufylki 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
línujafngild 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu
línulegt fall 2.1 Línuleg föll, 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum
línulegt jöfnuhneppi 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
línulegt líkan 2.3 Líkanagerð með línulegum föllum, 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum
línulegt samband 2.4 Aðlögun línulegra líkana að gögnum
línulegur hraði 5.1 Horn
línulegur vöxtur 4.1 Vísisföll
lograjafna 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur
logralíkan 4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum
logri 4.3 Lograföll
lokaarmur 5.1 Horn
lokað form 11.1 Runur og riháttur þeirra, 11.1 Runur og riháttur þeirra, 11.1 Runur og riháttur þeirra, 11.2 Jafnmunarunur, 11.3 Kvótarunur
lota 5.3 Önnur hornaföll, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla, 7.5 Lausnir hornafallajafna, 7.6 Líkangerð með hornaföllum
lotubundið fall 5.3 Önnur hornaföll, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
lotubundin hreyfing 7.6 Líkangerð með hornaföllum, 7.6 Líkangerð með hornaföllum

lóðfella 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll, 6.3 Andhverf hornaföll
lóðrétt hliðrun 1.5 Ummyndanir falla, 2.2 Gröf línulegra falla, 4.2 Gröf vísisfalla, 4.4 Gröf lografalla, 4.7 Vísis- og logralíkön, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
lóðrétt lína 2.2 Gröf línulegra falla
lóðrétt samþjöppun 1.5 Ummyndanir falla
lóðrétt speglun 1.5 Ummyndanir falla
lóðrétt teygja 1.5 Ummyndanir falla, 2.2 Gröf línulegra falla, 4.4 Gröf lografalla
lóðrétta línuprófið 1.1 Föll og fallatáknun
lóðréttur snertill 12.4 Afleiður
lógistískt vaxtarlíkan 4.7 Vísis- og logralíkön
lægsta gildi 3.2 Annars stigs föll
lækkunarformúlur 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur, 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur
M
margfeldi með tölu 8.8 Vigrar, 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
margfeldi tveggja fylkja 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
margfeldis-í-summu-formúlur 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu, 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu
margfeldisregla logra 4.5 Reiknireglur logra, 4.5 Reiknireglur logra
margfeldni 3.4 Gröf margliðufalla, 3.4 Gröf margliðufalla
margföldun með tölu 8.8 Vigrar, 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
margföldunarandhverfa 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
margföldunarlögmálið 11.5 Talningarreglur
margliða 3.6 Núllstöðvar margliðufalla, 12.3 Samfelldni
margliðufall 3.3 Veldisföll og margliðuföll, 3.4 Gröf margliðufalla, 3.4 Gröf margliðufalla, 3.4 Gröf margliðufalla
markgildi frá hægri 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum, 12.3 Samfelldni

markgildi frá vinstri 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum, 12.3 Samfelldni
markgildið 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum, 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum, 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda
Maxwell Inngangur að hnitarúmfræði
meðalbreytingarhraði 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 12.4 Afleiður
meginás 10.2 Breiðbogi
miðja breiðboga 10.2 Breiðbogi
miðja sporbaugs 10.1 Sporbaugur
miðlína 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 7.6 Líkangerð með hornaföllum
miðrétthyrningur 10.2 Breiðbogi
miðskekkja 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum
Milligildissetningin 3.4 Gröf margliðufalla
minnkandi fall 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 2.1 Línuleg föll
minnkandi línulegt fall 2.1 Línuleg föll
minnsta samnefnara 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda
mismunakvóti 12.4 Afleiður
mótlæg hlið 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga
myndmengið 1.1 Föll og fallatáknun, 6.3 Andhverf hornaföll
N
n aðfeldi 11.1 Runur og ritháttur þeirra
n n-ta hlutsumma 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
n n-ta rót tvinntölu 8.5 Pólform tvinntalna
n-ti liður rununnar 11.1 Runur og ritháttur þeirra, 11.1 Runur og ritháttur þeirra
nafnvextir 4.1 Vísisföll
náttúrlegar tölur 1.1 Föll og fallatáknun

náttúrulegur logri 4.3 Lograföll, 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur
neðri summumörk 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
neikvætt horn 5.1 Horn, 5.1 Horn, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll
núllpunktur rekstrar 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
núllstöðvar 3.2 Annars stigs föll, 3.4 Gröf margliðufalla, 3.4 Gröf margliðufalla, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla, 8.4 Pólhnit: gröf
nærpunktur 10.5 Keilusnið í pólhnitum
O
oddstætt fall 1.5 Ummyndanir falla, 5.3 Önnur hornaföll, 5.3 Önnur hornaföll, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
Ó
óendanleg kvótaruna 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
óendanleg runa 11.1 Runur og ritháttur þeirra
óendanleg röð 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
óháð breyta 1.1 Föll og fallatáknun
óhornréttir þríhyrningar 8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan
ójafna 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
ólínuleg ójafna 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
ólínulegt jöfnuhneppi 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
ólínulegt ójöfnuhneppi 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum
órétthyrndur þríhyrningur 8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan
ósamfellt 12.3 Samfelldni
ósamfellt fall 12.3 Samfelldni
ósamleitin 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
ósamrýmanlegir atburðir 11.7 Líkur
óúrkynjuð keilusnið 10.4 Snúningur hnitása
P
Pascal 8.4 Pólhnit: gröf
pH 4.5 Reiknireglur logra
pólform 8.5 Pólform tvinntalna
pólform keilusniðs 10.5 Keilusnið í pólhnitum
pólform tvinntölu 8.5 Pólform tvinntalna

pólhnit 8.3 Pólhnit, 8.3 Pólhnit, 8.3 Pólhnit, 8.4 Pólhnit: gröf
pólhnitaás 8.3 Pólhnit
pólhnitanet 8.3 Pólhnit, 8.3 Pólhnit
póljafna 8.3 Pólhnit, 8.4 Pólhnit: gröf, 8.4 Pólhnit: gröf, 10.5 Keilusnið í pólhnitum
Proxima Centauri 4.7 Vísis- og logralíkön
punkthallaform 2.1 Línuleg föll
punkthallaformúla 10.2 Breiðbogi
Pýþagóras 8.5 Pólform tvinntalna
Pýþagórasarsamsemd 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.3 Önnur hornaföll, 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
Pýþagórasarsamsemdir 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
R
radíanamál 5.1 Horn, 5.1 Horn, 5.1 Horn
radíani 5.1 Horn, 5.1 Horn, 5.1 Horn
raðað par 1.1 Föll og fallatáknun, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi
rafstöðukraftur 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa
rakningarformúla 11.1 Runur og ritháttur þeirra, 11.2 Jafnmunarunur, 11.2 Jafnmunarunur, 11.3 Kvótarunur
regla Cramers 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers, 9.8 Lausn jöfnuhneppa með reglu Cramers
regla Pýþagórasar 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og veldislækkunarformúlur, 7.5 Lausnir hornafallajafna, 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan, 8.7 Stikajöfnur: gröf
rétthyrnd hnit 8.3 Pólhnit, 8.3 Pólhnit, 8.3 Pólhnit
rétthyrndir þríhyrningar 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga
rétthyrndur þríhyrningur 6.3 Andhverf hornaföll
Richter-kvarði 4.3 Lograföll
rós 8.4 Pólhnit: gröf
rótaföll 3.8 Andhverf föll og rótaföll

runa 11.1 Runur og ritháttur þeirra, 11.1 Runur og ritháttur þeirra, 11.2 Jafnmunarunur, 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum
rúmmál kúlu 3.3 Veldisföll og margliðuföll
ræð segð 9.4 Stofnbrot, 9.4 Stofnbrot, 9.4 Stofnbrot
rætt fall 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll, 3.7 Ræð föll, 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda
rætur 3.2 Annars stigs föll
röð 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
röðuð þrennd 9.2 Línuleg jöfnuhneppi með þremur breytum
S
samantektir 11.5 Talningarreglur, 11.6 Tvíliðusetningin
sameiginleg grunntala 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur
sameiginlegt hlutfall 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
samfellt 3.4 Gröf margliðufalla
samfellt fall 3.3 Veldisföll og margliðuföll, 12.3 Samfelldni
samhverfuás 3.2 Annars stigs föll, 3.2 Annars stigs föll, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn
samhverfuásar 10.2 Breiðbogi
samhverfupróf 8.4 Pólhnit: gröf
samkvæmt jöfnuhneppi 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
samlagningaraðferð 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum, 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
Samlagningarlögmálið 11.5 Talningarreglur
sammengi tveggja atburða 11.7 Líkur
samoka 12.2 Markgildi fundin með eiginleikum markgilda
samoka tvinntala 3.1 Tvinntölur, 3.1 Tvinntölur
samsemdir 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.3 Önnur hornaföll
samsemdir jafnstæðra og oddstæðra falla 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
samsemdir samsvarandi hornafalla 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga, 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
samsetning falla 1.4 Samskeyting falla

samsetning falla 1.4 Samskeyting falla
samsíða línur 2.2 Gröf línulegra falla
samsíðungar 8.8 Vigrar
samskeytt fall 1.4 Samskeyting falla
samsvarandi hornafall 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
SAS-þríhyrningur (hlið–horn–hlið) 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
sekans 5.3 Önnur hornaföll, 6.2 Gröf annarra hornafalla
sekansfall 6.2 Gröf annarra hornafalla
Setning de Moivres 8.5 Pólform tvinntalna, 8.5 Pólform tvinntalna
setningin um línulega þáttun 3.6 Núllstöðvar margliðufalla, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
setningin um ræðar núllstöðvar 3.6 Núllstöðvar margliðufalla, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
Setningin um samoka tvinntölur 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
sérhorn 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.4 Hornareikningur rétthyrndra þríhyrninga, 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
sigma 11.4 Raðir og riththáttur þeirra
sínus 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda, 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu, 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu
sínusfall 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.3 Önnur hornaföll, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla
sínusfallið 6.3 Andhverf hornaföll
sínuslaga fall 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 7.6 Líkangerð með hornaföllum
Sínusreglan 8.1 Óréttþyrndir þríhyrningar: sínusreglan, 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
skalarstærð 8.8 Vigrar, 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
skammás 10.1 Sporbaugur
skaut 8.3 Pólhnit

skilgreiningarmengi og myndmengi 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi
skilgreiningarmengi samsetts falls 1.4 Samskeyting falla
skilgreiningarmengið 1.1 Föll og fallatáknun, 1.1 Föll og fallatáknun, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 6.3 Andhverf hornaföll, 6.3 Andhverf hornaföll
skilyrðisrithætti mengja 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi
skurðmengi 11.7 Líkur
sléttur ferill 3.3 Veldisföll og margliðuföll
snertill 12.4 Afleiður
sniðill 12.4 Afleiður
snigilferill með einni lykkju 8.4 Pólhnit: gröf
snigilferlar með innri lykkju 8.4 Pólhnit: gröf
snúningshorn 10.4 Snúningur hnitása
snúningspunktur 3.3 Veldisföll og margliðuföll, 3.4 Gröf margliðufalla
speglun 4.2 Gröf vísisfalla, 4.4 Gröf lografalla
sporbaugur 8.7 Stikajöfnur: gröf, 8.7 Stikajöfnur: gröf, 9.3 Ólínuleg jöfnu- og ójöfnuhneppi með tveimur breytum, 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.1 Sporbaugur, 10.3 Fleygboginn, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum
SSA (hlið–hlið–horn) 8.1 Óréttþyrndir þríhyrningar: sínusreglan
SSS-þríhyrningur (hlið–hlið–hlið) 8.2 Óréttþyrndir þríhyrningar: kósínusreglan
staðalstaða 5.1 Horn, 5.1 Horn, 8.8 Vigrar
staðbundið hágildi 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 3.4 Gröf margliðufalla
staðbundið lággildi 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 3.4 Gröf margliðufalla
staðbundin útgildi 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa
staðlað form annars stigs falls 3.2 Annars stigs föll
stak 9.5 Fylki og fylkjaaðgerðir
stefnuhorn 8.5 Pólform tvinntalna
stig 3.3 Veldisföll og margliðuföll, 5.1 Horn

stikaform 8.7 Stikajöfnur: gröf
stikajöfnur 8.6 Stikajöfnur, 8.7 Stikajöfnur: gröf, 8.7 Stikajöfnur: gröf
stiki 8.6 Stikajöfnur
stofnbrot 9.4 Stofnbrot
stofnbrotaliðun 9.4 Stofnbrot, 9.4 Stofnbrot
stuðlafylki 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.6 Lausn jöfnuhneppa með Gauss-eyðingu, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja, 9.7 Lausn jöfnuhneppa með andhverfum fylkja
stuðull 3.3 Veldisföll og margliðuföll, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
stýrilína 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum, 10.5 Keilusnið í pólhnitum
stærð 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.5 Ummyndanir falla, 8.5 Pólform tvinntalna, 8.8 Vigrar
stærðargráða 4.7 Vísis- og logralíkön
stöðuvigur 8.8 Vigrar, 8.8 Vigrar
stökkósamfelldni 12.3 Samfelldni
summu-í-margfeldis-formúlur 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu, 7.4 Formúlur sem breyta summu í margfeldi og margfeldi í summu
summu- og mismunarformúlur fyrir kósínus 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
summu- og mismunarformúlur fyrir sínus 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
summu- og mismunarformúlur fyrir tangens 7.2 Samsemdir fyrir summu og mismun
summutákn 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
summuvigur 8.8 Vigrar
summuvísir 11.4 Raðir og ritháttur þeirra
sveifluhreyfing 7.6 Líkangerð með hornaföllum

T

takmörkun skilgreiningarmengis 1.7 Andhverf föll
tangens 5.3 Önnur hornaföll, 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla
tangensfall 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla,

6.2 Gröf annarra hornafalla, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
tangensfallið 6.3 Andhverf hornaföll
tekjufall 9.1 Línuleg jöfnuhneppi með tveimur breytum
teningsrót 3.3 Veldisföll og margliðuföll
teygja 4.2 Gröf vísisfalla
teygju- eða samþjöppunarstuðull 6.2 Gröf annarra hornafalla, 6.2 Gröf annarra hornafalla
tilraun 11.7 Líkur
tugalogri 4.3 Lograföll
tvinntala 3.1 Tvinntölur, 8.5 Pólform tvinntalna
tvinntalnaplan 3.1 Tvinntölur, 8.5 Pólform tvinntalna
tvíhliða markgildi 12.1 Markgildi fundin með tölulegum og myndrænum aðferðum, 12.4 Afleiður
tvíliðuliðun 11.6 Tvíliðusetningin, 11.6 Tvíliðusetningin
tvíliðuna 3.5 Deiling margliða
Tvíliðusetningin 11.6 Tvíliðusetningin
tvíliðustuðull 11.6 Tvíliðusetningin
tvíræða tilvikið 8.1 Órétthyrndir þríhyrningar: sínusreglan
tvöföldunarformúlur 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur, 7.3 Tvöföldunar-, helmingunar- og lækkunarformúlur
tvöföldunartími 4.7 Vísis- og logralíkön
tölugildi 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 8.5 Pólform tvinntalna
tölugildi 1.2 Skilgreiningarmengi og myndmengi, 1.6 Tölugildisföll
tölugildisföll 1.6 Tölugildisföll, 1.6 Tölugildisföll
tölugildisjafna 1.6 Tölugildisföll
tölugildisójafna 1.6 Tölugildisföll
U
umhverfusamsemdir 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda, 7.1 Einföldun og sannprófun hornafallasamsemda
ummál hrings 5.1 Horn
ummyndanir 2.2 Gröf línulegra falla
ummyndun 1.5 Ummyndanir falla
umröðun 11.5 Talningarreglur
undirstöðusetning algebrunnar 3.6 Núllstöðvar margliðufalla, 3.6 Núllstöðvar margliðufalla

upphafsarmur 5.1 Horn
upphafspunktur 1.6 Tölugildisföll
upphafspunktur 8.8 Vigrar, 8.8 Vigrar
Ú
úrfellingarpunktar 11.1 Runur og ritháttur þeirra
úrkynjuð keilusnið 10.4 Snúningur hnitása
úrtaksrúm 11.7 Líkur
útkomur 11.7 Líkur
útslag 6.1 Gröf sínus- og kósínusfalla, 7.6 Líkangerð með hornaföllum, 7.6 Líkangerð með hornaföllum
úttak 1.1 Föll og fallatáknun
V
vaxandi fall 1.3 Breytingarhraði og hegðun grafa, 2.1 Línuleg föll
vaxandi línulegt fall 2.1 Línuleg föll
vaxtavextir 4.1 Vísisföll
vefja Arkimedesar 8.4 Pólhnit: gröf
veldisfall 3.3 Veldisföll og margliðuföll
veldisregla logra 4.5 Reiknireglur logra, 4.5 Reiknireglur logra
vensl 1.1 Föll og fallatáknun
viðmiðunarhorn 5.1 Horn, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.2 Einingarhringurinn: sínus- og kósínusföll, 5.3 Önnur hornaföll
vigur 8.8 Vigrar
vigursamlagning 8.8 Vigrar
vísisfall 4.1 Vísisföll
Vísishnignun 4.1 Vísisföll, 4.1 Vísisföll, 4.2 Gröf vísisfalla, 4.7 Vísis- og logralíkön, 4.7 Vísis- og logralíkön, 4.7 Vísis- og logralíkön, 4.8 Aðlögun vísislíkana að gögnum
vísisjafna 4.6 Vísisjöfnur og lograjöfnur
vísisvöxtur 4.1 Vísisföll, 4.1 Vísisföll, 4.2 Gröf vísisfalla, 4.7 Vísis- og logralíkön, 4.7 Vísis- og logralíkön, 4.7 Vísis- og logralíkön
víxlin 1.4 Samskeyting falla
X
x við x-ás 2.2 Gröf línulegra falla
Y
y við x-ás 2.1 Línuleg föll, 2.2 Gröf línulegra falla
yfirborðsflatarmál 3.8 Andhverf föll og rótaföll
Þ

þáttasetningin 3.6 Núllstöðvar margliðufalla
þáttun 9.4 Stofnbrot
þáttun samsetts falls 1.4 Samskeyting falla
þjöppun 2.2 Gröf línulegra falla, 4.2 Gröf vísisfalla, 4.4 Gröf lografalla
þrepafall 12.3 Samfelldni
þriðja stigs föll 3.8 Andhverf föll og rótaföll
Þríhyrningur Pascals 11.6 Tvíliðusetningin
þverás 10.2 Breiðbogi
þverbrennistrengur 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn, 10.3 Fleygboginn
þvertala 3.1 Tvinntölur
þyngdarafl 8.7 Stikajöfnur: gröf
Ö
öfugt breytileiki 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
öfugt hlutfall 3.9 Líkön gerð með hlutföllum
örvaritháttur 3.7 Ræð föll